



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIO FRACTAL DE LAS CUEVAS Y
CAVERNAS EN QUINTANA ROO**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
F I S I C A
P R E S E N T A :
MARISOL MONTERRUBIO VELASCO

DIRECTOR DE TESIS: DR. DENIS PIERRE BOYER

2005



0350258



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Estudio fractal de las cuevas y cavernas en Quintana Roo"

realizado por Monterrubio Velasco Marisol

con número de cuenta 098056626 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Denis Pierre Boyer

Propietario Dr. Luis Ernesto Marín Stillman

Propietario Dr. Gustavo Tolson

Suplente Dr. Rafael Angel Barrio Paredes

Suplente Dr. Federico González García

D. Boyer
Luis E. Marín Stillman
Gustavo Tolson
Rafael Angel Barrio Paredes
Federico González García

Consejo Departamental de Física

Alicia Zarzosa Pérez
M. EN C. ALICIA ZARZOSA PÉREZ

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

Agradecimientos:

- ❖ Victor y Romelia. Gracias por darme la vida, el amor incondicional, por su guía, consejos y apoyo en todas las batallas a las que me he enfrentado. Por darme las bases sólidas para enfrentar el mundo, ese es el mejor regalo.
- ❖ Pati y Vic, les agradezco todo el amor y paciencia que me tienen. El apoyo que siempre he recibido de ustedes. Los amo mucho hermanos.
- ❖ Eric y Santiaguito les dedico este trabajo, deseo verlos crecer y que podamos compartir nuestras experiencias en la vida.
- ❖ Dr. Luis Marin gracias por haberme introducido a la investigación y por compartirme tu amistad.
- ❖ Dr. Denis Boyer, te agradezco la paciencia, enseñanza y confianza en el desarrollo de este trabajo.
- ❖ Zian Fanti, amigo muchas gracias por estar aquí.
- ❖ Federico, es muy reconfortante contar con amigos como tu, quiero que sepas que este cariño es reciproco. Gracias por haberme introducido al mundo de la Física.
- ❖ Quiero agradecer a todo el grupo de espeleología de la UNAM, por haberme acompañado al maravilloso mundo de las cuevas y del montañismo y ofrecerme su amistad de corazón
- ❖ A todos mis amig@s escalador@s les dedico este trabajo. Muchas paredes más.
- ❖ A las cuevas y montañas, por ser la inspiración y motivación de mis sueños.

*Nuestro paso por este mundo es muy breve
y sólo existe el momento presente.
Somos hijos del Sol,
nuestra naturaleza es brillar.*

Índice

	Página
Agradecimientos	i
Índice	ii
Capítulo 1 INTRODUCCIÓN	
1.1 Resumen	1
1.2 Objetivo	6
Capítulo 2 MARCO TEÓRICO	
2.1 Fractales y formas de crecimiento	
2.1.1 Panorama general	7
2.1.2 Fractales generados de manera estocástica: caminantes aleatorios	14
2.1.3 Aplicaciones de caminantes aleatorios en Geofísica	18
2.1.4 Formas de crecimiento y modelo DLA	19
2.1.5 Patrones fractales formados por disolución química	23
2.1.6 Dedos viscosos	25
2.1.7 Efectos de una dirección preferencial sobre agregados de DLA	28
2.2 Hidrogeología	
2.2.1 Panorama general	32
2.2.2 Límites superior e inferior de la ley de Darcy	38
2.2.3 Flujo en rocas fracturadas	40
2.2.4 Karst y Cuevas	42
2.2.5 Hidrogeología de la zona de estudio	44
2.2.6 QRSS (Servicio de Espeleomapeo de Quintana Roo)	50

	Página
Capítulo 3	
METODOLOGÍA	
3.1 Mapas	54
3.2 Programa para simular el crecimiento de las cuevas	55
Capítulo 4	
4.1 Resultados	
4.1.1 Mapas	58
4.1.2 Modelo Teórico	58
4.2 Discusión	
4.2.1 Cuevas y Cavernas	62
4.2.2 Modelo Teórico	65
4.3 Conclusiones	
4.3.1 Cuevas, cavernas y modelo teórico	70
Apéndice	74
Glosario*	77
Figuras	79
Bibliografía	81

* las palabras que tengan este símbolo se encontrarán definidas en el glosario.

Capítulo 1

INTRODUCCION

1.1 Resumen

Al hacer una descripción de la geometría de la naturaleza, observamos que su comportamiento muestra patrones irregulares y fragmentados, los cuales son incompatibles con la descripción que ofrece la geometría Euclidiana*. En general la geometría más apropiada para hacer una descripción matemática de muchos patrones de la naturaleza (nubes, costas, árboles, montañas), es conocida como geometría fractal (Mandelbrot, 1982).

Pueden existir estructuras que muestran matemáticamente autosimilitud exacta (como el triángulo de Koch); sin embargo, muchos patrones fractales son autosimilares de manera no exacta o de manera estadística. El azar juega un papel importante en la evolución de los fenómenos naturales

Este trabajo tiene como objetivo analizar la dimensión de algunos sistemas de cuevas que se encuentran en la región noreste de la Península de Yucatán, en el estado de Quintana Roo, así mismo la realización de una simulación numérica, basada en un modelo de crecimiento controlado por difusión, que se aproxime a modelar el desarrollo de estos sistemas de cuevas.

La Península de Yucatán es una plataforma que consiste de pura roca carbonatada, formada por depósitos marinos hace millones de años (Figura 1.1).

Estratigrafía de la Península de Yucatán

Edad	Porción Norte	Porción Centro y Sur
Holoceno	Reciente	Reciente
Epoca: Cuaternario Inicio: 10000 años A.C. Fin: 1 año D.C.	Arenas de Playa	
Pleistoceno	Arcillas y Turbas	Suelos Residuales
Epoca: Cuaternario Inicio: 1.8-1.6 millones Fin: 10000 años A.C.	Suelos Residuales	
Plioceno	Calizas de moluscos	Indiferenciado
Epoca: final terciario Inicio: 15 millones Fin: 1.8-1.6 millones	Carrillo Puerto	
Mioceno	Sin nombre (lutitas, calizas, margas)	Indiferenciado
Epoca: terciario Inicio: 23 millones Fin: 15 millones		
Oligoceno	Miembro Chumbec (calizas)	Miembro Chumbec (calizas)
Epoca: terciario y cenozoico Inicio: 35.4 millones Fin: 23 millones		
Eoceno	Miembro Pisté (calizas)	Miembro Pisté (calizas)
Epoca: terciario y cenozoico Inicio: 57 millones Fin: 35.4 millones		
Paleoceno		F. Icaiché (Caliza, Dolomita, evaporitas)
Epoca: terciario Inicio: 65 millones Fin: 57 millones		
Cretácico Superior		Petén (calizas)
Epoca: mesozoico Inicio: 144 millones Fin: 65 millones		

Figura 1.1 Estratigrafía de la Península de Yucatán. La columna estratigráfica muestra las diferentes edades de la roca, o de los estratos que conforman la Península de Yucatán, así como las eras geológicas. Se observa que consiste de pura roca carbonatada, formada por depósitos marinos hace millones de años.

El proceso mediado por la disolución, que se lleva a cabo en las rocas carbonatadas se le conoce como karstificación. Ésta se da por la reacción química que tiene el carbonato de calcio (roca caliza) al ser disuelto por el agua ($\text{CaCO}_3 + \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Ca}^{2+} + 2 \text{HCO}_3^-$), que a través de muchos años forman grandes sistemas de cuevas subterráneas. Por lo tanto las fracturas de la superficie y la karstificación del subsuelo, favorecen la rápida infiltración de la lluvia; teniendo como resultado el desarrollo de sistemas kársticos.

En Quintana Roo, desde hace 20 años se han estado explorando los grandes sistemas de cuevas sumergidas por espeleólogos de todo el mundo, que vienen a disfrutar de estos lugares tan hermosos. El grupo QRSS (Servicio de Espeleomapeo de Quintana Roo) ha explorado 87 sistemas de cuevas, entre los cuales se encuentra Ox Bel Ha ubicado como la cueva subacuática más grande del mundo, con más de 121 km de conductos (Marin *et al.*, 2004).

De todos estos sistemas tomé una muestra de 18 mapas proporcionados por el grupo QRSS, para analizar su estructura geométrica, comprobar si estos mantienen un comportamiento fractal y si se puede determinar su dimensión. Encontrando que muestran dimensiones fractales $1 \leq D_f \leq 2$, así como invarianza de escala a lo largo de cuatro décadas en el caso de los sistemas más desarrollados.

En la literatura revisada no se encontraron estudios previos sobre la geometría fractal que tienen los sistemas kársticos, y sobre su dimensión fraccionaria. Por lo que la aportación de este trabajo es el estudio fractal que se hace de los sistemas de cuevas y cavernas en Quintana Roo.

Un modelo de crecimiento que se puede aplicar a las redes de corriente o drenaje, es el modelo de Agregación Limitada por la Difusión (DLA, por sus siglas en inglés) Witten y Sander (1981). Este modelo tiene una amplia gama de aplicaciones (disolución

química, agregados de nanopartículas, ruptura dieléctrica, dedos viscosos, procesos fluviales, etc.). La dimensión fractal de los agregados formados por el modelo de DLA toma el valor de $D \approx 1.6$ en dos dimensiones.

Aunque el modelo de DLA ha sido relevante para procesos de disolución química (Daccord y Lenormand, 1987), los sistemas de cuevas estudiados aquí tienen dimensiones fractales significativamente más baja que 1.6.

En la simulación numérica realizada en este trabajo, se tomó como base el modelo de crecimiento DLA (Agregación Limitada por la Difusión) que fue modificado al hacer una incorporación de algunas restricciones inspiradas de un modelo introducido para describir el crecimiento fractal de "Dedos Viscosos". Una característica de los dedos viscosos es que están confinados por la celda de Hell-Shaw (Nittman *et al.* 1985), Figura 1.2. La simulación también se inspira de un modelo en el que se analiza los efectos que tiene el introducir una dirección preferencial en el crecimiento de la agregación limitada por la difusión (DLA).

Al tener un medio anisotrópico y heterogéneo, como el que muestra la Península de Yucatán, es necesario agregar una condición más a la simulación, la cual consiste en colocar barreras que simulan las zonas de baja permeabilidad, es decir, las zonas en las que la disolución de la roca es más difícil o no se da, forzando así a que el agua tome direcciones por las que se pueda mover con facilidad, dando al final del recorrido una estructura ramificada posiblemente diferente del que predice el modelo de DLA.

Estudios geológicos en la zona de estudio (noreste de la Península de Yucatán), muestran a través de imágenes de radar la presencia de fracturas (Escolero *et al.* 2005). Lo

anterior apoya la hipótesis de que el crecimiento de las cuevas está confinado, además se tiene una dirección preferencial de crecimiento no sólo dada por estas fracturas sino

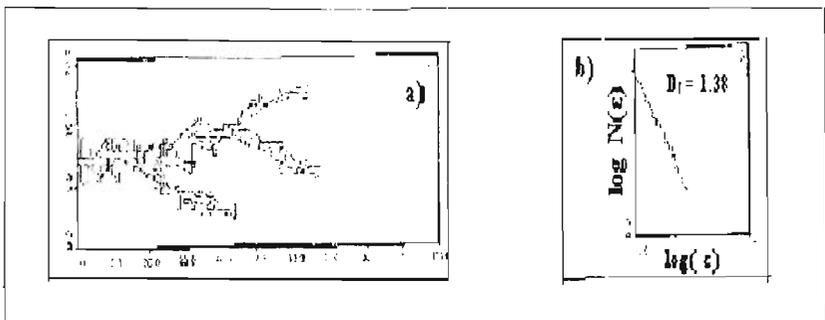


Figura 1.2 a) simulación del modelo dedos viscosos. b) grafica $\log N(\epsilon)$ vs $\log(\epsilon)$, (donde ϵ es el tamaño de segmento y $N(\epsilon)$ es el número necesario de segmentos ϵ para cubrir la superficie que ocupa los dedos viscosos), en donde la pendiente muestra la dimensión fractal de la simulación $D_f = 1.38$ (Nittman *et al.*, 1985)

también por la fuerza de gravedad que dirige el flujo del agua de oeste (Sierra de Ticul) hacia el este (Mar Caribe).

Este trabajo esta estructurado de la siguiente manera.

En el capítulo dos se presenta el marco teórico dividido en dos partes, en la primera se describen los conceptos generales de la geometría fractal, así como los modelos utilizados en la simulación numérica de esta tesis; la segunda parte se revisan los conceptos básicos de la Hidrogeología, la descripción de la zona de estudio y la presentación del grupo de espeleo-buzos QRSS.

En el Capítulo tres se describe la metodología utilizada para hacer la caracterización fractal de las cuevas.

En el Capítulo cuatro se presentan los resultados obtenidos, su discusión y las conclusiones de este trabajo.

1.2. Objetivo

El objetivo de este trabajo de investigación es caracterizar la geometría de algunos sistemas kársticos subacuáticos de la zona noreste de la Península de Yucatán, con un enfoque especial sobre su dimensión fractal; así como hacer una simulación numérica inspirándose en modelos que describen fenómenos de crecimiento y tomando en cuenta características físicas que se observan en la Península para aproximar el crecimiento de estos sistemas.

Capítulo 2 MARCO TEÓRICO

2.1 Fractales y formas de crecimiento

2.1.1 Panorama general

Al observar la naturaleza vemos que sus propiedades geométricas no siempre corresponden a una geometría Euclidiana; por ejemplo, las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas de costa no son círculos ni líneas rectas (Mandelbrot, 1982).

En general los patrones de la naturaleza son irregulares y fragmentados. Mandelbrot (1982) recopiló estas observaciones y presentó un nuevo concepto matemático, que no se deriva de la intuición directa, a diferencia de la geometría euclidiana. Mandelbrot ha sido conocido como el padre de la geometría fractal; sin embargo, ya antes en el campo de las matemáticas clásicas algunos matemáticos como George Cantor (1872), Giuseppe Peano (1890), David Hilbert (1891), Helge von Koch (1904), Waclaw Sierpinski (1916), Gaston Julia (1918) y Felix Hausdorff (1919) por nombrar algunos, habían jugado un papel importante dentro del desarrollo inicial de esta nueva geometría (Mandelbrot, 1982).

Los fractales matemáticos como el conjunto de Cantor, la curva de Koch, la curva de Peano, la curva de Hilbert y el tapete de Sierpinski, eran vistos como objetos excepcionales, como ejemplos contados. Varios de estos objetos juegan un papel importante en el desarrollo inicial de la topología*.

Matemáticamente, un fractal se define como un objeto geométrico cuyas derivadas no están definidas en ningún punto. Las derivadas son discontinuas en cualquier punto. Y esto se puede deber a que se trata de un cuerpo geométrico invariante a escala. Los fractales

son figuras geométricas complejas con una estructura fina a escalas arbitrariamente pequeñas. Usualmente éstas tienen cierto grado de auto-similitud, es decir, si nosotros aumentamos una pequeña parte de un fractal, podremos ver reminiscencias del total (Turcotte, 1997). En los fractales podemos encontrar un gran interés por su exquisita combinación de belleza, complejidad y estructura sin fin.

Los procesos geológicos de erosión*, sedimentación* y disolución química*, responsables de distintas estructuras de la naturaleza son bastante complejos para hacer una descripción de ellos, sin embargo, con la descripción fractal podemos una manera sencilla de caracterizarlos.

Los fractales representan una manera geométrica y matemática adecuada con la que podemos describir distintos fenómenos naturales. Se pueden generar a través de algoritmos, los cuales se pueden implementar con ayuda de una computadora. Los fractales son útiles en distintas aplicaciones científicas. Incluso es tal su utilidad que en el cine se utilizan para generar matemáticamente escenas de paisajes casi reales (Voss, 1988).

En resumen, las características básicas asociadas a la geometría fractal son:

- La geometría fractal de un objeto se caracteriza por un grado de irregularidad a todas las escalas (Turcotte, 1992). Si se analiza el objeto a diferentes escalas, se encuentran los mismos elementos básicos desde escala “microscópica” hasta escala “macroscópica”. A este concepto se le conoce como autosimilitud o invarianza de escala (Mandelbrot, 1982). Esta puede ser exacta (como los objetos de la figura 2.1 y 2.2) o en general aproximada.
- La otra característica importante de la geometría fractal es que las dimensiones que la caracterizan suelen ser fraccionarias si se entiende a la dimensión como el

número mínimo de coordenadas necesarias para describir cualquier punto en el conjunto (Strogatz, 1994). Un fractal es por definición un conjunto de puntos que viven en un espacio euclideo denotado \mathbf{R}^E en los que la dimensión Hausdorff-Besicovitch* D excede la dimensión topológica (Ver glosario. Espacio euclideo) D_T ($D > D_T$), a diferencia de la dimensión euclidea donde $D = D_T$. En algunos casos puede ser entero correspondiendo al caso de la dimensión euclidiana (dimensión cero que corresponde a un punto; dimensión uno a una línea; dimensión dos a un plano; dimensión tres a un espacio), en general aparece como un número racional o irracional.

Para los fractales matemáticos (como los ejemplos de la figura 2.1 y 2.2) la autosimilitud de la geometría fractal se relaciona con el concepto intuitivo de la dimensión de un objeto. Al dividir cada uno de los objetos en N partes iguales se establece una relación entre el número N y el factor de escala S que convierte cualquiera de las partes en el todo (Ramírez, 1996). Ver figura 2.3. Se observa que para cada caso resulta una ley del tipo $N = S^D$ donde D representa la dimensión de autosimilitud.

Mandelbrot, ilustra el concepto de fractales con la determinación de la dimensión fractal de la costa oeste de la Bretaña (Turcotte, 1992). La longitud de la línea de costa P fue determinado aproximándolo por un conjunto de segmentos de longitud determinado $|r_i| = \epsilon$ el cual sería la escala más chica (o resolución) de la construcción. Tomando un mapa de la línea de costa, el largo P se obtiene usando diferentes divisiones uniformes. Variando la resolución, se puede obtener una gráfica en escala log-log del largo de la línea de costa

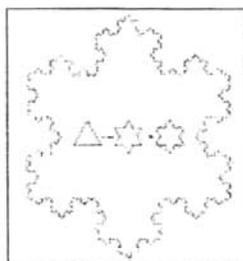


Figura 2.1. Curva de Koch

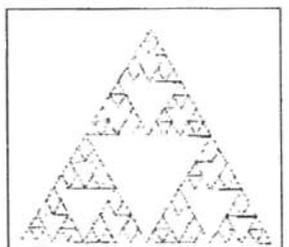


Figura 2.2. Tapete de Sierpinsky

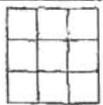
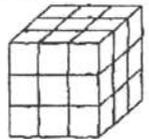
		NUMERO N	FACTOR DE ESCALA S	EFY
a)	 SEGMENTO	1	3.0	3^0
b)	 CUADRADO	9	3.0	3^2
c)	 CUBO	27	3.0	3^3

Figura 2.3. Interpretación de figuras con dimensiones enteras, en términos exactos de autosimilitud. La dimensión de un objeto puede expresarse de manera sencilla bajo la forma de una ley de potencia $N = S^D$. Al tener un objeto geométrico (por ejemplo una línea en R^1), este puede dividirse en partes más chicas de escala de longitud S^{-1} . En la figura se toma el factor de escala S como 3. a) si dividimos un segmento en tres partes iguales, el total será tres veces mas largo que cada segmento. b) por otra parte si dividimos un cuadrado en segmentos iguales (de factor de escala tres), de manera que el lado del cuadrado sea tres veces mayor que el de los cuadrados en que se divide se obtiene 3^2 , es decir 9 porciones. c) para el cubo se tiene $N = 3^3$ lo que resulta 27 unidades que conforman el cubo (Ramírez, 1996).

contra el largo ϵ de las divisiones (Turcotte, 1992). De manera sorprendente resulta que el longitud de la línea de costa crece (algebraicamente), cuando la resolución ϵ decrece. La longitud total por lo tanto dependerá de la escala de resolución que tomemos para medirla. Se define $N(\epsilon)$ como el número de pasos de tamaño ϵ necesarios para representar la curva. Si al hacer la gráfica de $N(\epsilon)$ vs (ϵ) en espacio log-log obtenemos una tendencia lineal (se puede ajustar una recta con un coeficiente de correlación alto), se obtiene la dimensión fractal de la curva a partir de la pendiente negativa de la recta. (Figura 2.4).

Si $N(\epsilon) = a \cdot \epsilon^{-D}$, el largo $L(\epsilon)$ de la costa se puede aproximar con la fórmula.

$$L(\epsilon) = N(\epsilon) \times \epsilon \text{ ó } L(\epsilon) = a \cdot \epsilon^{(1-D)}$$

La pendiente de recta o dimensión fractal obtenida por Mandelbrot para la línea de la costa oeste de Bretaña fue de $D \sim 1.3$, lo que muestra que la línea de costa tiene un comportamiento fractal, donde D será su dimensión. La técnica para obtener la dimensión fractal de una línea de costa es fácil y además se puede extender a cualquier topografía.

Cuando medimos un segmento, lo más sencillo será recurrir a dividir éste en $N(\epsilon)$ partes iguales que dependerán del tamaño de ϵ . Para una curva ordinaria de longitud L_0 bien definida, tenemos que $N(\epsilon) = L_0 / \epsilon$, por lo que el largo del segmento será $L = N(\epsilon) \epsilon \rightarrow L_0 \epsilon^0$, cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Si ahora cubrimos la curva L_0 con $N(\epsilon)$ cajas cuadradas de áreas ϵ^2 , podemos asociar un área a la curva, definida como $A(\epsilon) = N(\epsilon) \epsilon^2$, en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Si se cubre la curva con $N(\epsilon)$ cubos de volumen ϵ^3 podemos asociar un volumen a la curva,

** en adelante $\epsilon \rightarrow 0$, se refiere a que hacemos tender el segmento ϵ a cero

definido como $V(\epsilon) = N(\epsilon) \epsilon^3$, en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Para curvas ordinarias, el área y el volumen tenderán a cero conforme $\epsilon \rightarrow 0$ (Feder, 1988).

Si consideramos un conjunto de puntos que definen una superficie A_0 , la medida del área será $A = N(\epsilon) \epsilon^2 \rightarrow A_0 \epsilon^0$ ($\epsilon \rightarrow 0$), por tanto para una superficie ordinaria el número de cuadros necesarios es $N(\epsilon) = A_0 / \epsilon^2$. El volumen asociado con el área estará formado por la suma de los volúmenes de cubos de tamaño ϵ lo cuál se expresa como $V = N(\epsilon) \epsilon^3 \rightarrow A_0 \epsilon^1$ ($\epsilon \rightarrow 0$), el volumen tiende a cero también conforme $\epsilon \rightarrow 0$.

¿Podremos asociar una longitud a una superficie?, de acuerdo con lo que vimos antes, formalmente ésta tomará la medida $L = N(\epsilon) \epsilon \rightarrow A_0 \epsilon^{-1}$ ($\epsilon \rightarrow 0$), por lo que vemos que cuando $\epsilon \rightarrow 0$, L diverge; es decir tiende a infinito.

El método más sencillo para determinar la dimensión fractal es conocido como el "método de cajas" basado, de igual forma, en la idea de cubrir una estructura con partes regulares de tamaño ϵ y haciendo tender éste a cero. En dos dimensiones (en el plano) consiste en recubrir la figura con un grupo de cajas de lado ϵ (Figura 2.5).

Cuando F es un subgrupo del espacio euclidiano d -dimensional, y $N(\epsilon)$ es el número mínimo de cajas d -dimensionales de lado ϵ necesarias para cubrir F . Cuando se observa una ley de potencias $N(\epsilon) \sim 1 / \epsilon^D$, el exponente define la dimensión fractal D que puede ser interpretado como la dimensión del objeto F llamado dimensión de caja de F .

$$D = \lim_{(\epsilon \rightarrow 0)} \ln N(\epsilon) / \ln (1 / \epsilon)$$

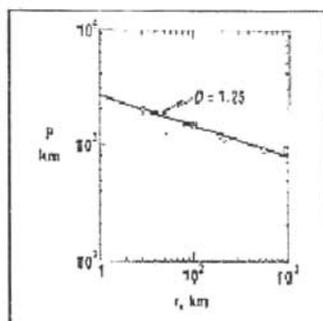


Figura 2.4 Línea de costa de Gran Bretaña. Esta figura muestra la grafica de longitud $L(\epsilon)$ de la costa oeste de Gran Bretaña en función del largo ϵ de la ventana de observación, en espacio log-log. La pendiente de la recta muestra la dimension fractal, los datos fueron obtenidos por Mandelbrot (1967), (Turcotte, 1997).

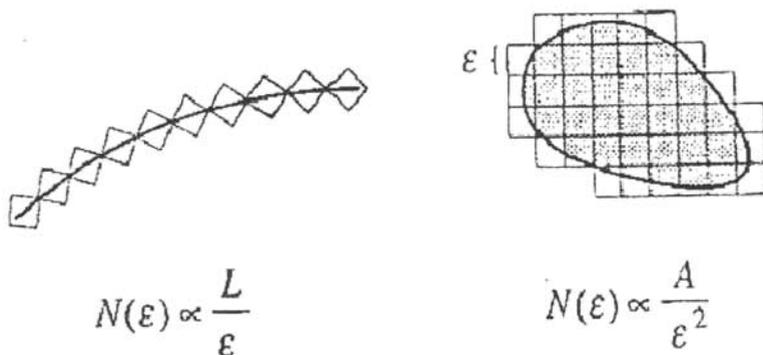


Figura 2.5 Dimensión de caja. Una de las maneras para medir la dimensión fractal es conocido como el método de cajas, consiste en dividir el segmento (L), o área (A), en cajas o celdas de igual tamaño ϵ , y contar el número de cajas $N(\epsilon)$ necesario para cubrir el segmento o área. Por la ley de potencia tenemos que $N(\epsilon)\epsilon = L$ para el segmento y $N(\epsilon)\epsilon^2 = A$. La potencia de ϵ indica la dimensión, en este caso es un número entero, sin embargo podemos medir la dimensión fractal de cualquier cuerpo geométrico utilizando este método (Strogatz, 1994).

2.1.2 Fractales generados de manera estocástica: caminantes aleatorios

Los fenómenos aleatorios juegan un papel importante en el desarrollo de los sistemas de la naturaleza. Incluso los sistemas perfectos (como los cristales) tienen elementos azarosos defectos. Si muchos sistemas naturales tienen propiedades fractales la mayor parte de estos se encuentran mejor descritos dentro del concepto de fractales aleatorios (Feder, 1988).

Contrariamente a las estructuras exactamente auto-similares generadas por las construcciones matemáticas de la sección anterior (figura 2.1 y 2.2), muchos fractales son autosimilares de manera no exacta; es decir de manera promedio o estadística. Un fenómeno que ha jugado un papel importante en el desarrollo de los fractales aleatorios es el movimiento Browniano.

En 1828 Robert Brown fue el primero en describir físicamente el movimiento del polen que se difunde en agua utilizando un microscopio. Los sistemas en equilibrio (y también fuera de equilibrio) se encuentran bajo fluctuaciones térmicas y fuerzas que modifican la posición de las moléculas, partículas o cualquier elemento que los constituyen. En el año de 1905 Albert Einstein (1879-1955) publicó un célebre trabajo en el que propuso la explicación del movimiento browniano. Einstein obtuvo, además de conclusiones cualitativas, predicciones cuantitativas que podrían compararse con resultados experimentales. Entre estas predicciones destacan dos muy importantes: predijo la distancia que debe recorrer una partícula suspendida en un fluido y además, mostró que la segunda ley de la termodinámica* se cumple sólo en promedio (Einstein, 1905). El movimiento de una partícula difundiéndose en agua se encuentra en constante cambio, estos cambios son impredecibles tanto en magnitud como en dirección ya que dada la cantidad de colisiones,

no es posible seguir el efecto individual de cada una de ellas. Pero lo importante es que éstas ocurren continuamente, por lo que la partícula suspendida cambiará su momento también en forma continua. De este modo, la partícula browniana realiza un movimiento fluctuante, azaroso. El movimiento Browniano se debe a colisiones prácticamente aleatorias entre componentes de un sistema fluido provocado por la energía térmica. El movimiento de una partícula browniana se puede ver en microscopio aparentemente como pasos con direcciones aleatorias y con longitudes de paso irregulares, cuya frecuencia de aparición está dada por una función de distribución de probabilidad característica. En este contexto se considera la caminata aleatoria como un modelo para describir al movimiento Browniano.

En el movimiento Browniano la posición de la partícula en un instante dado no es independiente de su posición en otro instante. Sin embargo, bajo la hipótesis de caos molecular, el vector de desplazamiento de la partícula durante un intervalo de tiempo se puede considerar independiente del desplazamiento de la partícula durante otro intervalo de tiempo. La trayectoria recorrida por la partícula Browniana resulta ser auto-similar. Cuando reducimos el tamaño de la ventana de observación, por ejemplo magnificando la resolución del microscopio y reducimos la escala del tiempo de observación de manera adecuada, la trayectoria de la partícula muestra una estructura estadísticamente similar a la observada en una ventana de observación más grande (Figura 2.6). De esta manera se tiene un proceso invariante de escala, que guarda el mismo aspecto a escalas espaciales diferentes. Si se incluye el tiempo en la descripción, la posición media de la partícula y su distribución de probabilidad se encuentra como función del tiempo (Feder, 1988).

La descripción macroscópica que se hace del movimiento Browniano es mediante la ecuación de difusión (Einstein, 1905).

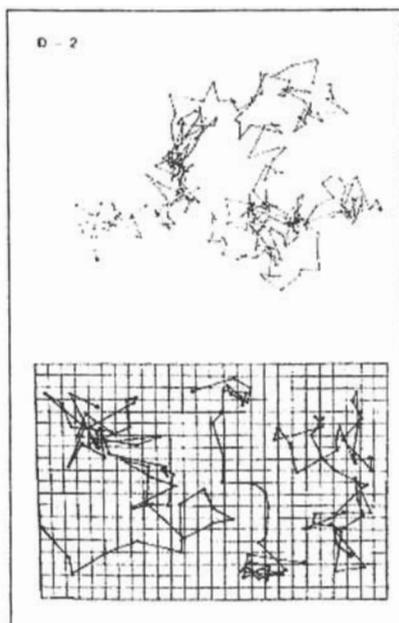


Figura 2.6. El movimiento Browniano, introducido por Robert Brown, es una manera de simular el movimiento en el que se difunde una partícula en un medio. Se observa que la trayectoria X_N que sigue la partícula en el plano, es la suma de pasos ($X_N = \sum_{i=1,2,...,N} \xi_i$), aleatorios en sus direcciones e independientes unos de los otros. El movimiento browniano es autosimilar. Cuando reducimos el tamaño de la ventana de observación, por ejemplo magnificando la resolución del microscopio y si reducimos la escala del tiempo de observación de manera adecuada, la trayectoria de la partícula muestra una estructura estadísticamente similar a la observada en una ventana de observación más grande. (Mandelbrot, 1982).

En una dimensión podemos introducir un modelo de caminantes aleatorios con pasos discretos. Escribimos la posición X_N del caminante después de N pasos independientes como,

$$X_N = \sum_{i=1,2,\dots,N} \xi_i$$

Se supone que la caminata no está sesgada hacia una dirección preferencial ($\langle \xi_i \rangle = 0$, mismo número de pasos hacia la derecha e izquierda), y que los pasos son estadísticamente independientes ($\langle \xi_i \cdot \xi_j \rangle = 0$ con $i \neq j$). Además $\langle \xi_i^2 \rangle = \sigma$, donde $\sqrt{\sigma}$ representa la longitud característica de un paso i , que se supone finita.

Sea $dX P(X)$ = probabilidad de hallar a la partícula en el intervalo $X_N \in [X, X + \xi]$ después de N pasos.

Normalizamos la función tal que:

$$\int_{(-\infty, \infty)} dX P(X) = 1 \quad \text{y} \quad \langle X_N^2 \rangle = \int_{(-\infty, \infty)} X^2 P(X) dX$$

Al tener la condición de que los ξ_i son estadísticamente independientes, la varianza de X_N , *i.e.*, $\langle X_N^2 \rangle$, es igual a $N \langle \xi^2 \rangle$. Además se puede escribir $N = t / \tau$ con t tiempo total de observación y τ el tiempo de cada paso independiente.

Introducimos $p(\xi)$, la distribución de probabilidad de los pasos ξ_i y se supone $p(\xi) = p(-\xi)$, ($\langle \xi_i \rangle = 0$)

Sea $P(X_N, t)$ la concentración de partículas en la posición X y en el instante t .

$$P(X_N, t + \tau) = \int_{(-\infty, \infty)} P(X + \xi, t) p(\xi) d\xi = \int_{(-\infty, \infty)} P(X + \xi, t) p(-\xi) d\xi$$

$$\tau \ll t \rightarrow P(X, t + \tau) \approx P(X, t) + \tau \partial P / \partial t$$

$$\xi \ll X \rightarrow P(X + \xi, t) \approx P(X, t) + \xi \partial P / \partial X + \xi^2 / 2 \partial^2 P / \partial X^2$$

$$P + \tau \partial P / \partial t \approx P \int_{(-\infty, \infty)} d\xi p(\xi) + \partial P / \partial X \int_{(-\infty, \infty)} \xi d\xi p(\xi) + \partial^2 P / \partial X^2 \int_{(-\infty, \infty)} \xi^2 / 2 d\xi p(\xi)$$

Donde $\int_{(-\infty, \infty)} \xi d\xi p(\xi) = 0$ ya que $p(\xi) = p(-\xi)$,

Por lo tanto se obtiene la ecuación de difusión:

$$\partial P / \partial t = D \partial^2 P / \partial X^2 \quad (1)$$

donde $D \equiv 1 / \tau \int_{(-\infty, \infty)} \xi^2 / 2 d\xi p(\xi)$ es el coeficiente de difusión.

Se ve que la solución de la ecuación (1) es $P(X, t) = 1 / (4 \pi D t)^{1/2} * e^{-X^2 / 4Dt}$. Para una partícula ubicada inicialmente en el origen, la solución satisface $1 \equiv \int_{(-\infty, \infty)} P(X, t) dX$.

En el caso de una partícula browniana se identifica el desplazamiento promedio de ésta como $\langle X_N^2 \rangle = \lambda^2$, donde $\langle X_N^2 \rangle = \int_{(-\infty, \infty)} (X^2) P(X, t) dX$ cuantifica la dispersión. Como $\langle X_N^2 \rangle = N \langle \xi^2 \rangle$ y $P(X, t) = 1 / (4 \pi D t)^{1/2} * e^{-X^2 / 4Dt}$; entonces $\lambda^2 = \langle X_N^2 \rangle = N \langle \xi^2 \rangle = t / \tau \langle \xi^2 \rangle = 2Dt$.

Por lo tanto $D \equiv \langle \xi^2 \rangle / 2 \tau$. La dimensión fractal de la trayectoria es dos. Estos resultados se generalizan para cualquier dimensión espacial.

La densidad de probabilidad de estar en X , en un número de pasos N (o un tiempo τ de observación) será.

$$P(X_N, N) = (1 / (2\pi N\sigma)^{1/2}) * e^{-X_N^2 / 2N\sigma},$$

donde $\langle X_N^2 \rangle = N\sigma$.

2.1.3 Aplicaciones de caminantes aleatorios en Geofísica

La superficie de la Tierra ha sido modificada por una gran variedad de procesos (erosión del agua, viento, movimientos de masas, glaciares, etc.).

Las redes de los ríos se pueden ver en el paisaje. En particular la erosión fluvial, si no es una de las más importantes, es la que ha modificado la superficie de la tierra, en su forma abarcando un amplio intervalo de escalas. Los patrones de las “redes de drenaje” que forman los procesos fluviales se pueden analizar geoméricamente, al investigar los ríos y sus posibles propiedades de invarianza de escala. También es relevante analizar la distribución de tamaños de los ríos (Hergarten, 2002).

Leopold and Langbein (1962) hicieron una aproximación de las propiedades fractales de las “redes de drenaje” sin introducir explícitamente la idea de la invarianza a escala (Figura 2.7). En su modelo, una región rectangular es dividida en pequeños cuadros uniformes y se supone que la precipitación caerá uniformemente en cada uno de los cuadros. En el primer paso, la fuente del primer río es elegida al azar. La generación del río se puede ver como una especie de caminante aleatorio. “La dirección del drenaje” desde la fuente se escoge al azar, de entre las cuatro posibilidades que tendría para moverse en su vecindad, las direcciones diagonales no están permitidas. El proceso terminará cuando el río abandone el área del modelo. Después, un segundo río será generado con el mismo procedimiento. Puede resultar que se formen anillos en la red, para evitar que el río forme anillos sobre él mismo se deben imponer restricciones extras al modelo (Hergarten, 2002).

2.1.4 Formas de crecimiento y modelo DLA

Muchos fractales estocásticos en la naturaleza se generan por fenómenos de crecimiento. Un modelo de crecimiento que se puede aplicar a las redes de corriente o drenaje, y a una amplia gama de aplicaciones (disolución química, agregación de nanopartículas, ruptura dieléctrica, dedos viscosos, procesos fluviales, etc.) es el modelo de Agregación Limitada

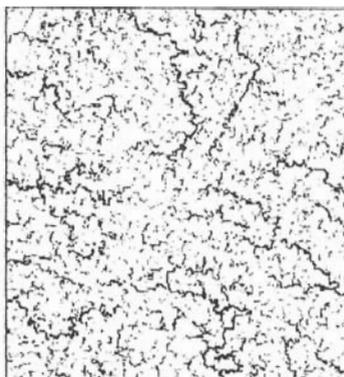


Figura 2.7 Caminantes aleatorios en Geofísica. En esta figura se ve las aplicaciones que pueden tener los modelos de caminantes aleatorios en la Geofísica para simular el comportamiento de los procesos fluviales. Este es una simulación que propusieron Leopold y Langbein (1962), dividen el espacio de modelado en celdas de tamaño igual, donde suponen caer la precipitación uniformemente. La generación de un río se puede ver como una especie de caminante aleatorio, al final de la simulación se observa los patrones de drenaje como los mostrados (Hergarten, 2002)

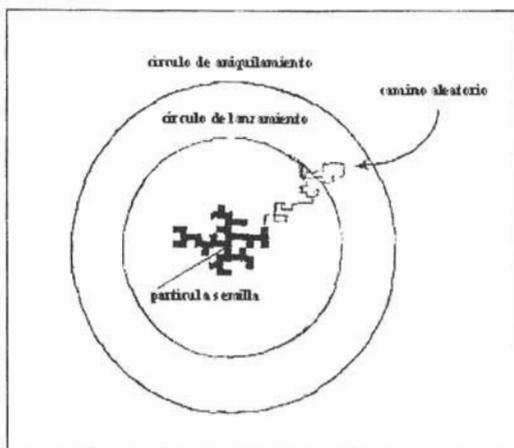


Figura 2.8 En la simulación del modelo DLA, una **partícula semilla** esta en el centro de dos radios uno de ellos llamado "**círculo de aniquilamiento**" y el otro de radio menor, llamado "**círculo de lanzamiento**" de donde saldrán las partículas, las cuales seguirán un **camino aleatorio**. Si en su trayectoria algunas de estas partículas lanzadas tocan a la partícula semilla se agregarán a ella. Si llegan al círculo de aniquilamiento sin haber tocado a la partícula semilla o al agregado son absorbidas. De esta manera después de ser absorbida la partícula lanzada (sea por tocar el agregado o por llegar a círculo de aniquilamiento) se genera otra partícula en el círculo de lanzamiento que repetirá lo anterior. Este es un esquema de cómo se realiza la simulación (Turcotte, 1997).

por la Difusión (DLA, por sus siglas en inglés). En este modelo los agregados que se forman son controlados por la difusión de partículas (ver 2.1.2), que se implementa utilizando la idea de caminantes aleatorios.

El concepto de Agregación Limitada por la Difusión (DLA) fue introducido por Witten y Sander (1981 & 1983). Este modelo describe el crecimiento de un sistema en el que los efectos azarosos, como la difusión, dominan sobre efectos que estabilicen el sistema. El modelo genera estructuras fractales naturalmente (Nittman *et al.*, 1985).

Se coloca una partícula semilla fija en el centro de una red (cuadrada, por ejemplo), alrededor de la semilla se coloca un círculo de lanzamiento de diámetro bastante grande, como el de la figura 2.8. Se elige una posición al azar sobre el círculo y se inicia ahí la trayectoria de una partícula que sigue un camino aleatorio sobre la red. Cuando la partícula difundida choca por primera vez con la partícula semilla, se pega de manera irreversible a la semilla. Luego se repite el proceso con otra partícula inicialmente en una nueva posición aleatoriamente elegida en el círculo de “lanzamiento”. La partícula se pega de manera irreversible cuando choca con el agregado formado por la semilla y las partículas previamente agregadas. Si una partícula difundida cruza un círculo llamado de “aniquilamiento” (de radio mayor al de “lanzamiento”), se considera como perdida y se remueve del sistema. En este caso una nueva partícula se introduce desde el círculo de lanzamiento.

Una manera para cuantificar el crecimiento de un agregado como el que se muestra en la Figura 2.9 es determinar el número de partículas contenidas en un disco de radio R (o ventana de observación). Alternativamente para aplicaciones del modelo en problemas de crecimiento estadístico y fenómenos naturales, es preferible utilizar el concepto de “radio

de giro” para un agregado de N partículas, creciendo alrededor de una partícula semilla, válida para cualquier dimensión espacial. El radio de giro se define como:

$$r_g = \left\{ (1/N) \sum r_i^2 \right\}^{1/2}$$

donde r_i es la distancia radial de la partícula i hasta el centro de masa. Se puede definir una dimensión fractal análoga a la dimensión de caja mencionada previamente, como $N \approx (r_g/a)^D$, donde a es el tamaño de una partícula o la distancia entre dos sitios vecinos en el caso de una red discreta.

El resultado se puede observar en la Figura 2.9, como una estructura ramificada. Los caminantes aleatorios se van pegando con más alta probabilidad en las puntas del cúmulo que en las partes hundidas. La dimensión fractal que se tiene para el modelo de DLA es $D = 1.7$ para dos dimensiones y $D = 2.5$ para tres dimensiones (Witten y Sander, 1981)

Los patrones generados por el proceso de DLA se han observado en diferentes sistemas donde el crecimiento se encuentra controlado por una ecuación de Laplace (Feder, 1988). La ecuación de difusión (que describe la concentración de las partículas difundidas en el modelo DLA) en el límite estacionario es una ecuación de Laplace $\nabla^2 P(X,t) = 0$.

Además, en el modelo DLA la rapidez de crecimiento de un punto del agregado es proporcional al gradiente de concentración en este punto (Sander, 1992). Los patrones que se encuentran en las descargas eléctricas, son similares a los patrones que se observan con DLA y se encuentra para los primeros una dimensión fractal de $D \approx 1.7$.

En el problema de la descarga eléctrica (Figura 2.10), el potencial eléctrico (dentro de una esfera cargada uniformemente) se puede hallar a partir de la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot E = 4\pi\rho$ donde E es el campo eléctrico y ρ es la densidad de carga dentro de la esfera, $E = -\nabla\Phi$, con Φ el potencial eléctrico. Fuera de la descarga no hay contribución de las cargas y se satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi=0$. Además la rapidez de crecimiento en un punto de la descarga se supone proporcional a E , es decir, $-\nabla\Phi$.

2.1.5 Patrones fractales formados por disolución química

Se han observado patrones altamente ramificados que se producen por el flujo de un fluido reactivo a través de un medio soluble poroso. A estos patrones se les conoce como patrones de disolución y se pueden obtener experimentalmente inyectando agua a través de yeso puro, resultando una estructura fractal. La reacción química entre el agua y el yeso ocurre instantáneamente y la cinética en conjunto queda limitado por la separación de los productos de la disolución en la interfase sólido-líquido, ambas por difusión molecular y por convección (cuando el fluido está en movimiento). En dos dimensiones, los patrones de disolución son muy similares a los patrones asociados con DLA, descargas eléctricas, dedos viscosos, polimerización limitada por difusión (Daccord, 1987; Daccord *et al.* 1987). En la naturaleza se observan disoluciones químicas en un medio poroso por la acción de un fluido en movimiento, por ejemplo, en la formación de cuevas. Todos los experimentos que se hicieron formaron estructuras altamente ramificadas parecidas a las producidas por DLA.

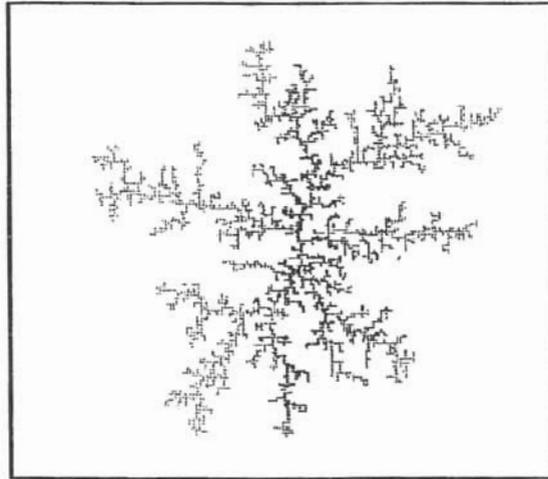


Figura 2.9 Crecimiento DLA Después de repetir muchas veces el proceso descrito en la figura 2.8, se muestran agregados como este, altamente ramificado y con un crecimiento radial (Turcotte, 1997).

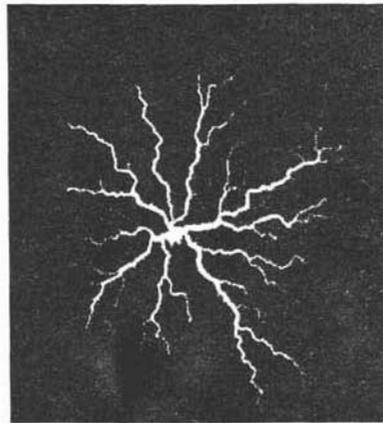


Figura 2.10. Descargas eléctricas. Los patrones que se encuentran en las descargas eléctricas, son muy similares a los descritos por DLA (Niemeyer *et al.*, 1984)

Otra característica que se observa es el efecto que tiene el flujo de inyección, es decir, si éste disminuye, el número de ramificaciones decrece de igual forma (Figura 2.11). Las ramas en donde la velocidad es alta se ensanchan más rápido, lo cual aumenta su permeabilidad y consecuentemente la velocidad. Contrariamente, cuando en las ramificaciones se tienen bajas velocidades del agua llegan a estar rápidamente saturadas y por tanto no reactivas (Daccord, 1987).

La dimensión fractal que se obtuvo al analizar digitalmente las imágenes de varios experimentos es de $D_f = 1.6 \pm 0.1$, valor que concuerda con los resultados obtenidos por el DLA para dos dimensiones. Un modelo de tipo DLA al que se le añade una parte de erosión lateral reproduce los experimentos (Daccord, 1987). Como se señalará en el capítulo siguiente se encuentra una discrepancia en la dimensión fractal entre los sistemas kársticos que se analizaron y este modelo de disolución química, a pesar de que la disolución química es el proceso de crecimiento para ambos.

2.1.6 Dedos Viscosos

Para describir el crecimiento de las redes de drenaje (como los sistemas kársticos) se propone más adelante en esta tesis algunas modificaciones al modelo de DLA, inspirados en un modelo propuesto por Nittman *et al.*, (1985) en un contexto muy diferente.

En un experimento de “Dedos Viscosos” (Nittman *et al.*, 1985), se observa que al estar confinados dos fluidos inmiscibles entre dos placas rectangulares paralelas de ancho finito y ser empujado uno dentro del otro en la dirección longitudinal, la interface que separa los dos fluidos toma formas fractales con diferentes valores de dimensión fractal, que dependen del ancho de las placas (Ver Figura 2.12 y 1.2). Entre mayor es el ancho, la

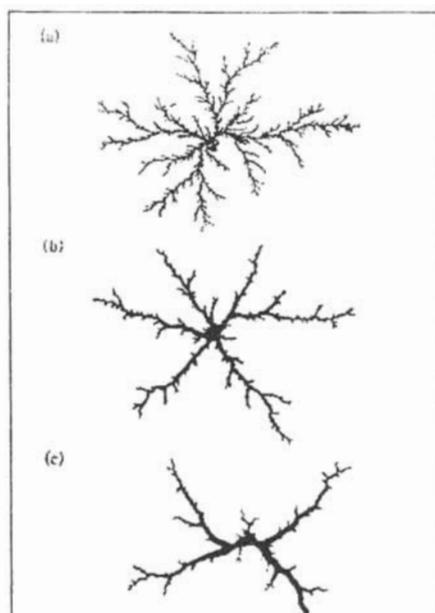


Figura 2.11 Patrones formados por disolución química. En la disolución química de un flujo de agua en un medio soluble poroso se observan estructuras altamente ramificadas. Se observan las imágenes de estas en dos dimensiones. a) Cuando aumenta la velocidad de flujo del agua las ramificaciones de la estructura aumentan ($48 \text{ cm}^3/\text{h}$). b) conforme la velocidad de flujo va disminuyendo las ramas se ensanchan y se muestra menos ramificaciones la estructura ($4 \text{ cm}^3/\text{h}$). c) Cuando la velocidad del flujo disminuye las ramas se ensanchan, así como el número de ramificaciones disminuye, esto por que la velocidad del agua llega a estar rápidamente saturadas y por tanto no reactivas (Daccord,1987).

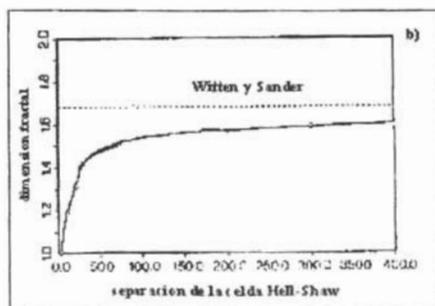
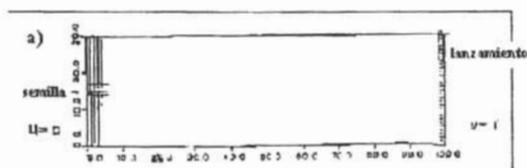


Figura 2.12 Simulación de Dedos viscosos. En la simulación del modelo Dedos Viscosos, también se utiliza la idea de caminata aleatoria, pero ahora se tiene una celda (de dimensiones X, Y) Hell-Shaw que confina el crecimiento de la estructura. a) Se coloca una partícula semilla en una de las orillas de la celda ($0, y/2$), desde el otro extremo se comienzan a lanzar partículas que describirán en su trayectoria una caminata aleatoria, si esta toca a la partícula semilla se pega al agregado, si toca una de las paredes (que se encuentran en $y = Y, y = 0$) se absorbe. b) Se ve en esta grafica, la relación entre el ancho de la interface de la celda y la dimensión fractal del agregado. Entre mayor es el ancho de la celda se tiende a los valores encontrados por Witten y Sander para la dimensión fractal, es decir las estructuras comienzan a parecerse a las que se ven en la figura 2.9. Ver también Figura 1.2 para un ancho finito.(Nittman *et al.*1985).

dimensión fractal tiende al valor que nos da DLA (caso isotrópico) en dos dimensiones. Para anchos pequeños, la interface tiene dimensión fractal uno. El espesor entre las dos placas es muy pequeño y el sistema se puede considerar como bidimensional.

En este experimento se utiliza una celda de Hell-Shaw rectangular que contiene un fluido viscoso (solución polimérica, fluido no newtoniano*) y se le inyecta un fluido de menor viscosidad (como agua o aire) por el lado más angosto. Se observa que dependiendo del ancho de la celda y de la velocidad con que sea inyectado el fluido menos viscoso, se formaran patrones interfaciales de naturaleza fractal, con una dimensión fractal (a escalas intermedias) que los caracteriza y va desde 1 hasta el límite máximo de 1.6 (el mismo que obtenemos con el DLA). El modelo que se utiliza para reproducir el crecimiento de estos dedos viscosos se da en un espacio rectangular ($0 < x < X, 0 \leq y \leq Y$) se coloca una partícula semilla fija que se encuentra en una orilla del rectángulo ($0, y/2$) y esta confinada por dos paredes laterales absorbentes (en $y=0$ y $y=Y$). Desde la orilla opuesta a donde se encuentra la partícula semilla ($x = X$) se tira una partícula que sale de una posición aleatoria sobre el eje y , que seguirá una caminata aleatoria. De esta manera si en algún momento en su caminata aleatoria toca a la partícula semilla ésta se pegará haciendo crecer el agregado. La partícula difundida es absorbida si toca una de las paredes laterales y automáticamente se genera otra partícula en el lado ($x = X$) que seguirá un camino aleatorio. Repetiendo este proceso muchas veces, se observa que reproduce los experimentos de dedos viscosos con

fluidos no newtonianos, donde se ha observado que cambia su dimensión fractal dependiendo de la distancia entre las paredes (Turcotte 1997; Nittman *et al.*, 1985). Figura 2.12.

2.1.7 Efectos de una dirección preferencial sobre los agregados de DLA

Si al modelo de DLA se le impone la restricción de que las partículas difundidas estén sujetas a un sesgo hacia una dirección determinada, se obtiene el modelo que fue estudiado en 1983 por Paul Meakin. Se estudió como la difusión controla (o no) la formación del cúmulo en presencia de una dirección de mayor probabilidad para que se mueva la partícula. Las simulaciones utilizan un cuadrado con celdas iguales. Se empieza con una celda ocupada por una partícula semilla (Figura 2.13), en la vecindad de ésta se ubican sucesivamente otras partículas que realizan caminatas aleatorias. Las trayectorias de las partículas se dan, primero generando un número aleatorio en el intervalo de $[0,1]$. Si el número al azar es menor que un parámetro p que define la probabilidad de *tendencia* (o sesgo), la partícula se moverá a la celda ubicada en la dirección preferencial (por ejemplo izquierda); si el número aleatorio es mayor que la probabilidad de tendencia, un segundo número aleatorio se genera para seleccionar una de las cuatro celdas vecinas (no se permiten movimientos diagonales) con igual probabilidad, en la que se colocará la partícula (Meakin, 1983). Si la probabilidad de tendencia es uno, la partícula seguirá una trayectoria lineal en esta misma dirección y si la probabilidad de tendencia es cero, la partícula seguirá una caminata aleatoria sobre las celdas. Si la partícula se encuentra en alguna de las cuatro posiciones alrededor de la partícula semilla, éstas se pegan comenzando a formar un cúmulo.

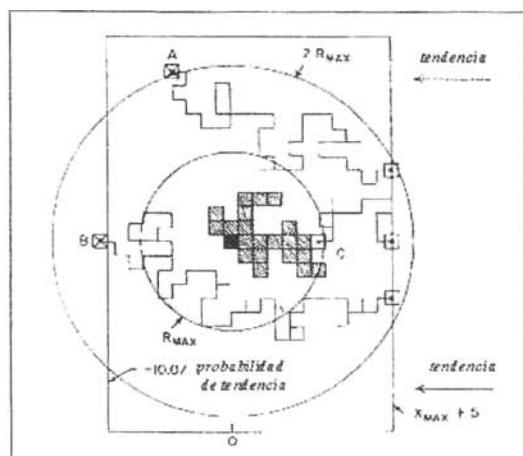


Figura 2.13 Efecto de una dirección de tendencia en el crecimiento de DLA. En este modelo se estudian los efectos de aplicar una dirección de tendencia al crecimiento de una agregación limitada por difusión. En la simulación es muy parecida a la descrita en la figura 2.8, la diferencia es que aunque las partículas lanzadas siguen una caminata aleatoria se les da una probabilidad de moverse en una dirección más que en las otras tres (no se permiten movimientos diagonales). Es por esto que crecen mostrando una tendencia en una de las direcciones. Las estructuras que resultan no son radiales como las de la figura 2.9, son estructuras más compactas y tienden similar a un forma de cono más que radial, como los que se observan en la figura 2.14 (Meakin, 1983).

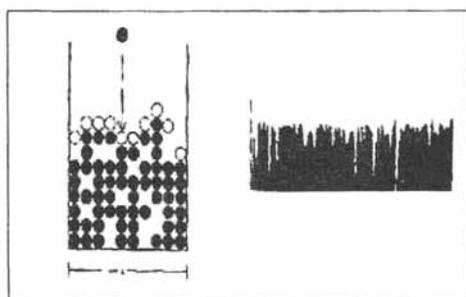


Figura 2.15. El crecimiento balístico es tal que las partículas caen a lo largo de trayectorias rectas y se agregan al sustrato o a las otras partículas que se encuentran en cualquier sitio del perímetro. Este modelo no muestra estructuras fractales, sino compactas ($D = 2$), Sander., (1992).

La dimensión fractal que se obtiene en esta simulación va desde $D \cong 5/3$ hasta $D=2$ dependiendo de la escala de observación.

Para todo valor del parámetro p se observa que en escalas chicas (es decir con una ventana de observación pequeña), este modelo tiene un comportamiento como los agregados DLA, y a escalas mayores (aumentando la ventana de observación) la dimensión del cúmulo tiende a dos (estado compacto) Figura 2.14.

El modelo de Crecimiento balístico es tal que las partículas caen a lo largo de trayectorias rectas y se agregan al sustrato o a las otras partículas que se encuentran en cualquier sitio del perímetro, Figura 2.15. Este modelo no muestra estructuras fractales sino compactas ($D=2$). El modelo de DLA con sesgo cae entonces en la clase del modelo de crecimiento Balístico.

Para entender por que el modelo de crecimiento balístico produce agregados compactos, considérese el argumento siguiente. Para un flujo fijo de partículas M , se ve que la razón de crecimiento del agregado debe ser proporcional al la superficie del área proyectada. En d -dimensiones esto significa que la masa del agregado crece como:

$$dM/dt \sim R^{d-1},$$

donde R es el radio del cúmulo. Ahora si $dM/dt = (dM/dR)(dR/dt) \sim R^{D-1} v$.

La velocidad, v , es la velocidad con la que aumenta el tamaño del radio, y D es la dimensión fractal del agregado. Ahora, si se supone que v es finito, entonces:

$$R^{d-D} \leq \text{constante}$$

Implica que $d=D$. La mayor parte del grupo agregado es compacto y la densidad alcanza un valor constante. Las propiedades de escala se presentan sólo en la superficie.

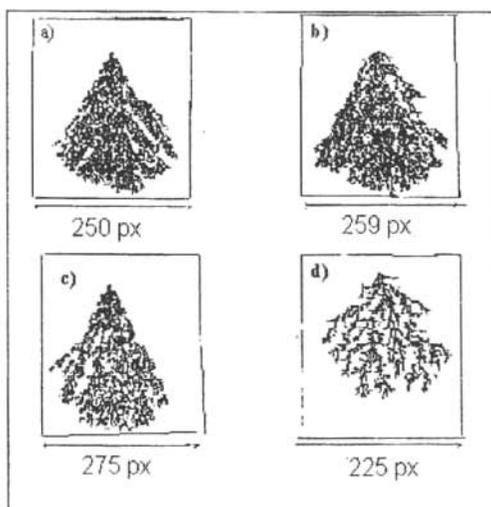


Figura 2.14 Crecimiento de un cúmulo típico usando una dirección preferencial sobre los agregados DLA usando modelo donde se simulan los efectos de una dirección preferencial sobre los agregados de DLA, utilizando distintos valores de *tendencia* o sesgo: **a)** *tendencia* 1 (trayectorias lineales de partículas), **b)** *tendencia* 0.5, **c)** *tendencia* 0.25, **d)** *tendencia* 0.1 (Meakin, 1983), el tamaño de las estructuras se miden en píxeles (px).

2.2 Hidrogeología

2.2.1. Panorama general

La hidrogeología, estudio del agua subterránea, requiere el conocimiento de distintas áreas de la ciencia como la geología, la física, la química y las matemáticas. Tanto la geología como la física y la química proveen de las herramientas para dar un análisis cuantitativo del sistema en estudio, por tanto es una ciencia cuantitativa, que toma a las matemáticas como su forma de expresión. Las leyes que controlan el flujo del agua subterránea son parte de la física conocida como mecánica de fluidos.

El nacimiento de la hidrogeología tuvo inicio en 1856, cuando Henry Darcy publicó su reporte sobre el agua. En este artículo él describe un experimento de laboratorio en el que analiza el flujo del agua a través de un tubo lleno de arena. El resultado de éste experimento ha sido generalizado dentro de una ley empírica conocida como la ley de Darcy (Freeze y Cherry, 1979).

Como se muestra en la figura 2.16, vemos que en un cilindro circular con una sección transversal A lleno con arena, el flujo de agua Q que entra al cilindro es igual al flujo saliente. Sean z_1 y z_2 las alturas de los manómetros (instrumento para medir la presión del fluido) respectivamente. Sea $z = 0$ un punto arbitrario al cual estarán referidos los manómetros. Dentro de los manómetros tenemos la elevación del agua como h_1 y h_2 , respectivamente. La distancia entre los manómetros la tomamos como Δl .

Definimos la descarga específica v , que ocurre a través del cilindro como:

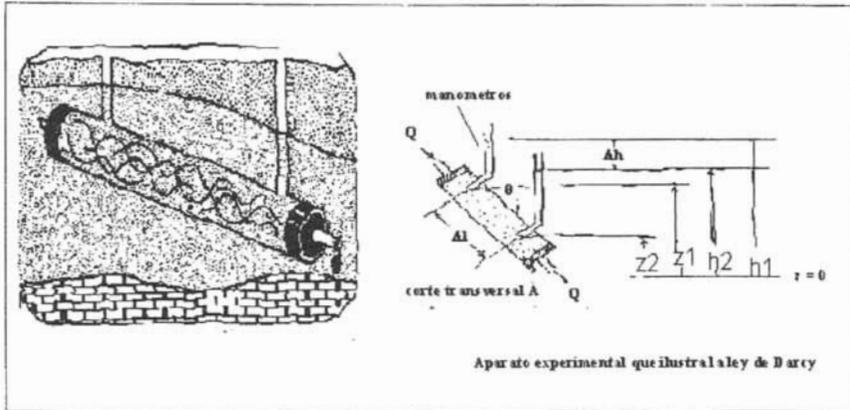


Figura 2.16. El aparato experimental que ilustra la ley de Darcy, se conforma de un tubo de arena de sección transversal A, por el cual atraviesa un fluido a razón de flujo Q. Se encuentran en el tubo dos manómetros separados por una distancia Δl . La elevación del fluido por los manómetros será h_1 y h_2 , con Δh la separación de estas elevaciones; z_1 y z_2 son las elevaciones a las que se encuentra los manómetros con referencia a un nivel $z = 0$; θ es el ángulo que hace el tubo de arena con la horizontal

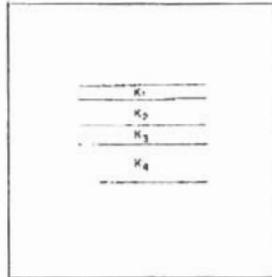


Figura 2.17 Heterogeneidad de la Conductividad hidráulica se representan una sección vertical donde se muestra el ejemplo esquemático de la heterogeneidad por capas comunes en rocas sedimentarias y depósitos marinos no consolidados. La conductividad hidráulica K es distinta para cada capa, por lo que el sistema completo será heterogéneo (Freeze y Cherry, 1979).

$$v = Q/A$$

donde haciendo un análisis dimensional tenemos que las unidades de Q son $[L^3/T]$, y las de A son $[L^2]$; por tanto v tendrá unidades de velocidad $[L/T]$.

En el experimento que realizó Darcy demostró que la descarga específica es directamente proporcional a las alturas $h_1 - h_2$ (donde h_1 y h_2 son las elevaciones del nivel del fluido), cuando Δl (Δl es la distancia entre los manómetros) es constante, e inversamente proporcional a Δl cuando $h_1 - h_2$ se mantiene constante. Por tanto la ley de Darcy la podemos escribir como:

$$v = -K \Delta h / \Delta l,$$

donde $\Delta h = h_2 - h_1$ y $\Delta h \sim \Delta p$ (Δp , diferencia de presión), o su forma diferenciales:

$$v = -K \delta h / \delta l ,$$

donde $\delta h / \delta l$ es conocido como el gradiente hidráulico y K es la constante de proporcionalidad, si $\delta h / \delta l$ se mantiene constante entonces $v \approx K$. Al parámetro K se le llama conductividad hidráulica. Las dimensiones de K serán de velocidad $[L/T]$. Por tanto una forma alternativa de escribir la Ley de Darcy será.

$$Q = -K \delta h / \delta l A \quad (2)$$

si $\delta h / \delta l = i$, entonces

$$Q = -K i A$$

La Ley de Darcy será válida para flujo de agua subterránea, en cualquier dirección y

espacio (Freeze y Cherry., 1979).

La descarga específica es un concepto macroscópico y es fácilmente medible. Las velocidades microscópicas contribuyen a las macroscópicas, sin embargo su medición puede ser más complicada, por tanto el análisis del flujo de agua subterránea, utilizando la ley de Darcy, reemplaza el medio poroso por un medio continuo en el que se pueden definir parámetros macroscópicos, como la conductividad hidráulica. Por lo que obtendremos un promedio macroscópico que nos proveerá de una descripción del comportamiento microscópico.

La conductividad hidráulica K es función no sólo del medio poroso, sino también del fluido. En el caso de tener un medio poroso, se suponen los poros son uniformes, de diámetro d y el fluido que lo atraviesa de una densidad ρ y una viscosidad dinámica μ .

Si el gradiente hidráulico i , se mantiene constante se obtiene la siguiente versión de la ley de Darcy.

$$v = -Cd^2 \rho g / \mu \delta h / \delta l$$

Para poner el fluido en movimiento hay que aplicar una diferencia de presión ($\rho g \delta h$) a lo largo del movimiento. Las fuerzas de fricción (μ) se oponen al movimiento. Vemos que en esta ecuación μ y ρ dependen sólo del fluido y que Cd^2 está en función del medio.

Si definimos $k = Cd^2$, este parámetro se le conoce como permeabilidad específica; tenemos

$$K = k \rho g / \mu$$

Los valores de la conductividad hidráulica usualmente muestran variaciones, debido a la distribución espacial de la formación geológica. Por lo que debemos distinguir diferentes términos que nos ayudan a determinar los valores de K .

Si la conductividad hidráulica es independiente de la posición dentro de la formación geológica, decimos que es homogénea. Y por el contrario si observamos que varía en función de sus coordenadas espaciales, entonces diremos que es heterogénea, $K(x,y,z) \neq C$ (Freeze y Cherry, 1979).

Se pueden encontrar diferentes tipos de configuraciones heterogéneas dependiendo del medio geológico. Por ejemplo en la figura 2.17 se muestra una heterogeneidad por estratos, que es común en rocas sedimentarias, o en depósitos marinos. Cada estrato puede tener valores homogéneos de conductividad, pero el sistema completo es heterogéneo. Se puede tener heterogeneidad discontinua debida a fallas también.

Si la conductividad hidráulica K es independiente de la dirección de medida en un punto de la formación geológica, la formación es isotrópica en ese punto, en cambio si ésta varía con la dirección de medición se dice que es anisotrópica en ese punto. Si consideramos un plano bidimensional en una formación anisotrópica, podemos tener direcciones principales de anisotropía, que serán siempre perpendiculares.

Si tenemos un plano coordenado XYZ y lo hacemos coincidir con las direcciones principales de anisotropía, los valores de la conductividad hidráulica en las direcciones principales pueden ser especificadas como K_x, K_y, K_z . Teniendo esto, el medio será isotrópico cuando $K_x = K_y = K_z$ y será anisotrópico si $K_x \neq K_y \neq K_z$. En la figura 2.18 podemos ver cuatro posibles combinaciones que se dan para diferentes configuraciones geológicas.

Para describir un fluido en tres dimensiones en un medio que puede ser anisotrópico es necesario descomponer a la velocidad en un vector que nos dé las componentes v_x, v_y, v_z , y para representarla de la manera más general se tiene un grupo de ecuaciones que estarán escritas en la forma:

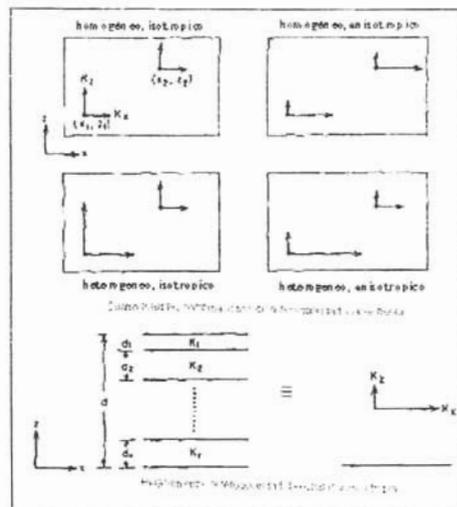


Figura 2.18 Heterogeneidad y anisotropía de K. Se describen cuatro posibles combinaciones de la conductividad hidráulica K mostrando como serían los componentes x,y en cada caso. El medio fracturado tiene una conductividad hidráulica heterogénea y anisotrópica (Freeze y Cherry, 1979).

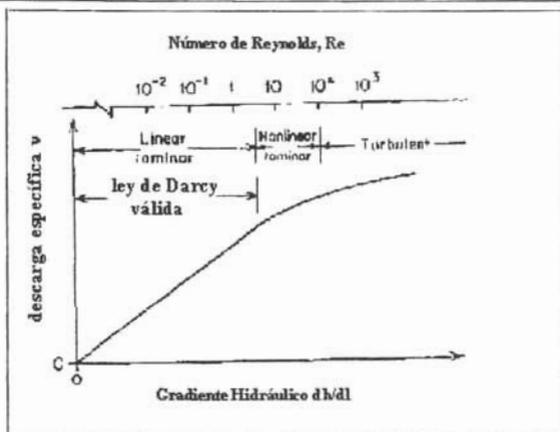


Figura 2.19. Rango de validez para la ley de Darcy. Cuando se realiza una gráfica de descarga específica v vs gradiente hidráulico dh/dl , se observa que el rango de validez para la Ley de Darcy es solo para gradientes hidráulico bajos y descarga específica baja, es decir donde v vs dh/dl tiene un comportamiento lineal ($v = -K (dh/dl)^m \dots (14); m = 1$). Cuando se tiene flujo no laminar o turbulento la ley de Darcy no se cumple. El límite superior de la ley de Darcy se da cuando el número de Reynolds es 10. Cuando tenemos el caso de un flujo turbulento el número de Reynolds

$$v_x = -K_{xx}\partial h/\partial x - K_{xy}\partial h/\partial y - K_{xz}\partial h/\partial z \quad (3)$$

$$v_y = -K_{yx}\partial h/\partial x - K_{yy}\partial h/\partial y - K_{yz}\partial h/\partial z \quad (4)$$

$$v_z = -K_{zx}\partial h/\partial x - K_{zy}\partial h/\partial y - K_{zz}\partial h/\partial z \quad (5)$$

Este grupo de ecuaciones nos muestran que podemos tener nueve componentes de la conductividad hidráulica en el caso más general. Estos componentes los podemos poner en forma matricial, y forman un tensor simétrico de segundo orden conocido como tensor de conductividad hidráulico. Si tenemos el caso especial en que $K_{yx} = K_{zx} = K_{xy} = K_{xz} = K_{yz} = K_{zy} = 0$, las nueve componentes, de las ecuaciones (3), (4) y (5), se reducirán a tres, condición necesaria y suficiente para usar las ecuaciones,

$$v_x = -K_x \partial h / \partial x \quad (6)$$

$$v_y = -K_y \partial h / \partial y \quad (7)$$

$$v_z = -K_z \partial h / \partial z \quad (8)$$

y será cuando la dirección principal de anisotropía coincida con los ejes coordenados x, y, z. En la mayoría de los casos es posible escoger el sistema coordenado que satisfaga estos requerimientos.

2.2.2 Límites superior e inferior de la ley de Darcy

La ley de Darcy es lineal. Si ésta fuera universalmente válida, una gráfica de descarga específica v contra gradiente hidráulico dh/dl nos daría una relación lineal para todos los

gradientes entre 0 y ∞ . Para flujos a través de medios granulares se tienen por lo menos dos casos en los que la relación lineal no se cumple.

El primero concierne al flujo a través de sedimentos de baja permeabilidad bajo gradientes pequeños; y el segundo se refiere a flujos grandes a través de sedimentos de alta permeabilidad. Es por esto que la ley de Darcy queda indicada de manera más general como.

$$v = -K (dh/dl)^m \quad (9)$$

Si el valor de $m=1$ tenemos la situación común, y la ley de flujo será lineal llamada ley de Darcy; y si $m \neq 1$ se tiene una ley no lineal que no se describe por la ley Darcy

El límite superior es usualmente identificado con el Número de Reynolds R_e . Este número adimensional expresa la razón de las fuerzas inerciales durante el flujo, es decir, éste criterio decide cuando el flujo debe ser laminar y cuando turbulento. El número de Reynolds a través de un medio poroso es:

$$R_e = \rho v d / \mu \dots (10)$$

donde ρ es la densidad del fluido, μ es la viscosidad, v será la descarga específica y d la dimensión representativa del medio poroso. Según evidencia experimental, se observa que la ley de Darcy es sólo válida en los casos en los que el número de Reynolds este basado en el diámetro de los granos que no exceda valores entre 1 y 10 (Freeze y Cherry, 1979). Para este intervalo del número de Reynolds describe que todo el flujo a través de medio poroso es laminar.

El intervalo que excede el límite superior de la Ley de Darcy es común en formaciones de rocas importantes como la caliza o las dolomitas y cavernas volcánicas. Las rocas fracturadas constituyen un caso especial que se tratará en este trabajo.

2.2.3 Flujo en rocas fracturadas

Para analizar qué ocurre con el flujo en rocas fracturadas podemos hacerlo con una aproximación continua o bien con una aproximación no continua que está basada en la hidráulica del flujo y en las fracturas individuales. Igual que en el medio poroso, la aproximación continua puede darse en el medio fracturado, obteniendo así los valores espaciales para la conductividad hidráulica K , porosidad y compresibilidad. Es importante observar que esta aproximación continua debe darse siempre que el espacio en el que están las fracturas sea suficientemente denso similar a los granos del medio poroso. Al volumen en el que la densidad del fluido es tal que se puede describir con la ley de Darcy se le conoce como volumen representativo elemental.

Al igual que en el medio poroso se tiene una idea similar del volumen representativo elemental para un medio fracturado.

Si los espacios entre las fracturas son irregulares para una dirección dada, se puede decir que el medio es heterogéneo. Y cuando los espacios de las fracturas son diferentes para distintas direcciones el medio es anisotrópico.

Se ha mostrado que muchos de los problemas de flujo en fracturas se pueden resolver utilizando las técnicas comunes de la Ley de Darcy para medios porosos y el tensor anisotrópico de la conductividad (Snow, 1968). Si la densidad de las fracturas es extremadamente baja, deberán analizarse como fisuras individuales. Los métodos de

análisis están basados en los principios usuales de la mecánica de fluidos incorporados en la ecuación de Navier-Stokes*.

Se deben revisar los límites a considerar en la aproximación continua a través de las rocas fracturadas. La primera cuestión es que el flujo es no darciano en fracturas con aperturas anchas. Existen datos obtenidos experimentalmente que soportan el hecho de que para rocas fracturadas se tiene flujo no lineal (Sharp, 1972).

Como se muestra en la figura 2.19 se puede hacer una distinción entre el intervalo para flujo lineal laminar (rango de Darcy), flujo no lineal laminar y rango turbulento, haciendo una gráfica entre la descarga específica v y el gradiente hidráulico i (Wittke, 1973). Para rocas con fracturas anchas, las descargas específicas y el número de Reynolds son altos, el gradiente hidráulico es menor que uno, y el exponente m será mayor que 1.

El segundo límite tiene que ver con la interacción del campo de tensiones tridimensionales y el campo tridimensional de flujo del fluido. Dado que la porosidad de las rocas fracturadas es baja, las expansiones y contracciones de las aperturas de la fractura ocurren bajo la influencia de cambios en el esfuerzo que afectan los valores de la conductividad K . La interacción entre la presión del fluido $p(x,y,z,t)$, de la altura pizométrica $h(x,y,z,t)$ y el esfuerzo efectivo $\sigma_c(x,y,z,t)$ es complicada y K debe representarse como función del esfuerzo $K(\sigma_c)$.

El análisis de estos sistemas y el cómo determinar el parámetro K sigue siendo motivo de investigaciones en campos de mecánica de rocas y en hidrogeología.

2.2.4 Karst y cuevas

Un paisaje superficial o subterráneo que exhibe irregularidades en su superficie causada por disolución, es conocido como paisaje kárstico. Éstos paisajes son usualmente formados sobre caliza y en menos extensión sobre dolomita y en general en rocas carbonatadas. En las áreas kársticas normalmente se pueden encontrar cuevas como resultado de un largo proceso de disolución. En la mayoría de las regiones de karst, miles de kilómetros de cuevas se han formado a lo largo de millones de años.

La reacción química que tiene la roca caliza (carbonato de calcio) al estar en contacto con el exterior (dióxido de carbono y agua), produce la disolución química al formar calcio y anhídrido carbónico, que se encarga de ir disolviendo la roca, formando así con el paso de los años, grandes sistemas de cuevas subterráneas (Figura 2.20), como las que se observan en la Península de Yucatán.

Otras de las condiciones para la formación de karst es la hidrodinámica, es decir, la existencia de una energía potencial o un gradiente hidráulico entre el área de carga y de descarga (Soliz, 2002), así como la existencia de discontinuidades que garanticen el flujo. Al ser la karstificación un proceso que se da en las discontinuidades de la roca ya existentes, esto da lugar a que existan zonas de alta permeabilidad (fracturas) y zonas impermeables en donde la permeabilidad es reducida (bloques).

La permeabilidad en el karst no se encuentra repartida de manera homogénea, sino que al estar ligada a la circulación del agua, existe una relación entre los flujos de agua y la estructura de los huecos, de esta manera se tiene una red de drenaje principal, en la que las aguas tienden a concentrarse en un reducido número de gruesos conductos que por lo general comunican con el área de descarga (ya sea en el mar o en un río). El término

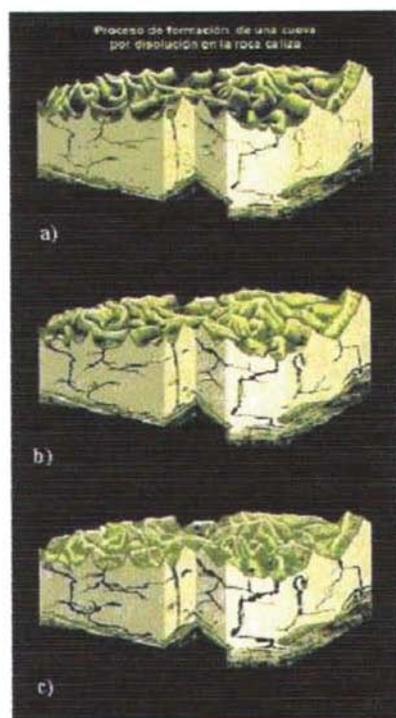


Figura 2.20 El proceso de formación de una cueva se da por proceso de disolución química; a) primero el agua que se filtra en la roca caliza va abriendo grietas; b) a lo largo de millones de años las grietas se van ensanchando hasta formar pasajes más grandes; c) el agua va abriéndose paso en la roca caliza y la cueva va haciéndose más larga y profunda (Vela, 2005).

fractura se usará de manera general para describir los variados tipos de discontinuidades en estos tipos de roca, donde por lo general, su presencia proporciona aberturas continuas cuyas longitudes excede el ancho de las mismas (Soliz, 2002). Las fracturas pueden considerarse como elementos discretos, cuyo ancho puede variar de centímetros hasta metros.

2.2.5 Hidrogeología de la zona de estudio

La península de Yucatán es una plataforma que consiste de roca carbonatada y evaporitas en varias centenas de sus metros superiores, con muy poco relieve y alta permeabilidad (Marín *et al.*, 2000). El fracturamiento de la superficie y la karstificación del subsuelo, favorecen la rápida infiltración de la lluvia; teniendo como resultado el desarrollo de sistemas kársticos interconectados a través de fracturas y abiertos al exterior por el colapso de alguna de estas fracturas subterráneas.

Por la geología que presenta la Península de Yucatán puede ser dividida en tres partes. El Este, la Zona Central y el Noroeste. De estas tres zonas las menos estudiadas son la Zona Central y la parte Este de la Península. En la parte Noroeste se encuentra la huella del cráter Chicxulub, hecho que ha dado pie a un número mayor de investigaciones (Marín, *et al.*, 2004). La zona motivo del presente trabajo es la zona noreste de la Península de Yucatán.

La Península ha tenido un desarrollo geológico complejo. Se caracteriza por ser bastante plana, con excepción de algunas elevaciones máximas de 275 m.s.n.m. Desde el Jurásico hasta el Reciente se han ido depositando más de 3000 metros de "secuencia sedimentaria" sobre un basamento metamórfico (Marín *et al.*, 2004).

El efecto de disolución de la roca carbonatada depende del contenido de carbonato de calcio y de la acidez del agua en cada sitio específico, como se señaló (ver capítulo 1) este fenómeno produce karstificación. Como resultado de esta karstificación continua, la heterogeneidad del sistema se incrementa continuamente, propiciando que el almacenamiento y el movimiento del agua subterránea tenga lugar a través de la red de cavidades interconectadas con fracturas y conductos de disolución, en estos últimos se encuentran las oquedades, cuevas y cavernas, localizadas a diferentes profundidades del subsuelo (Villasuso *et al.*, 2000).

La península de Yucatán tiene espesores de suelo muy reducidos, como consecuencia de esta ausencia de suelos se ha generado un sistema kárstico maduro. La única fuente de agua potable para la península es un delgado lente de agua dulce que flota sobre agua salada (Marín, 1990). El agua subterránea en la Península de Yucatán, se mueve de las zonas de mayor precipitación ubicadas al sur de la Península hacia la costa, donde se realiza la descarga natural del acuífero al mar (figura 2.21).

Los cenotes y dolinas (figura 2.22) corresponden a expresiones kársticas principales. Estas fueron formadas por la acción vertical de la disolución y por el paso de agua hacia las zonas profundas del nivel estático durante los periodos glaciales, revelando que las calizas han sido sujetas a una disolución vertical significativa (Freeze y Cherry, 1979; Acosta *et al.*, 2001). Las cavernas y grutas son las manifestaciones más espectaculares de las formas kársticas, se encuentran de diversos tamaños y extensión dependiendo de la edad de la roca y de la incidencia de los rasgos geológicos estructurales (Marín, *et al.*, 2004). En las cuevas algunas galerías son fósiles (ya no existe flujo de agua)

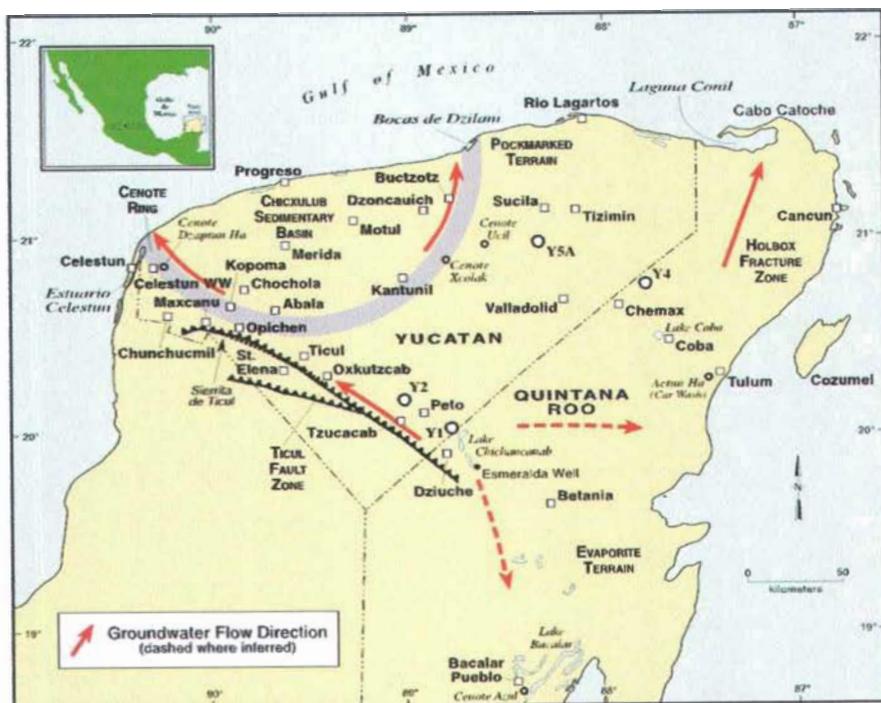


Figura 2.21 Las direcciones de flujo subterráneo de la Península de Yucatán son variadas y dependen de de la geología de la zona. Por ejemplo en la parte norte de la Península de Yucatán se encuentra la huella del cráter Chichxulub, el flujo aquí se da siguiendo el anillo de cenotes que dejó como marca (Marín *et al.*, 2004). En la zona noreste de la Península el flujo subterráneo tiene dirección este-oeste, teniendo como área de recarga la Sierra de Ticul y de descarga el mar Caribe.

y otras activas (existe flujo de agua, puede ser desde un pequeño caudal hasta salones inundadas por el agua subterránea).

Los principales ejes estructurales de la Península de Yucatán presentan una orientación ONO-ESE y NNE-SSO, asociados con la Sierrita de Ticul y el Sistema Bacalar-Río Hondo, respectivamente (Butterlin *et al.*, 1960). Otros rasgos estructurales de suma importancia son las fracturas que se encuentran en la parte noreste de la península conocida como la “zona de fracturas de Holbox”, Figura 2.23, tal vez asociadas con el Sistema Bacalar-Río Hondo (Marín, *et al.*, 2004). Estas fracturas de Holbox son lineamientos observadas por Weidie (1982) y tienen cientos de kilómetros de extensión. Posteriormente en el Programa de Monitoreo de Aguas Subterráneas de la Caleta de Xel-Ha y sus alrededores (Escolero, 2005), el área fue estudiada utilizando imágenes de radar de la Península de Yucatán y la zona de estudio en particular, verificando la presencia de las fracturas y fallas. Las fallas encontradas al este de Yucatán, en las zonas de Catoche y Río Hondo, tienen una orientación noreste y están asociadas a la rotación antihoraria del bloque de Yucatán respecto al bloque norte de centro América (Donnelly *et al.* 1990). A la fecha la influencia que este sistema de fracturas ejerce sobre la hidrogeología regional no ha sido estudiada.

Durante el Cretácico se dió un hundimiento paulatino de la plataforma de Yucatán, lo que favoreció los depósitos extensos de carbonatos y evaporitas.

El nivel freático en la zona costera se encuentra a una profundidad máxima de 30 metros de la superficie, mientras que al pasar a la Sierrita, el nivel freático se encuentra a más de 80 metros de la superficie (Marín, *et al.*, 2004).

Los sistemas de cuevas que son el objeto de análisis de este trabajo se encuentran en la zona Noreste de la Península de Yucatán (figura 2.24).

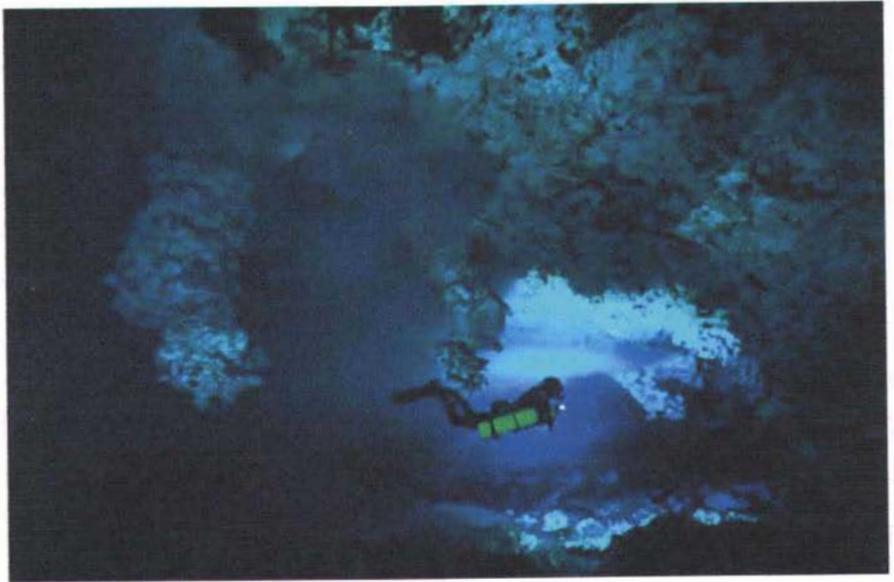


Figura 2.22 Los cenotes y dolinas corresponden a expresiones kársticas principales y pueden ser estructuras de colapso. Estas fueron formadas por la acción vertical de la disolución y el paso de agua hacia zonas profundas. En esta figura se muestra la medición en el cenote Tak Be Ha.

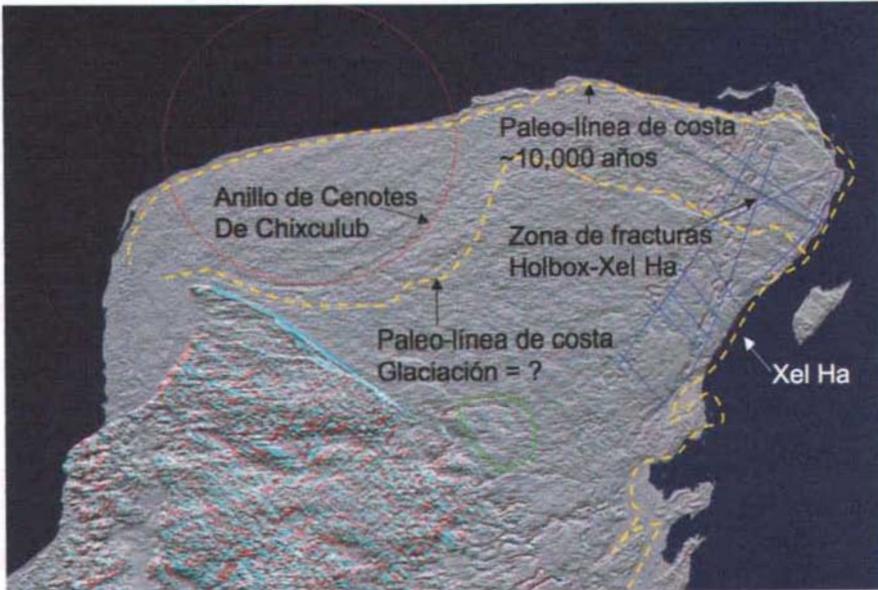


Figura 2.23 Al ver la Península de Yucatán a través de una imagen de radar se observan las fracturas y discontinuidades de su estructura. En esta imagen podemos distinguir algunos lineamientos estructurales regionales, como por ejemplo el anillo de cenotes que se encuentra al noroeste de la Península formando un medio círculo; también se pueden distinguir la fractura de Hol Box que esta en la parte noreste y corre de NE-SW y abarca una longitud de varios kilómetros. En estas imágenes no se muestra a detalle las fracturas pequeñas, que contribuyen a la formación de las cuevas. Las fracturas pueden estar distribuidas de manera fractal (pocas grandes y muchas pequeñas) (Escolero *et al.*, 2005).

A partir de los años setenta se comenzaron a realizar estudios cualitativos sobre la hidrogeología de esta zona. William Back y colaboradores (Marín *et al.*, 2004), estudiaron la interacción agua-roca. El flujo del agua subterránea se da a través de fracturas y sistemas de cavernas interconectadas (Beddows, 2003). Se observó que la orientación de las cavernas en esta zona es NNW-SSE, casi perpendicular a la costa. La formación de éstas fue multi-facética, cuando el nivel del mar se encontraba más abajo que el actual. Estos sistemas de cuevas tienen dimensiones que van desde los cinco metros hasta cincuenta metros de ancho, y de dos hasta diez metros de alto (algunos casos en los que esta altura es superada). La profundidad máxima promedio de los sistemas es de 16 metros debajo del espejo de agua. En el último kilómetro antes de llegar a la costa, los conductos tienden a ser paralelos a ésta, influenciados por el sistema de fracturas de la zona. El flujo está dirigido hacia la parte alta de las caletas que tienen una forma característica de “Y”, donde, a través de fracturas con orientación N-S descargan a canales principales que conducen el agua dulce al mar, como se ve en las caletas de Yal-Ku y Xel-Ha. Los cenotes tienen extensiones verticales considerables, lo cual indica que el desarrollo de los sistemas extensos de cavernas ocurrió durante periodos en que el nivel del mar se encontraba abajo, como “The Pit” (119 metros de profundidad en el Sistema Dos Ojos) y “Blue Abyss” (74 metros de profundidad en el Sistema Nohoch Nah Chich) (Marín *et al.*, 2004).

2.2.6. QRSS (Servicio de Espeleomapeo de Quintana Roo)

La exploración de las cavernas comenzó a principios de los ochenta en el estado de Quintana Roo. El QRSS es un grupo de espeleobuzos que se han dedicado a hacer la

exploración y mapeo de muchos sistemas de cuevas, manteniendo estadística sobre los 87 sistemas de cavernas reportados, teniendo un total de 500 km de cavernas subacuáticas mapeadas a la fecha. Estos mapas no son de acceso libre. Entre estos sistemas se encuentra Ox Bel Ha ubicado como la cueva subacuática más grande del mundo, con más de 121 km de conductos. La exploración de la cueva no ha finalizado (Marín *et al.*, 2004).

Se encuentran dos áreas a lo largo de la costa en donde la concentración de los sistemas de cuevas es mayor; Puerto Aventuras / Xpu Ha y Tulum. En el área entre Puerto Aventuras y Xpu Ha se encuentran cinco sistemas con más de 40 km de cueva. El área alrededor de Tulum tiene la mayor concentración de cuevas con 13 sistemas mayores sumando 350 km de pasajes explorados (Figura 2.25).

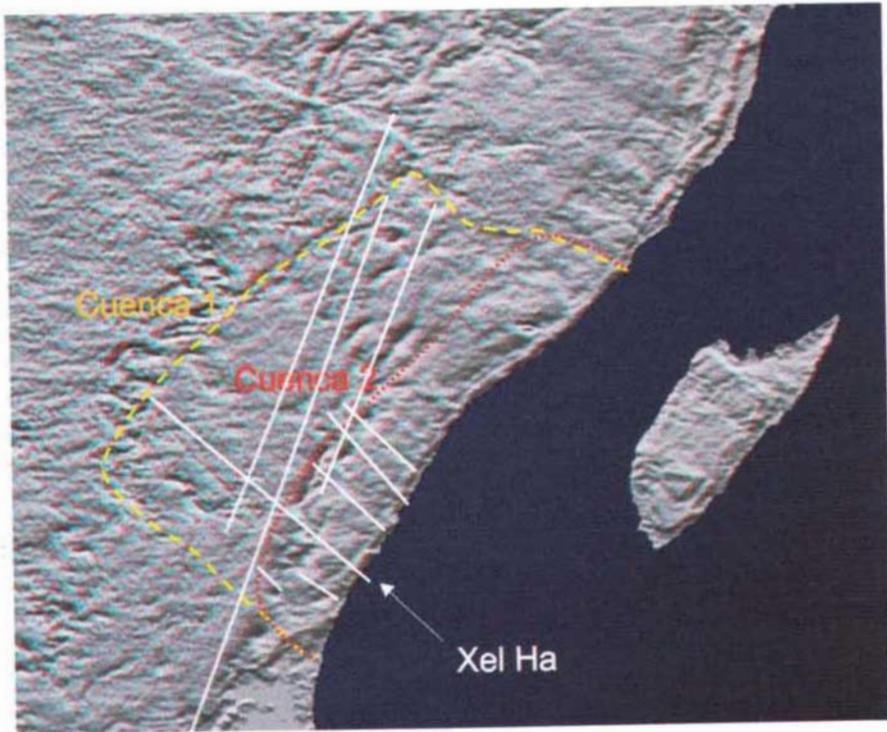


Figura 2.24. En esta figura se pueden observar las fracturas (remarcadas con líneas) que se encuentran en la zona de estudio. Se observa que no todas siguen la misma dirección, aunque más cerca de la costa se observa una disposición casi perpendicular a ésta, algunas de las cuevas muestran que en el último kilómetro paralelo a la cota, los conductos tienden a ser paralelos influenciados por el sistema de fracturas de la zona (Escolero *et al.*, 2005)



Figura 2.25 EL grupo de espeleo-buzos QRSS ha hecho la exploración de más de 500 km de cuevas y cavernas subacuáticas. Este es un mapa en donde se hace la integración de los sistemas de cavernas en la zona de Xel Ha (www.cavesproject qrss). También se observa que la dirección del flujo del agua tiende a seguir las zonas de alta permeabilidad, como los pasajes de disolución, las cuevas.

Capítulo 3 METODOLOGÍA

3.1 Mapas

De los 86 sistemas de cuevas mapeados por el grupo de espeleo-buzos QRSS (2005), tomé una muestra de 18 sistemas representativos para realizar el análisis de su geometría. La primera propiedad que se analizó fue comprobar si éstos sistemas mostraban un comportamiento fractal en su estructura. Los mapas proporcionados por QRSS (en formato bmp) fueron tratados en Corel Draw para el análisis posterior (Figura 3.1).

Se hizo el análisis para calcular la dimensión fractal utilizando el programa de software FracAnalysis V16.exe, elaborado y publicado por el Dr. Gustavo Tolson (2004) que a partir de gráficos o imágenes en formato bmp, este programa calcula la dimensión fractal utilizando el método caja descrito en el capítulo dos. El análisis fue en una proyección en R^2 .

Uno tiene la opción de elegir el tamaño mínimo de las cajas cuadradas (ventana de resolución) y el tamaño máximo, así como el incremento de tamaño entre estos dos valores. El programa llena una tabla de valores $\log(N(\epsilon))$ y $\log(\epsilon)$, donde $N(\epsilon)$ es el número necesario de cajas de tamaño (ϵ) para cubrir la imagen, así como un gráfico de ambas variables. También calcula una línea de regresión para los puntos obtenidos y tabula los datos referentes a ella.

3.2 Programa para simular el crecimiento de las cuevas

La segunda parte del análisis consistió en simular el crecimiento de las cuevas, inspirándose en los modelos descritos en el capítulo anterior. El programa fue realizado en colaboración con Zian Fanti (2005) y está escrito en lenguaje Java, consta de dos archivos Application Frame, en donde se escriben los parámetros y Cueva.java en donde se ejecuta el programa, desplegándose la imagen.

La idea fue reproducir el modelo propuesto por Nittman *et al.* (1985), en el cual se confina el crecimiento de los dedos viscosos en una celda de Hell-Shaw rectangular. En la zona de estudio se observa la existencia de fallas y fracturas de alta permeabilidad, que al igual que la celda Hell-Shaw confinan el crecimiento de las cuevas. Así en la simulación se confina el crecimiento del agregado por dos paredes paralelas absorbentes, para intentar simular las condiciones que se dan en la Península de Yucatán.

De acuerdo con el ciclo hidrológico, el agua subterránea se encuentra sometida a la fuerza de gravedad lo que implica que ésta fluirá preferencialmente de las zonas altas (montañas por lo general) a las zonas bajas del continente (el mar). Por lo que utilizando la idea de los efectos de una dirección preferencial sobre los agregados de DLA (*tendencia*), se pretende simular la fuerza de gravedad que influye directamente la formación de las cuevas.

Se toma un plano dado XY con dos paredes paralelas absorbentes horizontales. Se fija una partícula semilla entre las paredes en la posición $(L/4*3, l/2)$, donde L será la longitud de la pared y l la distancia de separación entre las paredes (Ver Figura 3.2).

Desde el lado opuesto a la semilla, comienzan a lanzarse partículas desde una posición aleatoria sobre el eje Y, en $X=0$, una por una. De esta manera cada partícula avanza siguiendo una caminata aleatoria, en vecindades de Moore (no se permiten movimientos diagonales) y con cuatro libertades de movimiento: adelante, abajo, atrás y arriba. Si la partícula lanzada toca a la semilla o al agregado, ésta formará parte del agregado, si toca alguna de las paredes absorbentes la partícula lanzada desaparece y se genera una nueva partícula en la zona de lanzamiento que comenzará su caminata aleatoria.

En el programa se puede determinar el número de partículas que formarán parte del agregado, y variar la fuerza preferencial (Meakin, 1983) que se quiere aplicar a la partícula lanzada dentro del rango $[0,1]$, así como la longitud y la separación de las paredes. La dirección preferencial está dirigida de la izquierda hacia la derecha (Figura 3.2)

Además de combinar los modelos de Nittman *et al.* (1985) y de crecimiento con una dirección preferencial, se introdujo una restricción más, que es colocar áreas generalmente cuadradas de menor conductividad hidráulica entre las paredes. Al ser el acuífero de Yucatán heterogéneo y anisotrópico, se tiene que las propiedades de la litología cambian de un lugar a otro, por lo que al añadir estas zonas de baja permeabilidad se pretende simular la heterogeneidad del medio y la diferencia de permeabilidad que existe. Si una partícula lanzada toca una zona de “baja permeabilidad” ésta desaparece generándose una nueva partícula en la zona de lanzamiento. Se puede escoger varias rocas de diferentes tamaños y a cada una se le da una posición determinada en el plano XY o bien está la posibilidad de elegir que aparezcan aleatoriamente. El tamaño de las piedras puede ser escogido al azar.

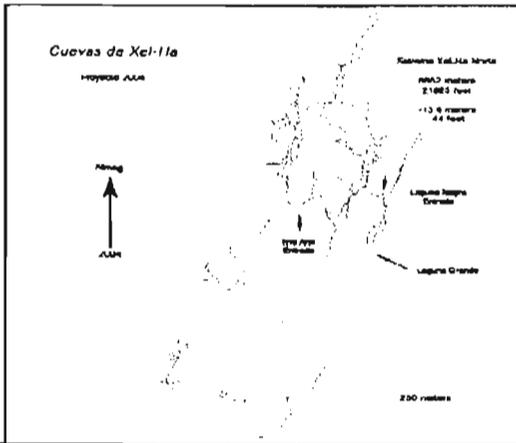


Figura 3.1 Muestra de uno de los mapas de las cuevas exploradas por el grupo QRSS, de los cuales se obtuvieron las imágenes para analizar

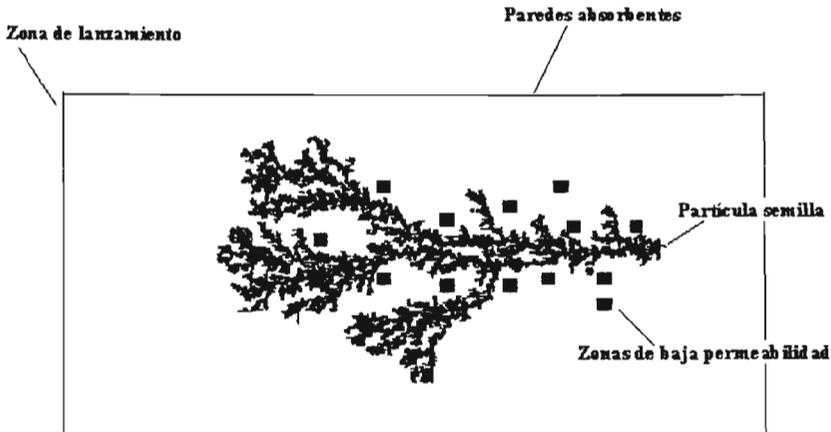


Figura 3.2 Esquema de la simulación numérica del crecimiento de las cuevas, propuesta en este trabajo. Dentro de un espacio confinado XY, donde las paredes son absorbentes, se colocó una partícula semilla en una de las orillas del espacio ($x = 3X/4$, $y = Y/2$). En la otra orilla (0, y) está la zona de lanzamiento de las partículas que forman el agregado, las cuales al momento de salir de un lugar sobre el eje y escogido al azar, siguen una caminata aleatoria, no se permiten los movimientos diagonales. Sin embargo existe una *tendencia* que hará que las partículas tengan más probabilidad de moverse en una dirección que en otra, las zonas de baja permeabilidad se colocan para observar que pasa con las estructuras cuando se encuentran una barrera.

Capítulo 4

4.1 Resultados

4.1.1 Mapas

En este trabajo se analizaron 18 mapas de los sistemas kársticos ubicados en la región noreste de la Península de Yucatán, en el estado de Quintana Roo. Al analizarlos con el programa de FracAnalysis V16.exe se vio que todos los sistemas presentaban dimensiones fractales, es decir, fraccionarias, aunque varias de ellas se aproximaban bastante a la unidad.

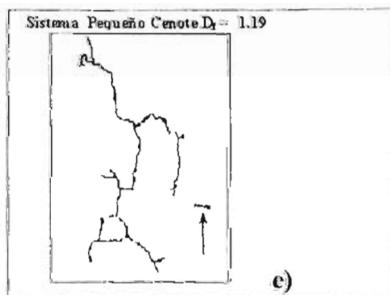
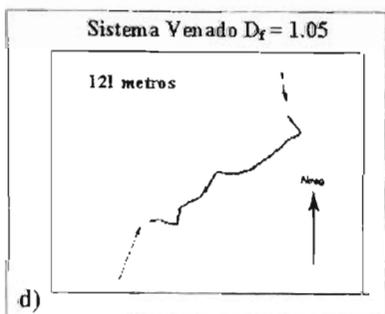
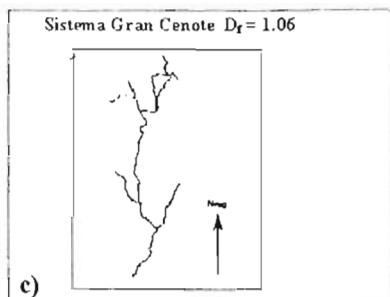
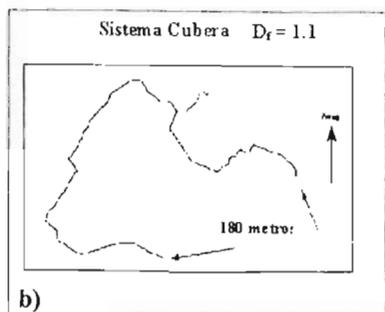
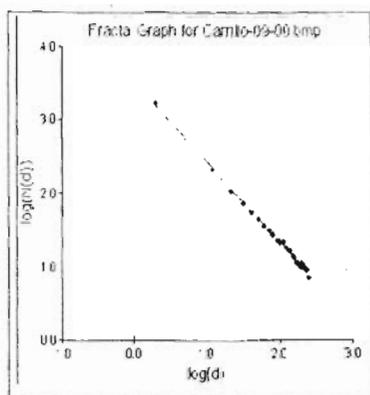
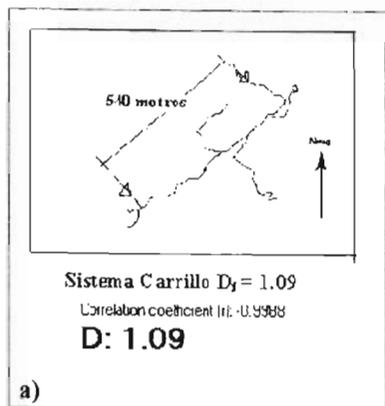
Para abarcar el mayor número de órdenes de magnitud en la escala de resolución se tomó un tamaño mínimo de caja en el valor dos y como máximo el valor 256 (siendo el valor más grande permitido por el programa). En la figura 4.1 se muestra los 18 mapas topográficos y su respectiva dimensión fractal obtenida, así como su escala de longitud característica.

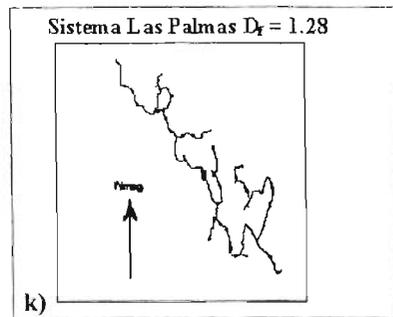
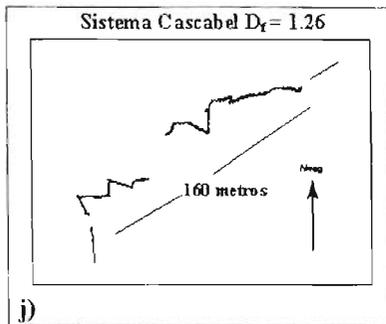
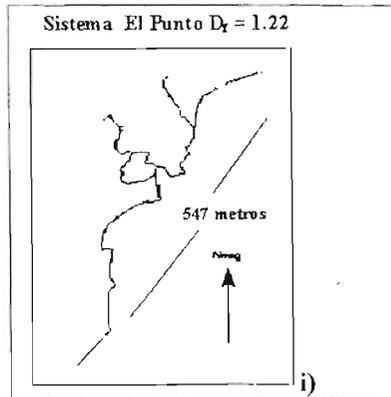
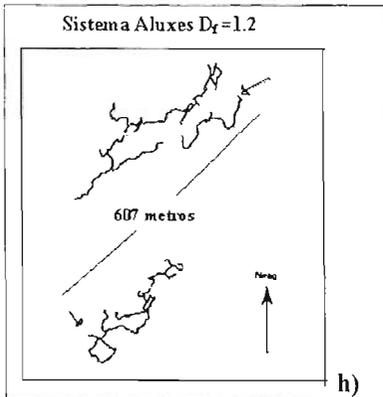
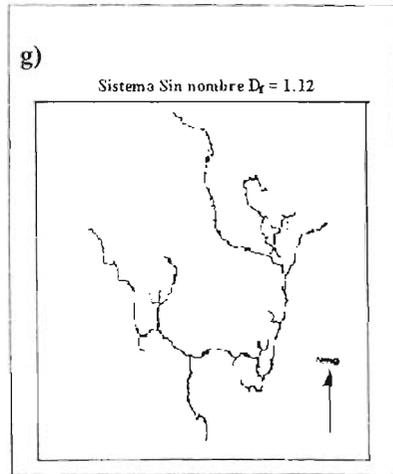
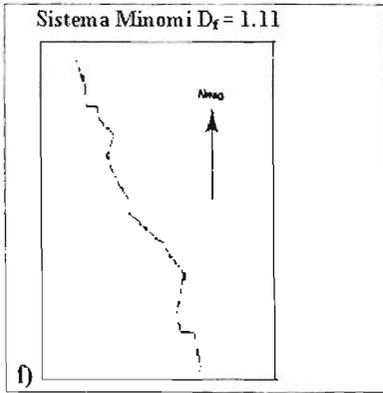
4.1.2 Modelo Teórico

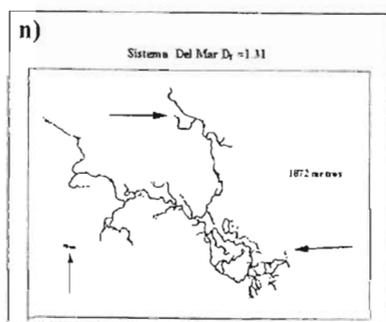
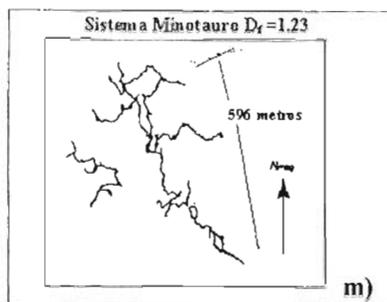
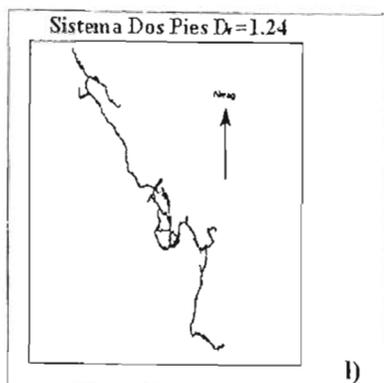
En la simulación numérica realizada, se obtuvieron los siguientes resultados:

Primero se realizó pruebas solamente utilizando la fuerza de *tendencia* o sesgo sobre las partículas lanzadas y la caja que confina el crecimiento de la estructura. Se fue variando los valores de la *tendencia* manteniendo constante el tamaño de la caja y el número de partículas (9000). Figura 4.2.

FIGURA 4.1

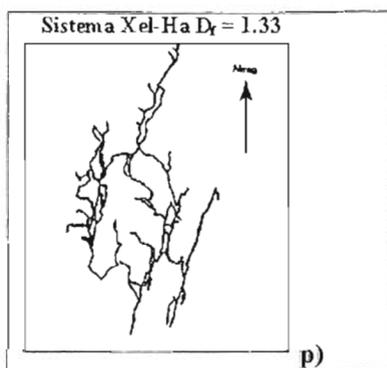
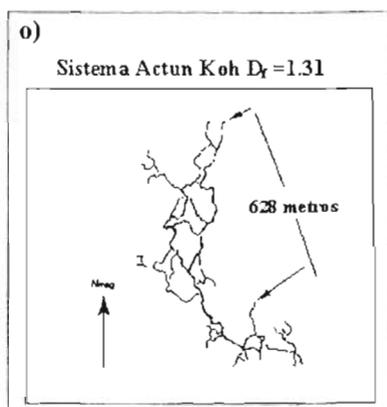
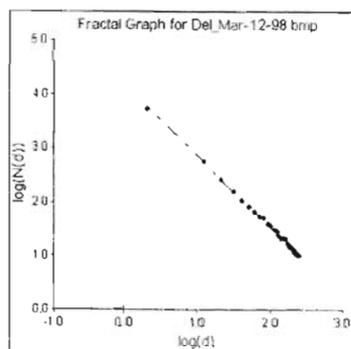






Correlation coefficient (r): -0.9992

D: 1.31



Sistema Sac Actun $D_f = 1.31$



Sistema Ox Bel Ha $D_f = 1.38$

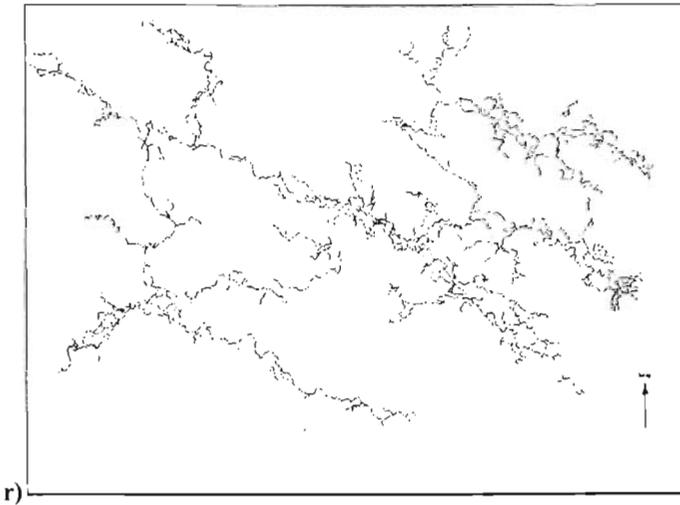


Figura 4.1 Se muestran los 18 mapas de cuevas (con su escala), en los que se coloca la dimensión fractal obtenida y en algunas (para ejemplificar) la gráfica $N(\epsilon)$ vs (ϵ) , donde ϵ es el tamaño de la caja, así como el coeficiente de correlación. También se pone la escala característica en la mayoría de los sistemas (Ver Tabla 1).

<i>tendencia</i> = 1 $D_f = 0.94$	<i>tendencia</i> = 0.9 $D_f = 1.42$	<i>tendencia</i> = 0.8 $D_f = 1.46$	<i>tendencia</i> = 0.7 $D_f = 1.48$
			
<i>tendencia</i> = 0.6 $D_f = 1.49$	<i>tendencia</i> = 0.5 $D_f = 1.54$	<i>tendencia</i> = 0.4 $D_f = 1.53$	<i>tendencia</i> = 0.3 $D_f = 1.53$
			
<i>tendencia</i> = 0.2 $D_f = 1.56$	<i>tendencia</i> = 0.1 $D_f = 1.54$	<i>tendencia</i> = 0.05 $D_f = 1.57$	<i>tendencia</i> = 0 $D_f \sim 1.6$
			

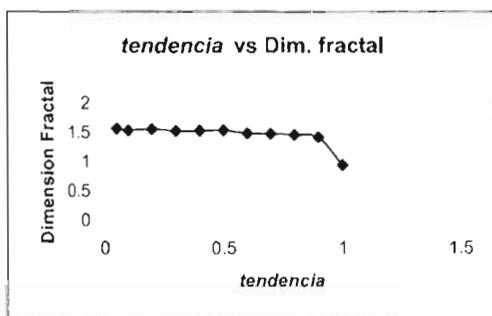
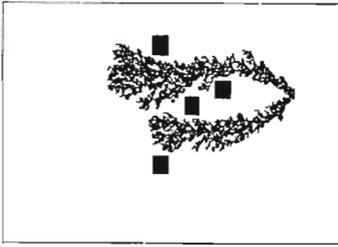


Figura 4.2 En la simulación numérica, al hacer la prueba de colocar el espacio de confinamiento y una dirección de *tendencia*, e ir variando ésta, se observa como se modifican las estructuras cuando aumentamos la *tendencia*. La dimensión fractal aumenta tendiendo al modelo de DLA cuando la *tendencia* es casi cero.

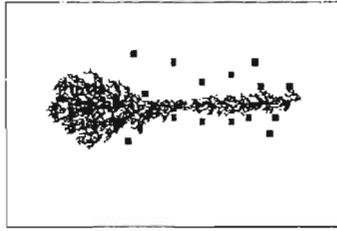
Las dimensiones fractales, de las estructuras obtenidas en el modelo teórico, se calcularon de la misma manera, es decir, tomando los valores de caja mínimo igual a dos y máximo igual a 256, para abarcar el mayor número de décadas. El error que se asoció a los valores para la dimensión fractal es de 0.06 tomando en cuenta que cuando *tendencia* = 1, la dimensión fractal debe ser uno lo cual difiere del valor encontrado en 0.06. Por tanto, se puede generalizar éste para error para los demás valores obtenidos.

La segunda parte de la simulación numérica consistió en colocar zonas de baja permeabilidad y se observó como variando distintas condiciones de la *tendencia*, cambian las estructuras pareciéndose más a lo que se observa en las cuevas de Yucatán (cuando la *tendencia* la heterogeneidad del medio aumentan la dimensión fractal D disminuye), en el sentido de hacer bucles y ramificaciones (Figura 4.3).

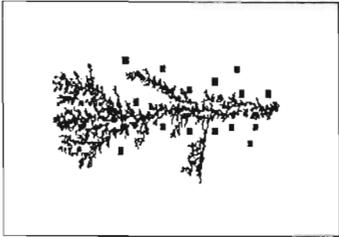
Figura 4.3 Se observan las figuras obtenidas en el modelo teórico, generadas como se explica en la figura 3.2. Se ve que las dimensiones fractales son menores que en las de la figura 4.2, lo que indica que la restricción de tener piedras absorbentes dentro del espacio hace que las estructuras sean más ramificadas y con algunos bucles.



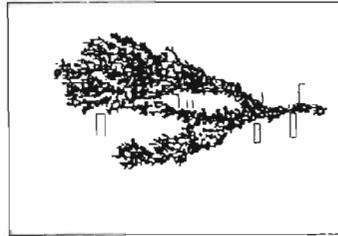
$D_f = 1.5$; $t_{enden.} = 0.1$



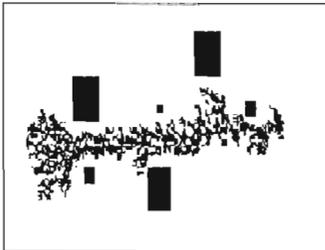
$D_f = 1.41$; $t_{enden.} = 0.5$



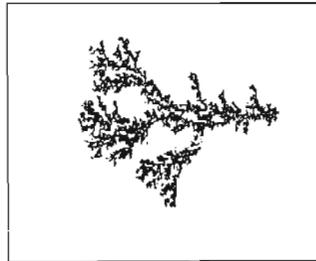
$D_f = 1.44$; $t_{enden.} = 0.1$



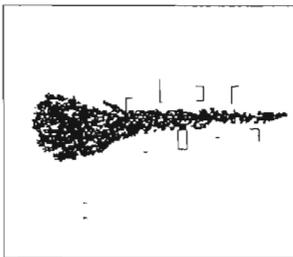
$D_f = 1.42$; $t_{enden.} = 0.1$



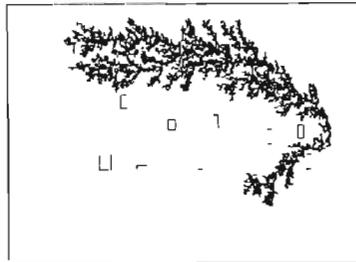
$D_f = 1.4$; $t_{enden.} = 0.1$



$D_f = 1.5$; $t_{enden.} = 0.1$



$D_f = 1.38$; $t_{enden.} = 0.1$



$D_f = 1.48$; $t_{enden.} = 0.3$

4.2. Discusión

4.2.1 Cuevas y Cavernas

Los resultados anteriores muestran distintos valores de dimensión fractal obtenidos para las cuevas, que se pueden ordenar en tres grupos. El primer grupo constituido por ocho cuevas tienen dimensión fractal $1 < D < 1.2$ (a, b, c, d, e, f, g, h). El siguiente está formado por seis cuevas (i, j, k, l, m, n) con dimensión $1.2 < D < 1.3$. Y finalmente el tercer grupo en el que se encuentran cinco cuevas (o, p, q, r, s) con valores de dimensión fractal $1.3 < D < 1.4$. No parece haber una correlación fuerte entre la dimensión fractal y la longitud de la cueva.

Ninguno de estos valores pueden ser explicados por el modelo de DLA ($D_f = 1.6$), y son distintos a los resultados de los experimentos en laboratorio en la disolución de yeso, donde las estructuras que crecen muestran una cercana relación con el modelo DLA y se desarrollan en un medio soluble poroso (Daccord, 1987). En el modelo que se propone la heterogeneidad y la anisotropía del medio producen agregados menos densos que en DLA. La escala menor que tienen los mapas comprende la escala humana (2 metros máximo), ya que éstas cuevas han sido mapeadas por espeleo-buzos y lo han hecho tomando como mínimo de tamaño su propio cuerpo (2 metros aproximadamente). Por lo tanto, la escala mínima es de unos metros y la escala máxima puede ser de kilómetros para algunas cuevas (las más ramificada como Ox Bel Ha) por lo que hablamos de que habría autosimilitud hasta en cuatro ordenes de magnitud. Sin embargo, el comportamiento fractal a escalas menores (centímetros) es probable que lo conserven.

El ancho de las cavernas pueden variar de cinco metros hasta alcanzar más de 50 metros para algunas. Y pueden tener de dos a cinco metros de alto (algunos casos superan los diez metros). La ubicación de los conductos varía desde la orilla de la costa y hasta 12 km tierra dentro (Escolero *et al.* 2005).

El estado de Quintana Roo está formado por calizas de características variadas y depósitos de litoral con un espesor máximo de 400 metros. La porosidad y la permeabilidad dependen de su litología. Por ejemplo, se encontraron valores altos de permeabilidad en los lugares en los que los estratos están constituidos por conchas y esqueletos de organismos, o en lugares donde ha habido disolución de la roca (Escolero *et al.*, 2005). A escala estatal el acuífero de Quintana Roo es un acuífero libre (se le llama así cuando el acuífero se encuentra confinado por la parte inferior de éste -puede ser por una roca con muy baja permeabilidad- y queda libre por la parte superior, Figura 4.4), heterogéneo y anisotrópico.

En el último kilómetro paralelo a la costa, los conductos tienden a ser paralelos a ésta, probablemente influenciados por el sistema de fracturas de la zona. El flujo está dirigido hacia la parte alta de las caletas, donde a través de fracturas con orientación N-S descargan a canales principales que conducen el agua dulce al mar, como se observa en las caletas de Xel-Ha (Escolero *et al.*, 2005). Estos sistemas de cuevas y cavernas se formaron cuando el nivel del mar se encontraba más abajo que el actual y su formación ha sido multi-facética.

La orientación de las cavernas de esta zona es NNW – SSE, casi perpendicular a la costa. Se considera que el flujo del agua subterránea es a través de la matriz (roca caliza), fracturas y sistemas de cavernas interconectadas (Beddows, 2003).

El tomar una dirección de preferencia para el crecimiento de las cuevas se debe a

que el agua subterránea se encuentra sometida a la fuerza de gravedad. Al ser la causa de la formación de las cuevas la disolución de la roca caliza por el agua, se ve que el agua dulce al mezclarse con el agua salada tiene una capacidad para disolver en forma natural más carbonato de calcio (caliza), lo cual ha dado pie a que en esta zona se observe un paisaje kárstico, donde en la actualidad hay cuevas y cavernas sumergidas.

Escolero *et al.* (2005) realizaron el análisis de las fracturas y diaclasas que existen en la zona de estudio, las cuales sirven como conductos para el flujo del agua subterránea. La manera en la que las analizaron fue utilizando una imagen de radar (Figura 2.23). En esta imagen se observan las fracturas que existen en la zona de estudio.

Las fracturas observadas en este estudio son bastante grandes en magnitud (kilómetros), sin embargo pueden existir fracturas de menor tamaño, que se encuentran confinando el crecimiento de los sistemas kársticos. La distribución en la que se encuentran las fracturas pueden ser fractal. Si el espacio en que están confinadas las cuevas tiene una distribución fractal, estas crecerán siguiendo estos pasajes, mostrando naturalmente un comportamiento fractal.

El agua subterránea fluye de las áreas altas a las bajas, por lo que es posible saber que la dirección del flujo del agua es de oeste a este (Escolero *et al.* 2005) siguiendo la fuerza que ejerce la gravedad (Perry *et al.* 2002). Figura 2.21.

Con respecto a la ubicación geográfica de los sistemas de cuevas, se observa que las cuevas con una dimensión fractal menor se encuentran ubicadas en la región más al norte de la zona de estudio. Sin embargo, no se puede afirmar que exista una relación directa entre la ubicación geográfica y la dimensión fractal debido a que el número de muestras no es muy grande como para confirmar esta propiedad y se tiene un medio anisotrópico y

heterogéneo (Figura 4.5). El grupo de exploración QRSS ha reportado que en el área alrededor de Tulum se concentran las cuevas de mayor tamaño (cavernas) a diferencia del área Puerto Aventuras-Xpu Ha. El mismo comportamiento se observa en la Figura 4.4, es decir, las cuevas de mayor dimensión fractal se encuentran ubicadas alrededor de Tulum. Esto es un indicio de que los componentes de la roca no se encuentran distribuidos uniformemente teniendo zonas de baja permeabilidad por donde los sistemas de cuevas no son tan ramificados, a diferencia de las zonas en las que se observa (como el caso de Ox Bel Ha “s”) que su estructura es muy ramificada, lo cual se refleja en su dimensión fractal. Es por esta razón que en el modelo de crecimiento de las cuevas, aparecen aleatoriamente las zonas de baja permeabilidad para simular de alguna manera las condiciones que hay en la zona de Quintana Roo, en la que se forman los sistemas de cuevas en terrenos donde hay heterogeneidad en la composición de la roca.

4.2.2. Modelo Teórico

Como se observa en los resultados, las estructuras que se obtienen en la simulación tienen una dimensión fractal que varía entre 1.38 y 1.5 (*tendencia* de 0.1). Estos valores dependen de cómo se ubiquen las zonas de baja permeabilidad dentro del espacio donde se forma el agregado. La forma en la que están distribuidas las heterogeneidades parece afectar de manera directa el desarrollo de la estructura y por tanto de su dimensión fractal.

Cuando no hay la restricción de zonas de baja permeabilidad, cuando se tiene un medio homogéneo y una dirección de sesgo, la dimensión fractal tiene valores de 1.54 (cuando el valor de *tendencia* de 0.1) aproximadamente. Por lo que no se alcanzan los valores

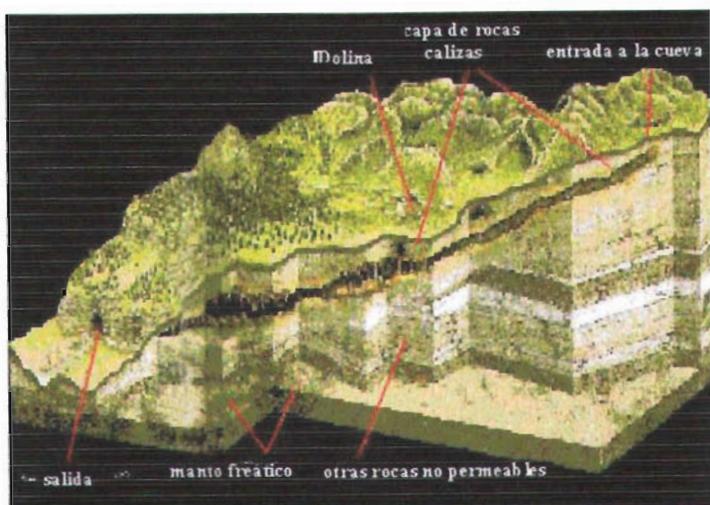


Figura 4.4 En esta imagen se ilustra un acuífero libre, en el se encuentra confinado por la parte inferior de éste, puede ser por una roca con muy baja permeabilidad, y queda libre por la parte superior (Vela, 2005)

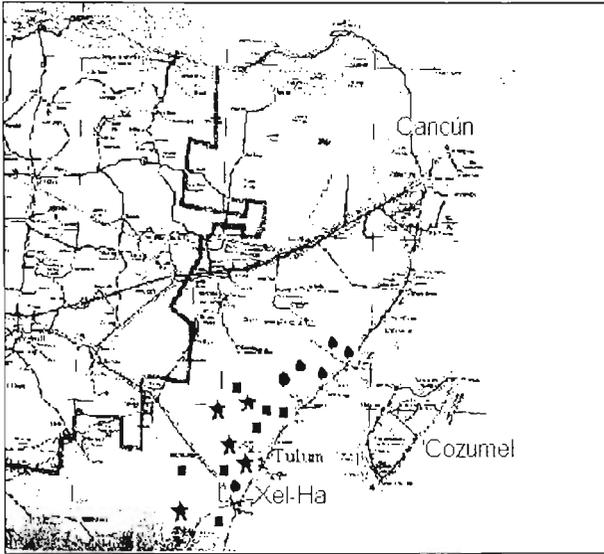


Figura 4.5 Relación entre la dimensión fractal y la ubicación geográfica. Círculo ($1.01 < D_f < 1.2$); cuadrado ($1.2 < D_f < 1.3$); estrella ($1.3 < D_f < 1.38$)

tan bajos encontrados en la mayoría de las cuevas solamente teniendo las restricciones de confinamiento y sesgo..

Cuando colocamos la restricción de baja permeabilidad la dimensión fractal de las estructuras producidas por la simulación se acercan más a los valores de dimensión fractal de las cuevas. Sin embargo, con medios heterogéneos se observan la formación de ramificaciones y bucles (Figura 4.3). Con las restricciones aplicadas, no se encuentran valores cercanos en las dimensiones fractales de los sistemas de cuevas y las del modelo teórico. El modelo tiende a sobre estimar la dimensión fractal. Las estructuras reales son menos compactas que los resultados de la simulación. Mas trabajos son necesarios para investigar las propiedades del modelo en todo el espacio de sus parámetros. Por ejemplo, reducir el ancho entre las paredes debería producir estructuras más parecidas a las reales. El modelo teórico se desarrolla en un espacio XY que confina el crecimiento del agregado, sin embargo puede ser que para reproducir el crecimiento de las cuevas sea necesario cambiar el espacio XY por un espacio en el que la distribución de las paredes absorbentes sea fractal, como se pudieran encontrar las fracturas en una escala mayor de observación. Aunque las piedras absorbentes intentan simular estas heterogeneidades del medio no se logra hacer estructuras tan ramificadas

El número de décadas (ordenes de magnitud) que se toman en cuenta en el análisis fractal de las cuevas, son como máximo cuatro, en el caso en el que las cuevas se desarrollan kilómetros (Ox Bel Ha). En la simulación numérica, se ve que en muchos

lugares el agregado es compacto. La autosimilitud en la simulación abarca un mayor número de escalas, a comparación de las cuevas pequeñas (dimensión fractal menor).

En el capítulo dos se vio la Ley de Darcy, que analiza el flujo del agua a través de un tubo lleno de arena (ecuación 2). Sin embargo los valores de la conductividad hidráulica usualmente muestran variaciones, debido a la distribución espacial de la formación geológica. La conductividad hidráulica K en medio fracturados (kársticos) no obedece la ley de Darcy, a menos que se considere como un medio continuo. El problema sería definir un volumen representativo elemental para los medios fracturados, problema que no ha sido resuelto, debido a la contribución que pueden tener muchas fracturas pequeñas en comparación con las fracturas grandes.

**ESTA TESIS NO SALIÓ
DE LA BIBLIOTECA**

4.3. Conclusiones

4.3.1 Cuevas, cavernas y modelo teórico

La geometría fractal es una manera matemática apropiada, para describir distintas estructuras que se observan en la naturaleza, a diferencia de la geometría euclidiana. Utilizando las particularidades de la geometría fractal como la autosimilitud o la invarianza de escala, las cuevas analizadas en este trabajo muestran, como muchas otras estructuras de crecimiento, un comportamiento fractal que se refleja en su dimensión fraccionaria.

En el caso de las cuevas con mayor tamaño de desarrollo (kilómetros), se ve que son más ramificadas que las cuevas que tan solo alcanzan decenas de metros de pasajes de disolución, esto puede deberse a la escala mínima de resolución que estamos tomando (metros). Para las cuevas que están en cuatro ordenes de magnitud (kilómetros) se observa que la dimensión fractal tiene mayor valor que las que se encuentran en centenas de metros, con algunas excepciones (Ver tabla 1).

Tabla 1. Relación entre la escala característica y la dimensión fractal

cueva	escala característica*	dimensión fractal
Carrillo	510 metros	1.09
Cubera	180 metros	1.06
Venado	121 metros	1.05
Gran Cenote	700 metros	1.06
Pequeño cenote	660 metros	1.19
El Punto	607 metros	1.2
Cascabel	547 metro	1.22
Las Palmas	160 metros	1.26
Minotauro	596 metros	1.23
Del Mar	1872 metros	1.31
Actun Koh	628 metros	1.31
Xel.Ha	900 metros	1.33

Sac Actun	1100 metros	1.31
Ox Bel Ha	2500 metros	1.38

*Escala característica. Es una aproximación al tamaño de la cueva, sirve como referencia

Se observó una relación entre la ubicación geográfica de las cuevas analizadas y su dimensión fractal (Figura 4.5). Tomando en cuenta las 18 cuevas analizadas, se ve que del grupo de sistemas con dimensión fractal $1.01 < D_f < 1.2$, se encuentran en su mayoría ubicadas en la zona de Puerto Aventuras / Xpu Ha, mientras que los sistemas con dimensión fractal $1.2 \leq D_f \leq 1.38$ se ubican en la zona de Tulum. Sin embargo, al ser la península de Yucatán heterogénea y anisotrópica en su composición geológica (Escolero *et al.* 2005), es posible que el número de cuevas que se necesite considerar para establecer una relación entre su distribución geográfica y la dimensión fractal deba ser mayor. Es posible que en las zonas en las que las cuevas tienen mayor dimensión fractal, la composición de la roca tiende a ser más permeable que en las zonas en las que la dimensión fractal de las cuevas es menor (Puerto Aventuras / Xpu Ha). Teniendo así una manera de caracterizar la composición espacial de la roca.

En la simulación numérica realizada, que está inspirada en un modelo de “Dedos Viscosos”, se utiliza una celda rectangular para confinar el crecimiento, las paredes laterales simulan las fracturas. Introduciendo una dirección preferencial en el movimiento difusivo, se intentó simular la fuerza de gravitación. Se observa que la dimensión fractal disminuye cuando se aumenta la densidad de zonas de baja permeabilidad. Estas heterogeneidades representan los lugares en los que no se dan crecimiento de sistemas kársticos, ya sea por la presencia de fracturas o por que la composición de la roca no permite fácilmente la disolución. Al colocar esta condición se observa que la dimensión

fractal es menor que la que predice el modelo de DLA (~ 1.6), pareciéndose a las encontradas para los sistemas kársticos. Sin embargo, en la mayoría de las simulaciones realizadas no se obtienen las dimensiones que muestran las cuevas (teniendo las simulaciones estructuras más compactas). El modelo de DLA, es un modelo en el que el crecimiento se da por difusión. El proceso que da lugar al crecimiento en las cuevas es la disolución: después de realizarse la disolución entre las dos fases sólido (caliza) y líquido (agua), existe difusión molecular de los componentes disueltos, pero también puede haber advección, cuando el fluido está en movimiento (Daccord, 1987). La advección no está tomada en cuenta por los modelos de tipo DLA.

La discrepancia para los valores de la dimensión fractal puede deberse a que existen otras fuerzas o interacciones, que juegan un papel importante en la formación de las cuevas y que no fueron consideradas en el modelo. O a que el espacio que confina el crecimiento de esta tiene una configuración diferente, como una distribución fractal de las fracturas; esto podría hacer crecer el sistema de forma fractal naturalmente. Esto sugiere que el desarrollo mismo de las cuevas y cavernas de Yucatán a grandes escalas este afectado por una distribución fractal de fracturas (Nieto *et al.*, 2005).

A escalas chicas o intermedias, las formas de crecimiento pueden no estar controladas únicamente por la difusión, por lo que el modelo de DLA (con las restricciones aplicadas) no es suficiente para simular el crecimiento de los sistemas kársticos. Este crecimiento puede implicar una hidrodinámica eventualmente compleja (flujos turbulentos).

Por último la conductividad hidráulica para un medio poroso está bien descrita, sin embargo para el caso de los medios fracturados, el definir un tensor* para la conductividad

hidráulica K no ha sido resuelto. Hay que considerar las contribuciones a K debidas a fracturas de todo tipo de tamaños. Un objetivo importante es encontrar un volumen representativo elemental, para describir los medios fracturados, que se pueda aproximar a un medio continuo. Estos temas pueden generar otros trabajos de investigación.

Apéndice

La ubicación geográfica de los sistemas de cuevas fue proporcionado por Jim Coke, espeleobuzo del grupo QRSS. Se anexa al trabajo para futuras investigaciones que requieran la ubicación precisa de éstas.

carrillo

16Q 0483596.26
UTM 2272176.62

cupera

16Q 0485963.28
UTM 2274110.63

valel

16Q 0476157
UTM 2266810

Sac Actun.

16Q 0451514.87
UTM 2238831.42

el punto

16Q 0461489.17
UTM 2244535.51

las palmas

16Q 0475569.00
UTM 2268599.00

minotauro

16Q 0471747.84

venado

16Q 0483609.26
UTM 2273240.63

del mar

16Q 0452176.26
UTM 2228564.03

cascabel

16Q 0483692.26
UTM 2273265.63

dos pies

16Q 0460494.63
UTM 2243937.56

UTM 2264827.92

aluxes

16Q 0475779.20
UTM 2268359.59

actun koh

16Q 0471943.00
UTM 2265947

Para mapear las cuevas, el grupo QRSS utilizan compás (± 2 grados), así como inclinómetro (± 0.3 metros). La línea de vida generalmente se instala en el centro de las cuevas y cuando los pasajes cambian de dirección la línea de vida se fija en un punto que

guiara éste cambio para el nuevo pasaje. En cada punto (3 metros de distancia aproximadamente) se toman datos sobre el azimuth, longitud, cambio en la profundidad. Para mapear una cueva se utilizan muchos puntos, es común tener unos 200 puntos para una cueva de 1200 metros aproximadamente. Claro que la naturaleza de la cueva dictará cuantos puntos son necesarios para mapearla. Al terminar la exploración y topografía, toda la colección de puntos se introduce en un programa de computadora donde se convierten de coordenadas polares a coordenadas Cartesianas y se genera el mapa de la cueva explorada (Coke, 2005).

Glosario

Caverna. Paisaje subterráneo causado por disolución de la roca carbonatada principalmente, en el que hay parcialmente iluminación solar.

Cueva. Paisaje subterráneo causado por disolución de la roca carbonatada principalmente en el que no hay luz solar, penumbra.

Dimensión Hausdorff-Besicovitch. Matemáticamente, un fractal es un subconjunto de un espacio métrico para el cual su dimensión Hausdorff-Besicovitch, D_{H-B} es estrictamente mayor que su dimensión topológica, D_T . La dimensión de Hausdorff-Besicovitch no está restringida a tomar valores enteros. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch se obtiene como un punto de inflexión del valor de la potencia elegida en la longitud de Hausdorff cuando esta pasa de ser infinita a ser nula. La longitud de Hausdorff es la suma del diámetro topológico elevado a una potencia "s" de un recubrimiento entero del objeto a partir de entornos o cubrimientos de diámetro delta o menor a este del propio objeto.

Disolución química. La disolución química es un proceso en el que se tiene un fluido reactivo y un medio soluble. Al entrar en contacto estos dos se produce una reacción química que da paso a la disolución del medio. Haciendo que los componentes disueltos, se separen de la interfase sólido-líquido a través de difusión molecular y convección

Ecuación de Navier-Stokes. Las ecuaciones de Navier-Stokes reciben su nombre de Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes. Se trata de un conjunto de ecuaciones no lineales en derivadas parciales que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones gobiernan la atmósfera terrestre las corrientes oceánicas y el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y, en general, cualquier fenómeno en todo tipo de fluidos.

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [2\mu (e_{ij} - \Delta \delta_{ij}/3)]$$

Esta expresión representa el principio de conservación del momento lineal aplicada a un fluido general. La ley de conservación de masa se escribe:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

En estas ecuaciones ρ representa la densidad, u_i ($i = 1,2,3$) las componentes cartesianas de la velocidad, F_i las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo, como la gravedad, P la presión del fluido, y μ la viscosidad dinámica.

$$e_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

donde $\Delta = e_{ii}$ es la divergencia del fluido y δ_{ij} la delta de Kronecker. D / Dt es la derivada total o derivada temporal siguiendo el fluido.

Cuando μ es uniforme sobre todo el fluido las ecuaciones de fluido se simplifican de la manera siguiente:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} \right)$$

Erosión. proceso natural de naturaleza física y química que desgastan y destruyen continuamente los suelos y rocas de la corteza terrestre; incluyen el transporte de material pero no la meteorización estática. La mayoría de los procesos erosivos son resultado de la acción combinada de varios factores, como el calor, el frío, los gases, el agua, el viento, la gravedad y la vida vegetal y animal. En algunas regiones predomina alguno de estos factores, como el viento en las zonas áridas

Espacio Euclideo. Dentro de un espacio euclideo \mathbf{R}^E la dimensión topológica D_T que describe un conjunto de puntos que se encuentran en \mathbf{R}^E , es tal que toma valores enteros entre el intervalo $0=D_T \leq E$ (Mandelbrot, 1977). Un conjunto de puntos que forman una línea dentro del espacio euclideo tendrá dimensión $D_T = 1$. La dimensión euclidea del espacio es $E = 3$. Así mismo un conjunto de puntos en \mathbf{R}^3 que forman una superficie tendrá una dimensión topológica $D_T = 2$ que coincide con la dimensión Hausdorff-Besicovitch (Feder, 1977). Ver capítulo 2.

Espacio Topológico. Sea E un espacio (es decir un conjunto de puntos - apelación que hace pensar a la geometría). Se nota $P(E)$ las partes de E , o sea sus subconjuntos.

Una topología sobre E es una parte de $P(E)$, es decir un conjunto de subconjuntos de E . Un elemento de la topología será por lo tanto un subconjunto de E , que recibe el nombre de abierto.

Una topología T tiene que verificar las tres propiedades siguiente:

- (1) $\emptyset \in T, E \in T$
- (2) $(O_1 \in T, O_2 \in T) \Rightarrow (O_1 \cap O_2 \in T)$
- (3) $(\forall i \in I, O_i \in T) \Rightarrow (\cup_{i \in I} O_i \in T)$

La condición (3) también se puede escribir:

$$(3') \quad \forall S \subset T, \cup_{O \in S} O \in T$$

Dicho de otra manera, el conjunto vacío y el conjunto entero son abiertos (1), una intersección de dos abiertos es un abierto (2), y una unión cualquiera (es decir que se autoriza tomar una infinidad de términos) de abiertos es un abierto (3). Por inducción evidente, se muestra que la intersección de un número finito de abiertos es un abierto. El conjunto E provisto de la topología T se llama *espacio topológico*, y se escribe (E, T) .

Fluido no newtoniano. la viscosidad depende del esfuerzo de corte (Esfuerzo de corte ó cizalla (τ)) Se define como la fuerza por unidad de área necesaria para alcanzar una dada deformación) aplicado. Un gráfico de esfuerzo de corte ó viscosidad en función de la velocidad de corte se conoce como reograma (La reología se define como la ciencia que estudia la deformación y el flujo de la materia). El reograma para un fluido Newtoniano es una línea recta cuya pendiente es la Viscosidad. La mayoría de los materiales con alguna significancia industrial son no Newtonianos. Hay varios tipos de comportamientos no Newtoniano.

Sedimentación. proceso de deposición de los materiales resultantes de la erosión. Los productos son transportados y se acumulan gracias a la acción de la gravedad. Las partículas erosionadas son transportadas en medios fluidos, como el agua o el viento. Cuando la energía del agente responsable del transporte disminuye, las partículas son depositadas y se produce la sedimentación. Los materiales, llamados sedimentos, se acumulan en áreas, casi siempre cóncavas, denominadas cuencas de sedimentación. La mayor parte de estas áreas se encuentran en los bordes de las placas litosféricas y, por esta razón, la sedimentación suele darse bajo los océanos.

Segunda ley de la termodinámica. La segunda ley de la termodinámica da una definición precisa de una propiedad llamada entropía. La entropía se puede considerar como una medida de lo próximo o no que se halla un sistema al equilibrio; también se puede considerar como una medida del desorden (espacial y térmico) del sistema. La segunda ley afirma que la entropía, o sea, el desorden, de un sistema aislado nunca puede decrecer. Por tanto, cuando un sistema aislado alcanza una configuración de máxima entropía, ya no puede experimentar cambios: ha alcanzado el equilibrio. La naturaleza parece pues "preferir" el desorden y el caos. Se puede demostrar que el segundo principio implica que, si no se realiza trabajo, es imposible transferir calor desde una región de temperatura más baja a una región de temperatura más alta.

Tensor. En matemáticas, un tensor es cierta clase de entidad geométrica, que generaliza los conceptos de escalar, vector y operador lineal de una manera que sea independiente de cualquier marco de la referencia elegido. Los tensores son de importancia en física e ingeniería. Los tensores pueden ser representados por una matriz de componentes.

Topología. de manera formal se refieren a una cierta familia de subconjuntos de un conjunto dado, familia que cumple unas reglas sobre la unión y la intersección. Generalmente se presenta la Topología como la "Geometría de la página de goma". Esto hace referencia a que en la Geometría euclídea dos objetos serán equivalentes mientras podamos transformar uno en otro mediante isometrías (rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc), es decir, mediante transformaciones que conservan las medidas de ángulo, longitud, área, volumen y otras. En Topología, dos objetos son equivalentes en un sentido mucho más amplio. Han de tener el mismo número de trozos, de agujeros, de intersecciones, etc. En topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer, etc., los objetos pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado. Por ejemplo, un triángulo es topológicamente lo mismo que una circunferencia, ya que podemos transformar uno en otra de forma continua, sin romper ni pegar.

Figuras	Página
Capítulo 1	
Figura 1.1 Estratigrafía de la Península de Yucatán	2
Figura 1.2 Dedos Viscosos	5
Capítulo 2	
Figura 2.1. Curva de Koch	10
Figura 2.2. Tapete de Sierpinky	10
Figura 2.3. Interpretación de figuras con dimensiones enteras, en términos exactos de autosimilitud.	10
Figura 2.4 Línea de costa de Gran Bretaña	13
Figura 2.5 Dimensión de caja	13
Figura 2.6. El movimiento Browniano	16
Figura 2.7 Caminantes alcatorios en Geofísica	20
Figura 2.8 Simulación del modelo DLA	20
Figura 2.9 Crecimiento DLA	24
Figura 2.10. Descargas electricas	24
Figura 2.11 Patrones formados por disolución química	26
Figura 2.12 Simulación de Dedos viscosos	26
Figura 2.13 Efecto de una dirección de tendencia en el crecimiento de DLA	29
Figura 2.14 Crecimiento de un cúmulo típico usando una dirección preferencial sobre los agregados DLA	31
Figura 2.15. El crecimiento balístico	29
Figura 2.16. El aparato experimental que ilustra la ley de Darcy	33
Figura 2.17 Heterogeneidad de la conductividad hidráulica	33
Figura 2.18 Heterogeneidad y anisotropía de K	37

Figura 2.19. Rango de validez para la ley de Darcy	37
Figura 2.20 El proceso de formación de una cueva	43
Figura 2.21 Las direcciones de flujo subterráneo de la Península de Yucatán	46
Figura 2.22 Los cenotes y dolinas	48
Figura 2.23 Península de Yucatán a través de una imagen de radar	49
Figura 2.24. En esta figura se pueden observar las fracturas (remarcadas con líneas) que se encuentran en la zona de estudio	52
Figura 2.25 Integración de sistemas en la zona de Xel-Ha Realizada por grupo de espeleo-buzos QRSS	53

Capítulo 3

Figura 3.1 uno de los mapas de las cuevas	57
Figura 3.2 Esquema de la simulación numérica que aproxima el crecimiento de las cuevas	57

Capítulo 4

Figura 4.1 Se muestran los 18 mapas de cuevas (con su escala característica)	58
Figura 4.2 simulación numérica, al hacer la prueba de colocar el espacio de confinamiento y una dirección de <i>tendencia</i>	59
Figura 4.3 figuras obtenidas en el modelo teórico	61
Figura 4.4 acuífero libre	66
Figura 4.5 Relación entre la dimensión fractal y la ubicación geográfica	67
Tabla 1. Relación entre la escala característica y la dimensión fractal	70

Bibliografía

- Acosta, R., Rodríguez, J.L. (2001). *Programa de Saneamiento del Municipio y la Ciudad de Mérida*. Subgerencia Regional Técnica, Gerencia Regional Península de Yucatán. Comisión Nacional del Agua, Mérida, Yucatán.
- Barton., La Pointe. (1995). *Fractals in the Earth Science*. Plenum Press, N.Y.
- Beddows, D.A., Smart, P.L., Whitaker, F.F., Smith, S.L. (2003). *Density stratified groundwater circulation on the Caribbean coast of the Yucatán Peninsula, México*. Hydrogeology and Biology of Post-Paeozoic Carbonate Aquifers, Special Publication 7. Karst Waters Institute.
- Butterlin, J., Bonet, F. (1960). *Formaciones cenozoicas de la Parte Mexicana de la Península de Yucatán*. Instituto de Geología, UNAM.
- Coke., J (2005). *chac@consolidated.net*. Espeleo-buzo, miembro del grupo QRSS.
- Daccord, G. (1987). *Chemical dissolution of a porous medium by a reactive fluid*. Phys. Rev. Lett. 58 (5).
- Daccord, G. y Lenormand, R. (1987). *Fractals patterns from chemical dissolution*. Nature 325, 1987.
- Donelly, T.W., Gregory, S.H., Richard, C.F., López, R.E. (1990). *Northern central America; The maya and chortis blocks*. The Geology of North America, Vol. H, Caribbean Region. The geological Society of America.
- Einstein, A., (1905). *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme gefördete Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*. Ann. Phys. 322,

549-560.

Escolero, O.F., Marín, L.E., Rebolledo, M., Alcalá, A. y Martínez, V. (2005). *Programa de Monitoreo de Aguas Subterráneas de la Calesa de Xel-Ha y sus alrededores. Estado de Quintana Roo*. Grupo Xcaret XXX.

Fanti, Z.G. (2005) coconetlero@ciencias.unam.mx

Feder, J. (1988). *Fractals*. Plenum Press, New York and London.

Freeze, A.R., Cherry, J.A. (1979). *Groundwater*. Prentice Hall.

Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983). *Characterization of strange attractors*. Phys. Rev. Lett.50, 346-9

Hergarten, (2002). *Self Organized Criticality in Earth Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Leopold, L.B. & Langbein, W.B. (1962). *The concept of entropy in landscape evolution*. U.S. Geological Survey Paper 500A.

Mandelbrot, B.B. (1982). *The fractal geometry of the nature*. W.H. Freeman, San Francisco.

Marín, L.E., Steinich, B.J., Pacheco, J., Escolero, O. (2001). *Hydrogeology of a contaminated sole-source karst aquifer, Mérida, Yucatán, México*. Geofísica Internacional, 39 (4), pp.359-365.

Marín, L.E., Pacheco, J., Méndez, R. (2004). *Hidrogeología de la Península de Yucatán. El agua en México vista desde la academia*. Academia Mexicana de Ciencias.

Marín, L.E. (1990). *Field investigations and numerical simulation of groundwater flow in the karstic aquifer of northwestern Yucatán, México*. Tesis Doctoral, Northern Illinois University, Dekalb, Illinois, USA.

- Meakin, P. (1983). *Effects of particle drift on diffusion-limited aggregation*. Phys. Rev. Lett. 28 (9).
- Niemeyer, L., Pietronero, L. y Wiesmann H.J. (1984) *Fractal Dimension of Dielectric Breakdown*. Phys. Rev. Lett. 52 (12).
- Nieto-Samaniego, A.F., Alaniz-Alvarez, S.A., Tolson, G., Olesschko, K., Korvin, G., Xu, S.S. y Pérez-Venzor, J.A. (2005). *Spatial distribution, scaling and self-similar behavior of fracture arrays in the Los Planes fault, Baja California Sur, México*. Pure and Applied Geophysics. 162(2005) 805-826.
- Nittman, J., Daccord, G. & Stanley, H.E. (1985). *Fractal growth of viscous fingers: Quantitative characterization of a fluid instability phenomenon*. Nature 314, 663-668.
- Perry, E.C., Velázquez, G. Y Marín, L.E. (2002). " *The hydrogeochemistry of the karst aquifer system of northern Yucatán Peninsula, México*". International Geology Review.
- QRSS. (2005). www.caves.org/project/qrss
- Ramírez, G. A., (1996). Geometría fractal y sismicidad: dos casos es el suroccidente y sureste de México. Tesis de M en C. IPN, México D.F.
- Sander, L.M. (1992). "Growth and aggregation far from equilibrium" in "Solids far from equilibrium". C. Godrèche Ed. Cambridge University Press.
- Sharp, J.C., Maini, N.T.Y. (1972). *Fundamental considerations on the hydraulic characteristics of joints in rock. Percolation Through Fissured Rock*. International Society of Rock Mechanics. Stuttgart.
- Snow, D.T. (1968). *Rock fracture spacing, openings, and porosities*. Amer. Soc. Civil.

- Engrs. (94).
- Soliz, J.G., Llanos, H. (2002). *Conceptualización y modelación de medios porosos fracturados. El caso del macizo kárstico de Gorbea (País Vasco)*. Estudios del Museo de Ciencias Naturales de Álava. Vol. 17.
- Strogatz, S.H. (1994). *Nonlinear dynamics on Chaos*. Westview
- Turcotte, D.L. (1997). *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics (second edition)*. Cambridge University Press.
- Vela, G.T. (2005). *Un viaje al México Profund*. Santillana, divulgación científica
- Villasuso, M., Méndez, R. (2000). *A conceptual model of the Aquifer of the Yucatán Peninsula*. Population, development and environment on the Yucatan Peninsula. Austria.
- Voss, R.F. (1988). *The Science of fractal images*. Springer-Verlag. New York.
- Witten, T. & Sander, L.M. (1981 & 1983). *Difusión-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon*. Phys. Rev. Lett. 47, 1400-3.
- Wittke, W. (1973). *General report on the symposium "Percolation Through Fissured Rock."* Bull. Intern. Assoc. Eng. Geol., pp. 3-28.