



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Erdős-Szekeres para convexos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
M A T E M Á T I C O
P R E S E N T A :
ALFREDO HUBARD ESCALERA

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT



FACULTAD DE CIENCIAS
U.N.A.M.

2005



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

m.347829



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Autorizó la Universidad Nacional Autónoma de México de la UNAM a depositar en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
 NOMBRE: Alfredo Hubard Escalera
 FECHA: 14-Septiembre-2005
 FIRMA: Alfredo Hubard

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Erdős - Szekeres para convexos

realizado por Alfredo Hubard Escalera

con número de cuenta 400042273 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

- | | | |
|-------------|-------------------------------|--|
| Director | Dr. Luis Montejano Peimbert | |
| Propietario | Dr. Javier Bracho Carpizo | |
| Propietario | Dr. Jorge Luis Arocha Pérez | |
| Suplente | Dr. Francisco Marmolejo Rivas | |
| Suplente | Dr. Efrén Morales Amaya | |

Consejo Departamental de
Matemáticas



M. en C. Alejandro Bravo M.
 FACULTAD DE CIENCIAS
 CONSEJO DEPARTAMENTAL
 DE
 MATEMÁTICAS

a Victor

a los hubaresescalera

a Asrtid

Índice general

	I
Introducción	v
1. El Teorema de Ramsey	1
1.1. El principio de casillas y el teorema de Ramsey	1
1.2. Compacidad y Lógica	10
2. Convexidad Combinatoria	15
3. Erdős-Szekeres	29
3.1. Un problema combinatorio en geometría	29
3.1.1. La prueba de Szekeres.	33
3.1.2. Otras pruebas	35
3.1.3. La Prueba de Erdős.	36
3.2. Generalizaciones del Teorema de Erdős Szekeres	41
3.2.1. La versión fraccionada del Teorema de Erdős-Szekeres	41
3.2.2. Erdős-Szekeres para cuerpos convexos	43
4. Resultados y Problemas	51
4.1. Línea transversal vs. posición convexa	51
4.2. Un Teorema tipo Hadwiger	55
4.2.1. Tipos de orden.	59
4.2.2. Prueba del teorema de rotación	63
4.2.3. Más problemas	70
Apéndice: Un poco de Gráficas	75

Índice de figuras

1.1. K_6	3
2.1. Prueba de Helly.	17
2.2. Particiones de Radon en el plano.	18
2.3. Prueba de Radon.	19
2.4. Caratheodory en el plano.	19
2.5. Caratheodory coloreado.	24
2.6. La prueba de Kelly al problema de Sylvester.	25
3.1. En cinco puntos en posición general en el plano siempre hay cuatro en posición convexa.	29
3.2. Un conjunto de puntos en posición convexa	30
3.3. Un conjunto de puntos que no está en posición convexa	30
3.4. Una familia que no está en posición convexa	44
3.5. Una familia que está en posición convexa	44
3.6. Estas ternas están prohibidas	44
3.7. Tangente comun a A, B, C y a $cc < A, B, C >$	44
3.8. No es 4-Helly	45
3.9. Una 4-tapa	48
3.10. Dos convexos que se intersectan pero no se cruzan.	49
3.11. Dos convexos que se cruzan.	49
4.1. Simple (Caso 1)	56
4.2. Pez (Caso 2)	57
4.3. Circuito (Caso 3)	57
4.4. Rota como las manecillas del reloj	57
4.5. Rota contra las manecillas del reloj.	58
4.6. No rota	58
4.7. Rota hacía los dos lados	58
4.8. Tomamos la representación, utilizamos los teoremas 3.1 Erdős-Szekeres y 4.3 el teorema de rotación	62

4.9. Convexos que se cruzan	63
4.10. Convexos que se embarran y no se cruzan	63
4.11. Primer Caso	69
4.12. Segundo Caso	70
4.13. ADIOS	73

Introducción

Hace algunos años, cuando aún era estudiante de la licenciatura, meditando sobre las matemáticas, Víctor Neumann me dijo que un matemático era fundamentalmente un hacedor de espacio.

La reflexión me pareció un poco extraña y sobre todo parcial pues pensé que hablaba de espacios topológicos.

Fue algún tiempo después que me di cuenta que Víctor, como siempre, estaba pensando en algo más profundo.

Ahora a la pregunta ¿qué hacen los matemáticos?, mi respuesta siempre es la misma: La labor de un matemático es crear espacio. Es, a través del pensamiento, hacer que el mundo se vuelva más amplio y se llene de posibilidades.

Es en términos futbolísticos, “abrir la cancha”.

Luis Montejano

Hacemos matemáticas porque las encontramos emocionantes, son para algunos un juego y un misterio. Un matemático es un hacedor de espacio.

Para mí un matemático se constituye de tres personas que viven en él. Un místico, un arqueólogo y un abogado, ya juntando las tres se parece un poco a la labor de un detective, una mezcla entre el padre Brown de Chesterton y algún personaje más oscuro que se dedica a buscar lo que es evidente pero nadie ha visto, y para ello tiene que estar “fuera del mundo”, a la vez “fuera” y dentro de ese otro mundo. La investigación en matemáticas es una actividad marginal y casi célibe, casi una condena a tener una actividad obsesiva que a nadie le importa, de la que sólo los otros iniciados pueden hablar. Y entonces, ¿por qué hacer matemáticas?, porque son un juego y un misterio, y porque casi ninguna otra sensación se compara con esa de hacer espacio, porque un teorema dice algo muy particular y demostrable. La forma del discurso matemático borra al sujeto, tal vez por eso, uno siente a veces que eso que hacemos en cubículos, en bibliotecas, esta actividad cuya única evidencia es papel rayado con carbón o con tinta es como hablar con Dios.

En un matemático, habitan tres personas, místico, un arqueólogo, y un abogado. El místico tiene que ver los teoremas como se escucha una música, interpretarlos miles de veces para dejarlos que existan sin interpretación, siempre creer que ya les enten-

dió sabiendo que hay algo más profundo detrás, algo que sólo se puede mostrar en una conjetura, pero que no se puede decir exactamente como es. El místico le comunica al arqueólogo un llamado, le dice ve ahí y trae evidencias. El arqueólogo lucha contra miles de cuentas, y todo lo demás que sea necesario, regresa y le explica al místico lo tajantemente equivocado que se encontraba, discuten hasta el hartazgo, hasta que el místico lo deja descansar, entonces el místico se dedica a soñar, condenado a nunca ver con sus propios ojos suda y grita en sus sueños. Cuando el arqueólogo se levanta ve al místico ahí, dormido, y se pregunta si la situación es justa. El místico despierta con una nueva conjetura y manda de nuevo al arqueólogo, lo manda una vez más, una y otra vez hasta que aparece el abogado y les arrebató sus notas. Obviamente ambos insultan al abogado, le escupen y lo hacen su hazmerreír, lo sapean, lo denigran pisando sus libros o jugando futbol con ellos. El abogado hace como si no los escuchara y sigue revisando libros, escoge algún verso, nunca el mejor. Le pide dos o tres cosas más al arqueólogo. Mientras, él se va al tribunal y sin ritmo ni mayor interés lee el verso. El tribunal se ríe de ellos, algunos proponen cortar la cabeza del místico y encarcelar al arqueólogo, el abogado casi ni los defiende, en lugar de ello da razones para que sus muertes sean dolorosas, desvía la atención lejos del verso original, los insulta hasta el cansancio. El místico mira a los ojos al abogado, le pide clemencia, perdón. Entonces los del jurado sienten un poco de compasión de los otros dos pobres. El abogado vuelve a empezar su alegato muy lentamente, recordando términos insulsos y definiciones vernáculas. Cuando todos están muy pero muy aburridos, viene regresando el arqueólogo con lo único que hacía falta, después de presentarlas al jurado, el abogado vuelve a leer el verso. El tribunal se siente un poco apenado de haberlos querido colgar o encarcelar por un asunto pleonásmico. El místico y el arqueólogo se quedan ahí llorando, agradecidos con el abogado, que les acaba de salvar la vida. Él sale de la sala, orgulloso, sin dirigirles ni siquiera una mirada.

Hacer una tesis de licenciatura es demostrar que, en efecto, uno es letrado en el críptico lenguaje matemático. Que uno puede hacerle a la abogacía. En la presente tesis se intenta que tanto letrados como iletrados encuentren alguna parte aburrida. Los letrados pueden leer solo definición, teorema, demostración, corolario como en un texto formal, los iletrados se pueden saltar todo eso, y solo leer las digresiones.

Capítulo 1

El Teorema de Ramsey

Hay muchos teoremas en matemáticas que afirman, a grandes rasgos, que cualquier sistema de cierta clase posee un subsistema grande con un mayor grado de organización que el sistema original.

Mirski

There are two kinds of man in this world my friend, those who carry loaded guns and those who dig.

Sergio Leone

1.1. El principio de casillas y el teorema de Ramsey

El precedente fundamental del teorema de Ramsey es el principio de casillas. El principio de casillas de Dirichlet (conocido por algunos europeos como el principio de Schubfach) enuncia algo bastante sencillo que todos sabemos y aplicamos de vez en cuando; si n palomas se meten en r casillas, con $n > r$, entonces en alguna casilla hay más de una paloma.

En un grupo de más de 13 personas, siempre podemos encontrar, al menos, dos con el mismo signo zodiacal.

Con mayor generalidad; si coloreamos los elementos de un conjunto X con r colores, con $|X| = N > r(n - 1)$, entonces existe un subconjunto monocromático de, al menos, n elementos.

Definición 1.1 *Una t -coloración de un conjunto X es una función que va del conjunto X en el conjunto de los colores (azul, rojo, verde, ...)*

$$\chi : X \rightarrow [t]$$

donde $[t] = \{1, 2, 3, \dots, t\}$, t es el número de colores y a cada color le asignamos un número entre 1 y t

Decimos que x es de color azul si $\chi(x) = azul$. Una partición es exactamente lo mismo que una coloración, sólo que en lugar de pensar que x es de color azul pensamos que x pertenece a la clase azul.

Definición 1.2 Una partición de un conjunto X , es una familia de subconjuntos de X $A_\alpha \subseteq X$ $\alpha \in I$ tales que

$$A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset \text{ si } \alpha \neq \beta$$

y

$$X = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

Los subconjuntos son las clases cromáticas y eso hace análogas las definiciones.

La teoría de Ramsey es el estudio de los invariantes bajo particiones. La cita de Mirsky con la que comencé este capítulo es una buena descripción filosófica de lo que estudia la teoría de Ramsey, en el contexto de la cita, entendemos que una clase cumple una propiedad tipo Ramsey, si para cualquier partición de un sistema de la clase podemos encontrar un subsistema completamente contenido en una de las clases cromáticas.

En particular, el teorema de Ramsey es una generalización estructural del principio de casillas. En lugar de colorear los elementos de un conjunto, coloreamos las parejas de elementos, o las ternas, y sucederá algo análogo a lo que sucede en el principio de casillas.

Por gusto personal comenzaremos con la versión grafiquera (colorear las parejas) del teorema de Ramsey, la más difundida, para lo que necesitamos un par de definiciones más.

Definición 1.3 Una gráfica G es un par $G = (V, A)$ de conjuntos, al conjunto V le llamamos el conjunto de vértices y al conjunto A le llamamos conjunto de aristas.

Una arista es una pareja de vértices.

Geoméricamente podemos representar una gráfica pintando como puntos a los vértices y como segmentos o arcos de línea a las aristas. Si G es una gráfica, denotamos con $V(G)$ al conjunto de vértices de G y con $A(G)$ al conjunto de aristas de G

Definición 1.4 Decimos que H es una subgráfica de G , si H es una gráfica y tanto $V(H) \subseteq V(G)$ como $A(H) \subseteq A(G)$

Definición 1.5 Decimos que H es una subgráfica inducida de G , si H es una subgráfica de G si para todo $a \in A(G)$ si $a \subseteq V(H)$, entonces, $a \in A(H)$

Definición 1.6 Decimos que una gráfica es completa si para toda pareja de vértices $v, w \in V$, $(v, w) \in A$. Es decir, el conjunto de aristas es el conjunto de parejas de vértices. Denotamos con K_n a la gráfica completa de n vértices.

Nótese que en ese caso $|A| = \binom{n}{2}$ y que cualquier subgráfica inducida de una completa también es completa. Abusaremos de la notación, cuando hablemos del conjunto de vértices como gráfica, nos referimos a la gráfica inducida por ese conjunto de vértices.

El siguiente es un caso particular del teorema de Ramsey. *En una fiesta de seis personas siempre hay tres que se conocen mutuamente, o hay tres que no se conocen mutuamente.* Asignaremos una gráfica coloreada a la fiesta. Asignemos un vértice a cada invitado, consideremos la gráfica completa sobre los seis invitados (vértices). Suponemos un mundo donde no tengan lugar ni las frivolidades de la sociedad ni las groserías de los distraídos, de forma que si Juan conoce a Pedro entonces Pedro conoce a Juan, y eso para todos los invitados, es decir conocerse es una relación mutua.

Coloreamos de color azul a la arista entre dos invitados si se conocen, y colorearemos la arista de rojo si no se conocen.

Entonces probar la aseveración de la fiesta equivale a probar que, si coloreamos las aristas de K_6 de azul y rojo, forzosamente encontraremos un triángulo azul, o un triángulo rojo.

■

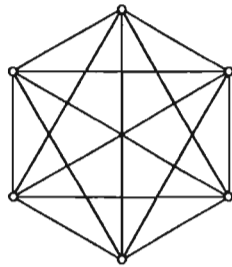
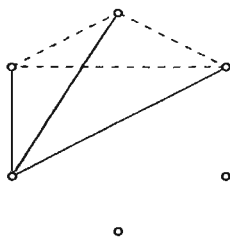


Figura 1.1: K_6

Prueba.

Supongamos que podemos encontrar una 2-coloración de la gráfica sin triángulos monocromáticos. Tomamos un vértice v y nos fijamos en todas las aristas que inciden en él, éstas son cinco aristas, por ser una gráfica completa. Por el principio de las casillas, al menos hay tres del mismo color, sin pérdida de generalidad suponemos que ese color es el rojo y que las aristas rojas son $(v, x_1), (v, x_2)$ y (v, x_3) . Si (x_1, x_2) es roja, entonces las aristas entre x_1, x_2 y v forman un triángulo monocromático, como supusimos lo contrario (x_1, x_2) es azul, y lo mismo sucede para (x_2, x_3) y para (x_3, x_1) , de manera que el triángulo generado por x_1, x_2 y x_3 sólo tiene aristas azules, pero esto es una contradicción, y con ello probamos la aseveración de la fiesta.

■



Ahora daremos el teorema de Ramsey para gráficas, comenzaremos con una prueba de la versión infinita del teorema similar a la primera que dió Ramsey en su artículo de 1930 *On a problem on formal logic* [R30]. El argumento es similar al que utilizamos en el ejemplo de la fiesta.

Teorema 1.1 (Ramsey para gráficas, versión infinita) *Cualquier gráfica infinita completa 2-coloreada contiene una subgráfica completa monocromática infinita.*

Prueba.

Tomemos x_1 cualquier vértice. Por la versión infinita del principio de casillas se cumple al menos una de dos posibilidades: en x_1 inciden una infinidad de aristas azules, o, en x_1 inciden una infinidad de aristas rojas. Si se da la primera opción, llamemos F_{x_1} al conjunto de vértices que son vecinos de x_1 vía aristas azules, y coloreamos de azul a x_1 . Si no se da la primera, llamemos F_{x_1} al conjunto de vértices que son vecinos de x_1 vía aristas rojas, y coloremos a x_1 de rojo.

F_{x_1} es una gráfica infinita 2-coloreada. Tomamos cualquier elemento de F_{x_1} y le llamamos x_2 , construimos F_{x_2} sobre F_{x_1} con los vecinos de x_2 de la misma manera que construimos F_{x_1} con los vecinos de x_1 . Coloreamos a x_2 de la misma manera que coloreamos a x_1 . Iterando este proceso una infinidad de veces, obtenemos una sucesión infinita de vértices coloreados de azul y rojo.

Finalmente aplicamos una vez más el principio de casillas, esta vez sobre la sucesión de vértices coloreados, o hay una infinidad de vértices rojos o hay una infinidad de vértices azules, supongamos sin pérdida de generalidad que son azules. Llamemos F a la gráfica completa sobre dichos vértices azules. Por construcción todas las aristas de F tienen la forma (x_i, x_j) y tienen el mismo color que x_i cuando $i < j$. Pero x_i siempre es azul, entonces todas las aristas de F son azules.

■

Para la versión finita necesitamos más definiciones.

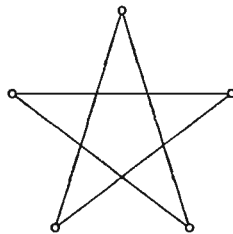
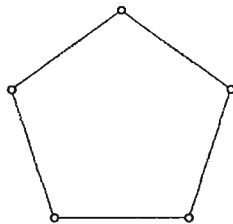
Llamaremos $R(s, t)$ al mínimo número para el cual, en cualquier 2-coloración de $K_{R(s,t)}$ podemos encontrar s vértices entre los que sólo hay aristas azules, o t vértices entre los que sólo hay aristas rojas. De manera que la versión finita del teorema de Ramsey dice:

Para cualesquiera $s, t \in \mathbb{N}$, $R(s, t)$ existe.

Por un argumento de compacidad, la versión finita se sigue de la versión infinita, pero surge el problema de determinar exactamente los valores de $R(s, t)$, los números de Ramsey, ésta es una labor mucho más complicada que demostrar su existencia.

El método clásico consiste en partir el problema en dos problemas. Por un lado, encontrar una cota superior para $R(s, t)$, es decir, mostrar que en cualquier coloración de las aristas de K_M siempre podemos encontrar una K_s del primer color o una K_t del segundo, de donde $R(s, t) \leq M$. Por otro lado encontrar una cota inferior, demostrar que existe una 2-coloración de K_{M-1} en la que no hay una K_s del primer color ni una K_t del segundo, de donde $R(s, t) > M - 1$. La prueba finitaria de la existencia de $R(s, t)$ consiste en encontrar cotas superiores generales para $R(s, t)$, desde este punto de vista una prueba finitaria de la versión finita es más fuerte que una prueba infinitaria.

Es muy fácil ver que $R(s, t) = R(t, s)$, $R(2, s) = R(s, 2) = s$. Ya vimos que $R(3) = R(3, 3) \leq 6$. Para ver que $R(3, 3) > 5$ tenemos que exponer una gráfica de cinco vértices, con la propiedad de que ni ella ni su complemento contengan un triángulo. La única gráfica con esas propiedades es el pentágono, el ciclo de cinco vértices. A partir de un



razonamiento análogo al del caso infinito se puede dar una cota superior para $R(s, t)$, de hecho, Ramsey escribió las dos pruebas (la finitaria y la infinitaria) en su artículo, sin embargo, usaremos otra técnica que da un mejor resultado. Esta prueba es bastante similar a una de las que dieron Erdős y Szekeres en 1935 en *A Combinatorial Problem in Geometry* [ErSze35], todas las mejoras al problema de encontrar cotas superiores generales a los números de Ramsey son bastante complicadas y consisten en jugar con las ideas de la siguiente prueba.

A Combinatorial Problem in Geometry [ErSze35] fue el artículo fundamental para la realización de esta tesis, recomendamos ampliamente su lectura a cualquiera que éste interesado en estos temas.

Teorema 1.2 (Ramsey finito para gráficas)

$R(s, t)$ existe para cualesquiera $s, t \in \mathbb{N}$,

Además

$$R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$$

que junto con

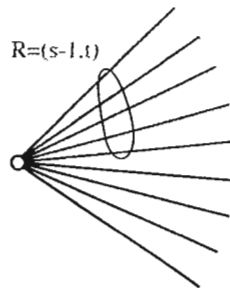
$$R(s, 2) = s$$

implica

$$R(s, t) \leq \binom{s + t - 2}{s - 1}$$

Prueba.

Se hará por inducción sobre $s + t$. Podemos suponer que tanto $R(s - 1, t)$ como $R(s, t - 1)$ existen. Tomamos cualquier 2-coloración de $K_{R(s-1,t)+R(s,t-1)}$. Sea x un vértice cualquiera. Por el principio de casillas, en x inciden al menos $R(s - 1, t)$ aristas azules (primer color) o, $R(s, t - 1)$ rojas (segundo color).



Supongamos sin pérdida de generalidad que sucede lo primero, y observemos que la gráfica de los vecinos de x por aristas azules contiene una $K_{R(s-1,t)}$ 2-coloreada. Por hipótesis de inducción ésta contiene una completa roja de t vértices o una completa azul de $s - 1$ vértices. En el primer caso no hay nada más que probar, en el segundo, por construcción podemos agregar a x y obtenemos una completa azul de s vértices.

La cota se demostrara por inducción, la base es

$$R(s, 2) = s = \binom{s + 2 - 2}{s - 1}$$

recordemos que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

junto con,

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1)$$

y la hipótesis de inducción, obtenemos

$$R(s, t) \leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}$$

■

A partir del teorema anterior es muy fácil generalizar para un número finito c de colores. Definimos $R(s_1, s_2, s_3, \dots, s_c)$ el número de Ramsey generalizado de forma que cualquier $K_{R(s_1, s_2, s_3, \dots, s_c)}$ con aristas c -coloreadas contiene K_{s_1} del primer color, o K_{s_2} del segundo color o en general, K_{s_i} del i -ésimo color.

Corolario 1.1 $R(s_1, s_2, \dots, s_c)$ existe.

Prueba.

$$R(s_1, s_2, \dots, s_c) \leq R(s_1, R(s_2, R(s_3, \dots, R(s_{c-1}, s_c) \dots))).$$

■

La siguiente generalización es igual de natural pero mucho más interesante. Con $\mathcal{P}(X)$ nos referimos al conjunto potencia de un conjunto, es decir, si X es un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de X .

Definición 1.7 Una hipergráfica G es un par $G = (V, A)$ de conjuntos, al conjunto V le llamamos el conjunto de vértices y al conjunto A le llamamos conjunto de hiperaristas. Una hiperarista es un conjunto no ordenado de vértices, es decir $A \subseteq \mathcal{P}(V)$.

Ejemplo 1 Sea $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{\{1\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{1, 3, 4\}\}$.

Definición 1.8 A una hiperarista de n vértices también le llamamos n -arista.

Definición 1.9 Una hipergráfica se llama regular cuando todas las aristas tienen el mismo número de elementos. La llamamos n -regular o n -hipergráfica cuando todas las aristas contienen exactamente n elementos.

Ejemplo 2 Una gráfica es una hipergráfica 2-regular o una 2-hipergráfica.

Definición 1.10 Llamamos a una hipergráfica k -regular completa cuando el conjunto de hiperaristas contiene a todos los subconjuntos de orden k

Nótese que la cardinalidad de las aristas de una hipergráfica k -regular completa de n vértices es $\binom{n}{k}$. Por lo que denotamos como $\binom{X}{k}$ al conjunto de todas las k -aristas sobre el conjunto X . Denotamos con $R^{(k)}(s, t)$ al mínimo número tal que, para toda 2-coloración de una k -hipergráfica completa de $R^{(k)}(s, t)$ vértices existe una k -hipergráfica completa de s vértices coloreada del primer color o una k -hipergráfica completa de t vértices coloreada del segundo. Por fin estamos listos.

Teorema 1.3 [Teorema de Ramsey, versión finita] Para toda terna s, t, k El número $R^{(k)}(s, t)$. Existe, y

$$R^{(k)}(s, t) \leq R^{(k-1)}(R^{(k)}(s-1, t), R^{(k)}(s, t-1)) + 1$$

Prueba.

La técnica es muy similar a la que usamos para gráficas. Se hará por doble inducción sobre k y sobre $s+t$. Nuestra base de inducción es el principio de casillas cuando $k=1$. Por hipótesis de inducción sobre k suponemos que $R^{(k-1)}(s, t)$ existe para todos $s, t \in \mathbb{N}$. Por otro lado, la base de inducción comienza en $s+t=2$, $R^{(k)}(s, t) = s$ si $k \leq t$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$. La hipótesis de inducción dice que para toda $k \in \mathbb{N}$, $R^{(k)}(s, t)$ existe cuando $s+t \leq n-1$. De manera que por hipótesis de inducción podemos asegurar la existencia del número de la derecha en la desigualdad. Bastará demostrar la desigualdad. Sea x cualquier vértice en la k -gráfica completa con $R^{(k-1)}(R^{(k)}(s-1, t), R^{(k)}(s, t-1))+1$ vértices. En él inciden $R^{(k-1)}(R^{(k)}(s-1, t), R^{(k)}(s, t-1))$ k -aristas. Tomemos el conjunto de todos los vértices excepto x , tomemos la $(k-1)$ -hipergráfica completa sobre ellos y coloremos a $a - \{x\}$, cualquier $(k-1)$ -arista de esa hipergráfica subyacente con el color $\chi(a)$. Ahora bien, por hipótesis de inducción y definición de $R^{(k-1)}(-, -)$ o bien hay una $(k-1)$ -gráfica completa azul (primer color) de $R^{(k)}(s-1, t)$ vértices o bien hay una $(k-1)$ -gráfica completa roja (segundo color) de $R^{(k)}(s, t-1)$ vértices. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer lo primero. Tomamos esos $R^{(k)}(s-1, t)$ vértices, les agregamos a x , llamemos V' a ese conjunto de vértices. Ahora nos fijamos en la coloración original de las k -aristas sobre V' . Por hipótesis de inducción y definición de $R^{(k)}(-, -)$, en $V' - x$ podemos encontrar una k -gráfica completa roja de t vértices, en cuyo caso no hay nada más que demostrar. O una completa azul de $s-1$ vértices, pero entonces agregamos a x y observamos que hemos construido una completa azul de s vértices. ■

De nuevo la generalización a más colores se sigue como un sencillo corolario. Definimos $R_r^k(s_1, s_2, \dots, s_r)$ como el mínimo número tal que cualquier r -coloración de la k -gráfica completa en $R_r^k(s_1, s_2, \dots, s_r)$ vértices, contiene un conjunto de s_1 vértices tales que todas las k -aristas entre ellos son del primer color, o un conjunto de s_2 vértices con la misma propiedad para el segundo color, y así para cada color.

Teorema 1.4 $R_r^k(s_1, s_2, \dots, s_r)$ Existe.

Prueba.

$$R_r^k(s_1, s_2, \dots, s_r) \leq R_r^k(R_r^k(s_1, s_2, \dots, s_{r-1}), s_r)$$

■

Este resultado implica que para cualquier r -coloración de $\binom{N}{k}$, con N infinito, existe un conjunto M arbitrariamente grande, tal que $\binom{M}{k}$ es monocromático, sin embargo, como en el caso $k = 2$ (Ramsey infinito para gráficas), podemos asegurar algo aún más fuerte, podemos asegurar que M es infinito. La prueba es casi igual a la que dimos para gráficas infinitas.

Teorema 1.5 (Teorema de Ramsey) *Cualquier hipergráfica completa infinita r -coloreada contiene una subhipergráfica completa monocromática infinita.*

Prueba.

Bastará con probar la afirmación para $r = 2$. Se hará por inducción sobre k . Para $k = 1$ se sigue por principio de casillas. Supongamos que para $k - 1$ el resultado es cierto, y demostremos el caso k . Tomamos cualquier vértice x_1 , y (como en el caso finito para hipergráficas) nos fijamos en $\binom{N - \{x\}}{k-1}$ 2-coloreado con la siguiente regla: $\chi'(a - \{x\}) = \chi(a)$, donde χ es la coloración de $\binom{N}{k}$. Por hipótesis de inducción existe $M_1 \subseteq N$ infinito con $\binom{M_1}{k-1}$ monocromático. Coloreamos a x_1 con el color de las $(k - 1)$ -aristas de M_1 . Repetimos este proceso sobre $\binom{M_1}{k}$ y obtenemos un $x_2 \in M_1$ que coloreamos con el mismo color que tienen las $(k - 1)$ -aristas de M_2 . Con $M_2 \subseteq M_1 \subseteq N$. Iterando este proceso una infinidad de veces obtenemos una sucesión infinita de vértices coloreados con dos colores. Por principio de casillas, al menos uno de los colores se repite en una infinidad de vértices. Llamemos M a esa infinidad de vértices. $\binom{M}{k}$ es monocromático.

■

Paul Erdős fue el padre de la combinatoria moderna y de la geometría combinatoria. Fue la fuerza inspiradora detrás del desarrollo de la teoría de Ramsey moderna, de la teoría de las gráficas, de la probabilidad moderna, y de muchas otras subramas de las matemáticas. Escribió más artículos que ningún otro matemático en la historia y propuso mucho más problemas y conjeturas que cualquier otro matemático en la historia, sin embargo nunca se enfocó en desarrollar una teoría, es criticado por tener una gran cantidad de resultados que no forman un cuerpo con sentido. Para muchos, la aportación matemática más trascendente que Erdős nos dejó fue la invención del método probabilístico en colaboración con Alfred Renyi. La idea detrás de este método es sencilla, supóngase que se quiere demostrar la existencia de un objeto difícil de construir, con propiedades aparentemente contradictorias o una estructura extremadamente desordenada. ¿Cómo demostrar la existencia del objeto sin tener que construirlo? Usando lo que Joel Spencer llama *la magia de Erdős*

Si, en un conjunto de objetos, la probabilidad de que un objeto no tenga cierta propiedad es menor a 1, entonces deberá existir un objeto con dicha propiedad.

Un ejemplo clásico de la sensación de magia que deja la utilización de este método es la cota inferior de los números diagonales de Ramsey $R(s)$. Se trata de dar 2-coloraciones de K_n que sean óptimas en el sentido de que no dejan ninguna K_s monocromática. Lo que hace muy difícil este problema es que, al parecer, dichas construcciones no tienen mucha estructura en común, ni mucha simetría, ni mucho orden. Como este resultado no es fundamental para esta tesis y no volveremos a entrar en temas de probabilidad, no daremos los prerrequisitos formales.

Teorema 1.6

$$R(s) > 2^{\frac{s}{2}}$$

Prueba.

Supongamos $s > 4$ y $N < 2^{\frac{s}{2}}$. Consideramos todas las posibles 2-coloraciones de las aristas de K_N en las que coloreamos cada arista independientemente con probabilidad $\frac{1}{2}$. En una completa de n vértices hay $\binom{n}{2}$ aristas, es decir, $2^{\binom{n}{2}}$ posibles coloraciones. Sea X un conjunto de s vértices, como estamos echando volados en cada arista, la probabilidad de que todas las aristas entre vértices de X sean rojas es $2^{-\binom{s}{2}}$. Llamemos X_R al evento de que todas las aristas de X sean rojas y X_A a que sean azules. Utilizando una expectativa lineal, la probabilidad p_R de que algún (k) -conjunto de vértices cumpla X_R esta acotada por

$$p_R = Prob(\cup_{|X|=s} X_R) \leq \sum_{|X|=s} Prob(X_R) = \binom{N}{s} 2^{-\binom{s}{2}}$$

Pero $\binom{N}{s} 2^{-\binom{s}{2}} < \frac{1}{2}$. Análogamente $p_B < \frac{1}{2}$ de donde $p_R + p_B < 1$. Entonces deberá existir una 2-coloración de K_N que no deja ninguna K_s monocromática. ■

1.2. Compacidad y Lógica

Las hipergráficas nos permiten desarrollar un lenguaje general en el que cualquier teorema tipo Ramsey puede ser expresado. Para cualquier estructura que tenga una propiedad tipo Ramsey construiremos una hipergráfica en la que una cota inferior sobre el número cromático expresa la propiedad tipo Ramsey en la estructura original.

Definición 1.11 *Dada una hipergráfica $H = (V, A)$, decimos que tiene número cromático r , si existe una función $\chi : V \rightarrow [r]$ (una r -coloración del conjunto de vértices), tal que, para toda arista $a \in A$ existen un par de vértices $v, w \in a$ tales que $\chi(v) \neq \chi(w)$. Y r es el mínimo entero para el que dicha función existe, es decir, para toda $\chi' : V \rightarrow [r-1]$*

existe $a \in A$ con $\chi(v) = c$ para todo $v \in a$ (con c constante). Denotamos $\chi(H) = r$ cuando H tiene número cromático r .

A las coloraciones que cumplan con la propiedad descrita en la definición de número cromático les llamamos *coloraciones propias*. Tomaré el teorema de Ramsey que acabo de enunciar para ilustrar la idea de convertir una proposición tipo Ramsey a una proposición sobre el número cromático de una hipergráfica asociada. Concretamente tomemos $N = R_r^k(s)$ y tomemos X un conjunto de N elementos. Construiremos $H = (V, A)$ de forma que $\chi(H) > r$, si y sólo si para cualquier r -coloración de $\binom{X}{k}$ existe $Y \subset X$ con $|Y| = s$ con la propiedad de que $\chi(a)$ es constante en $\binom{Y}{k}$.

Sea V el conjunto $\binom{X}{k}$ de todas las k -aristas sobre $N = |X|$ vértices. Sea $A = \binom{N}{s}$, para todo $a \in A$, $v \in a$ pensados como elementos de la hipergráfica, si y sólo si $v \subset a$ pensados como subconjuntos de X . De manera que si $\chi(H) > r$ entonces toda r -coloración χ' es constante en alguna arista a , si ahora traducimos al conjunto original, hacemos $a = Y$ por construcción $|Y| = s$. Y estamos diciendo que $\binom{Y}{k}$ es monocromático.

Con este nuevo lenguaje podemos enunciar formalmente la versión del principio de compacidad que hemos estado usando y usaremos en el resto de la tesis. Nótese la similitud con el teorema de Ramsey, tanto en el enunciado como en la prueba.

Definición 1.12 Sea $H = (V, A)$ una hipergráfica, $W \subset V$. La hipergráfica inducida por W , H_W es una hipergráfica que tiene a W como conjunto de vértices y si $a \in A$ y $a \subset W$ entonces a es arista de H_W .

Teorema 1.7 (Teorema de Compacidad) Dada una hipergráfica $H = (V, A)$, donde a es finito para toda $a \in A$. Sea $W \subset V$, W finito,

$$\chi(H_W) \leq r \text{ implica, } \chi(H) \leq r$$

Prueba de la versión numerable del Teorema de Compacidad.

Utilizando el axioma de elección el teorema se puede probar para V con cualquier cardinalidad, aquí supondremos V numerable (si V es finito el resultado es trivial). Para facilitar la escritura suponemos $V = \mathbb{N}$. Construiremos una r -coloración propia de H a partir de las (r) -coloraciones propias de H_W . Sea χ_n la coloración propia asociada a $H_{[n]}$. Como antes $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Construiremos χ , la r -coloración propia de H . $\chi_i(1)$ toma un valor para cada $i \in \mathbb{N}$, por el principio de las casillas, para algún color $\chi_i(1)$ toma el mismo valor una infinidad de veces, asignamos ese color a $\chi(1)$. Sea $M_1 = \{j \in \mathbb{N} : \chi_j(1) = \chi(1)\}$. Restringimos $i \in M_1 \subseteq \mathbb{N}$, y repetimos el proceso, es decir, nos fijamos en $\chi_i(2)$, por el principio de las casillas, existe un conjunto infinito $M_2 \subseteq M_1$, tal que, para todo $j \in M_2$ $\chi_j(2)$ es constante. Asignamos a $\chi(2) = \chi_j(2)$ cuando $j \in M_2$. Repetimos este proceso una infinidad de veces. Bastará mostrar que χ es una (r) -coloración propia. Sea $a \in H$ una hiperarista. Supongamos que $\chi(x) = c$ para toda $x \in a$. Por definición $a \subset \mathbb{N}$, y por hipótesis $|a|$ es finito. Tiene sentido hablar

del máximo de a . Sea m el primer elemento de $M_{\max(a)}$. Por construcción $\chi(x) = \chi_m(x)$ para toda $x < \max(a)$, por hipótesis la imagen de a bajo χ_m no es constante, de manera que la imagen de a bajo χ tampoco lo es.

■

El teorema de compacidad tiene muchas versiones y tuvo distintos descubridores en distintos contextos. Erdős y Szekeres mencionan una de sus versiones, el lema de infinitud de König. Se le llama *de compacidad* porque probarlo en la lógica de primer orden equivale a probar que cierto espacio de proposiciones es compacto usando el teorema de Tychonoff que dice que el producto de compactos es compacto en la topología del producto. Su primera enunciación y prueba en el lenguaje de la lógica, fue para lenguajes numerables, aparece como un corolario del teorema de Completitud de Gödel. Es un problema abierto si el teorema de Completitud se sigue de el de Compacidad.

En esta tesis trataremos los aspectos combinatorios de la teoría de Ramsey, sin embargo, me parece adecuado mencionar algunas de sus relaciones con la lógica matemática ya que ese fue el contexto en el que Ramsey descubrió su teorema.

Frank Plumpton Ramsey, vivió toda su vida en Cambridge, murió poco después de publicar *On a problem on formal logic*[R30] a los veintiséis años. Sus principales intereses eran la lógica, la filosofía y la economía. A pesar de lo joven que murió, *On a problem on formal logic*[R30] y *A mathematical theory of savings*, son artículos clásicos en sus respectivas áreas.

En economía perteneció al grupo de Cambridge encabezado por Keynes, que lo protegió desde muy joven. Al parecer el mayor interés de Ramsey era la lógica matemática desde un punto de vista filosófico. En aquellos días en Cambridge se encontraban muchos de los personajes más importantes de la vanguardia filosófica mundial. Las discusiones que había generado la filosofía matemática desde finales del siglo XIX estaban llegando a un punto crítico.

Bertrand Russell trabajaba con Whitehead en sus famosos *Principia Mathematica*, con el propósito de encontrar un sistema lógico formal completo sobre el cuál fundamentar el resto de las matemáticas. Ludwig Wittgenstein, un ingeniero en aviación nacido en Viena, hijo de uno de las personas más acaudaladas del mundo, había escrito el *Tractatus Logico-Philosophicus*. En el cuál decía haber resuelto todos los problemas filosóficos. Tal vez los filósofos de Cambridge no estaban de acuerdo con la radical opinión de Wittgenstein, pero los temas y métodos que Wittgenstein propuso en su *Tractatus*, se convirtieron en los temas centrales de cualquier discusión filosófica en Cambridge. Tal vez no sea exagerado afirmar que junto con Heidegger, Wittgenstein fué el filósofo más influyente del siglo XX. Wittgenstein había hecho una estancia de seis meses en Cambridge antes de que comenzara la primera guerra mundial. Durante ese tiempo entabló amistades con grandes mentes de Cambridge. Durante la primera guerra (que peleó contra Inglaterra) terminó de pensar el *Tractatus* y poco después del final de la

guerra lo mandó a Cambridge. Según Wittgenstein ninguna de las grandes mentes de Cambridge entendió su *Tractatus*, excepto, tal vez, el joven Ramsey de apenas diecinueve años. Ramsey ya había trabajado con Russell y con Whitehead corrigiendo los *Principia*, su rigor y claridad ya le habían dado una reputación en Cambridge. El siguiente, es un testimonio que escribió Moore acerca de Ramsey: *nadie podía evitar tan fácilmente el tipo de confusión en las que hasta los mejores filósofos tienden a caer...siempre tuve la sensación que no importaba el tema que discutiéramos, que él lo entendía mucho mejor de lo que yo*. Cuando Ramsey publicó un pequeño ensayo explicatorio del *Tractatus* Wittgenstein vivía épocas difíciles, sentía que su trabajo nunca sería comprendido. Ofendido porque a nadie le interesaba publicar el *Tractatus*, aceptó publicarlo con un ensayo explicatorio de Russell como prólogo, ese ensayo explicatorio fue el final de la amistad entre Wittgenstein y Russell. Wittgenstein criticó agriamente, no sólo el ensayo, sino toda la obra de Russell. En cambio, cuando leyó el ensayo que Ramsey había escrito, nació la esperanza de ser comprendido por este talentoso joven al que aún no conocía. Durante un par de años Ramsey visitó a Wittgenstein en Viena durante los veranos. Repasaron juntos el *Tractatus* línea por línea. Años después Wittgenstein regresó a Cambridge donde Ramsey, ahora de veintitantos, ya tenía el título de doctor en filosofía. Los estudios de Wittgenstein eran como ingeniero, así que a Ramsey (17 años más joven que Wittgenstein) se le asignó el puesto de supervisor de Wittgenstein como estudiante de doctorado. Durante más de un año trabajaron juntos.

Los comentarios y cuestionamientos de Ramsey fueron fundamentales en el trabajo de Wittgenstein. Por otro lado, tal vez la siguiente cita sea ilustrativa de hasta qué punto Ramsey fue influenciado por Wittgenstein, *We can make several things clearer, but we cannot make anything clear*.

El principal interés de Ramsey eran los principios filosóficos de la lógica matemática, se unió a la escuela de los logistas que Russell comandaba. La otra escuela en voga era la de los intuicionistas que Brouwer comandaba. Al parecer el objetivo principal de Ramsey era replantear el proyecto de los *Principia* de Russell a partir de sus reflexiones como lógico matemático y de su lectura del trabajo de Wittgenstein; se trataba de corregir los errores desde los que, según él, Russell había partido. Murió antes de comenzar dicha empresa.

Poco después de la muerte de Ramsey, Gödel descubrió sus famosos teoremas de indecidibilidad e incompletud en sistemas formales, estos teoremas cambiaron la matemática para siempre. Lo que Gödel probó es que 1) Cualquier sistema formal coherente es incompleto, es decir, que contiene proposiciones indecidibles de las que no se puede demostrar su certeza ni su falsedad. 2) Que la coherencia de cualquier sistema formal aritmético no puede ser probada desde el sistema formal.

El primero de estos dos teoremas hizo evidente que el sueño de los *Principia*, de fundamentar toda la matemática sobre un sistema formal era imposible. La prueba de Gödel consiste en construir una proposición indecidible, para muchos matemáticos de la época

no era más que una construcción ingeniosa y no una observación esencial de las matemáticas. El siguiente corolario del teorema de Ramsey fue el primer ejemplo de una proposición indecidible que no surgió en un contexto lógico. Se trata de una proposición sobre conjuntos finitos, sin embargo, no se puede demostrar (ni tampoco se puede demostrar su falsedad) a partir de los axiomas de Peano sin utilizar el axioma de infinito. Daremos la prueba por medio de la versión infinita, pero no daremos la demostración de que no es posible dar una prueba que no utilice el axioma de infinito. El teorema es de Paris y Harrington, de 1977. Pero antes de pasar al teorema cabe una observación más acerca del teorema de Ramsey y del teorema de Gödel. Ambos teoremas tienen a la lógica como *objetivo primordial* y en ambos es claro que sus autores tenían un conocimiento muy profundo de la Teoría de los Conjuntos.

Teorema 1.8 (Paris-Harrington) Sean r, k y s enteros positivos. Si $N \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande, entonces para cualquier r -coloración de $\binom{N}{k}$ existe $S \subset [N]$ tal que $\binom{S}{k}$ es monocromático y

$$|S| \geq \max\{s, \min S\}.$$

Prueba.

Como ya mencioné la técnica es enunciar la versión infinita y concluir el resultado por compacidad. Por el teorema de Ramsey toda r -coloración de $\binom{\mathbb{N}}{k}$ existe un subconjunto infinito $M \subset \mathbb{N}$ con $\binom{M}{k}$ monocromático. Construimos M' , $m \in M'$ sii $m \in M$ y $m \geq s$, claramente M' sigue siendo infinito. Y con ello hemos probado la versión infinita. ■

Este capítulo termina con una anécdota que contaba Paul Turan a sus alumnos. Recomendamos [GraRoSpe80] y [Boll98] al lector interesado en este tema. Durante los sesentas, la búsqueda de estructura y teoría acerca de los patrones de interrelación de los individuos dentro de un grupo social, fue un tema central en sociología. Algún autor propuso un modelo en el que por medio de argumentos psicológicos, explicaba el siguiente patrón, cualquier grupo social relativamente grande, tenía un subgrupo de muchas personas en el que o bien todos eran solidarios unos con los otros, o en su defecto, ninguno era solidario con el otro. Al parecer hubo gran cantidad de literatura sociológica al respecto. La polémica llegó a su fin cuando un sociólogo redescubrió, una vez más, el teorema de Ramsey, mostrando que no era un fenómeno con raíces psicológicas, ni sociológicas; sino un asunto de naturaleza combinatoria.

Capítulo 2

Convexidad Combinatoria

Este palacio es fábrica de los dioses, pensé primeramente. Exploré los inhabitados recintos y corregí: Los dioses que lo edificaron han muerto. Noté sus peculiaridades y dije: Los dioses que lo edificaron estaban locos

Jorge Luis Borges

Tal vez el teorema más importante de la convexidad combinatoria sea el teorema de Helly.

Teorema 2.1 (Helly) *Sea \mathcal{F} una familia de al menos $d + 1$ convexos en \mathbb{R}^d , si cada $d + 1$ -subfamilia tiene intersección no vacía y además, o la familia es finita, o todos los conjuntos son compactos, entonces la familia \mathcal{F} tiene intersección no vacía.*

Sus dos hermanitos son el Teorema de Radon y el Teorema de Caratheodory

Teorema 2.2 (Radon) *Dados $d + 2$ puntos en \mathbb{R}^d existe una partición en dos subconjuntos no vacíos A, B tal que $cc(A) \cap cc(B) \neq \emptyset$*

Teorema 2.3 (Caratheodory) *Sea $X \subset \mathbb{R}^d$. Si $x \in cc \langle X \rangle$ entonces existe un subconjunto $Y \subset X$ de a lo más $d + 1$ puntos tal que $x \in cc \langle Y \rangle$*

El primero de estos tres fue descubierto por Eduard Helly en 1913, fue publicado por primera vez por Radon en 1921. El teorema de Radon en realidad era un lema que Radon usó para dar la prueba del teorema de Helly, sin embargo la historia y el número de aplicaciones que ha tenido dicho lema hacen que hoy le llamemos *el teorema de Radon*.

Cabe notar que el teorema de Helly es trivial en el caso $n \leq d + 1$ y para $d = 1$ el teorema dice: *dados n intervalos (cerrados y acotados) en la línea real, si se intersectan dos a dos, entonces los n se intersectan*. Eso no es difícil de probar utilizando el hecho de que los puntos de la recta real tienen un orden total. Pero en el caso general, sin ir más lejos, en el plano, no hay una prueba trivial del teorema de Helly.

Como su nombre lo indica, la combinatoria es la rama de las matemáticas que trata de entender cómo se combinan las cosas, el hombre se ha enfrentado a problemas combinatorios desde siempre, sin embargo, es reciente el estudio sistemático de estos problemas. Por un lado se trata de contar las posibles combinaciones, en este sentido la combinatoria era considerada una subrama de la teoría de los números, por otro lado, se trata de entender la estructura o estructuras que las cosas conforman al combinarse, en este otro sentido, era considerada como una subrama de la topología.

Hoy en día las estructuras que estudia la combinatoria se asemejan a las de la topología en el siguiente sentido, comúnmente en combinatoria partimos de un conjunto y una familia de subconjuntos del conjunto (gráficas, matroides, convexidades, separoides, etc), la gran diferencia es que la topología suele estudiar propiedades interesantes de los conjuntos infinitos y la combinatoria de los finitos.

A veces restringirse a ciertas familias de objetos matemáticos tiene consecuencias combinatorias interesantes. Por razones profundas y misteriosas resulta que hay ciertas estructuras matemáticas que nacen desde un área y son ricas en propiedades en otra área. El teorema de Helly es un ejemplo clásico de lo anterior. Los subconjuntos convexos en los espacios reales lineales, se combinan de mucho menos maneras que los objetos matemáticos en general.

La primera prueba que voy a dar es la de Helly, apareció en un artículo en 1923, parece ser la más intuitiva de las pruebas del teorema de Helly.

Prueba(Helly).

Para facilitar técnicamente esta prueba pediremos como hipótesis extra que los convexos sean cerrados (topológicamente). En la versión infinita para compactos no estamos pidiendo nada extra.

Se hará inducción sobre la dimensión del espacio. Para \mathbb{R}^0 , el resultado es trivial. Supóngase que conocemos el resultado para \mathbb{R}^{d-1} . Considérese una familia $\{K_i\}$ de n conjuntos convexos en \mathbb{R}^d con la propiedad de que cada $d + 1$ de ellos tiene intersección no vacía, y supóngase por otro lado que la intersección $\bigcap_{i=1}^n K_i$ es vacía. Entonces existe una subfamilia $\{K_j\}$ de $\{K_i\}$ tal que $\bigcap_{j=1}^m K_j = \emptyset$ pero $\bigcap_{i=1}^{m-1} K_j = M \neq \emptyset$. Por el teorema de separación deberá existir un hiperplano H que separa a M de K_m . Sea J la intersección de d convexos de $\{K_j\} \setminus K_m$, es decir, $J \supset M$, pero por la hipótesis de que cada $d + 1$ tienen intersección no vacía entonces $J \cap K_m$ tiene intersección no vacía. De forma que J tiene intersección no vacía tanto con M como con K_m , por lo que necesariamente se interseca con H , pero recordemos que J era la intersección de cualesquiera d convexos entre $\{K_{m-1}\}$ de forma que si nos fijamos en los convexos de una dimensión menor de la forma $K_i \cap H$, estos cualquier colección de ellos se interseca en H , aplicando la hipótesis de inducción todos ellos se intersecan en H , por lo que $H \cap M \neq \emptyset$ pero ésta es una contradicción con el hecho de que H separa a K_m de M . De donde concluimos que $\{K_i\}$ tiene intersección no vacía.

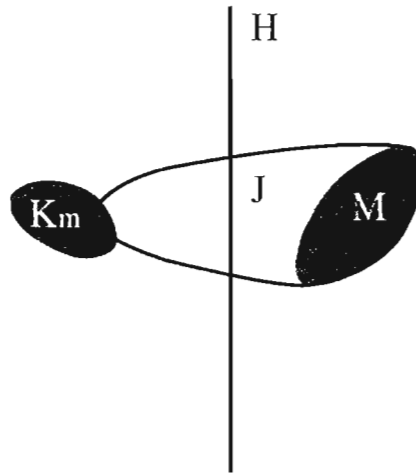


Figura 2.1: Prueba de Helly.

La siguiente prueba es de la de Radon, pero antes probaremos el teorema de Radon. La prueba es casi pura álgebra lineal.

Prueba(Teorema de Radon).

Sean $\{x_0, x_1, \dots, x_{d+1}\}$ $d+2$ puntos en \mathbb{R}^d . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_0 = \bar{0}$. Por un teorema clásico de álgebra lineal existen $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}\}$ no todas ellas cero, tales que

$$\sum_{i=1}^{d+1} x_i \lambda_i = 0$$

, de forma que el sistema de ecuaciones.

$$\sum_{i=0}^{d+1} x_i \lambda_i = 0 \quad \sum_{i=0}^{d+1} \lambda_i = 0$$

tiene solución, es decir, existen $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}\}$ no todas ellas cero, que cumplen las dos ecuaciones. Hagamos la partición (esta es la clave del teorema):

$$A = \{i \in [d+2] \text{ tales que } \lambda_i > 0\} \quad B = \{i \in [d+2] \text{ tales que } \lambda_i \leq 0\}$$

Nótese que

$$\sum_{i \in A} \lambda_i x_i = \sum_{i \in B} -\lambda_i x_i$$

Sea

$$\lambda = \sum_{i \in A} \lambda_i = \sum_{i \in B} -\lambda_i$$

Como $\lambda \neq 0$ podemos dividir la ecuación anterior entre λ

$$\sum_{i \in A} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = \sum_{i \in B} \frac{-\lambda_i}{\lambda} x_i$$

Pero estas son combinaciones convexas ya que,

$$\sum_{i \in A} \frac{\lambda_i}{\lambda} = \sum_{i \in B} \frac{-\lambda_i}{\lambda} = 1$$

y

$$\frac{\lambda_i}{\lambda} \geq 0 \text{ si } i \in A, \quad \frac{-\lambda_i}{\lambda} \geq 0 \text{ si } i \in B.$$

Es decir A y B inducen una partición del conjunto de puntos con la propiedad de que sus cascos convexos se intersectan.

■

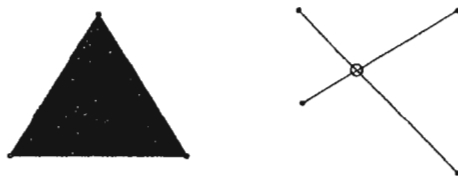


Figura 2.2: Particiones de Radon en el plano.

Y ahora pasamos a la prueba de Radon del Teorema de Helly

Prueba del teorema de Helly (Radon)

Sea K_1, K_2, \dots, K_n una familia de convexos en \mathbb{R}^d . De nuevo se hará por inducción, pero esta vez sobre el número de convexos en la familia. Si $n \leq d+1$, la hipótesis basta y esto nos sirve como base de inducción. Supóngase que el teorema es cierto para cualquier familia de $n-1$ convexos. Se demostrará primero para $n = d+2$. Sea $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ cualquier $d+1$ -subconjunto del conjunto de índices. Sea F_I la intersección de los $d+1$ convexos correspondientes a I y p_I cualquier punto en F_I . Por hipótesis $F_I \neq \emptyset$ para todo $d+1$ -conjunto. El caso $F_I = F_J$ para algunos $I \neq J$ y F_I es un punto, es trivial. Entonces tomando todos las $d+1$ -subfamilias posibles, obtenemos $\binom{d+2}{d+1} = d+2$ puntos con la propiedad de que cualesquiera $d+1$ de ellos están contenidos en todos excepto uno de los convexos originales, y por lo tanto el casco convexo de cualesquiera $m \leq d+1$ está contenido en todos excepto, a lo más, uno de los convexos originales. Aplicando el teorema de Radon existe una partición de los $d+2$ puntos en dos conjuntos A, B no vacíos cuyos cascos convexos se intersectan. Por ser no vacíos, para todo K_i miembro de la familia se cumple una de las siguientes dos, $A \subset K_i$ o $B \subset K_i$ pero entonces,

$$\{cc \langle A \rangle \cap cc \langle B \rangle\} \subset \bigcap_{i=1}^n K_i$$

con lo cual concluimos la prueba, la hicimos para $n = d + 2$, nótese que la misma prueba funciona para toda $n \in \mathbb{N}$ tomando como hipótesis de inducción que la afirmación es cierta para $n - 1$, ya que el teorema de Radon se generaliza trivialmente, si en lugar de pedir que sean $d + 2$ puntos pedimos que sean *al menos* $d + 2$ puntos.

■

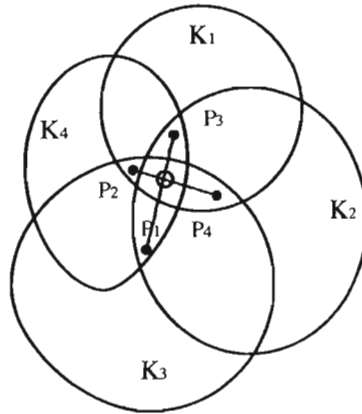


Figura 2.3: Prueba de Radon.

Antes de pasar a la prueba del teorema de Caratheodory, nótese lo sencillo del enunciado con un dibujo en el plano.2.4

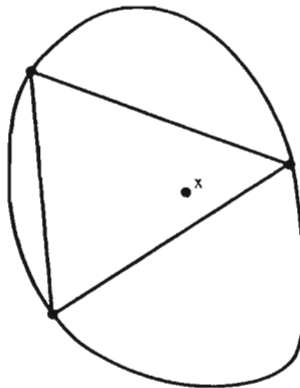


Figura 2.4: Caratheodory en el plano.

Prueba del Teorema de Caratheodory.

Sea $X' : \{y \in X \mid y \in cc \langle Y' \rangle \text{ para algún } Y' \subset X \text{ finito}\}$. $X' = cc \langle X \rangle$ por definición de casco convexo, ya que X' es convexo y cualquier punto de X es un punto de X' . De manera que si $x \in cc \langle X \rangle$, entonces $x \in cc \langle Y' \rangle$ para algún $Y' \subset X$

finito.

Ya que lo hicimos finito, podemos escoger Y un conjunto minimal con respecto a la propiedad $x \in cc \langle Y \rangle$ y lo único que nos falta por probar es que $|Y| = n \leq d + 1$. Sea $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Como $x \in cc \langle Y \rangle$, existen escalares no negativos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de tal suerte que, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, y, $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = x$. Si el conjunto Y no es afinmente independiente, entonces podemos encontrar escalares $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ no todos iguales a cero, de tal suerte que, $\sum_{i=1}^n \mu_i y_i = 0$, y, $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$. Como la suma de las μ_i es cero y no todos son cero, podemos suponer que al menos hay uno positivo, sea μ_1 dicho escalar. Tomando α como cualquier número no negativo obtenemos,

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \alpha \mu_i) y_i = x$$

Cuando $\alpha = 0$ ésta es nuestra representación original de x . Hacemos crecer a α continuamente hasta que $\lambda_i = \alpha \mu_i$ para alguna $i \in [n]$. Supongamos que esto pasa en $\alpha = \alpha_0$. Los coeficientes $\lambda_i - \alpha \mu_i$ son todos no negativos y $\sum_{i=1}^n \lambda_i - \alpha_0 \mu_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i + \alpha_0 \sum_{i=1}^n \mu_i = 1$. Además, $\lambda_i - \alpha_0 \mu_i = 0$ para alguna $i \in [n]$, es decir, podemos representar a x como combinación convexa de $n - 1$ elementos de Y , lo cual es una contradicción con la suposición de que Y era minimal con respecto a esa propiedad. De manera que Y deberá ser afinmente independiente, es decir, $|Y| \leq d + 1$.

■

El texto clásico de convexidad combinatoria es [?]. Ahora pasaremos a un par de aplicaciones clásicas del teorema de Helly. Necesitamos una definición.

Definición 2.1 *Decimos que n puntos en el plano están en posición general si no hay tres alineados.*

En general.

Definición 2.2 *Decimos que n puntos en \mathbb{R}^d están en posición general si no hay $d + 1$ en el mismo hiperplano.*

Corolario 2.1 (Teorema del punto central) *Para cualquier conjunto X de n puntos en posición general en \mathbb{R}^d existe un punto x , tal que cualquier semiplano cerrado que contiene a x contiene al menos $\frac{n}{d+1}$ de X .*

Prueba.

Nótese que la proposición del teorema es equivalente a demostrar que existe x con la propiedad de que para todo semiespacio abierto γ , tal que, $|X \cap \gamma| > \frac{d}{d+1}n$, x esté en γ . Dejando que γ corra sobre la familia de semiespacios de \mathbb{R}^d tales que $|\gamma \cap X| > \frac{d}{d+1}n$, por la observación anterior bastaría demostrar que dichos semiespacios se intersectan. Tomemos para cada γ que cumple lo anterior, $cc \langle \gamma \cap X \rangle$. De manera que obtenemos

una familia de cuerpos convexos. Además esa familia de cuerpos convexos tiene la propiedad de contener, al menos, una fracción estrictamente mayor a $\frac{d}{d+1}n$ puntos de X , de manera que la intersección de cualesquiera $d+1$ de estos cuerpos convexos comparte al menos algún punto de X . Por el teorema de Helly existe un punto en la intersección de la familia de cuerpos convexos, este es un punto central. ■

Corolario 2.2 *Si una familia finita de segmentos paralelos en el plano tiene la propiedad de que por cada tres de ellos existe una línea transversal (una línea que los intersecta a los tres), entonces existe una línea transversal a toda la familia.*

Prueba.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los segmentos son perpendiculares al eje ordenado. Para cada intervalo de la colección tomamos el conjunto de líneas que lo intersecta que tiene pendiente real (es decir, no tomamos la línea vertical que lo intersecta). Cada una de esas líneas está descrita de manera única por una expresión del tipo $y = mx + b$. Para poder aplicar el teorema de Helly consideramos la siguiente transformación, de líneas no verticales en el plano, en puntos en el plano:

$$y = mx + b \rightarrow (m, b).$$

Bastará demostrar que la imagen del conjunto de líneas no verticales que intersectan a un intervalo es un conjunto convexo, ya que por hipótesis tres a tres se intersectan, y por el teorema de Helly eso implica que todas se intersectan. Dadas l_1, l_2 dos líneas no verticales que intersectan al mismo intervalo, si están descritas por $y = m_1x + b_1$ y por $y = m_2x + b_2$ respectivamente, entonces les corresponden los puntos (m_1, b_1) y (m_2, b_2) . Bastará mostrar que la línea descrita por $y = (\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2)x + (\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2)$ intersecta al intervalo. Sea x_0 la cordenada del intervalo, entonces el punto

$$(x_0, (\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2)x_0 + (\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2))$$

claramente es combinación convexa del punto

$$(x_0, (m_1x_0 + b_1))$$

con el punto

$$(x_0, (m_2x_0 + b_2)).$$

Esto demuestra que el conjunto de líneas no verticales que intesectan a un intervalo es un conjunto convexo. Como además por hipótesis, la familia de intervalos era finita, podemos aplicar el teorema de Helly. ■

En todo lo siguiente cuando hablemos de convexos o de cuerpos convexos estaremos hablando de convexos compactos.

A las luces del corolario anterior y del teorema de Helly, aparece naturalmente la pregunta. *¿Dada una familia de convexos en el plano tales que tres a tres tienen una línea transversal si y solo si todos tienen una línea transversal?* El primero en hacerse esta pregunta fue Vincensini, la respuesta es negativa, existen familias de convexos con 3-transversales que no tienen ninguna transversal. Entonces el problema abierto era encontrar condiciones suficientes y necesarias para que una familia de cuerpos convexos en el plano tuviera una línea transversal. Varios autores dieron resultados parciales en este sentido, hipótesis que se les podían pedir a los cuerpos, como ser trasladados homotéticamente, otros resultados en este sentido consistieron en dar hipótesis menos fuertes y subir el número mágico, por ejemplo: *Cualquier familia de al menos 6 discos congruentes en el plano con la propiedad de que cuatro a cuatro tienen una línea transversal, tiene una línea transversal a toda la familia.* Fue Hadwiger el primero en dar una prueba en la que se daban condiciones suficientes y necesarias para que una familia de convexos en el plano tuviera una línea transversal[Ha57]. Decimos que una familia es disjunta si la intersección entre cualquier par de elementos de la familia es vacía. Años después, Wegner le pudo quitar la hipótesis de ser disjuntos y la de ser convexos[PoWen90]]. Probó el siguiente resultado para cualquier familia de compactos en el plano.

Teorema 2.4 (Hadwiger) *Dada una familia disjunta de cuerpos convexos en el plano, existe una línea transversal a la familia si y solo si existe un orden lineal de los convexos de tal suerte que cada tres tengan una línea transversal congruente con dicho orden.*

La siguiente es una bonita generalización de Imre Barany al teorema de Caratheodory [Bar82]. Conviene dar la siguiente definición.

Definición 2.3 *Un d -simplejo es el casco de $d + 1$ puntos en posición general en \mathbb{R}^d*

Cuando estamos trabajando en una dimensión fija, solo decimos simplejo. En la línea, un simplejo es un segmento, en el plano, un triángulo, en el espacio, un tetraedro. También se pueden pensar como la realización geométrica de las gráficas completas.

Un simplejo arcoiris es un simplejo en el que cada vértice tiene un color distinto.

Teorema 2.5 (Caratheodory coloreado) *Sea X un conjunto de puntos $d+1$ -coloreado en \mathbb{R}^d . Es decir, existen Y_1, Y_2, \dots, Y_{d+1} , $d + 1$ clases cromáticas. Sea x un punto con la propiedad de que para cada clase cromática Y_i , $x \in cc \langle Y_i \rangle$. Entonces podemos escoger $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2, \dots, y_{d+1} \in Y_{d+1}$ de tal suerte que $x \in cc \langle y_1, y_2, \dots, y_{d+1} \rangle$, un simplejo arcoiris que contiene a x .*

Prueba.

Supóngase que el resultado es falso para llegar a una contradicción. De manera que x

no está contenido en ningún simplejo arcoiris, por lo que podemos tomar $S \subset X$, un conjunto arcoiris tal que la distancia entre $cc \langle S \rangle$ y $X \setminus S$ sea lo más pequeño posible. Sea $x \in X \setminus S$ el punto que realiza esa distancia mínima a $cc \langle S \rangle$, sea y el punto más cercano a x contenido en $cc \langle S \rangle$. Sea H el hiperplano perpendicular a $[x, y]$ que pasa por y tenemos que $cc \langle S \rangle \cap H = cc \langle S \cap H \rangle$. Entonces por Caratheodory existe $T \subset S \cap H$ un conjunto de a lo más d puntos que contiene a y . Al menos hay un color que no aparece en ninguno de los puntos de dicho T , sea el k -ésimo color el que no aparece en T . Por hipótesis $x \in cc \langle Y_k \rangle$, por lo que es imposible que $Y_k \subset H^-$, donde H^- es el semiplano cerrado que tiene a H como plano soporte y no contiene a x . Entonces podemos suponer $y_k \in Y_k \cap H^+$ (esta vez H^+ es el semiplano abierto). Nótese que $T \cup y_k$ es un simplejo arcoiris que contiene a y , por tanto $[y, y_k] \subset cc \langle T \cup y_k \rangle$, y por construcción la distancia de este intervalo a x es menor que la de x a y , pero eso es una contradicción con la suposición de que $cc \langle S \rangle$ realizará la distancia mínima de un simplejo arcoiris al punto x (Vease 2.5).

■

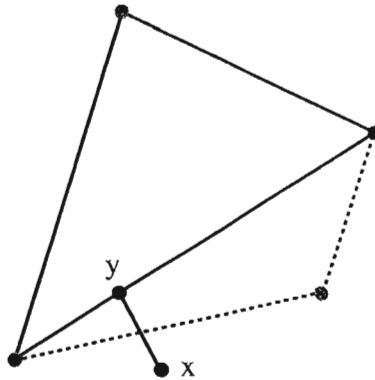


Figura 2.5: Caratheodory coloreado.

La demostración anterior nos hace recordar una demostración clásica de un problema histórico, tal vez sería justo decir que éste fue el problema que inauguró el área de la geometría discreta. A mitades del siglo XIX, Sylvester, un algebrista y geómetra inglés propuso el siguiente sencillo y sorprendente resultado. *Si un conjunto finito de puntos en el plano tiene la propiedad de que cada línea que define contiene al menos tres puntos del conjunto, entonces todos los puntos del conjunto están alineados.* Las líneas que define un conjunto de puntos, son todas las líneas que contienen al menos dos puntos del conjunto. El problema de Sylvester se perdió en los anales de la matemática durante años hasta que en 1943 Erdős lo volvió a conjeturar sin saber que Sylvester lo había conjeturado cincuenta años antes. Erdős no encontró respuesta, fue Gallai un año después de que

Erdős lo conjeturó, el primero en dar una prueba. Esa prueba usaba un argumento proyectivo. Desde esa prueba hasta hoy han aparecido un sin fin de demostraciones de diferente índole. Vease [AiZie02] o [Ab97]. La siguiente fue hallada originalmente por Kelly, es una de las pruebas de El Libro De Dios.

Teorema 2.6 (Sylvester-Gallai) *Si todas las líneas que define un conjunto finito de puntos, contienen, al menos, tres puntos del conjunto, entonces todos los puntos del conjunto se encuentran alineados.*

Prueba.

Sea X el conjunto de puntos con $|X| = n$ y $L(X)$ el conjunto de líneas que X define. Para cada línea $l \in L(X)$ definida por X , definimos $l_X = X \cap l$, el subconjunto de puntos de X que está contenido en l . Por la hipótesis de que cada línea contiene al menos tres puntos, tenemos $|l_X| \geq 3$. Si suponemos que el resultado es falso, entonces además tenemos $|l_X| < n - 1$. Por lo que, para toda l podemos considerar la distancia de l a $X \setminus l_X$. Esa distancia la realiza algún punto $x \in X \setminus l_X$. De manera que a cada línea $l \in L(X)$ le podemos asignar dicho punto, denotémoslo con x_l . Consideremos (como en la prueba de Caratheodory coloreado), una línea $l \in L(X)$ para la cual la distancia entre l y x_l sea mínima. Sea $y \in l$ el punto de la línea l más cercano a x_l . y parte a l en dos semilíneas, como $|l_X| \geq 3$, en alguna de esas dos semilíneas hay al menos, dos puntos de X sean x', x'' esos puntos, sea x'' el más alejado a y .

Consideremos l' la línea definida por x_l y por x'' , por definición de $L(X)$ tenemos que $l' \in L(X)$, y claramente la distancia entre l' y x' es menor a la distancia entre l y x_l . Lo cual constituye una contradicción. Entonces todos los puntos de X están alineados (Véase la figura 2.6).

■

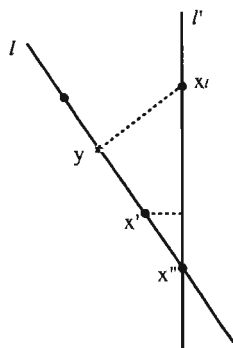


Figura 2.6: La prueba de Kelly al problema de Sylvester.

La siguiente es una bonita generalización del teorema de Radon. El teorema de Radon dice que en cualquier conjunto de $d + 2$ puntos en \mathbb{R}^d existe una 2-coloración de los

puntos, tal que, el casco convexo de una clase cromática, intersecta al de la otra. El siguiente problema fue propuesto por primera vez por Birch y por Rado (no Radon), ambos dieron una solución parcial, en 1966, Tverberg publicó el siguiente resultado del que hoy se conocen varias pruebas, vease [Bar82], [Mat02].

Teorema 2.7 (Tverberg) *Sea X un conjunto de puntos en \mathbb{R}^d . Si $|X| \geq (m-1)(d+1)+1$ entonces existe una partición de X en m subconjuntos, Y_1, Y_2, \dots, Y_m de tal suerte que $cc \langle Y_1 \rangle \cap cc \langle Y_2 \rangle, \dots, cc \langle Y_m \rangle \neq \emptyset$*

Este capítulo termina con un par de resultados *fraccionales*. El teorema de Helly en el plano dice que dada una familia de n convexos en el plano, si cualquier terna de conjuntos tiene intersección no vacía, entonces la familia tiene intersección no vacía. ¿Qué pasa si no todas pero una fracción de las ternas tienen intersección no vacía? Lo que podemos obtener es un teorema fraccional, es decir podemos concluir que *una fracción de la familia tiene intersección no vacía*.

Teorema 2.8 (Helly fraccional) *Sea \mathcal{F} una familia de n convexos en \mathbb{R}^d . Para toda $\alpha \in [0, 1]$ existe $\beta(\alpha, d) > 0$, tal que, si $\alpha \binom{n}{d+1}$ de todas las $(d+1)$ -subfamilias tienen intersección no vacía, entonces existe una subfamilia $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ con $\cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ y $|\mathcal{G}| \geq \beta n$*

Probaremos $\beta(\alpha, d) = \frac{\alpha}{d}$. El orden lexicográfico en \mathbb{R}^d es $x < y$ si $x_1 > y_1$. O $x_1 = y_1$ y $x_2 > y_2$, y así sucesivamente. Necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.1 *Sea \mathcal{F} una familia de convexos en \mathbb{R}^d con $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Sea v el mínimo lexicográfico de $\cap \mathcal{F}$. Se puede escoger una subfamilia $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ de a lo más d convexos, tal que v sea el mínimo lexicográfico de $\cap \mathcal{G}$.*

Prueba del lema.

Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^d : x <_{lex} v\}$. Claramente $x(\lambda) + y(1-\lambda) <_{lex} v$ cuando $x, y \in C$. Además de la definición de C , se sigue que $\mathcal{F} \cup \{C\}$ es una familia de convexos con intersección vacía. Por el teorema de Helly existe una subfamilia \mathcal{G}' de a lo más $d+1$ convexos con intersección vacía, por la hipótesis C debe ser uno de los convexos de esa subfamilia. Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \setminus \{C\}$. Por un lado $v \in \cap \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Y si existiera $v' \in \cap \mathcal{G}$, con $v' <_{lex} v$, entonces $\cap \mathcal{G}' \neq \emptyset$. Entonces v es el mínimo lexicográfico de \mathcal{G} . ■

Prueba del teorema fraccional de Helly.

Para cada una de las $\alpha \binom{n}{d+1}$ $(d+1)$ -subfamilias con intersección no vacía, escogemos una d -subfamilia que comparta el mínimo lexicográfico con la $d+1$ -subfamilia original. Pero solo hay $\binom{n}{d}$ d -subfamilias. De manera que alguna de ellas realiza el mínimo lexicográfico de varias $(d+1)$ -subfamilias. Haciendo la cuenta, vemos que a $\alpha \frac{\binom{n}{d+1}}{\binom{n}{d}} = \alpha \frac{n-d}{d+1}$, $(d+1)$ -subfamilias les corresponde la misma d -subfamilia \mathcal{G} . El mínimo lexicográfico de $\cap \mathcal{G}$ está contenido en al menos $d + \alpha \frac{n-d}{d+1} > \alpha \frac{n}{d+1}$ conjuntos. De manera que $\beta = \frac{\alpha}{d+1}$



El siguiente teorema afirma una proposición análoga, en vez de suponer y buscar intersecciones no vacías, suponemos y buscamos líneas transversales en el caso del plano. Lo sorprendente es que el teorema de Helly no es cierto para transversales, se necesita una hipótesis tipo Hadwiger, sin embargo el teorema de Helly fraccional para transversales sí es cierto.

Teorema 2.9 (Helly fraccional para líneas transversales) *Sea \mathcal{F} una familia de n convexos en el plano. Para toda $\alpha \in [0, 1]$ existe $\beta(\alpha) > 0$, tal que, si $\alpha \binom{n}{3}$ de las ternas tienen una línea transversal a los tres convexos de la terna entonces existe una subfamilia $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tal que \mathcal{G} tiene una línea transversal, con $|\mathcal{G}| \geq \beta n$*

Prueba.

Esta prueba utiliza fuertemente el teorema anterior. Partiremos la prueba en dos casos, dependiendo del número de parejas que se intersectan.

Caso 1) Al menos $\frac{\alpha}{7} \binom{n}{2}$ parejas de convexos se intersectan. Si proyectamos todos los conjuntos en el eje x . Obtenemos una familia de intervalos en la que $\frac{\alpha}{7} \binom{n}{2}$ parejas se intersectan, por el teorema fraccional de Helly eso implica que, al menos, $n \frac{\alpha}{14}$ intervalos tienen intersección no vacía, lo que se traduce en que $n \frac{\alpha}{14}$ de los convexos estén intersectados por la misma línea vertical. Caso 2) A lo más $\frac{\alpha}{7} \binom{n}{2}$ parejas de convexos se intersectan. Consideremos el conjunto de ternas que no tienen una pareja intersectante pero sí tienen una línea transversal. A lo más hay $n \frac{\alpha}{7} \binom{n}{2}$ ternas con una pareja intersectante, o sea que al menos hay $\frac{\alpha}{2} \binom{n}{3}$ ternas disjuntas con una línea transversal. Cualquiera de estas ternas tiene una línea transversal que además es tangente a dos convexos de la terna. Para ver esto tomamos una línea transversal y la movemos en cualquier dirección sin que cambie de pendiente, hasta el momento en que toque la frontera de alguno de los convexos, llamémosle A a ese convexo. Después la rotamos sobre la frontera de A de tal suerte que no deje de ser tangente a A , hasta que sea tangente a algún otro de los convexos, llamemos A' a este otro convexo. Para cada terna de convexos encontramos A, A' y la línea tangente que tienen en común l . De esta manera obtenemos un conjunto L formado por parejas $(l, \{A, A'\})$. Como dos convexos disjuntos en el plano tienen exactamente 4 tangentes en común, entonces $|L| \leq 4 \binom{n}{2}$. Como aseguramos $\frac{\alpha}{2} \binom{n}{3}$ ternas disjuntas con una línea transversal, alguna $(l, \{A, A'\})$ aparece en al menos δn de las buenas ternas, con $\delta > 0$. Cada una de estas δn ternas tiene la misma $(l, \{A, A'\})$. Esa línea es transversal a δn convexos. La cuenta da $\delta = \frac{1}{24}$.



El texto clásico en estos temas es [DaGrK163]. El texto más completo y actual que conozco al respecto de convexidad combinatoria y geometría discreta es [Mat02]. Para una introducción general a convexidad vease [Mon98].

Capítulo 3

Erdős-Szekeres

No estamos hechos más que de muchas cosas que nos ignoran

Paul Valery

3.1. Un problema combinatorio en geometría

Hacia 1935 en Hungría, Esther Klein, observó que en cualquier conjunto de cinco puntos en el plano, siempre hay cuatro en posición convexa.

La demostración es sencilla, si el casco convexo tiene cuatro o cinco puntos en la frontera, la observación es trivial.

De lo contrario hay tres en la frontera y los otros dos en el interior del triángulo

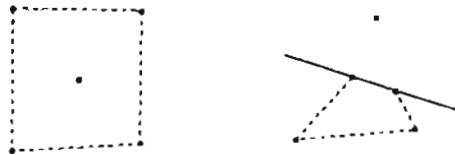


Figura 3.1: En cinco puntos en posición general en el plano siempre hay cuatro en posición convexa.

que los tres de la frontera forman. La recta que pasa por estos dos puntos interiores divide al plano en dos semiplanos, en uno de estos dos semiplanos hay dos puntos de los del triángulo, esos dos junto con los dos del interior forman un cuadrilátero convexo. Después de dar la prueba anterior, Esther Klein se preguntó si dicha observación era un caso particular de un hecho general, es decir, *en cualquier conjunto de muchísimos puntos, ¿habrá muchos en posición convexa?*

Definición 3.1 Decimos que n puntos están en posición convexa si ningún punto está en el casco convexo de los otros $n - 1$, en el plano equivale a decir que son los vértices de un n -ágono convexo.

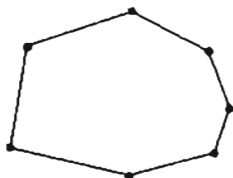


Figura 3.2: Un conjunto de puntos en posición convexa

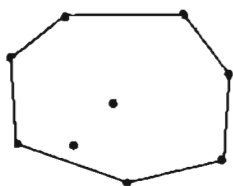


Figura 3.3: Un conjunto de puntos que no está en posición convexa

¿Existirá una función $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que, en cualquier conjunto de más de $N(n)$ puntos hay n en posición convexa?

O de otra manera ¿existen configuraciones de puntos en el plano arbitrariamente grandes con la propiedad de que cualquier subconfiguración de n puntos, no esté en posición convexa? La respuesta es sí, con la definición de estar en posición convexa que se dió sí existen configuraciones arbitrariamente grandes sin ninguna subconfiguración de tres puntos en posición convexa, basta colocar todos los puntos en una recta, sin embargo, uno siente que le están haciendo un poco de trampa porque entonces esa infinidad de puntos esta en la recta y no en el plano, por lo cual se antoja reformular la pregunta: ¿Existirá una función $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que en cualquier conjunto de más de $N(n)$ puntos en *posición general* hay n en posición convexa?

Esta vez, es fácil convencerse de que, en efecto, existe dicha función. Sin embargo, entre convencerse de una verdad matemática y probarla, muchas veces hay caminos oscuros. Esther Klein se dió cuenta de que este era uno de esos casos en los que la mente se estira tratando de argumentar pero en el juego del quehacer matemático no se vale hacer llamados al sentido común.

Así que Esther Klein comunicó el problema a Paul Erdős y a Gyorge Szekeres. En unas semanas, tenían dos pruebas distintas.

Una de las pruebas, la de Szekeres, usa el teoremita de Esther Klein como base de inducción y el teorema de Ramsey junto con un corolario del teorema de Caratheodory como prueba del paso inductivo. La otra, la de Erdős usa una afirmación tipo Ramsey para sucesiones; primero convierte el problema de configuraciones de puntos en un problema de sucesiones y en ese contexto utiliza una observación geométrica. Ambas dan

la demostración de la existencia de la función a partir de una cota superior.

Como se discutió en el primer capítulo, en los problemas tipo Ramsey, el primer problema es determinar la existencia de la función, y el segundo es determinar cuál es dicha función.

El ingenioso método para resultados tipo Ramsey para sucesiones que Erdős inventó, da una mucho mejor cota que la de Szekeres.

Szekeres no conocía el teorema de Ramsey y para probar la existencia de la función $N(n)$ lo redescubrió. La prueba de Szekeres del teorema de Ramsey es la misma que presentamos en el capítulo 1. Esta prueba tiene a favor su belleza y mejora notablemente la cota de Ramsey. Pero afirmo que su mayor importancia es de carácter histórico. Ramsey descubrió su teorema desde un contexto lógico conjuntista, Szekeres redescubrió el teorema de Ramsey desde un contexto plenamente combinatorio y con eso abrió una subrama de las matemáticas. Si bien Schur, Van der Waerden y Ramsey fueron los primeros en hacerse preguntas y probar teoremas de la así llamada *Teoría de Ramsey*, Erdős fue el responsable de popularizar, encontrar resultados y hacer preguntas que llevaron a la comunidad matemática a una masa crítica de conocimientos que hacen justo el título de *Teoría de Ramsey*. En [GraNes02] Nešetřil y Graham ilustran lo fundamental que fue para el trabajo combinatorio de Erdős este primer encuentro con el teorema de Ramsey (este encuentro fue con la prueba de Szekeres). Su tesis es que los problemas tipo Ramsey fueron la brújula en el trabajo combinatorio de Erdős y por tanto en el desarrollo de la combinatoria moderna.

Después de la publicación de *A combinatorial problem in geometry*, Szekeres y la señorita Klein se enamoraron y contrajeron matrimonio. De ese momento en adelante, Erdős apodaba al problema de Esther Klein, el problema del final feliz. Por alguno de los testimonios de Szekeres, sabemos que su motivación para la búsqueda de una prueba no era puramente matemática.

Gyorge Szekeres y Esther Klein murieron el domingo 28 de agosto del 2005 en su casa en Sidney, Australia. Ambos murieron de causas naturales, Esther Klein murió media hora después de Gyorge Szekeres. Ambos tenían plazas en la Universidad de Sidney.

Erdős, no lo supo instantáneamente pero él también se había enamorado, este fue su primer trabajo en combinatoria, con el tiempo sus intereses fueron pasando de la teoría de los números a la combinatoria.

Paul Erdős nació en Hungría, de familia judía. Desde muy joven se interesó por las matemáticas, publicó su primera artículo en teoría de los números a los diecinueve años. Casi toda su vida la pasó con poco dinero, cuando le dieron premios los donaba a causas nobles. Hay una biografía acerca de su vida que se titula *El hombre que amaba sólo a los números*. Nada más lejano a la realidad, amaba las matemáticas, a su madre y a los matemáticos, era un amigo y un hijo cariñoso, muchos matemáticos dicen que le deben más que sólo una carrera. Erdős era un excéntrico que llegó a trabajar hasta veinte horas diarias, dicen que sus colaboradores eran sorprendidos a altas horas de la noche

por Erdős que acababa de tener alguna idea genial. Aún así, es difícil entender como logró escribir más de 1500 artículos. Bueno, su método era ir viajando por el mundo de congreso en congreso, con dos maletas como únicas posesiones. En cada congreso trabajaba con algún o algunos matemáticos, cuando parecía que ya le habían dado a la clave del problema, les decía, ahí lo escribes, y se iba a trabajar con alguien más. Sus trabajos fueron principalmente en números y combinatoria, sin embargo, tiene resultados en las áreas más diversas, al respecto inspiró este versito:

A Conjecture both deep and profound
is whether the circle is round.
In a paper of Erdős,
Written in Kurdish
A counterexample is found

En [BaSpe98],[Boll96] hay mucho más sobre la vida de Paul Erdős.

Además de su enorme productividad, lo que hace maravillosa la vida de Paul Erdős es, su manera de ver la vida y las matemáticas. Acerca de la primera, de su manera de ver la vida, no diré mucho, desarrolló un slang personal que utilizaba siempre, en el siguiente cuadro se explican algunas de las traducciones:

epsilon	niño
jefe	mujer
esclavo	hombre
capturado	casado
liberado	divorciado
ruído	música
veneno	alcohol
molestias	posesiones
llegar	nacer
irse	morir
Sam	E.U.A.
Joe	U.R.S.S.
murió	dejó de hacer matemáticas
pobre gran viejo	Erdős de más de 55 años
muerto viviente	Erdős de más de 60 años
descubrimiento arqueológico	Erdős de más de 65 años
legalmente muerto	Erdős de más de 70 años
cuenta muerto	Erdős de más de 75 años
el fascista supremo	Dios

Decía que *un matemático es una máquina para convertir café en teoremas* y en su lápida se lee *Finally I am becoming stupider no more*. Daba conferencias, colaboraba con jóvenes y con viejos (en total más de 500 coautores) y regalaba el poco dinero que se ganaba a alguna buena causa o alguna joven promesa.

Su forma de ver las matemáticas era terrible para muchos elementos de la comunidad científica porque sus valores matemáticos eran puramente estéticos, le interesaban las ideas por su belleza y nunca persiguió formar una teoría, al contrario, dejaba que su intuición le llevara por los caminos más inciertos, por eso sus matemáticas son tan variadas y tan originales.

Su método era *prueba y luego conjetura*. Ningún otro matemático en la historia ha dejado tantos problemas abiertos como Erdős. Por cada respuesta, tenía cinco preguntas más. ¿Cómo puede no volverse loco en ese fluir amorfo de sentidos?, ¿cómo aguantar ese voltaje de creación (de espacio) sin sentido? Creo que el truco de Erdős era entender las matemáticas como una actividad teológica-religiosa.

Para Erdős la belleza matemática es un atributo divino, él creía en El Libro de Dios, el libro en el que Dios tenía las pruebas más perfectas a todas las verdades matemáticas. Alguna vez Erdős dijo, *no tienes que creer en Dios, pero tienes que creer en El Libro*.

Teorema 3.1 [Erdős Szekeres] *Existe una función $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que en cualquier conjunto de más de $N(n)$ puntos en posición general en el plano hay n en posición convexa.*

3.1.1. La prueba de Szekeres.

Prueba

$$N(n) \leq R^{(4)}(n, 5)$$

Se antoja dejar esa fórmula como prueba y dejar al lector el resto de la reflexión.

Pero como esto es una tesis, el lector lo tendrá que ver como nosotros lo vimos. Piénsese como una inducción, la base de inducción es el teorema de Esther Klein, es lo que nosotros llamamos un *bloqueador* o un *atorador*. El paso inductivo se sigue de una implicación del teorema de Caratheodory, en particular, *n puntos en el plano están en posición convexa si y solo si 4 a 4 están en posición convexa*. Así es como nos gusta pensar en el teorema de Esther Klein como un atorador, nos gusta decir que, para puntos en el plano, la propiedad de estar en posición convexa es tipo Helly para los 4-conjuntos, o dicho de otra manera; posición convexa para puntos en el plano es una propiedad 4-Helly. El resto lo hace el teorema de Ramsey. Tomemos $R^{(4)}(n, 5)$ puntos en el plano, coloreamos las cuartetos de puntos de azul si están en posición convexa, de rojo si no están en posición convexa, Ramsey nos asegura que o bien hay una 4-completa azul de n vértices o una 4-completa roja de cinco vértices; pero esto último no puede pasar porque atoramos el Ramsey con el hecho de que en cualquier quinteta de puntos hay cuatro en posición convexa, es decir en cada quinteta hay un 4-conjunto pintado de azul.



Antes de pasar a la segunda prueba, tratemos de explotar un poco más ésta. Pensemos en una clase \mathcal{S} en abstracto y pensemos que queremos probar un teorema tipo Ramsey sobre ella con cierta subclase \mathcal{S}' como la subclase bonita, será suficiente con que:

- 1) \mathcal{S}' cumpla una propiedad k -Helly.
- 2) El atorador: En todo conjunto X en \mathcal{S} de orden N , hay un subconjunto de orden r contenido en \mathcal{S}' , con $r \geq k$.

Un primer ejemplo sería tomar a \mathcal{S}' como la clase de familias de convexos en \mathbb{R}^d con intersección no vacía, y a \mathcal{S} como la clase las familias de convexos en \mathbb{R}^d con la propiedad de que cualquier r -subfamilia contiene una $(d+1)$ -subfamilia con intersección no vacía.

Otra ejemplo más natural es la generalización del teorema de Erdős-Szekeres al espacio n -dimensional. Este teorema fue probado por primera vez por Branko Grunbaum en los sesentas.

Teorema 3.2 *Existe una función $N_d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que en cualquier conjunto de más de $N_d(n)$ puntos en posición general en \mathbb{R}^d hay n en posición convexa.*

Prueba.

Por Caratheodory, posición convexa para puntos en \mathbb{R}^d es una propiedad $d+2$ -Helly. Y luego solo necesitamos un atorador, pero el teorema de Esther Klein se generaliza. *Cualquier conjunto X de $d+3$ puntos en \mathbb{R}^d contiene un subconjunto de $d+2$ puntos en posición convexa.* Como supusimos que los puntos estaban en posición general, $cc(X)$ tiene al menos $d+1$ puntos en su frontera. En caso de tener más, la afirmación es trivial, entonces supóngase que hay $d+1$ en la frontera, por lo tanto hay otros dos en el interior, Sean $a, b \in \text{int}(cc \langle X \rangle)$. Sea $Y = X \setminus \{a, b\}$, como $cc \langle Y \rangle$ es un simplejo, si tomamos $y \in \binom{Y}{d}$, $cc \langle y \rangle$ es una cara de $cc \langle Y \rangle$. Por otro lado si tomamos $W \in \binom{Y \cup \{a\}}{d+1}$ obtenemos que $cc \langle W \rangle$ es un simplejo, aún más podemos identificar naturalmente a $\binom{Y \cup \{a\}}{d+1}$ con $d+2$ simplejos, uno de ellos es $cc \langle Y \rangle$ y los otros son $d+1$ simplejos que particionan a $cc \langle Y \rangle$, y que podemos identificar naturalmenete con las caras $\binom{Y}{d}$. Como supusimos $b \in cc \langle Y \rangle$, entonces para alguna cara $y_b \in \binom{Y}{d}$ (y sólo para una por estar en posición general), $b \in cc \langle y_b \cup \{a\} \rangle$.

Podemos repetir este proceso particionando $cc \langle Y \rangle$ con $cc \langle y \cup \{b\} \rangle$ cuando y toma todos los posibles valores de $\binom{Y}{d}$. Análogamente a como encontramos y_b encontraremos y_a la cara correspondiente al simplejo de la partición que lo contiene. Por Caratheodory $y_a = y_b$ implica $a = b$ que es una contradicción. De la construcción se sigue que los conjuntos de la forma $y \cup \{a, b\}$ con $y \in \binom{Y}{d} \setminus \{y_a, y_b\}$ están en posición convexa. De hecho la generalización del teorema de Esther Klein que hemos probado dice: *Cualquier*

conjunto X de $d+3$ puntos en \mathbb{R}^d contiene $d-1$ subconjuntos de $d+2$ puntos en posición convexa.

■

Siguiendo las mismas ideas de esta prueba hay varias generalizaciones completamente combinatorias del Teorema de Erdős-Szekeres, una de Soltan para *Geometrías Convexas*[So84], otra de Lovasz y Korte para *Gredoides*[KoLov84] y la más reciente de Ricardo Strausz para *Separoides* (comunicación personal). Las tres pruebas consisten esencialmente en escoger una categoría donde la pregunta de Esther Klein tenga sentido, es decir logran definir *posición convexa* dentro de cada categoría, y después dan condiciones suficientes para que estar en posición convexa sea una propiedad *k-helly* y para que exista un atorador. En las tres generalizaciones, el problema de encontrar condiciones necesarias para que exista $f(n)$, tal que, cualquier objeto de cardinalidad $f(n)$ tenga un subobjeto de cardinalidad n en posición convexa es un problema abierto y parece bastante difícil.

En 1989 Tibor Bisztriczky y Gabor Féjes Toth dieron una generalización a cuerpos convexos en el plano, la discutiremos en otra sección pero cabe mencionar aquí que la idea de la primera prueba que ellos dieron es una bonita modificación de este argumento clásico de Szekeres.

3.1.2. Otras pruebas

Además del método de Szekeres, existen otros dos métodos para demostrar la existencia de la función $N(n)$ usando el teorema de Ramsey, ambos dan la cota $N(n) \leq R^{(3)}(n, n)$. Expondremos ambos métodos.

1) El primero es de Johnson, como el de Szekeres usa fuertemente que posición convexa para puntos en el plano es una propiedad 4-Helly y usa la siguiente coloración: la 3-arista a es azul si en el interior del casco convexo de los puntos correspondientes a a hay un número par de puntos del conjunto, y es roja si en el interior del casco convexo hay un número impar de ellos. Bastará demostrar que una completa monocromática de 4 vértices representa un conjunto de 4 puntos en posición convexa. Se hará por contradicción, supóngase que existe un conjunto de puntos, entre los cuales hay cuatro $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ tales que la paridad del número de puntos dentro de cada triángulo es la misma para los cuatro, y por otro lado supóngase que los cuatro puntos no están en posición convexa. De forma que alguno está en el casco convexo de los otros tres, sea x_1 el que está en el interior, sea a_1 el número de puntos dentro del triángulo $cc \langle x_2, x_3, x_4 \rangle$ y defínanse análogamente los otros a_i . No es difícil ver que $a_1 = a_2 + a_3 + a_4 + 1$, pero esto lleva a una contradicción por que supusimos que todos tenían la misma paridad y si a_2, a_3, a_4 son pares, entonces a_1 es impar y viceversa.

■

En el mismo espíritu de esta prueba pero muchos años antes, Erdős propuso el siguiente problema que generaliza el teorema de Erdős Szekeres. *Dada n existirá una función $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que en cualquier conjunto X de $H(n)$ puntos en el plano existe un subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ que formen un polígono convexo vacío, es decir, que estén en posición convexa y para cualquier otro punto $a \in X$ a no esté en el interior del polígono convexo, $a \notin cc < \{x_i\} >$*

Claramente $H(3) = 3$. Por un argumento similar al de Esther Klein $H(4) = 6$ y por una variación un poco más elaborada, utilizando la existencia de $N(6)$ se puede probar la existencia de $H(5)$. En 1978 Harborth probó $H(5) = 10$, luego, en 1983, Horton probó que $H(7)$ no existía, de donde se sigue que $H(n)$ no existe para $n \geq 7$, para probarlo construyó conjuntos de tamaño arbitrario sin heptágonos convexos vacíos. El problema de la existencia de $H(6)$ lleva abierto desde entonces y mucho se ha trabajado en intentar resolverlo, se sabe que de existir $H(6) \geq 27$ y al parecer la sensación general es que $H(6)$ sí existe, pero podría ser monstruoso.

2)El segundo método para probar Erdős Szekeres usando el teorema de Ramsey es de Tarsy. En los setentas Tarsy era un estudiante de licenciatura en Israel; tomaba un curso de combinatoria pero se perdió la clase en la que el maestro expuso el método de Szekeres. Cuando le pidieron la prueba en un examen, contesto usando el siguiente bonito argumento. Para cualquier ordenamiento de los puntos en el plano, dada $a = (x_i, x_j, x_k)$, $\chi(a)$ es azul si los puntos (x_i, x_j, x_k) están orientados en el sentido de las manecillas del reloj con $i < j < k$, y es rojo si están orientados contra las manecillas del reloj. (Definición 3.7) Después lo único que hay que demostrar es que si todas las triadas de un conjunto de cuatro puntos tienen la misma orientación entonces ese conjunto de cuatro puntos esta en posición convexa y volver a usar que posición convexa es una propiedad 4-Helly.

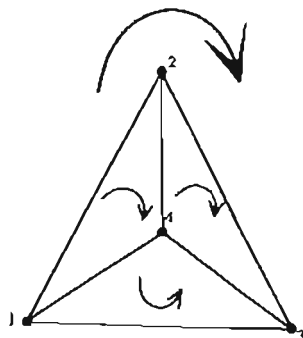
Esta prueba está íntimamente relacionada con el teorema 4.3 y con la siguiente prueba de Erdős. Profundizar en la relación entre estas dos pruebas revela hasta que punto el problema de Erdős-Szekeres es un problema geométrico y hasta que punto es un problema tipo Ramsey.



3.1.3. La Prueba de Erdős.

Erdős desarrolló un bonito método para demostrar la existencia de muchos puntos en posición convexa. En el mismo artículo, como introducción a su prueba, demostró otras dos proposiciones tipo Ramsey para sucesiones. Dejar de presentar el primero de ellos en este momento sería una falta al buen gusto.

Proposición 3.1 *En cualquier sucesión $\{a_1, a_2, \dots, a_{nm+1}\}$ de $nm + 1$ números reales,*



o bien existe una subsucesión decreciente

$$a_{i_1} > a_{i_2} > \dots > a_{i_{m+1}}$$

de $m + 1$ números reales, o una subsucesión no decreciente

$$a_{j_1} \leq a_{j_2} \leq \dots \leq a_{j_{n+1}}$$

de $n + 1$ números reales, o ambas.

Prueba.

Definimos una función que a cada elemento a_i de la sucesión le asigna la longitud de la subsucesión decreciente más larga que tiene como primer elemento a a_i . Podemos suponer que $f : \{a_i\} \rightarrow [m]$ ya que si para algún a_i , $f(a_i) \geq m + 1$, esto implicaría que existe una subsucesión decreciente de longitud $m + 1$. Por el principio de casillas, y dado que $\frac{nm+1}{m} > n$, hay al menos $n + 1$ elementos de la sucesión que tienen la misma imagen bajo f . Sean $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{n+1}}$ esos $n + 1$ elementos y sea k su imagen bajo f . Supongamos $a_{j_s} > a_{j_{s+1}}$ para alguna $s \in [n + 1]$. Como $f(a_{j_{s+1}}) = k$ en $a_{j_{s+1}}$ comienza una subsucesión decreciente de longitud k . Supusimos $a_{j_s} > a_{j_{s+1}}$ entonces a esa subsucesión le podemos agregar a_{j_s} y sigue siendo decreciente. Pero eso implica $f(a_{j_s}) = k + 1$ que es una contradicción. Entonces $a_{j_1} \leq a_{j_2} \leq \dots \leq a_{j_{n+1}}$. Es decir, existe una sucesión no decreciente de longitud $n + 1$. ■

La cota de la proposición anterior es exacta, es decir, es lo mejor posible, porque existe una sucesión de nm elementos sin ninguna subsucesión decreciente de longitud $m + 1$ ni ninguna no decreciente de longitud n , a saber,

Prueba de la cota inferior.

$$\begin{array}{cccccc}
 n & n-1 & \dots & 2 & 1 & \\
 2n & 2n-1 & \dots & n+2 & n+1 & \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \\
 mn & mn-1 & \dots & (m-1)n+2 & (m-1)n+1 &
 \end{array}$$

■

Para la prueba de Erdős al problema de Esther Klein necesitamos un par de definiciones.

Definición 3.2 Decimos que un conjunto de puntos en el plano es una k -taza, si al ordenarlos según su primera coordenada $\{a_i\}$, para cualquier terna de elementos sucesivos

$$m(a_i, a_{i+1}) \leq m(a_{i+1}, a_{i+2})$$

En donde por $m(p, p')$ denotamos la pendiente de la recta entre los puntos p y p' . Es decir, si $p = (x, y)$ y $p' = (x', y')$ entonces $m(p, p') = \frac{y-y'}{x-x'}$.

Definición 3.3 Decimos que un conjunto de puntos en el plano es una l -tapa si al ordenarlos según su primera coordenada $\{a_i\}$, para cualquier terna de elementos sucesivos

$$m(a_i, a_{i+1}) \geq m(a_{i+1}, a_{i+2})$$

Definición 3.4 Una sucesión de puntos en el plano es no degenerada si ningún par de puntos están en una línea vertical.

Nótese que estas definiciones, a diferencia de todas las demás que hemos dado, no son invariantes bajo rotaciones ni bajo reflexiones.

Erdős probó el siguiente teorema, que implica una respuesta positiva a la pregunta de Esther Klein.

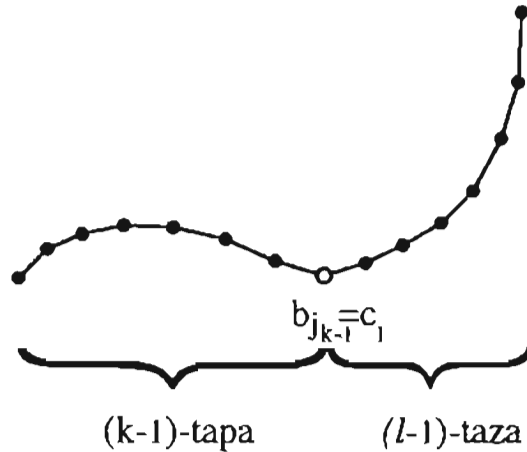
Teorema 3.3 Cualquier sucesión no degenerada de $\binom{k+l-4}{k-2} + 1$ puntos en posición general en el plano contiene una k -taza o una l -tapa.

Antes de pasar a la prueba cabe mostrar como este teorema implica el teorema de Erdős-Szekeres. Tómese cualquier conjunto de $\binom{k+l-4}{k-2} + 1$ puntos en posición general en el plano, como son un número finito de puntos inducen un número finito de líneas, entonces existe una dirección (existen muchas, tomamos cualquiera) en la que podemos ver al conjunto como una sucesión no degenerada.

Prueba.

Se hará por inducción. El teorema tiene sentido para $k, l \geq 3$. En tres puntos hay una 3-tapa o una 3-taza, dependiendo de si a_3 está por encima de $H(a_1, a_2)$, la línea que pasa simultáneamente por a_1 y por a_2 , o por debajo de ella. Por hipótesis de inducción, en los primeros $\binom{k+l-5}{k-3} + 1$ puntos hay una l -tapa o una $(k-1)$ -taza, supongamos que no hay una l -tapa, ya que si sucede lo contrario podríamos concluir la prueba. Sea $\{b_1, b_2, \dots, b_{1_{k-1}}\}$ la $(k-1)$ -taza. Intercambiando $b_{1_{k-1}}$, el último punto de esa $(k-1)$ -taza, por $a_{\binom{k+l-5}{k-3}+2}$, el siguiente punto después de los primeros $\binom{k+l-5}{k-3} + 1$, obtenemos otro subconjunto de $\binom{k+l+1}{k-3} + 1$ puntos que no contienen a $\{b_{1_i}\}$ ya que no contienen a

su último punto. Repitiendo el razonamiento, tenemos otra $(k - 1)$ -taza $\{b_{2i}\}$. Iterando este proceso hasta agotar los puntos, obtenemos $\binom{k+l-5}{k-2} + 1$ $(k - 1)$ -tazas distintas. Nos fijamos en el último punto de cada una de estas tazas, es decir, nos fijamos en el subconjunto ordenado $\{b_{j_{k-1}}\}$ con $j \in [\binom{k+l+1}{k-3} + 1]$. Por la hipótesis de inducción ese subconjunto contiene una k -taza o una $(l - 1)$ -tapa. De nuevo si sucede lo primero el teorema está probado, supongamos lo segundo, y llamemos $\{c_j\}$ a la $(l - 1)$ -tapa de puntos finales de $(k - 1)$ -tazas. De esta manera hemos asegurado la existencia de un punto (el primero de la $(l - 1)$ -tapa de puntos finales) $c_1 = b_{s_{k-1}}$ para alguna s , que es una clase de *punto de inflexión* ya que hacia su izquierda se encuentra una $(k - 1)$ -taza, y a su derecha una $(l - 1)$ -tapa, entonces podemos extender alguna de las dos. Es decir, si $m(b_{s_{k-1}}, c_1) > m(c_1, c_2)$ entonces $b_{s_{k-1}} \cup \{c_i\}$ es una l -tapa, de lo contrario $m(b_{s_{k-1}}, c_1) \leq m(c_1, c_2)$, $\{b_{s_i}\} \cup c_1$ es una k -taza. ■



En este teorema también el resultado es exacto.

Proposición 3.2 *Existe un conjunto no degenerado de $\binom{k+l-4}{k-2}$ puntos en posición general en el plano sin una k -taza ni una k -tapa.*

Prueba.

La idea de la prueba es similar a la de la cota superior. Se demostrará una vez más por inducción. Base. $k = l = 3$, evidentemente en un conjunto de dos puntos no hay una 3-taza ni una 3-tapa. De nuevo la inducción corre sobre $n = k + l$. Llamemos A al conjunto de $\binom{k+l-5}{k-3}$ puntos que no contiene una $k - 1$ -taza, ni una l -tapa. Y B al conjunto de $\binom{k+l-5}{k-2}$ puntos que no contiene una k -taza, ni una $(l - 1)$ -tapa. A partir de estos dos, daremos la construcción deseada, esencialmente uniremos una copia de A con una de B . Nótese que si multiplicamos por un escalar la segunda coordenada de

todos los puntos de un conjunto de puntos y después le aplicamos la misma traslación a todos los puntos, obtendremos un conjunto con las mismas tazas y las mismas tapas. Nótese también que una sucesión finita y no degenerada tiene una pendiente máxima. Tomamos A y colocamos una copia de B a la derecha del último punto de A , y con la suficiente altura para que la pendiente entre cualesquiera dos puntos de A y la pendiente entre cualesquiera dos puntos de B sea menor a la pendiente entre cualquier pareja de puntos que tenga un punto en A y otro en B . Dicha sucesión contiene $\binom{k+l-4}{k-2}$ puntos, y no contiene una k -tapa ni una l -tapa. Ya que de la hipótesis de inducción se sigue que si existiera una k -tapa, está tendría que tener puntos tanto en A como en B , pero si tiene más de un punto en A entonces sólo puede tener un punto en B y viceversa, por la hipótesis de inducción no hay una $(k-1)$ -tapa en A y por la construcción ninguna $(k-1)$ -tapa de B se le puede agregar un punto de A , por lo tanto, en esta unión no hay una k -tapa. El argumento para las l -tazas es completamente análogo.

■

Pareciera como si Erdős estuviera haciendo magia. En general, no se sabe como son las funciones tipo Ramsey, se conoce el comportamiento asintótico de algunos casos particulares. Aquí Erdős logró dar resultados generales tipo Ramsey que son lo mejores posibles. El secreto está en fijarse en estructuras con un orden total. De manera que en lugar de estar jugando con todas las particiones solo estamos jugando con las particiones que respetan cierta transitividad. Una forma de ver el hecho geométrico que Erdős está usando es que *n puntos están en posición conveza si y solo si existe un ordenamiento de ellos tal que todas las ternas tienen la misma orientación*, ese es el mismo hecho que usa Tarsy para su demostración, solo que Erdős además los ve como sucesiones, es decir los ordena por su primera coordenada. Ordenando por la primera coordenada, una l -tapa es un conjunto en el que todas las ternas tienen orientación positiva, y una k -tapa es un conjunto en el que todas las ternas tienen orientación negativa. La transitividad consiste en que si una l -tapa tiene dos puntos terminales que a su vez son puntos iniciales de una l' -tapa, entonces la unión es una $l+l'$ -tapa, y lo mismo pasa para las tazas. En 1971 Chvátal y Komlós [ChvKo71] notaron que la clave de estos resultados de Erdős era la monotonicidad y encontraron una bonita generalización del teorema anterior. Nos remitimos al apéndice para dar las definiciones necesarias, sin embargo como el siguiente corolario del teorema de Chvátal y Komlós se utiliza en la siguiente sección y es una generalización cristalina del teorema anterior lo enunciaremos aquí. No daremos prueba pero cabe mencionar que se puede probar calcando las pruebas del teorema anterior, o como corolario del resultado de Chvátal y Komlós (vease [ChvKo71]).

Proposición 3.3 *Dado un torneo transitivo de al menos $\binom{k+l-4}{k-2} + 1$ vértices y una función de las aristas en los reales, existe una trayectoria ordenada $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ con*

k vértices tal que la sucesión $f(v_1, v_2), f(v_2, v_3), \dots, f(x_{k-1}, x_k)$ es monótona creciente o existe una trayectoria ordenada $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ con l vértices tal que la sucesión $f(v_1, v_2), f(v_2, v_3), \dots, f(x_{l-1}, x_l)$ es estrictamente creciente.

En 1962 Erdős y Szekeres [ErSze62] utilizaron la cota inferior del su teorema para sucesiones para encontrar configuraciones de 2^{n-2} puntos en el plano sin n -ángulos convexos, desde su artículo de 1935 habían conjeturado $N(n) = 2^{n-2} + 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Existen pocos resultados que hayan mejorado la cota superior de $N(n)$ que encontró Erdős hace setenta años. Todos utilizan fuertemente la prueba de Erdős de las tazas y las tapas, la mejor cota superior es de 1998, la encontraron Pavel Valtr y Geza Toth[vato]; utilizando un argumento proyectivo lograron modificar un poco el argumento de Erdős para demostrar $N(n) \leq \binom{k+l-5}{k-3} + 2$, este resultado parcial todavía está muy lejos de la conjetura de Szekeres. Durante estos setenta años muchos matemáticos han intentado este problema de apariencia tan sencilla, eso ha generado entre otras cosas muchas generalizaciones del teorema original.

Además de los artículos citados recomendamos ampliamente [MoSo00]. En [Mat02] están las prueba de la existencia de $H(5)$ y la no existencia de $H(7)$. Para una bonita explicación de la cota inferior de $N(n)$ vease [Lov79].

3.2. Generalizaciones del Teorema de Erdős Szekeres

Como ya mencionamos existen varias generalizaciones del teorema de Erdős Szekeres. Mencionamos el problema n -dimensional, el problema de Erdős de los n -ángulos vacíos o n -agujeros, así como los tratamientos en categorías abstractas. Aquí mencionaremos dos generalizaciones más. La segunda de estas, es el tema central de esta tesis.

3.2.1. La versión fraccionada del Teorema de Erdős-Szekeres

En $N(n)$ puntos en posición general en el plano hay un n -ágono convexo, pero ¿cuántos puntos se necesitan para que haya dos, cuatro o mil? La pregunta es natural. De otra forma ¿cuántos k -ángulos convexos hay en $N(n)$ puntos?, y si además les pedimos que sean disjuntos. Imre Barany y Pavel Valtr, encontraron que además de ser muchos, los k -ángulos vienen con estructura.

Definición 3.5 *Dada una familia de conjuntos Y_1, Y_2, \dots, Y_k , un conjunto transversal T es un conjunto que consiste de un elemento de cada conjunto de la familia Y_i , es decir, $T = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, donde, $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2, \dots, y_k \in Y_k$.*

Teorema 3.4 (Erdős-Szekeres fraccionado) [BarVa98] *Para toda k existe una constante c_k tal que, en cualquier conjunto suficientemente grande de puntos en posición general en el plano X , existe una familia de subconjuntos $Y_1, Y_2, \dots, Y_k \subset X$, cada*

$|Y_i| \geq c_k |X|$. Con la propiedad de que cualquier conjunto transversal y_1, y_2, \dots, y_k , con $y_i \in Y_i$, está en posición convexa.

Para probar este teorema se utiliza el Teorema de Erdős-Szekeres y el siguiente resultado general para familias de conjuntos de puntos en cualquier espacio euclidiano, al que llaman *lema del mismo tipo de orden*. Este es un teorema tipo Ramsey para tipos de orden.

Para cada vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, denotamos con \bar{v} al vector $(v_1, v_2, \dots, v_d, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$

Definición 3.6 Dado un conjunto ordenado X de $d + 1$ vectores $\{x_1, x_2, \dots, x_{d+1}$ en \mathbb{R}^d , la orientación de X es el signo del determinante

$$\det(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_{d+1})$$

Definición 3.7 Decimos que dos colecciones de puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \subset \mathbb{R}^d$ tienen el mismo tipo de orden si los $d + 1$ -subconjuntos $\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{d+1}} \rangle$ y $\langle y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{d+1}} \rangle$ tienen la misma orientación para cualquier $d + 1$ -conjunto de índices contenido en $\{m\}$.

Teorema 3.5 (Lema del mismo tipo de orden) Para cualesquiera dos números naturales d y m , existe una constante $c(d, m) > 0$ con la siguiente propiedad. Para cualesquiera m conjuntos finitos de puntos $X_1, X_2, \dots, X_m \subset \mathbb{R}^d$ con $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m$ en posición general, podemos encontrar subconjuntos $Y_i \subset X_i$, de tal suerte que cualquier transversal de los Y_i tiene el mismo tipo de orden.

Como nuestro objetivo es el teorema fraccionado de Erdős Szekeres, solo probaremos le lema del mismo tipo de orden para dimensión 2, el lector interesado puede consultar [BarVa98] o [Mat02]. Probaremos

$$c(2, m) \geq \frac{1}{m} 2^{\binom{m}{3}}$$

Prueba del lema del mismo tipo de orden en el plano.

Podemos renombrar los conjuntos de tal suerte que existan $m + 1$ líneas paralelas l_0, l_1, \dots, l_m ordenadas en la dirección perpendicular según sus índices, tales que, entre l_{i-1} y l_i se encuentren $\frac{1}{m}|X_i|$ puntos de X_i . Sea X'_i los puntos de X_i que se encuentren entre l_{i-1} y l_i . Ahora nos olvidamos de los conjuntos originales y trabajamos con los X'_i . Tomemos cualquier terna de subconjuntos X'_r, X'_s, X'_t con $r < s < t$. La línea l_r separa a X'_r de los otros dos conjuntos. La línea l_t separa a X'_t de los otros dos conjuntos. Por el teorema de la torta de jamón existe una línea que bisecta simultáneamente a X_r y a X_t . Dicha línea define naturalmente dos semiplanos cerrados, alguno de esos semiplanos deberá contener más de la mitad de los puntos de $|X'_s|$, llamemos H^+ a ese semiplano, y H^- al otro. Si tomamos $H^+ \cap X'_s, H^- \cap X'_r$ y $H^- \cap X'_t$, obtenemos tres subconjuntos en los que cualquier transversal tiene la misma orientación.

Prueba de Erdős Szekeres fraccionado.

Tomamos $N = N(k)$, líneas verticales. l_0, l_1, \dots, l_N de izquierda a derecha, de tal suerte que entre l_{i-1} y l_i se encuentren al menos $\frac{1}{N}|X|$ puntos X , para cada $(i \in [N])$, denotemos como X_i a dichos puntos. Finalmente aplicamos el lema del mismo tipo de orden sobre los X_i obteniendo subconjuntos $Y_i \subset X_i$ tales que todas las transversales de Y_i tienen el mismo tipo de orden y $|Y_i| \geq c(2, m)|X_i|$. Si fijamos una transversal y_1, y_2, \dots, y_N y le aplicamos el teorema de Erdős Szekeres, obtendremos un k -ágono convexo $\langle y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k} \rangle$. Pero por el *lema del mismo tipo de orden* cualquier transversal de los Y_i , está en posición convexa.

3.2.2. Erdős-Szekeres para cuerpos convexos

En convexidad hay muchos teoremas que consisten en generalizar un hecho conocido sustituyendo puntos por cuerpos convexos. En esta tesis trabajamos en una generalización de este tipo para el teorema de Erdős-Szekeres. ¿Será que en un conjunto de muchísimos cuerpos convexos en el plano hay muchos de ellos en posición convexa? Tibor Bisztriczky y Gabor Féjes Toth en su artículo *A generalization of the Erdős-Szekeres convex n -gon theorem*[BisFeT89] fueron los primeros en encontrar una generalización en este espíritu. Ellos comenzaron trabajando con familias disjuntas de convexos, es decir, familias para las que ninguna pareja de convexos se intersecta. La prueba de Tibor Bisztriczky y Gabor Féjes Toth da una cota teórica, extremadamente grande. Unos diez años más tarde Janos Pach y Geza Toth [PaTo98] inspirados en técnicas del segundo artículo de Bisztriczky y Féjes Toth [BisFeT90] dieron las primeras cotas decentes. En otro artículo, Pach y Toth [PaTo99] demuestran que no hace falta pedirle a la familia que sea disjunta, basta con una condición topológica mucho más débil. Daremos una exposición superficial del método del primer artículo de Bisztriczky y Féjes Toth, y luego daremos una exposición detallada de la prueba de Pach y Toth para familias disjuntas.

Lo primero es preguntarse. ¿Qué significa estar en posición convexa para familias de convexos?

Definición 3.8 Decimos que una familia \mathcal{F} de subconjuntos de \mathbb{R}^d están en posición convexa si

$$\text{para todo } A \in \mathcal{F} \quad cc \langle \mathcal{F} \rangle \neq cc \langle \mathcal{F} \setminus A \rangle$$

Lo más natural era intentar imitar alguna de las pruebas para puntos. Lo más natural era imitar la prueba de Szekeres de Erdős-Szekeres (Teorema 3.1). lo primero que necesitamos es un atorador. El teorema de Esther Klein se generaliza naturalmente a



Figura 3.4: Una familia que no está en posición convexa



Figura 3.5: Una familia que está en posición convexa

cuerpos convexos siempre y cuando se traduzca bien la hipótesis de posición general para cuerpos convexos.

Definición 3.9 Decimos que una familia \mathcal{F} de subconjuntos de \mathbb{R}^d están en posición general si cualquier terna está en posición convexa y para ninguna terna $\{A, B, C\}$ existe una línea que sea tangente a A , a B , a C , y a $cc \langle A, B, C \rangle$



Figura 3.6: Estas ternas están prohibidas



Figura 3.7: Tangente común a A, B, C y a $cc \langle A, B, C \rangle$

Con esa definición, hace falta una muy leve modificación a la prueba de Esther Klein, para obtener la generalización, es decir; *en cualquier familia disjunta de cinco convexos en posición general en el plano hay cuatro en posición convexa.*

Podemos volver a aplicar el teorema de Ramsey como Szekeres y obtendremos familias de convexos cuyas subfamilias de cuatro elementos están en posición convexa. El

único problema es que estar en posición convexa para convexos no es 4-Helly, ya que el teorema de Caratheodory no se generaliza a convexos. Aún más, la propiedad de estar en posición convexa, en el caso de los cuerpos convexos no es k -Helly para ninguna k .

La observación anterior hace naturales las siguientes definiciones

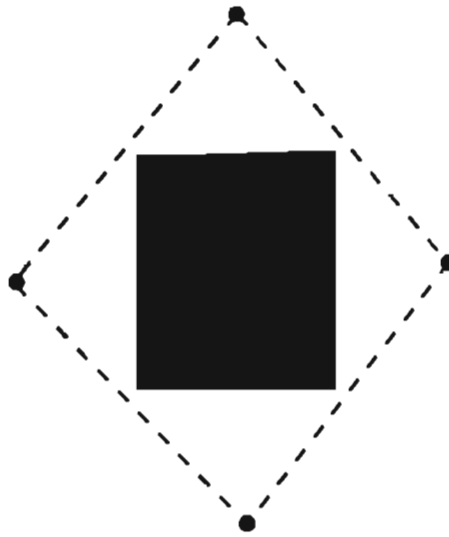


Figura 3.8: No es 4-Helly

Definición 3.10 Decimos que una familia de conjuntos en el plano tienen la propiedad \mathfrak{P}_k si cada k -subconjunto está en posición convexa.

Definición 3.11 Decimos que una familia de conjuntos en el plano tienen la propiedad \mathfrak{P}^n si ningún n -subconjunto está en posición convexa.

Diremos que una familia cumple la propiedad \mathfrak{P}_k^n si tiene la propiedad \mathfrak{P}_k y la propiedad \mathfrak{P}^n simultáneamente. Definimos $P_k(n)$ como el máximo número de cuerpos convexos disjuntos que puede tener una familia de convexos que tenga la propiedad \mathfrak{P}_k^n . Nótese que la existencia de la función $P_3(n)$ es el análogo del teorema de Erdős Szekeres para cuerpos convexos. Pero el problema para cuerpos convexos es mucho más rico. Nótese que la definición de $P_k(n)$ es distinta de las definiciones de funciones tipo Ramsey que hemos usado en el resto de esta tesis. En el resto de la tesis definíamos una función tipo Ramsey como el *mínimo* número natural $f(n)$ tal que cualquier estructura con al menos $f(n)$ elementos tenía una subestructura regular de n elementos. En este caso buscamos el *máximo* número que puede tener una estructura sin tener una subestructura regular. Nótese también que demostrar la existencia de $P_3(n)$ implica la existencia de $P_k(n)$ para toda $k \geq 3$, ya que claramente,

$$P_k(n) \leq P_m(n) \iff k \geq m$$

Utilizando el siguiente lema, cuya prueba no es difícil, se puede utilizar el teorema de Ramsey de manera un poco más enredada.

Lema 3.1 *Para familias disjuntas de cuerpos convexos se cumple la siguiente igualdad*
 $P_{n-1}(n) = n + 1$

Teorema 3.6 [BisFeT89] *La función $P_3(n)$ existe para familias disjuntas de cuerpos convexos*

Prueba.

Probaremos por inducción que $P_3(n) \leq R^{n-1}(P_3(n-1) + 1, n + 1)$. Como base tenemos $P_3(3) = 3$, o la generalización del teorema de Esther Klein. Supongamos por hipótesis de inducción la existencia de $P_3(n-1)$. Coloreamos todas los $(n-1)$ -subconjuntos de azul si están en posición convexa, y de rojo de lo contrario, por el teorema de Ramsey y en virtud de que podemos utilizar la hipótesis de inducción como atorador, es decir, como cualquier familia disjunta de $P_3(n-1) + 1$ convexos en posición general contiene una $(n-1)$ -subfamilia en posición convexa, no podríamos haber coloreado todas las $(n-1)$ -subfamilias de azul. Entonces podemos concluir que hay una familia de $n + 1$ convexos cuyas $(n-1)$ -subfamilias están en posición convexa, pero por el lema anterior obtenemos una n -subfamilia en posición convexa. ■

No profundizaré en mejores cotas para $P_k(n)$ cuando $k \neq 3$, cabe volver a mencionar que la idea que utilizaron Bisztriczky y FÉJES Toth [BisFeT90] en su segundo artículo fue encontrar familias grandes con una línea transversal, y utilizar el orden inducido por esa línea para argumentar subfamilias grandes en posición convexa, el siguiente resultado de Pach y Toth [PaTo98] utiliza fuertemente esta idea, junto con una ingeniosa variación.

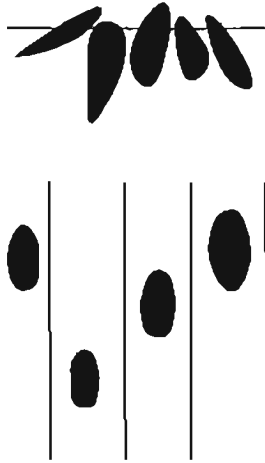
Teorema 3.7 [PaTo98]

$$P_3(n) < \binom{2n-4}{n-2}^2$$

La prueba consiste de la aplicación sucesiva de un par de lemas, esencialmente se trata de jugar con los convexos para poder aplicar las tapas y las tazas.

Lema 3.2 *Sea \mathcal{F} una familia de más de $\binom{2n-4}{n-2}$ cuerpos convexos en el plano, que satisfagan la propiedad \mathfrak{P}_3 y al menos una de las siguientes dos condiciones:*

- i) *Cualesquiera dos miembros de la familia pueden ser separados por una línea vertical.*
- ii) *Existe una línea vertical que intersecta a todos los miembros de \mathcal{F} . Entonces \mathcal{F} tiene una subfamilia \mathcal{G} de n cuerpos convexos en posición convexa.*



Prueba del lema.

Ordenaremos los convexos horizontalmente. Si *i*) por su proyección ortogonal, ya que sus proyecciones ortogonales están separadas. Si *ii*) por sus intersecciones con la línea transversal vertical.

Para cada pareja de cuerpos convexos disjuntos X_i, X_j hay dos líneas que son simultáneamente tangentes a X_i a X_j y a $cc < X_i, X_j >$ Sean p_i, p_j y q_i, q_j los puntos de tangencia entre dichas líneas y X_i, X_j respectivamente, de forma que $p_i, q_i \in X_i$ y $p_j, q_j \in X_j$. Si *ii*) giramos todo $\frac{\pi}{2}$ en contra de las manecillas del reloj y hacemos la traslación necesaria para que la línea transversal sea el eje de las x . Podemos distinguir las tangentes de arriba y las de abajo por la distancia de la intersección con el eje x a las proyecciones ortogonales al mismo, excepto si las líneas son paralelas al eje x en cuyo caso la de abajo es la que tenga menor coordenada en el eje y .

De manera que podemos hablar de la tangente de arriba y la tangente de abajo para cualquier pareja de cuerpos convexos de la familia. Sea $f(i, j)$ el ángulo que hace la tangente de arriba de X_i, X_j con el eje x . Sea $g(i, j)$ el ángulo que hace la tangente de abajo de X_i, X_j con el eje x . Por la propiedad \mathfrak{P}_3 tenemos $f(i, j) \leq f(j, k)$ implica $g(i, j) \leq g(j, k)$, y con eso nos basta para hacer tazas y tapas. Definimos un torneo transitivo de al menos $\binom{2n-4}{n-2} + 1$ donde para todo $i < j$, la arista (x_i, x_j) va dirigida de x_i a x_j . Asignándole $f(i, j)$ a la arista (x_i, x_j) , obtenemos un torneo transitivo con una función real definida sobre sus aristas. Por la generalización de Chvátal y Komlos [ChvKo71] al teorema de las tazas y las tapas existe una trayectoria dirigida $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\}$ con

$$f(x_{i_1}, x_{i_2}) \leq f(x_{i_2}, x_{i_3}) \leq \dots \leq f(x_{i_{n-1}}, x_{i_n})$$

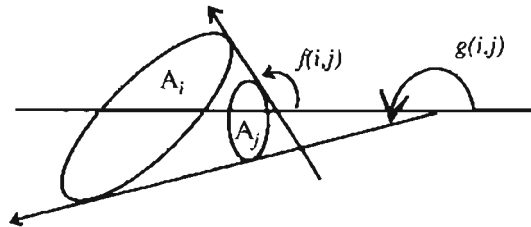
o

$$f(x_{i_1}, x_{i_2}) > f(x_{i_2}, x_{i_3}) > \dots > f(x_{i_{n-1}}, x_{i_n})$$

En cualquiera de los dos casos eso implica que los convexos asociados están en posición

convexa, ya que o bien forman una n -tapa usando la función f o forman una n -tapa usando la función g .

■



Una vez probado ese lema podemos probar el teorema.

Prueba del teorema.

Si $|\mathcal{F}| > \binom{2n-4}{n-2}^2$, proyectando en el eje de las x obtenemos una familia de intervalos, por un teorema de Gallai 4.3, utilizando el principio de casillas, hay al menos $\binom{2n-4}{n-2} + 1$ intervalos con un punto en común o al menos $\binom{2n-4}{n-2} + 1$ intervalos disjuntos. El primer caso representa una línea transversal, el segundo representa que cualesquiera dos pueden ser separados por líneas verticales paralelas, en cualquiera de los dos casos podemos aplicar el lema anterior, y con eso terminamos la prueba.

■

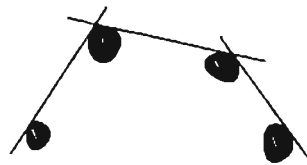


Figura 3.9: Una 4-tapa

En su siguiente artículo [PaTo99] Pach y Toth lograron dar pruebas teóricas de que en el teorema anterior, se puede sustituir la hipótesis de que la familia sea disjunta por una hipótesis más laxa.

Definición 3.12 Decimos que un convexo A , cruza a otro convexo B si $A \setminus B$ es *disconexo*

Pach y Toth demostraron lo siguiente:

1) Que la familia no se cruce y esté en posición general son condiciones suficientes y

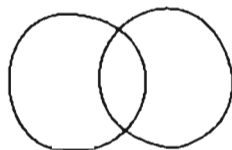


Figura 3.10: Dos convexos que se intersectan pero no se cruzan.

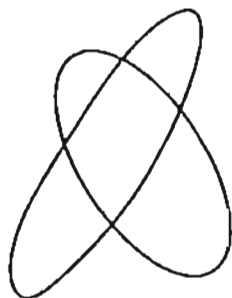


Figura 3.11: Dos convexos que se cruzan.

necesarias para que se cumpla la generalización al teorema de Erdős-Szekeres.

2) Si se permite que la familia tenga parejas de convexos que se cruzan, entonces basta pedir que la familia cumpla la propiedad \mathfrak{P}_4 para que se cumpla la generalización al teorema de Erdős-Szekeres.

Capítulo 4

Resultados y Problemas

...si el mundo avanza, no debería de girar...

Arthur Rimbaud

*You can't always get what you want
But if you try some time you just might find
You get what you need*

The Rolling Stones

4.1. Línea transversal vs. posición convexa

Nuestro objetivo fundamental era una generalización del teorema de Erdős-Szekeres que tratara de cuerpos convexos en lugar de puntos. Como ya se mencionó existía desde 1989 una generalización en ese espíritu. Gracias a nuestra inocencia, al dibujar el equivalente a la proposición de Esther Klein nos encontramos con una nueva generalización, tanto para puntos como para convexos.

Dada una familia de muchísimos cuerpos convexos en el plano, ¿habrá muchos en posición convexa o muchos por los que pasa una línea transversal?

Logramos responder la pregunta anterior afirmativamente, nótese que en los siguientes teoremas no pedimos ninguna hipótesis extra a la familia de convexos.

Teorema 4.1 *Existe una función*

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

tal que, cualquier familia de al menos $h(t, n)$ cuerpos convexos en el plano contiene t con una línea transversal o n en posición convexa.

Prueba.

Recordemos el teorema fraccional de Helly para transversales (Teorema 2.9). Para asegurar una transversal a $\beta(\alpha)N$ convexos, necesitamos que $\alpha \binom{N}{3}$ de las ternas tengan una línea transversal. Coloreamos de azul las 3-subfamilias que, o bien $cc < A, B, C > = cc < A, C >$, o bien dos de los tres elementos de la terna se intersectan. Coloreamos de rojo las 3-subfamilias disjuntas que estén en posición convexa. Aplicando el teorema de Ramsey (Teorema 1.3), obtenemos una subfamilia en la que cualesquier terna tiene una línea transversal, u obtenemos una subfamilia que cumple con las hipótesis del teorema de Bisztriczky-Féjes Toth (Teorema 3.6). Si pasa lo segundo obtenemos una subfamilia en posición convexa. Si pasa lo primero obtenemos una subfamilia con la propiedad de que una fracción $\alpha = 1$ de las ternas tiene una línea transversal. Por el teorema fraccional de Helly para transversales existe una transversal a $\beta(1)$ de ellos. Formalmente, sea $\beta(\alpha)$ como en el teorema fraccional de Helly para transversales, entonces $h(t, n) \leq R^{(3)}\left(\frac{t}{\beta(1)}, P_3(n)\right)$

■

Sin embargo, con el método anterior podemos estar "desperdiciando" muchas ternas con líneas transversales. Ya que existen ternas que están en posición convexa y tienen una línea transversal. ¿Qué está pasando?. Escencialmente lo que sucede es que la definición de posición convexa que utilizamos no es *separoidal*. Para el siguiente resultado, (hermanito del anterior), definiremos el concepto de separoide (ver [ABMOS02], [BrSt02]).

Definición 4.1 *Un separoide es una relación | definida sobre los subconjuntos de un conjunto S, denotada $A | B$ y leída A se separa de B, cuando $A, B \in S$ que además cumple:*

- 1) $A | B \Rightarrow B | A$
- 2) $A | B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
- 3) $A | B$ y $A' \subset A \Rightarrow A' | B$

En el caso de familias de cuerpos convexos decimos que dos subfamilias se separan si existe un hiperplano que deje en un semiplano a una y en el complemento a la otra y de esa manera podemos definir un separoide sobre la familia. En el caso de dos cuerpos convexos A, B sabemos que $A | B \iff A \cap B = \emptyset$. Para familias de tres convexos disjuntos, dos de ellos no se separan del tercero si y solo si los tres comparten una línea transversal.

¿Tiene sentido estar en posición convexa en el caso de los separoides?. La respuesta es que si. Le llamaremos *posición politopal* a la posición convexa separoidal.

Definición 4.2 *Decimos que un separoide sobre una familia de subconjuntos de un conjunto F es politopal si para todo $x \in F$ $x | (F \setminus \{x\})$*

Nótese que un conjunto de puntos está en posición politopal si y solo si está en posición convexa. Una familia de convexos en posición politopal esta en posición convexa, sin embargo una familia de convexos puede estar en posición convexa y no estar en posición politopal.

Lema 4.1 *Una familia de convexos \mathcal{F} está en posición convexa y ninguna terna acepta una línea transversal si, y sólo si la familia está en posición politopal.*

Prueba.

Claramente posición politopal implica posición convexa, supóngase que por $\{A, B, C\} \subset \mathcal{F}$ pasa una línea transversal, supóngase que B es el convexo de enmedio en el orden inducido por la línea. El convexo B no se separa de $\{A, C\}$ pero eso es una contradicción con que B se separe de $\mathcal{F} \setminus B$ ya que $\{A, C\} \subset (\mathcal{F} \setminus B)$.

Ahora supongamos que \mathcal{F} está en posición convexa y ninguna terna acepta una línea transversal y supongamos que para algún $B \in \mathcal{F}$ B no se separa de $\mathcal{F} \setminus \{B\}$. Hay dos casos, o bien $B \subset cc \langle \mathcal{F} \setminus \{B\} \rangle$ o B intersecta la frontera de $cc \langle \mathcal{F} \setminus \{B\} \rangle$, si sucede lo primero, la familia no está en posición convexa, si sucede lo segundo y para algún convexo $A \in \mathcal{F} \setminus \{B\}$, $A \cap B \neq \emptyset$ en cuyo caso para cualquier $C \in \mathcal{F}$ podemos encontrar una línea transversal a $\{A, B, C\}$. De manera que podemos suponer $A \cap B = \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F} \setminus \{B\}$ pero entonces para algún punto $b \in B$ podemos encontrar puntos $a \in A$ y $c \in C$ de tal suerte que b se puede escribir como combinación convexa de a y c , lo cual implica una línea transversal a $\{A, B, C\}$, por lo que podemos concluir posición politopal. ■

Teorema 4.2 *Existe una función*

$$h_{sep} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

tal que, cualquier familia de al menos $h_{sep}(t, n)$ cuerpos convexos en el plano contiene t con una línea transversal o n en posición politopal.

Prueba.

La idea es exactamente la misma que la de la prueba del teorema anterior (Teorema 4.1). Esta vez pintamos de azul las ternas si tienen una línea transversal y de rojo si no. Por el teorema de Ramsey, si la familia tiene más de $R^{(3)}(\frac{t}{\beta(1)}, P_3(n))$ convexos (Teoremas 1.3, 2.9 y 3.6). Entonces o bien existe una línea transversal a t de ellos, o (utilizando el teorema de Bisztriczky-Féjes Toth, Teorema) hay n en posición convexa con la propiedad extra de que ninguna terna tiene una línea transversal. Pero por el lema 4.1 si una familia está en posición convexa y ninguna terna tiene una línea transversal entonces la familia está en posición politopal.

■

Como corolario de este par de teoremas obtenemos sus generalizaciones a los casos n -dimensionales.

Corolario 4.1 *Existe una función*

$$h_{sep}^d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

tal que, cualquier familia de al menos $h_{sep}(t, n)$ cuerpos convexos en \mathbb{R}^d contiene t con un hiperplano transversal o n en posición politopal.

Prueba.

Probaremos

$$h_{sep}^d(t, n) \leq h_{sep}(t, n)$$

Tomamos cualquier proyección de la familia en cualquier plano. La proyección de un convexo d -dimensional, es un convexo plano. Por el teorema 4.2 podemos encontrar t convexos planos con una línea transversal o n convexos planos en posición politopal. En el primer caso la imagen inversa de esa subfamilia bajo la proyección está intersectada por el hiperplano que es la imagen inversa de la línea transversal. En el segundo caso, las líneas que separaban en el plano van a dar a hiperplanos separadores bajo la imagen inversa, de manera que también la familia original se encuentra en posición politopal.

■

No es difícil generalizar el lema 4.1 al espacio euclideo d -dimensional, por lo tanto $h^d(t, n) \leq h_{sep}^d(t, n)$ y eso prueba la existencia de $h^d(t, n)$.

Nótese que en las pruebas de los teoremas 4.2 y 4.1, no necesitábamos $\alpha = 1$ para utilizar el teorema fraccional de Helly. Pudimos haber utilizado cualquier $\alpha \in [0, 1]$ Lo que en términos del teorema de Ramsey significa que no buscamos una subgráfica completa, basta con que la subgráfica tenga cierta densidad. Para optimizar las cotas anteriores habría que resolver el siguiente problema de índole completamente combinatoria. Sean $s, t \in \mathbb{N}$ y $\rho_s, \rho_t \in [0, 1]$, definimos $R_\rho^k((s, \rho_s), (t, \rho_t))$ como el mínimo número tal que, en cualquier 2-coloración de una k -hipergráfica completa de al menos $R_\rho^k((s, \rho_s), (t, \rho_t))$ vértices podemos encontrar una subhipergráfica de s vértices entre los cuales hay $\rho_s \binom{s}{k}$ aristas azules, o t vértices entre los cuales hay $\rho_t \binom{t}{k}$ aristas rojas. La existencia de dichos números viene asegurada por el teorema de Ramsey ya que claramente $R_\rho^k((s, \rho_s), (t, \rho_t)) \leq R^k(s, t)$.

Una vez resuelto ese problema habría que buscar el mínimo de $R_\rho^k(\left(\frac{t}{\beta(\alpha)}, \alpha\right), (n, 1))$.

Por otro lado cualquier mejoría en la cota de $P_3(n)$ implica una mejor cota en $h(t, n)$ y en $h_{sep}(t, n)$, pero aunque lográramos optimizar mucho $P_3(n)$, las cotas para $h(t, n)$ y

para $h_{sep}(t, n)$ seguirían siendo muy malas. Por ello, probablemente para optimizar los resultados anteriores, no sería suficiente optimizar los resultados que estamos utilizando, hacen falta nuevas ideas.

Para terminar esta sección daremos algunas desigualdades relacionando la generalización de Bisztriczky y Féjes Toth (Teorema 3.6) con la nuestra (Teorema 4.1). Obsérvese que:

$$P_k(n) \leq P_m(n) \iff k \geq m$$

Por otro lado, claramente

$$h(3, n) = N(n),$$

y

$$h(k, n) \leq h(m, n) \iff k \geq m,$$

$$P_k(n) + 1 \leq P_m(n) + 1 \leq P_3(n) + 1 \leq N(n) = h(3, n) \leq h(k, n) \leq h(m, n) \iff k \geq m$$

Bisztriczky y Féjes Toth conjeturan que la desigualdad $P_3(n) + 1 \leq N(n)$ es en realidad una igualdad (véase 3.2.2 o [BisFeT89]).

4.2. Un Teorema tipo Hadwiger

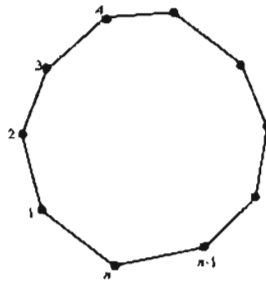
Una de las razones que hacen mucho más difícil el problema de Erdős-Szekeres para convexos que para puntos, es el hecho de que, en el caso de los convexos, estar en posición convexa no es una propiedad k -Helly para ninguna k (vease figura 3.8). Más aún, no existía ningún teorema que diera condiciones suficientes y necesarias para que una familia de cuerpos convexos estuviera en posición convexa.

La prueba de Tarsy (vease 3.1.2) del teorema de Erdős-Szekeres también utiliza el teorema de Ramsey para la parte combinatoria pero en la parte geométrica utiliza el hecho de que estar en posición convexa es una propiedad 3-Hadwiger. ¿Pero qué significa que una propiedad sea k -Hadwiger? Recordemos el teorema de Hadwiger para líneas transversales (Teorema 2.4). *Podemos asegurar una línea transversal a una familia de convexos si y sólo si, existe un ordenamiento de los convexos tal que, cualquier terna tiene una línea transversal consistente con ese orden.* Análogamente podemos pensar que una propiedad es k -Hadwiger, si la propiedad se cumple para una familia si y solo si, existe un ordenamiento de los objetos tal que cualquier k -subfamilia cumple la propiedad de manera consistente con el orden.

Regresando a nuestro problema, no es difícil ver que si un conjunto de puntos está en

posición convexa entonces acepta una indexación que induce la misma orientación en todas las ternas. De manera que decir que posición convexa sea una propiedad 3-hadwiger es una abreviación de la siguiente proposición:

Proposición 4.1 *Un conjunto de puntos está en posición convexa si y sólo si, existe una ordenación de los puntos de tal suerte que todas las ternas tienen la misma orientación.*



¿Y para cuerpos convexos? ¿Será que estar en posición convexa también es una propiedad 3-Hadwiger?

El meollo del asunto está en preguntarse ¿qué orientación tiene una terna de convexos ordenados? Y la clave para responder esta pregunta se encuentra en la topología de las ternas disjuntas de convexos en el plano.

Sea \mathcal{F} una terna de convexos en el plano. Otra vez nos saltaremos los requisitos formales necesarios para hablar de propiedades topológicas escudándonos en que las ideas son intuitivamente muy claras, se entienden de los dibujos. Los casos son los siguientes.

Caso 1) Para todo $A \in \mathcal{F}$, $cc < \mathcal{F} > \setminus A$ es homotópico a un punto. A estas ternas les llamaré *simples*

Caso 2) Existe $A \in \mathcal{F}$ tal que, $cc < \mathcal{F} > \setminus A$ es desconexo. A estas ternas les llamaré *pe-*

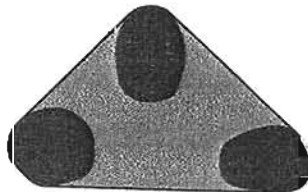


Figura 4.1: Simple (Caso 1)

Caso 3) Existe $A \in \mathcal{F}$ tal que, $cc < \mathcal{F} > \setminus A$ es homotópico a un círculo. A estas ternas

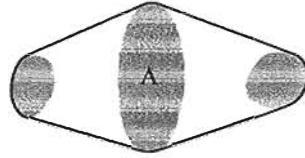


Figura 4.2: Pez (Caso 2)

les llamaré *circuitos*.

Para las ternas simples es bastante claro como definir la orientación. Sea \mathcal{F} , y supon-



Figura 4.3: Circuito (Caso 3)

gamos que esta ordenada, es decir, $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3\}$. Si una hormiga camina por la frontera de $cc < \mathcal{F} >$, desde algún punto de A_1 con el sentido de las manecillas del reloj, entonces pueden pasar dos cosas, o se encuentra primero puntos de A_2 , o se encuentra primero puntos de A_3 en el primer caso decimos que $cc < \mathcal{F} >$ *rota* como las manecillas del reloj; en el segundo caso decimos que \mathcal{F} *rota* contra las manecillas del reloj. Nótese

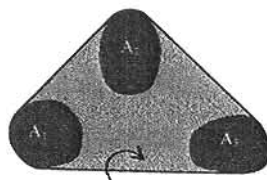


Figura 4.4: Rota como las manecillas del reloj

que en el caso de puntos rotar y tener cierta orientación es exactamente lo mismo.

Que una familia de convexos esté en posición general equivale a que ninguna de las ternas sea un circuito. Supongamos que $A_1 \subset cc < A_2, A_3 >$, entonces si queremos repetir el experimento de la hormiguita no lo vamos a lograr porque si la hormiguita está parada en A_1 entonces no está parada en la frontera de $cc < \mathcal{F} >$. Diremos que un circuito *no rota* 4.6.

Finalmente el caso complicado son los peces. Supongamos que cuando ordenamos los convexos obtuvimos que $cc < \mathcal{F} > \setminus A_1$ es desconexo, entonces dependiendo de la parte de A_1 que salga la hormiguita a caminar por la frontera de $cc < \mathcal{F} >$ se va a encontrar

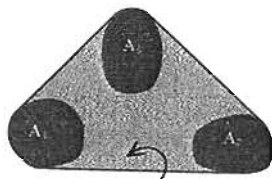


Figura 4.5: Rota contra las manecillas del reloj.

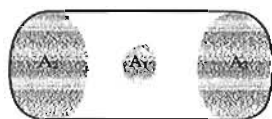


Figura 4.6: No rota

primero a A_2 o a A_3 . De manera que (no importando el orden que tengan los convexos) diremos que $cc < \mathcal{F} >$ rota hacia los dos lados. En la literatura una terna con orien-

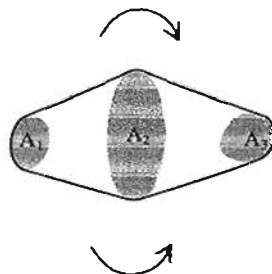


Figura 4.7: Rota hacia los dos lados

tación positiva es aquella que va contra las manecillas del reloj aunque a nosotros nos gusta más pensar en el reloj de aquí en adelante hablaremos de orientación positiva y negativa.

Conjeturamos y probamos la siguiente proposición a la que llamamos el teorema de rotación:

Teorema 4.3 *Sea \mathcal{F} una familia de convexos en el plano que no se embarran. \mathcal{F} está en posición convexa si y sólo si existe una indexación de los convexos que induce rotación positiva en cada terna.*

Nótese que una familia de convexos puede ser indexada para que cualquier terna rote positivamente si y sólo si puede ser indexada para que cualquier terna rote negativamente. Nótese también que no pedimos la misma orientación en todas las ternas ya que una terna que rota hacia los dos lados tiene distinta orientación que una que rota sólo positivamente.

Además de tener belleza propia, la proposición anterior tiene alcances teóricos muy interesantes. Por un lado nos da una nueva prueba cristalina del teorema de Bisztriczky-Féjes Toth (teorema 3.6 corolario 4.2), aplicando el razonamiento que utilizó Tarsy (sección 3.1.2) para probar el teorema de Erdős-Szekeres. Por otro lado nos acerca a la conjetura de Bisztriczky-Féjes Toth, y abre un mundo de preguntas al respecto del *tipo de orden* de una familia de convexos.

4.2.1. Tipos de orden.

El concepto de tipo de orden para puntos aparece naturalmente como un modelo abstracto que recupera la información combinatoria de un conjunto de puntos en un espacio euclidiano. Mucho se ha estudiado el modelo abstracto como objeto en si mismo; a ese modelo también se le llama *matroide orientado* (ver ?? ??). La teoría de matroides, o de espacios de independencia, es una de las principales subramas de la combinatoria. Tanto los matroides como los matroides orientados son estructuras que aceptan distintas axiomatizaciones. Se toma un conjunto X y un subconjunto de la potencia de X , de dos a cinco axiomas y comienzan a aparecer teoremas aplicables en subramas tan diversas como la teoría de las gráficas, la geometría discreta, la topología combinatoria, el álgebra lineal, etc.

No vamos a dar la definición formal de un matroide orientado; para simplificar la exposición, sólo pensaremos en tipos de orden, pero esta vez en tipos de orden abstractos. Para fijar ideas pensemos en un tipo de orden de rango $d+1$ sobre un conjunto ordenado X como un par (X, χ) . Donde X es el conjunto ordenado y χ es una función que tiene como rango los $d+1$ -subconjuntos de X .

$$\chi: \binom{X}{d+1} \rightarrow \{+, 0, -\}$$

Cabe mencionar que para que la estructura anterior sea un matroide orientado además tiene que cumplir otro requisito técnico que no voy a detallar.

Esta definición de tipo de orden abstracto coincide con la que habíamos dado de tipo de orden (vease 3.2.1) cuando $X \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto de vectores ordenados (definición 3.7), si hacemos

$$\chi(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_{d+1}}) = \text{sign}(\det(\overline{x_{i_1}}, \overline{x_{i_2}}, \overline{x_{i_3}}, \dots, \overline{x_{i_{d+1}}}))$$

donde para cada vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, $\overline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_d, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$

Un conjunto de puntos está en posición general si y sólo si la imagen de χ es solamente $\{+, -\}$. Un conjunto de puntos está en posición convexa si y sólo si para alguna indexación de los puntos la imagen de χ es constante y distinta de cero. De manera que el teorema de rotación nos hace natural considerar la estructura de tipo de orden de

una familia indexada de convexos. En el caso de que todas las ternas sean simples (ver figura 4.1) está muy claro como definir el tipo de orden de una familia de convexos, ¿y si permitimos peces o circuitos?.

Necesitamos un concepto de tipo de orden más general. Se puede definir naturalmente de dos maneras distintas, dependiendo si nos interesamos o no por la estructura de separación y las líneas transversales.

Para estudiar el problema de Erdős-Szekeres para convexos (Teorema 3.6) consideramos la siguiente estructura:

$$\chi : \binom{\mathcal{F}}{3} \rightarrow \{+, -\}$$

Donde \mathcal{F} es la familia ordenada, y χ una función multivaluada.

Si \mathcal{G} es una terna ordenada, $\chi(\mathcal{G}) = \{+\}$ o $\chi(\mathcal{G}) = \{-\}$ cuando \mathcal{G} es simple, y $\chi(\mathcal{G}) = \{+, -\}$ cuando \mathcal{G} es un pez.

Ahora bien, si dentro de nuestros intereses se encuentran las líneas transversales y el separoide de la familia de convexos, entonces me parece que lo natural es incluir familias que no están en posición general, donde χ se define como en el caso anterior salvo que para toda terna \mathcal{G} , $0 \in \chi(\mathcal{G})$ cuando \mathcal{G} tiene una línea transversal.

Regresemos por un momento a los tipos de ordenes de puntos y la teoría de matroides orientados.

Una pregunta clásica en el tema de los matroides orientados, es decidir cuando un matroide orientado es representable por un conjunto de puntos. Es decir, dado un matroide orientado M_0 , decidir si existe un conjunto de puntos X de tal suerte que $M(X)$, el matroide orientado asociado al conjunto de puntos, sea isomorfo a M_0 . Y de manera más general, cuando M_0 tiene una representación geométrica, en digráficas, familias de hiperplanos, etc.

Uno de los teoremas más importantes de la teoría de matroides orientados es que cualquier matroide orientado se puede representar geoméricamente como una familia de pseudohiperplanos.

Para saber cuando un tipo de orden abstracto de rango 3 se puede representar por un conjunto de puntos en el plano. Un primer requisito que le pediríamos al tipo de orden abstracto es que fuese un matroide orientado y después nos preguntaríamos si ese matroide orientado es representable por un conjunto de puntos. Pero he aquí el verdadero problema, se conocen infinidades de ejemplos de matroides orientados que no se pueden representar como conjuntos de puntos. No sólo son difíciles de caracterizar combinatoriamente, se conocen familias infinitas de matroides orientados arbitrariamente grandes, que son minimales con respecto a la propiedad de no ser representables por puntos, es decir, son matroides orientados no representables por puntos pero cualquiera de sus submatroides orientados sí es representable por puntos.

En lo siguiente, hablaré de problemas para familias disjuntas de convexos en posición general. No nos preocuparemos por líneas transversales ni por la estructura de separación, sin embargo cabe repetir todas estas preguntas teniendo en consideración la estructura de separación.

Llamare uniforme a una familia de convexos en el plano en la que todas sus ternas son simples.

Surgen naturalmente preguntas de representación.

Problema 4.1 *¿El tipo de orden de una familia uniforme de convexos forma un matroide orientado?*

Ezbosamos una prueba de respondiendo positivamente a esta pregunta. Más difícil será contestar a la siguiente.

Problema 4.2 *¿Habrá tipos de orden que no se pueden representar por puntos en posición general y si se pueden representar por familias uniformes de convexos?*

Responder negativamente esta pregunta equivale a demostrar que el tipo de orden de cualquier familia uniforme de convexos puede ser representada por un conjunto de puntos.

Ahora observemos este problema de representación en términos de la conjetura de Bisztriczky-Féjes Toth.

Existe un problema de representación que de ser resuelto positivamente junto con el teorema de rotación (Teorema 4.3) implica una respuesta positiva a la conjetura de Bisztriczky-Féjes Toth. Necesitamos un concepto de representación menos rígido. El siguiente es el problema de representación de convexos en puntos.

Problema 4.3 (Problema de Representación) *Sea \mathcal{F} una familia disjunta de convexos en posición general en el plano. ¿Existirán un conjunto de puntos X junto con una función biyectiva $f : \mathcal{F} \rightarrow X$ de los convexos en los puntos. Con la propiedad de que si tres puntos a, b, c son indexados para tener orientación positiva, entonces los convexos correspondientes $f^{-1}(a), f^{-1}(b), f^{-1}(c)$ con los índices correspondientes giran positivamente?*

Una respuesta positiva a éste último implica una respuesta negativa al problema 4.2. Supóngase que diéramos una respuesta positiva al problema de representación, junto con el teorema de rotación (Teorema 4.3) probaremos, $N(n) = P_3(n) + 1$. ($N(n)$ es la función de Erdős-Szekeres, teorema 3.1 y $P_3(n)$ es la función de Bisztriczky-Féjes Toth teorema 3.6.

Prueba.

Claramente $P_3 < N(n)$, ya que los puntos son cuerpos convexos.

Ahora probaremos $P_3(n) + 1 \geq N(n)$. Tómesese cualquier familia disjunta de $N(n)$ convexos en posición general en el plano. Por el problema de representación podemos encontrar un conjunto de $N(n)$ puntos con la propiedad de que si tres de ellos a, b, c son indexados para tener orientación positiva, entonces los convexos correspondientes $f^{-1}(a), f^{-1}(b), f^{-1}(c)$ con los índices correspondientes, rotan positivamente. Ahora bien, por definición de $N(n)$ existe un subconjunto de n puntos en posición convexa en el plano, si ordenamos dicho subconjunto en posición convexa, comenzando en cualquiera y caminando por la frontera de su casco convexo con orientación positiva, entonces todas las ternas de puntos tendrán orientación positiva, y por lo tanto las ternas correspondientes en la familia de convexos tendrán también orientación positiva. Pero por el teorema de rotación eso basta para concluir que esta n -subfamilia está en posición convexa. ■

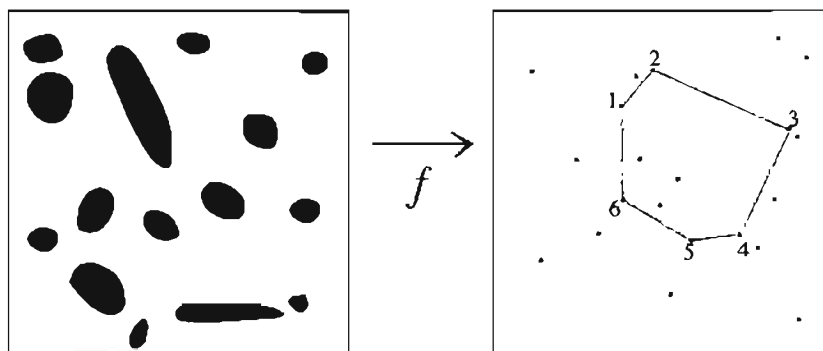


Figura 4.8: Tomamos la representación, utilizamos los teoremas 3.1 Erdős-Szekeres y 4.3 el teorema de rotación

Podría ser que la conjetura de Bisztriczky y Féjes Toth fuera cierta y el problema de representación tenga una respuesta negativa. Conjeturo que esto no es así, que el problema de representación y la conjetura de Bisztriczky y Féjes Toth son equivalentes.

De todas formas vale la pena encontrar propiedades suficientes y necesarias para que una familia de convexos se pueda representar como conjunto de puntos. Tenemos la prueba para familias de copias homotéticas, bosquejé una prueba para cuerpos centralmente simétricos, además sabemos que si nos preocupamos por la estructura de separación, entonces existen familias de convexos que no se pueden representar por puntos.

En particular si tanto las familias que se pueden separar por líneas paralelas como las familias que comparten una línea transversal se pudieran representar por puntos. Utilizando la técnica que utilizaron Pach y Toth [PaTo98] se obtendría $P_3(n) \leq (N(n) - 1)^2$. Otro método para encontrar una buena cota sería buscar un resultado fraccional, buscar que una fracción positiva de los convexos se pueda representar por puntos.

Utilizando estas ideas y la misma técnica que utilizamos en la prueba del teorema 4.2 no es difícil demostrar $h_{sep}(l, n) \leq R^3(g(l), N(n))$.

4.2.2. Prueba del teorema de rotación

Daremos la prueba del teorema de rotación 4.3. Éste me parece el resultado principal de esta tesis, necesitamos unas definiciones técnicas. Cabe mencionar que en la construcción de esta prueba nos ayudaron Emiliano Mora y Javier Bracho.

Sea H una línea dirigida en el plano. Denotamos H^+ al semiplano cerrado de los puntos a la izquierda de H (con respecto a la dirección de H). Análogamente denotamos como H^- al semiplano a la derecha de H .

Definición 4.3 Sea H una línea y A un convexo, decimos que H es soporte dirigida de A si H es soporte de A y $A \subset H^+$

Denotamos con $\mathcal{H}_{A,B}$ al conjunto de líneas que sean soportes dirigidas de A y B simultáneamente ($\mathcal{H}_{A,B} = \mathcal{H}_{B,A}$). Nos interesa el caso $|\mathcal{H}_{A,B}| = 2$. Esencialmente, esto sucede siempre que el par de convexos no se crucen. Existen otros casos degenerados, sin embargo, tenemos la impresión de que todo lo que vamos a probar aquí también es cierto para esos otros casos; para no entrar en demasiados tecnicismos nos restringiremos a los casos donde las definiciones y las pruebas son naturales.

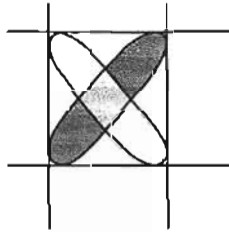


Figura 4.9: Convexos que se cruzan

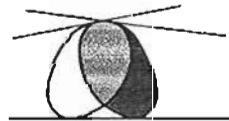
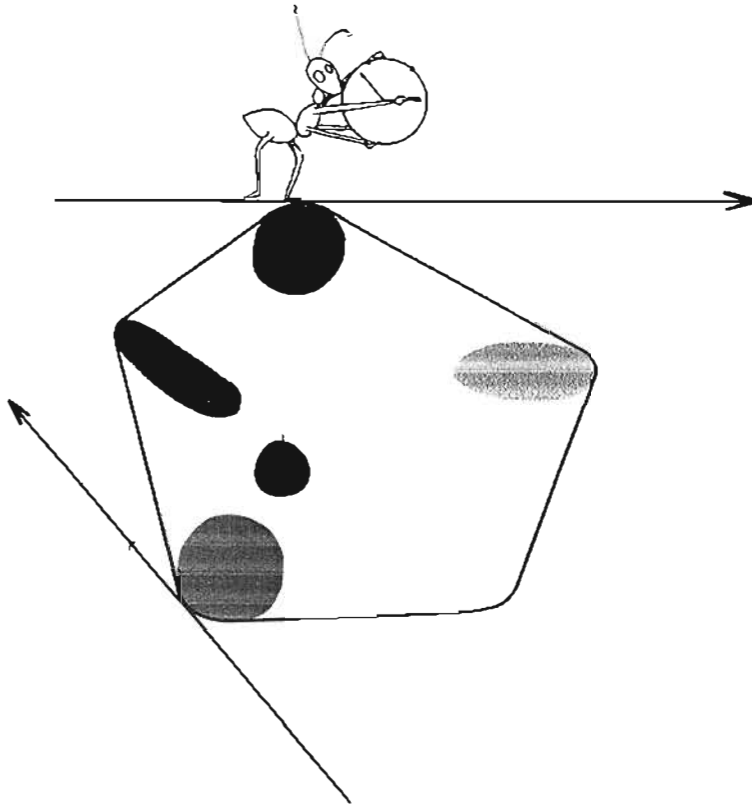


Figura 4.10: Convexos que se empujan y no se cruzan

Definición 4.4 Un par de convexos $\{A, B\}$ está empujado si $|\mathcal{H}_{A,B}| \neq 2$. Una familia de convexos está empujada, si algún par de la familia está empujado o si para alguna terna $\{A, B, C\}$ existe una línea soporte dirigida que sea tangente a los tres convexos de la terna.

Un problema clásico de convexidad afirma que dado un convexo en el plano, existe una línea soporte dirigida para cada dirección, de manera que podemos identificar las líneas soportes dirigidas de un convexo con los puntos del círculo S^1 . Dada una familia \mathcal{F} de convexos, consideramos una multicoloración χ del círculo S^1 . Sea $x \in S^1$, $A \in \chi(x)$ si la línea soporte dirigida de $cc \langle \mathcal{F} \rangle$ con dirección x es tangente a A . Es una multicoloración porque para algunos puntos, χ , es multivaluada. Con más precisión, $\chi(x)$ toma dos valores, digamos $\chi(x) = \{A, B\}$ si la línea soporte dirigida de $cc \langle \mathcal{F} \rangle$ con dirección x es también soporte dirigida de A y de B ; es decir, es una de las dos tangentes comunes a A, B y $cc \langle A, B \rangle$. Para todo lo siguiente suponemos que ninguna terna tiene una línea soporte dirigida que sea tangente a los tres convexos de la terna. De manera que $\chi(x)$ no toma tres valores para ninguna $x \in S^1$.



Los convexos están en posición convexa si y sólo si, para todo convexo $A \in \mathcal{F}$ existe un $x \in S^1$ tal que $\chi(x) = A$.

Dado un par de convexos que no se embarran, A y B , definiendo χ como antes, consideremos a S^1 orientado con respecto a las manecillas del reloj. Denotamos con $H_{A,B} \in \mathcal{H}_{A,B}$ a la línea que le corresponde al último punto $x \in S^1$ para el que $A \in \chi(x)$. Análogamen-

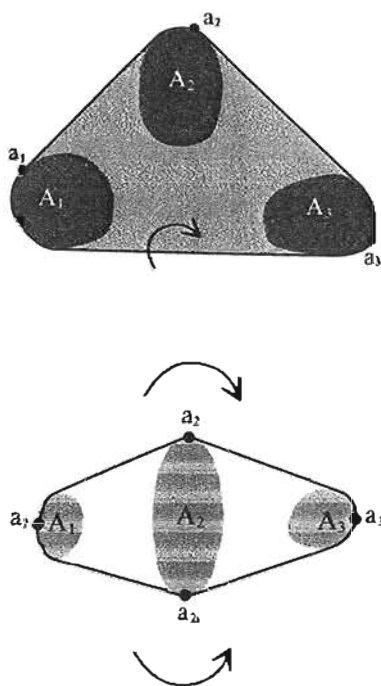
te, denotamos con $H_{B,A} \in \mathcal{H}_{A,B}$ a la última línea para la que $B \in \chi(x)$. Si los convexos están indexados A_i, A_j entonces denotamos con $H_{i,j}$ a H_{A_i,A_j} .

Si A y B no están embarrados entonces $H_{A,B}$ y $H_{B,A}$, están bien definidas, son únicas y $H_{A,B} \neq H_{B,A}$.

De aquí en adelante solo nos encargamos de familias que no se embarran.

Denotamos con $\partial(A)$ a la frontera de A

Definición 4.5 Decimos que tres convexos indexados $\{A_1, A_2, A_3\}$ en el plano, rotan positivamente (negativamente) si podemos encontrar puntos a_1, a_2, a_3 con orientación positiva (negativa) y $a_i \in A_i \cap \partial(cc \langle A_1, A_2, A_3 \rangle)$



Observación: Una terna de convexos (que no se embarran) rota hacia algún lado si y sólo si, está en posición convexa.

Partiemos en dos la prueba del teorema de rotación (Teorema 4.3) en dos proposiciones 4.2 y 4.3, primero demostraremos que:

Proposición 4.2 Una familia de convexos en posición convexa acepta una indexación en la que todas las ternas rotan positivamente.

Prueba.

Bastara encontrar, para cada convexo $A \in \mathcal{F}$ un punto en la intersección del convexo con la frontera de $cc \langle \mathcal{F} \rangle$, de tal suerte que el conjunto de puntos que seleccionamos

acepte una indexación en la que cualesquiera tres tengan orientación positiva. Tomamos $cc < \mathcal{F} >$ y χ como la definimos anteriormente. Escojamos algún punto en $x \in S^1$ para el cual $|\chi(x)| = 2$, digamos que $\chi(x) = \{A, B\}$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $B \in \chi(x')$, donde $x' \in S^1$ es un punto arbitrariamente cercano a x que se encuentra después en el círculo cuando le damos orientación positiva. Entonces podemos seleccionar $a_1 \in A \cap H_{A,B}$, $a_2 \in B \cap H_{A,B}$. Después avanzamos positivamente sobre S^1 hasta que $\chi(x) \neq \{B\}$ y $A \notin \chi(x)$, es decir hasta que $\chi(x) = \{B, C\}$ o $\chi(x) = \{A, C\}$, sea $a_3 \in C \cap H_{B,C}$ en el primer caso y $a_3 \in C \cap H_{A,C}$ en el segundo. Iteramos este proceso hasta que tengamos un punto por cada convexo. Cualquier terna de puntos con dicha indexación tiene orientación positiva ya que los puntos están en posición convexa y el proceso es equivalente a ordenar los puntos de un polígono convexo caminando por la frontera. Por lo tanto cualquier terna de convexos rota positivamente. ■

Para demostrar que si en una familia indexada cualquier terna rota positivamente, entonces, la familia está en posición convexa, necesitamos unos lemas de batalla.

Lema 4.2 *Dados tres convexos indexados A_i, A_j, A_k en el plano que no se embarran, tienen rotación positiva y no tienen rotación negativa si, y sólo si, las líneas $H_{i,j}, H_{j,k}$ y $H_{k,i}$ son líneas soporte de $cc < A_i, A_j, A_k >$, donde $i < j < k$.*

Prueba.

Podemos suponer que $i = 1, j = 2, k = 3$.

Probaremos primero que si tienen rotación positiva y no tienen rotación negativa entonces la línea $H_{1,2}$ es soporte dirigida de $cc < A_1, A_2, A_3 >$. Supongamos lo contrario; es decir, existe un punto $a_3 \in A_3 \cap H_{1,2}^-$. Además a b_3 le podemos pedir que esté en la frontera de $cc < A_1, A_2, A_3 >$. Sean $a_1 \in A_1 \cap H_{1,3}$ y $a_2 \in A_2 \cap H_{3,2}$. Los puntos $\{a_1, a_2, a_3\}$ inducen orientación negativa en la familia de convexos. Análogamente para $H_{2,3}$ y $H_{3,1}$. Ahora supongamos que $H_{1,2}, H_{2,3}$ y $H_{3,1}$ son soportes dirigidas de $cc < A_1, A_2, A_3 >$. Probaremos que entonces tienen rotación positiva y no tienen rotación negativa. Para ver que tienen rotación positiva basta tomarse $a_1 \in A_1 \cap H_{1,3}$, $a_2 \in A_2 \cap H_{3,2}$ y a_3 cualquier punto en $A_3 \cap \partial(cc < A_1, A_2, A_3 >)$ (es claro que esos conjuntos se intersectan). Ahora supongamos que hay puntos $\{b_1, b_2, b_3\}$ con orientación negativa y con $b_i \in A_i \cap \partial(cc < A_1, A_2, A_3 >)$ para cada $i \in [3]$. Consideramos los segmentos $[a_i, b_i] := \{sa_i + tb_i \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } s + t = 1\}$. Y nos fijamos en

$$\text{sign}(\det(\overline{sa_i + (1-s)b_i}, \overline{sa_i + (1-s)b_i}, \overline{sa_i + (1-s)b_i}))$$

mientras s va de 0 a 1 continuamente. Como la función determinante es continua, aplicando el teorema del valor medio podemos encontrar una $s_0 \in [0, 1]$ para la cual

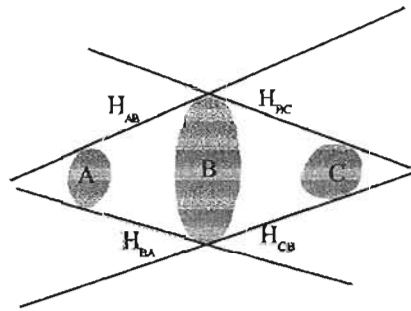
$$\det(\overline{s_0a_1 + (1-s_0)b_1}, \overline{s_0a_2 + (1-s_0)b_2}, \overline{s_0a_3 + (1-s_0)b_3}) = 0,$$

es decir, cuando $s = s_0$ los tres puntos están alineados. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $s_0 a_2 + (1 - s_0) b_2$ está en medio de los tres. Entonces el intervalo $[a_2, b_2]$ desconecta a $cc < A_1, A_2, A_3 >$; es decir, $cc < A_1, A_2, A_3 > \setminus [a_2, b_2]$ tiene dos componentes conexas, en una de ellas está $s_0 a_1 + (1 - s_0) b_1$ y en la otra $s_0 a_3 + (1 - s_0) b_3$. Pero como los convexos no se embarran entonces tampoco se cruzan, de manera que A_1 está en una componente conexas, A_3 está en la otra, y $[a_2, b_2]$ se cruza con $H_{3,1}$. Por lo que, $H_{3,1}$ no es soporte dirigida de $cc < A_1, A_2, A_3 >$, y con eso concluimos el lema. ■

Definición 4.6 Decimos que una familia de convexos \mathcal{F} es un k -pez si está en posición general, $|\mathcal{F}| = k$ y para algún elemento $A \in \mathcal{F}$, $cc < \mathcal{F} > \setminus A$ es desconexo. Al convexo A (el convexo que desconecta) le llamamos la panza de \mathcal{F}

Nótese que la panza de un pez no necesariamente es única, salvo en el caso de los 3-peces.

Observacion: Dado un 3-pez $\{A, B, C\}$, con panza B , tenemos que, $H_{A,B}, H_{B,C}, H_{C,B}$ y $H_{B,A}$



son líneas soporte de $cc < A, B, C >$

Lema 4.3 Tres convexos indexados en el plano $\{A_i, A_j, A_k\}$ son un pez si, y sólo si, tienen tanto rotación positiva como negativa.

Prueba.

Como estamos trabajando en un orden cíclico podemos suponer sin pérdida de generalidad que A_2 es la panza del pez. $A_2 \cap \partial(cc < A_1, A_2, A_3 >)$ tiene dos componentes conexas, tomamos a_2 cualquier punto en una de las componentes y b_2 cualquier punto en la otra componente, tomamos $a_1 \in A_1 \cap \partial(cc < A_1, A_2, A_3 >)$, $a_3 \in A_3 \cap \partial(cc < A_1, A_2, A_3 >)$. Las ternas $\{a_1, a_2, a_3\}$ y $\{a_1, b_2, a_3\}$ tienen distintas orientaciones, ya que de lo contrario H_{a_1, a_3} dejaría del mismo lado a a_2 y a b_2 pero entonces $[a_2, b_2]$ no cruza a $cc < A_1, A_2, A_3 >$. Sin embargo, lo construimos para que ese fuera el caso. Si tiene rotación positiva, podemos encontrar $a_i, b_i \in A_i \cap \partial(cc < A_1, A_2, A_3 >)$ con $i \in [3]$ de tal suerte que $\{a_1, a_2, a_3\}$ tiene orientación positiva y $\{b_1, b_2, b_3\}$ con orientación negativa. Por un argumento análogo al segundo que utilizamos en el lema anterior podemos concluir este lema.

■

La prueba general del teorema se puede reducir a dos casos, cuando la familia es pez y cuando la familia no es un pez. Para el segundo caso necesitamos los siguientes conceptos.

Definición 4.7 Decimos que un 3-pez dentro de una familia indexada está bien ordenado si dos de los convexos son consecutivos en la indexación, implica que alguno de esos dos es la panza

Observacion: Si un pez $\{A_{i-1}, A_i, A_{i+1}\}$ consiste de tres convexos con índices consecutivos, está bien ordenado si y solo si A_i es la panza.

Definición 4.8 La diadema de un pez \mathcal{P} contenido en una familia \mathcal{F} , es una subfamilia de \mathcal{F} , denotada $\Omega_{\mathcal{F}}(\mathcal{P})$, con $P \subset \Omega(\mathcal{P})$, que no es un pez y es minimal con respecto a esa propiedad, es decir, para todo $A \in \Omega(\mathcal{P}) \setminus P$, $\Omega(\mathcal{P}) \setminus A$ es un pez.

Observacion: $\Omega_{\mathcal{F}}(\mathcal{P})$ existe si, y sólo si \mathcal{F} no es un pez. Para simplificar la notación denotaremos a $\Omega_{\mathcal{F}}(\mathcal{P})$ como $\Omega(\mathcal{P})$.

Ahora si estamos listos para probar el otro lado del teorema tipo Hadwiger para convexos en posición convexa. La volvemos a enunciar:

Proposición 4.3 Sea \mathcal{F} una familia de convexos indexados. Si cualquier terna ordenada lexicográficamente rota positivamente entonces la familia está en posición convexa.

Prueba del teorema de rotación.

Se hará en dos casos

Primer Caso. \mathcal{F} es un pez. Se hará por inducción sobre el número de convexos.

Base $n=3$. Si tres convexos rotan, por definición están en posición convexa.

Hipótesis de inducción. Suponemos que para cualquier familia indexada de $k \leq n$ convexos en el plano, si cualquier terna rota positivamente entonces la familia está en posición convexa.

Ahora suponemos que la familia tiene $n + 1$ convexos indexados, de tal suerte que cualquier terna rota positivamente y demostramos que están en posición convexa. Sea I el conjunto de índices con los que \mathcal{F} está etiquetada. Supongamos $A_{n+1} \subset cc \langle \mathcal{F} \setminus A_{n+1} \rangle$. Es decir, existe $J \subset I$, con $n + 1 \notin J$, tal que, para todo $a \in A_{n+1}$, $a = \sum_{j \in J} \lambda_j a_j$ con $a_j \in A_j$, con $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$ Podemos suponer que es justamente A_{n+1} porque las hipótesis del problema se mantienen invariantes bajo la acción de \mathbb{Z}_{n+1} en el conjunto de índices. Sea A_k la panza de \mathcal{F} , por la definición de panza $n + 1 \neq k$. $cc \langle \mathcal{F} \rangle \setminus A_k$ tiene m componentes conexas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, sea $\mathcal{G}_i = \{\mathcal{F} \cap \alpha_i\} \cup \{A_k\}$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que A_{n+1} está en la componente conexa α_1 , podemos suponer que está completamente contenida en una componente conexa ya que de lo contrario

A_{n+1} y A_k se cruzan. Probaremos $A_{n+1} \subset cc \langle \mathcal{G}_1 \rangle$. Sea $a \in A_{n+1}$. Por hipótesis $a = \sum_{j \in J} \lambda_j a_j$. Supongamos que para alguna j , $A_j \notin \mathcal{G}_1$ podemos tomar $b_j \in [a_j, a] \cap A_k$ y despejando a a_j , en $b_j \in A_k$ y $a \in A_{n+1}$, podemos reescribir la ecuación $a = \sum_{j \in J} \lambda_j a_j$ como $a = \sum_{j \in J'} \lambda'_j a_j$. De nuevo con $\sum_{j \in J'} \lambda'_j = 1$ pero esta vez con $A_j \in \mathcal{G}_1$. Ahora bien, por hipótesis de inducción, la familia $\mathcal{G}_1 \cup \{A_{n+1}\}$ está en posición convexa ya que $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}_1| > 0$ por \mathcal{F} ser pez.

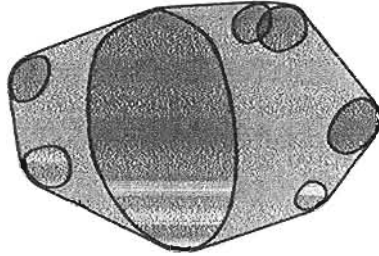


Figura 4.11: Primer Caso

Segundo Caso. \mathcal{F} no es un pez. Esta vez probaremos algo un poco más fuerte. Si \mathcal{F} no es un pez entonces, para toda $i \in I$, $H_{i,i+1}$ es soporte dirigido de $cc \langle \mathcal{F} \rangle$. Claramente eso implica que \mathcal{F} está en posición convexa. De nuevo haremos esta prueba por inducción. Base, $n = 3$ una terna no es un pez y rota positivamente entonces no rota negativamente, por el lema 4.2 concluimos el resultado. Hipotesis de inducción. Suponemos que para toda familia indexada de a lo más n convexos ($|\mathcal{F}| = k \leq n$) si todas las ternas de \mathcal{F} rotan positivamente y \mathcal{F} no es un pez entonces cualquier línea de la forma $H_{i,i+1}$ es soporte dirigida de $cc \langle \mathcal{F} \rangle$

Ahora demostraremos el resultado para cualquier familia indexada \mathcal{F} de $n+1$ convexos. Tomemos cualesquiera $i, j \in [n+1]$, demostraremos que $A_j \subset H_{i,i+1}^+$. Tenemos dos subcasos, si $\{A_i, A_{i+1}, A_j\}$ no es un pez y si $\{A_i, A_{i+1}, A_j\}$ es un pez.

Primer subcaso. La terna $\{A_i, A_{i+1}, A_j\}$ no es un pez, por el lema 4.2 $A_j \subset H_{i,i+1}^+$.

Segundo subcaso. La terna $\{A_i, A_{i+1}, A_j\}$ es un pez. Llamemos \mathcal{P} a la terna $\{A_i, A_{i+1}, A_j\}$, bastara mostrar que \mathcal{P} está bien ordenado, ya que eso implicaría también $A_j \subset H_{i,i+1}^+$.

Ahora demostraremos que dado un 3-pez \mathcal{P} contenido en una familia \mathcal{F} que no es un pez, si todas las ternas de \mathcal{F} rotan positivamente entonces \mathcal{P} está bien ordenado.

Si $\Omega(\mathcal{P}) \neq \mathcal{F}$ entonces por hipótesis de inducción sobre $\Omega(\mathcal{P})$ toda línea de la forma $H_{i,i+1}$ es soporte dirigida de $cc \langle \Omega(\mathcal{P}) \rangle$, en particular $A_j \subset H_{i,i+1}^+$ por lo que \mathcal{P} está bien ordenado.

Sólo nos falta el caso $\Omega(\mathcal{P}) = \mathcal{F}$. Por hipótesis de inducción $\Omega(\mathcal{P}) \setminus A_j$ está en posición convexa. Supongase que $\Omega(\mathcal{P}) \setminus A_j$ no es un pez, por lo que $H_{i,i+1}$ es soporte de $cc \langle \Omega(\mathcal{P}) \setminus A_j \rangle$ por lo que $A_j \subset H_{i,i+1}^+$ o en su defecto A_j no está contenido en $cc \langle \Omega(\mathcal{P}) \setminus A_j \rangle$. Ahora supongase que $\Omega(\mathcal{P}) \setminus A_j$ es un pez, entonces para alguna

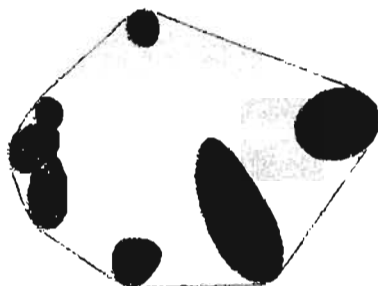


Figura 4.12: Segundo Caso

dirección $x \in S^1$ $A_j \in \chi(x)$ ya que $\Omega(\mathcal{P})$ por definición no es un pez. Ahora bien si $X \in \Omega(\mathcal{P}) \setminus \mathcal{P}$ y $X \subset cc < \Omega(\mathcal{P}) \setminus X >$ entonces $cc < \Omega(\mathcal{P}) \setminus X > = cc < \Omega(\mathcal{P}) >$ y si $cc < \Omega(\mathcal{P}) > \setminus A_j$ es disconexo, entonces $cc < \Omega(\mathcal{P}) \setminus X > \setminus A_j$ y entonces $\Omega(\mathcal{P})$ no es minimal, por lo que para todo $X \in \Omega(\mathcal{P}) \setminus \mathcal{P}$ existe $x \in S^1$ tal que $X \in \chi(x)$. De manera que $\Omega(\mathcal{P})$ está en posición convexa. Por definición $\Omega(\mathcal{P})$ no es un pez. Renombremos con P_1 a la panza de \mathcal{P} , y renombremos de tal suerte que $H_{P_i, P_{i+1}}$ sea línea soporte de $\Omega(\mathcal{P})$ para toda i . Las ternas de la forma $\{P_1, P_i, P_{i+1}\}$ no son peces ya que si P_1 es panza entonces $H_{P_i, P_{i+1}}$ no es soporte de P_1 y si P_i es panza entonces $P_i \subsetneq H_{P_{i+1}, P_1}^+$ y entonces $\Omega(\mathcal{P}) \setminus P_{i+1}$ tampoco es un pez. Análogamente si P_{i+1} es la panza entonces $\Omega(\mathcal{P}) \setminus P_{i+1}$ tampoco es un pez. Entonces el orden para que $\{P_1, P_i, P_{i+1}\}$ rote positivamente es ciclicamente único por lo que también en este caso $A_j \subset H_{i, i+1}^+$.

■

Corolario 4.2 *La función $P_3(n)$ existe para familias de cuerpos convexos que no se embarran.*

Prueba.

Probaremos $P_3(n) \leq R^{(3)}(n, n)$. Le damos cualquier orden a la familia de convexos. Y coloreamos las ternas de rojo si rotan positivamente y de azul si no. Como la familia cumple la propiedad \mathfrak{P}_3 , si una terna no rota positivamente entonces rota negativamente. Por el teorema de Ramsey podemos encontrar una n -subfamilia en la que todas las ternas rotan hacia el mismo lado. Por el teorema de rotación podemos concluir que esa familia está en posición convexa.

■

4.2.3. Más problemas

Otro problema clásico de tipos de orden y configuraciones de puntos es el llamado *problema de la isotopía*: dados dos conjuntos de puntos C, C' con el mismo tipo de orden, ¿podremos mover continuamente los puntos de C a los puntos de C' de manera que,

en cualquier momento durante el camino entre C y C' , la configuración de puntos se mantenga el mismo tipo de orden? Un matemático ruso llamado Mnev dió la respuesta negativa al problema anterior, inclusive probó que lo anterior es falso aún restringiéndonos a conjuntos de puntos en posición general.

Cabe hacerse la misma pregunta sustituyendo familias de convexos en lugar de conjuntos de puntos.

Como mencionamos en el capítulo 3, el hecho geométrico que está utilizando Erdős para su prueba es exactamente el mismo que utiliza Tarsy (ver 3.1.2 y 3.1.3). La gran diferencia es que Erdős ordena los puntos por su primera coordenada mientras Tarsy toma cualquier ordenamiento de los puntos. Más aún la mejoría a la cota de Erdős dada por Valtr y Toth utiliza la misma propiedad pero otro ordenamiento. Desde esta óptica cabe dar una definición nueva de posición convexa, esta vez no para conjuntos de puntos sino para conjuntos de puntos con un ordenamiento.

Definición 4.9 *Decimos que un conjunto de puntos ordenados están en situación convexa si todas las ternas tienen la misma orientación.*

Por la prueba de Tarsy sabemos que no importando como ordenemos los puntos, en un conjunto de $R^{(3)}(n, n)$ puntos siempre hay n en posición convexa. Sin embargo nos podemos preguntar por los números de Erdős-Szekeres para conjuntos ordenados. Es decir $\vec{N}(n)$ es el mínimo número tal que en cualquier conjunto ordenado de puntos \mathcal{X} con $|\mathcal{X}| \geq \vec{N}(n)$ hay n en situación convexa. Obviamente $N(n) \leq \vec{N}(n)$. Como ya se mencionó $\vec{N}(n) \leq R^{(3)}(n, n)$. No es difícil ver que $N(n) < \vec{N}(n)$. Un poco más difícil (no tenemos prueba aún) será ver que $\vec{N}(n) < R^{(3)}(n, n)$.

Definición 4.10 *Dado un conjunto de puntos en el plano X con un subconjunto Y de n puntos en posición convexa, decimos que un ordenamiento de todos los puntos ve el n -ágono convexo formado por los puntos de Y , si deja a Y en situación convexa.*

Definición 4.11 *Dado un conjunto de puntos X en posición general en el plano y otro punto, a tal que $X \cup \{a\}$ también esté en posición general, podemos ordenar el conjunto de puntos de la siguiente manera, para todo $x \in X$ nos fijamos en la semilínea $[a, x)$. Obtenemos una semilínea por cada punto, con la propiedad de que todas inciden en a . Escogemos cualquier semilínea como la primera, y ordenamos a las demás con respecto al ángulo que hagan con la primera. Finalmente le asignamos a los puntos el ordenamiento inducido por las semilíneas. A un ordenamiento de esta familia le llamamos ordenamiento del radar con respecto a a .*

Observese que si uno tira el radar desde el interior de un n -ágono convexo, el ordenamiento inducido ve al n -ágono convexo. De la observación anterior se sigue que un

conjunto de N puntos en posición general en el plano tiene un subconjunto de n en posición convexa si y sólo si existe un punto a tal que, el ordenamiento del radar desde a ve n puntos en posición convexa.

Sea $a = \{a_i\}$ una sucesión de funciones que van de un conjunto de puntos en un punto. $a_i : \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2}_i \rightarrow \mathbb{R}^2$. Denotamos con $\overrightarrow{N}_a(n)$ el mínimo número tal que, para

cualquier conjunto de puntos X de al menos $\overrightarrow{N}_a(n)$ puntos que estén ordenados con el ordenamiento del radar desde a $\overrightarrow{N}_a(n)$ podemos encontrar un subconjunto de n puntos en situación convexa.

- Determinar $\overrightarrow{N}_a(n)$, para cada a es un problema nuevo.
- ¿ $\max(\overrightarrow{N}_a(n)) = \overrightarrow{N}$?

Lo interesante es que $\min(\overrightarrow{N}_a(n)) = N(n)$. Bajo este nuevo enfoque la prueba de Erdős 3.1.3 diría lo siguiente: Si a un punto arbitrariamente lejano al conjunto de puntos $\overrightarrow{N}_a(n) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$. Además, la mejoría de Valtr y Toth a $N(n)$ diría, sea X un conjunto de puntos, sea x cualquier punto de la frontera del casco convexo de X , si a es un punto al interior del casco convexo de X , dentro de una vecindad de x arbitrariamente pequeña. Entonces $\overrightarrow{N}_a(n) \leq \binom{k+l-5}{k-2} + 2$.

El objetivo principal de esta nueva óptica es colocar al punto a adecuadamente buscando mejorar la cota superior al problema de Erdős-Szekeres.

Como último problema se deja otra generalización a los teoremas 4.2 y 4.1, al espacio d -dimensional.

Problema 4.4 ¿Será que en una familia de muchísimos cuerpos convexos en \mathbb{R}^d , habrá muchos en posición convexa o muchos por los que pasa una línea transversal?.



Figura 4.13: ADIOS

Apéndice: Un poco de Gráficas

Teoremas de monotonicidad

Definición 4.12 *Un torneo es una digráfica completa.*

Definición 4.13 *Un ciclo dirigido en una digráfica es un ciclo en el que además*

Definición 4.14 *Un torneo transitivo es una digráfica completa sin ciclos dirigidos.*

Definición 4.15 *Una trayectoria ordenada con vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es una subdigráfica con $(v_i, v_{i+1}) \in A$.*

Volvemos a enunciar el corolario al teorema de Chvátal y Komlos.

Proposición 4.4 *Dado un torneo transitivo de al menos $\binom{k+l-4}{k-2} + 1$ vértices y una función de las aristas en los reales, existe una trayectoria ordenada $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ con k vértices tal que la sucesión $f(v_1, v_2), f(v_2, v_3), \dots, f(x_{k-1}, x_k)$ es monótona creciente o existe una trayectoria ordenada $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ con l vértices tal que la sucesión $f(v_1, v_2), f(v_2, v_3), \dots, f(x_{l-1}, x_l)$ es estrictamente creciente.*

Gráficas de intervalos

Una gráfica perfecta es aquella en la que el número clásico el orden de la subgráfica completa maximal, y el número cromático, coinciden.

Alternativamente, como consecuencia de un teorema clásico de Lovasz que dice que el complemento de una gráfica perfecta es otra gráfica perfecta; una gráfica perfecta es aquella en la que el número de independencia y el mínimo número de clanes que la particionan, coinciden. Una gráfica de intervalos es una gráfica que sale de tomar una familia finita de intervalos como vértices y poner aristas entre ellos cuando los intervalos se intersectan. No es difícil ver que cualquier gráfica de intervalos está triangulada, es decir, que cualquier ciclo de orden mayor a 3 contiene una cuerda (es decir, una arista que une dos vértices que no son consecutivos en el ciclo). Un resultado clásico es que las gráficas trianguladas son perfectas. A partir de ese resultado, utilizando la segunda definición de gráfica perfecta y el teorema de Helly en la línea, Gallai concluye el siguiente

resultado que Pach y Toth utilizaron para probar su versión mejorada al teorema de Bisztrickzy-Fejes Toth.

Corolario 4.3 (Gallai) *Sea \mathcal{A} una familia finita de intervalos en la línea, y sea k el máximo número de intervalos disjuntos de \mathcal{A} , entonces existen k puntos en la línea, tales que, todo intervalo contiene, al menos, uno de estos puntos*

Bibliografía

- [R30] Ramsey F. P. *On a problem on formal logic*, Proc. London Math. Soc. 30, 122-130. 1930.
- [ErSze35] Erdős, P. y Szekeres, G. *A Combinatorial Problem in Geometry*, Composito Math. 2, 464-470. 1935.
- [ErSze62] Erdős, P. y Szekeres, G. *On Some Extremum Problems in Elementary Geometry*, Eotvos Sect. Math. 3-4, 53-62. 1962.
- [MoSo00] Morris W. Soltan V., *THE ERDŐS-SZEKERES PROBLEM ON POINTS IN CONVEX POSITION - A SURVEY*, Bulletin of the AMS 37, 437-458. 2000.
- [Bar82] Barany I., *A generalization of Caratheodory's theorem*, Discrete Math. 40, 141-151. 1982.
- [BarVa98] Barany I y Valtr P., *A positive fraction Erdős-Szekeres theorem*, Discrete Comput. Geom. 19, 335-342. 1998.
- [BisFeT89] Bisztriczky T. y Féjes Toth G., *A generalization of the Erdős-Szekeres convex n -gon theorem*, J. Reine Angew. Math. 395, 167-170. 1989.
- [BisFeTo89] Bisztriczky T. y Féjes Toth G., *Nine convex sets determine a pentagon with convex sets as vertices*, Geom. Dedicata 31, 89-104. 1989.
- [BisFeT90] Bisztriczky T. y Féjes Toth G., *Convexly independent sets*, Combinatorica 10, 195-202. 1990.
- [PaTo98] Pach J. y Toth G., *A generalization of the Erdős-Szekeres theorems to disjoint convex sets*, Discrete Comput. Geom. 19, 437-445. 1998.
- [PaTo99] Pach J. y Toth G., *Erdős-Szekeres type theorems for segments and non-crossing convex sets*, Geom. Dedicata. 1999.
- [Mat02] Matu?ek J. *Lectures on Discrete Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2002.

- [AiZie02] Aigner M. y Ziegler G. *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Boll98] Bollobas B. *Modern Graph Theory*, MAA's FOCUS, 1996.
- [Boll96] Bollobas B. *A Life of Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [GraRoSpe80] Graham R. Rothschild B. y Spencer J. *Ramsey Theory*, Wiley, 1980.
- [BaSpe98] Babai L. y Spencer J. *Uncle Paul y Paul Erdős just left town*, Notices of the AMS 45, 64-73. 1998.
- [BjLVStWhZi93] Bjorner A., Las Vergnas M., Sturmfels B., White N. y G. M. Ziegler, *Oriented Matroids*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 43, Cambridge University Press, 1993
- [GraNes02] Graham R. y Nešetřil J. *Ramsey Theory in the Work of Paul Erdős*, The Mathematics of Paul Erdős, Vol. 2, 193-209. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Ab97] Abrego B.M. *PROBLEMAS COMBINATORIOS SOBRE CONJUNTOS FINITOS DE PUNTOS*, Aportaciones Matemáticas, Soc. Mat. Mex., 1997.
- [Ha57] Hadwiger H., *Über Eibereiche mit gemeinsamer Treffgeraden*, Portugal Math. 6, 23-29. 1957.
- [PoWen90] Pollack R. y Wegner R. *Necessary and Sufficient conditions for hyperplane transversals*, Combinatorica 10, 307-311. 1990.
- [DaGrKl63] Danzer. L, Grünbaum B. y Klee V., *Helly's theorem and it's relatives Convexity*, Proc. Symp. Pure Math. 7, 100-181. 1963.
- [So84] Soltan V., *Introduction to the Axiomatic Theory of Convexity*, Stiinta Chisinau, 1984.
- [KoLov84] Korte B. y Lovász L., *Shelling structures, convexity and a happy end*, Theory and Combinatorics, Academic Press, London, 212-232. 1984.
- [Lov79] Lovász, L., *Combinatorial problems and exercises*, North-Holland, 1979.
- [ChvKo71] Chvátal y Komlós J. *Some combinatorial theorems on monotonicity*, Canad. Math. Bull. 14, 151-157. 1971.
- [VaTo98] Tóth G. y Valtr P. *A note on the Erdős-Szekeres theorem*, Discrete Comp. Geom. 19, 457-459. 1998.
- [Va96] Valtr P. *Several results related to the Erdős-Szekeres Theorem* Doctoral Dissertation, Charles University. 1996.

- [Be73] Berge C. *Graphs and hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [Mon98] Montejano L. *Cuerpos de ancho constante*, Ediciones Cientificas Universitarias, UNAM, Fondo de Cultura Economica, 1998.
- [ABMOS02] Arocha J.L, Bracho J, Montejano L. Oliveros D. Strausz R. *Separoids, Their Categories and a Hadwiger-Type Theorem*, Discrete Comput. Geom. 27, 377-385. 2002
- [BrSt02] Bracho J, Strausz R. *Separoids and a characterization of linear uniform oriented matroids*, KAM-DIMATIA Series, 2002-566 (17p). 2002
- [MO90] Monk R. *Ludwig Wittgenstein*, Anagrama, Barcelona. 1990