

Universidad Nacional Autónoma de México  
FACULTAD DE CIENCIAS

**TEORIA DE GRUPOS Y EL PROBLEMA PARTICULA-AGUJERO  
APLICACION A NUCLEOS EN LA CAPA 2s-1d.**

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN FISICA  
P R E S E N T A

Jorge Andrés Flores Valdés

México, D. F.

1965



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A Jacqueline*

*Agradezco al Dr. Marcos Moshinsky  
la dirección de este trabajo*

## INDICE

### INTRODUCCION

- I. - CONSTRUCCION DE LAS FUNCIONES DE ONDA DE PARTICULA-AGUJERO POR EL METODO ANALITICO.
- II. - METODO SINTETICO PARA LA CONSTRUCCION DE LAS FUNCIONES DE ONDA DE PARTICULA-AGUJERO.
- III. - ELIMINACION DEL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA. FUNCIONES DE ONDA NO-ESPURIAS.
- IV. - INTERACCION MODELO PARA UNA FUERZA CENTRAL CON CONFIGURACIONES DE PARTICULA-AGUJERO.
- V. - NIVELES DE ENERGIA Y FUNCIONES DE ONDA DE PARIDAD NEGATIVA DE ALGUNOS NUCLEOS EN EL PRINCIPIO DE LA CAPA  $2s-1d$ .

## INTRODUCCION

El sistema de partículas que constituye el núcleo es un sistema de muchos cuerpos que interaccionan entre sí por medio de interacciones fuertes y cuyo movimiento es extremadamente complicado. Matemáticamente, la descripción completa de la estructura del núcleo se encuentra en la función de onda correcta, solución de la ecuación de Schrödinger del sistema. Encontrar esta función sería desde un punto de vista práctico, imposible. Por otra parte, aunque pudiéramos hacerlo, sería necesaria una descripción simplificada del sistema en términos de un número relativamente pequeño de parámetros, que proporcionen información sobre algunas propiedades del sistema que se consideren esenciales.

Introducimos el concepto de modelo nuclear: un sistema que tiene características semejantes al sistema real que se quiere estudiar pero que ha sido simplificado en forma tal que la función de onda de este sistema modelo puede simular la función de onda del sistema real en forma razonable. Uno de los modelos nucleares más extensivamente estudiados hasta la fecha y con el cual se han logrado explicar y correlacionar una gran cantidad de datos experimentales nucleares es el Modelo de Capas, propuesto por Mayer, Haxel, Jensen y Suess en 1949. En este modelo del núcleo se supone que los nucleones se mueven en un potencial común ( campo autoconsistente, en principio ), que toma en cuenta algunas de las correlaciones entre los nucleones; la parte de las interacciones entre las

partículas no tomada en cuenta por el campo auto-consistente constituye la interacción residual. En la formulación más simplificada del modelo esta interacción residual se desprecia, dando origen a lo que se llama el Modelo de Partículas Independientes; en este modelo los nucleones ocupan los estados de una sola partícula dentro del potencial común, en forma compatible con el principio de Pauli, dando origen a los núcleos de capa cerrada; si el potencial común se modifica por el acoplamiento spin-órbita, estos núcleos de capa cerrada coinciden con núcleos cuyas propiedades son muy diferentes a las de la mayoría de los núcleos de la Tabla Nuclear, constituyendo en su estado base sistemas inertes de gran estabilidad.

Cuando se consideran las interacciones residuales entre los nucleones, únicamente las partículas fuera de capa cerrada interaccionan entre sí. Los análisis tradicionales del problema nuclear por medio del modelo de capas han sido realizados en esta forma.

Suponiendo válido el modelo de capas, los núcleos de capa cerrada deben tener un espectro tal que el estado base y el primer nivel excitado estén muy separados en energía, energía que proviene del rompimiento de la capa cerrada; este rompimiento se logra, dentro del modelo, excitando una de las partículas que constituyen el sistema de capa cerrada a una de las capas superiores. A la falta de una partícula para completar el sistema inerte se le llama un agujero; se dice entonces que la excitación de un núcleo de capa cerrada equivale a la creación de un agujero en esa capa y a la de una partícula en la capa inmediatamente superior.

Debemos, por lo tanto, considerar configuraciones partícula-agujero y clasificar y construir las funciones de onda correspondientes, para después calcular valores esperados de algunos observables físicos de interés. Este problema ha sido atacado --

por diversos métodos, siendo algunos de los resultados obtenidos muy satisfactorios <sup>4)</sup>.

En este trabajo analizaremos el problema partícula-agujero en el esquema de la segunda cuantización y empleando las técnicas de la Teoría de Grupos, según el método indicado por Moshinsky <sup>1)</sup>. Este método ha sido aplicado previamente al problema de la clasificación y construcción de las funciones de onda de un sistema de partículas - dentro de una capa del oscilador armónico que se considera como el potencial común. Se han estudiado núcleos en la capa  $2s-1d$ , obteniéndose los niveles de energía y algunos otros observables con resultados satisfactorios. <sup>1, II)</sup>

En el método propuesto por Moshinsky se utilizan los métodos de la segunda cuantización, expresando las funciones de onda en términos de operadores de Fermi; estas funciones se clasifican por las representaciones irreducibles de alguna cadena de subgrupos de interés físico, expresándose los generadores de estos grupos en términos de los mismos operadores de Fermi que las funciones de onda. Como cadenas de subgrupos de clasificación se han empleado tres, esencialmente diferentes <sup>5)</sup>:

1.- La cadena  $SU_3$ , que incluye la clasificación de supermultipletes de Wigner y el subgrupo  $SU_3$  correspondiente al grupo de simetrías del oscilador armónico. Las funciones de onda clasificadas por esta cadena diagonalizan la interacción cuadrupolo-cuadrupolo, que proporciona la correlación de largo alcance entre los nucleones y son las apropiadas, por lo tanto, para tratar el problema dentro del esquema de Elliott <sup>6)</sup>.

2.- La cadena  $R_r$ , que incluye la clasificación de supermultipletes de Wigner, como la anterior, pero ahora como subgrupo del grupo de degeneración orbital de  $r$  dimensiones se tiene a un grupo de rotaciones del mismo número de dimensiones que este,  $R_r$ ; esta cadena diagonaliza a la interacción de apareamiento correspondiente a las

correlaciones de corto alcance entre los nucleones.

3.- El acoplamiento  $j - j$ , que como es bien sabido, diagonaliza a la interacción spin-órbita y a diferencia de las dos anteriores no incluye la clasificación por supermultipletes.

En el presente trabajo se propone la extensión de estas técnicas al problema partícula-agujero. Se trata con estas configuraciones dentro del esquema de la segunda cuantización y se clasifican los estados por la cadena de subgrupos  $SU_3$ . El introducir el concepto de agujeros nos lleva a considerar representaciones de grupos unitarios con índices negativos; el estudio de estas últimas parece ser muy interesante y como se verá, es posible llegar a una expresión algebraica para la reducción del producto de dos representaciones irreducibles de un grupo unitario empleando este tipo de representaciones.

Se propone la interacción modelo para tratar con este tipo de problemas; la interacción consiste en una combinación lineal de una fuerza de cuadrupolo-cuadrupolo, interacción de apareamiento y acoplamiento spin-órbita.

Se calculan los niveles de paridad negativa de cinco núcleos al principio de la capa  $2s-1d$ , restringiéndonos a configuraciones de un solo agujero y se demuestra que el acuerdo con los datos experimentales en la mayoría de los casos es razonable y comparable, en aquellos casos previamente analizados, a los resultados obtenidos con una interacción central gaussiana entre los nucleones. En particular, parece ser que la clasificación por el grupo  $SU_3$  es adecuada en esta región mientras que la restricción a configuraciones de un solo agujero no lo es en muchos casos, siendo necesario considerar un número mayor de agujeros en la capa  $1p$ .

## CAPITULO I

### CONSTRUCCION DE LAS FUNCIONES DE ONDA DE PARTICULA-AGUJERO POR EL METODO ANALITICO.

#### I.- Clasificación de las Funciones de Onda de Partícula-Agujero.

Se analizará en este capítulo el problema de la clasificación y construcción de funciones de onda de un sistema de nucleones ( o, en general de fermiones ) que se mueven sujetos a un potencial común ( que, por las grandes ventajas que se tienen al considerarlo, se toma como un potencial de oscilador armónico isotrópico ) y a interacciones residuales entre ellos, y que, en la aproximación en que se desprecia la interacción residual entre los fermiones corresponden a estados de una sola partícula en el potencial común en dos capas contiguas, en donde por capa del oscilador se entiende el conjunto de estados de generados de una sola partícula.

En particular, se analiza el problema de nucleones en las capas  $2s-1d$  y  $1p$ , aunque los resultados que se obtienen son inmediatamente generalizables a otros casos de interés físico, como el problema en que se consideran las capas  $2s-1d$  y  $2p-1f$  del oscilador.

Si tenemos presente el tipo de configuraciones que deseamos estudiar, es decir, las configuraciones relacionadas con los estados de baja energía de núcleos con --

número de masa cercano a 16, es decir al núcleo doblemente mágico  $O^{16}$ , nos damos cuenta que el número de partículas en la capa  $1p$  ( la capa de energía menor ) es muy cercano a la capacidad total de ésta, que claramente es de 12 nucleones de acuerdo con el Principio de Pauli. Así por ejemplo, para obtener los niveles excitados del  $O^{16}$ , es necesario llevar una, tres, cinco o más partículas de la capa  $1p$  a la capa  $2s-1d$ , si los niveles que se desean estudiar son de paridad negativa o bien dos, cuatro, etc. si los niveles de interés son de paridad positiva; en esta forma la energía se altera, primero por la excitación de una o más partículas a un estado del potencial común de energía más alta y por otro lado, por las interacciones de los nucleones en la capa  $2s-1d$  entre sí, de estos con los de la capa  $1p$  y los de la capa  $1p$  entre sí, ya que estos últimos no forman un sistema inerte, como cuando constituyan la configuración del estado base del  $O^{16}$

Es conveniente, por tanto introducir el concepto de agujero en la capa  $1p$  : La falta de una partícula para formar un sistema de capa cerrada. En esta forma se manejan funciones de onda de partículas en la capa  $2s-1d$  y de agujeros en la capa  $1p$ .

El primer punto que se necesita discutir es la forma de representar un agujero en la capa  $1p$ , en el esquema de la segunda cuantización. Con este objeto se introduce el estado  $|0x\rangle$ , definido como,

$$|0x\rangle = \prod_s \prod_{\lambda} b_{\lambda s}^+ |00\rangle \quad (1.1)$$

en donde  $b_{\lambda s}^+$  es un operador de creación que obedece las reglas ordinarias de anticonmutación

$$\{ b_{\lambda s}^+, b_{\lambda' s'}^+ \} = 0 \quad (1.2a)$$

y los números cuánticos  $\lambda$  y  $s$  se refieren a los estados de una sola partícula, en los

espacios de configuración y de spin e isospin, respectivamente.

El número cuántico orbital  $\lambda$  toma tres valores

$$\lambda' = 1', 2', 3'$$

correspondientes a los tres estados diferentes de la capa  $1p$  y el número cuántico  $s$ , puede tomar cuatro valores

$$S = 1, 2, 3, 4,$$

correspondientes a los cuatro estados posibles para una sola partícula en los espacios de spin e isospin.  $|00\rangle$  es el estado de vacío del problema, correspondiente a la ausencia total de partículas en la capa  $1p$ . Claramente el estado  $|0x\rangle$  corresponde al estado base del  $O^{16}$  o sea a la capa  $1p$  completamente llena. \*

Se define ahora el operador de aniquilación  $b^{\lambda s}$ , como se acostumbra en la segunda cuantización, que satisface las reglas de anticonmutación habituales

$$\{b^{\lambda s}, b^{\lambda' s'}\} = 0, \quad \{b^{\lambda s}, b^{\lambda' s'}\} = \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{s s'} \quad (1.2b)$$

Entonces, la función

$$b^{\lambda' s'} |0x\rangle = b^{\lambda' s'} \prod_{s=1}^4 \prod_{\lambda=1}^3 b^{\lambda s} |00\rangle$$

corresponde a un estado de once partículas en la capa  $1p$ , de acuerdo con las relaciones de anticonmutación (1.2a y b) y por tanto a un agujero en esta capa, si recordamos el concepto que de éste hemos introducido previamente.

\* En los trabajos previos (1, 1, 11)  $|0x\rangle$  se indica como  $|0\rangle$  y corresponde al estado de vacío de partículas en la capa  $2s-1d$ .

La representación de un estado de una partícula en la capa 2s-1d es la empleada comunmente en segunda cuantización, en términos de un operador de creación  $b_{\mu s}^+$  aplicado al estado de vacío del problema, que en este caso es  $|0x\rangle$ ; por consiguiente,

$$b_{\mu s}^+ |0x\rangle, \quad \mu = 1, \dots, 6; \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (1.3)$$

representa la función de onda del sistema de una partícula en la capa 2s-1d y la capa 1p completamente llena. Los valores que puede tomar el índice  $\mu$  son ahora seis, que es la degeneración orbital para la capa 2s-1d.

De acuerdo con estas convenciones, el estado de dos partículas en la capa 2s-1d y un agujero en la capa 1p, por ejemplo, se representa en el esquema de la segunda cuantización, en la forma siguiente:

$$b_{\mu s}^+ b_{\mu' s'}^+ b_{\bar{\lambda} \bar{s}} |0x\rangle$$

Como las funciones de onda del sistema están expresadas en términos de operadores de creación de Fermi, que anticonmutan, el principio de Pauli se satisface automáticamente.

Se desea ahora encontrar polinomios en términos de operadores de creación de Fermi ( correspondientes a la capa 2s-1d ) y operadores de aniquilación ( referentes a estados de la capa 1p ) clasificados de acuerdo con las representaciones irreducibles ( RI ) de una cadena de subgrupos; en otras palabras se desean obtener bases para representaciones irreducibles ( BRI ) de una cadena de subgrupos, de tal manera que los índices de las RI nos proporcionen números cuánticos "aproximadamente buenos"; es decir, números cuánticos que reflejen simetrías aproximadas del sistema de nucleones en interacción.

En primer lugar, se introduce la clasificación de supermultipletes de Wigner <sup>1)</sup>. Se requiere primeramente que la función de onda corresponda a una RI del grupo  $U_{36}$ , grupo de transformaciones unitarias en un espacio de 36 dimensiones, que es igual a la degeneración total en las capas  $2s-1d$  y  $1p$  tomadas en conjunto, considerando tanto la degeneración orbital como la degeneración en los espacios de spin e isospin. En segundo lugar se pide que la función de onda sea BRI del producto directo  $U_9 \times U_4$  subgrupo del grupo  $U_{36}$ , en donde  $U_9$  es el grupo unitario de dimensión igual a la del espacio de degeneración orbital de las dos capas tomadas en conjunto y  $U_4$  es el grupo de transformaciones también unitario, en el espacio de spin e isospin. Para completar la clasificación por supermultipletes, se exige que la función de onda sea BRI del subgrupo  $SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)}$  de  $U_4$ , en donde  $SU_2^{(\sigma)}$  y  $SU_2^{(\tau)}$  constituyen grupos unimodulares unitarios en los espacios de spin e isospin, respectivamente. Esto último nos asegura que las funciones de onda del sistema corresponden a valores del spin total  $S$  y del isospin total  $T$ , definidos. Esto es muy conveniente, puesto que se sabe que  $T$  es un número cuántico bueno, con magnífica aproximación, en esta región de la tabla nuclear.

En cuanto al grupo  $U_9$ , es necesario encontrar una cadena de subgrupos apropiada, que nos proporcione números cuánticos que tengan algún significado físico para la clasificación de las funciones. En muchos problemas que consideran configuraciones de partícula-agujero, es una aproximación muy razonable restringirse a estados con un número fijo de partículas en cada capa; es decir, a estados que en la representación de segunda cuantización indicada anteriormente, correspondan a funciones de onda polinomiales de un grado determinado, tanto en los operadores de creación como en los operadores de aniquilación. Esto nos sugiere la posibilidad de utilizar el subgrupo

$$\begin{pmatrix} U_6 & 0 \\ 0 & U_3 \end{pmatrix}$$

de  $\mathcal{U}_9$  para la clasificación. En este caso  $\mathcal{U}_6$  y  $\mathcal{U}_3$  se refieren a los grupos unitarios de transformaciones que actúan, por separado, sobre estados de las capas  $2s-1d$  y  $1p$ , respectivamente. Claramente, el pedir que la función de onda sea BRI de la suma directa no es equivalente a la restricción mencionada antes acerca del número de partículas en cada capa, sino que es una restricción sobre los polinomios mucho más fuerte. Sin embargo, las RI de  $\mathcal{U}_6$  y  $\mathcal{U}_3$  pueden servir ocasionalmente como números cuánticos aceptables.

Mucho más importante es el siguiente eslabón en la cadena de subgrupos de  $\mathcal{U}_9$ : el grupo  $SU_3$ , grupo de simetrías del oscilador armónico isotrópico que, de acuerdo con la teoría de Elliott, proporciona un criterio muy aceptable para limitar el número de estados en el espacio de configuración que se han de considerar en un problema dado<sup>6)</sup>. Es decir, las RI de  $SU_3$  nos proporcionan números cuánticos adicionales, de considerable significado físico en esta región de la tabla.

Finalmente se clasifican las funciones de onda por las RI del subgrupo  $R_3$  de  $SU_3$ , de tal manera que se obtienen polinomios de momento angular orbital total definido.

Como se ve, esta clasificación es particularmente útil cuando se consideran interacciones entre los nucleones independientes de la carga de las partículas, centrales y que conserven la paridad. Para algunos potenciales presentes en el hamiltoniano, como la interacción spin-órbita o la fuerza tensorial, la clasificación no es la más adecuada, siendo necesario entonces construir explícitamente las matrices para estos potenciales. Sin embargo se verá más adelante como se pueden obtener los elementos de matriz de la interacción spin-órbita, por ejemplo, con respecto a estados clasificados en la cadena  $SU_3$ ,  $R_3$  indicada arriba.

Estudiaremos a continuación el procedimiento para obtener polinomios,

función de los operadores  $b_{\mu s}^+$  y  $b_{\lambda' s'}$ , actuando sobre el estado de vacío  $|0x\rangle$ , que satisfagan las condiciones indicadas anteriormente.

Antes de proceder a la construcción explícita de estas funciones de onda es conveniente hacer notar que esencialmente hay dos formas diferentes de resolver el problema:

El método analítico, en el cual se obtiene primero un polinomio que sea BRI del grupo  $U_{36}$  y de su subgrupo, el producto directo  $U_9 \times U_4$  y después se imponen condiciones para que el polinomio sea BRI de todos los subgrupos en la cadena, o sea de  $U_6 + U_3$ ,  $SU_3$  y  $R_3$  de  $U_9$  por un lado y los subgrupos  $SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)}$  de  $U_4$ , por otra parte.

El método de construcción sintética, en el cual se procede esencialmente a la inversa; se comienza la construcción obteniendo dos funciones de onda, una de las cuales es función de operadores de creación en la capa  $2s-1d$  y corresponde a una BRI del producto directo  $U_6 \times U_9$  y la otra, función de operadores de aniquilación en la capa  $1p$  correspondiente a una BRI del producto directo  $U_3 \times U_4$ . Después se acoplan las funciones de onda utilizando coeficientes de Wigner del grupo  $U_4$ , con lo cual se obtiene una función de onda BRI del producto directo  $U_9 \times U_4$ . Esto último es consecuencia del Principio de Pauli, que asocia unívocamente a una RI dada de  $U_4$  la RI conjugada del grupo  $U_9$ . Si además las funciones de onda construídas al principio corresponden a BRI del grupo de simetrías del oscilador  $SU_3$ , se puede obtener una función de partícula-agujero clasificada por una RI de  $SU_3$  acoplando por medio de coeficientes de Wigner de este grupo.

El análisis detallado de este segundo método lo reservaremos para el siguiente capítulo, concentrándonos por el momento al estudio del método de construcción analítico.

2.- Cadena de Grupos  $U_{2n} \supset R_{2n} \supset U_n$ . Representaciones Irreducibles de un Grupo Unitario con Indices Positivos y Negativos.

En todo lo que se ha discutido hasta ahora las funciones de onda se han considerado como polinomios en operadores de creación  $b_{\mu s}^+$  y operadores de aniquilación  $b_{\lambda s}$  aplicados al estado  $|0x\rangle$  (Ec. 1.1), que representa en el caso de las capas  $2s-1d$  y  $1p$  el estado base del núcleo doblemente mágico  $O^{16}$ . Sin embargo, es conveniente para los propósitos de construcción de las funciones de onda clasificadas como se indicó en el No. 1 de este capítulo por el método analítico, obtener el polinomio en sí, sin considerarlo aplicado al estado  $|0x\rangle$ .

Este polinomio, como se verá a continuación, corresponde a una RI del grupo  $U_n$  ( $n = 36$ ) de índices tanto negativos como positivos.

Con objeto de ver esto claramente, introducimos un espacio auxiliar del doble número de dimensiones, (o sea  $2n = 72$  en nuestro caso). Definimos ahora los operadores de creación

$$\bar{b}_p^+, \quad p = n, n-1, \dots, 1, -1, \dots, -n+1, -n$$

en donde la doble barra se utiliza para distinguir este operador de creación en el espacio de dimensión  $2n$ , de los operadores de creación introducidos antes y que tienen propiedades tensoriales frente a transformaciones unitarias en este espacio, como se verá posteriormente.

Al operador  $\bar{b}_p^+$  con  $p > 0$ , es conveniente identificarlo con el operador de creación ordinario  $b_p^+$  mientras que a  $\bar{b}_{-p}^+$  con  $p > 0$  lo identificamos con el operador de aniquilación  $b_p^-$ , en el espacio de  $n$  dimensiones.

Los operadores  $\bar{b}_p^+$  y  $\bar{b}_p^+$  satisfacen las relaciones de anticonmutación habituales para operadores de Fermi (Ec. 1.2). Claramente entonces los operadores

$$\mathcal{B}_\rho^{\rho'} = \mathcal{B}_\rho^+ \mathcal{B}^{\rho'} \quad (2.1)$$

satisfacen las reglas de conmutación siguientes:

$$[\mathcal{B}_\rho^{\rho'}, \mathcal{B}_{\bar{\rho}}^{\bar{\rho}'}] = \mathcal{B}_\rho^{\bar{\rho}'} \delta_{\bar{\rho}}^{\rho'} - \mathcal{B}_{\bar{\rho}}^{\rho'} \delta_{\rho}^{\bar{\rho}'} \quad (2.2)$$

y por tanto constituyen un algebra de Lie <sup>1)</sup>. Se pueden considerar como los generadores de un grupo unitario de  $2n$  dimensiones, el grupo  $U_{2n}$ .

Se definen, en este mismo espacio vectorial de  $2n$  dimensiones transformaciones ortogonales, que constituyen un subgrupo de  $U_{2n}$ , el grupo  $R_{2n}$ , cuyos generadores

$$\Lambda_\rho^{\rho'} = \mathcal{B}_\rho^{\rho'} - \mathcal{B}_{-\rho}^{-\rho'}, \quad (2.3)$$

( expresados en métrica de Weyl <sup>1)</sup> satisfacen las reglas de conmutación

$$[\Lambda_\rho^{\rho'}, \Lambda_{\bar{\rho}}^{\bar{\rho}'}] = \Lambda_{\bar{\rho}}^{\rho'} \delta_{\bar{\rho}}^{\rho'} - \Lambda_{\bar{\rho}}^{\rho'} \delta_{\rho}^{\bar{\rho}'} + \Lambda_{-\rho}^{\bar{\rho}'} \delta_{\rho}^{\bar{\rho}'} - \Lambda_{-\rho}^{\bar{\rho}'} \delta_{-\rho}^{\bar{\rho}'} \quad (2.4)$$

como se puede ver utilizando la ec. ( 3.2 ).

De la ecuación ( 2.4 ) se observa que los generadores  $\Lambda_\rho^{\rho'}$  con  $\rho, \rho' > 0$ , forman así mismo un algebra de Lie, equivalente al algebra de Lie de un grupo de transformaciones unitarias en un espacio de  $n$  dimensiones. Es éste el grupo de interés físico, cuyas RI son importantes en nuestro análisis.

Consideremos ahora el problema de la obtención de un polinomio función de  $\mathcal{B}_\rho^+$ , clasificado con RI de la cadena de grupos

cuyos generadores han sido definidos anteriormente.

Con respecto al grupo auxiliar  $U_{2n}$ , los polinomios corresponden a RI totalmente antisimétricas, ya que los operadores de creación  $b_p^+$  están totalmente especificados por el índice  $p$  y obedecen las reglas de anticonmutación de Fermi. Se tienen entonces RI del tipo

$$[1^\nu 0^{2n-\nu}], \quad \nu \leq 2n. \quad (2.5)$$

Esto nos indica que basta un solo número  $\nu$ , como índice de la representación irreducible. En otras palabras un polinomio BRI de  $U_{2n}$  queda completamente especificado si se impone la restricción de que sea eigenfunción del operador de Casimir\* de primer grado de  $U_{2n}$ :

$$N = \sum_p b_p^+ b_p, \quad (2.6)$$

que es simplemente el operador de número que cuenta el grado del polinomio en operadores de creación  $b_p^+$ . O sea, un polinomio de grado  $\nu$  en  $b_p^+$  es automáticamente BRI de  $U_{2n}$  con índice  $[1^\nu 0^{2n-\nu}]$ .

Por otro lado, se sabe que si  $\nu = n$  las RI del subgrupo  $R_{2n}$  de cuyos generadores están dados por (2.3) contenida en  $[1^\nu 0^{2n-\nu}]$  de  $U_{2n}$  están dadas por  $n$  números  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  y son del tipo

$$(1^{\nu-n}),$$

\* Operador de Casimir es el operador formado por los generadores del grupo, que conmuta con todos ellos, es decir, un operador invariante<sup>7)</sup>

en donde  $N = 0, 1, \dots, \nu$ . Si  $\nu = n$  además de estas representaciones de  $\mathbb{R}_{2n}$  se tiene también aquella con índices  $(1^{n-1} - 1)$

Ahora se trata de averiguar que representaciones de  $\mathcal{U}_n$  están contenidas en la representación dada de  $\mathcal{U}_{2n}$  y de construir la correspondiente BRI.

Considérese el polinomio

$$P = b_n^+ b_{n-1}^+ \cdots b_{n-p-1}^+ \left( \sum_{\mu \geq 0} b_{\mu}^+ b_{-\mu}^+ \right)^{\frac{\nu-p-r}{2}} b_{-1}^+ \cdots b_{-r}^+ \quad (2.7)$$

Si se aplica a este polinomio el operador  $N$ , definido en (2.8), se observa que  $P$  es eigenpolinomio de  $N$  con eigenvalor  $\nu$ . De acuerdo con el hecho de que  $N$  es el operador de Casimir de  $\mathcal{U}_{2n}$  y de que es el único necesario para determinar la RI en este caso, se tiene que  $P$  corresponde a la RI  $[1^\nu 0^{2n-\nu}]$  de  $\mathcal{U}_{2n}$ . Por otro lado,  $N$  es también un invariante en  $\mathbb{R}_{2n}$ , y las RI de este subgrupo también están caracterizadas por  $N$ ; en otros términos  $P$  es también BRI de  $\mathbb{R}_{2n}$  correspondiente a la RI  $(1^\nu)$ .

Consideremos ahora las propiedades de transformación de  $P$  frente a del grupo  $\mathcal{U}_n$ . Como primer paso, dividimos los generadores en tres clases ;

$$\begin{aligned} \Lambda_{\rho}^{\rho'} & \text{ con } \rho > \rho' > 0, \text{ que suben el peso} \\ \Lambda_{\rho}^{\rho} & \rho > 0, \text{ que da el peso} \quad (2.8) \\ \text{y } \Lambda_{\rho}^{\rho'} & \text{ con } \rho' > \rho > 0, \text{ que bajan el peso} \end{aligned}$$

Como  $\Lambda_{\rho}^{\rho} = \mathcal{E}_{\rho}^{\rho} - \mathcal{E}_{-\rho}^{-\rho}$ , los operadores de peso aplicados sobre  $P$  solo pueden tener eigenvalores  $\lambda_{\rho} = 1, 0, -1$ , de acuerdo con la expresión (2.7) para  $P$ . Por otro lado, si se exige la condición de que  $p+r \leq n$  es obvio que  $P$  satisface la condición de máximo peso

$$\Lambda_{\rho}^{\rho'} P = 0 \quad \rho > \rho' > 0 \quad (2.9)$$

y como  $I = \sum_{\mu > 0} b_{\mu}^{+} b_{-\mu}^{+}$  conmuta con  $\Lambda_{\rho}^{\rho'}$ ,  $\rho, \rho' > 0$ , el peso de  $P$  ( Ec. 2.7 ) está dado por

$$[1^{\rho} \ 0^{n-p-r} \ (-1)^r] \quad (2.10)$$

Se observa que la función de  $I$ , que no altera el peso ni la representación inicial de  $U_{2n}$  ya que es un invariante en este grupo es completar el grado del polinomio hasta el valor  $\nu$  dado.

Se sabe que si un polinomio es de máximo peso, en un grupo, corresponde a una RI con índices iguales al peso. Es decir, la base completa se puede generar de

este polinomio por un proceso de descenso adecuado. Por otro lado se puede comprobar que  $P$  es eigenfunción de los operadores de Casimir de  $U_n$ , si satisface la condición (2.8) de ser de máximo peso.

Hemos demostrado por tanto que el polinomio de la ec. (2.7) es BRI - de todos los grupos de la cadena

$$U_{2n} > R_{2n} > U_n,$$

con índices de representación irreducible en el último grupo de la cadena

$$[1^p 0^q (-1)^r] \quad (2.11)$$

en donde  $q = n - p - r$  y que, por tanto, esta última representación dada por (2.11) está contenida en la representación dada  $[1^p]$  de  $U_{2n}$ , siempre que  $p+r \leq p$  (en el caso contrario  $P$  no sería una expresión polinomial).

Se trata de averiguar ahora, si existen algunas RI de  $U_n$  contenida en la RI dada de  $U_{2n}$  que no sean de la forma (2.11) y en el caso que no las hubiera, encontrar para que valores de los índices  $p, q, r$ , que satisfagan la condición

$$p + q + r = n, \quad (2.12)$$

la correspondiente RI de  $U_n$  está contenida en  $[1^p]$  de  $U_{2n}$ . Demostraremos que no hay representaciones de otro tipo y encontraremos las restricciones sobre los índices  $p, q, r$ , a continuación.

Consideremos dos RI de  $U_{2n}$ ,  $[1^p]$  y  $[1^{p-1}]$ ; demostraremos que las RI de  $U_n$  contenidas en este conjunto de RI de  $U_{2n}$  son del tipo (2.11), en donde  $q$  toma los valores,

$$q = \mu, \mu+1, \mu+2, \dots, n \quad ; \quad \mu = n - \nu \quad (2.13a)$$

y para cada valor de  $q$  los índices  $p$  y  $r$  toman todos los valores posibles compatibles con las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} p+q+r &= n \\ h_n &\geq h_{n-1} \geq \dots \geq h_1 \end{aligned} \quad (2.13b)$$

en donde  $h_p$  es el eigenvalor del operador de peso  $\Lambda_p^p$  con  $p > 0$ , al aplicarlo al polinomio (2.7). La última condición es equivalente, por lo tanto, a la que ordinariamente se impone sobre los índices de las representaciones irreducibles de los grupos unitarios y corresponde a pedir que el diagrama de Young correspondiente sea un diagrama permitido <sup>1)</sup>:

Si demostramos que la siguiente relación es válida :

$$D_{[1^\nu]}(U_{2n}) + D_{[1^{\nu-1}]}(U_{2n}) = \sum_{\substack{p,r \\ q=\mu, \dots, n \\ p+q+r=n}} D_{[1^p 0^q (-1)^r]}(U_n) \quad (2.14)$$

en donde  $D$  indica la dimensionalidad de la RI del grupo especificada entre paréntesis y la suma en la expresión del lado derecho se extiende sobre los valores de los índices dados por (2.13 a y b), la afirmación anterior queda probada. Si hubiera alguna otra RI de tipo diferente a la que corresponde al polinomio  $P$  de la ec. (2.7) la ec. (2.14) no sería válida.

Para demostrar la ec. ( 2.14 ), consideramos la dimensionalidad de la RI ( 2.11 ) de  $U_n$ , según la fórmula de Weyl <sup>(11)</sup>. En este caso,

$$D_{[1^p 0^q (-1)^r]}(U_n) = \binom{q+1}{n+1} \binom{n+1}{p} \binom{n+1}{r},$$

con  $\binom{a}{b}$  es un coeficiente binomial.

Aplicando la misma fórmula de Weyl en el grupo  $U_{2n}$  se tiene:

$$D_{[1^\nu]}(U_{2n}) + D_{[1^{\nu-1}]}(U_{2n}) = \frac{n+1}{2n+3} \binom{2n+1}{n} + \frac{n+2}{2n+3} \binom{2n+1}{n-1}$$

Con estas expresiones es inmediata la demostración de la ec. ( 2.15 ), empleando el método de inducción por ejemplo.

Si ahora se puede saber qué RI de  $U_n$  del tipo ( 2.11 ) están contenidas en  $[1^\nu]$  y cuales en  $[1^{\nu-1}]$  de  $U_{2n}$ , el desarrollo estaría completo. Para ver esto, consideremos nuevamente el polinomio ( 2.7 ). De su definición, se tiene que

$$\nu = p + r$$

debe ser un número par, ya que si fuera un número impar la expresión ( 2.7 ) no sería un polinomio. Si  $n$  es par, ( lo que en nuestro caso no implica restricción, como se verá más adelante ),

$$\nu + q$$

también deberá ser par, ya que  $p + r = n - q$ . Por lo tanto,  $\nu$  y  $q$  deben tener la misma paridad y por consiguiente  $\mu = \nu - q$  y  $q$  también.

En otras palabras, a la RI  $[1^\nu]$  de  $U_{2n}$  le corresponden aquellas RI del tipo ( 2.11 ) con

$$q = \mu, \mu+2, \dots, \quad (2.15 a)$$

mientras que a la RI  $[1^{\nu-1}]$  las representaciones con

$$q = \mu+1, \mu+3, \dots \quad (2.15 b)$$

Si en  $[1^{\nu}]$  estuviera contenida otra RI de  $U_n$  del tipo (2.11) que no satisficiera la condición (2.15 a), se necesitarían representaciones con dimensionalidad negativa contenidas en la RI  $[1^{\nu-1}]$ ; de otra forma, la ec. (2.14) no sería válida.

En resumen, se ha demostrado que la RI  $[1^{\nu} 0^{2n-\nu}]$  de  $U_{2n}$  contiene a las RI de  $U_n$  del tipo

$$[1^p 0^q (-1)^r]$$

en donde,

$$q = n-\nu, n-\nu+2, \dots, \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\}$$

$$p+q+r=n$$

y

$$h_n \geq h_{n-1} \geq \dots \geq h_1$$

con  $h_p$ , el eigenvalor de  $\Lambda_p^p$ ,  $p > 0$  al aplicarse al polinomio (2.7).

### 3.- Representaciones Irreducibles del Producto Directo $U_3 \times U_4$ Contenidas en una Representación del Grupo $U_{36}$ .

Como se ha indicado en la sección anterior, el introducir el grupo

auxiliar de dimensión  $2n$ , nos ha permitido, por un lado considerar a las partículas y a los agujeros en el mismo plano; o sea considerarlas a ambas Como "partículas" que obedecen el principio de Pauli; por otro lado, nos permite introducir polinomios que estén clasificados por RI del grupo  $U_n$  con representaciones con índices tanto negativos como positivos. Esto último es útil ya que nos permite prescindir del estado de vacío  $|0\rangle$  en la construcción de las funciones de onda.

Según se demostró en el inciso anterior, las RI del grupo  $U_n$  son del tipo  $[1^p 0^q (-1)^r]$  cuando se refieren a configuraciones del tipo partícula-agujero; en la representación gráfica por medio de diagramas de Young, estas representaciones corresponden a diagramas del tipo

El diagrama de Young muestra una columna superior de  $p$  cuadros, con una llave a su derecha etiquetada como  $p$ . Una línea vertical los conecta a una columna inferior de  $r$  cuadros, con una llave a su izquierda etiquetada como  $r$ . A la derecha del diagrama se encuentra la ecuación  $p + q + r = n$  y el número  $(3.1)$ .

El introducir el diagrama de Young en esta forma tiene la gran ventaja de que nos indica explícitamente el número de partículas y el número de agujeros, por separado, que se manejan en cada caso. Con el objeto de referirnos a este tipo de diagramas con facilidad, se dirá que el diagrama está formado por una columna de  $p$  cuadros (que corresponden a las partículas) y una "anticolumna" de  $r$  "anticuadros" que corresponden a los agujeros.

Un diagrama de Young del tipo del (3.1) corresponde en el grupo  $SU_n$  a una RI de dos columnas, la primera de longitud  $(n-r)$  y la segunda de longitud  $p$ . Esto equivale gráficamente a desplazar la línea de referencia vertical que marca la separación entre columnas y anticolumnas hacia la izquierda por un cuadro; esto es posible, ya que frente a transformaciones que forman el grupo unimodular unitario  $SU_n$  el determinante formado por las componentes de los vectores BRI en el espacio vectorial de  $n$ .

dimensiones es un invariante. En particular la RI de un agujero con representación  $[-1]$  en  $U_n$  es equivalente a la RI  $[1^{(n-1)}]$  en  $SU_n$ . Gráficamente,

The diagram shows a transformation of a Young diagram. On the left, there is a single box with a vertical line extending upwards from its top edge. An arrow points to the right, where a vertical column of boxes is shown. The column consists of a solid box at the bottom, followed by a dashed box, then another solid box, and finally a solid box at the top. A large curly brace on the right side of this column is labeled 'n-1'. To the right of the diagram is the label '(3.2)'.

Es bien sabido que cuando se tiene en el grupo  $SU_n$  una RI correspondiente a un diagrama de Young de una sola columna el subgrupo producto directo  $U_g \times U_4$ , que se desea introducir en la clasificación, tiene representaciones tales que las de  $U_g$  y  $U_4$  son conjugadas entre sí y corresponden al mismo número de bloques que la longitud de la columna original en  $U_n$ . Sin embargo un resultado general de esta naturaleza no se conoce para una representación de carácter más general en  $U_n$ . En particular, las representaciones del producto directo  $U_g \times U_4$  contenidas en una RI de dos columnas en  $U_n$  no se conocen; empleando el lenguaje apropiado para tratar con partículas y agujeros, tenemos entonces que no se conocen cuales son las RI de  $U_g \times U_4$  contenidas en una representación de  $U_n$  del tipo indicado en (3.1).

Se plantea entonces, dentro del método analítico, el problema de encontrar cuales representaciones del producto directo están contenidas en  $[1^p 0^q (-1)^r]$  de  $U_n$ , o lo que es equivalente dentro del grupo  $SU_n$ , en una RI correspondiente a un diagrama de Young de dos columnas.

El método que se emplea para resolver este problema es muy directo y conceptualmente muy simple: el método del pletismo, usado originalmente por Jahn<sup>8)</sup> y que consiste en partir de algunas representaciones de  $U_n$  suficientemente sencillas y cuyo contenido en el subgrupo  $U_g \times U_4$  sea, o bien conocido, o bien fácil de calcular; después se efectúan repetidamente operaciones de multiplicación de unas representaciones

de  $U_n$  con otras, utilizando en cada paso un método de eliminación, de tal forma que por un lado se construye la RI de  $U_n$  deseada y por otro se puede conocer las representaciones de  $U_9 \times U_4$  que contiene.

Analizaremos este método en detalle a continuación. Consideremos la representación  $[1]$  de  $U_n$ , representada gráficamente por un diagrama.



De acuerdo con el resultado obtenido en el inciso anterior el polinomio correspondiente es del tipo  $b^+_{\rho}$ . Si ahora consideramos al índice  $\rho$  como formado por dos índices  $\rho \equiv \mu, s$ , en donde  $\mu$  se refiere al espacio orbital y  $s$  a los espacios de spin e isospin, vemos que esta función polinomial corresponde en el grupo  $U_9$ , de transformaciones que afectan únicamente los índices orbitales, a la representación  $[10 \dots 0]^*$  (de dimensión 9) y en el grupo  $U_4$  de transformaciones que afectan únicamente a los índices de spin e isospin, a la representación  $\{1000\}^*$  (de dimensión 4). Expresado gráficamente se tiene,

$$\square \supset \square \times \square \quad (3.3 a)$$

en donde el símbolo  $\times$  se emplea para indicar el producto directo de dos representaciones, cuando estas se refieren a dos grupos diferentes, en este caso  $U_9$  y  $U_4$ .

Por un razonamiento análogo se encuentra que

$$\square \supset \square \times \square \quad (3.3 b)$$

\* Las representaciones de  $U_9$  se indican como  $[h_1 \dots h_9]$  y las de  $U_4$  en la forma  $\{v_1 \dots v_4\}$

o sea,  $[0 \dots 0 - 1]$  de  $U_n$  contiene a la representación  $[0 \dots 0 - 1] \times \{000-1\}$  de  $U_9 \times U_4$ . También se encuentra fácilmente que la representación escalar de  $U_n$  contiene el producto de las representaciones escalares en  $U_9 \times U_4$ . Esto último se expresa gráficamente como

$$\left| \supset \right| \times \left| \right| . \quad (3.3 c)$$

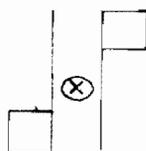
Con el objeto de hacer expedito el procedimiento se ha usado en (3.3 a), (3.3 b) y (3.3 c) la convención de ordenar las representaciones del producto directo, conservando las de  $U_9$  siempre a la derecha del símbolo  $\times$  y las de  $U_4$  siempre a la izquierda de este símbolo. En esta forma evitamos el tener que introducir representaciones gráficas diferentes para los cuadros y anticuadros en  $U_9$  y  $U_4$  respectivamente.

Para construir representaciones de  $U_n$  más complicadas usamos ahora las expresiones (3.3) como base. Debemos tomar en cuenta en este punto el hecho de que únicamente nos interesa averiguar el contenido de RI de  $U_n$  del tipo especial (3.1). Entonces deberemos efectuar el proceso de multiplicación repetitivo de tal forma que únicamente obtengamos representaciones del tipo (3.1) y no la más general posible, que no es de interés para nuestro problema.

Para construir (3.1) a partir de las representaciones indicadas en (3.3), tenemos que efectuar productos directos dentro del mismo grupo  $U_n$  y considerar la reducción de estos en sus componentes irreducibles. En el caso de reducción de productos directos de representaciones con índices positivos esto se logra mediante la aplicación de las reglas de Littlewood<sup>9)</sup>. Tenemos que expresar por tanto, estas reglas en forma directamente aplicable a nuestro problema, en donde se tienen configuraciones de partícula-agujero y

por tanto representaciones con índices positivos y negativos.

Para encontrar la forma adecuada de reducir el producto directo de dos representaciones del mismo grupo ( que se indica por el símbolo  $\otimes$  colocado entre las dos representaciones, para distinguirlo del producto directo de dos representaciones de grupos diferentes ) considérese el caso más sencillo:



Si tratamos el producto desde el punto de vista del grupo  $SU_n$  vemos que es equivalente al producto de  $[1]$  por  $[1^{n-1} 0]$  , que se reduce utilizando las reglas arriba mencionadas en la siguiente forma:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \rightarrow^{n-1} \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\}^{n-1} + \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\}^n, \quad (3.4 a)$$

o en otras palabras

$$[1^{n-1} 0] \otimes [1 0^{n-1}] \supset [2 1^{n-2} 0] + [1^n]$$

Regresando ahora a la correspondiente expresión en  $U_n$ , ( es decir trasladando la línea de referencia a su posición original ) se ve que  $[2 1^{n-2} 0]$  en  $SU_n$  es equivalente a  $[1 0 \dots 0 -1]$  en  $U_n$  y  $[1^n]$  en  $SU_n$  es equivalente a  $[0]$  en  $U_n$  .

Representando estos resultados gráficamente se tiene que

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \supset \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + | \quad (3.4 b)$$

En otras palabras, el proceso de reducción apropiado se puede encontrar de la siguiente for\_

ma:

1.- Se traslada la línea de referencia en el diagrama que contiene agujeros hasta obtener un diagrama con índices positivos únicamente.

2.- Se aplican las reglas de Littlewood ordinarias para reducir el producto directo.

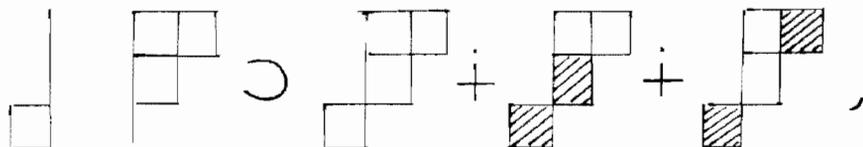
3.- Se regresa la línea de referencia a su posición original, de tal forma que se tengan diagramas con cuadros y anticuadros.

Como se ve, se ha utilizado al grupo  $SU_n$  en el proceso ya que se ha trasladado la línea de referencia, lo que es válido únicamente en este grupo y no en el grupo  $U_n$ . Sin embargo es bien conocido que a una representación irreducible del grupo unitario corresponde una del grupo unimodular unitario si se especifica el número de cuadros que se traslada la línea de referencia<sup>10)</sup>.

Aplicando este proceso en general, emerge la regla de reducción apropiada para este caso, que se podría enunciar en la siguiente forma:

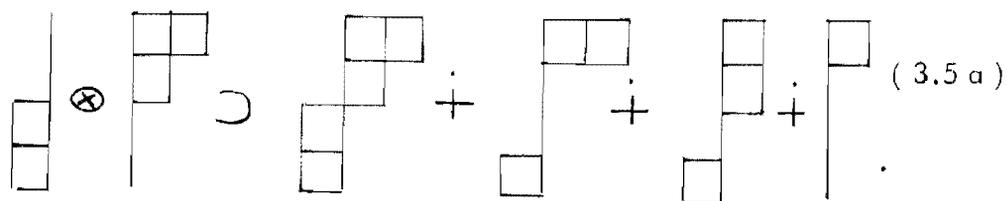
Para encontrar las representaciones irreducibles contenidas en el producto directo de una RI cuyos índices son todos positivos, con otra cuyos índices son todos negativos, se superponen directamente los diagramas y luego se contraen en todas las formas posibles, entendiéndose por contracción la aniquilación, en el diagrama, de un cuadro con un anticuadro.

Así, por ejemplo, en el grupo  $U_3$ ,



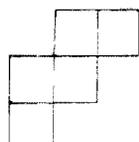
lo que se puede comprobar directamente en  $SU_3$  usando las reglas convencionales o bien verificando por dimensionalidad de las representaciones, usando la fórmula de Weyl<sup>11)</sup>.

Para complementar la regla hacemos notar que cuando un mismo diagrama se obtiene varias veces en el proceso se debe tomar en cuenta que las contracciones por las cuales se ha obtenido éste del diagrama original de superposición directa, sean diferentes entre sí; es decir, que no se obtengan estos diagramas por contracciones en distinto orden, de cuadros y anticuadros que se encuentren en la misma fila o columna, en cuyo caso el diagrama correspondiente no se repite. Como ejemplo de esto último, considérese en el grupo  $U_4$  la reducción siguiente:



Se observa que la representación  $\Gamma$  sólo aparece una vez, como consecuencia del hecho de que al contraer los diagramas  y  se han efectuado las mismas contracciones pero en distinto orden. Como se verá más adelante en este capítulo este punto resulta claro cuando se consideran las funciones de onda correspondientes a cada caso. Desde luego, si el proceso de contracción es diferente, en el sentido que se indicó antes, existen representaciones que aparecen más de una vez, lo que es posible ya que los grupos unitarios en general no son simplemente reducibles<sup>7)</sup>.

Supóngase ahora que se hubiera deseado reducir el producto directo (3.5), con representaciones del grupo  $U_3$  en vez del grupo  $U_4$ . Como los diagramas de Young de  $U_3$  pueden tener a lo más tres renglones, el primer diagrama correspondiente a la reducción en (3.5) sería del tipo



Es decir, se tendría un diagrama con un cuadro y un anticuadro superpuestos en la misma fila. Si este diagrama se considera desde el punto de vista del grupo unimodular  $SU_3$ ,

corresponde a un diagrama no permitido de Young, como es fácil ver al correr la línea de referencia un cuadro hacia la izquierda. Efectivamente, se puede demostrar formalmente que este tipo de diagrama está prohibido \*.

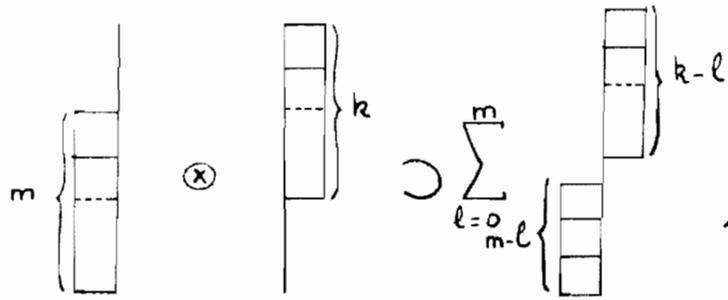
Sin embargo las reglas de reducción del producto directo expresadas anteriormente siguen siendo válidas, únicamente que aparecen diagramas obtenidos de éste por una contracción en adelante. Si la superposición en el diagrama original es de más de un bloque ( es decir, que se tienen más de un cuadro y un anticuadro en la misma fila ) aparecen en la reducción del producto directo diagramas obtenidos del original por un número de contracciones igual o mayor que el número de cuadros superpuestos. Desde luego estas últimas contracciones se pueden efectuar entre cuadros y anticuadros pertenecientes a diferentes filas del diagrama, como se puede ver del ejemplo en ( 3.5 ) aplicado al caso del grupo  $U_3$  .

Las reglas de Littlewood así expresadas tienen utilidad, desde un punto de vista práctico, aún en el caso de tratar únicamente con partículas, es decir con diagramas ordinarios de Young. Si el número de cuadros en uno de los factores es suficientemente grande, de tal manera que para obtener un diagrama con columnas completas ( es decir, columnas con  $n$  cuadros en el caso del grupo  $U_n$  ) haga falta un número menor de cuadros que los que contiene el diagrama original, entonces se puede trasladar la línea de referencia en este diagrama de Young, para tener un diagrama con anticuadros únicamente y efectuar la reducción del producto directo por el método indicado antes, que en este caso es de más fácil aplicación que las reglas ordinarias de Littlewood.

Volviendo ahora al método del pletismo, nos damos cuenta que para -

\* Ver apéndice A, en donde se expone la demostración formal para el caso del grupo  $U_3$  , aunque la demostración es fácilmente generalizable para  $U_n$  .





siempre que  $m \leq k$ . Pero la suma en la última expresión nos da términos que se obtienen precisamente por contracción de un cuadro con un anticuadro, una a la vez. En otros términos, se satisface la regla apropiada para reducción de productos directos indicada más arriba. Expresiones análogas se obtienen para el caso  $m > k$ .

Como se había anticipado, sólo se obtienen diagramas de Young en el proceso con una columna y una anticolumna.

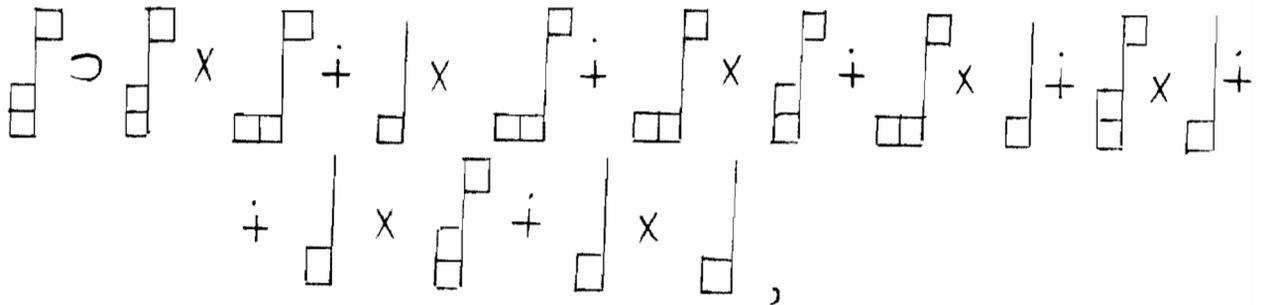
Se construye entonces, la representación de  $U_n$  cuyo contenido en  $\mathcal{U}_g \times \mathcal{U}_4$  se desea averiguar por producto directo de dos representaciones, una de las cuales consiste de una columna y la otra de una sola anticolumna. Esto tiene la ventaja indicada más arriba, pero además la conveniencia de que el contenido de cada una de estas representaciones se conoce, de acuerdo con el resultado general mencionado en la pag. 22, que desde luego es válido también para el diagrama consistente de una anticolumna únicamente. Así, por ejemplo, se sabe que  $[1^k]$  contiene todos los productos de representaciones conjugadas, que consisten, tanto en  $\mathcal{U}_g$  como en  $\mathcal{U}_4$  de  $k$  bloques; mientras que  $[0 \dots 0 (-1)^m]$  contiene productos de representaciones conjugadas que contienen  $m$  anticuadros.

Lo anterior se puede expresar gráficamente, como sigue :





Del proceso de construcción se observa que si se conoce el contenido de un diagrama de  $U_n$  con  $k$  cuadros y  $m$  anticuadros, se pueden conocer inmediatamente las representaciones que contiene otro diagrama consistente en  $m$  cuadros y  $k$  anticuadros; simplemente se intercambian en el resultado (o sea en los diagramas de  $U_4 \times U_4$ ) cuadros por anticuadros. Por ejemplo, de la última expresión se obtiene



resultado que se puede verificar directamente.

Como se verá más adelante el método en la práctica es de aplicación muy directa, ya que al aplicarlo para un cálculo específico en la forma que se propondrá después, no es necesario conocer todas las representaciones de  $U_4 \times U_4$  contenidas en una dada de  $U_n$ .

Por último, hacemos notar una propiedad de la reducción de gran importancia práctica, que emerge del método:

Al efectuar el producto de las RI  $[1^k]$  con  $[0 \dots 0 (-1)^m]$  en  $U_n$ , se obtienen varias representaciones de este grupo, como se ha indicado antes; en la RI  $[1^k 0 \dots 0 (-1)^m]$  de  $U_n$  aparecen todas las representaciones de  $U_4 \times U_4$  en las cuales no se ha efectuado ninguna contracción en uno de los grupos al menos. Es decir, las RI de  $U_4 \times U_4$  que tengan en alguno de los dos grupos (o en ambos grupos) representaciones cuyos diagramas consten de  $k$  cuadros y  $m$  anticuadros pertenecen a la RI  $[1^k 0 \dots 0 (-1)^m]$  de  $U_n$  y no a alguna de las otras representaciones de este grupo del tipo  $[1^{k-l} 0 \dots 0 (-1)^{m-l}]$ , que aparecen en el proceso.

4.- Construcción de Funciones de Onda de máximo peso en la Cadena de Grupos.

$$U_n \supset U_3 \times U_4$$

Se ha indicado en el inciso anterior un método para obtener las RI del producto directo  $U_3 \times U_4$  contenidas en una RI de  $U_n$ , cuyo diagrama de Young consiste de una columna y una anticolumna. El objeto de este inciso y el siguiente será encontrar las funciones de onda clasificadas por estas representaciones; o sea, la construcción de tensores irreducibles para esta cadena de grupos.

Como nuestro objetivo ulterior es clasificar las funciones por subgrupos, tanto del grupo  $U_3$  como del grupo  $U_4$ , que tengan algún significado físico, estudiaremos la construcción de tensores que sean de máximo peso en ambos grupos, correspondientes a cada una de las representaciones de  $U_3 \times U_4$  contenidas en la RI dada de  $U_n$ . En otras palabras, no nos interesa en este punto la construcción de funciones correspondientes a una BRI del producto directo de peso diferente al máximo, en cada factor del producto directo.

Se desea construir los tensores irreducibles en términos de los operadores de creación y de aniquilación  $b_{\mu s}^+$  y  $b^{\mu' s'}$ , introducidos en el No. 1 de este capítulo, operadores que obedecen la estadística de Fermi. Se ha visto que las diferentes RI de  $U_3 \times U_4$  con las que tenemos que tratar, se obtienen por el procedimiento de contracción de cuadros con anticuadros ( en ambos grupos del producto directo ). Este proceso de contracción se refleja directamente en la construcción de las funciones de onda correspondiendo en los tensores a contraer apropiadamente índices de un operador de creación ( que se representa gráficamente por un cuadro ) con índices de operadores de aniquilación ( que se representa gráficamente con un anticuadro ). El procedimiento tiene, por tanto, muchos puntos de contacto con el método que Mukunda y Pandit<sup>(3)</sup> siguen en la construcción de tensores irreducibles para el grupo  $SU_3$ .

La contracción se puede efectuar independientemente en cada uno de los grupos del producto directo; por razones de carácter práctico que se indicarán más adelante, nos concentraremos en el caso en que las contracciones se efectúan únicamente en el grupo  $U_4$ , manteniendo las representaciones de  $U_9$  fijas. Un cambio muy sencillo en el procedimiento serviría para lograr lo contrario, es decir, cambiar las representaciones de  $U_9$  por contracción, dejando intacta las de  $U_4$ .

Desarrollaremos ahora el método de construcción en detalle:

Como primer paso, introducimos operadores que son los generadores de  $U_9$  y  $U_4$ , respectivamente. Como se vio antes,

$$C_{\rho}^{\rho'} \equiv C_{\mu s}^{\mu' s'} = b_{\mu s}^+ b^{\mu' s'} \quad (5.1)$$

son los generadores del grupo infinitesimal correspondiente a  $U_n$ . Entonces

$$C_{\mu}^{\mu'} = \sum_s b_{\mu s}^+ b^{\mu' s} \quad (5.2)$$

y

$$C_s^{s'} = \sum_{\mu} b_{\mu s}^+ b^{\mu s'} \quad (5.3)$$

son los generadores de  $U_9$  y  $U_4$ , respectivamente, hecho que es bien conocido<sup>1)</sup> y que se puede verificar de inmediato usando las relaciones de anticonmutación de los operadores de creación y de aniquilación (ecs. (1.2)).

Desde el punto de vista del análisis gráfico por medio de diagramas de Young, estas ecuaciones tienen una interpretación muy sencilla. Se sabe que  $b_{\mu s}^+$  corresponde a un cuadro en  $U_n$  y que  $b^{\mu' s'}$  tiene como representación gráfica un anticuadro. Entonces la ec. (5.1) corresponde al producto directo (dentro del mismo gru-

po, indicado por lo tanto por el símbolo  $\otimes$  ) siguiente:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

que al reducirse en  $U_n$  tiene componentes irreducibles ( ec. ( 3.4 b ) )

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \supset \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Esto corresponde al hecho bien conocido de que los generadores de un grupo unitario no son tensores irreducibles, sino que constituyen una mezcla de ellos, uno de los cuales es un invariante del grupo. Este último es claramente el operador de Casimir de primer orden del grupo. En otras palabras,

$$b_{\mu s}^+ b^{\mu s'} - \frac{1}{n} \delta_s^{s'} \delta_{\mu}^{\mu'} \sum_{\bar{\mu}} \sum_{\bar{s}} b_{\bar{\mu} \bar{s}}^+ b^{\bar{\mu} \bar{s}} = b_{\mu s}^+ b^{\mu s'} - \frac{1}{n} \delta_s^{s'} \delta_{\mu}^{\mu'} N \quad (5.4)$$

es un tensor irreducible, correspondiente a  $[10 \dots 0-1]$  en  $U_n$  .

Si ahora consideramos el producto directo desde el punto de vista de su irreducibilidad en el subgrupo  $U_3 \times U_4$  , vemos que

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \supset \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (5.5)$$

De acuerdo con el mismo razonamiento anterior, se tiene que

$$C_{\mu}^{\mu'} - \frac{1}{9} \delta_{\mu}^{\mu'} \quad C_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}'} = C_{\mu}^{\mu'} - \frac{1}{9} \delta_{\mu}^{\mu'} N \quad (5.6)$$

corresponde a la representación  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ ,

ya que de las definiciones (5.2) y (5.3) es claro que  $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}$  y  $\mathcal{C}_s^{s'}$  conmutan:

$$\left[ \mathcal{C}_\mu^{\mu'}, \mathcal{C}_s^{s'} \right] = 0 \quad (5.7)$$

y el operador  $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}$  debe corresponder a un invariante en  $U_4$ , como se indica en el diagrama de Young respectivo. Análogamente  $\mathcal{C}_s^{s'} - \frac{1}{4} \delta_s^{s'} N$  es un tensor irreducible del subgrupo  $\mathcal{U}_9 \times U_4$  y corresponde a la RI

$$\left| \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right|$$

siendo un escalar en el grupo  $\mathcal{U}_9$ . Finalmente, el operador de número  $N$  se transforma frente a este subgrupo como la RI

$$\left| \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right|$$

como es claro, ya que  $N$  conmuta tanto con  $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}$  como con  $\mathcal{C}_s^{s'}$  para todos los valores posibles de  $\mu, \mu', s, s'$ .

Aprovechando estos resultados, podemos construir un tensor irreducible correspondiente a la RI  $\left[ \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right] \times \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right\}$  en el subgrupo  $\mathcal{U}_9 \times U_4$ . Este tensor se indica como  $T_{\mu s}^{\mu' s'}$  y está definido por la expresión siguiente,

$$T_{\mu s}^{\mu' s'} \equiv \mathcal{C}_{\mu s}^{\mu' s'} - \frac{1}{9} \delta_\mu^{\mu'} \mathcal{C}_s^{s'} - \frac{1}{4} \delta_s^{s'} \mathcal{C}_\mu^{\mu'} + \frac{1}{n} \delta_s^{s'} \delta_\mu^{\mu'} N. \quad (5.8)$$

Como  $T_{\mu s}^{\mu' s'}$  no conmuta con los generadores de  $U_4, \mathcal{C}_s^{s'}$ , ni con los del grupo  $\mathcal{U}_9$ , al aplicarlo a un polinomio base de una RI de  $\mathcal{U}_9$  o de  $U_4$  puede cambiar la RI a que este polinomio corresponda. Entonces  $T_{\mu s}^{\mu' s'}$  claramente sirve para nuestros propósitos de construcción de las funciones de onda, como veremos a continuación.

La contracción de cuadros y anticuadros se puede efectuar por separado en cada uno de los grupos  $\mathcal{U}_g, U_4$ . Si nos restringimos a la contracción en  $U_4$ , es claro que a partir del tensor  $T_{\mu s}^{\mu' s'}$  se debe construir un invariante en  $\mathcal{U}_g$ . Esto se puede lograr fácilmente, si contraemos los índices orbitales de  $T_{\mu s}^{\mu' s'}$  con los del generador de  $\mathcal{U}_g, C_{\mu}^{\mu'}$ :

$$T_s^{s'} = \sum_{\mu \mu'} T_{\mu s}^{\mu' s'} C_{\mu}^{\mu'} = \sum_{\mu \mu'} C_{\mu s}^{\mu' s'} C_{\mu}^{\mu'} - \frac{1}{9} C_s^{s'} N - \frac{1}{4} \delta_s^{s'} \Gamma(C_{\mu}^{\mu'}) + \frac{1}{n} \delta_s^{s'} N^2 \quad (5.9)$$

en donde

$$\Gamma(C_{\mu}^{\mu'}) = \sum_{\mu \mu'} C_{\mu}^{\mu'} C_{\mu'}^{\mu} \quad (5.10)$$

es el operador de Casimir de segundo orden del grupo  $\mathcal{U}_g$ .

El operador  $T_s^{s'}$  definido en la ec. (5.9) tiene las propiedades de-seadas:

- 1) Es un operador invariante con respecto a  $\mathcal{U}_g$ .
- 2) Se transforma como  $C_s^{s'}$  con respecto a las transformaciones de  $U_4$ ,
- 3) Puede cambiar la RI de  $U_4$ , sin alterar la RI de  $\mathcal{U}_g$ , al aplicarse a un tensor irreducible del producto directo  $\mathcal{U}_g \times U_4$ .

Utilizando este operador  $T_s^{s'}$  y los coeficientes de Wigner para el grupo  $U_4$ , podemos formar un operador tal que al aplicarse a un tensor clasificado por una RI de  $\mathcal{U}_g \times U_4$ , cambie la representación del grupo  $U_4$  dejando intacta la RI de  $\mathcal{U}_g$ , obteniéndose un nuevo tensor irreducible.

Expresado formalmente lo anterior, se tiene:

Partimos de un ket conocido, clasificado por  $\mathcal{U}_g$  y  $U_4$ :

$$\left| \begin{array}{c} [h_1 \dots h_n] \\ \omega \\ [h'_1 \dots h'_q] \\ \alpha \end{array} ; \begin{array}{c} \{v_1 v_2 v_3 v_4\} \\ \beta \end{array} \right\rangle \quad (5.11)$$

en donde los números cuánticos  $\omega, \alpha, \beta$  sirven para clasificar totalmente el estado, - - siendo  $\omega$  un conjunto de eigenvalores de operadores de Casimir generalizados <sup>14)</sup>, que distinguen a los estados en aquellos casos en que haya representaciones repetidas de  $\mathcal{U}_g \times U_4$  contenidas en la RI  $[h_1 \dots h_n]$  de  $U_n$ . Los símbolos  $\alpha$  y  $\beta$  representan las RI de subgrupos de  $\mathcal{U}_g$  y de  $U_4$ , respectivamente, necesarios para clasificar los renglones de las RI de estos grupos. Una posible elección para  $\alpha$  y  $\beta$  es tomarlas como las representaciones de una cadena de subgrupos natural o canónica de  $\mathcal{U}_g$  y de  $U_4$ , respectivamente.

A los estados (5.11) se aplica el operador  $T_S^{s'}$ , que corresponde a  $\{100-1\}$  en  $U_4$  (o bien a  $\{2110\}$  en  $SU_4$ ) y el resultado de la aplicación se acopla por medio de coeficientes de Wigner en  $SU_4$  a una representación definida en este grupo. Como se vio antes la representación del grupo  $\mathcal{U}_g$  no ha cambiado en el proceso. Se obtiene, por lo tanto,

$$\sum \left\langle \begin{array}{c} \{v'_1 \dots v'_4\} \\ \beta' \end{array} ; \begin{array}{c} \{2110\} \\ \beta'' \end{array} \middle| \begin{array}{c} \{v_1 \dots v_4\} \\ \beta \end{array} \right\rangle T_{\beta''}^{\{2110\}} \left| \begin{array}{c} [h_1 \dots h_{36}] \\ \omega \\ [h'_1 \dots h'_q] \\ \alpha' \end{array} ; \begin{array}{c} \{v'_1 \dots v'_4\} \\ \beta' \end{array} \right\rangle \quad (5.12)$$

en donde  $T_{\beta''}^{\{2110\}}$  es una combinación lineal de los operadores  $T_S^{s'}$ , de tal forma que se obtenga irreducibilidad con respecto a la cadena de subgrupos de  $U_4$  que se ha elegido para especificar los renglones de la representación;

$$\left\langle \underbrace{\{v_1' v_2' v_3' v_4'\}}_{\beta} ; \underbrace{\{2110\}}_{\beta''} \middle| \underbrace{\{v_1 v_2 v_3 v_4\}}_{\beta} \right\rangle \quad (5.13)$$

es el coeficiente de Wigner que acopla las representaciones  $\{v_1' v_2' v_3' v_4'\}$  y  $\{2110\}$  en  $SU_4$  con la RI  $\{v_1 v_2 v_3 v_4\}$ , en la cadena de subgrupos cuyas RI se indican simbólicamente por el número  $\beta$ . Desde luego, podemos emplear en vez del ket de la ec. (5.12), un ket de máximo peso en el grupo  $U_4$  al cual se aplican los operadores de descenso en la cadena de subgrupos apropiada. Esto último tiene la ventaja de que el estado de máximo peso en una representación dada es siempre fácil de construir, como veremos después.

El empleo de estos operadores de descenso en la cadena  $\mathcal{U}_g \times U_4$  presenta varios problemas:

1.- Como se observa de la ec. (5.12), es necesario aplicar el operador al ket (5.11) que, como la notación misma lo indica, es el resultado de haber aplicado el polinomio, función de  $b^+$  y  $b$ , al estado de vacío  $|0\rangle$ . En otros términos, con este método no se obtienen los polinomios en  $sf$ , sino directamente aplicados al vacío; como veremos después, esto se puede evitar, por un lado; por otro lado, obscurece el tratamiento, en el sentido en que pueden desaparecer los operadores de aniquilación, indicativos de la presencia de agujeros en el problema.

2.- La presencia del coeficiente de Wigner (5.13), que eventualmente puede ser necesario en una cadena diferente a la cadena canónica; la forma explícita de los coeficientes de Wigner se conoce en unos cuantos casos y no en general. Sin embargo, se puede evitar emplear los coeficientes (5.13) por el método de pesos que permite obtener el operador de descenso en  $\mathcal{U}_g \times U_4$  en el caso en que la función de onda resultante se desee únicamente de máximo peso en el grupo  $U_4$  <sup>1)</sup>.

Teniendo en cuenta estas dificultades, procedemos en otra forma. Indicamos en el siguiente inciso un método que nos permite obtener el tensor de máximo peso de cualquiera de las RI de  $U_3 \times U_4$  contenidas en una dada de  $U_n$ , expresado como función polinomial de los operadores  $b^+$  y  $b$ .

5a.- Contracción Explícita de Índices Covariantes y Contravariantes para obtener:  
Tensores de máximo peso en la Cadena de Grupos

Como punto inicial de esta discusión, es conveniente utilizar una enumeración apropiada para los índices de los estados de una sola partícula. En el caso especial de las capas  $2s-1d$  y  $1p$  tenemos en total nueve estados orbitales y cuatro estados de spin e isospin, como se indicó antes. Los estados orbitales (caracterizados por el índice  $\mu$ ) son estados de una sola partícula en el oscilador armónico y se pueden denotar por un conjunto de tres números cuánticos  $(n, n_0, n_{-1})$ , que indican el número de cuantos del oscilador en cada una de las tres componentes esféricas.

Para estados de la capa  $s-d$

$$n_1 + n_0 + n_{-1} = 2 \quad (5.14 a)$$

y para estados de la capa  $1p$

$$n_1 + n_0 + n_{-1} = 1, \quad (5.14 b)$$

como es bien sabido. Hacemos ahora la identificación de los nueve estados con el índice  $\mu$ , tomando los valores  $1, \dots, 6$  si el estado orbital se refiere a la capa  $2s-1d$  y los valores  $1', 2'$  y  $3'$  si el estado de una partícula se refiere a la capa  $1p$ . La identifica

ción con  $(n_1 n_0 n_{-1})$  se da en la tabla I:

$n_1 n_0 n_{-1}$	200	110	101	020	011	002	100	010	001
$\mu$	1	2	3	4	5	6	1'	2'	3'

Análogamente, el índice  $S$  toma valores de 1 a 4, identificados con valores de la proyección del spin  $\sigma$  y de la proyección del isospin  $\tau$  de la manera siguiente:

$\sigma \tau$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}$
$S$	1	2	3	4

( 5.15 )

Por otro lado, deseamos clasificar los generadores de  $\mathcal{U}_g$  ( ec. 5.2 ) y de  $U_4$  ( ec. 5.3 ) de acuerdo con el concepto de peso <sup>7)</sup>. Según se indica en la referencia 1, se tiene que los generadores de  $\mathcal{U}_g$ ,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}_{\mu}^{\mu'}, \quad \mu < \mu' && \text{suben el peso} \\
 & \mathcal{E}_{\mu}^{\mu} && \text{dan el peso} \\
 & \mathcal{E}_{\mu}^{\mu'}, \quad \mu > \mu' && \text{bajan el peso,}
 \end{aligned}
 \tag{ 5.16 }$$

al actuar sobre un estado BRI del grupo  $\mathcal{U}_g$ . Una expresión análoga se tiene para los

generadores  $C_s^{s'}$  de  $U_4$ . Como se puede ver de ( 5.16 ) es necesario ordenar los índices  $\mu$  y  $s$  introducidos anteriormente. Introducimos la convención de que un estado correspondiente a un índice  $\mu$  primo es de menor peso que un estado con índice no primo, utilizándose la enumeración natural dentro de cada una de las capas; es decir, se les da mayor peso a los estados de la capa  $2s-1d$  que a los de la capa  $1p$ , lo que resulta muy conveniente cuando se introduce la clasificación por el grupo  $SU_3$ , como se verá después. En cuanto a los índices  $s$  se usa la enumeración en orden natural. Con esta convención resulta, por ejemplo, que  $\mathcal{C}_1^1$  es un operador de ascenso para el grupo  $U_9$  y que  $\mathcal{C}_2^2$  es un operador de descenso en este mismo grupo.

Impondremos ahora sobre un polinomio  $P$  en operadores de creación y de aniquilación la condición de que sea de un peso definido en ambos grupos y que este peso sea máximo. Con el objeto de evitar el uso del estado de vacío las condiciones que se imponen son las siguientes:

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_\mu^{\mu'}, P] &= 0, \quad \mu < \mu' \\ [\mathcal{C}_\mu^\mu, P] &= h_\mu P \end{aligned} \tag{ 5.17 }$$

en y

$$\begin{aligned} [C_s^{s'}, P] &= 0, \quad s < s' \\ [C_s^s, P] &= v_s P \end{aligned} \tag{ 5.18 }$$

en  $U_4$ ; el efecto de conmutar un generador del grupo con un polinomio del tipo  $P(b^+_{\mu s}, b^{-}_{\mu' s'})$  es idéntico al efecto de una derivación si se tiene cuidado de conservar el orden, ya que  $b^+$  y  $b^-$  son cantidades algebraicas no conmutativas. Con las condiciones ( 5.17 ) y ( 5.18 ) estados consistentes únicamente de partículas ( o sea, - polinomios en operadores de creación únicamente ) coinciden, para el máximo peso, con los utilizados en trabajos previos <sup>1)</sup>.

Resulta útil para expresar tensores irreducibles de grupos unitarios con operadores de Fermi, introducir el concepto de determinante de Fermi, de acuerdo con las siguientes definiciones:

$$\Delta_{\mu_1 \dots \mu_j}^{s_1 \dots s_j} = \sum_{P_s} (-1)^{P_s} P_s b_{\mu_1 s_1}^+ \dots b_{\mu_j s_j}^+ \quad (5.19 a)$$

$$\nabla_{s_1 \dots s_j}^{\mu_1 \dots \mu_j} = \sum_{P_s} (-1)^{P_s} P_s b^{\mu_1 s_1} \dots b^{\mu_j s_j} \quad (5.19 b)$$

en donde  $P_s$  indica una permutación con respecto a los índices  $s$ . Si se toma en cuenta el hecho de que los operadores  $b^+$  y  $b$  anticonmutan entre sí se puede demostrar que  $\Delta$  y  $\nabla$  se comportan como determinantes con respecto a los índices  $s$  (es decir, al intercambiar dos de estos índices cambia de signo la expresión) y como permanente con respecto a los índices  $\mu$  (o sea, no se altera la expresión al intercambiar dos cualesquiera de las  $\mu_i$ )\*

Se introducen además los determinantes de Fermi siguientes,

$$\nabla_{\mu_1 \dots \mu_j}^{s_1 \dots s_j} = \sum_{P_\mu} (-1)^{P_\mu} P_\mu b_{\mu_1 s_1}^+ \dots b_{\mu_j s_j}^+ \quad (5.20 a)$$

$$\Delta_{s_1 \dots s_j}^{\mu_1 \dots \mu_j} = \sum_{P_\mu} (-1)^{P_\mu} P_\mu b^{\mu_1 s_1} \dots b^{\mu_j s_j} \quad (5.20 b)$$

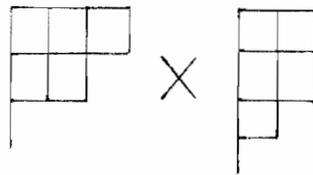
\* No se deben confundir los determinantes de Fermi  $\nabla_{s_1 \dots s_j}^{\mu_1 \dots \mu_j}$  con los introducidos en la referencia 1, los cuales coinciden con  $\nabla_{\mu_1 \dots \mu_j}^{s_1 \dots s_j}$  definidos en la ecuación (5.20 a). El punto en  $\nabla$  tiene por objeto distinguirlos; se observa que  $\nabla$  es formalmente idéntico a  $\Delta$ , salvo que está definido en términos de operadores de aniquilación.

en donde los papeles de  $\mu$  y  $s$  se intercambian con respecto a las expresiones análogas definidas antes, ya que  $P_\mu$  simboliza una permutación con respecto a los índices  $\mu$ .

En el caso de contracción en el grupo  $U_4$  conviene utilizar estas dos últimas expresiones, mientras que las definiciones ( 5.19 a ) y ( 5.19 b ) son útiles en el caso en que se efectúe la contracción de un cuadro con un anticuadro en el grupo de degeneración orbital. Como es al primer tipo de contracciones al cual nos referiremos a continuación, los polinomios que se obtendrán estarán expresados en términos de  $\nabla_{\mu_1 \dots \mu_j}^{s_1 \dots s_j}$  y

$$\Delta_{s_1 \dots s_j}^{\mu_1 \dots \mu_j} .$$

Si tenemos un diagrama de Young ordinario para la RI de  $U_g \times U_4$ , entonces el polinomio de máximo peso, que satisface las condiciones ( 5.17 ) y ( 5.18 ), se construye en términos de  $\nabla_{\mu_i \dots \mu_j}^{s_1 \dots s_j}$  como se indica en la referencia 1. Como ejemplo supóngase que se desea construir el tensor irreducible de máximo peso correspondiente a :



en  $U_g \times U_4$  . Inmediatamente se observa que

$$P = \nabla_{12}^{11} \nabla_{12}^{22} \nabla_1^3$$

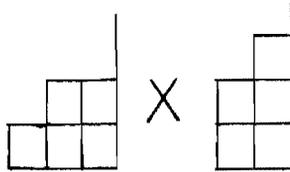
satisface las condiciones de máximo peso y que corresponde al peso apropiado en ambos grupos, si se recuerdan el efecto de  $C_\mu^{\mu'}$  y  $C_s^{s'}$  sobre  $P$  y las propiedades de los determinantes de Fermi .

Ahora supóngase que se tienen en ambos grupos diagramas de Young con representaciones de índices puramente negativos. El polinomio de máximo peso se construye en forma análoga al anterior, utilizando ahora los determinantes definidos en ( 5.20 b ), como es claro si se hace notar el efecto de  $C_\mu^{\mu'}$  sobre  $b^{\bar{\mu} \bar{s}}$  :

$$[c_{\mu}^{\mu'}, b^{\bar{\mu} \bar{s}}] = -b^{\mu'} \delta_{\mu}^{\bar{\mu}} \quad (5.21 a)$$

$$[c_s^{s'}, b^{\bar{\mu} \bar{s}}] = -b^{\bar{\mu} s'} \delta_s^{\bar{s}} \quad (5.21 b)$$

Así, por ejemplo, a las representaciones



les corresponde el polinomio de máximo peso

$$P' = \Delta_4^{3' 2'} \Delta_3^{3' 2'} \Delta_2^{3'}$$

expresado en términos de operadores de aniquilación.

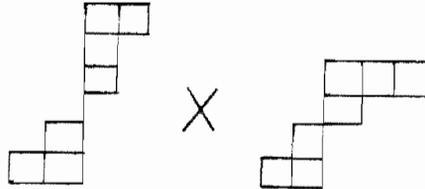
Se observa que los índices orbitales en este último caso toman el menor valor posible compatible con la estructura de los determinantes, mientras que en el caso de representaciones de partículas (índices puramente positivos) estos índices toman los mayores posibles, de acuerdo con la convención introducida antes.

Con estos polinomios podemos construir ahora el polinomio de máximo peso de una representación de  $U_9 \times U_4$ , obtenida por superposición directa de un diagrama de Young ordinario con otro consistente únicamente de índices negativos; o sea, la representación de  $U_9 \times U_4$  sobre la cual no se ha efectuado ninguna contracción. El polinomio correspondiente es simplemente el producto directo de los polinomios de máximo peso de cada una de las representaciones, del tipo de  $P$  y  $P'$  de los ejemplos antes considerados.

Se procede ahora a la construcción del polinomio de máximo peso de -

un diagrama contraído. Veamos por medio de un ejemplo como se procedería en general.

Supóngase que se tienen las RI  $[1^4 0 \dots 0^{-3}]$  de  $U_n$  y  $[2 1 \dots -1 -2] \times \{3 1 -1 -2\}$  de  $U_9 \times U_4$ , que gráficamente se representan en la forma



( se hace notar, de paso, que las partes positivas y negativas de los dos diagramas son conjugadas ).

El polinomio de máximo peso correspondiente a este diagrama de Young es

$$P = \nabla_{123}^{111} \nabla_1^2 \Delta_3^{3'} \Delta_{44}^{3'2'} \quad (5.22)$$

que, de acuerdo con lo indicado antes, es el producto directo de

$$\bar{P} = \nabla_{125}^{111} \nabla_1^2$$

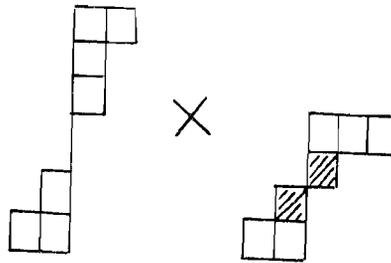
polinomio de máximo peso correspondiente a las partes positivas de los diagramas, con

$$\bar{P}' = \Delta_3^{3'} \Delta_{44}^{3'2'}$$

polinomio de máximo peso correspondiente a las partes negativas, expresado en términos de operadores de aniquilación.

Ahora deseamos efectuar una contracción en  $U_4$ ; es decir, se quiere obtener el tensor irreducible de máximo peso correspondiente a la representación

$$[2 1 1 \dots -1 -2] \times \{3 0 0 -2\} \quad \text{en } U_9 \times U_4, \text{ que gráficamente se indica como}$$



Como no se quiere alterar la RI de  $\mathcal{U}_g$  los índices orbitales no se alteran, garantizando así que el polinomio obtenido siga siendo de máximo peso en este grupo. Por otro lado, para obtener el peso adecuado en el grupo  $U_4$ , se hace notar que el índice  $S$  no puede tomar los valores 2 y 3; esto se puede lograr de la siguiente manera,

$$\nabla_{123}^{111} \nabla_1^S \Delta_S^{3'} \Delta_{44}^{3'2'}$$

si recordamos la expresión ( 5.21 b ). Para obtener el máximo peso en  $U_4$  sumamos sobre todos los valores posibles que puede tomar  $S$ ; en otras palabras, se efectúa una contracción sobre el índice  $S$ , logrando así que

$$\sum_S \nabla_1^S \Delta_S^{3'}$$

permanezca invariante frente a transformaciones en  $U_4$  ya que conmuta con los generadores  $C_S^{5'}$  de este grupo. El polinomio

$$P = \sum_S \nabla_{123}^{111} \nabla_1^S \Delta_S^{3'} \Delta_{44}^{3'2'}$$

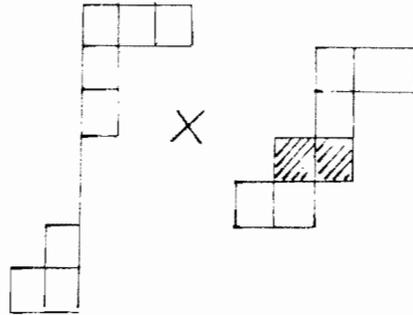
es de máximo peso en  $U_4$  si lo era el polinomio original, por consiguiente.

Se ha simulado el efecto del operador de descenso definido en el inciso anterior ( ec. 5.12 ), sin necesidad de utilizarlo explícitamente.

De paso, se observa que el resultado es el mismo independientemente de la longitud de cada fila del diagrama siempre que la estructura de éste sea la misma que la del considerado en el ejemplo. ( Hay que hacer notar, sin embargo, que en el caso de los

grupos considerados la longitud de cada fila está limitada. Por ejemplo, tratándose de la capa 10, las filas negativas pueden tener a lo más una longitud de tres cuadros, correspondientes a los tres diferentes valores del índice  $\mu$  en esta capa).

Si se hubiera considerado el caso,



por ejemplo, el diagrama de superposición directa no es un diagrama de Young permitido en el grupo  $U_4$ , ya que en la tercera fila se superponen un cuadro y un anticuadro. Si se aplican las reglas de construcción empleadas para obtener el polinomio ( 5.22 ), se obtiene la expresión,

$$\nabla_{123}^{111} \nabla_1^2 \nabla_1^3 \Delta_3^{3'} \Delta_{44}^{3'2'}$$

que es igual a

$$\sum_S \nabla_{123}^{111} \nabla_1^2 \nabla_1^S \Delta_3^{3'} \Delta_{44}^{3'2'},$$

ya que para  $S \neq 3$  los términos de esta última expresión valen cero; como ejemplo, el término con  $S = 2$ , es del tipo

$$\nabla_{123}^{111} \nabla_1^2 \nabla_1^2 \Delta_3^{3'} \Delta_{44}^{3'2'} \equiv 0$$

ya que  $\nabla_1^2$  aparece dos veces. Por consiguiente, la contracción se efectúa automáticamente en este tipo de diagramas; en este caso se obtiene el polinomio de máximo peso en  $\mathcal{Z}_3 \times U_4$  correspondiente a la RI  $\{310-2\}$  en  $U_4$ .

Volviendo al caso ( 5.22 ) antes considerado, vemos que la contracción efectuada no es la única posible, según las reglas de Littlewood enunciadas en el inciso 3 de este capítulo: el diagrama con índices  $[211\dots-1-2] \times \{210-2\}$  en  $U_2 \times U_4$  es también posible. Veamos ahora la construcción de la función de onda de máximo peso para esta RI. Para obtener el polinomio de peso correcto el índice  $s$  debe tomar el valor  $s=1$  únicamente dos veces y no debe tomar el valor  $s=3$ . En otras palabras se desea una expresión del tipo

$$\sum_s \nabla_{123}^{11s} \nabla_1^2 \Delta_s^{3'} \Delta_{44}^{3'2'}$$

en el cual no se han alterado los índices orbitales por la misma razón de antes y se ha contraído con respecto al índice  $s$ , de acuerdo con el resultado del ejemplo anterior. Pero este polinomio no conmuta con todos los generadores de ascenso de  $U_4$  ( con  $C_1^2$  por ejemplo ) y no se obtiene, por tanto, una función de máximo peso. Sin embargo el polinom

$$\sum_s \nabla_{123}^{112} \nabla_1^s \Delta_s^{3'} \Delta_{44}^{3'2'}$$

también tiene el peso adecuado en  $U_4$  y tampoco es de máximo peso en este grupo. Es de esperarse entonces, que una combinación lineal de ambas expresiones, que claramente son linealmente independientes, sea de máximo peso. Se propone por consiguiente, el polinomio

$$P = \alpha \sum_s \nabla_{123}^{11s} \nabla_1^2 \Delta_s^{3'} \Delta_{44}^{3'2'} + \beta \sum_s \nabla_{123}^{112} \nabla_1^s \Delta_s^{3'} \Delta_{44}^{3'2'}$$

en donde los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  se determinan exigiendo la condición de que este polinomio sea de máximo peso, lo que se reduce en este caso a pedir que conmute con el generador de ascenso  $C_1^2$ .

Este método para determinar el polinomio de máximo peso es análogo al método utilizado en  $i$  y es sumamente poderoso.

Veamos que condiciones deben satisfacer  $\alpha$  y  $\beta$  para que el polinomio satisfaga la condición

$$[C_1^2, P] = 0$$

Como se indicó en la discusión que sigue a la ecuación (5.18), el generador  $C_1^2$  al conmutar con  $P$  actúa como un operador diferencial; por lo tanto se tiene:

$$[C_1^2, P] = \alpha \sum_5 \nabla_{123}^{115} \nabla_1^1 \Delta_5^{3'} \Delta_{44}^{3'2'} + \beta \sum_5 \nabla_{123}^{111} \nabla_1^5 \Delta_5^{3'} \Delta_{44}^{3'2'} = 0.$$

En el apéndice C se demuestra que  $\nabla_{123}^{115} \nabla_1^1$  y  $\nabla_{123}^{111} \nabla_1^5$  no son linealmente independientes, sino que la relación

$$\nabla_{123}^{111} \nabla_1^5 - 3 \nabla_{123}^{115} \nabla_1^1 = 0$$

es válida, de acuerdo con las propiedades de los determinantes de Fermi. Tomando en cuenta esta relación, vemos que  $\alpha$  y  $\beta$  están relacionadas en la forma siguiente:

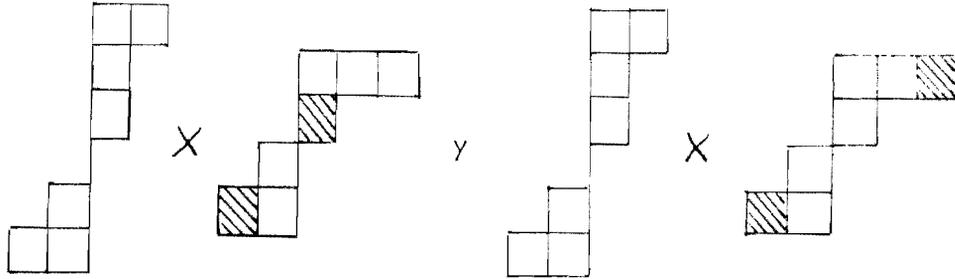
$$\alpha - 3\beta = 0,$$

con lo que se asegura que  $P$  sea de máximo peso. Esta relación determina  $\beta$  en términos de  $\alpha$ , a la cual se le puede dar un valor arbitrario que se fija por la normalización del polinomio

$$P = \sum_5 \left[ \nabla_{123}^{115} \nabla_1^2 \Delta_5^{3'} \Delta_{44}^{3'2'} - \frac{1}{3} \nabla_{123}^{112} \nabla_1^5 \Delta_5^{3'} \Delta_{44}^{3'2'} \right]. \quad (5.23)$$

Además de las contracciones consideradas hasta ahora otras dos primeras contracciones son posibles para estas representaciones; se tienen en total 4 diferentes con-

tracciones que llevan a diagramas de Young distintos entre sí; las dos no consideradas antes son



Los polinomios de máximo peso correspondientes, que se obtienen empleando la misma técnica, son

$$P = \sum_S \nabla_{123}^{111} \nabla_1^S \Delta_3^{3'} \Delta_{45}^{3'2'} - \frac{1}{2} \sum_S \nabla_{123}^{111} \nabla_1^S \Delta_5^{3'} \Delta_{43}^{3'2'} \quad (5.24)$$

y

$$P = \sum_S \nabla_{123}^{112} \nabla_1^S \Delta_5^{3'} \Delta_{43}^{3'2'} - \frac{1}{2} \sum_S \nabla_{123}^{112} \nabla_1^S \Delta_3^{3'} \Delta_{45}^{3'2'} + \frac{3}{2} \sum_S \nabla_{123}^{115} \nabla_1^2 \Delta_3^{3'} \Delta_{45}^{3'2'} - \frac{1}{3} \sum_S \nabla_{123}^{115} \nabla_1^2 \Delta_5^{3'} \Delta_{43}^{3'2'}, \quad (5.25)$$

respectivamente.

Analizaremos ahora el problema de efectuar una segunda contracción y obtener el polinomio de máximo peso correspondiente. Como se puede ver de los 4 diagramas resultantes de la primera contracción, solo dos de ellos resultan diferentes cuando se contrae por segunda vez. Esto se debe reflejar, según se vió en el inciso 3, en el hecho de que sólo dos de los polinomios de máximo peso resultantes de la segunda contracción deben ser linealmente independientes. En efecto, de la segunda contracción en los polinomios de las ecuaciones ( 5.22 ) a ( 5.25 ) se obtienen otros polinomios expresables como combinaciones lineales de las expresiones siguientes:

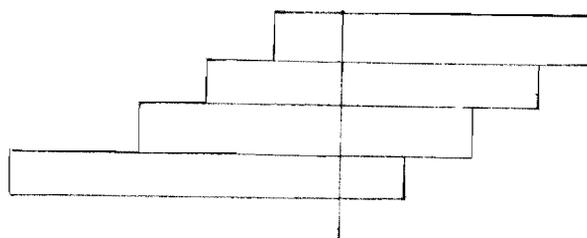
$$\sum_S \sum_{S'} \nabla_{123}^{115} \nabla_1^{S'} \Delta_5^{3'} \Delta_{45}^{3'2'}$$

γ

$$\sum_S \sum_{S'} \nabla_{123}^{11S} \nabla_{1'}^{S'} \Delta_{S'}^{3'} \Delta_{45}^{3'2'}$$

que son diferentes entre sí, aunque no ortogonales. En base a ellos se pueden obtener dos polinomios que sí lo sean, utilizando el proceso de Schmidt, por ejemplo.

La técnica general de construcción debe estar clara, ahora. Se plantea, sin embargo, el problema de la demostración en general. En este punto se deben tener claros los objetivos del trabajo, es decir, las aplicaciones físicas del método. En cualquier caso de interés físico se consideran cuando más tres agujeros en la capa  $l_p$  y el caso más general para el grupo  $U_4$ , correspondiente a todas las contracciones posibles de un diagrama ( virtual ) del tipo siguiente,

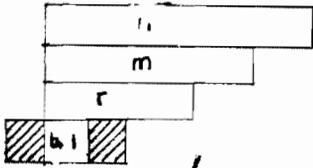
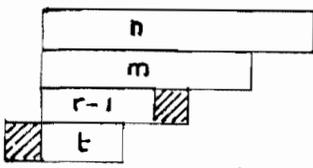
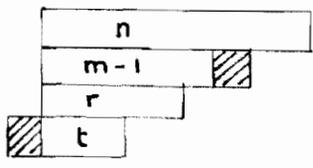
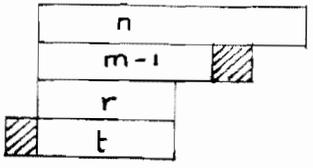


no es de interés en las aplicaciones y por lo tanto no lo consideraremos aquí. Por otro lado en la Tabla 2 se dan los polinomios de máximo peso en  $U_9 \times U_4$  que son de interés físico y para la construcción de los cuales se ha empleado una técnica similar a la utilizada en el ejemplo, que como se ha visto, implica únicamente el efectuar contracciones y el conocimiento de las relaciones entre los determinantes de Fermi. ( Apéndice C ).

Hasta ahora sólo se ha indicado la contracción en el grupo  $U_4$  habiéndose justificado este hecho indicando que las contracciones en el grupo  $U_9$  no eran necesarias. Veamos con un poco más de detalle este punto. Al efectuar una contracción en  $U_9$  se igualan índices orbitales de un operador de creación con los de un operador de aniquilación y luego se suma sobre todos los valores que puede tomar este índice  $\mu$ .

TABLA 2

Algunos Polinomios de Máximo Peso en

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$P_{\max}$
 <p style="text-align: center;"><math>n \geq m \geq r \geq t</math></p>	$\sum_s \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 1} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 2} \nabla_{1 \dots r}^{3 \dots 3} \nabla_{1 \dots t}^{4 \dots 4} \Delta_s^{3'}$
 <p style="text-align: center;"><math>n \geq m \geq r &gt; t</math></p>	$\sum_s \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 1} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 2} \left( \nabla_{1 \dots r}^{3 \dots 3} \nabla_{1 \dots t}^{4 \dots 4} + \frac{t}{r-t+1} \nabla_{1 \dots r}^{3 \dots 3} \nabla_{1 \dots t}^{4 \dots 4} \right) \Delta_s^{3'}$
 <p style="text-align: center;"><math>n \geq m &gt; r \geq t</math></p>	$\sum_s \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 1} \left( \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 2} \nabla_{1 \dots r}^{3 \dots 3} \nabla_{1 \dots t}^{4 \dots 4} + \frac{r}{m-r+1} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 2} \nabla_{1 \dots r}^{3 \dots 3} \nabla_{1 \dots t}^{4 \dots 4} + \frac{rt(m-r+1)^{-1}}{r(r+1)-t(t-1)} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 2} \nabla_{1 \dots r}^{3 \dots 3} \nabla_{1 \dots t}^{4 \dots 4} + \frac{rt^2(m-r+1)^{-1}}{r(r+1)-t(t-1)} \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 1} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 2} \nabla_{1 \dots r}^{3 \dots 3} \nabla_{1 \dots t}^{4 \dots 4} \right) \Delta_s^{3'}$
 <p style="text-align: center;"><math>n \geq m &gt; r = t</math></p>	$P = \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 1} \left( \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 2} \nabla_{1 \dots r}^{3 \dots 3} \nabla_{1 \dots r}^{4 \dots 4} \Delta_s^{3'} + \frac{r}{m-r+2} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 2} \nabla_{1 \dots r}^{3 \dots 3} \nabla_{1 \dots r}^{4 \dots 4} \Delta_s^{3'} + \frac{r}{m-r+2} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 2} \nabla_{1 \dots r}^{3 \dots 3} \nabla_{1 \dots r}^{4 \dots 4} \Delta_s^{3'} \right)$

Esto implica tener dentro de un mismo polinomio operadores de creación y de aniquilación pertenecientes a la misma capa del oscilador; por tanto la operación de contracción en  $\mathcal{U}_9$  altera el número de partículas en cada capa, violando la hipótesis simplificatoria indicada antes.

Por otro lado esto resulta muy conveniente, ya que entonces el clasificar las funciones de onda por los subgrupos de  $\mathcal{U}_9$ ,  $\mathcal{U}_6 + \mathcal{U}_3$ , que esencialmente es reflejo de la hipótesis simplificatoria indicada antes, se logra automáticamente. Sabemos que al contraer el polinomio en  $U_4$  los índices orbitales no se alteran; por otro lado, el polinomio original (antes de operar con el proceso de contracción en  $U_4$ ) es una función de máximo peso en  $\mathcal{U}_9$  y está constituido por el producto directo de un polinomio de máximo peso en  $\mathcal{U}_6$  con otro de máximo peso también, pero en el grupo  $\mathcal{U}_3$ ; por consiguiente, todas las funciones de onda que se obtengan por contracciones en  $U_4$  corresponden a una RI de  $\mathcal{U}_6$  cuyos índices están dados por la parte positiva del diagrama y a una RI de  $\mathcal{U}_3$  cuyos índices están dados por la parte negativa de este mismo diagrama.

Así, por ejemplo, en el caso considerado antes, los polinomios corresponden a  $[2\ 1\ 1]$  en  $\mathcal{U}_6$  y a  $[0\ -1\ -2]$  en  $\mathcal{U}_3$ .

Cualquier otra representación de  $\mathcal{U}_6 + \mathcal{U}_3$  contenida en la RI dada de  $\mathcal{U}_9$ , que en el caso más general indudablemente existe, corresponde a un estado con diferente número de partículas en cada capa y no es de interés en nuestro problema.

En esta forma se ha construido en forma analítica el polinomio

$$P_{\{W_n \supset \mathcal{U}_9 \times U_4 \supset (\mathcal{U}_6 + \mathcal{U}_3) \times U_4\}}$$

de máximo peso en  $\mathcal{U}_9$ ,  $\mathcal{U}_6 + \mathcal{U}_3$  y  $U_4$ . Sin embargo, la clasificación de la

función de onda no está completa, siendo nuestro objetivo final introducir en ella a los subgrupos  $SU_3$  y  $R_3$  de  $Z_9$  y a los subgrupos  $SU_2^{(\sigma)}$  y  $SU_2^{(\tau)}$  de  $U_4$ .

#### 6.- Obtención de Estados Físicos.

En el procedimiento analítico de construcción de los polinomios indicado hasta ahora, se han obtenido estructuras polinomiales en operadores de creación y de aniquilación, sin referirnos a las propiedades del vacío (1.1) sobre el cual actúan los polinomios; no hemos especificado, por tanto, las propiedades tensoriales del vacío, siempre presente en las formulaciones de problemas de muchos cuerpos que emplean las técnicas de la 2a. cuantización.

Consideraremos ahora la obtención de "estados físicos", es decir de estados representados en 2a. cuantización, cuyas funciones de onda están dadas por las operaciones polinomiales previamente construidas actuando sobre el estado de vacío

Cuando se considera el problema de partículas en interacción dentro de una sola capa del oscilador <sup>1)</sup>, el vacío, ( indicado en la referencia 1 y art. I, II como  $|0\rangle$ , por referirse a un estado de total ausencia de partículas en la capa ), satisficirá la condición

$$b^{\mu s} |0\rangle = 0 \quad \forall \mu, s \quad (6.1)$$

en donde  $\mu$  se refiere a las coordenadas orbitales (dentro de la misma capa) y  $s$  a las coordenadas de spin e isospin. En otros términos, de acuerdo con la definición de los generadores de los grupos unitarios correspondientes, el vacío  $|0\rangle$  corresponde a una  $[0]$ , en todos ellos: el vacío es un escalar con respecto a cualquier transformación unitaria, sin importar, el espacio en donde se lleve a cabo la transformación. Por consi--

guiente, si se construye un polinomio  $P(b_{\mu s}^+)$  (función únicamente de los operadores de creación, en este caso) que tenga propiedades tensoriales irreducibles con respecto a un grupo dado, las representaciones no se alteran al aplicar este polinomio al estado de vacío.

El problema tiene otras características cuando entran en juego dos capas y se desea tener funciones de onda correspondientes a configuraciones de partícula-agujero. Aquí el vacío está definido por la ecuación (1.1) en forma natural y de acuerdo con esta definición y el Principio de Pauli, se satisfacen las condiciones

$$b_{\mu s} |0x\rangle = 0 \quad \mu = 1, \dots, 6; \quad s = 1, \dots, 4 \quad (a)$$

$$b_{\mu s}^+ |0x\rangle = 0 \quad \mu = 1', 2', 3'; \quad s = 1, \dots, 4. \quad (b)$$

(6.2)

que se podrían considerar como una definición alternativa de  $|0x\rangle$ . (Se hace notar que esta misma definición  $|x\rangle$  para el vacío, sería la natural y conveniente cuando se considera una sola capa, conteniendo un número de partículas cercano a su capacidad, de acuerdo con el Principio de Pauli<sup>(5)</sup>).

De la ecuación (6.2 a) se ve que  $|0x\rangle$  es un invariante con respecto al grupo  $U_6$ , subgrupo de  $U_9$ , que corresponde a transformaciones unitarias en el espacio de degeneración de la capa  $s=d$  y cuyos generadores son, (ver ecuación 5.2)

$$c_{\mu}^{\mu'} \quad \mu, \mu' = 1, \dots, 6.$$

Por otro lado,

$$c_{\mu}^{\mu'} |0x\rangle = 0 \quad \mu, \mu' = 1', 2', 3'; \quad \mu \neq \mu' \quad (6.3)$$

$$c_{\mu}^{\mu} |0x\rangle = 4 |0x\rangle \quad \mu = 1', 2', 3'.$$

En otras palabras, con respecto a transformaciones del grupo  $U_3$ , relativo a la capa  $|p, |0x\rangle$  es de máximo y mínimo peso a la vez con RI, por tanto,  $[4^3]$  en este grupo  $U_3$ .

De la definición de  $|0x\rangle$  se observa que es de mínimo peso en  $U_9$  y que con respecto al grupo  $U_4$  es de máximo y mínimo peso a la vez. Corresponde, por tanto, a un tensor irreducible del producto directo  $U_9 \times U_4$ , con índices  $[4^3] \times \{3^4\}$ .

Teniendo en cuenta las propiedades del vacío del problema, veamos ahora que carácter de irreducibilidad tienen los estados físicos, formados por polinomios en operadores de aniquilación y de creación, clasificadas por R.I. de  $U_9 \times U_4$ , aplicadas al vacío.

Como el estado  $|0x\rangle$  no es un invariante con respecto a  $U_9$  ó a  $U_4$ ,  $P|0x\rangle$  en principio no debería tener carácter irreducible con respecto a estos grupos, sino ser una mezcla de diferentes representaciones, de acuerdo con la serie de Clebsch - Gordan. Sin embargo, tanto  $P$  como  $|0x\rangle$  son polinomios de máximo peso en el grupo  $U_4$  por construcción, resultando entonces el producto directo de los dos polinomios de máximo peso en este grupo.

Formalmente :

$$C_s^{s'} P|0x\rangle = PC_s^{s'}|0x\rangle + [C_s^{s'}, P]|0x\rangle = 0,$$

de acuerdo con las ecuaciones ( 6.2 ) y ( 5.18 )

En otras palabras,  $P|0x\rangle$  sigue correspondiendo a una RI del grupo  $U_4$ ; como el peso de  $P|0x\rangle$  es diferente al de  $P(b^+, b)$  y al de  $|0x\rangle$ , la RI de  $U_4$  cambia, desde luego, de tal forma que si  $P$  corresponde a la RI  $\{v^1 v^2 v^3 v^4\}$  de  $U_4$ ,  $P|0x\rangle$  corresponde a la RI  $\{v_1+3, v_2+3, v_3+3, v_4+4\}$  de  $U_4$  y continúa siendo de máximo peso. ( Pasa algo análogo al acoplar  $\psi_{j_1 j_1}$  y  $\psi_{j_2 j_2}$ , BRIs del grupo

$R_3$ , cuando se acoplan para tener un momento angular total  $J = j_1 + j_2$  con proyección  $M_J = J = j_1 + j_2$ , en cuyo caso el coeficiente de Wigner correspondiente vale la unidad:  $\Psi_{j_1 j_1} \Psi_{j_2 j_2}$  (está automáticamente acoplada a  $J$  y  $M$  totales).

Con respecto al acoplamiento en el grupo  $U_9$ , el razonamiento anterior ya no es válido, puesto que  $|0x\rangle$  no es de máximo sino de mínimo peso en  $U_9$ . Como consecuencia  $P|0x\rangle$ , resulta el producto de un tensor de máximo peso con uno de mínimo peso en  $U_9$ . Sin embargo  $P|0x\rangle$  es una expresión polinomial en términos de operadores de creación de Fermi, clasificada por una RI de  $U_4$ ; automáticamente es irreducible entonces en el grupo complementario  $U_9$  (con respecto a  $U_n$ , en donde  $P|0x\rangle$  corresponde a una RI de una columna) con una RI en este grupo conjugada a la asociada con  $P|0x\rangle$  en  $U_4$ .

Con respecto al subgrupo de  $U_9$ ,  $U_6 \dagger U_3$  se obtiene un resultado análogo. El estado de vacío  $|0x\rangle$  es un escalar con respecto a  $U_6$  y por tanto  $P|0x\rangle$  tiene el mismo carácter tensorial en este grupo que la expresión polinomial  $P(b^+, b)$ . Se ha demostrado, al final del inciso anterior, que  $P$  corresponde como tensor de Young a la RI  $[h_i]$  de  $U_6$ , en donde  $[h_i]$  es el diagrama de Young de índices puramente positivos en la representación de  $U_9$ . Por consiguiente  $P|0x\rangle$  corresponde a la misma RI  $[h_i]$  de  $U_6$ . Si consideramos ahora, el otro grupo de la suma directa, o sea el grupo  $U_3$ , vemos que  $|0x\rangle$ , de acuerdo con las ecuaciones (6.3 a y b) es también el máximo peso de la RI  $[4^3]$  de  $U_3$ . Aplicando un razonamiento análogo al utilizado en la página anterior para  $U_4$ , se tiene que  $P|0x\rangle$  es también de máximo peso en  $U_3$  y que corresponde a la RI con índices  $[4-h''_i]$  en donde  $[-h''_i]$  es la parte negativa de la RI de  $U_9$  considerada.

En resumen, si  $P$  está clasificada por  $[h_i]$  en  $U_9$ ,  $\{v_i\}$  en

$U_4$ ,  $[h_i']$  en  $\mathcal{U}_6$  y  $[-h_i'']$  en  $\mathcal{U}_3$ ,  $|l_0x\rangle$  se transforma como  $\{v_i+3\}$  con respecto a  $U_4$ , la representación conjugada en  $\mathcal{U}_6$ ,  $[h_i']$  en  $\mathcal{U}_6$  y finalmente,  $[4-h_i'']$  en  $\mathcal{U}_3$ .

Como parte final de la construcción analítica de las funciones de ondas deseamos introducir en la clasificación, por las razones expuestas en el inciso I, los subgrupos de  $\mathcal{U}_9$ ,  $SU_3$  grupo de simetrías del oscilador armónico y  $R_3$ , grupo de rotaciones en tres dimensiones, asociado con el momento angular orbital, por un lado; por otra parte, deseamos también clasificar los estados por los subgrupos  $SU_2^{(\sigma)}$  y  $SU_2^{(\tau)}$  de  $U_4$ , que nos introducen en la clasificación el spin total  $S$  y el isospin total  $T$ . Se indicará el procedimiento para conseguir esto en los incisos siguientes.

### 7.- Clasificación de las Funciones de Onda por la Cadena de Subgrupos de

$$\underline{U}_9, \underline{SU}_3 \supset \underline{R}_3$$

Como primer paso para lograr clasificar los estados por RI de  $SU_3 \supset R_3$ , es necesario analizar estos subgrupos y sus relaciones con el grupo  $U_9$  grupo de degeneración orbital de las dos capas del oscilador armónico.

En primer lugar, demostraremos explícitamente que los generadores de  $SU_3$  se pueden expresar como combinaciones lineales de los generadores de  $U_9$ , probando con este resultado, el hecho de que  $SU_3$  es verdaderamente un subgrupo de  $U_9$ .

Para esto, basta recordar la expresión para los operadores de una sola partícula en términos de  $E_{\mu}^{\mu'}$  (generadores de  $U_9$ ) cuando estos operadores son independientes de las coordenadas de spin e isospin, que se encuentra en la referencia 1 :

$$W = \sum_{\mu, \mu'} \langle \mu | W | \mu' \rangle E_{\mu}^{\mu'} \quad (7.1)$$

en donde  $\mu, \mu'$  son números cuánticos que definen los estados orbitales de una sola partícula, en el caso que tratamos, dentro de un potencial común de oscilador armónico.

Considérese los operadores de creación y aniquilación ordinarios del oscilador ( la. cuantización ) :

$$a_{\mathfrak{q}}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_{\mathfrak{q}} - iP_{\mathfrak{q}}), \quad a_{\mathfrak{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_{\mathfrak{q}} + iP_{\mathfrak{q}}) . \quad (7.2)$$

$$\mathfrak{q} = 1, 0, -1$$

De acuerdo con las reglas de conmutación

$$[x_i, P_j] = i \delta_{ij} \quad (7.3)$$

se tiene que  $a_{\mathfrak{q}}^{\dagger}$  y  $a_{\mathfrak{q}'}$  satisfacen las relaciones de conmutación :

$$[a_{\mathfrak{q}}^{\dagger}, a_{\mathfrak{q}'}^{\dagger}] = [a_{\mathfrak{q}}, a_{\mathfrak{q}'}] = 0 \quad (7.4)$$

$$[a_{\mathfrak{q}}^{\dagger}, a_{\mathfrak{q}'}] = \delta_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} .$$

( Aquí  $a_{\mathfrak{q}}^{\dagger}$  y  $a_{\mathfrak{q}'}$  son operadores de creación y aniquilación, respectivamente, de cuantos dentro del oscilador armónico y son operadores de una sola partícula, sin relación alguna a los operadores  $b_{\mu}^{\dagger}$  y  $b_{\mu'}$  antes introducidos ).

Si ahora se define, ( referencia 1 )

$$C_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} = a_{\mathfrak{q}}^{\dagger} a_{\mathfrak{q}'} \quad (7.5)$$

y se emplean las relaciones ( 7.4 ), se demuestra que los operadores de una sola partícula ( 7.5 ) forman los generadores del grupo  $U_3$  de simetría del oscilador armónico.

Pero ahora se puede aplicar la expresión ( 7.1 ) con  $C_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'}$ , operador de una sola partícula, en vez de  $W$  :

$$C_q^{\mathfrak{g}} = \sum_{\mu, \mu'} \langle \mu | C_q^{\mathfrak{g}'} | \mu' \rangle \mathcal{E}_{\mu}^{\mu'} \quad (7.6)$$

en donde la suma sobre  $\mu$  y  $\mu'$  va sobre todos los estados posibles del oscilador, es decir, se forma un sistema completo. Utilizando este hecho se ve que los operadores (7.6) forman un grupo de Lie, subgrupo de  $U_9$  e isomorfo al generado por  $C_q^{\mathfrak{g}'}$ . Es decir, el subgrupo  $U_3$  buscado.

Si restringimos los estados  $\mu, \mu'$  a estados de las capas s-d y p, usando para  $\mu$  las relaciones indicadas en la tabla 1, es decir,  $\mu = (n_1, n_0, n_{-1})$ ,  $\mu' = (n_1', n_0', -n_{-1}')$ , se observa que como  $C_q^{\mathfrak{g}'}$  no altera el número total de cuantos en un estado del oscilador, se tiene la restricción siguiente sobre la suma en la ec. (7.6) :

$$n_1 + n_0 + n_{-1} = n_1' + n_0' + n_{-1}' \quad (7.7)$$

Si además se emplea el resultado bien conocido de los elementos de matriz de  $a_q^+$  y  $a_q$  con respecto a estos estados

$$\langle n_1, n_0, n_{-1} | a_q^+ | n_1', n_0', n_{-1}' \rangle = \sqrt{n_1' + 1} \int_0^{n_1' + \delta q_1} \int_0^{n_0' + \delta q_0} \int_0^{n_{-1}' + \delta q_{-1}} \quad (7.8)$$

se tienen las combinaciones lineales apropiadas que nos expresan  $C_q^{\mathfrak{g}'}$  en función de  $\mathcal{E}_{\mu}^{\mu'}$ , generadores de  $U_9$ . Estas se dan en la tabla 3.

De la ecuación (7.7) se concluye un resultado muy importante, que se puede verificar fácilmente en la tabla 3: los generadores  $C_q^{\mathfrak{g}'}$  de  $U_3$  quedan expresados como generadores de  $U_6 \dot{+} U_3$ , puesto que no interviene nunca en la expresión de  $C_q^{\mathfrak{g}'}$  un operador que conecte estos dos grupos. Esto además debe ser así, ya que

$U_6$  y  $U_3$  se refieren a grupos de simetría orbital en una capa completa del oscilador.

(ref. 1).

TABLA 3

$C_1^2$	$\sqrt{2} C_1^2 + \sqrt{2} C_2^4 + C_3^5 + C_{1'}^{2'}$
$C_1^3$	$\sqrt{2} C_1^3 + C_2^5 + \sqrt{2} C_3^6 + C_{1'}^{3'}$
$C_2^3$	$C_2^3 + \sqrt{2} C_4^5 + \sqrt{2} C_5^6 + C_{2'}^{3'}$
$C_1^1$	$2C_1^1 + C_2^2 + C_3^3 + C_{1'}^{1'}$
$C_2^2$	$C_2^2 + 2C_4^4 + C_5^5 + C_{2'}^{2'}$
$C_3^3$	$C_3^3 + C_5^5 + 2C_6^6 + C_{3'}^{3'}$
$C_2^1$	$\sqrt{2} C_2^1 + \sqrt{2} C_4^2 + C_5^3 + C_{2'}^{1'}$
$C_3^1$	$\sqrt{2} C_3^1 + C_5^2 + \sqrt{2} C_6^3 + C_{3'}^{1'}$
$C_3^2$	$C_3^2 + \sqrt{2} C_5^4 + \sqrt{2} C_6^5 + C_{3'}^{2'}$

Utilizando este resultado, es sumamente sencillo encontrar las representaciones de  $SU_3$  contenidas en una representación dada de  $U_6$  y  $U_6 + U_3$ . Por un lado, se conocen las representaciones de  $SU_3$  contenida en una de  $U_6$  ( ver la tabla

correspondiente en el trabajo de Elliott ( ref. 6 ), obtenida por medio del método llamado pletismo ). Por otro lado, el grupo  $U_3$  referente a transformaciones en la capa  $1p$  es idéntico al grupo de simetrías del oscilador armónico, de tal forma que la representación de  $SU_3$  que contiene una RI dada de  $U_3$  es idéntica a esta última. Se multiplican entonces, utilizando las reglas de Littlewood, ( aplicables en este caso ) las representaciones de  $SU_3$  contenidas en  $U_6$  con la representación de  $U_3$  obteniéndose así la información buscada.

Una vez aclarada la relación entre los grupos  $SU_3$  y  $U_3$ , procedemos a construir a partir de los polinomios empleados hasta ahora, las bases que correspondan a una representación irreducible para  $SU_3$ . Una vez más, nos interesa clasificar el estado por subgrupos de  $SU_3$  que tengan significado físico; por lo tanto nos ocuparemos únicamente de indicar la construcción de la función de onda de máximo peso en el subgrupo  $SU_3$ .

El procedimiento es el mismo que el empleado en I con este objeto: el método de pesos. Consiste en construir todos los polinomios del tipo introducido en el inciso 6 de este capítulo que, por un lado, sean linealmente independientes entre sí y por el otro correspondan al mismo peso en  $SU_3$ ; posteriormente se forman combinaciones lineales de estos polinomios con coeficientes arbitrarios y se determinan estos últimos por la condición de que la combinación lineal resultante sea de máximo peso en el grupo  $SU_3$ .

Estas combinaciones lineales se pueden formar de los polinomios, función de  $b^{\mu s}$  y  $b^{\mu' s'}$  obtenidos antes, aunque también se pueden formar de los estados físicos definidos en el inciso anterior, o sea de los kets obtenidos por aplicación de estos polinomios al estado  $|0\rangle$ . Como se puede ver de la tabla 3 y de las propiedades del estado de vacío, éste corresponde a una representación irreducible de  $U_3$ , con índices

$$(k_1, k_2, k_3) = (4, 4, 4) \quad , \text{siendo por consiguiente un invariante con res-}$$

pecto a transformaciones unimodulares unitarias.

Si definimos el peso de un polinomio como el conjunto de eigenvalores de los operadores  $C_q^{\nu}$  como es habitual y si se definen los operadores de ascenso en  $U_3$  como los generadores  $C_q^{\nu'}$  con  $q < q'$  y utilizamos las expresiones para estos generadores en función de  $C_{\mu}^{\mu'}$  (tabla 3), el procedimiento es idéntico al que se sigue en I para el caso de estados de partículas. Para mayores detalles nos referimos, por consiguiente, a este artículo.

Una vez que se obtiene la función de máximo peso, los polinomios que constituyen la base completa, se clasifican por el subgrupo  $R_3$  de  $SU_3$  y se obtienen por medio del operador de descenso,  $M_{\llcorner'}$  introducido en I; este operador es tal que no altera la representación de  $SU_3$  a que corresponde el polinomio sobre el cual opera, ya que está formado por generadores de este subgrupo, pero que cambia el momento angular orbital  $L$ , índice de la  $RI$  de  $R_3$ , a un valor diferente  $L'$ .

$$M_{\llcorner'} | [k] \otimes [k'] + [k''] \chi(k_1, k_2) \omega L L \rangle = \sum_{\omega'} B_{\omega'} | [k] \otimes [k'] + [k''] \chi(k_1, k_2) \omega' L' L' \rangle, \quad (7.9)$$

en donde  $[k]$ ,  $[k']$  y  $[k'']$  son los índices de las representaciones de los grupos  $U_2$ ,  $U_6$  y  $U_3$ , respectivamente;  $(k_1, k_2)$  son los correspondientes índices para  $SU_3$  y  $L$  se refiere al momento angular. Los números cuánticos  $\chi$  y  $\omega$  son eigenvalores de operadores hermitianos (a los que se les llama operadores de Casimir generalizados) que sirven para distinguir entre funciones de onda que sean linealmente independientes y que correspondan a los mismos índices de representaciones de todos los grupos

incluidos en la clasificación \*. Los índices  $\{v\}$  se refieren a la RI de  $U_4$  mientras que el número cuántico  $\beta$  corresponde a un conjunto de índices que se especificará más adelante.

La forma explícita de  $\mathcal{M}_{LL'}$ , se da en 1, y es la siguiente :

$$\mathcal{M}_{LL'} = \sum_{\tau=2}^Z (-1)^\tau \left[ \frac{(Z+\tau)!}{2^{Z-\tau} (2-\tau)!} \right]^{1/2} \frac{(L-L'+\tau)! (L+L'+3)!}{(L-L'+\tau)! (L-L'+\tau+1)!} (\mathcal{L}-1)^{\tau+L-L'} \quad (7.10)$$

en donde

$$\mathcal{L}_m = -\sqrt{2} \sum_{q, q'} (-1)^q \langle 11q - q' | 1m \rangle C_q^{q'} \quad (7.11 a)$$

y

$$Q_\tau = -\sum_{q, q'} (-1)^q \langle 11q - q' | 2\tau \rangle C_q^{q'}, \quad (7.11 b)$$

con  $\langle 11q - q' | 1m \rangle$  y  $\langle 11q - q' | 2\tau \rangle$  coeficientes de Clebsch - Gordan de  $R_3$  que sirven para obtener tensores de Racah a partir de combinaciones lineales de generadores de  $SU_3$ ; en otras palabras, los operadores  $\mathcal{L}_m$  definidos en (7.11 a) son los generadores del subgrupo  $R_3$  de  $SU_3$ .

El proceso de obtención de las funciones de onda en esta cadena se completa si sabemos como construir el polinomio correspondiente al máximo valor de  $L$  contenido en la representación  $(k_1, k_2)$  dada. Este problema ha sido resuelto ya, puesto que se sabe que el polinomio de máximo peso en  $SU_3$  previamente construido corresponde a un momento angular total definido  $L = k_1$ , que es el máximo valor de  $L$  posible<sup>1)</sup>.

\* La necesidad de introducir  $\alpha$  y  $\omega$  surge del hecho de que la cadena de subgrupos empleada en la clasificación de las funciones de onda de la ecuación (7.9), no es canónica.

Aplicando el operador ( 7.10 ) a este estado se genera entonces la base completa .

### 8.- Clasificación de la Función de Onda por el Subgrupo $SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)}$ de $U_4$

Daremos en esta sección un breve resumen de como se obtienen estados clasificados por el subgrupo  $SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)}$  de  $U_4$ , ( estados con isospin T y spin S totales definidos ), a partir del estado de máximo peso en el grupo  $U_4$  construido como se indicó antes. En otras palabras, nos interesa en este punto la especificación del índice que aparece en los estados de la ecuación ( 7.9 ).

Como se demuestra en la referencia 1, los estados de máximo peso en  $U_4$  corresponden a valores bien definidos del isospin y del spin.

$$T = \frac{1}{2} (\nu_1 + \nu_3 - \nu_2 - \nu_4), \quad S = \frac{1}{2} (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - \nu_4) \quad (8.1)$$

y de máxima proyección en ambos espacios . En completa analogía al operador  $\eta_{LL'}$  empleado más arriba como operador de descenso en la cadena  $SU_3 \supset R_3$ , se pueden introducir operadores  $\mu_{S^{S'}}$  y  $\mu_{T^{T'}}$  tales que actuando sobre estados de spin S e isospin T nos produzcan estados con spin S' e isospin T', respectivamente, de máxima proyección en ambos espacios. Aplicándolos sobre el estado de máximo peso se puede generar la base completa en la cadena de interés  $SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)}$  aún cuando un mismo valor de S o de T aparezca más de una vez en la representación  $\{\nu\}$  dada de  $U_4$ , en cuyo caso se emplea un operador hermitiano extra, cuyos eigenvalores se indican aquí como  $\gamma$  y cuya función es distinguir estados linealmente independientes con los mismos valores de  $\{\nu\}$ , S y T.

En esta forma se obtienen los estados

$$| [h], [h]' + [h]'' , \alpha (k_1, k_2) \omega_{LL}; \{v_i\} \gamma SS, TT \rangle \quad (8.2)$$

en forma totalmente analítica. Estos estados corresponden a los valores máximos de las proyecciones de  $L, S, T$ . Empleando los operadores de descenso bien conocidos  $L_-, S_-$  y  $T_-$ , se pueden obtener estados para todas las proyecciones de  $L, S$  y  $T$  posibles. Cuando no se emplean interacciones coulombianas únicamente el valor máximo de la proyección del isospin es de interés.

Por último, una vez obtenidos los estados (8.2) para todos los valores posibles de las proyecciones de  $L$  y  $S$  se pueden acoplar por medio de coeficientes de Clebsch - Gordan para obtener estados de momento angular total  $J$  definido, lo cual es invariablemente muy conveniente.

En el siguiente capítulo analizaremos la construcción de las funciones de onda (8.2) desde otro punto de vista, empleando el método sintético.

## CAPITULO II

### METODO SINTETICO PARA LA CONSTRUCCION DE LAS FUNCIONES DE ONDA DE PARTICULA-AGUJERO

#### 9.- Relación de Funciones de Onda de Partículas con Funciones de Onda de Agujeros en la capa $l_p$ .

En este capítulo se expondrá el método sintético apropiado para el - -  
cálculo de funciones de onda clasificadas por la cadena de grupos

$$U_{36} \supset U_9 \times U_4 \begin{cases} U_9 \supset U_6 + U_3 \supset SU_3 \supset R_3 \\ SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)} \end{cases}$$

Este método es de gran utilidad cuando se conocen las funciones de onda en cada una de las capas, como se verá a continuación.

Como se desea construir las funciones de onda en términos de operadores de creación ( que corresponden a partículas en la capa  $2s-1d$  ) y operadores de aniquilación ( que corresponden a agujeros en la capa  $1b$  ) es necesario expresar las funciones de onda de la capa  $1p$  en términos de estos últimos operadores. Posteriormente, de acuerdo con la idea del método expuesta en el capítulo anterior, se acoplarán ambas funciones

de onda con coeficientes de Wigner, tanto del grupo  $U_4$ , lo que automáticamente implica que las funciones de onda corresponden a representaciones irreducibles de  $U_3$ , como del grupo  $SU_3$ .

Analizaremos a continuación la forma de expresar el polinomio, que se supone conocido, referente a la capa  $lp$  en función de operadores de aniquilación actuando sobre el estado de vacío  $|0x\rangle$ . Como se indicó en el capítulo anterior las configuraciones de interés consisten de un número de partículas, en la capa  $lp$  cercano a la capacidad total de ésta.

Si construimos un polinomio en operadores de aniquilación siguiendo las reglas enunciadas en el capítulo anterior, este polinomio corresponde a una RI del grupo unitario de tres dimensiones, asociado con la degeneración orbital de la capa  $lp$ , así como del grupo conjugado  $U_4$ , con índices negativos.

Es decir,

$$[c_{\mu}^{\mu'}, P(b)] = 0, \quad \mu < \mu' \quad (9.1 a)$$

$$[c_{\mu}^{\mu}, P(b)] = -\hbar_{\mu} P(b), \quad \hbar_{\mu} \geq 0$$

en el grupo  $U_3$  y

$$[C_s^{s'}, P(b)] = 0, \quad s < s' \quad (9.2 a)$$

$$[C_s^{s'}, P(b)] = -\varkappa_s P(b), \quad \varkappa_s \geq 0$$

en el grupo complementario  $U_4$ . Por otro lado, de la ec. (1.1), el estado de vacío satisface las condiciones siguientes :

$$\begin{aligned} C_s^{s'} |0x\rangle &= 0, \quad s \neq s' \\ \mathcal{C}_\mu^{\mu'} |0x\rangle &= 0, \quad \mu \neq \mu' \end{aligned} \quad (9.2)$$

en donde  $C_s^{s'}$  y  $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}$  son los generadores de  $U_4$  y  $\mathcal{U}_3$ , respectivamente. De (9.2) se tiene que el estado  $|0x\rangle$  es de máximo y mínimo peso en ambos grupos simultáneamente. Por consiguiente forma el origen de una RI de estos dos grupos, con índices  $\{3333\}$  en  $U_4$  y  $[444]$  en  $\mathcal{U}_3$ , como se puede ver aplicando a  $|0x\rangle$  los operadores de peso en estos grupos.

Si ahora aplicamos el polinomio definido por las ecs. (9.1 a y b) al estado de vacío  $|0x\rangle$  vemos que  $h_\mu \leq 4$  y  $v_s \leq 3$ , de tal forma que el resultado de la aplicación sea un polinomio en operadores de creación, lo que es necesario puesto que se trata de describir una configuración de partículas en la capa  $lp$ .

Pero el polinomio  $P(b)|0x\rangle$  también corresponde a una BRI de  $\mathcal{U}_3$  y  $U_4$  como es claro de las ecuaciones (9.1) y (9.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu^{\mu'} P(b) |0x\rangle &= [\mathcal{C}_\mu^{\mu'}, P(b)] |0x\rangle = 0, \quad \mu < \mu' \\ \mathcal{C}_\mu^{\mu} P(b) |0x\rangle &= (4 - h_\mu) P(b) |0x\rangle. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Claramente se pueden seguir los mismos razonamientos con respecto al grupo  $U_4$ , obteniéndose ecuaciones análogas a (9.3). Se tiene, por tanto que  $P(b) |0x\rangle$  corresponde a los índices positivos

$$[4 - h_\mu] \quad \text{en } U_3 \quad \text{y} \quad \{3 - v_s\} \quad \text{en } U_4$$

Llegamos por tanto, a la conclusión siguiente :

Para obtener una función de onda clasificada por la representación

$[h_\mu]$  en  $\mathcal{U}_3$  y la representación  $\{v_s\}$  en  $U_4$  como función de operadores de aniquilación aplicada al estado  $|0x\rangle$ , se debe obtener un polinomio que corresponda a las representaciones  $[4-h_\mu]$  en  $\mathcal{U}_3$  y  $\{3-v_s\}$  en  $U_4$ , de acuerdo con las reglas del capítulo anterior.

Los polinomios de máximo peso en agujeros son siempre muy sencillos de encontrar, simplemente por inspección, generándose la base completa por medio de operadores de descenso apropiados, con lo cual se asegura que las fases relativas de las funciones de onda así obtenidas están bien determinadas y congruentes con las fases de los coeficientes de Wigner, que se emplean para acoplar estos polinomios con los correspondientes de la capa 2s-1d, que se construyen como se indica en la referencia 1.

#### 10.- Acoplamiento de las Funciones de Onda en $U_4$ .

Se analizará a continuación el problema de acoplar las funciones obtenidas en el inciso 9 con polinomios clasificados por una RI de  $\mathcal{U}_6$  y  $U_4$ , que representan partículas en la capa 2s-1d. Trataremos primero el acoplamiento en el grupo  $U_4$ . Como se indicó anteriormente, al acoplar en  $U_4$ , las funciones de onda son automáticamente tensores irreducibles en el grupo conjugado  $\mathcal{U}_g$ , de degeneración orbital total en ambas capas, como consecuencia de haber utilizado en el desarrollo operadores de Fermi.

Se supone que se conocen los kets en ambas capas, clasificados como se especificó anteriormente, es decir, suponemos conocido el ket

$$| [h'_\mu] ; \{v'_s\} \rangle \quad (10.1)$$

en donde  $[h'_\mu]$  es una RI dada de  $\mathcal{U}_6$  y  $\{v'_s\}$  la representación conjugada en  $U_4$ , además del ket

$$| [h''_{\mu}] ; \{v'_s\} \rangle \quad (10.2)$$

en donde  $[h''_{\mu}]$  es una RI de  $\mathcal{U}_3$  y  $\{v'_s\}$  la RI conjugada en  $U_4$ ; este último está expresado en términos de agujeros, o sea, como un polinomio función de operadores de aniquilación en la capa  $lp$  aplicado al estado de vacío  $|0\rangle$ . Utilizando los estados (10.1) y (10.2) se desea obtener un estado del tipo

$$| [h_{\mu}], [h'_{\mu}] + [h''_{\mu}] ; \{v_s\} \rangle \quad (10.3)$$

en donde  $[h_{\mu}]$  indica una RI de  $\mathcal{U}_g$  y  $\{v_s\}$  la representación conjugada de  $U_4$ . El primer problema que se plantea es averiguar que representaciones de  $[h_{\mu}]$  y de  $\{v_s\}$  son compatibles con  $[h'_{\mu}], [h''_{\mu}]$  y  $\{v'_s\}, \{v''_s\}$ , que se supone están especificadas de antemano. Las representaciones de  $U_4$  se pueden obtener por las reglas ordinarias de Littlewood para reducir el producto directo de dos representaciones, que son aplicables en este caso ya que ambos kets son bases de la representación de un grupo de transformaciones en el mismo espacio. Una vez conocidas las representaciones posibles en  $U_4$  las de  $\mathcal{U}_g$  se obtienen conjugándolas, de acuerdo con el principio de Pauli\*.

El proceso de acoplamiento se puede obtener entonces, por medio de los coeficientes de Wigner en el grupo  $U_4$ , especificados en alguna cadena de grupos apropiada, siendo desde el punto de vista del cálculo de estos coeficientes la cadena natural la más útil. En otras palabras, el estado que se transforma irreduciblemente con respecto al grupo  $U_4$  se expresa como,

\* Las reglas de reducción no son aplicables para acoplar  $[h'_{\mu}]$  y  $[h''_{\mu}]$  ya que estos índices se refieren a representaciones de dos grupos de transformaciones que operan sobre espacios vectoriales diferentes.

$$\left| \begin{matrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ & \psi_{13} & \psi_{23} & \psi_{33} \\ & & \psi_{12} & \psi_{22} \\ & & & \psi_{11} \end{matrix} \right\rangle ; \left[ \begin{matrix} \rho \\ \mu \end{matrix} \right] \rangle = \sum \left\langle \begin{matrix} \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 & \psi'_4 \\ & \psi'_{ij} & & \\ & & \psi''_{ij} & \\ & & & \psi_{ij} \end{matrix} \right\rangle ; \left[ \begin{matrix} \rho' \\ \mu' \end{matrix} \right] \left\langle \begin{matrix} \psi''_1 & \psi''_2 & \psi''_3 & \psi''_4 \\ & \psi''_{ij} & & \\ & & \psi''_{ij} & \\ & & & \psi_{ij} \end{matrix} \right\rangle ; \left[ \begin{matrix} \rho'' \\ \mu'' \end{matrix} \right] \rangle \quad (10.4)$$

en donde no se han indicado explícitamente los renglones de las representaciones referentes al espacio orbital por no ser necesario en este punto.

El coeficiente de Wigner

$$\left\langle \begin{matrix} \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 & \psi'_4 \\ & \psi'_{ij} & & \end{matrix} \right\rangle ; \quad \begin{matrix} \psi''_1 & \psi''_2 & \psi''_3 & \psi''_4 \\ & \psi''_{ij} & & \end{matrix} \left| \begin{matrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ & \psi_{ij} & & \end{matrix} \right\rangle$$

se puede determinar por el método empleado por Brody, Moshinsky y Renner<sup>16)</sup>, que como se detalla en el apéndice D implica encontrar las bases irreducibles en la cadena de grupos

$$U_6 \supset U_3 + U_3,$$

problema que es sumamente complicado, por lo que estos coeficientes de Wigner no han sido determinados en general.

Por otro lado, el conocer estos coeficientes nos permitiría acoplar los kets (10.1) y (10.2) en la cadena natural, que no es de interés físico inmediato en nuestro caso. La cadena de interés, como se mencionó antes es

$$U_4 \supset SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)}$$

ya que en esta forma obtendríamos estados de partícula-agujero con spin e isospin totales definidos. Sin embargo, la determinación de paréntesis de transformación de la cadena natural a la cadena de interés físico se puede lograr mediante la diagonalización de los ope-

radores de Casimir  $S^2$  y  $T^2$  de los subgrupos  $SU_2^{(\sigma)}$  y  $SU_2^{(\tau)}$  de  $U_4$ , respectivamente, con respecto a los estados clasificados por la cadena natural. Puesto que se conocen los elementos de matriz de los generadores del grupo  $U_4$  con respecto a estos últimos<sup>17)</sup> y  $S^2$  y  $T^2$  se expresan en términos de estos generadores, las matrices necesarias no son difíciles de obtener\*.

Desde el punto de vista práctico se puede proceder de otra manera para la construcción de los estados deseados. El método que se propone es análogo al método de pesos empleado en la referencia 1 para encontrar el polinomio de máximo peso en el grupo  $SU_3$ .

En este método se forman combinaciones lineales de productos de estados clasificados por  $[h'_\mu]$  y  $\{v'_s\}$  y  $[h''_\mu]$ ,  $\{v''_s\}$ , respectivamente, que sean linealmente independientes y de tal forma que la suma de los pesos de estos estados en  $U_4$  sea igual al máximo peso de la representación de  $U_4$  que se desea obtener, ( en general, habrá varios términos en este desarrollo ). Los coeficientes arbitrarios de los diferentes términos de la combinación lineal se determinan imponiendo sobre el polinomio así formado, la condición de que sea de máximo peso en  $U_4$ . Este procedimiento se ilustra en el capítulo 5, en donde se aplica para obtener las funciones de onda del  $O^{16}$ . Utilizando operadores de descenso en la cadena  $U_4 \supset SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)}$  se puede generar entonces toda la base.

## II.- Acoplamiento de las Funciones de Onda en el Grupo $SU_3$

El problema de clasificar las funciones de onda por una RI de la cadena de subgrupos  $SU_3 \supset R_3$ , subgrupos de  $U_9$  se resuelve de acuerdo con la idea del método

\* En el apéndice D se sigue un procedimiento análogo a éste para la obtención de coeficientes de Wigner en la cadena no natural  $SU_3 \supset R_3$ .

sintético, obteniendo funciones de onda de partículas en la capa 2s-1d y de agujeros en la capa 1p clasificadas por representaciones de  $SU_3$  y  $R_3$  subgrupos de  $U_3$  y  $U_6$ , respectivamente y acoplándolas posteriormente por medio de coeficientes de Wigner en la cadena  $SU_3 \supset R_3$ . Estos estados se construyen por el procedimiento indicado en la referencia 1, que como se ha dicho antes consiste en determinar los polinomios de máximo peso y luego aplicar operadores de descenso en esta cadena de subgrupos.

Se obtienen por tanto, los estados de partícula-agujero deseados en la

forma,

$$\begin{aligned}
 \left| [k], [k'] + [k''], (k, k_2) \omega L M; \{v\} ST \right\rangle = \sum \left\langle \begin{matrix} (k', k'_2) & (k'', k''_2) \\ \omega' L' M' & \omega'' L'' M'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (k, k_2) \\ \omega L M \end{matrix} \right\rangle \times \\
 \times \left| [k], [k'] (k', k'_2) \omega' L' M'; [k''] (k'', k''_2) \omega'' L'' M''; \{v\} ST \right\rangle \quad (11.1)
 \end{aligned}$$

en donde  $(k', k'_2)$  y  $(k'', k''_2)$  indican las representaciones de  $SU_3$  de los estados de partículas y de agujeros, respectivamente y  $L', M'$  y  $L'', M''$  se refieren a las representaciones de los subgrupos  $R_3$  y  $R_2$  de  $SU_3$  para cada uno de estos estados. (o sea  $L', M'$ , son el momento angular total y la proyección del momento angular de las partículas de la capa 2s-1d y  $L''$  y  $M''$  son el momento angular total orbital y la proyección de éste de las partículas en la capa 1p). Por otro lado  $(k, k_2)$   $L$  y  $M$  se refieren a las cantidades correspondientes para la función de onda total.

Se hace notar que el ket, no acoplado en  $SU_3$ , de la parte derecha de la ecuación (11.1) corresponde a una RI del grupo  $U_4$ , puesto que se supone que el acoplamiento en este grupo se ha efectuado previamente por algunos de los métodos indicados en el inciso 10.

Los números cuánticos  $\omega, \omega', \omega''$ , que aparecen tanto en el coeficiente de Wigner en la cadena  $SU_3 \supset R_3$

$$\left\langle \begin{array}{c} (k', k'_2) \\ \omega' k' M' \end{array} ; \begin{array}{c} (k'', k''_2) \\ \omega'' k'' M'' \end{array} \middle| \begin{array}{c} (k, k_2) \\ \omega k M \end{array} \right\rangle \quad (11.2)$$

como en los kets de la ecuación ( 3.8 ), son eigenvalores del operador de Casimir generalizado  $\Omega$ , introducido por Bargman y Moshinsky <sup>14)</sup>, que caracterizan completamente el estado en esta cadena no natural.

A diferencia de los coeficientes de Wigner del grupo  $U_4$  los del grupo  $SU_3$  sí han sido extensivamente estudiados, aunque invariablemente en la cadena matemáticamente natural, es decir,  $U_3 \supset U_2 \supset U_1$ . Sin embargo se pueden obtener en la cadena de nuestro interés por el mismo método indicado antes para los coeficientes de Wigner en la cadena no natural  $U_4 \supset SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)}$ ; es decir, se diagonaliza la matriz del operador ( u operadores ) de Casimir de los subgrupos no naturales calculada con respecto a estados clasificados por los subgrupos canónicos. En este caso se diagonaliza la matriz del operador  $L^2$ , operador de Casimir del grupo  $R_3$ . La expresión de esta matriz ha sido obtenida por Moshinsky <sup>1)</sup> y ha sido programada para una computadora. Con los eigenvectores resultantes de la diagonalización se obtienen los paréntesis de transformación de la cadena canónica a la cadena física; combinando estos paréntesis de transformación y los coeficientes de Wigner en la cadena canónica se obtienen los coeficientes necesarios ( 11.2 ). Resultados para el caso particular en que  $k''_1=1$   $k''_2=1$  se encuentran en el apéndice D; estos coeficientes son de gran utilidad como se verá más adelante.

Por último, es conveniente hacer notar que en vez de los coeficientes ( 11.2 ) se podría emplear el método de pesos para construir los estados ( 11.1 ). En esta forma se obtendría la función de máximo peso en la cadena y por medio de operadores de descenso ( 7.10 ) se generaría toda la base.

## 12.- Comparación del Método Análítico con el Método Sintético.

En el método de construcción analítico se clasifican primeramente las funciones de onda por representaciones irreducibles del grupo unitario de mayor número de dimensiones  $U_{36}$ , que contiene a todos los subgrupos de la clasificación. Se clasifican posteriormente por representaciones definidas de  $Z_9$  y de  $U_4$ , así como de sus respectivos subgrupos. Se da, por tanto, un carácter formal a los agujeros que se introducen desde el principio, doblando con este objeto el número de dimensiones del grupo unitario origen de la cadena de subgrupos empleada en la clasificación.

La generación de la base completa se obtiene por medio de operadores de descenso en las cadenas apropiadas, siendo estos operadores los que constituyen el instrumento esencial del método.

En el método sintético, por otra parte, se procede en cierta forma a la inversa: se empieza la clasificación de las funciones por representaciones de los subgrupos de dimensionalidad menor, acoplándolas después por medio de coeficientes de Wigner para introducir los subgrupos de dimensión mayor.

Este método es el más efectivo cuando se conocen por algún motivo las funciones de onda en cada capa. Se presenta sin embargo, el problema de la falta de información sobre estos coeficientes que, como en el caso del grupo  $U_4$ , se ignoran por completo al presente. Se podría considerar que este método es el método de los coeficientes de Wigner, mientras que el método analítico es el método de los operadores de descenso. En los tratamientos tradicionales de problemas de estructura nuclear<sup>15)</sup>, ha sido el método sintético el más usado hasta ahora.

La utilidad práctica de cada uno deberá ser juzgada en cada caso, siendo en general lo más conveniente, utilizar una combinación de ambos, lo que simplifica ocasionalmente el problema.

## CAPITULO III

### ELIMINACION DEL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA. FUNCIONES DE ONDA NO-ESPURIAS.

#### 13.- Operador del Centro de Masa.

El hamiltoniano que se considera comunmente en el modelo de capas no es en general invariante frente a traslaciones; las eigenfunciones de este hamiltoniano no son simultáneamente eigenfunciones del momento lineal total del sistema, pues el momento del centro de masa no conmuta con un hamiltoniano de este tipo por ser el generador de las traslaciones del sistema como un todo <sup>18)</sup>.

Lo que se trata de comprender en el estudio de la estructura nuclear, por otro lado, son los estados intrínsecos del sistema de Anucleones que constituyen el núcleo, sin ser de interés en este tipo de análisis el estudio del movimiento del centro de masa; en otras palabras el centro de masa debe considerarse en su estado de excitación más bajo.

En los estudios habituales del modelo de capas se tienen, por tanto, un ejemplo de violación de una ley de conservación ( la del momento lineal total de un sistema que se supone aislado del exterior ) por conveniencia; esta violación de la ley de conservación nos permite introducir el concepto de potencial común referido a un origen fijo, con todas sus consecuencias favorables en el modelo de capas <sup>19)</sup>.

Como consecuencia de haber violado una ley de conservación ( que se supone desde luego, válida en general ) se tiene que las diferentes funciones de onda del núcleo utilizadas en el modelo de capas pueden corresponder a diferentes estados de excitación del movimiento del centro de masa, siendo por consiguiente, estados no físicos. Sin embargo, es posible encontrar combinaciones lineales de estas funciones de onda que sean eigenfunciones del momento del centro de masa y que correspondan al mismo nivel de excitación del movimiento del centro de masa, que se exige en general como el estado base. Esto es posible ya que el conjunto de funciones de onda del modelo de capas forman un conjunto completo.

Se han propuesto diferentes métodos para resolver este problema, pero como demuestra Lipkin <sup>20)</sup> cada uno de ellos lleva a un resultado diferente si se considera un potencial común arbitrario. Según Lipkin sólo en el caso en que se tenga un potencial común tal que las coordenadas del centro de masa y las coordenadas intrínsecas del sistema sean separables, se llegará al mismo resultado independientemente del método de solución. El oscilador armónico es un potencial de este tipo y por tanto el problema tiene aquí solución única.

Como todos los análisis en donde se han utilizado los métodos desarrollados por Moshinsky suponen al pozo común como un oscilador armónico, por su gran utilidad y sencillez, tenemos que este problema debe poder atacarse y resolverse utilizando el lenguaje de segunda cuantización empleado hasta ahora.

El problema de los estados espurios, o sea los estados correspondientes a diferentes niveles de excitación del movimiento del centro de masa no aparece cuando se trata con partículas en una sola capa del potencial común ( es decir, se tiene una capa no completa y todas las demás inferiores en energía completamente llenas hasta donde lo

permite el Principio de Pauli ). Sin embargo, como se dieron cuenta primeramente Bethe y Rose <sup>18)</sup>, el problema sí surge cuando se tratan configuraciones de partículas en varias capas del oscilador, o sea del tipo partícula-agujero, como las empleadas en este trabajo. Debemos por tanto encontrar el método apropiado para resolver este problema dentro de las técnicas empleadas aquí.

Consideraremos que el potencial común es un oscilador armónico y encontraremos un operador, expresado en función de operadores de creación y aniquilación de Fermi, que da la energía del movimiento del centro de masa. En el espacio de configuración este operador es, por consiguiente, proporcional a

$$R^2 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A r_i \cdot r_j = \frac{1}{A^2} \left[ \sum_{i=1}^A r_i^2 + 2 \sum_{i < j} r_i \cdot r_j \right] \quad (4.1)$$

en donde  $r_i$  es el vector de posición del nucleón  $i$ .

Esta expresión es proporcional a la diferencia entre  $\sum r_i^2$  y  $\sum (r_i - R)^2$ ; el primero es el potencial no invariante frente a traslaciones de todo el sistema que se emplea comúnmente en el modelo de capas y el segundo el potencial que debería usarse para describir propiedades intrínsecas, referido a las coordenadas del centro de masa e invariante frente a traslaciones.

Una vez obtenido el operador correspondiente a (4.1) en el esquema de la segunda cuantización se obtendrán, por aplicación directa, sus matrices con respecto a las funciones de onda previamente construidas, conservándose como estados físicos únicamente aquellas combinaciones lineales de estas funciones de onda que correspondan a un eigenvalor 0 de la matriz del operador del centro de masa, como nos referiremos a él en lo sucesivo. Este método fué introducido por Elliott y Skyrme <sup>21)</sup>, que calculan la ma

triz del operador del centro de masa pero en el espacio de configuración, lo cual hace necesario conocer los coeficientes de precedencia fraccional.

Por otra parte, el operador expresado con operadores de segunda cuantización que se obtendrá más adelante, deberá reproducir el hecho mencionado antes: esta dos con una sola capa del oscilador no completamente llena, es decir de configuraciones de partículas dentro de una sola capa, son todos estados no espurios.

Para obtener el operador del centro de masa, definimos los operadores de creación y aniquilación de cuantos en el oscilador para la partícula  $i$ , ( ver ec. (7.2) ) en la forma siguiente :

$$\underline{a}_i^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (r_i - i p_i) \quad (4.2 a)$$

$$\underline{a}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (r_i + i p_i) \quad (4.2 b)$$

en donde  $\underline{a}_i^+$  es el operador transpuesto conjugado de  $\underline{a}_i$ , operador de aniquilación.

El operador de creación de cuantos del movimiento del centro de masa, que se mueve también sujeto a un pozo de oscilador armónico, es entonces

$$\underline{\alpha}_A^+ = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{i=1}^A \underline{a}_i^+ \quad (4.3)$$

Por consiguiente el operador de número de cuantos del centro de masa está dado por <sup>22)</sup>

$$\underline{\alpha}_A^+ \cdot \underline{\alpha}_A$$

en donde  $\underline{\alpha}_A = \left( \underline{\alpha}_A^+ \right)^+$  es el correspondiente operador de aniquilación. El problema se reduce ahora a encontrar una expresión para este operador dentro del esquema de la segunda cuantización, de acuerdo con la idea indicada más arriba.

Utilizando las ecuaciones ( 4.2 ) y ( 4.3 ) se obtiene

$$\frac{\underline{a}^+}{A} \cdot \frac{\underline{a}}{A} = \frac{1}{A} \sum_{i,j} \underline{a}_i^+ \cdot \underline{a}_j = \frac{1}{A} \sum_{i \neq j} \underline{a}_i^+ \cdot \underline{a}_j + \frac{1}{A} \sum_i \underline{a}_i^+ \cdot \underline{a}_i \quad (4.5)$$

en donde

$$\sum_{i \neq j} \underline{a}_i^+ \cdot \underline{a}_j = \sum_{i < j} (\underline{a}_i^+ \cdot \underline{a}_j + \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j^+) \quad (4.6)$$

es equivalente a una interacción entre pares de partículas, del tipo dipolo-dipolo, cuando se consideran estados de un número fijo de partículas en cada capa del oscilador. El término restante en la expresión ( 4.5 ) es simplemente el operador de número de cuantos total del oscilador, siendo por consiguiente una suma de operadores de una sola partícula.

Según esto, el operador (4.5) está formado por uno de interacción entre pares de partículas del tipo  $\sum_{i < j} V_{ij}$  y otro operador del tipo de  $\sum_i W_i$ ; como es bien sabido se puede obtener su expresión en términos de operadores de segunda cuantización.

Consideremos primero el término de interacción dipolo-dipolo; en general para un operador de este tipo se tiene que

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu, \mu_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2} \langle \mu_1, \mu_2 | V_{12} | \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2 \rangle (c_{\mu_1}^{\bar{\mu}_1} c_{\mu_2}^{\bar{\mu}_2} - \delta_{\mu_2}^{\bar{\mu}_1} c_{\mu_1}^{\bar{\mu}_2}) \quad (4.7)$$

en donde

$$c_{\mu}^{\mu'} = \sum_s b_{\mu s}^+ b^{\mu' s}$$

es la expresión que corresponde en segunda cuantización <sup>1)</sup>. En la ecuación ( 4.7 )

$c_{\mu}^{\mu'}$  son los generadores del grupo unitario de dimensión igual a la degeneración orbital en el espacio de configuración y

$$\langle \mu_1, \mu_2 | V_{12} | \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2 \rangle$$

es el elemento de matriz del operador  $V_{12}$  entre estados de dos partículas no antisimetrizados.

Para el problema que nos interesa,

$$V_{12} = \underline{a}_1^+ \cdot \underline{a}_2 + \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2^+$$

y

$$|\mu_1, \mu_2\rangle = |n_1^i, n_0^i, n_{-1}^i, n_1^z, n_0^z, n_{-1}^z\rangle$$

con  $n_1^i, n_0^i, n_{-1}^i$  números cuánticos que especifican el estado de una sola partícula en el oscilador y que satisfacen las restricciones <sup>1)</sup>

$$n_1^i + n_0^i + n_{-1}^i = \mathcal{D}_i$$

En general  $\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$ , indicándonos que las dos partículas pueden estar en diferentes capas del oscilador, que es precisamente el problema de interés aquí.

Empleando esta notación para los estados de una sola partícula el operador (4.7) toma la expresión siguiente :

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{n_1^i, n_0^i, n_{-1}^i \\ \bar{n}_1^i, \bar{n}_0^i, \bar{n}_{-1}^i}} \sum_{\substack{n_1^z, n_0^z, n_{-1}^z \\ \bar{n}_1^z, \bar{n}_0^z, \bar{n}_{-1}^z}} \langle n_1^i, n_0^i, n_{-1}^i, n_1^z, n_0^z, n_{-1}^z | \underline{a}_1^+ \cdot \underline{a}_2 + \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2^+ | \bar{n}_1^i, \bar{n}_0^i, \bar{n}_{-1}^i, \bar{n}_1^z, \bar{n}_0^z, \bar{n}_{-1}^z \rangle \times$$

$$\times \left( \mathcal{E}_{\substack{\bar{n}_1^i, \bar{n}_0^i, \bar{n}_{-1}^i \\ n_1^i, n_0^i, n_{-1}^i}} \mathcal{E}_{\substack{\bar{n}_1^z, \bar{n}_0^z, \bar{n}_{-1}^z \\ n_1^z, n_0^z, n_{-1}^z}} - \int_{\bar{n}_1^i} \int_{\bar{n}_0^i} \int_{\bar{n}_{-1}^i} \mathcal{E}_{\substack{\bar{n}_1^z, \bar{n}_0^z, \bar{n}_{-1}^z \\ n_1^i, n_0^i, n_{-1}^i}} \right) \quad (4.8)$$

Aprovechando el hecho de que  $\underline{a}_1^+$  y  $\underline{a}_2$  son operadores de una sola partícula que conmutan entre sí, por corresponder a diferentes partículas, e intercambiando los índices mudos 1 y 2 se tiene de la ecuación (4.8) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum \sum \langle n_1' n_0' n_1' | \underline{a}_1^+ | \bar{n}_1' \bar{n}_0' \bar{n}_1' \rangle \cdot \langle n_1^2 n_0^2 n_1^2 | \underline{a}_2 | \bar{n}_1^2 \bar{n}_0^2 \bar{n}_1^2 \rangle \times \\
 & \times \left( \mathcal{E}_{n_1' n_0' n_1'}^{\bar{n}_1' \bar{n}_0' \bar{n}_1'} \mathcal{E}_{n_1^2 n_0^2 n_1^2}^{\bar{n}_1^2 \bar{n}_0^2 \bar{n}_1^2} - \delta_{n_1^2}^{\bar{n}_1^2} \delta_{n_0^2}^{\bar{n}_0^2} \delta_{n_1^2}^{\bar{n}_1^2} \mathcal{E}_{n_1' n_0' n_1'}^{\bar{n}_1' \bar{n}_0' \bar{n}_1'} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sum \sum \langle n_1^2 n_0^2 n_1^2 | \underline{a}_2 | \bar{n}_1^2 \bar{n}_0^2 \bar{n}_1^2 \rangle \cdot \langle n_1' n_0' n_1' | \underline{a}_1^+ | \bar{n}_1' \bar{n}_0' \bar{n}_1' \rangle \times \quad (4.9) \\
 & \times \left( \mathcal{E}_{n_1^2 n_0^2 n_1^2}^{\bar{n}_1^2 \bar{n}_0^2 \bar{n}_1^2} \mathcal{E}_{n_1' n_0' n_1'}^{\bar{n}_1' \bar{n}_0' \bar{n}_1'} - \delta_{n_1^2}^{\bar{n}_1^2} \delta_{n_0^2}^{\bar{n}_0^2} \delta_{n_1^2}^{\bar{n}_1^2} \mathcal{E}_{n_1' n_0' n_1'}^{\bar{n}_1' \bar{n}_0' \bar{n}_1'} \right).
 \end{aligned}$$

Introduciendo ahora el valor de los elementos de matriz de  $\underline{a}_i^+$  y  $\underline{a}_j$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle n_1' n_0' n_1' | \underline{a}_{1q}^+ | \bar{n}_1' \bar{n}_0' \bar{n}_1' \rangle &= \sqrt{\bar{n}_1' + 1} \delta_{n_1'}^{\bar{n}_1' + \delta q_1} \delta_{n_0'}^{\bar{n}_0' + \delta q_0} \delta_{n_1'}^{\bar{n}_1' + \delta q_{-1}} \\
 \langle n_1^2 n_0^2 n_1^2 | \underline{a}_{2q} | \bar{n}_1^2 \bar{n}_0^2 \bar{n}_1^2 \rangle &= \sqrt{\bar{n}_1^2} \delta_{n_1^2}^{\bar{n}_1^2 - \delta q_1} \delta_{n_0^2}^{\bar{n}_0^2 - \delta q_0} \delta_{n_1^2}^{\bar{n}_1^2 - \delta q_{-1}} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

en donde  $q$  indica las componentes esféricas de un vector y toma por tanto los valores  $q = 1, 0, -1$ ; el producto escalar denotado por un punto en la ecuación (4.9) se define entonces como una suma sobre este índice  $q$  en la forma habitual<sup>1)</sup>

$$\underline{a}_1^+ \cdot \underline{a}_2 = \sum_q \underline{a}_{1q}^+ \underline{a}_{2q}.$$

Si ahora se conmutan los operadores  $\mathcal{E}_{n_1^2 n_0^2 n_1^2}^{\bar{n}_1^2 \bar{n}_0^2 \bar{n}_1^2}$  y  $\mathcal{E}_{n_1' n_0' n_1'}^{\bar{n}_1' \bar{n}_0' \bar{n}_1'}$ , los términos cuadráticos en  $\mathcal{E}_\mu^\mu$  son idénticos, obteniéndose además otros cuatro términos lineales en  $\mathcal{E}_\mu^\mu$ , que después de aprovechar las expresiones (4.10) para los elementos de matriz de  $\underline{a}_1^+$  y  $\underline{a}_2$  se reducen a

$$- \sum (n_1 + n_0 + n_1) \mathcal{E}_{n_1 n_0 n_1}^{n_1 n_0 n_1} = -N \quad (4.11)$$

Se tiene finalmente que ( 4.9 ) se expresa como

$$\sum \sum \langle n_1^1 n_0^1 n_{-1}^1 | \underline{a}_1^+ | \bar{n}_1^1 \bar{n}_0^1 \bar{n}_{-1}^1 \rangle \cdot \langle n_1^2 n_0^2 n_{-1}^2 | \underline{a}_2 | \bar{n}_1^2 \bar{n}_0^2 \bar{n}_{-1}^2 \rangle e^{\bar{n}_1^1 \bar{n}_0^1 \bar{n}_{-1}^1} e^{\bar{n}_1^2 \bar{n}_0^2 \bar{n}_{-1}^2} - N$$

El último término en la ecuación anterior se anula con la expresión en segunda cuantización correspondiente al operador de número de cuantos de la expresión ( 4.5 ). El operador del centro de masa es igual, por tanto, a

$$\begin{aligned} \underline{a}_A^+ \cdot \underline{a}_A = \sum \sum \langle n_1^1 n_0^1 n_{-1}^1 | \underline{a}_1^+ | \bar{n}_1^1 \bar{n}_0^1 \bar{n}_{-1}^1 \rangle \cdot \langle n_1^2 n_0^2 n_{-1}^2 | \underline{a}_2 | \bar{n}_1^2 \bar{n}_0^2 \bar{n}_{-1}^2 \rangle \times \\ \times e^{\bar{n}_1^1 \bar{n}_0^1 \bar{n}_{-1}^1} e^{\bar{n}_1^2 \bar{n}_0^2 \bar{n}_{-1}^2} \end{aligned} \quad (9.12)$$

Supóngase ahora que el número de partículas en las capas  $\nu$  y  $\nu+1$  ( que son las únicas que se consideran en este análisis, según lo indicado en el capítulo I ) es fijo y que las capas con número cuántico principal  $\nu' > \nu+1$  están completamente vacías, mientras que aquellas con  $\nu'' < \nu$  están completamente llenas.

Como se puede ver de la expresión ( 4.12 ), en los dos elementos de matriz se tienen operadores de creación y aniquilación de cuantos del oscilador referentes a diferentes partículas, lo que implica que

$$\nu_1 = \bar{\nu}_1 + 1, \quad \nu_2 = \bar{\nu}_2 + 1$$

ya que de otra forma los elementos de matriz valdrían 0 . De acuerdo con la suposición hecha antes  $\bar{\nu}_2 \leq \nu+1$  , ya que de otra forma el operador  $e^{\bar{n}_1^2 \bar{n}_0^2 \bar{n}_{-1}^2} e^{n_1^2 n_0^2 n_{-1}^2}$  presente en ( 4.12 ) daría 0 al actuar sobre cualquiera de las funciones de onda de interés. Por otro lado, esto implica que  $\nu_2 \leq \nu$  . Si  $\nu_2 = \nu$  , se debe tener  $\nu_1 = \nu+1$

El operador  $\hat{C}_{\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_{-1}}^{\bar{n}'_1, \bar{n}'_2, \bar{n}'_{-1}}$  en (4.12) crea una partícula en la capa con número cuántico principal  $\bar{\nu}_2$ , que según nuestra suposición está completamente llena; por el Principio de Pauli el resultado de la aplicación del operador es entonces 0.

El mismo tipo de razonamiento nos indica que el operador del centro de masa da como resultado 0 al actuar sobre funciones de onda que describen sistemas de partículas colocadas en una capa  $\bar{\nu}$  no completamente llena, mientras que las capas superiores están completamente vacías y en las capas inferiores en energía a la capa  $\bar{\nu}$  hay tantas partículas como permite el principio de Pauli; en este caso  $\bar{\nu}_2$  está forzado a valer  $\bar{\nu}$  y por consiguiente  $\bar{\nu}_2 = \bar{\nu} - 1$ . Por tanto el operador  $\hat{C}_{\bar{n}_1^c, \bar{n}_2^c, \bar{n}_{-1}^c}$  crea una partícula en la capa  $\bar{\nu} - 1$ , que por hipótesis está completamente llena.

TABLA 4

Operador del Centro de Masa para  $\nu=0$  y  $\nu=1$

$\nu=0$	$\underline{\alpha}^+ \cdot \underline{\alpha} = \sum_{q=1}^{3'} \hat{C}_{q'}^{1''} \hat{C}_{1''}^q$
$\nu=1$	$\underline{\alpha}^+ \cdot \underline{\alpha} = \sum_{q=1,2,3} R_q \cdot L^q$ $R_1 = \sqrt{2} \hat{C}_1^1 + \hat{C}_2^2 + \hat{C}_3^3; \quad L_1 = \sqrt{2} \hat{C}_1^1 + \hat{C}_2^2 + \hat{C}_3^3$ $R_0 = \hat{C}_2^1 + \sqrt{2} \hat{C}_4^2 + \hat{C}_5^3; \quad L_0 = \hat{C}_1^1 + \sqrt{2} \hat{C}_2^2 + \hat{C}_3^3$ $R_{-1} = \hat{C}_3^1 + \hat{C}_5^2 + \sqrt{2} \hat{C}_6^3; \quad L_{-1} = \hat{C}_1^3 + \hat{C}_2^3 + \sqrt{2} \hat{C}_3^3$

Se tiene, por tanto, que el operador del centro de masa toma una expresión muy sencilla para el caso de interés, la cual depende del valor de  $\nu$ , o sea de que capas del oscilador se tomen en cuenta, pero siempre ambas semillenas.

En la tabla 4 se dan explícitamente los operadores para los casos  $\nu = 0$  (capas 0s y 1p) y  $\nu = 1$  (capas 1p y 2s + 1d).

#### 14.- Ejemplo de Aplicación del Operador del Centro de Masa.

Consideraremos ahora algunos ejemplos de aplicación del operador (4.12): Supóngase que se trata de describir los estados excitados de una partícula  $\alpha$ ; según el modelo de capas, estos estados corresponderían a configuraciones con 3 partículas en la capa 1s y una partícula en la capa 1p: estados de una partícula y un agujero. El grupo unitario correspondiente al grupo  $U_3$  introducido antes, es  $U_{10}$ , que contiene como subgrupo al producto directo  $U_4 \times U_4$  en donde  $U_4$  corresponde al grupo de simetrías orbital y  $U_4$  al grupo de transformaciones unitarias en el espacio de spin e isospin. Como antes  $U_4 \supset U_3 + U_1$ , que se refieren, respectivamente, a transformaciones en la capa 1p y 1s.

Los estados correspondientes a esta configuración se pueden obtener como se indicó en el capítulo 1; por ejemplo:

$$\left| (1s)^3 (1p), [4] L=1 S=0 T=0 \right\rangle = \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \left| 0x \right\rangle$$

en donde  $[4]$  es la representación irreducible de  $U_4$ ,  $|0x\rangle$  es el estado de vacío del problema (y corresponde por tanto a la capa 1s completamente llena, que en modelo de capas describe el estado base de la partícula  $\alpha$ ) y  $|1\rangle$  indica el estado con números cuánticos  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$  mientras que el número cuántico  $|1\rangle$  tiene el mismo

significado que el capítulo 1. El otro estado con  $L=1$  que se puede obtener para esta configuración es

$$\left| (1s)^3 (1p); [31] L=1 S=1 \Gamma=1 \right\rangle = b_{1,1}^+ b_{1,1}^{''-} |0x\rangle$$

Si ahora aplicamos el operador del centro de masa a estos dos estados, se encuentra que el primer estado es eigenfunción de este operador con eigenvalor 1, como era de esperarse según los resultados de Elliott, indicándonos que es un estado espurio, pues corresponde a un nivel excitado del centro de masa. Por otro lado, el estado  $b_{1,1}^+ b_{1,1}^{''-} |0x\rangle$  es también eigenfunción del operador del centro de masa pero con eigenvalor 0, indicándonos que es un estado no espurio.

Consideraremos ahora el carácter de estas funciones con respecto al grupo  $SU_3$ . Para lograr esto tenemos que obtener los generadores de este grupo como combinaciones lineales de los del grupo  $U_4$ , de tal forma que aseguremos que  $SU_3$  es, por un lado, subgrupo de  $U_4$  y por otro el grupo de simetrías del oscilador. El método para obtener estas combinaciones lineales es el mismo indicado en el número 7 del capítulo 1, obteniéndose el siguiente resultado:

$$\begin{array}{lll} C_1^{02} = e_{1,1}^{2'} & C_2^{03} = e_{2,1}^{3'} & C_3^{03} = e_{1,1}^{3'} \\ C_1^{01} = e_{1,1}^{1'} & C_2^{02} = e_{2,1}^{2'} & C_3^{03} = e_{3,1}^{3'} \\ C_2^{01} = e_{2,1}^{1'} & C_3^{02} = e_{3,1}^{2'} & C_3^{01} = e_{3,1}^{1'} \end{array}$$

Se observa que los generadores de  $SU_3$  coinciden con los del grupo  $U_3$  de dimensión igual al de la degeneración orbital en la capa  $1p$  y que, como era de esperarse, el generador del grupo  $U_1$ , no aparece en las combinaciones lineales, ya que el estado  $1s$  es un escalar con respecto a transformaciones de  $SU_3$ .

Utilizando los generadores se puede ver que ambos estados  $e_1^{11} |0x\rangle$  y  $b_{1,1}^+ b^{114} |0x\rangle$  corresponden a la representación (10) de  $SU_3$ , siendo ésta la única representación posible para la configuración dada. En otras palabras ambos estados corresponden a la máxima representación de  $SU_3$  en el sentido de Elliott y uno de los estados es espurio.

Por otro lado se observa que el operador del centro de masa conmuta, en este caso, con los generadores  $C_q^{q'}$  del grupo  $U_3$ , como es obvio del hecho de que se puede expresar como una contracción sobre el índice  $q$ , que es el afectado por las transformaciones generadas por  $C_q^{q'}$ .

Esto nos indica además que conmuta con los generadores del subgrupo  $R_3$  de  $SU_3$  y que se puede concluir, por consiguiente, que si el estado de máximo peso en la cadena  $SU_3 \supset R_3$  es un estado espurio, entonces todos los demás estados correspondientes a la misma representación de  $SU_3$  serán también espurios. En otras palabras, cuando se trata con estados clasificados por representaciones del grupo  $SU_3$  basta averiguar si el estado de máximo peso es o no espurio; si este estado corresponde a un eigenvalor diferente de 0 del operador del centro de masa, todos los estados de la misma representación serán espurios. Como se verá a continuación esto es válido en general.

#### 15.- Conexión del Operador del Centro de Masa con el Grupo $SU_3$ .

De la expresión  $\underline{\alpha}^+ \cdot \underline{\alpha}$ , ec. (4.5), se tiene,

$$\begin{aligned}
 \underline{\alpha}^+ \underline{\alpha} &= \sum_{\mathfrak{q}} \left\{ \sum_{\substack{n_1^+, n_0^+, n_{-1}^+ \\ \bar{n}_1^+, \bar{n}_0^+, \bar{n}_{-1}^+}} \langle n_1^+, n_0^+, n_{-1}^+ | a_{1\mathfrak{q}}^+ | \bar{n}_1^+, \bar{n}_0^+, \bar{n}_{-1}^+ \rangle \mathcal{E}_{\substack{\bar{n}_1^+, \bar{n}_0^+, \bar{n}_{-1}^+ \\ n_1^+, n_0^+, n_{-1}^+}} \right\} \\
 &\times \left\{ \sum_{\substack{n_1^-, n_0^-, n_{-1}^- \\ \bar{n}_1^-, \bar{n}_0^-, \bar{n}_{-1}^-}} \langle n_1^-, n_0^-, n_{-1}^- | a_{2\mathfrak{q}} | \bar{n}_1^-, \bar{n}_0^-, \bar{n}_{-1}^- \rangle \mathcal{E}_{\substack{\bar{n}_1^-, \bar{n}_0^-, \bar{n}_{-1}^- \\ n_1^-, n_0^-, n_{-1}^-}} \right\} \\
 &\equiv \sum_{\mathfrak{q}} R_{\mathfrak{q}} \mathcal{L}^{\mathfrak{q}}
 \end{aligned} \tag{15.1}$$

en donde

$$\begin{aligned}
 R_{\mathfrak{q}} &= \sum \langle n_1^+, n_0^+, n_{-1}^+ | a_{1\mathfrak{q}}^+ | \bar{n}_1^+, \bar{n}_0^+, \bar{n}_{-1}^+ \rangle \mathcal{E}_{\substack{\bar{n}_1^+, \bar{n}_0^+, \bar{n}_{-1}^+ \\ n_1^+, n_0^+, n_{-1}^+}} \\
 \mathcal{L}^{\mathfrak{q}} &= \sum \langle n_1^-, n_0^-, n_{-1}^- | a_{2\mathfrak{q}} | \bar{n}_1^-, \bar{n}_0^-, \bar{n}_{-1}^- \rangle \mathcal{E}_{\substack{\bar{n}_1^-, \bar{n}_0^-, \bar{n}_{-1}^- \\ n_1^-, n_0^-, n_{-1}^-}} = (R_{\mathfrak{q}})^+
 \end{aligned} \tag{15.2}$$

Como los operadores  $R_{\mathfrak{q}}$  y  $\mathcal{L}^{\mathfrak{q}}$  están formados a partir de  $a_{1\mathfrak{q}}^+$  y  $a_{2\mathfrak{q}}$ , respectivamente, tienen las mismas propiedades de transformación con respecto al grupo  $\mathcal{U}_3$  que estos operadores; en otras palabras,  $R_{\mathfrak{q}}$  corresponde a la representación contragradiente del operador  $\mathcal{L}^{\mathfrak{q}} = (R_{\mathfrak{q}})^+$ . Por consiguiente, el operador del centro de masa

$$\sum_{\mathfrak{q}} R_{\mathfrak{q}} \mathcal{L}^{\mathfrak{q}}$$

es una expresión invariante frente a transformaciones del grupo  $\mathcal{U}_3$  y desde luego, de todos los subgrupos.



## CAPITULO IV

### INTERACCION MODELO PARA UNA FUERZA CENTRAL EN CONFIGURACIONES PARTICULA-AGUJERO.

#### 16.- Análisis de la Interacción Modelo.

En varios cálculos efectuados previamente.<sup>11)</sup> se han obtenido los niveles de energía y las funciones de onda de un sistema de nucleones en la capa 2s-1d empleando como hamiltoniano de la interacción a un potencial modelo, consistente en una combinación lineal de interacción de apareamiento orbital, fuerza de cuadrupolo-cuadrupolo y acoplamiento spin-órbita. Es decir un hamiltoniano de tipo :

$$V = -V_0 [x Q^2 + y P + z W_{s.o.}] \quad (16.1)$$

Se ha demostrado que la fuerza de apareamiento  $P$ , definida por sus elementos de matriz entre estados de dos partículas

$$\langle \ell \ell, L=0 | P | \ell' \ell', L=0 \rangle = \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \quad (16.2 a)$$

es un buen modelo para las interacciones de corto alcance, mientras que la fuerza cuadrupolo-cuadrupolo  $Q^2$  toma en cuenta las correlaciones de largo alcance entre los nu-

cleones, dando origen a movimientos de carácter colectivo, en particular a la estructura en bandas rotacionales del espectro de energías. En otros términos, la combinación lineal de  $P$  y  $Q^2$  constituye un buen modelo para una fuerza central, cuando se estudian sistemas en una capa del oscilador. De hecho, los cálculos efectuados con el potencial (16.1) dan buenos resultados, que se comparan satisfactoriamente con los datos experimentales referentes a estados de paridad positiva y energía de excitación baja, para núcleos al principio de la capa 2s-1d.

El objeto del análisis que se indica a continuación es hacer ver que la interacción modelo (16.1) debe seguir siendo un buen modelo del hamiltoniano del sistema, aún cuando se consideren estados con partículas en varias capas del oscilador, estados que se pueden describir en términos de partículas y agujeros.

En particular nos restringiremos a estados tales que el número de partículas en cada capa sea fijo, como se ha mencionado antes. Esta restricción causa alteraciones importantes en el efecto del hamiltoniano modelo (16.1), como se demostrará después. Es conveniente entonces, averiguar que justificación se tiene para imponer esta restricción.

En primer lugar, la restricción a estados cuyas configuraciones consten de un número fijo de partículas en cada capa (número fijo de partículas y agujeros simplifica enormemente los cálculos \* y en un primer análisis del problema siempre es conveniente imponer esta restricción, como se ha hecho en la mayoría de los trabajos realizados hasta ahora en este caso.

Por otro lado, cuando se consideran estados de paridad definida, al variar el número de partículas y agujeros se debe hacer creando parejas de agujeros. Pero

\* Véase el capítulo siguiente.

esto introduce un aumento en la energía debido a la excitación de dos partículas a una capa de mayor energía. Se podría pensar por consiguiente que los estados de energía de excitación más baja corresponden a configuraciones con el menor número posible de agujeros compatible con la paridad del estado que se intenta describir. Como se verá a continuación, un análisis de los órdenes de magnitud de las diferentes cantidades que entran en juego para determinar la energía, muestra que esta conclusión es incorrecta.

Considere el caso del  $O^{16}$ , núcleo doblemente mágico. Los primeros niveles excitados se deben obtener por la creación de agujeros en la capa  $1p$ , o sea de la excitación de alguna de las partículas a la capa  $2s-1d$ . Si consideramos el sistema desde el punto de vista del esquema de Elliott, que consiste en darle preeminencia al término de la interacción (16.1) sobre los términos restantes, vemos que los estados de más baja energía provendrán de estados clasificados por la representación irreducible máxima de  $SU_3$ , como se ha indicado. Tomando en cuenta este hecho, para hacer el análisis de los órdenes de magnitud lo más sencillo posible, consideraremos este término de la interacción, únicamente.

De acuerdo con nuestra hipótesis, el estado de paridad negativa de energía de excitación baja corresponde a configuraciones de un solo agujero en la capa  $1p$ ; las representaciones posibles de  $SU_3$  son  $(31)$  y  $(10)$ . Por consiguiente la representación máxima de  $SU_3$  es  $(31)$  en este caso. Pero configuraciones de tres agujeros son también compatibles con la paridad de estos niveles; la máxima representación posible de  $SU_3$  es  $(93)$  para estos estados. Si recordamos la expresión para los eigenvalores de  $Q^2$  con respecto a estados clasificados por la cadena  $SU_3 \supset R_3$  (con respecto a los cuales  $Q^2$  es diagonal)<sup>1)</sup>.

$$Q^2(k_1, k_2, L) = \frac{2}{3} (k_1 + k_2)^2 - 2k_1 (k_2 + 1) - \frac{1}{2} L (L + 1) \quad (16.3)$$

vemos que la contribución negativa de estados clasificados por (93) es mayor que la de los estados con  $(k_1, k_2)$  (31) y que la diferencia de energías es del orden de 25 MeV, si consideramos que  $V_0 \simeq 1$  MeV, como parece adecuado de cálculos anteriores. Por otro lado el estado de 3 agujeros tiene energía mayor que el estado de 1 agujero, siendo la diferencia del orden de

$$2\hbar\omega \simeq 30 \text{ MeV},$$

en donde  $\omega$  es la frecuencia del oscilador armónico, en esta región.

Como se puede ver de estos cálculos aproximados los dos efectos contrarios son del mismo orden de magnitud; no se puede concluir a priori, por lo tanto, que las configuraciones con tres agujeros no contribuyan a los primeros niveles excitados de paridad negativa de este núcleo. De hecho, se sabe de trabajos recientes de Green y Brown<sup>23, 24)</sup>, que estas configuraciones son importantes aún para el primer nivel excitado del  $O^{16}$ .

Un análisis semejante para otros núcleos en esta región lleva a una conclusión semejante. En otras palabras, las configuraciones de más de un agujero son importantes, siendo entonces la principal justificación de la hipótesis de un número fijo de partículas y agujeros la gran simplificación que introduce en los cálculos.

En particular, aunque se logren ajustar razonablemente los niveles de energía de un cierto núcleo en esta región, es posible que las funciones de onda que se obtengan como eigenfunciones del sistema, sean tales que el traslape con las funciones físicas (funciones de onda hipotéticas que se obtendrían de la solución exacta del proble-

ma) no sea muy alto, En este caso, el cálculo de otros observables, como probabilidades de transición electromagnética, no sería sino aproximado.

En resumen, utilizamos las siguientes hipótesis simplificatorias :

1) Restricción a un número mínimo de agujeros, compatible con la paridad del estado que se desea describir.

2) Tratamiento dentro del esquema de Elliott : restricción a la representación que da la energía mas baja para el término  $Q^2$  de ( 16.1 ), o sea la máxima representación de  $SU_3$ , compatible con la restricción ( 1 ) y con el isospin T.

3) Uso de la interacción modelo ( 16.1 ) para tomar en cuenta las correlaciones entre las partículas.

En nuestra opinión, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente en cálculos efectuados con ( 16.1 ), la restricción más importante es ( 1 ). En un cálculo más exacto, debe ser la primera hipótesis simplificada desechada.

Teniendo en mente estas simplificaciones procedemos ahora a analizar la interacción modelo y sus efectos cuando se utilizan funciones de onda de partícula-agujero.

Veamos primeramente lo que sucede con las correlaciones de corto alcance de la interacción. En los estudios realizados previamente, se tiene que la fuerza de apareamiento definida por la ec. ( 16. 2 a ) representa un buen modelo para una interacción central de corto alcance, o sea, una interacción que se podría representar por una función delta de Dirac <sup>25,26,27, 1)</sup>. Analizaremos a continuación si esto sigue siendo válido en el caso que nos interesa ahora.

Una interacción central arbitraria se puede expresar en el esquema de la segunda cuantización en la forma siguiente :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \mu_2} \sum_{\mu', \mu'_2} \langle \mu, \mu_2 | V_{12} | \mu', \mu'_2 \rangle (c_{\mu}^{\mu'}, c_{\mu_2}^{\mu'_2} - \delta_{\mu_2}^{\mu'} c_{\mu}^{\mu'_2}) \quad (16.4)$$

en donde

$$c_{\mu}^{\mu'} = \sum_s b_{\mu s}^+ b^{\mu' s}$$

En el caso en que nos restringimos a estados de las capas  $lp$  y  $2s-1d$ ,  $c_{\mu}^{\mu'}$  son los generadores del grupo  $U_9$ ; en general, para dos capas contiguas con energías dadas por  $\nu$  y  $\nu+1$  respectivamente, son los generadores del grupo unitario en  $(\nu+2)^2$  dimensiones. Para nuestros propósitos presentes, es conveniente utilizar los números cuánticos  $\nu \ell m$  para denotar el estado de una sola partícula en el potencial común. Como antes  $\nu$  toma los valores  $0, 1, 2, \dots$  y nos indica el número de cuantos en el oscilador, mientras que  $\ell, m$  son el momento angular y su proyección, de la partícula. Es fácil expresar los estados  $\nu \ell m$  en términos de los previamente introducidos, que se denotaban con los números cuánticos  $n_1, n_0, n_{-1}$  <sup>28, 29</sup>. En el oscilador armónico dado el número cuántico  $\nu$  los valores posibles del momento angular son

$$\ell = \nu, \nu-2, \dots, 1 \text{ ó } 0. \quad (16.5)$$

Si en la ecuación (16.4) introducimos en lugar de  $V_{12}$  la función

$$V_{12} = \delta(r_1 - r_2) \quad (16.6)$$

tendremos, utilizando la notación  $\nu \ell m$  para el índice  $\mu$

$$\langle \nu_1 \ell_1 m_1, \nu_2 \ell_2 m_2 | \delta(r_1 - r_2) | \nu'_1 \ell'_1 m'_1, \nu'_2 \ell'_2 m'_2 \rangle \sum_{LM} \langle \ell_1 \ell_2 m_1 m_2 | LM \rangle \times \\ \times \langle \ell'_1 \ell'_2 m'_1 m'_2 | LM \rangle \langle \nu_1 \ell_1, \nu_2 \ell_2, LM | \delta(r_1 - r_2) | \nu'_1 \ell'_1, \nu'_2 \ell'_2, LM \rangle \quad (16.7)$$

ya que  $\delta(r_1 - r_2)$  es una interacción central que conmuta con el momento angular total de las dos partículas.

Por otro lado, se sabe que el elemento de matriz de la función delta entre funciones de onda de dos partículas acopladas al momento angular total definido es apreciablemente diferente de cero cuando  $L = 0$ ; es decir

$$\langle \nu_1 l_1, \nu_2 l_2, L | \delta(r_1 - r_2) | \nu'_1 l'_1, \nu'_2 l'_2, L \rangle \approx \langle \nu_1 l_1, \nu_2 l_2, 0 | \delta | \nu'_1 l'_1, \nu'_2 l'_2, 0 \rangle \delta_{L,0} \quad (16.8)$$

Por lo tanto, el elemento de matriz (16.7) es del mismo tipo que los elementos de matriz definidos en la ecuación (16.2 a); en otras palabras, la expresión para el potencial delta es aproximadamente igual a la expresión para la fuerza de apareamiento en segunda cuantización.

Si tomamos en cuenta los valores posibles de  $l$  para un valor dado de  $\nu$  (ec. 16.5) vemos que si  $l_1$  en  $\mu_1$  es igual a  $l_2$  en  $\mu_2$  entonces  $\nu_1$  en  $\mu_1$  es igual a  $\nu_2$  en  $\mu_2$ , cuando se trata con dos capas contiguas del oscilador, - únicamente. En otras palabras el elemento de matriz (16.2 b) se puede expresar como

$$\langle \nu_1 l_1 m_1, \nu_2 l_2 m_2 | P | \nu'_1 l'_1 m'_1, \nu'_2 l'_2 m'_2 \rangle = (-1)^{m_1 + m'_1} \delta_{\nu_1 \nu_2} \delta_{m_1, -m_2} \times \delta_{\nu'_1 \nu'_2} \delta_{l'_1 l'_2} \delta_{m'_1, -m'_2} \quad (16.2 b)$$

(Desde luego la misma expresión es válida aproximadamente para los elementos de matriz entre estados de dos partículas del oscilador con un potencial delta).

Sustituyendo la expresión (16.2 c) en la ecuación (16.4) se tiene para la fuerza de apareamiento,

$$P = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \nu'} \sum_{l, l'} \sum_{m, m'} (-1)^{m+m'} \left( \begin{matrix} \nu_i, l', m' \\ \nu, l, m \end{matrix} \begin{matrix} \nu', l', -m' \\ \nu, l, -m \end{matrix} - \begin{matrix} \nu_i, l', m' \\ \nu, l, m \end{matrix} \begin{matrix} \nu', l', -m' \\ \nu, l, -m \end{matrix} \right) \quad (16.9)$$

Si efectuamos la suma sobre  $\nu$  y  $\nu'$  explícitamente, restringiendo los valores de estos números cuánticos a  $\nu$  y  $\nu+1$  únicamente, se tiene

$$P = \frac{1}{2} \sum_{l, l'} \sum_{m, m'} (-1)^{m+m'} \left( \begin{matrix} \nu, l', m' \\ \nu, l, m \end{matrix} \begin{matrix} \nu, l', -m' \\ \nu, l, -m \end{matrix} + \begin{matrix} \nu+1, l', m' \\ \nu+1, l, m \end{matrix} \begin{matrix} \nu+1, l', -m' \\ \nu+1, l, -m \end{matrix} + \begin{matrix} \nu+1, l', m' \\ \nu, l, m \end{matrix} \begin{matrix} \nu+1, l', -m' \\ \nu, l, -m \end{matrix} + \begin{matrix} \nu, l', m' \\ \nu+1, l, m \end{matrix} \begin{matrix} \nu, l', -m' \\ \nu+1, l, -m \end{matrix} \right) - (N_\nu + N_{\nu+1}) \quad (16.10)$$

en donde

$$N_{\nu_i} = \sum_{\nu_i, l_i, m_i} \begin{matrix} \nu_i, l_i, m_i \\ \nu_i, l_i, m_i \end{matrix}$$

es el operador de número para la capa con  $\nu = \nu_i$ .

Como es fácil ver de la ecuación (16.10) el segundo y el tercer término dentro del primer paréntesis cambian al número de partículas en cada capa; así, por ejemplo, el segundo sumando disminuye en dos el número de ellas en la capa  $\nu$  y lo aumenta, también en dos, en la capa  $\nu+1$ .

Si ahora nos restringimos a considerar configuraciones con número fijo de partículas en cada capa, los términos arriba mencionados de la ecuación (16.10) tendrán elementos de matriz iguales a 0. Se obtiene entonces una fuerza de apareamiento simplificada  $P'$ , que se puede escribir como

$$P' = P_\nu + P_{\nu+1} \quad (16.11)$$

en donde  $P_{\nu}$  se expresa como

$$P_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{ll'} \sum_{mm'} (-1)^{m+m'} G_{\nu l m} G_{\nu l' - m'} - N_{\nu} \quad (16.12)$$

con una expresión análoga para  $P_{\nu+1}$ .

En otras palabras, la fuerza de apareamiento se descompone en dos sumandos, que representan ( cada uno por separado ) fuerzas de apareamiento que actúan independientemente sobre estados de cada capa. Esto lo podemos interpretar en la forma siguiente: si consideramos que  $G$  es un parámetro que mide la intensidad de la fuerza de apareamiento, lo que hemos supuesto es equivalente a considerar el valor de  $G$  como mucho menor a  $2 \frac{\hbar}{\omega}$ , el doble de la separación entre las dos capas del oscilador, en cuyo caso esta fuerza no puede llevar una pareja apareada a momento angular total igual a 0 de la capa  $\nu$  a la capa  $\nu+1$ .

Desde el punto de vista de la clasificación de los estados por una cadena de subgrupos de  $U_9$ , ( consideramos el caso particular  $\nu=1$  por ser el de interés directo aquí, aunque los resultados que se indican a continuación son válidos para  $\nu$  arbitraria ) se sabe que la expresión original ( 16.19 ) para  $P$  que incluya a  $R_9$ , grupo de rotaciones en un espacio de 9 dimensiones. La fuerza de apareamiento reducida ( 16.11 ) es diagonal cuando los estados se clasifican por la cadena de subgrupos siguiente

$$U_9 \supset U_6 + U_3 \supset P_6 + R_3 \quad (16.13)$$

como es claro de la ecuación ( 16.12 ) para  $P_{\nu}$  y la ecuación análoga para  $P_{\nu+1}$ , si se recuerda la demostración de un hecho análogo en el caso de partículas de una sola capa <sup>1)</sup>.

Consideraremos ahora las correlaciones de largo alcance. Si tomamos una interacción central, ( se elige un potencial gaussiano por conveniencia )

$$V(r_{12}) = -V_0 \rho^{-\frac{r_{12}^2}{\alpha^2}} \quad (16.14)$$

y desarrollamos su expresión en serie de potencias de  $\alpha^{-2}$  se tiene que

$$V(r_{12}) = -V_0 \left[ 1 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{\alpha^2} + \frac{2r_1 \cdot r_2}{\alpha^2} + \frac{r_1^4 + r_2^4}{\alpha^4} + \frac{5r_1^2 r_2^2}{3\alpha^4} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\alpha^4} (r_1^2 + r_2^2)(r_1 \cdot r_2) + \frac{2}{\alpha^4} (r_1 \cdot r_2)^2 - \frac{1}{3} r_1^2 r_2^2 \right] + \dots \quad (16.15)$$

Para largos alcances del potencial ( 16.14 ) (  $\alpha \rightarrow \infty$  ) sólo se necesitaría llegar hasta términos del orden  $\alpha^{-2}$  . Para configuraciones de partículas de una sola capa, estos términos no rompen la degeneración, ya que el término

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{\alpha^2}$$

se puede considerar como una corrección al pozo central y el término

$$\frac{2r_1 \cdot r_2}{\alpha^2}$$

tiene elementos de matriz iguales a 0 con respecto a estos estados, por ser todos de paridad par<sup>30)</sup> .

Sin embargo, cuando se consideran estados de partículas en dos capas contiguas, las funciones de onda de una sola partícula pueden tener paridades opuestas. En este caso este término, que es una interacción del tipo dipolo-dipolo, sí puede romper la degeneración.

En cuanto a los términos de orden  $\alpha^{-4}$ , únicamente el último en el desarrollo de la ecuación (16.15) rompe la degeneración y es equivalente, como es bien sabido, a una interacción cuadrupolo-cuadrupolo. Por lo tanto para valores grandes del alcance del potencial (16.14) el término cuadrupolo-cuadrupolo es despreciable frente al término dipolo-dipolo.

Sin embargo, cuando se considera la interacción entre todos los pares de partículas posibles, la parte dipolo-dipolo del potencial (del orden de  $\alpha^{-2}$ ) es proporcional a

$$\sum_{i < j}^N \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = \frac{1}{2} N^2 R^2 - \frac{1}{2} \sum_L^A r_i^2$$

en donde  $\underline{R}$  es el vector del centro de masa de los nucleones que forman el sistema. Como se demostró en el capítulo anterior,  $R^2$  es proporcional a la energía del centro de masa, la cual ha sido reducida a 0 mediante la eliminación de estados espurios.

En otros términos, la interacción dipolo-dipolo con respecto a estados no-espurios, es equivalente a un potencial de una sola partícula del mismo tipo del oscilador armónico y no rompe la degeneración aún cuando se consideren configuraciones de partícula-agujero. Podemos concluir, por consiguiente que el término  $Q^2$  sigue siendo el único término de una interacción de largo alcance que rompe la degeneración, si se eliminan previamente los estados espurios introducidos por el movimiento del centro de masa. A este término se le puede modificar por las fuerzas de intercambio de largo alcance<sup>31)</sup> que son diagonales con respecto a funciones de onda clasificadas según la teoría de supermultipletes de Wigner.

Vemos entonces, que la combinación lineal

$$x Q^2 + y P$$

sigue siendo un buen modelo para una interacción central entre los nucleones, aunque se consideren configuraciones de partícula-agujero; la interacción está relacionada a las correlaciones de largo alcance y la fuerza de apreamiento a las de corto alcance. Como el acoplamiento spin-órbita  $w_{s.o.}$  es, desde luego, parte integrante del hamiltoniano, se tiene que (16.1) se puede emplear como el hamiltoniano del sistema.

Discutiremos a continuación la aplicación de estas ideas a núcleos cercanos a la capa doblemente cerrada del  $O^{16}$ .

## CAPITULO V

### NIVELES DE ENERGIA Y FUNCIONES DE ONDA DE PARIDAD NEGATIVA DE ALGUNOS NUCLEOS EN EL PRINCIPIO DE LA CAPA 2s-1d.

#### 17.- Cálculo de los Elementos de Matriz de Interacción Modelo.

En este capítulo analizaremos el problema de la obtención de los estados de paridad negativa de cinco núcleos de la capa s-d cercanos al  $O^{16}$ . Para el cálculo de estos niveles y la construcción de las funciones de onda correspondientes se utiliza una combinación de las técnicas estudiadas antes, la técnica analítica y el método sintético.

La suposición básica que se hace en el cálculo indicado a continuación, es la siguiente: los primeros estados excitados de paridad negativa de estos núcleos al principio de la capa 2s-1d provienen de la excitación de una partícula (únicamente) de la capa 1p a la capa 2s-1d; en otras palabras las configuraciones que se consideran de importancia aquí, son las configuraciones de un agujero y un número de partículas compatible con el núcleo que se desea estudiar. Como se sabe del análisis de Brown y Green<sup>23,25)</sup> para el caso del  $O^{16}$ , esta suposición puede no ser correcta, habiéndose encontrado fuertes mezclas de estados de tres agujeros con los estados de un agujero, aún para el primer nivel excitado. Sin embargo, la hipótesis enunciada más arriba, simplifica los cálculos en forma nota-

ble como se verá a continuación.

La forma de la interacción que emplearemos para el cálculo es la dada en la ec. (16.1), que ha dado buenos resultados en otros casos. Por otro lado se ha demostrado en el capítulo anterior que esta interacción modelo puede simular a una interacción central entre los nucleones, una vez que los estados espurios han sido eliminados; en este caso,  $Q^2$  la fuerza cuadrupolo-cuadrupolo representa las correlaciones de largo alcance y  $P$ , la fuerza de apareamiento, las de corto alcance.

En el caso de un agujero en la capa  $1p$  y un número arbitrario de partículas en la capa  $2s-1d$ , que se haya analizado previamente, el cálculo de los elementos de matriz del hamiltoniano modelo es muy sencillo. Si las funciones de onda del sistema se clasifican por la cadena de subgrupos  $SU_3 \supset R_3$ , la interacción  $Q^2$ , que se puede expresar en función de los operadores de Casimir de segundo orden de  $SU_3$  y  $R_3$  es diagonal con eigenvalores dados por la expresión (16.3)<sup>1)</sup>.

Por otro lado, las matrices de apareamiento se pueden obtener de manera muy sencilla si se conocen las matrices de apareamiento para el número de partículas en la capa  $2s-1d$  que se está considerando y los coeficientes de Wigner para el grupo  $SU_3$  en la cadena física  $SU_3 \supset R_3$ . Esto se puede ver de la manera siguiente:

Como se indicó en el capítulo anterior el operador de apareamiento al actuar en el espacio definido por funciones de onda correspondientes a un número de partículas fijo en cada capa es equivalente a la suma de dos operadores de apareamiento, que actúan por separado en cada una de las capas. Es decir

$$P = P_1 + P_2$$

con  $P_1$  y  $P_2$  definidos en la ecuación (16.12).

Según se demuestra en la referencia 1,

$$P_1 = \Gamma_3 - 2\Phi_3$$

en donde  $\Gamma_3$  es el operador de Casimir de segundo orden del grupo  $U_3$  de degeneración orbital en la capa lp y  $\Phi_3$  es el operador de Casimir de  $R_3$ , el subgrupo ortogonal en tres dimensiones, que coincide con el grupo de rotaciones en el espacio orbital. Los índices de la representación irreducible de  $U_3$  están contenidos en la clasificación de las funciones de onda, así como el momento angular de los nucleones en la capa lp, que es el índice de la RI del subgrupo  $R_3$ . Esto último es cierto únicamente en el caso en que estamos interesados, es decir, un agujero en la capa lp, que corresponde a momento angular orbital definido  $L'' = 1$ . La expresión para los eigenvalores de  $\Gamma_3$  en términos de los índices de la representación de  $U_3$  es la siguiente:

$$\gamma_3 = \sum_{\mu=1}^3 h''_{\mu} (h''_{\mu} - 2\mu)$$

En el caso de un solo agujero la RI de  $U_3$  es  $[00-1]$ , como se vio en el capítulo I: por lo tanto

$$\gamma_3 = 7$$

Además, el eigenvalor del operador  $\Phi_3$  es

$$\varphi = L'' (L'' + 1)$$

con  $L'' = 1$  para todos los estados de un solo agujero.

Podemos concluir entonces que los estados considerados aquí son eigenfunciones de  $P_1$  con un eigenvalor independiente del estado específico de que se trate; es decir, la matriz de  $P_1$  es una matriz escalar con respecto a estos estados, lo que indi

ca que no es de importancia para la obtención de la separación entre los niveles de energía.

Por otro lado, el operador  $\rho_2$  actúa sólo sobre los operadores de partícula y las matrices correspondientes han sido obtenidas previamente para un número considerable de casos, en los cuales el objetivo era el análisis de estados de paridad positiva y baja excitación para núcleos de la capa,  $2s-1d$ .

Aprovechando estos resultados, podemos obtener las matrices de la fuerza de apareamiento con respecto a los estados de partícula-agujero clasificados por  $SU_3$  en la forma siguiente :

Se trata de calcular el elemento de matriz

$$\langle [k], [k'] + [k''], (k_1, k_2) \bar{L}; \{v\} S_T | P | [k], [k'] + [k''], (k_1, k_2) L; \{v\} S_T \rangle$$

en donde todos los símbolos tienen el mismo significado que se especificó antes. Como el operador de apareamiento no depende de los índices de spin e isospin y es independiente, por lo tanto, de los valores de  $\{v\}, S, T$  en los kets, se suprimirán de aquí en adelante. Además  $P$  es invariante frente a rotaciones y por tanto  $\bar{L} = L$ . Como consecuencia se tiene que la matriz de apareamiento será una matriz diagonal en la cadena  $SU_3 \supset R_3$  a menos que la representación  $(k_1, k_2)$  de  $L$  considerada contenga el mismo valor de  $L$  más de una vez.

De acuerdo con los resultados del método sintético, se sabe que una expresión posible para el ket clasificado por esta cadena de subgrupos es

$$\begin{aligned} & \left| [k], [k'] + [k''] (k_1, k_2) \omega L M_2; \{v\} S M_S, T M_T \right\rangle = \sum \left\langle \begin{matrix} \{v'\} & \{v''\} \\ j' s' T' & j'' s'' T'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \{v\} \\ j S M_S \\ T M_T \end{matrix} \right\rangle \\ & \times \left\langle \begin{matrix} (k', k_2') & (k'', k_2'') \\ \omega' L' M_L' & \omega'' L'' M_L'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (k_1, k_2) \\ \omega L M \end{matrix} \right\rangle \left| [k'] (k_1', k_2') L' M_2'; \{v'\} S' T' \right\rangle \left| [k''] (k_1'', k_2'') \omega'' L'' M_2'; \{v''\} S'' T'' \right\rangle \end{aligned}$$

en donde el primer factor en el lado derecho de esta ecuación es el coeficiente de Wigner

de  $U_4$  en la cadena no natural  $U_4 \supset SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)}$  que acopla el estado en  $\{\nu'\}$  como RI del grupo  $U_4$  y spin total  $S'$ , isospin  $T'$  con el estado cuya RI en  $U_4$  es  $\{\nu''\}$  y con spin total  $S''$  e isospin total  $T''$ , para obtener una RI de  $U_4$   $\{\nu\}$  así como spin e isospin totales  $S$  y  $T$ , respectivamente. Como se indicó antes, la función de onda queda automáticamente acoplada en el grupo unitario  $U_9$ , grupo complementario de  $U_4$ .

El segundo factor es un coeficiente de Wigner de  $SU_3$  en la cadena física y los kets se refieren, respectivamente, a partículas en la capa s-d y a agujeros en la capa p.

En el caso de un solo agujero, la representación  $(k'', k_2'')$  de  $SU_3$  es (11) que corresponde en  $U_3$  a  $(00-1)$  y en  $R_3$  a  $L'' = 1$ . (El índice  $\omega''$  no es necesario en este caso)

Introduciendo esta expresión para los estados de partícula agujero en el elemento de matriz de la fuerza de apareamiento se tiene la expresión:

$$\begin{aligned} & \left\langle [h], [h'] + [h''] (\bar{k}, \bar{k}_2) \bar{\omega} \bar{L} \bar{M}; \{\nu\} S M_S T M_T \mid P \mid [h], [h'] + [h''] (k, k_2) \omega L M; \{\nu\} S M_S T M_T \right\rangle \\ &= \sum \sum \left\langle (\bar{k}', \bar{k}_2'); (11) \mid (\bar{k}, \bar{k}_2) \right\rangle \left\langle (\omega', L', M'); (11) \mid (\omega, L, M) \right\rangle \times \\ & \quad \times \left\langle [h'] (k', k_2') \bar{\omega}' L' M' \mid P_2 \mid [h] (k, k_2) \omega L M \right\rangle, \end{aligned}$$

en donde se ha aprovechado la independencia de  $P$  con respecto al spin y al isospin para utilizar la ortonormalidad de los coeficientes de Clebsch - Gordan de  $U_4$  y eliminarlos. Se ha suprimido la contribución del operador de apareamiento en la capa  $lp$ , ya que es la misma para todos los estados. Por otro lado,  $P_2$  es invariante frente a rotaciones en el

espacio de tres dimensiones; el elemento de matriz

$$\langle [k'] (k'_1, k'_2) \bar{\omega}' \bar{L}' \bar{M}'_2 | P_2 | [k'] (k'_1, k'_2) \omega' L' M'_2 \rangle$$

es igual a cero si  $\bar{L}' \neq L'$  y es independiente de la proyección de  $L$ .

Si se aprovecha la independencia de  $M$  del elemento de matriz de  $P$  y se definen los coeficientes reducidos de Wigner de  $SU_3$  en la forma

$$\langle (k'_1, k'_2) ; (11) \left. \begin{matrix} \omega' L' M' \\ L'' M'' \end{matrix} \right| (k, k_2) \rangle = \langle (k'_1, k'_2) ; (11) \left. \begin{matrix} \omega' L' \\ L'' \end{matrix} \right| \omega L \rangle \langle L' L'' M' M'' | L M \rangle$$

el elemento de matriz para  $P$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} \langle |P| \rangle = & \sum \sum \langle (k'_1, k'_2) ; (11) \left. \begin{matrix} \bar{\omega}' \bar{L}' \\ L'' \end{matrix} \right| \bar{\omega} L \rangle \langle (k, k_2) ; (11) \left. \begin{matrix} \omega' L' \\ L'' \end{matrix} \right| \omega L \rangle \\ & \times \langle [k'] (k'_1, k'_2) \bar{\omega}' \bar{L}' | P_2 | [k'] (k'_1, k'_2) \omega' L' \rangle . \end{aligned}$$

Si nos restringimos por la hipótesis de Elliott  $k_1 = k'_1, k_2 = k'_2$ .

En otras palabras, el elemento de matriz de la fuerza de apareamiento restringida se expresa como función de coeficientes de Wigner en la cadena física  $SU_3 \supset R_3$  y los elementos de matriz para la fuerza de apareamiento  $P_2$  en la capa  $2s-1d$ , cuando se tiene un estado de un sólo agujero. Si por algún motivo se conocen estos elementos de matriz para  $P_2$  con respecto a estados de  $n$  partículas en la capa  $\nu = 2$ , se pueden calcular las matrices del apareamiento para una configuración de  $n$  partículas en la capa  $\nu = 2$ , se pueden calcular las matrices del apareamiento para una configuración de  $n$  partículas en  $\nu = 2$  y un agujero en  $\nu = 1$ .

En cuanto al tercer término en el hamiltoniano modelo, el acoplamiento spin-órbita, los elementos de matriz con respecto a estados clasificados por  $SU_3$  se pueden

calcular de la manera introducida por Moshinsky <sup>1)</sup>, que esencialmente consiste en utilizar las propiedades tensoriales que tiene el operador  $\mathcal{W}_{s.o.}$  frente a transformaciones en este grupo para aplicar el teorema de Wigner-Eckart, apropiado para grupos que no sean simplemente reducibles. Cuando en el bra y en el ket se tienen estados correspondientes a la misma representación  $(k_1 k_2)$  de  $SU_3$ , el cálculo del elemento de matriz reducido se puede hacer fácilmente por aplicación directa del operador a los polinomios correspondientes, que se construyen como se indicó antes. El método de cálculo de los elementos de matriz de  $\mathcal{W}_{s.o.}$  ha sido aplicado para calcular los niveles de paridad positiva de  $F^{20}$  y ha sido programado para una computadora electrónica.

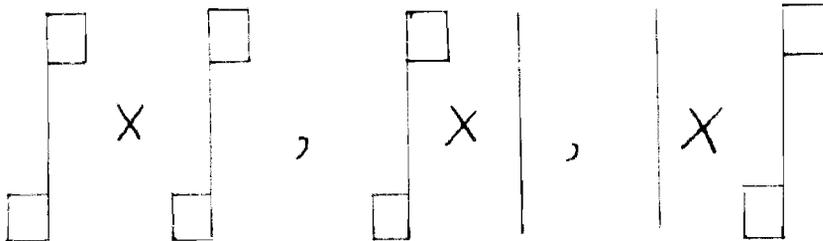
18.- Comparación de Resultados Teóricos con los Datos Experimentales.

Estudiaremos ahora cada uno de los núcleos por separado, empezando por el doblemente mágico  $O^{16}$ , que desde nuestro punto de vista es el más sencillo de tratar.

Según nuestra hipótesis, los estados de paridad negativa del  $O^{16}$  corresponden a una configuración de una partícula y un agujero. De acuerdo con la clasificación introducida en el cap. I, en el grupo  $U_{36}$  la RI para estos estados es



En el subgrupo  $U_9 \times U_4$  esta representación contiene las representaciones siguientes :



Como se vió antes, la representación  $\begin{array}{|c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \times \begin{array}{|c} \square \\ \square \end{array}$  incluye una contracción con respecto a los índices orbitales y por lo tanto equivale a cambiar el número de partículas en cada capa.

( En este caso, además, corresponde a estados de paridad positiva ). En cuanto a las otras dos representaciones posibles, ambas corresponden a los índices  $\{100-1\}$  en el grupo  $U_4$  (  $\{211\}$  en  $SU_4$  ) al considerar el estado físico ( es decir, con el estado de vacío  $|0\rangle$  incluido ). En el grupo orbital  $\mathcal{U}_9$  las representaciones son las conjugadas a las de  $U_4$  y son, respectivamente,  $[4431]$  y  $[444]$ . Ambas corresponden a  $[1]$  en  $\mathcal{U}_6$  y a  $[443]$  en  $\mathcal{U}_3$  ( todos los estados de un solo agujero en la capa  $1p$  están relacionados con esta  $RI$  de  $\mathcal{U}_3$  ) y contienen las representaciones  $(31)$  y  $(10)$  de  $SU_3$ . La clasificación completa de las funciones de onda se dan en la tabla 5

Si utilizamos el operador del centro de masa, introducido en el cap. III, se encuentra que los estados de la representación  $(10)$  de  $SU_3$  son estados espurios, ya que corresponden a un estado  $P$  del movimiento del centro de masa. Estos estados, independientemente de la representación de  $\mathcal{U}_9$  a que correspondan deben ser eliminados, por consiguiente. En la tabla 6 se dan las funciones de onda no-espurias, construidas por la técnica analítica expuesta antes.

Vemos entonces, que para la configuración de una sola partícula y un agujero, la restricción a la máxima representación de  $SU_3$  es automática, ya que estos estados son los únicos no-espurios. Sin embargo, se podría pensar en una simplificación extra, que se introduce habitualmente al tratar con estados de partículas en una capa; como las fuerzas entre los nucleones son atractivas, se supone que las representaciones más simétricas en el grupo orbital describen los estados de energía más baja y se acostumbra restringirse a ellas.

En el caso del  $O^{16}$ , esto equivale a tomar en cuenta la representación  $[4^3]$  de  $\mathcal{U}_9$ , únicamente. Como se puede ver de la tabla de clasificación, estos estados tienen valores nulos para  $S$  y  $T$ . Aunque los estados más bajos de paridad negativa del oxígeno  $16$  corresponden a  $T=0$ , es poco probable que correspondan a un valor definido de spin total; las

limitaciones impuestas sobre las funciones de onda que han de considerarse parecen, pues, - excesivas. Utilizando la interacción modelo (16.1) estas consideraciones se confirman, ya que los resultados que se obtienen con funciones de onda clasificadas por  $[4^3]$  en  $U_9$  están en total desacuerdo con los resultados experimentales, como se discute a continuación.

Para estados de una partícula y un agujero, la fuerza de apareamiento restringida es diagonal, con una contribución igual para todos los estados, independientemente del valor del momento angular orbital  $L$  a que estos correspondan; la matriz de la fuerza de apareamiento en este caso es una matriz escalar. Como únicamente son de interés las diferencias de energía entre los diversos niveles, la matriz de la fuerza de apareamiento no contribuye y se puede desechar. Por otro lado, el spin total es cero si se hace la restricción de la base por la simetría en  $U_9$ ; los elementos de matriz de la interacción spin-órbita son cero en este caso siendo entonces la fuerza de cuadrupolo-cuadrupolo la que determina la ordenación de los niveles y la separación entre ellos. Pero la ordenación de los niveles resultante de la interacción  $Q^2$  es 1, 2, 3, en discordancia con el experimento. Podemos concluir, por lo tanto, que no es conveniente introducir la simplificación extra en este caso.

Como se puede ver de la tabla 5, ambas representaciones de  $U_9$  contienen a  $(31)$  de  $SU_3$  y esta es la máxima representación de  $SU_3$  a la cual nos debemos restringir según la hipótesis de Elliott. En los casos tratados hasta ahora con configuraciones de partículas en una capa, la máxima representación de  $SU_3$  corresponde a una sola representación del grupo orbital, una vez especificado el valor del isospin.

Si tomamos en cuenta ambas RI de  $U_9$  los resultados que se obtienen mejoran considerablemente. En la figura 1 se muestran las gráficas comparativas entre los resultados teóricos y el experimento, para el valor del parámetro  $x$  en la interacción (16.1) que da el mejor ajuste en el sentido que

$$\sigma = \sum_i \left[ (E_{\text{teor}})_i - (E_{\text{exp}})_i \right]^2 \quad (17.1)$$

sea mínima. En la fig. la se dan los resultados experimentales<sup>32)</sup>; en la fig. lb resultados del cálculo teórico utilizando la interacción modelo, mientras que en la fig. lc se ha utilizado la interacción modelo modificada por fuerzas de intercambio a largo alcance. El orden para los tres primeros niveles es correcto ahora, pero el cuarto nivel experimental  $1^-$ , se predice teóricamente como el  $0^-$ .

De un cálculo anterior<sup>4)</sup>, se conoce la función de onda del primer estado excitado; se expresa en acoplamiento  $j-j$  en la forma siguiente :

$$0.87 \left| P_{1/2}^{-1} d_{5/2} \right\rangle + 0.37 \left| P_{3/2}^{-1} d_{5/2} \right\rangle + 0.33 \left| P_{3/2}^{-1} d_{3/2} \right\rangle.$$

La función de onda para este mismo nivel que surge de nuestro cálculo es

$$-0.46 \left| (31) L=3 S=0 \right\rangle + 0.65 \left| (31) L=2 S=1 \right\rangle + 0.60 \left| (31) L=3 S=1 \right\rangle$$

El traslape de las dos eigenfunciones es 80% , como se puede ver fácilmente si se utilizan los paréntesis de transformación de la cadena  $SU_3 \supset R_3$  a la base clasificada por acoplamiento  $j-j$ , que se encuentran en la tabla 7.

Como se puede observar en la fig. l los tres primeros niveles se pueden ajustar razonablemente en la misma forma que el nivel  $J = 0^-$  de 10.95 MeV. de excitación. El cuarto estado excitado en 9.59 MeV, ha sido considerado como el origen de una banda de rotación que incluye los niveles  $3^-$  en 11.63 MeV. y  $5^-$  aprox. en 16 MeV.<sup>33,34)</sup> Nuestros cálculos dan una configuración más a este punto en el sentido en que este nivel no

TABLA 5

Clasificación de los Estados de Paridad Negativa e Isospin

$T = 0$  del  $O^{16}$

$U_{36}$	$SU_2^{(8)}$	$U_9$	$SU_3$	$R_3$	$SU_2^{(6)}$	
	T	$[A_\mu]$	$(k_1, k_2)$	L	S	J
[112]	0	[444]	(31)	1, 2, 3	0	1, 2, 3
			(10)	1		1
		[4431]	(31)	1, 2, 3	1	$0, 1^2, 2^3, 3^2, 4$
			(10)	1		0, 1, 2
	1	[4431]	(31)	1, 2, 3	1	$0, 1^2, 2^3, 3^2, 4$
			(10)	1		0, 1, 2
			(31)	1, 2, 3	0	1, 2, 3
			(10)	1		1

TABLA 6

Funciones de Onda no-espurias para el  $0^{16}$  con isospin  $T = 0$ . Se emplea la notación  $(\mu s, \mu' s') \equiv b_{\mu s}^+ b^{\mu' s'}$ .

$  [h] (k_1 k_2) LS, J = M_J \rangle$	
$  [4431] (31) 31, 4 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (11, 3' 3) + (12, 3' 9) \right]  0_x \rangle$
$  [4431] (31) 31, 3 \rangle$	$\left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ (13, 3' 3) - (11, 3' 1) + (14, 3' 4) - (12, 3' 2) \right] - \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[ \sqrt{2}(22, 3' 4) + \sqrt{2}(21, 3' 3) - (11, 2' 3) - (12, 2' 4) \right] \right\}  0_x \rangle$
$  [4431] (31) 21, 3 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \left[ (22, 3' 4) + (21, 3' 3) + \sqrt{2}(12, 2' 4) + \sqrt{2}(11, 2' 3) \right]  0_x \rangle$
$  [4^3] (31) 30, 3 \rangle$	$\frac{1}{2} \left[ (11, 3' 1) + (12, 3' 2) + (13, 3' 3) + (14, 3' 4) \right]  0_x \rangle$ $= \frac{1}{2} \mathcal{G}_1^{31}  0_x \rangle$
$  [4431] 31, 2 \rangle$	$\frac{1}{90\sqrt{14}} \left[ -90(13, 3' 1) - 90(14, 3' 2) - 30(23, 3' 3) + 30(21, 3' 1) \right.$ $+ 15\sqrt{2} (13, 2' 3) - 15\sqrt{2}(11, 2' 1) - 30 (24, 3' 4)$ $+ 30 (22, 3' 2) + 15\sqrt{2}(14, 2' 4) - 15\sqrt{2}(12, 2' 2)$ $\left. + 12 (42, 3' 4) + 12 (41, 3' 3) + 6\sqrt{2}(32, 3' 4) \right]$

	$+ 6\sqrt{2}(31, 3'3) - 12\sqrt{2}(22, 2'4) - 12\sqrt{2}(21, 2'3) + 6(12, 1'4) + 6(11, 1'3) \Big]  0_x\rangle$
$ [4431] (31) 21, 2\rangle$	$\frac{1}{6} \left[ \sqrt{2}(23, 3'3) - \sqrt{2}(21, 3'1) + 2(13, 2'3) - 2(11, 2'1) + \sqrt{2}(24, 3'4) - \sqrt{2}(22, 3'2) + 2(14, 2'4) - 2(12, 2'2) - \sqrt{2}(42, 3'4) - \sqrt{2}(41, 3'3) - (32, 3'4) - (31, 3'3) + (22, 2'4) - (21, 2'3) + \sqrt{2}(12, 1'4) + \sqrt{2}(11, 1'3) \right]  0_x\rangle$
$ [4^3] Q=0, 2\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{12}} \left[ (21, 3'1) + (22, 3'2) + (23, 3'3) + (24, 3'4) + \sqrt{2}(11, 2'1) + \sqrt{2}(12, 2'2) + \sqrt{2}(13, 2'3) + \sqrt{2}(14, 2'4) \right]  0_x\rangle$ $= \frac{1}{\sqrt{12}} \left[ \mathcal{G}_2^{31} + \sqrt{2} \mathcal{G}_1^{21} \right]  0_x\rangle$
$ [4431] (31) 21, 1\rangle$	$- \frac{1}{2\sqrt{20}} \left[ 2\sqrt{2}(23, 3'1) + 4(13, 2'1) + 2\sqrt{2}(24, 3'2) + 4(14, 2'2) + \sqrt{2}(43, 3'3) + (33, 3'3) + (23, 2'3) - \sqrt{2}(13, 1'3) - \sqrt{2}(41, 3'1) - (31, 3'1) - (21, 2'1) + \sqrt{2}(11, 1'1) + \sqrt{2}(44, 3'4) + (34, 3'4) + (24, 2'4) + \sqrt{2}(14, 1'4) - \sqrt{2}(42, 3'2) - (32, 3'2) - (22, 2'2) + \sqrt{2}(12, 1'2) + \sqrt{2}(22, 1'4) + \sqrt{2}(21, 1'3) - \sqrt{2}(52, 3'4) - \sqrt{2}(51, 3'3) \right]  0_x\rangle$

$(k_1, k_2) \text{ LS, J}$	
$  [4431] (31) 11, 1 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{160}} \left[ \begin{aligned} & 2\sqrt{2}(43, 3'3) - 3(23, 3'3) + (23, 2'3) + \\ & + \sqrt{2}(13, 1'3) - 2\sqrt{2}(41, 3'1) + 3(31, 3'1) - (21, 2'1) \\ & - \sqrt{2}(11, 1'1) + 2\sqrt{2}(44, 3'4) - 3(34, 3'4) + \\ & + (24, 2'4) + \sqrt{2}(14, 1'4) - 2\sqrt{2}(42, 3'2) + \\ & + 3(32, 3'2) - (22, 2'2) - \sqrt{2}(12, 1'2) \\ & - \sqrt{2}(21, 1'3) - \sqrt{2}(22, 1'4) - 4\sqrt{2}(31, 2'3) \\ & - 4\sqrt{2}(32, 2'4) + 2(41, 2'3) + 2(42, 2'4) - \\ & - \sqrt{2}(51, 3'3) - \sqrt{2}(52, 3'4) \end{aligned} \right]  0_x\rangle$
$  [4^3] (31) 10, 1 \rangle$	$\begin{aligned} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \left[ \begin{aligned} & 2\sqrt{2}(41, 3'1) + 2\sqrt{2}(42, 3'2) + 2\sqrt{2}(43, 3'3) + \\ & + 2\sqrt{2}(44, 3'4) - 3(31, 3'1) - 3(32, 3'2) - 3(33, 3'3) \\ & - 3(34, 3'4) + (21, 2'1) + (22, 2'2) + (23, 2'3) + \\ & + (24, 2'4) + \sqrt{2}(11, 1'1) + \sqrt{2}(12, 1'2) + \sqrt{2}(13, 1'3) + \\ & + \sqrt{2}(14, 1'4) \end{aligned} \right]  0_x\rangle \\ & = \frac{1}{4\sqrt{5}} \left[ 2\sqrt{2} e_4^{3'} - 3 e_3^{3'} + e_2^{2'} + \sqrt{2} e_1^{1'} \right]  0_x\rangle \end{aligned}$

TABLA 7

Paréntesis de Transformación entre Funciones de Onda clasificadas por la Cadena  $SU_3$  y Acoplamiento  $j - j$  para el  $O^{16}$

$J$	$(k_1, k_2)$ LS	$(\frac{5}{2})^{-1}$	$(\frac{5}{2})^{-1}$	$(\frac{5}{2})^{-1}$	$(\frac{3}{2})^{-1}$	$(\frac{5}{2})^{-1}$	$(\frac{5}{2})^{-1}$	$(\frac{1}{2})^{-1}$	$(\frac{3}{2})^{-1}$	$(\frac{3}{2})^{-1}$	$(\frac{5}{2})^{-1}$	$(\frac{1}{2})^{-1}$	$(\frac{1}{2})^{-1}$	$(\frac{3}{2})^{-1}$	$(\frac{3}{2})^{-1}$	
4	$(31)$ 31	1														
	$(31)$ 31		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}}$	$2\sqrt{\frac{2}{15}}$											
3	$(31)$ 21		$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{-8}{3\sqrt{10}}$	$\frac{-1}{\sqrt{15}}$											
	$(31)$ 30		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-2}{\sqrt{15}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$											
2	$(31)$ 31					$\frac{-\sqrt{7}}{15}$	$\frac{-\sqrt{8}}{15}$	0	$\frac{2\sqrt{42}}{15}$	$\frac{\sqrt{42}}{15}$						
	$(31)$ 21					$\frac{4}{\sqrt{45}}$	$\frac{\sqrt{14}}{6\sqrt{5}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{30}}$	$\frac{-4}{\sqrt{30}}$						
	$(31)$ 11					$\frac{2}{5}$	$\frac{\sqrt{7}}{10}$	$\frac{-\sqrt{5}}{6}$	$\frac{-1}{10\sqrt{3}}$	$\frac{1}{5\sqrt{3}}$						
	$(31)$ 20					$\frac{\sqrt{2}}{15}$	$\frac{\sqrt{7}}{15}$	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{-1}{\sqrt{5}}$						
	$(10)$ 11					$\frac{-\sqrt{6}}{15}$	$\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{-1}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{15}}$						
	$(31)$ 21										$\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-2}{\sqrt{10}}$	
1	$(31)$ 11										$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$\frac{-\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{10}}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{2}{3\sqrt{5}}$	
	$(31)$ 10										$\frac{-1}{\sqrt{10}}$	$\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{-\sqrt{2}}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{5}}$	
	$(10)$ 11										$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{-2}{3}$	
	$(10)$ 10										$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-\sqrt{10}}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	

se puede obtener de la configuración de una partícula y un agujero. Desde el punto de vista del modelo considerado aquí, este nivel debería corresponder a una configuración más complicada, como la consistente en tres partículas y tres agujeros que no hemos analizado.

Uno de los puntos más interesantes del análisis es el hecho de que haya sido necesario incluir la representación  $[4431]$  de  $\mathcal{U}_9$  en el cálculo, cortando la base únicamente por  $SU_3$ , restringiendo el número de estados a los clasificados por la representación  $(31)$  de este grupo. Es interesante hacer notar, por otro lado, que la interacción modelo pueda dar un ajuste razonable para los primeros niveles de paridad negativa con  $T = 0$  aunque en este caso una parte importante del hamiltoniano modelo, la interacción de apareamiento  $P$ , tenga elementos de matriz iguales para todos los estados considerados y un efecto nulo, por lo tanto, sobre la separación entre los niveles. A nuestro juicio, esto indica que las correlaciones de largo alcance representadas por la fuerza de cuadrupolo-cuadrupolo representan en esta región de la tabla nuclear, uno de los componentes esenciales de la interacción entre los nucleones.

Pasaremos ahora a analizar espectros de otros núcleos cercanos al  $O^{16}$ , principiando por el estudio del  $O^{17}$ .

## OXIGENO 17

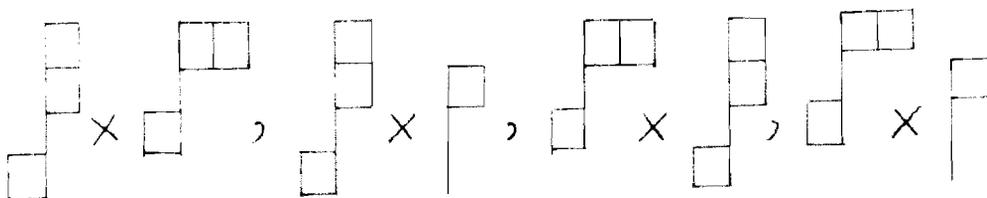
Para los estados de paridad negativa de excitación baja del  $O^{17}$ , consideraremos una configuración formada por dos nucleones en la capa  $2s-1d$  y un agujero en la capa  $1p$ . En principio se espera que los estados correspondientes tengan mayor energía que los correspondientes a la configuración formada por dos partículas en la capa  $s-d$  y la capa inerte del  $O^{16}$  en su estado base, que son estados de paridad positiva; en efecto, el estado base del  $O^{17}$  es un nivel de paridad positiva mientras que el primer nivel excita

do de paridad negativa se observa experimentalmente 3.07 MeV sobre el estado base. Desde luego la interpretación de los tres primeros niveles de este núcleo, cuyo espectro se muestra en la fig. 2a, se puede lograr en el modelo de partículas independientes más elemental, tomando en cuenta a la interacción Spin-orbita únicamente, considerando al estado base y al primer nivel excitado como excitaciones de una sola partícula a los niveles  $d_{5/2}$  y  $s_{1/2}$ , respectivamente y al tercer nivel ( primero de paridad negativa ) como la creación de un agujero en la capa  $p_{1/2}$ . Sin embargo el nivel con  $J = 7/2^-$  en 3.86 MeV. no se puede interpretar en forma tan simple, siendo necesario tomar en cuenta las interacciones entre los nucleones.

Para entender la estructura de los niveles de este núcleo que tienen paridad negativa, se considera una configuración formada por dos nucleones y un agujero, como se mencionó antes. Por lo tanto la representación del grupo  $U_{36}$  está formada por una columna de dos cuadros y una anticolumna de un anticuadro :



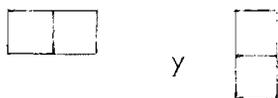
Las representaciones de  $U_9 \times U_4$  contenidas en esta de  $U_{36}$  que satisfacen nuestra hipótesis fundamental ( hipótesis No. 1, pág. 96 ) son :



en donde se han efectuado contracciones de cuadros y anticuadros únicamente en el grupo  $U_4$ , siguiendo el método indicado en el capítulo I. De estas representaciones de  $U_9 \times U_4$  se conserva en primera aproximación las correspondientes a  $[1]$  en  $SU_4$ , ya que al aplicarse al estado de vacío  $|0x\rangle$  da origen a la representación más simétrica en el grupo con

jugado  $\mathcal{U}_9$ . Si se desea restringir la base únicamente por el subgrupo  $SU_3$ , se deberá tomar en cuenta a la representación  $\{110-1\}$  de  $U_4$  que da origen a  $[4432]$  en  $\mathcal{U}_9$  al aplicarse al estado de vacío, que contiene la misma máxima representación de  $SU_3$  que  $[4441]$  da  $\mathcal{U}_9$ .

Analizaremos primero las representaciones  $[1]$  de  $SU_4$ . Los valores del spin e isospin totales que contiene esta RI de  $U_4$  son  $S = 1/2$  y  $T = 1/2$ , únicamente. Por consiguiente el valor del isospin total es el apropiado para tratar con los estados del  $0^{17}$ . Por otra parte, se tiene dos diferentes representaciones de  $\mathcal{U}_6$ ,



compatibles con  $[1]$  en  $SU_4$  y  $[4441]$  en  $\mathcal{U}_9$ . La diferencia entre ellas reside en las representaciones de  $SU_3$  que contienen; la representación  $[2]$  es más simétrica en  $\mathcal{U}_6$  y se sabe <sup>6)</sup> que esta RI de  $\mathcal{U}_6$  contiene las representaciones de  $SU_3$  con índices  $(40)$  y  $(22)$  mientras que  $[11]$  contiene solamente a  $(31)$  en  $SU_3$ . Al acoplarse estos estados BRI de  $SU_3$  con el agujero en la capa  $1p$  la máxima representación de  $SU_3$  se obtiene acoplando  $(40)$  con  $(11)$  para obtener la RI  $(51)$ , a la cual nos restringiremos según la hipótesis de Elliott; en general, cuando se consideran configuraciones de un solo agujero, se obtiene la restricción por la simetría de las funciones de onda en  $\mathcal{U}_6$  automáticamente, como consecuencia de limitar la base por la máxima representación de  $SU_3$ .

La construcción de la función de onda de máximo peso se puede obtener por dos métodos diferentes: el analítico y el sintético. Analicemos primero el método de construcción analítico.

Se desea un estado con representaciones  $[11 \dots -1]$  en  $U_{36}$ ,  $[20 \dots 0 -1]$  en  $\mathcal{U}_9$  y  $\{1000\}$  en  $U_4$ . Según las reglas enunciadas en el capítulo 1

el polinomio de máximo peso en este caso es :

$$P = \sum_5 b_{11}^+ b_{15}^+ b_{3's} = b_{11}^+ e_{1,3'}$$

que al aplicarse al estado de vacío  $|0x\rangle$  se convierte en  $P|0x\rangle = b_{11}^+ e_{1,3'} |0x\rangle$

que corresponde claramente a  $[4333]$  en  $U_4$  y a la representación  $[2]$  en el subgrupo

$U_6$ . Si a este estado se aplican los generadores de ascenso del grupo  $SU_3$ , se obtiene que  $P|0x\rangle$  es de máximo peso en este subgrupo; si se mide el peso del polinomio se observa que corresponde a la representación  $(51)$  que es la que nos interesa. Para generar la base completa se usan los operadores  $M_{LL'}$  obteniéndose así funciones de onda clasificadas por momento angular orbital total.

Si por otro lado, los operadores  $S_+$  y  $T_+$  actúan sobre este polinomio, el resultado de la operación es 0; los operadores de peso  $S_0$  y  $T_0$  dan los valores correctos -  $S_0 = 1/2$  y  $T_0 = 1/2$ , respectivamente.

Sin embargo, la construcción de las funciones de momento orbital total definido se puede lograr fácilmente por medio del método sintético, en vista del análisis previamente realizado del problema de dos partículas en la capa  $2s-1d$ , o sea del análisis de los niveles de paridad positiva del  $F^{18}$  y del  $O^{18}$  y la obtención de las correspondientes funciones de onda. Así, por ejemplo, la función de onda de máximo peso en  $SU_3$  se puede construir acoplando la función de dos partículas clasificada por  $(40)$  con un agujero, tanto en el grupo  $U_4$  como en el subgrupo  $SU_3$ ; el acoplamiento en  $U_4$  se puede lograr por el método de pesos mientras que el acoplamiento en  $SU_3$  se logra por medio de los coeficientes de Wigner de  $SU_3$  en la cadena física, que para este caso particular se encuentran en el apéndice D.

Si procedemos en forma análoga, se pueden construir las funciones de onda para la representación  $\{110-1\}$  de  $U_4$ ; el polinomio de máximo peso correspondiente es :

$$P = b_{11}^+ b_{12}^+ b^{3'4}$$

y los demás polinomios que constituyen la base completa de la representación ( 51 ) de  $SU_3$  en este caso, se obtienen por aplicación del operador de descenso  $M_{-}$ .

Si se calculan los niveles de energía en cualesquiera de las dos aproximaciones, pero siempre restringiéndonos a configuraciones de una partícula y un agujero, los resultados que se obtienen no concuerdan con el experimento. En particular el nivel  $J^{\pi} = 7/2^{-}$  en 3.86 MeV no se puede ajustar. Desde el punto de vista del cálculo de órdenes de magnitud del capítulo anterior, esto se puede comprender, ya que la diferencia entre las contribuciones de la interacción  $Q^2$  para 3 agujeros y 4 partículas y 1 agujero y 2 partículas es mayor que 30 MeV, siendo aproximadamente 40 MeV. Sin embargo, esta diferencia tiende a disminuir a medida que aumentan el número de partículas en la capa 2s-1d, de tal forma que algunas propiedades de estos núcleos se pueden explicar restringiéndose a configuraciones de un solo agujero, como veremos a continuación.

## OXIGENO 18

Los primeros estados excitados de paridad negativa del  $O^{18}$  corresponden a un valor del isospin  $T = 1$ ; como se puede ver de la tabla 8, si nos restringimos a la  $R_1$  más simétrica en el grupo orbital  $U_9$  en único valor posible del spin total es  $S = 0$ ; la interacción sfn-órbita no contribuye en este caso a la separación entre los niveles, ya que sus elementos de matriz son idénticamente nulos y el espectro está determinado, en esta aproximación por la interacción central únicamente. Los niveles de energía resultantes se

TABLA 8

Clasificación de Estados en el Esquema  $SU_3$  para

$O^{17}$ ,  $O^{18}$ ,  $F^{18}$  y  $F^{19}$ .

$U_{36}$	$SU_2^{(\tau)}$	$Zg$	$SU_3$	$R_3$	$SU_2^{(6)}$	
	T	$[A, \mu]$	$(k, k_2)$	L	S	J
$[1^{13}]$	$\frac{1}{2}$	$[4441]$	$(51)$	1, 2, 3, 4, 5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 \left(\frac{9}{2}\right)^2 \frac{11}{2}$
		$[4432]$			$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\right)^4 \left(\frac{7}{2}\right)^4$ $\left(\frac{9}{2}\right)^3 \left(\frac{11}{2}\right)^2 \frac{13}{12}$
$[1^{14}]$	0	$[4442]$	$(71)$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1	$01^2 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^2 8$
		$[4433]$			0	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
	1	$[4442]$			0	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
		$[4433]$			1	$01^2 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^2 8$
$[1^{15}]$	$\frac{3}{2}$	$[44421]$	$(91)$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4$ $\left(\frac{11}{2}\right)^2 \left(\frac{13}{2}\right)^2 \left(\frac{15}{2}\right)^2 \left(\frac{17}{2}\right)^2 \frac{19}{2}$

muestran en la figura 3 como función del parámetro de mezcla  $x$ .

Los niveles de energía observados experimentalmente se muestran en la figura 4a<sup>38)</sup>; se observa que los tres primeros niveles de paridad negativa coinciden con el orden predicho para todos los valores del parámetro  $x$ . Sin embargo, el mejor ajuste con los datos experimentales se obtiene para  $x \simeq 1$ , o sea una interacción cuadrupolo-cuadrupolo pura. Los resultados concuerdan también con los obtenidos por Harvey<sup>40)</sup> empleando una interacción central gaussiana dentro del esquema de Elliott.

Si restringimos el número de estados de acuerdo con la hipótesis de Elliott únicamente, vemos de la tabla 9, que la representación  $[4433]$  de  $U_9$  contiene también a la  $R_1(71)$  de  $SU_3$  empleada antes; estos estados se deben tomar en cuenta por con siguiente. Como se observa de la tabla el valor del spin total  $S$  ya no es 0 en todos los casos y la interacción spin-órbita tiene efectos sobre los niveles. En la fig. 4b se muestran los resultados teóricos para los valores  $x = 0.55$   $y = 0.0$  de los parámetros de la interacción mo delo que dan el mejor ajuste con las energías observadas experimentalmente. Los tres primeros niveles de paridad negativa se predicen en el mismo orden que en el cálculo restringido por simetría en el grupo orbital, pero ahora el cuarto nivel no es  $4^-$  como en aquel caso, sino más bien se predice un nivel  $J^\pi = 0^-$ . Más información experimental sobre este punto es necesaria para decidir cual de los dos cálculos es más apropiado.

### FLUOR 18

Los estados del Fluor 18 con tres partículas en la capa sd y un agujero en la capa lp corresponden a la representación  $[4442]$  de  $U_9$ , que es la misma que correspon de al  $0^{18}$  si se impone la restricción por simetría en el grupo orbital. Sin embargo el valor del spin isotópico en este caso es  $T = 0$  y el correspondiente valor del spin total es  $S = 1$ ,

según se puede ver en la tabla 9; la interacción spin-órbita sí tiene efecto sobre los niveles aún en esta primera aproximación.

La comparación del espectro obtenido utilizando la interacción modelo con los resultados experimentales<sup>39)</sup> se muestra en la figura 5; el mejor ajuste se logra para  $X_2(0.05)$  si se elige  $J^\pi = 3^-$  para el nivel de 6.04 MeV. de excitación, aunque el cálculo no elimina totalmente la posibilidad  $J^\pi = 2^-$  para este nivel. Sin embargo  $J^\pi = 4^-$  no sería consistente con los resultados teóricos obtenidos. Como cuarto nivel de paridad negativa se obtiene para estos valores de los parámetros la identificación  $J^\pi = 2^-$  que no contradice la información experimental (no confirmada) para el nivel con 6.82 MeV de excitación.

Cuando se elimina la restricción a la representación más simétrica de  $U_9$ , el espectro no se altera cualitativamente aunque se observa la tendencia del nivel  $J^\pi = 2^-$  a disminuir en energía.

## FLUOR 19

Como último ejemplo de aplicación de las técnicas de cálculo desarrollado hasta ahora calculamos el espectro del  $F^{19}$ , empleando una configuración de cuatro partículas en la capa sd y un agujero en la capa p y restringiendo el número de estados a los clasificados por  $[44421]$  en  $2g$ ,  $(91)$  en  $SU_3$  y a un valor del isospin  $T = 1/2$ , que deben corresponder a los estados de más baja excitación y paridad negativa. La clasificación completa de estos estados se da en la tabla 10.

La comparación de los resultados teóricos con los datos experimentales<sup>41,42)</sup> se muestra en la figura 6. En la figura 6a se han dibujado cinco niveles cuyo momento angular total y paridad no han sido identificados. Los niveles de paridad positiva conocidos se han

eliminado del diagrama. Al menos dos de estos niveles no identificados parecen ser de paridad negativa y de momento angular  $4/2^-$  y  $7/2^-$  en ese orden, según se puede ver de los resultados teóricos mostrados en la figura 6b. Por otro lado, según nuestro cálculo, el nivel con 6.08 MeV de excitación identificado experimentalmente como  $J^\pi = 5/2^-$  parece corresponder más bien a  $J^\pi = 3/2^-$ .

Como se puede ver de los dos diagramas el ajuste en general es bueno, aunque la falta de datos experimentales no permite una comparación muy detallada. Sin embargo, en un cálculo semejante empleando una interacción central de tipo gaussiano se obtienen resultados análogos a los del presente trabajo<sup>43)</sup>; en particular, se predicen dos estados  $J^\pi = 7/2^-$  y  $J^\pi = 9/2^-$  en aproximadamente la misma región de excitación.

#### 19.- Discusión General de los Resultados.

Del los resultados discutidos antes se pueden obtener varias conclusiones de carácter general. En primer lugar, en cálculos análogos efectuados con una interacción central de tipo gaussiano, se obtienen resultados semejantes. Esto parece indicar que la interacción (16.1) representa en efecto un buen modelo para la interacción entre las partículas.;

Por otro lado, en todos los casos el valor del parámetro  $\gamma$  que corresponde al mejor ajuste con el experimento es siempre muy pequeño, lo que indica que la contribución de la fuerza de apareamiento es mucho menor que las de los otros dos términos del hamiltoniano modelo. Esto refuerza la hipótesis de Elliott, ya que el término cuadrupolo-cuadrupolo representa la parte más importante de la interacción central entre los nucleones en esta región. Como además los resultados son en general buenos, el restringirse a la representación más alta de  $SU_3$  en cada caso parece ser lo indicado.

En algunos de los núcleos analizados, existen niveles que definitivamente

no se han logrado ajustar adecuadamente; por otra parte, la mayoría de estos niveles tampoco han sido identificados como provenientes de la excitación de una partícula de la capa  $1p$  a la capa  $2s-1d$  en los análisis previos del problema.

Estos estados, pertenecen por lo tanto a configuraciones de más de un agujero, que como se ha discutido antes deben contribuir en forma importante aún para los primeros niveles excitados. Es de esperarse que al introducir este tipo de configuraciones en el análisis, el ajuste con el experimento mejore en general, además de que se obtengan eigenfunciones del hamiltoniano con las cuales se puedan calcular otros observables físicos con buena aproximación.

Como se ha discutido, los cálculos de las matrices de la interacción modelo considerando configuraciones de  $n$  partículas y un agujero son muy simples, si se han efectuado previamente cálculos de estas matrices para estados de  $n$  partículas. Estos últimos se pueden calcular sistemáticamente empleando una computadora electrónica y se planea hacerlo para un gran número de casos en la capa  $2s-1d$ . Utilizando estos resultados se calcularán los niveles de energía de paridad negativa para un número correspondiente de núcleos en esta capa, empleando las técnicas del presente trabajo; esto permitiría en particular, analizar una gran cantidad de niveles de paridad negativa y decidir cuales de ellos corresponden a la excitación de una sola partícula de la capa  $1p$  a la capa  $2s-1d$  lo que proporcionaría un mejor conocimiento de la estructura de estos núcleos.

Aparte de este análisis sistemático de un gran número de niveles, restringiendo la configuración en cada caso a solo un agujero, se puede emplear la misma técnica de aplicar operadores expresados en segunda cuantización, a las funciones de onda de partícula-agujero construidas como se ha indicado, para calcular las matrices de la interacción con respecto a estados que correspondan a diferentes configuraciones. En esta forma, se obtendrá información sobre la importancia de la contribución de estados de tres agujeros, por ejemplo, a los diferentes estados nucleares analizados.



## APENDICE A

En este apéndice se demostrará el hecho mencionado en la pag. 28 , - capítulo I : los diagramas con índices positivos y negativos no se traslapan. El procedimiento que se emplea en la demostración, que se hace en el caso  $SU_3$  únicamente, es directo y fácilmente generalizable para el caso de grupo  $SU_n$ .

En el desarrollo que se expone esquemáticamente a continuación, se emplean operadores de Bose ya que se conocen expresiones generales para las bases de las representaciones irreducibles en términos de ellos. El resultado desde luego es independiente de que tipo de operadores se utilice para su demostración, ya que es una propiedad intrínseca de las representaciones del grupo.

Consideremos vectores  $x_j^t$  y  $e_t^j$  que se transforman con respecto al índice  $j$  ( que puede tomar tres valores para el caso del grupo  $U_3$  ) como vectores covariantes y contravariantes. ( En otros términos  $x_j^t$  se transforma frente a  $U_3$ , como el operador de creación  $a_j^+$  y  $e_t^j$  como el operador de aniquilación  $a_j^-$  ). El índice  $t$  sirve para diferenciar entre los vectores y para la representación más general en este grupo puede tomar también tres valores.

Hacemos ahora la identificación

$$\left\{ \begin{matrix} j \\ t \end{matrix} \right\} \rightarrow y_{-m}^t, X_j^t \rightarrow y_m^t; \quad m, t = 1, 2, 3$$

con lo cual se introducen vectores con índices negativos. Se definen ahora los operadores

$$\Lambda_m^{m'} = \sum_{t=1}^3 (y_m^t P_t^{m'} - y_{-m}^t P_t^{-m}) \equiv \mathcal{L}_m^{m'} - \mathcal{L}_{-m}^{-m}; \quad m, m' > 0$$

(A.1)

en donde

$$P_t^{m'} = \frac{\partial}{\partial y_m^t}, \quad y \quad P_t^{-m} = \frac{\partial}{\partial y_{-m}^t}$$

son operadores que se transforman por medio de  $U^+$ , las matrices transpuestas conjugadas de  $U$ , que son los elementos del grupo, bajo las cuales se transforman los vectores  $X_j^t$ .

De las relaciones de conmutación en mecánica cuántica ordinaria se observa que el conjunto de operadores  $\Lambda_m^{m'}$  con  $m, m' > 0$  se puede identificar con los generadores de un grupo unitario (ver capítulo 1, inciso 2).

En la forma indicada por Moshinsky se construyen los operadores <sup>44)</sup>

$$C_{s'}^s = \sum_m y_m^s P_s^m, \quad V_{s'}^s = \sum_m y_{-m}^s P_s^{-m}$$

(A.2)

$$D_{ss'} = \sum_m P_s^m P_{s'}^{-m}, \quad D_{ss'}^+ = \sum_m X_m^s X_{-m}^{s'}$$

que constituyen también los generadores de un grupo unitario. Se trata entonces de encontrar soluciones polinomiales a las ecuaciones

$$C_s^{s'} P = 0 \quad V_s^{s'} P = 0 \quad (b)$$

$$C_s^s P = h_s P \quad V_s^s P = k_s P \quad (a) \quad (A.3)$$

$$D_{ss'} P = 0 \quad (c)$$

ya que estos polinomios serán las bases irreducibles. Aquí los operadores

$$C_s^{s'}, \quad \Gamma_s^{s'}, \quad D_{ss'}$$

$s < s'$        $s < s'$

forman el conjunto de los generadores de ascenso en el grupo unitario complementario a  $U_3$ . Las ecuaciones (A.3) definen el polinomio de máximo peso en este grupo y  $[k_i]$  corresponde a los índices del diagrama positivo mientras que el conjunto de índices  $[k_i]$  corresponde al diagrama negativo.

Si además se imponen sobre el polinomio  $P$  las restricciones

$$\Lambda_m^m P = \lambda_m P \quad (a)$$

$$\Lambda_m^{m'} P = 0, \quad m < m' \quad (b)$$

(A.4)

se obtendrá que  $P$  es la función de máximo peso de una representación irreducible de  $U_3$  con índices  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

Veamos que se obtiene, cuando se aplican explícitamente las condiciones (A.3) y (A.4).

Como ha demostrado Moshinsky el polinomio que satisface las relaciones (A.3 b) está dado por la siguiente expresión :

$$P = (\Delta_1^1)^{h_1-h_2} (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} (\Delta_{123}^{123})^{h_3} (\Delta_{-3}^1)^{k_1-k_2} (\Delta_{-3-2}^{12})^{k_2-k_3} (\Delta_{-3-2-1}^{123})^{k_3} \times$$

$$\times \mathcal{Z} \left( \frac{\Delta_m^1}{\Delta_1^1}, \frac{\Delta_{1m}^{12}}{\Delta_{12}^{12}}, \frac{\Delta_{-m}^1}{\Delta_{-3}^1}, \frac{\Delta_{-3-m}^{12}}{\Delta_{-3-2}^{12}} \right); \quad m = 1, 2, 3, \quad (A.5)$$

en donde se ha empleado la notación

$$\Delta_m^s = \gamma_m^s, \quad \Delta_{-m}^s = \gamma_{-m}^s$$

y

$$\Delta_{\mu_1 \dots \mu_j}^{1 \dots j} = \sum_{P_\mu} (-1)^{P_\mu} P_\mu \Delta_{\mu_1}^1 \dots \Delta_{\mu_j}^j.$$

( Las expresiones definidas aquí se deben distinguir de los determinantes de Fermi introducidos antes, puesto que no constituyen una mezcla de permanente y determinante como estos últimos, sino que son determinantes ordinarios ). En la ecuación ( A.5 )  $\mathcal{Z}$  es una función de las variables explícitamente indicadas, que satisface únicamente la restricción de que al multiplicarse por el factor

$$\frac{P}{\mathcal{Z}} = (\Delta_1^1)^{h_1-h_2} (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} (\Delta_{123}^{123})^{h_3} (\Delta_{-3}^1)^{k_1-k_2} (\Delta_{-3-2}^{12})^{k_2-k_3} (\Delta_{-3-2-1}^{123})^{k_3}$$

se continúe teniendo una expresión polinomial para P,

Ahora aplicaremos sobre P las condiciones ( A.4 b ). Se trata de aplicar los tres generadores de ascenso de  $U_3$ ,

$$\Lambda_2^3, \Lambda_1^3, \Lambda_1^2, \quad (A.6)$$

sobre P; al actuar sobre  $P/\mathcal{Z}$  estos operadores dan automáticamente 0; por lo tanto, debemos ocuparnos únicamente de la aplicación de ellos a la función  $\mathcal{Z}$ . Con este objeto se introducen tres nuevas expresiones :

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_m \Delta'_m \Delta'_{-m} \\
 t &= \sum_m \Delta'_m \Delta'^2_{-3-m} \\
 r &= \sum_m \Delta'_{-m} \Delta'^2_{1,m}
 \end{aligned}
 \tag{A.7}$$

que conmutan con los generadores de ascenso ( A.6 ), como es fácil ver por cálculo directo.

De las ecuaciones ( A.7 ) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{S}{\Delta'_1 \Delta'_{-3}} &= \frac{\Delta'_{-1}}{\Delta'_{-3}} + \frac{\Delta'_2 \Delta'_{-2}}{\Delta'_1 \Delta'_{-3}} + \frac{\Delta'_3}{\Delta'_1} \\
 \frac{t}{\Delta'_1 \Delta'^2_{-3-2}} &= \frac{\Delta'^2_{-3-1}}{\Delta'^2_{-3-2}} + \frac{\Delta'_2}{\Delta'_1}
 \end{aligned}
 \tag{A.8}$$

y

$$\frac{r}{\Delta'_{-3} \Delta'^2_{12}} = \frac{\Delta'_{-2}}{\Delta'_{-3}} + \frac{\Delta'^2_{13}}{\Delta'^2_{12}}$$

Utilizando ( A.8 a ) se puede expresar la razón  $\Delta'_3/\Delta'_1$  en términos de  $S/\Delta'_1 \Delta'_{-3}$  y  $\Delta'_{-1}/\Delta'_{-3}$ ,  $\frac{\Delta'_2 \Delta'_{-2}}{\Delta'_1 \Delta'_{-3}}$ . En forma análoga  $\Delta'^2_{-3-1}/\Delta'^2_{-3-2}$  y  $\Delta'^2_{13}/\Delta'^2_{12}$  se expresan en términos de las razones  $t/\Delta'_1 \Delta'^2_{-3-2}$ ,  $\Delta'_2/\Delta'_1$  y  $r/\Delta'_{-3} \Delta'^2_{12}$ ,  $\Delta'_{-2}/\Delta'_{-3}$  respectivamente, empleando las ecuaciones ( A.8 b y c ). Sustituyendo estas expresiones en el argumento de la función  $\mathcal{Z}$  se define una nueva función  $\mathcal{Z}'$  que se expresa únicamente en términos de

$$\frac{\Delta'_2}{\Delta'_1}, \frac{\Delta'_{-2}}{\Delta'_{-3}}, \frac{\Delta'_{-2}}{\Delta'_{-3}}, \frac{S}{\Delta'_1 \Delta'_{-3}}, \frac{t}{\Delta'_1 \Delta'^2_{-3-2}}, \frac{r}{\Delta'_{-3} \Delta'^2_{12}}. \tag{A.9}$$

Si ahora aplicamos los generadores de ascenso ( A.6 ) sobre la nueva función  $\mathcal{Z}'$  y aprovechamos que  $S/\Delta'_1 \Delta'_{-3}$ ,  $t/\Delta'_1 \Delta'^2_{-3-2}$  y  $r/\Delta'_{-3} \Delta'^2_{12}$  conmutan con ellos se obtienen las relaciones siguientes :

$$\Lambda_1^3 P = 0 \quad \text{implica que} \quad \frac{\partial \mathcal{Z}'}{\partial \left( \frac{\Delta'_{-1}}{\Delta'_{-3}} \right)} = 0, \quad \text{o sea que } \mathcal{Z} \quad \text{no depende de la razón} \quad \frac{\Delta'_{-1}}{\Delta'_{-3}}$$

$$\Lambda_2^3 P = 0 \quad \text{implica que } \mathcal{Z}' \quad \text{no depende de } \frac{\Delta_{-2}'}{\Delta_{-3}'}.$$

$$\Lambda_1^2 P = 0 \quad \text{implica que } \mathcal{Z}' \quad \text{no es función de } \frac{\Delta_3'}{\Delta_1'}.$$

Por consiguiente  $\mathcal{Z}'$  depende únicamente de

$$\frac{s}{\Delta_1' \Delta_{-3}'} , \quad \frac{t}{\Delta_1' \Delta_{-3-2}'} , \quad \frac{r}{\Delta_{-3}' \Delta_{12}'}.$$

Como se ve, el procedimiento consiste en introducir como argumentos de  $\mathcal{Z}'$ , combinaciones de operadores de creación que conmuten con los generadores de ascenso (A.6) de tal forma que las ecuaciones (A.4 b) eliminen algunas de las razones del argumento de la función  $\mathcal{Z}'$ .

Si ahora desarrollamos esta función en series de potencias se obtiene la expresión siguiente para el polinomio P :

$$P = \sum_{n_1 n_2 n_3} A_{n_1 n_2 n_3} (\Delta_1')^{k_1 - k_2 - n_2 - n_3} (\Delta_{12}')^{k_2 - k_3 - n_1} (\Delta_{123}')^{k_3} \times \\ \times (\Delta_{-3}')^{k_1 - k_2 - n_1 - n_3} (\Delta_{-3-2}')^{k_2 - k_3 - n_2} (\Delta_{-3-2-1}')^{k_3} r^{n_1} t^{n_2} s^{n_3}, \quad (\text{A.10})$$

en donde los coeficientes  $A_{n_1 n_2 n_3}$  se determinan imponiendo las condiciones restantes, para obtener un polinomio que sea de máximo peso.

Si se exige que el polinomio (A.10) satisfaga la condición (A.4 a) se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= k_1 - k_3 - n_2 - n_3 \\ \lambda_2 &= k_2 - k_2 - n_1 + n_2 \\ \lambda_3 &= k_3 - k_1 + n_1 + n_3 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

en donde  $n_i$  son enteros no negativos.

Nos resta únicamente aplicar la condición (A.3 c) que debe determinar totalmente a estos números enteros ( y por consiguiente la relación entre los índices  $\lambda$ ,  $h$  y  $k$  ) además de proporcionamos una regla de recurrencia para los coeficientes  $A_{n_i}$  hasta ahora no determinados. Estas ecuaciones son difíciles de aplicar ya que contienen segundas derivadas. En todo caso, la aplicación directa muestra que las relaciones

$$n_1 = n_2 = n_3 = 0$$

son válidas, lo que implica que en la expresión (A.10) la suma se reduce a un solo término.

Por otro lado se puede introducir el operador de Casimir del grupo unitario de tres dimensiones cuyos generadores son  $\Lambda_m^{m'}$ ,  $m, m' > 0$  en la forma

$$\Phi = \sum_{m, m' > 0} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m = \sum_{m, m'} (e_m^{m'} - e_{-m'}^{-m}) (e_{m'}^m - e_{-m}^{-m'}),$$

( la segunda expresión para  $\Phi$  se obtiene utilizando la ecuación (A.1) ). Desarrollando esta expresión y usando las definiciones (A.2) el operador  $\Phi$  se convierte en

$$\Phi = \sum_{s, s'} C_s^{s'} C_{s'}^s + \sum_{s, s'} V_s^{s'} V_{s'}^s + 2 \sum_{s, s'} D^{+s s'} D_{s s'} ;$$

por otro lado, desarrollando la suma explícitamente se obtiene la expresión

$$\sum_m (\Lambda_m^m)^2 + 2 \sum_{m > m'} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m + \sum_{m < m'} (\Lambda_m^m - \Lambda_{m'}^{m'})$$

para el operador de Casimir en función de los generadores  $\Lambda_m^{m'}$ . Comparando ambas igualdades se obtiene la siguiente ecuación :

$$\begin{aligned} \sum_m (\Lambda_m^m)^2 + 2 \sum_{m > m'} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m + \sum_{m < m'} (\Lambda_m^m - \Lambda_{m'}^{m'}) = \\ = \sum_s (C_s^s)^2 - 2 \sum_{s > s'} C_s^{s'} C_{s'}^s - \sum_{s < s'} (C_s^s - C_{s'}^{s'}) - \end{aligned} \quad (A.12)$$

$$- \sum_s (r_s^s)^2 - 2 \sum_{s > s'} r_s^{s'} r_{s'}^{s'} - \sum_{s < s'} (r_s^s - r_{s'}^{s'}) + 2 \sum_{ss'} D^{+ss'} D_{ss'}.$$

Si ahora aplicamos ambos miembros de esta ecuación al polinomio de la ecuación (A.10), teniendo en cuenta los valores previamente determinados para los índices  $n_i$  y aprovechando las ecuaciones (A.3) y (A.4), se obtiene la relación

$$k_1 k_3 + h_2 k_2 + h_3 k_1 = 0$$

si se emplean las ecuaciones (A.11).

Puesto que los índices  $h$  y  $k$  son enteros no negativos, estas relaciones implican las condiciones siguientes

$$\begin{aligned} h_1 k_3 &= 0 \\ h_2 k_2 &= 0 \\ h_3 k_1 &= 0, \end{aligned}$$

que expresadas gráficamente indican que los diagramas de Young negativos y positivos no se traslapan.

45)

Como demuestra Chacón, todos los pasos de la deducción indicada más arriba son generalizables al caso del grupo  $U_n$ , quedando así nuestra afirmación demostrada en general.

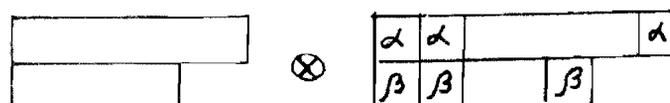
## APENDICE B

### REGLAS DE LITTLEWOOD PARA EL GRUPO $SU_3$ .

En este apéndice demostraremos que las reglas de Littlewood enunciadas en el capítulo 1, apropiadas para tratar con representaciones de partículas y agujeros son equivalentes a la forma usual de estas reglas, en el caso del grupo  $SU_3$ .

Este grupo, aparte del grupo  $SU_2$ , ha sido el más estudiado y se han dado formulaciones de la reducción del producto directo en forma algebraica, empleando propiedades de las bases de las representaciones irreducibles.

Como primer punto en la demostración obtendremos una expresión para la reducción del producto directo de dos representaciones  $(k_1, k_2)$  y  $(k'_1, k'_2)$  utilizando las reglas ordinarias de Littlewood; al efectuar el producto directo por el método de los diagramas de Young, uno de los diagramas se caracteriza de tal manera que a todos los cuadros del primer renglón se les asigna la letra  $\alpha$ , a los cuadros del segundo renglón la letra  $\beta$ , etc. Gráficamente se tiene

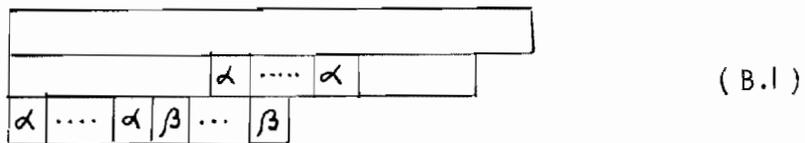


en la reducción del producto directo aparecerán los diagramas de un número de cuadros igual al total en ambos diagramas del producto directo, que se obtienen agregando los cuadros a los cuales se han asociado las letras  $\alpha$ ,  $\beta$ , etc. de tal forma que el diagrama resultante satisfaga las siguientes condiciones:

- 1.- Que se obtenga un diagrama de Young permitido.
- 2.- Que las letras  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  etc. aparezcan en orden alfabético de izquierda a derecha en cada fila y de arriba hacia abajo en cada columna.
- 3.- Que no haya letras repetidas en una columna.
- 4.- Que al ir sumando las letras de derecha a izquierda y de arriba hacia abajo en cualquier punto del diagrama resultante el número de  $\alpha$  sea mayor o igual al número de  $\beta$ ; el número de  $\beta$  mayor o igual que el número de  $\gamma$ , etc.

En el caso del grupo  $SU_3$  el diagrama más general posible tiene únicamente dos filas; aparecen por lo tanto las letras  $\alpha$  y  $\beta$  únicamente.

Aplicando las reglas directamente a la reducción del producto directo  $(k_1, k_2') \otimes (k_1'', k_2'')$ , se tienen diagramas del tipo



en donde se han colocado los cuadros denotados por  $\alpha$  y  $\beta$  en todas las maneras posibles. (El índice  $\beta$  no se puede colocar en la primera fila ya que esto violaría la condición 2).

Al número de cuadros colocados en la tercera fila lo denotamos por  $q$  - mientras que al número de  $\beta$  de esta misma fila lo denotamos por  $p$ . Si, por otro lado, se colocan  $r + p$  cuadros con índice  $\alpha$  en la segunda fila, el número de estos que se

Por tanto el primer renglón será

$$k_1'' - p - q - r \geq 0 \quad (\text{B.2})$$

y el número de  $\beta$  en el segundo renglón será

$$k_2'' - p \geq 0 \quad (\text{B.3})$$

La regla 2 se satisface ahora automáticamente.

Aplicaremos ahora la regla 3; se obtienen las siguientes relaciones:

$$0 \leq r + p \leq k_1' - k_2' \quad (\text{a})$$

$$0 \leq q \leq k_2' \quad (\text{b}) \quad (\text{B.4})$$

$$0 \leq q + p \leq k_2' + r + p \quad (\text{c})$$

Si las relaciones ( B.4 ) son válidas se asegura que no se tienen letras repetidas en una columna. Como es fácil ver, la desigualdad ( B.4 c ) se puede deducir de ( B.4 b ), de tal forma que únicamente las dos primeras desigualdades son independientes.

De las condiciones ( B.3 ) y ( B.4 a ) se tiene que el índice  $p$  debe satisfacer la condición

$$0 \leq p \leq \min ( k_2'', k_1' - k_2' )$$

Si ahora imponemos la cuarta restricción, sumando el número de  $\alpha$  y  $\beta$  hasta el punto del segundo renglón en que se termina de aplicar cuadros designados por  $\beta$  se obtiene

$$k_1'' - p - q - r \geq k_2'' - p$$

que es equivalente a

$$k_1'' - k_2'' \geq q + r \geq q \quad (\text{B.5})$$

Unicamente nos resta satisfacer la condición 1, para obtener un diagrama de Young permitido. Si se pide que el primer renglón sea de longitud mayor o igual que el segundo renglón en el diagrama ( B.1 ) se debe imponer la restricción

$$k_1'' + k_1' - p - q - r \geq k_2' + k_2'' + r$$

mientras que si se exige que el segundo renglón sea de longitud mayor que el tercero, se debe imponer que

$$k_2' + k_2'' + r \geq q + p$$

Empleando las definiciones de los índices  $q$  y  $p$  y las condiciones ( B.2 ) y ( B.3 ) estas condiciones se satisfacen automáticamente.

En resumen, los índices  $p$ ,  $q$ , y  $r$  están restringidos por las desigualdades

$$0 \leq p \leq \min ( k_2'', k_1' - k_2' ) \quad (\text{a})$$

$$0 \leq q \leq \min ( k_1'', k_2'', k_2' ) \quad (\text{b}) \quad (\text{B.6})$$

$$0 \leq r \leq \min ( k_1' - k_2' - p, k_1'' - k_2'' - q ) \quad (\text{c})$$

Sin embargo, existe la posibilidad de aplicar las  $\alpha$  y  $\beta$  en una manera diferente. Si como antes se denota al número de  $\alpha$  en el tercer renglón como  $q$ , pero ahora el número de  $\beta$  en esta fila se le llama  $p + s$ , se tiene que el número de  $\alpha$

de se aplica en el primer renglón es

$$k_1'' - p - q \geq 0$$

y el número de  $\beta$  en el segundo renglón es

$$k_2'' - p - s \geq 0$$

en donde se ha denotado el número de  $\alpha$  en el segundo renglón como  $p$ .

La aplicación de las cuatro reglas de la página 138, en la misma forma que antes, nos lleva a las siguientes restricciones sobre los índices  $p$ ,  $q$  y  $s$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq p &\leq \min. (k_2'', k_1' - k_2') \\ 0 \leq q &\leq \min. (k_1'' - k_2'', k_2') \\ 1 \leq s &\leq \min. (k_2' - q, k_2'' - p) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

(la posibilidad  $s = 0$  se incorpora en las fórmulas previamente obtenidas).

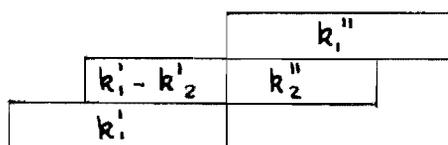
Es fácil ver que los casos que se obtienen aplicando las relaciones (B.6) y (B.7) por separado, son diferentes entre sí, obteniéndose por aplicación del primer tipo de condiciones diagramas de Young con índices

$$\begin{aligned} k_1 &= k_1' + k_1'' - 2p - 2q - r \\ k_2 &= k_2' + k_2'' - p - q + r, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Como es fácil ver del diagrama (B.1). Por otro lado la aplicación de las desigualdades (B.7) nos lleva a concluir que en la reducción del producto directo se tienen las representaciones de  $SU_3$  con índices

$$\begin{aligned} R_1 &= k_1'' + k_1' - 2q - 2p - s \\ R_2 &= k_2'' + k_2' - p - q - 2s \end{aligned} \quad (\text{B.8 a})$$

Ahora aplicaremos las reglas enunciadas en el capítulo I y demostraremos que son equivalentes a las reglas de Littlewood. En primer lugar trasladamos la línea de referencia del diagrama  $(k'_1, k'_2)$ , ( lo que es siempre posible cuando se trata con el grupo unimodular unitario ) para obtener un diagrama con índices negativos  $(-k'_1, -k'_1 + k'_2)$ . Según la regla, se superpone este diagrama con el correspondiente a  $(k''_1, k''_2)$  representado por medio de cuadros únicamente. En la representación gráfica, lo que se obtiene de la superposición directa es un diagrama del tipo



llamado virtual anteriormente y que según se ha demostrado en el apéndice A no es un diagrama permitido de Young; de él se obtienen sin embargo, todos los diagramas permitidos por medio de contracciones sucesivas de un cuadro con un anticuadro.

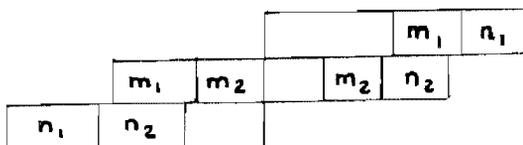
Supondremos en la discusión siguiente que la relación

$$k''_2 \geq k'_1 - k'_2$$

es válida; esto si implica pérdida de generalidad. La demostración en el caso contrario se puede lograr por una sucesión de pasos idéntica a la que se muestra a continuación.

La contracción más general posible para el caso del grupo  $SU_3$  es del -

tipo



en donde  $n_i, m_i$  son números enteros no negativos que indican la contracción del correspondiente número de cuadros y anticuadros en los renglones y columnas indicados en el diagrama. ( La hipótesis restrictiva  $k_2'' \geq k_1' - k_2'$  se ha usado únicamente en el hecho de haber elegido  $m_1 + m_2 = k_1 - k_2$ , de tal forma que el segundo antirenglón ha sido completamente eliminado y el diagrama ya no viola las condiciones impuestas en el apéndice A, siendo un diagrama no virtual. En el caso contrario  $k_2 < k_1' - k_2'$  el renglón que se aniquila totalmente es el segundo renglón, siendo esta la única diferencia entre los dos casos ).

Para satisfacer las reglas enunciadas en el capítulo II, los números  $n_i$  y  $m_i$  deben satisfacer varias condiciones. En primer lugar

$$0 \leq n_1 \leq k_2'$$

ya que en el caso contrario  $k_2 < n_1$ , se habrían efectuado contracciones de anticuadros en la misma anticolumna con cuadros en el mismo renglón, lo que viola las reglas.

Por otro lado

$$k_1'' - m_1 - n_1 \geq k_2'' - n_2$$

de tal forma que no se contraigan anticuadros del segundo antirenglón con cuadros en la misma columna. Esta desigualdad es equivalente a

$$k_1'' - k_2'' \geq (m_1 - n_2) + n_1 \tag{B.9}$$

En este punto, se tienen dos posibilidades:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad m_1 &\geq n_2; & m_1 &= n_2 + r, \quad r \geq 0 \\ \text{ii)} \quad m_1 &< n_2; & n_2 &= m_1 + s, \quad s > 0 \end{aligned} \tag{B.10}$$

se obtienen las mismas desigualdades que en ( B.6 ), así como las mismas expresiones ( B.8 ) para los índices de las representaciones irreducibles  $( k_1, k_2 )$  resultantes de la reducción del producto directo, si se traslada la línea de referencia del diagrama en la página B-

$$k_1' - n_1 - n_2$$

cuadros hacia la derecha, de tal forma que se obtenga un diagrama con índices positivos únicamente.

Para la segunda posibilidad indicada en ( B.9b ) se tiene

$$n_2 = m_1 + s, \quad s > 0$$

Por las mismas razones que antes, los números  $n_1$  y  $m_1$  satisfacen idénticas restricciones. Sin embargo, para evitar la contracción de dos anticuadros en la misma anticolumna con cuadros que se encuentren en el mismo renglón se debe exigir la condición

$$k_1' - k_2' - m_1 \leq k_1' - n_1 - n_2$$

que es equivalente a

$$k_2' - n_1 \geq n_2 - m_1 = s \tag{ B.16 }$$

( En el caso i, la condición presente se satisface automáticamente si se recuerdan las relaciones ( B.15 ) y ( B.10 a ) ).

Por construcción, se concluye que

$$k_2'' \geq m_2 + n_2$$

es siempre válida; como consecuencia de esta relación y de la condición ( B.10 b ) se tiene

$$k_2'' \geq m_2 + m_1 + s = k_1' - k_2' + s \geq m_1 + s \tag{ B.17 }$$

Analícemos la primera de ellas, o sea

$$m_1 = n_2 + r, \quad r \geq 0$$

en primer lugar, por construcción se tiene

$$m_1 = n_2 + r \leq k_1'' - k_2'' \quad (\text{B.11})$$

o sea

$$r \leq k_1'' - k_2'' - n_2 \quad (\text{B.12})$$

Por otro lado de la desigualdad ( B.9 ) se puede concluir que

$$k_1'' - k_2'' \geq n_1 + r \geq n_1 \quad (\text{B.13})$$

que, tomando en cuenta la relación ( B.12 ) implica la restricción siguiente sobre el índice

“ $r$ ”:

$$0 \leq r \leq \min ( k_1'' - k_2'' - n_2, k_1' - k_2' - n_1 ) \quad (\text{B.14})$$

Como  $0 \leq n_1 \leq k_2'$  y  $n_1 \leq k_1'' - k_2''$  se tiene finalmente para

el primer caso que la relación

$$0 \leq n_1 \leq \min ( k_2', k_1'' - k_2'' ) \quad (\text{B.15})$$

es válida. Si ahora hacemos la identificación de índices

$$\begin{aligned} q &\longleftrightarrow n_1 \\ p &\longleftrightarrow m_1 \\ r &\longleftrightarrow r \end{aligned}$$

De las dos últimas desigualdades se obtiene finalmente la relación

$$0 < s \leq \min (k_2' - n_1, k_2'' - m_1)$$

que es idéntica a la desigualdad ( B.7 c ) si se hace la identificación de índices

$$n_1 \longleftrightarrow q$$

$$m_1 \longleftrightarrow p$$

$$s \longleftrightarrow s$$

La equivalencia entre las dos reglas nos permite entender las condiciones segunda, tercera y cuarta de las reglas de Littlewood como provenientes únicamente de la eliminación de contracciones de índices antisimétricos, en uno de los tensores del producto directo, con índices simétricos en el otro.

Por otro lado, el proceder por medio de antidiagramas y diagramas que se contraen permite, en principio, la obtención de fórmulas algebraicas para los índices de las representaciones irreducibles posibles en la reducción del producto directo de dos de ellas en el caso general del grupo  $SU_n$ ; la obtención de estas fórmulas será publicada posteriormente.

## APENDICE C

### ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES DE FERMI

En este apéndice estudiaremos algunas de las propiedades de los determinantes de Fermi introducidos en el capítulo I. Es importante conocer las propiedades de estas expresiones ya que, como se ha visto, las bases para representaciones irreducibles de los grupos unitarios se pueden expresar en función de ellos, cuando se emplea el esquema de la segunda cuantización.

Como es bien sabido, las funciones que forman una BFI del grupo unitario están caracterizadas por un diagrama de Young, que representa los índices de una RI del grupo simétrico. Si el diagrama de Young consta de  $n$  cuadros la función correspondiente se expresa en términos de  $n$  vectores. (diferenciados por un índice que toma los valores  $\mu = 1, 2, \dots, n$ ) y tiene ciertas propiedades frente al intercambio de estos vectores. Se demuestra que esta función de onda se puede obtener aplicando el operador de Young  $Y$  al producto directo de los  $n$  vectores; este operador se define como <sup>46)</sup>

$$Y = PQ \quad (C.1)$$

en donde

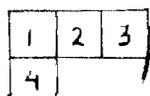


Si los vectores originales que aparecen en la expresión ( C.5 ) están formados por operadores de Fermi, cantidades algebraicas que anticonmutan, la operación indicada por Q se puede efectuar automáticamente denotando con el mismo índice a todos los vectores que intervengan en la misma columna.

Si ahora recordamos la definición ( 5.20 ) del determinante de Fermi

$$\nabla_{\mu_1 \dots \mu_j}^{s_1 \dots s_j} = \sum_{P_\mu} (-1)^{P_\mu} b_{\mu_1 s_1}^+ \dots b_{\mu_j s_j}^+ = \sum_{P_s} P_s b_{\mu_1 s_1}^+ \dots b_{\mu_j s_j}^+$$

vemos que la aplicación del operador P después de haber denotado los vectores correspondientes a la misma columna del diagrama de Young con el mismo índice nos produce determinantes de Fermi. Así por ejemplo, el diagrama de Young



le corresponde el polinomio

$$\nabla_{123}^{111} \nabla_4^2$$

expresado en función de determinantes de Fermi.

Analizaremos ahora el problema de encontrar los monomios formados por productos de varios determinantes de Fermi que sean linealmente independientes, teniendo en mente el resultado que acabamos de obtener.

Si se expresa un determinante de Fermi en la notación acostumbrada se tiene:

$$\nabla_{\mu_1 \dots \mu_j}^{s_1 \dots s_j} = \begin{vmatrix} \nabla_{\mu_1}^{s_1} & \nabla_{\mu_1}^{s_2} & \dots & \nabla_{\mu_1}^{s_j} \\ \nabla_{\mu_2}^{s_1} & \nabla_{\mu_2}^{s_2} & \dots & \nabla_{\mu_2}^{s_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_{\mu_j}^{s_1} & \nabla_{\mu_j}^{s_2} & \dots & \nabla_{\mu_j}^{s_j} \end{vmatrix} \quad (C.6)$$

que se puede desarrollar por el método de Laplace utilizado en algebra conmutativa. Sin embargo como al intercambiar dos columnas el valor del determinante de Fermi ( C.6 ) no se altera, el signo del cofactor en el desarrollo de Laplace es igual a  $(-1)^i$  en donde  $i$  es el número de cambios que se deberá hacer para llevar al cofactor a un lugar tal que su elemento principal  $(1,1)$  se encuentre en la primera fila; en otras palabras si se emplean en el desarrollo de Laplace cofactores con sus elementos principales en la primera fila del determinante, todos los términos en el desarrollo tendrán signo positivo.

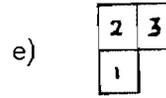
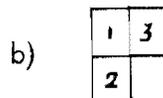
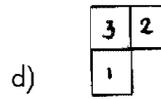
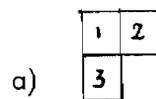
Como ejemplo considérese el desarrollo de

$$\nabla_{123}^{123} = \begin{vmatrix} \nabla_1^1 & \nabla_1^2 & \nabla_1^3 \\ \nabla_2^1 & \nabla_2^2 & \nabla_2^3 \\ \nabla_3^1 & \nabla_3^2 & \nabla_3^3 \end{vmatrix} = \nabla_{12}^{12} \nabla_3^3 + \nabla_{12}^{13} \nabla_3^2 + \nabla_{12}^{23} \nabla_3^1$$

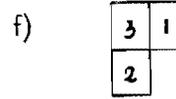
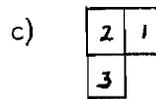
que se puede verificar aplicando directamente la definición.

Para indicar la técnica a seguir para encontrar los productos de determinantes de Fermi linealmente independientes, consideraremos el caso de monomios del tipo

$\nabla_{\mu_1 \mu_2}^{s_1 s_2} \nabla_{\mu_3}^{s_3}$ . Estas expresiones claramente corresponden a un diagrama de Young asociado con la partición  $[21]$ . Se pueden construir 6 diferentes diagramas del tipo ( C.4 ) en este caso :



(.C.7)



El diagrama ( C.7 a ) indica que la función correspondiente debe ser simétrica con respecto a los índices 1 y 2, mientras que el diagrama ( C.7 d ), por ejemplo, que

la función es simétrica con respecto a los índices 3 y 2.

Según lo indicado antes, a cada uno de estos diagramas corresponden los productos de determinantes de Fermi siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \nabla_{12}^{12} \nabla_1^3 & \text{d) } \nabla_{12}^{32} \nabla_1^1 \\
 \text{b) } \nabla_{12}^{13} \nabla_1^2 & \text{e) } \nabla_{12}^{23} \nabla_1^1 \\
 \text{c) } \nabla_{12}^{21} \nabla_1^3 & \text{f) } \nabla_{12}^{31} \nabla_1^2
 \end{array} \quad (\text{C.8})$$

en donde los índices inferiores denotan a diferentes vectores. Claramente

$$\begin{array}{l}
 \nabla_{12}^{12} \nabla_1^3 = \nabla_{12}^{21} \nabla_1^3 \\
 \nabla_{12}^{32} \nabla_1^1 = \nabla_{12}^{23} \nabla_1^1 \\
 \nabla_{12}^{13} \nabla_1^2 = \nabla_{12}^{31} \nabla_1^2
 \end{array} \quad (\text{C.9})$$

son válidas, si se recuerdan las propiedades de estos determinantes. En otros términos, nos interesan únicamente los monomios correspondientes a diagramas de Young que tengan el  $\xi_r$  orden natural en cada una de las filas.

Por otro lado, es fácil ver por cálculo directo que la ecuación

$$\nabla_{12}^{12} \nabla_1^3 + \nabla_{12}^{23} \nabla_1^1 + \nabla_{12}^{13} \nabla_1^2 = 0 \quad (\text{C.10})$$

es válida; esta ecuación nos permite eliminar cualquiera de los tres sumandos en términos de los otros dos, restando de los seis monomios originales (C.8) únicamente dos, que sí son linealmente independientes. Elegimos, por ejemplo,

$$\nabla_{12}^{12} \nabla_1^3 \quad \text{y} \quad \nabla_{12}^{13} \nabla_1^2$$

$$\nabla_{121}^{123} = \nabla_{12}^{12} \nabla_1^3 + \nabla_{12}^{13} \nabla_1^2 + \nabla_{12}^{23} \nabla_1^1 = 0,$$

que es la misma ecuación que ( C.10 ). Como se puede ver de este ejemplo, se construye un determinante de  $n \times n$ , si se trata de encontrar relaciones entre monomio de  $n$  vectores ( relacionados por lo tanto, con un diagrama de Young de  $n$  bloques ). En el caso en que se tengan algunos monomios linealmente dependientes, el rango del determinante es menor que  $n$ , lo que da origen a relaciones entre los determinantes.

Analizaremos a continuación las relaciones de interés directo para los desarrollos indicados en el capítulo I. Como primer punto es necesario expresar el desarrollo por menores de un determinante de Fermi en una forma ligeramente diferente a la dada anteriormente. Nos interesa en particular, el desarrollo del determinante ( C.6 ) como una suma de productos de determinantes de  $(n-1) \times (n-1)$  con un determinante de  $|x|$  con el mismo índice superior de este último en todos los términos. La fórmula del desarrollo es

$$\nabla_{12 \dots n-1 n}^{12 \dots n-1 n} = \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon(n-k) (-1)^{n-k} \nabla_{n-k+1 \dots n-k-1}^{1 \dots n-1} \nabla_{n-k}^n \quad (C.11)$$

en donde se interpreta al índice  $n-k$  como  $m$  y en donde se define

$$\epsilon(n-k) = \begin{cases} +1 & n, \text{ par} \\ (-1)^{n-k} & n, \text{ impar} \end{cases} \quad (C.12)$$

El desarrollo por menores se efectúa con respecto a los elementos de la última columna del determinante; de ahí que se obtengan cambios de signo.

Para demostrar la fórmula ( C.11 ) se demuestra que los  $n$  términos que

contiene  $\nabla_{1 \dots n}^{1 \dots n}$  aparecen en el desarrollo con el signo correcto. El primer punto es inmediatamente obvio, mientras que para demostrar lo relativo al signo, debemos recordar que  $\nabla_{1 \dots n}^{1 \dots n}$  está formado por una suma de monomios consistentes en productos de  $n$  factores del tipo  $\nabla_{\mu_j}^{s_j}$  en donde los índices  $\mu_j$  aparecen en orden natural y se aplican las  $n$  permutaciones posibles a los índices  $s_j$ , con todos los monomios del desarrollo con signo positivo, como se sigue del hecho de que ( C.11 ) es un permanente con respecto a ellos; para completar la demostración debemos colocar todos los términos del desarrollo con los índices  $\mu_j$  en orden natural. Como en la fórmula ( C.11 ) se ha efectuado una permutación cíclica sobre estos índices, se deben efectuar permutaciones cíclicas de  $n$  elementos para regresarlos al orden natural. Cuando  $n$  es un número impar y los elementos del algebra anticonmutan, el número de intercambios necesarios es siempre par y el término correspondiente tiene signo positivo. Como se puede ver de ( C.11 y 12 ) se obtiene el resultado correcto en este caso. Si  $n$  es un número par, cada permutación cíclica implica un cambio de signo; si el monomio cuyo coeficiente se analiza es

$$\nabla_{n-k+1 \dots n-k-1}^{1 \dots n-1} \nabla_{n-k}^n$$

se requieren  $(n-k)$  permutaciones cíclicas para colocar los índices inferiores en su orden natural; el signo de este monomio es  $(-1)^{n-k}$  como lo indican las ecuaciones ( C.11 y 12 ), que así quedan demostradas para  $n$  par, también.

Empleando este desarrollo se puede ahora demostrar las siguientes relaciones entre determinantes de Fermi:

$$n \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 12} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 251} + \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 1} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 25} = 0 \quad n \geq m \quad (C.13)$$

$$n \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 15} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 21} + \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 1} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 25} = 0 \quad n \geq m \quad (C.14)$$

Estas relaciones se utilizan explícitamente en la construcción de los polinomios de máximo peso en el subgrupo  $\mathbb{Z}_9 \times U_4$  de  $U_{36}$  cuando se ha efectuado una so la contracción, como se vió en el capítulo 1.

Mostraremos ahora la relación ( C.13 ); un método análogo se puede seguir para demostrar la ecuación ( C.14 ). Desarrollando ambos determinantes en la parte izquierda de ( C.13 ) se tiene:

$$n \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 1s} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 21} = n \left( \nabla_{1 \dots n-1}^{1 \dots 1} \nabla_n^s + \dots + \epsilon (n-k) (-1)^{n-k} \nabla_{n-k+1 \dots k-k-1}^{1 \dots 1} \nabla_{n-k}^s + \dots \right) \\ \times \left( \nabla_{1 \dots m-1}^{2 \dots 2} \nabla_m^1 + \dots + \epsilon (m-k) (-1)^{m-k} \nabla_{m-k+1 \dots m-k-1}^{2 \dots 2} \nabla_{m-k}^s + \dots \right)$$

Como los factores en el primer paréntesis de  $\nabla_n^s$  hasta  $\nabla_{m+1}^s$  se anulan al efectuarse la multiplicación con cualquier término del segundo paréntesis ya que  $\nabla_{m-k}^1$  con  $k=0, 1, \dots, m-1$  se repite en los términos resultantes del producto.

Por lo tanto:

$$n \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 1s} \nabla_{1 \dots m}^{2 \dots 21} = n \nabla_{m+1 \dots m-1}^{1 \dots 1} \nabla_m^s \nabla_{1 \dots m-1}^{2 \dots 2} \nabla_m^1 \epsilon (m) (-1)^m + \dots + \\ + n \epsilon (m-k) (-1)^{m-k} \nabla_{m-k+1 \dots m-k-1}^{1 \dots 1} \nabla_{m-k}^s \epsilon (m-k) (-1)^{m-k} \nabla_{m-k+1 \dots m-k-1}^{2 \dots 2} \nabla_{m-k}^1 + \dots$$

ya que el término que contiene  $\nabla_{m-k}^s$  da un resultado diferente de 0 al multiplicarse por el término del segundo paréntesis que tiene a  $\nabla_{m-k}^1$  como factor, únicamente. El término general es entonces del tipo,

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{m-k} \nabla_{m-k+1 \dots m-k-1}^s \nabla_{m-k}^s \in (-1)^{m-k} \nabla_{m-k+1 \dots m-k-1}^{2 \dots 2} \nabla_{m-k}^1 = \\
 & = - \nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 1} \in (-1)^{m-k} \nabla_{m-k+1 \dots m-k-1}^{2 \dots 2} \nabla_{m-k}^s
 \end{aligned}$$

Se observa, por consiguiente, que todos los términos contienen como factor al determinante  $\nabla_{1 \dots n}^{1 \dots 1}$ ; sacando a este como factor común y recombinando por medio del desarrollo (C.11) se obtiene el resultado deseado.

Los teoremas (C.13) y (C.14) son apropiados para el cálculo de los polinomios de máximo peso en  $\mathcal{U}_g \times \mathcal{U}_4$  cuando se efectúa una sola contracción; si se efectúa más de una contracción se necesitarán relaciones en donde el menor es un determinante de Fermi de dimensión igual al número de contracciones; estas relaciones se pueden obtener en la misma forma, partiendo del desarrollo de Laplace adecuado.

Como último punto, se hace notar que se pueden obtener relaciones análogas a las indicadas aquí para los determinantes de Fermi del tipo

$$\Delta_{\mu_1 \dots \mu_f}^{s_1 \dots s_f} = \sum_s (-1)^{P_s} b_{\mu_1 s_1}^+ \dots b_{\mu_f s_f}^+$$

definidos en la ecuación (5.19 a) intercambiados simplemente los índices de fila por los índices de columna. Esto último es importante, como se ha indicado antes, en el caso en que se deseen efectuar contracciones en el grupo orbital  $\mathcal{U}_g$ .

que corresponden a los tableaux ( C.7 a y b ). Pero estos son los dos únicos tableaux standard, en el sentido en que los números 1, 2, 3, etc... se encuentran en orden natural en cada una de las filas y columnas. Si recordamos que la dimensionalidad de la representación  $[21]$  del grupo simétrico es igual a 2 y que es igual al número de tableaux standard que se puedan construir dada la estructura del diagrama de Young, <sup>47)</sup> vemos que esta propiedad debe ser cierta en general:

Se tendrán tantos monomios linealmente independientes como tableaux -- standard.

Otra forma de llegar al mismo resultado es la siguiente:

Según ha demostrado recientemente Moshinsky <sup>48)</sup> las bases para representaciones irreducibles del grupo simétrico se pueden expresar como estados especiales de Gelfand; es decir, estados que corresponden a una partición del número  $n$  y a un peso  $(III...I)$  cuando se trata del grupo simétrico de  $n$  objetos. Por otra parte, estos estados de Gelfand se pueden expresar en función de polinomios en determinantes de Fermi del tipo analizado antes. Como los diagramas especiales de Gelfand forman una base ortonormal, se llega al mismo resultado de antes.

La técnica para encontrar relaciones del tipo ( C.10 ) para un diagrama de Young general se puede ver en la forma siguiente: considérese el determinante

$$\Delta_{121}^{123} = \begin{vmatrix} \Delta_1^1 & \Delta_1^2 & \Delta_1^3 \\ \Delta_2^1 & \Delta_2^2 & \Delta_2^3 \\ \Delta_3^1 & \Delta_3^2 & \Delta_3^3 \end{vmatrix}$$

que tiene dos índices inferiores iguales y vale 0 por lo tanto. Desarrollándolo por menores, se tiene:

## APENDICE D

### COEFICIENTES DE WIGNER EN LA CADENA $SU_3 \supset R_3$ .

En este apéndice se indicará como se construyen los coeficientes de Wigner para el grupo  $SU_3$ , empleando la técnica de relaciones de recurrencia propuesta recientemente por Brody, Moshinsky y Renner<sup>16)</sup> para obtener los coeficientes en la cadena natural  $SU_3 \supset SU_2 \supset SU_1$ . Para obtenerlos en la cadena física en nuestro caso, o sea la cadena de subgrupos no natural  $SU_3 \supset R_3 \supset R_2$ , se calcula la matriz del operador de Casimir del grupo  $R_3$  con respecto a estados de Gelfand caracterizados por la cadena de subgrupos canónica y se diagonaliza; los eigenvectores de esta matriz son los paréntesis de transformación de una base a otra.

Para obtener las reglas de recurrencia para los coeficientes de Wigner en la cadena natural, se introduce el concepto de coeficiente auxiliar:

Los polinomios BRI de  $SU_3$  introducidos por Moshinsky<sup>49)</sup>, son también BRI del subgrupo complementario, que en el caso de  $SU_3$  resulta ser un grupo  $U_4$ . Las bases clasificadas en la cadena natural para ambos grupos se pueden obtener por medio de los operadores de descenso<sup>50)</sup>. Por otro lado, el coeficiente de Wigner de  $U_3$  que acopla las representaciones  $(k_1', k_2')$  y  $(k_1'', k_2'')$  de  $SU_3$  para obtener una RI  $(k_1, k_2)$ , se puede expresar como el producto de dos polinomios

$$(P, P' P'')$$

en donde  $P'$  es el polinomio de máximo peso en  $SU_3$  y  $U_4$  correspondiente a la RI  $(k'_1, k'_2)$  en  $SU_3$  y  $P''$  es un polinomio de mínimo peso en ambos grupos y clasificado por  $(k''_1, k''_2)$  en  $SU_3$ ; el polinomio  $P$  corresponde a la RI  $(k_1, k_2)$  de  $SU_3$  y es de máximo peso en este grupo así como en el grupo  $U_4$ . Sin embargo, a diferencia de  $P'$  y  $P''$ , en el grupo  $U_4$  se utiliza la cadena no canónica

$$U_4 \supset U_2 + U_2$$

para la clasificación de  $P$ . Como ambas bases constituyen sistemas completos, un polinomio clasificado por esta cadena no canónica en  $U_4$  se puede expresar en términos de polinomio clasificado por la cadena canónica en ambos grupos.

En otras palabras, si se puede determinar el producto escalar de  $P'P''$  con un polinomio  $P_C$ , clasificado en la cadena canónica, se pueden calcular los coeficientes de Wigner deseados. Es a este producto escalar al que se le llama el coeficiente de Wigner auxiliar. Estos últimos no son difíciles de estudiar, ya que todos los factores que entran en ellos son polinomios clasificados en una cadena natural; en particular, se pueden encontrar reglas de recurrencia, mediante las cuales se expresa un coeficiente auxiliar en términos de otro, pero en el cual se han reducido  $k'_1$  ó  $k''_2$  (o ambas) por una unidad. Aplicando las reglas de recurrencia varias veces, se puede obtener un coeficiente auxiliar correspondiente a  $k''_2$  igual a cero (o ambas si  $k''_1 = k''_2$  para empezar) en cuyo caso se conoce la forma explícita del coeficiente de Wigner<sup>51)</sup>

Para funciones de onda partícula - agujero con un solo agujero en la capa  $1p$ , el coeficiente de Wigner necesario, tiene  $k''_1 = k''_2 = 1$  (Ver Cap. 5) y basta una

aplicación de la regla de recurrencia para expresar el coeficiente de Wigner deseado en términos de otro que vale uno ( $k_1'' = k_2'' = 0$ ).

En este caso, además, no es necesario expresar los coeficientes auxiliares en términos de los coeficientes normales, ya que son proporcionales. Una vez normalizados se obtienen los mismos resultados que se obtendrían empleando directamente los elementos de matriz de los generadores, siguiendo la conversión de Moshinsky y Nagel; este método <sup>52)</sup> ha sido utilizado por Baird y Biedenharn <sup>53)</sup> para determinar estos coeficientes.

Para obtener los coeficientes en la cadena física  $SU_3 \supset R_3$  se diagonaliza la matriz de  $L^2$  con respecto a estados de Gelfand clasificados por los índices  $(k_1, k_2)$  que entren en juego. La forma explícita de esta matriz se da en la referencia 1 y ha sido programada para una computadora, por lo que el cálculo numérico no presenta problema alguno. ( Como el operador  $L_z$  es diagonal en ambas cadenas, la matriz depende del eigenvalor de este operador; es necesario, por consiguiente, diagonalizar la matriz de  $L^2$  varias veces, si diferentes valores de  $M$  son necesarios en el acoplamiento ). Con los eigenvectores de la matriz  $L^2$  se obtienen los paréntesis de transformación de la cadena  $SU_3 \supset R_3$  a la cadena matemáticamente natural y con ellas el paso de los coeficientes de Wigner a la cadena física.

## Referencias .

- 1.- M. Moshinsky, Group Theory and The Many Body Problem in "Physics of Many Particle Systems", edited by E. Meron ( Gordon and Breach, New York, 1965 ).
- 2.- J. Flores, E. Chacón, P. A. Mello y M. de Llano. En prensa en Nuclear Physics ( 1965 ).
- 3.- M. de Llano, P. A. Mello, E. Chacón y J. Flores . En prensa en Nuclear Physics ( 1965 ).
- 4.- J. P. Elliott y B. H. Flowers, Proc. Roy. Soc. ( 1957 )  
G. E. Brown y M. Bolsterli, Phys. Rev. Lett. 3 ( 1959 ) 472  
G. E. Brown, J. A. Evans y L. Castillejo, Nucl. Phys. 22 ( 1961 ) 1  
D. M. Brink y G. F. Nash, Nucl. Phys. 40 ( 1963 ) 608.  
V. Gillet y N. Vinh Mau, Nucl. Phys. 54 ( 1964 ) 321  
G. E. Brown, Unified Theory of Nuclear Models, ( North Holland Publishing Co., Amsterdam 1964 ).
- 5.- M. Moshinsky, Proceedings of the International Conference on Nuclear Physics. Paris, 1964.
- 6.- J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. A 245 ( 1958 ) 128  
J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. A 245 ( 1958 ) 563  
M. Harvey y J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. A 272 ( 1963 ) 557
- 7.- G. Racah. Lecture notes on "Group theory and Atomic Spectroscopy", Princeton 1951, pág. 44.
- 8.- H. A. Jahn, Proc. Roy. Soc. A 201 ( 1950 ) 516

- 9.- D. E. Littlewood, "Theory of Group Characters"
- 10.- M. Hamermesh, "Group Theory and its Application to Physical Problems"  
( Addison Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. 1962 ) Cap. 10.
- 11.- H. Weyl, The Classical Groups ( Princenton University Press, Princeton,  
New Jersey 1946 ).  
  
S. Okubo, Progreso of Theor. Phys. 27 ( 1962 ) 949 .
- 12.- E. P. Wigner, Group Theory and its Applications to Quantum Mechanics  
( Academic Press Inc., New York 1959 ) pág. 18.
- 13.- M. Mukunda y Pandit, J. Math. Phys. ( 1965 )
- 14.- V. Bargmann and M. Moshinsky, Nuc. Phys. 23 ( 1961 ) 177
- 15.- A. de Shalit e I. Talmi, Nuclear Shell Theory ( Academic Press Inc.,  
New York 196 ) Cap. 22.
- 16.- T. A. Brody, M. Moshinsky e I. Renero, en prensa en Jour. Math Phys.
- 17.- I. M. Gelfand y M. L. Zetlin, Dok. Akad. Nauk, 71 ( 1950 ) 825
- 18.- H. Bethe y M. A. Rose, Phys. Rev. 51 ( 1937 ) 283
- 19.- H. Lipkin, Annals of Physics 9 ( 1960 ) 272.
- 20.- A. Lipkin, Phys. Rev. 110 ( 1962 ) 1395
- 21.- J. P. Elliott y T. H. Skyrme, Proc. Roy. Soc. A 232 ( 1955 ) 561
- 22.- P. Kramer y M. Moshinsky. En prensa en Nuclear Physics.
- 23.- G. E. Brown y A. M. Green, Phys. Letters 15 ( 1965 ) 168
- 24.- G. E. Brown y A. M. Green, por publicarse
- 25.- G. Racah e I. Talmi, Physica 17 ( 1952 ) 1097
- 26.- B. Bayman, Lecture notes on Seniority, Quasi particles and Collective  
Vibrations. Princeton University ( 1960 ).

- 27.- A. M. Lane, Nuclear Theory, ( Benjamin Inc., New York 1963 ).
- 28.- Y. F. Smirnov, Nuc. Phys. 39 ( 1962 ) 346.
- 29.- E. Chacón y M. de Llano, Rev. Mex. Fís. 12 ( 1963 ) 57
- 30.- M. Moshinsky, Group Theory and Collective Motions, Latin American School of Physics, México D. F. ( 1962 ).
- 31.- E. Chacón y M. de Llano, Rev. Mex. Fis, 13 ( 1963 )
- 32.- Landolt - Börnstein, Vol. I., Energy Levels of Nuclei ( Springer - Verlag, Berlin, 1961 )
- 33.- I. Kelson, Phys Letters. 16 ( 1965 ) 143
- 34.- E. B. Carter, G. E. Mitchell y R. H. Davis, Phys. Rev. 133 B ( 1964 ) 14 21
- 35.- W. Bassichis y G. Ripka, Phys. Letters 15 ( 1965 ) 320
- 36.- I. Talmi e I. Unna, Phys. Rev. 112 ( 1958 ) 452
- 37.- M. Harvey, Phys. Letters 3 ( 1963 ) 209
- 38.- A. Gobbi, A. Ruh, B. Gobbi y R. E. Pixley, Helv. Phys. Acta 37 ( 1964 ) 104
- 39.- R. W. Ollerhead, J. S. Lopes, A. R. Polletti, M. F. Thomas y E. K. Warburton, Nuc. Phys. 66 ( 1965 ) 161
- 40.- M. Harvey, Symposium on the Structure of Low - Medium Mass Nuclei, Kansas ( 1964 )
- 41.- C. Broude, M. A. Clark y A. E. Litherland, Phys Lett. 3 ( 1962 ) 118
- 42.- A. E. Litherland, M. A. Clark y C. Broude, Phys Lett. 3 ( 1963 ) 204.
- 43.- M. Harvey, Nuc. Phys. 52 ( 1964 ) 542

- 44.- M. Moshinsky, Nuc. Phys. 31 ( 1962 ) 384.
- 45.- E. Chacón, Tesis Doctoral.
- 46.- Hamermesh, op. cit. Cap. 7 y Cap. 10.
- 47.- Rutherford, Substitutional Analysis, ( Edinburgh, 1948 ).
- 48.- M. Moshinsky, por publicarse en Jour. Math. Phys. ( 1965 ).
- 49.- M. Moshinsky, Jour Math. Phys. 4 ( 1963 ) 1128.
- 50.- J. Nagel y M. Moshinsky, Jour. Math. Phys ( 1965 ).
- 51.- M. Moshinsky, Rev. Mod. Phys. 34 ( 1962 ) 813.
- 52.- J. Nagel y M. Moshinsky, Rev. Mex. de Fís. 14 ( 1965 ) 29.
- 53.- G. Baird y L. C. Biedenharn, Jour. Math. Phys. ( en prensa ).

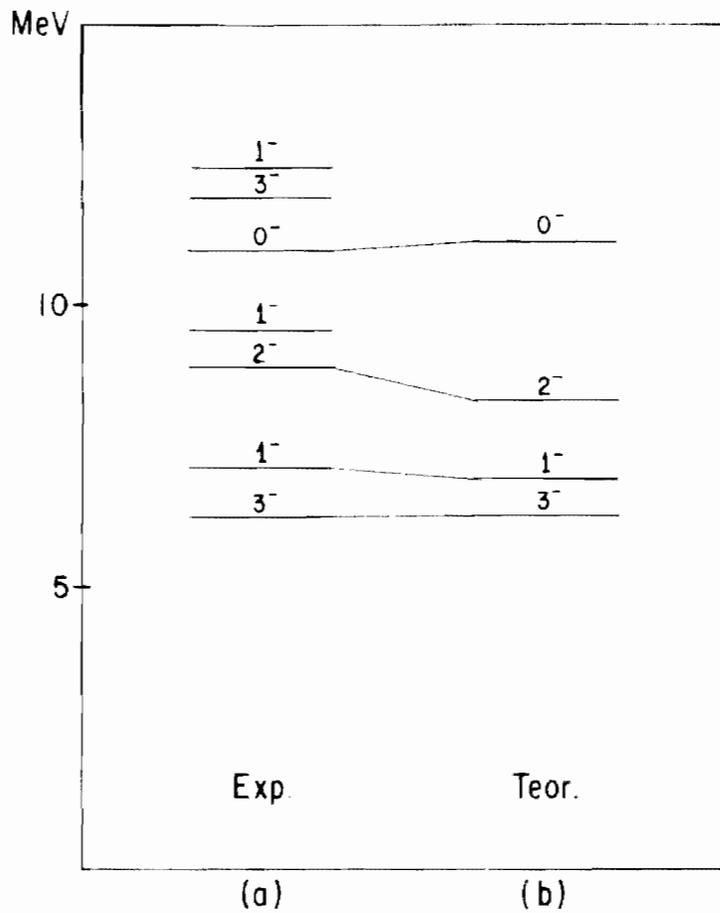


Fig. 1 Niveles de Energía del  $O^{16}$  con Paridad Negativa y  $T=0$

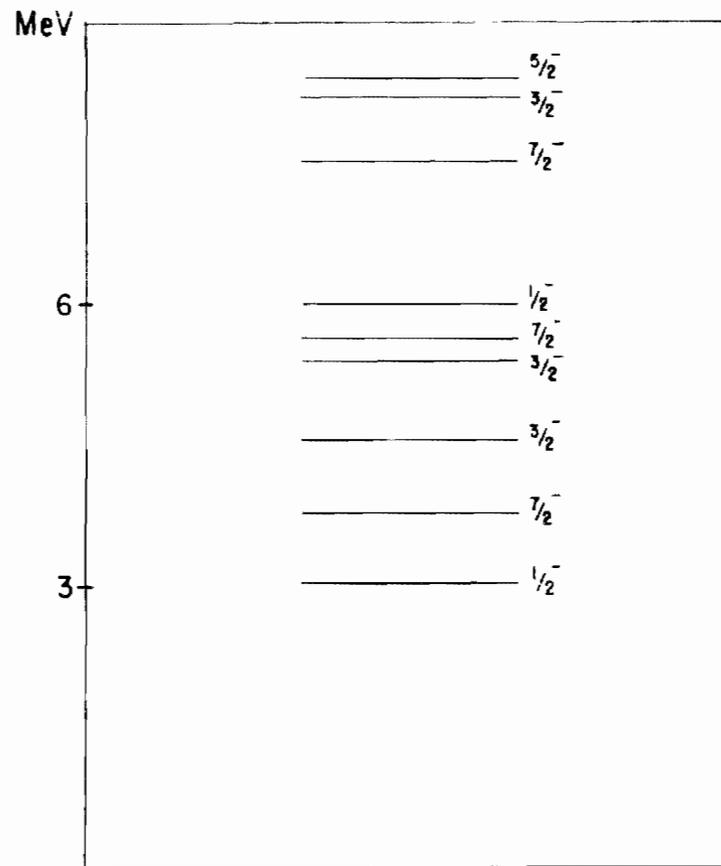


Fig. 2- Niveles de Energía de Paridad Negativa del  $O^{17}$  Observados Experimentalmente

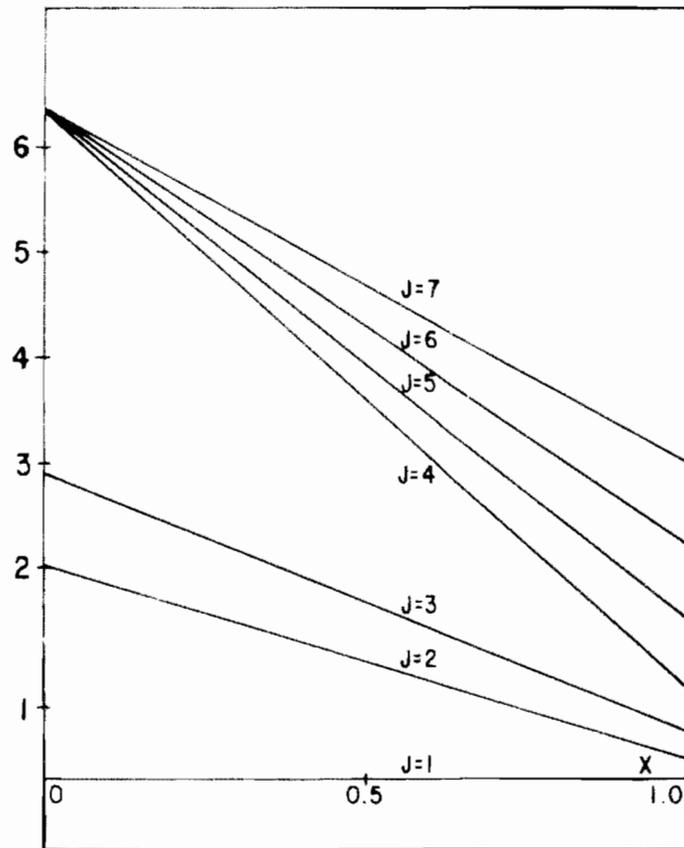


Fig. 3.- Niveles de Energía de Paridad Negativa del  $O^{18}$  Calculados con la Interacción  $V=(1-x)P + \frac{x}{10}Q^2$

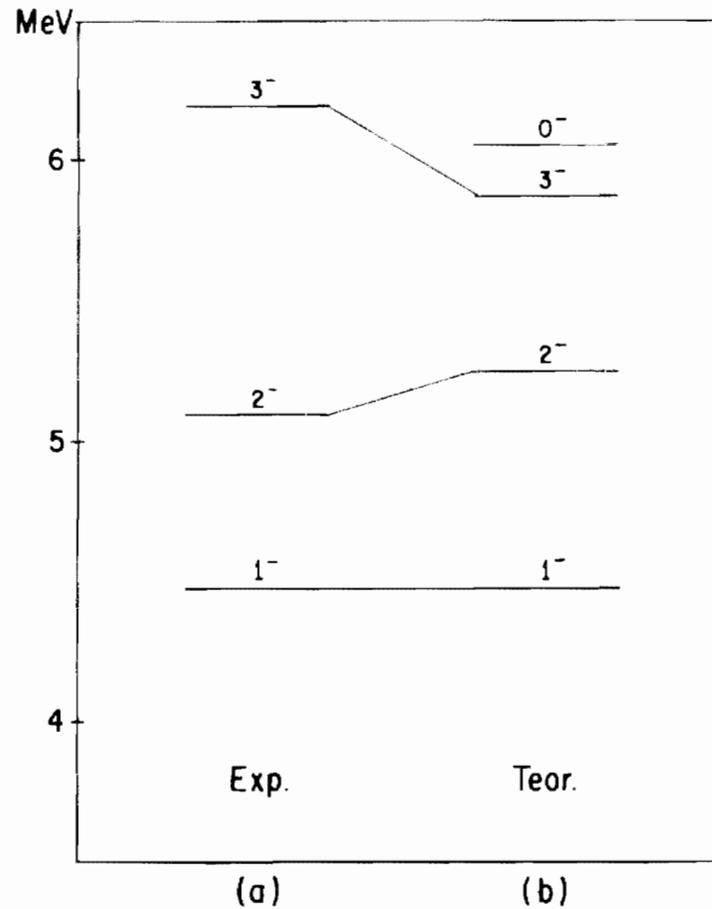


Fig. 4.- Comparación de los Calculos Teóricos con los Resultados Experimentales en el  $O^{18}$

