UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"APOSINDESIS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

LUIS PEDRO MONTEJANO CANTORAL

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. ISABEL PUGA ESPINOSA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2005

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Aposindesis"

realizado por Luis Pedro Montejano Cantoral

con número de cuenta 9720773-9, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra. Isabel Puga Espinosa	Isabel Puga
Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Propietario	Dr. Sergio Macías Alvarez	S. Macías A.
Suplente	Mat. Leobardo Fernández Román	Leobardo
Suplente	Dr. Javier Bracho Carpizo	Bracho

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A mis papás por el apoyo y el cariño que siempre me han dado.

Gracias a:

Mi mamá por el cariño y por estar siempre conmigo. Gracias por apoyarme en todo momento.

Mi papá por todo lo que me ha enseñado. Te admiro muchísimo y creo ser muy afortunado en tener a un papá como tú. Gracias por enseñarme a ver la vida de una manera tan bella.

Mis hermanas porque las amo y porque el ser su hermano es lo mejor del mundo.

Elsa por apoyarme siempre. Tú sabes lo importante que has sido para mí. Gracias por la compañía y por todo lo que he crecido a tu lado.

Toda mi Familia, porque forman una parte importante de mi vida.

Bety por haberme mostrado esta parte tan bonita de las matemáticas. Gracias por las enseñanzas y por que sin ti esto no hubiera sido posible.

Alejandro y Sergio por sus colaboraciones en esta tesis y su tiempo invertido en ella.

Todos mis amigos porque son como mi familia y constituyen una parte importante en mi vida.

CONTENIDO

Introducción

El trabajo de esta tesis, pertenece a la rama de la Topología que se conoce como Teoría de los Continuos. El tema que se estudia es una generalización de la conexidad local. Los teoremas principales se encuentran en los dos últimos capítulos, los cuales tratan acerca de continuos arcoconexos y de la existencia de curvas cerradas simples. En esta tesis, se establece la arcoconexidad para algún tipo de continuos aposindéticos, no localmente conexos del plano. Es decir, se darán condiciones para ver cuándo un continuo aposindético, no localmente conexo del plano es arcoconexo y contiene curvas cerradas simples. De igual manera, para los continuos no aposindéticos. Estos teoremas se obtuvieron del artículo [1] de C. L. Hagopian.

En el primer capítulo, se presentan algunos resultados básicos de la topología general que serán útiles más adelante. En particular de la topología métrica. Resultados acerca de conexidad, conexidad local y compacidad son los más importantes de este capítulo.

El segundo capítulo, es un breve análisis acerca de los continuos. En especial, el teorema 2.11 de golpes en la frontera y algunos resultados acerca de las composantes y los continuos irreducibles. Resultados acerca de las sucesiones de continuos, serán también muy importantes más adelante.

En el tercer capítulo, se introduce el concepto de aposindesis, el cual, como ya dijimos, es más general que el concepto de conexidad local, es decir, todo continuo localmente conexo es aposindético. Se definirán a los conjuntos L_y, L_{yz} y K_x, los cuales son la herramienta en los resultados de este trabajo. Se verá que K_x es un conjunto cerrado y tanto L_y como L_{yz} son continuos. Se verán ejemplos en los cuales K_x no necesariamente es un continuo. Por último, se verá la relación que tiene la aposindesis con la propiedad de ser semilocalmente conexo, se verá que globalmente las propiedades de aposindesis y de ser semilocalmente conexo son equivalentes, es decir, un continuo M es aposindético en x, para toda $x \in M$ si y sólo si M es semilocalmente conexo en x, para toda $x \in M$.

En los últimos dos capítulos, se presentan los resultados principales de este trabajo que comprenden continuos en el plano. Primero, se estudian condiciones que deben cumplir los continuos del plano que son aposindéticos para que sean arcoconexos y contengan curvas cerradas simples, además de ser cíclicamente conexos. Los continuos localmente conexos son aposindéticos y arcoconexos, por ello, nos interesan continuos aposindéticos del plano que no son localmente conexos.

En el último capítulo, que comprende a los continuos en el plano que no son aposindéticos, se dará una condición suficiente para que sean arcoconexos y contengan curvas cerradas simples, en especial para algunos continuos del plano que no son aposindéticos en ninguno de sus puntos (que no serán localmente conexos en ningún punto). En ambos capítulos, se presentan ejemplos de continuos en los cuales, si se quita alguna condición, entonces ya no tienen la propiedad de ser arcoconexos o la existencia de curvas cerradas simples.

Luis Pedro Montejano Cantoral
Facultad de Ciencias, UNAM
Julio de 2005

CAPÍTULO 1

Preliminares.

En este capítulo se definen y presentan algunos resultados básicos de la topología general que serán útiles más adelante. En particular se presentan resultados de la topología métrica, pues ésta, será más adelante el lugar donde se profundizan los temas de este trabajo. Entre lo más importante, se verán resultados básicos sobre la conexidad y compacidad. Por ejemplo, se verá que la conexidad local implica a la conexidad en pequeño y que el recíproco de esta implicación es falsa. Sin embargo, se demostrará que globalmente la conexidad local y la conexidad en pequeño son equivalentes. Algunos resultados sobre las componentes serán muy útiles posteriormente, en especial, el teorema 1.26.

Con respecto a la compacidad, se verá que en espacios métricos, ser compacto es equivalente a pedir que toda sucesión contenga una subsucesión convergente. También se verá que la intersección anidada de espacios métricos compactos, distintos del vacío, es un espacio métrico compacto, distinto del vacío. Se define el que un conjunto tenga la propiedad de la intersección finita y se demuestra el teorema 1.48, que trata sobre sucesiones anidadas de compactos, el cual, será muy útil más adelante. Por último, se cita al lema de Zorn el cual servirá para resultados posteriores.

Como es usual, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ denotan a los conjuntos de los números reales y naturales, respectivamente. El símbolo $\emptyset$ denota el conjunto vacío y ■ el fin de una demostración.

1. Espacios topológicos.

Definición 1.1. *Una* ***topología*** *sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

a) $\emptyset$ y X están en τ.

b) La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ.

c) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama ***espacio topológico****.*

Diremos que un espacio topológico es un par ordenado (X,τ), formado por un conjunto X y una topología τ en X, pero a menudo omitiremos hacer mención de τ si no existe confusión.

Si X es un espacio topológico con una topología τ, diremos que un subconjunto U de X es un **conjunto abierto** de X, si U pertenece a la colección τ. Diremos entonces que un espacio topológico es un conjunto X junto a una colección de subconjuntos de X, llamados conjuntos abiertos, tales que $\emptyset$ y X son conjuntos abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos.

Dada una topología sobre un conjunto X, podemos especificar la topología mediante la descripción de la colección completa τ de conjuntos abiertos. Generalmente, esto se vuelve bastante complicado. En la mayoría de los casos, se especifica una colección más pequeña de subconjuntos de X que es capaz de definir dicha topología.

Definición 1.2. *Sea X un conjunto. Una* ***base*** *para una topología sobre X es una colección β de subconjuntos de X, llamados* ***abiertos básicos****, tales que:*

a) Para cada $x \in X$, al menos existe un elemento básico B que contiene a x.

b) Si x está en la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe otro elemento básico B_3 que contiene a x y que está contenido en $B_1 \cap B_2$.

Si la colección β cumple estas dos condiciones, podemos definir a la topología τ generada por β de la siguiente manera: decimos que un subconjunto U de X es abierto en X, o es un elemento de τ, si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \beta$ que contiene a x, tal que $B \subset U$. Observemos que cada elemento básico es un conjunto abierto en X. No es difícil convencerse de que, con esta definición, en efecto τ resulta una topología.

2. La topología métrica.

Definición 1.3. *Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se llama* ***métrica o distancia*** *sobre X si para todo $x,y,z \in X$ se cumple lo siguiente:*
a) $d(x,y) = d(y,x)$
b) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
c) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$
d) $d(x,y) \geq 0$

Así, para $x,y \in X$, el número real $d(x,y)$, es la distancia entre x y y. Al par (X,d) se le conoce como **espacio métrico.**

Definición 1.4. *Sea (X,d) un espacio métrico. Dado $\epsilon > 0$ definimos el conjunto:*
$B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\}$,

Es decir, todos los puntos $y \in X$ cuya distancia a x, con la métrica d, es menor que ϵ. Le llamaremos la **bola abierta** de radio ϵ centrada en x. Observemos que el conjunto $\beta = \left\{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon > 0\right\}$ satisface la condición a) de la definición 1.2. Para demostrar que satisface la condición b), consideremos un punto $x \in B_{\epsilon_1}(x_1) \cap B_{\epsilon_2}(x_2)$ y definamos $\epsilon = \min\left\{\epsilon_1 - d(x_1,x),\ \epsilon_2 - d(x_2,x)\right\}$.
Si $y \in B_\epsilon(x)$, entonces
$d(x_1,y) \leq d(x_1,x) + d(x,y) < d(x_1,x) + \epsilon_1 - d(x_1,x) = \epsilon_1$.

Esto demuestra que $B_\epsilon(x) \subset B_{\epsilon_1}(x_1)$ y, análogamente $B_\epsilon(x) \subset B_{\epsilon_2}(x)$. Así que β forma una base para una topología en X. La llamaremos la **topología métrica**, que está inducida por la función d descrita anteriormente. De esta manera, diremos que A es un conjunto **abierto** en X, si para todo $x \in A$, existe una $\epsilon > 0$, tal que $B_\epsilon(x) \subset A$.

Definición 1.5. *Sean (X,d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Vamos a definir lo siguiente:*

*a) Un punto $x \in X$ es un **punto interior** de A, si existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset A$*

*b) Un punto $x \in X$ es un **punto frontera** de A, si para toda $\epsilon > 0$ se tiene que $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\epsilon(x) \cap (X - A) \neq \emptyset$.*

*c) Un punto $x \in X$ se llama **punto de adherencia** de A si para cualquier conjunto abierto V que contenga a x, se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$.*

*d) Un punto $x \in X$ se llama **punto de acumulación** de A, si para cualquier conjunto abierto V que contenga a x, se tiene que V intersecta a A en algún punto distinto de x.*

Es claro que A es un conjunto abierto si y sólo si todos sus puntos son puntos interiores

Definición 1.6. *Sea (X,d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Vamos a definir lo que es el **interior**, la **frontera** y la **cerradura** de A, respectivamente, como:*

$intA = \{x \in X \mid x \text{ es un punto interior de } A\}$,

$Fr(A) = \{x \in X \mid x \text{ es punto frontera de } A\}$, y

$\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ es un punto de adherencia de } A\}$.

Definición 1.7. *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que un conjunto B es **cerrado** si su complemento es un conjunto abierto en X.*

Es fácil ver que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado y que es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A. Note también que, a diferencia de los conjuntos abiertos, la unión arbitraria de conjuntos cerrados no es cerrada, pero la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, al igual que las uniónes finitas de conjuntos cerrados son cerradas.

Definición 1.8. *Sean X un espacio topológico y $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de X. Decimos que $\{x_n\}$* ***converge*** *a $x \in X$ si dado cualquier subconjunto abierto U en X que contenga a x, existe número natural k, tal que x_n está en U para todo $n \geq k$.*
Si (X,d) es un espacio métrico, podemos decir que $\{x_n\}$ ***converge*** *a $x \in X$, si dada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $d(x_n,x) < \epsilon$.*

Estas dos definiciones de convergencia son equivalentes en espacios métricos.

Teorema 1.9. *Sea (X,d) un espacio métrico. Un subconjunto B de X es un conjunto cerrado de X sí y sólo si B contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Prueba. Sea B un conjunto cerrado de X. Supongamos que existiera un punto $x \in X - B$ tal que x es un punto de acumulación de B. Entonces para cualquier conjunto abierto U que contenga a b, se tiene que U intersecta a B, de aquí que x no es un punto interior de $X - B$ y por tanto $X - B$ no es un conjunto abierto, lo cual es una contradicción pues el complemento de B es abierto. Entonces B contiene a todos sus puntos de acumulación.
Ahora supongamos que B contiene a todos sus puntos de acumulación. Vamos a demostrar que B es cerrado demostrando que $X - B$ es abierto. Sea $x \in X - B$, entonces x no es un punto de acumulación de B. De aquí que existe un conjunto abierto U de x tal que $U \subset X - B$ y, por lo tanto, x es un punto interior de $X - B$. Como x fue cualquier punto en $X - B$, se tiene que $X - B$ es abierto y por lo tanto, B es cerrado. ■

Definición 1.10. *Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que un subconjunto A de X está* ***acotado****, si existe algún número N tal que $d(a_1,a_2) \leq N$ para todo par de puntos de A. Si A es un conjunto acotado y no vacío, el díametro de A se define como el número $diámA = \sup\{d(a_1,a_2) \mid a_1,a_2 \in A\}$.*

También , si $x \in X$ y A es cualquier subconjunto de X, podemos definir la distancia del punto x al conjunto A como $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$

3. La topología del subespacio.

Dado un espacio topológico X, a menudo se trabaja con sus subconjuntos, por ello es importante darle una topología a estos subconjuntos de manera que sea muy natural.

Definición 1.11. *Sean (X,τ) un espacio topológico y S un subconjunto de X. Podemos darle al subconjunto S la siguiene topología:*
$\tau_S = \{U \cap S \mid U \in \tau\}$.

Es fácil comprobar que este conjunto forma una topología para el conjunto S, que viene a ser la topología que hereda de X. Es decir, sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos en X con S. A esta topología, se le conoce como la **topología relativa** o **inducida**. En adelante, siempre que tomemos subconjuntos de un espacio topológico X, se tomarán con la topología relativa.

Teorema 1.12. *Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto abierto en X. Entonces si U es un subconjunto abierto en Y, entonces U es un subconjunto abierto en X.*

Prueba. Como U es un conjunto abierto en Y, se tiene que $U = Y \cap V$, donde V es algún conjunto abierto en X. Luego, como Y y V son ambos conjuntos abiertos en X, tenemos que $Y \cap V$ es un conjunto abierto en X. ■

Lo mismo pasa para conjuntos cerrados, es decir, si C es un subconjunto cerrado en X, y B es un subconjunto cerrado en C, entonces B es un subconjunto cerrado en X. Éstos son casos especiales pues, si $C \subset X$ y B es un subconjunto abierto o cerrado en C, entonces tenemos que B no necesariamente es un subconjunto abierto o cerrado, respectivamente, en X.

4. Axiomas de separación y numerabilidad.

Una vez definida la base de una topología, introduciremos los conceptos de primero y segundo numerable, que serán utilizadas frecuentemente en este trabajo. En especial la propiedad de ser primero numerable, pues todo espacio métrico será primero numerable.

Definición 1.13. *Un espacio X se dice que es* ***primero numerable****, si X tiene una base local numerable en un punto x, para cada $x \in X$. Es decir, si existe una colección numerable β de subconjuntos abiertos de X, tales que para cada punto $x \in X$ y cada conjunto abierto U en X que contenga a x, existe un elemento $B \in \beta$ que contiene a x y esté contenido en U.*

Definición 1.14. *Se dice que un espacio X es* ***segundo numerable****, si X tiene una base numerable para su topología. Es decir, si existe una colección numerable β de subconjuntos abiertos de X, tales que para cada conjunto abierto U en X y cada punto $x \in U$, existe un elemento $B \in \beta$ que contiene a x y está contenido en U.*

Es claro que si un espacio X es segundo numerable, entonces X es primero numerable. Pues, si β es una base numerable para la topología de X, entonces el subconjunto de β formado por aquellos elementos de la base que contienen al punto x es una base numerable en x. Por otro lado, observemos que todo espacio métrico es primero numerable, ya que la familia $\beta(x) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ es una base local numerable en x. Sin embargo, no todo espacio métrico es segundo numerable.

Ejemplo 1.15. *Sea $(\mathbb{R}, \tau)$ el espacio topológico de los números reales con la topología discreta. Entonces $(\mathbb{R}, \tau)$ es un espacio métrico pero no es segundo numerable.*

$(\mathbb{R}, \tau)$ es un espacio métrico, pues si para cualesquiera x y $y \in \mathbb{R}$ se define

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, x = y \\ 1 & \text{si}\, x \neq y \end{cases},$$

resulta que d es una métrica para $(\mathbb{R}, \tau)$. La razón porque $(\mathbb{R}, \tau)$ no es segundo numerable, es simplemente porque los puntos son conjuntos abiertos en $(\mathbb{R}, \tau)$. De aquí que para cada punto x en $\mathbb{R}$, x tendría que ser un elemento de la base numerable, lo cual es imposible pues $\mathbb{R}$ no es numerable.

A continuación, se introducen tres axiomas de separación, los cuales, veremos que todo espacio métrico los cumple. Estos axiomas de separación serán utilizados con frecuencia, por ello, son muy importantes para los resultados de este trabajo.

Definición 1.16. *Sea X un espacio topológico. Entonces:*
a) X se dice de ***Hausdorff****, si para cada par de puntos $x,y \in X$, existen subconjuntos abiertos U y V en X, disjuntos, tales que $x \in U$ y $y \in V$.*
b) X es ***Regular*** *si para cualquier subconjunto cerrado B en X y cualquier punto $x \in X - B$, existen subconjuntos abiertos U y V en X, disjuntos, tales que $B \subset U$ y $x \in V$.*
c) X es ***Normal*** *si para cada par de conjuntos cerrados A y B disjuntos en X, existen abiertos U y V de X disjuntos tales que contienen a A y a B, respectivamente.*

Teorema 1.17. *Todo espacio métrico es normal.*

Prueba. Sea (X,d) un espacio métrico. Sean A y B dos conjuntos cerrados disjuntos de X. Para cada $a \in A$, elegimos ϵ_a de tal modo que $B_{\epsilon_a}(a) \cap B = \emptyset$. Análogamente, para cada $b \in B$, elegimos ϵ_b de tal manera que $B_{\epsilon_b}(b) \cap A = \emptyset$. Ahora tomemos $U = \bigcup_{a \in A} B_{\epsilon_a/2}(a)$ y $V = \bigcup_{b \in B} B_{\epsilon_b/2}(b)$. Es claro que $A \subset U$ y que $B \subset V$, además U y V son abiertos, pues la unión de conjuntos abiertos siempre es abierta. Afirmamos que $U \cap V = \emptyset$. Supongamos que existiera un $z \in U \cap V$, entonces $z \in B_{\epsilon_a/2}(a) \cap B_{\epsilon_b/2}(b)$ para alguna $a \in A$ y alguna

$b \in B$. Entonces, tenemos que $d(a,b) < \frac{\epsilon_a + \epsilon_b}{2}$. Si $\epsilon_a \leq \epsilon_b$, entonces $d(a,b) < \epsilon_b$ y esto lo que nos dice es que a estaría en la bola $B_{\epsilon_b}(b)$ lo cual es una contradicción. Análogamente si $\epsilon_b \leq \epsilon_a$ llegamos a que $b \in B_{\epsilon_a}(a)$ lo cual es imposible. Por lo tanto, $U \cap V = \emptyset$. ■

Note que, como todo espacio métrico es normal y los puntos son conjuntos cerrados, se tiene que todo espacio métrico es regular y de Hausdorff.

5. Conexidad.

Dado un espacio topológico X, se define el concepto de conexidad y se presentan algunos resultados básicos que serán de ayuda más adelante.

Definición 1.18. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X puede* ***ser separado*** *o tiene una* ***separación****, si existen* dos *conjuntos abiertos U y V en X, disjuntos, distintos del vacío, tales que $X = U \cup V$. El espacio topológico X es* ***conexo*** *si no puede ser separado.*

Es decir, un espacio es conexo, si no se puede dividir en dos conjuntos abiertos disjuntos y no vacíos. Es importante observar que cuando U y V satisfacen lo dicho en la definición 1.18, entonces tanto U como V son conjuntos abiertos y cerrados en X.

Teorema 1.19. *Sea X un espacio topológico. Sean C y D subconjuntos de X tales que forman una separación de X. Si $Y \subset X$ es conexo, entonces $Y \subset C$ o $Y \subset D$.*

Prueba. Como C y D son conjuntos abiertos de X, los conjuntos $C \cap Y$ y $D \cap Y$ son conjuntos abiertos en Y. Luego estos dos conjuntos son disjuntos y su unión es Y, Como Y es conexo, afirmamos que, $C \cap Y = \emptyset$ o $D \cap Y = \emptyset$, esto se debe a que si ambos conjuntos fueran distintos del vacío, formarían una separación de Y, lo cual sería una contradicción pues Y es conexo. Entonces alguno de estos conjuntos es vacío. Por lo tanto, Y está contenido en C o en D. ■

Teorema 1.20. *Sea X un espacio topológico. La unión de una familia de subconjuntos conexos de X que tienen un punto en común es conexa.*

Prueba. Sean $\{A_\alpha\}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico X y $p \in \bigcap A_\alpha$. Se probará que el conjunto $\bigcup A_\alpha$ es conexo. Supóngase que no lo es. Es decir, que $\bigcup A_\alpha = C \cup D$ es una separación de $\bigcup A_\alpha$ (es decir, que C y D son conjuntos abiertos en $\bigcup A_\alpha$, disjuntos y distintos del vacío). El punto p está en C o en D, supóngase que $p \in C$. Como A_α es conexo, por el teorema 1.19, se tiene que $A_\alpha \subset C$ o $A_\alpha \subset D$, pero como $p \in A_\alpha$, se tiene que $A_\alpha \subset C$. Entonces, para cada α, tenemos que $A_\alpha \subset C$ y, por lo tanto, $\bigcup A_\alpha \subset C$, contradiciendo el hecho de que D era distinto del vacío. Por lo tanto, $\bigcup A_\alpha$ es conexo. ■

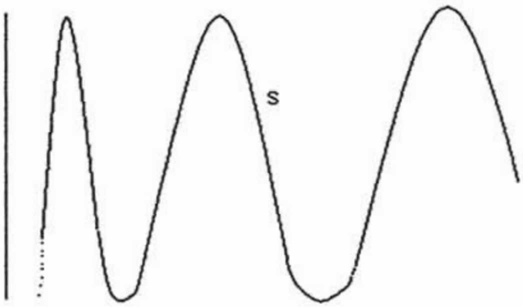
Teorema 1.21. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ conexo. Si $A \subset B \subset \overline{A}$ entonces B es conexo (es decir, si B se forma añadiéndole a A cualquier cantidad de sus puntos de adherencia, entonces B es conexo). En particular, $\overline{A}$ es conexo.*

Prueba. Sean A conexo y B tal que $A \subset B \subset \overline{A}$. Supóngase que $B = C \cup D$ es una separación de B, por el teorema 1.19, se tiene que, $A \subset C$, o $A \subset D$. Supongamos que $A \subset C$. Entonces $\overline{A} \subset \overline{C}$. Como $\overline{C}$ y D son disjuntos y $B \subset \overline{A}$, se tiene que $B \subset C$, contradiciendo el hecho de que D es distinto del vacío, lo que nos dice que B es conexo. ■

Definición 1.22. *Sean X un espacio topológico y $x, y \in X$. Una* ***trayectoria*** *de x a y, es una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Si para cada $x, y \in X$, existe una trayectoria $f : [0,1] \to X$ tal que $f : [0,1] \to f([0,1])$ es un homeomorfismo decimos que X es* ***arcoconexo****.*

Todo espacio arcoconexo es conexo, pero el inverso es falso como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.23. *Sea* $S = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \mid 0 < x < \frac{1}{\pi}\}$.



Entonces $M = \overline{S}$ es conexo (pues S es conexo) pero no arcoconexo. Para ver esto, supongamos que existe una trayectoria empezando en el $(0,0)$ y terminando en el punto $(\frac{1}{\pi}, 0)$ (el punto $(0,0)$ está en $\{0\} \times [-1,1]$ y el punto $(\frac{1}{\pi}, 0)$ en S). Es decir, existe una función continua $f = (f_1, f_2) : [0,1] \to M \subset \mathbb{R}^2$, tal que $f(0) = (0,0)$ y $f(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$.

Sea $I_0 = \{t \in [0,1] \mid f_1([t,1]) \subset (0, \frac{1}{\pi}]\}$ y $t_0 = \text{ínf}\, I_0$. I_0 es un intervalo abierto en $[0,1]$ de la forma $(t_0, 1]$. Necesariamente $f_1(t_0) = 0$, entonces $f_1((t_0, 1]) = (0, \frac{1}{\pi}]$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión en $(t_0, 1]$ tal que t_n converge a t_0 y $f_1(t_n) = \frac{2}{n\pi}$ (tal sucesión existe por el teorema del valor intermedio). Entonces se tiene que $f_2(t_0) = \text{lím}\, sen\left(\frac{1}{f_1(t_n)}\right)$; pero la sucesión oscila entre los valores $+1, -1$, luego no tiene límite, contradiciendo la continuidad de f. Entonces M no es arcoconexo. A M se le conoce como la **curva sen** $\frac{1}{x}$.

Definición 1.24. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que C_x es la* ***componente*** *de x en X si C_x es el mayor subconjunto conexo en X que contiene a x. A menudo sólo diremos que C_x es la x-componente de X.*

Teorema 1.25. *Sea X un espacio topológico.*

1) *Si $S \subset X$ es un conjunto cerrado y K es una componente de S, entonces K es cerrado en X.*

2) Si $x, y \in X$ *son distintos, y* $y \in C_x$, *entonces* $C_x = C_y$.

3) *Si Y es cualquier subconjunto de X, $z \in Y$, C_z^X la componente que contiene a z en X, C_z^Y la componente que contiene a z en Y y $C_z^X \subset Y$, entonces $C_z^Y = C_z^X$.*

Prueba. 1) Es inmediato del teorema 1.21, pues si K no fuera cerrado, $\overline{K}$ es un conexo tal que $K \subset \overline{K} \subset \overline{S} = S$ lo cual contradice el hecho de que K sea una componente.

2) C_x es el conexo más grande que contiene a x, se llegará a que también es el conexo más grande que contiene a y. Si existiera un conexo C que contuviera a y más grande que C_x (es decir $C_x \subset C$), entonces, como $x \in C$, esto contradice el hecho de que C_x fuera la componente de x. Por lo tanto, C_x es el conexo más grande que contiene a y, de aquí que C es también la *y-componente* de X.

3) La demostración es inmediata, pues como C_z^X es el mayor subconjunto conexo en X que contiene a z y $C_z^X \subset Y \subset X$, se tiene que C_z^X es el mayor subconjunto conexo en Y que contiene a x. De aquí que $C_z^Y = C_z^X$. ■

Teorema 1.26. *Sean X un espacio métrico, $x \in X$ y W un subconjunto de X tales que $x \in int(X - W)$. Si $X - W$ tiene un número finito de componentes y $x \in C$, donde C es una componente de $X - W$, entonces $x \in intC$.*

Prueba. Sean $\{C_1, \ldots, C_n\}$ las componentes de $X - W$ y supongamos que $x \in C_1$. Como $C_2 \cup \ldots \cup C_n$ es cerrado en $X - W$ y $x \notin C_2 \cup \ldots \cup C_n$, es posible encontrar una $\epsilon > 0$, tal que $\epsilon < d(x, C_2 \cup \ldots \cup C_n)$. Además, como $x \in int(X - W)$, se puede tomar dicha ϵ de tal forma que $B_\epsilon(x) \subset X - W$. Entonces $B_\epsilon(x) \subset C_1$, lo que nos dice que $x \in intC_1$. ■

En particular, si X tiene un número finito de componentes y $x \in C \subset X$, donde C es una componente de X, entonces $x \in intC$.

A continuación, se introducen los conceptos de conexidad local y de conexidad en pequeño y se presentan algunos resultados básicos que son fundamentales para este trabajo.

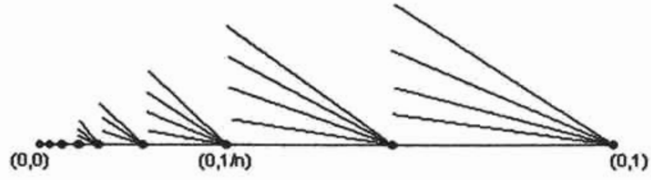
Definición 1.27. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es* ***localmente conexo*** *en x si para cada conjunto abierto V que contenga a x, existe un conjunto abierto y* *conexo U que contiene a x y que está contenido en V. Decimos que X es* ***localmente conexo****, si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Ejemplo 1.28. *El conjunto de los números reales, un círculo y un intervalo, son ejemplos de espacios localmente conexos (con la topología heredada).*

Definición 1.29. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es* ***conexo en pequeño*** *en x, si para cualquier conjunto abierto V que contenga a x, existe un conjunto conexo U tal que $x \in intU \subset U \subset V$. Decimos que X es* ***conexo en pequeño****, si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Es claro que si X es localmente conexo en un punto x, entonces X es conexo en pequeño en x. El recíproco es falso como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.30. *Para cada n y $k \in \mathbb{N}$, con $k > n > 1$, sea L_k^n el segmento de recta que une el punto $(\frac{1}{n}, \frac{1}{k})$ con el punto $(0, \frac{1}{n-1})$ y sea L el segmento de recta que une el punto $(0,0)$ con el punto $(0,1)$. Sea $M = \left(\bigcup_{k>n>1} L_k^n \right) \cup L$.*



Note que M es conexo en pequeño en el punto $(0,0)$ pues, si V es un conjunto abierto que contiene al punto $(0,0)$, existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que, el conjunto conexo $\bigcup_{k>1, n>N} L_k^n \cup L'$, donde L' es el segmento de recta que une el punto $(0,0)$ con el punto $(0, \frac{1}{n})$, se queda contenido en V. Sin embargo no es posible encontrar un conjunto que sea conexo y abierto contenido en V, de aquí que M no sea localmente conexo en $(0,0)$.

Aunque localmente no son lo mismo, globalmente sí lo son, es decir, X es localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño. Para probar esto, antes necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 1.31. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es localmente conexo si y sólo si para cada conjunto abierto U en X y cada componente C de U, se tiene que C es un conjunto abierto en X.*

Prueba. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U un conjunto abierto en X y C una componente de U. Se quiere demostrar que C es un conjunto abierto de X. Sea $x \in C$, entonces $x \in U$ y, como X es localmente conexo en x, se tiene que existe un conjunto abierto conexo V tal que $x \in V \subset U$, luego, $V \subset C$ pues V es un conexo que contiene a x y C es la componente de x, es decir, el conexo más grande que contiene a x. Entonces $x \in V \subset C$, lo que nos dice que x es un punto interior de C. De aquí que C es un conjunto abierto de X.

Supongamos ahora que para cada conjunto abierto U en X y cada componente C de U, se tiene que C es un conjunto abierto en X. Sean $x \in X$ y U cualquier conjunto abierto en X que contenga a x. Sea V la componente de U que contiene a x. Por hipótesis V es un conjunto abierto, y conexo por ser una componente, además $V \subset U$, lo que nos dice que X es localmente conexo en x para toda $x \in X$. ■

Teorema 1.32. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño.*

Prueba. Si X es localmente conexo, tenemos que X es conexo en pequeño. Ahora supóngase que, para cada punto $x \in X$, X es conexo en pequeño en x. Sean U un conjunto abierto de X y C una componente de U. Se demostrará que C es un conjunto abierto en X.

Tomemos un punto cualquiera x que esté en C. Como X es conexo en pequeño en x, para el conjunto abierto U (pues $x \in C \subset U$), existe un conexo V tal que $x \in intV \subset V \subset U$, luego, como V es un conexo que contiene a x, tenemos que $V \subset C$. Entonces se tiene que x es un punto interior de C, pues existe un conjunto abierto (que sería $intV$) que contiene a x y está contenido en C (pues $intV \subset V \subset C$). De aquí que C es un conjunto abierto en X. Se sigue del teorema 1.31, que X es localmente conexo. ■

También podemos pensar a la conexidad en pequeño de la siguiente manera.

Teorema 1.33. *Un espacio topológico X es conexo en pequeño en $x \in X$ si y sólo si para cada conjunto abierto U de X tal que $x \in U$, se tiene que $x \in intC$, donde C es la componente de U que contiene a x.*

Prueba. Supongamos que X es conexo en pequeño en un punto $x \in X$. Sean U un conjunto abierto en X que contiene a x y C la componente de U que contiene a x. Como X es conexo en pequeño en x, se tiene que para el conjunto abierto U, existe un conjunto conexo V tal que $x \in intV \subset V \subset U$. Como V es un conexo que contiene a x, se tiene que $V \subset C$, luego $x \in int\, C$, pues $intV \subset intC$.

Ahora, supóngase que para cada conjunto abierto U de x, se tiene que $x \in intC$, donde C es la componente de U que contiene a x. La demostración es inmediata pues C es un conexo contenido en U tal que $x \in intC$. ■

6. Compacidad.

Dado un espacio topológico X, se define el concepto de compacidad y se presentan algunos resultados básicos que nos serán de ayuda más adelante.

Definición 1.34. *Sea X un espacio topológico. Una colección β de subconjuntos de X se dice que **cubre** X, o que es una **cubierta** para X, si la unión de los elementos de β coincide con X.*

*Se dice que β es una **cubierta abierta** para X, si β es una cubierta de X formada por conjuntos abiertos en X.*

Una vez definido esto, se introduce el concepto de compacidad.

Definición 1.35. *Decimos que X es compacto si para cada cubierta abierta β para X podemos encontrar una subcubierta finita de β que cubre a X.*

Vamos a probar algunos hechos acerca de subespacios. Si Y es un subespacio de X, una colección β se dice que cubre a Y (o que es una cubierta para Y) si la unión de sus elementos contiene a Y.

Teorema 1.36. *Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si y sólo si cada cubierta de Y por abiertos de X contiene una subcubierta finita que cubre a Y.*

Prueba. Supongamos que Y es compacto y que $\beta = \{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una cubierta de Y por abiertos de X. Entonces la colección $\{B_\alpha \cap Y \mid \alpha \in J\}$ es una cubierta de Y por conjuntos abiertos en Y.

Como Y es compacto, existe una subcubierta finita de la forma $\{B_{\alpha_1} \cap Y, \ldots, B_{\alpha_2} \cap Y\}$ que cubre a Y. Entonces $\{B_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_n}\}$ es una subcubierta finita de β que cubre a Y.

Recíprocamente, sea $\beta' = \{B'_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una cubierta de Y por abiertos de Y. Para cada $\alpha \in J$, podemos elegir un conjunto B_α abierto en X tal que $B'_\alpha = B_\alpha \cap Y$.

La colección $\beta = \{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una cubierta de Y por abiertos de X. Por hipótesis, alguna subcubierta finita $\{B_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_1}\}$ cubre a Y. Entonces $\{B'_{\alpha_1}, \ldots, B'_{\alpha_1}\}$ es una subcubierta finita de β' que cubre a Y. ■

Teorema 1.37. *Cada subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Prueba. Sea C un subconjunto cerrado de un espacio compacto X. Dada una cubierta $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ para C de abiertos en X, queremos encontrar una subcubierta finita de $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$.

Como C es un cerrado de X, $X-C$ es un conjunto abierto. Por lo tanto $\{B_\alpha, X-C\}_{\alpha\in J}$ es una cubierta abierta para X, como X es compacto, existe una subcubierta finita $\{U_1,\ldots,U_n\}\subset\{B_\alpha, X-C\}_{\alpha\in J}$ que cubre a X. Si $\{U_1,\ldots,U_n\}$ no coniene a $X-C$, entonces $\{U_1,\ldots,U_n\}$ es una subcubierta abierta de $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ para C, luego, si $\{U_1,\ldots,U_n\}$ contiene a $X-C$, podemos suponer que $U_1=X-C$, y entonces $\{U_2,\ldots,U_n\}$ es una subcubierta abierta de $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ para C, de aquí que C es compacto. ■

Teorema 1.38. *Sea X un espacio de Hausdorff. Sea K un compacto en X, entonces K es cerrado.*

Prueba. Se demostrará que el complemento de K es un conjunto abierto en X. Sean $x\in X-K$ y un punto $y\in K$. Como X es un espacio de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos U_y y V_y en X, disjuntos, tales que $x\in U_y$ y $y\in V_y$. Note que esto se puede hacer para cada $y\in K$ y el punto x. Sea $\beta=\{V_y \mid y\in K\}$. Entonces β es una cubierta abierta de K y, como K es compacto, existen $V_{y_1},\ldots,V_{y_n}\in\beta$, tales que $K\subset\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i}$. Luego $\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}$ es un conjunto abierto en X que contiene a x, pues cada conjunto U_{y_i} es un conjunto abierto en X que contiene a x y la intersección finita de conjuntos abiertos en X es un conjunto abierto en X. Además, $\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}\subset\bigcap_{i=1}^{n}(X-V_{y_i})=X-\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i}\subset X-K$. Como $K\subset\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i}$, se tiene que x es un punto interior de $X-K$, esto pues, se encontró un conjunto abierto, $\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}$, en X que contiene al punto x, tal que $(\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i})\cap K=\emptyset$. Por lo tanto, $X-K$ es un conjunto abierto en X. De aquí que K es un conjunto cerrado. ■

Teorema 1.39. *Si K es un subconjunto compacto en un espacio métrico X, entonces K es cerrado y acotado.*

Prueba. Como todo espacio métrico es de Hausdorff, por el teorema 1.38, K es un conjunto cerrado. Se probará que K es un conjunto acotado. Sea $\beta=\{B_1(x) \mid x\in K\}$, es claro que β es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existe una subcubierta finita de bolas abiertas de radio 1 que cubren a K. Sean $x_1,\ldots,x_n$ los centros de dichas bolas. Sean $M = \text{máx}\{d(x_i,x_j) \mid i,j \in \{1,..,n\}\}$ y $x,y \in K$.

Entonces, $d(x,y) \leq M+2$, pues recordemos que el conjunto $\{B_1(x_1),\ldots,B_1(x_n)\}$ cubre a K. De aquí que K es un conjunto acotado. ■

A continuación, se introduce el concepto de casicomponente.

Definición 1.40. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. La **casicomponente** Q_x de x en X es la intersección de todos los abiertos y cerrados de X que contienen a x. Es decir,*

$$Q_x = \cap\left\{A \subset X \mid A \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } x \in A\right\}.$$

Resulta que si el espacio es compacto, las nociones de casicomponente y componente coinciden.

Teorema 1.41. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $x \in X$, entonces* $C_x = Q_x$. Ver [2, Teorema 9.2.4, pág. 427]

Teorema 1.42. *Sea X un espacio topológico compacto. Si K es una casicomponente de X y U es un conjunto abierto en X tal que $K \subset U$, entonces existe un conjunto abierto y cerrado B en X tal que $K \subset B \subset U$.*

Prueba. Para cada $x \in X-U$ existen U_x y V_x abiertos y cerrados en X tales que $K \subset U_x$, $x \in V_x$, $X = U_x \cup V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$. Como $X-U$ es un conjunto cerrado en X y éste es compacto, $X-U$ es compacto. Entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1,\ldots,x_m \in X-U$, tales que $X-U \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$. Sea $B = \bigcap_{i=1}^{m} U_{x_i}$, entonces $K \subset B$ y B es un conjunto abierto y cerrado en X con $B \subset U$. ■

Si X es un espacio métrico, se demostrará que la definición de compacidad es equivalente a pedir que toda sucesión en X contenga una subsucesión convergente. Para esto, se necesita demostrar el lema del número de Lebesgue y la siguiente proposición.

Proposición 1.43. *Sean X un espacio compacto y $J \subset X$ un subconjunto con una cantidad infinita de puntos, entonces X tiene un punto de acumulación de J.*

Prueba. Supongamos que ningún punto en X es un punto de acumulación de J, es decir, para toda $z \in X$ existe un conjunto abierto U_z, con $z \in U_z$ tal que $U_z \cap J \subset \{z\}$. La familia $\{U_z \mid z \in X\}$ es una cubierta abierta para X, como X es compacto, existe una subcubierta finita que cubre a X. Sea $\{U_{z_1}, \ldots, U_{z_m}\}$ tal subcubierta. Como $X = \bigcup_{i=1}^{m} U_{z_i}$ y, para cada $i = 1, \ldots, m$, se tiene que $U_{z_i} \cap J \subset \{z_i\}$. Se sigue que J tiene a lo más m elementos. ■

Lema 1.44. *Sea A una cubierta abierta para el espacio métrico (X,d). Si X es compacto, entonces existe un $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto de X con diámetro menor que δ, existe un elemento de A conteniéndolo.*

El número δ se denomina **número de Lebesgue para la cubierta** A.

Prueba. Sea A una cubierta abierta de X. Supongamos que X no es un elemento de A, pues es claro que el resultado se seguiría para cualquier $\delta > 0$. Como X es compacto, existe una subcolección finita $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de A que cubre a X. Para cada $i = 1, \ldots, n$, sea $C_i = X - A_i$ y se define $f : X \to \mathbb{R}$ como la función media de las distancias de un punto x a los conjuntos C_i, es decir,

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i).$$

Se demostrará que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Como $\{A_1, \ldots, A_n\}$ cubre a X, existe $i = 1, \ldots, n$ tal que $x \in A_i$. Como A_i es un conjunto abierto en X, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset A_i$. Entonces, $d(x, C_i) \geq \epsilon$, y por lo tanto $f(x) \geq \frac{\epsilon}{n}$. Como f es una función continua definida en un compacto, f tiene un valor mínimo δ. Se demostrará que δ es un número de Lebesgue. Sea B un subconjunto de X cuyo diámetro sea menor que δ.

Tomemos un punto $x_0 \in B$. Entonces $B \subset B_\delta(x_0)$. Ahora:

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m)$$

donde $d(x_0, C_m)$ es el mayor de los números $d(x_0, C_i)$. Entonces la bola de radio δ y centro en x_0 está contenida en el elemento $A_m = X - C_m$ de la cubierta de A. ■

Teorema 1.45. *Sea X un espacio métrico. Entonces son equivalentes:*

a) X es compacto.

b) Toda sucesión de puntos en X, contiene una subsucesión convergente.

Prueba. Supongamos que X es un espacio métrico y compacto y sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos en X. Se quiere demostrar que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente. Sea $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Considérense dos casos:

1) Si S es un conjunto finito, entonces hay una subsucesión constante de $\{x_n\}$ que claramente converge.

2) Si S es un conjunto infinito, por la proposición 1.43, se tiene que S tiene un punto de acumulación al cual lo llamaremos z. Se demostrará que existe una subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a z. Como X es un espacio métrico, X es primero numerable. Por lo tanto, existe una base local numerable $\beta = \{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$ para z. Se puede suponer que $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ (pues de lo contrario, se construye una nueva base local tomando como elementos a $B_1 \cap \ldots \cap B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$). Ahora, como z es un punto de acumulación, existe un punto de la sucesión $\{x_n\}$ en $B_1 - \{z\}$, al cual lo llamaremos x_{n_1}, luego, existe un punto x_{n_2} de la sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_{n_2} \in B_2 - \{z\}$ y podemos escoger $n_2 > n_1$. Sucesivamente se construye la subsucesión $\{x_{n_i}\}$ de $\{x_n\}$ que claramente converge al punto z.

Ahora supongamos que toda sucesión de puntos en X, contiene una subsucesión convergente.

Primero, se demostrará que el lema del número de Lebesgue se tiene para X. Sea A una cubierta abierta de X. Supongamos que no existe un $\delta > 0$ tal que cada subconjunto de X de diámetro menor que δ esté contenido en un elemento de A y veamos que se llega a una contradicción. Se está suponiendo que, para cada $\delta > 0$ existe un subconjunto C de X con diámetro menor que δ que no está contenido en ningúm elemento de A. En particular, para cada número natural n, existe un subconjunto C_n de X con diámetro menor que $\frac{1}{n}$ que no está contenido en ningún elemento de A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elijamos un punto $x_n \in C_n$. Por hipótesis, existe una subsucesión $\{x_{n_i}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$ que converge a un punto a. Como A es una cubierta abierta para X, se tiene que a está en algún elemento A_a de A. Como

A_α es un conjunto abierto en X, existe una $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subset A_\alpha$. Luego, como la sucesión $\{x_{n_i}\}$ converge al punto a, siempre existe un número natural i suficientemente grande para que $x_{n_i} \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(a)$ y $\frac{1}{n_i} < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, como el diámetro de C_{n_i} es menor a $\frac{1}{n_i} < \frac{\epsilon}{2}$ y $x_{n_i} \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(a)$, se tiene que el subconjunto $C_{n_i} \subset B_\epsilon(a)$, lo cual es una contradicción. Entonces la propiedad del número de Lebesgue se tiene para X.

Ahora se demostrará que dado $\epsilon > 0$, existe un cubierta finita de X por bolas de radio ϵ. Para esto, supóngase que existe un $\epsilon > 0$ tal que X no puede ser cubierto por un número finito de bolas de radio ϵ, para así llegar a una contradicción. Se construirá la siguiente sucesión: sea x_1 cualquier punto en X. Como $B_\epsilon(x_1)$ no cubre a X, es posible tomar un punto $x_2 \in X - B_\epsilon(x_1)$. Análogamente, dados $x_1, \ldots, x_n$, como $B_\epsilon(x_1) \cup \ldots \cup B_\epsilon(x_n)$ no cubre a X, se elige un punto x_{n+1} que no esté en la unión $B_\epsilon(x_1) \cup \ldots \cup B_\epsilon(x_n)$. Es claro que la sucesión $\{x_n\}$ no contiene ninguna subsucesión convergente, lo que contradice la hipótesis..

Finalmente, se demostrará que X es compacto. Sea A una cubierta abierta para X. Entonces la cubierta abierta A tiene un número de Lebesgue δ. Si tomamos a $\epsilon = \frac{\delta}{3}$, se puede encontrar una cubierta finita de X por bolas de radio ϵ. Cada una de estas bolas tiene como diámetro $\frac{2\delta}{3}$, que como es menor a δ, nos dice que cada bola de radio ϵ de la cubierta finita de X, está contenida en algún elemento de A. Eligiendo este elemento de A para cada una de las bolas de radio ϵ de la cubierta finita de X, se obtiene una subcubierta finita de A que cubre a X. ■

Definición 1.46. *Una colección C de subconjuntos de X se dice que tiene la propiedad de la intersección finita, si cada subcolección finita $\{C_1, \ldots, C_n\}$ de C tiene intersección no vacía, es decir, que $C_1 \cap \ldots \cap C_n$ es no vacía.*

Una vez definido esto, el siguiente teorema nos proporciona un criterio para decidir si un espacio es o no compacto, el cual, será una herramienta importante para el dearrollo de este trabajo.

Teorema 1.47. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si para cada* *colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es no vacía.*

Prueba. Dada cualquier colección β de subconjuntos de X, sea $\mathcal{C} = \{X - B \mid B \in \beta\}$ la colección de sus complementos.

Entonces, se afirma lo siguiente:

a) La colección β cubre X si y sólo si la intersección $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es vacía.

Esta afirmación se deduce de la ley de De Morgan: $X - (\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in J}(X - B_\alpha)$.

Supongamos entonces que X es compacto, sea $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita. Se quiere demostrar que $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es no vacía. Sea β la colección de los complementos de $\mathcal{C}$, es decir $\beta = \{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}$. Note que también se pueden presentar a las colecciones $\mathcal{C}$ y β como sigue: $\beta = \{B \mid B = X - C, \text{con } C \in \mathcal{C}\}$ y $\mathcal{C}=\{X - B \mid B \in \beta\}$. Como $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de la intersección finita, se tiene que para cada subcolección finita $\{X - B_1,\dots,X - B_n\}$ de $\mathcal{C}$, la intersección $X - B_1 \cap\dots\cap X - B_n$ es no vacía. Entonces se tiene que para cada subcolección finita $\{B_1,\dots,B_n\}$ de β, la colección $\{B_1,\dots,B_n\}$ no cubre X. Observe que los elementos de β son conjuntos abiertos, luego, como X es compacto, se tiene que β no cubre a X, pues de lo contrario existiría una cubierta abierta para X sin subcubierta finita de β que cubra a X. Se sigue de a) que la intersección $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es no vacía.

Recíprocamente, supóngase ahora que para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es no vacía. Sea β una cubierta abierta para X, se quiere demostrar que existe una subcubierta finita de β que cubre a X. Para esto, sea $\mathcal{C} = \{X - B \mid B \in \beta\}$. Note que los elementos de $\mathcal{C}$ son conjuntos cerrados en X. Se sigue de a) que la intersección $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es vacía. Entonces el conjunto $\mathcal{C}$ no tiene la propiedad de la intersección finita y, por lo tanto, existe una subcolección finita $\{X - B_1,\dots,X - B_n\}$ de β tal que $X - B_1 \cap\dots\cap X - B_n = \emptyset$.

De aquí que la subcolección $\{B_1,\dots,B_n\}$ de β cubra a X, que era lo que se quería demostrar. ■

Teorema 1.48. *Sean Y un espacio de Hausdorff, J un conjunto totálmente ordenado, y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de de espacios compactos no vacios de Y, tales que si α y $\varphi \in J$, con $\alpha < \varphi$, entonces $X_\varphi \subset X_\alpha$. Sean $X = \bigcap_{\alpha\in J} X_\alpha$ y U un conjunto abierto en Y tales que $X \subset U$.*

Entonces:

1) X es un espacio compacto distinto del vacío.

2) Existe $\alpha \in J$ tal que para toda $\varphi > \alpha$, se tiene que $X_\varphi \subset U$.

Prueba. 1) Se sigue de la propiedad de la intersección finita que $X \neq \emptyset$. Además X es cerrado ya que por ser Y de Hausdorff, cada X_α es cerrado (teorema 1.38). Entonces X es un subconjunto cerrado en Y el cual es compacto, que por el teorema 1.37, X es un espacio compacto.

2) Supongamos que para todo $\alpha \in J$ se tiene que $X_\alpha - U \neq \emptyset$, entonces $\{X_\alpha - U\}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita, ya que, si α y $\varphi \in J$, con $\alpha < \varphi$, entonces $X_\varphi - U \subset X_\alpha - U$, es decir, $\{X_\alpha - U\}$ es una familia anidada de cerrados. Como Y es compacto, por el teorema 1.47, se tiene que $\emptyset \neq \bigcap_{\alpha\in J}(X_\alpha - U) = X - U$ lo cual es una contradicción, pues $X \subset U$. Entonces, existe $\alpha \in J$ tal que $X_\varphi \subset U$ para toda $\varphi > \alpha$. ■

A continuación, se presenta el Lema de Zorn:

Lema 1.49. *Sea $(P,\preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado (es decir, $P \neq \emptyset$, si $a,b \in P$, $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$; si $a,b \in P$, $a \leq b$ y $b \leq a$,* entonces *$a = b$). Recordemos que un subconjunto C* de *P es una cadena, si dados $c_1,c_2 \in C$,* se tiene que *$c_1 \leq c_2$ o bien $c_2 \leq c_1$ (se pueden comparar). Si toda cadena no vacia tiene una cota superior [inferior] en P, entonces P tiene algún elemento maximal [minimal].*

Ver [2, A.10.8, pág. 637]

CAPÍTULO 2

Continuos

En este capítulo se presentan algunos resultados de la teoría de los continuos que serán utilizados posteriormente. En especial los teoremas de golpes en la frontera y algunos resultados acerca de las composantes y los continuos irreducibles.

Primero, se cita un resultado muy importante en la teoría de los continuos que nos dice que todo continuo localmente conexo es arcoconexo. Más adelante, se verán resultados sobre sucesiones de continuos que serán muy importantes posteriormente. También se define lo que es cíclicamente conexo, punto de separación y punto de separación débil y se presentan algunos resultados sobre estos temas, los cuales serán utilizados en el último capítulo.

Definición 2.1. *Decimos que M es un continuo si M es un espacio métrico, compacto y conexo.*

1. Conexidad local y en pequeño.

Si M es un continuo, entonces se pueden pensar a los subcontinuos de M como subconjuntos cerrados y conexos. Cuando se está en un espacio métrico M, se tiene que M es un espacio regular, por lo tanto, dados un punto $p \in M$ y un conjunto abierto U en M que contiene a p, se puede encontrar un conjunto abierto W tal que $p \in W \subset \overline{W} \subset U$.

Usando la regularidad, se puede reescribir la definición de conexidad en pequeño como sigue:

Definición 2.2. *Sean M un continuo y $p \in M$. Decimos que M es* ***conexo en pequeño*** *en p si para todo conjunto abierto U en M con $p \in U$, existe un subcontinuo H de M tal que $p \in intH \subset H \subset U$.*

También es posible presentar una equivalencia para la conexidad local en términos de continuos:

Teorema 2.3. *Sean M un continuo y $p \in M$. Entonces M es localmente conexo en p si y sólo si para cada conjunto abierto U que contenga a p, existe un subcontinuo H de M, con $intH$ conexo, tal que $p \in intH \subset H \subset U$.*

Prueba. Supongamos que M es localmente conexo en p. Tomemos un conjunto abierto U que contenga a p. Como M es un espacio métrico, M es un espacio regular, por lo tanto, se puede encontrar un conjunto abierto W tal que $p \in W \subset \overline{W} \subset U$. Como M es localmente conexo en p, para el conjunto abierto W, existe un conjunto V abierto y conexo tal que $p \in V \subset W$. Luego, $\overline{V}$ es un continuo que contiene a p en su interior (pues $p \in V \subset \overline{V}$), $\overline{V}$ está contenido en U (pues $\overline{V} \subset \overline{W} \subset U$) y, como V es un conjunto abierto conexo con $V \subset int\overline{V} \subset \overline{V}$, por el teorema 1.21, se tiene que $int\overline{V}$ es conexo que era lo que se quería demostrar.

Ahora supongamos que para cada conjunto abierto U que contenga a p, existe un subcontinuo H de M, con $intH$ conexo, tal que $p \in intH \subset H \subset U$. Se quiere demostrar que M es localmente conexo en p. Pero esto es inmediato, pues dado un conjunto abierto U con $p \in U$ y haciendo a $V = intH$, se tiene un conjunto abierto conexo V que contiene a p y está contenido en U. ■

El intervalo $[0,1]$ o el círculo, son ejemplos de continuos localmente conexos. También la unión, resulta un continuo localmente conexo. Este resultado se presenta a continuación.

Teorema 2.4. *La unión finita de continuos localmente conexos con intersección no vacía, es un continuo localmente conexo.*

Prueba. Basta demostrar que si X_1 y X_2 son continuos localmente conexos, entonces $X_1 \cup X_2$ es un continuo localmente conexo. Es claro que $X_1 \cup X_2$ es un continuo (pues la unión de cerrados es cerrada y la unión conexa de conexos con intersección no vacía es conexa).

Sean $x \in X_1 \cup X_2$ y U un conjunto abierto en $X_1 \cup X_2$ tales que $x \in U$. Se puede suponer que $x \in X_1$. Entonces $U \cap X_1$ es un conjunto abierto de X_1 y $U \cap X_2$ es un abierto de X_2.

Si $U \cap X_2 = \emptyset$, entonces $U = U \cap X_1$, por lo que U también es un conjunto abierto en X_1. Como X_1 es localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo $V \cap X_1$ en X_1 tal que $x \in V \cap X_1 \subset U$, donde V es un conjunto abierto en $X_1 \cup X_2$. Como $V \cap X_1 \subset X_1$, entonces $V = V \cap X_1$, lo que nos dice que V es un conjunto abierto y conexo en $X_1 \cup X_2$ tal que $x \in V \subset U$.

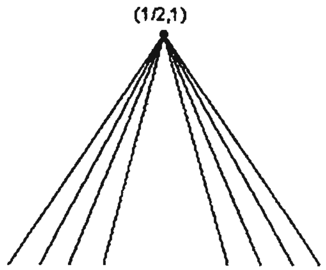
Si $U \cap X_2 \neq \emptyset$. Como X_1 es localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo $V \cap X_1$ en X_1, tal que, $x \in V \cap X_1 \subset U \cap X_1$. De igual manera, existe un conjunto abierto y conexo $V' \cap X_2$ en X_2, tal que, $x \in V' \cap X_2 \subset U \cap X_2$. Entonces $(V \cap X_1) \cup (V' \cap X_2)$ es un conjunto conexo contenido en U.

No es difícil convencerse de que $(V \cap X_1) \cup (V' \cap X_2) = V \cup V'$ (usando el hecho de que, dados tres conjuntos A, B y C, se tiene que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$), el cual, es un conjunto abierto en $X_1 \cup X_2$. Por lo que $X_1 \cup X_2$ es un continuo localmente conexo. ∎

Ejemplo 2.5. *Sea M la curva sen$\frac{1}{x}$ descrita en el ejemplo 1.23. Entonces M es un continuo que no es localmente conexo.*

M no es localmente conexo pues, dado cualquier conjunto abierto U que contenga a un punto de la forma $(0,y) \in \mathbb{R}^2$, con $-1 \leq y \leq 1$, observe que si C es la componente de U que contiene al punto $(0,y)$, entonces $x \notin intC$, que, por el teorema 1.33, se llega a que M no es conexo en pequeño en $(0,y)$ y, por lo tanto, M no es localmente conexo en $(0,y)$.

Ejemplo 2.6. *Sea C el conjunto de Cantor en el intervalo* $[0,1]$. *Tomemos el punto* $(\frac{1}{2},1)$ *y denotemos por* L_x *al segmento de recta que une al punto* $(\frac{1}{2},1)$ *con el punto* $(x,0)$ *para cada* $x \in C$. *Sea* $M = \bigcup_{x\in C} L_x$.



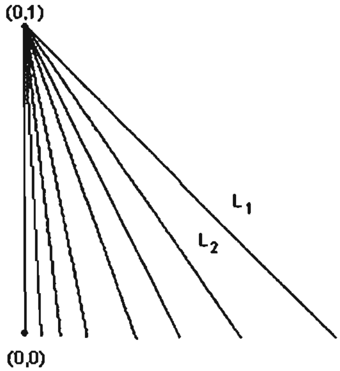
Entonces M es un continuo que no es localmente conexo. Esto pues, dado cualquier conjunto abierto U que contenga a un punto $x \in M - \{(\frac{1}{2},1)\}$, observe que si C es la componente de U que contiene al punto x, entonces $x \notin intC$, que, por el teorema 1.33, se llega a que M no es conexo en pequeño en x y, por lo tanto, M no es localmente conexo en x.

Observe que M sólo es localmente conexo en el punto $(\frac{1}{2},1)$. Al continuo M se le conoce como el **abanico de Cantor.**

Un resultado muy importante en la teoría de los continuos es el de que todo continuo localmente conexo es un continuo arcoconexo [6, Teorema 8.23, pág. 130]. El recíproco es falso, es decir, existen continuos arcoconexos que no son localmente conexos, como por ejemplo, el abanico de Cantor, aunque existen muchos otros como se muestra en los siguientes ejemplos:

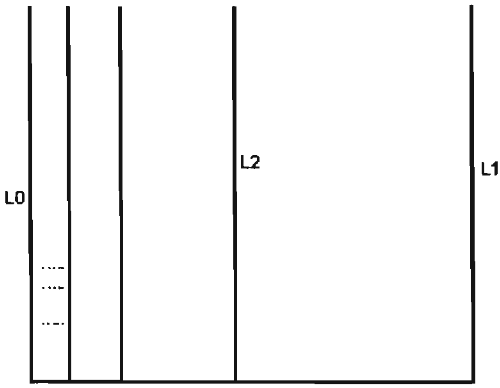
Ejemplo 2.7. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sean* L_n *el segmento de recta que une al punto* $(0,1)$ *con el punto* $(0,\frac{1}{n})$ y L_0 *el segmento de recta que une al punto* $(0,1)$ *con el punto* $(0,0)$. *Sea*

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n.$$



Entonces M es un continuo arcoconexo que no es localmente conexo (no es localmente conexo en ningún punto de $L_0 - \{(0,1)\}$). A M se le conoce como el **abanico armónico.**

Ejemplo 2.8. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sean* L_n *el segmento de recta que une al punto* $(\frac{1}{n}, 0)$ *con el punto* $(\frac{1}{n}, 1)$, L_0 *el segmento de recta que une al punto* $(0,0)$ *con el punto* $(0,1)$ *y* L *el segmento de recta que une al punto* $(0,0)$ *con el punto* $(1,0)$. *Sea* $M = L \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \right)$.



Entonces M es un continuo arcoconexo que no es localmente conexo (no es localmente conexo en ningún punto $(0,y)$ con $0 < y \leq 1$). A M se le conoce como **el espacio peine.**

2. Golpes en la frontera.

Dado cualquier subconjunto E de un continuo, si K es la componente de E, entonces $\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset$. Este resultado será utilizado en muchas ocasiones. Para obtenerlo se necesitan demostrar algunos resultados previos. A estos resultados se les conocen como los teoremas de golpes en la frontera. También se demostrarán un par de resultados sobre las fronteras que servirán posteriormente.

Teorema 2.9. *Sean X un continuo y U un subconjunto propio y abierto de X ($U \neq \emptyset$). Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$ (que es equivalente a decir que $K \cap (X - U) \neq \emptyset$, pues $K \subset \overline{U}$ y U es abierto).*

Prueba. Supongamos que $K \cap Fr(U) = \emptyset$. Como $\overline{U}$ es compacto, se sigue del teorema 1.41 que K es una casicomponente de $\overline{U}$. Además, como $K \cap Fr(U) = \emptyset$, se tiene que $K \subset U$. Se sigue de aquí, por el teorema 1.42, que existe M_1 abierto y cerrado en $\overline{U}$ tal que $K \subset M_1 \subset U$.

Sea $M_2 = \overline{U} - M_1$. Entonces $\overline{U} = M_1 \cup M_2$, donde M_1 y M_2 son conjuntos cerrados de $\overline{U}$, ajenos, de tal manera que $K \subset M_1$ y $Fr(U) \subset M_2$. Sea $M_3 = M_2 \cup (X - U)$. Se demostrará que X no es conexo usando a M_1 y M_3. Como $\overline{U} = M_1 \cup M_2$, se tiene que $X = M_1 \cup M_3$. Claramente M_1 y M_3 son conjuntos cerrados en X. Como $K \neq \emptyset$ y $K \subset M_1$, se tiene que $M_1 \neq \emptyset$. Como $X - U \subset M_3$ y $U \neq X$, se tiene que $M_3 \neq \emptyset$.

Se quiere demostrar que $M_1 \cap M_3 = \emptyset$. Note que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, entonces $M_1 \cap M_3 = M_1 \cap (X - U)$. Como $M_1 \subset \overline{U}$ y $X - U$ es un conjunto cerrado en X, se tiene que $M_1 \cap M_3 \subset \overline{U} \cap (X - U) = Fr(U) \subset M_2$ y, como $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, se tiene que $M_1 \cap M_3 = \emptyset$. Entonces X no es conexo, lo cual es una contradicción. ■

Corolario 2.10. *Sea X un continuo no degenerado. Entonces, X contiene propiamente un subcontinuo no degenerado. Más aún, si A es un subcontinuo propio de X y U es un* *subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subset B \neq A$ y $B \subset U$.*

Prueba. Se probará primero la última parte. Sean A un subcontinuo propio de X y U un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$. Como X es un espacio métrico, X es un espacio normal. Por lo tanto, se puede encontrar un conjunto abierto V en X tal que $A \subset V$, $\overline{V} \subset U$ y $V \neq X$. Sea B la componente de $\overline{V}$ que contiene a A. Como $A \subset B$ y $\overline{V} \subset U$, se tiene que $B \subset U$. Entonces por el teorema 2.9, $B \cap (X - V) \neq \emptyset$ además, B es un continuo (teorema 1.25, 1)) y, como $A \subset V$, se tiene que $A \neq B$ (pues $B \cap Fr(V) \neq \emptyset$). Esto prueba la última parte del corolario.

Ahora se probará la primera parte, pero esta es inmediata de la segunda parte del corolario tomando un punto $p \in X$ y haciendo $A = \{p\}$ y U un subconjunto abierto en X distinto del total tal que $A \subset U$. ■

Teorema 2.11. *Sean X un continuo y E un subconjunto propio, distinto del vacío, de X. Si K es una componente de E entonces $\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset$ (que es equivalente a decir que $\overline{K} \cap \overline{(X-E)} \neq \emptyset$).*

Prueba. Supongamos que $\overline{K} \cap \overline{(X-E)} = \emptyset$. Como $\overline{K} \neq \emptyset$ y $\overline{(X-E)} \neq \emptyset$, se tiene que $\overline{K}$ es un subcontinuo propio de X. Sea $U = X - \overline{(X-E)}$ (U es abierto pues $\overline{(X-E)}$ es cerrado). Entonces $\overline{K} \subset U \subset E$ y, por corolario 2.10, existe un continuo B tal que $\overline{K} \subset B$ propiamente y $B \subset U$ lo cual es una contradicción pues B es un conexo que contiene propiamente a K y $B \subset E$ contradiciendo el hecho de que K es una componente de E. Por lo tanto, se tiene que $\overline{K} \cap \overline{(X-E)} \neq \emptyset$. ■

Teorema 2.12. *Sean M un continuo y $x,y,z \in M$ puntos distintos. Supongamos que existen continuos H_y y H_z en $M - \{z\}$ y $M - \{y\}$, respectivamente, tales que $x,y \in H_y$ y $x,z \in H_z$. Sean U y V dos conjuntos abiertos en M que contienen a y y a z, respectivamente, tales que: $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, $x \notin \overline{U} \cup \overline{V}$, $\overline{U} \cap H_z = \emptyset$, y $\overline{V} \cap H_y = \emptyset$. Entonces, si C es la x-componente de $M - (U \cup V)$, se tiene que $C \cap Fr(U) \neq \emptyset$ y $C \cap Fr(V) \neq \emptyset$.*

Prueba. Sea J_1 la componente de $H_y - U$ que contiene a x. Por el teorema 2.11, se tiene que $J_1 \cap Fr_{H_y}(U) \neq \emptyset$, donde Fr_{H_y} es la frontera de U con la topología relativa sobre el conjunto H_y.

Afirmamos que $Fr_{H_y}(U) \subset Fr(U)$. Esto pues, si $x \in Fr_{H_y}(U)$, se tiene que $B_\epsilon^{H_y}(x) \cap U \neq \emptyset$ y $B_\epsilon^{H_y}(x) \cap (H_y - U) \neq \emptyset$ donde $B_\epsilon^{H_y}(x)$ es la bola abierta en H_y de radio ϵ y centro en x. Como $B_\epsilon^{H_y}(x) \subset B_\epsilon(x)$, se tiene que $B_\epsilon(x) \cap U \neq \emptyset$ y $B_\epsilon(x) \cap (H_y - U) \neq \emptyset$, luego, como $H_y - U \subset M - U$, se llega a que $B_\epsilon(x) \cap (M - U) \neq \emptyset$, lo que nos dice que $x \in Fr(U)$.

Como $Fr_{H_y}(U) \subset Fr(U)$, entonces $J_1 \cap Fr(U) \neq \emptyset$. Análogamente, sea J_2 la componente de $H_z - V$ que contiene a x. De igual manera, $J_2 \cap Fr(V) \neq \emptyset$. Entonces $J_1 \cup J_2$ es un conjunto conexo que contiene al punto x y está contenido en $M - (U \cup V)$, por lo tanto $J_1 \cup J_2 \subset C$. Se sigue que $C \cap Fr(U) \neq \emptyset$ y $C \cap Fr(V) \neq \emptyset$. ■

3. Sucesiones de continuos.

A continuación, se presentan algunos resultados sobre las sucesiones de continuos. Se demostrará que si una sucesión de continuos converge a X, entonces X es un continuo. Para esto, se usarán los límites inferiores y superiores. También se demostrará que la intersección anidada de continuos es un continuo, lo cual, será de gran utilidad posteriormente.

Definición 2.13. *Sea X un espacio métrico y sea $\{C_n\}$ una sucesión de subcontinuos de X. Vamos a definir los siguientes conjuntos:*

$$\text{líminf}\{C_n\} = \{x \in X \mid x = \text{lím}x_n, \text{ con } x_n \in C_n \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \text{ y}$$
$$\text{límsup}\{C_n\} = \{x \in X \mid x = \text{lím}x_{n_j}, \text{ con } x_{n_j} \in C_{n_j} \text{ y } n_1 < n_2 < \ldots\}$$

Es claro que $\text{líminf}\{C_n\} \subset \text{límsup}\{C_n\}$.

A veces conviene pensar a estos dos conjuntos de la siguiente manera:

$\text{líminf}\{C_n\} = \{x \in X \mid$ para todo conjunto abierto U tal que $x \in U$, $U \cap C_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$ a excepción de un número finito}

y

límsup$\{C_n\}$ = $\{x \in X$ | para todo conjunto abierto U que contenga a x, se tiene que $U \cap C_i \neq \emptyset$ para una infinidad de $i \in \mathbb{N}\}$

Estas nuevas definiciones son equivalentes a las primeras (ver [4, págs. 335-337]) y nos servirán para demostrar que el conjunto límsup$\{C_n\}$ es un conjunto cerrado.

Teorema 2.14. *Sean X un espacio métrico y $\{C_n\}$ una sucesión de conjuntos en X. Entonces,* límsup$\{C_n\}$ *es un conjunto cerrado en X.*

Prueba. Sea $x \in X$ tal que x es un punto de acumulación de límsup$\{C_n\}$. Se quiere demostrar que $x \in$ límsup$\{C_n\}$. Como x es un punto de acumulación de límsup$\{C_n\}$, dado cualquier conjunto abierto U que contenga a x, se tiene que $U \cap$ (límsup$\{C_n\}$) $\neq \emptyset$. Sea entonces U un conjunto abierto que contenga a x y y un punto en $U \cap$ límsup$\{C_n\}$. Como $y \in$ límsup$\{C_n\}$, se tiene que $U \cap C_i \neq \emptyset$ para una infinidad de $i \in \mathbb{N}$. Como esto fue para cualquier conjunto abierto U que contiene a x, entonces $x \in$ límsup$\{C_n\}$. De aquí que el conjunto límsup$\{C_n\}$ es cerrado. ■

Entonces, si $\{C_n\}$ es una sucesión de conjuntos, se tiene que límsup$\{C_n\}$ es un conjunto cerrado y, más aún, si el conjunto líminf$\{C_n\}$ es distinto del vacío, entonces límsup$\{C_n\}$ es conexo, es decir, el conjunto límsup$\{C_n\}$ es un continuo. Éste será el siguiente resultado, pero antes, se demostrará el siguiente teorema que servirá para demostrar lo que se quiere.

Teorema 2.15. *Sean X un espacio métrico compacto y $\{C_n\}$ una sucesión de conjuntos en X. Si W es un conjunto abierto en X tal que* límsup$\{C_n\} \subset W$, *entonces existe un número natural N tal que si $n \geq N$, se tiene que $C_n \subset W$.*

Prueba. Supongamos que no, es decir, que para todo número natural N, existe un numero $j_N \geq N$ tal que $C_{j_N} - W \neq \emptyset$. Podemos pedir que $j_N > j_{N-1}$ para cada $N \in \mathbb{N}$. Para cada N, sea $x_{j_N} \in C_{j_N} - W$. Tomemos la sucesión $\{x_{j_N}\}$. Por el teorema 1.45, existe una subsucesión $\{x_{j_{N_k}}\}$ de $\{x_{j_N}\}$ tal que $\{x_{j_{N_k}}\}$ converge a un punto $x \in X$, esto pues X es compacto, luego $x \in \text{límsup}\{C_n\}$ y, como para toda N, tenemos que $x_{j_N} \notin W$ y $X - W$ es cerrado, se tiene que $X - W$ contiene a todos sus puntos de acumulación y, por lo tanto, que $x \in X - W$, entonces $x \in \text{límsup}\{C_n\} - W$ lo cual es una contradicción. ■

Teorema 2.16. *Sean X un espacio métrico y $\{C_n\}$ una sucesión de conjuntos de X. Si* $\text{líminf}\{C_n\} \neq \emptyset$, *entonces* $\text{límsup}\{C_n\}$ *es conexo.*

Prueba. Sean $A = \text{límsup}\{C_n\}$ y $B = \text{líminf}\{C_n\}$. Por el teorema 2.14, A es cerrado. Supongamos que A no es conexo, entonces $A = H \cup K$ donde H y K son conjuntos cerrados de A y, por lo tanto, de X, disjuntos y distintos del vacío.

Como X es un espacio métrico, por normalidad, existen dos conjuntos abiertos U y V disjuntos tales que $H \subset U$ y $K \subset V$. Entonces por el teorema 2.15, existe un número natural N_1 tal que para toda $n \geq N_1$, se tiene que $C_n \subset U \cup V$ y, como para toda n sabemos que C_n es conexo, entonces dado $n \geq N_1$, $C_n \subset U$ o bien $C_n \subset V$.

Como $B \neq \emptyset$ se puede tomar un punto $b \in B$, entonces $b \in U$ o $b \in V$ (pues $B \subset A$). Supongamos que $b \in U$. Entonces, como U es un conjunto abierto de X y $b = \text{lím}x_n$ con $x_n \in C_n$, se tiene que existe un número natural N_2 tal que para toda $n \geq N_2$, se tiene que $x_n \in U$. Luego, si $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, $C_n \subset U$ para toda $n \geq N$, lo que nos dice que $A \subset X - V$, contradiciendo el hecho de que K fuera distinto del vacío. Entonces A es conexo. ■

Definición 2.17. *Sean M un continuo y $\{X_n\} \subset M$ una sucesión de subcontinuos de M. Decimos que $\{X_n\}$* ***converge*** *a X* y lo denotamos como $\{X_n\} \to X$, si $\text{líminf}\{X_n\} = X = \text{límsup}\{X_n\}$.

Corolario 2.18. *Sean M un continuo y $\{X_n\} \subset M$ una sucesión de subcontinuos de M, tal que $\{X_n\}$ converge a X. Entonces X es un subcontinuo de M.*

Prueba. Como $\{X_n\}$ converge a X, se tiene que $\text{líminf}\{X_n\} = \text{límsup}\{X_n\} = X$. Entonces por los teoremas 2.14 y 2.16, X es un subcontinuo de M. ■

Teorema 2.19. *Sean M un continuo, J un conjunto totálmente ordenado, y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de subcontinuos de M, tales que $X_\alpha \neq \emptyset$ y, si α y $\varphi \in J$, con $\alpha < \varphi$, entonces $X_\varphi \subset X_\alpha$. Entonces $X = \bigcap_{\alpha\in J} X_\alpha$ es un subcontinuo de M distinto del vacío.*

Prueba. Por el teorema 1.48, se tiene que $X \neq \emptyset$ es un espacio compacto y, como M es un espacio de Hausdorff, X es cerrado.

Se demostrará que X es conexo, para esto, supongamos que no lo es. Entonces $X = A \cup B$ donde A y B son conjuntos cerrados, disjuntos, distintos del vacío. Como M es un espacio métrico, entonces es un espacio normal, por lo tanto existen dos subconjuntos V y W abiertos en M tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Sea $U = V \cup W$, entonces por el teorema 1.48, existe $\alpha \in J$, tal que para toda $\varphi > \alpha$, se tiene que $X_\varphi \subset U$. Entonces $X_\varphi = (X_\varphi \cap V) \cup (X_\varphi \cap W)$. Como $X \subset X_\varphi$ y $X = A \cup B$ con A y B distintos del vacío, se tiene que $X_\varphi \cap V \neq \emptyset$ y $X_\varphi \cap W \neq \emptyset$ para toda $\varphi > \alpha$. No es difícil demostrar que lo que se obtiene es que X_φ no es conexo, lo cual es una contradicción. Entonces X es conexo y, por lo tanto, un continuo distinto del vacío. ■

4. Composantes y continuos irreducibles.

Dado un continuo, se introducirán los conceptos de composantes y de irreducibilidad, que constituyen una herramienta de gran utilidad en el estudio de las propiedades topológicas de los continuos. Sin embargo, en este trabajo, sólo se demostrará que las composantes son densas en un continuo y un par de resultados sobre los continuos irreducibles que se utilizarán más adelante.

Definición 2.20. *Decimos que K_p es la **composante** de p en M si K_p es la unión de todos los subcontinuos propios de M que contienen a p.*

Teorema 2.21. *Sea M un continuo, tomemos un punto $p \in M$. Si K_p es la composante de p*

en M, entonces $\overline{K_p} = M$. Es decir, las composantes son densas en un continuo.

Prueba. Supongamos que $\overline{K_p} \neq M$. Por el teorema 1.20, K_p es conexo pues es la unión de conexos que contienen a p. Por el teorema 1.21, se tiene que $\overline{K_p}$ es conexo y, además, es cerrado. Entonces $\overline{K_p}$ es un subcontinuo propio de M y, como M es un espacio métrico, se puede encontrar un subconjunto abierto U distinto de M, tal que $\overline{K_p} \subset U$ (pues el espacio es regular). Entonces, por el corolario 2.10, existe un subcontinuo B tal que $\overline{K_p}$ está contenido propiamente en B y U contiene a B. Entonces $B \subset K_p$, pues es un subcontinuo distinto del total que contiene a p (pues $\overline{K_p} \subset B \subset U \subset M$), pero esto es una contradicción pues $\overline{K_p} \subset B$ y $\overline{K_p} \neq B$. Por lo tanto, $\overline{K_p} = M$. ■

Definición 2.22. *Sean M un continuo, A y B dos subconjuntos compactos no vacíos en M. Decimos que un subcontinuo S en M es* ***irreducible*** *de A a B, si $S \cap A \neq \emptyset$, $S \cap B \neq \emptyset$ y ningún subcontinuo propio de S intersecta a A y a B.*

Teorema 2.23. *Sean M un continuo y A y B dos conjuntos cerrados y ajenos en M. Entonces existe un subcontinuo irreducible de A a B.*

Prueba. Sea

$P = \{S \subset M \mid S \text{ es un subcontinuo de } M, \text{ con } S \cap A \neq \emptyset \text{ y } S \cap B \neq \emptyset\}$.

Debido a que $M \in P$, P es distinto del vacío.

Diremos que $S_1 \preceq S_2$ si $S_1 \subset S_2$. Es claro que $(P, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Se quiere demostrar que el conjunto P cumple con las hipótesis del lema 1.49 para así demostrar lo que se quiere. Sea entonces $\mathcal{C} \subset P$ una cadena (es decir, para todo $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \subset C_2$ o bien $C_2 \subset C_1$), por el teorema 2.19, se tiene que $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ es un continuo que está en P, además, $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ es una cota inferior, pues para todo $C' \in \mathcal{C}$ se tiene que $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subset C'$. Falta demostrar que, en efecto, $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \in P$.

Para esto, lo que se necesita probar, es que $\left[\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C\right] \cap A \neq \emptyset$ y que $\left[\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C\right] \cap B \neq \emptyset$.

Tómese el conjunto $\{C \cap A \mid C \in \mathcal{C}\}$. Observe que este conjunto es una colección de conjuntos cerrados en M y tiene la propiedad de la intersección finita, pues dados cualesquiera $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ (se puede suponer que $C_{i+1} \subset C_i$ para todo $i = 1, \ldots n$), es claro que $C_n \cap A = \bigcap_{i=1}^{n}(C_n \cap A)$ que es distinto del vacío.

Entonces, como M es compacto, por el teorema 1.47, se tiene que $\left[\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C\right] \cap A \neq \emptyset$. Análogamente se obtiene que $\left[\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C\right] \cap B \neq \emptyset$. De aquí que $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \in P$ y, por lo tanto, se tiene que toda cadena no vacía en P tiene una cota inferior en P.

Se sigue del lema 1.49, que P tiene un elemento minimal, pero esto lo que dice es que P es precisamente un continuo irreducible de A a B. ■

5. Puntos de separación, separación débil y conexidad cíclica.

A continuación, se definirán los conceptos de puntos de separación, puntos de separación débil y conexidad cíclica. Se presentarán algunas de las relaciones que existen entre ellos.

Definición 2.24. *Sean M un espacio conexo y $p \in M$. Decimos que p **separa** a M si $M - \{p\}$ no es conexo. Decimos entonces que p es un **punto de separación** si el punto p cumple lo dicho anteriormente.*

Teorema 2.25 *Sean M un espacio conexo y $p \in M$ tales que p separa a M. Si $M - \{p\} = C \cup D$, donde C y D son conjuntos tales que $\overline{C} \cap D = \emptyset$ y $C \cap \overline{D} = \emptyset$, entonces $\overline{C} = C \cup \{p\}$ y $\overline{C}$ es un subconjunto conexo de M. Análogamente, $\overline{D} = D \cup \{p\}$ y $\overline{D}$ es un subconjunto conexo de M.*

Prueba. $\overline{C} = C \cup \{p\}$, pues, si $d \in D$, como D es un conjunto abierto en M que no intersecta a C, d no puede estar en $\overline{C}$. Además, C no puede ser $\overline{C}$, pues de lo contario, se tendría una separación de M, lo cual es imposible, pues M es conexo. De aquí que

$\overline{C} = C \cup \{p\}$. .

Para ver que $\overline{C}$ es conexo, supóngase que no lo es. Entonces $\overline{C} = M \cup N$, con M y N conjuntos distintos del vacío, tales que $\overline{M} \cap N = \emptyset$ y $M \cap \overline{N} = \emptyset$. Como $\overline{N} \subset \overline{C}$ y $\overline{C} \cap D = \emptyset$, se tiene que $\overline{N} \cap D = \emptyset$. Supongamos, por ejemplo, que $p \in M$. Como $\overline{D} \cap C = \emptyset$ y $N \subset C$ (pues $p \notin N$), se tiene que $\overline{D} \cap N = \emptyset$. Entonces N y $D \cup M$ son una separación de M, lo cual es imposible. Por lo tanto $\overline{C}$ es conexo. Análogamente se demuestra que $\overline{D} = D \cup \{p\}$ y que $\overline{D}$ es conexo. ■

Teorema 2.26. *Sean M un continuo localmente conexo y $p \in M$ tales que p separa a M. Si $M - \{p\} = C \cup D$, donde C y D son conjuntos tales que $\overline{C} \cap D = \emptyset$ y $C \cap \overline{D} = \emptyset$, entonces $\overline{C}$ y $\overline{D}$ son subcontinuos localmente conexos de M.*

Prueba. Por el teorema anterior, se tiene que $\overline{C}$ y $\overline{D}$ son subcontinuos de M. Se verá que $\overline{C}$ es un continuo localmente conexo. Recordemos del teorema anterior que $\overline{C} = C \cup \{p\}$. Sean $x \in C$ y U un conjunto abierto de $\overline{C}$ tales que $x \in U$. Sea $U' = U - \{p\} = U \cap C$. Luego, $U' \subset C$ el cual es un conjunto abierto en M. Por lo que U' es un conjunto abierto en M. Como M es localmente conexo, existe un conjunto V, abierto en M y conexo, tal que $x \in V \subset U'$. Entonces V es un conjunto abierto en $\overline{C}$ (pues $V \subset \overline{C}$), conexo, tal que $x \in V \subset U$. Por lo tanto, si $x \in C$, se tiene que $\overline{C}$ es localmente conexo en x. Falta ver que $\overline{C}$ es localmente conexo en p. Sea U un conjunto abierto de $\overline{C}$ tal que $p \in U$. Entonces $U = U' \cap \overline{C}$, donde U' es un conjunto abierto en M. Como M es localmente conexo en p, existe un conjunto abierto y conexo V' en M, tal que $p \in V' \subset U'$. Entonces $V = V' \cap \overline{C}$ es un conjunto abierto en $\overline{C}$, tal que $p \in V \subset U$. Si aplicamos el teorema 2.25 a V', tendremos que $(V' \cap C) \cup \{p\} = V' \cap \overline{C} = V$ es conexo. Por lo tanto $\overline{C}$ es localmente conexo en p. Entonces, $\overline{C}$ es localmente conexo. Análogamente, se demuestra que $\overline{D}$ es localmente conexo. Por lo tanto, $\overline{C}$ y $\overline{D}$ son subcontinuos localmente conexos de M. ■

Definición 2.27. *Sean M un continuo y $x,y,p \in M$ puntos distintos. Decimos que p **separa débilmente** a x y y* en *M, si todo subcontinuo H en M que contiene a x y a y contiene también a p. Diremos entonces que p **separa débilmente** a M, si existen dos puntos $x,y \in M$ que cumplen lo dicho anteriormente. Al punto p se le conoce como un **punto de separación***

débil.

Note que todo punto de separación es un punto de separación débil, esto pues, si p separa a M, entonces $M - \{p\} = U \cup V$ con U y V conjuntos abiertos de M, disjuntos y distintos del vacío, que por el teorema 1.19, se tiene que no existen conexos que intersecten a U y V en $M - \{p\}$, por lo tanto no van a existir continuos que intersecten a U y V que no tengan a p, pero esto es que p sea un punto de separación débil en M. El recíproco es falso, es decir, existen puntos de separación débil que no son puntos de separación como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.28. *Sea M como en el ejemplo 1.23 (la curva sen$\frac{1}{x}$). Note que cualquier punto de la forma $(0,y)$ con $-1 \leq y \leq 1$, es un punto de separación débil.*

Esto pues, si $p = (0,p_1)$, con $-1 \leq p_1 \leq 1$ y $p_1 \neq y$, y $q \in M$. Todo subcontinuo de M que contenga a los puntos p y q, contiene a todos los puntos de la forma $(0,y)$ con $-1 \leq y \leq 1$. Pero $M - \{(0,y)\}$ sigue siendo conexo. Es decir, el punto $(0,y)$ es un punto de separación débil que no es punto de separación.

Si el continuo es localmente conexo y, por lo tanto arcoconexo, los puntos de separación y de separación débil coinciden. Para su demostración, primero se citará el siguiente resultado.

Lema 2.29. *Todo conjunto abierto y conexo de un continuo localmente conexo es arcoconexo.* Ver [6, Teorema 8.26, pág. 132].

Teorema 2.30. *Si M es un continuo localmente conexo entonces los puntos de separación y los puntos de separación débil coinciden.*

Prueba. Todo punto de separación es un punto de separación débil. Sea $p \in M$ un punto de separación débil. Se quiere demostrar que p separa a M. Supongamos que p no separa a M. Entonces $M - \{p\}$ es un conjunto abierto y conexo, de aquí que por el lema 2.29,

$M-\{p\}$ es arcoconexo. Esto nos dice que para cualesquiera puntos $x,y \in M-\{p\}$, existe un arco que los contiene, es decir, que p no separa débilmente a M, lo cual es una contradicción. ■

Definición 2.31. *Una curva cerrada simple, es un espacio topólogico homeomorfo a* S^1 *(el círculo).*

Definición 2.32. *Decimos que un continuo M es* ***cíclicamente conexo****, si para cada par de puntos $x,y \in M$, existe una curva cerrada simple contenida en M que contiene a x y a y.*

Es claro que si un continuo M es cíclicamente conexo, entonces M es arcoconexo y no contiene puntos de separación. Para el recíproco, es necesario agregar la conexidad local, es decir, un continuo localmente conexo y sin puntos de separación es cíclicamente conexo. La demostración de este resultado requiere varios resultados previos que no son relevantes para los resultados de este trabajo, por ello, sólo se cita a continuación para hacer uso de ello.

Lema 2.33. *Si M es un continuo localmente conexo y sin puntos de separación, entonces M es cíclicamente conexo.* [8, Teorema 1, pág 31]

Un resultado importante que se deriva del lema anterior, es que, si p y q son puntos distintos en un continuo localmente conexo M, tales que ningún punto en M separa a p y q en M, entonces p y q están en una curva cerrada simple contenida en M. Este resultado no es inmediato, por ello, sólo se cita a continuación.

Lema 2.34. *Si M es un continuo localmente conexo y p y q son puntos distintos en M, tales que ningún punto en M separa a p y q en M, entonces p y q están en una curva cerrada simple contenida en M.* [3, página 1013]

CAPÍTULO 3

Aposindesis

En este capítulo se introduce el concepto de aposindesis, el cual veremos que está muy relacionado con el concepto de la conexidad local y conexidad en pequeño. Se verá que si un continuo es conexo en pequeño, entonces es aposindético, lo cual nos dice que todo continuo localmente conexo es aposindético, aunque el recíproco de esto es falso.

Por otra parte, se definen los conjuntos L_y, L_{yz}, y K_x, los cuales son la herramienta en los resultados de este trabajo. Veremos que K_x es un conjunto cerrado, mientras que L_y siempre será un continuo. Si el continuo es aposindético, se tendrá que L_{yz} es un continuo.

Por último, se verá la relación que tiene la aposindesis con la propiedad de ser semilocalmente conexo. Se verá que globalmente, las propiedades de aposindesis y de ser semilocalmente conexo son equivalentes (corolario 3.21)

1. Aposindesis y conexidad local.

Definición 3.1. *Sean M un continuo y $p \in M$. M es llamado* ***aposindético en p con respecto a un conjunto*** $N \subset M - \{p\}$, *si existen un conjunto abierto U que contiene a p y un continuo H de M de tal manera que $U \subset H$ y $H \cap N = \emptyset$. Es decir, si existe un continuo H tal que $p \in intH$ y H no intersecta a N.*

Definición 3.2. *Sean M un continuo y $p \in M$. Decimos que M es* ***aposindético en p****, si M es aposindético en p respecto a q, para cualquier punto q en M distinto de p. Entonces diremos* *que M es un continuo **aposindético** si M es aposindético en p para toda p en M.*

A continuación, se presentan algunos ejemplos de continuos aposindéticos y no aposindéticos:

Ejemplo 3.3. *La curva* $sen\frac{1}{x}$, *el abanico de Cantor, y el abanico armónico, son ejemplos de continuos no aposindéticos.*

Para ver que la curva $sen\frac{1}{x}$ no es aposindético, simplemente hay que tomar dos puntos x y y, distintos, en la recta que une el punto $(0,1)$ con el punto $(0,-1)$. Luego, M no es aposindético en x respecto a y.

Para ver que el abanico de Cantor no es aposindético, hay que tomar un punto $x \in M - \{(\frac{1}{2},1)\}$. Entonces M no es aposindético en x respecto a $(\frac{1}{2},1)$.

Para ver que el abanico armónico no es aposindético, basta con tomar un punto x en la recta que une el punto $(0,1)$ con el punto $(0,0)$, distinto del punto $(0,1)$. Luego, M no es aposindético en x respecto a $(0,1)$.

Ejemplo 3.4. *El intervalo* $[0,1]$ *y* S^1, *son ejemplos de continuos aposindéticos.*

Esto pues, como $[0,1]$ es un continuo localmente conexo, dados x y y puntos distintos en $[0,1]$, por estar en un espacio métrico, es posible encontrar un conjunto abierto U en $[0,1]$ que contenga a x y no contenga a y. Luego, por el teorema 2.3, es posible encontrar un continuo H tal que $x \in intH$ y $H \subset U$, lo que nos dice que M es aposindético en x respecto a y. Análogamente se verifica que S^1 es un continuo aposindético.

Observe que los continuos localmente conexos son aposindéticos y, aún más, los continuos conexos en pequeño serán aposindéticos. Este resultado se demostrará a continuación.

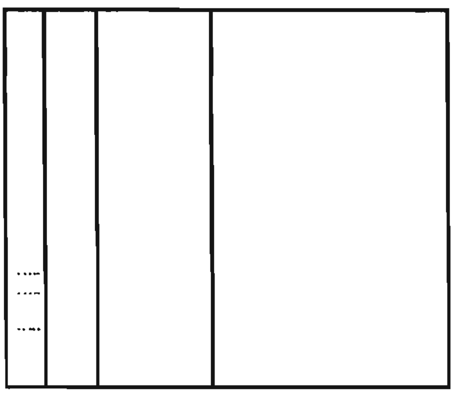
Teorema 3.5. *Sea M un continuo conexo en pequeño. Entonces para todo* $x \in M$ *y todo* *subconjunto cerrado F en M tal que $x \notin F$, se tiene que M es aposindético en x respecto a F. En particular, M es un continuo aposindético.*

Prueba. Sean $x \in M$ y $F \subset M - \{x\}$ cerrado en M. Como $M - F$ es un conjunto abierto en M, se puede encontrar un conjunto abierto V que contenga a p y no intersecte a F. Como M es conexo en pequeño en x, existe un conjunto conexo U de x tal que $x \in intU \subset U \subset V$ y, como M es un espacio regular, U se puede tomar de tal forma que $\overline{U} \subset V$. Luego M es aposindético en x respecto a F. En particular, M es aposindético en x respecto a y, para toda $y \in M - \{x\}$, de aquí que M sea aposindético. ■

En resumen, dado un continuo M y un punto p en M, se tiene que:
Si M es localmente conexo en p, entonces M es conexo en pequeño en p, luego M es aposindético en p.

El recíproco del teorema anterior no se cumple, es decir, existen continuos aposindéticos que no son conexos en pequeño (y, por lo tanto, no localmente conexos), como se muestra en los siguientes ejemplos.

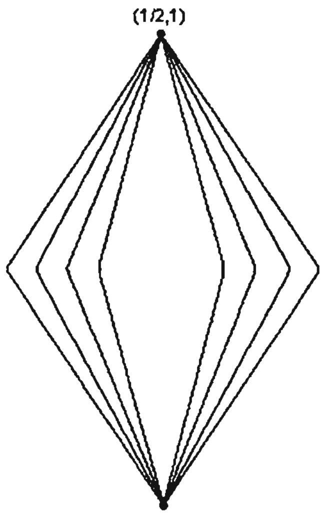
Ejemplo 3.6. *Sea M el espacio peine unido con el segmento de recta que une al punto* $(0,1)$ *con el punto* $(1,1)$.



Entonces M es un continuo aposindético que no es conexo en pequeño. Para ver que M no es conexo en pequeño, sean $x = (0, \frac{1}{2})$ y $F = \{(0,1),(0,0)\}$. Entonces M no es aposindético en x respecto a F, que, por el teorema anterior, se tiene que M no es conexo en pequeño.

Para ver que M es aposindético, se tiene que verificar que, para cada $x \in M$, M es aposindético en x. Sea L el segmento de recta que une al punto $(0,0)$ con el punto $(0,1)$. Es claro que si $x \in M-L$, o $x \in \{(0,1),(0,0)\}$, entonces M es aposindético en x (pues M es localmente conexo en x). Si $x \in L$, entonces se tiene que verificar que M es aposindético en x respecto a y, para toda $y \in M-\{x\}$. Si $y \in M-L$, no es difícil encontrar un subcontinuo H tal que $x \in intH$ y $y \notin H$. Sólo queda el caso en que $y \in L$. Como $x \in L$, se tiene que $x=(0,x_2)$, para algún $x_2 \in [0,1]$. Si $y=(0,y_2)$, con $y_2 < x_2$, entonces, existe un subcontinuo H que contiene al punto $(0,1)$ tal que $x \in intH$ y $y \notin H$. Análogamente, si $x_2 < y_2$, existe un subcontinuo H que contiene al punto $(0,0)$ tal que $x \in intH$ y $y \notin H$. Entonces, si $x \in L$, M es aposindético en x. Entonces M es aposindético.

Ejemplo 3.7. *Sea C el conjunto de Cantor en el intervalo $[0,1]$. Tomemos los puntos $(\frac{1}{2},1)$ y $(\frac{1}{2},-1)$. Para cada $x \in C$, denotemos por I_x al segmento de recta que une al punto $(\frac{1}{2},1)$ con el punto $(x,0)$ y por I'_x al segmento de recta que une al punto $(\frac{1}{2},-1)$ con el punto $(x,0)$. Sea $M=\left(\bigcup_{x\in C} I_x\right)\cup\left(\bigcup_{x\in C} I'_x\right)$.*

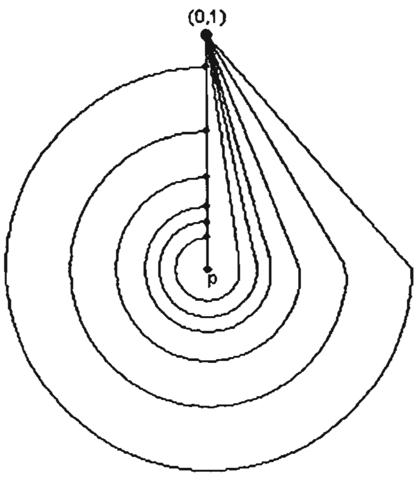


Entonces M es un continuo aposindético que no es conexo en pequeño. A M se le conoce como la **suspensión de Cantor**.

Para ver que M no es conexo en pequeño, sean $F = \{(\frac{1}{2},1),(\frac{1}{2},-1)\}$ y $x \in M-F$. Entonces M no es aposindético en x respecto a F, que, por el teorema anterior, se tiene que M no es conexo en pequeño.

Para ver que M es aposindético, se tiene que verificar que, para cada $x \in M$, M es aposindético en x. Si $x \in \{(\frac{1}{2},1),(\frac{1}{2},-1)\}$, entonces M es aposindético en x (pues M es localmente conexo en x). Si $x \notin \{(\frac{1}{2},1),(\frac{1}{2},-1)\}$, se tiene que verificar que M es aposindético en x respecto a y, para toda $y \in M-\{x\}$. Si $y \notin \{(\frac{1}{2},1),(\frac{1}{2},-1)\}$ no es difícil encontrar un continuo H tal que $x \in intH$ y $y \notin H$ (basta con que $(\frac{1}{2},1)$ o $(\frac{1}{2},-1)$ estén en H). Si $y = (\frac{1}{2},1)$, entonces existe un continuo H que contiene al punto $(\frac{1}{2},-1)$, tal que $x \in intH$ y $y \notin H$. De igual manera, Si $y = (\frac{1}{2},-1)$, entonces existe un continuo H que contiene al punto $(\frac{1}{2},1)$, tal que $x \in intH$ y $y \notin H$. Entonces, si $x \notin \{(\frac{1}{2},1),(\frac{1}{2},-1)\}$, se tiene que M es aposindético en x. Entonces M es aposindético.

Ejemplo 3.8. *Sea S_n el círculo con centro en el punto $p = (0,0)$ y radio $\frac{1}{n}$ y denotemos por $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ y } y > 0\}$. Tomemos el conjunto $S = \bigcup_{n=1}^{\infty}(S_n - X)$. Sea M el abanico armónico definido en el ejemplo 2.7 unido con el conjunto S.*



Entonces M es un continuo aposindético que no es conexo en pequeño.

Para ver que M no es conexo en pequeño, sean $F = \{(0, \frac{1}{n}) \in M \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{p\}$, L el segmento de recta que une el punto $(0,1)$ con el punto p y x cualquier punto en M. Entonces M no es aposindético en x respecto a F, que, por el teorema anterior, se tiene que M no es conexo en pequeño.

Para ver que M es aposindético, se tiene que verificar que, para cada $x \in M$, M es aposindético en x. Si $x \in M - L$ o $x \in \{(0,1), p\}$, es claro que M es aposindético en x (pues M es localmente conexo en x).

Si $x \in L - \{(0,1), p\}$, se tiene que verificar que M es aposindético en x respecto a y, para toda $y \in M - \{x\}$. En el caso de que $y \in M - L$, no es difícil encontrar un continuo H tal que $x \in intH$ y $y \notin H$ (basta con que $(0,1)$ o p estén en H). Si $y \in L$, entonces, como $x \in L - \{(0,1), p\}$, se tiene que $x = (0, x_2)$, para algún $0 < x_2 < 1$. Si $y = (0, y_2)$, con $0 \leq y_2 < x_2$, entonces, existe un subcontinuo H que contiene al punto $(0,1)$ tal que $x \in intH$ y $y \notin H$. Análogamente, si $0 < x_2 < y_2$, existe un subcontinuo H que contiene al punto p, tal que $x \in intH$ y $y \notin H$. Entonces, si $x \in L - \{(0,1), p\}$, M es aposindético en x. Entonces M es aposindético.

2. Los conjuntos L_y, L_{yz} y K_x.

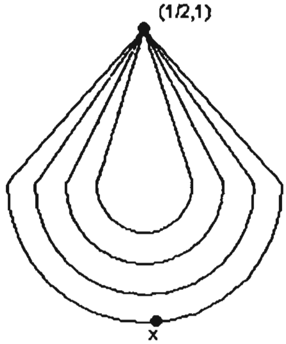
Definición 3.9. *Sean M un continuo y $x, y, z \in M$. Vamos a definir los siguientes conjuntos:*

$$L_y = \{x \in M \mid M \textit{ no es aposindético en } x \textit{ respecto a } y\} \cup \{y\}$$

$$L_{yz} = \{x \in M \mid M \textit{ no es aposindético en } x \textit{ respecto a } \{y,z\}\} \cup \{y,z\}$$

$$K_x = \{y \in M \mid M \textit{ no es aposindético en } x \textit{ respecto a } y\} \cup \{x\}$$

Ejemplo 3.10. *Sean H el abanico de Cantor definido en el ejemplo 2.6 y C el conjunto de Cantor en el intervalo $[0,1]$. Para cada $x \in C$, sea S_x el semicírculo en el semiplano* *inferior con centro en* $(\frac{1}{2},0)$ *y radio* $\| \frac{1}{2} - x \|$. *Sea* $M = H \cup \left(\bigcup_{x \in C} S_x \right)$.



Entonces M no es un continuo aposindético ya que dado $x \in M - \{(\frac{1}{2},1)\}$, M no es aposindético en x respecto al punto $(\frac{1}{2},1)$.

A diferencia de L_y, que para cada $y \in M$ el conjunto

$$L_y = \begin{cases} \{y\}, & \text{si } y \neq (\frac{1}{2},1) \\ M, & \text{si } y = (\frac{1}{2},1) \end{cases}$$

es conexo. Si $x \in M - \{(\frac{1}{2},1)\}$, entonces $K_x = \{x,(\frac{1}{2},1)\}$, el cual no es conexo.

Ejemplo 3.11. *Sea S como en el ejemplo 1.23 (la curva sen*$\frac{1}{x}$*). Sea I el segmento de recta que une el punto* $(0,2)$ *con el punto* $(0,-1)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$:

1) Sea I_n^1 *el segmento de recta que une el punto* $(-2 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ *con el punto* $(0, 1 + \frac{1}{n})$.

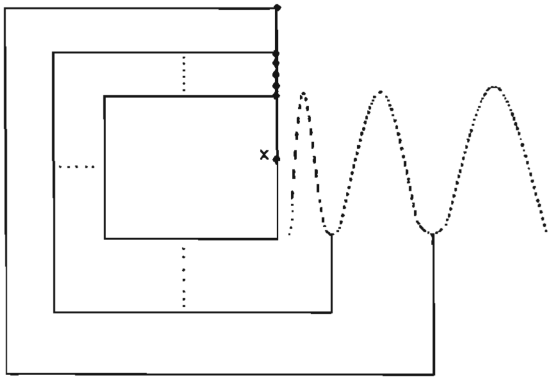
Tomemos $M_1 = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^1}$.

2) Sea I_n^2 *el segmento de recta que une el punto* $(-2 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ *con el punto* $(-2 - \frac{1}{n}, -1 - \frac{1}{n})$. *Tomemos* $M_2 = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^2}$.

3) Sea I_n^3 el segmento de recta que une el punto $(-2-\frac{1}{n},-1-\frac{1}{n})$ con el punto $(\xi^n,-1-\frac{1}{n})$ donde $\xi^n \in \left[\frac{1}{(2n+1)\pi},\frac{1}{2n\pi}\right]$ es tal que $(\xi^n,-1) \in S$. Sea $M_3 = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^3}$.

4) Sea I_n^4 el segmento de recta que une el punto $(\xi^n,-1)$ con el punto $(\xi^n,-1-\frac{1}{n})$. Tomemos $M_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^4$.

Sea $M = S \cup I \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$.



Entonces M no es un continuo aposindético ya que dado cualquier punto x en el segmento de recta que une el punto $(0,1)$ con el punto $(0,-1)$ (distinto del punto $(0,1)$), se tiene que M no es aposindético en x respecto al punto $(0,1)$. A diferencia de L_y, que para cada $y \in M$, el conjunto

$$L_y = \begin{cases} \{(0,x_2) \in M \mid y_2 \leq x_2 \leq 1\}, & \text{si } y = (0,y_2), \text{ con } -1 \leq y_2 < 1 \\ \text{El cuadrado con vertices en } (0,1), (-2,1), (-2,-1) \text{ y } (0,-1), & \text{si } y = (0,1) \\ \{y\}, & \text{para cualquier otro caso} \end{cases}$$

es conexo, si $x = (0,x_2)$, con $-1 < x_2 < 1$, el conjunto $K_x = \{(0,1)\} \cup \{(0,y_2) \mid -1 \leq y_2 \leq x_2\}$ es disconexo.

Note que en estos ejemplos, los conjuntos L_y y L_{yz} son subcontinuos de M, sin embargo,

K_x no necesariamente lo es. Se verá que, efectivamente, tanto L_y, L_{yz} como K_x son conjuntos cerrados, pero sólo se puede garantizar que L_y y L_{yz} son subcontinuos de M.

Teorema 3.12 *Sean M un continuo y $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones de puntos en M tales que para cada número natural n, con $x_n \neq y_n$, M no es aposindético en x_n respecto a y_n, $\{x_n\}$ converge a un punto $x \in M$ y $\{y_n\}$ converge a un punto $y \in M$. Entonces M no es aposindético en x respecto a y.*

Prueba. Sea H un subcontinuo de M tal que $x \in intH$, se quiere demostrar que $y \in H$. Como $\{x_n\}$ converge a x, entonces existe un natural N tal que $x_n \in intH$ para toda $n \geq N$. Como M no es aposindético en x_n respecto a y_n, se tiene que $y_n \in H$ y, esto pasa para toda $n \geq N$, es decir $\{y_n\}_{n \geq N} \subset H$ y $\{y_n\}_{n \geq N}$ converge a y. Como H es cerrado, entonces contiene a todos sus puntos de adherencia, de aquí que $y \in H$. Entonces M no es aposindético en x respecto a y. ∎

Corolario 3.13. *Sean M un continuo, x y $y \in M$, y $\{x_n\} \subset M$ una sucesión de puntos tal que para todo número natural n, se tiene que M no es aposindético en x_n respecto a y, entonces, si $\{x_n\}$ converge a x, M no es aposindético en x respecto a y.*

Prueba. Éste es un caso particular del teorema 3.12 (cuando una de las dos sucesiones es constante). ∎

Corolario 3.14. *Sean M un continuo, $\{x_n\}$ una sucesión de puntos en M tal que $\{x_n\}$* converge a un punto *$x \in M$ y A un subconjunto de M tal que M no es aposindético en x_n respecto a A para ningún número natural n, entonces M no es aposindético en x respecto a A.*

Prueba. Este es un caso igual al del corolario 3.13, sólo que en lugar de tomar un punto $y \in M$, se toma cualquier subconjunto A de M. La demostración es igual al teorema 3.12. Tomando un conjunto abierto U de M tal que $x \in U$, se tiene que existe un número natural N tal que $x_n \in U$ para toda $n \geq N$. Luego, para alguna $x_n \in U$, se tiene que M no es aposindético en x_n respecto a A, es decir, si H es un subcontinuo de M que contiene a U, entonces $H \cap A \neq \emptyset$. Como U fue cualquier conjunto abierto que contiene a x, se tiene que

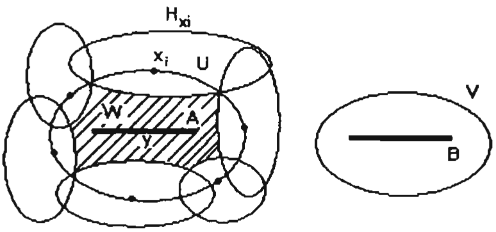
M no es aposindético en x respecto a A. ■

Teorema 3.15. *Sean M un continuo y $y \in M$. Entonces L_y es un continuo.*

Prueba. Primero se demostrará que L_y es un conjunto cerrado. Se demostrará que L_y contiene a todos sus puntos de adherencia. Sea entonces $\{x_i\}$ una sucesión de puntos en L_y tal que $\{x_i\}$ converge a un punto $x \in M$. Basta con demostrar que $x \in L_y$. Note que para todo x_i, se tiene que M no es aposindético en x_i respecto a y. Entonces, por corolario 3.13, M no es aposindético en x respecto a y. De aquí que $x \in L_y$, lo que nos dice que L_y es un conjunto cerrado.

Para demostrar que L_y es conexo, supóngase que no lo es. Entonces $L_y = A \cup B$ donde A y B son cerrados, ajenos y distintos del vacío. Podemos suponer que $y \in A$. Por la normalidad del continuo M, existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V en M, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Entonces, para todo $x \in Fr(U)$, $x \notin L_y$. Es decir M es aposindético en x respecto a y, por lo tanto, para cada $x \in Fr(U)$ existe un subcontinuo H_x de M tal que $x \in intH_x$ y $y \notin H_x$. Como $Fr(U)$ es cerrada, entonces es compacta. De aquí que exista un conjunto finito $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset Fr(U)$ tal que $Fr(U) \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}$. Sea $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}$. Note que $y \notin H$.

Sea $W = U - H$, entonces W es un conjunto abierto que contiene a y.



Por el teorema 2.11, cada componente K de $M - W$ intersecta a $Fr(W)$.

Luego, como

$$Fr(W) = \overline{W} \cap (M - W) = \overline{W} \cap [(M - U) \cup H] \subset \overline{U} \cap [(M - U) \cup H] =$$
$$[\overline{U} \cap (M - U)] \cup [\overline{U} \cap H] \subset Fr(U) \cup H \subset H,$$

se tiene que cada componente K de $M - W$ intersecta a H.

Entonces, para algún número j entre 1 y n, K intersecta a H_{x_j}. Como H_{x_j} es un continuo que no intersecta a W, H_{x_j} es un conexo contenido en $M - W$ y, por lo tanto, $H_{x_j} \subset K$ (pues K es un conexo maximal en $M - W$). Por lo tanto, $M - W$ tiene un número finito de componentes $K_1, \ldots, K_m$ (con $m \leq n$).

Sean $b \in B$ y K_b la componente de b en $M - W$. Note que $b \in M - \overline{U}$ que es un conjunto abierto en M con $M - \overline{U} \subset M - W$. Entonces por el teorema 1.26, tenemos que $b \in intK_b$. Como K_b es conexo, por ser una componente, y cerrado, porque W es abierto, se obtiene que K_b es un continuo que contiene en su interior a b y no intersecta a y, pues $y \in W$. De aquí que M sea aposindético en b respecto a y, lo cual contradice el hecho de que $b \in L_y$. Entonces L_y es conexo y, por lo tanto, L_y es un continuo. ■

Teorema 3.16. *Sean M un continuo aposindético y $x,y,z \in M$ tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$. Entonces L_{yz} es un continuo.* Ver [7, teorema 3].

Teorema 3.17. *Sean M un continuo y $x \in M$. Entonces K_x es cerrado.*

Prueba. Se demostrará que K_x es un conjunto cerrado, demostrando que su complemento es un conjunto abierto. Sea $y \in M - K_x$. Entonces, por la definición de K_x, se tiene que M es aposindético en x respecto a y, es decir, existen un conjunto abierto U que contiene a x y un subcontinuo H de M tal que $U \subset H$ y $H \cap \{y\} = \emptyset$.

Sea $V = M - H$, entonces V es un abierto que contiene a y y si $z \in V$, M es aposindético en x respecto a z (pues $x \in intH$ y $H \cap V = \emptyset$), es decir $V \cap K_x = \emptyset$. Se sigue que todo punto en $M - K_x$ es un punto interior de $M - K_x$, de aquí que K_x sea cerrado. ■

3. Aposindesis y conexidad semilocal.

Dado un continuo M, se introduce el concepto de conexidad semilocal. Se verán las relaciones que éste tiene con la aposindesis.

Definición 3.18. *Decimos que un continuo M es* ***semilocalmente conexo*** *en $x \in M$, si para cada conjunto abierto V en M que contenga a x, existe un conjunto abierto U en M que contiene a x* y *contenido en V tal que $M - U$ tiene un número finito de componentes.*

Teorema 3.19. *Sean M un continuo* y *$x,y \in M$,* con *$x \neq y$. Si M es semilocalmente conexo en y, entonces M es aposindético en x respecto a y.*

Prueba. Supongamos que M es semilocalmente conexo en y. Se demostrará que M es aposindético en x respecto a y. Sea U un conjunto abierto de M tal que $y \in U$ y $x \notin \overline{U}$. Sea W un conjunto abierto de M tal que $y \in W \subset U$ y $M - W$ tiene un número finito de componentes $H_1,\ldots,H_m$. Como $x \notin \overline{U}$, $x \notin W$. Entonces se puede suponer que $x \in H_1$. Es claro que H_1 es un continuo (ya que las componentes de un cerrado son cerradas) y que $y \notin H_1$. Como $x \in int(M - W)$ (pues $x \in M - \overline{U} \subset M - W$) y $x \in H_1$, por el teorema 1.26, se tiene que $x \in intH_1$, lo que nos dice que M es aposindético en x respecto a y. ■

Entonces, si M es un continuo y tomamos un punto $y \in M$ tal que M es semilocalmente conexo en y, se tiene que para toda $x \in M - \{y\}$, M es aposindético en x respecto a y.

Teorema 3.20. *Sean M un continuo* y *$y \in M$ tales que para toda $x \in M - \{y\}$, se tiene que M es aposindético en x respecto a y, entonces M es semilocalmente conexo en y.*

Prueba. Sea V un conjunto abierto de M tal que $y \in V$. Para cada punto $x \in M - V$, existe un subcontinuo H_x de M tal que $x \in intH_x$ y $y \notin H_x$. Por la compacidad de $M - V$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1,\ldots,x_n \in M - V$ tales que $M - V \subset intH_{x_1} \cup \ldots \cup intH_{x_n}$. Sea $W = M - (H_{x_1} \cup \ldots \cup H_{x_n})$. Entonces $y \in W \subset V$ y $M - W = H_{x_1} \cup \ldots \cup H_{x_n}$ tiene un número finito de componentes. ■

Corolario 3.21. *M es aposindético en x, para toda $x \in M$ si y sólo si M es semilocalmente conexo en x, para toda $x \in M$.*

Prueba. Se sigue de los teoremas 3.19 y 3.20. ■

CAPÍTULO 4

Arcos y curvas cerradas simples en continuos planos y aposindéticos

En el resto de este trabajo, se estudiarán continuos en el plano. Frecuentemente, sólo se hablará de M como un continuo, aunque es importante señalar que nos referiremos a un continuo del plano.

En este capítulo se estudiarán a los continuos aposindéticos en el plano. Se presenta una condición para ver cuándo son arcoconexos y cuándo contienen curvas cerradas simples. Sabemos que todo continuo localmente conexo es arcoconexo. Los continuos que se estudiarán, son los que no son conexos en pequeño y, por lo tanto, no son localmente conexos.

Se demostrará que si M **es aposindético y contiene un conjunto finito** F **tal que para todo punto** x **en** $M - F$ **existen puntos** y **y** z **en** F **distintos tales que** M **no es aposindético en** x **respecto a** $\{y,z\}$**, entonces** M **tiene que ser arcoconexo (teorema 4.5) y todo punto está en una curva cerrada simple contenida en** M **(teorema 4.12).**

Se darán ejemplos en donde se verá que la condición de que F contiene un número finito de puntos, es necesaria para garantizar que M es arcoconexo y que todo punto está en una curva cerrada simple. También se prueba que **si el conjunto** F **consta de dos puntos, entonces** M **es cíclicamente conexo (teorema 4.11).**

Note que si M no es aposindético en un punto x con respecto a cualquier subconjunto N

de $M-\{x\}$, entonces M no es localmente conexo en x. De aquí que los resultados de este capítulo, comprenden continuos aposindéticos del plano que no son localmente conexos en casi ninguno de sus puntos.

1. Definición del conjunto L_{yz}^x.

Dados un continuo aposindético M y x,y,z puntos distintos de M tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$, se definirá lo que es el conjunto L_{yz}^x, que es un subconjunto de L_{yz}, el cual es una herramienta fundamental para los siguientes resultados. Se verá que L_{yz}^x es un subcontinuo de M contenido en L_{yz} que contiene a $\{x,y,z\}$ y, aún más, resulta que L_{yz}^x es localmente conexo. Este último resultado, únicamente se citará, pues requiere varios resultados previos que no son del objetivo de esta tesis. Recordemos que estos resultados comprenden sólo a continuos del plano.

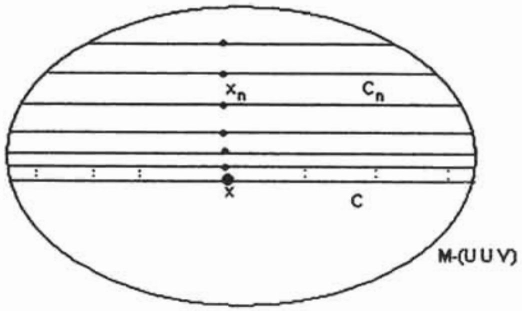
Para todo esto, es necesario probar los siguientes resultados.

Teorema 4.1. *Sean M un continuo y $x,y,z \in M$ tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$. Sean U y V dos conjuntos abiertos en M, con cerraduras disjuntas, tales que $y \in U$ y $z \in V$ y $x \in int(M-(U\cup V))$. Si C es la componente de $M-(U\cup V)$ que contiene a x. Entonces existe una sucesión de puntos $\{x_n\}$ que convergen a x y una sucesión $\{C_n\}$ de componentes de $M-(U\cup V)$ tales que para toda n en los naturales, $x_n \in C_n$ y* $\text{límsup}\{C_n\} \subset C$.

Prueba. Por estar en un espacio métrico, podemos suponer que $B_1(x) \subset M-(U\cup V)$. Entonces $B_1(x)$ no está contenida en C. Esto pues, de lo contrario se tiene que $x \in intC$ y, como C es una componente de $M-(U\cup V)$, C es cerrado en $M-(U\cup V)$ que es cerrado en M. De aquí que C es un subcontinuo de M tal que $x \in intC$ y $C\cap\{y,z\} = \emptyset$, lo cual es una contradicción pues M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$. Sean $x_1 \in B_1(x)-C$ y C_1 la componente en $M-(U\cup V)$ que contiene a x_1.

Afirmamos que $B_{\frac{1}{2}}(x)$ no está contenida en $C\cup C_1$. Esto pues, de lo contrario se tiene que $B_{\frac{1}{2}}(x) \subset C\cup C_1$, entonces, si $\epsilon < \text{mín}\{d(x,C_1), \frac{1}{2}\}$, se tiene que $B_\epsilon(x) \subset C$, lo cual es una contradicción de suponer que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$. Sean $x_2 \in B_{\frac{1}{2}}(x) - (C \cup C_1)$ y C_2 la componente en $M - (U \cup V)$ que contiene a x_2.

Análogamente, se construye la sucesión $\{x_n\}$. Entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge al punto x y para todo $n,m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, se tiene que x_n y x_m están en diferentes componentes.



Observe que $x \in$ líminf$\{C_n\}$. Por lo tanto, por el teorema 2.16, tenemos que límsup$\{C_n\}$ es conexo y, como líminf$\{C_n\} \subset$ límsup$\{C_n\}$, se tiene que límsup$\{C_n\}$ es un conexo que contiene a x. Por lo tanto, límsup$\{C_n\} \subset C$. ■

Teorema 4.2. *Supongamos que M es un continuo aposindético. Sean x,y,z puntos distintos de M tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$. Entonces existen dos abiertos disjuntos U y V en $M - \{x\}$, conteniendo a y y a z, respectivamente, tales que si U' es un abierto en U que contiene a y y V' es un abierto en V que contiene a z, entonces la x-componente de $L_{yz} - (U' \cup V')$ intersecta a $Fr(U')$ y a $Fr(V')$.*

Prueba. Como M es aposindético, M es aposindético en x respecto a p para cualquier $p \in M - \{x\}$. Por lo tanto, existen dos continuos H y K en $M - \{y\}$ y $M - \{z\}$, respectivamente, tales que $x \in intH$ y $x \in intK$.

Por ser M un espacio métrico, existen dos conjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $y \in U$, $z \in V$, $U \cap H = \emptyset$ y $V \cap K = \emptyset$.

Sean U' un conjunto abierto en U que contenga a y y V' un conjunto abierto en V que contenga a z. Sean $\{U_n\}$ y $\{V_n\}$ dos sucesiones decrecientes de bolas abiertas (es decir, $U_{n+1} \subset U_n$, $V_{n+1} \subset V_n$ para todo número natural n) contenidas en U' y V' con centros en y y

z, respectivamente, tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{y\}$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{z\}$.

Ahora, como $x \in int(M-(U_1 \cup V_1))$ (pues $x \in intH \cap intK \subset M-(U_1 \cup V_1)$) y M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$, por el teorema 4.1, se tiene que existe lo siguiente:

Una sucesión de componentes $\{X_i^1\}$ de $M-(U_1 \cup V_1)$ tal que límsup$\{X_i^1\} \subset X^1$, donde X^1 es la *x-componente* de $M-(U_1 \cup V_1)$, y una sucesión de puntos $\{x_i^1\}$ que converge a x con $x_i^1 \in X_i^1$.

Entonces, se afirma que existe un número natural i_1, tal que el punto $x_{i_1}^1$, que está en $X_{i_1}^1$, cumple lo siguiente:

a) $x_{i_1}^1 \in intH \cap intK$

b) $d(x_{i_1}^1,x) < 1$

c) $x \notin X_{i_1}^1$

Esto es cierto pues, como $x \in intH \cap intK$ y $\{x_i^1\}$ converge a x, entonces existe un número natural N para el cual $x_i^1 \in intH \cap intK$ para toda $i \geq N$ y de tal manera que $d(x_{i_1}^1,x) < 1$ (pues M es un espacio métrico). La tercera condición también es inmediata por como se construyó la sucesión de componentes $\{X_i^1\}$. Llamémosle al punto $x_{i_1}^1$ simplemente como x^1.

Para $M-(U_2 \cup V_2)$, análogamente, por el teorema 4.1, existe una sucesión de componentes $\{X_i^2\}$ de $M-(U_2 \cup V_2)$ tal que límsup$\{X_i^2\} \subset X^2$, donde X^2 es la *x-componente* de $M-(U_2 \cup V_2)$. Además, también existe una sucesión de puntos $\{x_i^2\}$ que converge a x, con $x_i^2 \in X_i^2$, para toda $i \in \mathbb{N}$.

De igual manera, existe un número natural i_2 tal que el punto $x_{i_2}^2$, que ahora se llamará simplemente como x^2, que está en $X_{i_2}^2$, y que cumple lo siguiente:

a) $x^2 \in intH \cap intK$

b) $d(x^2,x) < \frac{1}{2}$

c) $x \notin X_{i_2}^2$

Luego, como por el teorema 4.1, se tiene que para todo número natural n, el conjunto

$M-(U_n \cup V_n)$ tiene un número infinito de componentes, asi que es posible tomar $X_{i_2}^2$ de tal manera que $X_{i_2}^2 \cap X_{i_1}^1 = \emptyset$.

Así sucesivamente se obtiene que, si $n \in \mathbb{N}$, para $M-(U_n \cup V_n)$, existen una sucesión de componentes $\{X_i^n\}$ de $M-(U_n \cup V_n)$ tal que límsup$\{X_i^n\} \subset X^n$, donde X^n es la *x-componente* de $M-(U_n \cup V_n)$ y una sucesión de puntos $\{x_i^n\}$ que converge a x con $x_i^n \in X_i^n$, para toda $i \in \mathbb{N}$. Análogamente, existe un número i_n tal que el punto $x_{i_n}^n \in X_{i_n}^n$ que se denotará como x^n, cumple:

a) $x^n \in intH \cap intK$

b) $d(x^n,x) < \frac{1}{n}$

c) $x \notin X_{i_n}^n$

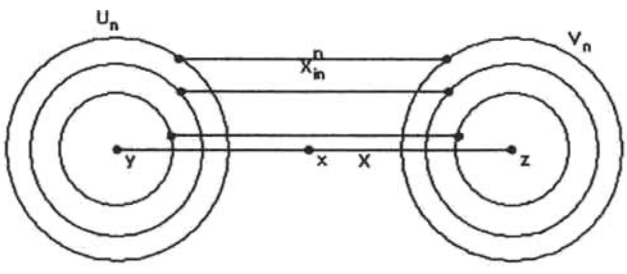
d) $X_{i_n}^n \cap X_{i_j}^j = \emptyset$ para toda $j > n$.

Observe que, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x^n \in H \cup K$ y $x^n \notin \overline{U_n} \cup \overline{V_n}$. De aquí que para toda $n \in \mathbb{N}$, por el teorema 2.12, se tiene que $X_{i_n}^n \cap Fr(U_n) \neq \emptyset$ y $X_{i_n}^n \cap Fr(V_n) \neq \emptyset$.

Sea X el límite superior de $X_{i_1}^1, X_{i_2}^2, X_{i_3}^3, \ldots$ Como para todo número natural n, se tiene que $X_{i_n}^n$ es un continuo, entonces, por el teorema 2.14, X es cerrado y, como el límite inferior de $\{X_{i_n}^n\}$ es distinto del vacío pues contiene a x, por el teorema 2.16, X es conexo.

Por lo tanto, X es un continuo y, además, como $x \in X^n$ para todo número natural n y $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{y\}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{z\}$, se tiene que X es un continuo que contiene a $\{x,y,z\}$.

La siguiente figura ilustra la idea del teorema que se acaba de demostrar.



Afirmamos que $X \subset L_{yz}$.

Para demostrar esto, sea $w \in X - \{y,z\}$ y supongamos que M es aposindético en w respecto de $\{y,z\}$ (es decir, supongamos que $w \notin L_{yz}$). Entonces existe un subcontinuo F de M tal que $w \in intF$ y $\{y,z\} \cap F = \emptyset$. Como F es cerrado, tenemos que $M - F$ es abierto y, como $y,z \in M - F$, existe un número natural m tal que $U_m \subset X - F$ y $V_m \subset X - F$.

De aquí que $F \subset M - (U_m \cup V_m)$, y es posible tomar a m de tal forma que $X^m_{i_m} \cap F \neq \emptyset$. Para ver esto, note que, como $w \in intF$, se tiene que existe un conjunto abierto V que contiene a w tal que $V \subset F$. Además, como $w \in X$ y $\{X^n_{i_n}\}$ converge a X, es posible tomar también a $m \in \mathbb{N}$, de tal forma que $X^m_{i_m} \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto se tiene que $X^m_{i_m} \cap F \neq \emptyset$.

Por otro lado, como $X^n_{i_n} \cap X^m_{i_m} = \emptyset$ para toda $n > m$, se afirma que $X^n_{i_n} \cap F = \emptyset$ para toda $n > m$. Para demostrar esto, supóngase lo contrario. Entonces se tendría que, para alguna $n > m$, F es un conexo intersectando a $X^n_{i_n}$ y a $X^m_{i_m}$. Luego, $X^n_{i_n}$ no puede ser una componente de $M - (U_n \cup V_n)$, pues $X^n_{i_n}$ está contenido propiamente en el conexo $X^n_{i_n} \cup F \cup X^m_{i_m}$ que está contenido en $M - (U_n \cup V_n)$, contradiciendo así, el hecho de que $X^n_{i_n}$ sea una componente de $M - (U_n \cup V_n)$. De aquí que $X^n_{i_n} \cap F = \emptyset$ para toda $n > m$.

Pero el hecho de que $X^n_{i_n} \cap F = \emptyset$ para toda $n > m$, es una contradicción, pues $w \in F$ y esto implicaría que $w \notin \text{límsup}_{n\to\infty} X^n_{i_n} = X$. La contradicción se dio al suponer que M era aposindético en w respecto de $\{y,z\}$. Por lo tanto, $w \in L_{yz}$ y, entonces, $X \subset L_{yz}$.

Luego, para todo número natural n, se define X'_n como la x^n-*componente* de $M - (U' \cup V')$. Por el teorema 2.12, se tiene que $X'_n \cap Fr(U') \neq \emptyset$ y $X'_n \cap Fr(V') \neq \emptyset$. Recuerde que para toda $n \in \mathbb{N}$, $U_n \subset U'$ y $V_n \subset V'$. De aquí que $X'_n \subset X^n_{i_n}$ para toda n.

Sea $X' = \text{límsup} X'_n$. Por el corolario 2.18, X' es un continuo y está contenido en X, pues para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $X'_n \subset X^n_{i_n}$, además de que $x \in X'$, pues para toda n, se tiene que $x^n \in X'_n$ y $\{x^n\}$ converge a x.

Luego, como para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $X'_n \cap Fr(U') \neq \emptyset$ y $X'_n \cap Fr(V') \neq \emptyset$, entonces $X' \cap Fr(U') \neq \emptyset$ y $X' \cap Fr(V') \neq \emptyset$. En consecuencia, X' es un subcontinuo de X que intersecta a $Fr(U')$ y a $Fr(V')$ que contiene a x. Como $X \subset L_{yz}$, se tiene que $X' \subset$ x-*componente* de $L_{yz} - (U' \cup V')$, esto pues, X' es un subcontinuo de L_{yz} que no intersecta ni a U' ni a V'.

Como X' intersecta a $Fr(U')$ y a $Fr(V')$, entonces la *x-componente* de $L_{yz} - (U' \cup V')$ intersecta a $Fr(U')$ y a $Fr(V')$ que era lo que se quería demostrar. ■

Definición 4.3. *Sean M un continuo aposindético y x,y,z puntos distintos de M tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$. Por el teorema 4.2, existen dos abiertos disjuntos U y V en $M - \{x\}$ conteniendo a y y a z, respectivamente, tales que si U' es un abierto en U que contiene a y y V' es un abierto en V que contiene a z, entonces la x-componente de $L_{yz} - (U' \cup V')$ intersecta a $Fr(U')$ y a $Fr(V')$. Sean $U_1, U_2, U_3, \ldots.$ y $V_1, V_2, V_3, \ldots.$dos sucesiones decrecientes de bolas abiertas en M (es decir $U_{n+1} \subset U_n$, $V_{n+1} \subset V_n$), con centros en y y en z, respectivamente, tales que $U_1 \subset U$ y $V_1 \subset V$. Para todo número natural n, se define a Y_n, como la x-componente de $L_{yz} - (U_n \cup V_n)$. Se define entonces a L_{yz}^x como el límite superior de $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ Es decir, $L_{yz}^x = \operatorname{límsup}\{Y_i\}$.*

2. Propiedades de L_{yz}^x.

Teorema 4.4. *Sea L_{yz}^x como en la definición anterior. Entonces:*

1) *L_{yz}^x es un subcontinuo de L_{yz} y, por lo tanto, de M (pues L_{yz} es un subcontinuo de M (teorema 3.16)), que contiene a $\{x,y,z\}$.*

2) *Para toda $n \in \mathbb{N}$, $Y_n \subset Y_{n+1} \subset L_{yz}^x$.*

3) *L_{yz}^x es localmente conexo.*

4) *Si $p \in L_{yz}^x$, entonces $L_{yz}^x = L_{yz}^p$.*

5) *Ni y ni z separan a L_{yz}^x.*

Prueba. 1) Por el teorema 3.16, L_{yz} es un conjunto cerrado. Entonces la *x-componente* de $L_{yz} - (U_n \cup V_n)$ es un conjunto cerrado. De aquí que Y_n sea un subcontinuo de M.

Entonces, por el teorema 2.14, se sigue que L_{yz}^x es cerrado. Luego, como $x \in \operatorname{líminf}\{Y_i\}$, por el teorema 2.16, se tiene que L_{yz}^x es conexo y, por el teorema 4.2, se sigue que para toda n, el subcontinuo Y_n intersecta a $Fr(U_n)$ y a $Fr(V_n)$. De aquí que L_{yz}^x sea un subcontinuo de L_{yz} (y, por lo tanto, de M), que contiene a $\{x,y,z\}$.

2) Como tanto las sucesiones $\{U_n\}$ y $\{V_n\}$ cumplen que $U_{n+1} \subset U_n$ y $V_{n+1} \subset V_n$, es claro que $L_y - (U_n \cup V_n) \subset L_y - (U_{n+1} \cup V_{n+1})$. De aquí que $Y_n \subset Y_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $L_{yz}^x = \text{límsup}\, Y_n$, se tiene que $Y_n \subset L_{yz}^x$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

3) Además de ser L_{yz}^x un subcontinuo de M, L_{yz}^x también será localmente conexo [1, Teorema 2, pág 391].

4) Sean $\{V_n\}$ y $\{U_n\}$ dos sucesiones decrecientes de bolas abiertas en M con centros en y y en z, respectivamente, tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{y\}$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{z\}$. Para cualquier $w \in L_{yz}^x$ (con w distinto de los puntos y y z), sea Y_n^w la *w-componente* de $L_{yz} - (V_n \cup U_n)$.

Sea $p \in L_{yz}^x$ (con p distinto de x,y,z). Tomemos un conjunto abierto W en M que contenga a p y no intersecte a $\{y,z\}$. Es posible encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $W \cap (U_m \cup V_m) = \emptyset$. Entonces $W \cap (U_n \cup V_n) = \emptyset$ para toda $n \geq m$.

Como L_{yz}^x es un continuo localmente conexo (inciso 3)) y $W \cap L_{yz}^x$ es un conjunto abierto de L_{yz}^x que contiene a p, existe un conjunto abierto W' en M tal que $W' \cap L_{yz}^x$ es un conjunto abierto en L_{yz}^x, conexo, tal que $p \in W' \cap L_{yz}^x \subset W \cap L_{yz}^x$. Sea $W'' = W' \cap L_{yz}^x$. Note que $W'' \cap (U_n \cup V_n) = \emptyset$ para toda $n \geq m$.

Por otro lado, como $p \in L_{yz}^x$, se tiene que $p \in \text{límsup}\, Y_n^x$. Entonces, por la definición del conjunto $\text{límsup}\, Y_n^x$, se tiene que $W' \cap Y_i^x \neq \emptyset$ para toda una infinidad de $i \in \mathbb{N}$. Es decir, existe una subsucesión $\{Y_{n_i}^x\}$ de $\{Y_n^x\}$, tal que $W' \cap Y_{n_i}^x \neq \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Como $Y_{n_i}^x \subset L_{yz}^x$ (inciso 2)), se tiene que $(W' \cap L_{yz}^x) \cap Y_{n_i}^x = W' \cap Y_{n_i}^x \neq \emptyset$. Entonces tenemos que $W'' \cap Y_{n_i}^x \neq \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $p \notin Y_n^x$.

Sea $n_i \geq m$. Como $Y_{n_i}^x \cap W'' \neq \emptyset$, se tiene que $Y_{n_i}^x \cup W''$ es un conexo que contiene propiamente a $Y_{n_i}^x$ (pues $p \in W''$ y $p \notin Y_n^x$). Afirmamos que $Y_{n_i}^x \cup W'' \subset L_{yz} - (U_{n_i} \cup V_{n_i})$. Pero esto es inmediato pues, por definición, $Y_{n_i}^x \subset L_{yz} - (U_{n_i} \cup V_{n_i})$, además, como $W'' \subset L_{yz}^x \subset L_{yz}$ y $W'' \cap (U_n \cup V_n) = \emptyset$ para toda $n \geq m$ y $n_i \geq m$, se tiene que $W'' \subset L_{yz} - (U_{n_i} \cup V_{n_i})$. Entonces $Y_{n_i}^x \cup W'' \subset L_{yz} - (U_{n_i} \cup V_{n_i})$, lo cual es una contradicción pues $Y_{n_i}^x$ es la *x-componente* de $L_{yz} - (U_{n_i} \cup V_{n_i})$.

De aquí que se tenga que existe un número natural N tal que $p \in Y_N^x$. Luego, se tiene que $Y^x_N = Y^p_N$ (teorema 1.25, inciso 2)). Se sigue que $p \in Y^x_n$ para toda $n \geq N$ (inciso 2)). Entonces $Y^x_n = Y^p_n$ para toda $n \geq N$ y, por lo tanto, $\text{límsup}\, Y^x_n = \text{límsup}\, Y^p_n$, lo que nos dice que $L^x_{yz} = L^p_{yz}$.

5) Supongamos que y separa a L^x_{yz}. Sea $\{V_n\}$ una sucesión decreciente de bolas abiertas en M con centros en y tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{y\}$. Como y separa al continuo L^x_{yz}, entonces $L^x_{yz} - \{y\} = A \cup B$, con A y B conjuntos abiertos en $L^x_{yz} - \{y\}$, ajenos y distintos del vacío.

Se afirma que existe un número natural N tal que ni A ni B están contenidos en V_N, esto, pues si $A \subset V_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por la construcción de $\{V_n\}$, se tendría que $A \subset \{y\}$ y como $y \notin A$, se tendría que $A = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Entonces existe un número natural N_A tal que A no está contenida en V_{N_A}. Como $V_{n+1} \subset V_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que A no está contenida en V_n para toda $n \geq N_A$. Análogamente, existe un número natural N_B tal que B no está contenido en V_n para toda $n \geq N_B$. Ahora, si tomamos $N = máx\{N_A, N_B\}$, entonces ni A ni B están contenidos en V_n, para toda $n \geq N$.

Luego, si $n \geq N$, se tiene que V_n separa a L^x_{yz}, esto pues, de lo contrario, existiría un conexo $K \subset L^x_{yz}$ tal que $K \cap A \neq \emptyset$, $K \cap B \neq \emptyset$, y $K \cap V_n = \emptyset$. Como $y \in V_n$, se tendría que $K \cap \{y\} = \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $\{y\}$ separa a L^x_{yz} en A y B.

Entonces, para toda $n \geq N$, se tiene que V_n separa a L^x_{yz} y se puede separar a $L^x_{yz} - V_n$ en A^n y B^n, conjuntos cerrados, ajenos y distintos del vacío, de tal manera que $A^n \subset A$ y $B^n \subset B$ para toda $n \geq N$.

Ahora, si $w_1 \in A - V_N$ y $w_2 \in B - V_N$, entonces se tiene que $w_1 \in A - V_n$ y $w_2 \in B - V_n$ para toda $n \geq N$. Como $w_1 \in L^x_{yz}$, por el inciso 4), se tiene que $L^x_{yz} = L^{w_1}_{yz}$. Por lo tanto, $w_2 \notin$ w_1-*componente* de $L^{w_1}_{yz} - V_n$, ninguna $n \geq N$.

Para cualquier $p \in L^x_{yz}$, distinto de y y z, sea Y^p_n la p-*componente* de $L_{yz} - (V_n \cup U_n)$, donde $\{U_n\}$ es una sucesión decreciente de bolas abiertas en M con centros en z de tal manera que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{z\}$.

Por lo tanto, $Y^{w_1}_n \subset Y^{w_1}_{n+1} \subset L^{w_1}_{yz} - (V_n \cup U_n) \subset L^{w_1}_{yz}$ para todo número natural n. Entonces, como $Y^{w_1}_n \subset L^{w_1}_{yz} - (V_n \cup U_n)$, se sigue que la w_1-*componente* de $L_{yz} - (V_n \cup U_n)$

es la w_1-*componente* de $L_{yz}^{w_1} - (V_n \cup U_n)$ (teorema 1.25, inciso 3)), es decir, $Y_n^{w_1}$ es la w_1-*componente* de $L_{yz}^{w_1} - (V_n \cup U_n)$. Luego, como $w_2 \notin w_1$-*componente* de $L_{yz}^{w_1} - V_n$ para ninguna $n \geq N$, se llega a que $w_2 \notin Y_n^{w_1}$ para toda $n \geq N$, es decir, se llega a que $w_2 \notin L_{yz}^{w_1}$.

Como $L_{yz}^{w_1} = L_{yz}^{x}$, se tendría que $w_2 \notin L_{yz}^{x}$, lo cual es una contradicción, pues $w_2 \in B \subset L_{yz}^{x}$. La contradicción se dio al suponer que y separaba a L_{yz}^{x}.

Análogamente se tiene que z no separa al subcontinuo L_{yz}^{x}. ■

3. Arcos en continuos planos y aposindéticos.

Teorema 4.5. *Si un continuo aposindético M contiene un conjunto finito F tal que para todo $x \in M - F$ existen y y $z \in F$ tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$, entonces M es arcoconexo.*

Prueba. Nótese que $\bigcup_{y,z \in F} L_{yz}$ cubre a M, pues dado $x \in M$, si $x \in F$ es claro que $x \in \bigcup_{y,z \in F} L_{yz}$ y si $x \in M - F$ por hipótesis existen $y_0, z_0 \in F$ tal que M no es aposindético en x respecto a $\{y_0, z_0\}$, es decir, $x \in L_{y_0 z_0}$ y, por lo tanto, $x \in \bigcup_{y,z \in F} L_{yz}$. Entonces $M = \bigcup_{y,z \in F} L_{yz}$.

Se quiere demostrar que $\bigcup_{y,z \in F} L_{yz}$ es arcoconexa ($\bigcup_{y,z \in F} L_{yz}$ es conexo pues M es conexo). Como L_{yz}^{x} es un continuo localmente conexo (teorema 4.4, inciso 3)) y, por lo tanto, arcoconexo [6, Teorema 8.23, pág. 130], tenemos que L_{yz} también es arconexo (pues $\bigcup_{x \in L_{yz}} L_{yz}^{x} = L_{yz}$ y todos los L_{yz}^{x} son continuos arcoconexos que contienen a y y a z).

Sea $A = \left\{ L_{yz} \mid y,z \in F \text{ y } L_{yz} \neq \{y,z\} \right\}$. Como F es finito, A tiene un número finito de elementos. Note que $\bigcup_{L \in A} L = \bigcup_{y,z \in F} L_{yz} = M$.

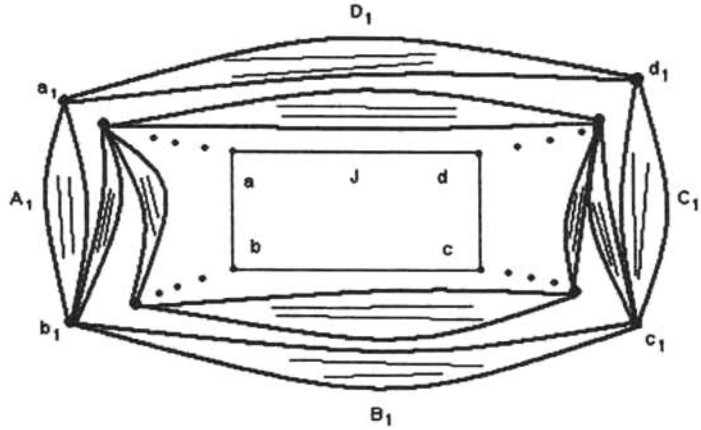
Sea $L \in A$. Si L no intersecta a ningún elemento de $A - \{L\}$, como A tiene un número finito de elementos y cada $L' \in A$ es un conjunto cerrado en M, existe una separación de M con abiertos U y V ajenos y distintos del vacío, tales que $L \subset V$ y $\bigcup_{y,z \in F} L_{yz} - L \subset U$, lo cual es una contradicción, pues M es conexo.

Entonces L intersecta a algún elemento de $A - \{L\}$. Sea L_1 tal elemento. Luego $L \cup L_1$ es un continuo arcoconexo. Análogamente, si $L \cup L_1$ no intersecta a ningún elemento de $A - \{L \cup L_1\}$, se llega nuevamente a una contradicción pues existiría una separación de M con abiertos U y V ajenos y distintos del vacío tales que $L \cup L_1 \subset V$ y $\bigcup_{y,z \in F} L_{yz} - L \cup L_1 \subset U$, lo cual es una contradicción, pues M es conexo. De aquí que $L \cup L_1$ intersecta a algún $L_2 \in A - \{L \cup L_1\}$. Como A es finito, es decir $A = \{L, L_1, \ldots, L_n\}$ se tiene que $\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ es un continuo arcoconexo. Como $\bigcup_{i=1}^{n} L_i = \bigcup_{y,z \in F} L_{yz}$, se tiene que M es un continuo arcoconexo. ■

Si se quita la condición de que el conjunto F sea finito, entonces no necesariamente M tiene que ser arcoconexo, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.6. *Si un continuo aposindético M contiene un conjunto F con una cantidad numerable de puntos tal que para todo $x \in M - F$ existen y y $z \in F$ tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$, entonces M no necesariamente tiene que ser arcoconexo.*

Sea M un continuo en el plano que consiste de una curva cerrada simple J y cuatro sucesiones de suspensiones de Cantor (ejemplo 3.7) $A_1, A_2, A_3, \ldots$, $B_1, B_2, B_3, \ldots$, $C_1, C_2, C_3, \ldots$ y $D_1, D_2, D_3, \ldots$. Los elementos de estas sucesiones están unidas entre sí por sus vértices (los vértices de la suspensión de Cantor son los puntos $(\frac{1}{2}, 1)$ y $(\frac{1}{2}, -1)$ del ejemplo 3.7) de tal manera que, si a_i y a_i' son los vértices de A_i, b_i y b_i' son los vértices de B_i, c_i y c_i' son los vértices de C_i, y d_i y d_i' son los vértices de D_i, entonces $a_i = d_i'$, $d_i = c_i'$, $c_i = b_i'$, y $b_i = a_i'$, y, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_{2n} = a_{2n+1}$, $b_{2n-1} = b_{2n}$, $c_{2n-1} = c_{2n}$, y $d_{2n} = d_{2n+1}$. Las suspesnsiones de Cantor convergen a J de tal manera que, si a, b, c y d son cuatro puntos de J, entonces, las sucesiones $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $\{c_i\}$ y $\{d_i\}$ convergen a a, b, c y d, respectivamente.



Entonces M es un continuo aposindético del plano. Para ver esto, se tiene que verificar que, para cada $x \in M$, M es aposindético en x.

Si $x \in M - J$, entonces se tiene que x está en alguna de las suspensiones de Cantor, luego, de manera similar al ejemplo 3.7, se verifica que M es aposindético en x. Si x está en el arco que va del punto a al punto d, el argumento es similar al del ejemplo 3.7, es decir, para cualquier $y \in M - \{x\}$, se puede encontrar un continuo H de tal manera que $x \in intH$, $y \notin H$ y, para alguna $N \in \mathbb{N}$, $a_n \in H$ o $d_n \in H$, para toda $n \geq N$, según sea el caso. Análogamente para los demás puntos de J. Entonces M es un continuo aposindético.

Sea $F = \{a_i\} \cup \{b_i\} \cup \{c_i\} \cup \{d_i\} \cup \{a,b,c,d\}$. F es un conjunto numerable y para todo punto $x \in M - F$, existen y y $z \in F$ tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$. Para ver esto, sea $x \in M - F$. Si $x \notin J$, entonces se tiene que x está en alguna de las suspensiones de Cantor. Supongamos que $x \in A_i$ para alguna $i \in \mathbb{N}$. Entonces M no es aposindético en x respecto a $\{a_i, b_i\}$. Si x está en el arco de J que une al punto a con el punto d, entonces M no es aposindético en x respecto a $\{a,d\}$. Si x está en el arco de J que une al punto d con el punto c, entonces M no es aposindético en x respecto a $\{d,c\}$. Análogamente si x está en el arco de J que une a c con b y el arco que une a b con a.

Las sucesiones de suspensiones de Cantor convergen a J pero nunca intersectan a la curva cerrada simple, es decir, M no es arcoconexo pues no existe un arco que una un punto de J con un punto de $M - J$.

A continuación se verá que, con las hipótesis del teorema 4.5, además, todo punto en M tiene que estar en una curva cerrada simple contenida en M. También se demostrará que, si F consta de dos puntos, entonces M es cíclicamente conexo. Para esto, es necesario el siguiente resultado.

Teorema 4.7. *Si M es un continuo aposindético y x, y y z son puntos distintos de M tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$, entonces ningún punto en $L_{yz}^x - \{x,y,z\}$ separa débilmente a x y $\{y,z\}$ en L_{yz}^x (es decir, para cualquier $p \in L_{yz}^x - \{x,y,z\}$, existe un subcontinuo en $L_{yz}^x - \{p\}$ que intersecta a $\{x\}$ y a $\{y,z\}$).*

Prueba. Supongamos que existe un punto $q \in L_{yz}^x - \{x,y,z\}$ que separa débilmente a x y $\{y,z\}$ en L_{yz}^x. Como M es aposindético, M es aposindético en x respecto a q, es decir, existe un subcontinuo H de M contenido en $M - \{q\}$, tal que $x \in intH$ (observe que $H \cap \{y,z\} \neq \emptyset$ pues M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$). Primero se demostrará la siguiente afirmación:

1) *$H \cap L_{yz}$ no contiene subcontinuos que intersecten a $\{x\}$ y a $\{y,z\}$.*

Para demostrar esto, supongamos que existe un subcontinuo L de $H \cap L_{yz}$ tal que $x \in L$ y $L \cap \{y,z\} \neq \emptyset$. Entonces por el teorema 2.23, existe un subcontinuo I de L que es irreducible de x a $\{y,z\}$.

Se demostrará que $I \subset L_{yz}^x$. Para esto, tomemos los siguientes conjuntos:

$$J = \{w \in I \mid I \text{ es un subcontinuo irreducible de } x \text{ a } w\} \text{ y}$$
$$I - J = \{w \in I \mid \text{existe un subcontinuo propio } S \text{ de } I \text{ con } x \text{ y } w \in S\}.$$

Observe que $I - J$ es precisamente la composante de x en I. Por el teorema 2.21, las composantes son densas, es decir, sabemos que $\overline{I - J} = I$. Como L_{yz}^x es un continuo (teorema 4.4, inciso 1)), en particular es un conjunto cerrado. Basta demostrar que $I - J \subset L_{yz}^x$, pues se tendría que $I = \overline{I-J} \subset \overline{L^x_{yz}} = L^x_{yz}$ que es lo que se quiere demostrar.

Sea entonces $w \in I - J$. Se llegará a que $w \in L^x_{yz}$. Como $w \in I - J$, existe un subcontinuo propio S de I con x y $w \in S$. Note que $\{y,z\} \cap S = \emptyset$, pues I es irreducible de x a $\{y,z\}$. Entonces, por normalidad, existen conjuntos abiertos U y V en M que contienen a y y a z respectivamente, tales que $U \cap S = \emptyset$ y $V \cap S = \emptyset$.

Sean $\{U_n\}$ y $\{V_n\}$ sucesiones decrecientes de bolas abiertas en M con centros en y y en z, respectivamente tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{y\}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{z\}$. Entonces existe un número natural N tal que $U_N \subset U$ y $V_N \subset V$, luego es claro que $w \notin U_N \cup V_N$ y, más aún, $w \in$ *x-componente* de $L_{yz} - (U_N \cup V_N)$ (pues w y $x \in S$ y $S \cap (U_N \cup V_N) = \emptyset$). Entonces por el teorema teorema 4.4, inciso 2), $w \in$ *x-componente* de $L_{yz} - (U_n \cup V_n)$ para todo número natural $n \geq N$. De aquí que $w \in L^x_{yz}$ y, por lo tanto, $I - J \subset L^x_{yz}$ que era lo que se necesitaba para que $I \subset L^x_{yz}$.

Ahora, se supuso que q separa débilmente a x y $\{y,z\}$ en L^x_{yz}. Entonces, como I es un subcontinuo de L^x_{yz}, se tiene que $q \in I$. Pero $I \subset L \subset H \cap L_{yz}$, de aquí que $q \in H$ lo cual es una contradicción.

Entonces $H \cap L_{yz}$ no contiene subcontinuos que intersecten a $\{x\}$ y a $\{y,z\}$, por lo que queda demostrado 1).

Entonces, $H \cap L_{yz} = A \cup B$, donde A y B son conjuntos cerrados, ajenos, distintos del vacío, con $x \in A$ y $H \cap \{y,z\} \subset B$. [6, teorema 5.2, pág. 72].

Sean U y V dos conjuntos abiertos en H con cerraduras disjuntas, distintos del vacío, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Observemos que $H - (U \cup V)$ es cerrado en H y, como H es cerrado en M, $H - (U \cup V)$ también es cerrado en M. Se sigue del teorema 1.37, que $H - (U \cup V)$ es compacto.

Se afirma lo siguiente:

2) *Existe una cubierta finita de continuos de $M - \{y,z\}$ que cubre a $H - (U \cup V)$.*

Para esto, tomemos $p \in H - (U \cup V)$. Entonces $p \notin L_{yz}$, es decir, M es aposindético en

p respecto a $\{y,z\}$. Por lo tanto, existen un conjunto abierto V_p de M, que contiene a p y un continuo H_p tales que $V_p \subset H_p$ y $\{y,z\} \cap H_p = \emptyset$. Luego $\bigcup_{p \in H-(U \cup V)} V_p$ es una cubierta abierta de $H-(U \cup V)$ el cual es compacto. Por lo tanto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $p_1,\ldots,p_n \in H-(U \cup V)$ tales que los conjuntos $V_{p_1},\ldots,V_{p_n}$ cubren a $H-(U \cup V)$. De aquí que se tenga una colección finita de continuos $\{H_{p_1},\ldots,H_{p_n}\}$ en $M-\{y,z\}$ que cubren a $H-(U \cup V)$, por lo que queda demostrado 2).

Para obtener una contradicción, demostraremos lo siguiente:

3) *M es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$.*

Se encontrará un continuo X de M tal que $x \in intX$ y $X \cap \{y,z\} = \emptyset$. Denotemos por $\overline{U}^H$ y por $Fr_H(U)$ a la cerradura y a la frontera de U con respecto al continuo H, respectivamente. Por el teorema 2.9, si K es una componente de $\overline{U}$ entonces $K \cap Fr_H(U) \neq \emptyset$, ya que $\overline{U}^H = \overline{U}$. Se afirma que $\overline{U} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i})$ tiene un número finito de componentes. Esto pues, $Fr_H(U) \subset H-(U \cup V)$, ya que, como $\overline{U} \subset \overline{H} = H$, se tiene que $Fr_H(U) \subset H$, luego, como $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, resulta que $Fr_H(U) \cap V = \emptyset$. Además, $Fr_H(U) \cap U = \emptyset$.

Luego, no importa cuántas componentes tenga $\overline{U}$, todas intersectan a $Fr_H(U)$, es decir, todas intersectan a $\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i}$ (pues $H-(U \cup V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i}$) y, como $\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i}$ tiene un número finito de componentes, se tiene que $\overline{U} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i})$ tiene un número finito de componentes y ninguna componente intersecta a $\{y,z\}$, pues $H \cap \{y,z\} \subset B$ y $B \cap \overline{U} = \emptyset$. Además, para toda i, se tiene que $\{y,z\} \cap H_{p_i} = \emptyset$.

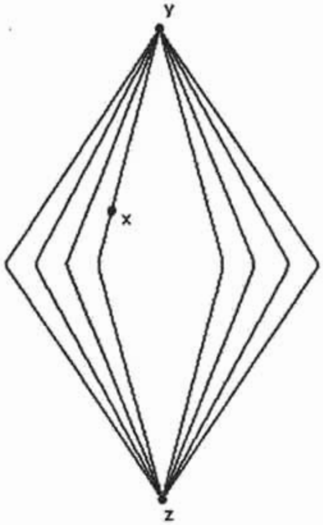
Como $x \in U$, que es un conjunto abierto de H, tenemos que $U = U' \cap H$ para algún conjunto abierto U' de M. Entonces $U' \cap intH$ es un conjunto abierto de M que contiene a x, tal que $U' \cap intH \subset U$, es decir, $x \in intU \subset \overline{U} \subset \overline{U} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i})$.

Sea X la *x-componente* de $\overline{U} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i})$. X es un subcontinuo de M (X es conexo por ser componente y cerrado pues $\overline{U} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i})$ es cerrado) que no intersecta a $\{y,z\}$ y, por el teorema 1.26, $x \in intX$. De aquí que M es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$.

Pero esto es una contradicción que viene de suponer que q separa débilmente a x y $\{y,z\}$ en L^x_{yz}. Por lo tanto, no existe $q \in L^x_{yz} - \{x,y,z\}$ tal que q separa débilmente a x y $\{y,z\}$ en L^x_{yz}, que era lo que se quería demostrar. ■

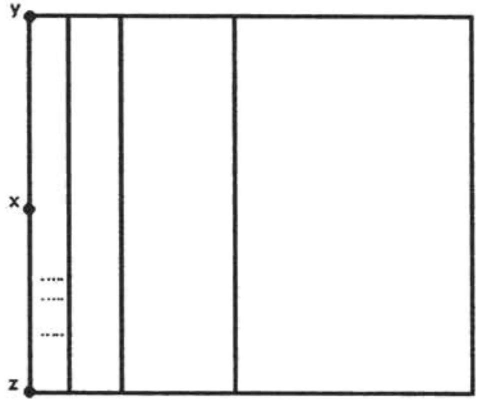
Los siguientes ejemplos, ilustran las ideas del teorema que se acaba de demostrar:

Ejemplo 4.8. *Sea M como en el ejemplo 3.7. Sean $y = (\frac{1}{2}, 1)$, $z = (\frac{1}{2}, -1)$ y x cualquier punto en $M - \{y,z\}$.*



Entonces M es un continuo aposindético tal que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$. Note que el conjunto L_{yz} es el continuo M y el arco que empieza en el punto y y termina en z pasando por x es precsisamente el conjunto L^x_{yz}. Observe que ningún punto en $L^x_{yz} - \{x,y,z\}$ separa débilmente a x y $\{y,z\}$ en L^x_{yz}.

Ejemplo 4.9. *Sea M como en el ejemplo 3.6. Sean $y = (1,1)$, $z = (0,0)$ y x un punto en el segmento de recta que une al punto y con el punto z.*



Entonces M es un continuo aposindético tal que M no aposindético en x respecto a $\{y,z\}$. Note que el conjunto L_y es igual al conjunto L^x_{yz}, que es el segmento de recta que une el punto y con el punto z.

Observe que ningún punto en $L^x_{yz} - \{x,y,z\}$ separa débilmente a x y $\{y,z\}$ en L^x_{yz}.

Teorema 4.10. *Si M es un continuo aposindético y contiene puntos w,x,y y z tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$, M no es aposindético en w respecto a $\{y,z\}$, y $w \notin L^x_{yz}$. Entonces $L^w_{yz} \cup L^x_{yz}$ es cíclicamente conexo.*

Prueba. Como L^w_{yz} y L^x_{yz} son continuos localmente conexos (teorema 4.4, inciso 3)), se tiene que $L^w_{yz} \cup L^x_{yz}$ es un continuo localmente conexo (teorema 2.4), por ello, basta demostrar que ningún punto en $L^w_{yz} \cup L^x_{yz}$ es punto de separación (lema 2.33).

Por el teorema 4.4, inciso 5), ni y ni z separan a L^w_{yz}, y de la misma forma ni y ni z separan a L^x_{yz}. Luego $L^w_{yz} \cap L^x_{yz} = \{y,z\}$, esto pues, si existiera un punto $p \in L^w_{yz} \cap L^x_{yz}$ con $y \neq p \neq z$, por el teorema 4.4, inciso 4), tendríamos que $L^w_{yz} = L^p_{yz}$ y, como $p \in L^x_{yz}$, también $L^p_{yz} = L^w_{yz}$ y, por lo tanto, $L^w_{yz} = L^x_{yz}$ lo cual es una contradicción, pues $w \notin L^x_{yz}$. Entonces se tiene que ni y y ni z separan a $L_{yz}^{w} \cup L_{yz}^{x}$.

Supongamos que existe un punto $q \in L_{yz}^{w} \cup L_{yz}^{x} - \{y,z\}$ que separa a $L_{yz}^{w} \cup L_{yz}^{x}$. Se puede suponer que $q \in L_{yz}^{w}$ (por lo tanto $q \notin L_{yz}^{x}$ pues $L_{yz}^{w} \cap L_{yz}^{x} = \{y,z\}$). Entonces L_{yz}^{x} está en una componente de $L_{yz}^{w} \cup L_{yz}^{x} - \{q\}$.

Sean C tal componente y $r \in C_r$, donde C_r es una componente de $L_{yz}^{w} \cup L_{yz}^{x} - \{q\}$ que no intersecta a C (existe tal componente pues como q separa a $L_{yz}^{w} \cup L_{yz}^{x}$, se tiene que $L_{yz}^{w} \cup L_{yz}^{x} - \{q\}$ tiene al menos dos componentes). Si existe un continuo H de L_{yz}^{w} que contenga a r y a algún punto de $\{y,z\}$, entonces $q \in H$, esto pues $\{y,z\} \subset L_{yz}^{x} \subset C$ y $r \notin C$.

Entonces q separa L_{yz}^{w} entre r y $\{y,z\}$. Como $r \in L_{yz}^{w}$, por el teorema 4.4, inciso 4), se tiene que $L_{yz}^{w} = L_{yz}^{r}$. De aquí que q separe a L_{yz}^{r} entre r y $\{y,z\}$, lo cual es una contradicción pues, por el teorema 4.7, se tiene que ningún punto separa débilmente a r y $\{y,z\}$ en L_{yz}^{r}. La contradicción viene de suponer que existe $q \in L_{yz}^{w} \cup L_{yz}^{x} - \{y,z\}$ tal que separa a $L_{yz}^{w} \cup L_{yz}^{x}$.

Por lo tanto, se tiene que $L_{yz}^{w} \cup L_{yz}^{x}$ no contiene puntos de separación, lo que nos dice que $L_{yz}^{w} \cup L_{yz}^{x}$ es cíclicamente conexo. ■

Teorema 4.11. *Si M es un continuo aposindético y contiene puntos y y $z \in M$ tales que para todo $x \in M - \{y,z\}$, M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$. Entonces M es cíclicamente conexo.*

Prueba. Sean a y $b \in M$ puntos distintos y supongamos por el momento que $a \in M - \{y,z\}$. Se quiere demostrar que existe una curva cerrada simple de M que los une. Se tienen varios casos:

Caso 1. Si $\{a,b\} \cap \{y,z\} = \emptyset$ y $b \in L_{yz}^{a}$ se asegura que existe un punto $w \in M - \{y,z\}$ tal que $w \notin L_{yz}^{a}$. Para esto, supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $L_{yz}^{a} = M$. Como L_{yz}^{a} es un continuo localmente conexo (teorema 4.4, inciso 3), M sería localmente conexo y, por lo tanto, por el teorema 3.5, para todo $x \in M - \{y,z\}$, M sería aposindético en x respecto a $\{y,z\}$, lo cual es una contradicción. Entonces existe tal w.

Como M no es aposindético en w respecto a $\{y,z\}$, se puede tomar el conjunto L_{yz}^{w}. Por el teorema 4.10, se tiene que $L_{yz}^{a} \cup L_{yz}^{w}$ es cíclicamente conexo. Como a y b están en

$L^a_{yz} \subset L^a_{yz} \cup L^w_{yz}$, se tiene que existe una curva cerrada simple que une a a con b.

Caso 2. Si $\{a,b\} \cap \{y,z\} = \emptyset$ y $b \notin L^a_{yz}$, por el teorema 4.10, $L^a_{yz} \cup L^b_{yz}$ es cíclicamente conexo, lo que nos dice que existe una curva cerrada simple que contiene a $\{a,b\}$.

Caso 3. Si $a \in \{y,z\}$ y $b \notin \{y,z\}$, entonces podemos tomar un punto $w \in M - \{y,z\}$ tal que $w \notin L^b_{yz}$, por lo que obtenemos que $L^b_{yz} \cup L^w_{yz}$ es cíclicamente conexo. Como a y b están en $L^b_{yz} \subset L^b_{yz} \cup L^w_{yz}$, se tiene que existe una curva cerrada simple que une a a con b. Análogamente para el caso en que $b \in \{y,z\}$ y $a \notin \{y,z\}$.

Caso 4. Si $a \in \{y,z\}$ y $b \in \{y,z\}$, como es posible encontrar un punto $x \in M - \{y,z\}$ y un punto $w \notin L^x_{yz}$, se tiene que $L^x_{yz} \cup L^w_{yz}$ es cíclicamente conexo. Como a y b están en $\{y,z\} \subset L^x_{yz} \cup L^w_{yz}$, existe una curva cerrada simple que contiene a $\{a,b\}$. ■

Teorema 4.12. *Si M es un continuo aposindético y $F \subset M$ es un subconjunto finito tal que para toda $x \in M - F$ existen y y $z \in F$ tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y,z\}$, entonces todo punto en M está en una curva cerrada simple contenida en M.*

Prueba. Para toda $x \in M$, se definen

$$H_x = \left\{ L^x_{yz} \mid M \text{ no es aposindético en } x \text{ respecto a } \{y,z\}, \text{ y } \{y,z\} \subset F - \{x\} \right\}$$

y

$$stH_x = \bigcup_{L^x_{yz} \in H_x} L^x_{yz}$$

Primero, observe lo siguiente:

Como cada $L^x_{yz} \in H_x$ es un continuo localmente conexo (teorema 4.4, inciso 3) y H_x contiene sólo un número finito de elementos (pues F es finito), se tiene que stH_x es un continuo localmente conexo (teorema 2.4).

Sea $p \in M$. Se demostrará que p está en una curva cerrada simple. Para esto, se demostrará la siguiente afirmación:

1) *Existe una sucesión* $\{x_n\}$ *de puntos en* M *tal que* $x_1 = p$ *y, para toda* $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in M - \left(F \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} stH_{x_i}\right)\right)$ *y* $d(x_{n+1}, p) < \frac{1}{n}$.

Para demostrar esto, tomemos $B_1(p)$ la bola abierta con centro en p y radio 1. Por ser M un espacio métrico y ser F finito, se puede suponer que $\overline{B_1(p)} \cap (F - \{p\}) = \emptyset$, aún en el caso de que $p \in F$.

Afirmamos que, si A es un subconjunto de M localmente conexo, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $B_{\frac{1}{n}}(p)$ no puede estar contenida en A. Para ver esto, supongamos que $B_{\frac{1}{n}}(p) \subset A$. Sea $x \in B_{\frac{1}{n}}(p)$ un punto distinto de p. Note que $x \notin F$. Es posible encontrar un conjunto abierto U en M tal que $x \in U$ y $\overline{U} \subset B_{\frac{1}{n}}(p) - \{p\}$. Como A es localmente conexo, se tiene que A es localmente conexo en x. Como $U \subset A$, se tiene que U es un conjunto abierto en A. Por lo tanto, para el conjunto abierto U en A, existe un conjunto V, abierto en A y conexo, tal que $p \in V \subset U$. Pero entonces, como $V \subset U$, se tiene que V es un conjunto abierto en U, que es abierto en M, por lo que V es abierto y conexo en M.

De aquí que se tenga que, $\overline{V}$ es un continuo tal que $x \in int\overline{V}$ y $\overline{V}$ no intersecta a F (pues $\overline{V} \subset B_{\frac{1}{n}}(p) - \{p\} \subset B_1(p) - \{p\}$ y $\overline{B_1(p)} \cap (F - \{p\}) = \emptyset$). Lo que nos dice que M es aposindético en x respecto a F. Pero esto es una contradicción a la hipótesis del teorema. De aquí que $B_{\frac{1}{n}}(p)$ no puede estar contenida en A, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, como stH_p es localmente conexo, se tiene que $B_1(p)$ no puede estar contenida en stH_p.

Entonces, es posible encontrar un punto x_2 tal que:

a) $x_2 \in B_1(p)$.

b) $x_2 \notin F$. Pues, $\overline{B_1(p)} \cap (F - \{p\}) = \emptyset$

c) $x_2 \notin stH_p$. Pues $B_1(p)$ no está contenida en stH_p.

De igual manera, tomemos ahora $B_{\frac{1}{2}}(p)$. Como $stH_p \cup stH_{x_2}$ es localmente conexo,

$B_{\frac{1}{2}}(p)$ no puede estar contenida en $stH_p \cup stH_{x_2}$.

Entonces, es posible encontrar un punto x_3 tal que:

a) $x_3 \in B_{\frac{1}{2}}(p)$.

b) $x_3 \notin F$. Pues, $\overline{B_{\frac{1}{2}}(p)} \cap (F - \{p\}) = \emptyset$

c) $x_3 \notin stH_p \cup stH_{x_2}$. Pues $B_{\frac{1}{2}}(p)$ no está contenida en $stH_p \cup stH_{x_2}$.

Análogamente, se construye la sucesión $\{x_n\}$ que cumple con las propiedades de 1).

Afirmamos lo siguiente:

2) *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos con las propiedades dichas en 1). Entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, tal que para y_0 y $z_0 \in F$ fijos, M no es aposindético en x_{n_i} con respecto a $\{y_0, z_0\}$, para toda $i \in \mathbb{N}$.*

Para demostrar esto, note que para cada $n \in \mathbb{N}$, al punto x_n se le asocia un $\{y,z\} \subset F$ tal que M no es aposindético en x_n respecto a $\{y,z\}$. Como el número de combinaciones de pares de puntos en F es finito (pues F es finito), existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que para todo punto de la subsucesión, existen $y_0, z_0 \in F$ fijos, tales que M no es aposindético en x_{n_i} con respecto a $\{y_0, z_0\}$, para toda $i \in \mathbb{N}$, por lo que queda demostrado 2).

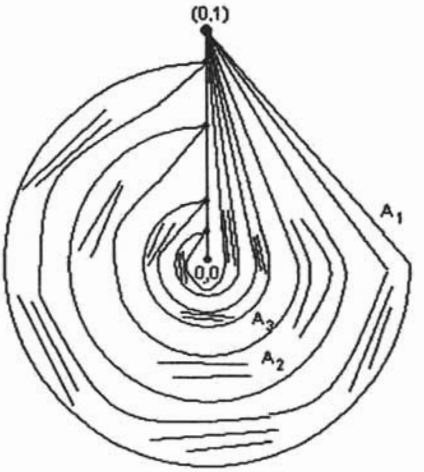
Entonces por el corolario 3.14, se tiene que M no es aposindético en p respecto a $\{y_0, z_0\}$.

Sea $x_m \in \{x_{n_k}\}$ con $x_m \neq x_1$ $(x_1 = p)$. Como $x_m \in M - (F \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} stH_{x_i})$, en particular $x_m \notin L^p_{y_0 z_0}$. Como M no es aposindético en x_m respecto a $\{y_0, z_0\}$, por el teorema 4.10, se tiene que $L^p_{y_0 z_0} \cup L^{x_m}_{y_0 z_0}$ es cíclicamente conexo. Se sigue que p está en una curva cerrada simple. ■

Si se quita la condición de que el conjunto F sea finito, entonces no necesariamente todo punto en M tiene que estar en una curva cerrada simple, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.13. *Si M es un continuo aposindético y $F \subset M$ es un subconjunto con una cantidad numerable de puntos tal que para toda $x \in M - F$ existen $y, z \in F$ tal que M no es aposindético en x respecto a $\{y, z\}$, entonces no necesariamente todo punto en M está en una curva cerrada simple contenida en M.*

Sean L el segmento de recta que une al punto $(0,0)$ con el punto $(0,1)$ y $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una sucesión de suspensiones de Cantor, tales que, si a_n y a_n' son los vértices de A_n, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces, $a_n' = (0,1)$ y $a_n \in L$ de tal manera que $d(a_n, (0,0)) < \frac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además, la sucesión $\{A_n\}$ va convergiendo a L como se muestra a continuación.



Entonces, si $M = L \cup \{A_n\}$, no es difícil convencerse de que M es un continuo aposindético. Sea F el conjunto que consta del punto $(0,0)$ y todos los vértices de las suspensiones de Cantor. F es numerable y, para toda $x \in M - F$, existen y y $z \in F$ tales que M no es aposindético en x respecto a $\{y, z\}$.

Para ver esto, sea $x \in M - F$. Si $x \notin L$, entonces $x \in A_i - \{a_i, a_i'\}$, para alguna $i \in \mathbb{N}$. De aquí que M no es aposindético en x respecto a $\{a_i, a_i'\}$. Si x está en L, entonces M no es aposindético en x respecto a $\{(0,0), (0,1)\}$.

Pero p no está en una curva cerrada simple.

CAPÍTULO 5

Arcos y curvas cerradas simples en continuos planos y no aposindéticos

En este capítulo se hace algo similar al capítulo anterior, pero ahora para continuos no aposindéticos del plano. Es decir, se establecen condiciones para que un continuo no aposindético en el plano sea arcoconexo y contenga curvas cerradas simples.

Si M no es aposindético en un punto $x \in M$, entonces M no es localmente conexo en x. El objetivo es establecer qué condiciones debe de cumplir un continuo no aposindético del plano, para ser arcoconexo y contener curvas cerradas simples. Este trabajo se enfocará en los continuos que no son aposindéticos en ninguno de sus puntos, los cuales comprenden a algunos continuos no localmente conexos en ningún punto.

Si M es un continuo semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número finito de ellos y, para todo punto x en M, se tiene que M no es aposindético en x o M no es semilocalmente conexo en x, entonces M es arcoconexo (teorema 5.4). Este resultado da como corolario que, **si M es totalmente no aposindético y M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número finito, entonces M es arcoconexo (corolario 5.6).**

Si se quita la condición de que M sea semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número finito de ellos y en cambio, se supone que para todo punto x en M, el conjunto K_x es finito, entonces todo punto en M está en una curva cerrada simple contenida en M.

Se demostrará que si M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número finito de ellos, entonces para todo punto x en M, el conjunto K_x es finito. Lo que da como corolario que **si M es totalmente no aposindético y M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número finito, entonces todo punto de M está en una curva cerrada simple contenida en M (corolario 5.12).**

Por último: Si M contiene un punto y tal que para toda $x \in M - \{y\}$, M es semilocalmente conexo en x y M no es aposindético en x respecto a y y si p y $q \in M$ son puntos distintos tales que ningún punto separa débilmente a p y q en M, se demuestra que p y q están en una curva cerrada simple de M.

Si en las hipótesis de los corolarios, se cambia la palabra finito por numerable, entonces se verán ejemplos en donde M es totalmente no aposindético y:

a) M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en una cantidad numerable, pero M no es arcoconexo,

b) M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en una cantidad numerable, pero no todo punto en M está en una curva cerrada simple contenida en M.

1. Definición y propiedades del conjunto L_y^x.

Dados un continuo no aposindético M y x y y puntos distintos de M tales que M no es aposindético en x respecto a y, se definirá lo que es el conjunto L_y^x, que es un subconjunto de L_y, el cual es una herramienta fundamental para los siguientes resultados. Se verá que L_y^x es un subcontinuo de M contenido en L_y que contiene a $\{x,y\}$ y, aún más, resulta que si para todo $z \in M$, el conjunto K_z es a lo más numerable, entonces L_y^x es localmente conexo. Este resultado únicamente se citara pues, requiere varios resultados previos que no son del objetivo de esta tesis. Recordemos que estos resultados comprenden de continuos del plano.

Definición 5.1. *Sean x y y puntos distintos en un continuo M tales que M no es aposindético en x respecto a y. Sea* $U_1, U_2, U_3, \ldots$ *una sucesión decreciente de bolas abiertas en M (es decir* $U_{n+1} \subset U_n$*, para toda* $n \in \mathbb{N}$*) con centros en y tal que* $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \{y\}$ y $x \notin U_1$. *Para todo número natural n, sea* Y_n *la x-componente de* $L_y - U_n$*. Definimos a* L_y^x *como el límite superior de* $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$*. Es decir,* $L_y^x = \text{límsup}\{Y_i\}$

Teorema 5.2. *Sea* L_y^x *como en la definición anterior, entonces:*

1) L_y^x *es un subcontinuo de* L_y *y, por lo tanto, de M (pues* L_y *es un subcontinuo de M (teorema 3.15)), que contiene a* $\{x,y\}$.

2) *Para toda* $n \in \mathbb{N}$, $Y_n \subset Y_{n+1} \subset L_y^x$.

3) *Si para todo* $z \in M$*, el conjunto* K_z *es a lo más numerable, entonces* L_y^x *es localmente conexo.*

4) *Si para todo* $z \in M$*, el conjunto* K_z *es a lo más numerable y* $p \in L_y^x$*, entonces* $L_y^x = L_y^p$.

5) *Si para todo* $z \in M$*, el conjunto* K_z *es a lo más numerable, entonces y no separa a* L_y^x.

Prueba. 1) Por el teorema 3.15, L_y es un conjunto cerrado, entonces la *x-componente* de $L_y - U_n$ es un conjunto cerrado. De aquí que Y_n sea un subcontinuo de M para toda $n \in \mathbb{N}$.

Entonces por el teorema 2.14, se sigue que L_y^x es cerrado. Luego, como $x \in \text{líminf}\{Y_i\}$, por el teorema 2.16, se tiene que L_y^x es conexo y, como el subcontinuo Y_n intersecta a $Fr(U_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se obtiene que L_y^x es un subcontinuo de L_y (y, por lo tanto, de M), que contiene a $\{x,y\}$.

2) Como $U_{n+1} \subset U_n$, es claro que $L_y - U_n \subset L_y - U_{n+1}$, de aquí que $Y_n \subset Y_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $L_y^x = \text{límsup}\, Y_n$. Se tiene que $Y_n \subset L_y^x$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

3) Ver [1, Teorema 8, pág 396].

4) La demostración es análoga al teorema 4.4, inciso 4). Sea $\{U_n\}$ una sucesión decreciente de bolas abiertas en M con centros en y tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{y\}$. Sea Y_n^w la

w-componente de $L_y - U_n$, para cualquier $w \in L_y^x$ (con w distinto de y).

Sea $p \in L_y^x$, (con p distinto de x y y). Tomemos un conjunto abierto W en M que contenga a p, tal que $y \notin W$. Es posible encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $W \cap U_m = \emptyset$. Entonces $W \cap U_n = \emptyset$ para toda $n \geq m$.

Como L_y^x es un continuo localmente conexo (inciso 3)) y $W \cap L_y^x$ es un conjunto abierto de L_y^x que contiene a p, existe un conjunto abierto W' en M tal que $W' \cap L_y^x$ es un conjunto abierto en L_y^x, conexo, tal que $p \in W' \cap L_y^x \subset W \cap L_y^x$. Sea $W'' = W' \cap L_y^x$. Note $W'' \cap U_n = \emptyset$ para toda $n \geq m$.

Por otro lado, como $p \in L_y^x$, se tiene que $p \in \text{límsup}\, Y_n^x$. Entonces, por la definición del conjunto $\text{límsup}\, Y_n^x$, se tiene que $W' \cap Y_i^x \neq \emptyset$ para toda una infinidad de $i \in \mathbb{N}$. Es decir, existe una subsucesión $\{Y_{n_i}^x\}$ de Y_n^x tal que $W' \cap Y_{n_i}^x \neq \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Como $Y_{n_i}^x \subset L_y^x$ (inciso 2)), se tiene que $(W' \cap L_y^x) \cap Y_{n_i}^x = W' \cap Y_{n_i}^x \neq \emptyset$. Entonces tenemos que $W'' \cap Y_{n_i}^x \neq \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $p \notin Y_n^x$.

Sea $n_i \geq m$. Como $Y_{n_i}^x \cap W'' \neq \emptyset$, se tiene que $Y_{n_i}^x \cup W''$ es un conexo que contiene propiamente a $Y_{n_i}^x$ (pues $p \in W''$ y $p \notin Y_n^x$). Afirmamos que $Y_{n_i}^x \cup W'' \subset L_y - U_{n_i}$. Pero esto es inmediato pues, por definición, $Y_{n_i}^x \subset L_y - U_{n_i}$. Además, como $W'' \subset L_y^x \subset L_y$ y $W'' \cap U_n = \emptyset$ para toda $n \geq m$ y $n_i \geq m$, se tiene que $W'' \subset L_y - U_{n_i}$. Entonces $Y_{n_i}^x \cup W'' \subset L_y - U_{n_i}$, lo cual es una contradicción pues $Y_{n_i}^x$ es la *x-componente* de $L_y - U_{n_i}$.

De aquí que se tenga que existe un número natural N tal que $p \in Y_N^x$. Luego, se tiene que $Y_N^x = Y_N^p$ (teorema 1.25, inciso 2)). Se sigue que $p \in Y_n^x$ para toda $n \geq N$ (inciso 2)). Entonces $Y_n^x = Y_n^p$ para toda $n \geq N$ y, por lo tanto, $\text{límsup}\, Y_n^x = \text{límsup}\, Y_n^p$, lo que nos dice que $L_y^x = L_y^p$.

5) Note que en la demostración del teorema 4.4, inciso 5), cuando se demuestra que y no separa a L_{yz}^x, el punto z no juega ningún papel importante. Por ello, la demostración es análoga al teorema 4.4, inciso 5), cambiando L_{yz}^x por L_y^x.

Supongamos que y separa a L_y^x. Sea $\{V_n\}$ una sucesión decreciente de bolas abiertas en M con centros en y tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{y\}$. Como y separa al continuo L_y^x, entonces $L_{yz}^x - \{y\} = A \cup B$, con A y B conjuntos abiertos en $L_{yz}^x - \{y\}$, ajenos y distintos del vacío.

Se afirma que existe un número natural N tal que ni A ni B están contenidos en V_N, esto, pues si $A \subset V_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por la construcción de $\{V_n\}$ se tendría que $A \subset \{y\}$ y como $y \notin A$, se tendría que $A = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Entonces existe un número natural N_A tal que A no está contenida en V_{N_A}. Como $V_{n+1} \subset V_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que A no está contenida en V_n para toda $n \geq N_A$. Análogamente existe un número natural N_B tal que B no está contenido en V_n para toda $n \geq N_B$. Ahora, si tomamos $N = máx\{N_A, N_B\}$, entonces ni A ni B están contenidos en V_n, para toda $n \geq N$.

Luego, si $n \geq N$, se tiene que V_n separa a L_y^x, esto pues, de lo contrario, existiría un conexo $K \subset L_y^x$ tal que $K \cap A \neq \emptyset$, $K \cap B \neq \emptyset$, y $K \cap V_n = \emptyset$. Como $y \in V_n$ se tendría que $K \cap \{y\} = \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $\{y\}$ separa a L_y^x en A y B.

Entonces, para toda $n \geq N$, se tiene que V_n separa a L_y^x, y se puede separar a $L_y^x - V_n$ en A^n y B^n, conjuntos cerrados ajenos distintos del vacío, de tal manera que $A^n \subset A$ y $B^n \subset B$ para toda $n \geq N$ (esto es posible para toda $n \geq N$, ni A ni B están contenidos en V_n).

Ahora, si $w_1 \in A - V_N$ y $w_2 \in B - V_N$, se tiene que $w_1 \in A - V_n$ y $w_2 \in B - V_n$ para toda $n \geq N$. Como $w_1 \in L_y^x$, por el inciso 4), se tiene que $L_y^x = L_y^{w_1}$. Por lo tanto $w_2 \notin w_1$*-componente* de $L_y^{w_1} - V_n$, para toda $n \geq N$.

Para cualquier $p \in L_y^x$, distinto de y, sea Y_n^p la *p-componente* de $L_y - V_n$.

Por lo tanto, $Y_n^{w_1} \subset Y_{n+1}^{w_1} \subset L_{yz}^{w_1} - V_n \subset L_y^{w_1}$ para todo número natural n. Entonces, como $Y_n^{w_1} \subset L_y^{w_1} - V_n$, se sigue que la w_1*-componente* de $L_y - V_n = w_1$*-componente* de $L_y^{w_1} - V_n$ (teorema 1.25, inciso 3)), es decir, $Y_n^{w_1} = w_1$*-componente* de $L_y^{w_1} - (V_n \cup U_n)$. Luego, como $w_2 \notin w_1$*-componente* de $L_y^{w_1} - V_n$ para toda $n \geq N$, se llega a que $w_2 \notin Y_n^{w_1}$ para toda $n \geq N$, es decir, se llega a que $w_2 \notin L_y^{w_1}$.

Como $L_y^{w_1} = L_y^x$, se tendría que $w_2 \notin L_y^x$, lo cual es una contradicción, pues $w_2 \in B \subset L_y^x$. La contradicción se dio al suponer que y separaba a L_y^x. De aquí que y no separa a L_y^x. ■

2. Arcos en continuos planos y no aposindéticos.

Lema 5.3. *Si M es un continuo semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un* *número finito, entonces para toda $x \in M$, el conjunto K_x es finito.*

Prueba. Sea $\{y_1,\ldots,y_n\} \subset M$ el conjunto de puntos en los que M no es semilocalmente conexo. Sea $x \in M$, aseguramos que $K_x \subset \{y_1,\ldots,y_n\} \cup \{x\}$. Supongamos que esto no ocurre, entonces existe $z \in K_x - (\{y_1,\ldots,y_n\} \cup \{x\})$. Por definición, M no es aposindético en x respecto a z y $z \notin \{y_1,\ldots,y_n\}$. Así que M es semilocalmente conexo en z y, por el teorema 3.19, M es aposindético en x respecto a z lo cual es una contradicción. Hemos probado entonces que $K_x \subset \{y_1,\ldots,y_n\} \cup \{x\}$ y, por lo tanto K_x es finito. ■

A continuación se dará una condición para que un continuo no aposindético del plano sea arcoconexo.

Teorema 5.4. *Sea M un continuo semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número finito y supongamos que para todo $x \in M$, M no es aposindético en x o M no es semilocalmente conexo en x, entonces M es arcoconexo.*

Prueba. Sea $\{y_1,\ldots,y_n\} \subset M$ el conjunto de puntos en los cuales M no es semilocalmente conexo. Para cada $x \in M - \{y_1,\ldots,y_n\}$, se tiene que M es semilocalmente conexo en x y M no es aposindético en x respecto a algún $z \in M - \{x\}$. Se sigue por el teorema 3.19, que M no es semilocalmente conexo en z.

Luego, $z \in \{y_1,\ldots,y_n\}$. Por lo tanto, $z = y_i$ para alguna $1 \leq i \leq n$. Entonces $x \in L_{y_i}$, de aquí que se tenga que, para toda $x \in M - \{y_1,\ldots,y_n\}$, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} L_{y_i}$, lo cual, implica que

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} L_{y_i}.$$

Como M es conexo, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} L_{y_i}$ es conexo.

Primero se demostrará que para cada i, L_{y_i} es arcoconexo, pero basta con demostrar que $L_{y_i}^x$ es arcoconexo para toda $x \in L_{y_i}$, pues $L_{y_i} = \bigcup_{x \in L_{y_i}} L_{y_i}^x$ y, para toda $x \in L_{y_i}$, se tiene que $L_{y_i}^x$ contiene al punto y_i.

Por el lema 5.3, se tiene que para toda $z \in M$, el conjunto K_z es finito. Se sigue que $L_{y_i}^x$ es un continuo localmente conexo (teorema 5.2, inciso 3) y, por lo tanto, arcoconexo.

Si $n > 1$ y L_{y_1} no intersecta a ningún otro L_{y_i}, entonces $M = L_{y_1} \cup (L_{y_2} \cup \ldots \cup L_{y_n})$ es una separación de M lo cual es una contradicción pues M es conexo. Entonces, se puede suponer que $L_{y_1} \cap L_{y_2} \neq \emptyset$. Similarmente, podemos suponer que $(L_{y_1} \cup L_{y_2}) \cap L_{y_3} \neq \emptyset$. Entonces $L_{y_1} \cup L_{y_2}$ es arcoconexo y $L_{y_1} \cup L_{y_2} \cup L_{y_3}$ es arcoconexo. Procediendo de esta manera, se puede concluir que $L_{y_1} \cup L_{y_2} \cup \ldots \cup L_{y_n} = M$ es arcoconexo. ■

Definición 5.5. *Decimos que un continuo M es **totalmente no aposindético** si M no es aposindético en ninguno de sus puntos.*

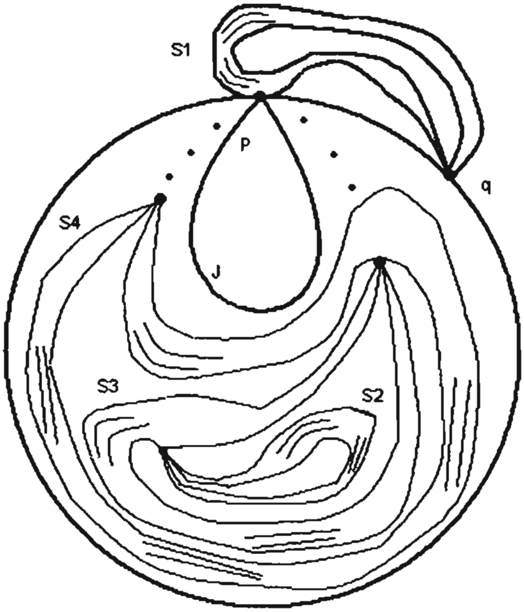
Note que el decir que M sea totalmente no aposindético es equivalente a decir que para toda $p \in M$, existe un punto $q \in M - \{p\}$ tal que M es no aposindético en p respecto de q.

El teorema 5.4, da como corolario lo siguiente.

Corolario 5.6. *Sea M un continuo totalmente no aposindético y semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número finito, entonces M es arcoconexo.*

Si se cambia la palabra finito por numerable, entonces el corolario falla como se aprecia a continuación:

Ejemplo 5.7. *Existe un continuo M totalmente no aposindético tal que M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número numerable y M no es arcoconexo.*
Para ver esto, considere un continuo M en el plano que consista de dos circunferencias L y J unidas por un punto p y una sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots$ de continuos como en el ejemplo 3.10 (al punto $(\frac{1}{2}, 1)$ del ejemplo 3.10, se le llamará su vértice), tal que $S_1 \cap L = \{p, q\}$ (donde q es el vértice de S_1) y, si para cada cada $i \in \mathbb{N}$, s_i es el vértice de S_i (con $s_i \neq s_j$, *si $i \neq j$*), *entonces $S_i \cap S_{i+1} = \{s_i\}$ y $S_i \cap S_j = \emptyset$, para toda $i \geq 2$ con $j \notin \{i-1, i+1\}$. También $\{s_n\}$ converge al punto p alternando sus puntos y $\{S_n\}$ tiende a L y a J, como lo muestra el dibujo.*



Afirmamos que M es totalmente no aposindético. Para esto, se tiene que verificar que para toda $x \in M$, M no es aposindético en x. Entonces:

1) Si $x \in L - \{p\}$, M no es aposindético en x respecto p (note que esto incluye al punto q, pues $q \in L$).

2) Si $x \in S_i - \{s_i\}$, para cualquier $i \in \mathbb{N}$, se tiene que M no es aposindético en x respecto s_i (note que esto incluye al punto p, pues, como $s_1 = q$, $p \in S_1 - \{q\}$).

3) Si $x = s_i$, para algún $i > 1$, como $s_i \in S_{i+1} - \{s_{i+1}\}$, por 2), se tiene que M no es aposindético en x respecto s_{i+1}.

4) Si $x \in J - \{p\}$, M no es aposindético en x respecto p. Entonces M es totalmente no aposindético.

Afirmamos que M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en el punto p y en todos los puntos $s_1, s_2, s_3, \ldots$ Es claro que para toda $i \in \mathbb{N}$, M no es semilocalmente conexo en s_i. M no es semilocalmente conexo en p, pues si U es un conjunto abierto de M que contiene a p, tal que para alguna $N \in \mathbb{N}$, $S_n - U \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$ y tomamos cualquier conjunto abierto V de M tal que $p \in V \subset U$, podemos tomar a $s_i \in V$ tal que $i \geq N$. Como $S_i - V \neq \emptyset$, no es difícil convencerse de que $M - V$ tiene un número infinito de componentes, es decir, que M no es semilocalmente conexo en p. No es difícil convencerse de que si $x \in M - \{p, s_1, s_2, s_3, \ldots\}$, M es semilocalmente conexo en x.

Para toda $n > 1$, se tiene que $S_n \cap (L \cup J \cup S_1) = \emptyset$, por ello, se tiene que M no es arcoconexo.

Note que para todo punto $x \in M$, el conjunto K_x consiste sólo de dos puntos. Estos son:

1) Si $x \in S_i - \{s_i\}$, entonces $K_x = \{x, s_i\}$.

2) Si $x \in L \cup J - \{p\}$, entonces $K_x = \{x, p\}$

Note que estos dos casos abarcan todos los puntos de M, por ello, para todo punto $x \in M$, el conjunto K_x consiste sólo de dos puntos.

3. Curvas cerradas simples en continuos planos y no aposindéticos.

El siguiente resultado dice que si M es un continuo tal que para toda $x \in M$, el conjunto K_x es finito y para toda $x \in M$ se tiene que M no es semilocalmente conexo en x o M no es aposindético en x, entonces todo punto en M está en una curva cerrada simple contenida en M. Para ello, se necesita probar lo siguiente:

Teorema 5.8. *Supongamos que x y $y \in M$ y M no es aposindético en x respecto a y. Entonces, si el punto $q \in L_y^x - \{y, x\}$ separa débilmente a x y y en L_y^x, entonces M no es aposindético en x respecto a q.*

Prueba. Sea $q \in L_y^x - \{x, y\}$ tal que q separa débilmente a x y y en L_y^x. Supongamos que M es aposindético en x respecto a q. Entonces existe un subcontinuo H de $M - \{q\}$ tal que $x \in intH$.

Se afirma lo siguiente:

1) *$H \cap L_y$ no contiene subcontinuos que intersecten a x y a y.*

Para demostrar esto, supongamos que existe un subcontinuo L de $H \cap L_y$ tal que $x, y \in L$. Entonces por el teorema 2.23, existe un subcontinuo I de L que contiene a x y a y tal que es irreducible de x a y.

Primero se demostrará que $I \subset L_y^x$. Para esto, consideremos los siguientes conjuntos:

$$J = \{w \in I \mid I \text{ es irreducible de } x \text{ a } w\}$$

y

$$I - J = \{w \in I \mid \text{ existe un subcontinuo propio } S \text{ de } I \text{ con } x, w \in S\}.$$

Observe que $I - J$ es precisamente la composante de x en I. Entonces por el teorema 2.21, se sabe que las composantes son densas, es decir, que $\overline{I - J} = I$. Como L_y^x es un continuo, se tiene que, en particular es un conjunto cerrado, por lo tanto, basta demostrar que $I - J \subset L_y^x$, pues se tendría que $I = \overline{I - J} \subset \overline{L_y^x} = L_y^x$ que es lo que se quiere demostrar.

Sea entonces $w \in I - J$, se quiere llegar a que $w \in L_y^x$. Como $w \in I - J$, existe un subcontinuo propio S de I con x y $w \in S$. Note que $y \notin S$, pues I es irreducible de x a y. Como M es un espacio métrico, se tiene que M es normal, por lo tanto, existe un conjunto abierto U que contiene a y, tal que $U \cap S = \emptyset$.

Sea $\{U_n\}$ una sucesión decreciente de bolas abiertas con centros en y tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{y\}$. Entonces existe un número natural N tal que $U_N \subset U$, luego es claro que $w \notin U_N$ y, más aún, $w \in$ *x-componente* de $L_y - U_N$ (pues $w \in S$ y $S \cap U_N = \emptyset$). Por lo tanto, $w \in L_y^x$ (teorema 5.2, 2)). Entonces $I - J \subset L_y^x$ que era lo que se necesitaba para demostrar que $I \subset L_y^x$.

Ahora, como q separa débilmente a x y y en L_y^x. Entonces, como I es un subcontinuo de L_y^x, se tiene que $q \in I$, pero $I \subset L \subset H \cap L_y$. De aquí que $q \in H$, lo cual es una contradicción. Entonces $H \cap L_y$ no contiene subcontinuos que intersecten a x y a y, por lo que queda demostrado 1).

Por lo tanto, $H \cap L_y = A \cup B$, donde A y B son conjuntos cerrados, ajenos, distintos del vacío, con $x \in A$ y $y \in B$, [6, teorema 5.2, pág. 72]. Sean U y V dos conjuntos abiertos en H con cerraduras disjuntas, distintos del vacío, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Observe que $H - (U \cup V)$ es cerrado en H y, como H es cerrado, $H - (U \cup V)$ es cerrado en M. Se sigue del teorema 1.37, que $H - (U \cup V)$ es compacto.

Se afirma lo siguiente:

2) *Existe una cubierta finita de continuos de $M - \{y\}$ que cubre a $H - (U \cup V)$.*

Sea $p \in H - (U \cup V)$, entonces $p \notin L_y$. Es decir, M es aposindético en p respecto a y. Por lo tanto, existe un conjunto abierto V_p en M, que contiene a p y un continuo H_p tal que $V_p \subset H_p$ y $y \notin H_p$. Luego $\bigcup_{p \in H-(U \cup V)} V_p$ es una cubierta abierta de $H - (U \cup V)$ el cual es compacto. Por lo tanto, existe una subcubierta finita $\{V_{p_1}, \ldots, V_{p_n}\}$ de $H - (U \cup V)$. De aquí se tenga una colección finita de continuos $\{H_{p_1}, \ldots, H_{p_n}\}$ en $M - \{y\}$ que cubren a $H - (U \cup V)$, por lo que queda demostrado 2)

Para obtener una contradicción, se demostrará lo siguiente.

3) *M es aposindético en x respecto a y.*

Se encontrará un continuo X de M de tal manera que $x \in intX$ y $y \notin X$. Denotemos por $\overline{U}^H$ y por $Fr_H(U)$ a la cerradura y a la frontera de U con respecto al continuo H, respectivamente.

Por el teorema 2.9, si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Fr_H(U) \neq \emptyset$, ya que $\overline{U}^H = \overline{U}$. Se afirma que $\overline{U} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i})$ tiene un número finito de componentes. Esto pues, $Fr_H(U) \subset H - (U \cup V)$, ya que, como $\overline{U} \subset \overline{H} = H$, se tiene que $Fr_H(U) \subset H$, luego, como $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, se tiene que $Fr_H(U) \cap V = \emptyset$, además, $Fr_H(U) \cap U = \emptyset$.

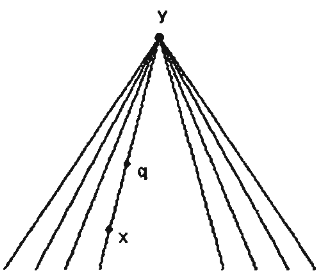
Luego, no importa cuántas componentes tenga $\overline{U}$, todas intersectan a $Fr_H(U)$, es decir, todas intersectan a $\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i}$ (pues $H - (U \cup V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i}$) y, como $\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i}$ tiene un número finito de componentes, se tiene que $\overline{U} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i})$ tiene un número finito de componentes y ninguna componente tiene a y, pues $y \in B$ y $B \cap \overline{U} = \emptyset$. Además, para toda i, se tiene que $y \notin H_{p_i}$.

Como $x \in U$, el cual es un conjunto abierto de H, se tiene que $U = U' \cap H$, donde U' es un conjunto abierto de M. Entonces $U' \cap intH$ es un conjunto abierto de M que contiene a x tal que $U' \cap intH \subset U$, es decir, $x \in intU \subset \overline{U} \subset \overline{U} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i})$. Sea X la *x-componente* de $\overline{U} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i})$. X es un subcontinuo de M (X es conexo por ser componente y cerrado pues $\overline{U} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} H_{p_i})$ es cerrado) que no tiene a y y, por el teorema 1.26, $x \in intX$. Se sigue que M es aposindético en x respecto a y, lo cual es una contradicción.

Entonces, M no es aposindético en x respecto a q, que era lo que se quería demostrar. ■

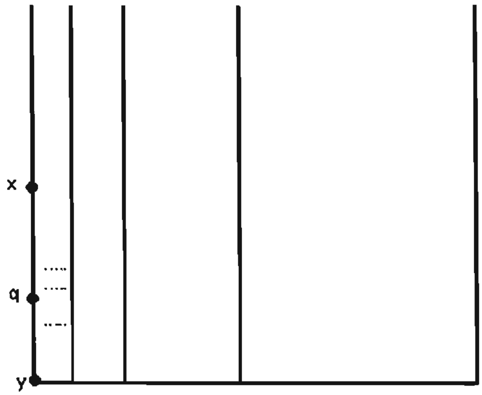
Los siguientes ejemplos, ilustran las ideas del teorema que se acaba de demostrar:

Ejemplo 5.9. *Sea M como en el ejemplo 2.6. Sean* $y = (\frac{1}{2}, 1)$ y x *cualquier punto en* $M - \{y\}$.



Entonces M no es aposindético en x respecto a y. Note que L_y es el continuo M y L_y^x es todo el segmento de recta que parte del punto y y pasa por el punto x. Observe que si un punto q separa débilmente a x y y en L_y^x, entonces M no es aposindético en x respecto a q.

Ejemplo 5.10. *Sea M como en el ejemplo 2.8. Sean $y = (0,0)$ y x un punto distinto de y en el segmento de recta que empieza en y y termina en el punto $(0,1)$.*



Entonces M no es aposindético en x respecto a y. Note que L_y es igual a L_y^x, que es el segmento de recta que une el punto y con el punto $(0,1)$. Observe que si q separa débilmente a x y y en L_y^x, entonces M no es aposindético en x respecto a q.

Observe que el hecho de que M no sea aposindético en x respecto a q, nos dice que $q \in K_x$. Es decir, los puntos que separan débilmente a x y y en L_y^x, están contenidos en el conjunto K_x.

Teorema 5.11. *Sea M un continuo tal que para toda $x \in M$, el conjunto K_x es finito y para toda $x \in M$ se tiene que M no es semilocalmente conexo en x o M no es aposindético en x. Entonces todo punto en M está en una curva cerrada simple contenida en M.*

Prueba. Sea $p \in M$. Se demostrará que p está en una curva cerrada simple. Como M no es semilocalmente conexo en p o M no es aposindético en p, se tienen dos casos.

Caso 1. Si M no es semilocalmente conexo en p, por el teorema 3.20, se tiene que existe un punto $x \in M - \{p\}$ tal que M no es aposindético en x respecto a p. El conjunto L_p^x es un continuo localmente conexo (teorema 5.2, inciso 3) y, por lo tanto, arcoconexo [6, Teorema 8.23, pág. 130].

Por el teorema 5.8, si $q \in L_p^x$ es un punto que separa débilmente a x y p en L_p^x, entonces

M no es aposindético en x respecto a q, es decir, $q \in K_x$.

Note que, como L_p^x es un continuo localmente conexo, los puntos de separación y de separación débil coinciden (teorema 2.30). Como K_x es finito, podemos escribir $\{q \in L_p^x \mid q \text{ separa a } x \text{ y } p \text{ en } L_p^x\} = \{q_1,\ldots,q_n\}$, cuando este conjunto no es vacío.

Si $A \subset L_p^x$, denotamos como $\overline{A}$ a la cerradura de A en L_p^x.

Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, se tiene que q_i separa a x y p en L_p^x. Entonces $L_p^x - \{q_i\} = A_i \cup B_i$, donde A_i y B_i son conjuntos distintos del vacío, tales que $x \in A_i$, $p \in B_i$, $\overline{A_i} \cap B_i = \emptyset$ y $A_i \cap \overline{B_i} = \emptyset$. Por el teorema 2.25, sabemos que $\overline{A_i} = A_i \cup \{q_i\}$ y $\overline{B_i} = B_i \cup \{q_i\}$, son subcontinuos de L_p^x.

Si $\{q_2,\ldots,q_n\} \cap B_1 \neq \emptyset$, podemos suponer que $q_2 \in B_1$. Entonces q_2 separa a x y p en L_p^x, y los separa en los conjuntos A_2 y B_2 descritos anteriormente. Como $\overline{A_1}$ es conexo en $L_p^x - \{q_2\}$ y $x \in \overline{A_1}$, se tiene que $\overline{A_1} \subset A_2$, es decir, que $q_1 \in A_2$. Si $\{q_3,\ldots,q_n\} \cap B_2 \neq \emptyset$ se realiza el mismo procedimiento, es decir, podemos suponer que $q_3 \in B_2$. Como $\overline{A_2}$ es conexo en $L_p^x - \{q_3\}$ y $x \in \overline{A_2}$, se tiene que $\overline{A_2} \subset A_3$, es decir, que $\{q_1,q_2\} \in A_3$. Como existe un número finito de puntos que separan a x y p en L_p^x, existe $m \in \mathbb{N}$ (con $m \leq n$), tal que $\{q_1,\ldots,q_n\} \cap B_m = \emptyset$. Luego, ningún punto en B_m separa a x y p en L_p^x, y más aún, ningún punto en B_m separa a q_m y p en $\overline{B_m}$. Para ver esto, tomemos un punto $y \in B_m$ y supóngase que y separa a q_m y p en $\overline{B_m}$. Entonces, $\overline{B_m} - \{y\} = U \cup V$, donde U y V son conjuntos distintos del vacío, tales que $q_m \in U$, $p \in V$, $\overline{U} \cap V = \emptyset$ y $U \cap \overline{V} = \emptyset$. No es difícil convencerse de que $\overline{A_m} \cup U$ y V, forman una separación en L_p^x, lo que nos dice que y separa a x y p en L_p^x, lo cual es una contradicción. De aquí que ningún punto en $\overline{B_m}$ separa a q_m y p en $\overline{B_m}$.

Por el teorema 2.26, se tiene que $\overline{B_m}$ es un continuo localmente conexo. Entonces $\overline{B_m}$ es un continuo localmente conexo tal que ningún punto separa a q_m y p en $\overline{B_m}$. Se sigue que q_m y p está en una curva cerrada simple (lema 2.34).

Caso 2. Si M no es aposindético en p, M no es aposindético en p respecto a algún punto $x \in M - \{p\}$. Luego, L_x^p es un continuo localmente conexo (teorema 5.2, inciso 3) y, por lo tanto, arcoconexo [6, Teorema 8.23, pág 130]. Como K_p es un conjunto finito, podemos escribir $\{q \in L_x^p \mid q \text{ separa a } x \text{ y } p \text{ en } L_x^p\} = \{q_1,\ldots,q_n\}$, cuando este conjunto no es vacío. Análogamente como en el caso 1, se encuentra una curva cerrada simple que contiene al punto p. ■

Cabe recordar que si M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número finito, entonces para toda $x \in M$, el conjunto K_x es finito. Por lo tanto, el teorema 5.11, nos da el siguiente resultado como corolario.

Corolario 5.12. *Si M es un continuo totalmente no aposindético tal que M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número finito, entonces todo punto en M está en una curva cerrada simple contenida en M.*

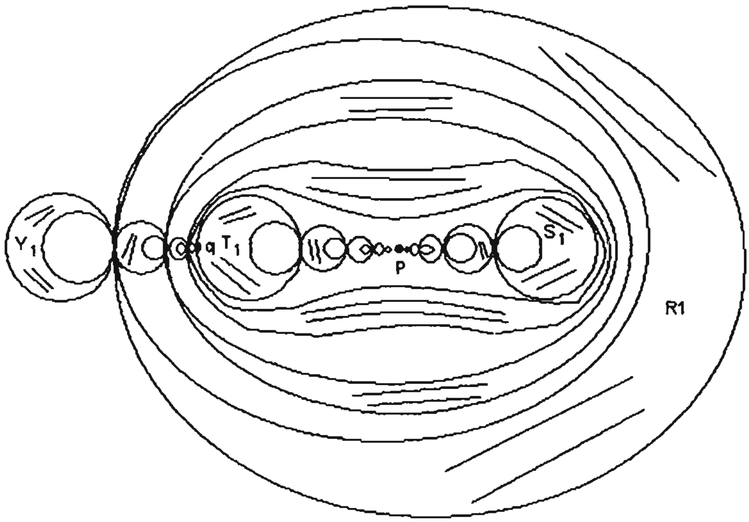
Ejemplo 5.13. *Existe un continuo M totalmente no aposindético tal que M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número numerable y no todo punto en M está en una curva cerrada simple contenida en M.*

Para ver esto, considere un continuo M en el plano que consista de cuatro sucesiones de continuos $R_1, R_2, R_3, \ldots$, $S_1, S_2, S_3, \ldots$, $T_1, T_2, T_3, \ldots$, y $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$, como en el ejemplo 3.10 (al punto $(\frac{1}{2}, 1)$ del ejemplo 3.10 le llamaremos su vértice), y un punto p tales que:

1) $S_1, S_2, S_3, \ldots$ y $T_1, T_2, T_3, \ldots$ convergen al punto p.

2) Para todo número natural i, R_i y Y_i tienen el mismo vértice y sus vértices convergen a un punto $q \in T_1$ como se muestra a continuación.

3) La sucesión $R_1, R_2, R_3, \ldots$ va rodeando a $\bigcup_{i=1}^{\infty}(S_i \cup T_i)$ y convergiendo a un subconjunto de $\bigcup_{i=1}^{\infty}(S_i \cup T_i)$ como se muestra a continuación.



Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean r_i el vértice de R_i, s_i el vértice de S_i, t_i el vértice de T_i y y_i el vértice de Y_i (entonces $r_i = y_i$).

Afirmamos que M es totalmente no aposindético. Para esto, se tiene que verificar que para toda $x \in M$, M no es aposindético en x.

1) Si $x \in R_i - \{r_i\}$ para alguna $i \in \mathbb{N}$, es claro que M no es aposindético en x respecto a r_i. Análogamente, si x está en $S_i - \{s_i\}$ o en $T_i - \{t_i\}$ o en $Y_i - \{y_i\}$.

2) Si para alguna $i \in \mathbb{N}$, $x = s_i$, entonces $x \in S_{i+1} - \{s_{i+1}\}$, que por 1), se tiene que M no es aposindético en x respecto a s_{i+1}. Análogamente, si $x = t_i$ o $x = y_i$.

3) Si $x = p$, entonces M no es aposindético en x respecto a q.

Entonces M es totalmente no aposindético.

No es difícil convencerse de que los únicos puntos en donde M no es semilocalmente conexo, es en los vértices. Es decir, M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en una cantidad numerable. Pero el punto p no está en ninguna curva cerrada simple contenida en M.

En resumen, lo que se tiene es que si tenemos un continuo M totalmente no aposindético tal que M es semilocalmente conexo en todos sus puntos excepto en un número finito, entonces M es arcoconexo y todo punto en M está en una curva cerrada simple contenida en

M. Finalizamos con el siguiente resultado.

Teorema 5.14. *Sean M un continuo* y *$y \in M$ tales que para toda $x \in M - \{y\}$, M es semilocalmente conexo en x* y *M no es aposindético en x respecto a y. Entonces si p* y *$q \in M$ son puntos distintos tales que ningún punto separa débilmente a p y q* en *M, entonces existe una curva cerrada simple en M que contiene a p* y *a q*

Prueba. Sean p y q puntos distintos en M tales que ningún punto separa débilmente a p y q en M. Supóngase por el momento que $p \neq y$. Como

$L_y = \{x \in M \mid M \text{ no es aposindético en } x \text{ respecto a } y\} \cup \{y\}$,

por hipótesis se tiene que $L_y = M$.

Se verá que $q \in L_y^p$. Como, por hipótesis, ningún punto separa débilmente a p y q en M, en particular y no los separa débilmente. Entonces tenemos que existe un continuo H de M tal que q y $p \in H$ y $y \notin H$. Sea $\{V_n\}$ una sucesión decreciente de bolas abiertas en M con centros en y tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{y\}$. Entonces existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $H \cap V_n = \emptyset$ (si no existiera tal N, se tendría que $y \in \overline{H}$ y, como H es cerrado, y estaría en H, lo cual sería una contradicción). De aquí que, como $L_y = M$ y $H \cap V_n = \emptyset$ para toda $n \geq N$, se tiene que $q \in$ *p-componente* de Y_n, para toda $n \geq N$ (donde $Y_n = L_y - V_n$), es decir, se tiene que $q \in L_y^p$.

Se demostrará que ningún punto en L_y^p es punto de separación, para así, asegurar que L_y^p es cíclicamente conexo (lema 2.33). Pero para esto, hace falta demostrar que L_y^p es localmente conexo. Entonces basta ver que para toda $z \in M$, K_z es un conjunto a lo más numerable (teorema 5.2, inciso 3).

Recordemos que, para cualquier $z \in M$, se tiene que

$$K_z = \{w \in M \mid M \text{ no es aposindético en } z \text{ respecto a } w\} \cup \{z\}.$$

Sea entonces $z \in M$. Si $z = y$, se tendría que $K_y = \{y\}$, pues, si existiera algún punto $w \in K_z$ distinto de y, se tendría que M no es aposindético en y respecto a w y, por el teorema 3.19, se tendría que M no es semilocalmente conexo en w, lo cual contradice la hipótesis del teorema.

Si $z \neq y$, se tendría que $K_z = \{z,y\}$, esto pues, de la misma manera, si existiera otro punto $w \in K_z$ distinto de z y de y, se llegaría a que M no es semilocalmente conexo en w, lo cual sería imposible. Por lo tanto, para toda $z \in M$, K_z es a lo más numerable.

Supongamos que existe un punto $z \in L_y^p - \{y\}$, tal que z separa a L_y^p, entonces $L_y^p - \{z\} = A \cup B$ donde A y B son conjuntos cerrados en $L_y^p - \{z\}$, ajenos y distintos del vacío, no necesariamente conexos, (se quiere demostrar que no existen puntos de separación en L_y^p). Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $y \in A$. Como $B \neq \emptyset$, existe algún punto $b \in B$. Entonces, como z separa al continuo L_y^p, se tiene que z separa débilmente a y y b en L_y^p. También, como $b \in L_y^p$, se tiene que $L_y^p = L_y^b$ (teorema 5.2, inciso 4)). Luego, por el teorema 5.8, se tiene que M no es aposindético en b respecto a z y, por el teorema 3.19, se llega a que M no es semilocalmente conexo en z, contradiciendo así la hipotesis del teorema. Entonces, para toda $z \in L_y^p - \{y\}$, z no es punto de separación en L_y^p. Como por el teorema 5.2, inciso 5), se tiene que y no separa a L_y^p, se llega a que ningún punto en L_y^p es punto de separación y, entonces, L_y^p es cíclicamente conexo (lema 2.33). De aquí que p y q están en una curva cerrada simple.

Si $p = y$, entonces se tiene que $\{q,p\} \subset L_y^q$. Análogamente se obtiene que L_y^q es cíclicamente conexo. De aquí que p y q están en una curva cerrada simple que era lo que se quería demostrar. ■

Bibliografía

[1] C. L. Hagopian, *Concerning arcwise connectedness and the existence of simple closed curves in plane continua.* Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970), págs. 389-402.

[2] D. Hinrichsen, J. L. Fernández Muñiz, A. Fraguela Collar, A. Álvarez Prieto, *Topología General.* Publicación de la Sociedad Matemática Mexicana; col. Aportaciones Matemáticas; textos nivel medio, número 22. México, 2003.

[3] F.B. Jones, *The cyclic connectivity of plane continua.* Pacific J. Math. 2 (1961), págs. 1013-1016.

[4] K. Kuratowski, *Topology.* Vol. I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.

[5] J. R. Munkres, *Topología.* Prentice Hall, 2ª Edición. Traducido de *Topology 2nd ed.* por: Fernández Izquierdo, Ángel, *et. al.* España, Madrid, 2002.

[6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory An Introduction.* Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, Vol 158. Marcel Dekker, Inc. New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[7] E. J. Vought, *n-aposyndetic continua and cutting theorems.* Trans. Amer. Math. Soc. 140 (1969), págs. 127-135.

[8] G. T. Whyburn, *Cyclicly connected continuous curves.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 13 (1927), págs. 31-38.