Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Filosofía y Letras
Posgrado en Filosofía

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Sobre la naturaleza de las proposiciones de la aritmética y la noción de número: Mill, Frege, Cantor y Dedekind

Tesis que para obtener el grado de Maestra en Filosofía

presenta

María Raquel Gutiérrez Aguilar

Directora de Tesis
Dra. Margarita M. Valdés Villarreal

Ciudad Universitaria, D.F.
Julio de 2005

Para
María Eugenia Aguilar de la Peña y
Alfonso Gutiérrez Inzunza
por tanto que de ellos he recibido siempre

A la memoria de mi hermana,

Teresa Eugenia Gutiérrez Aguilar,

quien ojalá me hubiera acompañado,
al menos,
hasta la finalización de este trabajo

Indice

Capítulo IV
La reducción de la aritmética a la lógica y la noción de número según Cantor y Dedekind

Introducción

La cuestión de la naturaleza de las proposiciones aritméticas atraviesa la discusión filosófica que busca de diversas formas explicar los atributos de certidumbre y necesidad de tales enunciados. Durante el siglo XIX, con el nacimiento del álgebra contemporánea a partir del trabajo de Boole y con el surgimiento de las llamadas geometrías no euclidianas[1], volvieron a presentarse en la discusión filosófica preguntas clásicas como, ¿en qué se funda la verdad o falsedad de una proposición aritmética? ¿Son estas proposiciones tales que su valor de verdad se deriva de la experiencia o, más bien, son *verdades de Razón*, como expresara Leibniz? ¿Son las proposiciones aritméticas verdades necesarias? Si es así, ¿en qué se funda tal necesidad?, ¿Cuál es la naturaleza de los objetos acerca de los que hablan?

Las respuestas que se han ofrecido a estas preguntas, entre otras, han ido dividiendo el campo de las posiciones filosóficas configurando un mosaico de tradiciones de pensamiento confrontadas. Cada una de tales tradiciones se propone esclarecer de diversas maneras nociones tan fundamentales como la verdad, la necesidad o la fuente del conocimiento aritmético y matemático. Además, cabe señalar que hay una serie de problemas internos al desarrollo de las propias matemáticas durante el siglo XIX que conducen a la discusión sobre la naturaleza de las proposiciones de la aritmética y la noción de número. Considero que entre tales problemas, la cuestión de la *continuidad* de los números reales y la del fundamento de ciertas proposiciones básicas sobre números reales, son las más estrechamente relacionadas con la discusión filosófica sobre la naturaleza de las proposiciones de la aritmética y el esclarecimiento del concepto de número.

El aporte de esta investigación radica justamente en presentar de manera ordenada la discusión en torno a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética durante la segunda mitad del siglo XIX, que deriva en la polémica sobre la noción de número hacia principios del siglo XX. El objetivo principal del trabajo consiste en discutir las virtudes, dificultades y límites de cada una de las posturas filosófica y matemáticamente relevantes en torno a la cuestión de si las proposiciones de la aritmética son o no necesarias, y a cómo

[1] Morris Kline, *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI, México, D.F., 2000. La admisibilidad de los números negativos como solución de ecuaciones lineales específicas, el significado de los números complejos y los problemas de los cuaterniones de Hamilton, por ejemplo, son elementos de este ambiente que pònía en duda tanto qué debía entenderse por número, como cuál es el carácter de las proposiciones de las matemáticas.

se explica su necesidad; así como en discutir y contrastar las distintas propuestas sobre lo que es el número.

Para llevar a cabo el objetivo señalado presentaré y discutiré las posiciones de cuatro importantes autores del siglo XIX, un filósofo, un matemático-filósofo y dos matemáticos: John S. Mill (1806-1873), Gotllob Frege (1848-1925), Georg Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916), en torno a la naturaleza de las proposiciones aritméticas y en especial, a la noción de número. Presentar con cierto detalle las distintas ideas en torno a la noción de número desarrolladas por estos cuatro autores y contrastar argumentos, arrojará luz sobre aspectos importantes de la discusión acerca de los fundamentos de las matemáticas ocurrida a principios del siglo XX y brindará antecedentes para entender algunas dificultades del proyecto general de reducción de las matemáticas a la aritmética y de ésta a la lógica.

En la medida en que sea necesario, el trabajo incluirá la discusión de algunas cuestiones del propio quehacer matemático en una época en la que esta disciplina inició su trayectoria hacia niveles de abstracción cada vez más altos, al separarse de las intuiciones geométricas que guiaron su desarrollo hasta el siglo XVIII. Es en el contexto de dar fundamento a las proposiciones del análisis matemático y de brindar definiciones precisas para conceptos básicos del cálculo –límite, continuidad, derivabilidad, etc.-, cuando se generaliza entre los matemáticos la insatisfacción con la posición kantiana que considera a las proposiciones de la aritmética como juicios sintéticos *a priori*[2]. Ahora bien, las objeciones a tal postura kantiana pueden llevarse a cabo al menos por dos caminos: o bien se cuestiona el carácter *a priori* de dichos juicios, que es el camino de John S. Mill; o bien se objeta su carácter sintético, que es el camino de Frege y hasta cierto punto, de Cantor y Dedekind. Revisar en detalle los argumentos presentados por cada uno de estos autores permitirá entender los distintos puntos de vista acerca de la fuente del conocimiento matemático y de lo que se entiende por "prueba" de una proposición aritmética; aspectos, ambos, que están en la base de la cuestión del carácter necesario o no de tales proposiciones.

Considero conveniente destacar, de entrada, la peculiar posición que encuentro en la obra de Frege: él constituye una especie de bisagra entre la discusión interna a la matemática y la reflexión filosófica sobre el quehacer matemático[3]. Así, por un lado, mi estudio de la postura de Mill en relación a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética y a la noción de número, incluirá la demoledora crítica fregeana a los principales supuestos empiristas de Mill. Y por otro lado, sobre todo en el tratamiento de la noción de número de Georg Cantor y Richard Dedekind, contrastaré la manera en que tanto ellos como Frege abordan ciertas dificultades estrictamente matemáticas, como por ejemplo los criterios válidos para la admisión de objetos abstractos y la cuestión de la relación de igualdad entre números.

Por tal razón, para la exposición general de la discusión en torno a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética, me guiaré por la estructura argumental diseñada por Gottlob Frege en *Die Grundlagen der Arithmetik*[4], donde él realiza uno de los esfuerzos más sistemáticos por demostrar el carácter analítico de las proposiciones aritméticas objetando tanto la posibilidad de que éstas tengan contenido empírico, como el hecho de que para demostrar su verdad se requiera de una "síntesis de la imaginación productiva" basada en intuiciones. Considero que la cuestión de fondo en ese esfuerzo es la pregunta acerca de la *verdad* y la *necesidad* de tales proposiciones. La estrategia de Frege para demostrar la analiticidad de las proposiciones de la aritmética, esto es, el hecho de que tengan una prueba estrictamente lógica expulsando todo recurso a la intuición, pasa por la cuestión de brindar una definición de cada número que no se sostenga en representación sensible alguna. Es decir, sólo si la noción de número puede obtenerse a partir de definiciones apoyadas únicamente en la lógica, se podrá sostener que las proposiciones de la aritmética cuyos elementos son números, pueden ser analíticas o, lo que es lo mismo según lo entiende Frege, tienen una prueba a partir de proposiciones lógicas. Si, por el contrario, la noción de número se sostiene en la intuición pura del tiempo, tal como afirmaba Kant, entonces las proposiciones que traten de sus relaciones no serán susceptibles de prueba lógica y tendrán simultáneamente un carácter sintético y *a priori*.

---

[2] En esta dirección, en los capítulos III y IV de la presente investigación se discute la participación de Frege, Cantor y Dedekind en el proyecto de "rigorización del análisis y del cálculo" iniciado por Weierstrass.

[3] Baker y Hacker sostienen que, en particular el trabajo de Frege en lógica, en filosofía del lenguaje y en filosofía de las matemáticas debe entenderse como guiado por el objetivo general *interno* a las propias matemáticas de reducción del cálculo y del análisis matemático a la aritmética. Baker G.P. & Hacker P.M.S., *Frege: Logical Excavations*, Oxford University Press, New York, 1984, en especial el capítulo I.

De esta manera, la lectura que haremos del trabajo de John S. Mill, *A System of Logic Ratiocinative and Inductive*[5], pretendiendo entender la manera en la que el empirismo británico del siglo XIX dio respuesta a las preocupaciones en torno a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética, estará fuertemente influenciada por las críticas de Frege a dicha posición. Mi interés al realizar un estudio más o menos cuidadoso de las ideas de Mill sobre el tema consiste en presentar las diferencias entre las posturas de ambos, tanto en el uso de ciertas categorías filosóficas básicas: la distinción analítico-sintético, por ejemplo; como en el conjunto de supuestos que cada una de ellas incluye en sus argumentos. Considero que este ejercicio puede contribuir a aclarar los términos de la discusión entre ambos y permite comprender mejor de qué estamos hablando o qué es lo que afirmamos cuando señalamos que Mill objeta el carácter *a priori* de las proposiciones de la aritmética o que para Frege, tales enunciados son analíticos; dado que la manera en la que emplean dichos términos no es, de ninguna manera, idéntica.

Ahora bien, la pertinencia de presentar también ciertos elementos matemáticos de los trabajos de Cantor y Dedekind sobre lo que son los números, consiste en que para la discusión sobre la naturaleza de las proposiciones aritméticas no sólo es importante contar con una noción adecuada de número, sino también entender la manera como se aborda lo relativo a la relación de igualdad entre números, que es una de las principales dificultades a la hora, por ejemplo, de formalizar un sistema axiomático que dé cuenta de ellos. Las propuestas de estos dos matemáticos tratan la relación de igualdad entre números de manera muy diferente a como lo hacen Frege y Mill; por lo que revisar en detalle tales diferencias arrojará luz sobre algunos aspectos particularmente difíciles del razonamiento matemático.

En resumen, la presente tesis se esforzará por presentar una versión de la discusión en torno a la noción de número y a la naturaleza de las proposiciones aritméticas hacia finales del siglo XIX y principios del XX. Asimismo, espero que su lectura muestre la importancia de las ideas de los autores elegidos para la discusión acerca de los fundamentos de la aritmética en el siglo XX; especialmente la relevancia de tales ideas para la posterior

---

[4] Frege Gottlob, *Los fundamentos de la aritmética. Una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. UNAM, México, 1972. Traducción de Hugo Padilla. (Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung uber den Begriff der Zahl, Breslau, 1884.)

[5] Mill J.Stuart, *A System of Logic Ratiocinative and Inductive,* University of Toronto Press, Toronto, 1974

axiomatización de la teoría de conjuntos. Lo que se quiere, en todo caso, es construir una especie de mapa que, en primer lugar, haga explícitos los supuestos de las distintas posiciones en torno a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética y, en segundo, visualice algunas de las debilidades y limitaciones de cada postura a partir del análisis detallado de los argumentos que ofrece.

Para el desarrollo del tema procederé de la siguiente forma. En el capítulo I introduciré algunos antecedentes filosóficos de la discusión que me interesa presentando una exposición breve de las ideas de Hume y de Kant sobre la naturaleza de las proposiciones de la aritmética y la noción de número, contrastando algunos problemas de cada una de estas posturas. Con ello, espero dibujar el terreno general de la discusión heredado en el siglo XIX.

En el capítulo II, consideraré las ideas de J.S. Mill sobre el carácter de las proposiciones aritméticas y sobre la noción de número, expuestas en *A System of Logic.* Si bien la filosofía de las matemáticas de Mill quedó prácticamente enterrada por la posterior crítica fregeana, considero interesante estudiar las ideas de este autor pues ellas constituyen una posible salida, distinta a la kantiana, a las dificultades de la posición de Hume que considera a las proposiciones de la aritmética como meras "relaciones entre ideas" vacías de cualquier contenido empírico.

En el capítulo III, abordaré con cierto detalle la manera como Frege propone "reducir la aritmética a la lógica". Me centraré en lo relativo a su definición del concepto de número, analizando especialmente su forma de tratar la relación de igualdad entre números. En este capítulo quedarán esbozadas algunas de las principales diferencias entre las escuelas logicista y formalista, en lo relativo a lo que se entiende por definir y a la aceptación o no del "principio de no contradicción" como garantía para la admisión de objetos.

Finalmente, en el capítulo IV revisaré algunos aspectos del proyecto de reducción del cálculo y del análisis matemático a la aritmética; proyecto del que Georg Cantor y Richard Dedekind forman parte. Posteriormente, presentaré lo que considero la parte más relevante de sus argumentos para la definición de número, incluyendo ciertos aspectos de su exposición formal. En especial, pondré atención en la manera como ambos autores tratan la relación de igualdad entre números.

A partir de lo anterior espero mostrar que para comprender la discusión en torno a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética y la noción de número, es necesario considerar tanto aspectos filosóficos relevantes conexos con tal temática, en particular su carácter de universalidad y necesidad; como las dificultades matemáticas propiamente dichas relacionadas con las nociones de magnitud y cantidad.

Para la realización de este trabajo he contado con el apoyo exigente, y a veces doloroso, de la Dra. Margarita Valdés Villarreal a quien agradezco profundamente sus esfuerzos por introducirme a temas que, al comienzo, me resultaban completamente ajenos. Agradezco también las críticas y sugerencias que durante la elaboración de esta tesis hicieron el Dr. Axel Barceló A. y el Dr. Carlos Torres Alcaráz, quienes me ayudaron a precisar las ideas aquí desarrolladas; así como la lectura y comentarios que realizaron la Dra. Atocha Aliseda y el Dr. Raúl Quesada.

Para la realización de estudios de maestría conté con la beca de CONACYT, No. 174119, por lo cual agradezco al pueblo de México la posibilidad que me ha brindado de hacer estudios de posgrado.

México D.F., mayo de 2005

Capítulo I
Antecedentes: Hume y Kant
¿Las proposiciones de la aritmética, expresan "relaciones entre ideas" o son juicios sintéticos *a priori*? Algunas consideraciones.

Las proposiciones de las matemáticas y, en particular las de la aritmética, han sido tradicionalmente consideradas distintas de las demás proposiciones del lenguaje que tratan sobre cuestiones empíricas. La verdad o falsedad de las primeras es algo que parece quedar fuera de toda duda y se les suele atribuir la condición de proposiciones necesarias; es decir, se piensa con frecuencia que las proposiciones verdaderas de las matemáticas son tales que no pueden ser falsas. Una proposición de la geometría, por ejemplo aquella que establece que el perímetro de un círculo guarda una proporción constante con su diámetro y que denomina a dicha constante la cantidad π, esto es, "Perímetro de C = π x Diámetro de C"; se considera una proposición necesaria en tanto no solamente es verdadera sino que no puede ser de otra manera[1].

Pero, ¿qué significa que "no puede ser de otra manera"? ¿Significa, en el caso del ejemplo anterior, que no podemos concebir otra relación entre el diámetro de un círculo y su circunferencia? ¿Significa, más bien, que el significado de π es precisamente el cociente entre el perímetro y el diámetro del círculo? ¿Ó significa que tal proposición admite una prueba meramente lógica siendo derivable a partir de unos axioma también necesarios? En este caso, ¿cómo podemos afirmar la verdad y la necesidad de tales axiomas? Estas preguntas han sido abordadas de distinta manera. Según Blanshard, en la historia de la filosofía ha habido varios intentos para explicar "nuestra posesión de conocimiento necesario"[2], de tal manera que la explicación del carácter necesario de una proposición *p* ha quedado generalmente ligada al esclarecimiento de la posesión de conocimiento necesario. Dependiendo de las fuentes del conocimiento que se admitan se sostendrán distintas posturas sobre la naturaleza de las proposiciones de la aritmética y la geometría. Ya sea que sólo se reconozca a la experiencia como fuente de conocimiento tal como hace Hume y la tradición empirista, o que se admita algún tipo de conocimiento *a priori*, independiente de

[1] Ver Saúl Kripke, *Naming and Necessity*, Basil Blackwell Publisher, Oxford, England, 1981. [Kripke Saúl, *El nombrar y la necesidad*, IIF-UNAM, 2ª Edición, México, D.F., 1995. Traducción de Margarita M.Valdés.]
[2] Blanshard Brand, "Foreword", en Pap Arthur, *Semantics and Necessary Truth [1958]*, Yale University Press, New Haven and London, 1996, pág. vi. En este ensayo, Blanshard registra cinco posiciones distintas

toda experiencia, tal como hace Kant; la cuestión de la necesidad o no de determinadas proposiciones se explicará de distinta manera.

En cada una de estas posiciones encontraremos problemas. Para Hume, la mayor dificultad será explicar la aparente universalidad y necesidad de las proposiciones de las matemáticas, dado que la experiencia como única fuente admitida de conocimiento, según él sólo brinda conocimiento contingente de generalizaciones inductivas. Por su parte, para Kant, que sostiene que hay una parte del conocimiento que es *a priori,* el problema será explicar cómo las proposiciones de la aritmética y la geometría a las cuales considera *a priori,* son simultáneamente sintéticas, es decir, ampliativas del conocimiento.

En este capítulo, no es mi intención exponer de manera sistemática la postura de David Hume y de Immanuel Kant en torno a los problemas epistemológicos y lógicos relacionados con el carácter aparentemente necesario y universal de las proposiciones de las matemáticas. Mi objetivo es mucho más modesto: se ceñirá a indagar en las explicaciones de ambos acerca de la naturaleza de las proposiciones de la aritmética para situar algunos antecedentes de la discusión posterior entre Mill, Frege, Cantor y Dedekind en relación a ese tema y a la noción de número. Considero que las posiciones tanto de Hume como de Kant, ponen los cimientos del escenario básico sobre el que se lleva a cabo la discusión sobre el tema en el siglo XIX: la posición empirista de Hume que considera que las proposiciones de la aritmética, la geometría y el álgebra son verdades necesarias en la medida en que expresan meras "relaciones entre ideas", es cuestionada por otro empirista, John S.Mill, quien, a diferencia de Hume, les atribuye contenido empírico. Por su parte, las distinciones kantianas clásicas entre proposiciones analíticas y sintéticas, *a priori* y *a posteriori,* así como su afirmación de que las proposiciones de la aritmética son juicios sintéticos *a priori,* son objetadas por Gottlob Frege y por Richard Dedekind.

1. El origen de las ideas y la distinción humeana entre "cuestiones de hecho" y "relaciones entre ideas"

La drástica afirmación de Hume y de la tradición empirista de que todo conocimiento proviene de la experiencia, requiere explicar la peculiaridad del conocimiento y de las proposiciones matemáticas en tanto ellas "parecen ser inmunes a la refutación a través de la

para explicar la cuestión del conocimiento necesario: la racionalista, la empirista, la kantiana, la pragmática y la del empirismo lógico.

experiencia"[3]. La manera en la que Hume explica el carácter de "certidumbre y evidencia" por ejemplo, de las proposiciones de Euclides, consiste en afirmar que tales proposiciones son "descubiertas sólo mediante operaciones del pensamiento, con independencia de cosa existente alguna en cualquier lugar del universo[4]", y que por lo tanto no hablan acerca de hechos en la realidad empírica. Queda entonces abierta la pregunta acerca de qué hablan las proposiciones de la aritmética.

Para Hume, y sin ninguna excepción, todos los materiales que pueblan la mente humana son percepciones obtenidas por el sujeto en primera instancia, a través de los sentidos[5]. Tales percepciones se dividen en dos clases: *impresiones e ideas* según el "grado de vivacidad" con el que surjan en la mente; siendo las primeras "más fuertes y vivaces", como cuando tenemos la imagen visual de un color o cuando sentimos pasiones y emociones fuertes como la ira o los celos. Las impresiones según Hume, pueden ser a su vez de sensación o de reflexión, simples o complejas. De entre todas ellas, las impresiones de sensación son condición necesaria para el pensamiento: "No hay pensamiento o actividad mental a menos que haya impresiones de sensación"[6].

Por su parte, las ideas son algo así como "copias deslavadas" de las impresiones, es decir, imágenes más "débiles" de los objetos, como cuando *reflexionamos* sobre una pasión que hemos sentido o sobre un objeto que hemos percibido en el pasado aunque no esté presente ante nuestros sentidos[7]. Las ideas pueden ser, a su vez, simples o complejas. Stroud aclara que aun las ideas de la reflexión (esto es, las emociones y pasiones), se originan a su vez "de la aparición en la mente de impresiones de los sentidos". Por lo cual concluye que, según Hume "todo lo que llega a la mente llega como resultado del hecho de que tenemos impresiones de sensación"[8].

[3] Penelhum T., *David Hume*, Purdue University Press, West Lafayette, Indiana, 1992, pág. 99

[4] Hume, "An Enquiry concerning Human Understanding (1748)" en, *Enquiries concerning Human Understanding and concerning the principles of morals* (1777), Clarendon Press, Oxford, 1975. Sección 20, pág.24.

[5] Stroud Barry, *Hume*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, D.F., 1995. Traducción de Antonio Zirión, págs. 38 y ss.

[6] *Ibid.*, pág.40.

[7] Hume, *op.cit.*, sección 12, pág.18. Stroud analiza en detalle la teoría de las ideas de Hume y concluye que, "Hume recurre a la experiencia para mostrar que las impresiones simples siempre preceden en la mente a sus ideas simples correspondientes, y de ese modo concluye que las impresiones simples son causa de sus correspondientes ideas simples". Stroud, *op.cit.*, pág.39

[8] Stroud, *op.cit.*, págs. 39-40

Contando con estos elementos, Hume procede a analizar los "objetos de la razón y del entendimiento", esto es, los conocimientos. Distingue dos tipos: las "relaciones entre ideas" y a las "cuestiones de hecho"[9]. Las primeras son, en la epistemología de Hume, conexiones entre aquellas "imágenes más débiles de los objetos" que constituyen el contenido de nuestros pensamientos y que establecemos examinando sólo a las ideas, sin necesidad de apelar a la experiencia. Las segundas son conocimientos acerca del mundo cuya verdad requiere de la experiencia. Por ejemplo, si sé "que el triángulo es una figura plana que tiene tres lados", lo que conozco es una *relación entre ideas,* que descubro al examinar las ideas de "triángulo" y "figura de tres lados"; en cambio, si sé "que el triángulo frente a mi es rojo", conozco una *cuestión de hecho* para descubrir la cual, requiero de la experiencia. Para Hume, las proposiciones de la geometría, la aritmética y el álgebra, pertenecen a la primera clase:

> Todos los objetos de la razón y del entendimiento humano pueden ser naturalmente, divididos en dos clases: Relaciones entre ideas y Cuestiones de hecho.
> La Geometría, el Algebra y la Aritmética pertenecen a la primera clase; (...) Las proposiciones de esta clase pueden descubrirse sólo mediante operaciones del pensamiento, con independencia de cosa existente alguna en cualquier lugar del universo[10].

El criterio de Hume para dividir el conocimiento, expresado mediante enunciados del lenguaje, en "relaciones entre ideas" o "cuestiones de hecho", está en la naturaleza del *tipo de prueba* que admitan, es decir, pertenecerán a uno u otro tipo, dependiendo de si pueden o no "descubrirse sólo mediante operaciones del pensamiento". Si esto último es el caso, serán "relaciones entre ideas"[11]. Por su parte, si en el "descubrimiento" o conocimiento de una proposición, se requiere indagar en la experiencia sensible ciertos hechos particulares del mundo, tal proposición será considerada como una "cuestión de hecho". Las proposiciones que sólo establecen "relaciones entre ideas" se descubren *–o demuestran-* con independencia total de eventos o hechos empíricos aunque sus componentes, las "ideas", no son a fin de cuentas más que "copias débiles" de nuestras sensaciones.

Ahora bien, en relación a las matemáticas, Hume señala:

[9] "Todos los objetos de la razón y del entendimiento humano pueden ser naturalmente, divididos en dos clases: Relaciones entre ideas y Cuestiones de hecho". Hume, sección 20, *op.cit.,* pág 25.
[10] Hume, *Ibid.*

> La gran ventaja de las ciencias matemáticas... consiste en que sus ideas, siendo sensibles, siempre son claras y determinadas; la más pequeña distinción entre ellas es inmediatamente perceptible, y los mismos términos expresan siempre las mismas ideas, sin ambigüedad o variación[12].

Las ideas de las matemáticas, pues, si bien como cualquier otra idea tienen su origen en la percepción de objetos externos, son al mismo tiempo "claras y determinadas". Por ejemplo, dos ideas geométricas parecidas como las de un triángulo escaleno y uno isósceles son, de todas maneras, susceptibles de diferenciación precisa. Hume aclara que aun cuando no tengamos una definición explícita de un objeto geométrico, "dicho objeto puede ser presentado a los sentidos, y por ese medio ser aprehendido estable y claramente". La manera en que la mente humana procede para obtener "las verdades de esta ciencia" es manteniendo las ideas básicas claras y determinadas, y llevando a cabo intrincadas cadenas de razonamientos[13]. En este sentido, la demostración o prueba de este tipo de proposiciones es independiente de la experiencia sensible de cualquier objeto espacio temporal y se basa solamente en "operaciones del pensamiento".

Para Hume, entonces, las verdades expresadas por las proposiciones matemáticas y en particular por las de la aritmética, son necesarias, tienen una peculiar certidumbre o evidencia dada la especificidad de la naturaleza de su prueba:

> Las cuestiones de hecho, que son la segunda clase de objetos de la razón humana, no son afirmadas de la misma manera [que las "relaciones entre ideas"]; y no importa que tan grande sea nuestra evidencia de su verdad, nunca es de la misma naturaleza que la de las primeras [i.e, de las "relaciones entre ideas"].

Tras tal afirmación, Hume precisa su criterio lógico para distinguir entre la diferente "naturaleza" de la evidencia que puede ofrecerse para establecer la verdad de una u otra clase de proposiciones:

> La proposición contraria de cualquier cuestión de hecho es de todas maneras posible; porque nunca puede implicar una *contradicción*, y es concebible por la mente con la misma facilidad y distinción, que si fuera conforme a la realidad[14].

---

[11] Ayer afirma que es poco lo que Hume dice sobre las relaciones entre ideas, pues su interés se dirige a discutir "nuestras creencias en cuestiones de hecho". Ayer A.J., *Hume*, Oxfrord University Press, Oxford, 1980, pág. 33.
[12] Hume, *ibid*, sección 48, pág.60
[13] *Ibid.*, pág.61
[14] Hume, *Ibid*, sección 21, pág.25

Resulta así que la negación de una proposición que afirma una "cuestión de hecho", por un lado, no es una contradicción; y en segundo lugar, no establece algo que sea "impensable o inconcebible". Por ejemplo, la proposición "Después de un relámpago no se produce un trueno" es claramente falsa, pese a que tal enunciado es inteligible y es posible imaginar una situación en la que los truenos no se perciban después de los rayos. En ese sentido, dicha proposición no constituye una contradicción, simplemente es falsa.

Hume sugiere en cambio, que la proposición contraria a un enunciado matemático verdadero, es decir a una "relación entre ideas" demostrada mediante operaciones de la razón, implica una contradicción y es "confusa e ininteligible": "Que la raíz cúbica de 64 es igual a la mitad de 10, es una proposición falsa y no puede ser concebida de manera distinta"[15]. Esto es, la negación de una proposición aritmética es inconcebible y necesariamente falsa.

En relación al aspecto de la "inconcebibilidad" o "contradicción" de la proposición contraria de una "relación entre ideas", Arthur Pap hace la precisión de que Hume utiliza la expresión "contradicción" no como "contradicción formal", sino justamente como "inconcebibilidad"[16]. Además, Pap sostiene que Hume identifica lo concebible con lo imaginable y, en este sentido, no es claro cómo habrá de entenderse para Hume aquello que es "posible" –y por tanto, tampoco aquello que es "necesario". Según Pap, en base a lo que Hume dice, "o bien se entiende "posible" en el amplio sentido de "no autocontradictorio", o bien en el sentido, más restringido, de "imaginable"[17]. De tal manera que se confunden las distinciones "necesario-contingente" y "analítico-sintético".

Por otro lado, considerando que para Hume las proposiciones matemáticas se distinguen básicamente por la naturaleza de la prueba que admiten, también *los razonamientos* se pueden clasificar en dos clases: el razonamiento demostrativo que concierne a relaciones entre ideas y el razonamiento inductivo, que concierne a cuestiones de hecho y de

[15] Hume, *Ibid*, sección 132, pág.164. En relación a esto Ayer considera que la "concebibilidad" de un juicio está directamente relacionada, según Hume, con "lo que puede ser lógicamente posible". Ayer, *op.cit.*, pág.62
[16] Pap dice que para Hume "todo lo que es inconcebible es contradictorio", *op.cit.*, pág.86.
[17] Según Pap, "si se entiende *posible* como "no autocontradictorio", entonces, "*no p* es posible" no implica que *p* sea contingente". Por su parte, si se entiende posible como imaginable entonces "la imaginabilidad de no p, al ser sinónimo de la posibilidad de tal estado de cosas, no puede ser una razón por la cual este último pueda probarse". Pap, *op.cit.*, pág 91.

existencia[18]. Así, el razonamiento demostrativo será aquel que se apoya en meras operaciones lógicas de la razón y contiene como elemento central el principio de no contradicción. En tal sentido, la verdad de las proposiciones de la aritmética, en tanto "relaciones entre ideas" se funda en el razonamiento demostrativo que consiste en meras deducciones lógicas. En cambio, el razonamiento inductivo se basa en la generalización de la experiencia, por lo que sólo brinda conocimiento contingente.

1.1 La explicación de Hume sobre la verdad y la necesidad de las proposiciones de las matemáticas

Si hay proposiciones cuya verdad se funda solamente en el significado de los términos que figuran en ellas, por ejemplo[19], "$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$" ; podemos considerar que Hume piensa que las proposiciones de las matemáticas tienen tal característica. Esto por dos razones:

i) En primer lugar, porque sostiene que la verdad de las "relaciones entre ideas" es susceptible de demostración meramente lógica, esto es, mediante pruebas que no apelan a objetos ni hechos sensibles. En el ejemplo anterior, tal enunciado se podría demostrar conociendo el significado de la operación "elevar al cuadrado" y multiplicando por sí mismo el término que se encuentra dentro del paréntesis, (a+b). Es decir, mediante ciertos pasos de la razón que no recurren ni se apoyan en experiencias sensibles.

ii) En segundo lugar, porque la negación de una proposición aritmética verdadera constituye una contradicción y expresa algo que, según Hume, no es siquiera inteligible. Considerando el mismo ejemplo: si el cuadrado de una suma no fuera igual al polinomio de tres términos de la derecha, no contaríamos siquiera con una definición de la operación "elevar al cuadrado". Esto se ve con mayor claridad utilizando un ejemplo particular: si $(10 + 2)^2$ no es igual a $(100 + 40 + 4) = 144$, no se sabe qué es elevar al cuadrado una suma.

[18] "Todos los razonamientos pueden dividirse en dos clases a saber, razonamiento demostrativo, o concerniente a relaciones entre ideas o a razones morales; y aquel concerniente a cuestiones de hecho y existencia". El razonamiento inductivo que concierne a cuestiones de hecho, se explica mediante el principio de causalidad. Hume, *Ibid.,* sección 30, pág.35

En este sentido, Hume relaciona la naturaleza de las "relaciones entre ideas sobre cantidad y número" con el significado de los términos de los cuáles se afirma identidad o diferencia:

> ... a diferencia de todas las otras ideas, [las de la cantidad y el número] son claramente distintas y diferentes unas de otras y mediante nuestro escrutinio riguroso, nunca podremos avanzar más allá de la observación de esta diversidad, y a través de una reflexión obvia, establecer que una cosa no es igual a otra. Si es que llega a haber alguna dificultad en tal decisión, procede enteramente de la subdeterminación del significado de las palabras, lo cual se corrige mediante definiciones más justas[20].

Es decir, para Hume, las proposiciones que hablan de la cantidad y del número no establecen más que igualdades o desigualdades entre ideas y, cualquier dificultad a la hora de establecer la verdad de algún enunciados de este tipo proviene según él, de la subdeterminación del significado de los términos. Por ejemplo, si no podemos establecer la verdad del enunciado, "a */ b = a^2/b^2 ", tal cosa según Hume, se debe a que no sabemos con precisión el significado de alguno de los términos, en este caso, del término "a */ b ". Para este autor, entonces, las proposiciones de la aritmética no son más que enunciados explicativos que establecen la igualdad o no de dos ideas; por lo cual, en caso de presentarse una "dificultad" para establecer la verdad de una ecuación, el camino a seguir es el de la precisión de la definición de las ideas sujetas a comparación[21].

Pero, ¿qué explicación ofrece Hume de la noción de número? De todo lo anterior puede afirmarse que Hume considera que los números son ideas del entendimiento que obtenemos cuando comparamos nuestras percepciones con respecto a la cantidad. Como todas las demás ideas de la mente, la de cualquier número debe provenir de una impresión simple

---

[19] El significado de la expresión algebraica "$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$" es el siguiente: el cuadrado de la suma de dos números cualesquiera es igual al cuadrado del primer número más el doble producto de ambos números más el cuadrado del segundo

[20] Hume, *Ibid*, Sección 131, pág. 163.

[21] Morris Kline señala que en el siglo XVIII estaba abierta entre los matemáticos una álgida discusión acerca del significado de algunos símbolos y en la definición de ciertas operaciones con ellos que, posteriormente, pasaron a ser básicos en el quehacer matemático. El menciona, entre varias, la discusión que en 1770 provocó la publicación del libro de Leonhard Euler, *Introducción completa al álgebra*, donde utilizaba símbolos específicos para referirse a números negativos, esto es, -a, -b, de manera semejante a cómo los empleamos ahora y proponía una manera de definir las operaciones con números negativos, estableciendo principios tales como: "(-a)(-a) = a". Una importante crítica al uso de números negativos había sido publicada por el profesor inglés Maséres en 1759 en su "Tesis sobre el uso del signo negativo en álgebra". Muy probablemente, Hume estaba al tanto de estas discusiones entre matemáticos acerca de la importancia de la precisión en el significado de los símbolos y de la definición exhaustiva de las operaciones. Kline M., *La pérdida de la certidumbre, op.cit.*, pág. 141 y ss.

correspondiente. Sin embargo, "a diferencia de las otras ideas" la correspondiente a cualquier número específico es claramente "distinta y diferente" a la de los demás. Razón por la cual, para Hume, es posible siempre, mediante operaciones del pensamiento, determinar si un número es o no igual a otro. Así, por ejemplo, el famoso enunciado de la aritmética, " $5 + 7 = 12$ " establece según Hume, la igualdad entre dos ideas de cantidad rigurosa y precisamente distinguibles, se puede derivar de operaciones lógicas y no es "concebible" que sea de otra manera.

Ahora bien, la cuestión de la necesidad o no de las "relaciones entre ideas", entre las que se encuentran las proposiciones de la aritmética, no es objeto de discusión explícita por parte de Hume. Sin embargo, la naturaleza aparentemente necesaria de la verdad de las proposiciones de la aritmética, puede inferirse de su afirmación de que la negación de una de estas verdades es una contradicción; pese a que tal criterio, en realidad, se apoya únicamente en que los términos de la proposición en cuestión se definan con toda precisión y que por ello mismo es inconcebible su falsedad[22].

Tenemos pues que para Hume la cuestión de la necesidad de las proposiciones de las matemáticas es una necesidad *de dicto*; esto es, que se circunscribe a la necesidad lógica de dichas proposiciones que enlazan razonamientos a partir del significado de las palabras o términos que figuran en ellas.

Hemos visto hasta aquí, en relación a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética, que las principales tesis de Hume son las siguientes:

i) Los enunciados de la aritmética expresan meras "relaciones entre ideas" y no establecen ninguna "cuestión de hecho"; por ello, pueden probarse a través de operaciones del pensamiento.

ii) Las ideas que se relacionan en las proposiciones de la aritmética, es decir, las de cantidad y número son ideas legítimas en el sentido de que provienen de alguna impresión de los sentidos. Si alguna especificidad tiene el número, es que es una

[22] La reflexión más amplia de Hume en torno a la *necesidad*, se ocupa de las proposiciones que establecen "cuestiones de hecho". Esto es así, pues su objetivo es mostrar que la noción de *necesidad* es, sencillamente, algo que el sujeto atribuye o adscribe a ciertos enunciados: "Nuestras ideas ... de necesidad y de causalidad surgen enteramente de la uniformidad observable en las operaciones de la naturaleza, donde objetos similares se conjugan constantemente, y la mente queda determinada por la costumbre, a inferir uno de ellos de la aparición del otro. Estas dos circunstancias constituyen todo lo relativo a la necesidad que adscribimos a la cuestión. Más allá de la *conjunción* constante de objetos similares, y de la consecuente *inferencia* de uno al

idea "claramente distinta y diferente", esto es, puede ser establecido con toda precisión. Además, los enunciados numéricos expresan siempre relaciones de igualdad o desigualdad entre ideas de cantidad.

iii) Sin embargo, las ideas de cantidad y número, cuya igualdad o desigualdad se establece siempre en las proposiciones aritméticas, pueden tener "distintas apariencias", como cuando enunciamos que,

$$\text{“}25 = 5^2 = (4+12+9) = (2+3)^2\text{”}$$

El razonamiento aritmético por tanto, pretende establecer la igualdad o la desigualdad expresada en un enunciado de la aritmética, a través de operaciones de la razón o derivaciones lógicas. Hume expresa lo anterior de la siguiente manera:

> Me parece que, los únicos objetos de las ciencias abstractas o de demostración son la cantidad y el número, y que todos los intentos de extender esta especie más perfecta de conocimiento más allá de estos límites son mera pretensión e ilusión. En tanto las partes que componen la cantidad y el número son enteramente similares, sus relaciones se convierten en algo intrincado y complejo; y nada puede ser más curioso, así como útil, que trazar, a través de diversos medios, su igualdad o desigualdad, a través de sus distintas apariencias. (...)
>
> Pienso que las ciencias de la cantidad y del número pueden, con seguridad, ser establecidas como los únicos objetos propios del conocimiento y la demostración[23].

iv) Finalmente, en caso de que se presenten dificultades en el proceso de demostrar la verdad de una proposición de la aritmética, ello se deberá a la obscuridad o subdeterminación del significado de las palabras y se puede corregir, "mediante definiciones más justas".

Como conclusión, podemos decir que Hume explica la necesidad de los enunciados matemáticos a costa de vaciarlos de todo contenido fáctico; y por lo tanto, este tipo de proposiciones no amplía el conocimiento. Pese a que Hume atribuye a "las ciencias de la cantidad y del número" el carácter de "único objeto propio del conocimiento y la demostración", tal conocimiento será meramente explicativo, solamente contribuirá al análisis y delimitación de las ideas de cantidad y número en tanto las demostraciones de este tipo de enunciados se apoyan únicamente en "operaciones del pensamiento", esto es,

otro, no tenemos otra noción de necesidad o conexión". Hume, *op.cit.*, sección 64, pág.82. Discutir con más detalle este aspecto está fuera de los alcances del presente trabajo.

[23] Hume, *Ibid.*, Sección 131, pág.163

en la lógica. Tal como veremos en las siguientes páginas, Kant no está de acuerdo con esta posición y objetará tanto la teoría humeana de las ideas que exige una impresión de sensación a la base de cualquier idea de la mente, como la concepción de las proposiciones de la aritmética como meras "relaciones entre ideas".

2. Kant: la distinción entre juicios analíticos y sintéticos, *a priori* y *a posteriori*

Uno de los principales objetivos de Immanuel Kant en la *Crítica de la Razón Pura*[24] es objetar la idea fundamental de Hume de que la experiencia es la única fuente del conocimiento. En particular, Kant busca explicar la posibilidad de un tipo especial de juicios que ni expresen meras relaciones entre ideas ni meras cuestiones de hecho contingentes y particulares: los juicios sintéticos *a priori*. Según Kant, tales juicios simultáneamente necesarios y ampliativos del conocimiento, es decir, cuya verdad no se basa únicamente en derivaciones lógicas y que al mismo tiempo, no pueden ser falsos, son los candidatos idóneos para explicar el conocimiento científico. El conocimiento matemático es considerado como *a priori* por Kant, en tanto conocimiento universal y necesario; aunque sin reducirlo a meras relaciones entre ideas tal como hace Hume. El problema de Kant, entonces, consiste en explicar "cómo son posibles tales juicios sintéticos *a priori*".

La epistemología kantiana, objetando la teoría de las ideas de Hume sostiene que, si bien en el orden temporal todo conocimiento efectivamente "*empieza* con la experiencia, no por eso *procede* todo él de la experiencia". La hipótesis kantiana en relación a la cuestión del origen del conocimiento es que:

> En efecto, podría ser que nuestro mismo conocimiento empírico fuera una composición de lo que recibimos mediante las impresiones *y* de lo que nuestra propia facultad de conocer produce (simplemente motivada por las impresiones) a partir de sí misma[25].

La parte del conocimiento que "nuestra propia facultad de conocer produce a partir de sí misma", y que es independiente de toda experiencia, Kant la llama *conocimiento a priori*. Este tipo de conocimiento *a priori* es para Kant universal y necesario, pues al ser

---

[24] Kant I., *Crítica de la Razón Pura(CRP)* (1781-1787), Alfaguara, Madrid, 1984, 3ª edición. Traducción de Pedro Ribas.
[25] Kant, Introducción a la CRP, *op.cit.*, B2.

independiente de toda experiencia no queda sometido ni a la contingencia ni a la particularidad, que son rasgos del conocimiento basado en la experiencia siempre finita o limitada del sujeto. De hecho, Kant sugiere que para distinguir el conocimiento *a priori* del conocimiento empírico, una "señal segura" es que la proposición que expresa tal conocimiento *a priori* sea universal y/o necesaria[26]. De esta manera la aprioridad de un juicio queda relacionada con su necesidad y con su universalidad. En relación al conocimiento necesario Kant afirma que, si bien "la experiencia nos enseña que algo tiene éstas u otras características", no nos indica "que no pueda ser de otro modo"; esto es, para Kant un juicio necesario o *a priori* es tal que no sólo es verdadero sino que no puede ser de otra manera.

Ahora bien, en la Introducción a su *Lógica*, Kant establece explícitamente que nuestros conocimientos, es decir, "las representaciones de la consciencia referidas a un objeto[27]" que se encuentran en la mente humana, consisten en intuiciones o en conceptos. Serán intuiciones si provienen de la "facultad de receptividad", esto es, si se originan en la sensibilidad y son representaciones de objetos que nos son dados. En cambio, serán conceptos si provienen de la "facultad del entendimiento", que los construye cuando conoce un objeto "mediante las representaciones" que le brinda la intuición[28]. Tales aspectos de la epistemología kantiana las analizaremos con más detalle posteriormente. Antes de ello conviene abordar lo relativo a su clasificación de los juicios.

Para Kant, un juicio es la unión o síntesis de dos conceptos que un sujeto lleva a cabo mediante el entendimiento[29]. Por ejemplo, cuando decimos que "Los caballos son animales" lo que hacemos es afirmar la relación que existe entre dos conceptos, el de "caballo" y el de "animal" por medio de una operación del entendimiento. En este caso, la unión de ambos conceptos se lleva a cabo mediante una síntesis lógica, porque es posible llegar a ella únicamente en base al análisis de los propios conceptos. Tales juicios, por tanto, serán *a priori* o independientes de toda experiencia. Ahora bien, en otras ocasiones la

[26] "Si se encuentra, en primer lugar, una proposición que, al ser pensada, es simultáneamente necesaria, tenemos un juicio *a priori*. (...) En segundo lugar, la experiencia nunca otorga a los juicios una universalidad verdadera o estricta (...) Por consiguiente, si se piensa un juicio con estricta universalidad, es decir, de modo que no admita ninguna posible excepción, no deriva de la experiencia, sino que es válido absolutamente *a priori*". *Ibid*, B4.
[27] Kant, *Logic*, Dover Publications, New York, 1988, sección 1, pág. 96.
[28] Kant, *CRP*, La lógica trascendental, A50-B74.

acción de síntesis que ocurre en un juicio puede, según Kant, también apoyarse en la experiencia; en cuyo caso tendremos un juicio de experiencia o *a posteriori*, como en la afirmación de que "El Océano Pacífico es el más grande del mundo".

Por otro lado, los juicios en tanto unión sintética de dos conceptos siempre tienen, para Kant, la forma sujeto-predicado: uno de los conceptos ocupará el lugar del sujeto en el enunciado, mientras que el otro estará en el lugar del predicado. La relación lógica que puede establecerse entre sujeto y predicado será, o bien de contención, cuando el predicado ya está contenido en el sujeto; o bien de no contención si tal no es el caso[30]. El ejemplo de Kant para ilustrar juicios de la primera clase, según este criterio *lógico*, es "Todo cuerpo es extenso". Él explica que en el concepto de "cuerpo" está ya contenido el concepto de "ser extenso", es decir, de ocupar un lugar en el espacio; por lo cual en tal juicio, el entendimiento realiza únicamente una síntesis lógica a través del análisis de los conceptos. Los juicios de este estilo serán, de acuerdo a tal criterio lógico, *analíticos* o explicativos del conocimiento. En contraste con ellos, a los juicios en los que el predicado no está contenido en el sujeto, Kant los llamará juicios *sintéticos* o ampliativos del conocimiento. Los juicios de experiencia son siempre sintéticos, como cuando expreso, por ejemplo, que "El agua del mar es salada". Del mero análisis del concepto "agua del mar" no puedo establecer si ésta es salada o no; pero si puedo hacerlo *a posteriori*, una vez que lo he constatado.

Sin embargo, para Kant, **no todos los juicios sintéticos son juicios a posteriori**. Existe una específica clase de juicios simultáneamente ampliativos del conocimiento que además, son también juicios *a priori*, esto es, independientes de toda experiencia. La síntesis de los conceptos realizada en tales juicios, ni se apoya en hechos empíricos como sucede en los juicios *a posteriori*, ni se reduce a una mera síntesis lógica producto del análisis de los conceptos, como en los juicios analíticos. Para Kant, las proposiciones de las matemáticas son justamente de esta clase, es decir, juicios sintéticos *a priori*.

Resumiendo lo hasta aquí dicho, cabe señalar que en la clasificación kantiana de los juicios intervienen dos tipos de consideraciones distintas: i) las epistemológicas, relacionadas con el origen o fuente del conocimiento de los conceptos que se enlazan en un

[29] "Un juicio es la presentación de la unidad de la conciencia de varias representaciones, o la presentación de sus relaciones en tanto constituyan un solo concepto". Kant, *Logica*, sección 17, pág.106.

[30] Pap critica la noción de "contención" kantiana señalando que tal "metáfora" no es clara; señala, además, la limitación de la explicación de Kant al restringir los juicios a la forma "sujeto-predicado", que es una de las principales objeciones de Frege. Pap A., *op.cit.*, pág.27.

juicio; y ii) las estrictamente lógicas que privilegian la relación entre el sujeto y el predicado. En la siguiente tabla se visualizan ambas cuestiones:

Distinción de los juicios según la fuente de su conocimiento	**Distinción de los juicios según el tipo de enlace entre el sujeto y el predicado**
A priori - La necesidad y universalidad de los juicios es "señal segura" de su aprioridad - Son absolutamente independientes de toda experiencia - Su justificación no puede provenir de la experiencia	**Analíticos o explicativos** - El predicado está contenido en el sujeto - El enlace entre el predicado y el sujeto es pensado mediante la identidad - La verdad de un juicio analítico puede establecerse a partir del "principio de contradicción[31]"
A posteriori - Su conocimiento se apoya en la experiencia. - Su justificación requiere de la experiencia.	**Sintéticos o ampliativos** - El predicado no está contenido en el sujeto - El enlace entre el predicado y el sujeto no es pensado mediante la identidad - La verdad de un juicio sintético no puede establecerse apoyándose únicamente en el principio de contradicción.

Ahora bien, a partir de estas consideraciones Kant sugiere distinguir entre tres tipos de juicios atendiendo a consideraciones tanto lógicas como epistemológicas:

1. Los juicios analíticos, que "no añaden nada al concepto del sujeto mediante el predicado, sino que simplemente lo descomponen en sus conceptos parciales, los cuales eran ya pensados en dicho concepto del sujeto (aunque de forma confusa)...[32]". Tales juicios son, además, *a priori* en la medida en que son independientes de toda experiencia[33]. En relación a esto, Kant llama la atención sobre la diferencia entre el proceder matemático y el filosófico. Según él, los juicios analíticos que son emblemáticos de la filosofía, se abocan a exhibir a los conceptos de manera distinta y

[31] La formulación kantiana del "principio de contradicción" en la CRP es: "A ninguna cosa le es adecuado un predicado que la contradiga" (CRP, A151). Pap afirma que esta formulación es particularmente obscura y se pregunta acerca del uso kantianao del término "cosa" u "objeto" y cómo esto se relaciona con la forma sujeto-predicado de los juicios. Pap, *op.cit.*, pág.28
[32] Kant, CRP, *op.cit.*, A7-B11

precisa mediante el análisis[34]. Las matemáticas, por su parte, hacen otra cosa en tanto requieren de intuiciones.

2. Los juicios sintéticos *a posteriori* que, apoyándose en la experiencia, "añaden al concepto de sujeto un predicado que no era pensado en él ni podía extraerse de ninguna descomposición suya[35]". En la medida en que en tales juicios la síntesis del sujeto y el predicado se apoya en hechos empíricos, solamente establecen verdades contingentes.
3. Los juicios sintéticos *a priori* esto es, juicios que extienden el conocimiento pues "añaden al concepto de sujeto algo que no era pensado en él", pero que no lo hacen a partir de una síntesis de experiencia, y tampoco mediante una síntesis lógica, sino que se apoyan en intuiciones *a priori*, estableciendo por tanto, verdades necesarias.

La pregunta que Kant formula en relación a los juicios sintéticos *a priori* es:

> ¿En qué me apoyo y qué es lo que hace posible la síntesis si quiero ir más allá del concepto A para reconocer que otro concepto B se halla ligado al primero, puesto que en este caso no tengo la ventaja de acudir a la experiencia para verlo?[36]

El "apoyo" kantiano para que el entendimiento lleve a cabo la síntesis del sujeto y del predicado en un juicio sintético *a priori* serán las formas puras de la intuición; es decir, las formas más abstractas que el propio sujeto que conoce aporta al conocimiento de objetos. A partir de las formas puras de la intuición sensible, el entendimiento apelará a una especial capacidad: la "síntesis de la imaginación productiva" que estará a la base del conocimiento matemático. Estudiemos ahora esta parte de la argumentación kantiana con más detalle.

2.2 Las proposiciones de las matemáticas como juicios sintéticos *a priori*

Hemos dicho ya que a los enunciados de las matemáticas y, en particular, a los de la aritmética Kant los considera juicios sintéticos *a priori*. Dado que las proposiciones de las matemáticas establecen verdades universales y necesaria son, para Kant, juicios *a priori* y su prueba, por tanto, no puede apoyarse en la experiencia. Sin embargo, a tales juicios Kant les atribuye también un carácter sintético o ampliativo del conocimiento; lo cual significa que la verdad de una proposición de las matemáticas no puede establecerse apoyándose

[33] Para establecer la verdad de una proposición analítica "no he de salir de mi concepto para formular el juicio". *Ibid*, A9-B13.
[34] Kant, *Lógica*, *op.cit.*, Introducción, sección VIII, pág. 63 y ss.
[35] *CRP*, *op.cit.*, A7-B11

únicamente en el análisis de los conceptos enlazados en el juicio a partir de derivaciones lógicas. Es decir, las proposiciones de las matemáticas, según Kant, no son verdaderas únicamente en virtud del significado de los términos, tal como sucede con las "relaciones entre ideas" de Hume, derivables por tanto, a través de meras operaciones del pensamiento.

Por otro lado, para Kant "la ausencia de contradicción interna constituye la condición universal de todos nuestros juicios, sea cual sea el contenido del conocimiento y el modo según el cual se refiera al objeto[37]". Es decir, no se puede admitir como juicio un enunciado donde el sujeto afirma lo que el predicado niega; un enunciado de tal clase, según Kant, carecería de significado. Los juicios entonces, pueden ser verdaderos, falsos, o incluso "carecer de fundamento", lo decisivo es que no sean auto-contradictorios.

Resulta entonces que, en relación a la distinción lógica entre juicios analíticos y sintéticos, Kant señala lo siguiente: un juicio es analítico si es posible *conocer su verdad* atendiendo al principio de contradicción, que establece que "A ninguna cosa le es adecuado un predicado que la contradiga[38]". Esto es, Kant establece que un juicio es analítico si se puede conocer su verdad mediante meras operaciones lógicas que se apoyen en el citado "principio de contradicción". De esta forma puede entenderse la afirmación kantiana de que para hacer un juicio analítico, el entendimiento no sale del análisis de los conceptos[39]. Por su parte, en relación a los juicios sintéticos, Kant afirma que "me veo obligado a salir fuera del concepto dado para considerar en relación con éste, algo completamente distinto de lo pensado en él[40]", y añade que la relación entre predicado y sujeto en un juicio sintético nunca es de identidad. El autor propone entonces que para "salir" de los conceptos en un juicio sintético *a priori*, se necesita de una síntesis de la imaginación productiva, la cual constituye una "acción del entendimiento sobre la sensibilidad[41]". Esto es lo que hacemos,

[36] *Ibid*, A9-B13
[37] Kant, *CRP*, *op.cit.*, B190
[38] CRP, A151
[39] Las debilidades de esta formulación del principio de no contradicción son analizadas por Pap. No entro a la discusión minuciosa de esto pues el objeto de este capítulo no consiste en analizar los problemas del criterio kantiano para la distinción analítico/sintético, sino en exponer sus argumentos para considerar las proposiciones de la aritmética como juicios sintéticos *a priori*. Sobre el tema, Pap, *op.cit.*, Capítulo II.
[40] CRP, A154-B194
[41] CRP, B 151-152 Sobre esto, Ralph Walker señala que para hacer un juicio sintético *a priori* se "requiere que vayamos más allá de la interrelación entre los conceptos: debe haber una tercera cosa además del concepto de sujeto y de predicado, que brinde la conexión entre ellos. En el caso de juicios teóricos o especulativos esta tercera cosa solamente puede ser la intuición –la inmediata *apercepción* de cosas", Walker Ralph, *Kant. Arguments of the Philosophers*, Routledge, London, 1978, pág.19

según la aclaración de Kant, cuando por ejemplo, al pensar una línea la *trazamos* en el pensamiento o al representarnos las tres dimensiones del espacio *construimos* tres líneas perpendiculares a partir del mismo punto[42].

La postura de Kant, por tanto, consiste en que para conocer la verdad de un juicio sintético *a priori* se requiere no sólo de deducciones lógicas sino también de una síntesis apoyada en la intuición, que nos permita "trazar" o "construir" en el pensamiento ciertos elementos de la prueba. Discutamos qué significa "construir en la intuición" analizando la proposición 17 del Libro I de los *Elementos* de Euclides[43].

> I.17. "En todo triángulo, dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos[44]",

Esta proposición, que establece que la suma de cualesquiera dos ángulos de cualquier triángulo es menor que 180°, si bien según Kant es necesaria y universal, es al mismo tiempo una proposición sintética, ampliativa del conocimiento. El sujeto de este juicio: "La suma de cualesquiera dos ángulos de cualquier triángulo" no *contiene* de por sí al predicado "ser menor de 180°". El conocimiento que dicha proposición establece puede derivarse lógicamente utilizando los postulados de Euclides, siempre y cuando además, podamos construir una línea auxiliar y escoger arbitrariamente un punto en ella. En este sentido, la proposición I.17 –o cualquier otra proposición de la geometría euclidiana- extiende o amplía nuestro conocimiento acerca de los triángulos, *sin apoyarse únicamente* en el principio de no contradicción y en la derivación lógica. Por tal razón, Kant considera que I.17 o cualquier otra similar, son proposiciones sintéticas y no analíticas.

Brevemente revisaremos la demostración de I.17 ofrecida por Euclides. La intención es mostrar que el carácter sintético *a priori* de tal proposición tiene, según la argumentación de Kant, dos razones: en primer lugar, porque tal proposición, según Kant, es derivable lógicamente de los axiomas de Euclides a los que considera también juicios sintéticos *a priori*. En segundo lugar, porque siguiendo la demostración se muestra lo que Kant entiende por realizar una síntesis de dos conceptos no a través de una síntesis lógica ni de

---

[42] CRP, B 154

[43] La idea de que para entender el carácter de las proposiciones de las matemáticas como juicios sintéticos *a priori* es necesario revisar la pruebas de tales proposiciones, esto es, la argumentación admitida como prueba en el siglo XVIII, se la debo a Carlos Torres Alcaraz.

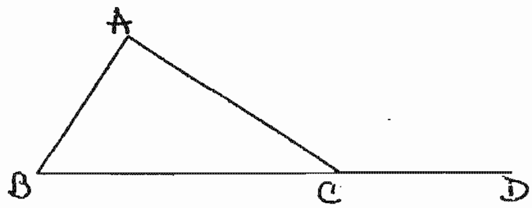
[44] Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 17, Gredos, Madrid, 1994. (Traducción de María Luisa Puertas Castaños).

una síntesis de experiencia, sino a través de la "síntesis de la imaginación productiva". Revisemos pues, la demostración ofrecida por Euclides para I.17.

Demostración

Sea ABC el triángulo

Digo que dos ángulos del triángulo ABC tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos.



Prolónguese BC hasta D [Este trazo está garantizado por el Postulado 2]

Puesto que el ángulo ACD es un ángulo externo del triángulo ABC es mayor que el interno y opuesto ABC [Por la proposición I.16[45].]

Añádase a ambos ACB; entonces los ángulos ACD, ACB son mayores que los ángulos ABC, BCA. [Por una derivación de la noción común 2: "Si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales". Euclides no justifica explícitamente este paso]

Pero los ángulos ACD, ACB son iguales a dos rectos [Por la proposición I.13]

Por tanto los ángulos ABC, BCA son menores que dos rectos.

De manera semejante demostraríamos que también los ángulos BAC, ACB son menores que dos rectos así como los ángulos CAB, ABC.

Por consiguiente, en todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos.

Q.E.D[46].

Resulta claro que la demostración de la proposición I. 17 no consiste simplemente en una derivación lógica a partir de los postulados y las nociones comunes. Un paso decisivo en la prueba es la *construcción* de trazos auxiliares; en este caso, la prolongación del segmento BC, garantizado por el Postulado 2 y la selección de un punto D cualquiera, en cierta medida justificado en la Definición 4 de línea recta, que también son, según Kant, juicios sintéticos *a priori*. Es en el trazo de la recta auxiliar y en la selección del punto D donde opera la "síntesis de la imaginación productiva", como una capacidad del entendimiento que se apoya en la intuición sensible.

Visto así, el argumento kantiano de que la verdad de una proposición de la geometría euclidiana no se apoya ni en el mero análisis de conceptos ni es únicamente una derivación lógica a partir de otras verdades analíticas, adquiere un significado concreto; y en mi

[45] La proposición I.16 establece que: "En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos". Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 16.

[46] Euclides, *Elementos*, Libro I, Proposición 17.

opinión, correcto. En la demostración hay un paso que depende de la *construcción* de un punto en la prolongación de un segmento de recta. Tal cosa es, sin duda alguna, la construcción de una representación en la intuición[47].

Por otro lado, si bien a lo largo de la demostración de I.17 nos referimos al triángulo ABC trazado en la hoja de papel, este triángulo es en realidad un representante de "cualquier triángulo", y el punto D es, igualmente, cualquier punto en la prolongación de alguno de los segmentos que lo conforman. Tales representaciones no son, por tanto, empíricas, a pesar de ser sensibles: surgen, de acuerdo a Kant, de la intuición pura del espacio. En ella es donde se apoya el entendimiento para hacer un juicio de la geometría y de ahí su carácter de juicios sintéticos *a priori*.

Para Kant, por tanto, la geometría en tanto "ciencia que determina las propiedades del espacio sintéticamente" es conocimiento *a priori*, basado en intuiciones puras: en la geometría, no procedemos meramente analizando conceptos sino que "nos damos pues, un objeto en la intuición[48]". Por ese motivo, las proposiciones de la geometría son juicios sintéticos a *priori*.

Por otro lado, en relación a las proposiciones básicas de la aritmética Kant analiza en varias ocasiones el enunciado "7 + 5 = 12", argumentando que los juicios de esta forma no pueden ser analíticos pues "por mucho que analice mi concepto de una suma semejante, no encontraré en él el número doce". Es decir, Kant sostiene que a la hora de sumar dos números el entendimiento realiza efectivamente una síntesis que amplía el conocimiento, la cual sin embargo, no se apoya en experiencia sensible alguna, sino que también lo hace en cierta intuición pura. El uso de los dedos de la mano, o la consideración de cinco puntos ..... que se añaden al siete, sugeridos en la explicación kantiana de cómo se realiza la operación de sumar cinco a siete, juega en cierta medida un papel semejante al de los trazos auxiliares de la geometría que hemos expuesto.

[47] Carlos Torres, en su artículo "Kant visto desde las matemáticas", Revista Digital Universitaria, Volumen 6, número 1, 2005, ISSN en trámite, dirección electrónica: http://www.revista.unam.mx/, analiza la posibilidad de que en alguna de las demostraciones geométricas euclidianas que requieren seleccionar al azar puntos en una recta, sucediera que en el lugar escogido "no hubiera un punto sobre la recta"; esto es, señala que desde los axiomas de Euclides no hay cómo garantizar que justamente *ahí* no existe un "hueco" en la recta. En cierta medida, esta cuestión está en el fondo de la necesidad de una definición formal para la noción de continuidad, como cuestión básica para la rigorización del análisis matemático, que se discutirá en el Capítulo III.
[48] Kant, CRP, B65

Sin embargo, las proposiciones de la aritmética no son, para Kant, completamente análogas a las proposiciones de la geometría. En esta última, los axiomas o "principios" euclidianos son juicios sintéticos *a priori* cuya verdad se apoya en la intuición pura del espacio y las proposiciones derivadas de tales axiomas son formulaciones universales. Por su parte, los principios en los que se basa la aritmética no son, según Kant, axiomas en el sentido propio y sus proposiciones no son universales sino que constituyen "fórmulas numéricas":

> Por lo que toca a la magnitud (*quantitas*), es decir, a la respuesta que se da a esta pregunta: ¿cómo es de grande tal cosa? No hay para ella axiomas en el sentido propio, aunque varias de esas proposiciones son sintéticas e inmediatamente ciertas (*indemostrabilia*). ... Las proposiciones evidentes de la relación numérica son, en cambio sintéticas, pero no universales como las de la geometría, y por ello precisamente no podemos llamarlas tampoco axiomas, sino fórmulas numéricas[49].

Kant no menciona explícitamente qué es lo que considera axiomas o "principios de la aritmética". Sin embargo, hace referencia al siguiente principio básico del álgebra –y de la aritmética- considerándolo como proposición analítica:

> Las proposiciones: "Si sumamos cantidades iguales a cantidades iguales, obtenemos cantidades iguales", "Si restamos cantidades iguales a cantidades iguales" son analíticas, ya que soy inmediatamente consciente de la identidad que existe entre la producción de una y otra magnitudes[50].

De lo anterior se sigue que para Kant, al menos algunas proposiciones relativas a la cantidad –*quantitas*- y a las operaciones con cantidades son proposiciones analíticas. Pese a lo cual, él considera que las infinitas proposiciones particulares de la aritmética son sintéticas *a priori*. En relación a este punto, cabe mencionar que el argumento para considerar tales igualdades generales sobre la cantidad como proposiciones analíticas, es que "tengo inmediatamente conciencia de la identidad de una y otra producción de magnitud". Tal "conciencia inmediata" de la verdad de una proposición, al menos en la

[49] Kant, *Ibid*, Sección "Axiomas de la intuición", B205

[50] Kant, *Ibid.*, A164-B205. Estas proposiciones son introducidas por Euclides como "nociones comunes" en los *Elementos*. Entonces, en cierta medida, son proposiciones que están también a la base de la geometría. Sin embargo, tales proposiciones básicas son "principios" del álgebra, al menos como ésta se trataba en el siglo XVIII.

Introducción de la *CRP*, Kant la propuso como una señal de su *aprioridad* y no de su analiticidad[51].

Ahora bien, Kant señala también que enunciados del estilo, "7 + 5 = 12" o cualquier otra ecuación aritmética semejante, son juicios sintéticos *a priori* que, sin embargo, son *particulares*. Mientras que una proposición geométrica como "Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°" establece una verdad universal acerca de todos los triángulos en la geometría euclidiana, pese a que en su prueba la síntesis de la imaginación productiva se represente o construya *un* triángulo para que el entendimiento pueda valerse de él; la fórmula "7 + 5 = 12" afirma una verdad particular: añadimos en esa proposición *el* número siete *al* número cinco. En la medida en que las proposiciones de la aritmética no tienen una representación análoga a las de la geometría –una imagen-, la explicación de los números requerirá, en el sistema kantiano, de los "esquemas puros del entendimiento". Esto lo discutiremos más adelante. Lo importante de momento es tomar en cuenta esta diferencia entre las proposiciones universales de la geometría y los juicios particulares de la aritmética.

Finalmente, en lo relativo a las distinciones entre los juicios de las matemáticas, Kant también considera una diferencia entre lo que él llama, "las conclusiones de los matemáticos" y "los principios" a partir de los cuales se deducen tales conclusiones:

> Al advertirse que todas las *conclusiones de los matemáticos* se desarrollaban de acuerdo con el principio de contradicción (cosa exigida por el carácter de toda certeza apodíctica), se supuso que las proposiciones básicas se conocían igualmente a partir de dicho principio. Pero se equivocaron, ya que una proposición sintética puede ser entendida, efectivamente, de acuerdo con el principio de contradicción, pero no por sí misma, sino sólo en la medida en que se presupone *otra proposición sintética* de la cual pueda derivarse[52].

Es decir, si bien para la prueba de una proposición de las matemáticas el entendimiento procede apoyándose en la lógica, a la base de tal deducción ha de encontrarse, según Kant,

[51] En relación a esto, Frege presenta varias críticas a los criterios kantianos de clasificación de los juicios en analíticos y sintéticos, tal como discutiremos en el capítulo III. Por su parte, Pap destaca el carácter ambiguo de la noción de analiticidad en Kant: por una parte el limitado criterio de contención del predicado en el sujeto ya mencionado y, por otro, el criterio lógico de que para la demostración de la verdad de una proposición analítica, el entendimiento puede apoyarse únicamente en el principio de contradicción. Pap hace notar, sin embargo, que en Kant el tratamiento de la necesidad de una proposición es confuso: por un lado en su determinación se incluye un criterio lógico, pero por otro también se considera el criterio "psicológico" de la "inmediata conciencia" de que lo establecido en dicha proposición no puede ser de otra manera. Ver, Pap, *op.cit*, capítulo II, "Kant".

una proposición sintética. En el caso de la geometría esto resulta claro: los axiomas de Euclides que están en la base de la prueba de cualquier proposición de la geometría son, bajo el criterio kantiano, juicios sintéticos *a priori.* En el caso de la aritmética, si los principios básicos del álgebra son, para Kant, proposiciones analíticas tal como hemos mostrado; entonces, el carácter sintético *a priori* de las proposiciones de la aritmética como "7 + 5 = 12" parece provenir, más bien, de la manera en que los números son representados en la intuición. En relación a ello, Kant señala que, por ejemplo, el principio que establece que "(a + b) > a", que es según él un principio analítico, "sólo se admite en matemáticas, a pesar de ser inmediatamente válido por sus meros conceptos, en cuanto que es susceptible de representación intuitiva[53]". Así, Kant considera que para que puedan ocurrir juicios sintéticos *a priori*, ciertos conceptos como los de las matemáticas deben ser construidos en la intuición pura[54].

En relación a la aritmética, considero que el caso de la suma analizada por Kant no permite comprender cómo el entendimiento se apoya en intuiciones puras para realizar la síntesis. Sin embargo, cuando se intenta definir el concepto de continuidad de los números reales, que está a la base del análisis matemático y, bajo otra formulación, en el corazón de la diferencia entre aritmética y geometría desde la época de Euclides hasta el siglo XVIII, se hace evidente la necesidad de apelar a ciertas representaciones intuitivas. Antes de discutir con más detalle estas cuestiones, conviene entender la distinción kantiana entre el espacio y el tiempo.

2.3 Las formas puras de la intuición sensible: espacio y tiempo

Tenemos, hasta aquí, las siguientes premisas defendidas por Kant:

i. Las proposiciones de la aritmética son necesarias y universales, por lo tanto, son *a priori*

ii. Las proposiciones de la aritmética son sintéticas en la medida en que amplían nuestro conocimiento.

iii. La experiencia no está en la base de la síntesis que enlaza al sujeto y al predicado en una proposición de la aritmética. La lógica tampoco constituye el único medio para tal síntesis. Para llevarla a cabo, el entendimiento recurre a la

[52] *Ibid.*, B-14

[53] *Ibid*, B-17

[54] Walker señala que sólo hay dos maneras en las que pueden ocurrir juicios sintéticos *a priori*: "o bien los conceptos deben ser construidos por la intuición pura, como [Kant] dice que son los conceptos matemáticos, o bien, debe ser posible mostrar que se requiere la verdad de tales juicios, si la experiencia (y por tanto la intuición) ha de ser posible". Walker, *Kant. Arguments of the Philosophers*, Routledge, London, 1978, pág.19

"síntesis de la imaginación productiva", y se apoya en las intuiciones puras del tiempo y el espacio.

Para entender la posición kantiana en relación al tiempo y al espacio, requerimos también de las siguientes dos consideraciones establecidas en la Lógica Trascendental:

iv. Los elementos del conocimiento son intuiciones o conceptos. Las primeras se conocen a través de la sensibilidad que es la facultad de "recibir representaciones". Los segundos se conocen mediante el entendimiento que es la facultad de "conocer un objeto mediante las representaciones" que le brinda la intuición[55].

v. Las intuiciones pueden ser empíricas o puras. Son empíricas si contienen una sensación que presupone la presencia de un objeto. Al objeto de una intuición empírica Kant lo llama fenómeno, mientras que al objeto de una intuición pura lo considera "objeto de la experiencia posible". Tanto las intuiciones como los conceptos son *puros*, en caso de que su representación no contenga "mezcla alguna de sensación"[56].

Kant considera que el espacio y el tiempo son condiciones de posibilidad del conocimiento en la medida en que permiten la recepción de intuiciones. Ambos son "formas puras de la intuición sensible" ya que habilitan la representación de objetos. Por expresarlo en otras palabras, el espacio y el tiempo son una especie de dispositivos humanos que ordenan la experiencia: las intuiciones puras son lo que el sujeto que conoce *aporta* al conocimiento de objetos en la experiencia. En tal sentido, ellas hacen posible el conocimiento *a priori.*

> Estos principios [del tiempo y el espacio en general] tienen validez como reglas bajo las cuales es posible la experiencia y nos informan con anterioridad a ésta última, no a través de ella[57].

Ahora bien, espacio y tiempo en tanto formas puras de la sensibilidad nos permiten o bien "representarnos objetos como exteriores a nosotros", a través del *sentido externo*; o bien "intuirnos a nosotros mismos" mediante el *sentido interno*. El sentido externo que consiste en cierta capacidad del espíritu humano, nos habilita para representarnos objetos externos "como estando todos en el espacio, dentro del cual son determinadas o determinables su figura, su magnitud y sus relaciones mutuas[58]". Por tanto, el sentido externo según Kant permite la intuición pura del espacio y está a la base del conocimiento

[55] Kant, *CRP*, La lógica trascendental, A50-B74.
[56] Kant, *CRP*, La estética trascendental, A20-B34.
[57] *Ibid*, B47

geométrico. Por su parte, el *sentido interno* que permite al sujeto intuir sus propios estados internos y que *no contiene nada como objeto*, hace posible que "todo lo que pertenece a las determinaciones internas [del sujeto] sea representado en relaciones de tiempo[59]".

Kant argumenta, a partir de lo anterior, que tanto el espacio como el tiempo no son entonces, i) ni conceptos empíricos extraídos de experiencias externas, pues las formas puras de la sensibilidad *preceden* a toda experiencia y la conforman y no pueden, por tanto, derivarse de ninguna experiencia; ii) ni conceptos universales que establecen relaciones entre cosas, pues corresponden a la sensibilidad y no al entendimiento. Espacio y tiempo son, por tanto, intuiciones *a priori* que están a la base de todas las representaciones y, por eso mismo, son "la condición de posibilidad de los fenómenos[60]".

Hasta aquí entonces, espacio y tiempo son para Kant, nociones análogas. Sin embargo, el tiempo tiene una peculiaridad: "[El tiempo] no posee más que una dimensión: tiempos diferentes no son simultáneos, sino sucesivos[61]". Esto es, el tiempo como forma pura de la sensibilidad, expresándolo en términos contemporáneos, habilita una noción intuitiva de orden, es decir, determina una relación binaria completa, que podemos expresar con el símbolo " $<$ " :

> ... el tiempo en el que situamos dichas representaciones –tiempo que, a su vez, precede a la conciencia de las mismas en la experiencia y les sirve de base en cuanto condición formal de nuestro modo de situarlas en el psiquismo- contiene ya relaciones de sucesión, de simultaneidad y de aquello que coexiste con lo sucesivo (lo permanente)[62].

Tal intuición del tiempo como orden lineal está, según Kant, a la base de las proposiciones de la aritmética[63].

---

[58] *Ibid*, A23-B38

[59] *Ibid.*, A23-B38

[60] Kant, *Ibid.* Paul Guyer señala una distinción entre las *intuiciones puras* y las *formas puras de la intuición*. Según Guyer, mediante las intuiciones puras, la Razón se representa individuos aislados y no clases; mientras que las formas puras de la intuición destacan el rasgo de que la comprensión del tiempo y el espacio precede a cualquier experiencia. Dentro de las formas puras de la intuición, el tiempo es la más general y esto es importante para la distinción entre las proposiciones de la aritmética y las de la geometría. Ver, Paul Guyer, "Kant", en E.Craig (General Editor), *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Routledge, London and New York, 1998.

[61] Kant, CRP, B47

[62] Kant, *CRP*, B67

[63] "Pienso que la especial conexión de la aritmética con el tiempo puede ser explicada como sigue: si uno construye de determinada manera, como en un papel o en la mente, una secuencia de símbolos tal como los primeros *n* numerales, la estructura ya está representada en la secuencia de operaciones y, más en general, en la sucesión de actos mentales que recorren un grupo de *n* objetos, como cuando contamos... El tiempo

2.4 La intuición del tiempo a la base de la aritmética

Según Parsons, Kant no discute ampliamente lo relativo a la filosofía de la aritmética por lo que "es virtualmente imposible entenderlo sin hacer uso de otro material[64]". En virtud de ello y dado que en los siguientes capítulos, en particular en la discusión entre Frege y Dedekind un problema subyacente será la noción de continuidad, en esta última sección abordaremos la manera en la que Kant estudia la noción de magnitud *–quantum-*, relacionándola con las intuiciones del tiempo y del espacio. Con ello, espero poder mostrar que un problema interno de las propias matemáticas está vinculado con el tratamiento filosófico acerca de la naturaleza de las proposiciones de la aritmética.

En la sección de la CRP titulada "Axiomas de la intuición", Kant relaciona las intuiciones del espacio y del tiempo con la noción de magnitud *–quantum-*

> En esta síntesis sucesiva de la imaginación productiva se basan, para producir las figuras, las matemáticas de la extensión (geometría) con sus axiomas. Son éstos los que expresan las condiciones de la intuición sensible *a priori* bajo las cuales, y sólo bajo las cuales, puede surgir el esquema de un concepto puro de los fenómenos externos... Estos son los axiomas que sólo se refieren propiamente a magnitudes (*quanta*) en cuanto tales[65].

Kant afirma entonces, que "todas las intuiciones son magnitudes extensivas", es decir, todas las representaciones *externas* que la sensibilidad puede recibir, el entendimiento las ordena y las conoce de acuerdo a determinadas propiedades geométricas de forma, tamaño y relaciones mutuas. Ahora bien, si todas las intuiciones pueden tratarse como magnitudes extensivas, de acuerdo a sus propiedades geométricas, se abre la pregunta acerca de qué específicamente trata la aritmética. Parsons afirma que cada vez que Kant habla del carácter intuitivo de la aritmética, él establece que el número requiere obligadamente de la noción de sucesión[66]. Sin embargo, el número también está relacionado, para Kant, con la noción de magnitud o cantidad, en tanto que responde a la pregunta "¿de qué tamaño es esto?". Analicemos primero lo relativo a la noción de sucesión.

---

constituye una fuente universal de modelos para los números." Parsons, "Kant's philosophy of Arithmetic", en Posy Carl J. (Ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992, pág.67.

[64] Parsons, *ibid*, pág 43.

[65] Kant, CRP, B205

[66] Parsons, op.cit, pág.62. Para sostener su afirmación remite, entre otras, a B16 y a A142-B182.

El tratamiento kantiano de la noción de número –a diferencia de la noción de punto o de línea en geometría- establece que el número no tiene una representación universal –como la del triángulo ABC en la demostración de la proposición I.17 de Euclides discutida anteriormente. Los números a lo más, se representan a través de una imagen singular, aunque cuando se "piensan en general", se "representan" mediante lo que Kant llama "el esquema puro de la magnitud (*quantitas*)". Los *esquemas del entendimiento* son representaciones de la imaginación que provienen del entendimiento *y también* de la sensibilidad. Por tal motivo, en relación a los números, Kant señala la importancia de distinguir entre esquema e imagen:

> Así, si escribo cinco puntos seguidos ....., tengo una imagen del número cinco. Si, por el contrario, pienso simplemente un número en general, sea el cinco, sea el cien, tal pensar es un método para representar, de acuerdo con cierto concepto, una cantidad en una imagen, más que esa imagen misma...[67]"

Los *esquemas de los conceptos puros* son, entonces, para Kant, "la representación de un procedimiento universal de la imaginación para suministrar a un concepto su propia imagen[68]". Y el número es el "concepto puro de la magnitud" que constituye una representación que comprende "la sucesiva adición de unidades homogéneas".

> "El número no es, pues, otra cosa que la unidad de síntesis de lo diverso de una intuición homogénea en general, unidad obtenida al producir yo el tiempo mismo en la aprehensión de la intuición[69]".

Por tanto, según Kant, si a la base de la geometría siempre hay una "imagen" trazada por la imaginación productiva; la explicación última del número, por su parte, se encuentra en un procedimiento para "suministrar a un concepto su propia imagen[70]". De ahí que la noción de sucesión, establecida a través de la intuición pura del tiempo, esté a la base de las

[67] Kant, CRP, A140-B179
[68] Kant, *ibid*, B180
[69] Kant, *ibid*, A143 -B182
[70] Según Javier de Lorenzo, el problema de explicar cómo a pesar de la particularidad de algunos enunciados de la aritmética, "el razonamiento matemático da paso a una conclusión universal ... [Kant] lo resuelve apoyándose en la noción de esquema que, como producto de la imaginación pura, alcanza la universalidad asociada al concetpo gracias a un proceso constructivo". De Lorenzo, *Kant y la Matemática. El uso constructivo de la razón pura*, Tecnos, Madrid, 1992, pág. 23.

proposiciones de la aritmética[71]. Vayamos ahora a la distinción kantiana entre "magnitudes extensivas" y "magnitudes intensivas".

Para Kant, "magnitud extensiva" o extensión geométrica, es aquellas "en la que la representación de las partes hace posible –y, consiguientemente precede necesariamente a- la representación del todo[72]". Para aclarar esta definición Kant sugiere pensar cómo, para representarme una línea, requiero producirla gradualmente a partir de un punto. Por su parte, el otro tipo de magnitud, la *intensiva*, es aquella "que únicamente aprehendemos como unidad y en la que sólo podemos representar la multiplicidad por aproximación a la negación = 0[73]".

Es posible que Kant establezca la idea de que todas las intuiciones de magnitud son extensivas, esto es, geométricas, dada la dificultad de expresar numéricamente ciertas magnitudes "inconmensurables" conocidas desde el trabajo de Euclides[74]. De hecho, la cuestión de la caracterización precisa de los números irracionales continuó siendo un problema para el análisis matemático hasta finales del siglo XIX.

Por su parte, las magnitudes intensivas, esto es, aquellas "que únicamente aprehendemos como unidad y en las que sólo podemos representar la multiplicidad por aproximación a la negación = 0" está relacionada directamente con el problema de la continuidad: "La propiedad de las magnitudes en virtud de la cual ninguna parte suya es la más pequeña posible (o parte simple) se llama continuidad de esas magnitudes[75]". En términos geométricos, la continuidad no tiene problema pues, de entrada, el punto tal como lo definió Euclides es el elemento simple, básico, distinto de cualquier segmento de recta de cualquier magnitud. No sucede lo mismo con la expresión numérica o aritmética de las cantidades. En particular, la representación de cantidades infinitesimales que están a la base

[71] Tal dificultad en la explicación kantiana del concepto de número, resulta insatisfactoria en el siglo XIX. De hecho, una parte de la crítica de Frege a Kant buscará definir el concepto de número apoyándose únicamente en la lógica. Ver capítulo III.

[72] Kant, CRP, A163

[73] Kant, *ibid*, A168-B210

[74] En el libro V del trabajo clásico de Euclides, *Elementos*, se estudian ciertas magnitudes llamadas "inconmensurables" que no pueden expresarse como razón de dos números enteros –es decir, los modernos números irracionales. Tales magnitudes, sin embargo, si tienen representación geométrica. La más conocida magnitud de esta clase es la raíz cuadrada de dos que, geométricamente, se determina de inmediato trazando la diagonal de un cuadrado de lado 1 pero que, aritméticamente no puede expresarse como razón de dos números naturales. Los problemas de la estructura de los números racionales y la continuidad de los reales, que está relacionada con este problema, se analizarán con más detalle en el Capítulo IV.

[75] Kant, CRP, B211

del Cálculo y que se determinan "por aproximación a la negación = 0", constituye un problema que sólo se resuelve apelando a la representación del tiempo como línea continua e infinitamente prolongable donde está determinada una relación de sucesión, esto es, de orden. Kant no entra a la discusión detallada de estas cuestiones, sin embargo, es muy probable que él haya estado al tanto de tales problemas internos de las matemáticas[76].

En resumen, la intuición del tiempo como orden lineal está, según Kant, a la base de las proposiciones de la aritmética. Además, para Kant los esquemas del entendimiento brindan la explicación del concepto de número apelando a la sensibilidad y a la imaginación. Como resultado de ello tenemos que, según la postura kantiana, para la definición de los objetos de la aritmética es necesaria la intuición sensible y por tal razón los juicios de la aritmética son sintéticos *a priori*. Tales argumentos serán objetados, a finales del siglo XIX, por Frege, Cantor y Dedekind.

Por su parte, del lado de la tradición británica humeana -empirista- encontramos en el siglo XIX otra propuesta que rechaza la posición kantiana de considerar las proposiciones de las matemáticas como juicios sintéticos *a priori*. Tal posición es la de John Stuart Mill, de cuyos argumentos para sostener la naturaleza no necesaria de las proposiciones de la aritmética nos ocuparemos en el siguiente capítulo.

[76] Kant escribió su *Historia natural general y teoría de los cielos* en 1755 y los *Principios metafísicos de la ciencia de la naturaleza*, donde presenta su propia versión de las leyes de Newton y de la mecánica en 1776, esto es, antes de escribir la *CRP*. Sobre todo en el segundo trabajo, Kant revisa cuidadosamente los problemas del movimiento cuya expresión matemática, el cálculo, requería en el siglo XVIII de operaciones con números infinitesimales.

Capítulo II

John Stuart Mill: la verdad de las proposiciones matemáticas fundada en la inducción

1. *A System of Logic*: el empirismo de Mill

John Stuart Mill (1806-1873), el más importante filósofo empirista británico del siglo XIX, sostiene una posición muy peculiar en torno a la naturaleza de las proposiciones matemáticas. Para él, si bien tales proposiciones junto a las de la lógica son las más generales y más ciertas entre todas las afirmaciones de la ciencia, su verdad se funda en la *inducción per enumerationem simplicem* y su conocimiento no es *a priori* sino que, como cualquier otro, se apoya en la experiencia[1]. En este sentido, Alan Ryan sugiere que John S. Mill construye un sistema filosófico que bien puede llamarse "inductivismo[2]". Esto es, partiendo de la premisa de que todo conocimiento comienza y proviene de la experiencia, Mill desarrolla una serie de argumentos y métodos cuyo núcleo es el "proceso de inducción", garantía única de la verdad de las proposiciones generales, en especial de las científicas y dentro de ellas, de las proposiciones de las matemáticas, consideradas tradicionalmente como verdades necesarias.

Ahora bien, para la escuela empirista dar cuenta de las verdades necesarias siempre ha sido problemático, pues se supone que el conocimiento de tales proposiciones, dada su universalidad y generalidad es un conocimiento *a priori*, esto es, basado solamente en aquello que podemos imaginar o concebir y no en la experiencia directa de cuestiones fácticas[3], que brinda solamente un conocimiento particular y contingente. En este sentido, el empirismo ha ensayado dos soluciones posibles en relación al carácter necesario de las proposiciones de las matemáticas y, en particular, de la aritmética. Una de ellas es la posición de Hume, bosquejada en el capítulo I, quien considera que la necesidad de las proposiciones de las matemáticas puede explicarse porque ellas carecen de cualquier contenido empírico y son meras *relaciones entre ideas*, establecidas mediante operaciones lógicas. La otra respuesta es la de Mill quien niega el carácter necesario de las proposiciones de la artimética. Mill, a diferencia de Hume, argumenta que las

[1] Mill John S, *A System of Logic (1843)*, III- XXIV, Sección 4., University of Toronto Press, Toronto, 1974
[2] Ryan Alan, *John Stuart Mill*, Pantheon Books, New York, 1970.
[3] Alan Sidelle, "Neccesary Truth and Convention" en, E.Craig (General Editor), *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Routledge, London and New York, 1998.

proposiciones de las matemáticas si tienen contenido empírico y por tanto, como cualquier otra *proposición real*, no tienen un carácter necesario.

Ahora bien, la argumentación de Mill acerca del carácter empírico de las proposiciones de la geometría y la aritmética, lo lleva a confrontar la idea kantiana de que los juicios de las matemáticas se apoyan en las intuiciones puras del tiempo y el espacio. En este sentido, el trabajo de Mill objeta los argumentos básicos de la llamada postura *intuicionista*[4] en matemáticas y en filosofía de las matemáticas. Tal escuela, heredera de la tradición kantiana y dominante en el siglo XIX, aceptaba la tesis de que para la formulación de los juicios de las matemáticas, el entendimiento se apoya en las intuiciones puras del tiempo y del espacio, que se encuentran *a priori* en la psique humana[5]. Sir William R. Hamilton, por ejemplo, un influyente matemático inglés contemporáneo de John S. Mill, sostenía la idea de que los números reales se derivan de la intuición del tiempo, e incluso de que el álgebra puede ser concebida como la "ciencia de la intuición pura del tiempo[6]".

Similar postura también sostenida por William Whewell[7], asumía la doble distinción kantiana de los juicios en *a priori* y *a posteriori* según la fuente de conocimiento de la que provienen: serán *a priori* aquellos cuyo conocimiento no está fundado en la experiencia y *a posteriori* en el caso contrario. Y en juicios analíticos y sintéticos según su carácter explicativo o ampliativo del conocimiento. Bajo este esquema, se caracterizaba a las proposiciones matemáticas como juicios sintéticos *a priori*, es decir, como proposiciones que efectivamente amplían el conocimiento –y de ahí su carácter sintético-, pero cuya fuente de conocimiento no es la experiencia sino las propias capacidades del sujeto que conoce, la estructura de la sensibilidad del sujeto, diría Kant: de ahí su carácter de juicios *a priori*. La necesidad de las proposiciones de las matemáticas dentro de la explicación

[4] Por *intuicionismo* no me refiero aquí a la escuela matemática encabezada por Brower. Más bien, empleo la palabra intuicionismo para referirme a la generalizada posición de influyentes matemáticos del siglo XIX (Hamilton y Kronecker entre otros) que aceptaban la tesis kantiana de que a la base del conocimiento matemático se encuentra la intuición pura. Ver, Frazier R., "Intuitionism" en Craig (Ed.), *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Routledge, London and New York, 1998.

[5] Kant I., *Crítica de la Razón Pura* (1781-1787), Alfaguara, Madrid, 1984. Traducción de Pedro Ribas

[6] Hamilton, "Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time (1837)", http://www.math/tcd.ie/pub/HistMath//Hamilton/Pure time

[7] William Whewell (1794-1886), fue un precursor inglés de la Filosofía de la Ciencia, crítico de la posición empirista de Hume que funda todo el conocimiento en la experiencia y cercano aunque con objeciones, de la postura idealista alemana que basa la ciencia en ideas *a priori*. E.Craig (General Editor), *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Routledge, London and New York, 1998.

kantiana es entonces una señal de su aprioridad, esto es, la necesidad de tales proposiciones se explica, sobre todo, mediante argumentos epistemológicos.

Hay entonces dos maneras posibles de negar el carácter sintético *a priori* de las proposiciones de la aritmética. O bien se objeta el carácter sintético de tales proposiciones, sosteniendo su naturaleza analítica y por tanto se argumenta que son proposiciones que pueden reducirse a la lógica, que es la postura de Frege; o bien se niega su carácter de juicios *a priori* que es el camino de Mill. En esta segunda ruta para objetar el carácter *sintético a priori* de las proposiciones de la aritmética y, en general, de las matemáticas, un problema es dar cuenta de su carácter necesario y de su universalidad o generalidad en la medida en que, al ser proposiciones cuya verdad depende de la experiencia, se presenta una especie de hiato entre la verdad particular o contingente apoyada por la experiencia y la verdad universal que es un aparente rasgo de las proposiciones de las matemáticas.

En este sentido, Ryan muestra que John S. Mill hizo notables esfuerzos a lo largo de su vida intelectual con el fin de mostrar que "la aparente necesidad de la verdad geométrica y matemática puede explicarse en términos inductivos[8]", poniendo asimismo similar empeño en demostrar que la universalidad de la ley de la causalidad, no requiere de ningún compromiso con el conocimiento *a priori* y puede sostenerse también en la inducción. El problema de Mill, tal como lo esboza Ryan, consiste en lo siguiente:

> "Si todo lo que hay son hechos particulares, eventos individuales y particulares [susceptibles de ser conocidos a través de la experiencia], si esto es todo lo que podemos observar, entonces, ¿acerca de qué son las leyes generales?. La respuesta de Mill es que las leyes generales deben ser entendidas como reglas de inferencia, reglas que nos permiten inferir de ´particulares a particulares´[9]".

A tales reglas, Mill las llamará reglas de "inferencia real" y ellas norman el proceso de inducción. Vale la pena examinar paso a paso ahora, la argumentación de Mill en torno a la naturaleza de las proposiciones matemáticas.

---

[8] Ryan A., *op.cit.*, pág xiii. Ryan insiste en que para volver inteligibles "los objetivos, método y estilo característico de Mill" hay que estudiarlo teniendo presente su "desagrado con el intuicionismo de Whewell y sus colegas", tal como el propio Mill establece en su *Autobiografía*.

[9] Ryan A., *op.cit.*, pág.xvi

2. Inducción, inferencia real y proposiciones fácticas

John S. Mill aborda lo relativo a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética, de la geometría y del álgebra en el capítulo titulado "Of the Remaining Laws of Nature" de su *A System of Logic Ratiocinative and Inductive.* De entrada entonces, las proposiciones en cuestión quedan comprendidas entre las "leyes de la naturaleza" y, si merecen un tratamiento especial, es solamente porque tales leyes tienen dos rasgos específicos: uno es su nivel de generalidad y universalidad, es decir, el que a diferencia de otros enunciados de la ciencia "las proposiciones de las matemáticas son verdaderas de todos los fenómenos, sin importar o al menos sin distinción de su origen[10]" y, en segundo lugar, el que "las leyes de la igualdad y la desigualdad entre espacios y entre números [que constituye el tema de esta rama del conocimiento] no tiene conexión con leyes causales[11]".

En relación al nivel de generalidad que tienen las proposiciones de las matemáticas, Mill contrasta entre las proposiciones de la física y de las matemáticas. Afirma que, por ejemplo, la siguiente proposición de la física:

(*) "Los cuerpos celestes describen áreas iguales en tiempos iguales"

que es una formulación simplificada de la segunda Ley de Kepler, es una proposición que trata de igualdades y proporcionalidades, es decir, es una proposición que comprende una afirmación sobre "relaciones de semejanza", que es el tema específico de las proposiciones matemáticas. Sin embargo, la proposición (*) trata de un tipo de fenómeno determinado, a saber, el movimiento planetario y, como fenómeno particular, se deriva de leyes causales que describen, específicamente, el "origen" de tal movimiento planetario.

Por su parte, enunciados de las matemáticas, tales como:

(**) "Si dos líneas rectas se intersectan entre sí, los ángulos opuestos por el vértice que definen son iguales"

Es una proposición de la geometría con un absoluto nivel de generalidad: es una proposición verdadera sin importar el origen o la causa de la intersección de dos líneas; en este sentido, es una proposición verdadera para todas las líneas y todos los ángulos, no importa cómo o por qué se hayan intersectado.

[10] Mill, *op.cit*, Libro III, cap.XXIV, Sección 3, pág. 608.
[11] *Ibid.*

Este nivel de generalidad y universalidad de las proposiciones de las matemáticas es lo que, según Mill, ha llevado a considerarlas "verdades necesarias" cuyo conocimiento es, además, *a priori.* Sin embargo, el autor brinda otra explicación para este específico rasgo de universalidad que distingue a las proposiciones de las matemáticas de otros enunciados de la ciencia.

Para Mill, el objeto de estudio de las matemáticas son un tipo de "relaciones", las relaciones de semejanza que comprenden el estudio de la igualdad, la desigualdad y la proporcionalidad[12]; todas ellas establecen relaciones entre objetos, que debemos considerar independientemente de la relación de causalidad. La relación de semejanza resulta, entonces, una más entre el conjunto de "relaciones entre objetos" estudiadas por Mill, que comprenden "la existencia, la causalidad, el orden en el tiempo, el orden en el espacio y la semejanza".

Para Mill, la relación de semejanza, en especial, la igualdad y la desigualdad entre objetos, así como las relaciones de "ser antecedente, ser consecuente y la simultaneidad", que son relaciones de orden en el tiempo, son un tipo de relaciones *sui generis*, que no tienen más fundamento que, en primer lugar, "las dos sensaciones de los objetos [relacionados] y, después, lo que podemos llamar un sentimiento de semejanza o un deseo de semejanza[13]". En relación a ello Mill señala:

> Que el sentimiento de semejanza de dos colores sea un tercer estado de conciencia, que experimento después de tener dos sensaciones de color; o que, como en el sentimiento de sucesión, la semejanza esté involucrada en las propias sensaciones, es cuestión de otra discusión. Pero en ambos casos, estos sentimientos de semejanza son partes de nuestra naturaleza; y partes tan poco susceptibles de análisis, que se presuponen en cualquier intento de analizar cualquier otro de nuestros sentimientos[14].

Resulta entonces que las matemáticas, cuyo objeto de estudio principal según Mill, son las relaciones de semejanza, así como el sentimiento de sucesión entre objetos, están en el fondo sostenidas en la experiencia; específicamente, en ese "sentimiento de semejanza" o de "sucesión" que siendo parte de nuestra naturaleza, es poco susceptible de cualquier análisis posterior.

[12] *Ibid.*
[13] Mill, *op.cit.*,Libro I, III, Sección 11, pág 70.
[14] Mill, *Ibid*, pág.70

Una vez especificado este objeto general de estudio de las matemáticas de acuerdo a la teoría de Mill, se vuelve muy clara su concepción acerca de la aritmética, en tanto cuerpo de proposiciones deductivas de la mayor generalidad posible que se apoyan en un reducidísimo número de axiomas, los cuales son auténticas verdades empíricas, pues provienen de la experiencia que cada individuo singular haya tenido al comparar objetos –a saber, del sentimiento de semejanza o sucesión recién aludido-, y no de ninguna clase de "conocimiento *a priori*".

Mill señala entonces, que si algo en el campo de la aritmética requiere explicación es el hecho de "la inmensa multitud de verdades comprendidas en las ciencias matemáticas, que pueden ser obtenidas de un número tan pequeño de leyes elementales[15]". No encuentra sin embargo, misterio alguno en lo relativo al fundamento de los enunciados más básicos de esta disciplina: son sencillamente generalizaciones llevadas a cabo a partir de la experiencia. Los axiomas que Mill sugiere como base para la aritmética, a partir de los cuales se puede deducir lógicamente el amplio conjunto de enunciados numéricos que, por lo general, toman la forma de igualdades, son las siguientes dos afirmaciones:

(***) "Dos cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí"
"Si sumamos iguales a iguales, la suma obtenida es igual"

Ahora bien, el carácter empírico de las matemáticas, más allá del hecho de que la mayoría de sus proposiciones verdaderas se obtiene mediante la deducción lógica cuidadosa a partir de premisas verdaderas; se basa en que sus axiomas primeros (***) son *proposiciones reales*, es decir, proposiciones fácticas, cuya verdad es inferida a través de un proceso de inducción. En el caso específico de (***), la verdad de tales proposiciones descansa en la inducción por enumeración simple; es decir, ambas afirmaciones son generalizaciones de la experiencia que cada individuo ha tenido al manipular y comparar objetos iguales; y de ninguna manera son ese tipo de verdades que Leibniz llamaba "verdades de razón".

[15] Mill, *Ibid*, Libro III, XXIV, Sección 5, pág. 610

2.1 Las proposiciones de la aritmética como proposiciones reales, fácticas

Conviene ahora revisar, antes de entrar al análisis de la definición de número propuesta por Mill, la distinción que el autor establece entre proposiciones reales y proposiciones meramente verbales, a fin de entender de manera más completa el conjunto de su argumentación.

John S. Mill desecha la distinción kantiana entre juicios analíticos y sintéticos, y utiliza otra clasificación en cierta medida análoga a la de Hume, diferenciando entre "proposiciones meramente verbales" y "proposiciones reales". Las proposiciones meramente verbales son, según Mill, aquellas que "no se relacionan con ninguna cuestión de hecho en el sentido propio del término sino solamente con el significado de los nombres[16]". La proposición "Los solteros son hombres no casados" por ejemplo, es meramente verbal pues lo que afirma "no se relaciona con ninguna cuestión de hecho", limitándose a esclarecer o mostrar la equivalencia del significado de dos palabras[17]. Por su parte, las proposiciones reales son aquellas que predican de algún objeto, algo no involucrado en el significado del nombre con el cual tal objeto es denotado[18].

Cabe notar que una diferencia de fondo entre la distinción de Mill y la clasificación kantiana de los juicios en analíticos y sintéticos, está en el hecho de que para el primero las proposiciones meramente verbales no sólo no son necesarias sino que incluso *no tienen valor de verdad* ya que sólo pueden *concordar o disentir* con el uso convencional del lenguaje:

> Las proposiciones meramente verbales no se relacionan con ninguna cuestión de hecho en el sentido propio del término, sino solamente con el significado de los nombres (...) Dichas proposiciones no son susceptibles de verdad o falsedad, sino de conformidad o disconformidad con el uso o convención[19].

[16] Mill, *op.cit.*, pág. 109.
[17] Pese a que Mill incluye un capítulo específico sobre los nombres: "Of names", en su *A System of Logic*, no brinda nunca una definición explícita de lo que entiende como tal. Su preocupación consiste más bien en analizar el uso de los nombres, en discutir la cuestión de si los nombres se refieren a cosas o a "nuestras ideas de cosas" y en clasificarlos en singulares y generales, abstractos y concretos, conotativos y no conotativos. Según mi entender, Mill utiliza la categoría "nombre" tal como en el sentido contemporáneo utilizamos la expresión "término del lenguaje"; es decir, como cualquier expresión del lenguaje que no es una conectiva ni un cuantificador. Es por ello que considero adecuada la formulación de que para Mill, las proposiciones *meramente verbales* simplemente establecen la relación entre dos palabras de acuerdo al uso convencional que de ellas se hace en el lenguaje.
[18] *Ibid.*, pág.115-116
[19] Ibid, pág. 109

Esta idea de las proposiciones meramente verbales como *carentes* de valor de verdad es absolutamente distinta de la noción kantiana de proposiciones analíticas, cuyo rasgo principal es ser verdaderas y necesarias, y cuyo valor de verdad se determina a través del principio lógico de no contradicción. En la clasificación de Mill, la cuestión de la verdad de las proposiciones meramente verbales ni siquiera es objeto de consideración pues, de entrada, tales proposiciones carecen de valor de verdad pudiéndose juzgar solamente su concordancia o disenso con el uso correcto del lenguaje. A partir de ello, la cuestión de la "necesidad" de las proposiciones meramente verbales es un tema cuyo análisis no se presenta siquiera como un problema: sencillamente, ninguna de estas proposiciones es necesaria dado que no es ni verdadera ni falsa.

Ahora bien, en relación a ciertas proposiciones de la geometría y la aritmética, en especial aquellas que establecen definiciones, como por ejemplo: "El triángulo es una figura de tres ángulos" -las cuales, de acuerdo a la clasificación kantiana son proposiciones analíticas-, para Mill, son enunciados empíricos verdaderos, cuya *verdad se infiere realmente por enumeración simple* a partir de la experiencia. Es decir, es mediante la experiencia que cada sujeto individual tiene al observar distintas figuras triangulares "cualquiera sea su origen" constatando que cada vez que se le presenta una figura de esa clase tiene tres ángulos, que puede "inferir", esto es, *generalizar*, la afirmación de que "Todo triángulo es una figura de tres ángulos". No es pues la razón, ni la intuición pura sino la experiencia perceptual la que, según Mill, asegura la verdad de una proposición de esta clase, e incluso es la misma experiencia la que sostiene, en última instancia, tal proposición como un axioma. La cuestión de la "necesidad" de tales proposiciones queda así fuera de la discusión, pues tales enunciados son en el fondo, sólo generalizaciones inductivas a partir de la experiencia, es decir, que se fundan en eventos empíricos particulares. Volveremos sobre esto más adelante.

En relación a las proposiciones reales, Mill sostiene que éstas predican hechos acerca de cosas y sostiene que hay cinco tipos diferentes de *cuestiones de hecho* que pueden ser afirmadas de las cosas: existencia, orden de lugar, orden de tiempo, causalidad y semejanza. Así, según Mill, en cada proposición real se niega o afirma una de estas cuestiones de hecho de alguna cosa u objeto individual, e incluso pueden afirmarse cuestiones de hecho acerca de clases de individuos[20]. Lo decisivo es que, sea lo que sea sobre aquello que predique una proposición real, en todos los casos, su verdad se conoce a través de la experiencia.

Ahora bien, a partir de la clasificación de las proposicione en reales y meramente verbales, Mill introduce otra distinción importantísima dentro de su sistema: aquella entre *inferencias* meramente *aparentes* e *inferencias reales*. Recordemos que las proposiciones meramente verbales, por ejemplo, "los solteros son hombres no casados", no se relacionan con ninguna cuestión de hecho y no son, por tanto, según Mill, "susceptibles de verdad o falsedad", sino sólo de conformidad o disconformidad con el uso o convención del lenguaje. De ahí se sigue que cualquier inferencia que se haga tomando a una de tales proposiciones como premisa no será una "inferencia real" sino que será una inferencia "meramente aparente", dado que no es susceptible de valor de verdad. Por su parte, las proposiciones reales, que predican sobre cuestiones de hecho y que tienen valor de verdad, se establecen a partir de "procesos reales de inferencia" que no son deductivos.

En tal sentido, en lo que concierne a los enunciados de las matemáticas, Mill los califica como *proposiciones reales* que predican sobre cuestiones de hecho y que tienen, por tanto, valor de verdad. El empirismo radical de Mill se hace evidente en su consideración de que, además de que tienen contenido empírico, la verdad de las proposiciones matemáticas fundamentales se *demuestra* por inducción. De lo cual se sigue que, si bien las matemáticas tienen la particularidad de constituir un sistema de razonamiento deductivo, todo este andamiaje está sostenido en un reducido número de "verdades directamente inductivas[21]", consistente en algunos axiomas junto a ciertas proposiciones relativas a existencia de objetos, expresadas en definiciones.

Mill señala que para contestar a la pregunta acerca de cómo "van a probarse las proposiciones, encontramos que es necesario indagar en lo que [éstas] contienen que requiere o es susceptible de prueba[22]". Es importante aquí, distinguir claramente entre lo que Mill entiende por "inferir" y lo que entiende por "deducir". En tal sentido, una

[20] Mill considera como existentes las "clases de individuos". Ver Mill, *op.cit.*, sección 4. "Kinds have a real existence in nature" del capítulo VII, "Of the Nature of Classification, and the Five Predicables".

[21] Mill, *op.cit.*, pág.609. La sección donde el autor plantea estas ideas lleva por título, "Los axiomas y teoremas de las matemáticas también comprenden las principales leyes de orden en el espacio y descansan en la inducción por enumeración simple".

[22] Mill, *op.cit.*, pág.109.

afirmación contundente sobre esta distinción es que: "... el fundamento de todas las ciencias, aún de las deductivas o demostrativas, es la Inducción[23]".

Para la geometría en particular, Mill aclara lo anterior señalando que "aquellos principios primeros de la geometría que son axiomas, son verdades experimentales" y preguntándose sobre la evidencia sobre la que descansan tales principios, insiste: "son verdades experimentales; generalizaciones de la observación[24]". Así, la proposición "Dos líneas rectas que se intersectan no pueden encerrar un espacio", por ejemplo, es una verdad inferida a partir de la evidencia de nuestros sentidos, esto es, es una generalización de nuestra experiencia pasada al haber percibido un sinnúmero de líneas rectas que tras intersectarse, divergen indefinidamente y, en tal sentido, "no encierran un espacio".

Para Mill, por tanto, la inducción es la única operación de la razón sobre la que se puede fundar la verdad de proposiciones reales. La deducción por su parte, esto es, la operación de derivar y concluir verdades a partir de premisas verdaderas, es una acción a través de la cual la razón infiere de proposiciones generales a particulares. Por ejemplo, si consideramos el silogismo:

Todos los hombres son mortales
Juan es hombre
Juan es mortal

Lo decisivo en el análisis propuesto por Mill no consiste en esclarecer la manera en que la mortalidad de Juan se deduce o infiere a partir de la premisa mayor; sino en explicar cómo se ha establecido la verdad de tal proposición universal. Mill defiende la tesis de que la afirmación universal "Todos los hombres son mortales" es verdadera y su verdad descansa en la inducción, es decir, en la generalización legítima que hacemos a partir de haber visto morir a una gran cantidad de hombres; y de no conocer a nadie que pueda presumir de ser inmortal. La verdad de la conclusión del silogismo en cuestión entonces, se desprende no de la deducción correcta a partir de premisas, sino de la verdad de las premisas. Y la verdad de la premisa mayor no se demuestra mediante ninguna deducción o mediante algún "análisis" de los conceptos, sino directamente por *inducción*, esto es, generalizando a partir de la experiencia perceptual.

[23] Mill, op,cit., pág.224
[24] Mill, *op, cit.*, pág. 229-231

Justamente aquí se inscribe una de las preguntas que Mill presenta desde el comienzo de su trabajo:

> "¿Es la lógica el arte y la ciencia del razonamiento o es la lógica el arte y la ciencia de la búsqueda de la verdad?[25]"

Parte de la discusión que el autor tiene con William R. Hamilton descansa en esta disyuntiva. Para Mill, como claramente expresa en relación a los axiomas de la geometría: "Algunos de los primeros principios de la geometría [establecidos por inducción] son axiomas y no son hipotéticos[26]". Es decir, lo que la inducción logra es establecer verdades, y de lo que se ocupa la Lógica es de la búsqueda de la verdad aunque para ello indaga en las operaciones válidas del razonamiento.

De esta manera, la cuestión de la *necesidad* de algunas proposiciones de las matemáticas y, en general, de la ciencia, queda excluida de la discusión. En tanto cualquiera de tales verdades se sostiene en la experiencia y se obtiene por inducción, esto es, generalizando a partir de casos particulares, ninguna de estas verdades es necesaria. El único sentido que Mill admite para la noción de "necesidad", o más bien, de "verdades necesarias", es un sentido *débil* por expresarlo de alguna manera: "Los teoremas de la geometría son "verdades necesarias" solamente en el sentido de que necesariamente se siguen de las hipótesis[27]". Es decir, dadas unas hipótesis básicas cuya verdad no es necesaria, pues se han establecido inductivamente mediante la generalización de regularidades observadas en casos particulares, puede decirse que los teoremas que se deduzcan lógicamente de ellas *se derivan necesariamente* de tales hipótesis. Pero nada más. Por tanto, la necesidad en este sentido "débil" queda acotada a la cuestión de la derivación lógica. Los aspectos epistemológicos que relacionan la necesidad de las proposiciones al conocimiento *a priori* no tienen cabida en la argumentación de Mill.

En este sentido, para Mill las matemáticas constituyen un cuerpo de proposiciones verdaderas conectadas entre sí a través de cadenas deductivas, pero su sostén básico son unas cuantas proposiciones reales –los axiomas-, cuya verdad se demuestra inductivamente. Si utilizamos la terminología kantiana para comprender la posición de Mill, resulta que las proposiciones de las matemáticas son claramente proposiciones sintéticas *a posteriori*, en el

[25] Mill, *op.cit.*, pág.4
[26] Mill, *op.cit.*, pág.229
[27] Mill, op,cit., pág. 224

sentido de que amplían el conocimiento; y de que todo el conocimiento que brindan incluso aquellas proposiciones básicas consideradas axiomas, proviene de la experiencia. En esta dirección, tal como sugiere Skorupski[28], una vez establecido lo anterior lo que Mill se propone es hacer un análisis empirista de la deducción.

Resumiendo lo discutido hasta aquí tenemos que para Mill, las matemáticas se sostienen en un pequeño cuerpo de axiomas y definiciones cuya verdad es "directamente inductiva" y la verdad de las demás proposiciones de la aritmética, la geometría y el álgebra radica en que ellas pueden inferirse deductivamente de los axiomas y de ciertas definiciones básicas. Algunas preguntas que quedan pendientes son, por un lado: ¿qué es la deducción?, ¿qué tipo de reglas son las reglas deductivas, es decir, cuál es la naturaleza de las reglas o proposiciones de la lógica[29]? Por otro, queda también pendiente la cuestión de qué garantiza o en qué se funda el proceso de inducción como método de obtención de verdades, que constituye una de las críticas más agudas de Frege a la posición de Mill. Finalmente, será necesario esclarecer sobre qué tipo de hechos predican las proposiciones más generales y abarcativas como las de las matemáticas y el álgebra. O, planteándolo de otra manera, ¿a partir de qué hechos es posible inferir, por ejemplo, la propiedad conmutativa de la suma? Para responder a esta cuestión, requerimos revisar lo que Mill entiende por número.

3. La definición de los números ofrecida por Mill

El primer aspecto que analizaremos en esta sección se refiere a la propia noción de "definición". Esclarecer qué es para Mill "definir", arrojará luz sobre su presentación de la definición de número y, además, nos introducirá en una de las más importantes dificultades de la discusión en torno a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética, a saber, la cuestión acerca de cómo podemos definir un objeto matemático básico, como el número, el punto o la línea.

[28] John Skorupski, "John Stuart Mill", en Craig Edwards (General Editor), *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Vol.6., Routledge, London & New York, 1998.

[29] Responder la pregunta acerca de lo que Mill considera la naturaleza de las proposiciones de la lógica no constituye un objetivo del presente trabajo, en la medida en que requerimos acotar el tema, de por sí extenso, de la naturaleza de las proposiciones de la aritmética y de la noción de número. Sin embargo, mencionamos la pregunta pues tal cuestión es una de las preocupaciones centrales de la obra de Mill.

Para Mill, las definiciones están entre las más importantes proposiciones meramente verbales y, la noción "más simple" de definición es "una proposición declaratoria del significado de una palabra[30]", de tal manera que las palabras que carecen de significado tampoco son susceptibles de definición. Ahora bien, lo anterior nos exige explicar brevemente lo que Mill entiende por *significado* de una palabra o, según la expresión que él emplea, por el significado de un *nombre*.

Desde el comienzo mismo de su trabajo, Mill presenta un análisis de lo que entiende por la expresión "nombre": una expresión del lenguaje que denota una cosa o un atributo de una cosa[31]. En este nivel de generalidad, los nombres se dividen en singulares y generales, concretos y abstractos y connotativos y no connotativos. La diferencia entre los nombres generales y singulares, está en si denotan a un objeto único e identificable –los nombres singulares- o si tal nombre general "puede ser afirmado con verdad, en el mismo sentido, de un número indefinido de cosas[32]". En segundo lugar, Mill distingue entre nombres concretos y abstractos dependiendo si el nombre está por –se refiere a- una cosa, en cuyo caso será concreto o si está por un atributo de una cosa. Para clarificar lo anterior pensemos que si *Margarita* es un nombre singular y concreto; *mujer* es un nombre general y concreto; mientras que *humanidad* es un nombre abstracto en la medida que está por el atributo de una gran cantidad de cosas.

Ahora bien, una tercera distinción entre los nombres que nos "conduce profundamente en la naturaleza del lenguaje[33]" es aquella entre los nombres connotativos y los nombres no connotativos.

> " Un término no connotativo es aquél que significa solamente un sujeto o un único atributo. Entendiendo por sujeto cualquier cosa que posea atributos. Entonces, Juan, Londres o Inglaterra son nombres que significan solamente un sujeto. Blancura, longitud, virtud, significan solamente un atributo. Ninguno de estos nombres, por tanto, es connotativo. Sin embargo, *blanco, largo, virtuoso*, son connotativos. La palabra blanco, denota todas las cosas blancas, como la nieve, el papel, la espuma del mar, etc., e implica o, en el lenguaje de los escolásticos, *connota*, el atributo de la blancura[34]."

[30] Mill, J.S. *op, cit.*, I, Capítulo VIII, Sección 1, pág.133

[31] El primer capítulo del trabajo de Mill, *A System of Logic*, se dedica exclusivamente a los nombres, entendidos como "términos del lenguaje", utilizando una expresión contemporánes. Si bien Mill no da expresamente una definición de aquello que entiende por "nombre", el rasgo que comparten es que denotan o refieren a "cosas" o a atributos de cosas.

[32] *Ibid*, Libro I, Capítulo 3, pág.28.

[33] *Ibid*, pág. 31

[34] *Ibid*, pág. 31

Tenemos entonces que la distinción entre nombres connotativos y no connotativos es fundamental para entender el *significado* de una palabra: si los nombres connotativos son aquellos que están por algún atributo que puede ser común a diversas cosas, establecer el significado de un nombre connotativo consiste justamente en establecer el atributo que tal expresión connota. Ahora bien, mientras que los nombres singulares concretos o abstractos, simplemente *denotan* a una cosa o a un atributo, los nombres generales, *denotan* conjuntos de cosas y *connotan* el atributo que tal conjunto de cosas tiene en común. De esta forma, *definir* una expresión o nombre connotativo, consiste en establecer "mediante una oración declarativa su significado", es decir, establecer el atributo que tal expresión connota.

> "En el caso de los nombres connotativos, el significado, como ha sido observado con frecuencia, es la connotación; y la definición de un nombre connotativo, es la proposición que declara su connotación[35]".

Tenemos pues, expuesto de manera precisa lo que es establecer la "definición de un nombre connotativo", a saber, dar una "proposición que declare la connotación" del nombre en cuestión. Esto es relevante para la definición de número pues para Mill, los números son nombres generales que son connotativos, por lo cual para definirlos, lo que se requiere es precisar el "atributo" por el cuál están tales nombres, esto es, el atributo que *comparten* los objetos a los cuales refiere el nombre. En cierto sentido, entonces, los nombres connotativos equivalen a nuestros términos predicativos. De su propia definición se sigue que "Todos los nombres generales concretos son connotativos", es decir, palabras como hombre o mujer son para Mill nombres connotativos puesto que son nombres concretos y generales, por lo cual refieren o *están* por una infinidad de personas singulares "considerándolas como una clase". De igual manera sucede con los números. Si en el caso de la palabra "mujer", entendemos que ésta es un nombre concreto y general, porque en primer lugar está por "cosas" –por una infinidad de mujeres concretas: Margarita, María, Ana, etc.- y en segundo lugar, está por un atributo que todos esos "objetos" tienen en común –la feminidad de todas ellas-; de igual manera sucede con los números. Por ejemplo, según Mill, el nombre "dos" es un nombre concreto general, tal como podemos encontrarlo en las expresiones "dos casas" o "dos cuadernos".

[35] *Ibid*, pág.133.

El carácter concreto del número dos –o de cualquier otro número- está en que, para Mill, siempre que utilizamos tales expresiones nos referimos a conglomerados de objetos concretos; mientras que su carácter general está en que el nombre "dos" está por "algún atributo" que hace que el objeto denotado tenga la peculiaridad de "ser dos". Tal atributo, que es la connotación del número –entendido como nombre-, es lo que necesitamos establecer en su definición.

Además de lo anterior, hay otro aspecto importante de lo que Mill entiende por "definir":

> "La única definición adecuada de un nombre es ... aquella que establece los hechos, todos los hechos, que el nombre involucra en su significación[36]".

Esta idea surge directamente tanto de lo expuesto por Mill acerca de la teoría de los nombres, como de su postura empirista pues según su visión, cualquier nombre connotativo o bien habla de cosas, o de atributos de cosas, por lo cual para definirlo será necesario establecer una demarcación precisa acerca de *cuáles* cosas distingue o, dicho de otra manera, acerca de qué hechos habla o a cuál atributo de cosas se refiere.

Resulta entonces que para John S. Mill, mostrar que una definición de número es adecuada, consiste en: i) una vez presentada la explicación de tal nombre, ii) mostrar que tal nombre consiste en "la afirmación de un hecho". Esto es, son dos pasos los que se requieren para el análisis de la definición de un número cualquiera; el más importante de los cuales es exhibir el hecho afirmado por el número: "Las definiciones, pese a que sean solamente de nombres, deben estar fundadas en el conocimiento de las cosas correspondientes[37]". De acuerdo a este señalamiento sobre lo que debe contener una definición, Mill necesita exhibir "el hecho afirmado en la definición de un número" y señala que tal cosa consiste en un "hecho físico". A partir ello, y en concordancia con su teoría general de los nombres, el dos, el tres, el cuatro, etc., *denotan* fenómenos físicos y *connotan* una propiedad física de tal fenómeno.

> "Dos, por ejemplo, denota todos los pares de cosas y connota aquello que los hace pares[38]"

[36] *Ibid*, pág. 136
[37] *Ibid*, pág. 150
[38] *Ibid*, pág.610

Resulta así que para Mill los números son, ante todo, propiedades o atributos de fenómenos físicos observables. Es decir, son los sentidos los que nos permiten conocer la diferencia que hay entre, por ejemplo, "dos caballos y tres caballos[39]". De ahí que la manera cómo Mill presenta su definición de número consista básicamente en presentar una serie de operaciones lógicas para su construcción, proporcionando abundantes ejemplos donde se "usan" expresiones numéricas: "dos caballos", "tres caballos", "cien guijarros", etc. Y señalando que utilizamos estos términos, a los que él considera nombres generales, concretos y connotativos, porque somos capaces de ***percibir*** tales "agregados" como algo distinto. Es decir, "la diferencia entre 102 caballos y 103 caballos es perceptible, pues si no, no les hubiéramos dado nombres distintos".

Hasta aquí Mill ha ejemplificado lo relativo al uso de expresiones numerales, argumentando que se puede percibir sensiblemente entre agregados de cardinalidad diferente, utilizando una terminología contemporánea. Sin embargo, la pregunta más importante que Mill debe responder es: ¿Qué es aquello *connotado* por el nombre de un número? Es decir, ¿qué es lo expresado en común por el nombre "dos", en las expresiones "dos caballos" y "dos piedras"?

Su respuesta es que lo connotado por el nombre de un número es "alguna propiedad que pertenece a la *aglomeración* de cosas [a la cual] llamamos con tal nombre[40]". Tal propiedad, señala Mill, es la manera característica en la que *se ha conformado* el agregado, y en la que *puede ser separado en partes*. De esta forma, lo que connota una expresión numérica es una propiedad que se descubre indagando en la manera de *conformación* del agregado. A través de este recurso, Mill vincula la definición de número con las nociones de operaciones aritméticas mediante las cuales se pueden "obtener números".

Al revisar el procedimiento de Mill, puede notarse la pertinencia de la objeción fregeana a su argumentación, en lo relativo a que el primero no define explícitamente ni el cero ni el uno. De una forma indirecta, Mill sugiere que hay alguna "propiedad" específica en los números "cero" y "uno" pues siempre comienza sus argumentos partiendo del número "dos". El peculiar comportamiento del cero y del uno en la definición de las operaciones básicas de la aritmética, donde tales números cumplen la función de neutro

---

[39] *Ibid*, pág. 611
[40] Mill, *op.cit.*, pág. 611

bajo cierta operación, será ampliamente estudiado por los algebristas en el siglo XIX[41]. Sin embargo, Mill no establece propiedades para las operaciones aritméticas a partir de las cuales construye su sistema numérico. Más bien, concordante con su teoría de los nombres, se empeña en brindar una definición para cada elemento del sistema, esto es, para cada número. Ni las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, ni el carácter neutro de números específicos para ciertas operaciones es motivo de la atención de Mill. Lo que él hace es sencillamente presentar una "manera característica" en la que se pueden conformar los distintos agregados denotados por los nombres de número.

Mill considera que establecer dicha "manera característica" de conformación de agregados de objetos a los cuales se refieren los números, cubre el requisito que estipuló a la acción de definir: exponer la connotación del término numérico, lo cual permitirá entender por cual tipo de agregados está cada nombre de número. La construcción de tal "manera característica" de conformación de los números es presentada por Mill después de indagar en la *multiplicidad* de maneras en las que cada número entero puede formarse a partir de otros. El razonamiento de Mill consiste en señalar que, por ejemplo, 8 puede construirse mediante la operación (7+1), o mediante (6+2) o de varias otras manera. Su argumento, además, vuelve a insistir en el carácter concreto de los números:

> "Cuando llamamos a una colección de objetos, dos, tres, cuatro, etc., no son dos o tres en abstracto... son dos o tres cosas de alguna clase particular: caballos, piedras, pulgadas, libras de peso, etc."
>
> "Lo que el nombre del número connota es la manera en la que los objetos individuales de una clase dada deben ser reunidos... para producir un agregado particular[42]".

Así, el tres se puede formar de la unión de la unidad con el número dos. El cuatro a su vez, puede formarse de la unión de la unidad con el número tres o de la unión de dos veces el número dos. Esta multiplicidad de "modos de formación" además, crece en la medida en la que nos referimos a números mayores, es decir, hay más maneras de "formar" el seis, por ejemplo, que de las que existen para formar el cinco o el cuatro a partir de la suma de sus

[41] Ver en particular el trabajo de Boole, "The laws of Thought" (1854), en *Collected Logical Works*, The Open Court Publishing Co., Illinois, 1952.
[42] *Ibid*, pág. 612

predecesores. Por tal razón Mill decide *fijar* "la connotación de los números en un principio uniforme, que es de gran sencillez":

> "Cada número se considera como formado por la adición de la unidad al número inmediatamente inferior en magnitud[43]".

De esta manera, la connotación de cada uno de los números naturales será la adición de la unidad a su predecesor, esto es, en cierta medida Mill entiende el sistema de los números naturales como un agregado ordenado –él lo llama "serie ascendente"- por la función sucesor. Sin embargo, Mill simultáneamente considera que a través de la función sucesor puede establecer la definición de cada número. De acuerdo a este procedimiento, Mill señala que cada proposición aritmética es el resultado de una operación aritmética. Y añade, toda proposición aritmética "es el enunciado de *uno* de los modos de formación de un número dado". Las operaciones aritméticas que Mill reconoce explícitamente como tales son la suma, la resta, la multiplicación, la división, la elevación de un número a una determinada potencia y su inverso, la obtención de la raíz n-ésima de un número dado.

De esta manera si tenemos proposiciones aritméticas que enuncian "modos de formación" de números, "14 = 7 + 7" , "36 = 72 / 2", etc., podemos ahora sí demostrar o probar la verdad o falsedad de esa afirmación, reduciendo deductivamente los términos –números- que componen tal enunciado a su modo de presentación simple: aquél expresado mediante la adición de la unidad. Así, las proposiciones matemáticas podrán deducirse rigurosa y lógicamente de principios básicos aceptables cuya fundamentación será, sin embargo, la experiencia empírica y la inducción. Las proposiciones de la aritmética para Mill por tanto, pese a ser susceptibles de prueba lógica, quedan sostenidas por proposiciones empíricas.

4. Las objeciones de Frege a la postura de Mill

En su *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege hace una serie de drásticas críticas a lo que llama "la aritmética de galletas de jengibre" de John S. Mill. Para terminar este capítulo, conviene revisar parte de las objeciones de Frege a Mill en torno tanto a la naturaleza empírica de las proposiciones matemáticas, como a su definición de los números, pues en ellas se exhiben con gran claridad las debilidades y carencias de los

---
[43] *Ibid*, pág.613

argumentos de Mill. Tales debilidades y, sobre todo, las ausencias en las pruebas ofrecidas por Mill, nos permitirán mostrar dos cuestiones de suma importancia para entender el contexto tanto matemático como filosófico en el que Frege desarrolla su trabajo.

En primer lugar, cabe mencionar que los señalamientos críticos de Frege se dirigen hacia las expresiones que Mill deja sin definición, en particular el "cero" y el "uno", o contra los argumentos basados en propiedades de las operaciones que no son satisfactoriamente discutidas: las propiedades conmutativa y asociativa de la suma. Tales objeciones exhiben elocuentemente uno de los principales problemas de las matemáticas de finales del siglo XIX: el de la rigurosidad lógica requerida en una argumentación para considerarla una demostración[44]. En segundo lugar, presentar aquí las críticas de Frege a Mill, permitirá constatar el desplazamiento de la atención filosófica respecto a la naturaleza de las proposiciones matemáticas, de la priorización de aspectos epistemológicas hacia cuestiones lógicas. Hemos ya discutido que el punto central para explicar la naturaleza necesaria de las proposiciones de la aritmética quedó situado por Kant en la fuente *a priori* del conocimiento numérico y aritmético, lo cual es objetado por Mill quien considera empíricas a las proposiciones aritméticas. Frege, por su parte, en su crítica a Mill, si bien rechaza tal carácter empírico, centra su atención en cuestiones lógicas acerca del carácter de la prueba que admiten las proposiciones de la aritmética.

Revisemos pues dos de las objeciones de Frege al trabajo de Mill que considero más pertinentes para la presente investigación. Tales críticas se refieren, en primer lugar, a lo que ha de entenderse por definir y, en segundo, a la ausencia de fundamento para la "inferencia inductiva" tal como Mill la entiende. En relación al primer aspecto Frege señala:

> Secc.7 Se podría pensar que las fórmulas numéricas resultan sintéticas o analíticas, *a posteriori* o *a priori*, según sean las leyes generales sobre las cuales se apoye su prueba. A esto se opone la opinión de John Stuart Mill. Sin duda, parece pretender fundar a la ciencia, como Leibniz, en definiciones, puesto que define los números individuales a la manera de éste; pero su prejuicio de que todo el saber es empírico, pronto pervierte su pensar correcto. Nos enseña, en verdad, que las

[44] Sobre el tema ver, Kline Morris, *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI, México, D.F., 2000. Para una discusión específica sobre lo que al interior de las matemáticas se admite históricamente como prueba ver, Torres Alcaraz Carlos, *Elementos para una crítica matemática de la razón filosófica*, Tesis de Doctorado, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM, México, D.F., 2001.

definiciones no lo son en sentido lógico, que no sólo aseguran el significado de una expresión, sino que a la vez afirman una situación empírica observada[45].

Tal como mostré en páginas anteriores, Mill efectivamente considera que una definición correcta es "aquella que establece los hechos, todos los hechos, que el nombre involucra en su significación". Frege no solamente discrepa con esta postura sobre lo que es una definición[46] criticando la contaminación empírica de una cuestión que él considera meramente lógica; sino que además, muestra que Mill no establece definición alguna ni para el cero, ni para el uno en la medida en que, de acuerdo a su estipulación, no presenta los "hechos", la "situación empírica observada", a los cuáles tales números podrían corresponder. Los hechos sobre los cuales Mill sostiene la definición de los números naturales, se apoyan en la constatación empírica de que "cualquier colección de objetos, además de que produce una impresión en los sentidos, puede ser separada en partes[47]". Este enunciado, cuya verdad se infiere por inducción a partir de los múltiples casos particulares en los que un sujeto ha manipulado colecciones de objetos y constatado la posibilidad de separarlos, es la base de que cada número natural, considerado como agregado o colección de objetos concretos, pueda separarse específicamente en dos partes: por un lado, uno de los objetos y por otro, el resto de ellos. A partir de ello, según Mill, cualquier natural *n* puede expresarse –definirse- de la forma: (n-1) + 1.

Frege señala correctamente que esto podría ser adecuado siempre y cuando tuviéramos definiciones para el cero y para el uno: "Es una lástima que Mill no haya señalado la situación física que serviría como base para los números 0 y 1". De hecho, la definición del cero y del uno constituirá un problema importante para el propio Frege, a la hora de presentar la definición del concepto de número tal como veremos en breve. En todo caso, Mill efectivamente elude la cuestión de definir dichos números, a los cuales no atribuye tampoco ningún carácter de términos lógicos "primitivos" como hacían algunos algebristas de la época. Mill simplemente utiliza el cero y el uno y, en particular la adición de uno al antecesor, constituye el corazón de su procedimiento para definir los demás números; por lo que claramente hay una ausencia importante en su argumentación.

[45] Frege, Die Grundlagen der Arithmetik, *op.cit.*, Sección 7, pág.121
[46] Lo que Frege entiende por "definir" se discutirá con mayor detalle en el siguiente capítulo.
[47] Así parafrasea Frege el postulado establecido por Mill. Frege, *op.cit.*, pág.121

Por otro lado, Frege también critica aquello que Mill entiende por "inducción": "Cuando se dice que una proposición es *a posteriori* no se juzga, según mi interpretación, sobre las relaciones psicológicas, fisiológicas y físicas que pudieran haber hecho posible la formulación de la proposición en nuestra conciencia (...) sino sobre la razón más profunda en que descansa la justificación que la toma por cierta[48]". En esta crítica de Frege a Mill se muestra un aspecto que para las matemáticas de fines del siglo XIX se ha convertido en un problema central: para admitir una proposición como verdadera lo fundamental no es establecer "cómo es que es posible que formulemos (tal enunciado) en nuestra conciencia" sino "encontrar su prueba y seguirla hasta las verdades primitivas". Frege añade que "si en este camino –de la prueba- sólo se encuentran definiciones y leyes lógicas generales, entonces se trata de una verdad analítica[49]".

Resulta entonces que para Frege la mayor debilidad de la argumentación de Mill en relación a las matemáticas está en que, en relación a la "inducción por enumeración simple" como garantía de la verdad de sus proposiciones básicas,

> "ella misma descansa sobre la proposición general de que este procedimiento podría establecer la verdad o, al menos , la probabilidad de una ley. Para quien niegue esto, la inducción no es otra cosa que un fenómeno psicológico, una manera como los hombres llegan a creer en la verdad de una proposición, sin que esta creencia por ello, esté justificada de algún modo[50]".

La distinción que posteriormente será fundamental en la epistemología contemporánea: aquella entre la creencia y el conocimiento, se presenta en esta crítica en toda su intensidad[51]. Para Frege, los argumentos ofrecidos por Mill no garantizan de ninguna manera la verdad de las proposiciones de la artimética, a menos que él pudiera ofrecernos una prueba de que el proceso de inducción establece la verdad de cualquier proposición así obtenida. Proceder como hace Mill, simplemente describiendo la manera cómo adquirimos conocimiento, no constituye de acuerdo a Frege, ninguna prueba de que aquellas generalizaciones que podemos inferir sean verdaderas. "Desde el punto de vista de las rosas, ningún jardinero ha muerto" comenta Frege con sorna, y con razón, en relación a la

[48] Frege, *op.cit.*, pág.117
[49] *Ibid.*
[50] Frege, *Ibid*, pág. 117, nota 6
[51] En relación a esto ver, en particular, Wittgenstein L., *Sobre la certeza*, Gedisa, Barcelona, 2000.

cuestión de que si la experiencia no nos ha ofrecido hasta ahora ningún caso que contradiga una afirmación determinada, nada nos justifica para asegurar que siempre será así.

Resulta pues que a partir de Frege la preocupación sobre de la verdad de las proposiciones de la aritmética se irá desplazando desde aquello que constituye la fuente de su conocimiento, hacia la cuestión acerca de la justificación de su verdad. Tal problema será considerado por Frege como el aspecto central del carácter analítico que él atribuye a las proposiciones de la aritmética. El carácter analítico y *a priori* de las proposiciones de la aritmética, se probará entonces, según Frege, mostrando que efectivamente es posible producir una prueba para tales proposiciones que apele únicamente a verdades lógicas y a definiciones que no se refieran ni a objetos empíricos ni a intuiciones sensibles. El tema que a partir de aquí queda en el centro del debate es el de la prueba, el de la justificación de cualquier proposición de la aritmética. Frege no tiene pues, duda alguna acerca del carácter *a priori* de tales enunciados, su empeño se dirigirá a mostrar, sobre todo, que las proposiciones de la aritmética son analíticas y no sintéticas.

CAPÍTULO III

Gottlob Frege: la analiticidad de las proposiciones de la aritmética y la noción de número en *Die Grundlagen der Arithmetik*

1. Lógica y matemáticas: el proyecto de reducción de la aritmética a la lógica

Gottlob Frege tiene un lugar destacado dentro de la discusión sobre la naturaleza de las proposiciones matemáticas dada la sistematicidad con la que se esfuerza por demostrar la analiticidad de los enunciados de la aritmética, desde su trabajo inicial, *Begriffsschrift*[1] y sobre todo, en *Die Grundlagen der Arithmetik*[2] y en *Grundgesetze der Arithmetik* [3]. A diferencia de Mill que, como hemos visto, considera que tales proposiciones son contingentes aunque de gran generalidad, Frege no tiene ninguna duda acerca del carácter necesario de las proposiciones de la aritmética. Sin embargo, no le satisface tampoco la explicación kantiana que considera a tales proposiciones como juicios sintéticos *a priori.* La insatisfacción con el argumento kantiano de los enunciados de las matemáticas como juicios sintéticos *a priori* no es privativa de Frege: es una posición generalizada en el ambiente académico matemático europeo de mediados del siglo XIX. De hecho, existía un vasto programa de investigación conocido como el "proyecto de rigorización del análisis y del cálculo" cuyo objetivo era desligar la definición de las principales nociones del análisis matemático –función, límite, continuidad, derivabilidad, etc.-, de cualquier intuición geométrica, intentando apoyar tales definiciones en una primera etapa únicamente en proposiciones numéricas o aritméticas. Dicho programa, inaugurado por Cauchy y Weierstrass[4] consiste entonces, *grosso modo*, en brindar *bases aritméticas* apoyadas en la lógica y sin contenido intuitivo, para las nociones básicas del análisis y, también, en

[1] Frege Gottlob, *Conceptografía. Un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética para el pensamiento puro*, México, UNAM, 1972. Traducción de Hugo Padilla. (*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reine Denkens*, Halle, 1879)

[2] Frege Gottlob, *Los fundamentos de la aritmética. Una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. UNAM, México, 1972. Traducción de Hugo Padilla. (*Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung uber den Begriff der Zahl*, Breslau, 1884.)

[3] *The Basic Laws of Arithmetic*, University of California Press, Berkeley-Los Angeles-London, 1964. Traducción de Montgomery Furth. (*Grundgesetze der Arithmetik*, 1893)

[4] Según Kline, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) está entre los primeros en "abordar el problema del rigor en el cálculo" pues concentró su atención en revisar, entre otras, la noción de límite heredada desde Newton. Tal noción requería apoyarse en la geometría mientras que Cauchy quería "construir la lógica del cálculo sobre los números". Por su parte, Weierstrass (1815-1897) "fue el primero en darse cuenta de que la rigorización del análisis no podía completarse sin una mejor comprensión del sistema de los números reales". Sobre este tema ver, Morris Kline, *op.cit*, sobre todo el capítulo 8.

determinar la estructura de los números reales[5]. En este sentido, el proyecto puede entenderse como la ambición de reducción de las matemáticas a la aritmética y la fundamentación de ésta en la lógica. En una segunda etapa, estos matemáticos intentaron fundamentar la aritmética sólo en proposiciones de la lógica.

Ahora bien, antes que un filósofo, Frege es un matemático preocupado por los problemas pendientes dentro de esta disciplina[6] que incluyen, además de cuestiones técnicas, específicamente matemáticas, también aspectos filosóficos acerca de la naturaleza del análisis y, en particular, de las proposiciones de la aritmética. En su Tesis doctoral titulada "Sobre la representación geométrica de las figuras imaginarias en un plano", Frege defendió la posición de que la geometría, incluso la de las figuras imaginarias, se apoya en la intuición del espacio, lo cual la distingue radicalmente de la aritmética. Es decir, comparte la afirmación kantiana sobre el carácter sintético *a priori* de las proposiciones de la geometría aunque, desde muy temprano, considera discutible que la verdad de los enunciados de la aritmética requiera del apoyo en la intuición. Más bien, Frege está convencido de que la aritmética, que ofrece una base sólida para el análisis y el cálculo, puede derivarse únicamente de principios lógicos básicos. Con tal perspectiva Frege participó en la controversia sobre el rigor necesario dentro del análisis matemático, investigando el tema de los "cálculos basados en la amplificación del concepto de magnitud[7]", donde explícitamente sostuvo la postura de que "sus principios [del análisis] no pueden derivarse de la intuición[8]", y que basta la lógica para explicitar su contenido.

El ambiente académico que hemos delineado y las preocupaciones generales tanto matemáticas como filosóficas dentro de él, son compartidos por otros dos matemáticos,

[5] Los números reales son, en lenguaje contemporáneo, el conjunto de números conformados por la unión de los racionales y los irracionales. Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como cociente de dos números enteros, es decir, números de la forma a/b donde a y b son enteros. Los irracionales, por su parte, son aquellos que no pueden ser expresados como cociente de dos enteros, para ninguna pareja de enteros. Números tan conocidos como la raíz cuadrada de dos o de tres son irracionales en tanto no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros. Un problema en el siglo XIX consistía en demostrar que las operaciones aritméticas con irracionales tenían las mismas propiedades que, por ejemplo, las propiedades de los enteros o los naturales.

[6] Según Baker and Hacker, "Frege fue un matemático por entrenamiento y por vocación. Los pocos cursos de filosofía que tomó siendo estudiante en Jena y Göttingen no fueron mas que los de la experiencia universitaria normal de cualquier alemán educado de clase media en el siglo XIX.", Backer and Hacker, *Frege: Logical Excavations*, Oxford University Press, New York, Basil Blackwell, Oxford, 1984, pág.6

[7] El título del trabajo de habilitación de Frege es justamente "Métodos de Cálculo basados en la amplificación del concepto de magnitud" en el cual se discuten ciertos problemas de las funciones complejas.

Georg Cantor y Richard Dedekind, de cuyas posiciones nos ocuparemos en el capítulo siguiente. Sin embargo, además de su formación matemática Frege también es un lógico y un filósofo de primera línea, lo cual imprime un sello particular a su tratamiento de la cuestión de la fundamentación de la aritmética. Baker y Hacker afirman que su objetivo principal: la reducción de la aritmética a la lógica, debe ser visto como el eje alrededor del cuál giran todos sus aportes tanto en la formalización de la lógica como en filosofía del lenguaje[9]. El programa de Frege, entonces, puede considerarse dentro del llamado "logicismo". Hempel sostiene que la *tesis logicista* en matemáticas puede expresarse de la siguiente manera:

> Las matemáticas pueden ser derivadas de la lógica en el siguiente sentido: A. Todos los conceptos de las matemáticas, i.e, de la aritmética, el álgebra y el análisis, pueden ser definidos en términos de los conceptos de la lógica pura. B. Todos los teoremas de las matemáticas pueden ser deducidos de esas definiciones mediante los principios de la lógica[10].

Esa es justamente la estrategia del trabajo filosófico de Frege expuesta inicialmente en *Los Fundamentos de la Aritmética.* Ahora bien, Michael Dummett comparando el trabajo de Frege con el de Dedekind, señala que la obra del primero tiene un contenido filosófico mucho más amplio que la del segundo; y propone distinguir entre el valor de la obra de Frege para las propias matemáticas y su importancia para la filosofía de las matemáticas. Mientras el trabajo matemático de Frege resulta, según Dummett, "anticuado" *–old-fashioned-*, sus aportes en filosofía contienen ideas "pioneras[11]". La principal contribución de Frege en Lógica, la teoría de la cuantificación, constituyó un significativo aporte entre otros, para el proyecto de rigorización del análisis, pues la herramienta formal de Frege brinda una manera precisa de expresar con claridad la dependencia entre variables universales y existenciales, facilitando así la definición de nociones complicadas y elusivas como la de continuidad[12].

---

[8] Citado en Belna, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*, Librairie Philosophique J.Vrin, Paris, 1996, pág.200.
[9] Backer and Hacker, *op.cit.*, pág.8.
[10] Hempel C., "On the nature of Mathematical Truth" en Feigl H.- Sellars W., *Readings in Philosophical Analysis*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1949, pág. 233.
[11] Dummett, *Frege. Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1991, pág.48-49
[12] Para formalizar la noción de continuidad, por ejemplo, es indispensable utilizar al menos un cuantificador universal y uno existencial. Además, expresar formalmente la relación de orden entre los números racionales,

Entonces, el significado más general del proyecto logicista, consiste en que por ese camino se quiere dar un fundamento a toda la matemática, en particular al análisis y al cálculo diferencial e integral sobre bases únicamente aritméticas que, a su vez, pretenden derivarse únicamente de la lógica. Otros matemáticos se ocuparon de la primera parte del proyecto: Karl Weierstrass[13] y Richard Dedekind[14], por ejemplo, avanzaron en la demostración de que es posible reducir el análisis matemático y el cálculo a la aritmética. Frege, por su parte, se esfuerza por mostrar que también es posible reducir la aritmética a la lógica o, lo que es equivalente para él, demostrar que las proposiciones de la aritmética son analíticas. Por ese camino, sería posible ofrecer solución a una cadena de problemas matemáticos abiertos; por ejemplo, dar una definición formal de la *continuidad de una función* sin apelar a intuiciones geométricas particulares exige, a su vez, tanto demostrar formalmente la continuidad de los números reales como asegurar la certidumbre lógica de la aritmética. Así pues, la investigación sobre la estructura de los sistemas numéricos y el esclarecimiento no intuitivo de la noción de número son cuestiones en curso para las matemáticas en la época de Frege. Él toma parte en esta discusión haciendo explícita su intención de reducir la aritmética a la lógica, para lo cual se propone demostrar dos cuestiones:

i. Que la relación de sucesión para los números naturales, se puede establecer sobre bases puramente lógicas.

ii. Que los objetos de la aritmética, en particular el concepto de número, no tienen un contenido intuitivo y pueden derivarse de la lógica.

La demostración de i. Frege la lleva a cabo desde su obra inicial, *Begriffsschrift*. En dicho trabajo, además de brindar "un lenguaje de fórmulas para el pensamiento puro",

---

de la cual depende la formalización de la noción de continuidad, requiere asimismo establecer una dependencia cuantificacional.

[13] Alrededor de 1860 Weierstrass completó la llamada "rigorización del análisis" al expulsar de sus definiciones básicas "toda dependencia con respecto al movimiento, la comprensión intuitiva y las nociones geométricas". En particular, a partir de su trabajo se separan dos nociones muy importantes del análisis: la de continuidad de una función y la de derivabilidad. Para más detalles sobre esto ver, Kline M., *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI, México D.F., 2000, pág. 212 y ss.

[14] Dedekind señala en varias oportunidades la necesidad de establecer claramente las propiedades de los números reales y, en particular, de los irracionales, para terminar la rigorización del análisis. En 1872 Dedekind afirmaba que sentía "más profundamente que nunca la carencia de unos rigurosos fundamentos en la aritmética". Dedekind Richard, "Continuity and Irrational Numbers" (1872), en *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, New York, 1963. Las ideas de Dedekind las discutiremos con cierto detalle en el siguiente capítulo.

Frege se esfuerza por expulsar el contenido intuitivo de un concepto aritmético básico: la relación "sucesor", proporcionando una definición puramente lógica del concepto "ser sucesor en una serie", que constituye la estructura básica del sistema de los números naturales[15]. Una vez hecho esto, el siguiente paso de la reducción de la aritmética a la lógica consiste en presentar una definición del concepto de número sostenida únicamente en premisas lógicas, esto es, sin apelar a la capacidad humana de "abstracción", tal como hace Cantor; o a cualquier otro contenido intuitivo o empírico. Definir la noción de número a partir de premisas lógicas es un requisito del proyecto logicista porque, como señala acertadamente Sluga analizando la estrategia de Frege, sólo si es posible definir los *objetos* de las proposiciones de la aritmética sin apelar a la intuición, será probable que tales proposiciones sean derivables a partir de la lógica[16].

Frege lleva a cabo esta segunda parte de su proyecto en *Die Grundlagen der Arithmetik* y es también ahí donde discute con mayor detalle lo relativo a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética. La posición fregeana sobre el carácter analítico de tales proposiciones constituye una crítica a la postura kantiana que las considera como juicios sintéticos *a priori* basados en la intuición pura del tiempo. Para los intereses de la presente investigación, conviene entonces analizar el sistema de clasificación de las proposiciones propuesto por Frege para entender qué significa el carácter analítico que él atribuye a las proposiciones de la aritmética y en qué medida su clasificación se aleja de la de Kant. Posteriormente revisaré con cierto cuidado lo relativo a la definición meramente lógica del concepto de número y el tratamiento fregeano de la relación de igualdad numérica.

1. *Los Fundamentos de la Aritmética*

1.1 La distinción entre proposiciones analíticas y sintéticas

---

[15] En el Prólogo de la Conceptografía, Frege afirma lo siguiente: "Mi procedimiento fue éste: primero busqué retrotraer el concepto de ordenación en una serie al de consecuencia lógica y de aquí progresar hasta el concepto de número". Frege mismo aclara que, al hacer lo anterior encontró "un obstáculo en la inadecuación del lenguaje: cuanto más complicadas eran las relaciones [a ser expresadas, RGA], tanto menos podía alcanzar la exactitud requerida para mi propósito". Frege, *Conceptografía, op.cit.*, pág. 8.

[16] Sluga dice que Frege "necesita responder a la pregunta de si los números naturales y el concepto de número son definibles a partir de las leyes de la lógica", porque si los números no son definibles de esa manera es "muy poco probable que las leyes de la aritmética sean verdades analíticas".Sluga H, *Gottlob Frege*, Routledge & Kegan Paul Ltd., London, 1980.

En el capítulo I presentamos la manera en la que Kant establece la división de los juicios en analíticos o sintéticos, relacionándola principalmente con su carácter ampliativo o no del conocimiento. Señalamos, además, el carácter sintético que de acuerdo a tal criterio, Kant atribuye a las proposiciones de la aritmética[17]. La naturaleza sintética de las proposiciones de la aritmética, que es objetada por Frege, Kant la explica argumentando básicamente dos cosas: en primer lugar, afirmando que para realizar tales juicios el entendimiento se apoya en la intuición pura del tiempo, que es un requisito indispensable para conocer la central noción aritmética de *sucesión*. En segundo lugar, las proposiciones de la aritmética son para Kant juicios sintéticos *a priori* porque sus objetos, los números, requieren de la intuición pura aunque carezcan de una "representación universal" análoga a la intuición geométrica. Recordemos que los números quedan explicados en el sistema kantiano a través de los "esquemas puros del entendimiento" que son "la representación de un procedimiento universal de la imaginación para suministrar a un concepto su propia imagen[18]". En este sentido, para Kant tanto la intuición pura del tiempo como el mecanismo de la "síntesis de la imaginación productiva" están a la base de la síntesis entre sujeto y predicado que se produce en un juicio de la aritmética y, por tal razón, les atribuye un carácter sintético.

Frege no sólo está en desacuerdo con los dos anteriores argumentos de Kant, sino que también objeta el criterio kantiano de la clasificación de los juicios en sintéticos y analíticos de acuerdo a su carácter ampliativo o no del conocimiento. En relación a lo primero, esto es, a la manera en que Kant explica el carácter sintético de las proposiciones de la aritmética, Frege ha presentado ya críticas contundentes. Mencioné anteriormente que desde la *Conceptografía* Frege demuestra que la relación sucesor para los números naturales puede derivarse únicamente de principios lógicos. Esto significa que la afirmación kantiana de que es necesaria la intuición pura del tiempo para el conocimiento de la noción de sucesión es falsa. Por lo cual, tal explicación no puede admitirse como argumento que justifique el carácter sintético de las proposiciones de la aritmética. Por otro lado, en relación a los números como productos del "esquema puro de magnitud", que requiere a su

[17] Recordemos sin embargo, que tal carácter sintético no corresponde a todas las proposiciones de la aritmética sino a los juicios particulares llamados por Kant "fórmulas numéricas", que tienen la forma de ecuaciones resultantes de operaciones (7 + 8 = 15, por ejemplo). El carácter sintético de tales proposiciones, tal como analizamos en el capítulo I de este trabajo, está relacionado con que el número consiste en "la representación de un procedimiento universal de la imaginación para suministrar a un concepto su propia imagen", y ello requiere de la intuición.

vez de la intuición sensible; en *Los Fundamentos de la Aritmética* Frege presenta una definición del concepto de número sobre bases únicamente lógicas que contradice tajantemente la argumentación kantiana. Este aspecto lo expondré en detalle en la sección 3.1 de este capítulo.

Ahora bien, en lo relativo a la propia distinción kantiana entre juicios analíticos y sintéticos, Frege objeta los criterios de clasificación utilizados por Kant criticándolos por "no ser exhaustivos[19]". En esta cuestión, los argumentos de Frege se desarrollan en dos direcciones: i) la primera es lógica, pues Frege sostendrá que el criterio kantiano de "contención o no" del predicado en el sujeto para distinguir entre el carácter analítico y sintético de los juicios, respectivamente, no nos permite clasificar todos los juicios posibles; ii) la segunda tiene que ver con el carácter ampliativo del conocimiento que Kant atribuye a los juicios sintéticos y no a los analíticos.

Según Frege, el criterio kantiano para distinguir entre los juicios analíticos y sintéticos dependiendo del tipo de relación que se establezca entre el sujeto y el predicado, abarca solamente los casos de juicios universales afirmativos que tienen la forma sujeto-predicado. En esta crítica Frege tiene toda la razón. Él se pregunta qué sucede con otro tipo de proposiciones en las cuales el sujeto es un objeto individual, o qué hacer si tratamos con un juicio existencial:

> Es evidente que Kant ha subestimado (...) el valor de los juicios analíticos, aunque parece haber imaginado algo del concepto más amplio utilizado aquí. Si se toma su definición como base, la división en juicios analíticos y sintéticos no resulta exhaustiva. Él piensa en el caso del juicio universal afirmativo. Pues se puede hablar de un concepto de sujeto si –siguiendo la definición- el concepto del predicado está contenido en él. Pero, ¿qué pasa si el sujeto es un objeto individual?, ¿y si se trata de un juicio existencial?[20].

Tal objeción de Frege tiene relación con su mucho más amplia crítica a la "forma lógica tradicional" de los juicios -aceptada por Kant en la *Crítica de la Razón Pura.* Desde la *Conceptografía*, Frege propuso "sustituir los conceptos de sujeto y predicado" por los de "argumento y función" para liberar a la lógica de los márgenes del lenguaje y la

---

[18] Kant, *CRP, op.cit.*, B180
[19] Frege, *Los fundamtentos de la aritmética*, Sección 88
[20] Frege, *Ibid.*

gramática[21]. Dada la propuesta fregeana de entender la proposición, ya no como la síntesis de un sujeto y un predicado que es lo que Kant entiende por "juicio", sino como lo expresado por una oración de la forma, $f(a)$; el criterio de la contención o no del predicado en el sujeto no establece una pauta para distinguir entre proposiciones analíticas y sintéticas.

En la segunda línea de crítica a los criterios clasificatorios de Kant, Frege sostiene explícitamente que las proposiciones de la aritmética amplían el conocimiento, pero argumenta que no por ello son sintéticas en la medida en que "pueden probarse por medios puramente lógicos". Recordemos que para Kant los juicios analíticos no amplían el conocimiento dado que la síntesis entre sujeto y predicado llevada a cabo en tales juicios, se produce únicamente a través del análisis de conceptos, por lo cual Kant los califica de "meramente explicativos". En contraste con ello, Frege entiende por "ampliación del conocimiento" algo diferente de lo que entiende Kant pues afirma que el análisis y esclarecimiento de conceptos si puede, efectivamente, ampliar el conocimiento:

> Las conceptuaciones fructíferas trazan líneas de delimitación que no están dadas con anterioridad. Lo que de esto se puede inferir no se vislumbra de antemano; en este caso, no se saca simplemente de la caja lo que ya estaba en ella. *Las conclusiones obtenidas amplían nuestro conocimiento* y, de acuerdo a Kant, deberían tenerse por sintéticas *a priori*; sin embargo, se pueden probar por medios puramente lógicos y, por tanto, son analíticas[22].

A partir de tal afirmación, es claro que Frege, además de disentir con Kant en lo relativo al significado de la expresión "ampliar el conocimiento", también establece un criterio distinto al de Kant para distinguir *entre* el carácter analítico o sintético de los juicios: el carácter de la prueba que tales juicios admitan. En cierto sentido, Frege está buscando separar los aspectos lógicos del criterio de distinción de los juicios en analíticos y sintéticos, de las cuestiones epistemológicas que constituían la preocupación principal de Kant. Cabe recordar que la justificación kantiana del carácter ampliativo del conocimiento

[21] "La mera invención de esta Conceptografía, me parece, ha hecho prosperar la lógica. Espero que los lógicos, si no se dejan intimidar por una primera impresión frente a lo extraño, no negarán su asentimiento a las innovaciones a que me vi impelido por una necesidad inherente al asunto mismo. Estas discrepancias con lo tradicional encuentran su justificación en que la lógica, hasta ahora, siempre se ha ajustado muy estrechamente al lenguaje y a la gramática. En especial, creo que la sustitución de los conceptos de *sujeto* y *predicado* por los de *argumento* y *función*, se acreditará con el tiempo. Es fácil ver cómo la aprehensión de un contenido como función de un argumento surte el efecto de una aprehensión formadora de conceptos". Frege, *Conceptografía*, Prólogo, pág.10.

de los juicios sintéticos consiste en señalar que, para producir juicios de este tipo el entendimiento no lleva a cabo únicamente una "síntesis lógica", sino que o bien se apoya en una "síntesis de experiencia" en caso de juicios sintéticos *a posteriori*, o bien se apoya en la intuición pura en el caso de los juicios sintéticos *a priori*. Es decir, para Kant un aspecto importante de la distinción de los juicios en analíticos y sintéticos está en el tipo de proceso mental que permite al entendimiento llevarlos a cabo. La afirmación kantiana de que el carácter sintético de un juicio se determina si el predicado no está contenido en el sujeto, puede entenderse, también, de la siguiente manera: no serán analíticos –ie, serán sintéticos- aquellos juicios para cuya formulación, el entendimiento requiera "algo más" que la lógica para realizar la síntesis entre sujeto y predicado.

Para Kant, entonces, los aspectos epistemológicos permanecen anidados en el fondo de las cuestiones lógicas. Así, la intención de Frege al modificar el criterio kantiano de clasificación de las proposiciones en analíticas y sintéticas consiste, hasta cierto punto, en destacar y hacer explícitas las cuestiones lógicas de tal distinción. En esa dirección, Frege, con herramientas lógicas mucho más poderosas que aquellas con las cuales contaba Kant, establece el carácter de la prueba que admitan los juicios como el criterio preciso y principal para distinguir aquellos que sean analíticos de todos los demás:

> Cuando se dice que una proposición es analítica o *a posteriori* no se juzga, según mi interpretación, sobre las relaciones psicológicas, fisiológicas y físicas que pudieran haber hecho posible la formación de la proposición en nuestra conciencia; [...] sino sobre la razón más profunda en que descansa la justificación que la toma por cierta.
>
> [...] El problema es el de encontrar su prueba [de la proposición] y seguirla hasta las verdades primitivas. Si en este camino sólo se encuentran definiciones y leyes lógicas generales, entonces se trata de una verdad analítica... Pero si es imposible llevar a cabo la prueba sin utilizar verdades que no sean de naturaleza lógica general, sino que pertenezcan a un campo especial del conocimiento, entonces se trata de una proposición sintética[23].

Discutamos ahora brevemente estas cuestiones en relación a las matemáticas. Sobre si las proposiciones del análisis matemático amplían o no el conocimiento, Frege tiene una opinión clara. Al analizar la definición de continuidad de una función basada únicamente en derivaciones lógicas y principios aritméticos, él señala justamente que si bien dicha

---

[22] Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, sección 88, pág.193. Lo subrayado es mío, RGA.
[23] Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, sección 3, pág.116.

definición no hace "aparecer" algo esencialmente *nuevo*, si traza "líneas de delimitación" que nos permiten "inferir [conclusiones] que no se vislumbran de antemano." De esta manera, Frege es explícito al establecer su posición en torno a los enunciados del análisis matemático que están relacionados con la estructura de los sistemas numéricos: tales proposiciones amplían nuestro conocimiento. Además, ellas se basan únicamente en derivaciones lógicas y en ciertos principios de la aritmética, por lo cual serán analíticas si es posible demostrar que las proposiciones de la aritmética son igualmente analíticas. Resulta así que Frege establece con la mayor claridad lo que considera la clave para la distinción entre dos clases de verdades, las analíticas y las sintéticas. Tal clave es, únicamente, el *carácter de la prueba* que las proposiciones de cada uno de estos tipos admita: serán analíticas las proposiciones que puedan probarse por medios puramente lógicos y serán sintéticas aquellas donde una prueba de tal clase no sea posible.

De hecho, la idea de Frege de establecer una distinción entre "dos clases de verdades", en base a si en su demostración admiten o no una prueba únicamente lógica, había sido ya expresada desde la *Conceptografía*, en cuyo Prólogo Frege sostiene:

> "[La más firme de las pruebas acerca de la certidumbre de una proposición] es la prueba lógica pura, la cual, prescindiendo de las características particulares de la cosa, sólo se funda en las leyes sobre las que descansa todo conocimiento. Por tanto, dividimos en dos clases todas las verdades que requieren una fundamentación; mientras que la prueba puramente lógica puede preceder a las unas, las otras deben apoyarse en hechos empíricos[24]".

Es decir, el criterio para distinguir entre estas dos "clases" de verdades, situándolo en el carácter de la prueba que admiten es un elemento temprano en el pensamiento de Frege. Desde la *Conceptografía*, él consideraba que para demostrar el carácter analítico de las proposiciones de la aritmética, lo que se necesita es probar que sus principios y sus objetos pueden derivarse únicamente de la lógica. Sin embargo, en contraste con la postura kantiana, Frege considera que aun siendo analíticas, las proposiciones de la aritmética *amplían* efectivamente el conocimiento no porque hagan "aparecer algo nuevo", sino porque trazan en nuestros conceptos "líneas de delimitación que no están dadas con anterioridad".

---

[24] Frege, *Conceptografía*, Prólogo, pág.7

Así, para Frege la distinción analítico-sintético será realmente exhaustiva sólo si se sostiene únicamente en cuestiones lógicas, a saber, en el carácter distinto de la prueba que admiten las proposiciones de una y otra clase. Las cuestiones epistemológicas sugeridas por Kant para distinguir entre los juicios analíticos y los sintéticos, es decir, el carácter ampliativo o no del conocimiento, no serán tomadas en cuenta por Frege. Con base en su criterio lógico para distinguir entre proposiciones analíticas y sintéticas, Frege afirma que las proposiciones de la geometría, en contraste con las de la aritmética, son efectivamente juicios sintéticos *a priori,* pues considera que no es posible derivarlas únicamente de principios lógicos. La razón de ello es que, según Frege, para definir los objetos de la geometría –punto, recta, etc.- y también en sus demostraciones, es necesario el apoyo de la intuición sensible[25].

Lo hasta aquí expuesto se puede resumir en tres puntos:

i. Frege considera y estudia proposiciones cuya *estructura* es distinta a la de los juicios analizados por Kant. La forma función-argumento de las proposiciones fregeanas es más amplia que la forma tradicional sujeto-predicado. El criterio de contención o no del predicado en el sujeto para establecer la distinción analítico-sintético es criticado por Frege por no ser exhaustivo.

ii. Frege considera que existen al menos algunas proposiciones de las matemáticas: las de la aritmética, cuya prueba se apoya únicamente en la lógica y que, sin embargo, amplían el conocimiento permitiéndonos llegar a conclusiones que "no se vislumbran de antemano".

iii. El criterio seguro según Frege, para determinar si una proposición es analítica o sintética será si ella admite o no una prueba meramente lógica.

1.2. La concepción fregeana de las proposiciones de la aritmética como verdades *a priori*

[25] Hilbert discrepa con Frege en relación a la naturaleza sintética *a priori* de las proposiciones de la geometría. Para el primero, tales proposiciones igual que las de la aritmética, son proposiciones que no requieren de la intuición sensible, y cuyos principios y definiciones de sus objetos básicos pueden establecerse apoyándose únicamente en la lógica. Qué significa "definir" un objeto para Hilbert es, sin embargo, algo totalmente distinto de lo que entiende Frege. Ver Hilbert, *Fundamentos de la Geometría*, Open Court Publishing Co., La Salle, Illinois, 1962.

En relación a la distinción de las proposiciones en *a priori* y *a posteriori* según la fuente de su conocimiento, Frege parece compartir la opinión de Kant admitiendo que no todo el conocimiento proviene de la experiencia, sino que alguna parte de él es aportado por la mente de manera *a priori*. Las proposiciones de la geometría, por ejemplo, Frege las considera sintéticas *a priori* en tanto que para la definición de sus nociones básicas apelan a la intuición sensible; y no son, por tanto, derivables a partir únicamente de la lógica. Esto es, Frege considera que no todas las proposiciones de las matemáticas son analíticas, puesto que las de la geometría requieren de la intuición. En tal sentido, Frege afirma:

> Un punto geométrico considerado en sí no se distingue de ningún otro; lo mismo vale para líneas y planos. Sólo cuando muchos puntos, líneas, planos, son aprehendidos al mismo tiempo en una intuición se les puede distinguir. Si en la geometría se llega a proposiciones generales *a partir de la intuición*, es explicable por esto que los puntos, las líneas y los planos *intuidos*, no sean propiamente y en realidad particulares y, por tanto, pueden valer como representantes de sus géneros[26].

Este argumento es muy similar al expuesto por Kant, que fue revisado en el capítulo I de este trabajo. Sin embargo, en relación a las proposiciones de la aritmética Frege sostiene una posición distinta a la kantiana. Frege niega el carácter sintético *a priori* de las proposiciones de la aritmética, y por tanto, rechaza el papel de la intuición pura en la formulación de tales juicios, que es el núcleo de la explicación de Kant. De ahí que un problema para Frege sea, entonces, explicar de dónde y cómo obtiene la aritmética los objetos de sus proposiciones. Una posible respuesta para esta cuestión es admitir como válido para la definición de los objetos de la aritmética el principio de no contradicción, tal como hacen los matemáticos formalistas. Es decir, una solución para la definición de objetos aritméticos –o matemáticos, en general-, una vez que se ha expulsado cualquier recurso a la intuición sensible es admitir como legítimos aquellos objetos en cuya definición no se encuentre contradicción alguna. Sin embargo, Frege no considera que tal principio sea suficiente para la definición legítima de los objetos de la aritmética:

> & 94. También se debe objetar que para el matemático sólo valga como imposible lo que se contradiga a sí mismo. Un concepto es admisible aun si sus notas contienen una contradicción; sólo que no se debe presuponer que algo cae bajo él. Pero de que el concepto no contenga contradicción alguna, tampoco se puede concluir que algo cae bajo él. Por lo demás, ¿cómo se puede probar que un

[26] Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, sección 13, pág. 129.

> concepto no contiene contradicción alguna? Esto de ninguna manera es obvio; de que no se vea contradicción alguna, no se sigue que no la haya, y la determinación de la definición no constituye garantía para ello[27].

De aquí surge una de las mayores dificultades de Frege para justificar el carácter analítico de las proposiciones de la aritmética. Él rechaza que, en particular en la definición de número, sea válido apelar a la "intuición pura del tiempo" tal como hace Kant, y simultáneamente objeta que para brindar tal definición, el matemático pueda apoyarse únicamente en el principio de no contradicción. Por esta razón, la estrategia de Frege para la definición de número buscará establecer no solamente una definición no contradictoria para cada número, sino demostrar que "algo cae" bajo el concepto así definido.

Cabe mencionar aquí que la cuestión de si ciertos objetos matemáticos han de admitirse como "legítimamente existentes" en tanto pueden ser definidos apoyándose en el principio de no contradicción, es una discusión importante dentro de las matemáticas de la segunda mitad del siglo XIX. Este tema derivará posteriormente en la polémica sobre si, para la admisión de objetos matemáticos es necesario presentar el procedimiento efectivo para construirlos. En particular, la demostración de Cantor de la existencia de "números trascendentes[28]" apoyándose únicamente en el principio de no contradicción, abrió una dura discusión sobre la legitimidad de este tipo de pruebas. La afirmación de Frege arriba citada es, hasta cierto punto[29], una toma de partido en esta discusión. Él señala explícitamente que "la no contradicción en la determinación de la definición" de un objeto matemático no constituye garantía para admitirlo legítimamente como existente. Y sugiere que el camino correcto para establecer la existencia de un objeto es, además de brindar una definición no contradictoria, ***exhibir*** que un objeto cae bajo tal concepto.

---

[27] Frege, *Los Fundamentos de la Aritmética, op.cit.*, sección 94.

[28] Un número trascendente *t* es, por definición, aquél que no es raíz de una ecuación con coeficientes enteros. Por su parte, un número será algebraico, si es raíz de una ecuación con coeficientes enteros. Notemos de entrada que los números trascendentes se definen a partir de una negación: son trascendentes los que no son algebraicos, los que no tienen la propiedad de ser raíz de ecuaciones con coeficientes enteros. En 1874, después de utilizar por primera vez su "prueba de diagonalización", Cantor demuestra que los números trascendentes existen y, todavía más, que existe un conjunto no numerable de números trascendentes. La debilidad de su prueba consiste en que no brinda un procedimiento efectivo para construir un número de tal tipo. Sobre esto ver, Dauben, *Georg Cantor. His mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1979

[29] Digo *hasta cierto punto* porque en la discusión de Cantor contra Kronecker en relación a la admisibilidad de los números trascendentes sin un procedimiento efectivo para construirlos, Frege se alineó a la posición de Cantor, en tanto existían objetos que, se sospechaba, caían bajo tal concepto: el número π era considerado trascendente aunque la prueba formal de tal carácter no se llevó a cabo sino hasta después.

Tenemos entonces que, en la medida en que el propósito de Frege es demostrar la analiticidad de las proposiciones de la aritmética, él tiene que probar en primer lugar, que sus objetos básicos, los números, pueden definirse sin apelar a ningún contenido intuitivo; pero al mismo tiempo no procede como el formalista apoyándose únicamente en el principio de no contradicción, sino que para darse por satisfecho con la definición de número se compromete con exhibir el objeto que cae bajo un concepto definido de manera únicamente lógica. Así, en relación a la aritmética Frege presenta una objeción a la afirmación de Kant que establece que "sin sensibilidad no se nos daría objeto alguno" y sus esfuerzos se dirigen más bien, a demostrar que "la razón tiene sus propios objetos[30]". Sin embargo, en la medida en que se compromete a exhibir tales objetos –en este caso, los números-, como garantía de la consistencia de su definición, su argumentación se vuelve enormemente compleja.

Resulta así que el camino de Frege para la definición de objetos lógicos para la aritmética tiene entonces tres aspectos centrales:

i) Requiere que en la definición de los números no se apele a ningún contenido intuitivo.

ii) Se apoya en el principio lógico de no contradicción para la definición de los conceptos, pero no lo considera como garantía de existencia de objetos, por lo cual,

iii) Requiere mostrar que "algo cae bajo el concepto" definido únicamente de forma lógica.

Este camino es el que Frege recorre en la definición del concepto de número tal como veremos en las sección 3.1 de este capítulo. La diferencia entre su procedimiento y el propuesto por Dedekind, está en que para este último -igual que para la escuela formalista de Hilbert en su conjunto-, el principio de no contradicción como sostén de las definiciones será garantía aceptable para la admisión legítima de objetos.

[30] Sluga, *op.cit.*, pág. 63 y ss.

2. La crítica de Frege al formalismo y al psicologismo

La estrategia de Frege para demostrar que es posible reducir las proposiciones de la aritmética a la lógica abarca, tal como esbocé anteriormente, una serie de pasos. Al objetar el carácter sintético *a priori* de las proposiciones de la aritmética, él tiene que exhibir que en la demostración de tales proposiciones la Razón no apela de ningún modo a la intuición. Además, al no aceptar el criterio de no contradicción como suficiente garantía para la admisión de objetos lógicos, requiere *exhibir explícitamente* los objetos aritméticos que caen bajo cada concepto numérico determinado. En medio de esta doble intención se inscribe la definición fregeana de número. Se puede afirmar entonces que el acercamiento de Frege a la noción de número, responde a preocupaciones un tanto diferentes de aquellas que animan los trabajos estrictamente matemáticos de Georg Cantor y Richard Dedekind que examinaremos posteriormente. Para Frege, esclarecer la noción de número es sólo un paso dentro de su objetivo, mucho más general filosóficamente hablando, de reducir la aritmética a la lógica y así probar la analiticidad de las proposiciones aritméticas. Por su parte, tanto para Cantor como para Dedekind los aspectos filosóficos de la discusión sobre la naturaleza de las proposiciones de la aritmética es secundaria, aunque su atención también se dirige a la fundamentación lógica de la aritmética a fin de brindar bases firmes para el análisis y el cálculo.

La preocupación filosófica de Frege puede rastrearse en la serie de críticas que presenta en *Die Grundlagen der Arithmetik* contra otras posiciones rivales como el psicologismo y el formalismo. Hasta cierto punto, Cantor puede leerse como un peculiar representante del psicologismo y Dedekind como un precursor del formalismo. Revisemos brevemente tales críticas que nos permitirán comprender mejor las diferencias entre las distintas posiciones de estos autores.

Al inicio de *Die Grundlagen*, Frege establece tres principios metodológicos que sostienen su argumentación y que están en el centro de sus críticas a las otras posiciones:

i) El principio del contexto según el cual, "no se debe preguntar por el significado de una palabra aislada, sino en el contexto de una proposición[31]".

[31] Frege, *Fundamentos de la Aritmética*, Introducción, pág.113

ii) La idea de que "Hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo", que es el centro de su argumento contra el empirismo y el psicologismo.

iii) La afirmación de que "Hay que mantener siempre a la vista la diferencia entre concepto y objeto", que está en la base de la consideración de las proposiciones bajo la forma función-argumento; y a partir de la cual desarrolla sus críticas al formalismo.

La crítica más importante que Frege hace a Cantor y a la posición "empirista-psicologista" que define al número por "abstracción de objetos", esto es, considerando al número como una "propiedad de las cosas externas" que es aprehendida por la mente mediante un proceso de abstracción, consiste en que tal posición no puede explicar el carácter objetivo de los números[32]. Frege critica la analogía de los conceptos de color y de número para evidenciar la debilidad de la posición empirista. "La distinción *esencial* entre color y número", afirma Frege, consiste en que el color de un objeto –una superficie, por ejemplo- "es independiente de nuestro arbitrio", es una propiedad del objeto: consiste en la capacidad del objeto de "reflejar ciertos rayos de luz y de absorber más o menos otros". Esta propiedad del objeto, según señala Frege, "nuestro pensamiento no puede cambiarla en lo más mínimo"; en contraste con ello, añade que "no puedo decir que a un montón de barajas corresponda en sí el número 1 o el 100 o algún otro, sino, a lo más, en relación a nuestro libre modo de pensarlo[33]".

Justamente para que la noción de número no quede relacionada con "nuestro libre modo de pensarla", Frege se esforzará por ofrecer una definición de cada uno de los números naturales que sea, i) absolutamente objetiva, es decir, en la que la capacidad de abstracción del sujeto, "el libre modo de pensar" la cantidad, no intervenga para nada y ii) que tales definiciones se deriven estrictamente de consideraciones lógicas. Frege considera que si logra estos objetivos habrá mostrado que la noción de número no depende de ninguna

[32] "&21. Procuremos, al menos, asignar al número su lugar entre nuestros conceptos. La mayor parte de las veces los números aparecen en el lenguaje en forma adjetiva y en construcción atributiva, de manera semejante a las palabras duro, pesado, rojo, que significan propiedades de las cosas externas. Pero pronto nos toparemos con la pregunta de si los números individuales deben ser aprehendidos de este modo, y de si, de acuerdo con ello, el concepto de número puede ser colocado, digamos, junto al de color.
Esta parece ser la opinión de Cantor, ya que él llama a la matemática una ciencia empírica puesto que tiene su inicio en consideraciones de objetos del mundo externo. El número se produce sólo por abstracción de los objetos". Frege, *Ibid.*

habilidad subjetiva o psicológica y será posible avanzar en el proyecto general de reducción de la aritmética a la lógica en virtud de que sus elementos básicos, los números, no dependen ni de la "intuición pura del tiempo", ni de proceso psicológico alguno.

Por otro lado, la discusión de Frege con Cantor tiene otra veta importante: aquella sobre la relación de identidad aplicada a símbolos[34]. Un capítulo especial de *Die Grundlagen* está dedicado a "Las opiniones sobre la unidad y el uno". En dicho capítulo, Frege comienza mostrando los diferentes significados que parece tener la palabra "μοναζ" (monas), definida al principio del libro VII de los *Elementos* de Euclides[35] que, "tan pronto parece referirse a un objeto numerable, tan pronto a una propiedad del mismo, tan pronto al número uno". Según Frege, la palabra "unidad", con la que por lo general se traduce la expresión griega "μοναζ", es conveniente pues "oscila" entre los diferentes significados[36]. La importancia que Frege concede a discutir lo que debe entenderse por unidad y por uno, está en que ningún otro concepto de un número singular descansa con más fuerza en la habilidad subjetiva de aprehensión o en la *intuición interna*, que el concepto de uno. Además, una vez concedida la posibilidad de "aprehensión" del concepto de uno a través de "un acto del entendimiento", el resto de los números naturales se pueden pensar y definir de manera casi inmediata, mediante la agregación de unos, tal como estableció Leibniz y como procede Mill.

Ahora bien, la noción de unidad y de uno que se adopte, influirá de manera importante en la definición de la relación de igualdad entre números. Georg Cantor, por ejemplo, trata la relación de igualdad " = " entre números cardinales derivándola de una más fundamental relación de equivalencia entre conjuntos, simbolizada por "$\equiv$". El paso cantoriano decisivo para definir la igualdad entre números cardinales, " = ", consiste en aceptar que es

---

[33] Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, sección 22, pág.136.

[34] En el argumento de Cantor para definir el concepto de número cardinal, una importante demostración se basa en considerar a los elementos de un conjunto dado como "colección de unidades", haciendo abstracción de la naturaleza de los objetos que conforman el conjunto y del orden en el que se presentan. Frege está discutiendo justamente este aspecto. En el Capítulo IV, sección 1, el argumento de Cantor se explicará en detalle.

[35] La primera proposición del Libro VII de los *Elementos* de Euclides dice: "1. Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una". La siguiente afirma: "2. Un número es una pluralidad compuesta de unidades". Por su parte, los pitagóricos decían que "La unidad es una frontera (methórion) entre número y partes". Euclides, *Elementos*, Gredos, Madrid, 1994.

[36] Constatada la dificultad de precisar el significado del uno y de la unidad, Frege discute las opiniones de Leibniz, quien afirma que "uno es lo que aprehendemos en un acto del entendimiento" y la de Baumann: "uno

posible pensar a cada número como una "colección de unidades", es decir, como un conjunto de objetos numerables. En este sentido, el significado que Cantor da a la noción de "unidad" es similar a la de Euclides. Frege objeta la validez del argumento que sostiene que se puede pensar cualquier número natural como una "colección de unos", como una "multiplicidad de unidades". Según él, si se procede de esta manera el concepto de uno sería "aprehendido en un acto de entendimiento" que implicaría recurrir a la intuición lo cual no es admisible dentro de su proyecto. Pero además, el problema resultante sería, según Frege, que o bien no tendríamos un criterio claro para la distinción de objetos "pensados" como unidades; o bien, si los distinguimos sería una pluralidad que no sirve para los propósitos de la aritmética. Él resume así su punto de vista:

> & 39. Nos enfrentamos, con esto, a la siguiente dificultad:
> Si queremos dejar que el número surja por resumen de objetos diferentes, entonces obtenemos una acumulación en la que están contenidos los objetos precisamente con las propiedades con las que se distinguen, y esto no es el número. Si, por otra parte, queremos construir el número por resumen de lo idéntico, entonces todo confluye perpetuamente en uno, y jamás alcanzamos una pluralidad.
> Si con 1 designamos a cada objeto a numerar, entonces aparece una falla, ya que lo diferente recibe el mismo símbolo. Si pertrechamos al 1 con índices diferenciales, entonces resulta inútil para la aritmética.

Tenemos pues que, según Frege, no sólo es necesaria una definición precisa del uno, sino que lo que está en el fondo de tal necesidad, es el problema de cómo abordar la relación de identidad. "Si con 1 designamos a cada objeto a numerar, (...) entonces lo diferente recibe el mismo símbolo" y la pregunta inmediata es entonces, ¿cómo podremos distinguir entre objetos distintos designados por símbolos idénticos[37]?

Según Belna, en relación a este problema Frege propone una solución novedosa: distinguir la unidad del uno. "La diferencia es lógica y gramatical. El uno, tal como Frege mostrará después es un objeto de la aritmética, único, que no admite el uso del plural y se designa mediante un nombre propio. A la inversa, la unidad es un concepto, designado por

es lo que se aprehende como uno... Lo que ponemos como punto o lo que ya no queremos poner como partible, lo consideramos como uno. Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, Sección 30, pág.145.

[37] Nótese que esta pregunta es exactamente la inversa de la que Frege se plantea al inicio de "Sobre sentido y referencia", donde el problema es precisar la diferencia entre símbolos distintos que designan al mismo objeto. Ver, "Sobre sentido y referencia", en Valdés V. (compilador), *La búsqueda del significado*, Tecnos, Madrid, 2000.

un término conceptual que admite el uso del plural[38]". En relación a esta observación, cabe preguntar si es adecuada la definición fregeana del uno como objeto de la aritmética que, además, es único. La argumentación de Benacerraf[39], quien exhibe dos objetos distintos que pueden ser designados por el término "uno" en tanto cumplen con los requisitos aritméticos establecidos por Frege en la definición del concepto de uno, muestra que la solución a esta cuestión es más compleja. Por otro lado, una vez hecha la distinción entre la unidad y el uno, la negativa de Frege a pensar las colecciones de objetos como conjuntos de unidades a la hora de definir la noción de igualdad entre números, lo llevará a enfrentar una gran dificultad para relacionar el concepto de un número determinado y el objeto que cae bajo tal concepto. Este aspecto será discutido en la siguiente sección.

Recapitulando la posición de Frege expuesta a través de la crítica al empirismo y al psicologismo podemos señalar que, para él:

> El número no se abstrae de las cosas a la manera del color, el peso, la dureza; no es, en el sentido de éstos, una propiedad de las cosas.
> El número no es algo físico, pero tampoco es algo subjetivo, no es representación alguna.
> El número no surge por la adición de una cosa a otra... Las expresiones "multiplicidad", "conjunto", "pluralidad", a causa de su indeterminación, son inapropiadas para la definición del número[40].

Por otro lado, aunque en *Die Grundlagen* Frege no discute directamente con la posición de Richard Dedekind en ningún momento, hay varias críticas a las posiciones formalistas de Hankel que podrían dirigirse también al autor de *Was sind und was söllen die Zhalen*?

En general, cualquier formalista sostendría que el número no es ni un objeto, ni una "sustancia que exista con independencia fuera del sujeto pensante[41]". Además, según Hankel, "para el matemático, como imposible en sentido estricto, sólo vale lo que es lógicamente imposible, esto es, lo autocontradictorio".

Este criterio formal para la aceptación legítima de la existencia de objetos matemáticos, extendido en la práctica matemática durante el siglo XIX, tal como ya hemos mencionado

---

[38] Belna, *op.cit.*, pág.227.
[39] Benacerraf Paul, "What numbers could not be", *Philosophical Review*, 74 (1), 1964
[40] Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, sección 45, pág.158.
[41] Frege cita ampliamente a Hankel quien, argumentando sobre la posibilidad de existencia de "otros números" dice: "El número no es ya una cosa, una sustancia que exista con independencia fuera del sujeto pensante y de los objetos que lo originan, un principio independiente como en los pitagóricos". Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, Sección 92, pág. 195.

no es admitido por Frege, quien contra-argumenta: "un concepto es admisible aun si sus notas contienen una contradicción; sólo que no se debe presuponer que algo cae bajo él". Dicha objeción está relacionada con las ideas básicas de Frege, asentadas desde la *Conceptografía*, donde una distinción fundamental es aquella entre el concepto y los objetos que caen bajo un concepto determinado. Sin embargo, en relación a la definición del concepto de número, el verdadero problema según Frege, está en que nada nos garantiza que un concepto definido de manera no contradictoria, no pueda resultar vacío: "de que un concepto no contenga contradicción alguna, tampoco se puede probar que algo cae bajo él". Para Frege, pues, el formalismo no atiende con cuidado a la precisa distinción entre los conceptos y los objetos.

Discutiendo contra el formalismo, Frege enfatiza su posición afirmando que "la falta de contradicción de un concepto *sólo se puede establecer* comprobando que algo cae bajo él[42]". La cuestión de la existencia de un objeto matemáticos se traduce entonces en probar que "algo cae bajo el concepto" que lo determina; lo cual es el nudo más problemático de la explicación de Frege y, según Benacerraf su aspecto más débil[43].

En la medida en que Frege considera insuficiente la respuesta formalista para admitir objetos lógicos en las proposiciones de la aritmética, esto es, que su definición no contenga contradicción, él afirma contundentemente que "el matemático no puede producir algo arbitrariamente". En este punto se sintetiza una de las principales discrepancias entre el realismo fregeano y la tradición formalista de las matemáticas. Mientras que los segundos se apoyan en el criterio lógico de no contradicción para la definición de los conceptos matemáticos básicos y consideran que ello es suficiente para admitirlos en la argumentación, Frege considera necesario mostrar que aun cuando la definición de un concepto no sea contradictoria, es necesario "mostrar que algo cae bajo el concepto" aludido. Su concepción, por tanto, lo lleva a decir que, de manera análoga al geógrafo, "el matemático también sólo puede descubrir y denominar lo que está ahí[44]".

---

[42] *Ibid*, Sección 94, pág. 196. El subrayado es mío, RGA.

[43] Benacerraf, desde una posición estructuralista-formalista que concibe a la aritmética como "la ciencia que elabora la estructura abstracta que todas las progresiones tienen en común solamente en virtud de ser progresiones", critica los esfuerzos de Frege por "mostrar el objeto que cae bajo el concepto" de algún número determinado, demostrando que los objetos así construidos por Frege no son únicos. Benacerraf Paul, "What numbers could not be", *Philosophical Review*, 74 (1), 1964

[44] Frege, *Los Fundamentos..., op.cit.*, sección 96, pág. 198.

Sobre esta peculiar idea fregeana se sostiene, a la larga, una concepción "descriptivista" de las matemáticas, concordante con sus esfuerzos para brindar no sólo una definición formal del concepto de número sino por demostrar que "algo cae bajo tal concepto". Considero que los problemas semánticos en cuyo estudio Frege se concentrará posteriormente, tienen su origen en este supuesto. Un ejemplo de las objeciones de Frege al formalismo, que apuntan a problemas semánticos, ocurre cuando discute lo relativo a los números complejos. Tales números tienen la forma $(a + bi)$, esto es, son números que se definen como la adición de una parte real, a, y otra parte imaginaria, bi; donde i es la raíz cuadrada de -1. Frege se pregunta, ¿qué objeto simbolizamos con 2 + 3i, por ejemplo? Y descarta como insuficiente la respuesta formalista que pone la atención no en un hipotético objeto simbolizado por 2 + 3i, sino en una no contradictoria definición de la adición de estas dos partes del número en cuestión[45].

Cuando Frege comenta irónicamente: "Tómese un objeto, digamos, la Luna, y defínase: la Luna multiplicada por sí misma da –1"; el formalista respondería que no hay en ello ningún problema, pues es sólo cuestión de sustituir "Luna", cada vez que anteriormente se utilizó "i", de tal forma que si las reglas que rigen la definición de la adición cuyo resultado es un número complejo no contenían contradicción, tampoco la contendrán si sustituimos "i" por "Luna". A lo más, quizá, habría que llamarles números lunares, en vez de complejos.

3.1 La noción de número en *Die Grundlagen der Arithmetik* y sus dificultades

Nos resta finalmente indagar con cuidado en la manera cómo Frege tras la crítica a las posturas rivales, presenta su noción de número en *Die Grundlagen*. En la recapitulación final de ese trabajo, él mismo señala:

> &106. ... "Después de haber establecido que el número ni es una colección de cosas ni una propiedad de las mismas, así como que tampoco es un producto subjetivo del proceso anímico, sino que una declaración numérica afirma algo objetivo de un concepto, intentamos definir en seguida los números individuales 0, 1, etc. y la progresión en la serie de los números."

Veamos con más detalle cómo procede. En el capítulo IV de los *Fundamentos de la Aritmética* y tras argumentar que cada número individual es un objeto independiente, Frege

[45] Frege, *Ibid.*, sección 100, pág. 199-200

afirma que "Para obtener el concepto de número, se debe *fijar el sentido de una igualdad numérica*[46]"; presentando a continuación la siguiente pregunta: "¿Cómo se nos ha de dar un número, si no podemos tener de él ninguna representación o intuición?" Y sugiere que si de lo que estamos hablando es de reconocimiento de objetos, requerimos de un criterio de distinción para ellos.

> Si se ha de designar un objeto con el símbolo *a*, entonces debemos poseer un criterio que nos permita distinguir en general, si *b* es lo mismo que *a* aunque no siempre esté en nuestro poder el aplicar este criterio[47].

En el caso de los números, Frege señala que es necesario definir el sentido de la proposición:

> (*) "el número que corresponde al concepto F es el mismo que el que corresponde al concepto G"[48].

Es decir, que es necesario establecer un criterio para poder distinguir entre números, aunque en la medida en que ha fijado una correspondencia entre cada número y un determinado concepto F, el problema de comparar números puede trasladarse al de comparar conceptos.

Frege señala que la importancia de marcar un criterio general para la igualdad numérica, consiste en que éste es un medio "para aprehender un número determinado y para reconocerlo como el mismo". Una vez conseguido ello, se puede asignar a dicho número "un término numérico como nombre propio[49]".

Entonces, lo que Frege busca es establecer un criterio de distinción entre números, considerados como objetos, a fin de poder designar a cada uno de tales objetos a través de un nombre propio que será la expresión numérica correspondiente.

Ahora bien, para Frege "definir el sentido" de la proposición (*) significa "reproducir su contenido con otros términos", esto es, explicar el significado de "el número que corresponde al concepto F", sin utilizar la expresión "el número que corresponde al concepto G[50]". La expresión propuesta por Frege para explicar el significado de tal igualdad, es la siguiente:

---

[46] Frege, *Ibid.*, sección 62 y ss., pág. 169. El subrayado es mío, RGA.
[47] *Ibid.*, pág. 170.
[48] *Ibid.*, pág. 170
[49] *Ibid.*, pág. 170
[50] *Ibid.*, pág. 170

"el número que corresponde al concepto F, es la extensión del concepto ´equinumérico respecto al concepto F´.[51]"

Y, posteriormente, asienta esta otra proposición:

la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto F" es igual a la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto G" es verdadera si y sólo si la proposición "al concepto F corresponde el mismo número que al concepto G" también es verdadera[52].

Es interesante notar la sutileza del procedimiento de Frege: definir la igualdad entre números apelando a otra relación binaria que permite comparar entre "extensiones de conceptos". El problema es que Frege no aclara ni cómo se pasa de un concepto a su extensión, ni cómo se establece la ley que relaciona o compara extensiones de conceptos.

La manera en que Frege define la igualdad entre números es en cierta medida similar a la conocida estrategia de Cantor quien utiliza, al realizar este paso en su propia construcción de la definición de número cardinal, la noción de equivalencia entre conjuntos. A través de la equivalencia entre conjuntos, Cantor puede comparar las llamadas "potencias" o números cardinales asociados con ellos[53]. Por su parte, Frege utiliza una expresión similar a la de equivalencia de conjuntos: "extensión del concepto ´equinumérico con respecto al concepto F" o G´". Belna señala con razón que la noción de "extensión de un concepto" tiene una posición central en la teoría de Frege acerca del número; y añade que es justamente en la ambigüedad con la que utiliza tal noción de donde surge posteriormente la llamada Ley V y la paradoja de Russell[54].

Revisemos la explicación fregeana de la expresión, "extensión del concepto ´equinumérico con respecto al concepto F" o G, para entender la dificultad que encierra. Para su aclaración Frege desarrolla una analogía con el juicio:

(**) "La recta *a* es paralela a la recta *b*", en símbolos, $a // b$

[51] *Ibid.*, sección 68, pág. 175.
[52] *Ibid.*, sección 69, pág. 175-176
[53] Los detalles del argumento cantoriano se encuentran en el siguiente capítulo.
[54] Belna, *op.cit*, pág. 246. No entro a los detalles del argumento pues ello rebasa las pretensiones del presente trabajo. Sin embargo, es pertinente señalar que la distinción entre objeto y concepto que Frege sostiene no es únicamente lógica, tal como la que se establece en la Teoría formal de conjuntos entre elemento y conjunto. Un problema, entonces, es que no está claramente desdoblada la diferencia entre la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto y la relación de inclusión de un conjunto en otro.

En este caso, según Frege, requerimos del concepto de "dirección" para explicar el significado del símbolo, *a // b.* De esa manera, la expresión "la dirección de la recta *a* es igual a la dirección de la recta *b*" explica el símbolo *a // b.*

Según Frege, lo que hacemos es, entonces,

> sustituir el símbolo // por el más general, =, con lo cual *dividimos el contenido* [del juicio] de un modo diferente del juicio original (**) y con ello obtenemos un nuevo concepto[55].

Frege utiliza esta analogía con el propósito de esclarecer la expresión "extensión del concepto ´equinumérico´ con respecto al concepto F"; considerando que esto es, a fin de cuentas, "construir el *contenido de un juicio* que pueda tomarse como una igualdad y que en cada lado de esta igualdad haya un número[56]".

En el caso de la analogía geométrica de las líneas paralelas *a y b,* Frege señala que es necesario, de todas maneras, establecer la definición del concepto "dirección de línea *a*". Su propuesta de definición es la siguiente:

> La dirección de la recta *a* es la extensión del concepto "paralela a la recta *a*"

Es decir, el concepto de "ser paralelo a" una determinada recta, se explicará a través de otro concepto que es "tener la misma dirección".

Con estos elementos, Frege finalmente explica el contenido de la expresión, "extensión del concepto ´equinumérico con respecto al concepto F o G´". Afirma que hay que proceder análogamente a como lo hizo para definir la dirección de la línea *a*, "poniendo conceptos en lugar de rectas... y en lugar de paralelismo, la posibilidad de coordinar biunívocamente los objetos que caen bajo un concepto con los que caen bajo el otro". A esta última posibilidad la llama "equinumerosidad". Es conveniente mantener en mente esta argumentación para contrastarla en el siguiente capítulo con la explicación cantoriana de la igualdad numérica.

Así, resulta finalmente que la definición de igualdad numérica que Frege propone es la siguiente:

> la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto F´ es igual a la extensión del concepto ´equinumérico respecto al concepto G´ es verdadera si y sólo si "al concepto F corresponde el mismo número que al concepto G" también es verdadera.

---

[55] Frege, *Los Fundamentos..., op.cit.,* sección 64, pág.171.
[56] *Ibid.*

Esta definición es análoga al procedimiento cantoriano para establecer la igualdad entre números cardinales. En ambos casos, la igualdad numérica se sostiene en la posibilidad de comparar o bien conjuntos, o bien "extensiones de conceptos" que, a su vez, corresponden a los números. Sin embargo, encuentro que en Frege no hay una explicación para lo que Cantor llama "el proceso de abstracción de la naturaleza y el orden de los elementos de una colección", que es lo que finalmente permite a Cantor comparar números cardinales a través de la equivalencia de conjuntos. En la expresión "extensión del concepto ′equinumérico con respecto al concepto F′", Frege insiste en que la palabra "equinumérico" es sólo un "modo de simbolización arbitrariamente elegido" y, a partir de él define:

> El número que corresponde al concepto F, es la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto F[57]".

Tenemos entonces que no solamente no sabemos cómo se pasa de un concepto a su extensión. Además, será comparando extensiones del concepto "equinumérico respecto al concepto F" y "equinumérico respecto al concepto G", como finalmente quedará establecida la posibilidad de comparar números, considerados objetos individuales. De alguna forma entonces, Frege está hablando de comparación entre colecciones de objetos sin aceptar que tales colecciones sean "conjuntos" en el sentido de Cantor, en tanto no admite el "proceso de abstracción" en el que éste último apoya su definición básica de conjunto.

De todas maneras, según Frege "los asertos básicos que pueden hacerse de las extensiones de los conceptos" son: i) la igualdad, ii) que una comprende más que la otra. Debido a ello resulta entonces que tenemos ya establecida la posibilidad tanto de comparar números como de ordenarlos en una sucesión. Una vez establecido esto Frege puede introducir definiciones de números individuales, en particular del cero, del uno y de la relación de sucesión:

> 0 es el número que corresponde al concepto "no igual a sí mismo."[58]
>
> 1 es el número que corresponde al concepto "igual a cero."[59]
>
> "hay un concepto F y un objeto x que cae bajo él, de manera que el número que corresponde al concepto F, es *n*, y de manera que el número que corresponde al

[57] *Ibid.*, sección 68, pág.175
[58] *Ibid.*, sección 74, pág. 181
[59] *Ibid.*, sección 77, pág. 184

> concepto ´lo que cae bajo F, pero no es igual a x´ es *m*, significa lo mismo que "*n* sigue en la serie de los números naturales inmediatamente a *m*"[60].

A partir de estas definiciones de los números entendidos como objetos individuales, en tanto son extensiones de conceptos, Frege "arma" por expresarlo de alguna manera, la sucesión de los naturales mostrando que cualesquier número *m* es sucedido por otro número ($m + 1$); con lo cual declara satisfecho su objetivo.

> & 91. ...Sin pedir prestado un solo axioma a la intuición, he probado una proposición que a primera vista se habría tomado por sintética, y la cual ahora deseo expresar así:
>
> Si la relación de cada miembro de una serie para con su sucesor es biunívoca, y si *m* e *y* siguen a *x* en esta serie, entonces *y* precede a *m* en esta serie, o coincide con ella, o sigue a *m*.
>
> Por medio de esta prueba se puede ver que las proposiciones que amplían nuestro conocimiento pueden contener juicios analíticos.

Según Frege entonces, es la posibilidad de comparar "extensiones de conceptos" la que hace aparecer al número "como un objeto reconocible, aunque no física o al menos espacialmente, ni como un objeto del cual pudiéramos formarnos una imagen por medio de nuestra capacidad de imaginación[61]". Según Baker y Hacker tal afirmación compromete a Frege con una peculiar forma de platonismo pues, al buscar que el número en tanto "contenido de un juicio de reconocimiento" sea independiente de cualquier acto mental o capacidad subjetiva, se obliga a admitir cierta "*substancia* no espacio-temporal[62]". Sólo en este sentido es posible comprender la ya mencionada metáfora del matemático como geógrafo[63], esto es, como alguien que descubre lo que "ya estaba ahí".

Una vez revisados estos argumentos, recapitulemos las dificultades que encontramos en la definición de número de Frege:

---

[60] Ibid., sección 76, pág.183

[61] *Ibid.* En la sección 106 Frege sostiene que: "Fue de importancia establecer el sentido de una igualdad numérica... La posibilidad de que los objetos que caen bajo un concepto F se coordinen biunívocamente con los que caen bajo un concepto G, la tomamos como contenido de un juicio de reconocimiento respecto a números".

[62] Baker y Hacker, *op.cit.*, pág. 59. La idea que sobre este punto sostienen estos autores es que Frege no avanzó lo suficiente en sus esfuerzos por separar lo lógico de lo psicológico: "Lo que [Frege] intentó hacer fue eliminar cualquier vestigio de mentalismo de los objetos propios de la investigación científica en lógica. [Sin embargo], en relación a los objetos de juicio y también respecto a los conceptos, remplazó los mitos y confusiones cartesianos por confusiones y mitos platónicos".

[63] "Tampoco el matemático puede producir algo arbitrariamente, como tampoco lo puede el geógrafo; también él sólo puede descubrir y denominar lo que está ahí". Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, Sección 96.

En primer lugar, Frege se compromete a separar lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo y, bajo tal premisa, no admite que el número puede definirse a partir de la noción de conjunto como colección de objetos separados y distinguibles. Frege critica a la noción de conjunto por su carácter subjetivo, no admite la explicación de los conjuntos como "abstracciones de objetos" ni como construcciones. Él parte únicamente de la clarificación de los conceptos tratando que los conceptos de la aritmética sean únicamente lógicos. Sin embargo, su estrategia de partir únicamente de conceptos para posteriormente llegar a las "extensiones de conceptos" a la hora de definir un número determinado, lo obliga a explicar el paso de un concepto a su extensión; cuestión que Frege elude. Él afirma en sus conclusiones:

> & 107. [...] Aun queda una duda: "Una proposición de reconocimiento siempre debe tener un sentido. Si ahora entendemos la posibilidad de coordinar biunívocamente los objetos que caen bajo el concepto F con los que caen bajo el concepto G como una igualdad, al decir: "el número que corresponde al concepto F es igual al número que corresponde al concepto G", y con ello introducimos la expresión "el número que corresponde al concepto F", entonces, obtenemos un sentido para la igualdad sólo si ambos lados tienen la forma justamente mencionada. De acuerdo con tal definición, no podríamos juzgar si una igualdad es verdadera o falsa en caso de tener únicamente un lado en esta forma...
> ...
> Aquí *se presupone que se conoce el sentido de la expresión "extensión del concepto"*. Este modo de superar la dificultad ciertamente no encontrará consenso general, y muchos preferirán allanar tal dificultad de otra manera. Yo tampoco pongo un peso decisivo en lo atrayente de la extensión de un concepto[64].

Resulta así que en la argumentación de Frege el paso de un concepto a su extensión es un supuesto, que se sostiene en el argumento de que se puede conocer el contenido de un juicio de reconocimiento. Entiendo, pues, a partir de lo anterior que Frege llama "extensión de un concepto" a una colección o conjunto a la cual, sin embargo, no está dispuesto a considerar de esa manera. El problema pendiente, para Frege, es que no ha quedado demostrado que el paso de un concepto a su extensión se pueda hacer por medios únicamente lógicos.

En segundo lugar, Frege separa la noción de concepto de la de objeto y tiene que mantener siempre a la vista tal distinción a la hora de definir el concepto de cada número

[64] Frege, *Los Fundamentos....*, sección 107, pág. 204.

específico para pasar, posteriormente, a la extensión de dicho concepto. Sin embargo, su posición realista no le permite apelar únicamente a criterios lógicos para establecer la existencia de objetos, por lo que queda comprometido con un cierto platonismo aritmético o numérico.

En la siguiente y última parte de este trabajo revisaremos las posiciones de dos matemáticos contemporáneos a Frege, Georg Cantor y Richard Dedekind en relación a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética y la definición de número. Estos dos autores, para demostrar la necesidad lógica de las proposiciones de la aritmética, y para definir el número y fijar la definición de igualdad numérica, proceden de una manera totalmente distinta a la fregeana y encuentran, a su vez, otro tipo de problemas.

Capítulo IV

La reducción de la aritmética a la lógica y la noción de número según Cantor y Dedekind

En este último capítulo presentaré, de manera panorámica y en contraste con la posición de Frege, algunas ideas de Georg Cantor y Richard Dedekind en relación a la naturaleza de las proposiciones de las matemáticas y la noción de número. Cantor y Dedekind, tal como ya hemos mencionado, desde el comienzo de sus respectivas carreras se dedicaron a resolver las dificultades técnicas pendientes dentro del enorme propósito de reducción del análisis a la aritmética inaugurado por Cauchy y Weierstrass. En tal sentido, aunque ni Cantor ni Dedekind se ocupan directa y explícitamente de investigar sistemáticamente la naturaleza de las proposiciones de la aritmética de manera filosófica; ambos comparten con Frege la intención de demostrar que para definir las nociones principales del cálculo, del análisis e incluso de la aritmética, no es necesario apelar a la intuición. El trabajo matemático de Cantor y Dedekind, entonces, se inscribe dentro del proyecto de reducción de las matemáticas a la lógica que hemos discutido en el capítulo anterior, en tanto ambos se proponen, inicialmente, "expulsar a la intuición" de las proposiciones del análisis. Justamente en esta dirección, Dedekind por ejemplo, en relación a la noción de continuidad de una función, afirma que:

> Aun ahora encuentro de gran utilidad el recurso a la intuición geométrica en una primera presentación del cálculo diferencial. Al discutir la noción de acercamiento de una magnitud variable a un valor límite fijo, y especialmente al probar el teorema de que cada magnitud que crece continuamente, pero no más allá de ciertos límites, debe obligatoriamente aproximarse a un valor límite, tenemos el recurso a la evidencia geométrica Pero nadie puede negar que esta forma de presentación del cálculo diferencial no puede reclamarse científica. Para mi este sentimiento de insatisfacción es tan grande que he resuelto continuar meditando en la cuestión hasta que pueda dar un *fundamento puramente aritmético* y perfectamente riguroso de los principios del análisis infinitesimal[1].

Dedekind es muy claro al expresar la molestia que le produce el hecho de que la explicación de la noción de límite y de continuidad de una función requiera acudir a la evidencia geométrica. Él busca, tal como lo señala explícitamente, *un fundamento puramente aritmético* para el análisis infinitesimal que garantice o justifique las

---

[1] Dedekind, R., "Continuity and Irrational Numbers", en *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, New York, 1963, págs. 1-2. El subrayado es mío, RGA..

afirmaciones de esta disciplina sobre cantidades continuas. La intención de Dedekind, por tanto, consiste en expulsar a la intuición geométrica del conocimiento del análisis para fundarlo en la aritmética que, a su vez, adquiere su certidumbre de la lógica –aunque esta cuestión no es abordada explícitamente por Dedekind en la cita anterior. En tal sentido, aunque no en otros como veremos más adelante, el trabajo de Dedekind comparte la inquietud antikantiana de Frege de que, en particular las proposiciones del cálculo y del análisis no pueden ser consideradas como juicios sintéticos *a priori*.

Por su parte, Cantor, en relación al conocimiento matemático afirma que:

> ... Debo declarar que en mi opinión hacer depender del concepto de tiempo o de la intuición del tiempo, *el mucho más general y básico concepto de continuidad* es una gran equivocación. En mi opinión, el tiempo es una idea cuya explicación clara presupone el concepto independiente de continuidad[2]...

La anterior afirmación de Cantor puede igualmente entenderse como una crítica a la postura kantiana que apoya el conocimiento de la aritmética y del análisis en la intuición pura del tiempo. Entonces, la "expulsión" de la intuición de la definición de los conceptos básicos del análisis matemático, intención compartida por Dedekind y Cantor debe entenderse como una parte del amplio programa de reducción del análisis y del cálculo a la lógica; programa del que Frege también forma parte. Ahora bien, tal como discutimos en el capítulo anterior son dos los pasos requeridos para la reducción de las matemáticas a la lógica. En primer lugar, es necesario llevar a cabo la reducción del análisis y el cálculo a la aritmética y, en segundo lugar, se requiere de la reducción de la aritmética a la lógica, es decir, demostrar la analiticidad de las proposiciones de la aritmética.

Cantor y Dedekind se ocuparon al comienzo de sus respectivas carreras de asuntos técnicos relacionados con la primera parte de dicho proyecto, es decir, de la reducción de las nociones del análisis a la aritmética. En esta investigación no entraré a discutir en detalle tales cuestiones sino que, más bien, me abocaré a revisar la manera en la que tanto Cantor como Dedekind ofrecieron fundamentos lógicos para la aritmética a partir de cierta definición de la noción de número.

1. Cantor: el concepto de número basado en la noción de conjunto

El trabajo de Georg Cantor (1845- 1918) sobre teoría intuitiva de conjuntos y sobre la aritmética de los números transfinitos[3], es quizá la parte más conocida de su obra; aunque también hizo contribuciones importantes sobre cuestiones sumamente técnicas como la convergencia de series trigonométricas infinitas[4]. Para los fines de esta investigación, cabe mencionar que desde sus primeros trabajos Cantor utilizó la relación establecida por Weierstrass entre magnitud numérica y "agregado" o "colección" de "puntos numéricos". Jourdain señala que en el siglo XIX, siguiendo a Weierstrass, los matemáticos aceptaban que un número era "*determinado* si sabemos de qué elementos se compone y cuántas veces cada elemento ocurre en él". Es decir, se decía que "un número racional ***r*** estaba contenido en una cantidad numérica ***a*** si podemos separar de ***a*** un agregado parcial que sea igual a ***r***". Esto muestra que, de manera informal, el tratamiento matemático de la cantidad numérica se asociaba en la época de Cantor, a la consideración de específicos *agregados o colecciones* de puntos que podían separarse y ordenarse[5]. Un problema pendiente utilizando esta herramienta es que los números irracionales, en tanto no pueden expresarse como cociente de dos números enteros, no podían definirse. Estas cuestiones, relacionadas con la continuidad de los números reales, configuran el ambiente académico en el que Cantor se mueve.

Uno de los primeros resultados del trabajo matemático de Cantor es la demostración de que no es posible definir a los irracionales como secuencias de números racionales. La relevancia de tal resultado para esta investigación está en que en ella se exhiben ciertos supuestos que Cantor utiliza a lo largo de su trabajo: por un lado, la consideración de la cantidad pensándola como colección de puntos; y por otro, el uso de procesos infinitos completos o de colecciones infinitas pensadas como totalidad. El mérito de Cantor frente a

---

[2] Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten* (1883), Teubner, Leipzig, citado por Hallet, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Clarendon Press, Oxford, 1984, pág. 15. El subrayado es mío. RGA.

[3] Cantor Georg, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover Publications, New York, 1955. Traducción de Philip Jourdain. (*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehere* I, 1895)

[4] Hallet Michael, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Clarendon Press, Oxford, 1984

[5] En el capítulo anterior hemos discutido la incomodidad de Frege con este supuesto. Según él, la consideración de "colecciones de unidades" –de puntos o de "unos"- exige recurrir a la intuición, en tanto, tales objetos no son particulares sino representantes de determinados "géneros" o "clases".

otros matemáticos de la época, está en haber reflexionado rigurosa y explícitamente sobre estos dos aspectos tal como mostraremos posteriormente.

De hecho, el estudio de los conjuntos y en particular, de los conjuntos infinitos, son los dos grandes temas que ocupan la atención de Cantor. A diferencia de otros matemáticos, Cantor asume como admisibles procesos infinitos completos y como existentes las "colecciones infinitas" a las que daban lugar. En este sentido, para el pensamiento matemático, Cantor "abre nuevos terrenos al considerar colecciones de números reales *definidos* mediante una operación[6]", es decir, desde el inicio de su obra piensa a cada número singular como un elemento de una colección donde se definen operaciones con ciertas propiedades. Las nociones básicas de conjunto infinito y de comparabilidad entre conjuntos infinitos, sobre las que posteriormente Cantor construirá su Teoría de los Números Transfinitos, se introducen desde 1874 cuando las emplea para la demostración de la existencia de los números trascendentes. Antes de entrar a discutir los supuestos de la definición cantoriana de número y su posición en torno a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética, vale la pena revisar algunos aspectos de su tratamiento de la noción de "conjunto infinito actual", a fin de brindar una panorámica de ciertos aspectos de las ideas básicas de este autor que nos ayudarán a esclarecer su postura. En particular, a precisar la idea de comparación de conjuntos como cimiento de la posibilidad de comparar cantidades; o dicho de otro modo, de explicar la relación de igualdad entre números.

1.1 Brevemente sobre los conjuntos infinitos *actuales*

Quizá la mayor notoriedad de Georg Cantor consiste en que creó para nosotros, a decir de Hilbert, "el paraíso de los números transfinitos[7]" al asumir como aceptable y válida la noción de conjunto infinito *actual*. En este sentido, Cantor rompe con una tradición de más de 2000 años en Matemáticas, que consideraba al infinito simplemente como *potencial*, esto es, como cantidad representada por una colección susceptible de crecimiento incesante,

[6] Kanamori Akihiro, "The mathematical development of Set Theory from Cantor to Cohen", *The Bulletin of Symbolic Logic*, Volume 2, Number 1, Marzo 1996. Akihiro señala que, si bien no es Cantor quien extiende el concepto de función a "correspondencias arbitrarias", en cierta medida la fertilidad de sus razonamientos está en que utiliza ampliamente esta idea.

[7] David Hilbert, discutiendo con los intuicionistas, dice literalmente: "Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros". Hilbert, "Acerca del Infinito" en *Fundamentos de las Matemáticas* (recopilación), Colección MATHEMA, Facultad de Ciencias-UNAM, México, D.F., 1993. Traducción de Felipe Segura.

pero nunca como entidad completa. El propio Aristóteles en su *Física* señala que "la opción que nos queda es que el infinito tiene una existencia potencial... El infinito actual no existirá" y los griegos, en general, "miraban al infinito (actual) como un concepto inadmisible"[8].

En contraste con ello, Cantor asume cantidades infinitas *actuales*:

> Por un infinito-actual debe entenderse una cantidad –*quantum*- que, por un lado *no es variable* sino que es más bien fija y determinada en todas sus partes –una constante genuina-, pero que al mismo tiempo sobrepasa en *magnitud a cualquier cantidad finita* de la misma clase[9].

En la cita se muestra claramente la idea que Cantor tiene del infinito como *cantidad* fija, determinada y, por tanto, comparable con otras cantidades. Ahora bien, en la medida en que el estudio de la cantidad iba conectándose cada vez más con la noción de "colección" de objetos, la comparación entre cantidades devino comparación entre colecciones de objetos –puntos geométricos, "puntos numéricos", etc.-. De momento, cabe mencionar en relación al infinito actual, que la innovación cantoriana consiste en que sugirió pensar las cantidades infinitas utilizando colecciones infinitas de números entendidas como totalidades completas. Para esclarecer la noción de colección infinita –nuestros actuales conjuntos infinitos-, Cantor utilizó una propiedad básica[10] de tales colecciones:

> Si A es un conjunto, A será infinito si existen, un subconjunto propio B de A y una función f que establece una correspondencia uno a uno entre los elementos de A y los de B[11]

Esta definición establece que la propiedad fundamental de cualquier colección o conjunto infinito es la posibilidad de ponerse en correspondencia uno a uno con al menos un subconjunto propio de sí mismo. Definición claramente contraintuitiva pues una de las nociones básicas del estudio clásico de la cantidad es aquella que establece que "El todo es

---

[8] Kline Morris, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI, México, 2000, p.240.

[9] Citado por Hallet, *op.cit.*, pág.12-13

[10] Bernhard Bolzano (1781-1848), reflexionando sobre temas de álgebra y considerando colecciones de objetos abstractos, consideraba que "una colección es infinita si contiene una parte propia que es del mismo tamaño del total". Sin embargo, tal propiedad según Bolzano constituía una fuente de paradojas por lo cual recomendaba desecharla.

[11] Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" en *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84. Citado por Hallet, *op.cit.*, pág.1

mayor que cualquiera de las partes[12]". Sin embargo, a partir de tal definición Cantor establece que, por ejemplo, el conjunto de los números naturales, N, es infinito pues un subconjunto propio de N, el de los números pares, P, puede ponerse en correspondencia uno a uno con N. Si consideramos la función f, definida de N a P, de la siguiente forma, f(***n***) = ***2n***, tal función establece una correspondencia uno a uno entre cada número natural ***n*** y un elemento del conjunto de los números pares, a saber, su doble.

La comparación entre distintos conjuntos infinitos permite a Cantor introducir un número transfinito, ω[13], al cual designará la *potencia* o *tamaño*[14] del conjunto de los números naturales *N*. En su trabajo "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre[15]" Cantor utiliza explícitamente la noción de "potencia de un conjunto A", denotándola /A/, y establece un criterio para definir "equipotencia" y, en general, para comparar potencias de conjuntos:

> Si A y B son dos conjuntos dados, entonces, / A / = / B / si hay una función f que establece una correspondencia uno a uno entre los elementos de A y los de B[16].

Es decir, el requisito para la igualdad de dos potencias de conjuntos, / A / y / B / es que exista una función f de A en B que establezca una correspondencia biunívoca entre ambos. A la potencia de un conjunto A, Cantor la llamará posteriormente, el **número cardinal de A**. Cabe notar entonces, que para definir la potencia de un conjunto lo que Cantor hace es establecer una relación entre colecciones de objetos y señalar un procedimiento para compararlos. Las dificultades de esta definición las discutiremos posteriormente.

De momento, conviene insistir en que una vez establecida dicha regla de comparación entre conjuntos, las investigaciones de Cantor se dirigen a la "comparación" de diversos conjuntos infinitos a través de brindar "una regla de correspondencia exhaustiva" entre los

---

[12] Recordemos a Kant, quien señala que la proposición (a + b) > a , es un principio *a priori* puro expuesto directamente en la intuición. Esto lo hemos discutido en el Capítulo 1, sección 2.2. de este trabajo.

[13] Para fines de claridad utilizo una notación introducida por Cantor sólo posteriormente: ω, en vez del símbolo oo_1, empleado inicialmente.

[14] Cantor puede utilizar la palabra "tamaño" de una colección infinita, por ejemplo, la colección de los números naturales o la de los números pares, en primer lugar porque, como ya señalamos, las considera como "totalidades completas". Además, en su tratamiento de números transfinitos Cantor poco a poco va distinguiendo entre dos nociones matemáticas básicas: contar y medir; según Cantor, para contar conviene utilizar números ordinales y para medir el tamaño de un conjunto o colección, se usarán números cardinales. La discusión en detalle de estos aspectos rebasa el interés del presente trabajo.

[15] Cantor Georg, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" *en Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84, 1878. Citado por Hallet, *op.cit.*

elementos de los conjuntos a comparar, esto es, dando explícitamente funciones biyectivas de uno de los conjuntos infinitos a comparar, en el otro. Al hacer esto, Cantor encuentra que es posible aparear biyectivamente a cada uno de los elementos de varios de los sistemas numéricos utilizados frecuentemente en matemáticas como por ejemplo, el de los números naturales, ***N***; el de los enteros, ***Z***; el de los números racionales ***Q***, que tienen la forma p/q donde p y q son enteros; el de los números algebraicos, **A,** que son raíces de ecuaciones enteras, etc. Así, lo que Cantor hace es comparar la potencia o *tamaño* de diferentes conjuntos infinitos "completos". Por este camino, en 1874 Cantor encuentra un desconcertante resultado: no es posible establecer una biyección entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los racionales; es decir, existen conjuntos infinitos de "distinto tamaño".

1.2. La comparación de conjuntos infinitos y nuevos números transfinitos

En 1874 Cantor publica un resultado básico de la teoría de conjuntos[17] que allana el camino hacia su teoría de los números transfinitos. Comparando el conjunto de los números naturales, ***N***, y el de los números reales, ***R***, demuestra que no existe una función que establezca una correspondencia biunívoca entre ***N*** y ***R***. A partir de haber establecido la comparación entre conjuntos como medio para la comparación entre cantidades numéricas, Cantor interpreta este resultado afirmando no sólo que ***N*** y ***R***, como conjuntos o colecciones, tienen distinto *tamaño;* sino asignando signos numéricos para representar cada una de estas dos cantidades. El argumento es el siguiente: dado que no es posible establecer una correspondencia biunívoca entre ***N*** y ***R***, el conjunto de los reales necesariamente tiene que ser "más grande" que el conjunto de los números naturales. Es decir, pese a que ambos son conjuntos infinitos cada uno de ellos tiene una potencia distinta. A la potencia del conjunto de los números reales, ***/ R /***, Cantor la llamará *continuo*[18] simbolizado por $\mathfrak{c}$.

[16] Dauben Joseph, *Georg Cantor. His mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1979

[17] Cantor Georg, "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", en *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 77, 1874. Citado por Hallet, *op.cit.*

[18] Llamar *continuo* a la potencia o cardinal de los números reales, / R /, tiene relación con el problema de la estructura de los números reales y su representación geométrica. Ya hemos mencionado que el conjunto de los reales se pensaba como la unión de los racionales y los irracionales y que éstos últimos, pese a admitir en ocasiones, una representación geométrica, no podían ser expresados formalmente con precisión.

Tenemos entonces que, hasta aquí, Cantor cuenta con dos "cantidades infinitas" de distinta magnitud, a saber, ω y C, que son respectivamente / ***N*** / es decir, la potencia del conjunto de los números naturales y / ***R*** /, la potencia de los números reales. Al mismo tiempo, tenemos que ω es igual a ***/ Z /, / Q /, / A /,*** es decir, a las potencias de los conjunto de los números enteros, racionales y algebraicos, respectivamente; en la medida en que cada uno de tales conjuntos puede biyectarse con el conjunto de los números naturales. Teniendo entonces, además, que $\omega < C$, Cantor afirma que es posible definir una relación de orden lineal entre tales "números transfinitos".

Por otro lado, durante su análisis del comportamiento de los conjuntos infinitos, Cantor encuentra la necesidad de introducir una distinción entre lo que posteriormente llamará "números ordinales" y "números cardinales", dependiendo si se toma en cuenta o no el orden de los elementos de un conjunto infinito dado. A partir de tal distinción resulta que, por ejemplo, el número $(\omega + 1)$ es el número ordinal sucesor de ω, correspondiente a una re-ordenación del conjunto de los números naturales tal que, por ejemplo, el número uno se "añade" *al final* de la serie de los naturales. Estos dos "números", sin embargo, en términos de su cardinalidad, serán equipotentes pues trivialmente pueden biyectarse a través de la función f(n) = n, para cualquier elemento de N.

Todas estas innovaciones cantorianas, deducidas lógicamente a partir de la definición de conjunto infinito colocan en el centro de la discusión cuestiones tales como el significado de expresiones como "ω" que denota al llamado *primer ordinal transfinito*, pero cuya cardinalidad es idéntica a la de los demás ordinales sucesores menores que C. Esta cuestión exige precisar qué significa "comparar" dos números infinitos de distinto tamaño o qué se afirma al hacer enunciados de identidad entre números.

Sobre esto Cantor, en 1883, señala:

> Estoy convencido que el dominio de las cantidades definibles no se limita a las cantidades finitas, y que los límites de nuestro conocimiento pueden ser extendidos de acuerdo a ello, sin que esto necesariamente violente nuestra naturaleza. Por tanto, reemplazo la proposición Aristotélica-escolástica [*infinitum actu non datur*] por la siguiente:
>
> *Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt* [Todas las formas ya sean finitas o infinitas son definidas, y

con la excepción de Dios, son capaces de ser determinadas matemáticamente –intelectualmente-[19]]

Ahora bien, Cantor expondrá rigurosamente su teoría de los números transfinitos en sus más conocidos artículos, "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre[20]" de 1895 y 1897, que revisaremos a continuación.

En *Los Fundamentos de la Aritmética*[21] Frege admite los "números infinitos" de Cantor señalando que en ellos "no hay nada de misterioso o asombroso[22]" e inclusive señala, "Un nombre o un símbolo que se introduzca lógicamente de modo inobjetable, puede ser usado sin temor en nuestras investigaciones, y así, nuestro número, ∞_1, está tan justificado como el dos o el tres[23]". Tal afirmación es claramente una toma de posición fregeana contra Kronecker y la escuela intuicionista y a favor de Cantor en torno a la admisibilidad del infinito actual. Sin embargo, en relación a los números infinitos Frege hace una afirmación donde se muestra su criterio para determinar la existencia de objetos: además de que el símbolo que lo denote haya sido introducido lógicamente de manera inobjetable, se requiere mostrar que "algo cae" bajo el concepto que explica tal nombre. En este caso, Frege dice: "El número que corresponde al concepto 'número finito' es un número infinito[24]". Esto es, podemos afirmar que Frege sancionó las afirmaciones cantorianas sobre el infinito, pese a que no comparte la posición de Cantor que considera admisible la existencia de objetos matemáticos, siempre que su definición se base en el principio de no contradicción.

1.3 Los conjuntos como abstracciones de conglomerados de objetos, a la base de la noción de número: el platonismo de Cantor

Desde 1874 Cantor utilizó la noción de conjunto como una cuestión fundamental de su razonamiento, ensayando distintas definiciones a lo largo de su obra y recibiendo críticas

---

[19] Citado por Hallet, *op.cit.*, pág. 14.
[20] Ambos artículos fueron publicados originalmente en los *Mathematische Annalen* de 1895 y 1897. Utilizamos la traducción al inglés de Philip Jourdain publicada como *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, New York, 1955.
[21] Frege Gottlob, *Los fundamentos de la aritmética. Una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número.* UNAM, México, 1972. Traducción de Hugo Padilla. (Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung uber den Begriff der Zahl, Breslau, 1884.)
[22] Frege Gottlob, *Los fundamentos de la aritmética. op.cit.*, sección 84, pág. 190.
[23] Frege, *op.cit*, sección 85.
[24] Frege, *op.cit.*, sección 84.

desde diversas posturas[25]. Sin embargo, en su artículo de *1895*[26], Cantor explica lo que entiende por "conjunto" (Menge), para definir a partir de ello su noción de número cardinal. Tal definición, que resume sus distintos ensayos previos es la que mantendrá por el resto de su vida:

> Por un conjunto entenderemos cualquier colección, considerada como un todo **M**, de objetos **m** de nuestra intuición o nuestro pensamiento, definidos y separados.[27]

Y añade: "Cualquier conjunto M tiene una ´potencia definida´, a la cual también llamaremos su ´número cardinal´."

En esta definición no queda clara cuál es la naturaleza de los objetos que, considerados como colección, forman conjuntos. Según Cantor los objetos ***m*** proceden o de nuestra intuición o de nuestro pensamiento; lo cual puede interpretarse como que Cantor no quiere comprometerse únicamente con objetos sensibles, y tampoco únicamente con objetos abstractos: o bien tales objetos "son dados a la intuición" utilizando la terminología kantiana, o bien no lo son y proceden únicamente del pensamiento. En todo caso, es claro que a diferencia de Mill quien como ya hemos visto, también apela a la noción de conglomerado o colección de objetos sensibles para pensar el número; Cantor admite colecciones de "objetos del pensamiento" –como totalidades infinitas completas- que le permitan pensar en números infinitos. En todo caso, lo que más preocupa a Cantor es dejar clara la posibilidad de *definir y separar* los objetos que conforman conjuntos.

Sigamos ahora con el argumento de Cantor que, después de definir conjunto y de relacionar la noción de "número cardinal" con la de "potencia de conjunto", aclara:

> Llamaremos con el nombre de ´potencia´ o ´número cardinal´ de M al concepto general que, mediante nuestra *activa facultad de pensamiento*, surge del conjunto M cuando hacemos abstracción de la naturaleza de sus variados elementos *m* y del orden en el que están dados[28].

Usaremos / M / para denotar la potencia o el número cardinal de M.

[25] Para una revisión sistemática de las distintas definiciones de "conjunto" utilizadas por Cantor ver Dauben, *op.cit.*
[26] Cantor, "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", publicado en Cantor, *Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers, op.cit.*
[27] Cantor Georg, *Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers* (Primer Artículo- 1895), *op.cit.* Todas las citas siguientes, a menos que otra cosa se indique provienen de este artículo.

Cantor no cae en circularidad pues **no dice** que la potencia o "número cardinal" de un conjunto M es el número de objetos que contiene. Lo que dice, literalmente, es que "llama potencia" al "concepto general" que surge de hacer un proceso de abstracción de la naturaleza de los elementos que lo componen y del orden en que tales elementos se encuentran. Conviene destacar aquí dos cosas: i) el aparente psicologismo implícito en Cantor al hacer descansar la definición de potencia en "un proceso de abstracción" psicológico y, por ende, subjetivo; pese a su manifiesta intención de separar, igual que Frege, lo lógico de lo psicológico, y ii) la idea de Cantor del número cardinal como "concepto"; pues estos serán dos aspectos de su teoría drásticamente criticados, entre otros, por Frege.

Si tal como hemos mostrado, en su *Beiträge* de 1895 Cantor presenta explícitamente una definición de potencia de conjunto basándola en la capacidad intelectual de abstracción, Hallet argumenta que desde mucho antes Cantor había presentado las nociones básicas de la Teoría de Conjuntos como *construcciones* conceptuales "libres":

> Sólo a partir del nuevo empirismo, sensibilismo y escepticismo, y del criticismo kantiano que emergió de ello, se ha creído que la fuente del conocimiento y de la certidumbre se localiza o bien en los sentidos o bien en la llamada forma pura de la intuición del mundo de las ideas... Sin embargo, de acuerdo a mi convicción estos elementos de ninguna manera proporcionan conocimiento verdadero. Este sólo puede ser obtenido a través de conceptos e ideas que son, en el mejor de los casos, estimuladas por nuestras experiencias exteriores, pero que son formadas principalmente a través de la inducción interna y de la deducción, como algo que, por expresarlo de algún modo, ya estaba dentro de nosotros y solamente se despierta y se hace consciente[29].

Cabe notar que Cantor busca separarse tanto del empirismo milliano como del "criticismo" kantiano objetando lo que cada una de estas corrientes considera origen y fuente legítima de conocimiento verdadero. Es decir, Cantor no acepta que el conocimiento matemático surja de la abstracción de objetos sensibles, ni se compromete con las intuiciones puras del tiempo o del espacio como garantía de la necesidad y generalidad en matemáticas. Más bien, para explicar la fundamental noción de conjunto, Cantor parece sostener simultáneamente posiciones constructivistas, basando la noción de conjunto en cierta "activa facultad mental" que determina los elementos que pertenecen a una colección

[28] El subrayado es mío, RGA.
[29] Citado por Hallet, *op.cit.*, pág.15.

determinada; al mismo tiempo que admite una peculiar especie de "ideas puras" que, a través de algún tipo de proceso mental –la "inducción interna y la deducción"-, se "hacen conscientes", tal como se sugiere en la última cita.

Hay otras afirmaciones cantorianas que permiten también sostener el carácter platónico que Cantor adjudica, en particular, a los números. Refiriéndose a ellos, Cantor sencillamente introduce una especie de *topus uranus* platónico donde los números habitan e incluso incluye a Dios en sus argumentos. Dauben examina la correspondencia privada de Cantor, donde él manifiesta con mayor claridad sus puntos de vista:

> Todos los números me parecen constituidos como un mundo de realidades que existe fuera de nosotros, con el mismo carácter de necesidad que las realidades de la Naturaleza cuyo conocimiento nos viene dado a través de los sentidos.

Y añade: Tanto de modo separado como conjuntamente como una totalidad infinita, los números naturales "existen en el más alto nivel de realidad como ideas eternas en el *Intellectus Divinus*[30]".

Por otro lado, vale la pena insistir en que el trabajo de Cantor se sostiene fundamentalmente en la posibilidad de pensar "colecciones" de objetos separados y definidos como totalidades completas, esto es, conjuntos donde cada uno de sus elementos son distinguibles entre sí. En este sentido, Cantor comienza sus argumentos a partir de una cuestión que para Frege es un problema: determinar lógicamente la posibilidad de considerar cada elemento de un conjunto como "uno". La matemática contemporánea, en este sentido, avanza sobre la estrategia de Cantor y no sobre la de Frege[31].

Para entender con más detalle la dificultad y la importancia de la afirmación cantoriana de que los elementos de los conjuntos que fundan la noción de "número" son objetos "separables y definidos", abordemos ahora el tratamiento de Cantor de la identidad entre números; pues es ahí justamente donde aparecerán las principales diferencias matemáticas –y filosóficas- entre las posturas de Frege y de Cantor.

---

[30] Dauben, *op.cit.*, pág.228. La cita de Cantor proviene de una carta a su amigo Charles Hermite.

[31] La cuestión de determinar con precisión lo relativo a la noción de conjunto resultó no ser tan sencilla como Cantor suponía. La polémica matemática en torno a la axiomatización de la teoría de conjuntos, es prueba de ello. Sobre esta cuestión puede revisarse, entre otros, Devlin J.K., *Fundamentals of Contemporary Set Theory*, Springer-Verlag, 1979. También, para la discusión contemporánea sobre estos temas, Penelope Maddy, *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, 2000

2.0 La identidad entre números y la correspondencia biyectiva entre conjuntos

Una vez establecidas las ya mencionadas definiciones de "conjunto" y de "potencia" en su artículo de 1895, Cantor apela a la noción de "equivalencia de dos conjuntos" para comparar las "potencias" o "números cardinales" de dos conjuntos cualesquiera:

La relación de *equivalencia* entre conjuntos ($\equiv$) la define de la siguiente forma:

> (II) " $M \equiv N$ o $N \equiv M$ si es posible establecer entre ellos, a través de una ley, una relación tal que cada elemento de uno de ellos corresponda a uno y sólo un elemento del otro."

La cuestión de que, si existe tal relación biunívoca entre M y N, entonces podemos decir que M y N tienen la misma cardinalidad o que sus potencias son iguales, Cantor la deriva como teorema:

> (II) "Dos conjuntos M y N tienen el mismo número cardinal si y sólo si son equivalentes".

Podemos expresar el teorema de la siguiente manera:

i) $M \equiv N$ implica $/ M / = / N /$

ii) $/M / = / N /$ implica $M \equiv N$

En la demostración que Cantor ofrece de la segunda implicación, se presenta un problema: se necesita un paso intermedio que le permita conectar la noción de igualdad de potencias con la de equivalencia de conjuntos. Para dar este paso Cantor presenta el siguiente razonamiento:

Dados un conjunto M y su número cardinal / M /, si para cada elemento singular *m* de M hacemos abstracción de su naturaleza, tal elemento *m* se convierte en una "unidad",

> de tal manera que el número cardinal / M / es un conjunto definido compuesto por unidades, y este número tiene existencia en nuestras mentes como una imagen intelectual o proyección del agregado M.

Considerando al número cardinal / M / como un conjunto definido de unidades, la demostración de ii) resulta inmediata pues ahora se podrá decir que,

$$/ M / \equiv M \quad \text{y} \quad / N / \equiv N$$

Es decir, según Cantor, se podrá usar la relación de equivalencia entre M y N para compararlos con sus respectivos números cardinales o potencias / M / y / N /, pero ahora pensándolos como "conjuntos definidos de unidades".

Este tipo de argumento nos muestra a Cantor como representante de una peculiar posición constructivista, dado que su noción básica, la de "potencia de un conjunto" o "número cardinal" la hace descansar en la *facultad humana de abstracción* de objetos. Sin embargo, en cierto sentido y obviando grandes diferencias, como es el hecho de que Cantor está empeñado en dar una definición general de "número cardinal" y no en definir el "dos", el "tres", etc., su definición guarda ciertos rasgos de similitud con la de John S. Mill: ambos consideran conglomerados o conjuntos de cosas, de objetos, y presentan el número como lo que surge al hacer abstracción de la naturaleza –y el orden- de tales elementos. Si bien Mill toma en cuenta en su exposición solamente colecciones de objetos concretos, perceptibles a través de los sentidos: "colección de dos piedras" o de "tres galletas de jengibre", Cantor piensa por su parte, en conglomerados finitos o infinitos de puntos u objetos cualesquiera, es decir, de algún tipo de entidad abstracta básica a la cual atribuye existencia. Tal como ya mencionamos, de esta forma puede entenderse el implícito platonismo cantoriano.

Ahora bien, del análisis cuidadoso de la definición cantoriana de potencia o número cardinal podemos concluir que ésta contiene cierta ambigüedad. Por un lado, Cantor dice que el número cardinal es un *concepto general* que surge de hacer abstracción de la naturaleza y el orden de los elementos de un conjunto M dado; y por otro, que es un "conjunto de unidades" equivalente a o biyectable con, el conjunto original M.

Tal ambigüedad es lo que permite a Cantor establecer que:

> (*) "Entre los elementos de M y las diferentes unidades de su número cardinal / M / subsiste una relación de correspondencia recíprocamente unívoca (o bi-unívoca)".

De tal manera que la relación de equivalencia permite comparar entidades de, aparentemente, diferente tipo: $M \equiv / M /$. Una vez establecida esta relación, la implicación ii) del teorema en cuestión, se demuestra directamente.

El problema que se presenta aquí, es que establecer la relación de equivalencia entre un conjunto M y su potencia nos exige responder a las siguientes preguntas. De acuerdo a la definición II, si dos conjuntos son equivalentes entonces contamos con una función *f* que establece una correspondencia uno a uno entre ambos; sin embargo, la cuestión pendiente es establecer a quién corresponde *f(m)* para un elemento *m* de M, si la función la definimos de M a / M / . ¿Corresponde a un elemento de su número cardinal?, ¿qué significa entonces ser un elemento de un "concepto general"?

La solución de Cantor, como ya mencionamos, consiste en sostener que la potencia o cardinal de un conjunto /M/ es, a su vez, otro conjunto formado por unidades que es equivalente al conjunto original. Esta solución, que le permite establecer un criterio para conocer la igualdad entre números cardinales, de todas maneras deja pendiente la cuestión de qué son esas "partes" de un "concepto general[32]".

Aquí se inscribe una de las críticas más duras de Frege a Cantor: la relativa a pensar los conjuntos como "colecciones de unidades" y al problema que en ese caso se presenta con la posibilidad o no de distinguir entre objetos, es decir, entre los elementos de un conjunto dado. Recordemos lo que dice Frege en relación a este punto:

> & 39. (...) Si queremos dejar que el número surja por resumen de objetos diferentes, entonces obtenemos una acumulación en la que están contenidos los objetos precisamente con las propiedades con las que se distinguen, y esto no es el número. Si, por otra parte, queremos construir el número por resumen de lo idéntico, entonces todo confluye perpetuamente en uno, y jamás alcanzamos una pluralidad.
>
> Si con 1 designamos a cada objeto a numerar, entonces aparece una falla, ya que lo diferente recibe el mismo símbolo. Si pertrechamos al 1 con índices diferenciales, entonces resulta inútil para la aritmética[33].

Considero que la primera parte de la crítica de Frege es justa y es, exactamente, la que intento mostrar analizando la argumentación cantoriana. Sin embargo, me parece que la segunda parte de esta crítica, es decir, aquella de que "si queremos construir el número por resumen de lo idéntico entonces todo confluye perpetuamente en uno" no es pertinente pues, claramente podemos "alcanzar la pluralidad" de la manera en que Cantor propone: concibiendo a cualquier conjunto como colección de múltiples elementos que bien podemos denominar "unidades". Tengo la impresión de que la auténtica preocupación de Frege está en que, pensándolos como unidades, no tendríamos un criterio para distinguir entre los elementos de un conjuntos dado, lo cuál no es motivo para considerar que no constituya una pluralidad. En cierto sentido, la consideración de los conjuntos como colecciones definidas y diferenciables de objetos separables y distinguibles, aun careciendo

[32] Hallet discute este punto ampliamente en el capítulo III de su *Cantorian set theory...*, *op.cit.*

[33] Frege, *Los fundamentos de la aritmética, op.cit.*

de un criterio explícito para distinguir entre los elementos de los conjuntos, está a la base de la formalización de la teoría de conjuntos en la axiomática de Zermelo-Fraenkel.

Tampoco parece tener fuerza la objeción de Frege acerca de que "si designamos con 1 a cada objeto a numerar ... lo diferente recibe el mismo símbolo", pues de entrada podríamos considerar un conjunto de varios objetos iguales que bien pueden admitir ser designados con el mismo símbolo y que no por ello dejan de ser una pluralidad[34]. El uso de Cantor de la expresión "diferentes unidades" en la afirmación (*), considero que puede interpretarse como "múltiples unidades idénticas y separadas", esto es, contables.

Una vez establecido el significado de la igualdad entre las potencias de cualesquiera dos conjuntos, Cantor generaliza la posibilidad de comparación a todos los números cardinales estableciendo un orden lineal para los números transfinitos. Los detalles de la argumentación cantoriana son sumamente interesantes aunque tienen un carácter básicamente matemático y técnico, por lo cual serán expuestos en el Apéndice 1. Lo más importante de ello es contrastar la manera en que Cantor aborda la relación de comparabilidad de los números transfinitos, contrastando los supuestos que él admite con la postura de Frege.

Resumiendo las dificultades relacionadas con la definición del número hasta aquí abordadas, hemos encontrado que un problema de gran complejidad consiste en establecer cómo puede establecerse la verdad de una proposición aritmética de la mayor simplicidad, por ejemplo, de la proposición "n = m", que establece la igualdad entre dos números. Solamente si es posible demostrar de manera únicamente lógica la verdad de una proposición de ése estilo, podrá afirmarse que otras proposiciones de la aritmética, como por ejemplo las que establecen igualdades a partir de operaciones, son analíticas. Sin embargo, para la demostración de una proposición como "n = m", o bien, según Cantor se necesita admitir conjuntos N y M, tales $N \equiv M$ y que $/ N / = n$ y $/ M / = m$; o bien, según Frege, se requiere pasar de los conceptos "equinumeroso con respecto al número m" y "equinumeroso con respecto al número n", a las extensiones de tales conceptos, a fin de compararlas. En la postura de Cantor, un problema inmediato es la pregunta acerca de la posibilidad de derivar los conjuntos únicamente de la lógica. En el caso de Frege, el problema, como ha sido señalado en el capítulo III es volver explícito el paso del concepto a su extensión a fin de poder compararlo. Esto será discutido más ampliamente en las conclusiones.

1.5 ¿Qué expresan las proposiciones de la aritmética?

A partir de lo que ha sido expuesto hasta aquí en este capítulo, se puede afirmar que Cantor, sin establecerlo explícitamente, considera como necesarias a las proposiciones de la aritmética en tanto que su demostración se apoya en la lógica y en la primordial noción cantoriana de conjunto, que puede ser definida formalmente admitiendo que los elementos que forman los conjuntos son objetos separados y distinguibles.

Hemos ya mencionado que Cantor, al igual que otros matemáticos, no está satisfecho con la explicación kantiana que considera a las proposiciones de la geometría y de la aritmética como juicios sintéticos *a priori*. De hecho, el trabajo inicial de Cantor dentro del "proyecto de la rigorización del cálculo" emprendido por Weierstrass, tiene como finalidad expulsar a las intuiciones geométricas de la definición de las nociones básicas – continuidad, límite, derivabilidad, etc.- del cálculo y del análisis para apoyarlas únicamente en la aritmética a la que él confiere un mayor grado de certidumbre[35]. En ese sentido, Cantor, igual que Frege, parece admitir que hay una diferencia tajante entre las proposiciones de la geometría y las de la aritmética, ya que las primeras tienen un menor grado de certidumbre que las segundas, aunque, insisto, este no es un tema sobre el que Cantor se pronuncie explícitamente.

Entonces, para Cantor, las proposiciones de la aritmética ni son juicios sintéticos *a priori* ni son proposiciones empíricas[36]. La única alternativa que le queda entonces, es demostrar que las proposiciones de la aritmética son analíticas. Sin embargo, Cantor no entiende el concepto de analiticidad ni en el sentido de Frege ni en el de Kant. Tal como

---

[34] Si imaginamos, por ejemplo, un conjunto de personas que comparten el mimo nombre, por decir, que se llaman Teresa, entonces lo diferente recibe el mismo nombre y ellas, de todos modos, son una pluralidad.

[35] Interpreto de esta manera la cita de Cantor ya mencionada anteriormente donde él señala que: "Debo declarar que en mi opinión hacer depender del concepto de tiempo o de la intuición del tiempo, *el mucho más general y básico concepto de continuidad* es una gran equivocación. En mi opinión, el tiempo es una idea cuya explicación clara presupone el concepto independiente de continuidad...". Ver, Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten* (1883), Teubner, Leipzig, citado por Hallet, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Clarendon Press, Oxford, 1984, pág. 15. Entonces, si bien Cantor no *dice* explícitamente que considera necesarias a las proposiciones de la aritmética, lo que *él hace* tal como hemos visto en este capítulo, es establecer la verdad de las proposiciones de la aritmética derivándola únicamente a partir de la lógica y de su noción de conjunto.

[36] Ver Hallet, *op.cit.*, pág.15

hemos discutido en capítulos anteriores, según Frege, demostrar que una proposición es analítica consiste en mostrar que admite una prueba únicamente lógica; mientras que para Kant un juicio es analítico si, para realizar la síntesis que une al sujeto y al predicado en dicho juicio, el entendimiento no requiere salir del análisis de conceptos. A diferencia de ambos, Cantor considera que la necesidad y la verdad de las proposiciones de la aritmética se deriva de que éstas pueden demostrarse por medios lógicos, admitiendo además, la noción de conjunto. Para respaldar tal afirmación basta referirnos al contenido del trabajo de Cantor de 1895, "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" que hemos analizado en las páginas anteriores.

En dicho trabajo, Cantor muestra que los principios básicos de la aritmética -incluida la aritmética de los números transfinitos-, es decir, la noción de número, la noción de sucesor y las propiedades de las operaciones fundamentales-, pueden derivarse rigurosamente de la lógica y de la noción de conjunto expuesta por Cantor de manera más o menos formal. De acuerdo a la postura de Frege, derivar de la lógica la noción de número y la función sucesor es justamente el camino para demostrar que las proposiciones de la aritmética son analíticas. Entonces, resulta que Cantor cree haber fundado la aritmética en la lógica, demostrando la necesidad lógica de sus proposiciones una vez admitida la noción de conjunto como colección de objetos separables y distinguibles.

Entonces, si bien Cantor nunca se propone *explícitamente* llevar a cabo la reducción de la aritmética a la lógica, lo que él hace es explicar las nociones básicas de la aritmética –en particular la de número y la de sucesor-, apoyándose en tres supuestos explícitamente establecidos que le parecen irrefutables:

i. Existen conjuntos infinitos.
ii. Es posible distinguir entre elementos y conjuntos, o entre colecciones de objetos y los objetos que forman tales colecciones.
iii. Los elementos de los conjuntos, o los objetos que forman las colecciones finitas o infinitas, son entidades separadas y distinguibles[37].

La estrategia de Cantor consiste en la presentación explícita y la discusión exhaustiva de tales supuestos, sin afirmar nunca que está derivándolos únicamente de la lógica. Considero que en relación a la cuestión sobre si la noción de conjunto es o no admisible

[37] Estas tres afirmaciones son paráfrasis de la sección 1 de Cantor, "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", publicado en Cantor, *Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers, op.cit.*

para fundar la aritmética, resulta pertinente la siguiente afirmación de Hempel: el "desarrollo riguroso de la teoría matemática procede no simplemente de un conjunto de definiciones sino más bien de un conjunto de proposiciones no definicionales que no se prueban dentro de la teoría...[38]". La noción de conjunto, y más específicamente, las proposiciones de que existen los conjuntos infinitos y de que los elementos de un conjunto son entidades separadas y distinguibles son, en el argumento cantoriano, "proposiciones no definicionales que no se prueban dentro de la teoría". A partir de tales supuesto, Cantor puede hacer una presentación elegante y sistemática de su teoría intuitiva de conjuntos, cuyas proposiciones básicas "están formuladas en términos de ciertos conceptos básicos o primitivos para los cuales no se brinda definición al interior de la teoría". Los conceptos básicos o primitivos son, en el trabajo de Cantor, la existencia de colecciones infinitas pensadas como totalidad y el que tales colecciones estén conformadas por elementos separados y distinguibles, es decir, numerables. Si bien es enteramente legítimo proceder como lo hace Cantor, su estrategia no logra reducir la aritmética a la lógica, pues para ello sería necesario partir de proposiciones puramente lógicas.

Los argumentos no matemáticos con los que Cantor defiende su posición son, tal como he mostrado, de lo más diversos y asistemáticos: van desde la afirmación de que los números naturales existen en el *Intellectus Divinus*, de modo separado y como totalidad infinita, hasta su señalamiento de que una cierta "inducción interna" es la fuente principal de nuestro conocimiento de ellos. Tales afirmaciones comprometen a Cantor con un cierto "platonismo aritmético[39]" bastante discutible, en tanto atribuye existencia objetiva genuina a los conjuntos infinitos, a los números trascendentes[40], etc. Sin embargo, conviene reconocer que si se aceptan los supuestos cantorianos discutidos en este capítulo, sus argumentos sobre la necesidad lógica de las proposiciones de la aritmética derivada a partir de tales premisas, son impecables. Tal como veremos en la siguiente sección, la debilidad

[38] Hempel Carl, "On the Nature of Mathematical Truth", en Feigl H.- Sellars W., *Readings in Philosophical Analysis*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1949, pág. 229 y ss.
[39] Wright Crispin, *Frege's conception of numbers as objects*, Aberdeen University Press, Aberdeen, Great Britain, 1983, pág.xx. Wright señala que el platonismo aritmético sostiene que "los números naturales un único dominio de objetos genuinos", tal como afirma Cantor.
[40] Es probable que Cantor recurriera a argumentos en cierta forma débiles para apoyar su confianza en la existencia objetiva de determinados objetos matemáticos, como el conjunto infinito de los números trascendentes, por ejemplo, sin poder demostrar de ningún elemento singular de tal conjunto la propiedad de ser trascendente; en razón a la presión de las críticas de Kronecker, influyente matemático de su época, quien

en la explicación cantoriana de ciertos objetos que constituyen "partes" de conceptos, será esclarecida por Dedekind de otra manera, ensayando una definición meramente formal de aquello que es un conjunto y definiendo a partir de ella la noción de número.

consideraba inadmisible, además de inútil, el trabajo de Cantor. Ver, Kline Morris, *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI, México, D.F., 2000.

2. Dedekind: el número como elemento de un sistema numérico ordenado e infinito

Richard Dedekind (1831-1916) hizo importantes contribuciones al Cálculo Diferencial e Integral así como al Análisis Matemático. Muchas de sus reflexiones y de sus enfoques constituyen la base de las matemáticas del siglo XX, en amplias y fundamentales ramas de esta disciplina.

Al igual que Frege y Cantor, Dedekind participa en el programa de reducción del análisis a la aritmética y, tal como mencionamos al inicio del capítulo, él considera que las proposiciones y definiciones básicas del cálculo y del análisis no tienen que basarse en intuiciones geométricas. En este sentido, una de las mayores preocupaciones matemáticas de Dedekind fue la elucidación precisa de la *estructura* de los números reales, a fin de brindar demostraciones formales para las principales proposiciones del análisis que no apelen a representaciones geométricas. Las conocidas "cortaduras de Dedekind[40]", tienen como antecedente su idea, bosquejada desde 1858, de que cada número real *r* divide al conjunto de los números racionales -esto es, a los que pueden ser expresados como cociente de dos números enteros, p/q-, en dos conjuntos; a saber, los mayores que *r* y los menores que *r*[41]. La reflexión de Dedekind sugiere que cualquier número real se puede representar mediante tal división del conjunto de los números racionales.

Otra importante herencia teórica de Dedekind es la caracterización precisa de los diferentes tipos de números, entendidos como sistemas numéricos constituidos a partir de operaciones claramente definidas y de las propiedades de tales operaciones, como por ejemplo los números enteros, los racionales o los reales. Por tal razón, cabe afirmar que Dedekind hace aportes muy significativos a los dos grandes ámbitos del proyecto de rigorización del cálculo y el análisis: tanto a la reducción de las nociones básicas del cálculo a la aritmética con su concepto de "cortadura" que permite establecer formalmente la noción de continuidad de una función, como a la propia fundamentación de la aritmética en la lógica. En las siguientes páginas revisaré la propuesta de Dedekind para fundar la aritmética en la lógica contrastándola con las posiciones de Frege y de Cantor.

[40] En su artículo "Continuity and Irrational Numbers", Dedekind señala: "Si para alguna separación dada del sistema [de los números racionales] R en dos clases A_1, A_2, ocurre que cada número a_1 de A_1 es menor que cada número a_2 de A_2, entonces llamaremos a tal separación una ***cortadura*** y la designaremos como (A_1,A_2)". Esta noción es básica para demostrar la continuidad del sistema de los números reales. Dedekind, "Continuity and Irrational Numbers", en ***Essays on the Theory of Numbers***, Dover Publications, New York, 1963, pág.13.

2.1 Las proposiciones de la aritmética como derivables de la lógica y apoyadas en "actos de creación" de la mente humana.

Mencioné en páginas anteriores que derivar la aritmética de la lógica consiste, según Frege, básicamente en demostrar que es posible establecer la definición de número, la relación sucesor y las propiedades de las operaciones de la aritmética apoyándose únicamente en los principios básicos de la lógica. Tal cosa constituye, para Frege, la demostración del carácter analítico de las proposiciones de la aritmética. Dedekind trabaja también en esta dirección aunque él, al igual que Cantor, considera lógicamente admisible la noción de "conjunto" o "colección" a la cual llama "sistema". En este sentido, la posición de Dedekind en relación a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética consiste en demostrar que ellas no son juicios sintéticos *a priori*. Sin embargo, Dedekind no comparte la posición realista de Frege, es decir, Dedekind no considera que los números existan independientemente de la mente humana que los piensa, e incluso es categórico al afirmar que los números son "creaciones libres de la mente humana":

> Al hablar de aritmética (álgebra, análisis) como una parte de la lógica sostengo que considero al concepto de número como enteramente independiente de las nociones o intuiciones de espacio y tiempo, que lo considero como un resultado inmediato de las leyes del pensamiento.... Los números son *creaciones libres de la mente humana*; sirven como medios de aprehender más fácilmente y con mayor agudeza la diferencia entre cosas....[42].

La alusión a la independencia de los números de las intuiciones de espacio y tiempo es una clara objeción de Dedekind a cierta parte de las posiciones de Kant y a su influencia entre algunos matemáticos de la época. A saber, a la caracterización de las proposiciones de la aritmética como juicios sintéticos *a priori* y a la posición que sostiene que la noción de número se basa en la intuición pura del tiempo. Hasta aquí, es posible afirmar que Dedekind, al igual que Frege, está comprometido con demostrar que las proposiciones de la aritmética son derivables de la lógica. Es más, él afirma, aunque sin mayor discusión, que la aritmética es "una parte de la lógica". Sin embargo, ambos hacen cosas muy distintas para definir la noción de número como veremos en el siguiente acápite.

---

[41] Dedekind, *ibid*, capítulo I, "Properties of Rational Numbers".

[42] Dedekind, Prefacio a la Primera Edición de "Was sind und was sollen die Zahlen?", en *Essays on the Theory of Numbers, op.cit.*

Resulta entonces que si bien el trabajo de Dedekind en relación a la fundamentación de la aritmética en la lógica está guiado por las mismas intenciones que mueven a Frege, no sería correcto afirmar que Dedekind busca demostrar la analiticidad de las proposiciones de la aritmética. Más bien, él se empeña en mostrar que las proposiciones de la artimética pueden derivarse lógicamente de un conjunto de supuestos explícitamente enunciados, que incluyen la admisión de conjuntos y de conjuntos infinitos, como legítimos objetos de pensamiento. Esto lo discutiremos más adelante.

En este sentido, es claro que existe cierta similitud entre los trabajos de Dedekind y Cantor: ambos aceptan la existencia de conjuntos y los utilizan para la definición de número. Sin embargo, el punto de partida de Dedekind es distinto al de Cantor. Si este último, tal como vimos en la primera parte de este capítulo, parte de la noción de conjunto entendiéndola como "*cualquier colección, considerada como un todo M, de objetos m* de nuestra intuición o nuestro pensamiento definidos y separados[43]", Dedekind parte de objetos simples, separados y distinguibles y sólo en un segundo momento los piensa como colecciones:

> & 1. En lo que sigue, entenderemos por objeto a cualquier cosa que sea asunto de nuestro pensamiento. A fin de poder hablar de objetos, los denotaremos a través de símbolos, por ejemplo, letras; (...) Asumimos que un objeto está de forma esencial, completamente determinado por todo lo que puede ser afirmado en relación con él...[44]
> & 2. Como sucede con frecuencia, diferentes objetos *a, b, c*,... pueden ser asociados en la mente como una totalidad, y en tal caso decimos que forman un *conjunto*[45]; llamamos a los objetos *a, b, c*,... elementos del conjunto S y decimos que ellos están contenidos en S, y decimos que S consiste en estos elementos. Tal conjunto S, en tanto objeto de nuestro pensamiento, es igualmente un objeto de acuerdo a & 1., y está completamente determinado cuando para cada individuo, está determinado si es o no un elemento de S. El conjunto S es el mismo que un conjunto T, denotado por S = T, si cualquier elemento de S es también un elemento de T y conversamente....[46]

Vale la pena notar que Dedekind establece con mayor precisión que Cantor la noción de conjunto a partir de la afirmación de que: "[Un conjunto S] está completamente

---

[43] Cantor Georg, *Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers* (Primer Artículo- 1895), *op.cit.*
[44] Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Research Institute for Mathematics, Orono-Maine, 1995. Todas las siguientes referencias de Dedekind provienen de este trabajo a menos que se indique lo contrario.
[45] Dedekind utiliza la palabra *sistema* para referirse a lo que posteriormente se ha denominado *conjunto*.
[46] Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, *op.cit.*

determinado cuando para cada individuo [es decir, para cada objeto], está determinado si es o no un elemento de S". Una vez establecidas estas afirmaciones, Dedekind define con claridad la relación de igualdad entre conjuntos a partir de comparar si ambos contienen los mismos elementos.

Este supuesto, es decir, la definición de la noción de conjunto apoyada en la posibilidad plena de establecer si un elemento pertenece o no a él, Frege, por supuesto, no lo consideraría como derivable únicamente de la lógica en tanto alude a la capacidad subjetiva de pensar en ciertos objetos elementales y en colecciones de tales objetos. Sin embargo, para Dedekind este punto de partida es lógicamente aceptable y lo coloca a la base de su tratamiento de la noción de número y de la relación sucesor. La estrategia de Dedekind para mostrar que es posible definir la noción de número, la función sucesor y demostrar las propiedades básicas de las operaciones de la aritmética, sin acudir a la intuición consiste, a grandes rasgos, básicamente en "construir" un conjunto infinito, ordenado por una relación binaria, al cual llamará el "conjunto de los números naturales". Exhibiendo que es posible construir un conjunto infinito y ordenado, Dedekind se dará por satisfecho en su empeño por demostrar que las nociones básicas de la aritmética se pueden fundar en la lógica. Veamos con cuidado aunque sin demasiados detalles técnicos cómo procede Dedekind.

2.2 Los números como "creaciones libres de la mente humana", en tanto elementos de un conjunto infinito ordenado por una relación binaria

Hemos mencionado ya que desde el primer párrafo de su trabajo *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Dedekind presenta explícitamente los supuestos que sostienen su argumentación. En primer lugar establece lo que entiende por objeto, para después, en el siguiente parágrafo establecer la posibilidad de pensar colecciones de objetos. Un poco más adelante Dedekind introduce otras definiciones para su "construcción" lógica del conjunto de los números naturales: la *contención* de un conjunto en otro, la *intersección* entre conjuntos, así como la noción de *función* y de función biyectiva[47]. Con estos elementos Dedekind realizará la "construcción" de un conjunto, al que denominará "infinito simple"

[47] Dedekind define en su trabajo lo que es una función inyectiva, aunque en realidad utiliza funciones que son también sobreyectivas, utilizando terminología contemporánea. Por tal razón, sostengo que entre los elementos de la construcción de Dedekind está el de función biyectiva pese a que él habla únicamente de "función inyectiva".

que, además, resultará totalmente ordenado[48]. Presentemos las definiciones ofrecidas por Dedekind.

1. La relación de contención o inclusión entre dos conjuntos A y B, expresada A $\subseteq$ B, queda definida por Dedekind de la siguiente manera: "Se dice que un conjunto A es un subconjunto de B, denotado por la expresión A $\subseteq$ B, si todo elemento de A es también un elemento de B".[49]
2. La intersección entre conjuntos Dedekind la define en el párrafo 17 de la siguiente manera: "Se dice que un objeto *g* es un *elemento común* de los conjuntos A, B, C... si está contenido en cada uno de estos conjuntos..."[50]. El conjunto formado por el objeto *g* será, para Dedekind, la intersección de los conjuntos A, B, C,...[51]
3. Lo que Dedekind entiende por función o mapeo es lo siguiente:

    &21. Definición. Por un mapeo o función φ de un conjunto S entendemos una ley que asigna a cada elemento *s* de S, un objeto determinado y único llamado la imagen de *s*, denotado por $\varphi(s)$

Presentada de esta manera, la función o mapeo consiste en una "ley" que correlaciona objetos: la función φ se aplica sobre cualquier elemento de un conjunto S, y produce una "imagen del elemento s bajo φ" que es, a su vez, otro objeto. De esta manera, se puede pensar también en el conjunto φ(S) que contiene a todas las imágenes de los elementos s de S bajo la función φ.

4. Finalmente, después de definir "función", Dedekind distingue entre diversas maneras de correlacionar objetos, destacando un tipo especial de funciones: las inyectivas, que son aquellas en las que dados cualesquiera dos elementos *a* y *b* de S, si *a* y *b* son distintos, entonces son distintas las imágenes $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$.

---

[48] En la matemática contemporánea se dice que una relación de orden en un conjunto P, simbolizada por el símbolo R, es una relación que tiene las siguientes propiedades: i) es reflexiva es decir, x R x, para toda x de P; ii) es antisimétrica, es decir, si xRy y yRx entonces, x = y; iii) es transitiva es decir, si xRy y yRz entonces, xRz. Si R cumple estas tres propiedades será considerada una relación de orden parcial. Si además, para cualesquiera dos elementos de P, R es tal que, o bien xRy o yRx, entonces R será una relación de orden total. Simmons, *Introduction to topology and modern analysis*, McGraw Hill-Kogakusha, Tokyo, 1963.
[49] Dedekind, op.cit., párrafo 3.
[50] Ibid, párrafo 17.
[51] Jean Pierre Belna hace notar, con toda razón, que Dedekind no está todavía utilizando la distinción entre dos relaciones básicas para la teoría formal de conjuntos: la relación de pertenencia y la de inclusión. Dedekind hace referencia explícita solamente a la noción de inclusión. Belna, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*, Librairie Philosophique J.Vrin, Paris, 1996, pág.30

A partir de la definición de función inyectiva, Dedekind puede presentar la noción de conjuntos biyectables como aquellos conjuntos R y S para los cuales existe una función inyectiva φ , tal que $\varphi(S) = R$ y tal que la inversa de la función φ denotada por φ^{-1}, es tal que $\varphi^{-1}(R) = S$. La expresión $\varphi(S) = R$ está bien definida pues se ha establecido el significado de cada uno de sus términos: $\varphi(S)$ es el conjunto de las imágenes bajo φ de los elementos de S y ha quedado establecido, también, el significado de la igualdad entre conjuntos. Las nociones de función inyectiva y de conjuntos biyectables son básicas para la construcción de los números en el trabajo de Dedekind

Con estos elementos, Richard Dedekind realiza de manera sistemática su construcción de los números naturales, procediendo además de una manera casi estrictamente formal que se generalizará en el quehacer matemático del siglo XX. Recordemos que lo que Dedekind tiene en mente para demostrar que las proposiciones de las matemáticas no son juicios sintéticos *a priori* -pues para su demostración no se requieren del apoyo de la intuición-; es ***construir*** un conjunto infinito y bien ordenado basándose solamente en derivaciones lógicas a partir de supuestos explícitos. A tal conjunto infinito y bien ordenado lo llamará "el sistema de los números naturales" y sus elementos serán cada uno de los números naturales que constituyen los objetos básicos de las proposiciones de la aritmética.

Sin embargo, una cuestión curiosa de la argumentación de Dedekind que lo distancia del formalismo posterior, es su empeño por dar una prueba de la existencia del conjunto infinito. En el tratamiento formal de la teoría de conjuntos, posterior a Dedekind, la existencia del conjunto infinito se establece simplemente como axioma; mientras que él ofrece una peculiar demostración para la proposición: "Existe un conjunto infinito[52]", que consiste en exhibir un ejemplar de este tipo de conjuntos.

El argumento de Dedekind, más tarde considerado inaceptable por Zermelo, consiste en ofrecer, como instancia del conjunto infinito realmente existente, nada

[52] Dedekind, op.cit., párrafo 66.

menos que la totalidad de sus pensamientos: "El mundo de mis pensamientos, es decir, la totalidad S de todos los objetos que son objetos de mi pensamiento, es infinito[53]".

Resulta entonces que, si bien el trabajo de Dedekind es lógicamente muy riguroso, no se puede considerar plenamente formal en la medida en que por ejemplo, para la demostración de la anteriormente citada proposición 66, Dedekind elige "mostrar" un ejemplar de conjunto infinito constituido por la totalidad de sus pensamientos, lo cual es inadmisible para el formalista. Recapitulando lo hasta aquí presentado, tenemos que Dedekind considera que tanto la noción de conjunto como la de conjunto infinito son admisibles para la fundamentación de la aritmética e incluso las considera partes legítimas de la lógica. Su construcción de un conjunto infinito simple, que resultará isomorfo con la estructura de los números naturales, y cuyos elementos serán justamente números naturales es sumamente técnica y se basa en la noción de ϕ-cadenas. En el siguiente acápite revisaré paso a paso los argumentos de Dedekind para construir tal conjunto, intentando no sumergirme demasiado en los detalles, sino comprendiendo la estructura general de su exposición. La idea central de Dedekind es construir un conjunto infinito ordenado que, además, tenga "primer elemento". En este sentido, a Dedekind no le preocupará, como a Cantor y a Frege, la cuestión de la equivalencia o equinumerosidad entre conjuntos, sino que lo decisivo para él es construir la relación sucesor demostrando que puede determinar lógicamente el primer elemento de un conjunto infinito. A lo largo de la exposición de los argumentos de Dedekind sobre lo que son los números naturales, pondré mayor atención en dos temas relevantes para esta investigación: la definición del "primer elemento" y la relación de igualdad entre números.

---

[53] Dedekind, *What are numbers and what should they be?, op.cit.*, pág.28. El conjunto de los pensamientos de Dedekind es infinito, según él, en el sentido estricto de la definición de conjunto ya utilizada por Cantor: S contiene un subconjunto propio que es biyectable consigo mismo. Dedekind se encarga en la prueba del teorema en cuestión de "brindar" la función biyectiva *f* que va de un subconjunto de sus pensamientos al conjunto total S, lo cual demuestra, según él, el carácter infinito de S. La curiosa función de Dedekind para establecer una correspondencia entre el conjunto S que contiene la totalidad de sus pensamientos y un subconjunto de él, consiste en considerar un determinado elemento s de S –un pensamiento-, y después, pensar en el "pensamiento de ese pensamiento s", presentándolo como la imagen de s bajo *f*. De esta manera, los "pensamientos de pensamientos" que son un subconjunto del conjunto S, resultan simultáneamente biyectables con S.

2.3 La estructura de los números naturales. La noción de ϕ-cadena

En la sección VI de su trabajo, Dedekind presenta lo que entiende por "números naturales". Utiliza para ello, la distinción –básica- entre conjuntos finitos e infinitos, e introduce la definición de número natural después de construir un "elemento inicial" de un conjunto infinito bien ordenado por la función sucesor. Las últimas secciones de su artículo, finalmente, se dedican a definir e indagar las operaciones entre números.

Antes de entrar a los detalles, recordemos los supuestos a partir de los cuales Dedekind trabaja:

1. "Entenderemos por objeto a cualquier cosa que sea asunto de nuestro pensamiento[54]". Los conjuntos o colecciones de elementos son objetos, en tanto son también objetos de nuestro pensamiento; tal como discutimos en 2.1.
2. En relación a la relación de identidad entre objetos, Dedekind afirma:

> Un objeto *a* es el mismo que un objeto *b* (es idéntico a *b*), y *b* es el mismo que *a*, cuando todo lo que pueda ser pensado en relación con *a* puede ser también pensado en relación con *b*, y conversamente cuando todo lo que sea verdadero de *b* es también verdadero de *a*. Si *a* y *b* son solamente símbolos o nombres de uno y el mismo objeto, entonces denotamos esto como $a = b$ ó $b = a$; y además, si $b = c$, es decir, si *c* y *a* son símbolos para el objeto *b*, entonces $a = c$. Si la relación anterior entre el objeto denotado por *a* y el objeto denotado por *b* no existe, entonces se dice que los objetos *a* y *b* son diferentes...[55]"

En este párrafo, se pueden vislumbrar varias cuestiones problemáticas que también merecieron la atención de Frege: i) la preocupación por lo que es un objeto, ii) la necesidad de denotar a los objetos a través de símbolos para poder hablar de ellos; iii) la manera cómo un objeto puede determinarse y cómo se distingue si un objeto es o no igual a otro. Sin embargo, los problemas relativos al significado y utilización del signo de identidad, no son cuestiones a las que Dedekind preste de momento mayor atención. Él establece, con toda claridad y desde un inicio, el criterio de identidad que empleará: "Un objeto *a* es el mismo

---

[54] Dedekind, op.cit., párrafo 1.

[55] Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Research Institute for Mathematics, Orono-Maine, 1995. Todas las siguientes referencias de Dedekind provienen de este trabajo a menos que se indique lo contrario.

que un objeto *b* (es idéntico a *b*), y *b* es el mismo que *a*, cuando todo lo que pueda ser pensado en relación con *a* puede ser también pensado en relación con *b*[56]".

Acerca de esta cuestión, McCarty hace notar que Dedekind no tiene los problemas de Frege respecto a la relación de igualdad pues cualquier complicación ha quedado excluida de entrada, en la medida en que Dedekind "admite una noción puramente lógica de la identidad que se apega a la formulación de Leibniz de la identidad de los indiscernibles[57]"; es decir, para Dedekind el principio de sustituibilidad *salva veritate* será necesariamente válido en todos los casos.

Por otro lado, en relación a la igualdad entre conjuntos, Dedekind sostiene que dos conjuntos *A* y B son iguales si y sólo si cualquier elemento de A es también un elemento de *B*. Cabe recordar que Dedekind establece que un conjunto sólo está "completamente determinado", cuando para cada individuo podemos saber si dicho individuo es o no es un elemento del conjunto en cuestión. Es decir, Dedekind establece de entrada condiciones mediante las cuales, puede saber cuándo dos conjuntos son o no son iguales.

3. Dedekind cuenta, además, con las definiciones de "contención de un conjunto A en un conjunto B", "intersección del conjunto A y B", función y función biyectiva.

Las nociones de función inyectiva y de conjuntos biyectables son básicas para la construcción de los números en el trabajo de Dedekind, y tienen cierto lejano "aire de familia" con algunas de las nociones que Frege emplea en *Los Fundamentos de la Aritmética*. En dicha obra, para presentar la definición de número, Frege también recurre a una noción de función o mapeo biyectivo para explicar su fundamental noción de "equipotencia". Sin embargo, en contraste con ese camino, la construcción de Dedekind es distinta. Él, más bien, lo que hace es considerar una clase particular de funciones: aquellas que mapean cualquier conjunto sobre sí mismo. A partir de una muy peculiar función de este tipo, qué más tarde se presentará como la función sucesor, Dedekind construye un "primer elemento" para los números naturales. En este sentido, Dedekind no tiene las dificultades que enfrentan Cantor y Frege para precisar lo que es la "unidad". Dedekind no

[56] Este "criterio" es lo que se llama Ley de Leibniz o Principio de identidad de los indiscernibles que establece que los objetos que son iguales en todos los aspectos son idénticos, expresado de manera formal: Si para toda función f, f(a) = f (b) entonces a = b. No hay que confundirlo con el llamado Principio de indiscernibilidad de los idénticos, que puede expresarse formalmente así: (∀ a, ∀ b), a = b implica que f (a) si y sólo si, f (b). *Rotuledge Encyclopedia of Philosophy*.

parte de unidades ni de elementos homogéneos que conforman conjuntos; más bien, lo que hace es "construir" formalmente, utilizando las definiciones enumeradas en 2.2, el primer elemento de una serie infinita.

El principal detalle técnico de tal construcción, que sirve a Dedekind para introducir la función sucesor, consiste en la definición de "φ- cadena". La definición & 36. de Dedekind dice:

> Llamamos a φ un mapeo de S sobre sí mismo si $\varphi(S) \subseteq S$.

Y en la Definición 37 añade,

> Sea φ un mapeo de S sobre sí mismo. Sea K un subconjunto de S. El subconjunto K se denominará una *φ-cadena* si $\varphi(K) \subseteq K$. Notemos que el término *φ-cadena* involucra tanto a K como a φ. Dado otro mapeo ϕ de S sobre sí mismo, el conjunto K de S en tal caso, puede muy bien no ser una *ϕ-cadena.*

Es decir, una *φ-cadena* es un subconjunto de S; pero no cualquier subconjunto sino uno tal que las imágenes de sus elementos bajo la función φ, pertenecen a dicho subconjunto. Por ejemplo, consideremos a S como el conjunto de los números reales, es decir, S = **R** y el subconjunto K de **R** como el intervalo cerrado entre 0 y π, es decir, K = $[0, \pi]$[58]. Consideremos además la aplicación o función trigonométrica, seno (x). Podemos entonces decir que K es una *seno-cadena* pues, *sen (K)* $\subseteq$ *K,* ya que, $0 < \text{sen}(x) < 1 < \pi$, para toda x que pertenezca a K.

Notemos que K no será *φ-cadena* si consideramos otra aplicación, por ejemplo, la función *coseno* pues ésta toma valores negativos para x's mayores que $\pi/2$. Es decir, un subconjunto de S será o no cadena dependiendo de la función que se esté considerando.

Resulta así que un subconjunto particular será una *φ-cadena* sólo para ciertos mapeos φ de S sobre sí mismo . Mediante algunos de estos mapeos, los elementos de un determinado subconjunto K tendrán la propiedad de que $\varphi(K) \subseteq K$. Tales mapeos serán decisivos para la conformación de *φ-cadenas.*

A partir de lo anterior Dedekind define –o construye- otro objeto de pensamiento:

---

[57] McCarty, *op.cit.,* pág. 77. La admisión de tal principio es otro indicador de la influencia kantiana en Dedekind, pues Kant lo utiliza explícitamente para "gobernar a las entidades inteligibles".
[58] Este ejemplo es sugerido por Belna, *op.cit.,* pág.34

> Definición 44. Si A es un subconjunto arbitrario de S, denotaremos A_0, a la intersección de todas aquellas *φ-cadenas* de las cuales A es un subconjunto.

Es interesante percibir la sencillez de los elementos que Dedekind está utilizando: parte de cualquier conjunto S, considera un subconjunto arbitrario A de S y las funciones φ de S sobre sí mismo.

Después, toma en cuenta todas las posibles *φ-cadenas* de S bajo cualquier mapeo *φ, que contengan a A como un subconjunto.* Es decir, distingue entre todas las *φ-cadenas* que, recordemos, no son sino específicos subconjuntos de S, aquellos que tienen la propiedad de contener a A como subconjunto.

Y, finalmente, toma en cuenta la intersección de todas aquellas ***φ-cadenas de las cuales A es un subconjunto*** . A tal "objeto", es decir, a la intersección de todos los subconjuntos X de S, que son *φ–cadenas y tales que* $A \varsigma X$, lo denota con el símbolo Ao. Este objeto denotado por Ao, resulta entonces una especie de "elemento mínimo", a partir del cuál se puede iniciar la construcción de una sucesión.

Ahora bien, pese a estar hablando con un absoluto nivel de generalidad, Dedekind está pensando en la función sucesor para los naturales. Veamos la Definición 71.

> &71. Un conjunto N se denomina infinito simple si existe un mapeo inyectivo φ de N sobre sí mismo, tal que N forma una φ-cadena, de un elemento no contenido en φ (N). Llamamos a este elemento, que denotaremos en lo siguiente con el símbolo 1, la raíz de N y decimos que el conjunto infinito simple N es generado por el mapeo φ.

Consideremos a N como el conjunto de los números naturales, N = {1 , 2 , 3, ..., n , ...} y a ϕ como la función sucesor, es decir, $\phi(n) = n + 1$. Es inmediato que N es una ϕ-cadena pues $\phi(N) \varsigma N$, en la medida en que bajo la función f sucede lo siguiente:

$$1 \searrow 2 \qquad 2 \searrow 3 \qquad 3 \searrow 4 \qquad \ldots \qquad n \searrow n+1 \qquad \ldots$$

Además, el 1 no es un elemento de ϕ (N). Y cualquier número natural puede alcanzarse mediante sucesivas aplicaciones de la función ϕ al elemento inicial 1.

Esta es la manera en la que Dedekind define –o construye- al conjunto de los números naturales cuya "esencia", según explica en la misma definición 71, consiste en la existencia de un mapeo φ de N y de un elemento 1 que satisfagan las siguientes condiciones:

i. $\varphi(N) \subseteq N$
ii. $N = 1_0$
iii. 1 no pertenece a $\varphi(N)$
iv. φ es inyectiva.

Dedekind insiste en que al considerar el conjunto infinito simple N, generado por la aplicación ϕ, "ignoramos completamente el carácter especial de sus elementos, teniendo en mente su discriminabilidad y considerando solamente las relaciones entre los elementos en relación al orden del conjunto determinado por el mapeo ϕ" y añade:

Entonces, estos elementos pueden ser llamados números naturales

Resulta pues que, según el planteamiento de Dedekind, los números naturales no son más que una colección de elementos distinguibles de un conjunto infinito, que puede ser generado por una aplicación ϕ que, además, establece una relación de orden entre tales elementos a partir de la cual se establece un "primer elemento". Es claro ahora por qué Dedekind considera a este sistema, como una "libre creación de la mente humana" y además, dadas las propiedades i) –iv), "no importa que nombres podamos darles a los elementos individuales [del conjunto en cuestión], ellos forman el primer objeto de la ciencia de los números o aritmética[59]".

[59] Dedekind, *What are numbers....?, op.cit.*, Sección 73.

2.4 Para Dedekind, ¿son necesarias las proposiciones de la aritmética?

Una vez expuesta la argumentación de Dedekind en relación a lo que son los números naturales, conviene reflexionar nuevamente sobre su postura en torno a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética. Sin duda, la de Dedekind es una posición ambigua, pues si bien rechaza el carácter sintético *a priori* de las proposiciones de la aritmética, e incluso considera al igual que Frege, que la aritmética constituye una parte de la lógica, su definición de número como "elemento individual" –distinguible- en un conjunto infinito y ordenado, apoyada además, en la "libre actividad de la mente humana" difícilmente es compatible con la definición fregeana de analiticidad de una proposición, según la cual p es analítica si y sólo si p es demostrable a partir de proposiciones lógicas. En primer lugar, Dedekind admite, como Cantor, otros supuestos no puramente lógicos como la existencia de conjuntos e incluso de conjuntos infinitos; y en segundo lugar, admite "actos de creación" de la mente humana, cosa que Frege habría rechazado por completo como adecuado para fundar sobre ellos la aritmética.

En este sentido, según David McCarty, Dedekind a diferencia de Frege, en algunos aspectos de su trabajo es antes que un crítico, más bien un continuador del proyecto de Kant[60]. McCarty afirma que la idea de "creación", que aparece con frecuencia en el trabajo de Dedekind, no es solamente una "manera de expresarse", sino que Dedekind considera que, efectivamente, tal creación ocurre en el quehacer matemático. Así, si bien Dedekind objeta la explicación kantiana de que la intuición pura del tiempo está a la base de la aritmética, coloca el fundamento de esta disciplina en una específica habilidad mental racional de construcción de conceptos:

> Es solamente a través del proceso lógico puro de *construcción* de la ciencia de los números, y conociendo a través de él al conjunto continuo[61] de los números, que estamos preparados para investigar nuestras nociones de espacio y tiempo, relacionándolas con este conjunto de números *creado* en nuestras mentes[62].

[60] La idea de McCarty es que las matemáticas de Dedekind "son antikantianas en tanto dependen únicamente de la razón pura que es, [sin embargo, estudiada de una manera] totalmente kantiana". McCarty David, "The mysteries of Richard Dedekind" en Jaakko Hintikka (ed.), *Essays on the Develpment of the Foundations of Mathematics.* pág. 71.

[61] El significado del adjetivo "continuo" tal como Dedekind lo está usando aquí está relacionado con la estructura de los números reales y con el problema de la continuidad que ya hemos discutido.

[62] Dedekind, *Ibid.*

Resulta entonces que, lo que hace Dedekind, según McCarty es "llevar el peso de las matemáticas de la intuición a la razón", y lo hace siguiendo aspectos del proyecto kantiano. Recordemos que para Kant las proposiciones de las matemáticas no podían ser analíticas pues para realizar la síntesis que une sujeto y predicado en tales proposiciones, la razón no se apoya únicamente en conceptos y requiere, además, de la intuición pura del tiempo y del espacio y de la síntesis de la imaginación productiva. Dedekind, por su parte, al igual que Frege, tiene la intención de expulsar a la intuición de la base de la aritmética; aunque lo hace incluyendo los *actos de creación* de la mente, específicamente, de la razón.

La cita anterior, en la que Dedekind señala que sólo habiendo construido "la ciencia de los números" y conociendo "el conjunto continuo" podemos investigar nuestras propias nociones de espacio y tiempo, sugiere contundentemente, como dice McCarty, que en cierta medida Dedekind recoge aspectos importantes del proyecto kantiano; en particular, lo relativo a la contribución activa del sujeto que conoce en la determinación de aquello a ser conocido, aún en las matemáticas. En palabras de McCarty:

> Dedekind toma las partes generales del mosaico trascendental kantiano, debe reacomodarlas según sus propias especificaciones, para formar una imagen de las matemáticas como una parte de la lógica antes que como una parte de la percepción. Dedekind es libre para aceptar el inventario completo del mecanismo mental kantiano de las facultades pero no puede seguir a Kant en la manera en la que tal inventario es parcelado[63].

Esto es, si bien Dedekind busca sistematizar y dar rigor a las nociones básicas del análisis, expulsando las intuiciones geométricas y apoyándolas en la aritmética, él cree que en el fondo, la certidumbre de la aritmética descansa en la razón, cuya *actividad* crea sus propios objetos básicos: los números. En este sentido, se puede afirmar que Dedekind, en contraposición a Frege, sostiene una posición anti-realista en Matemáticas, pues para aquél los números no existen independientemente del pensamiento y las propias nociones básicas de tiempo y espacio no tienen existencia más allá de las herramientas y distinciones que inventamos para conocerlas. Dedekind se dedica, por tanto, a presentar instrumentos lógicos y teóricos para dar cuenta de la estructura de los números, que no apelen a la intuición. Para él, insistimos, los números ni surgen de "abstracciones" de objetos perceptibles –como sugiere el empirismo-, ni de objetos abstractos que no son espacio-

---

[63] McCarty, *op.cit.*, pág.71.

temporales tal como propone Cantor. Y sin embargo, Dedekind tampoco comparte la idea fregeana sobre la posibilidad del "descubrimiento" de números a los cuales se atribuye existencia real.

En este sentido comparto la opinión de McCarty en relación a que el trabajo de Dedekind, además de buscar demostrar que la aritmética es parte de la lógica, tiene asimismo otra intención: dar una explicación del propio pensamiento matemático; que es igualmente un propósito del trabajo de Kant. La explicación de Dedekind, según McCarty es trascendental en el sentido kantiano pues "no se limita como el formalista propone, a expresar axiomas y reglas sino que busca *dar cuenta de los actos mentales* que llenan esas formas, a través de las cuales los axiomas y las reglas son, de por sí, comprendidas"[64].

Dedekind, en el prefacio de *Was sind und was sollen die zhalen?,* se propone mostrar que las proposiciones de la aritmética son lógicamente necesarias en el sentido que pueden ser derivadas de un conjunto de premisas y definiciones explícitas, "construidas" por la razón apoyándose en la lógica[65]; a saber, las definiciones de objetos, conjuntos formados por objetos, funciones etc. Los conceptos que Dedekind incluye en sus argumentos son antes que nada, construcciones de la razón que sirven como material básico para construcciones posteriores. En la definición de los números como elementos de un conjunto infinito y ordenado, a partir de utilizar una función y algunas operaciones entre conjuntos, podemos ver lo que para Dedekind significa "construir la ciencia de los números". Valdría la pena investigar si las definiciones de Dedekind son verdaderas *a priori* y si son necesarias. Pues la naturaleza de las proposiciones de la aritmética dependerá de la naturaleza de esas definiciones. En la medida en que la construcción de los números naturales que ofrece Dedekind parte de la aceptación de la existencia de conjuntos, y de la aceptación de conjuntos infinitos, pareciera que no parte de una base puramente lógica y, si esto es así, que no logra su propósito original.

---

[64] McCarty, *op.cit.,* pág.27. Recordemos además que para Kant los juicios sintéticos *a priori* son juicios que extienden el conocimiento pues, al contrario de los analíticos, "añaden al concepto de sujeto algo que no era pensado en él". En tal sentido, la pregunta que Kant formula en relación a los juicios sintéticos *a priori* es: "¿En qué me apoyo y qué es lo que hace posible la síntesis si quiero ir más allá del concepto A para reconocer que otro concepto B se halla ligado al primero, puesto que en este caso no tengo la ventaja de acudir a la experiencia para verlo?", Kant, *CRP, op.cit.*, A9-B13.

[65] Dedekind, "The nature and meaning of numbers" (1888), en *Essays on the Theory of Numbers,* Dover Publications, New York, 1963, pág.41-43 [Traducción de W.W.Beman del trabajo, *Was sind und was sollen die zahlen?]*

Dedekind puede ser considerado como un precursor del formalismo, en el sentido de que, por ejemplo, la construcción del conjunto de los números natruales N como "infinito simple" se levanta sobre lo siguiente: a) un conjunto de objetos N; b) un mapeo o función φ de N sobre sí mismo, que define una φ–cadena para un subconjunto A de N. Tal como vimos en la sección anterior, a partir de estos dos supuestos Dedekind puede demostrar la existencia formal de un objeto distinguido o "primer elemento" en el conjunto N: el objeto que "cae" en la intersección de todos los subconjuntos X de N tales que son φ–cadenas y que $A \subsetneq X$. Es decir, en la construcción de Dedekind intervienen, desde el comienzo, objetos que forman conjuntos y funciones que son maneras de expresar relaciones entre tales objetos. En este sentido, el trabajo de Dedekind es estrictamente formal: no apela en absoluto a la intuición y solamente requiere de la distinción entre elemento y conjunto, de las definiciones de subconjunto y de función y de cierta operación entre conjuntos: la intersección.

Contrastemos ahora tal definición formal de los números naturales que ofrece Dedekind con la definición de Frege y con la de Cantor. En primer lugar, Dedekind no da en ningún lugar una definición de cada uno de los números naturales, **correlacionando signos** –los numerales en este caso- **con conjuntos**. Dedekind sólo expresa formalmente las relaciones que entre sí establecen los elementos de un conjunto al que llama N y que contiene un elemento distinguido denotado por el signo "1". Tales relaciones entre números serán establecidas a partir de la Seccion 88 de *Was sind...?,* como relaciones de orden lineal. Parsons opina que la manera en que Dedekind aborda la cuestión del número consiste entonces en la "caracterización" de la *estructura* de los números naturales, y en tal sentido, que no habla específicamente de los números naturales sino de *cualquier* "sistema infinito simple[66]", tal como hemos discutido al analizar la definición que ofrece en la sección 71 de su trabajo. Según Parsons, en dicha sección, lo que Dedekind hace es brindar una "definición explícita del tipo de estructura" de los conjuntos numerables, una de cuyas instancias son los números naturales[67].

[66] Parsons Charles, "A structuralist view" en, Hart W.D. (Editor), *The philosophy of mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

[67] Dedekind mismo dice en la sección 73 de su trabajo: "Si, al considerar un infinito simple N, ordenado por un mapeo ϕ, uno hace abstracción de la específica naturaleza de sus elementos, mantiene únicamente el hecho de que sean distinguibles, y toma nota solamente de las relaciones en las que están colocados por el mapeo de orden ϕ, entonces, tales elementos se llaman números naturales o números ordinales o simplemente números,

Ahora bien, los signos básicos utilizados por Dedekind en su argumentación, tanto letras minúsculas (a, b, c...) como mayúsculas (A, B, C...), denotan objetos entendidos como "construcciones del pensamiento" y lo único que en el fondo necesitamos distinguir es si los hemos de pensar como elementos o como conjuntos, es decir, como objetos simples o como totalidades formadas por objetos simples. Así, lo que Dedekind brinda es una descripción de los rasgos esenciales de una colección de objetos así construida y ordenada y que, por tanto, sus elementos estarán relacionados entre sí de determinada manera a partir de la relación con la cual fueron ordenados.

Por otro lado, Dedekind afirma que es la mente humana la que construye tales relaciones entre objetos; de tal manera que lo decisivo de su trabajo, es que en él se logra *expresar* cuáles son los rasgos fundamentales de la estructura de los elementos ordenados en sucesión, con primer elemento, a la cual llamamos "números naturales". Por todo lo anterior, considero que la noción central en todo el pensamiento de Dedekind es la de función o aplicación, que es justamente la que permite "operar" con o "establecer relaciones" entre los objetos del pensamiento de los cuales se ha expulsado cualquier contenido intuitivo. Sólo a través de la noción de "función" es posible para Dedekind, tal como se ha mostrado en la sección anterior, realizar la construcción de nuevos objetos –las ϕ-cadenas, por ejemplo- que den cuenta del orden de los elementos del conjunto infinito considerado inicialmente. Según Belna, la noción de función o aplicación, como central para la definición de la noción de número, está presente en el pensamiento de Dedekind desde, al menos 1854. En su Tesis de Habilitación, Dedekind dice que el paso de un elemento del conjunto de los números enteros al siguiente "es la primera y la más simple operación de la aritmética; sobre ella descansan todas las demás"[68]. Posteriormente, insiste en la centralidad de la función sucesor para fundamentar la aritmética:

> Considero que toda la aritmética es una consecuencia necesaria, o al menos natural, del *acto aritmético más simple*, el de contar; y contar no es más que la creación sucesiva de la infinita serie de enteros positivos en la que cada individuo se define a partir del que lo precede...[69].

---

y el elemento inicial 1 se denomina número inicial de la serie de números N." Dedekind, *op.cit*. Este párrafo también es discutido por Parsons, *op.cit*, pág.276.

[68] Belna, *op.cit.*, pág. 27

[69] Dedekind, "Continuity and Irrational Numbers", *op.cit.*, pág.4. El subrayado es mío, RGA.

Esta afirmación reafirma la sugerencia de McCarty acerca de que lo que Dedekind se propone al demostrar que la aritmética es parte de la lógica es "explicar" lógicamente el propio pensamiento matemático, es decir, mostrar que la acción de creación del matemático es lógicamente admisible. En este sentido, si bien las proposiciones de la aritmética son para Dedekind, lógicamente necesarias, su demostración no se basa únicamente en la lógica, según el sentido que Frege da a esta expresión; sino que para determinar su verdad se requiere incluir ciertos "actos de creación" del matemático que, según Frege, no tienen garantía lógica; aunque tal como hemos visto, si la tienen para Dedekind.

Así, Richard Dedekind no "descubre" lo que los números naturales son, tal como es la pretensión fregeana. Él tampoco cree estar "abstrayendo" rasgos de una realidad "ideal" tal como propone Cantor. Dedekind habla del número como de una construcción mental a partir del "acto aritmético más simple" y procede, como hemos visto, sin apelar en ningún momento a intuiciones o captaciones de objetos espacio-temporales. Dedekind, entonces, no logra la reducción de la aritmética a la lógica pues, tal como hemos visto se apoya en supuestos, como la existencia del conjunto infinito o el que los elementos de un conjunto sean distinguibles, que no son lógicamente demostrables.

Conclusiones

I

En el debate filosófico la cuestión de la naturaleza de las proposiciones de la aritmética ha sido abordada de diversas maneras. El punto central de esta temática gira en torno a si tales proposiciones son o no necesarias; y, si son necesarias, cómo se explica este rasgo y qué definición de número se ofrece pues, a fin de cuentas, las proposiciones de la aritmética establecen básicamente igualdades entre números y entre operaciones realizadas con base en números.

Tal como hemos visto en esta tesis, la cuestión de la necesidad puede explicarse de diversas maneras: ya sea privilegiando los argumentos epistemológicos (tal como hacen David Hume y John S. Mill), sosteniendo combinaciones de razones epistemológicas y lógicas (tal como hace Kant y en cierta medida Cantor), o acudiendo a explicaciones ante todo lógicas (como es el caso de Gottlob Frege y Richard Dedekind). Corresponde entonces, para concluir este trabajo, examinar los contrastes y las similitudes entre las distintas explicaciones ofrecidas.

II

John S. Mill es el único autor investigado que sostiene *explícitamente* que las proposiciones de la aritmética no son necesarias. Él afirma que tales proposiciones son enunciados empíricos de máxima generalidad cuya verdad se demuestra mediante la generalización inductiva por enumeración simple. Es decir, al igual que cualquier otra proposición empírica, las de la aritmética no son necesarias aunque se distingan por su gran generalidad o universalidad[1]. La explicación de Mill del carácter empírico de las proposiciones de la aritmética, tal como vimos en el capítulo II, se apoya fundamentalmente en consideraciones epistemológicas: este autor, al igual que Hume, sostiene que todo el conocimiento proviene de la experiencia y de ahí que la clasificación de las proposiciones que ambos de alguna manera comparten, se centra en la cuestión de si éstas tienen o no contenido empírico. La distinción de Hume de las proposiciones entre aquellas que expresan meras "relaciones entre ideas" y aquellas que establecen "cuestiones de hecho", es reformulada por Mill entre "proposiciones meramente verbales" y "proposiciones reales". En ambos casos, la distinción entre estos dos tipos de enunciados radica en si tienen o no contenido empírico.

En contraste con Hume que, como vimos en el capítulo I, considera necesarias a las proposiciones de la aritmética puesto que ellas son meras "relaciones entre ideas", es decir, enunciados vacíos de cualquier contenido fáctico; Mill sostiene que las proposiciones de la aritmética son efectivamente proposiciones con contenido empírico, que hablan acerca de hechos del mundo aunque lo hacen con el mayor grado de generalidad posible.

La posición de Mill sobre del carácter empírico de las proposiciones de la aritmética lo lleva a negar cualquier pretensión de necesidad: la verdad de dichos enunciados, como la de cualquier otra *proposición real*, se establece a partir de generalizaciones inductivas y, por tanto, no es necesaria. El punto más débil de la explicación del carácter empírico de las proposiciones de la aritmética ofrecida por Mill está en su definición de la noción de número. Este autor establece definiciones para los diferentes números naturales, apoyándose en la facultad subjetiva de abstraer lo que es común en diferentes colecciones equinumerosas de objetos empíricos[2]. A partir de ello tiene algunos problemas: en primer lugar no logra dar una definición ni para el cero ni para el uno en tanto a estos dos, a diferencia de los demás números naturales, no los puede presentar como colecciones de objetos. En segundo lugar, tal como queda establecido en las críticas de Frege, a partir de la definición de número ofrecida por Mill el significado de un número específico no está claramente fijado, puesto que la abstracción de la cantidad de elementos de una colección dada se basa en las capacidades subjetivas o psicológicas del sujeto o incluso en sus preferencias. Por lo tanto, el significado preciso de la cantidad representada por un conjunto de objetos sensibles no queda objetivamente determinado. Por ejemplo, si un sujeto A define el número 12 como la cantidad de pares de zapatos que conforman una colección; otro sujeto B puede decir que el mismo agregado define al número 24 considerando a cada zapato una unidad.

---

[1] John S.Mill afirma que "Los axiomas y teoremas de las matemáticas también comprenden las principales leyes de orden en el espacio y descansan en la inducción por enumeración simple". Mill J.Stuart, *A System of Logic Ratiocinative and Inductive,* University of Toronto Press, Toronto, 1974, pág. 609.

[2] Si bien Mill no hace referencia explícita a la capacidad subjetiva de abstracción, la manera en la que define los números, presentándolos como "nombres generales connotativos" remite a cómo sabemos la connotación de un término numérico. Esto es, cómo sabemos por ejemplo, que una colección de objetos corresponde al número *dos*, si no es conociendo *el atributo* expresado por tal nombre, su connotación.

III

Otra vertiente de la postura empirista que fue brevemente revisada en el capítulo I es la de David Hume. Hemos mencionado ya que Hume considera necesarias a las proposiciones de la aritmética en tanto éstas expresan meras "relaciones entre ideas", es decir, que tales proposiciones carecen de contenido empírico y no hablan acerca de objetos o hechos del mundo. David Hume, admitiendo que a la base de todo conocimiento existe una impresión simple –o una combinación de ellas- que procede de la experiencia, sitúa a las proposiciones de la aritmética entre los enunciados vacíos de cualquier contenido empírico. Una vez dibujada esta distinción epistemológica, Hume argumenta que la necesidad de la verdad de los enunciados de la aritmética se apoya únicamente en definiciones precisas y en derivaciones lógicas[3]. Por tal razón, puede decirse que Hume atribuye a las proposiciones de la aritmética una necesidad únicamente *de dicto*[4], pues ellas carecen de cualquier contenido fáctico. El carácter necesario de las proposiciones de la aritmética se constata, según Hume, en virtud de que la negación de una proposición aritmética verdadera no solamente es una proposición necesariamente falsa sino incluso "inconcebible". Por ejemplo, la proposición de que "la raíz cuadrada de 25 es 4" es, además de falsa, inconcebible en tanto la propia definición de la expresión, "*a* es raíz cuadrada de *b*" establece que "el cuadrado de *b* es igual a *a*" y no es posible concebir que 4 por 4 sea igual a 25. En este sentido, para Hume, la necesidad de la verdad de los enunciados de la aritmética se apoya únicamente en la deducción lógica a partir de definiciones precisas de las "ideas" que se relacionan en tales enunciados.

IV

[3] "La Geometría, el Algebra y la Aritmética pertenecen a [las relaciones entre ideas]; (...) Las proposiciones de esta clase pueden descubrirse sólo mediante operaciones del pensamiento, con independencia de cosa existente alguna en cualquier lugar del universo". Hume, "An Enquiry concerning Human Understanding (1748)" en, *Enquiries concerning Human Understanding and concerning the principles of morals* (1777), Clarendon Press, Oxford, 1975, sección 20, pág 25. Hume también indica que: "... a diferencia de todas las otras ideas, [las de la cantidad y el número] son claramente distintas y diferentes unas de otras y mediante nuestro escrutinio riguroso, nunca podremos avanzar más allá de la observación de esta diversidad, y a través de una reflexión obvia, establecer que una cosa no es igual a otra. Si es que llega a haber alguna dificultad en tal decisión, procede enteramente de la subdeterminación del significado de las palabras, lo cual se corrige mediante definiciones más justas". Hume, *op.cit.*, sección 131.

[4] En términos generales, se dice que un enunciado es necesario *de dicto*, cuando el predicado "ser necesario" sólo se aplica al enunciado, o es *de re* cuando ese predicado se aplica al hecho en el mundo expresado por la oración.

En contraste con las posturas anteriores, hemos visto en este trabajo que hay autores como Immanuel Kant y Georg Cantor que, con base en diversas combinaciones de argumentos lógicos y epistemológicos, sostienen que las proposiciones de la aritmética son necesarias aunque brindan explicaciones muy distintas acerca de sus objetos, los números.

Como vimos en el capítulo I, Kant afirma que los juicios de la aritmética son juicios sintéticos *a priori*, es decir, que su verdad no surge únicamente del análisis lógico de conceptos sino que ésta solamente puede establecerse si aceptamos que hay una "síntesis de la imaginación productiva" cuya posibilidad, a su vez, descansa en la intuición pura del tiempo[5]. Para Kant, entonces, insatisfecho con la explicación de Hume y convencido de que la aritmética nos aporta conocimientos substanciales acerca del mundo, el carácter necesario de las proposiciones de la aritmética se basa, ante todo, en que el sujeto que conoce una proposición aritmética necesariamente construye de una manera determinada los contenidos de tal proposición. Es la intuición pura del tiempo, en tanto forma de la sensibilidad del sujeto, la que está a la base del conocimiento matemático y de la verdad necesaria de sus enunciados.

Podría suponerse que Kant, al igual que el empirismo, privilegia la argumentación epistemológica a la hora de establecer la naturaleza de las proposiciones de la aritmética; sin embargo, en esta investigación hemos visto que este autor incluye asimismo argumentos lógicos, aunque acepta, con base en consideraciones epistemológicas, una estructura *a priori* del conocimiento que lo aleja del empirismo. El principal criterio lógico establecido por Kant para la distinción de los juicios en analíticos y sintéticos -la contención o no del predicado en el sujeto-, es acertadamente criticado por Frege como un criterio no exhaustivo y por tanto insuficiente; pues solamente se aplica a juicios con la forma sujeto-predicado. Por otro lado, Kant sostiene explícitamente, además, que el principio de no contradicción no es suficiente para determinar la verdad de las proposiciones de la aritmética[6]. Según Kant, la verdad de una proposición de la aritmética no se deriva

[5] "... el tiempo en el que situamos dichas representaciones [de objetos sensibles] –tiempo que, a su vez, precede a la conciencia de las mismas en la experiencia y les sirve de base en cuanto condición formal de nuestro modo de situarlas en el psiquismo- contiene ya relaciones de sucesión, de simultaneidad y de aquello que coexiste con lo sucesivo (lo permanente)". Esta intuición pura del tiempo está, para Kant, a la base de la aritmética. Kant, *CRP*, B67

[6] En relación a los juicios sintéticos, Kant afirma: "me veo obligado a salir fuera del concepto dado para considerar en relación con éste, algo completamente distinto de lo pensado en él", y añade que la relación entre predicado y sujeto en un juicio sintético nunca es de identidad. Kant, CRP, A154-B194.

únicamente de la lógica en tanto que los objetos acerca de los cuales habla dicha proposición, los números, no pueden definirse únicamente mediante el principio de no contradiccion y para su conocimiento la razón se apoya en la intuición. Por tanto, insistimos, el carácter necesario de las proposiciones de la aritmética, Kant lo defiende dado su carácter *a priori*.

V

Para Georg Cantor, por su parte, las proposiciones de la aritmética son necesarias en tanto que no son empíricas pues no hablan acerca de objetos del mundo y, sin embargo, tampoco son juicios sintéticos *a priori* pues, según él, para la determinación de sus objetos, los números y de la relación sucesor, no se requiere de la intuición. Según Cantor, la necesidad de las proposiciones de la aritmética se explica en primer lugar, porque la demostración de su verdad se apoya únicamente en la lógica; y, en segundo lugar, porque para la determinación de los números no se requiere de la intuición sino que éstos pueden derivarse lógicamente de la noción de conjunto.

Según Cantor, tal como vimos en el capítulo IV, los números pueden definirse formalmente a partir de principios lógicos, a condición de que se admita, además, la *existencia* de conjuntos entendidos como colecciones de objetos separados y distinguibles. Dicha existencia de ninguna manera es una cuestión puramente lógica. De esta manera, cada número natural queda asociado a la cardinalidad de un determinado conjunto que puede compararse con cualquier otro a partir de una relación de equivalencia que "cuenta", por expresarlo de alguna manera, los elementos de cada uno de tales conjuntos[7]. Estos supuestos, en mi opinión, si bien evitan el recurso a la intuición a la hora de definir los números, trasladan el problema a la posibilidad de pensar colecciones de objetos distinguibles y separados y comprometen a Cantor con un "platonismo aritmético".

Es justamente en la definición de los números a partir de la teoría intuitiva de conjuntos, donde Cantor combina argumentos lógicos y epistemológicos, que son criticados ampliamente por Frege. Para poder explicar la existencia de conjuntos pensados como colecciones de objetos separados y distinguibles, Cantor apela a la capacidad subjetiva de abstracción, esto es, no llega a ofrecer, según Frege, una definición objetiva de la noción de número que se apoye únicamente en la lógica. En todo caso, si bien la posición de Cantor tiene ciertas debilidades, sus esfuerzos por fundar la aritmética, incluida la de los números transfinitos, en la noción de conjunto, constituyen los cimientos de la matemática contemporánea.

VI

Finalmente, otros dos autores estudiados en esta tesis, Gottlob Frege y Richard Dedekind, privilegian los argumentos lógicos para explicar el carácter necesario, de las proposiciones de la aritmética. Frege y Dedekind consideran que las proposiciones de la aritmética admiten una prueba únicamente lógica, aunque ninguno de los dos brinda una demostración satisfactoria de ello.

Tal como vimos en el capítulo III, el argumento de Frege para demostrar la analiticidad de las proposiciones de la aritmética consiste en demostrar que para su prueba se requieren únicamente definiciones y principios lógicos[8]. De ahí el esfuerzo de Frege por demostrar que el concepto de cada número natural puede ser definido de manera estrictamente lógica. La postura de Frege, en lo relativo a la analiticidad de las proposiciones de la aritmética, es hasta cierto punto compartida por Dedekind, pues él, al igual que Frege, busca expulsar de las demostraciones aritméticas cualquier recurso a la intuición[9]. Sin embargo, Dedekind no comparte el realismo fregeano, por lo cual considera innecesario presentar una definición lógica del concepto de cada número natural y, más bien, dirige sus esfuerzos a construir lógicamente el sistema de los números naturales, esto es, a establecer el primer elemento de una serie infinita y definir en ella una relación de orden. En este sentido y dada la manera en la que Dedekind construye el sistema de los números naturales buscando dar cuenta lógicamente del "acto aritmético más simple", el de contar[10], tal como vimos al final del capítulo IV; se puede afirmar que Dedekind tiene una idea muy distinta a la de Frege, de lo que significa dar fundamento lógico a la aritmética.

---

[7] Cantor Georg, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers (1895)*, Dover Publications, New York, 1955, proposiciones 5-8.
[8] Frege Gottlob, *Los fundamentos de la aritmética. Una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. UNAM, México, 1972. Traducción de Hugo Padilla. Prólogo, pág.7
[9] Dedekind, R., "Continuity and Irrational Numbers", en *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, New York, 1963, págs. 1-2
[10] "Considero que toda la aritmética es una consecuencia necesaria, o al menos natural, del *acto aritmético más simple*, el de contar; y contar no es más que la creación sucesiva de la infinita serie de enteros positivos

Mientras que Frege busca demostrar que las proposiciones de la aritmética son analíticas, esto es, que admiten una prueba únicamente lógica y para ello requiere definir los números naturales basándose únicamente en principios lógicos clásicos; Dedekind, en cambio, considera que para fundar la aritmética se debe *construir* el sistema de los números naturales de manera lógica rigurosa. Dada esta diferencia de fondo en lo que significa dar fundamento a la aritmética, se puede sostener que Dedekind al intentar mostrar que las proposiciones de la aritmética admiten una prueba únicamente lógica, no se compromete con demostrar que éstas son analíticas en el sentido kantiano de que su verdad se puede establecer únicamente mediante el análisis de conceptos. En realidad, Dedekind no objeta de la misma manera que Frege el carácter sintético *a priori* atribuido por Kant a los juicios de la aritmética. Tal como ha sido expuesto en el Capítulo IV, Dedekind busca demostrar que en las proposiciones de la aritmética, no es la intuición la que interviene en la determinación de sus objetos sino la razón apoyándose en el principio de no contradicción. En este sentido, Dedekind aparentemente aceptaría la explicación kantiana de que a la base de la definición del número hay una "síntesis de la imaginación productiva", a través de la cual se explica "el acto aritmético más simple", que es según Dedekind, el de contar. Aunque esta "síntesis" o construcción se apoya, según Dedekind, únicamente en la razón sin recurrir en ningún momento a la intuición[11].

Encontramos pues en esta investigación, que en el centro de las diferencias entre Frege y Dedekind está la posición que cada uno de ellos asume en relación al principio de no contradicción y, sobre todo, a si tal principio es o no suficiente para la admisión de objetos aritméticos. Frege no acepta que sea suficiente el principio de no contradicción como garantía de existencia o admisibilidad de números[12], tal como vimos en el capítulo III en relación a los números complejos. Frege exige que, además, se muestre el objeto que cae

---

en la que cada individuo se define a partir del que lo precede...". Dedekind, "Continuity and Irrational Numbers", *op.cit.*, pág.4

[11] Coincido con la explicación de McCarty a lo que él llama la "misteriosa" posición de Dedekind. Ver, McCarty David, "The mysteries of Richard Dedekind" en Jaakko Hintikka (ed.), *Essays on the Develpment of the Foundations of Mathematics.*

[12] "También se debe objetar que para el matemático sólo valga como imposible lo que se contradiga a sí mismo. Un concepto es admisible aun si sus notas contienen una contradicción; sólo que no se debe presuponer que algo cae bajo él. Pero de que el concepto no contenga contradicción alguna, tampoco se puede concluir que algo cae bajo él. Por lo demás, ¿cómo se puede probar que un concepto no contiene contradicción alguna? Esto de ninguna manera es obvio; de que no se vea contradicción alguna, no se sigue que no la haya, y la determinación de la definición no constituye garantía para ello". Frege, *Los fundamentos de la aritmética, op.cit.*, sección 94.

bajo tal definición. Por ejemplo, en relación a la admisibilidad del concepto de "número infinito" Frege considera que es legítimo admitir tal concepto sólo en tanto se puede exhibir que "algo" cae bajo tal concepto: "El número que corresponde al concepto ´número finito´ es un número infinito[13]".

Por su parte, Dedekind considera que si logra construir sin contradicción un elemento distinguido en un conjunto ordenado, es decir, el "primer elemento" de una sucesión, entonces puede admitir la existencia –lógica- del objeto así especificado. De este modo rechaza la idea de Frege según la cual se tiene que mostrar que *hay algo independiente* de la mente de quien lo construye, que cae bajo el concepto definido lógicamente.

La cuestión de si es suficiente o no el principio de no contradicción para admitir como existentes objetos definidos lógicamente de manera formal, determina dos acercamientos diferenciados a los problemas matemáticos. Uno es el realismo de Frege que exige la presentación explícita del objeto que cae bajo un concepto definido a partir del principio de no contradicción. Es más, la exhibición del objeto es la garantía que Frege exige para efectivamente saber que la definición de tal concepto es no contradictoria. Por ejemplo, en relación a la definición del número 0, Frege sugiere que se la puede mostrar de la siguiente manera: "0 es el número que corresponde al concepto ´no igual a sí mismo´"[14]. El otro enfoque es el antecedente formalista, representado por Dedekind en esta investigación, que admite sólo el principio de no contradicción como criterio de la admisibilidad de objetos matemáticos.

VII

La pregunta que queda abierta a partir sobre todo de los trabajos de Frege, Cantor y Dedekind es si realmente es posible pensar que las proposiciones de la aritmética son analíticas, y por tanto necesarias. Esto es, siguiendo la noción fregeana de "analiticidad", que su verdad o falsedad admite una prueba únicamente lógica. El desarrollo de la lógica en el siglo XX, en particular la axiomatización de la teoría formal de los conjuntos como vía hacia la fundamentación de la aritmética, nos hace pensar que no es posible reducir la aritmética a la lógica y que por tanto, las proposiciones de la aritmética no son analíticas. En particular el axioma del infinito y el axioma de elección dentro de la axiomatización de

---

[13] Frege, *op.cit.*, sección 84.

Zermelo-Fraenkel con elección (ZFE), si bien pueden ser expresados de manera formal en un lenguaje de primer orden, establecen afirmaciones cuya verdad no puede deducirse únicamente de consideraciones lógicas sino que suponen compromisos existenciales. Cabe observar que el desarrollo de la teoría de conjuntos como un instrumento tan poderoso para el desarrollo de las matemáticas, ha diluido el interés por demostrar que sus axiomas son puramente lógicos y ha tendido a centrarse en el problema de la consistencia e independencia de tales axiomas.

VIII

El otro gran tema que ha sido abordado a lo largo de esta tesis es la cuestión de la definición de número. Especialmente en los trabajos de Cantor, Dedekind y Frege, hemos encontrado dos posturas claramente distintas: o bien se aceptan tanto la noción de conjunto para sostener la definición de número, así como el principio de no contradicción como único criterio para aceptar la existencia de objetos; o bien tales supuestos se rechazan.

Cantor y Dedekind, aceptan la noción de conjunto y el principio de no contradicción como garantía suficiente para la admisión de objetos, como supuestos básicos para establecer el concepto de número tal como mostramos detalladamente en el capítulo IV. Frege, por su parte, no admite la noción de conjunto a la base de la noción de número, sino que funda tal noción en las "extensiones de conceptos" sin explicar la manera cómo se pasa de un concepto a su extensión[15]. En cuanto al principio de no contradicción, no lo juzga suficiente como criterio de admisibilidad de la existencia de objetos.

La postura de Dedekind, de entre todas las revisadas en esta tesis en relación a la noción de número, es la más original y la más fértil desde el punto de vista del matemático. Para él no es necesario dar una definición de cada uno de los números naturales tal como se empeña en hacerlo Frege. Lo que Dedekind hace es mostrar que es lógicamente posible "construir" un primer elemento en un conjunto infinito "simple" y definir una relación de orden para tal conjunto. De esta manera, la forma en la que Dedekind expulsa cualquier recurso a la intuición sensible del fundamental concepto de número, no es mostrando que existen definiciones para cada número que son derivables únicamente de la lógica, tal como

[14] Ibid., sección 74, pág. 181

[15] "... Aquí se presupone que se conoce el sentido de la expresión "extensión del concepto". Este modo de superar la dificultad ciertamente no encontrará consenso general, y muchos preferirán allanar tal dificultad de otra manera. Yo tampoco pongo un peso decisivo en lo atrayente de la extensión de un concepto". Frege, Los Fundamentos..., sección 107.

propone Frege; sino demostrando que se puede construir una serie ascendente e infinita a partir de un primer elemento, igualmente construido lógicamente, apoyándose únicamente en la razón[16]. La posterior formalización de la teoría de conjuntos como fundamento de las matemáticas siguió el camino sugerido por Dedekind antes que el de Frege.

IX

Finalmente, para concluir, cada una de las posiciones revisadas en torno a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética y sobre la noción de número tiene debilidades que se hacen visibles conociendo otro tipo de explicaciones. Sin embargo, viendo las cosas desde el interior de la práctica matemática, considero que la solución más convincente es la postura formalista que en cierta medida es bosquejada por Dedekind. Tal postura aborda lo relativo a la naturaleza de las proposiciones de la aritmética desde la perspectiva de si hay una demostración de tales proposiciones a partir ciertas definiciones y proposiciones lógicamente aceptables, que se asumen como axiomas de un sistema formal. Esta posición obliga a vaciar de cualquier contenido intuitivo o empírico a los objetos de la matemática; y únicamente exige al matemático que sus premisas fundamentales, necesarias para reconstruir la aritmética sean no contradictorias. La acusación de vacuidad que Frege hace al formalismo, deja de lado la ponderación de una virtud de tal posición que fue discutida en esta tesis en relación al trabajo de Dedekind: el matemático formalista no sólo manipula símbolos vacíos sino que, hasta cierto punto, intenta dar cuenta de los actos matemáticos, del quehacer de la práctica matemática. En este sentido, como Dedekind, considero que el matemático que procede de manera puramente formal se dota de sus propios objetos y opera con ellos apoyándose en principios lógicos.

---

[16] Dedekind R., "The nature and meaning of numbers" (1888), en *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, New York, 1963. [Traducción de W.W.Beman del trabajo, *Was sind und was sollen die zahlen?]*

Apéndice 1

La generalización cantoriana de la relación de comparación entre números cardinales

Una vez establecido el significado de la igualdad entre las potencias de cualesquiera dos conjuntos, Cantor generaliza su comparación estableciendo las siguientes condiciones:

> "Si para dos conjuntos M y N con los números cardinales $\mathfrak{a} = / M /$ y $\mathfrak{b} = / N /$ se cumplen las dos siguientes condiciones:
>
> i) No hay una parte de M que sea equivalente a N
>
> ii) Hay una parte N_1 de N, tal que $N_1 \equiv M$
>
> Es obvio que tales condiciones son también validas si en ellas M y N son reemplazados por dos conjuntos equivalentes M′ y N′. Entonces tales condiciones expresan una relación definida entre los números cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$."

La notación para tal relación será la conocida desigualdad >, < y en el caso de cumplirse las condiciones i) y ii) se puede decir: $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ ó $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$

Es muy importante notar la forma de proceder de Cantor: para hablar de comparación de potencias, una vez establecido el significado de la relación de igualdad, discute ***las condiciones que tiene que cumplir tal relación.*** Así, a partir del análisis de las dos condiciones que ha establecido para la relación de comparación, Cantor llega a la afirmación de que o bien:

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \qquad ó \qquad \mathfrak{a} > \mathfrak{b} \qquad ó \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$$

y de que cada uno de los casos excluye los otros dos.

Resulta evidente que tanto la definición de número cardinal como la manera de introducir la relación de comparación entre cardinales están en el centro de la diferencia entre Cantor y Frege. Mientras que Cantor parte de la noción básica de conjunto (Menge) para definir después lo que es el número cardinal de un conjunto apoyándose en la *activa facultad* humana de *abstracción*, con lo cual resulta que un número cardinal es un "concepto general" subjetivo; Frege se empeña en construir una definición objetiva de número como la "extensión de un concepto F". Considero que en ambas definiciones hay una dificultad: si Cantor peca de ambigüedad, Frege guarda absoluto silencio acerca de la manera cómo se pasa de un concepto a su extensión[1].

---

[1] Baker y Hacker, *op.cit.*

La cuestión de la comparabilidad de los números cardinales también exhibe una gran diferencia entre ambos autores. Cantor emplea como noción primitiva la relación de equivalencia entre conjuntos y después, estableciendo condiciones para tal relación de equivalencia *entre los conjuntos,* la utiliza como un *pivote* o punto firme, para asegurar la *comparabilidad entre los números cardinales* que les corresponden: dados cualesquiera dos conjuntos M y N, si ninguna parte de M es biyectable con N y alguna parte de N es biyectable con M, entonces los números cardinales que les corresponden a ambos conjuntos están en determinada relación de comparabilidad. Esta relación es la que le permite entender a los números cardinales como una serie ordenada: ordenada a partir de la relación de equivalencia y contención entre conjuntos, por lo que cada miembro –cardinal- de la serie resulta comparable con los demás.

Por su parte, Frege sigue un camino diferente para introducir la relación de comparabilidad entre números cardinales finitos, que consistirá en construir lógicamente la función sucesor y obtener cualquier número a partir de su antecesor. El problema de Frege, entonces, es lograr introducir la relación de comparabilidad entre números, sin apelar explícitamente a la equivalencia de conjuntos tal como, de entrada, hace Cantor. Resulta entonces que la formulación de la relación de comparabilidad de Frege requiere, ***como puente***, de la noción de verdad:

> "la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto F´ es igual a la extensión del concepto ´equinumérico respecto al concepto G´ es verdadera si y sólo si al concepto F corresponde el mismo número que al concepto G también es verdadera".

Discutimos en el capítulo III la manera cómo Frege explica el concepto "equinumérico" utilizando una analogía con la relación de paralelismo entre dos rectas dadas. Lo que sucede en este punto, según entiendo, es que para definir una relación binaria como la igualdad entre números, la explicación de tal relación requiere obligadamente de algo que funcione como "punto de apoyo" para la comparación[2]. Qué se escoja para fungir como "puente" o "punto de apoyo" nos alumbra en todo caso acerca de los demás supuestos que o bien Cantor o Frege, admiten en su argumentación.

[2] Al estudiar la axiomatización formal de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel esto se percibe de manera muy nítida: el axioma de extensionalidad, donde se define la igualdad de conjuntos, señala que dos

Finalmente, un aspecto secundario pero necesario para entender la manera de proceder de Cantor al construir la noción de número, es la manera en que introduce la adición y la multiplicación de potencias de conjuntos, sin que la propiedad conmutativa de la adición presente problema alguno. Si se define la suma de dos cardinales, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ como el número cardinal de la unión de los conjuntos ajenos M y N, es decir,

$$/ M \cup N / = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$$

la propiedad conmutativa de la adición no presenta problema, pues en la consideración del cardinal de la unión de M y N se hace justamente abstracción tanto de la naturaleza de los elementos que contengan tales conjuntos, como del orden en el que se encuentren.

A partir de aquí Cantor tiene todos los elementos para definir los números cardinales finitos y, además, sus propiedades más importantes:

a. "Los términos de la serie ilimitada de los números cardinales finitos

   1, 2, 3, ..., n, ...

   son todos diferentes entre sí.
b. Cada uno de estos números n es mayor que los que le preceden y menor de los que lo suceden.
c. No hay ningún número cardinal que, en magnitud, esté entre dos números consecutivos n y n + 1
d. Si M es un conjunto tal que es de igual potencia que un subconjunto propio, entonces el conjunto M U { e }, que surge de M a través de la adición de un único elemento e, tiene la misma propiedad de ser de igual potencia que un subconjunto propio.
e. Si N es un conjunto con un número cardinal finito n y N_1 es cualquier subconjunto de N, el número cardinal de N_1 es igual a uno de los números precedentes 1, 2, 3... n-1".

El tratamiento cantoriano de los números cardinales finitos consiste, entonces, en considerarlos como una serie discreta y ordenada por la relación " < ".

conjuntos son iguales si y sólo si, tienen los mismos elementos. En este caso, es la relación de pertenencia la que define la igualdad.

Bibliografía

Alemán A., *Lógica, matemáticas y realidad*, Tecnos, Madrid, 2001.

Ayer A.J., *Hume*, Oxfrord University Press, Oxford, 1980.

Beaney Michael, *Frege. Making sense*, Duckworth, London, 1996.

Baker G.P. & Hacker P.M.S., *Frege: Logical Excavations*, Oxford University Press, New York, 1984

Belna Jean-Pierre, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*, Librairie Philosophique J.Vrin, Paris, 1996

Benacerraf Paul, "What numbers could not be", *Philosophical Review*, 74 (1), 1964.

"Mathematical Truth" (1973), en Hart W.D (Editor), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1996

Benacerraf Paul and Hillary Putnam (Editors),*Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. Basil Blackwell, Oxford, 1964

Blanshard Brand, "Foreword", en Pap Arthur, *Semantics and Necessary Truth [1958]*, Yale University Press, New Haven and London, 1996

Boole, "The Laws of Thought" (1854), en *Collected Logical Works*, The Open Court Publishing Co., Illinois, 1952.

Cantor Georg, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover Publications, New York, 1955.

Courant R, *Differential and Integral Calculus*, Vol.I, Black & Son Lmtd., London and Glasgow, 1966.

Dauben Joseph, *Georg Cantor. His mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1979.

Dedekind Richard, "Continuity and Irrational Numbers" (1872), en *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, New York, 1963.

"The nature and meaning of numbers" (1888), en *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, New York, 1963. [Traducción de W.W.Beman del trabajo, *Was sind und was sollen die zahlen?]*

What are numbers and what should they be? (1888), Research Institute for Mathematics, Orono-Maine, 1995.

Dummett M., *Frege, Philosphy of Language*, Duckworth, London, 1973

Frege, Philosophy of Mathematics, Harvard Unviersity Press, Cambridge, Massachusetts, 1991.

Frege and other philosophers, Clarendon Press, Oxford, 1991

Euclides, *Elementos*, Gredos, Madrid, 1994. (Traducción de María Luisa Puertas Castaños)

Feigl H.- Sellars W., *Readings in Philosophical Analysis*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1949

Frege Gottlob, *Conceptografía. Un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética para el pensamiento puro*, México, UNAM, 1972. Traducción de Hugo Padilla. (*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reine Denkens*, Halle, 1879)

Los fundamentos de la aritmética. Una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número. UNAM, México, 1972. Traducción de Hugo Padilla. (*Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung uber den Begriff der Zahl*, Breslau, 1884.)

The Basic Laws of Arithmetic, University of California Press, Berkeley-Los Angeles-London, 1964. Traducción de Montgomery Furth. (*Grundgesetze der Arithmetik*, 1893)

Philosophical and Mathematical Correspondence, The University of Chicago Press, Chicago, 1980.

"Sobre sentido y referencia", en Valdés V. (compilador), *La búsqueda del significado*, Tecnos, Madrid, 2000

Guyer Paul, "Kant", en E.Craig (General Editor), Routledge Encyclopedia of Philosophy, Routledge, London and New York, 1998.

Hallet Michael, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Clarendon Press, Oxford, 1984.

Hamilton William, "Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time (1837)", http://www.math/tcd.ie/pub/HistMath//Hamilton/Pure time

Hart W.D (Editor), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1996

Hempel Carl, "On the Nature of Mathematical Truth", en Feigl H.- Sellars W., *Readings in Philosophical Analysis*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1949

Heijenoorth, Jean van (Editor), *From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Nueva York, 1967

Hilbert David, «On the foundations of logic and aritmetic" en Heijenoorth, Jean van (Editor), *From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Nueva York, 1967

"Acerca del Infinito" en *Fundamentos de las Matemáticas* (recopilación), Colección MATHEMA, Facultad de Ciencias-UNAM, México, D.F., 1993. Traducción de Felipe Segura

Fundamentos de la Geometría, Open Court Publishing Co., La Salle, Illinois, 1962

Hume David, *A Treatise of Human Nature* (1729)

"An Enquiry concerning Human Understanding (1748)" en, *Enquiries concerning Human Understanding and concerning the principles of morals* (1777), Clarendon Press, Oxford, 1975

Jourdain Philip, "Introducción", en Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover Publications, New York, 1955

Kanamori Akihiro, "The mathematical development of Set Theory from Cantor to Cohen", The Bulletin of Symbolic Logic, Volume 2, Number 1, Marzo 1996.

Kant I., *Crítica de la Razón Pura(CRP)* (1781-1787), Alfaguara, Madrid, 1984. Traducción de Pedro Ribas

Logic, Dover Publications, New York, 1988

Kline Morris, *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI, México, D.F., 2000

Lorenzo Javier de, *Kant y la Matemática. El uso constructivo de la razón pura*, Tecnos, Madrid, 1992

Maddy Penelope, *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, 2000

McCarty David, "The mysteries of Richard Dedekind" en Jaakko Hintikka (ed.), *Essays on the Develpment of the Foundations of Mathematics*,

Mill J.Stuart, *A System of Logic Ratiocinative and Inductive*, University of Toronto Press, Toronto, 1974
Autobiography, Columbia University Press, New York, 1924

Pap Arthur, *Semantics and Necessary Truth [1958]*, Yale University Press, New Haven and London, 1996

Parsons Charles, "Arithmetic and the categories" en, Posy Carl J. (Ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

"Kant's philosophy of Arithmetic" en Posy Carl J. (Ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992

"A structuralist view" en, Hart W.D. (Editor), *The philosophy of mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1996

Penelhum T., *David Hume*, Purdue University Press, West Lafayette, Indiana, 1992

Posy Carl J. (Ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992

Sidelle Allan, "Neccesary Truth and Convention" en, E.Craig (General Editor), Routledge Encyclopedia of Philosophy, Routledge, London and New York, 1998

Ryan Alan, *John Stuart Mill*, Pantheon Books, New York, 1970

Simmons G.F., *Introduction to topology and modern analysis*, McGraw Hill-Kogakusha, Tokyo, 1963.

Sluga H, *Gottlob Frege*, Routledge & Kegan Paul Ltd., London, 1980

Smith Norman Kemp, *A Commentary to Kant's 'Critique of Pure Reason' (1918)*, McMillan Press Ltd., London and Basingstoke, 1979

Stilwell John, "Logic and the phiosophy of mathematics in the nineteenth century" en, C.L.Ten (Editor), *Routledge History of Philosophy*, Volume VII, Routledge, London, 1994

Stroud Barry, *Hume*, IIF-UNAM, México D.F., 1995

Torres Alcaraz Carlos, *Elementos para una crítica matemática de la razón filosófica*, Tesis de Doctorado, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM, México, D.F., 2001

"Kant visto desde las matemáticas", Revista Digital Universitaria, Volumen 6, número 1, 2005, ISSN en trámite, dirección electrónica: http://www.revista.unam.mx/

Walker Ralph, *Kant. Arguments of the Philosophers*, Routledge, London, 1978.

Wright Crispin, *Frege's conception of numbers as objects*, Aberdeen University Press, Aberdeen, Great Britain, 1983