# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

# PROCESOS DE SOLUCIÓN DE LOS ESTUDIANTES AL ABORDAR PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

**A C T U A R Í A**

**P R E S E N T A :**

**DIANA SILVIA CARVAJAL RABIELLA**

**DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ GUZMÁN HERNÁNDEZ**

**CO-DIRECTOR DE TESIS: M. en C. JOSÉ ANTONIO FLORES DÍAZ**

**FACULTAD DE CIENCIAS**
**UNAM**

**2005**

DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN ESCOLAR

m. 348698

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**
**Tesis Digitales**
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

VNIVERSIDAD NACIONAL AVPNºMA DE MEXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias**
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Procesos de solución de los estudiantes al abordar problemas de razonamiento proporcional".

realizado por Carvajal Rabiella Diana Silvia

con número de cuenta 09033811-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

| | |
|---|---|
| Director de Tesis Propietario | Dr. José Guzmán Hernández |
| Propietario Codirector | M. en C. José Antonio Flores Díaz |
| Propietario | M. en A. P. María del Pilar Alonso Reyes |
| Suplente | Dr. Luis Antonio Rincón Solís |
| Suplente | Act. Jaime Vázquez Alamilla |

**Consejo Departamental de** Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

Agradezco a todos esos seres de luz que siempre han estado conmigo y que me han alentado a seguir y no claudicar: al Dr. José Guzmán Hernández por ser la luz de esperanza que tanto necesitaba, que me brindó su apoyo incondicional y guió a buen término este trabajo y quien con su ejemplo me ha inspirado para continuar con mi proyecto de vida profesional; al M. en C. José Antonio Flores por creer en mí y seguir firme a pesar de las adversidades; a Greivin y Hongo por hacerme un espacio en su valioso tiempo; y a mis hermanos: Mónica, Jesús y Naxielly por ser la fuente de mi inspiración.

Gracias a mi papá Silvestre Carvajal Duarte porque siempre me ha apoyado y creído en lo que hago y a ese ser tan maravilloso que la vida me regaló, que siempre está conmigo bajo cualquier circunstancia y por quien soy lo que soy, mi mamá: Diana Perla Rabiella Cervantes.

A todos, mi más sincero y profundo respeto y admiración.

Porque nada es por casualidad, los quiero mucho.

Diana Silvia Carvajal Rabiella

Una Pulgada de Alto

*Si tuvieras sólo una pulgada de alto, podrías ir a la escuela montado en un gusano.*
*La lágrima de una hormiga que llora podría servirte de piscina.*
*Con una miga de pastel te podrías dar un banquete*
*Durante siete días por lo menos.*
*Una pulga sería una bestia aterradora*
*Si tuvieras sólo una pulgada de alto.*

*Si tuvieras sólo una pulgada de alto, podrías pasar por debajo de la puerta,*
*Y tardarías casi un mes en bajar al almacén.*
*Un bombón podría ser tu cama.*
*Te balancearías sobre un hilo de una tela de araña,*
*Y llevarías un dedal sobre tu cabeza*
*Si tuvieras sólo una pulgada de alto.*

*Podrías navegar sobre un chicle en el fregadero de la cocina.*
*No podrías abrazar a tu mamá, sólo podrías abrazar su dedo pulgar.*
*Sentirías miedo de los pies de la gente, y te apartarías corriendo.*
*Mover una pluma te llevaría toda una noche.*
*(Tardé catorce años en escribir este poema,*
*Porque sólo tengo una pulgada de alto).*

-Shel Silverstein (1974)

# ÍNDICE DE CONTENIDO

## Presentación

El presente trabajo trata el tema de investigación titulado: Procesos de solución de los estudiantes al abordar problemas de razonamiento proporcional. Dicho estudio se llevó a cabo con estudiantes adolescentes de primer grado de educación secundaria con el objetivo de analizar y determinar los procesos de solución de los estudiantes al abordar problemas de razonamiento proporcional cuando interactúan en el salón de clases.

Este trabajo está dividido en cinco capítulos; a continuación se menciona lo que se aborda en cada uno de ellos, con el propósito de dar al lector un panorama general de su contenido.

En el Capítulo I se presenta el enunciado del problema de investigación, la importancia del estudio, el propósito y la pregunta de investigación.

En el Capítulo II se presenta una reseña de la literatura revisada que se relaciona con el problema de investigación, donde se destaca la importancia de la resolución de problemas como medio de aprendizaje del razonamiento proporcional.

En el Capítulo III se describe la metodología utilizada en el trabajo: el tipo de investigación, el grupo experimental, los instrumentos y el proceso de recolección de la información.

En el Capítulo IV se presenta el trabajo de los estudiantes frente a la resolución de cinco actividades no rutinarias. Se hace un análisis de tipo cualitativo de las soluciones dadas por los estudiantes, enfocado en el proceso de resolución que ellos hacen; se elabora una tabla de niveles de competencia. Se presentan los resultados globales del trabajo de los estudiantes y algunas evidencias.

El Capítulo V contiene las conclusiones de los resultados relevantes encontrados en el estudio; incluye comentarios de cómo se llegó al objetivo de la investigación y cómo fue contestada la pregunta de investigación; se incluyen las implicaciones didácticas de este estudio y se comentan las futuras investigaciones que pueden surgir a partir de este trabajo.

La parte final, llamada Anexo, contiene las actividades implementadas: Mezcla de limonada, Área fraccionada, Receta de cocina, Vamos de compras y Vamos de compras (2).

# Capítulo I

## Problema de investigación

## 1.1 Introducción

La aritmética elemental trata de los significados y formas de operar con los números enteros naturales, los decimales y las fracciones, así como de sus aplicaciones en la solución de problemas.

Se está tan familiarizado con la aritmética elemental, que con frecuencia se olvida las dificultades que encierra su aprendizaje y el papel que juega en la comprensión de otras partes de las matemáticas. Las nociones y procedimientos de la aritmética constituyen la base intuitiva del álgebra y de casi todas las matemáticas que se enseñan en la escuela, desde los grados elementales hasta la universidad y niveles más avanzados. Asimismo, la aritmética provee a los estudiantes de los esquemas básicos de tratamiento de situaciones y resolución de problemas necesarios para elaborar y comprender procedimientos más avanzados.

Uno de los esquemas fundamentales del pensamiento matemático corresponde al razonamiento proporcional.

La experiencia docente permite afirmar que tanto profesores como estudiantes enfrentan dificultades al resolver situaciones que involucran las nociones de razón y proporción, debido en parte a los obstáculos propiciados por el tratamiento que se da en el currículo escolar, pues resolver problemas de forma tradicional, que involucren proporciones, no garantiza que se esté empleando el razonamiento proporcional.

Al enfrentarse a problemas matemáticos, cuya solución requiere hacer uso del pensamiento proporcional, los estudiantes de primer año de secundaria tienen serias dificultades al intentar resolverlos, y más aún cuando estos están fuera del contexto escolar.

Ahora, si se les pide que sean ellos quienes propongan un problema, se les complica todavía más la situación.

¿Cuáles son las causas de dichas dificultades?

¿Tiene que ver el método de enseñanza?

Para conocer qué método es el más utilizado en la actualidad referente a la enseñanza del concepto de proporcionalidad, no se requiere de grandes investigaciones. Es conocido que la forma expositiva es la que más usan los profesores en su trabajo diario. Dicha forma, a pesar de su enorme popularidad y prolongada presencia en las escuelas, no ha mostrado aún su plena eficacia. Investigadores preocupados por la enseñanza y aprendizaje del concepto de proporcionalidad (por ejemplo, el Grupo Beta[1]), han propuesto en las últimas décadas, nuevas e interesantes alternativas para abordar el problema; éstas basadas, principalmente, en las teorías del aprendizaje por descubrimiento y de educación activa.

El Grupo Beta (1996) tiene una propuesta didáctica para trabajar la proporcionalidad, en donde el profesor debe crear un ambiente de trabajo estimulante mediante fichas y material didáctico y situarse como observador de la situación de aprendizaje; por otro lado, el estudiante debe describir lo que ha encontrado, sus descubrimientos y explicar cómo ha llegado a solucionar el problema. Todo lo anterior representa buenos y atinados acercamientos en la preocupación por resolver el problema, ahora, es urgente continuar con este proceso de búsqueda encaminado, principalmente, a encontrar situaciones que despierten más y mejor el deseo a la inclinación por aprender aritmética y en especial el concepto de proporcionalidad.

La falta de investigaciones al respecto, parece ser que se debe a la gran influencia que algunos investigadores (por ejemplo Ausubel) en matemática educativa y en psicología educativa ejercen, y señalan que los métodos de aprendizaje activo y por descubrimiento son necesarios e importantes en niños pequeños, pero no parecen ser nada valiosos para los mayores (nivel secundaria). Ausubel (1963) afirma: *Los métodos de descubrimiento pueden utilizarse con alumnos de más edad durante las primeras etapas de su exposición a una disciplina nueva* (p. 447).

[1] El grupo Beta se dedica al estudio, investigación y docencia de la didáctica de la matemática. Su fundación final data del año 1980, lo componen profesores pertenecientes a los tres niveles educativos (Educación General Básica, Bachillerato y Universidad) y se vertebró en torno al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Escuela Universitaria. Existen dos líneas de trabajo en el grupo: didáctica de la matemática y la informática aplicada a la educación y más concretamente a la matemática.

El aprendizaje por descubrimiento de las matemáticas ha sido en los últimos años, un tema de gran interés, tanto para investigadores que lo apoyan como para los que no lo hacen. En efecto, el valor del descubrimiento ha sido y sigue siendo un tema de polémica y los trabajos de investigación en torno a su validación, siguen en pie.

## 1.2 Enunciado del problema de investigación

El aprendizaje de las matemáticas está relacionado con el significado o caracterización que de ellas se tiene, lo cual influye, determinantemente, en la forma en que el profesor se conduce en el salón de clases; es decir, en las actividades diarias que tiene que realizar para llevar a cabo el proceso de enseñanza de esta disciplina.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en sus Principios y Estándares para la Educación Matemática (2000) resalta que:

> Los profesores tienen diferentes estilos y utilizan distintas estrategias para ayudar a los estudiantes a aprender ideas matemáticas concretas; no existe un camino único para enseñar. No obstante, los profesores eficientes reconocen que las decisiones que tomen pueden determinar la disposición de los alumnos hacia las matemáticas y crear entornos que enriquezcan el aprendizaje. (p. 18)

Es necesario que los contenidos matemáticos se aborden a partir de situaciones y actividades que tengan sentido para los alumnos, que les permitan generar conjeturas, analizarlas de manera individual y de grupo, poner en juego de manera consciente los conocimientos adquiridos con anterioridad, para que se dé lugar a la transferencia del conocimiento.

El NCTM (2000) aborda los temas de igualdad, currículo, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnología; en el principio de aprendizaje señala que:

> Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos (p. 20).

Una de las conceptualizaciones de las matemáticas es que no se consideran como un producto terminado, sino como una disciplina que está avanzando, constantemente, y reajustándose a nuevas situaciones. Esta caracterización está en términos de la propuesta de resolución de problemas, en donde lo que se persigue es que el estudiante participe, activamente, en el desarrollo de las ideas matemáticas al estar inmerso en un medio similar al de la gente que hace matemáticas.

La investigación en Educación Matemática ha reconocido que el aprendizaje de las matemáticas no es una actividad memorística donde la presentación y ejercitación de definiciones y procedimientos es el énfasis en la enseñanza, como Bransford, Brown y Cocking (1999) advierten:

> Los estudiantes que memorizan hechos o procedimientos sin comprenderlos, frecuentemente no están seguros de cuándo o cómo utilizar lo que saben, y tal aprendizaje es muchas veces bastante frágil (Citado en NCTM, 2000, p. 21).

Si las ideas están bien conectadas y conceptualmente fundamentadas, son más accesibles para su empleo en situaciones nuevas.

Schoenfeld (1988) señala que: *Las matemáticas cobran más sentido y se recuerdan y aplican más fácilmente cuando los estudiantes conectan de forma significativa los nuevos conocimientos a los ya existentes* (Citado en NCTM, 2000, p. 21).

En el contexto de la enseñanza de las matemáticas, la resolución de problemas atrae la atención, no sólo porque es una de las vías principales para la asimilación del conocimiento, formación de habilidades y hábitos matemáticos en los alumnos, sino también porque participa en su preparación con vistas a enfrentar las diferentes tareas de la vida escolar y laboral, aun en situaciones de la vida cotidiana.

El NCTM (2000) en su apartado de números y operaciones señala: *Los alumnos deberían profundizar en la comprensión de las fracciones, los decimales, los porcentajes y los números enteros, y llegar a ser competentes al usarlos para resolver problemas* (p. 219).

Los estudiantes, al resolver problemas que requieran comparaciones multiplicativas (¿cuántas veces más? o ¿cuántos...por?, por ejemplo) adquieren una gran experiencia con las razones, las tasas y los porcentajes, lo que les ayuda a obtener una base sólida para comprender el concepto de proporcionalidad y usarlo con facilidad.

Los porcentajes pueden considerarse como formas que combinan aspectos de fracciones y decimales, proporcionan al estudiante otra manera útil de representar los números racionales. Son, particularmente, convenientes para comparar partes fraccionarias de conjuntos o de números de distinto tamaño, lo que se presenta con frecuencia en problemas de la vida diaria. Lo mismo que ocurre con las fracciones y los decimales, las dificultades en cuanto a los porcentajes requieren una cuidadosa atención; especialmente, en los casos de porcentaje menores o mayores que 1, que deben presentarse, frecuentemente, en problemas si se pretende que el estudiante alcance una comprensión sólida.

Al respecto el NCTM (2000) agrega:

> Si se procura que el trabajo con números racionales se desarrolle con flexibilidad, se contribuye a que los estudiantes comprendan y utilicen con facilidad el concepto de proporcionalidad. La soltura con este concepto conlleva mucho más que establecer la igualdad de dos razones y calcular un término desconocido; supone reconocer cantidades que estén relacionadas proporcionalmente, y utilizar números, tablas, gráficos y ecuaciones para pensar sobre las cantidades y sus relaciones. (p. 221)

El razonamiento proporcional es una forma inherente al pensamiento matemático; muchos aspectos del mundo operan de acuerdo con reglas de proporcionalidad. En los salones de clases, este concepto surge cuando se explora la densidad, se encuentre el punto en el brazo de palanca, se comparan velocidades equivalentes, se examinan propiedades de triángulos semejantes, etc.

En la enseñanza de las matemáticas, y a finales del nivel básico y en todo el medio básico, se puede considerar que el concepto de proporcionalidad (o razonamiento proporcional) es núcleo a partir del cual se unifican las líneas básicas de nociones como:

- Razón y proporción.
- Fracción y número racional.
- Número decimal y problema de la medida.
- Cambio de unidades, cambio de escalas.
- Problemas de reparto proporcional.
- Problemas de regla de tres.
- Porcentajes.
- Probabilidad.
- Gráficas de funciones lineales.
- Teorema de Thales.
- Semejanza de figuras.
- Problemas de mezclas y aleaciones.
- Escalas, mapas y maquetas.
- Funciones trigonométricas.
- El número $\pi$. [2]

En las Ciencias, como Física, Química, Biología, entre otras, el concepto de proporcionalidad es uno de los instrumentos más importantes. Frecuentemente, muchos de los conceptos en Física y Química son en realidad nombres dados a relaciones de proporcionalidad, como, por ejemplo: la velocidad, la aceleración, la densidad, la presión, las concentraciones, las dilataciones, o la formulación de leyes[3] como la de Ohm, la de Hooke o la de Proust. Además, el concepto de proporcionalidad aparece incluso a finales del nivel básico en el currículo de Ciencias Sociales bajo distintas formas: densidad de población,

[2] Lista tomada de "Proporcionalidad directa. La forma y el número", por M. L. Fiol y J. M. Fortuny, 1999, p. 118, editorial Síntesis.

[3] Ley de Ohm: $R = \frac{V}{I}$, donde $R$ es la resistencia, $V$ son los voltios e $I$ es la intensidad; ley de Hooke: $F = kx$, donde $F$ es la fuerza deformadora aplicada y $x$ la deformación relativa; ley de Proust o de las proporciones constantes, afirma que para formar un determinado compuesto, dos o más elementos químicos se unen siempre en la misma proporción ponderal.

tasa de natalidad, así como en la lectura de mapas y de diversos tipos de gráficos.

El concepto de proporcionalidad no es importante sólo desde el punto de vista de la Ciencia, sino que también tiene importancia fundamental en el desarrollo de la inteligencia. Así, la epistemología genética lo considera uno de los esquemas operativos fundamentales del estadio[4] de las operaciones formales donde, según Collis (1980):

> El alumno no tiene necesidad de relacionar elementos, operaciones o la combinación de ellos con modelos análogos físicos, y puede tomar como realidad un sistema abstracto bien determinado con sus definiciones, relaciones y reglas. Se enfrenta con variables en cuanto tales, porque puede evitar sacar la conclusión final hasta haber considerado las diversas posibilidades. El niño está preparado para trabajar con el sistema formal abstracto que, para el matemático, constituye la esencia de las matemáticas. (Citado en El Problema de las Matemáticas, p.3)

Carretero (1993) también habla sobre el estadio de las operaciones formales:

> El pensamiento formal es un pensamiento proposicional. Esto quiere decir que el adolescente ya no razona sólo sobre hechos u objetos que tiene delante de sí, sino también sobre lo posible. De hecho, la mayoría de los conceptos científicos –por ejemplo, velocidad o densidad– hacen referencia a la relación entre dos conceptos que han debido comprenderse anteriormente. En el caso de la velocidad son los de tiempo y espacio, y en el de la densidad, los de peso y volumen. (p. 48)

Aunado a lo anterior, hay un hecho evidente: el niño ya desde los primeros años de su vida, para moverse en su entorno físico, utiliza la noción del concepto de proporcionalidad, por ejemplo: estimar el tamaño real del objeto que está lejos o en interpretar imágenes tan cotidianas como dibujos, fotos, cine, carteles, etc. Y esto no sólo a nivel cualitativo, sino que también y muy pronto aparecen intentos de cuantificación.

He aquí unas anécdotas sobre lo anterior:

[4] Los estadios pueden considerarse como estrategias ejecutivas cualitativamente distintas que corresponden tanto a la manera que el sujeto tiene de enfocar los problemas como a su estructura. (Carretero, 1993)

Freudenthal (1983) cuenta conversaciones con su nieto.

En uno de sus paseos el pequeño (de 5 años) señala unas nubes y dice que son de lluvia. Freudenthal le dice que no, que las nubes que ve están muy altas y que las nubes de lluvia están más bajas (dando una altura aproximada). El niño, que entiende la respuesta, hace con las manos una reproducción de la situación a escala.

Años después y durante otro paseo el niño (de 7 años y medio) pregunta por la altura de una torre. Al principio intenta dar él mismo una respuesta a la pregunta y estima que la altura de la torre es de 100 metros. Freudenthal le dice que no, que ni la torre de la catedral tiene esa altura y para ayudar en el cálculo se sitúa él al pie de la torre pegado a la pared. Pero este método sugerido, por comparación directa, no va bien al niño. Finalmente, y después de una pequeña conversación en que se sugiere la utilización de un palo, el pequeño es capaz de plantear el problema. Apoyando el palo sobre un muro bajo y calculando la distancia en pasos del muro a la torre, se contesta a la pregunta: 40 *m*, aproximadamente.

Otra situación familiar: un domingo por la mañana la madre se encuentra en casa con dos de sus hijos. Kepa (de 7 años) mide a su hermana pequeña. Ha hecho que se ponga en el suelo, la mide con los pies y dice: "6 pies y medio de Kepa". Más tarde en la terraza juegan y toman el sol. De repente Kepa que está mirando la calle dice: "La calle es un pulgar... y la ventana una uña y aquella ventana una uña del dedo meñique..." (Citado por Fiol M. y Fortuny A., 1996, p. 119)

Las matemáticas juegan un papel fundamental en el desarrollo del individuo; su acceso a ellas exige un razonamiento maduro y bien fundamentado, pero dicho razonamiento no es fácil de lograr, la muestra está en la existencia de un alto índice reprobatorio en esta disciplina en la mayoría de las escuelas, y aún más, el innegable rechazo que hacia ellas tienen un gran número de estudiantes.

Es necesario entonces, presentar a las matemáticas de una manera más atractiva, procurando con ello su aceptación y la continuidad de su aprendizaje significativo.

Ante tan inminente necesidad, y en búsqueda de la apertura de una línea de investigación que considere al juego como herramienta valiosa en la enseñanza del concepto de proporcionalidad con estudiantes adolescentes, se plantea el siguiente problema de investigación:

## Procesos de solución de los estudiantes al abordar problemas de razonamiento proporcional

Es de todos conocido que al llegar a la escuela secundaria, un gran número de estudiantes tienen rechazo a las matemáticas; de ahí que una de las preocupaciones fundamentales del profesor debe ser, intentar cambiar esas actitudes y hacerlas positivas; para lograrlo, debe utilizar todos los medios a su alcance.

En una amplia gama de material didáctico que puede utilizar el profesor de matemáticas en su trabajo diario, los juegos tienen un papel importante dado su enorme atractivo tanto para los niños como para los adolescentes, su adecuada y oportuna utilización puede ser una herramienta poderosa en la escuela de hoy.

En la enseñanza de las matemáticas, es importante diseñar actividades de juego que provoquen imaginación en los sujetos para generar la construcción de su conocimiento y sus aplicaciones. Al respecto Puig Adam (1960) señaló:

> Si la vida corriente suministra tantos modelos y situaciones aptas para la enseñanza de la matemática, es natural que busquemos, así mismo, modelos matemáticos en los juguetes, que tan esencial papel desempeñan en la vida del niño, promoviendo su más espontánea actividad. (Citado por Grupo Azarquiel[5], 1991, p.124)

[5] El Grupo Azarquiel está compuesto por profesores de Matemáticas de Bachillerato de Madrid y lleva trabajando durante diez años diversos aspectos de la didáctica de las Matemáticas.

## 1.3 Propósito de la investigación

El propósito de esta investigación gira en torno a:

Determinar los procesos de solución que los estudiantes utilizan al abordar problemas de razonamiento proporcional.

Se tiene interés por fomentar en el estudiante el uso del razonamiento proporcional, generar ambientes propicios de discusión y promover el uso de situaciones de la vida cotidiana que posibiliten el aprendizaje de dicho razonamiento.

El estudio sobre los procesos de solución que los estudiantes utilizan al abordar problemas de razonamiento proporcional, busca dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

**¿Cómo son los procesos y estrategias de solución de los estudiantes cuando abordan problemas que implican hacer uso del razonamiento proporcional?**

Para responder a la pregunta, se entregaron a los estudiantes, actividades que requieren del uso del razonamiento proporcional para ser resueltas; se analizaron los procesos de solución que condujeron a los estudiantes a dar sus respuestas a dichas actividades; se observó cómo los estudiantes justificaban sus resultados y en algunos casos cómo de situaciones particulares hacían generalizaciones. Por otro lado, se consultaron trabajos relacionados con los procesos de solución de actividades con razonamiento proporcional para observar las distintas clasificaciones que existen en las respuestas de los estudiantes. Aspecto que es abordado en el Capítulo II de este documento.

## 1.4 Importancia del estudio

El aprendizaje es concebido como un proceso de construcción del conocimiento e interesa documentar cómo los estudiantes construyen ideas matemáticas sobre el concepto de proporcionalidad. Es preciso, entonces, hacer explícita la noción de conocimiento que se utiliza.

Las interacciones que se desarrollan en el aula son complejas; el estudiante se enfrenta con diversos objetos y personas y la manera como interpreta estas interacciones, incluyendo aquellos aspectos que pueden considerarse como específicamente matemáticos, evoluciona con el tiempo. El objetivo que se plantea en esta investigación es analizar los procesos de solución de los estudiantes al abordar problemas de razonamiento proporcional, cuando interactúan en el salón de clases.

Las interacciones en el salón de clases están constituidas por las acciones de los distintos sujetos que participan en ellas, y que tienen como marco normas sociales propias de la escuela y del salón de clases en particular.

En este trabajo se adopta una concepción constructivista del conocimiento al considerarlo como un proceso adaptativo que organiza la propia experiencia sobre el mundo. Conocer implica un proceso de construcción que realiza el sujeto cognoscente, proceso en el que interactúa con su entorno y, como resultado de esta interacción, el sujeto construye el objeto de conocimiento y, al mismo tiempo, él resulta transformado por esta acción; ya no es el mismo sujeto.

Esta noción de conocimiento aplica, tanto para el estudiante en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, como para el investigador en su afán de dar cuenta de dicho proceso; el estudiante aprende, conoce, participando activamente en la organización de su experiencia matemática en el salón de clases y el investigador busca dar respuesta a las preguntas de investigación construyendo una interpretación, basada en su experiencia como observador, del aprendizaje del estudiante.

En el Libro para el Maestro de Matemáticas (Educación secundaria, SEP 2000), se enfatiza que: *Las nociones del concepto de proporcionalidad y sus consecuencias son centrales en todas las matemáticas* (p. 107).

Más adelante, en este mismo libro se señala que:

El concepto de proporcionalidad no debe ser visto como un tema más del programa, sino como el acceso a una forma de razonamiento que se logra gradualmente a lo largo de toda la enseñanza, a través de actividades adaptadas al grado de madurez de los alumnos. (p. 117)

Keret (1999) define al que "razona proporcionalmente" como: *Una persona que hace uso inteligente del esquema proporcional cuando resuelve problemas de razón y proporción* (p. 145).

Este mismo autor señala que para que lo anterior se dé, se requiere un programa de acción de tres pasos:

a) Identificar la relación proporcional inversa o directa (aspecto intuitivo)
b) Mostrar la relación en la forma de un modelo matemático (aspecto formal)
c) Usar este modelo para encontrar una solución cuantitativa al problema (aspectos algorítmicos combinados con aspectos intuitivos y formales).

En Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics CESSM (1989, citado en NCTM, 1989) se menciona que:

> La habilidad para razonar proporcionalmente se desarrolla en su totalidad en los estudiantes de grados 5-8. Esto es de tal importancia que merece el tiempo y esfuerzo necesarios para asegurar que se lleve a cabo cuidadosamente. Los estudiantes necesitan ver muchos problemas que puedan ser modelados y resueltos a través del razonamiento proporcional. (p. 82)

Propuestas recientes del currículo matemático sugieren organizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas alrededor de la resolución de problemas (NCTM, 2000), donde resulta relevante que los estudiantes desarrollen distintos recursos y estrategias para plantear y resolver diferentes tipos de problemas. Además, se reconoce la necesidad de crear un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes tengan la oportunidad de presentar sus ideas ante sus compañeros, así como de escuchar y examinar las ideas de otros estudiantes para robustecer, constantemente, su comprensión de los contenidos matemáticos y fortalecer su habilidad para resolver problemas.

Así, resulta importante que los problemas se transformen en una plataforma donde los estudiantes formulen conjeturas, utilicen distintas representaciones, empleen varios caminos de solución y comuniquen sus resultados.

En particular, el NCTM (2000) señala la importancia de diseñar e implementar problemas para promover el aprendizaje de los estudiantes, que sean útiles para motivarlos a expresar por medio de la discusión, la experimentación y el intercambio de experiencias y, además, que exista la posibilidad de recuperar los procesos de pensamiento empleados en sus intentos de solución.

# Capítulo II

## Revisión de la literatura

## 2.1 Introducción

En este capítulo se hace una revisión de la literatura relacionada con estudios desarrollados sobre el razonamiento proporcional[6]; en éste se destacan las actividades abordadas en ellos. La exposición contiene trabajos de investigadores que han destacado la importancia del aprendizaje de los conceptos de razón y proporción, los elementos que caracterizan al razonamiento formal y la caracterización de las respuestas de los estudiantes, cuando resuelven problemas de razonamiento proporcional.

## 2.2 Literatura relevante

Los conceptos de razón y proporción han sido de los más investigados en el campo de la educación matemática, y existe literatura extensa al respecto. Aquí sólo se hará referencia a aquellos trabajos que se relacionan directamente con los procesos de solución de los estudiantes cuando abordan problemas de razonamiento proporcional.

Piaget e Inhelder (1958), en sus estudios desarrollados en la primera etapa de sus investigaciones, afirman que el contenido escolar sobre razonamiento proporcional es característico del estadio de las operaciones formales (12 a 14 años de edad) propio de la adolescencia; según los autores ese estadio se caracteriza por el razonamiento formal, que incluye la habilidad de formular hipótesis y trabajar con un número de variables de un problema.

De acuerdo con Lowell (1971, citado en Hart, Jonson, Brown, Dickson y Clarkson, 1982) para Piaget hay dos elementos que caracterizan el razonamiento formal: el estudiante debe ser capaz de manipular las condiciones de límite de las variables y manipular razones entre valores ordenados sucesivos de las variables; eso requiere la cuantificación de la proporción, más que la descripción en términos cuantitativos.

[6] Según Post, Behr y Lesh (1988, p. 79): El razonamiento proporcional es una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación, comparaciones múltiples, y la habilidad para acumular y procesar mentalmente información diversa. Está relacionado con la inferencia y la predicción, y abarca métodos de pensamiento cualitativos y cuantitativos.

Varios autores contestan la postura piagetiana, básicamente por dos razones: la primera, que el razonamiento proporcional caracteriza al estadio de las operaciones formales, y la segunda se refiere al tipo de tareas trabajadas por el referido autor. En el primer caso, Bryant y Spinillo (1990), Spinillo y Bryant (1989) y Spinillo (1990, 1992) citados en Spinillo (1993), comentan que el razonamiento proporcional no es una habilidad propia de las operaciones formales y puede ser desarrollado en edad temprana.

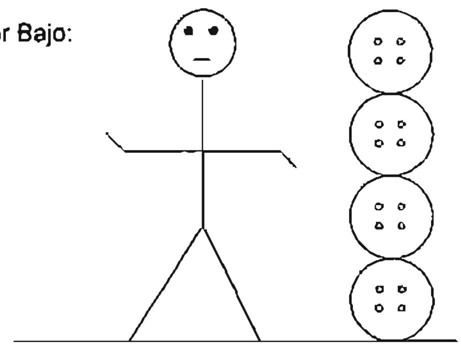
Los estudios realizados con niños de 4 a 6 años de edad comprueban que estos comprenden la idea de mitad, y tienen un juicio perceptual y empiezan a comparar razones de cantidad antes de tener cualquier experiencia con razones numéricas. Esto comprueba, por otra parte, que el juicio perceptual (geométrico) es una habilidad que puede ser desarrollada a temprana edad.

El segundo cuestionamiento está relacionado con el tipo de tareas propuestas a los niños, el lenguaje utilizado y el contexto de los problemas presentados, como elementos que posiblemente perjudicaban no sólo el entendimiento del problema, sino también su desempeño en la tarea. Pero Piaget, también en otra etapa de su trabajo, describe estadios tempranos en el pensamiento utilizado en las correspondencias cualitativas y seriaciones, el llamado estadio intermediario para sumar compensaciones de dos razones 2:1, y el estadio avanzado, en el que se aplicó el razonamiento proporcional para valores numéricos con los datos y sus razones, y concluye que puede haber un entendimiento temprano de algunos conceptos matemáticos, por ejemplo, el concepto de proporcionalidad.

English y Halford (1995) afirman que una de las características esenciales del razonamiento proporcional involucra relaciones de segundo orden (relaciones entre dos relaciones), y entre dos cantidades directamente perceptibles. Esta perspectiva defiende que la fase temprana de razonamiento proporcional de los niños involucra un razonamiento aditivo en la forma $a-b=c-d$. Entretanto, el trabajo de Lesh, Post y Behr (1988, citado en English y Halford, op. cit., 1995) apunta hacia un razonamiento paradigmático, que los estudiantes usan en varias tareas multiplicativas; características de una ecuación $ab = cd$, y pueden ser indicadores de razonamiento proporcional, especialmente, cuando tienen una solución algorítmica.

Ubicándose ahora, en el terreno de la educación, interesa hacer referencia a estudios como el de Karplus y Peterson (1970), quienes caracterizaron las respuestas de los estudiantes agrupándolas a partir de su nivel de comprensión. Aquí es muy conocido el estudio sobre el señor bajo y el señor alto.

Este es el Señor Bajo:



La longitud del Señor Bajo es de 4 botones.
La longitud del Señor Alto es de 6 botones.

Cuando usamos clips para medir al Señor Bajo y al Señor Alto:
La longitud del Señor Bajo es de 6 clips.
*¿Cuántos clips son necesarios para medir la longitud del señor Alto?*

EXPLICA cómo llegaste a tu respuesta.

Figura 2.1 Mr. Tall/Mr. Short (tomado de Khoury, 2002, p. 100).

Estos autores distinguen diferentes métodos para la respuesta correcta y comentan que no todos los estudiantes tienen una estrategia de tipo aditiva y argumentan que este tipo de pensamiento (aditivo) está fuertemente influenciado por la instrucción escolar. Ciertamente, la instrucción escolar privilegia el trabajo en torno de las estructuras aditivas, deja, para más tarde, el desarrollo de las de tipo multiplicativo, lo que dificulta la adquisición del razonamiento proporcional.

Noelting (1980) estudia el razonamiento proporcional con problemas de comparación numérica; se dan razones completas, pero no se requiere una respuesta numérica, pues los estudiantes deben comparar las razones de acuerdo con la Figura 2.2; los estudiantes deben responder cuál jarra contiene la limonada con un sabor más fuerte o si las dos tienen el mismo sabor.

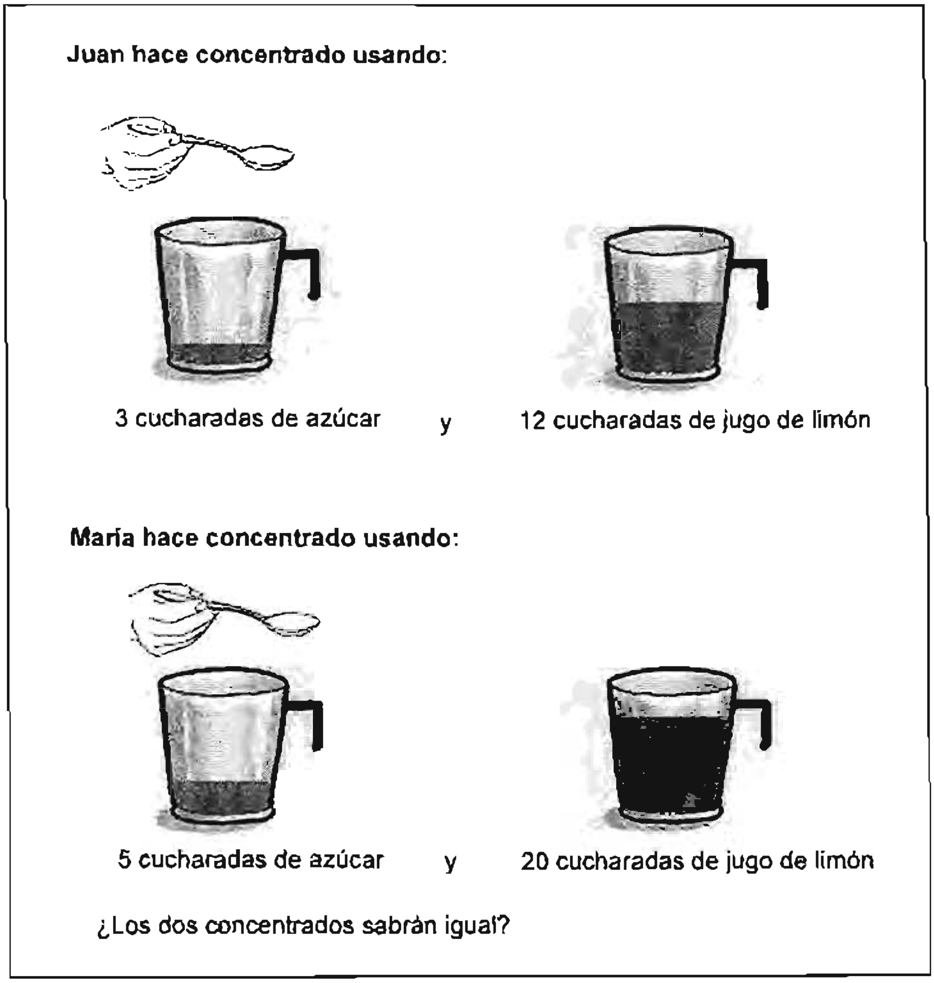



Figura 2.2. Ideas tomadas de El enigma de la limonada (Karplus R., Pulos S., & Stage E.,1983, p.53)

El estudio se realizó con estudiantes de entre 6 y 12 años; los resultados indican que los estudiantes tienen un mejor desempeño cuando una cantidad de una razón completa es un múltiplo entero de la cantidad correspondiente de la otra razón; cuando los múltiplos no son enteros, los estudiantes usan estrategias aditivas.

Noelting (1980) observó que en los problemas de comparación los estudiantes presentan dificultades, y diversificó la investigación con problemas de valor perdido, comparación cualitativa, abordaje aditivo y el cálculo de razones. El autor propone la teoría de la reestructuración adaptativa para la transición del primer estadio al segundo (es decir, del estadio temprano al intermedio) y analiza el tipo de comparación que los sujetos hacen cuando resuelven un problema: comparan el jugo de limón y el agua en cada recipiente y, comparando esas dos relaciones, primero seleccionan dos jugos de limón y de agua, formando así el abordaje denominado "entre estrategias".

Streefland (1985, citado en Hart et al., 1982) sugiere que el aprendizaje de los conceptos de razón y proporción es un proceso que empieza con la comparación cualitativa, y argumenta que no deberían introducirse tan de prisa la formalización y la enseñanza de algoritmos, pues la proporción, inicialmente, es percibida por los niños en situaciones realistas.

De acuerdo con Streefland (1985, citado en Hart et al., 1982) la realidad puede ser microinterpretada fácilmente; esto quiere decir que los primeros significados de las matemáticas pueden ser pensados en conexión con la realidad o a la inversa; que la realidad sirve para ambas cosas: como fuente para concebir matemáticas y como su dominio de aplicación. El acercamiento realista se refiere a la manera como los estudiantes llevan a cabo su proceso de enseñanza y aprendizaje. Para establecer el vínculo entre lo concreto y lo abstracto, ellos necesitan desarrollar herramientas; por ejemplo, modelos visuales, esquemas y diagramas[7]. Este es un vehículo de pensamiento para que los estudiantes puedan avanzar en matemáticas.

Carraher, Schliemann y Ruiz (1986) investigaron el desarrollo de la conceptualización de cantidades medidas por razones, con 49 estudiantes que cursaban quinto y sexto grado de primaria y primer grado de secundaria, con edades entre 10 y 16 años. Los estudiantes fueron expuestos a dos tipos de contenidos: problemas de compra y venta y problemas de velocidad.

[7] Esquema: dibujo hecho sin detalles para dar idea de una cosa. Anteproyecto, esqueleto, idea, idea general, trazado, bosquejo.
Diagrama: representación mediante un dibujo geométrico de un fenómeno o de una ley. (Tomado de Diccionario del uso del Español, María Moliner, editorial Gredos)

En la primera actividad (problemas de compra y venta), el entrevistador solicitaba al estudiante que indicara, entre dos posibles compras cuál era la mejor y que en seguida la justificara. En la segunda (problemas de velocidad), el estudiante disponía de diversas medidas de tiempo y distancia recorridas por dos autos que eran movidos por el entrevistador, y debía indicar si los dos autos los habían movido a la misma velocidad o no.

El desempeño de los estudiantes en la primera actividad se clasificó de acuerdo con las siguientes categorías:

Nivel 1: respuesta de los estudiantes que involucraban solamente una variable y la utilizaban en las soluciones y comparaciones directas.

Nivel 2: respuesta de los estudiantes que intentaban considerar ambas variables de manera simultánea, pero con algunas dificultades.

Nivel 3: respuesta de los estudiantes que utilizaban estrategias correctas, considerando todas las variables.

Para la actividad de velocidad el desempeño de los estudiantes se clasificó en cuatro niveles:

Nivel 1: los estudiantes de este nivel presentaron dos tipos de respuesta: a) considerar solamente una variable, distancia o tiempo, y confundían el significado de velocidad con la variable usada; b) ignorar los datos cuantitativos, buscando apenas la velocidad de los dos autos mientras el entrevistador los movia.

Nivel 2: los estudiantes que reflexionaban acerca de la cuantificación imprecisa de la velocidad, pero consideraban ambas variables.

Nivel 3: los alumnos que utilizaban una cuantificación aditiva incorrecta.

Nivel 4: los estudiantes que indicaban una consideración de las dos variables. Aquí se observaron dos tipos de estrategias: a) calcular el número en centímetros por segundo, y b) dividir la distancia por el tiempo para los dos autos y comparar los resultados.

A partir de los resultados obtenidos en las dos actividades, los autores encontraron cierta influencia de la instrucción escolar sobre el desempeño de los estudiantes en la actividad de velocidad. Contrariamente, a la actividad de compra y venta en la cual no se observó ningún efecto de la instrucción escolar.

Los resultados revelaron que algunos estudiantes son capaces de hacer los cálculos para encontrar una respuesta correcta. Pero Carraher et al. (1986) también sugieren una discusión acerca de la enseñanza de la regla de tres, pues a pesar de que los cálculos involucrados en su resolución son simples, en dicha regla se involucra un modelo matemático complejo; cuyo uso, los estudiantes no han conseguido comprender.

Carraher, Schliemann y Carraher (1986) evaluaron el desarrollo cognitivo de los niños y adolescentes con diferentes niveles de instrucción escolar en cuanto al esquema de proporcionalidad, mediante dos tareas piagetianas: el equilibrio de la balanza y la cuantificación de probabilidades[8]. En este estudio participaron 83 estudiantes de quinto y sexto grado de primaria y primer grado de secundaria de escuelas públicas brasileñas y dos escuelas privadas de la ciudad de Recife.

La tarea de cuantificar probabilidad fue aplicada por Piaget e Inhelder (1951), tomando en consideración los elementos utilizados por Carraher (1983).

En la tarea del equilibrio de la balanza, se utilizó un modelo desarrollado para su aplicación, que involucra las siguientes actividades: el entrevistador coloca un peso en uno de los dos lados de la balanza y el estudiante debe reequilibrar la balanza, utilizando un peso igual; en seguida, el entrevistador realiza algunos cambios de peso y el estudiante hace otros cambios, de tal forma que reequilibra la balanza, utilizando dos pesos, cada uno de ellos de igual valor al utilizado por el entrevistador; después de una serie de cambios de peso realizados por el entrevistador, el estudiante obtiene el equilibrio de la balanza; en este tercer momento, el entrevistador coloca un peso de un lado de la balanza y el estudiante debe reequilibrarla utilizando tres pesos, cada uno igual al peso unitario, seguido de cambios, y en el cuarto momento, el

[8] La tarea de cuantificar probabilidades fue aplicada por Piaget e Inhelder (1951), tomando en consideración los elementos utilizados por Carraher (1983).

entrevistador coloca el peso unitario en el octavo gancho y el estudiante tiene tres pesos, cada uno de igual valor unitario, para intentar reequilibrar la balanza (en esta parte la solución es imposible); el último momento de resolución posible es especialmente útil para estimular al estudiante a enunciar la ley de la compensación de pesos y distancia en forma cuantitativa.

Los resultados revelaron que 50% de los estudiantes intentan resolver el problema utilizando solamente una variable y, por lo tanto, Carraher y Schliemann sugieren que la enseñanza del concepto de proporcionalidad se debe relacionar con variables en distintos contextos, con el objetivo de que los estudiantes puedan examinar, en diversas situaciones, que las variables afectan el resultado de un problema.

Leão (1986) intentó poner en evidencia la universalización de la teoría piagetiana, dejando claro que las estructuras cognitivas necesarias al desarrollo del esquema de proporcionalidad existen, pero la influencia socio-cultural es un factor importante de esas estructuras. Ella propone como objetivo general buscar una comparación de los resultados de los estudiantes brasileños, con los resultados obtenidos por Noelting (1980) y Karplus (1983), como un intento por esclarecer la influencia de la cultura en el desarrollo cognitivo de los niños. Además, como objetivos específicos, propone investigar:

1. El concepto de proporcionalidad;
2. El tipo de razonamiento empleado en la solución de las tareas de proporcionalidad;
3. La influencia de la instrucción escolar de la proporcionalidad sobre el desarrollo del referido concepto;
4. La influencia del tipo de tareas en contextos diferentes sobre la resolución de problemas de proporcionalidad;
5. La influencia de las razones con valores enteros y fraccionarios sobre el desempeño en los problemas de proporcionalidad.

Participaron en este trabajo, estudiantes de tres escuelas privadas y escuelas públicas, divididos en dos grupos: el grupo no instruido, que correspondía a 159 estudiantes de quinto y sexto grado de primaria, con edades entre los 11 y 18 años, sin conocimiento previo de proporcionalidad y el grupo instruido con 173 estudiantes de primer y segundo grado de secundaria con edades entre los 12 y 18 años.

Los estudiantes fueron sometidos a las siguientes tareas: un problema (clips de papel, Karplus, Karplus y Wollman, 1974), que consiste en buscar el valor ausente y tratar con razones fraccionarias; el jugo de naranja (Noelting, 1980) que se refiere a problemas de comparación, y dos problemas formales constituidos por cuatro problemas de comparación, dos de razones enteras y dos de razones fraccionarias, y cuatro problemas de valor perdido con dos razones enteras y dos fraccionarias.

Los resultados del estudio revelaron que, en las tres tareas, los estudiantes mostraron el uso de estrategias aditivas en los dos grupos. Este tipo de estrategia era más usual en las tareas de los clips de papel. El grupo de estudiantes que no había recibido instrucción escolar de proporcionalidad también presentaba un razonamiento aditivo: se concluye que la instrucción escolar en dicho contenido matemático no estaba siendo eficaz, que los problemas de comparación son resueltos más fácilmente que los problemas de valor ausente, y que los de razones fraccionarias eran más difíciles que los de razones enteras. De acuerdo con Leão, una posible explicación para estos resultados está en que los estudiantes, independientemente de haber recibido instrucción escolar o no, en la vida cotidiana mantienen contacto con problemas de comparación y en la mayoría de las veces utilizan razones enteras.

Un dato interesante encontrado en la tarea de los problemas formales es que algunos estudiantes armaron correctamente el problema, pero se equivocaron en la resolución de los mismos problemas cuando involucraban números decimales. El otro dato interesante es que los estudiantes, después de intentar inútilmente resolver los problemas a la manera de la escuela, lo hacían por sus propios caminos, y llegaron así a una respuesta al problema, pero con dificultades para utilizar los algoritmos enseñados en la escuela.

Leão (ibid) concluye que los resultados obtenidos son muy semejantes a los de Karplus (1974, 1979) y Noelting (1980). Esta semejanza lleva a creer en la universalidad de las estructuras cognitivas iniciales referentes al concepto de proporción, pero Leão (ibid) destaca el hecho de que la regla de tres (que es el algoritmo utilizado por la escuela para la enseñanza de la proporcionalidad), a pesar de ser un procedimiento matemático muy simple, exige la comprensión de conceptos complejos; luego, si el estudiante no desarrolla las estructuras multiplicativas, no tendrá cómo asimilar las reglas.

Leão (ibid) encuentra, además, diferencias entre los datos encontrados de Karplus y Noelting, relacionados con la proporcionalidad:

1. La enseñanza de la proporcionalidad debería ser reorientada, con el fin de adecuar la secuencia natural de la evolución del concepto de proporcionalidad a una metodología de enseñanza; debería empezar con problemas de comparación con razones enteras y seguir con razones fraccionarias, para, posteriormente, continuar con problemas de valor ausente con razones enteras y seguir con razones fraccionarias.
2. La regla de tres se enseña de manera descontextualizada; es decir, se procesa en un contexto puramente abstracto, fuera del área de interés de los estudiantes, sin conexiones de orden práctico y sin interconexiones entre problemas con diferentes contenidos, lo que dificulta su asimilación y uso.

Czarnocha (1999) desarrolló un estudio usando la técnica[9] de enseñanza por descubrimiento de Bruner (1961) y Shulman (1968) (citados en Czarnocha, op cit., 1999), cuya principal idea es que el estudiante aprende de manera más efectiva cuando descubre el conocimiento por sí solo en lugar de hacerlo por instrucción directa. El profesor actúa como agente para que aquél pueda realizar el descubrimiento. Esta técnica propicia que los estudiantes revelen su proceso de pensamiento, denominado como *momentos de cognición matemática*, que ayudan a que ellos construyan su propia realidad matemática, y ésta les permite acercarse de manera creativa y muy semejante a la manera

[9] Los orígenes de la técnica de instrucción por descubrimiento se remontan a Arquímedes, quien en su obra "El Método" presenta al lector la forma en que descubrió muchos de sus resultados en el campo de la integración. Al mismo tiempo, indica que esta presentación de ninguna manera debe tomarse como la demostración de sus resultados, sino como un ejercicio estimulante e iluminador.

Este método descansa en el diseño de situaciones y el empleo de técnicas que permitan al estudiante participar en el descubrimiento del conocimiento matemático. La técnica se relaciona con el constructivismo al postular un proceso de descubrimiento en las mentes de los estudiantes. (Citado en Czarnocha, 1998, p. 53) como actúa un científico cuando plantea un nuevo concepto o teorema. Tal técnica no se debe tomar como una demostración de resultados, sino como ejercicio estimulante para los alumnos, en el cual se les muestra su error y se les conduce a un momento de reflexión que concluye con la reestructuración de su pensamiento.

La técnica se convierte así en una herramienta de investigación, recientemente asociada con la enseñanza experimental constructivista y relacionada con la idea *vygotskiana* de que es necesario estudiar los cambios mentales bajo la instrucción, mediante la interacción con el estudiante. Aquí, el papel del profesor es semejante al de un investigador, en el sentido de encontrar medios y caminos para facilitar lo que los estudiantes necesitan para alcanzar un descubrimiento particular; pero esos momentos de descubrimiento sólo pueden ocurrir dentro de las estructuras cognitivas matemáticas autónomas de ellos y el profesor debe investigar esas estructuras mentales que surgen durante la secuencia didáctica.

Czarnocha (ibid) se refiere a un estudio realizado en una escuela, con siete estudiantes que tenían dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. El curso contenía los temas matemáticos de razones y proporciones. En el trabajo con proporciones se planteó una secuencia didáctica que incluía figuras a escala, trabajo con mapas, dibujo de objetos de acuerdo con una razón preestablecida, recetas de cocina, entre otras. Este investigador decidió empezar por la percepción de semejanza, por considerarla más intuitiva, y las razones como una herramienta de comparación, conceptual y numérica para expresarlas; éstas deberían aparecer de manera natural para la idea de semejanza y problemas de receta de cocina.

Los resultados revelan dificultades en las proporciones (dibujos) respecto al descubrimiento del concepto de medida común que debían utilizar para resolver esos problemas; sin embargo, los cuestionarios aplicados al final del curso demostraron una actitud diferente de los estudiantes frente a las matemáticas: aprendieron a pensar en formas diferentes de ver los problemas matemáticos. Desde el punto de vista del investigador, el estudio generó otras preguntas, desarrolló las nociones de medida común, comprensión matemática y la interrelación con la verbalización de los procesos de pensamiento, así como la equivalencia entre la madurez intelectual y los niveles de pensamiento concreto y abstracto.

De acuerdo con Hoyles, Noss y Pozzi (2001), a pesar de todas las investigaciones realizadas, el razonamiento proporcional continúa siendo un problema para los estudiantes porque estos adoptan una estrategia aditiva más que una de tipo multiplicativa. Según estos autores, el razonamiento proporcional también está marcado por un contraste entre la resolución de problemas en adultos en situaciones cotidianas y los problemas que involucran proporcionalidad. Aquí, se pueden citar los estudios realizados por Carraher, Carraher y Schliemann (1985), Lave (1988), Nunes, Schliemann y Carraher (1993), quienes sugieren que los adultos resuelven problemas de proporcionalidad en la vida cotidiana y emplean estrategias informales, y que a pesar de que éstas son buenas, las razones usadas en estos estudios son elementales, como por ejemplo: 2:1 y 3:1 y que por lo tanto, ellas no son generalizables para razones más complejas. Hoyles, Noss y Pozzi (op. cit.) piensan que este contenido matemático necesita de un entendimiento más complejo de las relaciones entre el conocimiento que generan y las prácticas culturales.

# Capítulo III

## Metodología

## 3.1 Introducción

Este capítulo cuenta con seis secciones: participantes en la investigación, toma de datos, selección y características de las tareas, fase de diseño de las actividades, forma de trabajo y etapa de aplicación.

En la primera sección, Participantes en la investigación, se menciona la población en estudio y el contexto; en la segunda, Toma de datos, se señalan los instrumentos utilizados para la toma de información, la secuencia de la aplicación de las actividades y se comenta un poco sobre el trabajo en equipo; en la tercera, Selección y características de las tareas, se describe el propósito por el cual se seleccionaron y rediseñaron las actividades implementadas, así como un panorama general de dichas actividades; en la cuarta sección, Fase de diseño de las actividades, se enlistan y describen los componentes de las actividades y se reporta el proceso de análisis realizado para ellas; en la quinta, Forma de trabajo, se explica porqué los estudiantes trabajaron en equipo y el papel de la profesora a cargo de la investigación; y en la sexta y última sección, Etapa de aplicación, se describe cómo se trabajó cada una de las actividades con los estudiantes.

## 3.2 Participantes en la investigación

El estudio se llevó a cabo con 15 estudiantes de primer grado de secundaria de 12 y 13 años de edad, de la Escuela Secundaria Anexa a la Normal Superior de México. Se implementaron las actividades seleccionadas (Mezcla de limonada y Área fraccionada) y re-diseñadas (Receta de cocina, Vamos de compras y Vamos de compras (2)), las cuales se encuentran en el Anexo.

El contexto en que se desarrolló la implementación de este trabajo fue el siguiente:

La escuela donde se realizó la investigación ofrece estudios de nivel medio básico. El nivel académico de sus estudiantes es alto y para esta investigación participaron en su mayoría, alumnos que son preparados en un taller para concursar en las olimpiadas de matemáticas.

Con el propósito de llevar a cabo la experimentación del estudio, se solicitó a la directora de la escuela impartir un taller de matemáticas en la escuela ya mencionada y se propuso un programa con enfoque constructivista, cuyos objetivos fueron fomentar en el estudiante el uso del razonamiento proporcional, generar ambientes propicios de discusión y promover el uso de situaciones de la vida cotidiana que posibiliten el aprendizaje de dicho razonamiento.

Así, la propuesta incluyó una serie de cinco actividades que involucraban para su solución el uso del concepto de razonamiento proporcional. En este contexto, se llevaron a cabo las cinco actividades seleccionadas y re-diseñadas.

## 3.3 Toma de datos

Buscando obtener la información adecuada que contribuya, eficazmente, en la respuesta a la pregunta de investigación, se implementaron los siguientes instrumentos para la toma de la información:

1. Audio grabación de:
   i) el comportamiento de los estudiantes de manera individual durante la solución de las actividades,
   ii) la interacción entre los estudiantes y la profesora a cargo de la investigación,
   iii) las explicaciones verbales de los procedimientos utilizados para la solución de las actividades.
2. Hojas de actividades para tener los procedimientos de los estudiantes de manera escrita.

Los talleres se llevaron a cabo dos días a la semana en sesiones de dos horas durante un mes y medio, bajo una programación específica previamente elaborada. La fase de aplicación, se plantea como etapa de aplicación de las actividades, cuya secuencia fue:

a) Lectura en voz alta de la situación;
b) Trabajo en equipos;

c) Presentación de resultados;
d) Discusión colectiva;
e) Resumen final de la actividad.

Se trabajó en equipos y estos quedaron conformados por tres integrantes cada uno. Debido a que el nivel académico de los estudiantes era similar, no hubo necesidad de elegir a los integrantes de cada equipo.

Santos (1997) comenta respecto al trabajo en equipos:

> Otra variante instruccional que resulta muy efectiva en la resolución de problemas es que los estudiantes trabajen en grupos pequeños durante la clase. Cuando esto ocurra, participan activamente sugiriendo y explorando conjeturas y pueden evaluar constantemente sus ideas. (p. 153)

En general, los problemas contenidos en las actividades seleccionadas y rediseñadas pueden ser clasificados como rutinarios o no rutinarios, de acuerdo con una cierta definición o conceptualización de un autor (ejemplo, Polya[10], Schoenfeld); sin embargo, lo importante no es en sí el problema, sino lo que se propicia o desencadena en el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, si en una actividad considerada rutinaria se promueve la participación activa de los estudiantes y como producto de esta interacción emergen acercamientos o ideas, en un principio quizás insospechados, puede ser que la actividad se convierta en no rutinaria.

## 3.4 Selección y características de las actividades

En esta investigación existe el interés por saber cuáles son los procesos de solución de los estudiantes cuando resuelven problemas de razonamiento proporcional. Para ello, se recurrió a la implementación de actividades que permitieron observar dichos procesos, estimulando a los estudiantes a expresar lo que desconocían por medio de la discusión y a experimentar e intercambiar ideas.

[10] Un problema es rutinario si su solución depende de técnicas usuales y no de la aplicación especializada de éstas y otras técnicas a las que suele recurrir un experto. En cambio, la solución de un problema no rutinario demanda pensamiento y reflexión, antes de poder tener una propuesta de solución. (Polya, 1945, citado en Sepúlveda, 2004, p. 14).

Se quiere valorar qué tanto una serie de actividades, que involucran razonamiento proporcional, con una forma de trabajo en el salón de clases, comprometen y generan una disposición matemática en los estudiantes hacia su entendimiento y solución. Se espera que los estudiantes reorganicen y extiendan sus ideas, utilicen diferentes recursos y estrategias matemáticas como resultado de su interacción con estas actividades, de manera que su implementación no sólo permita obtener información relacionada con los distintos tipos de solución que utilizan los estudiantes al abordarlas, sino que se conviertan en una herramienta para que aprendan.

Con tales propósitos, se diseñaron cinco actividades de las que interesa distinguir los distintos tipos de solución empleados por los estudiantes, cuando abordan un problema y cómo son utilizados los recursos matemáticos, su comportamiento y comentarios. Para ello, se analizan los reportes escritos de los estudiantes contenidos en las hojas impresas que contiene la actividad y los hechos relevantes registrados en las video-grabaciones durante su implementación.

La idea es dejar en claro el tipo de estrategias que utilizan los estudiantes en sus intentos de solución: si es por tanteo, si aplican resultados o algoritmos ya establecidos, si recurren a representaciones como dibujos, tablas, etc., si logran hacer conexiones entre diferentes resultados y, en particular, la forma como construyen sus acercamientos o formas de solución.

Las tablas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 contienen las actividades seleccionadas. Describen un panorama general en cuanto a su clasificación y se identifican: contenidos fundamentales, recursos básicos y estrategias potenciales de solución. Este panorama permite ubicar, específicamente, cuáles son los objetivos que se persiguen con cada una de ellas. Estas actividades fueron así elegidas (Mezcla de limonada y Área fraccionada) y re-diseñadas (Receta de cocina, Vamos de compras y Vamos de compras (2)), porque se considera que pueden ser generativas y así permitir el desarrollo de habilidades en los estudiantes para expresar y hacer generalizaciones, a partir de sus entendimientos y conjeturas iniciales.

| Actividad | Mezcla de limonada |
|---|---|
| Contenidos fundamentales | • concepto de razón,<br>• comparación de dos cantidades,<br>• mezcla como razón,<br>• búsqueda de patrones,<br>• regla de tres directa,<br>• búsqueda de generalizaciones,<br>• interpretación de conceptos:<br>a) significado de rectas similares,<br>b) significado de rectas diferentes,<br>c) significado de rectas empinada,<br>• concepto de razón como la tangente del ángulo de inclinación de la recta,<br>• concepto de incremento,<br>• paso del concepto de razón al concepto de proporción,<br>• comparación de pendientes de dos rectas. |
| Recursos básicos | • construcción de tablas de cantidades que varían proporcionalmente,<br>• relación entre las razones de mezcla de limonada y agua para los diferentes números de jarras para hacer proporciones,<br>• construcción de la gráfica de cantidades que varían proporcionalmente,<br>• relación entre las razones alojadas en la tabla y las pendientes de las dos gráficas lineales. |
| Estrategias potenciales de solución | • aplicar nociones de razón y proporción,<br>• graficar la cantidad de cucharadas de mezcla de limonada contra la cantidad de tazas de agua y ver si las rectas pasan por el origen. |

Tabla 3.1 Clasificación de la actividad seleccionada.

| Actividad | Área fraccionada |
|---|---|
| Contenidos fundamentales | • porción del área como razón,<br>• escalas,<br>• búsqueda de generalizaciones o patrones. |
| Recursos básicos | • transformación de escalas,<br>• subdivisión de regiones,<br>• representación de fracciones,<br>• cálculo de razones. |
| Estrategias potenciales de solución | • transformar escalas y aplicar nociones de razón,<br>• subdividir las regiones más grandes en otras pequeñas por medio de triángulos. |

Tabla 3.2 Clasificación de la actividad seleccionada.

| Actividad | Receta de cocina |
|---|---|
| Contenidos fundamentales | • *cantidad de*, como conteo,<br>• concepto de variación proporcional,<br>• significado de que algo varíe proporcionalmente,<br>• interpretación de la gráfica,<br>• búsqueda de generalizaciones,<br>• significado que tiene la inclinación de la recta,<br>• concepto de variación proporcional a través de:<br>a) búsqueda del factor de proporcionalidad,<br>b) uso de la regla de tres,<br>c) uso de tablas de valores,<br>d) uso de la gráfica asociada a los datos. |
| Recursos básicos | • cálculo de proporciones,<br>• obtención de información a partir de una gráfica,<br>• obtención de una relación que modele la situación,<br>• construcción de tablas de cantidades que varían proporcionalmente,<br>• relación de la pendiente con las características visuales de la gráfica. |
| Estrategias potenciales de solución | • aplicar nociones de proporcionalidad,<br>• encontrar el factor de proporcionalidad. |

Tabla 3.3 Clasificación de la actividad seleccionada.

| **Actividad** | **Vamos de compras** |
|---|---|
| **Contenidos fundamentales** | • concepto de factor de proporcionalidad como:<br>a) porcentaje (%),<br>b) razón geométrica $\left(\frac{x}{100}\right)$,<br>• concepto de descuento,<br>• concepto de regla de tres,<br>• búsqueda de patrones,<br>• comparación de cantidades con descuentos iguales,<br>• factor de proporcionalidad,<br>• descuentos. |
| **Recursos básicos** | • cálculo de descuentos con porcentajes iguales,<br>• comparación entre un descuento aplicado a cada artículo y el descuento aplicado al total de la compra. |
| **Estrategias potenciales de solución** | • cálculo, para un caso particular, del descuento sobre el precio de cada una de las prendas y en seguida sobre la cantidad total de prendas para, posteriormente, tratar de generalizar y responder las preguntas,<br>• multiplicar por un factor constante en la calculadora. |

Tabla 3.4 Clasificación de la actividad seleccionada.

| Actividad | Vamos de compras (2) |
|---|---|
| Contenidos fundamentales | • concepto de factor de proporcionalidad como:<br>a) porcentaje (%),<br>b) razón geométrica $\left(\frac{x}{100}\right)$,<br>• cálculo de descuentos con porcentajes iguales,<br>• concepto de regla de tres,<br>• cálculo de factores de proporcionalidad,<br>• significado de porcentaje y su cálculo,<br>• búsqueda de patrones,<br>• búsqueda de generalizaciones,<br>• cálculo de aumentos,<br>• cálculo de descuentos,<br>• razones aritméticas (diferencias). |
| Recursos básicos | • cálculo de descuentos con distintos porcentajes,<br>• cálculo de porcentajes,<br>• elaboración de tablas de aumentos y descuentos con porcentajes dados,<br>• obtención del porcentaje de ganancia en la compra y venta de un artículo. |
| Estrategias potenciales de solución | • multiplicación de números, por un factor constante, en la calculadora,<br>• cálculo de uno de los tres porcentajes para un caso particular y, posteriormente, tratar de generalizar, buscando algún patrón, hacer lo mismo para los descuentos y aumentos. |

Tabla 3.5 Clasificación de la actividad seleccionada.

## 3.5 Fase de diseño de las actividades

En el NCTM (2000) se identifican como aspectos centrales del currículo el desarrollo de los procesos inherentes del quehacer matemático: el planteamiento de conjeturas, la toma de casos particulares, la búsqueda de patrones y relaciones, la generalización y la justificación de resultados.

El currículo es un conjunto de declaraciones donde se plasman los principios, valores o lineamientos educativos, en su sentido más amplio, los cuales requieren de normas que orienten las acciones que habrán de realizar los actores que participan en un determinado nivel de educación. Con base en estos lineamientos, valores y principios, se concretan acciones a través de la elaboración de planes y programas de estudio. En síntesis, el currículo es una instancia para transformar o llevar a cabo los cambios en el aprendizaje escolar de los estudiantes; y un programa de estudios realiza uno de los aspectos del currículo (Idea tomada de NCTM, 2000, pp.15-17).

En particular, el tema de proporcionalidad es parte del plan de estudios de nivel medio básico de la Secretaría de Educación Pública. En este contexto, las actividades seleccionadas están contempladas en un punto particular del currículo.

En cuanto a los componentes de las actividades, cada una comienza con una situación inicial que, en esencia, determinan la estructura de la misma. Las diferencias entre una actividad y otra dependen del lugar específico del currículo donde va a ser aplicada, los recursos matemáticos necesarios para su solución, las experiencias previas que poseen los estudiantes, las ideas o acciones esenciales para atacarla y resolverla, y las condiciones para su empleo. Así, los componentes de las actividades incluyen:

**Situación inicial.** Se ubica al estudiante en un escenario también llamado situación problema en donde se le expone el contexto de la actividad, que generalmente busca estar en un contexto de la vida cotidiana.

**Preguntas y actividades.** Están relacionadas con la situación inicial, son los problemas a los que el estudiante deberá dar solución.

**Resumen de la tarea[11].** Se pide a los estudiantes que al final de cada actividad, reflexionen de manera individual sobre la actividad, y que después en equipos lo discutan y hagan un resumen. Esto tiene el fin de que intercambien ideas.

Con la finalidad de conocer más a fondo cada una de las actividades seleccionadas, así como de distinguir concretamente cada una de sus componentes y, si es necesario, llegar a un posible rediseño de éstas, se realizaron las acciones enmarcadas en los siguientes puntos:

---

[11] Se utilizará tarea como sinónimo de actividad.

1. Se analizó la actividad con la idea de identificar distintas maneras o formas de solución de los problemas implicados. Además, se identificaron los recursos matemáticos y los diferentes procesos vinculados con la solución, los cuales conducen a la elaboración de una lista de los temas involucrados para resolver la actividad.
2. A continuación, se analizaron las soluciones con la finalidad de estimar si era prudente hacerle cambios a la tarea.
3. Finalmente, se rediseñó la actividad, en su caso, y se valoró si era conveniente complementarla.

La elaboración de la lista de los temas involucrados en la solución de la tarea, permitió tener en cuenta los contenidos y procesos del pensamiento implicados, así como las habilidades básicas que se desea desarrollar en los estudiantes. De esta manera, se obtuvo la versión final, la cual consta de una primera hoja exclusiva para la guía; en ella se incluyen los temas a trabajar, el material a utilizar y cómo se desarrollará paso a paso. Las siguientes hojas contienen la actividad que fue entregada a los estudiantes para su solución.

A continuación se reporta el proceso de análisis, correspondiente a esta fase de diseño, realizado para las actividades. El Anexo contiene la versión final de las cinco actividades.

**Mezcla de limonada**

Es una actividad que pretende fomentar en el estudiante el manejo adecuado del concepto de razón; la construcción de tablas y de la gráfica de cantidades que varían proporcionalmente; el descubrimiento de la relación entre las razones de mezcla de limonada y agua para los diferentes números de jarras para hacer proporciones y la relación entre las razones alojadas en la tabla y las pendientes de las dos gráficas lineales.

Sus aspectos relevantes son:

- Incluye contenidos sobre concepto de razón, comparación de dos cantidades y el concepto de mezcla como razón;
- Implica el uso de la regla de tres directa para responder a las

preguntas formuladas;

- Busca que el estudiante interprete conceptos de: rectas semejantes, rectas diferentes, rectas empinadas, razón como la tangente del ángulo de inclinación de la recta, concepto de incremento;
- Involucra al estudiante en el paso del concepto de razón al de proporción y la comparación de pendientes de dos rectas;
- Dado que los estudiantes pueden hacer el experimento de las mezclas físicamente, fomenta las habilidades de: explorar, particulizar, conjeturar y generalizar.

**Área fraccionada**

En esta actividad se espera que el estudiante comprenda el concepto de porción del área como razón y utilice escalas.

Sus aspectos relevantes son:

- Transformación de escalas y subdivisión de regiones ya sea de manera física o imaginaria, ya que el estudiante construye sus propias figuras;
- Se pretende el uso de fracciones y del cálculo de razones;
- Fomenta en el estudiante las habilidades de: explorar, conjeturar y generalizar.

**Receta de cocina**

Esta actividad pretende que el estudiante realice cálculo de proporciones; obtenga información a partir de una gráfica y una relación que modele la situación; construya tablas de cantidades que varían proporcionalmente; que lo ayude a relacionar la pendiente con las características visuales de la gráfica.

Sus aspectos relevantes son:

- Incluyen los conceptos de *cantidad* como conteo y de variación proporcional;
- Busca que el estudiante interprete gráficas y dé significado a la inclinación de la recta;
- Fomenta el concepto de variación proporcional a través de la

búsqueda del factor de proporcionalidad, el uso de la regla de tres, de tablas de valores y de la gráfica asociada con los datos;
- Fomenta en el estudiante las habilidades de: explorar, particulizar, conjeturar y generalizar.

**Vamos de compras**

En esta actividad se trabaja con situaciones de la vida cotidiana, como: el cálculo de descuentos con porcentajes iguales y la comparación entre descuentos aplicados a cada artículo y el aplicado al total de la compra.

Sus aspectos relevantes son:

- Uso del concepto de factor de proporcionalidad como porcentaje y como razón geométrica;
- Implica conocimientos sobre el concepto de descuento y el uso del concepto de regla de tres;
- Fomenta en los estudiantes la comparación de cantidades con descuentos iguales, el cálculo del factor de proporcionalidad y descuentos;
- Fomenta en el estudiante las habilidades de conjeturar y generalizar.

**Vamos de compras (2)**

Esta actividad también presenta situaciones de la vida cotidiana, como: el cálculo de descuentos con distintos porcentajes, el cálculo de porcentajes, la elaboración de tablas de aumentos y descuentos con porcentajes dados y la obtención del porcentaje de ganancia en la compra y venta de un artículo.

Sus aspectos relevantes son:

- Uso del concepto de factor de proporcionalidad como porcentaje, razón geométrica y aritmética;
- Implica los cálculos de descuentos con porcentajes iguales, de factores de proporcionalidad, aumentos y descuentos;
- Implica conocimientos sobre el uso del concepto de regla de tres, el significado de porcentaje y su cálculo;
- Fomenta en el estudiante las habilidades de conjeturar, particularizar y generalizar.

Se deben tomar las medidas necesarias para que la implementación se lleve en las mejores condiciones. En particular, para Mezcla de limonada, aprovechando que la actividad se puede hacer físicamente, la profesora a cargo de la investigación dio la oportunidad a los estudiantes para que prepararan las mezclas y las probaran, compararan los resultados obtenidos de manera teórica con los obtenidos de manera práctica.

Para el Área fraccionada, la guía proporcionó a los estudiantes papeles de colores para que trazaran las figuras a escala y las recortaran, así podían comparar físicamente el tamaño de las figuras originales (que la profesora a cargo de la investigación pegó en el pizarrón) contra el tamaño de las elaboradas por ellos.

La profesora a cargo de la investigación, durante las actividades, invitó a los estudiantes a la reflexión y fungió como monitor, promoviendo la discusión colectiva, guiando y llamando la atención sobre aspectos clave que estaban debatiendo; además, permitió que los integrantes de los equipos preguntaran libremente. En la tarea: Vamos de compras, la profesora a cargo de la investigación promovió la discusión entre los estudiantes y los invitó a reflexionar sobre qué convenía más: aplicar el descuento a cada artículo o aplicar el descuento al total de la compra; impulsó a los estudiantes a que justificaran su respuesta para el caso general.

## 3.6 Forma de trabajo

En la implementación de las actividades, se propuso que los estudiantes trabajaran organizados en pequeños grupos, ¿qué se pretende con esta forma de organizar el trabajo en el salón de clases? Lesh et al. (2000) argumentan que cuando se trabaja en pequeños grupos con actividades que poseen ciertas cualidades en su diseño, los estudiantes tienen la posibilidad de aprender y avanzar en la construcción de modelos; proponen específicamente la conformación de equipos de tres, para evitar el antagonismo que pudiera presentarse cuando se trabaja en parejas; de esta manera, el tercer estudiante adopta el papel de mediador en la discusión. La intención es que los estudiantes construyan de manera activa su conocimiento, mientras avanzan en la solución de la actividad.

Con el propósito anterior, Hagelgans et al. (1995, citados en Sepúlveda, 2004) han elaborado una *guía práctica* para la conformación de grupos de aprendizaje cooperativo, en los cuales se asume que el sujeto aprende como resultado de su participación en un proceso de continua interacción. Sepúlveda (2004, p. 57) resume los componentes esenciales del aprendizaje cooperativo citado:

- Cuando una actividad se estructura con equipos de aprendizaje cooperativo, se prevé una interacción regular entre los miembros de cada equipo; esto es, la actividad es estructurada para que los estudiantes se involucren y participen significativamente en el trabajo de equipo, donde se valora y destaca la comunicación de unos con otros y la reflexión de las ideas matemáticas, así como la discusión de los distintos acercamientos en la resolución de problemas.
- Se espera que los estudiantes desarrollen un sentido de pertenencia al equipo, lo que se identifica como el desarrollo de un *espíritu de cuerpo* entre los miembros del equipo. Esto se manifiesta cuando los estudiantes sienten la necesidad de aportar ideas y colaborar genuinamente en la solución de la actividad, o de superar las deficiencias personales o de otros miembros del equipo.
- Los miembros de cada equipo esperan, de alguna manera, la mutua responsabilidad de unos con otros, ayudando a quienes lo necesitan. Cuando esta responsabilidad no se asume, la no contribución de alguno(s) perjudica el desarrollo del aprendizaje.
- El trabajo de equipo debe ser incluido en el proceso de evaluación, pues se considera que esta estructuración del curso realmente proporciona oportunidades para lograr que los estudiantes aprendan.

Sepúlveda (*ibid*) da algunas recomendaciones de la citada *guía práctica*:

- el tamaño de los equipos debe ser de 3 o 4 estudiantes; la última cantidad es ideal cuando se requiere subdividirlos en equipos de dos;

- la composición de cada equipo debe combinar algunos estudiantes con talento y experiencia, donde se consideren antecedentes matemáticos, cuestiones de género, manejo de computadora (en su caso) y que provengan de distintos estratos sociales;
- al involucrar a los propios estudiantes en la conformación de los equipos, se permite la participación de quienes se distinguen por ser líderes naturales en el salón de clases;
- mantener la duración de los equipos por uno o varios semestres.

Pero la conformación de equipos en el salón de clases no garantiza por sí misma un aprendizaje cooperativo; se requiere de directrices para fomentar un aprendizaje (Skemp, 1987, citado en Sepúlveda, 2004) que vaya más allá del aprendizaje instrumental proporcionado por la memorización, donde se promueva la reflexión, la discusión, la ayuda mutua, la aplicación y extensión de lo que se va aprendiendo.

En este proceso, también se debe considerar que los estudiantes tienen una serie de creencias y actitudes en relación con el aprendizaje y con la naturaleza de las matemáticas; lo cual puede tener influencia en su comportamiento y actitud a la hora de participar en equipos o en el grupo completo, durante la implementación del problema.

Es importante, entonces tener en cuenta las creencias y actitudes durante el desarrollo de las sesiones. El aprendizaje cooperativo tiene sus efectos sobre esas actitudes. Con él se espera que los estudiantes estén dispuestos a ayudar a otros y a valorar el apoyo recibido, argumentar sus ideas, explorar nuevas y mejores maneras de resolver problemas. Aquí, se deben considerar algunos aspectos socio-académicos que se presentan en el avance desigual de los equipos, ya que en un ambiente de resolución de problemas algunos estudiantes requerirán más tiempo en asumir el papel que les corresponde. Para ello, la profesora a cargo de la investigación necesita haber previsto conversaciones que guíen las actividades de los equipos, promueban la interacción interna y entre equipos hacia la resolución de los problemas planteados.

Esas creencias fueron tomadas en cuenta a la hora de la implementación de las actividades, cuando la guía intervino en momentos precisos, participando en los equipos, escuchando los argumentos de los estudiantes y valorando sus aportaciones en los esfuerzos colectivos por resolver las tareas. La intención de la profesora a cargo de la investigación fue hacer ver a los estudiantes que sus contribuciones, por pequeñas que sean, pueden producir avances en los intentos de solución, ya sea en el equipo o en el grupo completo. Así mismo, dichas creencias también se tuvieron presentes durante el proceso de análisis de los datos.

## 3.7 Etapa de aplicación

Cada una de las actividades pasó por las siguientes etapas de aplicación:

1. *Lectura en voz alta de la situación.* La profesora a cargo de la investigación dio al grupo una breve introducción de la actividad con el propósito de ubicar a los estudiantes en el contexto donde iban a trabajar.
2. *Trabajo en equipos.* Los estudiantes se organizaron en equipos de tres, ellos se escogieron entre sí. Esto fue con el propósito de tener la posibilidad de que interactuaran entre ellos y los demás equipos, así como de que pudieran expresar sus ideas ante el grupo completo. Al concluir el tiempo asignado al trabajo por equipos, cada uno de ellos entregó su actividad contestada.
3. *Presentación de resultados.* Un representante de cada equipo presentó la solución obtenida a toda la clase; durante las presentaciones los demás estudiantes y la profesora a cargo de la investigación tuvieron la oportunidad de plantear preguntas o pedir explicaciones.
4. *Discusión colectiva.* La profesora a cargo de la investigación promovió la discusión colectiva con la idea de analizar los distintos procesos de solución presentados y, cuando fue necesario, se llegó a una solución sistematizada.
5. *Resumen final de la actividad.* Con el propósito de reflexionar, sobre todo el trabajo llevado a cabo, la profesora a cargo de la investigación pidió a los estudiantes que al final de cada actividad, reflexionaran de

manera individual sobre la actividad, y que, posteriormente, lo discutieran en equipos y elaboraran un resumen. Esto, también, tiene el fin de que se den cuenta de los nuevos conceptos que se generaron como producto de la interacción.

# Capítulo IV

## Análisis de datos

## 4.1 Introducción

En este capítulo se muestran las formas de los estudiantes de responder a las preguntas de cada una de las actividades, para hallar una identificación de tendencias de cómo llegan a la solución. También, se busca identificar los tipos de argumentos y recursos empleados por ellos para sustentar y buscar una respuesta a las preguntas planteadas.

La utilización de actividades para promover el aprendizaje de las matemáticas encaja en la visión global del aprendizaje que tiene el NCTM (2000), donde se sugiere la importancia de que el estudiante realice prácticas consistentes con el quehacer de la disciplina. Dicha visión contempla que la instrucción se desarrolle en varias situaciones, de manera que el estudiante aprenda a exponer y defender sus ideas.

En esta investigación se tiene un conjunto de tareas llamadas actividades, con distintos escenarios de aprendizaje. El trabajo en pequeños grupos (equipos) es uno de estos escenarios, en donde se pueden ver más concretamente cómo surgen las ideas, las tendencias y cuáles son los acercamientos de los equipos.

Cada uno de los equipos decidió organizarse para trabajar en grupos de tres estudiantes, pero se dio a cada uno las hojas con la actividad. En la mayoría de los casos, uno de los tres estudiantes asumió la conducción del trabajo y fue escribiendo las respuestas en las hojas de la misma actividad; con base en las ideas, aportaciones e interacción dada en cada uno de los equipos y después los otros dos compañeros copiaban la información. Durante la aplicación, la profesora a cargo de la investigación estuvo circulando entre los cinco pequeños grupos con la idea de mantener el interés y estar al pendiente de lo que pudiera surgir. En particular, el diseño de estas actividades permitió que los estudiantes se involucraran en su resolución.

## 4.2 Análisis

Como ya se ha mencionado en el Capítulo I de este trabajo, el propósito de esta investigación es determinar los procesos de solución que los estudiantes utilizan al abordar problemas de razonamiento proporcional; con el objeto de lograr este propósito, se analizó la información recolectada de las cinco actividades implementadas, y se creó una tabla de niveles de competencia[12] de los estudiantes. Esta tabla agrupa seis niveles y en cada uno se describe lo que, por lo general, el estudiante sabe hacer.

A continuación, se describe cada uno de los seis niveles, y es acompañada de un ejemplo representativo, obtenido de las respuestas de los estudiantes. Es importante señalar que las respuestas de los estudiantes cubren al menos, una de las características de los niveles en que se están clasificando.

Nivel 1: en este nivel, los estudiantes saben o son capaces de:

- Responder a preguntas seleccionadas en contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas.
- Identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios, siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas.
- Realizar acciones obvias que se deducen, inmediatamente, de los estímulos presentados.

En la siguiente figura se muestra una respuesta representativa por medio de la cual se ejemplifica este nivel.

**d) ¿Qué significado tiene encontrar el porcentaje de una determinada cantidad? ¿Y cómo se encuentra? Discute en equipo estas preguntas, y anota en seguida los comentarios al respecto.**

Entontrar el porcentaje de una cantidad

Figura 4.1. Respuesta a la pregunta 5.1.d.1 (dada por Amaury), de la actividad Vamos de compras (2).

El contexto de la pregunta es conocido, el estudiante responde lo mismo que se está preguntando (acción obvia).

[12] Se define competencia como la capacidad de los estudiantes para aplicar conocimientos y habilidades, y para analizar, razonar y comunicarse con eficacia cuando plantean, resuelven e interpretan problemas relacionados con distintas situaciones.

Nivel 2: en este nivel, los estudiantes saben o son capaces de:

- Interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa.
- Extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional.
- Utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales.
- Efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.

En la siguiente figura se muestra una respuesta representativa por medio de la cual se ejemplifica este nivel.

a) ¿En qué recipiente el preparado sabe más a limón? ¿Por qué? en el 2, hay más cucharadas de limónada

Figura 4.2. Respuesta a la pregunta 1.a (dada por José María), de la actividad Mezcla de limonada.

El estudiante hace una interpretación de la tablas para el recipiente 1 y 2. Su respuesta sólo incluye las cucharadas de limonada (que se considera una fuente de información), pero su justificación no incluye los vasos de agua (la segunda fuente de información).

Nivel 3: en este nivel, los estudiantes saben o son capaces de:

- Ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo a aquellos que requieren decisiones secuenciales.
- Seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos.
- Interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas.
- Elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

En la siguiente figura se muestra una respuesta representativa por medio de la cual se ejemplifica este nivel.

f) ¿A cuántas personas se pueden invitar si se tienen 20 pollos?

1 — 2 = 2x10 = 20 pollos
5 - 10 10x10 = 100 invitados

Figura 4.3. Respuesta a la pregunta 3.2.f (dada por Cintia F.), de la actividad Receta de cocina.

Esta estudiante pudo utilizar la regla de tres para contestar la pregunta; sin embargo, eligió otra estrategia de solución:
si 1 pollo = 5 personas, duplicando esta cantidad se tiene que: 2 pollos = 10 personas multiplicando la igualdad anterior por 10 obtenemos: 20 pollos = 100 personas.

Nivel 4: en este nivel, los estudiantes saben o son capaces de:

- Trabajar con eficacia modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condiciones o exigir la formulación de supuestos.
- Seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente con situaciones de la vida cotidiana.
- Utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos.
- Elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.

En la siguiente figura se muestra una respuesta representativa por medio de la cual se ejemplifica este nivel.

e) ¿Qué le conviene más a Roberto: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

Sobre la cantidad

+ 375.50
299.70
675.20
x .25
337600
135040
168.8000

- 675.20
168.80
506.40

Por cada prenda.

+ 281.62
224.79
506.41

R: Es lo mismo

Figura 4.4. Respuesta a la pregunta 4.1.e (dada por Cintia F.), de la actividad Vamos de compras.

Esta estudiante primero supone que le hacen el descuento sobre la cantidad total y calcula el monto a pagar, después supone que le hacen el descuento prenda por prenda y calcula el total a pagar; compara ambos resultados y concluye.

Nivel 5: en este nivel, los estudiantes saben o son capaces de:

- Desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando las condiciones y especificando los supuestos.
- Seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar otros más complejos relativos a estos modelos.
- Trabajar, estratégicamente, utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones relacionadas de forma adecuada, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones.
- Reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

En la siguiente figura se muestra una respuesta representativa por medio de la cual se ejemplifica este nivel.

j) ¿Existirá una fórmula para llevar a cabo los cálculos de estos porcentajes? Si la respuesta es afirmativa, anótalo:

- Fórmula para calcular 10% de una cantidad:

$$\frac{x}{10} = n$$

- Fórmula para calcular 15% de una cantidad:

$$\frac{x}{20} \times 3 = n$$

- Fórmula para calcular 25% de una cantidad:

$$\frac{x}{4} = n$$

Figura 4.5. Respuestas a las preguntas 5.1.j.1, 5.1.j.2 y 5.1.j.3 (dadas por Juan Carlos R.), de la actividad Vamos de compras (2).

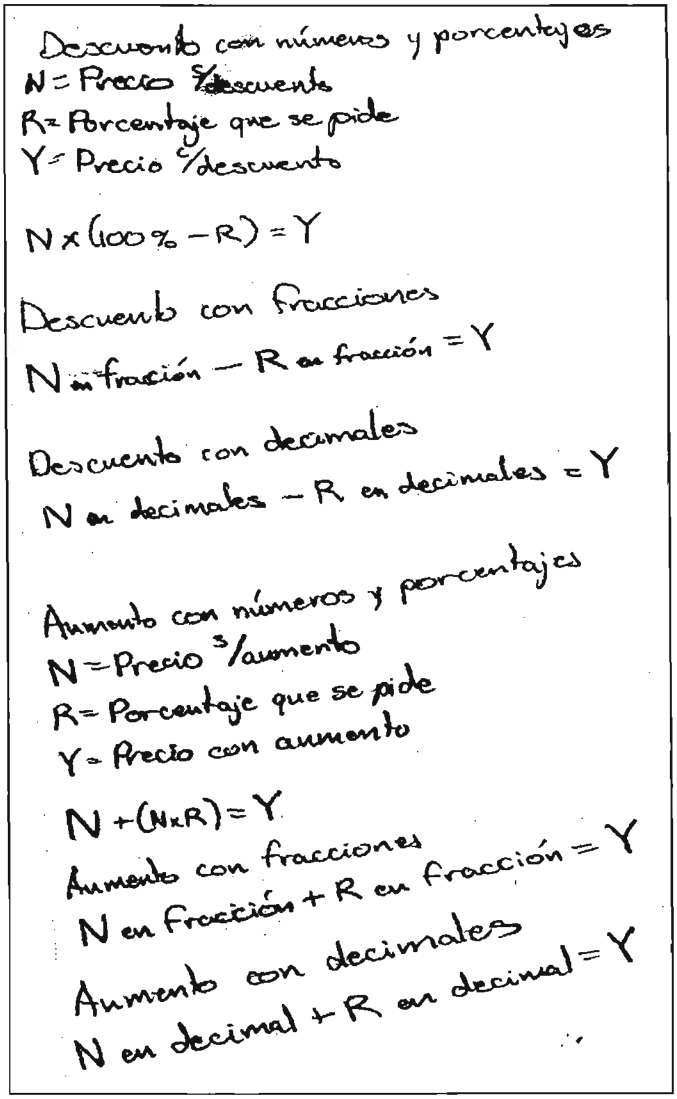
El estudiante trabaja con representaciones simbólicas y crea los modelos que le permiten calcular 10, 20 y 25% de cualquier cantidad. Es importante notar que el estudiante da las fórmulas ya simplificadas; por ejemplo, para calcular 15% de una cantidad $x$ se tiene: $\frac{x}{100} \times 15$, que de manera simplificada se obtiene: $\frac{x}{20} \times 3$.

Nivel 6: en este nivel, los estudiantes saben o son capaces de:

- Formar conceptos, generalizan y utilizan información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos.
- Relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de una manera flexible.
- Tener pensamiento y razonamiento avanzado.
- Aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas.

- Formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.

En la siguiente figura se muestra una respuesta representativa por medio de la cual se ejemplifica este nivel.


Descuento con números y porcentajes
N = Precio s/descuento
R = Porcentaje que se pide
Y = Precio c/descuento

$N \times (100\% - R) = Y$

Descuento con fracciones
N en fración − R en fracción = Y

Descuento con decimales
N en decimales − R en decimales = Y

Aumento con números y porcentajes
N = Precio s/aumento
R = Porcentaje que se pide
Y = Precio con aumento

$N + (N \times R) = Y$

Aumento con fracciones
N en Fracción + R en fracción = Y
Aumento con decimales
N en decimal + R en decimal = Y

Figura 4.6. Respuesta a la pregunta 5.3.b (dada por Rafael J.), de la actividad Vamos de compras (2).

El estudiante logra elaborar las expresiones que le permiten calcular, de manera general, el precio con descuento y con aumento de cualquier cantidad.

Relaciona la información que le proporciona la tabla de aumentos y la de descuentos.

En las siguientes tablas se muestran las respuestas de los alumnos en cada una de las actividades, clasificadas por nivel. Se utilizó el código $P_iN_j$ donde $P_i$ corresponde a la pregunta i realizada en alguna de las actividades y $N_j$ corresponde al nivel de competencia j.

## Nivel 1

| Código | Características de la respuesta |
|---|---|
| P1.f.2 N1<br>P1.g N1<br>P5.1.d.1N1<br>P5.1.e.1N1<br>P5.1.e.2N1<br>P5.1.e.3N1 | • Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados. |

Tabla 4.1. Nivel de competencia 1.

Las respuestas que se agrupan en este nivel se caracterizan porque responden lo mismo que se está preguntando, lo que se considera como una acción obvia que se deduce inmediatamente de la pregunta (vea figuras 4.7, 4.8 y 4.9).

> **g) ¿Cómo puedes usar la comparación de dos gráficas para determinar en cuál recipiente la limonada sabe más limón que la otra?**
>
> sacando grafica del reapiente 1

Figura 4.7. Respuesta a la pregunta 1.g (dada por Cristian), de la actividad Mezcla de limonada.

e) En particular, ¿cómo encuentras los descuentos de: 10%, 15% y 25% de una cantidad? Anota tus comentarios a continuación.

R= encontramos el porciento, porque depende que porciento nos indiquen

Figura 4.8. Respuesta a la pregunta 5.1.e.1 (dada por Guillermina), de la actividad Vamos de compras (2).

d) ¿Qué significado tiene encontrar el porcentaje de una determinada cantidad? ¿Y cómo se encuentra? Discute en equipo estas preguntas, y anota en seguida los comentarios al respecto.

Encontrar el porcentaje de una cantidad

Figura 4.9. Respuesta a la pregunta 5.1.d.1 (dada por Amaury), de la actividad Vamos de compras (2).

## Nivel 2

| Código | Características de la respuesta |
|---|---|
| P1.a N2 | • Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales.<br>• Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados. |
| P1.c N2<br>P1.d N2<br>P3.2.d N2<br>P5.1.d.1N2<br>P5.1.d.2N2<br>P5.1.e.1N2<br>P5.1.e.2N2<br>P5.1.e.3N2<br>P5.1.g N2<br>P5.1.h N2<br>P5.1.i N2 | • Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. |

| Código | Características de la respuesta |
|---|---|
| P1.e.1N2<br>P3.2.e N2<br>P4.1.e N2<br>P4.1.f N2 | • Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados. |
| P1.e.3N2<br>P1.e.4N2 | • Saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa.<br>• Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados. |
| P1.f.2N2<br>P3.2.f N2 | • Saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. |
| P1.g N2<br>P3.1.c.2N2<br>P3.2.b N2<br>P3.2.c N2 | • Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. |
| P3.1.a N2<br>P3.1.b N2<br>P4.1.a N2<br>P4.1.b N2<br>P4.1.c N2<br>P5.1.a N2<br>P5.1.b N2 | • Saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa.<br>• Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. |
| P3.2.a N2 | • Saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa.<br>• Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. |
| P4.1.d N2 | • Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales.<br>• Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados. |

Tabla 4.2. Nivel de competencia 2.

Las respuestas que se agrupan en este nivel se caracterizan porque:

- En el caso de la actividad Mezcla de limonada, los estudiantes no relacionan las cucharadas de esta mezcla con los vasos de agua; la respuesta está en función de sólo una fuente de información (cucharadas o vasos) (vea Figura 4.10).
- Los estudiantes utilizan fórmulas o procedimientos elementales para resolver el problema (vea figuras 4.11, 4.12 y 4.13).
- Hacen inferencias directas de la situación y utilizan la información pertinente de un único modelo (vea Figura 4.14).

**a) ¿En qué recipiente el preparado sabe más a limón? ¿Por qué?**

R= En el recipiente 2 Poique hay más cucharadas de mezcla de limonada.

Figura 4.10. Respuesta a la pregunta1.a (dada por Enrique G.), de la actividad Mezcla de limonada.

**b) Para el recipiente 1, ¿cuántas cucharadas de mezcla de limonada necesitarías para preparar 100 vasos de limonada? ¿Para 1000 vasos de limonada? Explica cómo obtuviste tus respuestas.**

R= 40 para 100 y 400 para Mil

Si en la tabla hay Jarras 10 con 50 vaso de agua y 20 cucharadas de mezcla de limonada, al doble son 100 vasos y 40 cucharadas. Para el Recipiente 1. y para 1000 multiplico 40 y 100 x 10. y me dio el Resultado del Recipiente 2.

Figura 4.11. Respuesta a la pregunta 1.b (dada por Enrique G.), de la actividad Mezcla de limonada.

**e) En particular, ¿cómo encuentras los descuentos de: 10%, 15% y 25% de una cantidad? Anota tus comentarios a continuación.**

Multiplico .10,.15,.25 por la cantidad, luego la cantidad que salió se la resto a la cantidad original

Figura 4.12. Respuesta a la pregunta 5.1.e.1 (dada por Rafael V.), de la actividad Vamos de compras (2).

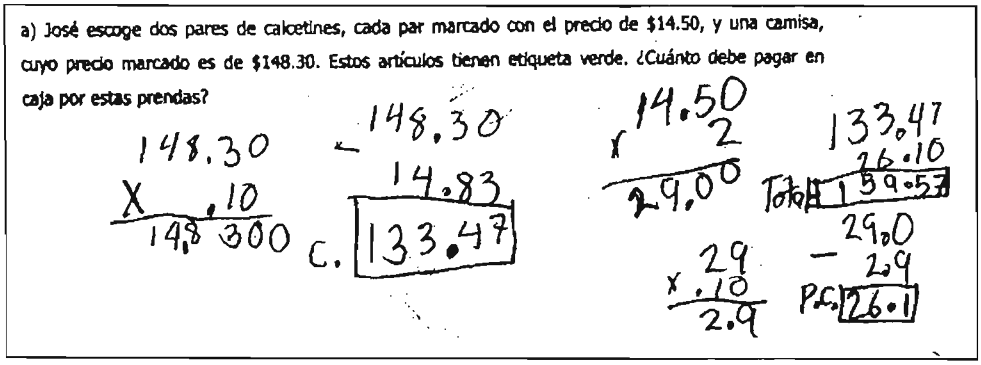
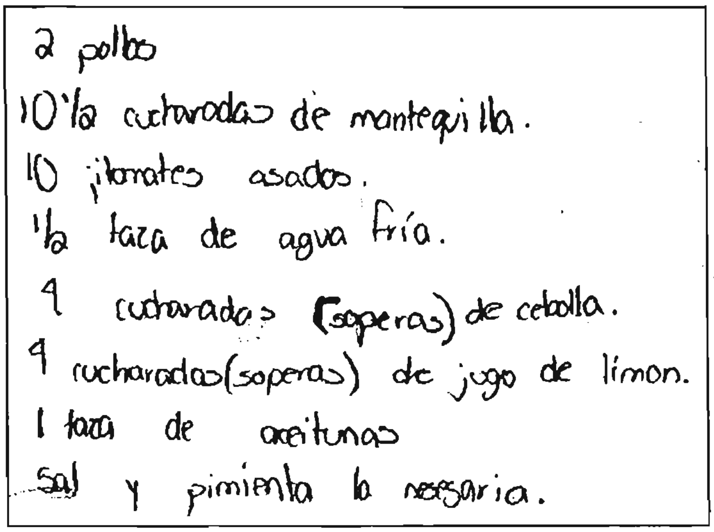

a) José escoge dos pares de calcetines, cada par marcado con el precio de $14.50, y una camisa, cuyo precio marcado es de $148.30. Estos artículos tienen etiqueta verde. ¿Cuánto debe pagar en caja por estas prendas?

Figura 4.13. Respuesta a la pregunta 4.1.a (dada por José María), de la actividad Vamos de compras.


2 pollos

10'½ cucharadas de mantequilla.

10 jitomates asados.

1½ taza de agua fría.

4 cucharadas (soperas) de cebolla.

4 cucharadas(soperas) de jugo de limon.

1 taza de aceitunas

Sal y pimienta lo necesaria.

Figura 4.14. Respuesta a la pregunta 3.1.b (dada por Guillermina), de la actividad Receta de cocina.

## Nivel 3

| Código | Características de la respuesta |
|---|---|
| P1.a N3<br>P1.b N3 | • Ejecutan procedimientos descritos con claridad, incluyendo a aquellos que requieren decisiones secuenciales.<br>• Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. |

| Código | Características de la respuesta |
|---|---|
| P1.c N3<br>P1.d N3<br>P1.g N3<br>P2.1.a N3<br>P2.1.b N3<br>P2.1.c N3<br>P2.1.d N3<br>P2.2.a N3<br>P2.2.b N3<br>P2.2.c N3<br>P3.1.a N3<br>P3.2.d N3<br>P4.1.a N3<br>P4.1.b N3<br>P4.1.c N3<br>P5.1.a N3<br>P5.1.g N3<br>P5.1.i N3 | • Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos |
| P1.f.2N3<br>P3.1.c.2N3 | • Saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. |
| P3.2.e N3 | • Saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas.<br>• Son capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos. |
| P3.2.f N3 | • Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos.<br>• Saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. |

| Código | Características de la respuesta |
|---|---|
| P4.1.d N3<br>P4.1.e N3<br>P4.1.f N3 | • Son capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos. |
| P5.1.j.1N3<br>P5.1.j.2N3<br>P5.1.j.3N3 | • Ejecutan procedimientos descritos con claridad, incluyendo a aquellos que requieren decisiones secuenciales. |
| P5.2.1N3 | • Ejecutan procedimientos descritos con claridad, incluyendo a aquellos que requieren decisiones secuenciales.<br>• Saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. |
| P5.3.a N3<br>P5.3.b N3 | • Saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. |

Tabla 4.3. Nivel de competencia 3.

Las respuestas que se agrupan en este nivel se caracterizan porque:

- En el caso de la actividad Mezcla de limonada, los estudiantes relacionan las cucharadas de esta mezcla con los vasos de agua, la respuesta está en función de las dos fuentes de información (cucharadas y vasos, vea Figura 4.15).
- Seleccionan una estrategias de solución y la aplican, como por ejemplo, en la actividad Área fraccionada; una estrategia es dividir la figura en cuartos (con cuadrados) en octavos (con triángulos) o en dieciseisavos (con triángulos), otra estrategia es obtener el área de cada una de las figuras inscritas y ver qué parte representa del total (los estudiantes que siguieron esta estrategia, no hicieron este último paso, vea figuras 4.16 y 4.17).
- Los estudiantes tomaron diferentes fuentes de información (la que les proporciona la actividad, las gráficas o tablas) y a partir de esto razonan e interpretan, llegando a la solución (vea Figura 4.18).

- Incluyen el concepto de proporcionalidad en su justificación (vea figuras 4.19 y 4.20).
- Los procedimientos realizados son claros (vea Figura 4.21).

a) ¿En qué recipiente el preparado sabe más a limón? ¿Por qué? en el resipiente dos porque, ~~[illegible]~~ aunque es el doble de mezcla es menos cantidad de agua.

Figura 4.15. Respuesta a la pregunta 1.a (dada por Cynthia E.), de la actividad Mezcla de limonada.

a) ¿Qué porción del área del cuadrado grande está cubierta por la parte X?

R= $\frac{1}{4}$

b) ¿Qué porción del área del cuadrado grande está cubierta por la parte Y?

R= $\frac{1}{8}$

Figura 4.16. Respuestas a las preguntas 2.1.a y 2.1.b (dadas por Juan D.), de la actividad Área fraccionada.

a) ¿Qué porción del área del cuadrado grande está cubierta por la parte X?

36 $cm^2$

b) ¿Qué porción del área del cuadrado grande está cubierta por la parte Y?

18 $cm^2$

Figura 4.17 Respuestas a las preguntas 2.1.a y 2.1.b (dadas por Amaury), de la actividad Área fraccionada.

e) ¿Qué significa la inclinación de la recta?

C/vez que va aumentando la cantidad de invitados, también aumenta la cantidad de pollos, provocando una inclinación en la recta.

Figura 4.18. Respuesta a la pregunta 3.2.e (dada por Cynthia E.), de la actividad Receta de cocina.

¿Consideras que la cantidad de ingredientes a utilizar variará proporcionalmente de acuerdo con el número de personas? ¿Por qué? Si porque de acuerdo cuanto ascienda la cantidad de personas ascendera proporcionalmente con la cantidad de ingredientes

Figura 4.19. Respuesta a la pregunta 3.1.c.2 (dada por Alonso), de la actividad Receta de cocina.

¿Consideras que la cantidad de ingredientes a utilizar variará proporcionalmente de acuerdo con el número de personas? ¿Por qué?

Sí, porque es proporcional el número de personas con el número de ingredientes

Figura 4.20. Respuesta a la pregunta 3.1.c.2 (dada por Rafael J.), de la actividad Receta de cocina.

j) ¿Existirá una fórmula para llevar a cabo los cálculos de estos porcentajes? Si la respuesta es afirmativa, anótalo: Si

- Fórmula para calcular 10% de una cantidad:

Multiplicando la cantidad por .10

- Fórmula para calcular 15% de una cantidad:

Multiplicando la cantidad por .15

- Fórmula para calcular 25% de una cantidad:

Multiplicando la cantidad por .25

Figura 4.21. Respuestas a las preguntas 5.1.j.1, 5.1.j.2 y 5.1.j.3 (dadas por Guillermina), de la actividad Vamos de compras (2).

## Nivel 4

| Código | Características de la respuesta |
|---|---|
| P1.a N4 | • Trabajan con eficacia modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condiciones o exigir la formulación de supuestos.<br>• Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente con situaciones del mundo real.<br>• Saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos.<br>• Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones. |
| P1.b N4<br>P1.c N4<br>P1.d N4<br>P2.1.a N4<br>P2.1.b N4 | • Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente con situaciones de la vida cotidiana. |

| Código | Características de la respuesta |
|---|---|
| P2.1.c N4<br>P2.1.d N4<br>P2.2.a N4<br>P2.2.b N4<br>P2.2.c N4<br>P3.1.a N4<br>P5.1.d.2N4<br>P5.1.j.1N4<br>P5.1.j.2N4<br>P5.1.j.3N4 | |
| P1.g N4 | • Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente con situaciones de la vida cotidiana.<br>• Saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. |
| P4.1.d N4<br>P4.1.e N4<br>P4.1.f N4<br>P5.1.d.1N4 | • Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones. |
| P5.1.e.2N4<br>P5.1.e.3N4<br>P5.3.b N4 | • Saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. |
| P5.3.a N4 | • Trabajan con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condiciones o exigir la formulación de supuestos.<br>• Saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. |

Tabla 4.4. Nivel de competencia 4.

Las respuestas que se agrupan en este nivel se caracterizan porque:

- Los estudiantes utilizan la regla de tres como representación simbólica para resolver el problema (vea Figura 4.22).
- Integran representaciones tanto numéricas como gráficas y obtienen sus conclusiones; esto permite un razonamiento flexible y perspicaz. (vea figuras 4.23 y 4.24).
- Mencionan en su justificación la comparación de proporciones (vea Figura 4.25).
- Sus respuestas incluyen varias representaciones de una misma cosa (vea Figura 4.26).
- Argumentan a partir de las acciones que llevan a cabo (vea figuras 4.27 y 4.28).

c) Supón que sólo tienes una cucharada de mezcla de limonada. ¿Cuántas vasos de limonada podrías preparar usando el recipiente 1? ¿Y usando el recipiente 2? Explica cómo obtuviste tus respuestas.

cdas vasos
4 — 7
1 — x

2 — 5
1 — x

$7 \div 4 = 1.75$

$5 \div 2 = 2.5$

Recipiente 1 = 2 vaso y medio

Recipiente 2 = 1 vaso 3/4

Figura 4.22. Respuesta a la pregunta 1.c (dada por Paulina), de la actividad Mezcla de limonada.

g) ¿Cómo puedes usar la comparación de dos gráficas para determinar en cuál recipiente la limonada sabe más limón que la otra?

R= Por las proporciones. La más inclinada llevará más mezcla.

Figura 4.23. Respuesta a la pregunta 1.g (dada por Paulina), de la actividad Mezcla de limonada.

a) ¿En qué recipiente el preparado sabe más a limón? ¿Por qué?

En el recipiente a, porque aunque es el doble de mezcla, es menor cantidad de agua, para que estuvieran iguales deben de ser 4 cucharadas en 10 vasos de agua.

Figura 4.24. Respuesta a la pregunta 1.a (dada por Guillermina), de la actividad Mezcla de limonada.

a) ¿En qué recipiente el preparado sabe más a limón? ¿Por qué?

En el segundo, por q la proporcion entre agua y esencia de limón es mas grande

Figura 4.25. Respuesta a la pregunta 1.a (dada por Juan Carlos R.), de la actividad Mezcla de limonada.

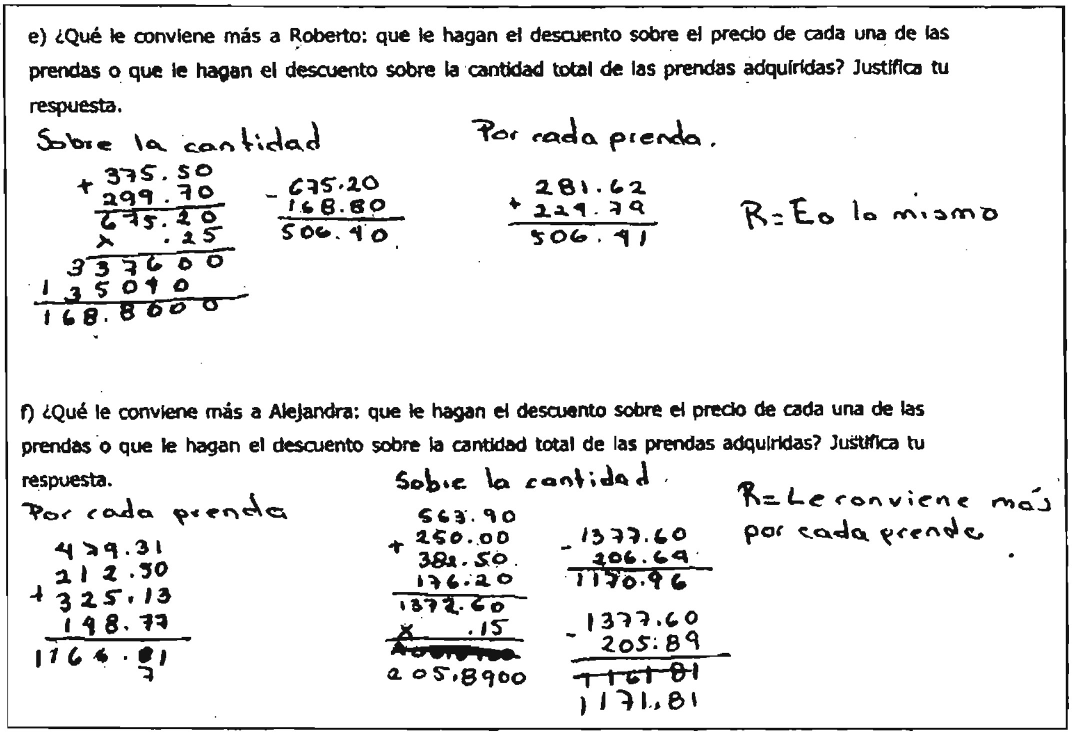
a) ¿Qué porción del área del cuadrado grande está cubierta por la parte X?

$1/4 = 36\ cm^2 = 25\%$

b) ¿Qué porción del área del cuadrado grande está cubierta por la parte Y?

$1/8 = 18 cm^2 = 12.5\%$

Figura 4.26. Respuestas a las preguntas 2.1.a y 2.1.b (dadas por Rafael V.), de la actividad Área fraccionada.



e) ¿Qué le conviene más a Roberto: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

Sobre la cantidad

+ 375.50
299.70
675.20
x .25
337600
135040
168.8000

675.20
\- 168.80
506.40

Por cada prenda.

281.62
\+ 224.79
506.41

R: Es lo mismo

f) ¿Qué le conviene más a Alejandra: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

Por cada prenda

479.31
212.30
\+ 325.13
148.77
1164.81

Sobre la cantidad.

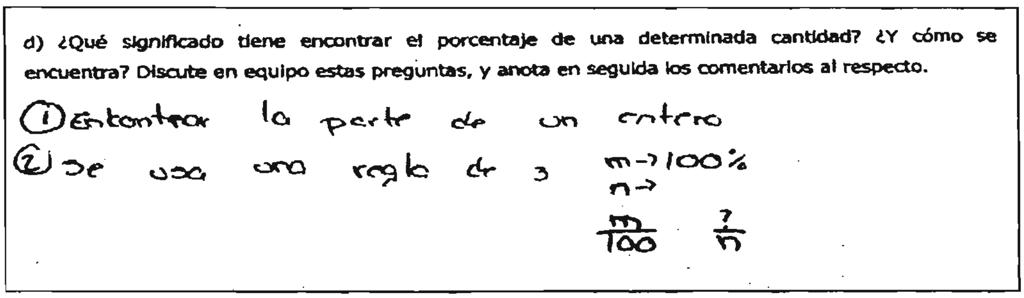
563.90
\+ 250.00
382.50
176.20
1372.60
x .15
205.8900

1377.60
\- 206.69
1170.96

1377.60
\- 205.89
1171.81

R = Le conviene más por cada prenda.

Figura 4.27. Respuestas a las preguntas 4.1.e y 4.1.f (dadas por Cintia F.), de la actividad Vamos de compras.



d) ¿Qué significado tiene encontrar el porcentaje de una determinada cantidad? ¿Y cómo se encuentra? Discute en equipo estas preguntas, y anota en seguida los comentarios al respecto.

1) Encontrar la parte de un entero

2) Se usa una regla de 3 m → 100%
n →

$\frac{m}{100}$ $\frac{?}{n}$

Figura 4.28. Respuestas a las preguntas 5.1.d.1 y 5.1.d.2 (dadas por Adriana), de la actividad Vamos de compras (2).

## Nivel 5

| Código | Características de la respuesta |
|---|---|
| P5.1.j.1N5<br>P5.1.j.2N5<br>P5.1.j.3N5 | • Pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones relacionadas de forma adecuada, |

| Código | Características de la respuesta |
|---|---|
| | caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. |

Tabla 4.5. Nivel de competencia 5.

Las respuestas que se agrupan en este nivel se caracterizan porque:

- El estudiante trabaja con representaciones simbólicas y crea los modelos que le permiten calcular 10, 20 y 25% de cualquier cantidad (vea Figura 4.5).

## Nivel 6

| Código | Características de la respuesta |
|---|---|
| P3.2.d N6<br>P5.3.b N6 | • Forman conceptos, generalizan y utilizan información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. |

Tabla 4.6. Nivel de competencia 6.

Las respuestas que se agrupan en este nivel se caracterizan porque:

- El estudiante logra elaborar las expresiones que le permiten calcular de manera general el precio con descuento y con aumento de cualquier cantidad. Relaciona la información que le proporciona la tabla de aumentos y la de descuentos (vea figuras 4.6, 4.30 y 4.31).

$a-(a \times b)$

a) Precio del articulos
b) Porcentaje del descuento

Figura 4.30. Expresión dada por Juan Carlos R. en la actividad Vamos de compras (2).

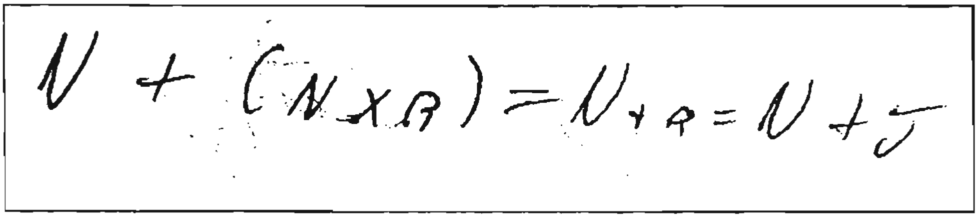


Figura 4.31. Expresión dada por Juan D. en la actividad Vamos de compras (2).

## 4.3 Resultados globales

De las tablas 4.7 a la 4.57 de este capítulo, se encuentra la distribución de las respuestas a los problemas planteados en las cinco actividades implementadas[13]. Las respuestas marcadas con (♦) corresponde a las estrategias[14] utilizadas por los estudiantes; las respuestas marcadas con (•) corresponde a las respuestas[15] dadas por los estudiantes; en ellas puede haber errores de ortografía y redacción, pero se respetan para reflejar su autenticidad.

### Mezcla de limonada

| Respuestas (•) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Cantidad de agua (proporción) | | 1 | 1 |
| Cantidad de mezcla | 3 | | 3 |
| Cantidad de mezcla y agua | 3 | | 3 |
| Cantidad de mezcla y agua (proporción) | 2 | | 2 |
| Cantidad de mezcla y agua (equivalencia) | | 2 | 2 |
| Comparación de fracciones | 1 | | 1 |
| Sin justificación | 3 | | 3 |
| | 12 | 3 | |

Tabla 4.7. Respuestas a la pregunta 1.a de la actividad 1, Mezcla de limonada.

[13] En las tablas y figuras se hace referencia al número de pregunta de cada una de las actividades; para ver qué pregunta corresponde a cada número, consultar el Anexo.
[14] Estrategia: arte de dirigir un asunto para lograr el objeto deseado. (Tomado de Diccionario del uso del Español, María Moliner, editorial Gredos).
[15] Respuesta: acción de responder, en cualquier acepción. (Tomado de Diccionario del uso del Español, María Moliner, editorial Gredos).

Tres estudiantes (20%) respondieron que en los dos recipientes el preparado sabía igual, conclusión que es errónea. Su razonamiento indica que quizá no compararon las proporciones entre el recipiente 1 y 2, sino que concluyeron a partir de los resultados obtenidos en uno de los dos recipientes (vea figuras 4.32 y 4.33).

a) ¿En qué recipiente el preparado sabe más a limón? ¿Por qué?

En los 2 es igual.
Porque es equivalente las cucharadas con el núm de agua

Figura 4.32. Respuesta dada por Daniel.

a) ¿En qué recipiente el preparado sabe más a limón? ¿Por qué?

En ninguno, todos tienen la misma proporción de mezcla y agua.

Figura 4.33. Respuesta dada por Paulina.

Doce estudiantes (80%) respondieron de manera correcta, aunque sólo seis (40%) involucraron en su justificación a la cantidad de mezcla de limonada con la cantidad de vasos de agua,

a) ¿En qué recipiente el preparado sabe más a limón? ¿Por qué? en el resipiente dos porque, aunque es el doble de mezcla es menos cantidad de agua.

Figura 4.34. Respuesta dada por Cynthia E.

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Multiplicar por | 10 |
| Regla de tres | 4 |
| División y multiplicación | 1 |

Tabla 4.8. Respuestas a la pregunta 1.b de la actividad 1, Mezcla de limonada.

Las tres estrategias dadas por los estudiantes fueron correctas. Véase en qué consistió cada una:

- En la estrategia de *multiplicar*, los estudiantes se fijaron en la tabla para el recipiente uno y se dieron cuenta de que para 20 cucharadas de mezcla de limonada se necesitarían 50 vasos de agua; como lo que se estaba pidiendo era encontrar la cantidad de cucharadas de mezcla de limonada necesarios para 100 vasos, sólo se tendrían que multiplicar por 2 ambas cantidades para obtener 40 cucharadas de mezcla de limonada = 100 vasos de agua. Multiplicando lo anterior por 10, se obtendría que 400 cucharadas de mezcla de limonada = 1000 vasos de agua. Esta estrategia fue la más utilizada (67%) (vea Figura 4.35).
- Los estudiantes que utilizaron la *regla de tres*, encontraron la cantidad necesaria de cucharadas de mezcla de limonada para 100 vasos y al resultado lo multiplicaron por 10 para obtener que 400 cucharadas de mezcla de limonada = 1000 vasos de agua. Esta estrategia se utilizó en 27% de los casos (vea Figura 4.36).
- En realidad, lo que hicieron los estudiantes que eligieron la estrategia de *multiplicación y división*, fue una regla de tres implícita, ya que dividieron los 100 vasos de agua entre los 5 vasos necesarios y esto lo multiplicaron por dos, que es el número de cucharadas de limonada necesarias para 5 vasos. Para los 1000 vasos, hicieron el mismo procedimiento, pero en lugar de dividir 100 entre 5, dividieron 1000 entre 5. Esta estrategia fue utilizada en 6% de los casos, por lo que fue la de menos uso (vea Figura 4.37).

b) Para el recipiente 1, ¿cuántas cucharadas de mezcla de limonada necesitarías para preparar 100 vasos de limonada? ¿Para 1000 vasos de limonada? Explica cómo obtuviste tus respuestas.

R1 = 40 cucharadas. para 100 vasos.

R= 400 cucharadas para 100 vasos

Si con 20 cucharadas son 50 vasos, se multiplico por 2 y son 40 cucharadas por 100 vasos.

Y si en 100 vasos se ocupan 40 cucharadas, se multiplica 40 por diez y 100 por diez lo que da de resultado son 400 cucharadas para 1000 vasos.

Figura 4.35. Estrategia utilizada por Guillermina.

b) Para el recipiente 1, ¿cuántas cucharadas de mezcla de limonada necesitarías para preparar 100 vasos de limonada? ¿Para 1000 vasos de limonada? Explica cómo obtuviste tus respuestas.

2 — 5
X — 100

$200 \div 5 = 40$

$\boxed{400} \quad \boxed{40}$

Sí por 2 cucharadas son 5 vasos entonces por 100 son 40 y esto se hace con la regla de 3 y con 1000 vasos solo se aumenta un cero

Figura 4.36. Estrategia utilizada por Amaury.

b) Para el recipiente 1, ¿cuántas cucharadas de mezcla de limonada necesitarías para preparar 100 vasos de limonada? ¿Para 1000 vasos de limonada? Explica cómo obtuviste tus respuestas.

R: 40

Dividí 100 entre 5 y lo multipliqué por 2

R = 400

Dividí 1000 ÷ 5 y lo multipliqué por 2

Figura 4.37. Estrategia utilizada por Juan Carlos R.

| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Vasos de agua entre cucharadas de mezcla de limonada | 8 | 1 | 9 |
| Regla de tres | 6 | | 6 |
| | 14 | 1 | |

Tabla 4.9. Respuestas a la pregunta 1.c de la actividad 1, Mezcla de limonada.

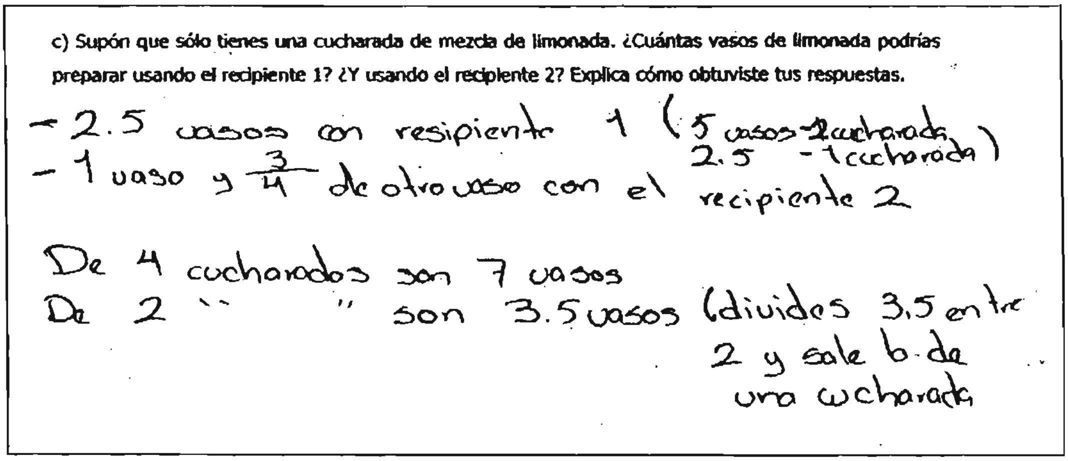
Las estrategias utilizadas por los estudiantes consistieron en:

- *Dividir el número de vasos de agua entre la cantidad de mezcla de limonada*, esto en ambos recipientes con el objetivo de obtener el número necesario de vasos de agua para una cucharada de mezcla de limonada. Esta estrategia se utilizó en 60% de los casos (vea figuras 4.38 y 4.39).
- Los estudiantes que utilizaron la *regla de tres*, encontraron la cantidad necesaria de vasos de agua para una cucharada de mezcla de limonada. Esta estrategia se utilizó en 40% de los casos (vea Figura 4.40).

c) Supón que sólo tienes una cucharada de mezcla de limonada. ¿Cuántas vasos de limonada podrías preparar usando el recipiente 1? ¿Y usando el recipiente 2? Explica cómo obtuviste tus respuestas.

En el recipiente 1 nos saldrían 2 vasos ½ si son 2 cucharadas a 5 vasos 1 es a 2 ½.
En el recipinte 2 nos saldrían si tenemos 1 cucharada nos salen 1 vaso y ¾ porq´ 4 entre 2 a 2 y 7 entre 2 a 3.5 y entre dos da a 1 es a 1 ¾.

Figura 4.38. Estrategia utilizada por Héctor.

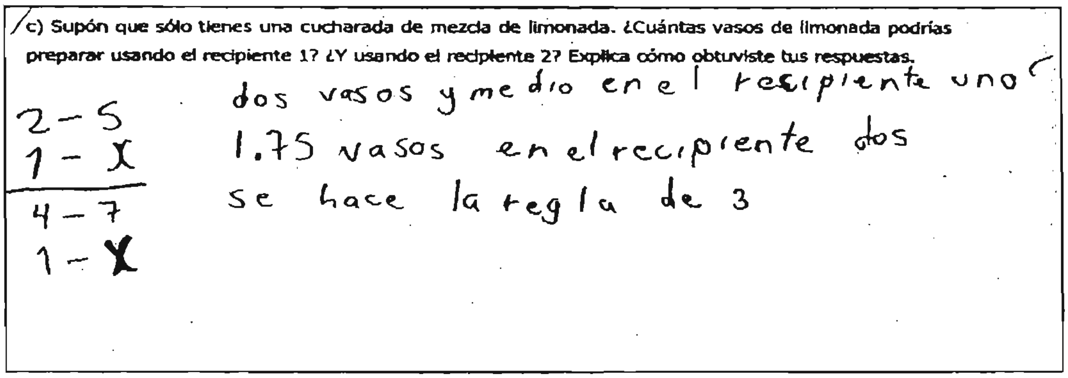


c) Supón que sólo tienes una cucharada de mezcla de limonada. ¿Cuántas vasos de limonada podrías preparar usando el recipiente 1? ¿Y usando el recipiente 2? Explica cómo obtuviste tus respuestas.

- 2.5 vasos con resipiente 1 (5 vasos - 2 cucharadas; 2.5 - 1 cucharada)
- 1 vaso y $\frac{3}{4}$ de otro vaso con el recipiente 2

De 4 cucharadas son 7 vasos
De 2 " " son 3.5 vasos (dividí 3.5 entre 2 y sale b. de una cucharada

Figura 4.39. Estrategia utilizada por Daniel.



c) Supón que sólo tienes una cucharada de mezcla de limonada. ¿Cuántas vasos de limonada podrías preparar usando el recipiente 1? ¿Y usando el recipiente 2? Explica cómo obtuviste tus respuestas.

2 - 5
1 - X

4 - 7
1 - X

dos vasos y medio en el recipiente uno
1.75 vasos en el recipiente dos
se hace la regla de 3

Figura 4.40. Estrategia utilizada por Amaury.

| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Regla de tres | 5 | 3 | 8 |
| Mezcla de limonada entre vasos de agua | 4 | | 4 |
| Sin justificación | 3 | | 3 |
| | 12 | 3 | |

Tabla 4.10. Respuestas a la pregunta 1.d de la actividad 1, Mezcla de limonada.

Las estrategias utilizadas en la pregunta 1.d son similares a las anteriores. Tres estudiantes no justificaron su respuesta, aunque ésta fue correcta. La estrategia más utilizada fue la regla de tres (53%).

| Gráfica (•) | |
|---|---|
| Lineas | 12 |
| Barras | 1 |
| Otra | 2 |
| | 15 |

Tabla 4.11. Tipo de gráficas elaboradas por los estudiantes en la actividad 1, Mezcla de limonada.

Doce estudiantes hicieron una gráfica de líneas (80%) (vea Figura 4.41); a pesar de que los datos no partían de cero, cinco estudiantes (42%) graficaron las líneas partiendo del origen (lo que es importante para saber de manera gráfica que hay proporcionalidad directa entre los datos, vea Figura 4.42).

Tres estudiantes (20%) graficaron de distinta manera: Cristian utilizó gráfica de barras (vea Figura 4.43), Daniel graficó con líneas verticales (vea Figura 4.44) y José María únicamente localizó los puntos pero no los unió (vea Figura 4.45).

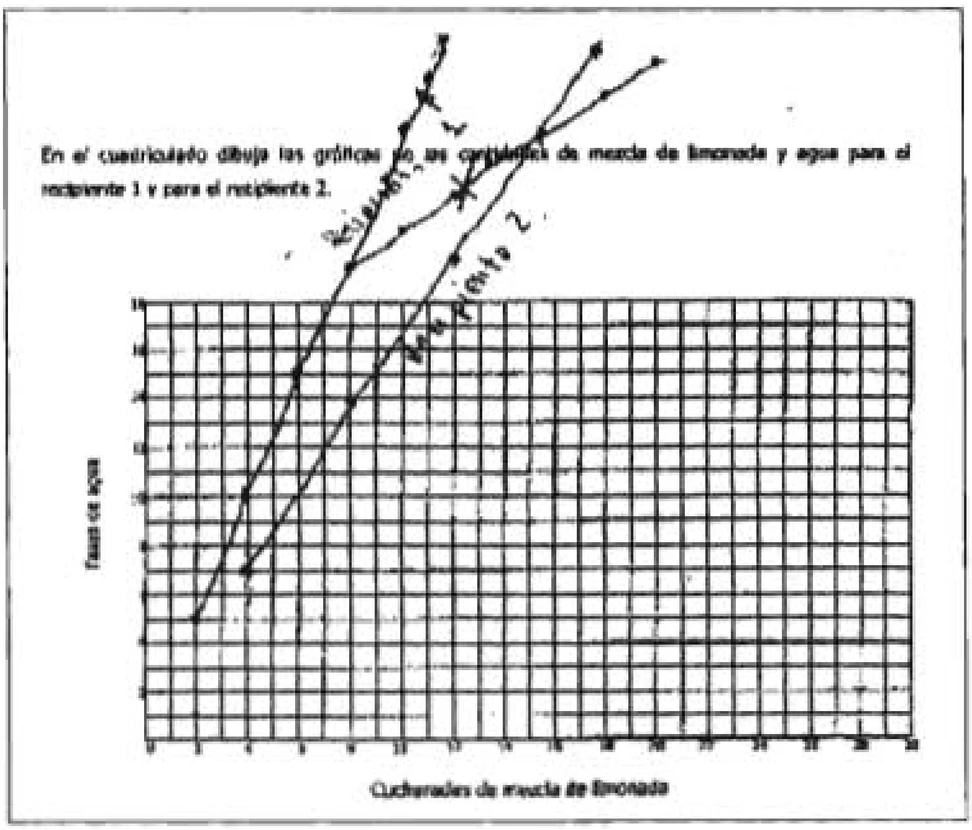


Figura 4.41. Gráfica elaborada por Enrique G.

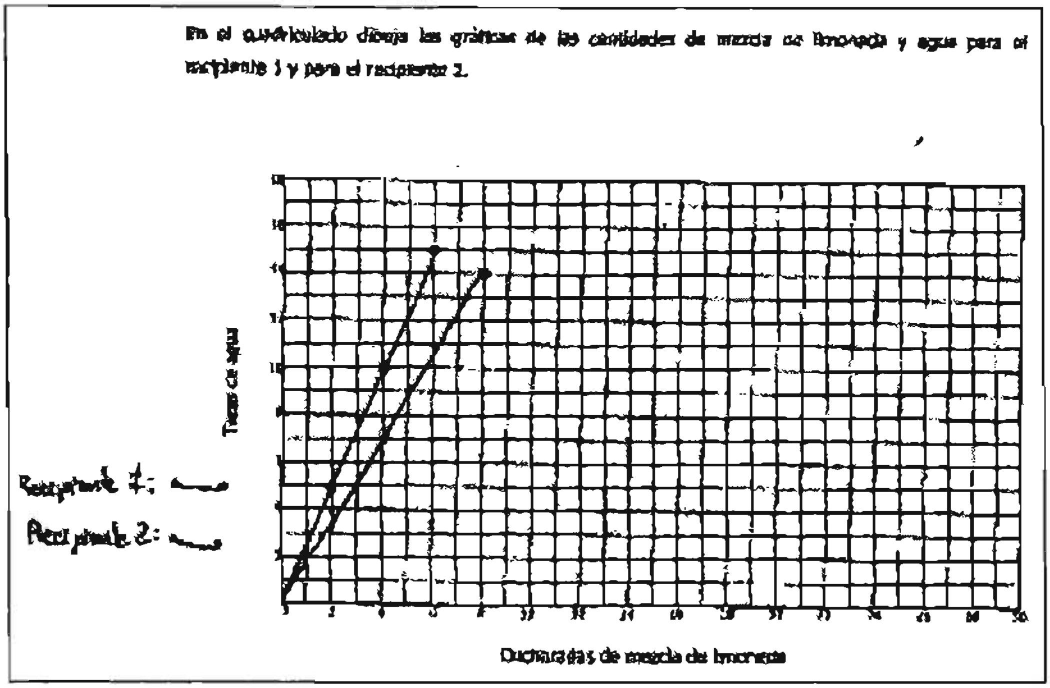



Figura 4.42. Gráfica elaborada por Rafael J.

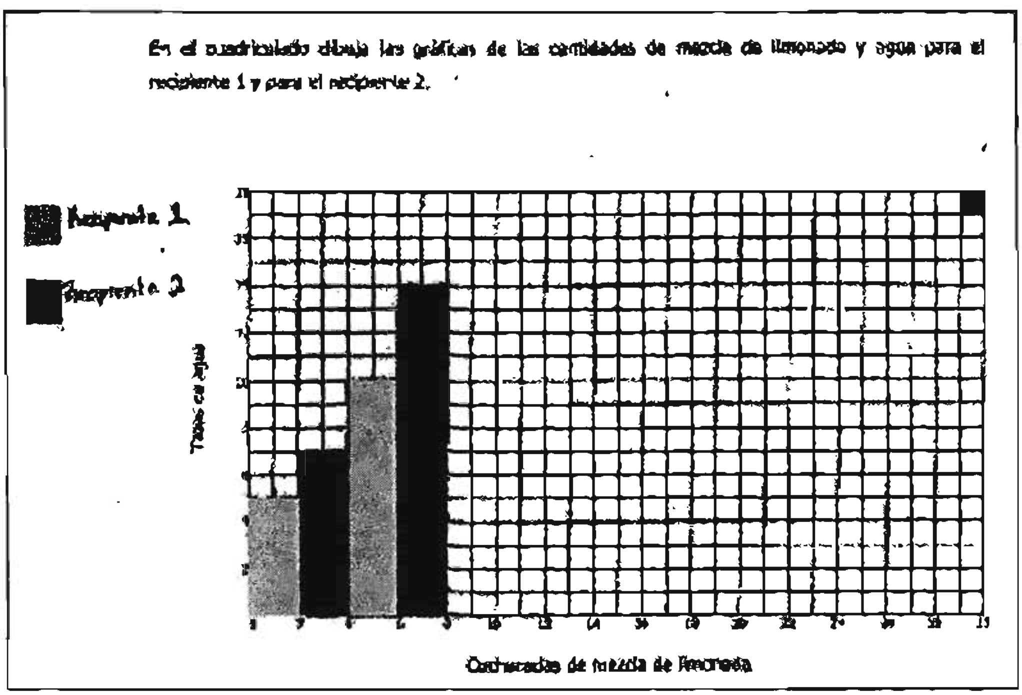



Figura 4.43. Gráfica elaborada por Cristian.

En el cuadriculado dibuja las gráficas de las cantidades de mezcla de limonada y agua para el recipiente 1 y para el recipiente 2.

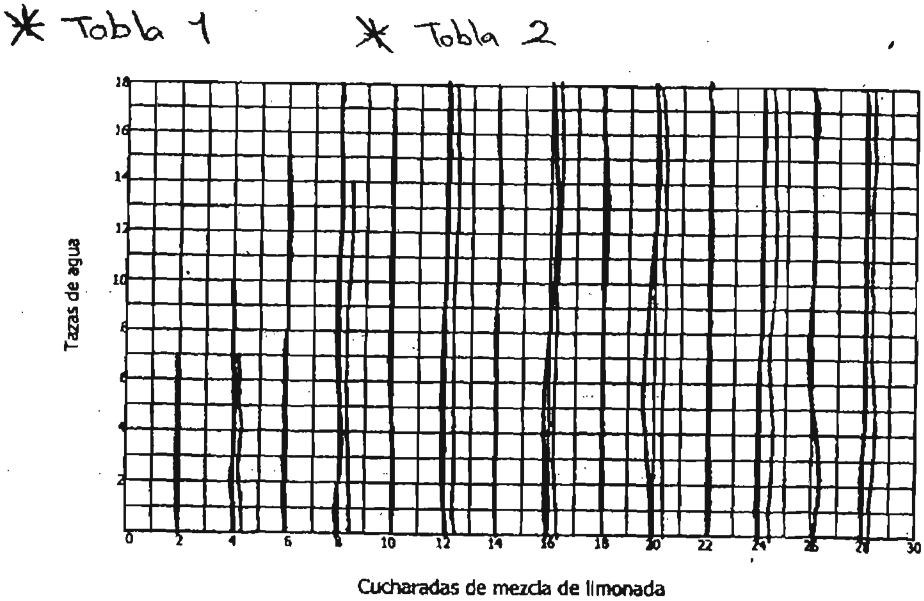



Figura 4.44. Gráfica elaborada por Daniel.

En el cuadriculado dibuja las gráficas de las cantidades de mezcla de limonada y agua para el recipiente 1 y para el recipiente 2.

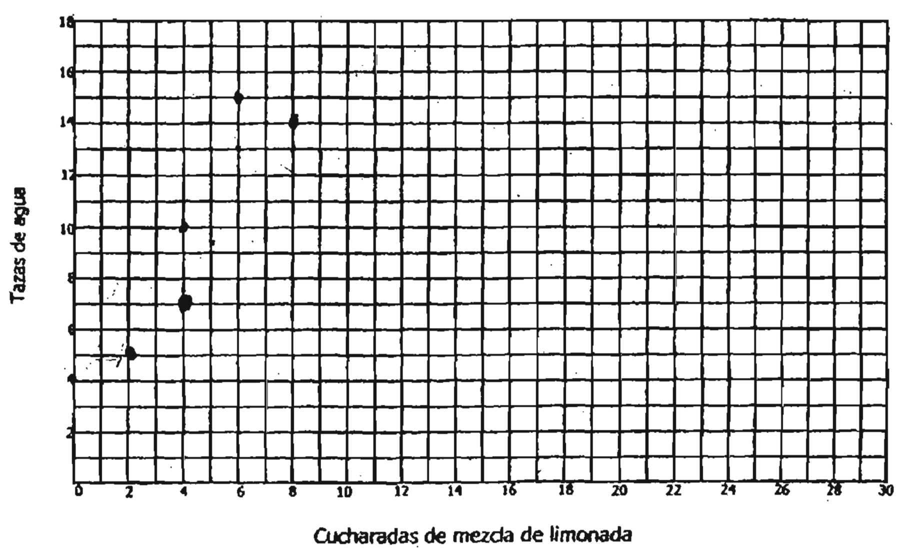



Figura 4.45. Gráfica elaborada por José María.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Sí | 12 |
| No | 1 |

Tabla 4.12. Respuestas a la pregunta 1.e.1 de la actividad 1, Mezcla de limonada.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Sí | 11 |
| No | 0 |
| Un poco | 2 |

Tabla 4.13. Respuestas a la pregunta 1.e.2 de la actividad 1, Mezcla de limonada.

En estas dos tablas, llama la atención que sólo para un estudiante las gráficas no eran similares y sí diferentes (vea Figura 4.46); 13 estudiantes (87%) contestaron que las gráficas eran similares y diferentes, por lo que se deduce que tal vez para ellos el ser similar correspondía a que ambas eran líneas rectas y el ser diferentes correspondía a que las pendientes eran distintas (vea figuras 4.47 y 4.48). Dos estudiantes (13%) respondieron que las gráficas eran un poco diferentes (vea Figura 4.49).

**e)** **¿Las gráficas son similares? ¿Son diferentes? ¿Por qué una gráfica está arriba de la otra? ¿Por qué una gráfica está más** ***empinada*** **que la otra?**

No, Sí, porque hay más vasos de agua, por el no. de cucharadas

Figura 4.46. Respuestas dadas por José María.

**e)** **¿Las gráficas son similares? ¿Son diferentes? ¿Por qué una gráfica está arriba de la otra? ¿Por qué una gráfica está más** ***empinada*** **que la otra?**

Si son similares. Si son diferentes.
Porque una tiene mayor Cantidad o proporcion que la otra. Porque Como ya habia dicho una tiene mayor proporcion que otra.

Figura 4.47. Respuestas dadas por Enrique G.

e) ¿Las gráficas son similares? ¿Son diferentes? ¿Por qué una gráfica está arriba de la otra? ¿Por qué una gráfica está más *empinada* que la otra?

R1 = Sí, son similares; ambas van en asenso
R2 = Sí
R3 = Tienen distintas cantidades
R4 = Porque el 1 que va de 2 en 2 es menor la distancia y por lo mismo queda más empinado

Figura 4.48. Respuestas dadas por Cintia F.

e) ¿Las gráficas son similares? ¿Son diferentes? ¿Por qué una gráfica está arriba de la otra? ¿Por qué una gráfica está más *empinada* que la otra?

R: Si, un poco, por que son diferentes las cantidades Por que es diferente

Figura 4.49. Respuestas dadas por Juan Carlos R.

| Respuestas (•) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Cantidad de mezcla de limonada y vasos de agua | | 3 | 3 |
| Diferente cantidad de vasos de agua | | 1 | 1 |
| Cantidades diferentes de mezcla de limonada | | 2 | 2 |
| Cantidades distintas | | 2 | 2 |
| Proporciones distintas | 3 | | 3 |
| Datos distintos | | 2 | 2 |
| Los datos afectan | | 1 | 1 |
| | 3 | 11 | |

Tabla 4.14. Respuestas a la pregunta 1.e.3 de la actividad 1, Mezcla de limonada.

Los estudiantes respondieron incorrectamente a esta pregunta (73%), ya que sus respuestas están en función de las cantidades; es decir, argumentan que hay más agua que mezcla de limonada; que la cantidad de agua es distinta, las cantidades son distintas, entre otros. Únicamente tres estudiantes argumentan que ello se debe a las proporciones entre las cucharadas de mezcla y a los vasos de agua diferentes en los recipientes (20%) (vea figuras 4.46, 4.47, 4.48 y 4.49).



ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

| Respuestas (•) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Cantidades distintas | | 5 | 5 |
| Distancia entre las rectas | | 2 | 2 |
| Proporciones distintas | 1 | | 1 |
| Número de cucharadas | 1 | | 1 |
| Los datos afectan | | 1 | 1 |
| Es diferente | | 1 | 1 |
| Cantidades diferentes de mezcla de limonada | 3 | | 3 |
| | 5 | 9 | |

Tabla 4.15. Respuestas a la pregunta 1.e.4 de la actividad 1, Mezcla de limonada.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Las gráficas se ven más alejadas | 11 |
| Las gráficas se separan | 2 |

Tabla 4.16. Respuestas a la pregunta 1.f.1 de la actividad 1, Mezcla de limonada.

A todos los estudiantes que contestaron a esta pregunta les quedó claro que las gráficas se iban alejando a medida que la cantidad de mezcla de limonada se incrementaba. Aunque la mayoría utiliza el término "alejada", 13% de ellos utiliza el término "se separan" (vea figuras 4.50, 4.51 y 4.52).

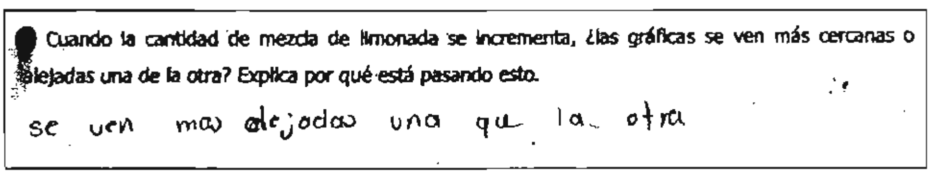

Cuando la cantidad de mezcla de limonada se incrementa, ¿las gráficas se ven más cercanas o alejadas una de la otra? Explica por qué está pasando esto.
se ven mas alejadas una que la otra

Figura 4.50. Respuesta dada por Cristian.

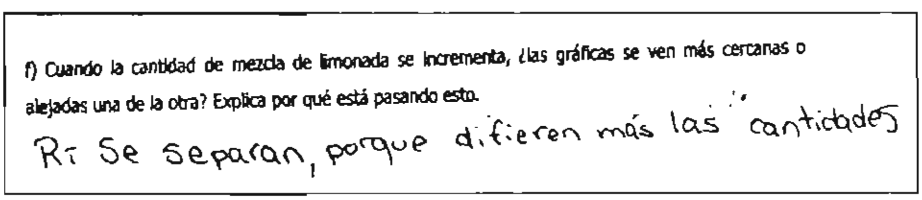

f) Cuando la cantidad de mezcla de limonada se incrementa, ¿las gráficas se ven más cercanas o alejadas una de la otra? Explica por qué está pasando esto.
R: Se separan, porque difieren más las cantidades

Figura 4.51. Respuesta dada por Juan D.

f) Cuándo la cantidad de mezcla de limonada se incrementa, ¿las gráficas se ven más cercanas o alejadas una de la otra? Explica por qué está pasando esto.

Mas alejados así porq tienen mas limón

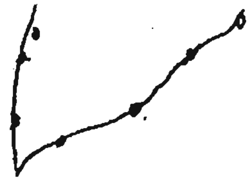


Figura 4.52. Respuesta dada por Héctor.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Aumenta la diferencia entre las cantidades | 3 |
| La cantidad de mezcla de limonada va aumentando | 2 |
| Cada vez hay mayor proporción | 1 |
| Entre más cantidad de mezcla haya, hay más espacio | 2 |
| Sin justificación | 6 |

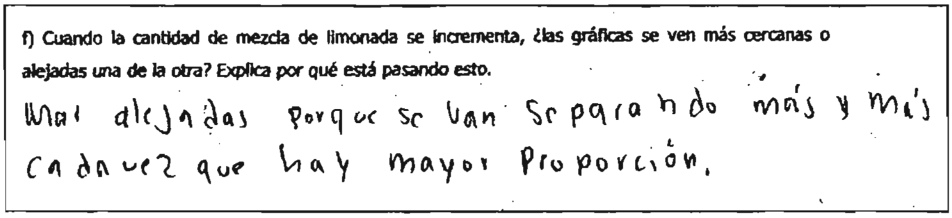
Tabla 4.17. Respuestas a la pregunta 1.f.2 de la actividad 1, Mezcla de limonada.

Las respuestas más interesantes fueron: a) *entre más cantidad de limonada,* (las rectas) *más se alejan* y b) *se van separando más y más* (las rectas) *cada vez que hay mayor proporción,* pues ambas respuestas se sitúan en el contexto y utilizan términos matemáticos, como es el caso de b) (proporción, vea figuras 4.53 y 4.54). Sólo 53% de los estudiantes justificaron su respuesta.

f) Cuando la cantidad de mezcla de limonada se incrementa, ¿las gráficas se ven más cercanas o alejadas una de la otra? Explica por qué está pasando esto.

Entre mas cantidad de limonada más se alejan

Figura 4.53. Respuesta dada por Daniel.



f) Cuando la cantidad de mezcla de limonada se incrementa, ¿las gráficas se ven más cercanas o alejadas una de la otra? Explica por qué está pasando esto.

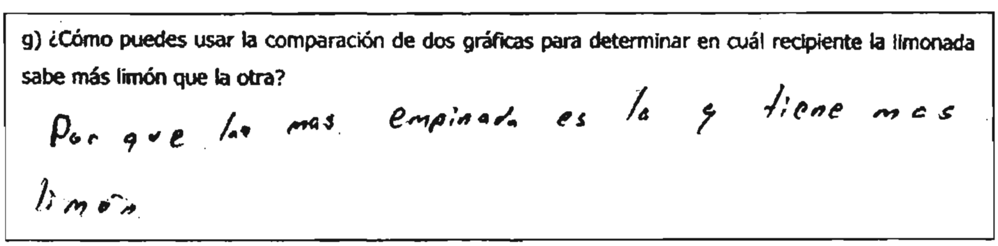
Mas alejadas porque se van separando más y más cada vez que hay mayor proporción.

Figura 4.54. Respuesta dada por Enrique G.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Haciendo una gráfica de equivalencias | 3 |
| Fijarse en las proporciones, la más inclinada es la que lleva más mezcla | 3 |
| Obtener una tabla de proporciones | 2 |
| Comparar equivalentemente y ver cuál está más abierta | 1 |
| Inclinación de la recta, la más empinada tiene más limón | 3 |
| Obtener la(s) gráfica(s) del(os) recipiente(s) | 2 |
| Hay más cucharadas de mezcla de limonada en una que en otra jarra | 1 |

Tabla 4.18. Respuestas a la pregunta 1.g de la actividad 1, Mezcla de limonada.

Las propuestas de solución, por parte de los estudiantes, para esta pregunta son interesantes. Por ejemplo, la que corresponde a *fijarse en las proporciones, la mas inclinada es la que lleva más mezcla* (25% razonó de esta manera) (ver Figura 4.23), e *inclinación de la recta la más empinada tiene más limón* (25% argumentó así) (ver Figura 4.55), indican que los estudiantes quienes argumentaron de esta forma utilizaron la información, tanto numérica como gráfica, que fueron obteniendo a medida que trabajaron en la actividad.



g) ¿Cómo puedes usar la comparación de dos gráficas para determinar en cuál recipiente la limonada sabe más limón que la otra?

Por que la mas empinada es la q tiene mas limón.

Figura 4.55. Respuesta dada por Juan Carlos R.

## Área fraccionada

| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Área, fracción y porcentaje | 3 | | 3 |
| Área y fracción | 2 | 2 | 4 |
| Fracción | 6 | | 6 |
| Área | | 2 | 2 |
| | 11 | 4 | |

Tabla 4.19. Respuestas a la pregunta 2.1.a de la actividad 2, Área Fraccionada.

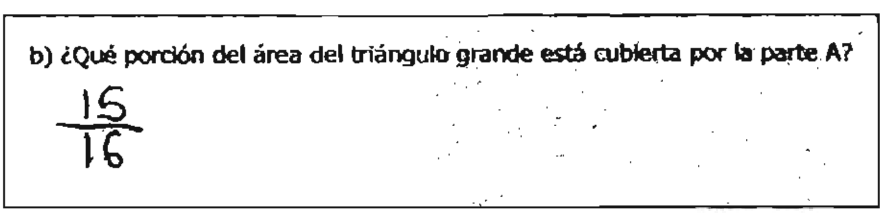
| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Área, fracción y porcentaje | 3 | | 3 |
| Área y fracción | 2 | 2 | 4 |
| Fracción | 6 | | 6 |
| Área | | 2 | 2 |
| | 11 | 4 | |

Tabla 4.20. Respuestas a la pregunta 2.1.b de la actividad 2, Área Fraccionada.

| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Área, fracción y porcentaje | 3 | | 3 |
| Área y fracción | 2 | 2 | 4 |
| Fracción | 6 | | 6 |
| Área | | 2 | 2 |
| | 11 | 4 | |

Tabla 4.21. Respuestas a la pregunta 2.1.c de la actividad 2, Área Fraccionada.

A pesar de que todas las estrategias utilizadas por los estudiantes, para responder estas tres preguntas, fueron correctas, cuatro de ellos (27%) obtuvieron el área de las figuras o regiones que se pidieron, pero no así la parte que esta área representaba del total de toda la región (vea figuras 4. 16, 4.17, 4.56 y 4.57).


b) ¿Qué porción del área del triángulo grande está cubierta por la parte A?

$\frac{15}{16}$

Figura 4.56. Estrategia utilizada por Rafael V.

**b) ¿Qué porción del área del cuadrado grande está cubierta por la parte Y?**

R= 18 $cm^2$ o 1/8 Parte.

Figura 4.57. Estrategia utilizada por Enrique G.

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| **Para X:** | |
| Multiplicación de medidas | 8 |
| Fraccionando la figura | 1 |
| Mediante el área | 3 |
| Dividiendo el cuadrado grande en octavos | |
| **Para Y:** | |
| División de medidas | 7 |
| Fraccionando la figura | 3 |
| Mediante el área | 1 |
| Resta de medidas | 1 |
| Dividiendo el cuadrado grande en octavos | 3 |
| **Para Z:** | |
| Sumando cuadrados y triángulos | 2 |
| Sumando y restando áreas | 2 |
| Multiplicación y suma | 3 |
| Resta de áreas | 1 |
| Fraccionando la figura | 3 |
| Mediante el área | 1 |
| Dividiendo el cuadrado grande en octavos | 3 |

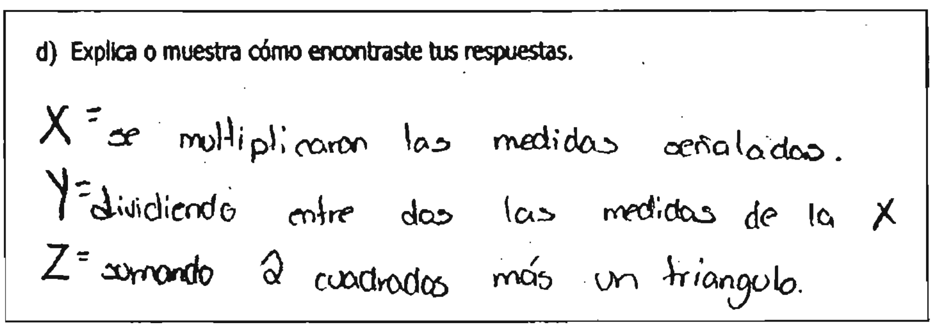
Tabla 4.22. Respuestas a la pregunta 2.1.d de la actividad 2, Área Fraccionada.

Los estudiantes echaron mano de diversas estrategias para responder a esta pregunta; desde las numéricas hasta la manipulación de figuras geométricas que elaboraron para esta actividad. Las estrategias consistieron en lo siguiente:

- *Multiplicación de medidas*: obtuvieron el área de la región X y vieron qué porción representaba del área total. Los estudiantes que utilizaron esta estrategia no mencionan nada de áreas, sólo indican que multiplicaron las medidas (vea Figura 4.58).
- *Fraccionando la figura*: dividieron la figura grande en cuadrados (como la región X) y triángulos (como la región Y, vea Figura 4.59).

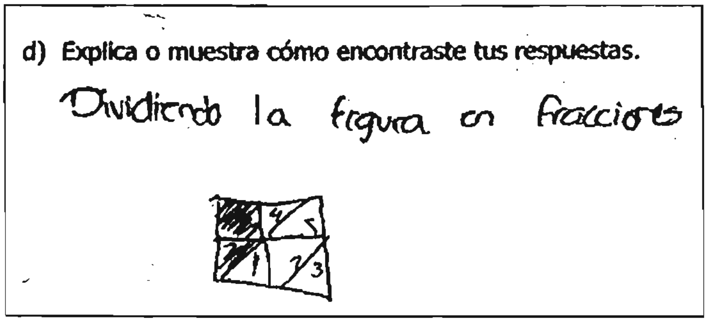
- *Mediante el área*: la estrategia es igual a la de multiplicación de medidas, pero se menciona que se está sacando el área o los cálculos corresponden a este procedimiento (vea Figura 4.60).
- *Dividiendo el cuadrado grande en octavos*: los estudiantes primero dividieron el cuadrado grande en cuatro cuadrados más pequeños (como la región X) y estos los dividieron en triángulos (como la región Y), obteniendo ocho triángulos inscritos (vea Figura 4.61).
- *División de medidas*: los estudiantes multiplicaron dos lados del cuadrado pequeño (región X) y dividieron entre dos (inscribir dos triángulos en el cuadrado, vea Figura 4.62).
- *Resta de medidas*: multiplicaron los dos lados del cuadrado (región X) y restaron el área del triángulo (región Y), pero no mencionan que obtuvieron el área (vea Figura 4.63).
- *Sumando cuadrados y triángulos*: dividen la región Z en dos cuadrados y un triángulo y ven qué porción del total de la figura representa (vea Figura 4.58).
- *Sumando y restando áreas*: suman las áreas de las regiones X, Y y las restan a la del cuadrado grande (área total, vea Figura 4.63).
- *Multiplicación y suma*: es igual a la estrategia *sumando cuadrados y triángulos*, pero los estudiantes lo expresan de manera numérica (vea Figura 4.62).
- *Resta de áreas*: esta estrategia consiste en obtener el área de la región total y restarle el área de las regiones X y Y (vea Figura 4.64).

Todas las estrategias utilizadas por los estudiantes fueron correctas.


**d) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.**

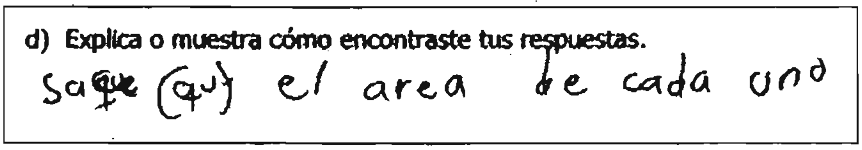
X = se multiplicaron las medidas señaladas.
Y = dividiendo entre dos las medidas de la X
Z = sumando 2 cuadrados más un triangulo.

Figura 4.58. Estrategia utilizada por Guillermina.


d) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.

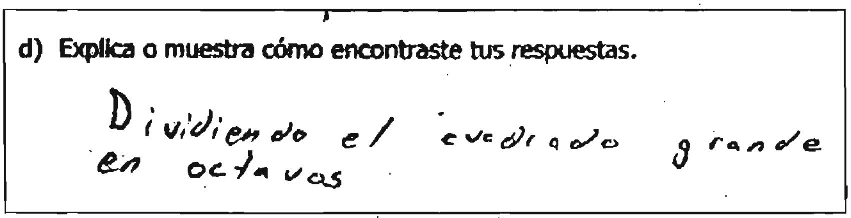
Dividiendo la figura en fracciones

Figura 4.59. Estrategia utilizada por Héctor.


d) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.

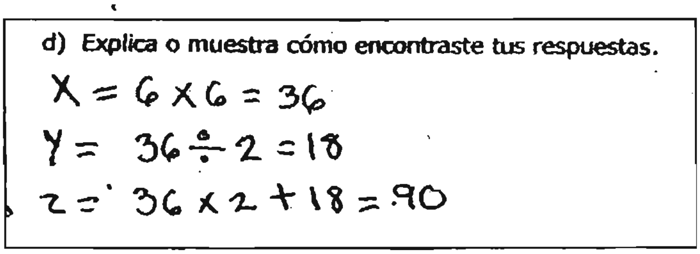
saque (que) el area de cada uno

Figura 4.60. Estrategia utilizada por Amaury.


d) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.

Dividiendo el cuadrado grande en octavos

Figura 4.61. Estrategia utilizada por Juan Carlos R.

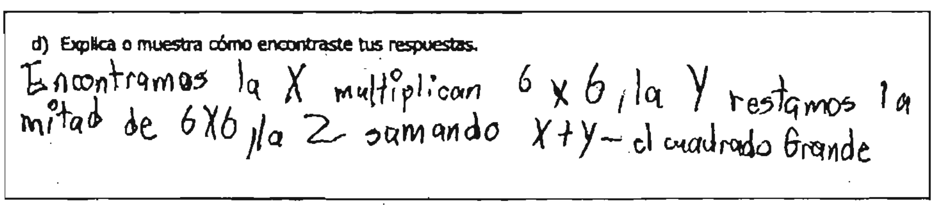

d) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.

$X = 6 \times 6 = 36$

$Y = 36 \div 2 = 18$

$Z = 36 \times 2 + 18 = 90$

Figura 4.62. Estrategia utilizada por Paulina.


d) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.

Encontramos la X multiplican 6 x 6, la Y restamos la mitad de 6X6, la Z sumando X+Y – el cuadrado Grande

Figura 4.63. Estrategia utilizada por José María.

d) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.
Encontramos la R= de la parte X multiplicando 6x6.
Encontramos la R= de la parte Y Dividiendo la parte X ÷ 2.
Encontramos la R= de la parte Z Saque el area del cuadrado grande y despues le Resto lo de la Parte X e Y.

Figura 4.64. Estrategia utilizada por Enrique G.

| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Área y fracción | 2 | 1 | 3 |
| Fracción | 9 | | 9 |
| Área | | 2 | 2 |
| Número y fracción | | 1 | 1 |
| | 11 | 4 | |

Tabla 4.23. Respuestas a la pregunta 2.2.a de la actividad 2, Área Fraccionada.

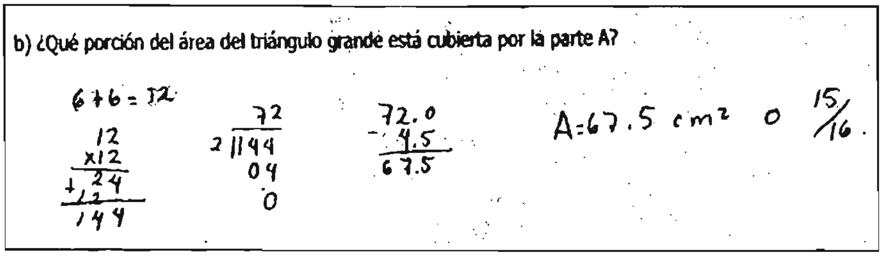
| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Área y fracción | 2 | 1 | 3 |
| Fracción | 9 | | 9 |
| Área | | 2 | 2 |
| Número y fracción | | 1 | 1 |
| | 11 | 4 | |

Tabla 4.24. Respuestas a la pregunta 2.2.b de la actividad 2, Área Fraccionada.

A pesar de que todas las estrategias utilizadas por los estudiantes para responder estas tres preguntas fueron correctas, cuatro estudiantes (27%) obtuvieron el área de las figuras o regiones que se pidieron, pero no lograron encontrar la parte que esta área representaba del total de toda la región (vea figuras 4.56, 4.65, 4.66 y 4.67).

a) ¿Qué porción del área del triángulo grande está cubierta por la parte B? 4.5 cm²

Figura 4.65. Estrategia utilizada por José María.


b) ¿Qué porción del área del triángulo grande está cubierta por la parte A?

6+6 = 12

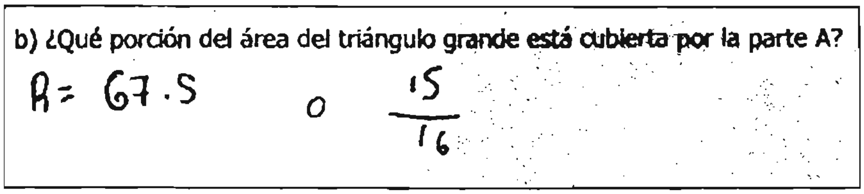
12 x 12 = 144

144 ÷ 2 = 72

72.0 − 4.5 = 67.5

A: 67.5 cm² o 15/16.

Figura 4.66. Estrategia utilizada por Cintia F.


b) ¿Qué porción del área del triángulo grande está cubierta por la parte A?

A = 67.5 o 15/16

Figura 4.67. Estrategia utilizada por Enrique G.

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Inscripción imaginaria de triángulos | 1 |
| Inscripción física de triángulos | 3 |
| Inscripción de triángulos mediante dobleces | 2 |
| Multiplicación y división de medidas | 1 |
| Resta de áreas | 1 |
| Resta de fracciones | 6 |
| Obteniendo el área de los triángulos | 1 |

Tabla 4.25. Respuestas a la pregunta 2.2.c de la actividad 2, Área Fraccionada.

Los estudiantes echaron mano de diversas estrategias (todas correctas), desde las numéricas hasta la manipulación de figuras geométricas que elaboraron para esta actividad. Éstas consistieron en lo siguiente:

- *Inscripción de triángulos*: en esta estrategia el estudiante inscribió en la región total, triángulos como el de región B, contó cuántos eran y quitó uno; se hizo de tres maneras distintas:
  - *imaginaria*: el procedimiento fue hecho de manera mental (vea Figura 4.68),

- *física*: el estudiante utilizó el triángulo de región B y los trazó en la figura grande (vea Figura 4.69),
- *mediante dobleces*: el estudiante dobló el triángulo grande de manera que quedaran inscritos por medio de dobleces (vea Figura 4.70).

- *Multiplicación y división de medidas*: consistió en obtener el área de la región B y de la región total, esta última se divide entre dos y se le resta la de la región B. Este procedimiento se hizo de manera numérica (vea Figura 4.71).
- *Resta de áreas*: se obtuvo el área de la región total y se le restó la de la región A o B. Esta fue la estrategia más utilizada (40%, vea Figura 4.72).
- *Resta de fracciones*: si la región total es 16/16, entonces la región B ocupa 1/16 y la región A ocupa 15/16 de ella. Las preguntas se contestan calculando [(16/16)-(1/16)] o [(16/16)-(15/16)] (vea Figura 4.73).
- *Obteniendo el área de los triángulos*: consistió en obtener la de la región B y la de la región total y después restarlas (vea Figura 4.74).

> c) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.
>
> Nos imaginamos cuantos triangulos B caben en A, lo cual es 16 y de ahí nos guiamos para responder.

Figura 4.68. Estrategia utilizada por Guillermina.

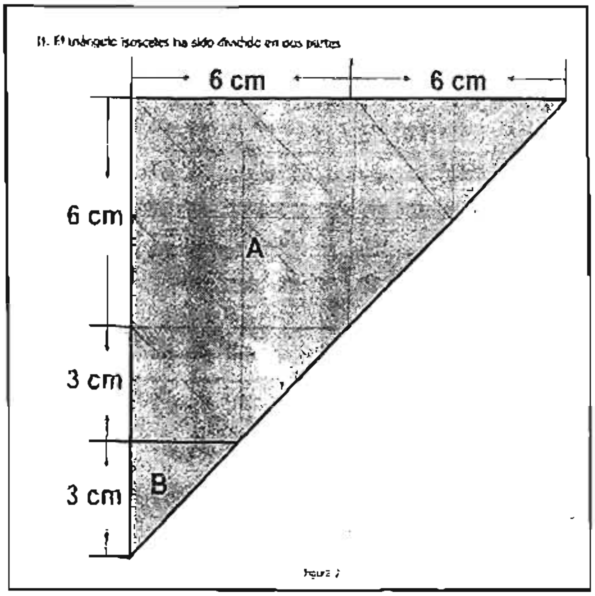



Figura 4.69. Estrategia utilizada por Rafael J.

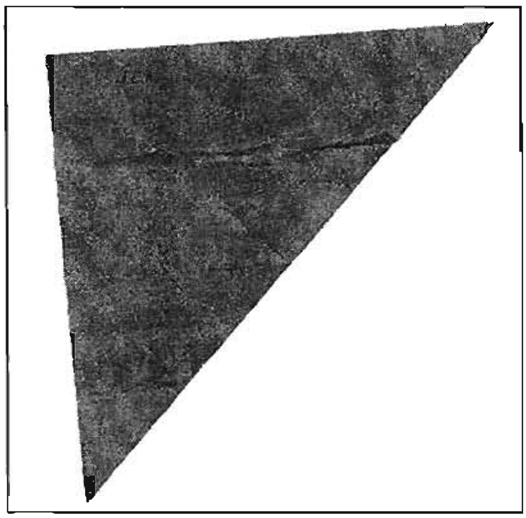
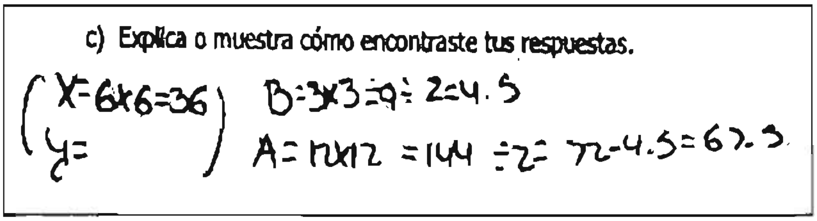


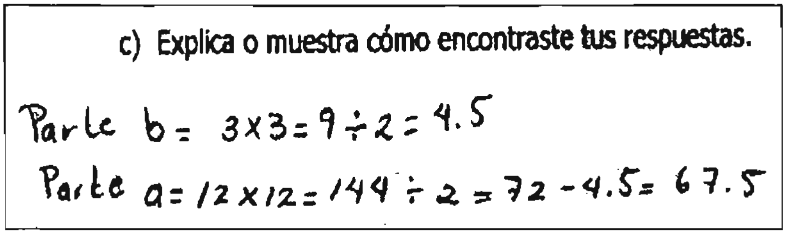
Figura 4.70. Estrategia utilizada por Juan Carlos R.


c) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.

(X=6x6=36) B=3x3=9÷2=4.5

(y= ) A=12x12=144÷2=72-4.5=67.5

Figura 4.71. Estrategia utilizada por Adriana.

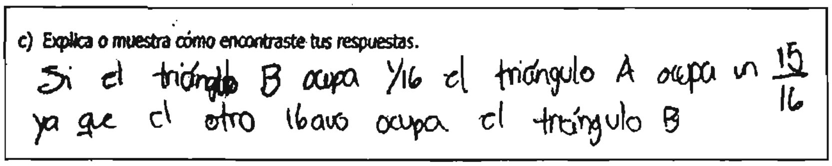


c) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.

Parte b = 3x3=9÷2=4.5

Parte a= 12x12=144÷2=72-4.5= 67.5

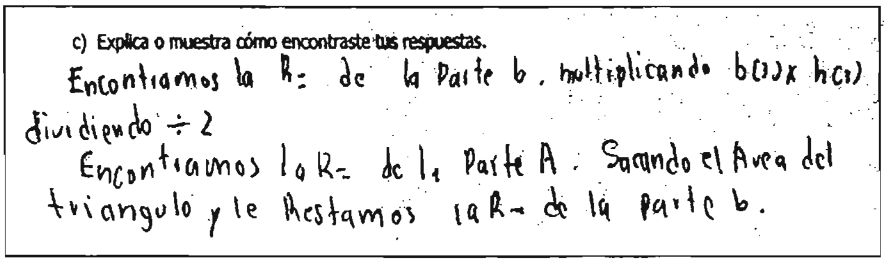
Figura 4.72. Estrategia utilizada por Cintia F.



c) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.

Si el triángulo B ocupa 1/16 el triángulo A ocupa un 15/16 ya que el otro 16avo ocupa el triángulo B

Figura 4.73. Estrategia utilizada por Héctor.



c) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.

Encontramos la A= de la Parte b, multiplicando b(1)x h(1) dividiendo ÷ 2

Encontramos la A= de la Parte A: Sumando el Area del triangulo y le Restamos la A= de la parte b.

Figura 4.74. Estrategia utilizada por Enrique G.

## Receta de cocina

| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Encuentra el número de pollos y con este número multiplica todos los ingredientes de la receta original | 2 | | 2 |
| Multiplica el número de ingredientes por el mínimo de invitados | 5 | | 5 |
| Multiplica el número de ingredientes por el máximo de invitados | 1 | 1 | 2 |
| Multiplica el número de ingredientes por el mínimo y el máximo de invitados | 3 | | 3 |
| | 11 | 1 | |

Tabla 4.26. Respuestas a la pregunta 3.1.a de la actividad 3, Receta de cocina.

A pesar de que en la receta se señala que los ingredientes son para cinco o seis personas, sólo 25% de los estudiantes calculan para ambos casos (máximo y mínimo de invitados, vea Figura 4.75), los demás lo hacen para el mínimo o el máximo. Dos estudiantes (17%) encontraron una expresión general para calcular la cantidad de ingredientes a partir de cinco o seis invitados: $5n$ y $6n$ (vea figuras 4.76 y 4.77). La respuesta incorrecta, corresponde a un estudiante que no calculó de manera completa todos los ingredientes. La mayoría de los estudiantes (42%) calcularon para el mínimo de invitados.

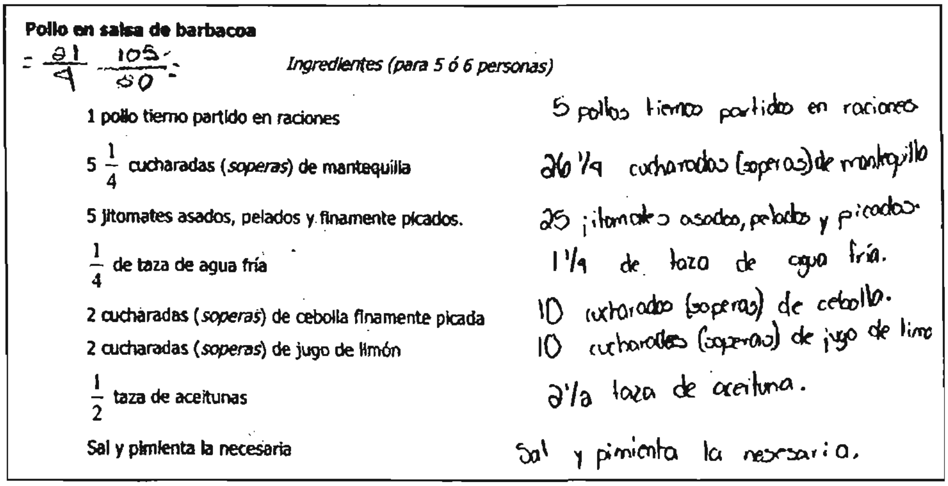
Pedro y María tendrán una reunión con 30 invitados. Como desean preparar la cena, eligen de su recetario el siguiente platillo. ¿Cuál será la cantidad de ingredientes que requerirán para preparar la cena para sus 30 invitados? R= 5 o 6 pollos, 26 1/4 o 31 1/2 cucharadas de mantequilla, 25 o 30 jitomates, 1 1/4 o 1 1/2 de tazas de agua, 10 o 12 cucharadas de cebolla y de jugo de limón; 2 1/2 o 3 tazas de aceitunas

Figura 4.75. Respuesta dada por Rafael J.

**Pollo en salsa de barbacoa**

| *Ingredientes (para 5 ó 6 personas)* | (5 n) | (6 n) |
|---|---|---|
| 1 pollo tierno partido en raciones | 6 | 5 |
| $5\frac{1}{4}$ cucharadas (*soperas*) de mantequilla | $31\frac{1}{2}$ | $26\frac{1}{4}$ |
| 5 jitomates asados, pelados y finamente picados. | 30 | 25 |
| $\frac{1}{4}$ de taza de agua fría | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{4}$ |
| 2 cucharadas (*soperas*) de cebolla finamente picada | 12 | 10 |
| 2 cucharadas (*soperas*) de jugo de limón | 12 | 10 |
| $\frac{1}{2}$ taza de aceitunas | 3 | 2.5 |
| Sal y pimienta la necesaria | | |

Figura 4.76. Respuesta dada por Cintia F.


**Pollo en salsa de barbacoa**

$= \frac{21}{4} \quad \frac{105}{20} =$

*Ingredientes (para 5 ó 6 personas)*

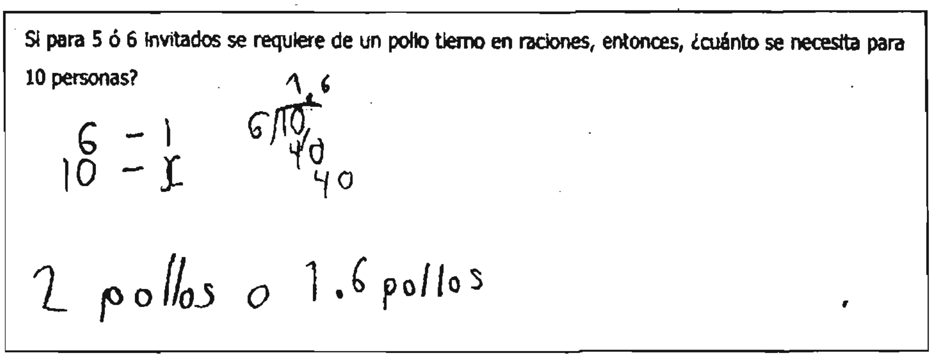
| | |
|---|---|
| 1 pollo tierno partido en raciones | 5 pollos tierno partido en raciones |
| $5\frac{1}{4}$ cucharadas (*soperas*) de mantequilla | 26 1/4 cucharadas (soperas) de mantequilla |
| 5 jitomates asados, pelados y finamente picados. | 25 jitomates asados, pelados y picados. |
| $\frac{1}{4}$ de taza de agua fría | 1 1/4 de taza de agua fría. |
| 2 cucharadas (*soperas*) de cebolla finamente picada | 10 cucharadas (soperas) de cebolla. |
| 2 cucharadas (*soperas*) de jugo de limón | 10 cucharadas (soperas) de jugo de limo |
| $\frac{1}{2}$ taza de aceitunas | 2 1/2 taza de aceituna. |
| Sal y pimienta la necesaria | Sal y pimienta la necesaria. |

Figura 4.77. Respuesta dada por Guillermina.

| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Multiplicando por dos | 1 | | 1 |
| Regla de tres | 1 | | 1 |
| Sin justificación | 14 | | 14 |
| | 16 | 0 | |

Tabla 4.27. Respuestas a la pregunta 3.1.b de la actividad 3, Receta de cocina.

Únicamente dos estudiantes justificaron sus resultados (13%, vea figuras 4.14, 4.78 y 4.79) los demás, aunque no lo hicieron, parece que optaron por la estrategia de multiplicar por dos, que es la más rápida y natural. Ambas fueron correctas.


Si para 5 ó 6 invitados se requiere de un pollo tierno en raciones, entonces, ¿cuánto se necesita para 10 personas?

6 – 1
10 – x

$6\overline{)10}$ = 1.6

2 pollos o 1.6 pollos

Figura 4.78. Estrategia utilizada por Amaury.

Si para 5 ó 6 invitados se requiere de un pollo tierno en raciones, entonces, ¿cuánto se necesita para 10 personas?

2 pollos, de 5 personas cada uno

Figura 4.79. Estrategia utilizada por Juan Carlos A.

| Respuestas | |
|---|---|
| Sí | 16 |
| No | 0 |

Tabla 4.28. Respuestas a la pregunta 3.1.c.1 de la actividad 3, Receta de cocina.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Los ingredientes aumentan de acuerdo a cuánto aumentan los invitados | 3 |
| El número de personas es proporcional al número de ingredientes | 4 |
| La proporción aumenta o disminuye | 1 |
| Igual proporción | 2 |
| Aumenta proporcionalmente | 4 |
| El número de personas aumenta (o disminuye) proporcionalmente | 1 |
| El número aumenta o disminuye en forma diferente | 1 |

Tabla 4.29. Respuestas a la pregunta 3.1.c.2 de la actividad 3, Receta de cocina.

Los estudiantes no tuvieron dificultades al responder la pregunta de variación proporcional y al justificarla; la mayoría tiene la idea de lo que esto significa, aunque algunos estudiantes lo explican de manera más formal que otros (vea figuras 4.20 y 4.80).

¿Consideras que la cantidad de ingredientes a utilizar variará proporcionalmente de acuerdo con el número de personas? ¿Por qué? Sí, aumenta proporcionalmente

1 pollo 5 ó 6 personas

2 pollos 10 ó 12 personas así sucesivamente.

Figura 4.80. Respuesta dada por Enrique G.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Dependiendo de la cantidad de comida | 3 |
| De acuerdo con el número de pollos | 13 |

Tabla 4.30. Respuestas a la pregunta 3.2.a de la actividad 3, Receta de cocina.

| Respuesta correcta | Respuesta incorrecta |
|---|---|
| 16 | 0 |

Tabla 4.31. Respuestas a la pregunta 3.2.b de la actividad 3, Receta de cocina.

| Respuesta correcta | Respuesta incorrecta |
|---|---|
| 16 | 0 |

Tabla 4.32. Respuestas a la pregunta 3.2.c de la actividad 3, Receta de cocina.

Los estudiantes no tuvieron dificultades para interpretar la gráfica y contestar las preguntas. Todos lo hicieron de manera correcta.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| **Regla para 5 o 10 invitados:**<br>Regla de tres | 9 |
| **Regla para *n* invitados:**<br>$n \cdot 1 \div 5 = na$ pollo<br>Cada cinco invitados aumenta un pollo<br>El número de pollos es la quinta parte del número de invitados<br>Regla de tres | <br>3<br>4<br>3<br>1 |

Tabla 4.33. Respuestas a la pregunta 3.2.d de la actividad 3, Receta de cocina.

Once estudiantes (69%) trataron de responder a la pregunta de manera general (vea figuras 4.81, 4.82 y 4.83), aunque sólo tres de ellos (27%) lo hicieron de manera "algebraica" (vea figuras 4.84 y 4.85). Al parecer, los estudiantes han tenido poco contacto con el álgebra ya que *n* denota al número de invitados y utilizan *na* como: número de pollos en lugar de emplear otra letra distinta (vea Figura 4.85). La expresión *na* significaría (de manera estricta) *número de invitados por a*.

Para calcular el número de pollos para cinco y diez invitados, la única estrategia que utilizaron los estudiantes fue la regla de tres.

d) Escribe la regla para obtener el número de pollos requeridos para 5 invitados, para 10 invitados. Trata de escribir la regla general para *n* invitados. Describe tu proceso de solución lo más claro que sea posible.

Usamos la regla de tres

Ejemplo

5 — 1
10 — X

10 se multiplica por 1 y lo que salga se divide entre 5 y lo que salga es la X

Figura 4.81. Respuesta dada por Amaury.

d) Escribe la regla para obtener el número de pollos requeridos para 5 invitados, para 10 invitados. Trata de escribir la regla general para *n* invitados. Describe tu proceso de solución lo más claro que sea posible.

[redacted]

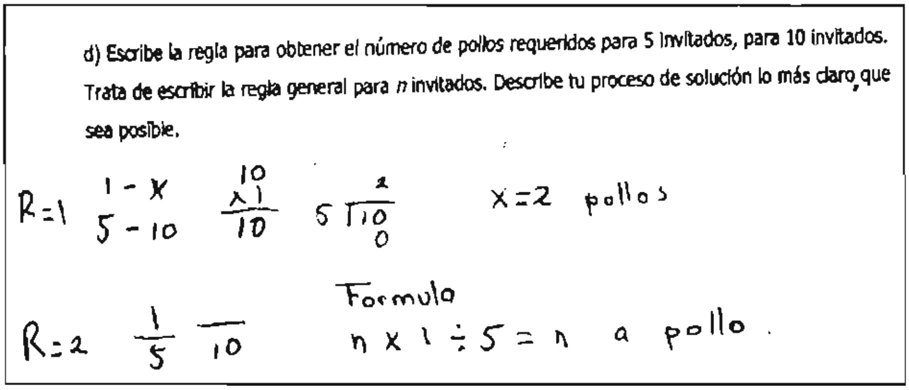
El número de pollos es la 5ª parte del número de invitados

Figura 4.82. Respuesta dada por Juan Carlos R.

d) Escribe la regla para obtener el número de pollos requeridos para 5 invitados, para 10 invitados. Trata de escribir la regla general para *n* invitados. Describe tu proceso de solución lo más claro que sea posible.

Por c/5 invitados se aumenta un pollo a esto se le llama variación proporcional directa

Figura 4.83. Respuesta dada por Alonso.



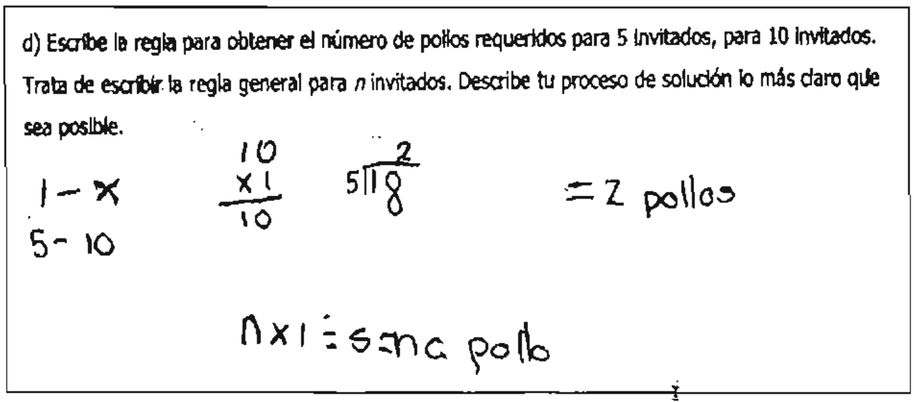
d) Escribe la regla para obtener el número de pollos requeridos para 5 invitados, para 10 invitados. Trata de escribir la regla general para *n* invitados. Describe tu proceso de solución lo más claro que sea posible.

R=1 1 - x
5 - 10
10 x 1 = 10
10 ÷ 5 = 2
x = 2 pollos

Formula

R=2 1/5 10
n x 1 ÷ 5 = n a pollo.

Figura 4.84. Respuesta dada por Cintia F.



d) Escribe la regla para obtener el número de pollos requeridos para 5 invitados, para 10 invitados. Trata de escribir la regla general para *n* invitados. Describe tu proceso de solución lo más claro que sea posible.

1 - x
5 - 10
10 x 1 = 10
10 ÷ 5 = 2
= 2 pollos

n x 1 ÷ 5 = n a pollo

Figura 4.85. Respuesta dada por Paulina.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Cada vez que aumenta el número de invitados debe aumentar la cantidad de pollos, provocando una inclinación en la recta | 3 |
| La proporción sigue siendo la misma | 3 |
| Disminución proporcional de pollos e invitados | 1 |
| Disminución de pollos y humanos | 1 |
| Las cantidades aumentan proporcionalmente | 3 |
| Proporción de pollos e invitados | 3 |
| Al aumento de la cantidad de invitados la recta asciende en concordancia con el número de comida | 1 |
| Disminución de proporciones entre pollos y personas | 1 |

Tabla 4.34. Respuestas a la pregunta 3.2.e de la actividad 3, Receta de cocina.

Ningún estudiante escribió qué significaba exactamente la inclinación de la recta; se fijaron en qué era lo que pasaba con los datos y ambas rectas (mínimo y máximo de invitados, vea figuras 4.18 y 4.86). La respuesta más acertada es la que corresponde a *las cantidades aumentan proporcionalmente*, empleada por tres estudiantes (19%, vea Figura 4.87).

e) ¿Qué significa la inclinación de la recta? disminución de pollos y humanos

Figura 4.86. Respuesta dada por José María.

e) ¿Qué significa la inclinación de la recta?

R: Que las cantidades aumentan proporcional-
mente.

Figura 4.87. Respuesta dada por Juan D.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| 100 | 4 |
| 120 | 3 |
| Mínimo 100 y máximo 120 | 9 |

Tabla 4.35. Respuestas a la pregunta 3.2.f de la actividad 3, Receta de cocina.

Todos los estudiantes respondieron de manera correcta y la mayoría (56%) hizo los cálculos para el máximo y mínimo de personas.

## Vamos de compras

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Primero suma los precios de todas las prendas y al final obtiene el descuento | 2 |
| Mediante regla de tres, encuentra el precio con descuento por cada prenda y al final los suma | 2 |
| Encuentra el precio con descuento por cada prenda y al final los suma | 3 |
| Encuentra el precio con descuento por cada prenda, no muestra procedimiento | 6 |
| Procedimiento confuso o incompleto | 3 |

Tabla 4.36. Respuestas a la pregunta 4.1.a de la actividad 4, Vamos de compras.

La mayoría de los estudiantes calculó el descuento prenda por prenda (88%, vea Figura 4.88), únicamente 13% suma primero los precios de toda la mercancía y al final obtiene el descuento (vea Figura 4.89). Dos estudiantes (13%) utilizaron la regla de tres como estrategia de solución (vea Figura 4.90).

| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Primero suma los precios de todas las prendas y al final obtiene el descuento | 5 | 1 | 6 |
| Mediante regla de tres, encuentra el precio con descuento por cada prenda y al final los suma | 3 | | 3 |
| Encuentra el precio con descuento por cada prenda y al final los suma | 1 | | 1 |
| Encuentra el precio con descuento por cada prenda, no muestra procedimiento | 6 | | 6 |
| | 15 | 1 | |

Tabla 4.37. Respuestas a la pregunta 4.1.b de la actividad 4, Vamos de compras.

En esta pregunta, el número de estudiantes que obtiene al final el descuento es el mismo de aquellos que obtienen el descuento prenda por prenda y que no muestran el procedimiento (38%). Esta última estrategia fue la más utilizada (63%, vea Figura 4.88). La respuesta incorrecta corresponde a un estudiante que tuvo errores de cálculo, pero no de procedimiento.

| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Primero suma los precios de todas las prendas y al final obtiene el descuento | 5 | 1 | 6 |
| Mediante regla de tres, encuentra el precio con descuento por cada prenda y al final los suma | 1 | | 1 |
| Encuentra el precio con descuento por cada prenda, no muestra procedimiento | 6 | 2 | 8 |
| | 12 | 3 | |

Tabla 4.38. Respuestas a la pregunta 4.1.c de la actividad 4, Vamos de compras.

La estrategia más utilizada (60%) fue calcular el descuento prenda por prenda (vea Figura 4.88), sólo 40% sumó todos los precios y al final calculó el descuento (vea Figura 4.89). Las respuestas incorrectas (20%) corresponden a estudiantes que tuvieron errores de cálculo, pero no de procedimiento.

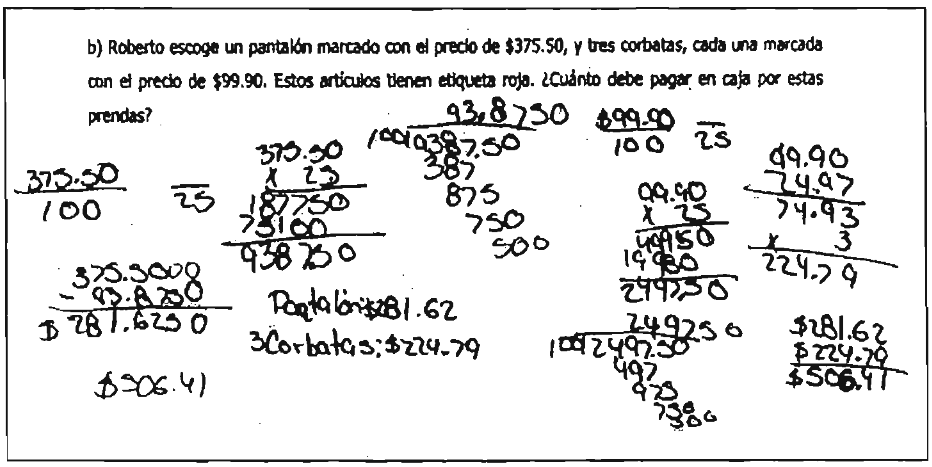
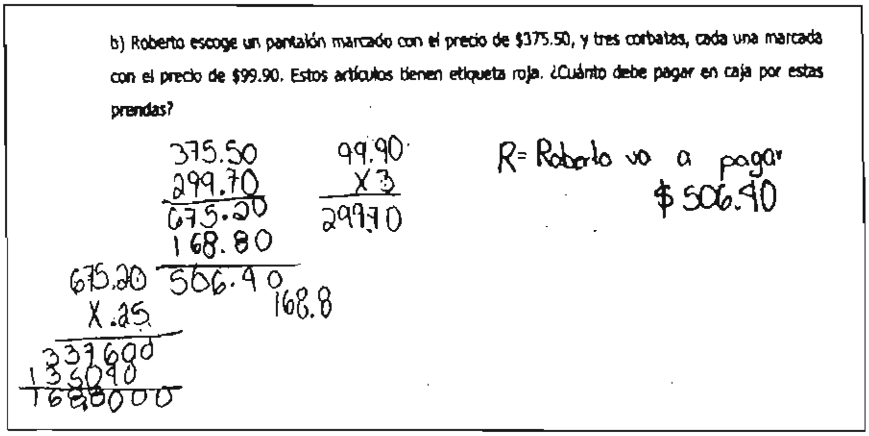

b) Roberto escoge un pantalón marcado con el precio de $375.50, y tres corbatas, cada una marcada con el precio de $99.90. Estos artículos tienen etiqueta roja. ¿Cuánto debe pagar en caja por estas prendas?



Figura 4.88. Estrategia utilizada por Adriana.



b) Roberto escoge un pantalón marcado con el precio de $375.50, y tres corbatas, cada una marcada con el precio de $99.90. Estos artículos tienen etiqueta roja. ¿Cuánto debe pagar en caja por estas prendas?

375.50 + 299.70 = 675.20

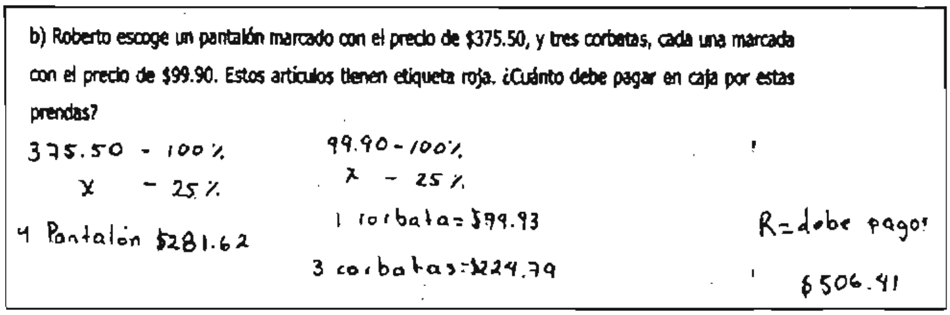
99.90 x 3 = 299.70

675.20 x .25 = 168.8

675.20 − 168.80 = 506.40

R= Roberto va a pagar $506.40

Figura 4.89. Estrategia utilizada por Guillermina.



b) Roberto escoge un pantalón marcado con el precio de $375.50, y tres corbatas, cada una marcada con el precio de $99.90. Estos artículos tienen etiqueta roja. ¿Cuánto debe pagar en caja por estas prendas?

375.50 - 100%
x - 25%

1 Pantalón $281.62

99.90 - 100%
x - 25%

1 corbata = $99.93

3 corbatas = $224.79

R= debe pagar $506.41

Figura 4.90. Estrategia utilizada por Cintia F.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Le conviene el descuento prenda por prenda | 0 |
| Le conviene el descuento al final | 4 |
| Da lo mismo | 10 |
| Realiza los cálculos, pero no concluye | 1 |

Tabla 4.39. Respuestas a la pregunta 4.1.d de la actividad 4, Vamos de compras.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Le conviene el descuento prenda por prenda | 5 |
| Le conviene el descuento al final | 0 |
| Da lo mismo | 8 |
| Realiza los cálculos, pero no concluye | 2 |

Tabla 4.40. Respuestas a la pregunta 4.1.e de la actividad 4, Vamos de compras.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Le conviene el descuento prenda por prenda | 5 |
| Le conviene el descuento al final | 3 |
| Da lo mismo | 7 |

Tabla 4.41. Respuestas a la pregunta 4.1.f de la actividad 4, Vamos de compras.

Se puede pensar que si los estudiantes encuentran, para un caso particular que da lo mismo calcular el descuento prenda por prenda que calcularlo al final de la compra responderían a las preguntas 4.1.d, 4.1.e y 4.1.f de manera similar, ya que estas preguntas son parecidas. No sucedió de esta manera porque al hacer los cálculos, los estudiantes truncaron y redondearon las cantidades, lo que al final, cuando comparaban los dos procedimientos, los resultados diferían por centavos, ello los llevó a concluir que convenía más un procedimiento que otro (vea Figura 4.91).

Siete estudiantes (47%) concluyeron en las tres preguntas que daba lo mismo; de estos, tres estudiantes explican que da lo mismo siempre y cuando el descuento sea igual para todas las prendas y dos de ellos agregan que calcular el descuento al total de la compra es más rápido (vea Figura 4.92).

d) ¿Qué le conviene más a José: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

Es la misma cantidad, así que es igual.

+ 29.00
148.30
177.30
x .10
17.7300
Sobre la cantidad

\- 177.30
17.73
159.57

\+ 26.10
133.47
159.57
Por cada prenda

e) ¿Qué le conviene más a Roberto: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

Sobre la cantidad

\+ 375.50
299.70
675.20
x .25
337600
135040
168.8000

\- 675.20
168.80
506.40

Por cada prenda.

\+ 281.62
224.79
506.41

R: Es lo mismo

f) ¿Qué le conviene más a Alejandra: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

Por cada prenda

429.31
212.30
\+ 325.13
198.77
1164.81
7

Sobre la cantidad

563.90
\+ 250.00
381.50
176.20
1372.60
x .15
~~[illegible]~~
205.8900

\- 1377.60
206.64
1170.96

\- 1377.60
205.89
~~1161.81~~
1171.81

R= Le conviene más por cada prenda

Figura 4.91. Respuesta dada por Cintia F.

d) ¿Qué le conviene más a José: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

R= da lo mismo si se le hace el decuento de las prendas todas juntas, que si es una por una, porque todas las prendas tienen el mismo descuento, y en dado caso de que fueran diferentes descuentos, se tiene que hacer prenda por prenda.

e) ¿Qué le conviene más a Roberto: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

R= es igual, porque en este caso el descuento de cada prenda es el mismo.

f) ¿Qué le conviene más a Alejandra: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

R= da igual, pues son los mismos descuentos de cada prenda y es igual, pero al hacerlo todo junto es más rápido.

Figura 4.92. Respuesta dada por Guillermina.

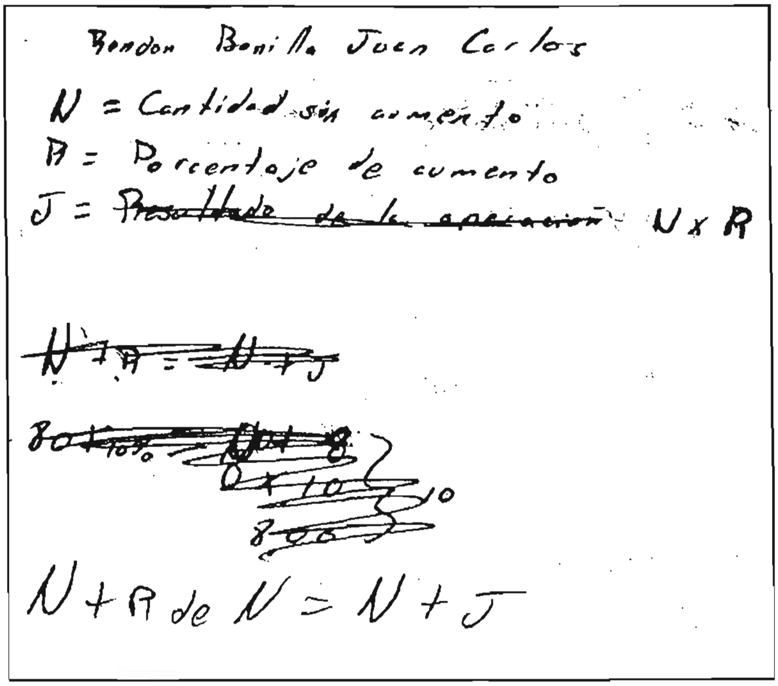
Es importante mencionar que dos estudiantes (Juan Carlos R. y Juan D.) llegaron a una fórmula general para calcular el precio con descuento de una cantidad (vea figuras 4.93 y 4.94):

$N + (N \cdot R)$, donde

$N$ = cantidad sin aumento

$R$ = porcentaje de aumento

Lo único que les faltó aclarar fue que $R$ estaba dado en forma decimal.


Rendon Bonilla Juan Carlos

N = Cantidad sin aumento

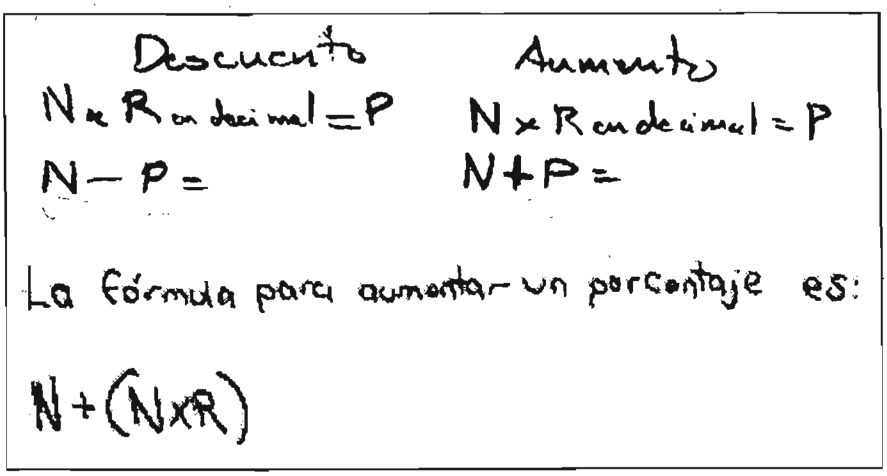
R = Porcentaje de aumento

J = ~~Resultado de la operación~~ N x R

~~N + R = N + J~~

N + R de N = N + J

Figura 4.93. Respuesta dada por Juan Carlos R.


| Descuento | Aumento |
| --- | --- |
| N x R en decimal = P | N x R en decimal = P |
| N − P = | N + P = |

La fórmula para aumentar un porcentaje es:

N + (NxR)

Figura 4.94. Respuesta dada por Juan D.

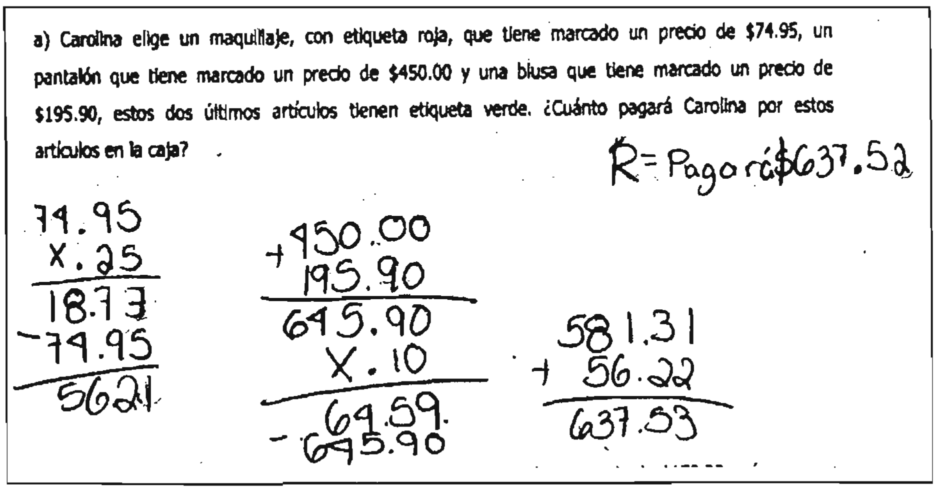
## Vamos de compras (2)

| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Obtiene los precios rebajados de acuerdo con cada descuento y al final los suma (agrupa por descuento) | 3 | | 3 |
| Encuentra el precio con descuento por cada prenda y al final los suma | | | |
| Encuentra el precio con descuento por cada prenda; no muestra procedimiento | 2 | 3 | 5 |
| Procedimiento confuso o incompleto | 3 | 1 | 4 |
| | 8 | 4 | |

Tabla 4.42. Respuestas a la pregunta 5.1.a de la actividad 5, Vamos de compras (2).

Tres estudiantes (25%) utilizaron la estrategia vista en la actividad pasada de sumar precios de artículos, cuyo descuento era el mismo y obtuvieron descuentos separados de prendas marcadas con distintas etiquetas (vea Figura 4.95). La estrategia más utilizada fue la de obtener el descuento prenda por prenda, no importando si los artículos tenían igual o diferente descuento.

Las respuestas incorrectas (33%) corresponden a estudiantes que tuvieron errores de cálculo, pero no de procedimiento.


a) Carolina elige un maquillaje, con etiqueta roja, que tiene marcado un precio de $74.95, un pantalón que tiene marcado un precio de $450.00 y una blusa que tiene marcado un precio de $195.90, estos dos últimos artículos tienen etiqueta verde. ¿Cuánto pagará Carolina por estos artículos en la caja?

R= Pagará $637.52

74.95 × .25 = 18.73; 74.95 − 18.73 = 56.21

450.00 + 195.90 = 645.90; 645.90 × .10 = 64.59; 645.90 − 64.59

581.31 + 56.22 = 637.53

Figura 4.95. Estrategia utilizada por Guillermina.

| Respuestas (♦) | Correcta | Incorrecta | |
|---|---|---|---|
| Encuentra el precio con descuento por cada prenda y al final los suma | 3 | 1* | 4 |
| Encuentra el precio con descuento por cada prenda; no muestra procedimiento | 3 | 2 | 5 |
| Obtiene el resultado, pero no muestra procedimiento | 1 | 2 | 3 |
| | 7 | 5 | |

Tabla 4.43. Respuestas a la pregunta 5.1.b de la actividad 5, Vamos de compras (2).

Esta pregunta no incluía artículos con descuentos iguales. La respuesta incorrecta que está señalada con (*), corresponde a Guillermina, quien obtuvo el precio con descuento de la corbata y el precio con descuento de la loción, y estas cantidades, en lugar de sumarlas para saber el monto de la compra, las restó (vea Figura 4.96). Las demás respuestas incorrectas (33%) corresponden a estudiantes que tuvieron errores de cálculo, pero no de procedimiento.

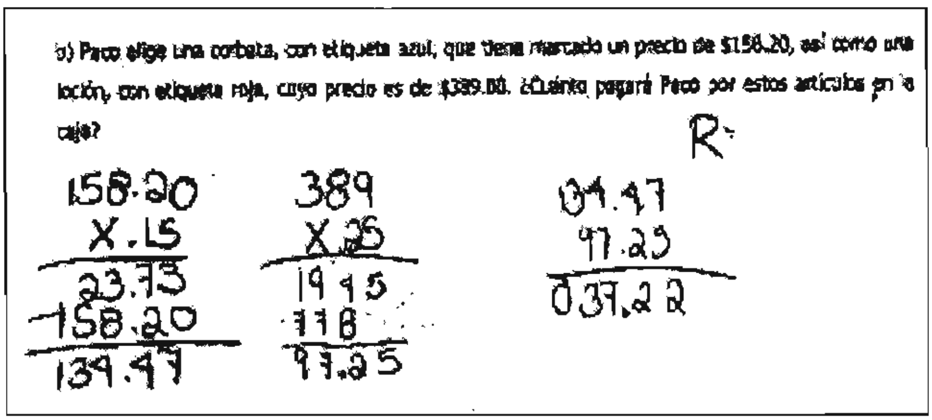



Figura 4.96. Estrategia utilizada por Guillermina.

| Respuestas (•) | |
|---|---|
| Encontrar la parte (o fracción) de un entero | 7 |
| Encontrar el porcentaje de una cantidad | 1 |
| Cuánto se le va a descontar de la cantidad completa | 2 |
| Encontrar una fracción de la cantidad | 1 |

Tabla 4.44. Respuestas a la pregunta 5.1.d.1 de la actividad 5, Vamos de compras (2).

Al parecer sólo dos estudiantes (18%) no respondieron lo que significaba encontrar el porcentaje en general de una determinada cantidad, sino lo que significaba el porcentaje de descuento y otros dos, respondieron lo mismo que se estaba preguntando (18%, vea Figura 4.1).

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Multiplicando | 1 |
| Recorriendo el punto dos lugares, porque el 100 tiene dos ceros | 1 |
| $\frac{m}{100}=\frac{?}{n}$ | 1 |
| Dividiendo entre la fracción que representa del entero y multiplicando por el número de porcentaje que se quiere encontrar | 2 |
| Multiplicando la cantidad por el porcentaje | 1 |
| Regla de tres | 2 |

Tabla 4.45. Respuestas a la pregunta 5.1.d.2 de la actividad 5, Vamos de compras (2).

La estrategia *recorriendo el punto dos lugares, porque el 100 tiene dos ceros*; el estudiante que utilizó esta estrategia no menciona si el punto se recorre hacia la derecha o hacia la izquierda, aunque da por entendido que es hacia la izquierda (vea Figura 4.97).

En general, las estrategias mostradas por los estudiantes son utilizadas de manera correcta; *la regla de tres* y *dividir entre la fracción que representa del entero y multiplicando por el número de porcentaje que se quiere encontrar* (vea Figura 4.98), son las estrategias más utilizadas.

d) ¿Qué significado tiene encontrar el porcentaje de una determinada cantidad? ¿Y cómo se encuentra? Discute en equipo estas preguntas, y anota en seguida los comentarios al respecto.

R① = Encontrar la parte de unentero

R② = Recorriendo el punto 2 lugares, porque el cién tiene 2 ceros.

Figura 4.97. Estrategia utilizada por Cynthia E.

d) ¿Qué significado tiene encontrar el porcentaje de una determinada cantidad? ¿Y cómo se encuentra? Discute en equipo estas preguntas, y anota en seguida los comentarios al respecto.

1.- Cuando se le va a descontar de la canti dad completa se puede encontrar dividien do entre la fracción que representa del entero, al multiplicarlo por el número del porcentaje que se quiere encontrar.

Figura 4.98. Estrategia utilizada por Juan D.

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| $\frac{m}{100} = \frac{?}{10}$ | 1 |
| *M* es a 100% como _ es a 10% | 2 |
| Se divide entre 10 | 2 |
| La cantidad por 0.10 | 1 |
| Encontramos el por ciento, porque depende qué por cientos nos indiquen | 2 |
| Se multiplica el número por el porcentaje y después el resultado lo restamos a la cantidad original | 2 |

Tabla 4.46. Respuestas a la pregunta 5.1e.1 de la actividad 5, Vamos de compras (2).

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| $\frac{m}{100}=\frac{?}{15}$ | 1 |
| *S* es a 100% como_ es a 15% | 2 |
| Se divide entre 20 y lo multiplicamos por 3 | 2 |
| La cantidad por 0.15 | 1 |
| Encontramos el por ciento, porque depende qué por cientos nos indiquen | 2 |
| Se multiplica el número por el porcentaje y después el resultado lo restamos a la cantidad original | 2 |

Tabla 4.47. Respuestas a la pregunta 5.1.e.2 de la actividad 5, Vamos de compras (2).

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| $\frac{m}{100}=\frac{?}{25}$ | 1 |
| *C* es a 100% como_ es a 25% | 2 |
| Se divide entre 4 | 2 |
| La cantidad por 0.25 | 1 |
| Encontramos el por ciento, porque depende qué por cientos nos indiquen | 2 |
| Se multiplica el número por el porcentaje y después el resultado lo restamos a la cantidad original | 2 |

Tabla 4.48. Respuestas a la pregunta 5.1e.3 de la actividad 5, Vamos de compras (2).

Dos estudiantes (20%) respondieron de manera incorrecta, pues aquello que se pregunta es cómo encontrar el descuento de 10, 15 y 25% de una cantidad, y ellos responden: *encontrar el por ciento porque depende qué por ciento nos indiquen* (vea Figura 4.8).

Las estrategias *se divide entre 20 y lo multiplicamos por 3* y *se divide entre 4*, son ingeniosas, y aunque los estudiantes no explicaron porqué, éstas se obtienen de simplificar 15/100 y 25/100 (vea Figura 4.99).

e) En particular, ¿cómo encuentras los descuentos de: 10%, 15% y 25% de una cantidad? Anota tus comentarios a continuación.

10% se divide entre 10
15% se divide entre 20 y lo multiplicas por 3
25% se divide entre 4.

Figura 4.99. Estrategia utilizada por Juan D.

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Multiplicando la cantidad por 0.10 | 4 |
| Recorriendo el punto dos lugares a la izquierda | 2 |
| Por el número de ceros se recorre el punto hacia la izquierda | 3 |
| Se recorre el punto un lugar a la derecha | 1 |
| Se recorre el punto decimal un lugar a la izquierda de la cantidad | 2 |

Tabla 4.49. Respuestas a la pregunta 5.1.g de la actividad 5, Vamos de compras (2).

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Multiplicando la cantidad por 0.15 | 8 |
| Multiplicando la cantidad por 0.15 para evitar dividir luego entre 100 | 3 |
| Se multiplica por 0.15 y el resultado lo restamos a la cantidad | 1 |

Tabla 4.50. Respuestas a la pregunta 5.1.h de la actividad 5, Vamos de compras (2).

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Multiplicando la cantidad por 0.25 | 5 |
| Multiplicando la cantidad por 0.25 o se multiplica por 25 y se divide entre 100 | 4 |
| Se multiplica por 0.25 y el resultado lo restamos a la cantidad | 1 |
| Se divide entre 4 | 2 |

Tabla 4.51. Respuestas a la pregunta 5.1.i de la actividad 5, Vamos de compras (2).

Las estrategias más utilizadas fueron las de multiplicar la cantidad por el porcentaje en decimal (33, 67 y 42%, respectivamente, vea Figura 4.100). Los estudiantes no tuvieron ninguna dificultad en general al escribir cómo se calculaba el porcentaje de una cantidad, salvo por uno que escribe cómo se calcula el porcentaje de descuento.

Se puede observar que cuando el porcentaje a calcular es 10%, los estudiantes cuentan con más estrategias que cuando el porcentaje no es múltiplo de 10.

i) Describe, a manera de conjetura, cómo se calcula 25% de una cantidad.

se multiplica por .25 (la cantidad) y el resultad lo restamos ala cantidad.

Figura 4.100. Estrategia utilizada por Enrique G.

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Multiplicando la cantidad por 0.10 | 4 |
| $\frac{m}{100}=\frac{?}{10}$ | 1 |
| *m* es a 100% como_ es a 10% | 2 |
| Se multiplica el número por .10 y el resultado lo restamos a la cantidad | 1 |
| Se multiplica *n* por 0.10 | 1 |
| $\frac{x}{10}=n$ | 2 |
| A la cantidad se le recorre el punto decimal una cifra a la izquierda | 1 |

Tabla 4.52. Respuestas a la pregunta 5.1.j.1 de la actividad 5, Vamos de compras (2).

De estas respuestas, lo que se debe destacar es que únicamente dos estudiantes escribieron de manera general (algebraica) las fórmulas para calcular 10, 15 y 25% de una cantidad (ver Figura 4.5), y otros dos lo hicieron utilizando la regla de tres (vea Figura 4.101). Estos cuatro estudiantes representan 31% de los que contestaron esta pregunta.

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Multiplicando la cantidad por 0.15 | 5 |
| $\frac{m}{100}=\frac{?}{15}$ | 1 |
| *m* es a 100% como_ es a 15% | 2 |
| Se multiplica el número por 0.15 y el resultado lo restamos a la cantidad | 1 |
| Se multiplica *n* por 15 entre 100 | 1 |
| $\frac{x}{20}\bullet 3=n$ | 2 |

Tabla 4.53. Respuestas a la pregunta 5.1.j.2 de la actividad 5, Vamos de compras (2).

De estas respuestas, lo que se debe destacar es que únicamente dos estudiantes escribieron de manera general (algebraica) las fórmulas para calcular 10, 15 y 25% de una cantidad (vea Figura 4.5), otros dos lo hicieron utilizando la regla de tres, (vea Figura 4.101) y un estudiante escribió la estrategia: *se multiplica n por 15 entre 100* (vea Figura 4.102). Estos cinco estudiantes representan 42% de los que contestaron de forma correcta esta pregunta.

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Multiplicando la cantidad por 0.25 | 5 |
| $\frac{m}{100}=\frac{?}{25}$ | 1 |
| *m* es a 100% como_ es a 25% | 2 |
| Se multiplica el número por 0.25 y el resultado lo restamos a la cantidad | 1 |
| Se multiplica la cantidad por 25 y luego entre 100 | 1 |
| $\frac{x}{4}=n$ | 2 |

Tabla 4.54. Respuestas a la pregunta 5.1.j.3 de la actividad 5, Vamos de compras (2).

De estas respuestas, lo que se debe destacar es que únicamente dos estudiantes escribieron de manera general (algebraica) las fórmulas para calcular 10, 15 y 25% de una cantidad (vea Figura 4.5), y otros dos lo hicieron utilizando la regla de tres (vea Figura 4.101). Estos cuatro estudiantes representan 33% de los que contestaron de forma correcta esta pregunta.

j) ¿Existirá una fórmula para llevar a cabo los cálculos de estos porcentajes? Si la respuesta es afirmativa, anótalo:

- Fórmula para calcular 10% de una cantidad:

m – 100%
10%

- Fórmula para calcular 15% de una cantidad:

m – 100%
15%

- Fórmula para calcular 25% de una cantidad:

m – 100%
25%

Figura 4.101. Estrategia utilizada por Sara.

j) ¿Existirá una fórmula para llevar a cabo los cálculos de estos porcentajes? Si la respuesta es afirmativa, anótalo: sí

- Fórmula para calcular 10% de una cantidad: se multiplica n por .10
- Fórmula para calcular 15% de una cantidad: se multiplica "n" por 15 entre K.
- Fórmula para calcular 25% de una cantidad: se multiplica la cantidad por 25 y luego entre 100

Figura 4.102. Estrategia utilizada por José María.

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Multiplicando el precio unitario por el porcentaje marcado y luego lo sumamos o restamos al precio unitario | 7 |
| Multiplicando por el número de descuento | 1 |
| Multiplicando por el porcentaje marcado | 1 |

Tabla 4.55. Respuestas a la pregunta 5.2.1 de la actividad 5, Vamos de compras (2).

La mayoría de los estudiantes (78%) fueron muy explícitos al escribir su argumento (vea figuras 4.103 y 4.104); no se registró ninguna estrategia fuera de la que se mostraba en la tabla 5.T7 de la actividad (vea Anexo). Todas las respuestas fueron correctas.

Explícale a Carolina y a Paco cómo le hicieron para completar las tablas. Anota en seguida tus comentarios a manera de conjeturas.

Saqué el porcentaje de la cantidad y lo sumé a la cantidad o lo resté, y el total lo redondeé

Figura 4.103. Estrategia utilizada por Rafael J.

Explícale a Carolina y a Paco cómo le hicieron para completar las tablas. Anota en seguida tus comentarios a manera de conjeturas.

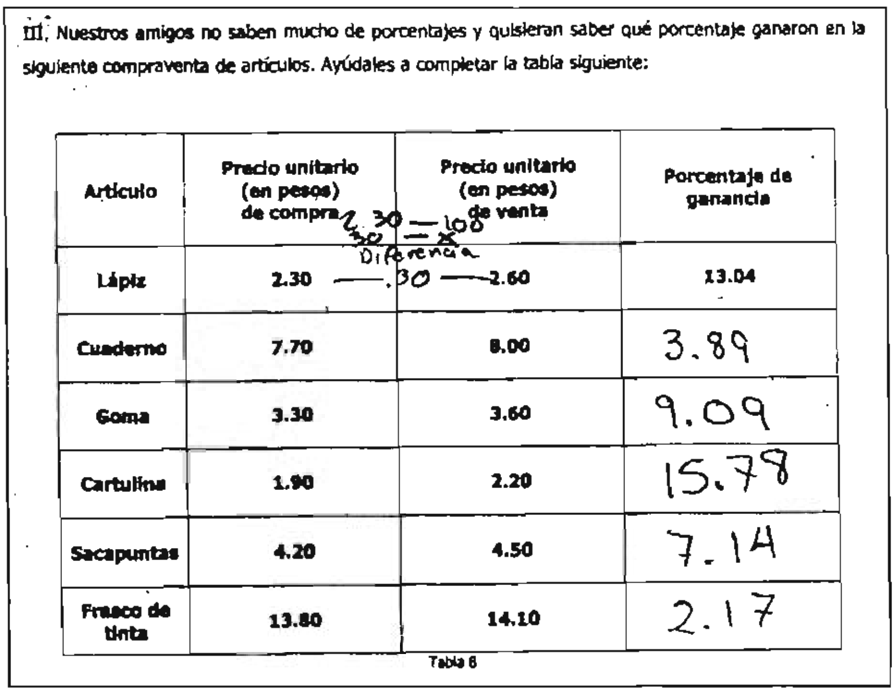
- Pues ~~pa~~ ~~multi~~ en 4% de descuento al precio era poner la cantidad y multiplicarla x el descuento, en este caso 0.04.
- En el "total de descuento" pusimos el resultado de lo anterior (8.30 x 0.04) Total de descuento es .332. "eso poníamos!!".
- En el "Precio con Descuento" poníamos ~~te~~ ~~el resultado~~ del precio mas el total del descuento y salía el nuevo precio pero con el descuento. ejemplo. 8.30 + .332 = 8.632 Resultado. Así con todas los demas.
- En la ultima solo redondeabamos de acuerdo el resultado. Si era (por ejemplo) 8.632 se queda en 8.6 porque .032 no es suficiente para redondear a 8.64 y si fuera 15.496 el redondeo seria de 15.50 porque es lo suficiente

Figura 4.104. Estrategia utilizada por Enrique G.

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Regla de tres | 3 |
| 2.30 es a 100 como (2.60-2.30) es a *x* | 1 |
| Se multiplica la diferencia entre el precio de compra y el precio de venta por 100 y esto se divide entre el precio de compra | 4 |
| Se divide la diferencia (el precio unitario de compra con el precio unitario de venta) entre el precio de compra | 2 |

Tabla 4.56. Respuestas a la pregunta 5.3.a de la actividad 5, Vamos de compras (2).

La estrategia más socorrida (40%) fue: *se multiplica la diferencia entre el precio de compra y el precio de venta por 100 y esto se divide entre el precio de compra* y la segunda más utilizada (30%) fue la regla de tres; sólo un estudiante la escribió de manera más formal (vea Figura 4.105). La última estrategia mencionada en la Tabla 4.56 (20%) no es correcta del todo, ya que olvidaron dividir entre 100 (dos estudiantes).


III. Nuestros amigos no saben mucho de porcentajes y quisieran saber qué porcentaje ganaron en la siguiente compraventa de artículos. Ayúdales a completar la tabla siguiente:

| Artículo | Precio unitario (en pesos) de compra | Precio unitario (en pesos) de venta | Porcentaje de ganancia |
|---|---|---|---|
| Lápiz | 2.30 | 2.60 | 13.04 |
| Cuaderno | 7.70 | 8.00 | 3.89 |
| Goma | 3.30 | 3.60 | 9.09 |
| Cartulina | 1.90 | 2.20 | 15.78 |
| Sacapuntas | 4.20 | 4.50 | 7.14 |
| Frasco de tinta | 13.80 | 14.10 | 2.17 |

2.30 — 100
.30 — x
Diferencia .30

Tabla 6

Figura 4.105. Estrategia utilizada por Juan D.

| Respuestas (♦) | |
|---|---|
| Una cantidad por porcentaje en decimal | 2 |
| Multiplico | 1 |
| Con regla de tres y el resultado se resta o se suma | 1 |
| Se multiplica por .10, etc., y lo restas o aumentas | 4 |
| Multiplicando el porcentaje que debe descontarse | 2 |

Tabla 4.57. Respuestas a la pregunta 5.3.b de la actividad 5, Vamos de compras (2).

Es importante mencionar que tres estudiantes lograron encontrar una expresión algebraica mediante la cual se puede obtener el precio con descuento o aumento de cualquier cantidad (vea figuras 4.6, 4.30, 4.31 y 4.94).

## 4.4 Comentario final de este capítulo

Las presentaciones de los equipos desencadenaron la discusión colectiva en el salón de clases; esta forma de trabajo propició un ambiente en donde los estudiantes externaron sus ideas y mostraron la manera en que usaron los recursos y procedimientos matemáticos. Algunas veces defendían y reforzaban sus ideas y otras aceptaban los cuestionamientos de otros compañeros y las modificaban; además, hicieron aclaraciones y observaciones a quienes exponían. El resultado de esta interacción fue que algunos estudiantes modificaron su forma de pensar.

El ambiente de trabajo fue cordial, de participación y cooperación entre los integrantes de cada equipo; se mostraron muy familiarizados con la forma de trabajo (en equipos) e interesados en las actividades que estaban realizando.

De las actividades, los estudiantes llegaron a conclusiones como:

a) Hay diferentes procedimientos para llegar a una misma conclusión.
b) Un cuerpo puede ser dividido en partes iguales, lo cual se puede representar por medio de fracciones y números decimales.

También, fueron capaces de crear reglas de manera algebraica para calcular porcentajes, obtener el monto con descuento o aumento de cualquier cantidad y porcentaje.

Se detectaron las siguientes dificultades por parte de los estudiantes:

1. Al redondear cantidades con punto decimal, ya que no sabían cuál era la discrepancia y las consecuencias de redondear y truncar, pero después de hacer algunos ejercicios pudieron darse cuenta de ella.
2. La minoría no están acostumbrados a hacer análisis a partir de gráficas sino de los datos que obtienen o se les presentan. Es importante señalar que tanto los estudiantes que elaboraron de manera correcta las gráficas como los que no, obtienen conclusiones similares (vea figuras 4.47, 4.48 y 4.49).

Por lo demás, no tuvieron dificultades para resolver los problemas; contaron con varias estrategias; los procesos de solución fueron distintos, desde los numéricos y algorítmicos (por ejemplo, el uso de la regla de tres), hasta los algebraicos.

# Capítulo V

## Conclusiones y recomendaciones

## 5.1 Introducción

El propósito de este capítulo está centrado básicamente en poner de manifiesto las conclusiones a las que fue posible llegar con el trabajo de esta investigación, referente a los procesos de solución de los estudiantes al abordar problemas de razonamiento proporcional. Para lograr tal propósito, son comentados tanto el objetivo principal como la pregunta de investigación a la luz de la literatura revisada y de las propias observaciones.

Se abunda respecto a los frutos del estudio que fueron señalados con anterioridad, en seguida, se hacen algunos señalamientos en torno a las implicaciones del propio estudio y, finalmente, se proponen otros trabajos que se derivan de éste para futuras investigaciones, en la línea seguida por este trabajo.

## 5.2 Respecto al objetivo de investigación

El objetivo de este trabajo de investigación y cómo se llegó a él, se muestra a continuación:

> Analizar y determinar los procesos de solución de los estudiantes al abordar problemas de razonamiento proporcional cuando interactúan en el salón de clases.

El estudio realizado ha permitido analizar y determinar los procesos de solución que los estudiantes utilizan al abordar problemas de razonamiento proporcional cuando interactúan en el salón de clases (c.f., pp. 64-112, Capítulo IV de esta tesis).

El desarrollo del aprendizaje de los estudiantes se entiende como una evolución en sus ciclos de entendimiento, que se traduce en un manejo más "robusto" y sofisticado de las estrategias y recursos para resolver problemas; lo que se logra cuando los estudiantes realizan prácticas, consistentes con la labor de las matemáticas: tomar casos particulares, descubrir patrones y relaciones, plantear conjeturas, hacer generalizaciones, y justificar resultados. Esto se puede ver en el Capítulo IV, donde se hizo un análisis de las respuestas obtenidas por los estudiantes al resolver las cinco actividades implantadas.

Las actividades que fueron seleccionadas para el desarrollo de esta investigación: Mezcla de limonada, Área fraccionada, Receta de cocina, Vamos de compras y Vamos de compras (2), así como la forma de trabajo en el salón de clases utilizado para su aplicación, parecen favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Al discutir las distintas estrategias de solución, primero entre cada equipo y luego entre todo el grupo, los estudiantes van aprendiendo a interpretar y resolver de manera distinta un mismo problema.

Algunos estudiantes lograron encontrar expresiones generales (de manera numérica o algebraica) que se desprendían de los casos particulares (c.f., figuras 4.5, 4.76, 4.84, 4.93, 4.94 y 4.101, Capítulo IV de esta tesis); esto se logró una vez que los integrantes de los equipos discutieron la manera de llegar a tales expresiones.

Otra situación que permite ver que los estudiantes aprendieron a partir de las actividades que ya habían resuelto, es la siguiente: en la actividad cuatro denominada Vamos de compras, los estudiantes se dieron cuenta de que daba igual aplicar un mismo descuento al total de la compra que hacerlo artículo por artículo, sólo que la primera forma simplificaba los cálculos. Este conocimiento lo aplicaron en la actividad llamada Vamos de compras (2), donde se pedía que calcularan el total de la compra con descuento de ciertos artículos (unos con el mismo descuento y otros con descuentos diferentes) (c.f., Figura 4.95, Capítulo IV de esta tesis).

En la mayoría de los casos, las actividades mantuvieron la atención y participación de los estudiantes durante el trabajo, las presentaciones por equipo, la discusión colectiva y en el trabajo individual, siendo factible llevar a cabo el análisis de los procesos utilizados por los estudiantes en sus intentos de solución. Además, fue posible recuperar sus procesos de pensamiento con la justificación escrita que se pedía que hicieran en las actividades (c.f., figuras 4.35, 4.36, 4.58, 4.60, 4.78, 4.99, entre otras, Capítulo IV de esta tesis).

La forma de instrucción permitió que en cada una de las actividades, los estudiantes expusieran y defendieran sus ideas, utilizando diversos argumentos para ello, y propició que algunos las modificaran sobre todos o algunos de los aspectos de la actividad.

Resumiendo las cualidades importantes que aparecieron (en mayor o menor grado) en las actividades, se resalta:

i) resultaron atractivas para los estudiantes y admiten diferentes formas de solución;

ii) incluyen un contenido fundamental del currículo, ya que las actividades están relacionadas con las nociones de proporcionalidad y variación proporcional;

iii) promueven el desarrollo de habilidades para comunicar y argumentar la solución de problemas;

iv) su diseño permite recuperar las ideas de los estudiantes.

## 5.3 Respecto a la pregunta de investigación

La pregunta de investigación propuesta para guiar el trabajo del presente estudio y la manera en que fue contestada se exhiben a continuación:

> ¿Cómo son los procesos y estrategias de solución de los estudiantes cuando abordan problemas que implican hacer uso del razonamiento proporcional?

Las actividades, quizá en un principio, pudieron ser vistas como problemas rutinarios (en especial, las actividades Vamos de compras y Vamos de compras (2)), sin embargo, lo importante no fue en sí el problema, sino lo que se propició en el aprendizaje de los estudiantes, ya que se originó la participación activa y, como producto de esta interacción emergieron acercamientos o ideas, en un principio quizás insospechados para la profesora a cargo de la investigación, por lo que la actividad se convirtió en no rutinaria.

Se pudo observar que los equipos en el proceso de solución de la actividad buscaron distintas formas de resolver el problema. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de utilizar varias representaciones de los problemas que les permitieron utilizar distintos recursos matemáticos y estrategias de solución.

Los estudiantes que lograron un acercamiento algebraico; pudieron modelar algunos problemas a través de una expresión, y es aquí donde el estudiante tuvo que examinar en detalle la situación para, eventualmente, encontrar una representación algebraica (c.f., figuras 4.5, 4.76, 4.84, 4.93, 4.94 y 4.101, Capítulo IV de esta tesis).

Más que emplear estrategias de tipo aditivo (usadas en la actividad Área fraccionada), se utilizaron las de tipo multiplicativo que según Lesh et al. (2000) es indicador de razonamiento proporcional, especialmente cuando se tiene una solución algorítmica.

A pesar de que los estudiantes son capaces de trabajar con el concepto de variación proporcional, en sus justificaciones no hablaban de la constante de proporcionalidad como tal, sino que se referían a ella como: *se multiplica por dos los datos*; también, se pudo ver que, por ejemplo, para la actividad Mezcla de limonada, los estudiantes se fijaron más en el número de jarras que en la relación de los vasos de agua y las cucharadas de mezcla de limonada.

## 5.4 Implicaciones didácticas

La utilización de problemas o actividades que gocen de algunas cualidades, como las que se han usado en esta investigación, para promover un aprendizaje significativo, conlleva algunas implicaciones de carácter didáctico, las cuales pueden verse como obstáculos y serias dificultades a vencer:

i) cambia la forma de concebir el currículo y la manera en que son cubiertos los contenidos matemáticos, específicamente, el de razonamiento proporcional;

ii) la instrucción también cambia. El profesor y los estudiantes juegan un papel distinto del tradicional: los estudiantes trabajan en pequeños grupos, presentan y discuten colectivamente las soluciones de los problemas, mientras que el profesor es un promotor que conduce y orienta el proceso;

iii) los argumentos de validación pueden provenir de la comunidad que representa la clase;

iv) respecto al aprendizaje, los estudiantes tienen la posibilidad de construir su conocimiento en la medida en que su entendimiento evoluciona a través de ciclos, que se manifiesta por un manejo más efectivo ("robusto" y sofisticado) de los recursos matemáticos y de la aplicación de estrategias heurísticas y de reflexión.

Las principales dificultades que se presentaron en el desarrollo del estudio fueron:

i) mantener el interés de los integrantes de los equipos cuando algunos de ellos terminaban primero que otros;

ii) algunas pequeñas deficiencias en el manejo del lenguaje por parte de los estudiantes;

iii) la tendencia más fuerte en la forma de argumentar la resolución de los problemas de las actividades fue a través de la justificación directa, es decir, los estudiantes tienden a explicar, pero no a buscar una respuesta.

## 5.5 Futuras investigaciones

En este trabajo se utilizaron cinco actividades diseñadas para el nivel medio básico, las cuales se ubican en la conceptualización del NCTM (2000) de promover el aprendizaje de las matemáticas a través de una serie de actividades que resulten útiles para suscitar el desarrollo de estrategias y recursos asociados con la toma de casos particulares, el planteamiento de conjeturas, el descubrimiento de patrones y relaciones; hacer generalizaciones y la justificación de resultados. Hace falta realizar más investigaciones en esta línea para promover el aprendizaje por medio de actividades, y para documentar, de manera precisa, tanto las potencialidades que tienen actividades diseñadas bajo ciertos principios, como los resultados de su

# Referencias bibliográficas

Ausubel, D. (1963). *Some Psychological and Educational Limitations of Learning by Discovery*. New York State. Mathematics Teachers Journal, p. 147.

Azarquiel, G. (1991). *Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra*. España. Editorial Síntesis. Capítulo 2.

Beta, G. (1996). *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza*. España, Editorial Síntesis.

Bruner, J. (1961). *The Process of Education*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Carraher, T., Schliemann, A. e Carraher, D. (1986). *Proporcionalidade na Educação Científica e Matemática: Uma Análise de Tarefas Piagetianas*. Revista Brasileira de Estudia Pedagógicos, pp. 367-379.

Carraher, T., Schliemann, A. e Ruiz, E. (1986). *Proporcionalidade na Educação Científica e Matemática: Quantidades e Medidas para Razões*. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, pp. 93-107.

Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (1985). *Mathematics in the Streets and in Schools*. British Journal of Developmental Psychology, pp. 21-29.

Carretero, M. (1993). *Constructivismo y Educación*. Editorial Aique, Argentina, p. 48.

Czarnocha, B. (1999). *El maestro Constructivista como Investigador. Cómo Enseñar Razones y Proporciones a Adolescentes*. Educación Matemática, vol. II Nº. 2, agosto, pp. 52-63.

*El Problema de las Matemáticas* (s.f.). Recuperado el 3 de julio de 2005, de http://www.cnice.mecd.es/recursos2/e_padres/html/matematicas.htm

English, L. & Halford, G. (1995). *Mathematics Education: Models and Processes*. Lawrence Earlbaun Associates, Publishers, New Jersey, UK.

Fiol, M. y Fortuny, A. (1990). *Proporcionalidad Directa. La Forma y el Número*. Editorial Síntesis. España, pp. 118-119.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure.* Holanda: Reidel Pub. Co.

Hart, Johnson K., Brown, M., Dickson, L. & Clarkson, R. (1982). *Ratio: Enlargement. Children Mathematical Frameworks 8-13. A Study of Classroom Teaching.* Capítulo 9, pp. 191-226.

Hoyles, C., Noss, R. & Pozzi, S. (2001). *Proportional Reasoning in Nursing Practice. Journal for Research Mathematics Education,* vol 32, no. 1, NCTM.

Inhelder, B. & J. Piaget. (1958). *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*, New York, Basic Books.

Karplus, R. (1983). *Early Adolescents´ Proportional Reasoning on Rate Problems.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 14, Nº. 3, pp. 219-233.

Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. (1983). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* Capítulo 3. Academic Press Inc, pp. 46-89.

Karplus, R., Karplus, E. and Wollman, W. (1974). *Intellectual Development Beyond Elementary School. IV: Ratio, the Influence of Cognitive Style.* School Science and Mathematics, pp. 476-482.

Karplus, R., Peterson, R. (1970). *Intellectual Development Beyond Elementary School II; Ratio and Survey.* Science Curriculum Improvement Study. University of California, Berkeley.

Keret, Y. (1999). *Change Processses in Adult Proportional Reasoning: Student Teachers and Primary Mathematics Teachers, After Exposure to Ratio and Proportion Study Unit.* Proceedings of the 23rd International Symposium Elementary Maths Teaching, Prague, Czech Republic, p. 145.

Khoury, H. (2002). *Exploring Proportional Reasoning: Mr. Tall / Mr. Short.* Making Sense of Fractions, Ratio and Proportions. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston Va.: NCTM 2002, pp. 100-102.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Leão, M.L. (1986). *Proporção: Escolarização e Formas de Raciocínio em Diferentes Contextos*. Dissertação de Mestrado, Mestrado em Psicologia. UFPE, Recife.

National Council of Teachers of Mathematics (2002). *Classroom Activities for Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions*. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, pp. 18-21, 219-223.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.Grades 5-8. Rational Numbers and Proportions.*

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *National Standards for Mathematics National Council Teachers of Mathematics,* p. 82.

Noelting, G. (1980). *The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept: Part I, Differentation of States*. Educational Studies in Mathematics, pp. 217-253.

Nunes, T., Schliemann, A. & Carraher, D. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*. Cambridge, UK. Cambridge University Press.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1951). La *Génese de L'idée de Hazard chez L'enfant.* PUF, París.

Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton University Press.

Post, T., Behr, M. & Lesh, R. (1988). *Proportionality and the Development of Prealgebra Understandings. The Ideas of Algebra, K-12.* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 78-90.

Puig Adam, P. (1960). *La Matemática y su Enseñanza Actual.* Citado en el libro *Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra.* España. Editorial Síntesis.

Sánchez, E., Hoyos, V., Guzmán, J., Sáiz, M. (2003). *Matemática 1: Primer Grado.* México: Editorial Patria, p. 208.

Santos, M. (1997). *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas,* 2ª Edición. México: Grupo Editorial Iberoamérica, p. 153.

Schliemann, A. & Carraher, D. (1993). *Proportional Reasoning In and Out School.* En P. Ligth & G. Butterworth (eds). Context and Context and cognition: Ways of Learning and Knowing, New York, Harvester Wheatsheaf, pp. 47-73.

Schoenfeld , A. (1988). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Secretaría de Educación Pública, (1994). *Libro para el Maestro, Matemáticas Secundaria.* México, pp. 107 y 117.

Sepúlveda, L. (2004). *Ciclos de Entendimiento y Procesos Matemáticos Relevantes que Muestran Estudiantes en una Instrucción Basada en Resolución de Problemas.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN. México.

Spinillo, A. (1993). *Bases Constructivistas da Avaliação: Contribução da Psicología Cognitiva.* Seminario de Práticas Avaliativas e Qualidade do Ensino. Secretaria de Educação, Cultura e Esportes do Estado de Pernambuco. Conselho Estatal de Educação. FUNDAJ, Recife, setembro.

# Anexo

## Actividades implementadas

# ACTIVIDAD 1

## MEZCLA DE LIMONADA

Tenemos dos recipientes para hacer limonada. El recipiente 1 requiere 2 cucharadas de mezcla de limonada por cada 5 vasos de agua. El recipiente 2 requiere 4 cucharadas de mezcla de limonada por cada 7 vasos de agua.

Completa la tabla para determinar la cantidad de mezcla de limonada y agua dado el número de jarras.

| Recipiente 1 | | | |
|---|---|---|---|
| **Jarras** | **Mezcla para limonada (cucharadas)** | **Agua (vasos)** | **Justificación** |
| **1** | **2** | **5** | |
| **2** | | | |
| **3** | | | |
| **4** | | | |
| **5** | | | |
| **6** | | | |
| **7** | | | |
| **8** | | | |
| **9** | | | |
| **10** | | | |

Tabla 1.T1

| Recipiente 2 | | | |
|---|---|---|---|
| **Jarras** | **Mezcla para limonada (cucharadas)** | **Agua (vasos)** | **Justificación** |
| **1** | **4** | **7** | |
| **2** | | | |
| **3** | | | |
| **4** | | | |
| **5** | | | |
| **6** | | | |
| **7** | | | |
| **8** | | | |
| **9** | | | |
| **10** | | | |

Tabla 1.T2

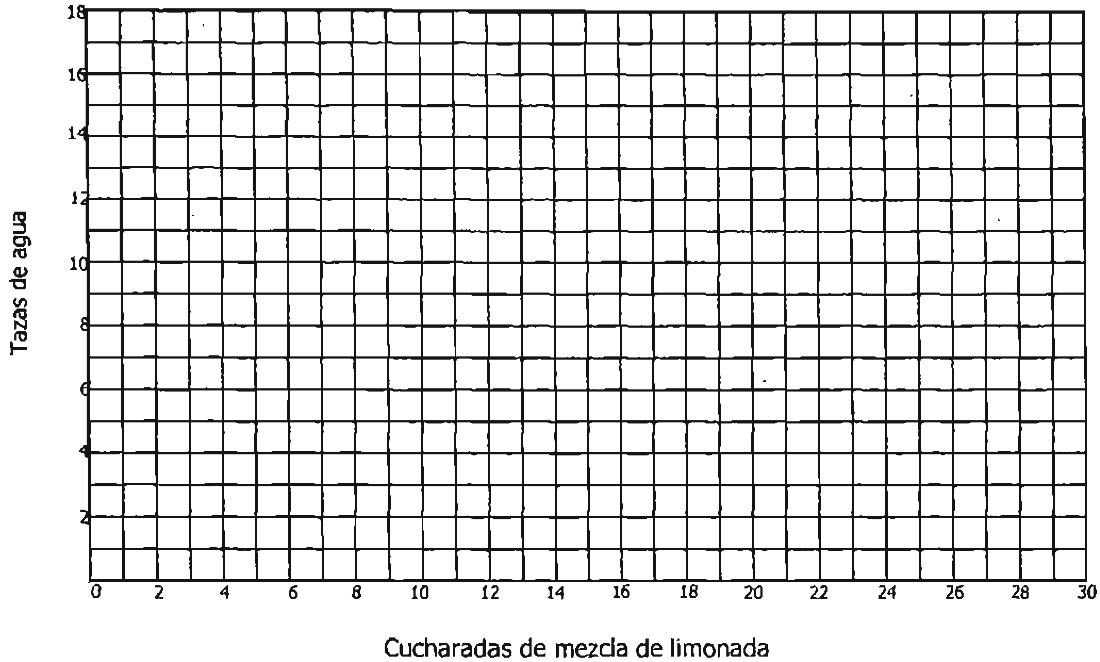
1.a) ¿En qué recipiente el preparado sabe más a limón? ¿Por qué?

1.b) Para el recipiente 1, ¿cuántas cucharadas de mezcla de limonada necesitarías para preparar 100 vasos de limonada? ¿Para 1000 vasos de limonada? Explica cómo obtuviste tus respuestas.

1.c) Supón que sólo tienes una cucharada de mezcla de limonada. ¿Cuántas vasos de limonada podrías preparar usando el recipiente 1? ¿Y usando el recipiente 2? Explica cómo obtuviste tus respuestas.

1.d) Supón que quieres preparar sólo un vaso de limonada, ¿cuánta mezcla de limonada necesitarías usando el recipiente 1? ¿Usando el recipiente 2? Explica cómo obtuviste tus respuestas.

En el cuadriculado dibuja las gráficas de las cantidades de mezcla de limonada y agua para el recipiente 1 y para el recipiente 2.




1.e.1) ¿Las gráficas son similares? 1.e.2) ¿Son diferentes? 1.e.3) ¿Por qué una gráfica está arriba de la otra? 1.e.4) ¿Por qué una gráfica está más *empinada* que la otra?

1.f.1) Cuando la cantidad de mezcla de limonada se incrementa, ¿las gráficas se ven más cercanas o alejadas una de la otra? 1.f.2) Explica por qué está pasando esto.

1.g) ¿Cómo puedes usar la comparación de dos gráficas para determinar en cuál recipiente la limonada sabe más limón que la otra?

Resumen de la actividad (por equipos)

## ACTIVIDAD 2

### ÁREA FRACCIONADA

I. El cuadrado grande ha sido dividido en tres partes.

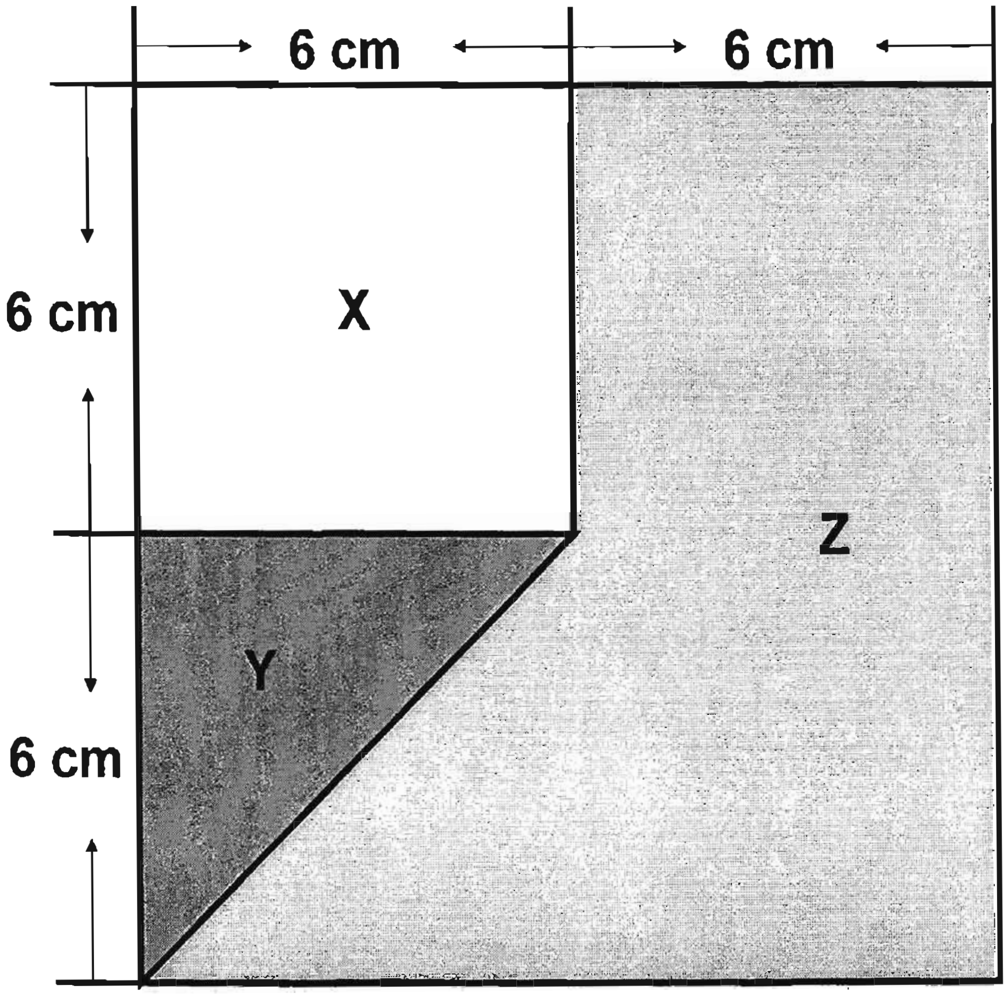



Figura 1

2.1.a) ¿Qué porción del área del cuadrado grande está cubierta por la parte X?

2.1.b) ¿Qué porción del área del cuadrado grande está cubierta por la parte Y?

2.1.c) ¿Qué porción del área del cuadrado grande está cubierta por la parte Z?

2.1.d) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.

II. El triángulo isósceles ha sido dividido en dos partes.

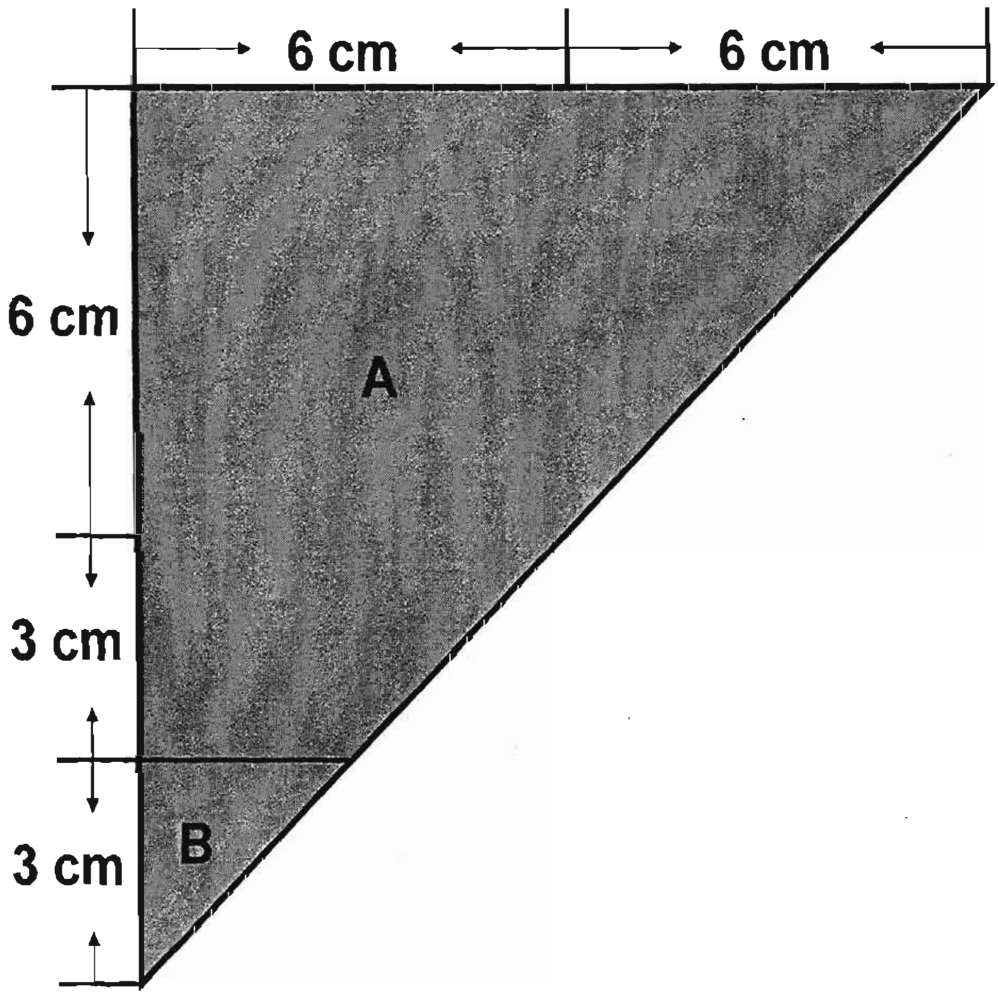



Figura 2

2.2.a) ¿Qué porción del área del triángulo grande está cubierta por la parte B?

2.2.b) ¿Qué porción del área del triángulo grande está cubierta por la parte A?

2.2.c) Explica o muestra cómo encontraste tus respuestas.

Resumen de la actividad (por equipos)

# ACTIVIDAD 3

## RECETA DE COCINA

Pedro y María tendrán una reunión con 30 invitados. Como desean preparar la cena, eligen de su recetario el siguiente platillo. 3.1.a) ¿Cuál será la cantidad de ingredientes que requerirán para preparar la cena para sus 30 invitados?

**Pollo en salsa de barbacoa**

*Ingredientes (para 5 ó 6 personas)*

1 pollo tierno partido en raciones

$5\frac{1}{4}$ cucharadas (*soperas*) de mantequilla

5 jitomates asados, pelados y finamente picados.

$\frac{1}{4}$ de taza de agua fría

2 cucharadas (*soperas*) de cebolla finamente picada

2 cucharadas (*soperas*) de jugo de limón

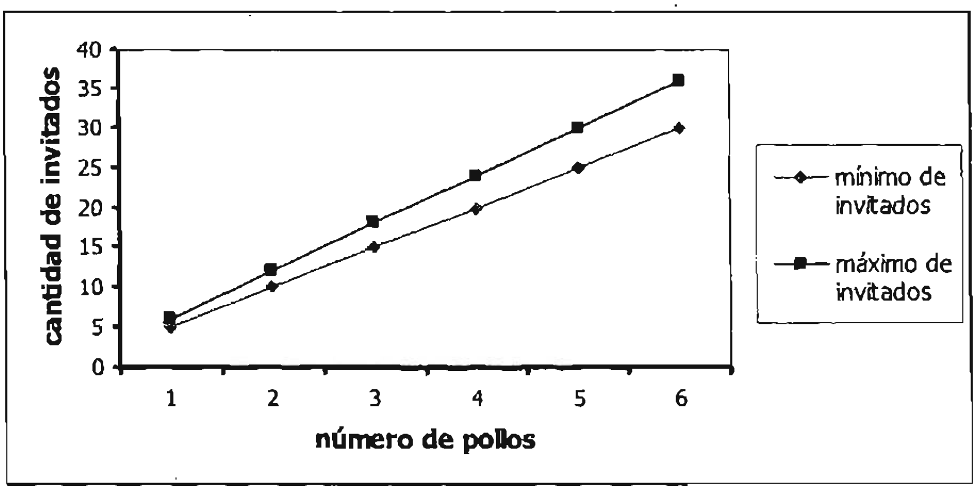
$\frac{1}{2}$ taza de aceitunas

Sal y pimienta la necesaria

3.1.b) Si para 5 ó 6 invitados se requiere de un pollo tierno en raciones, entonces, ¿cuánto se necesita para 10 personas?

3.1.c.1) ¿Consideras que la cantidad de ingredientes a utilizar variará proporcionalmente de acuerdo con el número de personas? 3.1.c.2) ¿Por qué?

Observa la siguiente gráfica y contesta las preguntas.




3.2.a) ¿Cómo puedes saber a cuánta gente invitar a la cena?

3.2.b) ¿Cuál es la cantidad mínima de pollos a comprar para satisfacer a los invitados?

3.2.c) ¿Cuál es la cantidad máxima de pollos a comprar para satisfacer a los invitados?

3.2.d) Escribe la regla para obtener el número de pollos requeridos para 5 invitados, para 10 invitados. Trata de escribir la regla general para *n* invitados. Describe tu proceso de solución lo más claro que sea posible.

3.2.e) ¿Qué significa la inclinación de la recta?

3.2.f) ¿A cuántas personas se pueden invitar si se tienen 20 pollos?

g) Para preparar 20 pollos, ¿qué cantidades de los demás ingredientes necesitamos?

| Ingredientes | Cantidad | Justificación |
|---|---|---|
| **Pollo** | **20** | |
| **Cucharadas de mantequilla** | | |
| **Jitomates** | | |
| **Tazas de agua** | | |
| **Cucharadas de cebolla** | | |
| **Cucharadas de jugo de limón** | | |
| **Tazas de aceitunas** | | |

Tabla 3.T1

Trabaja por equipo la cantidad de cada ingrediente de la receta que se requiere para 5 invitados y para 6 invitados. Cada equipo trabajará con ingredientes distintos. Utiliza las siguientes tablas:

| | **Mínimo de invitados** | **Máximo de invitados** | **Justificación** |
|---|---|---|---|
| | **5** | **6** | |
| | **10** | **12** | |
| | **15** | **18** | |
| | **20** | **24** | |
| | **25** | **30** | |
| | **30** | **36** | |

Tabla 3.T2

| | Mínimo de invitados | Máximo de invitados | Justificación |
|---|---|---|---|
| | **5** | **6** | |
| | **10** | **12** | |
| | **15** | **18** | |
| | **20** | **24** | |
| | **25** | **30** | |
| | **30** | **36** | |

Tabla 3.T3

Con toda la información obtenida por los equipos, llena las siguientes tablas:

| Ingredientes | 5 invitados | 10 invitados | 15 invitados | 20 invitados | 25 invitados | 30 invitados |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pollos | | | | | | |
| Cucharadas de mantequilla | | | | | | |
| Piezas de jitomate | | | | | | |
| Tazas de agua fría | | | | | | |
| Cucharadas de cebolla | | | | | | |
| Cucharadas de jugo de limón | | | | | | |
| Tazas de aceitunas | | | | | | |

Tabla 3.T4

| Ingredientes | 6 invitados | 12 invitados | 18 invitados | 24 invitados | 30 invitados | 36 invitados |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pollos | | | | | | |
| Cucharadas de mantequilla | | | | | | |
| Piezas de jitomate | | | | | | |
| Tazas de agua fría | | | | | | |
| Cucharadas de cebolla | | | | | | |
| Cucharadas de jugo de limón | | | | | | |
| Tazas de aceitunas | | | | | | |

Tabla 3.T5

Resumen de la actividad (por equipo)

# ACTIVIDAD 4

## VAMOS DE COMPRAS

José, Roberto y Alejandra van de compras a la tienda *La gran barata*. En la entrada aparece un anuncio:

> "Aproveche nuestras ofertas de fin de temporada: todos nuestros artículos tienen **descuentos de 10%, 15% y 25%.** Estos descuentos le serán aplicados al pagar en caja; identifíquelos por las etiquetas verde, azul y roja, respectivamente."

4.1.a) José escoge dos pares de calcetines, cada par marcado con el precio de $14.50, y una camisa, cuyo precio marcado es de $148.30. Estos artículos tienen etiqueta verde. ¿Cuánto debe pagar en caja por estas prendas?

4.1.b) Roberto escoge un pantalón marcado con el precio de $375.50, y tres corbatas, cada una marcada con el precio de $99.90. Estos artículos tienen etiqueta roja. ¿Cuánto debe pagar en caja por estas prendas?

4.1.c) Alejandra escoge varias prendas, todas marcadas con etiqueta azul: un vestido marcado con el precio de \$563.90, un par de zapatos marcado con el precio de \$250.00, un suéter marcado con el precio de \$382.50 y unos lentes marcados con el precio de \$176.20. ¿Cuánto debe pagar en cajas por estas prendas?

4.1.d) ¿Qué le conviene más a José: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

4.1.e) ¿Qué le conviene más a Roberto: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

4.1.f) ¿Qué le conviene más a Alejandra: que le hagan el descuento sobre el precio de cada una de las prendas o que le hagan el descuento sobre la cantidad total de las prendas adquiridas? Justifica tu respuesta.

g) Completa las siguientes tablas:

| Artículos | Precio marcado (sin descuento) | 10% del precio | Nuevo precio (con descuento) | Justificación |
|---|---|---|---|---|
| Dos pares de calcetines | | | | |
| Una camisa | | | | |
| | | | Total a pagar: | |

Tabla 4.T1

| Artículos | Precio marcado (sin descuento) | 25% del precio | Nuevo precio (con descuento) | Justificación |
|---|---|---|---|---|
| Un pantalón | | | | |
| Tres corbatas | | | | |
| | | | Total a pagar: | |

Tabla 4.T2

| Artículos | Precio marcado (sin descuento) | 15% del precio | Nuevo precio (con descuento) | Justificación |
|---|---|---|---|---|
| Un vestido | | | | |
| Un par de zapatos | | | | |
| Un suéter | | | | |
| Unos lentes | | | | |
| Total a pagar: | | | | |

Tabla 4.T3

Resumen de la actividad (por equipos)

# ACTIVIDAD 5

## VAMOS DE COMPRAS (2)

I. Carolina y Paco van de compras unos días después a la misma tienda que nuestros anteriores amigos: *La gran barata*. En la entrada todavía está el anuncio:

"Aproveche nuestras ofertas de fin de temporada: todos nuestros artículos tienen **descuentos de 10%, 15% y 25%.** Estos descuentos le serán aplicados al pagar en caja; identifíquelos por las etiquetas verde, azul y roja, respectivamente."

5.1.a) Carolina elige un maquillaje, con etiqueta roja, que tiene marcado un precio de \$74.95, un pantalón que tiene marcado un precio de \$450.00 y una blusa que tiene marcado un precio de \$195.90, estos dos últimos artículos tienen etiqueta verde. ¿Cuánto pagará Carolina por estos artículos en la caja?

5.1.b) Paco elige una corbata, con etiqueta azul, que tiene marcado un precio de \$158.20, así como una loción, con etiqueta roja, cuyo precio es de \$389.00. ¿Cuánto pagará Paco por estos artículos en la caja?

5.1.c) Completa las siguientes tablas:

| Artículos | Precio marcado (sin descuento) | 25% del precio | 10% del precio | Nuevo precio (con descuento) |
|---|---|---|---|---|
| Un maquillaje | | | | |
| Un pantalón | | | | |
| Una blusa | | | | |
| | | | Total a pagar: | |

Tabla 5.T1

| Artículos | Precio marcado (sin descuento) | 15% del precio | 25% del precio | Nuevo precio (con descuento) |
|---|---|---|---|---|
| Una corbata | | | | |
| Una loción | | | | |
| | | | Total a pagar: | |

Tabla 5.T2

5.1.d.1) ¿Qué significado tiene encontrar el porcentaje de una determinada cantidad? 5.1.d.2) ¿Y cómo se encuentra? Discute en equipo estas preguntas, y anota en seguida los comentarios al respecto.

En particular, ¿cómo encuentras los descuentos de: 5.1.e.1) 10%, 5.1.e.2) 15% y 5.1.e.3) 25% de una cantidad? Anota tus comentarios a continuación.

f) Calcula los siguientes porcentajes:

| Cantidad | 10% |
|---|---|
| 25 | 2.5 |
| 48 | 4.8 |
| 71 | 7.1 |
| 84 | |
| 107 | |
| 130 | |
| 153 | |
| 176 | |
| 199 | |

Tabla 5.T3

| Cantidad | 15% |
|---|---|
| 10 | 1.5 |
| 72 | 10.8 |
| 134 | 20.1 |
| 196 | |
| 258 | |
| 320 | |
| 382 | |
| 444 | |
| 506 | |

Tabla 5.T4

| Cantidad | 25% |
|---|---|
| 33 | 8.25 |
| 68 | 17 |
| 103 | 25.75 |
| 138 | |
| 173 | |
| 208 | |
| 243 | |
| 278 | |
| 313 | |

Tabla 5.T5

5.1.g) Describe, a manera de conjetura, cómo se calcula 10% de una cantidad.

5.1.h) Describe, a manera de conjetura, cómo se calcula 15% de una cantidad.

5.1.i) Describe, a manera de conjetura, cómo se calcula 25% de una cantidad.

¿Existirá una fórmula para llevar a cabo los cálculos de estos porcentajes? Si la respuesta es afirmativa, anótalo:

- 5.1.J.1) Fórmula para calcular 10% de una cantidad:

- 5.1.J.2) Fórmula para calcular 15% de una cantidad:

- 5.1.J.3) Fórmula para calcular 25% de una cantidad:

II. Carolina y Paco son dueños de una papelería. Ellos desean que les ayudes a elaborar una tabla de aumentos y otra de descuentos. Se proponen utilizarlas para tener una estimación de sus ganancias reales, en porcentajes, de cada uno de los artículos que aparecen en las tablas. Complétalas en equipo.

**Tabla de aumentos**

| Artículo | Precio unitario (en pesos) | 8% de aumento al precio | Total de aumento | Precio con aumento | Redondeo |
|---|---|---|---|---|---|
| **Lápiz** | **2.30** | **2.30 x 0.08** | **0.184** | **2.484** | **2.50** |
| **Cuaderno** | **7.70** | | | | |
| **Goma** | **3.30** | | | | |
| **Cartulina** | **1.90** | | | | |
| **Sacapuntas** | **4.20** | | | | |
| **Frasco de tinta** | **13.80** | | | | |

Tabla 5.T6

**Tabla de descuentos**

| Artículo | Precio unitario (en pesos) | 4% de descuento al precio | Total de descuento | Precio con descuento | Redondeo |
|---|---|---|---|---|---|
| Lápiz | 2.50 | 2.50 x 0.04 | 0.1 | 2.40 | 2.40 |
| Cuaderno | 8.30 | | | | |
| Goma | 3.60 | | | | |
| Cartulina | 2.05 | | | | |
| Sacapuntas | 4.50 | | | | |
| Frasco de tinta | 14.90 | | | | |

Tabla 5.T7

5.2.1) Explícale a Carolina y a Paco cómo le hicieron para completar las tablas. Anota en seguida tus comentarios a manera de conjeturas.

III. Nuestros amigos no saben mucho de porcentajes y quisieran saber qué porcentaje ganaron en la siguiente compraventa de artículos. Ayúdales a completar la tabla siguiente:

| Artículo | Precio unitario (en pesos) de compra | Precio unitario (en pesos) de venta | Porcentaje de ganancia |
|---|---|---|---|
| Lápiz | 2.30 | 2.60 | 13.04 |
| Cuaderno | 7.70 | 8.00 | |
| Goma | 3.30 | 3.60 | |
| Cartulina | 1.90 | 2.20 | |
| Sacapuntas | 4.20 | 4.50 | |
| Frasco de tinta | 13.80 | 14.10 | |

Tabla 5.T8

5.3.a) Compara los porcentajes de ganancia obtenidos con tus demás compañeros. Trata de encontrar una regla que te permita resolver rápidamente este problema y escribe en seguida tus comentarios.

5.3.b) En general, ¿cómo calculas el porcentaje de descuento, o aumento, de una cantidad dada? Anota tus comentarios a continuación.

Resumen de la actividad (por equipos)