



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



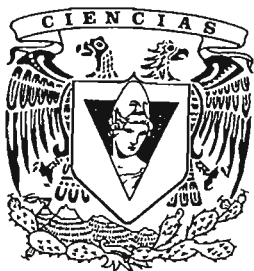
UN FLUJO QUE ACORTA CURVAS EN SUPERFICIES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :

SERGIO CESAR ALEJANDRO GUTIERREZ GUZMAN

DIRECTOR DE TESIS: DR. MAX NEUMANN COTO



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

2005



m348923



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

“Un flujo que acorta curvas en superficies”

realizado por Sergio César Alejandro Gutiérrez Guzmán

con número de cuenta **09424540-8** , pasante de la carrera de **Matemáticas**.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario **Dr. Max Neumann Coto**

Propietario **Dr. Carlos Prieto de Castro**

Propietario **Dr. Mario Eudave-Muñoz**

Suplente

Dr. Santiago López de Medrano Sánchez

Suplente

Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

A las decenas de miles que dieron todo
para defender a la Universidad en 1999,
al CGH.

A mis padres.

UN FLUJO QUE ACORTA CURVAS EN SUPERFICIES

SERGIO GUTIÉRREZ

1. INTRODUCCIÓN

Las geodésicas son trayectorias que minimizan localmente las distancias en una superficie riemanniana: son las trayectorias más directas en la superficie. Se puede probar que por cada punto de la superficie y en cada dirección, pasa una (y sólo una) geodésica. En esta tesis se expone un algoritmo que acorta y endereza curvas cerradas de forma continua y hace que se aproximen a geodésicas. El método, al que sus autores llaman *flujo de discos*, consiste en cubrir la superficie con discos y reemplazar los arcos que la curva tiene en cada uno de ellos por segmentos de geodésica. Al repetir el proceso en todos los discos una y otra vez, se obtienen curvas de longitud decreciente y que, o se aproximan a una geodésica o desaparecen en algún momento. El flujo de una curva depende de la elección de los discos, pero en muchos casos el límite no depende de ésta. Si empezamos con una geodésica, el flujo de discos la deja fija. Si la curvatura de la superficie es menor o igual a cero, el flujo converge a una geodésica (en caso de que no desaparezca) y puede probarse que si el flujo no converge, en la superficie hay una infinidad de geodésicas homotópicas a la curva con la que iniciamos. Además, el proceso no aumenta el número de puntos dobles de una curva. Esta característica permite establecer que cada curva simple, cerrada y esencial es isotópica a una geodésica simple o que entre dos curvas homotópicas con k puntos dobles, hay una homotopía que mantiene el número de puntos dobles en a lo más k .

El *flujo de discos* puede aplicarse a varias curvas a la vez sin que cambien sus propiedades, a menos que la cantidad de curvas sea infinita. En ese caso, el flujo se vuelve un proceso que endereza las curvas pero puede ser discontinuo, es decir, al enderezar a las curvas las puede alejar. Este problema se presenta al trabajar con familias de curvas que tienen tangencias con los bordes de los discos que cubren a la superficie. Hay forma de corregir ese defecto del flujo agregando a la familia nuevas curvas que rellenan las discontinuidades que puedan generarse. El resultado es un proceso que endereza familias de curvas con la propiedad

de que las familias que va generando en todo momento son homotópicas a la familia original. Que el flujo para familias tenga esta última propiedad, permite usarlo para encontrar geodésicas en una esfera. Encontrar geodésicas en una esfera tiene la complicación de que, por ser todas las curvas sobre ella triviales, al enderezar (acortar) las curvas nada garantiza que todas ellas no se acorten demasiado y desaparezcan. El flujo de familias resuelve ese problema haciendo fluir familias de curvas que “cubren” a toda la esfera en lugar de curvas solas. Como las familias que genera el *flujo para familias* son homotópicas a la original, si se empieza con una familia que cubre toda la esfera, las familias resultantes también la cubren y de esa forma no todas las curvas desaparecen y alguna o algunas se aproximan a geodésicas. A partir de esto se da una nueva prueba de un resultado clásico: en cualquier esfera riemanniana hay al menos 3 geodésicas cerradas. En la prueba de este resultado se usan solamente resultados estándares de topología algebraica.

La tesis está basada en el artículo de Joel Hass y Peter Scott titulado “Shortening curves on surfaces” [1]. En ese trabajo se pone atención solamente a superficies orientables. En esta tesis se añadieron algunas pruebas que funcionan para superficies no orientables y se explica con detalle algunos resultados que en el artículo de Hass y Scott sólo se mencionan.

2. EL FLUJO DE DISCOS PARA COLECCIONES FINITAS DE CURVAS

Recordemos que una superficie riemanniana F es una superficie diferenciable donde se pueden medir las longitudes de las curvas suaves por pedazos y los ángulos que forman al **intersecarse**. Las geodésicas son curvas suaves que minimizan localmente **las distancias** en la superficie. En una superficie riemanniana, dados un punto y una dirección existe una única geodésica que pasa por ese punto con esa dirección. De hecho, para cualquier punto p de la superficie, existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto de los puntos que distan de p menos que ε es un disco convexo, o sea, un disco tal que cualesquiera dos de sus puntos pueden unirse por una única geodésica en el disco. Si la superficie además es compacta hay un ε_0 que sirve para todos los puntos, el mayor ε que sirva para todos los puntos de F es el radio de inyectividad de la superficie. En este trabajo consideraremos que una curva cerrada en F es una función suave por tramos del círculo S^1 en F ; en particular, una geodésica cerrada es una curva cerrada que es geodésica en todos sus puntos. De aquí en adelante, cuando digamos curva se deberá entender curva cerrada. Diremos que dos curvas, α y β , en F son homotópicas si existe una función continua $f : [0, 1] \times S^1 \rightarrow F$ tal que $f(0, s) = \alpha$ y $f(1, s) = \beta$ (podemos deformar continuamente α para obtener β y viceversa). La función f es una homotopía. f es regular en un punto (t, s) si su derivada existe en ese punto y es distinta de cero.

En esta sección se introducirá un método para acortar o enderezar una curva inmersa en una superficie riemanniana. Este método toma una colección finita de curvas en una superficie y la transforma mediante homotopía de tal forma que durante el tiempo que dura este proceso se cumple que:

1. las autointersecciones de una curva no aumentan con el tiempo,
2. las intersecciones entre dos curvas cualesquiera tampoco aumentan con el tiempo,
3. cada curva se acerca arbitrariamente a una geodésica o desaparece en un tiempo finito,
4. el proceso modifica continuamente a la colección de curvas.

Primero se describirá intuitivamente el proceso mencionado, al que sus autores llaman *flujo de discos* y después se definirá con rigor.

Supongamos que tenemos una superficie riemanniana compacta F y una curva suave por pedazos γ_0 inmersa en F . Cubramos F con discos convexos D_1, D_2, \dots, D_n de radio menor que el radio de inyectividad de F . Intuitivamente, el flujo consiste en llevar cada componente de $\gamma_0 \cap D_1$

al único segmento de geodésica en D_1 con los mismos extremos. De esta forma obtenemos una nueva curva γ_1 de longitud menor o igual que la de γ_0 . Repetimos en D_2 para obtener γ_2 y así sucesivamente. Al terminar con los n discos, comenzamos de nuevo en el primer disco. De esta forma obtenemos una sucesión de curvas $\{\gamma_i\}$ con $i = 0, 1, 2, \dots$ a menos que la curva desaparezca en tiempo finito (figura 1). La cuestión de cómo llevar γ_i en γ_{i+1} con una homotopía que cumpla las cuatro condiciones planteadas al principio será resuelta mas adelante en la prueba del lema 2.3. En ese momento tendremos la homotopía γ_t con $t \in [0, \infty)$ que lleva γ_0 a una geodésica γ_∞ homotópica a ella o la hace desaparecer.

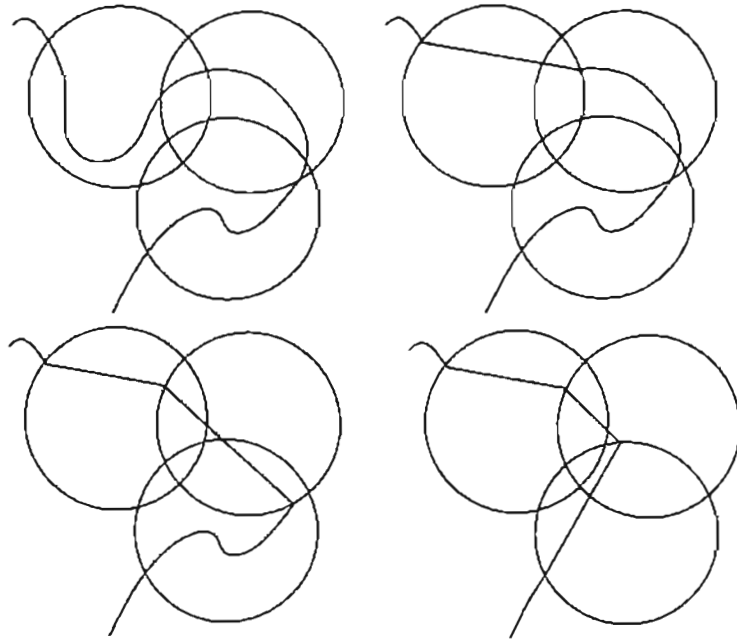


FIGURA 1. Tres pasos de la construcción del *flujo de discos*.

En lo que sigue plantearemos la definición rigurosa del *flujo de discos* y estudiaremos sus propiedades.

Cuando tenemos arcos que se autointersecan y se intersecan entre ellos en un disco, aparecen ciertas configuraciones entre sus arcos llamadas monógonos y bígonos.

Decimos que una curva $\gamma : S^1 \rightarrow F$ tiene un **monógono** encajado si hay un subarco a de S^1 encajado cuyos extremos a^+ y a^- están identificados por γ ($\gamma(a^+) = \gamma(a^-)$) y el lazo resultante $\gamma(a)$ está encajado y es borde de un disco en F .

Decimos que una curva $\gamma : S^1 \rightarrow F$ tiene un bígono encajado si hay un par de subarcos disjuntos y encajados a y b de S^1 cuyos extremos están identificados por pares, i.e., $\gamma(a+) = \gamma(b+)$ y $\gamma(a-) = \gamma(b-)$, el lazo formado por $\gamma(a) \cup \gamma(b)$ está encajado y bordea un disco en F .

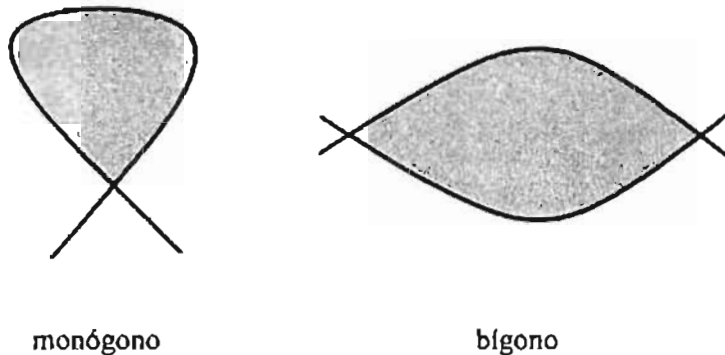


FIGURA 2.

Decimos que un monógono o bígono es interior si no contiene propiamente ni un monógono ni un bígono.

El proceso de enderezar una curva implica quitar las intersecciones que hay de más y por lo tanto quitar los monógonos y bígonos. Los dos siguientes lemas tienen ese propósito.

Lema 2.1. *Dado un triángulo y una colección de arcos encajados que lo cruzan, si:*

1. *cualesquiera dos arcos se intersecan en a lo más un punto y*
2. *hay una arista del triángulo que no interseca a ninguno de los arcos,*

entonces hay un triángulo interior adyacente a cada una de las otras dos aristas.

Demostración. Supongamos que tenemos un triángulo con aristas a , b , c y vértices p , q , r como en la figura 3. Supongamos que la arista que no es tocada por los arcos se llama c . Haremos la prueba por inducción sobre el número n de arcos que cruzan al Δabc . Si sólo hay un arco l cruzando al triángulo entonces es claro que el subtriángulo que determinan a , b y l es un triángulo interior adyacente a a y b . Supongamos ahora que el lema vale para $n < k$ arcos y que tenemos k arcos cruzando Δabc . Si caminamos desde el vértice p , opuesto a la arista c que no es intersecada por los arcos, sobre una de las dos aristas que ahí concurren, digamos sobre a , hasta encontrar el primer arco l que la cruza, el subtriángulo determinado por a , b y l es atravesado

por menos de n arcos (a lo más es atravesado por todos los arcos que cruzan $\triangle abc$ menos l) y ninguno de ellos toca la arista que está sobre a . Por la hipótesis de inducción, en $\triangle abl$ hay un triángulo interior adyacente a b . Si repetimos este procedimiento, ahora con la arista b , obtendremos un triángulo adyacente a a completando la prueba. \square

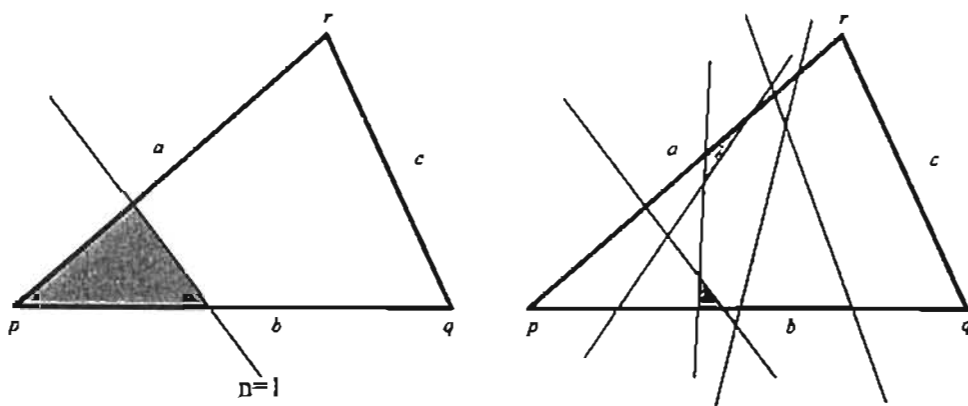


FIGURA 3.

Lema 2.2. *Dado un bígono interior y una colección de arcos que lo cruzan, hay un triángulo interior adyacente a cada arista del bígono.*

Demostración. Sea un bígono interior con aristas a_1 y a_2 y vértices p y q . Como el bígono es interior, los arcos que lo cruzan están encajados y cualquier par de ellos se tocan en a lo más un punto en el interior del bígono. Si nos paramos sobre uno de los vértices, por ejemplo p y caminamos por la arista a_1 hasta tocar el primer arco l que la cruza, definimos un triángulo con a_1 , a_2 y l que cumple con las hipótesis del lema 2.1. Entonces $\triangle a_1 a_2 l$ tiene un triángulo interior adyacente a a_2 . Si repetimos el procedimiento, ahora caminando por a_2 , obtenemos un triángulo interior adyacente a a_1 . \square

Llamamos **movimiento triangular** al proceso de deslizar una de las aristas de un triángulo interior a través del vértice opuesto.

Al proceso de reemplazar un arco de una curva por un arco de geodésica homotópico le llamamos un **enderezamiento** de la curva.

Lema 2.3. *Una colección finita de arcos suaves por pedazos, que se intersecan transversalmente en un disco convexo D , pueden ser llevados mediante homotopía (relativa a ∂D) a una colección de segmentos de geodésica de tal forma que durante la homotopía no aumente el número*

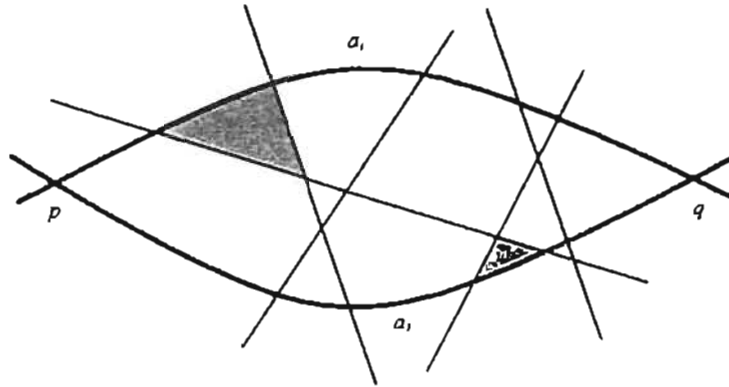


FIGURA 4.

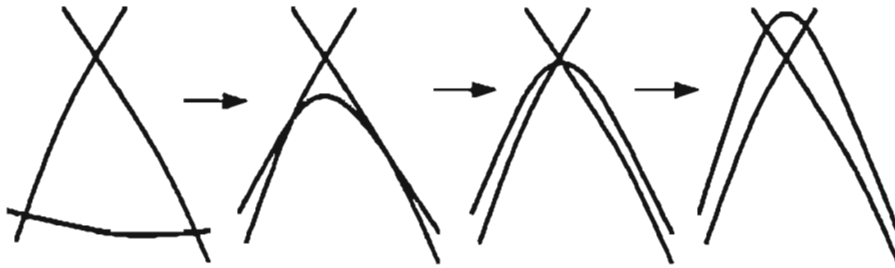


FIGURA 5. Movimiento triangular.

de autointersecciones de un arco ni el número de intersecciones entre cualquier par de arcos de la colección.

Demostración. Veamos cómo proceder cuando tenemos un disco con arcos como lo indican las hipótesis del lema.

- 1: Si tenemos puntos dobles de más, es decir, más del mínimo número de puntos dobles en la clase de homotopía (rel ∂D) de la colección de arcos, entonces hay dentro de D monógonos y/o bígonos. Para quitar el exceso de puntos dobles debemos quitar todos los monógonos y bígonos existentes. Tenemos que hacerlo con cuidado para no introducir nuevos puntos dobles. Por ser la colección de arcos en D finita y tener intersecciones transversales, sólo hay un número finito de intersecciones, es decir, hay sólo un número finito de bígonos y/o monógonos en D y por lo tanto hay monógonos y bígonos interiores. Podemos quitar monógonos interiores con homotopía simplemente encogiéndolos hasta desaparecerlos, este proceso no introduce ningún punto doble nuevo porque los monógonos interiores no son cruzados

por ningún arco y al final se reduce en 1 el número de puntos dobles (ver figura 10). A un bígono interior lo cruzan arcos encajados que se tocan en a lo más un punto; por el lema 2.2 sabemos que tal bígono tiene un triángulo interior adyacente a cada arista; dejando una de las aristas fijas y realizando en la otra movimientos triangulares, es posible hacer que el interior del bígono contenga solamente arcos que no se cruzan sin aumentar los puntos dobles (ver figura 6); un bígono con estas características nos permite "jalar" sus aristas para deshacer el bígono reduciendo en 2 el número de puntos dobles (figura 7). Como el número de bígono y monógono es finito, repitiendo este procedimiento se consigue quitar todos los puntos dobles que están de más. Al final quedan arcos encajados que se intersecan por pares en a lo más un punto.

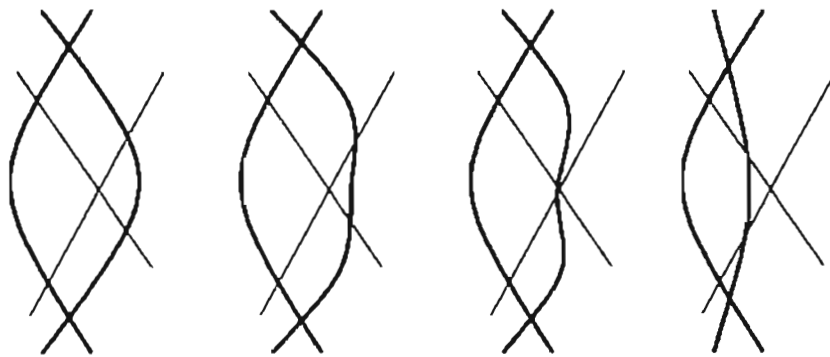


FIGURA 6.

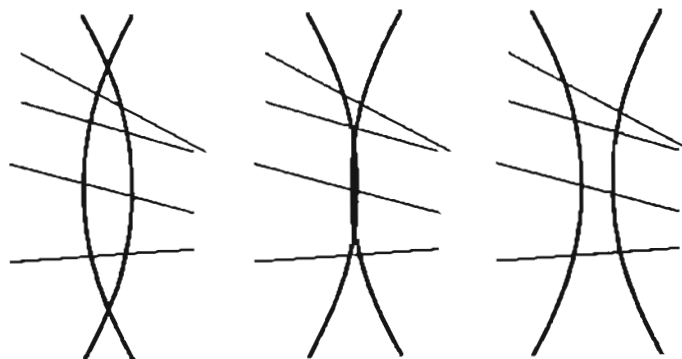


FIGURA 7. Desaparece bígono.

2: Una vez que no hay puntos dobles de más (o si nunca los hubo) lo que tenemos es una colección de arcos encajados que se intersecan por pares en D en a lo más un punto. Tomamos uno de ellos y le llamamos l . Consideramos el segmento de geodésica en D con los mismos extremos que l , al que llamaremos l' y lo añadimos a la colección de arcos. Si se forman bígono con l' en el interior de D los quitamos igual que en el paso 1 (obsérvese que podemos hacerlo sin mover l' porque el lema 2.2 garantiza la existencia de triángulos interiores adyacentes a cada una de las aristas del bígono, de tal forma que podemos hacer los movimientos triangulares en la arista del bígono que no está en l'). De esta forma tenemos al final un sólo bígono formado por l y l' que es interior y que por lo tanto tiene en su interior arcos que se intersecan en a lo más un punto. Así las cosas, podemos deslizar l haciendo movimientos triangulares hasta hacerlo coincidir con l' . Dado que l' no pertenece a la colección original de arcos, todo este proceso se lleva a cabo sin aumentar los puntos dobles en la colección original de arcos. Repitiendo este proceso para todos los arcos de la colección se logra el resultado deseado. Es importante hacer notar que una vez enderezado un arco, no lo tenemos que mover ya durante el enderezamiento de los demás porque se interseca en a lo más un punto con cualquier otro arco enderezado (los arcos de geodésica en el disco se intersecan en a lo más un punto).

Debemos notar que al quitar un bígono hay un instante en el que se produce una intersección no transversal entre sus aristas, también es posible que al terminar de enderezar alguno de los arcos de la colección se forme una tangencia entre el nuevo arco enderezado y otro de la colección. Sin embargo, al inicio y al final del proceso de enderezamiento las intersecciones entre los arcos son transversales. Si se formaran puntos múltiples (como los que se forman durante un instante al hacer un movimiento triangular) o si los hubiera desde el principio, basta con contarlos con su multiplicidad, es decir, un punto de multiplicidad k lo contamos como $\frac{k(k-1)}{2}$ puntos dobles. Todo este proceso tiene como resultado una homotopía regular (excepto en los momentos en que desaparece un pequeño lazo) que deforma la colección de arcos en una colección de segmentos de geodésica sin aumentar el número de puntos dobles. \square

El lema anterior nos permite definir el flujo de discos. Sea F una superficie Riemanniana, γ_0 una curva inmersa en F con autointersecciones transversales. Cubramos F con discos convexos D_1, D_2, \dots, D_n

de radio menor que el radio de inyectividad de F y tales que, si disminuimos su radio a la mitad, sigan cubriendo a F . Los discos estarán colocados de tal forma que cualquier punto de F esté en, a lo más, la frontera de dos discos y la frontera de cualquiera de ellos interseque a γ_0 transversalmente. A una cubierta de F con estas características le llamaremos bien colocada respecto a γ_0 . Definimos D_i como D_r , donde r es el residuo que deja i al dividirlo entre n , para cualquier $i \in \mathbb{N}$. Definimos γ_t para $t \in [i-1, i]$ con $i = 1, 2, \dots$ como el resultado de llevar a cabo el proceso continuo de enderezamiento descrito en la prueba del lema 2.3 en el disco D_i , siempre y cuando γ_{i-1} no tenga puntos dobles en la frontera de D_i . Si hubiera puntos dobles de γ_{i-1} en la frontera de D_i , antes de llevar a cabo el proceso de enderezamiento del lema 2.3, multiplicamos el radio de D_i por un factor λ tal que $1 - \frac{1}{4^i} < \lambda < 1$ para encoger el disco y evitar la situación antes descrita. Si en algún momento γ_{i-1} está completamente contenido en D_i el flujo la contraerá a un punto y después la desaparecerá.

Debemos recordar que en los tiempos enteros de este proceso γ_0 tiene solamente autointersecciones transversales. La razón por la que tenemos que garantizar que no haya dos arcos de γ_t que tengan puntos comunes en la frontera de algún disco es que al enderezarlos podrían encimarse produciendo una infinidad de puntos dobles (figura 8), o se generarían autointersecciones que no son transversales (figura 9). Como γ_0 tiene intersecciones transversales, basta con encoger un poco el disco para evitar este tipo de situaciones. Al multiplicar el radio de los discos por λ , ninguno se encogerá a menos de la mitad de su tamaño original porque $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{4^i}) > \frac{1}{2}$.

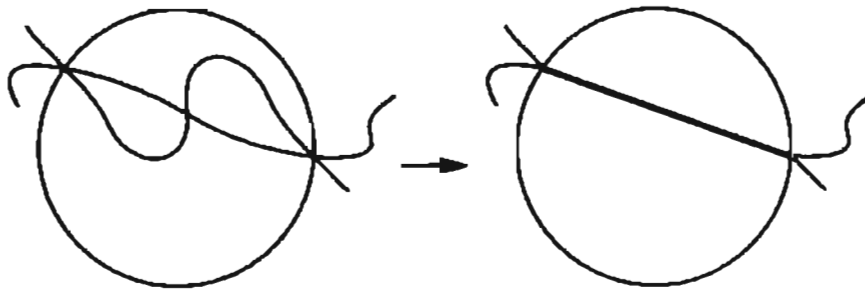


FIGURA 8.

El *flujo de discos* define una homotopía regular, excepto en los momentos en que un pequeño monógono en la curva desaparece (figura 10). Sólo hay un número finito de estos momentos en la homotopía. Como la forma de enderezar que nos da el lema 2.3 no es única, el *flujo de discos* no es canónico.

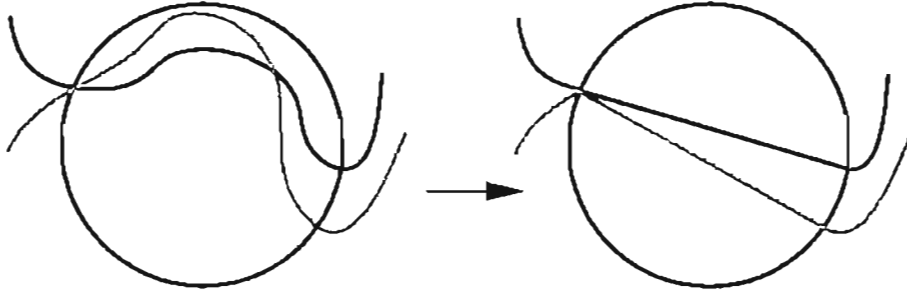


FIGURA 9.



FIGURA 10.

Definimos la transformación $\Delta : \{\text{curvas en } F\} \rightarrow \{\text{curvas en } F\}$ como aquella que toma una curva γ_0 y la lleva en la curva γ_n que resulta de aplicar a γ_0 el proceso de enderezamiento en los discos D_1, D_2, \dots, D_n . La topología que usaremos para el espacio de las curvas en la superficie es aquella en la que una ε -vecindad de una curva γ consiste en todas las curvas γ' tales que γ y γ' admiten parametrizaciones que están ε -cerca con la topología de las funciones continuas, es decir, la que resulta de la norma uniforme ($\|\cdot\|_\infty$). Ahora estamos en posibilidades de probar que el flujo que definimos tiene las características que buscamos.

Teorema 2.1 (donde se prueba que el flujo de discos sirve). Sean γ y γ' curvas en F que se intersecan y autointersecan transversalmente. Sea $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ una colección de discos que cubren a F y que están bien colocados respecto a $\gamma \cup \gamma'$. Sean γ_t y γ'_t imágenes de γ y γ' bajo el flujo de discos, entonces:

1. El número de autointersecciones de γ_t no se incrementa con t , $t \in [0, \infty)$
2. El número de intersecciones entre γ_t y γ'_t no se incrementa con t , $t \in [0, \infty)$
3. γ_t desaparece en un tiempo finito, o bien una subsucesión de $\{\gamma_t\}$ converge a una geodésica cuando $t \rightarrow \infty$. En el segundo caso, si U es una vecindad del conjunto de las geodésicas homotópicas a γ_t , existe $t_0 > 0$ tal que $\gamma_t \in U$ si $t > t_0$.
4. Si una sucesión $\{\gamma_i\}$ converge a la geodésica γ_∞ cuando $i \rightarrow \infty$, entonces $\text{longitud}(\gamma_i) \rightarrow \text{longitud}(\gamma_\infty)$.

5. $Longitud(\Delta(\gamma)) \leq longitud(\gamma)$. La igualdad se da sólo en el caso de que γ sea una geodésica o un punto.

Demostración. **Inciso (1) y (2).** El inciso (1) y (2) se siguen inmediatamente de la definición del flujo de discos y del lema 2.3.

Inciso (3) y (4). Si γ_t no desaparece en $t < \infty$ entonces $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de curvas rectificables en una superficie compacta cuya longitud es no creciente y está acotada por abajo. El teorema de Arzela-Ascoli [6, pag. 158] garantiza que una sucesión equicontinua de curvas en un espacio métrico compacto, tiene una subsucesión uniformemente convergente. Una familia de curvas es equicontinua si para toda $\varepsilon > 0$ existe δ (que depende sólo de ε) tal que para cualesquiera x e y en el dominio de las curvas, $|x - y| < \delta$ implica que $distancia(\gamma_i(x), \gamma_i(y)) < \varepsilon$, para toda $i \in \mathbb{N}$. Para asegurar que la familia de curvas $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sea equicontinua, parametrizamos γ_0 con longitud de arco y en los tiempos enteros del flujo de discos, reparametrizamos de tal forma que el parámetro se distribuya uniformemente a lo largo de la curva, es decir, reparametrizamos conservando el dominio y haciendo que la velocidad con la que el parámetro recorre la curva sea constante. Como el flujo disminuye la longitud de las curvas conforme i crece y la distancia entre dos puntos de una curva está acotada por la longitud del arco de la curva que los une, si $\delta = \varepsilon$ y $|x - y| < \delta$, entonces $distancia(\gamma_i(x) - \gamma_i(y)) < longitud(\gamma_i[x, y]) < longitud(\gamma_0[x, y]) = |x - y| < \delta = \varepsilon, \forall i \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Arzela-Ascoli, existe una subsucesión $\{\gamma_{i_k}\}$ que converge uniformemente a una curva rectificable δ , con $longitud(\delta) \leq \lim_{i_k \rightarrow \infty} longitud(\gamma_{i_k})$.

Si $longitud(\delta) < \lim_{i_k \rightarrow \infty} longitud(\gamma_{i_k})$, podemos encontrar un disco D_{i_0} tal que $\gamma_{i_k} \cap D_{i_0} \rightarrow \delta \cap D_{i_0}$, la longitud de $\gamma_{i_k} \cap D_{i_0}$ es no creciente y $longitud(\delta \cap D_{i_0}) < \lim_{i_k \rightarrow \infty} longitud(\gamma_{i_k} \cap D_{i_0})$. Sea $\varepsilon = \lim_{i_k \rightarrow \infty} longitud(\gamma_{i_k} \cap D_{i_0}) - longitud(\delta \cap D_{i_0}) > 0$. Como $\gamma_{i_k} \cap D_{i_0}$ converge uniformemente a $\delta \cap D_{i_0}$ sus extremos están cerca. Entonces, al enderezar en D_{i_0} , los segmentos de geodésica correspondientes tienen longitudes tan próximas como se quiera (ver figura 11), es decir, hay una curva de $\{\gamma_{i_k}\}$, digamos $\gamma_{i_{k_0}}$, para la cual su enderezamiento en D_{i_0} , al que llamaremos $\overline{\gamma_{i_{k_0}} \cap D_{i_0}}$, cumple que $longitud(\overline{\gamma_{i_{k_0}} \cap D_{i_0}}) - longitud(\overline{\delta \cap D_{i_0}}) < \varepsilon$ ($\overline{\delta \cap D_{i_0}}$ es el enderezamiento de $\delta \cap D_{i_0}$). Entonces $longitud(\overline{\gamma_{i_{k_0}} \cap D_{i_0}}) < longitud(\overline{\delta \cap D_{i_0}}) + \varepsilon < longitud(\delta \cap D_{i_0}) + \varepsilon = \lim_{i_k \rightarrow \infty} longitud(\gamma_{i_k} \cap D_{i_0})$, lo cual es una contradicción porque la longitud de los arcos $\gamma_{i_k} \cap D_{i_0}$ es no creciente. Por lo tanto,

$longitud(\gamma_i) \rightarrow longitud(\delta)$. El inciso 4 es consecuencia inmediata de este párrafo.

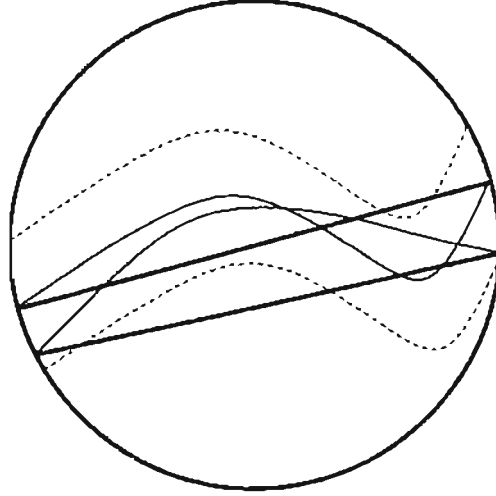


FIGURA 11. Enderezar arcos cercanos da como resultado segmentos de longitud próxima.

Falta probar que δ es geodésica. Si δ no es geodésica, tiene un arco d que no es geodésica y está contenido en alguno de los discos D_i , digamos en D_{i_0} . Hay una $\varepsilon > 0$ tal que, enderezando en D_{i_0} , la longitud de δ disminuye en por lo menos ε . Si los extremos de dos arcos contenidos en un disco están próximos (suponiendo que tienen sus extremos en la frontera del disco), sus enderezamientos tienen longitudes próximas. Entonces, como $\gamma_{i_k} \rightarrow \delta$, existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $k > K_0$, el enderezamiento de $\gamma_{i_k} \cap D_{i_0}$ mide, a lo más, lo que mide el enderezamiento de $\delta \cap D_{i_0}$ más $\frac{\varepsilon}{2}$, es decir, enderezando γ_{i_k} en D_{i_0} disminuimos su longitud en por lo menos $\frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, si $k > K_0$, $longitud(\Delta(\gamma_{i_k})) < longitud(\gamma_{i_k}) - \frac{\varepsilon}{2}$. Además, como $longitud(\gamma_i) \rightarrow longitud(\delta)$, existe K_1 tal que, si $k > K_1$, $longitud(\gamma_{i_k}) - longitud(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, si $k > \max\{K_0, K_1\}$, $longitud(\Delta(\gamma_{i_k})) < longitud(\gamma_{i_k}) - \frac{\varepsilon}{2} < (longitud(\delta) + \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} = longitud(\delta)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, cualquier subsucesión convergente de $\{\gamma_i\}$, converge a una geodésica. Por último, si hay alguna subsucesión de $\{\gamma_i\}$ que no cae en U , hay una subsucesión del flujo de discos que converge a una curva que no es una geodésica homotópica a γ_0 , y de nuevo tenemos una contradicción.

Inciso (5). La primera parte del inciso (5) es inmediata. Si γ es geodésica, $\gamma \cap D_i$ es un arco de geodésica para toda i y entonces el

flujo de discos no modifica nada. Si γ es un punto, el *flujo de discos* la desaparece. En ambos casos $\text{longitud}(\Delta(\gamma)) = \text{longitud}(\gamma)$. Si γ no es una geodésica, hay un disco tal que, al enderezar en él, disminuye la longitud de γ , con lo que $\text{longitud}(\Delta(\gamma)) < \text{longitud}(\gamma)$. \square

Aunque hemos probado que una subsucesión de $\{\gamma_t\}_{t=1}^{\infty}$ converge a una geodésica, no sabemos qué pasa con la sucesión entera. Una posibilidad es que la sucesión oscile entre geodésicas distintas. Sin embargo bajo condiciones especiales se puede asegurar que γ_t converge a una única geodésica, por ejemplo si F tiene una métrica de curvatura negativa o cero.

El **teorema de Gauss-Bonnet** dice que en una superficie con curvatura k menor o igual a cero, la suma de los ángulos internos de un triángulo geodésico (sus lados son geodésicas) es menor o igual a π (y es π sólo si la curvatura en todos los puntos del triángulo es cero). Como corolario tenemos que en una superficie con curvatura k menor o igual a cero, dos geodésicas no pueden formar un bígono. Si lo formaran, podemos atravesar el bígono con otra geodésica, esto lo parte en dos triángulos geodésicos, pero la suma de los ángulos de estos dos triángulos es mayor que 2π (tienen ángulos complementarios en los puntos donde atraviesa la geodésica). También podemos concluir que si dos geodésicas inmersas en una superficie con curvatura k menor o igual a cero son homotópicas entonces son borde de un anillo plano inmerso; esto es porque tales geodésicas, al no poder formar bígono, son borde de un anillo (inmerso) con borde geodésico. Atravesando una geodésica, el anillo puede partirse en un rectángulo, y atravesando otra geodésica diagonalmente, el rectángulo puede partirse en dos triángulos. Ahora puede verse que la suma de los ángulos de los dos triángulos es 2π , por lo tanto la suma de los ángulos de cada uno es π (ya que en cada uno es a lo más π). Esto dice que la curvatura dentro de cada triángulo es cero. Por lo tanto, en una superficie con curvatura negativa, dos geodésicas distintas no pueden ser homotópicas.

Diremos que dos geodésicas son paralelas si son borde de un anillo plano.

Teorema 2.2. *Sea F una superficie cerrada de curvatura negativa o cero. El flujo de discos aplicado a una curva γ_0 en F produce una homotopía γ_t en la cual γ_t desaparece en un tiempo finito o γ_t converge a una única geodésica γ_{∞} cuando $t \rightarrow \infty$.*

Demostración. Supongamos que γ_t no desaparece en un tiempo finito. Primero veremos el caso particular en que la curvatura sea estrictamente menor que cero y luego el caso general:

Curvatura negativa: En una superficie de curvatura negativa no puede haber geodésicas distintas y homotópicas. El inciso (3) del teorema 2.1 implica que si γ_t no desaparece en un tiempo finito, una subsucesión converge a la única geodésica γ_∞ homotópica a γ_0 y, para t suficientemente grande, la sucesión entera está en vecindades de radio arbitrariamente chico, es decir, la sucesión entera converge a γ_∞ .

Curvatura menor o igual a cero: En una superficie de curvatura menor o igual a cero puede haber geodésicas distintas y homotópicas. Sin embargo, el teorema de Gauss-Bonnet implica que dos geodésicas no pueden formar bigonos en superficies de curvatura menor o igual a cero. La cubierta de F correspondiente a $[\gamma_0]$ (a la que llamaremos F_{γ_0}) es una superficie cuyo grupo fundamental es \mathbb{Z} , o sea, es un anillo o una banda de Möbius con la métrica heredada de F . Las geodésicas en F homotópicas a γ_0 se levantan a geodésicas en F_{γ_0} homotópicas a la curva central y γ_0 se levanta a la curva central. En una banda de Möbius con curvatura menor o igual a cero sólo puede haber una geodésica homotópica al centro de la banda (porque dos curvas en la banda que dan una vuelta, se intersecan en un número impar de puntos, es decir forman bigonos, de tal forma que a lo más una de ellas puede ser geodésica), así que en este caso γ_t se levanta a una sucesión de curvas en la banda de Möbius que convergen a la única geodésica homotópica a ellas. Proyectando a F terminamos de probar el resultado para este caso. Ahora supongamos que F_{γ_0} es un anillo y que el flujo de discos no converge. Entonces podemos encontrar 2 subsucesiones del flujo, γ_m y γ_n , que convergen a 2 geodésicas homotópicas distintas α y β . En F_{γ_0} , α y β no se tocan, es decir son geodésicas paralelas y por lo tanto podemos encontrar una tercera geodésica que está entre las dos. Llamemos σ a tal geodésica y pensemos en el flujo de discos. Como γ_m y γ_n convergen uniformemente a α y β respectivamente, hay un momento a partir del cual γ_m está dentro de una vecindad de α que no toca a σ y γ_n está en una vecindad de β que tampoco toca a σ . Si enderezamos en cualquier disco que toque a σ , una curva que está del mismo lado de σ que α , se queda de ese mismo lado (figura 12). De esta forma el flujo no puede acercarse a β , lo que contradice el

supuesto de que hay una subsucesión del flujo que converge a β . Entonces el flujo converge a una geodésica, como se quería probar.

□

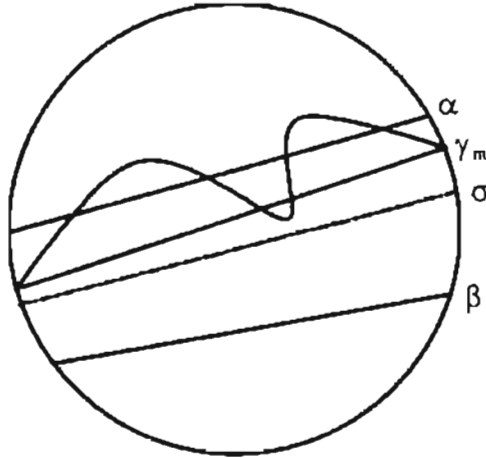


FIGURA 12.

Teorema 2.3. *El flujo de discos aplicado a una curva γ_0 en F , produce una homotopía en la cual γ_t desaparece en un tiempo finito o γ_t converge a una única geodésica γ_∞ cuando $t \rightarrow \infty$, a menos que haya una infinidad de geodésicas de la misma longitud en la clase de homotopía de γ_0 .*

Demostración. Supongamos que γ_t no converge y está oscilando solamente entre un número finito de geodésicas. Como el número de geodésicas es finito, podemos encontrar una vecindad suficientemente chica de cada una de las geodésicas de forma que la unión de dichas vecindades sea una vecindad regular de la unión de las geodésicas. Llamemos U a tal vecindad. Existe $t_0 < \infty$ tal que si $t_0 < t$, $\gamma_t \in U$, de otra forma, entre las curvas que se salen de U podemos encontrar una sucesión de ellas que converge a una geodésica que no está contenida en U y por lo tanto es distinta a las que teníamos. Como U es regular, las geodésicas no son homotópicas en U . Y como $\gamma_t \in U \forall t > t_0$ y el flujo es continuo, las curvas γ_t con $t > t_0$ son homotópicas en U y si además están oscilando entre las distintas geodésicas, en un momento son homotópicas a una y en otro a otra (en U), contradicción. Así, si el flujo no converge, debe oscilar entre una infinidad de geodésicas, que además son de la misma longitud porque si hubiera una más corta, al acercarse el

flujo a ella, no podría aproximarse después a una más larga (el flujo no aumenta longitudes en tiempos enteros). \square

2.1. Algunas aplicaciones del flujo de discos. Como una consecuencia inmediata de las propiedades del flujo de discos tenemos el siguiente

Lema 2.4. *Sea F una superficie riemanniana cerrada. Cada curva simple, cerrada y esencial γ , es isotópica a una geodésica simple.*

Demostración. En este caso γ_t no desaparece porque la curva es esencial y, como γ está encajada, γ_t está encajada para todo t y por lo tanto es una isotopía. Si el flujo no converge, al menos una subsucesión converge a una geodésica γ_∞ . En este caso basta con detener el flujo en una de las curvas de tal subsucesión que esté en una vecindad pequeña de γ_∞ y establecer "a pie" una isotopía entre dichas curvas (que podría ser unir dos puntos que son imágenes del mismo parámetro con el único segmento de geodésica entre ellos). \square

Ahora usaremos el flujo de discos para responder la siguiente pregunta: Sean s_0 y s_1 dos curvas primitivas y homotópicas en una superficie F , cada una con k puntos dobles. ¿Habrá una homotopía de s_0 a s_1 con la propiedad de que cada curva en la homotopía tiene a lo más k puntos dobles?

La respuesta es sí, como lo muestra el corolario 2. Para contar los puntos dobles, necesitamos que las curvas se autointersequen transversalmente, sin embargo, no es necesario que estén en posición general porque podemos contar los puntos con multiplicidad k como $\frac{k(k-1)}{2}$ puntos dobles. El resultado se puede generalizar a curvas en general, no necesariamente primitivas, pero implica detalles técnicos largos y tediosos que evitaremos aquí. El problema con las curvas que representan potencias de elementos primitivos de $\pi_1(F)$ es que al final de la homotopía dada por el flujo de discos, se enciman para darle varias vueltas a una geodésica primitiva y con esto aumentan en una infinidad el número de puntos dobles.

Lema 2.5. *Si α es un elemento primitivo del grupo fundamental de una superficie F , hay una geodésica en α que minimiza el número de puntos dobles para esa clase de homotopía.*

Demostración. Sea s_0 una curva en α que minimiza los puntos dobles. Como s_0 es esencial, hay una subsucesión $\{s_i\}$ del flujo de discos aplicado a s_0 que converge a una geodésica $s_\infty \in \alpha$. Entonces, en una vecindad regular de s_∞ siempre hay curvas de $\{s_i\}$. Como s_∞ es geodésica, sus intersecciones son transversales (si las hay), y por lo tanto

cualquier curva suficientemente cercana a ella en la métrica uniforme tiene al menos una autointersección por cada una de s_∞ . Así que s_∞ también minimiza los puntos dobles de α . \square

Corolario 1. *En las superficies F con métricas de curvatura menor o igual a cero, las geodésicas que representan elementos primitivos α de $\pi_1(F)$ minimizan el número de puntos dobles en su clase de homotopía.*

Demostración. Sea γ_0 una curva que minimiza los puntos dobles en α , entonces el flujo aplicado a γ_0 converge a una geodésica que también minimiza los puntos dobles. Si tal geodésica no es única en α , cualquier otra geodésica en α tiene el mismo número de puntos dobles que ella (porque juntas son borde de un anillo plano). \square

Teorema 2.4. *Sea F una superficie, sea α un elemento primitivo de $\pi_1(F)$ y sea s_0 una curva en α . Hay una homotopía s_t de s_0 a una geodésica s_1 que minimiza los puntos dobles de α , tal que la homotopía no incrementa los puntos dobles con t y es regular excepto en un número finito de puntos donde un lazo se convierte en un punto.*

Demostración. Para esta prueba daremos a F una métrica de curvatura constante, de forma que estaremos considerando 2 casos: curvatura $+1$ (\mathbb{RP}^2 y \mathbb{S}^2) y curvatura 0 ó -1 (todas las demás). Debemos tener en cuenta que en $\pi_1(\mathbb{S}^2)$ no hay elementos primitivos porque el grupo es trivial. Si $F = \mathbb{RP}^2$, tomamos una curva s_0 en la única clase de homotopía $\alpha \in \pi_1(F)$ no trivial. El flujo de discos aplicado a s_0 produce una familia de curvas $\{s_t\}$ que tiene una subsucesión $\{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ que converge a una geodésica simple y cerrada $s_\infty \in \alpha$. Afirmamos que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq K$, s_k es una curva simple. Para probarlo, basta con asegurar que en algún tiempo finito t_0 , s_{t_0} ya no tiene sublazos triviales porque en \mathbb{RP}^2 si una curva tiene puntos dobles entonces podemos cortarla en el punto doble para generar dos curvas; como el producto de las clases de las curvas resultantes es igual a la clase de la curva original y en \mathbb{RP}^2 sólo hay una clase no trivial, una de las curvas resultantes es trivial; por lo tanto, si una curva en \mathbb{RP}^2 tiene puntos dobles, tiene un sublazo trivial. Como F es compacta, existe ε_0 tal que, todo arco de longitud menor que ε_0 está contenida en un disco D_i . Sabemos que si $s_k \rightarrow s_\infty$, $\text{longitud}(s_k) \rightarrow \text{longitud}(s_\infty)$, de forma que podemos asegurar que existe K_1 tal que, cualquier sublazo trivial que tenga s_{K_1} , tiene longitud menor que ε_0 y, como el flujo de discos desaparece los lazos que están completamente contenidos en alguno de los discos D_i , $\Delta(s_{K_1})$ es una curva simple. Además, $\Delta(s_{K_1})$ está en una vecindad regular de s_∞ y por lo tanto ambas curvas son isotópicas. La homotopía buscada para este caso es la que resulta de aplicar el flujo

de discos a s_0 , interrumpirlo al llegar a $\Delta(s_{K_1})$ y finalmente aplicar la isotopía que hay entre $\Delta(s_{K_1})$ y s_∞ . Si F admite una métrica de curvatura constante 0 ó -1, el *flujo de discos* aplicado a s_0 produce una homotopía s_t entre s_0 y s_∞ , donde s_∞ es la única geodésica en α . s_t no aumenta los puntos dobles y por el corolario 1, s_∞ minimiza el número de puntos dobles en α . En este caso la homotopía buscada es s_t y s_1 es s_∞ . \square

Corolario 2. *Sea F una superficie, sea α un elemento primitivo de $\pi_1(F)$ y sean s_0 y s_1 dos curvas en α con k puntos dobles. Hay una homotopía s_t entre ellas con la propiedad de que el número de puntos dobles en cualquier curva s_t es menor o igual que k .*

Demostración. Por el teorema 2.4, hay una homotopía de s_0 a una geodésica s'_0 y otra de s_1 a una geodésica s'_1 , ambas geodésicas minimizan los puntos dobles en α y las homotopías mantienen el número de puntos dobles menor que k . Si F admite una métrica de curvatura constante negativa o cero, s'_0 y s'_1 son la misma curva o son el borde de un anillo plano en F , y en este último caso, s'_0 y s'_1 son homotópicas por una homotopía (que no cambia el número de puntos dobles) dada por las geodésicas del anillo. Y si $F = \mathbb{R}P^2$, hay una única clase de homotopía donde todas las geodésicas cerradas son simples e isotópicas. Combinando las dos homotopías (y la isotopía en los dos últimos casos) probamos este corolario. \square

3. EL FLUJO DE DISCOS PARA FAMILIAS DE CURVAS

El objetivo de esta sección es usar el *flujo de discos* para mostrar que una esfera tiene por lo menos 3 geodésicas simples y cerradas. Para ello hace falta hacer fluir familias de curvas en lugar de curvas solas. Tendremos que hacer algunos arreglos al flujo de curvas definido en la sección 2 para que se ajuste a esta nueva necesidad, dado que hasta ahora sólo se ha definido un proceso de enderezamiento para un número finito de curvas.

Hay una posibilidad para extender el flujo de discos al caso en que tratamos con una familia de curvas: aplicarlo a cada curva por separado. Si lo hacemos de esta forma ya no tenemos control sobre la evolución del número de intersecciones entre dos curvas cualesquiera porque la forma de enderezar las curvas que nos da el lema 2.3 sólo garantiza que no se introducen nuevos puntos dobles cuando hay un número finito de curvas. Sin embargo sabemos que en los tiempos enteros tales intersecciones no aumentan porque los arcos de geodésica en un disco minimizan el número de intersecciones en su clase de homotopía (relativa a la frontera del disco). Además sabemos que el número de autointersecciones de cualquier curva es no creciente, así que si una curva está encajada, permanecerá encajada todo el tiempo.

El principal problema que se presenta al hacer fluir familias de curvas de esta forma es la pérdida de continuidad. Si hay alguna curva de la familia que sea tangente a la frontera de algún disco, se va a quedar atorada en el punto de tangencia mientras las curvas que están cerca y no son tangentes se enderezan y se produce una discontinuidad en el flujo de la familia. Ver la figura 13.

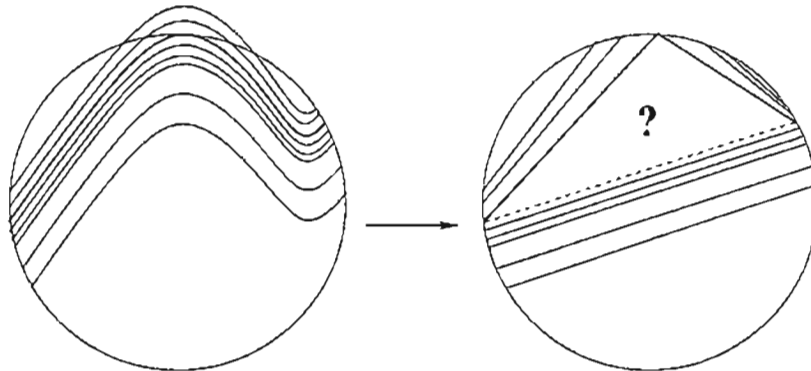


FIGURA 13. Al hacer fluir familias de curvas pueden generarse "huecos".

Para resolver este problema tenemos que rellenar de alguna forma los “huecos” que producen las tangencias en el flujo de las familias de curvas. El que podamos rellenar los “huecos” está relacionado con cuántos de ellos hay, es decir cuántas tangencias tiene una familia de curvas con los discos que cubren la superficie F en la que están inmersas. Veremos que ocurren pocas de estas tangencias y que podemos “rellenar” los pocos “huecos” que aparecen con segmentos de geodésica. Una vez resuelto el problema de la pérdida de continuidad en el flujo estaremos en posibilidad de mostrar que hay tres geodésicas simples y cerradas en la esfera.

Por una familia de curvas de k -parámetros en F , entenderemos una transformación continua de $M^k \times \mathbb{S}^1$ a F , donde M^k es una variedad de dimensión k .

Lema 3.1. *Dada una familia de curvas suaves por pedazos de k -parámetros en F y un disco $D \in F$, D puede ser perturbado un poco para que el conjunto de curvas que tienen p tangencias con ∂D tenga codimensión p en la familia de curvas para cada p .*

Idea de la prueba. Sea $\Gamma : M^k \times \mathbb{S}^1 \rightarrow F$ una familia de curvas a k parámetros sobre F , sea D un disco en F . Obsérvese que el conjunto de curvas tangentes a la frontera de D es cerrado. Se afirma que podemos perturbar D un poco para que el conjunto de curvas que son tangentes a ∂D tenga codimensión uno (por lo menos). Supongamos que una curva en Γ es tangente a ∂D en un punto x . Si todas las curvas de la familia tuvieran tangencias en una vecindad de x , la familia estaría aplastada en la dirección de la frontera de D y en ese caso basta con modificar un poco ∂D para desaparecer todas las tangencias en tal vecindad. Entonces, hay por lo menos una dirección por la cual moverse para que las curvas sean transversales al borde del disco en una vecindad de x o perturbando ∂D quitamos todas las tangencias en esa vecindad. Esto dice que la codimensión del conjunto en cuestión es por lo menos uno.

Si una curva $\gamma \in \Gamma$ tiene tangencias con ∂D en 2 puntos, digamos x_1 y x_2 , debe estar en el conjunto de curvas que son tangentes a ∂D en una vecindad de x_1 y en el conjunto de curvas que son tangentes a ∂D en una vecindad de x_2 . Ambos conjuntos tienen codimensión uno y γ debe estar en su intersección. Genéricamente, la intersección de dos conjuntos de codimensión uno es un conjunto de codimensión dos. Si no fuera así, basta con modificar un poco la dirección de ∂D en una vecindad de x_1 (o de x_2) porque la dirección de las familias que son tangentes a ∂D en una vecindad de x_1 (o de x_2) depende de la dirección de ∂D en tal vecindad. Por lo tanto, podemos perturbar ligeramente

D para que el conjunto de curvas en Γ que son tangentes a ∂D en dos puntos tenga codimensión dos.

El mismo argumento sirve para el caso general. Una curva con l tangencias debe estar en la intersección de l conjuntos de codimensión uno que, genéricamente, tiene codimensión l . Si los l conjuntos no son transversales, basta con perturbar un poco ∂D en la vecindad de a lo más $l - 1$ puntos para que lo sean. Siempre se puede hacer esto porque los grados de libertad para hacer las perturbaciones de los discos de forma que conserven la convexidad es muy grande (dimensión infinita). Observemos que, en particular, podemos perturbar D para que el conjunto de curvas con k tangencias con ∂D sea finito y el conjunto de curvas con l tangencias, con $l > k$, sea vacío.

Lo anterior es una idea intuitiva de la prueba de este lema, la prueba formal involucra detalles técnicos complicados y puede consultarse en [2]. \square

Ahora veremos cómo podemos enderezar continuamente algunas familias especiales de curvas de forma que las curvas que están encajadas sigan encajadas durante el enderezamiento.

Diremos que un arco α en un disco convexo es una **pseudo-gráfica** si podemos foliar la cerradura convexa de α con segmentos de geodésica disjuntos, cada uno de los cuales interseca a α a lo más una vez.

Sea D un disco convexo. Dada un arco $\alpha_0 : [0, 1] \rightarrow D$, un **enderezamiento inicial** de α_0 es el arco α_t que se obtiene al remplazar en α_0 el arco $\alpha_0 [0, t]$ por el segmento de geodésica que va de $\alpha_0(0)$ a $\alpha_0(t)$. Generalizando, sea α' el arco que se obtiene de α al sustituir $\alpha[t_1, t_2]$ por el segmento de geodésica que une $\alpha(t_1)$ con $\alpha(t_2)$, le llamamos a α' un **enderezamiento de α** .

Lema 3.2. *Una pseudo-gráfica α sigue siendo pseudo-gráfica después de un enderezamiento.*

Demostración. Sea α una pseudográfica. Hay una foliación de la cerradura convexa de α con segmentos de geodésica disjuntos. Un segmento l de dicha foliación interseca a α a lo más una vez. El mismo segmento l interseca al enderezamiento de α , α' , a lo más una vez porque los segmentos de geodésica minimizan las intersecciones en su clase de homotopía, así que los segmentos de la foliación que tocan a α' en la parte no enderezada no la pueden tocar en la parte enderezada porque tocarían a α en 2 puntos, y los segmentos de la foliación tocan a α' en la parte enderezada en a lo más un punto porque los segmentos de geodésica en un disco se tocan en a lo más un punto. Por lo tanto α' es una pseudográfica respecto a la misma foliación que α . \square

Lema 3.3. *Sea D un disco convexo. Sea $\sigma : [0, 1] \mapsto D$ una geodésica en D y sea $\Gamma = \{\text{pseudo-gráficas } \alpha \text{ en } D \text{ con } \partial\alpha = \partial\sigma\}$. Hay un retracto de deformación de Γ a σ que disminuye la longitud de los arcos continuamente.*

Demostración. A cada arco $\alpha \in \Gamma$ lo llevamos mediante enderezamientos iniciales a σ . El lema 3.2 garantiza que al hacer esto nos mantenemos todo el tiempo en Γ . Además, si dos pseudográficas están cerca, sus enderezamientos iniciales también lo están. Los enderezamientos iniciales varían continuamente la longitud de un arco de manera no creciente respecto al parámetro del arco, la longitud se mantiene igual a lo largo de todo el enderezamiento sólo en el caso de que el arco sea un segmento de geodésica. Por lo tanto, los enderezamientos iniciales de las curvas en Γ producen un retracto de deformación de Γ en σ que disminuye las longitudes continuamente. \square

Lema 3.4. *Un arco encajado formado por segmentos de geodésica en un disco convexo D con vértices en ∂D es una pseudo-gráfica.*

Demostración. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$, un arco que cumple las hipótesis del lema. Hay un homeomorfismo de D que lleva a α a un arco dibujado en el disco unitario en \mathbb{R}^2 con su primer vértice en $(0, -1)$ y ordenada siempre creciente. Para notar esto lo que tenemos que hacer es encoger y mover el disco hasta hacerlo coincidir con el unitario, después lo rotamos hasta que el primer vértice (el que viene de $\alpha(0)$) coincida con $(0, -1)$; el último vértice lo llevamos a $(0, 1)$ y a los vértices restantes los acomodamos en el disco de forma que su ordenada esté distribuida uniformemente en el intervalo y respetando el orden que les da la parametrización. Estos arcos son pseudográficas respecto a una foliación que tenga únicamente segmentos de geodésica verticales. Un homeomorfismo entre cualquier disco convexo y un disco en \mathbb{R}^2 concluye la prueba para el caso general. \square

Lema 3.5. *Una familia de curvas de k -parámetros en una esfera riemanniana puede ser enderezada continuamente. La familia enderezada es homotópica a la familia original.*

Demostración. Consideremos primero una familia de curvas parametrizadas por $[0, 1] = I$ sobre una esfera riemanniana. Cubramos a la esfera con una colección de discos como en la sección 2. Veamos cómo enderezar a la familia en el disco D_1 . Cualquier curva que esté completamente contenida en D_1 la desaparecemos. Un arco con sus extremos en ∂D_1 lo reemplazamos con el único arco de geodésica en D_1 con los mismos extremos. Como no podemos asegurar que todas las curvas tengan intersecciones transversales con las fronteras de los

discos pueden desarrollarse discontinuidades en el flujo donde haya curvas con tangencias internas con la frontera del disco. El lema 3.1 nos dice que podemos modificar los discos para que una curva de tal familia tenga a lo más 1 punto de tangencia con la frontera de D_1 y sólo un número finito de ellas sea tangente a ∂D_1 . Si el flujo se hace discontinuo debido a que una curva γ_s tiene una tangencia interna con ∂D_1 , rellenamos la discontinuidad con los enderezamientos iniciales de $\gamma_s \cap D_1$. En el espacio de parámetros sustituimos el punto s por un intervalo cerrado y asignamos esos nuevos parámetros a las curvas del enderezamiento inicial de $\gamma_s \cap D_1$. Podemos reparametrizar para que el espacio de parámetros siga siendo I . Debemos repetir este procedimiento en D_2, D_3, \dots para cada curva que tenga tangencias internas con el disco en turno. Esto nos da como resultado una sucesión de funciones $f_i : I \rightarrow I$, donde f_i asocia a un parámetro s_i otro parámetro s_{i-1} si γ_{s_i} es la imagen bajo el flujo de familias aquí descrito de $\gamma_{s_{i-1}}$ o si γ_{s_i} fue generada a raíz de una tangencia interna de $\gamma_{s_{i-1}}$. Entonces tenemos una sucesión de funciones y espacios de parámetros $\dots I \xrightarrow{f_{i+1}} I \xrightarrow{f_i} I \xrightarrow{f_{i-1}} I \dots \xrightarrow{f_1} I \xrightarrow{f_0} I$ cuyo límite inverso, que podemos pensar como las sucesiones $S = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ donde $s_i = f_i(s_{i+1})$, es homeomorfo a I . Este proceso de enderezamiento es continuo. Las familias de curvas que resultan en cada paso son homotópicas a la original.

Si tenemos una familia de curvas a dos parámetros, podemos modificar los discos para que a lo más un número finito de curvas tenga dos puntos de tangencia con ∂D_i para toda $i \in \mathbb{N}$. El flujo está definido continuamente para las curvas que no tienen tangencias con algún disco. Veamos cómo definirlo para los casos donde hay tangencias. Tenemos que sustituir cualquier curva que tenga una tangencia con el borde de algún disco por todos sus enderezamientos iniciales. En el espacio de parámetros, los puntos que corresponden a curvas que tienen una tangencia con el borde de algún disco forman curvas y las intersecciones entre estas curvas son puntos cuya imagen es una curva con una doble tangencia. Tenemos que sustituir cada punto de esas curvas (cuya imagen es una curva que tiene una tangencia con el borde de algún disco) por un intervalo y cada intersección por un disco. Las sustituciones de puntos por intervalos quedan definidas por el caso a un parámetro: simplemente sustituimos cada curva de parámetros donde ocurren tangencias sencillas por bandas de parámetros (por cada punto ponemos un intervalo que corresponde a los enderezamientos iniciales de la curva con una tangencia). Ahora diremos cómo definir el flujo en los discos que sustituyen las intersecciones de las curvas en el espacio de parámetros. En la frontera del disco hay parámetros que corresponden a

pseudográficas con a lo más una tangencia con ∂D_i y el centro del disco corresponde a un segmento de geodésica con los mismos extremos que la curva con la doble tangencia. Entonces para definir el flujo en cada radio del disco, hacemos enderezamientos iniciales haciendo coincidir los extremos de las pseudográficas con los del segmento de geodésica del centro. Si repetimos este proceso en todos los discos D_i , el espacio de parámetros que queda al final (el límite inverso) es homeomorfo al original. El lema 3.3 junto con la observación de que pseudográficas cercanas tienen enderezamientos iniciales cercanos, garantiza que el resultado es un proceso continuo de enderezamiento que hace que en cada momento tengamos familias homotópicas a la original.

Para el caso de familias a 3 parámetros podemos proceder de manera similar. Ahora los parámetros correspondientes a tangencias sencillas forman superficies en el espacio de parámetros, las intersecciones de estas superficies (curvas) son los parámetros que corresponden a las dobles tangencias y las intersecciones de esas curvas, que son puntos aislados, son los parámetros donde ocurre una tangencia triple. El flujo queda definido con los casos anteriores para el complemento de los puntos donde ocurre una triple tangencia (debemos sustituir cada punto por intervalos o discos, según el caso). A los puntos donde ocurren tangencias triples los sustituimos por bolas sólidas. Las fronteras de tales bolas corresponden a pseudográficas que tienen a lo más 2 tangencias con el borde de cualquier disco y podemos definir, igual que antes, enderezamientos de cualquiera de esas pseudográficas que las llevan al segmento de geodésica que corresponde al centro de la bola. El flujo así definido, es continuo y genera en todo momento familias de curvas homotópicas a la familia inicial.

El caso de una familia k -paramétrica se hace de igual forma y las familias resultantes son homotópicas en todo momento a la familia original. \square

Ahora estamos en condiciones de discutir un problema clásico. ¿Cuántas geodésicas tiene una esfera? La esfera redonda tiene infinidad de geodésicas cerradas, todos sus círculos máximos son geodésicas cerradas de la misma longitud. Un elipsoide de revolución también tiene una infinidad de geodésicas, pero a diferencia de la esfera redonda, en este caso hay un conjunto infinito de geodésicas de la misma longitud -consistente precisamente de todas las elipses que resultan de rotar la elipse que genera al elipsoide- y una geodésica más, de longitud distinta y perpendicular a todas las anteriores. Por último, si nos fijamos en un elipsoide que tenga sus tres ejes de distinta longitud, nos daremos cuenta que en esta esfera topológica sólo hay 3 geodésicas cerradas y las tres

son de distinto tamaño. Así, parece que la cantidad de geodésicas que tiene una esfera depende de su forma geométrica particular, sin embargo el siguiente teorema muestra que en cualquier esfera topológica podemos encontrar al menos 3 geodésicas cerradas distintas.

Teorema 3.1. *Una esfera riemanniana tiene al menos 3 geodésicas cerradas.*

Demostración. Lo primero que haremos será mostrar cómo se puede encontrar una geodésica cerrada en una esfera. Consideremos una familia de curvas encajadas $\{\alpha_s\}$ con $s \in I = [0, 1]$ que comienza y termina con un punto (α_0 y α_1 son curvas puntuales) y que define una transformación de grado 1 sobre una esfera. Como la esfera es compacta podemos encontrar $\delta_0 > 0$ tal que cualquier curva de longitud a lo más δ_0 está en uno de los discos $\{D_i\}$. Si todas las curvas de la familia tuvieran longitud menor o igual a δ_0 , cada una estaría metida en algún disco y por lo tanto podríamos extender continuamente la transformación de la esfera a la esfera a otra de la bola sólida en la esfera (¿cómo? mandando una curva y el disco plano que bordea en la bola sólida a la curva correspondiente y el interior del disco que bordea esa curva en la esfera y que está contenido en el disco D_i que contiene a la curva), contradiciendo el supuesto de que la transformación es de grado 1. Entonces, la longitud de una curva de longitud máxima que esté en una familia como $\{\alpha_s\}$, tiene que ser mayor a δ_0 . Apliquemos el *flujo de discos* a $\{\alpha_s\}$. Por el lema 3.5 sabemos que las familias que resultan de hacer fluir una familia de curvas son homotópicas a ella, por lo que el grado de la familia no cambia durante el flujo. Entonces, durante el flujo siempre hay una curva de longitud mayor que δ_0 . Si una curva desaparece durante el flujo, antes debe caer dentro de un disco. Si hay una curva que esté metida en un disco, hay una vecindad de ella que también está en el disco. Así que si una curva desaparece en $[t_0, t_0 + 1]$, toda una vecindad de ella desaparece también en ese intervalo de tiempo ($t_0 \in \mathbb{N}$). Por lo tanto el conjunto de curvas que desaparece es abierto. Además, al ser $\{\alpha_s\}$ un conjunto compacto, no desaparecen todas las curvas, porque de hacerlo, bastaría con que desaparecieran un número finito de las curvas de la familia para que desaparecieran todas y esto se lograría en un tiempo finito, sin embargo en todo momento debe haber una de longitud mayor que δ_0 . Por lo anterior, sabemos que el conjunto de curvas de $\{\alpha_s\}$ que no desaparece es cerrado y no vacío. Como hicimos fluir a la familia con el *flujo de discos*, cada curva tiene asociado una sucesión de parámetros (de acuerdo con la prueba del lema 3.5). Sea $S = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ la menor de tales sucesiones -con el orden lexicográfico- para la que α_S no desaparece, entonces α_S tiene una subsucesión que converge a una

geodésica cerrada. Para mostrar que existen tres geodésicas simples y cerradas nos ayudaremos del siguiente lema.

Lema 3.6. *El espacio Σ de las curvas cerradas, simples y suaves por pedazos en la esfera con todas las curvas puntuales identificadas se retrae en el espacio $\bar{\Sigma}$ de los círculos en la esfera con los círculos puntuales identificados, que es homeomorfo al espacio proyectivo \mathbb{RP}^3 .*

Demostración. Vamos a dividir la prueba en 2 partes: primero mostraremos que \mathbb{RP}^3 es homeomorfo al espacio $\bar{\Sigma}$ de los círculos sin parametrizar sobre \mathbb{S}^2 y después que $\bar{\Sigma}$ es un retracto de Σ . Para ello, tenemos que mostrar que existe un homeomorfismo $h : \mathbb{RP}^3 \rightarrow \bar{\Sigma}$ y un retracto $r : \Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$. En adelante cuando hablemos de \mathbb{RP}^3 estaremos pensando en su representación como una bola sólida con los puntos antípodas identificados.

Primero veamos cómo definir el homeomorfismo h . Dado un punto p en \mathbb{RP}^3 hay un radio que lo une con el centro (a menos que p sea el centro, en ese caso lo asociamos con la curva puntual en Σ). Sea q el simétrico de p respecto al centro del radio donde está p (figura 14a). Nos fijamos en el plano que corta perpendicularmente a dicho radio y pasa por q . Ese plano determina un círculo plano α al intersectarse con la cáscara de \mathbb{RP}^3 . α es la imagen de p bajo h . Es inmediato que esta función resulta continua y sólo hay que hacer notar que si un punto se acerca al centro de \mathbb{RP}^3 en distintas direcciones, las imágenes bajo h se acercan a una curva puntual en la dirección correspondiente. Como Σ identifica todas las curvas puntuales, la continuidad de h no se rompe. La inversa queda definida justamente por el proceso inverso, de tal forma que h es un homeomorfismo entre $\bar{\Sigma}$ y \mathbb{RP}^3 .

Ahora se definirá un retracto de Σ en $\bar{\Sigma}$. Dada una curva α simple y cerrada en \mathbb{S}^2 , α separa a \mathbb{S}^2 en dos partes, tomamos la de mayor área y le llamamos S_0 (si las dos partes tienen igual área tomamos la que sea) (figura 15b). La imagen de α es el círculo plano sobre \mathbb{S}^2 que parte a la esfera en 2 pedazos tales que el de mayor área tiene el mismo centro de masa que S_0 (figura 15c-d). Esto define una función r de Σ en $\bar{\Sigma}$ (está bien definida porque la imagen de las curvas que parten a \mathbb{S}^2 en dos partes iguales es un ecuador de la esfera y tomemos el pedazo que tomemos, obtenemos el mismo ecuador porque los centros de masa de los dos pedazos están en un mismo diámetro) que es continua porque curvas cercanas tienen área y centro de masa cercanos y por lo tanto se transforman en círculos cercanos. Además r es la identidad en $\bar{\Sigma}$ y por lo tanto es un retracto de Σ en $\bar{\Sigma}$. \square

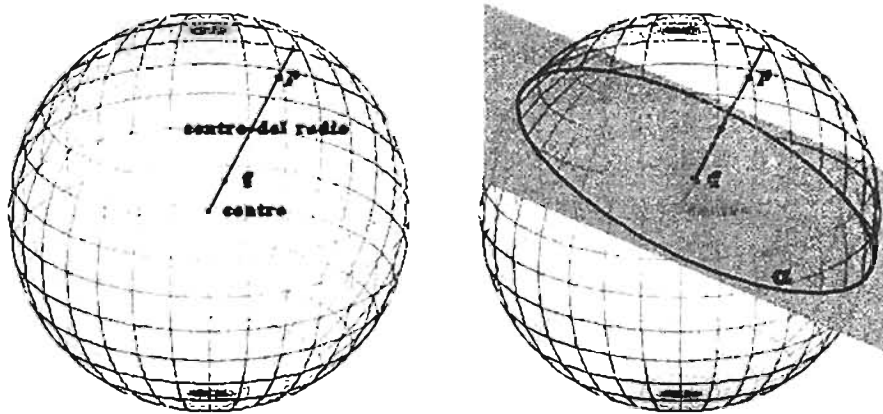


FIGURA 14. $h : \mathbb{RP}^3 \rightarrow \bar{\Sigma}$

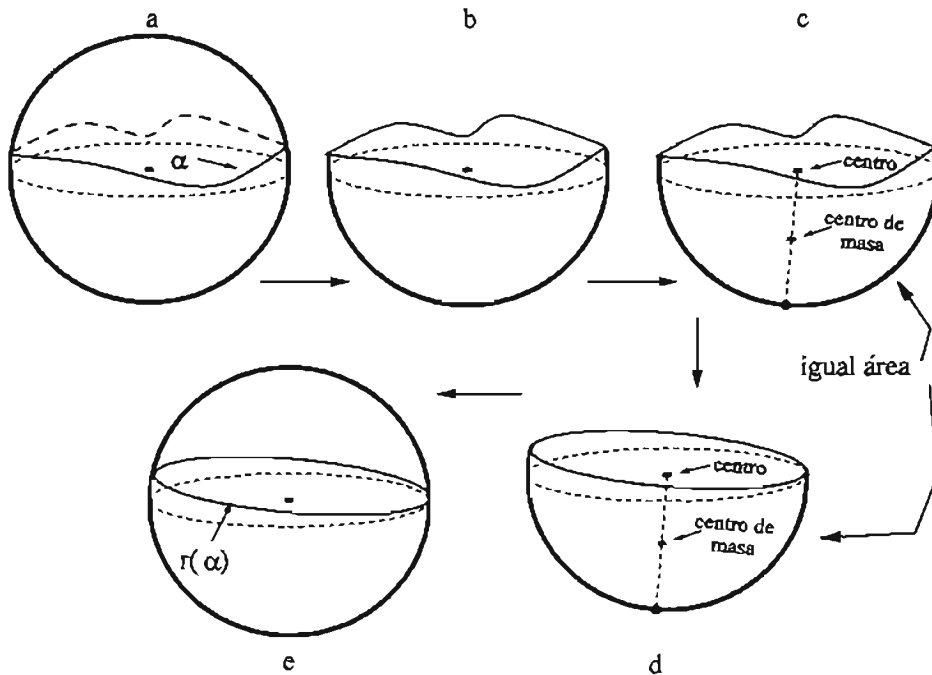


FIGURA 15. $\tau : \Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$

Observemos que si componemos τ con h^{-1} , a las curvas puntuales en Σ les corresponde el centro de \mathbb{RP}^3 y a las curvas que parten a la esfera en dos pedazos de igual área les corresponde cualquiera de los

extremos del diámetro donde están los centros de masa de los pedazos (el hecho de que estén identificados los puntos antípodas en $\mathbb{R}P^3$ hace que todo esté bien definido).

Lema 3.7. *La \mathbb{Z}_2 -homología de $\mathbb{R}P^3$ es generada por un ciclo no trivial en cada dimensión, desde cero hasta tres. ($H_i(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, $i = 0, 1, 2, 3$).*

Demostración. Estamos pensando en $\mathbb{R}P^3$ como la bola sólida de dimensión 3 con los puntos antípodas en su frontera identificados. Entonces, un complejo que representa a $\mathbb{R}P^3$ es el formado por una k -célula en cada dimensión desde 0 hasta 3. La 3-célula es toda la bola sólida, llamémosla τ . La 2-célula, que llamaremos σ , es uno de los hemisferios de la frontera de la 3-célula. La 1-célula, a en adelante, es la mitad del ecuador que es frontera de la 2-célula. Por último, la 0-célula es un punto en el borde de la 1-célula, le llamaremos P . Para $i = 0, 1, 2, 3$, la imagen de la i -célula es una copia de $\mathbb{R}P^i$.

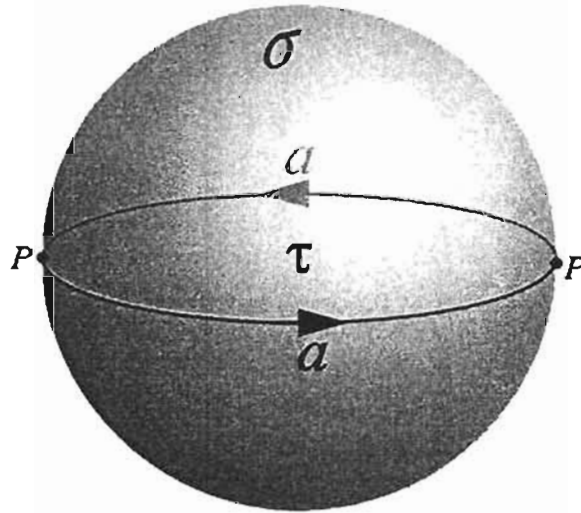


FIGURA 16. Un complejo para $\mathbb{R}P^3$.

Al no haber k -células distintas de \emptyset para $k > 3$, los k -ésimos grupos de homología son isomorfos al grupo trivial para $k > 3$. Por esto mismo, τ no es frontera de ninguna 4-cadena; la única 3-cadena que es frontera de una 4-cadena es \emptyset . Como estamos calculando los grupos de homología con coeficientes en \mathbb{Z}_2 , cualquier cadena se hace cero al multiplicarla por dos. Entonces $C_3 = \{\tau : 2\tau = 0\}$, donde C_3 es el grupo de las 3-cadenas. La frontera de τ es $\sigma + (-\sigma) = 0$, por lo que τ es un 3-ciclo. Así que $Z_3 = \{\tau : 2\tau = 0\}$ y como $B_3 = \{\emptyset\}$ tenemos que

$H_3(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2) = \{\tau : 2\tau = 0\} \simeq \mathbb{Z}_2$, donde Z_3 y B_3 son los grupos de los 3-ciclos y las 3-fronteras respectivamente. Para las dimensiones 2, 1 y 0 podemos repetir los argumentos haciendo la observación de que ni σ , ni a , ni P son frontera. \square

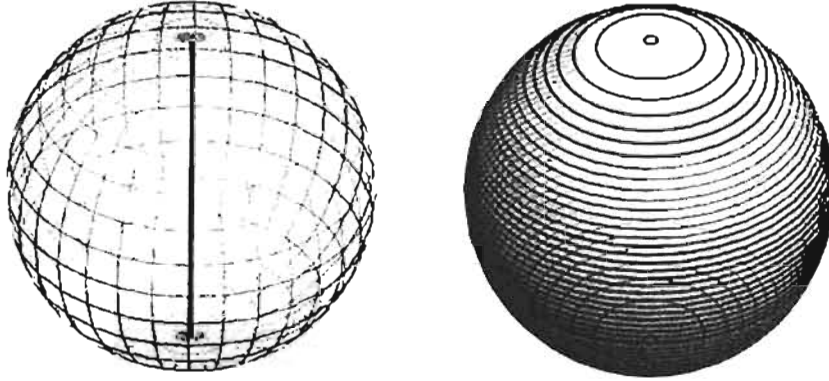
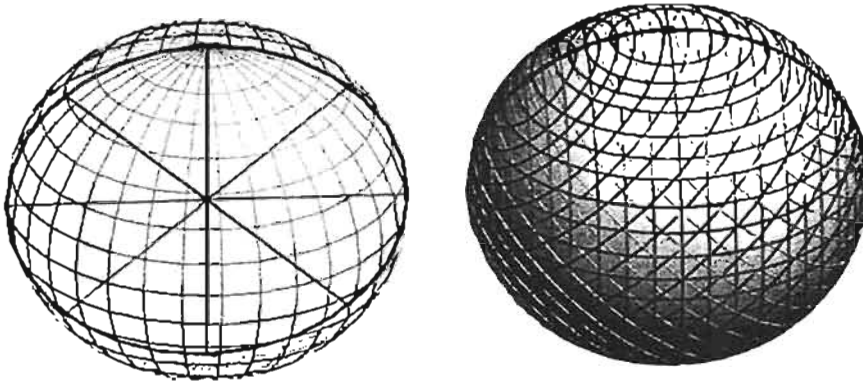
Corolario 3. *La \mathbb{Z}_2 -homología de Σ tiene al menos un ciclo no trivial en cada dimensión, desde cero hasta tres. Cada uno de esos ciclos puede representarse por una transformación $z_j : \mathbb{RP}^j \rightarrow \Sigma$. La clase de homología de dimensión cero corresponde a las curvas puntuales.*

Demostración. Sea i la inclusión de $\bar{\Sigma}$ en Σ . Entonces $r \circ i : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ es la identidad en $\bar{\Sigma}$ y en consecuencia el homomorfismo que induce entre los grupos de homología de $\bar{\Sigma}$ es el homomorfismo identidad, es decir, $(r \circ i)^* = r^* \circ i^* : H_j(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_j(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_j(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z}_2)$ es la identidad. Esto nos dice que $i^* : H_j(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_j(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ es un monomorfismo y por lo tanto los grupos de homología de $\bar{\Sigma}$ (que son isomorfos a los de \mathbb{RP}^3) se inyectan en los de Σ . Así que los ciclos no triviales de \mathbb{RP}^3 se corresponden con ciclos no triviales en Σ . El lema anterior nos dice que en \mathbb{RP}^3 hay un ciclo no trivial en cada dimensión y con eso concluimos la prueba. \square

Antes de seguir veamos algunos ejemplos de ciclos en Σ . En la figura 17 tenemos una familia de curvas a un parámetro sobre la esfera redonda. Esta familia es un 1-ciclo en Σ que representa a h_1 y lo podemos ver como la imagen bajo h de un 1-ciclo en \mathbb{RP}^3 representado por un diámetro. Los colores de las curvas indican las regiones del 1-ciclo en \mathbb{RP}^3 que van a dar a cada curva, por ejemplo, los extremos del ciclo en \mathbb{RP}^3 van a dar a las curvas que están en una vecindad del ecuador de la esfera, mientras que la parte central del ciclo en \mathbb{RP}^3 se transforma en curvas cercanas a los polos de S^2 . Esta visualización nos permite comprender mejor cómo actúa la función h que hace a \mathbb{RP}^3 y $\bar{\Sigma}$ homeomorfos.

Un 2-ciclo $z_2 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \Sigma$ puede ser visto como la imagen bajo h de una copia de \mathbb{RP}^2 representada por un disco plano que pasa por el centro de \mathbb{RP}^3 . Para visualizarlo podemos pensar por separado en la imagen de cada uno de sus diámetros, que resultan ser familias como las del ejemplo anterior. Así, z_2 es una familia que incluye a todos los ecuadores perpendiculares al borde del 2-ciclo que estamos enviando a Σ y a todas las curvas planas paralelas a estos ecuadores (figura 18).

Un 3-ciclo $z_3 : \mathbb{RP}^3 \rightarrow \Sigma$, es la imagen bajo h de todo \mathbb{RP}^3 . Para visualizarlo podemos pensar en la imagen de todos los diámetros de \mathbb{RP}^3 , el resultado es una familia que incluye a todos los círculos planos sobre la esfera redonda.

FIGURA 17. Un 1-ciclo en Σ .FIGURA 18. Un 2-ciclo no trivial en \mathbb{RP}^3 se transforma en un 2-ciclo no trivial en Σ .

En los ejemplos anteriores, los ciclos fueron construidos sobre una esfera redonda. Para las esferas que no son redondas, un difeomorfismo con la esfera estándar produce las familias correspondientes.

Sea h_j una clase no trivial en el j -ésimo grupo de la \mathbb{Z}_2 -homología de Σ representada por $z_j : \mathbb{RP}^j \rightarrow \Sigma$, $j = 1, 2, 3$. Fijemos una métrica riemanniana en S^2 . Definimos $\text{longitud}(z_j)$ como $\max_{s \in z_j} \{\text{longitud}(s)\}$. Definimos $k(h_j)$ como $\inf_{z_j} \{\text{longitud}(z_j)\}$.

Como cualquier 3-ciclo contiene un 2-ciclo y cualquier 2-ciclo contiene un 1-ciclo, $k(h_1) \leq k(h_2) \leq k(h_3)$.

Ahora mostraremos que hay una geodésica de longitud $k(h_j)$ para $j = 1, 2, 3$. Después veremos que en caso de que sean iguales dos de esas longitudes, hay una infinidad de geodésicas de igual longitud. En lo que

sigue estaremos haciendo uso de la transformación Δ que definimos en la sección 2 y del proceso de enderezamiento definido en el lema 3.5, al que llamaremos simplemente *flujo de familias*.

Lema 3.8. *En cada esfera riemanniana hay al menos una geodésica de longitud $k(h_j)$ para cada $j = 1, 2, 3$.*

Demostración. Sea z_{j_0} un ciclo tal que $[z_{j_0}] = h_j$, el *flujo de familias* aplicado a z_{j_0} produce en cada momento un ciclo homotópico a z_{j_0} . Hay una curva $s \in z_{j_0}$ tal que sus imágenes bajo el *flujo de familias* siempre tienen longitud mayor o igual a $k(h_j)$ en los tiempos enteros, porque si no, habría un ciclo homotópico a z_{j_0} cuya longitud sería menor que $k(h_j)$, contradiciendo que $k(h_j) = \inf_{z_j} \{\text{longitud}(z_j)\}$ (todo esto pasa porque el flujo de discos reduce longitudes en tiempos enteros y las curvas con las que rellena los “hoyos” que se generan con las tangencias internas son más cortas que la curva que genera el “hoyo”). Entonces, la sucesión s_n (s_n es la imagen de s en los tiempos enteros bajo el *flujo de familias*) es una sucesión de curvas de longitud decreciente y uniformemente acotada, por lo que tiene una subsucesión que converge a una curva γ tal que $\text{longitud}(\gamma) \geq k(h_j)$ porque $\text{longitud}(s_n) \geq k(h_j)$. Además, $\text{longitud}(\gamma) = \text{longitud}(\Delta(\gamma))$ porque si no, Δ disminuiría las longitudes de las curvas s_{n_k} por debajo de la de γ . Si $\text{longitud}(\gamma) > k(h_j)$ tomamos un ciclo z_{j_1} cuya longitud sea menor que la de γ (la forma en que definimos $k(h_j)$ nos dice que para cada $\varepsilon > 0$, podemos elegir un ciclo z_{j_0} representante de h_j cuya longitud es menor que $k(h_j)$) y repetimos el razonamiento para obtener una segunda geodésica de longitud menor que la de γ y mayor o igual que $k(h_j)$. Si la longitud de esta nueva geodésica no es $k(h_j)$ podemos repetir esto hasta obtener una geodésica de longitud $k(h_j)$ u obtener una infinidad de geodésicas de distinta longitud. En conclusión, o hay una geodésica de longitud $k(h_j)$ o hay una infinidad de geodésicas en la esfera riemanniana. \square

Sea U_j una vecindad de las geodésicas de longitud $k(h_j)$ para $j = 1, 2$ y 3 con la topología que genera la norma uniforme. Si $k(h_1)$, $k(h_2)$ y $k(h_3)$ son distintos habría 3 o más geodésicas. Si sólo hay un número finito de geodésicas, podemos tomar U_j de forma que cada una de sus componentes sea contraíble. Debemos notar que ninguna de las geodésicas cerradas puede tener tangencias internas con alguno de los discos D_i (porque son convexos), de forma que podemos elegir U_j en que las curvas no tienen tangencias internas. Así las cosas, las curvas que están cerca de una geodésica tienen imágenes bajo Δ que permanecen cerca, y entonces al aplicar Δ a la vecindad U_j hay una vecindad más pequeña, U'_j , tal que $\Delta(U'_j) \subset U_j$. Definimos Σ^l como las curvas que

están en Σ y tienen longitud menor o igual a l . El siguiente resultado será importante para mostrar que $k(h_i) \neq k(h_j)$ si $i \neq j$.

Lema 3.9. *Existe $\varepsilon > 0$ y un ciclo z_j representante de la clase h_j tal que si $\gamma \in z_j \Rightarrow \gamma \in U_j$ ó $\text{longitud}(\gamma) < k(h_j) - \varepsilon$.*

Demostración. Fijemos una clase de homología h_j . Probaremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Delta(\Sigma^{k(h_j)+\varepsilon}) \subset \Sigma^{k(h_j)-\varepsilon} \cup U_j$. Si no, podemos encontrar una sucesión de curvas γ_m tales que $\text{longitud}(\gamma_m) < k(h_j) + \frac{1}{m}$, $\text{longitud}(\Delta(\gamma_m)) > k(h_j) - \frac{1}{m}$ y $\gamma_m \notin U_j$ para $m = 1, 2, \dots$. Las curvas γ_m tienen longitud uniformemente acotada, entonces podemos asumir que convergen a una curva γ (γ_m o una subsucesión). Tenemos que mostrar que $\text{longitud}(\gamma) = \text{longitud}(\Delta(\gamma)) = k(h_j)$ (esto no es inmediato porque Δ no es continuo en Σ). Los argumentos del teorema 2.1 muestran que $\text{longitud}(\gamma) = \text{longitud}(\Delta(\gamma))$, porque si no, Δ disminuiría también las longitudes de las curvas γ_m . Esto nos dice que γ es una geodésica o un punto. Ahora tenemos que probar que $\text{longitud}(\gamma) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{longitud}(\gamma_m)$. Como $\gamma_m \rightarrow \gamma$ y γ es una geodésica, si $\text{longitud}(\gamma) < \lim_{m \rightarrow \infty} \text{longitud}(\gamma_m)$, hay un arco $\alpha \subset \gamma$ y una sucesión de arcos $\alpha_m \subset \gamma_m$ tales que $\alpha_m \rightarrow \alpha$ y con $\text{longitud}(\alpha) < \lim_{m \rightarrow \infty} \text{longitud}(\alpha_m)$ y todos en un disco D_k . Entonces, $\text{longitud}(\Delta(\gamma_m)) < \text{longitud}(\gamma_m) - \delta$ para alguna $\delta > 0$ independiente de m , lo cual es una contradicción con nuestro primer supuesto. Entonces, $\Delta(\Sigma^{k(h_j)+\varepsilon}) \subset \Sigma^{k(h_j)-\varepsilon} \cup U_j$ para alguna ε suficientemente chica.

Para concluir la prueba del lema, tomamos un ciclo z_j representante de h_j con cada curva en z_j contenida en $\Sigma^{k(h_j)+\varepsilon}$. Podemos hacer esto porque $k(h_j) = \inf_{z_j} \{\text{longitud}(z_j)\}$. De esta forma, $\Delta(z_j) \subset \Sigma^{k(h_j)-\varepsilon} \cup U_j$. $\Delta(z_j)$ no es necesariamente un ciclo porque Δ no es continuo en Σ , sin embargo el *flujo de familias*, que sí es continuo, produce un ciclo no trivial después de llevarlo a cabo una vez en cada disco D_i . Tal ciclo, al que llamaremos Z_j , difiere de $\Delta(z_j)$ en las curvas con las que se rellenan los "hoyos" que producen las tangencias internas, estas curvas son más cortas que la curva tangente que produce el "hoyo" y como las curvas que tienen tangencias internas no están en U_j , las curvas que rellenan son más cortas que $k(h_j) - \varepsilon$. Por lo tanto, cada curva en Z_j está en U_j o mide menos que $k(h_j) - \varepsilon$. \square

Hagamos fluir un ciclo que represente a la clase no trivial de $H_2(\Sigma; \mathbb{Z}_2)$. Si $k(h_2) = k(h_1)$ y hay una sola geodésica que resulta de hacer fluir los 1-ciclos y los 2-ciclos, deduciremos una contradicción. Podemos escoger un 2-ciclo $z_2 : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \Sigma$ tal que cada curva en z_2 está en $U_2 = U_1$ o tiene longitud menor o igual a $k(h_2) - \varepsilon = k(h_1) - \varepsilon$ para alguna

$\varepsilon > 0$. Sea $W_2 = z_2^{-1}(U_2)$. Entonces W_2 es un subconjunto abierto de \mathbb{RP}^2 y podemos suponer que su frontera es una colección de curvas (si no, basta con encoger un poco U_2 para que lo sea). W_2 interseca a cualquier curva esencial en \mathbb{RP}^2 porque de no hacerlo habría un 1-ciclo que representa a h_1 con todas las curvas de longitud menor a $k(h_2) = k(h_1)$.

Lema 3.10. *Si una subvariedad de \mathbb{RP}^2 de codimensión cero interseca a todas las curvas esenciales de \mathbb{RP}^2 , entonces contiene una curva esencial.*

Demostración. Sea W una subvariedad de codimensión cero de \mathbb{RP}^2 y sea V su complemento en \mathbb{RP}^2 . La frontera de W (y de V , que es la misma) se compone de curvas cerradas en \mathbb{RP}^2 . En la representación de \mathbb{RP}^2 como un disco con los puntos antípodos en su frontera identificados, estas curvas cerradas se ven como curvas cerradas en el interior del disco y arcos que tocan la frontera del disco. W es un conjunto abierto de \mathbb{RP}^2 , y en consecuencia, V es cerrado. Por lo tanto, la frontera común de W y V está contenida en V . Como W interseca a todas las curvas esenciales de \mathbb{RP}^2 , la frontera de W no contiene ninguna curva esencial. Ahora podemos hacer que la frontera de W se componga solamente de curvas cerradas en el interior del disco, empujando los arcos fuera del disco (los arcos que empujamos fuera del disco aparecen "del otro lado" pero en el interior). Podemos empujar todos los arcos porque ninguno es esencial y lo podemos hacer mediante homeomorfismos. Al término de este proceso, vemos a ∂W como una colección de curvas cerradas dentro del disco, es decir, la frontera de W no toca a la frontera del disco. Por lo tanto, la frontera del disco está contenida en W o en V , pero no puede estar contenida en V porque la frontera del disco contiene curvas esenciales y las tendría que intersecar W . La única posibilidad es que la frontera del disco esté contenida en W . Así, W contiene curvas esenciales de \mathbb{RP}^2 . \square

El lema anterior garantiza que W_2 contiene una curva β que es un representante del generador del grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$. Además, $z_2(\beta) \subset z_2(W_2) = U_2$, es decir $z_2(\beta)$, que representa a h_1 , está completamente contenido en U_1 , y como U_1 es contraíble en Σ , $z_2(\beta)$ es homotópico a una transformación constante, contradicción. Lo anterior también muestra que si $U_1 = U_2$, esta vecindad no puede ser contraíble, es decir, hay una infinidad de geodésicas de longitud $k(h_1) = k(h_2)$. Por lo tanto, o $k(h_1) \neq k(h_2)$ o hay una infinidad de geodésicas de longitud $k(h_1) = k(h_2)$.

Usaremos un argumento similar al anterior para probar que hay una tercera geodésica simple y cerrada en \mathbb{S}^2 pero hará falta el siguiente resultado.

Definimos $k'(h_2) = \inf\{\text{longitud}(z) \text{ tal que } z : F \rightarrow \Sigma, F \text{ es cualquier superficie y } [z] = h_2\}$.

Lema 3.11. $k'(h_2) = k(h_2)$ o bien la esfera tiene 3 geodésicas cerradas distintas. (Es decir la longitud mínima no cambia si la calculamos sobre todos los 2-ciclos no triviales en Σ).

Demostración. Supongamos que existe una superficie $F \subset \mathbb{RP}^3$ y una transformación $z_2^* : F \rightarrow \Sigma$ tal que $\text{longitud}(z_2^*) < k(h_2)$ con $[z_2^*] = h_2$. La prueba del lema 3.8 muestra que hay una geodésica de longitud $k'(h_2)$. Entonces hay una tercera geodésica, con lo que acabaríamos la prueba del teorema, a menos que $k'(h_2) = k(h_2)$. En ese caso, tomemos un 2-ciclo $z_2 : F \rightarrow \Sigma$, para alguna superficie cerrada F tal que $\text{longitud}(z_2) < k(h_2)$ con $[z_2] = h_2$. Por el lema 3.9, podemos suponer que $z_2 \subset U_1 \cup \Sigma^{k'(h_2)-\varepsilon}$. Sea $W = (z_2)^{-1}(U_1)$. Necesitamos que W sea un disco o una colección de discos para probar que z_2 contiene un 1-ciclo que no toca a W . Si W tiene una componente que no es un disco, digamos W_1 , entonces W_1 tiene una curva c que es esencial en W_1 . Podemos cortar a F a lo largo de esa curva y pegar discos en los 2 bordes resultantes, para obtener una superficie F' (que puede ser disconexa). Como la imagen de c bajo z_2 está en U_1 que es contractible, la función definida en c puede extenderse a una función continua de los discos a U_1 . De este modo podemos definir un ciclo $z_2' : F' \rightarrow \Sigma$ homólogo a $z_2 : F \rightarrow \Sigma$, en el que W_1 se transforma en una superficie W_1' de característica de Euler mayor. Repitiendo este argumento podemos encontrar un ciclo $z_2' : F' \rightarrow \Sigma$ en el que W es una colección de discos. Entonces, z_2' es un 2-ciclo que representa a h_2 . Se afirma que z_2' contiene un 1-ciclo no trivial. Si no lo tuviera, consideremos $r(z_2')$ (r es la retracción de Σ en $\bar{\Sigma}$ del lema 3.6). $[z_2'] = h_2 = [\hat{z}_2]$ donde \hat{z}_2 es un ciclo no trivial en $\bar{\Sigma}$ y $[r(\hat{z}_2)] = [\hat{z}_2]$ porque r es la identidad en $\bar{\Sigma}$. Entonces, $[r(z_2')] = [r(\hat{z}_2)] = [\hat{z}_2] = [z_2']$, así que $r(z_2')$ es un 2-ciclo no trivial. Si z_2' envía todas las curvas en F' a ciclos triviales en Σ , $r(z_2')$ envía todas las curvas en F' a ciclos homológicamente triviales, y por lo tanto homotópicamente triviales en $\bar{\Sigma}$ (ya que $\pi_1(\bar{\Sigma})$ es isomorfo a $H_1(\bar{\Sigma})$). Esto implica que $r(z_2')$ se levanta a un ciclo \tilde{z}_2 en la cubierta universal de $\bar{\Sigma}$, que es homotópicamente equivalente a \mathbb{S}^3 . Ahí todos los 2-ciclos son cero en homología o lo que es lo mismo, son borde de un 3-complejo. Como \tilde{z}_2 es cero en homología, su proyección, que es $r(z_2')$, es cero en homología en $\bar{\Sigma}$, lo cual es una contradicción pues habíamos dicho que $r(z_2')$ era un 2-ciclo no trivial. Como W está formada de

discos, cualquier 1-ciclo en F' puede ser llevado mediante homotopía a otro 1-ciclo que no interseque a W . De esta forma podemos encontrar un 1-ciclo no trivial contenido en F' que no interseque a W , es decir, podemos encontrar un 1-ciclo no trivial cuya longitud es menor que $k'(h'_2) = k(h_1)$, contradicción. Entonces, $k'(h_2) > k(h_1)$. Por lo tanto, el lema se cumple o hay una tercera geodésica de longitud $k'(h_2)$. \square

Ahora encontremos una tercera geodésica simple y cerrada. Si $k(h_3) > k(h_2)$ encontramos una tercera geodésica al hacer fluir un 3-ciclo en Σ y tomar una subsucesión convergente de curvas de longitud mayor a $k(h_3)$. Si $k(h_3) = k(h_2)$ y hay una única geodésica de esa longitud, tomemos un ciclo $z_3 : \mathbb{R}P^3 \rightarrow \Sigma$ tal que todas las curvas en z_3 estén en $U_3 = U_2$ o tengan longitud menor a $k(h_3) - \varepsilon = k(h_2) - \varepsilon$. Sea $W_3 = z^{-1}(U_3)$. Como antes podemos suponer que W_3 es una subvariedad de $\mathbb{R}P^3$ cuya frontera es una superficie cerrada. Usando el lema 3.11 resulta que W_3 interseca a todos los 2-ciclos de $\mathbb{R}P^3$, porque si no, habría un 2-ciclo en Σ cuya longitud es menor que $k(h_3) = k(h_2)$.

Lema 3.12. *Si una subvariedad de $\mathbb{R}P^3$ interseca a todos los 2-ciclos de $\mathbb{R}P^3$, contiene una curva esencial de $\mathbb{R}P^3$.*

Demostración. Sea W una subvariedad de $\mathbb{R}P^3$. En la representación de $\mathbb{R}P^3$ como una bola sólida con las antípodas identificadas, el disco central representa una copia de $\mathbb{R}P^2$. W interseca a esta copia de $\mathbb{R}P^2$ en una superficie con frontera S .

Si todas las curvas cerradas en W intersecan a S un número par de veces, entonces S separa a W en dos partes, W_1 y W_2 (no necesariamente conexas) formadas por los puntos de W a los que se puede llegar viajando por W desde un punto fijo y pasando por S un número par o un número impar de veces respectivamente. S es homólogo a su complemento en la frontera de W_1 (o de W_2 , resulta lo mismo); si a $\mathbb{R}P^2$ le quitamos S y lo sustituimos con el complemento de S en W_1 , obtenemos un ciclo homólogo a $\mathbb{R}P^2$ que no interseca a W , lo cual es una contradicción.

Si alguna curva cerrada β contenida en W , interseca a S un número impar de veces, entonces interseca a $\mathbb{R}P^2$ un número impar de veces. Como la paridad del número de intersección de una curva con un 2-ciclo depende únicamente de la clase de homología de la curva, β es un 1-ciclo no trivial contenido en W . \square

Entonces W_3 contiene un 1-ciclo no trivial, β , que se transforma en un subconjunto de U_3 , vecindad contraíble en Σ , es decir, $z_3(\beta)$ que representa a h_1 es homotópico a una transformación constante, contradicción. Igual que antes, podemos concluir que: o $k(h_3) > k(h_2)$

o hay una infinidad de geodésicas de longitud $k(h_3) = k(h_2)$. En ambos casos encontramos una tercera geodésica y concluimos la prueba del teorema. \square

4. EL FLUJO DE DISCOS PARA ARCOS

El propósito de esta sección es adaptar el *flujo de discos* para que funcione con arcos inmersos en una superficie y probar una versión parcial del teorema 3.1.

Si tenemos un arco s inmerso en una superficie F lo haremos fluir a un arco de geodésica de la misma manera que hacemos fluir una curva excepto cerca de los extremos. Si s no toca la frontera de F entonces el flujo estará definido exactamente como antes, con la particularidad de que los extremos de s estarán fijos a lo largo de todo el proceso, es decir, la homotopía será relativa a los extremos de s . Para definir qué pasa si s toca a la frontera de F basta con decir cómo enderezar arcos en un disco D_k que interseque a ∂F . Un arco en D_k que no toque a ∂F se endereza como dijimos antes; si el arco toca a ∂F en dos puntos, desaparece; por último, para enderezar un arco s que toque a ∂D_k y a ∂F , lo reemplazamos por el único segmento de geodésica con extremo en $s \cap (\partial D_k - \partial F)$ y que es perpendicular a ∂F . Tenemos que elegir con cuidado los discos D_i para asegurar que el segmento de geodésica exista siempre. **Si la frontera de F es convexa**, basta con pedir que los centros de los discos que tocan a ∂F estén sobre ∂F .

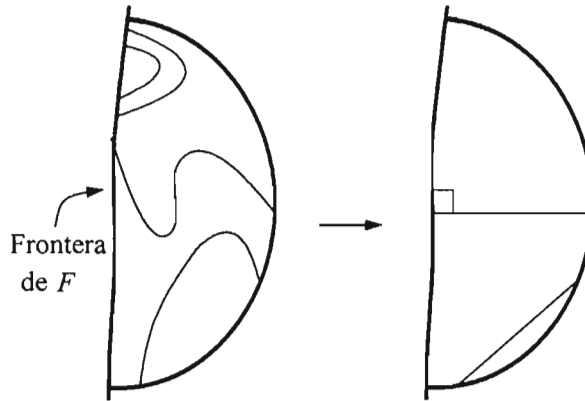


FIGURA 19. *Flujo de discos para arcos.*

Con este flujo se pueden hacer fluir familias de arcos de la misma forma que familias de curvas. En este caso pueden desarrollarse dos tipos de discontinuidades en el flujo además de las que aparecen para familias de curvas. El primer tipo ocurre cuando un arco es tangente a ∂D_i , donde D_i es un disco que toca a ∂F (figura 20). El segundo tipo ocurre cuando un arco tiene un extremo en $\partial D_i \cap \partial F$ (figura 21). En ambos casos podemos rellenar las discontinuidades en el flujo con arcos que no son más largos que los que los originan.

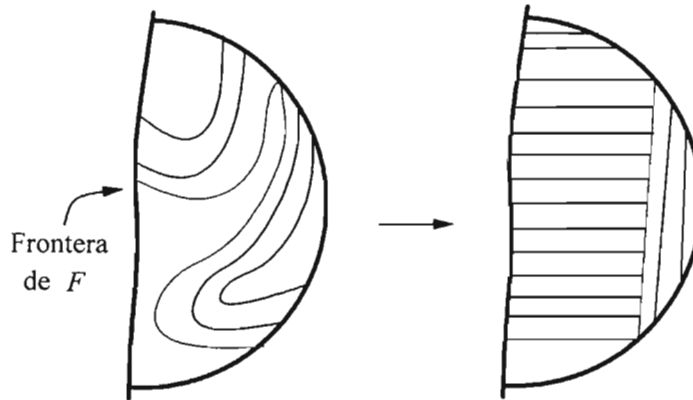


FIGURA 20. Discontinuidad en el flujo de familias de arcos provocada por una tangencia interna.

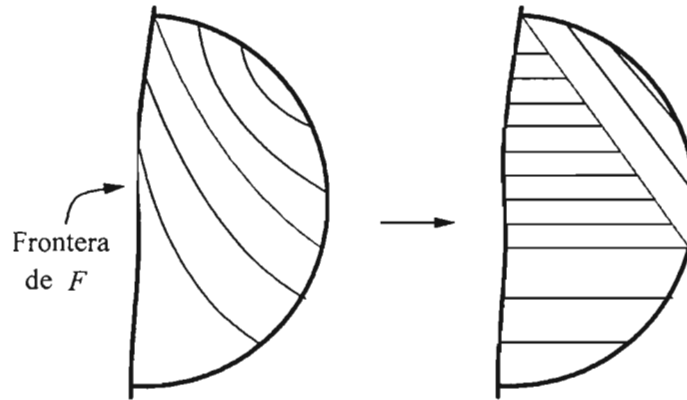


FIGURA 21. Discontinuidad en el flujo de familias de arcos causada por un arco que tiene un extremo en $\partial D_i \cap \partial F$.

Para finalizar, la versión para arcos en un disco convexo del teorema 3.1.

Teorema 4.1. *Un disco riemanniano con frontera convexa tiene, al menos, dos distintos arcos de geodésica con los extremos perpendiculares a la frontera.*

Demostración. La prueba es idéntica a la del teorema 3.1. En este caso nos podemos apoyar en el hecho de que el espacio de arcos simples, suaves por pedazos y con los extremos en la frontera del disco, con los arcos puntuales identificados, se retrae en el espacio de segmentos de geodésica entre dos puntos de la frontera del disco con los segmentos puntuales identificados, que a su vez es homeomorfo a \mathbb{RP}^2 . (La prueba

de esto es una versión “aplanada” de la prueba del lema 3.6). \mathbb{RP}^2 tiene únicamente 2 grupos no triviales en su \mathbb{Z}_2 -homología y por lo tanto al hacer fluir familias de arcos sólo obtenemos 2 segmentos de geodésica normales a la frontera. La perpendicularidad de los segmentos de geodésica se deriva de la definición del flujo para arcos. \square

REFERENCIAS

- [1] J. HASS y P. SCOTT, Shortening curves on surfaces, *Topology*, **33** N° 1 (1994), pág. 25-43.
- [2] B. WHITE, Generic properties of stationary surfaces, *Indiana Math. J.* **36** (1987), pág. 567-602.
- [3] L. C. KINSEY, *Topology of surfaces*, Springer-Verlag, 1993.
- [4] W. MASSEY, *Algebraic Topology: An introduction*, Harcourt, Brace & World, 1967.
- [5] J. G. HOCKING y G. S. YOUNG, *Topology*, Dover, 1988.
- [6] W. RUDIN, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1976.
- [7] J. A. THORPE, *Elementary topics in differential Geometry*, Springer-Verlag, 1979.