



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL POLINOMIO DE TUTTE PARA GRÁFICAS
DE TAMAÑO MODERADO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS
DE LA COMPUTACIÓN

P R E S E N T A :
RODOLFO CONDE MARTÍNEZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. CRIEL MERINO LÓPEZ

2005



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

m. 346947



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

El polinomio de Tutte para gráficas de tamaño moderado
realizado por Rodolfo Conde Martínez

con número de cuenta 09851393-4 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
Lic. en Ciencias de la Computación

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Criel Merino López

Merino Lopez Criel

Propietario Dr. Jorge Urrutia Galicia

Propietario M. en C. José de Jesus Galaviz Casas

Suplente Dr. Sergio Rajsbaum Gorodezky

Suplente Dra. Marta Gabriela Araujo Pardo

[Handwritten signatures]

Galaviz

Consejo Departamental de Matemáticas

[Handwritten signature]
Dr. Francisco Hernández Quiroz

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

El polinomio de Tutte para gráficas de tamaño moderado

Rodolfo Conde Martínez

13 de agosto de 2005

A la gloria del Señor mi Dios, quién siempre ha guiado mi camino y nunca me abandona.

Para mi Papá, quién siempre me apoya y con paciencia ha esperado este momento.

Para mi Mamá, quién se preocupa por mi y cada día espera a que regrese.

Gracias.

*El principio de la sabiduría es el temor a Jehova;
Los insensatos desprecian la sabiduría y la enseñanza.*

Proverbios 1.7

En Dios siempre hay esperanza.

Agradecimientos

A Dios mi señor primeramente, por guiarme en mi camino durante toda mi vida y ayudarme a lograr mis metas.

A mis padres, me dieron amor, educación y comprensión, a pesar de que muchas veces soy introvertido y no les compartía mis cosas, pero jamas se apartaron de mi lado.

A mis hermanas, Viridiana, Thalía, Perlita y mi pequeño hermano Carlos (ni tanto, ya está en la secundaria) por toda la diversión que tenemos en los días que nos vemos.

A mi novia, Karla Verónica, que se tardo mucho en llegar a mi vida, y tiene conmigo una deuda enorme, con ella me animé para echarle mas ganas y ser un mejor hombre.

A mis hermanos, Miguel (el Mike), Marcos, Carlos (el Greñas), Paco, todos ellos han sido más que mis amigos. Toda la banda de la Facultad, Lorena, Liliana, Vicky (con su ayuda, aprendí \LaTeX de repente, Ja Ja Ja), Pedro, Rene, Gabo, Gerardo, Alan, Nahiely, Jorge, en fin, son demasiados (afortunadamente). Y muchos otros desde la secundaria (Orbelín y compañía) que me dieron siempre buena amistad y hermandad.

A Criel Merino, por la gran paciencia que me tuvo, definitivamente mi habilidad en Teoría de Gráficas ha aumentado con sus consejos, nunca hubiera terminado este trabajo sin su ayuda, además de que mi tesis es justamente lo que yo quería que fuera.

A mis sinodales, por el valioso tiempo que me dedicaron a mi y a esta tesis, sus atenciones, consejos y correcciones.

A José Galaviz, por ser el profesor que es, esas divertidas clases las deben de tenerlas todos los estudiantes de C.C., José sabe verdaderamente lo que es ser computólogo.

A Gabriel Ocampo, siendo su ayudante en Calculo III,IV y Álgebra Lineal I, aprendí mas matemáticas que en toda mi carrera, también aumentó mi visión en esta ciencia tan bonita.

A todos los que forman parte de la Universidad Nacional Autónoma de México, y en especial la Facultad de Ciencias, fue un rato verdaderamente increíble el que viví en este lugar.

A los proyectos CONACyT 37540-A y PAPIIT IN110802 por el apoyo economico recibido durante la realización de esta tesis.

A l proyecto CONACyT 43098-A que también apoyo este trabajo.

A todos les agradezco profundamente lo que han hecho por mi.

Muchas Gracias.

Índice general

Introducción	VII
Índice general	IX
Índice de figuras	XI
1. El Polinomio de Tutte	1
1.1. Definiciones preliminares	1
1.2. La función de rango	7
1.3. Contracción y borrado	8
1.4. Definición del polinomio de Tutte	11
1.4.1. Forma universal del polinomio de Tutte	15
1.4.2. Evaluaciones del polinomio de Tutte	15
1.4.3. Expansión del polinomio de Tutte por árboles generadores	16
1.4.4. Complejidad computacional del polinomio de Tutte	19
2. Cálculo del polinomio de Tutte	23
2.1. 2-Isomorfismo	23
2.1.1. 2-isomorfismo y el polinomio de Tutte	24
2.2. Menores 2-isomorfos, el árbol de expansión y el DDB	25
2.2.1. Algoritmos	30
2.3. Un algoritmo para <i>2ISO</i>	34
2.4. Cotas del espacio	38
2.5. Implementación	44
2.5.1. Marco de trabajo de Teoría de Gráficas	44
2.5.2. Implementación de los algoritmos para el cálculo del polinomio de Tutte	48
2.6. TuLiC	53
3. Aplicaciones	59
3.1. Árboles, orientaciones acíclicas y totalmente cíclicas	59
3.1.1. Árboles	60

3.1.2. Ciclos	61
3.1.3. Gráfica completa K_n	62
3.1.4. Gráficas bipartitas	64
3.1.5. Gráficas de 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 vértices	74
3.2. Una forma más fuerte de la conjetura 3.1.1.	81
Conclusiones	89
A. Polinomios de Tutte	93
Bibliografía	127

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de gráficas.	2
1.2. Gráficas isomorfas.	2
1.3. Trayectorias y ciclos.	3
1.4. Gráfica G con tres componentes conexas	4
1.5. Árboles y bosques.	5
1.6. Corte y ciclo fundamental.	7
1.7. Contracción y borrado en una gráfica.	9
1.8. Actividad interna y externa.	17
2.1. Gráficas 2-isomorfas.	24
2.2. Árbol de expansión de K_4 . Los arcos punteados indican que la arista fue borrada de la gráfica, los arcos sólidos indican que fue contraída.	26
2.3. DDB de K_4	28
2.4. Ordenamiento de K_5 con la <i>propiedad conexa</i>	35
2.5. Menores de K_5 y sus particiones del i -ésimo frente de eliminación.	37
2.6. Menores 2-isomorfos con particiones distintas.	38
2.7. Ordenamiento con la <i>propiedad conexa</i> de una gráfica cualquiera.	43
3.1. Para $f = \{a, c\}$ orientada de a hacia c , existe la trayectoria dirigida t , dada por la orientación totalmente cíclica de K_{n-1}	63
3.2. Orientación totalmente cíclica de una subgráfica de K_4	64
3.3. Vértices u, v y sus orientaciones duales.	65
3.4. La arista $\{a, b\}$ está en un ciclo dirigido en cualquier caso.	66
3.5. Cálculo de $T(K_{2,m+1}; 0, 2)$ por contracción y borrado.	69
3.6. Contéo de orientaciones acíclicas de $K_{2,m}$	70
3.7. Contéo de orientaciones totalmente cíclicas de $K_{3,m}$	71
3.8. Contéo de orientaciones acíclicas de $K_{3,3}$	72

Introducción

El polinomio de Tutte es un ejemplo particular de una tendencia en las matemáticas de intentar llevar los problemas de un área de estudio a otra, como es el caso de la Teoría de Galois (asociar un grupo a una extensión de campo), Topología Algebraica (asociar un grupo a un espacio topológico, como los grupos de homotopía, homología y cohomología) con la idea de que en esta transformación, la nueva teoría cumpla al menos tres propiedades fundamentales:

- Que sea invariante de la teoría original.
- Conserve suficiente información del objeto que se estudia
- Proporcione nuevas forma para estudiar el objeto al que está asociado.

La primera usualmente no es difícil de lograr, la segunda significa muchas veces un intercambio entre que tanta información se conserva y que tan fácil es calcular el invariante; si se conserva mucha información, podría ser muy difícil (si no es que hasta imposible) hacer cálculos prácticos, si es muy sencillo calcularlo, probablemente no contendrá mucha información del objeto original. Para saber si se tiene la tercer propiedad, se necesita trabajar y desarrollar la nueva teoría, es entonces cuando se averigua si se ha encontrado algo útil e interesante, o debe ser desechado y empezar de nuevo. Sin embargo muchos de estos intentos han sido exitosos, como es el caso de los ejemplos mencionados. Con el polinomio de Tutte se consiguen estas tres propiedades.

El polinomio de Tutte de una gráfica contiene mucha información invariante de ella, esto se verá durante el Capítulo 1. Esto implica, según las observaciones anteriores, que calcular el Polinomio de Tutte es difícil en general. Sin embargo el tercer punto mencionado antes hace importante calcularlo y saber más de este invariante algebraico de las gráficas, por lo que mucho esfuerzo se ha puesto en estudiarlo, muestra de ello es el taller sobre el polinomio de Tutte que se lleva a cabo bianualmente en Barcelona España.

En esta obra se presenta este invariante de gráficas, varias de sus propiedades, la complejidad de calcularlo y un algoritmo razonablemente bueno que se conoce para su cálculo en el

caso general. Aún más, este trabajo presenta implementado dicho algoritmo junto con el análisis de su eficiencia y el uso del programa para estudiar, principalmente, una conjetura sobre invariantes en las gráficas. Aquí se obtuvieron resultados tanto teóricos como experimentales.

Aunque se ha intentado dar definiciones formales de los conceptos utilizados, muchas han sido omitidas, para no extender demasiado la obra, el lector interesado en profundizar alguno de estos temas puede consultar la bibliografía. En muchas de las demostraciones, se ha preferido la intuición sobre el formalismo, lo cual es usual en la teoría de gráficas.

En el Capítulo 1 se dan los conceptos necesarios de gráficas para poder introducir al polinomio de Tutte, sus más importantes propiedades y al final se da una pequeña discusión acerca de su complejidad computacional. El Capítulo 2 presenta el concepto no muy común de 2-isomorfismo, el cual es una parte fundamental del algoritmo que apareció por primera vez en [SIT95]. Se hace un análisis del mismo, demostrando su correctez y las cotas de memoria que tiene. Finalmente, se describen las partes más interesantes de la implementación del algoritmo en un programa en el lenguaje Java. En el capítulo 3 se pone a trabajar a este programa, en conjunto con otras herramientas como lo son resultados teóricos, programación en shell y Maple, para intentar atacar varias conjeturas en las cuales están involucradas distintas evaluaciones del polinomio de Tutte, abriendo así un nuevo camino para estudiarlo.

He decidido proporcionar una demostración no rigurosa, sino una demostración tal que aquellos que la examinen no tendrán ninguna duda de que hay una demostración rigurosa.
Christian Huygens (1629-1695).

Capítulo 1

El Polinomio de Tutte

Se da inicio a esta obra presentando algunas definiciones y resultados de la teoría de gráficas, necesarios para definir el polinomio de Tutte, se dan sus propiedades, se calcula el mismo para algunas gráficas y finalmente se discute la complejidad computacional de calcularlo. Muchas de las definiciones y resultados de este capítulo pueden encontrarse en [BR00] y [Bb92].

1.1. Definiciones preliminares

Definición 1.1.1. Una gráfica es un par ordenado $G = (V, E)$ donde $V \neq \emptyset$ es el conjunto de vértices y $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V\}$ se le llama el conjunto de aristas.

Si una arista une un vértice consigo mismo se llama un lazo. Si G tiene mas de una arista que unen dos vértices ó tiene al menos un lazo, se dice que G es una multigráfica. Si para todos $u, v \in V$ existe a lo más una arista entre ellos se dice que G es simple. Dos vértices son adyacentes si existe al menos una arista entre ellos. Si $v \in V$, el grado de v , denotado por $d(v)$ se define como el número de vértices adyacentes a v .

Definición 1.1.2. Sea $G = (V, E)$ una gráfica, H es una subgráfica de G si $H = (V', E')$ es una gráfica y además $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Cuando $V' = V$, se dice que H es subgráfica generadora.

Observación. En la práctica, muchas veces se considera a una gráfica como un conjunto de aristas, como es el caso de una subgráfica generadora.

Notación. Si $G = (V, E)$ y $V' \subseteq V$, $G[V']$ denota a la subgráfica de G en el conjunto V' . Como se menciona en la observación anterior, un subconjunto de aristas denotará una subgráfica generadora de G , por lo cual se hará uso frecuente de la notación de conjuntos entre gráficas. Finalmente, cuando haya lugar a ambigüedad, se denotarán por $E(G)$ y $V(G)$ a E y V respectivamente, para la gráfica G .

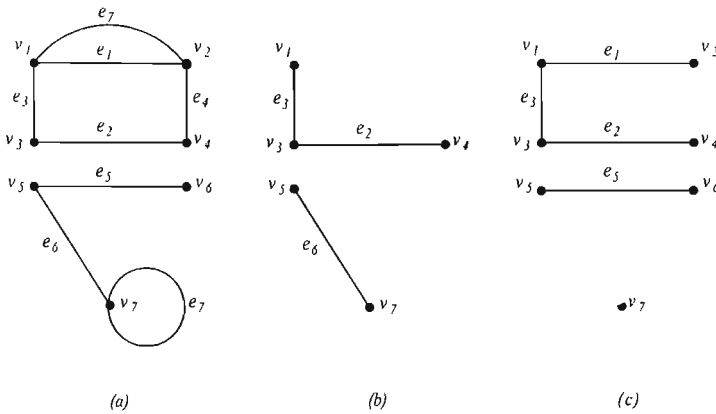


Figura 1.1: Ejemplos de gráficas.

Ejemplos. Sea $E = (\{*\}, \emptyset)$, entonces E es una gráfica. Sea $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\})$ (Figura 1.1 (a)), G es una multigráfica, $d(v_1) = 3, d(v_7) = 3$ (nótese en este caso que, la arista e_7 , siendo un lazo, añade 2 al grado de v_7). $H = (\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7\}, \{e_2, e_3, e_6\})$ es una subgráfica de G (Figura 1.1 (b)) e $I = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \{e_1, e_2, e_3, e_5\})$ es una subgráfica generadora (Figura 1.1 (c)). H e I son gráficas simples.

Definición 1.1.3. Sean $G = (V, E), H = (V', E')$, una función $f : V \rightarrow V'$ es un isomorfismo si f es biyectiva y además cumple que, para todos $v_1, v_2 \in V$, $\{v_1, v_2\} \in E \Leftrightarrow \{f(v_1), f(v_2)\} \in E'$ (es decir, f preserva adyacencias). Cuando existe tal función, se dice que G es isomorfa a H , esto se denota por $G \cong H$.

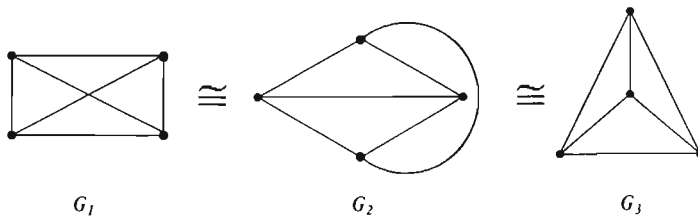


Figura 1.2: Gráficas isomorfas.

Ejemplos. Sea $G = (V, E)$ cualquier gráfica, entonces $G \cong G$, pues $1_V : V \rightarrow V$ es claramente isomorfismo. En la Figura 1.2 se tiene que $G_1 \cong G_2$ y $G_2 \cong G_3$, claramente se pueden

exhibir funciones biyectivas entre los conjuntos de vértices que preservan adyacencias. Nótese también que $G_1 \cong G_3$. Esto es cierto en general.

Proposición 1.1.1. *La relación " \cong " es de equivalencia.*

Así, " \cong " particiona al conjunto de las gráficas en clases de equivalencia, donde en cada clase todas las gráficas son intuitivamente la misma, tan solo con distintos nombres en los vértices y las aristas. Se le hace notar al lector que, de ahora en adelante, cuando se haga referencia a una gráfica G , en realidad se está haciendo referencia a la clase de G en " \cong ".

Definición 1.1.4. *Sea $G = (V, E)$, un camino en G es una sucesión alternada $W : v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_nv_n$ de vértices y aristas que inician y terminan en vértices tales que v_{i-1} y v_i son los extremos de e_i ; v_0 es el origen y v_n es el destino de W ; también se le denota como un $v_0 - v_n$ camino. Si todos los vértices en W son distintos se le llama una trayectoria. Un ciclo es una trayectoria en donde $v_0 = v_n$.*

Ejemplo. En la gráfica de la Figura 1.3, $v_5e_7v_1e_1v_2e_4v_4e_5v_1e_7v_5e_9v_6$ es un camino; $v_6e_8v_1e_1v_2e_2v_3$ es una trayectoria y $v_1e_1v_2e_4v_4e_6v_5e_7v_1$ es un ciclo.

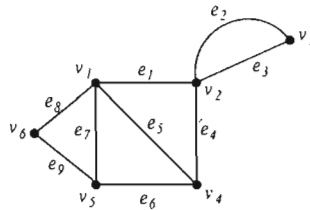


Figura 1.3: Trayectorias y ciclos.

Definición 1.1.5. *Sea $G = (V, E)$ y $u, v \in V$, se dice que u y v están conectados si existe una $u - v$ trayectoria.*

Esta relación es de equivalencia sobre el conjunto de vértices de la gráfica. Si $V_1, V_2, \dots, V_\omega$ son las clases de equivalencia, las subgráficas $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$ se llaman las componentes conexas de G (Véase como ejemplo la Figura 1.4).

Definición 1.1.6. *Sea $G = (V, E)$ y sea $\omega(G)$ el número de componentes de G , se dice que G es conexa si $\omega(G) = 1$; equivalentemente, G es conexa si para todos $v, u \in V$, existe una trayectoria entre ellos.*

Definición 1.1.7. *Sea $G = (V, E)$, se dice que $v \in V$ es un vértice de corte si el número de componentes de la subgráfica $G[V - \{v\}]$ es mayor que el de G . Similarmente $e \in E$ es un puente si al borrarla se incrementa el número de componentes. Una gráfica G con $|V| \geq 3$ es 2-conexa si es conexa y no contiene vértices de corte.*

Ejemplo. La gráfica de la Figura 1.2 es 2-conexa.

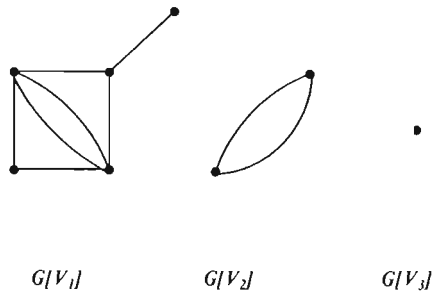


Figura 1.4: Gráfica G con tres componentes conexas

Gráficas especiales.

Existen algunas familias de gráficas que se caracterizan por ciertas propiedades muy particulares, a continuación se describen las que son mencionadas a lo largo de esta obra.

- La gráfica $E_n = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \emptyset)$ se le llama la gráfica vacía de n vértices.
- La gráfica simple con n vértices y $\binom{n-1}{2}$ aristas se llama la gráfica completa K_n . Aquí se tiene que todos par de vértices está unido por una arista.
- Una trayectoria de n vértices se denota por P_n , el ciclo se le llama C_n .
- La retícula rectangular de $n \times m$ vértices y $2nm - (n + m)$ aristas se denota por $L_{n,m} = (U, R)$ donde $U = \{(i, j) \mid 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$ y $\{(i, j), (i', j')\} \in R \Leftrightarrow |i - i'| + |j - j'| = 1$. En particular, si $n = m$ se le llama la retícula cuadrada $L_{n,n}$.
- Una gráfica $G = (V, E)$ es m -partita si existe una partición V_1, V_2, \dots, V_m de V tal que ninguna de las aristas de G une dos vértices en la misma clase. Si $n_1 = |V_1|, n_2 = |V_2|, \dots, n_m = |V_m|$, entonces la gráfica m -partita completa (es decir, tiene todas las aristas posibles uniendo vértices en diferentes clases) se denota por K_{n_1, n_2, \dots, n_m} . En particular si $m = 2$ se dice que G es bipartita y $K_{p,q}$ es la gráfica bipartita completa.

Definición 1.1.8. Sea $G = (V, E)$, se dice que G es un árbol si es conexa y no contiene ciclos. G es un bosque si no tiene ciclos.

Ejemplos. Considérense las gráficas F, T de la Figura 1.5, F es un bosque pues no contiene ciclos. T es un árbol pues no tiene ciclos y es conexa. Nótese que cada componente conexa de F es un árbol, por lo tanto, un bosque se puede definir como una gráfica en la cual cada componente conexa es un árbol.

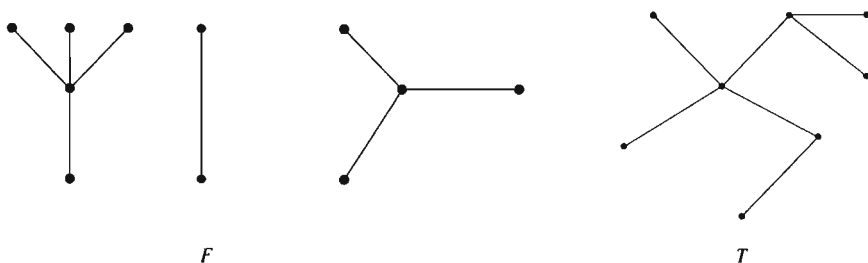


Figura 1.5: Árboles y bosques.

Proposición 1.1.2. *Toda gráfica conexa contiene un árbol generador. Más aún, toda gráfica contiene un bosque generador de tamaño máximo.*

Demostración. Sea G conexa. Tómesese T una subgráfica generadora y conexa de G mínima (vista como conjunto de aristas). Por la elección de T , $T - e$ no es conexa para toda arista e de T [Bb92]. Por lo tanto T es un árbol.

Si G es conexa entonces por lo anterior contiene un árbol generador que en particular es un bosque generador. Si G no es conexa tómesese un árbol generador en cada componente conexa de G . Esto define un bosque generador y además es máximo con esta propiedad. Esto prueba la proposición. \square

Proposición 1.1.3. *Si T es un árbol en n vértices, entonces tiene $n - 1$ aristas. Si F es un bosque en n vértices, entonces tiene $n - \omega(F)$ aristas.*

Demostración. Por inducción en n . Sea T un árbol y sea $n = |V|$. Si $n = 1$, entonces T tiene $0 = 1 - 1 = n - 1$ aristas. Supóngase que un árbol con $n \geq 1$ vértices tiene $n - 1$ aristas. Si T tiene $n + 1$ vértices, tiene al menos un vértice que es hoja. Si se quita este vértice se borra exactamente una arista de T , la gráfica resultante es un árbol y tiene n vértices, por hipótesis de inducción tiene $n - 1$ aristas. Vuélvase a colocar el vértice hoja con la correspondiente arista y entonces T tiene $n + 1$ vértices y $n - 1 + 1 = (n + 1) - 1$ aristas.

Sea F un bosque con n vértices. Sean F_1, F_2, \dots, F_k las componentes conexas de F y n_i el número de vértices de F_i . Como cada F_i es un árbol entonces tiene $n_i - 1$ aristas. Sumando se obtiene el resultado. \square

Definición 1.1.9. *Sea $G = (V, E)$, un corte C^* por aristas de G es un subconjunto de E tal que el número de componentes conexas de la subgráfica en $E - C^*$ es mayor que el de G . Un corte mínimo es un subconjunto de aristas mínimo con la propiedad de ser corte por aristas.*

Ahora se probara que, dado un árbol generador de una gráfica, existe un ciclo que es inducido por este y una arista que no pertenece a el, así como la proposición dual que corresponde a la existencia de un corte mínimo. Para hacer esto se necesitan los siguientes resultados que en realidad también son duales, no se da aquí su demostración, para esto el lector interesado puede consultar [Ox92].

Proposición 1.1.4. *Sea $G = (V, E)$, si C_1, C_2 son ciclos distintos de G y e es una arista tal que $e \in E(C_1) \cap E(C_2)$, entonces existe un ciclo $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2$ que no contiene a e .*

Proposición 1.1.5 (Dual de la Proposición 1.1.4). *Sea $G = (V, E)$, si C_1^*, C_2^* son cortes mínimos distintos de G con una arista $e \in C_1^* \cap C_2^*$, entonces existe un corte mínimo $C_3^* \subseteq C_1^* \cup C_2^*$ que no contiene a e .*

Proposición 1.1.6. *Sea $G = (V, E)$ conexa, T un árbol generador de G y $e \notin E(T)$. Entonces $T \cup e$ contiene un único ciclo C de G .*

Demostración. Sea T un árbol generador de G . Entonces $T \cup e$ contiene un ciclo C . Supóngase que existe C' otro ciclo en $T \cup e$. Por ser T árbol, no tiene ciclos, así que necesariamente $e \in C'$ y además $e \in C$. Por la Proposición 1.1.4, existe $C'' \subseteq C \cup C'$ que no contiene a e , con lo que C'' esta contenido en T , lo cual es una contradicción, por lo tanto, C es único. \square

Definición 1.1.10. *Dado T un árbol generador de G y $e \notin E(T)$, se denota por $C_{e,T}$ al único ciclo en $T \cup e$ y se le llama el ciclo fundamental inducido por e en T .*

Proposición 1.1.7 (Dual de la Proposición 1.1.6). *Sea $G = (V, E)$ conexa, T un árbol generador de G y $e \in E(T)$. Entonces el conjunto $E(G) - E(T) \cup \{e\}$ contiene un único corte mínimo C^* de G .*

Demostración. Sea T un árbol generador de G . El conjunto $E(G) - E(T)$ no es un corte de G , pues la subgráfica que queda contiene un árbol generador, sin embargo, al quitar también la arista e , G se desconecta en exactamente dos componentes, por lo tanto, en $E(G) - E(T) \cup \{e\}$ existe un corte mínimo C^* , además, por lo dicho, $e \in C^*$. Supóngase que D_1^* es otro corte mínimo, entonces de la misma manera, $e \in D_1^*$, por la Proposición 1.1.5, existe $D_2^* \subseteq D_1^* \cup C^*$ que no contiene a e , pero esto implica que $D_2^* \subseteq E(G) - E(T)$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, C^* es único. \square

Definición 1.1.11 (Dual de la Definición 1.1.10). *Dado T un árbol generador de G y $e \in E(T)$, se denota por $C_{e,T}^*$ al único corte mínimo en $E(G) - E(T) \cup \{e\}$ y se le llama el corte fundamental inducido por e en T .*

Ejemplos. Sea G la gráfica dada en la Figura 1.6 (a), T el árbol generador dado en (b), las aristas punteadas son el corte fundamental en $E(G) - E(T) \cup \{e_i\}$ (Figura 1.6 (c)) y en $T \cup \{e_j\}$ el ciclo fundamental (Figura 1.6 (d)) inducidos en T por e_i y e_j respectivamente.

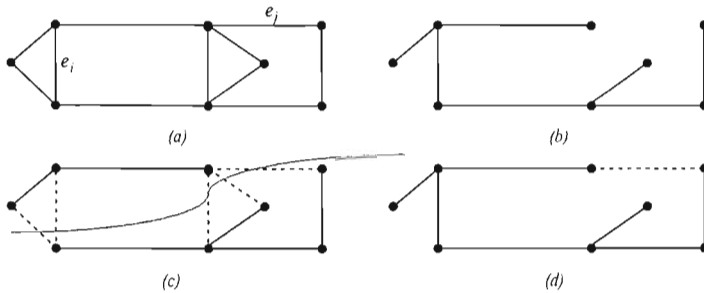


Figura 1.6: Corte y ciclo fundamental.

1.2. La función de rango

Se introduce el concepto de rango de una gráfica, el cual servirá después para definir el polinomio de Tutte.

Definición 1.2.1. Sea $G = (V, E)$ y $A \subseteq E$ subgráfica generadora. La función de rango $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$, esta dada por $r(A) = |V| - \omega(A)$.

Claramente, si $G \cong H$, entonces tienen el mismo rango, así como sus subgráficas, por lo que r es un invariante algebraico.

Ejemplos. Sean G la gráfica de la Figura 1.1 (a), e I la subgráfica generadora de G (Figura 1.1 (c)). Entonces $r(G) = 7 - 2 = 5, r(I) = 7 - 3 = 4$. Nótese que I es un bosque generador de G y $|E(I)| = 4 = r(I)$.

Sea $H = (V, E)$ cualquier gráfica con $E \neq \emptyset$, sea $e \in E$. Si e es lazo entonces $r(\{e\}) = |V| - \omega(\{e\}) = |V| - |V| = 0$, pues e conecta un vértice consigo mismo. Si e no es lazo, conecta a dos vértices distintos y $r(\{e\}) = |V| - (|V| - 1) = 1$.

Observación. Dado $H \subseteq E$, $r(H)$ es igual al número de aristas de un bosque generador contenido en H de tamaño máximo (Usando la Proposición 1.1.3).

Notación. Cuando haya lugar a ambigüedad, se denotará el rango de H en G por $r_G(H)$.

Proposición 1.2.1. Sea $G = (V, E)$, la función de rango cumple las siguientes propiedades:

- R1** Para cada subgráfica generadora H de G se tiene $0 \leq r(H) \leq |E(H)|$.
- R2** Si H_1, H_2 son subgráficas generadoras de G tales que $E(H_1) \subseteq E(H_2)$, entonces $r(H_1) \leq r(H_2)$.
- R3** Si H_1, H_2 son subgráficas generadoras de G , entonces $r(H_1 \cap H_2) + r(H_1 \cup H_2) \leq r(H_1) + r(H_2)$.

Demostración. R1. Claramente el número de componentes conexas de G no puede exceder el de los vértices, así que $0 \leq r(H)$. Como $r(H)$ es igual al número de aristas de un bosque generador máximo contenido en H , no puede ser más grande que $|E(H)|$, por lo tanto $r(H) \leq |E(H)|$.

R2. Sean H_1, H_2 subgráficas generadoras de G tales que $E(H_1) \subseteq E(H_2)$, por lo tanto $\omega(H_2) \leq \omega(H_1)$ pues H_1 tiene a lo más tantas aristas como H_2 . Entonces $r(H_1) = |V| - \omega(H_1) \leq |V| - \omega(H_2) = r(H_2)$.

R3. Sean H_1, H_2 subgráficas generadoras de G . Sea I_\cap un bosque generador de tamaño máximo contenido en $H_1 \cap H_2$. Por la observación, $|I_\cap| = r(H_1 \cap H_2)$. Como $H_1 \cap H_2 \subseteq H_1 \cup H_2$, podemos extender I_\cap a un bosque generador I_\cup de tamaño máximo en $H_1 \cup H_2$, entonces $|I_\cup| = r(H_1 \cup H_2)$.

Pero $H_1 \cap I_\cup$ es un bosque generador contenido en H_1 , por lo que $r(H_1) \geq |H_1 \cap I_\cup|$, similarmente para H_2 , $r(H_2) \geq |H_2 \cap I_\cup|$.

$$\begin{aligned}
 \therefore r(H_1) + r(H_2) &\geq |H_1 \cap I_\cup| + |H_2 \cap I_\cup| \\
 &= |(H_1 \cap I_\cup) \cup (H_2 \cap I_\cup)| + |H_1 \cap I_\cup \cap H_2 \cap I_\cup| \\
 &= |(H_1 \cup H_2) \cap I_\cup| + |H_1 \cap H_2 \cap I_\cup| \\
 &= |I_\cup| + |I_\cap| \\
 &= r(H_1 \cup H_2) + r(H_1 \cap H_2)
 \end{aligned}$$

□

1.3. Contracción y borrado

Se introducen dos operaciones fundamentales para estudiar el polinomio de Tutte: contracción y borrado de aristas. Estas están íntimamente involucradas en el proceso de calcularlo.

Definición 1.3.1 (Borrado). Sea $G = (V, E)$ y $e \in E$, se define la gráfica $G \setminus e = (V, E - \{e\})$.

Definición 1.3.2 (Contracción). Sea $G = (V, E)$ y $e = \{a, b\} \in E$, se define $G/e = (V', E')$ donde si e no es lazo, entonces $V' = V - \{a, b\} \cup \{\overline{ab}\}$ y E' se construye a partir de $E - \{e\}$ de la siguiente forma, sea $f \in E - \{e\}$:

1. Si $f = \{c, d\}$ y $c, d \notin \{a, b\}$, entonces se añade f a E' .
2. Si $f = \{a, c\}$ ó $f = \{b, c\}$ y $c \notin \{a, b\}$, entonces se añade $\{\overline{ab}, c\}$ a E' .
3. Si $f = \{a, b\}$ pero $f \neq e$, entonces se añade $\{\overline{ab}, \overline{ab}\}$ a E' .
4. Si f es un lazo en a ó en b , entonces se añade $\{\overline{ab}, \overline{ab}\}$ a E' .

Si e es lazo, entonces $G/e = G \setminus e$.

El borrado de una arista es simplemente quitarla de la gráfica, la contracción, aunque su definición es un poco complicada, es tan solo identificar los vértices de la arista en uno.

Ejemplos. Obsérvese la gráfica G de la Figura 1.7, f es contraída y e borrada, los vértices u, v se identifican en \overline{uv} y e se quita del conjunto de aristas. De la figura es claro que $G/f \setminus e \cong G \setminus e/f$ usando $1_{V - \{u,v\} \cup \{\overline{uv}\}}$ como isomorfismo. La siguiente proposición muestra que esto siempre pasa.

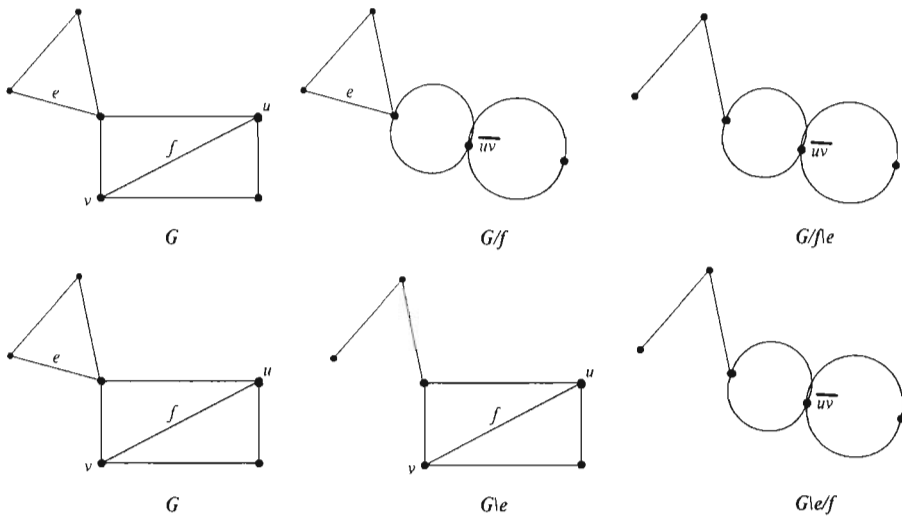


Figura 1.7: Contracción y borrado en una gráfica.

Proposición 1.3.1. Sea $G = (V, E)$ y $e, f \in E$, tal que $e \neq f$, entonces:

- i) $G \setminus e \setminus f \cong G \setminus f \setminus e$.
- ii) $G/e \setminus f \cong G \setminus f/e$.
- iii) $G/e \setminus f \cong G \setminus f/e$.

Demostración. Todas son fáciles de verificar usando la identidad como isomorfismo, téngase en cuenta que los vértices deben ser etiquetados consistentemente. □

Este resultado muestra la conmutatividad del borrado y la contracción. Si $G = (V, E)$ y $X, Y \subseteq E$ con $X \cap Y = \emptyset$, donde $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $Y = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$. Por la proposición anterior se pueden definir $G \setminus X = G \setminus e_1 \setminus e_2 \setminus \dots \setminus e_n$, $G/Y = G/f_1/f_2/\dots/f_m$ y $G \setminus X/Y = G \setminus e_1 \setminus e_2 \setminus \dots \setminus e_n / f_1 / f_2 / \dots / f_m$.

Definición 1.3.3. Sean $G = (V, E)$ y H gráficas. Se dice que H es menor de G si existen $X, Y \subseteq E$, $X \cap Y = \emptyset$, tal que $H \cong G \setminus X/Y$. Además, si X ó Y es no vacío, H es un menor propio de G .

Ejemplos. En la Figura 1.7, G es menor de si misma, G/f , $G \setminus e$, $G/e \setminus f$ y $G \setminus f/e$ son menores propios de G .

Observación. Aunque G sea una gráfica simple, sus menores pueden no serlo.

Notación. Se denotará a $G \setminus e$ por G' y a G/e por G'' .

El último resultado de esta sección muestra la relación entre el rango de una gráfica y el de sus menores.

Proposición 1.3.2. Sea $G = (V, E)$ y $X \subseteq E$, $A \subseteq E - X$, entonces:

$$i) r_{G \setminus X}(A) = r_G(A).$$

$$ii) r_{G/X}(A) = r_G(A \cup X) - r_G(X).$$

Demostración. i) Como $A \subseteq E - X$, en G , F es un bosque generador máximo contenido en A si y sólo si en $G \setminus X$, F es un bosque máximo contenido en A . Por lo tanto $r_{G \setminus X}(A) = |E(F)| = r_G(A)$.

ii) Por inducción sobre $|X|$. Si $|X| = 1$, sea $X = \{e\}$. Supóngase que e es lazo, entonces $r_{G/X}(A) = r_G(A \cup X)$ pues e no afecta al número de componentes conexas de A , además $r_G(X) = r_G(\{e\}) = 0$, Por lo tanto $r_{G/X}(A) = r_G(A \cup X) - 0 = r_G(A \cup X) - r_G(X)$. Supóngase que e no es lazo. Considérese a $A \cup \{e\}$ en G . Extiéndase e a un bosque F de tamaño máximo contenido en $A \cup \{e\}$. Claramente F/e es un bosque de tamaño máximo contenido en A en G/e . Por lo tanto $r_{G/X}(A) = |F| - 1 = r_G(A \cup \{e\}) - r_G(\{e\})$.

Supóngase que para $|X| \leq k$, $r_{G/X}(A) = r_G(A \cup X) - r_G(X)$. Sea $Y \subseteq E$ tal que $|Y| = k + 1$, sin pérdida de generalidad supóngase que $Y = X \cup \{e\}$ con $|X| = k$. Entonces,

$$\begin{aligned} r_{G/Y}(A) &= r_{G/X/e}(A) \\ &= r_{G/X}(A \cup \{e\}) - r_{G/X}(\{e\}) \\ &= r_G(A \cup \{e\} \cup X) - r_G(X) - (r_G(\{e\} \cup X) - r_G(X)) \\ &= r_G(A \cup Y) - r_G(Y). \end{aligned}$$

□

1.4. Definición del polinomio de Tutte

A través de la historia de la Teoría de Gráficas, se han definido muchos invariantes de estas, en particular, muchos de estos son distintos polinomios, incluyendo el polinomio cromático, el polinomio característico (éste, viene de los espacios vectoriales asociados a la gráfica) y muchos otros. El objetivo principal de esta obra, es estudiar un polinomio que contiene más información de la gráfica que estos invariantes. Este polinomio fue construido por W.T. Tutte en 1954. Tutte lo llamo el polinomio dicromático.

Primero se define el polinomio de Tutte y se dan algunas de sus propiedades elementales, se presenta un polinomio universal que es obtenido a partir de este. Después se demuestra que las evaluaciones en ciertos puntos del plano del polinomio de Tutte cuentan ciertas estructuras asociadas con la gráfica y, finalmente, se da una propiedad fundamental del polinomio de Tutte, que es su expansión en términos de los árboles generadores de la gráfica.

Hay muchas formas de definir al polinomio de Tutte, se hará usando al polinomio generador de rango.

Definición 1.4.1. Sea $G = (V, E)$, entonces

i) Para $A \subseteq E$, se define la nulidad de A , $n : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$ como $n(A) = |A| - r(A)$.

ii) El polinomio generador de rango de G es

$$S(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} x^{r(E)-r(A)} y^{n(A)}.$$

Es claro que $S(G; x, y)$ es un polinomio en el anillo $\mathbb{Z}[x, y]$ para toda G . El siguiente teorema muestra sus propiedades básicas, pero antes se necesitan algunos resultados técnicos. En adelante se denotará al rango en $G \setminus e$ por r' , en G/e por r'' , análogamente para la nulidad.

Lema 1.4.1. Sea $G = (V, E)$, $e \in E$ y $A \subseteq E - \{e\}$, entonces

i) $r(E) - r(A \cup \{e\}) = r''(E - \{e\}) - r''(A) = r''(E(G'')) - r''(A)$

ii) $r(E) = \begin{cases} r'(E - \{e\}) + 1 & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ r'(E - \{e\}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$

iii) $n(A \cup \{e\}) = \begin{cases} n''(A) + 1 & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ n''(A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Demostración. i) Por hipótesis, $A \subseteq E - \{e\}$, por la Proposición 1.3.2, $r''(A) = r(A \cup \{e\}) - r(\{e\})$. Multiplicando por -1 y sumando $r(E)$ se obtiene:

$$r(E) - r''(A) = r(E) - r(A \cup \{e\}) + r(\{e\}).$$

Por lo que,

$$r(E) - r(A \cup \{e\}) = r(E) - r''(A) - r(\{e\}).$$

Pero $r''(E - \{e\}) = r((E - \{e\}) \cup \{e\}) - r(\{e\}) = r(E) - r(\{e\})$. Además, $r''(E - \{e\}) = r''(E(G''))$, con lo cual,

$$r(E) - r(A \cup \{e\}) = r''(E - \{e\}) - r''(A) = r''(E(G'')) - r''(A).$$

ii) Si e es puente, entonces $r(E) = r(E - \{e\}) + 1$. En otro caso, $r(E) = r(E - \{e\})$, pues e debe estar dentro de alguna componente conexa de G , el resultado se sigue de la Proposición 1.3.2.

iii) Como $A \subseteq E - \{e\}$, usando de nuevo la Proposición 1.3.2, $r(A \cup \{e\}) = r''(A) + r(\{e\})$ y de aquí se tiene que,

$$r(A \cup \{e\}) = \begin{cases} r''(A) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ r''(A) + 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, si e es lazo, $n(A \cup \{e\}) = |A \cup \{e\}| - r(A \cup \{e\}) = |A| + 1 - r''(A) = n''(A) + 1$. En otro caso, $n(A \cup \{e\}) = |A \cup \{e\}| - r(A \cup \{e\}) = |A| + 1 - (r''(A) + 1) = n''(A)$. □

Ahora se prueban las propiedades del polinomio generador de rango, este resultado es muy bien conocido. La demostración que se da fue tomada de [Bb92].

Teorema 1.4.1. Sea $G = (V, E)$ y $e \in E$. Entonces

$$S(G; x, y) = \begin{cases} (x+1)S(G/e; x, y) & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ (y+1)S(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ S(G \setminus e; x, y) + S(G/e; x, y) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Más aún, $S(E_n; x, y) = 1$ para toda $n \geq 1$.

Demstración. Sea G una gráfica y sea $e \in E$. Considérese a $S(G; x, y)$ como sigue:

$$S(G; x, y) = S_0(G; x, y) + S_1(G; x, y),$$

donde

$$S_0(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E, e \notin A} x^{r(E)-r(A)} y^{n(A)} = \sum_{A \subseteq E - \{e\}} x^{r(E)-r(A)} y^{n(A)}$$

y

$$S_1(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E, e \in A} x^{r(E)-r(A)} y^{n(A)} = \sum_{A \subseteq E - \{e\}} x^{r(E)-r(A \cup \{e\})} y^{n(A \cup \{e\})}.$$

Recuérdese que los conjuntos $E - \{e\}$, $E(G')$ y $E(G'')$ están identificados de manera natural, así que, por lo anterior y el Lema 1.4.1,

$$\begin{aligned} S_0(G; x, y) &= \sum_{A \subseteq E - \{e\}} x^{r(E)-r(A)} y^{n(A)} \\ &= \begin{cases} \sum_{A \subseteq E(G')} x^{r'(E-\{e\})+1-r'(A)} y^{n'(A)} & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ \sum_{A \subseteq E(G')} x^{r'(E-\{e\})-r'(A)} y^{n'(A)} & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} xS(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ S(G \setminus e; x, y) & \text{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S_1(G; x, y) &= \sum_{A \subseteq E - \{e\}} x^{r(E)-r(A \cup \{e\})} y^{n(A \cup \{e\})} \\ &= \begin{cases} \sum_{A \subseteq E(G'')} x^{r''(E(G''))-r''(A)} y^{n''(A)+1} & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ \sum_{A \subseteq E(G'')} x^{r''(E(G''))-r''(A)} y^{n''(A)} & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} yS(G/e; x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ S(G/e; x, y) & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Así, el resultado se obtiene al sumar las expresiones de S_0 y S_1 , y el hecho que si e es un lazo ó un puente, $S(G \setminus e; x, y) = S(G/e; x, y)$, pues las funciones de rango son iguales. Finalmente,

$$S(E_n; x, y) = \sum_{A \subseteq \emptyset} x^{r(E)-r(A)} y^{n(A)} = x^{r(\emptyset)-r(\emptyset)} y^{n(\emptyset)} = x^0 y^0 = 1. \quad \square$$

Teniendo el polinomio generador de rango, es muy sencillo definir, en función de éste, el polinomio de Tutte.

Definición 1.4.2. Sea $G = (V, E)$, el polinomio de Tutte de G está definido por

$$T(G; x, y) = S(G; x - 1, y - 1) = \sum_{A \subseteq E} (x - 1)^{r(E) - r(A)} (y - 1)^{n(A)}.$$

Ejemplos. Usando la definición, se calcularán $T(E_1; x, y)$, $T(K_2; x, y)$, y $T(L; x, y)$, donde $L = (\{*\}, \{\{*, *\}\})$ (la gráfica lazo).

Por el Teorema 1.4.1, $T(E_1; x, y) = S(E_1; x - 1, y - 1) = 1$.

Supóngase que $K_2 = (\{v, u\}, \{\{u, v\}\})$. Aplicando la definición 1.4.2,

$$\begin{aligned} T(K_2; x, y) &= \sum_{A \subseteq \{\{u, v\}\}} (x - 1)^{r(\{\{u, v\}\}) - r(A)} (y - 1)^{n(A)} \\ &= (x - 1)^{r(\{\{u, v\}\}) - r(\{\{u, v\}\})} (y - 1)^{n(\{\{u, v\}\})} + \\ &\quad (x - 1)^{r(\{\{u, v\}\}) - r(\emptyset)} (y - 1)^{n(\emptyset)} \\ &= 1 + (x - 1) \\ &= x. \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} T(L; x, y) &= \sum_{A \subseteq \{\{*, *\}\}} (x - 1)^{r(\{\{*, *\}\}) - r(A)} (y - 1)^{n(A)} \\ &= (x - 1)^{r(\{\{*, *\}\}) - r(\{\{*, *\}\})} (y - 1)^{n(\{\{*, *\}\})} + \\ &\quad (x - 1)^{r(\{\{*, *\}\}) - r(\emptyset)} (y - 1)^{n(\emptyset)} \\ &= (y - 1) + 1 \\ &= y. \end{aligned}$$

Observación. Por el Teorema 1.4.1, es inmediato que T cumple las siguientes propiedades:

$$T(G; x, y) = \begin{cases} xT(G/e; x, y) & \text{si } e \text{ es puente,} \\ yT(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ es lazo,} \\ T(G \setminus e; x, y) + T(G/e; x, y) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, $T(E_n; x, y) = 1$.

La fórmula dada en la observación es de suma importancia, es la base para el algoritmo que se da en el Capítulo 2, para construir un programa que calcule el polinomio de Tutte.

Del ejemplo y la observación anteriores, se pueden obtener de manera sencilla otras propiedades de T :

- i) Si G es tal que el conjunto de aristas consta de p puentes y l lazos, entonces $T(G; x, y) = x^p y^l$.
- ii) Si G se obtiene al agregar p puentes y l lazos a una gráfica H , entonces $T(G; x, y) = x^p y^l T(H; x, y)$.
- iii) Si G no tiene puentes ni lazos, por la fórmula de la observación se tiene que $T(G; x, y) = T(G \setminus e; x, y) + T(G/e; x, y)$ para $e \in E$.

De hecho, es posible demostrar que T es la única función en la clase de multigráficas con estas propiedades.

1.4.1. Forma universal del polinomio de Tutte

Existe una generalización del polinomio de Tutte, la cual es un polinomio de cinco variables, no se demuestra este resultado, pero se enuncia, pues es una de las más importantes propiedades del polinomio de Tutte. Teniendo esta forma universal, es posible demostrar que otros polinomios asociados a la gráfica, son en realidad evaluaciones del polinomio de Tutte bajo ciertos cambios de variables. Este resultado se debe a Oxley y Welsh, para una demostración puede consultarse [Bb92].

Teorema 1.4.2. *Sea \mathcal{G} la clase de multigráficas finitas. Entonces existe una única función $U : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{Z}[x, y, \alpha, \sigma, \tau]$ tal que*

$$U(E_n) = U(E_n; x, y, \alpha, \sigma, \tau) = \alpha^n$$

para toda $n \geq 1$. Si $G = (V, E)$ y $e \in E$:

$$U(G) = \begin{cases} xU(G \setminus e) & \text{si } e \text{ es puente,} \\ yU(G \setminus e) & \text{si } e \text{ es lazo,} \\ \sigma U(G \setminus e) + \tau U(G/e) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Más aún,

$$U(G) = \alpha^{\omega(E)} \sigma^{n(E)} \tau^{r(E)} T(G; \alpha x/\tau, y/\sigma).$$

El polinomio del Teorema 1.4.2 se conoce como el *Polinomio Universal* de las gráficas.

1.4.2. Evaluaciones del polinomio de Tutte

Como se ha mencionado, el polinomio de Tutte conserva mucha información de una gráfica G , así como bajo sustituciones adecuadas se obtienen otros polinomios. Primero se vera que si $x, y \in \{1, 2\}$, entonces $T(G; x, y)$ cuenta el número total de ciertas subgráficas de G .

Teorema 1.4.3. *Sea $G = (V, E)$ conexa. Entonces $T(G; 1, 1)$ es el número de árboles generadores de G , $T(G; 2, 1)$ es el número de bosques generadores de G , $T(G; 1, 2)$ es el número de subgráficas generadoras conexas, y $T(G; 2, 2)$ es el número de subgráficas generadoras.*

Demostración. Sea G conexa, cada una de las afirmaciones es inmediata de la definición de T . Así,

$$\begin{aligned} T(G; 1, 1) &= \sum_{A \subseteq E} 0^{r(E)-r(A)} 0^{n(A)} \\ &= |\{A \mid A \subseteq E, r(A) = r(E) \text{ y } n(A) = 0\}|. \end{aligned}$$

Y $A \subseteq E$ es un árbol generador si y sólo si $r(A) = r(E)$ y $n(A) = 0$. Similarmente,

$$\begin{aligned} T(G; 2, 1) &= \sum_{A \subseteq E} 1^{r(E)-r(A)} 0^{n(A)} \\ &= |\{A \mid A \subseteq E \text{ y } n(A) = 0\}|, \end{aligned}$$

son los subconjuntos de E que forman bosques generadores, y

$$\begin{aligned} T(G; 1, 2) &= \sum_{A \subseteq E} 0^{r(E)-r(A)} 1^{n(A)} \\ &= |\{A \mid A \subseteq E \text{ y } r(A) = r(E)\}|, \end{aligned}$$

es el número de subgráficas generadoras de G conexas. Finalmente,

$$\begin{aligned} T(G; 2, 2) &= \sum_{A \subseteq E} 1^{r(E)-r(A)} 1^{n(A)} \\ &= |\{A \mid A \subseteq E\}| = 2^{|E|}, \end{aligned}$$

es el número de subgráficas generadoras, y con esto se completa la demostración. \square

1.4.3. Expansión del polinomio de Tutte por árboles generadores

Ahora se dará la definición original de Tutte de su polinomio, y se demostrará que es equivalente a la Definición 1.4.2. Sabiendo las propiedades del polinomio de Tutte, la tarea en esta sección será más sencilla que si se hubiera empezado desde aquí. Se hace la observación al lector que la propiedad del polinomio de Tutte de tener una expansión en términos de árboles generadores es válida sólo para gráficas conexas.

Definición 1.4.3. Sea G conexa, $T \subseteq E$ un árbol generador. Supóngase que se tiene un orden total en E . Sea $e \in T$. Decimos que e es internamente activa, si e es la menor arista en el corte fundamental inducido por e . $e \notin T$ es externamente activa, si e es la menor arista en el ciclo fundamental inducido por e .

Ejemplo. Considérese la gráfica de la Figura 1.8 (a) y el ordenamiento dado de E . Para el árbol generador dado, la arista e_5 induce el corte mínimo $C^* = \{e_5, e_6, e_7, e_8, e_{11}\}$, e_5 es internamente activa, pues es la arista mas pequeña en C^* , dado el orden. Similarmente, la arista e_2 , induce el ciclo $C = \{e_2, e_9, e_{10}, e_{12}\}$ y e_2 es externamente activa, pues es la arista mas pequeña en C .

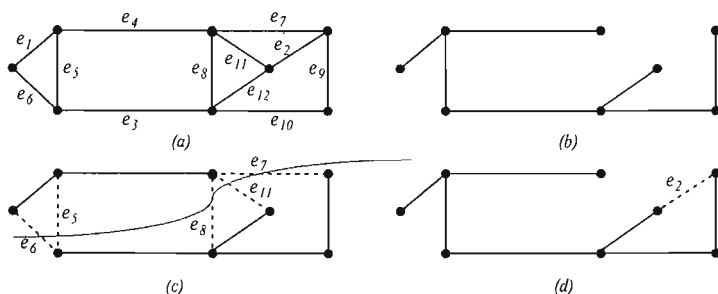


Figura 1.8: Actividad interna y externa.

(a) Gráfica con un ordenamiento en sus aristas y un árbol generador (b). En (c), el corte fundamental inducido por e_5 , la cual es internamente activa. (d) Ciclo fundamental inducido por e_2 , y ésta es externamente activa.

Se dice que T tiene actividad interna i y actividad externa j , si T tiene i aristas internamente activas y j aristas externamente activas. Considérese el conjunto $A_{ij} = \{T \subseteq E \text{ a.g. } | T \text{ tiene actividad interna } i \text{ y actividad externa } j\}$ y sea $t_{ij} = |A_{ij}|$. Nótese que $\{A_{ij}\}_{i,j}$ es una partición del conjunto de árboles generadores de G .

Notación. Manteniendo la nomenclatura usada a lo largo de este capítulo, t'_{ij} es el número de árboles en $G \setminus e$ que tienen actividad interna i y actividad externa j . Análogo para t''_{ij} y G/e .

Teorema 1.4.4. Sea $G = (V, E)$ conexa. Supóngase que se tiene un orden total en E , entonces,

$$T(G; x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$$

En particular, t_{ij} no depende del orden en E .

Demostración. Por inducción en $m = |E|$. Base: $m = 0$. En este caso, $T(G; x, y) = 1 = t_{00}x^0y^0$. Supóngase que para G con $|E| \leq m - 1$ aristas $T(G; x, y) = \sum_{i,j} t_{ij}x^i y^j$. Sea G conexa con m aristas y tómesese cualquier orden total en E , considérese a $e_m \in E$, se tienen tres casos:

Caso 1. Si e_m es puente, para mantener conexidad, tómesese a G/e_m . Entonces,

T es árbol generador de $G \Leftrightarrow T/e_m$ es árbol generador de G/e_m .

T tiene i aristas internamente activas $\Leftrightarrow T/e_m$ tiene $i - 1$ aristas internamente activas.

T tiene j aristas externamente activas $\Leftrightarrow T/e_m$ tiene j aristas externamente activas.

$$\therefore t_{ij} = t''_{i-1j}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} t_{ij}x^i y^j &= \sum_{i,j} t''_{i-1j}x^i y^j \\ &= x \sum_{i,j} t''_{i-1j}x^{i-1} y^j \\ &= x \sum_{k,j} t''_{kj}x^k y^j \\ &= xT(G/e_m; x, y) \\ &= T(G; x, y). \end{aligned}$$

Caso 2. Si e_m es lazo, considérese a $G \setminus e_m$ y lo siguiente:

T es árbol generador de $G \Leftrightarrow T$ es árbol generador de $G \setminus e_m$.

T tiene i aristas internamente activas $\Leftrightarrow T$ tiene i aristas internamente activas en $G \setminus e_m$.

T tiene j aristas externamente activas $\Leftrightarrow T$ tiene $j - 1$ aristas externamente activas en $G \setminus e_m$.

$$\therefore t_{ij} = t'_{ij-1}$$

De manera análoga a lo anterior,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} t_{ij}x^i y^j &= \sum_{i,j} t'_{ij-1}x^i y^j \\ &= y \sum_{i,j} t'_{ij-1}x^i y^{j-1} \\ &= y \sum_{i,k} t'_{ik}x^i y^k \\ &= yT(G \setminus e_m; x, y) \\ &= T(G; x, y). \end{aligned}$$

Caso 3. Si e_m no es lazo ni puente, se tienen a $G \setminus e_m$ y G/e_m . Se particiona el conjunto de árboles de G en los que tienen a e_m y los que no la tienen. Con esto se afirma que:

T es árbol generador de $G \setminus e_m \Leftrightarrow T$ es árbol generador de G y $e_m \notin T$.

T tiene actividad interna i y actividad externa j en $G \setminus e_m \Leftrightarrow T$ tiene actividad interna i y actividad externa j en G .

T es árbol generador de $G/e_m \Leftrightarrow T \cup e_m$ es árbol generador de G .

T tiene actividad interna i y actividad externa j en $G/e_m \Leftrightarrow T \cup e_m$ tiene actividad interna i y actividad externa j en G .

$\therefore t_{ij} = t''_{ij} + t'_{ij}$, por la partición de los árboles de G . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j &= \sum_{i,j} t''_{ij} x^i y^j + \sum_{i,j} t'_{ij} x^i y^j \\ &= T(G/e_m; x, y) + T(G \setminus e_m; x, y) \\ &= T(G; x, y). \end{aligned}$$

Y en cualquier caso se tiene el resultado. □

Observación. Con el Teorema 1.4.4, el polinomio de Tutte puede ser visto como cualquiera de las siguientes sumas:

$$T(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{n(A)} = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j = \sum_{T \text{ a.g. de } G} x^{i(T)} y^{e(T)},$$

donde $i(T)$ y $e(T)$ son el número de aristas internamente activas y externamente activas para el árbol T respectivamente.

Los coeficientes del polinomio de Tutte son no negativos, pues tienen una interpretación combinatoria. Si G tiene al menos una arista, entonces $t_{00} = 0$, es decir, G no tiene árboles con actividad interna y externa igual a cero, con lo cual, T no tiene término independiente.

Aquí se detiene el estudio de las propiedades del polinomio de Tutte, pues estos resultados empiezan a rebasar el alcance de esta obra. Para estudiar más a fondo estas y otras propiedades de T , se pueden consultar [Bb92, Ox92].

1.4.4. Complejidad computacional del polinomio de Tutte

Ahora se analiza la dificultad de calcular el polinomio de Tutte. El desarrollo de este tema es un tanto informal, pues es muy amplio, sólo se dan las definiciones necesarias y se enuncia el teorema que expone la complejidad del polinomio de Tutte.

La notación usada es totalmente estándar y se supone familiaridad con los conceptos tratados, los cuales se pueden consultar más a fondo en [V177, Ko97, Pa94]. La abreviatura MTD denotará Máquina de Turing Determinística, similarmente, MTND es Máquina de Turing No Determinística. En esta sección los términos lenguaje, conjunto y problema se usan indistintamente para denotar al conjunto de cadenas reconocido por una Máquina de Turing.

Para poder expresar cual es la complejidad del polinomio de Tutte, es necesario definir la clase $\#P$, de las funciones que calcula alguna MTND en tiempo polinomial, y además tienen la facilidad de calcular el número total de cálculos correctos. Valiant [V177] uso esta clase para determinar la complejidad de calcular la función permanente de una matriz.

Se denota por P a la clase de lenguajes que son aceptados por MTD en tiempo acotado por un polinomio (tiempo polinomial), y por FP a la clase de funciones calculadas por MTD en tiempo polinomial. NP es la clase de lenguajes que son aceptados por MTND en tiempo polinomial. Como es sabido, existe una pregunta fundamental en la Teoría de la Computación que concierne a las clases básicas P y NP , es claro que $P \subseteq NP$, pero no se sabe si esta contención es propia. Para atacar esta interrogante, se desarrollaron los conceptos de reducción de lenguajes y el de completez [Pa94], los cuales formalizan matemáticamente el que un problema sea un verdadero representante de la clase dada, y que éste es, en cierta manera, al menos tan difícil como cualquier otro problema en la clase.

Hay muchos problemas que son **NP-completos**, y son muy importantes en computación, si se encontrara una solución eficiente para alguno, todo problema en NP tendría solución eficiente. Los siguientes son ejemplos de problemas **NP-completos**:

Satisfacibilidad (SAT), y su variante, 3SAT.

Corte máximo en una gráfica (MAX-CUT).

Problema del agente viajero (TSP).

Para problemas **NP-completos**, contar el número de soluciones de una instancia dada, (por ejemplo, para SAT, contar el número de asignaciones que satisfacen una fórmula) es usualmente **#P-completo**. Se presentan las definiciones básicas. Para un trato más a fondo de la complejidad computacional de contar, el lector puede consultar [V177, Pa94].

Definición 1.4.4. *Una Máquina de Turing Contadora (MTC) es una MTND estándar, con un dispositivo auxiliar, el cual escribe en una cinta especial, en notación binaria, el número total de aceptaciones para la entrada de la máquina.*

Definición 1.4.5. *$\#P$ es la clase de funciones que son calculadas por MTC en tiempo polinomial.*

Para definir completitud en la clase $\#P$, la noción de reducción usada se basa en Máquinas de Turing con Oráculo. Una Máquina de Turing con Oráculo (MTO) $M^?$ es una MTD con una cinta especial, la cinta de consulta. Para consultar el oráculo, la máquina escribe una cadena en la cinta de consulta y, al entrar en un estado especial de espera, se obtiene una respuesta en tiempo a lo más polinomial (la respuesta puede ser membresía de la cadena en un conjunto, calcular una función, etc.) el símbolo i .^{en} el exponente de M indica que se puede insertar cualquier lenguaje como oráculo. Si C es una clase de MTO, con oráculo A , se denota a la clase de funciones (o predicados) que se reconocen por MTO en C , usando a A como oráculo, por C^A . Finalmente, un conjunto B es $\#P$ -difícil si y sólo si $\#P \subseteq \mathbf{FP}^B$. B es $\#P$ -completo si además $B \in \#P$.

Con estas definiciones, la complejidad del polinomio de Tutte es dada en el siguiente teorema:

Teorema 1.4.5 (Jaeger, Vertigan y Welsh, 1990). *Evaluar el polinomio de Tutte de una gráfica en cualquier punto del plano complejo es $\#P$ -difícil, excepto cuando*

1. *El punto yace en la hipérbola $(x - 1)(y - 1) = 1$, ó*
2. *El punto es alguno de $(1, 1), (-1, 0), (0, -1), (-1, -1), (i, -i), (-i, i), (j, j^2), (j^2, j)$, donde $j = e^{2\pi i/3}$.*

En estos casos, la evaluación puede efectuarse en tiempo polinomial.

Así, calcular el polinomio de Tutte, o simplemente obtener su valor en algún punto es algo realmente difícil, con lo que el intentar encontrar un algoritmo eficiente para el caso general, no parece venir en el futuro cercano (esto, si es posible encontrar uno). A pesar de este resultado, muchos investigadores han tratado de encontrar soluciones eficientes para ciertas clases de gráficas, y han tenido éxito en algunos casos, como para las gráficas $K_n, L_{n,m}$. Aún para gráficas planas o bipartitas, calcular $T(G; x, y)$ es muy difícil. Sin embargo, el algoritmo descrito en esta obra es altamente efectivo para gráficas pequeñas (para una computadora) en el caso general.

Capítulo 2

Cálculo del polinomio de Tutte

Ya se ha visto como el polinomio de Tutte de una gráfica G es de gran utilidad, ya que posee en varios puntos del plano información invariante de la gráfica, como el número de árboles generadores, de bosques generadores, subgráficas generadoras, etc. También se puede probar que, bajo ciertas sustituciones, se obtienen otros polinomios de G , como el polinomio cromático y el de flujo. Sin embargo, también se ha visto que calcularlo no es nada fácil, aun para una gráfica de tamaño moderado, todos los algoritmos que se conocen toman tiempo exponencial (usualmente toman tiempo proporcional al número de árboles). Aún una computadora de hoy día puede paralizarse intentando calcular el polinomio de Tutte de una gráfica de tan solo 9 vértices.

En este capítulo se analiza el algoritmo propuesto en [SIT95], sus bases teóricas y la complejidad del espacio que utiliza. Este algoritmo permite calcular el polinomio de Tutte de cualquier gráfica de 14 vértices y $\binom{14}{2} = 91$ aristas, por una computadora personal en un tiempo moderado. Antes de iniciar el análisis, se introduce un concepto similar al de isomorfismo de gráficas, el cual es una parte importante del algoritmo.

2.1. 2-Isomorfismo

Definición 2.1.1. Sean $G = (V_1, E_1), H = (V_2, E_2)$ gráficas. Se dice que G y H son 2-isomorfas bajo la función $\phi : E_1 \rightarrow E_2$, si ϕ es biyectiva y ambas ϕ, ϕ^{-1} preservan árboles generadores (es decir, si A es un árbol en G , entonces $\phi(A)$ es un árbol en H). Esto se denota por $G \cong_2 H$.

Claramente, cuando $G \cong H$, entonces $G \cong_2 H$. La inversa no siempre es cierta, como lo muestran las gráficas de la Figura 2.1. G es 2-isomorfa a H , pero no isomorfa, pues H tiene un vértice de grado 6. Obsérvese que H se obtuvo de G mediante una separación en ésta de tamaño dos $\{v, w\}$, voltear una de las subgráficas y unir las de nuevo por medio del conjunto de separación. A esta operación se le conoce como *torcer* G . Como " \cong ", la relación " \cong_2 "

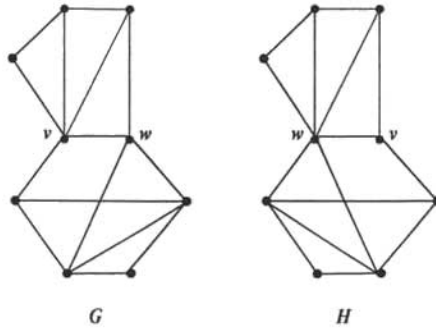


Figura 2.1: Gráficas 2-isomorfas.

" es una relación de equivalencia. El resultado más importante sobre 2-isomorfismo es el siguiente debido a Whitney [Wh33].

Teorema 2.1.1 (Whitney, 1933). *Sean G y H gráficas 2-conexas. Entonces $G \cong_2 H \Leftrightarrow$ existe una gráfica isomorfa a H , G' , que se obtiene mediante torcer G un cierto número de veces.*

También, del Teorema de Whitney se tiene que, si las gráficas G y H son 3-conexas (es decir, el corte mas pequeño para hacer que la gráfica se desconecte, es de tamaño 3), entonces $G \cong_2 H$ si y sólo si $G \cong H$. Ha habido mejoras a este teorema , por ejemplo, se sabe que si $G = (V, E)$, el número de veces que hay que torcer G no es mayor a $|E| - 2$ (ver [Tr80]).

2.1.1. 2-isomorfismo y el polinomio de Tutte

Para concluir esta sección, se da un resultado de gran utilidad en la construcción del programa que se busca. Como se vio con las gráficas de la Figura 2.1, la condición de 2-isomorfismo entre gráficas es menos estricta que la de isomorfismo. Este hecho es muy importante por la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. *Sean $G = (V_1, E_1), H = (V_2, E_2)$ gráficas conexas. Si $G \cong_2 H$, entonces $T(G; x, y) = T(H; x, y)$.*

Demostración. Sean G y H conexas, supóngase que $G \cong_2 H$. Sea ϕ el 2-isomorfismo. Nótese que, como ϕ preserva árboles generadores, también preserva bosques generadores.

Se afirma que para todo $A \subseteq E_1$, $r_G(A) = r_H(\phi(A))$. Tómesese $A \subseteq E_1$, $r_G(A)$ es igual al tamaño de un bosque máximo, B , contenido en A . Como ϕ preserva bosques generadores, $\phi(B)$ es un bosque generador contenido en $\phi(A)$, y es máximo, por lo tanto, $r_H(\phi(A)) = |\phi(B)|$. Pero ϕ es biyectiva, entonces $|B| = |\phi(B)|$, por lo que $r_G(A) = |B| = |\phi(B)| =$

$r_H(\phi(A))$, así, el resultado es inmediato, pues ϕ induce una biyección entre los subconjuntos de E_1 y los de E_2 , de este modo,

$$\begin{aligned} T(G; x, y) &= \sum_{A \subseteq E_1} (x-1)^{r(E_1)-r(A)} (y-1)^{n(A)} \\ &= \sum_{\phi(A) \subseteq E_2} (x-1)^{r(E_2)-r(\phi(A))} (y-1)^{n(\phi(A))} \\ &= T(H; x, y). \end{aligned}$$

□

2.2. Menores 2-isomorfos, el árbol de expansión y el DDB

De ahora en adelante, solo se consideran gráficas conexas, pues estas constituyen una parte fundamental de los resultados de este y el siguiente capítulo. Se hace uso libremente de conceptos básicos de gráficas dirigidas o digráficas, en lugar de dar las definiciones pertinentes, se ha preferido remitir al lector a la bibliografía si desea consultar acerca de este amplio tema. Muchos resultados interesantes se pueden encontrar en [BR00, Bb92].

La base del algoritmo que se pretende construir es la fórmula de contracción y borrado, vista en el Capítulo 1. Cuando esta se aplica a una gráfica G , esto se hace dando un orden cualquiera a las aristas, supóngase que el orden es e_1, e_2, \dots, e_m ($m = |E|$). Este proceso forma un árbol binario (una gráfica dirigida, en la cual los arcos apuntan del nivel $i-1$ al nivel i) donde cada nodo es un menor de G . En la Figura 2.2 se muestra este árbol para la gráfica K_4 (Nótese, además, que se ha aprovechado la ocasión para calcular $T(K_4; x, y) = x^3 + 3x^2 + 2x + 4xy + 2y + 3y^2 + y^3$).

Los nodos del nivel i -ésimo son menores de G en el subconjunto de aristas $\{e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_m\}$ (el nivel 0-ésimo es la raíz del árbol y corresponde a G). Como el polinomio de Tutte de dos gráficas 2-isomorfas es el mismo, por la Proposición 2.1.1, si fuera posible identificar menores 2-isomorfos en el mismo nivel, podrían ser representados por uno sólo de ellos, de este modo se evita calcular redundantemente el mismo polinomio de Tutte de menores 2-isomorfos. Con esta modificación, el árbol binario se convierte en una gráfica dirigida acíclica, que tiene un origen (la raíz del árbol de expansión), que corresponde a la gráfica G , y el nivel m -ésimo es un pozo. Antes de continuar, es necesario dar definiciones rigurosas para el manejo de estas ideas. A través de este capítulo, se supondrá fijo el ordenamiento e_1, e_2, \dots, e_m en las aristas de G y se le denota por O_E .

Definición 2.2.1. Sea $G = (V, E)$, el árbol de expansión de G en el ordenamiento de aristas O_E es una digráfica $\mathcal{A}_G = (N, F)$, construida de la siguiente manera:

1. Si $|E| = 0$, entonces $\mathcal{A}_G = (\{G\}, \emptyset)$.
2. Si $|E| \geq 1$, sea $e_1 \in E$ y supóngase que se tienen los árboles de expansión de G' y G'' .

- Si e_1 es lazo, entonces $\mathcal{A}_G = (\{G\} \cup N(\mathcal{A}_{G'}), \{G \rightarrow G'\} \cup F(\mathcal{A}_{G'}))$.
- Si e_1 es puente, entonces $\mathcal{A}_G = (\{G\} \cup N(\mathcal{A}_{G''}), \{G \rightarrow G''\} \cup F(\mathcal{A}_{G''}))$.
- Si e_1 no es lazo ni puente, entonces $\mathcal{A}_G = (\{G\} \cup N(\mathcal{A}_{G'}) \cup N(\mathcal{A}_{G''}), \{G \rightarrow G', G \rightarrow G''\} \cup F(\mathcal{A}_{G'}) \cup F(\mathcal{A}_{G''}))$.

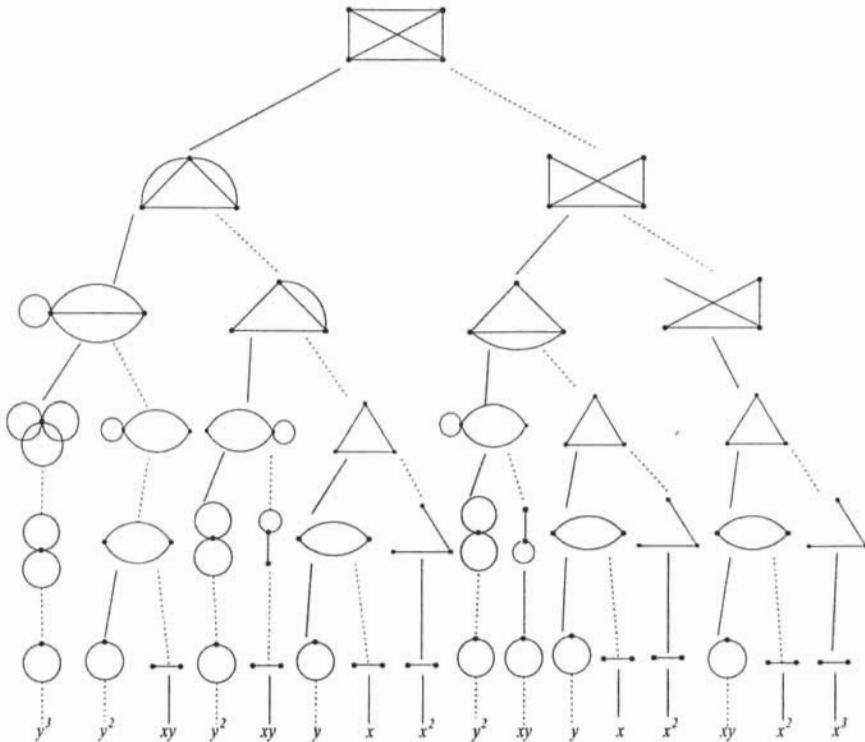


Figura 2.2: Árbol de expansión de K_4 . Los arcos punteados indican que la arista fue borrada de la gráfica, los arcos sólidos indican que fue contraída.

Esta definición ha sido diseñada en base a la fórmula de contracción y borrado, el siguiente paso es definir cuando dos menores de G son equivalentes y, en este caso, se desea calcular su polinomio de Tutte una sola vez.

Dado el ordenamiento de las aristas de G , todos sus menores heredan un ordenamiento en sus aristas, y estas quedan etiquetadas. Nótese en el árbol de expansión que los menores en el mismo nivel tienen el mismo conjunto de etiquetas. Mas adelante se discute brevemente que tan difícil es el decir si dos gráficas son 2-isomorfas ó no, por el momento, para poder

presentar el algoritmo para calcular el polinomio de Tutte, se supondrá que se cuenta con un procedimiento, llamando $2ISO(H_1, H_2)$, que cumple las siguientes condiciones:

1. $2ISO$ es una relación de equivalencia.
2. $\forall H_1, H_2 (2ISO(H_1, H_2) \Rightarrow H_1 \cong_2 H_2)$.

En la Sección 2.3 se vera que, en efecto, existe una implementación eficiente de tal procedimiento.

Definición 2.2.2. Sea $G = (V, E)$, se dice que dos menores G_1, G_2 de G están relacionados si y sólo si $E(G_1) = E(G_2)$ (visto como conjunto de etiquetas) y $2ISO(G_1, G_2) = TRUE$. Esto se denota por $G_1 \simeq G_2$.

Proposición 2.2.1. La relación " \simeq " es de equivalencia.

Así, " \simeq " particiona al conjunto de menores de G en clases de equivalencia, las cuales se denotan por $[H]$, para cada H menor de G . Ahora se define la nueva estructura obtenida al colapsar a los menores de G bajo " \simeq ".

Definición 2.2.3. Sea $G = (V, E)$, el DDB (Diagrama de Decisión Binario) de G , en el ordenamiento O_E es la digráfica $\mathcal{B}_G = (U, A)$, donde $U = N / \simeq$ y $A = \{[H] \rightarrow [I] \mid \exists W \in [H], \exists Z \in [I], W \rightarrow Z \in E\}$.

Para saber con detalle el porque esta estructura es llamada así, el lector puede consultar [SIT95].

Ejemplo. En la Figura 2.3, se muestra el DDB de K_4 , que ha sido obtenido aplicando la Definición 2.2.3 al árbol de expansión de la Figura 2.2. Obsérvese como, en efecto, el espacio requerido para calcular el polinomio de Tutte disminuye considerablemente. Más adelante se discutirá esto, y para ello, se definen formalmente lo que es el tamaño y el ancho del DDB.

Nota. El DDB de la Figura 2.3 es obtenido a partir de la implementación del procedimiento $2ISO$ dada en la Sección 2.3, y aunque es una implementación efectiva, no es capaz de identificar a todos los menores 2-isomorfos en un nivel.

Definición 2.2.4. Sea $G = (V, E)$, dado el DDB de G , \mathcal{B}_G se definen:

- El nivel $L(G, i)$ de \mathcal{B}_G , es el conjunto de todos los menores de G , en el conjunto de aristas $\{e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_m\}$, esto es, $L(G, i) = \{[H] \in U \mid E(H) = \{e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_m\}\}$.
- El cardinal de \mathcal{B}_G , denotado por $|\mathcal{B}_G|$, se define como $|\mathcal{B}_G| = |U|$.
- El ancho de \mathcal{B}_G , se define como $W(\mathcal{B}_G) = \max \{|L(G, i)|\}_{i=0}^m$.

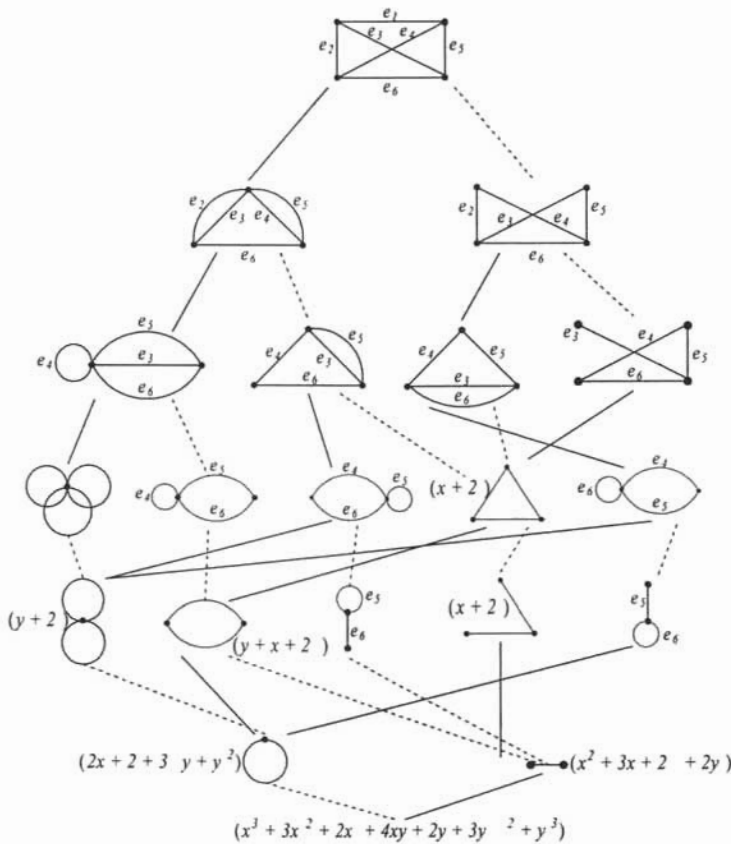


Figura 2.3: DDB de K_4 .

El siguiente es un resultado técnico que será de gran utilidad cuando se demuestre la validez de los algoritmos que se dan en la siguiente sección.

Proposición 2.2.2. *Sea $G = (V, E)$, entonces el DDB \mathcal{B}_G se puede describir de alguna de las siguientes formas:*

- i) Si $|E| = 0$, entonces $\mathcal{B}_G = (\{[G]\}, \emptyset)$.
- ii) Si $|E| \geq 1$, sea $e_1 \in E$, entonces,
 - Si e_1 es lazo, entonces $\mathcal{B}_G = (\{[G]\} \cup U(\mathcal{B}_{G'}), \{[G] \rightarrow [G']\} \cup A(\mathcal{B}_{G'}))$.
 - Si e_1 es puente, entonces $\mathcal{B}_G = (\{[G]\} \cup U(\mathcal{B}_{G''}), \{[G] \rightarrow [G'']\} \cup A(\mathcal{B}_{G''}))$.

- Si e_1 no es ni lazo ni puente, entonces $\mathcal{B}_G = (\{[G]\} \cup U(\mathcal{B}_{G'}) \cup U(\mathcal{B}_{G''}), \{[G] \rightarrow [G'], [G] \rightarrow [G'']\} \cup A(\mathcal{B}_{G'}) \cup A(\mathcal{B}_{G''}))$ ¹.

Demostración. Sea \mathcal{B}_G el DDB de G . Si $|E| = 0$, entonces por la Definición 2.2.1, $\mathcal{A}_G = (\{[G], \emptyset$), así, sólo se tiene a un nodo, G , y ningún arco, por lo que \mathcal{B}_G tiene únicamente a la clase $[G]$, y no tiene arcos.

Supóngase que $|E| \geq 1$, tómesese a $e_1 \in E$ y los tres posibles casos.

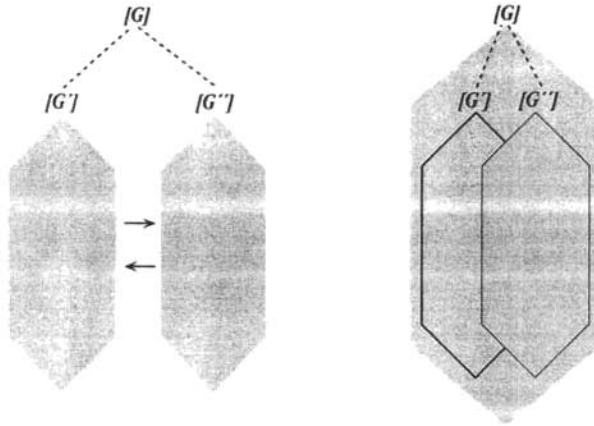
Caso 1. Si e_1 es lazo. Por la Definición 2.2.1, $\mathcal{A}_G = (\{[G] \cup N(\mathcal{A}_{G'}), \{G \rightarrow G'\} \cup F(\mathcal{A}_{G'})$), de este modo, en \mathcal{B}_G se tiene un único arco $[G] \rightarrow [G']$. El resto del DDB depende totalmente de los menores de G' , por lo que el resultado es inmediato.



Caso 2. El argumento es similar cuando e_1 es puente.

Caso 3. Si e_1 no es lazo ni puente, por la Definición 2.2.1, $\mathcal{A}_G = (\{[G] \cup N(\mathcal{A}_{G'}) \cup N(\mathcal{A}_{G''}), \{G \rightarrow G', G \rightarrow G''\} \cup F(\mathcal{A}_{G'}) \cup F(\mathcal{A}_{G''})$), y de manera similar al primer caso, entre $[G]$ y $[G']$, $[G'']$ sólo existen los arcos $[G] \rightarrow [G']$ y $[G] \rightarrow [G'']$, después, dados los niveles $L(G', i)$ y $L(G'', i)$ con $2 \leq i \leq |E(G')| = |E(G'')|$, suponiendo que se ha construido el nivel $i - 1$ de \mathcal{B}_G , el nivel i se construye de la siguiente manera:

¹Formalmente, lo que se está haciendo no es la unión de los conjuntos $U(\mathcal{B}_{G''})$ y $U(\mathcal{B}_{G'})$, sino tomar todas estas clases de equivalencia, y dadas $[H] \in U(\mathcal{B}_{G''}), [W] \in U(\mathcal{B}_{G'})$, tal que, si $H \simeq W$, entonces se toma el conjunto $[H] \cup [W]$ en lugar de los anteriores. Se ha preferido dejar expresado como unión para no introducir una notación complicada. El caso es similar con la unión $A(\mathcal{B}_{G'}) \cup A(\mathcal{B}_{G''})$.



Si $[H_1] \in L(G', i)$ y $[H_2] \in L(G'', i)$, son tales que H_1 no está relacionado con H_2 , entonces se agregan ambas clases a $U(\mathcal{B}_G)$, y todos sus arcos a $A(\mathcal{B}_G)$. Por el contrario, si $H_1 \simeq H_2$, entonces, en \mathcal{B}_G , $[H_1] = [H_2]$, y se toma precisamente ésta clase (que es la unión de las clases $[H_1]$ y $[H_2]$ de $U(\mathcal{B}_{G'})$ y $U(\mathcal{B}_{G''})$ respectivamente), la cual se agrega a $U(\mathcal{B}_G)$, y todos los arcos que apuntan a $[H_1]$ en $A(\mathcal{B}_{G'})$ y los que apuntan a $[H_2]$ en $A(\mathcal{B}_{G''})$ se hace que apunten a la clase $[H_2]$ (en \mathcal{B}_G) y se agregan a $A(\mathcal{B}_G)$. Así, al terminar esta construcción se tiene el DDB de G , y además que $\mathcal{B}_G = (\{[G]\} \cup U(\mathcal{B}_{G'}) \cup U(\mathcal{B}_{G''}), \{[G] \rightarrow [G'], [G] \rightarrow [G'']\} \cup A(\mathcal{B}_{G'}) \cup A(\mathcal{B}_{G''}))$. \square

La Proposición 2.2.2 muestra la compatibilidad de \mathcal{B}_G con la definición de \mathcal{A}_G . Cuando no haya ambigüedad, dado el ordenamiento O_E y los menores G', G'' se denotan a, $\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_{G'}, \mathcal{B}_{G''}$ por $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ y \mathcal{B}'' respectivamente. Dado H menor de G , su clase de equivalencia $[H]$ se denota únicamente por H .

Observación. Dado H menor de G , la digráfica que se genera en \mathcal{B}_G , dada por las flechas que salen de H , y siguiendo los menores que le siguen en dirección al pozo, de manera recursiva, ésta es isomorfa a \mathcal{B}_H . En particular, Los DDB's $\mathcal{B}', \mathcal{B}''$ son subgráficas de \mathcal{B} .

2.2.1. Algoritmos

El algoritmo para calcular el polinomio de Tutte de una gráfica G esta basado en la fórmula de contracción y borrado. En el **Algoritmo 1**, se calcula el DDB de la gráfica G , identificando menores 2-isomorfos, y usando como representante al primero de estos que se haya presentado.

El polinomio de Tutte se calcula en el **Algoritmo 2**, donde a cada nodo v se le asocia un polinomio $t(v; x, y)$. A continuación se prueban la validez de estos algoritmos.

Algoritmo 1 Cálculo del DDB de la gráfica G .

$L_0 := \{G\}$

for $i := 1$ **to** m **do**

begin

$L_i := \emptyset$

for each menor \tilde{G} **in** L_{i-1} **do**

begin

if e_i es un lazo **in** \tilde{G} **then** $M(\tilde{G}) := \{\tilde{G} \setminus e_i\}$

else if e_i es un puente **in** \tilde{G} **then** $M(\tilde{G}) := \{\tilde{G}/e_i\}$

else $M(\tilde{G}) := \{\tilde{G} \setminus e_i, \tilde{G}/e_i\}$

for each menor \tilde{G}_{e_i} **in** $M(\tilde{G})$ **do**

begin

Busca una gráfica \hat{G} en L_i , tal que $2ISO(\hat{G}, \tilde{G}_{e_i}) = TRUE$.

Si hay tal gráfica en L_i , agréguese un arco del nodo que representa \hat{G} hacia el nodo que representa \tilde{G} .

En otro caso, agréguese \tilde{G}_{e_i} a L_i , y agréguese un arco del nodo que representa \tilde{G} hacia el nodo de \tilde{G}_{e_i} .

end

end

end

Proposición 2.2.3. *El Algoritmo 1 da como resultado al aplicarlo a una gráfica $G = (V, E)$, el DDB B .*

Demostración. Claramente, el algoritmo siempre termina, el ciclo **for** principal sólo es ejecutado $m = |E|$ veces. Para probar que construye a B , se hará por inducción en m .

Base: $m = 0$, en este caso, el algoritmo sólo ejecuta la primera línea $L_0 = \{G\}$ y termina, entonces la estructura obtenida es la digráfica vacía con un sólo vértice, a saber $[G]$. Por lo tanto, el resultado es correcto.

Supóngase que para $m \geq 0$ el resultado es válido, sea G con $m + 1$ aristas. Primero se hace $L_0 = \{G\}$, después, se ejecuta el ciclo **for** en $i = 1$, entonces $L_1 = \emptyset$ y entra en el segundo ciclo **for** una sola vez, pues $L_{i-1} = L_0 = \{G\}$, entonces $\tilde{G} = G$ y $e_i = e_1$. Considérense los tres posibles casos:

- Si e_1 es lazo, entonces se ejecuta el primer **if** y así, $M(G) = \{G \setminus e_1\}$. Al entrar en el tercer ciclo **for** el nivel L_1 está vacío, por lo que se agrega $G \setminus e_1$ a L_1 y se construye el arco $G \rightarrow G \setminus e_1$. Falta que el algoritmo se ejecute sobre el menor $G \setminus e_1 = G'$ que

Algoritmo 2 Cálculo del polinomio de Tutte a partir del DDB de G .

$t(\text{fuente}; x, y) := 1$

for $i := 1$ **to** m **do**

begin

for all nodes u **in** L_i **do** $t(u; x, y) := 0$

for each node v **in** L_{i-1} **do**

begin

if v tiene dos hijos u, w **then**

begin

$t(u; x, y) := t(u; x, y) + t(v; x, y)$

$t(w; x, y) := t(w; x, y) + t(v; x, y)$

end

else /* solo un hijo u */

if e_i es un lazo **then** $t(u; x, y) := t(u; x, y) + yt(v; x, y)$

else $t(u; x, y) := t(u; x, y) + xt(v; x, y)$ /* e_i es puente */

end

end

El polinomio $t(\text{pozo}; x, y)$ es $T(G; x, y)$.

tiene m aristas, por hipótesis de inducción, el algoritmo construye, al terminar estos m pasos, el DDB \mathcal{B}' , por lo tanto, la digráfica que se tiene al finalizar es $(\{[G], [G']\} \cup U(\mathcal{B}'), \{[G] \rightarrow [G']\} \cup A(\mathcal{B}')) = (\{[G]\} \cup U(\mathcal{B}'), \{[G] \rightarrow [G']\} \cup A(\mathcal{B}'))$, y por la Proposición 2.2.2, esto es \mathcal{B} .

- Si e_1 es puente, de manera análoga a lo anterior se tiene que el algoritmo construye la digráfica $(\{[G], [G'']\} \cup U(\mathcal{B}''), \{[G] \rightarrow [G'']\} \cup A(\mathcal{B}'')) = (\{[G]\} \cup U(\mathcal{B}''), \{[G] \rightarrow [G'']\} \cup A(\mathcal{B}'')) = \mathcal{B}$.
- Si e_1 no es lazo ni puente, entonces se ejecuta la tercera parte del **if**, se tienen los dos menores G', G'' en $M(G)$, asimismo, el nivel L_1 está vacío, por lo que se agregan ambos a L_1 , y se construyen los arcos $G \rightarrow G', G \rightarrow G''$. Ahora se ejecuta el algoritmo en cada uno de estos menores, que tienen m aristas, por hipótesis de inducción, el algoritmo construye en los m pasos restantes los DDB's $\mathcal{B}', \mathcal{B}''$ (como subgráficas de la estructura total que se construye). Es importante notar que el algoritmo va determinando adecuadamente, en el tercer **for** anidado, cuales menores están en la misma clase de equivalencia, usando el procedimiento *2ISO* en cada nivel L_i . Finalmente, la digráfica que se obtiene al terminar el algoritmo es $(\{[G], [G'], [G'']\} \cup U(\mathcal{B}') \cup U(\mathcal{B}''), \{[G] \rightarrow$

$$[G'], [G] \rightarrow [G''] \cup A(B') \cup A(B'') = (\{[G]\} \cup U(B') \cup U(B''), \{[G] \rightarrow [G'], [G] \rightarrow [G'']\} \cup A(B') \cup A(B'')) = \mathcal{B}, \text{ por la Proposición 2.2.2.}$$

Por lo tanto, el algoritmo es valido $\forall m \geq 0$. □

Proposición 2.2.4. *El Algoritmo 2 da como resultado al aplicarlo a \mathcal{B}_G , $T(G, x, y)$.*

Demostración. Análogamente a la proposición 2.2.3 el algoritmo termina. Se prueba que calcula $T(G; x, y)$ por inducción en m .

Base: $m = 0$, en este caso, no hay aristas y por la Proposición 2.2.2, $\mathcal{B} = (\{[G]\}, \emptyset)$, entonces $t(\text{source}; x, y) = t(G; x, y) = 1$, el ciclo **for** principal nunca es ejecutado y el algoritmo termina. Como el nodo fuente es igual al nodo pozo; $T(G; x, y) = 1$ y la salida es correcta.

Supóngase que para $m \geq 1$ pasos, el algoritmo da como resultado para una gráfica G , $T(G; x, y)$.

Sea G con $m + 1$ aristas. Primero se hace $t(\text{source}; x, y) = t(G; x, y) = 1$. Cuando $i = 1$, en el siguiente nivel a calcular, L_1 en este caso, todas las variables $t(u; x, y)$ se hacen cero, después, dado $e_i = e_1$, hay tres posibles casos:

- Si e_1 es puente, entonces L_1 sólo tiene un nodo, a saber $G/e_1 = G''$, ejecutándose la parte **else** del segundo **if**, se hace $t(G''; x, y) := t(G''; x, y) + xt(G; x, y) = 0 + x \cdot 1 = x$, luego, se debe aplicar el algoritmo a la subgráfica del DDB de G'' , \mathcal{B}'' , para el cual quedan m pasos. Por hipótesis de inducción, el algoritmo da como resultado en el nodo *pozo* $T(G''; x, y)$. Nótese que un menor H de G va a tener $t(H; x, y)$ como un polinomio con un factor x (Esto se puede mostrar por inducción usando el hecho que $t(H; x, y)$ es la suma de los $t(\hat{H}; x, y)$, donde \hat{H} es una gráfica que tiene a H como un menor mediante borra ó contraer una arista. Por hipótesis de inducción, estos son polinomios con un factor x , por lo que $t(H; x, y)$ tendrá un factor x). Este factor, que proviene del valor de $t(G; x, y)$, puede ser identificado si se cambia esta variable por w . Entonces, al final en el nodo pozo hay un polinomio en 3 variables $P(G; w, x, y) = wT(G''; x, y)$, inviértase el cambio de variable y se tiene que $P(G; x, x, y) = xT(G''; x, y)$, como por hipótesis, e_1 es puente en G , $P(G; x, x, y) = xT(G''; x, y) = T(G; x, y)$ y es exactamente lo que el algoritmo calcula en el nodo *pozo*, así que la salida es correcta.
- El caso en el que e_1 es lazo es similar al anterior.
- Si e_1 no es lazo ni puente, el nivel L_1 consta de 2 nodos G' y G'' , se ejecuta el primer **if**, dando como resultado $t(G'; x, y) := t(G'; x, y) + t(G; x, y) = 0 + 1 = 1$ y $t(G''; x, y) := t(G''; x, y) + t(G; x, y) = 0 + 1 = 1$. Para cada una de estas gráficas, se tiene una subgráfica en \mathcal{B} , que es su DDB, los cuales tienen m niveles, por hipótesis de inducción, el algoritmo da como resultado a $T(G'; x, y)$ y $T(G''; x, y)$ en los respectivos pozos. Se puede suponer que el algoritmo produce para el DDB correspondiente a

G' , el polinomio $T(G'; x, y)$ y para G'' el polinomio $T(G''; w, z)$. Cada término en el DDB de G será una suma de términos correspondientes a los DDB's de G' y G'' . En particular, el pozo será la suma $T(G'; x, y) + T(G''; x, y)$. Haciendo $w = x, y = z$, se tiene que el término en el pozo es $t(\text{pozo}; x, y) = T(G'; x, y) + T(G''; x, y)$ que es $T(G; x, y)$.

En cualquier caso, la salida del algoritmo es $T(G; x, y)$, y el resultado es válido por inducción. \square

2.3. Un algoritmo para 2ISO

Para poder aplicar los algoritmos dados en la sección anterior, es necesario encontrar un algoritmo que implemente el procedimiento 2ISO. Una posibilidad (y la mejor) es dar un algoritmo para determinar 2-isomorfismo entre gráficas, sin embargo, en general, no se sabe la complejidad computacional de este problema, se piensa que debe ser, al menos, tan difícil como el problema de isomorfismo de 2 gráficas, para el cual no se sabe si existen algoritmos polinomiales, aunque hay implementaciones que en la práctica, parecen ser muy eficientes, como el paquete Nauty [Nauty].

Sin embargo, en este caso se tiene la restricción de que ambos menores están en el mismo conjunto de aristas (vistas como etiquetas), y con esto si es posible resolver este problema, dado un ordenamiento de las aristas con una propiedad muy particular; además, esta implementación de 2ISO permite dar resultados teóricos acerca del ancho del DDB, lo cual se verá en la siguiente sección.

Definición 2.3.1. Sea $G = (V, E)$, y $O_E = e_1, e_2, \dots, e_m$ un ordenamiento de las aristas de G . Sea $E_i = \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ y $\overline{E}_i = \{e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_m\}$ ($i = 1, \dots, m$). Se dice que este ordenamiento tiene la propiedad conexa, si para cada i , la subgráfica de G en el subconjunto \overline{E}_i es conexa.

Definición 2.3.2. Sea $G = (V, E)$, y O_E un ordenamiento de las aristas de G , E_i, \overline{E}_i como en la Definición 2.3.1. El i -ésimo frente de eliminación, denotado por \tilde{V}_i , es un subconjunto de V , de los vértices que son adyacentes a alguna arista en E_i y en \overline{E}_i .

Ejemplos. En la Figura 2.4, se muestra un ordenamiento de las aristas de K_5 , con la propiedad conexa, únicamente se han enumerado los vértices de manera arbitraria y las aristas se ordenaron en orden lexicográfico. Se ha calculado para algunos de los subconjuntos E_i, \overline{E}_i , el frente i -ésimo de eliminación \tilde{V}_i .

Dado $E' \subseteq E_i$, considérese la siguiente relación en el conjunto \tilde{V}_i : Dos vértices $v, u \in \tilde{V}_i$, están relacionados si y sólo si, al contraer las aristas en E' , son identificados en un sólo vértice. Denótese esta relación por $v \sim u$.

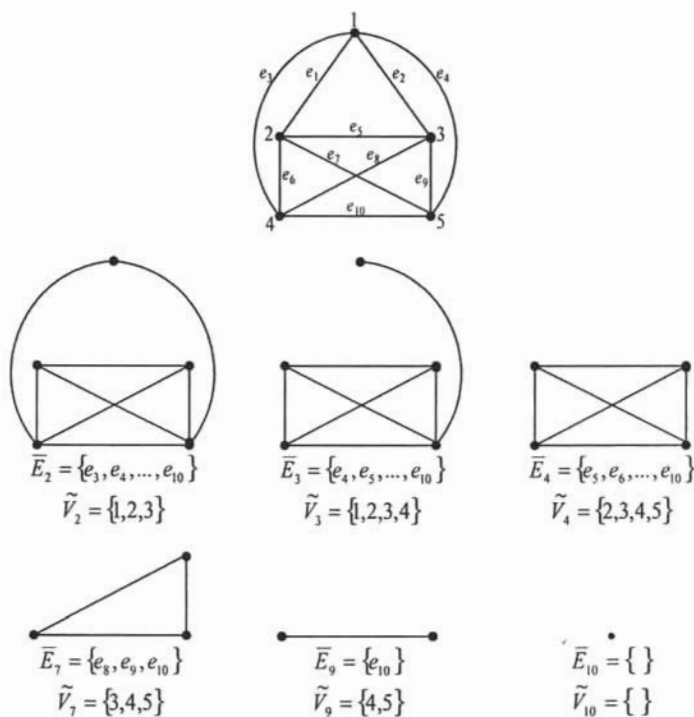


Figura 2.4: Ordenamiento de K_5 con la propiedad conexa.

Lema 2.3.1. Dado el i -ésimo frente \tilde{V}_i , " \sim " es de equivalencia.

Demostración. En efecto, dado $E' \subseteq E_i$ la relación es claramente reflexiva y simétrica. La transitividad también es clara, si $u \sim v$ y $v \sim w$, entonces en E' existen caminos de u a v y de v a w , por lo que en E' existe un camino de u a w . Así, si estos caminos fueron contraídos, se tiene que $u \sim w$. Por lo tanto, " \sim " es de equivalencia. □

Definición 2.3.3. Dado el i -ésimo frente \tilde{V}_i , a la partición inducida por la relación " \sim ", se le llama la i -ésima partición de eliminación inducida por $E' \subseteq E_i$.

Teorema 2.3.1. Sea $G = (V, E)$, sean G_1, G_2 dos menores de G en el mismo conjunto de aristas \bar{E}_i , tal que, si $E_\alpha^c \cup E_\alpha^d = E - \bar{E}_i = E_i$, $E_\alpha^c \cap E_\alpha^d = \emptyset$, G_α se obtiene al contraer aristas en E_α^c y borrar aristas en E_α^d ($\alpha = 1, 2$).

- i) Si la i -ésima partición de eliminación inducida por E_1^c y la inducida por E_2^c son la misma, entonces G_1 y G_2 son 2-isomorfas bajo la correspondencia del conjunto original de aristas.
- ii) Supóngase que el ordenamiento tiene una propiedad conexa. Entonces si G_1 y G_2 son 2-isomorfas bajo la correspondencia del conjunto original de aristas, la i -ésima partición de eliminación inducida por E_1^c y la inducida por E_2^c son la misma.

Demostración. i) Por hipótesis, las particiones inducidas por E_1^c y E_2^c son la misma, entonces existe $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ biyectiva, tal que, $u, v \in V$ son identificados en un vértice uv en V_1 si y sólo si u y v son identificados en $\phi(uv)$ en V_2 , y para los demás vértices $w \in V$, w es un vértice w' en V_1 si y sólo si w es un vértice $\phi(w')$ en V_2 , es decir, el vértice en V_1 que corresponde a la clase de u y v es mandado bajo ϕ al vértice en V_2 que corresponde a la misma clase. Si $\{u, v\}$ es una arista en G_1 con etiqueta j , al tener G_1 y G_2 el mismo conjunto de aristas (como etiquetas), la arista en G_2 con etiqueta j es $\{\phi(u), \phi(v)\}$. Similarmente al revés, por lo que ϕ preserva adyacencias, y se concluye que $G_1 \cong G_2$ por lo tanto, $G_1 \cong_2 G_2$.

- ii) Por contraposición. Supóngase que las particiones son diferentes. Entonces existen al menos un par de vértices u, v en el frente i -ésimo de eliminación, tal que, para G_1 , u y v están en un mismo conjunto de la partición, mientras que para G_2 , están en conjuntos diferentes (intercámbiese 1 y 2 si es necesario). Esto significa que u y v son identificados en un sólo vértice en G_1 , mientras que en G_2 no son identificados. Como el ordenamiento tiene la *propiedad conexa*, en \bar{E}_i , existe una trayectoria que conecta u con v , por lo tanto, existe un árbol generador en G_2 que contiene esta trayectoria, pero en G_1 , este conjunto de aristas, como trayectoria, no está contenida en un árbol generador, pues contendría un ciclo. Por lo tanto, G_1 y G_2 no son 2-isomorfas bajo la correspondencia original de aristas. □

Ejemplos. Considérese a K_5 y el ordenamiento con la *propiedad conexa* dado en la Figura 2.4. En la Figura 2.5 se muestran los menores obtenidos con las contracciones y borrados dados por el conjunto $E_i = E_i^c \cup E_i^d$ ($i = 3, 4$), a los que se ha aplicado el Teorema 2.3.1 en el frente i -ésimo \bar{V}_3 y \bar{V}_4 respectivamente. Cuando las particiones son iguales, los menores, en efecto, son 2-isomorfos (de hecho, isomorfos, como es dado en el teorema). Si las particiones no son iguales, como el ordenamiento tiene la *propiedad conexa*, se concluye que los menores no son 2-isomorfos, como lo muestra la figura.

Es muy importante notar que el Teorema 2.3.1 dice que los menores son 2-isomorfos bajo la correspondencia original del conjunto de aristas (nuevamente, vistas como etiquetas). Aún cuando este resultado diga que dos menores no son 2-isomorfos, no lo serán bajo las

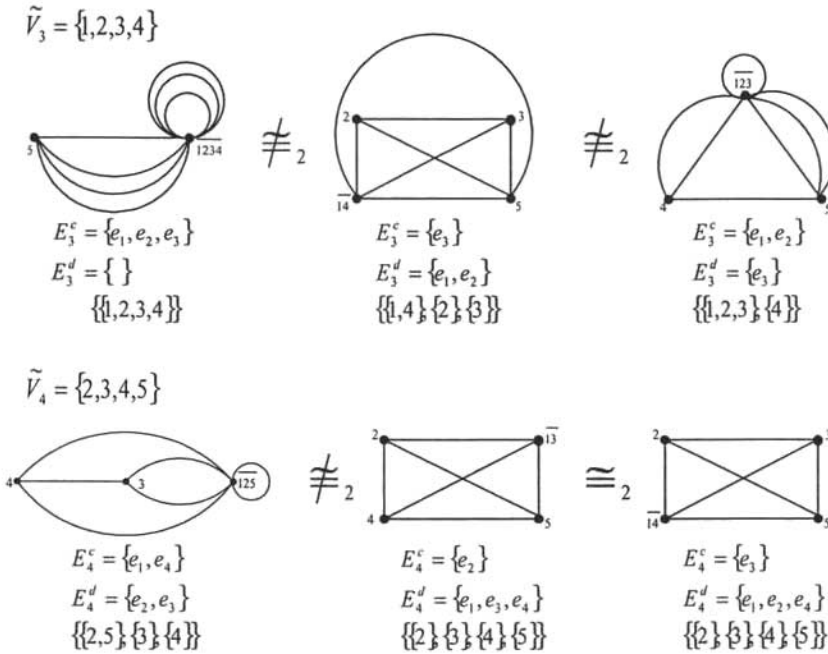


Figura 2.5: Menores de K_5 y sus particiones del i -ésimo frente de eliminación.

condiciones que pide, pero en general podrían sí ser 2-isomorfos. Como ejemplo de esto observe varios de los menores de K_4 en su DDB de la Figura 2.3 en los niveles 2,3 y 4. Nótese que la parte i) del Teorema 2.3.1 se prueba sin la hipótesis de la *propiedad conexa* en el ordenamiento de las aristas. Sin embargo, sin esta propiedad la parte ii) no es cierta en general. Considérese la gráfica de la Figura 2.6, el ordenamiento no tiene la *propiedad conexa*, ya que la gráfica se desconecta en el subconjunto de aristas $\bar{E}_4 = \{e_5, e_6, e_7, e_8\}$, el menor obtenido al contraer e_1, e_2 y borrar e_3, e_4 y el menor obtenido al contraer e_3, e_4 y borrar e_1, e_2 son 2-isomorfos (de hecho, isomorfos), mientras que las particiones $\{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\}$ y $\{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}\}$ inducidas por $\{e_1, e_2\}$ y $\{e_3, e_4\}$ respectivamente, son diferentes.

El Teorema 2.3.1 hace que el probar si dos menores en el mismo conjunto de aristas de la gráfica son 2-isomorfos, se reduzca a checar la igualdad entre particiones del conjunto \tilde{V}_i , lo cual tiene implementaciones eficientes, como la estructura de datos UNION-FIND.

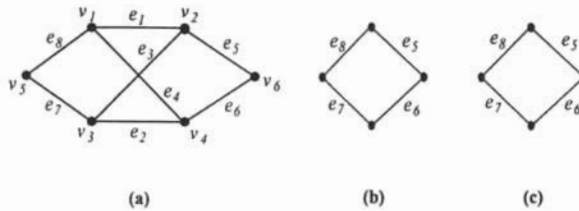


Figura 2.6: Menores 2-isomorfos con particiones distintas.

(a) Gráfica original, (b) gráfica obtenida contrayendo las aristas e_1, e_2 y borrando e_3, e_4 , (c) gráfica obtenida contrayendo e_3, e_4 y borrando e_1, e_2 . El ordenamiento de las aristas no tiene la propiedad conexa, (b) y (c) son 2-isomorfos, sin embargo las particiones correspondientes del 4to frente de eliminación no son iguales.

2.4. Cotas del espacio

Debe ser notorio que los algoritmos sólo logran reducir el espacio necesitado para calcular el polinomio de Tutte, pues de todas maneras, se deben de probar todos los menores de la gráfica G , de los cuales el número de ellos es exponencial. Para una gráfica G de n vértices, se considera a la gráfica completa K_n , como una cota superior para el espacio.

Considérese el siguiente ordenamiento de aristas para K_n , primero se enumeran los vértices de 1 a n , entonces a cada arista se le representa por (u, v) , donde $u < v$ y se ordenan las aristas en orden lexicográfico. A este ordenamiento se le llama ordenamiento canónico de una gráfica completa.

Lema 2.4.1. *El ordenamiento canónico de una gráfica completa K_n tiene la propiedad conexa.*

Teniendo el ordenamiento canónico para K_n , se procede a probar las cotas del espacio ocupado por el algoritmo (respecto a la prueba de 2-isomorfismo entre menores, basada en particiones de \tilde{V}_i). Recuérdese que el número de Bell B_n , es el número de particiones de un conjunto de n elementos, y el número Catalán C_n , es el número de particiones sin cruces [St04]. El siguiente teorema es uno de los más importantes en esta obra.

Teorema 2.4.1. i) $|L(K_n, i)| \leq 2^i$. En particular, $|L(K_n, i)| = 2^i$ con $0 \leq i \leq n - 2$ y $|L(K_n, n - 1)| = 2^{n-1} - n + 1$.

ii) Para $n \geq 4$, $|L(K_n, i)| \leq \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - (n - 1)2^{n-2} + \binom{n-1}{2}$ si $n \leq i < 2n - 3$ y $|L(K_n, 2n - 3)| = \frac{1}{2}(3^{n-2} + 1) - (n - 2)2^{n-3} + \binom{n-2}{2}$.

iii) $|L(K_n, i)| \leq B_j$ para $n(n - 1)/2 - j(j - 1)/2 \leq i < n(n - 1)/2 - (j - 1)(j - 2)/2$, y $|L(K_n, i)| = B_j$ para $n(n - 1)/2 - (n - \lfloor (n + 1)/3 \rfloor)(n - \lfloor (n + 1)/3 \rfloor - 1)/2 \leq i$.

Demostración. i) Del nivel padre al nivel hijo, el número de nodos es a lo más el doble, y como $|L(K_n, 0)| = 1$, se tiene que $|L(K_n, i)| \leq 2^i$.

En lo siguiente, recuérdese que debido al ordenamiento canónico de K_n , las $n - 1$ primeras aristas son de la forma $e_i = (1, i + 1)$ con $0 \leq i \leq n - 1$.

Para verificar que $|L(K_n, i)| = 2^i$ para $0 \leq i \leq n - 2$, nótese que $\bar{V}_i = \{j\}_{j=1}^{i+1}$, pues $E_i = \{(1, 2), (1, 3), \dots, (1, i), (1, i + 1)\}$ y $\bar{E}_i = \{(1, i + 2), (1, i + 3), \dots, (1, n), (2, 3), \dots, (n - 1, n)\}$, por lo tanto, los vértices adyacentes a aristas en E_i y \bar{E}_i son $1, 2, 3, \dots, i + 1$, luego, en E_i , las aristas solo pueden unificar a estos vértices, claramente el vértice 1 siempre es unificado (si hay al menos una contracción). Entonces la i -ésima partición para \bar{V}_i , dadas cualesquiera dos gráficas en el nivel i , tendrán la forma $\{\{1, a_1, a_2, \dots, a_k\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \dots, \{b_s\}\}$, donde $2 \leq k + s \leq i + 1$, y cada partición está determinada de manera única por las aristas que se contrajeron. Como todas las posibles particiones son diferentes, se obtiene que $|L(K_n, i)| = 2^i$.

Para verificar que $|L(K_n, n - 1)| = 2^{n-1} - n + 1$, de igual manera, nótese que $\bar{V}_{n-1} = \{j\}_{j=2}^n$, en este caso, $E_{n-1} = \{(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)\}$ y $\bar{E}_i = \{(2, 3), (2, 4), \dots, (n - 1, n)\}$. Así, los vértices adyacentes a aristas en E_i y \bar{E}_i son $2, 3, \dots, n$. Además, en este nivel, todos los menores tienen al menos una contracción, pues K_n se desconecta al borrar de un vértice sus $n - 1$ aristas.

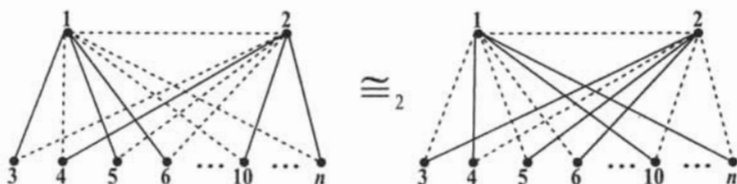
Considérese el caso en que hay solo una contracción, el total de formas posibles de esto es $n - 1$. Al haber solo una contracción de alguna arista $e_i \in E_{n-1}$, se identificaron los vértices 1 e $i + 1$, sin embargo, $1 \notin \bar{V}_{n-1}$, así que la partición $(n - 1)$ -ésima, en cualquier caso, es $\{\{i + 1\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \dots, \{b_s\}\}$ con $b_j \neq i + 1 \quad \forall j$. Por el Teorema 2.3.1 i), estas $n - 1$ gráficas son 2-isomorfas y el algoritmo las colapsa en una sola (un representante de la partición). Entonces, se tiene que $|L(K_n, n - 1)| \leq 2^{n-1} - (n - 1) = 2^{n-1} - n + 1$.

Se afirma que la desigualdad anterior se mantiene por igualdad estricta. Supóngase que hay mas de una contracción, entonces se identificaron el vértice 1 y otros vértices (al menos dos mas), en este caso, la partición para cualquier menor con mas de una contracción es de la forma $\{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \dots, \{b_s\}\}$, donde $|\{i_1, i_2, \dots, i_k\}| \geq 2$ y $0 \leq s \leq n - 3$. Todas estas particiones son diferentes, por lo tanto, la desigualdad estricta no se puede dar, con lo cual $|L(K_n, n - 1)| = 2^{n-1} - n + 1$.

ii) Sea $n \geq 4$, se vera primero que $|L(K_n, 2n - 3)| = \frac{1}{2}(3^{n-2} + 1) - (n - 2)2^{n-3} + \binom{n-2}{2}$.

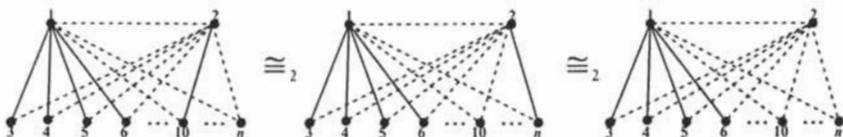
En el nivel $2n - 3$, se han borrado ó contraído todas las aristas de los vértices 1 y 2. Primero supóngase que 1 no fue contraído con 2, entonces para cada uno de los $n - 2$ vértices que quedan, sólo tienen 3 posibilidades: O fue contraído con 1, ó fue contraído con 2 ó fue borrado, supóngase también que no hay algún vértice que es contraído tanto con 1 y con 2, entonces se tiene una partición de los $n - 2$ vértices, el número total de particiones es $3^{n-2} - 1$ (se quita la partición que corresponde cuando se borran todas

las aristas de 1 y 2). Pero en este conteo, hay muchas gráficas que son 2-isomorfas. Considérese el caso cuando se tiene, por ejemplo, que $1 \sim 3 \sim 5 \sim 6$, $2 \sim 4 \sim 10 \sim n$ y los demás vértices no están relacionados, la partición inducida por esta relación es la misma que es inducida por $1 \sim 4 \sim 10 \sim n$, $2 \sim 3 \sim 5 \sim 6$ y los demás vértices no relacionados (es decir, intercambiamos las contracciones de 1 y 2), pues $1, 2 \notin \tilde{V}_{2n-3}$. Por lo tanto, el total de nodos, contando nuevamente el caso donde se borran todas las aristas de 1 y 2 es $\frac{1}{2}(3^{n-2} - 1) + 1 = \frac{1}{2}(3^{n-2} + 1)$.



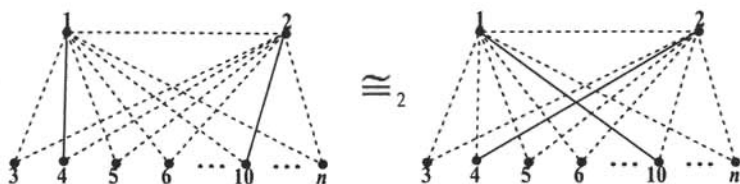
Sin embargo, en este conteo, aún se están repitiendo muchos menores 2-isomorfos, como es el caso donde sólo se contrae una arista de 2 y se contraen k aristas de 1 ($k \geq 0$), hay $n - 2 - k$ particiones idénticas para cada k , que se están repitiendo, dado k fijo, se tienen $\binom{n-2}{k}$ posibles subconjuntos de vértices que se contraen con 1, quedando para 2, $n - 2 - k$ posibles vértices para contraer, en total $\binom{n-2}{k} (n - 2 - k)$, sumando estas cantidades sobre k ,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-2}{k} (n - 2 - k) &= (n - 2) \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-2}{k} - \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-2}{k} k \\
 &= (n - 2) \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-2}{k} - \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-2}{k} k \\
 &\quad + \binom{n-2}{n-2} (n - 2) - \binom{n-2}{n-2} (n - 2) \\
 &= (n - 2) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} k \\
 &= (n - 2) 2^{n-2} - (n - 2) 2^{n-3} \\
 &= (n - 2) 2^{n-3}.
 \end{aligned}$$

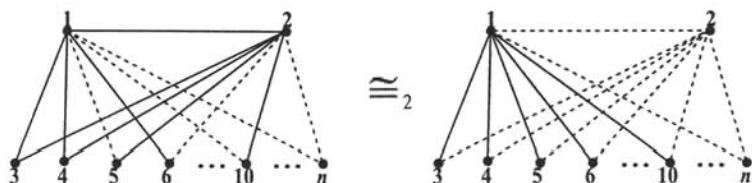


Dejando como único representante de estas gráficas el caso en el cual 2 no contrae ninguna arista, los menores a los que corresponden estas particiones están de mas, por lo tanto, se tienen $\frac{1}{2}(3^{n-2} + 1) - (n - 2)2^{n-3}$.

Y por último, al restar este termino, se están quitando algunos menores de mas, pues cuando $k = 1$, se quitan todas las posibles particiones que no inducen 2-isomorfismo. En este caso, tanto 1 como 2 se contraen cada uno con un vértice distinto, por lo que el total de posibilidades es $\binom{n-2}{2}$, dando un total de nodos de $\frac{1}{2}(3^{n-2} + 1) - (n - 2)2^{n-3} + \binom{n-2}{2}$.



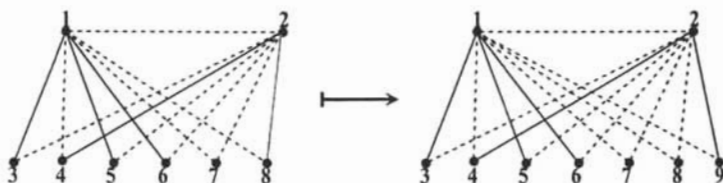
Para verificar que este es el total, falta considerar el caso en el que $1 \sim 2$, esto puede suceder de 2 maneras, 1 se contrajo con 2 directamente, o están relacionados por uno o mas vértices que ambos contrajeron en común, en cualquier caso, se puede ver que estas particiones ya están contadas, por ejemplo, si se tiene que $1 \sim 2 \sim 3 \sim 4 \sim 5 \sim 6 \sim 10$ y los demás vértices separados, entonces la partición inducida es la misma dada por $1 \sim 3 \sim 4 \sim 5 \sim 6 \sim 10$, 2 con todas sus aristas borradas y los demás vértices separados.



Y se han contado todos los nodos en el nivel $2n - 3$.

Para probar que $|L(K_n, i)| \leq \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - (n - 1)2^{n-2} + \binom{n-1}{2}$ si $n \leq i < 2n - 3$ (i.e. aun no se borran todas las aristas adyacentes a 2 y al menos queda la última, $(2, n)$), nótese que la ecuación a la derecha corresponde al número de nodos en el nivel $2(n+1) - 3$ de K_{n+1} . Ahora, dada una partición correspondiente a un nodo en $L(K_n, i)$, se le asocia una de un nodo en $L(K_{n+1}, 2(n+1) - 3)$ de la siguiente manera: Tómesese una partición que tiene la restricción de que la arista $(2, n)$ fue borrada y la arista

$(2, n+1)$ es contraída, mándese la clase del vértice 2 a la clase del vértice $n+1$. Por ejemplo, si $n = 8$ y se tiene que $1 \sim 3 \sim 5 \sim 6, 2 \sim 4$ esta relación induce la partición $\{\{3, 5, 6\}, \{2, 4\}, \{7\}, \{8\}\}$, a la cual se le asignaría $\{\{3, 5, 6\}, \{7\}, \{8\}, \{9, 4\}\}$.



Esta asignación está bien definida y claramente es inyectiva, por lo tanto, se tiene que $|L(K_n, i)| \leq |L(K_{n+1}, 2(n+1) - 3)| = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - (n-1)2^{n-2} + \binom{n-1}{2}$.

- iii) Si i y j son tales que $n(n-1)/2 - j(j-1)/2 \leq i \leq n(n-1)/2 - (j-1)(j-2)/2$, entonces el número de aristas r que aún no se borran ó contraen cumple con $j(j-1)/2 \leq r \leq (j-1)(j-2)/2$, por lo tanto el i -ésimo frente de eliminación tiene j vértices, y del Teorema 2.3.1, el número de nodos en el nivel i está acotado por el número Bell B_j . Por último, cuando $i \geq n(n-1)/2 - (n - \lfloor (n+1)/3 \rfloor)(n - \lfloor (n+1)/3 \rfloor - 1)/2$, el número de aristas que quedan es a lo más $(n - \lfloor (n+1)/3 \rfloor)(n - \lfloor (n+1)/3 \rfloor - 1)/2$, por lo que ya se han borrado y contraído más de la mitad de aristas de K_n . Entonces cualquier partición del i -ésimo frente de eliminación \tilde{V}_i es realizable, pues dada una partición, hay suficientes aristas procesadas para conseguirla, y se concluye que $|L(K_n, i)| = B_j$. □

Corolario 2.4.1. Para todo entero $n \geq 12$, dado el DDB de K_n , se tiene que,

$$W(B_{K_n}) \leq B_{n-2}.$$

Demostración. Es claro que $B_{n-2} > C_{n-2}$, y este último crece de forma proporcional a $\frac{4^{n-2}}{\sqrt{\pi n^7(n+1)}}$, que es mayor que $\frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - (n-1)2^{n-2} + \binom{n-1}{2} \forall n \geq N$ suficientemente grande. Así, B_{n-2} es mayor que esta cantidad. De hecho, esto es cierto tomando $N = 12$, con lo que se tiene el resultado. □

Hasta este momento, estos resultados son válidos sólo para la gráfica completa K_n . Para poder extender estos resultados a cualquier gráfica G conexa, es necesario encontrar un ordenamiento de sus aristas con la *propiedad conexa*. El siguiente lema garantiza la existencia de tal ordenamiento.

Lema 2.4.2. Para toda gráfica simple conexa G , existe un ordenamiento de sus aristas con la propiedad conexa.

Demostración. Como G es conexa, por la Proposición 1.1.2 existe un árbol generador de G . Escójase una hoja del árbol y se le marca como raíz del mismo. Entonces enumérense los vértices de la gráfica recorriendo el árbol en postorden (es decir, primero se recorren todos los vecinos del vértice actual, y al final se marca a éste), empezando en el vértice raíz. Como en el caso de la gráfica completa, representamos cada arista como un par ordenado (u, v) , donde $u < v$, y ordénense las aristas en orden lexicográfico. De este modo, se tiene un ordenamiento de G con la propiedad conexa. \square

Ejemplo. A la gráfica de la Figura 2.7 se ha aplicado el Lema 2.4.2, primero se encuentra cualquier árbol generador. Luego, se escoge un vértice hoja (v_4 en este caso) y a partir de éste, se recorre el árbol en postorden, de este modo se obtiene una nueva enumeración de todos los vértices. Finalmente, se ordenan las aristas en orden lexicográfico. Intuitivamente, con este ordenamiento, primero se eliminan las aristas de los vértices más profundos del árbol generador.

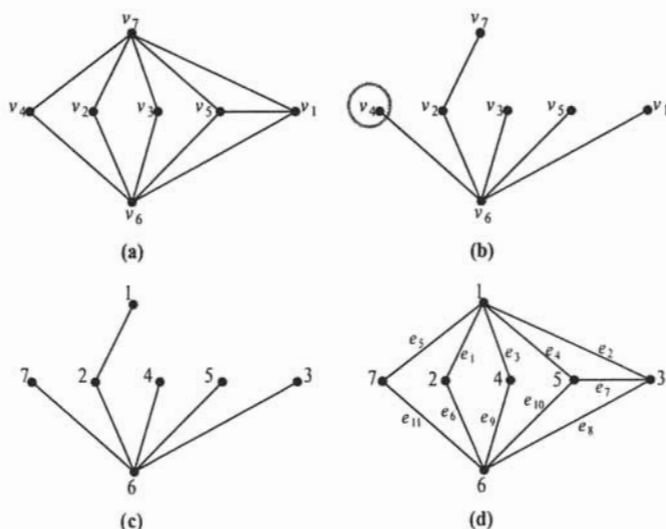


Figura 2.7: Ordenamiento con la propiedad conexa de una gráfica cualquiera.

(a) Gráfica original. (b) Un árbol generador de la gráfica. (c) Reenumeración de los vértices después de recorrer el árbol en postorden. (d) Ordenamiento de las aristas con la propiedad conexa.

Usando el Lema 2.4.2, se tiene que para cualquier gráfica G conexa de n vértices, el ancho del DDB $W(\mathcal{B})$, está acotado por el ancho del DDB de la gráfica completa del mismo número de vértices, el cual está acotado por el número de Bell B_{n-2} . Así, esta es la cota máxima del espacio ocupado por el algoritmo para calcular el polinomio de Tutte de G .

2.5. Implementación

Todos los detalles técnicos del programa para el cálculo del polinomio de Tutte se dan a continuación, se empieza con un análisis del marco de trabajo de Teoría de Gráficas que presentan las interfaces, haciendo las bibliotecas del programa útiles en cualquier aplicación programable de gráficas, después se dan los detalles más importantes de la implementación de los algoritmos expuestos en [SIT95] y otros, como por ejemplo, la construcción de las particiones del algoritmo para la prueba de 2-isomorfismo entre menores de una gráfica en el mismo conjunto de aristas.

El lenguaje de programación que se escogió es JavaTM, esto debido a la variedad de sistemas en los que se ejecuta, de este modo es innecesario que quien quiera usar el programa tan pronto como sea posible, tenga que pasar por el tedioso proceso de obtener el código fuente, compilarlo, instalarlo, etc. Por supuesto, el código fuente está disponible bajo las licencias GPL y LGPL², el kit de desarrollo de Java que se utilizó para programar, compilar y depurar es el Sun JDK 1.5 (Java 5).³

2.5.1. Marco de trabajo de Teoría de Gráficas

La base de las bibliotecas programadas es la abstracción de el concepto de gráfica, esta se compone de los siguientes elementos:

- Abstracción e implementación de gráficas.
- Construcción de gráficas.
- Algoritmos de gráficas.

Implementación de gráficas. Esto se lleva a cabo a través de las interfaces **GraphObject** y **Graph**. Un vértice se representa por un entero de 16 bits, las aristas son manejadas internamente por la implementación, en el exterior, se representan por un identificador (un entero de 16 bits), ó un par de vértices, y para esta última, se puede usar las clases **EdgeObject** (generalización de una arista y un arco, es decir, lo que ambos tienen en común) y **Edge** (una arista de una gráfica). De esta manera, la forma en que la gráfica es representada queda escondida del exterior, el cual solo ve la interfaz y los métodos que se proporcionan, estas son las interfaces:

²<http://www.gnu.org>

³Disponible en <http://java.sun.com>

```
package mx.unam.matem.maths.graphs;

import java.util.Collection;
import java.lang.Iterable;

public interface GraphObject {

    public Collection<Short> vertices();

    public boolean areIncident(short vi, short vj);

    public Collection<Short> neighborsOf(short v);

    public void addVertex(short v);

    public void removeVertex(short v);

    public int degreeOf(short v);

    public boolean hasVertex(short v);

    public String name();

    public int nvertices();
}
```

```
package mx.unam.matem.maths.graphs.graph;

import java.util.Collection;
import java.lang.Iterable;

import mx.unam.matem.maths.graphs.GraphObject;

public interface Graph extends GraphObject {

    public static final byte DeleteEdge = 1;

    public static final byte ContractEdge = 2;
```

```
public Collection<Short> edges();

public void addEdge(short edge_id, short v, short u);

public Edge removeEdge(short u, short v);

public boolean isLoop(short u, short v);

public boolean hasEdge(short u, short v);

public int nedges();

public Collection<Short> incidentEdgesOf(short v);

public Graph deleteEdge(short u, short v);

public Graph contractEdge(short u, short v);

public Edge removeEdge(short edge_id);

public boolean isLoop(short edge_id);

public boolean hasEdge(short edge_id);

public Graph deleteEdge(short edge_id);

public Graph contractEdge(short edge_id);

public boolean edgeHasVertex(short edge_id, short u);

public boolean edgesEqualsByVertices(short e1, short e2);

public short edge_u(short edge_id);

public short edge_v(short edge_id);
}
```

Como ha sido discutido, en los algoritmos, es necesario guardar para las aristas, no solo el par de vértices que la forman, también el identificador con el cual se les da un ordenamiento, y este es heredado a los menores. Por lo que esto agrega un pequeño factor lineal en $|E|$ a la complejidad del espacio ocupado para representar la gráfica. El programa cuenta con siete implementaciones de la interfaz **Graph**, cada implementación debe mantener la lista

de identificadores de los vértices y las aristas, esto es importante, pues si no se hace, no es posible mantener el ordenamiento de las aristas al calcular el polinomio de Tutte ó una evaluación:

ALGraph. Implementación basada en listas de adyacencias. Utiliza un hash para guardar los identificadores de las aristas. Es la más eficiente en velocidad, pero ocupa mucho espacio.

IMBoolGraph. Implementación basada en matriz de incidencia, con valores de tipo booleano (utiliza la clase **BitSet** de java). Utiliza arreglos para guardar los identificadores de las aristas, eficaz en memoria, pero mucho menos veloz.

IMBBvBeGraph. Variante de **IMBoolGraph**, guarda los identificadores de los vértices y las aristas en enteros de 8 bits.

IMBBvSleGraph. Variante de **IMBoolGraph**, guarda los identificadores de los vértices en enteros de 8 bits y los identificadores de las aristas en enteros de 16 bits.

BitsGraph. Implementación basada en bits. El conjunto de vértices se guarda en un objeto **BitSet**, y las aristas se guardan en un entero de 32 bits (16 bits para cada vértice); los identificadores los guarda en enteros de 16 bits. Es la más rápida despues de **ALGraph** y la que menos recursos de memoria requiere.

BitsBvBeGraph. Variante de **BitsGraph**, para las aristas usa enteros de 16 bits (8 bits para cada vértice) y guarda los identificadores de las aristas en enteros de 8 bits.

BitsBvSleGraph. Variante de **BitsGraph**, para las aristas usa enteros de 16 bits y guarda los identificadores de las aristas en enteros de 16 bits.

Las variantes de **IMBoolGraph** y **BitsGraph** fueron programadas con el propósito de ahorrar el máximo de espacio, aunque, por supuesto, sólo pueden ser usadas para gráficas muy pequeñas. La forma en la cual se construye una gráfica de alguna de estas implementaciones se describe a continuación.

Construcción de gráficas. Para utilizar alguna de las implementaciones de la interfaz **Graph**, se tiene la clase **GraphFactory**. Solo existe una instancia de esta clase, a la cual se accede a través del método estático **factory()**. En esta clase se alberga una colección de «constructores» que son responsables de construir gráficas a partir de una implementación dada. Un constructor de **GraphFactory** debe implementar la interfaz **GraphBuilder**, la cual sólo tiene el método **newInstance()**, que es donde se construye la gráfica de una implementación de la interfaz **Graph**. Al iniciar el programa, automáticamente se registran en la fábrica un constructor por cada implementación. Antes de intentar construir una gráfica, se le debe decir a la fábrica que constructor usar, hay dos maneras de hacer esto: Se puede utilizar el método **setDefaultBuilder()**, y usar los métodos para construcción de

gráficas con este constructor de default, o seleccionar el constructor dinámicamente con los métodos de construcción que requieren que se les especifique el constructor a usar. Habiendo seleccionado un constructor, el proceso para solicitar la construcción de una gráfica es muy sencillo. Por ejemplo, si se desea una gráfica sin vértices ni aristas para construcción manual, se usa el método `newGraph()`, si se desea una instancia de K_n , se usa el método `buildKn()`, etc. **GraphFactory** puede construir una amplia gama de clases de gráficas muy conocidas, en particular, tiene métodos para construir miembros de las familias de gráficas descritas en el Capítulo 1.

Algoritmos de gráficas. Una vez que se cuenta con las gráficas a manipular, esto se hace en gran manera a través de los métodos de la clase **GraphAlgorithms**, la cual contiene varios de los algoritmos más conocidos de la teoría de gráficas. Se notará que muchos de estos métodos tienen su contraparte en la interfaz **Graph**, sin embargo, no se aconseja usar estos directamente, ¿Porque tener la contraparte de estos métodos en **GraphAlgorithms**? Esto es debido a que las versiones programadas en **GraphAlgorithms** son «genéricas», y no están optimizadas para ciertas representaciones de gráficas, por ejemplo quizá la implementación de **Graph** tenga una versión de alguno de estos métodos que se ejecuta más rápido que la versión en **GraphAlgorithms**, la cual puede detectar si la implementación cuenta con una versión propia, si es así, usará esta, si no, entonces usará la versión genérica. Si la implementación no puede dar una versión más rápida, el programador puede ahorrarse un poco de trabajo.

Algunos de los algoritmos implementados son: encontrar los vecinos de un vértice (`neighborsOf`), calcular el grado de un vértice (`degreeOf`), encontrar el número de componentes conexas (`nconnectedComponents`), saber si la gráfica es conexa (`isConnected`), saber si es un árbol (`isTree`), construir un menor (`makeMinor`) etc. Muchos de estos algoritmos fueron tomados de [CLRS01].

De esta manera se tiene un marco de trabajo muy versátil y flexible, para implementar resultados de la teoría de gráficas, el usuario puede hacer su propia implementación de la interfaz **Graph**, y decirle a **GraphFactory** que la utilice en lugar de las implementaciones que vienen en la biblioteca, y no tiene que modificar una sola línea de código de los algoritmos, pues a través de las interfaces, la implementación es transparente para el resto de las clases.

2.5.2. Implementación de los algoritmos para el cálculo del polinomio de Tutte

Basado en el marco de trabajo descrito anteriormente, se hace la implementación de los algoritmos para calcular el polinomio de Tutte de una gráfica G . Los procedimientos residen dentro de la clase **GraphAlgorithms** y son los siguientes:

- `tuttePolynomial` - Calcula el polinomio de Tutte.

- **tuttePolynomialEval** - Evalúa el polinomio de Tutte en puntos del plano, se permiten valores enteros, utiliza la clase **BigInteger** de Java.
- **tuttePolynomialEvalD** - Evalúa el polinomio de Tutte en puntos del plano, se permiten valores reales, utiliza la clase **BigDecimal** de Java.

Estos procedimientos implementan los algoritmos descritos en este capítulo. Para manejar polinomios se tienen dos clases:

- **Polynomial1v** - Abstracción de un polinomio en el anillo $\mathbb{Z}[x]$, utiliza la clase **BigInteger** para manejar los coeficientes.
- **Polynomial2v** - Abstracción de un polinomio en el anillo $\mathbb{Z}[x, y]$, utiliza a la clase **Polynomial1v** como coeficientes, es decir, la implementación simula el anillo $(\mathbb{Z}[x])[y] \cong \mathbb{Z}[x, y]$.

Ambas clases pueden escribir los polinomios en un archivo, en formatos compatibles con \LaTeX , Maple, HTML y texto simple.

Por ultimo, se describe una parte fundamental de la implementación: La prueba de 2-isomorfismo de dos menores de G en el mismo conjunto de aristas, basada en el Teorema 2.3.1. Con este resultado, y dada la hipótesis de que se tiene un ordenamiento en las aristas con la *propiedad conexa*, el checar si dos menores G_1, G_2 son 2-isomorfos se reduce a probar la igualdad entre dos particiones de un subconjunto del conjunto de vértices V de G , las particiones se generan utilizando la estructura de datos UNION-FIND, esta se encuentra en la clase **BSIPartitionMaker**:

```
package mx.unam.matem.maths.util;

import java.util.BitSet;
import java.util.Collection;
import java.util.Map;
import java.util.HashSet;
import java.util.HashMap;

public class BSIPartitionMaker {

    private Map<Integer, BitSet> partition;

    private Map<Integer, Integer> m;
```

```
public BSIPartitionMaker() {
    partition = new HashMap<Integer, BitSet>();
    m = new HashMap<Integer, Integer>();
}

protected void finalize() {
    partition.clear();
    m.clear();

    partition = null;
    m = null;
}

public void makeSet(int x) {
    BitSet nl = new BitSet(13);

    nl.set(x);
    m.put(x, x);
    partition.put(x, nl);
}

public void union(int x, int y) {
    int px, py;

    px = m.get(x);
    py = m.get(y);

    if (px != py) {
        BitSet lx, ly, f, l;
        int pf, pl;

        lx = partition.get(px);
        ly = partition.get(py);

        if (lx.cardinality() > ly.cardinality()) {
            f = lx;
            l = ly;

            pf = px;
            pl = py;
        } else {
            f = ly;
```

```

        l = lx;

        pf = py;
        pl = px;
    }

    f.or(l);

    for (int inl = l.nextSetBit(0); inl >= 0;
         inl = l.nextSetBit(inl + 1))
        m.put(inl, pf);

    partition.remove(pl);
}
}

public int findSet(int x) {
    return m.get(x);
}

public Collection<BitSet> partition() {
    return new HashSet<BitSet>(partition.values());
}

public void clear() {
    partition.clear();
    m.clear();
}
}
}

```

Esta clase implementa la estructura de datos UNION-FIND, que es capaz de construir las clases de equivalencia de la relación " \sim ", dado el i -ésimo frente de eliminación. Los conjuntos son codificados en objetos **BitSet** para ahorrar espacio y tiempo. El método **makeSet** crea un nuevo conjunto con un sólo elemento, **findSet** regresa un representante de la clase de equivalencia del parámetro que recibe, y el más importante, **union**, hace la unión de las clases de equivalencia de sus dos argumentos. Para conocer más de UNION-FIND, consúltese [CLRS01].

La clase **BSIPartitionMaker** es utilizada por la clase **IsomorphismByPartitions** que implementa el método **testIsomorphism** de la interfaz **IsomorphismTester**, de este modo, si se hallara otra forma de probar isomorfismo (2-isomorfismo) entre los menores, los cambios al programa serían mínimos.

```
public boolean testIsomorphism(Graph gm, Graph hm,
```



```
                                Object[] tools) {
if (gm.nvertices() != hm.nvertices())
    return false;

Collection<BitSet> gmip, hmip;

BDDNode<Collection<BitSet>> node;

int newi;

if (mgraph == null)
    mgraph = (Graph) tools[0];

newi = (Integer) tools[1];

node = (BDDNode<Collection<BitSet>>) tools[2];

if (bsvs == null)
    bsvs = vset2bitset(mgraph.vertices());

if (mges == null)
    mges = mgraph.edges();

if (newi != currenti) {
    BitSet bsvif;

    bsvifc.clear();
    bsvifc.or(bsvs);

    currenti = newi;

    ei.clear();
    ei.addAll(mges);

    eic.clear();
    eic.addAll(mges);

    ei.removeAll(gm.edges());
    eic.removeAll(ei);

    bsvifc.xor(bsvif = makeEliminationFront(ei, eic));
    bsvifc.andNot(bsvif);
}
```

```

}

gmip = (Collection<BitSet>) tools[3];

if (gmip == null) {
    gmec.clear();
    gmec.or((BitSet) tools[4]);

    gmip = makeEliminationPartition(gmec);
    tools[3] = gmip;
}

if ((hmip = node.info()) == null) {
    hmec.clear();
    hmec.or(node.getCEdges());

    hmip = makeEliminationPartition(hmec);

    node.setInfo(hmip);
}

if (gmip.equals(hmip))
    return true;

return false;
}

```

Para no recalcular las particiones innecesariamente, estas se guardan como objetos de tipo **BitSet**, en el nodo del DDB donde está el menor que le corresponde.

2.6. TuLiC

Para finalizar el presente capítulo, se introduce el nombre de la implementación completa, el programa se llama **TuLiC** (*The Tutte Polynomial Calculator*). Cabe mencionar además, que el que los algoritmos se hayan implementado en Java tiene muchas ventajas, pero una desventaja que fue notoria al poner a trabajar el programa, es que no se alcanzaron los límites que se mencionan en [SIT95]. Por ejemplo, no ha sido posible calcular con el programa $T(K_{14}; x, y)^4$; además, el algoritmo necesita mas tiempo y espacio, debido al manejo de memoria que el recolector de basura de Java ejecuta, por lo que claramente se tiene un intercambio crucial entre portabilidad y eficiencia. Por último, se dan algunos ejemplos de uso de

⁴Al menos no con la cantidad de memoria de que se disponía: 1024M.

TuliC, estos fueron hechos en Linux, se utiliza el comando **time** para saber cuanto tiempo tarda en calcular la operación solicitada. La computadora donde se realizaron estos ejemplos tiene un procesador de 2.4Ghz y 256M de memoria.

Genera el polinomio de Tutte de K_{10} en todos los formatos (HTML, \LaTeX , Maple y texto simple), usando la implementación de **Graph** de listas de adyacencia.

```
<<-- rodolfo [TuLiC2] -->> time java -jar tulic2.jar -w alg poly -f all kn 10
TuLiC version 2rc1
```

```
Using worker alg
```

```
Executing the requested operation...please wait...
```

```
L(K_10, 0) has 1 nodes.
L(K_10, 1) has 2 nodes.
L(K_10, 2) has 4 nodes.
L(K_10, 3) has 8 nodes.
L(K_10, 4) has 16 nodes.
L(K_10, 5) has 32 nodes.
L(K_10, 6) has 64 nodes.
L(K_10, 7) has 128 nodes.
L(K_10, 8) has 256 nodes.
L(K_10, 9) has 503 nodes.
L(K_10, 10) has 623 nodes.
L(K_10, 11) has 800 nodes.
L(K_10, 12) has 1060 nodes.
L(K_10, 13) has 1440 nodes.
L(K_10, 14) has 1992 nodes.
L(K_10, 15) has 2788 nodes.
L(K_10, 16) has 3926 nodes.
L(K_10, 17) has 2285 nodes.
L(K_10, 18) has 2415 nodes.
L(K_10, 19) has 2570 nodes.
L(K_10, 20) has 2753 nodes.
L(K_10, 21) has 2967 nodes.
L(K_10, 22) has 3215 nodes.
L(K_10, 23) has 3500 nodes.
L(K_10, 24) has 877 nodes.
L(K_10, 25) has 877 nodes.
L(K_10, 26) has 877 nodes.
L(K_10, 27) has 877 nodes.
L(K_10, 28) has 877 nodes.
L(K_10, 29) has 877 nodes.
L(K_10, 30) has 203 nodes.
L(K_10, 31) has 203 nodes.
L(K_10, 32) has 203 nodes.
L(K_10, 33) has 203 nodes.
L(K_10, 34) has 203 nodes.
L(K_10, 35) has 52 nodes.
L(K_10, 36) has 52 nodes.
L(K_10, 37) has 52 nodes.
L(K_10, 38) has 52 nodes.
L(K_10, 39) has 15 nodes.
L(K_10, 40) has 15 nodes.
L(K_10, 41) has 15 nodes.
L(K_10, 42) has 5 nodes.
L(K_10, 43) has 5 nodes.
L(K_10, 44) has 2 nodes.
L(K_10, 45) has 1 nodes.
```

```
java -jar tulic2.jar -w alg poly -f all kn 10 2:10.75 total
```

Calcula el número de árboles de $K_{2,3,4}$.

```
<<-- rodolfo [TuLiC2] --> time java -jar tulic2.jar eval -xy 1 1 mp 2 3 4
TuLiC version 2rc1
```

```
Using default worker imbg
```

```
Executing the requested operation...please wait...
```

```
L(K_2_3_4, 0) has 1 nodes.
L(K_2_3_4, 1) has 2 nodes.
L(K_2_3_4, 2) has 4 nodes.
L(K_2_3_4, 3) has 8 nodes.
L(K_2_3_4, 4) has 16 nodes.
L(K_2_3_4, 5) has 32 nodes.
L(K_2_3_4, 6) has 64 nodes.
L(K_2_3_4, 7) has 121 nodes.
L(K_2_3_4, 8) has 242 nodes.
L(K_2_3_4, 9) has 357 nodes.
L(K_2_3_4, 10) has 493 nodes.
L(K_2_3_4, 11) has 673 nodes.
L(K_2_3_4, 12) has 921 nodes.
L(K_2_3_4, 13) has 1265 nodes.
L(K_2_3_4, 14) has 667 nodes.
L(K_2_3_4, 15) has 692 nodes.
L(K_2_3_4, 16) has 720 nodes.
L(K_2_3_4, 17) has 751 nodes.
L(K_2_3_4, 18) has 203 nodes.
L(K_2_3_4, 19) has 203 nodes.
L(K_2_3_4, 20) has 203 nodes.
L(K_2_3_4, 21) has 203 nodes.
L(K_2_3_4, 22) has 52 nodes.
L(K_2_3_4, 23) has 15 nodes.
L(K_2_3_4, 24) has 5 nodes.
L(K_2_3_4, 25) has 2 nodes.
L(K_2_3_4, 26) has 1 nodes.
T(K_2_3_4; 1, 1) = 283500
Bytes used in integer: 3
java -jar tulic2.jar eval -xy 1 1 mp 2 3 4 10.116 total
```

Por lo tanto, $T(K_{2,3,4}; 1, 1) = 283500$.

Calcula el polinomio de Tutte de la gráfica con 10 vértices y 22 aristas dada en el archivo **graph.e**, en formato para \LaTeX .

```
<<-- rodolfo [TuLiC2] --> cat graph.e
10 22
0 5 0 6 0 7 0 8 1 5 1 6 1 8 1 9 2 6 2 7 2 8 2 9 3 7 3 9 4 8
5 7 5 9 6 7 6 8 6 9 7 9 8 9

<<-- rodolfo [TuLiC2] --> time java -jar tulic2.jar poly -f tex -r graph.e
TuLiC version 2rc1
```

Executing the requested operation...please wait...

```
L(G, 0) has 1 nodes.
L(G, 1) has 2 nodes.
L(G, 2) has 4 nodes.
L(G, 3) has 8 nodes.
L(G, 4) has 12 nodes.
L(G, 5) has 24 nodes.
L(G, 6) has 33 nodes.
L(G, 7) has 41 nodes.
L(G, 8) has 44 nodes.
L(G, 9) has 44 nodes.
L(G, 10) has 45 nodes.
L(G, 11) has 90 nodes.
L(G, 12) has 48 nodes.
L(G, 13) has 48 nodes.
L(G, 14) has 48 nodes.
L(G, 15) has 48 nodes.
L(G, 16) has 49 nodes.
L(G, 17) has 49 nodes.
L(G, 18) has 15 nodes.
L(G, 19) has 15 nodes.
L(G, 20) has 5 nodes.
L(G, 21) has 2 nodes.
L(G, 22) has 1 nodes.
```

```
java -jar tulic2.jar poly -f tex -r graph.e 3.548 total
```

Asi, $T(G; x, y) = x^9 + 13x^8 + 75x^7 + 16x^7y + 246x^6 + 158x^6y + 32x^6y^2 + 3x^6y^3 + 487x^5 + 658x^5y + 326x^5y^2 + 100x^5y^3 + 20x^5y^4 + 2x^5y^5 + 571x^4 + 1302x^4y + 1217x^4y^2 + 705x^4y^3 + 303x^4y^4 + 99x^4y^5 + 21x^4y^6 + 2x^4y^7 + 361x^3 + 1358x^3y + 2041x^3y^2 + 1874x^3y^3 + 1279x^3y^4 + 708x^3y^5 + 322x^3y^6 + 113x^3y^7 + 28x^3y^8 + 4x^3y^9 + 94x^2 + 646x^2y + 1501x^2y^2 + 2014x^2y^3 + 1947x^2y^4 + 1516x^2y^5 + 1001x^2y^6 + 567x^2y^7 + 270x^2y^8 + 105x^2y^9 + 32x^2y^{10} + 7x^2y^{11} + x^2y^{12} + 94xy + 379xy^2 + 732xy^3 + 943xy^4 + 937xy^5 + 774xy^6 + 551xy^7 + 341xy^8 + 181xy^9 + 80xy^{10} + 28xy^{11} + 7xy^{12} + xy^{13}$.

Calcula el número de bosques generadores de $L_{100,3}$.

```
<<- rodolfo [TuLic2] --> time java -jar tulic2.jar eval -xy 2 1 ltt 100 3
TuLic version 2rc1
```

```
Using default worker imbg
```

Executing the requested operation...please wait...

```
L(L_100_3, 0) has 1 nodes.
L(L_100_3, 1) has 2 nodes.
L(L_100_3, 2) has 2 nodes.
L(L_100_3, 3) has 4 nodes.
L(L_100_3, 4) has 5 nodes.
L(L_100_3, 5) has 5 nodes.
L(L_100_3, 6) has 5 nodes.
L(L_100_3, 7) has 5 nodes.
L(L_100_3, 8) has 5 nodes.
L(L_100_3, 9) has 5 nodes.
L(L_100_3, 10) has 5 nodes.
```

```
...
L(L_100_3, 480) has 5 nodes.
L(L_100_3, 481) has 5 nodes.
L(L_100_3, 482) has 5 nodes.
L(L_100_3, 483) has 5 nodes.
L(L_100_3, 484) has 5 nodes.
L(L_100_3, 485) has 5 nodes.
L(L_100_3, 486) has 5 nodes.
L(L_100_3, 487) has 5 nodes.
L(L_100_3, 488) has 5 nodes.
L(L_100_3, 489) has 5 nodes.
L(L_100_3, 490) has 5 nodes.
L(L_100_3, 491) has 5 nodes.
L(L_100_3, 492) has 5 nodes.
L(L_100_3, 493) has 5 nodes.
L(L_100_3, 494) has 5 nodes.
L(L_100_3, 495) has 5 nodes.
L(L_100_3, 496) has 2 nodes.
L(L_100_3, 497) has 1 nodes.
T(L_100_3; 2, 1) = 225478585859752349181636377196073231866890680...
Bytes used in integer: 60
java -jar tulic2.jar eval -xy 2 1 ltt 100 3 5:51.23 total
```

Por lo tanto, $T(L_{100,3}; 2, 1) = 225478585859752349181636377196073231866890680533837921810262163713223611619316994725054090808562613332640931756514576704662429783302765491316058$.

Con esto se concluye el presente capítulo.

Capítulo 3

Aplicaciones

Ahora que se cuenta con un programa eficiente para calcular el Polinomio de Tutte de gráficas pequeñas, se utilizará como herramienta para intentar, junto con la teoría, obtener nuevos resultados en varias áreas donde este polinomio juega un papel principal. Se presentan resultados teóricos y experimentos realizados para intentar desmentir ó confirmar ciertas conjeturas, que se presentarán a lo largo del capítulo.

3.1. Árboles, orientaciones acíclicas y totalmente cíclicas

Antes de empezar a analizar la primera conjetura, es necesario dar algunas definiciones y resultados que relacionan el polinomio de Tutte de una gráfica G , con las orientaciones de sus aristas con ciertas propiedades.

Definición 3.1.1. Sea $G = (V, E)$, una orientación de G es dar a cada arista $e \in E$ dirección (en otras palabras, es convertir a G en una digráfica). Una orientación es acíclica si es tal que ninguna de las aristas está en algún ciclo dirigido. Se dice que la orientación es totalmente cíclica, si cada arista de G se encuentra en al menos un ciclo dirigido.

Para una arista $\{u, v\}$, sus dos posibles orientaciones se denotan por $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow u$. Si todas las aristas de v están orientadas de la forma $x \rightarrow v$ (es decir, todas "entran" a v) se dice que v es pozo, por el contrario, cuando todas las aristas están orientadas en la forma $v \rightarrow x$ (todas "salen" de v), se dice que v es fuente.

Considérense ahora las siguientes cantidades para una gráfica G : El número de árboles generadores, el número de orientaciones acíclicas y el número de orientaciones totalmente cíclicas. Por el Teorema 1.4.3, el número total de árboles generadores es $T(G; 1, 1)$. ¿Existe alguna forma de conocer las otras dos cantidades? La respuesta es sí, y en efecto, ambas son evaluaciones del polinomio de Tutte, como lo menciona el siguiente resultado, el cual es demostrado en [TJ92].

Teorema 3.1.1 (Richard Stanley, 1973). Sea $G = (V, E)$. Entonces $T(G; 2, 0)$ cuenta el número de orientaciones acíclicas de G , y $T(G; 0, 2)$ el número de orientaciones totalmente cíclicas.

En [MW98], se discuten más a fondo estas tres cantidades, y concluyen presentando la siguiente

Conjetura 3.1.1. Sea $G = (V, E)$ una gráfica 2-conexa, entonces

$$T(G; 1, 1) \leq \max\{T(G; 2, 0), T(G; 0, 2)\}.$$

Se demostrará que el resultado es válido para algunas familias infinitas de gráficas 2-conexas.

3.1.1. Árboles

A pesar de no ser gráficas 2-conexas, los árboles si cumplen con la conjetura, esto será usado en muchas de las demostraciones.

Lema 3.1.1. Sea $G = (V, E)$ un árbol con $|V| = n$, entonces

$$T(G; x, y) = x^{n-1}.$$

Demostración. Por inducción sobre n . Base: $n = 1$, en este caso, $T(E_1; x, y) = 1 = x^0 = x^{1-1}$. Supóngase que para $n \geq 1$, $T(G; x, y) = x^{n-1}$.

Sea G un árbol con $n + 1$ vértices y sea e una arista de G . Como G es un árbol, entonces todas las aristas son puentes, además, al contraer una arista de G , la gráfica resultante es conexa, y tiene n vértices y $n - 1$ aristas, por la Proposición 1.1.3 es un árbol, así,

$$T(G; x, y) = xT(G/e; x, y) = x(x^{n-1}) = x^n = x^{(n+1)-1}.$$

Por lo tanto, para toda n ,

$$T(G; x, y) = x^{n-1}. \quad \square$$

Teorema 3.1.2. Sea $G = (V, E)$ un árbol, entonces,

$$T(G; 1, 1) \leq \max\{T(G; 2, 0), T(G; 0, 2)\}.$$

Demostración. Si G es un árbol, por el Lema 3.1.1, $T(G; x, y) = x^{n-1}$, entonces $T(G; 1, 1) = 1^{n-1} = 1$, $T(G; 2, 0) = 2^{n-1}$, $T(G; 0, 2) = 0^{n-1} = 0$. Por lo tanto, $1 \leq 2^{n-1} = \max\{2^{n-1}, 0\}$. □

3.1.2. Ciclos

La primera familia de gráficas 2-conexas que satisfacen la conjetura son los ciclos.

Lema 3.1.2. Para todo entero $n \geq 3$,

$$T(C_n; x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} x^i + y.$$

Demostración. Por inducción sobre n . Base: $n = 3$ En este caso $C_3 \cong K_3$ y $T(K_3; x, y) = x^2 + x + y = \sum_{i=1}^{3-1} x^i + y$. Supóngase que para $n \geq 3$, $T(C_n; x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} x^i + y$. Sea $e \in E(C_{n+1})$, entonces como e no es lazo ni es puente, al borrar e lo que se obtiene es P_{n+1} , que en particular es un árbol, al contraer e se obtiene C_n , entonces,

$$\begin{aligned} T(C_{n+1}; x, y) &= T(C_{n+1} \setminus e; x, y) + T(C_{n+1}/e; x, y) \\ &= T(P_{n+1}; x, y) + T(C_n; x, y) \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} x^i + y \\ &= \sum_{i=1}^n x^i + y \\ &= \sum_{i=1}^{(n+1)-1} x^i + y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene el resultado. □

Teorema 3.1.3. Para todo entero $n \geq 3$,

$$T(C_n; 1, 1) \leq \max\{T(C_n; 2, 0), T(C_n; 0, 2)\}.$$

Demostración. Por el Lema 3.1.2, $T(C_n; x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} x^i + y$, entonces $T(C_n; 1, 1) = \sum_{i=1}^{n-1} 1^i + 1 = n - 1 + 1 = n$, $T(C_n; 2, 0) = \sum_{i=1}^{n-1} 2^i + 0 = \sum_{i=1}^{n-1} 2^i = 2^n - 2$, $T(C_n; 0, 2) = \sum_{i=1}^{n-1} 0^i + 2 = 2$. Por lo tanto, $n \leq 2^n - 2 = \max\{2^n - 2, 2\}$. □

3.1.3. Gráfica completa K_n

El conocido teorema de Cayley [AMZG04] dice que $T(K_n; 1, 1) = n^{n-2}$. Ahora se intentará calcular o aproximar $T(K_n; 2, 0)$ y $T(K_n; 0, 2)$. Nótese que K_1 no cumple con la hipótesis de la conjetura, y K_2 es un árbol, así que basta considerar K_n con $n \geq 3$.

Lema 3.1.3. Para todo entero $n \geq 2$, $T(K_n; 2, 0) = n!$.

Demostración. Si se toma una orientación acíclica de K_n , obsérvese que debe haber al menos un vértice fuente, ya que si no es así, tómesese un vértice cualquiera v , como v no es fuente, entonces hay al menos dos aristas tales que una sale de v y la otra regresa, como en los demás vértices pasa lo mismo, se puede formar una trayectoria dirigida, tal que sale de v y regresa a él, por lo tanto hay un ciclo dirigido, lo cual es contradictorio con el hecho de que la orientación es acíclica.

Así que al menos debe haber un vértice fuente, entonces en este vértice, $n-1$ aristas tienen dirección, faltando las aristas de los demás $n-1$ vértices, a los cuales les restan $n-2$ aristas a cada uno, i.e. falta orientar la subgráfica K_{n-1} acíclicamente, a la cual aplicamos el mismo argumento. Entonces debo escoger en cierto orden los n vértices para volverlos fuentes en cada una de las subgráficas K_i , donde ($2 \leq i \leq n$) y este orden es importante, lo cual dice que una orientación acíclica corresponde a una permutación de los vértices, por lo tanto, el número total de orientaciones (permutaciones) es $n!$. □

Lema 3.1.4. Sea $G = (V, E)$ tal que $G \cong K_3$ ó $G \cong K_4$, entonces,

$$T(G; 1, 1) \leq T(G; 2, 0).$$

Demostración. Por casos:

- Si $G \cong K_3$, entonces $G \cong C_3$ y el resultado se sigue del Teorema 3.1.3.
- Si $G \cong K_4$, entonces $T(G; 1, 1) = 4^2 = 16$ y $T(G; 2, 0) = 4! = 24$.

En cualquier caso, $T(G; 1, 1) \leq T(G; 2, 0)$. □

Para $n \geq 5$, $n^{n-2} > n!$, así que de ahora en adelante considero las orientaciones totalmente cíclicas.

Lema 3.1.5. Para todo entero $n \geq 2$,

$$(2^{n-1} - 2)T(K_{n-1}; 0, 2) \leq T(K_n; 0, 2).$$

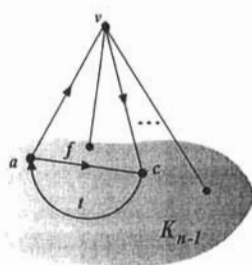


Figura 3.1: Para $f = \{a, c\}$ orientada de a hacia c , existe la trayectoria dirigida t , dada por la orientación totalmente cíclica de K_{n-1} .

Demostración. Considérese la gráfica completa K_n para $n \geq 2$. A la subgráfica K_{n-1} , désele alguna de las $T(K_{n-1}; 0, 2)$ orientaciones totalmente cíclicas, y para el vértice v que falta, a sus $n - 1$ aristas las oriento de tal manera que v no sea ni fuente ni pozo. Esta es una orientación totalmente cíclica de K_n . Todas las aristas de la subgráfica K_{n-1} están en algún ciclo dirigido, solo falta probar que las $n - 1$ aristas del vértice v , también lo están.

Sin pérdida de generalidad, tóme-se un arco $e = a \rightarrow v$, como v no es pozo, otro arco sale de v . Sea $e' = v \rightarrow c$ este arco. Si $f = \{a, c\}$ está orientada de c a a , se ha terminado, pues se tiene el ciclo dirigido $r = a \rightarrow v \rightarrow c \rightarrow a$. Si no, hay una trayectoria dirigida t de c a a , porque f está en un ciclo dirigido, entonces e, e' y t forman un ciclo dirigido, por lo tanto e está en un ciclo dirigido (Figura 3.1). De esta manera, se tienen $(2^{n-1} - 2)T(K_{n-1}; 0, 2)$ orientaciones totalmente cíclicas de K_n , con lo que el resultado es inmediato. \square

Observación. $T(K_4; 0, 2) = 24$.

Demostración. Inmediata, pues $T(K_4; x, y) = x^3 + 3x^2 + 2x + 4xy + 2y + 3y^2 + y^3$, por lo tanto, $T(K_4; 0, 2) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3 = 24$. \square

Corolario 3.1.1. $T(K_5; 1, 1) \leq T(K_5; 0, 2)$.

Demostración. Por el Lema 3.1.5 y la observación anterior, se tiene que $T(K_5; 0, 2) \geq (2^4 - 2)T(K_4; 0, 2) = 14 \cdot 24 = 336 \geq 125 = 5^3 = T(K_5; 1, 1)$. \square

Lema 3.1.6. Para todo entero $n \geq 3$, $2^{\frac{n(n-1)}{2} - n + 1} \leq T(K_n; 0, 2)$.

Demostración. Tómese los n vértices de K_n unidos por n aristas, tal que la subgráfica sea isomorfa a un ciclo C_n . Hay dos orientaciones totalmente cíclicas, al tomar una de ellas y agregar una arista cualquiera de las que faltan, se le puede dar cualquiera de las dos orientaciones posibles, a manera de ejemplo, observe la Figura 3.2 de la subgráfica de K_4 .

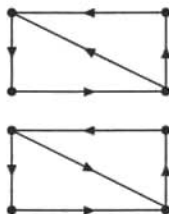


Figura 3.2: Orientación totalmente cíclica de una subgráfica de K_4 .

Y esto se pueda hacer para cada una de las aristas restantes de K_n , entonces, de este modo se tienen $2 \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}-n} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}-n+1}$ orientaciones totalmente cíclicas, con lo que se obtiene el resultado. \square

Teorema 3.1.4. Para todo entero $n \geq 3$,

$$T(K_n; 1, 1) \leq \max\{T(K_n; 2, 0), T(K_n; 0, 2)\}.$$

Demostración. Sea $n \geq 3$. Por los Lemas 3.1.4 y 3.1.1, el resultado es válido para $n = 3, 4$ y 5 . Para $n \geq 6$, usando los Lemas 3.1.5 y 3.1.6, se tiene que $(2^{n-1} - 2)(2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-(n-1)+1}) = (2^{n-1} - 2)(2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-n+2}) \leq (2^{n-1} - 2)T(K_{n-1}; 0, 2) \leq T(K_n; 0, 2)$. Además, $n^{n-2} \leq (2^{n-1} - 2)(2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-n+2})$ si $n \geq 6$, con lo que finalmente se concluye que

$$T(K_n; 1, 1) \leq \max\{T(K_n; 2, 0), T(K_n; 0, 2)\}. \quad \square$$

3.1.4. Gráficas bipartitas

Ahora se analiza a $K_{n,m}$. Usando el teorema de Kirchhoff [AMZG04] sobre el número de árboles generadores se tiene que $T(K_{n,m}; 1, 1) = n^{m-1}m^{n-1}$. El camino para $K_{n,m}$ es aún más delicado que para K_n , se partirá en tres partes, pero antes de empezar, se dan algunas definiciones que involucran orientaciones totalmente cíclicas, junto con algunos resultados técnicos que serán de gran utilidad más adelante.

Definición 3.1.2. Sea $K_{n,m}$ la gráfica bipartita completa, con bipartición $V_n \cup V_m$, sean $v, u \in V_n$. Dada una orientación de las aristas que inciden en v , se dice que las aristas que inciden en u tienen la orientación dual de las de v , si estas cumplen con las siguientes propiedades:

1. Si $\{a, v\}$ está orientada de a a v , entonces la arista $\{a, u\}$ está orientada de u a a .
2. Si $\{b, v\}$ está orientada de v a b , entonces la arista $\{b, u\}$ está orientada de b a u .

Intuitivamente, dada una orientación de las aristas de v , la orientación dual de las aristas de u se obtiene asignando las direcciones opuestas, obsérvese la Figura 3.3 de la gráfica $K_{3,3}$ y orientaciones duales para las aristas de los vértices u, v . Nótese que esta relación es simétrica, pero no reflexiva ni transitiva.

Notación. Cuando las aristas de u y v tengan orientaciones duales, se dirá simplemente que u tiene la orientación dual de v (y viceversa).

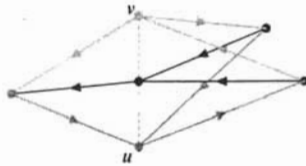


Figura 3.3: Vértices u, v y sus orientaciones duales.

Lema 3.1.7. Sea $K_{n,m}$ la gráfica bipartita completa. Considérese una orientación de $K_{n,m}$ en la cual ningún vértice es pozo ó fuente y existen $u, v \in V_n$, tal que u tiene la orientación dual de v , entonces la orientación es totalmente cíclica.

Demostración. Sea e una arista de $K_{n,m}$. Si $e = \{u, w\}$, sin pérdida de generalidad, supóngase que la orientación de e es $u \rightarrow w$. Por hipótesis, u tiene la orientación dual de v y ningún vértice es fuente ó pozo, así, esto garantiza la existencia del ciclo dirigido $u \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow a \rightarrow u$, donde $a \in V_m$. El argumento es simétrico para las aristas de v . Es decir, todas las aristas de u y v están en algún ciclo dirigido.

Supóngase que $e = \{a, b\}$, donde $a \in V_n, b \in V_m$ y $a, b \neq u, v$. Sean

$$O_u = \{x \in V_m \mid \{u, x\} \text{ tiene la orientación } u \rightarrow x\},$$

y

$$I_u = \{z \in V_m \mid \{u, z\} \text{ tiene la orientación } z \rightarrow u\}.$$

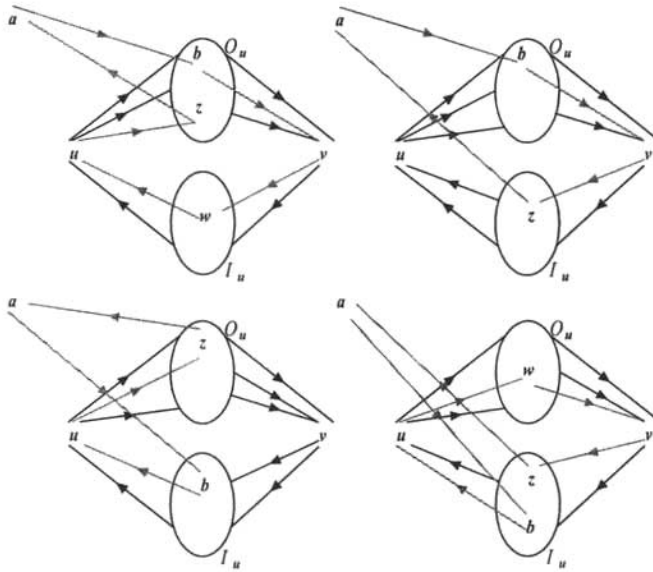


Figura 3.4: La arista $\{a, b\}$ está en un ciclo dirigido en cualquier caso.

Análogamente para v , constrúyanse los conjuntos I_v, O_v . Es claro que $V_m = I_u \cup O_u$, y además, $O_u = I_v, I_u = O_v$. Con esta partición de V_m , y las hipótesis, se puede construir un ciclo dirigido el cual contiene a e , sin importar la orientación. Se da la construcción para el caso en el cual e está orientada en la forma $a \rightarrow b$. Como $b \in V_m$, entonces $b \in O_u$ ó $b \in I_u$. Si $b \in O_u = I_v$, se tiene la trayectoria dirigida $a \rightarrow b \rightarrow v$. Por hipótesis, a no es fuente, así que existe una arista $\{a, z\}$, con orientación $z \rightarrow a$, donde $z \in O_u$ ó $z \in I_u$.

Caso 1. $z \in O_u$, v no es pozo, por lo que existe $\{w, v\}$ que tiene la orientación $v \rightarrow w$, entonces $w \in I_v = O_u$, por lo que se tiene la trayectoria dirigida $v \rightarrow w \rightarrow u \rightarrow z \rightarrow a$, por lo tanto, se tiene el ciclo dirigido $a \rightarrow b \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u \rightarrow z \rightarrow a$.

Caso 2. $z \in I_u = O_v$, entonces la arista $\{z, v\}$ está orientada en la forma $v \rightarrow z$, por que se tiene el ciclo dirigido $a \rightarrow b \rightarrow v \rightarrow z \rightarrow a$.

Los demás casos son totalmente similares, y se ilustran en la Figura 3.4. Así, todas las aristas de $K_{n,m}$ están en algún ciclo dirigido y por lo tanto la orientación de $K_{n,m}$ es totalmente cíclica. □

Finalmente, el siguiente lema sera de gran utilidad.

Lema 3.1.8. Sean $n, m \geq 5$, tales que $m \geq n$. Si $p = 2^n - 2$, entonces

$$p^m - p \cdot (p-1)^{m-1} \geq n^{m-1}m^{n-1}.$$

Demostración. Sean $n, m \geq 5$, el resultado se sigue de los siguientes hechos:

1. $p^m - p \cdot (p-1)^{m-1} \geq p^{m-1}$. Esto es inmediato, pues $p \geq 1 + p \left(\frac{p-1}{p}\right)^{m-1}$, restando $p \left(\frac{p-1}{p}\right)^{m-1}$ y multiplicando por p^{m-1} se tiene el resultado.
2. $p^{m-1} \geq n^{m-1}m^{n-1}$. La desigualdad se sigue de que

$$p^{m-1} \geq n^{m-1}m^{n-1} \Leftrightarrow p \geq nm^{\frac{n-1}{m-1}},$$

pero $m \geq n$, por lo tanto $\frac{n-1}{m-1} \leq 1$. Entonces

$$nm^{\frac{n-1}{m-1}} \leq nm \leq n^2,$$

por lo que si $n^2 \leq p = 2^n - 2$, se obtiene la desigualdad, y esto último es cierto para $n \geq 5$.

Así, se tiene que $p^m - p \cdot (p-1)^{m-1} \geq p^{m-1} \geq n^{m-1}m^{n-1}$, y esto completa la demostración. □

Gráfica bipartita completa $K_{2,m}$

Aplicando el resultado mencionado al principio de esta sección, $T(K_{2,m}; 1, 1) = m2^{m-1}$. Ahora se buscan expresiones que igualen ó en su defecto aproximen como cota inferior a $T(K_{2,m}; 2, 0)$ y $T(K_{2,m}; 0, 2)$. Al calcular algunos polinomios de Tutte de $K_{2,m}$ con **TuliC**,

es notoria una peculiaridad en las potencias de y :

$$\begin{aligned}
 T(K_{2,1}; x, y) &= x^2 \\
 T(K_{2,2}; x, y) &= x^3 + x^2 + x + y \\
 T(K_{2,3}; x, y) &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 3xy + y + y^2 \\
 T(K_{2,4}; x, y) &= x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 6x^2y + x + 4xy + 4xy^2 + y + y^2 + y^3 \\
 T(K_{2,5}; x, y) &= x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 10x^3 + 10x^3y + 5x^2 + 10x^2y + 10x^2y^2 + x \\
 &\quad + 5xy + 5xy^2 + 5xy^3 + y + y^2 + y^3 + y^4 \\
 &\quad \vdots \\
 T(K_{2,10}; x, y) &= x^{11} + 9x^{10} + 45x^9 + 120x^8 + 45x^8y + 210x^7 + 120x^7y + 120x^7y^2 \\
 &\quad + 252x^6 + 210x^6y + 210x^6y^2 + 210x^6y^3 + 210x^5 + 252x^5y \\
 &\quad + 252x^5y^2 + 252x^5y^3 + 252x^5y^4 + 120x^4 + 210x^4y + 210x^4y^2 \\
 &\quad + 210x^4y^3 + 210x^4y^4 + 210x^4y^5 + 45x^3 + 120x^3y + 120x^3y^2 \\
 &\quad + 120x^3y^3 + 120x^3y^4 + 120x^3y^5 + 120x^3y^6 + 10x^2 + 45x^2y \\
 &\quad + 45x^2y^2 + 45x^2y^3 + 45x^2y^4 + 45x^2y^5 + 45x^2y^6 + 45x^2y^7 + x \\
 &\quad + 10xy + 10xy^2 + 10xy^3 + 10xy^4 + 10xy^5 + 10xy^6 + 10xy^7 \\
 &\quad + 10xy^8 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + y^8 + y^9
 \end{aligned}$$

Con estos polinomios se infiere el siguiente resultado.

Lema 3.1.9. Para todo entero $m \geq 1$, $T(K_{2,m}; 0, 2) = 2^m - 2$.

Demostración. La demostración es por inducción en m y un argumento de contracción y borrado. Para $m = 1$, $K_{2,1}$ es un árbol, entonces por el Lema 3.1.1, $T(K_{2,1}; 0, 2) = 0 = 2^1 - 2$. Suponiendo la validez para $m \geq 1$, y aplicando las operaciones de contracción y borrado en $K_{2,m+1}$ (Figura 3.5). De aquí que $T(K_{2,m+1}; 0, 2) = 2^m + 2^m - 2 + 0 = 2 \cdot 2^m - 2 = 2^{m+1} - 2$ y el resultado es inmediato. \square

Es claro que $2^m - 2 \leq m2^{m-1} \forall m$, así que aproximaré $T(K_{2,m}; 2, 0)$.

Lema 3.1.10. Para todo entero $m \geq 2$,

$$T(C_4; 2, 0)2^{m-2} + 2(m-2)2^{m-1} \leq T(K_{2,m}; 2, 0).$$

Demostración. Considérese el siguiente argumento, tómesese la subgráfica formada por los 2 vértices del conjunto en la partición de menor tamaño, y dos de los otros m restantes, esta subgráfica es isomorfa a C_4 (Figura 3.6). Dada una orientación acíclica de esta, las aristas de los demás $m - 2$ vértices oriéntense de tal manera que todos sean fuentes o pozos, esto

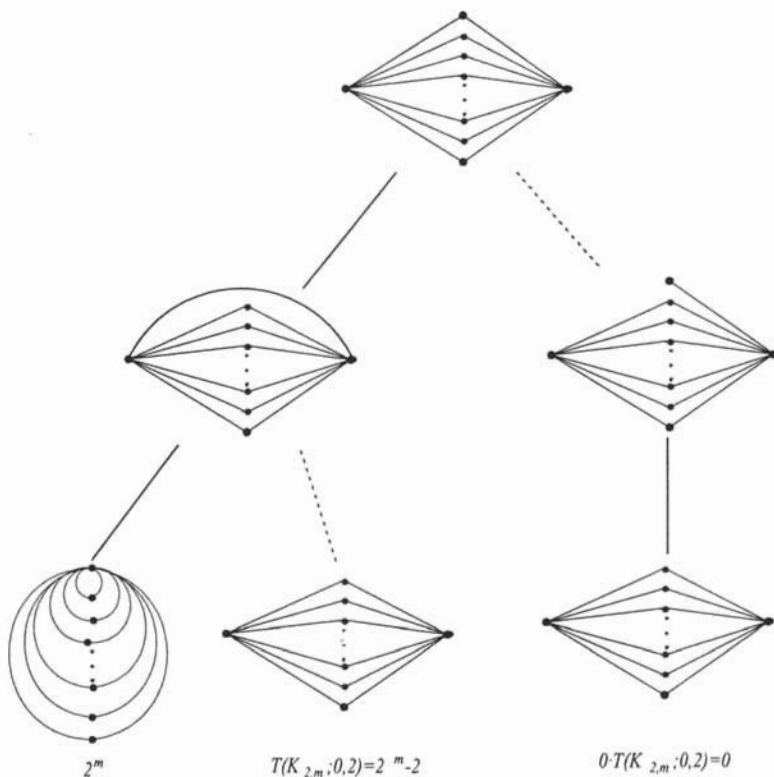


Figura 3.5: Cálculo de $T(K_{2,m+1}; 0, 2)$ por contracción y borrado.

se puede hacer de 2^{m-2} formas distintas, de este modo tengo $T(C_4; 2, 0)2^{m-2}$ orientaciones acíclicas. Agreguense estas: Escójanse uno de los $m - 2$ vértices que quedaban, (el porque de estos $m - 2$ vértices es para no duplicar orientaciones en el contéo) selecciónense sus dos aristas y oriéntense de forma que tengan la misma dirección, esto se puede hacer de 2 formas, luego, en los demás $m - 1$ vértices, se orientan sus aristas como fuentes o pozos, lo cual se puede hacer de 2^{m-1} formas, por lo que se tienen $2(m - 2)2^{m-1}$ orientaciones acíclicas nuevas, por lo tanto,

$$T(C_4; 2, 0)2^{m-2} + 2(m - 2)2^{m-1} \leq T(K_{2,m}; 2, 0).$$

□

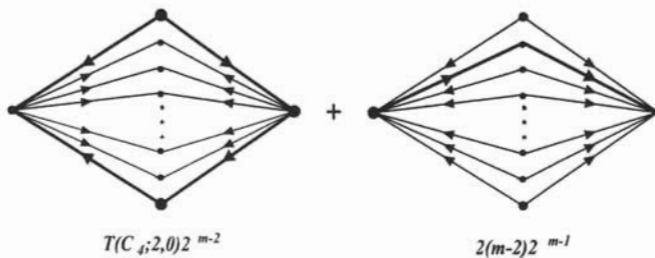


Figura 3.6: Conteo de orientaciones acíclicas de $K_{2,m}$.

Teorema 3.1.5. Para todo entero $m \geq 1$,

$$T(K_{2,m}; 1, 1) \leq \max\{T(K_{2,m}; 2, 0), T(K_{2,m}; 0, 2)\}.$$

Demostración. Si $m = 1$ entonces $K_{2,1} \cong P_3$, la cual es un árbol, y el resultado se sigue del Teorema 3.1.2. Supóngase que $m \geq 2$.

Como $T(K_{2,m}; 1, 1) \geq T(K_{2,m}; 0, 2)$, por el Lema 3.1.10, $T(K_{2,m}; 2, 0) \geq T(C_4; 2, 0)2^{m-2} + 2(m-2)2^{m-1}$, y como $T(C_4; 2, 0) = 2^4 - 2$, entonces,

$$\begin{aligned} T(K_{2,m}; 2, 0) &\geq (2^4 - 2)2^{m-2} + 2(m-2)2^{m-1} \\ &= 2^m(m-2) + 2 \cdot 2^m + 2 \cdot 2^m - 2^{m-1} \\ &= m2^m + 3 \cdot 2^{m-1} \\ &\geq m2^{m-1} \\ &= T(K_{2,m}; 1, 1). \end{aligned}$$

Así que $T(K_{2,m}; 1, 1) \leq T(K_{2,m}; 2, 0)$. Finalmente,

$$T(K_{2,m}; 1, 1) \leq \max\{T(K_{2,m}; 2, 0), T(K_{2,m}; 0, 2)\}.$$

□

Gráfica bipartita completa $K_{3,m}$

Para $K_{3,m}$, el resultado al comienzo de la sección dice que $T(K_{3,m}; 1, 1) = 3^{m-1}m^2$. Como la gráfica $K_{3,1}$ es un árbol y $K_{3,2} \cong K_{2,3}$, se considera $m \geq 3$, nuevamente, se tratará de calcular ó acotar inferiormente a $T(K_{3,m}; 2, 0)$ y $T(K_{3,m}; 0, 2)$.

Lema 3.1.11. Para todo entero $m \geq 3$, $6^m - 6 \cdot 5^{m-1} \leq T(K_{3,m}; 0, 2)$.

Demostración. Désele a las aristas de los vértices de la partición con m elementos cualquier orientación, excepto la de fuente y pozo, en total son $(2^3 - 2)^m = 6^m$; sea v uno de los m vértices, para v y una de sus 6 orientaciones, escojo para los otros $m - 1$ restantes, una orientación de las 6 que no sea el dual de la orientación de v , de esas hay $6 - 1 = 5$ orientaciones para cada uno, en total se tienen $6 \cdot 5^{m-1}$, las cuales, si las quito al total 6^m , quedan las orientaciones en donde hay dualidad entre el vértice v y alguno de los otros $m - 1$ (Figura 3.7).

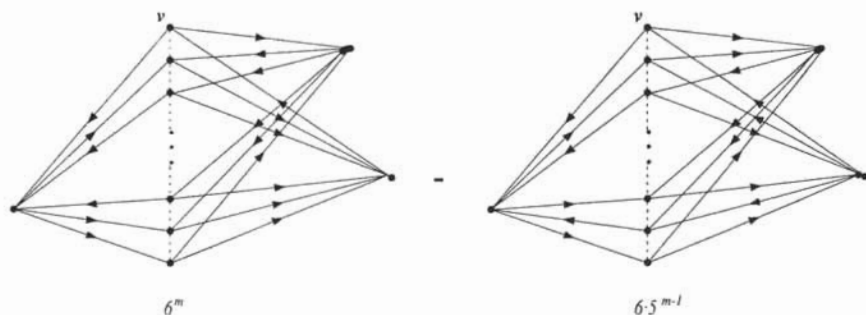


Figura 3.7: Conteo de orientaciones totalmente cíclicas de $K_{3,m}$.

Por el Lema 3.1.7, estas orientaciones son totalmente cíclicas, con lo que

$$6^m - 6 \cdot 5^{m-1} \leq T(K_{3,m}; 0, 2).$$

□

De este resultado se tiene lo siguiente.

Proposición 3.1.1. Para todo entero $m \geq 4$,

$$T(K_{3,m}; 1, 1) \leq \max\{T(K_{3,m}; 2, 0), T(K_{3,m}; 0, 2)\}.$$

Demostración. Usando el conteo del Lema 3.1.11, se tiene que $3^{m-1} \cdot m^2 \leq 6^m - 6 \cdot 5^{m-1}$ si $m \geq 4$. □

Para $m = 3$, $T(K_{3,3}; 1, 1) = 81 > 66 = 6^3 - 6 \cdot 5^2$, por lo que se hace un caso especial con $K_{3,3}$, aproximando $T(K_{3,3}; 2, 0)$.

Proposición 3.1.2. $T(K_{3,3}; 1, 1) \leq \max\{T(K_{3,3}; 2, 0), T(K_{3,3}; 0, 2)\}$.

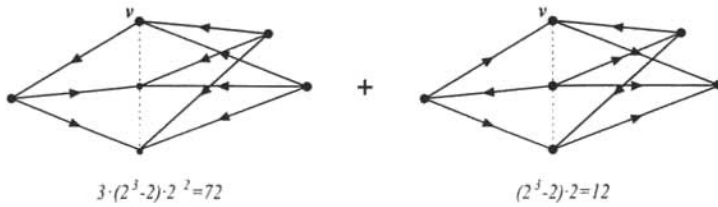


Figura 3.8: Conteo de orientaciones acíclicas de $K_{3,3}$.

Demostración. Escójase un vértice v de uno de los conjuntos de la partición, désele cualquier orientación a sus 3 aristas excepto las de fuente y pozo, a los otros dos vértices del conjunto, oriéntense sus aristas de tal manera que sea como fuente ó pozo, de este modo no es posible formar ningún ciclo dirigido, entonces se tiene una orientación acíclica. El argumento es válido para cada uno de los vértices del conjunto, por lo tanto se tienen $3 \cdot (2^3 - 2) \cdot 2^2 = 72$ orientaciones acíclicas. De nuevo, escójase un vértice del mismo conjunto y oriéntense sus aristas de la misma manera, luego, al escoger otro vértice, se orientan sus aristas para que sea fuente ó pozo, para las aristas del vértice que queda, se asegura que existe una orientación distinta de la de fuente y pozo, tal que no es posible formar ciclo dirigido con la orientación de las aristas del primero, de esto modo no hay algún ciclo dirigido, con lo cual se tiene una orientación acíclica distinta de las anteriores, y en total son $(2^3 - 2) \cdot 2 = 12$ (Figura 3.8), con lo cual $72 + 12 = 84 \leq T(K_{3,3}; 2, 0)$ y por lo tanto,

$$T(K_{3,3}; 1, 1) = 81 \leq 84 \leq T(K_{3,3}; 2, 0) \leq \max\{T(K_{3,3}; 2, 0), T(K_{3,3}; 0, 2)\}.$$

□

Claro que este resultado se pudo probar directamente con **TuLiC**. De hecho, el polinomio de Tutte de $K_{3,3}$ es $T(K_{3,3}; x, y) = x^5 + 4x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 5x + 9x^2y + 15xy + 5y + 6xy^2 + 9y^2 + 5y^3 + y^4$, y de aquí se sigue que $T(K_{3,3}; 2, 0) = 230$, que es mayor a 81.

Teorema 3.1.6. Para todo entero $m \geq 3$,

$$T(K_{3,m}; 1, 1) \leq \max\{T(K_{3,m}; 2, 0), T(K_{3,m}; 0, 2)\}.$$

Demostración. Inmediata de las proposiciones 3.1.2 y 3.1.1.

□

Gráfica bipartita completa $K_{n,m}$

Similarmente, es posible hacer un conteo de $T(K_{4,m}; 0, 2)$ y obtener resultados análogos a los de la sección anterior. En general, sea $K_{n,m}$ bipartita completa, con $n, m \geq 4$ y sea V_m el conjunto de la partición con m elementos, sea $v \in V_m$, désele a sus n aristas cualquier orientación excepto la de fuente y pozo, en total tenemos $2^n - 2$ orientaciones para v , sea $p = 2^n - 2$, el total de orientaciones, considerando los m vértices es p^m . Nuevamente, sea $v \in V_m$, para v y una de sus p orientaciones, escójase para los otros $m - 1$ vértices, una orientación de las p que no sea el dual de la orientación de v , de esas hay $p - 1$ orientaciones para cada uno, entonces dada una orientación de v , se tienen $(p - 1)^{m-1}$ orientaciones, por lo tanto, hay en total $p \cdot (p - 1)^{m-1}$, las cuales, si las quito al total p^m , quedan las orientaciones en las cuales hay dualidad entre v y alguno de los $m - 1$ vértices. Por el Lema 3.1.7, estas orientaciones son totalmente cíclicas con lo que se tiene el siguiente

Lema 3.1.12. Para enteros $n, m \geq 4$, $p^m - p \cdot (p - 1)^{m-1} \leq T(K_{n,m}; 0, 2)$.

Teorema 3.1.7. Para enteros $n, m \geq 4$

$$T(K_{n,m}; 1, 1) \leq \max\{T(K_{n,m}; 2, 0), T(K_{n,m}; 0, 2)\}.$$

Demostración. Por el Lema 3.1.8, $n^{m-1}m^{n-1} \leq p^m - p \cdot (p - 1)^{m-1} \leq T(K_{n,m}; 0, 2)$ si $n, m \geq 5$. Sólo faltan los casos $n = 4, m = 4$ y $n = 4, m = 5$. Se evalúa la desigualdad en cada caso:

- Para $n = 4, m = 4$, se tiene que $4^3 \cdot 4^3 = 4096 \leq 14^4 - 14 \cdot (13)^3 = 7658$.
- Para $n = 4, m = 5$, se tiene que $4^4 \cdot 5^3 = 32000 \leq 14^5 - 14 \cdot (13)^4 = 137970$.

Y se obtiene el resultado. □

Teorema 3.1.8. Para enteros n, m tales que $n, m \geq 1$,

$$T(K_{n,m}; 1, 1) \leq \max\{T(K_{n,m}; 2, 0), T(K_{n,m}; 0, 2)\}.$$

Demostración. Es inmediata de los resultados anteriores, los cuales se resumen en la siguiente tabla:

n	m	$K_{n,m}$	¿ La conjetura es válida ?
1	$1 \leq m$	$K_{1,m}$	$K_{1,m}$ es un árbol, Teorema 3.1.2
2	$2 \leq m$	$K_{2,m}$	Teorema 3.1.5
3	$3 \leq m$	$K_{3,m}$	Teorema 3.1.6
$4 \leq n$	$4 \leq m$	$K_{n,m}$	Teorema 3.1.7

□

3.1.5. Gráficas de 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 vértices

Ya se probó que varias familias de gráficas cumplen con la Conjetura 3.1.1 de manera teórica. Sin embargo, esto no prueba la validez general de la misma, en consecuencia, se hicieron una serie de experimentos con **TuliC**, para intentar demostrar que la conjetura es falsa en general.

Sabiendo que **TuliC** puede calcular el polinomio de Tutte de cualquier gráfica de tamaño moderado, es posible, por ejemplo, suponiendo que se tienen todas las gráficas no isomorfas de 6 vértices, correr **TuliC** en cada una de ellas, y probar la conjetura, si en alguna es falsa, entonces es un contraejemplo y se demostraría la invalidez de esta. Afortunadamente, si se cuenta con una forma de conocer todas la gráficas diferentes, no solo de 6 vértices, sino de más, en esta sección se da la «bitácora» del experimento realizado.

El paquete Nauty y las GTools

Nauty es un conjunto de procedimientos escritos en el lenguaje de programación C por Brendan McKay, para determinar el grupo de automorfismos de una gráfica coloreada por vértices, y esta información se puede utilizar para pruebas de isomorfismo de manera muy eficiente. El lector interesado en Nauty puede obtenerlo en [Nauty], y si desea conocer los detalles del algoritmo de isomorfismo, puede consultar [Mc81].

Junto con Nauty vienen varios programas de utilerías, para manipular archivos de gráficas en formato **g6** ó **sparse6**¹, este conjunto de programas se llama las **gtools**. Con estas herramientas y **TuliC**, fue posible hacer experimentos en todas las gráficas 2-conexas no isomorfas de 3 hasta 9 vértices, las pruebas fueron hechas en el sistema Operativo Linux, y estos fueron los pasos que se siguieron:

1. Se utilizó el programa **geng** de las **gtools** para generar siete archivos, cada archivo contiene todas las gráficas 2-conexas no isomorfas de n vértices, en formato **g6**. Por ejemplo, para crear el archivo **bg9.g6**, se usa el comando **geng -C 9 bg9.g6**, los archivos que se crearon fueron **bg3.g6**, **bg4.g6**, **bg5.g6**, **bg6.g6**, **bg7.g6**, **bg8.g6**, **bg9.g6**.
2. **TuliC** no puede leer gráficas en formato **g6**, para atacar esto, se hizo lo siguiente: En las **gtools** viene un programa llamado **listg**, que lee archivos en formato **g6** ó **sparse6**, y los convierte en otros formatos más accesibles y fáciles para usar; el que se utilizó es el obtenido pasando la opción **-e** la cual escribe las gráficas como una lista de aristas precedida por el orden y el número de aristas, aquí esta un ejemplo:

```
<<-- rodolfo [simplebiconected] -->> listg -p10 -e bg5.g6
```

¹**g6** es un formato compacto para guardar gráficas simples en un archivo, **sparse6** es una evolución de **g6** y puede manipular gráficas no simples.

```
Graph 10, order 5.
5 10
0 1 0 2 0 3 0 4 1 2 1 3 1 4 2 3 2 4 3 4
```

Esta salida corresponde a K_5 .

De este modo, sólo se hizo una función para leer gráficas de un flujo de entrada en este formato.

- Se procedió a escribir un pequeño programa en el lenguaje Java que utiliza las bibliotecas de **TuliC** para analizar una gráfica dada en el formato descrito, leyéndola del flujo de entrada estándar, y evaluando su polinomio de Tutte en los puntos $(1, 1)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$. La salida del programa es de la forma « $T(G; 1, 1) T(G; 2, 0) T(G; 0, 2) [true | false]$ », se llama **TestConjecture3** y este es el código fuente:

```
import java.util.*;
import java.io.*;
import java.math.*;

import mx.unam.matem.maths.graphs.*;
import mx.unam.matem.maths.graphs.factory.*;
import mx.unam.matem.maths.graphs.graph.*;
import mx.unam.matem.maths.graphs.objects.*;

public class TestConjecture3 {

    private TestConjecture3() {
    }

    public static void main(String[] args) {
        try {
            Graph g = loadGraphFrom(System.in);

            if (!GraphAlgorithms.isConected(g)) {
                System.out.println(" Not a conected graph");
                System.exit(0);
            }

            Graph tree = GraphAlgorithms.getSomeSpaningTree(g);
```



```

    Map<Vertex, Integer> vordering =
GraphAlgorithms.postOrderTraversal(tree);
    Edge []es =
GraphAlgorithms.orderEdgesLexicographically(g, vordering);

    tree = null;

    BigInteger ntrees, nao, ntco;

    ntrees = GraphAlgorithms.tuttePolynomialEval(g, 1,
                                                    1, es);
    nao = GraphAlgorithms.tuttePolynomialEval(g, 2,
                                                0, es);
    ntco = GraphAlgorithms.tuttePolynomialEval(g, 0,
                                                2, es);

    g = null;

    int a = ntrees.subtract(nao.max(ntco)).signum();
    boolean ct = (a == 0 || a == -1);

    System.out.println(ntrees + " "
        + nao + " " + ntco
        + " " + ct);

} catch (Exception e) {
    System.out.println("Error in program !!!");
    System.out.println("Exception: " + e);
    System.out.println("Stack Trace:");
    e.printStackTrace();
    System.exit(1);
}
}

private static Graph loadGraphFrom(InputStream in)
throws Exception {
    GraphFactory f = GraphFactory.factory();

    f.setDefaultBuilder(
GraphFactoryWorkers.callWorker("alg"));

    StreamTokenizer st =
new StreamTokenizer(new InputStreamReader(in));

```

```
st.parseNumbers();

int nvertices, nedges;

if (st.nextToken() == StreamTokenizer.TT_EOF)
    throw new Error("graph specification empty !!!");

nvertices = (int) st.nval;

st.nextToken();

nedges = (int) st.nval;

Graph g = f.newGraph("G");
Vertex vs[] = new Vertex [nvertices];

for (int i = 0; i < vs.length; ++i) {
    vs[i] = new Vertex(i + 1);
    g.addVertex(vs[i]);
}

int k = 1, v1, v2;
Edge e;
while (st.nextToken() != StreamTokenizer.TT_EOF) {
    v1 = (int) st.nval;
    st.nextToken();
    v2 = (int) st.nval;

    e = new Edge(vs[v1], vs[v2], k++);

    g.addEdge(e);
}

if (nedges < g.nedges())
    throw new Error("Incorrect edges number !!!!"
        + " it's small: "
            + nedges);

return g;
}
}
```

Con un poco de conocimiento del lenguaje Java, el lector se dará cuenta que este programa utiliza el ordenamiento con *la propiedad conexa* del Lema 2.4.2.

4. Finalmente, para poder probar todos los archivos con la gráficas 2-conexas, se escribió un script del shell de Linux (**Bash**) llamado **runtests**, que combina las **gtools** y el programa descrito anteriormente, para hacer las pruebas, aquí está el código del script:

```
#!/bin/sh

if test $# -lt 2; then
    echo -n "usage: $0 graphsfile resultsfile"
    echo " [java memory] [graphnumber]"
    exit 1
fi

gfile=$1
rfile=$2

sleeptime=7

echo "Ready to run tests on graphs in file $gfile"
echo "Starting in $sleeptime seconds"
echo "(Press Ctr-C to abort)..."

sleep $sleeptime

echo "Starting !!!!"
echo ""

tmpfile="/tmp/graph$RANDOM.e"

JAVACMD="java"

if test "$3" = ""; then
    JAVA_OPTS="-cp tulic.jar:.."
else
    JAVA_OPTS="-Xmx$3 -cp tulic.jar:.."
fi

echo "Java command is: $JAVACMD $JAVA_OPTS"

if test "$4" = ""; then
    let "gnumber = 1"
else
    let "gnumber = $4"
fi
```

```
echo "Counting graphs...please wait..."

totalg1='countg -q $gfile |grep : | cut -c0,1,2,3,4,5,6,7,8,9'
let "totalg = $totalg1"

echo "graphs file has $totalg graphs"

echo "starting from graph number $gnumber"

mv -f $rfile $rfile.bk

for ((i = $gnumber; i <= $totalg ; ++i)); do
  listg -eq -p$i $gfile > $tmpfile

  resultTest='$JAVACMD $JAVA_OPTS TestConjecture3 $tmpfile'

  if test ! $? -eq 0; then
    if test $i -eq $totalg; then
      echo "All graphs tested succefully"
    else
      echo -n "There was an error and maybe "
      echo "some graphs were not tested"
    fi

    break
  fi

  echo "$i $resultTest" >> $rfile

  echo "Test in graph # $i: $resultTest"
done

rm -f $tmpfile

echo "Finished !!!"
echo ""

echo "Tests run on $((i - $gnumber)) graphs..."
echo "Results are in file $rfile"
```

El script primero verifica si sus argumentos son correctos, necesita al menos el archivo

de las gráficas a probar en formato **g6**, y un archivo donde escribir los resultados, configura las opciones del interprete **java** y después cuenta cuantas gráficas hay en el archivo, usando la utilería **countg** de las **gtools**. Al entrar en el ciclo principal, extráe una gráfica del archivo fuente, la convierte a lista de aristas con **listg**, y la coloca en un archivo temporal, luego, ejecuta el programa **TestConjeture3**, el cual lee el archivo y convierte la gráfica a una instancia de las implementaciones descritas en la sección 2.5.1, calcula las evaluaciones y prueba la conjetura, los resultados son guardados por el script en una variable, y finalmente los guarda en el archivo indicado, un renglón por gráfica, en la forma «*número-gráfica* $T(G; 1, 1)$ $T(G; 2, 0)$ $T(G; 0, 2)$ [*true*]*false*», y repite este ciclo tantas veces como gráficas haya en el archivo, esta es una ejecución del programa sobre el archivo **bg5.g6**, que contiene todas las gráficas 2-conexas no isomorfas de 5 vértices

```
<-- rodolfo [research] --> runtests g5.g6 results.txt
Ready to run tests on graphs in file bg5.g6
Starting in 7 seconds (Press Ctrl-C to abort)...
Starting !!!!

Java command is: java -cp tulic.jar:.
Counting graphs...please wait...
graphs file has 10 graphs
starting from graph number 1

Finished !!!

Tests run on 10 graphs...
Results are in file resultsbg5.txt
```

Y este es el archivo de salida:

```
1 12 46 6 true
2 20 54 14 true
3 5 30 2 true
4 11 42 6 true
5 21 54 18 true
6 40 72 60 true
7 24 60 24 true
8 45 78 78 true
9 75 96 204 true
10 125 120 544 true
```

Así, para encontrar un contraejemplo a la conjetura, solo bastaba encontrar una línea en algún archivo de salida que tuviera «*false*», y con el número de gráfica, esta se puede extraer del archivo original.

Después de haber probado la conjetura con todas estas gráficas, en total 201,727; los resultados fueron a favor de la conjetura, fué verdadera en cada una, esto, por supuesto, no es una prueba, pero fortalece la idea de que debe ser cierta. Alguien podría intentar probar con las 9,743,542² gráficas 2-conexas de 10 vértices, quizá en estas se halle un contraejemplo.

²Calculado usando la utilería **countg**.

3.2. Una forma más fuerte de la conjetura 3.1.1.

No ha sido posible probar o refutar la conjetura, sin embargo, en [MW98] se presenta lo que llaman una forma más fuerte de esta, no se da formalmente, pero aquí está.

Conjetura 3.2.1. *Sea $G = (V, E)$ 2-conexa, entonces, $T(G; x, y)$ es una función convexa en el segmento de línea que une los puntos $(2, 0)$ y $(0, 2)$.*

En esta sección se intentará encontrar un contraejemplo, usando técnicas similares a las de la sección 3.1.5.

Esta vez se intentará ver que $T(G; x, y)$ no es una función convexa, para alguna gráfica G 2-conexa. Existe un criterio de convexidad que establece lo siguiente: Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función con segunda derivada continua y positiva en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es convexa. Con este criterio, se puede intentar encontrar G 2-conexa, tal que, al derivar dos veces la función $f(z) = T(G; z, 2 - z)$, calcular f'' y buscar algún $\alpha \in [0, 2]$ tal que $f''(\alpha) \leq 0$, entonces el polinomio de Tutte de G sería candidato a ser un contraejemplo de la conjetura. **TuLiC** no puede calcular derivadas, pero para esto, se cuenta con **Maple**³. A continuación se describe como se hicieron estas pruebas:

1. Se necesitaban generar los polinomios de Tutte de tantas gráficas como fuera posible, otra vez, se tomaron en 3 hasta 9 vértices. **TuLiC** puede tomar una gráfica en un archivo y calcular su polinomio, a pesar de esto, se prefirió utilizar un programa específico para esto, que use las bibliotecas de **TuLiC**. La tarea de éste, es leer una gráfica de un flujo de entrada, obtener su polinomio de Tutte y escribirlo en la salida estándar en formato para **Maple**. El programa se llama **GenTP** y este es el código fuente:

```
import java.util.*;
import java.io.*;
import java.math.*;

import mx.unam.matem.maths.polynomials.*;
import mx.unam.matem.maths.graphs.*;
import mx.unam.matem.maths.graphs.factory.*;
import mx.unam.matem.maths.graphs.graph.*;
import mx.unam.matem.maths.graphs.objects.*;

public class GenTP {

    private GenTP() {
    }
}
```

³Disponible para Windows y Linux en <http://www.maplesoft.com>

```
public static void main(String[] args) {
    try {
        Graph g = loadGraphFrom(System.in);

        if (!GraphAlgorithms.isConnected(g)) {
            System.out.println(" Not a conected graph");
            System.exit(0);
        }

        Graph tree = GraphAlgorithms.getSomeSpaningTree(g);
        Map<Vertex, Integer> vordering =
            GraphAlgorithms.postOrderTraversal(tree);
        Edge []es =
            GraphAlgorithms.orderEdgesLexicographically(g,
                vordering);

        tree = null;

        Polynomial tp;

        tp = GraphAlgorithms.tuttePolynomial(g, es);

        g = null;

        System.out.println(tp.toStringMapple());

    } catch (Exception e) {
        System.out.println("Error in program !!!");
        System.out.println("Exeption: " + e);
        System.out.println("Stack Trace:");
        e.printStackTrace();
        System.exit(1);
    }
}

private static Graph loadGraphFrom(InputStream in)
throws Exception {
    GraphFactory f = GraphFactory.factory();

    f.setDefaultBuilder(
        GraphFactoryWorkers.callWorker("alg"));
}
```

```
StreamTokenizer st =
new StreamTokenizer(new InputStreamReader(in));

st.parseNumbers();

int nvertices, nedges;

if (st.nextToken() == StreamTokenizer.TT_EOF)
    throw new Error("graph specification empty !!!");

nvertices = (int) st.nval;

st.nextToken();

nedges = (int) st.nval;

Graph g = f.newGraph("G");
Vertex vs[] = new Vertex [nvertices];

for (int i = 0; i < vs.length; ++i) {
    vs[i] = new Vertex(i + 1);
    g.addVertex(vs[i]);
}

int k = 1, v1, v2;
Edge e;
while (st.nextToken() != StreamTokenizer.TT_EOF) {
    v1 = (int) st.nval;
    st.nextToken();
    v2 = (int) st.nval;

    e = new Edge(vs[v1], vs[v2], k++);

    g.addEdge(e);
}

if (nedges < g.nedges())
    throw new Error("Incorrect edges number !!!!"
        + " it's small: "
            + nedges);

return g;
}
}
```


2. Se hizo un script de shell, para combinar este programa y las **gtools**, de manera similar a la sección anterior, se llama **genpolys**, aquí está el código fuente:

```
#!/bin/sh

if test $# -lt 2; then
    echo -n "usage: $0 graphsfile resultsDir"
    echo " [java memory] [graphnumber]"
    exit 1
fi

gfile=$1
polyDir=$2

sleeptime=5

echo -n "Ready to generate Tutte Polynomials for graphs"
echo " in file $gfile"
echo -n "Starting in $sleeptime seconds"
echo " (Press Ctr-C to abort)..."

sleep $sleeptime

echo "Starting !!!!!"
echo ""

tmpfile="/tmp/graph$RANDOM.e"

JAVACMD="java"

if test "$3" = ""; then
    JAVA_OPTS="-cp tulic.jar:."
else
    JAVA_OPTS="-Xmx$3 -cp tulic.jar:."
fi

echo "Java command is: $JAVACMD $JAVA_OPTS"

if test "$4" = ""; then
    let "gnumber = 1"
else
    let "gnumber = $4"
fi
```

```
echo "Counting graphs...please wait..."

totalg1='countg -q $gfile |grep : | cut -c0,1,2,3,4,5,6,7,8,9'
let "totalg = $totalg1"

echo "graphs file has $totalg graphs"

resultsDir="$polyDir/"

mkdir -p $resultsDir

echo "starting from graph number $gnumber"

for ((i = $gnumber; i <= $totalg ; ++i)); do
  listg -eq -p$i $gfile > $tmpfile

  tuttepoly='$JAVACMD $JAVA_OPTS GenTP < $tmpfile'

  if test ! $? -eq 0; then
    if test $i -eq $totalg; then
      echo -n "Polynomials for all graphs"
      echo " generated succesfully"
    else
      echo -n "There was an error and maybe"
      echo " some graphs are without TP.."
    fi

    break
  fi

  echo "tp:=$tuttepoly;" > "$resultsDir/$i.txt"

  echo ""
  echo "Tutte Polynomial for graph # $i: $tuttepoly"
  echo ""

done

rm -f $tmpfile

echo ""
```

```
echo "Finished !!!"
echo ""
```

```
echo "Generated polynomials for  $\$(i - \$\text{number})$  graphs..."
```

El script toma como parámetros el archivo de las gráficas en formato **g6**, un directorio donde guardar los archivos con los polinomios, pasa las gráficas a formato de lista de aristas al programa **GenTP**, este calcula el polinomio, y lo escribe en la salida estándar. Finalmente, el resultado es guardado en un archivo con el número de la gráfica como nombre. Como ejemplo, aquí está una ejecución para las gráficas 2-conexas de 7 vértices:

```
[####] [rodolfo] -|### research %> ./genpolys bg7.g6 polisbg7
Ready to generate Tutte Polynomials for graphs in file bg7.g6
Starting in 5 seconds (Press Ctr-C to abort)...
Starting !!!!
```

```
Java command is: java -cp tulic.jar:.
Counting graphs...please wait...
graphs file has 468 graphs
starting from graph number 1
```

```
...
```

```
Finished !!!
Generated polynomials for 468 graphs...
[####] [rodolfo] -|### research %>
```

Y he aquí el resultado:

```
[####] [rodolfo] -|### research %> ls polisbg7
100.txt 136.txt 171.txt 206.txt 241.txt 277.txt 311.txt 347.txt 382.txt 417.txt 452.txt 65.txt
101.txt 137.txt 172.txt 207.txt 242.txt 278.txt 312.txt 348.txt 383.txt 418.txt 453.txt 66.txt
102.txt 138.txt 173.txt 208.txt 243.txt 279.txt 313.txt 349.txt 384.txt 419.txt 454.txt 67.txt
103.txt 139.txt 174.txt 209.txt 244.txt 27.txt 314.txt 34.txt 385.txt 41.txt 455.txt 68.txt
104.txt 13.txt 175.txt 20.txt 245.txt 280.txt 315.txt 350.txt 386.txt 420.txt 456.txt 69.txt
105.txt 140.txt 176.txt 210.txt 246.txt 281.txt 316.txt 351.txt 387.txt 421.txt 457.txt 6.txt
106.txt 141.txt 177.txt 211.txt 247.txt 282.txt 317.txt 352.txt 388.txt 422.txt 458.txt 70.txt
107.txt 142.txt 178.txt 212.txt 248.txt 283.txt 318.txt 353.txt 389.txt 423.txt 459.txt 71.txt
108.txt 143.txt 179.txt 213.txt 249.txt 284.txt 319.txt 354.txt 38.txt 424.txt 45.txt 72.txt
109.txt 144.txt 17.txt 214.txt 24.txt 285.txt 31.txt 355.txt 390.txt 425.txt 460.txt 73.txt
10.txt 145.txt 180.txt 215.txt 250.txt 286.txt 320.txt 356.txt 391.txt 426.txt 461.txt 74.txt
110.txt 146.txt 181.txt 216.txt 251.txt 287.txt 321.txt 357.txt 392.txt 427.txt 462.txt 75.txt
111.txt 147.txt 182.txt 217.txt 252.txt 288.txt 322.txt 358.txt 393.txt 428.txt 463.txt 76.txt
112.txt 148.txt 183.txt 218.txt 253.txt 289.txt 323.txt 359.txt 394.txt 429.txt 464.txt 77.txt
113.txt 149.txt 184.txt 219.txt 254.txt 28.txt 324.txt 35.txt 395.txt 42.txt 465.txt 78.txt
114.txt 14.txt 185.txt 21.txt 255.txt 290.txt 325.txt 360.txt 396.txt 430.txt 466.txt 79.txt
115.txt 150.txt 186.txt 220.txt 256.txt 291.txt 326.txt 361.txt 397.txt 431.txt 467.txt 7.txt
116.txt 151.txt 187.txt 221.txt 257.txt 292.txt 327.txt 362.txt 398.txt 432.txt 468.txt 80.txt
117.txt 152.txt 188.txt 222.txt 258.txt 293.txt 328.txt 363.txt 399.txt 433.txt 46.txt 81.txt
118.txt 153.txt 189.txt 223.txt 259.txt 294.txt 329.txt 364.txt 39.txt 434.txt 47.txt 82.txt
119.txt 154.txt 18.txt 224.txt 25.txt 295.txt 32.txt 365.txt 3.txt 435.txt 48.txt 83.txt
11.txt 155.txt 190.txt 225.txt 260.txt 296.txt 330.txt 366.txt 400.txt 436.txt 49.txt 84.txt
120.txt 156.txt 191.txt 226.txt 261.txt 297.txt 331.txt 367.txt 401.txt 437.txt 4.txt 85.txt
121.txt 157.txt 192.txt 227.txt 262.txt 298.txt 332.txt 368.txt 402.txt 438.txt 50.txt 86.txt
122.txt 158.txt 193.txt 228.txt 263.txt 299.txt 333.txt 369.txt 403.txt 439.txt 51.txt 87.txt
123.txt 159.txt 194.txt 229.txt 264.txt 29.txt 334.txt 36.txt 404.txt 43.txt 52.txt 88.txt
124.txt 15.txt 195.txt 22.txt 265.txt 2.txt 335.txt 370.txt 405.txt 440.txt 53.txt 89.txt
125.txt 160.txt 196.txt 230.txt 266.txt 300.txt 336.txt 371.txt 406.txt 441.txt 54.txt 8.txt
126.txt 161.txt 197.txt 231.txt 267.txt 301.txt 337.txt 372.txt 407.txt 442.txt 55.txt 90.txt
127.txt 162.txt 198.txt 232.txt 268.txt 302.txt 338.txt 373.txt 408.txt 443.txt 56.txt 91.txt
128.txt 163.txt 199.txt 233.txt 269.txt 303.txt 339.txt 374.txt 409.txt 444.txt 57.txt 92.txt
129.txt 164.txt 19.txt 234.txt 26.txt 304.txt 33.txt 375.txt 40.txt 445.txt 58.txt 93.txt
12.txt 165.txt 1.txt 235.txt 270.txt 305.txt 340.txt 376.txt 410.txt 446.txt 59.txt 94.txt
130.txt 166.txt 200.txt 236.txt 271.txt 306.txt 341.txt 377.txt 411.txt 447.txt 5.txt 95.txt
131.txt 167.txt 201.txt 237.txt 272.txt 307.txt 342.txt 378.txt 412.txt 448.txt 60.txt 96.txt
132.txt 168.txt 202.txt 238.txt 273.txt 308.txt 343.txt 379.txt 413.txt 449.txt 61.txt 97.txt
133.txt 169.txt 203.txt 239.txt 274.txt 309.txt 344.txt 37.txt 414.txt 44.txt 62.txt 98.txt
134.txt 16.txt 204.txt 23.txt 275.txt 30.txt 345.txt 380.txt 415.txt 450.txt 63.txt 99.txt
135.txt 170.txt 205.txt 240.txt 276.txt 310.txt 346.txt 381.txt 416.txt 451.txt 64.txt 9.txt
```

3. Por último, se escribió un script de **Maple** para ejecutar la prueba dada por el criterio y tratar de encontrar un contraejemplo a la conjetura, he aquí el código fuente, para el caso donde se probaron las gráficas de 9 vértices:

```

basedir:="C:\\polynomials\\polysbg9";
nv:=9;
ngraphs:=194066;

dir:=basedir;

for i from 1 to ngraphs do
  aFile:=sprintf("%s\\%d.txt", dir, i);
  printf("reading file %s\n", aFile);
  read(aFile);
  printf("Tutte polynomial: ");
  print(tp);
  printf("\n");
  aFunc:=simplify(eval(tp, [x=z, y=2-z]));
  secDiff:=simplify(diff(diff(aFunc, z), z));
  aRoot:=fsolve(secDiff, z, 0..2, maxsols=1);
  if (type(aRoot, numeric)
    or eval(secDiff, z=1) < 0) then
    print("Graph number %d is a candidate counter-example ",
      i);
    break;
  else
    printf("Graph number %d passes test\n", i);
  end if
end do;

printf("Succesfully tested all graphs.\n");

```

El script primero lee el polinomio de Tutte de un archivo, hace el cambio de variables $x = z, y = 2 - z$, deriva la función obtenida dos veces, e intenta encontrar alguna raíz de esta en el intervalo $[0, 2]$ con el comando **fsolve** de **Maple**, si no encuentra alguna, la segunda derivada está por encima ó por debajo del eje de las abscisas, en este caso, la evalúa en $z = 1$ (cualquier valor del intervalo basta), para saberlo. Si hay una raíz ó la derivada está por debajo del eje, $T(G; x, y)$ no es convexa, y se imprime en la pantalla el número de la gráfica que puede servir de contraejemplo, si ambas pruebas fallan, se intenta con la siguiente.

Al concluir las pruebas, los resultados fueron también a favor de esta conjetura, no fue

posible encontrar un contraejemplo.

Estos son algunos usos de un programa como **TuLiC**, capaz de calcular el polinomio de Tutte de una gran cantidad de gráficas. A pesar de que en los experimentos no se pudieron refutar las conjeturas, nunca se hubieran podido llevar a cabo con alguno de los algoritmos que se conocen. Cabe mencionar que la Conjetura 3.1.1 y 3.2.1 no son las únicas que no han podido ser probadas ó refutadas, existen mas, y **TuLiC** podría ser un aliado importante para los investigadores del polinomio de Tutte y sus interpretaciones.

Conclusiones

En esta obra se presentó al Polinomio de Tutte, uno de los invariantes algebraicos más importantes para gráficas. Al ver que contiene tanta información de la gráfica, se hace inminente la necesidad de tener una forma de calcularlo eficientemente. Sin embargo, esto al parecer no es posible, ya que a excepción de algunos puntos en el plano complejo, evaluar el polinomio de Tutte es **#P-difícil**, lo cual se convierte en un grave inconveniente para encontrar el valor de ciertos invariantes naturales, como el número de bosques de la gráfica.

Para calcular el polinomio de Tutte se usó el algoritmo de [SIT95], el cual es simplemente aplicar la fórmula de contracción y borrado a una gráfica, formando su árbol de expansión, y utilizando el hecho de que en un mismo nivel, aparecen muchos menores 2-isomorfos, los cuales tienen el mismo polinomio de Tutte, así se evita calcularlo redundantemente. En lugar de limitar al algoritmo a probar solamente 2-isomorfismo, se le dio la flexibilidad de utilizar el procedimiento *2ISO*, con dos gráficas como parámetros, que puede probar un 2-isomorfismo restringido; esto es en general una buena idea, pues en la implementación, el algoritmo que prueba 2-isomorfismo es una especie de componente (plugin) que se puede cambiar por otro mejor. A partir de esto se formó el DDB, que es la idea principal de los algoritmos.

Se probó que los algoritmos calculan correctamente el DDB y el polinomio de Tutte, pero aún faltaba una implementación eficiente del procedimiento *2ISO*. Como en este caso se contaba con la restricción de que las gráficas, que eran menores de una gráfica dada, tenían el mismo conjunto de etiquetas en las aristas, fué posible desarrollar una implementación de *2ISO* que se redujo tan sólo a checar particiones de un subconjunto de vértices de la gráfica original. Además, esto permitió dar resultados concretos sobre el ancho del DDB obtenido, y así dar una cota superior en cuanto al espacio en memoria ocupado por el DDB. Teniendo las bases teóricas, se procedió a escribir un programa que calculara el polinomio de Tutte de una gráfica dada, **TuLiC**.

Con éste programa fué posible atacar dos de las muchas conjeturas que se tienen acerca de evaluaciones del polinomio de Tutte. Primero se demostró que muchas familias infinitas de gráficas 2-conexas cumplían con la conjetura 3.1.1; y ante la imposibilidad de demostrarla en general, se hicieron una serie de experimentos que no habrían sido posible antes; se tomaron todas las gráficas 2-conexas de 3 hasta 9 vértices y se hicieron programas para que, junto con **TuLiC**, intentaran encontrar un contraejemplo a la conjetura, lo mismo para la

conjetura 3.2.1. No se encontraron contraejemplos, lo que hace más plausibles las conjeturas. Estos experimentos constituyen una nueva forma de estudiar al polinomio de Tutte: Cuando por medios teóricos no es posible saber más, los investigadores pueden recurrir a **TuLiC** para saber si sus conjeturas son falsas, y así desecharlas rápidamente, ó al no encontrar contraejemplos, hacerlas más plausibles. Estas son matemáticas experimentales, en donde con la ayuda de las computadoras, es posible hacer matemáticas de una forma distinta, realizando experimentos, intentando de esta manera encontrar una dirección hacia la verdad, como es el caso de la Biología.

Esto último da pie para resaltar lo siguiente. La interacción entre las Matemáticas y las Ciencias de la Computación es mucha y muy profunda, tanto al nivel más general, como ocurre con Maple o Mathematica, como a un nivel fundamental, como es el caso de la prueba del Teorema de los 4 Colores. Este es el punto de vista adecuado para leer la obra. El polinomio de Tutte es imposible de calcular para una gráfica en general, sin embargo, hay conjeturas y preguntas sobre éste. **TuLiC** da un marco de trabajo que permite certificar o rechazar conjeturas para un conjunto significativo de manera experimental.

Aquí está otro ejemplo de tales preguntas.

Una conjetura sobre el polinomio cromático

El polinomio cromático de una gráfica G , $\chi(G; x)$ se puede definir como la función que en el valor entero x , $x \geq 1$, da el número de coloraciones propias de G , para después probar que esta función es un polinomio. De hecho:

$$\chi(G; x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} a_i x^i,$$

donde cada a_i es un entero no negativo, $a_n = 1$, a_{n-1} es el número de aristas de G y $a_0 = 0$.

El polinomio cromático está relacionado al polinomio de Tutte mediante la siguiente relación:

$$\chi(G; x) = \frac{(-1)^{n-1}}{x^{\omega(G)}} T(G; 1-x, 0)$$

donde n es el número de vértices de G .

En 1932 Whitney [Wh32] dio la siguiente caracterización de los coeficientes de χ . Supongamos que las etiquetas de las aristas de G están ordenadas arbitrariamente. Un *ciclo roto* es una subgráfica de G que se obtiene de un ciclo al quitar la arista con etiqueta más chica. Entonces

Teorema *El coeficiente a_i es el número de subgráficas de G con $n - i$ aristas que no contienen un ciclo roto.*

En [LM] se considera la función $\epsilon(G)$ que da el tamaño esperado de una subgráfica de G que no contiene un ciclo roto, o sea, si se define para $0 \leq i \leq n$, $b_i = \frac{a_{n-i}}{\sum_{j=0}^n a_j}$, se puede definir $\epsilon(G)$ como:

$$\epsilon(G) = \sum_{i=0}^n i b_i.$$

Entre otras conjeturas, ellos proponen la siguiente

Conjetura *Para una gráfica G conexa en n vértices, que no es un árbol ni una gráfica completa,*

$$\epsilon(P_n) < \epsilon(G) < \epsilon(K_n).$$

La primer desigualdad fue probada por C. Merino y S. Noble. La segunda desigualdad no ha sido probada, pero **TuLiC** puede ser usado para verificarla en toda gráfica conexa de a lo más 9 vértices.

Los algoritmos descritos en [SIT95] son, al parecer, lo mejor que hasta ahora se conoce para calcular el polinomio de Tutte en el caso general, y debe ser notorio que si se utiliza un algoritmo de prueba de 2-isomorfismo más eficaz que el dado por el Teorema 2.3.1, las cotas de espacio de los algoritmos serían mas pequeñas, y de este modo se podrían hacer cálculos en gráficas más grandes. Entre dos niveles distintos del DDB no hay ningún par de menores que sean 2-isomorfos, por lo que usando esta técnica, lo mejor que se puede esperar es reducir el tamaño del DDB, y esto se logrará solamente si alguien construye un algoritmo eficiente para determinar 2-isomorfismo.

TuLiC ha sido hecho con el propósito de ser distribuido a la comunidad científica interesada en el polinomio de Tutte y en Teoría de Gráficas en general, ya que puede ser extendido, y hacer esto podría ser trabajo a futuro, y puede ser un buen aliado para establecer resultados, como se hizo con el Lema 3.1.9. Por ejemplo: Son problemas abiertos el dar fórmulas explícitas de $T(L_{n,m}; x, y)$ y $T(K_{n,m}; x, y)$; observando algunos polinomios calculados con **TuLiC**, alguien puede tratar de dar con una fórmula general. O bien encontrar propiedades interesantes, como se ha hecho en el problema de enumeración de emparejamientos [Pr99].

Con esto se concluye ésta obra.

Apéndice A

Polinomios de Tutte

Se presentan algunos de los polinomios de Tutte más interesantes calculados por **TuLiC**. Para cada tipo de gráfica, se expone solamente el polinomio de mayor tamaño, y debe entenderse que es posible calcular todos los anteriores. Se hace notar al lector que para poder calcular estos polinomios se necesitó una computadora con una gran cantidad de memoria RAM (1024M).

Gráfica completa K_{13}

Número de términos: 298.

$$\begin{aligned} T(K_{13}; x, y) = & x^{12} + 66x^{11} + 1925x^{10} + 286x^{10}y + 32670x^9 + 14300x^9y + 2145x^9y^2 + \\ & 715x^9y^3 + 357423x^8 + 308022x^8y + 113685x^8y^2 + 45045x^8y^3 + 12870x^8y^4 + 5148x^8y^5 + \\ & 1287x^8y^6 + 2637558x^7 + 3740880x^7y + 2449590x^7y^2 + 1317030x^7y^3 + 626340x^7y^4 + \\ & 308880x^7y^5 + 145860x^7y^6 + 60060x^7y^7 + 25740x^7y^8 + 8580x^7y^9 + 1716x^7y^{10} + \\ & 13339535x^6 + 28139826x^6y + 28330302x^6y^2 + 21010990x^6y^3 + 13498485x^6y^4 + \\ & 8270262x^6y^5 + 4975971x^6y^6 + 2869152x^6y^7 + 1647360x^6y^8 + 900900x^6y^9 + 456456x^6y^{10} + \\ & 216216x^6y^{11} + 96096x^6y^{12} + 36036x^6y^{13} + 10296x^6y^{14} + 1716x^6y^{15} + 45995730x^5 + \\ & 135486780x^5y + 193426233x^5y^2 + 193708515x^5y^3 + 160690530x^5y^4 + 121050930x^5y^5 + \\ & 87038952x^5y^6 + 60537048x^5y^7 + 41342730x^5y^8 + 27717690x^5y^9 + 18078060x^5y^{10} + \\ & 11447436x^5y^{11} + 7018011x^5y^{12} + 4117113x^5y^{13} + 2290860x^5y^{14} + 1204632x^5y^{15} + \\ & 594594x^5y^{16} + 270270x^5y^{17} + 108108x^5y^{18} + 36036x^5y^{19} + 9009x^5y^{20} + 1287x^5y^{21} + \\ & 105258076x^4 + 416102258x^4y + 801375861x^4y^2 + 1055099045x^4y^3 + 1110769660x^4y^4 + \\ & 1023013992x^4y^5 + 870740871x^4y^6 + 705403842x^4y^7 + 553491510x^4y^8 + 424848710x^4y^9 + \\ & 319875556x^4y^{10} + 236384148x^4y^{11} + 171372201x^4y^{12} + 121546425x^4y^{13} + 84041100x^4y^{14} + \\ & 56525040x^4y^{15} + 36911160x^4y^{16} + 23333310x^4y^{17} + 14214200x^4y^{18} + 8308300x^4y^{19} + \\ & 4639635x^4y^{20} + 2460315x^4y^{21} + 1226940x^4y^{22} + 566280x^4y^{23} + 235950x^4y^{24} + 85800x^4y^{25} + \\ & 25740x^4y^{26} + 5720x^4y^{27} + 715x^4y^{28} + 150917976x^3 + 784515160x^3y + 1979224104x^3y^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3353221300x^3y^3 + 4427328620x^3y^4 + 4969514550x^3y^5 + 5013315307x^3y^6 + \\
& 4709432013x^3y^7 + 4213159665x^3y^8 + 3642506725x^3y^9 + 3070406768x^3y^{10} + \\
& 2536227408x^3y^{11} + 2058775719x^3y^{12} + 1644037395x^3y^{13} + 1291054050x^3y^{14} + \\
& 996144864x^3y^{15} + 754462566x^3y^{16} + 560321190x^3y^{17} + 407552860x^3y^{18} + 289949660x^3y^{19} + \\
& 201522321x^3y^{20} + 136645509x^3y^{21} + 90240150x^3y^{22} + 57915000x^3y^{23} + 36027420x^3y^{24} + \\
& 21659352x^3y^{25} + 12540528x^3y^{26} + 6961240x^3y^{27} + 3682250x^3y^{28} + 1840410x^3y^{29} + \\
& 858858x^3y^{30} + 368082x^3y^{31} + 141570x^3y^{32} + 47190x^3y^{33} + 12870x^3y^{34} + 2574x^3y^{35} + \\
& 286x^3y^{36} + 120543840x^2 + 829158408x^2y + 2716328472x^2y^2 + 5859961536x^2y^3 + \\
& 9638525325x^2y^4 + 13168529088x^2y^5 + 15799102176x^2y^6 + 17283458049x^2y^7 + \\
& 17688057387x^2y^8 + 17238306085x^2y^9 + 16196480443x^2y^{10} + 14794737022x^2y^{11} + \\
& 13213854732x^2y^{12} + 11583115401x^2y^{13} + 9988126005x^2y^{14} + 8482363890x^2y^{15} + \\
& 7097905815x^2y^{16} + 5852533830x^2y^{17} + 4754000680x^2y^{18} + 3802864780x^2y^{19} + \\
& 2994411277x^2y^{20} + 2319877131x^2y^{21} + 1767482925x^2y^{22} + 1323519990x^2y^{23} + \\
& 973411725x^2y^{24} + 702617916x^2y^{25} + 497305380x^2y^{26} + 344807320x^2y^{27} + 233921545x^2y^{28} + \\
& 155060620x^2y^{29} + 100267596x^2y^{30} + 63127350x^2y^{31} + 38610000x^2y^{32} + 22879350x^2y^{33} + \\
& 13092300x^2y^{34} + 7204626x^2y^{35} + 3792360x^2y^{36} + 1896180x^2y^{37} + 892320x^2y^{38} + \\
& 390390x^2y^{39} + 156156x^2y^{40} + 55770x^2y^{41} + 17160x^2y^{42} + 4290x^2y^{43} + 780x^2y^{44} + 78x^2y^{45} + \\
& 39916800x + 397126080xy + 1746026568xy^2 + 4857283288xy^3 + 10012432430xy^4 + \\
& 16736474040xy^5 + 24040142841xy^6 + 30871572303xy^7 + 36445235541xy^8 + \\
& 40352717405xy^9 + 42518818056xy^{10} + 43092548434xy^{11} + 42339276044xy^{12} + \\
& 40561541020xy^{13} + 38049502062xy^{14} + 35055564258xy^{15} + 31786670916xy^{16} + \\
& 28406477814xy^{17} + 25041209765xy^{18} + 21786110775xy^{19} + 18711238546xy^{20} + \\
& 15865968404xy^{21} + 13282216168xy^{22} + 10976952480xy^{23} + 8954517000xy^{24} + \\
& 7208935734xy^{25} + 5726217783xy^{26} + 4486536197xy^{27} + 3466233342xy^{28} + \\
& 2639608972xy^{29} + 1980439175xy^{30} + 1463187583xy^{31} + 1063901124xy^{32} + 760812702xy^{33} + \\
& 534690507xy^{34} + 368979039xy^{35} + 249773810xy^{36} + 165670648xy^{37} + 107530137xy^{38} + \\
& 68193697xy^{39} + 42181568xy^{40} + 25395942xy^{41} + 14845402xy^{42} + 8400392xy^{43} + \\
& 4584372xy^{44} + 2401750xy^{45} + 1200914xy^{46} + 568854xy^{47} + 252824xy^{48} + 104104xy^{49} + \\
& 39039xy^{50} + 13013xy^{51} + 3718xy^{52} + 858xy^{53} + 143xy^{54} + 13xy^{55} + 39916800y + \\
& 316499040y^2 + 1263741336y^3 + 3436086940y^4 + 7237654710y^5 + 12703397135y^6 + \\
& 19469297133y^7 + 26905602867y^8 + 34305690705y^9 + 41042986985y^{10} + 46659503176y^{11} + \\
& 50889618637y^{12} + 53641257890y^{13} + 54956679987y^{14} + 54968456400y^{15} + \\
& 53860118169y^{16} + 51835895826y^{17} + 49100042277y^{18} + 45844190249y^{19} + \\
& 42240691636y^{20} + 38439949834y^{21} + 34570017053y^{22} + 30737260554y^{23} + \\
& 27027494637y^{24} + 23507359590y^{25} + 20225890047y^{26} + 17216245827y^{27} + \\
& 14497575092y^{28} + 12076978342y^{29} + 9951530017y^{30} + 8110295765y^{31} + 6536274030y^{32} + \\
& 5208196422y^{33} + 4102137897y^{34} + 3192906717y^{35} + 2455199604y^{36} + 1864518656y^{37} + \\
& 1397857032y^{38} + 1034170357y^{39} + 754658542y^{40} + 542887488y^{41} + 384782112y^{42} + \\
& 268521682y^{43} + 184366182y^{44} + 124439172y^{45} + 82488835y^{46} + 53644734y^{47} + \\
& 34183578y^{48} + 21313292y^{49} + 12981111y^{50} + 7708415y^{51} + 4452668y^{52} + 2495130y^{53} + \\
& 1351922y^{54} + 705419y^{55} + 352716y^{56} + 167960y^{57} + 75582y^{58} + 31824y^{59} + 12376y^{60} +
\end{aligned}$$

$$4368y^{61} + 1365y^{62} + 364y^{63} + 78y^{64} + 12y^{65} + y^{66}.$$

Gráfica bipartita completa $K_{9,9}$

Número de términos: 389

$$\begin{aligned} T(K_{9,9}; x, y) = & x^{17} + 64x^{16} + 2080x^{15} + 44464x^{14} + 1296x^{14}y + 689584x^{13} + \\ & 69552x^{13}y + 6048x^{13}y^2 + 8140720x^{12} + 1822464x^{12}y + 326592x^{12}y^2 + 44352x^{12}y^3 + \\ & 7056x^{12}y^4 + 75043864x^{11} + 30385152x^{11}y + 8740872x^{11}y^2 + 2210544x^{11}y^3 + \\ & 622944x^{11}y^4 + 127008x^{11}y^5 + 21168x^{11}y^6 + 547155100x^{10} + 355644324x^{10}y + \\ & 149134608x^{10}y^2 + 54577152x^{10}y^3 + 20909448x^{10}y^4 + 7298424x^{10}y^5 + 2328480x^{10}y^6 + \\ & 592704x^{10}y^7 + 132300x^{10}y^8 + 15876x^{10}y^9 + 3168806932x^9 + 3059052012x^9y + \\ & 1773087192x^9y^2 + 860277168x^9y^3 + 411818976x^9y^4 + 190165320x^9y^5 + \\ & 84060720x^9y^6 + 34101648x^9y^7 + 12790764x^9y^8 + 4161276x^9y^9 + 1157184x^9y^{10} + \\ & 254016x^9y^{11} + 31752x^9y^{12} + 14538934664x^8 + 19747737468x^8y + 15273653868x^8y^2 + \\ & 9440838684x^8y^3 + 5460562188x^8y^4 + 3053978316x^8y^5 + 1659415356x^8y^6 + \\ & 863834220x^8y^7 + 428486436x^8y^8 + 198574740x^8y^9 + 85319892x^8y^{10} + 33473412x^8y^{11} + \\ & 11706660x^8y^{12} + 3572100x^8y^{13} + 904932x^8y^{14} + 164052x^8y^{15} + 15876x^8y^{16} + \\ & 52363143728x^7 + 96246991080x^7y + 96822119592x^7y^2 + 74632055976x^7y^3 + \\ & 51414231528x^7y^4 + 33616228536x^7y^5 + 21290437800x^7y^6 + 13087459800x^7y^7 + \\ & 7789815504x^7y^8 + 4451842080x^7y^9 + 2428101144x^7y^{10} + 1256184720x^7y^{11} + \\ & 612264744x^7y^{12} + 279284544x^7y^{13} + 118043352x^7y^{14} + 45538416x^7y^{15} + 15761088x^7y^{16} + \\ & 4747680x^7y^{17} + 1173312x^7y^{18} + 211680x^7y^{19} + 21168x^7y^{20} + 145595404724x^6 + \\ & 352077867876x^6y + 451900367856x^6y^2 + 428807261904x^6y^3 + 349688997084x^6y^4 + \\ & 263717984628x^6y^5 + 190153373928x^6y^6 + 132857734296x^6y^7 + 90329252832x^6y^8 + \\ & 59665938528x^6y^9 + 38160690792x^6y^{10} + 23547805848x^6y^{11} + 13971543600x^6y^{12} + \\ & 7946066688x^6y^{13} + 4316612328x^6y^{14} + 2230066776x^6y^{15} + 1090269852x^6y^{16} + \\ & 501172812x^6y^{17} + 214740792x^6y^{18} + 84807576x^6y^{19} + 30401028x^6y^{20} + 9659916x^6y^{21} + \\ & 2616768x^6y^{22} + 565488x^6y^{23} + 86688x^6y^{24} + 7056x^6y^{25} + 304378172420x^5 + \\ & 949664022804x^5y + 1533548367792x^5y^2 + 1776587615208x^5y^3 + 1711119277224x^5y^4 + \\ & 1483250723892x^5y^5 + 1207155791520x^5y^6 + 942822476064x^5y^7 + 714331378656x^5y^8 + \\ & 527197640760x^5y^9 + 379176067368x^5y^{10} + 265437711504x^5y^{11} + 180531121428x^5y^{12} + \\ & 119077484904x^5y^{13} + 76039571664x^5y^{14} + 46922412096x^5y^{15} + 27924426180x^5y^{16} + \\ & 15989805972x^5y^{17} + 8784976536x^5y^{18} + 4615490376x^5y^{19} + 2309397048x^5y^{20} + \\ & 1094810724x^5y^{21} + 488504520x^5y^{22} + 203415408x^5y^{23} + 78154776x^5y^{24} + 27264384x^5y^{25} + \\ & 8432424x^5y^{26} + 2228688x^5y^{27} + 474012x^5y^{28} + 72576x^5y^{29} + 6048x^5y^{30} + \\ & 459074435072x^4 + 1828089992700x^4y + 3681578445804x^4y^2 + 5182401454020x^4y^3 + \\ & 5895584266068x^4y^4 + 5881981997556x^4y^5 + 5399543556036x^4y^6 + 4690599875964x^4y^7 + \\ & 3919330269972x^4y^8 + 3178535834628x^4y^9 + 2513030287572x^4y^{10} + 1940168524140x^4y^{11} + \\ & 1462845114612x^4y^{12} + 1076503689828x^4y^{13} + 772555649652x^4y^{14} + 540194494284x^4y^{15} + \\ & 367680684924x^4y^{16} + 243362277900x^4y^{17} + 156458122380x^4y^{18} + 97572336372x^4y^{19} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 58933714644x^4y^{20} + 34412213700x^4y^{21} + 19383291252x^4y^{22} + 10504716012x^4y^{23} + \\
& 5460527772x^4y^{24} + 2712285324x^4y^{25} + 1281325500x^4y^{26} + 572370372x^4y^{27} + \\
& 239978772x^4y^{28} + 93528612x^4y^{29} + 33444180x^4y^{30} + 10774764x^4y^{31} + 3046932x^4y^{32} + \\
& 727272x^4y^{33} + 137592x^4y^{34} + 18360x^4y^{35} + 1296x^4y^{36} + 466922052098x^3 + \\
& 2375343704076x^3y + 5954990301666x^3y^2 + 10179656707248x^3y^3 + 13711755823416x^3y^4 + \\
& 15812650688688x^3y^5 + 16436535012240x^3y^6 + 15908461253472x^3y^7 + \\
& 14635922567364x^3y^8 + 12967081817424x^3y^9 + 11152385766732x^3y^{10} + \\
& 9354305794680x^3y^{11} + 7670579539896x^3y^{12} + 6155645266512x^3y^{13} + \\
& 4835772079128x^3y^{14} + 3718365592368x^3y^{15} + 2797695325698x^3y^{16} + \\
& 2058918601068x^3y^{17} + 1481374815858x^3y^{18} + 1041450342912x^3y^{19} + 714954888144x^3y^{20} + \\
& 478910508192x^3y^{21} + 312736243680x^3y^{22} + 198883532736x^3y^{23} + 123024632976x^3y^{24} + \\
& 73917722592x^3y^{25} + 43068309984x^3y^{26} + 24287839968x^3y^{27} + 13227102816x^3y^{28} + \\
& 6937884576x^3y^{29} + 3493730688x^3y^{30} + 1682577120x^3y^{31} + 771314040x^3y^{32} + \\
& 334584936x^3y^{33} + 136321416x^3y^{34} + 51665688x^3y^{35} + 17981376x^3y^{36} + \\
& 5646144x^3y^{37} + 1559880x^3y^{38} + 365232x^3y^{39} + 68208x^3y^{40} + 9072x^3y^{41} + 648x^3y^{42} + \\
& 282940520207x^2 + 1886405131269x^2y + 5952553269804x^2y^2 + 12439640444736x^2y^3 + \\
& 19969578964980x^2y^4 + 26814743810604x^2y^5 + 31793089462632x^2y^6 + \\
& 34497614751120x^2y^7 + 35090288975286x^2y^8 + 34009305477762x^2y^9 + \\
& 31754404723824x^2y^{10} + 28773968162400x^2y^{11} + 25425070990332x^2y^{12} + \\
& 21972756272004x^2y^{13} + 18604826098344x^2y^{14} + 15448891470480x^2y^{15} + \\
& 12586330222101x^2y^{16} + 10062506474271x^2y^{17} + 7894421405604x^2y^{18} + \\
& 6077086469712x^2y^{19} + 4589319000384x^2y^{20} + 3399083371008x^2y^{21} + \\
& 2468230073280x^2y^{22} + 1756446299712x^2y^{23} + 1224303277644x^2y^{24} + 835390940292x^2y^{25} + \\
& 557619596064x^2y^{26} + 363822815376x^2y^{27} + 231820408872x^2y^{28} + 144102926232x^2y^{29} + \\
& 87284601648x^2y^{30} + 51446335968x^2y^{31} + 29460627909x^2y^{32} + 16361090451x^2y^{33} + \\
& 8793222192x^2y^{34} + 4562199288x^2y^{35} + 2278348092x^2y^{36} + 1091363076x^2y^{37} + \\
& 499335192x^2y^{38} + 217095696x^2y^{39} + 89118126x^2y^{40} + 34262514x^2y^{41} + 12208752x^2y^{42} + \\
& 3976776x^2y^{43} + 1162188x^2y^{44} + 296820x^2y^{45} + 63720x^2y^{46} + 10800x^2y^{47} + \\
& 1287x^2y^{48} + 81x^2y^{49} + 75796724309x + 744696817083xy + 3100097183922xy^2 + \\
& 8115875592240xy^3 + 15780884079780xy^4 + 25001186799420xy^5 + 34212717326736xy^6 + \\
& 42056004368520xy^7 + 47715579793332xy^8 + 50931384601674xy^9 + 51846269658012xy^{10} + \\
& 50826108032640xy^{11} + 48318287781948xy^{12} + 44763243963516xy^{13} + \\
& 40550156053920xy^{14} + 36001637495208xy^{15} + 31373822903967xy^{16} + \\
& 26862634304577xy^{17} + 22611378357954xy^{18} + 18717933049488xy^{19} + \\
& 15241380591816xy^{20} + 12208384452888xy^{21} + 9619492725936xy^{22} + 7455319340256xy^{23} + \\
& 5682397978818xy^{24} + 4258463042016xy^{25} + 3136959120240xy^{26} + 2270665484928xy^{27} + \\
& 1614409482168xy^{28} + 1126916596152xy^{29} + 771898925808xy^{30} + 518516070192xy^{31} + \\
& 341354923533xy^{32} + 220071633237xy^{33} + 138824364456xy^{34} + 85603788360xy^{35} + \\
& 51543367308xy^{36} + 30266901324xy^{37} + 17308774008xy^{38} + 9624245688xy^{39} + \\
& 5193516924xy^{40} + 2714028822xy^{41} + 1370034216xy^{42} + 666075096xy^{43} + 310781556xy^{44} + \\
& 138573324xy^{45} + 58740984xy^{46} + 23520456xy^{47} + 8824131xy^{48} + 3069711xy^{49} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 976752xy^{50} + 279072xy^{51} + 69768xy^{52} + 14688xy^{53} + 2448xy^{54} + 288xy^{55} + \\
& 18xy^{56} + 75796724309y + 537553021185y^2 + 1935226605729y^3 + 4779316649889y^4 + \\
& 9204170104269y^5 + 14858881477317y^6 + 21059635219245y^7 + 27045407627901y^8 + \\
& 32184511080545y^9 + 36073601543917y^{10} + 38543733557829y^{11} + 39613804605093y^{12} + \\
& 39427334201793y^{13} + 38194439639985y^{14} + 36148197731961y^{15} + 33516440416041y^{16} + \\
& 30506061191913y^{17} + 27295827561309y^{18} + 24034209516141y^{19} + 20839841111277y^{20} + \\
& 17803281314601y^{21} + 14989450787793y^{22} + 12440487197673y^{23} + 10178891930745y^{24} + \\
& 8210853460053y^{25} + 6529612205241y^{26} + 5118721203217y^{27} + 3955067004209y^{28} + \\
& 3011542147773y^{29} + 2259296925309y^{30} + 1669536649269y^{31} + 1214865857925y^{32} + \\
& 870209564601y^{33} + 613362386265y^{34} + 425228918337y^{35} + 289823664785y^{36} + \\
& 194097434053y^{37} + 127650986469y^{38} + 82387552029y^{39} + 52145180877y^{40} + \\
& 32339046501y^{41} + 19633782069y^{42} + 11657337597y^{43} + 6761021805y^{44} + 3825395097y^{45} + \\
& 2108373609y^{46} + 1130032161y^{47} + 587842065y^{48} + 296127369y^{49} + 144079641y^{50} + \\
& 67497633y^{51} + 30334545y^{52} + 13020453y^{53} + 5308981y^{54} + 2042669y^{55} + 735453y^{56} + \\
& 245157y^{57} + 74613y^{58} + 20349y^{59} + 4845y^{60} + 969y^{61} + 153y^{62} + 17y^{63} + y^{64}.
\end{aligned}$$

Redícula cuadrada $L_{10,10}$

Este no es el polinomio más grande de las retículas cuadradas que se ha podido calcular con **TuLiC**. Para apreciar a $T(L_{11,11}; x, y)$ con 5785 términos, y $T(L_{12,12}; x, y)$ con sus enormes 8349 términos, el lector puede dirigirse a http://ada.fciencias.unam.mx/~rconde/L_11_11.html y http://ada.fciencias.unam.mx/~rconde/L_12_12.html.

Número de términos: 3864.

$$\begin{aligned}
T(L_{10,10}; x, y) = & x^{90} + 81x^{98} + 3321x^{97} + 91800x^{96} + 1922940x^{95} + 32532516x^{94} + 462715956x^{93} + 5687328752x^{92} + 61630- \\
& 747698x^{91} + 597842126418x^{90} + 5253573064762x^{89} + 42224797071185x^{88} + 312855526675509x^{87} + 2150984749152021x^{86} + 13799- \\
& 515190468904x^{85} + 83002821887974302x^{84} + 470019227845734754x^{83} + 2514758577218864708x^{82} + 12752973300910119940x^{81} + 61472- \\
& 500756739935471x^{80} + 282352760013830069091x^{79} + 1238567296925445243169x^{78} + 5199258602365510629836x^{77} + 209243245688948- \\
& 56024667x^{76} + 80860802686157988731178x^{75} + 300576931245229927912168x^{74} + 1075986463786385644248373x^{73} + 371427506634342- \\
& 6102704088x^{72} + 12378344933626605518699135x^{71} + 39869182898428514772818877x^{70} + 124230168176189487904038120x^{69} + 37482- \\
& 4295285713887413439173x^{68} + 1095987003865474210947152440x^{67} + 3108127995636313091709628535x^{66} + 8556038483183159593545999- \\
& 255x^{65} + 22869953638262132218607620078x^{64} + 59415274565131125792588139141x^{63} + 150096230593889126160440661837x^{62} + 36890- \\
& 202184335103559458501845x^{61} + 882541397122980460863825480919x^{60} + 2056073456484346043436084526097x^{59} + 466662250646515- \\
& 6675293741342881x^{58} + 10322699020442835378278913376989x^{57} + 22261892941388714437137021450766x^{56} + 46821677469063837538- \\
& 613704955425x^{55} + 96066568211446665997611376773354x^{54} + 192330962292055602496667632008672x^{53} + 3758166979000749203084020- \\
& 5149358x^{52} + 716866639307478724017937202973237x^{51} + 1335084793451845908190600761337894x^{50} + 24279932280330709297940495- \\
& 707407996x^{49} + 4312223632906605452141773219468500x^{48} + 7480044077734668843398919101924997x^{47} + 1267291570380862467416737- \\
& 4195302056x^{46} + 20971282286081399734638289905288591x^{45} + 33895465698445231556942618968033900x^{44} + 53566121389176018737- \\
& 435259368793856x^{43} + 82484400007269606398180824722728889x^{42} + 124162702559746317977097936385119553x^{41} + 18316862170263-
\end{aligned}$$

$243304167362455180650x^{10} + 261740360546585140343791099220834459x^{39} + 366375143046927707477841735094310349x^{38} + 5002873956-$
 $508922088167017389501521526x^{37} + 666182367111923425952426486485833757x^{36} + 86469472942006718670857570443641444x^{35} + 10034-$
 $95056674147696089764020864454163x^{34} + 1346520830381913279556395773671619369x^{33} + 16135277266907845936989493788456293-$
 $08x^{32} + 18801638934911314614082936693874674737x^{31} + 2128728868077698177640941388314880791x^{30} + 2339681694322444681910454-$
 $363410260566x^{29} + 2493815660655685947789509252582215624x^{28} + 257484391189423671282894822700163244x^{27} + 257198143231548-$
 $4728524543140745305661x^{26} + 2482015683193385150380720455072803729x^{25} + 2310373662042141143145452490817367197x^{24} + 20708-$
 $42133346236119376077478448310105x^{23} + 1783863560859770962093903338452889267x^{22} + 14736508451561191842666940343311285-$
 $44x^{21} + 1164710000741601470594725164179021367x^{20} + 878366546588096951481457301463625882x^{19} + 6302135706940179848880839-$
 $14549291032x^{18} + 428764391075498247383582248440671793x^{17} + 275586239891194956979895921318102219x^{16} + 16664259678927155274-$
 $8054452025686710x^{15} + 94349530437141961355727229166872793x^{14} + 49745842009241328162193819605032780x^{13} + 242722426148903-$
 $39150167703620259291x^{12} + 10879640134193683192547132340539493x^{11} + 4441209129651378876325329504883077x^{10} + 163393096523683-$
 $8710141685228797040x^9 + 534860202330423304066447850755937x^8 + 153285339856001675558841220610884x^7 + 37859582212879953185-$
 $340341827215x^6 + 770802050979226658409941396455x^5 + 1261206278885864044546094006030x^4 + 15450983926090525353825488082-$
 $3x^3 + 12612250665459466665665668811x^2 + 513427482871084962707467332x + 81x^{90}y + 6480x^{95}y + 262296x^{91}y + 7155504x^{93}y + 14787-$
 $3x^{44}y^{92}y + 2467368256x^{91}y + 34601246512x^{90}y + 419201798864x^{89}y + 4476428192045x^{88}y + 4277857266036x^{87}y + 3702456461-$
 $94448x^{86}y + 2930157320236570x^{85}y + 21372265038758790x^{84}y + 14461870442070992x^{83}y + 912914044711787038x^{82}y + 5401786196-$
 $439811644x^{81}y + 30084226409173809155x^{80}y + 158270054021017660436x^{79}y + 7890302705875690390x^{78}y + 37380325187664344922-$
 $18x^{77}y + 16870727660421769695769x^{76}y + 72700880014649338693428x^{75}y + 299734868270677927582414x^{74}y + 11844565100467216840-$
 $17466x^{73}y + 440370298507189185342453x^{72}y + 16392596337742882990959492x^{71}y + 5757647779350821676837942x^{70}y + 1949619541-$
 $30210391477302138x^{69}y + 637174208241262499581742591x^{68}y + 2012026971593877237900070092x^{67}y + 61447164914329268569602118-$
 $991x^{66}y + 18165791894055880532330651984x^{65}y + 52029904085432086546544677545x^{64}y + 1444880803379392892774689952x^{63}y + 38931-$
 $3950172585763417954904448x^{62}y + 1018455247215355544042014911076x^{61}y + 25883923389601398069818878880x^{60}y + 6394115749-$
 $567723747132146277304x^{59}y + 15361847936574812046504515678568x^{58}y + 3591001779412433532076352122188x^{57}y + 817119019932493-$
 $10940218423899619x^{56}y + 181060836782263218215481852841172x^{55}y + 390831412499722261022918401236529x^{54}y + 822093418203044-$
 $251677767015109332x^{53}y + 1685566570300640367560810381907974x^{52}y + 3369577899070176553817831106622308x^{51}y + 636912336911407-$
 $3970011968480513493x^{50}y + 12491803531661633288210341638796828x^{49}y + 23173836029210216522736945464430436x^{48}y + 4194505950-$
 $5221490661583953016840100x^{47}y + 74082292382414772444367434292549379x^{46}y + 127680505731135415261558547364241666x^{45}y + 21474-$
 $4508382898575803176098045028230x^{44}y + 352453499681719722404829338442892776x^{43}y + 56447211438512561166026386205531011-$
 $1x^{42}y + 882074940480386765057559866922323544x^{41}y + 1344726843021208348527494714713394095x^{40}y + 19996420584861901348-$
 $1965525908854552x^{39}y + 2899769559378947807291543503069395334x^{38}y + 4099672268315528672170565161623300610x^{37}y + 56489-$
 $39123282505220213139982211957077x^{36}y + 7583135157645161685293709630247041036x^{35}y + 99128637186414891607000923764851561-$
 $24x^{34}y + 12612234981958876494771280012147953760x^{33}y + 15608777362367878163641937755454054177x^{32}y + 18777389122969635764-$
 $444626072851327232x^{31}y + 21941057353894338657563102668484861714x^{30}y + 2488054042918460355692363280746213122x^{29}y + 27353-$
 $896816222920154449497641662818854x^{28}y + 29124728196506807182564100568796366448x^{27}y + 29995629825662748481273234633255550-$
 $33x^{26}y + 29841193557441444652320013138945679160x^{25}y + 28633705287812451895748044902219070544x^{24}y + 26455048586569593355-$
 $66456813420947264x^{23}y + 23490552147216813759297747104035351906x^{22}y + 20004323178721325931028334384533683010x^{21}y + 16300-$
 $104745457399688345481776706454605x^{20}y + 12675573001963303040608173643068333164x^{19}y + 93799341786271983040723889865162280-$
 $14x^{18}y + 6583883298963823103991137524426420682x^{17}y + 4367546018718600144301648591206352834x^{16}y + 27270148096223665350-$
 $41587038870164344x^{15}y + 159520144959210458111494782561770383x^{14}y + 869598934416461860491940670273136646x^{13}y + 43908-$
 $2793279618606778991759227234169x^{12}y + 203898101119877984142335214415632924x^{11}y + 86354712342581561746285471750128372-$
 $x^{10}y + 33023327354141485131377331731132686x^9y + 11264902938370216396174811647370047x^8y + 337611415368477097732493408727-$

$7360x^7y + 871863030531553932562022308123675x^6y + 189064562496086785972830912652912x^5y + 332108631197776416562089692621$
 $93x^4y + 4479296128533556679578286443772x^3y + 424876819959698848648038138213x^2y + 23939659001962484701680266326xy + 513427$
 $482871084962707467332y + 144x^{91}y^2 + 14472x^{93}y^2 + 699242x^{92}y^2 + 22017274x^{91}y^2 + 512838046x^{90}y^2 + 9475592644x^{89}y^2 + 14514$
 $7530578x^{88}y^2 + 1900027885202x^{87}y^2 + 21728810990026x^{86}y^2 + 220749147419519x^{85}y^2 + 2018510096088731x^{84}y^2 + 167876457485104$
 $30x^{83}y^2 + 128087631441417650x^{82}y^2 + 903003672148371006x^{81}y^2 + 5917787330383648352x^{80}y^2 + 3623744046961309944x^{79}y^2 + 20826$
 $6027164736171786x^{78}y^2 + 1127786946111829141159x^{77}y^2 + 5773811422042790248273x^{76}y^2 + 2803061016309396204616x^{75}y^2 + 12938$
 $9719500184955721168x^{74}y^2 + 569251286883529904566891x^{73}y^2 + 2392100890738189734451121x^{72}y^2 + 9619868066429597254374938$
 $x^{71}y^2 + 37088251952063201645824116x^{70}y^2 + 137301435606388676922858055x^{69}y^2 + 488784794151975835985476507x^{68}y^2 + 1675491181$
 $574999768940099592x^{67}y^2 + 5537042025709011313585014657x^{66}y^2 + 17660804707690028438270610137x^{65}y^2 + 54423521818160452119$
 $838013450x^{64}y^2 + 162187421440455078706821639436x^{63}y^2 + 467821882899004345481858602402x^{62}y^2 + 1307150275346054817100514$
 $452968x^{61}y^2 + 3540573506733747011544089237350x^{60}y^2 + 9302958238969974579294221124686x^{59}y^2 + 237268826079128441658795513446$
 $70x^{58}y^2 + 58773740087043079176838125503698x^{57}y^2 + 141474872256508158936238013624882x^{56}y^2 + 33108498410248566258680946388$
 $518x^{55}y^2 + 75362661910366777606430946371837x^{54}y^2 + 1669184196804712627047112320616093x^{53}y^2 + 3598664100347025732275523$
 $574674266x^{52}y^2 + 7554550657902405047876320526714076x^{51}y^2 + 1544654884100848342822859712013019x^{50}y^2 + 307694153104537$
 $60016518557173594483x^{49}y^2 + 50726333411597293722409050321263394x^{48}y^2 + 112992503390481464385992018516144754x^{47}y^2 + 20836$
 $9098593242431424841434115818289x^{46}y^2 + 374596627055341776544544335094979068x^{45}y^2 + 65655658018819028516438259593013148$
 $1x^{44}y^2 + 1121917575483060193316247583423161162x^{43}y^2 + 18692283718959792727503810965499353699x^{42}y^2 + 30361348136811633547$
 $61057036692243861x^{41}y^2 + 4807391251631899552624050625230642212x^{40}y^2 + 7419399928869181813797736571284100824x^{39}y^2 + 11158$
 $84582962555781687924486085463902x^{38}y^2 + 1635155177396293054122164861267948757x^{37}y^2 + 23337913201338507059874428738646827$
 $0x^{36}y^2 + 32432235056392425826516681696487124956x^{35}y^2 + 43865619316458415323366402021988803350x^{34}y^2 + 57715814697396800409$
 $443998580593846546x^{33}y^2 + 73832328326169971455040267017320891148x^{32}y^2 + 91770246543092370592423459471396031738x^{31}y^2 + 11075$
 $0190647109113695632634692339979312x^{30}y^2 + 129662862622797134094135385504558786875x^{29}y^2 + 147133046650314165553108939885$
 $778917559x^{28}y^2 + 161648835491612948293606843942656875344x^{27}y^2 + 171747835670607204114812369405843240047x^{26}y^2 + 1762356814$
 $995377068055332269685624987x^{25}y^2 + 174397654212758008225816780074271663970x^{24}y^2 + 166156725599921260587511798353279966$
 $8906x^{23}y^2 + 152135304592715459439673129524767738712x^{22}y^2 + 13359499333234252071159493952734238307x^{21}y^2 + 1122561557$
 $18659121152096724438307531327x^{20}y^2 + 90030077149721457722292079180525442124x^{19}y^2 + 6872127831303791205172734703116701$
 $588x^{18}y^2 + 497671233742849014832533113569482139x^{17}y^2 + 340716877415058526435626247876861359091x^{16}y^2 + 2196386604758939741$
 $263336745908284040x^{15}y^2 + 1327032539915304088506687125921781553x^{14}y^2 + 7476258175202452982743003775624421298x^{13}y^2 + 39040$
 $33710526811863396865801101330103x^{12}y^2 + 1876542163195670830442372696929014240x^{11}y^2 + 8235355599399948660679661020640613$
 $8x^{10}y^2 + 326793644602197220834010257399294017x^9y^2 + 115885258676285340618947928457927331x^8y^2 + 3619341798110399677107550$
 $927338226x^7y^2 + 9773605019973978720483833760927501x^6y^2 + 2227221359642460499169511914714533x^5y^2 + 41426183708503145576$
 $5146614441930x^4y^2 + 59923494806608528653175951481272x^3y^2 + 62408166054649667642830045956232x^2y^2 + 406683752425730037991420$
 $52318x^2y^2 + 11840836719374102998722064847y^2 + 383x^{92}y^3 + 40408x^{91}y^3 + 2077744x^{90}y^3 + 69704424x^{89}y^3 + 1725489726x^{88}y^3 + 33752$
 $496040x^{87}y^3 + 545081902276x^{86}y^3 + 7491702917584x^{85}y^3 + 89607242241470x^{84}y^3 + 948718157196944x^{83}y^3 + 901101501842364$
 $8x^{82}y^3 + 77612807007080264x^{81}y^3 + 611589813441059902x^{80}y^3 + 4441830483498023504x^{79}y^3 + 29919314981158245990x^{78}y^3 + 18791$
 $0236827698177588x^{77}y^3 + 1105513667724994750132x^{76}y^3 + 6117033924045261963112x^{75}y^3 + 31945970485135366599066x^{74}y^3 + 15795$
 $9903613124305149788x^{73}y^3 + 741551234956099737975564x^{72}y^3 + 3313426008009459271607367x^{71}y^3 + 1412295821928417517151258$
 $2x^{70}y^3 + 57538485893605998296396024x^{69}y^3 + 224477062143969390579762054x^{68}y^3 + 84000264058138971445782796x^{67}y^3 + 30195$
 $40488916634039381498501x^{66}y^3 + 10441203352114756666231431662x^{65}y^3 + 34774182589281531861829981473x^{64}y^3 + 11167451571414$
 $480198554188820x^{63}y^3 + 346198429855726911506434145958x^{62}y^3 + 1036980588240680261988512426744x^{61}y^3 + 30039137573377805x^{60}$
 $02458334362x^{59}y^3 + 8422358420482534031450984913220x^{58}y^3 + 228738286510896579456416344404x^{57}y^3 + 60215155527951785983$

$3711120192x^{57}y^3 + 153749171777358779061246821329684x^{56}y^3 + 38099114487575910895506875763508x^{55}y^3 + 91673843944515563449-$
 $1563916630807x^{54}y^3 + 2142075460871080162567069063730646x^{53}y^3 + 4868814710162861551711609252783241x^{52}y^3 + 107556795955866-$
 $99614281125292731440x^{51}y^3 + 23110913474160306304916677254225179x^{50}y^3 + 48316939929744980751530244401351622x^{49}y^3 + 98311-$
 $852805574204129396271560137383x^{48}y^3 + 194733425860692781361594977151087100x^{47}y^3 + 375569503326260571579281955333636712-$
 $7x^{46}y^3 + 70538356602022787218386226483417462x^{45}y^3 + 1290322833058062166880553927956073955x^{44}y^3 + 22990307865574974024-$
 $33471281407758144x^{43}y^3 + 399008315821834848599727311778502851x^{42}y^3 + 6745415773288407034223267786634887330x^{41}y^3 + 11107-$
 $202504999553240662894140024547647x^{40}y^3 + 17812677525706357537341230444866032520x^{39}y^3 + 278176420996253103754898607693-$
 $92706831x^{38}y^3 + 42295430350157228071319917705196579136x^{37}y^3 + 62595038610358743852948009382875836778x^{36}y^3 + 9014157784-$
 $872542858964673501525157856x^{35}y^3 + 126266108294776608873383084208984030018x^{34}y^3 + 17196195215940428509464686818453774-$
 $3144x^{33}y^3 + 227581419673876481129665422927636888418x^{32}y^3 + 292509242202177367256182844395868661512x^{31}y^3 + 3648729086-$
 $37155925854257315499557546610x^{30}y^3 + 441368787285046476461275846515247024952x^{29}y^3 + 51728781773427486679709803257275037-$
 $1978x^{28}y^3 + 586807602026863704278938839200715924296x^{27}y^3 + 64357468585602269735842937779230323839x^{26}y^3 + 6815348290-$
 $78717300640464200515002331310x^{25}y^3 + 695892766543822671254434487167221081951x^{24}y^3 + 68401765329306540701050339020002289-$
 $1284x^{23}y^3 + 616081067483861736031437173858464312594x^{22}y^3 + 585241181806655251534111575262104812184x^{21}y^3 + 5072748559-$
 $-11205916390722432556856055242x^{20}y^3 + 11969278958561910486574448185266975492x^{19}y^3 + 33051450233016801386142169896284860-$
 $3872x^{18}y^3 + 246982253008621569243664819433166025060x^{17}y^3 + 17451591166587711841293704714534081536x^{16}y^3 + 1161399286-$
 $-16488861641146108690665356380x^{15}y^3 + 72470224077670230381306156424374537509x^{14}y^3 + 42184276849202384668962136540860175-$
 $-158x^{13}y^3 + 2277224353205703427016449322619373527x^{12}y^3 + 11323225494472867367749146677731241020x^{11}y^3 + 514492371337554-$
 $7500268902443861158542x^{10}y^3 + 2115994443876476432878191029161558516x^9y^3 + 778756384742132208853618127479853408x^8y^3 + 25287-$
 $4617290755714399709293140941896x^7y^3 + 71164978069796389157487052191939663x^6y^3 + 16957058467955612071057296038683142-$
 $-x^5y^3 + 3313981354865247813294726364088885x^4y^3 + 507378824327730231063123699585488x^3y^3 + 566218301697768134287469179908-$
 $47x^2y^3 + 4044277281793208642766536830046x^2y^3 + 13562650244487931683795798223y^3 + 64x^0y^1 + 5932x^0y^0 + 305814x^89y^1 + 11230-$
 $715x^88y^1 + 318270041x^87y^1 + 7248009011x^86y^1 + 136510199903x^85y^1 + 2176436227702x^84y^1 + 29948412093012x^83y^1 + 361463642322830-$
 $-x^82y^1 + 3878604050513832x^81y^1 + 37420861666200954x^80y^1 + 327729465776722301x^79y^1 + 2626580093520485509x^78y^1 + 1939726723-$
 $5037525826x^77y^1 + 132785485009932582137x^76y^1 + 846962099899442192634x^75y^1 + 5056384087288734057520x^74y^1 + 283661973242157-$
 $56390841x^73y^1 + 150061679617673787821314x^72y^1 + 75092988538362537556740x^71y^1 + 3564498761656680115948326x^70y^1 + 18089-$
 $81917205756792506117x^69y^1 + 69220354461031742841684869x^68y^1 + 284399529651603047597980372x^67y^1 + 11179862366185632437-$
 $16007398x^66y^1 + 4211959037597069268440671284x^65y^1 + 15231236926408160003126710863x^64y^1 + 5294140969359743468814392-$
 $0354x^63y^1 + 177100472439314938242859212474x^62y^1 + 570842370569705504012765129284x^61y^1 + 177480844070299670641887339107-$
 $7x^60y^1 + 5327875506107924504269009599957x^59y^1 + 15456731661758620980909889056826x^58y^1 + 43371460539208391304650142373-$
 $87x^57y^1 + 117800046194136420430260293344899x^56y^1 + 309917968171704927110907925450353x^55y^1 + 700291286655806236172304385243-$
 $520x^54y^1 + 1954438471990518085458363472014229x^53y^1 + 4690117356914859396608854556329406x^52y^1 + 1092655499521541024073401-$
 $2024219826x^51y^1 + 24723555514744644741345591253628230x^50y^1 + 543547005169298264157037363123173568x^49y^1 + 116148302450358-$
 $271662357880315659557x^48y^1 + 241307264241502394565018381915986229x^47y^1 + 487554630708457850064818600663428807x^46y^1 + 95822-$
 $3156134978975870869557669779314x^45y^1 + 1832218099039605594146310527041511736x^44y^1 + 34088886318432706640467691133864580-$
 $13x^43y^1 + 6171811338182713070406838571786380852x^42y^1 + 10874173915750411837826657176432009263x^41y^1 + 18645037591440670073-$
 $447607643081416324x^40y^1 + 31109446250977579171881771503770912948x^39y^1 + 50505668160782639589452667469897159028x^38y^1 + 79770-$
 $167008331366222438868750201873482x^37y^1 + 122546990358458882714553066065820587133x^36y^1 + 183066830289061077269918694317-$
 $474225089x^35y^1 + 20583772273909559877615367719220362494x^34y^1 + 375101128457805422804170708129856926500x^33y^1 + 5140403289-$
 $-9828248958497043065774576877x^32y^1 + 6837855331269539866180449305769170846217x^31y^1 + 88233769041750073025201275890417790-$
 $1072x^30y^1 + 110361672543943284960924678870440668183x^29y^1 + 133690532500059745032951063841374272327x^28y^1 + 1566975297-$

$131064776941129900071581261137x^{27}y^4 + 177512057860420022949271233182980898072x^{26}y^4 + 19411646112481561851642103241145073-$
 $37818x^{25}y^4 + 2046273406358189523600212913181641412139x^{24}y^4 + 20761382457766483495268868399757171158x^{23}y^3 + 2023873862-$
 $056959045700934026657106524420x^{22}y^3 + 1891900061362727282135781078038114526581x^{21}y^3 + 16922047130213272248835220341217497-$
 $66723x^{20}y^3 + 14447314211405468481156074986214780121936x^{19}y^3 + 1174121522094834812598575511260919591778x^{18}y^3 + 9055200007-$
 $56565775600398011906684824843x^{17}y^3 + 660454965871936308347283215887702637829x^{16}y^3 + 45379196282468218946289438619069070-$
 $3042x^{15}y^3 + 292429215963032570815791379743818358666x^{14}y^3 + 175852218293189104510005341970404892024x^{13}y^3 + 9811284315-$
 $27238x^{12}y^3 + 106016677018003254920x^{12}y^3 + 50447963701193427569254161251863628867x^{11}y^3 + 23718707225545336057437173218089131-$
 $097x^{11}y^3 + 10102296004748095838463765135722840506x^9y^3 + 3854319252059900184351992769568520005x^8y^3 + 129916508890156086419-$
 $88843082483965987x^7y^3 + 380178841707872661230869722116968773x^6y^3 + 94415423836165640340347153240940002x^5y^3 + 1929375418-$
 $4600486534141852489274427x^4y^3 + 310321830064666842442146717066404x^3y^3 + 366444832915347027494509186283823x^2y^3 + 28027-$
 $970849430132071957969571302x^1y^3 + 1028869838647836565747657585528y^3 + 448x^{80}y^5 + 41331x^{88}y^5 + 1978928x^{87}y^5 + 65561-$
 $318x^{86}y^5 + 1680261120x^{85}y^5 + 35216398857x^{84}y^5 + 623226109188x^{83}y^5 + 9510737338900x^{82}y^5 + 127115257901260x^{81}y^5 + 1506615926-$
 $590010x^{80}y^5 + 16001779972594956x^{79}y^5 + 153673120749509984x^{78}y^5 + 1344889453693795646x^{77}y^5 + 10799569297474041781x^{76}y^5 + 80051-$
 $62879039369824x^{75}y^5 + 550658957728012070234x^{74}y^5 + 3531704150449385465862x^{73}y^5 + 21207388353411626295867x^{72}y^5 + 11967-$
 $5838495440361187368x^{71}y^5 + 5367759231107216198400918x^{70}y^5 + 3204230558852679069394762x^{69}y^5 + 1528919360865756477269286-$
 $8x^{68}y^5 + 99346184747448373287633676x^{67}y^5 + 299634390493535279309270638x^{66}y^5 + 1235827629933479348711743844x^{65}y^5 + 48742-$
 $68958046272171876265845x^{64}y^5 + 1811472734652498261545683636x^{63}y^5 + 86739385657913505731997268720x^{62}y^5 + 232360052936010-$
 $288220580323363x^{61}y^5 + 77813352443366319588581715587x^{60}y^5 + 2509376076171406533747671623036x^{59}y^5 + 78011840373063837223-$
 $5194848845x^{58}y^5 + 23402635187696005153539949941606x^{57}y^5 + 67806295039624165970953110231240x^{56}y^5 + 1899046985714659593-$
 $04067750060512x^{55}y^5 + 514507209798327512018291487486507x^{54}y^5 + 13493949389697987494038703323107518x^{53}y^5 + 342810594148120-$
 $834855092147352019x^{52}y^5 + 8440884914072819549176203417316680x^{51}y^5 + 20154310076898012484701030333236484x^{50}y^5 + 46687-$
 $362977723006585542488146889276x^{49}y^5 + 104970167554963327347645408339352743x^{48}y^5 + 229155539451936863692342897425406-$
 $0x^{47}y^5 + 48586824998931589667620702058908422x^{46}y^5 + 1000927103413317545511999768900503530x^{45}y^5 + 20037090610703363226-$
 $16788285582549662x^{44}y^5 + 38986489456689078243977677731165492x^{43}y^5 + 7373999422870873892780001997310127891x^{42}y^5 + 13559-$
 $489729876177202718989447291210842x^{41}y^5 + 24241287038870726314220818071124065367x^{40}y^5 + 42134632583318444553807200255-$
 $40622872x^{39}y^5 + 71198448137493109499867597194646503488x^{38}y^5 + 116950623550262955329664341911849406404x^{37}y^5 + 1867081208-$
 $21242461023743936712827428817x^{36}y^5 + 289636953146817337106771070143081793108x^{35}y^5 + 43646352913115146285089212662800632-$
 $0617x^{34}y^5 + 638686767616879470044877856980973914372x^{33}y^5 + 907159856376375961843727709632146227079x^{32}y^5 + 125000051633153-$
 $1847671535628090486406096x^{31}y^5 + 1669948334198786317020803281004764279327x^{30}y^5 + 2161505000589205682971400171673419894794-$
 $x^{29}y^5 + 270843648809835250049605393666466081380x^{28}y^5 + 3282372970318565117386924517023185372192x^{27}y^5 + 384332867419225-$
 $1300041468351314520256763x^{26}y^5 + 4342705846187298793925356551374461680952x^{25}y^5 + 4728932856923647792388127937887409330995-$
 $x^{24}y^5 + 4955175228996274956807153865205906206860x^{23}y^5 + 4987813780160550758730029586965188461954x^{22}y^5 + 481381028920448-$
 $0155774709787401886164162x^{21}y^5 + 4444951488925200285847492474512015793846x^{20}y^5 + 3917451649069191476424143100047230235476-$
 $x^{19}y^5 + 3286481029436606142781562402462518779634x^{18}y^5 + 2616600940537534011869686941673889826158x^{17}y^5 + 197035874163819-$
 $0130342859203100601091070x^{16}y^5 + 1397930208958605063996943944058318741504x^{15}y^5 + 930388598247428018226569787672266003-$
 $2848x^{14}y^5 + 577991713776869119129258581065706010000x^{13}y^5 + 33325403674383456916948609513087240536x^{12}y^5 + 1771536797-$
 $56018827077737466727579496820x^{11}y^5 + 86154040180519956604323280276088353345x^{10}y^5 + 37980931910623066716483802700035199-$
 $662x^9y^5 + 1501054704628952650565379737378212071x^8y^5 + 5246284687111807695866017356398325476x^7y^5 + 15939418168657756763-$
 $7048398536640970x^6y^5 + 41167681971403002165764816325180040x^5y^5 + 8768887011778163141618700640409847x^4y^5 + 1474781407-$
 $451160951299321238367191x^3y^5 + 1829196548600387465853987645402755x^2y^5 + 18027129485498016930866249373134x^1y^5 + 5816111862-$
 $208936645418691560570y^5 + 112x^{88}y^6 + 10344x^{87}y^6 + 511562x^{86}y^6 + 17718120x^{85}y^6 + 476846786x^{84}y^6 + 10531070856x^{83}y^6 + 19724-$

$1905708x^{82}y^6 + 3201179547654x^{81}y^6 + 45703638634682x^{80}y^6 + 580552914555856x^{79}y^6 + 662126250079805x^{78}y^6 + 68328765791155997x^{77}y^6 + 642353102708956125x^{76}y^6 + 5534547651926823362x^{75}y^6 + 43944042050704537934x^{74}y^6 + 323126908729710455703x^{73}y^6 + 2210270086024885682329x^{72}y^6 + 14121423158837317102544x^{71}y^6 + 84580433879211419680850x^{70}y^6 + 476506548463004845203995x^{69}y^6 + 2532743486730035988428911x^{68}y^6 + 12735997526336388310648832x^{67}y^6 + 60741106213312714816300904x^{66}y^6 + 275380044297029306641439618x^{65}y^6 + 1180289792294585491145980436x^{64}y^6 + 4902029026733364165078766800x^{63}y^6 + 19317651797809364022015730708x^{62}y^6 + 72898228187945472292743861132x^{61}y^6 + 263815503774782492121731038134x^{60}y^6 + 916820854966816008930361596252x^{59}y^6 + 30635028973812065569752633016769x^{58}y^6 + 9853374499866571124796115036902x^{57}y^6 + 30537945062624981536851539592509x^{56}y^6 + 91285209950016445790663329762902x^{55}y^6 + 263420509915094349906724896600329x^{54}y^6 + 734409688970708873520567897399796x^{53}y^6 + 1979649795778504165101562940654895x^{52}y^6 + 5162893625606332048640233278947496x^{51}y^6 + 13035275293173038878657810123890146x^{50}y^6 + 31879525306110149926109693167667190x^{49}y^6 + 755590608698148201221537595057664x^{48}y^6 + 173635984054284144746671558406214470x^{47}y^6 + 387029824725494945108977506425099310x^{46}y^6 + 83705083216664424037475765221918649x^{45}y^6 + 1757080165324268236808418761125631485x^{44}y^6 + 3580732821091060562129409338475921210x^{43}y^6 + 7085650062943890877130725688453001519x^{42}y^6 + 13616959855902274405178909497920592630x^{41}y^6 + 2541054550622805156079351304051017356740y^6 + 4607908094874073490516291897624116107839x^{39}y^6 + 81143979425164276214478125318504407206x^{38}y^6 + 1387810087002990665855504033147090245636x^{37}y^6 + 23050382884660580584009804794075375440x^{36}y^6 + 37174428400199697984623297949200801734x^{35}y^6 + 58190315914252627667340406876656604783x^{34}y^6 + 883950822989440863389625336567611954387x^{33}y^6 + 1302511075823199981654055720712461084658x^{32}y^6 + 1860815183116391427223719273498392123422x^{31}y^6 + 2576910023621127204139920511634112598271x^{30}y^6 + 3453237164726820510820332441831767482100x^{29}y^6 + 4479258612464942493942789060318086173423x^{28}y^6 + 5616982365103554075612707362433930120800x^{27}y^6 + 6802658847588757821950458923251796321163x^{26}y^6 + 7947569863894127259951713872382760799605x^{25}y^6 + 894550997809800992349476877064924298446x^{24}y^6 + 968618732744636990921084153397306663054x^{23}y^6 + 1007294763428055874642165951777779091194x^{22}y^6 + 10041842684476979334866146060359852652735x^{21}y^6 + 957652830370683385540953775878069766341x^{20}y^6 + 8716077738081828717995893795127077847790x^{19}y^6 + 7550993731068896517855617221037703969926x^{18}y^6 + 6208188113191948656878260487436196420497x^{17}y^6 + 4827765109681128520716938185641369403379x^{16}y^6 + 3537526896926996003033520740210653408x^{15}y^6 + 2431946897828899268528272815485535810182x^{14}y^6 + 1560890577418744244061981292661713348980x^{13}y^6 + 930034755891805871384071671182861274870x^{12}y^6 + 511079178998428015890914395259786580122x^{11}y^6 + 25704350839637290145839305744100662828x^{10}y^6 + 117246931102118273342761183153437065989x^9y^6 + 479744065735679733091897380274283651257x^8y^6 + 17373142164379694782703365395574368156x^7y^6 + 5474406632646524627538560007025313528x^6y^6 + 1468264937151191621167368074218292247x^5y^6 + 325306265418453632087803231531253755x^4y^6 + 57035033737721767655598616670681944x^3y^6 + 7398370663592659770716057730924943x^2y^6 + 62885054652461086849304394152430x^1y^6 + 26135771128193482512139139461191y^6 + 1070x^8y^7 + 94304x^8y^7 + 4310614x^9y^7 + 136105440x^8y^7 + 3330678388x^8y^7 + 67131626428x^8y^7 + 1155775467708x^8y^7 + 17399244064692x^7y^7 + 232683406501512x^7y^7 + 2795502061771816x^7y^7 + 3042856789461446x^7y^7 + 302101820202663524x^7y^7 + 2751247104110027444x^7y^7 + 23096998233705999952x^7y^7 + 179538029613917264072x^7y^7 + 1297438349097699801448x^7y^7 + 8748980055073425813434x^7y^7 + 55239897974145091568768x^6y^7 + 327598551568634264066246x^6y^7 + 1830152010381648112897468x^6y^7 + 9657221250438038861364144x^6y^7 + 48251338302226350041333804x^6y^7 + 228795006869152649204551370x^6y^7 + 1031747923334221814044020744x^6y^7 + 4433315756569918308006635658x^6y^7 + 18183766423996103517602047288x^6y^7 + 71310026245034541371404990818x^6y^7 + 267783984944352488173623435408x^5y^7 + 964251252466892950034934066433x^5y^7 + 3333684465630717895168159678162x^5y^7 + 11079006772218440186990768245015x^5y^7 + 35431715819163534958481837996612x^5y^7 + 109152576193712760699102172352423x^5y^7 + 324210228402045485835088329134146x^5y^7 + 929261868394926248941442891386189x^5y^7 + 2572203116631055015500124810215052x^5y^7 + 6880756990311953040708366092565126x^5y^7 + 177996550465402234227660202981099676x^4y^7 + 44553900245961321334195210416298626x^4y^7 + 107946210036957689922149589339385516x^4y^7 + 253409491822182652549054243739038944x^4y^7 + 576331110721759929315974065227892768x^4y^7 + 1270555173497915676055745621460952430x^4y^7 + 2713954748383270677160236927245226727x^4y^7 + 5630819125147014400703648751556273281x^4y^7 + 113247954372036372989554387752738$

$$\begin{aligned}
& 546r^{11}y^7 + 22098638404655461678524328122008930243x^{10}y^7 + 41842739989609186660257888364195162864r^{10}y^7 + 7687994523- \\
& 9936197206830398736154072820x^9y^7 + 137068670152935967350660208972527476556x^8y^7 + 2371(726830443345497460684214032194- \\
& 5072r^{26}y^7 + 397949683064270221283550720699764848608x^{33}y^7 + 647804786462999519849217007070167191809x^{34}y^7 + 102256548956508- \\
& 3851624682497005149571418x^{33}y^7 + 1564645084257692802314615286332498460827x^{32}y^7 + 2319686167582740985346713819948285214000- \\
& x^{31}y^7 + 3330455019053201301250910694326504942829x^{30}y^7 + 4627741818936740843838099849852658890086x^{29}y^7 + 621885453066578- \\
& 796204925093599925997658x^{28}y^7 + 807536106099857016663905235124136168392x^{27}y^7 + 1012286818598576448602128128079774557259- \\
& 1r^{26}y^7 + 12236437426868793086673435844630241746294x^{25}y^7 + 14245237947901366899320496864199721408597x^{24}y^7 + 159488070070627- \\
& 37289176053784092268533076x^{23}y^7 + 17144707951076688519385624780706945737272x^{22}y^7 + 17663841436756882219544294016930944- \\
& 018440x^{21}y^7 + 174061605190689529259794780905539559501986x^{20}y^7 + 16367442968672361103645655602036120535320x^{19}y^7 + 1464837072- \\
& 5106223532089541269210964117556x^{18}y^7 + 1244099777107293035502927194350269331756x^{17}y^7 + 999402755022802570541781588349- \\
& 1808106448x^{16}y^7 + 756513769122933723961180380173605305520x^{15}y^7 + 5373197322989133417155434091873257395074x^{14}y^7 + 35634- \\
& 69780100076955849912397508781182888x^{13}y^7 + 2194345261186065223128702055232024077614x^{12}y^7 + 12465441101584381524721600133- \\
& 7532864048x^{11}y^7 + 648301445393685502045599577825273778x^{10}y^7 + 3059099015526619325836614230537952914076x^9y^7 + 1295492294- \\
& 24998031297142004251807007986x^8y^7 + 48584649245976923194418337971005143396x^7y^7 + 15866491905186762422661538700662361- \\
& 348x^6y^7 + 4414549682455915429613965043364716200x^5y^7 + 1015889519896072086502388424726785426x^4y^7 + 18520794897843860269- \\
& 0811131211189540x^3y^7 + 26060546324278711200533355151639663x^2y^7 + 222769620563564605241908898641250r^2y^7 + 972607325438117- \\
& 01913521096483995y^7 + 292r^{35}y^8 + 27087x^{31}y^8 + 1323422x^{33}y^8 + 44733618x^{32}y^8 + 1165895192x^{31}y^8 + 24848542171x^{30}y^8 + 44937- \\
& 3155176r^{79}y^8 + 7071150685300x^{78}y^8 + 98558707663974r^{77}y^8 + 1232736004011253x^{76}y^8 + 13971168998513618x^{75}y^8 + 1454508434- \\
& 33449512x^{74}y^8 + 1373428848419321286x^{73}y^8 + 12042420717563222104x^{72}y^8 + 97850998186863367020x^{71}y^8 + 73955920341281694602- \\
& 6x^{70}y^8 + 5216720065073239541642x^{69}y^8 + 3444941661393681283557x^{68}y^8 + 213586618902305430951074x^{67}y^8 + 12466187920674434535- \\
& 78466x^{66}y^8 + 6866653247951166827009200x^{65}y^8 + 35778314377043908352054326x^{64}y^8 + 176726348465357254695342136x^{63}y^8 + 82921- \\
& 7270687022522779654714x^{62}y^8 + 3702874809224498549694050198x^{61}y^8 + 15764274457598252906157297443x^{60}y^8 + 640884499392588- \\
& 64859188619330x^{59}y^8 + 249119407617902923877466479578x^{58}y^8 + 92785323320209111726032233947x^{57}y^8 + 33131774379902289307- \\
& 52048916773x^{56}y^8 + 11358734787747204869986852494749x^{55}y^8 + 37429828435345354158847128030709x^{54}y^8 + 11867346330892819875- \\
& 9506393300939x^{53}y^8 + 36236673791199646824345659262246x^{52}y^8 + 10655474154546601637154823471475176x^{51}y^8 + 302828236899237- \\
& 4783203312728078852x^{50}y^8 + 8300700045702778954927273892026980x^{49}y^8 + 21979860032400250088118160608915653x^{48}y^8 + 56254- \\
& 703774194394576326327488692469x^{47}y^8 + 139266246375836511993009525955605967x^{46}y^8 + 3338375701953981894675789189346534- \\
& 2x^{45}y^8 + 7734881877780301151621106504416054473x^{44}y^8 + 1736820328948513145325702707111199687x^{43}y^8 + 37778712968317899852- \\
& 10661204234803985x^{42}y^8 + 7962421064702043246898388002815645116x^{41}y^8 + 16264449347850005428803840873150630492x^{40}y^8 + 32202- \\
& 965762114287532840777407771357763x^{39}y^8 + 61809559757538527190137178270223261678x^{38}y^8 + 11500954164955627695920925899918889- \\
& 8840r^{37}y^8 + 207452595046820661170737582372285128437x^{36}y^8 + 3627194887997746055678232523278101551x^{35}y^8 + 614639624974427- \\
& 643523548848141535945852x^{34}y^8 + 1009176349903770182556856474366432525762x^{33}y^8 + 1605003720905588665868083801824562245066- \\
& r^{32}y^8 + 2471593913322035539316838681040011505466x^{31}y^8 + 3683503014353749962341101875135892397014x^{30}y^8 + 530977871730040- \\
& 2985572880734171369429162x^{29}y^8 + 7398201209984814204850010643088567162849x^{28}y^8 + 9955499169186945934801833689468475119x^{27}- \\
& r^{27}y^8 + 12926628753117301861972230002265527720413x^{26}y^8 + 16178227232781818509987844483046817968678x^{25}y^8 + 194926987637552- \\
& 3839678357558430408793703x^{24}y^8 + 22579138868619475131921526214863761215310x^{23}y^8 + 25104715162877396385395095387573789- \\
& 149578x^{22}y^8 + 267450920274555101990888376626028064787702x^{21}y^8 + 27245948549296045540306124457565079226454x^{20}y^8 + 2648162552- \\
& 9017804281348605802215287242058x^{19}y^8 + 24494094381687436789485301439213501702559x^{18}y^8 + 2149797258583160076349551161354- \\
& 04452072266r^{17}y^8 + 17845702536932254875115793729783359247606x^{16}y^8 + 13959186884944858086322473137613700740579r^{15}y^8 + 10215- \\
& 7726641476999505242839083755843673328x^{14}y^8 + 7023500792623837120272264021267627007825x^{13}y^8 + 446981216091478245776866213206- \\
& 3325388112x^{12}y^8 + 262505575908000776110525001604660629104r^{11}y^8 + 1411756739918356423994784787676992740644r^{10}y^8 + 68966-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 7329584137578893402847982614715778x^9y^8 + 301963288093691751204138645059156810795x^8y^8 + 117239842077191843450262101791 \cdot \\
& 923495066x^7y^8 + 30661529897980623198030743847953811610x^6y^8 + 11439501862787749627296069964428750288x^5y^8 + 27315267249547 \cdot \\
& 3473159042290838043484x^4y^8 + 517596682653257704821015798249148434x^3y^8 + 7283917215943424785817114544348777x^2y^8 + 67518 \cdot \\
& 36717450338394343893723259315xy^8 + 308326352618530826923465355271016y^8 + 49x^{84}y^9 + 6536x^{83}y^9 + 391472x^{82}y^9 + 15033 \cdot \\
& 604x^{81}y^9 + 427664197x^{80}y^9 + 9726045568x^{79}y^9 + 185166482376x^{78}y^9 + 3041671046392x^{77}y^9 + 44026110610405x^{76}y^9 + 5700975895 \cdot \\
& 49572x^{75}y^9 + 6679257585727806x^{74}y^9 + 71411849801976640x^{73}y^9 + 701402717479745250x^{72}y^9 + 6362430019369222544x^{71}y^9 + 53533 \cdot \\
& 504575190659246x^{70}y^9 + 419347021503884586996x^{69}y^9 + 306803894181889733305x^{68}y^9 + 21025010722449572512776x^{67}y^9 + 13531 \cdot \\
& 3380119061251362732x^{66}y^9 + 819845280480488673196816x^{65}y^9 + 4687034665110788173678762x^{64}y^9 + 2533737366689942214886232 \cdot \\
& 8x^{63}y^9 + 1297818716951543997915466994x^{62}y^9 + 631042787244277428147994808x^{61}y^9 + 29179300549485893032931948583x^{60}y^9 + 12852 \cdot \\
& 510319229916352392927416x^{59}y^9 + 54010540172913271194379675892x^{58}y^9 + 216862040509840069128800120182x^{57}y^9 + 833102253152548 \cdot \\
& 74400622521350x^{56}y^9 + 3066042831098326207334222124876x^{55}y^9 + 10822822396379259236842462681072x^{54}y^9 + 36683108712579051034 \cdot \\
& 580544937160x^{53}y^9 + 119509158625126047790010527121753x^{52}y^9 + 374592203625719569733229057005180x^{51}y^9 + 11306290529034085665 \cdot \\
& 59953678232740x^{50}y^9 + 3288792442004860939990307110223426x^{49}y^9 + 9226344359002620522275023969645168x^{48}y^9 + 249800692295365 \cdot \\
& 01794602210312159996x^{47}y^9 + 6531233220975756535600991973571758x^{46}y^9 + 16499569705978330133714189301875226x^{45}y^9 + 40294 \cdot \\
& 6149470686112841288876540217321x^{44}y^9 + 95170270999766054167305753800960524x^{43}y^9 + 2174712984181170749266518500786451 \cdot \\
& 74x^{42}y^9 + 480937093258420838387036990951688682x^{41}y^9 + 10296143133958426148227577295512000100x^{40}y^9 + 21342720887002699614 \cdot \\
& 975920461820451476x^{39}y^9 + 42842719857301045338722610353230378859x^{38}y^9 + 83290008982019381583671942018093413580x^{37}y^9 + 15682 \cdot \\
& 133671384132282810780830381378059x^{36}y^9 + 285955462903287155989707872109059214508x^{35}y^9 + 504915709293965117674153299458 \cdot \\
& 385050313x^{34}y^9 + 863150544671609858848720209371855425636x^{33}y^9 + 142819026073903950520139828141002595796x^{32}y^9 + 2286471679 \cdot \\
& 73535676080232847248655693810x^{31}y^9 + 3540260021557947200521756110392899055408x^{30}y^9 + 52986003535053629163384354287396526 \cdot \\
& 21152x^{29}y^9 + 7660639999954092341708572416501096575881x^{28}y^9 + 1069099266488075765873150158292466583544x^{27}y^9 + 1438919789 \cdot \\
& 2897184411544591642805839297475x^{26}y^9 + 18658518723909365660557155591500633206702x^{25}y^9 + 232825275996337212290694034042 \cdot \\
& 87164218339x^{24}y^9 + 27919837384108554726466807177109834200468x^{23}y^9 + 32126398817785336737977394909767044512320x^{22}y^9 + 35409 \cdot \\
& 87716996309736706218010776565851832x^{21}y^9 + 37311834032757838029408537212439899214080x^{20}y^9 + 37502721682714013027 \cdot \\
& 06530878782686833040x^{19}y^9 + 35865794604060606016519288771857996419877x^{18}y^9 + 3264341729201601766110448375208423537748 \cdot \\
& 2x^{17}y^9 + 2792600108227615846580089708404564347372x^{16}y^9 + 22580235695675028883671058939130577700116x^{15}y^9 + 1713189970 \cdot \\
& 3421074120956448489645898757393x^{14}y^9 + 12138402311612986176431138546585573871910x^{13}y^9 + 798748067543447518013187595279 \cdot \\
& 5261754969x^{12}y^9 + 4850262581334679561165480744734034419360x^{11}y^9 + 2697563204291049938829813709120921266560x^{10}y^9 + 13619 \cdot \\
& 49319276382830663840498597265930760x^9y^9 + 617547550511856702414680901179579350615x^8y^9 + 24818167529342515599502349214 \cdot \\
& 039012544x^7y^9 + 80944532185545443699538256335150831288x^6y^9 + 25984077585983474815003673178978520628x^5y^9 + 843347387694100 \cdot \\
& 639969955273977289224x^4y^9 + 1265230575933002832462037027691397444x^3y^9 + 185010550389877723869626713506992803x^2y^9 + 17847 \cdot \\
& 9894511181179781399616712600xy^9 + 850047100200218267614706706901727y^9 + 1256x^{82}y^{10} + 110840x^{81}y^{10} + 5093070x^{80}y^{10} + 16153 \cdot \\
& 9616x^{79}y^{10} + 3900722400x^{78}y^{10} + 79774119838x^{77}y^{10} + 1370402990298x^{76}y^{10} + 20500922678550x^{75}y^{10} + 275481049176980x^{74}y^{10} + 33249 \cdot \\
& 56618004748x^{73}y^{10} + 36563659357598564x^{72}y^{10} + 369136500767752660x^{71}y^{10} + 3441842857945994032x^{70}y^{10} + 29780898489720635342 \cdot \\
& 636x^{69}y^{10} + 240064371935506762774x^{68}y^{10} + 1808796582076308099456x^{67}y^{10} + 12774894832285400001702x^{66}y^{10} + 84785764245206721286 \cdot \\
& 036x^{65}y^{10} + 52999979460726321287596x^{64}y^{10} + 3126993363267539672000376x^{63}y^{10} + 17447241896687764026337664x^{62}y^{10} + 9223046037 \cdot \\
& 7136850664867786x^{61}y^{10} + 462726582411648064062835178x^{60}y^{10} + 2206942570274624252383340364x^{59}y^{10} + 1002189375918971217838619 \cdot \\
& 428x^{58}y^{10} + 43394983526219528905632052855x^{57}y^{10} + 179416842644906520636838530867x^{56}y^{10} + 709232939098535088617629285796 \cdot \\
& 2x^{55}y^{10} + 2683802628280033823117966989694x^{54}y^{10} + 9733051138904305626722176012808x^{53}y^{10} + 338651205202107858265370174780 \cdot \\
& 12x^{52}y^{10} + 11316143356562812976927523367929x^{51}y^{10} + 363490390522142403917565390193278x^{50}y^{10} + 1123344172611400311928383 \cdot \\
& 26944553x^{49}y^{10} + 33427701133409890494227012659992997x^{48}y^{10} + 95850363254640508656810656450410x^{47}y^{10} + 265013082807428 \cdot
\end{aligned}$$

$62321905649591373956x^{16}y^{10} + 7069573341570612008887199851506117x^{15}y^{10} + 182058600993136247139662223022261001x^{14}y^{10} + 45283-$
 $0005192386746853723829121709708x^{14}y^{10} + 1088312016692485506984013017145102770x^{12}y^{10} + 252829958427762103975992372134-$
 $1600509x^{11}y^{10} + 5679334995332880371491012442189529431x^{10}y^{10} + 12338753638910623431363392589181374874x^{9}y^{10} + 2593191245-$
 $574986509650244645387283931x^{8}y^{10} + 5272841998300446652305085175102159947x^{8}y^{10} + 10373646942604481943135468298063113-$
 $4358x^{16}y^{10} + 197467257627240613351445136949659100856x^{15}y^{10} + 363668416461942368378160447618984634075x^{14}y^{10} + 6478891183-$
 $09660255141219335926429026431x^{13}y^{10} + 1116307824859877040497792714526253667488x^{12}y^{10} + 185961264896823004317223604442-$
 $1302297402x^{11}y^{10} + 2993946783063004134346696487527218482886x^{10}y^{10} + 4056227398070296023534185014228088325220x^{9}y^{10} + 69908-$
 $87461576118056139105262921888467226x^{8}y^{10} + 1012579662308176138870995659690305515146x^{7}y^{10} + 141369499744359600112090-$
 $4196757268174431x^{6}y^{10} + 19005967581882200801761885050330354353768x^{5}y^{10} + 2457757090743861858198417090084280143428-$
 $7x^{4}y^{10} + 3053108897965551100106881405164724930806x^{3}y^{10} + 363180442363592305265603340117834760574228x^{2}y^{10} + 41507-$
 $764793067706905907437774953532798620x^{2}y^{10} + 45263103983753592703735845971529908501334x^{20}y^{10} + 47070481563839757085-$
 $811465008894206305638x^{19}y^{10} + 46556777962469504501421964579588432731549x^{18}y^{10} + 4369993404203688603320940097168617764543-$
 $4x^{17}y^{10} + 3877992870310961570472075907919995816979x^{16}y^{10} + 3242437471874093428774357803872151900134x^{15}y^{10} + 2543771903-$
 $9347490315278250754104303946847x^{14}y^{10} + 1863661732572524021518606518294024791354x^{13}y^{10} + 126812785267220538905500424451-$
 $61386828995x^{12}y^{10} + 793632873919363350160484260997153824716x^{11}y^{10} + 45809482796672793714934778391800561506x^{10}y^{10} + 23925-$
 $72266737378048651388789006994189876x^{9}y^{10} + 1122521213551911325047434342638248857004x^{8}y^{10} + 406916988216315999741505915171-$
 $178315588x^{7}y^{10} + 169361544133798749821865675434823554618x^{6}y^{10} + 524296793044349992015931714785456900912x^{5}y^{10} + 1345413716-$
 $2919259980175988606810618548x^{4}y^{10} + 27442677978267256950170059670883642014x^{3}y^{10} + 4165726001895827258271034793726517-$
 $1x^{2}y^{10} + 4176660981723845678079633843634159x^{10}y^{10} + 207064063755638237903840986137654y^{10} + 336x^{81}y^{11} + 35006x^{70}y^{11} + 18198-$
 $68x^{79}y^{11} + 63381776x^{78}y^{11} + 1670511100x^{77}y^{11} + 35620915372x^{76}y^{11} + 640697236812x^{75}y^{11} + 10000239680462x^{74}y^{11} + 1382002555-$
 $37484x^{73}y^{11} + 171628281613004x^{72}y^{11} + 19309372487834088x^{71}y^{11} + 200371534513723128x^{70}y^{11} + 1912851685952962128x^{69}y^{11} + 16942-$
 $545231213210140x^{68}y^{11} + 139931521406380631820x^{67}y^{11} + 1079199615597465235762x^{66}y^{11} + 7811972104442268473132x^{65}y^{11} + 53172-$
 $823367866638216500x^{64}y^{11} + 341084078635029297951528x^{63}y^{11} + 206608630774408268311264x^{62}y^{11} + 1183991613857678540007714-$
 $0x^{61}y^{11} + 6429869829275035063819104x^{60}y^{11} + 331438834420493951092176448x^{59}y^{11} + 1624081562599481789727439599x^{58}y^{11} + 72759-$
 $43784542245948361598600x^{57}y^{11} + 3368427619899027166707357054x^{56}y^{11} + 142987916099896213535800742184x^{55}y^{11} + 5799944861-$
 $50572373479516376584x^{54}y^{11} + 2250964005691189819256680512796x^{53}y^{11} + 8367065789530350156218159715396x^{52}y^{11} + 2982079202-$
 $7337180504675288789296x^{51}y^{11} + 102003263996994841212819703960960x^{50}y^{11} + 335156114585002140724406875112068x^{49}y^{11} + 10587-$
 $4437196090936414306261798450x^{48}y^{11} + 3217929402192885935185081211805924x^{47}y^{11} + 941711635314910298925635475296-$
 $2814x^{46}y^{11} + 26552252003463434714213250965214896x^{45}y^{11} + 72175026002953516767446679726412406x^{44}y^{11} + 18923837079239941463-$
 $0243342415452708x^{43}y^{11} + 478825212989434564808942861047155830x^{42}y^{11} + 11695976386689953521265123710834972x^{41}y^{11} + 27596-$
 $65191236272289815021468110435084x^{40}y^{11} + 629008573668506999554370543392887296x^{39}y^{11} + 138541105203660448225620400112-$
 $38313253x^{38}y^{11} + 29491690699012474178497075900498261910x^{37}y^{11} + 6088326351370170856550264592483780735x^{36}y^{11} + 1206995193-$
 $6839416996280937847651623812x^{35}y^{11} + 232058989007379377804714546412609995705x^{34}y^{11} + 431224002916148265156063282198578-$
 $3158x^{33}y^{11} + 774361691327860751146897115092117292209x^{32}y^{11} + 1343394919510766689192125371734806260876x^{31}y^{11} + 2250760879-$
 $712654264815936456145067243208x^{30}y^{11} + 3640102161399799575560852083190261169760x^{29}y^{11} + 567997019926536323960582728421-$
 $8718917218x^{28}y^{11} + 8544802616038991479238672167292035709620x^{27}y^{11} + 12383544715722686565056543495546271069613x^{26}y^{11} + 17272-$
 $0941151054396314732285383012595088421x^{25}y^{11} + 23163161422172776923500364605837062202689x^{24}y^{11} + 2982538561134640199619408-$
 $1457568801782096x^{24}y^{11} + 3682211935416413121388880171981284885134x^{22}y^{11} + 4351591502946233120488180548980686460752-$
 $0x^{21}y^{11} + 4915458552905458760850034820326873116094x^{20}y^{11} + 52892736310435325159302589943219891835076x^{19}y^{11} + 54152-$
 $499335125299698109678231879236012119x^{18}y^{11} + 52584009174094478049258929082953953418314x^{17}y^{11} + 48270493936105777423-$
 $872931010009377110455x^{16}y^{11} + 4175494976766584732666996536871866957452x^{15}y^{11} + 3388371962899237124832393515240272808295-$

$3x^{11}y^{11} + 25676988739758716279523074116360684866782x^{13}y^{11} + 180719854004373041644009445754480113757795x^{12}y^{11} + 1173899192$
 $2026629602435882329926293985292x^{11}y^{11} + 6085582183524430569943940880470653962474x^{10}y^{11} + 377476267529865824421849813375$
 $4941089244x^9y^{11} + 1832616418420066239572793925486626212580x^8y^{11} + 788980159860773018051814216454805686820x^7y^{11} + 29628$
 $7156332192425140265728982639142244x^6y^{11} + 94994674204923630792402406090209886920x^5y^{11} + 252575788568559395198668002508$
 $71153368x^4y^{11} + 5340890053793986835769992215552046236x^3y^{11} + 841064537182968031187491189082512541x^2y^{11} + 8755971350$
 $2522840097987106794814438xy^{11} + 4512522263529619511501149944943559y^{11} + 84x^{20}y^{12} + 11160x^{70}y^{12} + 668672x^{78}y^{12} + 25682$
 $162x^{77}y^{12} + 727164421x^{76}y^{12} + 16412366336x^{75}y^{12} + 309135200466x^{74}y^{12} + 5013287930688x^{73}y^{12} + 71566525075466x^{72}y^{12} + 91411$
 $9151609253x^{71}y^{12} + 10577383805596649x^{70}y^{12} + 111942344204377240x^{69}y^{12} + 1091730108693815743x^{68}y^{12} + 987040387865922$
 $5930x^{67}y^{12} + 83126305131040040836x^{66}y^{12} + 654670184329377996773x^{65}y^{12} + 4837122960153719944632x^{64}y^{12} + 33620687171288105945$
 $440x^{63}y^{12} + 220335744243253960044200x^{62}y^{12} + 1364263439637941874304590x^{61}y^{12} + 7995146787812780013578265x^{60}y^{12} + 4441986377$
 $6554155158516642x^{59}y^{12} + 234316519492200026483819116x^{58}y^{12} + 1175201485597733873180940871x^{57}y^{12} + 56114979514681308276$
 $99950815x^{56}y^{12} + 25541434549433078399580396754x^{55}y^{12} + 110950054383070872385143383538x^{54}y^{12} + 4604854510171812317026681$
 $73808x^{53}y^{12} + 1828001290334902916416009162443x^{52}y^{12} + 6947865117146977381628823398650x^{51}y^{12} + 2530806142737868901976234$
 $5035463x^{50}y^{12} + 88428759223325232169696547504420x^{49}y^{12} + 296637451243966578013744677280748x^{48}y^{12} + 95609904200802063328$
 $3790432478128x^{47}y^{12} + 2963103212674586164333314898863101x^{46}y^{12} + 883600548076407748954988968840023x^{45}y^{12} + 25360620421675$
 $12659508421396792306x^{44}y^{12} + 70168385265312072947111958507684438x^{43}y^{12} + 187064702785018414348128419930973053x^{42}y^{12} + 48090$
 $0401254008007189006772536692887x^{41}y^{12} + 119262963183706805590575502283074403x^{40}y^{12} + 285424720075845614504214756394$
 $15385363x^{39}y^{12} + 65937980702943009391899244035769107144x^{38}y^{12} + 14707214198243191713142038459908524513x^{37}y^{12} + 3167701771$
 $1385205481430204224688007142x^{36}y^{12} + 65889106455619593716408694452731153829x^{35}y^{12} + 132356310766694089991557243400030093$
 $4679x^{34}y^{12} + 256750437916555492664056528597074775791x^{33}y^{12} + 480897623124409555425659316684667047357x^{32}y^{12} + 8695041545$
 $42602410946598349409440828732x^{31}y^{12} + 1517160830016014174671447503643057540964x^{30}y^{12} + 2553603203146654318305988015x$
 $3593528676x^{29}y^{12} + 4143925879167563032292990109031373207867x^{28}y^{12} + 6479361970718044557032503712257922464811x^{27}y^{12} + 97540$
 $39268342481175343356912392437517491x^{26}y^{12} + 14124696758892666576483631763031739738987x^{25}y^{12} + 1965443624878893416735775$
 $9764173148013770x^{24}y^{12} + 26248259407058093654906501036676534030613x^{23}y^{12} + 3359617365310915186798663632287249626796$
 $8x^{22}y^{12} + 41146193124577561742841992559121444630185x^{21}y^{12} + 4813055529773011526754975210747173941145x^{20}y^{12} + 53660$
 $127028833932476427550866385825696319x^{19}y^{12} + 56883100652333843078072220510051834079211x^{18}y^{12} + 57178439273717464892$
 $107700981729922865337x^{17}y^{12} + 5433131231112470581389470007833827652294x^{16}y^{12} + 48629223374474623065511204768438130496516$
 $9x^{15}y^{12} + 40832981009720247760149246337416101558937x^{14}y^{12} + 32015862551302098125490192700019937846165x^{13}y^{12} + 2331403460$
 $0940469667596361716534810176308x^{12}y^{12} + 156689680311371335910453820295397397905x^{11}y^{12} + 96478032235584148393826448263$
 $9360170767x^{10}y^{12} + 5394719789828453753324827189859124531469x^9y^{12} + 271058277417308005449913402696032002604x^8y^{12} + 12079$
 $09762933387381613621761215390362471x^7y^{12} + 469631038791740838838226454154727631048x^6y^{12} + 1559328266795994200838856$
 $77980222765606x^5y^{12} + 42950931438974487216084018236511188758x^4y^{12} + 9412871092001068646001386703402896916x^3y^{12} + 15370$
 $846051716986051406583088466708342x^2y^{12} + 166045774626640059877353643791932073xy^{12} + 8887424985762679156105425556$
 $1847y^{12} + 2420x^{78}y^{13} + 216072x^{77}y^{13} + 9950137x^{76}y^{13} + 314206224x^{75}y^{13} + 7633866098x^{74}y^{13} + 151835348636x^{73}y^{13} + 2569495552$
 $866x^{72}y^{13} + 3797575546496x^{71}y^{13} + 49942648879003167x^{70}y^{13} + 5926491117566322x^{69}y^{13} + 64139309001006621x^{68}y^{13} + 6383834709$
 $94331108x^{67}y^{13} + 5882308218319706482x^{66}y^{13} + 50447026479509015962x^{65}y^{13} + 40440932336614458181x^{64}y^{13} + 304117291285870$
 $2894700x^{63}y^{13} + 21516481442671256526076x^{62}y^{13} + 143576322995813269620568x^{61}y^{13} + 905504951680569515734835x^{60}y^{13} + 54074$
 $23603571290903179098x^{59}y^{13} + 30625644983622179922361566x^{58}y^{13} + 164743913547792253847068102x^{57}y^{13} + 84283618676397152634$
 $4478100x^{56}y^{13} + 4106057687716072953078953368x^{55}y^{13} + 19670392233742437891689957028x^{54}y^{13} + 8453241141887332414373420$
 $7870x^{53}y^{13} + 357987248790731824665699322629x^{52}y^{13} + 1449844891030666143074181759036x^{51}y^{13} + 562073098947305958097457795747$
 $7x^{50}y^{13} + 20876995792273531206002107449990y^{19}y^{13} + 743554847793692824583410384561367y^{19}y^{13} + 2541398107566319721344893$

$11001104x^{17}y^{13} + 834200967253931534793263486804669x^{16}y^{13} + 263153354426233855352530108901092x^{15}y^{13} + 798301969268328$
 $2891081488135655425x^{14}y^{13} + 23302516012102075884429414626371132x^{13}y^{13} + 65486219789271167678915145118883359x^{12}y^{13} + 17726$
 $338849337332600270024178944788x^{11}y^{13} + 462377258523648766510053681415356384x^{10}y^{13} + 11626350331227667339256790238$
 $6648752x^{9}y^{13} + 2819004405114864109533266909111835132x^{8}y^{13} + 6592682052163357778689640316237847402x^{7}y^{13} + 1487386422$
 $5399570123295851275449436943x^{6}y^{13} + 323767289731284294321140283152791644x^{5}y^{13} + 68000371998062975786958052623260322$
 $390x^{4}y^{13} + 137799696174281058465074740755153011888x^{3}y^{13} + 269400979109354472879829433904053245318x^{2}y^{13} + 5080223104$
 $56399656579874908281804159540x^{1}y^{13} + 923801533935949835799221065909465688664x^{0}y^{13} + 16192881910961183278170865963487923$
 $20020x^{29}y^{13} + 2734706262409788227079076252992397018797x^{28}y^{13} + 4447131021984592303821518285473279436004x^{27}y^{13} + 69585$
 $5451555800665025232665506974772956x^{26}y^{13} + 10467799802845371603338616388238785755836x^{25}y^{13} + 151234433232619334289208$
 $1368449504321857x^{24}y^{13} + 20960121577961121688475387834826827365356x^{23}y^{13} + 2782871160008329035714253244834503779224$
 $7x^{22}y^{13} + 35340055684538273454217526651809962781010x^{21}y^{13} + 42848393648361535001077580971809326922500x^{20}y^{13} + 49499$
 $496371451547228115395115965096550544x^{19}y^{13} + 54355622829358815071429291242177381405816x^{18}y^{13} + 5658477107728726504$
 $675692224250259566544x^{17}y^{13} + 55671714113766342773023894867226726374675x^{16}y^{13} + 5158536895381362949841144695649859722621$
 $6x^{15}y^{13} + 44836242746551763771944519465961803552292x^{14}y^{13} + 36385830696214623611123633049770318473304x^{13}y^{13} + 2742265708$
 $9673460202436440772194614621509x^{12}y^{13} + 19074300210927635335958081605199522399556x^{11}y^{13} + 121551191927042348038177349028$
 $06996270514x^{10}y^{13} + 7034673473614475985835616799635461056936x^9y^{13} + 3658603762031185842771245220670053381145x^8y^{13} + 16878$
 $21118159470422469865197525612469756x^7y^{13} + 679446997228144276959181885014017758657x^6y^{13} + 2336334022984162516561970$
 $09688619370064x^5y^{13} + 6665261314269149741599587073986554206x^4y^{13} + 15138808385166805836925857234770826584x^3y^{13} + 25627$
 $49524941709147111986719352437210x^2y^{13} + 2871460446941651272763290421866250338x^1y^{13} + 15951838142398945907684519844189882$
 $y^{13} + 784x^{77}y^{14} + 79914x^{76}y^{14} + 4082872x^{75}y^{14} + 139924994x^{74}y^{14} + 3628125544x^{73}y^{14} + 760416333428x^{72}y^{14} + 1343052079$
 $834x^{71}y^{14} + 20566000163878x^{70}y^{14} + 278676345760665x^{69}y^{14} + 3392892322424591x^{68}y^{14} + 37552751225349234x^{67}y^{14} + 3813224502$
 $41504256x^{66}y^{14} + 3578347045496522097x^{65}y^{14} + 31214271014019921299x^{64}y^{14} + 2543123364883280191720x^{63}y^{14} + 194273637855021$
 $1519794x^{62}y^{14} + 13960043690571976788660x^{61}y^{14} + 94612436139003889745306x^{60}y^{14} + 606146565914529888574080x^{59}y^{14} + 36779$
 $9775025945988367102x^{58}y^{14} + 21172624112129433264119419x^{57}y^{14} + 115709923233367892215316879x^{56}y^{14} + 60252817346835827005$
 $4508250x^{55}y^{14} + 298612949282784954728220774x^{54}y^{14} + 14111689480792014872232702878x^{53}y^{14} + 6365534199707282882365846$
 $5362x^{52}y^{14} + 274343945670731336158093908314x^{51}y^{14} + 1130723408076320754958385456739x^{50}y^{14} + 446059301970123285706582266051$
 $2x^{49}y^{14} + 16856175522006004251043544662227x^{48}y^{14} + 61064895345843646173446117647788x^{47}y^{14} + 2122302192588152537945661$
 $51632835x^{46}y^{14} + 708114007617631898229324635137439x^{45}y^{14} + 2269648729934367767396916821432554x^{44}y^{14} + 699246500851273$
 $0711212776433818784x^{43}y^{14} + 207183605354917564488038921040707747x^{42}y^{14} + 590675660923193919287077328527185x^{41}y^{14} + 16210$
 $7838096601171940674705321009478x^{40}y^{14} + 428439396142218919685713145670596710x^{39}y^{14} + 10908121822188547133764650345$
 $1785940x^{38}y^{14} + 2676116079047931235918649038038145829x^{37}y^{14} + 6327711782306607689982798761615578097x^{36}y^{14} + 1422246140$
 $9957103816829165946041436818x^{35}y^{14} + 31689647903948520542767332220004203670x^{34}y^{14} + 67124881465450759228207839657428099$
 $496x^{33}y^{14} + 137058759462705119453022093423784521608x^{32}y^{14} + 269724368846523943231793509908011333550x^{31}y^{14} + 5114672983$
 $782145039295644952801798636462x^{30}y^{14} + 934226340299989840801968235795107152524x^{29}y^{14} + 16429701301570139261096119493173765$
 $13424x^{28}y^{14} + 2780403187640690663040125679006840624004x^{27}y^{14} + 4524696742243806422636490736653411632240x^{26}y^{14} + 70748$
 $67662370031052864045885812185680358x^{25}y^{14} + 10618723930020327670799948844736920135026x^{24}y^{14} + 1528118626746579926978959$
 $3699083535587324x^{23}y^{14} + 21057058298229950474944332209019605892753x^{22}y^{14} + 2774149227487696800286016631225272528406$
 $0x^{21}y^{14} + 34880993273081434367211561594156220763075x^{20}y^{14} + 41773185498452939807016630023405003634792x^{19}y^{14} + 47539$
 $177510772595704590649094466406466944x^{18}y^{14} + 51274561826178376878017746101419234900158x^{17}y^{14} + 52255694230645798754$
 $670174597896921570104x^{16}y^{14} + 5014645304686562495783320614516520711440x^{15}y^{14} + 4513273067155888756104229441046952454379$
 $8x^{14}y^{14} + 37922179000270881821075563110615404337456x^{13}y^{14} + 29589247732095708332624865023126579786784x^{12}y^{14} + 2130670934$

$6403823003909301799179803757992x^{11}y^{14} + 14056096250557765907766381350235735391862x^{10}y^{14} + 842162307981018938035257938353-$
 $2366542352x^9y^{14} + 4534573875131156497048078359343293457998x^8y^{14} + 216597913793731222245342024221791413882x^7y^{14} + 90290-$
 $7179167085973127578122703119383919x^6y^{14} + 32155254577470173689823355218643221193x^5y^{14} + 950428809343097859859872585875-$
 $22174994x^4y^{14} + 22364440044618454978308365463281633038x^3y^{14} + 3924131799561906622929034719409459244x^2y^{14} + 4559191716-$
 $49687002546872162910040907x^1y^{14} + 26276482503115866214775146987460399y^{14} + 214x^{76}y^{15} + 28012x^{75}y^{15} + 1655710x^{74}y^{15} + 62572-$
 $488x^{73}y^{15} + 1742810264x^{72}y^{15} + 38607135220x^{71}y^{15} + 712875368076x^{70}y^{15} + 11323190007132x^{69}y^{15} + 158222871499184x^{68}y^{15} + 10775-$
 $93273131824x^{67}y^{15} + 22392027067503018x^{66}y^{15} + 231982767190778278x^{65}y^{15} + 2216443548058943476x^{64}y^{15} + 19654441592951638808-$
 $x^{63}y^{15} + 16250832249914043078x^{62}y^{15} + 1260275883703176862892x^{61}y^{15} + 9183975798842511767154x^{60}y^{15} + 6310677791306173643-$
 $408x^{59}y^{15} + 40988390349569087276662x^{58}y^{15} + 252162772827262468065588x^{57}y^{15} + 14719796940820167747952934x^{56}y^{15} + 81655-$
 $597127334970763735920x^{55}y^{15} + 431037345352176128060192812x^{54}y^{15} + 2167736480102470279163313860x^{53}y^{15} + 103974887685148-$
 $5638092625444x^{52}y^{15} + 4761116293813532148494270504x^{51}y^{15} + 208325936837309883017884553645x^{50}y^{15} + 871768945446078-$
 $986411333454310x^{49}y^{15} + 349163055467069353030614853785x^{48}y^{15} + 1395331874385920715721387942180x^{47}y^{15} + 4925845588-$
 $2595674362874952653283x^{46}y^{15} + 173740189775283853687541484984814x^{45}y^{15} + 588142824125601912872447962554083x^{44}y^{15} + 19119-$
 $68743433352618379422141439544x^{43}y^{15} + 5972109942470359936660633241402303x^{42}y^{15} + 17932370348673801860452089072959686-$
 $x^{41}y^{15} + 5178497950236195102183787262949845x^{40}y^{15} + 143879134597872221540393360418714896x^{39}y^{15} + 38474116240423264228-$
 $6994251547139034x^{38}y^{15} + 990469729110967379789757434986755496x^{37}y^{15} + 2455358582387215150860120019326690954x^{36}y^{15} + 58622-$
 $21863129458427059827358166142188x^{35}y^{15} + 13481148283337409048785445348576526216x^{34}y^{15} + 298622034488579514696414686567-$
 $68675304x^{33}y^{15} + 63712887961046793703112776409637946124x^{32}y^{15} + 130914578303301070216684301018126531848x^{31}y^{15} + 25900-$
 $6500861920619118224719768879540968x^{30}y^{15} + 493242600380754652563682566904362241008x^{29}y^{15} + 903770451625304430470979840682-$
 $744282348x^{28}y^{15} + 1592482523642532425574547271460965512912x^{27}y^{15} + 269660990235501768871785376035275843124x^{26}y^{15} + 43850-$
 $64746933300067110110847584831281576x^{25}y^{15} + 6840891816701254212260460597807371069572x^{24}y^{15} + 1022725750739806499757552-$
 $6279547460814280x^{23}y^{15} + 14633781892611269411382331915496923017421x^{22}y^{15} + 2001044420364558047662165630937053089990-$
 $6x^{21}y^{15} + 26104266485898116442229252855464133784369x^{20}y^{15} + 32423525971254870217851866691451400411988x^{19}y^{15} + 38257-$
 $372791723221203024456191937398050148x^{18}y^{15} + 42770431377123575136649880137449382614160x^{17}y^{15} + 45169701798907699637-$
 $570722232324937623594x^{16}y^{15} + 44909230438686811019890981412035120005740x^{15}y^{15} + 418691791555587813585517217939986140374-$
 $6x^{14}y^{15} + 3643716500804111116438425311027833149404x^{13}y^{15} + 29443511672498493657922542860080070281952x^{12}y^{15} + 2195567277-$
 $5844702762095534811268943853632x^{11}y^{15} + 14998712540799443197580791521692644776546x^{10}y^{15} + 930554136528016395698947944065-$
 $5283252156x^9y^{15} + 5188595640649153511464774173602515012010x^8y^{15} + 2566606160583035358831744238995414399352x^7y^{15} + 11080-$
 $95012937541378880175248078906478091x^6y^{15} + 408759209944515424260490530101186025426x^5y^{15} + 125165471866813506949276346876-$
 $242768061x^4y^{15} + 30518194278461874772344540202087197268x^3y^{15} + 5549949759107663846943509413343657194x^2y^{15} + 6685205043-$
 $8574x^1y^{15} + 1704006406724090360x^0y^{15} + 39962105890453142733096103850460866y^{16} + 36x^{75}y^{16} + 8824x^{74}y^{16} + 650032x^{73}y^{16} + 27772-$
 $598x^{72}y^{16} + 839764456x^{71}y^{16} + 19764413036x^{70}y^{16} + 382628942834x^{69}y^{16} + 6315168384426x^{68}y^{16} + 91102291227963x^{67}y^{16} + 11698-$
 $7131918284x^{66}y^{16} + 1355774067715440x^{65}y^{16} + 143343510096907106x^{64}y^{16} + 1394435787814503413x^{63}y^{16} + 125673248377432116695-$
 $x^{62}y^{16} + 105520819520371429236x^{61}y^{16} + 82923935809572137934x^{60}y^{16} + 612234339619213519130x^{59}y^{16} + 42601333382391412926-$
 $272x^{58}y^{16} + 280119713673060725810908x^{57}y^{16} + 1744394462344973143176162x^{56}y^{16} + 10307302588314425535288893x^{55}y^{16} + 57882-$
 $215905933816544151305x^{54}y^{16} + 309350424912183197025521378x^{53}y^{16} + 1575402789802357617964782305x^{52}y^{16} + 765309868930910-$
 $8839568182887x^{51}y^{16} + 35498426313015711267436038927x^{50}y^{16} + 157358240265869764060391998823x^{49}y^{16} + 66715908170866072135-$
 $5633665372x^{48}y^{16} + 2707406070364603937383376805648x^{47}y^{16} + 10523576477421848851768685268676x^{46}y^{16} + 392049520069730-$
 $26718106159656469x^{45}y^{16} + 140071226444100303629280486293235x^{44}y^{16} + 480210985813701288629025090429370x^{43}y^{16} + 15805-$
 $8239898075654288279497064418x^{42}y^{16} + 499703597658322775349924046909119x^{41}y^{16} + 15181249017971966712513381607064015-$
 $x^{40}y^{16} + 4433755282721100641488596070859133x^{39}y^{16} + 124524144395297695231414698295433422x^{38}y^{16} + 33641792265007545102-$

1666816527486858x³⁷y¹⁶ + 874481475998223390776417797369170284x³⁶y¹⁶ + 2187483227022654034085011120733049901x³⁵y¹⁶ + 52663-
 6306859762624328777992713827736x³⁴y¹⁶ + 12203058371922947535350611831283557423x³³y¹⁶ + 272148876287435206527673318438-
 55499405x³²y¹⁶ + 58408786474601356918920252328677397727x³¹y¹⁶ + 120614688805942532519048629779016929297x³⁰y¹⁶ + 2395789811-
 7915335902011339328239747171x²⁹y¹⁶ + 45756462419645578033213816264388629955x²⁸y¹⁶ + 83985587169749277173907574725756861-
 9737x²⁷y¹⁶ + 148056064619868062052496348034815655087x²⁶y¹⁶ + 25049111899641399776576936635029695112633x²⁵y¹⁶ + 4063595600-
 819046256622230571958848083866x²⁴y¹⁶ + 6314172600222921175755306991070572035271x²³y¹⁶ + 93856934474982464224256877037-
 400386790x²²y¹⁶ + 13326846997213993245967158438669846369728x²¹y¹⁶ + 18045423164523533427306523940238638392483x²⁰y¹⁶ + 23256-
 20586057076318753121166421631827443x¹⁹y¹⁶ + 2846289629853879071305035898343145456017x¹⁸y¹⁶ + 3295566891509290226884298-
 7868336224606893x¹⁷y¹⁶ + 36124405119052304176295208660202545388878x¹⁶y¹⁶ + 3722483381985262113421919433849791700039-
 0x¹⁵y¹⁶ + 35962859053769726152446024255725274769849x¹⁴y¹⁶ + 3242658630909894145961785904506864736960x¹³y¹⁶ + 2714507422-
 6176556901774278191727539033244x¹²y¹⁶ + 209670396172733738253568088320743100719755x¹¹y¹⁶ + 148376128151025283725837407400-
 97857996267x¹⁰y¹⁶ + 953468545112758307528740528525920330839x⁹y¹⁶ + 5306655746797876506725514348523628010808x⁸y¹⁶ + 28215-
 25201813160454021151247754724807x⁷y¹⁶ + 1261868027013392584100957160215103301107x⁶y¹⁶ + 4822294403689758110201930-
 83850284490809x⁵y¹⁶ + 15292929380399880096107182636981028689x⁴y¹⁶ + 386558987754322030995888493219585272x³y¹⁶ + 72860-
 675182526068042244029958839056087x²y¹⁶ + 90986096587486302924263638305097839x¹y¹⁶ + 5640247986423222988692120813667365-
 y¹⁶ + 2624x⁷³y¹⁷ + 252502x⁷²y¹⁷ + 12316956x⁷¹y¹⁷ + 406168136x⁷⁰y¹⁷ + 10186241992x⁶⁹y¹⁷ + 207180986164x⁶⁸y¹⁷ + 3558410904-
 116x⁶⁷y¹⁷ + 53054152075838x⁶⁶y¹⁷ + 700488035624986x⁶⁵y¹⁷ + 8314011291254574x⁶⁴y¹⁷ + 89740291642087056x⁶³y¹⁷ + 8890304021-
 64118938x⁶²y¹⁷ + 8143344190817100758x⁶¹y¹⁷ + 69383397831581618870x⁶⁰y¹⁷ + 552611650219963449240x⁵⁹y¹⁷ + 413116313214611-
 9106610x⁵⁸y¹⁷ + 29086507277657740709156x⁵⁷y¹⁷ + 193426281390585203890654x⁵⁶y¹⁷ + 1217824639062607261118995x⁵⁵y¹⁷ + 72740-
 9307354615203461856x⁵⁴y¹⁷ + 41290052784626134734589730x⁵³y¹⁷ + 223061555138416423686695625x⁵²y¹⁷ + 1183377404911087750-
 47351464x⁵¹y¹⁷ + 5639783092509440707415103402x⁵⁰y¹⁷ + 26450145772335697392673829968x⁴⁹y¹⁷ + 118561964274401479154426083923-
 x⁴⁸y¹⁷ + 508341209734498408415454375336x⁴⁷y¹⁷ + 208625607618662209080992154872x⁴⁶y¹⁷ + 820097840250109427502215129723-
 8x⁴⁵y¹⁷ + 30896549180180419602413699064858x⁴⁴y¹⁷ + 111619598075920528682646676994604x⁴³y¹⁷ + 3868813091242818172412448-
 33448412x⁴²y¹⁷ + 12871346178341910934954034404276707x⁴¹y¹⁷ + 41120899757540447969894067897416600x⁴⁰y¹⁷ + 12619964685223712989-
 522354146354028x³⁹y¹⁷ + 37218185378357714479552345078919421x³⁸y¹⁷ + 105506064555457157558267582390649042x³⁷y¹⁷ + 28755-
 8422135024072682899313192965130x³⁶y¹⁷ + 78366514751411621000392760570064384x³⁵y¹⁷ + 18997032487843454290493732027-
 9152657x³⁴y¹⁷ + 4605442646056866860418878746145185454x³³y¹⁷ + 10738117319584676888793949096617607254x³²y¹⁷ + 2407774791-
 447708044631299874941393636x³¹y¹⁷ + 51910865989238615520693576375476836272x³⁰y¹⁷ + 10758202336858135497296783248177385-
 0504x²⁹y¹⁷ + 214240375056742405598289207318030899978x²⁸y¹⁷ + 4097668629843257996075546602049294103076x²⁷y¹⁷ + 7522942474-
 64553326888632067720309823410x²⁶y¹⁷ + 1324761915282956475931978156649700171144x²⁵y¹⁷ + 223566648968065090315734194405-
 0105651547x²⁴y¹⁷ + 361970688017191856005247512912721493880x²³y¹⁷ + 5979808194237364065491894503003944298935x²²y¹⁷ + 82302-
 604633313360746821764777404236998332x²¹y¹⁷ + 1157202266515171179807290205005351691369x²⁰y¹⁷ + 1548020003246389842302811-
 6565807468630694x¹⁹y¹⁷ + 1965883618685048069457105603984439948930x¹⁸y¹⁷ + 2364040352179280490484194006499605937172-
 0x¹⁷y¹⁷ + 268409280689189530364359015121512056169x¹⁶y¹⁷ + 286765865448447732540990768811197730220x¹⁵y¹⁷ + 28718-
 43481098481069424022853680309464335x¹⁴y¹⁷ + 26817867848452162765128898117434509899182x¹³y¹⁷ + 23282063908421516119-
 169999553906474433792x¹²y¹⁷ + 18634854036458342610647043737834721580428x¹¹y¹⁷ + 136623655133528970293505508212014546091-
 2x¹⁰y¹⁷ + 909654892293050056248860078415930519568x⁹y¹⁷ + 5443052997418848409846267553025694542635x⁸y¹⁷ + 2889531505-
 234244549584390436407283589452x⁷y¹⁷ + 13389419000509204592201383650902387213463x⁶y¹⁷ + 530190720826256781239068535438-
 231071372x⁵y¹⁷ + 17408241280457277933981857385819992288x⁴y¹⁷ + 45643291628131706499231967992281329498x³y¹⁷ + 89174-
 3033349814529299971376885736317x²y¹⁷ + 115417529010605145542577457495730432x¹y¹⁷ + 74211869579431049664674612843901862-
 y¹⁷ + 896x⁷²y¹⁸ + 101400x⁷¹y¹⁸ + 5531892x⁷⁰y¹⁸ + 198021068x⁶⁹y¹⁸ + 528865384x⁶⁸y¹⁸ + 113071265452x⁶⁷y¹⁸ + 2022534600-

$584r^{66}y^{18} + 31189462900189x^{05}y^{18} + 423698683492903x^{04}y^{18} + 5152837751561792x^{63}y^{13} + 56804782957881272x^{02}y^{18} + 5732355140$
 $13621359r^{61}y^{18} + 5337201263357208561x^{00}y^{18} + 46143677513174959492x^{59}y^{18} + 372409121151981351992x^{58}y^{18} + 281797790800086$
 $4305948r^{57}y^{18} + 20065434797797107691144x^{56}y^{18} + 1348594072423359426965486x^{55}y^{18} + 857734634551044707200438x^{54}y^{18} + 51737$
 $72252507047575063179x^{53}y^{18} + 29651345497227705937151895x^{52}y^{18} + 161713299083214630105425146x^{51}y^{18} + 84041740279628927042$
 $3902852r^{51}y^{18} + 4166732738992731363856201796x^{19}y^{18} + 19728085043418095367069090208x^{18}y^{18} + 8927834039294712415754621$
 $6602x^{17}y^{18} + 386472016800224759715920337512x^{46}y^{18} + 1601409852646881184990436671789x^{45}y^{18} + 635580197476280918180538387130$
 $7x^{41}y^{18} + 24174970088200781533453465781378x^{43}y^{18} + 88167828547266095347684858758312x^{42}y^{18} + 308462590570188076089670481206$
 $115r^{11}y^{18} + 1035672438682992467427999566460947x^{40}y^{18} + 3338332758013251928032883425823028x^{30}y^{18} + 10333894716325198252$
 $791989348773177x^{38}y^{18} + 30728765581995031994480395876915143x^{37}y^{18} + 87795213659064164031625571344580530x^{36}y^{18} + 24105$
 $506632576676856711727939664016x^{35}y^{18} + 636109348784653638445643814276353959x^{34}y^{18} + 161339632267246430893823114512$
 $6945356x^{33}y^{18} + 3933133791429830484719846075258244293x^{32}y^{18} + 9214835717680352297508295705466362554x^{31}y^{18} + 2074511095$
 $8744676740127777396043394214x^{30}y^{18} + 4486556067569237613437357287918748332x^{29}y^{18} + 93181023974691981194091908462368575$
 $554x^{28}y^{18} + 185763521964050939464141407714042142122x^{27}y^{18} + 355273078875726449930818262790553329154x^{26}y^{18} + 6513683662$
 $92929614337672649978797741240x^{26}y^{18} + 1143889614070609759159813869589668708956x^{24}y^{18} + 192218460060201730845684580137$
 $8970773722x^{23}y^{18} + 308703590193886827961347928500105576767x^{22}y^{18} + 4731710765762244517265769153063414533037x^{21}y^{18} + 69106$
 $7130687017999938635413667627916126x^{20}y^{18} + 9599132828449365366801533026978121686734x^{10}y^{18} + 1265351514277957325067397$
 $4619960388518202x^{18}y^{18} + 15789602036756400580576520461970269460846r^{17}y^{18} + 1859771156202352911438832062870566455024$
 $6r^{16}y^{18} + 20607795326482526676168778287460074060988r^{15}y^{18} + 21400202459438463792872067768534578602909r^{14}y^{18} + 20734$
 $010781186134944435853708601267894424x^{13}y^{18} + 186454947599493411993440506820623578987113x^{12}y^{18} + 15468481876499448027$
 $609371060478146642140x^{11}y^{18} + 11753887951459092361136462413296877785840x^{10}y^{18} + 8110409727749543230543940254662056614430$
 $r^9y^{18} + 5029290109215882780060581483939409401644x^8y^{18} + 2766862653914140041739957315955681952412x^7y^{18} + 132869653582519$
 $831084628769363661228827x^6y^{18} + 545277370020057784010201672958183351047x^5y^{18} + 18580250432798312805495567549442925$
 $4408x^4y^{18} + 5043081471673287269088107383685146802x^3y^{18} + 10213921580367928355062295639121950391x^2y^{18} + 137088566844841$
 $9892121153344793045485x1y^{18} + 91389321857987720954075364358873184y^{18} + 240x^{21}y^{10} + 37970x^{20}y^{10} + 2430628x^{60}y^{10} + 96040$
 $398r^{68}y^{10} + 2750116664x^{67}y^{10} + 62001315256x^{66}y^{10} + 1156982134620x^{65}y^{10} + 18473676749844x^{64}y^{10} + 258399602286700x^{63}y^{10} + 32218$
 $48116727264x^{62}y^{10} + 36289822253533136x^{61}y^{10} + 373147164873119536x^{60}y^{10} + 35321065568486909000x^{59}y^{10} + 30988962137692554084$
 $x^{58}y^{10} + 253416573749235817520x^{57}y^{10} + 1940609086901467644378x^{56}y^{10} + 1397022896911394741204x^{55}y^{10} + 94852275369463287893$
 $47x^{54}y^{10} + 609065716887807618331828x^{53}y^{10} + 3707331031000274656721198x^{52}y^{10} + 21433554873563606530055028x^{51}y^{10} + 11789$
 $3310089760039269188210x^{30}y^{10} + 617825403951364864742354328x^{49}y^{10} + 3088547006559653633746573036x^{48}y^{10} + 147438400678821$
 $32473219456652x^{47}y^{10} + 67271223518108065018818121558x^{46}y^{10} + 293598210516685069602823008056x^{45}y^{10} + 122654358812422$
 $9227332824768180x^{44}y^{10} + 4907745649023567601802129387840x^{43}y^{10} + 18818439808005790852254397918774x^{42}y^{10} + 6918209042$
 $8046880006778125677844x^{41}y^{10} + 243946145408662377695668033032394x^{40}y^{10} + 825360473253614424107276788825992x^{39}y^{10} + 26802$
 $81746745789949130515988511265x^{38}y^{10} + 8356426788735669399092629297395282x^{37}y^{10} + 25018353941585497831948659361652887$
 $r^{36}y^{10} + 7193938741152987173165093783566576x^{35}y^{10} + 198697556114790168539471322517609199x^{34}y^{10} + 52717910246239308634$
 $242166625197682x^{33}y^{10} + 134356224103683300843889697351108143x^{32}y^{10} + 328893140304393895928047034705193828x^{31}y^{10} + 77317$
 $7485717227968862946701953960352x^{30}y^{10} + 17451144116113818440861103000335219164x^{29}y^{10} + 378042926859599917260187908714$
 $67525614x^{28}y^{10} + 78566584713703568695637401288395818956x^{27}y^{10} + 156556519748227886477187207710449124960x^{26}y^{10} + 2989112833$
 $73702932851185128244081119992x^{25}y^{10} + 546374847186928347721899892425483523228x^{24}y^{10} + 9551828277297297292667617649908030$
 $4924r^{23}y^{10} + 1595226880189034644915470649726227349917x^{22}y^{10} + 254158310193526791888081416369050707064x^{21}y^{10} + 3856913520$
 $16769221355409618207179725025x^{20}y^{10} + 5564499923867189195369076702627786712964x^{19}y^{10} + 761612492226016649562629801919$
 $7696804104r^{18}y^{10} + 9864855171145320329881699658120956551228r^{17}y^{10} + 1205750759820365937771492905769968724416r^{16}y^{10} + 13861$

20900242178507632135677953102001348 $x^{15}y^{19}$ + 14930503121138833518540793286892037754585 $x^{14}y^{19}$ + 1500194445020028041814494-
 5318837255030814 $x^{13}y^{19}$ + 13988870646250380640177181377000285697011 $x^{12}y^{19}$ + 1203235311344850056130743091536655973254-
 4 $x^{11}y^{19}$ + 9478514986696451603220809498651347988488 $x^{10}y^{19}$ + 6780013086685946159280816714151069888028 x^9y^{19} + 435819898234320-
 6146951243621556447055290 x^8y^{19} + 2485386756471947426827936003446494488448 x^7y^{19} + 1237201913453347876613388531480502054539-
 x^6y^{19} + 526321968207315202589071652626794706514 x^5y^{19} + 185919028018443159168985658152344642653 x^4y^{19} + 52315913510515445282-
 445104999716642436 x^3y^{19} + 10985811762526504253439772611502819077 x^2y^{19} + 152904743505464698793446405865695942 y^{19} + 10570-
 394935400624126400387316313495 y^{19} + 60 $x^{70}y^{20}$ + 14088 $x^{69}y^{20}$ + 1063413 $x^{68}y^{20}$ + 46531260 $x^{67}y^{20}$ + 1432386672 $x^{66}y^{20}$ + 34119-
 839110 $x^{65}y^{20}$ + 665154220860 $x^{64}y^{20}$ + 11007730172036 $x^{63}y^{20}$ + 158651662258378 $x^{62}y^{20}$ + 2029164026065196 $x^{61}y^{20}$ + 2336238904-
 1309752 $x^{60}y^{20}$ + 244845297042956098 $x^{59}y^{20}$ + 2356724713925480464 $x^{58}y^{20}$ + 20984875743475270561 $x^{57}y^{20}$ + 17388510418273078435-
 3 $x^{56}y^{20}$ + 1347455060059482589879 $x^{55}y^{20}$ + 9805138443482971982955 $x^{54}y^{20}$ + 67232465716936004805560 $x^{53}y^{20}$ + 43567175373912240231-
 3881 $x^{52}y^{20}$ + 2674655229452084664158919 $x^{51}y^{20}$ + 1558885222706344692712025 $x^{50}y^{20}$ + 86411483904119489182921250 $x^{49}y^{20}$ + 45624-
 4487159952336294694652 $x^{48}y^{20}$ + 2297489105285867332279771273 $x^{47}y^{20}$ + 11046331598827432260952149719 $x^{46}y^{20}$ + 507576875470877-
 48946673426889 $x^{45}y^{20}$ + 223078206273446846207807473343 $x^{44}y^{20}$ + 938398976425785088925583721072 $x^{43}y^{20}$ + 378054092077824657069-
 91784932595 $x^{42}y^{20}$ + 14594373563204367823391113671546 $x^{41}y^{20}$ + 5401000744070202030101863139723 $x^{40}y^{20}$ + 19168512924342958642-
 8193551329973 $x^{39}y^{20}$ + 652633974994488526604756819629478 $x^{38}y^{20}$ + 2132237291614603789384352287374841 $x^{37}y^{20}$ + 668620921821517-
 8590977486737056297 $x^{36}y^{20}$ + 20126731513109117264133272592174292 $x^{35}y^{20}$ + 58164938539086947867560588483553040 $x^{34}y^{20}$ + 16138-
 5366527551007811880713273892791 $x^{33}y^{20}$ + 429906948794889515408969399870996024 $x^{32}y^{20}$ + 109939794219833804507164261207-
 0636615 $x^{31}y^{20}$ + 2698581774997760481181613424150794805 $x^{30}y^{20}$ + 63563912889629816808705738768191295 $x^{29}y^{20}$ + 1436264722-
 1346874812390003854359177098 $x^{28}y^{20}$ + 31118433284943887821033188570054838323 $x^{27}y^{20}$ + 64613297446610076697315279875317744-
 253 $x^{26}y^{20}$ + 128485510209535390406992299686268773727 $x^{25}y^{20}$ + 244489791785892201297306977784245961008 $x^{24}y^{20}$ + 441759316514321-
 67205018375386566774534 $x^{23}y^{20}$ + 772561402873482197566858966413005339696 $x^{22}y^{20}$ + 12797232591867656696485985074570571184-
 $x^{21}y^{20}$ + 201830861254439068073664705132308817631 $x^{20}y^{20}$ + 3025212958361442289331375077683167326423 $x^{19}y^{20}$ + 430035579838263-
 20987647156060475737760021 $x^{18}y^{20}$ + 5783258581062965003437600041169153696279 $x^{17}y^{20}$ + 7332799558804585180290787563249030-
 17928 $x^{16}y^{20}$ + 8753353142490781576215885560481745377606 $x^{15}y^{20}$ + 9782470296805265700222466094197215063591 $x^{14}y^{20}$ + 1019644950-
 8871460767624883078153842175419 $x^{13}y^{20}$ + 9861613332854359400835258456813305778357 $x^{12}y^{20}$ + 879688034717395413079229763660-
 5238630096 $x^{11}y^{20}$ + 7186075984634936969348397670557431037385 $x^{10}y^{20}$ + 5329996382276113923334095054834871899386 x^9y^{20} + 35524-
 65245514843591352719897973389126680 x^8y^{20} + 210055381233992137731858903945553542181 x^7y^{20} + 1084167451495659356778139474-
 7885391469 x^6y^{20} + 478222082471228627472920518261703378227 x^5y^{20} + 175161102327887192441954509608490432625 x^4y^{20} + 5110971328-
 6671716573277703761004725116 x^3y^{20} + 11129731621454743440687867033404964654 x^2y^{20} + 16065394266757613493736130074467821-
 11 x^2y^{20} + 11519240697149274106175009708740256 y^{20} + 4587 $x^{68}y^{21}$ + 451052 $x^{67}y^{21}$ + 22350924 $x^{66}y^{21}$ + 745131232 $x^{65}y^{21}$ + 18812-
 913130 $x^{64}y^{21}$ + 383794238956 $x^{63}y^{21}$ + 6589961252982 $x^{62}y^{21}$ + 97938842210348 $x^{61}y^{21}$ + 1285635220025844 $x^{60}y^{21}$ + 1513599586-
 7726292 $x^{59}y^{21}$ + 161731136722523882 $x^{58}y^{21}$ + 1583310963794215602 $x^{57}y^{21}$ + 14310213699960233644 $x^{56}y^{21}$ + 1201584823088864618-
 0 $x^{55}y^{21}$ + 942208959715385988840 $x^{54}y^{21}$ + 6929636495240152491994 $x^{53}y^{21}$ + 47976700283440265540291 $x^{52}y^{21}$ + 31365133120867919416-
 7096 $x^{51}y^{21}$ + 1941316719238412187519118 $x^{50}y^{21}$ + 11400986356183133526690190 $x^{49}y^{21}$ + 63650955500161984387949882 $x^{48}y^{21}$ + 33836-
 164759140883788475448 $x^{47}y^{21}$ + 1715000575987990920915194218 $x^{46}y^{21}$ + 8297772710199389354904226784 $x^{45}y^{21}$ + 383614791844193-
 73343472334646 $x^{44}y^{21}$ + 109604867817061184329284576624 $x^{43}y^{21}$ + 717627029760596032476466167463 $x^{42}y^{21}$ + 29076393146144009241-
 27866860074 $x^{41}y^{21}$ + 11287211428801605508494421729539 $x^{40}y^{21}$ + 4199761766854178777682205579584 $x^{39}y^{21}$ + 149833939257948-
 661291785784424685 $x^{38}y^{21}$ + 512707785236283083135165227057034 $x^{37}y^{21}$ + 1683073775918775963640593090671272 $x^{36}y^{21}$ + 53013-
 06512933883796865878367128760 $x^{35}y^{21}$ + 16023447335382560477975872649119924 $x^{34}y^{21}$ + 46477442387192102635454403049811466-
 3 $x^{33}y^{21}$ + 129370006352978914137715767669607543 $x^{32}y^{21}$ + 34553502702267971038311290751194584 $x^{31}y^{21}$ + 88541597276507960403-
 725181775476954 $x^{30}y^{21}$ + 2176174911804145307530069911066681348 $x^{29}y^{21}$ + 5128459518432004643249776388066988103 $x^{28}y^{21}$ + 11583-

$484506852057920958503543143376056x^{27}y^{21} + 25061974323908503805205590416498439466x^{26}y^{21} + 519070464595858453179281071667-$
 $14643976r^{23}y^{41} + 102830938263204450009365583218574116639x^{21}y^{21} + 194666924698989553920725015892175537684x^{23}y^{21} + 35175-$
 $5179172698449104445448965377670686x^{22}y^{21} + 6058887182637005343317736330533663744x^{21}y^{21} + 993292513852125817128651071156-$
 $501894531x^{20}y^{21} + 1547077532489915132730904535680543694076x^{19}y^{21} + 2284503076296492334031146598872567858338x^{18}y^{21} + 31905-$
 $6419576853973222169154831704344900x^{17}y^{21} + 4202675466020401229503660414842692139655x^{16}y^{21} + 52042946064198871915-$
 $49640813911248427228x^{15}y^{21} + 6035954658577331784153284018364742391633x^{14}y^{21} + 6528031655702509359184108207386921097932-$
 $r^{13}y^{21} + 6560209957742478497458976544388738672794x^{12}y^{21} + 6061217590168505156965521350598363226496x^{11}y^{21} + 5135800281-$
 $681899969788133135519941544245x^{10}y^{21} + 3950936092730385302976506618049694593266x^9y^{21} + 273112057128456937629792461790-$
 $94534023262x^8y^{21} + 1674836915974460316191253997077167373428x^7y^{21} + 896520143737326044811517451296977670802x^6y^{21} + 41013-$
 $0651055003792541201215123491564500x^5y^{21} + 155800559178692159570987117886751370406x^4y^{21} + 471507671776267668767683323543-$
 $50425996x^3y^{21} + 10649875958836499911865923729376056204x^2y^{21} + 1504601372994888993376578064799539114x^{21}y^{21} + 1186093733-$
 $27741229860112303470550891y^{21} + 1672x^{67}y^{22} + 194530x^{66}y^{22} + 10762208x^{65}y^{22} + 388024038x^{64}y^{22} + 10392594092x^{63}y^{22} + 22209-$
 $4335510x^{62}y^{22} + 3960005679976x^{61}y^{22} + 60725626738094x^{60}y^{22} + 818532457343744x^{59}y^{22} + 9857843504211388x^{58}y^{22} + 1074218578-$
 $92851139x^{57}y^{22} + 1069813292012452969x^{56}y^{22} + 9815859689435849966x^{55}y^{22} + 83525510481770370382x^{54}y^{22} + 662755532415298-$
 $42619x^{53}y^{22} + 4926221394426625783629x^{52}y^{22} + 34432543203996577406456x^{51}y^{22} + 22705412312325730348650x^{50}y^{22} + 14164-$
 $17867182085187538615x^{49}y^{22} + 8378616416339675609448696x^{48}y^{22} + 47090970401203581062529440x^{47}y^{22} + 25189750289562236098-$
 $2059004x^{46}y^{22} + 1284272549854896776538915754x^{45}y^{22} + 6248408508820863087189366020x^{44}y^{22} + 2904907267305015541488369-$
 $3136x^{43}y^{22} + 120051570259721588361054948079x^{42}y^{22} + 548714544979039990060695004414x^{41}y^{22} + 223372221239285314038328232429-$
 $5x^{40}y^{22} + 8710323342305998357430135012310x^{39}y^{22} + 32549515054161194372870579832389x^{38}y^{22} + 11660215524603145258530977916-$
 $456x^{37}y^{22} + 400529202162101396535244377201117x^{36}y^{22} + 1319502591682954880619420855196406x^{35}y^{22} + 41695386577752458957-$
 $01734518334458x^{34}y^{22} + 12638378856383170164048406902007861x^{33}y^{22} + 36746372955756003675496058455206575x^{32}y^{22} + 10247-$
 $5608756238442533229214639288608x^{31}y^{22} + 274056302869222918023447676878321688x^{30}y^{22} + 702695696123012187407074217344-$
 $618130x^{29}y^{22} + 172686881723060954383051512110347542x^{28}y^{22} + 4065648113940184089950294680831806128x^{27}y^{22} + 9165271011-$
 $89842394863092808620075470x^{26}y^{22} + 19770610900534205311655944240224880172x^{25}y^{22} + 4077645915090051127234759936764952-$
 $654x^{24}y^{22} + 80334662051987739093748320992011435190x^{23}y^{22} + 151013416901547157115854571050841913544x^{22}y^{22} + 2705068663-$
 $09750469101105344640781411406x^{21}y^{22} + 461027853372307959972277047932847264098x^{20}y^{22} + 746259349898760178324853303603-$
 $870946156x^{19}y^{22} + 1144906662527607731947204961796609701072x^{18}y^{22} + 166084797856482055698543491563127676940x^{17}y^{22} + 22717-$
 $83164215490737111306871948644488458x^{16}y^{22} + 292070438262018386949251845497231996018x^{15}y^{22} + 35162058582011836326-$
 $15189323456157520259x^{14}y^{22} + 3946780030487343193210011076811267997173x^{13}y^{22} + 4109506553555071209505101677468917404802-$
 $r^{12}y^{22} + 3945671148168591634892366533705819253478x^{11}y^{22} + 3468630883636948255546544138748989846645x^{10}y^{22} + 2768309681-$
 $936529135952991605465256001924x^9y^{22} + 1985188180556423875807665542426319142861x^8y^{22} + 126290315682430630877019613601-$
 $5476428244x^7y^{22} + 701280548544203028658452008847372430646x^6y^{22} + 332806306818441358650484032206452363394x^5y^{22} + 13115-$
 $1802082608778841673155946951875056x^4y^{22} + 41177721145840272427083262142542024782x^3y^{22} + 964923319137326302915738899482-$
 $0786000x^2y^{22} + 1498978531813613565960858028456955273x^{21}y^{22} + 115686413832953548172501593534423315y^{22} + 542x^{66}y^{23} + 81140-$
 $6786x^{65}y^{23} + 5124716x^{64}y^{23} + 201373672x^{63}y^{23} + 5746711538x^{62}y^{23} + 128739578148x^{61}y^{23} + 2386174464642x^{60}y^{23} + 3778195670-$
 $7436x^{59}y^{23} + 523191475207688x^{58}y^{23} + 6447809828807296x^{57}y^{23} + 71674177280242728x^{56}y^{23} + 726274651366640448x^{55}y^{23} + 67657-$
 $39951063815048x^{54}y^{23} + 58346932533007936652x^{53}y^{23} + 468489105951224981628x^{52}y^{23} + 351915952191884046458x^{51}y^{23} + 24830-$
 $49214078626680470x^{50}y^{23} + 165126882740151484798484x^{49}y^{23} + 1037987342359717326080170x^{48}y^{23} + 6182678133724034187986752-$
 $r^{47}y^{23} + 34968865089075331480868704x^{46}y^{23} + 188140206482947030792377252x^{45}y^{23} + 964352425145496038103092138x^{44}y^{23} + 47152-$
 $319980167316952157520868x^{43}y^{23} + 22016879000555409805891363767x^{42}y^{23} + 98263360479904858271681611042x^{41}y^{23} + 4195104243-$
 $091487890906237747x^{40}y^{23} + 1714289838257920283959866527012x^{39}y^{23} + 6708737792059128472239720671451x^{38}y^{23} + 2915315132-$

3593399685984481276958 $x^{37}y^{23}$ + 90381298386134120548777474501709 $x^{36}y^{23}$ + 311316294161114978461157368140896 $x^{35}y^{23}$ + 10280-
 87344014145888341100723508160 $x^{34}y^{23}$ + 3255348376341826970425090213317504 $x^{33}y^{23}$ + 988338588618580654193271832690-
 9960 $x^{32}y^{23}$ + 2876889765992223584557903892488988 $x^{31}y^{23}$ + 80275570046087822210714687530314136 $x^{30}y^{23}$ + 21467626292037370336-
 652366284380048 $x^{29}y^{23}$ + 550026196533540313635750959634832604 $x^{28}y^{23}$ + 1349575329779879536621182003986529028 $x^{27}y^{23}$ + 31695-
 24643138585109205665640045358078 $x^{26}y^{23}$ + 7120183103738289878889145438703532520 $x^{25}y^{23}$ + 152878671098365744253639740334-
 89275806 $x^{24}y^{23}$ + 31344030497133090645409273032899480240 $x^{23}y^{23}$ + 61296413140733308332125241938853964522 $x^{22}y^{23}$ + 1141890905-
 20168343089257482685739361128 $x^{21}y^{23}$ + 202332820100339034205399751152492527852 $x^{20}y^{23}$ + 34040483417225419453889125357848549-
 2104 $x^{19}y^{23}$ + 542657015737303092365591062104753134568 $x^{18}y^{23}$ + 817761773231770674730404269137150290516 $x^{17}y^{23}$ + 1161736737-
 068795378306572148485549033012 $x^{16}y^{23}$ + 1550905926565472057237909964601780288788 $x^{15}y^{23}$ + 193844395492212366801211273584-
 7531889489 $x^{14}y^{23}$ + 2258594553920121991478600811109018531542 $x^{13}y^{23}$ + 2440887931287616251009856021861649066457 $x^{12}y^{23}$ + 24321-
 98841006497974893894462759765731260 $x^{11}y^{23}$ + 2218834607674325076052410596337928973431 $x^{10}y^{23}$ + 1837574445119845672298608-
 82963266062346 x^9y^{23} + 1367357634205864887651781047660034201851 x^8y^{23} + 902596758750103756670102347593559110396 x^7y^{23} + 52006-
 5725120868307663381244788558672382 x^6y^{23} + 256097464978194967653233268841871888976 x^5y^{23} + 104725833932167013215221053185-
 564427818 x^4y^{23} + 3411925709854854903352031101711421104 x^3y^{23} + 829682509559852981895528595624387206 x^2y^{23} + 1337559239-
 031011602733557363594988916 x^2y^{23} + 107131659516046683453786499185931716 y^{23} + 148 x^6y^{24} + 32639 x^6y^{24} + 2409296 x^6y^{24} + 10400-
 5412 x^6y^{24} + 3167317878 x^6y^{24} + 74681078055 x^6y^{24} + 1440552354736 x^6y^{24} + 23568597001410 x^6y^{24} + 335455412546096 x^6y^{24} + 42319-
 40993024803 x^6y^{24} + 47999180719677155 x^6y^{24} + 494956361448822251 x^6y^{24} + 4681900300536313336 x^6y^{24} + 40022458241310649988-
 x^6y^{24} + 332502445742337349298 x^6y^{24} + 2524045700855431624396 x^6y^{24} + 179761888310971447233618 x^6y^{24} + 12054316045243262950-
 7011 x^6y^{24} + 763388078057505184533731 x^6y^{24} + 4577455797226613856468085 x^6y^{24} + 26045454488339877421203425 x^6y^{24} + 14080-
 0178556202428634832791 x^6y^{24} + 7257067983639493139901495 x^6y^{24} + 3564175263781084205116645057 x^6y^{24} + 167097001588609-
 95006276756902 x^6y^{24} + 74852196921147798682740553504 x^6y^{24} + 320035217963662150667036503810 x^6y^{24} + 131422986774396-
 4135240040182373 x^6y^{24} + 5157183726747948484163567566712 x^6y^{24} + 193826642734068621142568074116633 x^6y^{24} + 6979231739-
 3092171842431147392945 x^6y^{24} + 240817146460034644386866702155971 x^6y^{24} + 79635429520689426755492313735827 x^6y^{24} + 25239-
 48386729778700621148491136011 x^6y^{24} + 76663573443909439305366564114832509 x^6y^{24} + 2231382880341518058194767547541253-
 x^6y^{24} + 622313088531125396692960667891081492 x^6y^{24} + 166167926384773148116467048757758092 x^6y^{24} + 42483254585740185225-
 892764366423154 x^6y^{24} + 1039257207847614341851103486789833513 x^6y^{24} + 2430983009933924621173268851885263 x^6y^{24} + 54332-
 53489473495945351226219753526584 x^6y^{24} + 11501810416590299282794687016680374251 x^6y^{24} + 23582054146726198531487878116-
 68597184 x^6y^{24} + 45687087650028417141131359630420426181 x^6y^{24} + 84165834392531848726890355694550298917 x^6y^{24} + 1471808348-
 62033868362180159585816946447 x^6y^{24} + 243814943825472795176181342228376385181 x^6y^{24} + 38171837345126952822847100308489235-
 5185 x^6y^{24} + 563270153500842887448608823252017103393 x^6y^{24} + 780923667118281852114210411216628582915 x^6y^{24} + 1013496400-
 93481545581867593071991259069 x^6y^{24} + 1226013816225295634592557310270174384525 x^6y^{24} + 137545350126977217251349458254-
 2584610319 x^6y^{24} + 1422660634709365128607631880855710497307 x^6y^{24} + 1347113971818169157064746473258319326701 x^6y^{24} + 11579-
 33527109186326083250885845658688330 x^6y^{24} + 89427344329974605511262633765774278378 x^6y^{24} + 612673050957018505583745791959-
 07825927 x^6y^{24} + 3663895352813373367633672698459661626539 x^6y^{24} + 187261032296135120583062268341540254754 x^6y^{24} + 7948111608-
 5310592490004453965867393655 x^6y^{24} + 26877600406816412821605428887515200792 x^6y^{24} + 67841861172283513103027614127668813-
 37 x^6y^{24} + 113529499350311305353677635001717222 x^6y^{24} + 94392921931155675407100781692886887 x^6y^{24} + 25 x^6y^{25} + 12440 x^6y^{25} + 11145-
 80 x^6y^{25} + 53396320 x^6y^{25} + 1744051703 x^6y^{25} + 43323333280 x^6y^{25} + 870707662258 x^6y^{25} + 14730453079940 x^6y^{25} + 2156010376-
 1777 x^6y^{25} + 2785159610787492 x^6y^{25} + 32239175040276252 x^6y^{25} + 338357195637692826 x^6y^{25} + 3250200599819984524 x^6y^{25} + 28794-
 174894110084620 x^6y^{25} + 236749512402797757230 x^6y^{25} + 1816085624137021691500 x^6y^{25} + 13054334489646772305847 x^6y^{25} + 88258-
 65322340680250500 x^6y^{25} + 563006714801464150418254 x^6y^{25} + 3397737917291057632400236 x^6y^{25} + 1944377927740781134341786-
 6 x^6y^{25} + 105714294067231391503957728 x^6y^{25} + 546978476696030216995331706 x^6y^{25} + 2697129110834354761474767558 x^6y^{25} + 12689-

$478535797715230805985946x^{10}y^{25} + 57020053969171837649667824816x^{20}y^{25} + 244911992755488983557497472363x^{35}y^{25} + 1006103658$
 $221484300720502343038x^{37}y^{25} + 3956155480748065437174638853885x^{36}y^{25} + 14892336775860479701353956264076x^{35}y^{25} + 5368814473$
 $5740180140164602426382x^{34}y^{25} + 18539693672967280589588852541292x^{33}y^{25} + 513303048936585924658093618106656x^{32}y^{25} + 19435$
 $40203214037069927392508202008x^{31}y^{25} + 5899489456117050748049245552475264x^{30}y^{25} + 17149550586681760097723695477827584$
 $x^{29}y^{25} + 47728786124984442379501035313037613x^{28}y^{25} + 127122951812836804571579859376906108x^{27}y^{25} + 32386311668529621113$
 $9230306964609127x^{26}y^{25} + 78871134808170529773410402664101388x^{25}y^{25} + 1834681423984423225857645434436173067x^{24}y^{25} + 40727$
 $6403533265918500369785646681680x^{23}y^{25} + 8018662357349875644165616394767572381x^{22}y^{25} + 173641663576730080372444129081$
 $70017638x^{21}y^{25} + 33257425522660801135405630652955181760x^{20}y^{25} + 60449564584884803144305900455053257564x^{19}y^{25} + 1040628144$
 $93054300315918986998173907202x^{18}y^{25} + 169271561300615900236778308952268429064x^{17}y^{25} + 25946843696803889740139159792601544$
 $9788x^{16}y^{25} + 373623170164890279761884271828949725576x^{15}y^{25} + 50355304103343424761212979617273698322x^{14}y^{25} + 6325688637$
 $38335293726500320932853491192x^{13}y^{25} + 73675984817033964861049355439695217068x^{12}y^{25} + 791153183937880295834016964613$
 $232010428x^{11}y^{25} + 777719013318613975699319453600257812878x^{10}y^{25} + 693984410096026274430910966600244198658x^9y^{25} + 55639$
 $1493317966550926720767482457118340x^8y^{25} + 395718101328951658642457691722071477272x^7y^{25} + 245671832393769865918316316825$
 $737671764x^6y^{25} + 130354753080549311083114006376077208630x^5y^{25} + 57441403259183360243484652281784648415x^4y^{25} + 2016734782$
 $4940575225497417561984844512x^3y^{25} + 5285292348347699860450127441413226981x^2y^{25} + 91835000664487516753263227347951295$
 $0x^1y^{25} + 792833374307697132102522011256095941y^{25} + 4704x^{62}y^{26} + 512864x^{51}y^{26} + 27310634x^{60}y^{26} + 95856508x^{50}y^{26} + 25122$
 $649810x^{58}y^{26} + 526614236534x^{57}y^{26} + 9218801328174x^{56}y^{26} + 138817124408970x^{55}y^{26} + 1836835466518072x^{54}y^{26} + 2170357713$
 $2550893x^{53}y^{26} + 23186542395902975x^{52}y^{26} + 2291935595562131454x^{51}y^{26} + 20311393651705009238x^{50}y^{26} + 16899288356034796508$
 $2x^{49}y^{26} + 13098979945304263039896x^{48}y^{26} + 9602440571252273067888x^{47}y^{26} + 64765001940243264344910x^{46}y^{26} + 4160811204647004260$
 $969x^{45}y^{26} + 2526743957349704173771900x^{44}y^{26} + 1453866635086098987950726x^{43}y^{26} + 7942368262490069497223850x^{42}y^{26} + 41265$
 $884007344984148358985x^{41}y^{26} + 2042086622486148437588185479x^{40}y^{26} + 9637080437316462516283917204x^{39}y^{26} + 434168087683826$
 $1610748699301x^{38}y^{26} + 186874609376532753510123206464x^{37}y^{26} + 769043117266190203131453932491x^{36}y^{26} + 30274951002424001185$
 $26660992864x^{35}y^{26} + 114085779143416337272937378135042x^{34}y^{26} + 41133730362113910981106613411280x^{33}y^{26} + 142028555697238$
 $986325589040816884x^{32}y^{26} + 46955103905534262497940755607538x^{31}y^{26} + 148627216321124153897501955204482x^{30}y^{26} + 45035$
 $520718351859167199195877194x^{29}y^{26} + 13059903362773276387445138425207894x^{28}y^{26} + 36231882615053585577781562115434146$
 $x^{27}y^{26} + 96116005313860012643916016148098663x^{26}y^{26} + 243661900992008804331073848900784427x^{25}y^{26} + 58984865390531948819$
 $7111834561393828x^{24}y^{26} + 1362269898005167412688790966158922218x^{23}y^{26} + 2998411244033722516614905331973611701x^{22}y^{26} + 62817$
 $2667293545755657217446963180846x^{21}y^{26} + 12507972988779647504933220741470167030x^{20}y^{26} + 23630463989374205983787165965$
 $09120582x^{19}y^{26} + 42273669165044650895018437113491875598x^{18}y^{26} + 71445717528866959986362941556441212600x^{17}y^{26} + 137604457$
 $9325233188583114465865544020x^{16}y^{26} + 170162542932470534421741375896921497072x^{15}y^{26} + 2381848236353282449243387412398689$
 $4988x^{14}y^{26} + 310694487407298433988585761813607225069x^{13}y^{26} + 375802880947121378648731417076027151258x^{12}y^{26} + 4190257487$
 $48635214009826744970116991288x^{11}y^{26} + 427897510027271776223334274499512293480x^{10}y^{26} + 396272487042606671137273254775$
 $076301637x^9y^{26} + 329882025315529771725997061337254386891x^8y^{26} + 2436172441768370679707692106791748779207x^7y^{26} + 15704$
 $9363630471595195848430334406207302x^6y^{26} + 8653353429298386602851370654598782683x^5y^{26} + 3959863179975944494120610$
 $67338875309512x^4y^{26} + 14438409282427648291457664253575207166x^3y^{26} + 3929842959897771730790200221217904293x^2y^{26} + 70919$
 $78150357569299801165985690347426x^1y^{26} + 63593010575950889439219598780148507y^{26} + 1744x^0y^{26} + 232338x^0y^{27} + 13862$
 $720x^{59}y^{27} + 525022114x^{58}y^{27} + 14550031400x^{57}y^{27} + 318501330756x^{56}y^{27} + 5773788096660x^{55}y^{27} + 89489153617422x^{54}y^{27} + 12132$
 $6869686700x^{53}y^{27} + 14636150907991280x^{52}y^{27} + 159181169044021136x^{51}y^{27} + 157712808846653260x^{50}y^{27} + 14354668246231647332$
 $x^{49}y^{27} + 120851266530713042078x^{48}y^{27} + 946482004100916435092x^{47}y^{27} + 6928597938976864407854x^{46}y^{27} + 47698683682052582242$
 $296x^{45}y^{27} + 307921916430581527298954x^{44}y^{27} + 188122769501590191887512x^{43}y^{27} + 10881042358969036930612708x^{42}y^{27} + 59709$
 $418262516420063799824x^{41}y^{27} + 311412879134026507095169660x^{40}y^{27} + 154600494183227874847867984x^{39}y^{27} + 731510182491530$

$9821741015769x^{38}y^{27} + 33023797260862909385835490602x^{37}y^{27} + 142367200610354354418727400289x^{36}y^{27} + 58650779558175759708-$
 $0854596264x^{35}y^{27} + 23102303818153227778383015650450x^{34}y^{27} + 8704208599476158572540460196592x^{33}y^{27} + 31377061825740471554-$
 $792015417796x^{32}y^{27} + 108234692747824433724322652182172x^{31}y^{27} + 357274307534872513399582367478612x^{30}y^{27} + 112843595672658-$
 $8963175138143546708x^{29}y^{27} + 3409570787808936296819828332047568x^{28}y^{27} + 98520421213344922105672836284106668x^{27}y^{27} + 27211-$
 $893004279580450155728364711769x^{26}y^{27} + 71803037172334387040064605280444546x^{25}y^{27} + 18086844565804876109509651736981120-$
 $5x^{24}y^{27} + 43454671417431940605054500621689644x^{23}y^{27} + 994736109400443905413037120917793727x^{22}y^{27} + 21688999435798363566-$
 $9009612184212146x^{21}y^{27} + 4485372384806309117842793875965561063x^{20}y^{27} + 8807459039613926340805289535031889828x^{19}y^{27} + 16373-$
 $388350801066857660060898098956896x^{18}y^{27} + 28751015275863523638578585668098336712x^{17}y^{27} + 475640267382932146399278125647-$
 $41206652x^{16}y^{27} + 7389735256190781074255998878640893924x^{15}y^{27} + 107438024074703612719712927213034615722x^{14}y^{27} + 14554-$
 $8908786132932246355088279703240592x^{13}y^{27} + 182832493714866536298239957929452844254x^{12}y^{27} + 211709155120905170412872611072-$
 $595250416x^{11}y^{27} + 224407873368021997155120953856498923404x^{10}y^{27} + 215924988527523899100564567355146736664x^9y^{27} + 18667-$
 $5493380145043884278657824957620888x^8y^{27} + 143177479243101590381589768781335314624x^7y^{27} + 95865770980434856036223615112-$
 $03613286x^6y^{27} + 54865328083918471458632149636083762104x^5y^{27} + 260798623287981956978454075209340211034x^4y^{27} + 9879345383-$
 $543474144314896079899418564x^3y^{27} + 2793204497204975914899794135230773187x^2y^{27} + 52369531445621232451623081130889129-$
 $4x^1y^{27} + 48789021701829129825948747000730983y^{27} + 506x^{60}y^{28} + 102708x^{59}y^{28} + 6966392x^{58}y^{28} + 286256992x^{57}y^{28} + 84101-$
 $78049x^{56}y^{28} + 192521747208x^{55}y^{28} + 3617021624322x^{54}y^{28} + 57731953212920x^{53}y^{28} + 802219155744542x^{52}y^{28} + 9882084965-$
 $504200x^{51}y^{28} + 109424249230533310x^{50}y^{28} + 1101116858422600019x^{49}y^{28} + 10158266768918228537x^{48}y^{28} + 8653342162074587787-$
 $x^{47}y^{28} + 684699009780393071807x^{46}y^{28} + 5057283184781267161961x^{45}y^{28} + 35014454712804399070579x^{44}y^{28} + 22804664653774761874-$
 $3689x^{43}y^{28} + 1401361810361273863549715x^{42}y^{28} + 8145880284109456701210552x^{41}y^{28} + 44888311760013903165442670x^{40}y^{28} + 23493-$
 $1101213425692168754397x^{39}y^{28} + 1169608746697514057082617457x^{38}y^{28} + 5546328212665531850702197527x^{37}y^{28} + 250790262253024-$
 $08134329344658x^{36}y^{28} + 1082291933173518942019288894x^{35}y^{28} + 446084104257268960536060482975x^{34}y^{28} + 175697549900506-$
 $1091629429391408x^{33}y^{28} + 6615503156912092781846462757945x^{32}y^{28} + 23818675460497947021026356268202x^{31}y^{28} + 8201250155-$
 $1253209896903995157695x^{30}y^{28} + 270049437102108462172771427066790x^{29}y^{28} + 850245049259095227349821371000905x^{28}y^{28} + 25589-$
 $57637938007947494808626296510x^{27}y^{28} + 7359074291438519702842769416072092x^{26}y^{28} + 20210978707845221975827446548450096-$
 $x^{25}y^{28} + 52973036066004005720663557435534716x^{24}y^{28} + 132290360838671925655365843519830193x^{23}y^{28} + 3151717582835704724-$
 $6044911329066736x^{22}y^{28} + 713838171113131409603703419500062826x^{21}y^{28} + 1536004584525652344764867253714312323x^{20}y^{28} + 31347-$
 $18773457427892611405232360364389x^{19}y^{28} + 6055784805704362536972919464645749736x^{18}y^{28} + 110489682756623567902928195107-$
 $57221807x^{17}y^{28} + 18989133579330066616174081047571451736x^{16}y^{28} + 30646796878484857630533580163101281715x^{15}y^{28} + 4628109968-$
 $3056342408229312410498588978x^{14}y^{28} + 65123534073448697701193553249633364774x^{13}y^{28} + 84966009510921791887622411164035460-$
 $958x^{12}y^{28} + 102186014617663176555775176288849146707x^{11}y^{28} + 112500933615382892461401630626367528142x^{10}y^{28} + 1124350078-$
 $07497192166781046382929650704x^9y^{28} + 10096910953801687150380020807686690947x^8y^{28} + 80446270507191263343088764169877264-$
 $546x^7y^{28} + 55957265794437708235489438055662076947x^6y^{28} + 33272599362696969045149595184323265104x^5y^{28} + 16433289882738539822-$
 $93888457680154976x^4y^{28} + 6467958737279956783513453103896543600x^3y^{28} + 1900553171305878785118837495498770148x^2y^{28} + 37031-$
 $949960648880004034698638487750x^1y^{28} + 35856031013616351226988247095767426y^{28} + 160x^{59}y^{29} + 43744x^{58}y^{29} + 345804x^{57}y^{29} + 15523-$
 $3963x^{56}y^{29} + 4848012336x^{55}y^{29} + 116248747090x^{54}y^{29} + 2265416970072x^{53}y^{29} + 37255233946026x^{52}y^{29} + 530742415463588x^{51}y^{29} + 66772-$
 $47076518230x^{50}y^{29} + 7528886827829794x^{49}y^{29} + 769425571628166830x^{48}y^{29} + 719445577794963072x^{47}y^{29} + 62006459864027244680-$
 $x^{46}y^{29} + 495634795162489662036x^{45}y^{29} + 369322656237853537046x^{44}y^{29} + 25765896830585744999256x^{43}y^{29} + 16891525231148911713-$
 $9678x^{42}y^{29} + 1043817829996879229540102x^{41}y^{29} + 6096215850523704540316530x^{40}y^{29} + 33725032664167659724654340x^{39}y^{29} + 17706-$
 $3983223302882392461720x^{38}y^{29} + 883679746939830356543012176x^{37}y^{29} + 4197920745202127926892113265x^{36}y^{29} + 190035718886728-$
 $97296894033760x^{35}y^{29} + 82052938376443049945966093854x^{34}y^{29} + 338161816384107918822085028754x^{33}y^{29} + 13309574663152174530-$
 $18168797047x^{32}y^{29} + 5004721045369563938209682248756x^{31}y^{29} + 17983401307159133953538450233793x^{30}y^{29} + 61755598134748823046-$

$544087064986z^{29}y^{20} + 202659729203411264584124216006797z^{28}y^{20} + 635415365569540613226842508796612z^{27}y^{20} + 190281884350428-$
 $2727280508510367762r^{26}y^{29} + 5439676614228949706799106157985164z^{25}y^{29} + 14835565368103854193860670778611420z^{24}y^{29} + 38569-$
 $018912370259922679577843055728z^{23}y^{29} + 9548767192356004045062601841400171z^{22}y^{29} + 22486195946436269001741821071822052-$
 $4z^{21}y^{29} + 502967093820640067210438979686987315z^{20}y^{29} + 1066820234342664684953692419484214920z^{19}y^{29} + 21416368855168473195-$
 $76193179746885103z^{18}y^{29} + 4059980095528427834959672079008295106z^{17}y^{29} + 7249176655719274147854676414471020943z^{16}y^{29} + 12153-$
 $884045001185628076397634841802492z^{15}y^{29} + 19065832467614167610811441742709261975z^{14}y^{29} + 278675183561484944912025784109-$
 $38635324z^{13}y^{29} + 37766805377348973188392379465086022208z^{12}y^{29} + 47181053682063980357486121548913382572z^{11}y^{29} + 53958-$
 $4305822105197985131779092534387z^{10}y^{29} + 5602168291367090946938557851584833270z^9y^{29} + 522668473767330402943500609023-$
 $12731361z^8y^{29} + 43267770832076811657948642004531924808z^7y^{29} + 31273585508091440902605060123431945973z^6y^{29} + 1932477324-$
 $1733078166157959420700150438z^5y^{29} + 9919793984079812139517566901261326340z^4y^{29} + 40582411989200354614688424151842159-$
 $60z^3y^{29} + 1239594403739847161204334959955010072z^2y^{29} + 25109709379443549598906460006746656z^1y^{29} + 252765708877795955182-$
 $59095608680504y^{29} + 40z^{28}y^{11} + 18312z^{27}y^{30} + 1699638z^{26}y^{30} + 83727684z^{25}y^{30} + 2787543454z^{24}y^{30} + 70900341976z^{23}y^{30} + 14179-$
 $07933140z^{22}y^{30} + 24038909097254z^{21}y^{30} + 351199162985492z^{20}y^{30} + 451329421392579z^{19}y^{30} + 51814825850173133z^{18}y^{30} + 53786-$
 $5533282715366z^{17}y^{30} + 5097150068041218336z^{16}y^{30} + 44442793318359626100z^{15}y^{30} + 358823775574613210626z^{14}y^{30} + 2670202972-$
 $798241972150z^{13}y^{30} + 1895636355255400939378z^{12}y^{30} + 125064818344378238322695z^{11}y^{30} + 776992850128061033102001z^{10}y^{30} + 45581-$
 $012161948629192346z^9y^{30} + 25307064964895520604227844z^8y^{30} + 133242692327359925858187498z^7y^{30} + 66035931016066191317-$
 $1662416z^6y^{30} + 3169852169832812648317321166z^5y^{30} + 14359258308611291851425465808z^4y^{30} + 6199970145653967606779817-$
 $991z^3y^{30} + 2593449216770395226783573891z^2y^{30} + 1003645070973778180591446075194z^1y^{30} + 376624473799549608005959796498-$
 $4z^{30}y^{30} + 13956878004094122373073172477902z^{29}y^{30} + 46182548623641702025167848793709z^{28}y^{30} + 1509006800358909161779351-$
 $22986754z^{27}y^{30} + 470680342029350092129814616599950z^{26}y^{30} + 1400873784696941879513293187215764z^{25}y^{30} + 397608494834992-$
 $3627159396297755814z^{24}y^{30} + 1075392180170991325313116817193694z^{23}y^{30} + 27690028998670700036192831067012411z^{22}y^{30} + 67799-$
 $8496368660779954537953286479z^{21}y^{30} + 157648512203014175749935332951058798z^{20}y^{30} + 34754094708473899410377029105491361-$
 $2z^{19}y^{30} + 725026706090571364181242205811108943z^{18}y^{30} + 142814108836906896389130904866123335z^{17}y^{30} + 26493106467034633008-$
 $62826311809126489z^{16}y^{30} + 4614516927479283363497642861799931554z^{15}y^{30} + 751996147283999804624202220638002095z^{14}y^{30} + 11418-$
 $26446446511948921659421938433349z^{13}y^{30} + 16075278375336171971820403216271497302z^{12}y^{30} + 208630395147001943098291442656-$
 $91614502z^{11}y^{30} + 247888424212166109874043892728960303571z^{10}y^{30} + 26740803946522424596360074554715066547z^9y^{30} + 2592436635-$
 $2734713545821213613716287638z^8y^{30} + 22302740289271216439941193128785677310z^7y^{30} + 1675466709617182422576321858158477-$
 $787z^6y^{30} + 10761965190893467091183056533359288086z^5y^{30} + 5743191274016469052826677602836640911z^4y^{30} + 24429458068896259433-$
 $01093164996865330z^3y^{30} + 775943346275864258337089528612613860z^2y^{30} + 163457229930115897282016343024720878z^1y^{30} + 1711308605-$
 $7161991333692575661550932y^{30} + 7278z^5y^{31} + 823504z^5y^{31} + 44862870z^5y^{31} + 1506866208z^5y^{31} + 42178611788z^5y^{31} + 88666-$
 $9942676z^5y^{31} + 15503109237194z^5y^{31} + 232348916390364z^4y^{31} + 3050513149850172z^4y^{31} + 35662962753922668z^4y^{31} + 37599-$
 $2010361993990r^4y^{31} + 3619973694718000776z^{15}y^{31} + 31848227739898610930z^{14}y^{31} + 25969146340993535975z^{13}y^{31} + 1968543018-$
 $500819427800z^{12}y^{31} + 1393667875148858867102z^{11}y^{31} + 92511744621518719659188z^{10}y^{31} + 577688253268883907772060z^9y^{31} + 34030-$
 $449195694067084526z^8y^{31} + 18956283705497344163864536z^7y^{31} + 100051878838512446070116006z^6y^{31} + 501210978276406-$
 $484931624180z^5y^{31} + 2386457291022460415059898300z^4y^{31} + 10812687576738534024544983024z^3y^{31} + 46661051564967093515-$
 $68715001z^2y^{31} + 191930252937493344561360582268z^1y^{31} + 752882097522620945790892800575z^0y^{31} + 2817488039090251613-$
 $85091305186z^{29}y^{31} + 10060169439421392898264871172333z^{28}y^{31} + 34274831764185898917342346412028z^{27}y^{31} + 111402126685618-$
 $148073589709216200z^{26}y^{31} + 345313388298441791011537329662720z^{25}y^{31} + 1020265870249761665763582900847028z^{24}y^{31} + 28713-$
 $94475976171643249953247182228z^{23}y^{31} + 7690736030202743652491331568466329z^{22}y^{31} + 19582333762107722500927319184929490-$
 $z^{21}y^{31} + 47337968217704941974199560082596903z^{20}y^{31} + 108472771820689508907749172535068108z^{19}y^{31} + 23517518076180567294-$
 $7052341769567647z^{18}y^{31} + 48136513117017887171716400431890454z^{17}y^{31} + 927812907335334314963184896183136305z^{16}y^{31} + 16789-$

96621333959752254313636160398180 $\times 10^{-15} y^{31}$ + 2842633161300285702099791023590345321 $\times 10^{-1} y^{31}$ + 4484205092142563680454659271214-
 1816310 $\times 10^{-1} y^{31}$ + 6588965790060386820645265467049959993 $\times 10^{-12} y^{31}$ + 8844411273674719513755242815453186656 $\times 10^{-11} y^{31}$ + 1091033573-
 4682897075672166522305295965 $\times 10^{-10} y^{31}$ + 12420725131683233077894523094559437330 $\times 10^{-9} y^{31}$ + 12333494609989061417781224307426144-
 879 $\times 10^{-8} y^{31}$ + 11029119909239347875361827795742916832 $\times 10^{-7} y^{31}$ + 8613645395692972503964132766017164077 $\times 10^{-6} y^{31}$ + 57527758554426050192-
 00113357280164550 $\times 10^{-5} y^{31}$ + 3192564020803639839140742569127131271 $\times 10^{-4} y^{31}$ + 1412418863208344341600176360356943316 $\times 10^{-3} y^{31}$ + 46666-
 007580005149850955332487837222 $\times 10^{-2} y^{31}$ + 102269513359276735811384667862567580 $\times 10^{-1} y^{31}$ + 11139968524632360830541640364390602-
 y^{31} + 2904 $\times 10^{-65} y^{32}$ + 394528 $\times 10^{-54} y^{32}$ + 23860476 $\times 10^{-43} y^{32}$ + 911031473 $\times 10^{-32} y^{32}$ + 25321980334 $\times 10^{-21} y^{32}$ + 553661030454 $\times 10^{-10} y^{32}$ + 998985301-
 472 $\times 10^{-1} y^{32}$ + 153637064286649 $\times 10^{-18} y^{32}$ + 2061927492199424 $\times 10^{-17} y^{32}$ + 245374991979486564 $\times 10^{-16} y^{32}$ + 262735606421872928 $\times 10^{-15} y^{32}$ + 25569-
 31266171717007 $\times 10^{-14} y^{32}$ + 22809256418239504200 $\times 10^{-13} y^{32}$ + 187804134422258840022 $\times 10^{-12} y^{32}$ + 1435464526939249420067 $\times 10^{-11} y^{32}$ + 19234-
 209833283235562941 $\times 10^{-10} y^{32}$ + 68334607972064532743781 $\times 10^{-9} y^{32}$ + 428778046713520215297217 $\times 10^{-8} y^{32}$ + 253560086209327783143024-
 $\times 10^{-7} y^{32}$ + 14166002309351310574814558 $\times 10^{-6} y^{32}$ + 74929194965153302056846084 $\times 10^{-5} y^{32}$ + 375815699614672600828887936 $\times 10^{-4} y^{32}$ + 17902-
 0565566503477130940513 $\times 10^{-3} y^{32}$ + 8108773169046105091662636735 $\times 10^{-2} y^{32}$ + 3495484598193069950822704550 $\times 10^{-1} y^{32}$ + 143510180479141-
 60370996145382 $\times 10^{-1} y^{32}$ + 5614413770304592007107204040 $\times 10^{-20} y^{32}$ + 2093684868149166738408542478858 $\times 10^{-26} y^{32}$ + 744321904148869-
 4111437093566607 $\times 10^{-27} y^{32}$ + 2522406311155242364914569930782 $\times 10^{-26} y^{32}$ + 814739495933292529043048009331235 $\times 10^{-25} y^{32}$ + 250693557122028-
 329711400281040715 $\times 10^{-24} y^{32}$ + 734409451805149100889632855095110 $\times 10^{-23} y^{32}$ + 2046685503620991621015368916676969 $\times 10^{-22} y^{32}$ + 54204-
 49975225238290439405743246492 $\times 10^{-21} y^{32}$ + 13625200706047165235806191681731158 $\times 10^{-20} y^{32}$ + 32457390136555097117046147229983476-
 $\times 10^{-19} y^{32}$ + 73141112758194793292941628353181478 $\times 10^{-18} y^{32}$ + 155581677469335105827710491888292599 $\times 10^{-17} y^{32}$ + 31161056844227688045-
 8578394396544294 $\times 10^{-16} y^{32}$ + 585922725238117153523661828618987903 $\times 10^{-15} y^{32}$ + 1030710634038000775808825639511068471 $\times 10^{-14} y^{32}$ + 16893-
 84761249062833368485662312810446 $\times 10^{-13} y^{32}$ + 2567565232625327025886340038233121488 $\times 10^{-12} y^{32}$ + 3597723282948547799404024200784981-
 80 $\times 10^{-11} y^{32}$ + 4616039492737456002431953062304763408 $\times 10^{-10} y^{32}$ + 5378339294868752213174991050274079993 $\times 10^{-9} y^{32}$ + 50332329766720053118-
 69487912738185205 $\times 10^{-8} y^{32}$ + 523737053045086797946494732925495058 $\times 10^{-7} y^{32}$ + 4253397904708165232228319192021846822 $\times 10^{-6} y^{32}$ + 29544-
 80447596780311688720924641324676 $\times 10^{-5} y^{32}$ + 170595278962249603405395183008303130 $\times 10^{-4} y^{32}$ + 78506826712631619269442366229494153-
 $\times 10^{-3} y^{32}$ + 269911342851627311093374586750178748 $\times 10^{-2} y^{32}$ + 61560803601015906572485652697216016 $\times 10^{-1} y^{32}$ + 6979512646021186152788462-
 076360199 $\times 10^{-1} y^{32}$ + 1060 $\times 10^{-51} y^{33}$ + 184600 $\times 10^{53} y^{33}$ + 12570639 $\times 10^{54} y^{33}$ + 817226280 $\times 10^{51} y^{33}$ + 15199322684 $\times 10^{50} y^{33}$ + 345117601384 $\times 10^{49} y^{33}$ + 84299-
 18354787 $\times 10^{46} y^{33}$ + 101503413224408 $\times 10^{47} y^{33}$ + 1351807766332036 $\times 10^{46} y^{33}$ + 16871265585781356 $\times 10^{45} y^{33}$ + 183460975232813393 $\times 10^{44} y^{33}$ + 18090-
 6243895026072 $\times 10^{43} y^{33}$ + 16310731463860253706 $\times 10^{42} y^{33}$ + 135659204978483656702 $\times 10^{41} y^{33}$ + 10453060615318817235890 $\times 10^{40} y^{33}$ + 75032-
 17655901509168720 $\times 10^{39} y^{33}$ + 50380937564285067765904 $\times 10^{38} y^{33}$ + 317557309098260052286602 $\times 10^{37} y^{33}$ + 1884524126032006926622598-
 $\times 10^{36} y^{33}$ + 10555822811547745363083540 $\times 10^{35} y^{33}$ + 55925386235240141199159848 $\times 10^{34} y^{33}$ + 28074926520509593361506598 $\times 10^{33} y^{33}$ + 13373-
 81117849596217614827106 $\times 10^{32} y^{33}$ + 6652486613514533833447734296 $\times 10^{31} y^{33}$ + 26047242973441220816994012716 $\times 10^{30} y^{33}$ + 106670918877525-
 223382648744868 $\times 10^{29} y^{33}$ + 415910389566290675414889479594 $\times 10^{28} y^{33}$ + 1544352360206408270039192458220 $\times 10^{27} y^{33}$ + 546163105995934-
 8700847059396395 $\times 10^{26} y^{33}$ + 1830406758709558958561602957838 $\times 10^{25} y^{33}$ + 58976421847943797149135458419032 $\times 10^{24} y^{33}$ + 179928112410700-
 090048147464356724 $\times 10^{23} y^{33}$ + 521944557197878978633429394577279 $\times 10^{22} y^{33}$ + 438273332542767159412253709616282 $\times 10^{21} y^{33}$ + 37603-
 83846296778399247033217889986 $\times 10^{20} y^{33}$ + 93145662823198144096859964209854804 $\times 10^{19} y^{33}$ + 21820993712699976360090589891066499-
 $\times 10^{18} y^{33}$ + 48245791566840592845188585465919098 $\times 10^{17} y^{33}$ + 100426269968169918954173077655371161 $\times 10^{16} y^{33}$ + 19623458897802490028-
 2847937434963964 $\times 10^{15} y^{33}$ + 35872071375472174791439392777533372 $\times 10^{14} y^{33}$ + 610990636775054640547107470293482 $\times 10^{13} y^{33}$ + 96501-
 22074209958691075879139924609334 $\times 10^{12} y^{33}$ + 140532959611648741348909538946133488 $\times 10^{11} y^{33}$ + 1874164568018171636977625938514976-
 96 $\times 10^{10} y^{33}$ + 227004961976265710051514817481841014 $\times 10^9 y^{33}$ + 247210065586894894012619087716280580 $\times 10^8 y^{33}$ + 23901447521678074388-
 13126846033351584 $\times 10^7 y^{33}$ + 20190018449366547324409028519461920824 $\times 10^6 y^{33}$ + 1459024467279421198085201370649816980 $\times 10^5 y^{33}$ + 87643-
 3603994653713267387860150159770 $\times 10^4 y^{33}$ + 419874563863325456217779620182097156 $\times 10^3 y^{33}$ + 15027098329459030005124970245034043-
 7 $\times 10^2 y^{33}$ + 35683757126225253999294737300332328 $\times 10 y^{33}$ + 4212825840424537020383847207959589 $\times 10 y^{33}$ + 344 $\times 10^{53} y^{34}$ + 84434 $\times 10^{52} y^{34}$ + 65620-
 96 $\times 10^{51} y^{34}$ + 292089410 $\times 10^{51} y^{34}$ + 9046479600 $\times 10^{51} y^{34}$ + 214679841218 $\times 10^{51} y^{34}$ + 4132460227688 $\times 10^{51} y^{34}$ + 66983013024686 $\times 10^{51} y^{34}$ + 93852

$6983504392z^{15}y^{31} + 11588670526404366z^{14}y^{31} + 127970887635689344z^{13}y^{31} + 1278436396687476916z^{12}y^{31} + 11860961591293402157z^{11}y^{31} + 9784191696057870697z^{10}y^{31} + 759843980124302130176z^{9}y^{31} + 5489782912039634018386z^{8}y^{31} + 37057651692336895144z^{7}y^{31} + 234562118205167864757833z^{6}y^{31} + 1396416001066469892442764z^{5}y^{31} + 7839004351807923573226340z^{4}y^{31} + 41584z^3y^{31} + 1581689219247564941z^2y^{31} + 208833061940289790103773313z^2y^{31} + 994293982987328846776105664z^2y^{31} + 44935368817845535910z^2y^{31} + 19294146544465235573701742178z^2y^{31} + 78763579904738798599283215488z^2y^{31} + 3058152614681464110109689z^2y^{31} + 112983823247105778559434388461z^2y^{31} + 3971209773439043904152629270860z^2y^{31} + 1327779337345678858316653z^2y^{31} + 42213401489569033271997290204118z^2y^{31} + 12753348106584609626953639853248z^2y^{31} + 3658254043459151816z^2y^{31} + 995214916721956532805927629667151z^2y^{31} + 2564203620563603621008625101021848z^2y^{31} + 6246678468595261z^2y^{31} + 14359134618321377985076519770148624z^2y^{31} + 31070190151917321824526637060665837z^2y^{31} + 63103z^2y^{31} + 110894963435583620368953983021739176z^2y^{31} + 21224711618134496592841649090834338z^2y^{31} + 348434269385813778417708834176063123z^2y^{31} + 527453078610437656763734396490360644z^2y^{31} + 73128066425982156673z^2y^{31} + 920980721852011624736217337523535965z^2y^{31} + 1043040509423786470205560829380513257z^2y^{31} + 10489z^2y^{31} + 9219208013755085027883876818685811750z^2y^{31} + 69331954488776956174734944090789315z^2y^{31} + 433528914351209307713748735812937896z^2y^{31} + 216236167006546117163114554268815540z^2y^{31} + 80593003171101398571z^2y^{31} + 19933987659359690315782258130145179z^2y^{31} + 2451725304910381436805427458293112y^2z^2y^{31} + 94z^2y^2z^2y^{31} + 37556z^2y^2z^2y^{31} + 163996028z^2y^2z^2y^{31} + 5379494214z^2y^2z^2y^{31} + 133223610916z^2y^2z^2y^{31} + 2651238700002z^2y^2z^2y^{31} + 4413927122z^2y^2z^2y^{31} + 63218294253608z^2y^2z^2y^{31} + 7949863421678452z^2y^2z^2y^{31} + 89142967003129080z^2y^2z^2y^{31} + 902099526588207788z^2y^2z^2y^{31} + 83181z^2y^2z^2y^{31} + 7043269070718232827z^2y^2z^2y^{31} + 551146890461462814858z^2y^2z^2y^{31} + 4006820793185360090452z^2y^2z^2y^{31} + 27182z^2y^2z^2y^{31} + 1727192554000965534709z^2y^2z^2y^{31} + 1031120324618353999400160z^2y^2z^2y^{31} + 57986965915066262489905220z^2y^2z^2y^{31} + 30786106591965958985189710z^2y^2z^2y^{31} + 154586642259574781228393456z^2y^2z^2y^{31} + 735236246993882696759991542z^2y^2z^2y^{31} + 33161z^2y^2z^2y^{31} + 14197103135958373497912435342z^2y^2z^2y^{31} + 57730152738792630444511459564z^2y^2z^2y^{31} + 2230634006z^2y^2z^2y^{31} + 819139043594096738371535068030z^2y^2z^2y^{31} + 28587214948131282075488933215z^2y^2z^2y^{31} + 947871703z^2y^2z^2y^{31} + 29845373527747869470634212009387z^2y^2z^2y^{31} + 8917002379315793197270980981830z^2y^2z^2y^{31} + 2525438401z^2y^2z^2y^{31} + 677123312549886598739272357376609z^2y^2z^2y^{31} + 1715990200654788154228363541438495z^2y^2z^2y^{31} + 41023z^2y^2z^2y^{31} + 9229967476525196898062928263264919z^2y^2z^2y^{31} + 19489913666105594258966448307966196z^2y^2z^2y^{31} + 38406395986106256724678243389503116z^2y^2z^2y^{31} + 70846743559045122903186227687788932z^2y^2z^2y^{31} + 12091310678782954210z^2y^2z^2y^{31} + 190303686966041458885488701013118244z^2y^2z^2y^{31} + 27435576656124230286602122387094236z^2y^2z^2y^{31} + 35935z^2y^2z^2y^{31} + 4233499194278120590733155500454560z^2y^2z^2y^{31} + 4429945703179552873419326474868334z^2y^2z^2y^{31} + 40519257583036989069822493036833450z^2y^2z^2y^{31} + 31721789312773543388351057062169656z^2y^2z^2y^{31} + 20654599986509859474z^2y^2z^2y^{31} + 10730434295756887751002813974836372z^2y^2z^2y^{31} + 41666397370417309312677284019723231z^2y^2z^2y^{31} + 1073945168z^2y^2z^2y^{31} + 1376723681927281353757332530700181y^2z^2y^{31} + 16z^2y^2z^2y^{31} + 16272z^2y^2z^2y^{31} + 1728388z^2y^2z^2y^{31} + 91503z^2y^2z^2y^{31} + 82451995048z^2y^2z^2y^{31} + 1697478343532z^2y^2z^2y^{31} + 29036529678232z^2y^2z^2y^{31} + 425162733941372z^2y^2z^2y^{31} + 54450z^2y^2z^2y^{31} + 1699304155209171z^2y^2z^2y^{31} + 635395168749581232z^2y^2z^2y^{31} + 5921667690781359772z^2y^2z^2y^{31} + 50587652794985827196z^2y^2z^2y^{31} + 39875861101411954070z^2y^2z^2y^{31} + 291614371463279085225z^2y^2z^2y^{31} + 1987529562778475336537z^2y^2z^2y^{31} + 1267284663517896833z^2y^2z^2y^{31} + 758362062882236335632961z^2y^2z^2y^{31} + 4270495136369765615354516z^2y^2z^2y^{31} + 22680153818074198961219341z^2y^2z^2y^{31} + 11380z^2y^2z^2y^{31} + 54040827328296860673694579z^2y^2z^2y^{31} + 243103825028707461530652744z^2y^2z^2y^{31} + 103699361933867z^2y^2z^2y^{31} + 4197079991404193830841062177z^2y^2z^2y^{31} + 16123764260460884145370498369z^2y^2z^2y^{31} + 5880125533464732206z^2y^2z^2y^{31} + 203541642277428210977890602644z^2y^2z^2y^{31} + 668503043288622192994119902226z^2y^2z^2y^{31} + 20819092427192156185z^2y^2z^2y^{31} + 61423632057977662685677866750981z^2y^2z^2y^{31} + 17147674383432275010143743369254z^2y^2z^2y^{31} + 452286876618041z^2y^2z^2y^{31} + 1124998271015874034794685370708969z^2y^2z^2y^{31} + 26329121544935952065380887819407916z^2y^2z^2y^{31} + 57821z^2y^2z^2y^{31} + 11876645447031013625094487046972921z^2y^2z^2y^{31} + 22728621191450534937428269302915046z^2y^2z^2y^{31}$

$$\begin{aligned}
& x^{13}y^{36} + 4033807265094957053457066540246884x^{12}y^{36} + 660254124022266675492686167206671890x^{11}y^{36} + 9900477703354328839187746- \\
& 3292695162x^{10}y^{36} + 134901612272329646138302907758360064x^9y^{36} + 16536568636637353193161975235951385x^8y^{36} + 180095653390309- \\
& 673844781999098305018x^7y^{36} + 171493080144323993292717402932594091x^6y^{36} + 139814479219664671498243135087992179x^5y^{36} + 94831- \\
& 559924420362680922722563723732x^4y^{36} + 51336452423101468091461151402520126x^3y^{36} + 20777425812117014036419234091122840- \\
& x^2y^{36} + 5583415890284404171628116619413247x y^{36} + 746412804735652379097962579583627y^{36} + 6848x^{19}y^{37} + 870997x^{18}y^{37} + 50696- \\
& 184x^{17}y^{37} + 1879141280x^{16}y^{37} + 50876051868x^{15}y^{37} + 1084319365516x^{14}y^{37} + 19063859852700x^{13}y^{37} + 285410805131502x^{12}y^{37} + 37226- \\
& 01039520230x^{11}y^{37} + 43028350469544537x^{10}y^{37} + 446597189306442688x^9y^{37} + 4205800051430549232x^8y^{37} + 3623985155501260563x- \\
& x^7y^{37} + 287669032886711501312x^6y^{37} + 2115493751474024227128x^5y^{37} + 144800927778095010477732x^4y^{37} + 92811515796094543398- \\
& 076x^3y^{37} + 555274670610806647319657x^2y^{37} + 3129543203168408375775240x y^{37} + 166174483368502492914037024x^0y^{37} + 83284- \\
& 197082855200394577056x^{29}y^{37} + 394570136941093574040682665x^{28}y^{37} + 1769115411425808635872187240x^{27}y^{37} + 75133706233750476480- \\
& 91633712x^{26}y^{37} + 30242206129225507662603037612x^{25}y^{37} + 11540570133328207038743275778x^{24}y^{37} + 4175374874335657324256791- \\
& 17920x^{23}y^{37} + 1431928935158777716861497448059x^{22}y^{37} + 4652541590982346078857670745038x^{21}y^{37} + 14310789504322373353390- \\
& 3412627x^{20}y^{37} + 41626722619077997787006799392592x^{19}y^{37} + 114311786498308403758360039555658x^{18}y^{37} + 2960609548961812918- \\
& 3119905889318x^{17}y^{37} + 721102124762846041470303893884661x^{16}y^{37} + 1647664316585536170286745118176016x^{15}y^{37} + 352073721977162- \\
& 6832215254152107288x^{14}y^{37} + 7008748116825643326583471328692282x^{13}y^{37} + 12939258610170920863386586018605842x^{12}y^{37} + 22032- \\
& 288928095029486224974841491196x^{11}y^{37} + 34372614756559849296876482094733410x^{10}y^{37} + 48737029207378849171105821173204416- \\
& x^9y^{37} + 62183002838234424257795399114817959x^8y^{37} + 70506794782950605304453642607405948x^7y^{37} + 6992094492560106621318482- \\
& 9472748189x^6y^{37} + 59386445129199946233064768888513000x^5y^{37} + 41976789376981782467663974140082807x^4y^{37} + 236891681551530- \\
& 35719242589609293408x^3y^{37} + 9998260680722687166333196706768878x^2y^{37} + 2802674675144298475263661755431102x y^{37} + 3909400405- \\
& 72948135715693534636280y^{37} + 2800x^{18}y^{38} + 432040x^{17}y^{38} + 27862792x^{16}y^{38} + 1102868984x^{15}y^{38} + 31288642758x^{14}y^{38} + 6908683676- \\
& 56x^{13}y^{38} + 12488649352228x^{12}y^{38} + 191195967810143x^{11}y^{38} + 2539656585831823x^{10}y^{38} + 29798982395502414x^9y^{38} + 3131424374- \\
& 27682780x^8y^{38} + 2979216529917608477x^7y^{38} + 25885253498660388629x^6y^{38} + 206851293383426140370x^5y^{38} + 152910921377748- \\
& 4788640x^4y^{38} + 10507009105859485493782x^3y^{38} + 67377549344401444792824x^2y^{38} + 404568647049823357599998x y^{38} + 22809- \\
& 279511855600936636x^0y^{38} + 12102227255033364596352448x^{29}y^{38} + 60542789501893823837542396x^{28}y^{38} + 28508862477247503555- \\
& 6764460x^{27}y^{38} + 1277098070444855205487199702x^{26}y^{38} + 5395621520758865487334895144x^{25}y^{38} + 21578930502325199602415075- \\
& 004x^{24}y^{38} + 81717185076508487024538212908x^{23}y^{38} + 292987117301827232415009116965x^{22}y^{38} + 994251762744240511947932319442- \\
& x^{21}y^{38} + 3191397713967131383413727685729x^{20}y^{38} + 9680321871235336317650928422244x^{19}y^{38} + 277117651321218351664776861540- \\
& 46x^{18}y^{38} + 74745348877218003938929574776235x^{17}y^{38} + 189562140092393436319666925401571x^{16}y^{38} + 45088328277589208305556013801- \\
& 312x^{15}y^{38} + 1002730472358523678066397799993408x^{14}y^{38} + 2077291815467236934327600741338839x^{13}y^{38} + 3990787625360029644288184- \\
& 696201341x^{12}y^{38} + 7071622953054711965874974132080848x^{11}y^{38} + 11482345803631476900250445382667822x^{10}y^{38} + 169477421333738- \\
& 547733212005063557969y^{38} + 22514404812214797474913682793498072x^8y^{38} + 26587574023336410267866411791333472x^7y^{38} + 27469- \\
& 747604144123447327842440899513x^6y^{38} + 24315767163507002394249632019363817x^5y^{38} + 17919433028310554108396719435300736- \\
& x^4y^{38} + 1054731700077972511580558356911634x^3y^{38} + 4644641789769351795993678295728622x^2y^{38} + 1358892043597108146802077- \\
& 201320965x y^{38} + 197898651808614059722092333949599y^{38} + 1040x^{17}y^{39} + 210044x^{16}y^{39} + 15177192x^{15}y^{39} + 643914126x^{14}y^{39} + 19173- \\
& 417204x^{13}y^{39} + 43894577192x^{12}y^{39} + 8161198023624x^{11}y^{39} + 127783065963174x^{10}y^{39} + 1728529625018234x^9y^{39} + 2058563355- \\
& 5344566x^8y^{39} + 218974957819913280x^7y^{39} + 2104105985477327086x^6y^{39} + 18428726793395772044x^5y^{39} + 14819951395704238983- \\
& 0x^4y^{39} + 1100824470302889922260x^3y^{39} + 7590183218049217960686x^2y^{39} + 48778241402491420648760x y^{39} + 29316651999074131225- \\
& 7866x^0y^{39} + 1652484101290548381733576x^{29}y^{39} + 8755821741733043006804960x^{28}y^{39} + 4389221930635893702793460x^{27}y^{39} + 20563- \\
& 5907657466916923397350x^{26}y^{39} + 913830681542902989365122488x^{25}y^{39} + 3837457047542835678296779420x^{24}y^{39} + 152346703248748- \\
& 22145214802404x^{23}y^{39} + 57187390329086963006446508089x^{22}y^{39} + 202944274168863421656547538394x^{21}y^{39} + 68054578951617627633- \\
& 4395501333x^{20}y^{39} + 2154735596412783014630266834612x^{19}y^{39} + 643408628280057599315455629126x^{18}y^{39} + 18091354881393932459-
\end{aligned}$$

$050008531480x^{17}y^{30} + 47807770619985310850509157455668x^{16}y^{30} + 118444334383141863812790471414024x^{15}y^{30} + 27420942146500942995-$
 $6025383595136x^{14}y^{30} + 591640140452657002421737421096048x^{13}y^{30} + 1183331249775115180457385166710204x^{12}y^{30} + 218302921827136-$
 $1225145814062329344x^{11}y^{30} + 3090656768288327685603708003689402x^{10}y^{30} + 567269628347992774095374566256028x^9y^{30} + 78495-$
 $395185703248319197359965575672x^8y^{30} + 9658187508283945330001628320426596x^7y^{30} + 10400483339174365905760730109245885-$
 $x^6y^{30} + 10599174947881556065969703694065026x^5y^{30} + 7378921579364623928641512088479419x^4y^{30} + 453223971041241361267270702827-$
 $7812x^3y^{30} + 2083541276011935723979976778406992x^2y^{30} + 636622280161142163595487939734628xy^{30} + 9885942330287545280815730-$
 $0947x^0y^{30} + 356x^{16}y^{10} + 99984x^{15}y^{10} + 8190946x^{14}y^{10} + 373875284x^{13}y^{10} + 11703988406x^{12}y^{10} + 278034012210x^{11}y^{10} + 5318919454-$
 $715x^{10}y^{10} + 85182256796292x^9y^{10} + 1173387830107000x^8y^{10} + 14181597279949855x^7y^{10} + 152667405482331360x^6y^{10} + 1481180842-$
 $293260366x^5y^{10} + 13072470370551323888x^4y^{10} + 105754297866971771584x^3y^{10} + 788998875787118683673x^2y^{10} + 545634914047261-$
 $9163326x^1y^{10} + 35123133403105605582172x^0y^{10} + 211179820135132558869729x^29y^{10} + 11893704382151607755060822x^28y^{10} + 62892-$
 $24565649633583308555x^27y^{10} + 31282550894385360954099023x^26y^{10} + 146576088398555299620317413x^25y^{10} + 6476596102333783852-$
 $1712810x^24y^{10} + 2700637753022192522737884009x^23y^{10} + 1063132451299683008389951913x^22y^{10} + 3951216275422643104553860-$
 $6119x^21y^{10} + 13860273580903499616594675447x^20y^{10} + 458601553446625893695529282908x^19y^{10} + 142984502553257850535068063371-$
 $3x^18y^{10} + 419496818296808575468020484999x^17y^{10} + 11560158647570565841366396138061x^16y^{10} + 298532945983779599076767032102-$
 $16x^15y^{10} + 72039491968482588802245386155462x^14y^{10} + 161872522449962034887340481705679x^13y^{10} + 3372301257330121410584367-$
 $38848356x^12y^{10} + 64803079498095999761694792714225x^11y^{10} + 1141227396747742467092480146208414x^10y^{10} + 18274920171917886638-$
 $45718752911999x^9y^{10} + 2635157610040392496727803598691385x^8y^{10} + 3379745178620082169763135827564276x^7y^{10} + 379509950231739-$
 $3440638608804464601x^6y^{10} + 3653934849263482357572776793480056x^5y^{10} + 2931345768286832237831887145347398x^4y^{10} + 1879884400-$
 $06739611267267274304948x^3y^{10} + 902735786036612598754787475585189x^2y^{10} + 288249945441974487829266321883013xy^{10} + 45849-$
 $46425155938770140110835146y^{10} + 96x^{15}y^{11} + 46586x^{14}y^{11} + 4376688x^{13}y^{11} + 215798178x^{12}y^{11} + 7114813344x^{11}y^{11} + 17552-$
 $928539116y^{11} + 3456384443868x^{10}y^{11} + 56624256438996x^9y^{11} + 794254254154342x^8y^{11} + 97401627043055x^7y^{11} + 1060890480-$
 $591963814x^6y^{11} + 1038926159353110522x^5y^{11} + 9236674142198679780x^4y^{11} + 7513593796035013275x^3y^{11} + 562774848747996-$
 $530176x^2y^{11} + 390152385766081167374x^1y^{11} + 25142287257343735999870x^0y^{11} + 151138685346268023105511x^28y^{11} + 84996-$
 $195740705666410080x^27y^{11} + 4482197773711629009460308x^26y^{11} + 2205254543067514650386592x^25y^{11} + 1034930529242782198-$
 $9233403x^24y^{11} + 45425713715738968687782664x^23y^{11} + 1878921606769449011315616024x^22y^{11} + 7325805337835861165605843-$
 $500x^21y^{11} + 2692210492800323135032140734x^20y^{11} + 93213275048713071799005346396x^19y^{11} + 303811547310960982740123490233-$
 $x^18y^{11} + 931010407507849635397010535436x^17y^{11} + 2677945134171521833713649378882x^16y^{11} + 721445546144128582238298605996-$
 $4x^15y^{11} + 1815401339294129212895406481774x^14y^{11} + 42521179723685496147112552858306x^13y^{11} + 923382430243671351062776627917-$
 $19x^12y^{11} + 184921574478742695536277035540444x^11y^{11} + 339410113757438636699284104270293x^10y^{11} + 5665306233046256071406451-$
 $20088414x^9y^{11} + 851694295418154209950861081830998x^8y^{11} + 1139199085103938763129014605183016x^7y^{11} + 13345606826918282168-$
 $60415449110761x^6y^{11} + 1341099513934926758048980467219798x^5y^{11} + 11234570678285557486748042978858x^4y^{11} + 752704384636240-$
 $099172081245249616x^3y^{11} + 3778109129827068503029791419773326x^2y^{11} + 126157894742477030619510169815096xy^{11} + 209947469148791-$
 $7212091517955005y^{11} + 24x^{14}y^{12} + 21168x^{13}y^{12} + 2313194x^{12}y^{12} + 123759492x^{11}y^{12} + 4305796634x^{10}y^{12} + 110422426824x^9y^{12} + 22389-$
 $75455012x^8y^{12} + 37525841807357x^7y^{12} + 535946001681857x^6y^{12} + 6667585198391734x^5y^{12} + 7345760302514636x^4y^{12} + 72586-$
 $4771034796162x^3y^{12} + 6498110582280293574x^2y^{12} + 5312836672862639484x^1y^{12} + 399307863934042816338x^0y^{12} + 2773615973-$
 $0951601446657x^29y^{12} + 17882969359737081055749x^28y^{12} + 107409376777160394144414x^27y^{12} + 602725361561133685335570x^26y^{12} + 31672-$
 $093780623587822150x^25y^{12} + 156151218407929243284657084x^24y^{12} + 72325398231365544974020952x^23y^{12} + 31502188390531761268-$
 $7048x^22y^{12} + 1291033174562356236448066822x^21y^{12} + 4979132052178879156133882718x^20y^{12} + 180672664905451202111233-$
 $6401x^19y^{12} + 61642791303347031472915099875x^18y^{12} + 197645697438271105599851326035x^17y^{12} + 593736334573049985762940410986-$
 $x^16y^{12} + 167026494046614091213266610524x^15y^{12} + 43864986185530879981653117126x^14y^{12} + 107195761658863575430483629978-$
 $89x^13y^{12} + 2427747560006872919772712176415x^12y^{12} + 50703919659486675626036578556474x^11y^{12} + 970569000765044358007507-$

$$\begin{aligned}
& 8560917x^{11}y^{12} + 168949877909538627943990379327326x^9y^{12} + 264950436803548616161517076902325x^8y^{12} + 36978921327476806249. \\
& 9986099774966x^7y^{12} + 452199340830132286140337191316873x^6y^{12} + 474552556561518421403297484884172x^5y^{12} + 415364595516036. \\
& 865276168610473799x^4y^{12} + 290924278985711478689719516710248x^3y^{12} + 152739330648122891669245425057564x^2y^{12} + 5337606838. \\
& 013328429431296127086x^1y^{12} + 9300877313581423913319834468442y^{12} + 9338x^{12}y^{13} + 1207736x^{11}y^{13} + 70480862x^{10}y^{13} + 25033. \\
& 38964x^9y^{13} + 69201660924x^8y^{13} + 144545996304x^7y^{13} + 24787361415734x^6y^{13} + 360425556886116x^5y^{13} + 4547907233. \\
& 192082x^4y^{13} + 50665535857285264x^3y^{13} + 504981457548617212x^2y^{13} + 4550099543972734400x^1y^{13} + 37373026286488985406. \\
& x^0y^{13} + 28171031040146495404x^29y^{13} + 1959414779638369720506x^28y^{13} + 12631798986704949869512x^27y^{13} + 75752445913546355939. \\
& 896x^26y^{13} + 423834391870386002819340x^25y^{13} + 2217577396085277754172894x^24y^{13} + 10869989973627509006897852x^23y^{13} + 49983. \\
& 094826977175888965544x^22y^{13} + 215795393927945594949674672x^21y^{13} + 875147866022175013904854828x^20y^{13} + 33330024499269971810. \\
& 47241472x^19y^{13} + 11925673540186318407274033651x^18y^{13} + 40022553405484866869973444190x^17y^{13} + 1258477035311449494652348. \\
& 6084300y^13 + 37008769819014639150737587560x^15y^13 + 1015379349465806396689730114886x^14y^13 + 2591006532011601942987413. \\
& 983800x^13y^13 + 6125364963508002800331952524084x^12y^13 + 13350869073192255002728802589120x^11y^13 + 2666734073585096825441466. \\
& 6991811x^10y^13 + 48447898052428661130672704265010x^9y^13 + 79303401805732136048177155428189x^8y^13 + 1155615440063255475778251. \\
& 92354244x^7y^13 + 14759978889490675713676248233543y^13 + 161859665363597045405020248887670x^6y^13 + 14811992062050228791. \\
& 3776404644441x^5y^13 + 108528813252119917353177597126696x^4y^13 + 59642830120186441858509634809216x^3y^13 + 21830173178612782723. \\
& 402638062140x^2y^13 + 3986498385612836545052711869100y^13 + 3988x^11y^14 + 621637x^10y^14 + 39831484x^9y^14 + 1554020380x^8y^14 + 43194. \\
& 141200x^7y^14 + 929809822922x^6y^14 + 16315445460918x^5y^14 + 241507864582876x^4y^14 + 3090095214035980x^3y^14 + 3479859179. \\
& 8767097x^32y^14 + 349697641158318182x^31y^14 + 3169932533942782510x^30y^14 + 26143205837791945987x^29y^14 + 19752234696364268272. \\
& 2x^28y^14 + 1374835513399261147362x^27y^14 + 8855949237768846395136x^26y^14 + 52986764310891586780531x^25y^14 + 29534508480863992146. \\
& 7913x^24y^14 + 1537203883126527639840920x^23y^14 + 7484083929468144816552940x^22y^14 + 34126968902647151367133200x^21y^14 + 14586. \\
& 3586311986992718101801x^20y^14 + 584553577830738332881651124x^19y^14 + 2196184824578792502500516310x^18y^14 + 773063458043377. \\
& 9624359372712x^17y^14 + 25467251980603257817206066707x^16y^14 + 78388930304417976697402807216x^15y^14 + 22493516421390092685. \\
& 0584493753x^14y^14 + 599951294054047336135924745948x^13y^14 + 1481860479250110447365223359509x^12y^14 + 33735620665705627536. \\
& 59990499752x^11y^14 + 70372985582432371481112680537x^10y^14 + 13351857559582145186703500027777x^9y^14 + 22827659220354009671. \\
& 640792007682x^8y^14 + 34753535278328196087313332229918x^7y^14 + 46392822684536480428545261705001x^6y^14 + 531974078737231. \\
& 34226958300033377x^5y^14 + 50932583664387099634877564771342x^4y^14 + 39068588643619449270663148221866x^3y^14 + 224919262677129. \\
& 368601188801467612x^2y^14 + 8629795862920776663833590070870x^1y^14 + 1653085340579328051093733420141y^14 + 159x^10y^15 + 31456. \\
& 4x^9y^15 + 22329516x^8y^15 + 926234204x^7y^15 + 26846157418x^6y^15 + 595819039656x^5y^15 + 10698736005762x^4y^15 + 161195784732276. \\
& x^3y^15 + 2090847079417167x^2y^15 + 23792612550126056x^1y^15 + 240962667445779304x^0y^15 + 2196338215888433038x^29y^15 + 18177. \\
& 493277945706677x^28y^15 + 137573086040987271144x^27y^15 + 957594976053456349346x^26y^15 + 615866661809103576398x^25y^15 + 36733. \\
& 616528123806478554x^24y^15 + 203796992217054208975464x^23y^15 + 1054112831878697398772812x^22y^15 + 5091833265458993031518988. \\
& x^21y^15 + 22996769283130775689299879x^20y^15 + 97174180458700865199219840x^19y^15 + 384233719336303611647737706x^18y^15 + 14211. \\
& 87671609289883104636936x^17y^15 + 4912954192626292196611616321x^16y^15 + 15850767698952147350027846308x^15y^15 + 4763069945. \\
& 6513942889031251349x^14y^15 + 132941772776235332790484894138x^13y^15 + 34342282859418277582120905963x^12y^15 + 8173717022. \\
& 58288697852266354580x^11y^15 + 178216582795585321965124754245x^10y^15 + 3534074919633261994899438464316x^9y^15 + 6315716985. \\
& 67564353083792455611x^8y^15 + 10052834916885204185432448369224x^7y^15 + 14035487911871651812986353009043x^6y^15 + 1684089515. \\
& 2079947720259427477884x^5y^15 + 168819769155483553210459727147x^4y^15 + 13567412128040972039465949640028x^3y^15 + 8189326443. \\
& 56866372367688599792x^2y^15 + 3296810824853097727336439847100x^1y^15 + 663103322941389902449736986873y^15 + 584x^39y^16 + 15647. \\
& 4x^38y^16 + 12411092x^37y^16 + 548947338x^36y^16 + 16610463076x^35y^16 + 380249536574x^34y^16 + 6987539418220x^33y^16 + 107143371813372. \\
& x^32y^16 + 1408416022795296x^31y^16 + 16188476421704160x^30y^16 + 165150841045990135x^29y^16 + 1512806739279372401x^28y^16 + 12556. \\
& 765927112478241x^27y^16 + 9513180994637246020x^26y^16 + 661707287045619910215x^25y^16 + 4245591581201233460679x^24y^16 + 25221.
\end{aligned}$$

$589592981161112046x^{23}y^{16} + 139139880555133471578000x^{22}y^{16} + 714425483095988646546606x^{21}y^{16} + 3419787145734600284782698x^{20}y^{16} + 15277016371097501190572504x^{19}y^{16} + 63723091380335403449456870x^{18}y^{16} + 248175778166227386787891188x^{17}y^{16} + 901925345578272535074952350x^{16}y^{16} + 3055064705001177895441016076x^{15}y^{16} + 962708086722666416524056017x^{14}y^{16} + 28156327190674259441881644836x^{13}y^{16} + 76159695972176271626429199451x^{12}y^{16} + 189707121913939294615221846322x^{11}y^{16} + 4327567236826901500854408434535x^{10}y^{16} + 897726005391188811830699198509x^9y^{16} + 1678320609080209819500689218870x^8y^{16} + 2795209073043634868290915866204x^7y^{16} + 4084843073014526540746114389327x^6y^{16} + 5132711813106678592233656877933x^5y^{16} + 53914252778341907151576134944118x^4y^{16} + 4543423070198514089147538009242x^3y^{16} + 2877909407645268829427948914244x^2y^{16} + 1216797944229314781152475103666x^1y^{16} + 257253050059654653154961345608y^{16} + 190x^{38}y^{17} + 76364x^{37}y^{17} + 6836102x^{36}y^{17} + 323388996x^{35}y^{17} + 10228822618x^{34}y^{17} + 241631291068x^{33}y^{17} + 4544289855128x^{32}y^{17} + 70899712817360x^{31}y^{17} + 944101964909284x^{30}y^{17} + 10057146616546132x^{29}y^{17} + 1125409223033208848x^{28}y^{17} + 1035395269214723556x^{27}y^{17} + 8613322006562797300x^{26}y^{17} + 65275207848446849760x^{25}y^{17} + 4533464370775350190x^{24}y^{17} + 2899250771464277111776x^{23}y^{17} + 17137780644740454539190x^{22}y^{17} + 93910022255705095098664x^{21}y^{17} + 478095736508780326936908x^{20}y^{17} + 2264816976843107597742252x^{19}y^{17} + 99922367626744732201289286x^{18}y^{17} + 4107367547634490015724724x^{17}y^{17} + 157254203747681431005007894x^{16}y^{17} + 560272623722613638657687216x^{15}y^{17} + 185473297416238203285559841x^{14}y^{17} + 5691863654856672326617424826x^{13}y^{17} + 16142033403856852823927400913x^{12}y^{17} + 42130768692407357061051357376x^{11}y^{17} + 100660410958667360809163284929x^{10}y^{17} + 218654992827774799467153007194x^9y^{17} + 428033147903405782057052295025x^8y^{17} + 74655880437774920918629364592x^7y^{17} + 1142903146153116493003171733759x^6y^{17} + 1505144026737852896672315489454x^5y^{17} + 1658073413502415914311254830873x^4y^{17} + 146648473457705814935025515840x^3y^{17} + 975730690909265570627144917714x^2y^{17} + 43372854869249095569560636916x^1y^{17} + 96496030932750383577660812482y^{17} + 52x^{37}y^{18} + 36499x^{36}y^{18} + 3727540x^{35}y^{18} + 189321568x^{34}y^{18} + 8267456456x^{33}y^{18} + 152850286858x^{32}y^{18} + 2942020498048x^{31}y^{18} + 46694402052284x^{30}y^{18} + 629746154824046x^{29}y^{18} + 7374828624768801x^{28}y^{18} + 76217094729707936x^{27}y^{18} + 703813416915586238x^{26}y^{18} + 5863774230036375645x^{25}y^{18} + 44415805327053978487x^{24}y^{18} + 307737280404365918714x^{23}y^{18} + 1950745890020411891582x^{22}y^{18} + 11514380788887855147432x^{21}y^{18} + 62598419341698228645509x^{20}y^{18} + 31556735131426044303307x^{19}y^{18} + 1477217230451594757488621x^{18}y^{18} + 6426125693607311168273395x^{17}y^{18} + 25980830542014826353220543x^{16}y^{18} + 97569726207445075015404132x^{15}y^{18} + 3399317536489905688056236320x^{14}y^{18} + 1096498158918521898573185376x^{13}y^{18} + 3265225238112871382482640416x^{12}y^{18} + 8941647985401529921514404278x^{11}y^{18} + 22402705437744274637756423138x^{10}y^{18} + 5101287586725974247482267938x^9y^{18} + 104670319375497945165146131723x^8y^{18} + 191368512298144309819111384957x^7y^{18} + 307186933102915172506657452675x^6y^{18} + 424383572288309369407647410844x^5y^{18} + 490738609140876489544330924338x^4y^{18} + 455965668515488119979835449167x^3y^{18} + 318995826679141053579116157324x^2y^{18} + 1492450850226755824527572952776x^1y^{18} + 34983973921091254244544879626y^{18} + 9x^{36}y^{19} + 16992x^{35}y^{19} + 2011916x^{34}y^{19} + 110080096x^{33}y^{19} + 3820116386x^{32}y^{19} + 98228011720x^{31}y^{19} + 1895609782944x^{30}y^{19} + 30598018261548x^{29}y^{19} + 417728181189669x^{28}y^{19} + 4933912744720160x^{27}y^{19} + 51275199535496798x^{26}y^{19} + 474911044730596846x^{25}y^{19} + 3959531594987260890x^{24}y^{19} + 29950811118035196348x^{23}y^{19} + 206821481564316780364x^{22}y^{19} + 1310148737321898504708x^{21}y^{19} + 7642326147052718146255x^{20}y^{19} + 41166911536998293318184x^{19}y^{19} + 205196001458788465774274x^{18}y^{19} + 947631134506900239469540x^{17}y^{19} + 4056937932484723265459708x^{16}y^{19} + 16098071074130085241160068x^{15}y^{19} + 59152358633411398241909496x^{14}y^{19} + 200934045906421156727603272x^{13}y^{19} + 829350056946730293440030552x^{12}y^{19} + 1810983973783546208454994976x^{11}y^{19} + 4764418468923257003069224456x^{10}y^{19} + 11386804123470909321360180152x^9y^{19} + 2451664654372695562755734727x^8y^{19} + 470355293929202996100793372x^7y^{19} + 79245903506490737466024290810x^6y^{19} + 114959314480013250972264981822x^5y^{19} + 139677868681094906097958047808x^4y^{19} + 136476816273479688341960310768x^3y^{19} + 1005036977547595567684645964932x^{19} + 49548978652632702013312375208x^{18}y^{19} + 12253086737451696337392180060y^{19} + 7728x^{34}y^{20} + 1072200x^{33}y^{20} + 63552508x^{32}y^{20} + 2315593016x^{31}y^{20} + 60277813458x^{30}y^{20} + 1215217776036x^{29}y^{20} + 10942994406282x^{28}y^{20} + 275475028734708x^{27}y^{20} + 327972071232518x^{26}y^{20} + 34250059092667971x^{25}y^{20} + 317926978303171775x^{24}y^{20} + 2650303682381740660x^{23}y^{20} + 20000989529297317644x^{22}y^{20} + 137507820829183740346x^{21}y^{20} + 865473771011091574038x^{20}y^{20} + 5005680039872897263628x^{19}y^{20} + 26678365874627273029930x^{18}y^{20} + 131269944179709146986884x^{17}y^{20} + 596967265911493375675966x^{16}y^{20} + 2598915316406650740868926x^{15}y^{20} + 9750350153$

$$\begin{aligned}
& 87908928336034x^{14}y^{50} + 34954455519750409688187102x^{13}y^{50} + 115373149674251705243684192x^{12}y^{50} + 3494494811894388085942391. \\
& 22x^{11}y^{50} + 966839471309753077803938866x^{10}y^{50} + 242860263559304135316002884x^9y^{50} + 549383629777594131544406584x^8y^{50} + 11072. \\
& 936612179891911771280404x^7y^{50} + 19602276357347733891437423340x^6y^{50} + 29891274811421932211975816297x^5y^{50} + 382012004958534. \\
& 95386581929435x^4y^{50} + 3929418788024669604945571378x^3y^{50} + 3049447037780864904967754215x^2y^{50} + 1586186185107807258. \\
& 937236865x^1y^{50} + 4143893990392761757339981256y^{50} + 3344x^{33}y^{51} + 564022x^{32}y^{51} + 36412460x^{31}y^{51} + 1395613946x^{30}y^{51} + 37559. \\
& 364640x^{29}y^{51} + 774883839158x^{28}y^{51} + 12924287539368x^{27}y^{51} + 180533483823930x^{26}y^{51} + 2165104563589784x^{25}y^{51} + 2270300403. \\
& 3669086x^{24}y^{51} + 211027652064260228x^{23}y^{51} + 1757250114469757016x^{22}y^{51} + 13216833734730070844x^{21}y^{51} + 90363236430913437464. \\
& x^{20}y^{51} + 564370806564412462692x^{19}y^{51} + 3231899153418258368118x^{18}y^{51} + 17014902236731511516508x^{17}y^{51} + 82495218057746001483. \\
& 134x^{16}y^{51} + 36865566508856579673676x^{15}y^{51} + 1518424966325788558911764x^{14}y^{51} + 5758966637075986692216308x^{13}y^{51} + 2007492055. \\
& 784334720317958x^{12}y^{51} + 64125100120385769818257544x^{11}y^{51} + 18690433006028471327633796x^{10}y^{51} + 4941989928831570574473595. \\
& 36x^9y^{51} + 1176219614925317463909717684x^8y^{51} + 249376060122195557950030268x^7y^{51} + 464421749940134144369179940x^6y^{51} + 74528. \\
& 077722372243011736660x^5y^{51} + 10029838056372688435603505276x^4y^{51} + 10873463169136877004139620492x^3y^{51} + 890350772999144. \\
& 0936620275733x^2y^{51} + 4892731593746141788506963638x^1y^{51} + 1352358799038934015428637035y^{51} + 1372x^{32}y^{52} + 292192x^{31}y^{52} + 20703. \\
& 824x^{30}y^{52} + 836074568x^{29}y^{52} + 23274288771x^{28}y^{52} + 491313777500x^{27}y^{52} + 8325024347608x^{26}y^{52} + 117525901124466x^{25}y^{52} + 14187. \\
& 41053641277x^{24}y^{52} + 14925283491726522x^{23}y^{52} + 138790896311498010x^{22}y^{52} + 1153287925971561717x^{21}y^{52} + 863503573640255. \\
& 1196x^{20}y^{52} + 58636119964883988950x^{19}y^{52} + 362885347298139611352x^{18}y^{52} + 2054264327618759665285x^{17}y^{52} + 10664029231054028958. \\
& 304x^{16}y^{52} + 50841580063206506906822x^{15}y^{52} + 22273283350858309429560x^{14}y^{52} + 896248127942607146491996x^{13}y^{52} + 3307603115. \\
& 000462687027459x^{12}y^{52} + 11167118594103931272164129x^{11}y^{52} + 34355639726414611978038915x^{10}y^{52} + 9578886693200103213664237. \\
& 7x^9y^{52} + 24024145865029787838086633258x^8y^{52} + 536552716697048718443803334x^7y^{52} + 105258651397639096403245711x^6y^{52} + 1779K. \\
& 2967104700488511145386x^5y^{52} + 2525370915426234457859301797x^4y^{52} + 2889079991894401782652603271x^3y^{52} + 249929868585434. \\
& 3346760324027x^2y^{52} + 1453043520181406358511183333x^1y^{52} + 425589476844131844439493068y^{52} + 512x^{31}y^{53} + 149296x^{30}y^{53} + 11673. \\
& 400x^{29}y^{53} + 497762305x^{28}y^{53} + 14338159456x^{27}y^{53} + 309660010440x^{26}y^{53} + 5327906031424x^{25}y^{53} + 75964281403457x^{24}y^{53} + 9223032976. \\
& 59720x^{23}y^{53} + 9725354465026508x^{22}y^{53} + 90381039719477546x^{21}y^{53} + 748557948929697869x^{20}y^{53} + 5572501677183275892x^{19}y^{53} + 37529. \\
& 892451986622490x^{18}y^{53} + 229788713246828847830x^{17}y^{53} + 1283618210506825251141x^{16}y^{53} + 6557093367309185410892x^{15}y^{53} + 30668. \\
& 243167433528995166x^{14}y^{53} + 131352095354384669456624x^{13}y^{53} + 514692294354677812630217x^{12}y^{53} + 1841186352134753895888780. \\
& x^{11}y^{53} + 5992090300482567416180042x^{10}y^{53} + 17651475749617372340855912x^9y^{53} + 4673287546890452982611723x^8y^{53} + 1101221523. \\
& 29167523923653940x^7y^{53} + 227898499751798132349075557x^6y^{53} + 406602902938816166990790826x^5y^{53} + 6090672652536360450983992. \\
& 17x^4y^{53} + 736269525051695881745242524x^3y^{53} + 673849101505832087292493620x^2y^{53} + 415092827878732095894775408x^1y^{53} + 1290510081. \\
& 48358531646461361y^{53} + 176x^{30}y^{54} + 74904x^{29}y^{54} + 6527396x^{28}y^{54} + 294364712x^{27}y^{54} + 8779329354x^{26}y^{54} + 193936720492x^{25}y^{54} + 33864. \\
& 14081368x^{24}y^{54} + 48726740878124x^{23}y^{54} + 59447434747558x^{22}y^{54} + 6276697110471439x^{21}y^{54} + 582293280018413039x^{20}y^{54} + 48008. \\
& 7944896938322x^{19}y^{54} + 3548366596932449992x^{18}y^{54} + 23664755255395526165x^{17}y^{54} + 143098339341548927827x^{16}y^{54} + 7872084104. \\
& 24469582686x^{15}y^{54} + 3947946484204712980962x^{14}y^{54} + 18065834163892321252644x^{13}y^{54} + 75406353076908624711208x^{12}y^{54} + 28663. \\
& 6087019113610074248x^{11}y^{54} + 989297754088284058855198x^{10}y^{54} + 308588810590129162507668x^9y^{54} + 8641496471058695272616450. \\
& x^8y^{54} + 2152288088219014627929264x^7y^{54} + 47064342520659609533038921x^6y^{54} + 88732628001357553064233876x^5y^{54} + 1405243583. \\
& 0924412977450353x^4y^{54} + 179754929218857824028220940x^3y^{54} + 17430765625977853198495206x^2y^{54} + 113950191774040882836903. \\
& 32x^1y^{54} + 37671913496567196632451620y^{54} + 18x^{29}y^{55} + 37032x^{28}y^{55} + 3613816x^{27}y^{55} + 172895866x^{26}y^{55} + 534104308x^{25}y^{55} + 12065. \\
& 0696380x^{24}y^{55} + 213608449384x^{23}y^{55} + 31000556830698x^{22}y^{55} + 379661870660404x^{21}y^{55} + 4009300052318450x^{20}y^{55} + 3708259670. \\
& 3614352x^{19}y^{55} + 30392994220684246x^{18}y^{55} + 2226831586324034704x^{17}y^{55} + 1468079809565972796x^{16}y^{55} + 87497843231775359352. \\
& x^{15}y^{55} + 472942850476229305984x^{14}y^{55} + 2322431531399510551812x^{13}y^{55} + 1036526006916538128266x^{12}y^{55} + 420056306914716. \\
& 95191576x^{11}y^{55} + 154194787136571022020460x^{10}y^{55} + 510589832258488055450920x^9y^{55} + 1515722990981988338807338x^8y^{55} + 39981. \\
& 41220114670065538956x^7y^{55} + 9254614763397808831721517x^6y^{55} + 18468605402341833474975726x^5y^{55} + 30971255765372138277147.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1x^1y^{55} + 41987072207089353557727236x^2y^{55} + 43206476508572841360883842x^3y^{55} + 30026387884437987945699008x^4y^{55} + 1057619524- \\
& 2717873050135172y^{55} + 12x^{28}y^{56} + 17820x^{27}y^{56} + 1981864x^{26}y^{56} + 100805388x^{25}y^{56} + 3227501435x^{24}y^{56} + 74529341256x^{23}y^{56} + 13376- \\
& 58113576x^{22}y^{56} + 19550196770728x^{21}y^{56} + 240078072275695x^{20}y^{56} + 2532499586253988x^{19}y^{56} + 2332037237721394x^{18}y^{56} + 18970- \\
& 8722522608417x^{17}y^{56} + 1375468984189034939x^{16}y^{56} + 8046227823542607204x^{15}y^{56} + 52435690671130420608x^{14}y^{56} + 277751553319285- \\
& 218704x^{13}y^{56} + 1331392168838213058019x^{12}y^{56} + 5774275025120465477610x^{11}y^{56} + 22618614289457996195120x^{10}y^{56} + 7973981055- \\
& 3664188222123x^9y^{56} + 251574803503169084628243x^8y^{56} + 704387614054808870542401x^7y^{56} + 1729415115695071688372365x^6y^{56} + 36598- \\
& 28807799124348224548x^5y^{56} + 6510157197535518914772012x^4y^{56} + 936919651869796120036463x^3y^{56} + 1024876798603226782208075- \\
& 0x^2y^{56} + 758527471379175747730173x^1y^{56} + 2852454137441972448231252y^{56} + 84042x^0y^{57} + 1074456x^{25}y^{57} + 58328961x^{24}y^{57} + 19366- \\
& 48732x^{23}y^{57} + 45695633576x^{22}y^{57} + 830448720472x^{21}y^{57} + 12212999474753x^{20}y^{57} + 150192971688152x^{19}y^{57} + 158039329679211- \\
& 0x^{18}y^{57} + 14466331930711566x^{17}y^{57} + 116601334552984294x^{16}y^{57} + 834957326000111632x^{15}y^{57} + 5345772251187599820x^{14}y^{57} + 30733- \\
& 297376603683232x^{13}y^{57} + 15905181368270950925x^{12}y^{57} + 741537695803378449780x^{11}y^{57} + 3111559570784821385668x^{10}y^{57} + 1171769014- \\
& 5803307415242x^9y^{57} + 39404180199721360948156x^8y^{57} + 117410104076215654350208x^7y^{57} + 306457370205358925156012x^6y^{57} + 68914- \\
& 6672317060604260846x^5y^{57} + 1302793241613713303210386x^4y^{57} + 1994032433049628629808468x^3y^{57} + 2322915605000810548900791- \\
& x^2y^{57} + 1834525405536011051248378x^1y^{57} + 738168160562168949943529y^{57} + 3808x^{25}y^{58} + 575530x^{24}y^{58} + 33489192x^{23}y^{58} + 1153592814- \\
& x^{22}y^{58} + 27794394848x^{21}y^{58} + 5109966223578x^{20}y^{58} + 7551859750908x^{19}y^{58} + 92875772883944x^{18}y^{58} + 973319407592045x^{17}y^{58} + 88409- \\
& 61526994065x^{16}y^{58} + 70467154993869380x^{15}y^{58} + 497253808392699188x^{14}y^{58} + 3125834851831881122x^{13}y^{58} + 17574176843574332148- \\
& x^{12}y^{58} + 88543775022878162090x^{11}y^{58} + 399788742250900486082x^{10}y^{58} + 1614461719970366146039x^9y^{58} + 58061882819673284678- \\
& 81x^8y^{58} + 18464750001715971820856x^7y^{58} + 51309646405893800583248x^6y^{58} + 123035988699653886335123x^5y^{58} + 24771221074760170592- \\
& 4069x^4y^{58} + 404033716293216846473310x^3y^{58} + 502241072891874775230011x^2y^{58} + 424131243398217729916278x^1y^{58} + 183042705871037- \\
& 548774351y^{58} + 1638x^{24}y^{59} + 304504x^{23}y^{59} + 19076346x^{22}y^{59} + 681839228x^{21}y^{59} + 167612051814x^{20}y^{59} + 311350987400x^{19}y^{59} + 46183- \\
& 60848128x^{18}y^{59} + 56711617809504x^{17}y^{59} + 59088473843146x^{16}y^{59} + 531549887959700x^{15}y^{59} + 41803194524826332x^{14}y^{59} + 28994- \\
& 910146170192x^{13}y^{59} + 1784283298446115118x^{12}y^{59} + 9775908981463563220x^{11}y^{59} + 47748295727338386920x^{10}y^{59} + 2077063322- \\
& 40296546194x^9y^{59} + 801977473167140572056x^8y^{59} + 2731268184804711294924x^7y^{59} + 8122783261660337760076x^6y^{59} + 2077536234- \\
& 6019357860112x^5y^{59} + 4465204107878275824800x^4y^{59} + 77782440981785417213388x^3y^{59} + 103396762259439069394545x^2y^{59} + 93577- \\
& 064618130051403286x^1y^{59} + 43427024762973708166867y^{59} + 660x^{23}y^{60} + 159204x^{22}y^{60} + 10776304x^{21}y^{60} + 399744337x^{20}y^{60} + 10018- \\
& 056969x^{19}y^{60} + 187757495494x^{18}y^{60} + 27900703960568x^{17}y^{60} + 34156099816894x^{16}y^{60} + 353114780173066x^{15}y^{60} + 31398873811999- \\
& 0x^{14}y^{60} + 24295359648265717x^{13}y^{60} + 165150172398341786x^{12}y^{60} + 991437628593356352x^{11}y^{60} + 5271517945690212526x^{10}y^{60} + 24833- \\
& 32200741104803x^9y^{60} + 163410907835070688619x^8y^{60} + 378625656729937795518x^7y^{60} + 1207803443995005325466x^6y^{60} + 3308629766- \\
& 597908620371x^5y^{60} + 76115432439520929361326x^4y^{60} + 14195306296702590494968x^3y^{60} + 20226777966457775154812x^2y^{60} + 19666- \\
& 150416648056728783x^1y^{60} + 9841425014116113986133y^{60} + 244x^{22}y^{61} + 82168x^{21}y^{61} + 6036083x^{20}y^{61} + 232298028x^{19}y^{61} + 59290- \\
& 26418x^{18}y^{61} + 111954298488x^{17}y^{61} + 1664461322726x^{16}y^{61} + 20264064285948x^{15}y^{61} + 207406964745368x^{14}y^{61} + 181723298642531- \\
& 0x^{13}y^{61} + 13801947567467395x^{12}y^{61} + 91630368590588048x^{11}y^{61} + 534426130601566846x^{10}y^{61} + 2743791040288858846x^9y^{61} + 12388- \\
& 661464035792780x^8y^{61} + 48987458672350338760x^7y^{61} + 168273468052189014576x^6y^{61} + 495397487685237113710x^5y^{61} + 1223541215- \\
& 249551082405x^4y^{61} + 2496980591421426319481x^3y^{61} + 3751266918689957501008x^2y^{61} + 3928684231847119068198x^1y^{61} + 2126408637- \\
& 579074758122y^{61} + 80x^{21}y^{62} + 41806x^{20}y^{62} + 3148536x^{19}y^{62} + 133756794x^{18}y^{62} + 3472202752x^{17}y^{62} + 65943642660x^{16}y^{62} + 9786694461- \\
& 52x^{15}y^{62} + 11825435352494x^{14}y^{62} + 119514064201201x^{13}y^{62} + 1029082333284807x^{12}y^{62} + 7643221093435962x^{11}y^{62} + 493579551181121- \\
& 16x^{10}y^{62} + 278289481566495397x^9y^{62} + 1371189626749401119x^8y^{62} + 588712657327226878x^7y^{62} + 21875648104300082956x^6y^{62} + 69485- \\
& 230427696477979x^5y^{62} + 184881057633014343063x^4y^{62} + 398602112059154758722x^3y^{62} + 65788283616895353415x^2y^{62} + 7442956359- \\
& 9759872115x^1y^{62} + 437156531380779222971y^{62} + 22x^{20}y^{63} + 20972x^{19}y^{63} + 1839642x^{18}y^{63} + 76253840x^{17}y^{63} + 2010501256x^{16}y^{63} + 38326- \\
& 649906x^{15}y^{63} + 5666545076442x^{14}y^{63} + 6775747262824x^{13}y^{63} + 67420347319032x^{12}y^{63} + 568522495596172x^{11}y^{63} + 411267628606362- \\
& 6x^{10}y^{63} + 257070165610300544x^9y^{63} + 139281699182466512x^8y^{63} + 653462181933044252x^7y^{63} + 2640830438452716458x^6y^{63} + 90919-
\end{aligned}$$

03937765464324x³y⁶³ + 26164504048906443870x⁴y⁶³ + 6095872973305398576x⁵y⁶³ + 10878975683341708936x⁶y⁶³ + 133378775467077-
 361624x⁷y⁶³ + 85317168719056024102y⁶³ + 4x¹⁰y⁶⁴ + 10316x¹⁸y⁶⁴ + 999008x¹⁷y⁶⁴ + 43012767x¹⁶y⁶⁴ + 1149841628x¹⁵y⁶⁴ + 21956-
 707514x¹¹y⁶⁴ + 32233234956x¹³y⁶⁴ + 3804340507765x¹²y⁶⁴ + 37135607760824x¹¹y⁶⁴ + 30544916872827x¹⁰y⁶⁴ + 214158812504231-
 2x⁹y⁶⁴ + 12880723737556221x⁸y⁶⁴ + 66548494857397708x⁷y⁶⁴ + 294377012308330114x⁶y⁶⁴ + 1104440449749520839x⁵y⁶⁴ + 3453517939-
 386616300x¹y⁶⁴ + 8729802948779462577x³y⁶⁴ + 16907638603923926857x²y⁶⁴ + 22542536630043450787x¹y⁶⁴ + 15766447528401642061-
 y⁶⁴ + 4960x¹⁷y⁶⁵ + 537041x¹⁶y⁶⁵ + 23984776x¹⁵y⁶⁵ + 649182454x¹⁴y⁶⁵ + 12377074380x¹³y⁶⁵ + 179900858919x¹²y⁶⁵ + 2087614619-
 168x¹¹y⁶⁵ + 19911625842632x¹⁰y⁶⁵ + 158963242406892x⁹y⁶⁵ + 1073981587356931x⁸y⁶⁵ + 6168457492652984x⁷y⁶⁵ + 300987218668877-
 66x⁶y⁶⁵ + 123850520379678146x⁵y⁶⁵ + 423092096524477691x⁴y⁶⁵ + 1165778898643224680x³y⁶⁵ + 2460513400110386616x²y⁶⁵ + 35814-
 62537375589108xy⁶⁵ + 2750927547052088922y⁶⁵ + 2296x¹⁶y⁶⁶ + 284720x¹⁵y⁶⁶ + 13229174x¹⁴y⁶⁶ + 361176756x¹³y⁶⁶ + 68548-
 76574x¹²y⁶⁶ + 98252723892x¹¹y⁶⁶ + 1116415796208x¹⁰y⁶⁶ + 10351780115608x⁹y⁶⁶ + 79760666251366x⁸y⁶⁶ + 515334717825896-
 x⁷y⁶⁶ + 2800195071770960x⁶y⁶⁶ + 1273538601207507x⁵y⁶⁶ + 47837619711810877x⁴y⁶⁶ + 144482346705510216x³y⁶⁶ + 333868113372166-
 516x²y⁶⁶ + 532879997141129274xy⁶⁶ + 4517090059598792742y⁶⁶ + 1008x¹⁵y⁶⁷ + 149550x¹⁴y⁶⁷ + 7203608x¹³y⁶⁷ + 197846186x¹²y⁶⁷ + 37198-
 1022x¹¹y⁶⁷ + 52364356284x¹⁰y⁶⁷ + 579495161716x⁹y⁶⁷ + 5195056326434x⁸y⁶⁷ + 38334897188080x⁷y⁶⁷ + 234733182880332x⁶y⁶⁷ + 11912-
 25940735988x⁵y⁶⁷ + 4958626842347582x⁴y⁶⁷ + 16517583945255244x³y⁶⁷ + 42034221137731306x²y⁶⁷ + 73933764139162356xy⁶⁷ + 69544-
 739752337628y⁶⁷ + 420x¹¹y⁶⁸ + 77628x¹³y⁶⁸ + 3875267x¹²y⁶⁸ + 106381740x¹¹y⁶⁸ + 1973494266x¹⁰y⁶⁸ + 27118940372x⁹y⁶⁸ + 29077-
 3026113x⁸y⁶⁸ + 25000999687702x⁷y⁶⁸ + 17515431985066x⁶y⁶⁸ + 100366157355269x⁵y⁶⁸ + 467402113396125x⁴y⁶⁸ + 173088394301479-
 2x³y⁶⁸ + 4882335915397642x²y⁶⁸ + 9517971755355033xy⁶⁸ + 9996608492063882y⁶⁸ + 160x¹³y⁶⁹ + 40057x¹²y⁶⁹ + 2051844x¹¹y⁶⁹ + 56077-
 122x¹⁰y⁶⁹ + 1018714784x⁹y⁶⁹ + 136001879992x⁸y⁶⁹ + 140062232508x⁷y⁶⁹ + 1145488865900x⁶y⁶⁹ + 7524863674374x⁵y⁶⁹ + 3967588937-
 3948x⁴y⁶⁹ + 164897956315764x³y⁶⁹ + 519659632955366x²y⁶⁹ + 1130367771806770xy⁶⁹ + 1335039769162871y⁶⁹ + 56x¹²y⁷⁰ + 26433-
 x¹¹y⁷⁰ + 1070284x¹⁰y⁷⁰ + 28803744x⁹y⁷⁰ + 510417396x⁸y⁷⁰ + 6554484800x⁷y⁷⁰ + 643311753948x⁶y⁷⁰ + 494291776753x⁵y⁷⁰ + 22961-
 91961099x⁴y⁷⁰ + 14142329990250x³y⁷⁰ + 50277168772650x²y⁷⁰ + 122999406396147xy⁷⁰ + 164703852042069y⁷⁰ + 16x¹³y⁷¹ + 10396-
 x¹⁰y⁷¹ + 544988x⁹y⁷¹ + 14412848x⁸y⁷¹ + 246012856x⁷y⁷¹ + 3017014772x⁶y⁷¹ + 27872267756x⁵y⁷¹ + 108188939608x⁴y⁷¹ + 1078555722-
 876x³y⁷¹ + 4378421893488x²y⁷¹ + 1216320416838xy⁷¹ + 18844388877860y⁷¹ + 4x¹⁰y⁷² + 5176x⁹y⁷² + 272232x⁸y⁷² + 6944068x⁷y⁷² + 11344-
 7914x⁶y⁷² + 1311914720x⁵y⁷² + 11251091981x⁴y⁷² + 72035902454x³y⁷² + 339050652704x²y⁷² + 1082293144717xy⁷² + 1920957608-
 245y⁷² + 2580x⁸y⁷³ + 131040x⁷y⁷³ + 3207170x⁶y⁷³ + 49489836x⁵y⁷³ + 533049483x⁴y⁷³ + 4127070008x³y⁷³ + 22988507602x²y⁷³ + 85596-
 371538xy⁷³ + 178379085732y⁷³ + 1240x⁷y⁷⁴ + 60598x⁶y⁷⁴ + 1402580x⁵y⁷⁴ + 20237064x⁴y⁷⁴ + 197241248x³y⁷⁴ + 1336866870x²y⁷⁴ + 59234-
 149y⁷⁴ + 14747380625y⁷⁴ + 574x⁶y⁷⁵ + 26564x⁵y⁷⁵ + 577264x⁴y⁷⁵ + 7549944x³y⁷⁵ + 64859536x²y⁷⁵ + 351397096xy⁷⁵ + 10688-
 90718y⁷⁵ + 252x⁶y⁷⁶ + 10999xy⁷⁶ + 217016x⁵y⁷⁶ + 2520552x⁴y⁷⁶ + 17375212xy⁷⁶ + 66544252y⁷⁶ + 105x⁴y⁷⁷ + 4161x³y⁷⁷ + 73572-
 x²y⁷⁷ + 687492y⁷⁷ + 3460396y⁷⁷ + 40x³y⁷⁸ + 1434x²y⁷⁸ + 20408xy⁷⁸ + 144332y⁷⁸ + 14x²y⁷⁹ + 404xy⁷⁹ + 4528y⁷⁹ + 4xy⁸⁰ + 95y⁸⁰ + y⁸¹.

Bibliografía

- [SIT95] K. Sekine, H. Imai, S. Tani: Computing the Tutte Polynomial of a Graph and the Jones Polynomial of an Alternating Link of Moderate Size. Department of Information Science, Faculty of Science University of Tokyo, July 5 1995.
- [MW98] C. Merino, D.J.A. Welsh: Forest, Colorings and Acyclic Orientations of the Square Lattice. Mathematical Institute, Oxford University, December 11, 1998.
- [CLRS01] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein: Introduction to Algorithms, Second Edition, MIT Press, McGraw-Hill 2001.
- [Nauty] Nauty by B. D. McKay. Disponible en <http://cs.anu.edu.au/~bdm/nauty>.
- [Mc81] B. D. McKay: Practical Graph isomorphism, *Congressus Numerationum* **30** (1981). Disponible en <http://cs.anu.edu.au/~bdm/nauty/PGL/>.
- [BR00] R. Balakrishnan, K. Ranganathan: A Textbook of Graph Theory. New York, Springer-Verlag 2000. pp 13,14.
- [Bb92] B. Bollobás: Modern Graph Theory. New York, Springer-Verlag 1998.
- [Ox92] J. G. Oxley: Matroid Theory. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [VI77] L.G. Valiant: The Complexity of Computing the Permanent. Computer Science Department, University of Edinburg, Edinburg, Scotland, October 1977.
- [Se93] K. Sekine: The Flow Polynomial and its computation. Master's Thesis, University of Oxford, 1993.
- [Ko97] D. C. Kozen: Automata and Computability. New York, Springer-Verlag 1997.
- [Pa94] C. H. Papadimitriou: Computational Complexity. University of California, San Diego, Addison-Wesley 1994.
- [Tr80] K. Truemper: On Whitney's 2-isomorphism theorem for graphs. *J. Graph Theory*, **4**, 43-45, 1980.

- [Wh33] H. Whitney: 2-isomorphic graphs. *American Mathematical J.*, **55**, 245-254, 1933.
- [TJ92] T. Brylawski, J. G. Oxley: The Tutte polynomial and its applications. In N. White, editor, *Matroid Applications*. Cambridge University Press, 1992.
- [AMZG04] M. Aigner, G. M. Ziegler: *Proofs from THE BOOK*. New York, Springer-Verlag, 2004.
- [St04] R. P. Stanley: *Enumerative Combinatorics: Volume 2*. Cambridge University Press, 2004.
- [Pr99] J. Propp: Enumeration of Matchings: Problems in Progress. In L. J. Billera, A. Björner, C. Curtis, R. Simion and R. Stanley, Eds. *New Perspective in Geometric Combinatorics*, MSRI publications, Vol. 38. 1999.
- [Wh32] H. Whitney, A logical expansion in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.* 38 (1932), 572–579.
- [LM] H. Lundow, K. Markström, The Log-concavity conjecture for chromatic polynomials, *Reporte interno*, Departamento de Mathematicas, Universidad de Umea.