



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

**COMPORTAMIENTO DE GRUPOS DE PILOTES
BAJO CARGA LATERAL EN SUELO BLANDO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

(GEOTECNIA)

PRESENTA

ROBERTO ALEJANDRO RUEDAS MEDINA

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALBERTO JAIME PAREDES

**CIUDAD UNIVERSITARIA
MÉXICO D.F.**

2005



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres: Roberto y Rufina

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Programa de Posgrado en Ingeniería.

Al Dr. Alberto Jaime P., gracias por su paciencia y gran apoyo para elaborar esta tesis.

A los profesores del Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería.

A los miembros del jurado, por sus apreciables comentarios de este trabajo.

Un agradecimiento muy especial a mi familia: Roberto, Rufina, Silvia, Carlos, Marcela, Rebeca y Alejandro, por todo el apoyo, cariño y comprensión.

A los compañeros de la División de Ingeniería Civil Topográfica y Geodésica.

A todos mis amigos, por su apreciable compañía.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo brindado a través del programa de becas.

ÍNDICE

Resumen	vii
Lista de símbolos	viii
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Alcances	3
2. Tipos de pilotes y cargas laterales	5
2.1 Tipos de pilotes	5
2.1.1 De acuerdo con la forma de carga	5
2.1.2 De acuerdo con la longitud	5
2.2 Cargas laterales	8
2.2.1 Viento	6
2.2.2 Olas y corrientes marinas	13
2.2.3 Sismos	15
2.2.4 Impactos	16
3. Método de la viga apoyada sobre un medio elástico	19
3.1 Bases del Programa de Bowles	19
3.1.1 Obtención de la matriz A	21
3.1.2 Obtención de la matriz B	22
3.1.3 Obtención de la matriz S	24
3.1.4 Obtención de la matriz P	25
3.2 Módulo de reacción del suelo	25
3.3 Módulo de reacción no lineal	30

4. Método de las curvas $P-Y$	35
4.1 Introducción	35
4.2 Capacidad de carga lateral de arcillas	37
4.3 Obtención de curvas $p-y$ con datos de laboratorio	38
4.3.1 Curvas $p-y$ estáticas y cíclicas para arcilla rígidas sobre la superficie de agua (Reese y Welch, 1975)	39
4.3.2 Curvas $p-y$ estáticas y cíclicas para arcillas rígidas sumergidas (Reese et al, 1975)	41
4.3.3 Curvas $p-y$ estáticas y cíclicas para arcillas blandas según el Instituto Americano del Petróleo (API)	45
4.3.4 Curvas $p-y$ estáticas y cíclicas para arcillas blandas sumergidas (Matlock, 1970)	46
4.3.5 Curvas $p-y$ estáticas y cíclicas para arenas sumergidas (Reese y Cox, 1974)	51
5. Método de Elementos Finitos	57
5.1 Bases del Método de Elementos Finitos (MEF)	57
5.1.1 Cálculo de variaciones y métodos variacionales	58
5.1.2 Principios variacionales de la mecánica de sólidos	62
5.1.3 Unidad básica: elemento finito	63
5.1.4 Ensamblaje de elementos finitos	73
5.1.5 Preproceso, proceso y postproceso	78
5.2 Análisis de grupo de pilotes con el MEF	79
5.2.1 Módulo de elasticidad lateral	82
5.2.2 Condiciones de frontera	85
6. Comportamiento teórico y experimental de grupos de pilotes bajo carga lateral	87
6.1 Comportamiento teórico de pilotes aislados	87
6.2 Comportamiento teórico grupos de pilotes	95

6.3	Comportamiento experimental observado en pruebas de carga lateral en grupos de pilotes	99
6.3.1	En arcilla rígida preconsolidada	99
6.3.2	En arena	103
6.3.3	En arcillas y limos blandos	105
6.4	Multiplicadores MP para curvas p - y de grupos de pilotes	109
6.5	Observaciones al comportamiento teórico de pilotes bajo carga lateral en suelo elástico lineal	112
6.6	Influencia recíproca entre carga axial y carga lateral	114
7.	Comparación de Métodos	115
7.1	Pilotes aislados	115
7.1.1	Ensaye de Matlock, 1970	115
7.1.1.1	Análisis con el método de curvas p - y	116
7.1.1.2	Análisis con MEF-TEST	119
7.1.1.3	Análisis con el método de la viga sobre medio elástico (programa de Bowles)	124
7.1.2	Ensaye de Snyder y Rollins, 2004	130
7.1.2.1	Análisis con el método de curvas p - y	133
7.1.2.2	Análisis con MEF-TEST	138
7.2	Grupos de pilotes	140
7.2.1	Ensaye de Matlock, 1970	140
7.2.1.1	Análisis con el método de curvas p - y	140
7.2.1.2	Análisis con MEF-TEST	144
7.2.2	Ensaye de Snyder y Rollins, 2004	155
7.2.2.1	Análisis con el método de curvas p - y	155
7.3	Consideraciones sobre el análisis lineal	161
7.4	Grupos con pilotes inclinados	163
8.	Conclusiones	167
	Apéndice A. Ejemplo ilustrativo del Método de Elementos Finitos	171
	Referencias	177

Resumen

Se efectuó una revisión de la clasificación de pilotes para resistir cargas laterales, así como los tipos de cargas laterales (viento, olas, sismos e impactos) que pueden afectar a estructuras cimentadas sobre pilotes. Después se estudiaron tres métodos de análisis de pilotes sometidos a carga lateral: un programa elaborado por Bowles basándose en el método de la viga apoyada sobre un medio elástico, el método de curvas p - y , y el método de elementos finitos.

Para el programa de Bowles (1974) se estudió la forma de obtener las diferentes matrices que usa el programa y el módulo de reacción del suelo, principal parámetro que modela el suelo. En el capítulo del método de curvas p - y se estudió la idea central en la que se fundamenta el método, la capacidad de carga lateral de las arcillas y las metodologías para calcular curvas p - y con base en pruebas de laboratorio de distintos tipos de suelo.

Luego se estudiaron brevemente las bases del Método de Elementos Finitos, el uso del programa TEST (Tridimensional **EST**ático), un método para calcular el módulo de elasticidad lateral del suelo que fuera aplicable a TEST y las condiciones de frontera usadas en los análisis de esta tesis.

Se estudiaron, además, el comportamiento teórico de grupos de pilotes considerando que el suelo es un medio homogéneo, elástico lineal e isótropo (descrito por Poulos y Randolph), y el comportamiento encontrado experimentalmente en pruebas de carga a escala real, hechas en arcilla rígida, arcilla blanda y arena. De las pruebas de carga lateral también se estudian los multiplicadores MP, que modifican las curvas p - y para aplicarlas al análisis de grupos de pilotes, y también la influencia recíproca entre carga axial y carga lateral.

Usando la información de pruebas de carga lateral en pilotes a escala real, tomados de un artículo y una tesis de maestría, se realizaron los análisis estáticos con los tres métodos estudiados en esta tesis. Se utilizaron correlaciones para determinar los parámetros del suelo: el módulo de reacción para el programa de Bowles y el módulo de elasticidad lateral para el método de elementos finitos. Para el método de curvas p - y se calcularon las correspondientes curvas para arcilla blanda y para algunos estratos de arena.

Los resultados se comparan con las mediciones experimentales. Se obtuvieron conclusiones con respecto a la exactitud de los diferentes métodos, sus ventajas y desventajas, y las tareas pendientes para seguir avanzando en el estudio de los pilotes cargados lateralmente.

Entre las principales conclusiones, se tiene que el programa de Bowles y TEST modelan linealmente la respuesta del pilote cargado lateralmente; sus resultados son razonables únicamente para un rango de cargas, y erróneos para cargas muy bajas o muy altas. Una modificación al programa de Bowles que tomó en cuenta la no linealidad del suelo mejoró los resultados. Por otra parte, TEST modela parcialmente la interacción en grupos de pilotes y podría mejorar si tomara en cuenta la no linealidad del suelo. Los resultados más cercanos a los experimentales, tanto para pilotes aislados como para pilotes en grupo, se obtuvieron con el método de curvas p - y .

Lista de símbolos

A	factor de proporcionalidad entre fuerzas externas e internas (programa de Bowles)
A	área de la sección transversal de los pilotes
B	factor de proporcionalidad entre desplazamientos externos e internos, (programa de Bowles)
B o D	Ancho o diámetros del pilote
c	resistencia al esfuerzo cortante no drenada o cohesión del suelo
C_D	factor de empuje
E_H	módulo de elasticidad lateral del suelo
E_p	módulo de elasticidad del pilote
e	deformaciones internas de los miembros estructurales en los nodos, (programa de Bowles)
F_i	Fuerza interna actuando en el nodo i , (programa de Bowles)
G	módulo de rigidez al cortante
I_x	momento de inercia de la sección transversal de los pilotes alrededor del eje x
J	constante adimensional empírica usada para calcular curvas p - y en arcillas
J	momento polar de inercia de la sección transversal de los pilotes
k_s	módulo de reacción
MP	multiplicadores de curvas p - y para el análisis de grupos de pilotes
P_i	fuerza externa actuando sobre el nodo i , (programa de Bowles)
P_u	resistencia última del suelo
q_u	resistencia en compresión simple
RT	resistencia a la tensión
S_u	resistencia al cortante no drenada, igual a la cohesión c
x	profundidad, (curvas p - y)
x_R	profundidad límite de la zona de resistencia reducida (curvas p - y)
X_i	desplazamiento externo del nodo i , (programa de Bowles)
y_c	desplazamiento ocurrido después de N ciclos de carga o desplazamiento de referencia para curvas p - y de distintos suelos
y_{50}	desplazamiento producido por la mitad de la carga última
ρ	densidad
γ	peso específico
γ'	peso específico sumergido
ϕ	ángulo de fricción interna del suelo
ε_{50}	deformación unitaria cuando se alcanza la mitad del esfuerzo desviador máximo $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$
ε_c	deformación unitaria de referencia que varía de acuerdo con las curvas p - y para distintos suelos
ν	relación de poisson

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

Prácticamente todas las estructuras están sujetas a cargas laterales, al menos en un pequeño grado en comparación con las cargas verticales, y no en todos los casos es necesario tomarlas en cuenta en el diseño. Sin embargo, hay estructuras, como las plataformas petroleras ubicadas mar adentro, en que las cargas laterales pueden resultar de una magnitud que se debe considerar.

Las cargas laterales son causadas por viento, sismos, mareas, movimientos o empuje de tierra, fuerzas de coceo en columnas de naves industriales, etc. Matlock (1970) asegura que “la capacidad de hacer estimaciones razonables del comportamiento de pilotes cargados lateralmente es muy importante en el diseño y construcción de muchas instalaciones ubicadas fuera de costa. Esto es particularmente cierto en el Golfo de México, donde grandes fuerzas laterales son provocadas por viento y olas asociados a ciclones, y donde los materiales de cimentación en la zona crítica cercana al lecho marino son frecuentemente arcillas blandas”.

Estructuras como las plataformas marinas están sujetas a fuertes cargas laterales provocadas por corrientes marinas, flujo y reflujos de las mareas, olas y huracanes. Muelles, malecones, rompeolas o muros de retención están bajo el empuje lateral de agua y tierra. Torres de transmisión y puentes están frecuentemente construidos cerca de taludes y requieren el empleo de pilotes. No debe olvidarse tampoco que los sismos pueden provocar fuertes cargas horizontales y en México hay vastas regiones con alto riesgo sísmico. Como se ve, no son pocas las estructuras cimentadas sobre pilotes que requieren de un análisis de resistencia a la carga lateral, o estructuras cuya cimentación puede incluir pilotes justamente para resistir las fuerzas laterales.

Por otra parte, es interesante mencionar que antes se pensaba que los pilotes sólo tenían resistencia en su dirección axial y para soportar cargas laterales se usaban los pilotes inclinados. Los primeros análisis de pilotes bajo carga lateral fueron procedimientos gráficos en los que era necesario colocar pilotes inclinados para poder cerrar el polígono de fuerzas. Mientras mayor es la inclinación, mayor es la componente de la carga lateral que es paralela al eje axial del pilote y así se cumple mejor la función de resistir cargas laterales.

Tomlinson (1986) menciona que inclinaciones de 1H a 3V (18.4° respecto a la vertical) o 1H a 4V (14°) son comunes, pero inclinaciones de 1H a 2V (26.6°) ya implican un procedimiento complicado de hincado. Entonces, la desventaja de los pilotes inclinados es el mayor costo de construcción debido a la mayor complejidad del trabajo de hincado.

Surgió entonces la pregunta: ¿Cuánta carga lateral podrían soportar los pilotes verticales? ¿Sería la suficiente comparada con las cargas impuestas? Hetenyi (1946) se basó en el estudio de una viga apoyada sobre un medio elástico y proporcionó soluciones para diferentes condiciones de carga y restricciones en la cabeza de un pilote vertical. Obtuvo soluciones generales para la longitud crítica l_c , desplazamiento u y giro θ , ambos en la cabeza. Hetenyi dio inicio al estudio de la interacción suelo-pilote cuando la carga es lateral.

Numerosas pruebas de carga comprobaron que los pilotes también tienen una capacidad importante, y suficiente en varios casos, para resistir cargas perpendiculares a su eje axial “vía cortante, momento flexionante y reacción lateral del suelo” Bowles (1996).

Diferentes métodos de análisis fueron propuestos, dependiendo del tipo de pilote y del suelo de soporte principalmente. Los pilotes fueron clasificados, para efectos de carga lateral, en cortos y largos, debido a que presentan diferentes mecanismos de falla. Los más comunes son los pilotes largos y son los que se estudian en este trabajo.

Alrededor de 1960 se desarrolló el uso del método de diferencias finitas aplicado a pilotes bajo carga lateral. Matlock y Reese fueron los principales impulsores del método; obtuvieron curvas adimensionales con las que, dada una carga lateral, se podía calcular el desplazamiento en la cabeza del pilote y el momento flexionante máximo en el fuste del mismo.

Surgió después otro método cuya idea fundamental fue propuesta años atrás por McClelland y Focht (1956). Ellos propusieron usar una conversión lineal de las curvas de laboratorio esfuerzo vs deformación a las curvas p - y para pilotes cargados lateralmente. “ p ” representa la reacción del suelo por unidad de longitud, “ y ” es el desplazamiento lateral de un cierto punto del pilote. Este fue el primer intento importante de tratar con el comportamiento no lineal de la reacción del suelo, llamado método p - y , o de curvas p - y .

Bajo el patrocinio de compañías petroleras principalmente, entre 1970 y 1980 fueron desarrolladas pruebas de carga lateral en pilotes muy bien instrumentados y en diferentes tipos de suelo. Estas pruebas fueron la base para proponer métodos de cálculo de curvas p - y utilizando datos de laboratorio. En 1970 Matlock desarrolló el primer procedimiento formal para calcular curvas p - y en arcillas blandas. En 1974, Reese y Cox hicieron lo mismo para arenas; en 1975, Reese y otros desarrollaron la metodología para arcillas rígidas sobre el nivel del agua y también para arcillas rígidas sumergidas. Estos fueron los trabajos más importantes, aunque no los únicos, en cuanto a curvas p - y se refiere.

Otro camino para estudiar los pilotes cargados lateralmente fue considerar al suelo como un medio elástico lineal continuo. Poulos y Randolph, entre otros, hicieron esta consideración para obtener sus fórmulas de desplazamiento lateral en la cabeza del pilote y momento máximo en el fuste del pilote. Trabajaron no sólo con pilotes aislados sino también con factores de interacción que pudieran representar la influencia recíproca entre los pilotes de un grupo.

Posteriormente, debido al desarrollo de las computadoras, fue más accesible el desarrollo de programas con base en el método de elementos finitos. Con estos programas es posible modelar el suelo y el grupo de pilotes, así como la superestructura soportada. El problema es modelar adecuadamente la interacción suelo-estructura, en este caso, pilotes y suelo.

1.2 Objetivos

- 1 Comprender el comportamiento de pilotes en grupo sujetos a carga lateral estática a través de una revisión bibliográfica de casos historia.
- 2 Estudiar diferentes métodos de análisis de pilotes bajo carga lateral. En particular el método de curvas $p-y$ y un programa de elementos finitos.
- 3 Comparar los diferentes métodos de análisis para modelar el comportamiento real, reportado en pruebas de carga de pilotes sujetos a carga lateral, tanto aislados como en grupo.

1.3 Alcances

Esta tesis es un estudio teórico del comportamiento de pilotes aislados y principalmente de grupos de pilotes sujetos a carga lateral estática. Se contempló únicamente la carga de tipo estático considerando que es una base muy importante y sirve de referencia para el posterior estudio bajo cargas cíclicas. Sin embargo, no debe olvidarse que es común que actúen ambos tipos de cargas en una misma estructura.

Se estudiaron tres métodos de análisis con sus respectivos programas de computadora, luego se aplicaron a dos pruebas de carga reales para comparar los resultados con las mediciones experimentales. La tesis está enfocada al comportamiento de los pilotes bajo carga lateral en suelos blandos, como arcillas y limos. De las dos pruebas de carga citadas, una fue hecha por Matlock (1970) en arcillas blandas y otra hecha por Snyder (2004) en arcillas y limos de baja plasticidad. Los métodos fueron: Método de la viga apoyada sobre un medio elástico a través del programa de Bowles (1974), método de curvas $p-y$, y el método de elementos finitos.

Los principales resultados fueron el desplazamiento en la cabeza del pilote y el momento flexionante máximo en el fuste del pilote. Fueron graficados contra la profundidad y la fuerza horizontal aplicada, y también comparados con los resultados experimentales.

A continuación se hace una rápida exposición del contenido la tesis:

Definir con la mayor exactitud la intensidad de las cargas es tan importante como calcular la resistencia que tendrá la cimentación. Sin embargo, es un tema fuera del alcance de este trabajo y sólo se da una guía mínima de las principales fuentes de carga lateral en el capítulo 2.

En los siguientes tres capítulos se presentan los métodos de análisis de pilotes bajo carga lateral. El capítulo 3 se dedica al programa de Bowles (1974) para pilotes cargados lateralmente y a la estimación del módulo de reacción, principal parámetro del suelo usado en este método. Los análisis con este método sólo fueron para pilotes aislados.

El capítulo 4 está dedicado al método de curvas p - y , y al cálculo de las propias curvas en arcilla blanda, arcilla rígida y arena. Se utilizó el programa COM624P (Wang y Reese, 1989) para efectuar los análisis. En los análisis de grupo se modificaron las curvas p - y con los multiplicadores MP para empatar los cálculos teóricos con las mediciones experimentales.

En el capítulo 5 se hace un resumen de las bases del método de elementos finitos y de aspectos importantes del programa TEST (**T**ridimensional **E**stático) (Li, Romo y Magaña, 1992 y Magaña, 2005), programa de elemento finito desarrollado en el Instituto de Ingeniería y usado en esta tesis para el análisis de grupos de pilotes bajo carga lateral. Se elaboraron diferentes mallas para modelar los cambios de propiedades del suelo con la profundidad y para distintos tamaños de los grupos de pilotes (6, 9 y 16 elementos). Se sugirió un procedimiento para calcular el módulo de elasticidad del suelo en dirección lateral y aplicable al problema principal de la tesis.

En el capítulo 6 se revisa el análisis teórico descrito por Poulos y Randolph de pilotes aislados y grupos de pilotes, que consideran el suelo como un medio elástico lineal continuo. También se revisan varias pruebas de carga lateral hechas en pilotes a escala real, que sirven para conocer más exactamente el comportamiento de pilotes aislados y grupos de pilotes en situaciones reales, y, posteriormente, para comparar con los resultados calculados por diferentes métodos de análisis.

En el capítulo 7 se presentan los resultados obtenidos con el programa de Bowles (1974), con el método de curvas p - y , y con el método de elementos finitos. En la primera parte del capítulo están los análisis de pilotes aislados y en la segunda parte los grupos de pilotes. Se compara el comportamiento descrito por los métodos de análisis con el comportamiento encontrado en las pruebas de carga a escala real del capítulo 6. Finalmente, en el capítulo 8 se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Tipos de pilotes y cargas laterales

2.1 Tipos de pilotes

Se hacen dos clasificaciones de los pilotes, una de acuerdo con la forma en que reciben la carga lateral y otra de acuerdo a la longitud de los pilotes.

2.1.1 De acuerdo con la forma de carga

Pilotes con carga activa. Son los pilotes que reciben cargas laterales externas sobre su fuste y que se apoyan en el suelo para resistirlas. Ejemplo: las olas empujan horizontalmente a una estructura de fuera de costa, y ésta, a su vez, le transmite la carga horizontal a los pilotes por medio de un cabezal.

Pilotes con carga pasiva. En los casos en que el movimiento del suelo o la tendencia al movimiento del suelo ejercen una carga sobre los pilotes. Los pilotes obtienen su apoyo de suelo más profundo que no está sujeto a movimiento. Ejemplo: Pilotes de una torre de transmisión cimentada sobre un talud.

En este trabajo sólo se estudian los pilotes con carga activa.

2.1.2 De acuerdo con la longitud

Un pilote sujeto a carga lateral puede fallar de diferentes formas dependiendo de su longitud, de su rigidez y de la rigidez del suelo que lo soporta. Aunque la longitud no sea el único factor que influye en la forma de fallar, es común clasificarlos en pilotes cortos o largos.

El mecanismo de falla de un pilote es a grandes rasgos el siguiente: al aplicar la carga lateral en la cabeza del pilote el suelo reacciona y le impone un cortante a lo largo del fuste. La carga lateral también provoca un momento flexionante que hace girar al pilote. La cabeza del pilote es la que tiene el mayor desplazamiento y es la parte que inicialmente transmite más carga al suelo.

Como es sabido, el confinamiento del suelo en la superficie del suelo es nula y va creciendo con la profundidad. Al tener muy poco confinamiento, el suelo más superficial posee una capacidad de soporte muy limitada y con una carga muy baja del pilote el suelo se deforma haciendo que la mayor parte de la carga lateral se transmita hacia partes más profundas y resistentes del suelo. El momento flexionante máximo también se desplaza hacia abajo.

Al aumentar la carga, existe un punto, que llamaremos punto de “giro”, arriba del cual el pilote empuja al suelo hacia enfrente, y abajo del punto el suelo empuja el suelo hacia atrás. Arriba de este punto, el suelo superficial que está frente al pilote falla en forma de cuña mientras que atrás del pilote se forma una cavidad. En zonas más profundas pero todavía arriba del punto de giro, el suelo falla desplazándose alrededor del pilote y sin que se forme la cavidad, con la resultante de la reacción del suelo empujando al pilote en su cara delantera. Debajo del punto de giro el suelo también falla desplazándose alrededor del pilote, sin embargo, la resultante de la reacción del suelo empuja al pilote en su cara posterior.

Se considera que un pilote es “corto” si la rigidez a la flexión del pilote es tal que debajo del punto de giro el suelo falla antes que en el pilote se forme una articulación plástica; en este caso el pilote girará en forma muy parecida a un cuerpo rígido. Si por el contrario, en el pilote se forma la articulación plástica antes de que bajo el punto de giro el suelo falle, entonces se considera que el pilote es “largo”. En la práctica la mayoría de los pilotes son largos, razón por la cual en esta tesis sólo se consideran los pilotes largos.

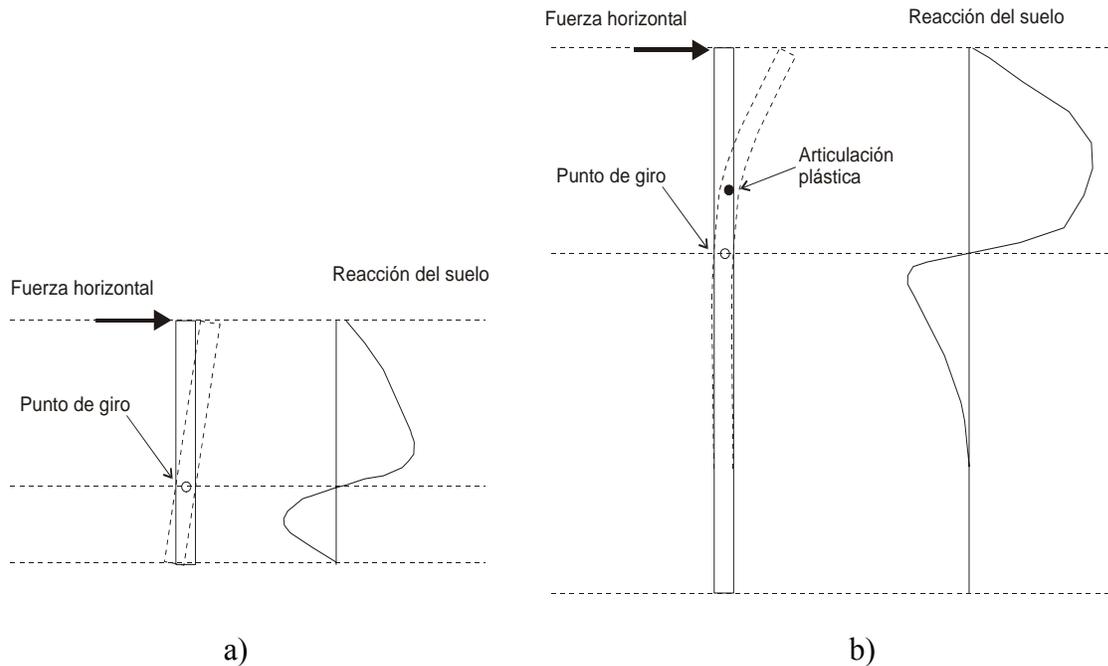


Figura 2.1 Clasificación de pilotes de acuerdo a su longitud, a) pilote corto; b) pilote largo.

La longitud crítica l_c es aquella con la que el pilote se comportaría de la misma forma que lo haría con una longitud mayor. Puede considerarse que un pilote es largo si tiene una longitud mayor o igual que l_c . Una solución para l_c en un suelo homogéneo y elástico es (Hetenyi, 1946):

$$l_c \cong 4 \left[\frac{(EI)_p}{k} \right]^{\frac{1}{4}} \quad 2.1$$

Donde $(EI)_p$ es la rigidez del pilote, y k es el módulo de reacción del suelo.

Cuando los pilotes tienen un cabezal rígido que les impide girar su cabeza libremente hay tres tipos de falla. Cuando los pilotes son cortos, éstos se trasladan como cuerpo rígido junto con el cabezal; luego, si pudiéramos aumentar la longitud del pilote se formaría una articulación plástica, primero en la unión de pilote y cabezal, y luego otra a mayor profundidad. La mayoría de los pilotes se comportan como pilotes largos y fallan como se ilustra en la figura 2.2 c), Fleming et al (1992).

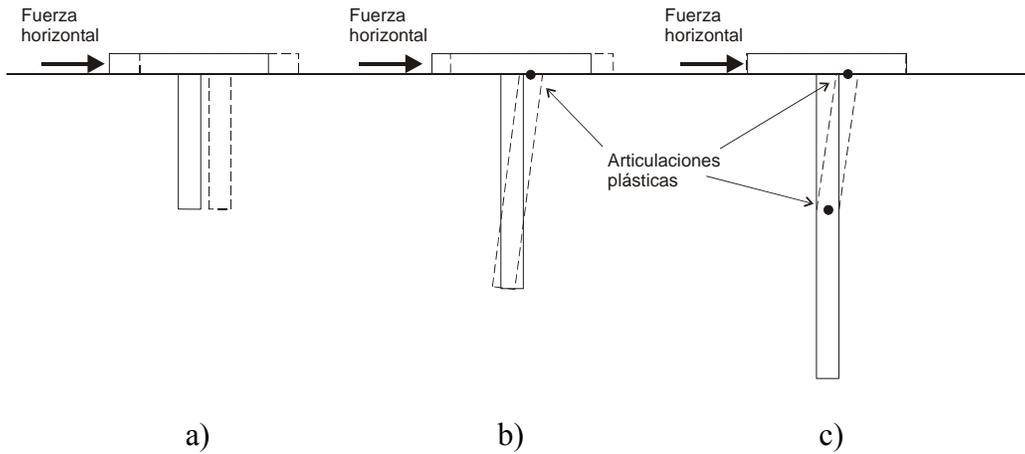


Figura 2.2 Clasificación de pilotes con cabezal rígido de acuerdo a la longitud, a) pilote corto; b) pilote corto; c) pilote largo.

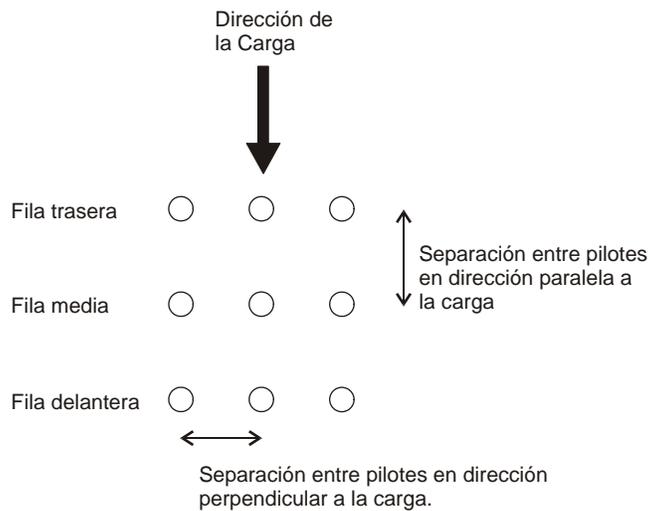


Figura 2.3 Ilustración de las filas delantera, media y trasera.

Para evitar que más adelante haya confusiones se presenta el esquema de un grupo de pilotes en que se indican las filas delantera, media y trasera de acuerdo a la dirección de la carga, figura 2.3. Además, se presenta un esquema para ilustrar claramente un pilote con libertad de giro y desplazamiento en la cabeza, que son los que comúnmente se utilizan en las pruebas de carga, figura 2.4.

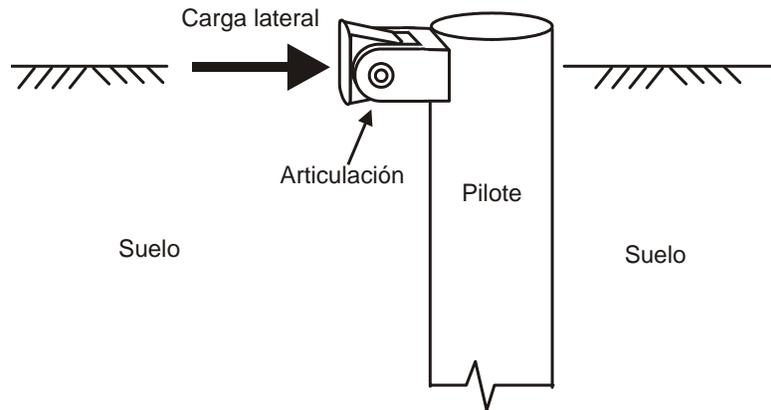


Figura 2.4 Pilote con libertad de giro y desplazamiento lateral en una prueba de carga común.

2.2 Cargas laterales

Para tener una mínima idea de los fenómenos que pueden provocar cargas laterales y la forma en que se calculan, en lo que resta del capítulo se estudian rápidamente las fuerzas laterales causadas por viento, olas y corrientes marinas, sismos e impactos.

El viento puede afectar especialmente estructuras altas ubicadas en tierra y cualquier estructura ubicada fuera de costa, principalmente debido a ciclones. Las olas y corrientes marinas también son más intensas por la presencia de ciclones y provocan cargas laterales de tipo cíclico. Los sismos pueden provocar cortantes de magnitud considerable y son cargas de tipo dinámico. Los impactos, por ejemplo, pueden originarse por choques de buques tanque contra las plataformas marinas y se consideran cargas de tipo estático.

2.2.1 Viento

Los vientos se pueden definir como movimientos de masas de aire, causados por diferencias de presión en diferentes partes de la atmósfera y al movimiento de rotación de la Tierra. Cuando los vientos chocan con un obstáculo, como son las obras de ingeniería civil, lo rodean y provocan presiones sobre la superficie del obstáculo. En la cara de barlovento se suscitan presiones positivas o de empuje, mientras que en la cara de sotavento se suscitan presiones negativas o de succión. El efecto combinado de estas dos presiones se

conoce como fuerza de *arrastre*. En las caras laterales se presenta empuje o succión dependiendo de la geometría del obstáculo. Si estas caras son paralelas a la dirección del viento se presenta succión. Dependiendo de la inclinación de la parte superior o techo también se presenta empuje o succión, esta última cuando el techo es horizontal o con ángulos de inclinación bajos, alrededor de 30° o menos.

La velocidad del viento no es uniforme ni en el tiempo ni en el espacio. En las cercanías del suelo la velocidad puede ser muy baja por causa de la rugosidad del terreno, luego la velocidad aumenta hasta una altura determinada donde la rugosidad ya no afecta y se alcanza la velocidad *gradiente*. Para terrenos muy lisos, se llega a la velocidad gradiente a alturas relativamente bajas (200 m), mientras que para centros de ciudades con edificios altos la velocidad gradiente se presenta hasta 450 m sobre la superficie. Una ley que describe la variación de la velocidad del viento con la altura es la siguiente:

$$V = V_0 \left(\frac{Z}{Z_0} \right)^\alpha \quad 2.2$$

donde V es la velocidad del viento a la altura Z, V₀ es la velocidad a una altura Z₀. La mayoría de normas de diseño de obras civiles especifican una altura de referencia Z₀ de 10 m sobre la superficie, en campo abierto y un tiempo de 3 segundos de velocidad sostenida; α es un exponente que depende esencialmente de lo accidentado del terreno

La velocidad del viento también varía con el tiempo y los modelos más usuales consideran dos componentes, una estática, que es la que puede considerarse como velocidad media actuando durante varios minutos, y otra llamada oscilación aleatoria, que tiene periodos del orden de varios segundos. La velocidad de diseño normalmente considera sólo la componente estática.

Para el diseño es necesario conocer la fuerza ejercida sobre una superficie debida al viento y ésta puede calcularse en forma aproximada multiplicando la siguiente ecuación por el área de la superficie expuesta:

$$p = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 \quad 2.3$$

C_D es el factor de forma o factor de empuje, ρ es la densidad del aire a una temperatura de 15° C y presión al nivel del mar (ρ=0.125 kgf seg²/m⁴) . Para sitios con altitud significativa la densidad del aire debe corregirse con el siguiente factor:

$$\frac{8+h}{8+2h}$$

donde h es la altitud en kilómetros.

La velocidad del viento utilizada en la ecuación 2.3 depende de los siguientes factores: a) ubicación geográfica de la construcción; b) características topográficas locales en lo

relacionado con la rugosidad de la superficie; c) altura sobre el nivel del terreno de la porción de la estructura que se está considerando; d) importancia de la construcción y e) sensibilidad de la estructura a los efectos de las ráfagas.

Para tomar en cuenta los puntos b) y c) se utiliza un factor correctivo:

$$k \left(\frac{Z}{10} \right)^\alpha \quad Z \leq Z_G \quad 2.4$$

Donde Z es la altura en metros sobre el nivel del terreno, k y α son coeficientes obtenidos de mediciones hechas en diferentes sitios y alturas, y Z_G es la altura gradiente.

Los coeficientes de empuje en edificios se pueden observar en la figura 2.5. Los coeficientes del techo son función del ángulo Θ al cual está inclinado; se considera que son de succión para $\Theta \leq 30^\circ$ y de empuje para $\Theta > 30^\circ$.

Tabla 2.1 Parámetros que definen la variación de la velocidad de viento con la altura

Tipo de terreno	k	α	Z_G , en m
A Centro de ciudades con concentración de edificios altos (más de la mitad de las construcciones tienen alturas de más de 21 m)	0.5	0.33	450
B Áreas urbanas y suburbanas, zonas boscosas, campo abierto con topografía irregular	0.8	0.22	400
C Campo abierto con terreno plano	1.0	0.14	275
D Litorales y promontorios	1.2	0.10	200

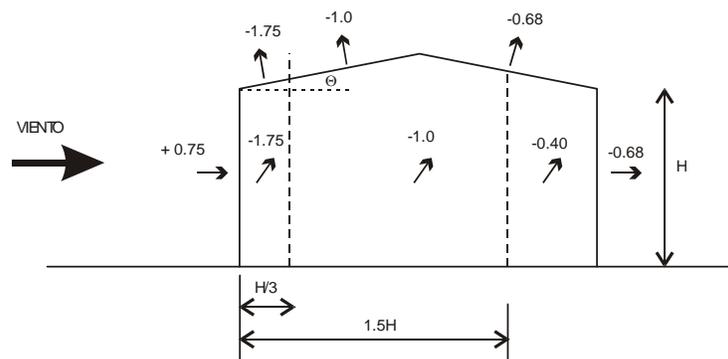


Figura 2.5 Coeficientes de empuje en edificios

Las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcción del D.F. de 1995 indican la forma en que deberán diseñarse por viento las diferentes estructuras que ahí se

clasifican. Además, presentan fórmulas para los empujes dinámicos paralelos al viento y el efecto de vórtices periódicos sobre estructuras prismáticas.

También se debe resaltar que los efectos del viento dependen de la distribución de masa, rigidez y amortiguamiento de la estructura. Esto es más importante para estructuras de mucha flexibilidad, poco amortiguamiento y bajo peso, debido a que poseen frecuencias naturales de vibración que pueden estar en el mismo rango de las frecuencias en que se presentan las fuertes ráfagas de viento, que al entrar en resonancia producen efectos de gran magnitud y deben ser tomados en cuenta (Simiu, 1996).

La presión y por lo tanto la fuerza provocada por el viento es, de acuerdo con lo visto en la ecuación 2.2, función del cuadrado de la velocidad, por lo tanto, es importante determinar correctamente la velocidad del viento de diseño. A partir de registros de velocidad del viento en el sitio de interés en un periodo de tiempo significativo y a través de un modelo probabilista, se calcula la velocidad de viento de diseño para un cierto periodo de recurrencia (T_r). El $T_r=50$ años es el aceptado para una estructura normal y $T_r= 200$ años para estructuras de especial importancia.

Las fuentes de datos de velocidad del viento pueden ser estaciones meteorológicas, aeropuertos o la regionalización presentada en el manual de la CFE. También puede recurrirse a modelos de predicción de la velocidad del viento debido a la presencia de huracanes.

Viento sobre plataformas petroleras.

Simiu (1996), en su libro “Efectos del viento sobre estructuras”, hace referencia a un artículo de Pike y Vickery sobre los efectos del viento en el modelo a escala 1:120 de una torre de plataforma petrolera. El perfil de viento promedio creado en el laboratorio fue cercano a la siguiente ley:

$$V_{(z)} = V_{10} \left(\frac{z}{10} \right)^{\frac{1}{12}} \quad 2.5$$

El Servicio Geológico de Estados Unidos (USGS) recomienda calcular la velocidad de viento (sostenido por al menos un minuto) en el Golfo de México con:

$$V_{(z)} = V_{10} \left(\frac{z - z_d}{10 - z_d} \right)^{0.1128} \quad 2.6$$

donde $z_d = 2.2$ m y z es la elevación sobre el nivel medio de mar.

Los coeficientes de fuerza y momento fueron definidos por las relaciones del tipo:

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V_{16}^2 (16) A_R} \quad 2.7$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho V_{16}^2 (16) A_R L_R} \quad 2.8$$

Donde F y M son la fuerza y el momento que nos interesan, ρ es la densidad del aire, $V(16)$ es la velocidad del viento a una altura de 16 pies sobre la superficie del agua, y A_R y L_R son el área y longitud de referencia, que en este caso fueron 1 ft^2 y 1 ft respectivamente. En la figura 2.6 aparecen los coeficientes C_F y C_M para varias configuraciones de plataforma. Los momentos obtenidos con los coeficientes CMD y CMT están referidos a una distancia de 6.2 pulgadas (62 pies en escala real) abajo del nivel medio del agua.

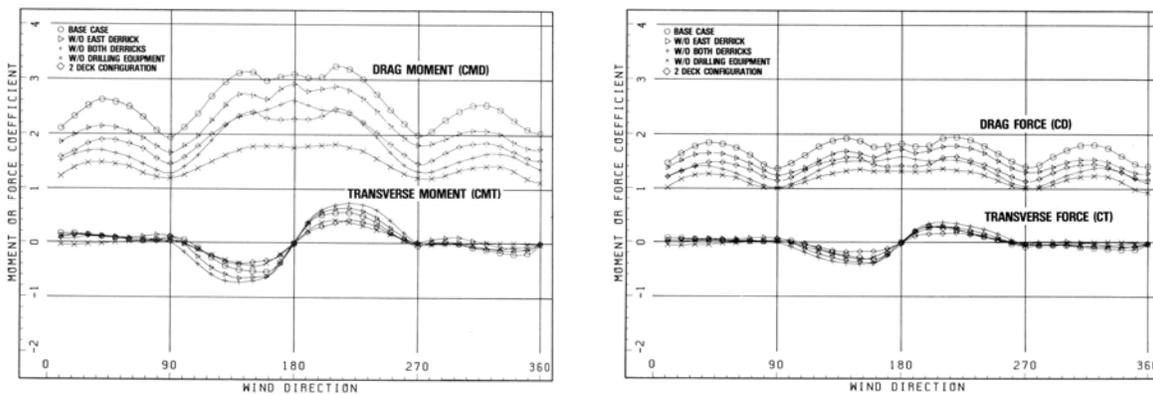


Figura 2.6 Resultados de prueba de túnel de viento de P.J. Pike and Vickery, “A wind tunnel investigation of loads and pressure on a typical guyed tower offshore platform” citado por Simiu en “Wind effects on structures”.

La mayoría de los métodos para calcular los efectos del viento sobre las estructuras son aplicables únicamente para geometrías comunes y consideran que no hay turbulencias importantes provocadas por estructuras vecinas. Para casos no comunes o con características muy peculiares lo usual es recurrir a pruebas de modelos en el túnel de viento.

Fórmula de la fuerza del viento del Instituto Americano del Petróleo

Hsu (1984) escribe que el Instituto Americano del Petróleo (API) recomienda calcular las fuerzas debidas a vientos sobre estructuras de fuera de costa con la siguiente fórmula:

$$F = 0.00256 V^2 C_s A \text{ (unidades inglesas)} \quad 2.9$$

$$F = 0.0473 V^2 C_s A \text{ (unidades métricas)}$$

Donde:

F	fuerza del viento, en libras o Newtons
V	Velocidad sostenida del viento con un tiempo de promediación de 10 segundos, en m/s o ft/s
C_s	Coefficiente de forma
A	Área proyectada del objeto, en ft^2 o m^2

API recomienda los siguientes coeficientes de forma:

Vigas	1.5
Lados de edificio	1.5
Secciones circulares	0.5
Área proyectada global de la plataforma	1.0

El factor de altura es considerado por la siguiente fórmula:

$$V = V_{10}(y/10)^x \quad 2.10$$

Donde:

V_{10}	Velocidad del viento a una altura de 10 m sobre el nivel del mar
y	altura sobre el nivel del mar, en metros.
x	exponente, usualmente con un valor entre 1/13 y 1/7 dependiendo del estado del mar, la distancia relativa a la tierra y duración de la velocidad de diseño.

API recomienda $x=1/13$ para ráfagas, y $x=1/8$ para viento sostenido.

2.2.2 Olas y corrientes marinas.

Las obras portuarias, de protección costera y obras ubicadas fuera de costa están expuestas a los empujes provocados por mareas, olas y corrientes marinas.

La marea es un movimiento periódico de ascenso y descenso del nivel del mar, causado por la atracción de la Luna y el Sol sobre la Tierra. Como la marea sube en unas partes del planeta mientras que en otras baja, se genera flujo del agua: flujo al subir la marea y reflujos al bajar la marea.

Las corrientes marinas son causadas por las diferencias en densidad y temperatura del agua en diferentes partes del globo terrestre. La densidad es menor en las cercanías del Ecuador por estar con mayor temperatura y el agua tiende a moverse hacia los polos en la parte más superficial; el agua fría de los polos es más densa y al ser desplazada por la corriente de agua caliente se traslada por el fondo marino hacia las zonas ecuatoriales.

Cuando las corrientes marinas chocan con las estructuras de ingeniería civil las empujan y, al igual que en el caso del viento, la presión es proporcional a la densidad del fluido y al cuadrado de la velocidad.

La fuerza de arrastre, f_D , por unidad de altura se puede calcular con:

$$f_D = C_D \frac{\gamma}{2g} D u^2 \quad 2.11$$

Donde C_D es el factor de empuje, γ el peso específico del agua, g es la aceleración de la gravedad, D el diámetro del tubo o ancho de la sección expuesta al flujo y u es la velocidad horizontal de una partícula del fluido si no existiera el obstáculo.

La continua aceleración y desaceleración de las partículas de agua induce, además, sobre el obstáculo una fuerza de inercia que depende de la aceleración del agua en el punto de estudio, de la densidad del agua y del volumen de agua desplazado por el objeto; la fuerza de inercia por unidad de altura del objeto resulta

$$f_I = C_I \frac{\gamma}{g} \frac{\pi D^2}{4} \dot{u} \quad 2.12$$

C_I es el factor de forma del objeto y \dot{u} es la aceleración del agua en el punto. La suma de los dos efectos proporciona la presión total de la ola en un punto sobre el objeto a través de la fórmula de Morison:

$$f = f_D + f_I \quad 2.13$$

La fuerza total sobre el obstáculo será la integral de la presión sobre toda la longitud. Para poder aplicar la fórmula de Morison es necesario conocer el perfil completo de la ola, de la velocidad y de la aceleración. La ecuación de Morison es aplicable cuando la longitud de la ola es más de cinco veces el diámetro o dimensión proyectada del miembro estructural (Hsu, 1974). Un modelo sencillo que proporciona el movimiento teórico del agua en una ola es la teoría de la ola lineal o de Airy.

Según la teoría de Airy las características de la ola son:

$$u = \pi \frac{H}{T} \frac{\cosh\left(\frac{2\pi}{L} z\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi}{L} d\right)} \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right) + u_{corriente} \quad 2.14$$

$$\dot{u} = \frac{2\pi^2 H}{T^2} \frac{\cosh\left(\frac{2\pi}{L} z\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi}{L} d\right)} \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) \quad 2.15$$

donde:

H	altura de la ola
T	periodo de la ola
L	longitud de la ola
z	altura del punto en estudio sobre el fondo marino
x	distancia del punto en estudio desde la cresta de la ola
$u_{\text{corriente}}$	velocidad de la corriente que puede haber en el sitio durante la tormenta que genera la ola

2.2.3 Sismos

En estructuras ubicadas en tierra puede utilizarse un método simplificado de análisis sísmico, o si la estructura así lo demanda, un análisis modal espectral, o integración paso a paso. En tierra lo más común es que con un análisis de riesgo sísmico ya se disponga de espectros de respuesta y aceleraciones máximas para un determinado periodo de retorno. En estructuras ubicadas fuera de costa a veces es necesario realizar el análisis de riesgo sísmico, y “debido a la incertidumbre que involucra definir el sismo de diseño es aconsejable usar una aproximación estocástica para simular un entorno sísmico aleatorio más que un único sismo de diseño” (Romo y Jaime, 1980).

Una forma bastante sencilla para calcular aproximadamente el cortante basal que provoca un sismo sobre una estructura es multiplicar el peso total de la superestructura por el coeficiente sísmico:

$$V = W C_s \quad 2.16$$

Otra forma es emplear el análisis modal espectral. De acuerdo con Bazan y Meli (1985) los modos de vibración constituyen un conjunto completo y dado un instante el desplazamiento de una cualquiera de las masas puede expresarse como la suma de los desplazamientos debidos a la participación de cada uno de los modos naturales, esto es:

$$u_i(t) = \sum_j \phi_j(t) c_j Z_{ij} \quad 2.17$$

donde:

$u_i(t)$	desplazamiento relativo a la base de la masa i en el instante t .
$\phi_j(t)$	función que expresa la variación con respecto al tiempo de la participación del modo j .
c_j	coeficiente de participación que define la escala a la que interviene el modo j en el movimiento
z_{ij}	amplitud del desplazamiento de la masa m_i en el modo j .
\sum_j	expresa suma sobre todos los modos de vibrar.

c_j puede expresarse en términos de las masas y desplazamientos:

$$c_j = \frac{\sum_i m_i z_{ij}}{\sum_i m_i z_{ij}^2} \quad 2.18$$

sustituyendo en 2.17 queda:

$$u_i(t) = \sum_j \phi_j(t) Z_{ij} \frac{\sum_i m_i z_{ij}}{\sum_i m_i z_{ij}^2} \quad 2.19$$

Reglamentos de construcción como el del Distrito Federal estipulan que los espectros se pueden interpretar como pseudoaceleraciones, y de ahí obtener la pseudoaceleración máxima A_j (igual al desplazamiento máximo por la frecuencia al cuadrado). Tomando en cuenta esto se llega a:

$$u_{ij \max} = \frac{A_j c_j z_{ij}}{\omega_j^2} \quad 2.20$$

Una cota superior a la respuesta de la estructura por la participación de todos los modos es la suma de las respuestas máximas de todos los modos. Sin embargo este valor es siempre conservador ya que las respuestas máximas de cada modo no ocurren simultáneamente. Con base en estudios probabilísticos, Rosenblueth (citado por Bazán y Meli, 1985) demostró que en estructuras elásticas es más realista estimar la respuesta total con la expresión:

$$R = \sqrt{\sum_j R_j^2} \quad 2.21$$

Esta expresión es adecuada para sistemas cuyos periodos tengan valores bastante distintos.

La amplitud de desplazamiento de cada masa, la frecuencia y periodo de cada modo pueden calcularse con el método de Newmark o con el método de Holzer. Las aceleraciones máximas se pueden obtener de los espectros de diseño. Luego de calcular los desplazamientos máximos se multiplican por la rigidez de entrepiso y se obtienen los cortantes para cada modo. El cortante máximo se calcula con la ecuación 2.21.

2.2.4 Impactos

Es muy común que los barcos al realizar maniobras normales de acercamiento impacten con estructuras marinas como muelles y plataformas de fuera de costa. Es importante para el diseño de estas estructuras conocer la magnitud de la carga que provocan tales impactos. “Las cargas provocadas por accidentes y condiciones catastróficas son difíciles de evaluar. En el diseño práctico siempre es mejor considerar una velocidad de aproximación del barco

de entre 1 y 2 pies por segundo (0.3 y 0.6 m/s)” (Hsu, 1984). Se menciona que el tonelaje de los barcos puede llegar incluso a las 100 000 toneladas.

De acuerdo nuevamente con Hsu, (1984), la energía cinética del impacto de un barco puede calcularse de la siguiente forma:

$$E_c = C \frac{W}{2g} V^2 \quad 2.22$$

Dónde:

E_c	energía cinética
C	coeficiente de impacto (en la práctica se usa $C=1.4$)
W	tonelaje del barco
g	aceleración de la gravedad
V	velocidad de aproximación

La reacción R al impacto puede ser calculada relacionando la energía cinética con el trabajo interno:

$$E_c = R (y/2) \quad 2.23$$

Donde:

R	reacción de la estructura debida al impacto
y	desplazamiento debido al impacto. Puede expresarse en términos de la reacción y la rigidez de la estructura: $y=R/k$
k	rigidez de la estructura

$$E_c = \frac{1}{2} R \frac{R}{k} \quad 2.24$$

$$R = \sqrt{2kE_c} \quad 2.25$$

De 2.25 puede verse que la reacción depende de la velocidad de aproximación, de la raíz cuadrada del peso del barco y de la rigidez de la estructura. Para disminuir la reacción se usan parachoques o amortiguadores que protejan a las estructuras marinas.

Método de la viga apoyada sobre un medio elástico

Las bases para resolver el problema del pilote cargado lateralmente están en el estudio de una viga apoyada sobre un medio elástico. En 1867, Winkler propuso un modelo en el cual el suelo es sustituido por un conjunto de resortes que se deformaban en forma proporcional a la presión de contacto en un punto e independientes de los esfuerzos que ocurrieran en otros puntos. Otro modelo fue el propuesto por Hetényi en 1946 que considera la interacción entre resortes incorporando una viga elástica.

Basándose en estos modelos, Bowles (1974) elaboró un programa de computadora que modela un pilote cargado lateralmente. Por esta razón se le llama método de la viga apoyada sobre un medio elástico.

3.1 Bases del programa de Bowles

Bowles (1974) elaboró un programa para analizar y diseñar pilotes sujetos a carga lateral. El método está basado en la solución de una viga sobre un medio elástico, pero rotado 90 grados en de manecillas de reloj.

El método tiene la ventaja de poder analizar casi cualquier sistema de cargas laterales, considerar diferentes tipos de suelo (siempre y cuando el usuario pueda describirlo), huecos en el suelo, cambios de sección en el pilote, etc.

Bowles se basa en un esquema como el mostrado en la figura 3.1 y establece que en cualquier nodo del pilote la siguiente ecuación es válida:

$$P_i = A_i F_i$$

Donde:

P_i fuerza externa actuando sobre el nodo i

F_i fuerza interna en el mismo nodo i

A_i factor de proporcionalidad

En forma matricial, para un determinado arreglo de nodos en el pilote, la ecuación queda:

$$P = AF \tag{3.1}$$

Si ahora llamamos e a las deformaciones internas de los miembros estructurales en los nodos, y X a los desplazamientos externos de los nodos, los podemos relacionar por medio de un factor de proporcionalidad B .

$$e = BX$$

3.2

Se sabe que la matriz B es la traspuesta de la matriz A : $B=A^T$ (Wang, 1970; Laursen, 1969, citados por Bowles, 1974). Entonces la ecuación 3.2 queda:

$$e=A^T X$$

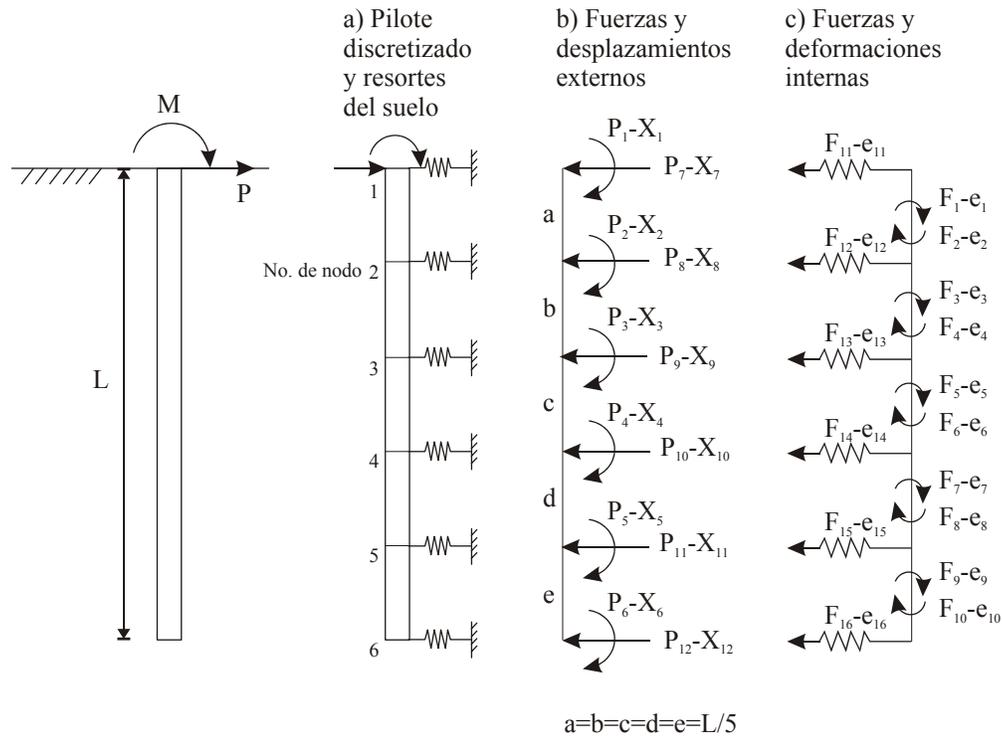


Figura 3.1 Modelo de pilote con carga lateral. a) modelo de Winkler rotado 90°; b) diagrama P - X de fuerzas y desplazamientos externos; c) Diagrama de fuerzas y deformaciones internas. (Bowles, 1974)

La fuerza interna en el nodo i -ésimo F_i es relacionada con el desplazamiento interno e_i como sigue:

$$F_i = S_i e_i$$

En forma matricial para todos los elementos:

$$F = Se \tag{3.3}$$

Si se sustituye 3.2 en 3.3 queda:

$$F = SA^T X \tag{3.4}$$

Ahora se sustituye 3.4 en 3.1:

$$P = A SA^T X \quad 3.5$$

La ecuación 3.5 se resuelve para X al invertir la matriz cuadrada ASA^T de tamaño $P \times P$:

$$X = [ASA^T]^{-1} P \quad 3.6$$

Se sustituye la ecuación 3.6 en la 3.4 y se obtienen las fuerzas internas F .

3.1.1 Obtención de la matriz A.

Se considera que el suelo que da soporte al pilote se sustituye por un conjunto de resortes con constante K , tal como se muestra en la figura 3.1. En el inciso b) de dicha figura se observa el esquema de fuerzas y momentos externos, así como desplazamientos y giros, que deberá considerarse para el desarrollo del análisis, entrada de datos y evaluación de resultados. Se pueden ver los momentos P_1 a P_6 con sus correspondientes rotaciones en los nodos X_1 a X_6 , y las fuerzas externas en los nodos en dirección horizontal P_7 a P_{12} con los correspondientes desplazamientos horizontales X_7 a X_{12} . Este será llamado diagrama $P-X$.

En el inciso c) de la misma figura se observan las fuerzas internas en los extremos de cada elemento en que es dividido el pilote por los seis nodos. Las fuerzas $F_1 - F_{10}$ son momentos internos en los extremos de los elementos; F_{11} a F_{16} son fuerzas internas de los “resortes”; e_1 a e_{10} son giros en los extremos de los elementos; e_{11} a e_{16} son compresiones en los “resortes”.

La relación entre fuerzas internas y externas dada por la ecuación 3.1, obtenida de la estática, la podemos aplicar al nodo 1 para los momentos (se aplica al nodo, no al elemento; además, debe hacerse notar que el resorte actúa sobre el nodo):

$$\begin{aligned} P_1 - F_1 &= 0 \\ P_1 &= F_1 \end{aligned} \quad 3.7$$

De la misma forma para las fuerzas:

$$\begin{aligned} P_7 - \frac{F_1}{a} - \frac{F_2}{a} + F_{11} &= 0 \\ P_7 &= \frac{F_1}{a} + \frac{F_2}{a} - F_{11} \end{aligned} \quad 3.8$$

En el nodo 2, para satisfacer el equilibrio de momentos:

$$P_2 = F_2 + F_3 \quad 3.9$$

Y para satisfacer la suma de fuerzas horizontales $\Sigma F_h = 0$ (todos los elementos son de la misma longitud)

$$P_8 = -\frac{F_1}{a} - \frac{F_2}{a} + \frac{F_3}{a} + \frac{F_4}{a} - F_{12} \quad 3.10$$

En el nodo 6, al sumar momentos obtenemos:

$$P_6 = F_{10} \quad 3.11$$

Y si sumamos fuerzas horizontales:

$$P_{12} = -\frac{F_9}{a} - \frac{F_{10}}{a} - F_{16} \quad 3.12$$

La matriz A completa para el esquema presentado queda como se muestra abajo:

A=	F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	P																
	1	1															
	2		1	1													
	3				1	1											
	4						1	1									
	5								1	1							
	6										1						
	7	Z	Z										-1				
	8	-Z	-Z	Z	Z								-1				
	9			-Z	-Z	Z	Z							-1			
	10					-Z	-Z	Z	Z						-1		
	11							-Z	-Z	Z	Z					-1	
12									-Z	-Z						-1	

Figura 3.2 Matriz A. $Z = 1/a$; los espacios en blanco son elementos nulos.

En caso de utilizarse más divisiones en el pilote, la matriz A tiene la misma configuración pero más grande. El tamaño se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} N &= \text{número de elementos} = 5 \\ P &= 2N + 2 = 12 = NP \\ F &= 3N + 1 = 16 = NF \end{aligned} \quad 3.13$$

La matriz A resulta ser una matriz de tamaño NP x NF.

3.1.2 Obtención de la matriz B

Si el nodo 1 rota $X=1$ rad, considerando que el resorte del suelo no tiene resistencia a la rotación y que las deformaciones son pequeñas, e_1 rota como sigue:

$$e_1 = X_1 + \frac{X_7}{a} - \frac{X_8}{a} \tag{3.14}$$

De la misma forma:

$$e_2 = X_2 + \frac{X_7}{a} - \frac{X_8}{a} \tag{3.15}$$

$$e_3 = X_2 + \frac{X_8}{a} - \frac{X_9}{a} \tag{3.16}$$

$$e_4 = X_3 + \frac{X_8}{a} - \frac{X_9}{a} \tag{3.17}$$

Las deformaciones internas de los resortes e_{11} al e_{16} son:

$$e_{11} = -X_7 \tag{3.18}$$

$$e_{12} = -X_8 \tag{3.19}$$

.....

La matriz B completa queda:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12					
e																	
1	1						Z	-Z									
2		1					Z	-Z									
3			1					Z	-Z								
4				1				Z	-Z								
5					1				Z	-Z							
6						1			Z	-Z							
7							1		Z	-Z							
8								1	Z	-Z							
9										Z	-Z						
10											Z	-Z					
11												-1					
12													-1				
13														-1			
14															-1		
15																-1	
16																	-1

Figura 3.3 Matriz B. $Z = 1/a$. Obsérvese que $B=A^T$.
(Los espacios en blanco son elementos nulos)

3.1.3 Obtención de la matriz S

Las pendientes en los extremos del elemento se obtienen de los principios de la viga conjugada aplicados a la figura 3.1:

$$e_1 = \frac{F_1 l}{3EI} - \frac{F_2 l}{6EI} \quad 3.20$$

$$e_2 = -\frac{F_1 l}{6EI} + \frac{F_2 l}{3EI} \quad 3.21$$

Se resuelven las ecuaciones 3.20 y 3.21 simultáneamente para el primer segmento de la figura 3.1, donde $a=1$ y se obtiene:

$$F_1 = \frac{4EI}{a} e_1 + \frac{2EI}{a} e_2$$

$$F_2 = \frac{2EI}{a} e_1 + \frac{4EI}{a} e_2$$

De la misma forma se obtienen:

$$F_3 = \frac{4EI}{b} e_3 + \frac{2EI}{b} e_4$$

$$F_4 = \frac{2EI}{b} e_3 + \frac{4EI}{b} e_4$$

etc...

La fuerza F_{11} es, sencillamente:

$$F_{11} = K_1 e_{11}$$

El “resorte” del suelo tiene unidades FL^{-1} obtenidas del módulo de reacción del suelo k_s , el ancho B , y la longitud del segmento:

$$K_1 = (aB/48)(7k_{s1} + 6k_{s2} - k_{s3})$$

$$K_2 = (aB/24)(7k_{s3} + 6k_{s2} - k_{s1})$$

.....

$$K_n = (aB/12)(k_{sn-2} + 10k_{sn-1} + k_{sn})$$

3.1.4 Obtención de la matriz P

Las ecuaciones 3.7 a la 3.12 se pueden escribir en forma extendida como combinaciones lineales de las fuerzas internas F_i .

$$\left. \begin{aligned}
 P_1 &= F_1 + 0F_2 + 0F_3 + \dots + 0F_{16} \\
 P_2 &= 0F_1 + F_2 + F_3 + \dots + 0F_{16} \\
 P_3 &= 0F_1 + 0F_2 + 0F_3 + F_4 + F_5 + \dots + 0F_{16} \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_7 &= \frac{F_1}{a} + \frac{F_2}{a} + \dots - F_{11} + \dots + 0F_{16} \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_{12} &= 0F_1 + 0F_2 + \dots - \frac{F_9}{e} - \frac{F_{10}}{e} + \dots - F_{16}
 \end{aligned} \right\} 3.22$$

F \ e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	A	B														
2	B	A														
3			A	B												
4			B	A												
5					A	B										
6					B	A										
7							A	B								
8							B	A								
9									A	B						
10									B	A						
11											K_1					
12												K_2				
13													K_3			
14														K_4		
15															K_5	
16																K_6

F	1	2
1	A	B
2	B	A
3	A	B
4	B	A
5	A	B
6	B	A
7	A	B
8	B	A
9	A	B
10	B	A
11	K_1	0
12	K_2	0
13	K_3	0
14	K_4	0
15	K_5	0
16	K_6	0

Figura 3.4 Matriz S. $A = \frac{4EI}{a}$; $B = \frac{2EI}{a}$
 (Los espacios en blanco son elementos nulos)

3.2 Módulo de reacción del suelo

El módulo de reacción del suelo se define como el cociente que resulta al dividir la presión aplicada al suelo entre la deformación causada por dicha presión (se trata de un módulo secante de la curva fuerza vs desplazamiento del suelo). Sin embargo, el módulo es raramente medido en el sitio a través de una prueba de carga lateral. En lugar de esto, usualmente se miden las cargas y desplazamientos en la parte superior embebida del pilote,

de 1 a 3 m aproximadamente. A partir de estos datos uno puede utilizar una ecuación para el módulo lateral y obtener una base para el diseño en el sitio. En el análisis propuesto por Bowles es necesario contar con valores del modulo de reacción del suelo k_s para cada nodo. La siguiente ecuación puede ser utilizada para calcular estos valores:

$$k_s = A_s + B_s Z^n \quad 3.23$$

También es posible usar una variación de la ecuación anterior:

$$k_s = A_s + B_s \left(\frac{Z}{L} \right)^n \quad 3.24$$

Para arena, Bowles (1974) considera que usando $A_s=0$ y $B=1$ se obtiene una aproximación razonable. En arcilla, n puede variar entre 0.4 y 0.8, mientras que para A_s puede usarse $2.4 q_u$ (kg/cm^3).

Cuando no se dispone de una prueba de carga lateral, se puede recurrir a una estimación del módulo de reacción del suelo. Se ha encontrado que los momentos flexionantes y la presión en el suelo calculados no son muy sensibles a las variaciones en el valor de k_s debido a que la rigidez del miembro estructural es usualmente 10 o más veces mayor que la rigidez del suelo tal y como esta definido por k_s (Bowles, 1996).

Bowles propone estimar k_s a partir de la capacidad de carga admisible q_a :

$$q_a = q_{ult}/FS$$

Si se considera que la presión última se alcanza cuando hay un asentamiento $\Delta H=0.0254$ m y además k_s es $q_{ult}/\Delta H$, entonces:

$$k_s = q_a FS / \Delta H$$

$$k_s = 40 (FS) q_a \quad \text{kN}/\text{m}^3 \quad 3.25$$

donde q_a está en kPa. Se pueden emplear otros valores de $\Delta H= 6, 12, 20$ mm, etc., para los cuales el factor cambia de 40 a 160, 83, ó 50, respectivamente. La elección dependerá de que valor le asignemos a ΔH en el momento que se alcance la presión última.

Considerando que el suelo que rodea al pilote produce una considerable resistencia por cortante, Bowles propone usar el doble de la ecuación 3.25. Bajo este mismo enfoque, los parámetros A_s y B_s se pueden calcular usando las componentes de la capacidad de carga y luego multiplicarse por dos ($C_m=2$)

$$\left. \begin{aligned} A_s &= C_m \times 40 (cN_c + 0.5\gamma B_p N_\gamma) \\ B_s Z^n &= C_m \times 40 (\gamma N_q Z^n) \end{aligned} \right\} \quad 3.26$$

Donde

C_m	Coefficiente que toma en cuenta la resistencia por cortante en los lados del pilote
c	Cohesión del suelo
N_c y N_q	Factores de capacidad de carga
γ	Peso específico del suelo
B_p	Ancho o diámetro del pilote
Z	Profundidad
n	Exponente adimensional

Se ha encontrado que el uso de la ecuación 3.26 proporciona resultados en el rango de la mitad hacia arriba de los valores obtenidos por otros métodos.

La duplicación de la ecuación 3.25 puede no ser cierta para pilotes de diámetro o lado mayor que 18 pulgadas, debido a que la contribución de la resistencia por cortante en los lados es proporcionalmente menor a la resistencia que ofrece el frente del pilote. Bowles propone, aunque afirma que no hay los suficientes datos que lo sustenten, que el límite para duplicar la ecuación es $D=0.457$ m (18 pulg.) Para pilotes de mayor diámetro se utilizará un factor de tamaño C_m , para pilotes aislados:

$$\begin{aligned}
 B = D < 0.457 \text{ m} & \quad C_m = 2.0 \\
 B = D > 0.457 \text{ m} & \quad C_m = 1.0 + \left(\frac{457}{D, \text{mm}} \right)^{0.75} \geq 1.5 \quad 3.27 \\
 & \quad C_m = 1.0 + 0.25 \text{ para } D > 1200 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

También recomienda que se utilice un valor de n entre 0.4 y 0.6 para que k_s no aumente sin límite con la profundidad. En la figura 3.5 se pueden comparar los perfiles de k_s para distintos valores de n . La gráfica se construyó utilizando los valores arbitrarios $A_s=1$ y $B_s=1$, pero nos brinda una buena idea de la diferencia que hay entre utilizar $n=1$ y $n=0.4$ ó 0.6.

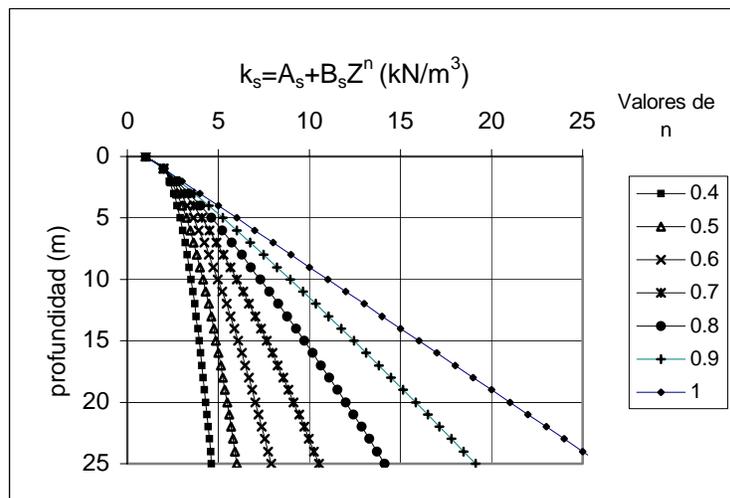


Figura 3.5 Módulo de reacción del suelo para diferentes valores de n .

Obtención de k_s usando la capacidad de carga admisible y módulo de elasticidad

Cuando lo único disponible es la capacidad de carga admisible del suelo q_a , Bowles propone utilizarla para calcular una aproximación del módulo de reacción k_s de la siguiente forma (se puede omitir el término N_q):

$$k_s = F_{w,1} \times FS \times C_m \times C \times q_a + F_{w,2} \times C_m \times C \times \gamma \times Z^n \times N_q \quad 3.28$$

donde:

$F_{w,1}$ = Factor de forma, 1.0 para pilotes cuadrados ó H, 1.3 – 1.7 para pilotes circulares

$F_{w,2}$ = Factor de forma, 1.0 para pilotes cuadrados ó H, 2.0 – 4.4 para pilotes circulares

FS = Factor de seguridad usado para obtener q_a (usualmente 3 para arcillas; 2 para suelos sin cohesión)

N_q = de la fórmula de Vesic

n = exponente previamente definido

Bowles propone otra fórmula basándose en la resistencia a la compresión simple q_u :

$$k_s = C_m \times 40 \times FS \times q_u = 2 \times 3 \times 40 \times q_u = 240 q_u \quad (t/m^3)$$

El Instituto Americano del Petróleo (1984) sugiere que la capacidad de carga lateral para arcilla blanda ($c \leq 50$ kPa) esté limitada a $9c$ y, para arcilla dura de $8c$ a $12c$. Por lo tanto, para arcilla blanda el valor del módulo será, de acuerdo a la ecuación 3.26:

$$k_s = C_m (40) (9c) = 360 C_m c = 360 (2) (q_u/2) = 360 q_u \quad (t/m^3)$$

Bowles (1996), basándose en Vesic (1961) propone una fórmula para calcular el módulo de reacción a partir del módulo de elasticidad del suelo y la relación de Poisson:

$$k_s = \frac{E_s}{B(1-\nu^2)} \quad 3.29$$

E_s módulo de elasticidad del suelo

B ancho del pilote o cimiento

ν relación de poisson

k_s también se puede estimar a partir de pruebas hechas in situ:

❖ Prueba de Presiómetro.

$$k_s = \frac{3.3E_{pm}}{B_p} \quad 3.30$$

Para suelos sin cohesión (Chen, 1978):

$$k_s = \frac{3.0E_{pm}}{B} \quad 3.31a$$

Para suelos cohesivos

$$k_s = \frac{1.6E_{pm}}{B} \quad 3.31b$$

donde E_{pm} = módulo del presiómetro.

❖ Prueba de Dilatómetro.

$$k_s = \frac{E_d F_p}{3.7B} \quad 3.32$$

donde:

E_d módulo del dilatómetro, kPa

F_p factor de forma del pilote: 1.5 a 4.0 para pilote circular; 1.0 para pilote cuadrado ó HP

Se deben calcular los valores de k_s tan cercanos como sea posible de los nodos del pilote y no se deberá utilizar un sólo valor para la longitud total del pilote.

La tabla 3.1 proporciona los rangos de k_s para diferentes tipos de suelo y puede ser utilizada como una guía con la que se comparen los valores calculados por diferentes métodos. Éstos deben tomarse como razonablemente representativos del término A_s a una profundidad de entre 3 y 6 m y para pilotes de diámetro menor a 0.5 m.

Tabla 3.1 Rangos de valores representativos del módulo lateral de reacción (valores de A_s en la ecuación $k_s = A_s + B_s Z^n$) Bowles, 1996.

Suelo*	k_s , kcf	k_s , MN/m ³
Grava arenosa densa	1400-2500	220-400
Arena gruesa densa	1000-2000	157-300
Arena media	700-1800	110-280
Finos o limos, arena fina	500-1200	80-200
Arcilla dura (húmeda)	350-1400	60-220
Arcilla dura (saturada)	175-700	30-110
Arcilla consistencia media (húmeda)	250-900	39-140
Arcilla consistencia media (saturada)	75-500	10-80
Arcilla blanda	10-250	2-40

*Cualquiera: húmedo o seco, a menos que se especifique

De acuerdo con Bowles (1996), un valor entre la mitad y el doble del valor correcto de k_s puede ser adecuado. Tal como ya se había mencionado, se ha encontrado que los momentos flexionantes y la presión en el suelo calculados no son muy sensibles a las variaciones en el valor de k_s debido a que la rigidez del miembro estructural es usualmente 10 o más veces mayor que la rigidez del suelo definida por k_s .

3.3 Módulo de reacción no lineal

En su programa, Bowles considera que el suelo es un material elástico lineal a través del módulo de reacción. Sin embargo, la experiencia en pruebas de carga lateral sobre pilotes (capítulo 6) demuestra que esa consideración sólo es aceptable a niveles de carga bajos.

Para introducir el comportamiento no lineal de un suelo arcilloso blando se propone un procedimiento iterativo para calcular el módulo de reacción en función del nivel de deformación unitaria a lo largo del proceso de carga del pilote.

Si tomamos la gráfica para construir curvas p - y para arcillas blandas sumergidas desarrollada por Matlock (1970) observamos que en el punto e el suelo tiene un desplazamiento de $8y_{50}$ y alcanza su máxima resistencia. Para desplazamientos mayores la resistencia se mantiene constante, figura 3.6.

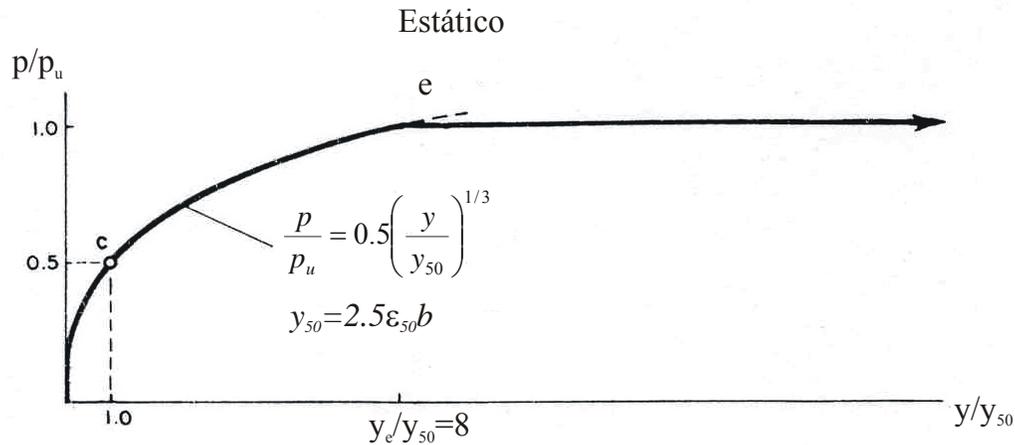


Figura 3.6 Curvas p - y para arcillas blandas sumergidas, Matlock 1970.

$$y_{50} = 2.5 \epsilon_{50} b$$

$$y_e = 8y_{50}$$

$$y_e = 20 \epsilon_{50} b$$

3.33

donde:

- y_e desplazamiento en el punto e
 ε_{50} deformación unitaria correspondiente a la mitad del esfuerzo desviador máximo $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$
 b diámetro o ancho del pilote

Si asumimos que tal desplazamiento $y_e = 8y_{50}$ le produce al suelo una deformación unitaria igual al 100% de la que tendría una probeta del mismo suelo en la falla en una prueba CU, y además, que hay una relación lineal entre desplazamiento y deformación unitaria, entonces podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{y}{y_e} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{100}}$$

o bien:

$$\varepsilon = \varepsilon_{100} \left(\frac{y}{y_e} \right) \quad 3.34$$

donde:

- y desplazamiento calculado para un punto del pilote
 ε deformación unitaria que provoca el desplazamiento y
 ε_{100} deformación unitaria correspondiente al máximo esfuerzo desviador $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\text{máx}}$ en una prueba CU

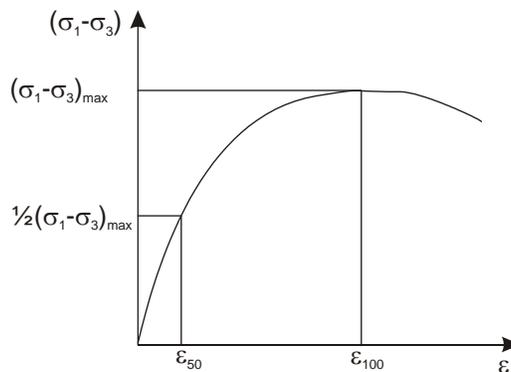


Figura 3.7 Definición de ε_{50} y ε_{100} en una curva esfuerzo deformación de una prueba CU

Por otra parte, Jaime (1988) aplica una fórmula hiperbólica propuesta por Kondner (1963) para ajustar las curvas esfuerzo deformación obtenidas de pruebas CU en arcillas blandas del Valle de México. Jaime encontró que las hipérbolas se ajustaron con un coeficiente de correlación superior a 0.9, por lo que “es bastante aproximada también para el caso de las arcillas de valle de México”.

La expresión propuesta por Kondner (1963) es:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{b + a\varepsilon} \quad 3.35$$

o bien:

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = b + a\varepsilon \quad 3.36$$

Jaime (1988) menciona que para ajustar los parámetros de la hipérbola se trazan los datos de la curva experimental en un sistema de ejes coordenados ε/σ vs. ε . Si los datos se alinean a una recta, entonces es posible el ajuste. Luego se hace un análisis de regresión lineal para obtener los parámetros a y b : a es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.

El módulo de elasticidad secante es igual a σ/ε , y de acuerdo con la fórmula de Kondner:

$$E_s = \frac{1}{b + a\varepsilon} \quad 3.37$$

Ahora sustituyamos la ecuación 3.37 en la 3.29, que relaciona el módulo de elasticidad del suelo con el módulo de reacción:

$$k_s = \frac{1}{B(1-\nu^2)(b + a\varepsilon)} \quad 3.38$$

Para tomar en cuenta el comportamiento no lineal del suelo, en el programa de Bowles se siguió un procedimiento iterativo que consiste en:

1. Ajustar hipérbolas a las curvas experimentales esfuerzo vs deformación de pruebas triaxiales CU para diferentes profundidades. Se deben obtener los parámetros a y b de la ecuación 3.36 de cada hipérbola. De las curvas experimentales también se obtienen los valores de ε_{50} y ε_{100} .
2. Calcular un módulo de reacción inicial a través de las ecuaciones 3.29 y 5.43

$$k_s = \frac{E_s}{B(1-\nu^2)} \quad 3.29$$

$$E_H = 40 S_u \quad 5.43$$

3. Calcular los desplazamientos en cada nodo del pilote con el programa de Bowles usando el módulo de reacción del punto anterior.

4. Con estos desplazamientos y la ecuación 3.34 se calcula la deformación unitaria que tiene el suelo en la vecindad de cada nodo.
5. Emplear los parámetros a y b de la hipérbola que corresponde a cada nodo y la ecuación 3.38 para calcular un nuevo valor del módulo de reacción. Este último módulo de reacción se usa para calcular nuevamente los desplazamientos, mismos que se comparan con los calculados anteriormente.

Si la diferencia es mayor que una tolerancia previamente establecida, entonces se calcula de nueva cuenta el módulo de reacción, luego los desplazamientos y otra vez se hace la comparación de desplazamientos. El proceso es iterativo hasta que la diferencia sea menor a la tolerancia (pasos 4 y 5)

La forma en que se decide si ya no hay una diferencia importante entre desplazamientos es, sencillamente:

$$|x_1 - x_2| < \text{tolerancia}$$

Este procedimiento no ha sido validado con datos de pruebas de carga reales y se incluye con el fin de demostrar en el capítulo 7 que un manejo del comportamiento no lineal del suelo conduce a resultados más satisfactorios.

Capítulo 4

Método de las curvas P - Y

4.1 Introducción

La ecuación diferencial que representa el problema de un pilote cargado lateralmente es la siguiente:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P_x \frac{d^2 y}{dx^2} - p = 0 \quad 4.1$$

$$p = -E_s y \quad 4.2$$

donde:

P_x	carga axial
y	desplazamiento lateral
x	profundidad
EI	rigidez a la flexión
E_s	Módulo del suelo
p	Reacción del suelo

La ecuación 4.1 se puede resolver fácilmente utilizando un programa computacional si el módulo del suelo E_s se puede expresar en función de la profundidad x , y del desplazamiento lateral y .

Los primeros en proponer el uso de las curvas p - y en la solución del problema de pilotes cargados lateralmente fueron McClelland y Focht en 1956. El concepto de curvas p - y se puede definir con ayuda de la figura 4.1 de la siguiente manera: en 4.1.a se observa la sección de un pilote a cierta profundidad x debajo de la superficie. En 4.1.b se observa una posible distribución de esfuerzos del suelo alrededor del pilote en dicha sección, después de hincado y antes de ser cargado lateralmente. Luego el pilote se desplaza una distancia y_l por la aplicación de una carga lateral F y el suelo alrededor tiene una distribución de esfuerzos desbalanceada, como se ilustra esquemáticamente en 4.1.c. Al integrar el volumen de esfuerzos se obtiene una fuerza desbalanceada p_l , por unidad de longitud, que es la reacción del suelo.

De diversos estudios se desprende que la resistencia del suelo es una función no lineal. Por ello, el problema se debe resolver para el rango de cargas laterales de trabajo. Al conjunto de cargas laterales le corresponden conjuntos de desplazamientos y_i , y de fuerzas de reacción del suelo p_i . Entonces, para cada reacción p_i del rango se tiene un desplazamiento

y_i . Al graficarlos se obtienen las curvas p - y . Se construye una curva para cada profundidad a intervalos que dependen de la exactitud deseada o de los medios disponibles.

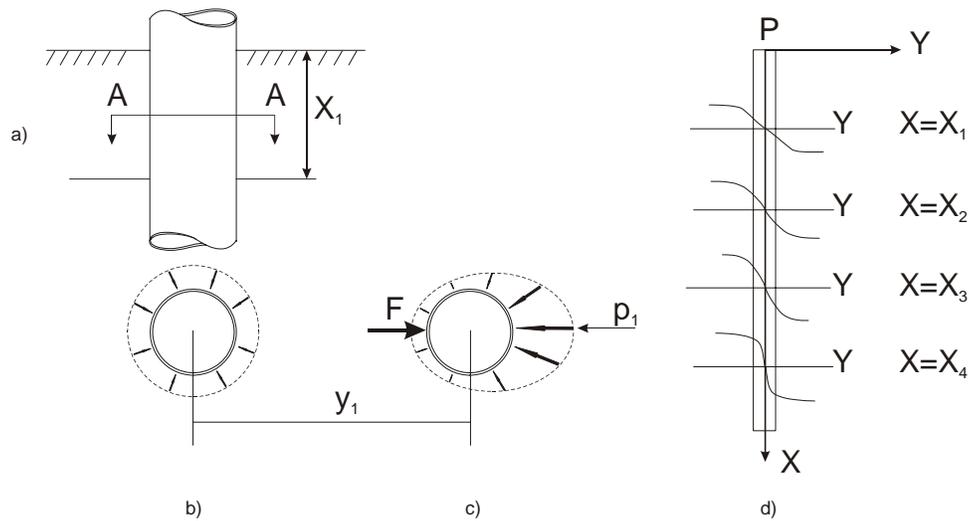


Figura 4.1 Definición de las curvas p - y (Reese y Welch, 1975)

Las curvas p - y pueden obtenerse experimentalmente, para ello se realizan pruebas de carga lateral en pilotes instrumentados para medir los momentos flexionantes en toda la profundidad del cemento. También se miden el desplazamiento y la rotación en la cabeza del pilote. Las cargas laterales aplicadas son típicamente estáticas de corto plazo y a veces cíclicas.

Los valores de p y y pueden calcularse a partir de las curvas experimentales de momento flexionante por medio de

$$y = \iint \frac{M(x)}{EI} \quad 4.3$$

$$p = \frac{d^2}{dx^2} M(x) \quad 4.4$$

Se deben emplear las condiciones de frontera apropiadas para la solución numérica de las ecuaciones. La solución de 4.3 se puede realizar con aceptable exactitud. Sin embargo, la solución analítica de 4.4. puede complicarse. Si se dispone de una curva de momentos muy exacta es posible una doble diferenciación numérica.

Las condiciones de frontera en la cabeza del pilote pueden ser libertad de rotación y desplazamiento, o libertad de desplazamiento y rotación restringida. En la punta del pilote puede haber desplazamiento y rotación pero el cortante y el momento flexionante se consideran nulos.

Una vez que se conocen las curvas p - y se establecen fácilmente los valores de E_s por medio de la ecuación 4.2. Como E_s es función de x y y , tal como se mencionó anteriormente, la ecuación 4.1 puede resolverse con un programa computacional.

De la solución de 4.1 resultan las curvas de desplazamiento y , pendiente S , momento M , cortante V , y reacción del suelo p , todas en función de la profundidad x . Estas curvas se muestran en la figura 4.2.

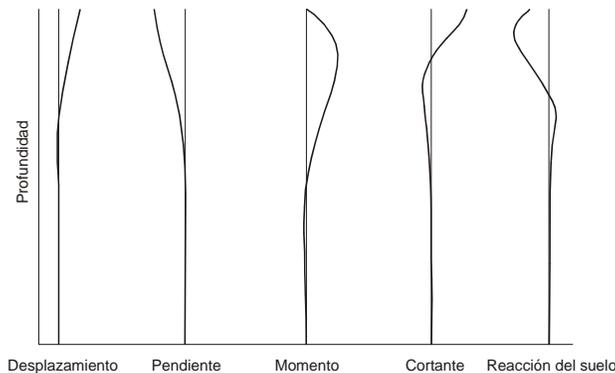


Figura 4.2 Solución completa de un pilote cargado empleando curvas p - y

4.2 Capacidad de carga lateral de arcillas blandas

La capacidad de carga unitaria, P_u , varía entre $3c$ y $12c$ (c = cohesión del suelo). Las normas del Instituto Americano del Petróleo (API, sección 6.8.2), adoptando el consenso de los investigadores, sugieren que la capacidad de carga lateral de arcillas blandas se calcule con (Matlock, 1970):

$$P_u = 3c + \gamma' x + J \frac{cx}{b} \quad \text{para } x < x_R \quad 4.5$$

$$P_u = 9c \quad \text{para } x \geq x_R \quad 4.6$$

donde:

- P_u resistencia última unitaria, en kPa (psi)
- x profundidad donde se calcula P_u , en m(in)
- c resistencia al esfuerzo cortante no drenada, a la profundidad x , en kPa (psi)
- b diámetro del pilote, en m (in)
- γ' peso específico sumergido del suelo, valor promedio desde la superficie hasta la profundidad x , en kN/m^3 (lb/in^3)
- J constante adimensional empírica con valores entre 0.25 y 0.5 (para arcillas frágiles se recomienda usar 0.25)
- x_R profundidad de la zona de resistencia reducida de la arcilla por su cercanía con la superficie, en m (in)

Cuando la resistencia no drenada y el peso específico de la arcilla es constante en la zona superior, x_R se calcula con:

$$x_R = \frac{6b}{\frac{\gamma' b}{c} + J} \quad 4.7$$

Cuando la resistencia varía con la profundidad, las ecuaciones 4.5 y 4.6 se resuelven gráficamente y en el primer cruce entre las dos ecuaciones se encuentra el valor de x_R . Un valor mínimo general de x_R es $2.5b$.

4.3 Obtención de curvas p - y con datos de laboratorio

Varios investigadores realizaron pruebas de carga lateral sobre pilotes instrumentados en diferentes tipos de suelo, en diversas condiciones y niveles de carga. En general, la respuesta del suelo depende del tipo de carga, ya sea estática o cíclica. Por lo tanto, es de esperarse que las curvas p - y difieran según el tipo de carga.

La instrumentación les proporcionó los momentos flexionantes a diferentes profundidades con los que formaron un perfil de momentos. Posteriormente, con las ecuaciones 4.3, 4.4, la ecuación del perfil de momentos y las condiciones de frontera adecuadas, obtuvieron los perfiles de p y y . De esta forma, construyeron curvas p - y experimentales para carga estática y cíclica a distintas profundidades.

Los investigadores observaron que las curvas p - y experimentales presentaban un patrón común para un mismo suelo y condición de carga. Sobre esta base, idealizaron las curvas y las ajustaron empíricamente a ecuaciones simples que involucraban los resultados obtenidos de las pruebas de laboratorio del respectivo suelo (pruebas triaxiales en muestras inalteradas).

Dichas ecuaciones son las que permiten construir las curvas p - y a partir de pruebas triaxiales de laboratorio, salvando la necesidad de realizar pruebas de carga lateral en pilotes instrumentados para cada sitio en particular. Sin embargo, estas ecuaciones deben utilizarse con sumo cuidado, aplicándolas sólo a suelos con características similares a las del suelo en que se originaron.

A continuación se presenta una síntesis de algunos de los métodos para construir curvas p - y para carga estática y cíclica en distintos tipos de suelo.

4.3.1 Curvas p - y estáticas y cíclicas para arcillas rígidas sobre la superficie de agua (Reese y Welch, 1975)

Basándose en pruebas de carga lateral en pilotes hincados en arcilla rígida, Reese y Welch (1975) propusieron un método para definir las curvas p - y estáticas y cíclicas a partir de datos obtenidos en laboratorio.

Para carga estática el método consiste en:

1. Obtener la mejor estimación de la resistencia al esfuerzo cortante c , y el valor de ε_{50} , deformación axial cuando se aplica la mitad de la diferencia de esfuerzos máximos: $(\sigma_1 - \sigma_3)_{máx}$. Si no se dispone de un valor se puede usar 0.005 o 0.010, el valor mayor es más conservador. También el peso específico sumergido γ' promedio desde la superficie hasta la profundidad de la curva p - y que se va a calcular.
2. Calcular la resistencia última del suelo por unidad de longitud del fuste P_u , usando el menor de los valores obtenidos con las ecuaciones 4.5 y 4.6 multiplicados por el ancho del pilote:

$$P_u = \left(3c + \gamma'x + J \frac{cx}{b} \right) b \quad \text{para } x < x_R \quad 4.8$$

$$P_u = 9cb \quad \text{para } x \geq x_R \quad 4.9$$

3. Se calcula el desplazamiento horizontal y_{50} , producido cuando se alcanza la mitad de la resistencia última:

$$y_{50} = 2.5b\varepsilon_{50} \quad 4.10$$

Los puntos que describen la curva p - y se calculan con la ecuación:

$$\frac{P}{P_u} = 0.5 \left(\frac{y}{y_{50}} \right)^{1/4} \quad 4.11$$

Cuando la abscisa y sea mayor que $16y_{50}$, se usará $P = P_u$.

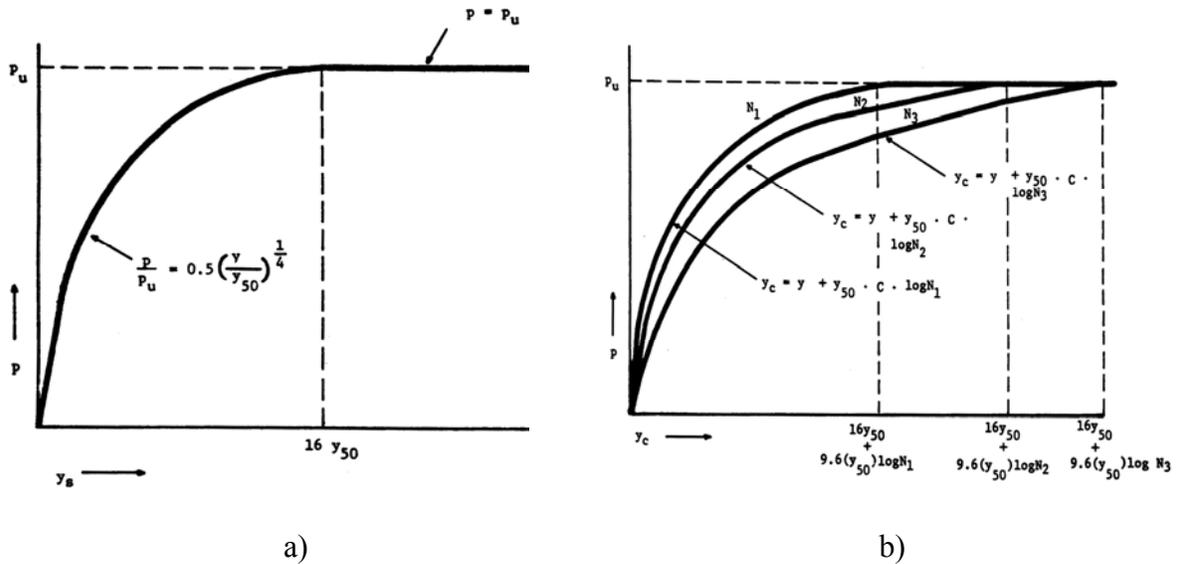


Figura 4.3 Forma general de curvas p - y para carga estática a), y carga cíclica b), en arcilla rígida sobre la superficie del agua (Reese y Welch, 1975)

Para considerar el efecto de las cargas cíclicas, tales como las impuestas por el oleaje, Reese y Welch propusieron:

$$y_c = y + y_{50} C \log N \quad 4.12$$

donde:

- y_c desplazamiento ocurrido después de N ciclos de carga
- y y y_{50} desplazamiento horizontal de la curva estática y desplazamiento producido por la mitad de la carga última
- C parámetro dependiente del nivel de carga aplicado. Para los experimentos que realizaron encontraron que era igual a:

$$C = 9.6 \left(\frac{P}{P_u} \right)^4 = 9.6 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}} \right)^4 \quad 4.13$$

Según Reese y Welch, los resultados de pruebas de laboratorio baja carga cíclica se pueden expresar por medio de:

$$\epsilon_c = \epsilon + \epsilon_{50} C \log N \quad 4.14$$

donde:

- ϵ_c deformación acumulada después de N ciclos de carga; los demás parámetros se definieron anteriormente

El procedimiento para construir las curvas p - y cíclicas es el siguiente:

1. Obtener las curvas p - y para carga estática con el procedimiento anterior.
2. Se estima un número de repeticiones de la carga cíclica, N .
3. Con los ensayos de laboratorio y la ecuación 4.14 ó 4.13 se determina el valor de C para varios valores de $(\sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)_{máx}$ (Si no se tienen ensayos de laboratorio se proponen valores de P y se calcula C con la ecuación 4.13).
4. Para cada valor de P seleccionado en el punto 3 se calcula el valor de y_c por medio de la ecuación 4.12.

Las curvas p - y así obtenidas definen la respuesta del suelo después de N ciclos de carga.

Las normas API (sección 6.8.5) indican que “al desarrollarse las curvas esfuerzo-deformación y las curvas p - y para cargas cíclicas, debe ejercerse un buen juicio respecto al deterioro de la capacidad de carga de las arcillas frágiles para deformaciones grandes”. Las mismas normas recomiendan usar una capacidad de carga lateral P_u ante cargas estáticas entre $8c$ y $12c$.

Romo y Ovando (1995) mencionan que además de la resistencia a la falla de las arcillas rígidas, debe considerarse el efecto que fisuras, grietas y pequeños bloques irregulares (no mencionan una forma para considerar los efectos) pueden tener en la deformación global (y en la concentración de deslizamientos) de la arcilla y, por tanto, en las características de las curvas p - y . Esta estructura secundaria es típica de los suelos preconsolidados (principalmente por secado) y en suelos expansivos.

4.3.2 Curvas p - y estáticas y cíclicas para arcillas rígidas sumergidas (Reese et al, 1975)

Procedimiento para desarrollar curvas p - y para carga estática:

1. Obtener los valores de la resistencia no drenada al cortante c , peso específico sumergido del suelo γ' , y diámetro del pilote b , desde el nivel superficial hasta la profundidad X_p donde se desea calcular la curva p - y .
2. Calcular el promedio de la resistencia no drenada al cortante c_a sobre la profundidad X_p .
3. Se calcula la resistencia del suelo en la profundidad X_p con las siguientes ecuaciones:

$$p_{cl} = 2 c_a b + \gamma' b X_p + 2.83 c_a X_p \quad 4.15$$

$$p_{c2} = 11 c b \quad 4.16$$

Se utiliza el menor de los valores obtenidos de las ecuaciones 4.15 y 4.16.

4. De la figura 4.4 se elige un valor de A apropiado para la profundidad adimensional.

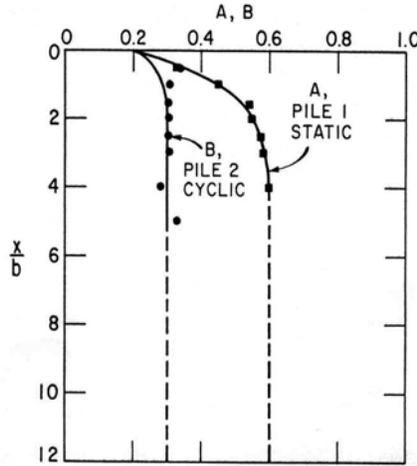


Figura 4.4 Coeficientes adimensionales A y B de la resistencia última del suelo vs. profundidad adimensional (Reese et al, 1975)

5. La línea recta inicial de la curva p - y está dada por:
 $p = k_x y \quad 4.17$

El valor de k se obtiene de la tabla 4.1.

Tabla 4.1 Valores recomendados de k para arcillas rígidas.

Resistencia promedio no drenada al cortante (ton/ft ²)*	0.5 – 1	1 – 2	2.4
k_s (estático) lb/in ³	500	1000	2000
k_c (cíclico) lb/in ³	200	400	800

*La resistencia promedio al cortante debe ser calculada desde una profundidad de 5 diámetros de pilote.

6. Se calcula:
 $y_c = \epsilon_c b \quad 4.18$
 ϵ_c se obtiene de la tabla 4.2

Tabla 4.2. Valores representativos de ϵ_c para arcillas rígidas.

Resistencia promedio no drenada al cortante (ton/ft ²)	0.5 - 1	1- 2	2.4
ϵ_c (in/in)	0.007	0.005	0.004

7. La primera porción parabólica de la curva p - y se calcula con:

$$p = 0.5 p_c (y/y_c)^{0.5} \quad 4.19$$

la sección de la parábola de la ecuación 4.19 que se incluye en la curva p - y será desde la intersección de la parábola con la recta de la ecuación 4.17, hasta un valor de y igual a Ay_c . Si no hay intersección con la recta entonces la parábola será la curva p - y desde el origen de coordenadas.

8. La segunda sección parabólica de la curva p - y está dada por:

$$p = 0.5 p_c \left(\frac{y}{y_c} \right)^{0.5} - 0.055 p_c \left(\frac{y - Ay_c}{Ay_c} \right)^{1.25} \quad 4.20$$

$$A y_c \leq y \leq 6A y_c$$

9. La siguiente línea recta de la curva p - y está dada por:

$$p = 0.5 p_c (6A)^{0.5} - 0.411 p_c - \frac{0.0625}{y_c} p_c (y - 6A y_c) \quad 4.21$$

$$6 A y_c \leq y \leq 18 A y_c$$

10. La línea recta final de la curva p - y se define con:

$$p = 0.5 p_c (6A)^{0.5} - 0.411 p_c - 0.75 p_c A \quad 4.22$$

$$18A y_c \leq y$$

La figura 4.5 ilustra la forma en que se construye la curva p - y para arcillas rígidas sumergidas.

Procedimiento para desarrollar curvas p - y para carga cíclica.

1. Los pasos 1, 2, 3 y 5 son iguales al caso de carga estática.
4. Se elige un valor apropiado de B de la figura 4.4 para la profundidad adimensional.

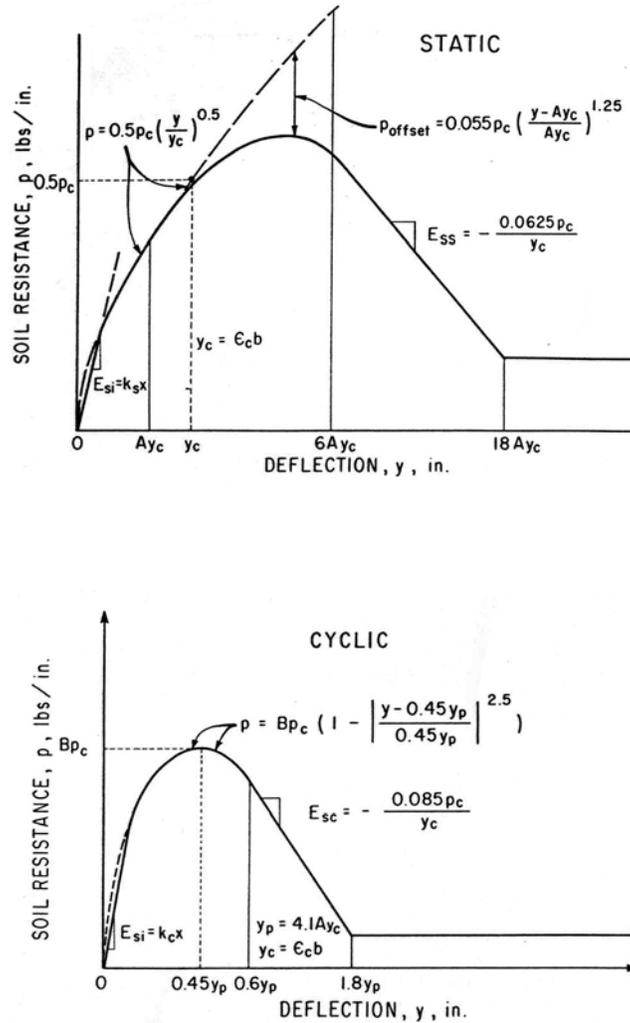


Figura 4.5 Curvas p - y estáticas y cíclicas para arcilla rígida sumergida, (Reese et al, 1975)

6. Calcular:

$$y_c = \epsilon_c b$$

$$y_p = 4.1 A y_c$$

4.23

El valor de ϵ_c se obtiene de la tabla 4.2

7. La porción parabólica de la curva p - y está dada por:

$$p = B p_c \left[1 - \left| \frac{y - 0.45 y_p}{0.45 y_p} \right|^{2.5} \right]$$

4.24

intersección con la recta $\leq y \leq 0.6 y_p$

Si no hay intersección, la parábola forma la curva p - y desde el origen de coordenadas.

8. La siguiente porción recta está dada por:

$$p = 0.936Bp_c - \frac{0.085}{y_c} p_c (y - 0.6y_p) \quad 4.25$$

$$0.6 y_p \leq y \leq 1.8y_p$$

9. La porción recta última de la curva p - y esta dada por:

$$p = 0.936Bp_c - \frac{0.102}{y_c} p_c y_p \quad 4.26$$

$$1.8y_p \leq y$$

Se recomienda realizar pruebas triaxiales UU, no consolidadas, no drenadas, para obtener la resistencia del suelo, con presiones de confinamiento iguales a las presiones in-situ. El valor de ε_{50} se tomará como la deformación durante la prueba correspondiente a la mitad de la diferencia máxima de esfuerzos principales.

4.3.3 Curvas p - y estáticas y cíclicas para arcillas blandas según el Instituto Americano del Petróleo (API)

Para arcillas blandas, las normas API usan curvas p - y adimensionales. La carga P se normaliza dividiéndola entre la capacidad lateral P_u , mientras que el desplazamiento lateral y del pilote se normaliza con un desplazamiento lateral de referencia y_c . P_u se calcula con las ecuaciones 4.5 y 4.6. Se considera que $y_c = 2.5b\varepsilon_{50}$; b es el ancho o diámetro del pilote y ε_{50} es la deformación correspondiente al 50% de la resistencia no drenada, en decimal.

La tabla 4.3 muestra la curva P/P_u vs y/y_c para carga estática a corto plazo. No se considera que haya baja resistencia en la zona cercana a la superficie del terreno.

Tabla 4.3 Curvas p - y para carga estática a corto plazo (API)

P/P_u	y/y_c
0.0	0.0
0.5	1.0
0.72	3.0
1.0	8.0
1.0	∞

Para considerar el efecto de las cargas cíclicas se disminuye la capacidad de carga lateral P_u y se toma en cuenta la existencia de la zona superficial de baja resistencia. En las tablas 4.4 y 4.5 aparecen las curvas adimensionales para carga cíclica. X_R se definió en la ecuación

4.7. Las hipótesis para la construcción de estas curvas son similares a las de arcillas frágiles mencionadas anteriormente.

Tabla 4.4 Curvas p - y para carga cíclica, $x \geq x_R$ (API)

P/P_u	y/y_c
0.0	0.0
0.5	1.0
0.72	3.0
0.72	∞

Tabla 4.5 Curvas p - y para carga cíclica, $x < x_R$ (API)

P/P_u	y/y_c
0.0	0.0
0.5	1.0
0.72	3.0
$0.72x/x_R$	15.0
$0.72x/x_R$	∞

4.3.4 Curvas p - y estáticas y cíclicas para arcillas blandas sumergidas (Matlock, 1970)

Matlock (1970) propuso un método para calcular las curvas p - y para arcillas blandas sumergidas. Se basó en pruebas de carga lateral realizadas en dos sitios. En el primero la arcilla tenía resistencia al cortante de 800 lb/ft² y en el segundo, 300 lb/ft².

El procedimiento para carga estática consiste en:

1. Obtener el perfil de resistencia no drenada al esfuerzo cortante c , y el peso específico sumergido γ' . También determinar los valores de ϵ_{50} , que es la deformación correspondiente a la mitad de la diferencia de esfuerzos máximos, $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$. Si no se dispone de curvas esfuerzo deformación, se puede seleccionar un valor típico de ϵ_{50} de la tabla 4.6.

Tabla 4.6 Valores representativos de ϵ_{50}

Consistencia de la arcilla	ϵ_{50}
Suave	0.020
Media	0.010
Rígida	0.005

2. Calcular la reacción última del suelo por unidad de longitud del pilote considerando el menor de los valores obtenidos con las ecuaciones 4.8 y 4.9.

$$P_u = \left(3c + \gamma' x + J \frac{cx}{b} \right) b \quad \text{para } x < x_R \quad 4.8$$

$$P_u = 9cb \quad \text{para } x \geq x_R \quad 4.9$$

Matlock encontró que un valor $J=0.5$ era adecuado para arcillas blandas con resistencia no drenada menor a 2.5 t/m^2 , y $J=0.25$ para arcillas medias con resistencia no drenada entre 2.5 y 4.8 t/m^2 .

3. Calcular el desplazamiento y_{50} con la ecuación 4.10.

$$y_{50} = 2.5b \varepsilon_{50} \quad 4.10$$

4. La curva p - y se calcula con:

$$\frac{p}{P_u} = 0.5 \left(\frac{y}{y_{50}} \right)^{1/3} \quad 4.27$$

Después de que la curva alcance la abscisa $8y_{50}$, p se mantiene constante. El procedimiento se describe gráficamente en la figura 4.6

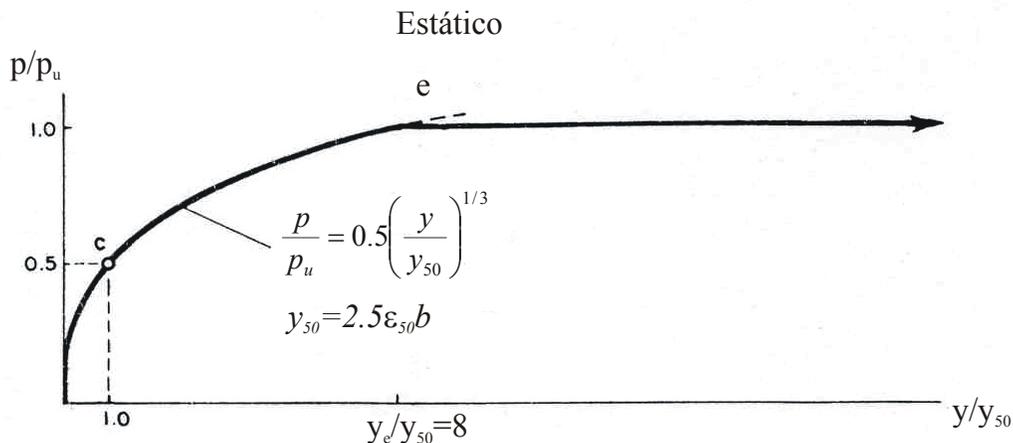


Figura 4.6 Forma general de las curvas p - y para carga estática en arcilla blanda bajo la superficie del agua (Matlock, 1970)

$$\epsilon_{50} = 0.007\%$$

Tabla 4.7 Datos de suelo para construir curvas p - y de suelo arcilloso

prof. (in)	Su=c (psi)	γ (lbf/in ³)	γ' (lbf/in ³)
0	2.0833	0.04335	0.007225
24	2	0.04335	0.007225
48	1.86	0.04335	0.007225
72	2.100	0.04335	0.007225
96	2.48	0.04335	0.007225
120	2.31	0.04335	0.007225
432	3.887	0.04335	0.007225
590.5	3.887	0.04335	0.007225

Paso 2. Considerando $J=0.5$ y con las ecuaciones 4.8 y 4.9 se obtiene P_u :

Tabla 4.8

prof. (in)	Ecuación 4.8 (lbf/in)	Ecuación 4.9 (lbf/in)	P_u (lbf/in)
0	79.686	239.0587	79.686
24	102.711	229.5	102.711
48	120.207	213.435	120.207
72	162.558	240.975	162.558
96	222.743	284.58	222.743
120	238.012	265.073	238.012
432	1028.065	446.0333	446.033
590.5	1350.815	446.0333	446.033

Paso 3. Con los datos anteriores y la ecuación 4.10 se calcula y_{50} :

Tabla 4.9

prof. (in)	y_{50} (in)
0	0.223
24	0.223
48	0.223
72	0.223
96	0.223
120	0.223
432	0.223
590.5	0.223

Paso 4. Para cada profundidad se ha calculado un valor de P_u y y_{50} , luego se proponen valores de y , y se aplica la ecuación 4.27. Esta ecuación será la curva p - y hasta que alcance la abscisa $8y_{50}$, desde donde la curva tendrá una ordenada constante e igual a P_u .

Para una profundidad de 24 pulgadas se obtiene la curva p - y mostrada en la tabla de abajo, así como las curvas p - y para todas las profundidades en la figura 4.8:

Tabla 4.10

curva p-y para profundidad 24 pulg	
y (in)	p (lbf/in)
0.00000	0.000
0.01969	22.862
0.15748	45.724
0.31496	57.609
0.47244	65.946
0.62992	72.583
0.78740	78.187
0.94488	83.086
1.10236	87.467
1.25984	91.448
1.41732	95.110
1.57480	98.510
1.77165	102.454
1.92913	102.711
2.50000	102.711
10.00000	102.711

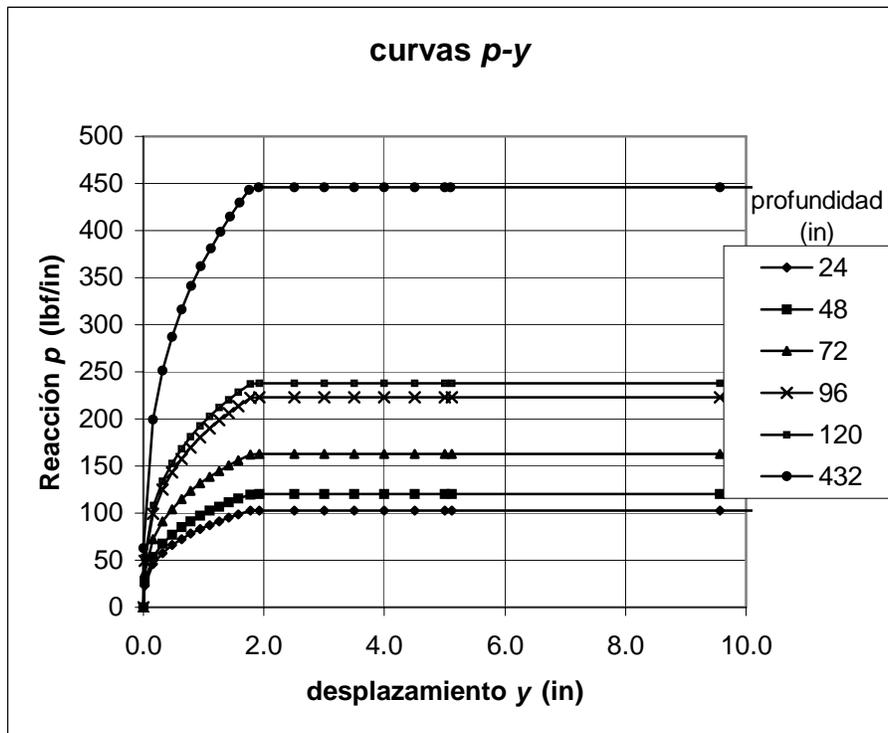


Figura 4.8 Ejemplo de curvas p - y para arcillas blandas

4.3.5 Curvas p - y estáticas y cíclicas para arenas sumergidas (Reese et al, 1974)

El procedimiento para obtener las curvas p - y para arenas bajo el agua fue propuesto por Reese, Cox y Koop en 1974. Se basaron en pruebas de carga laterales en pilotes de acero de 24 pulgadas (61 cm) de diámetro, hincados en arenas finas limpias y arenas limosas finas, ambas con densidades relativas altas. La longitud del pilote embebida en el suelo fue de 69 pies (21 m). Observaron la arena en un microscopio y encontraron que los granos eran subangulares y un gran porcentaje de ellos presentaban escamas. El ángulo de fricción interna fue de 39° y un peso específico sumergido de 66 lb/ft^3 .

El procedimiento de cálculo es el siguiente y se ilustra en la figura 4.9:

1. Obtener los parámetros del suelo: ángulo de fricción interna ϕ y peso específico sumergido γ' . Medir el ancho del pilote b .
2. Calcular la resistencia última del suelo con las siguientes fórmulas de acuerdo a la profundidad:

Cerca de la superficie:

$$p_{ct} = \gamma' x \left[\frac{k_0 x \tan \phi \operatorname{sen} \beta}{\tan(\beta - \phi) \cos \alpha} + \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \phi)} (b + x \tan \beta \tan \alpha) + k_0 x \tan \beta (\tan \phi \operatorname{sen} \beta - \tan \alpha) - k_a b \right] \quad 4.29$$

A profundidades mayores:

$$p_{cd} = k_a b \gamma' x (\tan^8 \beta - 1) + k_0 b \gamma' x \tan \phi \tan^4 \beta \quad 4.30$$

donde:

x es la profundidad desde el nivel superficial

$$\alpha = \phi/2$$

$$\beta = 45^\circ + \phi/2$$

$$k_0 = 0.4$$

$$k_a = \tan^2(45^\circ - \phi/2)$$

3. Encontrar la profundidad de intersección, x_R , de las dos ecuaciones de resistencia última 4.29 y 4.30. Arriba de la profundidad x_R emplear la ecuación 4.29.
4. Seleccionar la profundidad en la que se desea calcular la curva p - y .
5. El desplazamiento en el punto u de la figura 4.9 se calcula con $y_u = 3b/80$. Luego, la resistencia última se calcula con:

$$P_u = Ap_c \quad 4.31$$

El valor del coeficiente A se obtiene de la figura 4.10 para su respectiva profundidad adimensional y tipo de carga (estática o cíclica). P_c se calcula con la ecuación 4.29 o 4.30 según la profundidad sea menor o mayor que x_R .

6. El desplazamiento en el punto m de la figura 4.9 se calcula con $y_m = b/60$. Luego, la resistencia última se calcula con:

$$P_m = Bp_c \quad 4.31$$

El valor del coeficiente B se obtiene de la figura 4.10 para su respectiva profundidad adimensional y tipo de carga (estática o cíclica). P_c se calcula según la profundidad.

7. La pendiente k de la parte inicial se selecciona de la tabla 4.11.

Tabla 4.11 Valores recomendados de k para arena sumergida (carga estática y cíclica)

Densidad relativa	Suelta	Media	Densa
k (lb/in ³)	20	60	125

8. Ajustar la siguiente ecuación parabólica para que pase por los puntos k y m (ver figura 4.9)

$$p = Cy^{1/n} \quad 4.32$$

Obtener la pendiente de la recta que pasa por los puntos m y u :

$$m = \frac{P_u - P_m}{y_u - y_m}$$

obtener la potencia de la parábola por medio de:

$$n = \frac{P_m}{my_m}$$

El coeficiente C se calcula con:

$$C = \frac{P_m}{y_m^{1/n}}$$

El punto k se encuentra con:

$$y_k = \left(\frac{C}{kx} \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

Finalmente, se calculan suficientes puntos de la parábola con la ecuación 4.32.

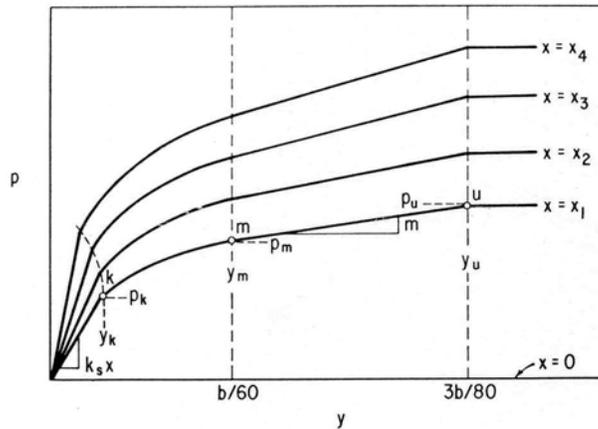


Figura 4.9. Forma general de las curvas p - y para carga estática y cíclica en arena bajo la superficie del agua (Reese et al, 1974)

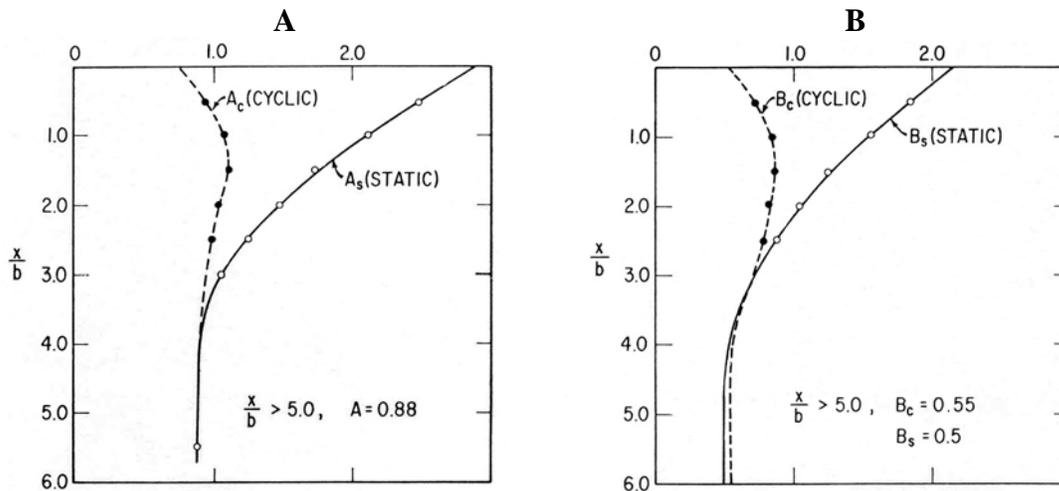


Figura 4.10 Coeficientes adimensionales A y B para resistencia última vs profundidad.

Ejemplo de cálculo de curvas p - y estáticas para arena.

Los datos para este ejemplo fueron obtenidos de un prueba de carga lateral a escala real efectuada por Snyder y Rollins (2004). El suelo del sitio está conformado por arcilla blanda, limos arenosos y arenas limosas. Aquí se calculará la curva del estrato de arena

limosa localizado a 4.8 m de profundidad. En el capítulo 7 se utilizará esta curva para analizar la prueba de Snyder y Rollins. El diámetro del pilote es 0.324 m (12.75 pulgadas).

Tabla 4.12 Datos de suelo para construir curvas p - y de arenas

Profundidad (m)	Tipo de suelo	Curva p - y	γ' (kN/m^3)	ϕ	k (kN/cm^3)
4.8	Arena limosa	Arena	8.14	38°	25.5
12.0	Arena	Arena	8.14	33°	14.9

Se calcularon las reacciones últimas P_{ct} y P_{cd} de acuerdo con las ecuaciones 4.29 y 4.30 respectivamente. Para encontrar la profundidad x_t que divide la aplicación de las ecuaciones se graficaron ambas, figura 4.11, y resultó igual a 6.3 m.

Como la curva que se desea construir es a 4.31 m de profundidad entonces se utiliza el valor de $P_{ct} = 630.3 \text{ kN/m}$

La resistencia última se calcula con:

$$P_u = Ap_c \tag{4.31}$$

El valor de A se lee de la figura 4.10 para la profundidad adimensional $4.31/0.324 = 13.3 > 5$; por lo tanto $A = 0.88$.

$$P_u = 0.88 \times 630.3 = 554.7 \text{ kN/m}$$

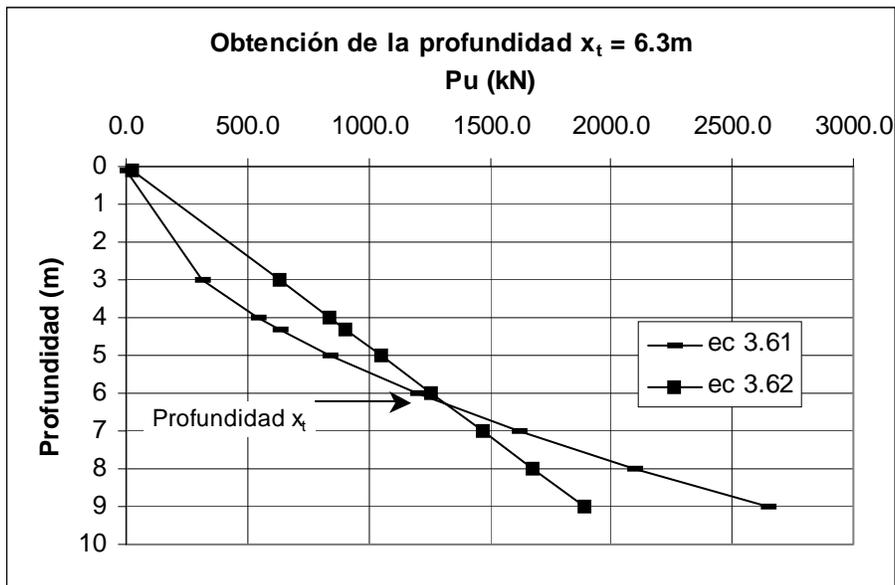


Figura 4.11 Obtención de la profundidad x_t por solución gráfica.

Luego el desplazamiento del punto u se calcula con $y_u = 3b/80$

$$y_u = 3 \times 0.324 / 80 = 0.012 \text{ m}$$

El desplazamiento en el punto m se calcula con $y_m = b/60$ y su respectiva resistencia última con

$$P_m = Bp_c \quad 4.31$$

El valor de B se lee de la figura 4.10 a la profundidad adimensional $4.31/0.324 = 13.3 > 5$; por lo tanto $B = 0.5$.

$$y_m = 0.324/60 = 0.0054 \text{ m}$$

$$P_m = 0.5 \times 630.3 = 315.15 \text{ kN/m}$$

La pendiente k de la parte inicial de la curva se obtiene de la tabla 4.11 o bien de valores medidos en campo. El valor medido fue $k = 25\,500\,000 \text{ kN/m}^3$

Se calcula la pendiente de la recta que une los puntos u y m .

$$m = \frac{p_u - p_m}{y_u - y_m}$$

$$m = (554.7 - 315.15) / (0.012 - 0.0054) = 35\,484$$

Se obtiene la potencia de la parábola:

$$n = \frac{P_m}{my_m}$$

$$n = 315.15 / (35\,484 \times 0.0054) = 1.645$$

Se calcula el coeficiente C :

$$C = \frac{P_m}{y_m^{1/n}}$$

$$C = 315.15 / (0.0054^{1/1.645}) = 7538$$

El desplazamiento en el punto k se calcula con:

$$y_k = \left(\frac{C}{kx} \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$y_k = \left(\frac{7538}{25500000 \times 4.31} \right)^{\frac{1.645}{0.645}} = 2.388 \times 10^{-11}$$

Finalmente, la parte parabólica se calcula con la ecuación 4.32:

$$p=Cy^{1/n} \tag{4.32}$$

El valor obtenido de y_k resultó demasiado pequeño y la recta que va del origen al punto k prácticamente no existe. Por esta razón la parábola abarca desde el origen hasta la intersección con la recta de los puntos m y u . En la tabla 4.13 en negritas aparecen los valores de la curva p - y en su parte parabólica. Los siguientes tres valores forman las dos partes rectas finales, figura 4.12

Tabla 4.13 Curva p - y de la prueba de Snyder (2004) calculada con el criterio para arena de Reese et al (1974)

Y (m)	P (kN/m)
0	0
0.0001	27.87
0.0003	54.36
0.0005	74.16
0.001	113.04
0.002	172.29
0.003	220.45
0.004	262.59
0.005	300.75
0.0054	315.16
0.0054	315.16
0.01215	554.67
0.02	554.67

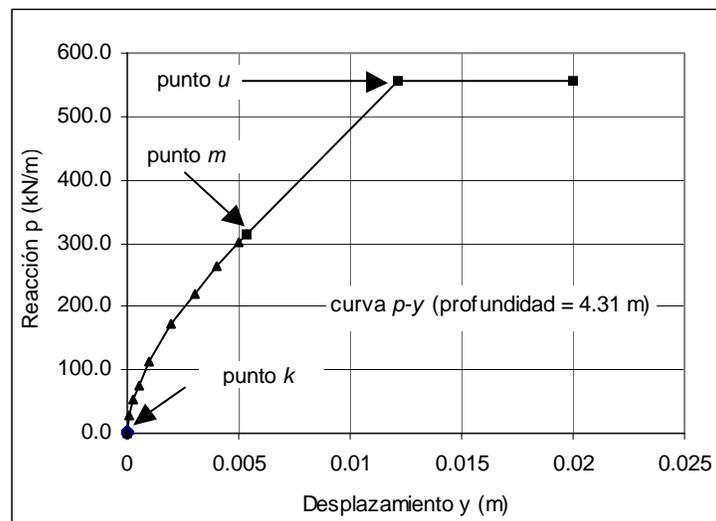


Figura 4.12 Curva p - y para arena sumergida calculada con los datos de la prueba de Snyder(2004)

5.1 Bases del Método de Elementos Finitos¹

Introducción.

Las soluciones analíticas siempre parten de ciertas hipótesis simplificadoras. En muchas ocasiones es imposible o demasiado complicado obtener estas soluciones para los problemas planteados en ingeniería, a menos que se introduzcan demasiadas hipótesis en detrimento de la fidelidad de los resultados. Para problemas en que están involucrados materiales y condiciones de frontera en situaciones complejas es mejor recurrir a métodos numéricos que nos brindan soluciones aproximadas.

La mayoría de los métodos numéricos proporciona la solución del problema sólo en determinados puntos del cuerpo; el proceso de seleccionar un cierto número de puntos en el cuerpo puede ser llamado *discretización*. El método de elementos finitos (MEF) *discretiza* el cuerpo en partes pequeñas que unidas entre si forman el total. Se puede resolver el problema para cada parte individualmente y luego se combinan para obtener la solución del cuerpo entero.

A las partes más pequeñas en que se divide el total se les llama *elementos finitos* y éstos se consideran interconectados en los *nodos*. Se eligen funciones simples que modelen en forma aproximada los desplazamientos en cada elemento finito. A estas funciones se les llama *funciones de desplazamientos* o *modelos de desplazamientos*. La solución final de las funciones de desplazamientos serán los desplazamientos (o las derivadas de los desplazamientos) en los nodos.

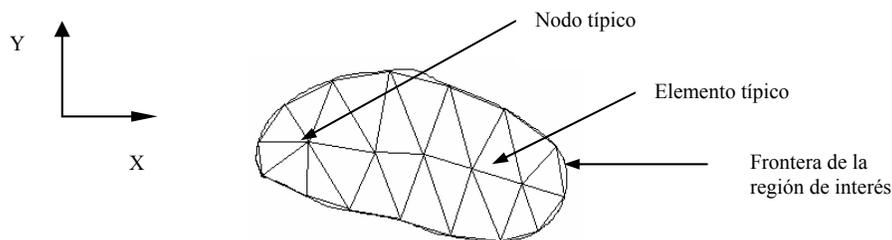


Figura 5.1 Región bidimensional representada como un ensamblaje de elementos finitos triangulares.

¹ Las bases del método de elementos finitos fueron extraídas del libro "Introduction to the finite element method: a numerical method for engineering analysis", Desai, 1972.

Para obtener las ecuaciones de equilibrio de cada elemento se emplea algún principio variacional de mecánica, tal como el *principio de energía potencial mínima*. La energía potencial de un cuerpo elástico cargado es la suma de la energía interna almacenada durante la deformación del cuerpo y la energía potencial de las cargas externas. Si el cuerpo está en equilibrio, la energía potencial es mínima. Las ecuaciones de equilibrio para la totalidad del cuerpo se obtienen combinando las ecuaciones de cada elemento de tal forma que en los nodos se tenga compatibilidad o continuidad de desplazamientos. Las ecuaciones son modificadas para satisfacer las condiciones de frontera y luego son resueltas para obtener los desplazamientos buscados.

En síntesis, el método de elementos finitos sigue fundamentalmente los siguientes pasos:

1. Discretización del medio continuo
2. Selección de los modelos de desplazamiento o de las funciones de interpolación
3. Determinación de las ecuaciones de equilibrio y propiedades elementales
4. Ensamblado de las ecuaciones de equilibrio globales
5. Aplicación de las condiciones de frontera
6. Solución del sistema de ecuaciones
7. Interpretación de resultados

En el cuerpo de este capítulo se hace un breve resumen de las principales características de los métodos variacionales, posteriormente se estudian los elementos finitos como elementos básicos, el ensamblaje de dichos elementos, la aplicación de las condiciones de frontera y finalmente su solución.

5.1.1 Cálculo de Variaciones y Métodos Variacionales

Consideremos la siguiente expresión:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u', u'') dx \quad 5.1$$

donde u y su primera y segunda derivadas, u' y u'' , son una funciones de x . F y A se llaman *funcionales* porque están en función de otras funciones. La ecuación 5.1 está definida en un intervalo $[x_1, x_2]$ y las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} u(x_1) &= u_1 \\ u(x_2) &= u_2 \end{aligned} \quad 5.2$$

El cálculo de variaciones, surgido hace más de tres siglos, se ocupa de la determinación de máximos y mínimos de las funcionales. Se trata básicamente de encontrar la función argumento $u(x)$ que haga que la integral del tipo 5.1 adquiera un valor máximo o mínimo;

este valor se llama generalmente *extremo* de la funcional y la función $u(x)$ que le corresponde se le llama *extremal*. El problema se extiende a la búsqueda de extremales de funcionales de cualquier tipo.

Para entender más fácilmente el problema podemos hacer una analogía con el cálculo diferencial ordinario. En éste último se dice que una función $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo para $x=x_0$ cuando es posible encontrar un intervalo (x_0-h, x_0+h) , grande o pequeño (vecindad h de la abscisa x_0), tal que $f(x_0)$ es mayor (o menor) que $f(x)$ en todos los demás puntos del intervalo. En el cálculo funcional el concepto de punto x_0 se remplaza por el de función $y=u(x)$ y el de vecindad del punto x_0 por el de vecindad de la función $y=u(x)$, definida como sigue: dada una cantidad positiva h , se dice que una función $y= \tilde{u}(x)$ está en la vecindad (h) de una función $y=u(x)$, en el intervalo (x_1, x_2) , cuando se tiene

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| < h \text{ para } x_1 \leq x \leq x_2$$

O sea que la curva $y= \tilde{u}(x)$, en dicho intervalo, está incluida dentro de una banda de ancho $2h$, cuyo eje es la curva $y=u(x)$, figura 5.2.

El problema fundamental del *Cálculo de Variaciones* puede expresarse de la siguiente forma: en el dominio de las funciones argumento admitidas para una funcional determinada, hallar esa función argumento (extremal) para la cual la funcional alcanza un valor extremo, con respecto a los valores que ella adquiere para todas las demás funciones argumento del dominio, que se hallan en una vecindad suficientemente pequeña de la extremal. La forma de obtener la extremal es, por analogía con el cálculo ordinario, igualando a cero la primer variación de la funcional.

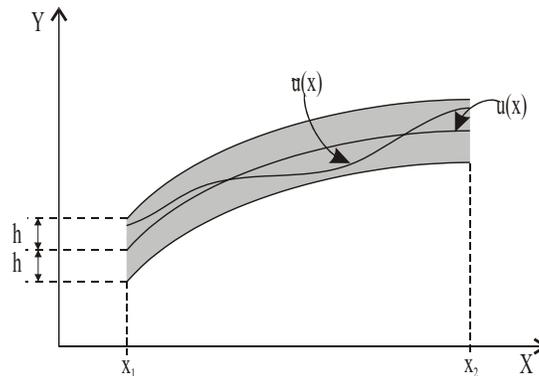


Figura 5.2 Vecindad de $y=u(x)$

Una solución tentativa, \tilde{u} , en la vecindad de la solución exacta u , puede ser representada como la suma de dicha solución exacta más una *variación de u* , δu

$$\tilde{u} = u + \delta u \quad 5.3$$

La variación en $u=u(x)$ es definida como un cambio infinitesimal arbitrario en u para un valor fijo de la variable independiente x , es decir, para $\delta x=0$. Expresado en los términos más arriba escritos, $y=\tilde{u}(x)$ es una función que está en la vecindad de $y=u(x)$, y, para un valor fijo de x ($\delta x=0$) se tiene $\delta u = \tilde{u}-u$.

La notación δu es llamada notación variacional. El símbolo δ de la notación variacional es tratado como un operador, similar al operador de diferencial d . El operador δ es conmutativo con la integración y la diferenciación:

$$\delta\left(\int F dx\right) = \int (\delta F) dx \quad 5.4a$$

$$\delta(du/dx) = d(\delta u)/dx \quad 5.4b$$

Se define la variación de una funcional en una manera semejante al diferencial total del cálculo ordinario:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' \quad 5.4c$$

Ahora consideremos pequeños cambios o variaciones de la funcional A de la ecuación 5.1, correspondientes a las variaciones en la solución. Como ya se mencionó más arriba, por analogía con el cálculo ordinario, al igualar a cero la primera variación de la funcional A tendremos la condición para que A sea estacionaria (máximo o mínimo de la funcional).

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' \right) dx = 0 \quad 5.5a$$

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx = 0 \quad 5.5b$$

Al integrar por partes los respectivos términos de la ecuación 5.5a se obtiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial u} \delta u dx \quad 5.6a$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \delta u dx \quad 5.6b$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial u''} \delta u' \right]_{x_1}^{x_2} - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u dx \quad 5.6c$$

Sumando las ecuaciones 5.6a, 5.6b y 5.6c se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \delta A = & \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u dx + \\
 & + \left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} + \\
 & + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u' \right]_{x_1}^{x_2} = 0
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Para satisfacer la igualdad de la ecuación 5.7 podemos recordar que la variación δu es arbitraria; por lo tanto, los términos se pueden eliminar individualmente:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0 \tag{5.8a}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{5.8b}$$

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u' \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{5.8c}$$

La ecuación 5.8a es la ecuación diferencial gobernante del problema y es llamada la *Ecuación de Euler* o la *Ecuación Euler-Lagrange*. Las ecuaciones 5.8b y 5.8c nos dan las condiciones de frontera. Las condiciones

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad \text{y} \quad \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u' \right]_{x_1}^{x_2} = 0$$

Son llamadas *condiciones naturales de frontera*; si son satisfechas, son llamadas *condiciones de frontera libres*. Si una de las condiciones naturales de frontera no es satisfecha, las correspondientes porciones de las ecuaciones 5.8b y 5.8c deben ser satisfechas.

$$\delta u(x_1) = 0, \quad \delta u(x_2) = 0$$

$$\delta u'(x_1) = 0, \quad \delta u'(x_2) = 0$$

A las últimas se les llama las *condiciones geométricas de frontera*, o *condiciones forzadas de frontera*.

La aproximación con el cálculo de variaciones, cuando se aplica a una funcional del tipo expresado en la ecuación 5.1, proporcionan una descripción completa del problema. Obtenemos no sólo la ecuación diferencial gobernante del problema, sino que también

obtenemos las condiciones inherentes de frontera. La formulación de este tipo se conoce como *Formulación de Euler-Lagrange*.

En los métodos variacionales se intenta resolver un problema con una solución aproximada y la funcional es expresada en términos de dicha solución aproximada. De todas las soluciones posibles que cumplen las condiciones de frontera, la solución que satisface el principio variacional que gobierna el comportamiento del fenómeno, será la que haga a la funcional estacionaria. En seguida se tratarán los *Principios Variacionales en Mecánica de Sólidos*.

5.1.2 Principios Variacionales de la Mecánica de Sólidos

Los *teoremas variacionales* de la mecánica de sólidos son empleados comúnmente para obtener las ecuaciones de equilibrio de los elementos finitos. Estos teoremas son derivados de la aplicación de los principios energéticos de mecánica, específicamente del *principio de trabajo virtual*.

Principio de energía potencial mínima

La energía potencial de un cuerpo elástico se define como:

$$\Pi = U + W_p \quad 5.9a$$

Donde U es la energía de deformación, y W_p es el potencial de las cargas aplicadas. Como se considera que las fuerzas permanecen constantes durante la variación de los desplazamientos, las variaciones del trabajo hecho por las cargas, W , se puede relacionar con el potencial de las cargas como sigue:

$$\delta W = -\delta W_p \quad 5.9b$$

El *principio de energía potencial mínima* es:

$$\delta \Pi = \delta U + \delta W_p = \delta U - \delta W = 0 \quad 5.9c$$

El principio dice: *de todas las configuraciones posibles de desplazamientos que un cuerpo puede asumir satisfaciendo la compatibilidad y las condiciones cinemáticas de frontera, la configuración que cumple con el equilibrio es la que hace a la energía potencial mínima.*

La energía potencial para un cuerpo elástico lineal puede ser expresada como la suma del trabajo interno (energía de deformación debida a los esfuerzos internos) y el potencial de las fuerzas de cuerpo y fuerzas superficiales. La funcional de la energía potencial es:

$$\begin{aligned} \Pi = & \iiint_V dU(u, v, w) - \iiint_V (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dV \\ & - \iint_{S_1} (\bar{T}_x u + \bar{T}_y v + \bar{T}_z w) dS_1 \end{aligned} \quad 5.10$$

donde S_1 es la superficie del cuerpo donde se aplican las fuerzas, V es el volumen del elemento y $dU(u, v, w)$ denotan la *energía de deformación por unidad de volumen* o *densidad de energía de deformación*. Las dos últimas integrales expresan el trabajo realizado por fuerzas constantes externas: las fuerzas de cuerpo X, Y, Z y las fuerzas de superficie T_x, T_y, T_z . Estas fuerzas son especificadas.

La ecuación 5.10 puede ser expresada en forma matricial. Consideremos a la *densidad de energía de deformación* como sigue:

$$dU = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dV$$

La energía potencial es:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V (\{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} - 2\{u\}^T \{\bar{X}\}) dV - \iint_{S_1} \{u\}^T \{\bar{T}\} dS_1 \quad 5.11$$

donde:

$$\{u\}^T = [u \quad v \quad w]$$

$$\{\bar{X}\}^T = [\bar{X} \quad \bar{Y} \quad \bar{Z}]$$

$$\{\bar{T}\}^T = [\bar{T}_x \quad \bar{T}_y \quad \bar{T}_z]$$

5.1.3 Unidad básica: Elemento Finito

5.1.3.1 Formas de los elementos

El primer paso para modelar un problema es seleccionar la forma o configuración de la unidad básica. La elección depende de la forma del cuerpo o estructura y del número de coordenadas independientes en el espacio necesarias para modelar el problema. Normalmente un elemento finito tiene una configuración de uni-, bi- ó tridimensional.

Elementos unidimensionales.

Cuando la geometría, propiedades del material y variables dependientes tales como desplazamientos, pueden ser expresadas en términos de una sola coordenada espacial independiente, un elemento unidimensional es adecuado. La coordenada es medida a lo largo del eje del elemento.

Un elemento unidimensional puede ser representado por una línea recta que termina en los puntos nodales. Los nodos numerados 1 y 2 en la figura 5.3 son llamados *nodos externos* porque son los que se conectan con los elementos adyacentes. Algunas veces son necesarios nodos adicionales como el nodo 3, que al no estar conectado con ningún otro elemento se le llama *nodo interno*.

Elementos Bidimensionales

Hay muchos problemas de mecánica de sólidos que pueden modelarse con elementos bidimensionales, tales como el esfuerzo plano y deformación plana. El elemento bidimensional más sencillo es un triángulo como el mostrado en la figura 5.4 (a). Los nodos 1, 2 y 3 son llamados *nodos principales externos*; los nodos 4, 5 y 6, *nodos secundarios externos*; y los nodos del tipo 7 son llamados *nodos internos*.

Otra forma de elemento bidimensional o plano es el cuadrilátero. El rectángulo y el cuadrado son casos particulares del cuadrilátero. Por otra parte, los cuadriláteros pueden ser por sí mismos un solo elemento ó, formarse por varios elementos triangulares, figura 5.4 (b).

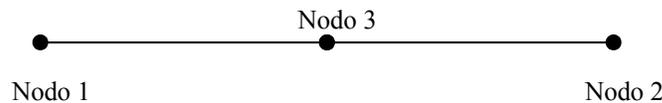


Figura 5.3 Elemento unidimensional

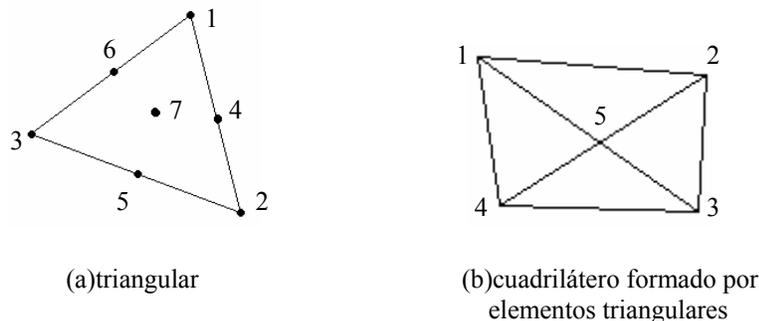


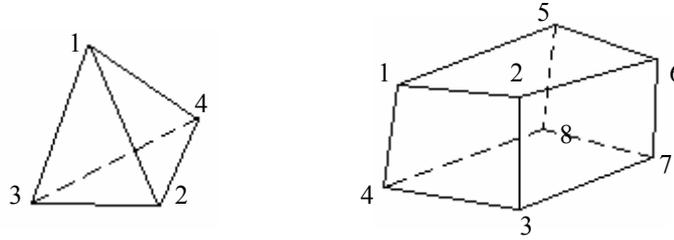
Figura 5.4 Elementos bidimensionales

Elementos axisimétricos

Hay problemas tridimensionales que dependen de sólo dos coordenadas espaciales independientes que bien se pueden modelar con elementos planos. Si son usadas las coordenadas cilíndricas r , z y θ , y todas las variables y propiedades involucradas en el problema son simétricas con respecto a un eje (axisimétricas) entonces se puede decir que son independientes de la coordenada θ . Los elementos usados son del tipo de anillos y toroides, con sección transversal en el plano r - z .

Elementos tridimensionales

Los elementos tridimensionales más sencillos son los tetraedros, con cuatro puntos nodales principales externos. Elementos tridimensionales de ocho nodos principales exteriores tienen la forma general de un hexaedro. Como en el caso bidimensional en que se pueden formar cuadriláteros con triángulos, aquí, dos tetraedros forman un hexaedro sencillo de nueve lados. Los hexaedros más complicados, de doce lados, se pueden formar con cinco, seis, doce o veinticuatro tetraedros.



(a) Tetraedro

(b) Hexaedro

Figura 5.5 Elementos tridimensionales

5.1.3.2 Modelos de desplazamiento

Los modelos de desplazamiento son funciones sencillas que representan en forma aproximada los desplazamientos reales de cada elemento, y que junto con los desplazamientos aproximados de todos los elementos que componen el cuerpo entero forman la solución total del problema.

Los modelos de desplazamiento más utilizados tienen la forma de polinomios, debido a la facilidad con la que pueden manejarse matemáticamente y también a que eligiendo un cierto grado del polinomio se pueden conseguir aproximaciones bastante aceptables. Mientras mayor sea el número de términos del polinomio, mayor es la aproximación, sin embargo, por razones prácticas no se utilizan polinomios de grado infinito.

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_{n+1} x^n \tag{5.12a}$$

A los coeficientes α del polinomio expresado en 5.12a se les llama *coordenadas generales* o *amplitudes generales de desplazamiento*. La ecuación 5.12a se puede expresar en forma matricial:

$$u(x) = \{\phi\}^T \{\alpha\}$$

$$\begin{aligned} \{\phi\}^T &= [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^n] \\ \{\alpha\}^T &= [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \dots \ \alpha_{n+1}] \end{aligned} \tag{5.12b}$$

La forma polinomial general para un modelo de desplazamiento bidimensional es:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \dots + \alpha_m y^n \quad 5.13a$$

$$v(x,y) = \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} x + \alpha_{m+3} y + \alpha_{m+4} x^2 + \alpha_{m+5} xy + \alpha_{m+6} y^2 + \dots + \alpha_{2m} y^n \quad 5.13a$$

donde:

$$m = \sum_{i=1}^{n+1} i$$

La misma ecuación expresada en forma matricial queda:

$$\begin{aligned} \{u(x,y)\} &= \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [\phi] \{\alpha\} = \begin{bmatrix} \{\phi_1\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\phi_1\}^T \end{bmatrix} \{\alpha\} \\ \{\phi\}^T &= [1, \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad \dots \quad y^n] \\ \{\alpha\}^T &= [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_{2m}] \end{aligned} \quad 5.13b$$

El modelo tridimensional tiene una forma semejante.

Condiciones de Convergencia

Cualquier método numérico puede o no convergir a la solución del problema. Para el MEF se ha observado que bajo ciertas circunstancias de los modelos de desplazamientos se obtienen fronteras superiores de la rigidez real de la estructura. Es decir, para una determinada carga, los desplazamientos calculados son menores que los reales. Si la subdivisión se hace de una forma más fina, la solución se acerca a la real desde abajo (fronteras inferiores). Para asegurarse de que habrá convergencia a la solución real se debe cumplir con las tres siguientes condiciones:

1. Los modelos de desplazamiento deberán ser continuos dentro de los elementos y deberá existir compatibilidad de desplazamientos entre elementos adyacentes.
2. Los modelos de desplazamiento deberán incluir un desplazamiento como cuerpo rígido del elemento.
3. Los modelos de desplazamiento deberán incluir deformaciones constantes del elemento.

Aunque estas tres condiciones son suficientes para asegurar la convergencia en un caso general, se han obtenido resultados con convergencia aceptable en problemas donde sólo se cumple con la tercer condición. A los elementos finitos que cumplen con la primer condición se les llama *compatibles*; los que cumplen con la segunda y tercer condición se les llama *completos (íntegros)*. Además, se debe asegurar que los modelos de desplazamiento permitan derivadas continuas diferentes de cero del orden en que aparecen en la funcional de energía potencial.

Por otra parte, se deben seleccionar los modelos de desplazamiento de tal forma que sean independientes de la orientación del sistema de coordenadas local, propiedad conocida como isotropía geométrica. Finalmente, el número de coordenadas generales para un elemento debe ser igual o mayor que el número de grados de libertad externos del elemento.

Grados de libertad

Los desplazamientos nodales, rotaciones, y/o alargamientos necesarios para expresar completamente la deformación de elementos finitos son los *grados de libertad del elemento*.

El mínimo número de grados de libertad (coordenadas generales) necesario para un elemento es determinado por los requisitos de integridad (elementos completos) para la convergencia, isotropía geométrica, y la necesidad de una adecuada representación de los términos de la funcional de energía potencial.

Los grados de libertad y las coordenadas generales pueden relacionarse utilizando el modelo de desplazamiento: se evalúan los desplazamientos en los nodos sustituyendo las coordenadas nodales en el modelo.

$$\{u\} = [\phi] \{\alpha\} \quad 5.14a$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{u(\text{nodo1})\} \\ \{u(\text{nodo2})\} \\ \dots \\ \{u(\text{nodoM})\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi(\text{nodo1})] \\ [\phi(\text{nodo2})] \\ \dots \\ [\phi(\text{nodoM})] \end{bmatrix} \{\alpha\} = [A] \{\alpha\} \quad 5.14b$$

M es el número total de nodos para el elemento considerado y $\{q\}$ es el vector de desplazamientos nodales. La ecuación 5.14b se invierte y queda:

$$\{\alpha\} = [A^{-1}] \{q\} \quad 5.15$$

donde $[A^{-1}]$ es la matriz de transformación de desplazamientos. Si reemplazamos la ecuación 5.15 en 5.14a obtenemos:

$$\{u\} = [\phi] [A^{-1}] \{q\} = [N] \{q\} \quad 5.16$$

5.1.3.3 Elementos Isoparamétricos

La formulación de los modelos de desplazamientos y cálculo de la rigidez de los elementos pueden ser generalizados por medio del concepto de *elementos isoparamétricos*. Para poder definir este concepto es necesario conocer primero los sistemas de coordenadas naturales y los modelos de interpolación.

Sistemas de coordenadas naturales

Un *sistema global de coordenadas* es útil para todo un conjunto de cuerpos o elementos. Un *sistema local de coordenadas* es el que está definido para un elemento en particular y no necesariamente para la totalidad del cuerpo. Un *sistema de coordenadas naturales* es un sistema local que permite identificar cualquier punto dentro del elemento por medio de un conjunto de números adimensionales, cuyas magnitudes nunca sean mayores que la unidad. Además, los sistemas de coordenadas naturales están comúnmente adecuados para que en los nodos principales exteriores, alguna de las coordenadas tenga magnitud igual a la unidad.

Las coordenadas naturales simplifican la formulación del problema y además facilitan la integración que es requerida en la obtención de la matriz de rigidez. En la figura 5.6 se muestran algunos sistemas de coordenadas naturales.

Un sistema de coordenadas naturales para el elemento unidimensional mostrado en 5.6(a) puede relacionarse con la coordenada cartesiana x de la forma que sigue:

$$x = \frac{1}{2} (1-L)x_1 + \frac{1}{2} (1+L)x_2 \tag{5.17}$$

$$L = (x-x_3)/(l/2)$$

Las últimas ecuaciones se utilizan como ejemplo en la definición que más adelante se hace del elemento isoparamétrico.

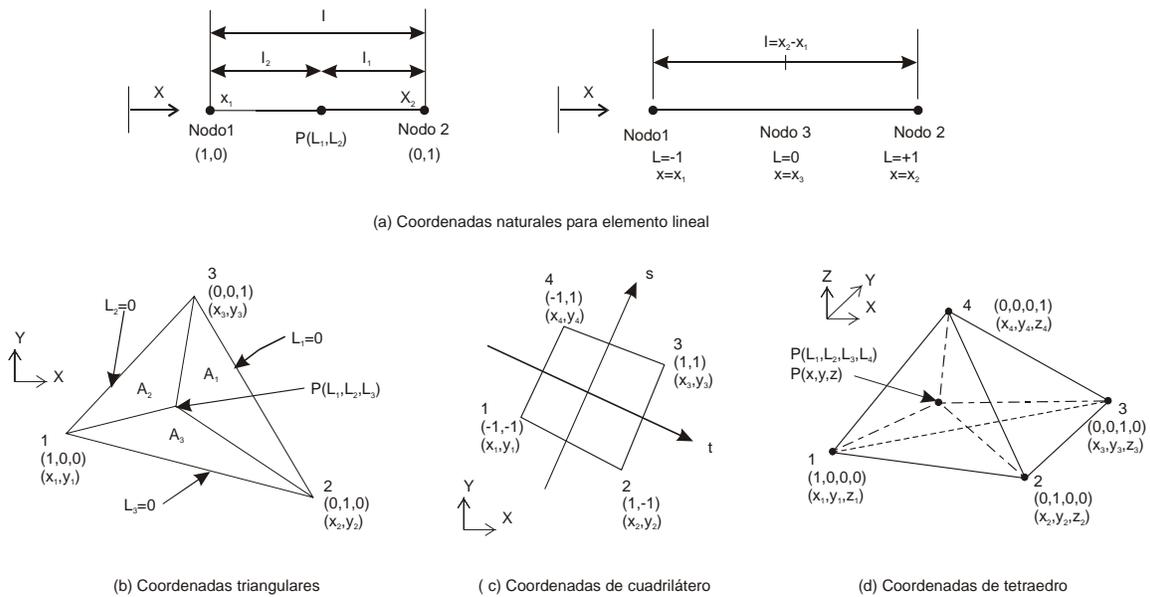


Figura 5.6 Sistemas de coordenadas naturales

Modelos de Interpolación de Desplazamientos

Las *funciones de interpolación de desplazamientos*, también llamadas *funciones de forma*, tienen la característica de adquirir un valor unitario en un punto nodal y cero en los demás puntos nodales y se utilizan como base para la creación del modelo de desplazamientos.

Si de alguna manera se pudiera formular la matriz $[N]$ de la ecuación 5.16, se evitaría el cálculo e inversión de la matriz $[A]$, que para grandes sistemas de ecuaciones representa un ahorro sustancial de recursos computacionales. Son las funciones de interpolación junto con las coordenadas naturales las que nos permiten producir la matriz $[N]$ directa y fácilmente.

Se utilizan funciones de interpolación en forma de polinomios de grado tal que cumpla con las condiciones de convergencia. Para cada desplazamiento del vector $\{u\}$ se necesita una función de interpolación correspondiente a cada grado de libertad nodal representado en el vector $\{q\}$. Como ejemplo están las funciones de interpolación de la figura 5.7; se puede comprobar fácilmente como dichas funciones cumplen con la característica de tener magnitud uno en un nodo y cero en los demás.

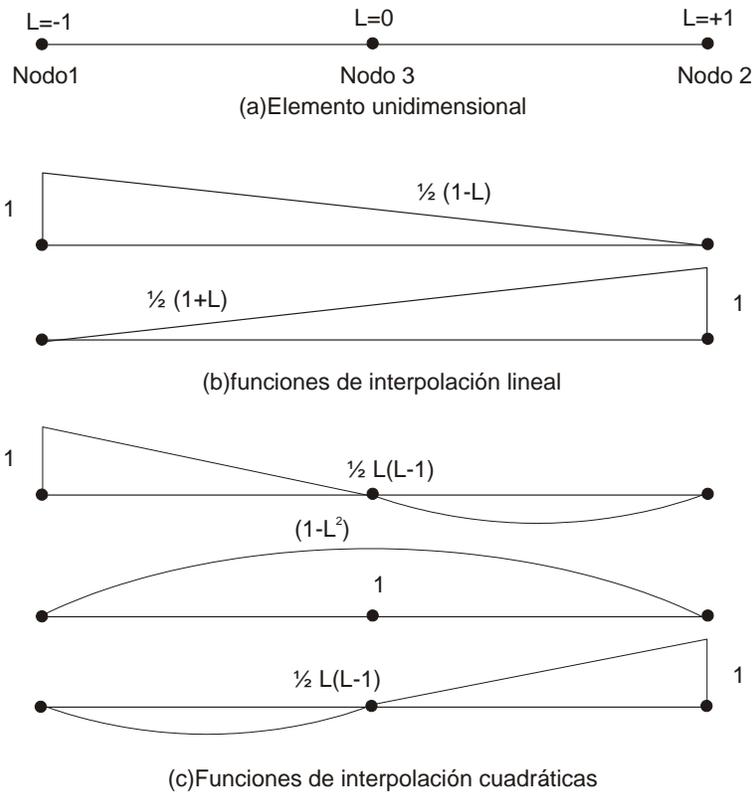


Figura 5.7 Funciones de interpolación para un elemento lineal

Para un elemento lineal con función del interpolación lineal y de acuerdo con la figura 5.7, la ecuación 5.16 se puede escribir de la siguiente forma:

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-L) & \frac{1}{2}(1+L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \{N\}^T \{q\} \quad 5.18$$

Si ahora se utiliza una interpolación cuadrática para un elemento lineal de tres nodos, la ecuación 5.16 queda:

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L(L-1) & \frac{1}{2}L(L+1) & (1-L^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \{N\}^T \{q\} \quad 5.19$$

En forma general para cualquier tipo de elemento:

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad 5.20$$

Elemento Isoparamétrico

Si se comparan las ecuaciones 5.17 y 5.18 podrá observarse que tiene la misma forma:

$$x = \{N\}^T \{x_n\} \quad y \quad u = \{N\}^T \{q\}$$

Esto quiere decir que la geometría y los desplazamientos del elemento son descritos en términos de los mismos parámetros y que además son del mismo orden. A los elementos en que se cumple esta situación se les llama *elementos isoparamétricos*.

Desai(1972) cita a Pian(1964) y menciona que los elementos isoparamétricos de cualquier orden satisfacen los requisitos de integridad y compatibilidad mencionados en la sección 5.1.3.2 y además son isótropos. Se ha demostrado que si las funciones de forma en las coordenadas naturales son continuas para la geometría y los desplazamientos dentro del elemento y entre los elementos, entonces los requisitos de compatibilidad son satisfechos para las coordenadas globales. Por otra parte, si los modelos de desplazamiento proveen un movimiento como cuerpo rígido en las coordenadas naturales, entonces las condiciones de convergencia 2 y 3 se satisfacen en las coordenadas globales.

Se pueden utilizar los modelos de desplazamiento del tipo mostrado en las ecuaciones 5.12 y 5.13, o bien, utilizar los modelos de interpolación, ambos son igualmente válidos. Sin embargo, los modelos de interpolación evitan el cálculo de la matriz $[A]$ y de su inversa, lo cual conduce a una economía de recursos computacionales.

5.1.3.4 Relaciones desplazamiento-deformación y esfuerzo-deformación

Las relaciones desplazamiento-deformación y esfuerzo-deformación del material considerado se utilizan para formular la matriz de rigidez y matriz de cargas del elemento. Por ejemplo, si se considera la relación desplazamientos-deformación donde las deformaciones están expresadas como una combinación de las derivadas de los desplazamientos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad 5.21$$

Además, como ni los desplazamientos nodales $\{q\}$, ni las coordenadas generales $\{\alpha\}$ son funciones de las coordenadas espaciales, tal como se vio en las ecuaciones 5.14a y 5.16 mostradas nuevamente abajo.

$$\{u\} = [\phi] \{\alpha\} \quad 5.14a$$

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad 5.20$$

Entonces, las deformaciones forzosamente deberán estar expresadas en función de las derivadas de cualquiera de las matrices $[N]$ o $[\phi]$, según sea el caso:

$$\{\varepsilon\} = [B_\alpha] \{\alpha\} \quad 5.22a$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\} \quad 5.22b$$

Por otra parte, sólo como ejemplo, se puede considerar la relación esfuerzo-deformación como la ley generalizada de Hooke para el caso de material lineal, isotrópico y elástico:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad 5.23a$$

simétrica

En forma condensada la misma ecuación queda:

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad 5.23b$$

Donde $[C]$ es la matriz de constantes del material. Si ahora sustituimos las ecuaciones 5.22a y 5.22b en 5.23b obtenemos respectivamente:

$$\{\sigma\}=[C] [B_\alpha]\{\alpha\} \quad 5.24a$$

$$\{\sigma\}=[C] [B]\{q\} \quad 5.24b$$

Se observa que los esfuerzos también son función de las derivadas de las matrices $[N]$ o $[\phi]$, es decir, de las matrices $[B_\alpha]$ o $[B]$.

5.1.3.5 Matriz de Rigidez y de Cargas

Las matrices de rigidez y de carga se pueden obtener directamente, tal y como se hace en el análisis estructural básico, o por medio de una formulación variacional. Aquí sólo se menciona brevemente el segundo caso.

Método General

El método general para la obtención de la matriz de rigidez y la matriz de carga se hace aplicando algún principio variacional de la mecánica de sólidos. Para el método de análisis de desplazamientos se utiliza el principio de energía potencial mínima mencionado en la sección 5.1.2 para problemas estáticos.

El principio variacional se aplica a la totalidad del cuerpo estudiado, pero si consideramos que los elementos o subregiones del continuo mantienen compatibilidad de desplazamientos, entonces se puede pensar que cualquier integral del principio variacional está operando sobre la suma de desplazamientos de las subregiones. Como la integral de una suma es equivalente a la suma de las integrales individuales, el principio se puede aplicar a cada una de las partes individualmente. Esto es expresado en la ecuación 5.25:

$$2U = \iiint_{V_{\text{cuerpo}}} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV_{\text{cuerpo}} = \iiint_{V_{\text{cuerpo}}} \sum_{e=1}^N \{\varepsilon_e\}^T \{\sigma_e\} dV_{\text{cuerpo}} = \sum_{e=1}^N \iiint_{V_e} \{\varepsilon_e\}^T \{\sigma_e\} dV_e \quad 5.25$$

Donde e es el número de elemento y N es el total de elementos del cuerpo

Cuando se expresan los desplazamientos en términos de un modelo de interpolación, los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos están dados por ecuaciones del tipo 5.20, 5.22b y 5.24b, respectivamente. Si sustituimos las mismas ecuaciones en 5.11 hacemos que la funcional quede en términos del modelo de interpolación:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\{q\}^T [B]^T [C] [B] \{q\} - 2\{q\}^T [N]^T \{\bar{X}\} \right) dV - \iint_{S_1} \{q\}^T [N]^T \{\bar{T}\} dS_1 \quad 5.26$$

Ahora aplicamos el principio variacional, ecuación 5.9c, y obtenemos:

$$\{\delta q\}^T \left(\iiint_V [B]^T [C] [B] dV \{q\} - \iiint_V [N]^T \{\bar{X}\} dV - \iint_{S_1} [N]^T \{\bar{T}\} dS_1 \right) = 0 \quad 5.27$$

Como las variaciones de los desplazamientos nodales son arbitrarias, lo que está entre paréntesis debe igualarse a cero. La ecuación de equilibrio para el elemento queda:

$$[k] \{q\} = \{Q\} \quad 5.28a$$

$$[k] = \iiint_V [B]^T [C] [B] dV \quad 5.28b$$

$$\{Q\} = \iiint_V [N]^T \{\bar{X}\} dV - \iint_{S_1} [N]^T \{\bar{T}\} dS_1 \quad 5.28c$$

La aplicación del principio variacional produce una fórmula general de las características del elemento.

5.1.4 Ensamblaje de Elementos Finitos

La compatibilidad de desplazamientos es la base para el ensamblaje de elementos. Esta compatibilidad significa que todos los elementos aledaños a un nodo tengan el mismo desplazamiento en ese mismo nodo.

Debe aclararse que el concepto de desplazamientos incluye los propios desplazamientos y además las rotaciones. Para modelos de mayor orden pueden incluir también las deformaciones, curvaturas y otras derivadas de los desplazamientos con respecto a las coordenadas espaciales.

5.1.4.1 Reglas de ensamblaje y principio variacional

Las reglas de ensamblaje pueden resumirse en que, debido a que los desplazamientos están relacionados en los nodos, las cargas y la rigidez son sumadas en dichos nodos.

En la sección 5.1.3.5 se aplicó el principio variacional a los elementos en forma individual, ahora se aplica al cuerpo entero para obtener las reglas de ensamblaje. Se acepta que el número total de elementos es E y N es el número total de grados de libertad de los nodos, esto es, el número total de ecuaciones que serán resueltas para el ensamblaje. Además, se acepta que se conocen las matrices de rigidez y el vector de carga de cada elemento y, que los vectores de carga de los elementos incluyen todas las cargas aplicadas al cuerpo. Los desplazamientos nodales para el ensamblaje total pueden ser escritos como un vector $\{r\}$ de

$N \times 1$. Si el subíndice e denota el número de elemento y se usa un sistema de numeración de nodos y elementos, entonces se pueden escribir las matrices de rigidez de $N \times N$, $[K_e]$, y el vector de cargas de $N \times 1$, $\{R_e\}$, para cada uno de los elementos. Éstas son construidas insertando los coeficientes de rigidez y las cargas conocidas en los lugares adecuados y rellenando los demás lugares con ceros. Por ejemplo, el vector de carga $\{R_e\}$, para el elemento número e , se forma usando el vector $\{Q_e\}$ visto en la sección 5.3.5:

$$\{R_e\} = [\{0\}^T \quad \{0\}^T \quad \cdots \quad \{0\}^T \quad \{Q_e\}^T \quad \{0\}^T \quad \cdots \quad \{0\}^T]$$

Las cargas $\{Q_e\}$ son colocadas en el vector de cargas totales $\{R_e\}$ en una posición que guarde correspondencia con los desplazamientos nodales del elemento e , $\{q_e\}$, en el vector $\{r\}$. De la misma forma se construye la matriz de rigidez global. La energía potencial total para un elemento se puede escribir:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \underbrace{\{q_e\}^T}_{1 \times n} \underbrace{[k_e]}_{n \times n} \underbrace{\{q_e\}}_{n \times 1} - \underbrace{\{q_e\}^T}_{1 \times n} \underbrace{\{Q_e\}}_{n \times 1} = \frac{1}{2} \underbrace{\{r\}^T}_{1 \times N} \underbrace{[K_e]}_{N \times N} \underbrace{\{r\}}_{N \times 1} - \underbrace{\{r\}^T}_{1 \times N} \underbrace{\{R_e\}}_{N \times 1}$$

Donde n y N son los números de desplazamientos para un solo elemento y para el ensamblaje, respectivamente.

El potencial para el ensamblaje se puede escribir:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E \Pi_e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \{r\}^T [K_e] \{r\} - \sum_{e=1}^E \{r\}^T \{R_e\} = \frac{1}{2} \{r\}^T \left\{ \left(\sum_{e=1}^E [K_e] \right) \{r\} - \sum_{e=1}^E \{R_e\} \right\}$$

Se aplica ahora el principio de energía potencial mínima al ensamblaje:

$$\delta \Pi = \{\delta r\}^T \left\{ \left(\sum_{e=1}^E [K_e] \right) \{r\} - \sum_{e=1}^E \{R_e\} \right\} = 0$$

El principio se satisface cuando $\{\delta r\}^T = 0$

$$\left(\sum_{e=1}^E [K_e] \right) \{r\} = \sum_{e=1}^E \{R_e\}$$

La anterior es la ecuación de equilibrio para el ensamblaje. En forma abreviada:

$$[K] \{r\} = \{R\} \quad 5.29$$

Las reglas de ensamblaje para la matriz de rigidez y el vector de cargas son:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [K_e] \quad 5.30$$

$$[R] = \sum_{e=1}^E [R_e] \quad 5.31$$

5.1.4.2 Compatibilidad en las interfaces de elementos

Tres condiciones deben ser cumplidas para que en la interface entre dos elementos haya compatibilidad:

1. Utilizar el mismo modelo de desplazamiento isotrópico en ambos elementos.
2. Para cada elemento, los desplazamientos en la interface deben depender únicamente de los desplazamientos nodales que ocurren en esa misma interface.
3. Forzar la compatibilidad nodal entre los elementos.

Puede suceder que un modelo satisfaga la compatibilidad de traslaciones pero no necesariamente cumpla con la continuidad de las pendientes o de las derivadas de los desplazamientos en la interface de los elementos. La continuidad de las pendientes se puede conseguir incluyéndolas en el modelo como grados de libertad nodal.

5.1.4.3 Método de construcción directa de la matriz de rigidez y vector de carga

Aunque no es el método más eficiente, sirve para ilustrar la forma en que se construyen la matriz de rigidez y el vector de cargas. Métodos más eficientes asignan dinámicamente el tamaño de las matrices eliminando los espacios en blanco para ahorrar memoria.

Para ilustrar el método se emplea un modelo simple ilustrado en la figura 5.8.

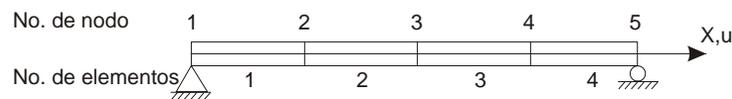


Figura 5.8 Elemento cargado axialmente

Admitiendo que para cada elemento se conocen las matrices simétricas de rigidez y los vectores de carga:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad [k_2] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad [k_3] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad [k_4] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \quad 5.32$$

$$\{Q_1\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}, \quad \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}, \quad \{Q_3\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \{Q_4\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad 5.33$$

Los vectores de los desplazamientos nodales incógnitas de cada elemento son:

$$\{q_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \{q_2\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \{q_3\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \{q_4\} = \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} \quad 5.34$$

La energía potencial total para un elemento es:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} \{q_1\}^T [k_1] \{q_1\} - \{q_1\}^T \{Q_1\} \\ &= \frac{1}{2} (a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2) - A_1u_1 - A_2u_2 \end{aligned}$$

y así sucesivamente para los elementos restantes. La energía potencial para el ensamblaje de elementos está dada por la suma de los potenciales de todos los elementos individuales:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} [a_{11}u_1^2 + a_{12}u_1u_2] - A_1u_1 \\ &+ \frac{1}{2} [a_{12}u_1u_2 + (a_{22}+b_{11})u_2^2 + b_{12}u_2u_3] - (A_2+B_1)u_2 \\ &+ \frac{1}{2} [b_{12}u_2u_3 + (b_{22}+c_{11})u_3^2 + c_{12}u_3u_4] - (B_2+C_1)u_3 \\ &+ \frac{1}{2} [c_{12}u_3u_4 + (c_{22}+d_{11})u_4^2 + d_{12}u_4u_5] - (C_2+D_1)u_4 \\ &+ \frac{1}{2} [d_{12}u_4u_5 + d_{22}u_5^2] - D_2u_5 \end{aligned}$$

Al aplicar la primera variación, ecuación 5.4c, y el principio de energía potencial mínima, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 - A_1 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} &= a_{12}u_1 + (a_{22}+b_{11})u_2 + b_{12}u_3 - (A_2+B_1) = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} &= b_{12}u_2 + (b_{22}+c_{11})u_3 + c_{12}u_4 - (B_2+C_1) = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_4} &= c_{12}u_3 + (c_{22}+d_{11})u_4 + d_{12}u_5 - (C_2+D_1) = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_5} &= d_{12}u_4 + d_{22}u_5 - D_2 = 0 \end{aligned}$$

Lo anterior se puede escribir en forma matricial como abajo se muestra:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & (a_{22}+b_{11}) & b_{12} \\ & b_{12} & (b_{22}+c_{11}) & c_{12} \\ & & c_{12} & (c_{22}+d_{11}) & d_{12} \\ & & & d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ (A_2+B_1) \\ (B_2+C_1) \\ (C_2+D_1) \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad 5.35$$

en forma resumida:

$$[K]\{r\} = \{R\} \quad 5.36$$

Se ve claramente la relación que existe entre las ecuaciones de equilibrio de los elementos individuales y la ecuación global de ensamblaje, 5.35. El método directo permite construir la matriz de ensamblaje insertando las rigideces y las cargas individuales en forma ordenada y en un sitio adecuado donde exista una correspondencia uno a uno entre los nodos de los elementos y los nodos del ensamblaje.

El método directo puede generalizarse a dos y tres dimensiones, y además evita la aplicación del principio variacional en forma desglosada.

5.1.4.4 Condiciones de Frontera

Sin la aplicación de las condiciones de frontera las matrices de rigidez de los elementos y del ensamblaje, $[k]$ y $[K]$ respectivamente, son singulares: sus determinantes son nulos y sus inversas no existen. El significado físico es que el cuerpo o estructura estaría libre de experimentar movimientos ilimitados como cuerpo rígido a menos que algún soporte o restricciones cinemáticas se le impusieran para asegurar el equilibrio con las cargas. Las restricciones son las condiciones de frontera.

Desde el punto de vista del método variacional existen dos tipos de condiciones de frontera: geométricas y naturales. Al utilizar un principio variacional las condiciones naturales están implícitas y sólo es necesario aplicar las condiciones geométricas. En el método de desplazamientos que aquí se ha visto, en el que se asumen desplazamientos como solución tentativa, las condiciones geométricas de frontera consisten en restricciones cinemáticas o desplazamientos asignados a ciertos puntos del cuerpo. Las condiciones de frontera de las cargas son incorporadas a los vectores $\{Q\}$ y $\{R\}$.

La aplicación de las condiciones de frontera puede ser explicada matemáticamente por medio de la partición de la ecuación de equilibrio como sigue:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{12}]^T & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r_1\} \\ \{r_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R_1\} \\ \{R_2\} \end{Bmatrix} \quad 5.37$$

donde $\{r_1\}$ es el vector de desplazamientos libres, y $\{r_2\}$ es el vector de los desplazamientos restringidos o especificados. El problema se reduce a la solución de la ecuación:

$$[K_{11}]\{r_1\} = \{R_1\} - [K_{12}]\{r_2\} \quad 5.38$$

Las reacciones en los nodos con desplazamientos restringidos se calculan con la ecuación:

$$\{R_2\} = [K_{12}]^T \{r_1\} + [K_{22}]\{r_2\} \quad 5.39$$

Un modo más práctico de modificar la ecuación de equilibrio es escribir la ecuación 5.37 en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [0] \\ [0] & [1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r_1\} \\ \{r_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R_1\} - [K_{12}]\{r_2\} \\ \{r_2\} \end{Bmatrix} \quad 5.40$$

La ecuación 5.40 se forma sin reordenar las ecuaciones como lo indica la partición. El subvector $\{R_1\} - [K_{12}]\{r_2\}$ se construye primero para cada condición no homogénea. Luego el renglón y columna de $[K]$ correspondiente a esta condición se vuelven nulos con la excepción del elemento de la diagonal, que se iguala a uno. Finalmente, el desplazamiento especificado se introduce al vector de carga. Para el desplazamiento r_i en el $i^{\text{ésimo}}$ grado de libertad, el procedimiento de arriba se resume en:

$$\begin{aligned} R_j &= R_j - K_{ji}r_i && \text{para } j=1,2,3,\dots,N \quad \text{si } r_i \neq 0 \\ K_{im} &= K_{mi} = 0 && \text{para } m=1,2,3,\dots,N \\ K_{ii} &= 1 \\ R_i &= r_i \end{aligned} \quad 5.41$$

5.1.5 Preproceso, proceso y postproceso

El método de elementos finitos se puede dividir en tres fases: Preproceso, proceso y postproceso.

Preproceso

El preproceso consiste en delimitar el problema, determinar las propiedades mecánicas de los materiales involucrados, la geometría del medio y su discretización, condiciones de frontera y solicitaciones que se aplicarán.

En cuanto a la discretización del medio se puede decir que depende de la precisión deseada y de la capacidad de memoria y procesamiento de datos de nuestra computadora (mientras más pequeños sean los elementos mayor será la precisión pero más tiempo tomará el análisis) Además, tendrá que considerarse que en los puntos de aplicación de cargas deberá haber nodos, mientras que en los cambios de material convendrá tener fronteras de elementos.

Para conseguir un análisis con cierto grado de precisión sin demasiado consumo de recursos computacionales es común hacer una discretización o malleo con elementos gruesos, hacer el análisis, y con los resultados obtenidos ver qué parte de la malla nos interesa más, ya sea porque ahí se encuentren los máximos esfuerzos o deformaciones, o porque sea una parte crítica para nuestro estudio. Es en esa parte donde se afinará la discretización y lo demás se dejará con elementos gruesos.

Proceso

Un esquema simplificado del proceso en un programa típico de elemento finito es el siguiente:

1. Lectura de control global de datos generales
2. Lectura de coordenadas y desplazamientos prescritos de nodos
3. Lectura de cargas

4. Lectura de propiedades geométricas y mecánicas de elementos
5. Bucle sobre cada elemento
 - 5.1 Lectura de incidencias, número de material y otras características
 - 5.2 Cálculo de la matriz de rigidez elemental
 - Cálculo de la matriz de rigidez local
 - Cálculo de la matriz de transformación
 - Cálculo de la matriz de rigidez global
 - 5.3 Consideración del peso propio en el vector de cargas
6. Ensamble de la matriz de rigidez global
7. Cálculo del vector de desplazamientos e impresión de resultados
8. Cálculo de resultados adicionales e impresión (elementos mecánicos, esfuerzos)

Postproceso

El postproceso consiste en organizar y desplegar los resultados para facilitar su interpretación. Para esta tesis es particularmente importante obtener las gráficas de desplazamientos laterales y momentos flexionantes vs profundidad y carga en todos los pilotes.

5.2 Análisis de Grupos de Pilotes con Elemento Finito

Una vez que se han visto a grandes rasgos los principios fundamentales del método de elementos finitos (MEF) pasamos a un programa con el que se pueden modelar tanto el suelo como los pilotes. El programa usado se llama **TEST (Tridimensional Estático)**, desarrollado en el Instituto de Ingeniería de la UNAM (Li,1990; Li, Romo y Magaña, 1992; Jiménez, 2004)

De acuerdo con Jiménez (2004) TEST modela el suelo por medio de hexaedros isoparamétricos de ocho nodos (sólidos), mientras que los pilotes son modelados por elementos lineales isoparamétricos de dos nodos (vigas). Modela el comportamiento no lineal de suelos blandos con el criterio de von Mises.

La matriz de rigidez de los elementos hexaedros se basó en un método variacional que simula el proceso constructivo. La idea principal del método es convertir los esfuerzos distribuidos de cada elemento en fuerzas internas concentradas en los nodos, luego las fuerzas se aplican en la siguiente etapa como solicitaciones externas con una dirección que depende del proceso constructivo que se quiera simular, construcción nueva o excavación. TEST fue elaborado según un método variacional ideado por Borja et al en 1989 y que asegura un buen funcionamiento para materiales elástico lineales y elasto-plásticos (Jiménez, 2004).

Aunque Von Mises elaboró su criterio pensando en metales, es posible usarlo para modelar la fluencia de una arcilla blanda saturada, durante periodos cortos y sin tomar en cuenta la consolidación.

Por otra parte, la matriz de rigidez de los elementos viga fue formulada con un método de aproximación directa, igual al seguido en el análisis estructural. Es decir, en cada uno de los grados de libertad de la viga se aplican desplazamientos unitarios para obtener los coeficientes de rigidez y luego se acomodan en una matriz de rigidez de cada elemento viga.

La información requerida por TEST para modelar el suelo es:

1. Módulo de elasticidad lateral, E_H
2. Relación de Poisson, ν
3. Peso específico, γ
4. Cohesión, S_u
5. Resistencia a la tensión, R_T
6. Módulo de compresibilidad volumétrica, m_v

Para analizar los elementos viga el programa requiere la siguiente información:

1. Módulo de elasticidad del pilote, E_p
2. Relación de Poisson, ν
3. Peso específico, γ
4. Área transversal del pilote, A
5. Momento polar de inercia, J
6. Momento de inercia respecto al eje local Y, I_y
7. Momento de inercia respecto al eje local Z, I_z

Adicionalmente, el programa debe ser alimentado con la malla del modelo, es decir, el conjunto de nodos, cada uno con sus tres coordenadas X, Y, Z, y sus seis grados de libertad. Los hexaedros se forman con ocho nodos ordenados debidamente, el tipo de material del que están hechos y su etapa de aplicación. Las vigas se forman con dos nodos, material y etapa.

Una visualización de las mallas típicas empleadas en esta tesis se muestra en las figuras 5.9 y 5.10. Nótese la estratificación del suelo y la inclinación de los pilotes. En el método de curvas p - γ se considera que la distribución de pilotes es uniforme y simétrica. Por su parte, el método de elementos finitos tiene la ventaja de poder configurar los pilotes en cualquier forma y además darles inclinación.

Adicionalmente, el método tiene potencial para desarrollar programas que hagan un análisis global de suelo-subestructura-superestructura.

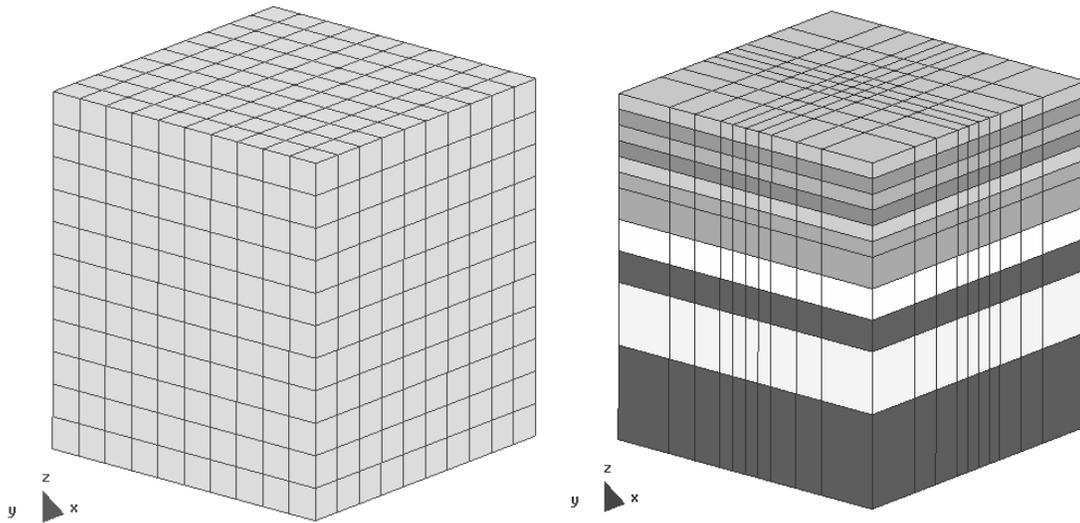


Figura 5.9 Mallas de suelo de material uniforme y estratificado.

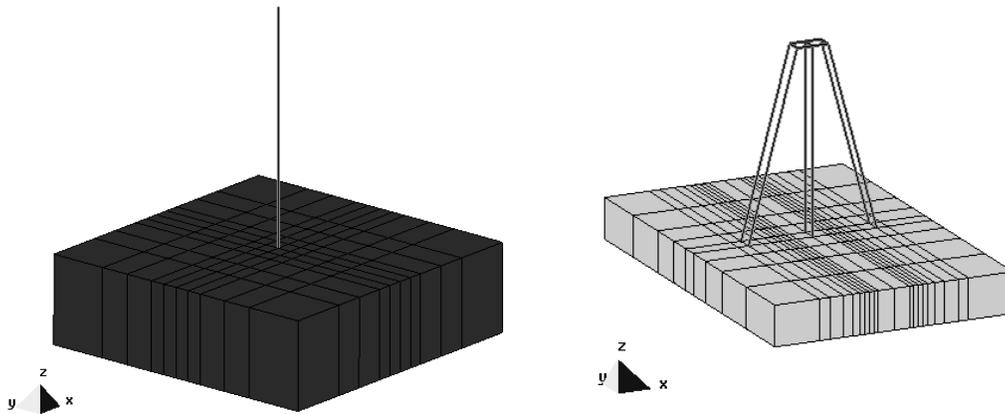


Figura 5.10 Elementos de pilote y suelo.

Para evaluar la sensibilidad del programa a las variaciones de los parámetros se asignaron valores muy por arriba o muy por debajo de lo común a todos los parámetros, luego se realizaron las corridas y se encontró que E_H , ν y γ son los que mayor influencia tienen en los resultados.

Un incremento en el módulo de elasticidad se ve reflejado en una disminución del desplazamiento lateral y del momento flexionante máximo en el pilote, así como una disminución de la profundidad donde se presenta. Si se reduce la relación de Poisson se produce un incremento en los momentos flexionantes y desplazamientos. La variación del peso específico modifica muy poco los resultados, pero se observó que al incrementar su

valor, los momentos y desplazamientos laterales aumentan ligeramente. Los valores de S_u , R_T y m_v no tienen prácticamente ninguna influencia en el análisis

También se menciona que TEST no modela la fricción entre el fuste del pilote y el suelo que lo rodea. Aunque la fricción no influye mucho en la respuesta de los pilotes bajo carga lateral, sí es de mucha importancia cuando se analice bajo carga vertical. Para considerar esta fricción es necesario implementar elementos de suelo que modelen la interface pilote-suelo.

5.2.1 Módulo de elasticidad lateral

Los artículos de las pruebas de carga consultados para esta tesis no proporcionaban el módulo de elasticidad lateral del suelo E_H , pero sí la resistencia al corte no drenada S_u . Por este motivo se recurrió a fórmulas que correlacionan ambos valores. Basándose en las mediciones de desplazamientos, recolectadas por Broms de pruebas de carga lateral a escala real, Poulos (1971a) propone la siguiente correlación para suelos cohesivos:

$$E_H = (15 \text{ a } 95) S_u \quad 5.42$$

Los valores más bajos están asociados a arcillas muy suaves mientras que los más altos a arcillas rígidas. Para todos los casos se puede considerar un valor promedio de:

$$E_H = 40 S_u \quad 5.43$$

Por otra parte, Bowles (1996) propone las siguientes correlaciones:

Arcilla sensitiva normalmente consolidada:

$$E_s = (200 \text{ a } 500) \times S_u \quad 5.44a$$

Arcilla no sensitiva normalmente consolidada y ligeramente sobreconsolidada:

$$E_s = (750 \text{ a } 1200) \times S_u \quad 5.44b$$

Arcilla fuertemente sobreconsolidada :

$$E_s = (1500 \text{ a } 2000) \times S_u \quad 5.44c$$

Si aplicamos directamente las correlaciones de arriba obtendremos el módulo de elasticidad vertical, pues S_u comúnmente se obtiene de probetas que en el laboratorio mantienen la orientación de su sitio de origen y son cargadas verticalmente. Como en este trabajo se ejercen fuerzas laterales sobre los pilotes es más adecuado calcular el módulo de elasticidad horizontal del suelo E_H .

Asumiendo que el módulo de elasticidad del suelo se comporta isotrópicamente en el plano horizontal, pero anisotrópicamente en la dirección vertical, la teoría de la Elasticidad nos proporciona la relación entre los módulos de elasticidad vertical y lateral:

$$\frac{\nu_1}{E_v} = \frac{\nu_2}{E_H} \quad 5.45$$

$v_1 = \varepsilon_x / \varepsilon_z$ la relación de Poisson cuando se aplica un esfuerzo en dirección vertical, σ_z
 $v_2 = \varepsilon_z / \varepsilon_x$ la relación de Poisson cuando se aplica un esfuerzo en dirección horizontal, σ_x

$$E_H = (v_2/v_1)E_V \quad 5.46$$

La propuesta de Poulos expresada en la ecuación 5.43 ofrece directamente el módulo elástico lateral. Si sustituimos 5.43 y 5.44a en 5.46 y consideramos que $v_1 = 0.45$:

$$40 S_u = (v_2/v_1) 200 S_u \quad 5.47a$$

$$v_2 = 0.09$$

$$15 S_u = (v_2/v_1) 200 S_u \quad 5.47b$$

$$v_2 = 0.0338$$

Los valores de v resultan demasiado pequeños y pueden indicar que alguna o ambas correlaciones subestima o sobrestima el módulo de elasticidad del suelo. En todo caso, al no poder abarcar en la tesis este problema, sólo se muestra la posibilidad de cometer errores significativos al emplear correlaciones como las mostradas arriba.

Por otro lado, cuando un pilote largo es cargado lateralmente, el suelo que le da soporte alcanza su resistencia última en la parte cercana a la superficie. En esta parte el suelo falla por cortante, empujado por el pilote hacia delante y hacia arriba. En partes más profundas del suelo, cuando éste llega a la falla ocurre un flujo plástico en un plano horizontal alrededor del pilote (Matlock, 1970). La diferencia de confinamiento es la que provoca los dos tipos de falla y también que en la superficie la resistencia sea menor.

Matlock y Reese han considerado esta situación en sus propuestas para elaborar las curvas $p-y$, como ya se ha visto en el capítulo 4. Para también considerar la menor resistencia en la cercanía de la superficie, se ha propuesto reducir el módulo de elasticidad lateral en la misma proporción que la resistencia se reduce en las curvas $p-y$.

La propuesta consiste en calcular la resistencia con las ecuaciones 4.5 y 4.6, y la profundidad x_R que delimita la zona de baja resistencia. Ver capítulo 4.

$$P_u = 3c + \gamma' x + J \frac{cx}{b} \quad \text{para } x < x_R \quad 4.5$$

$$P_u = 9c \quad \text{para } x \geq x_R \quad 4.6$$

Para profundidades menores que x_R se divide la ecuación 4.5 entre 4.6. El resultado es la fracción de la resistencia de cuando falla por flujo plástico alrededor del pilote. Este cociente se multiplica por el módulo de elasticidad lateral calculado con la correlación y así tomamos en cuenta la reducción de la resistencia en la zona cercana a la superficie.

$$E_H' = \frac{3c + \gamma'x + J\frac{cx}{b}}{9c} E_H \quad 5.48$$

En la figura 5.11 se observan las curvas de momento flexionante calculadas en el programa TEST con E_H' modificado y E_H sin modificar. Además, se muestran los resultados experimentales. Es claro que las curvas con E_H tienen un momento flexionante máximo mucho menor que el resultado experimental, lo que indica que el módulo de elasticidad lateral es demasiado alto. Por otra parte, como el módulo modificado E_H' es menor, provoca momentos flexionantes de mayor valor y más cercanos a los valores experimentales.

El procedimiento propuesto para modificar E_H es empírico, sin embargo, las corridas realizadas en TEST con E_H' modificado arrojan mejores resultados que las que incluyeron un E_H sin modificar.

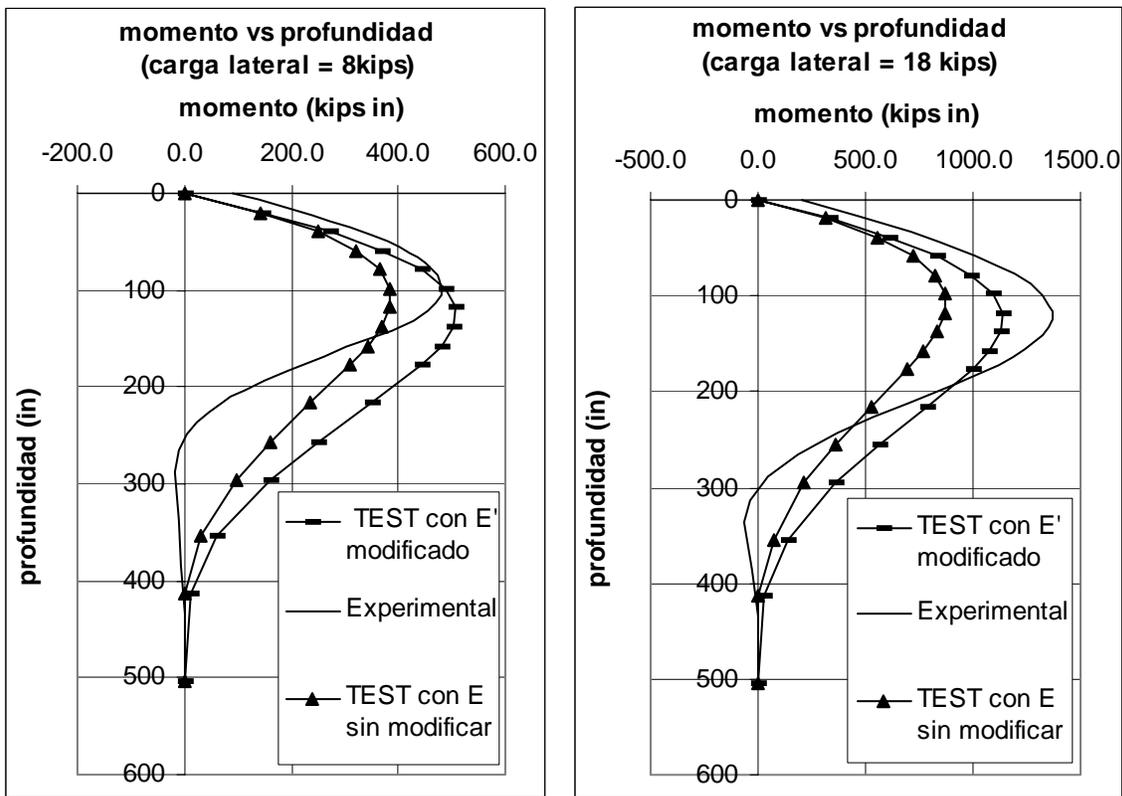


Figura 5.11 Comparación entre curvas de momento flexionante experimentales, con E_H modificado y sin modificar.

5.2.2 Condiciones de frontera

Para determinar las condiciones de frontera se tomó en cuenta lo siguiente:

La carga lateral sólo aumenta el desplazamiento axial del pilote cuando se aplica simultáneamente carga axial; la carga lateral no produce movimiento vertical por sí sola. Por el contrario, el efecto de la carga axial sobre la respuesta lateral del pilote es muy limitada (Anagnostopoulos y Georgiadis, 1993).

Debido a que se está analizando el pilote bajo carga lateral únicamente y que la carga vertical influye muy poco en la respuesta lateral del pilote, se considera aceptable imponer restricción de movimiento a la punta del pilote en la dirección vertical. Esta restricción además fue necesaria para que el pilote fuera estable en el análisis con TEST. Adicionalmente, se restringió el desplazamiento en las dos direcciones laterales, en el giro alrededor del eje del pilote y el giro en el eje paralelo a la dirección de la carga lateral. En resumen, el nodo de la punta del pilote está restringido en todos sus desplazamientos y giros, excepto en el giro alrededor del eje perpendicular a la carga (eje Y, si la carga lateral tiene dirección X), figura 5.12. Todos los demás nodos pertenecientes al pilote no tuvieron ninguna restricción de movimiento.

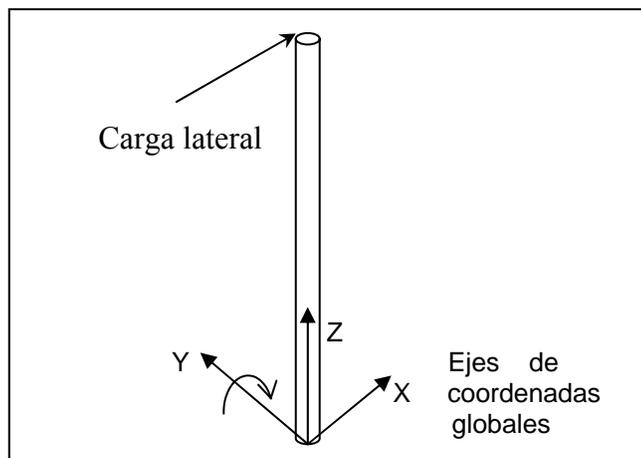


Figura 5.12 Esquema de la carga lateral en dirección X, y libertad de giro en la punta del pilote alrededor del eje Y.

A diferencia de los elementos viga, que tienen seis grados de libertad, los elementos hexaedro sólo tienen tres grados de libertad en cada nodo, correspondientes a los desplazamientos en las direcciones X, Y y Z. Por esta razón, en cada nodo donde no incida un elemento viga se restringieron los giros alrededor de los tres ejes. Los desplazamientos no quedan restringidos a menos que pertenezcan a una frontera del modelo. Esto ayuda notablemente a reducir el número de incógnitas en el sistema de ecuaciones.

Por otra parte, Rollins et al (1998) han encontrado en trabajos experimentales de grupos de pilotes que no hay interacción significativa entre pilotes cuando están separados más de 5.5 diámetros, figura 6.30. Considerando lo anterior y dado que es necesario delimitar el suelo que vamos a modelar, se estableció que las fronteras laterales del suelo deberían estar a por lo menos 11 diámetros de distancia del centro del pilote. Con el doble de distancia nos aseguramos que las fronteras del suelo modelado no influirán en los resultados.

Para modelar el comportamiento semi-infinito del suelo es necesario aplicar condiciones especiales en las fronteras. Los nodos de elementos hexaedro pertenecientes a las fronteras laterales deben ser restringidos en su desplazamiento en dirección normal al plano de la frontera. Los nodos de la base del modelo quedaron restringidos en todas direcciones y giros.

Las condiciones de frontera aplicadas fueron:

1. Los nodos que yacían en un plano XZ que eran frontera del suelo modelado tuvieron restricción de movimiento en la dirección Y.
2. Los nodos que yacían en un plano YZ que eran frontera del suelo modelado tuvieron restricción de movimiento en la dirección X.
3. Todos los nodos que formaban parte de la base del modelo fueron restringidos en todos los desplazamientos y giros, excepto el nodo de la punta del pilote.
4. Todos los nodos pertenecientes a elementos hexaedro fueron restringidos en los giros alrededor de los tres ejes.
5. Los nodos pertenecientes a elementos viga no tuvieron ninguna restricción de movimiento, con excepción del nodo de la punta del pilote, que tuvo como único grado de libertad el giro alrededor del eje Y.
6. A ningún nodo se le impuso desplazamiento inicial.

Un manual de usuario de TEST se puede consultar en Jiménez, 2004.

Capítulo 6

Comportamiento teórico y experimental de Grupos de pilotes bajo carga lateral

6.1 Comportamiento teórico de pilotes aislados

Diversos investigadores han estudiado el comportamiento de pilotes bajo carga lateral, entre ellos Randolph y Poulos. Ambos hicieron un análisis considerando que el suelo se comporta elásticamente, aunque el primero contempla la variación lineal de la rigidez del suelo con la profundidad.

La idealización más simple del problema de pilote cargado lateralmente es considerarlo como una viga elástica rotada noventa grados y considerar el suelo como resortes elásticos a lo largo del pilote. La rigidez de los resortes es generalmente calculada con base en el módulo de reacción del suelo k . Hetenyi (1946) proporciona soluciones para diferentes condiciones de carga y restricciones en la cabeza del pilote que conducen a soluciones generales para la longitud crítica l_c , desplazamiento en la cabeza u , y giro θ , también en la cabeza.

La longitud crítica o efectiva de un pilote bajo carga lateral es aquella con la que el pilote se comporta de la misma forma que se comportaría con una longitud mayor, incluso infinita. Es decir, la parte del pilote que se extiende por debajo de la longitud crítica no afecta el desplazamiento ni el cortante en la cabeza del pilote. La solución de Hetenyi citada por Randolph (1981) para un pilote de rigidez a la flexión EI , hincado en un suelo con coeficiente de reacción k , dice que la longitud crítica está dada por:

$$l_c \cong 4 \left[\frac{(EI)_p}{k} \right]^{\frac{1}{4}} \quad 6.1a$$

Para pilotes con longitud mayor que la crítica y cargados con una fuerza lateral H y un momento M , el desplazamiento y el giro están dados por:

$$u = \sqrt{2} \frac{H}{k} \left(\frac{l_c}{4} \right)^{-1} + \frac{M}{k} \left(\frac{l_c}{4} \right)^{-2} \quad 6.1b$$

$$\theta = \frac{H}{k} \left(\frac{l_c}{4} \right)^{-2} + \sqrt{2} \frac{M}{k} \left(\frac{l_c}{4} \right)^{-3} \quad 6.1c$$

Este modelo fue mejorado permitiendo la variación de los resortes a lo largo del pilote y después remplazando los resortes por curvas p-y. Sin embargo, Randolph considera que este tipo de análisis discretiza el suelo por medio de los resortes y no toma en cuenta su continuidad.

Poulos (1971a) analizó el comportamiento de un pilote vertical aislado sujeto a carga horizontal H y momento M . Asume que el suelo es homogéneo, isotrópico, y con parámetros elásticos constantes: módulo de Young E_s y relación de poisson ν_s , que no son alterados por la presencia del pilote. Considera el pilote como una tira rectangular, delgada y vertical, de ancho d , longitud L , y con rigidez constante $E_P I_P$. Considera dos casos de interés práctico: pilote con cabeza libre (con libertad de girar en la cabeza) y pilote con cabeza fija (sin posibilidad de giro, $\theta = 0$).

Poulos identifica la relación longitud-diámetro L/d y el factor de flexibilidad K_R como las dos variables de mayor influencia en el comportamiento del pilote y las asocia con factores adimensionales de influencia dentro de las figuras 6.1 a 6.4.

$$K_R = \frac{E_P I_P}{E_s L^4} \tag{6.2}$$

K_R adquiere un valor de infinito para un pilote infinitamente rígido y cero para una longitud infinita.

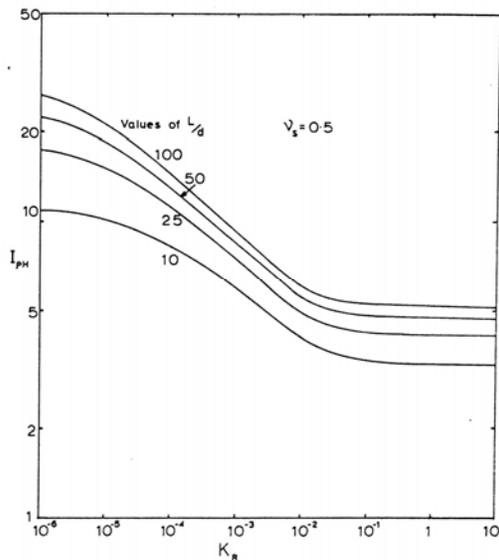


Figura 6.1 Factor de influencia I_{uH}
Pilote de cabeza libre

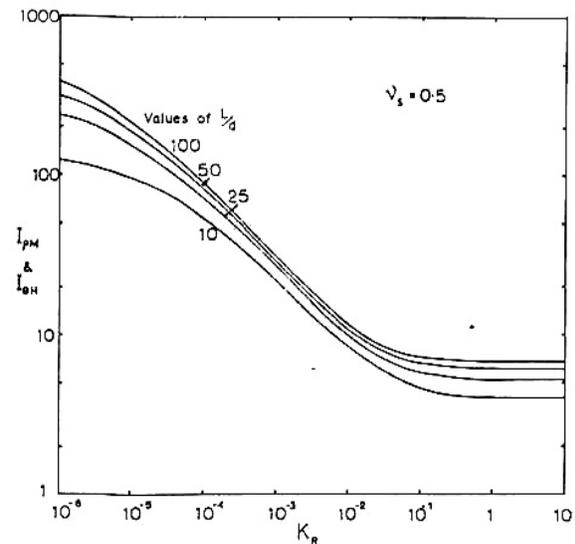


Figura 6.2 Factor de influencia I_{uM} y $I_{\theta H}$
Pilote de cabeza libre

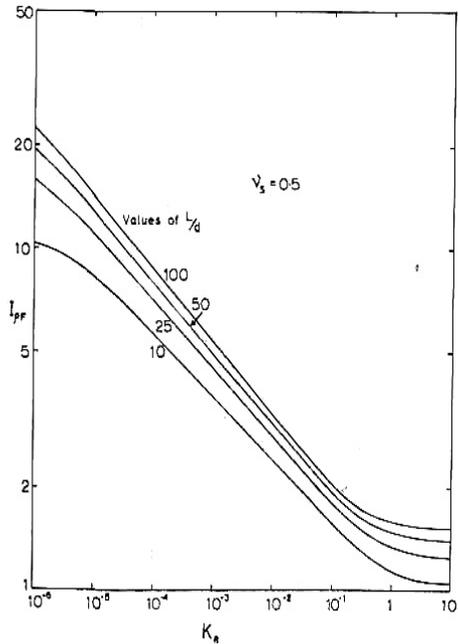


Figura 6.3 Factor de influencia I_{uF}
Cabeza Fija

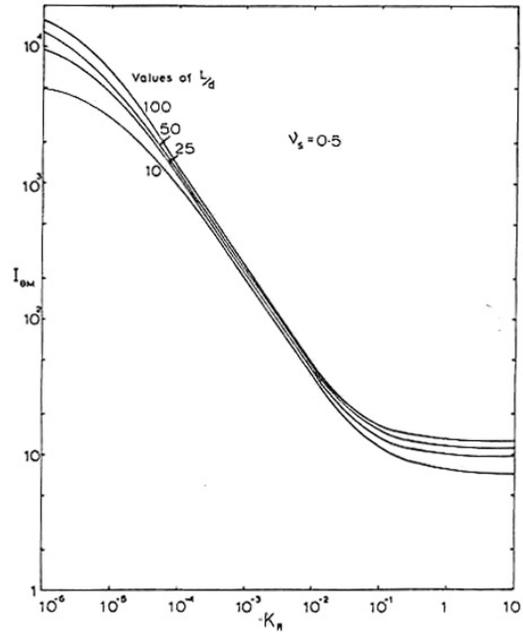


Figura 6.4 Factor de influencia $I_{\theta M}$
Pilote de cabeza libre

Para calcular el desplazamiento en la cabeza de un pilote libre Poulos propone la ecuación:

$$u = I_{uH} \frac{H}{E_s L} + I_{uM} \frac{M}{E_s L^2} \quad 6.3$$

I_{uH} es el factor de influencia para desplazamiento debido a carga horizontal sola, mientras I_{uM} es el factor de influencia para desplazamiento debido a momento solo, obtenidos de las figuras 6.1 y 6.2 respectivamente. Para un pilote con cabeza fija el desplazamiento en la cabeza esta dado por:

$$u = I_{uF} \frac{H}{E_s L} \quad 6.4$$

I_{uF} es el factor de influencia de desplazamiento para pilote de cabeza fija sujeto a carga horizontal, obtenido de la figura 6.3.

El giro en la cabeza del pilote libre se calcula con:

$$\theta = I_{\theta H} \frac{H}{E_s L^2} + I_{\theta M} \frac{M}{E_s L^2} \quad 6.5$$

$I_{\theta H}$ es el factor de influencia para giro debido a carga horizontal sola y es igual al factor I_{uM} . $I_{\theta M}$ es el factor de influencia para giro debido a momento solo obtenido de la figura 6.4.

De acuerdo con lo planteado por Poulos, el desplazamiento se incrementa cuando la relación L/d aumenta o el factor K_R disminuye. Las figuras 6.1 a 6.4 fueron calculadas para $\nu=0.5$, sin embargo, Poulos afirma que la relación de poisson tiene relativamente poca influencia en la solución del problema, por lo que las gráficas pueden ser utilizadas para todos los valores de ν .

La calidad de los resultados de las ecuaciones 6.2 a 6.4 depende en gran medida de la aproximación que se tenga al obtener E_s . Cuando no se dispone de ninguna información, para suelos cohesivos Poulos propone emplear $E_s = 40c_u$ (c_u es la resistencia al corte no drenada). Para suelos granulares se dan valores de E_s en la tabla 6.1.

Tabla 6.1 Valores promedio de E_s para suelos granulares

Densidad del suelo	Rango de valores para E_s , (lb/in ²)	E_s promedio (lb/in ²)
Suelto	130-300	250
Medio	300-600	500
Denso	600-1400	1000

Poulos presenta el ejemplo de un pilote de cabeza libre sujeto a carga horizontal sola y hace variar E_s y L para mostrar su influencia. Los resultados se muestran en la figura 6.5 y nos dan una idea del posible grado de error cometido por una inexactitud en la estimación de E_s .

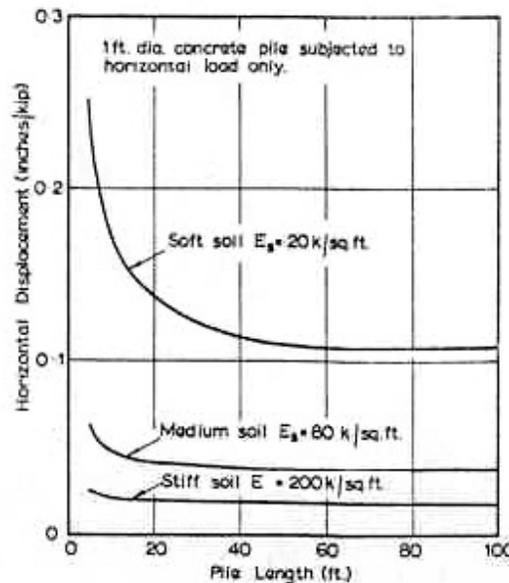


Figura 6.5 Influencia de la longitud del pilote y módulo de reacción del suelo en el desplazamiento del pilote.

También proporciona gráficas para calcular el momento máximo en un pilote de cabeza libre y el momento de fijación para un pilote de cabeza fija, figuras 6.6 y 6.7.

Por su parte, Randolph (1981) realizó un análisis paramétrico de pilotes cargados lateralmente y embebidos en una masa de suelo elástico continuo. Empleó el método de elementos finitos y sus resultados los sintetizó en fórmulas algebraicas similares a la 6.1. Considera que en casos prácticos los pilotes regularmente tienen una longitud mayor que la crítica, y que los desplazamientos y momentos flexionantes se reducen a proporciones despreciables dentro de unos pocos diámetros debajo de la superficie. Por lo tanto, la longitud del pilote raramente es un parámetro relevante en la solución del problema y estará sólo en función de la razón de rigidez E_p/G . Para suelos homogéneos caracterizados por un módulo de rigidez al cortante G y una relación de poisson ν , Randolph encontró:

$$u = 0.25 \frac{H}{G^* r_0} \left(\frac{E_p}{G^*} \right)^{-\frac{1}{7}} + 0.27 \frac{M}{G^* r_0^2} \left(\frac{E_p}{G^*} \right)^{-\frac{3}{7}} \quad 6.6a$$

$$\theta = 0.27 \frac{H}{G^* r_0^2} \left(\frac{E_p}{G^*} \right)^{-\frac{3}{7}} + 0.8 \frac{M}{G^* r_0^3} \left(\frac{E_p}{G^*} \right)^{-\frac{5}{7}} \quad 6.6b$$

donde:

$$E_p = \frac{4(EI)_p}{\pi r_0^4} \quad 6.7a$$

E_p es el módulo de Young efectivo del pilote, $(EI)_p$ es la rigidez a la flexión del pilote y r_0 es el radio del pilote.

$$G^* = G(1+3\nu/4) \quad 6.7b$$

G es el módulo de rigidez al cortante y ν es la relación de poisson.

Randolph asegura que las ecuaciones 6.6a y b tienen una discrepancia menor al 3% con los resultados obtenidos del método de elementos finitos para un rango de la rigidez de $100 \leq E_p/G \leq 5 \times 10^4$. Para $E_p/G > 5 \times 10^4$ la discrepancia llega a ser hasta de 10% en el caso de carga lateral H .

Cuando la rigidez del suelo aumenta con la profundidad, u y θ se calculan con:

$$u = 0.54 \frac{H}{m^* r_0^2} \left(\frac{E_p}{m^* r_0} \right)^{-\frac{3}{9}} + 0.60 \frac{M}{m^* r_0^3} \left(\frac{E_p}{m^* r_0} \right)^{-\frac{5}{9}} \quad 6.8a$$

$$\theta = 0.60 \frac{H}{m^* r_0^3} \left(\frac{E_p}{m^* r_0} \right)^{-\frac{5}{9}} + 1.13 \frac{M}{m^* r_0^4} \left(\frac{E_p}{m^* r_0} \right)^{-\frac{7}{9}} \quad 6.8b$$

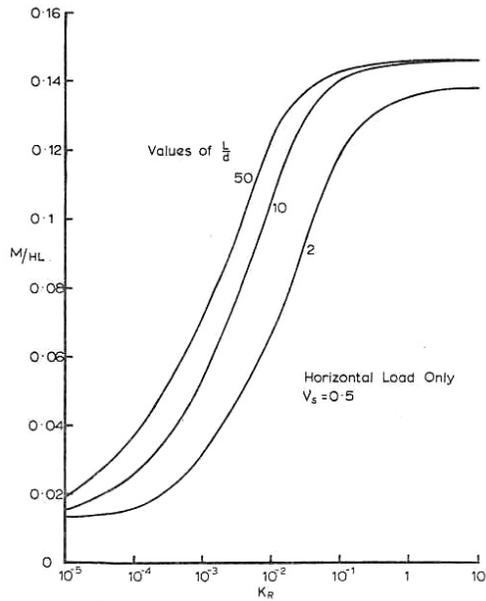


Figura 6.6 Momento máximo en un pilote con cabeza libre

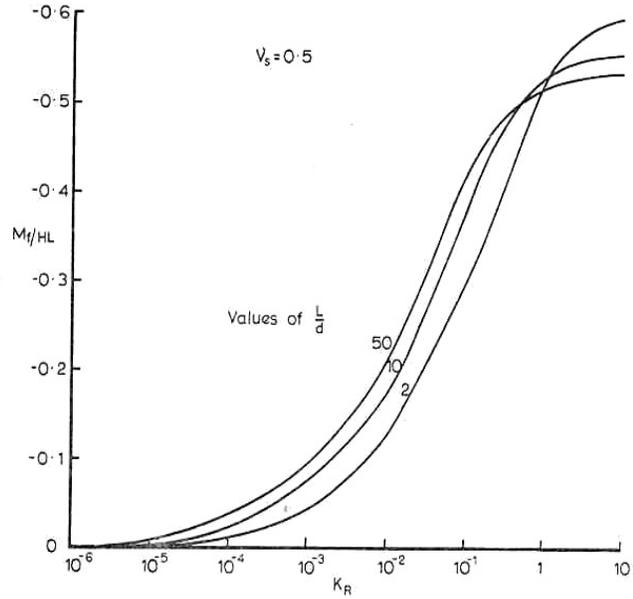


Figura 6.7 Momento en la cabeza de un pilote fijo

m es el parámetro que da la razón de incremento del módulo de rigidez al cortante con la profundidad:

$$G = mz \tag{6.9a}$$

Para tomar en cuenta el efecto de la relación de poisson en el desplazamiento se utiliza el parámetro m^* :

$$m^* = m(1 + 3\nu/4) \tag{6.9b}$$

La discrepancia es menor a 2% excepto en el caso de $E_p/mr_0 = 400$ donde llega a ser de 7%.

Para calcular la longitud crítica, Randolph propone dos ecuaciones:

$$\left(\frac{l_c}{r_0}\right) = 2\left(\frac{E_p}{G^*}\right)^{\frac{2}{7}} \tag{6.10a}$$

para suelo homogéneo, y

$$\left(\frac{l_c}{r_0}\right) = 2\left(\frac{E_p}{m^* r_0}\right)^{\frac{2}{9}} \tag{6.10b}$$

para suelo con rigidez proporcional a la profundidad.

En caso de tener un suelo que caiga entre los dos extremos (suelo homogéneo y con rigidez proporcional a la profundidad), Randolph propone combinar las ecuaciones 6.6 y 6.8 y utilizar un módulo característico G_c que es un valor promedio de G^* a lo largo de la profundidad crítica. Luego combina las ecuaciones 6.10a y b para definir una nueva longitud crítica:

$$\left(\frac{l_c}{r_0}\right) = 2\left(\frac{E_p}{G_c}\right)^{\frac{2}{7}} \quad 6.11$$

Como l_c y G_c dependen entre sí, es necesario suponer una longitud crítica para calcular G_c y después un nuevo valor de l_c ; el cálculo es iterativo. Luego, Randolph llega a las expresiones generales:

$$u = \frac{(E_p / G_c)^{1/7}}{\rho_c G_c} \left[0.27H \left(\frac{l_c}{2}\right)^{-1} + 0.3M \left(\frac{l_c}{2}\right)^{-2} \right] \quad 6.12a$$

$$\theta = \frac{(E_p / G_c)^{1/7}}{\rho_c G_c} \left[0.3H \left(\frac{l_c}{2}\right)^{-2} + 0.8(\rho_c)^{1/2} M \left(\frac{l_c}{2}\right)^{-3} \right] \quad 6.12b$$

$$\rho_c = \frac{G_{z=l_c/4}^*}{G_{z=l_c/2}^*} = \frac{G_{z=l_c/4}^*}{G_c} \quad 6.13$$

Para pilotes con la cabeza fija el momento flexionante en la cabeza, o momento de fijación, es:

$$M_f = - \left[\frac{0.375}{\rho_c^{1/2}} \right] H \frac{l_c}{2} \quad 6.14$$

y tiene un desplazamiento u aproximadamente igual a la mitad de un pilote con la cabeza libre bajo la misma fuerza lateral H . Por otra parte, el máximo momento en un pilote con cabeza libre bajo una fuerza lateral H se puede estimar con:

$$M_{\max} \approx \frac{0.1}{\rho_c} H l_c \quad 6.15$$

El máximo momento ocurre a una profundidad de entre $l_c/4$ (suelo homogéneo) y $l_c/3$ (suelo con rigidez proporcional a la profundidad)

Randolph comenta que puede ser más conveniente utilizar el modelo de suelo con rigidez proporcional a la profundidad, pues éste considera que a niveles cercanos a la superficie la rigidez del suelo es cero o muy baja, lo cual concuerda con el módulo secante de rigidez que tiene el suelo cuando hay grandes deformaciones.

A deformaciones muy grandes se alcanza una presión límite en la parte superior del pilote y la deformación puede ser calculada, según Randolph, tratando al pilote como si fuera un simple cantiliver. Bajo la región fallada se pueden utilizar las ecuaciones 6.12 y 6.13. Para conocer los perfiles de deformación y momento flexionante debidos a carga lateral H y momento M , el autor presenta gráficas para distintos valores de ρ_c .

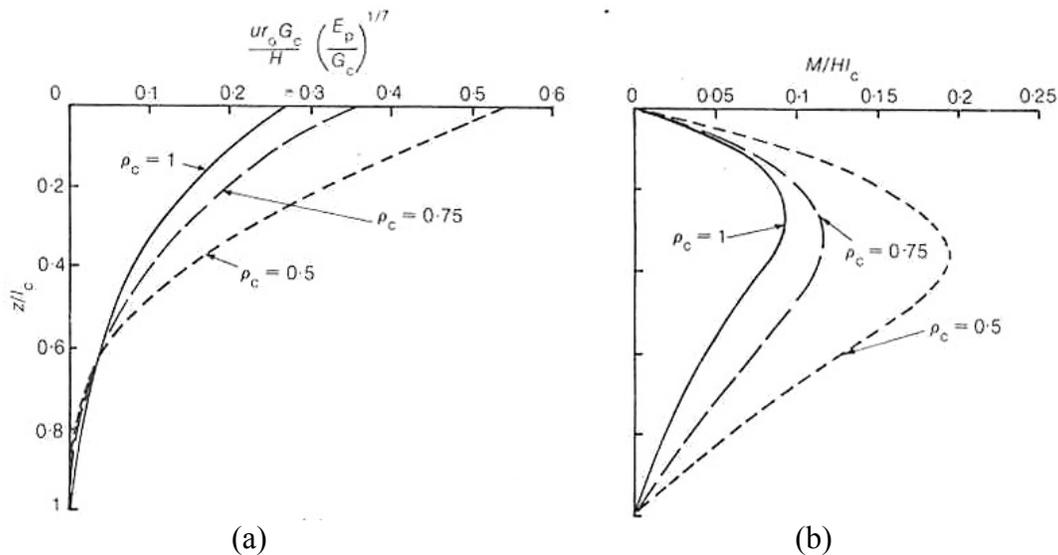


Figura 6.8 Curvas generales que proporcionan perfiles de desplazamiento (a) y de momento flexionante (b) en un pilote sujeto a fuerza horizontal.

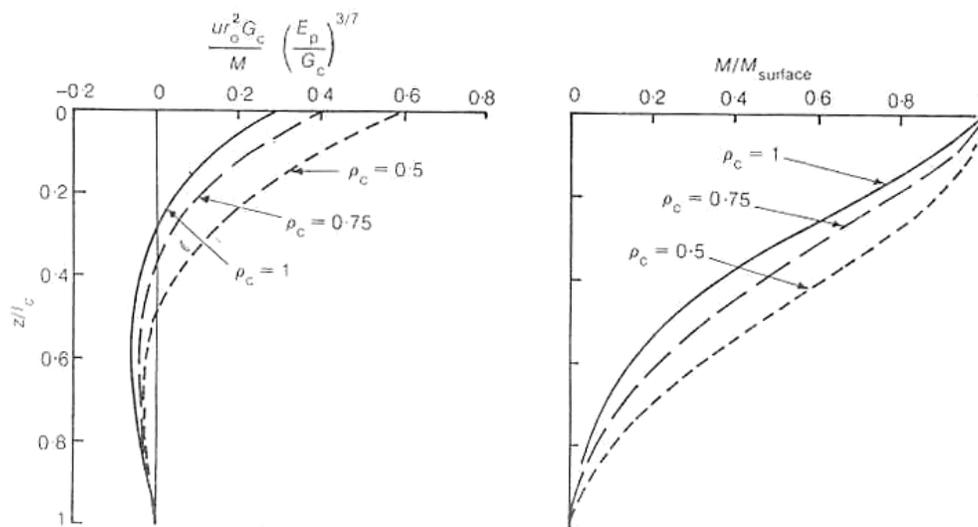


Figura 6.9 Curvas generales que proporcionan perfiles de desplazamiento (a) y de momento flexionante (b) en un pilote sujeto a momento.

6.2 Comportamiento teórico de grupos de pilotes

Poulos (1971b) analiza el comportamiento de grupos de pilotes cargados lateralmente partiendo de la interacción entre dos pilotes igualmente cargados, luego aplica los resultados junto con el principio de superposición de efectos al análisis de grupos de más de dos pilotes. Al igual que para pilotes aislados, hace las mismas consideraciones para suelo y pilotes. Además, no considera el efecto de una posible fluencia local entre suelo y pilote.

Para tomar en cuenta el desplazamiento y giro adicional provocados por la interacción de los pilotes del grupo con un pilote del grupo, Poulos propone los factores de interacción α_u y α_θ :

$$\alpha_u = \frac{\text{desplazamiento adicional debido al pilote adyacente}}{\text{desplazamiento debido a la carga propia del pilote}}$$

$$\alpha_\theta = \frac{\text{rotación adicional debida al pilote adyacente}}{\text{rotación debida a la carga propia del pilote}}$$

Los valores de α_u y α_θ para varias condiciones de carga y de fijación en la cabeza de los pilotes se presentan en las figuras 6.10 a 6.13 y se designan como sigue: α_{uH} y $\alpha_{\theta H}$ son los valores de α_u y α_θ para cabeza de pilote libre sujeta a carga horizontal sola; α_{uM} y $\alpha_{\theta M}$: son los valores de α_u y α_θ para cabeza de pilote libre bajo momento solo ($\alpha_{uM} = \alpha_{\theta H}$, del teorema de reciprocidad); y α_{uF} es el valor de α_u para pilote con cabeza fija (rotación igual a cero).

s es la distancia entre los centros de los pilotes; d es el ancho o diámetro del pilote; β se define como el ángulo comprendido entre la línea que une los centros de los dos pilotes considerados y la línea de dirección de la fuerza aplicada. Poulos apunta que se obtiene una buena aproximación si se considera que los factores de interacción varían linealmente con el ángulo β . Así, solo es necesario conocer los valores para $\beta=0^\circ$ y $\beta=90^\circ$, y para valores intermedios se interpola linealmente.

En las figuras 6.10 a 6.13 se considera que la relación de Poisson ν_s vale 0.5. Poulos señala que dichas figuras pueden usarse para todos los valores de ν_s y sólo se comete un pequeño error. También advierte que, aunque el desplazamiento es afectado considerablemente por la interacción, la distribución de presión horizontal a lo largo del pilote, y en consecuencia la distribución de momentos, permanecen virtualmente inalterados. Para propósitos prácticos, la distribución de presiones y momentos obtenida de un pilote aislado puede emplearse para grupos de pilotes.

Los tres casos que Poulos presenta para analizar grupos de pilotes bajo carga lateral son:

1. Grupo de pilotes con cabeza libre e igual desplazamiento.
2. Grupo de pilotes con cabeza libre, sobre cada pilote actúan fuerzas horizontales o momentos iguales.

3. Grupo de pilotes con cabeza fija e igual desplazamiento.

Para el primer caso, el procedimiento de cálculo consiste en construir el sistema de ecuaciones basado en la ecuación 6.16:

$$u_k = \bar{u}_H \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m H_j \alpha_{uHkj} + H_k \right) \tag{6.16}$$

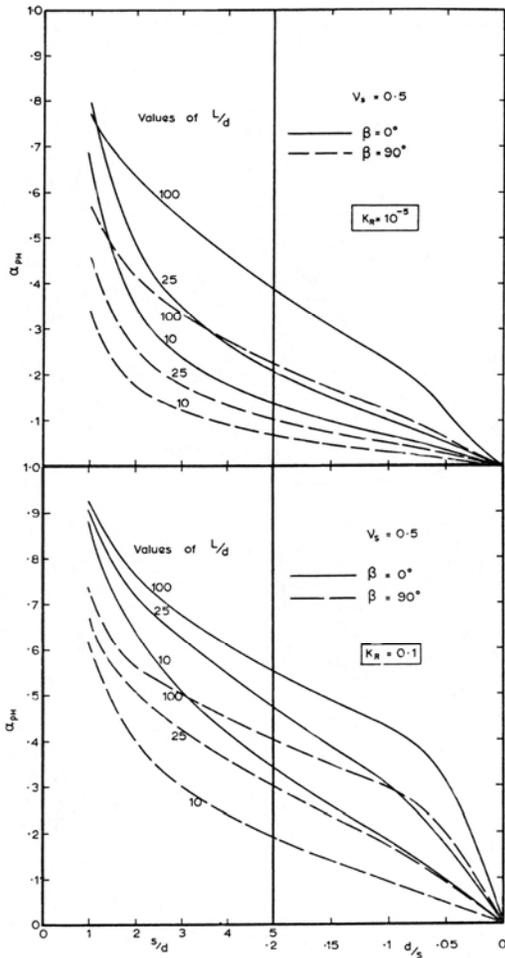


Figura 6.10 Factores de interacción α_{uH} para pilotes de cabeza libre sujetos a carga horizontal

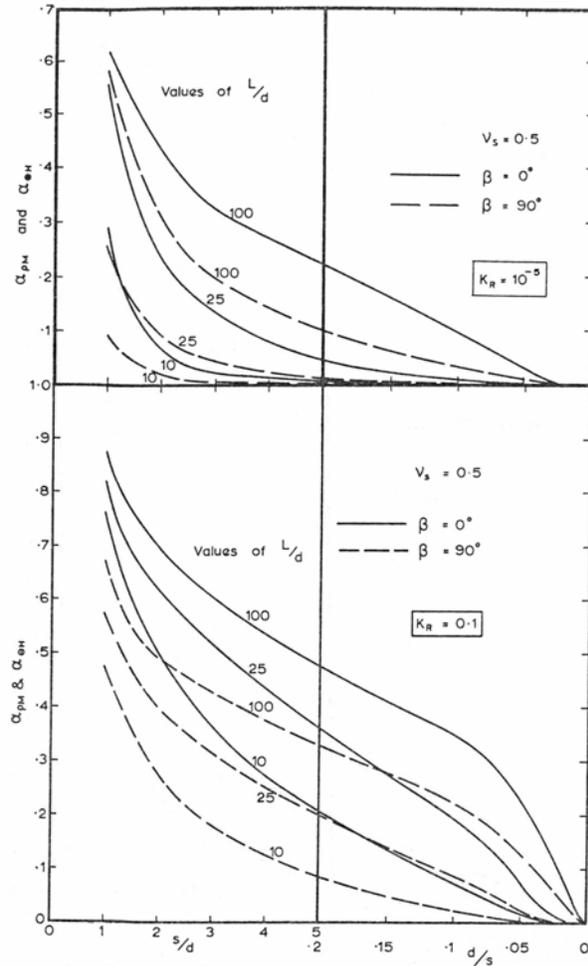


Figura 6.11 Factores de interacción α_{uM} y $\alpha_{\theta H}$ para pilotes de cabeza libre sujetos a momento

En donde m es el número de pilotes del grupo; \hat{u}_H es el desplazamiento unitario de referencia de un pilote de cabeza libre bajo carga horizontal unitaria; H_j es la carga sobre el pilote j ; y α_{uHkj} es el valor de α_{uH} para dos pilotes correspondiente al espacio entre los pilotes k y j , y, el ángulo β tal como se definió anteriormente.

La carga total sobre el grupo H_G es:

$$H_G = \sum_{j=1}^m H_j \tag{6.17}$$

Las m ecuaciones obtenidas con 6.16 se resuelven junto con la ecuación 6.17 para obtener las cargas H_j y el desplazamiento del grupo.

Para el caso de pilotes con cabeza libre e igual desplazamiento, pero con momento solo, se realiza el mismo procedimiento, excepto que se utiliza α_{uM} y el desplazamiento unitario de referencia \hat{u}_M (desplazamiento de un pilote de cabeza libre, aislado, bajo un momento unitario). En forma análoga, para grupo de pilotes de cabeza fija, caso 3, se emplea α_{uF} y \hat{u}_F .

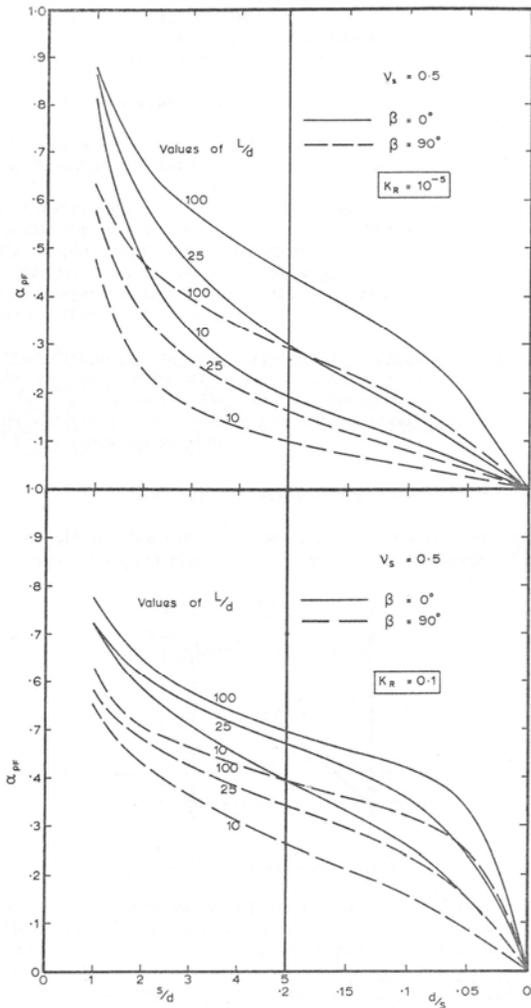


Figura 6.12 Factores de interacción α_{uF} Para pilotes de cabeza fija a 6.13 (3 a 6)

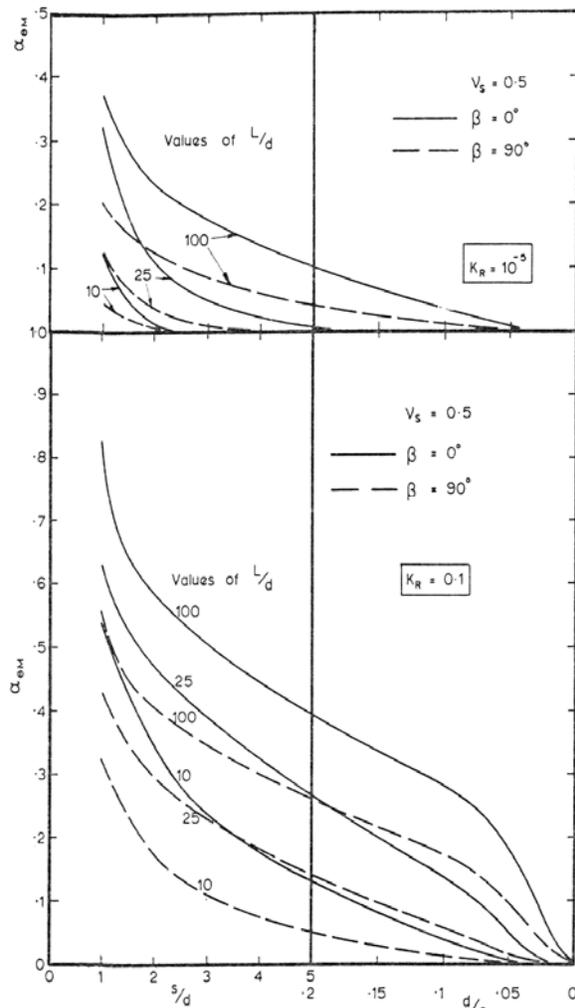


Figura 6.13 Factores de interacción $\alpha_{\theta M}$ para pilotes de cabeza libre sujetos

a momento

Para el caso 2, donde actúan fuerzas horizontales o momentos iguales ($H_j=H_G/m$), se aplica directamente la ecuación 6.16 y se obtienen los desplazamientos.

Los valores teóricos de los desplazamientos unitarios \hat{u}_H , \hat{u}_M y \hat{u}_F pueden obtenerse de las ecuaciones 6.3 y 6.4.

Poulos realiza análisis de grupos cuadrados de pilotes de hasta 5X5 y llega a la conclusión de que el desplazamiento de un grupo disminuye no sólo al aumentar el número de pilotes, sino también al aumentar el ancho del grupo, aun sin aumentar el número de pilotes. Así, por economía en problemas prácticos, es preferible usar un número pequeño de pilotes con grandes espaciamientos cuando el criterio de diseño sea el desplazamiento más que la capacidad de carga.

Por otra parte, Poulos encontró que en un suelo idealmente saturado la razón de desplazamiento inmediato u_u al desplazamiento final total u_{TF} depende esencialmente de la relación de Poisson ν_s del esqueleto del suelo, y es casi independiente de otros factores tales como el número de pilotes K_R y el espaciamiento de los pilotes. La relación entre u_u/u_{TF} y ν_s se muestra en la figura 6.14. De acuerdo con esta figura, para valores prácticos de ν_s , u_u/u_{TF} vale entre 0.8 y 0.9, por lo tanto, la mayor parte del desplazamiento total final ocurre inmediatamente después de la carga.

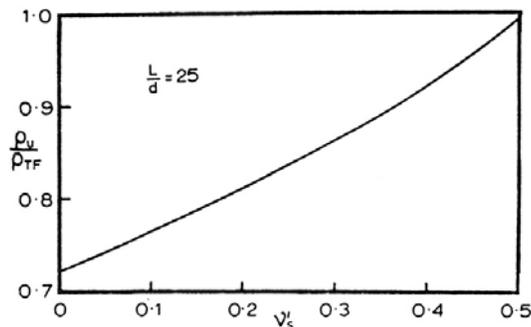


Figura 6.14 Razón entre el desplazamiento inmediato y el total final para un grupo de pilotes de cabeza fija.

Poulos afirma que la forma más confiable de obtener el módulo del suelo E_s es realizando una prueba de carga lateral en un pilote aislado y con el desplazamiento medido calcular un valor global de E_s , luego un valor de K_R y posteriormente un valor recalculado de E_s .

Finalmente Poulos afirma que las variables que más influyen en el desplazamiento del grupo de pilotes son el espaciamiento entre pilotes, la relación L/d y el factor de flexibilidad K_R .

Randolph (1981) considera que en la práctica el factor de interacción α_{uF} es el de más relevancia, dado que la mayoría de los grupos de pilotes están unidos por una placa o losa

de suficiente rigidez que impide una rotación significativa de las cabezas de los pilotes. Encontró que dicho factor puede ser expresado en forma aproximada como sigue:

$$\alpha_{uF} \approx 0.6 \rho_c \left(\frac{E_p}{G_c} \right)^{1/7} \frac{r_0}{s} (1 + \cos^2 \beta) \quad 6.18$$

Randolph resalta algunas características importantes de la ecuación 6.18: primero, la interacción para un pilote sobre la línea normal a la dirección de carga ($\beta=90^\circ$), a un espaciamiento s dado, es la mitad de la correspondiente a pilotes que yacen sobre la línea de carga ($\beta=0^\circ$); segundo, la interacción para pilotes en suelo con rigidez proporcional a la profundidad ($\rho_c=0.5$) es la mitad de la interacción en suelo homogéneo ($\rho_c=1.0$); tercero, los factores de interacción son inversamente proporcionales al espaciamiento s .

Poulos (1971b) menciona que los factores de interacción para pilotes de cabeza fija son mayores que los de cabeza libre. Basándose en esta afirmación, Randolph considera que α_{uH} puede estimarse con suficiente exactitud sustituyendo el factor 0.6 por 0.5 en la ecuación 6.18:

$$\alpha_{uH} \approx 0.5 \rho_c \left(\frac{E_p}{G_c} \right)^{1/7} \frac{r_0}{s} (1 + \cos^2 \beta) \quad 6.19$$

Como los demás factores de interacción adquieren valores considerablemente menores que α_{uH} con espaciamientos entre pilotes realistas, Randolph propone:

$$\alpha_{uM} = \alpha_{\theta H} \approx \alpha_{uH}^2 \quad 6.20$$

$$\alpha_{\theta M} \approx \alpha_{uH}^3 \quad 6.21$$

6.3 Comportamiento experimental observado en pruebas de carga lateral en grupos de pilotes.

6.3.1 En arcilla rígida preconsolidada.

Brown *et al.* (1987) realizaron una prueba de carga cíclica lateral sobre un grupo de pilotes a escala real en arcilla rígida preconsolidada y limo arcilloso. Realizaron también una prueba sobre un pilote aislado que sirvió de referencia para compararlo con el comportamiento individual de los pilotes del grupo. Los resultados generales más importantes que obtuvieron fueron los siguientes:

Para un mismo desplazamiento lateral, la carga soportada por un pilote aislado es mayor que la carga promedio soportada por el grupo de pilotes. A niveles de carga bajos, los pilotes del grupo tienen un comportamiento similar al de un pilote aislado, sin embargo,

mientras mayor es el nivel de carga, mayor es la influencia del grupo. El promedio de carga lo obtuvieron dividiendo la carga total aplicada al grupo entre el número de pilotes del grupo. Figura 6.15.

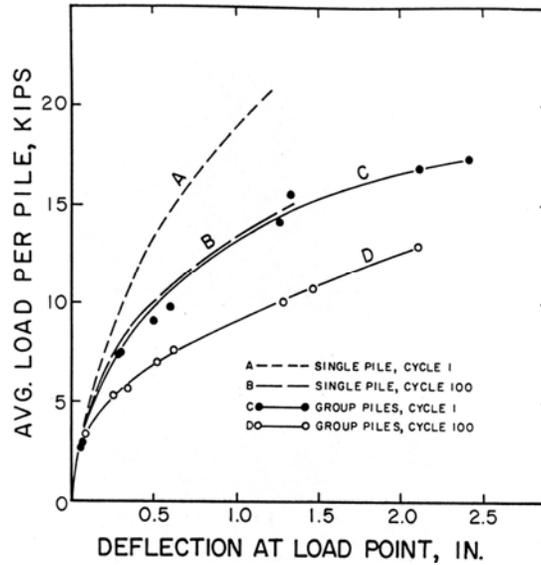


Figura 6.15 Respuesta de carga lateral vs desplazamiento (Brown *et al*, 1987)

El mismo comportamiento puede describirse en otras palabras: para una misma carga promedio, el pilote aislado presenta un menor desplazamiento que el grupo de pilotes. A su vez, para una misma carga lateral promedio, el momento flexionante en un pilote aislado resulta menor que el momento promedio para los pilotes del grupo. Nuevamente, el efecto del grupo aumenta con el nivel de carga. Figura 6.16.

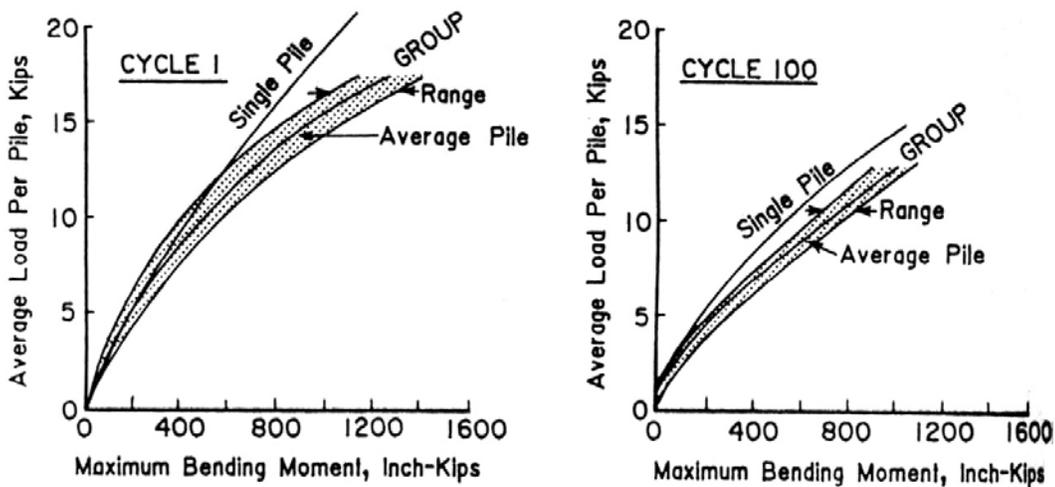


Figura 6.16. Carga lateral vs Momento flexionante (Brown *et al*, 1987)

Una comparación entre el comportamiento bajo carga estática y bajo carga cíclica muestra que el efecto de la carga cíclica es más significativo para el grupo de pilotes que para el pilote aislado. Se reporta en la figura 6.17 que el desplazamiento del grupo, sujeto a 100 ciclos de carga de 10 kips, llegó a ser hasta 2.3 veces mayor que el desplazamiento del pilote aislado sujeto a carga estática de la misma magnitud.

Por otra parte, el pilote aislado sujeto a 100 ciclos de carga de 16 kips sólo llegó a desplazarse aproximadamente 2.0 veces lo del pilote sujeto a carga estática. Un comportamiento similar es observado para los momentos flexionantes. El efecto de la carga cíclica también se puede observar en las figuras 6.15 y 6.16.

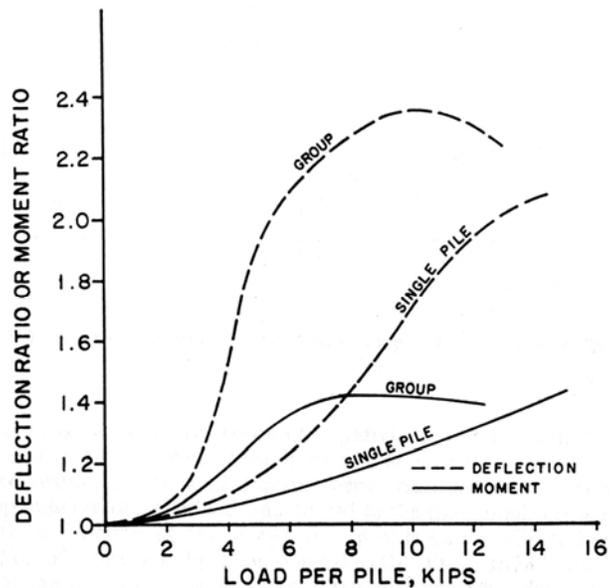


Figura 6.17 Respuesta cíclica normalizada a la respuesta estática de un pilote aislado. (Brown et al, 1987)

Brown también encontró que la distribución de la carga en los pilotes depende de su posición dentro del grupo, predominantemente de la fila que los albergue, más que de la posición del pilote en la dirección normal a la dirección de la carga. Como puede verse en la figura 6.18, los pilotes frontales soportan una mayor carga que los pilotes de en medio, y los pilotes de en medio soportan mayor carga que los pilotes traseros (considerando un mismo desplazamiento para todos los pilotes). Lo mismo sucede tanto para carga estática como para cíclica, aunque en menor grado en el último caso.

Brown apunta: “El efecto de la posición sobre la distribución de la carga parece ser más significativo conforme la carga aumenta y algo menos significativo conforme el número de ciclos se incrementa para una carga dada (probablemente debido al abocardamiento). Bajo cargas que se acercan a la de falla, los pilotes de la fila frontal soportan los incrementos de carga mientras que los pilotes de las filas de en medio y trasera se deforman a carga constante.”

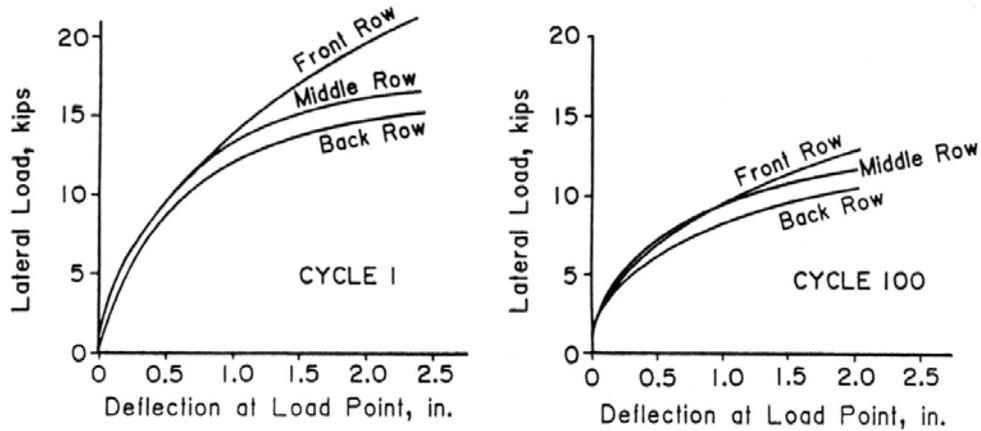


Figura 6.18 Distribución de carga por fila (Brown et al, 1987)

Como se puede ver en la figura 6.19, la posición también tiene un efecto sobre el momento flexionante máximo. Los pilotes de la fila frontal presentaron el momento máximo a una profundidad de 6 a 7D (D=diámetros) aproximadamente. Los pilotes de la fila media tuvieron momentos menores de 0 a 7 D de profundidad pero sostuvieron los máximos momentos debajo de esta profundidad. Los pilotes de la fila media alcanzaron un momento máximo a una profundidad mayor que los pilotes de la fila frontal, una observación que sugiere que la transferencia de carga al suelo tiende a ocurrir a mayor profundidad para los pilotes medios que para los pilotes frontales. Los pilotes de la fila trasera tuvieron un momento máximo a una profundidad incluso mayor que los pilotes medios, sin embargo, fue de menor magnitud debido a la menor transferencia de carga a los pilotes traseros, según explica Brown *et al.* El momento flexionante máximo del pilote aislado fue notablemente menor que cualquiera de los pilotes del grupo y ocurrió a una profundidad menor.

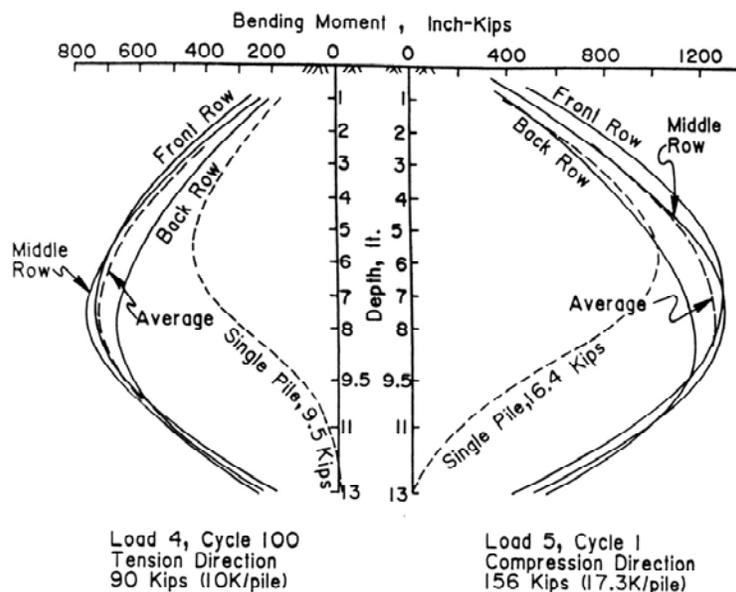


Figura 6.19 Momento flexionante vs profundidad (Brown et al, 1987)

Por otra parte, para carga estática, reportan una gran pérdida de resistencia última del suelo para el grupo de pilotes relativa a la medida para pilote aislado. En la figura 6.20 se puede observar la resistencia última del suelo contra la profundidad para pilotes de las tres filas, del pilote aislado y lo recomendado por el Instituto Americano del Petróleo (API, 1979). Se observa que la pérdida de resistencia relativa para el grupo se incrementa con la profundidad. Para carga cíclica encontraron un comportamiento análogo.

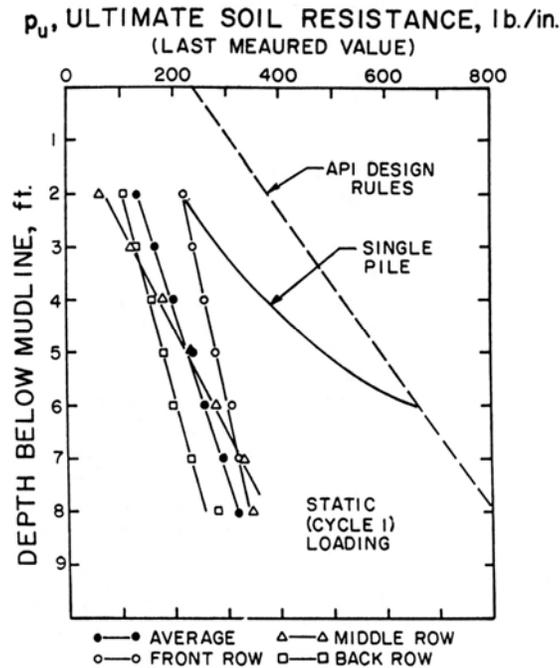


Figura 6.20 Resistencia última del suelo vs Profundidad (Brown *et al.*, 1987)

6.3.2 En arena

Después de realizar una prueba de carga en arcilla rígida, cuyos resultados se describieron anteriormente, Brown *et al.* (1988) realizaron una prueba de carga similar pero en arena compactada.

Los resultados de la prueba más significativos obtenidos por Brown de la prueba en arena fueron:

El efecto de grupo en arena es más significativo que en arcilla rígida y no disminuye con el número de ciclos de carga, tal como sucede en arcilla. Esto se puede ver al comparar las figuras 6.21 y 6.15. La poca influencia de los ciclos de carga la atribuyen a la densificación de la arena alrededor de los pilotes durante la prueba.

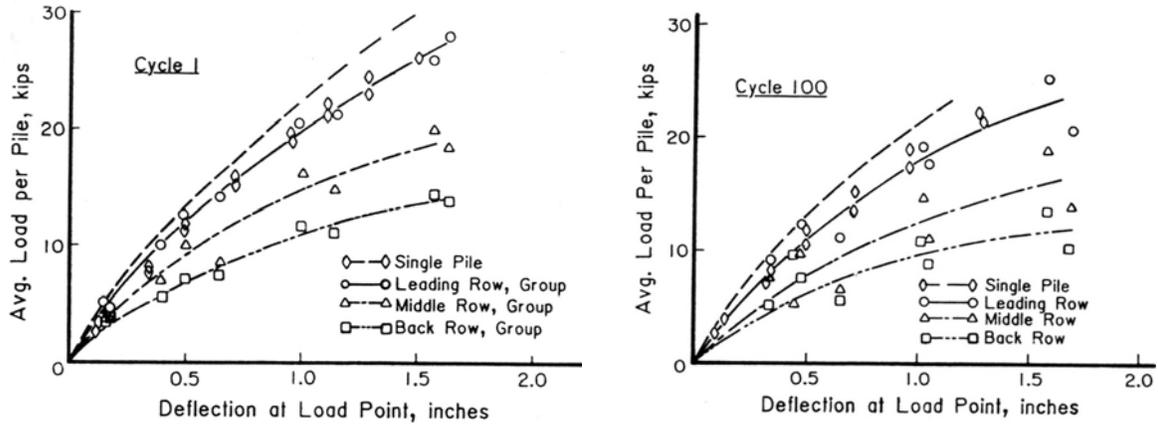


Figura 6.21 Carga vs desplazamiento en pilote aislado y grupo de pilotes por fila (brown et al, 1988)

La distribución de momentos flexionantes máximos es, en términos generales, muy similar a la vista en arcilla. El momento máximo se da en los pilotes frontales a una profundidad alrededor de 5 D; en los pilotes de la fila media el momento máximo es menor que el de los pilotes frontales y a una profundidad mayor; los pilotes traseros tienen un momento máximo aun menor y a mayor profundidad. Sin embargo, el momento máximo de un pilote aislado es prácticamente el mismo que el de los pilotes frontales, cosa que no ocurre en arcilla. Figura 6.22.

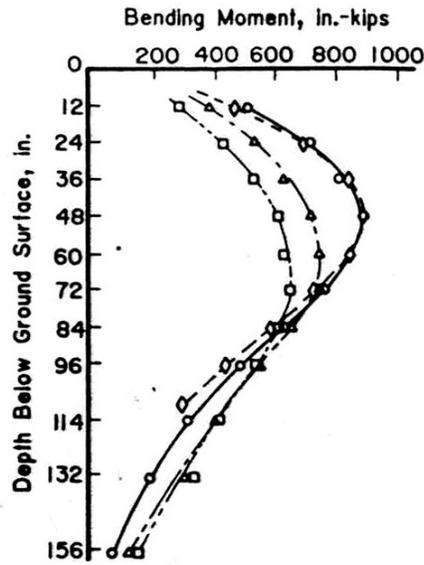


Figura 6.22 Momento flexionante vs profundidad en pilote aislado y grupos de pilotes por fila (Brown et al, 1988)

La resistencia del suelo es notablemente reducida en las filas traseras debido a la influencia de los pilotes frontales. La resistencia del suelo de los pilotes frontales fue reducida ligeramente debajo de la del pilote aislado.

Brown *et al* (1987) consideran que el mecanismo que produce el efecto de grupo, es decir, la disminución de la eficiencia del grupo de pilotes respecto a un pilote aislado y la distribución de cargas y momentos en función de la posición dentro del grupo, está relacionado con la modificación de la zona de cortante y de los esfuerzos efectivos alrededor de los pilotes individuales, provocado por los pilotes circundantes, y produce una reducción de la resistencia al cortante. Esta reducción en el suelo de los pilotes traseros es el factor primario en la disminución de la eficiencia de los grupos de pilotes.

6.3.3 En arcillas y limos blandos

Pruebas de carga lateral estática en grupos de pilotes a escala real hincados en arcillas y limos de consistencia blanda fueron llevadas a cabo por Rollins *et al* (1998). Los resultados que obtuvieron fueron en general consistentes con los resultados de Brown *et al* (1987 y 1988).

El equipo de Rollins descubrió que a pequeños desplazamientos la carga promedio soportada por los pilotes del grupo fue similar a la de un pilote aislado. A niveles de desplazamiento mayores la carga promedio del grupo de pilotes fue notablemente menor que la del pilote aislado. En la figura 6.23 se observa también que para una misma carga promedio, el desplazamiento del grupo de pilotes fue de entre 2 y 2.5 veces el desplazamiento del pilote aislado.

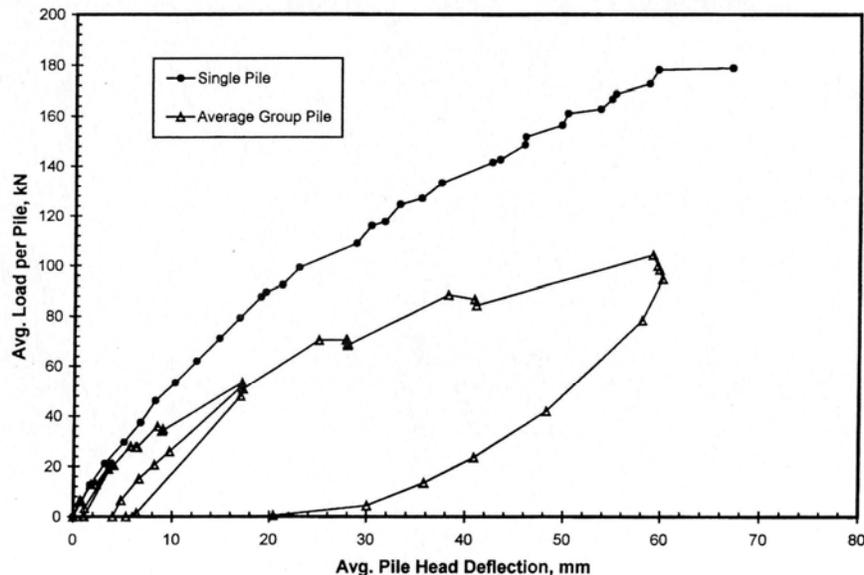


Figura 6.23 Carga vs desplazamiento en pilote aislado y grupo de pilotes (Rollins, 1998)

La figura 6.24 muestra la carga promedio por pilote contra el desplazamiento para cada fila de pilotes. Encontraron que la distribución de cargas depende de la posición de la fila en el grupo, soportando de más a menos carga la fila frontal, trasera y media.

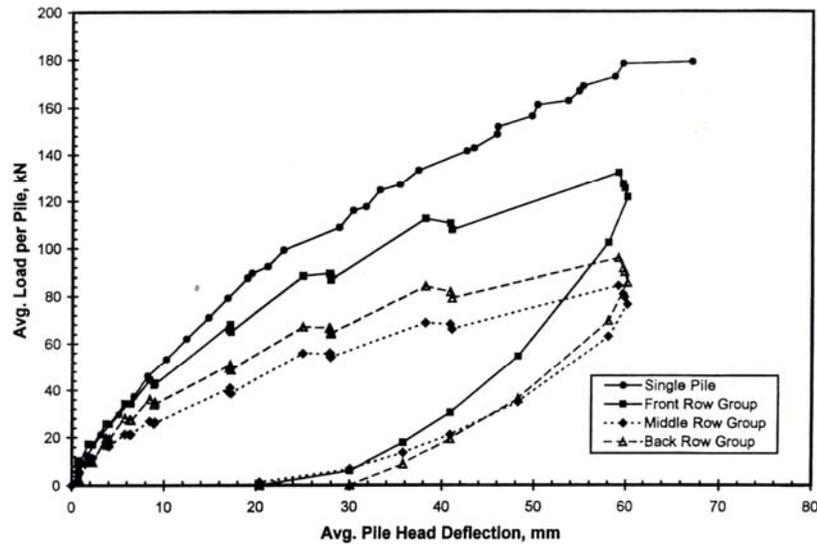


Figura 6.24 carga promedio vs desplazamiento por fila comparado con pilote aislado (Rollins, 1998)

La razón de la carga horizontal promedio de un pilote en cada fila entre la carga soportada por un pilote aislado varía dependiendo del desplazamiento, pero para desplazamientos grandes (mayores que 20 mm) se vuelve casi constante: para las filas frontal, media y trasera la razón es, respectivamente, 80%, 50% y 60%. Esto último difiere de lo encontrado por Brown *et al.* (1987 y 1988), en cuyas pruebas la fila trasera soportaba la menor carga promedio.

Los momentos flexionantes máximos se observaron en la fila frontal a una profundidad de 6.5 D; en la fila media se presentaron los menores momentos máximos de las filas a 11 D de profundidad y en la fila trasera los momentos fueron ligeramente mayores a los de la fila media y a una profundidad de 9.5 D. El momento flexionante promedio del grupo fue notablemente mayor (más de 50%) que el del pilote aislado. Figura 6.25.

Ilyas *et al.* (2004) obtuvieron de una prueba de carga lateral realizada en centrífuga que el efecto de grupo aumenta con el número de pilotes del grupo y disminuye con la separación entre pilotes. El efecto de grupo también es más importante en arcilla normalmente consolidada que en preconsolidada. Figura 6.26 y 6.27.

Ilyas *et al.* definen la eficiencia del grupo η como el promedio de carga lateral por pilote dividido entre la carga lateral de un pilote aislado para un mismo desplazamiento en la cabeza. La figura 6.28 muestra la gráfica de número de pilotes del grupo vs. eficiencia del grupo. Con desplazamiento de 0.25 D y grupos de 9 nueve pilotes, encontraron una

eficiencia de 67% para separación entre pilotes de 3 D, mientras que para separación de 5D la eficiencia es de 95%, notablemente mayor. Para desplazamiento de 0.5D la eficiencia baja a menos de 50%. Se puede observar que la eficiencia disminuye en forma importante para grupos grandes de pilotes y al parecer se mantiene estable para grupos mayores de 9 pilotes.

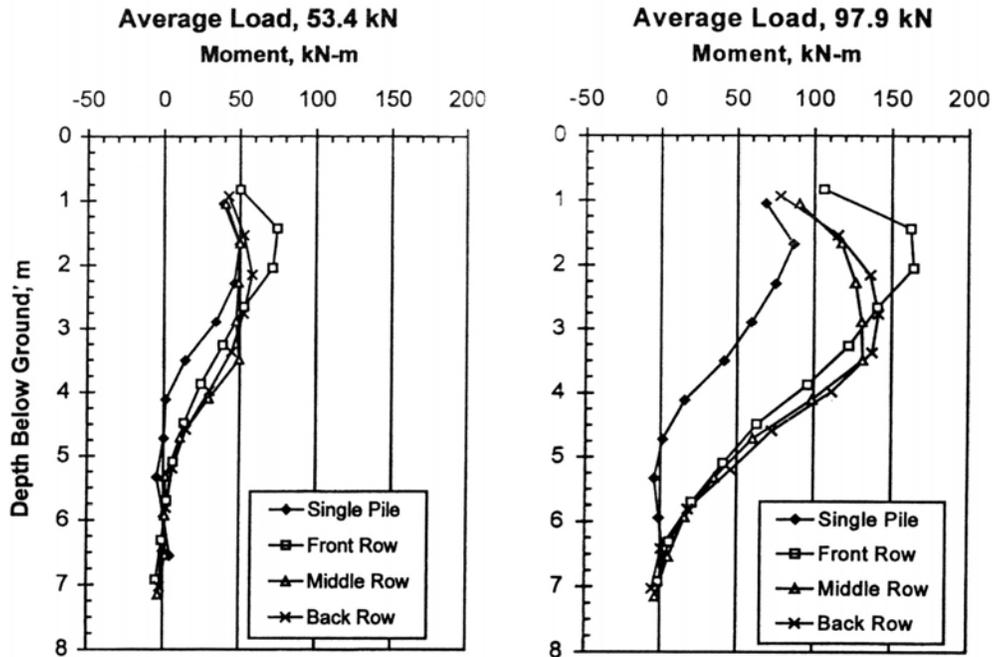


Figura 6.25 Comparación de momento flexionante vs profundidad entre pilote aislado y grupo de pilotes (Rollins, 1998)

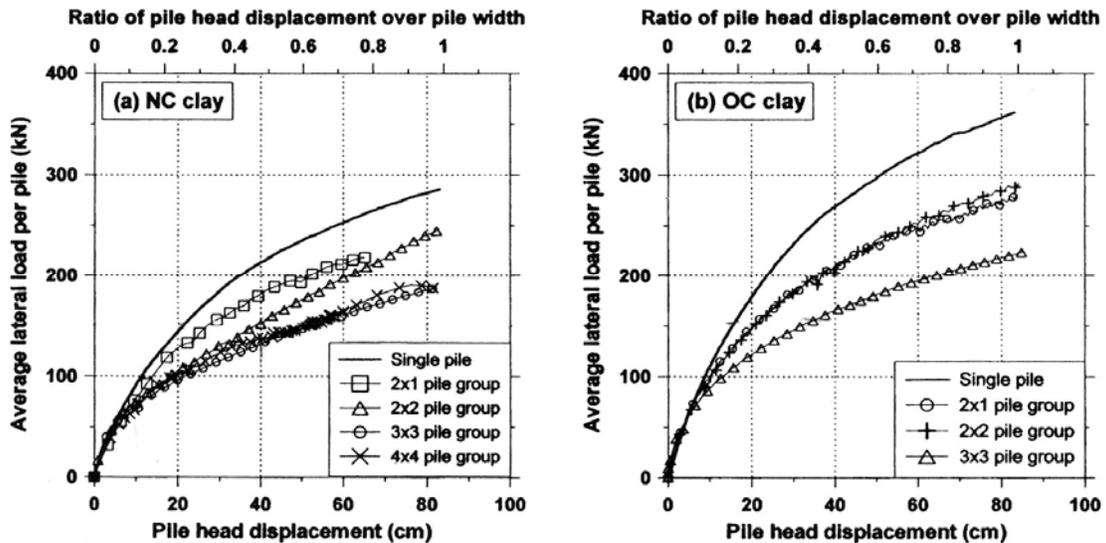


Figura 6.26 Carga vs desplazamiento para grupos de pilotes de diferente tamaño con separación de 3D (Ylias *et al*, 2004)

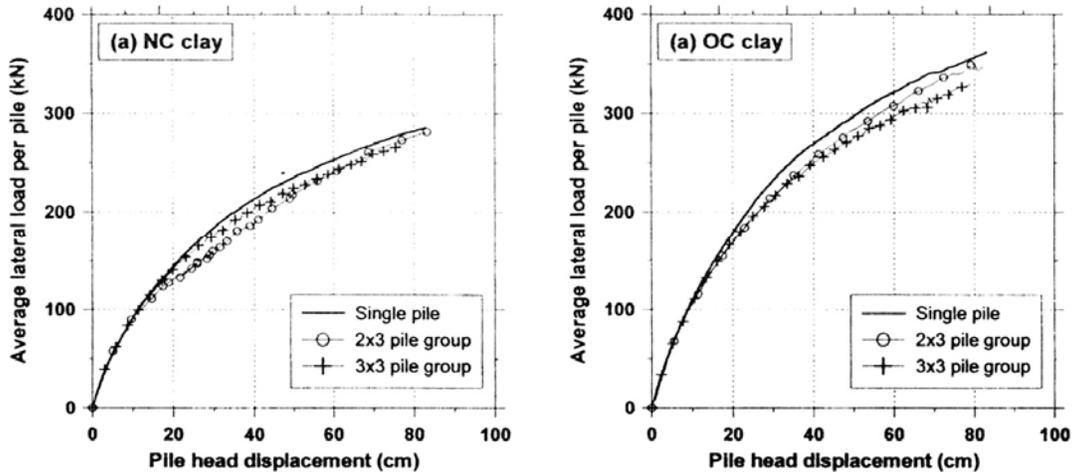


Figura 6.27 Carga lateral vs desplazamiento del pilote para grupos de pilotes con separación de 5D (Ylias *et al*, 2004)

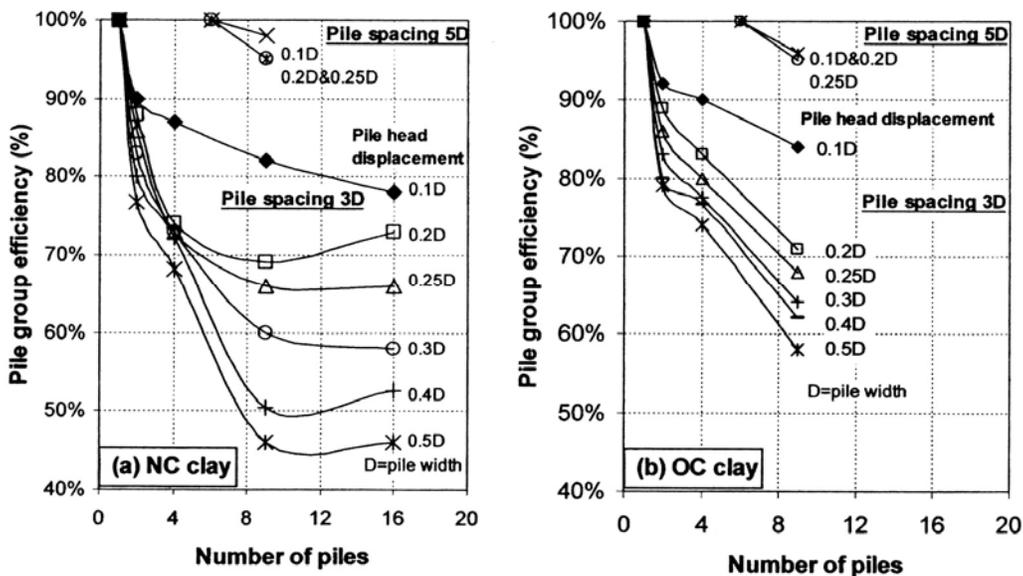


Figura 6.28 Eficiencia del grupo de pilotes para varios desplazamientos y espaciamientos (Ylias *et al*, 2004)

La distribución de momentos dentro del grupo concuerda con los resultados de Rollins, pero difiere en forma importante en la comparación del grupo con el pilote aislado. Ilyas reporta un momento flexionante en el pilote aislado marcadamente mayor que de los grupos, mientras que Brown y Rollins encuentran que el momento en el pilote aislado es igual o incluso menor que el promedio del grupo.

Ilyas también escribió que la distribución de cargas y momentos dentro del grupo depende de la fila que albergue el pilote, sin embargo, considera que es erróneo calcular una carga o momento promedio para las filas medias, pues de acuerdo con sus investigaciones, los

pilotes externos soportan una proporción de carga mayor que los pilotes internos de la misma fila. Para las filas frontal y trasera dice que el promedio es adecuado. Los demás investigadores consultados no encontraron una tendencia clara en la distribución de cargas dentro de una misma fila y consideran que el promedio es una medida satisfactoria.

6.4 Multiplicadores MP para curvas p - y de grupos de pilotes.

Se ha encontrado experimentalmente, Brown (1987, 1988) y Rollins (1998), entre otros, que los pilotes pertenecientes a filas traseras y medias reciben un menor soporte de parte del suelo. Como consecuencia, los momentos flexionantes y la carga generada en estos pilotes son menores que en los pilotes de la fila frontal.

Brown et al (1988) explican que delante de cada pilote cargado se forma una cuña en la cual hay un incremento de esfuerzos cortantes. Enfrente de la fila las cuñas de pilotes adyacentes se traslapan y forman una zona de mayor concentración de esfuerzos cortantes que provoca una disminución de la resistencia del suelo. Por esta razón, los pilotes de la fila delantera tienen una capacidad de carga menor que la de un pilote aislado.

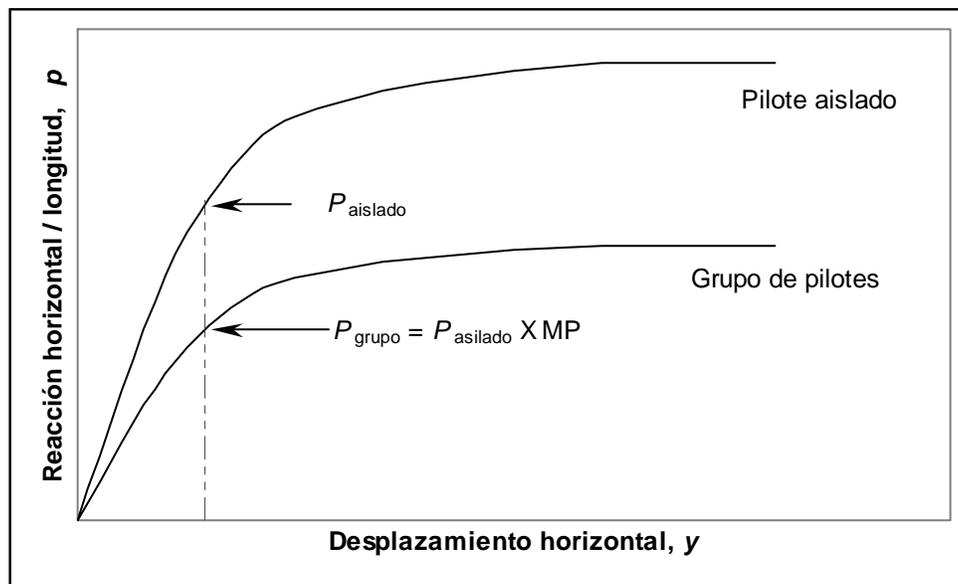


Figura 6.29 Esquema conceptual de los multiplicadores MP para reducir las curvas p - y de pilotes aislados y obtener curvas p - y de pilotes de grupo, Rollins (1998).

Por otra parte, los pilotes de la fila delantera empujan el suelo que proporciona la resistencia y dejan a los pilotes de las filas traseras con menos soporte. A esta disminución del soporte para las filas traseras se suma la disminución de la resistencia del suelo por los

traslapes de sus propias cuñas de esfuerzos. El resultado es que la resistencia del suelo en las filas traseras es todavía más baja que en las filas delanteras.

Para tomar en cuenta esta disminución de la resistencia del suelo en las filas del grupo de pilotes, Brown et al (1988) propusieron multiplicar los valores de p de una curva p - y de pilote aislado por un factor MP (multiplicador de $p = MP$). Este factor depende de la separación adimensional S centro a centro de los pilotes medida en dirección paralela a la carga, de la fila en que se encuentre el pilote analizado y del nivel de carga aplicado. Esto último no se ha logrado descifrar con la claridad suficiente, por lo que las gráficas de multiplicadores MP se basan sólo en la separación y posición de la fila.

Reese y Wang (1996) citados por Snyder(2004), Rollins et al (1998), AASHTO (2000) citado por Snyder(2004) y Snyder(2004), entre otros han propuesto graficas para determinar el multiplicador MP. Las diferencias entre gráficas son muy grandes, lo que indica que faltan más pruebas de carga a escala real que permitan perfeccionarlas.

Rollins se basó en pruebas de carga a escala real de un grupo de pilotes de 9 elementos, acomodados en tres filas de tres pilotes cada una. Para elaborar su propuesta, Rollins introdujo información de suelo y pilote, así como un valor inicial de los multiplicadores MP en el programa GROUP, luego, los resultados se compararon con las mediciones experimentales. Después, en un proceso iterativo, ajustaron los multiplicadores para que las diferencias entre lo calculado y lo medido fuera mínima, figura 6.30.

Snyder propuso unos multiplicadores MP a partir de pruebas de carga realizadas sobre un grupo de 15 pilotes, repartidos en 5 filas. El procedimiento para calcular los MP fue idéntico al usado por Rollins, figura 6.30.

De acuerdo con las pruebas de carga realizadas por Rollins y Snyder, la propuesta de AASHTO es demasiado conservadora pues le resta mucha capacidad de soporte al suelo; lo contrario sucede con la propuesta de Reese y Wang, figura 6.31.

Un pilote aislado tiene una curva p - y “completa” o con multiplicador $MP=1$, mientras que un pilote de grupo tiene una curva p - y “reducida” o con multiplicador $MP<1$. Por otro lado, cuando la separación adimensional S entre pilotes aumenta, la interacción entre ellos disminuye, lo que significa que su comportamiento va cambiando de un pilote de grupo a uno aislado. Este comportamiento, que se puede entender intuitivamente, se ve reflejado en las graficas de los multiplicadores.

De la figura 6.30 podemos concluir que los multiplicadores de Rollins marcan la separación de 6 diámetros como límite para la interacción entre pilotes, independientemente de la fila, y a una distancia mayor se comportan como pilotes aislados; los multiplicadores de Snyder si hacen una diferenciación entre filas, pero la interacción desaparece cuando hay una distancia entre pilotes en el rango de 7 a 8 diámetros.

La figura 6.31 nos dice que según Reese y Wang a una distancia mayor que 3.5 diámetros los pilotes de la fila delantera se comportan como aislados, y para la segunda y siguientes filas es necesaria una distancia mayor de 5.5 diámetros. El criterio de AASHTO es el más

conservador y considera que el efecto de grupo se mantiene hasta separaciones de 8 diámetros.

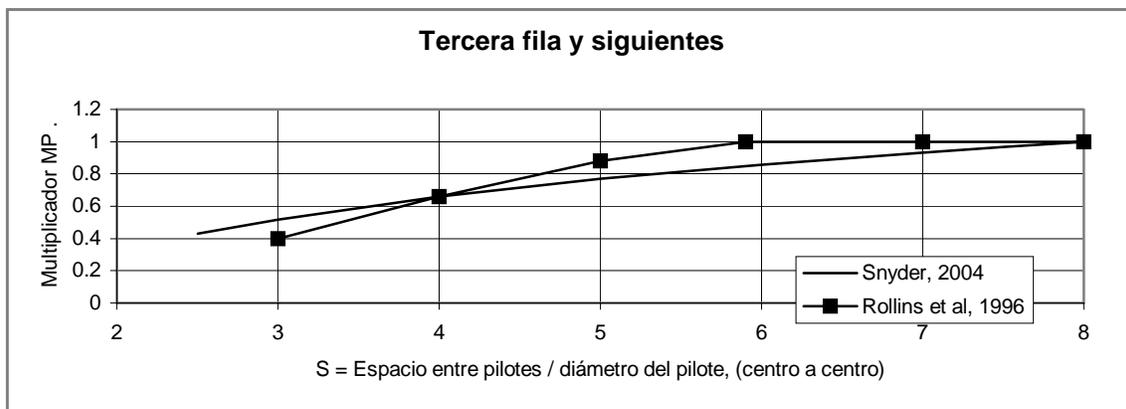
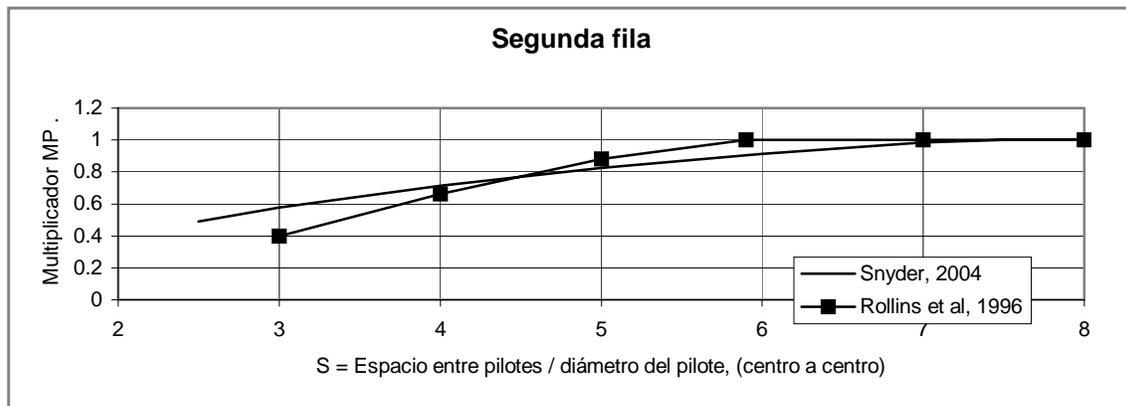
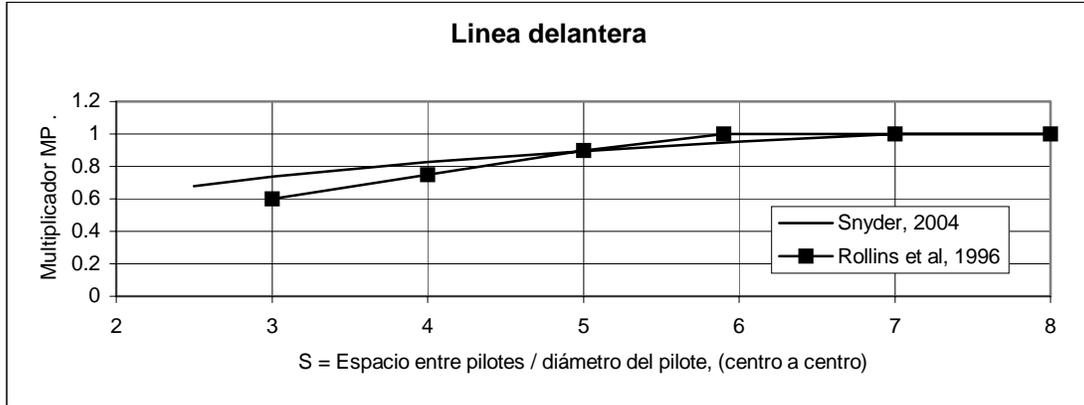


Figura 6.30 Multiplicadores MP propuestos por Rollins et al (1996) y Snyder(2004)

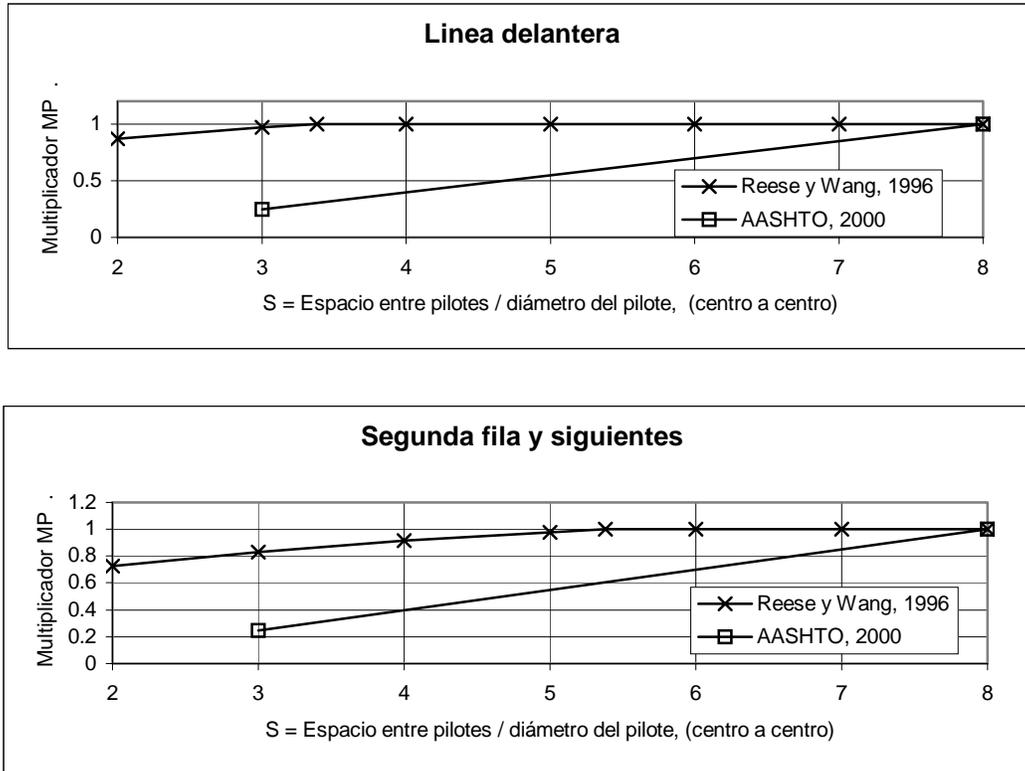


Figura 6.31 Multiplicadores MP propuestos por Reese y Wang (1996) citados por Snyder(2004) y AASHTO (2000) citado por Snyder(2004).

El análisis se realiza considerando que los pilotes de una misma fila tienen el mismo comportamiento. Esto no es estrictamente cierto pues Rollins et al (1998) y Brown (1987 y 1988) han encontrado diferencias entre las respuestas de pilotes externos e internos de la misma fila, pero sin un patrón de comportamiento, por lo que consideran adecuado analizar el comportamiento promedio de la fila.

Sin embargo, Ilyas et al (2004) aseguran que los pilotes externos si soportan una mayor proporción de carga que los internos. Este comportamiento fue descubierto en un modelo de grupo de pilotes y convendría confirmarlo y estudiarlo en pruebas a escala real antes de aplicarlo al análisis.

6.5 Observaciones al comportamiento teórico de pilotes bajo carga lateral en suelo elástico lineal.

Todas las ecuaciones que hacen la consideración del suelo elástico lineal tienen como característica que el desplazamiento, el giro y el momento son funciones lineales de la carga lateral y el momento flexionante aplicado en la cabeza del pilote.

Por ejemplo, la ecuación 6.8a, para calcular el desplazamiento lateral en la cabeza de un pilote aislado:

$$u = 0.54 \frac{H}{m^* r_0^2} \left(\frac{E_p}{m^* r_0} \right)^{-3} + 0.60 \frac{M}{m^* r_0^3} \left(\frac{E_p}{m^* r_0} \right)^{-5} \quad 6.8a$$

en donde $m^* = m(1 + 3\nu/4)$ y m es el parámetro que da la razón de incremento del módulo de rigidez al cortante con la profundidad; r_0 es el radio del pilote; E_p es el módulo de Young efectivo del pilote. Ninguno de los parámetros anteriores depende de la carga lateral H , o del momento flexionante M aplicados. Luego, la ecuación 6.8a puede reducirse a una forma más simple expresada en 6.8A, en donde C_1 y C_2 son constantes:

$$u = C_1 H + C_2 M \quad 6.8A$$

Si aplicamos únicamente carga lateral (como sucede en varias pruebas de carga a escala real) y graficamos desplazamiento u vs carga lateral H obtendremos una línea recta que parte del origen. Como ya se vio más arriba, los resultados experimentales indican que desplazamientos y momentos tienen un comportamiento lineal sólo cuando las cargas son bajas y después se vuelve netamente no lineal. Gráficas de resultados del tipo lineal fueron calculadas con el programa de Bowles (método de la viga apoyada sobre un medio elástico) y el programa TEST (método de elementos finitos). En el capítulo 7 se discuten más ampliamente las desventajas de este tipo de resultados.

En las ecuaciones usadas para el análisis de grupos de pilotes Poulos hace las mismas consideraciones para el suelo y emplea el principio de superposición de efectos en los factores de interacción pilote-suelo-pilote, el cual es propio de materiales elástico-lineales, lo cual lleva nuevamente a resultados lineales.

También menciona que el desplazamiento es afectado considerablemente por la interacción pero la distribución de presiones y momentos permanece virtualmente inalterada en la interacción entre dos pilotes. De la solución teórica, Poulos extrae el comportamiento de grupos cuadrados de pilotes (usó grupos de 9 y 16 elementos como ejemplo) con el mismo desplazamiento en el cabezal e indica que los pilotes de las cuatro esquinas son los que soportan las mayores cargas, le siguen los pilotes centrales de las filas delantera y trasera, luego los pilotes laterales y por último los pilotes que están dentro del grupo.

Esto difiere significativamente de lo encontrado en las pruebas de carga donde, en cuanto a distribución de cargas entre pilotes se refiere, el comportamiento está en función de la fila que albergue al pilote. La diferencia más importante en cuanto a magnitud es que los pilotes de la fila trasera, incluyendo los de esquina, sin duda soportan menos cargas que los pilotes de esquina de la fila delantera.

6.6 Influencia recíproca entre carga axial y carga lateral.

Anagnostopoulos y Georgiadis (1993) realizaron experimentos con modelos de pilotes (19 mm de diámetro exterior y 500 mm de longitud, hincados en arcilla reconstituida) y sometidos a cargas horizontales y verticales. Los pilotes fueron instrumentados con *strain-gauges* y los desplazamientos de cabeza fueron medidos con transductores de desplazamiento. Realizaron seis pruebas variando las secuencias de carga.

Las conclusiones a las que llegaron fueron:

- a) La carga lateral incrementa significativamente el desplazamiento axial del pilote. El incremento depende del valor de la carga lateral y del nivel de carga axial.
- b) La carga lateral provoca una pequeña reducción en el esfuerzo axial del pilote cerca de la superficie y aparentemente tiene un efecto pequeño sobre la capacidad de carga axial. La carga horizontal sola no provoca movimiento vertical
- c) El efecto de la carga axial sobre la respuesta lateral del pilote es muy limitada.

Respecto al inciso b), Anagnostopoulos menciona que el incremento del asentamiento vertical no puede atribuirse al cambio de esfuerzos axiales, sino que, al parecer, se debe a la creación de puntos plásticos en el suelo causados por la acción conjunta de las cargas horizontal y vertical.

Anagnostopoulos también menciona que Shahrour y Meimon (1991), con un análisis de elementos finitos 3D, así como Sastry y Meyerhof (1990), a través de modelos de pilotes, encontraron un comportamiento similar al reportado en el inciso c).

Capítulo 7

Comparación de Métodos

En este capítulo se revisan los resultados obtenidos con cada uno de los métodos empleados en esta tesis y se comparan con los obtenidos de pruebas de carga a escala real. Se utilizan gráficas de momento, desplazamiento y cortante vs profundidad, así como desplazamiento y momento vs carga lateral. En estas gráficas se pueden comparar los resultados y observar la exactitud de cada método.

7.1 Pilotes aislados

En la gran mayoría de casos, si no es que en todos, lo que interesa es analizar un grupo de pilotes y no un pilote aislado. Sin embargo, el caso de un pilote aislado ha sido estudiado más a fondo, tanto teórica como experimentalmente, y sirve de base para el análisis del grupo.

7.1.1 Ensayo de Matlock, 1970.

Se aplicaron el programa de Bowles (basado en el método de la viga apoyada sobre medio elástico), el método de curvas $p-y$ y el método de elementos finitos al pilote ensayado por Matlock en 1970 para comparar la exactitud de los métodos. Se eligió este caso porque estaban disponibles los perfiles de momento vs profundidad, suficientes datos del suelo y pilote, y porque este ensayo fue la base del método para calcular curvas $p-y$ de suelos arcillosos blandos sumergidos.

Los datos del pilote y suelo son los siguientes:

La prueba se realizó en suelos del sitio Sabine, Texas, E.U. El suelo de Sabine es arcilla de depósitos marinos, ligeramente sobreconsolidada, y con resistencia al esfuerzo cortante, medida con veleta, de alrededor de 300 libras por pie cuadrado (14.36 kPa) en la parte superior, la más significativa ante cargas laterales. La superficie del suelo se mantuvo inundada para simular un pilote instalado fuera de costa. Se supuso un peso específico uniforme en toda la profundidad de $0.043353 \text{ lbf/in}^3$ (11.768 kN/m^3).

Emplearon un pilote de tubo de acero con las siguientes características:

Diámetro $D = 12.75$ pulgadas (0.324 m)
Pared del tubo $W = 0.5$ pulgadas (1.27 cm)
Longitud $L = 504$ pulgadas (12.8 m)
Módulo de Young $E = 29025532$ psi (200.12 GPa)
Área transversal $A = 19.2417$ pulg² ($1.2414 \times 10^{-2} \text{ m}^2$)

Momento de inercia $I = 361.544 \text{ pulg}^4 (1.505 \times 10^{-4} \text{ m}^4)$
 Momento polar de inercia $J = 723.088 \text{ pulg}^4 (3.0097 \times 10^{-4} \text{ m}^4)$

Matlock obtuvo de los estudios del sitio Sabine valores de los parámetros para construir las curvas p - y , vistos en el capítulo 4: $J=0.5$; $\epsilon_{50}=0.007$

Matlock proporciona también la reacción última del suelo P_u para varias profundidades (columna C de la tabla 7.1) Con base en los datos anteriores, las ecuaciones 4.8 y 4.9, se calculó el perfil de resistencia al esfuerzo cortante, mostrado en la tabla 7.1. Hasta aquí los datos básicos proporcionados por Matlock.

Tabla 7.1 Perfil de resistencia al esfuerzo cortante del sitio Sabine

A	B	C	D	E
Profundidad (m)	Profundidad (in)	P_u (lbf/in)	S_u (kPa)	S_u (psi)
0.000	0		14.36	2.083
0.610	24	103	13.79	2.00
1.219	48	120	12.82	1.86
1.829	72	163	14.48	2.10
2.438	96	223	17.1	2.48
3.048	120	238	15.93	2.31
10.973	432	446	26.8	3.887
15.000	590.5	446	26.8	3.887

7.1.1.1 Análisis con el método de curvas p - y .

El programa COM624P-Laterally loaded pile analysis program for the microcomputer, versión 2.0, sirvió para hacer los análisis con el método de las curvas p - y . Dicho programa fue elaborado por Shih-Tower Wang y Lymon C. Reese en 1989 basándose en la solución de la ecuación diferencial de una viga sobre un medio elástico; fue utilizado en esa época por el Departamento Estadounidense del Transporte.

COM624P versión 2.0 se puede descargar desde la dirección <http://www.fhwa.dot.gov/bridge/geosoft.htm>. El manual está disponible en tres partes en las siguientes direcciones: <http://www.civiltechsoftware.com/downloads/com624A.pdf>
<http://www.civiltechsoftware.com/downloads/com624B.pdf>
<http://www.civiltechsoftware.com/downloads/com624C.pdf>.

Actualmente se utilizan otros programas más amigables y sofisticados como LPILE y GROUP, sin embargo, la base conceptual es la misma y proporcionan resultados similares. LPILE plus 5.0 y GROUP 6.0 son un producto de Ensoft Inc. y se pueden comprar a través de la página <http://www.ensoftinc.com/>

COM624P es un programa que permite introducir manualmente las curvas p - y o bien suministrarle la información necesaria para que internamente calcule las curvas p - y de acuerdo con los métodos propuestos por Matlock (1970), Reese et al (1975), Reese y Welch (1975), o Reese et al (1974), vistos en el capítulo 4. Los resultados que proporciona son el desplazamiento, momento flexionante, cortante y reacción del suelo vs profundidad.

Ya en el capítulo 4 se han calculado las curvas p - y para el ensaye de Matlock. Abajo se presentan nuevamente las curvas p - y obtenidas.

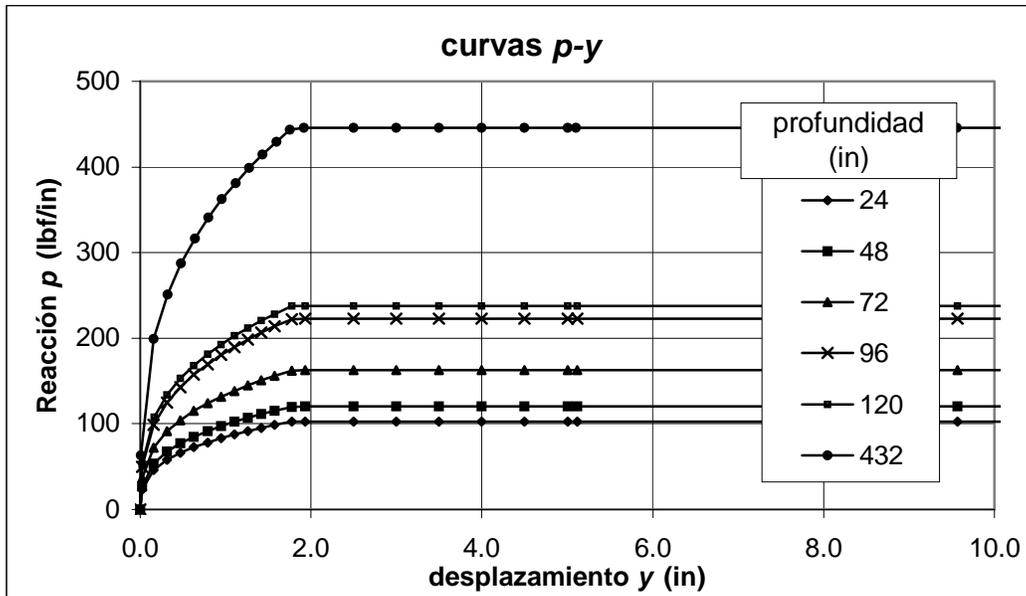


Figura 7.1 Curvas calculadas p - y para el pilote de Matlock, 1970.

Para realizar el análisis se introdujeron en el programa las curvas p - y , calculadas y graficadas en la figura 7.1, junto con los datos del pilote y cargas laterales. Al igual que en la prueba de carga a escala real, no se aplicaron cargas verticales ni momentos flexionantes. La condición de frontera en la cabeza del pilote fue de libertad para desplazamiento y giros.

La gráfica de momento vs profundidad calculada por el programa se dibujó junto con las medidas experimentales, figura 7.2. Como puede observarse, el programa proporciona resultados bastante satisfactorios. Con una carga lateral de 4 kips (17.79 kN) la diferencia entre momentos máximos calculados y experimentales es de 9%, mientras que para la carga de 18 kips (80.07kN) la diferencia es de apenas 3.7 %.

Sin embargo, no debe olvidarse que el método de las curvas p - y se está aplicando precisamente a la prueba de carga que fue la base del procedimiento de cálculo de las curvas p - y de suelos arcillosos blandos. Por lo tanto, era de esperarse que lo calculado concuerde casi perfectamente con lo experimental.

En la figura 7.3 se dibujaron las curvas de desplazamiento lateral vs profundidad. Desafortunadamente Matlock no presentó más gráficas de resultados experimentales y no podemos hacer la comparación con lo calculado.

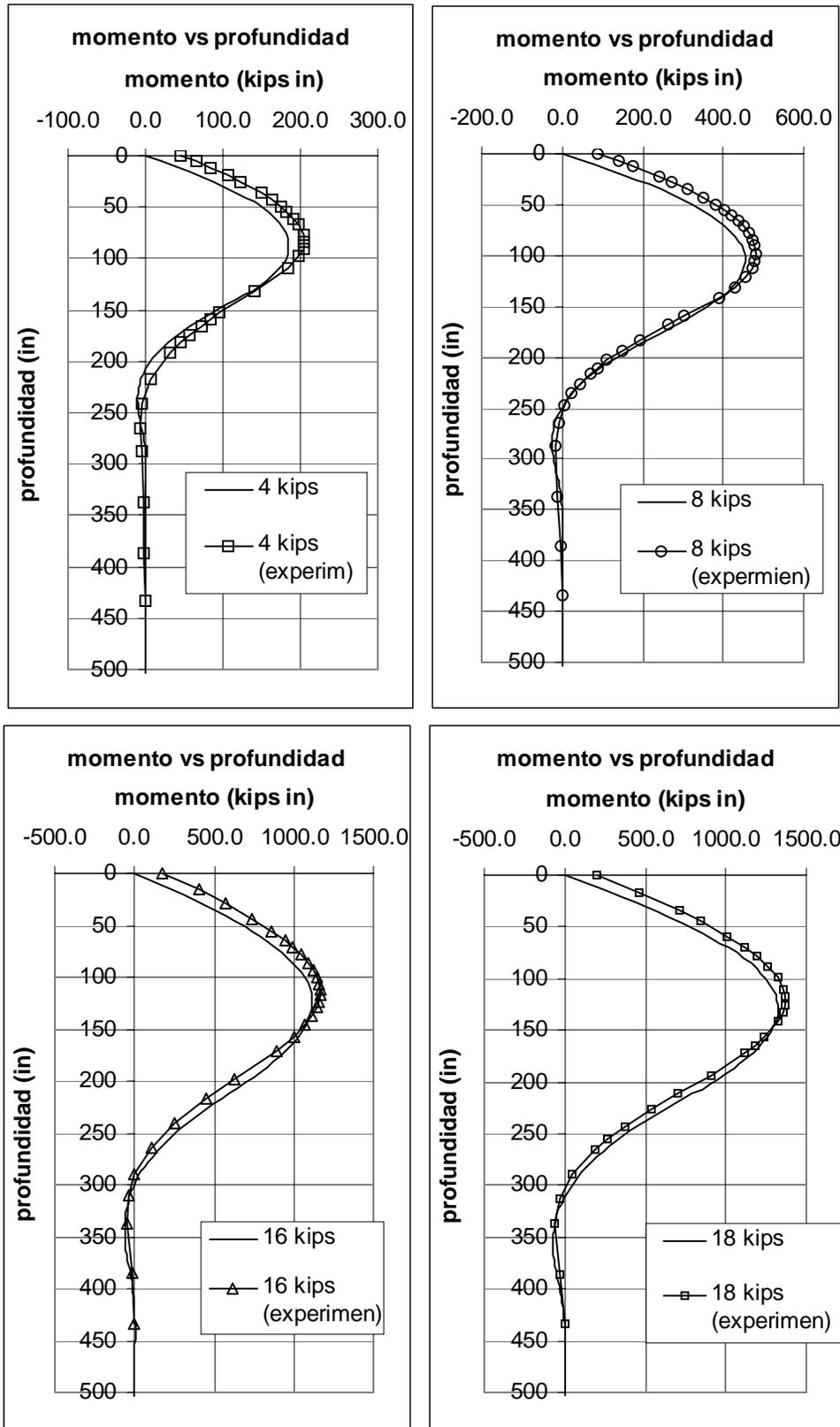


Figura 7.2 Comparación de curvas Momento vs Profundidad, experimentales y calculadas del ensaye de Matlock, 1970.

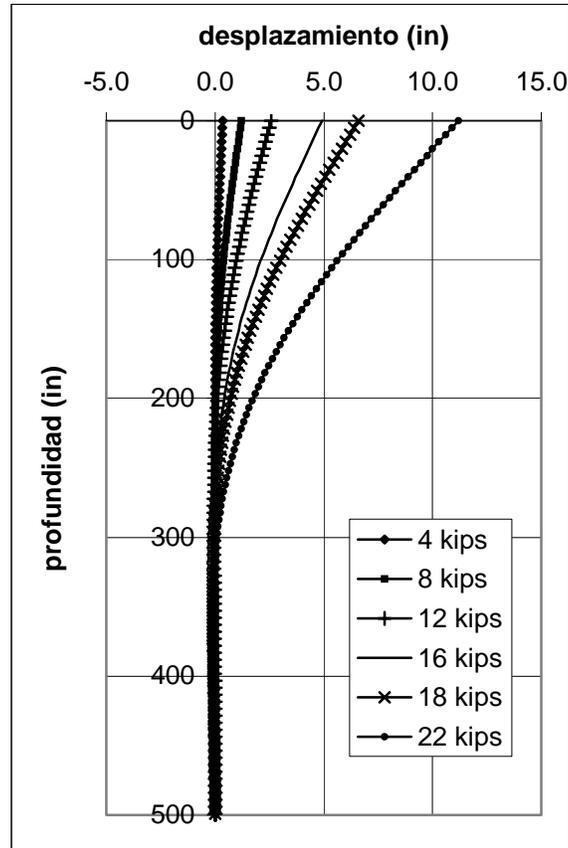


Figura 7.3 Curvas calculadas con COM624P desplazamiento vs profundidad para diferentes niveles de carga.

7.1.1.2 Análisis con MEF– TEST

El análisis del pilote aislado (de la prueba experimental de Matlock, 1970) con el Método de Elementos Finitos se realizó a través del programa TEST. En el capítulo 5 se ha mencionado que las variables que más influyen en los resultados son E_H , ν y γ , así como la forma propuesta para calcular E_H en aquellos casos en que no se disponga de mediciones de campo. Se menciona que se utilizaron unidades kgf-cm. El programa TEST fue alimentado con los datos del suelo mostrado tabla 7.2.

El módulo de elasticidad lateral modificado E_H' fue calculado según el procedimiento antes propuesto. La relación de Poisson de suelos arcillosos saturados varía de 0.45 a 0.5 (Bowles, 1996); se eligió un valor de 0.45. Se consideró un peso específico constante de 0.0012 kgf/cm^3 . Los valores de S_u , R_T y $1/m_v$ pertenecen al suelo superficial, aunque, como ya se mencionó, dichos valores no tienen ninguna influencia en el análisis y sólo se utilizaron como requisito para que funcionara el programa.

Tabla 7.2 Datos del suelo de la prueba de Matlock, 1970

Profundidad (cm)	E_H' (kgf/cm ²)	ν	γ (kgf/cm ³)	S_u (kgf/cm ²)	RT (kgf/cm ²)	$1/m_\nu$ (kgf/cm ²)
0	1.210	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
50	2.417	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
100	2.790	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
150	3.426	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
200	4.401	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
250	5.500	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
300	5.808	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
350	6.128	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
400	6.450	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
450	6.772	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
550	7.416	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
650	8.060	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
750	8.703	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
900	9.669	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5
1050	10.634	0.45	0.0012	0.141	0.1	16.5

Los datos del pilote tubular de acero ya han sido presentados más arriba y sólo se cambiaron las unidades a kgf y cm.

Módulo de Young, $E = 2.04 \times 10^6$ kgf/cm²

Relación de Poisson, $\nu = 0.3$

Peso específico, $\gamma = 0.00783$ kgf/cm³

Área transversal, $A = 124.14$ cm²

Momento polar de inercia, $J = 30097$ cm⁴

Momento de inercia $I_y = I_z = 15048$ cm⁴

La malla utilizada se muestra en la figura 7.4. A la izquierda de la figura se aprecian los elementos hexaedros del suelo y la estratificación para considerar el cambio de módulo de elasticidad lateral. A la derecha se observa el estrato que sirve de base del modelo y el propio pilote formado por 15 elementos viga o lineales.

Las condiciones de frontera se han explicado en el capítulo 5. Las cargas se aplicaron en la dirección X, a nivel de la superficie del suelo y tuvieron magnitudes de 907.2, 1814.3, 3628.7, 5443.1, 7257.5, 8164.7 y 9929.0 kgf (2, 4, 8, 12, 16, 18 y 22 kips respectivamente).

Los resultados de momento flexionante obtenidos con TEST se observan en la figura 7.5. Se puede apreciar que los momentos máximos calculados con TEST son mayores que los obtenidos con curvas p - y en el rango de carga de 2 a 8 kips; son casi iguales cuando la carga lateral ronda los 12 kips, y son menores cuando la carga es de 16 a 22 kips.

En la figura 7.6 se observa más claramente este comportamiento y además que TEST trabaja en forma lineal. La diferencia máxima encontrada entre TEST y el método de curvas p - y fue de 22.2% con carga lateral de 22 kips.

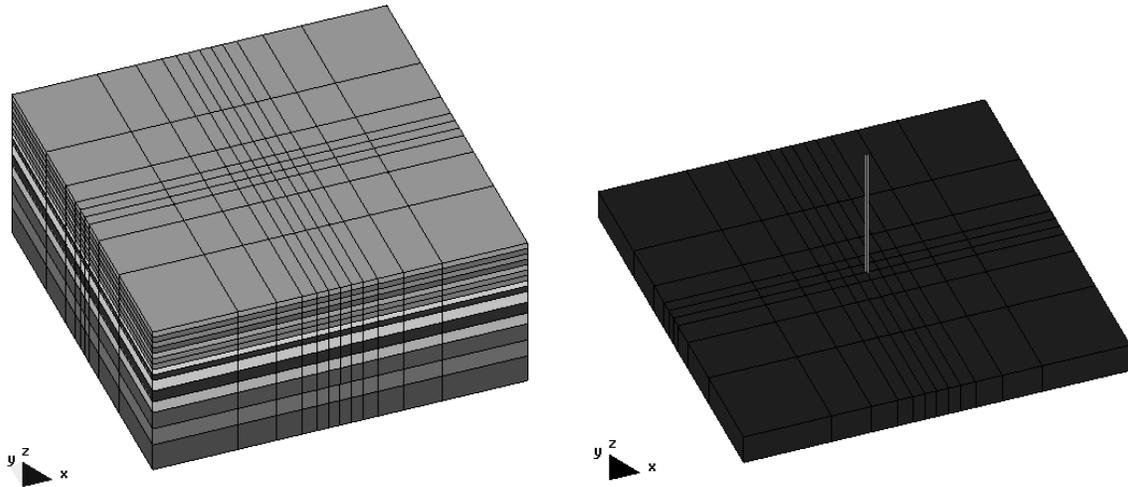


Figura 7.4 Malla empleada para analizar pilotes aislados del ensayo de Matlock.

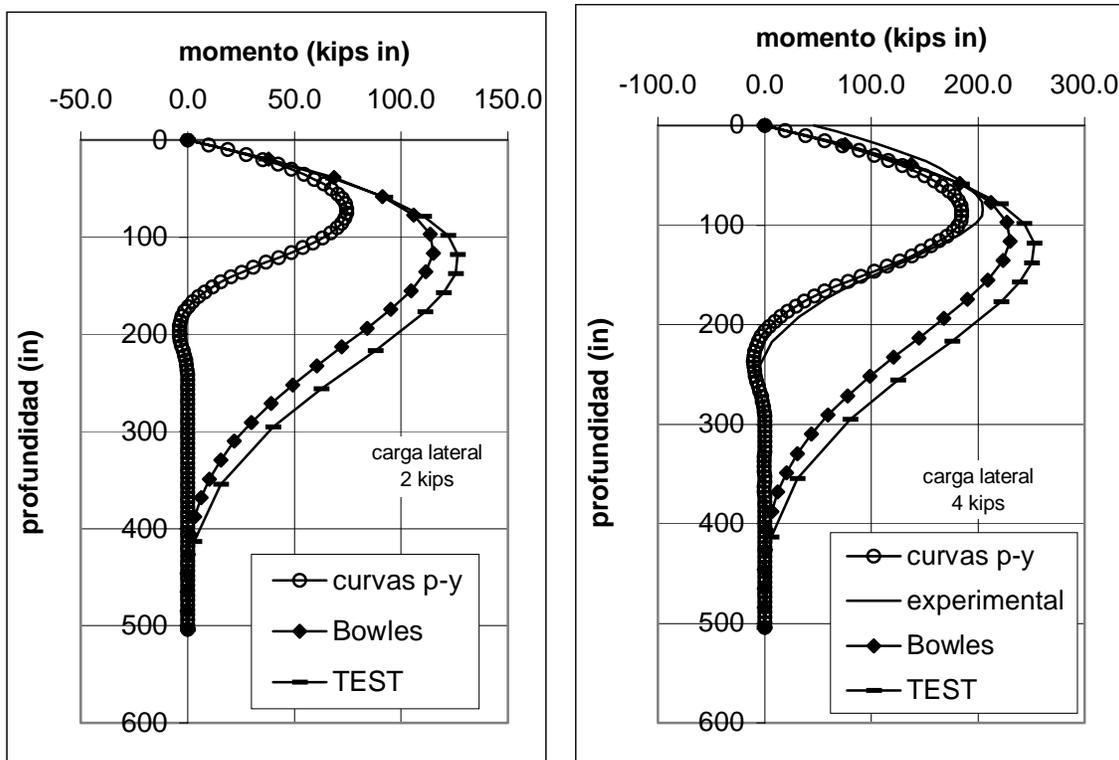


Figura 7.5 Curvas de momento flexionante vs profundidad, obtenidas con el método de curvas p - y , método de elementos finitos-TEST, programa de Bowles y experimentalmente.

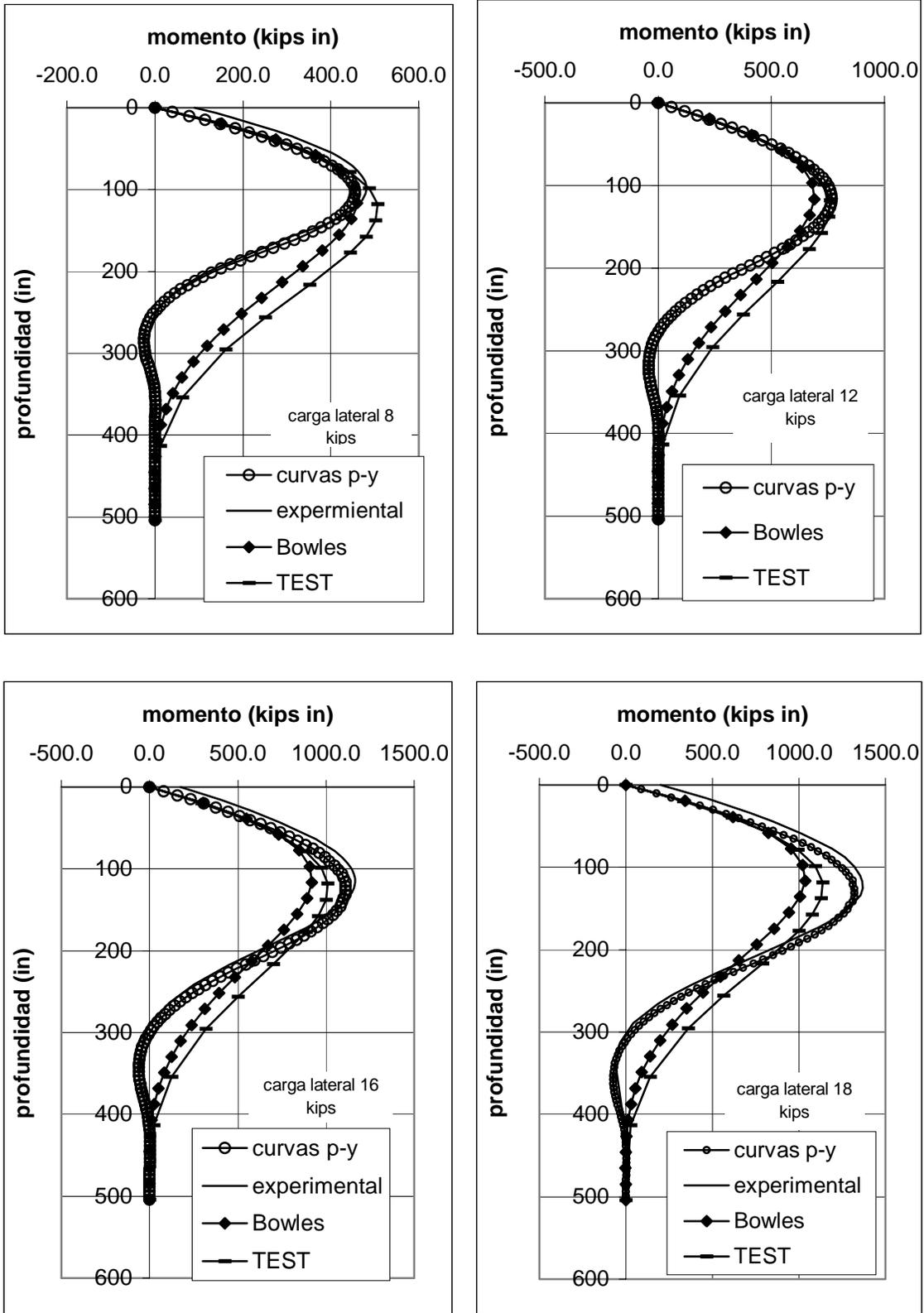


Figura 7.5 Continuación...

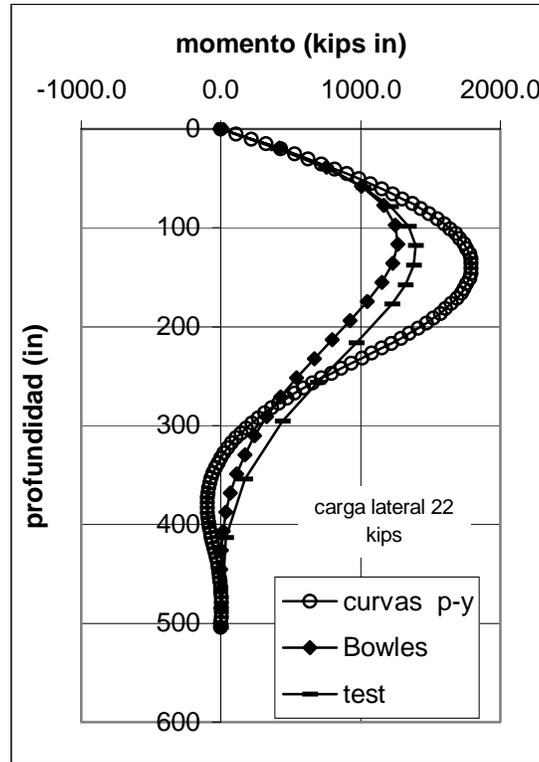


Figura 7.5 Continuación...

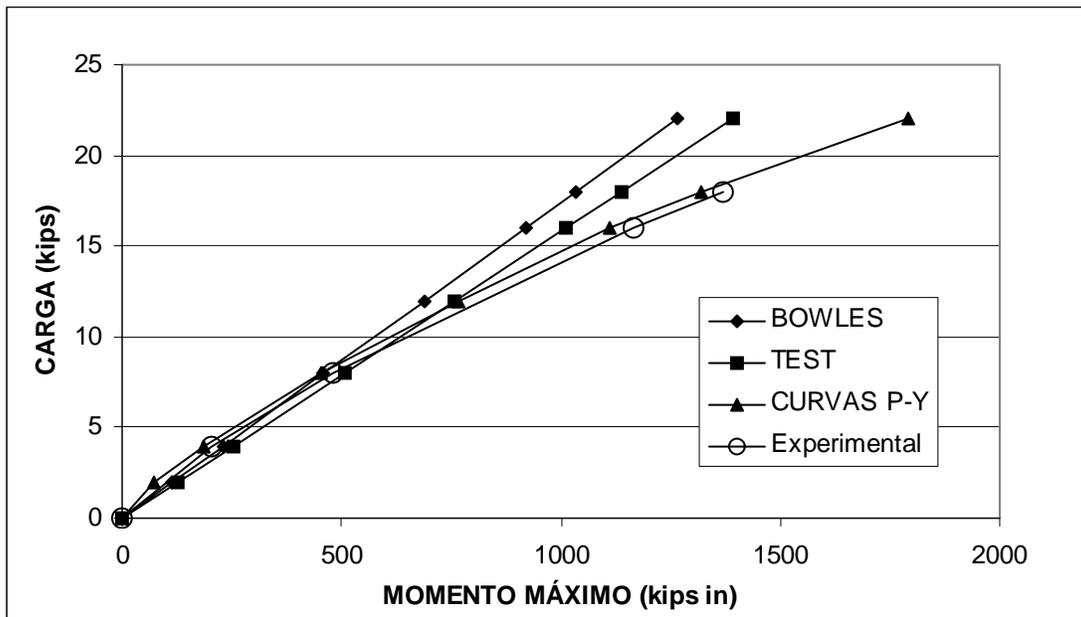


Figura 7.6 Momento máximo vs carga horizontal

También debe notarse que las diferencias entre TEST y el método $p-y$ son más acentuadas a profundidades por debajo del momento máximo. TEST extiende los momentos positivos muy por abajo y además no calcula momentos flexionantes negativos, a diferencia de lo determinado por el método $p-y$ y lo encontrado experimentalmente. Esta diferencia puede llegar a ser muy importante para efectos del refuerzo contra la flexión.

Los perfiles de desplazamiento obtenidos con TEST se muestran en la figura 7.7. Al comparar métodos se observa que para cargas laterales menores que 16 kips los desplazamientos obtenidos con TEST son notablemente mayores que los del método $p-y$. De 16 a 20 kips de carga los momentos de TEST son algo mayores; de 20 a 22 kips son ligeramente menores y a partir de 22 kips se convierten en marcadamente menores.

La figura 7.8 muestra más claramente el comportamiento descrito. Además, en esta figura puede comprobarse otra vez que TEST modela el suelo en forma lineal. Con una carga de 22 kips, la diferencia entre TEST y método $p-y$ fue de 9.3 %. Pero para una carga de 35 kips la diferencia aumenta a 56%. Esto se debe a que para cargas mayores, el método $p-y$ calcula incrementos de desplazamiento cada vez más grandes, reflejando la no linealidad del comportamiento del suelo. Por su parte, el programa TEST mantiene los incrementos de desplazamiento linealmente proporcionales a la carga, mostrando que el suelo es modelado como elástico lineal.

Desafortunadamente Matlock no publica los perfiles de desplazamiento lateral de los pilotes y no es posible su comparación con los resultados de TEST. No obstante, se vio que los momentos flexionantes obtenidos con el método de curvas $p-y$ a través del programa COM624P son sumamente parecidos a los experimentales. Se asume que los desplazamientos laterales del pilote cargado experimentalmente corresponden con los calculados por COM624P. Si esta admisión es cierta, entonces TEST sobrestima fuertemente los desplazamientos cuando se aplican niveles de carga bajos y los subestima con niveles de carga altos.

7.1.1.3 Análisis con el método de la viga apoyada sobre medio elástico (programa de Bowles)

Para analizar el pilote aislado de acero del ensaye de Matlock se introdujo la siguiente información:

Pilote

Longitud = 12.8 m

Diámetro = 0.32385 m

Módulo de elasticidad = 20.4×10^9 kgf/m²

Momento de inercia = 0.000150486 m⁴

Suelo

En este método el suelo es modelado considerando únicamente la rigidez del suelo por medio del módulo de reacción k_s , que fue calculado con la ecuación 3.29, basada en el módulo de elasticidad del suelo y la relación de poisson:

$$k_s = \frac{E_s}{B(1-\nu^2)} \quad 3.29$$

E_s módulo de elasticidad del suelo

B ancho del pilote o cimiento

ν relación de poisson

Se ha considerado que el módulo de elasticidad debe ser el lateral y calculado con la ecuación 5.43

$$E_H = 40 S_u \quad 5.43$$

Alrededor de 1.0 m de profundidad S_u vale 1410 kg/m²

$$E_H = 56400 \text{ kg/m}^2$$

$$B = 0.32385 \text{ m}$$

$$\nu = 0.45$$

$$k_s = 218\,375.8 \text{ kg/m}^3$$

Para tomar en cuenta que la rigidez crece con la profundidad se ha utilizado la ecuación 3.23

$$k_s = A_s + B_s Z^n \quad 3.23$$

A_s vale cero para que en la superficie el suelo tenga rigidez nula, y $n = 0.4$, de acuerdo a lo recomendado por Bowles(1974).

$$218\,375.8 = B_s (1)^{0.4}$$

$$B_s = 218\,375.8 \text{ kg/m}^3$$

$$k_s = 218\,375.8 Z^{0.4}$$

Los momentos flexionantes y perfiles de desplazamiento se observan en las figuras 7.5 a 7.8. Se percibe fácilmente que los resultados de TEST y del programa de Bowles tienen gran similitud en su comportamiento y sólo difieren en la magnitud. Ambos tienen respuestas lineales para el momento máximo y el desplazamiento en la cabeza del pilote.

Con los datos proporcionados y el programa de Bowles se obtuvieron momentos y desplazamientos menores que los de TEST. No obstante, con una modificación en el módulo de reacción del suelo podrían obtenerse resultados prácticamente idénticos.

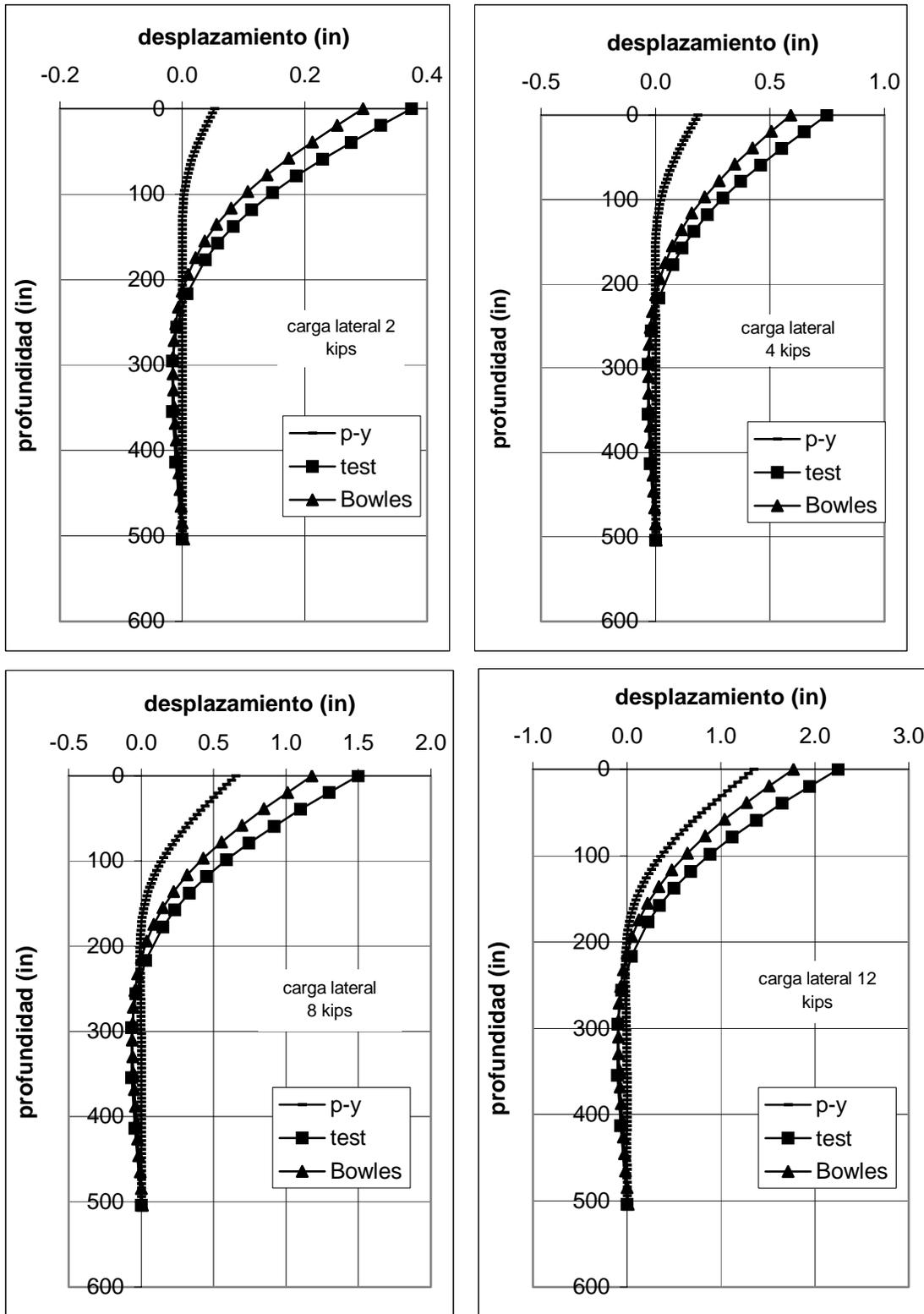


Figura 7.7. Curvas de desplazamiento vs profundidad obtenidas con el método de curvas $p-y$, método de elementos finitos-TEST, programa de Bowles.

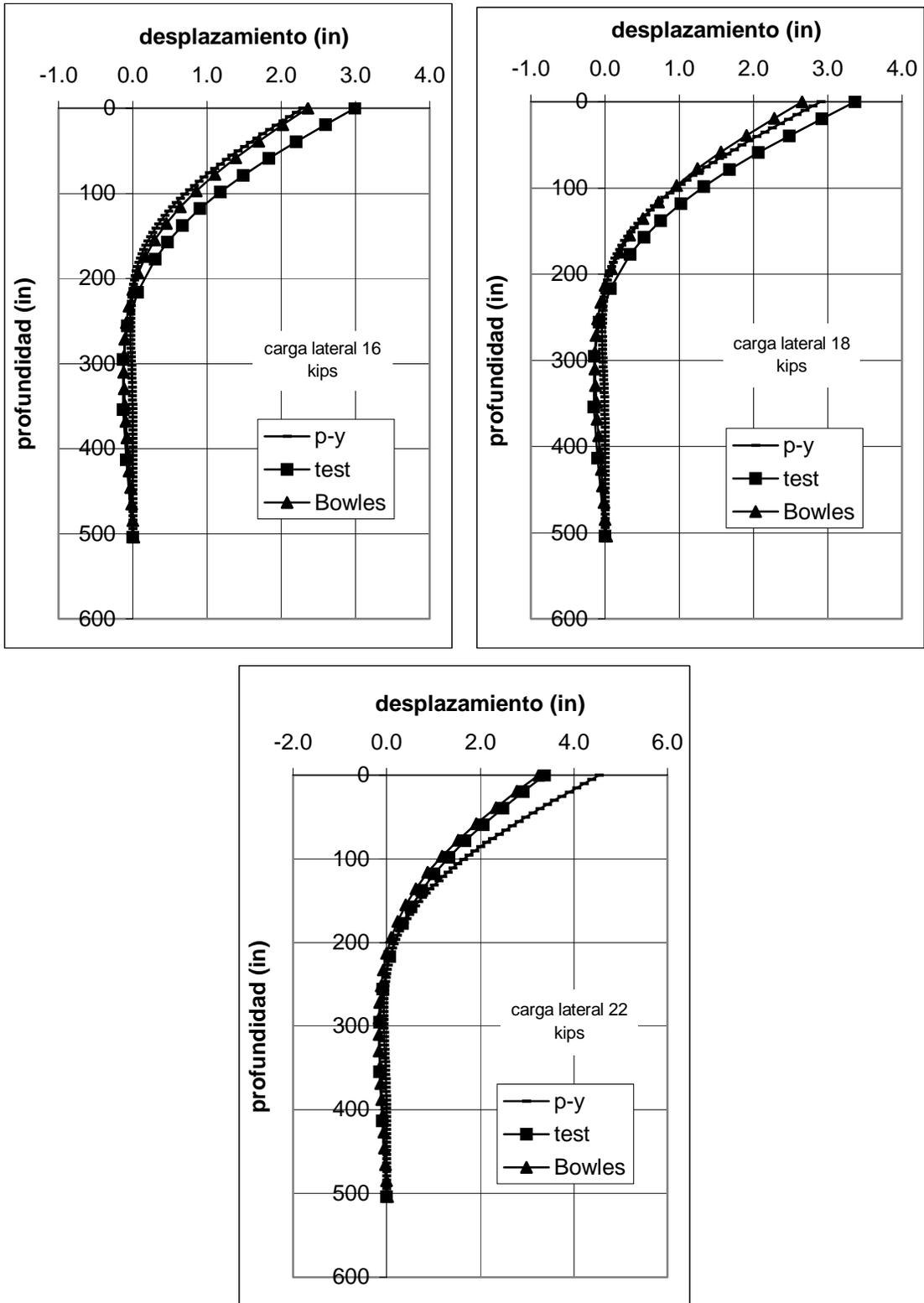


Figura 7.7 Continuación...

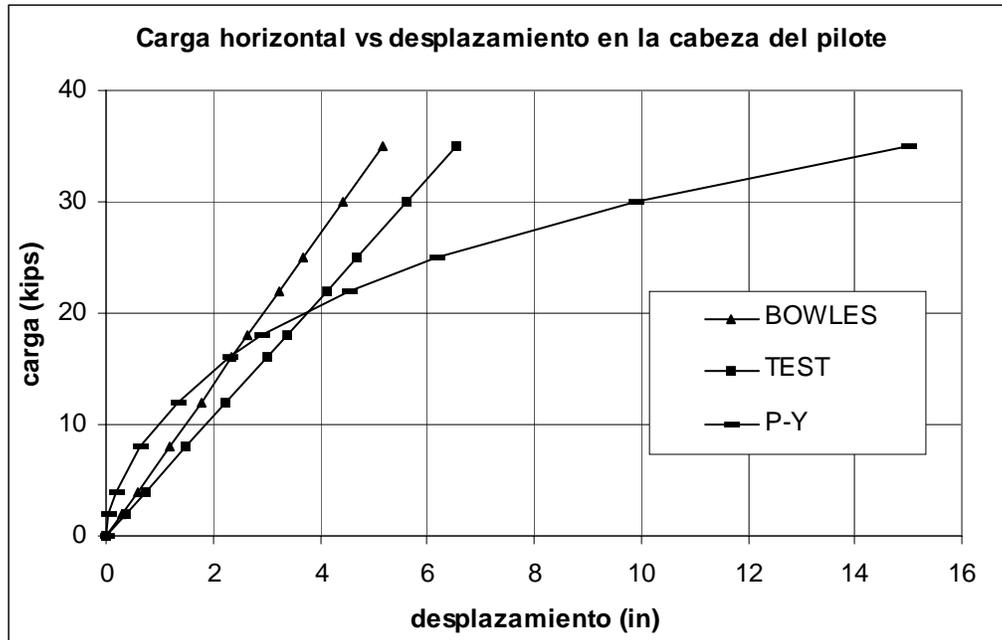


Figura 7.8 Desplazamiento en la cabeza del pilote vs carga horizontal.

Tomando en cuenta la no linealidad del suelo

Tal como se explicó en el capítulo 3, se hizo un análisis tomando en cuenta la no linealidad del comportamiento del suelo. Como no se disponía de curvas esfuerzo vs deformación de prueba CU del ensaye de Matlock, se usó una curva de otro suelo arcilloso blando y luego se modificó para que los resultados de desplazamiento y momento empataran con los resultados experimentales.

Es importante aclarar que aquí no se intenta probar la validez del procedimiento descrito en el capítulo 3 para calcular el módulo de reacción en forma no lineal, pues no se dispone de suficientes datos ni pruebas de carga lateral para tal fin. Lo que sí se trata de demostrar es que un manejo no lineal de los parámetros del suelo conduce a mejores resultados.

Se reitera que la curva esfuerzo vs deformación no corresponde al suelo del ensaye de Matlock y que además dicha curva fue modificada. En la figura 7.9 se ilustra la curva esfuerzo vs deformación utilizada. Se consideró que el suelo tenía la misma curva para toda la profundidad estudiada.

Las curvas desplazamiento vs carga y momento máximo vs carga obtenidas con el módulo de reacción no lineal están dibujadas en las figuras 7.10 y 7.11. Como puede verse, las curvas así calculadas son mucho más parecidas a los resultados experimentales o a los resultados obtenidos con el método de las curvas p-y que las curvas calculadas con k_s lineal.

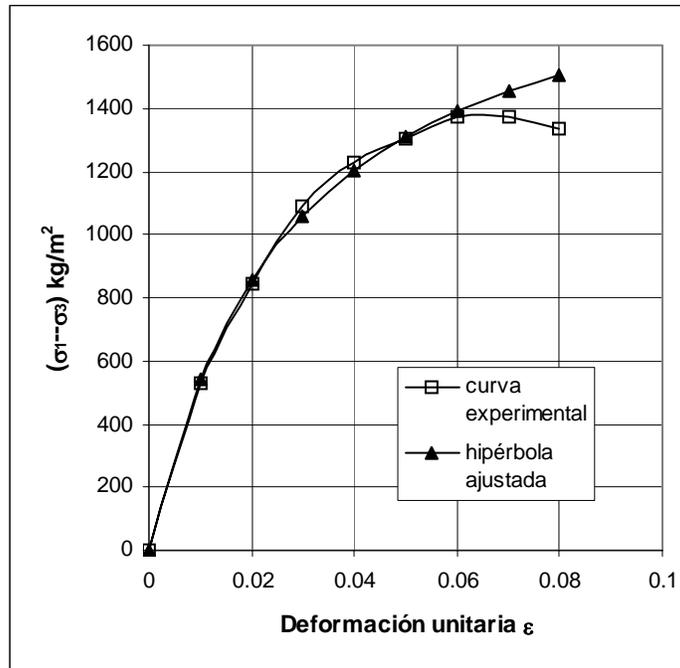


Figura 7.9 Curva esfuerzo vs deformación obtenida de prueba CU y la hipérbola ajustada.

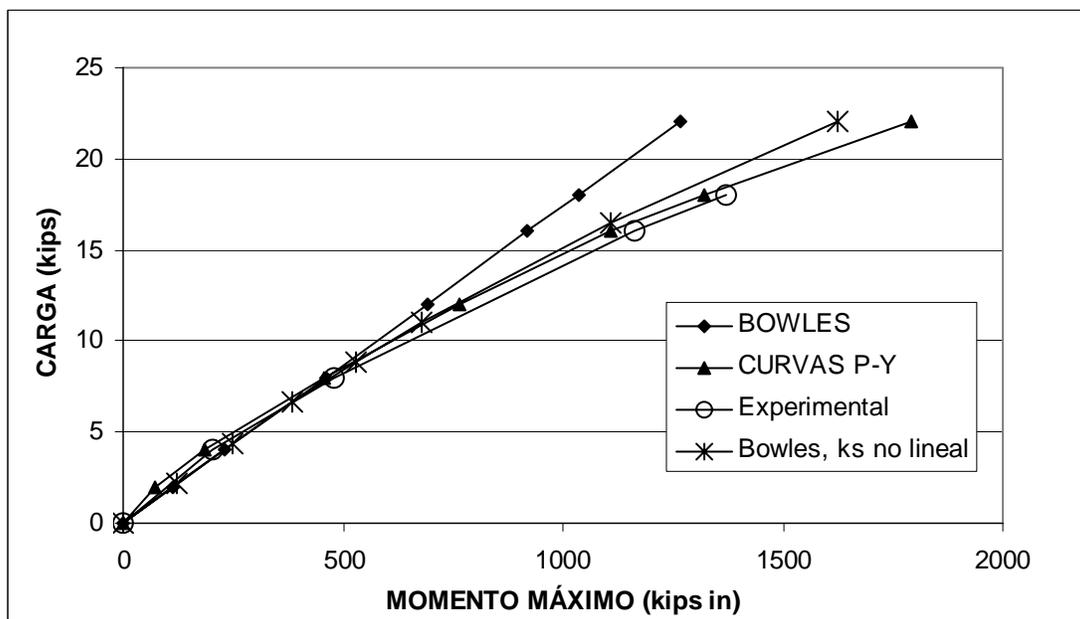


Figura 7.10 Momento máximo vs carga lateral en la cabeza, calculado considerando k_s no lineal.

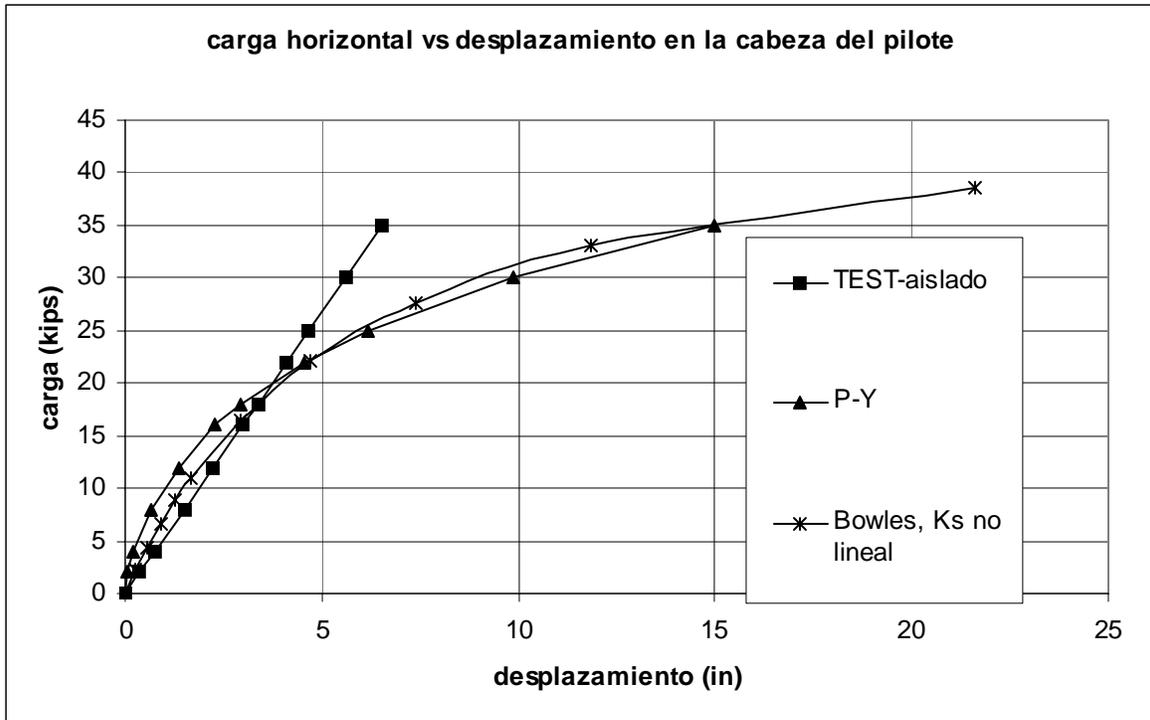


Figura 7.11 Desplazamiento en la cabeza vs carga, calculado considerando k_s no lineal.

Sin embargo, queda pendiente una validación con datos reales del procedimiento propuesto para calcular k_s en forma no lineal.

7.1.2 Ensaye de Snyder y Rollins, 2004.

Snyder y Rollins llevaron a cabo una serie de pruebas de carga en un grupo de pilotes y en un pilote aislado. El trabajo está enmarcado en una investigación más amplia del comportamiento de pilotes bajo carga lateral, dirigida por el Dr Rollins. La tesis de Snyder para obtener el grado de maestro en ciencias por la Brigham Young University, UTA, fue una parte del amplio trabajo encabezado por Rollins.

Las pruebas de carga lateral fueron realizadas en las cercanías del aeropuerto internacional de Salt Lake City, Utah, Estados Unidos. Previamente, realizaron la investigación geotécnica para determinar el tipo de suelo, contenido de agua, límites de Atterberg, resistencia al corte no drenada, etc.

De acuerdo con Snyder (2004), los diferentes tipos de suelo generalmente tenían índices de plasticidad bajos, alrededor de 20 o menos. Cerca de 1.7 m debajo de la superficie, el suelo es limo arenoso no plástico. El contenido de agua medido in situ (w_n) fue encontrado típicamente similar al límite líquido de los suelos que sí tenían plasticidad. Sin embargo, en algunos casos se encontró que w_n fue mayor que el límite líquido, lo que indica la posibilidad de que existan suelos sensitivos en el perfil.

Los tipos de suelo encontrados fueron arcillas y limos de baja plasticidad (CL, CL-ML y ML) y arena limosa o mal graduada (SM y SP). El perfil de suelo se expone en la figura 7.12. Los resultados de S_u se encuentran resumidos en la figura 7.13 y en la tabla 7.3, así como la simplificación del perfil, en cuanto a S_u se refiere. También realizaron pruebas triaxiales de las que obtuvieron los valores de ϵ_{50} y ϕ .

Las características de los pilotes tubulares de acero son las siguientes:

Diámetro $D = 12.75$ pulgadas (0.324 m)
 Pared del tubo $W = 0.375$ pulgadas (0.95 cm)
 Longitud $L = 456$ pulgadas (11.6 m)
 Módulo de Young $E = 29\,000$ psi (200 Gpa)
 Área transversal $A = 93.863$ cm²
 Momento de inercia $I = 14318.4$ cm⁴
 Momento polar de inercia $J = 23231.2$ cm⁴

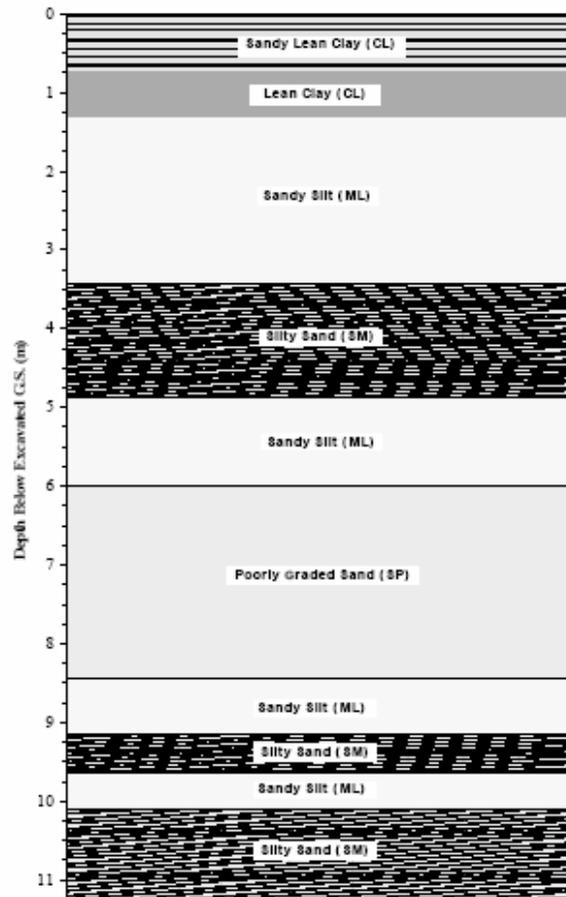


Figura 7.12 Perfil de suelo de la prueba de Snyder y Rollins, 2004.

Tabla 7.3 Características del suelo de Salt Lake City, Utah.

Profundidad (m)	Tipo de suelo	Curva p - y	γ' (kN/m ³)	Su (kPa)	ϵ_{50}	ϕ	k (kN/cm ³)
1.22	Arcilla suave	Arcilla suave	9.05	40.0	0.010	-	-
2.14	Limo arenoso	Arcilla suave	9.05	50	0.010	-	-
3.06	Limo arenoso	Arcilla suave	9.05	40	0.010	-	-
4.8	Arena limosa	Arena	8.14	-	-	38	25.5
5.33	Limo arenoso	Arcilla suave	9.05	56.9	0.010	-	-
5.87	Limo arenoso	Arcilla suave	9.05	25	0.015	-	-
6.48	Limo arenoso	Arcilla suave	9.05	54	0.010	-	-
12.0	Arena	Arena	8.14	-	-	33	14.9

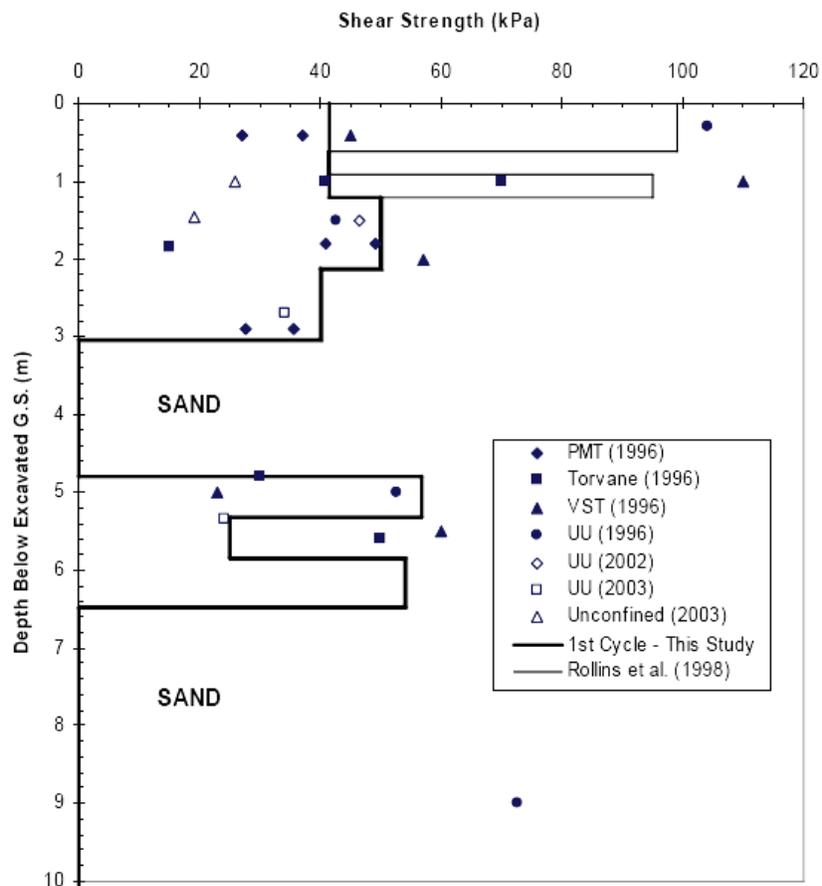


Figura 7.13 Resistencia al cortante no drenada y perfil simplificado (Snyder, 2004)

7.1.2.1 Análisis con el método de curvas *p-y*.

Se calcularon las curvas *p-y* para los estratos de suelo blando con el criterio de Matlock (1970) para arcillas blandas. En la tabla 7.4 las cuatro primeras columnas corresponden a los datos del suelo. En la columna 5 P_u se calculó con las ecuaciones 4.8 y 4.9. ($J=0.5$) La columna 6 se calculó con la ecuación 4.10.

Tabla 7.4 Datos para calcular las curvas *p-y* de la prueba de Snyder.

1	2	3	4	5	6
prof. (m)	c (kPa)	γ (kN/m ³)	$\varepsilon_{50\%}$	P_u (kN/m)	y_{50} (m)
0	40	9.05	0.01	38.880	0.008
1.22	40	9.05	0.01	66.857	0.008
2.14	50	9.05	0.01	108.375	0.008
3.45	40	9.05	0.01	116.640	0.008
5.33	56.9	9.05	0.01	165.920	0.008
5.87	25	9.05	0.015	72.900	0.012
6.48	54	9.05	0.01	157.464	0.008

Tabla 7.5 Curvas *p-y* de suelos blandos para la prueba de Snyder, calculadas con el criterio de Matlock (1970).

profundidad = 1.22 m		profundidad = 2.14 m		profundidad = 3.45 m	
y (m)	p (kN)	y (m)	p (kN)	y (m)	p (kN)
0.0000	0.000	0.0000	0.000	0.0000	0.000
0.0010	16.645	0.0010	26.982	0.0010	29.040
0.0020	20.972	0.0020	33.995	0.0020	36.587
0.0040	26.423	0.0040	42.831	0.0040	46.097
0.0060	30.246	0.0060	49.029	0.0060	52.768
0.0080	33.291	0.0080	53.964	0.0080	58.079
0.0100	35.861	0.0100	58.130	0.0100	62.564
0.0120	38.108	0.0120	61.773	0.0120	66.484
0.0140	40.117	0.0140	65.030	0.0140	69.989
0.0160	41.943	0.0160	67.990	0.0160	73.175
0.0180	43.623	0.0180	70.712	0.0180	76.105
0.0200	45.182	0.0200	73.240	0.0200	78.825
0.0220	46.641	0.0220	75.604	0.0220	81.370
0.0240	48.013	0.0240	77.829	0.0240	83.764
0.0650	66.857	0.0650	108.375	0.0650	116.640
0.1220	66.857	0.1220	108.375	0.1220	116.640
0.1620	66.857	0.1620	108.375	0.1620	116.640

Tabla 7.5 Continuación...

profundidad = 5.33 m		profundidad = 5.87 m		profundidad = 6.48 m	
y (m)	p (kN)	y (m)	p (kN)	y (m)	p (kN)
0.0000	0.000	0.0000	0.000	0.0000	0.000
0.0010	41.309	0.0010	15.855	0.0010	39.203
0.0020	52.046	0.0020	19.976	0.0020	49.393
0.0040	65.573	0.0040	25.169	0.0040	62.231
0.0060	75.063	0.0060	28.811	0.0060	71.237
0.0080	82.617	0.0080	31.710	0.0080	78.407
0.0100	88.997	0.0100	34.159	0.0100	84.461
0.0120	94.573	0.0120	36.299	0.0120	89.753
0.0140	99.560	0.0140	38.213	0.0140	94.486
0.0160	104.091	0.0160	39.953	0.0160	98.786
0.0180	108.259	0.0180	41.552	0.0180	102.742
0.0200	112.129	0.0200	43.038	0.0200	106.414
0.0220	115.749	0.0220	44.427	0.0220	109.849
0.0240	119.155	0.0240	45.734	0.0240	113.082
0.0650	165.920	0.0650	63.749	0.0650	157.464
0.1220	165.920	0.1220	72.900	0.1220	157.464
0.1620	165.920	0.1620	72.900	0.1620	157.464

Luego, con la información de la tabla 7.4 podemos utilizar la ecuación 4.27 y calcular la curva p - y hasta la abscisa igual a δy_{50} , desde donde la curva p - y tiene ordenada constante e igual a P_u . Las curvas p - y calculadas se muestran en la tabla 7.5 y figura 7.14.

Las curvas p - y de arena y arena limosa fueron calculadas con el criterio de Reese et al (1974). En el capítulo 4 se ha visto el cálculo de la curva p - y de 4.31 m de profundidad. Para abreviar, aquí ya no se presentan los cálculos, sino únicamente las curvas de 4.31 y 12.0 m de profundidad, figura 7.15:

Las curvas p - y de arenas, arcillas y limos, junto con los demás datos de la prueba de carga se introdujeron al programa COM624P. No se aplicaron cargas verticales ni momentos flexionantes; en la cabeza del pilote se permitió el desplazamiento lateral y giro libre. Los resultados se dibujan en las figuras 7.16, 7.17 y 7.18.

En la figura 7.16 se ilustran los resultados obtenidos con curvas p - y calculadas internamente por COM624P y los obtenidos con curvas calculadas y luego introducidas manualmente al programa.

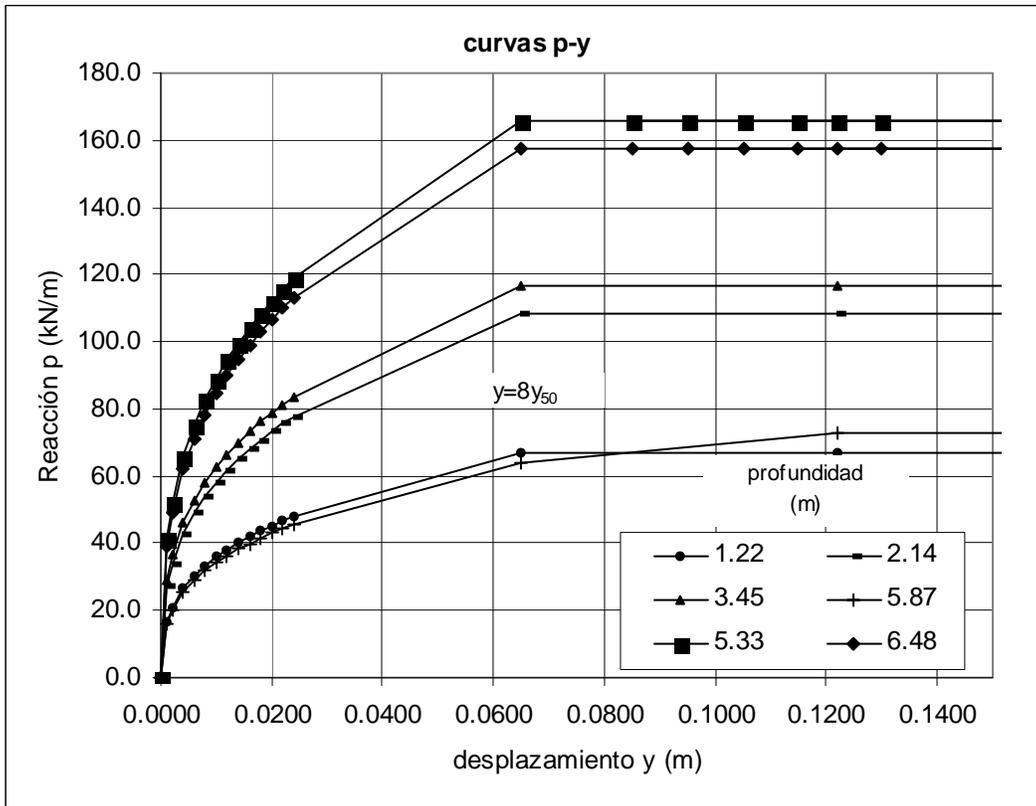


Figura 7.14 Curvas p - y de suelos blandos para la prueba de Snyder.

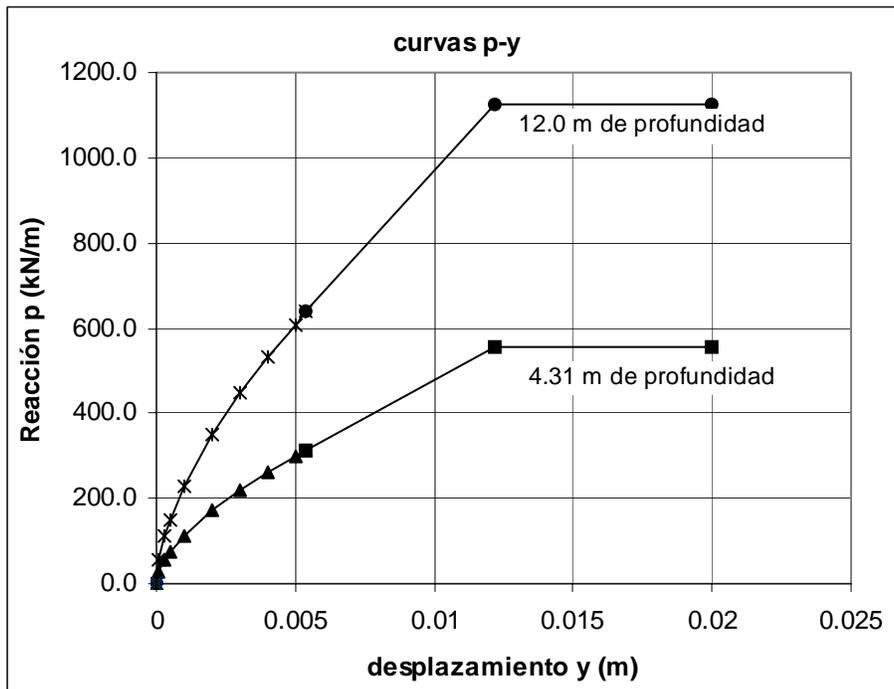


Figura 7.15 Curvas p - y de arenas para la prueba de Snyder

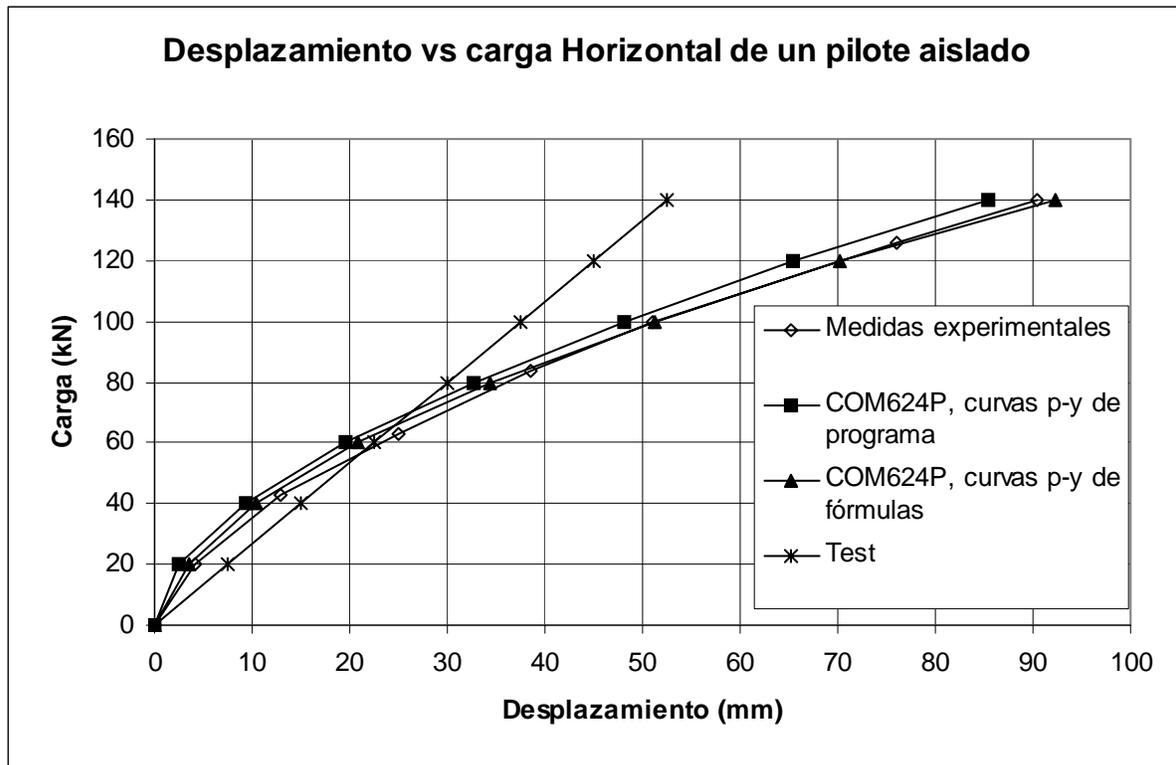


Figura 7.16 Desplazamiento en la cabeza de un pilote aislado vs carga horizontal. Prueba de Snyder, calculado con el método de curvas p - y y TEST.

Se encontró que las curvas p - y calculadas con el criterio para arenas por COM624P tienen una rigidez mayor y difieren notablemente de las calculadas manualmente. Éstas últimas proporcionaron un mejor ajuste con los resultados experimentales, tanto en desplazamientos como en momentos flexionantes. En adelante, los resultados de COM624P fueron calculados con las curvas determinadas manualmente.

En la figura 7.17 se observa que los momentos flexionantes calculados con COM624P son algo menores que los experimentales. Para la carga de 140 kN, la diferencia entre lo calculado y experimental fue de 11.9 %, mientras que para la carga de 100 kN la diferencia fue de 6.8 %. Además, el momento máximo calculado se presenta a una profundidad también menor que la experimental.

En la figura 7.18 se comparan los momentos máximos calculados y experimentales. A niveles de carga altos las diferencias crecen pero quedan alrededor de 10%. El ajuste de resultados no es tan bueno como en el caso de desplazamientos aunque se aprecia que sigue siendo aceptable.

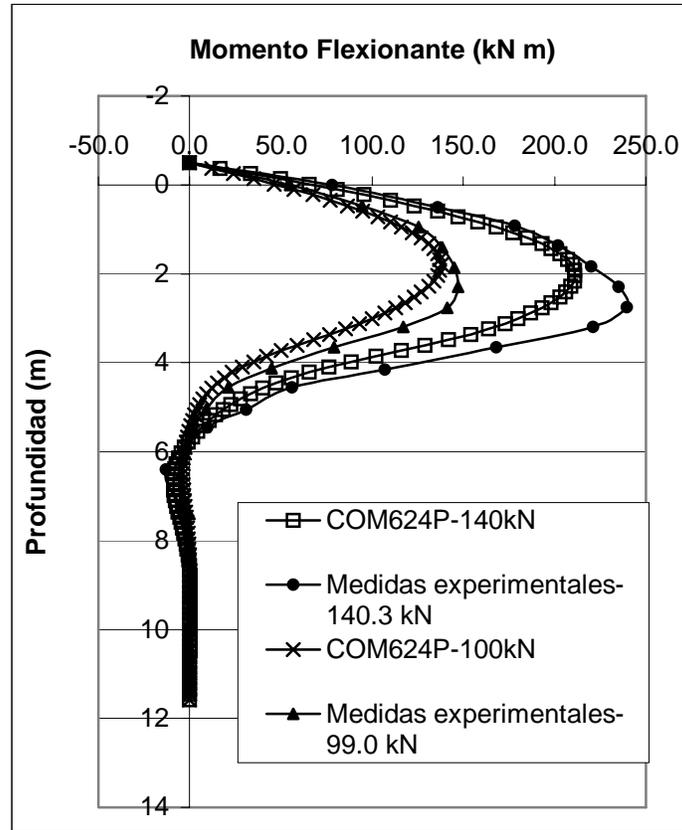


Figura 7.17 Momento flexionante vs profundidad de un pilote aislado de la prueba de Snyder, calculado con el método de curvas p - y .

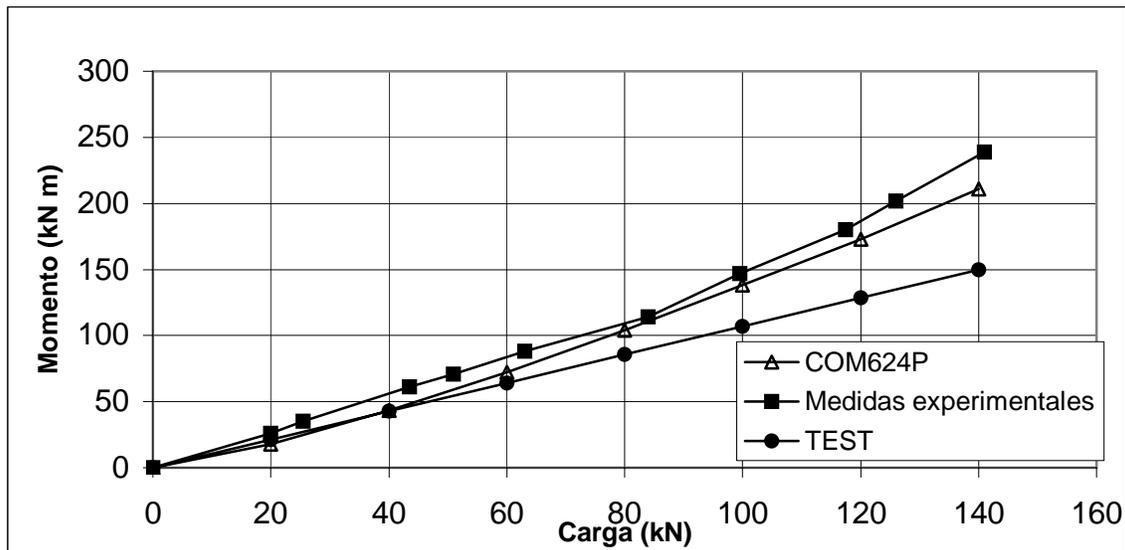


Figura 7.18 Carga horizontal vs Momento flexionante máximo de un pilote aislado. Prueba de Snyder, calculado con el método de curvas p - y y TEST.

7.1.2.2 Análisis con Método de Elementos Finitos – TEST

Los datos ingresados al programa TEST para el suelo fueron los siguientes:

Profundidad (cm)	E_H' (kgf/cm ²)	ν	γ (kgf/cm ³)	S_u (kgf/cm ²)	RT (kgf/cm ²)	$1/m_v$ (kgf/cm ²)
0	7.400	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
212	9.358	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
412	15.170	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
512	15.748	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
573	16.327	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
627	153.000	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
680	153.000	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
747	23.220	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
815	10.200	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
880.5	22.040	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
946	115.000	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
1038	115.000	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
1099	115.000	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5
1160	7.400	0.45	0.0019	0.408	0.1	16.5

Nuevamente, el módulo de elasticidad lateral fue modificado de acuerdo al procedimiento propuesto con anterioridad. Las condiciones de frontera, formulación de la malla y modelado en general, fueron muy similares a lo empleado en la prueba de Matlock.

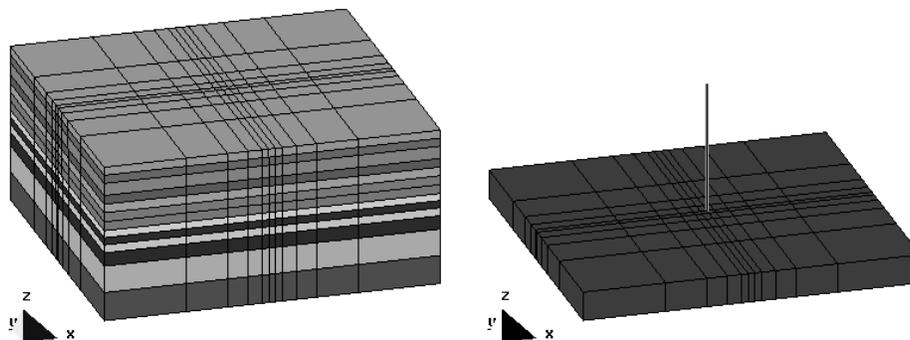


Figura 7.19 Malla empleada para analizar pilotes aislados de la prueba de Snyder y Rollins

La figura 7.16 nos demuestra como TEST analiza linealmente el problema y que sólo proporciona resultados aceptables dentro de un rango de cargas bajas. A cargas mayores se manifiesta más el comportamiento no lineal del suelo y el programa TEST se aleja demasiado de lo encontrado experimentalmente. De nueva cuenta, en la figura 7.18

observamos el análisis lineal de TEST y los resultados alejados de los experimentales cuando las cargas laterales aumentan.

El ensaye de Matlock se analizó también con el programa de Bowles y se encontró que proporcionaba resultados semejantes a los de TEST, aunque éste último daba resultados ligeramente mejores. Debido a esta circunstancia se decidió omitir el análisis con el programa de Bowles para la prueba de Snyder y Rollins.

7.2 Grupos de pilotes

En la práctica las estructuras que se apoyan sobre pilotes lo hacen sobre grupos y no sobre pilotes aislados. El análisis de grupos de pilotes es lo que finalmente interesa a los ingenieros. En esta parte se analizan grupos de seis, nueve y hasta dieciséis elementos con el método de elementos finitos, a través de programa TEST, y con el método de curvas p - y , con el programa COM624P.

7.2.1 Ensaye de Matlock, 1970.

La prueba de carga de Matlock de 1970 sólo se realizó sobre un pilote aislado, pero aquí se usan los datos de suelo y pilote para analizar teóricamente el comportamiento de tres grupos, uno de 6, uno de 9 y otro de 16 pilotes, distribuidos simétricamente. Con el análisis de elementos finitos se modelaron simultáneamente todos los pilotes del grupo, mientras que con el método de curvas p - y se analizaron separadamente cada una de las filas del grupo de pilotes.

Los datos del suelo y pilote son iguales a los empleados en el análisis del pilote aislado.

7.2.1.1 Análisis con el método de curvas p - y .

Para analizar un grupo de pilotes con el método de las curvas p - y se desarrolló el concepto de multiplicadores MP.

Rollins (1998) obtuvo su propuesta de multiplicadores a partir de un grupo de 9 pilotes repartidos en tres filas de tres elementos cada una. Para el análisis teórico que se hizo en esta tesis se eligió una configuración de pilotes muy similar. En la figura 7.20 se ilustran los tres grupos analizados y las cargas aplicadas en la dirección X.

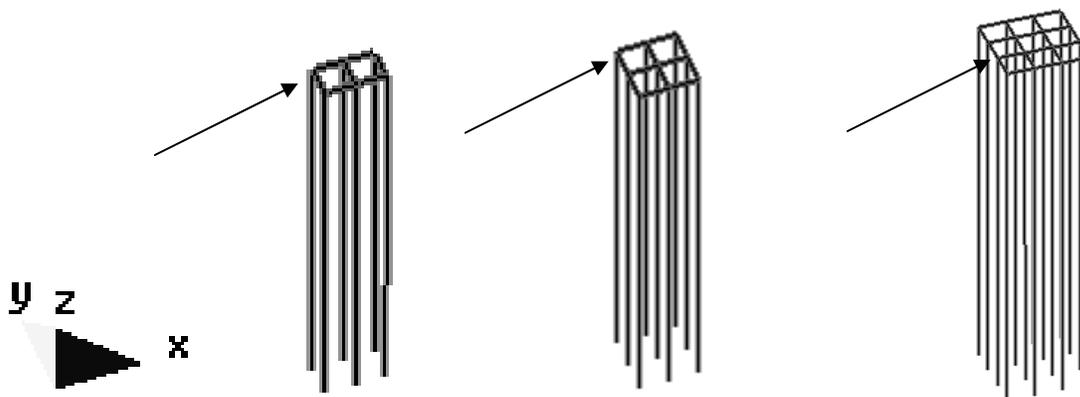


Figura 7.20 Grupos de seis, nueve y dieciséis pilotes

Una vez que se ha analizado el pilote aislado con el método de curvas p - y , el análisis del grupo es muy sencillo. Basta con elegir los multiplicadores MP de acuerdo a la fila que se analice y la separación entre pilotes, multiplicar las curvas p - y por dichos multiplicadores y realizar la corrida con el programa computacional. Los datos del pilote son los mismos que en el caso de pilote aislado. Los multiplicadores que se usaron están dibujados en la figura 6.30.

El diámetro de los pilotes fue de 32.38 cm y la separación entre pilotes, de centro a centro fue de 90 cm. La separación adimensional S tiene un valor de 2.8. Los multiplicadores de Rollins de la figura 6.30 valen 0.6 para los pilotes delanteros y 0.4 para los de filas traseras cuando la S vale 3.

Se multiplicaron las curvas p - y de la figura 7.1 por 0.6 y 0.4, y luego se introdujeron los valores en el programa COM624P. Los resultados obtenidos están graficados en las figuras 7.21, 7.22 y 7.23. Como el método de curvas p - y para grupos analiza por filas, sin tener en cuenta cuantos elementos tenga cada una, los resultados son los mismos para los grupos de 6, de 9 o de 16 pilotes de esta tesis.

La figura 7.21 nos deja ver las diferencias entre los desplazamientos en la cabeza de un pilote aislado ($MP=1$) y los de pilotes de las filas delantera ($MP=0.6$) y traseras ($MP=0.4$). Se observa que con carga de 4 kips, el cociente del desplazamiento de pilote de grupo entre el de pilote aislado vale 1.9 para la fila delantera y 3.1 para las filas traseras. Para la carga de 18 kips el cociente vale 2.27 en la fila delantera y 5.0 en las traseras. Es decir, la diferencia de comportamiento entre pilote aislado y de grupo es mayor cuando el nivel de carga sube y además la diferencia es más grande en los pilotes de las filas traseras.

Otra forma de interpretar la figura 7.21, acorde con lo que pasa en la realidad cuando los pilotes están unidos por un cabezal rígido que los obliga a tener un desplazamiento prácticamente igual, es la siguiente: para un desplazamiento de 14 pulgadas el pilote delantero toma una carga del 71% de lo de un pilote aislado, y un pilote trasero la equivalente al 52%. Para un desplazamiento de 4 pulgadas los porcentajes correspondientes son 69% y 55%. Si comparamos detalladamente las figuras 7.21 y 6.24 (la última es de una prueba de grupo a escala real) podemos encontrar grandes similitudes en el comportamiento de los pilotes. Debe observarse que, para un mismo desplazamiento, los pilotes soportan diferentes cargas, hecho que no debe perderse de vista para interpretar las siguientes figuras.

Por otra parte, la figura 7.22 enseña como los momentos flexionantes máximos son superiores en los pilotes de grupo. Los momentos de pilote delantero son alrededor de 1.3 veces los del aislado, y los momentos de los pilotes traseros son aproximadamente 1.6 veces los del aislado. Esta figura debe interpretarse con cuidado pues las ordenadas corresponden a la carga que está soportando cada pilote, independientemente de la que soporten los demás. Debe tenerse claro que no corresponde a la carga promedio del grupo. Tampoco debe pensarse que para un mismo desplazamiento en la cabeza de los pilotes, el pilote trasero es el que tiene un mayor momento flexionante.

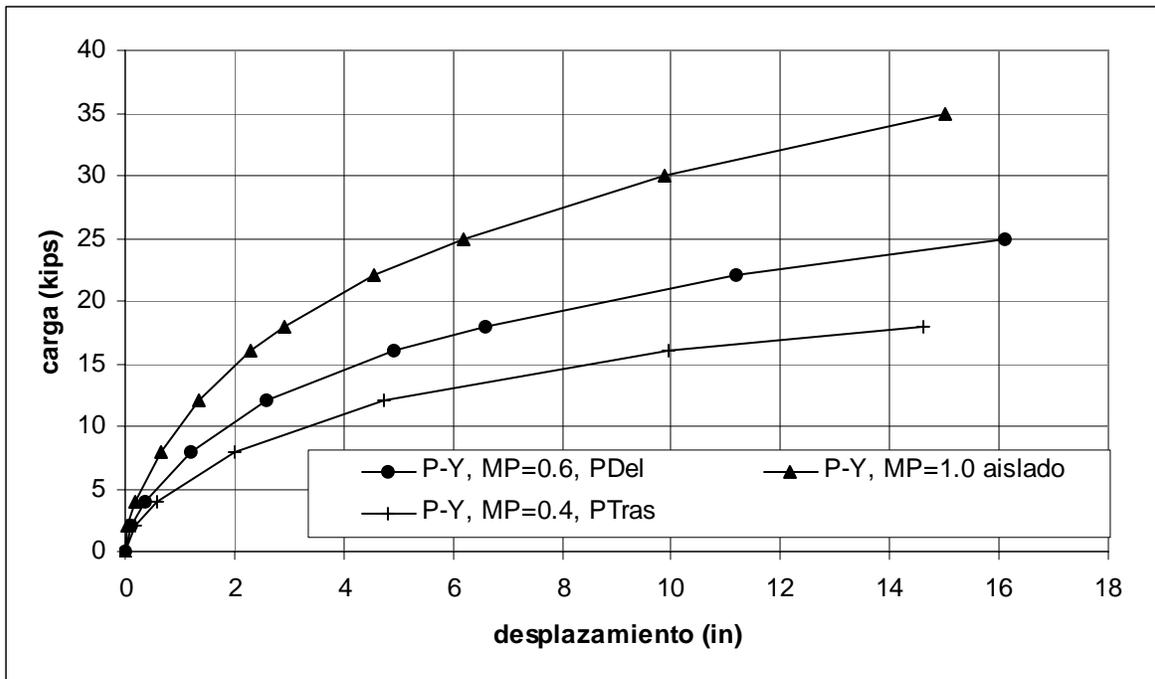


Figura 7.21 Carga horizontal vs desplazamiento en la cabeza del pilote.

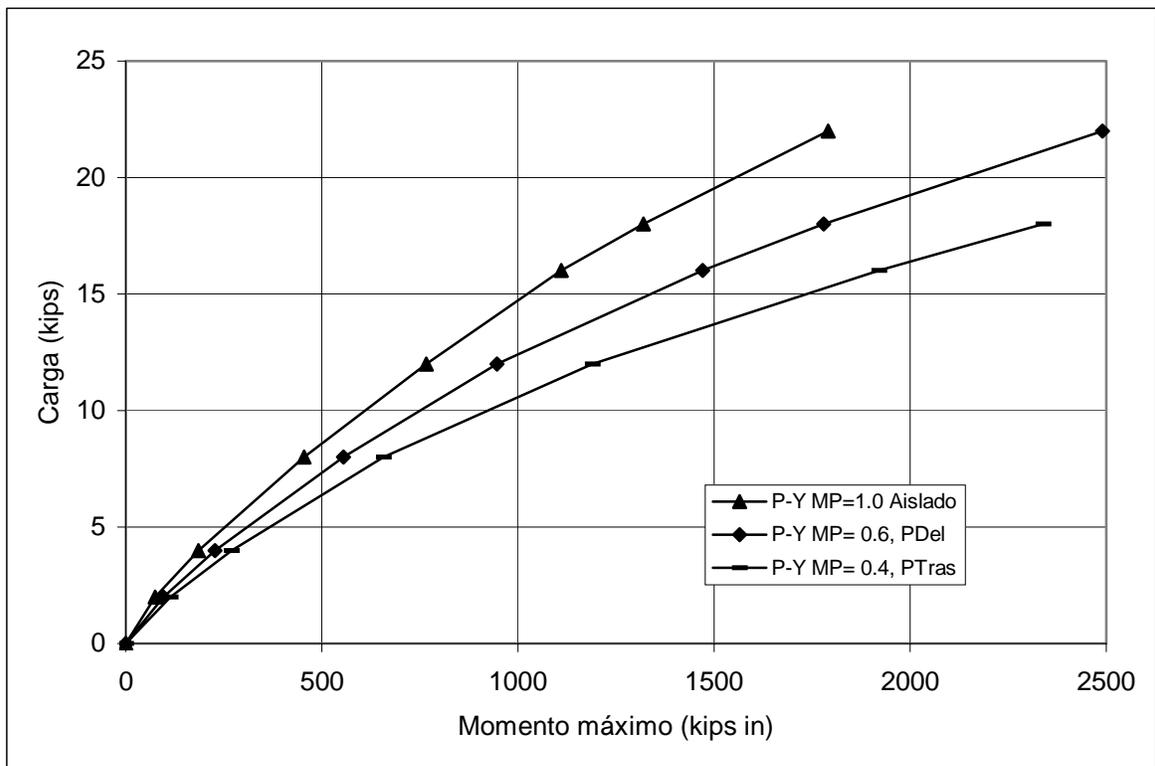


Figura 7.22 Momento máximo vs carga horizontal

La figura 7.22 también nos dice que para una misma carga lateral (se reitera, no es la promedio del grupo, sino la que recibe cada pilote individualmente), los pilotes traseros tienen un mayor momento flexionante. Es decir, tienen menor eficiencia provocada por el menor soporte que reciben del suelo (lo cual se simula a través del concepto de los multiplicadores MP).

Las mismas consideraciones deben hacerse al interpretar la figura 7.23. Esta figura revela, en cuanto a la distribución de momentos flexionantes en las filas del grupo se refiere, que el método de curvas $p-y$ no solo incrementa los momentos máximos del grupo sino que también los desplaza hacia abajo, más para las filas traseras que la delantera. Este comportamiento es igual al observado en pruebas de carga de grupos a escala real, como lo ilustra la figura 6.25.

Todo esto nos da una idea de que el método de curvas $p-y$ modela adecuadamente el grupo de pilotes.

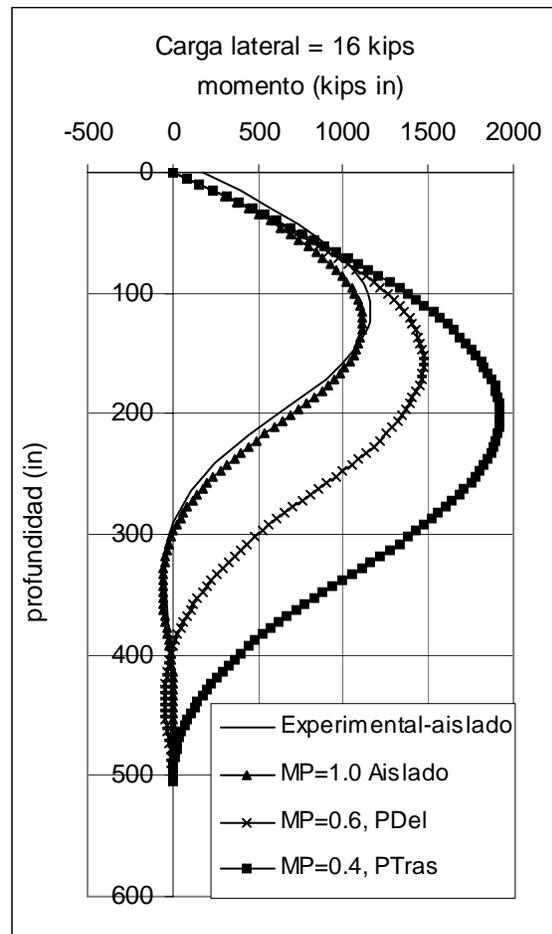
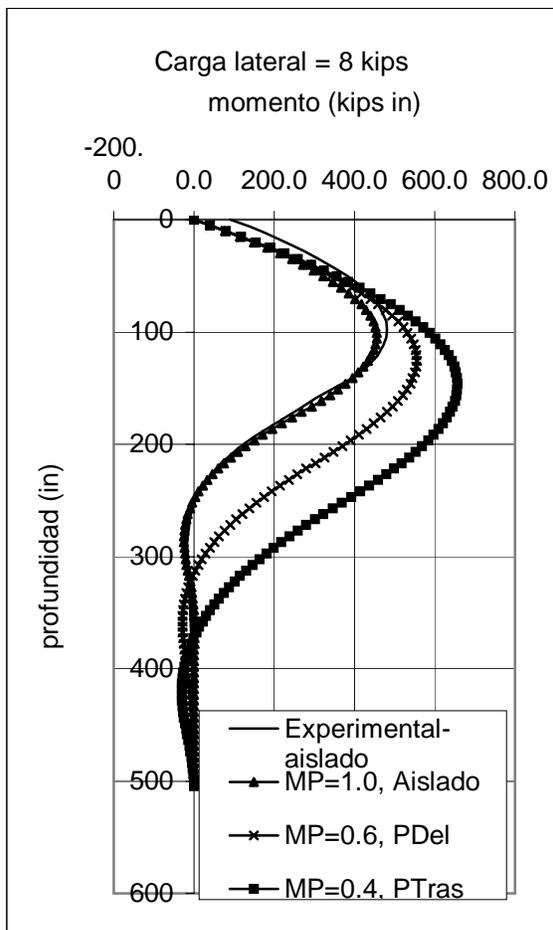


Figura 7.23 Perfil de momentos vs profundidad para pilote aislado, de fila delantera y de filas traseras, para dos niveles de carga.

7.2.1.2 Análisis con MEF – TEST

Para modelar el cabezal que uniera los pilotes y asegurara un desplazamiento uniforme pero sin que transmitiera momentos flexionantes, tal y como se realizaron las pruebas de carga a escala real, se emplearon vigas de acero de sección cuadrada, con un módulo de elasticidad muy elevado, aunque con momento de inercia prácticamente nulo. Las vigas unieron las cabezas de los pilotes como se muestra en la figura 7.24

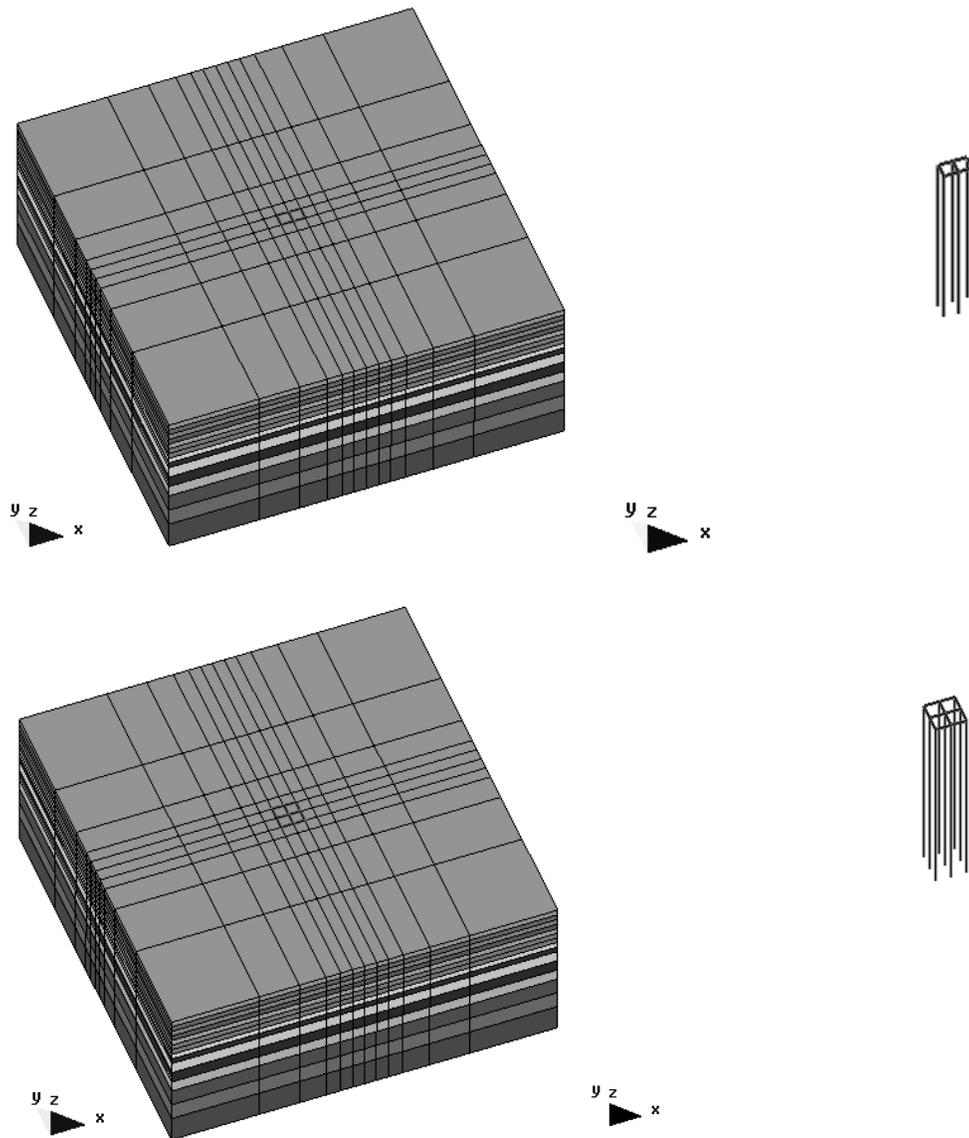


Figura 7.24 Mallas de suelo y grupos de pilotes de 6 y 9 elementos unidos con cabezal de vigas.

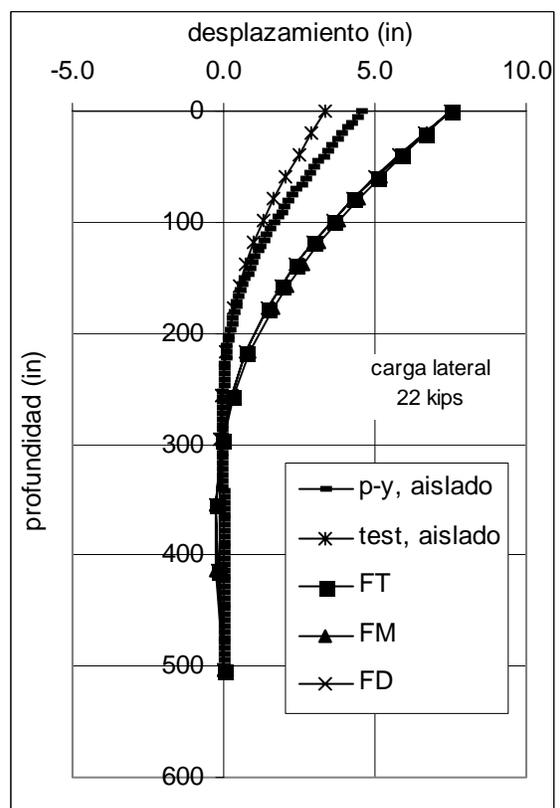
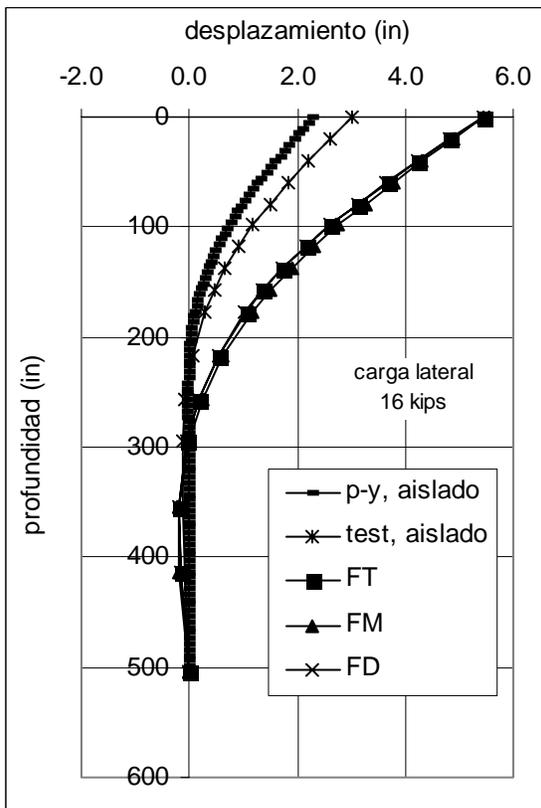
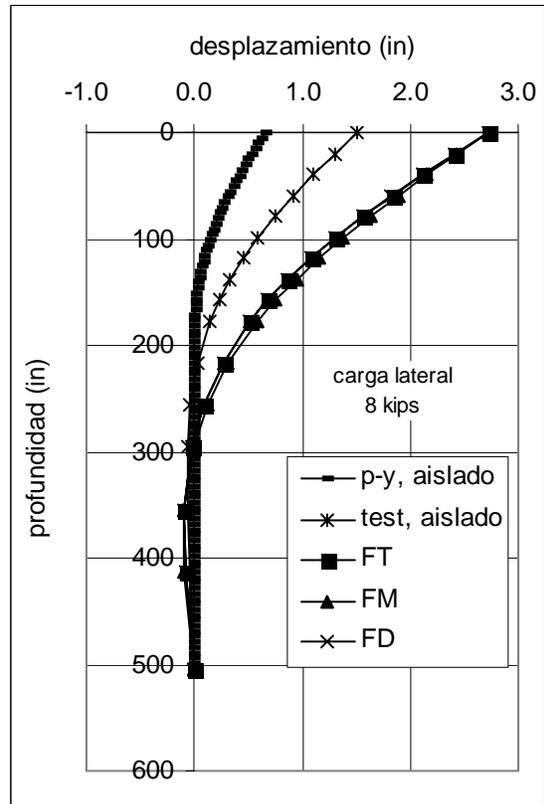
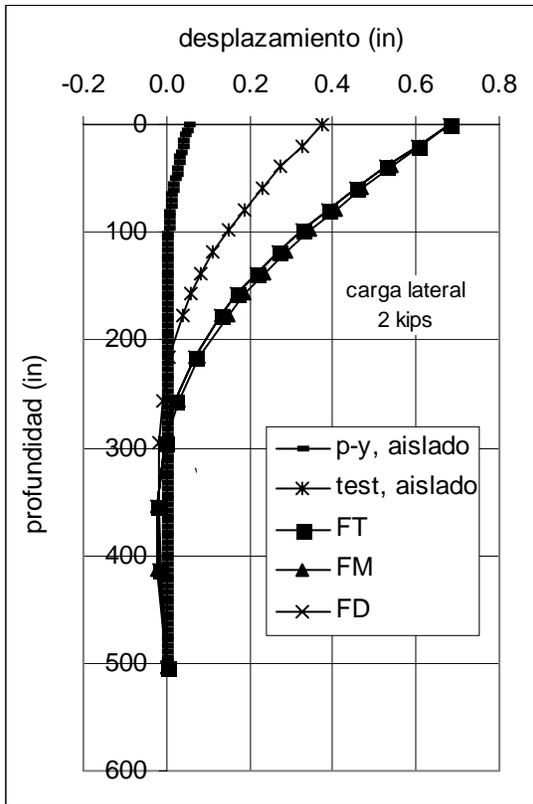


Figura 7.25 Desplazamiento en la cabeza del pilote vs profundidad. Análisis del grupo de 6 pilotes con TEST. (FT=fila trasera; FM=fila media; FD=fila delantera)

La figura 7.25 muestra las gráficas de desplazamiento en la cabeza del pilote vs profundidad obtenidas con TEST para el grupo de 6 pilotes. Para efectos de comparación también se dibujó la gráfica obtenida con el método de curvas p - y para un pilote aislado. Es de resaltar que los desplazamientos promedio del grupo son mayores que los del pilote aislado, igual a lo encontrado en mediciones de campo.

Sin embargo, como TEST modela el suelo linealmente, a niveles de carga extremos se aleja de los resultados del método de curvas p - y , que, como ya se vio anteriormente, son más apegados a los resultados experimentales, figura 7.26.

Por otra parte, TEST proporciona desplazamientos distintos para grupos de pilotes con diferente número de pilotes. La tendencia general es que para una misma carga promedio el desplazamiento es proporcional al número de pilotes del grupo, sin embargo dicha tendencia ya no se cumple para el grupo de 16 pilotes, que tiene menor desplazamiento que el grupo de 9 elementos.

Si ahora se toma como referencia un mismo desplazamiento, observamos que el pilote aislado soporta más carga promedio que el grupo de 6 pilotes, el grupo de 6 más que el de 9, pero el de 9 menos que el de 16. Es decir, la eficiencia del grupo de 16 es ligeramente mayor que la del grupo de 9, figura 7.28. Un comportamiento similar ha sido reportado por Ilyas et al (2004) para modelos de grupos de pilotes, y dice que aparentemente para grandes desplazamientos en la cabeza de los pilotes, la eficiencia de los grupos permanece casi constante para grupos cuadrados con 9 o más elementos (eficiencia del grupo = promedio de carga lateral del grupo / carga lateral de un pilote aislado, cuando el desplazamiento es igual) figura 6.28.

Los momentos flexionantes presentan una tendencia semejante a los desplazamientos: los momentos máximos de un grupo de 6 pilotes son mayores que los del pilote aislado; los del grupo de 9 son mayores que los del de 6; pero los del grupo de 16 pilotes ya son menores incluso que los del grupo de 6 pilotes, figura 7.27. La diferencia con los resultados del método de curvas p - y sólo es pequeña a niveles de carga bajos, y a niveles altos los momentos de TEST son hasta un 40% menores que los del método de curvas p - y .

Una posible explicación de por qué el grupo de 16 pilotes tiene un menor desplazamiento que el de 9 pilotes puede estar en el efecto de “shadowing” o “sombreado”. Rollins et al (1998) dicen que la tendencia de un pilote de una fila trasera a presentar menos resistencia lateral por el pilote que tiene enfrente de él es comúnmente llamada “shadowing”. Este efecto de “shadowing” se vuelve menos significativo si el espacio entre pilotes aumenta y relativamente insignificante para espacios mayores que seis diámetros de pilote de centro a centro. Adicionalmente, Snyder menciona que a grandes deformaciones también puede presentarse el efecto de orilla (edge effects). La figura 7.29 muestra ambos efectos.

Con la idea de encontrar estos efectos se revisaron los esfuerzos en el suelo. En la figura 7.30 están dibujados el grupo de pilotes y los esfuerzos σ_{xx} del suelo. Los tonos rojos indican esfuerzos positivos (compresión) mientras que los tonos azules, esfuerzos negativos

(tensión). Los efectos de sombreado y de orilla explican bien la concentración de esfuerzos positivos frente al grupo de pilotes pero no los esfuerzos negativos en la parte posterior.

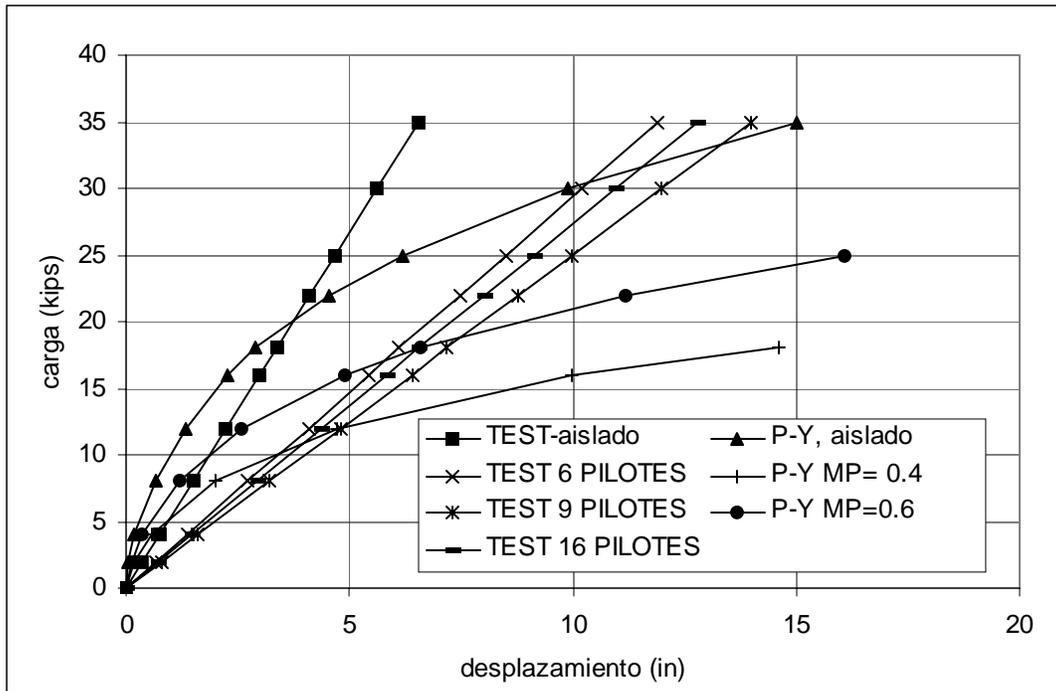


Figura 7.26 Momentos vs carga horizontal. Comparación entre pilote aislado, grupos de 6, 9 y 16 pilotes analizados con TEST y pilotes de grupo analizados con método de curvas p - y

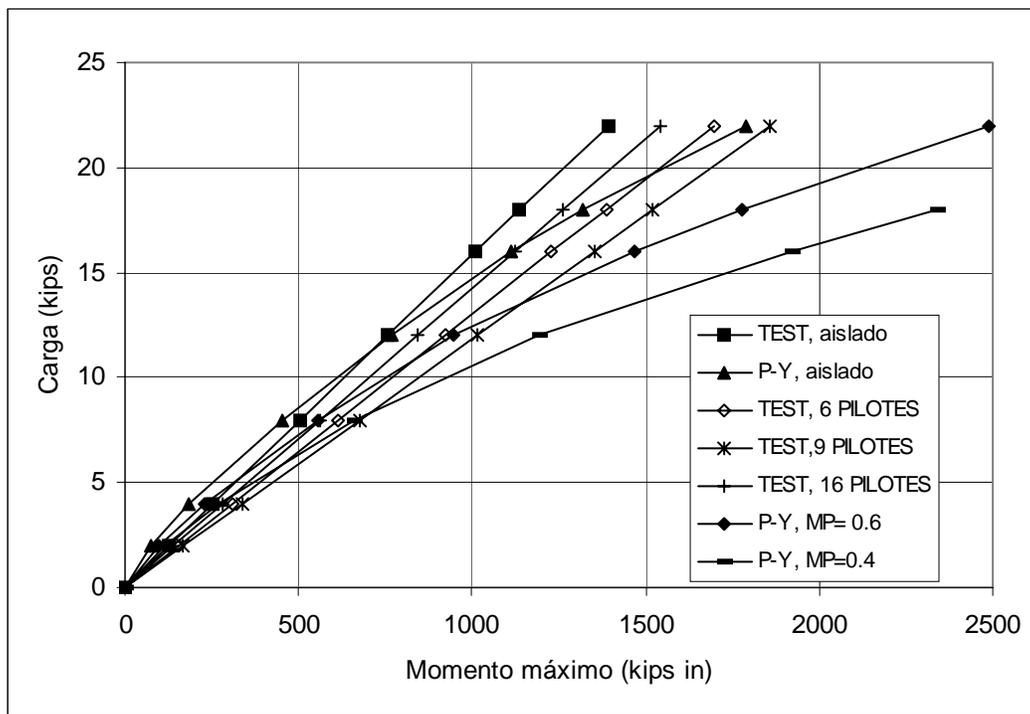


Figura 7.27 Momentos máximos vs carga horizontal. Comparación entre pilote aislado, grupos de 6, 9 y 16 pilotes analizados con TEST y pilotes de grupo analizados con el método de curvas p - y .

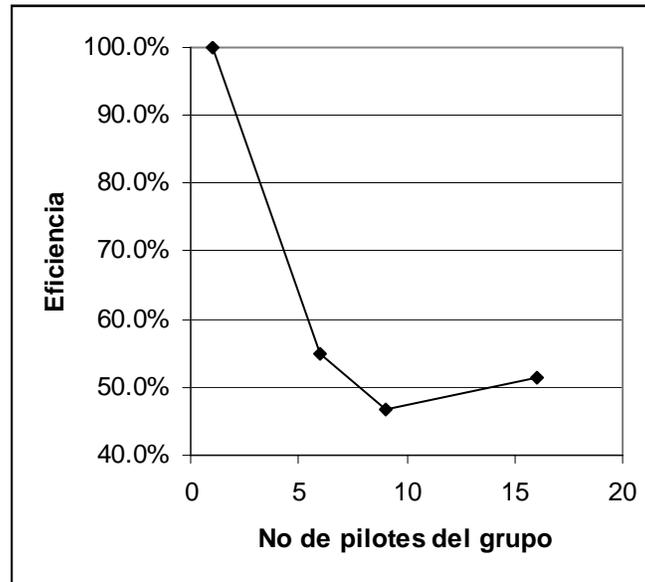


Figura 7.28. Eficiencia de grupos de pilotes de acuerdo a su número de elementos, obtenida de los resultados de TEST para 1, 6, 9 y 16 pilotes.

Como el suelo tiene muy poca capacidad para soportar esfuerzos negativos o de tensión, se fractura y da lugar a las cavidades que se han observado detrás de los pilotes en diferentes pruebas de carga. En el análisis realizado con TEST no es posible modelar la fractura del suelo y por lo tanto trata esta situación como esfuerzos de tensión sin generar las cavidades ya mencionadas.

El movimiento de los pilotes, y con ellos el suelo que está enfrente, es el que provoca los “esfuerzos de tensión” y las cavidades de la parte trasera. Esto crea una pérdida de confinamiento del suelo detrás de los pilotes, y una menor capacidad de soporte. La figura 7.31 ilustra el efecto de sombreado positivo (en blanco), que ocurre delante de los pilotes, y el efecto de sombreado negativo (en negro) que reduce la capacidad de soporte del suelo detrás de los pilotes.

Al superponer las figura 7.31 sobre la 7.30 encontramos un parecido significativo entre ambas, figura 7.32. Vemos que en la parte delantera se suman y predominan las sombras blancas o de efecto positivo; en la parte media blancos y negros se combinan y puede decirse que se nulifican; en la parte trasera predominan las sombras negras que indican una pérdida de confinamiento y resistencia del suelo.

Este sencillo esquema puede explicar porque los pilotes traseros sostienen menos carga que los pilotes delanteros.

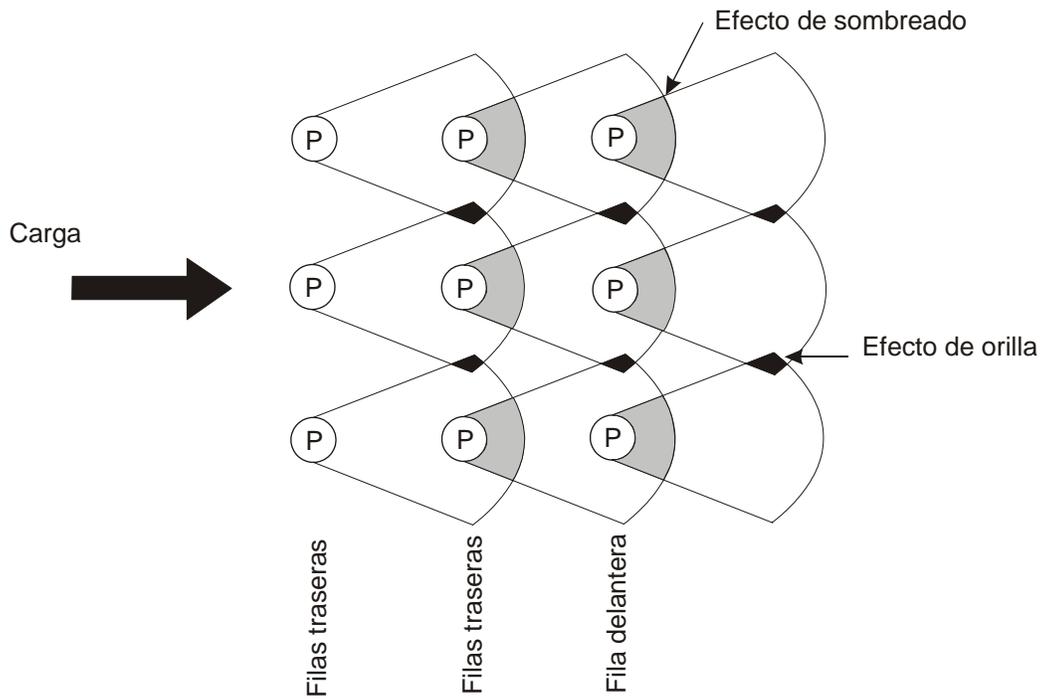


Figura 7.29 Efecto de sombreado y de orilla en un grupo de pilotes cargado lateralmente. (Snyder, 2004)

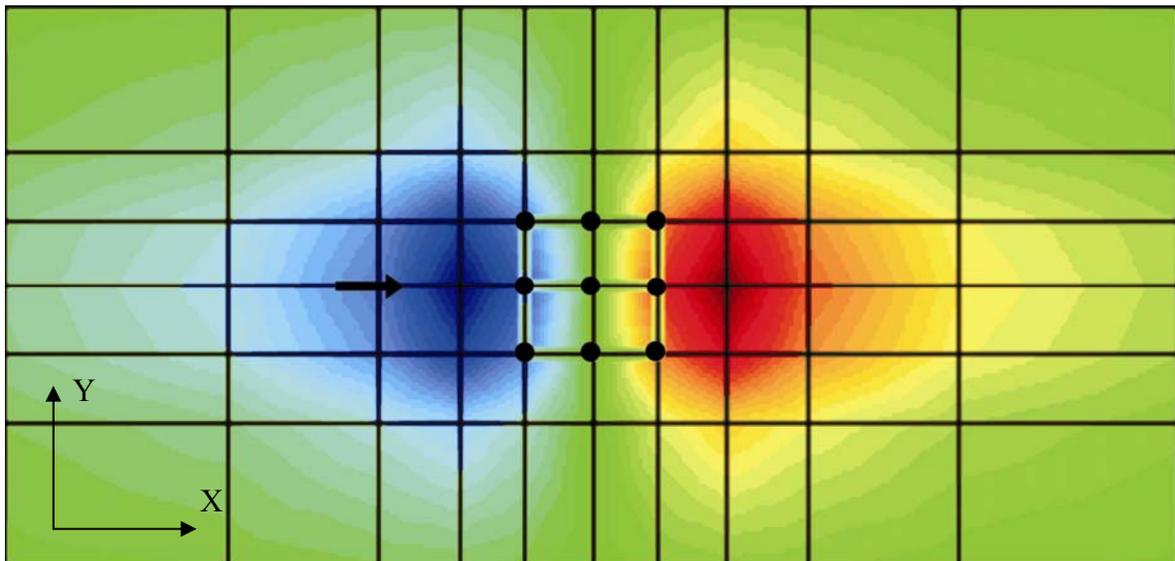


Figura 7.30 Vista en planta del grupo de 9 pilotes y los esfuerzos σ_{xx} en el suelo a una profundidad de 98 pulgadas (250 cm).

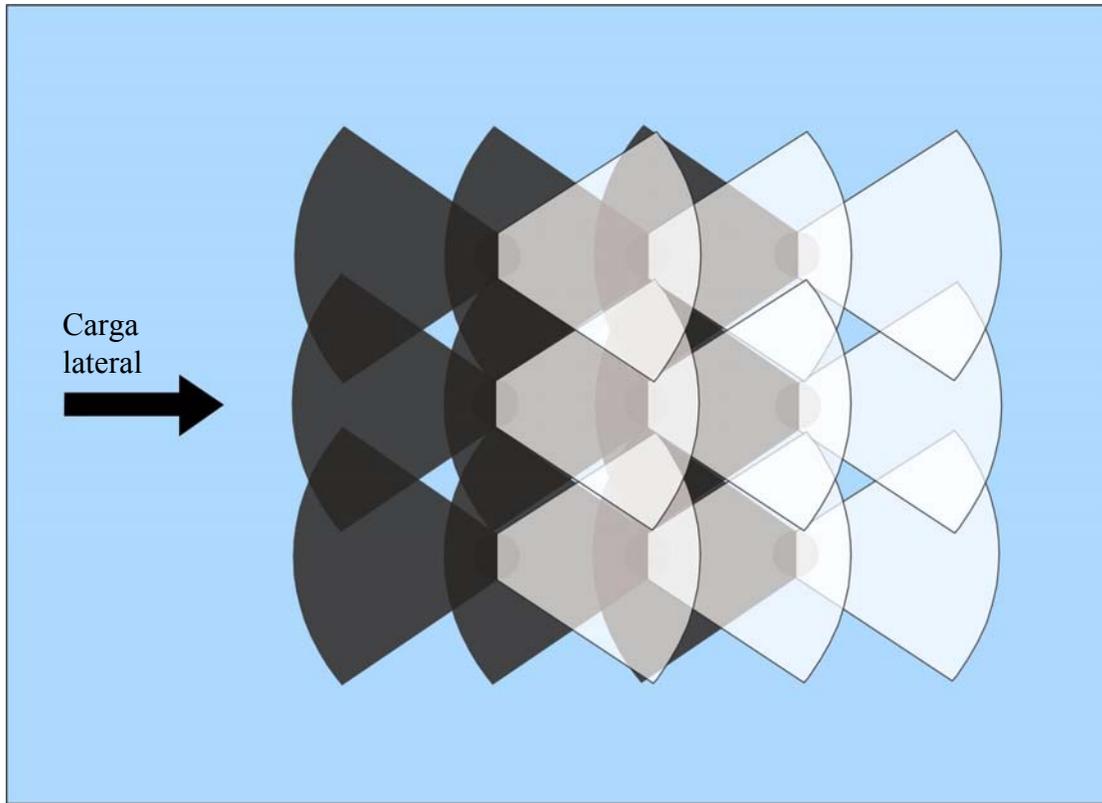


Figura 7.31 Efecto de sombreado positivo (blanco) y negativo (negro) en un grupo de pilotes.

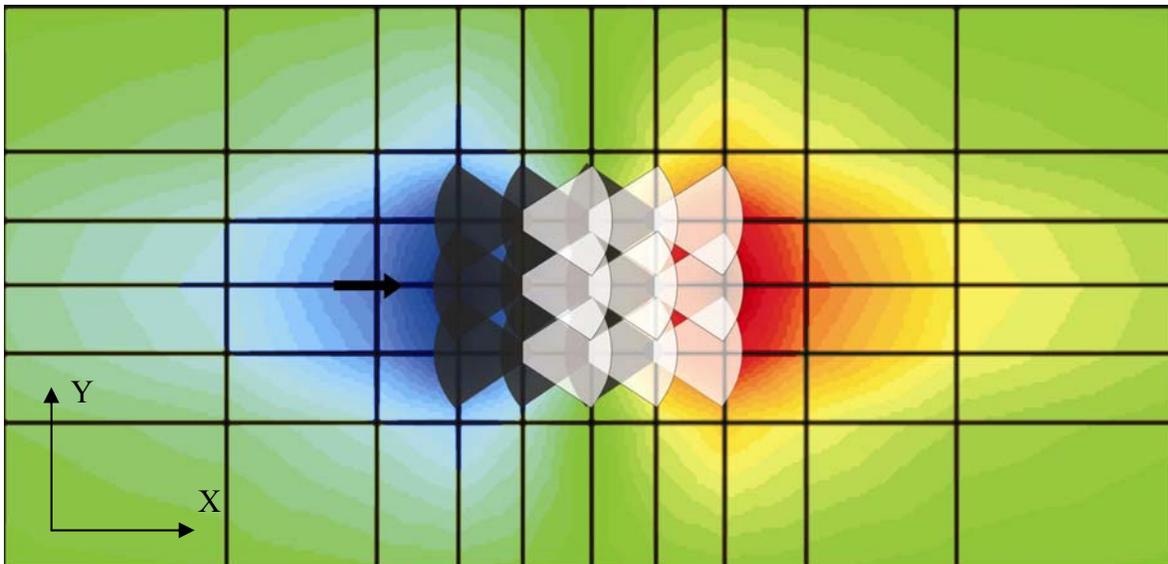


Figura 7.32 Esfuerzos σ_{xx} en el suelo y los efectos de sombreado positivo y negativo.

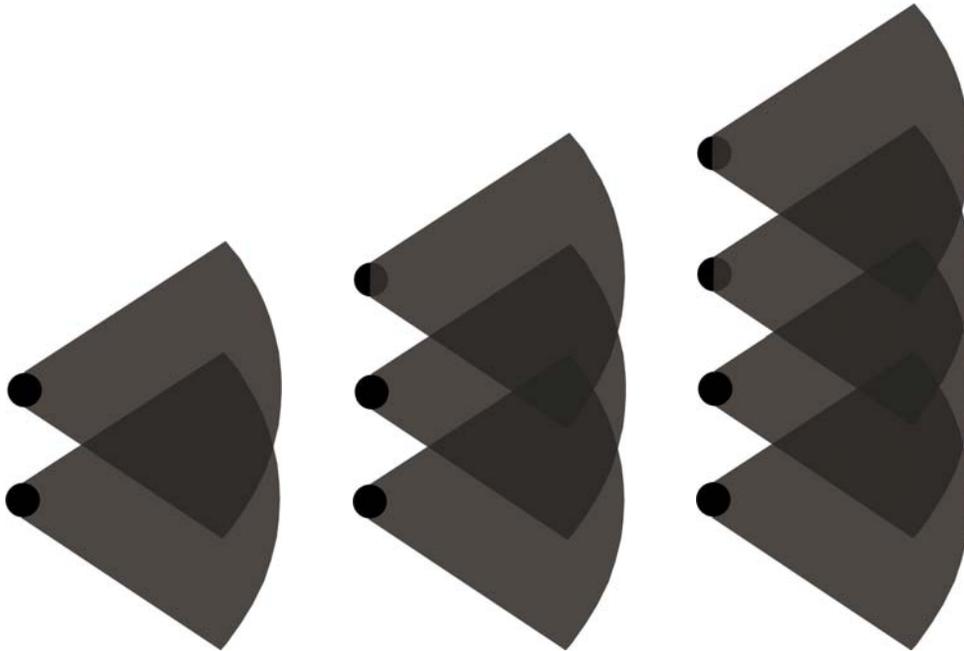


Figura 7.33 Traslape de sombreado en un grupo de pilotes

Si consideramos que los efectos de sombreado se traslapan en las orillas (efecto de orilla) entonces un pilote ubicado entre otros dos, todos de la misma fila, tendrá una mayor concentración de esfuerzos tanto enfrente como detrás de él.

Suponiendo que el tamaño de la influencia o sombra que provoca cada pilote es semejante al esquema mostrado en la figura 7.33, y que mientras más sombras se traslapen mayor es el esfuerzo, entonces un grupo con filas de dos elementos tendrá una concentración de esfuerzos menor que un grupo que tenga filas de tres elementos, pero un grupo con filas de cuatro elementos no tendrá concentraciones de esfuerzos mayores que el grupo con filas de tres. Por lo tanto, el grupo con filas de tres elementos tendrá desplazamientos muy semejantes al grupo con filas de 4 o más elementos. Esto explicaría porque grupos cuadrados con 9 pilotes o más tienen una eficiencia casi constante, como lo reporta Ilyas(2004).

Sin embargo, la afirmación anterior aparentemente depende de la separación entre pilotes. Es decir, si ahora consideramos que los pilotes están separados a una distancia tal que las sombras de los pilotes no se traslapen, entonces los grupos se desplazarán lateralmente en magnitud muy parecida sin importar el número de pilotes que tenga cada fila.

De los párrafos anteriores se desprende que hay que cuidar no solo la separación entre pilotes en la dirección paralela a la carga, sino también en la dirección perpendicular. Tradicionalmente los multiplicadores de curvas $p-y$ se han obtenido considerando principalmente la separación en dirección paralela a la carga. Por ejemplo, Rollins et al (1998) e Ilyas et al (2004) hicieron sus pruebas de carga con separaciones idénticas en

ambas direcciones, mientras que Snyder (2004) usa diferentes separaciones, de 3.3 diámetros en dirección perpendicular a la carga y 3.9 en dirección paralela, aunque los multiplicadores MP están referenciados a la separación en la segunda dirección.

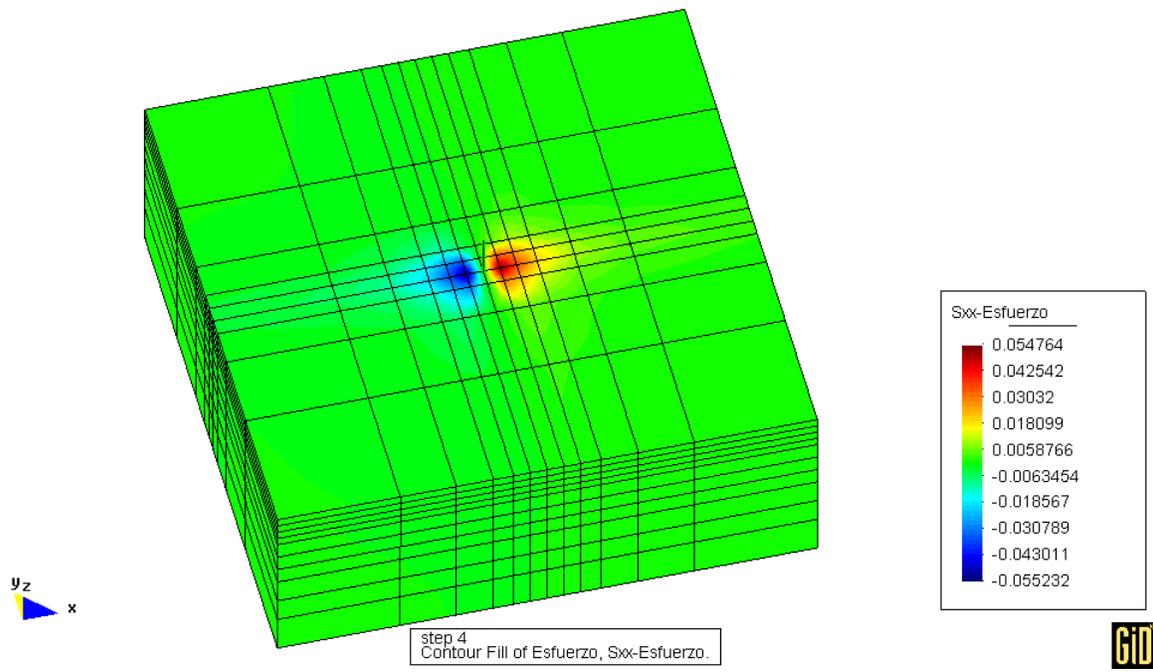
Como la mayoría de multiplicadores están basados en separaciones iguales en las dos direcciones, podrían resultar conservadores si se aplican a un grupo en que la separación sea mayor en la dirección perpendicular, o inseguros si la separación fuera menor.

En la figura 7.34 están representados los esfuerzos σ_{xx} de suelo alrededor de un pilote aislado y de grupos de 6, 9 y 16 pilotes. Las magnitudes máximas de σ_{xx} se presentan enfrente de las filas delanteras y a una profundidad de 98 pulgadas (250 cm, cerca de 7.7 diámetros). Ordenados de menor a mayor, los máximos esfuerzos están en el pilote aislado, en el grupo de 6 pilotes, en el grupo de 16 y finalmente en el grupo de 9 pilotes.

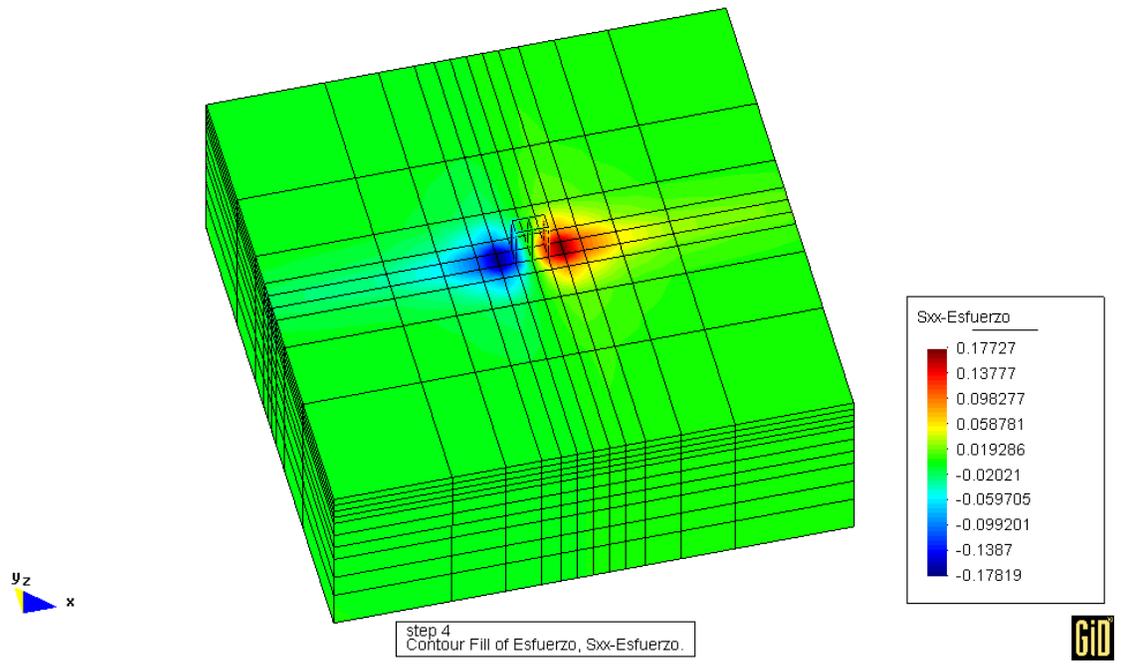
Este orden de menor a mayor es el mismo que el encontrado en el desplazamiento lateral de los grupos. Incluso se ve que los esfuerzos σ_{xx} en el grupo de 16 pilotes son menores que en el grupo de 9, y los desplazamientos del grupo de 16 también son menores que los del grupo de 9.

En esta parte se trata de remarcar que es más importante para la comprensión del tema entender qué pasa con el estado de esfuerzos del suelo que el número de pilotes o la separación que haya entre ellos. Aunque la separación influye en los esfuerzos, pues una mayor separación lo que provoca es que los esfuerzos tengan suficiente espacio para disiparse sin traslaparse con los que provoca el pilote vecino, son los esfuerzos los que en definitiva explican por qué hay mayor o menor desplazamiento. La separación, sin embargo es una ayuda para la práctica común de diseño de grupos de pilotes.

En resumen, el programa TEST ofrece un análisis lineal que, sobre todo a niveles de carga altos, se aleja demasiado de los resultados encontrados experimentalmente. Sin embargo, el programa es capaz de analizar los esfuerzos en el suelo y si se modifica para que pueda modelar adecuadamente la no linealidad del suelo, puede proporcionar mejores resultados y una visión más amplia para comprender el problema. El método de elementos finitos, además, puede modelar conjuntamente la cimentación de pilotes y la estructura que se encuentre sobre ellos, lo cual significaría un análisis integral del problema.

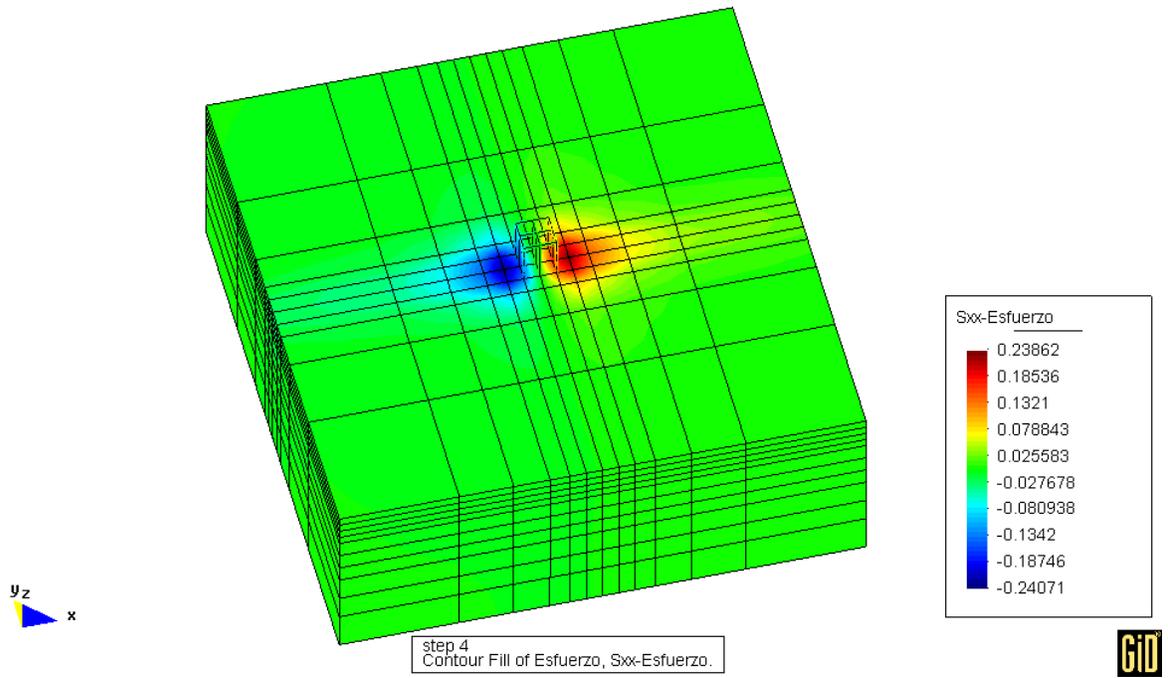


PILOTE AISLADO

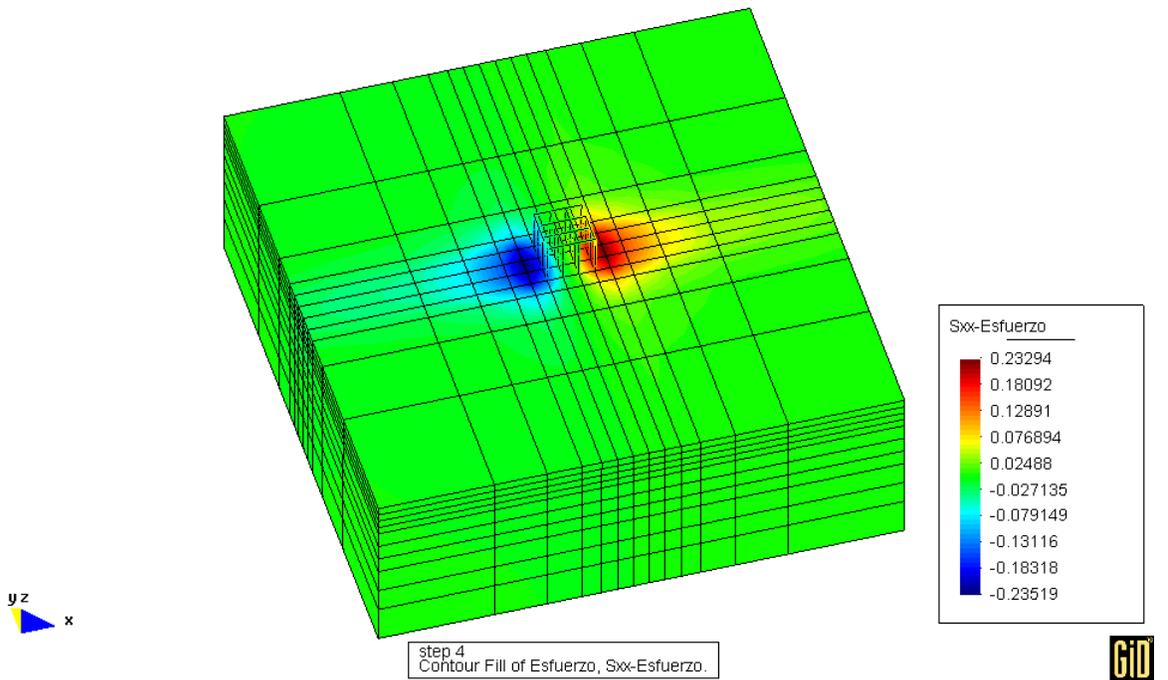


GRUPO DE 6 PILOTES

Figura 7.34 Esfuerzos σ_{xx} en el suelo a una profundidad de 98 pulgadas (250 cm), alrededor de pilote aislado, grupos de 6, 9 y 16 pilotes.



GRUPO DE 9 PILOTES



GRUPO DE 16 PILOTES

Figura 7.34 Continuación.

7.2.2 Ensaye de Snyder y Rollins, 2004.

Snyder y Rollins efectuaron una prueba de carga en un grupo de 15 pilotes, con cinco filas de tres pilotes cada una. Los datos del suelo y pilotes de acero son iguales a los del ensaye del pilote aislado visto anteriormente (7.1.2). Obtuvieron gráficas de desplazamiento y momento vs profundidad experimentales, así como una gráfica de multiplicadores MP vs separación adimensional entre pilotes.

En esta tesis se tomaron los datos de suelo y pilotes para analizarlos con el programa COM624P y luego se compararon con los resultados experimentales de la prueba. Se usaron inicialmente los multiplicadores propuestos por Snyder y luego se ajustaron para empatar las graficas calculadas con las experimentales.

7.2.2.1 Análisis con el método de curvas $p-y$.

Como ya se ha mencionado, la diferencia entre un análisis de grupo y un análisis de pilote aislado consiste en aplicar los multiplicadores MP a las curvas $p-y$. Tomando como base los valores de MP propuestos por Snyder se realizó el análisis del grupo de pilotes para cada una de las cinco filas.

Los multiplicadores empleados fueron 1.0, 0.81, 0.59, 0.71 y 0.59 para la primera a quinta filas, respectivamente. Luego los multiplicadores se modificaron para lograr un mejor ajuste entre las curvas calculadas y las experimentales.

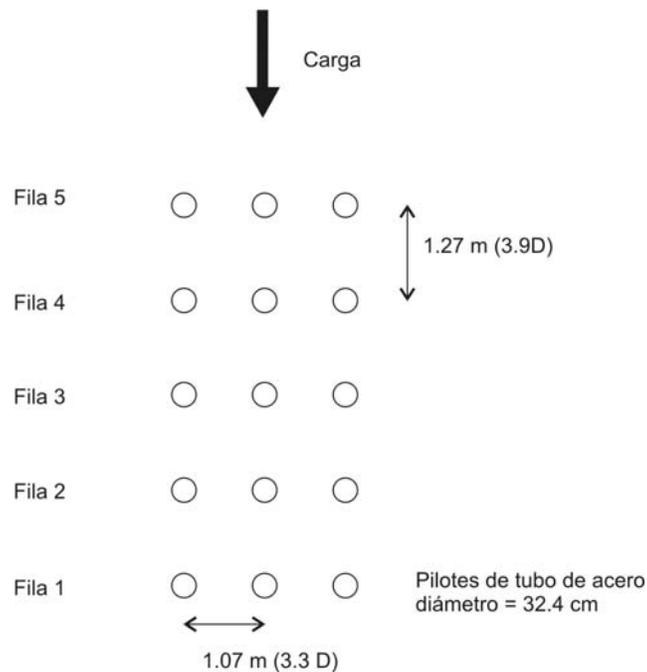


Figura 7.35 Grupo de pilotes de la prueba de Snyder (2004)

Los resultados de desplazamiento vs carga se ilustran en la figura 7.36. Snyder encontró que los pilotes de la primera fila tenían una respuesta prácticamente igual a un pilote aislado, lo que significa que para esa fila el multiplicador vale 1.0. No hubo necesidad de modificar el valor de MP pues, como se ve en la figura, el ajuste entre lo calculado y lo medido experimentalmente es muy bueno.

No sucedió lo mismo para las demás filas. En la segunda fila se usó un multiplicador con valor de 0.81 pero los desplazamientos fueron menores que los experimentales. El multiplicador se ajustó hasta un valor de 0.72 y así se logró el mejor ajuste entre resultados teóricos y experimentales. En las filas tres y cinco el multiplicador se cambió a un valor de 0.53, y en la fila cuatro a un valor de 0.6.

Considerando un desplazamiento de 40 mm, los cocientes de la carga promedio de la fila entre la carga de un pilote aislado fueron los siguientes: 1.0, 0.81, 0.67, 0.73 y 0.67 para las filas 1 a 5 respectivamente. Para un desplazamiento de 80 mm los cocientes fueron: 1.0, 0.84, 0.69, 0.74 y 0.69, también respectivamente. Es decir, la fila 1 tomó una carga promedio igual al 100% de lo que tomaría un pilote aislado; la fila 2 tomó el equivalente al 82%; las filas 3, 4 y 5 tomaron el equivalente a 68%, 73% y 68% de lo que tomaría un pilote aislado.

En general se obtuvo una buena concordancia entre lo calculado con COM624P y lo medido experimentalmente. Comparados con los multiplicadores encontrados por Snyder usando el programa GROUP, los que aquí se determinaron fueron menores en las filas segunda a quinta. Las discrepancias se deben probablemente a pequeñas diferencias en los datos del suelo y pilotes usados en esta tesis y los usados por Snyder, pues la base teórica de los programas computacionales es la misma.

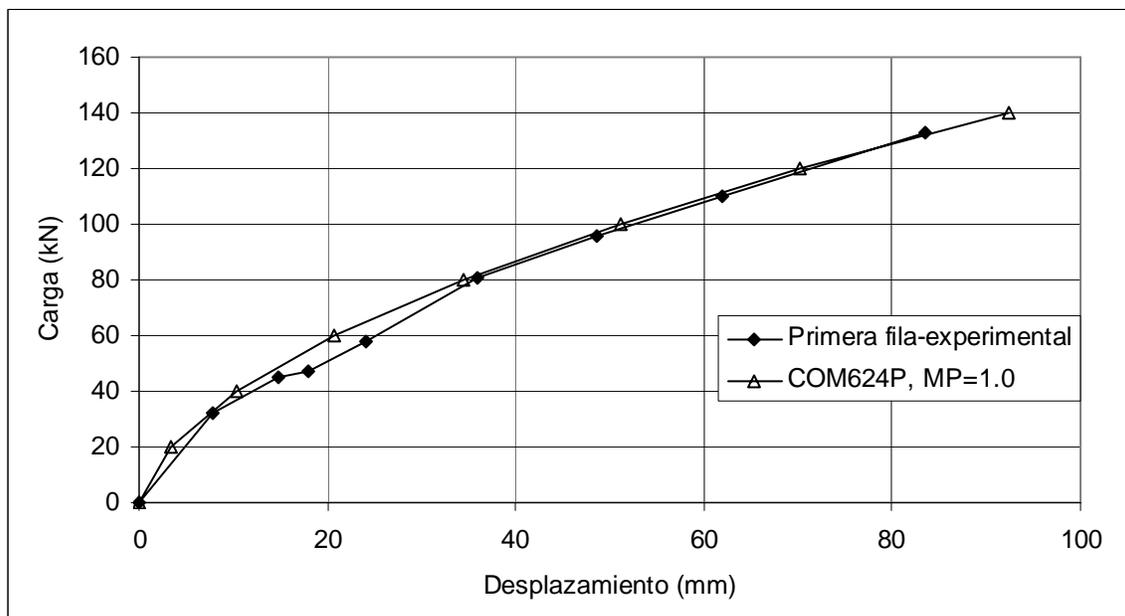


Figura 7.36 Desplazamiento vs carga para la prueba de Snyder

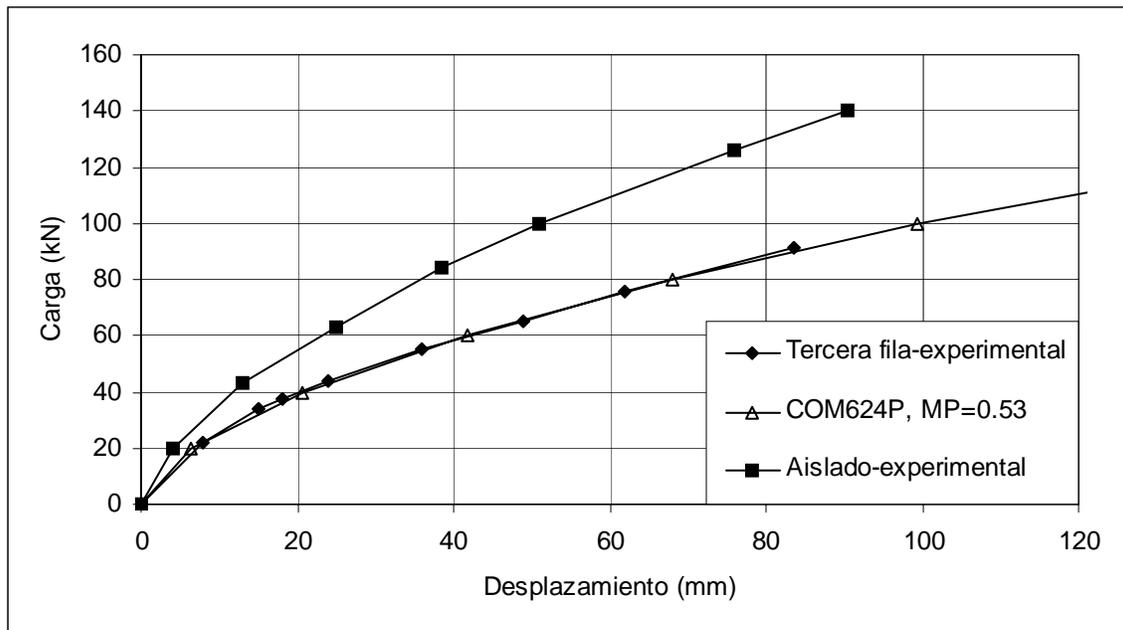
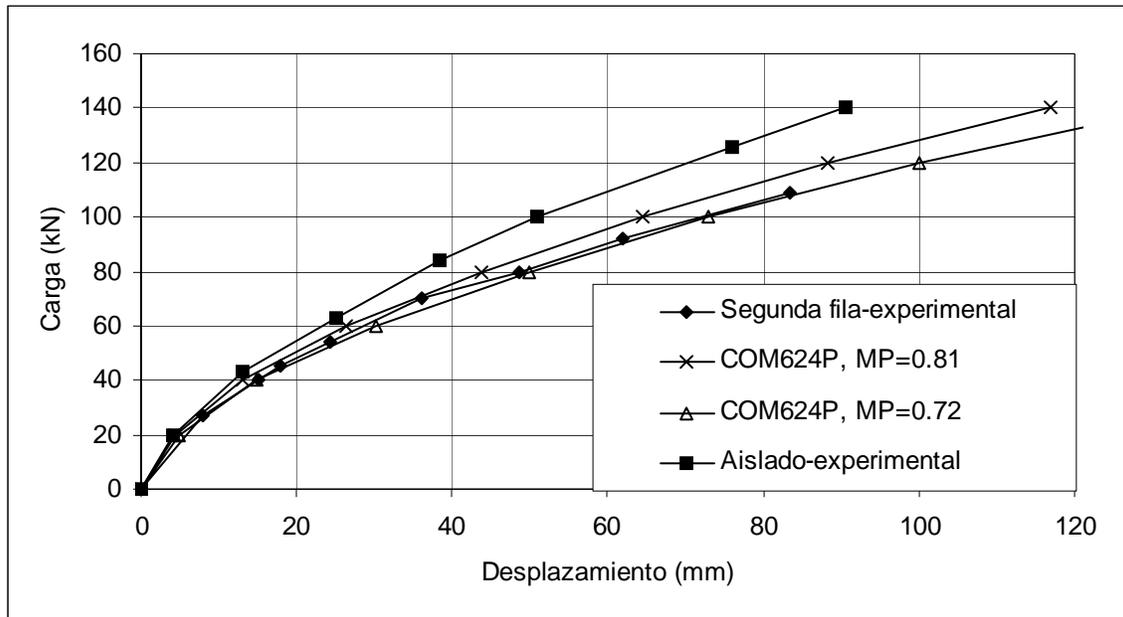


Figura 7.36 Continuación...

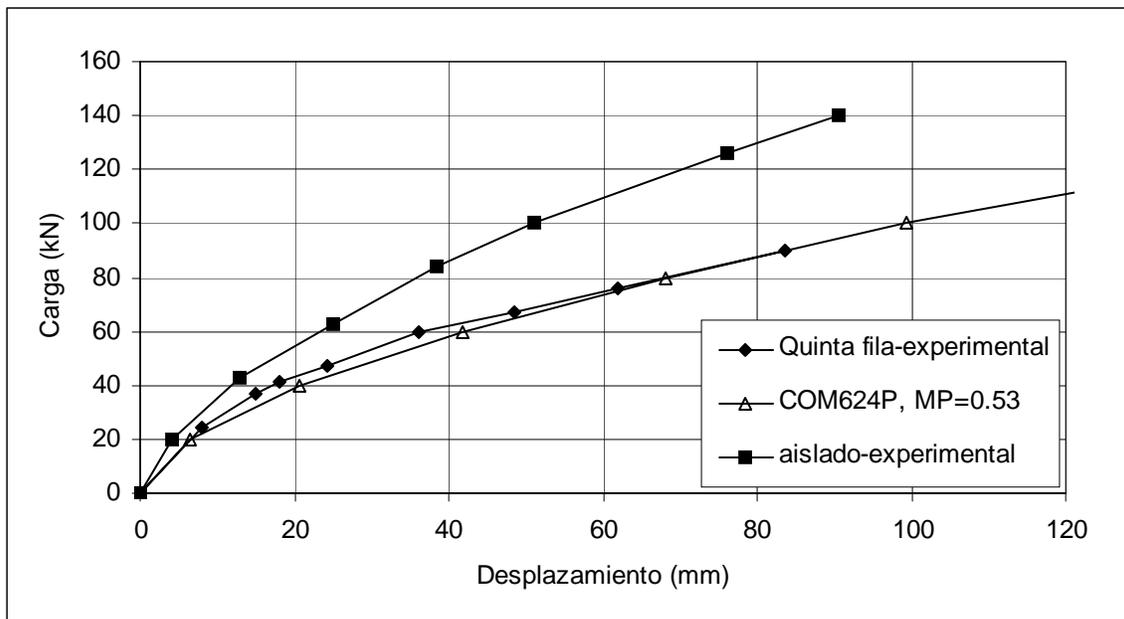
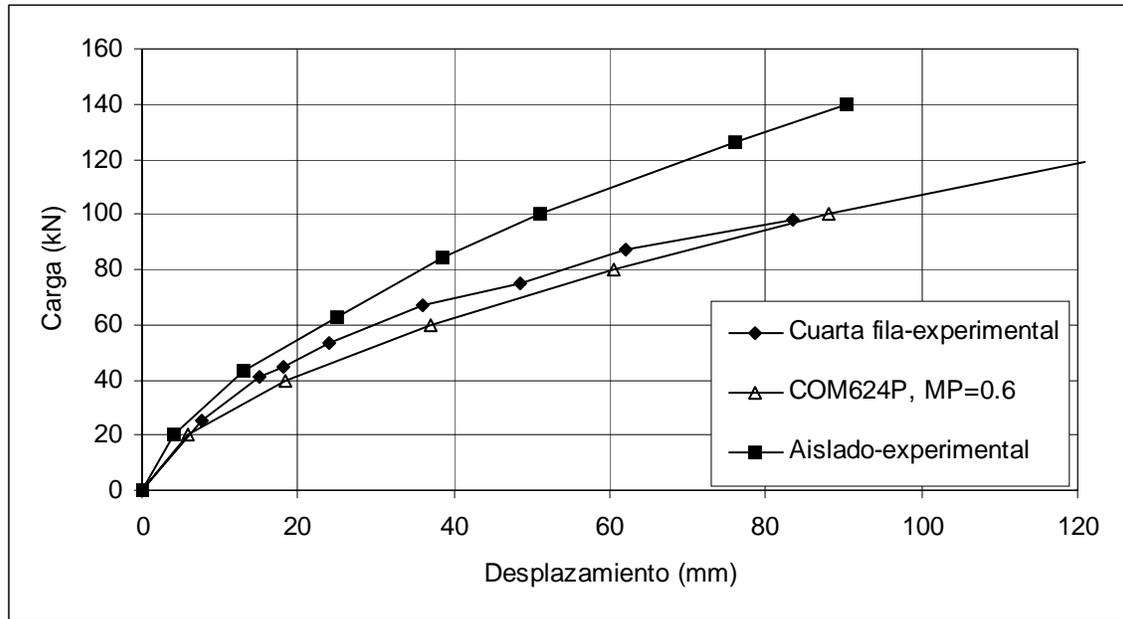


Figura 7.36 Continuación...

En la figura 7.37 se grafican las cargas vs momentos flexionantes de las filas 1 a 5, calculadas con los multiplicadores ajustados. La concordancia entre resultados teóricos y experimentales es buena en general, aunque para niveles de carga mayores los momentos teóricos son menores en un 15 % en la tercera fila, y en un 27% en la quinta fila. En todas las filas se aprecia que en el último tramo los momentos tienen un repunte y se alejan de los cálculos teóricos, hecho que podría deberse a la cercanía de la falla del suelo.

Nuevamente, se reitera que las cargas representadas en las gráficas no corresponden a la promedio del grupo, sino a la que soporta cada pilote individualmente. Como las filas tres y cinco soportan una menor carga, y esto es lo que tratan de representar los multiplicadores de menor valor aplicados a esas filas, las gráficas experimentales de estas filas llegan a una carga apenas arriba de 80 kN, mientras que en la fila delantera la carga llega hasta los 140 kN.

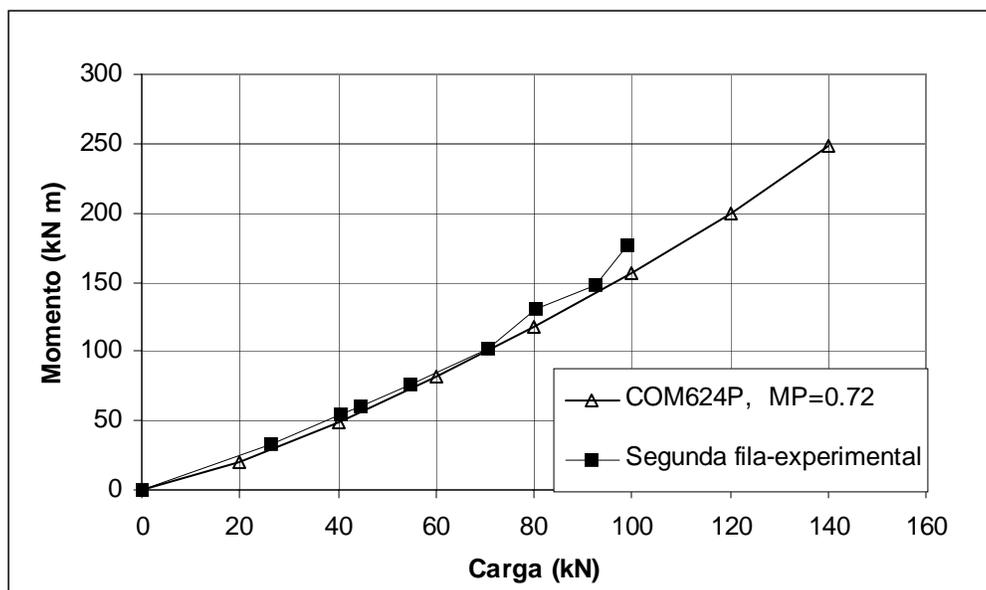
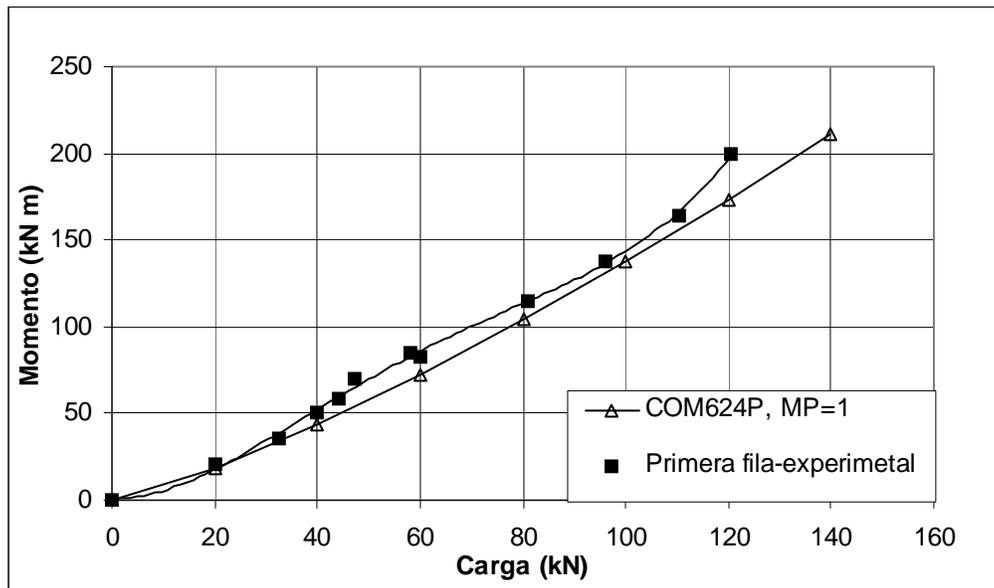


Figura 7.37 Carga promedio por fila vs momento máximo

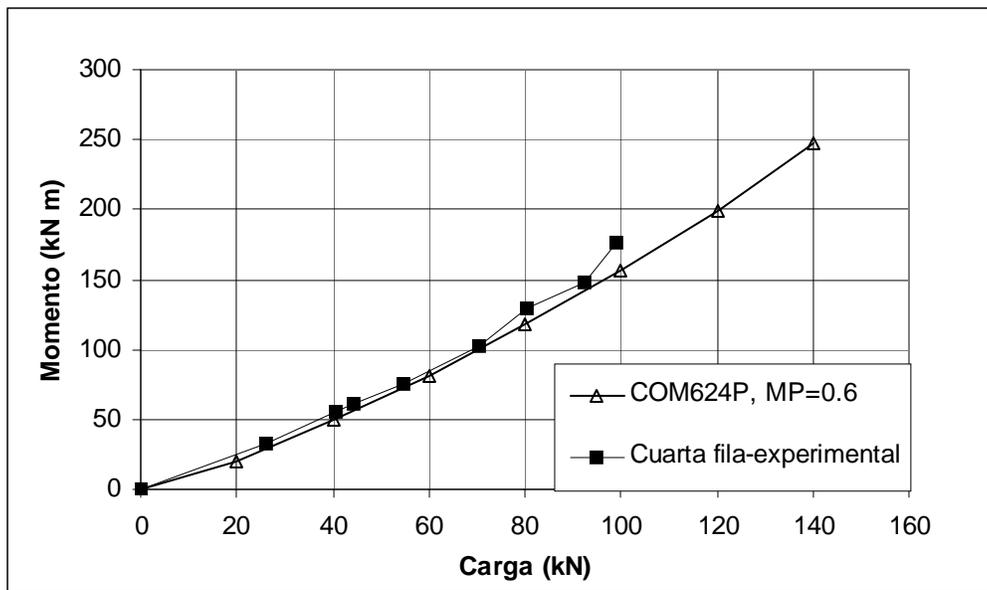
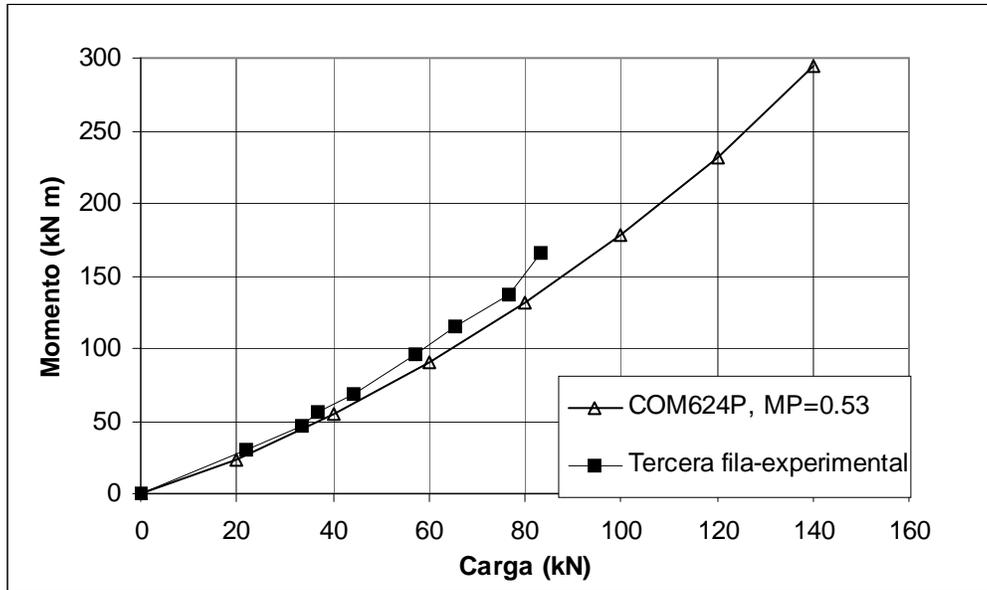


Figura 7.37 continuación...

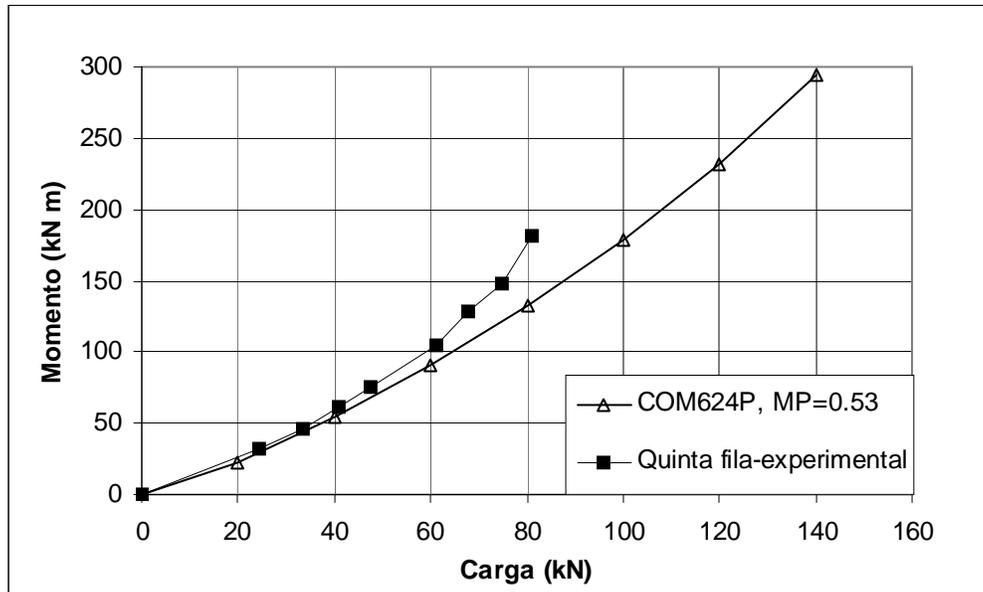


figura 7.37 Continuación...

Se menciona que la información disponible de pruebas de carga lateral a escala real es todavía muy limitada. A pesar de que recientemente se han hecho más pruebas, en los reportes no se detalla completamente la información del suelo o de los resultados. Como ya se ha visto, para poder aplicar los métodos de análisis a veces es necesario recurrir a correlaciones de las propiedades del suelo y en otros casos suponer valores de algunos parámetros.

7.3 Consideraciones sobre el análisis lineal.

Para explicar más claramente por qué un análisis lineal no modela adecuadamente el comportamiento del suelo sometido a grandes esfuerzos, se ha dibujado la figura 7.38. En esta figura se muestran esquemáticamente una curva esfuerzo vs deformación de una arcilla, y los módulos elásticos, o de deformación, para diferentes niveles de esfuerzo. Supongamos que para nuestros cálculos utilizamos un valor del módulo de elasticidad E_{calc} , que es un módulo secante para un nivel de esfuerzos igual a q_{calc} . También se asume que las cargas son aplicadas en una sola etapa.

Si cargamos el suelo hasta un nivel de esfuerzos $q_1 \ll q_{calc}$, el suelo tendrá una deformación real ε_{1r} . Sin embargo, con E_{calc} calcularemos una deformación ε_{1c} , que puede llegar a ser el doble de ε_{1r} .

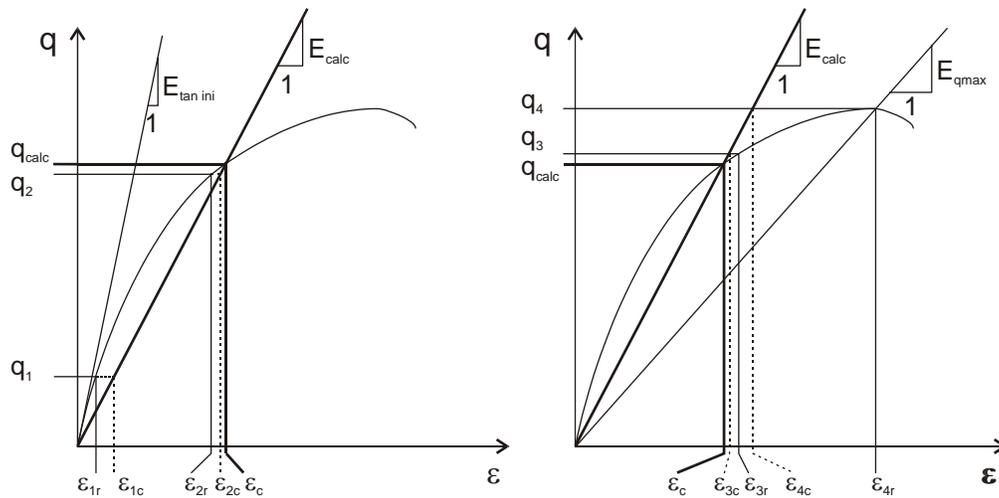


Figura 7.38 Comparación entre deformaciones reales y calculadas a diferentes niveles de carga.

Si ahora aplicamos una carga que produzca un nivel de esfuerzos en el suelo (q_2 o q_3) que sea ligeramente inferior o superior a q_{calc} , las deformaciones reales (ε_{2r} o ε_{3r}) serán aproximadamente las mismas que las deformaciones calculadas (ε_{2c} o ε_{3c}). Pero, si la carga aumenta, se producirá un esfuerzo en el suelo $q_4 \gg q_{\text{calc}}$, y la deformación real ε_{4r} puede ser mucho mayor que la calculada ε_{4c} .

Como se ve, las deformaciones calculadas sólo son cercanas a las reales cuando en el suelo se provocan esfuerzos en un rango alrededor del esfuerzo q_{calc} . Si el esfuerzo en el suelo es mucho mayor o mucho menor que q_{calc} , entonces las deformaciones calculadas serán mucho menores o mucho mayores, respectivamente.

El análisis de interacción de pilotes bajo carga lateral calcula los desplazamientos del pilote tomando en cuenta la rigidez del suelo y del pilote, las condiciones de frontera y la interacción con los pilotes vecinos. La rigidez del suelo a través del módulo de elasticidad E_s , y del pilote a través del módulo de elasticidad del material E_p y del momento de inercia de su sección transversal, I . Debe remarcarse que los desplazamientos en la cabeza del pilote no son una función exclusiva de la rigidez del suelo, sino que dependen de los demás factores antes mencionados.

Los análisis hechos con el programa de Bowles y TEST, que modelan linealmente el comportamiento del suelo por medio de E_{prog} , que intenta representar una rigidez media del suelo. Sin embargo, la rigidez del suelo varía de acuerdo con el nivel de carga y si consideramos un único E para todos los niveles de esfuerzo, tendremos diferencias entre lo calculado y lo real, como puede verse en las figuras 7.5 a 7.8, 7.16 y 7.18.

7.4 Grupos con pilotes inclinados

Con el fin de analizar las posibles ventajas y desventajas del uso de pilotes inclinados para soportar cargas laterales se realizó el análisis de un grupo de pilotes como el mostrado en la figura 7.39

Los pilotes de las filas delantera y trasera tuvieron ángulos de inclinación α de 15°, 30° y 45° con respecto a la vertical. Los pilotes de la fila media se mantuvieron verticales. El suelo y los pilotes de acero tuvieron las características de la prueba de Matlock de 1970 ya antes vistas.

Se encontró que la inclinación ayuda significativamente a reducir el desplazamiento lateral: para una misma carga promedio y ángulos α de inclinación de 0°, 15°, 30° y 45° se calcularon desplazamientos de 18.83, 13.01, 8.11 y 5.19 pulgadas respectivamente, figura 7.40. Como era de esperarse, una inclinación mayor produce un menor desplazamiento lateral, lo cual es muy deseable para la estabilidad de la superestructura, sin embargo, hay repercusiones en los elementos mecánicos de los pilotes.

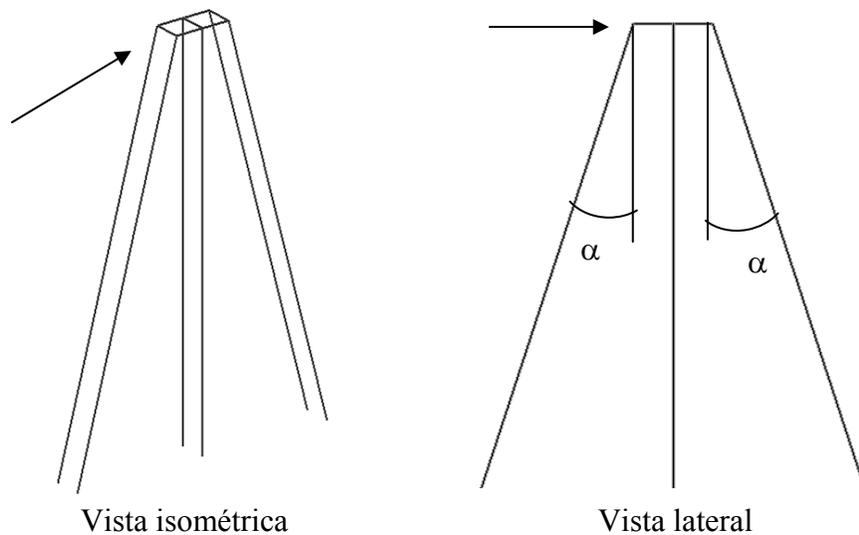


Figura 7.39 Grupo con pilotes inclinados

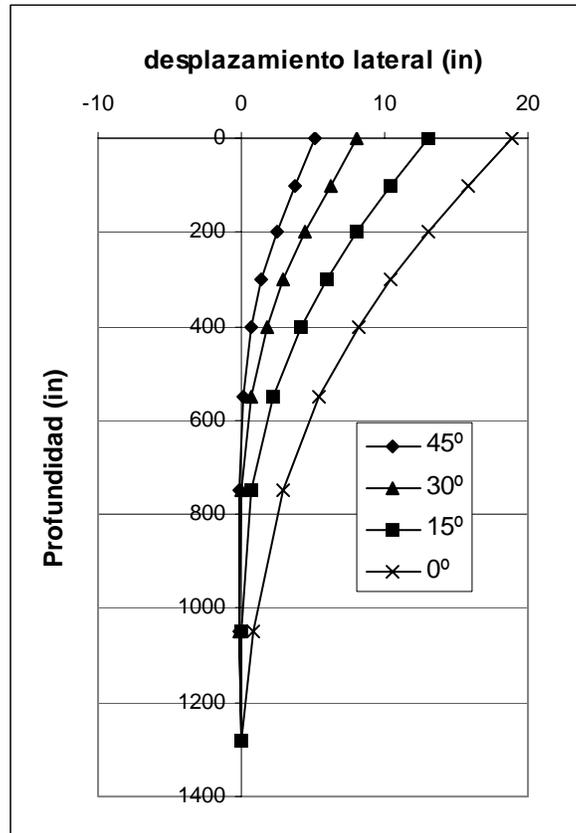


Figura 7.40 Variación del desplazamiento lateral con el ángulo de inclinación de los pilotes

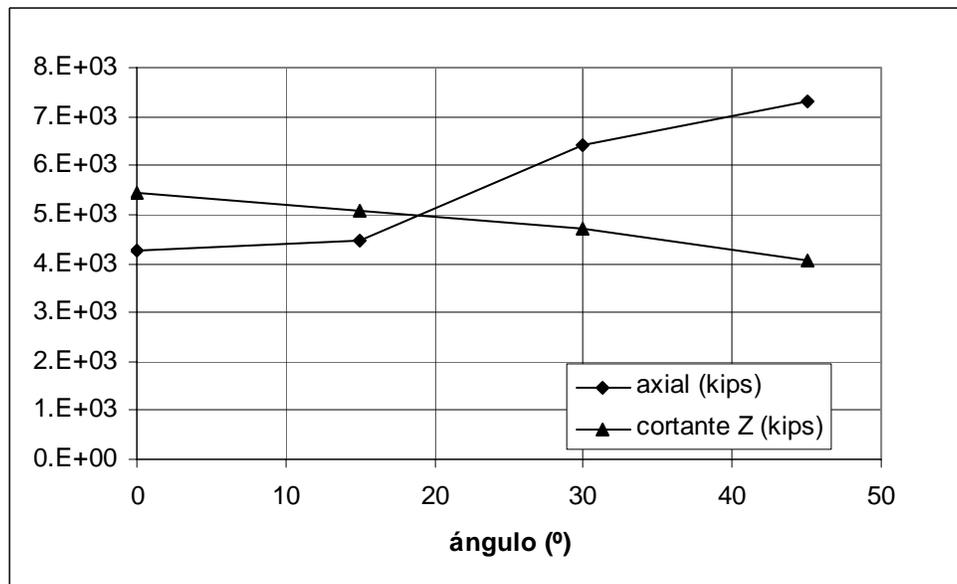


Figura 7.41 Variación de los elementos mecánicos con el ángulo de inclinación de los pilotes.

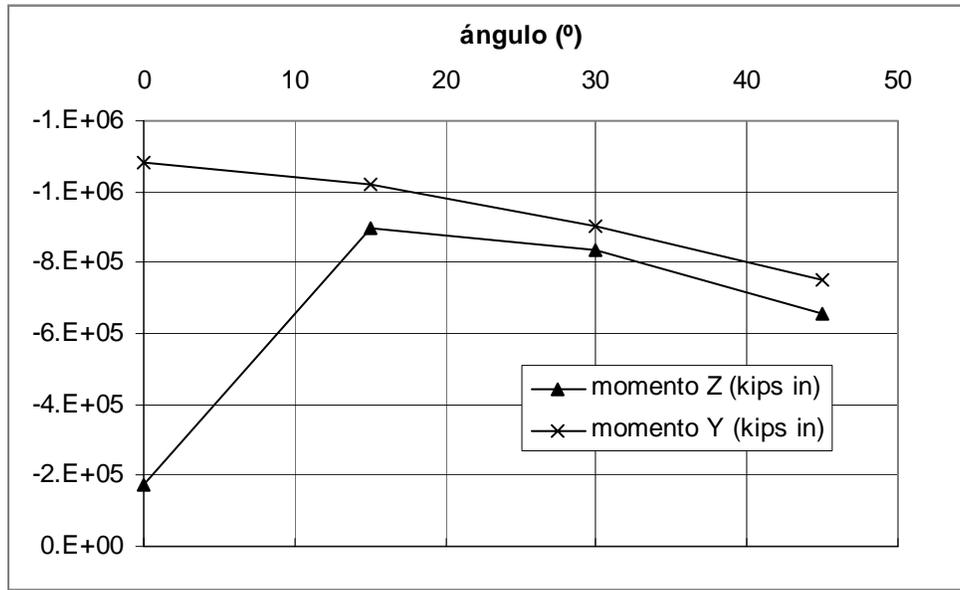


Figura 7.42 Variación de los momentos flexionantes alrededor de los ejes Z y Y con el ángulo de inclinación de los pilotes

En las figuras 7.41 a 7.43 están dibujados los valores máximos de la fuerza axial, el cortante en la dirección Z, momentos flexionantes alrededor de los ejes Y y Z, y la torsión de los pilotes, todos en función del ángulo de inclinación de los pilotes extremos.

Puede observarse que la fuerza axial aumenta de 4300 kips, cuando los pilotes están totalmente verticales, a 7300 kips, cuando tienen una inclinación de 45°. Aprovechando que gran parte de la carga lateral se transmite al suelo a través de la fuerza axial, anteriormente sólo se usaban pilotes inclinados para soportar las cargas laterales.

La fuerza cortante en dirección Z (dirección perpendicular al eje del pilote) disminuye de 5420 a 4050 kips para 0 y 45° respectivamente. El momento flexionante alrededor de Y también disminuye en valor absoluto de 1 085 000 a 753 000 kips in, para 0° y 45°.

Sin embargo, el momento flexionante alrededor de Z y la torsión asumen valores mínimos para inclinación de 0° y valores máximos para inclinación de 15°. El momento alrededor de Z vale 175 800 kips in cuando la inclinación es de 0° y luego pasa a un máximo de 895 400 kips in para una inclinación de 15°. Posteriormente disminuye a 653 000 kips in para una inclinación de 45°. La torsión vale cero cuando los pilotes están verticales y 2.68 kips in cuando la inclinación es de 15°, luego disminuye a 0.33 para una inclinación de 45°.

Aunque el cortante en Z y el momento alrededor de Y disminuyen al aumentar el ángulo de inclinación a 15°, no se compensa con el gran incremento que tienen el momento alrededor de Z y la torsión. Sucede distinto cuando la inclinación se aumenta hasta 45° pues el aumento del momento alrededor de Z y la torsión se compensan con la disminución de los otros elementos mecánicos y además el desplazamiento lateral es notablemente menor (menos de la mitad de cuando los pilotes son verticales).

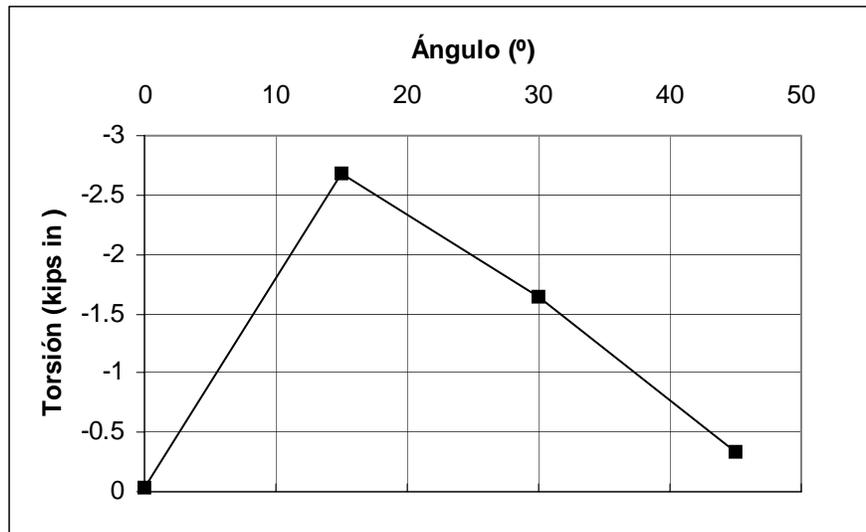


Figura 7.43 Variación de la torsión con el ángulo de inclinación de los pilotes.

Puede decirse que si se piensa inclinar los pilotes, es mejor inclinarlos un ángulo cercano a los 45° para que los desplazamientos se reduzcan ampliamente y además los pilotes no se vean sometidos a esfuerzos tan grandes. Un ángulo de inclinación alrededor de los 15° no mejora en forma importante los desplazamientos laterales y si genera elementos mecánicos desfavorables.

Los pilotes triangulares estarían particularmente afectados por estos elementos mecánicos adicionales, ya que por su geometría, tienen un momento de inercia I variable según el eje de referencia, y hay una dirección en que I es muy bajo.

Capítulo 8

Conclusiones

8.1 Conclusiones

1. **Programa de Bowles.** El programa elaborado por Bowles (basado en el método de la viga apoyada sobre un medio elástico) hace una modelación elástica-lineal del pilote cargado lateralmente. Debido a esta característica, el programa sólo se acerca satisfactoriamente a los desplazamientos experimentales en un estrecho margen de cargas. A niveles de carga bajos el desplazamiento experimental puede ser incluso la mitad del calculado. Por el contrario, a niveles de carga altos, el desplazamiento experimental llega a ser hasta 50% mayor que el desplazamiento calculado.

Por su parte, los momentos flexionantes máximos calculados se acercan satisfactoriamente a los experimentales en un rango más amplio. Sin embargo, a niveles de carga bajos, el programa de Bowles sobrestima hasta en un 75% los momentos flexionantes máximos, mientras que a niveles de carga altos, los momentos máximos calculados son alrededor de 35% menores que los experimentales. Una seria desventaja de la modelación lineal del suelo es que no se puede determinar el momento en que el conjunto pilote-suelo se acerca a la falla.

Se encontró que la forma de los perfiles de momentos vs profundidad calculados es muy distinta de los experimentales: los máximos momentos se presentan a la misma profundidad aproximadamente, pero más abajo los perfiles experimentales pasan rápidamente de momentos positivos a negativos y luego tienden a cero, mientras que los perfiles calculados pasan suavemente del momento máximo a momento nulo, sin presentar momentos negativos. Esta diferencia, en la que el momento calculado es incluso más de 100% mayor que el experimental, es importante al considerar el refuerzo de acero de refuerzo contra la flexión.

Este método sólo analiza pilotes aislados, pero tiene la ventaja de ser fácil y rápido en su manejo. La modificación al programa para manejar un módulo de reacción no lineal k_s permite modelar más adecuadamente el comportamiento del pilote. Sin embargo, falta mejorar y validar el procedimiento de cálculo del k_s no lineal de suelos, basados en pruebas de laboratorio y de campo.

2. **TEST.** El Programa TEST, basado en el Método de elementos finitos, también hace una modelación lineal del problema de pilotes cargados lateralmente. En cuanto al comportamiento de pilotes aislados, las conclusiones son básicamente las mismas para TEST y para el programa de Bowles. Además, se encontró que reducir el

módulo de elasticidad lateral en la zona superficial del suelo, calculado conforme al método aquí propuesto, es mejor que usar un módulo en dirección vertical y sin reducción. No obstante, mantiene las desventajas del análisis lineal.

Los resultados del análisis de grupos de pilotes obtenidos con TEST indican que el programa modela parcialmente la interacción pilote-suelo-pilote, esto se refleja en los desplazamientos laterales y los momentos flexionantes, que son mayores en pilotes de grupo que en pilotes aislados, aunque en menor proporción que lo calculado por el método de curvas p - y . Por otra parte, los resultados de TEST son prácticamente los mismos para las filas trasera, media y delantera, y no reflejan la diferencia en el comportamiento de las filas encontrado experimentalmente.

También se encontró que el grupo de 16 pilotes tuvo una eficiencia ligeramente mayor que el grupo de 9 pilotes, tal como lo identificó experimentalmente en modelos de grupos de pilotes Ilyas et al.

Además, los mayores desplazamientos laterales y momentos flexionantes se presentan cuando el suelo tiene los mayores esfuerzos σ_{xx} . Con base en el aumento de los esfuerzos σ_{xx} enfrente de los pilotes y la disminución atrás de los pilotes, se explica cómo el comportamiento de los grupos de pilotes depende de los esfuerzos generados en el suelo, relacionados con la distribución, separación y número de pilotes.

El programa TEST no proporciona resultados numéricos satisfactorios debido a la linealidad con que trata el problema. Sin embargo, describe cualitativamente un comportamiento general de mayores desplazamientos laterales y momentos flexionantes, semejante al comportamiento experimental. Admite la modelación del grupo entero de pilotes y los diferentes estratos del suelo. Además, permite conocer el estado de esfuerzos del suelo con el que es posible explicar cualitativamente por qué a mayor separación entre pilotes se consigue mayor eficiencia del grupo, o por qué la eficiencia se mantiene prácticamente constante en grupos de 9 o más pilotes, cuando la separación se mantiene constante.

Sin duda, para mejorar los resultados del método es necesario implementar un modelo del suelo que tome en cuenta la no linealidad de la deformación con respecto a la carga.

Tomando en cuenta que para encontrar la mejor combinación de pilotes y bajo distintos niveles de carga es necesario ejecutar varias veces el programa, otra desventaja del método es la gran cantidad de tiempo que toma la preparación y modificación de los datos del modelo, y sobre todo, el tiempo de ejecución en la computadora.

3. Las pruebas de carga a escala real demuestran que los desplazamientos laterales y momentos flexionantes dependen de la rigidez a la flexión del propio pilote, del comportamiento no lineal del suelo, de las condiciones de frontera, de la interacción

con los pilotes vecinos, y de la magnitud de la carga lateral. Estos factores pueden modelarse aceptablemente en forma lineal, excepto el suelo. Análisis lineales, como el realizado por el programa de Bowles y TEST, que modelan el suelo por medio de un parámetro que representa la rigidez promedio del suelo y no dependen del nivel de carga o deformación, sólo proporcionarían resultados aceptables en un rango de cargas, y en general, malos resultados para cargas muy bajas o muy altas. Debido al comportamiento no lineal del suelo, los desplazamientos y momentos no pueden ser una función lineal de la carga aplicada, contrario a lo que muestran los resultados de análisis lineales del programa de Bowles y TEST.

4. **Método de curvas p - y .** De los tres métodos usados en esta tesis, el método de las curvas p - y fue el que proporcionó los mejores resultados. En los pilotes aislados este método calculó perfiles de desplazamiento que empataban muy bien con los experimentos. En los perfiles de momentos flexionantes se encontró que la diferencia máxima fue de 12%.

De acuerdo con el primer análisis de grupo (con datos del ensaye de Matlock) la fila frontal toma una carga promedio equivalente al 70% de un pilote aislado, y las filas traseras un equivalente al 53%. Esto, de acuerdo con los multiplicadores MP de 0.6 y 0.4 para las filas delantera y trasera, respectivamente.

En el segundo análisis, (con datos del ensaye de Snyder) la fila frontal toma 100% de lo que tomaría un pilote aislado; la fila 2 tomó el equivalente al 82%; las filas 3, 4 y 5 tomaron el equivalente a 68%, 73% y 68%. En este análisis se usaron los multiplicadores 1.0, 0.72, 0.53, 0.6 y 0.53.

Como puede verse, el método de curvas p - y también modela adecuadamente los grupos de pilotes si se eligen adecuadamente los multiplicadores MP. El problema es que se han propuesto varias graficas de multiplicadores que tienen diferencias importantes entre sí y sólo una mayor cantidad de pruebas de carga a escala real nos pueden ayudar a discernir cuál es la más adecuada.

Los perfiles de momentos para pilotes de grupo tuvieron valores máximos mayores que los de pilotes aislados. Además, para las filas traseras, el máximo momento se presentó a una profundidad mayor que en la fila delantera. Estos resultados concuerdan perfectamente con lo visto experimentalmente.

Es importante mencionar que los buenos resultados obtenidos con el método de curvas p - y dependen en gran medida de que datos como J , γ' , S_u y ϵ_{50} sean obtenidos de pruebas de laboratorio muy bien elaboradas. Los datos de tablas que se proporcionan en los métodos para construir curvas p - y sólo son una guía y no es recomendable usarlos como sustitutos de las pruebas de laboratorio. El método de curvas p - y empleando un programa computacional como el COM624P es fácil y rápido de usar.

Adicionalmente, debe mencionarse que con el programa TEST se demostró que el comportamiento del grupo depende del estado de esfuerzos que se provoque en el suelo, y éste está relacionado con la distribución y separación entre pilotes, no sólo en sentido paralelo a la dirección de la carga sino también en la dirección perpendicular. No obstante, las gráficas de multiplicadores MP se han construido mayoritariamente a partir de pruebas de carga en las que la separación entre pilotes es la misma en las dos direcciones. Se concluye que los multiplicadores así obtenidos y sin tomar en cuenta explícitamente la separación en la dirección perpendicular a la carga pueden resultar conservadores si $S' > S$, o riesgosos, si $S' < S$, figura 8.1.

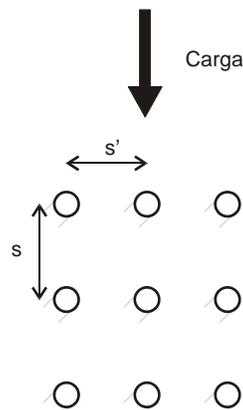


Figura 8.1

5. Las fórmulas teóricas que consideran el suelo como un medio elástico lineal tienen el defecto de ofrecer resultados lineales de un problema no lineal. Sin embargo, con parámetros obtenidos de pruebas de suelo se pueden aplicar y dar resultados aproximados de forma rápida y sencilla antes de aplicar un método más sofisticado.

Apéndice A

Ejemplo ilustrativo del Método de Elementos Finitos

En este ejemplo se hace el análisis de una viga simplemente apoyada con una carga que varia linealmente; se aplica el método de elementos finitos y se obtienen los desplazamientos y giros en los nodos. El modelo de la viga se observa en la figura FE.1.

La teoría de vigas dice que la sección transversal permanece plana aún después de que la viga es flexionada. Al asumir lo anterior y además que el eje x coincide con el eje neutral podemos representar los desplazamientos axiales en función de la pendiente de la viga:

$$u(x, z) = -z \frac{dw}{dx} \quad \text{E.1}$$

La deformación unitaria axial y el esfuerzo axial quedan definidos por:

$$\varepsilon(x, z) = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} \quad \text{E.2}$$

$$\sigma(x, z) = E\varepsilon = -Ez \frac{d^2w}{dx^2} \quad \text{E.3}$$

Sin embargo, en el análisis de vigas lo que más nos importa determinar en cualquier sección es el desplazamiento vertical, w , la pendiente, θ , la curvatura, w'' , y el momento flexionante, M .

$$w(x) = \text{desplazamiento vertical} \quad \text{E.4}$$

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \text{pendiente} \quad \text{E.5}$$

$$w''(x) = \frac{d^2w}{dx^2} = \text{curvatura} \quad \text{E.6}$$

$$M(x) = - \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma(x, z) dz = EI w''(x) = \text{momento flexionante} \quad \text{E.7}$$

Por otra parte, los nodos extremos de cada elemento de la viga tienen dos grados de libertad: un desplazamiento, w , y una rotación o giro, $\theta = dw/dx$. Para definir los cuatro grados de libertad, el vector de desplazamientos nodales de un elemento queda definido como sigue (ver figura FE.1 c):

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} w(x=0) \\ \theta(x=0) \\ w(x=l) \\ \theta(x=l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{E.8}$$

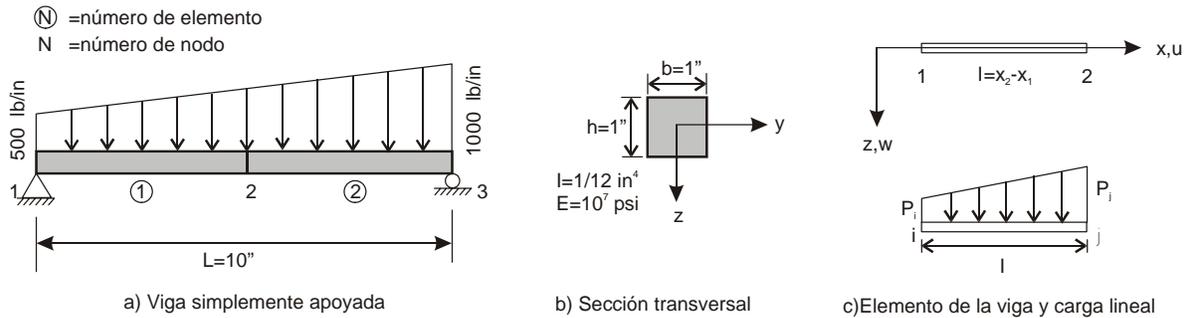


Figura FE.1 Viga simplemente apoyada del ejemplo ilustrativo.

Para este ejemplo se utilizará el sistema de coordenadas naturales definido en la figura FE.2. La relación entre las coordenadas naturales L_1 y L_2 de cualquier punto con la coordenada cartesiana x se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} \quad \text{E.9}$$

donde: $L_1 = 1_1/1$ y $L_2 = 1_2/1$

Al invertir la matriz obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} \quad \text{E.10}$$

Además, se definen la reglas de derivación e integración:

$$\frac{d}{dx} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial L_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_i} = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial}{\partial L_2} - \frac{\partial}{\partial L_1} \right) \quad \text{E.11}$$

$$\int_l L_1^p L_2^q dl = \frac{p! q!}{(p+q+1)!} l \quad \text{E.12}$$

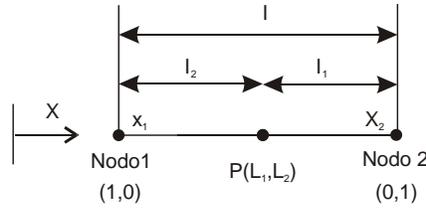


Figura FE.2 Coordenadas naturales para elemento lineal

Si se utilizara un modelo de desplazamiento como el de la ecuación 5.12a, el polinomio tendría que ser de tercer grado para cumplir con la condición de tener un número de coordenadas generales igual a los grados de libertad externos. De manera análoga, se utilizará un modelo cúbico de interpolación para nuestro sistema de coordenadas naturales, el cual, además, proporciona la solución exacta del problema. El modelo es:

$$\{w\} = [L_1^2(3-2L_1), L_1^2 L_2, L_2^2(3-2L_2), L_1 L_2^2] \{q\} \quad E.13$$

$$\{w\} = [N] \{q\}$$

$$[N] = [L_1^2(3-2L_1), L_1^2 L_2, L_2^2(3-2L_2), L_1 L_2^2] \quad E.14$$

La curvatura se obtiene derivando dos veces la ecuación E.13 con respecto a x utilizando la regla E.11:

$$\{w''\} = \frac{1}{l^2} [(6-12L_1), 1(2L_2-4L_1), (6-12L_2), 1(4L_2-2L_1)] \{q\}$$

$$\{w''\} = [B] \{q\} \quad E.15$$

$$[B] = \frac{1}{l^2} [(6-12L_1), 1(2L_2-4L_1), (6-12L_2), 1(4L_2-2L_1)] \quad E.16$$

La densidad de energía de deformación estará, en este ejemplo, en función de la curvatura, w'' , y del momento flexionante, M (ecuaciones E.6 y E.7).

$$dU = \frac{1}{2} \{w''\}^T \{M\} dl = \frac{1}{2} \{w''\}^T [C] \{w''\} dl$$

$$dU = \frac{1}{2} \{q\}^T [B]^T [C] [B] \{q\}$$

$$[C] = EI$$

La energía potencial total queda igual a la ecuación 5.26 y por lo tanto la matriz de rigidez y el vector de cargas quedan también igual a las ecuaciones 5.28b y 5.28c.

$$[k] = \iiint_V [B]^T [C] [B] dV \quad 4.28b$$

$$\{Q\} = \iiint_V [N]^T \{\bar{X}\} dV - \iint_{S_1} [N]^T \{\bar{T}\} dS_1 \quad 4.28c$$

Al sustituir E.16 en 5.28b y tomando en cuenta que $[C] = EI$:

$$[k] = \frac{EI}{l^4} \int_l \begin{bmatrix} 6-12L_1 \\ l(2L_2-4L_1) \\ 6-12L_2 \\ l(4L_2-2L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6-12L_1 & l(2L_2-4L_1) & 6-12L_2 & l(4L_2-2L_1) \end{bmatrix} dl$$

$$[k] = \frac{EI}{l^4} \int_l \begin{bmatrix} (6-12L_1)^2 & l(6-12L_1)(2L_2-4L_1) & (6-12L_1)(6-12L_2) & l(6-12L_1)(4L_2-2L_1) \\ \text{simétrica} & l^2(2L_2-4L_1)^2 & l(2L_2-4L_1)(6-12L_2) & l^2(2L_2-4L_1)(4L_2-2L_1) \\ & & (6-12L_2)^2 & l(6-12L_2)(4L_2-2L_1) \\ & & & l^2(4L_2-2L_1)^2 \end{bmatrix} dl$$

Para ejemplificar se hace la integración del elemento (1,2) con base en la regla definida en E.12.

$$\int_l l(6-12L_1)(2L_2-4L_1) dl = \int_l l 12L_2 dl - \int_l l 24L_1 dl - \int_l l 24L_2L_1 dl + \int_l l 48L_1^2 dl =$$

$$= l^2 \left[12 \frac{0! 1!}{2!} - 24 \frac{1! 0!}{2!} - 24 \frac{1! 1!}{3!} + 48 \frac{2! 0!}{3!} \right] = 6l^2$$

Los demás elementos se integran de igual forma y se forma la matriz de rigidez $[k]$:

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{sim.} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad \text{E.17}$$

Para el vector $\{Q\}$ se propone representar la variación lineal de la carga en términos de las cargas en los nodos y a través de una interpolación lineal:

$$p = p_1L_1 + p_2L_2 = [L_1 \quad L_2] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad \text{E.18}$$

Se desprecian las fuerzas de cuerpo \bar{x} y solamente se considera la carga externa p . El vector de cargas $\{Q\}$ queda, según 5.28c:

$$\{Q\} = b \int_l (p_1L_1 + p_2L_2) [N]^T dl = b \int_l \begin{Bmatrix} p_1L_1^3(3-2L_1) + p_2L_2L_1^2(3-2L_1) \\ p_1L_1^3L_2l + p_2L_1^2L_2^2l \\ p_1L_1L_2^2(3-2L_2) + p_2L_2^3(3-2L_2) \\ -p_1L_1^2L_2^2l - p_2L_1L_2^3l \end{Bmatrix} dl$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{P_1 l}{60} \begin{Bmatrix} 21 \\ 3l \\ 9 \\ -2l \end{Bmatrix} + \frac{P_2 l}{60} \begin{Bmatrix} 9 \\ 2l \\ 21 \\ -3l \end{Bmatrix} \quad \text{E.19}$$

Ahora sustituimos los valores numéricos del ejemplo en las ecuaciones de la matriz de rigidez y el vector de cargas (ecuaciones E.17 y E.19):

$$[k_1] = [k_2] = \frac{10^7}{(12)(125)} \begin{bmatrix} 12 & 30 & -12 & 30 \\ & 100 & -30 & 50 \\ & & 12 & -30 \\ sim & & & 100 \end{bmatrix} \quad \text{E.20}$$

$$\begin{aligned} \{Q_1\}^T &= \{1437.5 \quad 1250.0 \quad 1687.5 \quad -1354.1\}^T \\ \{Q_2\}^T &= \{2062.5 \quad 1770.1 \quad 2312.5 \quad -1875.0\}^T \end{aligned} \quad \text{E.21}$$

Empleando el método directo para ensamblar la matriz global de rigidez se obtiene la ecuación de equilibrio:

$$[K]\{r\} = \{R\}$$

$$\frac{10^7}{(12)(125)} \begin{bmatrix} 12 & 30 & -12 & 30 & 0 & 0 \\ 30 & 100 & -30 & 50 & 0 & 0 \\ -12 & -30 & (12 + 12) & (-30 + 30) & -12 & 30 \\ 30 & 50 & (-30 + 30) & (100 + 100) & -30 & 50 \\ & & -12 & -30 & 12 & -30 \\ & & 30 & 50 & -30 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1437.5 \\ 1250.0 \\ (1687.5 + 2062.5) \\ (-1354.1 + 1770.5) \\ 2312.5 \\ -1875.0 \end{Bmatrix}$$

Ahora se introducen las condiciones de frontera $w_1 = w_3 = 0$ y se sigue el procedimiento descrito en la ecuación 5.37. Por ejemplo, para $w_1 = 0$, el renglón 1 y la columna 1 de $[K]$ se igualan a cero, excepto el elemento k_{11} que se iguala a 1. El elemento R_1 del vector de carga se iguala a w_1 . Se sigue un procedimiento similar para $w_3 = 0$.

$$\frac{10^7}{(12)(125)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -30 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 24 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 50 & 0 & 200 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 50 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1250.0 \\ 3750.0 \\ 416.0 \\ 0 \\ -1875.0 \end{Bmatrix} \quad \text{E.22}$$

Se resuelve la ecuación y se obtiene el vector de desplazamientos $\{r\}$:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 0.0 & in \\ 0.0366667 & rad \\ 0.1171875 & in \\ 0.0007291 & rad \\ 0.0 & in \\ -0.038333 & rad \end{Bmatrix}$$

Que es prácticamente la solución analítica.

Para obtener los momentos flexionantes en el primer elemento se procede como sigue: con la ecuación E.10 calculamos los valores de L_1 y L_2 para la coordenada x deseada. Una vez conocidos L_1 y L_2 los sustituimos en la ecuación E.16 y determinamos el valor de $[B]$.

$$x=5; L_1=0; L_2=1;$$

$$[B] = [0.24 \quad 0.4 \quad -0.24 \quad 0.8]$$

Luego, a la ecuación E.22 le aplicamos las siguientes condiciones de frontera, que son momentos nulos en los extremos de la viga, $M_1=M_2=0$, resolvemos la ecuación otra vez y obtenemos un nuevo vector de desplazamientos $\{r\}$.

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3750.0 \\ 416.0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.027917 \\ 0.09375 \\ 0.0004167 \\ 0 \\ -0.028333 \end{Bmatrix}$$

Luego se sustituye la ecuación E.15 en E.7 y calculamos el momento en la sección con coordenada x . $EI=10^7/12$.

$$M(x=5) = EI[B]\{q\} = EI [0.24 \quad 0.4 \quad -0.24 \quad 0.8] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.027917 \\ 0.09375 \\ 0.0004167 \end{Bmatrix} = -9166.667 \text{ lb in}$$

Referencias

- Anagnostopoulos, C. y Georgiadis, M. (1993). "Interaction of axial and lateral responses". *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 119, No. 4, abril de 1993.
- Bazán, E. y Meli, R. "Manual de diseño sísmico de edificios", Ed. Limusa, México, 1985.
- Bowles, J. "Analytical and computer methods in foundation engineering", Ed. McGraw-Hill, Nueva York, E.U. 1974.
- Bowles, J. "Foundation Analysis and Design", quinta edición. Ed. McGraw-Hill, E.U., 1996.
- Brown, D., Reese, L. y O'Neill, M. (1987). "Cyclic lateral loading of a large-scale pile group". *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 113, No. 11, noviembre de 1987.
- Brown, D., Morrison, C. y Reese, L. (1988). "Lateral load behavior of pile group in sand". *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 114, No. 11, noviembre de 1988.
- Desai, Ch. S., "Introduction to the finite element method: a numerical method for engineering analysis". Ed. Van Nostrand Reinhold, Nueva York, E.U., 1972.
- Fleming, W. G., Weltman, A. J., Randolph, M. F. y Elson, W. K. "Piling engineering" Segunda edición. Ed. John Wiley and Sons, Inglaterra, 1992.
- Hsu, Teng, "Applied offshore structural engineering", Gulf Publishing Company, 1984, E.U. pp 7-37.
- Ilyas, T., Leung, C. F., Chow, Y. K. y Budi, S. S. (2004). "Centrifuge model study of laterally loaded pile groups in clay". *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 130, No. 3, marzo de 2004.
- Jaime, A. "Características dinámicas de la arcilla del Valle de México", tesis para obtener el grado de Doctor, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1988.
- Jiménez, G. A. "Elemento viga tridimensional para el análisis de cimentaciones profundas en suelos blandos", tesis de licenciatura, ENEP Acatlán, México, 2004.
- Li Liu Xiangyue y Romo, M. (1990). "TEST: Programa de elementos finitos tridimensionales para el análisis de la interacción suelo-estructura". Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1990.

- Li Liu Xiangyue, Romo, M. y Magaña, R. (1992). "TEST92: Un programa de computadora para simular excavaciones en suelos elasto-plásticos". Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1992.
- Magaña del Toro, R. Comunicación personal, 2005.
- Matlock, H. y Reese, L. (1960). "Generalized solutions for laterally loaded piles". Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, Vol. 86, No. SM5, octubre de 1960.
- Matlock, Hudson (1970). "Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay", OTC 1204. Second Annual Offshore Technology Conference, Dallas, Texas.
- McClelland, B. y Focht, J. (1956). "Soil modulus for laterally loaded piles". Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, Vol. 82, octubre de 1956.
- Meli, R. "Diseño estructural", segunda edición, Ed. Limusa, México, 2004.
- Normas técnicas complementarias del Reglamento de Construcción de Distrito Federal, 1995.
- Poulos, H. G. (1971a). "Behavior of laterally loaded piles: I-single piles". Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, Vol. 97, No SM5, mayo de 1971.
- Poulos, H. G. (1971b). "Behavior of laterally loaded piles: II-pile groups". Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, Vol. 97, No SM5, mayo de 1971.
- Randolph, M. F. (1981). "The response of flexible piles to lateral loading". Géotechnique 31, No 2, pp 247-259.
- Reese, L., Cox, W. y Koop, F. (1974). "Analysis of laterally loaded piles in sand", OTC 2080. Sixth Annual Offshore Technology Conference, Dallas, Texas.
- Reese, L., Cox, W. y Koop, F. (1975). "Field testing and analysis of laterally loaded piles in stiff clay", OTC 2312. Seventh Annual Offshore Technology Conference, Dallas, Texas.
- Reese, L. y Welch, R. (1975). "Lateral loading on deep foundations in stiff clay". Journal of Geotechnical Engineering Division, Vol. 101, No GT7, Julio de 1975.
- Rollins, K., Peterson, K. y Weaver, T. (1998). "Lateral load behavior of full-scale pile group in clay". Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Vol. 124, No. 6, junio de 1998.
- Romo, M. y Jaime, A. (1980). "Environmental factors influencing foundation design of offshore platforms". Memorias de Simposio Internacional de Mecánica de Suelos

- Marinos, vol. 1, pp 85-95. Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, México.
- Romo, M. y Ovando, E., (1995). “Curvas dinámicas para el análisis de interacción sísmica pilote-suelo”. Publicación 570 del Instituto de Ingeniería de la UNAM, México.
- Simiu, E. “Wind effects on structures: fundamentals and applications to design”, tercera edición. Ed. John Wiley, Nueva York, E.U., 1996.
- Snyder, J. (2004) “Full-scale lateral-load test of a 3X5 pile group in soft clays and silts”, tesis de maestría, DCEE, Brigham Young University, E.U.
- Tomlinson, M. J., “Foundation design and construction”, Ed. Longman Scientific and technical, Inglaterra, 1986.
- Wang, S.T. y Reese, L. (1993) “User guide: Laterally loaded pile analysis program for the microcomputer, version 2.0”, Ensoft Inc, Austin Texas, E.U.

Factores aproximados de conversión de unidades

Símbolo	Significado	Multiplicar por	para obtener	Símbolo
<u>Longitud</u>				
in	pulgadas	2.54	centímetros	cm
ft	pies	30.48	centímetros	cm
cm	centímetros	0.4	pulgadas	in
m	metros	3.28	pies	ft
in ²	pulgadas cuadradas	6.45	centímetros cuadrados	cm ²
ft ²	pies cuadrados	0.093	metros cuadrados	m ²
<u>Fuerza</u>				
Lb	libra	0.454	kilogramo fuerza	kgf
kips	kilolibra	453.6	kilogramo fuerza	kgf
kgf	kilogramo fuerza	2.2	libra	lb
kN	kilonewton	102	kilogramo fuerza	kgf
kN	kilonewton	224	libra	lb
<u>Esfuerzo</u>				
psi	libra por pulgada cuadrada	6.9	Kilopascales	kPa
psi	libra por pulgada cuadrada	0.07	kilogramo fuerza por centímetro cuadrado	kgf/cm ²
kPa	kilopascal	0.01	kilogramo fuerza por centímetro cuadrado	kgf/cm ²
kgf/cm ²	kilogramo fuerza por centímetro cuadrado	100	kilopascal	kPa