

01173



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA

OPTIMIZACION DE LOS PARES MOTORES DE UNA
MAQUINA CAMINANTE BASADA EN ARQUITECTURA
DE ROBOT PARALELO DEL TIPO 3RRR CON
MOVIMIENTO PLANO HORIZONTAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

PRESENTA

LUIS ALBERTO TINAJERO RAMIREZ

TUTOR:

DR. IGNACIO JUAREZ CAMPOS



MEXICO, D. F.

2005

m347257



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

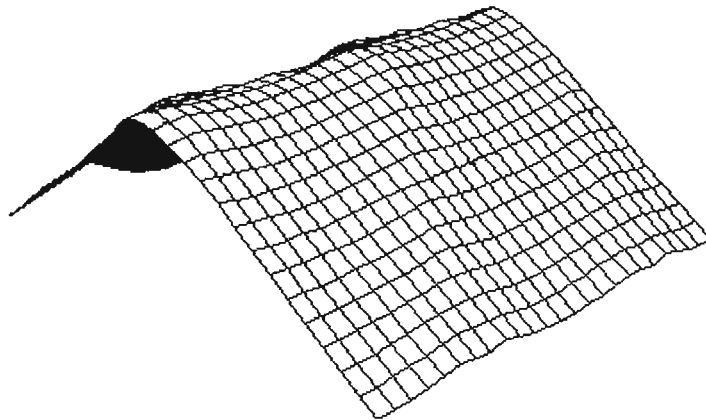
El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Luis Alberto Tinajero
Ramírez

FECHA: 23 de agosto de 2005

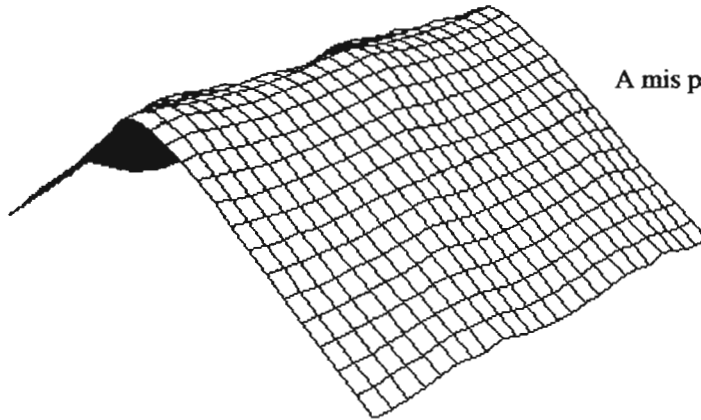
FIRMA: L. Tinajero R.



*“It is not the mountain
that we conquer,
but ourselves”*

Edmund Hillary

Al Señor



A mis padres Manuel y Martha

A mi hermana Luz María

A mis alumnos Edgar Pineda, Francisco José Cedillo , y Juan Antonio Herrera

Agradecimientos

A una edad en que algunos de mis cabellos se han tornado blancos, y otros muchos han emprendido un éxodo inopinado (lo que supone haber conocido a muchas buenas personas), queriendo ser agradecido, por fuerza de limitaciones de tiempo y espacio, me he visto obligado a ser ingrato, y a omitir en el siguiente elenco, nombres de personas que me son entrañables y que sé que me quieren bien, para mencionar a aquéllas que de manera directa, por un diálogo ya breve, ya prolongado, influyeron en la forma definitiva que tiene esta tesis. Así pues, sabiéndome disculpado por aquéllos cuyo nombre ha quedado tácito, agradezco expresamente a: Ignacio Juárez por su ejemplar calidad como ser humano y como docente, y por la dirección de la tesis; a Vicky Carreras por sus alentadores consejos, y su proverbial alegría por vivir; a Sergio Martínez, Alejandro González, César Octavio Maguey, Alfredo González, Félix Martínez, Gerardo Grisé, y Paul Heredia quienes en una, en algunas, o en muchas ocasiones, ora dialogando, ora escuchando mis soliloquios, me ayudaron a encontrar respuestas; a Israel Olguín y Eric Altbach, por la construcción de las maquetas de los caminantes Ágata, Bambi y Pi; a Antonio Castro, y a través suyo a la Universidad Panamericana, por haberme facilitado medios materiales para escribir la tesis; a Marcelo López Parra, Leopoldo González, Francisco Cuenca, y Ociel Flores, por su meticulosa revisión de los borradores.

ÍNDICE

Introducción	<i>INTRODUCCIÓN-1</i>
Motivación	<i>INTRODUCCIÓN-1</i>
Objetivo de la tesis	<i>INTRODUCCIÓN-2</i>
Desarrollo de la tesis y método adoptado	<i>INTRODUCCIÓN-2</i>
Capítulo 1. Selección de la cadena cinemática	<i>C01-1</i>
1.1 Introducción.....	<i>C01-1</i>
1.2 Objetivos.....	<i>C01-1</i>
1.3 Descripción de algunos tipos de máquinas caminantes.....	<i>C01-2</i>
1.3.1 Caminantes ya construidos.....	<i>C01-2</i>
1.3.1.1 Bauhaus.....	<i>C01-2</i>
1.3.1.2 Sleipnir.....	<i>C01-4</i>
1.3.1.3 Caminante Delta.....	<i>C01-5</i>
1.3.2. Caminantes propuestos por el autor.....	<i>C01-6</i>
1.3.2.1 Bambi.....	<i>C01-6</i>
1.3.2.2 Ágata.....	<i>C01-7</i>
1.3.2.3 Caminante Pi.....	<i>C01-8</i>
1.3.2.4 Caminante Delta Nabla.....	<i>C01-10</i>
1.4 Comparación entre las distintas cadenas cinemáticas examinada.....	<i>C01-10</i>
1.5 Conclusión del capítulo.....	<i>C01-12</i>
Capítulo 2. Análisis cinemático	<i>C02-1</i>
2.1 Introducción.....	<i>C02-1</i>
2.2 Descripción y nomenclatura de las partes.....	<i>C02-1</i>
2.3 Cinemática directa y cinemática inversa.....	<i>C02-2</i>
2.3.1 Cinemática directa.....	<i>C02-2</i>
2.3.2 Cinemática inversa.....	<i>C02-2</i>
2.4 Solución al problema de posición cinemático inverso.....	<i>C02-2</i>
2.4.1 Cálculo de posiciones angulares de los fémures.....	<i>C02-4</i>
2.4.2 Cálculo de los vectores de posición de las rodillas.....	<i>C02-6</i>
2.4.3 Trayectorias.....	<i>C02-6</i>
2.5 Conclusión del capítulo.....	<i>C02-6</i>
Capítulo 3. Análisis cinético inverso	<i>C03-1</i>
3.1 Introducción.....	<i>C03-1</i>
3.2 Premisas.....	<i>C03-1</i>

3.3 Ecuaciones de movimiento.....	C03-2
3.4 Conclusión del capítulo.....	C03-5
Capítulo 4. Planeación de trayectorias.....	C04-1
4.1 Introducción.....	C04-1
4.2 Perfiles de velocidad y aceleración para traslación rectilínea suavizados mediante el uso de polinomios.....	C04-1
4.3 Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo suavizado mediante polinomios.....	C04-3
4.4 Una subfamilia de movimientos de cuerpo rígido en el plano.....	C04-4
4.5 Descripción de la posición del centro de gravedad del endoesqueleto en términos del sistema de coordenadas asociado al exoesqueleto.....	C04-4
4.6 Otra subfamilia de movimientos de cuerpo rígido en el plano.....	C04-5
4.7 Traslaciones netas.....	C04-8
4.8 Conclusión del capítulo.....	C04-8
Capítulo 5. Optimización mediante un algoritmo genético.....	C05-1
5.1 Introducción.....	C05-1
5.2 Descripción simplificada de un mecanismo evolutivo en el reino animal y algunas definiciones.....	C05-2
5.3 Algoritmo genético: emulación de los mecanismos evolutivos de los seres vivos para la optimización de una función escalar de una sola variable.....	C05-3
5.3.1 Cuestiones de precisión.....	C05-3
5.3.2 Etapa de evaluación.....	C05-4
5.3.3 Asignación de probabilidad de éxito, selección de supervivientes y reemplazo.....	C05-4
5.3.4 Traducción.....	C05-5
5.3.5 Mutación.....	C05-6
5.3.6 Cruzamiento.....	C05-6
5.3.7 Obtención de los nuevos fenotipos.....	C05-7
5.3.8 Elitismo.....	C05-7
5.3.9 Criterio de paro de ejecución del algoritmo genético.....	C05-7
5.4 Cómo pueden optimizarse funciones cuando se considera que el óptimo es el mínimo.....	C05-8
5.5 Qué hacer cuando los valores del dominio y/o del conjunto de imágenes pueden adoptar valores negativos.....	C05-8
5.6 Ejemplos de aplicación del algoritmo genético canónico.....	C05-8
5.6.1 Ejemplo 1: función polinomial.....	C05-8

5.6.2 Ejemplo 2: función construida con funciones armónicas.....	C05-10
5.7 Conclusión del capítulo.....	C05-10

Capítulo 6. Optimización de algunas características del

caminante Delta Nabra	C06-1
6.1 Introducción.....	C06-1
6.2 Especificación de criterios, reglas, dimensiones y propiedades	C06-1
6.2.1 Distancias entre articulaciones.....	C06-1
6.2.2 Criterio de optimización.....	C06-2
6.2.3 Restricciones respecto al movimiento que se ha de optimizar	C06-2
6.2.4 Medidas, pesos e inercias del endoesqueleto.....	C06-3
6.2.5 Estimación de medidas, pesos, e inercias de los fémures y las tibias.....	C06-4
6.3 Optimización de las longitudes de los fémures y las tibias	C06-4
6.3.1 Especificación del espacio de búsqueda	C06-5
6.3.1.1 Método de prueba y error por bisección o búsqueda binaria	C06-5
6.3.2 Búsqueda de la razón de longitudes óptima mediante el algoritmo genético canónico.....	C06-6
6.3.3 Por qué la razón de longitudes óptima es la mínima posible. Una posible explicación a través del concepto de ventaja mecánica.....	C06-7
6.3.3.1 Un mecanismo cinemáticamente equivalente al endoesqueleto en traslación rectilínea a lo largo de un eje ξ colineal con el eje x_1	C06-7
6.3.3.2 El concepto de ventaja mecánica	C06-7
6.3.3.3 Ventaja mecánica asociada a un mecanismo 3RP.....	C06-8
6.4 Optimización del rumbo y de la digresión angular para traslación neta.....	C06-9
6.4.1 Especificación de los espacios de búsqueda para rumbo y digresión angular.....	C06-10
6.4.2 Búsqueda del rumbo y la digresión angular óptimos.....	C06-12
6.4.3 Validación de los resultados obtenidos en la sección 6.4.2 mediante un método exhaustivo.....	C06-15

Conclusiones	entre C06-24 y A1-1
---------------------------	---------------------

Apéndice. Colección de programas

A1 Animador	A1-1
A2 Trazador	A2-1

A3 Anatomía óptima	A3-1
A4 Operación óptima	A4-1

Bibliografía

Introducción

Motivación

El interés por el Delta-Nabla, la máquina caminante estudiada en esta tesis, fue motivado por la justa internacional interuniversitaria convocada anualmente por la SAE durante los últimos años, denominada "Walking Machine Challenge" (WMC), en la que la Universidad Panamericana, donde labora el autor, ha participado, y obtenido premios en varias ocasiones. Este concurso, que tuvo su última edición en el año 2004, ha sido substituido por el Robot Systems Challenge, en el que las exigencias de comportamiento inteligente y dinámico son más estrictas, aunque hay más apertura en las posibilidades de locomoción.

A pesar de no ajustarse al nuevo formato del concurso, se considera que el proyecto de la máquina propuesta en el que se inscribe esta tesis, es intrínsecamente valioso, y que puede tener utilidad educativa. Por otra parte, el formato del "Walking Machine Challenge" como existió hasta 2004, puede inspirar concursos locales, estatales y nacionales.

A continuación se traducen algunos extractos de las reglas del WMC [1] en los que se describen las pruebas a las que fueron sometidas las máquinas caminantes que compitieron en la primavera de 2004 en Nueva York, para en seguida, comentar la medida en la que la máquina aquí estudiada cumple con dichas reglas.

Descripción de las pruebas (extraídas de la referencia [1]) a las que se sometió a cada máquina participante en el "Walking Machine Challenge" en su edición del año 2004

"21.1 Andar

El robot debe caminar mediante el uso de patas. Específicamente, un robot caminante se define como una máquina móvil apoyada discontinuamente e impulsada por mecanismos articulados (patas). Cada pata debe tener una o más articulaciones o bisagras con las cuales tiene movimiento relativo con respecto a TODAS las otras patas y la estructura. Una pata puede girar, o deslizar sobre la superficie de apoyo, pero no puede rodar. Una pata debe moverse con relación al cuerpo principal (o estructura, o masa mayor) del robot caminante. Las patas deben tener movimiento relativo entre sí.

Se excluyen los siguientes mecanismos cinemáticos: ruedas, ruedas con rayos sin aro, pistas como las usadas por tanques o bulldozers. No hay restricciones en cuanto al número, diseño o ubicación de las patas del robot.

En general, si un equipo puede demostrar que la configuración de su robot caminante encuentra paralelo con alguna creatura en la naturaleza dotada de patas múltiples, entonces la configuración es aceptable con gran probabilidad.

Si un equipo de estudiantes tiene dudas con respecto a si un concepto cinemático para el diseño de una pierna está permitido, debe ponerse en contacto con el organizador y/o el comité regulador antes de la competencia. Las decisiones de los jueces tomadas durante la competencia con respecto al diseño de patas son definitivas"

"21.3 VERSATILIDAD

El diseño del robot debe ser tal que éste sea teóricamente, si no en su realización, capaz de acometer todos los retos de la competencia. Específicamente, el diseño no debe impedir al robot que intente cualquiera de los desafíos. Por ejemplo, la altura del paso, debe ser suficiente para que el robot pase por encima de los alambres de la prueba 4."

"51. PRUEBA 1: DASH (CARRERA EN LÍNEA RECTA)

OPERACIÓN A CONTROL REMOTO- FACTOR DE DESEMPEÑO = 1.25

AUTONOMÍA TIPO 1- FACTOR DE DESEMPEÑO = 1.25

AUTONOMÍA TIPO 2- FACTOR DE DESEMPEÑO = 1.825

51.1 OBJETIVO

Esta prueba demuestra la rapidez del robot caminante sobre una pista recta.

51.2 PROCEDIMIENTO

Caminar tan rápido como sea posible desde el rectángulo de inicio designado hasta el rectángulo meta designado, permaneciendo dentro de la pista de 3 metros de ancho."

52. PRUEBA 2: RECUPERACIÓN DE UN CARGAMENTO

OPERACIÓN A CONTROL REMOTO- FACTOR DE DESEMPEÑO = 1.50

AUTONOMÍA TIPO 1- FACTOR DE DESEMPEÑO = 1.50

AUTONOMÍA TIPO 2- FACTOR DE DESEMPEÑO = 2.25

52.1 OBJETIVO

Esta prueba demuestra la capacidad del robot para portar una carga útil.

52.2 PROCEDIMIENTO

Caminar del rectángulo de inicio, al rectángulo meta. Una vez que el robot esté en el rectángulo meta, debe detenerse por completo, mientras uno de los dos miembros del equipo designados, colocará una carga sobre la máquina. La carga consistirá en hasta seis sacos de municiones, cada uno de los cuales pesará 10 kg. El robot debe llevar la carga del rectángulo meta al rectángulo de inicio, donde la máquina deberá detenerse por completo junto con su carga. El equipo debe cargar al menos un saco.

Viajes múltiples: se permiten viajes múltiples, aunque todos los viajes intentados deben completarse con éxito, pues de lo contrario el robot se clasificará como "no terminó". Antes del inicio de esta prueba, el capitán del equipo debe anunciar el número de viajes que se intentará.

"53. PRUEBA 3: SLALOM

OPERACIÓN A CONTROL REMOTO- FACTOR DE DESEMPEÑO = 2.5

AUTONOMÍA TIPO 1- FACTOR DE DESEMPEÑO = 2.5

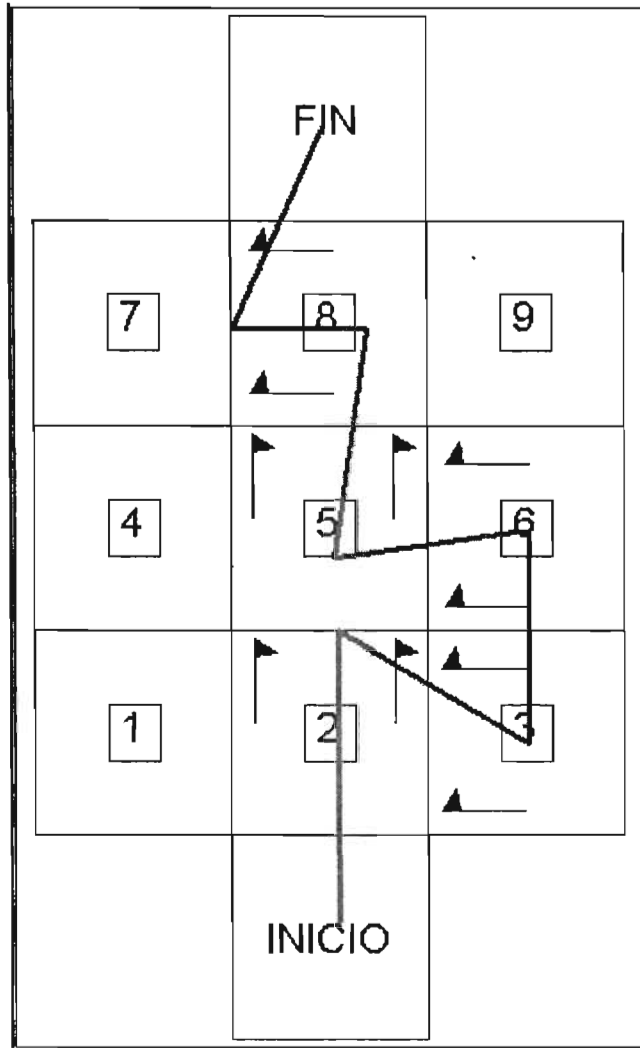
AUTONOMÍA TIPO 2- FACTOR DE DESEMPEÑO = 3.75

53.1 OBJETIVO

Esta prueba está diseñada para evaluar la maniobrabilidad de los robots caminantes a través de una serie de virajes cerrados y porterías estrechas.

53.2 PROCEDIMIENTO

Comenzando en el rectángulo de inicio, los robots deben maniobrar a través de 5 porterías hasta el rectángulo final a lo largo de la trayectoria mostrada. Cada portería se define mediante dos banderas separadas entre sí por 1.5m. el punto medio entre las dos banderas coincide siempre con el centro del rectángulo correspondiente. Las porterías están orientadas bien en dirección norte-sur, o bien en dirección este-oeste." Los robots caminantes deben permanecer dentro de los rectángulos 2, 3, 5, 6 y 8 y no pueden tocar las astas de las banderas.



Trayectoria a seguir en la prueba "slalom"

Figura I. 1

54. PRUEBA 4: ALAMBRES DE TROPIEZO

OPERACIÓN A CONTROL REMOTO- FACTOR DE DESEMPEÑO = 1.5

AUTONOMÍA TIPO 1- FACTOR DE DESEMPEÑO =1.5

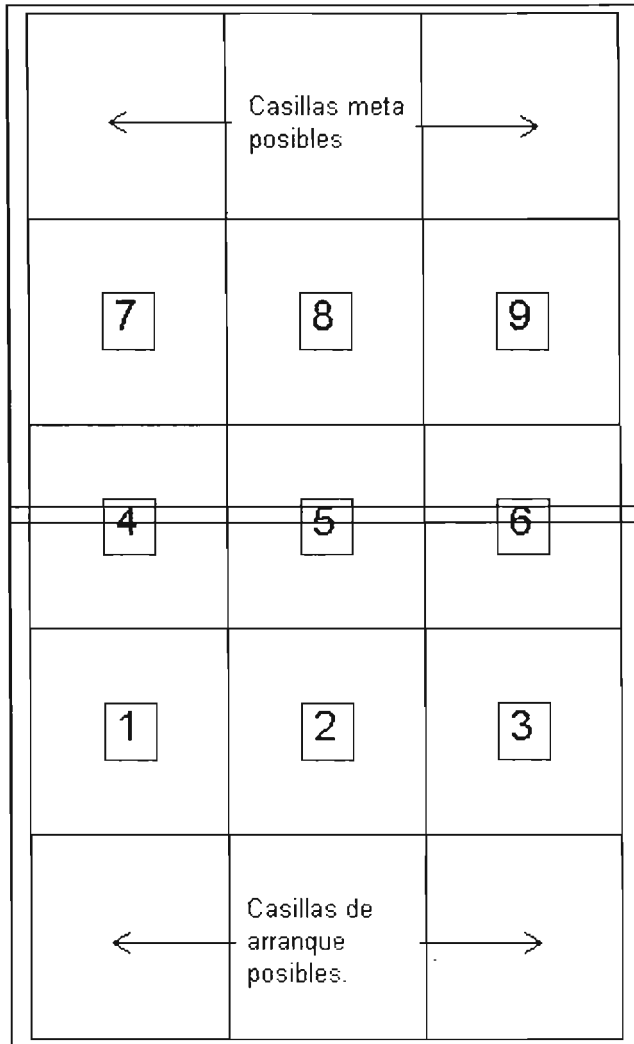
AUTONOMÍA TIPO 2- FACTOR DE DESEMPEÑO = 2.25

54.1 OBJETIVO

Caminar desde el rectángulo de inicio hasta el rectángulo meta, pasando por encima de los dos alambres de tropiezo, sin tocarlos.

54.2 PROCEDIMIENTO

Los alambres de tropiezo se extenderán atravesando la pista sobre los rectángulos 4, 5, y 6 como se muestra en la figura. Los dos alambres estarán 15 cm por encima del piso y 15 cm separados entre sí. El robot no puede pasar por debajo de ellos, pero sí puede pisar entre ellos. Se permite el uso de una rampa u otro dispositivo auxiliar, a condición de que el dispositivo no toque los alambres y de que cumpla los criterios esbozados en la sección 21.7 "accesorios desechables-opcionales"



Prueba de alambres de tropiezo: las tres rutas posibles son: 1-4-7, 2-6-8, 3-6-9

Figura I. 2

"55. PRUEBA 5: BÚSQUEDA DE UN OBJETO

OPERACIÓN A CONTROL REMOTO- FACTOR DE DESEMPEÑO = 3.0

AUTONOMÍA TIPO 1- FACTOR DE DESEMPEÑO =3.0

AUTONOMÍA TIPO 2- FACTOR DE DESEMPEÑO = 4.5

55.1 OBJETIVO

Partiendo del rectángulo de inicio, localizar y recoger un bloque de madera, y volver al rectángulo de inicio con el bloque a bordo del robot caminante. El bloque debe separarse completamente del piso, al cual no debe tocar sino hasta el final de la prueba.

55.2 PROCEDIMIENTO

Tan pronto se haya posicionado la máquina en el rectángulo de inicio, los jueces colocarán el bloque en una posición arbitraria en alguno de los rectángulos 4, 5, ó 6. Esta secuencia tiene la finalidad de desalentar al que los equipos simplemente alineen sus robots con el bloque y lo recojan de una cucharada.

55.3 COORDENADAS DEL OBJETO

Se darán a conocer al equipo las coordenadas del bloque con precisión de unidades de centímetro al principio del periodo de preparación de 5 minutos. Para los propósitos de esta prueba, el origen del sistema de coordenadas se define como la esquina inferior izquierda del bloque 1. El sentido positivo del eje X se define por la esquina inferior derecha del rectángulo 3, y el sentido positivo del eje Y se define por la esquina superior izquierda del rectángulo 7."

En las reglas se dan algunos pormenores respecto a los colores del bloque, para el uso de sistemas de visión, pero su cita se ha omitido aquí.

56. PRUEBA 6: PRUEBA DE RESISTENCIA Y OBSTÁCULOS

OPERACIÓN A CONTROL REMOTO- FACTOR DE DESEMPEÑO = 3.5

AUTONOMÍA TIPO 1- FACTOR DE DESEMPEÑO =3.5

AUTONOMÍA TIPO 2- FACTOR DE DESEMPEÑO = 5.25

Esta es la prueba final y la más desafiante de la competencia. La prueba 6 está diseñada para probar la resistencia y la maniobrabilidad del robot caminante en un ambiente no estructurado. El mapa preciso de la pista es determinado por el comité organizador y es desconocido para los participantes antes de la competencia. La pista de obstáculos puede incluir:

- (A) Una capa simple de llantas de automóvil esparcidas aleatoriamente y atadas unas con otras con una cuerda de nylon.
- (B) Superficies inclinadas que no excedan +/- 20° sin una orientación particular en relación con una trayectoria preferencial del robot (esto es, puede requerirse que las máquinas se aproximen a las superficies inclinadas en forma oblicua).
- (C) Maderos distribuidos al azar.
- (D) Piedras, grava y arena.
- (E) Escalones
- (F) Otros obstáculos desconocidos y superficies que determine el comité organizador.

Como directriz general, los obstáculos no excederán una altura de 200 mm. Las pendientes (o sea las superficies que no excederán +/-20° de inclinación) pueden exceder la altura de 200 mm. Un juego de escalones también puede exceder los 200 mm de altura, a condición de que ningún escalón por sí solo excederá 200 mm de altura, y de que todo escalón tenga por lo menos 200 mm de ancho. La pista de obstáculos se dispondrá en la superficie de competencia habitual.

56.2 OBJETIVO

Demostrar la resistencia del robot, su robustez, confiabilidad, y versatilidad al atravesar una pista de obstáculos desconocida.

56.3 PROCEDIMIENTO

El robot caminante debe colocarse en el rectángulo 1 con el frente declarado orientado hacia el rectángulo 3. La máquina viajará del rectángulo 1 al 3 mientras permanece por completo dentro de la porción baja de la pista, o sea los rectángulos 1, 2 y 3. Esto marca el final del primer tramo de la carrera.

El robot caminante maniobrá entonces para pasar del rectángulo 3 al 6. Los jueces indicarán el momento en el que el caminante esté totalmente dentro del rectángulo 6, o sea sin que partes en voladizo estén sobre cualquier otro rectángulo. Desde ese momento, el robot no puede regresar al rectángulo 3. Entonces la máquina se desplazará del rectángulo 6 al 4, permaneciendo por completo en la porción media de la pista, o sea, los rectángulos 6, 5, y 4. Esto marca el final del segundo tramo de la carrera. El robot caminante maniobrá para pasar del rectángulo 4 al 7. Los jueces indicarán el momento en el que el caminante esté totalmente dentro del rectángulo 7, o sea sin que partes en voladizo estén sobre cualquier otro rectángulo. Desde ese momento, el robot no puede regresar al rectángulo 4. La máquina se desplazará del rectángulo 7 al 9, permaneciendo por completo dentro de la porción superior de la pista, es decir, los rectángulos 7, 8, y 9. Esto marca el final del tercer tramo de la carrera. Podrán colocarse obstáculos en los rectángulos 2 a 9, a discreción del comité organizador."

De las reglas del concurso, se desprende que los organizadores privilegian diseños de máquinas caminantes que se asemejen a algún viviente. Esta tendencia prevalece entre los investigadores dedicados a la robótica con locomoción como corroboran Luk, Galt y Chen [8]: *"Muchos investigadores que trabajan en robots con patas se han fijado tradicionalmente en el mundo natural en busca de inspiración y soluciones, razonando que estas soluciones de la evolución son apropiadas y efectivas, porque han pasado las duras pruebas de la supervivencia a través del tiempo por generaciones."* El caminante Delta-Nabla, cuya estirpe de manipulador paralelo es más artificial, ciertamente dista de parecerse a cualquier viviente del que el autor tenga noticia y, por lo que se lee en el párrafo 21.1 de las reglas del concurso, se infiere que el que se le aceptase en la competencia estaría estrechamente vinculado a las definiciones de "masa principal" o "cuerpo principal" y "patas". Considerando a este caminante en abstracto, se descubre que solamente posee dos cuerpos idénticos que tienen movimiento relativo entre sí, y que asumen alternativamente los papeles de "pie apoyado" y "cuerpo en tránsito". Ahora bien, si se considera que en la práctica sólo uno de estos cuerpos o módulos será portador de los motores, podría definirse a éste como la masa principal, en cuyo caso se tendría una máquina "monópoda", que a veces apoyaría su cuerpo principal, y a veces su pie. Por otra parte si las 6 patas retráctiles gozan de movimiento independiente, se cumple con que las patas se muevan unas con respecto a otras. En resumen, se cree que nombrando adecuadamente sus partes, el Delta-Nabla, a pesar de no emular a un ser vivo, habría podido superar los desafíos del WMC por las siguientes razones:

- 1) cumple con el requisito de estar discontinuamente apoyado;
- 2) su concepto permite la superación de la prueba 1, pues estando diseñado para desplazarse en cualquier dirección de un plano horizontal, una carrera en línea recta no le debería representar mayor dificultad. Crucial para esta prueba es la rapidez de extensión y retracción de las patas verticales, tema que será objeto de otro trabajo;
- 3) con un diseño adecuado del endoesqueleto puede proveerse al Delta-Nabla de espacio para llevar una carga, y de la robustez necesaria para llevar sobre sí 60 kilogramos adicionales;
- 4) el estar pensado para moverse en cualquier dirección sobre un plano horizontal, le permitiría competir con éxito en la prueba de Slalom, pues no está obligado a reorientarse (aunque es capaz de hacerlo, y muy eficazmente): bastaría con que ejecutara movimientos de traslación en las direcciones x ó y , o en cualquier dirección oblicua, y en cualquier sentido;
- 5) garantizando que sus dimensiones sean adecuadas, y proveyéndolo de los sensores y la programación necesarios, o a falta de sensores, introduciendo en su memoria la localización de los alambres de tropiezo, no se ve dificultad en que logre pasar por encima de ellos sin tocarlos;
- 6) nuevamente, si está equipado apropiadamente con sensores de algún tipo y con un dispositivo de recolección, debería serle posible encontrar el bloque de madera;
- 7) siendo la carrera de obstáculos muy demandante, se cree que su estructura mecánica, respaldada con una adecuada sensorización y programación, sería capaz de superar esta prueba; en ella, quizá el mayor reto para el Delta-Nabla sería pasar los juegos de escalones.

Objetivo de la tesis

En la creencia de poseer suficientes justificaciones (Cap. 1) para adoptar la arquitectura de un manipulador paralelo con movimiento plano del tipo 3RRR, como solución para superar los antiguos desafíos del WMC, el objetivo de esta tesis fue: *minimizar los pares motores demandados de los actuadores para lograr un movimiento prescrito de uno de los pies con respecto al otro*. Este objetivo presentó dos aspectos: 1) especificadas las propiedades geométricas y físicas que se consideraron más relevantes del caminante, así como un movimiento deseado a través del tiempo, encontrar la razón de longitudes de los eslabones que se denominaron "fémur" y "tibia" que minimizaran el valor absoluto del par máximo demandado a cualquier actuador durante el trayecto; y 2) habiendo establecido dicha razón de longitudes, encontrar el modo de operación óptimo para dar un paso de longitud y duración idénticas a las especificadas para el aspecto 1, logrando nuevamente mejorar (o sea minimizar ulteriormente) el valor absoluto del par máximo demandado de cualquiera de los actuadores.

Desarrollo de la tesis y método adoptado

La literatura que trata sobre manipuladores paralelos, en los que está basado el caminante Delta-Nabla, es vasta; pero sólo se encontraron dos autores que hubieran aplicado el concepto de robots paralelos a una máquina estrictamente caminante en los términos del WMC. Rekleitis, Nahon y Saha [9] estudian un robot móvil basado en un mecanismo paralelo; pero el de ellos no calificaría para la competencia descrita, porque los apoyos de las extremidades están provistos de ruedas. Dunlop [6] y sus colaboradores construyeron un prototipo de un caminante (caminante Delta) basado en arquitectura de robot paralelo que posee 3 grados de libertad. El trabajo de Dunlop tiene como antecedentes el de Clavel [4, 5], y el de Wang et al. [11]. Se aclara que antes de conocer el caminante Delta, el autor había ya

concebido la posibilidad de aplicar un robot paralelo como principio de andar, aunque ciertamente, el nombre Delta-Nabla, fue sugerido por el caminante de Dunlop y por la configuración de reposo del propio Delta-Nabla. En el capítulo 1 se examinan las diferencias entre los caminantes Delta y Delta-Nabla. Se encontraron algunos autores que abordan algún problema de optimización de robots paralelos: por ejemplo, Hay y Snyman [7] presentan una metodología para determinar la distribución de tensiones y configuraciones óptimas de manipuladores planos conducidos por tendones (TDPMs, por sus siglas en Inglés); Alici y Shirinzadeh [3] abordan una síntesis óptima de manipuladores paralelos planos, con pares de rotación, mediante el uso de dos procedimientos restringidos de optimización basados en la minimización de: (i) la desviación total del número de condición de la matriz jacobiana del manipulador con respecto al número de condición ideal/isotrópico, y (ii) las fuerzas en los cojinetes a lo largo y ancho del espacio de trabajo del manipulador mediante el balanceo de fuerzas; en otro trabajo, estos autores [2] estudian el balanceo óptimo de fuerzas para un manipulador paralelo que se mueve en un plano vertical, articulado con 5 pares rotatorios, con una combinación de una adecuada distribución de las masas de los eslabones y dos resortes conectados a los eslabones conductores. Ninguno de estos autores aborda específicamente el problema que se formula en esta tesis para las características *sui generis* del Delta-Nabla, por lo que en este sentido se cree estar haciendo una aportación original.

En el capítulo 1 se establecen premisas y restricciones para la selección de la arquitectura de la cadena cinemática, y se describen varios robots caminantes con fines comparativos, poniendo énfasis en consideraciones de movilidad.

En el capítulo 2 se resuelve el problema cinemático de posición inverso de un robot paralelo tipo 3RRR con movimiento plano. Williams y Shelley [12] resuelven la cinemática inversa en posición y velocidad para una clase amplia de robots paralelos planos de 3 grados de libertad que abarca diversas combinaciones de pares cinemáticos prismáticos y rotatorios. Para los fines de esta tesis ha bastado usar una transformación homogénea de 4×4 para traducir las coordenadas de partículas pertenecientes al endoesqueleto, conocidas en un sistema de coordenadas local, a las coordenadas de las mismas partículas con relación a un sistema de coordenadas asociado al exoesqueleto. La transformación homogénea se emplea solamente en aras de una notación breve para la operación simbólica con *Mathematica*, pues en los programas de simulación numérica, también escritos en *Mathematica*, se emplean sólo vectores bidimensionales. Las posiciones angulares de los fémures, esto es, de los eslabones directamente movidos por los actuadores, se calculan por medios trigonométricos. Se prescindió del cálculo de los ángulos pasivos. Se prescindió también del cálculo de velocidades y de aceleraciones, porque en el análisis cinético se vio válido despreciar las inercias de los fémures y las tibias; por otra parte, las aceleraciones lineal y angular del endoesqueleto, cuyas inercias no son despreciables, se obtienen de derivar dos veces los polinomios de posición lineal y angular que se especifican. Cabe hacer notar que para la evaluación de los pares motores, que son el centro del objetivo de este trabajo, se consideró suficiente mantener al exoesqueleto fijo, y simular un movimiento de ida y vuelta del endoesqueleto, en la inteligencia de que, si ambos esqueletos tienen masas y momentos de inercia idénticos, desde el punto de vista de las magnitudes de los pares motores tienen el mismo efecto las dos siguientes rutinas:

1) *a)* Avanzar el endoesqueleto en movimiento de traslación (estando apoyado el exoesqueleto), *b)* extender las patas del endoesqueleto para que éste se apoye, *c)* retraer las patas del exoesqueleto y llevarlo hacia al endoesqueleto en un movimiento de traslación de manera que el caminante adquiriera la misma configuración de partida.

2) Avanzar el endoesqueleto (estando apoyado el exoesqueleto) y volverlo a traer a la configuración de partida.

Para que la afirmación anterior sea válida, es necesario que las longitudes y las duraciones de los pasos se mantengan

invariables para ambas rutinas (excluyendo el tiempo de retracción y extensión de patas, necesario en la rutina 1)

En el capítulo 3 se resuelve el problema cinético inverso, o sea, encontrar los pares motores que deben aplicar los actuadores para lograr cualquier movimiento del endoesqueleto que se especifique. Para ello, se emplean los resultados del capítulo 2, y las ecuaciones de Newton Euler.

En el capítulo 4 se explica como generar las coordenadas (x,y) del centro de gravedad del endoesqueleto y su orientación ζ como funciones de tiempo a modo de que sean nulas sus velocidades lineales y angulares, así como sus aceleraciones lineales y angulares al inicio y al final del movimiento. Ello se consigue mediante el uso de polinomios de quinto y sexto grado en la variable tiempo. Los resultados de este capítulo alimentan al modelo cinemático del capítulo 2.

El capítulo 5 se dedica a explicar el funcionamiento de un algoritmo genético con elitismo. En él se exponen dos ejemplos de optimización de funciones de una sola variable independiente. Se hace ver la importancia de la mutación para garantizar la evolución hacia el óptimo absoluto, así como la importancia del elitismo para no perder material genético valioso por efecto del azar. Conforme se fue avanzando y experimentando, se vio que el problema en estudio podía resolverse más eficientemente mediante otro método. En esta tesis se incluyen ambos, pues se validan mutuamente.

En el capítulo 6 se añaden restricciones a la geometría del caminante, y se precisan las características del movimiento del endoesqueleto con el que se habrá de evaluar el comportamiento de los pares motores en el tiempo. En este capítulo se obtienen resultados de integrar en un gran algoritmo la planeación de trayectorias (Cap. 4), el análisis cinemático inverso (Cap. 2), el análisis cinético inverso (Cap. 3) la optimización mediante algoritmos genéticos (Cap. 5) y mediante un método exhaustivo de optimización. Al emplear dos métodos de optimización, éstos se validan mutuamente.

El cuadro sinóptico siguiente ilustra la integración de los capítulos en una herramienta de optimización.

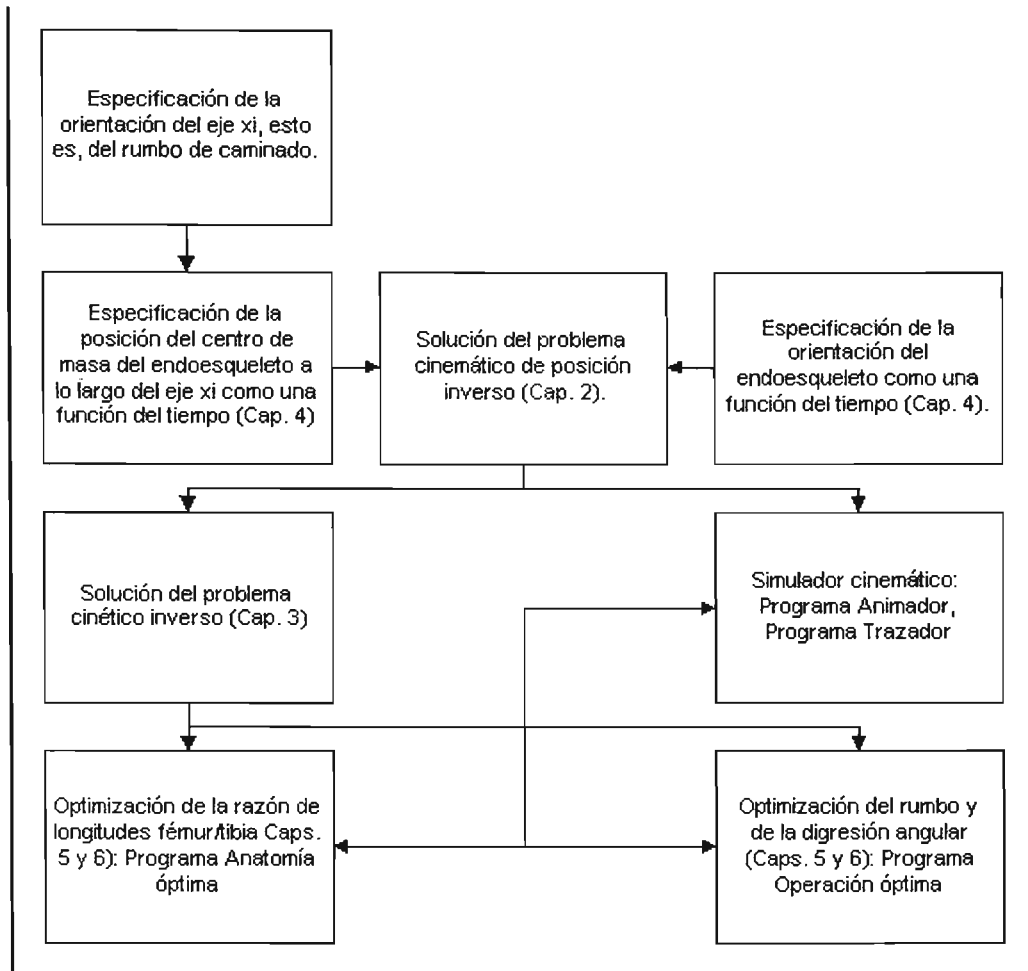


Diagrama que muestra la interrelación entre los capítulos de la tesis, y como se integran en una herramienta de optimización.

Figura I. 3

En el capítulo 6 se manifiestan los resultados de optimizar la razón de longitudes por una parte, y por otra, la simultánea optimización de lo que se denominó el *rumbo* y la *digresión angular*. Con el concepto de *digresión angular reversible* gobernada por un polinomio de sexto grado, se cree aportar un enfoque y una solución novedosos al problema que se formuló inicialmente.

Capítulo 1. Selección de la cadena cinemática

1.1 Introducción

En este capítulo se expresan los objetivos perseguidos al realizar los trabajos que se reportan en esta tesis; se describen brevemente varios modelos de caminantes: algunos que han sido ya diseñados y construidos por terceros, y otros que el autor propone como alternativas, y finalmente, se hace una comparación en cuanto a la satisfacción de los objetivos por los distintos modelos de caminantes.

1.2 Objetivos

El presente estudio se comenzó con las siguientes metas en mente:

1 Uniformidad de la energía potencial

Minimizar el consumo de energía implicado por hacer trabajo mecánico en contra de la gravedad, esto es, hacer que el caminante se desplazara manteniendo su centro de gravedad siempre en el mismo plano horizontal.

2 Minimización del número de motores

Minimizar el número de motores necesarios para realizar la locomoción, permitiendo que el caminante pudiera desplazarse en cualquier dirección sobre un plano horizontal, y tuviera la libertad de orientarse alrededor de un eje perpendicular a dicho plano horizontal.

3 Adaptación al relieve

Lograr la meta anterior aun en el caso de que el terreno en el que se desplazara el caminante tuviera cierto relieve, lo cual implicaría que las patas se adaptasen al relieve.

4 Condición de no deslizamiento

Que las patas que estuvieran apoyadas no tuvieran ningún tipo de deslizamiento, sino que pasaran a formar parte de la Tierra, considerada ésta como un cuerpo rígido. Esto excluye terrenos arenosos o fangosos.

5 Control total de grados de libertad

Que durante el movimiento relativo del tronco con respecto a la Tierra, las patas apoyadas, el tronco y la Tierra, formaran una cadena cinemática espacial o planar consistente únicamente en cuerpos rígidos articulados exclusivamente por pares cinemáticos inferiores, y que el número total de motores del caminante fuera igual a (o en todo caso mayor que) la movilidad de dicha cadena cinemática. Esta última condición permite considerar a la cadena cinemática como si se tratase de un manipulador cuyo órgano terminal fuera el tronco.

6 Control continuo

Poder controlar el movimiento de forma prácticamente continua.

7 Control simplificado y desacoplamiento de grados de libertad

Obtener facilidad de control minimizando el número de grados de libertad que hubieren de controlarse a la vez.

8 Patrón de apoyo estable

Que en todo momento, el patrón de apoyo fuera estable, de modo que el caminante pudiera permanecer en pie sin depender del control.

9 Transporte de carga útil

Que una carga útil a transportar fuera llevada con seguridad.

10 Versatilidad de movimientos

Que el caminante tuviera la posibilidad de desplazarse a cualquier punto sobre un plano horizontal con gran precisión y en cualquier orientación con respecto a un eje vertical.

Con fines comparativos se describen en la siguiente sección algunos tipos de arquitecturas de entre las que, por considerarse que cumpliría con las metas arriba mencionadas, se seleccionó la que se propone como solución en esta tesis.

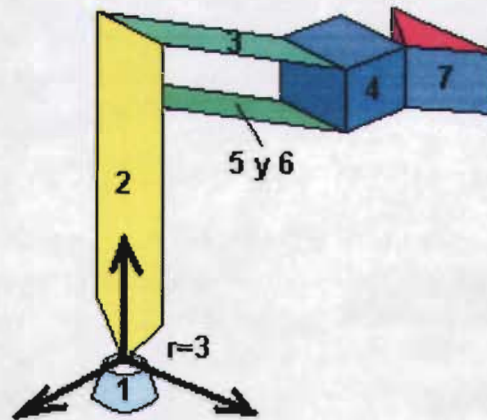
1.3 Descripción de algunos tipos de máquinas caminantes

Se examinan algunos caminantes que ya han sido construidos y probados, y otros que el autor de la tesis propone como alternativas.

1.3.1 Caminantes ya construidos

■ 1.3.1.1 Bauhaus

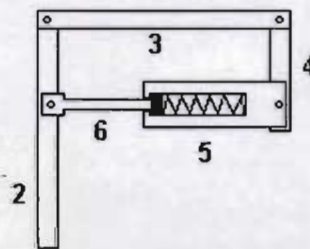
El caminante Bauhaus, que toma su nombre de la escuela de diseño funcionalista fundada en Weimar por el arquitecto Gropius a principios del siglo XX, es un octópodo construido en el campus Ciudad de México de la Universidad Panamericana, proyectado para competir en el Walking Machine Challenge de la SAE en su edición del año 2004. Cada una de las patas de Bauhaus es movida por dos actuadores lineales; pero por simplicidad, desde un punto de vista cinemático, su movimiento puede estudiarse como el que producirían dos motores rotatorios cuyos ejes de rotación fueran perpendiculares entre sí. La figura 1.1 ilustra la estructura cinemática de una pata de Bauhaus.



Estructura cinemática de una pata de Bauhaus

Figura 1.1

El cuerpo 1 representa el extremo de la pata, y cuando ésta se apoya, dicho cuerpo pasa a identificarse formalmente con la Tierra [13], de manera que tratándose de patas apoyadas, todos los eslabones marcados como 1 deben considerarse como un único cuerpo. Similarmente, el cuerpo 7, el cual representa al tronco, es común a todas las patas, no sucede así con los eslabones 2 a 6, de los cuales hay uno por cada pata. Los eslabones 1 y 2 forman un par esférico; los eslabones 2 y 3 forman un par de revoluta, al igual que los eslabones 3 y 4, 4 y 7, 6 y 4, y 5 y 2. En la figura 1.1 se ha representado como uno solo a los eslabones 5 y 6, en razón de que cuando la pata está despegada del piso, un resorte mantiene al par prismático formado por estos eslabones en su máxima extensión, de modo que la cadena cinemática 2-3-4-5-6-2 se comporta como un mecanismo planar de cuatro barras de paralelogramo, como se ilustra en la figura 1.2.



Detalle de la estructura cinemática de una pata de Bauhaus en la que observa un eslabón compresible

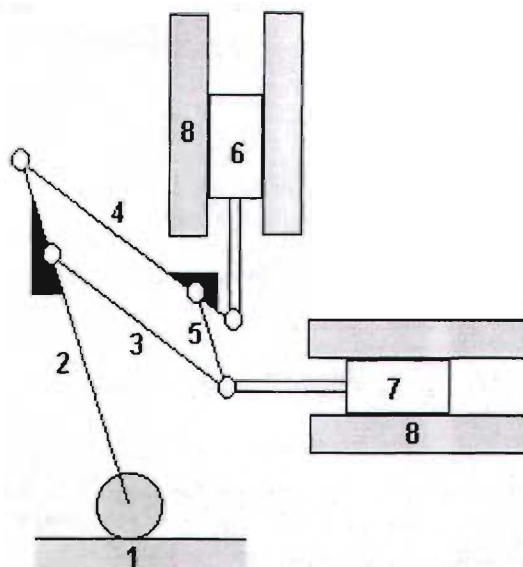
Figura 1.2

Cuando una pata está despegada del piso, supuesto estático el tronco, el cuerpo 1 tiene 5 grados de libertad, habida cuenta de que los cuerpos 5 y 6 se comportan como un único cuerpo; 2 de dichos grados de libertad son controlados por sendos actuadores, por ejemplo, un motor que posiciona al eslabón 4 con relación al eslabón 7 (tronco), y otro que posiciona al eslabón 3 en relación con el eslabón 4. Controlar estos 2 grados de libertad es suficiente para determinar la posición en el espacio del centro del par esférico formado por los cuerpos 1 y 2. La orientación del cuerpo 1, que tiene 3 grados de libertad en relación con el cuerpo 2, quedará determinada completamente al posarse la pata en el piso. Al ocurrir esto, es posible que entre en acción el grado de libertad propio al par prismático formado por los eslabones 5 y 6, siempre y cuando el sistema de fuerzas externas actuando sobre la pata origine una compresión del resorte.

Si sólo 4 patas están apoyadas sobre el piso, y si todos los resortes están sometidos a compresión, entonces el conjunto formado por la Tierra, las cuatro patas apoyadas, y el tronco constituyen una cadena cinemática espacial con movilidad 6 como predice el criterio de movilidad de Kutzbach, suponiendo que se trate de una cadena banal según la clasificación de Hervé [14]. Es de notar que la construcción de Bauhaus incluye 2 motores adicionales, lo cual significa que estando las cuatro patas apoyadas, 2 de estos motores deberán estar ociosos, y su movimiento estará regido por el movimiento de los otros 6.

■ 1.3.1.2 Sleipnir

Sleipnir es también un octópodo diseñado y construido en la Universidad Panamericana. Cada una de sus patas es una cadena plana de dos grados de libertad. En los pares prismáticos se encuentran los actuadores. La figura 1.3 ilustra la estructura cinemática de una pata de Sleipnir. El eslabón 1 representa la Tierra; los eslabones 1 y 2 constituyen un par cinemático superior de rodamiento, el cual, para efectos de estudio de movilidad, puede aproximarse a un par cinemático inferior del tipo esférico; el eslabón 8 representa al tronco del caminante. La cadena cinemática tipo pantógrafo logra la proporcionalidad entre el vector desplazamiento del extremo de la pata y los desplazamientos de los eslabones 6 y 7. Esto implica que si el eslabón 7 se mantiene fijo (supuesto fijo el cuerpo 8), un desplazamiento de 6 originará un desplazamiento vertical del extremo de la pata. Similarmente, si los cuerpos 6 y 8 están fijos, un desplazamiento del cuerpo 7 originará un desplazamiento horizontal del extremo de la pata. Si sólo tres patas de Sleipnir (en por lo menos dos planos distintos) están apoyadas sobre el piso y no deslizan, la movilidad del tronco con respecto al piso es 3: el tronco puede tener movimiento de traslación a lo largo y ancho de planos verticales paralelos a los planos que contienen las patas y rotación alrededor de un eje perpendicular a dichos planos, esto es, movilidad total en planos verticales. Los movimientos de patas adicionales apoyadas se habrán de conformar a estas posibilidades de movimiento.



Detalle de la estructura cinemática de una pata de Sleipnir

Figura 1.3

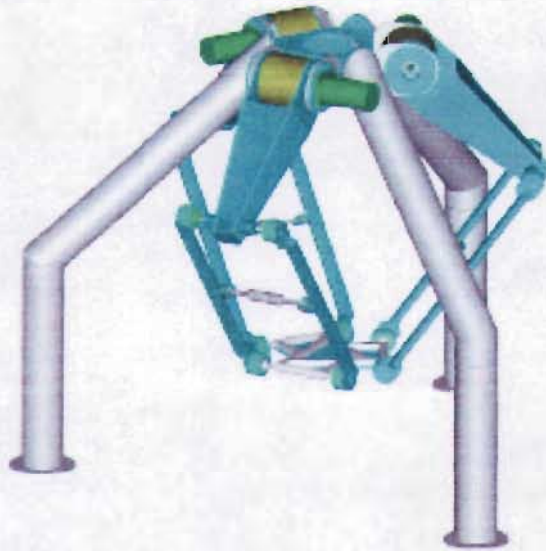
Tanto Bauhaus como Sleipnir poseen un pie dotado de un motor que permite un giro alrededor de un eje vertical. Cuando éste entra en acción las patas restantes se despegan del piso y puede conferírsele a cualquiera de estos robots la dirección deseada sobre un plano horizontal. Dicho pie es sólo auxiliar en el caso de Bauhaus; pero es indispensable en el caso de Sleipnir, si es que se quiere que los eslabones que conforman toda la estructura cinemática se comporten

como cuerpos rígidos y evitar deslizamientos entre las patas y el suelo.

Se toma a estos dos caminantes como representativos de una gran familia de robots caminantes que imitan artópodos.

■ 1.3.1.3 Caminante Delta

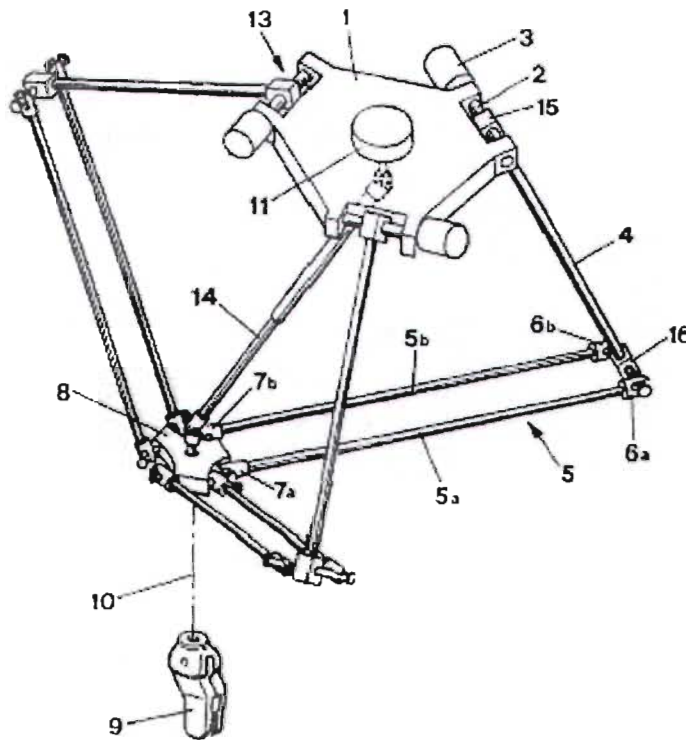
El caminante Delta (figura 1.4), diseñado y construido en la Universidad de Canterbury, Christchurch, Nueva Zelanda [6] tiene como principio de funcionamiento una cadena cinemática paralela, llamada robot delta (figura 1.5), y desarrollada por Clavel [4, 5] de la Escuela Politécnica de Lausana.



El caminante Delta de Dunlop

Figura 1.4

El robot Delta fue concebido originalmente como un manipulador alternativo a los robots cartesianos. Tiene tres grados de libertad, y la propiedad de conservar la orientación del órgano terminal. Esta estructura cinemática puede modelarse como una cadena compuesta por 11 cuerpos, 3 por cada pierna, 1 base fija y un órgano terminal. Estos eslabones están articulados mediante 12 pares esféricos y 3 de revoluta. Si se aplica el criterio generalizado de Kutzbach, se obtiene que la movilidad de esta cadena es 9. Sin embargo, se observa que de estos 9 grados de libertad, 6 son pasivos, pues los eslabones 5 pueden girar alrededor de sus propios ejes longitudinales, y estas libertades no aportan movilidad a la posición relativa del eslabón 8 con respecto al eslabón 1, por lo que la movilidad del órgano terminal con respecto a la base es 3. Examine la figura 1.5. Se supone fijo el eslabón 1. Los 3 eslabones 4 giran alrededor de ejes fijos y al hacerlo las rectas que pasan por los puntos 6a y 6b generan cilindros. Cada juego de eslabones 5a, 5b, 16 y 8 constituye un cuadrilátero cuyos lados opuestos tienen longitudes iguales. Estando estos cuadriláteros separados del robot Delta cabría la posibilidad de que los eslabones 5a y 5b tuvieran una orientación arbitraria uno con respecto al otro, lo mismo que los ejes 6a-6b y 7a-7b; pero al estar los tres cuadriláteros integrados a la cadena cinemática se logra que cada uno de ellos sea en todo momento un paralelogramo deformable. Esto significa que dentro de un cuadrilátero 5a, 5b, 16 y 8 los ejes 6a -6b y 7a-7b sean siempre paralelos. Aquí reside el secreto de que la orientación del cuerpo 8 con respecto al cuerpo 1 se mantenga constante, y que los desplazamientos angulares de los 3 eslabones 4 se traduzcan en una traslación en el espacio de 3D del cuerpo 8.



El manipulador Delta de Clavel

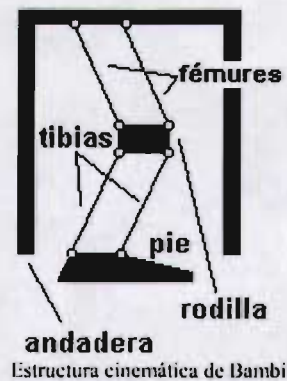
Figura 1.5

En el caminante Delta tanto el eslabón 1 como el 8 están adaptados para fungir como pies. Las tolerancias en las articulaciones deben ser muy estrechas, y los eslabones 5 deben resistir bien la compresión en aquellos momentos en los que el eslabón 8 tiene la función de pie. Los eslabones 4 deben además soportar sin deformarse flexión en todas direcciones, y torsión. Dunlop propone una versión gigante del caminante Delta para usarse como una grúa.

1.3.2. Caminantes propuestos por el autor

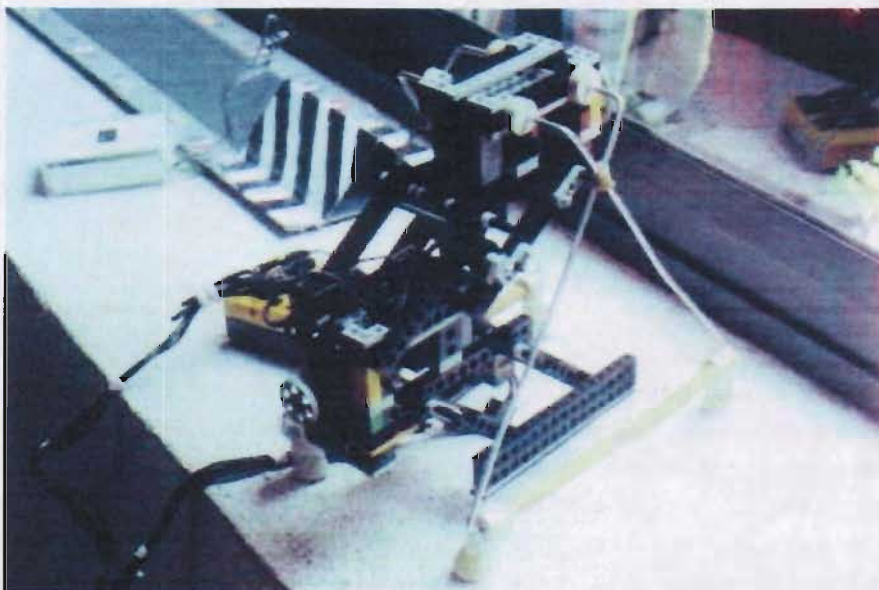
■ 1.3.2.1 Bambi

Bambi es un caminante cuya estructura cinemática de 2 grados de libertad se ilustra en la figura 1.6 y consiste en 7 eslabones, a saber: un pie, una andadera, una rodilla, 2 fémures y 2 tibias. Las 8 articulaciones son pares cinemáticos de revoluta. La cadena andadera-fémur-rodilla-fémur-andadera constituye un paralelogramo, al igual que la cadena rodilla-tibia-pie-tibia-rodilla. Estos 2 mecanismos de paralelogramo consiguen que la orientación de la andadera con respecto al pie sea constante. Esta cadena cinemática es capaz de caminar principalmente en línea recta. Si se añade un cuerpo que apoye sobre el suelo, y que se articule con el pie mediante un par de revoluta cuyo eje sea vertical, Bambi puede desplazarse a lo largo y ancho de un plano horizontal, o sobre un terreno con un relieve moderado. Bambi ha funcionado en un pequeño prototipo construido en *Legó* (M.R.) (figura 1.7) con un control de encendido y apagado para cada uno de los dos motores de corriente continua. El encendido, apagado e inversión de los sentidos de giro de los motores se controlan con el cerebro RCX de *Legó*.



Estructura cinemática de Bambi

Figura 1.6



Modelo funcional de Bambi realizado con módulos de construcción LEGO

Figura 1.7

■ 1.3.2.2 Ágata

El principio de andar de Ágata se funda en el funcionamiento de una plataforma de Stewart con 3 vértices en cada uno de los cuerpos provistos de patas. En cada uno de dichos vértices convergen los ejes longitudinales de 2 actuadores lineales, de los cuales el caminante tiene 6 en total. Las cuerpos A y B intercambian entre sí las funciones de una base fija al sistema de coordenadas mundiales y un órgano terminal. El estudio cinemático de esta cadena desde que se levanta un cuerpo inicialmente apoyado hasta que vuelve a apoyarse en una nueva ubicación, puede hacerse entonces como si se tratase de un manipulador paralelo con movilidad 6. La movilidad relativa de B con respecto a A es 6, al igual que la movilidad de A con respecto a B, razón por la cual se requiere de 6 actuadores para controlar completamente la actitud de un cuerpo con respecto al otro. Cinemáticamente, esta arquitectura ofrece la ventaja de permitir el andar sobre terrenos irregulares. La figura 1.8 muestra la fotografía de una maqueta del caminante Ágata. En ella puede apreciarse la estructura cinemática

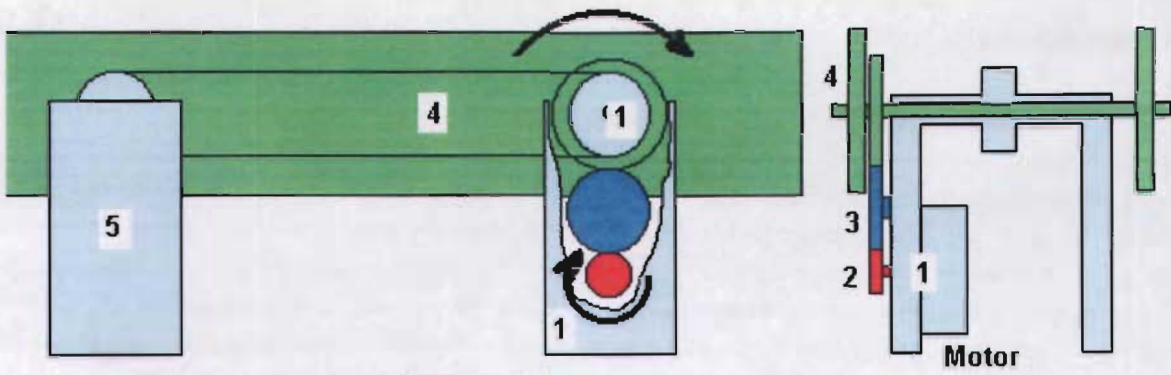


Maqueta del caminante Ágata

Figura 1.8

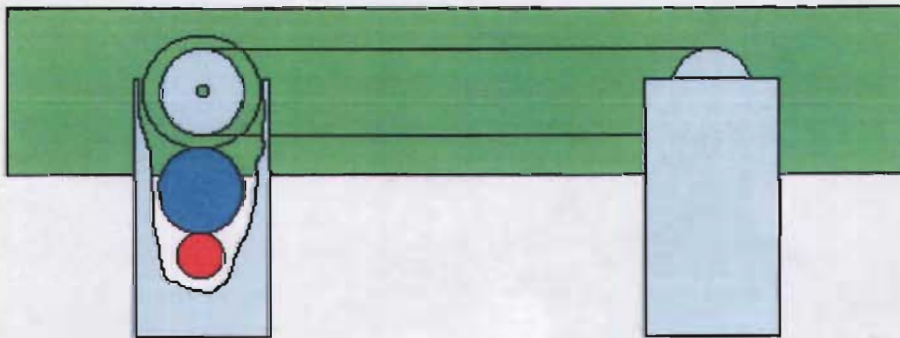
■ 1.3.2.3 Caminante Pi

El caminante Pi es otra propuesta de arquitectura consistente en un puente apoyado sobre dos columnas o patas. Este caminante se inspira en el caminante *Piernuda* que se construyó en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, pero se diferencia de éste en que el puente del caminante Pi rota en un plano vertical, mientras que el de *Piernuda* lo hace en un plano horizontal, razón por la cual *Piernuda* tiene más posibilidades de movimiento en el plano. Se concibió que un peso se trasladara longitudinalmente a lo largo del puente con la finalidad de cambiar la posición del centro de gravedad, de modo que éste idealmente se situara sobre el eje que articulase al puente con la pata que debería permanecer apoyada antes de iniciar el paso. De esta manera, para dar un paso el motor responsable de efectuarlo (motor locomotor) no tendría más que aplicar un par motor que fuera suficiente tan sólo para vencer el momento de inercia del puente y los pares debidos a fricción; pero no tendría que vencer la fuerza de gravedad. Una transmisión de banda síncrona o de cadena haría que en todo momento, las patas tuvieran la misma orientación. Este caminante requeriría de 2 motores para conseguir un andar en línea recta: un motor para desplazar el contrapeso, y otro para efectuar el paso. Nuevamente, añadiendo a cualquiera de las patas un motor que produjera una rotación alrededor de un eje vertical, se conseguiría que el caminante Pi pudiera desplazarse a lo largo y ancho de un plano horizontal. La figura 1.9 muestra dos vistas esquemáticas del caminante Pi. La vista lateral muestra al caminante a punto de dar un paso, durante la realización del cual la pata derecha estará apoyada. Sólo se muestra el motor de locomoción (engrane rojo). La figura 1.10 muestra una vista lateral del caminante Pi cuando ya se efectuó el paso. El centro de gravedad que ahora se supone ubicado en el eje de rotación entre los eslabones 1 y 4, deberá trasladarse al eje que articula los eslabones 4 y 5. El ciclo se repite cuantas veces sea necesario. La figura 1.11 muestra una maqueta del caminante Pi.



Esbozo conceptual del caminante Pi

Figura 1.9



Configuración de Pi tras haber ejecutado un paso

Figura 1.10

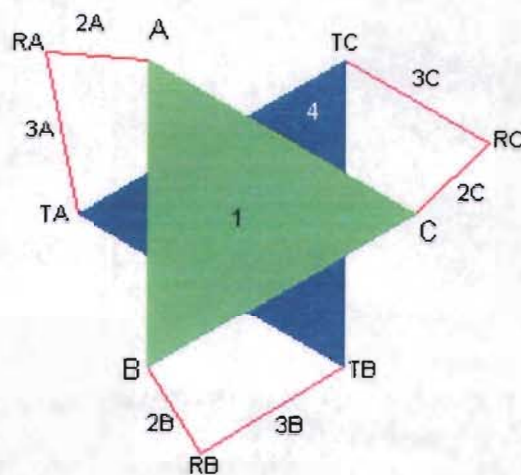


Maqueta del caminante Pi

Figura 1.11

■ 1.3.2.4 Caminante Delta Nabla

El caminante Delta Nabla, parte de cuya estructura cinemática se muestra en la figura 1.12, se basa en una cadena cinemática para un manipulador paralelo del tipo 3RRR con movimiento plano. El plano de movimiento relativo entre los eslabones 1 y 4 (exoesqueleto y endoesqueleto respectivamente) será horizontal. El endoesqueleto y el exoesqueleto deberán estar provistos de medios de apoyo en el suelo. Cada uno de estos dos cuerpos deberá tener tres patas retráctiles, de modo que este caminante podría llegar a tener un total de 9 actuadores: 3 motores rotatorios en las articulaciones 2 (cadera con fémur) para producir el movimiento relativo entre el exoesqueleto y el endoesqueleto, y 3 actuadores prismáticos (por ejemplo) por cada esqueleto. La acción de los motores rotatorios estará matemáticamente desacoplada de los actuadores prismáticos de las patas, lo que supone un análisis cinemático y cinético de relativa sencillez. Ahora bien, un diseño simplificado de este caminante se obtendría con una cadena cinemática de un grado libertad por cada esqueleto que retrayera o extendiera las 3 patas correspondientes simultáneamente, lo que daría como resultado que sólo se requeriría de 5 actuadores en total para el caminante Delta Nabla.



Estructura cinemática responsable del movimiento plano del caminante Delta-Nabla

Figura 1.12

1.4 Comparación entre las distintas cadenas cinemáticas examinadas

De acuerdo a los criterios establecidos se tiene lo siguiente:

1 Uniformidad de la energía potencial*

Desde la óptica de este criterio, el caminante Pi y el Delta-Nabla superan a todos los demás pues mantienen su energía potencial prácticamente constante. Puede objetarse que el caminante Delta Nabla requiere que las patas se retraigan, lo que implica un trabajo en contra de la gravedad. No obstante, un diseño adecuado, puede hacer que la masa de cada juego de 3 patas sea una fracción pequeña de la masa de todo el robot, por lo que la altura del centro de gravedad no variaría significativamente. Más aún, puede concebirse que estas patas estén contrapesadas, para que la única oposición a moverlas sea su inercia y algunas fuerzas de fricción.

2 Minimización del número de motores

El caminante Pi es el que requiere el mínimo número de motores: dos para movimiento en línea recta, y uno adicional para permitir cambio de dirección.

3 Adaptación al relieve

Bambi, el caminante Pi, el caminante Delta y el caminante Delta Nabla simplificado (5 actuadores) están en desventaja con respecto a Bauhaus y Ágata en cuanto a adaptación del relieve., pues pisar sobre una zona en la que el terreno no sea horizontal o sobre una eminencia de dimensiones comparables a su patrón de apoyo puede significar un cambio de orientación no previsto o no deseado alrededor de cualesquiera dos ejes horizontales. En el caso de los caminantes Pi y Delta, podría alterarse comprometedoramente la posición del centro de gravedad en relación al patrón de apoyo. No obstante, a todos estos robots pueden añadirseles grados de libertad adicionales para permitir una adaptación al terreno. Dada su distribución de masa, parece que estas adaptaciones darían los mejores resultados en el caso del caminante Delta-Nabla, pues su diseño es tal, que un triángulo trazado con los puntos de apoyo como vértices tendría la mayor superficie, lo que significaría un patrón de apoyo que garantizaría la máxima estabilidad.

4 Condición de no deslizamiento

Las estructuras cinemática de todas las cadenas discutidas, con excepción de Sleipnir, permiten cumplir con esta condición.

5 Control total de grados de libertad

Todas las cadenas cinemáticas consideradas en esta tesis permiten un análisis similar al de un manipulador. Bajo el supuesto de que las patas de cualquiera de ellas estuvieran bien afianzadas en el suelo, todas estas máquinas tienen motores suficientes para controlar completamente todos los grados de libertad, por lo que no es éste un criterio que permita discriminar entre ellas.

6 Control continuo

En todas las cadenas cinemáticas propuestas, con excepción del caminante Pi, la continuidad del movimiento está limitada sólo por el tipo de actuadores que se elijan. Por ejemplo, en el caso de Bauhaus, hay limitaciones en continuidad de movimiento por el hecho de que sólo son permisibles algunas posiciones discretas de los actuadores. Si se substituyera el control por uno de tipo PID, sería factible un control continuo. Si para cualquiera de las cadenas propuestas, excepto el caminante Pi, se usan motores a pasos, cuyas posiciones son discretas, las posiciones que pueda ocupar el robot lo serán también; pero puede obtenerse la resolución que se desee a través de un mecanismo reductor. El caminante Pi sólo puede dar pasos de longitud fija, lo cual limita su aplicabilidad, pues requeriría de sistemas auxiliares en el punto en el que recogiera una carga y aquél en el que la despositara para que la dejara precisamente en el sitio deseado.

7 Control simplificado y desacoplamiento de grados de libertad.*

El caminante Pi es el que tiene el control más sencillo pues sus tres motores pueden accionarse uno a la vez. Por ejemplo, si se hubiera de desplazar en línea recta la secuencia sería: 1) accionamiento del motor de avance hasta completar un paso, 2) desplazamiento del contrapeso para reubicar el centro de gravedad, y 3) repetición del ciclo. Le sigue en sencillez de control Bambi, en el que han de controlarse 2 motores a la vez para hacer avanzar el pie o la andadera, para que los puntos de estos cuerpos describan trayectorias especificadas en planos verticales. En tercer lugar de sencillez sigue el caminante Delta-Nabla, pues en el análisis de su cinemática inversa están desacoplados los grados de libertad que producen el movimiento plano y los grados de libertad verticales. Además, el análisis

cinemático inverso es sencillo. La cierta falta de simplicidad con respecto a los caminantes Pi y Bambi queda sobrecompensada con el control de movilidad total en el plano horizontal.

8 Patrón de apoyo estable.*

Sin duda, de las propuestas consideradas, el caminante Delta-Nabla ofrece el mejor patrón de apoyo en todo momento.

9 Transporte de carga útil*

De los caminantes propuestos, el que parece presentar mayores dificultades de diseño para el alojamiento de una carga útil es el caminante Pi, pues el añadir una carga cambiaría las restricciones del desplazamiento del centro de gravedad. Los caminantes Bambi, Delta, y Ágata necesariamente requieren hacer trabajo para contrarrestar la gravedad. Su manera de realizar los pasos así lo exige. Los caminantes Bauhaus y Sleipnir, si bien teóricamente podrían hacer traslaciones con una energía potencial constante, requerirían disipar energía para hacer fuerzas que contrarrestaran la gravedad. Decididamente, el más apto para el traslado de carga es el caminante Delta-Nabla, pues además de ser el que naturalmente se presta a desplazamientos con energía potencial constante sin necesidad de fuerzas disipativas, su diseño permite adaptar fácilmente el dorso de alguno de los esqueletos para transportar carga. Desde luego, a la mayoría de estos robots pueden instalárseles mecanismos auxiliares como brazos manipuladores que los hagan más versátiles para manipular y desplazar carga; pero esto queda fuera de los objetivos de este estudio.

10 Versatilidad de movimientos

Los robots menos versátiles de los aquí descritos son los caminantes Pi, Bambi, y Sleipnir: si están desprovistos del pie auxiliar que les permite girar alrededor de un eje vertical, estos robots sólo pueden desplazarse en línea recta. Pi tiene la ulterior desventaja de que sus pasos son de longitud fija. Sleipnir aventaja a Pi y a Bambi en el hecho de que los múltiples grados de libertad de aquél le permiten que sus patas se adapten a un relieve irregular. El prototipo que se ha construido del caminante Delta está restringido a movimientos de traslación pura, lo cual implica entre otras cosas que no deba caminar sobre terrenos que tengan relieve apreciable; pero puede ubicarse en cualquier lugar a lo largo y ancho de un plano horizontal. La versión de 5 actuadores del caminante Delta-Nabla está limitada también por no poder andar sobre terrenos con relieve; pero supera al caminante Delta por el hecho de que un esqueleto puede orientarse arbitrariamente respecto al otro (rotación alrededor de un eje). Sin duda, los robots más versátiles en lo que a movimiento se refiere de los descritos aquí son Bauhaus y Ágata.

1.5 Conclusión del capítulo

Por destacarse en los criterios 1, 7, 8, 9, y por cumplir aceptablemente los otros criterios, se seleccionó el caminante Delta-Nabla para estudiarse con más detenimiento y eventualmente construirse.

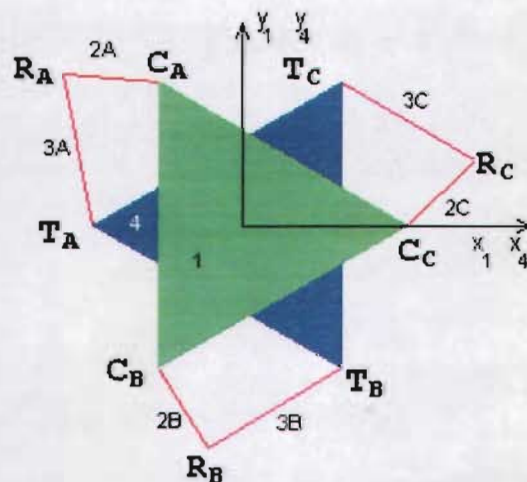
Capítulo 2. Análisis cinemático

2.1 Introducción

En este capítulo se describe la estructura cinemática del caminante Delta-Nabla, se definen los problemas cinemáticos directo e inverso y se explican las estrategias abordadas para resolver el problema cinemático inverso para el caso del caminante en cuestión.

2.2 Descripción y nomenclatura de las partes

Refiérase el lector a la figura 2.1. Se muestra un esquema de la vista superior del caminante Delta-Nabla. A la configuración mostrada en dicha figura se le denominará *configuración inicial*. Ésta se caracteriza por el hecho de que los baricentros de los triángulos equiláteros de idénticas dimensiones están alojados a lo largo de un eje vertical, y porque uno de dichos triángulos está rotado 180° con respecto al otro. El *exoesqueleto* (1) es el cuerpo indicado con color verde (en el caso de impresiones a color); el *endoesqueleto* (4) viene indicado en azul; por su parte, los eslabones que son directamente conducidos por motores, que se han denominado *fémures* (2), se identifican con el color rojo, y los eslabones que conectan al endoesqueleto con los fémures, llamados *tibias* (3) se representan en magenta. Todos los pares cinemáticos son del tipo revoluto cuyos ejes son todos paralelos entre sí. Una articulación entre el exoesqueleto y un fémur se denomina *cadera* y se representa con la letra C, seguida de uno de los subíndices A, B o C; una articulación entre un fémur y una tibia se denomina *rodilla*, y se representa con la letra R seguida de uno de los subíndices A, B o C, según la cadera con la que el fémur correspondiente esté articulado al exoesqueleto; finalmente, una articulación entre una tibia y el endoesqueleto se denomina *tallo*, y se representa con la letra T seguida de uno de los subíndices A, B o C, según corresponda.



Nomenclatura del caminante Delta-Nabla

Figura 2.1

2.3 Cinemática directa y cinemática inversa

2.3.1 Cinemática directa

Tratándose del problema de posición, se define al problema cinemático directo como aquél en el que se conocen los desplazamientos de los actuadores respecto a una posición definida como posición de reposo, y se desea conocer cuál es la actitud del eslabón considerado como órgano terminal, entendida la actitud como los cosenos directores que indican las orientaciones de los vectores unitarios de un sistema de coordenadas ortogonales que está unido rígidamente al órgano terminal con respecto a un sistema de coordenadas considerado fijo, y el vector de posición del origen del sistema de coordenadas asociado al órgano terminal con respecto al sistema fijo.

2.3.2 Cinemática inversa

En oposición, el problema cinemático inverso consiste en que, conocida la actitud del órgano terminal, se desea indagar los desplazamientos de los actuadores respecto a su posición de reposo que hacen posible la actitud del órgano terminal especificada.

Sabido es que, tratándose de cadenas cinemáticas construidas con eslabones binarios en serie, habitualmente resulta más compleja la solución del problema cinemático inverso. Contrariamente ocurre en cadenas cinemáticas en paralelo como la que se propone para el caminante Delta-Nabla. En esta tesis se resuelve el problema de posición cinemático inverso.

2.4 Solución al problema de posición cinemático inverso

En la solución a este problema se ha supuesto que el exoesqueleto está fijo en todo instante a la Tierra, supuesta ésta como un cuerpo rígido, y se ha considerado al endoesqueleto como el órgano terminal de un manipulador paralelo. Tanto al exoesqueleto como al endoesqueleto se asocian, como es costumbre, sendos sistemas de coordenadas ortogonales, respectivamente (x_1, y_1, z_1) y (x_4, y_4, z_4) . La actitud del endoesqueleto con respecto al exoesqueleto se especifica con una matriz homogénea de la forma [10]:

$$H_{14} = \begin{pmatrix} \cos[\zeta] & -\sin[\zeta] & 0 & x \\ \sin[\zeta] & \cos[\zeta] & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

donde ζ es el ángulo medido en sentido antihorario desde la dirección positiva del eje x_1 hasta la dirección positiva del eje x_4 , y (x, y) son las coordenadas del origen del sistema 4 con respecto al sistema 1. Cabe aclarar que los orígenes de estos sistemas de referencia se han identificado con los centroides de los respectivos cuerpos. Se ha optado por emplear coordenadas homogéneas sólo con la finalidad de abreviar la notación, puesto que la transformación de un sistema de coordenadas a otro puede expresarse sencillamente mediante el producto de una matriz por un vector. Las operaciones simbólicas hechas con *Mathematica* aprovecharon de las matrices homogéneas. Sin embargo para el cálculo numérico sólo se emplean las coordenadas físicas de los distintos vectores, y puesto que se analiza una cadena cinemática plana, los vectores físicos son bidimensionales.

Si el vector de posición de una partícula puntual cualquiera del endoesqueleto, expresado en términos del sistema de referencia local del propio endoesqueleto, se premultiplica por la matriz homogénea de la expresión 1, el resultado será el vector de posición de la misma partícula puntual expresado en términos del sistema de referencia asociado al exoesqueleto. Matemáticamente,

$$P_1 = H_{14} P_4 \quad (2.2)$$

La ecuación 2.2 servirá para calcular la posición de los tobillos con respecto al sistema local asociado al exoesqueleto. Los vectores de posición de los tobillos medidos en el sistema local correspondiente al endoesqueleto y expresados en coordenadas homogéneas son los siguientes:

$$T_{A_4} = \begin{pmatrix} -\frac{L}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$T_{B_4} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2\sqrt{3}} \\ -0.5L \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$T_{C_4} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2\sqrt{3}} \\ 0.5L \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

donde L representa el lado de los triángulos equiláteros. En estas expresiones está implícito que el origen del sistema de referencia local 4 coincide con el baricentro del triángulo equilátero cuyos vértices son los tobillos. En la figura 2.1, los sistemas de referencia 4 y 1 coinciden.

Aplicando la ecuación 2.2 a cada uno de los vectores de las expresiones 2.3 a 2.5, se obtienen las coordenadas homogéneas de los tobillos en el sistema asociado al exoesqueleto. En las siguientes expresiones se han escrito sólo los vectores bidimensionales:

$$T_{A_1} = \begin{pmatrix} X - \frac{L \cos[\zeta]}{\sqrt{3}} \\ Y - \frac{L \sin[\zeta]}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$T_{B_1} = \begin{pmatrix} X + \frac{L \cos[\zeta]}{2\sqrt{3}} + 0.5L \sin[\zeta] \\ Y - 0.5L \cos[\zeta] + \frac{L \sin[\zeta]}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$T_{C_1} = \begin{pmatrix} x + \frac{L \cos[\zeta]}{2\sqrt{3}} - 0.5 L \sin[\zeta] \\ y + 0.5 L \cos[\zeta] + \frac{L \sin[\zeta]}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Las coordenadas de las caderas en el sistema de coordenadas asociado al exoesqueleto se expresan como sigue:

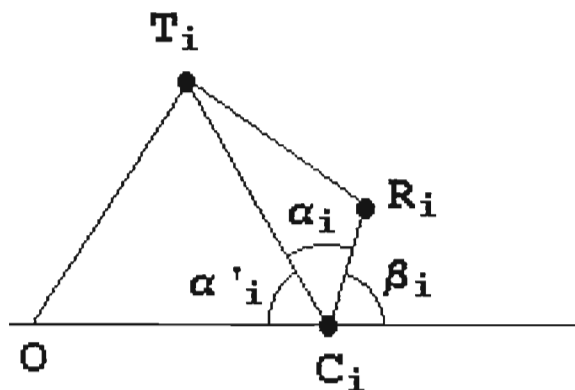
$$C_{A_1} = \begin{pmatrix} -\frac{L}{2\sqrt{3}} \\ \frac{L}{2} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$C_{B_1} = \begin{pmatrix} -\frac{L}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{L}{2} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$C_{C_1} = \begin{pmatrix} \frac{L}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

2.4.1 Cálculo de posiciones angulares de los fémures

Para el fémur i y la tibia i puede hacerse la construcción geométrica de las figuras 2.2 y 2.3.



Construcción geométrica para la solución del problema cinemático inverso en posición (ángulos)

Figura 2.2

C_i , R_i , T_i representan los vectores de posición de la cadera i , la rodilla i , y el tobillo i respectivamente, en tanto que O es el vector cero. Todos estos vectores se consideran medidos en el sistema de referencia asociado al exoesqueleto. En estas condiciones pueden definirse:

$$a_i = \text{Longitud de la tibia } i \quad (2.12)$$

$$b_i = \text{Norma} [T_i - C_i] \quad (2.13)$$

$$c_i = \text{Longitud del fémur } i \quad (2.14)$$

$$a'_i = \text{Norma} [T_i] \quad (2.15)$$

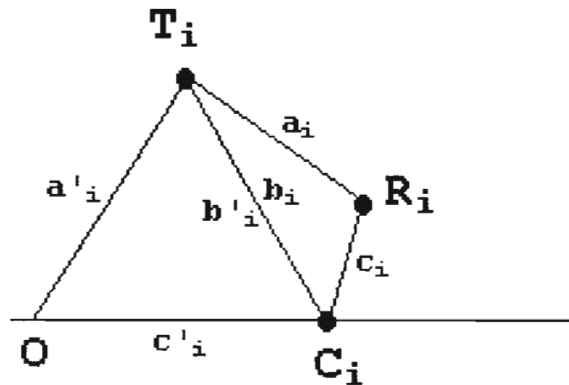
$$b'_i = b_i \quad (2.16)$$

$$c'_i = \text{Norma} [C_i] \quad (2.17)$$

Con las anteriores definiciones pueden calcularse los ángulos α_i y α'_i como sigue:

$$\alpha_i = \text{Cos}^{-1} [(b_i^2 + c_i^2 - a_i^2) / (2 * b_i * c_i)] \quad (2.18)$$

$$\alpha'_i = \text{Cos}^{-1} [(b'_i^2 + c'_i^2 - a'_i^2) / (2 * b'_i * c'_i)] \quad (2.19)$$



Construcción geométrica para la solución del problema cinemático inverso en posición (longitudes)

Figura 2.3

Para que el ángulo α_i sea un número real, es necesario que se cumplan las siguientes desigualdades:

$$-1 < (b_i^2 + c_i^2 - a_i^2) / (2 * b_i * c_i) < 1 \quad (2.20)$$

Cabe anotar que en esta tesis se ha supuesto que las tres tibias tienen longitudes idénticas entre sí. Igualmente, los tres fémures tienen idénticas longitudes entre sí. Si α_i y α'_i están expresados en radianes, los ángulos β_i son:

$$\beta_i = \pi - \alpha'_i - \alpha_i \quad (2.21)$$

Los ángulos β_i son los subtendidos entre una línea que va de O a C_i y el eje longitudinal del fémur i . Para obtener los ángulos que los fémures forman con el eje x_1 medidos en sentido antihorario desde la dirección positiva de éste se requieren las siguientes expresiones:

$$\theta_{1A} = \beta_A + \frac{2\pi}{3} \quad (2.22)$$

$$\theta_{1_B} = \beta_B + \frac{4\pi}{3} \quad (2.23)$$

$$\theta_{1_C} = \beta_C \quad (2.24)$$

Los segundos sumandos en los miembros derechos de las ecuaciones 22 y 23 representan el ángulo que forman respectivamente los segmentos OA y OB con el eje x_1 .

2.4.2 Cálculo de los vectores de posición de las rodillas.

Los vectores de posición de las rodillas se calculan con las siguientes expresiones:

$$R_i = C_i + c_i \begin{pmatrix} \cos[\theta_{1_i}] \\ \sin[\theta_{1_i}] \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Recapitulando, si se conoce la actitud del endoesqueleto medida según un observador situado en el exoesqueleto (expresión (2.1)), podemos calcular los vectores de posición de los tobillos aprovechando las expresiones 2.2 a 2.8; con las ecuaciones 2.9 a 2.24, somos capaces de calcular los ángulos que cada uno de los fémures forma con respecto al eje x_1 , o sea que si se especifica el movimiento deseado del endoesqueleto con respecto al exoesqueleto, se puede saber exactamente cómo debe moverse cada motor. Con la ecuación 2.25, podemos calcular los vectores de posición de las rodillas. Al conocer los vectores de posición de las caderas, las rodillas y los tobillos, es posible dibujar la configuración de la cadena cinemática, lo cual puede aprovecharse para hacer una simulación de movimiento si se prescribe una historia de actitudes que habrá de tener el endoesqueleto.

2.4.3 Trayectorias

Las variables x , y y ζ pueden ser cualquier función real y continua del tiempo; su forma precisa se estudiará en el capítulo 4.

2.5 Conclusión del capítulo

En este capítulo se desarrolló un procedimiento para calcular las posiciones angulares que deben tener los fémures a fin de conseguir que el endoesqueleto tenga una actitud deseada. Se encontraron expresiones para los vectores de posición de los tobillos, y las rodillas. El análisis hecho en este capítulo tendrá utilidad en el cálculo de fuerzas para el análisis cinético (capítulo 3). También fue útil para escribir los programas *Animador* y *Trazador*. El primero hace una animación del movimiento de la cadena cinemática con el exoesqueleto fijo, y el segundo imprime en un mismo gráfico sucesivas configuraciones de la misma cadena cinemática.

Capítulo 3. Análisis cinético inverso

3.1 Introducción

Se entiende por análisis cinético inverso la búsqueda de las fuerzas generalizadas que han de ejercer los actuadores a fin de obtener un movimiento especificado de una cadena cinemática. El análisis cinético de la presente tesis se propone calcular los momentos de torsión que deben ejercer los motores sobre los fémures del caminante Delta-Nabla para conseguir el movimiento deseado del endoesqueleto.

3.2 Premisas

Premisa 1

Se supone que el endoesqueleto posee movimiento plano horizontal, esto es, todas las partículas pertenecientes al endoesqueleto se mueven sobre planos paralelos horizontales fijos a la Tierra.

Premisa 2

Se supone que uno de los planos descritos por al menos una de las partículas del endoesqueleto es un plano de simetría del mismo. Cuando se construya un prototipo del caminante Delta-Nabla, difícilmente se logrará esto; pero esta Premisa sirve como una primera aproximación.

Premisa 3

Se supone que las masas y los momentos de inercia de los fémures y de las tibias son despreciables en comparación con la masa y el momento de inercia alrededor del eje vertical centroidal del endoesqueleto.

Premisa 4

Las fuerzas que actúan verticalmente sobre cada uno de los componentes del caminante suman siempre cero, lo que posibilita el movimiento plano horizontal. En realidad, esta Premisa está implicada en la primera.

Premisa 5

Se suponen despreciables los efectos de cualquier suerte de fricción en las articulaciones.

Premisa 6

Se supone que el régimen de fricción que prevalece en todo momento entre el pie apoyado y el suelo es estático.

La Premisa 3 ayuda a simplificar considerablemente el análisis, pues al suponer despreciables sus inercias, no se precisa conocer las aceleraciones lineales ni angulares de 6 de los 7 cuerpos móviles que componen la cadena bajo estudio, y en consecuencia se hace innecesario el análisis cinemático inverso tanto en velocidad como en aceleración a efectos de estimar los pares que ejercerán los motores sobre los fémures.

3.3 Ecuaciones de movimiento

Puede observarse que cada una de las tibias es un cuerpo de los llamados "de dos fuerzas", pues dos fuerzas de tensión o dos de compresión actúan sobre sendos extremos de cada tibia a lo largo de su eje longitudinal. En contraste, los fémures están sujetos a fuerzas oblicuas y a momentos flectores. El endoesqueleto está sujeto a tres fuerzas coplanares, no concurrentes, que las tibias ejercen sobre él.

La figura 3.1 muestra el diagrama de cuerpo libre del endoesqueleto en el que se ha supuesto que las tibias están sometidas a tensión.

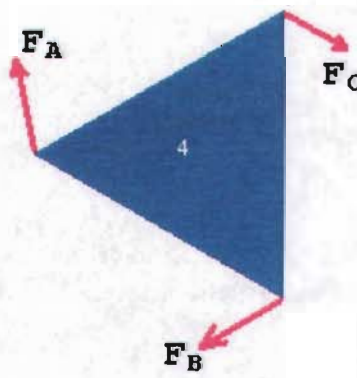


Diagrama de cuerpo libre del endoesqueleto

Figura 3.1

Las ecuaciones de movimiento del endoesqueleto son:

Suma total de fuerzas:

$$F_A \mathbf{e}_{T_A} + F_B \mathbf{e}_{T_B} + F_C \mathbf{e}_{T_C} = m \mathbf{a}_G \quad (3.1)$$

Suma total de momentos alrededor del centro de masa del endoesqueleto:

$$\mathbf{r}_{GA} \times F_A \mathbf{e}_{T_A} + \mathbf{r}_{GB} \times F_B \mathbf{e}_{T_B} + \mathbf{r}_{GC} \times F_C \mathbf{e}_{T_C} = I \alpha \mathbf{k} \quad (3.2)$$

donde

F_A, F_B, F_C son las magnitudes de las fuerzas ejercidas por las tibias respectivas,

$\mathbf{e}_{T_A}, \mathbf{e}_{T_B}, \mathbf{e}_{T_C}$ son los vectores unitarios correspondientes a las direcciones de los ejes longitudinales de las tibias,

m es la masa del endoesqueleto,

\mathbf{a}_G es el vector aceleración del centro de masa del endoesqueleto,

$\mathbf{r}_{GA}, \mathbf{r}_{GB}, \mathbf{r}_{GC}$ son los vectores que van del centro de gravedad del endoesqueleto respectivamente a los tobillos A, B

y C,

I es el momento de inercia del endoesqueleto alrededor de un eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por el centro de masa,

α es la aceleración angular del endoesqueleto,

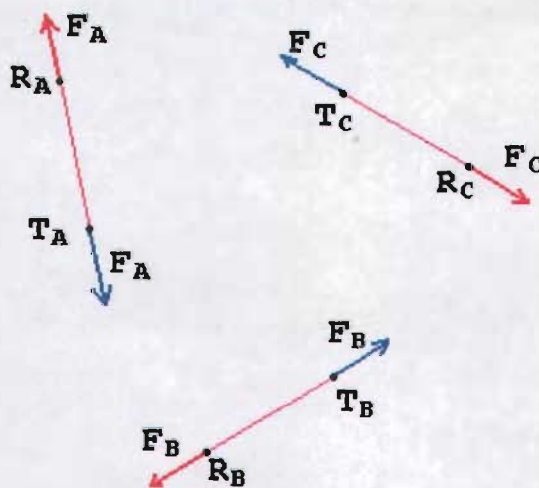
y k es el vector unitario a lo largo de la dirección del eje z_1 .

Puesto que los vectores r_{GA} , r_{GB} , r_{GC} , y todos los vectores fuerza yacen sobre el plano de movimiento, los momentos producidos por cada fuerza tienen como dirección el eje z_1 , y en consecuencia, la ecuación 3.2 se reduce a una ecuación escalar; razón por la cual las ecuaciones 3.1 y 3.2 constituyen un sistema de 3 ecuaciones escalares en las incógnitas F_A , F_B , F_C , siempre que la aceleración del centro de masa, la aceleración angular, la masa, el momento de inercia del endoesqueleto, las posiciones instantáneas de los tobillos A, B y C y las direcciones de los ejes longitudinales de las tibias sean conocidos. Según práctica usual, un signo positivo de cualquiera de las fuerzas F_A , F_B , F_C se interpretará como que la tibia correspondiente está sometida a tensión, y un signo negativo significará que la tibia correspondiente está bajo compresión.

La figura 3.2 muestra los diagramas de cuerpo libre para las tres tibias. La ecuación de movimiento para cada tibia es:

$$\sum F = 0 \quad (3.3)$$

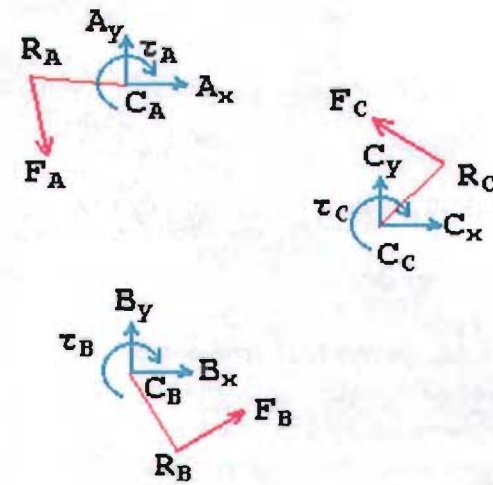
El análisis de fuerzas sobre las tibias es trivial, pues al haberse supuesto que su masa es despreciable, y al ser cada una de ellas un cuerpo de dos fuerzas, se desprende que para cada tibia la fuerza ejercida sobre ella por el endoesqueleto tiene igual magnitud que la fuerza ejercida sobre ella por el fémur con el que está conectada. Puede decirse que la fuerza que el endoesqueleto aplica a una tibia se transmite sin modificación a través de la tibia al fémur correspondiente.



Diagramas de cuerpo libre de las tibias

Figura 3.2

Con las consideraciones anteriores, se construyen los diagramas de cuerpo libre para los fémures, los cuales aparecen en la figura 3.3.



Diagramas de cuerpo libre de los fémures

Figura 3.3

Sobre cada fémur actúa la fuerza que sobre él ejerce la tibia que, se ha dicho, es igual a la fuerza que el endoesqueleto produce sobre la tibia correspondiente; actúa también una fuerza ejercida por el exoesqueleto de dirección desconocida (fuerza comúnmente llamada reacción), que en los diagramas de cuerpo libre se ha descompuesto en dos fuerzas perpendiculares orientadas según los ejes de referencia; y finalmente, sobre cada fémur actúa un par de torsión producido por el motor correspondiente.

Para los fines de esta tesis, es irrelevante indagar los valores de las reacciones, de modo que sólo interesa tener en cuenta la suma de momentos que las fuerzas que actúan sobre los fémures producen alrededor de los puntos C_A , C_B , y C_C , según corresponda. Teniendo en cuenta que, para una tibia, la fuerza que ésta hace sobre el endoesqueleto difiere de la que la misma tibia hace sobre el fémur correspondiente sólo en signo, y en concordancia con la Premisa 3, se puede escribir:

Para el fémur A:

$$(\mathbf{R}_A - \mathbf{C}_A) \times (-F_A \mathbf{e}_{T_A}) + \tau_A \mathbf{k} = 0 \quad (3.4)$$

Para el fémur B:

$$(\mathbf{R}_B - \mathbf{C}_B) \times (-F_B \mathbf{e}_{T_B}) + \tau_B \mathbf{k} = 0 \quad (3.5)$$

Para el fémur C:

$$(\mathbf{R}_C - \mathbf{C}_C) \times (-F_C \mathbf{e}_{T_C}) + \tau_C \mathbf{k} = 0 \quad (3.6)$$

Aunque en la figura 3.3 se han dibujado los pares de torsión en sentido horario, a fin de obviar que dichos pares se oponen a los infligidos por las tibias sobre los fémures, en las ecuaciones 3.4 a 3.6 se han sumado en los miembros izquierdos. De las ecuaciones 3.4 a 3.6 se obtienen expresiones explícitas para los pares de torsión τ_A , τ_B , τ_C :

$$\tau_A \mathbf{k} = (\mathbf{R}_A - \mathbf{C}_A) \times F_A \mathbf{e}_{T_A} \quad (3.7)$$

$$\tau_B \mathbf{k} = (\mathbf{R}_B - \mathbf{C}_B) \times F_B \mathbf{e}_{T_B} \quad (3.8)$$

$$\tau_C \mathbf{k} = (\mathbf{R}_C - \mathbf{C}_C) \times \mathbf{F}_C \mathbf{e}_{T_C} \quad (3.9)$$

Aunque escritas en forma vectorial, las ecuaciones 3.7 a 3.9 se reducen en realidad a tres expresiones escalares. Un valor positivo para cualquiera de los pares τ_A , τ_B , τ_C se interpretará como que el fémur correspondiente acelerará angularmente en sentido antihorario, y un signo negativo querrá decir que el fémur correspondiente acelerará en sentido horario.

3.4 Conclusión del capítulo

En resumen, si para un instante se conocen la aceleración del centro de masa y la aceleración angular del endoesqueleto, así como los vectores de posición de los tobillos A, B y C con respecto al sistema de coordenadas fijo al exoesqueleto, y la masa y el momento de inercia alrededor de un eje centroidal vertical del endoesqueleto, las ecuaciones 3.1 y 3.2 forman un sistema determinado de tres ecuaciones lineales cuyas incógnitas son las fuerzas que se debe aplicar al endoesqueleto sobre los tobillos para producir el movimiento deseado; las expresiones 3.7 a 3.9 dan los valores de los pares de torsión que deben aplicar los motores a los fémures para producir el movimiento deseado del endoesqueleto.

Capítulo 4. Planeación de trayectorias

4.1 Introducción

Dos objetivos a perseguir en el diseño del caminante señalados en el capítulo 1 están relacionados con el comportamiento temporal de las variables cinemáticas posición, velocidad y aceleración del centro de gravedad de los cuerpos rígidos que se mueven, así como con las variables orientación, velocidad angular y aceleración angular de los mismos cuerpos rígidos. Estos objetivos son: evitar el deslizamiento de las patas apoyadas (objetivo 4), y transportar una carga útil con seguridad (objetivo 9).

En el contexto del caminante Delta-Nabla se usa el término *pie* para referirse bien al exoesqueleto, o bien al endoesqueleto, y por *pata* se entenderá un apéndice de cualquiera de los dos pies diseñado para tener contacto con el piso y darle soporte al caminante. Recuérdese que las patas deberán ser retráctiles en un prototipo funcionante; pero en este capítulo, salvo que explícitamente se indique lo contrario, la atención se limitará al movimiento plano de un pie con respecto al otro.

Comiencese por considerar que el caminante Delta-Nabla se desplazará en línea recta. En el andar de un caminante bípedo (como es en cierto sentido el Delta-Nabla), uno de los pies descansa sobre el suelo, en tanto que el otro parte del reposo, experimenta un aumento gradual de su rapidez hasta un valor máximo, la cual disminuye luego hasta que el pie en movimiento alcanza de nuevo el reposo para apoyarse en una ubicación diferente. También es deseable que la aceleración al inicio y al final del movimiento del pie que se desplaza sea nula, pues por una parte, ello facilitará que las fuerzas de fricción entre las patas apoyadas y el piso se mantengan dentro del régimen estático (hipótesis 6, cap.3) (condición de no deslizamiento), y por otra, para una velocidad media dada, las fuerzas al arranque y en el paro entre eslabones articulados pueden ser nulas, y mantenerse durante el movimiento en valores moderados. Moderar estas fuerzas contribuirá a alargar la vida del sistema mecánico. Se dirá que cuando las velocidades inicial y final, así como las aceleraciones inicial y final son nulas, los perfiles de velocidad y aceleración están *suavizados*. En ocasiones el diseñador deseará que la derivada temporal de la aceleración, conocida como *sacudida*, tome valores específicos para ciertos valores del tiempo. Para los fines del presente estudio, será suficiente la nulidad de las velocidades y las aceleraciones al inicio y al final del desplazamiento de un pie, y valores preestablecidos de las posiciones inicial y final.

4.2 Perfiles de velocidad y aceleración para traslación rectilínea suavizados mediante el uso de polinomios

Del estudio de mecanismos con levas se sabe que para el movimiento rectilíneo de un seguidor, un recurso sencillo y efectivo para restringir los valores de las variables cinemáticas para ciertos instantes, es el uso de polinomios en los que la variable dependiente es la posición, y la variable independiente, el tiempo. Este enfoque se ha adoptado también en robótica. El grado del polinomio correspondiente será igual al número de restricciones menos 1. Si por ejemplo, se conocen las posiciones inicial y final de una masa que ha de moverse en línea recta, y se desea que tanto la velocidad como la aceleración de dicha masa sean nulas al inicio y al final del movimiento, se tienen seis restricciones, por lo que el polinomio para la posición será de quinto grado. Así pues, supóngase que una masa se desplazará a lo largo del eje ζ desde una posición ξ_i hasta una posición ξ_f en un intervalo de tiempo cuya duración sea T . El polinomio correspondiente a la posición instantánea es:

$$\xi[t] = a_0 + t a_1 + t^2 a_2 + t^3 a_3 + t^4 a_4 + t^5 a_5 \quad (4.1)$$

Derivando una vez con respecto al tiempo, se obtiene una expresión para la velocidad instantánea:

$$v_\xi[t] = a_1 + 2 t a_2 + 3 t^2 a_3 + 4 t^3 a_4 + 5 t^4 a_5 \quad (4.2)$$

Derivando una vez más con respecto al tiempo, se obtiene la aceleración instantánea:

$$a_\xi[t] = 2 a_2 + 6 t a_3 + 12 t^2 a_4 + 20 t^3 a_5 \quad (4.3)$$

En las ecuaciones 4.1 a 4.3 las a_j son constantes que deben determinarse usando las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} \xi[0] &= \xi_i \\ \xi[T] &= \xi_f \\ \xi'[0] &= 0 \\ \xi'[T] &= 0 \\ \xi''[0] &= 0 \\ \xi''[T] &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Substituyendo estas restricciones en las ecs. 4.1 a 4.3 resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales que ha de resolverse para las a_j :

$$\begin{aligned} a_0 &= \xi_i \\ a_0 + T a_1 + T^2 a_2 + T^3 a_3 + T^4 a_4 + T^5 a_5 &= \xi_f \\ a_1 &= 0 \\ a_1 + 2 T a_2 + 3 T^2 a_3 + 4 T^3 a_4 + 5 T^4 a_5 &= 0 \\ 2 a_2 &= 0 \\ 2 a_2 + 6 T a_3 + 12 T^2 a_4 + 20 T^3 a_5 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_i \\ 0 \\ 0 \\ \frac{10 (\xi_f - \xi_i)}{T^3} \\ -\frac{15 (\xi_f - \xi_i)}{T^4} \\ \frac{6 (\xi_f - \xi_i)}{T^5} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

De manera que los polinomios de posición, velocidad y aceleración son:

$$\xi[t] = \frac{6 t^5 (\xi_f - \xi_i)}{T^5} - \frac{15 t^4 (\xi_f - \xi_i)}{T^4} + \frac{10 t^3 (\xi_f - \xi_i)}{T^3} + \xi_i \quad (4.7)$$

$$v_{\xi}[t] = \frac{30 t^4 (\xi_f - \xi_i)}{T^5} - \frac{60 t^3 (\xi_f - \xi_i)}{T^4} + \frac{30 t^2 (\xi_f - \xi_i)}{T^3} \quad (4.8)$$

$$a_{\xi}[t] = \frac{120 t^3 (\xi_f - \xi_i)}{T^5} - \frac{180 t^2 (\xi_f - \xi_i)}{T^4} + \frac{60 t (\xi_f - \xi_i)}{T^3} \quad (4.9)$$

4.3 Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo suavizado mediante polinomios

Suponiendo que se desea que un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje tenga posiciones angulares inicial y final prescritas, así como velocidades y aceleraciones angulares iniciales y finales nulas, si la duración del movimiento de rotación es T , bastará con reemplazar ξ por ζ , v_{ξ} por ω , y a_{ξ} por α en las ecuaciones 4.7 a 4.9 para obtener:

$$\zeta[t] = \frac{6 t^5 (\zeta_f - \zeta_i)}{T^5} - \frac{15 t^4 (\zeta_f - \zeta_i)}{T^4} + \frac{10 t^3 (\zeta_f - \zeta_i)}{T^3} + \zeta_i \quad (4.10)$$

$$\omega[t] = \frac{30 t^4 (\zeta_f - \zeta_i)}{T^5} - \frac{60 t^3 (\zeta_f - \zeta_i)}{T^4} + \frac{30 t^2 (\zeta_f - \zeta_i)}{T^3} \quad (4.11)$$

$$\alpha[t] = \frac{120 t^3 (\zeta_f - \zeta_i)}{T^5} - \frac{180 t^2 (\zeta_f - \zeta_i)}{T^4} + \frac{60 t (\zeta_f - \zeta_i)}{T^3} \quad (4.12)$$

donde ζ , ω y α son respectivamente: la orientación, la velocidad angular y la aceleración angular del cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo.

4.4 Una subfamilia de movimientos de cuerpo rígido en el plano

Puesto que las variables cinemáticas del centro de masa de un cuerpo rígido son independientes de las variables cinemáticas de rotación del propio cuerpo rígido, pueden especificarse libremente las posiciones inicial y final de su centro de masa y sus posiciones angulares inicial y final, y sustituirse en las ecuaciones 4.7 a 4.12 para, haciendo variar el tiempo desde 0 hasta T , generar un movimiento plano consistente en la combinación de un movimiento recto horizontal del centro de masa, a lo largo de un eje ξ de orientación arbitraria contenido en un plano horizontal, y un movimiento de rotación alrededor de un eje z vertical que contenga al centro de masa del cuerpo rígido en cuestión.

Adviértase que si se tiene un cuerpo rígido apoyado sobre un plano horizontal, y se elige una recta paralela a dicho plano, de orientación arbitraria, que pase por el centro de masa, de manera que dicho centro de masa pueda moverse a lo largo de la recta elegida, y se permite que el cuerpo rígido gire alrededor de un eje vertical que pasa por su centro de masa, éste puede llevarse a cualquier nueva posición dentro del plano horizontal que lo contiene, y el cuerpo rígido en sí puede tener cualquier orientación final alrededor del eje vertical que pasa por su centro de masa.

Si se recuerda que el exoesqueleto y el endoesqueleto del caminante Delta-Nabla van a desempeñar alternativamente las funciones de marco de referencia fijo, y de cuerpo móvil, se comprende que si el cuerpo móvil en turno se mueve de acuerdo con las ecuaciones 4.7 a 4.12, teóricamente puede hacerse que el caminante se desplace a cualquier parte del plano horizontal, y que los dos esqueletos o pies tengan la actitud deseada al término del desplazamiento.

4.5 Descripción de la posición del centro de gravedad del endoesqueleto en términos del sistema de coordenadas asociado al exoesqueleto

En este capítulo se han estado describiendo las coordenadas del centro de masa en términos de su posición ξ y de una orientación del eje ξ sobre un cierto plano horizontal. Si se considera el sistema de coordenadas xy asociado al exoesqueleto, puede describirse la orientación del eje ξ mediante un ángulo γ que dicho eje forme con respecto al eje x . El ángulo γ , al que se le llamará el *rumbo*, se medirá a partir de la dirección positiva del eje x y en sentido antihorario. Por lo tanto, para convertir las coordenadas (ξ, γ) a las coordenadas (x, y) se requerirán de las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos [\gamma] \\ y &= \xi \sin [\gamma] \end{aligned} \tag{4.13}$$

Son estas coordenadas las que se alimentarán a las ecuaciones obtenidas para la solución al problema cinemático inverso en el capítulo 2.

4.6 Otra subfamilia de movimientos de cuerpo rígido en el plano

Supóngase que el caminante Delta-Nabla debe efectuar una carrera entre dos puntos siguiendo una línea recta, y que se desea que la orientaciones de los esqueletos sean las mismas al inicio y al final de la carrera. Desde luego, hay multitud de formas para lograr esto; pero una de ellas es que en cada paso la orientación del último cuerpo en haber efectuado un desplazamiento, sea al final del paso la misma que su orientación al comienzo del paso, y que el centro de masa se mueva durante el paso a lo largo de una línea recta. Obviamente esto puede conseguirse haciendo que el pie en movimiento tenga una traslación rectilínea; pero no es ésta la única forma de lograrlo. El pie puede por ejemplo rotar en un sentido durante una fracción del trayecto, y después rotar en el sentido inverso en la fracción restante para que las orientaciones al inicio y al final del paso sean iguales. Si por ejemplo se precisa que en un cierto instante comprendido entre 0 y T el pie al que corresponde moverse gire un cierto ángulo respecto a la orientación de arranque, se está añadiendo una restricción, por lo que ahora el grado del polinomio de la posición con respecto al tiempo deberá ser de grado 6, lo cual implica que habrán de determinarse 7 constantes como se muestra a continuación.

Polinomios de posición, velocidad y aceleración:

$$\zeta[t] = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 \quad (4.14)$$

$$\omega[t] = a_1 + 2 a_2 t + 3 a_3 t^2 + 4 a_4 t^3 + 5 a_5 t^4 + 6 a_6 t^5 \quad (4.15)$$

$$\alpha[t] = 2 a_2 + 6 a_3 t + 12 a_4 t^2 + 20 a_5 t^3 + 30 a_6 t^4 \quad (4.16)$$

Restricciones:

$$\begin{aligned} \zeta[0] &= \zeta_i \\ \zeta[T] &= \zeta_f \\ \zeta[kT] &= \zeta_m \\ \zeta'[0] &= 0 \\ \zeta'[T] &= 0 \\ \zeta''[0] &= 0 \\ \zeta''[T] &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde k es un número comprendido en el intervalo $[0,1]$ y ζ_m es una cierta desviación de la posición angular inicial que ocurrirá en el tiempo kT . Se llamará a esta desviación *digresión angular*.

Con las restricciones anteriores se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_0 &= \zeta_i \\ a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + a_4 T^4 + a_5 T^5 + a_6 T^6 &= \zeta_f \\ a_1 &= 0 \\ a_1 + 2 a_2 T + 3 a_3 T^2 + 4 a_4 T^3 + 5 a_5 T^4 + 6 a_6 T^5 &= 0 \\ 2 a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$2 a_2 + 6 a_3 T + 12 a_4 T^2 + 20 a_5 T^3 + 30 a_6 T^4 = 0$$

$$a_0 + a_1 k T + a_2 k^2 T^2 +$$

$$a_3 k^3 T^3 + a_4 k^4 T^4 + a_5 k^5 T^5 + a_6 k^6 T^6 = \zeta_m$$

cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \zeta_i \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\zeta_m - 15 k^4 \zeta_f + 24 k^5 \zeta_f - 10 k^6 \zeta_f - \zeta_i + 15 k^4 \zeta_i - 24 k^5 \zeta_i + 10 k^6 \zeta_i}{(-k + k^2)^3 T^3} \\ -\frac{3 (-\zeta_m + 5 k^3 \zeta_f - 9 k^5 \zeta_f + 5 k^6 \zeta_f + \zeta_i - 5 k^3 \zeta_i + 9 k^5 \zeta_i - 5 k^6 \zeta_i)}{(-k + k^2)^3 T^4} \\ \frac{3 (-\zeta_m + 8 k^3 \zeta_f - 9 k^4 \zeta_f + 2 k^6 \zeta_f + \zeta_i - 8 k^3 \zeta_i + 9 k^4 \zeta_i - 2 k^6 \zeta_i)}{(-1 + k)^3 k^3 T^5} \\ -\frac{-\zeta_m + 10 k^3 \zeta_f - 15 k^4 \zeta_f + 6 k^5 \zeta_f + \zeta_i - 10 k^3 \zeta_i + 15 k^4 \zeta_i - 6 k^5 \zeta_i}{(-1 + k)^3 k^3 T^6} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Reemplazando las expresiones para estas constantes en las ecuaciones 4.14 a 4.16, se obtienen los siguientes polinomios para posición, velocidad y aceleraciones angulares:

$$\zeta[t] = \zeta_i -$$

$$(t^6 (10 k^3 \zeta_f - 15 k^4 \zeta_f + 6 k^5 \zeta_f + \zeta_i - 10 k^3 \zeta_i + 15 k^4 \zeta_i -$$

$$6 k^5 \zeta_i - \zeta_m)) / ((-1 + k)^3 k^3 T^6) -$$

$$\frac{1}{(-k + k^2)^3 T^4} (3 t^4 (5 k^3 \zeta_f - 9 k^5 \zeta_f + 5 k^6 \zeta_f +$$

$$\zeta_i - 5 k^3 \zeta_i + 9 k^5 \zeta_i - 5 k^6 \zeta_i - \zeta_m)) +$$

$$(3 t^5 (8 k^3 \zeta_f - 9 k^4 \zeta_f + 2 k^6 \zeta_f + \zeta_i - 8 k^3 \zeta_i +$$

$$6 k^4 \zeta_i - 2 k^6 \zeta_i - \zeta_m)) / ((-1 + k)^3 k^3 T^5) \quad (4.20)$$

$$\frac{9 k^4 \zeta_i - 2 k^6 \zeta_i - \zeta_m)}{((-1 + k)^3 k^3 T^5)} - \frac{1}{(-k + k^2)^3 T^3} (t^3 (-15 k^4 \theta_f + 24 k^5 \theta_f - 10 k^6 \theta_f - \theta_i + 15 k^4 \theta_i - 24 k^5 \theta_i + 10 k^6 \theta_i + \theta_m))$$

$$\omega[t] =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{(-1 + k)^3 k^3 T^6} (6 t^5 (10 k^3 \zeta_f - 15 k^4 \zeta_f + 6 k^5 \zeta_f + \zeta_i - 10 k^3 \zeta_i + 15 k^4 \zeta_i - 6 k^5 \zeta_i - \zeta_m)) - \\ & \frac{1}{(-k + k^2)^3 T^4} (12 t^3 (5 k^3 \zeta_f - 9 k^5 \zeta_f + 5 k^6 \zeta_f + \zeta_i - 5 k^3 \zeta_i + 9 k^5 \zeta_i - 5 k^6 \zeta_i - \zeta_m)) + \\ & (15 t^4 (8 k^3 \zeta_f - 9 k^4 \zeta_f + 2 k^6 \zeta_f + \zeta_i - 8 k^3 \zeta_i + 9 k^4 \zeta_i - 2 k^6 \zeta_i - \zeta_m)) / ((-1 + k)^3 k^3 T^5) - \\ & \frac{1}{(-k + k^2)^3 T^3} (3 t^2 (-15 k^4 \zeta_f + 24 k^5 \zeta_f - 10 k^6 \zeta_f - \zeta_i + 15 k^4 \zeta_i - 24 k^5 \zeta_i + 10 k^6 \zeta_i + \zeta_m)) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\alpha[t] =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{(-1 + k)^3 k^3 T^6} (30 t^4 (10 k^3 \zeta_f - 15 k^4 \zeta_f + 6 k^5 \zeta_f + \zeta_i - 10 k^3 \zeta_i + 15 k^4 \zeta_i - 6 k^5 \zeta_i - \zeta_m)) - \\ & \frac{1}{(-k + k^2)^3 T^4} (36 t^2 (5 k^3 \zeta_f - 9 k^5 \zeta_f + 5 k^6 \zeta_f + \zeta_i - 5 k^3 \zeta_i + 9 k^5 \zeta_i - 5 k^6 \zeta_i - \zeta_m)) + \\ & (60 t^3 (8 k^3 \zeta_f - 9 k^4 \zeta_f + 2 k^6 \zeta_f + \zeta_i - 8 k^3 \zeta_i + 9 k^4 \zeta_i - 2 k^6 \zeta_i - \zeta_m)) / ((-1 + k)^3 k^3 T^5) - \\ & \frac{1}{(-k + k^2)^3 T^3} (6 t (-15 k^4 \zeta_f + 24 k^5 \zeta_f - 10 k^6 \zeta_f - \zeta_i + 15 k^4 \zeta_i - 24 k^5 \zeta_i + 10 k^6 \zeta_i + \zeta_m)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.7 Traslaciones netas

Se denominará *traslación neta* al movimiento de un pie de tal modo que las posiciones angulares inicial y final sean iguales, independientemente de cuál haya sido la historia del movimiento. Definida de esta manera, la traslación neta permite rotaciones intermedias que en un cierto subintervalo de tiempo se revierten. La razón de considerar una traslación neta en la que la posición angular esté gobernada por un polinomio de sexto grado, es la sospecha de que, en comparación con la traslación pura del pie, una digresión angular intermedia reversible, puede aminorar los momentos que los motores deben aplicar para lograr el desplazamiento neto deseado, en la medida en que la dirección de una tibia y de un fémur se aproxime más a la colinealidad. Esto se evaluará empleando un algoritmo genético en el capítulo 6. El valor preciso de k parece ser irrelevante. Es suficiente que sea distinto de 0 y de 1, pues basta que en cualquier instante intermedio se permita a ξ_m tomar valores distintos de las posiciones inicial y final, siendo éstas iguales, para garantizar la posibilidad de evaluar si una digresión angular reversible en el tránsito del pie logrará minimizar los momentos requeridos de los motores. En esta tesis, a k se le asigna arbitrariamente el valor 0.5.

4.8 Conclusión del capítulo

Suponiendo que el movimiento del pie móvil con respecto al fijo consiste en un movimiento rectilíneo del centro de masa de aquél, y que las orientaciones inicial y final del mismo son iguales, movimiento al que se ha llamado "traslación neta", se han propuesto dos familias de trayectorias de cuerpo rígido en el plano: 1) que la posición del centro de masa del pie en movimiento a lo largo de un eje de orientación arbitraria sea un polinomio de quinto grado, caso para el cual puede demostrarse que los desplazamientos lineal y angular son directamente proporcionales, como lo son entre sí la velocidad lineal del centro de masa y la velocidad angular, así como la aceleración lineal del centro de masa y la aceleración angular; 2) que la posición a lo largo del eje de orientación arbitraria sea nuevamente un polinomio de quinto grado, pero que la orientación sea un polinomio de sexto grado. Esta segunda familia se propone como una posibilidad de exploración para que un algoritmo genético determine si para una traslación neta es mejor que se efectúe una traslación pura o que se permita una oscilación intermedia que se ha denominado digresión angular.

“In the survival of favoured individuals and races, during the constantly-recurring struggle for existence, we see a powerful and ever-acting form of selection.”

Charles Darwin

Capítulo 5. Optimización mediante un algoritmo genético

5.1 Introducción

Los algoritmos de la familia denominada genéricamente mediante el término "algoritmos genéticos" (GA, por sus siglas en Inglés), que es un subconjunto de los llamados "algoritmos evolutivos", emulan el proceso mediante el cual, según se entiende hoy, evolucionan las especies de seres vivos, y se aplican para hacer evolucionar, e idealmente perfeccionar, sistemas artificiales de índole variada.

5.2 Descripción simplificada de un mecanismo evolutivo en el reino animal y algunas definiciones

Para comprender la filosofía que subyace los algoritmos genéticos, tómese como ejemplo una población de gacelas, antílopes habitualmente depredados por los guepardos. La población de gacelas tiene N individuos. Entre los individuos que conforman la población habrá algunos mejor dotados para escapar cuando los guepardos acechan, en algunos casos, porque estén mejor alimentados, y en otros, porque posean ciertas características estructurales que los habilitan para correr más rápido que otros de sus congéneres. Es posible que algunas de las características anatómicas y fisiológicas ventajosas hayan sido adquiridas por los individuos durante su vida; pero es posible que otras de esas características las hayan recibido como herencia de sus padres. A las características visiblemente manifiestas que un individuo posee como un legado genético de sus padres, se le llama *fenotipo* (del verbo griego *φαίνο*, manifestarse). A la codificación de dichas características en los cromosomas de los gametos femeninos y masculinos que darán origen al cigoto que contenga a nivel celular la información genética completa para configurar a un nuevo individuo de la especie, se le llama *genotipo*. Cuando los guepardos llevan a cabo la cacería de gacelas, los individuos que de éstas sean menos aptos para el escape serán presa de los felinos. Habrá operado aquí un fenómeno de *evaluación* y otro de *selección*. Habrán obtenido mejores *calificaciones* las gacelas que hubieren logrado escapar (con excepción de aquellas que lo hubieren logrado no tanto por ser más aptas, sino por alguna razón exógena fortuita, como un viento de dirección favorable), y por ello habrán sido seleccionadas para sobrevivir. Si las características anatómicas y fisiológicas ventajosas se encuentran impresas en el genotipo, esto es, si son heredadas y no adquiridas, cuando entre los individuos sobrevivientes se verifique el apareamiento de machos y hembras, esto es, cuando se dé el *cruzamiento*, y una consiguiente fecundación, se espera que se engendren individuos que conformarán una población globalmente mejor que la de sus padres. El nuevo individuo, producto de la fecundación, habrá recibido características de su padre y características de su madre. Estas características estarán impresas en su genotipo, y algunas se manifestarán en su fenotipo. Por ser finita la población, si este proceso, tal como se ha descrito, se repite para un número suficiente de generaciones, la tendencia será que los genotipos de todos los individuos lleguen a ser idénticos entre sí, y cuando eso suceda, se detendrá el proceso evolutivo. Este fenómeno es conocido como *endogamia*. La endogamia impide el ulterior enriquecimiento de la información genética. Una forma que puede abrir nuevos caminos a dicho proceso evolutivo, es el fenómeno que se conoce como *mutación*, el cual ocurre cuando un agente exógeno (por ejemplo, una radiación o algún factor químico) inflige un cambio en el genotipo. El hecho de que exista mutación evita que los genotipos de los diferentes individuos tiendan a ser todos idénticos. En el caso de las gacelas, una mutación podría dar origen, por ejemplo, a un cambio en las dimensiones de los huesos de las extremidades. Y con seguridad, tal cambio incidirá en el mejoramiento o en el retroceso de la aptitud de las gacelas para escapar de las garras y las fauces de los guepardos.

No por el hecho de que no habiendo mutación, la tendencia es uniformar los genotipos de los individuos de las generaciones, debe pensarse que si se pudiese repetir m veces el proceso evolutivo a través de n generaciones, empezando siempre con idénticas poblaciones iniciales, las características del genotipo uniforme de la generación n para todas las veces que se repitiere el proceso, serán en todos los casos las mismas, puesto que no hay garantía de que siempre en las generaciones sucesivas van a sobrevivir exactamente los mismos individuos, pues en la supervivencia interviene el azar.

5.3 Algoritmo genético: emulación de los mecanismos evolutivos de los seres vivos para la optimización de una función escalar de una sola variable.

Para el caso de las gacelas, puede decirse de modo sucinto que la función *aptitud de escape* puede evolucionar (e idealmente perfeccionarse) si varían las características anatómicas y fisiológicas de los individuos de una generación a otra.

En un escenario más abstracto, supóngase que se tiene una función escalar cuyo dominio y cuya imagen son subconjuntos de los números reales no negativos. Supóngase que se considera como óptimo el valor máximo que dicha función puede tener para el dominio especificado. Puede escogerse aleatoriamente un número finito de valores del dominio. Este conjunto de valores del dominio será la población inicial. A la expresión con guarismos arábigos de cada valor del dominio en base diez se le considera el *fenotipo* del individuo correspondiente. Dicho fenotipo puede expresarse también como un número binario. A la expresión del fenotipo como un número en base 2 se le llamará el *genotipo* o *cromosoma*. A cada posición del código binario se le considerará un *gene*. Esto es, cada gene podrá tener uno de dos valores: 1 ó 0. No es requisito indispensable que el genotipo se exprese en números binarios. En realidad, el genotipo podría tener una expresión idéntica al fenotipo. Es sólo por razón de conveniencia que se emplea código binario, pues una ventaja de éste es que al momento de producirse la mutación de un gene, basta con cambiar el valor presente de dicho gene por su valor complementario, es decir, 0 por 1, ó 1 por 0, lo cual facilita la programación del algoritmo en una computadora digital.

5.3.1 Cuestiones de precisión

Si bien teóricamente el dominio de la función que se ha de optimizar es un conjunto continuo, en la práctica, se ha de elegir un número de cifras significativas con el que se representarán en números decimales los valores del dominio. Naturalmente, al elegir el número de cifras significativas decimales con las que se representarán los individuos del fenotipo, se está especificando indirectamente el mínimo número de bits que se requerirán para representar al correspondiente genotipo. Para determinar este número se decide con cuántas cifras significativas se representará el fenotipo en base diez; para ello, el número mayor posible del dominio en base 10 se expresa en notación científica, o sea como un coeficiente (con una parte entera menor que diez y una parte decimal) multiplicado por una potencia de 10. Al coeficiente se le truncan todos los dígitos de la derecha que sea necesario para que conste únicamente del número de cifras significativas deseado (o dado el caso, se añaden los ceros a la derecha que hagan falta). El número así obtenido se multiplica por 10 cuantas veces haga falta para obtener un número entero. Este número entero se convierte en un número binario, cuyo número de bits será la longitud de todos los *cromosomas*.

5.3.2 Etapa de evaluación

Si se conoce una expresión matemática de la función f que se desea optimizar y se ha establecido que la función se considerará optimizada cuando se haya encontrado el valor del dominio que maximice dicha función, un modo sencillo de evaluar el *desempeño* de los valores del dominio de la población inicial, es evaluar la función para todos ellos. La imagen correspondiente a cada valor del dominio o *individuo*, puede considerarse la calificación obtenida por dicho individuo:

$$c_{x_i} = \hat{f}(x_i) \quad (5.1)$$

donde x_i es el fenotipo del i -ésimo individuo,
 f es la función que se desea optimizar o *función objetivo*,
 c_{x_i} es la calificación merecida por el i -ésimo individuo.

5.3.3 Asignación de probabilidad de éxito, selección de supervivientes y reemplazo

En función de su calificación, a cada individuo le será asignada una probabilidad de supervivencia. En el algoritmo que se ha usado en esta tesis, ello se consigue de la manera que se describe a continuación:

1.- Se define a la calificación de la generación como

$$c_{\text{gen}} = \sum_{i=1}^n c_{x_i} \quad (5.2)$$

donde n es el número de individuos de la población, el cual se mantendrá constante generación tras generación.

2.- Se define a la aptitud del individuo como

$$a_{x_i} = \frac{c_{x_i}}{c_{\text{gen}}} * 100 \quad (5.3)$$

Según se ha definido la aptitud del individuo i -ésimo, puede verse que la suma total de las aptitudes de todos y cada uno de los individuos es igual a 100.

3.- En una escala en la que una variable real y puede variar desde 0 hasta 100, se asigna a cada individuo un intervalo cuyo tamaño depende de su aptitud. Designando con b_{izq_i} el comienzo del intervalo del i -ésimo individuo, y con b_{der_i} el fin del mismo intervalo, y a dicho intervalo con I_x , puede escribirse:

$$b_{izq_1} = 0 \quad (5.4)$$

$$b_{der_1} = a_{x_1} \quad (5.5)$$

$$b_{izq_i} = b_{der_{i-1}} + a_{x_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (5.6)$$

$$I_{x_i} = \{Y \mid b_{izq_i} \leq Y < b_{der_i}\} \quad (5.7)$$

4.- Se elige a los sobrevivientes y se reemplaza a la población anterior mediante el siguiente método:

a) Se genera un número real aleatorio y comprendido entre 0 y 100, con distribución de probabilidad uniforme.

b) Se busca la i para la cual se cumpla

$$Y \in I_{x_i} \quad (5.8)$$

c) Si se designa mediante s_j al fenotipo del j -ésimo sobreviviente, y si $j=1$ se tendrá:

$$s_1 = x_i \quad (5.9)$$

d) Se repiten los pasos (a) y (b) y se efectúan las siguientes asignaciones:

$$s_j = x_i, \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (5.10)$$

e) Finalmente los sobrevivientes reemplazan enteramente a la población inicial:

$$x_i = s_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.11)$$

Se comprende fácilmente que la aptitud del i -ésimo individuo equivale a su probabilidad de supervivencia multiplicada por 100.

Con el método descrito de asignación de probabilidad de éxito, selección y reemplazo se observa que un individuo puede "sobrevivir" varias veces, o visto de otro modo, al haber obtenido una mayor probabilidad de éxito por su mejor desempeño, puede "clonarse" una o más veces y sus clones pueden reemplazar a individuos de la población original.

5.3.4 Traducción

Traducción es el procedimiento por el cual los individuos de la población se convierten a enteros en base 10, que a su vez se convierten a números binarios, o bien el procedimiento por el cual los fenotipos se convierten en cromosomas, o sea,

$$cr_i = B[x_i] \quad (5.12)$$

donde

B es la función que convierte un entero en base 10, a un entero binario,
 cr_i es el genotipo o cromosoma del individuo i .

5.3.5 Mutación

Al inicio de la ejecución del algoritmo genético se puede especificar una probabilidad de mutación pm que será aplicable a dos genes de cada cromosoma seleccionados al azar en cada generación.

- Para realizar la mutación se hace variar al entero i desde 1 hasta n .
- Para cada valor de i se generan dos números enteros aleatorios comprendidos entre 1 y L . Estos enteros indicarán cuáles son los dos genes que son susceptibles de mutar.
- Para cada uno de los genes seleccionados, se genera un número aleatorio dm que pertenezca al intervalo $[0,1]$. Se comprueba si

$$dm \in [0, pm]; \quad (5.13)$$

en caso afirmativo, el gene afectado del i -ésimo cromosoma se cambia por su valor complementario (0 se convierte en 1, y viceversa). De lo contrario, se deja intacto el gene actual, y se somete al mismo proceso al otro gene.

5.3.6 Cruzamiento

En el contexto de algoritmos genéticos, por cruzamiento se entiende el proceso por el cual dos cromosomas elegidos al azar se combinan para producir dos nuevos cromosomas de la misma longitud que los cromosomas originales.

Consideremos a un cromosoma de longitud L como una serie de casillas yuxtapuestas dentro de cada una de las cuales reside uno y sólo un dígito binario. Llámese *punto de unión* a la línea divisoria entre dos casillas consecutivas, de manera que si el cromosoma tiene longitud L , el número de puntos de unión será $L-1$. Es posible seleccionar al azar uno de los $L-1$ puntos de unión y separar la subcadena a la izquierda del punto de unión seleccionado, de la subcadena a la derecha del mismo. Al punto de unión seleccionado, se le denomina *punto de cruce*.

A efectos de producir el cruzamiento entre dos cromosomas se genera un número aleatorio pc tal que

$$pc \in \{1, 2, \dots, L-1\} \quad (5.14)$$

El número pc indicará cuál es el punto de cruce para los dos cromosomas. Así, las dos subcadenas izquierdas obtenidas serán de longitudes iguales, y lo mismo ocurrirá con las dos subcadenas derechas. El cruzamiento en sí consiste en unir la subcadena izquierda del cromosoma 1 con la subcadena derecha del cromosoma 2 y viceversa, produciéndose de este modo dos cromosomas nuevos.

Para obtener una nueva generación a partir del cruzamiento de los cromosomas actuales, de entre toda la población se seleccionan al azar $n/2$ individuos que formarán el conjunto de los padres, y de la misma población se seleccionan al azar otros $n/2$ individuos que configurarán el conjunto de las madres. De este modo se obtienen $n/2$ parejas. Se efectúa el cruzamiento entre los cromosomas de cada pareja para obtener de cada una de ellas 2 cromosomas hijos, de tal manera que se tendrá una generación de hijos que será nuevamente de n individuos. Lógicamente, este algoritmo se presta a que un individuo sea seleccionado una o más veces como padre, y una o más veces como madre. Puede darse incluso el caso en el que el padre y la madre en una pareja sean cromosomas idénticos, en cuyo caso,

independientemente del punto de cruce, los dos hijos serán idénticos entre sí e idénticos a los progenitores, lo que permite que exista la posibilidad de que de una generación a otra se conserven intactos algunos genotipos.

5.3.7 Obtención de los nuevos fenotipos

Si con z se denota al conjunto de cromosomas hijos, y con B^{-1} a la función que convierte enteros binarios a enteros base 10, puede reemplazarse la generación actual con la generación de hijos mediante la siguiente fórmula:

$$x_i = B^{-1}[z_i], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.15)$$

Renovada la población, es posible repetir los pasos de evaluación, selección, reemplazo, traducción, mutación, cruzamiento y nuevo reemplazo indefinidamente. No obstante, debe existir un criterio que permita decidir cuándo debe detenerse la ejecución del algoritmo. De esto se hablará más adelante.

5.3.8 Elitismo

Con un algoritmo como el que se ha descrito, es posible que entre una generación y otra se pierdan especímenes valiosos. Para que esto no ocurra, puede hacerse que el algoritmo preserve a los dos mejores individuos o *aristócratas* de cada generación. De este modo, independientemente de los vaivenes de la población en su conjunto, se tendrá la garantía de que en cada generación se contará con el espécimen que hasta ese momento haya demostrado el mejor desempeño. El permitir que ocurra la mutación puede dar lugar a que de una generación a otra los aristócratas cambien; pero se tendrá la certeza de su aristocracia. En resumen, los aristócratas pueden reproducirse, pero no desaparecer por producto del azar: el aristócrata supremo no puede ser eliminado de una generación, mas que por un aristócrata de la nueva generación mejor que él.

5.3.9 Criterio de paro de ejecución del algoritmo genético

En caso de que nunca se verifique la mutación previa al cruzamiento, o sea si $pm = 0$, como se ha dicho antes, el algoritmo genético tenderá a uniformar todos los genotipos, por lo que no habiendo mutación, el criterio de paro puede ser el que todos los genotipos de una generación sean iguales entre sí. Como ya se ha anotado anteriormente, en corridas distintas, el valor uniforme no será el mismo, aunque la experiencia indica que se aproximará en alguna medida a un óptimo relativo. Por otra parte, en el caso de existir la mutación, será posible que en determinada generación, haya algún valor del dominio que se repita más veces; pero es posible que a la generación siguiente, por efecto de la mutación, esa preeminencia se extinga, por lo que se requerirá de un criterio de paro diferente. Un criterio alternativo posible consiste en que, si tras cierto número de ejecuciones del algoritmo genético el aristócrata se mantiene invariable, puede detenerse el proceso y considerar al aristócrata como la solución, y probablemente se trate de un óptimo absoluto. Puede darse el caso de que tras cierto número de ejecuciones, el aristócrata cambie en los dígitos menos significativos. Cuando esto ocurre, es posible que 2 o más valores del dominio, bastante próximos entre sí, optimicen igualmente bien la función. Si se introduce un grado de precisión mayor, quizá desaparezca la ambigüedad.

5.4 Cómo pueden optimizarse funciones cuando se considera que el óptimo es el mínimo

Para emplear el mismo algoritmo descrito con apenas algunos cambios cosméticos, a fin de optimizar una función que se desea minimizar, se puede recurrir a una función intermedia que crezca conforme decrezca la función objetivo. Una función que cumple con este requisito es:

$$g = e^{-f} \quad (5.16)$$

donde e es la base de los logaritmos naturales. La función g será la nueva función objetivo.

Puesto que el algoritmo descrito supone que los valores de f son números no negativos, el máximo valor de g se obtendría cuando f valiera cero, y en la medida en la que f creciera, g se aproximaría asintóticamente a cero. Desde luego, las restricciones del problema particular que se desee optimizar probablemente excluirán la posibilidad de que f sea igual a cero para algún valor aceptable del dominio.

5.5 Qué hacer cuando los valores del dominio y/o del conjunto de imágenes pueden adoptar valores negativos

Siempre será posible establecer una relación lineal entre los valores reales del dominio, y los enteros decimales que representarán los fenotipos en el algoritmo genético, de tal modo que al valor más negativo de los valores reales del dominio, se le asigne el 0 de la escala de fenotipos, y se asigne al mayor de los valores reales del dominio el entero máximo que pueda ser almacenado en una palabra con un número de bits igual a L . Puede procederse de manera análoga con las imágenes. A través de este artificio, los supuestos que se han hecho para el algoritmo genético descrito en este capítulo pueden funcionar para prácticamente cualquier problema de una variable dependiente y una variable independiente. Ulteriores artificios pueden usarse para convertir problemas multivariantes en problemas de una variable.

5.6 Verificación de la programación del algoritmo genético mediante 2 ejemplos

Con la finalidad de verificar la funcionalidad del algoritmo desarrollado en *Mathematica*, se buscó el máximo de dos funciones con una variable independiente. La congruencia de los resultados numéricos con las gráficas conduce a confiar en la funcionalidad de dicho algoritmo.

5.6.1 Ejemplo 1: función polinomial

Supóngase que se desea optimizar la función

$$y = 5 + \frac{x}{2} - 3x^4 + 2x^5 - 0.343643x^6 \quad (5.17)$$

Se trata de un polinomio de sexto grado cuyos máximos y mínimos pueden calcularse por los métodos tradicionales del cálculo diferencial y que aquí, con fines comparativos, se estudiará por estos métodos y mediante el empleo del

algoritmo genético canónico.

La figura 6.1 muestra la gráfica de este polinomio para el intervalo $[-1.5, 3]$.

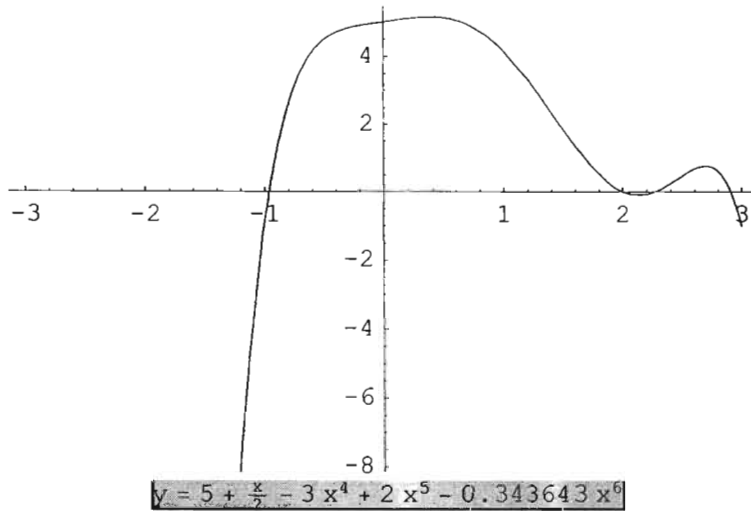


Figura 5.1

La derivada de y con respecto a x es:

$$y' = \frac{1}{2} - 12x^3 + 10x^4 - 2.06186x^5 \quad (5.18)$$

Del cálculo diferencial se sabe que para las raíces de este polinomio se tiene un máximo o un mínimo. Las raíces obtenidas con *Mathematica* son:

$-0.183921-0.27256i$, $-0.183921+0.27256i$, 0.390273 , 2.13236 , 2.69521 .

Puesto que sólo hay tres raíces reales de la derivada, sólo se identifican 3 puntos extremos que son los que pueden apreciarse en la gráfica. Al inspeccionar la gráfica de la función, se observa que de la lista de raíces obtenida, la que da el máximo absoluto debería ser la tercera, aunque por la escala empleada por *Mathematica* en la gráfica hay un intervalo de valores del dominio para los que la curva presenta un radio de curvatura considerable. En varias corridas del algoritmo genético a través de 200 generaciones con poblaciones de 30 individuos y posibilidad de mutación se obtuvieron los siguientes valores del dominio que optimizaban la función: $.39031$ y $.39855$. El primero de estos valores fue el más frecuente. Las calificaciones de estos individuos son:

$$f[.39031] = 5.14243$$

$$f[.39855] = 5.14232$$

Por otra parte, el valor del dominio que optimiza la función, obtenido por los métodos del cálculo diferencial es:

$$f[.390273] = 5.14243.$$

Se observa que el primer valor obtenido mediante el algoritmo genético coincide por lo menos hasta en seis cifras significativas con el óptimo verdadero. La calificación del segundo valor obtenido mediante el algoritmo genético sólo

discrepa del óptimo verdadero en una cifra significativa.

Este ejemplo ilustra que el algoritmo genético conduce a un valor del dominio muy cercano al que optimiza la función, y sugiere que ahí donde exista un sistema en que una variable de entrada se relacione con una de salida, si en el intervalo de valores permitidos de la variable de entrada, la relación con la variable de salida es continua, el algoritmo genético puede optimizar esta relación aun cuando no se conozca una expresión matemática de la misma. Si, por ejemplo, el sistema que se desea optimizar es un sistema físico con una variable de entrada y una de salida, hipotéticamente, para poder usar el algoritmo genético basta con que los valores de entrada y los de salida sean medibles, y se disponga de los transductores necesarios para que una computadora digital reciba los valores de salida del sistema como entradas para el algoritmo genético, y para que los valores de salida del algoritmo genético se conviertan en entradas del sistema físico. En este caso el propio sistema físico constituiría el módulo evaluador.

Puede suceder que se conozca la función que se desea optimizar; pero que resulte engorroso determinar el óptimo mediante los métodos tradicionales. También en estos casos es útil el algoritmo genético .

5.6.2 Ejemplo 2: función construida con funciones armónicas

Sea la función

$$y = 10 \sin[\pi t] + 3 \sin[\pi t] \sin[10 \pi t] \quad (5.19)$$

cuya gráfica en el intervalo $[0, 1]$ del dominio es:

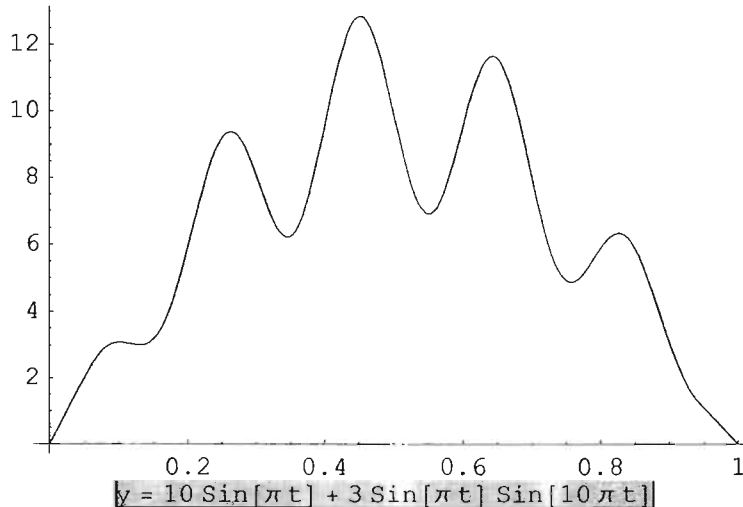


Figura 5.2

Para una corrida del algoritmo genético sin mutación, los individuos de la población lograron uniformarse al valor 0.64243 tras 28 generaciones. Observando la gráfica, se advierte que este valor es cercano al valor del dominio que corresponde a la cuarta cima de la curva ilustrada, pero esta cima no corresponde al óptimo. En cambio, corriendo el algoritmo de manera que se elijan aleatoriamente 2 genes de cada individuo a cada uno de los cuales se dará una probabilidad de mutación del 10%, la generación 200 está configurada como sigue:

```
{0.43997, 0.44082, 0.43997, 0.44473, 0.45242, 0.38931, 0.45169,  
0.44516, 0.45169, 0.44107, 0.46591, 0.45053, 0.43997, 0.46811,  
0.44461, 0.45181, 0.44375, 0.43997, 0.44516, 0.43997, 0.43997, 0.38137,  
0.45254, 0.43997, 0.45169, 0.45169, 0.45181, 0.44516, 0.45181, 0.45224}
```

Tabla 5.1

El valor del dominio que se considera que optimiza la función es el último de la lista, esto es, 0.45224, valor cuya imagen es: 12.8466, que según se aprecia en la gráfica es el óptimo o un número muy cercano a él. El algoritmo ya había identificado el valor 0.45224 desde la generación 68, esto es, mucho antes de llegar a la generación 200. El hecho de que las generaciones tengan cierta variación de una a otra, pero que a través de muchas, el aristócrata se mantenga constante, hace pensar que el aristócrata de la última generación obtenida es el óptimo. Nótese que, habiendo mutación, así transcurran muchas generaciones, los individuos no parecen llegar a uniformarse.

5.7 Conclusión del capítulo

Se han explicado los diversos operadores que en conjunto constituyen el algoritmo genético canónico. Se dan instrucciones para encontrar el óptimo sea que una función de una variable se desee maximizar o minimizar. Se han dado dos ejemplos que ponen de relieve la importancia del operador cruzamiento y de proteger ciertos genotipos y sus fenotipos mediante el elitismo.

Capítulo 6. Optimización de algunas características del caminante Delta Nabla

6.1 Introducción

Una vez que se ha completado el modelado de la cinemática y la cinética inversas del caminante Delta Nabla, y definido los tipos de trayectorias que éste habrá de efectuar, y cuando se cuenta con una herramienta que puede emplearse para optimizar funciones, se está en el umbral del problema de diseño y se tiene ante sí una gran cantidad de variables por determinar. Los valores de algunas de ellas estarán sin duda dictados por el propósito al cual esté destinado el caminante; pero ciertamente otros quedan abiertos a ser determinados por la intuición y la creatividad del diseñador. En este capítulo se estipulan arbitrariamente ciertas dimensiones y relaciones, y con base en ellas se intenta optimizar otras por medio del algoritmo genético explicado previamente.

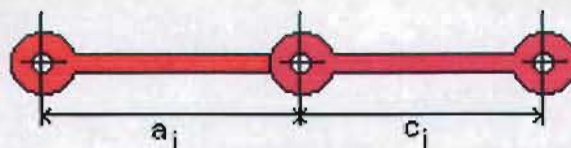
Todavía en el terreno de lo abstracto y sin necesidad de conocer cuál será el orden de magnitud de las dimensiones reales de un prototipo, es posible optimizar algunas características en un modelo de dimensiones arbitrarias. Optimizadas las dimensiones del modelo, en algunos casos será posible simplemente aplicar un factor de escala para obtener las dimensiones óptimas del prototipo. Tal es el caso de las longitudes que son significativas en la cinemática.

6.2 Especificación de criterios, reglas, dimensiones y propiedades

6.2.1 Distancias entre articulaciones

Arbitrariamente se decidió estudiar un modelo en el que las distancias entre los ejes de dos tobillos consecutivos fuera 30 cm, y que la misma distancia hubiera entre los ejes de dos caderas consecutivas. También arbitrariamente se decidió que

$$a_i + c_i = 26 \quad (6.1)$$



$$a_i + c_i = 26$$

Una pierna extendida: la longitud del fémur está representada por a , y la de la tibia por c .

Figura 6.1

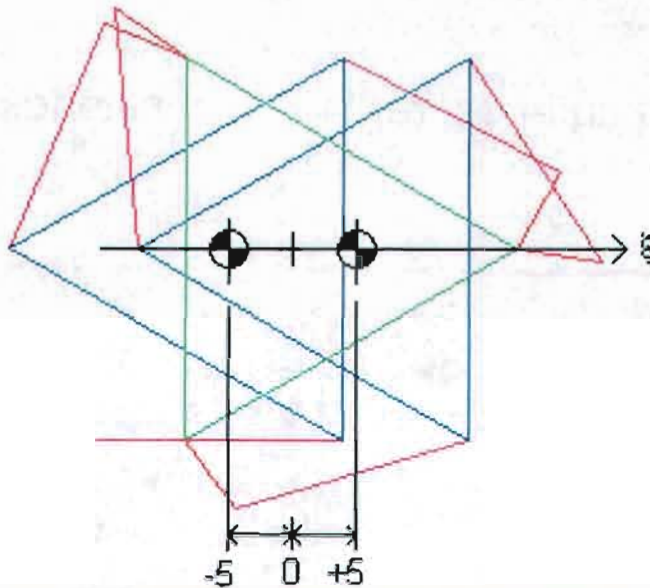
esto es, que estando extendida una pierna por completo, la distancia medida entre la cadera y el tobillo correspondientes fuera igual a 26 cm. No obstante la arbitrariedad con la que se han elegido estas dimensiones, su orden de magnitud obedece a una necesidad práctica: la de poder construir un modelo funcionante de costo relativamente bajo.

6.2.2 Criterio de optimización

Se buscará que los pares de torsión requeridos de los motores sean mínimos; ello con dos finalidades: 1) en la etapa de diseño, seleccionar del mejor modo posible, dentro de los requerimientos que se han planteado, los motores, y 2) en la etapa de operación, demandar de los motores el mínimo par posible.

6.2.3 Restricciones respecto al movimiento que se ha de optimizar

En esta tesis se estudia un movimiento cíclico del endoesqueleto, de modo que su centro de masa se mueva a lo largo de un eje ξ de orientación arbitraria γ , primero desde $\xi_i = -5$ cm, hasta $\xi_f = +5$ cm, y en seguida con el movimiento opuesto. Cuando el exoesqueleto y el endoesqueleto intercambien la función de apoyo, este movimiento permitirá que el centro de masa de cualquiera de los dos esqueletos avance con pasos de 10 cm. En las simulaciones cuyos resultados se manifiestan en este capítulo, se ha requerido que cada uno de estos pasos se verifique en un tiempo total $T=1s$.



Para cualquier rumbo, el CG del endoesqueleto deberá ir desde -5 cm hasta 5 cm.

Especificación del paso para el cual se optimizarán los pares motores

Figura 6.2

6.2.4 Medidas, masa y momento de inercia del endoesqueleto

Supóngase que el exoesqueleto consiste en una placa plana de aluminio de 1 cm de espesor y de densidad uniforme igual a $2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, cuyo contorno es un triángulo equilátero de tal manera que cada uno de los centros de las articulaciones que se han denominado tobillos, dista 2 cm de los lados que le son más cercanos (Figura 6.3). El volumen de la placa triangular es

$$V = \frac{0.37^2 * \text{Cos}[30^\circ]}{2} * .01 = 5.93 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \quad (6.2)$$

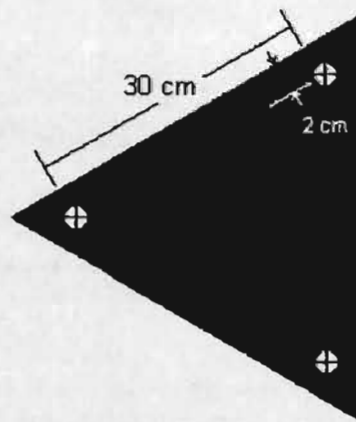
La masa será entonces:

$$m = \rho V = 1.60 \text{ kg} \quad (6.3)$$

El momento de inercia de la placa triangular equilátera alrededor de un eje centroidal perpendicular a ella es:

$$I_{z \text{ Endo}} = \frac{m_{\text{Endo}} L_{\text{Endo}}^2}{12} = 1.82 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2 \quad (6.4)$$

Es ésta la inercia que el par de torsión neto aplicado al endoesqueleto alrededor de su centro de masa debe vencer para producir al propio endoesqueleto una aceleración angular.



Placa representativa del endoesqueleto

Figura 6.3

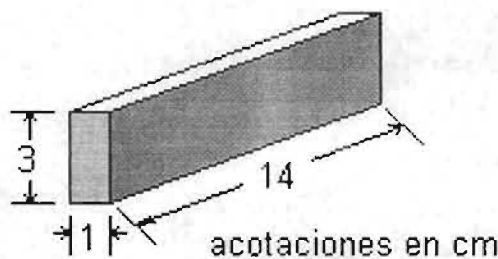
6.2.5 Estimación de medidas, masa y momento de inercia de los fémures y las tibias

Supóngase que los eslabones esbeltos de la cadena cinemática en estudio, esto es, los fémures y las tibias son barras fabricadas con el mismo material que el endoesqueleto de sección rectangular de $3 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$, y cuya longitud es de 14 cm (Figura 6.4). El momento de inercia de esta barra alrededor de un eje centroidal perpendicular al eje longitudinal de la barra es:

$$m_{\text{barra}} = 2700 (.01) (.03) (.14) = .1134 \text{ kg} \quad (6.5)$$

$$I_{z \text{ barra}} = \frac{m_{\text{barra}} L_{\text{barra}}^2}{12} = 1.85 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2 \quad (6.6)$$

Con las medidas supuestas, se observa que la masa de cada elemento esbelto es aproximadamente $\frac{1}{14}$ de la masa del endoesqueleto, y que el momento de inercia de cada elemento esbelto es $\frac{1}{97}$ del momento de inercia del endoesqueleto. En vista de esto, parece razonablemente justificada en una primera aproximación, la hipótesis 3 que se hiciera en el capítulo 3, y todas sus implicaciones.



Barra representativa de los elementos esbeltos (fémur o tibia)

Figura 6.4

6.3 Optimización de las longitudes de los fémures y las tibias

Como primer problema de optimización del caminante Delta-Nabla, se planteó el encontrar la razón $\frac{c_i}{a_i}$, esto es, longitud de fémur entre longitud de tibia, que, satisfaciendo la restricción señalada por la igualdad 6.1, minimizara el par de torsión máximo ejercido por cualquiera de los tres motores durante el movimiento de traslación pura, con el movimiento señalado por la restricción 6.2.3 para un rumbo $\gamma = 0^\circ$. La función a optimizar es:

$$f_{\text{Obj}} = e^{-\text{Max}[\text{Abs}[\tau_A], \text{Abs}[\tau_B], \text{Abs}[\tau_C]]} \quad (6.7)$$

donde los pares se calculan aprovechando lo desarrollado en los capítulos 4, 2 y 3. Para cada valor de la razón de longitudes, esta función habrá de evaluarse para un conjunto finito (pero suficientemente grande) de instantes entre 0 y T .

6.3.1 Especificación del espacio de búsqueda

Si a_i y c_i son números reales no negativos, es claro que en teoría la razón $\frac{c_i}{a_i}$ estaría entre cero e infinito, pero es necesario fijar límites prácticos a esta relación, de modo que ambas cotas sean números finitos positivos. Una condición que debe cumplirse es la desigualdad

$$-1 < (b_i^2 + c_i^2 - a_i^2) / (2 * b_i * c_i) < 1 \quad (6.8)$$

(ec. 2.20), cuyo significado geométrico es que una pierna formada por un fémur y una tibia articulados, al estar plegada un ángulo comprendido entre 0° y 180° , logre satisfacer la distancia entre la cadera y el tobillo correspondientes demandada por la actitud especificada para el endoesqueleto. El hallazgo de la cota inferior se hizo mediante prueba y error empleando el programa Trazador (ver Apéndice). Este programa rechaza movimientos que no son mecánicamente posibles. El argumento de dicha función es precisamente la razón que se quiere optimizar, que en el programa se llama *razonLongitudes*. En este programa se comprueba que se satisfaga la desigualdad 6.8. El método de prueba y error empleado se inspira en el conocido método de bisección para encontrar las raíces de una ecuación trascendente y se describe a continuación:

■ 6.3.1.1 Método de prueba y error por bisección o búsqueda binaria

Paso 1

Se especifica el número de cifras significativas, que se desea sean exactas para el argumento.

Paso 2

Se ensayan en el simulador dos valores arbitrarios del argumento, procurando que uno de ellos satisfaga la desigualdad 6.8, y el otro no. Al valor de éstos que no satisfaga la desigualdad, se le llamará *inferior*, y al otro, *superior*.

Paso 3

Se calcula la media aritmética de los valores inferior y superior, y el resultado se ensaya para averiguar si se satisface la desigualdad 6.8. En caso afirmativo, la media aritmética se convierte en el nuevo superior; de lo contrario se convierte en el nuevo inferior

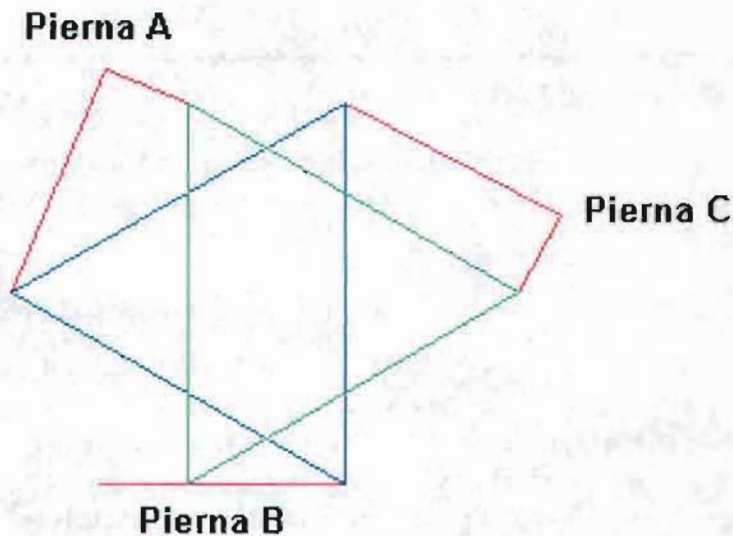
Paso 4

Se comprueba si todas las cifras significativas que interesan son iguales para el inferior y el superior; en caso afirmativo, se detiene el método, pues ya se ha encontrado el valor buscado; de lo contrario se vuelve al paso 3.

Por simetría, la cota derecha de la *razonLongitudes* es el recíproco del valor encontrado con el método anterior. Por tanto, para el caso del que se ocupa este capítulo, si se desean 5 cifras de precisión, la *razonLongitudes* pertenece al siguiente intervalo:

$$.35698 \leq \text{razonLongitudes} \leq 2.8013 \quad (6.9)$$

Con la razón inferior, la pierna B se pliega totalmente cuando el caminante se encuentra en la actitud de arranque de un movimiento correspondiente a $\xi_i = -5$ cm y $\xi_j = +5$ cm y $\gamma = 0^\circ$, como se aprecia en la figura 6.5. En dicha figura no se ve el fémur B porque está situado por debajo de la tibia B.



Configuración de arranque del caminante Delta-Nabla con rumbo cero, y $\xi = -5$ cm. Obsérvese que la pierna B está completamente plegada.

Figura 6.5

6.3.2 Búsqueda de la razón de longitudes óptima mediante el algoritmo genético canónico

Este problema se resolvió genéticamente con el programa Anatomía óptima. Para el espacio de búsqueda especificado en la sección anterior, se hicieron dos corridas con 30 individuos por generación a través de 100 generaciones: en la primera de estas corridas antes de cada apareamiento, se seleccionaban al azar dos genes de cada progenitor y se hacía que la probabilidad de mutar de ellos fuera de 2%; en la segunda también se seleccionaban al azar dos genes de cada progenitor antes del apareamiento, pero con una probabilidad de mutación de 20%. Los resultados de estas corridas se muestran respectivamente en las tablas 1 y 2:

```
{0.35698, 0.35698, 0.58615, 0.35698, 0.58615, 0.58615, 0.35698,
0.58615, 0.35698, 0.35698, 0.35698, 0.35698, 0.35698, 0.50976,
0.50976, 0.58615, 0.35698, 0.35698, 0.58615, 0.36653, 0.58615, 0.58615,
0.58615, 0.35698, 0.35698, 0.35698, 0.35698, 0.58615, 0.58615, 0.35698}
```

Tabla 6.1

```
{0.38518, 0.53124, 0.35967, 0.42263, 0.37384, 0.35937, 0.51483,
0.46933, 0.38518, 0.51811, 0.45023, 1.6584, 0.38443, 0.35713, 0.36534,
0.99630, 0.38339, 0.40353, 0.35937, 0.37444, 0.38518, 0.37846,
0.35952, 0.37369, 0.40249, 1.6775, 0.36459, 0.42263, 0.35937, 0.35698}
```

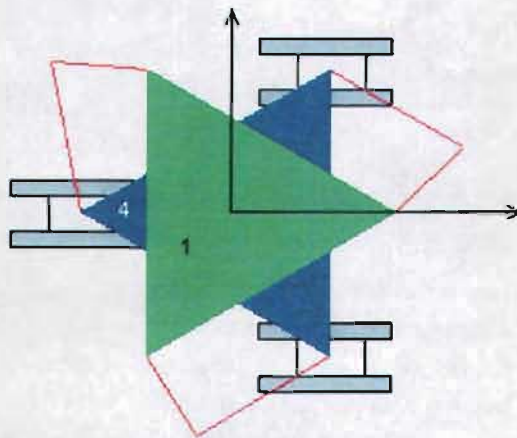
Tabla 6.2

En la corrida que tuvo menos probabilidad de mutación se aprecia una convergencia hacia el aristócrata. No así en la segunda. No obstante, para las dos corridas se obtuvo el mismo aristócrata, que además no es otro valor que la cota inferior del espacio de búsqueda. Sólo después de haber hecho este hallazgo a través de un algoritmo genético, se reflexionó que esta respuesta podía estar ligada al concepto de ventaja mecánica, y que hipotéticamente pudo haberse encontrado por otro camino.

6.3.3 Por qué la razón de longitudes óptima es la mínima posible. Una posible explicación a través del concepto de ventaja mecánica

■ 6.3.3.1 Un mecanismo cinemáticamente equivalente al endoesqueleto en traslación rectilínea a lo largo de un eje ξ colineal con el eje x_1 .

Al restringir el movimiento del endoesqueleto a una traslación rectilínea, puede visualizarse que el mismo movimiento podría conseguirse si los tres tobillos estuvieran articulados a sendas correderas que pudieran deslizarse a lo largo de 3 rectas paralelas. Cada una de estas correderas junto con el fémur y la tibia correspondientes forman 1 mecanismo 3RP. La figura 6.6 muestra la cadena cinemática redundante que resulta de añadir al caminante original las tres correderas mencionadas.



Cadena cinemática redundante, que incluye tres mecanismos 3RP, congruentes con una traslación rectilínea pura con rumbo cero.

Figura 6.6

■ 6.3.3.2 El concepto de ventaja mecánica

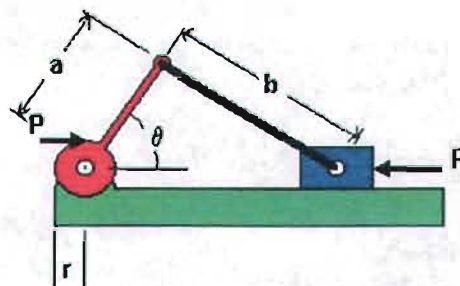
Cuando se tiene una máquina a la que se le aplica un trabajo mecánico, llamado de entrada, y la cual devuelve un trabajo, llamado de salida (que idealmente es numéricamente igual al de entrada), para máquinas que se conciben como multiplicadoras de fuerza, tradicionalmente se ha definido la ventaja mecánica como la razón $\frac{\text{Fuerza de salida}}{\text{Fuerza de entrada}}$ o bien como $\frac{\text{Momento de salida}}{\text{Momento de entrada}}$. Un cociente como el primero es un índice de mérito conveniente para máquinas como palancas o malacates, pues tanto a la entrada de este tipo de máquinas, como a su salida se tiene una fuerza (con unidades de masa por aceleración); un cociente como el segundo es apropiado para trenes de engranes o para mecanismos de cuatro barras, por ejemplo, pues estas máquinas admiten un momento a la entrada y devuelven también un momento a la salida. En la literatura revisada no se encontró el concepto de ventaja mecánica aplicado a un mecanismo manivela-biela-corredera en el que la entrada es un momento y la salida una fuerza, como sucedería en un compresor de desplazamiento positivo; pero si se considera que el momento de entrada, es producido por una fuerza P , también es posible definir una ventaja mecánica para un mecanismo 3RP.

■ 6.3.3 Ventaja mecánica asociada a un mecanismo 3RP

Puede demostrarse que la ventaja mecánica teórica $\frac{F}{P}$ del mecanismo 3RP ilustrado en la figura 6.7, si se ignoran los efectos de fricción, es

$vm =$

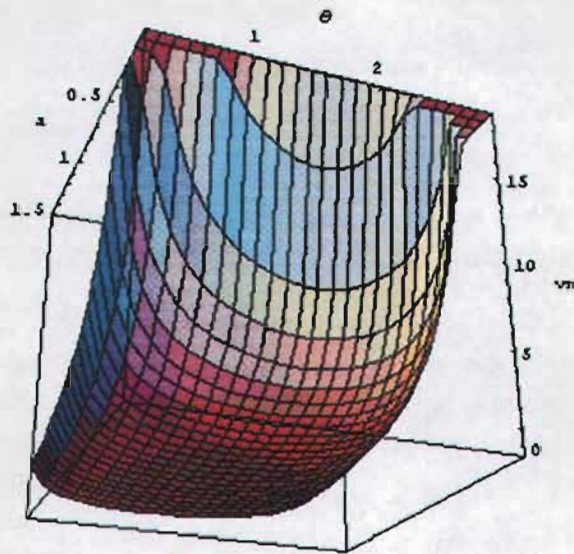
$$\text{Abs} \left[\frac{r \text{Csc} [\theta + \text{ArcSin} [\frac{a \text{Sin}[\theta]}{b}]] \sqrt{1 - \frac{a^2 \text{Sin}[\theta]^2}{b^2}}}{a} \right] \quad (6.10)$$



Mecanismo 3RP con $P =$ fuerza de entrada, y $F =$ fuerza de salida, para el que se define la ventaja mecánica como F/P

Figura 6.7

Ha convenido definir la ventaja mecánica para este mecanismo como $\frac{F}{P}$ pues P es una fuerza motriz de entrada que se quiere minimizar, y si se minimiza ésta, consecuentemente se minimiza el momento τ que debe proporcionar el motor para producir en el bloque azul la fuerza de salida F de magnitud *ma* requerida. Para $r = 1$, $b = 3$, haciendo variar el ángulo θ en el intervalo $[\frac{\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}]$, y la longitud a en el intervalo $[0.01, 1.5]$, se obtiene la superficie tridimensional mostrada en la figura 6.8. Es claro que a medida que θ se aproxima a 0° o a 180° , lo que se ha definido como ventaja mecánica crece indefinidamente, sean cuales fueren las dimensiones del mecanismo; pero es interesante observar, que si la superficie obtenida se corta con un plano paralelo al plano θ - vm , a modo de producir curvas $vm = vm(\theta)$ para $a = CTE$, mientras más pequeña sea la distancia entre el plano θ - vm y el plano de corte, los valles de dichas curvas serán menos pronunciados, lo que significa que para valores de a más pequeños, se obtienen las mejores ventajas mecánicas, resultado análogo a lo revelado por el algoritmo genético para el caninante Delta-Nabla.



Superficie que representa a la ventaja mecánica como función de la longitud a y el ángulo θ

Figura 6.8

6.4 Optimización del rumbo y de la digresión angular para traslación neta

Es de suponerse que el rumbo y elegido para una traslación rectilínea tenga algún influjo en las magnitudes de los pares motores, lo que sugiere que exista un rumbo óptimo. Definir un rumbo preferencial para que el caminante efectúe desplazamientos en línea recta equivaldría a redefinir su frente. Hasta este momento se ha supuesto que el frente del caminante Delta-Nabla está señalado por el sentido positivo del eje x_1 ; de hecho, puede llamarse *vector frontal* a un vector unitario fijo al exoesqueleto, y dirigido en el sentido positivo de x_1 ; pero puede redefinirse al frente del caminante, y por ende su vector frontal, según una dirección en la que el andar sea más fácil, esto es, una dirección en la que se atenúe cuanto sea posible el valor absoluto del máximo par motor demandado. La estructura cinemática del caminante Delta-Nabla hace posible que el mismo siga cualquier trayectoria rectilínea sobre el sistema de coordenadas globales sin reorientar ninguno de los pies, y esto es una de sus mayores ventajas, por ejemplo, para la prueba llamada *slalom*; no obstante, puede hacerse que antes de emprender la trayectoria rectilínea, por ejemplo para la prueba llamada *dash*, el caminante reoriente sus pies de modo que el vector frontal óptimo, cuya dirección ha de contener a los baricentros de ambos esqueletos, quede alineado según el eje ξ . En la redefinición del vector frontal se supone que al iniciarse el movimiento, los sistemas de coordenadas 1 y 4 definidos en el capítulo 2, son coincidentes, lo cual desde luego, no ha de ser necesariamente así; pero éste es un supuesto de la presente sección.

Por otra parte, como se había anticipado en el capítulo 4, se cree que si se permite al pie que ha de efectuar una traslación neta, experimentar lo que se ha llamado una digresión angular, manteniendo el movimiento rectilíneo del centro de gravedad, se logre que el par motor máximo demandado durante la ejecución de un paso sea menor con respecto al par motor máximo que se demandaría efectuando una traslación pura. Dicho de otro modo, se cree que para una cierta traslación pura en línea recta, existe al menos una traslación neta equivalente con movimiento rectilíneo del centro de gravedad, y con digresión angular que proporcionaría una historia de mejores ventajas mecánicas que dicha traslación pura. Para permitir la digresión angular se usará un polinomio de sexto grado como se explicó en el capítulo 4. En esta sección se procura encontrar al menos una pareja óptima de rumbo y digresión angular. Nuevamente la función objetivo es de la forma:

$$f_{Obj} = e^{-\text{Max}[\text{Abs}[\tau_A], \text{Abs}[\tau_B], \text{Abs}[\tau_C]]} \quad (6.11)$$

Para cada par ordenado (digresión angular, rumbo), esta función habrá de evaluarse para un conjunto finito (pero suficientemente grande) de instantes entre 0 y T .

6.4.1 Especificación de los espacios de búsqueda para rumbo y digresión angular

Si se examina atentamente la figura 2.1, se descubre que la configuración inicial del robot es simétrica con respecto a toda rotación rígida de 120° alrededor del eje vertical que contiene a los baricentros. De aquí se infiere que el espacio de búsqueda para el rumbo óptimo γ_{opt} debe estar comprendido entre 0° y 120° , y serán también rumbos óptimos los ángulos

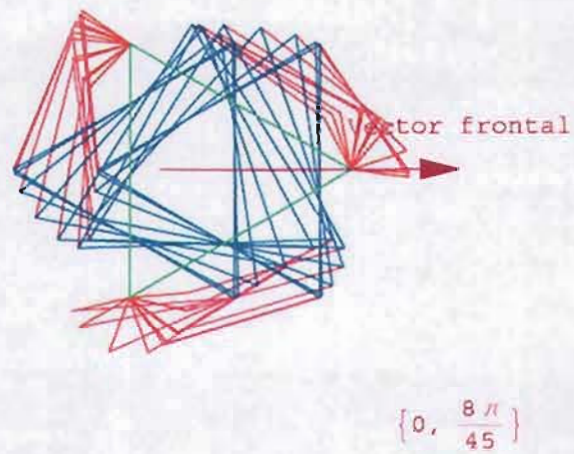
$$\gamma = \gamma_{opt} + n \times 120^\circ$$

donde

(6.12)

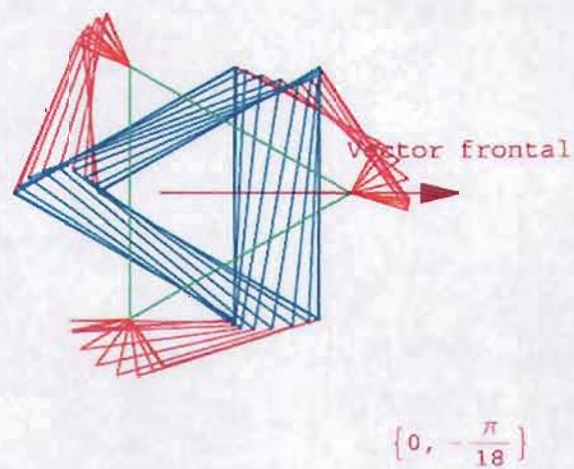
$n \in \{1, 2\}$

En cuanto al espacio de búsqueda para la digresión angular óptima, se experimentó con el programa simulador de la cinemática y se encontró que, para un rumbo de 0° , la máxima digresión angular posible para que no se viole la condición de rigidez de todos los elabones está en la vecindad de 32° , en tanto que la mínima está en el entorno de -10° . Las figuras 6.9 y 6.10 muestran que para estos valores, la pierna B se extiende totalmente o se pliega por completo respectivamente; por otra parte, puede anotarse como directriz general, que no se espera que la digresión angular óptima sea muy grande pues, si el tiempo en el que debe efectuarse el movimiento total del pie está prescrito, digresiones angulares grandes implicarían aceleraciones angulares grandes (pues toda digresión angular debe revertirse para obtener al final del movimiento la orientación inicial) lo cual implicaría que las fuerzas sobre las tibias tuvieran que ser grandes, y ello exigiría momentos de torsión grandes de parte de los motores, efecto opuesto al que se quiere lograr.



Movimiento de traslación neta con rumbo cero y digresión angular de 12°

Figura 6.9



Movimiento de traslación neta con rumbo cero y digresión angular de -10°

Figura 6.10

6.4.2 Búsqueda del rumbo y la digresión angular óptimos

A pesar de haberse definido el intervalo de valores admisibles de la digresión angular para el caso de rumbo 0° , no se ve muy claramente cuál podría ser ese intervalo para cualquier otro rumbo. No obstante, con base en la directriz enunciada en la sección anterior, podría establecerse un intervalo de uso general que el diseñador juzgue sea suficientemente amplio. Si se escoge un intervalo amplio, existe la posibilidad de que para algunos de los valores de digresión angular contenidos en dicho intervalo, se viole la desigualdad 6.8, en cuyo caso las soluciones a las ecuaciones 2.18 serían números complejos, y por lo tanto las posiciones angulares de los actuadores, y los pares motores también lo serían; pero esto no representa dificultad alguna, pues por una parte, *Mathematica* es capaz de hacer cálculos con números complejos sin ninguna programación especial, y por otra, dado que dentro de la función objetivo que se desea maximizar, las expresiones que dependen de los pares son de la forma

$$e^{-\text{Abs}(\tau_i)} \quad (6.13)$$

se aprovecha que la función "valor absoluto" obtiene la norma de τ_i que, independientemente de que éste sea un número complejo, es siempre real y no negativa, por lo que la imagen de la función objetivo será siempre un número real. En resumen, el hecho de que los pares motores sean números complejos, como lo serían en caso de que se quisiera violar la condición de rigidez de los eslabones del caminante Delta-Nabla, no presenta obstáculos insalvables, pues en el supuesto de que un método de optimización encontrara como óptimos de digresión angular y de rumbo, valores que en el transcurso del tiempo generaran valores complejos de los pares, estos falsos óptimos podrían discriminarse usando el simulador de la cinemática, el cual detiene los cálculos tan pronto como detecta que se viola la desigualdad 6.8 (2.20). En la presente tesis, al emplear el algoritmo genético, se usó como espacio de búsqueda para la digresión angular el siguiente intervalo:

$$-30^\circ \leq \zeta_m \leq +30^\circ \quad (6.14)$$

La ejecución del programa Operación Óptima (v. Apéndice), basado en el algoritmo genético, y que optimiza la digresión angular y el rumbo, con 10% de probabilidad de mutación para cada uno de los dos genes seleccionados en cada generación, arrojó el siguiente resultado:

```
{ {0.09939, 0.97137}, {0.0010247, 0.95088}, {0.10349, 0.42626},
{0.09939, 0.95088}, {0.05021, 0.42626}, {0.10349, 0.95088}, {0.033814, 0.95908},
{0.09939, 0.95088}, {0.10759, 0.95088}, {0.11579, 0.95908}, {0.09939, 0.84022},
{0.09939, 0.97137}, {0.11579, 0.95908}, {0.09939, 0.95088}, {0.10759, 0.84022},
{0.09939, 0.95908}, {0.09939, 0.82792}, {0.042011, 0.97137},
{0.11579, 0.96318}, {0.09939, 0.96727}, {0.11579, 2.0001}, {0.09939, 0.95088},
{0.11988, 0.42626}, {0.09939, 0.95088}, {0.09939, 2.0083}, {0.09939, 0.42626},
{0.09939, 0.84022}, {0.09939, 0.95088}, {0.09939, 0.95088}, {0.09939, 0.95088}}
```

Tabla 6.3

El par ordenado aristocrata de esta tabla de resultados es:

$$\zeta_m = 0.09939 \text{ radianes}$$

$$\gamma = 0.95088 \text{ radianes}$$

o bien,

$$\zeta_m = 5.694^\circ$$

$$\gamma = 54.48^\circ$$

(6.15)

Este par ordenado da la siguiente imagen de la función objetivo:

```
fObjetivo[.09939, .95088]
```

```
0.847228
```

Como se desprende de lo explicado en la sección 6.4.1 y en esta sección, con este espacio de búsqueda existe una alta probabilidad de que se hayan explorado valores de digresión angular y de rumbo que hayan generado pares motores complejos; sin embargo, los resultados 6.13 fueron probados con el simulador de cinemática, y encontrados válidos.

Para los valores 6.15 de digresión angular y de rumbo, con intervalos de tiempo de $0.01s$, y $T=1s$, las figura 6.11 muestra la evolución de los tres pares motores en función del tiempo:

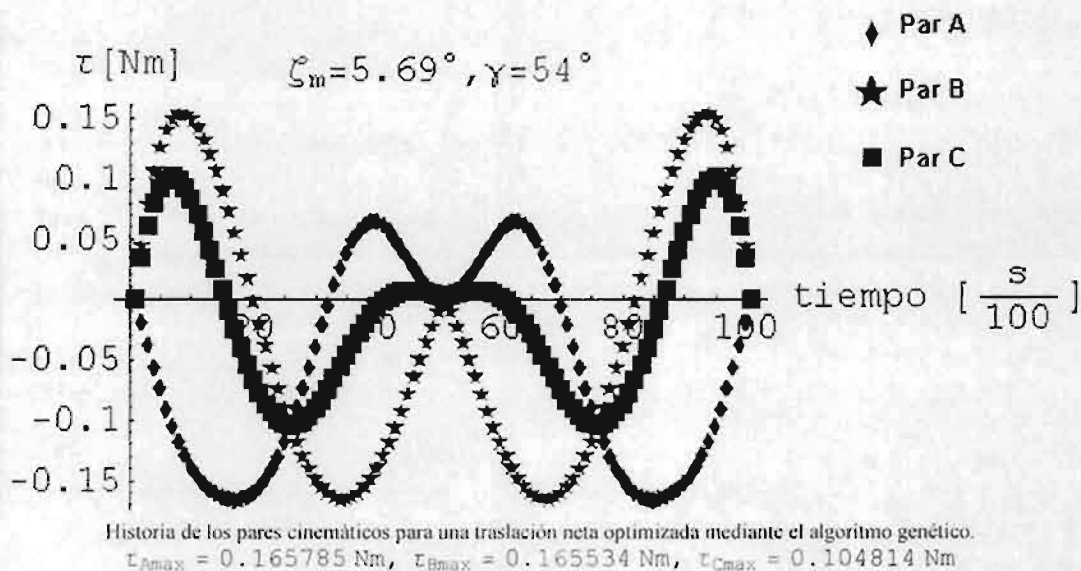


Figura 6.11

Se observa que el motor más exigido en este caso es el A cuyo par absoluto máximo es $\tau_{Amax} = 0.165785 \text{ Nm}$.

Las figura 6.12 ilustra la evolución de los pares en función del tiempo para una traslación pura con rumbo cero.

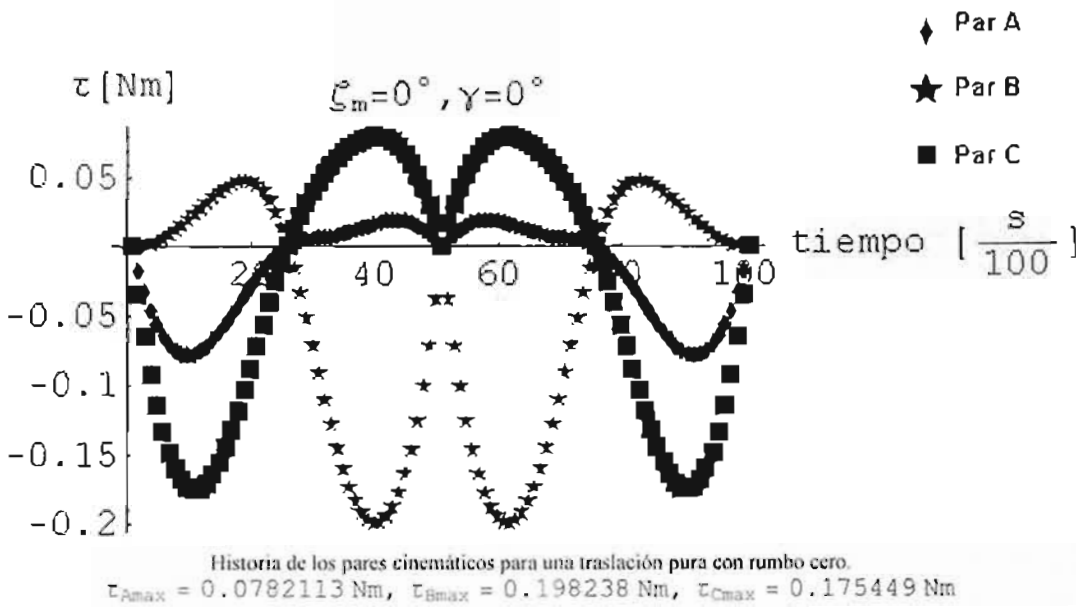


Figura 6.12

Se observa que el motor más exigido en este caso es el B, cuyo par absoluto máximo es $\tau_{Bmax} = 0.198238 \text{ Nm}$.

Los resultados del algoritmo genético proporcionan una distribución más equitativa de los pares motores, y reducen el par máximo con respecto a la traslación pura de rumbo cero en un 16.3%. En la figura 6.13 se comparan los comportamientos de los motores más exigidos para traslación neta optimizada y para traslación pura de rumbo cero, que son respectivamente los motores A y B.

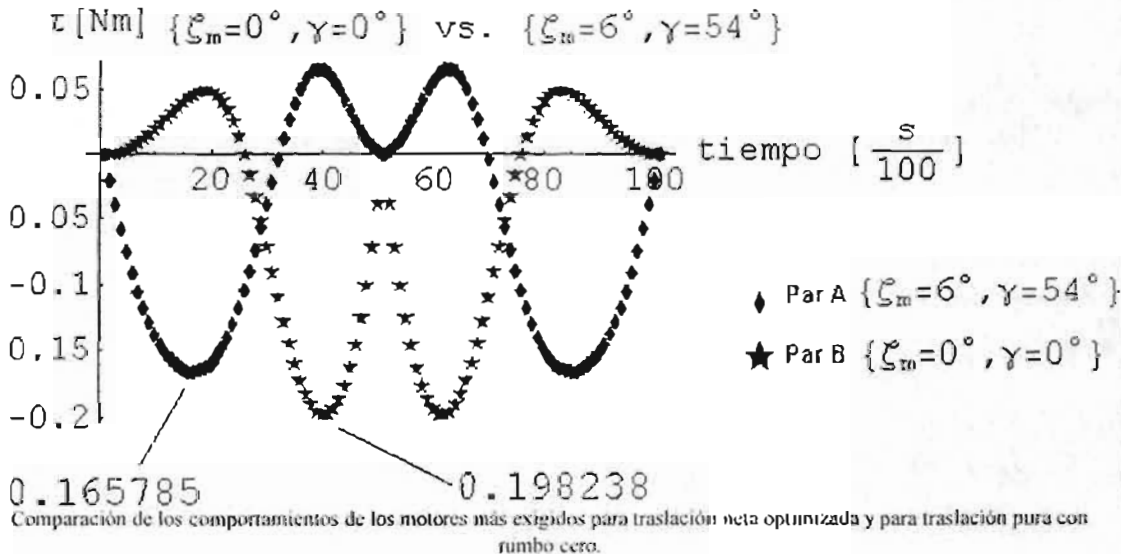
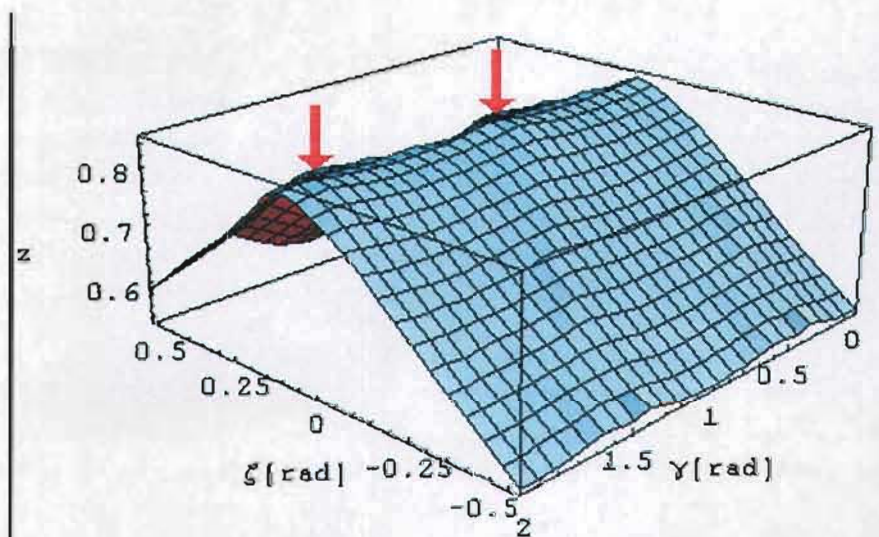


Figura 6.13

6.4.3 Validación de los resultados obtenidos en la sección 6.4.2 mediante un método exhaustivo

Al ser sólo dos los argumentos independientes de la función objetivo para optimizar la digresión angular y el rumbo, es posible construir una superficie tridimensional en la que el eje vertical corresponda al valor de la función objetivo (representada con z), y los ejes ζ_m y γ , yazan sobre un plano horizontal. Si esta superficie tiene una o más cúspides, entre éstas estarán los puntos que optimizan la función objetivo. Empleando *Mathematica*, para un espacio de búsqueda de -30° a 30° para la digresión angular, y de 0° a 120° para el rumbo, se obtuvo la superficie que se muestra en la figura 6.14.



Superficie $f_{obj} = f_{obj}(\zeta_m, \gamma)$

Figura 6.14

La figura 6.14 ilustra que la función objetivo es más sensible a la digresión angular que al rumbo. En ella se aprecia que hay dos cúspides, lo que significa que hay dos óptimos. La solución encontrada con el algoritmo genético parece corresponder a la cima más distante. Con la siguiente instrucción codificada en *Mathematica* se obtuvo en forma tabular la función para 676 puntos y su máximo. La tabla 6.4 muestra sólo el fragmento de la función tabulada en la que aparece el máximo.

```
superficie = Table[fTabular[dig, rum] = fObjetivo[dig, rum],
  {dig, -Pi/6, Pi/6, Pi/75}, {rum, 0, Pi/1.5, Pi/37.5}];
Max[superficie]
? fTabular
```

```
fTabular[ $\frac{\pi}{15}$ , 1.75929] = 0.835417
```

```
fTabular[ $\frac{\pi}{10}$ , 1.84307] = 0.83845
```

```
fTabular[ $\frac{\pi}{5}$ , 1.92684] = 0.842368
```

```
fTabular[ $\frac{\pi}{30}$ , 2.01062] = 0.846277
```

```
fTabular[ $\frac{\pi}{30}$ , 2.0944] = 0.842287
```

```
fTabular[- $\frac{23\pi}{150}$ , 2.0944] = 0.559052
```

```
fTabular[- $\frac{23\pi}{150}$ , 2.01062] = 0.559641
```

Es curioso notar que el rumbo óptimo obtenido no es el mismo que el encontrado por el algoritmo genético. La digresión y el rumbo óptimos expresados en grados son:

$$\begin{aligned} \zeta_m &= 6^\circ \\ \gamma &= 115.2^\circ \end{aligned} \tag{6.16}$$

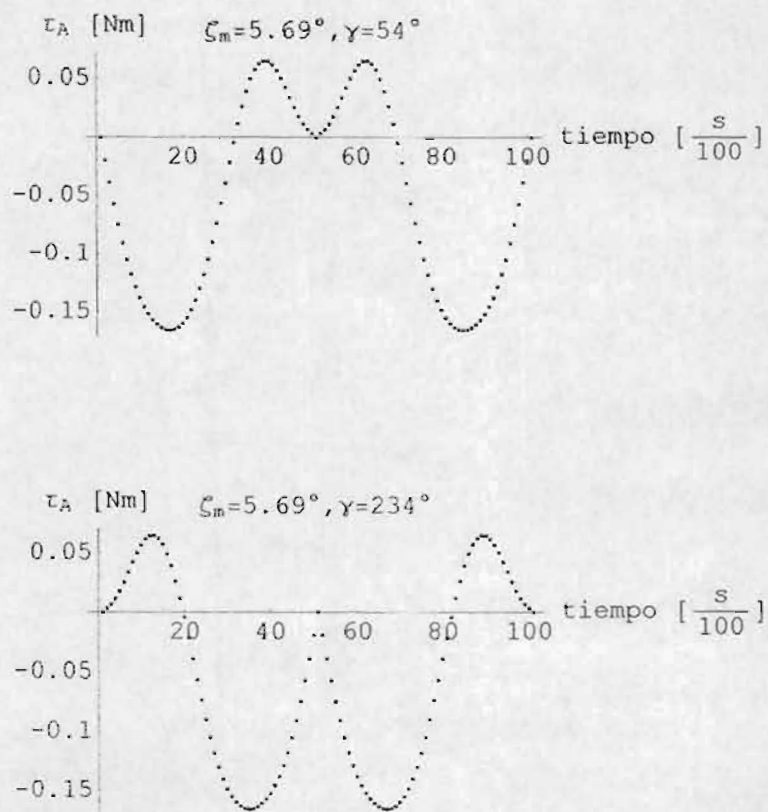
A simple vista, parecería que este valor no tuviera nada que ver con el resultado del algoritmo genético. Sin embargo, recuérdese que según la gráfica de la figura 6.14, se esperan dos valores óptimos, lo cual está en aparente contradicción con el hecho de que la búsqueda del máximo de la función tabulada ha revelado sólo 1, contradicción que se mostrará es inexistente. De hecho existen dos valores para el rumbo en el intervalo $[0^\circ, 120^\circ]$ que optimizan la función objetivo. Si por ejemplo, se resta el valor de rumbo óptimo obtenido con el método exhaustivo del obtenido con el algoritmo genético, se encuentra que la diferencia es 60.72° , que es un valor similar a 60° . Puede experimentarse evaluar la función objetivo para los valores de rumbo 115.2° y $115.2^\circ - 60^\circ$ con una digresión angular de 6° , lo que se hace con un par de comandos *Mathematica*:

```
fObjetivo[6°, 115.2°]
fObjetivo[6°, (115.2 - 60)°]

0.846277
```

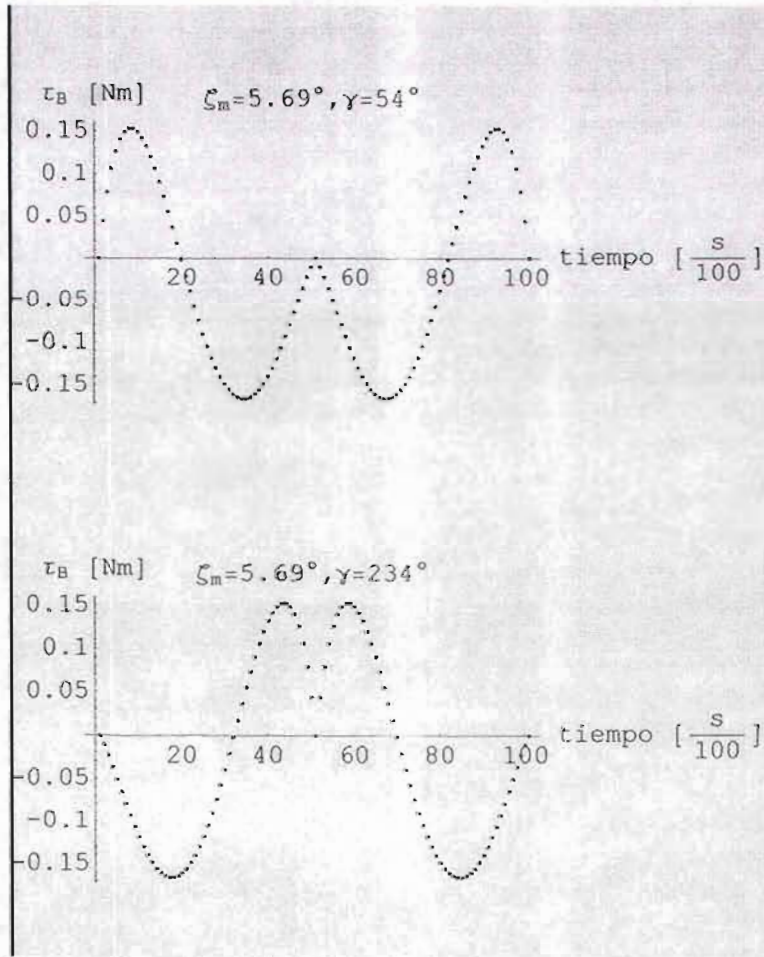
```
0.846277
```

Se observa que se obtiene la misma imagen de la función objetivo para los valores probados. En realidad la función objetivo repite su valor no sólo cada 120° como ya se había anticipado, sino cada 60° , lo cual puede inferirse del examen minucioso de las curvas par-tiempo de las figuras 6.15 a 6.17. En efecto, en el supuesto de que el exoesqueleto está apoyado permanentemente, y de que el endoesqueleto se mueve cíclicamente entre dos actitudes preestablecidas, y considerando como ejemplo la figura 6.15 se aprecia que las curvas $\tau_A - tiempo$ para $\gamma = 54^\circ$ y para $\gamma = 234^\circ$ con la misma digresión angular, difieren únicamente en la fase: por ejemplo, el trazo desde 0 hasta 5 segundos para $\gamma = 234^\circ$, es idéntico al trazo que va desde 5 hasta 10 segundos en la curva correspondiente a $\gamma = 54^\circ$. Idéntica cosa sucede con τ_B y τ_C , como se aprecia en las figuras 6.16 y 6.17. Por la simetría mencionada previamente de la configuración inicial del Delta Nabla, obligadamente debe repetirse este comportamiento para los pares de rumbos $\{174^\circ, 354^\circ\}$ y $\{294^\circ, 114^\circ\}$.



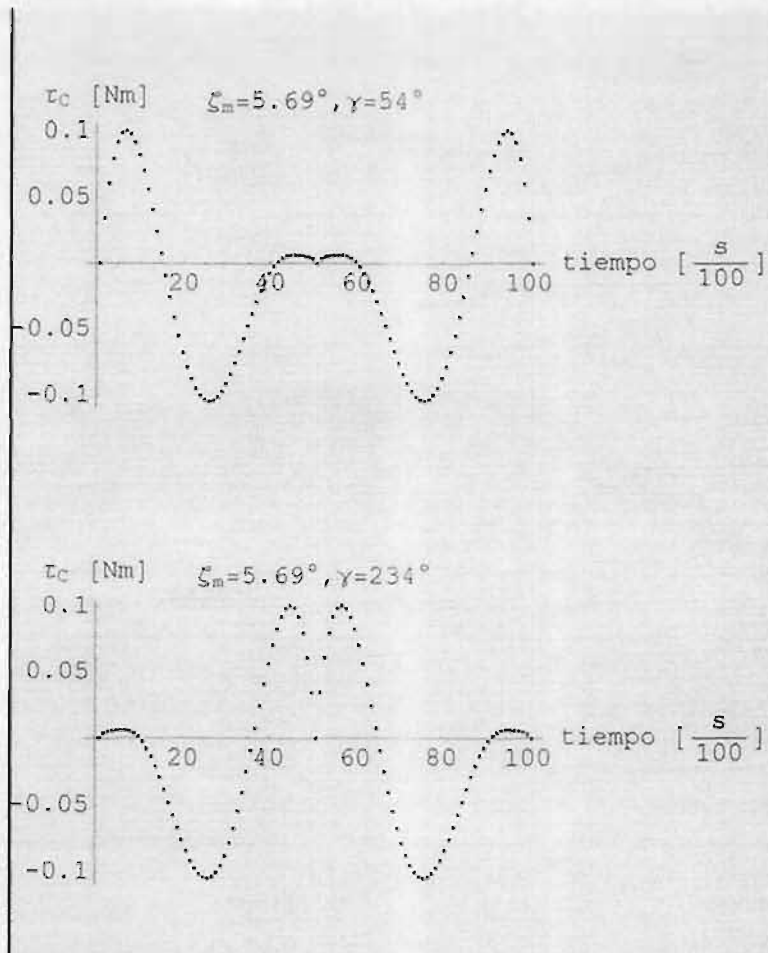
Evolución del par motor A para digresión de 5.69° y rumbos de 54° y de 234° . Las curvas difieren sólo por la fase

Figura 6.15



Evolución del par motor B para digresión de 5.69° y rumbos de 54° y de 234° . Las curvas difieren sólo por la fase

Figura 6.16



Evolución del par motor C para digresión de 5.69° y rumbos de 54° y de 234° . Las curvas difieren sólo por la fase

Figura 6.17

Queda pendiente resolver la contradicción en torno a por qué, previéndose 2 óptimos, la maximización de la función tabulada sólo reveló uno. La respuesta es simple: puesto que la función es discreta, y fue tabulada para incrementos de la variable rumbo de $\pi/37.5$, no era posible tabular la función para un valor γ y para otro rumbo exactamente igual a $\gamma + 60^\circ$. Hasta este momento, se tiene evidencia de que el "óptimo" genético (0.847228) es mejor que el "óptimo" exhaustivo (0.846277), no obstante, el óptimo encontrado a través del método exhaustivo puede refinarse cuanto se quiera explorando un espacio de búsqueda que represente un pequeño entorno alrededor de la primera aproximación al óptimo. Esto se ha hecho para los intervalos de búsqueda $[0.05, 0.2]$ radianes para la digresión angular, y $[0.8, 1.1]$ radianes para el rumbo. La figura 6.18 muestra la superficie generada por esta exploración. Al buscar el valor máximo de la función tabular correspondiente a la gráfica de la figura 6.18, se encontró que dicho valor es 0.848288, el cual ya es mejor que el encontrado con el algoritmo genético, si bien nada obsta para refinar el resultado de éste ejecutándolo a través de más generaciones. La pareja digresión-rumbo que consigue este valor óptimo es:

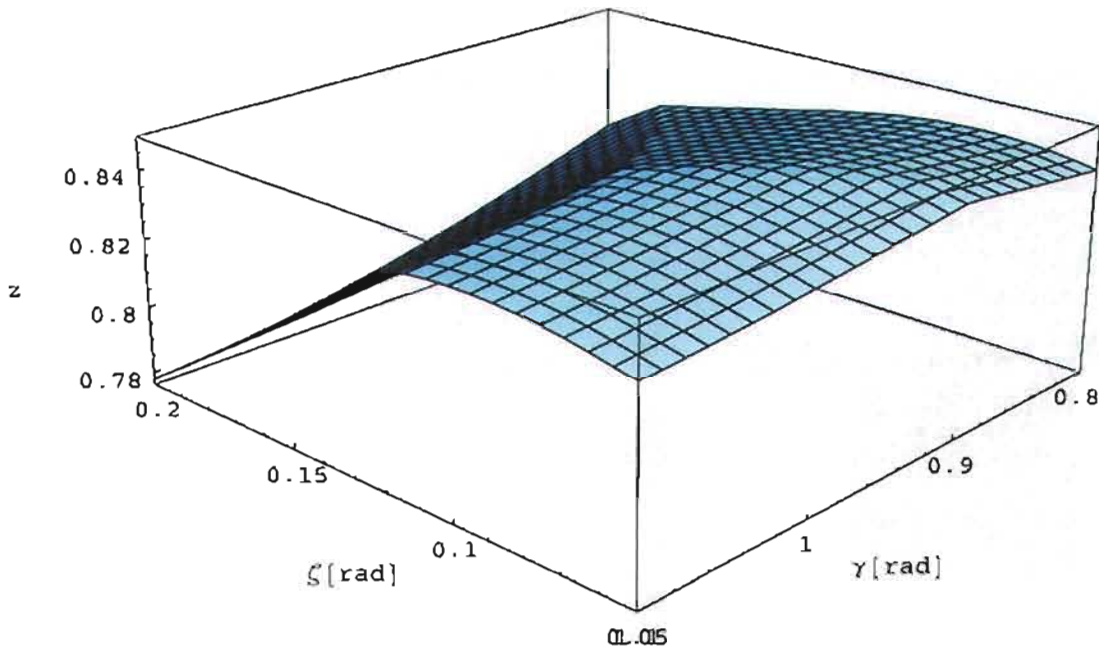
$$\zeta_m = 0.086 \text{ radianes}$$

$$\gamma = 0.932 \text{ radianes}$$

o bien,

$$\zeta_m = 4.93^\circ$$

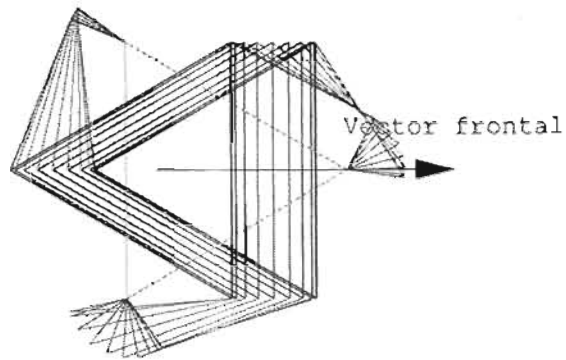
$$\gamma = 53.4^\circ$$



Superficie $f_{obj} = f_{obj}(\zeta_m, \gamma)$ refinada

Figura 6.18

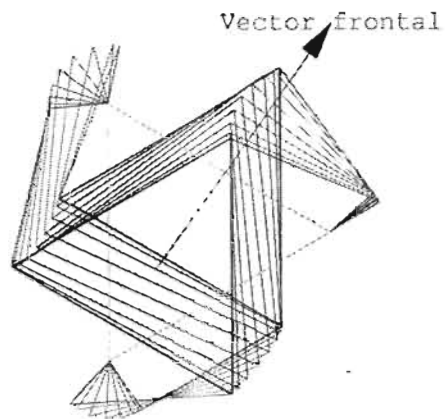
La figura 6.19 ilustra el movimiento del endoesqueleto para una traslación pura con rumbo cero. Las figuras 6.20 a 6.25 ilustran la historia de movimientos del endoesqueleto para una digresión angular de 6° con rumbos de 54° , 114° , 174° , 234° , 294° y 354° . En ellas puede advertirse la equivalencia entre rumbos espaciados 120° . Como se había anticipado, la digresión angular óptima es moderada, pero distinta de cero.



$$\{0, 0\}$$

Traslación pura con rumbo de 0°

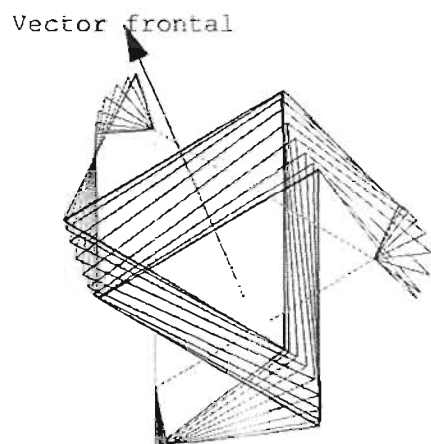
Figura 6.19



$$\left\{ \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{30} \right\}$$

Rumbo de 54° y digresión de 6°

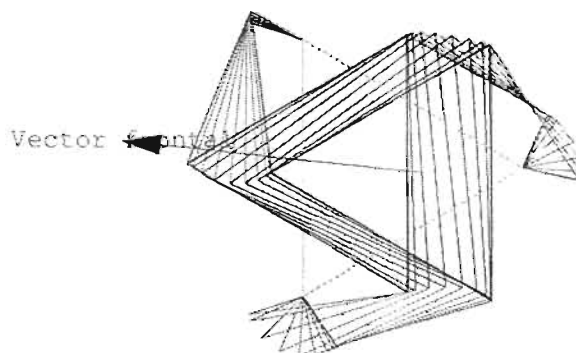
Figura 6.20



$$\left\{ \frac{19\pi}{30}, \frac{\pi}{30} \right\}$$

Rumbo de 114° , digresión de 6°

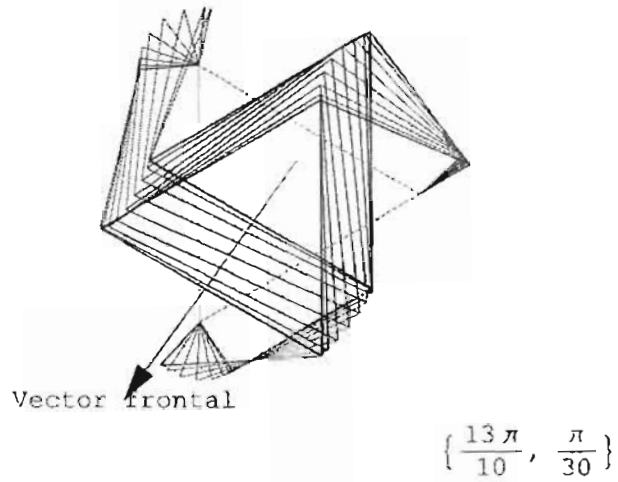
Figura 6.21



$$\left\{ \frac{29\pi}{30}, \frac{\pi}{30} \right\}$$

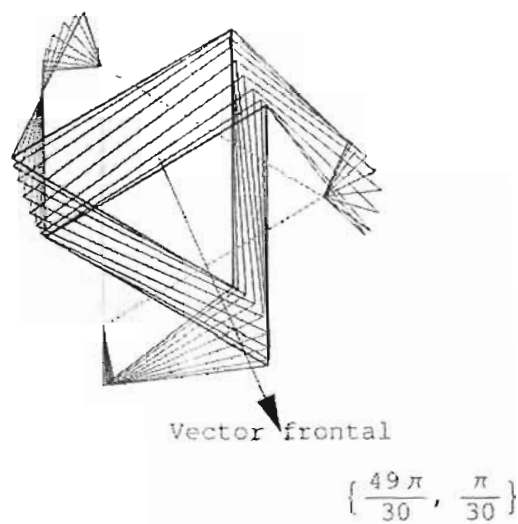
Rumbo de 174° y digresión de 6°

Figura 6.22



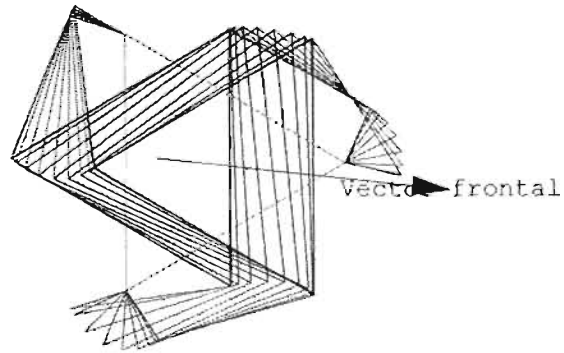
Rumbo de 234° y digresión de 6°

Figura 6.23



Rumbo de 294° y digresión de 6°

Figura 6.24



$$\left\{ \frac{59\pi}{30}, \frac{\pi}{30} \right\}$$

Rumbo de 354° y digresión de 6°

Figura 6.25

Conclusiones

- 1) Se desarrolló un simulador cinemático y uno cinético en *Mathematica*, que constituyen auxiliares útiles en el estudio de la máquina caminante, objeto de estudio de esta tesis. El simulador cinemático permite por una parte, animar al caminante, y por otra, trazar en un sólo cuadro su comportamiento en un cierto periodo T; el simulador cinético, permite obtener el comportamiento de los pares motores en función del tiempo tanto gráfica como tabularmente.
- 2) Se desarrolló un programa optimizador con base en algoritmos genéticos cuya estructura permite modificar fácilmente el número de variables que han de optimizarse.
- 3) Para un conjunto de restricciones especificadas, incluida la prescripción de las posiciones inicial y final, así como la evolución en el tiempo del movimiento, se optimizó la razón $\frac{\text{fémur}}{\text{tibia}}$, de acuerdo con el objetivo planteado en la introducción. Ello es útil en la mejor selección de los motores.
- 4) Una vez fijada la razón $\frac{\text{fémur}}{\text{tibia}}$, se optimizó el rumbo (esto es, se encontró el conjunto de direcciones en las que el desplazamiento rectilíneo prescrito demanda el mínimo par absoluto máximo) y la digresión angular, esto es, una rotación reversible que se verifica durante el trayecto de un esqueleto. Se confirmó la conjetura surgida durante el desarrollo de la tesis de que un movimiento rectilíneo del centro de masa acompañado de una moderada rotación reversible, distribuye mejor los pares motores entre los actuadores que una traslación rectilínea, siendo las actitudes inicial y final, y la duración, las mismas para los dos movimientos. Se encontró que son 6 las direcciones que optimizan la función objetivo, lo que en una competencia en la que haya que recorrer una trayectoria que implique bifurcaciones o retrocesos, confiere al Delta-Nabla una ventaja competitiva, pues sin necesidad de que el caminante se reoriente, cuando sea necesario un cambio de dirección puede elegirse de entre 6 direcciones preferenciales, por ejemplo: una Norte, una Sur, una Noreste, una Noroeste, una Sureste y una Suroeste.
- 5) Se encontró, mediante la validación de un método tabular exhaustivo que aprovecha poderosos comandos de *Mathematica* que, para la solución específica de este problema, un algoritmo genético con elitismo conduce exitosamente a los óptimos buscados. No obstante, para esta aplicación concreta, el método exhaustivo es mejor que el genético por dos razones:
 - a) al sólo requerirse optimizar dos variables independientes, el método exhaustivo permite visualizar las regiones en las que se ubican los óptimos a través del trazo de una superficie tridimensional, y aprovechar de la información tabular con la que se genera la gráfica, para encontrar mediante la función "Max" de *Mathematica* el máximo de la función objetivo, y los valores de los argumentos que lo producen (Recuérdese que el máximo valor de la función objetivo representa el mínimo par absoluto máximo).
 - b) el tiempo de ejecución del método exhaustivo es considerablemente menor que el del algoritmo genético; la relación de tiempos de ejecución es: $\frac{1455s}{8649s}$. Esta razón de tiempos se obtuvo para 625 puntos de precisión de la superficie, en el caso del método exhaustivo, y para 200 generaciones de 30 individuos con probabilidad de mutación de 10% para dos genes de cada cromosoma en cada generación seleccionados al azar. La longitud de cada cromosoma fue de 18 bits, 9 de los cuales se usaron para codificar el rumbo, y los 9 restantes para representar la digresión angular. El operador cruzamiento sólo contempla un punto de cruce. El óptimo encontrado por el algoritmo genético con las condiciones mencionadas es ligeramente mejor que el encontrado con el método exhaustivo, pero éste puede refinarse reduciendo el

tamaño de la región a explorar una vez que se tiene una idea aproximada de la localización del óptimo.

Está por comprobarse si los resultados finales de la optimización por cualquiera de los métodos comentados son aplicables independientemente de la escala de la máquina caminante. Se cree que la respuesta es afirmativa.

6) Se observó que la función objetivo es más sensible a cambios en la digresión angular, que a cambios en el rumbo. Téngase presente que para un rumbo fijo, la digresión angular tiene cotas superior e inferior, mientras que para una traslación pura (digresión angular nula), el rumbo no tiene cotas, ni superior, ni inferior.

En este momento, se está en condiciones de comenzar el diseño de un modelo funcionante del caminante Delta-Nabla en la versión de 5 actuadores, a una escala en que el tema del análisis de esfuerzos no sea de consideración. Este modelo servirá como plataforma de experimentación mecánica, electrónica y de software que, como se adelantaba en la introducción, tenga aplicación en la didáctica de la robótica.

Ciudad de México, en el día décimo quinto del mes de agosto del año 2005, fiesta de la Asunción de María

Programa animador

Rutina de inicialización de directorios

```
If[Directory[] == "C:\\ARCHIVOS DE PROGRAMA\\WOLFRAM RESEARCH\\MATHEMATICA\\5.0",
  SetDirectory["Caminante paralelo"], Directory[]];

Off[General::"spell", General::"spell1"];

<< anguloTresLados
<< posGrado5
<< posGrado6
```

NOTA: `anguloTresLados`, `posGrado5` y `posGrado6` son funciones definidas por el usuario: la primera de ellas, calcula un ángulo de un triángulo si se conocen sus tres lados; el orden de los argumentos determinará cuál de los tres ángulos se calculará; la segunda es un polinomio de quinto grado, que aquí se aplica para la posición del centro de gravedad a lo largo de ξ ; finalmente, la tercera es un polinomio de sexto grado que aquí se emplea para la orientación del endoesqueleto

Rutina en la que el programa solicita las posiciones inicial y final a lo largo del eje ξ , así como la duración de un paso y el rumbo γ .

```
xI = Input["Especifique la posición inicial del centro de masa en centímetros sobre
el eje a lo largo del cual tendrá lugar el desplazamiento rectilíneo"];
xF = Input["Especifique la posición extrema del centro de masa en centímetros
sobre el eje a lo largo del cual tendrá lugar el desplazamiento rectilíneo"];
tiempoTotal = Input["Especifique el tiempo que debe emplearse
en efectuar el desplazamiento total"];
anguloRumbo = Input["Especifique el rumbo deseado en grados"] * Pi / 180;
```


Definición de las coordenadas del centro de gravedad y de la orientación en términos de los datos proporcionados, y como funciones polinomiales del tiempo

```

xRumbo = If[t < tiempoTotal / 2, posGrado5[xI, xF, t, tiempoTotal / 2],
  posGrado5[xF, xI, t - tiempoTotal / 2, tiempoTotal / 2]]; x = xRumbo * Cos[anguloRumbo];
y = xRumbo * Sin[anguloRumbo];
ξI = Input["Especifique la posición angular inicial en grados"] * Pi / 180;
ξM = Input["Especifique la amplitud de oscilación intermedia"] * Pi / 180;
ξF = Input["Especifique la posición angular final en grados"] * Pi / 180; fracTiempo =
  Input["Especifique la fracción tiempo en el que ocurrirá la amplitud intermedia"];
ξ = If[t < tiempoTotal / 2, posGrado6[ξI, ξM, ξF, t, tiempoTotal / 2, fracTiempo],
  posGrado6[ξF, ξM, ξI, t - tiempoTotal / 2, tiempoTotal / 2, fracTiempo]];

```

Cálculo de los vectores de posición de los tobillos

```
datosConstantes = {L → 30};
```

```
razonLongitudes = .35698; LongTibia = 26 / (1 + razonLongitudes);
LongFemur = razonLongitudes * LongTibia;
```

```
oC = 10 √3;
```

```
TobilloA = {{x + (L / (2 √3) - (√3 L) / 2) Cos[ξ]}, {y + (L / (2 √3) - (√3 L) / 2) Sin[ξ]}} /. datosConstantes;
```

```
TobilloB =
```

```
{(x + (L Cos[ξ] / (2 √3) + 0.5 L Sin[ξ])), (y - 0.5 L Cos[ξ] + (L Sin[ξ] / (2 √3)))} /. datosConstantes;
```

```
TobilloC = {{x + (L Cos[ξ] / (2 √3) - 0.5 L Sin[ξ])}, {y + 0.5 L Cos[ξ] + (L Sin[ξ] / (2 √3))}} /.
```

```
datosConstantes;
```

```
Table[{ankleA[t] = TobilloA, ankleB[t] = TobilloB, ankleC[t] = TobilloC},
  {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal / 100}];
```

Cálculo de los vectores de posición de las caderas

$$\text{caderaA} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} * L * \text{Cos}[30^\circ] \\ \frac{1}{2} L \end{pmatrix} /. \text{datosConstantes};$$

$$\text{caderaB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} * L * \text{Cos}[30^\circ] \\ -\frac{1}{2} L \end{pmatrix} /. \text{datosConstantes};$$

$$\text{caderaC} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} L * \text{Cos}[30^\circ] \\ 0 \end{pmatrix} /. \text{datosConstantes};$$

Cálculo del objeto gráfico que representará al exoesqueleto

```
exoesqueleto = Graphics[{RGBColor[0, 1, 0],
  Line[{Flatten[caderaA], Flatten[caderaB], Flatten[caderaC], Flatten[caderaA]}]},
  PlotRange -> {{-45, 45}, {-45, 45}}, AspectRatio -> 1]
```

(*La siguiente línea es una instrucción de limpieza. El valor de asignación debe ser mayor a la suma fémur más tibia para que el control sea efectivo.*)

```
Table[{extA[t] = LongFemur + LongTibia + 1; extB[t] = LongFemur + LongTibia + 1;
  extC[t] = LongFemur + LongTibia + 1}, {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}];
```

(*La siguiente línea define el dominio de valores permisibles para la función ArcCos*)

```
dominio = Interval[{-1, 1}];
```

```
discR[extension_] := (extension2 + LongFemur2 - LongTibia2) / (2 * extension * LongFemur)
```

(*El siguiente procedimiento evalúa para cada posición del endoesqueleto, si el valor de la función discR pertenece al dominio.*)

NOTA: La variable "discR" debe tener valores comprendidos en el conjunto "dominio" para que la actitud especificada sea válida. El argumento "extension" es la distancia entre un tobillo y la cadera correspondiente (extA, extB, extC).

Instrucción que detecta actitudes incompatibles con la rigidez de los eslabones

```
Catch[Do[{extA[t] = Norm[ankleA[t] - caderaA];
  extB[t] = Norm[ankleB[t] - caderaB]; extC[t] = Norm[ankleC[t] - caderaC];
  ok = And[IntervalMemberQ[dominio, discR[extA[t]]], IntervalMemberQ[
    dominio, discR[extB[t]]], IntervalMemberQ[dominio, discR[extC[t]]]];
  If[Not(ok), Throw[{discR[extA[t]], discR[extB[t]], discR[extC[t]], t}]],
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}]
```

Código para producir la animación

```
If[ok, Table[distTA[t] = Norm[ankleA[t]]; distTB[t] = Norm[ankleB[t]];
  distTC[t] = Norm[ankleC[t]], {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}];
Table[ $\theta_1a[t] = \text{Pi} - \text{anguloTresLados}[oC, \text{extA}[t], \text{distTA}[t]] -$ 
  anguloTresLados[LongFemur, extA[t], LongTibia];
 $\theta_1b[t] = \text{Pi} - \text{anguloTresLados}[oC, \text{extB}[t], \text{distTB}[t]] -$ 
  anguloTresLados[LongFemur, extB[t], LongTibia];
 $\theta_1c[t] = \text{Pi} - \text{anguloTresLados}[oC, \text{extC}[t], \text{distTC}[t]] -$ 
  anguloTresLados[LongFemur, extC[t], LongTibia],
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}]; Table[KnieA[t] = caderaA +
  {{LongFemur * Cos[ $\theta_1a[t] + 2 * \text{Pi} / 3$ ]}, {LongFemur * Sin[ $\theta_1a[t] + 2 * \text{Pi} / 3$ ]}]; KnieB[t] =
  caderaB + {{LongFemur * Cos[ $\theta_1b[t] + 4 * \text{Pi} / 3$ ]}, {LongFemur * Sin[ $\theta_1b[t] + 4 * \text{Pi} / 3$ ]}];
KnieC[t] = caderaC + {{LongFemur * Cos[ $\theta_1c[t]$ ]}, {LongFemur * Sin[ $\theta_1c[t]$ ]}};
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}]; Table[
femurA[t] = Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Line[{Flatten[caderaA], Flatten[KnieA[t]}]}],
  PlotRange -> {{-45, 45}, {-45, 45}}, AspectRatio -> 1];
femurB[t] = Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Line[{Flatten[caderaB], Flatten[KnieB[t]}]}],
  PlotRange -> {{-45, 45}, {-45, 45}}, AspectRatio -> 1];
femurC[t] = Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Line[{Flatten[caderaC], Flatten[KnieC[t]}]}],
  PlotRange -> {{-45, 45}, {-45, 45}}, AspectRatio -> 1],
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}]; Table[tibiaA[t] =
Graphics[{RGBColor[1, 0, 1], Line[{Flatten[KnieA[t]], Flatten[ankleA[t]}]}],
  PlotRange -> {{-45, 45}, {-45, 45}}, AspectRatio -> 1]; tibiaB[t] =
Graphics[{RGBColor[1, 0, 1], Line[{Flatten[KnieB[t]], Flatten[ankleB[t]}]}],
  PlotRange -> {{-45, 45}, {-45, 45}}, AspectRatio -> 1]; tibiaC[t] =
Graphics[{RGBColor[1, 0, 1], Line[{Flatten[KnieC[t]], Flatten[ankleC[t]}]}],
  PlotRange -> {{-45, 45}, {-45, 45}}, AspectRatio -> 1],
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}]; Table[endoesqueleto[t] =
Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{Flatten[ankleA[t]], Flatten[ankleB[t]],
  Flatten[ankleC[t]], Flatten[ankleA[t]}]}], PlotRange -> {{-45, 45}, {-45, 45}},
  AspectRatio -> 1], {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}];
Table[Show[{femurA[t], femurB[t], femurC[t], tibiaA[t], tibiaB[t],
  tibiaC[t], endoesqueleto[t], exoesqueleto}],
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}], "No es posible la animación"]
```

Programa trazador

NOTA: Este programa es muy similar en estructura al programa "Animador"; pero en contraste con él, no produce una secuencia de cuadros para producir una animación, sino que todos los cuadros que genera los superpone en un solo gráfico. Los datos para este gráfico único se guardan en las variables "historiaEndoesqueletal", "historiaTibial" e "historiaFemoral".

```

If[Directory[] == "C:\\ARCHIVOS DE PROGRAMA\\WOLFRAM RESEARCH\\MATHEMATICA\\5.0",
  SetDirectory["Caminante paralelo"], Directory[]];

Off[General::"spell", General::"spell1"];

<< Graphics`Arrow`
<< anguloTresLados
<< posGrado5
<< posGrado6

xI = Input["Especifique la posición inicial del centro de masa en centímetros sobre
  el eje a lo largo del cual tendrá lugar el desplazamiento rectilíneo"];
xF = Input["Especifique la posición extrema del centro de masa en centímetros
  sobre el eje a lo largo del cual tendrá lugar el desplazamiento rectilíneo"];
tiempoTotal = Input["Especifique el tiempo que debe emplearse
  en efectuar el desplazamiento total"];
anguloRumbo = Input["Especifique el rumbo deseado en grados"] * Pi / 180;
xRumbo = If[t < tiempoTotal / 2, posGrado5[xI, xF, t, tiempoTotal / 2],
  posGrado5[xF, xI, t - tiempoTotal / 2, tiempoTotal / 2]]; x = xRumbo * Cos[anguloRumbo];
y = xRumbo * Sin[anguloRumbo];
ξI = Input["Especifique la posición angular inicial en grados"] * Pi / 180;
ξM = Input["Especifique la amplitud de oscilación intermedia"] * Pi / 180;
ξF = Input["Especifique la posición angular final en grados"] * Pi / 180; fracTiempo =
  Input["Especifique la fracción tiempo en el que ocurrirá la amplitud intermedia"];
ξ = If[t < tiempoTotal / 2, posGrado6[ξI, ξM, ξF, t, tiempoTotal / 2, fracTiempo],
  posGrado6[ξF, ξM, ξI, t - tiempoTotal / 2, tiempoTotal / 2, fracTiempo]];
vectorFrontal = Arrow[{x /. {t -> 0}, y /. {t -> 0}},
  {(x /. {t -> 0}) + 35 * Cos[anguloRumbo], (y /. {t -> 0}) + 35 * Sin[anguloRumbo]};

(*Tobillos bidimensionales.*)

datosConstantes = {L -> 30};

LongFemur = 6.9;
LongTibia = 19.1;
oC = 10 √3;

TobilloA = {{x + (L / (2 √3) - √3 L / 2) Cos[ξ]}, {y + (L / (2 √3) - √3 L / 2) Sin[ξ]}} /. datosConstantes;

```

```

TobilloB =
  {{x +  $\frac{L \text{Cos}[\xi]}{2 \sqrt{3}} + 0.5 \cdot L \text{Sin}[\xi]$ }, {y - 0.5 \cdot L \text{Cos}[\xi] +  $\frac{L \text{Sin}[\xi]}{2 \sqrt{3}}$ }} /. datosConstantes;

TobilloC = {{x +  $\frac{L \text{Cos}[\xi]}{2 \sqrt{3}} - 0.5 \cdot L \text{Sin}[\xi]$ }, {y + 0.5 \cdot L \text{Cos}[\xi] +  $\frac{L \text{Sin}[\xi]}{2 \sqrt{3}}$ }} /.
  datosConstantes;

Table[{ankleA[t] = TobilloA, ankleB[t] = TobilloB, ankleC[t] = TobilloC},
  {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/20}];

caderaA =  $\left( \begin{array}{c} -\frac{1}{3} * L * \text{Cos}[30^\circ] \\ \frac{1}{2} L \end{array} \right)$  /. datosConstantes;

caderaB =  $\left( \begin{array}{c} -\frac{1}{3} * L * \text{Cos}[30^\circ] \\ -\frac{1}{2} L \end{array} \right)$  /. datosConstantes;

caderaC =  $\left( \begin{array}{c} \frac{2}{3} L * \text{Cos}[30^\circ] \\ 0 \end{array} \right)$  /. datosConstantes;

exoesqueleto =
  Line[{Flatten[caderaA], Flatten[caderaB], Flatten[caderaC], Flatten[caderaA]}]

(*La siguiente línea es una instrucción de limpieza. El valor de asignación debe
  ser mayor a la suma fémur más tibia para que el control sea efectivo.*)

Table[{extA[t] = LongFemur + LongTibia + 1; extB[t] = LongFemur + LongTibia + 1;
  extC[t] = LongFemur + LongTibia + 1}, {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/20}];

(*La siguiente línea define el dominio
  de valores permisibles para la función ArcCos*)

dominio = Interval[{-1, 1}];

discR[extension_] := (extension2 + LongFemur2 - LongTibia2) / (2 * extension * LongFemur)

(*El siguiente procedimiento evalúa para cada posición del endoesqueleto,
  si el valor de la función discR pertenece al dominio.*)

Catch[Do[{extA[t] = Norm[ankleA[t] - caderaA];
  extB[t] = Norm[ankleB[t] - caderaB]; extC[t] = Norm[ankleC[t] - caderaC];
  ok = And[IntervalMemberQ[dominio, discR[extA[t]]], IntervalMemberQ[
    dominio, discR[extB[t]]], IntervalMemberQ[dominio, discR[extC[t]]]];
  If[Not[ok], Throw[{discR[extA[t]], discR[extB[t]], discR[extC[t]], t}]],
  {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/20}]]

(*Instrucciones de animación*)

If[ok, Table[distTA[t] = Norm[ankleA[t]]; distTB[t] = Norm[ankleB[t]];

```

```

distTC[t] = Norm[ankleC[t]], {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/20}];
Table[θ1a[t] = Pi - anguloTresLados[oC, extA[t], distTA[t]] -
  anguloTresLados[LongFemur, extA[t], LongTibia];
θ1b[t] = Pi - anguloTresLados[oC, extB[t], distTB[t]] -
  anguloTresLados[LongFemur, extB[t], LongTibia];
θ1c[t] = Pi - anguloTresLados[oC, extC[t], distTC[t]] -
  anguloTresLados[LongFemur, extC[t], LongTibia],
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/20}]; Table[KnieA[t] = caderaA +
  {{LongFemur * Cos[θ1a[t] + 2 * Pi / 3]}, {LongFemur * Sin[θ1a[t] + 2 * Pi / 3]}}; KnieB[t] =
  caderaB + {{LongFemur * Cos[θ1b[t] + 4 * Pi / 3]}, {LongFemur * Sin[θ1b[t] + 4 * Pi / 3]}};
KnieC[t] = caderaC + {{LongFemur * Cos[θ1c[t]]}, {LongFemur * Sin[θ1c[t]]}},
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/20}];
historiaFemoral = Table[{Line[{Flatten[caderaA], Flatten[KnieA[t]]}],
  Line[{Flatten[caderaB], Flatten[KnieB[t]]}],
  Line[{Flatten[caderaC], Flatten[KnieC[t]]}]}, {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/20}];
historiaTibial = Table[{Line[{Flatten[KnieA[t]], Flatten[ankleA[t]]}],
  Line[{Flatten[KnieB[t]], Flatten[ankleB[t]]}], Line[
  {Flatten[KnieC[t]], Flatten[ankleC[t]]}], {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/20}];
historiaEndoesqueletal = Table[{Line[{Flatten[ankleA[t]], Flatten[ankleB[t]],
  Flatten[ankleC[t]], Flatten[ankleA[t]]}], {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/20}];
Table[Show[Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], historiaFemoral, RGBColor[1, 0, 1],
  historiaTibial, RGBColor[0, 0, 1], historiaEndoesqueletal,
  RGBColor[0, 1, 0], exoesqueleto, RGBColor[0.501961, 0, 0.25098],
  vectorFrontal, Text[{anguloRumbo, "M"}, {30, -30}], Text["Vector frontal",
  {(x /. {t → 0}) + 35 * Cos[anguloRumbo], (y /. {t → 0}) + 5 + 35 * Sin[anguloRumbo]}]}],
  PlotRange → {{-45, 45}, {-45, 45}}, AspectRatio → 1]],
"No es posible el movimiento especificado"]

```

Programa anatomía óptima

Este programa optimiza mediante el algoritmo genético canónico, la razón $\frac{\text{fémur}}{\text{tibia}}$.

```
(*Protocolos de inicio*)

(*Inicialización de directorios*)
If[Directory[] == "C:\\ARCHIVOS DE PROGRAMA\\WOLFRAM RESEARCH\\MATHEMATICA\\5.0",
  SetDirectory["Caminante paralelo"], Directory[]];

(*Cancelación de errores por nombres similares*)
Off[General::"spell", General::"spell1"];

(*Apertura de funciones necesarias*)
<< anguloTresLados
<< posGrado5
<< acelGrado3
```

Definición de las posiciones inicial y final, tanto lineales como angulares; funciones que calculan las coordenadas (x,y) y el vector aceleración (ax,ay) del centro de gravedad; función de la aceleración angular (α)

```
(*Solución a los problemas cinemático (posiciones) y cinético inverso*)

xI = -5/100; xF = 5/100; tiempoTotal = 1; anguloRumbo = 0;  $\xi$ I = 0;  $\xi$ F = 0;
datosConstantes = {L -> .30, masa -> 1.6, Inercia -> .018};  $\omega$ C =  $10\sqrt{3}/100$ ;
xRumbo = If[t < tiempoTotal/2, posGrado5[xI, xF, t, tiempoTotal/2],
  posGrado5[xF, xI, t - tiempoTotal/2, tiempoTotal/2]];
acelRumbo = If[t < tiempoTotal/2, acelGrado3[xI, xF, t, tiempoTotal/2],
  acelGrado3[xF, xI, t - tiempoTotal/2, tiempoTotal/2]];
x = xRumbo * Cos[anguloRumbo]; ax = acelRumbo * Cos[anguloRumbo];
y = xRumbo * Sin[anguloRumbo]; ay = acelRumbo * Sin[anguloRumbo];
 $\xi$  = If[t < tiempoTotal/2, posGrado5[ $\xi$ I,  $\xi$ F, t, tiempoTotal/2],
  posGrado5[ $\xi$ F,  $\xi$ I, t - tiempoTotal/2, tiempoTotal/2]];
 $\alpha$  = If[t < tiempoTotal/2, acelGrado3[ $\xi$ I,  $\xi$ F, t, tiempoTotal/2],
  acelGrado3[ $\xi$ F,  $\xi$ I, t - tiempoTotal/2, tiempoTotal/2]];
```

Cálculo de tobillos y caderas

$$\text{TobilloA} = \left\{ \left\{ x + \left(\frac{L}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}L}{2} \right) \cos[\xi], \left\{ y + \left(\frac{L}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}L}{2} \right) \sin[\xi] \right\} \right\} /. \text{datosConstantes};$$

TobilloB =

$$\left\{ \left\{ x + \frac{L \cos[\xi]}{2\sqrt{3}} + 0.5 \cdot L \sin[\xi], \left\{ y - 0.5 \cdot L \cos[\xi] + \frac{L \sin[\xi]}{2\sqrt{3}} \right\} \right\} /. \text{datosConstantes};$$

$$\text{TobilloC} = \left\{ \left\{ x + \frac{L \cos[\xi]}{2\sqrt{3}} - 0.5 \cdot L \sin[\xi], \left\{ y + 0.5 \cdot L \cos[\xi] + \frac{L \sin[\xi]}{2\sqrt{3}} \right\} \right\} /.$$

datosConstantes;

$$\text{caderaA} = \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{3} * L * \cos[30^\circ] \\ \frac{1}{2} L \end{array} \right) /. \text{datosConstantes};$$

$$\text{caderaB} = \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{3} * L * \cos[30^\circ] \\ -\frac{1}{2} L \end{array} \right) /. \text{datosConstantes};$$

$$\text{caderaC} = \left(\begin{array}{c} \frac{2}{3} L * \cos[30^\circ] \\ 0 \end{array} \right) /. \text{datosConstantes};$$

$$\text{palancaA} = \left(-\left(\frac{L}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}L}{2} \right) \sin[\xi], \left(\frac{L}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}L}{2} \right) \cos[\xi] \right) /. \text{datosConstantes};$$

$$\text{palancaB} = \left(0.5 \cdot L \cos[\xi] + \frac{L \sin[\xi]}{2\sqrt{3}}, \frac{L \cos[\xi]}{2\sqrt{3}} + 0.5 \cdot L \sin[\xi] \right) /. \text{datosConstantes};$$

$$\text{palancaC} = \left(-0.5 \cdot L \cos[\xi] + \frac{L \sin[\xi]}{2\sqrt{3}}, \frac{L \cos[\xi]}{2\sqrt{3}} - 0.5 \cdot L \sin[\xi] \right) /. \text{datosConstantes};$$

Cálculo de los "brazos de palanca" que las tibias tienen alrededor de las caderas.

$$\text{palFemA} = \{-\text{LongFemur} \sin[\theta_{1a}[t] + 2 * \text{Pi} / 3], \text{LongFemur} \cos[\theta_{1a}[t] + 2 * \text{Pi} / 3]\};$$

$$\text{palFemB} = \{-\text{LongFemur} \sin[\theta_{1b}[t] + 4 * \text{Pi} / 3], \text{LongFemur} \cos[\theta_{1b}[t] + 4 * \text{Pi} / 3]\};$$

$$\text{palFemC} = \{-\text{LongFemur} \sin[\theta_{1c}[t]], \text{LongFemur} \cos[\theta_{1c}[t]]\};$$

Generación de tablas de las posiciones de los tobillos (ankleA, ankleB, ankleC) a lo largo del tiempo, así como de las distancias entre tobillos y caderas correspondientes, y de las normas de los vectores de posición de los tobillos.

```
Table[{ankleA[t] = TobilloA, ankleB[t] = TobilloB, ankleC[t] = TobilloC},
  {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}];
Table[extA[t] = Norm[ankleA[t] - caderaA]; extB[t] = Norm[ankleB[t] - caderaB];
  extC[t] = Norm[ankleC[t] - caderaC], {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}];
Table[distTA[t] = Norm[ankleA[t]]; distTB[t] = Norm[ankleB[t]];
  distTC[t] = Norm[ankleC[t]], {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}];
```

Definición de la función objetivo

NOTA: El argumento de esta función es la variable "razonLongitudes", esto es, el cociente de la longitud del fémur entre la de la tibia. La fórmula al final de la porción de código con la que se define la función objetivo:

$$\text{Exp}[-\text{Max}[\text{Table}[\{\text{Abs}[\tau A[t]], \text{Abs}[\tau B[t]], \text{Abs}[\tau C[t]]\}]]]$$

toma en cuenta la historia de los valores de los pares proporcionados por los tres motores desde 0 hasta T, y escoge el máximo valor absoluto de ellos, esto es, la peor condición de par. El antilogaritmo natural del negativo de esta peor condición es la calificación que obtiene la "razonLongitudes" probada. Mientras más pequeña la "peor condición", mejor será la calificación.

```
fObjetivo[razonLongitudes_] :=
(Clear[θ1a, θ1b, θ1c, KnieA, KnieB, KnieC, unitTibiaA, unitTibiaB,
unitTibiaC, fuerzaA, fuerzaB, fuerzaC, ecFu, ecMom, fA, fB, fC, τA, τB, τC];
LongTibia = .26 / (1 + razonLongitudes); LongFemur = razonLongitudes * LongTibia;;
Table[θ1a[t] = Pi - anguloTresLados[oc, extA[t], distTA[t]] -
anguloTresLados[LongFemur, extA[t], LongTibia];
θ1b[t] = Pi - anguloTresLados[oc, extB[t], distTB[t]] - anguloTresLados[LongFemur,
extB[t], LongTibia]; θ1c[t] = Pi - anguloTresLados[oc, extC[t], distTC[t]] -
anguloTresLados[LongFemur, extC[t], LongTibia],
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal / 100}]; Table[KnieA[t] = caderaA +
{{LongFemur * Cos[θ1a[t] + 2 * Pi / 3]}, {LongFemur * Sin[θ1a[t] + 2 * Pi / 3]}}; KnieB[t] =
caderaB + {{LongFemur * Cos[θ1b[t] + 4 * Pi / 3]}, {LongFemur * Sin[θ1b[t] + 4 * Pi / 3]}};
KnieC[t] = caderaC + {{LongFemur * Cos[θ1c[t]]}, {LongFemur * Sin[θ1c[t]]}},
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal / 100}];
Table[unitTibiaA[t] = (ankleA[t] - KnieA[t]) / LongTibia;
unitTibiaB[t] = (ankleB[t] - KnieB[t]) / LongTibia;
unitTibiaC[t] = (ankleC[t] - KnieC[t]) / LongTibia,
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal / 100}];
Table[fuerzaA[t] = fA[t] * unitTibiaA[t]; fuerzaB[t] = fB[t] * unitTibiaB[t];
fuerzaC[t] = fC[t] * unitTibiaC[t], {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal / 100}]; Table[
ecFu[t] = (fuerzaA[t] + fuerzaB[t] + fuerzaC[t] = masa * {{ax}, {ay}}) /. datosConstantes;
ecMom[t] = (Dot[palancaA, Flatten[fuerzaA[t]]] + Dot[palancaB, Flatten[fuerzaB[t]]] +
Dot[palancaC, Flatten[fuerzaC[t]]] == Inercia * α) /. datosConstantes;
{{fA[t], fB[t], fC[t]}} = {fA[t], fB[t], fC[t]} /. Solve[{ecFu[t], ecMom[t]},
{fA[t], fB[t], fC[t]}}; τA[t] = Dot[palFemA, Flatten[fuerzaA[t]]];
τB[t] = Dot[palFemB, Flatten[fuerzaB[t]]]; τC[t] = Dot[palFemC, Flatten[fuerzaC[t]]],
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal / 100}];
Exp[-Max[Table[{Abs[τA[t]], Abs[τB[t]], Abs[τC[t]]}],
{t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal / 100}]]]
```

Generador de población inicial para el algoritmo genético

```
(*Generador de población inicial*)
tamanoPob =
Abs[IntegerPart[Input["Introduzca el tamaño de la población, el cual, en caso
de no ser par, se ajustará al par inmediato superior."]]];
tamanoPob = tamanoPob + Mod[tamanoPob, 2]; longCromosoma = 14;
probMutacion =
Input["Introduzca la probabilidad de mutación como un porcentaje."] / 100;
pMax = 2.8013; pMin = .35698; bs = 2 ^ longCromosoma - 1;
pendiente = (pMax - pMin) / bs;
Table[enteros[individuo] = Random[Integer, {0, bs}];
genotipo[individuo] = IntegerDigits[enteros[individuo], 2, longCromosoma];
fenotipo[individuo] = SetPrecision[pendiente * enteros[individuo] + pMin, 5],
{individuo, 1, tamanoPob, 1}]; Print["Favor de ejecutar la celda 2"];
```

Algoritmo genético

(*Celda 2*)

```

generacion = 1; totalGen = Input["¿Cuántas generaciones deberá haber?"];

Timing[While[generacion < totalGen + 1, generacion = generacion + 1; monte = Table[
  califInd[individuo] = fObjetivo[fenotipo[individuo]], {individuo, 1, tamanoPob, 1}];
  genotipo[tamanoPob] = genotipo[Part[Flatten[Position[monte, Max[monte]]], 1]];
  genotipo[tamanoPob - 2] = genotipo[tamanoPob];
  monte = Drop[monte, {Part[Flatten[Position[monte, Max[monte]]], 1],
    Part[Flatten[Position[monte, Max[monte]]], 1]};
  genotipo[tamanoPob - 1] = genotipo[Part[Flatten[Position[monte, Max[monte]]], 1]];
  genotipo[tamanoPob - 3] = genotipo[tamanoPob - 1]; califGen = 0; For[individuo = 1,
    individuo <= tamanoPob - 2, individuo++, califGen = califGen + califInd[individuo]];
  Table[aptitud[individuo] = califInd[individuo] / califGen * 100,
    {individuo, 1, tamanoPob - 2, 1}];
  Table[rango[individuo] = aptitud[individuo], {individuo, 1, tamanoPob - 2, 1}];
  Table[rango[individuo] = rango[individuo - 1] + aptitud[individuo],
    {individuo, 2, tamanoPob - 2, 1}]; Table[
    region[individuo] = Interval[{0, rango[individuo]}], {individuo, 1, tamanoPob - 2, 1}];
  Table[region[individuo] = Interval[{rango[individuo - 1], rango[individuo]}],
    {individuo, 2, tamanoPob - 2, 1}]; Table[Catch[electoUno = Random[Real, {0, 100}];
    Do[If[IntervalMemberQ[region[i], electoUno], afortunado[individuo] = i; Throw[i],
      {i, tamanoPob - 2}]], {individuo, 1, tamanoPob - 2, 1}];
  Table[sobreviviente[individuo] = genotipo[afortunado[individuo]],
    {individuo, 1, tamanoPob - 2, 1}];
  Table[patriarca[pareja] = sobreviviente[Random[Integer, {1, tamanoPob - 2}]];
    matrona[pareja] = sobreviviente[Random[Integer, {1, tamanoPob - 2}]],
    {pareja, 1, (tamanoPob - 2) / 2, 1}];
  Table[puntoDeCruce = Random[Integer, {1, longCromosoma}];
    genotipo[2 * pareja - 1] = Join[Take[patriarca[pareja], {1, puntoDeCruce}],
      Take[matrona[pareja], {puntoDeCruce + 1, longCromosoma}]]; genotipo[2 * pareja] =
    Join[Take[matrona[pareja], {1, puntoDeCruce}], Take[patriarca[pareja],
      {puntoDeCruce + 1, longCromosoma}]], {pareja, 1, (tamanoPob - 2) / 2, 1}];
  Table[electoUno = Random[Integer, {1, longCromosoma}]; electoDos =
    Random[Integer, {1, longCromosoma}]; notaProvisional = genotipo[individuo];
  debeMutar = IntervalMemberQ[Interval[{1 - probMutacion, 1}], Random[Real, {0, 1}]];
  If[debeMutar, If[Part[notaProvisional, electoUno] = 1,
    Part[notaProvisional, electoUno] = 0, Part[notaProvisional, electoUno] = 1]];
  debeMutar = IntervalMemberQ[Interval[{1 - probMutacion, 1}], Random[Real, {0, 1}]];
  If[debeMutar, If[Part[notaProvisional, electoDos] = 1,
    Part[notaProvisional, electoDos] = 0, Part[notaProvisional, electoDos] = 1]];
  genotipo[individuo] = notaProvisional, {individuo, 1, tamanoPob - 2, 1}];
  Table[enteros[individuo] = FromDigits[genotipo[individuo], 2];
    fenotipo[individuo] = SetPrecision[pendiente + enteros[individuo] + pMin, 5],
    {individuo, 1, tamanoPob, 1}];]
Table[fenotipo[individuo], {individuo, 1, tamanoPob, 1}]

```

Programa operación óptima

Este programa optimiza simultáneamente el rumbo y la digresión angular

Este programa es muy similar al programa "anatomía óptima"; pero se diferencia de él en que aquí los argumentos de la función objetivo son la digresión angular ξ_m y el rumbo γ .

Funciones definidas por el usuario para posiciones y aceleraciones

```
(*Protocolos de inicio*)

(*Inicialización de directorios*)
If[Directory[] == "C:\\ARCHIVOS DE PROGRAMA\\WOLFRAM RESEARCH\\MATHEMATICA\\5.0",
  SetDirectory["Caminante paralelo"], Directory[]];

(*Cancelación de errores por nombres similares*)

Off[General::"spell", General::"spell1"];

(*Apertura de funciones necesarias*)
<< anguloTresLados
<< posGrado5
<< acelGrado3
<< posGrado6
<< acelGrado4
```

Nótese que se han incorporado las funciones "acelGrado3", función polinomial de tercer grado para la posición lineal del centro de gravedad, y "acelGrado4", función polinomial de cuarto grado para la orientación del endoesqueleto.

Geometría del movimiento

```
(*Solución a los problemas cinemático (posiciones) y cinético inverso*)

xI = -5 / 100; xF = 5 / 100; tiempoTotal = 1;  $\zeta$ I = 0;  $\zeta$ F = 0;
datosConstantes = {L → .30, masa → 1.6, Inercia → .018}; oC = 10  $\sqrt{3}$  / 100;
razonLongitudes = .35698; LongTibia = .26 / (1 + razonLongitudes);
LongFemur = razonLongitudes * LongTibia; fracTiempo = 0.5;
xRumbo = If[t < tiempoTotal / 2, posGrado5[xI, xF, t, tiempoTotal / 2],
  posGrado5[xF, xI, t - tiempoTotal / 2, tiempoTotal / 2]];
acelRumbo = If[t < tiempoTotal / 2, acelGrado3[xI, xF, t, tiempoTotal / 2],
  acelGrado3[xF, xI, t - tiempoTotal / 2, tiempoTotal / 2]];
x = xRumbo * Cos[anguloRumbo]; ax = acelRumbo * Cos[anguloRumbo];
y = xRumbo * Sin[anguloRumbo]; ay = acelRumbo * Sin[anguloRumbo];
 $\zeta$  = If[t < tiempoTotal / 2, posGrado6[ $\zeta$ I,  $\zeta$ M,  $\zeta$ F, t, tiempoTotal / 2, fracTiempo],
  posGrado6[ $\zeta$ F,  $\zeta$ M,  $\zeta$ I, t - tiempoTotal / 2, tiempoTotal / 2, fracTiempo]];
 $\alpha$  = If[t < tiempoTotal / 2, acelGrado4[ $\zeta$ I,  $\zeta$ M,  $\zeta$ F, t, tiempoTotal / 2, fracTiempo],
  acelGrado4[ $\zeta$ F,  $\zeta$ M,  $\zeta$ I, t - tiempoTotal / 2, tiempoTotal / 2, fracTiempo]];
TobilloA = {{x - 0.5773502691896257` L Cos[ $\zeta$ ]}, {y - 0.5773502691896257` L Sin[ $\zeta$ ]}} /.
  datosConstantes;
TobilloB = {{x + 0.28867513459481287` L Cos[ $\zeta$ ] + 0.5` L Sin[ $\zeta$ ]},
  {y - 0.5` L Cos[ $\zeta$ ] + 0.28867513459481287` L Sin[ $\zeta$ ]}} /. datosConstantes;
TobilloC = {{x + 0.28867513459481287` L Cos[ $\zeta$ ] - 0.5` L Sin[ $\zeta$ ]},
  {y + 0.5` L Cos[ $\zeta$ ] + 0.28867513459481287` L Sin[ $\zeta$ ]}} /. datosConstantes;
caderaA = {{-0.28867513459481287` L}, {0.5` L}} /. datosConstantes;
caderaB = {{-0.28867513459481287` L}, {-0.5` L}} /. datosConstantes;
caderaC = {{0.5773502691896257` L}, {0.`}} /. datosConstantes;
palancaA =
  {-0.5773502691896257` L Cos[ $\zeta$ ], -0.5773502691896257` L Sin[ $\zeta$ ]}} /. datosConstantes;
palancaB = {0.16666666666666666` L (1.7320508075688772` Cos[ $\zeta$ ] + 3.` Sin[ $\zeta$ ]),
  0.16666666666666666` L (-3.` Cos[ $\zeta$ ] + 1.7320508075688772` Sin[ $\zeta$ ])} /. datosConstantes;
palancaC = {0.16666666666666666` L (1.7320508075688772` Cos[ $\zeta$ ] - 3.` Sin[ $\zeta$ ]),
  0.16666666666666666` L (3.` Cos[ $\zeta$ ] + 1.7320508075688772` Sin[ $\zeta$ ])} /. datosConstantes;

palFemA = {-LongFemur Sin[ $\theta$ 1a[t] + 2 * Pi / 3], LongFemur Cos[ $\theta$ 1a[t] + 2 * Pi / 3]};
palFemB = {-LongFemur Sin[ $\theta$ 1b[t] + 4 * Pi / 3], LongFemur Cos[ $\theta$ 1b[t] + 4 * Pi / 3]};
palFemC = {-LongFemur Sin[ $\theta$ 1c[t]], LongFemur Cos[ $\theta$ 1c[t]]};
Table[{ankleA[t] = TobilloA, ankleB[t] = TobilloB, ankleC[t] = TobilloC},
  {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal / 100}];
Table[{extA[t] = Norm[ankleA[t] - caderaA]; extB[t] = Norm[ankleB[t] - caderaB];
  extC[t] = Norm[ankleC[t] - caderaC]}, {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal / 100}];
Table[{distTA[t] = Norm[ankleA[t]]; distTB[t] = Norm[ankleB[t]];
  distTC[t] = Norm[ankleC[t]]}, {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal / 100}];
```

Definición de la función objetivo con los argumentos "distorsion" (digresión), y "rumbo".

```
fObjetivo[distorsion_, rumbo_] :=
(Clear[θ1a, θ1b, θ1c, KnieA, KnieB, KnieC, unitTibiaA, unitTibiaB, unitTibiaC,
 fuerzaA, fuerzaB, fuerzaC, ecFu, ecMom, fA, fB, fC, τA, τB, τC]; GM = distorsion;
 anguloRumbo = rumbo; Table[θ1a[t] = Pi - anguloTresLados[oC, extA[t], distTA[t]] -
 anguloTresLados[LongFemur, extA[t], LongTibia];
 θ1b[t] = Pi - anguloTresLados[oC, extB[t], distTB[t]] -
 anguloTresLados[LongFemur, extB[t], LongTibia]; θ1c[t] = Pi - anguloTresLados[
 oC, extC[t], distTC[t]] - anguloTresLados[LongFemur, extC[t], LongTibia],
 {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}]; Table[KnieA[t] = caderaA +
 {(LongFemur * Cos[θ1a[t] + 2 * Pi / 3]}, {LongFemur * Sin[θ1a[t] + 2 * Pi / 3]}]; KnieB[t] =
 caderaB + {(LongFemur * Cos[θ1b[t] + 4 * Pi / 3]}, {LongFemur * Sin[θ1b[t] + 4 * Pi / 3]}];
 KnieC[t] = caderaC + {(LongFemur * Cos[θ1c[t]]}, {LongFemur * Sin[θ1c[t]]},
 {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}];
 Table[unitTibiaA[t] = (ankleA[t] - KnieA[t]) / LongTibia;
 unitTibiaB[t] = (ankleB[t] - KnieB[t]) / LongTibia;
 unitTibiaC[t] = (ankleC[t] - KnieC[t]) / LongTibia,
 {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}];
 Table[fuerzaA[t] = fA[t] * unitTibiaA[t]; fuerzaB[t] = fB[t] * unitTibiaB[t];
 fuerzaC[t] = fC[t] * unitTibiaC[t], {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}]; Table[
 ecFu[t] = (fuerzaA[t] + fuerzaB[t] + fuerzaC[t] = masa * {{ax}, {ay}}) /. datosConstantes;
 ecMom[t] = (Dot[palancaA, Flatten[fuerzaA[t]]] + Dot[palancaB, Flatten[fuerzaB[t]]] +
 Dot[palancaC, Flatten[fuerzaC[t]]] = Inercia * α) /. datosConstantes;
 {{fA[t], fB[t], fC[t]} = {fA[t], fB[t], fC[t]} /. Solve{{ecFu[t], ecMom[t]},
 {fA[t], fB[t], fC[t]}}; τA[t] = Dot[palFemA, Flatten[fuerzaA[t]]];
 τB[t] = Dot[palFemB, Flatten[fuerzaB[t]]]; τC[t] = Dot[palFemC, Flatten[fuerzaC[t]]],
 {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}];
 Exp[-Max[Table[{Abs[τA[t]], Abs[τB[t]], Abs[τC[t]]},
 {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}]]]
```

Algoritmo genético: generador de población inicial

```
(*Generador de población inicial*)
tamanoPob =
  Abs[IntegerPart[Input["Introduzca el tamaño de la población, el cual, en caso
    de no ser par, se ajustará al par inmediato superior."]]];
tamanoPob = tamanoPob + Mod[tamanoPob, 2]; longCromosoma = 18;
semicromosoma = longCromosoma / 2; probMutacion =
  Input["Introduzca la probabilidad de mutación como un porcentaje."] / 100;
pMaxAlfa =  $\pi / 6$ ; pMinAlfa =  $-\frac{\pi}{6}$ ; bsAlfa =  $2^{\text{semicromosoma}} - 1$ ;
pendienteAlfa = (pMaxAlfa - pMinAlfa) / bsAlfa;
Table[enterosAlfa[individuo] = Random[Integer, {0, bsAlfa}]];
gAlfa[individuo] = IntegerDigits[enterosAlfa[individuo], 2, semicromosoma];
fenotipoAlfa[individuo] =
  SetPrecision[pendienteAlfa * enterosAlfa[individuo] + pMinAlfa, 5],
  {individuo, 1, tamanoPob, 1}]; pMaxBeta =  $\pi / 1.5$ ; pMinBeta = 0;
bsBeta =  $2^{\text{semicromosoma}} - 1$ ; pendienteBeta = (pMaxBeta - pMinBeta) / bsBeta;
Table[enterosBeta[individuo] = Random[Integer, {0, bsBeta}]];
gBeta[individuo] = IntegerDigits[enterosBeta[individuo], 2, semicromosoma];
fenotipoBeta[individuo] = SetPrecision[
  pendienteBeta * enterosBeta[individuo] + pMinBeta, 5], {individuo, 1, tamanoPob, 1}];
Table[genotipo[individuo] = Join[gAlfa[individuo], gBeta[individuo]],
  {individuo, 1, tamanoPob, 1}]; Print["Favor de ejecutar la celda 2"];

Favor de ejecutar la celda 2
```

Algoritmo genético modificado para maximizar funciones de 2 variables independientes

(*Celda 2*)

```

generacion = 1; totalGen = Input["¿Cuántas generaciones deberá haber?"];

Timing[While[generacion < totalGen + 1, generacion = generacion + 1;
monte = Table[califInd[individuo] = fObjetivo[fenotipoAlfa[individuo],
fenotipoBeta[individuo]], {individuo, 1, tamañoPob, 1}];
genotipo[tamañoPob] = genotipo[Part[Flatten[Position[monte, Max[monte]]], 1]];
genotipo[tamañoPob - 2] = genotipo[tamañoPob];
monte = Drop[monte, {Part[Flatten[Position[monte, Max[monte]]], 1],
Part[Flatten[Position[monte, Max[monte]]], 1]}];
genotipo[tamañoPob - 1] = genotipo[Part[Flatten[Position[monte, Max[monte]]], 1]];
genotipo[tamañoPob - 3] = genotipo[tamañoPob - 1];
califGen = 0; For[individuo = 1, individuo <= tamañoPob - 2,
individuo++, califGen = califGen + califInd[individuo]];
Table[aptitud[individuo] = califInd[individuo] / califGen * 100,
{individuo, 1, tamañoPob - 2, 1}];
Table[rango[individuo] = aptitud[individuo], {individuo, 1, tamañoPob - 2, 1}];
Table[rango[individuo] = rango[individuo - 1] + aptitud[individuo],
{individuo, 2, tamañoPob - 2, 1}]; Table[
region[individuo] = Interval[{0, rango[individuo]}], {individuo, 1, tamañoPob - 2, 1}];
Table[region[individuo] = Interval[{rango[individuo - 1], rango[individuo]}],
{individuo, 2, tamañoPob - 2, 1}]; Table[Catch[electoUno = Random[Real, {0, 100}];
Do[If[IntervalMemberQ[region[i], electoUno], afortunado[individuo] = i; Throw[i]],
{i, tamañoPob - 2}], {individuo, 1, tamañoPob - 2, 1}];
Table[sobreviviente[individuo] = genotipo[afortunado[individuo]],
{individuo, 1, tamañoPob - 2, 1}];
Table[patriarca[pareja] = sobreviviente[Random[Integer, {1, tamañoPob - 2}]];
matrona[pareja] = sobreviviente[Random[Integer, {1, tamañoPob - 2}]],
{pareja, 1, (tamañoPob - 2) / 2, 1}];
Table[puntoDeCruce = Random[Integer, {1, longCromosoma}];
genotipo[2 * pareja - 1] = Join[Take[patriarca[pareja], {1, puntoDeCruce}],
Take[matrona[pareja], {puntoDeCruce + 1, longCromosoma}]]; genotipo[2 * pareja] =
Join[Take[matrona[pareja], {1, puntoDeCruce}], Take[patriarca[pareja],
{puntoDeCruce + 1, longCromosoma}]], {pareja, 1, (tamañoPob - 2) / 2, 1}];
Table[electoUno = Random[Integer, {1, longCromosoma}]; electoDos =
Random[Integer, {1, longCromosoma}]; notaProvisional = genotipo[individuo];
debeMutar = IntervalMemberQ[Interval[{1 - probMutacion, 1}], Random[Real, {0, 1}]];
If[debeMutar, If[Part[notaProvisional, electoUno] = 1,
Part[notaProvisional, electoUno] = 0, Part[notaProvisional, electoUno] = 1]];
debeMutar = IntervalMemberQ[Interval[{1 - probMutacion, 1}], Random[Real, {0, 1}]];
If[debeMutar, If[Part[notaProvisional, electoDos] = 1,
Part[notaProvisional, electoDos] = 0, Part[notaProvisional, electoDos] = 1]];
genotipo[individuo] = notaProvisional, {individuo, 1, tamañoPob - 2, 1}];
Table[enterosAlfa[individuo] = FromDigits[Take[genotipo[individuo], {1, 9}], 2];

```



```

enterosBeta[individuo] = FromDigits[Take[genotipo[individuo], {10, 18}], 2];
fenotipoAlfa[individuo] = SetPrecision[
  pendienteAlfa * enterosAlfa[individuo] + pMinAlfa, 5]; fenotipoBeta[individuo] =
  SetPrecision[pendienteBeta * enterosBeta[individuo] + pMinBeta, 5],
{individuo, 1, tamanoPob, 1}];}]
Table[{fenotipoAlfa[individuo], fenotipoBeta[individuo]}, {individuo, 1, tamanoPob, 1}]

```

Ejemplo de una corrida con 30 individuos y 100 generaciones

■ Tiempo empleado por el algoritmo genético para obtener la solución

```
{8649.23 Second, Null}
```

■ La siguiente tabla es una lista de los últimos 30 individuos({digresión, rumbo}) probados. El último conjunto es el aristócrata

```

{{0.09939, 0.97137}, {0.0010247, 0.95088}, {0.10349, 0.42626},
{0.09939, 0.95088}, {0.05021, 0.42626}, {0.10349, 0.95088}, {0.033814, 0.95908},
{0.09939, 0.95088}, {0.10759, 0.95088}, {0.11579, 0.95908}, {0.09939, 0.84022},
{0.09939, 0.97137}, {0.11579, 0.95908}, {0.09939, 0.95088}, {0.10759, 0.84022},
{0.09939, 0.95908}, {0.09939, 0.82792}, {0.042011, 0.97137},
{0.11579, 0.96318}, {0.09939, 0.96727}, {0.11579, 2.0001}, {0.09939, 0.95088},
{0.11988, 0.42626}, {0.09939, 0.95088}, {0.09939, 2.0083}, {0.09939, 0.42626},
{0.09939, 0.84022}, {0.09939, 0.95088}, {0.09939, 0.95088}, {0.09939, 0.95088}}

```

He aquí la calificación obtenida por el aristócrata.

```
fObjetivo[0.09939, 0.95088]
```

```
0.847228
```

■ Tabulación de los pares motores para el aristócrata

```
Table[{rA[t], rB[t], rC[t]}, {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}]
```

{(0., 0., 0.), (-0.0195543, 0.0438417, 0.0342912), (-0.0387928, 0.0788617, 0.0604907),
{-0.0573141, 0.105995, 0.0794374}, {-0.0747349, 0.126152, 0.0919296},
{-0.0907433, 0.14018, 0.098716}, {-0.105127, 0.148837, 0.100495},
{-0.117781, 0.15279, 0.0979183}, {-0.1287, 0.15262, 0.0916034},
{-0.137953, 0.148835, 0.0821429}, {-0.145659, 0.141889, 0.0701148},
{-0.151959, 0.132191, 0.0560865}, {-0.156983, 0.120126, 0.0406136},
{-0.160838, 0.106055, 0.0242336}, {-0.163586, 0.0903279, 0.00745622},
{-0.165245, 0.0732794, -0.00924598}, {-0.165785, 0.0552343, -0.0254469},
{-0.165134, 0.0365061, -0.0407729}, {-0.163188, 0.0173971, -0.0549058},
{-0.159827, -0.00180327, -0.0675835}, {-0.154927, -0.0208195, -0.0785981},
{-0.148378, -0.0393929, -0.0877922}, {-0.140097, -0.0572837, -0.0950561},
{-0.130049, -0.0742744, -0.100324}, {-0.118257, -0.0901728, -0.103571},
{-0.104814, -0.104814, -0.104814}, {-0.0898897, -0.11806, -0.104106},
{-0.0737375, -0.129804, -0.101542}, {-0.0566882, -0.139962, -0.0972583},
{-0.0391448, -0.148478, -0.0914292}, {-0.0215681, -0.155312, -0.0842706},
{-0.00445649, -0.160441, -0.0760355}, {0.0116787, -0.16385, -0.0670092},
{0.0263414, -0.165534, -0.0575009}, {0.039081, -0.16549, -0.0478329},
{0.0495201, -0.163722, -0.0383266}, {0.0573794, -0.160241, -0.0292869},
{0.0624954, -0.155069, -0.0209859}, {0.0648315, -0.148248, -0.0136473},
{0.0644809, -0.139847, -0.00743356}, {0.0616623, -0.129968, -0.00243556},
{0.0567106, -0.118752, 0.00133249}, {0.0500635, -0.10638, 0.00393322},
{0.0422457, -0.0930763, 0.00550026}, {0.0338501, -0.0790995, 0.00622556},
{0.025515, -0.0647398, 0.00633848}, {0.0178874, -0.0503128, 0.00607188},
{0.0115473, -0.0361626, 0.00559808}, {0.00681105, -0.0226884, 0.00488003},
{0.00333178, -0.010412, 0.00338181}, {0., 0., 0.}, {0.00333178, -0.010412, 0.00338181},
{0.00681105, -0.0226884, 0.00488003}, {0.0115473, -0.0361626, 0.00559808},
{0.0178874, -0.0503128, 0.00607188}, {0.025515, -0.0647398, 0.00633848},
{0.0338501, -0.0790995, 0.00622556}, {0.0422457, -0.0930763, 0.00550026},
{0.0500635, -0.10638, 0.00393322}, {0.0567106, -0.118752, 0.00133249},
{0.0616623, -0.129968, -0.00243556}, {0.0644809, -0.139847, -0.00743356},
{0.0648315, -0.148248, -0.0136473}, {0.0624954, -0.155069, -0.0209859},
{0.0573794, -0.160241, -0.0292869}, {0.0495201, -0.163722, -0.0383266},
{0.039081, -0.16549, -0.0478329}, {0.0263414, -0.165534, -0.0575009},
{0.0116787, -0.16385, -0.0670092}, {-0.00445649, -0.160441, -0.0760355},
{-0.0215681, -0.155312, -0.0842706}, {-0.0391448, -0.148478, -0.0914292},
{-0.0566882, -0.139962, -0.0972583}, {-0.0737375, -0.129804, -0.101542},
{-0.0898897, -0.11806, -0.104106}, {-0.104814, -0.104814, -0.104814},
{-0.118257, -0.0901728, -0.103571}, {-0.130049, -0.0742744, -0.100324},
{-0.140097, -0.0572837, -0.0950561}, {-0.148378, -0.0393929, -0.0877922},
{-0.154927, -0.0208195, -0.0785981}, {-0.159827, -0.00180327, -0.0675835},
{-0.163188, 0.0173971, -0.0549058}, {-0.165134, 0.0365061, -0.0407729},
{-0.165785, 0.0552343, -0.0254469}, {-0.165245, 0.0732794, -0.00924598},
{-0.163586, 0.0903279, 0.00745622}, {-0.160838, 0.106055, 0.0242336},
{-0.156983, 0.120126, 0.0406136}, {-0.151959, 0.132191, 0.0560865},
{-0.145659, 0.141889, 0.0701148}, {-0.137953, 0.148835, 0.0821429},
{-0.1287, 0.15262, 0.0916034}, {-0.117781, 0.15279, 0.0979183},
{-0.105127, 0.148837, 0.100495}, {-0.0907433, 0.14018, 0.098716},
{-0.0747349, 0.126152, 0.0919296}, {-0.0573141, 0.105995, 0.0794374},
{-0.0387928, 0.0788617, 0.0604907}, {-0.0195543, 0.0438417, 0.0342912}, {0., 0., 0.}}

Par máximo demandado para condiciones óptimas de operación

```
Max[Abs[Table[{rA[t], rB[t], rC[t]}, {t, 0., tiempoTotal, tiempoTotal/100}]]]
```

0.165785

Bibliografía

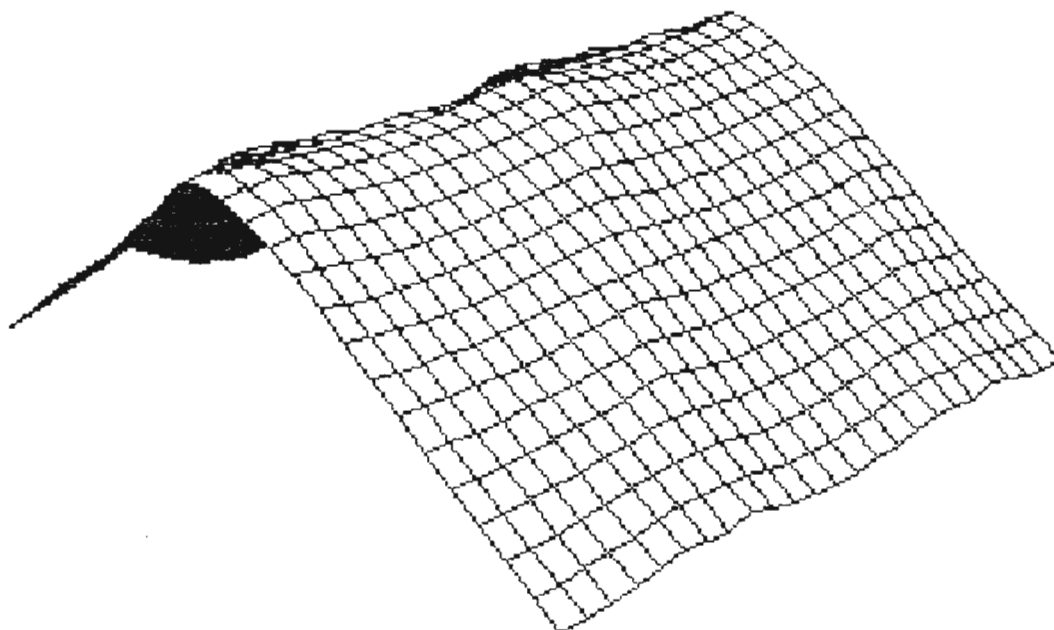
- [1] 2004 SAE Walking Robot Challenge Rules. ©2003 Society of Automotive Engineers, Inc.
- [2] Alici, G; Shirinzadeh, B. , Optimum force balancing of a planar parallel manipulator. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers -- Part C -- Journal of Mechanical Engineering Science, 5/1/2003, Vol. 217 Issue 5, p515, 10p; DOI: 10.1243/095440603765226803; (AN 9840916)
- [3] Alýcý, Gürsel; Bijan Shirinzadeh., Optimum synthesis of planar parallel manipulators based on kinematic isotropy and force balancing. Robotica, Jan2004, Vol. 22 Issue 1, p97, 12p; (AN 11906450)
- [4] Clavel R 1985 Développement d'un Petit Robot très Rapide à 3 Degrés de Liberté. Point en robotique, Tec & Doc Lavoisier, Vol 2 pp25-35.
- [5] Clavel R 1988 DELTA, A Fast Robot with Parallel Geometry. Proc. of the 18th Int. Symposium on Industrial Robots, IFS Publications, pp91-100.
- [6] Dunlop G R and Wong T P 2000 The Delta walker. Proc. 6th International Conference, on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV 2000, ISBN 981-04-3445-6 #083.
- [7] Hay, A. M.; Snyman, J. A. Optimization of a planar tendon-driven parallel manipulator for a maximal dextrous workspace. Engineering Optimization, Apr2005, Vol. 37 Issue 3, p217, 20p
- [8] Luk, B. L., Galt S., Chen S., Using genetic algorithms to establish efficient walking gaits for an eight-legged robot. International Journal of Systems Science, 2001, volume 32, number 6. pages 703-713
- [9] **Rekleitis, Georgios** and **Meyer Nahon**, McGill University, Department of Mechanical Engineering, 817 Sherbrooke Street West, Montreal, Quebec H3A 2K6; **Subir K. Saha**, Indian Institute of Technology Delhi, Department of Mechanical Engineering, Hauz Khas, New Delhi 110 016, INDIA, Inverse kinematics and dynamics analysis of a three legged parallel mechanism actuated by AGVs.
- [10] Stadler, Wolfram, Analytical Robotics and Mechatronics, McGraw-Hill International Editions, Electrical Engineering Series1995, ISBN 0-07-060608-0
- [11] Wang J S Rong S N Zhang B P Guo G and Gruver W A 1993 An omnidirectional dual tripod walking machine: mechanical structure and control Systems, Man and Cybernetics, International Conference on 'Systems Engineering in the Service of Humans', ISBN: 0-7803-0911-1, Vol.5 pp385 –390.
- [12] Williams, Robert L., Shelley, Brett H., Inverse kinematics for planar parallel manipulators. Proceedings of DETC '97, 1997 ASME Design Technical Conferences, September 14-17, 1997, Sacramento, California

[13] Rooney J., and Earl, C. F. Some kinematic structures for Robot Manipulator Designs, Trans. ASME J. of Mechanisms, Transmissions, and Design, 105, 15, 1983

[14] Hervé, J. M., Analyse Structurelle des Mecanismes par Groupes des Deplacements, Mechanism and Machine Theore, Vol, 13, pp. 437-450, 1978

*“What makes the battle worth the fighting?
What makes the mountain worth the climb?
What makes the question worth the asking?
The reason’s worth the rhyme.”*

Los hermanos Sherman



Pensando en:

Ian Fleming,
Albert R. Broccoli,
Dick Van Dyke,
Sally Ann Howes,
los hermanos Sherman,
Irwin Kostal
y todo el equipo de United Artists
quienes me hicieron creer en una maravillosa quimera.