

01190



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

CONVECCIÓN NATURAL EN
SISTEMAS ROTATORIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTORA EN INGENIERÍA
PRESENTA
MINERVA GUADALUPE VARGAS VEGA

DIRECTOR DE TESIS: DR. EDUARDO RAMOS MORA

MÉXICO D.F.

2005

0346441



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1
Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Minerva Guadalupe Vargas Vega

FECHA: 01 - Agosto - 2005

FIRMA: Minerva Guadalupe Vargas Vega

Por su amor y apoyo

A Ricardo y Ricky

A mis padres Ricardo y Maria Guadalupe

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin la valiosa colaboración y ayuda de muchas personas, este espacio es para agradecer su participación. En primer lugar, le doy las gracias a mi asesor Dr. Eduardo Ramos por su dirección en este proyecto, su inestimable ayuda en la investigación y desarrollo de la tesis y las detalladas revisiones al documento. Le agradezco también sus invaluable enseñanzas y su ejemplo. A los miembros de mi Jurado Doctoral, Dr. Jorge Rojas por la paciente lectura y sus críticos comentarios en el primer borrador de este trabajo que ayudaron a mejorarlo. A la Dra. Guadalupe Huelsz por su asesoría en la técnica de velocimetría por imágenes de partículas, así como a sus acertados comentarios en la corrección del manuscrito, gracias por su apoyo y disposición en todo momento. A la Dra. Gabriela Álvarez, Dr. Federico Méndez, Dr. Francisco Solorio Ordaz y Dr. Alejandro Rodríguez por sus comentarios al trabajo.

Al Dr. Gabriel Ascanio por el apoyo brindado en el diseño del sistema rotatorio, así como a los técnicos de taller mecánico del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CIADET) de la UNAM. Al Físico Raúl Espejel del Instituto de Física de la UNAM por su asesoría y siempre entusiasta colaboración en la instrumentación de la centrífuga. Al Dr. Fernando Sierra quién realizó los cálculos numéricos de la convección natural en un cilindro en un sistema de referencia fijo con FLUENT. Le agradezco sus comentarios, discusiones y su crucial ayuda durante su participación en el proyecto. Los modelos teóricos del segundo número de Rayleigh crítico fueron concebidos por Dr. Andrey Avramenko durante su estancia en el CIE mucho le agradezco su colaboración. Al Ing. Guillermo Hernández por la asesoría técnica en la instrumentación del sistema rotatorio, le agradezco su invaluable ayuda en este trabajo.

A los integrantes del Departamento de Termociencias del CIE: Dr. Mariano Lopez de Haro, Dra Julia Tagüña, Dr. Antonio del Río, Dr. Yuri Rubo, Dr. Sergio Cuevas, Dr. Raúl Rechman, Dra. Guadalupe Huelsz, Dr. Jorge Rojas, Dr. Miguel Robles y Dr. Eduardo Ramos. Por brindarnos a los estudiantes de Termociencias un ambiente de armonía y colaboración. Al Dr. Francisco Avila Segura (q.e.p.d.) a quién siempre recordaré por su actitud y entusiasmo para emprender nuevos retos. A los Profesores Liya Regel y William Wilcox de la Universidad de Clarkson E.U. por la información sobre alta gravedad y sus aplicaciones. La asistencia al IV High Gravity Congress no hubiera sido posible sin su apoyo. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por su apoyo económico al proyecto GE0044-E que hizo realidad la construcción de la centrífuga.

Al personal del Área de Cómputo del Centro de Investigación en Energía mucho les agradezco su apoyo durante las pruebas y puesta en marcha del sistema rotatorio. Al L.C. Héctor Daniel Cortés por el apoyo técnico en la operación de la computadora central. Al Ing. Alfredo Quiroz por su ayuda siempre eficaz en las reparaciones de emergencia de las computadoras y en la red del laboratorio de Transferencia de Energía y Masa (TEyM). Al Ing. Alfredo Nava Bustos (q.e.p.d) por su ayuda en la instalación eléctrica de la centrífuga. A Giovanni Esquivel, estudiante de Ingeniería Electromecánica del Tecnológico de Zacatepec quién trabajo intensamente en la instrumentación del sistema experimental. Al M.I. Guillermo Barrios por su asesoría en LATEX que se utiliza en la escritura de este manuscrito, la solución a un sin número de dudas fueron exitosamente resueltas.

En el Laboratorio de Transferencia de Energía y Masa tuve la fortuna de coincidir con otros estudiantes que trabajaban en sus proyectos de doctorado. A Héctor Perales por su asesoría en el conocimiento del sistema UNIX, en el manejo de la red interna y ayudarme en las fotografías de la centrífuga. A Ramón Tovar Olvera por sus comentarios y su actitud optimista en los meses más críticos, A Manuel Palacios por su disposición para manejar el programa de PIV. A los compañeros; Hugo Salas, Julián Becerra, Juan Manuel García, Horacio Guzmán, Francisco Alquisira, Luis Nerí, Giovanni Esquivel, Maria Loreto Cedillo, Rafael y Alfonso Castrejón, Raúl Aválos, Gabriela Hernández, Pedro Guido, Guillermo Barrios, Guillermo Ovando y Vivechana Agarwal, su presencia hizo del laboratorio de TEyM un sitio agradable de trabajo. Deseo expresar mi gratitud todo el personal e investigadores del Centro de Investigación en Energía por su trato siempre amable a mi persona, gracias.

Contenido

1. Introducción	1
2. Revisión bibliográfica	3
2.1. Introducción	3
2.2. Convección Rayleigh-Bénard	3
2.3. Convección natural en cilindros de sección transversal circular	5
2.3.1. Flujo dependiente del tiempo	8
2.3.2. Viscosidad dependiente de la temperatura	8
2.4. Convección natural en cilindros en un sistema de referencia rotatorio	9
2.4.1. Introducción	9
2.4.2. Eje de rotación, vector de gravedad y gradiente térmico colineales	9
2.4.3. Eje de rotación perpendicular al vector gradiente de temperatura	13
2.5. Aplicaciones	14
3. Convección natural en un cilindro	19
3.1. Aproximación de Boussinesq	19
3.1.1. Planteamiento de las ecuaciones de conservación	20
3.1.2. Condiciones hidrostáticas	21
3.1.3. Escalamiento	23
3.1.4. Ecuaciones aproximadas	25
3.1.5. La aproximación de Boussinesq en un sistema no inercial	27
3.1.6. Casos especiales	28
3.2. Validez de la aproximación de Boussinesq en el presente estudio	29
3.3. Ecuaciones de conservación para el flujo de convección natural en un cilindro de sección circular en un marco de referencia inercial	30
4. Sistema experimental	33
4.1. Criterios de diseño	33
4.2. Dispositivo experimental	35
4.2.1. Componentes principales	35
4.3. Instrumentación	38
4.4. Cimentación	41
4.5. Barandal de seguridad y puente	42
4.6. Cavity experimental	42
4.6.1. Fluido de trabajo	43
4.6.2. Instrumentación de la cavity	44
4.6.3. Visualización	45
4.7. Metodología experimental	47
4.7.1. Actividades previas	47
4.7.2. Procedimiento	48

5. Análisis teórico	51
5.1. Introducción	51
5.2. Mapa paramétrico A , Ta y Ra	51
5.3. Flujo convectivo sin rotación $Ta=0$	53
5.3.1. Flujo con $Ra \geq Ra^{c1}$	53
5.3.2. Flujo con $Ra \geq Ra^{c2}$	54
5.3.3. Modelo para predecir el inicio de las celdas secundarias	61
6. Observaciones experimentales	67
6.1. Introducción	67
6.2. Resumen de observaciones	67
6.3. Experimento F	67
6.3.1. Flujos sin rotación	69
6.3.2. Observaciones de la quinta etapa, $Ra = 1.9 \times 10^6$	81
6.3.3. Flujo con rotación	86
6.4. Comentarios generales sobre los experimentos	88
6.5. Dificultades y recomendaciones	93
6.6. Trabajo a futuro	94
7. Conclusiones	97
. Bibliografía	101
. Apéndice A	107
. Apéndice B	125
. Apéndice C	138
. Apéndice D	148
. Apéndice E	174

Lista de Figuras

2.1. Rayleigh crítico como función de las razones de aspecto H_1 y H_2 para cavidades rectangulares de acuerdo a Catton, <i>Int. J. Heat Mass Transfer</i> , 13 , 1970.	5
2.2. Diagrama Ra- razón de aspecto Müller <i>et al.</i> , <i>J. Crystal Growth</i> , 99 , 1990.	7
4.1. Arreglo idealizado en un recipiente de convección natural	34
4.2. Arreglo geométrico para la observación de la influencia de la fuerza de Coriolis en una centrífuga.	34
4.3. Elementos no rotatorios de la centrífuga. Los rodamientos y las poleas se encuentran abajo del soporte central.	37
4.4. Estructura rotatoria de la centrífuga.	37
4.5. Distribución de los componentes en la canastilla experimental.	38
4.6. Circuito electrónico del convertidor CD/CA.	39
4.7. Fotografía de la centrífuga.	42
4.8. Cavity experimental	44
4.9. Circuito de control de los termoelectrónicos	46
4.10. Fotografía de la canastilla experimental	47
5.1. Mapa paramétrico Ra , Ta y A , las esferas indican los casos analizados teórica y experimentalmente en este trabajo.	52
5.2. Campo de velocidades, $Ra = 5 \times 10^4$. La escala de velocidad está en unidades adimensionales.	53
5.3. Isolíneas de la velocidad vertical en los planos horizontales para distintas alturas. (a), $z^* = 0.25$; (b), $z^* = 0.5$ y (c), $z^* = 0.75$, para $Ra = 5 \times 10^4$	55
5.4. Campos de temperatura para los planos AA' y BB' con $Ra = 5 \times 10^4$	56
5.5. Campo de velocidades para los planos AA' y BB', $Ra = 7.5 \times 10^5$	57
5.6. Isolíneas de la velocidad vertical en los planos horizontales para distintas alturas. (a), $z^* = 0.25$; (b), $z^* = 0.5$ y $z^* = 0.75$ para $Ra = 7.5 \times 10^5$	58
5.7. Isosuperficies de velocidad vertical para la zona central $0.25 < z^* < 0.75$, $Ra = 7.5 \times 10^5$. 59	59
5.8. Campos de temperatura para los planos AA' y BB' con $Ra = 7.5 \times 10^5$	59
5.9. Vista superior de la sección transversal de la cavity donde se indica la orientación de los planos que contienen los campos de velocidad.	60
5.10. a) Campo de velocidad en el plano AA', b) Campo de velocidad en el plano EE' y c) Campo de velocidad en el plano FF', $Ra = 2.25 \times 10^6$	60
5.11. Campo de velocidades en el plano BB', $Ra = 2.25 \times 10^6$	61
5.12. Interpretación cualitativa del patrón del flujo	62
5.13. Segundo número de Rayleigh crítico como función de la razón de aspecto. Los símbolos \bullet y ∇ denotan flujos obtenidos numéricamente en los que aparecen y no aparecen respectivamente vórtices en las esquinas del plano AA'.	65

6.1. Traza de los termopares de las bases superior e inferior y de la temperatura ambiente para el experimento F. Los números romanos indican los tiempos en los que se analizan los campos de velocidades en forma detallada en la subsección de análisis de velocidad. T_{bc} temperatura de la base caliente, T_c temperatura de termoelectrico de la base caliente, T_{bf} temperatura de la base fría, T_f temperatura del termoelectrico de la base fría y T_{amb} temperatura del ambiente.	70
6.2. Campo de velocidades en el plano central de la celda para la observación 3la. . .	71
6.3. Velocidad vertical como función de la coordenada horizontal en el plano central de la cavidad para la observación 3la. Las curvas fueron obtenidas a alturas equidistantes y están desplazadas en la dirección vertical para que se aprecie mejor el patrón de movimiento. El nivel $v = 0$ sólo se indica para la posición $y = 0.4$. . .	72
6.4. Componente vertical (panel izquierdo) y componente horizontal (panel derecho) de la velocidad como función de las coordenadas (x, y) en el plano central de la cavidad para la observación 3la.	72
6.5. Energía cinética $ec = \sqrt{u^2 + v^2}$ como función de las coordenadas (x, y) en el plano central de la cavidad para la observación 3la.	73
6.6. Mapa de contornos de la distribución de la energía cinética en el plano central de la cavidad para la observación 3la.	73
6.7. Campos de velocidades. Panel izquierdo, observación 3lb. Panel derecho, observación 3lc.	74
6.8. Campo de velocidades en el intervalo de tiempo $1258 \text{ s} \leq t \leq 1274.6 \text{ s}$ denotado por 3lla.	76
6.9. Campo de velocidades en el plano central para $1274 \text{ s} \leq t \leq 1291 \text{ s}$, observación 3llb.	77
6.10. Campo de velocidades en el plano central para $t = 1298 \text{ s}$ denotado por 3llc. . .	78
6.11. Campo de velocidades en el plano central para el intervalo de tiempo $1678 \text{ s} \leq t \leq 1694.7 \text{ s}$, denotado por 3llla.	79
6.12. Campo de velocidades en el plano central para $1694 \text{ s} \leq t \leq 1711.3 \text{ s}$ denotado por 3lllb.	80
6.13. Campo de velocidades en el plano central para el intervalo $1711.3 \text{ s} \leq t \leq 1722.9 \text{ s}$, denotado por 3lllc.	81
6.14. Campo de velocidades en el plano central para el intervalo de tiempo $3838 \text{ s} \leq t \leq 3854.7 \text{ s}$ denotado por 5la.	82
6.15. Campo de velocidades en el intervalo $3854.7 \text{ s} \leq t \leq 3871.7 \text{ s}$ denotado por 5lb. . .	83
6.16. Campo de velocidades en el intervalo de tiempo correspondiente a $3871 \text{ s} \leq t \leq 3872 \text{ s}$ denotado por 5lc.	84
6.17. Campo de velocidades en el intervalo $3898 \text{ s} \leq t \leq 3914.6 \text{ s}$ denotado por 5lla. . .	85
6.18. Campo de velocidades de la observación 5llb	86
6.19. Historia de la velocidad en el punto $(0.65, 0.45)$	87
6.20. Historia de la velocidad en los puntos $(0.65, 0.45)$, $(0.70, 0.45)$, $(0.75, 0.45)$, $(0.80, 0.45)$. Las unidades de tiempo son segundos y las de velocidad son m/s.	89
6.21. v como función de x y t para $y = 0.45$	90
6.22. Vista superior de la figura 6.21.	91

Lista de Tablas

2.1. Centrifugas utilizadas en el crecimiento de cristales.	17
3.1. Definiciones de los parámetros ϵ_i , γ , Λ y G	25
3.2. Propiedades del agua a $P=0.10$ MPa	29
3.3. Parámetros adimensionales ϵ_i para el agua $T_0=298.16$ K y $P_0=1$ atm	30
3.4. Parámetros adimensionales del presente estudio	30
4.1. Parámetros adimensionales principales.	35
4.2. Propiedades termofísicas del fluido de trabajo a $20^\circ C$	43
5.1. Comparación del segundo número de Rayleigh crítico obtenido con los modelos teóricos como función de la razón de aspecto.	64
6.1. Resumen de observaciones experimentales. V : visualización (medición del campo de velocidades), T_i : termopares internos (medición de temperaturas en el interior de la cavidad). Ω : velocidad de rotación. Ra : número de Rayleigh. G : es el cociente de la aceleración resultante entre la aceleración de la gravedad $G = a/g$. Ra^r : número de Rayleigh cuando la cavidad se encuentra en rotación. Ta : número de Taylor. ★ indica que el método para cuantificar la variable citada en la parte superior de la columna fue usado exitosamente. ♠ indica que no se consiguió observar la variable correspondiente. ♦ indica que la cavidad experimental usada no tiene termopares internos. ♣ indica que no fue posible calcular el número de Rayleigh debido a que las señales de los termopares fueron inestables.	68
6.2. Etapas del experimento F. GTM: gradiente térmico máximo, SC: sin calentamiento, CNT: convección natural transitoria, CN S/R: convección natural sin rotación, CN C/R: convección natural con rotación, GTN: gradiente térmico nulo y GTV: gradiente térmico variable.	69
6.3. Velocidad en puntos representativos de la observación 3Ia.	72
6.4. Velocidad en la observación 3Ib.	74
6.5. Velocidad para la observación 3Ic.	75
6.6. Posición de los centros de los vórtices de la observación 3I.	75
6.7. Velocidad para la observación 3IIa.	76
6.8. Componentes de velocidades de la observación 3IIb.	77
6.9. Velocidad de la observación 3IIc.	78
6.10. Posición de los centros de los vórtices de la observación 3II.	79
6.11. Componentes del campo de velocidades 3IIa.	80
6.12. Componentes de velocidad de la observación 3IIb.	80
6.13. Componentes de velocidad de la observación 3IIc.	81
6.14. Posición de los centros de los vórtices de la observación 3III.	82
6.15. Componentes de velocidad de 5Ia.	82
6.16. Componentes de velocidad de 5Ib.	83

6.17. Componentes de velocidad de 5Ic.	83
6.18. Posición de los centros de los vórtices de la observación 5I.	84
6.19. Componentes de velocidad de 5IIa.	85
6.20. Componentes de velocidades de 5IIb.	86
6.21. Posición de los centros de los vórtices de la observación 5II.	86

Nomenclatura

A	Razón de aspecto
a	Aceleración resultante
a^c	Número de onda crítico
a_1, a_2	Constantes
b_o, c_o	Coefficientes, ecuación 3.4
C_p	Calor específico a presión constante
C_{po}	Calor específico a presión constante en un estado de referencia
CA	Corriente alterna
CD	Corriente directa
CD/CA	Corriente directa a corriente alterna
$^{\circ}C$	Grados centígrados
D	Diámetro
dB	Decibeles
d_o, e_o, f_o	Coefficientes, ecuación 3.4
Fr	Número de Froude
G	Relación de gravedades \hat{g}/g
g	Aceleración de la gravedad
\hat{g}	Aceleración resultante de la suma de la aceleración de la gravedad mas la aceleración centrífuga
g_o, h_o	Coefficientes, ecuación 3.4
g_{rms}	Gravedad eficaz
Hz	Hertz
HP	Caballos de potencia
h	Altura, entalpia
I	Corriente eléctrica
k	Conductividad térmica
k_o	Conductividad térmica en un estado de referencia
k_i	Vector unitario
L	Distancia
L	Longitud característica

m	Metro
m_o, n_o	Coefficientes, ecuación 3.4
Pa	Pascal
Pr	Número de Prandtl
p_s	Presión estática
p^*	Presión adimensional
p_s^*	Presión adimensional en estado estático
p	Presión de referencia
psi	Libras fuerza por pulgada cuadrada
q	Escala de la velocidad característica
R	Distancia
Ra	Número de Rayleigh
Ra^c	Número de Rayleigh crítico
Ra^{c1}	Primer número de Rayleigh crítico
Ra^{c2}	Segundo número de Rayleigh crítico
Ra^r	Número de Rayleigh rotatorio
R_e	Resistencia eléctrica
R_i	Vector de posición
R_i^*	Vector de posición adimensional
r	Radio, coordenada radial
R	Radio, ecuación 5.1
r	Vector de posición
rad/s	Radianes por segundo
rpm	Revoluciones por minuto
s	Segundo
s	Entropía
T	Temperatura
Ta	Número de Taylor
Ta^c	Número de Taylor crítico
T_{amb}	Temperatura ambiente
T_{bc}	Temperatura en la base caliente
T_{bf}	Temperatura en la base fría
T_c	Temperatura caliente
T_f	Temperatura fría
T_i	Temperatura del termopar interno
T_o	Temperatura en un estado de referencia
T^*	Temperatura adimensional
T_o^*	Temperatura adimensional en estado de referencia
T_s	Temperatura en estado estático

T_s^*	Temperatura adimensional en estado estático
t	Tiempo
u	Componente de velocidad en dirección horizontal
u_r, u_θ, u_z	Componentes de velocidad en coordenadas cilíndricas
u_r^*, u_θ^*, u_z^*	Componentes adimensionales de velocidad en coordenadas cilíndricas
V	Volts
V_{ca}	Volts corriente alterna
V_{cd}	Volts corriente directa
V_{rms}	Voltaje eficaz
v	Componente de velocidad en dirección vertical
v_i^*	Velocidad adimensional
x, y, z	Coordenadas cartesianas
x^*, y^*, z^*	Coordenadas cartesianas adimensionales
x_i	Vector de posición

Símbolos griegos

α	Coefficiente de expansión térmica
α_o	Coefficiente de expansión térmica en un estado de referencia
β	Compresibilidad isotérmica
β_o	Compresibilidad isotérmica en estado de referencia
γ	Parámetro, definido en la Tabla 3.1
Γ_{ij}	Tensor de esfuerzos
ΔT	Diferencia de temperatura
ϵ_i	Parámetros adimensionales definidos en la Tabla 3.1
θ	Ángulo
κ	Difusividad térmica
$\tilde{\lambda}$	Longitud de onda
λ	Segundo coeficiente de la viscosidad
λ_o	Segundo coeficiente de viscosidad en un estado de referencia
Λ	Parámetro adimensional definido en la Tabla 3.1
μ	Viscosidad dinámica
μ_o	Viscosidad dinámica en un estado de referencia
ν	Viscosidad cinemática
ν_o	Viscosidad cinemática en un estado de referencia
∇T	Gradiente de temperatura
Φ	Función de disipación viscosa
ρ	Densidad
ρ_o	Densidad en un estado de referencia
ρ_s	Densidad en un estado estático
$\hat{\Omega}$	Ohms
Ω	Velocidad de rotación
Ω_o	Velocidad de rotación característica
Ω^*	Velocidad de rotación adimensional
χ	Constante

Resumen

El tema en el que esta tesis está enmarcada es el estudio de la convección natural en un cilindro que se encuentra en un marco de referencia no inercial y tiene como principal objetivo conocer el efecto de las fuerzas centrífuga y Coriolis sobre el movimiento convectivo de un fluido. Con este fin se diseñó y construyó un sistema rotatorio que permitiera observar el patrón de flujo en el interior del recipiente cilíndrico. La aportación principal de esta tesis es la construcción de un dispositivo para estudiar el fenómeno de interés. El trabajo efectuado también incluye estudios teóricos y experimentales sobre el tema.

El sistema construido consiste de una centrífuga de 1.5 m de radio que puede girar a una velocidad angular máxima de 86 rpm. Este aparato tiene tres partes principales, una base fija al laboratorio, una estructura central que aloja al eje de rotación y dos brazos. Una fuente de potencia autónoma y una computadora se encuentran situados en el interior de la estructura central. En cada uno de los extremos de la estructura rotatoria se localiza una canastilla. En una de ellas se ubican el recipiente cilíndrico en el que ocurre el fenómeno bajo análisis con sus respectivos accesorios e instrumentación, la otra canastilla es el contrapeso. La centrífuga fue construida sobre una cimentación especial y cuenta con un barandal de protección y un puente de acceso a la estructura central.

Dentro de los estudios teóricos, se presenta el análisis de la validez de la aproximación de Boussinesq cuando la convección tiene lugar en un sistema rotatorio. Específicamente, se demuestra que esta aproximación es válida para las condiciones físicas y geométricas de interés en este estudio. También se presenta un estudio numérico para el caso de la convección natural sin rotación. En este análisis, se encontró que el flujo convectivo en estado permanente en el interior del cilindro es tridimensional con una estructura compleja. Se describe el campo de velocidades en planos con diferentes orientaciones. Se encontró que para bajos números de Rayleigh se puede identificar un plano en el que se distingue una celda convectiva única. Para números de Rayleigh del orden de 10^6 se origina un flujo secundario adicional en forma de vórtices en las esquinas de la celda principal. Con el propósito de comprender las condiciones que propician la formación de estas estructuras que pueden definirse como un flujo local invertido en esta región, se planteó una teoría linealizada que describiera su formación. Se plantearon dos modelos teóricos que predicen la aparición de estos pequeños vórtices. Los modelos determinan el número de Rayleigh mínimo Ra^{c2} en cuyo flujo aparecen los vórtices más pequeños cerca del fondo y en la parte superior del contenedor. Los valores específicos del número de Rayleigh crítico encontrados en la teoría están expresados como función de la razón de aspecto. Se encontró que los resultados del modelo teórico para las razones de aspecto de 0.1, 0.125 y 0.25 están en concordancia con resultados de soluciones numéricas de las ecuaciones de conservación.

La descripción del estudio experimental se inicia con la presentación de los detalles de la construcción de la centrífuga y de la metodología experimental. Finalmente se describen los flujos observados. Se efectuaron observaciones de flujos convectivos cuando el contenedor se encuentra en reposo en el eje de coordenadas del laboratorio. En todas las observaciones, se usó una razón de aspecto (radio/altura) de 0.28 y agua como fluido de trabajo con número de Prandtl igual a 6. El intervalo de número de Rayleigh es 1.6×10^6 a 3.2×10^6 . Se observó la celda convectiva única y la estructura de cuatro vórtices que es geoméricamente equivalente a la encontrada en los cálculos numéricos. Se observó así mismo patrones de flujo convectivo con flujos secundarios en forma de vórtices que se alojan en las esquinas del campo de velocidad, ambos tipos de flujo se asemejan a los determinados numéricamente. Se hicieron observaciones experimentales del flujo cuando el sistema se encuentra en rotación. Se exploró el fenómeno con tasas de rotación de 22 a 30 rpm. Estas condiciones generan una aceleración gravitacional equivalente a $2g$. Los intervalos de números de Rayleigh y Taylor resultantes son 2.9×10^6 a 4.2×10^6 y 1.2×10^7 a 3.9×10^7 respectivamente. Se encontró que la distribución espacial de los patrones de flujo convectivo cambian radicalmente y notablemente, se hacen dependientes del tiempo a pesar que el intervalo de número de Rayleigh estudiado es 1.2 veces mayor del usado en las observaciones del flujo sin

rotación. Bajo estas condiciones experimentales específicas fue posible identificar un patrón de movimiento aproximadamente periódico con un período de 55 segundos y un patrón de movimiento espacial con una estructura compleja. Debido a que en el presente contamos con una colección limitada de resultados experimentales no es posible, todavía, llegar a conclusiones generales sobre el efecto de la fuerza de Coriolis en la convección natural en cavidades.

Abstract

The topic of this thesis is the study of natural convection in a cylindrical cavity considering a non inertial frame of reference. Its main objective is to find out the effect of the centrifugal and Coriolis forces over the convective motion of a fluid, and its major contribution is the design and construction of a rotatory system to observe the flow pattern inside the cylindrical cavity. This work also includes theoretical and experimental studies on this subject. The system consists of a centrifuge with a radius dimension of 1.5 m, which spins up to a maximum velocity of 86 rpm. This device has three main components: a base fixed to the laboratory floor, a central structure that holds the rotation axis, and two arms. At the end of each arm there is a basket; one basket holds the cylindrical cavity with all the instrumentation needed for the analysis, while the other basket works as counterweight. Inside the central structure there is an independent power source and a computer. The centrifuge is fixed to an antivibration foundation surrounded by a protection guard, and a bridge to access the central structure.

The theoretical studies present the analysis of the validation of the Boussinesq approximation when the convection motion takes place in a rotational system. Specifically, it is demonstrated that this approximation is valid for the physical and geometrical conditions designed for this study. The numerical study for natural convection without rotation was performed showing that the convective flow in steady state inside the cylinder is tridimensional with a complex structure. The velocity field is described by means of the analysis of vertical planes taken at different orientations, passing through the axis of symmetry and horizontal planes at different heights. It was found that for low Rayleigh numbers it is possible to identify a plane in which a single and unique convective cell is perceptible. On the other hand, Rayleigh numbers in the order of 10^6 originate an additional secondary flow in the form of vortex in the regions where the vertical wall meets the horizontal wall in the plane where a single cell is observed. The minimum Rayleigh number Ra^{c2} required for these small vortex structures to appear has been determined as a function of the aspect ratio of the container. To better understand the conditions that cause the formation of the structures that can be defined as an inverted local flow in this region, a linearized theory has been proposed. The theoretical results for the aspect ratios of 0.1, 0.125, and 0.25 are close to those of the numerical solutions of the conservation equations. The description of the experimental study starts with the technical details of the design and construction of the centrifuge and the experimental methodology. Next, the description of the experimental flow is presented, followed by the analysis of convective flows when the container is at rest, and positioned in the axis of coordinates of the laboratory. In all observations the aspect ratio (radius/height) was 0.28 and the working fluid water, with Prandtl number equal to 6. The experimental Rayleigh number ranged from 1.6×10^6 to 3.2×10^6 . Results from the experimental observations coincide with those of the numerical analysis which revealed the existence of a structure consisting of a single and unique convective cell, and the four vortex pattern. These structures are geometrically equivalent to the flow found with numerical calculations. Experimental observations of the flow pattern in a rotating system were also made. The natural convection was studied within the range of angular velocity of 22 to 30 rpm; under these conditions the equivalent gravitational acceleration is approximately $2g$. Rayleigh and Taylor numbers ranged from 2.9×10^6 to 4.2×10^6 and from 1.2×10^7 to 3.9×10^7 , respectively. It could be appreciated that the former intervals of the Rayleigh and Taylor numbers dramatically affected the spatial distribution of the flow pattern. The flow pattern is time dependent even though the Rayleigh number is only 1.2 times that of the flow without rotation. Under these specific experimental conditions it was possible to identify a periodic pattern with a period of approximately 55 seconds and a pattern of spatial motion with a complex structure. Due to the limited collection of experimental results it is not possible to present a general conclusion of the effect of the Coriolis force over the natural convection in cavities.

CORIOLIS

*On a merry-go-round in the night,
Coriolis was shaken with fright.
Despite how he walked,
'Twas like he was stalked,
By some friend always pushing him right.*

Capítulo 1

Introducción

La motivación principal de esta tesis surge de la posibilidad de producir cristales puros o contaminados (doped) de manera más uniforme controlando o modificando la dinámica del proceso de cristalización. En estos años recientes se ha demostrado que la calidad de los cristales semiconductores como silicio, germanio y otros de importancia capital en la industria electrónica y en la transformación fotovoltaica de la energía solar puede ser mejorada si se modifica convenientemente el movimiento convectivo en el material fundido durante el proceso de cristalización. Observaciones experimentales de crecimiento de cristales de silicio usando el método de Czochralski han demostrado de manera convincente que en el movimiento convectivo del material fundido dentro del crisol forma dominios con una orientación instantánea definida en forma de estrias en el cristal generado. El método de Czochralski para crecer cristales consiste en fundir en un crisol el material a cristalizar, en su parte superior se coloca en un vástago que sostiene en su extremo inferior un cristal de gran pureza del mismo material a fundir [1]. El cristal se sumerge en el material fundido y con una tasa de rotación pequeña se empieza a sustraer del material fundido. En este movimiento de traslación ascendente y lenta rotación, el material fundido se solidifica uniformemente obteniendo un cristal libre de impurezas y homogéneo. En la interface líquido - sólido del material fundido y el cristal, el fenómeno de convección es el principal mecanismo de transporte de calor. Las estrias e impurezas de los cristales fabricados en las diferentes técnicas de crecimiento de cristales a partir de un material fundido se atribuyen al movimiento convectivo en la interface [2]. La calidad óptica y electrónica de los cristales es mayor en cristales con una estructura cristalina uniforme. La dinámica de la convección puede alterarse de diferentes maneras. Una primera posibilidad es la supresión de las fuerzas de cuerpo que generan la convección. Esto puede lograrse al fabricarse el cristal en condiciones de microgravedad. Este tipo de experimento se ha realizado en las estaciones espaciales, varias de las misiones científicas han obtenido resultados prometedores. La información de estos experimentos es muy limitada y obviamente desde el punto de vista de producción en masa, esta alternativa no es muy realista dado su costo y dificultad [3], [4], [5], [6].

Otra posibilidad de alterar el movimiento convectivo se realiza en presencia de una fuerza de cuerpo adicional, en este caso la fuerza de Lorenz o la fuerza de Coriolis [7]. En el primer caso, el proceso de cristalización se realiza en presencia de campos electromagnéticos [8], [9], [10] y en el segundo caso, el proceso tiene lugar a bordo de un sistema en rotación. Es en esta última alternativa donde hemos enfocado nuestro interés y esfuerzo. Sabemos que las condiciones de rotación requeridas para obtener cristales de mejor calidad por las técnicas usuales operan en rangos limitados [11] y hasta ahora no se entiende cabalmente la dinámica de flujo que ocurre en el interior del crisol. Es importante recordar que este flujo puede ser turbulento y está confinado a un volumen que cambia como función del tiempo como consecuencia del proceso de solidificación. El objetivo principal de la presente tesis es conocer el efecto de las fuerzas de Coriolis y centrífuga en un flujo convectivo, para ello fue necesario diseñar y construir un aparato que

permitiera llevar a cabo observaciones de la convección natural en un sistema en rotación. Una vez construido este dispositivo realizamos las observaciones del patrón de flujo que contribuyeran a describir los cambios causados por la rotación. Finalmente nos planteamos como objetivo desarrollar las piezas de teoría que permitieran una mejor comprensión de algunas de las facetas del fenómeno de interés. En el capítulo 2, presentamos una revisión bibliográfica de los estudios sobre la convección natural que consideramos más importante para este proyecto. Presentamos los trabajos en convección natural en cilindros con y sin rotación así como las aplicaciones en donde se presenta el fenómeno de convección natural en sistemas rotatorios. El capítulo 3, contiene la teoría fundamental requerida para el análisis teórico del fenómeno de interés e incluye un estudio original sobre la validez de la aproximación de Boussinesq para sistemas en rotación.

En el capítulo 4 se describe el diseño y la caracterización de la centrífuga construida dentro de proyecto. Los resultados teóricos obtenidos para la convección natural sin rotación se presenta el capítulo 5 y en el capítulo 6 se describen las observaciones experimentales de flujos de convección natural en cavidades con y sin rotación. En el capítulo 7 se presentan las conclusiones del trabajo. Las publicaciones derivadas de esta tesis están contenidas en los apéndices.

Capítulo 2

Revisión bibliográfica

2.1. Introducción

La convección natural en cavidades esbeltas en sistemas con rotación es un fenómeno que presenta una dinámica muy compleja debido a que pequeños cambios de los parámetros externos se manifiestan como cambios notables en los patrones de flujo. El avance que nos ha llevado a la comprensión que tenemos actualmente de este fenómeno, se ha conseguido a través del estudio de flujos más simples. Cronológicamente, se estudió primero la convección natural en sistemas no rotatorios y en los que las paredes verticales no influyen en el patrón de movimiento.

Se ha estudiado con gran detalle el efecto de la geometría de las fronteras rígidas del contenedor en la estabilidad y en la dinámica del movimiento convectivo. Estos estudios teóricos, numéricos y experimentales en contenedores de geometrías rectangulares y cilíndricas de distintas razones de aspecto han esclarecido durante los últimos años muchas propiedades del fenómeno convectivo. Sin embargo aún queda una gran cantidad de características del fenómeno que no se han explorado con suficiente detalle como para que el conocimiento disponible sea útil para ciertas aplicaciones.

El estudio del efecto de la rotación sobre la convección natural es mucho más reciente y fue motivado principalmente por problemas de astrofísica y geofísica. Aunque hay mucha información que nos es de utilidad en estos estudios, la posición relativa entre el vector de rotación y el gradiente térmico impuesto externamente no coincide con la posición correspondiente en nuestro problema. Por esto, la dinámica de los dos fenómenos es diferente.

El número de investigaciones que se refieren a las condiciones de interés en esta teoría es muy reducido se ha enfocado principalmente en el contexto de crecimiento de cristales. Por ello, estos trabajos incluyen la solidificación del fluido donde se presenta la convección natural. En esta tesis no se considera el cambio de fase y por tanto, sólo parte de la información contenida en estos trabajos coincide con nuestros intereses. En este capítulo presentaremos una revisión bibliográfica de algunos aspectos de la convección natural. Debido a que el volumen de información disponible actualmente es muy grande (estimamos más de mil artículos de investigación en revistas especializadas) restringiremos la revisión a los estudios que sean fundamentales o de alguna utilidad en la interpretación de los resultados presentados en esta tesis.

2.2. Convección Rayleigh-Bénard

Aunque el tema de esta tesis concierne mayormente al estudio de la convección natural en cavidades con una razón de aspecto ($A = \text{longitud horizontal/longitud vertical}$) finita, dado que existen resultados fundamentales de gran relevancia cuando la razón de aspecto de la cavidad es infinita, iniciaremos nuestra revisión con un comentario sobre este último caso. En el libro de Koschmieder [12] se puede encontrar una descripción amplia de este tema. Al considerar la razón

de aspecto $A \rightarrow \infty$, este es el límite cuando un recipiente se convierte en una cavidad infinita en sus direcciones horizontales y el fluido sólo está limitado por planos horizontales separados una distancia L .

El primer estudio sistemático sobre este fenómeno consistió en observaciones experimentales realizadas por Bénard sobre el movimiento de una capa de aceite de ballena (*spermaceti*) de un espesor del orden de 1 mm, contenida en un recipiente circular, calentada en su pared inferior y enfriada por el aire del medio ambiente [13]. La razón de aspecto de la capa era de aproximadamente 200 y la diferencia entre las temperaturas caliente y fría era de 80°C .

El movimiento observado en estado permanente era estable y se ordenó en celdas hexagonales con distancias entre sus centros entre tres y cuatro veces la profundidad de la capa. Una teoría de perturbaciones lineales que describiera las observaciones de Bénard fue publicada por Lord Rayleigh en 1917 y ha sido descrita en varios libros de texto; notablemente en el libro de Chandrasekhar [7].

La teoría de Rayleigh consiste en usar modos de Fourier para encontrar la solución de las ecuaciones que describen la evolución temporal de perturbaciones a las distribuciones en equilibrio de la velocidad, presión y temperatura. Las condiciones de frontera consideradas en esta teoría para las placas horizontales, corresponden a combinaciones de fronteras rígidas y libres, pero la tensión superficial, que era un efecto físico de fundamental importancia en las observaciones de Bénard, no está incluida. Uno de los resultados principales de la teoría de Rayleigh es la identificación de un número adimensional que define la estabilidad del sistema. Este parámetro se conoce como el número de Rayleigh y se define de la siguiente manera:

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta TL^3}{\kappa\nu}, \quad (2.1)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, ΔT y L son respectivamente, la diferencia de temperaturas entre las paredes horizontales y la distancia entre ellas. Las propiedades del fluido son: α , el coeficiente de expansión volumétrica, κ , la difusividad térmica y ν la viscosidad cinemática.

La teoría permite calcular el número de Rayleigh crítico Ra^{c1} para el que se inicia la convección. Cuando el esfuerzo cortante se anula en las paredes superior e inferior, el número Rayleigh crítico Ra^{c1} es 657.5 mientras que cuando las paredes que confinan a la capa de fluido son rígidas $Ra^{c1} = 1707$.

El patrón de flujo generado cuando el número de Rayleigh es ligeramente superior al crítico no está unívocamente determinado por la teoría. Dos posibles patrones de movimiento que se han observado en experimentos son rollos y hexágonos. Los rollos son movimientos en los que todas las variables dependen sólo de una coordenada horizontal. Se puede pensar en estos movimientos como celdas convectivas infinitamente elongadas. La magnitud vertical de los rollos es la distancia entre las placas que contienen al fluido y la magnitud vertical es igual a la longitud de onda más inestable. Los hexágonos son celdas de convección con fronteras verticales hexagonales tales que el fluido asciende por el centro y desciende por la periferia. El patrón de flujo inverso, en el que el fluido desciende por el centro y asciende por la periferia, también es solución a las ecuaciones de conservación perturbadas. Nótese que ambas soluciones están indeterminadas y presentan una gran cantidad de simetrías. Por ejemplo, la teoría no define la dirección de orientación de los rollos. Una manera de evitar la posibilidad de soluciones múltiples es romper las simetrías. En muchas de las observaciones experimentales, la unicidad de la solución está definida por condiciones de frontera o efectos no considerados por la aproximación de Boussinesq.

En el contexto del trabajo presente, hay dos procedimientos importantes. El primero consiste en imponer fronteras verticales rígidas cercanas (ver el párrafo siguiente) y el otro es hacer rotar el sistema. Ver la sección 2.4.

La teoría de estabilidad lineal basada en modos de Fourier ha sido extendida a contenedores de razón de aspecto finita. El contenedor se puede describir como un cilindro cuya sección transversal puede ser circular, rectangular u otra y es difícil hacer descripciones generales. Por ejemplo, si la generatriz del cilindro es un círculo, se define la razón de aspecto como el cociente entre el diámetro y la altura. Sin embargo, cuando la generatriz es un rectángulo, es necesario considerar

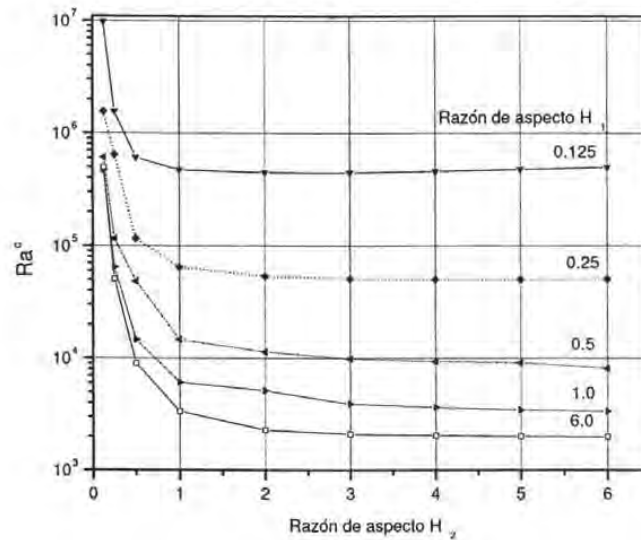


Figura 2.1: Rayleigh crítico como función de las razones de aspecto H_1 y H_2 para cavidades rectangulares de acuerdo a Catton, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 13, 1970.

dos razones de aspecto, una para cada dirección horizontal. Debido a que este trabajo se refiere mayormente al flujo de convección natural en cilindros de sección circular, haremos una descripción detallada en la siguiente sección.

Como ejemplo de los resultados obtenidos para otras secciones transversales comentaremos brevemente el caso de sección rectangular. El contenedor de sección transversal rectangular tiene dos razones de aspecto finitas $H_1 = \text{largo/altura}$ y $H_2 = \text{ancho/altura}$, en este caso Ra^{c1} ha sido calculado de manera numérica usando la teoría de Galerkin [14]. Estos resultados se muestran gráficamente en la figura 2.1.

2.3. Convección natural en cilindros de sección transversal circular

Como discutiremos más adelante, las características cualitativas de los flujos de convección natural para $A > 1$ en cilindros pueden ser muy diferentes de las correspondientes con $A < 1$. Sin embargo, en nuestra presentación describiremos también algunos aspectos de los flujos de convección natural con $A > 1$ debido a que tienen algunas características importantes en común con el caso $A < 1$ que es el que nos concierne en este trabajo.

La solución a las ecuaciones linealizadas que describen la estabilidad del flujo de convección natural en un cilindro de sección transversal circular (que por brevedad llamaremos cilindro), incorporando las condiciones de frontera y considerando flujos con simetría axial fue encontrada empleando una formulación variacional y el método de Rayleigh-Ritz [15].

Aunque en principio se pueden obtener criterios de estabilidad para cualquier razón de aspecto, es importante notar que para cilindros de razón de aspecto pequeña, el flujo más inestable no es axisimétrico. La generalización de esta misma teoría para flujos no axisimétricos y por tanto válida para el tipo de cavidades que interesan en esta tesis fue presentada por los mismos autores [16].

Entre sus resultados, se encuentran que el modo antisimétrico es más inestable en cavidades con razones de aspecto menores a 1.6 para paredes laterales aislantes y con $A=1.2$ para paredes laterales conductoras. Este tipo de flujo fue observado experimentalmente desde 1952 (Ver referencias en [16]) y es el que se encontró también en la presente investigación cuando se hicieron experimentos a bajos números de Rayleigh (ver capítulo 6).

En general, puede afirmarse que el número de Rayleigh crítico para contenedores de razón de aspecto pequeña es igual al número de Rayleigh crítico para una cavidad infinita más una corrección inversamente proporcional al cuadrado de la razón de aspecto [17], [18].

La primera investigación numérica de los efectos no lineales en flujos axisimétricos de convección natural en estado permanente dentro de cavidades es debida a Charlson y Sani [19]. Empleando un método de Galerkin, ellos estudiaron la estabilidad de la convección axisimétrica al interaccionar con perturbaciones no axisimétricas. Este análisis fue hecho considerando diferentes condiciones de frontera en las paredes laterales, y con las paredes superior e inferior aisladas o libres, así como para distintos números de Prandtl ($Pr=0.025, 1$ y 60).

Charlson y Sani encontraron que los flujos simétricos con fronteras laterales conductoras de calor son inestables para números de Ra cuya magnitud es sólo 1.1 veces mayor que el número de Rayleigh crítico.

Stork y Müller [20] realizaron experimentos con cavidades cilíndricas, ellos determinaron el número de Rayleigh crítico como función de la razón de aspecto y describieron cualitativamente los patrones de flujo. En sus experimentos consideraron la influencia de la conducción de calor a través de las paredes en la dinámica del patrón de flujo. Como fluido de trabajo emplearon dos tipos de aceites de silicón y trazadores de polvo de aluminio para visualizar la evolución del patrón del flujo. El rango de razón de aspecto usado en la experimentación fue de $0.8 < A < 3.2$ y analizaron los planos horizontales, observando los patrones de flujo desde una vista superior.

Para razones de aspecto pequeñas, ($A \sim 0.8$), y para números de Rayleigh ligeramente superiores al número de Rayleigh crítico, el flujo se organiza en una sola celda no axisimétrica. Sin embargo, cuando el número de Rayleigh se incrementa en 5 %, el flujo adquiere un patrón bicelular. Estas observaciones son importantes en el contexto de la presente tesis porque a pesar de que la razón de aspecto no es la misma que la que se usó aquí, el patrón de celda única no axisimétrica es igual al que observamos (ver el capítulo 6). Debemos enfatizar sin embargo que en nuestro caso no se observa el flujo bicelular. Otro aspecto interesante de las observaciones reportadas por Stork y Müller, consiste en que a pesar de que la orientación de la celda no está determinada por las condiciones de frontera, los autores no hacen comentarios en cuanto al número infinito de orientaciones que tienen igual probabilidad de ocurrir. En esta tesis proponemos que la celda convectiva noaxisimétrica puede rotar. Esta interpretación es compatible con la indefinición de la orientación de la celda y con nuestras observaciones experimentales. Ver el capítulo 6 para los detalles.

Rosenblat [21] realizó un estudio del flujo de convección natural en un cilindro con un calentamiento en su parte inferior. El estudio se centró en razones de aspecto de $0.5 \leq A \leq 2.0$ y uno de los objetivos principales fue el análisis del patrón de movimiento convectivo y su relación con la razón de aspecto. Para ello derivó las ecuaciones de amplitud para la evolución débilmente no lineal de las perturbaciones y determinó que para $A < 1$, la forma inicial del movimiento convectivo para números de Rayleigh ligeramente superiores al Rayleigh crítico no son axisimétricos, presentando un número de onda unitario. En todos los cálculos del estudio de Rosenblat se consideraron condiciones de frontera donde el esfuerzo cortante se anula. Estas condiciones no modelan correctamente las condiciones de frontera correspondientes a los experimentos, pero reducen sustancialmente la dificultad de los cálculos.

El patrón del movimiento convectivo para números de Rayleigh mayores que el primer número de Rayleigh crítico fue analizado por Müller *et al.* [22]. En un estudio numérico y experimental analizaron los patrones de movimiento convectivo para diferentes razones de aspecto. Resumieron los resultados en un diagrama $Ra - A$, para dos tipos de fluidos de trabajo: agua y un material semiconductor (GaSb), se presentaron los distintos patrones de flujo en un rango de razón de

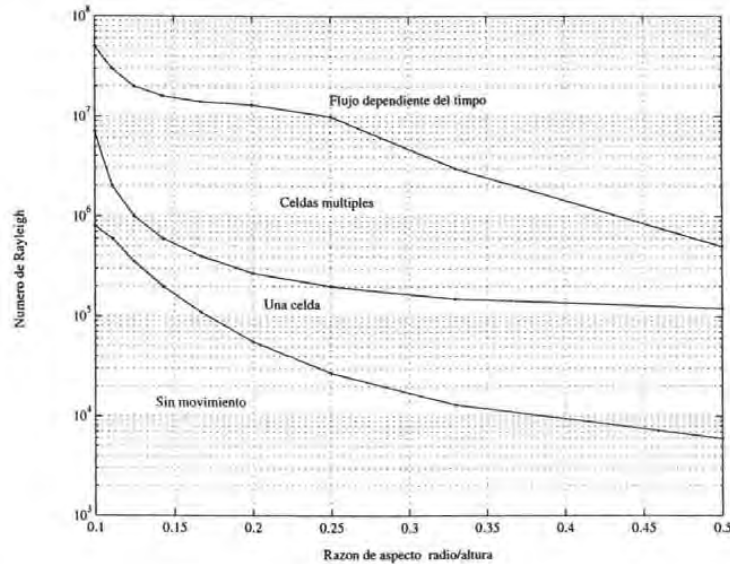


Figura 2.2: Diagrama Ra- razón de aspecto Müller *et al.*, *J. Crystal Growth*, **99**, 1990.

aspecto de $0.1 < A < 0.5$, considerando que $A = r/h$. Este diagrama se presenta en la figura 2.2, donde se observan cuatro regiones que indican las características cualitativas del flujo. La primera región corresponde al flujo sin movimiento que ocurre en el rango del número de Rayleigh de $10^3 < Ra < 8.5 \times 10^5$. Es en esta región donde la mayoría de los cálculos teóricos del número de Rayleigh crítico para el inicio de la convección se ha realizado. Tanto Chandrasekhar como Charlson y Sani determinaron la magnitud del Rayleigh crítico y la estructura del patrón convectivo inicial.

A partir del límite que indica el Rayleigh crítico Ra^{c1} se manifiesta el movimiento convectivo. Es en ésta, la segunda región del mapa donde el patrón de flujo pronosticado por las teorías de perturbación lineal para la geometría cilíndrica se presenta.

Éste corresponde a una celda convectiva única no axisimétrica, donde el fluido asciende por uno de los lados de la celda y desciende en el lado opuesto. Cuando se observa este patrón desde un ángulo de vista de 90° respecto al ángulo de vista inicial se observan cuatro celdas colocadas en cada uno de los cuatro cuadrantes. El rango de número de Rayleigh donde este patrón se presenta es en el rango de $10^5 - 10^6$ para recipientes con una razón de aspecto $0.5 < A < 0.1$. Este tipo de patrón se observó en el presente trabajo y se discute en los capítulos 5 y 6.

En la tercera región del diagrama, el tipo de patrón de flujo corresponde a una celda no axisimétrica con dos estructuras secundarias que se ubican en esquinas opuestas, una característica particular de este tipo de patrón es que ambas estructuras giran en sentido contrario al correspondiente de la celda principal. El rango donde este tipo de patrón se observó fue $2 \times 10^5 < Ra < 8 \times 10^6$. Una configuración semejante fue encontrada por Neumann en un estudio numérico para agua en una cavidad cilíndrica [23] y en el presente trabajo para $Ra = 10^6$ y $A = 0.28$, en los capítulos 5 y 6 se discute este tipo de campo de velocidad.

En $A = 0.1$ y $Ra = 10^7$, el patrón de flujo cambia a una configuración donde se alinean tres vórtices con el eje vertical del recipiente. Para valores menores a $A = 0.5$ (esta magnitud no se presenta en la figura 2.2) el flujo convectivo se comporta axisiméricamente, el fluido asciende o desciende por el centro de la cavidad dependiendo de las condiciones iniciales en que se realizó el experimento. En sus resultados numéricos para esta razón de aspecto, Müller *et al.* obtuvieron un modo no axisimétrico encontrado analíticamente por Charlson y Sani. Sin embargo

experimentalmente no lograron comprobarlo y atribuyeron esta discrepancia a las condiciones iniciales de temperatura.

En la última región, el patrón de flujo se presenta en múltiples celdas y cambia a un flujo dependiente del tiempo en todas las razones de aspecto analizadas y para grandes números de Rayleigh. En el diagrama $Ra - A$ realizado por Müller *et al.* para el Galio líquido $Pr=2 \times 10^{-2}$, encontraron una conducta similar al agua. Sin embargo, el patrón de flujo dependiente del tiempo sucede para números de Rayleigh de menor magnitud. Ellos observaron una simetría similar en los distintos flujos convectivos para las razones de aspecto estudiadas a los observados en el agua.

Consideramos que los resultados experimentales y numéricos que acabamos de describir son de gran importancia en esta tesis pues tienen la misma forma cualitativa que los flujos que encontramos en los cálculos numéricos del capítulo 5 y en las observaciones experimentales sin rotación que se describen en el capítulo seis de este trabajo.

2.3.1. Flujo dependiente del tiempo

Cuando la convección natural en cavidades se realiza considerando números de Rayleigh grandes, el flujo se comporta de manera oscilatoria, caótica y turbulenta. Este tipo de flujo es el menos documentado en la literatura.

Abernathey y Rosenberg [24] reportan observaciones experimentales del flujo convectivo en una cavidad cilíndrica usando Xenón como fluido de trabajo con un $Pr = 0.67$. El recipiente empleado es de geometría cilíndrica tiene una razón de aspecto de 0.167 y su calentamiento es desde la base inferior. El análisis del flujo se realizó para el intervalo $400 \leq Ra \leq 2300$, el flujo se caracterizó por medio de la señal temporal de un sensor de temperatura colocado en su interior. Se observó que para $400 \leq Ra \leq 700$ el flujo en estado permanente era biestable esto es, se observaron dos patrones de movimiento alternantes.

Cuando el $Ra = 1550$, el flujo era periódico y al incrementar el número de Rayleigh, aparecieron modos de Fourier de frecuencia inconmensurable con la frecuencia de la oscilación inicial. Para $Ra = 2000$, el régimen del flujo se tornaba turbulento particularmente en el intervalo $2100 \leq Ra \leq 2200$. Abernathey y Rosenberg reportaron una ventana periódica con una secuencia de doble período. Otra característica importante de este flujo es una marcada histéresis al disminuir el número de Rayleigh.

Un estudio numérico tridimensional dependiente del tiempo de la convección en cilindros verticales calentados desde abajo fue reportado por Neumann [23]. El fluido de trabajo analizado fue galio que tiene un número de Prandtl de 0.02. Para una razón de aspecto de 1, el estudio indica que en $Ra = 5000$, el sistema presenta una oscilación no amortiguada disparada por los errores de la aproximación numérica.

En los resultados se encontró que al disminuir el número de Rayleigh a 4000, el flujo deja de oscilar. Al interpolar las tasas de incremento y disminución de la amplitud de la oscilación, se encontró que el segundo número de Rayleigh crítico es de 4550. Para $Ra=6000$ aparece un segundo modo de Fourier y en $Ra=8000$ el sistema oscila de manera aperiódica. Para una razón de aspecto de $A=0.5$ y $Pr = 0.02$, el segundo número de Rayleigh crítico es 1.5×10^4 .

2.3.2. Viscosidad dependiente de la temperatura

En un estudio numérico y experimental se analizó el efecto de la dependencia de la viscosidad con la temperatura sobre la dirección del flujo en una cavidad de geometría cilíndrica. En el planteamiento de la solución, Liang *et al.* [25] usaron las ecuaciones no lineales de masa, momento y energía, adicionaron una viscosidad dependiente de la temperatura obteniendo soluciones en estado permanente. El comportamiento del flujo se analizó para distintas condiciones de frontera como: una superficie lateral aislada o conductora y las bases superior e inferior sólida o libre y para distintos números de Rayleigh y Prandtl. Encontraron dos soluciones axisimétricas en cada uno de los casos considerados, teniendo como principal diferencia el sentido del flujo en la parte

central de la cavidad. Esta dependencia se relacionaba con las condiciones iniciales del sistema. Para comprobar estas soluciones se realizaron experimentos en una celda cilíndrica de acrílico de razón de aspecto $A=0.95$. Como fluido de trabajo se empleó aceite blanco cuyo coeficiente de viscosidad es dependiente de la temperatura. Los experimentos se realizaron con una superficie superior sólida e isotérmica y un gradiente de temperatura de $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ en los extremos de la probeta, se observó que el movimiento se iniciaba en el centro del recipiente para un gradiente de temperatura mínimo de $0.45\text{ }^{\circ}\text{C}$ y un $Ra = 4300$. Este valor representa el límite superior del criterio de estabilidad del flujo para esta geometría. Los resultados de los experimentos sin la base superior, no correspondieron a los obtenidos numericamente, esta discrepancia se debió a la imposibilidad de controlar la temperatura de la pared superior sin lograr alcanzar un estado permanente. Además se realizaron experimentos de largo plazo con cilindros de distintos diámetros para un rango de números de Rayleigh $4300 \leq Ra \leq 12000$, estos resultados mostraron que las trayectorias de las partículas eran muy cercanas entre sí y axisimétricas, indicando que el patrón de flujo total correspondía a una celda toroidal simétrica.

2.4. Convección natural en cilindros en un sistema de referencia rotatorio

2.4.1. Introducción

El estudio del efecto de la rotación sobre la convección natural ha sido motivado por la gran cantidad de aplicaciones potenciales en diferentes ramas de la ciencia y la ingeniería como la convección natural en el océano y las atmósferas planetarias, el flujo no isotérmico en máquinas rotatorias y el crecimiento de cristales en centrífugas. Como es bien sabido, en el análisis de movimientos rotatorios, se deben incluir las fuerzas centrífuga y de Coriolis, que son consecuencia de efectuar la descripción en un eje de referencia no inercial [7]. Estos efectos obligan a que se incluyan en el análisis nuevos parámetros independientes de los descritos en la sección anterior y que indiquen la importancia relativa entre las fuerzas centrífuga y de Coriolis respecto de otras fuerzas que intervienen en el fenómeno. La elección más conveniente del conjunto de parámetros que describirán el comportamiento cualitativo del flujo depende de la geometría del sistema y de la posición relativa entre el vector de rotación, la fuerza de gravedad y el vector que define el gradiente de temperaturas impuesto externamente.

El caso en el que la fuerza de gravedad y los vectores de rotación y gradiente térmico son colineales es el más estudiado en la literatura debido a que esta situación modela con mucha aproximación el movimiento local de flujos geofísicos. Actualmente existen excelentes monografías que describen algunos aspectos de este fenómeno, entre ellas [7], [26]. La configuración de más interés, en esta tesis donde el eje de rotación es perpendicular al vector de gradiente térmico ha sido mucho menos estudiada y sólo hemos encontrado en la literatura algunos ejemplos de análisis en condiciones particulares. Debido a que algunas características de los fenómenos que ocurren bajo diferentes configuraciones son de relevancia en nuestro estudio, consideramos conveniente presentar en la subsección 2.4.2 una breve reseña de la teoría y las observaciones experimentales de la convección natural en rotación aún cuando la disposición de los vectores no es igual a la de nuestro mayor interés. En la sección 2.4.3 describiremos las investigaciones efectuadas en condiciones similares a las estudiadas en el presente trabajo.

2.4.2. Eje de rotación, vector de gravedad y gradiente térmico colineales.

Capas de fluido planas e infinitas

El procedimiento analítico para determinar la estabilidad de este sistema es similar al planteado a la capa de fluido sin el efecto de la rotación [7]. Se considera una perturbación lineal y planteando un problema de valores propios, se determina el número de Rayleigh crítico y la longitud de onda

más probable. El desarrollo original de esta teoría se debe a Chandrasekhar. La modificación principal respecto al cálculo de la estabilidad sin rotación, consiste en que ahora deben agregarse las fuerzas de Coriolis y centrífuga a la ecuación de Navier-Stokes. En el estudio original de Chandrasekhar, sólo tomó en cuenta el efecto de la fuerza de Coriolis. Nótese que cuando se considera una capa de fluido de extensión infinita en la dirección horizontal y que el eje de rotación se encuentra en el seno del fluido, la fuerza centrífuga es infinita. Los parámetros adimensionales convenientes para analizar este sistema de ecuaciones son, el número de Rayleigh Ra , el número de Prandtl Pr y el número de Taylor Ta definido como:

$$Ta = \frac{4\Omega^2 L^4}{\nu^2}. \quad (2.2)$$

En esta fórmula, Ω es la velocidad angular, L es una distancia característica y ν es la viscosidad cinemática. El número de Taylor Ta representa la relación entre la fuerza de Coriolis y los esfuerzos viscosos del fluido.

En términos generales, se puede afirmar que el efecto de la rotación es de estabilizar el sistema aumentando el número de Rayleigh crítico y causando una disminución en el tamaño de la celda convectiva.

Al examinar el efecto de la rotación sobre la estabilidad de una capa de fluido infinita encontramos que depende fuertemente del número de Prandtl [27], [7]. En un fluido cuyo número de Prandtl es menor a 0.68, y el número de Rayleigh excede el valor crítico, el sistema presenta superestabilidad (*overstability*), esto es, pasa de la inmovilidad (velocidad igual a cero) a un movimiento dependiente del tiempo. En contraste, para un fluido con un $Pr > 0.68$, el fluido adquiere un movimiento con velocidad constante una vez que la solución estática pierde estabilidad. Este último caso es análogo al que se presenta cuando el fluido no se encuentra en rotación. Uno de los resultados más importantes del análisis para $Pr < 0.68$, es que la magnitud del número de Rayleigh crítico se incrementa como función del número de Taylor. La dependencia asintótica del Ra^c y del número de onda crítico a^c para $Ta \rightarrow \infty$ se determinó en el análisis de perturbación lineal de Chandrasekhar es $Ra^{c1} \rightarrow \text{constante } Ta^{2/3}$ y $a^c \rightarrow \text{constante } Ta^{1/6}$ respectivamente.

El valor de estas constantes fue obtenido posteriormente por Niiler y Bisshopp [28] quienes estudiaron con un método asintótico la estabilidad de una capa horizontal de fluido que gira con una velocidad de rotación tal que ($Ta \rightarrow \infty$). Considerando condiciones de frontera libres, Niiler y Bisshopp determinaron las expresiones para el comportamiento asintótico del número de Rayleigh crítico.

$$Ra^c = 8.69Ta^{2/3}, \quad a^c = 1.3Ta^{1/6} \quad (2.3)$$

El efecto atenuante de la rotación en el inicio de la convección es uno de los resultados principales de la teoría de Chandrasekhar. La interpretación física de este fenómeno fue ideada por él mismo. Chandrasekhar explicó el incremento de Ra^{c1} como función del número de Taylor, al imaginar el movimiento de una parcela de fluido bajo el efecto de la rotación. En estas condiciones, la trayectoria de la parcela es curva y distinta a la trayectoria ascendente y/o descendente que tendría en un sistema sin rotación. Esta nueva trayectoria es más larga y la parcela de fluido tiene una mayor disipación de energía. Por tanto, el sistema requiere diferencias de temperatura mayores para iniciar la convección. Al hacer girar una capa de fluido calentada por su parte inferior y enfriada en su parte superior alrededor de un eje vertical, se rompe la simetría sobre planos verticales (ver subsección 2.2). Esto trae como consecuencia la deformación de los patrones de flujo convectivos que ocurren en la convección sin rotación (flujos hexagonales, rectangulares y triangulares). Ver la sección 2.2. Los patrones de movimiento convectivo con rotación fueron analizados y descritos por Veronis [29]. En el caso de flujos en forma de rollos, la alteración en las estructuras convectivas provocada por la acción de la aceleración de Coriolis, induce movimiento en la dirección longitudinal del rollo. Como se describió en la sección anterior, cuando el patrón de movimiento es en forma de rollos en una capa horizontal en reposo, las parcelas de fluido se mueven en órbitas cerradas en planos cuya dirección es perpendicular al eje del rollo. La aceleración

de Coriolis induce movimiento a lo largo del eje de los rollos, pero el movimiento seguirá estando confinado a planos inclinados respecto del eje de los rollos. Más aún, la longitud de onda de los rollos, medida en la dirección de los planos que contienen el movimiento, es independiente de la rotación [29].

El estudio débilmente no lineal para una capa horizontal de fluido con un número de Prandtl infinito revela que no existe ningún flujo convectivo en estado permanente cuando el número de Taylor es mayor que $Ta^c = 2285$. En este estudio, realizado por Küppers y Lortz [30] encontró que para $Ta < Ta^c$, el tipo de patrón de flujo está compuesto por rollos bidimensionales. Posteriormente, Küppers [31] analizó este mismo sistema con un método seminumérico, y determinó su comportamiento cualitativo considerando condiciones de fronteras rígidas y números de Prandtl finitos. Küppers encontró que la curva en el espacio (Ta, Pr) que separa la región de sobrestabilidad de la región en la que se puede observar un movimiento en estado permanente una vez que el sistema ha excedido el número de Rayleigh crítico, tiene las siguientes propiedades: a) es monótonamente creciente, esto es al disminuir el número de Prandtl disminuye el número de Taylor crítico, b) corta al eje $Pr = 0$ en $Ta \sim 36$ y c) toma el valor asintótico $Ta = 3000$ para $Pr \rightarrow \infty$. Es interesante observar que esta teoría no predice el mismo comportamiento obtenido por la teoría lineal desarrollada por Chandrasekhar. Desafortunadamente, Küppers no ofrece ninguna discusión al respecto.

Cavidades cilíndricas

En la revisión de trabajos sobre convección natural en un marco rotatorio encontramos dos tipos de planteamientos: aquellos que ignoran los efectos de la fuerza centrífuga y los que la consideran. La mayoría de los casos atribuye la discrepancia entre la teoría y los experimentos en este marco rotatorio a la fuerza centrífuga. Son varios los trabajos que siguen el modelo propuesto por Chandrasekhar que considera el efecto de Coriolis como el más sobresaliente en el marco rotatorio. Chandrasekhar supuso una rotación rígida del fluido antes de iniciar la convección, esto es válido únicamente si la relación de la aceleración de la gravedad g con respecto a la aceleración centrífuga $\Omega^2 r$ es mayor a la unidad. Surge entonces la inquietud de conocer cual es la relación más pequeña para la cual la circulación centrífuga en una capa rotatoria estratificada se desprecia.

El estudio de Küppers y Lortz fue extendido para números de Rayleigh ligeramente mayores al valor crítico por Clever y Busse [32] quienes adaptaron una técnica de análisis ideada por ellos mismos para el caso no rotatorio. Los resultados de esta teoría no coinciden con observaciones experimentales, aún en el caso en el que el número de Taylor es cero. Al observar los rollos convectivos en placas horizontales sin y con rotación se encontró que existía una evolución de lenta transición del patrón de flujo. Esto es, al incrementarse ligeramente la velocidad de rotación, los rollos concéntricos se separaban en zonas grandes y pequeñas.

Koschmieder [12] observó este comportamiento y supuso que la fuerza centrífuga es la que origina que la circulación global mueva al fluido cuya temperatura es menor hacia la parte superior de la capa en dirección radial hacia el exterior y el fluido más ligero cuya temperatura es mayor lo dirige hacia el fondo y al interior de la capa. Supuso que cualquier fluido con un gradiente de temperatura experimenta esta circulación provocada por la fuerza centrífuga. La contribución de la fuerza centrífuga al fenómeno de convección origina que el análisis sea más difícil debido a que la circulación se incrementa con el radio de la placa. La relación analítica obtenida por Chandrasekhar entre el Rayleigh crítico y el número de Taylor fue corroborada con resultados experimentales por Rossby [33]. Para números de Taylor $Ta > 10^5$ la concordancia entre el estudio analítico y experimental fue excelente. No así para valores de números de Taylor pequeños $Ta < 2 \times 10^4$ donde la diferencia entre la teoría y la experimentación fue significativa. Los fluidos empleados en la experimentación fueron $Pr=100,6.8$ y 0.025 . En este trabajo se estableció para el agua y el mercurio el mapa $Ra-Ta$ donde se indican las regiones del comportamiento inestable de la convección oscilatoria que se manifiesta en oscilaciones regulares e irregulares. Se utilizaron dos tipos de condiciones experimentales con y sin rotación y se determinó la transferencia de calor

para estas condiciones. También se visualizó el patrón de flujo del aceite de silicón. Sin embargo, varias de las imágenes presentadas de la vista superior del experimento fueron tomadas con el dispositivo apagado. Para velocidades mayores en el patrón de flujo se observaron rollos orientados radialmente. Este patrón de flujo se debe al esfuerzo cortante causado por la circulación centrífuga que es dominante y alinea radialmente los rollos. En los resultados de la transferencia de calor del marco rotatorio Rossby encontró una bifurcación en el número de Nusselt para $Ta = 10^7$ y $Pr=6.8$. Esta diferencia se atribuyó a los efectos de la aceleración radial en el flujo. Uno de los parámetros experimentales que Rossby varió fue la altura del fluido en el recipiente y analizó la transferencia de calor, el patrón de flujo a distintas alturas. Esta bifurcación la atribuyó a que para un punto y un número de Rayleigh dado, una altura pequeña de fluido implicaba una alta tasa de rotación y una gran diferencia de temperatura. Estos dos efectos cooperan entre sí para generar una zona de fuerte circulación. Algo notorio en el análisis de la transferencia de calor es la tasa de crecimiento del número de Nusselt respecto al número de Rayleigh que se ve afectada al aumentar el número de Taylor tanto para el agua como para el mercurio. Varias de las observaciones y mediciones realizadas en este estudio no fueron explicadas completamente. Estudios posteriores encontraron una explicación a la bifurcación del trabajo de Rossby y analizaron los resultados del número de Rayleigh, encontrando una buena concordancia con la curva de estabilidad marginal de la teoría lineal de la convección con rotación dada por Chandrasekhar [34].

Homsy y Hudson seleccionaron el modo axisimétrico para analizar la convección en un cilindro y consideraron que las fuerzas de Coriolis y centrífuga actuaban simultáneamente. Este modo se eligió por su estabilidad para números de Taylor grandes en comparación con el modo asimétrico [35], [34]. Encontraron que la aceleración centrífuga causaba un leve efecto desestabilizador en las paredes de cilindro en rotación.

Estos resultados fueron verificados por Buell y Catton [36], ellos encontraron que para números de Taylor grandes, la presencia de las paredes laterales desestabilizaban los modos asimétricos. En cambio, el efecto de las paredes en los modos axisimétricos era disminuir su presencia.. El efecto de las paredes aislantes y conductoras en cavidades cilíndricas de razones de aspecto $A \leq 2$ (donde $A=\text{radio/altura}$ del cilindro) con números de $Ta \leq 10^6$ fue analizado teóricamente por Buell y Catton [37] siguiendo el método propuesto por ellos para el caso sin rotación. Analizaron la presencia de los modos asimétricos y axisimétricos en la cavidad cilíndrica. Encontraron que el modo axisimétrico que se presenta frecuentemente en cilindros fijos, en el caso de rotación no es muy importante. Este modo sólo es dominante para razones de aspecto mayores a 2, sin embargo se puede suprimir cuando la velocidad angular aumenta. Los modos asimétricos tienen un comportamiento similar, para razones de aspecto moderadas, y a números de Taylor mayores a 10^5 . El número de Ra crítico obtenido en el análisis fue de una magnitud menor al caso de placas paralelas infinitas. Cuando las paredes del contenedor son conductoras, el número de Ra crítico es 10 al 30 % menor, en cambio cuando las paredes son aislantes, el Rayleigh crítico es menor en un factor del 6 %. La estabilidad lineal del flujo de convección natural dentro de cilindros que rotan alrededor de un eje vertical fue determinado por Goldstein *et al.* [38] usando un método analítico para condiciones de resbalamiento en las paredes y semianalítico para condiciones de no resbalamiento en las paredes. Para un número de onda azimutal diferente de cero (solución no axisimétrica), el tránsito de flujo conductivo a flujo con movimiento es siempre vía una bifurcación de Hopf, que se manifiesta como una precesión del patrón de flujo alrededor del eje vertical y (en la mayoría de los casos) en dirección opuesta al giro. Para cilindros con una razón de aspecto menor a la unidad, el patrón de flujo más inestable presenta una velocidad alta cerca de las fronteras, indicando que el movimiento se inicia en las zonas más alejadas del centro. Este estudio es importante en el contexto de esta tesis debido a que se demuestra que el flujo presenta una precesión alrededor del eje vertical. Aunque en esta tesis no se estudia el flujo en presencia de una rotación alrededor de un eje vertical, es posible que se haya observado un precesión generada por otros efectos. Este punto se discute más ampliamente en el capítulo 6. La literatura contiene resultados aparentemente contradictorios, y en la actualidad no contamos con una argumentación que explique de manera satisfactoria el origen de estas aparentes discrepancias

en las interpretaciones de la convección natural en sistemas que giran alrededor de un eje vertical. Ver Koschmieder [12]

2.4.3. Eje de rotación perpendicular al vector gradiente de temperatura

El fenómeno de la convección natural en cilindros que giran alrededor de un eje perpendicular al vector de gradiente de temperaturas y a su eje de simetría, se ha estudiado muy poco. En la literatura han aparecido algunos artículos que describen detalles particulares del fenómeno y actualmente estamos muy lejos de contar con una documentación que permita hacer una descripción coherente del fenómeno. Sin embargo hacemos notar que los artículos que se han publicado en esta configuración han sido elaborados con la aplicación del control de crecimiento de cristales. Aquí haremos una breve descripción de los trabajos que consideramos más relevantes. La estabilidad de flujos de convección natural por centrifugación fue explorada experimentalmente por Williams *et al.* [39]. Los fluidos utilizados en el experimento fueron agua, estaño y germanio líquidos. Las pruebas experimentales se efectuaron en una centrífuga de 5.5 m de brazo de giro que operó en un rango de aceleraciones fue $1 g < a < 10 g$. Los recipientes cilíndricos de cuarzo empleados tenían distintas razones de aspecto 0.12, 0.19, 0.24. Se construyeron dos tipos de recipientes. En el tipo 1, los termopares se mantienen a una altura fija y en contacto directo con la mezcla, este tipo de recipiente se empleó para las pruebas de temperatura más bajas. En la probeta del segundo tipo, los sensores de temperatura se protegieron con dedos de cuarzo y se desplazaron en el interior del material fundido. El desplazamiento a través del material fundido permitió conocer la distribución de temperatura en el interior del fundente. El gradiente de temperatura axial en el estaño y el germanio fue de -20 a -40 $^{\circ}Ccm^{-1}$, y para el germanio -40 $^{\circ}Ccm^{-1}$. La temperatura del fundente fue para el estaño 400 $^{\circ}C$ y para el germanio de 1000 $^{\circ}C$. Para conocer el efecto de la aceleración de Coriolis sobre el movimiento convectivo se realizaron simultáneamente los experimentos de visualización y temperatura. En un brazo de la centrífuga se colocó el recipiente con agua y en el otro brazo el recipiente con material semiconductor. Se observó que el comportamiento del patrón de flujo del agua antes de la rotación, asciende por el centro y desciende por las paredes. Al operar la centrífuga, el flujo es no permanente, en el régimen de 1.5 a 10 g , no aparecen fluctuaciones en las señales de temperatura central y la velocidad del flujo disminuye. Ellos reportaron que a 5 g el flujo carece de movimiento en dirección radial pero en el plano transversal se observa una sola celda convectiva que rota en el mismo sentido que la velocidad de rotación de la centrífuga. Las líneas de corriente del flujo se confinan en planos tangenciales y notaron un incremento de la velocidad del flujo en las paredes de la cavidad. A eso atribuyeron que en la mezcla de material fundido las trazas de temperatura registraran una disminución del gradiente del material fundido debido a un incremento de la transferencia de calor. Sus resultados confirmaron los resultados numéricos obtenidos por Weber *et al.* [40] que simulaban numéricamente el comportamiento de un fluido con $Pr=0.02$ sujeto a un gradiente térmico desestabilizante y que con la rotación se estabiliza. Weber *et al.* argumentaron que la fuerza de Coriolis producía un aumento en la fricción y un mejoramiento en la transferencia de calor. Ambos efectos amortiguan la convección y aumentan la estabilidad del flujo. Otro argumento sobre este efecto fue propuesto por Ma *et al.* [41] que discutieron que la fuerza de Coriolis deflecta las líneas de corriente del flujo hacia las paredes del contenedor y organiza al flujo como una estructura independiente del tiempo. Sin rotación no existe una fuerza adicional que imponga una estructura regular al flujo y las líneas de corriente son variantes con el tiempo. El efecto estabilizador de la fuerza de Coriolis sobre el flujo convectivo fue reportado por Müller [42], [43] en observaciones con solidificación. Existen diversas simulaciones numéricas aplicadas al crecimiento de cristales con diferentes materiales. [44], [45], [46] que han corroborado los resultados experimentales en centrífugas.

2.5. Aplicaciones

En esta última sección comentamos las aplicaciones de flujos convectivos en sistemas rotatorios. Aunque se puede identificar una larga lista de estas aplicaciones, aquí sólo presentamos dos de ellas: el crecimiento de cristales y los dispositivos rotatorios.

Crecimiento de Cristales

La aplicación que ha recibido una mayor atención recientemente por su influencia en la tecnología y la ciencia es el control del crecimiento de cristales.

Como sabemos, los cristales son sólidos que están constituidos por átomos localizados en arreglos que tienen una o más simetrías espaciales. La mayoría de los cristales naturales están compuestos por regiones relativamente pequeñas donde los átomos están colocados ordenadamente y que están limitados por fronteras que presentan imperfecciones en la disposición espacial de los átomos. En general, las imperfecciones reducen la calidad del material que pudiera emplearse en aplicaciones ópticas o electrónicas.

En los laboratorios, los cristales se pueden producir artificialmente para satisfacer las necesidades de la ciencia y la tecnología. La habilidad de crecer cristales de alta calidad ha influido en la competitividad de las naciones ya que es una herramienta esencial en la fabricación de nuevos materiales que son un elemento vital en la investigación y en la tecnología del estado sólido. La fabricación de dispositivos electrónicos, ópticos y fotónicos requieren de cristales con propiedades bien definidas tales como: un tamaño mínimo, una forma y orientación de grano específica. Son varios los métodos utilizados en el crecimiento de cristales: a partir de un gas, de materiales sólidos, de una solución de un líquido o material fundido y de cuasicristales o cristales amorfos.

De nuestro interés particular son los cristales que se crecen a partir de un material fundido. En este tipo de método la convección natural está presente durante el crecimiento del cristal debido a la presencia inevitable de la fuerza de la gravedad y a los gradientes térmicos. Materiales semiconductores puros como el silicio, el germanio, el galio y el selenio o compuestos como el antimonio de galio (GaSb), el antimonio de indio (InSb), el telurio de plomo (PbTe), son materiales cuyos cristales se obtienen a partir de un material fundido. Su principal aplicación es en la microelectrónica, por lo que resulta necesario considerar que los cristales donde proceden estos materiales debe tener una mínima cantidad de impurezas y sin fracturas. La eficiencia de los dispositivos electrónicos se relaciona con la homogeneidad de la composición de los cristales. Las formas de los cristales dependen de la aplicación. Generalmente se utilizan monocristales en láseres. En circuitos integrados se emplean capas epitaxiales con un espesor de submicrones a miles de micrones y los cristales pequeños de diferente forma y tamaño son necesarios en otro tipo de aplicaciones. El crecimiento del cristal puede iniciarse utilizando una pequeña semilla del cristal del mismo material a fabricar. Esto permite definir la orientación cristalográfica. Los métodos de crecimiento a partir de un material fundido son varios, los más conocidos son Czochralski, Bridgman, Verneuil, refinación zonal y zona caliente viajera (*heater traveling zone*). En cada uno de ellos el material fundido se solidifica gradualmente a una velocidad lenta de aproximadamente 2 mm/s [47]. El método de Czochralski consiste en mantener el material fundido en un crisol a una temperatura alta que se consigue mediante un horno de inducción. Un cristal del mismo material a fabricar se encuentra en contacto con el material fundido contenido en el crisol y se traslada verticalmente. El material fundido en contacto con el cristal se solidifica y se extrae lentamente del material fundido. La calidad de la superficie del cristal en proceso de crecimiento puede analizarse *in situ*. El método de Bridgman es conocido también como el método de solidificación del gradiente. En este método, los cristales pueden crecer por solidificación direccional en una región donde el gradiente de temperatura del horno disminuye gradualmente. Este método tiene dos variantes, vertical y vertical invertido. El primero consiste en mantener la temperatura más alta en la parte inferior del horno y la temperatura menor en la base superior. El cristal crece lentamente al solidificarse durante el descenso gradual de la temperatura del horno. En la configuración

Bridgman vertical invertido, la temperatura más alta se encuentra en la base superior del horno y la temperatura menor se localiza en la base inferior. Otra técnica empleada en el crecimiento de cristales es la propuesta por Verneuil, donde el cristal crece hacia la parte inferior de un arreglo de suspensión mecánica y en la parte superior se tiene material sólido pulverizado que al contacto con las paredes del dispositivo incrementa su temperatura y se funde y se agrega al cristal en crecimiento.

El método de zona caliente viajera (*heater traveling zone*) es un proceso de crecimiento usando una solución de un material policristalino con una composición promedio que se disuelve progresivamente bajo la influencia de un gradiente de temperatura. Posteriormente se deposita en forma de un cristal único a partir de una semilla de la misma composición. El crecimiento sucede por la traslación relativa del horno y la carga. Este método es particularmente útil en el crecimiento de aleaciones semiconductoras terciarias. Una de sus desventajas es una tasa de crecimiento muy baja; típicamente de un orden de magnitud menor a aquellos relacionados con las técnicas de crecimiento a partir de un fundido. La tasa de crecimiento está limitada por la tasa más lenta de transporte de las especies de constituyentes que se encuentran en la zona de la solución y por la inestabilidad morfológica de la interface de crecimiento causada por el superenfriamiento de los constituyentes.

Estudios experimentales y teóricos, [48], [49] han mostrado que existe una correlación entre las imperfecciones resultantes y las condiciones dinámicas en el material fundido a partir del cual se consigue el crecimiento del cristal. El efecto principal que modifica la calidad del cristal es la convección natural, que está presente en las técnicas anteriormente mencionadas. Durante el crecimiento del cristal coexisten mecanismos que tienen movimientos con distintas escalas espaciales y temporales y que en conjunto describen el proceso de solidificación y el crecimiento del cristal. La convección natural afecta la solidificación teniendo un impacto sobre la morfología de la interfase sólido líquido y por tanto en la estructura del cristal. También se ha observado que el transporte convectivo determina la distribución de la concentración de las especies rechazadas y las ubica en el frente de la interfase de crecimiento influyendo así en la composición del cristal en macro y microescala.

Experimentos de cristalización en condiciones de microgravedad se realizaron en la década de los noventas en las estaciones espaciales MIR, TEXUS y Skylab en colaboración con diversas agencias alemanas, japonesas y francesas. La gama de experimentos fue diversa desde la cristalización de diferentes tipos de proteínas biológicas, de metales y de aleaciones, de geles y aerogeles, de materiales cerámicos y de zeolitas [50], [51], [52].

En ellos el movimiento convectivo en la interfase sólido-líquido se amortiguó obteniendo así cristales homogéneos de alta calidad y eficiencia [11]. Sin embargo, el costo de este proceso es el principal inconveniente. A partir de estos magníficos resultados obtenidos en el espacio, la comunidad científica de la Ciencia de Materiales se interesó en conocer cual era el papel de la gravedad y empezó a realizar experimentos con dispositivos donde se incrementa la gravedad hasta un orden de millones de veces la fuerza de gravedad equivalente. [53]

Para ello utilizaban centrífugas que operaban a altas velocidades de rotación, algunas de ellas fueron construidas específicamente para hacer crecer cristales, otras se utilizaban en la industria aeroespacial en el entrenamiento de astronautas o para analizar problemas de ingeniería civil. Estas máquinas se modificaron para probar las técnicas de crecimiento de cristales en alta gravedad. [54], [55], [56], [57].

El horno se localizaba en una de las canastillas de los brazos de la centrífuga y en el otro brazo se tenía uno o varios contrapesos. Las centrífugas de gran capacidad se localizan en espacios físicos construidos especialmente para ellas, tienen sistemas de refrigeración apropiados, una cimentación especial para aislar el dispositivo en su operación y diferentes componentes electrónicos para su control.

En estas centrífugas, se emplean los métodos descritos anteriormente: el método invertido de Bridgman, el método de solidificación en dirección horizontal (en este caso el contenedor donde se realiza el crecimiento tiene una posición horizontal), el método vertical de Bridgman (temperatura

mayor en la base inferior y temperatura menor en la base superior) [54], [58], [59]. Cada uno de ellos ha sido probado al crecer diferentes materiales con buenos resultados [60], [61], [62], [46]. Los resultados de esta técnica de alta gravedad son sorprendentes y han sido presentados en los diferentes congresos de procesamiento de materiales con alta gravedad. [60], [61], [63] y en otros foros [64]. En la Tabla 2.1 se presenta un condensado de los resultados obtenidos con centrífugas que se utilizan con este propósito.

Máquinas rotatorias

Las máquinas rotatorias son dispositivos que se emplean para diferentes aplicaciones: turbinas, motores eléctricos y secadores son algunos de ellos. En la operación de una máquina rotatoria en la que existe un gradiente de temperatura se origina un flujo convectivo y aparecen adicionalmente las fuerzas centrífuga y de Coriolis

En turbomaquinaria de manera particular en turbinas de gas, los álabes del rotor se encuentran sometidos durante la operación de la máquina a altas temperaturas. Con el propósito de incrementar la eficiencia y la potencia de salida de la turbomáquina comúnmente se incrementa la temperatura del gas a la entrada de la turbina. Los materiales que se utilizan para fabricar los álabes tienen un límite de operación hasta temperaturas máximas de $1500\text{ }^{\circ}\text{C}$. Para prolongar la vida útil de la turbina y evitar el sobrecalentamiento en los álabes han surgido distintos diseños para enfriarlos. Uno de estos diseños se basa en orificios radialmente distribuidos en el álabe, en su interior se hace circular un fluido refrigerante para el enfriamiento [69]. Durante la operación de la máquina se originan corrientes convectivas en el fluido refrigerante del álabe. El fluido adyacente a la pared del álabe con temperatura alta se reemplaza con fluido de temperatura menor procedente de la flecha central del rotor de la turbina. Este sistema de enfriamiento permite mantener el nivel de la temperatura del material del álabe adecuado y compatible con el esfuerzo mecánico de operación [70]. Se han planteado diversos estudios sobre el comportamiento físico de estos pequeños termosifones en los álabes de las turbinas para mejorar su eficiencia. [71]

En máquinas eléctricas se atribuye su calentamiento principalmente a dos efectos, el rozamiento de las partes mecánicas de motor y al efecto joule ($I^2 R_e$) que es el calentamiento resistivo en los devanados del estator y del rotor al circular corriente a través del devanado manifestándose en un incremento de temperatura. [72]

Las temperaturas altas oxidan y carbonizan gradualmente los materiales del aislamiento, lo cual reduce su capacidad aislante. Conforme los materiales cambian lentamente pasan a ser de buenos a malos aisladores y por último a conductores parciales [73]. Para prevenir la falla del aislamiento de los devanados por sobrecalentamiento es necesario limitar su temperatura. La mayoría de los motores eléctricos se enfrían por aire, de manera que la temperatura ambiente o circundante determina la eficacia del enfriamiento del motor o generador.

La convección natural se encuentra presente en el proceso de enfriamiento del motor, las carcasas de los motores se fabrican con aletas integradas a la estructura que permiten la disipación de calor al medio ambiente y una disminución de la temperatura de los devanados. Los motores de gran capacidad se refrigeran con ventiladores que extraen el aire caliente del interior hacia el exterior [72].

Se han propuesto diseños de aislamientos de los devanados que contemplan un fluido refrigerante circulando alrededor de los devanados reduciendo drásticamente la temperatura del dispositivo eléctrico y prolongando su vida útil. Este fluido refrigerante tiene un comportamiento similar del patrón convectivo en un marco rotatorio al de una turbomáquina [70].

Secadores rotatorios para el secado de granos agrícolas y sólidos empleados en la industria es otra de las aplicaciones donde se manifiesta el movimiento convectivo en este marco rotatorio. En ellos circula gas caliente obteniendo una disminución en la humedad del sólido. [63].

Localización	Velocidad de giro (rpm)	Brazo de giro m	G	Materiales	Técnica	Referencia
CAMP(E.U.)	90	1.524	13.8	Te	Bridgman Vertical Invertido	[62]
Tsukuba(Japon)	1.6-82.9	7.5	50	InSb		[65]
Erlangen (Alemania)		1.6			Bridgman, Bridgman vert. invertido, Zona horizontal, zona viajera	[42], [43]
Nantes(Francia)	189	5.5	200	PbTe,Ge, Al,n 70Sn-30Bi, B, I		[66], [58], [57]
Benjing(China)	30	7	9	GaAs,Sn	Gradiente de solidificación horizontal	[67] [41]
C-Core(Canada)	189	5.5	200			[68]
Star City(Rusia)	38.6	18				[56]
Centro Inv. μG (E.U.)	120	1.2	20	PbSn	Solidificación direccional	[60]

Tabla 2.1: Centrífugas utilizadas en el crecimiento de cristales.

Capítulo 3

Convección natural en un cilindro

En este capítulo se plantean las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía cuya solución describe la convección natural en un cilindro.

En la primera sección discutimos la aproximación de Boussinesq que es una de las herramientas más utilizadas en el planteamiento y en la solución de problemas de convección natural. Específicamente describiremos a detalle las condiciones en las que esta simplificación es válida en el problema de convección natural en un marco de referencia no inercial. El análisis presentado aquí es original y constituye la parte medular del artículo de investigación de la referencia [74], en el apéndice A se incluye una copia de este trabajo. Las ecuaciones de conservación de masa, movimiento y energía de la convección natural en un marco de referencia fijo se plantean en la segunda sección de este capítulo. Posteriormente se obtienen los parámetros adimensionales que gobiernan el fenómeno convectivo al adimensionalizar las ecuaciones de conservación con las escalas características del sistema.

3.1. Aproximación de Boussinesq

La aproximación de Boussinesq ha sido una herramienta muy útil para simplificar las ecuaciones de balance en el análisis de flujos no isotérmicos. El primero en proponer esta simplificación fue Oberbeck en 1879 [75]. Sin embargo, esta simplificación es conocida como la aproximación de Boussinesq, pues fue él quien a principios de siglo pasado la utilizó en su conocido trabajo sobre el análisis teórico de la transferencia de calor [76]. Comentarios interesantes sobre la historia de la aproximación de Oberbeck-Boussinesq se pueden encontrar en las referencias [77] y [78]. Diferentes discusiones intuitivas sobre esta aproximación se pueden encontrar en los libros de texto como por ejemplo los escritos por Chandrasekhar [7] y Leal [79]. Por otro lado, se han realizado esfuerzos para encontrar los argumentos cuantitativos sobre las regiones en el espacio de parámetros donde la aproximación es válida. Un estudio de la validez de la aproximación de Boussinesq para un gas ideal, con posible aplicación en atmósferas planetarias, fue presentada en [80]. Un estudio complementario a éste, y restringido a una capa delgada de fluido, se encuentra en [81]. En este trabajo se ofrecen criterios cuantitativos para determinar los intervalos de temperatura máximos donde la aproximación es válida, una vez que se conocen las propiedades físicas del fluido de trabajo. Una discusión rigurosa del rango de validez de la aproximación de Boussinesq para líquidos y gases basada en el método de perturbación de primer orden y que contiene un análisis detallado para los casos específicos de agua y aire a temperatura y presión ambiente está publicado en la referencia [82]. Existen algunos estudios que buscan determinar la validez de la aproximación y resolviendo las ecuaciones de conservación con y sin la aproximación de Boussinesq ([83]). Esta estrategia es limitada pues sólo es vigente para el caso particular estudiado. En el contexto de esta tesis, es de particular interés analizar la validez de la aproximación de Boussinesq en un sistema rotatorio. En la sección 3.1.1 presentamos esta teoría que determina cuantitativamente las

condiciones bajo las que podemos aplicar la aproximación. El análisis sigue el método planteado por Gray y Giorgini [82]. Aunque la teoría propuesta es general, presentamos un análisis más detallado para la configuración geométrica que se utiliza en el flujo de convección natural en centrífugas. Es conveniente mencionar que en estas aplicaciones el eje de rotación se encuentra fijo y distante del contenedor en donde ocurre el fenómeno de convección natural. Antes de presentar el análisis de la aproximación de Boussinesq, es conveniente enfatizar que el movimiento por convección natural en el fluido es consecuencia de los gradientes de densidad que surgen en su interior; por lo que es inevitable iniciar el análisis considerando al fluido como compresible.

3.1.1. Planteamiento de las ecuaciones de conservación

En este apartado se plantean las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía para un fluido newtoniano y compresible cuyas propiedades físicas son variables. El fluido se encuentra rotando alrededor de un eje con una velocidad angular Ω_i . Las ecuaciones de conservación son las siguientes:

Conservación de masa

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (3.1)$$

Conservación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = \\ - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g k_i + \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} |\Omega \times \mathbf{r}|^2 \right) + 2\rho \epsilon_{ijk} v_j \Omega_k \end{aligned} \quad (3.2)$$

y conservación de energía

$$\frac{Dh}{Dt} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{Dp}{Dt} + \Phi \quad (3.3)$$

donde:

$$\Gamma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

es el tensor-de esfuerzos y:

$$\Phi = \Gamma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

es la función de disipación de calor. La velocidad, la densidad, la presión y la entalpía del fluido se denotan por v_i, ρ, p y h respectivamente. La aceleración de la gravedad es g y se supone que actúa en dirección negativa del vector unitario k_i . Las propiedades físicas del fluido, son la viscosidad dinámica (μ) y la conductividad térmica (k). Los últimos dos términos de la ecuación de conservación de movimiento son respectivamente la aceleración centrífuga y de Coriolis.

Como la entalpía es función de la temperatura (T) y la presión, se puede escribir:

$$\delta h(p, T) = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \delta T + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \delta p.$$

Usando la definición de calor específico a presión constante, $C_p = (\partial h / \partial T)_p$, la definición de la variación de la entalpía en términos de la entropía (s) y la presión, $\delta h = T \delta s + \delta p / \rho$ y de una de las relaciones de Maxwell se obtiene:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p,$$

por tanto puede escribirse la siguiente expresión para la variación de entalpía como una función de la presión a temperatura constante:

$$\left(\frac{\delta h}{\delta p}\right)_T = \frac{(1 - \alpha T)}{\rho}.$$

Donde, $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ es el coeficiente de expansión volumétrica. Usando las relaciones anteriores, la ecuación de la energía puede expresarse en términos de la temperatura como sigue:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \alpha T \left[\frac{\partial p}{\partial t} + v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right] + \Phi.$$

En las ecuaciones previas, se ha considerado que las propiedades físicas del fluido son variables. Además, se supone que éstas pueden expandirse linealmente como funciones de la temperatura y la presión de la siguiente manera:

$$\rho = \rho_o [1 - \alpha_o (T - T_o) + \beta_o (p - p_o)],$$

$$C_p = C_{p_o} [1 + a_o (T - T_o) + b_o (p - p_o)],$$

$$\mu = \mu_o [1 + c_o (T - T_o) + d_o (p - p_o)],$$

$$\alpha = \alpha_o [1 + e_o (T - T_o) + f_o (p - p_o)],$$

$$\lambda = \lambda_o [1 + g_o (T - T_o) + h_o (p - p_o)],$$

$$k = k_o [1 + m_o (T - T_o) + n_o (p - p_o)]. \quad (3.4)$$

Donde α_o, β_o, \dots son los coeficientes de primer orden de la expansión de Taylor. El subíndice o indica que las variables se evalúan con respecto a un estado de referencia (T_o, p_o) .

3.1.2. Condiciones hidrostáticas

Si se supone que el fluido se encuentra estático, $v_i = 0$ y $\partial/\partial t = 0$. Las ecuaciones gobernantes de cantidad de movimiento y energía son:

$$0 = -\frac{\partial p_s}{\partial x_i} + \rho_s \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} |\Omega \times \mathbf{r}|^2 \right) - \rho_s g k_i$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_s \frac{\partial T_s}{\partial x_j} \right) = 0$$

con

$$\rho_s = \rho_o [1 - \alpha_o (T_s - T_o) + \beta_o (p_s - p_o)]$$

y

$$k_s = k_o [1 + m_o (T_s - T_o) + n_o (p_s - p_o)].$$

Restando la expresión hidrostática de la ecuación de cantidad de movimiento de su correspondiente expresión general y utilizando las aproximaciones lineales de las propiedades físicas del fluido se obtiene:

la ecuación de conservación de masa

$$-\alpha_o \frac{DT}{Dt} + \beta_o \frac{Dp}{Dt} + [1 - \alpha_o (T - T_o) + \beta_o (p - p_o)] \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0,$$

la ecuación de conservación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} & [1 - \alpha_o (T - T_o) + \beta_o (p - p_o)] \left(\frac{Dv_i}{Dt} - 2\varepsilon_{ijk} v_j \Omega_k \right) \\ &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial (p - p_o)}{\partial x_i} + [\alpha_o (T - T_o) - \beta_o (p - p_o)] g k_i \\ &+ [\alpha_o (T - T_o) - \beta_o (p - p_o)] \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} |\Omega \times \mathbf{r}|^2 \right) \\ &+ \frac{\mu_o}{\rho_o} [1 + c_o (T - T_o) + d_o (p - p_o)] \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\mu_o}{\rho_o} \left[c_o \frac{\partial T}{\partial x_j} + d_o \frac{\partial p}{\partial x_j} \right] \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &+ \frac{\lambda_o}{\rho_o} [1 + g_o (T - T_o) + h_o (p - p_o)] \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\lambda_o}{\rho_o} \left[g_o \frac{\partial T}{\partial x_i} + h_o \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right), \end{aligned}$$

y la ecuación de conservación de energía

$$\begin{aligned} & [1 - \alpha_o (T - T_o) + \beta_o (p - p_o)] [1 + a_o (T - T_o) + b_o (p - p_o)] \frac{DT}{Dt} = \\ & \kappa_o [1 + m_o (T - T_o) + n_o (p - p_o)] \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \kappa_o \left[m_o \frac{\partial T}{\partial x_i} + n_o \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \frac{\partial T}{\partial x_i} \\ & + \left(\frac{\alpha_o}{\rho_o C p_o} \right) [1 + e_o (T - T_o) + f_o (p - p_o)] \\ & (T - T_o) \frac{D}{Dt} (p - p_o) + T_o \frac{D}{Dt} (p - p_o) - (T - T_o) g v_j k_j \rho_o [1 - \alpha_o (T_s - T_o) + \beta_o (p_s - p_o)] \\ & - T_o g v_j k_j \rho_o [1 - \alpha_o (T_s - T_o) + \beta_o (p_s - p_o)] \\ & + (T - T_o) \rho_o [1 - \alpha_o (T_s - T_o) + \beta_o (p_s - p_o)] v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} |\Omega \times \mathbf{r}|^2 \right) \\ & - T_o \rho_o [1 - \alpha_o (T_s - T_o) + \beta_o (p_s - p_o)] v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} |\Omega \times \mathbf{r}|^2 \right) \\ & + \frac{\mu_o}{\rho_o C p_o} [1 + c_o (T - T_o) + d_o (p - p_o)] \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ & + \frac{\lambda_o}{\rho_o C p_o} [1 + g_o (T - T_o) + h_o (p - p_o)] \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^2 \end{aligned}$$

donde la difusividad térmica κ se define como:

$$\kappa_o = \frac{k_o}{\rho_o C p_o}$$

En la ecuación de energía se utiliza la identidad:

$$\begin{aligned} T \frac{Dp}{Dt} &= (T - T_o) \frac{D(p - p_s)}{Dt} + T_o \frac{D(p - p_s)}{Dt} - (T - T_o) \rho_s g v_j k_j - T_o \rho_s g v_j k_j \\ &\quad - (T - T_o) \rho_s v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} |\Omega \times \mathbf{r}|^2 \right) - T_o \rho_s v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} |\Omega \times \mathbf{r}|^2 \right). \end{aligned}$$

3.1.3. Escalamiento

El escalamiento óptimo de las ecuaciones de conservación es fuertemente dependiente de las estructuras geométricas del flujo, por lo tanto es difícil de proponer un escalamiento con una validez general. En la presente investigación, es de especial interés el arreglo físico donde el recipiente que contiene al fluido convectivo se encuentra rotando alrededor de un eje localizado a una cierta distancia del contenedor.

Sea un eje de coordenadas que se localiza en el centro geométrico de la región de interés y sea x_i el vector de posición de este eje. Definiremos el vector r_i como:

$$r_i = R_i + x_i$$

donde R_i es un vector constante que denota la distancia desde el origen de coordenadas al eje de rotación. Otra escala espacial natural es la distancia que separa dos regiones isotérmicas L . La escala correspondiente a la diferencia de temperaturas entre las regiones caliente y fría es $\Delta T = T_c - T_f$. La escala de la velocidad característica se considera como la velocidad de caída libre definida como $q = \sqrt{\alpha_o \hat{g} \Delta T L}$ donde la fuerza de cuerpo que promueve el movimiento es $\hat{g} = g + \Omega^2 |R + L|$.

Las distancias adimensionales se definen de la siguiente manera:

$$x_i^* = x_i / L$$

y

$$r_i^* = \frac{R_i + x_i}{L} = R_i^* + x_i^*.$$

Las escalas de tiempo, temperatura y velocidad son:

$$t^* = \frac{t q}{L} = \sqrt{\frac{\alpha_o \hat{g} \Delta T}{L}} t, \quad T^* - T_o^* = \frac{T - T_o}{\Delta T} \quad \text{y} \quad v_i^* = \frac{v_i}{q} = \frac{v_i}{\sqrt{\alpha_o \hat{g} \Delta T L}}.$$

Las escalas para las presiones dinámica e hidrostática son:

$$p^* - p_s^* = \frac{p - p_s}{\rho_o q^2} = \frac{p - p_s}{\rho_o \alpha_o \hat{g} \Delta T L} \quad \text{y} \quad p^* - p_o^* = \frac{p - p_o}{\rho_o \hat{g} L}.$$

La escala de la velocidad de rotación es:

$$\Omega_i^* = \frac{\Omega_i}{\Omega_o}$$

donde Ω_o es una velocidad de rotación característica.

Reescribiendo las ecuaciones gobernantes en términos de las variables adimensionales se obtiene:

conservación de masa

$$-\epsilon_1 \frac{DT^*}{Dt^*} + \epsilon_2 \frac{Dp^*}{Dt^*} + [1 - \epsilon_1 (T^* - T_o^*) + \epsilon_2 (p^* - p_o^*)] \frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} = 0,$$

conservación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} & [1 - \epsilon_1 (T^* - T_o^*) + \epsilon_2 (p^* - p_o^*)] \\ & \left(\frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* \right) = \\ & - \frac{\partial (p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} + G [(T^* - T_s^*) k_i - \epsilon_2 (p^* - p_s^*) k_i] \\ & + Fr [(T^* - T_s^*) - \epsilon_2 (p^* - p_s^*)] \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{1}{2} |\Omega^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) \\ & + \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} [1 + \epsilon_3 (T^* - T_o^*) + \epsilon_4 (p^* - p_o^*)] \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \\ & + \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\epsilon_3 \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} + \epsilon_4 \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} \right] \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \\ & + \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} [1 + \epsilon_{11} (T^* - T_o^*) + \epsilon_{12} (p^* - p_o^*)] \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \right) \\ & + \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\epsilon_{11} \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} + \epsilon_{12} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} \right] \left(\frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \right), \end{aligned}$$

y conservación de energía

$$\begin{aligned} & [1 - \epsilon_1 (T^* - T_o^*) + \epsilon_2 (p^* - p_o^*)] [1 + \epsilon_5 (T^* - T_o^*) + \epsilon_6 (p^* - p_o^*)] \frac{DT^*}{Dt^*} = \\ & \frac{1}{(Pr Ra)^{\frac{1}{2}}} [1 + \epsilon_7 (T^* - T_o^*) + \epsilon_8 (p^* - p_o^*)] \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} + \frac{1}{(Pr Ra)^{\frac{1}{2}}} \left(\epsilon_7 \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} + \epsilon_8 \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} \\ & + \gamma (1 + \epsilon_9 (T^* - T_o^*) + \epsilon_{10} (p^* - p_o^*)) \left[\epsilon_1 (T^* - T_o^*) \frac{D}{Dt^*} (p^* - p_s^*) + \epsilon_1 T_o^* \frac{D(p^* - p_s^*)}{Dt^*} \right. \\ & \quad \left. - (1 - \epsilon_1 (T_s^* - T_o^*) + \epsilon_2 (p_s^* - p_o^*)) \{ (T^* - T_o^*) v_j^* k_j + T_o^* v_j^* k_j \} \right. \\ & \quad \left. + Fr (T^* - T_o^*) v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\Omega^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) + Fr T_o^* v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\Omega^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) \right] \end{aligned}$$

Tabla 3.1: Definiciones de los parámetros ϵ_i , γ , Λ y G

$\epsilon_1 = \alpha_o \Delta T$	$\epsilon_2 = \beta_o \rho_o \hat{g} L$
$\epsilon_3 = c_o \Delta T$	$\epsilon_4 = d_o \rho_o \hat{g} L$
$\epsilon_5 = a_o \Delta T$	$\epsilon_6 = b_o \rho_o \hat{g} L$
$\epsilon_7 = m_o \Delta T$	$\epsilon_8 = n_o \rho_o \hat{g} L$
$\epsilon_9 = e_o \Delta T$	$\epsilon_{10} = f_o \rho_o \hat{g} L$
$\epsilon_{11} = g_o \Delta T$	$\epsilon_{12} = h_o \rho_o \hat{g} L$
$\gamma = \alpha_o \hat{g} L / C p_o$	$G = g / \hat{g}$
$\Lambda = \lambda_o / \mu$	

$$\begin{aligned}
 & + \gamma \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} [1 + \epsilon_3 (T^* - T_o^*) + \epsilon_4 (p^* - p_o^*)] \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \\
 & + \gamma \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} [1 + \epsilon_{11} (T^* - T_o^*) + \epsilon_{12} (p^* - p_o^*)] \left(\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Los parámetros ϵ_i , γ , Λ y G están definidos en la Tabla 3.1.

Los parámetros adimensionales están definidos por: el número de Rayleigh

$$Ra = \frac{\alpha_o \hat{g} \Delta T L^3}{\kappa_o \nu_o},$$

el número de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu_o}{\kappa_o},$$

el número de Taylor

$$Ta = \frac{4\Omega_o^2 L^4}{\nu_o^2}$$

y el número de Froude

$$Fr = \Omega_o^2 L / \hat{g}.$$

Se deberá recordar que los números de Ra y Fr están definidos en términos de \hat{g} , por lo que las definiciones usuales de estos números adimensionales se recuperan al multiplicar Ra por G y dividir Fr por G .

3.1.4. Ecuaciones aproximadas

Condiciones cercanas a las condiciones de referencia

Para este análisis se supone que la temperatura y la presión son poco diferentes a sus valores de referencia, esto es, $T - T_o$ y $p - p_o \ll 1$ y no se impone ninguna restricción a las ϵ 's. Para estas condiciones, las ecuaciones de conservación son las siguientes.

Conservación de masa

$$-\epsilon_1 \frac{DT^*}{Dt^*} + \epsilon_2 \frac{Dp^*}{Dt^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} = 0,$$

conservación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} & \frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* = \\ & - \frac{\partial (p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} + \frac{g}{\bar{g}} ((T^* - T_s^*) k_i - \epsilon_2 (p^* - p_s^*) k_i) \\ & + Fr [(T^* - T_s^*) - \epsilon_2 (p^* - p_s^*)] \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{1}{2} |\Omega^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) \\ & + \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \\ & + \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\epsilon_3 \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} + \epsilon_4 \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} \right] \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \\ & + \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \right) \\ & + \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\epsilon_{11} \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} + \epsilon_{12} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} \right] \left(\frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \right), \end{aligned}$$

y de conservación de energía

$$\begin{aligned} \frac{DT^*}{Dt^*} &= \frac{1}{(Pr Ra)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} + \left(\epsilon_7 \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} + \epsilon_8 \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} \right) \\ & + \gamma [\epsilon_1 T_o^* \frac{D(p^* - p_s^*)}{Dt^*} \\ & - \{ T_o^* v_j^* k_j \\ & + Fr T_o^* v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\Omega^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) \}] \\ & + \gamma \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \\ & + \gamma \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} \right)^2. \end{aligned}$$

Ecuaciones extendidas de Boussinesq

A partir de las definiciones de las ϵ_i^* s mostradas en el cuadro 3.1 se encuentra que la interpretación física de esta aproximación consiste en lo siguiente. Se puede tener que las ϵ_i^* s sea pequeñas sí al menos se cumple una de las siguientes condiciones: o bien se tiene un fluido de trabajo cuyas propiedades físicas son débilmente dependientes de la temperatura y la presión; o bien los gradientes térmicos y la presión generada por las fuerzas de cuerpo $\rho\hat{g}L$ son pequeñas.

Conservación de masa

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} = 0.$$

conservación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* = \\ -\frac{\partial(p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} + G(T^* - T_s^*) k_i \\ + Fr(T^* - T_s^*) \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{1}{2} |\Omega^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2\right) + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^{*2}}, \end{aligned}$$

y de conservación de energía

$$\begin{aligned} \frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{(Pr Ra)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^{*2}} - \gamma T_o^* v_j^* k_j \\ - \gamma Fr T_o^* v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\Omega^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2\right) + \gamma \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*}\right) \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*}. \end{aligned}$$

3.1.5. La aproximación de Boussinesq en un sistema no inercial

Consideremos ahora un caso particular de las exposiciones de la subsección anterior. Postulemos que se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$\gamma T_o^* \leq 0.1 \quad (3.5)$$

y

$$\gamma \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}} \leq 0.1 \frac{1}{(Pr Ra)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.6)$$

Sí se omiten los términos de las expresiones de la subsección 3.1.4 que resultan pequeños a causa de las condiciones (3.5) y (3.6) obtendremos las siguientes expresiones.

ecuación de conservación de masa

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} = 0, \quad (3.7)$$

ecuación de conservación de cantidad de movimiento

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* = \quad (3.8)$$

$$-\frac{\partial(p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} - Fr \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) + G(T^* - T_s^*) k_i + \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^{*2}},$$

y la ecuación de conservación de energía

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{(Pr Ra)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} - Fr T_o^* \gamma v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right). \quad (3.9)$$

Las expresiones (3.7) a (3.9) son las ecuaciones de la aproximación de Boussinesq en un sistema rotatorio. Cuando el número de Taylor, el número de Froude son igual a cero, estas expresiones se reducen a las ecuaciones de Boussinesq en un sistema inercial.

3.1.6. Casos especiales

Las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en un sistema en rotación se pueden simplificar en dos casos particulares.

$\mathbf{R}^* \gg 1$

Las condiciones para este caso son:

$$|R_i^*| \gg 1 \quad (|R_i| \gg L),$$

por tanto $r_i^* \approx R_i^*$ es un vector constante en todos los puntos del dominio.

Las ecuaciones de conservación son las siguientes:

Conservación de masa

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} = 0. \quad (3.10)$$

Conservación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* = \\ - \frac{\partial(p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} + G(T^* - T_s^*) k_i + \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^{*2}}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

y conservación de energía

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{(Pr Ra)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}}. \quad (3.12)$$

$\mathbf{R}^* \ll 1$

Para este segundo caso las condiciones son las siguientes:

$$|R_i^*| \ll 1 \quad (|R_i| \ll L)$$

por tanto $r_i^* \approx x_i^*$.

Las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía resultantes son:

Conservación de masa

Tabla 3.2: Propiedades del agua a P=0.10 MPa

Propiedad	T _o =298.16 K	T=303.16 K
ρ _o (kg/m ³)	997	995.6
Cp _o (kJ/kg K)	4.181	4.180
μ _o (Pa.s)	8.899×10 ⁻⁴	7.972×10 ⁻⁴
α _o (K ⁻¹)	2.57×10 ⁻⁴	3.03×10 ⁻⁴
β _o (MPa)	0.4511	0.4457
k _o (W/mK)	0.6072	0.6155
κ _o (m ² /s)	1.45×10 ⁻⁷	-
ν _o (m ² /s)	8.92×10 ⁻⁷	-

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} = 0, \quad (3.13)$$

Conservación de cantidad de movimiento

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* = \quad (3.14)$$

$$-\frac{\partial(p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} - Fr \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{1}{2} |\Omega^* \times \mathbf{x}^*|^2 \right) + G(T^* - T_s^*) k_i + \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^{*2}},$$

y de conservación de energía

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{(Pr Ra)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} - Fr T_s^* \gamma v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\Omega^* \times \mathbf{x}^*|^2 \right). \quad (3.15)$$

3.2. Validez de la aproximación de Boussinesq en el presente estudio

En esta sección se verifica la factibilidad de invocar a la aproximación de Boussinesq para el análisis teórico presentado en la tesis. Aplicaremos las condiciones requeridas para un sistema en rotación, expresiones (3.5, 3.6). En el estudio experimental que se trata con detalle en el capítulo cuatro, el fluido de trabajo es agua, por lo que es necesario conocer los valores de los coeficientes de expansión de las propiedades físicas del agua en función de la temperatura (T) y de la presión (p). Los rangos de los parámetros ϵ_i se evalúan usando los parámetros experimentales extremos. En la evaluación se considera que la temperatura ambiente es 298.16 K, la diferencia de temperaturas en el interior del recipiente es $\Delta T = 5K$ y que la presión atmosférica es 1 atm = 0.101325 MPa. Las propiedades físicas del agua bajo estas condiciones se muestran en la Tabla 3.2. La velocidad de rotación se considera $\Omega_0 = 3.037 \text{ rad/s}$, el brazo de giro es 1.63 m, la altura del recipiente cilíndrico se toma $L=0.03 \text{ m}$, la constante de la aceleración de la gravedad es $g=9.807 \text{ m/s}^2$ y la gravedad resultante máxima $\hat{g} = 18.0 \text{ m/s}^2$. Como se puede observar en la Tabla 3.3 los valores de los parámetros adimensionales $\epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_6, \epsilon_8$ y ϵ_9 son muy pequeños debido a que la magnitud de las propiedades físicas del agua no tiene un cambio apreciable con las variaciones de presión. Estos parámetros corresponden al tercer término de la expansión lineal de la propiedad física correspondiente.

Los parámetros adimensionales de la convección natural rotatoria del agua a las condiciones de temperatura y presión anteriores se muestran en la Tabla 3.4.

Tabla 3.3: Parámetros adimensionales ϵ_i para el agua $T_o=298.16 K$ y $P_o=1 atm$

Parámetro	Magnitud
ϵ_1	1.18×10^{-5}
ϵ_2	2.52×10^{-8}
ϵ_3	-9.27×10^{-5}
ϵ_4	≈ 0
ϵ_5	-10^{-3}
ϵ_6	≈ 0
ϵ_7	8.3×10^{-3}
ϵ_8	≈ 0
ϵ_9	4.60×10^{-5}

Tabla 3.4: Parámetros adimensionales del presente estudio

Parámetro	Magnitud
γ	3.4×10^5
Ta	3.756×10^7
Pr	6.15
Fr	0.0147
Ra	5.024×10^6

Las condiciones para utilizar la aproximación de Boussinesq en el planteamiento de la solución de la convección natural en un sistema rotatorio son:

a) $\epsilon_i \ll 0.1$,

Dados los valores de los parámetros adimensionales ϵ_i de la Tabla 3.4 son menores a 0.1.

b) $\gamma T_o^* \ll 0.1$,

Para las condiciones de interés, para este término es $2 \times 10^{-3} \ll 0.1$ y

c) $\gamma \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}} \ll 0.1 \frac{1}{(Pr Ra)^{\frac{1}{2}}}$.

Evaluando estas expresiones con nuestros parámetros, obtenemos $3.77 \times 10^{-8} \ll 3.25 \times 10^{-5}$.

Como se puede observar, las tres condiciones anteriores se cumplen por lo que es posible utilizar la aproximación de Boussinesq al presente problema de convección natural.

3.3. Ecuaciones de conservación para el flujo de convección natural en un cilindro de sección circular en un marco de referencia inercial

En esta sección se presentan las ecuaciones de conservación bajo la aproximación de Boussinesq que gobiernan el movimiento de un fluido newtoniano e incompresible contenido en un recipiente cilíndrico de diámetro $2R$ y altura L . Las ecuaciones se escriben en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) pues esta descripción se ajusta a la geometría del recipiente.

De acuerdo a la discusión de la sección anterior, la aproximación de Boussinesq es válida para nuestro análisis y por tanto sólo presentaremos las ecuaciones aproximadas. En análisis posteriores será más conveniente usar un escalamiento alternativo al presentado en la sección anterior. Por esta razón, usaremos un escalamiento que distingue entre las direcciones radial y axial y que utiliza el tiempo difusivo como escala de tiempo. Adicionalmente, es pertinente comentar que,

resultará simple comparar nuestros resultados con los de otros grupos debido a que muchos estudios disponibles en la literatura favorecen el conjunto de escalas presentado en esta sección.

Las variables adimensionales están definidas por:

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad t^* = \frac{t}{L^2/\nu}, \quad (u_r^*, u_\theta^*, u_z^*) = \frac{(u_r, u_\theta, u_z)}{\kappa/L}, \quad (3.16)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho_o \nu \kappa / L^2}, \quad T^* = \frac{T}{T_c - T_f}$$

En las ecuaciones u , p , ρ y T denotan velocidad, presión, densidad y temperatura respectivamente. Los tres parámetros que describen el flujo son: la razón de aspecto y los números de Rayleigh y Prandtl definidos por las siguientes expresiones:

$$A = R/L,$$

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta TL^3}{\kappa\nu} \quad (3.17)$$

y

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}.$$

La difusividad térmica es κ y ν es la viscosidad cinemática. La aceleración de la gravedad es g , el coeficiente de expansión térmica para un estado de referencia es $\alpha = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho}{\partial T}|_o$ y $\Delta T = T - T_o$.

Debido a que el fluido de trabajo que estudiaremos será agua, usaremos la siguiente ecuación de estado:

$$\rho = \rho_o(1 - \alpha\Delta T). \quad (3.18)$$

Omitiendo los asteriscos de las variables adimensionales, las ecuaciones de conservación son:
Conservación de masa

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + A \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3.19)$$

Conservación de cantidad de movimiento:
dirección en r :

$$APr \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + Au_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -Pr \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{Pr}{A} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (3.20)$$

dirección en θ :

$$APr \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + Au_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = -Pr \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{Pr}{A} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad (3.21)$$

dirección en z :

$$APr \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + Au_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \quad (3.22)$$

$$-APr \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{Pr}{A} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + ARaPr \Delta T.$$

Conservación de energía:

$$APr \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + Au_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (3.23)$$

Las condiciones de frontera del sistema son: una velocidad nula en todas las fronteras rígidas y $T = T_c$, $T = T_f$ en la frontera inferior y en la superior, respectivamente. La pared lateral del cilindro se considera adiabática, esto es $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$.

Capítulo 4

Sistema experimental

Este capítulo trata sobre el sistema experimental. En las secciones iniciales, discutimos el diseño de cada uno de sus componentes y sus características así como la instrumentación. La metodología empleada en los experimentos, es presentada en la última sección. El diseño, construcción y calibración del sistema se presentó en un artículo de instrumentación, una copia de este reporte se encuentra en el apéndice B.

4.1. Criterios de diseño

En esta primera sección trataremos los aspectos particulares de diseño y requerimientos que deberá cumplir el sistema experimental. El propósito principal tanto en el diseño como en la construcción del sistema fue obtener un sistema rotatorio versátil que permitiera realizar una gran variedad de experimentos. Como una idea inicial en el diseño del sistema experimental se concibió un esquema idealizado en donde, el movimiento convectivo del fluido se genera por el gradiente de temperatura ∇T en el interior del recipiente que se localiza a una distancia R del eje vertical central que gira con una velocidad angular Ω . En este caso ideal, durante el movimiento de rotación el contenedor se alinea horizontalmente con el brazo de giro, tal como se muestra en la figura 4.1. Cada parcela de fluido está sometida a la fuerza centrífuga $\Omega^2 R$ e idealmente, la acción de la fuerza de gravedad g es nula durante el movimiento. En condiciones reales este arreglo no se puede obtener debido al efecto de la aceleración de la gravedad g . Para obtener un efecto semejante al caso ideal, el brazo de giro tendría una longitud grande y/o el sistema debería girar a una alta velocidad angular para que el contenedor se alinee con el brazo de giro.

Como una alternativa de diseño para obtener condiciones similares al arreglo ideal, en la figura 4.2 se muestra, una configuración geométrica donde el brazo de giro del sistema rotatorio se encuentra unido con el recipiente que contiene al fluido por medio de un rodamiento que funciona como unión. De esta manera, cuando el sistema rotatorio se encuentre en movimiento el recipiente se alineará por sí mismo con el vector a . Este vector resultante es la suma de la aceleración centrífuga $\Omega^2 R$ y la aceleración de la gravedad g . En estas condiciones a es paralelo al vector del gradiente de temperatura ∇T . En este arreglo geométrico, el fluido en el interior del recipiente sólo tiene un efecto adicional originado por la fuerza de Coriolis.

En el capítulo anterior mencionamos que los parámetros adimensionales más relevantes de la convección natural rotatoria son el número de Prandtl Pr , el número de Rayleigh Ra y el número de Taylor Ta [84]. Uno de nuestros propósitos es diseñar y construir un sistema rotatorio que sea lo más versátil posible. Con esta idea en mente consideramos como criterio de diseño los rangos más amplios de los números de Prandtl, Rayleigh y Taylor que sean técnicamente posibles. Las propiedades físicas de los fluidos expresados en el número de Prandtl no determinan criterios de diseño importantes. Podemos afirmar que en la centrífuga se puede experimentar con fluidos de número de Prandtl arbitrario.

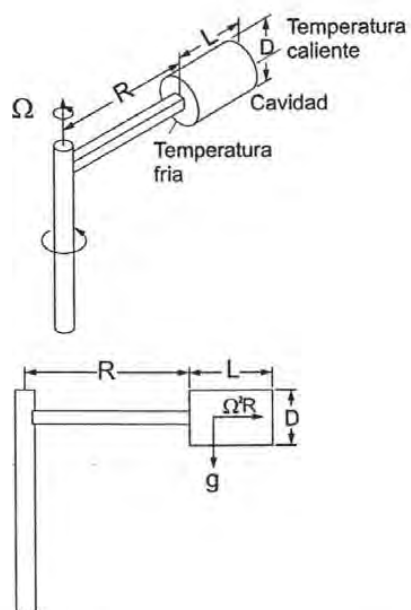


Figura 4.1: Arreglo idealizado en un recipiente de convección natural

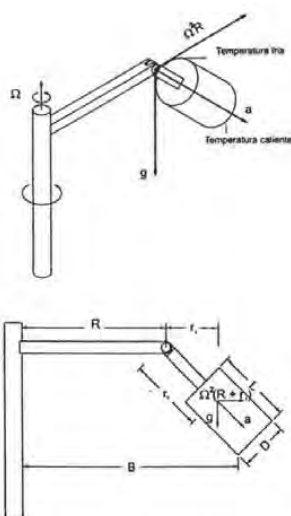


Figura 4.2: Arreglo geométrico para la observación de la influencia de la fuerza de Coriolis en una centrífuga.

Tabla 4.1: Parámetros adimensionales principales.

Parámetro	Definición	Rango
Prandtl Pr	ν/κ	10^{-2} - 10^2
Rayleigh Ra	$g\alpha\Delta TL^3/\nu\kappa$	10^5 - 10^7
Taylor Ta	$4\Omega^2 L^4/\nu^2$	$0 - 10^9$
Froude Fr	$(\Omega^2 R/g).(L/R)$	0 - 10^{-1}
Rayleigh rotacional Ra_r	$a\alpha\Delta TL^3/\nu\kappa$	$10^5 - 10^8$

La información disponible sobre el comportamiento del flujo de convección natural en cavidades indica que se han observado cambios cualitativos cuando la cavidad se hace rotar a una velocidad angular tal que el número de Taylor está entre 0 y 10^9 [15,59]. Considerando que la altura mínima del recipiente es de 2 cm para permitir una visualización del patrón de flujo adecuada y suponiendo que la viscosidad cinemática del fluido es del orden de 10^{-5} m²/s (por ejemplo para agua a 20°C), concluimos que la tasa de rotación requerida para cubrir el rango completo del número de Taylor es de 40 rad/s (301 rpm)

Debido a dificultades técnicas en la construcción de una centrífuga capaz de girar a 40 rad/s, se decidió reducir la velocidad angular máxima a 9 rad/s (86 rpm). Esto nos permite alcanzar un número de Taylor de 6×10^7 .

4.2. Dispositivo experimental

El dispositivo experimental consiste de una centrífuga cuyas características principales son un radio de giro de 1.5 m y una velocidad máxima de 86 rpm (9 rad/s). En el extremo de cada uno de los brazos se sujetan dos canastillas respectivamente. Una de ellas es un contrapeso y la otra contiene en su interior un pequeño laboratorio en donde se realizan los experimentos de convección natural. La construcción del dispositivo se realizó en el Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CIADET) anteriormente Centro de Instrumentos de la Universidad Nacional Autónoma de México. La centrífuga se ubica en el laboratorio de Termociencias del Centro de Investigación en Energía CIE-UNAM.

4.2.1. Componentes principales

Los principales elementos del dispositivo experimental son los componentes fijos y los rotatorios, dos canastillas, un puente de acceso, una protección o barandal de seguridad y una cimentación especial. En esta sección describiremos las principales características geométricas, mecánicas y de construcción de las partes que componen la centrífuga.

Elementos fijos

Los componentes no rotatorios o fijos de la centrífuga son la base, el sistema de transmisión de potencia mecánica integrado por los rodamientos, las bandas y el motor, además de la estructura o el soporte central. Todos estos elementos se muestran en la figura 4.3.

Base La base de la centrífuga es una placa metálica de acero de 0.6 m de ancho, una longitud de 1.2 m y un espesor de 6×10^{-3} m. Esta placa está sujeta a la losa de la cimentación mediante 6 taquetes de expansión de alta resistencia cuyo diámetro es 9.25×10^{-3} m (3/8") y una longitud 7.6×10^{-2} m (3"). En la placa se encuentran anclados mediante tornillos de alta resistencia, el soporte central de la centrífuga y el motor.

Sistema de transmisión de potencia El sistema de transmisión de potencia mecánica está compuesto por dos bandas y dos poleas. Una característica atractiva de este sistema de transmisión es la reducción de vibraciones al mínimo cuando la centrífuga se encuentra en operación. El tipo de banda utilizado es B-40 de sección trapezoidal que absorbe choques y opera con eficiencias del 70 – 90 %. Este tipo de banda puede operar a bajas presiones del rodamiento. La transmisión utiliza un acoplamiento flexible de zamak. El sistema de transmisión tiene dos poleas de aluminio con un diámetro de 0.152 m (6") que se fijan al eje de rotación con una cuña doble f.

Motor La centrífuga gira impulsada por un motor de 1 HP de corriente alterna trifásico. Este dispositivo desarrolla un torque máximo de 42.35 Nm (1260 lb plg) a 1750 rpm. Las características eléctricas del motor son (208-230)/460 V y 4.2/2.1 A en el estator. Para el control de la velocidad del motor se utiliza un inversor digital (VS mini C series) con un rango de frecuencia de 0 a 400 Hz. [85]. Mediante dos bandas y dos poleas de aluminio fijas al eje del motor, se transmite el movimiento a dos poleas de aluminio montadas en el extremo final de la flecha central de la centrífuga.

Soporte central La estructura del soporte central se construyó de tubos de acero al carbón de 0.025 m² (1" × 1") de sección transversal rectangular. Este módulo es un prisma de 0.4 m × 0.4 m × 0.6 m y está anclado a la placa de acero que sirve de base a todo el sistema experimental. En su parte superior se localiza una placa de acero en la que se ajusta un rodamiento cuyo diámetro es 0.076 m (3"). En su parte inferior se localiza el sistema de transmisión de potencia mecánica.

Componentes rotatorios

Los elementos rotatorios del sistema son básicamente: una estructura rotatoria y dos canastillas.

Estructura rotatoria La estructura rotatoria consiste de una flecha y cinco módulos: el módulo central, dos módulos intermedios y dos módulos terminales que se localizan en los extremos de la estructura. La flecha es de acero 4140 y tiene un diámetro 0.101 m (4") y 1.10 m de longitud. Se ubica verticalmente en el soporte central y está apoyada por dos rodamientos cónicos de 0.0762 m (3") de diámetro que trabajan con cargas axiales y radiales. Los rodamientos se encuentran separados a una distancia de 0.328 m. El diámetro del extremo inferior de la flecha se redujo hasta 0.038 m (1.5") para un buen ajuste con las poleas y en el rodamiento inferior.

Todos los módulos que integran la estructura rotatoria están fabricados con tubos de fierro tubular de 0.025 m × 0.025 m (1" × 1") de sección transversal rectangular. Los módulos intermedios y de los extremos se encuentran sujetos a los lados opuestos de la estructura del soporte central. Están unidos mediante empalmes y tornillos Allen de acero con diámetro de 7.9×10^{-3} m (5/16") y tuercas de seguridad. Los empalmes están soldados al tubular por medio de soldadura E6013 de eutectic cuya resistencia a la tracción es 4.137×10^8 N/m² (60 000 psi). El módulo central es un prisma rectangular de 0.4 m × 0.4 m × 0.4 m y los módulos intermedios y terminales tienen una geometría trapezoidal, tal como se muestra en la figura 4.4. La dimensión transversal mayor de los módulos intermedios es de 0.4 m × 0.4 m y se ajusta al módulo central. Su sección transversal más pequeña es de 0.4 m × 0.14 m y se encuentra en contacto con la sección transversal mayor de los módulos terminales. Los módulos terminales tienen una sección transversal mayor de 0.4 m × 0.14 m y una sección transversal menor de 0.4 m × 0.09 m. La longitud de los módulos terminales e intermedios es de 0.645 m. En los extremos de los módulos terminales se localizan unas placas de acero de 0.11 m (4.33") de ancho, 0.20 m (7.87") de largo y 0.55 m (0.014") de espesor. En ellas se alojan dos rodamientos de pared con 0.028 m (9/8") de diámetro, respectivamente. A su vez, estas placas soportan una flecha de acero de 0.53 m de longitud y un diámetro de 0.028 m (9/8"). Este último elemento permite la rotación horizontal de las canastillas localizadas en los extremos de los brazos de la centrífuga.

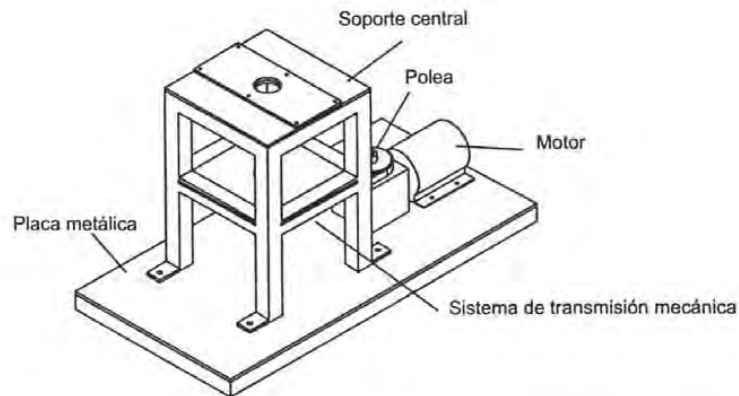


Figura 4.3: Elementos no rotatorios de la centrífuga. Los rodamientos y las poleas se encuentran abajo del soporte central.

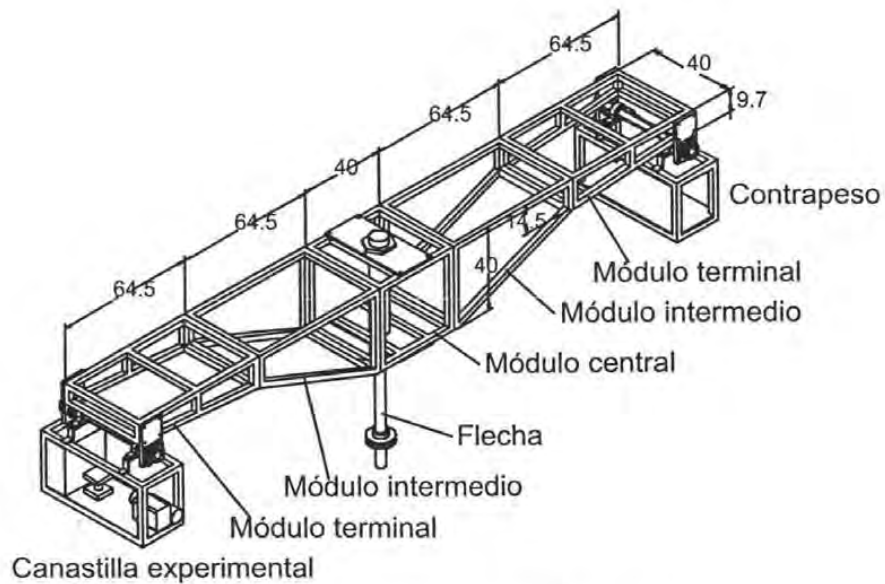


Figura 4.4: Estructura rotatoria de la centrífuga.

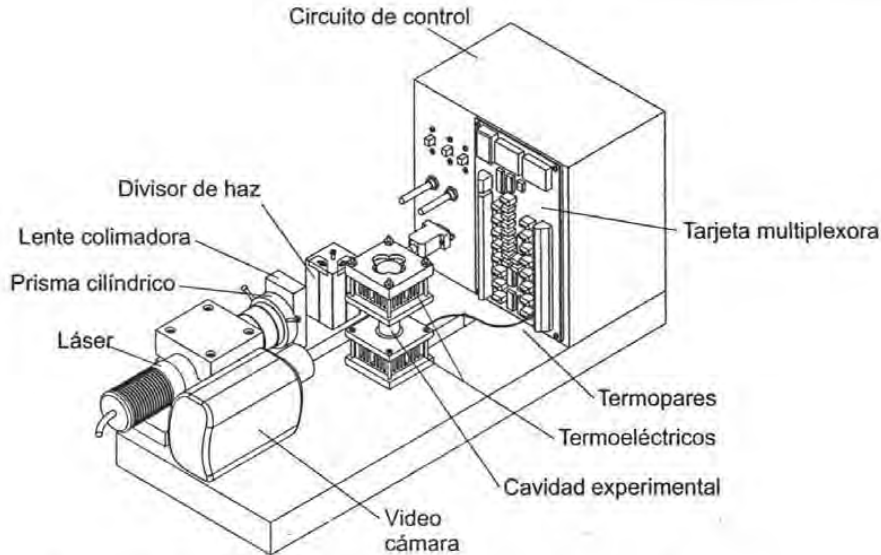


Figura 4.5: Distribución de los componentes en la canastilla experimental.

Canastillas En los extremos de los brazos de la centrífuga, se localizan sendas canastillas rectangulares. Uno de ellas sirve de contrapeso y la otra es la canastilla experimental. Las canastillas están construidas con ángulo de acero DEXION y tienen dimensiones iguales : 0.22 m ancho, 0.55 m de longitud y 0.28 m de altura. Las bases de las canastillas se fabricaron de madera y en la canastilla de contrapeso se agregaron paredes de este mismo material. Las canastillas se unen a los brazos de la estructura rotatoria mediante una flecha horizontal y dos chumaceras de piso de 0.0254 m (1") de diámetro. Los rodamientos se encuentran separados 0.22 m uno del otro y están sujetas con tornillos de alta resistencia al techo de la canastilla. Las chumaceras funcionan como una junta rotatoria que permite que las canastillas giren libremente alrededor de un eje horizontal. Cuando la centrífuga se encuentra en movimiento, las posiciones de las canastillas adquieren una cierta inclinación que depende de la acción simultánea de las fuerzas centrífuga y de gravedad. La canastilla de contrapeso consiste de tres placas de hule de 0.10 m × 0.265 m × 0.019 m que están fijadas al piso y a una de las paredes de la canastilla mediante tornillos. La masa aproximada de las canastillas es de 9.8 kg. La canastilla experimental es un pequeño laboratorio, donde se localizan, la videocámara, la cavidad experimental, el circuito de control y el arreglo óptico. El piso de madera se desbastó para fijar la videocámara y la cavidad experimental. El arreglo óptico que se utiliza para obtener el plano de iluminación y observar el patrón de flujo en el interior de la cavidad experimental está compuesto por un láser, un prisma cilíndrico, una lente y un divisor de haz de geometría cúbica. Todos estos elementos están fijados mecánicamente a una montura de madera que se asegura al piso de la canastilla. La figura 4.5 muestra la distribución espacial de estos dispositivos.

4.3. Instrumentación

Dada la naturaleza rotatoria del sistema, la instrumentación se diseñó para que funcionara de manera autónoma y con un mínimo requerimiento de ajustes. Con este fin, los dispositivos electrónicos auxiliares, los equipos eléctricos y mecánicos, tales como una fuente de potencia eléctrica, un CPU y otros se montaron sobre la sección rotatoria de la centrífuga.

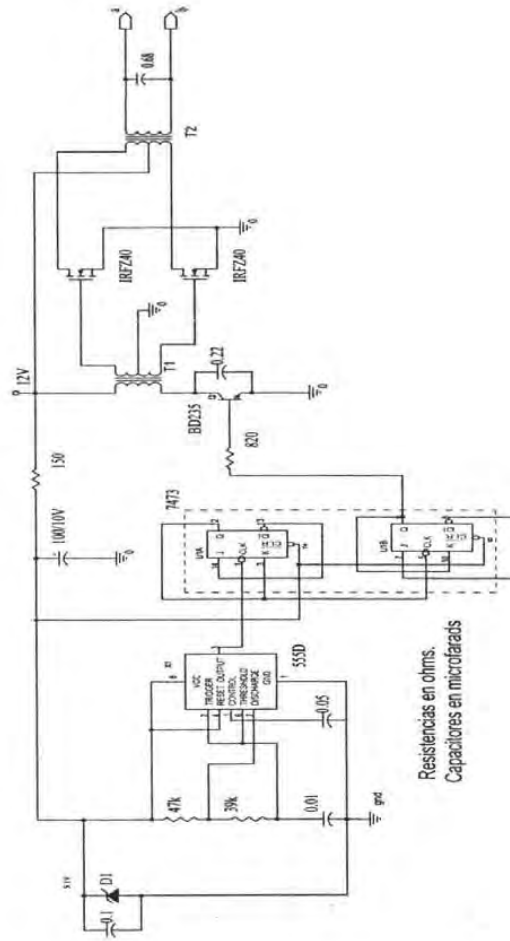


Figura 4.6: Circuito electrónico del convertidor CD/CA.

Fuente de potencia

Para evitar el uso de anillos deslizantes para suministrar energía al sistema experimental y al sistema de intercambio de la información experimental con el laboratorio, se consideró armar una fuente de potencia eléctrica en la estructura rotatoria de la centrífuga. Esta estrategia en el diseño de la centrífuga tiene como principal ventaja contar con una fuente de potencia muy versátil que soporte las demandas de energía presentes y futuras de varios instrumentos usados en la adquisición de datos y en la visualización. Los instrumentos que requieren energía eléctrica son varios: un CPU central a bordo de la centrífuga que tienen un consumo de potencia de $\sim 50W$, una fuente de energía del láser para el sistema de visualización que tiene un consumo de potencia aproximado de $30 W$, los dispositivos termoeléctricos requeridos para mantener un gradiente de temperatura constante a través de la cavidad tienen un consumo de potencia de $8 W$ y el circuito de control para los termoeléctricos que consume aproximadamente $2 W$. Al considerar el consumo de energía de estos instrumentos y el consumo a futuro de otros dispositivos que se pudieran requerir, se estimó una demanda de potencia total de aproximadamente $200 W$. La fuente de potencia está constituida por un arreglo en paralelo de dos baterías de plomo-ácido de $12 V$ y $60 Ah$ de capacidad y de un convertidor CD/CA . La fuente se ubica cerca del eje de rotación de sistema rotatorio, específicamente, en el módulo central. Con estos parámetros de diseño y considerando una autonomía de tres horas, se diseñó el convertidor de CD/CA para alimentar los dispositivos que operan con corriente alterna. En la figura 4.6 se muestra el circuito electrónico del convertidor. El sistema de corriente alterna está compuesto básicamente por un oscilador RC , que comprende de un circuito integrado $U2(555)$, dos resistencias R_1 y R_2 y un capacitor C_4 . La magnitud de estos componentes determinan la frecuencia de oscilación. El circuito integrado $U1(7473)$ divide la frecuencia de señal de salida del $U2(555)$ en un factor de cuatro con un ciclo de operación del 50%. Además el circuito integrado $U1$ controla el transistor bipolar BTJ (*bipolar transistor junction*) Q_1 acoplado al devanado primario del transformador T_1 en una configuración de emisor común. Este dispositivo y el capacitor C_1 son una carga resonante del circuito colector del transistor. Este arreglo tiene dos señales con fase opuesta y un tiempo de retardo bastante prolongado para evitar una conducción eléctrica simultánea en los transistores MOSFET M_1 y M_2 . Al conectarse al devanado secundario del transformador T_2 , los transistores operan como amplificadores de potencia incrementando el voltaje a $125 V_{ca}$, el principal funcionamiento del condensador C_5 es suavizar la forma de onda del voltaje de salida. En el diseño de este convertidor se consideraron dos puntos importantes. En contraste con la señal de voltaje proporcionada por la línea de corriente alterna que es una onda senoidal de $125 V_{rms}$ con una frecuencia de $60 Hz$, la señal proporcionada por el convertidor CD/CA es una onda cuadrada de $160 V_{rms}$ a $240 Hz$. Esta forma de onda se seleccionó para permitir que los transistores de potencia trabajaran en un modo de corte y saturación y así minimizar la disipación de calor del dispositivo. El otro detalle del diseño consiste en que el voltaje y la frecuencia de salida se ajustaron a la entrada capacitiva de la fuente de potencia del CPU para mejorar la conversión y la transferencia de potencia. En la parte superior del módulo central se colocó un armazón de madera para alojar los instrumentos de mayor volumen requeridos en la centrífuga. El armazón cuenta con dos secciones independientes, una de ellas fija y tiene una geometría circular con un área de $0.126 m^2$ y una altura $1.2 m$. Esta sección se encuentra anclada al techo del laboratorio. Los instrumentos que se localizan en esta estructura son una videogradora que recibe la señal de la cámara de video montada en una de las canastillas y la amplifica para enviarla posteriormente a un monitor de TV y permitir observar el patrón de flujo en tiempo real. La señal de video procede de una antena UHF de geometría circular de $0.05 m$ de diámetro a través de un cable de $75 Ohm$ en un rango de frecuencia de 60 a $72 MHz$. La sección rotatoria del armazón tiene una geometría rectangular con un área $0.16 m^2$ y una altura de $1.1 m$. Tiene cinco entrepaños, los dos superiores se encuentran vacíos para un uso a futuro. En los tres restantes se colocaron: en la primera división, la fuente de potencia del láser (primer entrepaño), en el segundo entrepaño: el CPU (unidad del procesador central) y el disco duro conectado al CPU (tercer entrepaño). El CPU es un Pentium II y mediante una

tarjeta PCLab 818L se capturan los datos de temperatura de la cavidad experimental.

Aceleración

Una de las variables importantes para caracterizar y monitorear el funcionamiento de la centrífuga es la aceleración. Es de interés medir esta variable en algunos puntos del dispositivo. Cuando la centrífuga se encuentra en reposo la única aceleración existente es la gravedad g . Al iniciar el movimiento de rotación, las canastillas localizadas en los extremos de la estructura cambian su posición con respecto al estado de reposo. Esto es, al girar se inclinan con un cierto ángulo θ con respecto a la horizontal. El vector de aceleración resultante es a que representa la suma de los vectores correspondientes a la aceleración centrífuga $\Omega \times \Omega \times R$ y la aceleración de la gravedad g . El sensor proporciona una respuesta de frecuencia óptima para un amplio rango de aceleraciones. Los sensores utilizados son acelerómetros uniaxiales K-BEAM marca Kistler del tipo 8303A50, con sensibilidades de aproximadamente 19 mV/g a 30 Hz , 3 g rms y un voltaje de polarización de 2.5 V . Otras características particulares de estos transductores son una sensibilidad transversal de aproximadamente del 1.0%, sus rangos de referencia son de $\pm 50 \text{ g}$ y su impedancia de salida es $\leq 500 \Omega$. La sensibilidad exacta varía levemente con el dispositivo en particular [86]. Es posible seleccionar la señal de salida de los acelerómetros en distintas opciones como: un voltaje bipolar, un voltaje diferencial o una señal de corriente. Su respuesta no varía con respecto a los efectos térmicos y trabajan con una tasa de ruido mayor a 100 dB .

Los acelerómetros están contruidos con un sensor micromaquinado de capacidad variable. Este elemento consiste básicamente de una masa inercial de silicio de dimensiones pequeñas y tratada químicamente. La masa sísmica del acelerómetro se posiciona entre las dos placas que actúan como electrodos. Cuando la masa se deflecta por la aceleración, ocurre un cambio en la magnitud de la capacitancia entre estas dos placas y se produce una señal de salida proporcional a la aceleración. En aquellos casos en donde existen altas aceleraciones o choques, el movimiento de la masa se encuentra limitado por la distancia entre estas dos placas. El espacio entre las placas se llena de aire que opera como amortiguador de la masa del silicio. Para monitorear la centrífuga se utilizaron tres acelerómetros. El primero de ellos se localiza en el módulo externo de la estructura rotatoria, a una distancia de 1.472 m del eje de rotación. Está orientado a 90° del vector de aceleración de la gravedad. Este dispositivo mide únicamente la aceleración centrífuga. El segundo dispositivo se orienta paralelamente a g y se ubica en la parte superior de la canastilla. Cuando la centrífuga se encuentra en reposo, la distancia horizontal al eje de rotación es de aproximadamente 1.445 m y la distancia vertical al eje de rotación de la canastilla es 0.031 m . Un tercer sensor se colocó en la canastilla experimental, en la posición que se encuentra el recipiente experimental. Se alineó al mismo eje vertical del segundo acelerómetro con una distancia entre ellos de 0.22 m . El segundo y tercer acelerómetro miden únicamente la aceleración terrestre cuando no existe rotación. En el momento en que la centrífuga gira, la canastilla se inclina libremente y los acelerómetros miden la aceleración resultante a que es la suma vectorial de g y la aceleración centrífuga $\Omega \times \Omega \times R$.

4.4. Cimentación

El sistema rotatorio cuenta con un tipo de cimentación especial para soportar el peso y amortiguar la vibración originada por otros dispositivos del laboratorio. El área de cimentación es un rectángulo de 1.10 m de ancho, 1.60 m de largo y una profundidad de 0.18 m . Está recubierta por una capa de cemento y una capa de impermeabilizante. La cimentación consiste de dos capas alternadas de neopreno, unisel y corcho. El espesor de la lámina de neopreno es $4.7 \times 10^{-3} \text{ m}$, el de unisel de $2.5 \times 10^{-2} \text{ m}$ y del corcho de $6 \times 10^{-3} \text{ m}$ con un área de 1.76 m^2 . Sobre ellas se vació una losa de concreto de 0.11 m de espesor con una área de 1.5 m^2 . En el interior de la losa se ahogaron seis tuercas de 0.0134 m ($17/32''$) de diámetro para sujetar a la placa de acero

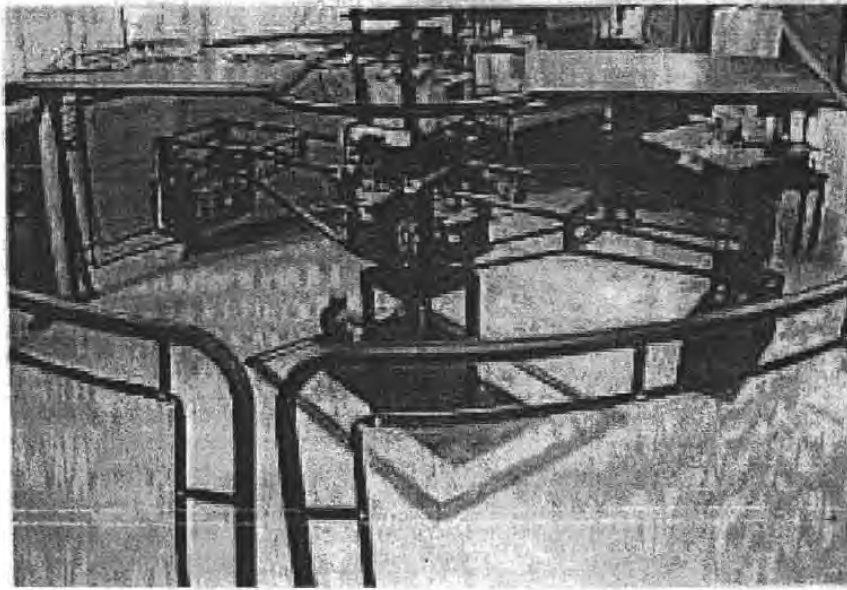


Figura 4.7: Fotografía de la centrífuga.

que sirve de base al sistema rotatorio. La instalación eléctrica requerida para alimentar el motor se colocó en el interior de la losa.

4.5. Barandal de seguridad y puente

Con el propósito de proteger al personal de laboratorio se construyó alrededor de la centrífuga una cerca de seguridad que está dividida en cuatro secciones. Cada una de ellas tienen una altura de 1.37 m y 2.29 m de ancho y descansan sobre dos zapatas de acero tubular que se encuentran ancladas al piso del laboratorio. El material usado en su fabricación es acero tubular de 0.052 m (2") de diámetro. El área interna de cada sección tiene una geometría rectangular formada por el marco tubular que se cubre con una malla de acero inoxidable de 0.01 m (3/8 ") de espesor. Estos accesorios protegen el resto del área del laboratorio de posibles accidentes. También se construyó un puente para tener acceso a los instrumentos que se encuentran en la estructura central. Las dimensiones del puente son 0.89 m de ancho, 1.54 m de altura y una longitud de 4.6 m. Para ascender al puente se construyó una escalera con cuatro escalones en cada uno de los extremos del puente. En la parte superior del puente se encuentran dos plataformas de madera que soportan una carga de 100 kg. La figura 4.7 muestra una fotografía donde se muestra una vista completa de estos componentes, en ella se puede apreciar el puente de acceso, la estructura central, la instrumentación, la fuente de potencia y las canastillas.

4.6. Cavity experimental

La cavity experimental tiene una geometría cilíndrica y está construida de borosilicato (vidrio). Este material tiene una baja expansión térmica, un bajo costo y una transmisión óptica

Tabla 4.2: Propiedades termofísicas del fluido de trabajo a $20^{\circ}C$

Propiedad	Magnitud
Densidad ρ	994 kg/m^3
Coefficiente de expansión térmica α	$1.8 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Difusividad térmica κ	$1.43 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
Viscosidad cinemática ν	$1.006 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

de 99 % de luz entre 350-2300 nm. Su índice de refracción es $n=1.517$ para una longitud de onda de 589.3 nm. El diámetro interno del recipiente es de 0.017 m y una altura de 0.036 m con un espesor de pared de 1.5×10^{-3} m. A una altura de 0.023 m desde el fondo se localizan diametralmente opuestos dos pequeños capilares de vidrio de 5×10^{-3} m de diámetro y una longitud de 7×10^{-3} m, que sirven para ubicar los sensores que miden la temperatura del fluido en esos puntos. Las paredes inferior y superior de la cavidad tienen características de diseño similares. Ambas se construyeron con solera de cobre de 6.35×10^{-3} m (1/4") y sus áreas son de 0.36 m^2 . En ambas bases se desbastó en una de sus caras una sección anular de 0.017 m de radio interior y de 0.025 m de radio exterior con una profundidad de 0.0024 m. En estas zonas anulares se alojan los extremos del recipiente y se sellan con un arosello de neopreno para evitar las fugas de fluido hacia el exterior. La otra cara de las bases de cobre se maquinó para alojar totalmente al termoelectrico. En la parte central de esta cara se perforó un orificio de 3.9×10^{-4} m de diámetro con una profundidad de 5.8×10^{-3} m para ubicar un termopar. Este transductor mide la temperatura de la base. El sensor térmico que controla el funcionamiento del termoelectrico se ubicó en una área de 0.00465 m de ancho con 0.0017 m de longitud. Otro termopar se localiza en el centro del termoelectrico en contacto directo con él. Al ajustar la cavidad a las bases superior e inferior, la altura de la cavidad se reduce aproximadamente a 30 milímetros, obteniendo así una razón de aspecto de $A=0.28$. Los dispositivos que mantienen el gradiente de temperatura en el interior del recipiente cilíndrico son termoelectricos que operan bajo el principio del efecto Peltier. Los termoelectricos se localizan en las bases de cobre y tienen una área de contacto de $16 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y un espesor de 3.81×10^{-3} m. Las condiciones de operación dadas por el fabricante para los termoelectricos son: una potencia máxima de 8 W a un voltaje de 12 V_{cd} y operan en un rango de temperatura de $(-79 \text{ a } 79)^{\circ}C$. La alimentación de los termoelectricos se realiza a través del circuito de control (CC), y dependiendo de la temperatura deseada se regula su voltaje de alimentación a través de los potenciómetros del CC [87]. Entre la base de cobre inferior y el termoelectrico se tiene una capa uniforme de pasta conductora de óxido de aluminio de aproximadamente 2 milímetros de espesor que sirve para obtener un calentamiento y/o enfriamiento uniforme en las bases de cobre. En la otra cara del termoelectrico se instaló un intercambiador de calor que tiene como propósito evitar el sobrecalentamiento. El área de este dispositivo es aproximadamente $25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y una altura de 0.02 m. En la parte inferior del intercambiador de calor se colocó un ventilador de 12 V_{cd} , 0.18 A para forzar la circulación de aire a través del intercambiador de calor. El arreglo comprendido por el termoelectrico, el intercambiador de calor y el ventilador es similar en la base superior de la cavidad. Para sujetar todos estos componentes, se colocó en la parte inferior del arreglo una pieza plástica de área ligeramente mayor a los componentes descritos anteriormente. Todas las piezas se sujetan mediante cuatro tornillos de $(1/8" \times 2")$ que atraviesan la base de cobre. En la figura 4.8 se presenta la cavidad experimental.

4.6.1. Fluido de trabajo

El fluido de trabajo seleccionado para los experimentos es agua. Sus propiedades físicas se presentan en la Tabla 4.2.

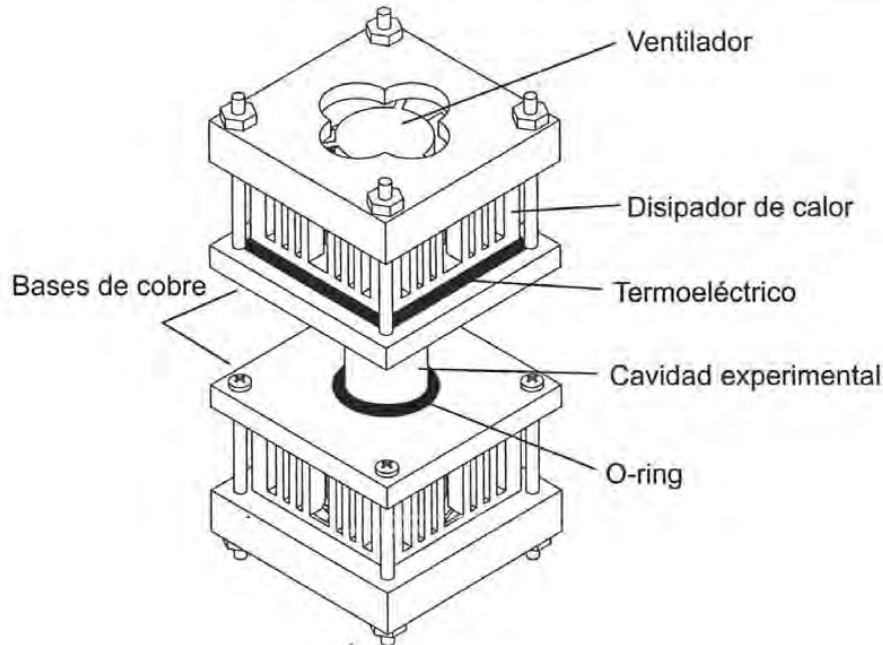


Figura 4.8: Cavidad experimental

4.6.2. Instrumentación de la cavidad

La cavidad experimental cuenta con sensores de temperatura y un arreglo óptico para observar el patrón de flujo en el interior del recipiente y medir su velocidad mediante la técnica de Velocimetría por imágenes de partículas.

Temperatura

Dada la naturaleza de la convección natural dentro de la cavidad es determinante utilizar sensores de temperatura en puntos estratégicos. Estos proporcionan la información necesaria para un análisis posterior. Los sensores de temperatura empleados son termopares de tipo T fabricados con cobre-constantan marca Omega [88]. En la cavidad la temperatura más alta se encuentra en la base inferior y la menor temperatura en la pared superior. Esta diferencia de temperatura se controla continuamente durante todo el experimento. Dado el diseño de la cavidad y la dificultad de medir la temperatura del fluido en su parte inferior sin perturbar físicamente el fluido y causar fugas de fluido hacia el exterior, se procedió a colocar un termopar en un termopozo localizado a la mitad de la cara contraria de la placa donde se asienta el recipiente. Este termopozo se localiza en la mitad de la cara y tiene 3.9×10^{-4} m de diámetro con 5.8×10^{-3} m de profundidad y tiene una separación de 0.55×10^{-3} m de la superficie de la base de cobre. Para medir la temperatura en el interior de la cavidad se localizaron dos termopares a una altura de 0.023 m. Los termopares se ubicaron en dos capilares de vidrio de 0.005 m de diámetro que están diametralmente opuestos. Los sensores se sujetaron con termofil y silicon en el interior del capilar para evitar fugas al exterior y se localizaron a una distancia horizontal de 3×10^{-3} m de las paredes internas del recipiente. Debido a su peso, funcionamiento y el rango de temperatura de operación consideramos que eran apropiados para los experimentos de rotación. Los termoelectricos se probaron con anterioridad para conocer su rapidez de respuesta y una temperatura uniforme en su superficie. Previamente al diseño de la cavidad experimental se probó su rapidez de respuesta y uniformidad de la temperatura

en su superficie a diferentes escalas de temperatura. Se adhirió una lámina de cristal líquido de área similar al termoelectrico. Las laminas de cristal funcionan en distintos rangos de temperatura $25-30\text{ }^{\circ}\text{C} \pm 1.0^{\circ}\text{C}$, $30-35^{\circ}\text{C} \pm 1.0^{\circ}\text{C}$. Los resultados obtenidos mostraron un tiempo de respuesta de 3 s aproximadamente con una uniformidad de temperatura en toda su superficie. Para monitorear la conducta del termoelectrico se colocó un termopar en la cara superior del termoelectrico de la base inferior y otro termopar en la cara inferior del termoelectrico de la base superior. Para medir la temperatura ambiente se colocó un termopar externo a la cavidad a 0.06 m del contenedor cilindrico y sus accesorios.

Circuito electrónico

El circuito electrónico para el control del voltaje de los termoelectricos está dividido en dos secciones: a) el circuito de control y b) el circuito de potencia. El circuito de control tiene como principales componentes un circuito integrado $U_1(35)$ que opera de manera similar a un termómetro. Este circuito integrado monitorea continuamente la temperatura de la cara del termoelectrico más cercano a la pared horizontal de la celda convectiva. Tiene un voltaje de salida que es proporcional a $10\text{ mV}/^{\circ}\text{C}$. Un divisor de voltaje ajustable constituido por las resistencias R_1 y R_3 y el potenciómetro R_2 proporcionan el voltaje de ajuste. El voltaje de salida de este divisor de voltaje se aplica a la entrada del amplificador diferencial $U_2(358)$ que se utiliza como un comparador de voltaje. Las resistencias R_4 , R_5 , R_6 y R_7 con sus condensadores correspondientes determinan la ganancia y el tiempo de respuesta del circuito. En la figura 4.9 se muestra el diagrama electrónico del circuito. La señal de salida de esta sección de control se denomina señal de error y alimenta al transistor de potencia Darlington (Q_1). Este dispositivo controla la corriente que atraviesa al termoelectrico. El voltaje de referencia se ajusta con una resistencia variable y los sensores térmicos $U_1(35)$ se ubican en contacto directo con las caras de los termoelectricos proporcionando una señal de control de entrada.

4.6.3. Visualización

La visualización del patrón de flujo es una herramienta que se utiliza para la descripción de las estructuras del flujo en fluidos. La visualización se realiza por medio de una hoja de luz que se proyecta sobre un fluido con partículas en suspensión. La observación se realiza en ángulo recto con respecto al plano de iluminación. El plano de luz usado tiene un espesor uniforme de $2 \times 10^{-3}\text{ m}$. El arreglo óptico que se emplea para este fin comprende los siguientes accesorios: un láser de estado sólido de 50 mW cuya longitud de onda es $\lambda = 543.5\text{ nm}$, un prisma cilindrico de 0.004 m de diámetro, una lente y un divisor de haz de geometría cúbica de $(0.028\text{ m} \times 0.04\text{ m} \times 0.04\text{ m})$. La fuente del láser se abastece de la fuente de potencia ubicada en la primera división de la estructura central. El láser se fija a la plataforma del piso de la canastilla experimental con una base de madera. Esta plataforma tiene tres secciones, una de ellas es una base de sección cuadrada $(0.075\text{ m} \times 0.075\text{ m} \times 0.078\text{ m})$ con una forma semicircular para sostener el láser. La segunda sección es una base que soporta el lente y la tercera sección es una base rectangular de $(0.04\text{ m} \times 0.04\text{ m} \times 0.063\text{ m})$ que sostiene al separador de haz cúbico. Todas las secciones están fijas a la plataforma. Una videocámara Sony Handycam TR403 se coloca en la canastilla para capturar las imágenes del flujo en el interior de la cavidad. La figura 4.10 muestra una fotografía de la canastilla con los componentes, usados para la visualización. Como se comentó anteriormente la señal de video se transmite a la antena UHF de geometría circular localizada en la parte superior de la estructura central. Los trazadores utilizados para visualizar el flujo dentro de la cavidad son partículas de cristal líquido. Los cristales líquidos son compuestos orgánicos que presentan una conducta intermedia entre un líquido isotrópico y un sólido cristalino no isotrópico. Estos trazadores se producen en forma de suspensión en agua con diámetros de rango de 10 a $15\text{ }\mu\text{m}$ y son fabricados por Hallcrest [89]. Algunos de los resultados preliminares obtenidos con este equipo fueron mostrados en Vargas *et. al.* 2001 y Vargas *et. al.* 2002. [90] [91]

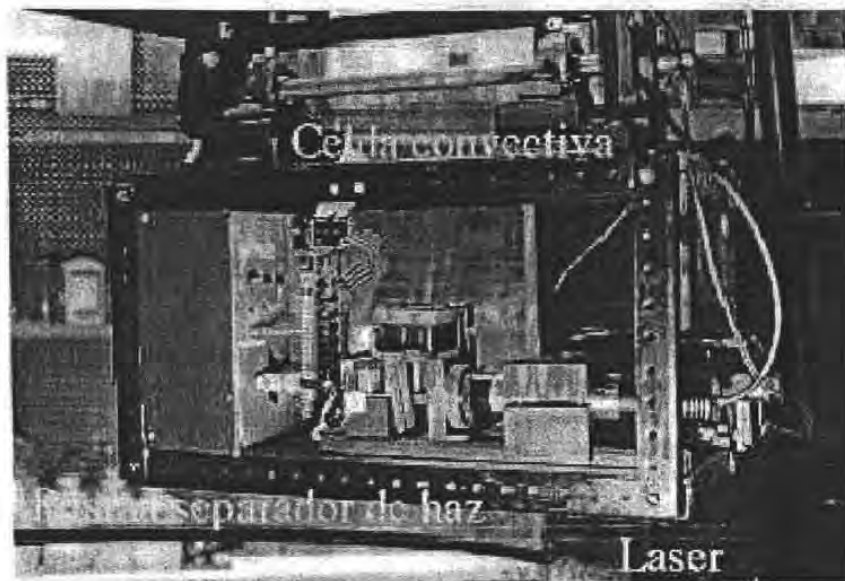


Figura 4.10: Fotografía de la canastilla experimental

4.7. Metodología experimental

En esta sección se comenta la metodología experimental empleada para llevar a cabo las observaciones. Primeramente, se describen las actividades preparatorias previas a la ejecución de un experimento. Posteriormente se presenta el procedimiento utilizado en los distintos ensayos. Todos los experimentos se realizaron con agua como fluido de trabajo siendo el número de Prandtl igual a seis. La cavidad experimental tiene una geometría cilíndrica de sección transversal circular cuya razón de aspecto es $A=0.28$ donde $A=r/h$. Las pruebas experimentales se realizaron para diferentes números de Rayleigh en el rango $0 \leq Ra \leq 10^7$ y para números de Taylor de $0 \leq Ta \leq 10^7$ esto resulta en una aceleración de la gravedad modificada de hasta aproximadamente dos veces la aceleración de la gravedad. Los resultados de las observaciones experimentales se presentan en el capítulo 6.

4.7.1. Actividades previas

Antes de iniciar un experimento en el sistema rotatorio es necesario realizar las siguientes actividades:

1. Se verifica la carga existente en los acumuladores de la fuente de alimentación independiente para lograr una alimentación constante y confiable. Rutinariamente ambos acumuladores se recargan al finalizar cada experimento a carga lenta por varias horas. Una medida preventiva en la operación del acumulador es evitar que el voltaje sea menor al 85 % de su carga máxima.
2. Se prepara una solución del fluido de trabajo y los trazadores para enseguida llenar con ella la cavidad cilíndrica.
3. La cámara de video Sony TR403 se fija mecánicamente a la plataforma, agregando un casete nuevo para la grabación. Se enfoca la cámara y se comprueba que la imagen captada se muestre claramente en el monitor de TV externo.
4. Se enciende la fuente del láser, alimentada por el convertidor de la fuente de potencia. Al encender el láser de estado sólido, se logra un plano de luz que ilumina el interior de la parte

central de la cavidad.

5. Se ajusta la frecuencia de operación del variador de frecuencia, y se determinan los intervalos de tiempo de las etapas de aceleración y desaceleración.
6. Se verifica la comunicación entre la computadora giratoria y la computadora fija para asegurar que la transmisión de datos sea confiable.
7. Se coloca el barandal de protección alrededor de la centrífuga.
8. Se enciende el sistema de adquisición de datos en la PC giratoria con el propósito de corroborar la lectura inicial de los sensores de temperatura, y de detectar fallos. Se ajustan y/o verifican las temperaturas del sistema experimental. Enseguida se desconectan el monitor y el teclado de la PC giratoria en la estructura central giratoria.
9. Se apagan las luces del laboratorio para evitar reflejos en la imagen de video. Se enciende la cámara de video y se inicia la grabación del experimento. Se enciende el circuito de control localizado en la canastilla experimental y el calentamiento de la celda convectiva. Se monitorea visualmente el flujo convectivo a través del monitor de televisión localizado en el puente de la centrífuga. Después de estos pasos se procede a iniciar el experimento.

4.7.2. Procedimiento

La metodología empleada en el desarrollo del experimento está constituida por los siguientes pasos: Después de encender el circuito de calentamiento y a un tiempo en el que el flujo convectivo se encuentre en estado permanente se enciende el variador de frecuencia y por consiguiente el motor, rotando la centrífuga a una velocidad angular Ω_1 . En esta etapa se observa el cambio del flujo convectivo debido a la rotación. Al término de la observación del flujo en rotación se desacelera la centrífuga y se retorna al reposo. El circuito de control continúa operando. Esta etapa tiene una duración similar al intervalo de tiempo previo a la etapa de rotación. Posteriormente se procede a finalizar el experimento apagando los equipos en el siguiente orden: 1) el circuito de control, 2) la cámara de video y 3) el láser. Se encienden las luces del laboratorio y por último se interrumpe el sistema de adquisición de datos. Posteriormente se revisan los datos obtenidos y se envían hacia la computadora fija para tener un respaldo. En ciertos experimentos, después de la primera rotación Ω_1 , la centrífuga permanece en reposo un cierto intervalo de tiempo para posteriormente rotar con una velocidad angular Ω_2 distinta a Ω_1 . Esta nueva etapa de rotación tiene una duración de varios minutos con el propósito de comparar la influencia de dos velocidades de rotación diferentes en el flujo convectivo. Para finalizar este tipo de pruebas se detiene la rotación de la centrífuga tornando al reposo.

En resumen, un experimento consiste básicamente de cinco etapas: 1. Etapa inicial, sin calentamiento $Ra=0$. En esta etapa inicial del experimento se verifican con el sistema de adquisición de datos las temperaturas de todos los sensores. 2. Etapa de flujo convectivo en estado transitorio. Se inicia el calentamiento en la base inferior y por consiguiente la convección natural en el fluido. Las lecturas de los termopares de la base caliente y en contacto al termoelectrónico acusan el incremento en la temperatura. En el monitor de TV externo se observa la evolución del flujo en esta parte del experimento. 3. Flujo convectivo en estado permanente, primera etapa sin rotación. Como se describirá en el capítulo 5, en esta etapa se forma una celda convectiva no axisimétrica que aparentemente presenta una rotación lenta sobre el eje de simetría del contenedor. En esta etapa las lecturas de los sensores de temperatura en las bases superior e inferior proporcionan una diferencia de temperatura constante. 4. Primera etapa con rotación. Una vez que se ha alcanzado el estado permanente, se empieza la etapa de rotación. A partir de este instante, la centrífuga se acelera durante un cierto intervalo de tiempo hasta alcanzar una velocidad Ω_1 constante. Después de un intervalo del orden de diez o quince minutos la centrífuga se desacelera hasta volver al reposo. 5. Segunda etapa de convección sin rotación. En esta etapa, la rotación es nula, sin embargo el calentamiento del fluido continúa. Algunos experimentos finalizan en esta etapa. 6. Segunda etapa con rotación. En algunos experimentos se giró la centrífuga a una velocidad de rotación mayor a Ω_1 . El propósito de esta segunda etapa de rotación es conocer el patrón de flujo

al alterarlo con una mayor velocidad que la anterior, después de la etapa sin rotación. 7. Tercera etapa de convección sin rotación. En esta etapa se desacelera la centrífuga hasta que deja de rotar. El patrón de flujo se modifica hasta formar una celda convectiva. Para concluir el experimento, se interrumpe el calentamiento apagando el circuito de control de los termoelectrónicos.

Capítulo 5

Análisis teórico

5.1. Introducción

En este capítulo y el siguiente se presentan los resultados de las simulaciones teóricas y de las observaciones experimentales de la convección natural en cavidades. Como se explicará en este capítulo, la convección en cavidades cilíndricas es un fenómeno tridimensional y debido a que la técnica experimental sólo permite observar el fenómeno en un corte bidimensional, es imposible presentar una descripción completa a partir solamente de los resultados experimentales en los que tenemos acceso a un solo plano. Por esta razón consideramos más didáctico presentar primeramente los resultados teóricos y posteriormente las observaciones experimentales en el capítulo 6.

De acuerdo con la información contenida en el capítulo 4, recordaremos que todo el estudio se realizó usando agua como fluido de trabajo y dado que la temperatura del agua se mantuvo entre 20°C y 30°C la aproximación de Boussinesq es válida. (Ver capítulo 3). En todas las simulaciones numéricas, consideramos que la cavidad es cilíndrica y que las paredes horizontales se mantienen a temperatura constante, que la temperatura de la pared inferior es mayor que la temperatura de la pared superior. La pared lateral siempre se considerará como un aislante térmico perfecto. En el capítulo 4 se comentaron las razones técnicas que imponen límites a los rangos de parámetros que el equipo experimental nos permite explorar y son: $10^5 < Ra < 10^7$ y $0 < Ta < 10^9$.

5.2. Mapa paramétrico A , Ta y Ra

En el capítulo 3 se presentó la estructura de las ecuaciones de conservación cuya solución describe el flujo convectivo dentro de una cavidad. Ahí se demostró que el sistema está descrito por cuatro parámetros: Los números de Prandtl Pr , Rayleigh Ra , Taylor Ta y la razón de aspecto A .

El estudio de los flujos que se presenta en las secciones 5.3.1 y 5.3.2 fue hecho resolviendo numéricamente las ecuaciones de conservación. En todos los casos presentados la integración se hizo usando el código comercial FLUENT V5.1 con una malla no estructurada conformada por 2×10^4 volúmenes de control, el mayor de estos volúmenes es 1/1748 del volumen total. Tal como se comentó anteriormente, en este capítulo consideraremos que el fluido de trabajo es agua a temperatura y presión ambiente, por lo que el número de Prandtl es una constante igual a 6. El resto de los parámetros adimensionales conforman un espacio tridimensional donde en principio, se puede identificar de manera simple el comportamiento cualitativo del fenómeno.

Estudiar y analizar todos los puntos representativos de este mapa en detalle constituiría una tarea muy laboriosa, debido a lo extenso del espacio de parámetros, y a la riqueza del comportamiento dinámico. Por esto decidimos hacer una selección de casos que ilustran algunos com-

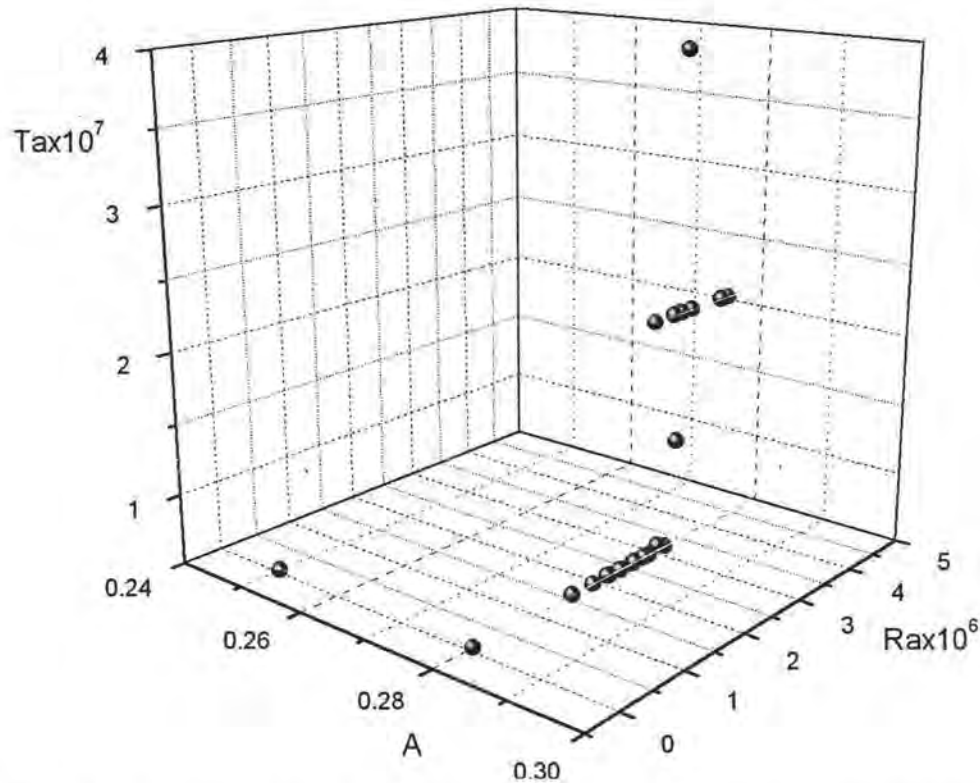
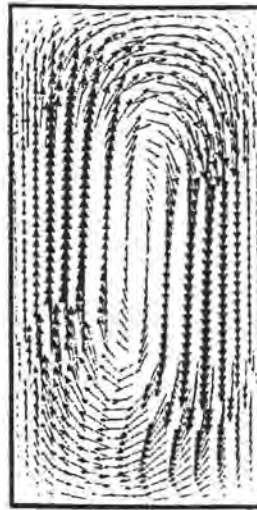


Figura 5.1: Mapa paramétrico Ra , Ta y A , las esferas indican los casos analizados teórica y experimentalmente en este trabajo.

portamientos cualitativos del sistema. La elección se hizo considerando geometrías similares a las usadas en crecimiento de cristales y los intervalos de los parámetros alcanzables con el dispositivo experimental (ver sección 4.1 del capítulo 4). El caso de número de Taylor igual a cero es muy importante pues corresponde a una velocidad de rotación cero y por consiguiente constituye el punto de partida de la descripción del flujo en rotación. Como se describió en el capítulo 2 y se discutirá más adelante, para este caso se cuenta con un acervo relativamente grande de información publicada que incluye la identificación de la posición de las fronteras que dividen los diferentes comportamientos cualitativos en estado permanente. Para el estudio del caso $Ta = 0$, escogimos considerar el número de Rayleigh en el intervalo $5 \times 10^4 - 7.5 \times 10^5$ y la razón de aspecto de 0.28. Si bien este estudio paramétrico es limitado, indica muchas propiedades cualitativas interesantes del flujo. En la figura 5.1 se muestran los casos particulares estudiados en el espacio paramétrico tridimensional (A , Ta , Ra). Los detalles de los flujos encontrados en cada caso se presentan en las secciones siguientes.



→ 29.1

Figura 5.2: Campo de velocidades, $Ra = 5 \times 10^4$. La escala de velocidad está en unidades adimensionales.

5.3. Flujo convectivo sin rotación $Ta=0$

5.3.1. Flujo con $Ra \geq Ra^{c1}$.

En ausencia de rotación y para una región de número de Rayleigh pequeño no hay movimiento. El valor crítico para el cual se inicia el flujo se conoce como el primer número de Rayleigh crítico Ra^{c1} y depende de la razón de aspecto de la cavidad. No es posible dar una descripción breve del patrón de flujo convectivo en cavidades finitas debido a que depende fuertemente de la razón de aspecto, por tanto aquí se describe con detalle solamente el flujo calculado para una razón de aspecto de $A = 0.25$ y un número de Rayleigh $Ra = 5 \times 10^4$. Este valor se encuentra ligeramente arriba del primer número de Rayleigh crítico para esta razón de aspecto ($Ra^{c1} \sim 3 \times 10^4$).

Las ecuaciones que se presentaron en la sección 3.3 del capítulo 3 se resolvieron numéricamente. El tipo de patrón de flujo encontrado para estas condiciones tiene como característica principal una celda única que cubre la mayor parte del volumen, tal como se muestra en la figura 5.2, donde el campo de velocidades se grafica en función de la posición para un plano vertical que incluye el eje de simetría del contenedor.

El valor máximo de la velocidad (adimensional) en la cavidad es aproximadamente 29. Encontramos que esta estructura no es axisimétrica, y dado que las condiciones de frontera son axisimétricas, la orientación de la celda no está definida. Para simplificar la descripción llamaremos AA' , al plano donde la celda más grande es vista de lado (ver la figura 5.2) y el plano BB' es el plano orientado con un ángulo $\pi/2$ respecto al plano AA' . Como puede inferirse de la figura 5.2, en las regiones superior e inferior, las velocidades son prácticamente perpendiculares al plano BB' , mientras que en la parte central las velocidades son aproximadamente dos órdenes de magnitud menores que las velocidades medias en el plano AA' . La orientación de los planos AA' y BB' se puede observar en las figuras 5.3 a), b) y c) en donde están mostradas las isolíneas

de la velocidad vertical en los planos horizontales para distintas alturas $z^* = 0.25, 0.5$ y 0.75 . La estructura tridimensional de la celda convectiva puede ser reconstruida al combinar la información de las figuras 5.2 y 5.3. El patrón de flujo principal es una celda convectiva no axisimétrica cuya geometría está conformada con las paredes curvas del contenedor cilíndrico. La componente del campo de velocidad normal al plano AA' es menor que el 1 % de la componente contenida en el plano y por lo tanto, éste es un plano de simetría. Las parcelas de fluido no cruzan o cruzan muy lentamente al plano AA' y permanecen en el volumen limitado por las paredes y el plano AA' por intervalos de tiempo largos. El campo de velocidad en el plano AA' presenta una simetría definida por la composición de una reflexión alrededor de la línea $z^* = 0.5$ y una reflexión alrededor del eje situado a la mitad de la altura del cilindro ($z^* = 0.5$).

El plano en $z^* = 0.5$ es también un plano de simetría como puede verse en la figura 5.3. Nótese que la distribución de la velocidad en $z^* = 0.25$ (fig 5.3a) es la misma que en $z^* = 0.75$ (ver fig. 5.3c) con diferencia únicamente en la orientación. Los centros de la distribución de la velocidad vertical de las figuras 5.3a y 5.3b no se localizan a la misma distancia del centro del cilindro, lo que indica que la celda se encuentra ligeramente inclinada con respecto a la vertical. Los campos de temperatura de los planos AA' y BB' se muestran en la figura 5.4. El campo de temperatura en el panel izquierdo de la figura 5.4 no es axisimétrico y refleja el hecho de que la convección es el mecanismo de transferencia dominante. En el panel derecho de la figura 5.4 se puede apreciar que el campo de temperatura es sólo una perturbación del campo conductivo, que es consecuencia de una velocidad baja en esa zona.

5.3.2. Flujo con $Ra \geq Ra^{c2}$.

En esta subsección se describe el flujo que se desarrolla usando la misma razón de aspecto que la sección anterior pero con un número de Rayleigh de 7.5×10^5 y un número de Prandtl igual a 6. El patrón de velocidad del flujo para estas condiciones es una celda de gran tamaño similar a la descrita en la sección anterior (figura 5.2), con velocidades del orden de 195. Su principal diferencia es la presencia de dos pequeñas celdas cercanas a las paredes superior e inferior, tal como se muestra en el panel izquierdo de la figura 5.5a. El campo de velocidad es aproximadamente simétrico con respecto a la composición de las reflexiones sobre la línea $z^* = 0.5$ y la línea vertical central. La orientación de la celda no está definida por las condiciones de frontera.

Al observar la estructura del flujo en el plano vertical BB' mostrado en la figura 5.5b, se distingue una gran diferencia con respecto al plano AA'. La estructura está constituida por un sistema de cuatro celdas. En cambio, en el plano AA' se puede apreciar la presencia de una celda principal y dos pequeñas celdas simétricas que se extienden aproximadamente 1/4 del diámetro en las direcciones r^* y z^* . Para $Ra = 5 \times 10^4$ la presencia de estas estructuras verticales es una característica menor del flujo, como se discutirá posteriormente estas estructuras son muy importantes en el rango de $Ra > 10^6$, donde el flujo llega a ser más vigoroso e inestable. Consideramos que la aparición de vórtices en las esquinas es una bifurcación del flujo unicelular y por esta razón en la sección 5.3.3 presentamos una teoría para describir las condiciones que originan estas estructuras.

En las figuras 5.6 a,b,c las isolíneas de la componente vertical de la velocidad en planos horizontales para diferentes alturas $z^* = 0.25, 0.5$ y 0.75 . Las isolíneas de las figuras 5.6a y 5.6c son prácticamente iguales pero con una rotación de π alrededor del eje vertical. En el plano inferior en $z^* = 0.25$, (figura 5.6a) se representa una región en donde la velocidad es descendente y adquiere una forma ovalada en tanto la región con una velocidad ascendente es una zona cóncava en forma de C. En el plano superior, la distribución de los flujos ascendente y descendente se invierten. La estructura tridimensional del flujo puede ser reconstruida con las figuras 5.6 utilizando el plano AA' como un plano de simetría. Las distribuciones de la velocidad vertical para $z^* = 0.25$ y 0.75 son iguales si se hace una rotación de π alrededor del eje del cilindro.

Nótese que en la figura 5.6 las isolíneas obtenidas en $z^* = 0.5$ son simétricas con referencia a las líneas AA' y BB'. Para entender la estructura tridimensional del flujo, presentamos isosuperficies de la velocidad vertical en la región media de la cavidad ($z^* = 0.5$ en la figura 5.7).

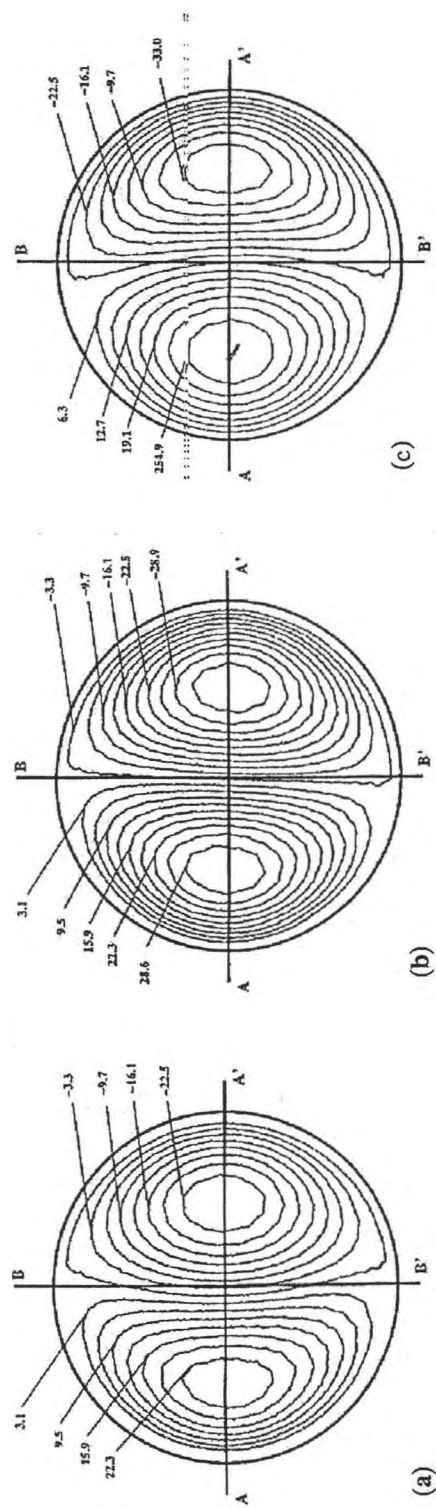


Figura 5.3: Isolíneas de la velocidad vertical en los planos horizontales para distintas alturas. (a), $z^* = 0.25$; (b), $z^* = 0.5$ y (c), $z^* = 0.75$, para $Ra = 5 \times 10^4$.

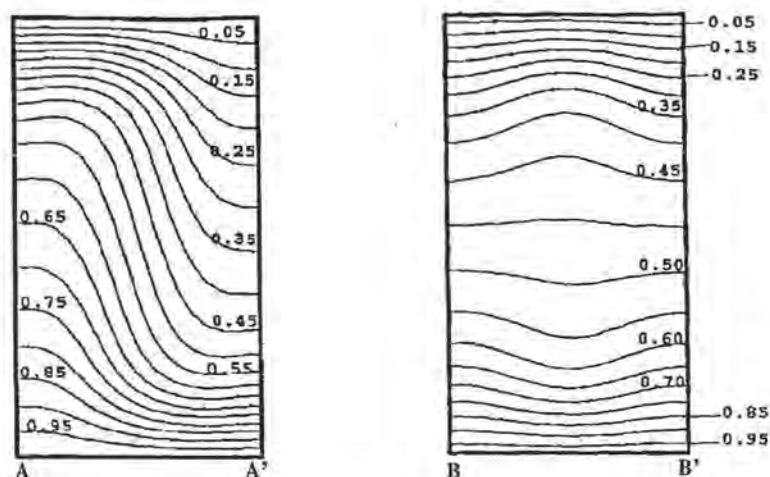


Figura 5.4: Campos de temperatura para los planos AA' y BB' con $Ra = 5 \times 10^4$.

El flujo tridimensional de esta región alejada de las paredes superior e inferior, puede concebirse conformada por dos ramales de flujo, cuya sección transversal cambia en función de la coordenada vertical. En uno de los ramales, el flujo es principalmente ascendente. En tanto en el otro ramal, el flujo es principalmente descendente. La sección transversal del ramal del lado derecho en la figura 5.7 evoluciona a lo largo de la dirección vertical de una forma ovalada a una forma concava. El ramal del lado izquierdo tiene una geometría similar pero en su sección superior el flujo adquiere una dirección descendente. Esto se ilustra en la figura 5.7.

El campo de temperatura correspondiente a las figuras de velocidad 5.5 se muestran en las figuras 5.8a y 5.8b respectivamente. Los gradientes térmicos mayores se localizan cerca de las paredes superior e inferior. La distribución de temperaturas presenta simetrías análogas a las encontradas en las distribuciones de velocidad.

Para describir la estructura tridimensional del flujo con mayor detalle se realizó otro cálculo numérico con un número de Rayleigh de 2.25×10^6 y con un número de Prandtl igual a 6. Los resultados se presentan con mayor detalle en el apéndice C [92]. En estas condiciones el flujo es laminar y permanente. La descripción de los resultados numéricos se hace por medio de los campos de velocidad en los planos verticales que contiene el eje de simetría y se localizan en distintas orientaciones tal como se muestra en la figura 5.9. Como ya se ha observado anteriormente, debido a la simetría de las ecuaciones gobernantes y a las condiciones de frontera, no puede definirse la orientación absoluta del flujo y solamente una orientación relativa es significativa.

Las proyecciones del campo de velocidad en planos seleccionados se muestran en las figuras 5.10a,b,c. En la figura 5.10a donde se muestra el campo de velocidades AA', se puede observar que el patrón dominante es una celda convectiva que gira en sentido a las manecillas de reloj análogo al mostrado en la figura 5.5a. En este caso también se observan dos pequeñas celdas que rotan en sentido contrario a la celda principal y que aparecen en las esquinas superior izquierda y en la esquina inferior derecha respectivamente. El diámetro de las celdas secundarias es aproximadamente $1/6$ del diámetro de la cavidad. En las figuras 5.10b y 5.10c se presenta el campo de velocidades de los planos EE' y FF', respectivamente. La estructura del flujo es similar a la encontrada en el plano AA'. Se puede observar que los centros de rotación de las celdas en los planos EE' y FF' se localizan en una posición inferior y superior respectivamente respecto a su posición en el plano AA'.

En contraste con la descripción anterior, el flujo que se observa en el plano BB' presenta un

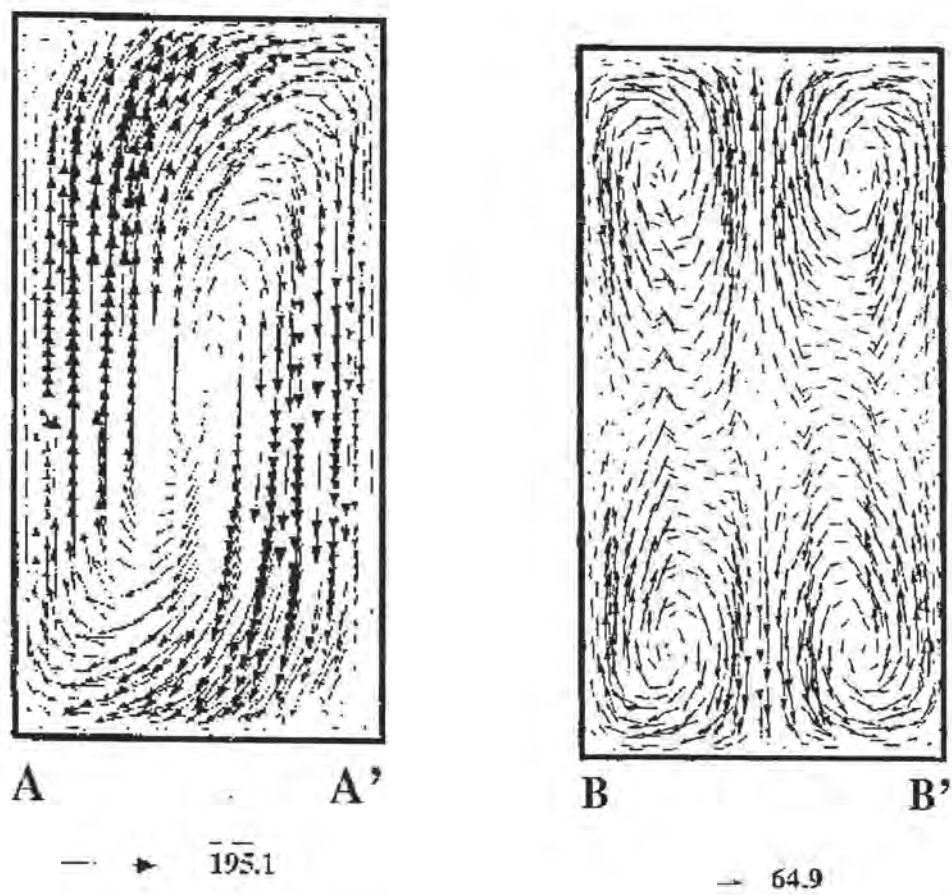


Figura 5.5: Campo de velocidades para los planos AA' y BB', $Ra=7.5 \times 10^5$.

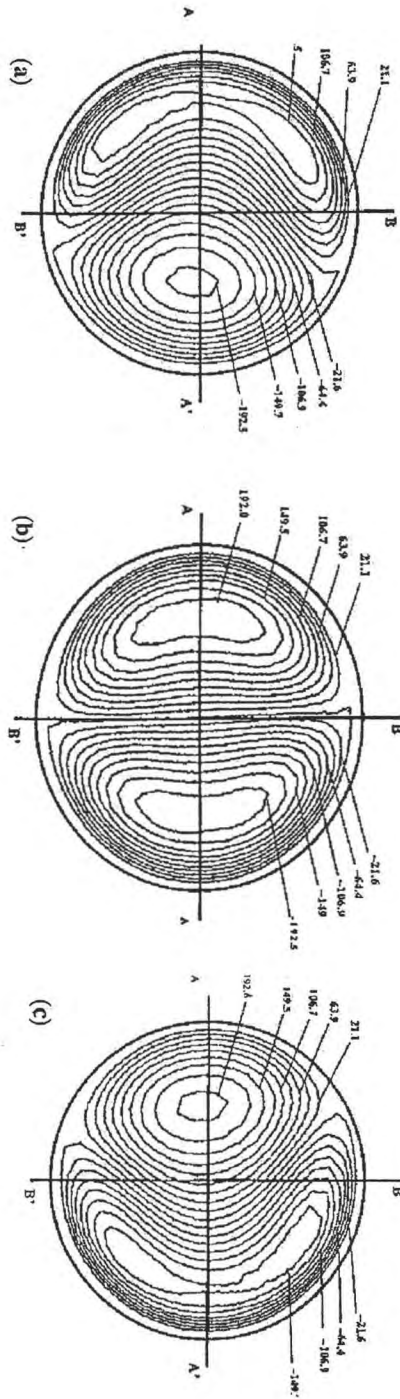


Figura 5.6: Isolíneas de la velocidad vertical en los planos horizontales para distintas alturas. (a), $z^* = 0.25$; (b), $z^* = 0.5$ y $z^* = 0.75$ para $Ra = 7.5 \times 10^5$.



Figura 5.7: Isosuperficies de velocidad vertical para la zona central $0.25 < z^* < 0.75$, $Ra=7.5 \times 10^5$.

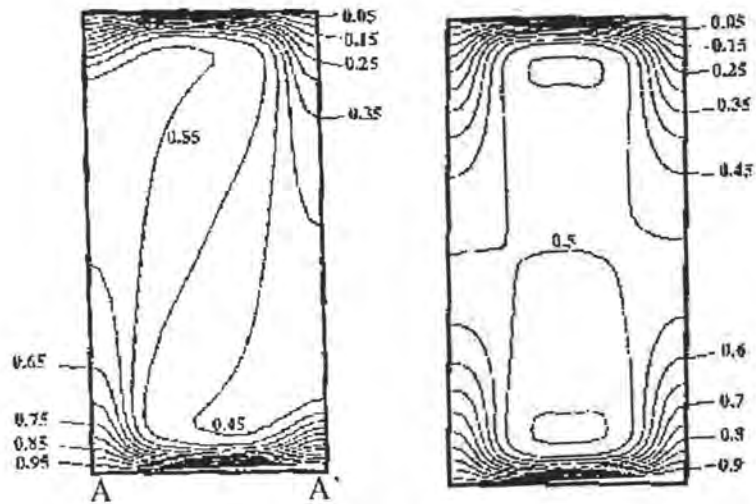


Figura 5.8: Campos de temperatura para los planos AA' y BB' con $Ra = 7.5 \times 10^5$.

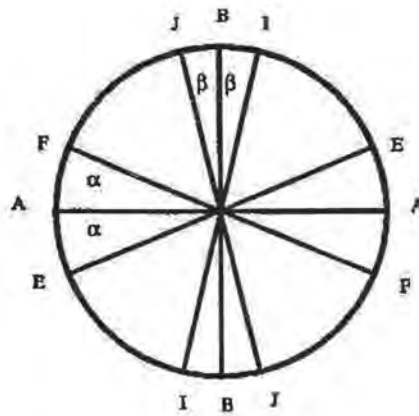


Figura 5.9: Vista superior de la sección transversal de la cavidad donde se indica la orientación de los planos que contienen los campos de velocidad.

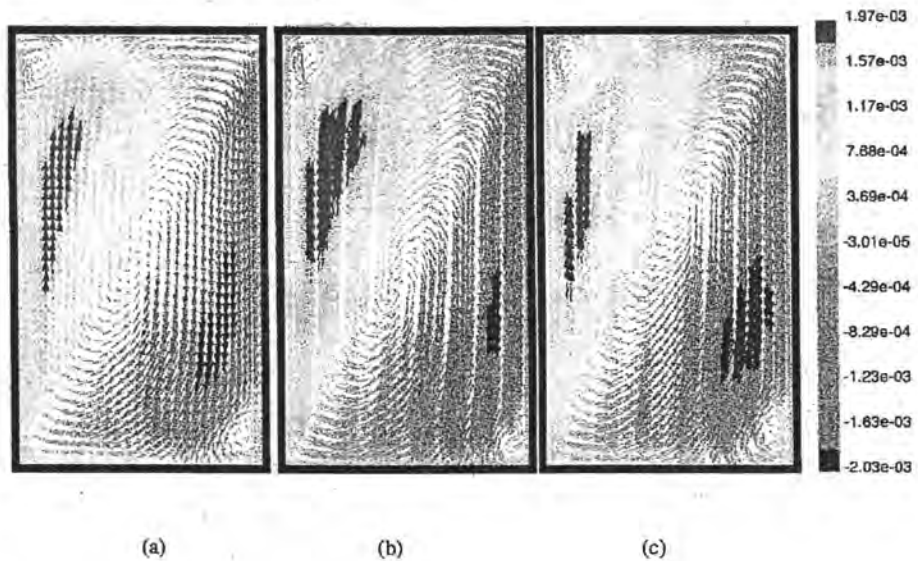


Figura 5.10: a) Campo de velocidad en el plano AA', b) Campo de velocidad en el plano EE' y c) Campo de velocidad en el plano FF', $Ra = 2.25 \times 10^6$.



Figura 5.11: Campo de velocidades en el plano BB' , $Ra = 2.25 \times 10^6$.

patrón convectivo más complejo, y está formado por cuatro celdas, dos de ellas distorsionadas, tal como se muestra en la figura 5.11.

Un dibujo del patrón del flujo principal en la región cercana al plano BB' se muestra en la figura 5.12. Las flechas indican las direcciones del flujo. Como se puede apreciar los flujos ascendentes en la mitad inferior de la cavidad se dirigen hacia la mitad superior distribuyéndose cerca de la pared lateral. En contraste, los flujos descendentes en la mitad superior se unen en la región superior para posteriormente descender hacia la mitad inferior y se distribuyen cerca de la pared vertical inferior.

5.3.3. Modelo para predecir el inicio de las celdas secundarias

En esta sección se plantea una teoría para predecir la aparición de las pequeñas celdas que surgen en las esquinas del plano AA' como las mostradas en la figura 5.5. Aquí se dará solo un bosquejo de la teoría, los detalles se encuentran en la referencia [93] y se presenta en el apéndice D de este trabajo. Como se trata de dilucidar las condiciones que propician la formación de estos vórtices en las regiones cercanas a las paredes horizontales resulta apropiado definir un modelo local. En el análisis teórico de esta sección es más conveniente utilizar una definición del número de Rayleigh ligeramente distinta a la presentada en la sección 2.2 del capítulo 2.

La definición que se usará aquí es:

$$\mathcal{Ra} = \frac{g\alpha\nabla TR^4}{\kappa\nu} = RaA^3 \quad (5.1)$$

donde $\nabla T = \Delta T/R$.

Se realizará una perturbación lineal al flujo base que está definido en forma aproximada por el flujo descrito en la región $Ra \geq Ra^{c1}$. El resultado será la determinación del número de Rayleigh mínimo para el que aparecen celdas pequeñas cerca del fondo y en la parte superior del contenedor. Para una mayor claridad, la descripción del método se realizará en dos partes. En la primera parte se desarrollan las ideas básicas del método al resolver un problema sencillo (aunque sin sólido



Figura 5.12: Interpretación cualitativa del patrón del flujo .

fundamento físico). En él no se considera la ecuación de conservación de masa, posteriormente, en la sección siguiente se presenta la solución del problema completo.

Modelo simplificado

Este modelo tiene varias suposiciones. La primera consiste en aseverar que la única componente de la velocidad del flujo es la componente vertical u_z . Además, suponemos que el gradiente de presión no existe y la componente vertical de velocidad u_z así como la temperatura T están determinadas por las siguientes expresiones:

$$u_z^* = u_z^o + u_z', \quad T^* = T^o + T'$$

donde u_z^o y T^o son el flujo base y las perturbaciones correspondientes son $u_z'(r, \theta, z)$ y $T'(r, \theta, z)$.

Estas perturbaciones son pequeñas de tal manera que sus productos pueden despreciarse. Enfatizamos que las suposiciones anteriores son inconsistentes con la ecuación de conservación de masa.

Las ecuaciones para las perturbaciones son las siguientes, donde se han omitido las primas.

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \mathcal{R}a T = \frac{A}{\text{Pr}} \left(u_z \frac{\partial u_z^o}{\partial z} + u_z^o \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + u_z = 0 \quad (5.3)$$

En el planteamiento de estas ecuaciones se supone que para la pequeña región bajo análisis, el campo de temperatura base es una función lineal de la coordenada vertical. Suponemos también que por la analogía de Reynolds, la perturbación de la velocidad vertical u_z y de la temperatura T están determinadas por la siguiente expresión:

$$u_z = T = R(r)Z(z).$$

Propondremos también que u_z^o puede expresarse como: $u_z^o = R^o(r)Z^o(z)$.

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (5.2), y dividir entre u_z se obtiene:

$$\frac{1}{\widehat{R}} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \sqrt{\mathcal{R}a} = -\frac{A^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{A}{\text{Pr}} \left(R^o \frac{dZ^o}{dz} + \frac{R^o Z^o}{Z} \frac{dZ}{dz} \right) \quad (5.4)$$

Para encontrar la solución a la ecuación anterior, notamos que su lado izquierdo es sólo función de r , mientras que el lado derecho es sólo función de z excepto por R^o . Intentaremos resolver esta ecuación por separación de variables definiendo:

$$\widehat{R}^o(\mathcal{R}a) = \int_0^1 R^o(r, \mathcal{R}a) dr$$

y suponiendo que se puede usar \widehat{R}^o para reemplazar a R^o . Entonces, la ecuación (5.4) puede escribirse:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + (\sqrt{\mathcal{R}a} - k^2)R = 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{\widehat{R}^o Z^o}{A \text{Pr}} \frac{dZ}{dz} - \left(\frac{\widehat{R}^o}{A \text{Pr}} \frac{dZ^o}{dz} - \frac{k^2}{A^2} \right) Z = 0 \quad (5.6)$$

donde k es la constante de separación.

Interpretamos el conjunto de ecuaciones (5.5) y (5.6) como un problema de valores propios, cuya solución es:

$$\mathcal{R}a^{c2} = \left[s_2^2 + 2A^2 \left(a_1 - a_2 \frac{\widehat{R}^o(\mathcal{R}a^{c2})}{A \text{Pr}} \right) \right]^2 \quad (5.7)$$

donde

$$s_2 = \sqrt{\sqrt{\mathcal{R}a} - k^2},$$

$$a_1 = \frac{(\pi m)^2}{2},$$

$$a_2 = \frac{m^3 \sin(\pi/m)}{4m^2 - 1},$$

$$m = 3.825 + 0.091\gamma - 3.33 \times 10^{-3}\gamma^2,$$

y

$$\gamma = 1/2A.$$

La ecuación (5.7) permite calcular el número crítico de Rayleigh y expresar \widehat{R}^o en términos del número de Rayleigh. En este punto, se hacen las siguientes consideraciones: debido a que las paredes laterales del cilindro se consideran térmicamente aisladas, se espera que las capas límites térmica y dinámica que se desarrollan cerca de las paredes verticales tengan un espesor constante. Al realizar un análisis local unidimensional del flujo de capa límite cercano a la pared se obtiene la siguiente expresión:

$$\widehat{R}^o = \omega \mathcal{R}a = \frac{\varkappa_o}{1 + 0.018 \frac{A}{\text{Pr}}} \mathcal{R}a \quad (5.8)$$

con $\varkappa_o = 1/24$. Los cálculos numéricos dan $\widehat{R}^o = \mathcal{R}a/26$ para el caso particular resuelto en la sección que corresponde a la región $\text{Ra} \geq \text{Ra}^{c2}$. Esto indica que aunque el modelo es simple, captura la dependencia correcta de \widehat{R}^o en el número de Rayleigh.

Tabla 5.1: Comparación del segundo número de Rayleigh crítico obtenido con los modelos teóricos como función de la razón de aspecto.

R/L	Ra^{c2} M. Completo	Ra^{c2} M. Simplificado
0.1	4 586 030	9 700 000
0.125	1 974 890	4 100 000
0.167	739 019	1 428 000
0.25	237 252	356 000
0.5	58 460	55 149

Modelo completo

En este modelo el flujo base está definido por:

$$\mathbf{u}^o = (u_r^o, 0, u_z^o)$$

donde

$$u_z^o = u_z^o(r, z).$$

La ecuación de conservación de masa en coordenadas cilíndricas se define considerando la suposición anterior como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r^o)}{\partial r} + A \frac{\partial u_z^o}{\partial z} = 0,$$

o bien, despejando u_r^o :

$$u_r^o = -\frac{A}{r} \int_a^r \left(r \frac{\partial u_z^o}{\partial z} \right) dr$$

en esta última expresión se encuentra que la componente radial del flujo base es una función de (r, z) y tiene el mismo orden de magnitud que $\partial u_z^o / \partial z$.

Los campos de velocidad y temperatura para \mathbf{u}^* y T^* se suponen que tienen la forma:

$$u_r^* = u_r^o + u_r', \quad u_z^* = u_z^o + u_z', \quad T^* = T^o + T'.$$

Las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \mathcal{Ra} T = \frac{1}{\text{Pr}} \left(A u_z \frac{\partial u_z^o}{\partial z} + A u_z^o \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r^o \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + u_z = 0 \quad (5.10)$$

Siguiendo una estrategia de solución análoga a la usada en el modelo simple, obtenemos el número de Rayleigh crítico.

En la tabla 5.1 se presenta el segundo número de Rayleigh crítico Ra^{c2} (valor mínimo del número de Rayleigh para el que aparecen estructuras secundarias en el campo de velocidad) como función de la razón de aspecto de las celdas. Como podemos observar, tanto para el modelo simplificado como para el modelo completo, el segundo número de Rayleigh crítico es una función monótonamente decreciente de la razón de aspecto. La tasa de decrecimiento es ligeramente mayor para el modelo completo. La magnitud del número de Rayleigh para la razón de aspecto de 0.5 es el único caso donde el Rayleigh pronosticado por el modelo completo es mayor al modelo simplificado. En la figura 5.13 se grafican los resultados de los dos modelos en función de la razón

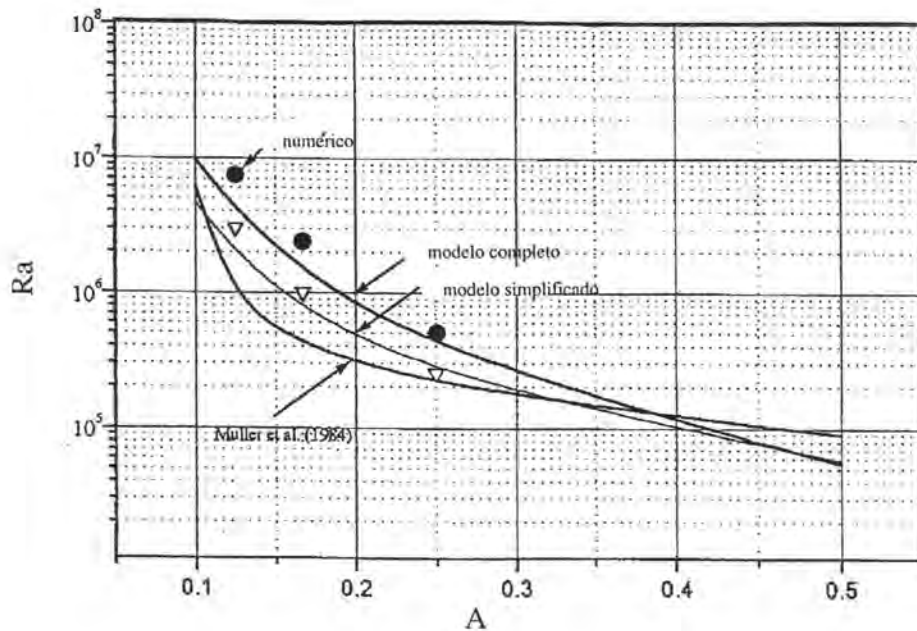


Figura 5.13: Segundo número de Rayleigh crítico como función de la razón de aspecto. Los símbolos \bullet y ∇ denotan flujos obtenidos numéricamente en los que aparecen y no aparecen respectivamente vórtices en las esquinas del plano AA' .

de aspecto y se comparan con resultados obtenidos de la integración numérica de las ecuaciones completas. Los símbolos (∇) denotan campos de velocidad en los que las estructuras secundarias no están presentes, mientras que los símbolos (\bullet) representan campos de velocidad en los que se encuentran vórtices en las esquinas del plano AA' . Como puede observarse, el modelo completo se ajusta de una manera fiel al comportamiento acusado por la integración numérica de las ecuaciones completas. Esto nos indica que el modelo que incluye la conservación de masa, captura correctamente los efectos físicos de mayor influencia en el fenómeno de la ocurrencia de flujos secundarios. En esta figura, también se presentan resultados experimentales reportados por Müller [22]. Las observaciones experimentales indican que el número de Rayleigh crítico es consistentemente menor al determinado por las predicciones teóricas. Es importante mencionar que los resultados experimentales fueron obtenidos observando el fenómeno siempre desde el mismo ángulo, y no hay garantía de que la orientación de la celda convectiva no haya cambiado entre cada una de las observaciones. En caso de que la orientación relativa entre la dirección de observación y la celda convectiva sea diferente en cada experimento, el error puede ser grande. Con los resultados obtenidos no es posible interpretar esta discrepancia.

Capítulo 6

Observaciones experimentales

6.1. Introducción

Como se explicó en la introducción del capítulo 5, en este capítulo se presenta la componente experimental de la investigación. La metodología y el procedimiento experimentales se presentaron en detalle en la sección 4.7. Aquí se describirán las observaciones de los flujos que ocurren dentro de la cavidad experimental con y sin rotación. El análisis de los experimentos estudiados es de una enorme complejidad, pues se trata de campos escalares y vectoriales tridimensionales dependientes del tiempo. Con la finalidad de hacer una presentación didáctica, se expondrá primeramente un resumen de las siete observaciones experimentales que se llevaron a cabo en el estudio. En seguida, se describirá con detalle una de ellas y finalmente se harán comentarios sobre el resto de las observaciones. El tiempo disponible no permitió hacer un análisis en detalle de todos los experimentos.

6.2. Resumen de observaciones

Se emplearon dos tipos de la cavidad experimental, una de ellas igual a la descrita en la sección 4.6 del capítulo 4 y otra cavidad de las mismas dimensiones pero sin los termopares interiores. Este último diseño permitió observar con mayor detalle las estructuras del flujo en la zona obstruida ópticamente por el capilar y el termopar. En la tabla 6.1 se presenta un condensado de los experimentos realizados. En ella se muestra el tipo de mediciones realizadas durante la prueba, los parámetros adimensionales y las magnitudes de las variables más significativas. El análisis de las observaciones experimentales es muy laborioso pues requiere de varios procesos que con la tecnología disponible no fue posible automatizar. En la sección siguiente, se presenta una descripción detallada del análisis del experimento F que fue una de las observaciones más completas, los fenómenos encontrados en este experimento son representativos de los ocurridos en los restantes y con base en su descripción, en la sección 6.4 se comentan brevemente las observaciones del resto de los experimentos.

6.3. Experimento F

En este experimento se observó el fenómeno de convección natural bajo las condiciones listadas en la tabla 6.2. Este ensayo consiste de siete etapas, en la primera no hay calentamiento, y en la segunda se tiene convección natural transitoria. De las cinco etapas siguientes, se tienen tres en las que se observa convección natural sin rotar y dos con rotación. En este experimento se usó la cavidad sin los capilares laterales y de esta manera fue posible tener una mayor calidad de la visualización. En la figura 6.1 se muestran las trazas de temperatura de los diversos termopares.

Tabla 6.1: Resumen de observaciones experimentales. V : visualización (medición del campo de velocidades), T_i : termopares internos (medición de temperaturas en el interior de la cavidad). Ω : velocidad de rotación. Ra : número de Rayleigh. G : es el cociente de la aceleración resultante entre la aceleración de la gravedad $G = a/g$. Ra^r : número de Rayleigh cuando la cavidad se encuentra en rotación. Ta : número de Taylor. ★ indica que el método para cuantificar la variable citada en la parte superior de la columna fue usado exitosamente. ♠ indica que no se consiguió observar la variable correspondiente. ♦ indica que la cavidad experimental usada no tiene termopares internos. ♣ indica que no fue posible calcular el número de Rayleigh debido a que las señales de los termopares fueron inestables.

Exp.	V	T_i	Ω rpm	$Ra \times 10^6$	G	$Ra^r \times 10^6$	$Ta \times 10^6$
A	★	★	11,16.8, 22	2.92,2.81, 2.86	1.02,1.14, 1.35	3.07,3.39, 4.32	5.37,12.5, 21.6
B	★	★	22	2.63,2.41	1.35	3.46	21.6
C	★	★	22	3.21,2.83	1.35	4.2	21.6
D	★	♠	22	-	1.35	-	21.6
E	★	★	22	2.65,2.23	1.35	3.32	21.6
F	★	♦	22, 29.8	2.41,1.94,1.6	1.35,1.95	2.98,3.5	21.6,39.5
G	★	♦	22, 29.8	2.67,2.19	1.35,1.95	3.64,♣	21.6,39.5

En esta figura T_{bc} es la temperatura de la base caliente, T_c es la temperatura del termoelectrico de la base caliente, T_{bf} es la temperatura de la base fría, T_f es la temperatura del termoelectrico de la base fría y T_{amb} es la temperatura del ambiente. Los números romanos indican los intervalos en los que se analizan los campos de velocidades en forma detallada y que se discuten en la sección siguiente. Antes de encender el termoelectrico de calentamiento se inició la adquisición de datos de los termopares durante 178 s con una tasa de muestreo de 10 s^{-1} . Considerando que el sistema ha estado sin calentamiento y que no hay gradientes térmicos en el laboratorio, esta operación permite hacer una calibración de los termopares, decenas de segundos antes de iniciar el experimento. Pasados 178 s, se impone una diferencia de potencial de 5.8 V a través del termoelectrico inferior. Los termopares cercanos a este dispositivo de calentamiento presentan un cambio rápido pues a los 186 s, la base inferior ha alcanzado una temperatura cercana a $30.7 \text{ }^\circ\text{C}$. Las trazas de temperatura como función del tiempo para los termopares que se encuentran cerca del termoelectrico acusan oscilaciones de alta frecuencia (0.042 Hz) y una amplitud $\pm 2 \text{ }^\circ\text{C}$. Durante el intervalo $178 \text{ s} \leq t \leq 364 \text{ s}$, el termopar que se encuentra en la masa térmica y el que está en contacto con el termoelectrico muestran decaimientos críticamente amortiguados y adoptan los valores de $32.1 \text{ }^\circ\text{C}$ y $32 \text{ }^\circ\text{C}$ respectivamente. En este tiempo también está presente la oscilación de alta frecuencia. Esta oscilación se debe a que el funcionamiento del circuito de control es de encendido– apagado que es de una frecuencia alta comparada con la frecuencia característica de los fenómenos observados en el flujo convectivo y por tanto el fluido dentro de la cavidad integra estas variaciones de temperatura. La temperatura ambiente aumenta ligeramente de manera aproximadamente lineal durante este intervalo con una pendiente de $2 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/s}$. En esta etapa se considera que la convección en el interior de la cavidad es en estado transitorio. En el intervalo comprendido entre los segundos 364 y 758, las trazas de los termopares de la base y el termoelectrico superiores indican un cambio asintótico hasta alcanzar el valor de $26.6 \text{ }^\circ\text{C}$.

En el intervalo de tiempo 364 a 1978 la variación de las temperaturas es pequeña por lo que se considera que la convección natural en estado permanente se desarrolla en tiempos menores a los 758 s. En la etapa comprendida entre el 758 y 1978 s, el número de Rayleigh es $Ra = 2.4 \times 10^6$. El tipo de patrón de flujo que ocurre en este intervalo se describe en detalle en la siguiente sección. A partir de los 1978 s después de haber comenzado el registro de las temperaturas, se

Tabla 6.2: Etapas del experimento F. GTM: gradiente térmico máximo, SC: sin calentamiento, CNT: convección natural transitoria, CN S/R: convección natural sin rotación, CN C/R: convección natural con rotación, GTN: gradiente térmico nulo y GTV: gradiente térmico variable.

Etapas	Intervalo de tiempo (s)	Ω (rpm)	GTM ($^{\circ}C$)	$Ra \times 10^6$	$Ta \times 10^7$
1. SC	0-178	0	GTN	0	0
2. CNT	178-364	0	GTV	-	0
3. CN S/R	364-1978	0	4.5	2.4	0
4. CN C/R	1978-2878	22	4.0	2.9	2.1
5. CN S/R	2878-5203	0	3.6	1.9	0
6. CN C/R	5203-6455	29	3.3	3.5	3.9
7. CN S/R	6455-7180	0	2.9	1.6	0

inicia la rotación a una tasa de 2.3 rad/s (22 rpm). En el intervalo $1978 \text{ s} \leq t \leq 2878 \text{ s}$, las temperaturas en el interior de la celda son constantes (su variación es menor a la incertidumbre de la medición). El número de Rayleigh es 2.9×10^6 en este intervalo tomando en consideración el aumento de la fuerza de cuerpo por la aceleración centrífuga, mientras que el número de Taylor es 2.1×10^7 s. Las señales de temperatura procedentes de los termopares son independientes de la potencia suministrada a esos dispositivos. Es interesante notar que al concluir la etapa de rotación en 2878 s la temperatura de la base superior aumenta ligeramente reduciendo el gradiente térmico en el interior de la cavidad.

El comportamiento observado en la quinta etapa del experimento es similar al descrito para el intervalo de $364 \text{ s} \leq t \leq 1978 \text{ s}$. Debido al calentamiento de la tapa superior, el número de Rayleigh en este intervalo es $Ra = 1.9 \times 10^6$. La sexta etapa inicia en $t = 5203 \text{ s}$ y tiene una duración de 1250 segundos aproximadamente y una velocidad de rotación de 3.1 rad/s (29 rpm). Los números adimensionales que caracterizan el movimiento en esta etapa son $Ra = 3.5 \times 10^6$ y $Ta = 3.9 \times 10^7$. El experimento concluye en la séptima y última etapa del ensayo a 7180 segundos después de haber iniciado el registro de temperaturas.

6.3.1. Flujos sin rotación

En esta sección se presentan los campos de velocidad obtenidos con la técnica de PIV en tiempos representativos de la tercera y quinta etapa del experimento. La metodología utilizada en la obtención de los campos de velocidad se presenta en el apéndice E.

Observaciones en la tercera etapa, $Ra = 2.4 \times 10^6$.

Se presentan los campos de velocidad para tres distintos intervalos de tiempos de la tercera etapa (convección natural) marcados 3I, 3II y 3III en la figura 6.1 a 1018, 1258 y 1678 segundos después del inicio del registro de temperaturas respectivamente.

Observación 3I.

A partir del inicio del calentamiento en el segundo 1018 se digitalizaron 45 s que corresponde a 1349 imágenes de la videofilmación. Este tiempo corresponde al punto 3I en la figura 6.1.

Observación 3Ia.

El campo de velocidades resultante (3Ia) correspondiente a los primeros 16.8 s en el intervalo $1018 \text{ s} \leq t \leq 1034.8 \text{ s}$ se muestra en la figura 6.2. Se pueden observar tres vórtices, cuyo patrón de flujo coincide aproximadamente con el flujo convectivo encontrado para $Ra=7.5 \times 10^5$ correspondiente al plano AA' descrito en la sección 5.3.2 del capítulo 5. En la esquina superior izquierda del plano iluminado se encuentra un vórtice (S_1) que gira en sentido antihorario. En la parte central del plano se localiza el vórtice principal (C) cuyo giro es en sentido horario. Obsérvese que su centro

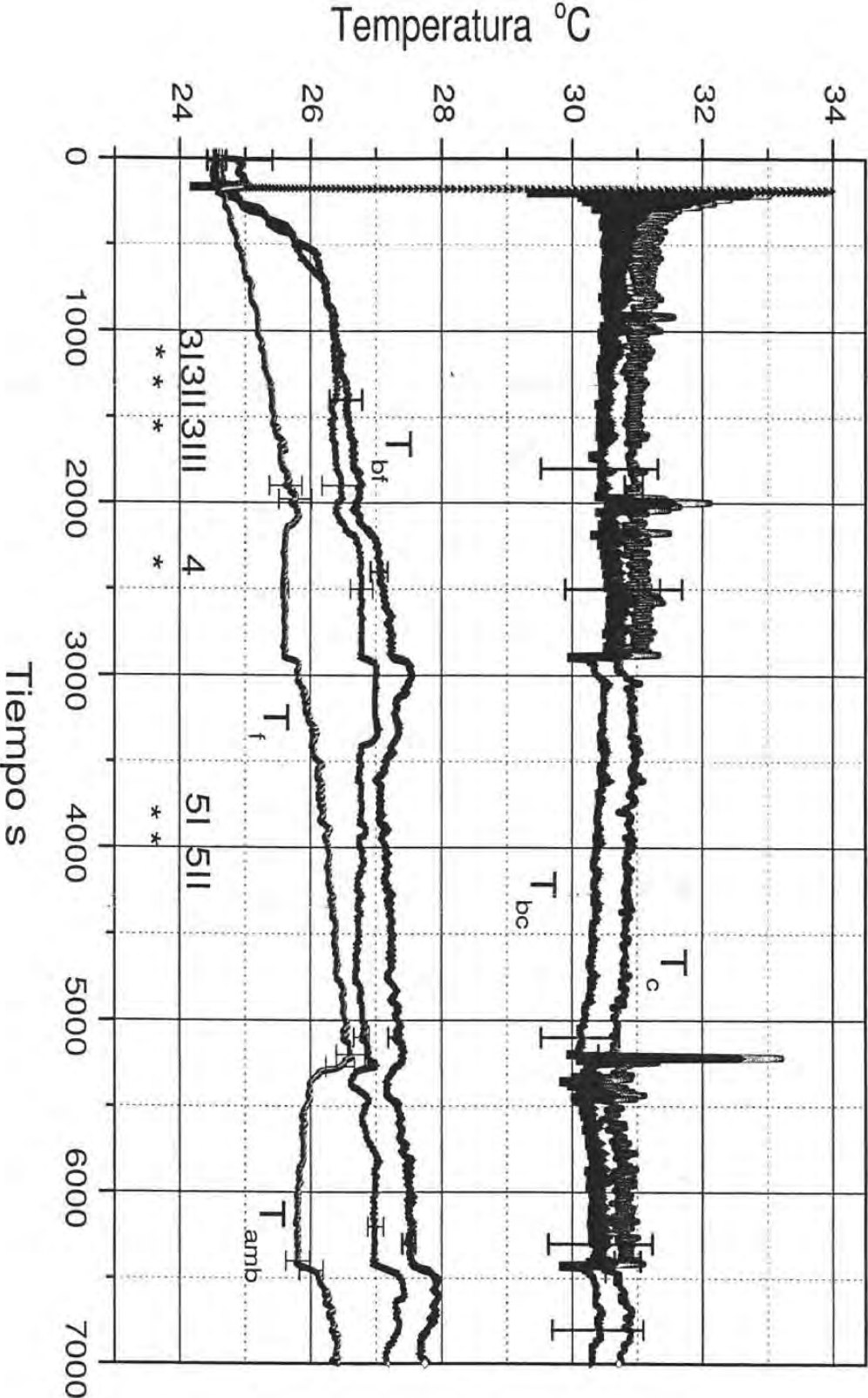


Figura 6.1: Trazo de los termopares de las bases superior e inferior y de la temperatura ambiente para el experimento F. Los números romanos indican los tiempos en los que se analizan los campos de velocidades en forma detallada en la subsección de análisis de velocidad. T_{bc} temperatura de la base caliente, T_c temperatura de termoelectrico de la base fría, T_f temperatura de la base fría, T_{amb} temperatura del termoelectrico de la base fría y T_{bf} temperatura del ambiente.

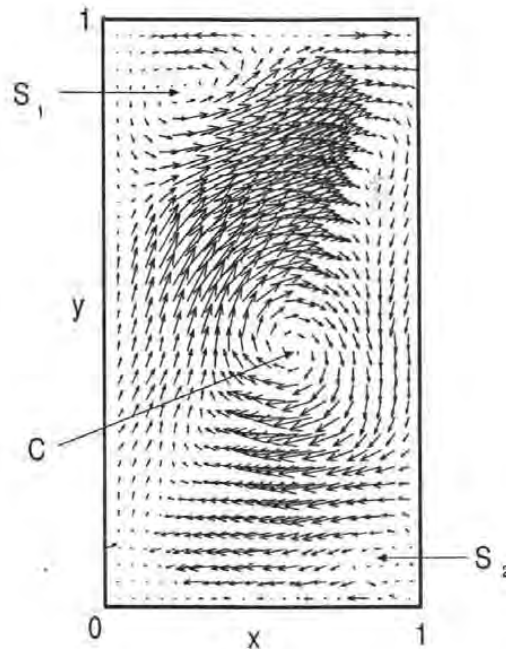


Figura 6.2: Campo de velocidades en el plano central de la celda para la observación 3la.

no coincide con el centro geométrico del plano. En la esquina inferior derecha se ubica el vórtice (S_2) con un giro en sentido antihorario. El flujo principal tiene una dirección ascendente cerca de la pared izquierda y se desarrolla alrededor del vórtice principal (C). En la figura 6.3 se muestra la velocidad vertical (v) como función de la coordenada horizontal x para diversos valores de la coordenada vertical y .

En la figura 6.4 se muestran las componentes de la velocidad vertical y horizontal como función de las coordenadas (x, y) en el plano central de la cavidad para la observación 3la. En el panel izquierdo se muestra la componente vertical v de la velocidad. Se observa que para $y = 0.5$, el flujo asciende con una velocidad máxima 2.4×10^{-4} m/s y en el lado derecho el flujo desciende a una velocidad de 2×10^{-4} m/s. En el panel derecho se grafica la componente horizontal u . Como se observa, el movimiento del flujo en la dirección horizontal se manifiesta en las secciones superior e inferior. La máxima velocidad se presenta en la sección superior, en cambio en la sección inferior se encuentran velocidades máximas con dirección negativa. En la figura 6.5 se presenta la energía cinética del flujo. Como puede observarse, la zona superior es la más dinámica en la observación 3la. La figura 6.6 muestra el mapa de contornos de la distribución de energía cinética.

Con el fin de establecer si el patrón descrito anteriormente es permanente, se efectuaron dos observaciones de los campos de velocidad en los intervalos de (1034.8 s - 1051.3 s) 16.5 s y a (1051.3 s - 1063 s) 11.6 s subsiguientes. Estas observaciones llamadas 3lb y 3lc en la figura 6.7 se describen en los párrafos siguientes.

Observación 3lb.

El campo de velocidades correspondiente se muestra en la figura 6.7. En esta imagen se presentan diferencias con respecto a la figura 6.2. Igual que en la observación 3la se observan tres estructuras vorticosas. En la esquina superior izquierda se localiza un pequeño vórtice cuyo giro es en sentido antihorario, su flujo es contrario al flujo principal que asciende desde la parte izquierda de la celda y toma una dirección hacia la derecha. Este flujo principal cambia su dirección al alcanzar el 75 % de la altura para posteriormente descender. Durante el descenso del flujo por el lado derecho de la

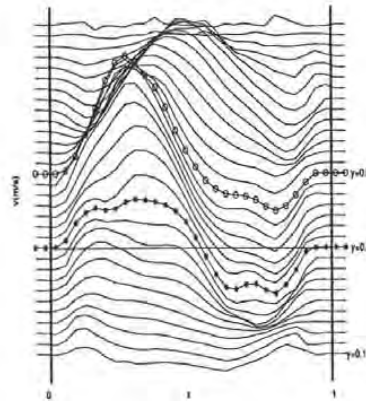


Figura 6.3: Velocidad vertical como función de la coordenada horizontal en el plano central de la cavidad para la observación 31a. Las curvas fueron obtenidas a alturas equidistantes y están desplazadas en la dirección vertical para que se aprecie mejor el patrón de movimiento. El nivel $v = 0$ sólo se indica para la posición $y = 0.4$.

Tabla 6.3: Velocidad en puntos representativos de la observación 31a.

(x, y)	$u \times 10^{-4}(\text{m/s})$	(x, y)	$v \times 10^{-4}(\text{m/s})$
(0.56, 0.76)	9.0	(0.26, 0.55)	5.2
(0.69, 0.23)	-6.7	(0.30, 0.52)	4.8
(0.65, 0.23)	6.6	(0.90, 0.46)	-2.2

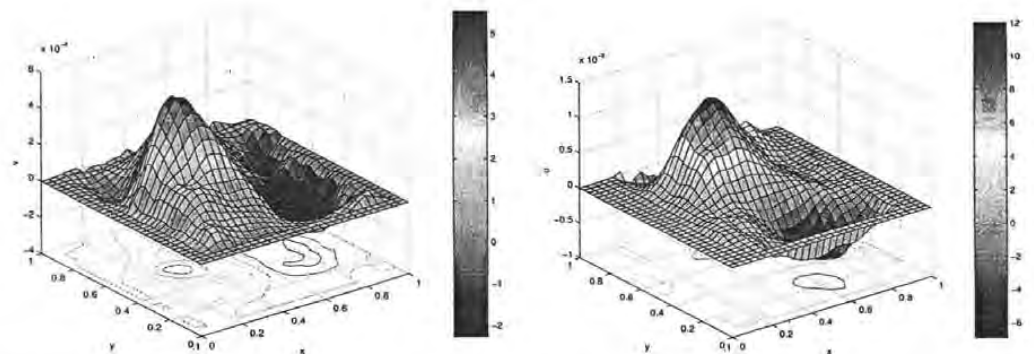


Figura 6.4: Componente vertical (panel izquierdo) y componente horizontal (panel derecho) de la velocidad como función de las coordenadas (x, y) en el plano central de la cavidad para la observación 31a.

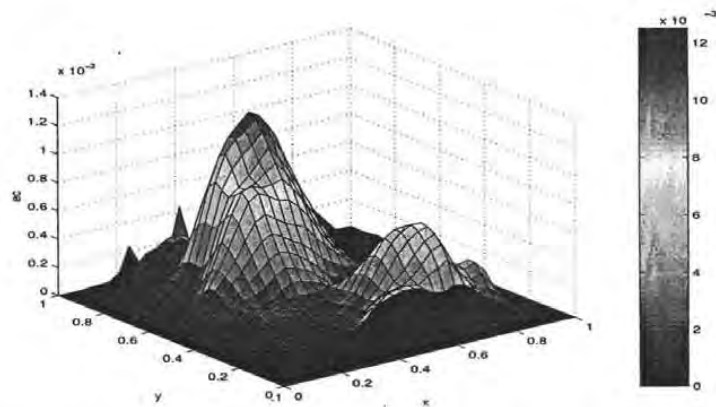


Figura 6.5: Energía cinética $ec = \sqrt{u^2 + v^2}$ como función de las coordenadas (x,y) en el plano central de la cavidad para la observación 31a.

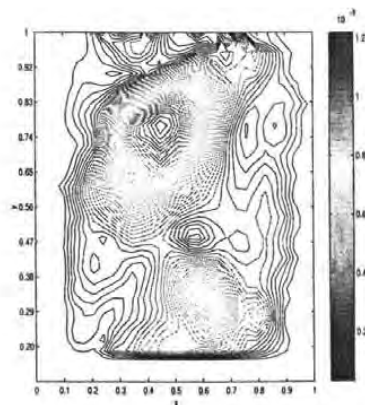


Figura 6.6: Mapa de contornos de la distribución de la energía cinética en el plano central de la cavidad para la observación 31a.

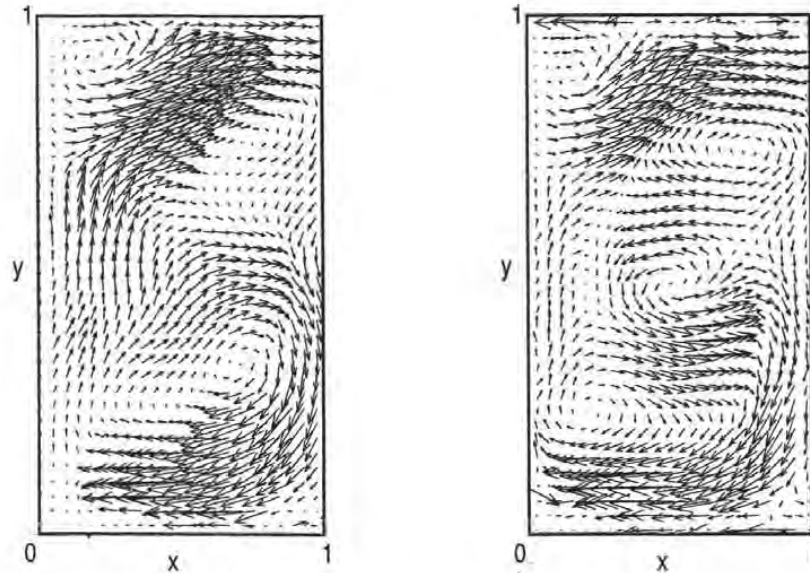


Figura 6.7: Campos de velocidades. Panel izquierdo, observación 3lb. Panel derecho, observación 3lc.

Tabla 6.4: Velocidad en la observación 3lb.

(x, y)	$u \times 10^{-4}$ m/s	(x, y)	$v \times 10^{-4}$ m/s
(0.53, 0.10)	-7.2	(0.18, 0.34)	1.5
(0.35, 0.84)	8.3	(0.92, 0.33)	-3.0
(0.61, 0.99)	4.9	(0.35, 0.84)	2.6

sección transversal del plano se une otro flujo que proviene del vórtice central, que gira en sentido horario. Este vórtice se desplaza fuera de centro del plano iluminado acercándose al lado derecho. En el centro de la figura se puede observar una zona que corresponde a otro vórtice de geometría alargada que se encuentra en la parte superior del vórtice central. El vórtice que se encontraba en la esquina inferior derecha de la figura 6.7 desaparece en esta imagen. Excepto por el flujo en la zona central $0.5 \leq x \leq 0.9$, $0.4 \leq y \leq 0.6$, el patrón resultante es compatible con el flujo de una sola celda principal (ver figura 6.2).

Observación 3lc.

En la imagen correspondiente a la observación 3lc y mostrada en el lado derecho de la figura 6.7 se pueden apreciar cuatro vórtices. Existe un vórtice en la sección superior izquierda, girando en sentido antihorario. El flujo circulante en esta estructura se une al flujo principal que asciende desde el lado izquierdo del plano hasta alcanzar el 85 % de la altura. Este flujo sigue una trayectoria hacia la parte superior derecha y gira alrededor de otra estructura vorticiosa. Debajo de esta estructura se localiza el vórtice central que gira en sentido contrario a como había girado el vórtice que se encontraba en esta posición en las imágenes anteriores. El centro geométrico del vórtice central no coincide con el centro del plano.

Como se puede apreciar en las observaciones 3lb y 3lc se encontró un cambio en la estructura del patrón de flujo. Inicialmente en el campo de velocidad 3la se presentan tres vórtices, el vórtice central C corresponde a una celda convectiva bien desarrollada y en las esquinas dos

Tabla 6.5: Velocidad para la observación 3lc.

(x,y)	$u \times 10^{-4}$ m/s	(x,y)	$v \times 10^{-4}$ m/s
(0.88,0.16)	-1.5	(0.88,0.16)	1.6
(0.41,0.86)	3.1	(0.41,0.86)	1.4
(0.45,0.11)	-3.7	(0.89,0.16)	-1.5

Tabla 6.6: Posición de los centros de los vórtices de la observación 3l.

Vórtice	Observación 3la	Observación 3lb	Observación 3lc	$(\bar{x} \pm \sigma_x, \bar{y} \pm \sigma_y)$
S_1	(0.19,0.88)	(0.18,0.93)	(0.10,0.89)	$(0.15 \pm 0.02, 0.9 \pm 0.02)$
B	No aparece	(0.77, 0.81)	(0.77,0.76)	$(0.77 \pm 0.0, 0.78 \pm 0.025)$
C	(0.61,0.43)	(0.72, 0.31)	(0.49,0.45)	$(0.6 \pm 0.11, 0.39 \pm 0.07)$
S_2	(0.89,0.04)	No aparece	No aparece	(—,—)
S_3	No aparece	No aparece	(0.2,0.24)	(—,—)

celdas secundarias S_1 y S_2 que giran en sentido contrario. La magnitud de la velocidad vertical v es mayor en este campo de velocidades, que en los dos restantes. Ver cuadros 6.3 a 6.5. Posteriormente el patrón de flujo cambia observándose un desplazamiento del vórtice central y la formación de una nueva zona vorticiosa. La componente horizontal u tiene una mayor magnitud en el campo de velocidades 3lb. En la observación 3lc, se obtiene un nuevo patrón de flujo formado por cuatro vórtices mayores: dos pequeños vórtices S_1 y S_3 en las esquinas del lado izquierdo y los otros dos vórtices B y C que se habían detectado ya en el campo de velocidades anterior 3lb, que giran en sentido contrario.

Observación 3II

Observación 3IIa.

Este campo de velocidades corresponde al intervalo que inicia en el segundo 1258 del experimento F. Para esta observación se digitalizaron 40 segundos obteniéndose 1200 imágenes. El campo de velocidad (3IIa) es el promedio de las primeras 500 imágenes, corresponde al intervalo de tiempo $1258 \text{ s} \leq t \leq 1274.6 \text{ s}$ y se muestra en la figura 6.8. En ella se pueden apreciar cuatro vórtices A, B, C y S_1 . Dos de estos vórtices se localizan en la sección superior y los otros dos en la sección inferior. En la sección superior existe un flujo que asciende desde la sección central hacia la parte superior del campo. Durante su trayectoria ascendente, el flujo se ramifica en dos secciones, siendo la corriente derecha la de mayor tamaño. Al llegar a la parte superior, el flujo retorna hacia la parte inferior de la celda por las regiones cercanas a las paredes verticales. Se puede observar que el flujo descendente en cada lado de la parte superior de la celda forma vórtices.

El flujo descendente del lado izquierdo circula hasta la sección inferior. En la parte central de la sección inferior se puede observar un flujo que desciende a pocos milímetros de la pared inferior, para dividirse en ramales derecho e izquierdo. En el lado izquierdo se encuentra el vórtice S_1 . Esta estructura semeja a una celda secundaria recluida en esta zona, girando en sentido horario. En el lado derecho y alojado en la esquina inferior se localiza otro vórtice cuyo giro es en sentido antihorario.

Observación 3IIb.

El flujo encontrado en el intervalo $1274 \text{ s} \leq t \leq 1291 \text{ s}$ se muestra en la figura 6.9. En este campo de velocidades se puede encontrar un vórtice en la sección inferior izquierda del plano iluminado;

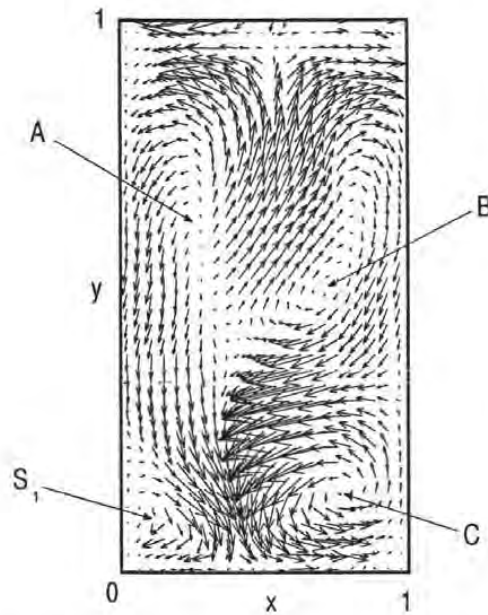


Figura 6.8: Campo de velocidades en el intervalo de tiempo $1258 \text{ s} \leq t \leq 1274.6 \text{ s}$ denotado por 3IIa.

Tabla 6.7: Velocidad para la observación 3IIa.

(x, y)	$u \times 10^{-4} \text{ m/s}$	(x, y)	$v \times 10^{-4} \text{ m/s}$
(0.61, 0.31)	-7.7	(0.91, 0.58)	-1.8
(0.69, 0.11)	1.7	(0.52, 0.69)	2.8
(0.61, 0.28)	-7.8	(0.52, 0.72)	3.1

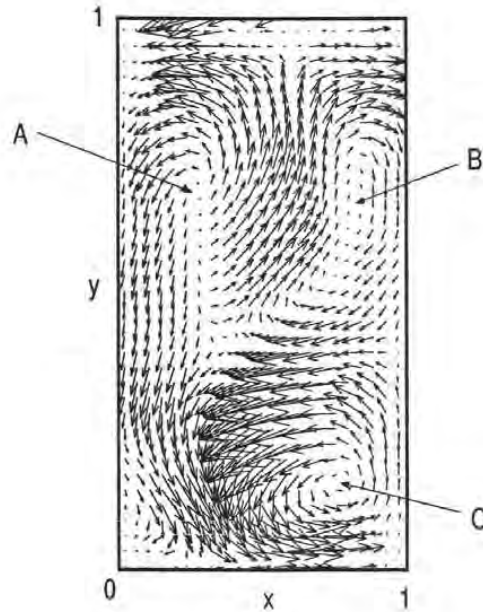


Figura 6.9: Campo de velocidades en el plano central para $1274 \text{ s} \leq t \leq 1291 \text{ s}$, observación 3Ilb.

Tabla 6.8: Componentes de velocidades de la observación 3Ilb.

(x,y)	$u \times 10^{-4} \text{ m/s}$	x,y	$v \times 10^{-4} \text{ m/s}$
(0.52,0.61)	2.11	(0.09,0.37)	-2.3
(0.82,0.93)	4.4	(0.82,0.93)	-2.3
(0.65,0.37)	-6.2	(0.22,0.14)	3.6

este vórtice se forma del flujo proveniente de la sección superior derecha que desciende cerca de la pared, ver figura 6.9. En la sección central del plano se tiene un flujo que asciende hacia la sección superior y se divide en dos ramales, uno hacia la izquierda y otro hacia la derecha. Este flujo central semeja un chorro que llega hasta la sección superior del plano y se divide en dos ramales que ascienden y se desvían hacia las paredes del plano respectivamente. Entre los flujos central y los descendentes procedentes de la sección superior se localizan dos vórtices *A* y *B*, que giran en sentido contrario.

Observación 3Ilc.

Este campo de velocidades se presenta en la figura 6.10 y corresponde al promedio de las imágenes 1001 a 1200 en el intervalo de tiempo $1291 \text{ s} \leq t \leq 1298 \text{ s}$. En esta figura se encuentran dos vórtices situados en los cuadrantes superiores cuyo origen se describió en los campos de velocidad anteriores (3Ila y 3Ilb). En el lado superior izquierdo se tiene el vórtice *A* que se origina del flujo ascendente proveniente de la sección central del plano. Este vórtice tiene un giro antihorario. En el cuadrante superior derecho se tiene el vórtice *B*. Esta estructura tiene como origen el flujo que asciende por la parte central, su giro es en el sentido horario. Milímetros abajo del vórtice *B* parte de este flujo se une al flujo central ascendente y otra parte del flujo aparentemente desaparece en la sección central. El vórtice *A* tiene un giro antihorario y el fluido desciende hasta la sección inferior del plano. En el cuadrante inferior derecho, se localiza el vórtice *C* cuya formación se debe

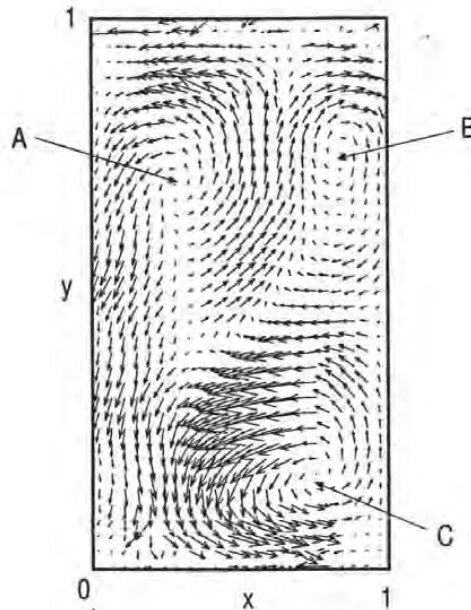


Figura 6.10: Campo de velocidades en el plano central para $t=1298$ s denotado por 3IIc.

Tabla 6.9: Velocidad de la observación 3IIc.

(x,y)	$u \times 10^{-4}$ m/s	(x,y)	$v \times 10^{-4}$ m/s
(0.56,0.28)	-7.6	(0.26,0.22)	-2.2
(0.43,0.17)	-3.6	(0.09,0.61)	-2.4
(0.82,0.90)	3.1	(0.09,0.49)	-1.7

al flujo que proviene de la sección inferior izquierda del campo. Este flujo se origina en la sección central tiene una recirculación alrededor del vórtice C. En este campo de velocidades se puede apreciar que desapareció el vórtice S_1 que se encontraba en el cuadrante inferior izquierdo del campo de velocidades 3IIa correspondiente a la figura 6.8.

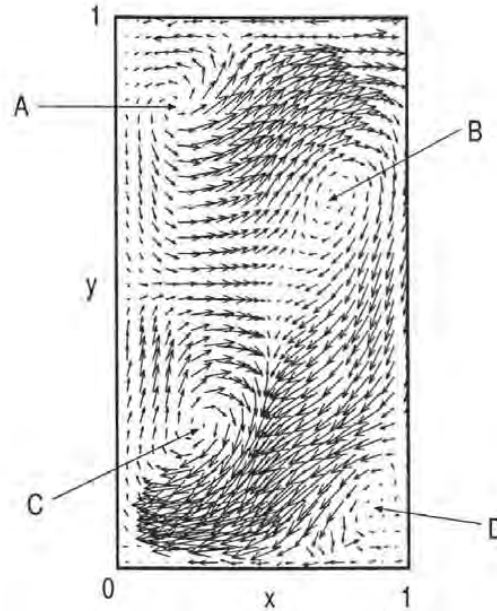
El análisis de las imágenes obtenidas en la observación 3II (figuras 6.8-6.10) nos indica que: a) El flujo se mantiene prácticamente inalterado durante los 40 segundos de observación. El mayor cambio observado corresponde al vórtice S_1 de la figura 6.8 comentado en el párrafo anterior. b) Las características cualitativas del flujo tienen similitudes notables con respecto al patrón de movimiento encontrado en el plano BB' del flujo calculado numéricamente (ver figura 5.5). En esta observación se encontraron cuatro puntos elípticos, un punto silla central y dos puntos semi-silla en las regiones de las paredes horizontales. Al comparar los dos campos de velocidad numérico y experimental atribuimos como principal diferencia de la imperfección del patrón de flujo experimental a la alineación del plano de luz, a un calentamiento no uniforme o bien a fuga de calor a través de la pared.

Observación 3III.

Esta observación 3III se inicia al segundo 1678 después de haber iniciado el registro de datos. En el análisis del patrón de flujo se digitalizaron 45 s generándose 1349 imágenes.

Tabla 6.10: Posición de los centros de los vórtices de la observación 3II.

Vórtices	Observación 3IIa	Observación 3IIb	Observación 3IIc	$(\bar{x} \pm \sigma_x, \bar{y} \pm \sigma_y)$
A	(0.26,0.62)	(0.25,0.63)	(0.26,0.73)	$(0.25 \pm 0.005, 0.66 \pm 0.068)$
B	(0.69,0.54)	(0.78,0.62)	(0.82,0.78)	$(0.76 \pm 0.06, 0.64 \pm 0.12)$
S_1	(0.04,0.08)	Desaparece	Desaparece	(—, —)
C	(0.77,0.14)	(0.72,0.14)	(0.73,0.16)	$(0.74 \pm 0.026, 0.14 \pm 0.011)$

Figura 6.11: Campo de velocidades en el plano central para el intervalo de tiempo $1678 \text{ s} \leq t \leq 1694.7 \text{ s}$, denotado por 3IIa.

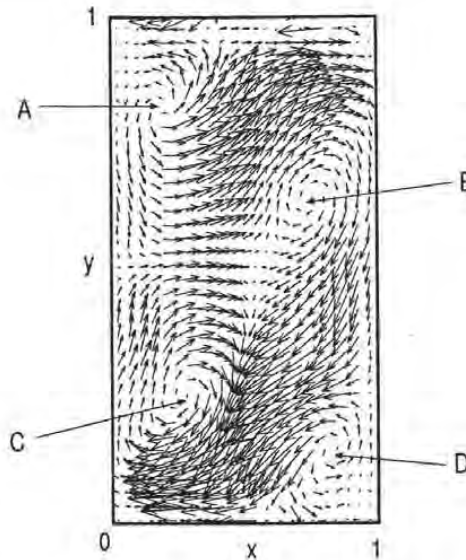
El primer campo de velocidad en esta etapa corresponde a la imagen 3IIa que se muestra en la figura 6.11 y se originó de las primeras 500 imágenes que corresponden al intervalo de tiempo de $1678 \text{ s} \leq t \leq 1694.7 \text{ s}$. En este campo de velocidades se pueden observar cuatro estructuras vorticosas identificadas como A , B , C y D . La primera de ellas A se localiza en la sección superior izquierda y gira en sentido antihorario. Otro de estos vórtices B se ubica en el lado derecho de la parte media superior del campo de observación. En la sección superior central se observa un flujo que asciende desde la parte central hacia la esquina superior derecha. Este flujo desciende por la pared derecha para formar la estructura B . El flujo desciende hasta la pared inferior izquierda del campo de velocidades y se confina en la esquina inferior izquierda formando la estructura C que tiene una circulación horaria. En la esquina inferior derecha se observa una estructura vorticiosa incipiente D . Como se puede observar la estructura A y este vórtice incipiente D giran sentido antihorario y los vórtices B y C giran en sentido horario.

Observación 3IIb

El campo de velocidades mostrado en la fig 6.12 corresponde al promedio de 500 imágenes en el intervalo de tiempo $1694 \text{ s} \leq t \leq 1711.3 \text{ s}$. Como se puede observar, el patrón de flujo es similar a la imagen 3IIa. Los dos vórtices B y C giran en sentido antihorario. En cambio, los vórtices A

Tabla 6.11: Componentes del campo de velocidades 3IIIa.

(x, y)	$u \times 10^{-4}$ m/s	(x, y)	$v \times 10^{-4}$ m/s
(0.39,0.14)	-5.3	(0.39,0.85)	2.0
(0.39,0.08)	-7.2	(0.48,0.73)	1.6
(0.39,0.11)	-6.5	(0.87,0.50)	-2.2

Figura 6.12: Campo de velocidades en el plano central para $1694 \text{ s} \leq t \leq 1711.3 \text{ s}$ denotado por 3IIIb.

y D que se encuentran en las esquinas inferior derecha y superior izquierda circulan en el mismo sentido.

Observación 3IIIc.

La figura 3IIIc contiene el campo de velocidades obtenido al promediar las 350 imágenes obtenidas en el intervalo $1711.3 \text{ s} \leq t \leq 1722.9 \text{ s}$ y se muestra en la figura 6.13. Nuevamente, se presentan cuatro vórtices, uno de ellos colocado en la esquina izquierda de la parte superior gira en sentido antihorario. El otro vórtice colocado en la mitad superior tiene su centro en una posición ligeramente por debajo del vórtice izquierdo. Este movimiento es provocado por la corriente ascendente del flujo que procede de la parte central. Otro efecto de esta corriente ascendente es el flujo que desciende del lado derecho que a su vez origina dos vórtices en la parte inferior, ambos vórtices

Tabla 6.12: Componentes de velocidad de la observación 3IIIb.

(x, y)	$u \times 10^{-4}$ m/s	(x, y)	$v \times 10^{-4}$ m/s
(0.28,0.42)	4.3	(0.37,0.78)	2.3
(0.63,0.84)	3.3	(0.85,0.54)	-2.2
(0.28,0.75)	4.5	(0.37,0.75)	2.0

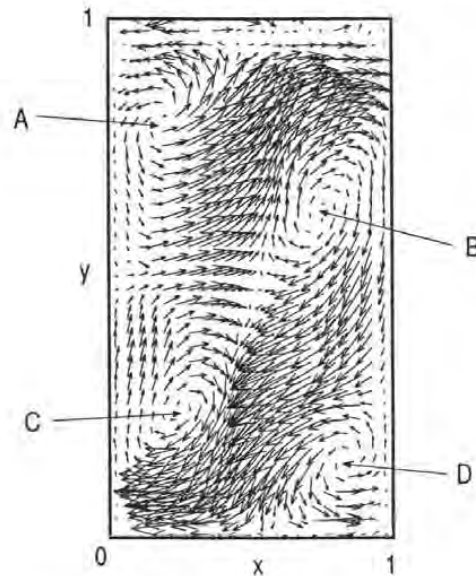


Figura 6.13: Campo de velocidades en el plano central para el intervalo $1711.3 \text{ s} \leq t \leq 1722.9 \text{ s}$, denotado por 3IIIc.

Tabla 6.13: Componentes de velocidad de la observación 3IIIc.

(x, y)	$u \times 10^{-4} \text{ m/s}$	(x, y)	$v \times 10^{-4} \text{ m/s}$
(0.59, 0.22)	-4.5	(0.50, 0.81)	3.5
(0.59, 0.81)	4.3	(0.45, 0.83)	3.2
(0.59, 0.84)	5.1	(0.54, 0.22)	-3.2

tienen una circulación contraria.

6.3.2. Observaciones de la quinta etapa, $Ra = 1.9 \times 10^6$.

Observación 5I

La quinta etapa ocurre después de concluir la etapa de rotación a 22 rpm e inicia al segundo 2878 cuando el sistema rotatorio vuelve al reposo. En esta etapa se realizaron dos observaciones 5I y 5II. La primera de ellas es al segundo 3838 s y en este tiempo se digitalizaron 34 s para obtener 1020 imágenes. De ellas se generaron tres campos de velocidad 5Ia, 5Ib y 5Ic.

Observación 5Ia.

Este primer campo de velocidad corresponde a las primeras 500 imágenes en el intervalo $3838 \text{ s} \leq t \leq 3854.7 \text{ s}$ y se muestra en la figura 6.14. En esta figura se puede observar que el vórtice B se localiza en la sección superior derecha tiene un giro en sentido horario. Al centro del campo de velocidad se localiza el vórtice A y alrededor de él gira el flujo en sentido antihorario. Se puede apreciar una diferencia en el sentido del giro de la celda convectiva de este campo de velocidades con respecto al campo de velocidades de 3Ia en la figura 6.2.

Observación 5Ib

El campo de velocidades correspondiente al promedio de las imágenes 502 a 1013 obtenidas en el

Tabla 6.14: Posición de los centros de los vórtices de la observación 3III.

Vórtice	Observación 3IIIa	Observación 3IIIb	Observación 3IIIc	$(\bar{x} \pm \sigma_x, \bar{y} \pm \sigma_y)$
A	(0.19,0.89)	(0.18,0.89)	(0.18,0.84)	$(0.18 \pm 0.057, 0.87 \pm 0.028)$
B	(0.74,0.71)	(0.72,0.65)	(0.72,0.65)	$(0.72 \pm 0.11, 0.67 \pm 0.034)$
C	(0.27,0.27)	(0.26,0.26)	(0.26,0.26)	$(0.26 \pm 0.005, 0.26 \pm 0.005)$
D	(0.88,0.12)	(0.82,0.14)	(0.82,0.14)	$(0.84 \pm 0.034, 0.13 \pm 0.011)$

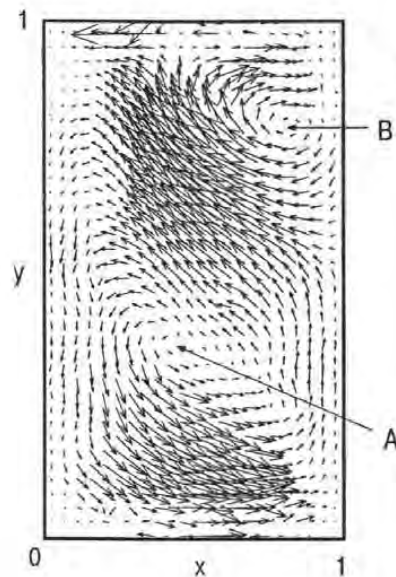
Figura 6.14: Campo de velocidades en el plano central para el intervalo de tiempo $3838 \text{ s} \leq t \leq 3854.7 \text{ s}$ denotado por 5Ia.

Tabla 6.15: Componentes de velocidad de 5Ia.

(x, y)	$u \times 10^{-4} \text{ m/s}$	(x, y)	$v \times 10^{-4} \text{ m/s}$
(0.59,0.73)	-5.8	(0.59,0.73)	4.4
(0.52,0.73)	-6.4	(0.52,0.73)	-4.4
(0.21,0.14)	4.2	(0.21,0.14)	-2.4
(0.60,0.52)	-2.5	(0.60,0.52)	1.8

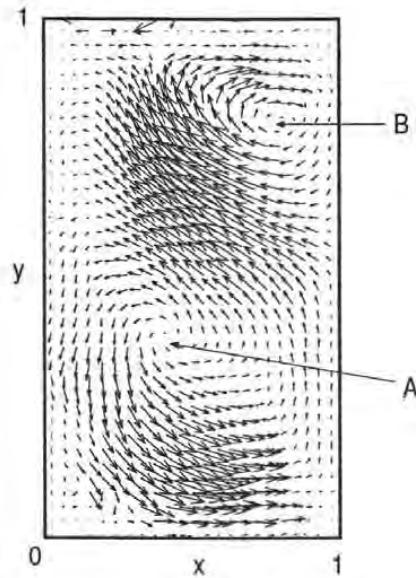


Figura 6.15: Campo de velocidades en el intervalo $3854.7 \text{ s} \leq t \leq 3871.7 \text{ s}$ denotado por 5lb.

Tabla 6.16: Componentes de velocidad de 5lb.

(x, y)	$u \times 10^{-4} \text{ m/s}$	(x, y)	$v \times 10^{-4} \text{ m/s}$
(0.13, 0.38)	-2.0	(0.21, 0.26)	-2.8
(0.43, 0.29)	2.2	(0.86, 0.35)	1.2
(0.43, 0.11)	6.3	(0.50, 0.70)	4.1

intervalo $3854 \text{ s} \leq t \leq 3871.7 \text{ s}$ se muestra en la figura 6.15. En él se puede observar nuevamente los dos vórtices A y B. El primero corresponde al centro de la celda convectiva, y el segundo se localiza en el cuadrante superior derecho como se mostró en la figura 6.14. El vórtice B gira en sentido horario. El campo de velocidades encontrado aquí es similar al observado en la figura 5la.

Observación 5lc

El campo de velocidades obtenido en el tiempo $3871.8 \text{ s} \leq t \leq 3872 \text{ s}$ se muestra en la figura 6.16, se observa un movimiento más vigoroso alrededor del centro de la celda convectiva. Aunque la estructura general del flujo está dominado por dos vórtices; se observan vestigios de otros dos vórtices en la zona cercana a la pared izquierda.

Tabla 6.17: Componentes de velocidad de 5lc.

(x, y)	$u \times 10^{-4} \text{ m/s}$	(x, y)	$v \times 10^{-4} \text{ m/s}$
(0.60, 0.50)	6.1	(0.43, 0.79)	7.0
(0.52, 0.73)	9.2	(0.65, 0.50)	-4.7
(0.60, 0.76)	8.4	(0.26, 0.38)	-2.8

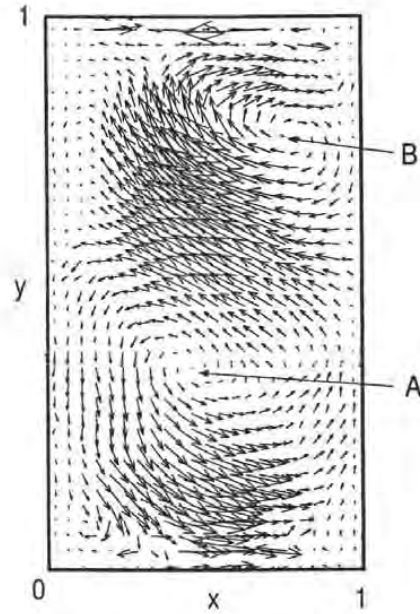


Figura 6.16: Campo de velocidades en el intervalo de tiempo correspondiente a $3871 \text{ s} \leq t \leq 3872 \text{ s}$ denotado por 5lc.

Tabla 6.18: Posición de los centros de los vórtices de la observación 5l.

Vórtice	Observación 5la	Observación 5lb	Observación 5lc	$(\bar{x} \pm \sigma_x, \bar{y} \pm \sigma_y)$
A	(0.42,0.38)	(0.44,0.39)	(0.43,0.36)	$(0.43 \pm 0.01, 0.37 \pm 0.015)$
B	(0.78,0.81)	(0.78,0.81)	(0.77,0.79)	$(0.77 \pm 0.005, 0.8 \pm 0.011)$

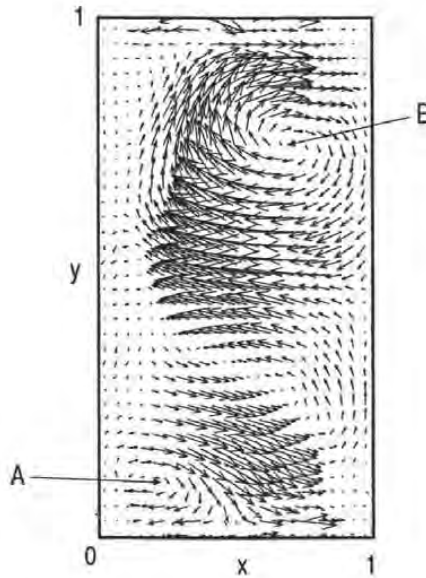


Figura 6.17: Campo de velocidades en el intervalo $3898 \text{ s} \leq t \leq 3914.6 \text{ s}$ denotado por 5IIa.

Tabla 6.19: Componentes de velocidad de 5IIa.

(x, y)	$u \times 10^{-4} \text{ m/s}$	(x, y)	$v \times 10^{-4} \text{ m/s}$
(0.42, 0.16)	-5.5	(0.42, 0.58)	2.0
(0.56, 0.58)	-8.6	(0.38, 0.88)	2.9
(0.60, 0.91)	7.1	(0.42, 0.85)	3.8

Observación 5II

La segunda observación de esta quinta etapa se realizó al segundo 3898 y se digitalizaron 34 s de la videofilmación obteniéndose 1020 imágenes. Los campos de velocidad en esta observación corresponden a 5II a, b, y c.

Observación 5IIa

Este primer campo de velocidades se muestra en la figura 6.17. El flujo observado tiene una estructura compleja y se pueden observar dos vórtices *A* y *B*; el primero de ellos se localiza en la parte superior y gira en sentido horario. Este flujo es una celda convectiva bien definida. El flujo proviene de la parte inferior derecha del campo de velocidades. En la sección inferior derecha se ubica un vórtice cuyo giro es en sentido horario. Este patrón de movimiento podría ser un flujo intermedio entre los flujos observados en los planos AA' y BB' mostrados en la figura 5.5 del capítulo 5. Aunque no es completamente claro en este punto aceptar esta descripción, el análisis del flujo 5IIb obtenido con la promediación de las imágenes inmediatamente subsecuentes y presentadas en el párrafo siguiente fortalecerá esta interpretación.

Observación 5IIb

Este campo de velocidades corresponde al promedio de 540 imágenes obtenidas en los tiempos $3914.6 \text{ s} \leq t \leq 3931.9 \text{ s}$. La celda convectiva se localiza en el lado derecho del plano inclinado y continúa girando en sentido horario. Sin embargo, el flujo proveniente de la parte central asciende del lado izquierdo de la celda convectiva. En la parte superior izquierda se localiza un vórtice y los vectores de velocidad ascienden separándose del flujo principal. El patrón de movimiento

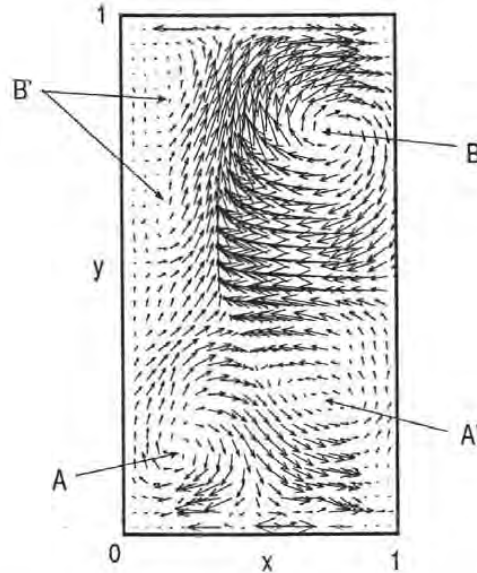


Figura 6.18: Campo de velocidades de la observación 5IIb

Tabla 6.20: Componentes de velocidades de 5IIb.

(x, y)	$u \times 10^{-4} \text{ m/s}$	(x, y)	$v \times 10^{-4} \text{ m/s}$
(0.72, 0.42)	-5.4	(0.41, 0.57)	2.3
(0.63, 0.90)	6.0	(0.45, 0.91)	2.8
(0.63, 0.93)	6.8	(0.45, 0.71)	3.6

semeja a una celda convectiva localizada en esa sección del campo. En la parte inferior de la esquina izquierda se localiza el vórtice B. El flujo que proviene de lado izquierdo del campo en la parte superior del vórtice se divide en dos secciones, una de ellas se une al vórtice, el otro ramal descende hacia el lado derecho. Este flujo semeja cualitativamente el flujo BB' como se muestra en la figura 5.5 descrito en el capítulo 5.

6.3.3. Flujo con rotación

Observación 4I

En esta sección se describen las observaciones de las etapas de rotación del experimento F. Se tuvieron dos etapas de rotación. La primera de ellas es la cuarta etapa (4I) que operó con

Tabla 6.21: Posición de los centros de los vórtices de la observación 5II.

Vórtice	Observación 5IIa	Observación 5IIb	$(\bar{x} \pm \sigma_x, \bar{y} \pm \sigma_y)$
A	(0.22, 0.08)	(0.23, 0.15)	$(0.22 \pm 0.007, 0.11 \pm 0.04)$
B	(0.72, 0.76)	(0.80, 0.78)	$(0.76 \pm 0.056, 0.77 \pm 0.014)$
C	(0.64, 0.25)	(0.72, 0.24)	$(0.68 \pm 0.056, 0.245 \pm 0.007)$

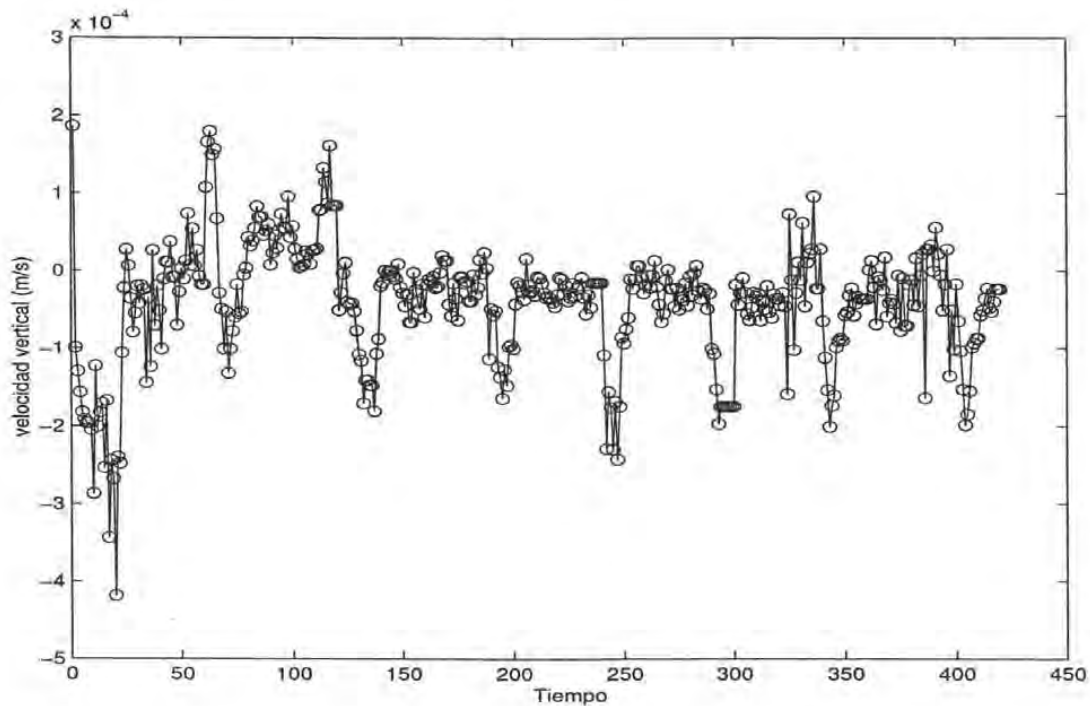


Figura 6.19: Historia de la velocidad en el punto (0.65,0.45).

una velocidad de rotación de 22 rpm y la sexta etapa (6l) donde el sistema giró a 29 rpm. Para simplificar la descripción de ambas etapas se discutirá únicamente el patrón de flujo observado en la etapa 4l cuya duración fue de 900 s aproximadamente. En este período el efecto de la rotación es descrito por los números de Taylor, de Rayleigh y Prandtl cuyos valores son $Ta=2.1 \times 10^7$, $Ra=2.9 \times 10^6$ y $Pr=6$. En esta etapa se identificó un patrón de flujo característico que se manifestaba periódicamente y correspondía a un flujo descendente que procedía de la sección superior derecha y se dirigía hacia la sección inferior izquierda. Al encontrarse a 40 % de la altura cambiaba su dirección descendente y se dirigía hacia la pared derecha. Este patrón se repetía cada 55 segundos aproximadamente, en la figura 12 del trabajo [91] contenido en el apéndice 2 se muestra este patrón de flujo. Para comprender mejor el tipo de patrón de flujo que se presentaba en la etapa de rotación se digitalizaron los primeros 420 s a partir del inicio de la rotación y se promediaron cada 30 imágenes para analizar detalladamente la evolución del patrón de flujo. Se seleccionó un punto del campo de velocidades donde se presentaba esta estructura, eligiéndose la posición (0.65, 0.45) y se graficó la componente vertical de la velocidad v como función del tiempo durante 420 s. En la figura 6.19 se presenta la componente vertical de la velocidad v del punto (0.65,0.45) como función del tiempo. Se puede observar un movimiento con cambios de velocidad rápidos en los primeros 120 s, en este período la centrífuga parte del reposo hasta alcanzar 22 rpm en un tiempo de 15 s. Los 105 s restantes de este movimiento corresponden al estado transitorio debido a la inercia del fluido.

En los últimos 300 s se distinguen tres etapas separadas por periodos donde la componente de la velocidad v es negativa y que interpretamos como un flujo descendente en el campo de velocidades. Los intervalos con $v > 0$ tienen una duración es 50 s aproximadamente.

La descripción anterior correspondió a un punto. Con el propósito de conocer el comportamien-

to de la velocidad vertical en una región más amplia, se graficó en la figura 6.20 el comportamiento de la velocidad vertical en puntos adyacentes (0.65,0.45), (0.70,0.45), (0.75, 0.45), (0.80,0.45). En esta figura 6.20 se puede apreciar el movimiento transitorio en los primeros 120 s, para las cuatro gráficas. Aproximadamente cinco segundos después, se observa una disminución de la velocidad vertical durante 20 s hasta alcanzar un mínimo a los 456 s. En seguida ocurre en las cuatro gráficas un incremento de la velocidad hasta valores constantes cercanos al cero. Posteriormente, en cada gráfica se observan cinco etapas con una configuración semejante, la primera de ellas tiene una duración de 62 s aproximadamente y las siguientes tres etapas mantienen una duración de 50 s. La última etapa tiene una duración de 62.5 s. Entre cada etapa se presenta una disminución en la velocidad v que corresponde a un flujo descendente en esta zona. La figura 6.21 muestra la velocidad vertical v a la altura $y = 0.45$ como función de la coordenada x y del tiempo. El tiempo se normalizó con el tiempo total de observación (420 s) y la velocidad se expresa en m/s.

En esta figura se pueden observar características análogas a las descritas previamente. En esta gráfica, las zonas de tono gris claro indican un movimiento ascendente mientras que las zonas de tono gris oscuro indican movimiento descendente. En $t=0.28$ a partir de que se inició la etapa de rotación, la velocidad v muestra cambios rápidos. Las zonas de color blanco indican un movimiento ascendente, estas zonas se extienden a todo lo ancho de la celda para diferentes valores de x . La primera zona oscura de corta duración indica un flujo descendente. En el plano inferior de la gráfica se observan las isóneas de velocidad vertical. Las zonas de gris claro se extienden a todo lo ancho de la celda. La primera zona oscura de corta duración indica un flujo descendente y se encuentra localizada en $t=0.25$ para $0.18 \leq x \leq 0.9$. La magnitud de la velocidad v es del orden de 10^{-4} m/s. En las últimas dos etapas se observa una zona de velocidades ascendentes. Una vista superior de la gráfica 6.21 se muestra en la figura 6.22. En esta gráfica se observa con mayor claridad el tiempo y la ubicación de los flujos descendentes.

6.4. Comentarios generales sobre los experimentos

En esta sección se discuten las observaciones respecto al comportamiento del resto de los experimentos realizados y las diferencias principales entre ellos. Las variables más importantes se presentan en la Tabla 1 de este capítulo.

Experimento A

En este ensayo se probaron los sistemas de adquisición de datos y de transmisión de potencia. La velocidad de rotación se varió a 11, 16.8 y 22 rpm. Los números de Rayleigh correspondientes en las etapas de convección sin rotación fueron 2.92×10^6 , 2.81×10^6 , y 2.85×10^6 . Las observaciones realizadas en este experimento dieron como resultado patrones de flujo similares a los descritos en la sección 6.3 pero no se analizaron a detalle.

Experimento B

Este experimento consistió de cinco etapas: la primera sin calentamiento, la segunda de transición, la tercera y quinta etapas de convección natural sin rotación y la cuarta etapa de convección natural con rotación. La experimentación se realizó en una cavidad con termopares internos y una razón de aspecto de $A=0.28$. Los parámetros característicos se presentan en la Tabla 1 del capítulo. La historia de temperatura de los termopares ubicados en las bases de la cavidad indican un gradiente de temperatura constante en cada una de las etapas. En la primera etapa sin rotación las trazas de temperatura de los termopares internos son casi constantes. Un cambio drástico ocurre en la gráfica de las trazas de temperatura en la etapa de rotación. Ambas señales muestran un comportamiento oscilatorio, la señal del termopar izquierdo oscila con una frecuencia de 0.033 Hz y al parar la rotación las señales de temperatura recuperan un comportamiento similar a la etapa sin rotación. Esta señal de temperatura se encuentra en la figura 11 del artículo [91] contenido en el anexo 2. Las observaciones experimentales del patrón de flujo en el interior de la cavidad para las etapas sin y con rotación mostraron comportamientos similares a los descritos en el experimento F con ciertas variantes. En la primera etapa, se obtuvo después de promediar 899 imágenes

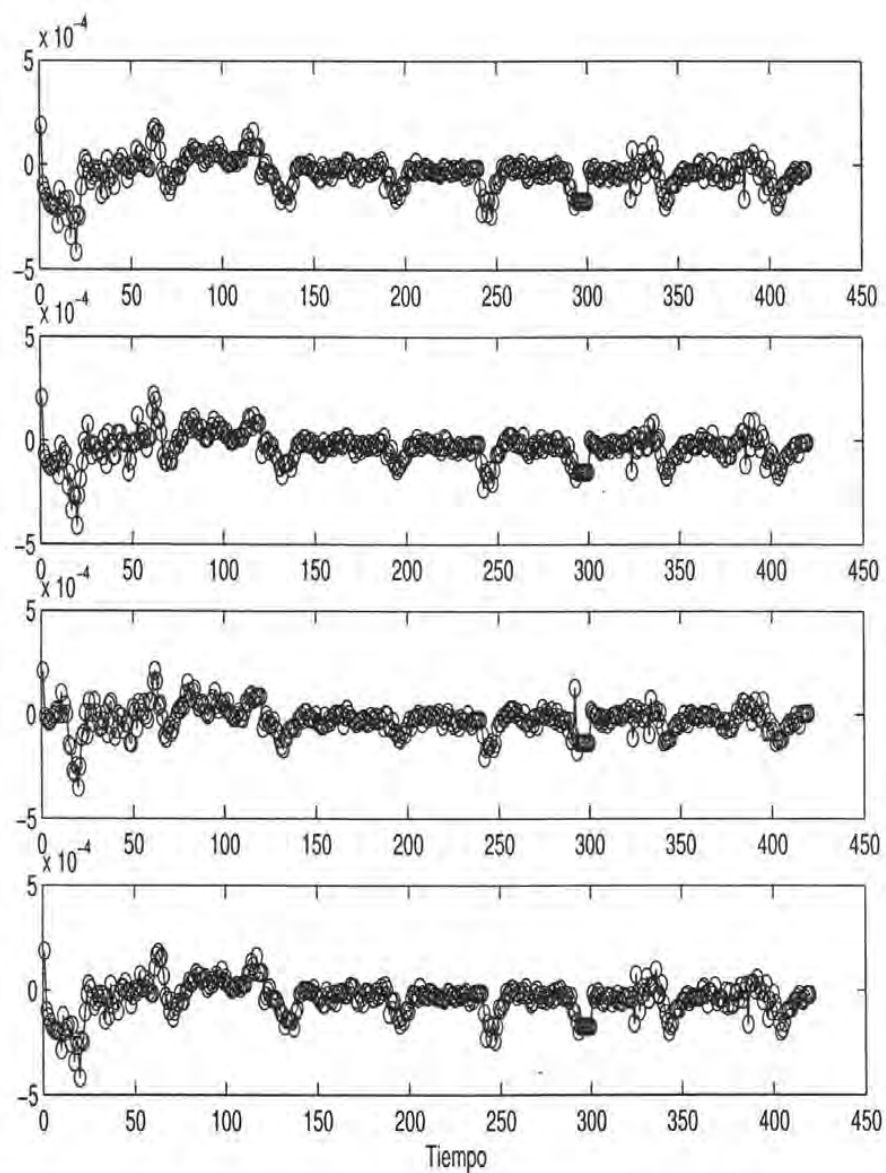


Figura 6.20: Historia de la velocidad en los puntos (0.65,0.45),(0.70,0.45),(0.75,0.45),(0.80,0.45). Las unidades de tiempo son segundos y las de velocidad son m/s.

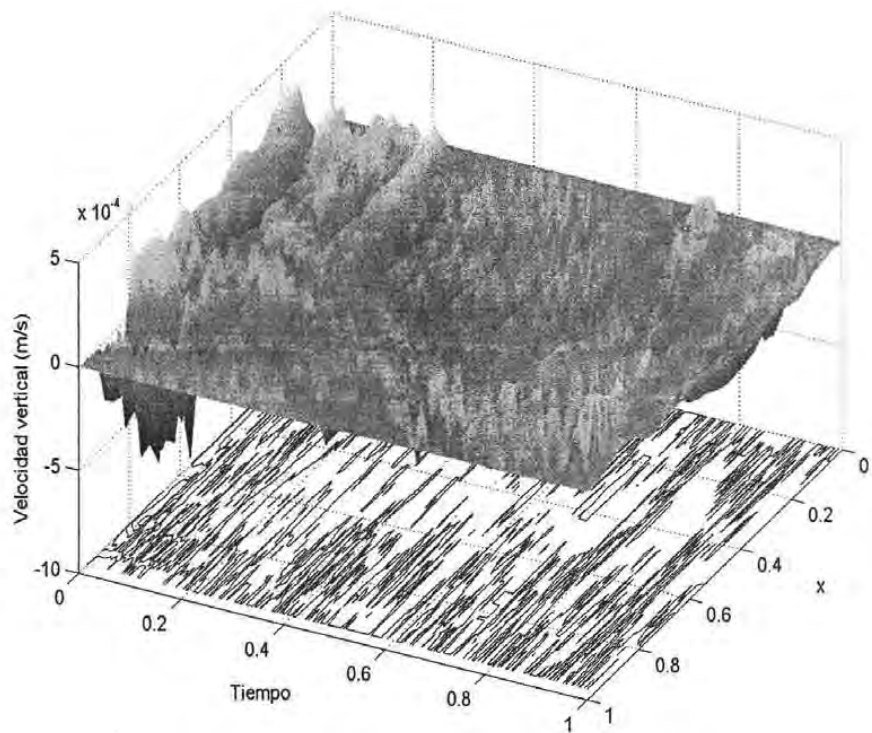


Figura 6.21: v como función de x y t para $y=0.45$.

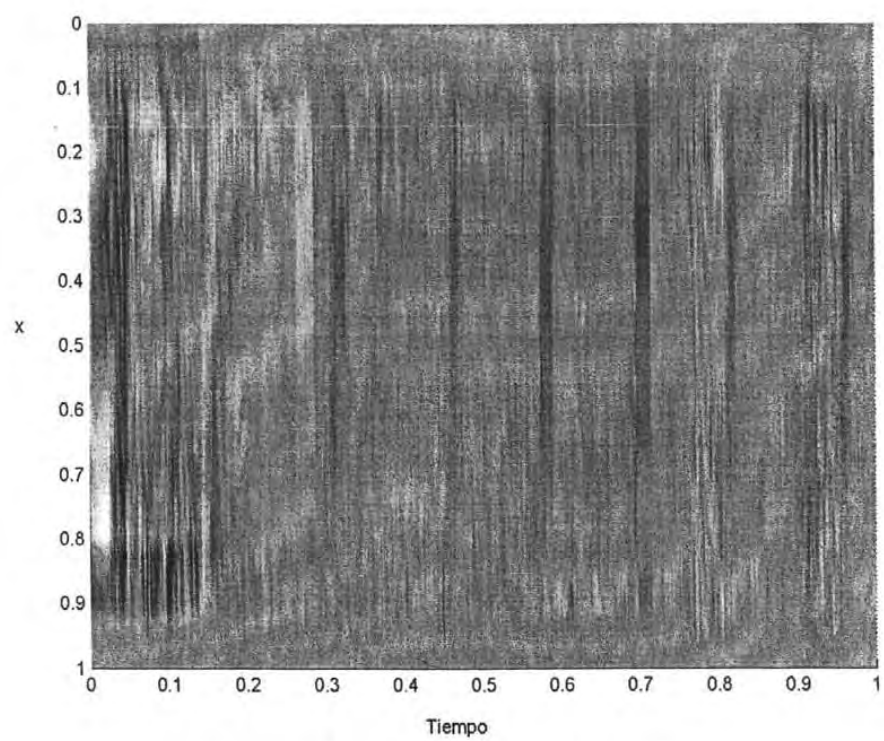


Figura 6.22: Vista superior de la figura 6.21.

un campo de velocidades donde se representa una celda convectiva con un giro antihorario, el centro geométrico de la celda no coincide con el plano de observación y las magnitudes de las componentes de velocidad vertical son del orden de 10^{-4} m/s. En los primeros segundos de la rotación la videgrabación mostró un patrón de flujo distinto al comentado en el experimento F. El patrón de flujo correspondía a un flujo que ascendía a través de la diagonal del plano de observación con una dirección de izquierda a derecha a través de la diagonal del plano de observación. En la sección inferior derecha se observó un flujo horizontal cuya circulación es de derecha a izquierda.

Experimento C

En este experimento se realizó visualización del patrón de flujo y se midieron las temperaturas interiores en la cavidad. Se utilizó una cavidad cilíndrica con capilares. En la etapa sin rotación el número de Rayleigh característico fue $Ra=3.2 \times 10^6$, y posteriormente se incrementó en la etapa de rotación a $Ra=4.2 \times 10^6$ con un número de Taylor de $Ta=2.1 \times 10^7$, al concluir la etapa de rotación el número de Rayleigh fue de $Ra=2.8 \times 10^6$. La primera etapa sin rotación tuvo una duración de 1570 s aproximadamente y se caracterizó por una mínima alteración en las trazas de los termopares interiores. Este período tiene una duración de 900 s con una velocidad de rotación de 22 rpm. Al concluir el período de rotación, las trazas de temperatura retornaron a las magnitudes que tenían antes de la etapa con rotación. El patrón de flujo característico de la convección natural consistente en una celda convectiva que gira en sentido antihorario se manifestó claramente y además en esta etapa se presentaron dos vórtices en las esquinas superior derecha e inferior izquierda del campo de velocidad. Este campo de velocidades coincide con el campo de velocidades descrito en la figura 5.5 del capítulo 5. En la segunda etapa sin rotación en $t=2816$ s el patrón de flujo encontrado correspondió a una celda convectiva que gira en sentido antihorario. El centro del vórtice coincide con el centro geométrico del campo de velocidad. Esta estructura convectiva muestra un flujo más vigoroso en la sección superior. Las estructuras secundarias no aparecen para este campo de velocidades. En la etapa de rotación de este experimento se observó nuevamente el patrón de flujo típico de los otros experimentos. Un flujo descendente transversal que circula de derecha a izquierda y desciende hasta alcanzar el 45 % de la altura para cambiar su dirección y desplazarse horizontalmente hacia la pared derecha.

Experimento D

Este experimento fue un ensayo fallido, únicamente se visualizó el patrón de flujo debido a una falla en el sistema de adquisición de los datos de temperatura.

Experimento E

En este experimento se realizó visualización y se midió la temperatura. La historia de temperaturas del experimento presenta cinco etapas similares a los experimentos B y C. Los parámetros adimensionales en las etapas del ensayo son: $Ra=2.65 \times 10^6$; en la tercera etapa sin rotación. La etapa con rotación el número de Taylor es 21.6×10^6 y el Rayleigh rotatorio $Ra_r=3.32 \times 10^6$. Al parar la centrífuga el número de Rayleigh es $Ra=2.23 \times 10^6$. Las trazas de temperatura de las bases de la cavidad permanecieron constantes manteniendo un gradiente de temperatura constante en el interior de la cavidad. El patrón de flujo observado en la primera etapa sin rotación es una celda convectiva que cubre todo el plano de visualización y gira en sentido antihorario, las magnitudes de la velocidad son del orden de 10^{-4} m/s. En la etapa con rotación se observó un patrón de flujo descrito por un flujo principal en la diagonal central del plano que desciende de derecha a izquierda, en la parte superior se localiza un flujo horizontal que circula de derecha a izquierda y en la sección inferior del plano se observó un flujo horizontal cuya circulación es hacia la pared derecha del campo de de velocidades. Al concluir la etapa de rotación el campo de velocidad resultante observado está formado por tres vórtices; uno se encuentra recluido en la esquina superior izquierda girando en sentido antihorario, el segundo vórtice se ubica en el cuadrante superior derecho girando en sentido antihorario y el tercer vórtice se localiza en el cuadrante inferior izquierdo y gira en sentido horario. Minutos después se analizó otra serie de 900 imágenes y se obtuvo un campo de velocidades formado por una celda convectiva única que gira en sentido horario.

Experimento G

Este experimento tiene las mismas características que el experimento F, consiste de tres etapas sin rotación y dos con rotación con velocidades diferentes. Los datos de los termopares de la base caliente presentaron errores en la captura a la mitad del experimento y únicamente se obtuvieron los parámetros de las etapas correspondientes a la primera etapa sin rotación: $Ra=3.6 \times 10^6$, de la tercera etapa (sin rotación) $Ra=2.1 \times 10^6$ y en la etapa de rotación $Ra_r=3.6 \times 10^6$ y el número de Taylor de 2.1×10^7 . La videofilmación correspondiente presenta patrones de flujo en cada etapa similares a los descritos para los anteriores experimentos.

6.5. Dificultades y recomendaciones

Esta sección trata de las dificultades en el trabajo y las recomendaciones que surgen a partir de las experiencias con el dispositivo.

Sistema rotatorio

- Velocidad de rotación

El control de la velocidad del sistema rotatorio se realiza manualmente al cambiar los parámetros de funcionamiento del variador de frecuencia; como son los intervalos de tiempo de las rampas de aceleración y desaceleración, el tiempo de operación así como la velocidad de rotación. Es recomendable automatizar el funcionamiento del variador de frecuencia usando el puerto paralelo de la computadora de control. A baja velocidad de rotación $0 \leq \Omega \leq 12$ rpm, el motoreductor incrementa su temperatura, lo cual se debe a que la corriente aumenta a un 110% del valor de su corriente nominal, causando un repentino paro en la centrífuga a pocos minutos de haber iniciado el experimento.

Una alternativa para las pruebas a velocidades bajas es variar la relación de diámetros de las poleas sujetas a la flecha principal y al motoreductor. También es recomendable medir la velocidad de rotación de la centrífuga, colocando en la flecha principal un tacómetro y así verificar la correspondencia entre la velocidad de rotación y la frecuencia de operación del variador. Las pruebas de vacío (sin carga) del motor se realizaron en el intervalo de $(0 \leq \Omega \leq 86)$ rpm, sin embargo se desconoce el comportamiento del sistema completo (canastillas, recipiente y accesorios) en el intervalo de $(35 \leq \Omega \leq 86)$ rpm.

- Vibración

Un punto importante en la operación de sistema es la vibración. Una lubricación periódica de los rodamientos que albergan la flecha principal es necesaria para evitar este fenómeno. La estructura principal deberá balancearse evitando que durante el giro de la centrífuga se presente vibración. Un peso excesivo en la canastilla experimental deflecta el brazo de giro causando un desbalance en la estructura rotatoria. Además cualquier modificación al diseño de la canastilla deberá considerar que no haya rozamiento con el barandal de protección cuando el sistema opera y la canastilla se alinea con el brazo de giro.

- Fuente de energía

Las baterías en paralelo operan correctamente si se les da un mantenimiento continuo. Colocar baterías selladas evita que se derrame ácido cuando se encuentra girando el sistema o durante el proceso de carga de energía. Para evitar cualquier accidente es necesario anclarlas firmemente a la estructura central durante la operación del sistema. Si se desea incrementar la cantidad de instrumentos y por consiguiente el consumo de energía, se requiere aumentar la capacidad de ambos acumuladores y revisar las características del convertidor CD/CA.

Recipiente cilíndrico e instrumentación

- Geometría

La geometría del recipiente causa una distorsión óptica durante la visualización del patrón de flujo. La alternativa más viable es encerrar el cilindro en otro recipiente de geometría

cuadrada lleno de agua para minimizar la refracción del haz de luz procedente del láser al atravesar las paredes del recipiente. En el diseño del recipiente experimental es conveniente considerar el purgado del aire. La formación de burbujas en el interior del recipiente es un factor contraproducente durante las pruebas.

- Plano de visualización

El patrón de flujo observado en un solo plano de visualización es insuficiente para proporcionar la información del flujo tridimensional que se desarrolla en el interior del recipiente cilíndrico. Se requiere conocer al menos dos planos perpendiculares entre sí; transversal y longitudinal permitiendo la reconstrucción tridimensional del flujo convectivo. Para mejorar la visualización del patrón de flujo se necesita emplear otro tipo de partículas trazadoras con diámetros más pequeños a los cristales líquidos.

Análisis de datos Las variables que se midieron en el experimento rotatorio fueron la temperatura y la velocidad del flujo convectivo en el recipiente así como la aceleración en varios puntos de interés del sistema.

- Temperatura

La calibración de los termopares con el baño térmico y su respuesta con la tarjeta de adquisición a emplear son requisitos necesarios en este tipo de experimentos. En este caso la señal de los termopares se vio afectada por ruido debido a un mal blindaje del cableado de la tarjeta de adquisición al CPU de la computadora central.

- Velocidad del flujo convectivo

La velocidad en el interior del recipiente es la variable más difícil de medir, las incertidumbres y propagación de errores en esta variable se inicia desde el haz de luz de láser, las pérdidas debidas al divisor de haz para formar el plano de iluminación, la refracción del plano de luz láser al incidir en la pared del recipiente cilíndrico, el espesor del haz, la iluminación uniforme del plano en el interior del recipiente, el tipo y enfoque de cámara, la distancia de la cámara al plano iluminado en el interior del recipiente, la cantidad y dimensiones de los píxeles del CCD de la cámara, el procesamiento de las imágenes y el empleo de un programa comercial proporciona a una serie de errores. Con el propósito de tener una mejor certeza en la magnitud de velocidad del flujo convectivo, es recomendable medir previamente en puntos de interés usando la técnica de anemometría láser, teniendo así la seguridad del orden en la magnitud de la velocidad media de los campos de velocidad proporcionados por el software de velocimetría por imágenes de partículas.

- Aceleración

Los acelerómetros son dispositivos muy sensibles sus señales en milivolts son fácilmente perturbadas por el ruido. Es recomendable un blindaje adecuado en sus cables de conexión para tener una señal limpia de cualquier perturbación. La ubicación de los transductores debe ser estratégica para obtener la aceleración centrífuga y la aceleración resultante del fluido durante la rotación o en su caso determinar el balance entre los brazos de la centrífuga.

6.6. Trabajo a futuro

Los siguientes comentarios están enfocados a mejorar el funcionamiento del sistema y a plantear algunas propuestas del trabajo a futuro sobre la convección natural en el sistema rotatorio, así como los ensayos que podrán realizarse en el dispositivo.

1. Centrífuga

Automatizar el control de velocidades del motoreductor y por consiguiente de la centrífuga, de tal manera que a partir de la computadora externa se puedan modificar las velocidades del sistema rotatorio.

2. Patrón de flujo

La construcción de un mecanismo que permita visualizar dos planos perpendiculares entre sí. Estos planos se iluminan con dos láseres de distinta longitud de onda y las imágenes de estos planos se captan con dos cámaras dotadas con un filtro óptico que permite el paso de la longitud de onda del plano de luz correspondiente. Uno de los planos corta el cilindro transversalmente y el otro plano es paralelo al eje de simetría. Ambos planos de iluminación recorren el cilindro a través del diámetro y su altura. Los mecanismos de posicionamiento requeridos deben controlarse automáticamente y extraer la información del flujo por imágenes captadas por las cámaras para la reconstrucción tridimensional. Inicialmente se probaría con el recipiente fijo a las coordenadas del laboratorio y posteriormente se colocaría en la canastilla experimental.

3. Estudios básicos

El centro de la centrífuga puede utilizarse para experimentos de rotación alrededor del eje de simetría del recipiente y evaluar el comportamiento dinámico del flujo en estas condiciones. El cambio de geometría del recipiente, de fluido de trabajo y de las condiciones de frontera llevan a otro tipo de estudio de la mecánica de fluidos y transferencia de calor. La evaluación de los parámetros adimensionales principales para sistemas convectivos en rotación se encuentra en etapas iniciales en la mayoría de los estudios, quedando aún pendiente un claro entendimiento de la acción de las fuerzas de Coriolis y centrífuga en el flujo convectivo. La construcción de un mapa Ra, Ta, A para un fluido y geometría de recipiente que presente los patrones de flujo es necesario para estudios de transferencia de calor y mecánica de fluidos. Por otra parte, el sistema rotatorio puede emplearse para conocer el comportamiento de sistemas con cambio de fase, de separación de sedimentos, combustión, etc en el marco de referencia no inercial.

4. Crecimiento de un cristal

El estudio del crecimiento de un cristal a partir de un fluido con un bajo punto de solidificación cuyas características ópticas permitan visualizar el proceso de cristalización entre las fases líquida a sólida es uno de los trabajos a futuro. Un estudio más completo de la dinámica del crecimiento del cristal se realizaría teniendo el control de velocidades del sistema y un conocimiento claro del tipo de patrón de flujo. Otra propuesta es el mejoramiento de las propiedades físicas de distintos compuestos semiconductores empleados en celdas fotovoltaicas bajo diferentes condiciones de gravedad.

Capítulo 7

Conclusiones

Este trabajo trata de un estudio teórico y experimental de la convección natural en un cilindro en marcos de referencia inercial y no inercial con el objetivo a largo plazo de entender el fenómeno de convección natural en el proceso de crecimiento de cristales por el método de Czochralski. Una de las metas principales que nos plantamos en el trabajo de investigación que se reporta en esta tesis es la construcción de una centrífuga que permita hacer observaciones experimentales de la convección natural en cavidades en rotación. Realizar este tipo de experimentos presenta una serie de dificultades técnicas. Al cambiar a otro marco de referencia nos encontramos con distintas limitantes para realizar experimentos. Como parte del proyecto doctoral, propusimos diseños alternativos para la construcción, instrumentación y alimentación de energía comúnmente utilizadas en otros equipos rotatorios. El principal criterio de diseño son los intervalos de interés de los números de Rayleigh y Taylor que son los parámetros adimensionales más sensitivos que gobiernan la convección natural de un fluido en rotación. Una vez identificados los criterios de diseño, se construyó el dispositivo que permite explorar la dinámica de los patrones de flujo convectivo en cavidades. Sus características principales son un diámetro de 3 m y una velocidad de rotación de hasta 86 rpm. Para su ubicación se construyó una cimentación especial, un barandal de protección, una fuente de poder independiente, así como un puente de acceso al centro de la centrífuga. En los extremos de la estructura rotatoria del dispositivo se colocaron las canastillas, experimental y contrapeso. En la primera se ubica el recipiente donde ocurre el fenómeno convectivo. Mediante un arreglo óptico se ilumina y se visualiza el flujo en el interior del recipiente. La instrumentación requerida en los experimentos rotatorios consiste de sensores de temperatura y aceleración. Los datos experimentales se almacenan temporalmente en el CPU que rota a bordo de la centrífuga para un posterior análisis en otra computadora externa. Mediante una cámara de video colocada perpendicular al plano de observación se filma el patrón de flujo en el interior del recipiente durante la operación de la centrífuga. Con la idea de un dispositivo versátil, el diseño actual permite realizar experimentos de rotación alrededor del eje de simetría del recipiente al colocarlo en el centro de la centrífuga. Además es factible reducir su brazo de giro y realizar experimentos con un radio de giro menor, la velocidad de la centrífuga puede modificarse no sólo regulando la frecuencia de operación del motor sino también cambiando la relación de los diámetros de las poleas del sistema de transmisión de potencia. Este dispositivo es único en México y comparativamente con otras centrífugas construidas en otras partes del mundo su costo es menor. Como se ha explicado en los capítulos precedentes el dispositivo descrito cumplió con las expectativas y por tanto podemos concluir que construimos un equipo de gran utilidad en el estudio de flujos convectivos y de otros fenómenos en rotación.

Para comprender el tipo de patrón de flujo convectivo en un cilindro en rotación, iniciamos el análisis de este tipo de flujo en un marco de referencia inercial respecto al eje de coordenadas del laboratorio. Efectuando cálculos numéricos, fue posible describir el flujo de convección natural en una cavidad cilíndrica cuyas paredes horizontales se mantienen a temperatura constante. La

temperatura en la base inferior es mayor que la temperatura en la base superior y la pared lateral se considera adiabática. La razón de aspecto de la cavidad es de 0.25 y el número de Rayleigh de $Ra = 5 \times 10^4$. Este valor es ligeramente superior al primer número de Rayleigh crítico para esta razón de aspecto. El patrón de flujo principal se puede describir de la siguiente manera. Observando desde una dirección sugerida por el flujo mismo, se puede identificar una celda convectiva única, no axisimétrica cuya geometría está conformada por las paredes curvas del recipiente cilíndrico. Al incrementarse el número de Rayleigh a un orden de magnitud $Ra = 7.5 \times 10^5$ aparece una celda convectiva que ocupa la mayor parte del volumen del contenedor y dos pequeños vórtices cercanos a las paredes superior e inferior. Observando desde una dirección perpendicular a la descrita en el párrafo anterior, se encontró una estructura de cuatro celdas o vórtices ubicados en cada uno de los cuadrantes del área observada.

Consideramos que la evolución de una sola celda observada para números de Rayleigh pequeños a un flujo con tres celdas podría ser un indicio de la posibilidad de ocurrencia de flujos múltiples para los mismos valores de los parámetros. Entonces, se planteó un modelo teórico con el fin de predecir las condiciones que generan la aparición de las pequeñas celdas o vórtices en las esquinas. Dentro de una aproximación aceptable, el modelo predice los números de Rayleigh requeridos para que se presenten las celdas en las esquinas como función de la razón de aspecto del recipiente. Estos valores coinciden satisfactoriamente con cálculos numéricos puntuales, por lo que podemos concluir que esta teoría es exitosa.

Las pruebas experimentales en un cilindro fijo se realizaron usando una cavidad cilíndrica de razón de aspecto 0.28 y un fluido con $Pr=6$. Los campos de velocidad observados experimentalmente para números de Rayleigh del orden de 10^6 resultaron semejantes a los obtenidos numéricamente con los mismos parámetros. El patrón de flujo observado consistió de una celda convectiva única que giraba en sentido horario. En las esquinas se encontró que se alojaban dos vórtices. A juzgar desde el plano de observación, el patrón convectivo que describimos en el párrafo anterior se modifica lentamente. Al cabo de 4 min, se identifica otro tipo de patrón de flujo, consistente en tres o cuatro estructuras vorticosas. Dos de ellas aparecen en el cuadrante superior del campo de velocidad y una o dos en el cuadrante inferior. El cambio de la estructura de flujo observado en el análisis numérico y experimental para un mismo número de Rayleigh donde inicialmente se presenta una celda convectiva principal y posteriormente una estructura conformada por tres o cuatro vórtices de tamaños similares, sugiere que el flujo convectivo rota alrededor de su eje de simetría. Esta conclusión es consistente con el análisis de los campos de velocidad numéricos y experimentales y con la observación consistente en que las condiciones de frontera no fijan la orientación del patrón convectivo respecto al eje de simetría de la cavidad. Por estas razones, consideramos que esta interpretación tiene alta probabilidad de ser correcta. Es importante notar que el flujo que proponemos puede ser un flujo en estado permanente.

La principal limitante experimental que encontramos para una comprensión completa de la configuración del flujo es que la observación que se realiza en un sólo plano. Una manera de eliminar la limitante y verificar la validez de nuestra interpretación, es hacer mediciones de campos de velocidad en planos horizontales. Actualmente llevamos a cabo estas mediciones como parte del proyecto de investigación en el que se enmarca el estudio reportado en esta tesis.

En la convección natural en cilindros en un marco de referencia no inercial, sabemos que aparecen dos fuerzas adicionales a la fuerza de la gravedad. La fuerza de Coriolis que depende de la velocidad local de las parcelas de fluido y la fuerza centrífuga que actúa dependiendo de la localización de la partícula de fluido respecto al eje de rotación. Debido al diseño de la centrífuga, de estas dos fuerzas adicionales, es la fuerza de Coriolis la que tiene una mayor influencia sobre el patrón de flujo.

En este trabajo, proponemos una teoría para determinar las condiciones bajo las cuales es válido utilizar la aproximación de Boussinesq en un sistema en rotación. Nuestro análisis sigue el método planteado por Gray y Giorgini en 1979 que se fundamenta en la técnica de perturbación a primer orden de las variables termodinámicas y dinámicas de flujos convectivos como función de la temperatura y la presión. En nuestro estudio, analizamos específicamente la configuración

geométrica que se utiliza en el flujo de convección natural en centrífugas. Establecimos los criterios que deben cumplirse para afirmar que la aproximación de Boussinesq es válida y los aplicamos al caso particular de nuestra centrífuga experimental. En conclusión, encontramos que sí es posible utilizar la aproximación de Boussinesq en los modelos que consideren parámetros del orden de magnitud de los usados en los experimentos.

Los resultados experimentales con el recipiente fijo tuvieron como propósito conocer el patrón de flujo previo a la rotación. Al hacer el experimento en rotación, observamos un drástico cambio de estructura. El patrón de flujo tiene una fuerte dependencia del tiempo con una frecuencia dominante y un complejo patrón de movimiento. Se observó un flujo descendente en la diagonal del campo de velocidades con un comportamiento periódico de 50 s aproximadamente. Durante este intervalo existía un movimiento mínimo del flujo en el plano de observación. Desafortunadamente, no se realizó una simulación numérica de la rotación para comparar con estos resultados exploratorios. Para éste tipo de patrón se está muy lejos de contar con una descripción clara y con un entendimiento cabal del fenómeno. Para continuar con estos estudios es necesario diseñar y construir sistemas de observación que nos permitan reconstruir el patrón de movimiento tridimensional tanto con rotación como sin rotación. Las conclusiones generales de nuestro trabajo son: a) contamos con un dispositivo que nos permite estudiar la convección natural en rotación y b) se requieren estudios más completos para elucidar la física del fenómeno de convección natural en rotación y en consecuencia del proceso de crecimiento de cristales.

Bibliografía

- [1] Liaw H.M. *Handbook of Semiconductor Silicon Technology*, chapter 3 Crystal Growth of Silicon. Noyes Publications, 1990.
- [2] Müller G. A comparative study of crystal growth phenomena under reduced and enhanced gravity. *J. Crystal Growth*, 99:1242–1257, 1990.
- [3] Carruthers J.R. Crystal growth in a low gravity environment. *J. Crystal Growth*, 42:379–385, 1977.
- [4] Duffar T., Serrano M.D., Moore C.D., Camassel J., Contreras S., Dusserre P., Rivoallant A., and Tanner B.K. Bridgman solidification of gasb in space. *J. Crystal Growth*, 192(1-2):63–72, 1998.
- [5] Yoon T.S., Tetreault S., Bosshard H.E., Sweet R.M., and Sygusch J.S. Mosaic spread analysis of canadian advanced protein crystallization experiment on the russian space station, mir. *J. Crystal Growth*, 232(1-4):520–535, 2001.
- [6] DeLucas L. J., Moore K.M., Long M.M., Rouleau R., Bray T., Crysel E., and Weis L. Protein crystal growth in space, past and future. *J. Crystal Growth*, 237-239(3):1638–1645, 2002.
- [7] Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, 1981.
- [8] Moreau R. The fundamentals of mhd related to crystal growth. In *Progress in Crystal Growth and Characterization of Materials*, pages 61–194. Elsevier Science Ltd, 1999.
- [9] Hicks T.W. and Riley N. Boundary layers in magnetic czochralski crystal growth. *J. Crystal Growth*, 96:957–968, 1989.
- [10] Series R.W. and Hurle D.T.J. The use of magnetic fields in semiconductor crystal growth. *J. Crystal Growth*, 113:305–328, 1991.
- [11] Amato I. The high side of gravity. *Science*, 253:30–33, 1991.
- [12] Koschmieder E.L. *Benard cells and Taylor vortices*. Cambridge University Press, New York, 1984.
- [13] Bénard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Rev. Gen. Sciences Pure Appl.*, 11:1261–1271, 1309–1328, 1900.
- [14] Catton I. Convection in a closed rectangular regimen: The onset of motion. *J. Heat Transfer*, pages 186–188, 1970.
- [15] Charlson G.S. and Sani R.L. Thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 13:1479–1496, 1970.
- [16] Charlson G.S. and Sani R.L. On thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 14:2157–2160, 1971.

- [17] Segel L.A. Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection. *J. Fluid Mech.*, 38:203–224, 1969.
- [18] Brown S.N. and Stewartson K. On finite amplitude Bénard convection in a cylindrical container. *Proc. Roy. Soc. A*, 360:455–469, 1978.
- [19] Charlson G.S. and Sani R.L. Finite amplitude axisymmetric thermoconvective flows in a bounded cylindrical layer of fluid. *J. Fluid Mech.*, 71(2):209–229, 1975.
- [20] Stork K. and Müller U. Convection in boxes: an experimental investigation in vertical cylinders and annuli. *J. Fluid Mech.*, 71(2):231–240, 1975.
- [21] Rosenblat S. Thermal convection in a vertical circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 122:395–410, 1982.
- [22] Müller G., Neumann G., and Weber W. Natural convection in vertical Bridgman configuration. *J. Crystal Growth*, 70:78–82, 1984.
- [23] Neumann G. Three dimensional numerical simulation of buoyancy-driven convection in vertical cylinders heated from below. *J. Fluid Mech.*, 214:559–578, 1990.
- [24] Abernathy J.R. and Rosenberg F. Time dependent convective instabilities in a closed vertical cylinder heated from below. *J. Fluid Mech.*, 160:137–154, 1985.
- [25] Liang S.F., Vidal A., and Acrivos A. Buoyancy driven convection in cylindrical geometries. *J. Fluid Mech.*, 36:239–256, 1969.
- [26] Greenspan H.P. *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge Univ. Press, 1968.
- [27] Chandrasekhar S. The instability of a layer of fluid heated below and subject to Coriolis force. *Proc. Roy. Soc. London A*, 217:306–327, 1953.
- [28] Naylor P.P. and Bisshopp F.E. On the influence of Coriolis force on onset of thermal convection. *J. Fluid Mech.*, 22(4):753–761, 1965.
- [29] Veronis G. Cellular convection with finite amplitude in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 5:401–434, 1959.
- [30] Küppers G. and Lortz D. Transition from laminar convection to turbulence in a rotating fluid layer. *J. Fluid Mech.*, 35:609–620, 1969.
- [31] Küppers G. The stability of steady finite amplitude convection in a rotating fluid layer. *Physics Letters*, 32A(1), 1970.
- [32] Clever R.M. and Busse F.H. Nonlinear properties of convection rolls in a horizontal layer rotating about a vertical axis. *J. Fluid Mech.*, 94:609–627, 1979.
- [33] Rossby H.T. A study of Bénard convection with or without rotation. *J. Fluid Mech.*, 36(2):309–335, 1969.
- [34] Homsy G.M. and Hudson J.L. Centrifugal convection and its effect on the asymptotic stability of a bounded rotating fluid heated from below. *J. Fluid Mech.*, 48(605–624), 1971.
- [35] Homsy G.M. and Hudson J.L. Centrifugally driven thermal convection in a rotating cylinder. *J. Fluid Mech.*, 35:33–52, 1969.
- [36] Buell J.C. and Catton I. The effect of wall conduction on the stability of a fluid in a right circular cylinder heated from below. *Trans. ASME J. Heat Transfer*, 105:255–260, 1983.

- [37] Buell J.C. and Catton I. Effect of rotation on the stability of a bounded cylindrical layer of fluid heated from below. *Physics of fluids*, 24(4):892–896, April 1983.
- [38] Goldstein H.F., Knobloch E., Mercader L., and Net M. Convection in a rotating cylinder , part 1 linear theory for moderate prandtl numbers. *J. Fluid Mech.*, 248:583–604, 1990.
- [39] Williams P., Chevy A., Bobeche S., and Rodot M. Stabilization of unsteady convective flows by centrifugation. *J. Physics D Applied*, 27:920–926, 1994.
- [40] Weber W., Neumann G., and Müller G. Stabilizing influence of the coriolis force during melt growth on a centrifuge. *J. Crystal Growth*, 100:145–158, 1990.
- [41] Ma W.J., Tao F., Zheng Y., Xue M.L., Zhou B.J., and Lin L.Y. Response of temperature oscillations in a tin melt to centrifugal effect. In Regel L.L. and Wilcox W.R., editors, *Materials Processing in High Gravity*, pages 61–66. Plenum Press, 1994.
- [42] Müller G. and Neumann G. Supression of doping striations in zone melting of insb by enhanced convection on a centrifuge. *J. Crystal Growth*, 59:548–556, 1982.
- [43] Müller G., Neumann G., and Weber W. The growth of homogeneous semiconductor crystals in a centrifuge stabilizing influence of the coriolis force. *J. Crystal Growth*, 119:8–23, 1992.
- [44] Kakimoto K. Heat and mass transfer in semiconductor melts during single crystal growth process. *Journal Applied Physics*, 77(5):1827–1842, 1995.
- [45] Kyang-Woo Hibiya T., Nakamura S. and Kakimoto K. Coriolis effect on heat transfer experiment using hot-wire technique on centrifuge. In Regel L.L. and Wilcox W.R., editors, *Materials Processing in High Gravity*, pages 171–180. Plenum Press, 1994.
- [46] Arnold W. A., Wilcox W. E., Carlson F., Chait A., and Regel L.L. Transport modes during crystal growth. *J. Crystal Growth*, 119:24–40, 1992.
- [47] Hurle D.T.J. *Handbook of Crystal Growth "Fundamentals". Vol 1.* Elsevier Science Publishers, 1993.
- [48] Müller G. *Crystals growth, properties and applications*, volume 12, chapter Convection and inhomogeneties in crystal growth from the melt, pages 441–467. Springer, 1982.
- [49] Müller G., Kyr P., and Schmidt E. Investigation of convection in melts and crystal growth underinertial accelerations. *J. Crystal Growth*, 49:387–395, 1980.
- [50] Zhao A.X. Narayanan R. Matisak B.P. and Fripp A.L. The microgravity enviroment its prediction, measurements and importance to materials processing. *J. Crystal Growth*, 174:90–95, 1997.
- [51] Pimputkar S.M. and Ostrach S. Convective effects in crystal grown from melt. *Journal of Crystal Growth*, 55:614–646, 1981.
- [52] Yu A. Polovko V.S. Yuferev V.S. Koleskinova E.N. and Zhmakin A.I. Influence of coriolis force on thermal convection and impurity segregation during crystal growth under microgravity. *J. Crystal Growth*, 180:578–586, 1997.
- [53] Schlita P.J. Crystal growth and materials processing above 1000 g. *J. Crystal Growth*, 119:1–7, 1992.
- [54] Regel L.L. Materials science in space. Technical report, Space Research Institute, Academic of Science of the USSR, Moscú, 1980.

- [55] Melekh B.T. Parfeniev R.V. Volkov M.P. and Regel L.L. Stratification of the bi-sr-ca-cu-o system melted under high gravity conditions. *J. Crystal Growth*, 2(4):237–244, 1992.
- [56] Turchaninov A.M. Burdin B.V., Regel L.L. and Shumaev O.V. The peculiarities of material crystallization experiments in cf-18 centrifuge under high gravity. *J. Crystal Growth*, 119:61–65, 1992.
- [57] Garnier J. and Cottineau L.M. Questions raised about material processing in a centrifuge, lessons derived from the lcpc's experience. *J. Crystal Growth*, 119:66–69, 1992.
- [58] Rodot H. and Regel L.L. and Turchaninov A.M. Crystal growth of iv-vi semiconductors in a centrifuge. *J. Crystal Growth*, 104:280–284, 1990.
- [59] Regel L.L. and Shumaev O.V. Gasb directional solidification under high gravity conditions. *J. Crystal Growth*, 119:70–73, 1992.
- [60] Regel L.L. y Wilcox W.R., editor. *Materials Processing in High Gravity*, New York, Junio 1994. Plenum Press.
- [61] Regel L.L. and Wilcox W.R., editors. *Processing by Centrifugation*. Plenum Press, December 2001.
- [62] Derebail R., Arnold W. A., Rosen G.J., Wilcox W., and Regel L.L. Hirb-the centrifuge facility at clarkson. In Regel L.L. and Wilcox W.R., editors, *Material Processing in High Gravity*, pages 203–209. Plenum Press, 1994.
- [63] Regel L.L. and Wilcox W.R., editors. *Centrifugal Materials Processing*, March 1997.
- [64] Wilcox W.R. and Regel L.L. Influence of centrifugation on transport phenomena. In *World Space Congress*, 1996.
- [65] Kakimoto K. Heat and mass transfer in semiconductor melts during single crystal growth process. *J. Crystal Growth*, 55, 1981.
- [66] Chevy A., Williams P., Rodot M., and Labrosse G. Removal of convective instabilities in liquid metals by centrifugation. In Regel L.L. and Wilcox W.R., editors, *Materials Processing in High gravity*, pages 43–52. Plenum Press, 1994.
- [67] Ma W.J. Tao F., Zheng Y. and Xue M.L. Unsteady thermal convection of melts in a 2-d horizontal boat in a centrifugal field with consideration of the coriolis effect. In Regel L.L. and Wilcox W.R., editors, *Materials Processing in High Gravity*, pages 67–80. Plenum Press, 1994.
- [68] Paulin M.J., Phillips R., Clark J.J., Meaney R., Millan D., and Tuff K. Establishment of the new c-core centrifuge center. In Regel L.L. and Wilcox W.R., editors, *Materials Processing in High Gravity*, pages 213–220. Plenum Press, 1994.
- [69] Siegel R. Analysis of bouyancy effects on fully developed laminar heat transfer in a rotating tube. *Transactions of ASME*, 107, 1985.
- [70] Morris W.H. Laminar convection in a heated vertical tube rotating about a parallel axis. *J. Fluid Mechanics*, 21(3):453–464, 1965.
- [71] Metzger D.E. Goldstein R.J. and Leontiev A.I., editors. *Heat Transfer in Turbomachinery*. Begell House Inc., August 1992. International Symposium on Heat Tranfer in Turbomachinery.
- [72] Chapman S. J. *Máquinas eléctricas*. McGraw Hill, 2000.

- [73] Richardson D.V. and Caisse A.J. *Máquinas eléctricas rotatorias y transformadores*. Prentice Hall, 1997.
- [74] Ramos E. and Vargas M. The boussinesq approximation in a rotating frame of reference. *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 30:1–17, 2005.
- [75] Oberbeck A. Über the wärmeleitung der flüssigkeiten bei berücksichtigung der stromungen infolge von temperaturdifferenzen. *Ann. Phys. Chem.*, 7:271–292, 1879.
- [76] Boussinesq J. *Théorie analytique de la chaleur*, volume 2. Gauthier-Villars, Paris., 1903.
- [77] Joseph D.D. Stability of convection in containers of arbitrary shape. *J. Fluid Mech.*, 47:257–282, 1971.
- [78] Joseph D.D. *Stability of Fluid Motions*, volume 27-28 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer, Berlin, 1976.
- [79] Leal G. L. *Laminar flow and Convective Transport Processes, Scaling Principles and Asymptotic Analysis*. Butterworth Heinemann, 1992.
- [80] Spiegel E.A. and Veronis G. On the boussinesq approximation for a compressible fluid. *Astrophys. Jl.*, 131:442–447, 1960.
- [81] Mihaljan J.M. A rigorous exposition of the boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid. *Astrophys. Jl.*, 136:1126–1133, 1962.
- [82] Gray D.D. and Giorgini A. The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 19:545–551, 1975.
- [83] Yang K.T. Zhong Z.Y and Lloyd J.R. Variable property effects in laminar natural convection in a square enclosure. *ASME Proc. J. Heat Tranf.*, 107:133–138, 1985.
- [84] Boubnov B.M. and Golitsyn G.S. *Convection in rotating fluids*. Kluwer, Londres, 1994.
- [85] Yaskawa Electric Corp. *VS miniC Series ultra compact all digital inverter*, 1995.
- [86] Kistler. *Advanced instrumentation for a World of Applications*, 1998.
- [87] Esquivel O.G. Instrumentación de un sistema rotatorio, tesis licenciatura. Instituto Tecnológico de Zacatepec, 2002.
- [88] Omega. *The Temperature Handbook*, 1998.
- [89] Hallcrest. *The Hallcrest Handbook of Thermochromic Liquid Crystal Technology*, 1996.
- [90] Vargas M., Ramos E., Sierra F.Z., and Avramenko A.A. Pattern formation in natural convection in a rotating container. In Regel L.L. and Wilcox W.R., editors, *Processing by Centrifugation*, pages 287–294, New York, December 2001. Plenum Press.
- [91] Vargas M., Ramos E., Ascanio G., Espejel R., Esquivel G., and Hernández-Cruz G. A centrifuge for studies of fluid dynamics phenomena in a rotating frame of reference. *Revista Mexicana de Física*, 48(3):255–266, 2002.
- [92] Vargas M., Sierra F.Z., Ramos E., and Avramenko A.A. Steady natural convection in a cylindrical cavity. *International Communication of Heat and Mass Transfer*, 29(2):213–221, 2002.
- [93] Avramenko A.A., Sierra F.Z, Vargas M., and Ramos E. Onset model of secondary flow in natural convection in a cylindrical cavity. *Fluid Dynamics Research in review*.

- [94] Raffel M., Willert C.E., and Kompenhans J. *Particle Image Velocimetry, A practical guide*. Springer, 1998.
- [95] Adrian R.J. Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Ann. Rev Fluid Mech.*, 23:261–304, 1991.
- [96] Westerweel J. Efficient detection of spurious vectors in particle image velocimetry data. *Experiments in Fluids*, 16(236-247), 1994.
- [97] Minerva Vargas, Fernando Sierra, A.A. Avramenko, and E. Ramos. Experimental and numerical investigation of the transition convective motion in a cylinder. In C. Dopazo, editor, *Advances in Turbulence VIII Proceedings of Eight Turbulence Conference*, page 99, 2000.
- [98] Minerva Vargas, F.Z. Sierra, and E. Ramos and A.A. Avramenko. Campos de velocidad en una probeta cilíndrica con convección natural. In *Memorias del XLIV Congreso Nacional de Física, VII Congreso de la División de Dinámica de Fluidos*. Sociedad Mexicana de Física, Octubre 2001.

Apéndice A

Publicación derivada de esta tesis

A. The Boussinesq approximation in a rotating frame of reference, J. Non-Equilib. Thermodyn, **30**,1-17, 2005.

The Boussinesq approximation in a rotating frame of reference

Eduardo Ramos^{1*} and Minerva Vargas²

¹Center for Energy Research, National University of Mexico, Ap.P. 34, 62580 Temixco, Mor. Mexico

²Zacatepec Institute of Technology, Ap.P. 27, 65780 Zacatepec, Mor. Mexico

*Corresponding author (erm@cie.unam.mx)

Abstract

We present linear perturbation analysis of the mass, momentum and energy conservation equations for a compressible fluid to obtain quantitative bounds for the validity of the Boussinesq approximation for a rotating flow. We have used the methodology developed by Gray and Georgini [11] and generalized it to include the effects of rotation. We consider cases where the axis of rotation is contained in the body of fluid and also those where the axis of rotation is located far away from the region occupied by the fluid.

1. Introduction

The Boussinesq approximation has been an extremely useful tool for simplifying the balance equations in the analysis of non-isothermal flows. Although bearing the name of the distinguished French scientist who used it in a classic monograph on heat transfer published at the beginning of the Twentieth century, [1] the approximation is known to have been first proposed by Oberbeck [2]. For this reason, the approximation is also known as the Oberbeck–Boussinesq approximation. An interesting historical comment on the details of the origin of this approximation can be found in [3]. This approximation is based on the assumption that the fluid density is constant except in the buoyancy term. All other physical properties of the fluid are constant and viscous dissipation is neglected. Under these conditions, the velocity field is solenoidal and the motion of a fluid initiated by temperature gradients is due to buoyancy and is not due to internal waves excited by density variations. From the basic point of view, it is of fundamental importance to decide whether the Boussinesq approximation is valid or not, since it is known that dynamic and topological properties of solutions to the conservation equations with and without the Boussinesq approximation can be very different. See for instance, [4] or [5].

Several intuitive and very enlightening discussions have appeared in well respected books in the literature. Notably, Chandrasekhar [6] and Leal [7] present qualitative discussions on the justification of the approximation but do not give formal analyses to determine the regions of validity. Kundu [8] assumes constant physical properties and gives a detailed qualitative analysis of the range of validity of the Boussinesq approximation. The methods for finding quantitative arguments to determine the ranges of validity of the approximation can be classified in three groups. The first method was introduced by Oberbeck himself [2] and has been used more recently by Spiegel and Veronis [9], Mihaljan [10], and Gray and Giorgini [11]. These last authors present a rigorous deduction of the range of validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases using a first-order perturbation method for the physical properties of the fluid in terms of temperature and pressure. They apply their theory to the specific cases of water and air. According to Joseph [12], it is required to demonstrate that the solution of the compressible equations converge to the Boussinesq equations when the proper limit is taken.

Another method of analysis has been introduced by Hills and Roberts [13] (see also [14]) and is applicable to materials whose physical properties vary with temperature but not with pressure. Considering that typical accelerations generated by density gradients are always much lower than the acceleration of gravity, the Boussinesq equations are obtained considering that the acceleration of gravity is very large and the thermal expansion coefficient is very small but their product remains finite. The third method consist in solving numerically the full compressible equations and then finding the set of conditions where the behavior of the system is indistinguishable from incompressible. Because of the major computational effort required, this more direct method was impractical until very recently. The development of efficient solvers and accessibility of computing power have made this approach more feasible. Examples of analyses with this method can be found for instance in Zhong et al. [15].

The importance of the Boussinesq approximation for rotating flows has been discussed in the context of oceanographic [16] and atmospheric [17, 18] flows and in rotational flows in the laboratory, notably in the context of crystal growth in centrifuges [19]. The Boussinesq approximation for rotating flows has been discussed by Greenspan [20]. This author considered natural convection of a liquid with constant physical properties contained in a rotating cylinder and assumed that the rotating axis, the gravity vector, and the cylinder axis of symmetry are parallel. Greenspan demonstrates that there is no motionless solution for his configuration, but argues that states of near-static equilibrium persist for times longer than typical times of the motion generated by rotation. He then displays the nondimensional form of the equations as a perturbation of the approximate static solution, but no further comment on the validity of the different possible approximations is made. In the present work, we shall extend the method of Gray and Giorgini [11] to a nonisothermal flow described in a rotating frame of reference. Although the method we present is general, we make a more detailed analysis of two geometrical configurations. The first is used in systems for growing crystals in centrifuges where the axis of rotation is fixed and is located far away from a container where the natural convective motion takes place. In the second example, we consider a configuration useful for modeling

meteorological flows in the laboratory, where the axis of rotation is co-linear to the axis of symmetry of the container.

2. The conservation equations

Consider a body of fluid rotating around the axis Ω_i . The mass, momentum, and energy conservation equations in Cartesian coordinates for a compressible Newtonian fluid with variable physical properties can be expressed as

mass conservation

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0;$$

momentum conservation

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_i}{Dt} &= \rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g k_i + \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 \right) + 2\rho \varepsilon_{ijk} v_j \Omega_k; \end{aligned}$$

energy conservation

$$\frac{Dh}{Dt} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{Dp}{Dt} + \Phi,$$

where

$$\Gamma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

is the stress tensor and

$$\Phi = \Gamma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

is the heat dissipation function. The velocity, density, pressure, and enthalpy of the fluid are denoted by v_i , ρ , p , and h , respectively. The acceleration of gravity is g and is assumed to be in the negative direction of the unit vector k_i . The physical properties of the fluid are the dynamic viscosity (μ) and the heat conductivity k . The last two terms of the momentum conservation equation are the centrifugal and Coriolis acceleration, respectively.

Since the enthalpy is a function of temperature (T) and pressure, we write

$$\delta h(p, T) = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \delta T + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \delta p.$$

Using the definition of heat capacity at constant pressure $C_p = (\partial h / \partial T)_p$, the definition of enthalpy variation in terms of entropy (s) and pressure, $\delta h = T\delta s + \delta p / \rho$, and the Maxwell relation that reads

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p,$$

the following expression can be written for the variation of the enthalpy as a function of pressure at constant temperature:

$$\left(\frac{\delta h}{\delta p}\right)_T = \frac{(1 - \alpha T)}{\rho}.$$

Here, $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ is the volumetric expansion coefficient. Using the previous relations, the energy equation can be expressed in terms of the temperature as follows:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \alpha T \left[\frac{\partial p}{\partial t} + v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right] + \Phi.$$

In the previous equations, we have considered that the physical properties of the fluid are variable. Further, we will assume that they can be linearly expanded as functions of temperature and pressure as follows:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_o [1 - \alpha_o(T - T_o) + \beta_o(p - p_o)], \\ C_p &= C_{p_o} [1 + a_o(T - T_o) + b_o(p - p_o)], \\ \mu &= \mu_o [1 + c_o(T - T_o) + d_o(p - p_o)], \\ \alpha &= \alpha_o [1 + e_o(T - T_o) + f_o(p - p_o)], \\ \lambda &= \lambda_o [1 + g_o(T - T_o) + h_o(p - p_o)], \\ k &= k_o [1 + m_o(T - T_o) + n_o(p - p_o)], \end{aligned}$$

where α_o, β_o, \dots are the coefficients of the first-order Taylor expansions. The subscript o indicates that the variables are evaluated at the reference state (T_o, p_o) . Note that the first of these equations is the state equation.

2.1. Hydrostatic conditions

We assume that the boundary conditions and geometrical arrangements of the flow under analysis are such that the system admits a static solution. This is equivalent to saying that functions ρ_s, p_s , and T_s exist and satisfy the governing equations given in the previous section with $v_i = 0$ and $\partial/\partial t = 0$. The conditions under which a static solution is available for the system depend on the relative orientation of the rotation vector, the temperature gradient, and the gravity acceleration vector. In Sec-

tion 6.1 we present an example where the static solution exists, and in Section 6.2, an example where the system maintains an approximate static condition for long times.

In symbols, the static density, pressure and temperature distributions satisfy the following form of the conservation equations:

$$0 = -\frac{\partial p_s}{\partial x_i} + \rho_s \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 \right) - \rho_s g k_i \quad (1)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_s \frac{\partial T_s}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (2)$$

with

$$\rho_s = \rho_o [1 - \alpha_o (T_s - T_o) + \beta_o (p_s - p_o)]$$

and

$$k_s = k_o [1 + m_o (T_s - T_o) + n_o (p_s - p_o)].$$

Subtracting the hydrostatic expression for the momentum equation from the corresponding general expression, and using the linear approximations, we get

mass conservation equation

$$-\alpha_o \frac{DT}{Dt} + \beta_o \frac{Dp}{Dt} + [1 - \alpha_o (T - T_o) + \beta_o (p - p_o)] \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0;$$

momentum conservation equation

$$\begin{aligned} & [1 - \alpha_o (T - T_o) + \beta_o (p - p_o)] \left(\frac{Dv_i}{Dt} - 2\varepsilon_{ijk} v_j \Omega_k \right) \\ &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial (p - p_s)}{\partial x_i} + [\alpha_o (T - T_s) - \beta_o (p - p_s)] g k_i \\ &+ [\alpha_o (T - T_s) - \beta_o (p - p_s)] \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 \right) \\ &+ \frac{\mu_o}{\rho_o} [1 + c_o (T - T_o) + d_o (p - p_o)] \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &+ \frac{\mu_o}{\rho_o} \left[c_o \frac{\partial T}{\partial x_j} + d_o \frac{\partial p}{\partial x_j} \right] \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_o}{\rho_o} [1 + g_o(T - T_o) + h_o(p - p_o)] \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \\
& + \frac{\lambda_o}{\rho_o} \left[g_o \frac{\partial T}{\partial x_i} + h_o \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right);
\end{aligned}$$

energy conservation equation

$$\begin{aligned}
& [1 - \alpha_o(T - T_o) + \beta_o(p - p_o)] [1 + a_o(T - T_o) + b_o(p - p_o)] \frac{DT}{Dt} \\
& = \kappa_o [1 + m_o(T - T_o) + n_o(p - p_o)] \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \kappa_o \left[m_o \frac{\partial T}{\partial x_i} + n_o \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \frac{\partial T}{\partial x_i} \\
& + \left(\frac{\alpha_o}{\rho_o C p_o} \right) [1 + e_o(T - T_o) + f_o(p - p_o)] \\
& (T - T_o) \frac{D}{Dt} (p - p_s) + T_o \frac{D}{Dt} (p - p_s) \\
& - (T - T_o) g v_j k_j \rho_o [1 - \alpha_o(T_s - T_o) + \beta_o(p_s - p_o)] \\
& - T_o g v_j k_j \rho_o [1 - \alpha_o(T_s - T_o) + \beta_o(p_s - p_o)] \\
& + (T - T_o) \rho_o [1 - \alpha_o(T_s - T_o) + \beta_o(p_s - p_o)] v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 \right) \\
& - T_o \rho_o [1 - \alpha_o(T_s - T_o) + \beta_o(p_s - p_o)] v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 \right) \\
& + \frac{\mu_o}{\rho_o C p_o} [1 + c_o(T - T_o) + d_o(p - p_o)] \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\
& + \frac{\lambda_o}{\rho_o C p_o} [1 + g_o(T - T_o) + h_o(p - p_o)] \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^2,
\end{aligned}$$

where the thermal diffusivity κ is defined by

$$\kappa_o = \frac{k_o}{\rho_o C p_o}.$$

In the energy equation, we have used the identity

$$\begin{aligned}
T \frac{Dp}{Dt} &= (T - T_o) \frac{D(p - p_s)}{Dt} + T_o \frac{D(p - p_s)}{Dt} - (T - T_o) \rho_s g v_j k_j - T_o \rho_s g v_j k_j \\
& - (T - T_o) \rho_s v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 \right) - T_o \rho_s v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 \right).
\end{aligned}$$

3. Scaling

Let an axis of coordinates be located at the geometrical center of the region of interest and x_i be position vector in this axis. We will define the vector r_i as

$$r_i = R_i + x_i,$$

where R_i is a constant vector that denotes the distance from the origin of coordinates to the rotation axis.

Let us assume that there is a natural spatial scale defined as the distance separating two isothermal regions that drive the flow. This parameter will be denoted by L . The temperature scale is the temperature difference between the hot and cold regions (usually boundaries) $\Delta T = T_H - T_C$. The characteristic velocity scale will be taken as the "free fall" velocity defined by $q = \sqrt{\alpha_o \hat{g} \Delta T L}$, where the body force that promotes the motion is $\hat{g} = g + \Omega_o^2 |R + L|$, where Ω_o is a characteristic rotation velocity.

The nondimensional variables are defined as follows:

$$x_i^* = x_i / L$$

and

$$r_i^* = \frac{R_i + x_i}{L} = R_i^* + x_i^*.$$

The scaled time, temperature, and velocity are

$$t^* = \frac{t q}{L} = \sqrt{\frac{\alpha_o \hat{g} \Delta T}{L}} t, \quad T^* - T_o^* = \frac{T - T_o}{\Delta T}, \quad \text{and} \quad v_i^* = \frac{v_i}{q} = \frac{v_i}{\sqrt{\alpha_o \hat{g} \Delta T L}}.$$

The scaled dynamic and hydrostatic pressures are

$$p^* - p_s^* = \frac{p - p_s}{\rho_o q^2} = \frac{p - p_s}{\rho_o \alpha_o \hat{g} \Delta T L} \quad \text{and} \quad p^* - p_o^* = \frac{p - p_o}{\rho_o \hat{g} L}.$$

The scaled rotation velocity is

$$\Omega_i^* = \frac{\Omega_i}{\Omega_o}.$$

4. Nondimensional conservation equations

Rewriting the governing equations in terms of the nondimensional variables (see Table 1) we have

Table 1 Definition of the nondimensional coefficients contained in the conservation equations.

$\varepsilon_1 = \alpha_o \Delta T$	$\varepsilon_2 = \beta_o \rho_o \hat{g} L$
$\varepsilon_3 = c_o \Delta T$	$\varepsilon_4 = d_o \rho_o \hat{g} L$
$\varepsilon_5 = a_o \Delta T$	$\varepsilon_6 = b_o \rho_o \hat{g} L$
$\varepsilon_7 = m_o \Delta T$	$\varepsilon_8 = n_o \rho_o \hat{g} L$
$\varepsilon_9 = e_o \Delta T$	$\varepsilon_{10} = f_o \rho_o \hat{g} L$
$\varepsilon_{11} = g_o \Delta T$	$\varepsilon_{12} = h_o \rho_o \hat{g} L$
$\gamma = \alpha_o \hat{g} L / C p_o$	$G = g / \hat{g}$
$\Lambda = \lambda_o / \mu_o$	

mass conservation equation

$$-\varepsilon_1 \frac{DT^*}{Dt^*} + \varepsilon_2 \frac{Dp^*}{Dt^*} + [1 - \varepsilon_1(T^* - T_o^*) + \varepsilon_2(p^* - p_o^*)] \frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} = 0;$$

momentum conservation equation

$$\begin{aligned} & [1 - \varepsilon_1(T^* - T_o^*) + \varepsilon_2(p^* - p_o^*)] \left(\frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta \ Pr}{Ra} \right)^{1/2} \varepsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* \right) \\ &= - \frac{\partial(p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} + G[(T^* - T_s^*)k_i - \varepsilon_2(p^* - p_s^*)k_i] \\ &+ Fr[(T^* - T_s^*) - \varepsilon_2(p^* - p_s^*)] \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) \\ &+ \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} [1 + \varepsilon_3(T^* - T_o^*) + \varepsilon_4(p^* - p_o^*)] \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \\ &+ \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} \left[\varepsilon_3 \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} + \varepsilon_4 \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} \right] \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \\ &+ \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} [1 + \varepsilon_{11}(T^* - T_o^*) + \varepsilon_{12}(p^* - p_o^*)] \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \right) \\ &+ \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} \left[\varepsilon_{11} \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} + \varepsilon_{12} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} \right] \left(\frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \right); \end{aligned}$$

energy conservation equation

$$\begin{aligned} & [1 - \varepsilon_1(T^* - T_o^*) + \varepsilon_2(p^* - p_o^*)][1 + \varepsilon_5(T^* - T_o^*) + \varepsilon_6(p^* - p_o^*)] \frac{DT^*}{Dt^*} \\ &= \frac{1}{(Pr \ Ra)^{1/2}} [1 + \varepsilon_7(T^* - T_o^*) + \varepsilon_8(p^* - p_o^*)] \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} \\ &+ \frac{1}{(Pr \ Ra)^{1/2}} \left(\varepsilon_7 \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} + \varepsilon_8 \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma [1 + \varepsilon_9(T^* - T_o^*) + \varepsilon_{10}(p^* - p_o^*)] \\
 & \times \left[\varepsilon_1(T^* - T_o^*) \frac{D}{Dt^*} (p^* - p_s^*) + \varepsilon_1 T_o^* \frac{D(p^* - p_s^*)}{Dt^*} \right. \\
 & - (1 - \varepsilon_1(T_s^* - T_o^*) + \varepsilon_2(p_s^* - p_o^*)) \left\{ (T^* - T_o^*) v_j^* k_j + T_o^* v_j^* k_j \right. \\
 & + Fr(T^* - T_o^*) v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) \\
 & \left. \left. + Fr T_o^* v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) \right\} \right] \\
 & + \gamma \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} [1 + \varepsilon_3(T^* - T_o^*) + \varepsilon_4(p^* - p_o^*)] \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \\
 & + \gamma \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} [1 + \varepsilon_{11}(T^* - T_o^*) + \varepsilon_{12}(p^* - p_o^*)] \left(\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} \right)^2.
 \end{aligned}$$

The nondimensional parameters are defined by
the Rayleigh number

$$Ra = \frac{\alpha_o \hat{g} \Delta T L^3}{\kappa_o \nu_o},$$

the Prandtl number

$$Pr = \frac{\nu_o}{\kappa_o},$$

the Taylor number

$$Ta = \frac{4\Omega_o^2 L^4}{\nu_o^2},$$

and the Froude number

$$Fr = \Omega_o^2 L / \hat{g}.$$

It must be recalled that Ra and Fr are defined in terms of \hat{g} and therefore the usual definitions are recovered by multiplying Ra by G and dividing Fr by G .

5. Approximate equations

5.1. Small departures from reference conditions

Let us assume that temperature and pressure departures from the reference values are small i.e., $T - T_o$ and $p - p_o \ll 1$, but we impose no restrictions to ε 's. According to

their definitions, this situation is met if the coefficients of the linear expansions are large. The conservation equations take the following form:

mass conservation equation

$$-\varepsilon_1 \frac{DT^*}{Dt^*} + \varepsilon_2 \frac{Dp^*}{Dt^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} = 0;$$

momentum conservation equation

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta \ Pr}{Ra} \right)^{1/2} \varepsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* \\ = - \frac{\partial(p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} + G[(T^* - T_s^*)k_i - \varepsilon_2(p^* - p_s^*)k_i] \\ + Fr[(T^* - T_s^*) - \varepsilon_2(p^* - p_s^*)] \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) \\ + \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \\ + \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} \left[\varepsilon_3 \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} + \varepsilon_4 \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} \right] \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \\ + \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \right) \\ + \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} \left[\varepsilon_{11} \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} + \varepsilon_{12} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} \right] \left(\frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \right); \end{aligned}$$

energy conservation equation

$$\begin{aligned} \frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{(Pr \ Ra)^{1/2}} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} + \left(\varepsilon_7 \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} + \varepsilon_8 \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} \right) \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} \right) \\ + \gamma \left[\varepsilon_1 T_o^* \frac{D(p^* - p_s^*)}{Dt^*} - \left\{ T_o^* v_j^* k_j + Fr T_o^* v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) \right\} \right] \\ + \gamma \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \\ + \gamma \Lambda \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} \right)^2. \end{aligned}$$

5.2. Extended Boussinesq equations

In the next level of simplification, we assume that $\varepsilon_i \ll 1$ for $i = 1, \dots, 12$. This condition implies that all physical properties of the fluid are at most weakly dependent on temperature and pressure. However, due to the convenient scaling chosen, a

temperature difference in the gravitational and centrifugal body forces that can be traced back to the state equation (i.e., linear density expansion in terms temperature and pressure) is not neglected. Also, the coefficient γ may or may not be small, depending on the relative magnitudes of the parameters involved. Specifically, it may be large for large \hat{g} . Under this simplification, the equations take the following form:

mass conservation equation

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} = 0;$$

momentum conservation equation

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta}{Ra}\right)^{1/2} \varepsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* \\ = -\frac{\partial(p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} + G(T^* - T_s^*)k_i \\ + Fr(T^* - T_s^*) \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2\right) + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^{*2}}; \end{aligned}$$

energy conservation equation

$$\begin{aligned} \frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{(Pr Ra)^{1/2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^{*2}} - \gamma T_o^* v_j^* k_j \\ - \gamma Fr T_o^* v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2\right) + \gamma \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*}\right) \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*}. \end{aligned}$$

Note that in this approximation, density is considered constant for Coriolis force, while the effect of variable density is present in the gravitational and centrifugal body forces.

5.3. The Boussinesq approximation in a rotating frame of reference

Following Gray and Giorgini [11], we examine the third and the last terms of the energy equation in the previous approximation. If we have that

$$|\gamma T_o^*| \ll 1$$

and

$$\left| \gamma \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \right| \ll \frac{1}{(Pr Ra)^{1/2}},$$

then the energy equation simplifies and we get the Boussinesq approximation in a rotating frame of reference. The first condition is met for small enough T_o^* and also recalling the definition $\gamma = \alpha_o \hat{g} L / C p_o$ for fluids with weak temperature-dependent

density and appropriate magnitudes of other variables in this expression. Neglecting this term implies that the effect of pressure work can be ignored. An interesting feature in this approximation is that the conditions may be satisfied under zero or small rotation, but increasing the rotation rate (and therefore \hat{g}), the condition can be violated. The second condition can be met by fluids with small Prandtl numbers, like liquid metals. Recall that the the second condition is independent of the Rayleigh number, but writing the condition as above emphasizes its physical meaning. Both conditions are satisfied when γ is small enough. It is interesting to note that by multiplying the numerator and denominator by ΔT this parameter can be interpreted as the ratio of the potential energy to sensible heat, and thus this approximation requires that the potential energy generated by the density change be small compared to the heat required to take the system from the low to high temperature. This criterion has been used by some authors to discuss the validity of the Boussinesq approximation [14]. Under this approximation, the conservation equations are

mass conservation equation

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} = 0;$$

momentum conservation equation

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta \text{ Pr}}{Ra} \right)^{1/2} \varepsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* \\ = - \frac{\partial(p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} - Fr \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{\Omega}^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right) \\ + G(T^* - T_s^*) k_i + \left(\frac{\text{Pr}}{Ra} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^{*2}}; \end{aligned}$$

energy conservation equation

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{(\text{Pr} Ra)^{1/2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} - Fr T_s^* \gamma v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{\Omega}^* \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{x}^*)|^2 \right).$$

The previous set of equations are the Boussinesq conservation equations in a rotating frame of reference. Note that if $\mathbf{\Omega} = 0$ then $Ta = 0$, $Fr = 0$, and $G = 1$. In this case, these equations reduce to the Boussinesq equations in a nonrotating frame of reference.

6. Special cases

The Boussinesq equations in a rotating frame of reference can be further simplified for specific geometrical arrangements. We display the equations for two important limiting cases.

6.1. $|R^*| \gg 1$

If the convective system is located far away from the rotation axis, then $|R_i^*| \gg 1$ or $(|R_i| \gg L)$ and $r_i^* \approx R_i^*$ is a constant vector for all points in the volume occupied by the fluid. In this case, the Boussinesq equations may be further simplified to become

mass conservation equation

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} = 0;$$

momentum conservation equation

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta \ Pr}{Ra}\right)^{1/2} \varepsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* \\ = -\frac{\partial(p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} + G(T^* - T_s^*)k_i + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^{*2}}; \end{aligned}$$

energy conservation equation

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{(Pr \ Ra)^{1/2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}}.$$

The effect of rotation manifests itself in the Coriolis term and in the G parameter.

As an specific application of this case, we can consider the studies of natural convection in centrifuges made in the context of crystal growth. See for instance [19], [21], or [22]. The geometrical setup used in these experiments is sketched in Figure 1. The container where natural convection takes place rotates around a vertical axis and is attached to the end of the arm of the centrifuge with a hinge. When the system is

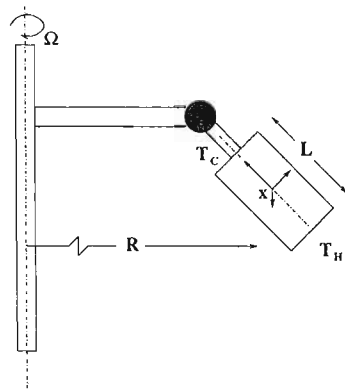


Figure 1 Geometry of a convective cell rotating around an axis located far away from the cell. The top and bottom walls of the container are perpendicular to the sum of gravity acceleration and centrifugal force.

in motion, the axis of the container aligns itself with the resultant of centrifugal and gravity forces and, considering that the distance from the container to the axis of rotation has been assumed much larger than the characteristic magnitude of the container, the centrifugal force is the same for all points inside the container. We note that an approximate static solution exists in this case since the body force is constant and linear density, temperature and pressure distributions as functions of the axial coordinate satisfy the static equations (Eqs. [1-2]) and the state equation.

6.2. $|\mathbf{R}^*| \ll 1$

When the axis of rotation is near or inside the volume occupied by the fluid, $|R_i^*| \ll 1$ or ($|R_i| \ll L$) and then r can be taken as the position vector, i.e., then $r_i^* \approx x_i^*$. The conservation equations are

mass conservation equation

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j^*} = 0;$$

momentum conservation equation

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i^*}{Dt^*} - \left(\frac{Ta \text{ Pr}}{Ra}\right)^{1/2} \varepsilon_{ijk} \Omega_j^* v_k^* \\ = -\frac{\partial(p^* - p_s^*)}{\partial x_i^*} - Fr \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}^* \times \mathbf{x}^*|^2\right) + G(T^* - T_s^*) k_i + \left(\frac{\text{Pr}}{Ra}\right)^{1/2} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^{*2}}; \end{aligned}$$

energy conservation equation

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{(\text{Pr} Ra)^{1/2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} - Fr T_o^* \gamma v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}^* \times \mathbf{x}^*|^2\right).$$

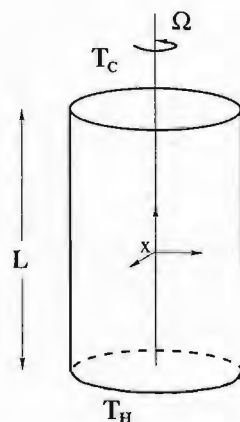


Figure 2 Geometry of a convective cell rotating around an axis located inside the cell.

Under this approximation, the effect of rotation is represented by the Coriolis effect, the larger body force, and in the terms multiplied by the Froude number. In this geometrical configuration, the Froude number can be considered small for $g \gg \Omega_0^2 L$.

An example of this case is the natural convection of a cylinder around an axis of coordinates that coincides with its axis of symmetry. This situation is described and discussed at length in [20] and sketched in Figure 2. As demonstrated in [20] strictly, there is no static solution for this situation, but for a small enough Froude number, an approximate static solution exists and the incurred error is of the order of the Froude number.

7. Discussion and conclusions

In the previous sections, we have presented the equations that govern natural convective motions in rotating systems under various approximations. The application and usefulness of these expressions depend on the validity of the postulates on which the theory is based and the availability of the data required to evaluate the various coefficients involved. As stated in Section 2.1, this theory requires that a static state exists. Although this may seem to be a stringent condition, as discussed in [20], an approximate static state would suffice for the application of the theory. An important point that needs to be checked before embarking on a detailed analysis concerns the fact that the convective velocity has been scaled with the “free fall” velocity. For instance, it has been experimentally found that the mean flow velocity is given by the “free fall” scale for a turbulent flow ($Ra \sim 10^7$) in a cavity with a diameter equal to its height and a working fluid with a Prandtl number of 0.024 [23]. However, it is likely that this scale overestimates the characteristic velocity for convective flows in slim containers due to the influence of rigid walls. In these cases, appropriate expressions accounting for the presence of walls should be used in the scaling analysis for convective flows inside cavities. Upon using these expressions, the analysis can be carried out along the same lines discussed above. Another requirement of the theory is that the physical properties of the working fluid can be expressed as linear functions of temperature and pressure. This is a reasonable assumption for most materials, provided that the ranges of temperature and pressure differences involved in the process are small. In these cases, it is likely that the Boussinesq approximation is valid since the actual coefficients are the product of the linear expansions and characteristic temperature and pressure intervals and, the two quantities being small, this product will be smaller. The precise intervals of the temperature and pressure for which the approximation is valid depend on the specific material of interest and the thermodynamic reference conditions. In general, for liquids, physical properties are weakly dependent on the pressure, and therefore only precise data on temperature dependence is required for the analysis. In contrast, for gases, temperature and pressure data are needed. In some cases, kinetic theory can be used to obtain the data required. A major requirement for the application of the theory concerns the availability of the coefficients of the linear expansions of physical properties in terms of temperature and pressure. For some common substances like water or air, these

data are available in databases and handbooks, but for many important substances data are unfortunately missing. For instance, it would be interesting to make a detailed analysis of the validity of the Boussinesq approximation for the case of natural convection of molten semiconductors in rotating crystal growth systems. But, data on the physical properties of molten materials like silicon, germanium, or other important materials in the semiconductor industry are far from complete and their dependence on the temperature is not well known [24], [25]. For instance, although a great effort has been devoted to determine the temperature dependence of the viscosity of molten silicon, these data is not exempt from controversy [26]. However, if partial knowledge of the data is available, in some cases the theory will be useful for estimating the validity of Boussinesq approximation.

8. Acknowledgments

Informative discussions with Prof. M. López de Haro (UNAM) are gratefully acknowledged.

References

- [1] Boussinesq, J., *Théorie analytique de la chaleur*, vol 2, p. 172, Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- [2] Oberbeck, A., *Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei der Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen*, *Annalen der Physik und Chemie*, 7 (1879), 271–292.
- [3] Joseph, D.D., *Stability of convection in containers of arbitrary shape*, *J. Fluid Mech.*, 47 (1971), 257–282.
- [4] Ahlers, G., *Effects of departures from the Oberbeck-Boussinesq approximation on the heat transport of horizontal convective layers*, *J. Fluid Mech.*, 98 Part 1 (1980), 137–148.
- [5] Busse, F.H., *The stability of finite cellular convection and its relation to an extremum principle*, *J. Fluid Mech.*, 30 (1967), 625–649.
- [6] Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press, Oxford, 1961.
- [7] Leal, L.G., *Laminar Flow and Convective Transport Processes: Scaling Principles and Asymptotic Analysis*, Butterworth-Heinemann Series in Chemical Engineering, Boston, 1992.
- [8] Kundu, P.K., *Fluid Mechanics*, Academic Press Inc., New York, 1990.
- [9] Spiegel, E.A., Veronis, G., *On the Boussinesq approximation for a compressible fluid*, *Astrophys. J.*, 131 (1960), 442–447.
- [10] Mihaljan, J.M., *A rigorous exposition of the Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid*, *Astrophys. J.*, 136 (1962), 1126–1133.
- [11] Gray, D.D., Giorgini, A., *The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 19 (1975), 545–551.
- [12] Joseph, D.D., *Stability of Fluid Motions II*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [13] Hills, R.N., Roberts, P.H., *On the motion of a fluid that is incompressible in a generalized sense and its relationship to the Boussinesq approximation*, *Stab. Appl. Anal. Cont. Media*, 1 (1991), 205–212.
- [14] Straughan, B., *The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [15] Zhong, Z.Y., Yang, K.T., Lloyd, J.R., *Variable property effects in laminar natural convection in a square enclosure*, *ASME Proc. J. Heat Transfer*, 107 (1985), 133–138.

- [16] McDougall, T.J., Greatbatch, R.J., Lu, Y., On conservation equations in oceanography: How accurate are ocean Boussinesq models?, *J. Phys. Oceanography*, 32 (2002), 1574–1584.
- [17] Emanuel, K.A., *Atmospheric Convection*, Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [18] Doswell, C.A., Markowski, P.M., Is buoyancy a relative quantity?, submitted to *Monthly Weather Review*, (2003).
- [19] Regel, L.L., Wilcox, W.R., Eds. *Centrifugal Processing*, Kluwer/Plenum, New York, 2001.
- [20] Greenspan, H.P., *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge University Press, New York, 1969.
- [21] Muller, G., Neumann, G., Weber, W., The growth of homogeneous semiconductor crystals in a centrifuge by the stabilizing influence of the Coriolis force, *J. Crystal Growth*, 119 (1992), 8–23.
- [22] Vargas, M., Ramos, E., Ascanio, G., Espejel, R., Esquivel, G., Hernández-Cruz, G., A centrifuge for studies of fluid dynamics phenomena in a rotating frame of reference, *Rev. Mex. Fisica*, 48 No. 3 (2002), 255–266.
- [23] Takeshita, T., Segawa, T., Glazier, J.A., Sano, M., Thermal turbulence in mercury, *Phys. Rev. Lett.*, 76 No. 9 (1996), 1465–1468.
- [24] Juel, A., Mullin, T., Ben Hadid, H., Henry, D., Three-dimensional free convection in molten gallium, *J. Fluid Mech.*, 436 (2001), 267–281.
- [25] Braunsfurth, M.G., Juel, A., Mullin, T., Riley, D.S., Free convection in molten gallium, *J. Fluid Mech.*, 342 (1997), 295–314.
- [26] Sato, Y., Kameda, Y., Nagasawa, T., Sakamoto, T., Moriguchi, S., Yamamura, T., Waseda, Y., Viscosity of molten silicon and the factors affecting measurement, *J. Crystal Growth*, 249 (2003), 404–415.

Apéndice B

Publicación derivada de esta tesis

A centrifuge for studies of fluid dynamics phenomena in a rotating frame of reference, *Revista Mexicana de Física*, **48**, 3, p.p. 255-266, 2002.

A centrifuge for studies of fluid dynamics phenomena in a rotating frame of reference

M. Vargas

† *Instituto Tecnológico de Zacatepec*
A.P. 45, 62780, Zacatepec, Mor., México

E. Ramos

‡ *Centro de Investigación en Energía*
Universidad Nacional Autónoma de México
A.P. 34, 62580, Temixco. Mor., México

G. Ascanio

Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico
Universidad Nacional Autónoma de México
A.P. 70-186, 04510, México, D.F., México

R. Espejel

Instituto de Física UNAM
A.P. 20-364, 04510, México, D.F., México,

G. Esquivel† and G. Hernández-Cruz‡

Recibido el 13 de junio de 2001; aceptado el 11 de febrero de 2002

A centrifuge for the study of fluid mechanics phenomena in a rotating frame has been constructed at the Center for Energy Research at the National University of Mexico (UNAM). The centrifuge has a 1.5 m long arm and is designed to rotate at a maximum rate of 86 rpm which corresponds to a maximum centrifugal acceleration of 13 g. This paper describes the mechanical characteristics of the centrifuge and its instrumentation. The potential of the system for performing fluid mechanics experiments in a rotating frame of reference is also discussed and sample results of natural convection in a cavity are presented.

Keywords: Centrifuge; fluid dynamics; microgravity; natural convection; Coriolis force

Se construyó una centrífuga para el estudio de fenómenos de la dinámica de fluidos en un marco de referencia rotatorio. La centrífuga tiene un brazo de giro de 1.5 m de longitud y se diseñó para rotar a una tasa máxima de 86 rpm, la cual corresponde a una aceleración de 13 g. Este artículo describe las características mecánicas de la centrífuga y su instrumentación. Se muestra el potencial del sistema en el desarrollo de experimentos de mecánica de fluidos en un marco de referencia rotatorio y se presentan algunos resultados de la visualización de la convección natural en una cavidad.

Descriptores: Centrífuga; dinámica de fluidos; microgravedad; convección natural; fuerza de Coriolis.

PACS: 01.52.+r; 47.27.Te; 47.32.-y

1. Introduction

Centrifuges have been used to explore a large variety of physical phenomena with augmented gravity, ranging from the study of statics and failure of materials used in civil engineering to the determination of human response to time dependent supergravity. A specific application of centrifugation that has an enormous potential for applications in microelectronics, solar energy, and other fields is crystal growth. The improvement of the quality of the semiconductor crystals is the ever present goal of material science researchers and manufacturers. With this aim in mind, some sophisticated experiments were performed in the MIR station and German sounding rocket TEXUS 24 some years ago. The main objective was to clarify the role played by the buoyancy force that generates the convective motion in a crucible in the quality of crystal. Buoyancy is the force which is exerted on a fluid due to vari-

ations of density and in the presence of a gravitational field. Fluid parcels with lower density move in a direction opposite to that of the body force and fluid parcels with higher density move in the same direction as that of the body force. It has been found that the absence of the force of gravity increases the crystal homogeneity when crystals are grown in crucibles, for example with the Czochralski method. However, because of their enormous costs, the extraterrestrial methods for crystal growth are impractical. In a further effort to explore the effect of body forces on the crystal growth process and as an alternative approach, crystals were grown in centrifuges. Furnaces were mounted in centrifuges and rotated to obtain centrifugal accelerations of up to 50 g (g is the terrestrial acceleration constant; 9.81 m/s^2). The results of these experiments were successful in the sense that specific values of the rotation rate yielded enhanced crystal quality. However, considerable difficulties have been encountered by many mate-

rial scientists around the world to use centrifuges to perform crystal growth experiments since most centrifuges were constructed for other purposes. The centrifuge used by the Soviet team lead by L. Regel to perform crystal growth experiments was a 18 m arm with a rotation velocity at 36.5 rpm machine at Star City near Moscow. This centrifuge was used to train cosmonauts to withstand high accelerations during take off and reentry of spacecrafts. The results of these pioneering work has been described by Burdin *et al.* [1]. The 5.5 m maximum arm centrifuge used by Rodot *et al.* [2] to perform crystal growth experiment at Nantes in France belongs to the Department of Roads and Bridges and is used mainly for civil engineering studies on small scale models. Another relevant centrifuge used occasionally for materials processing, is the C CORE (Centre for Cold Ocean Resources Engineering) which is located on the campus of Memorial University of Newfoundland, Canada. Its principal use is geotechnical research. This Acutronics 680 – 2 is capable of generating up to 200 g, and has a 5 m nominal radius, its maximum rotational speed being about 189 rpm see Ref. 3. At the Tsukuba Space Center, the National Space Development Agency of Japan (NASDA) built a centrifuge with 7.25 m arm, which reaches up to 10 g with an angular velocity of 35 rpm. This device was used to reproduce several of the German rocket TEXUS 24 experiments as described by Hibiya *et al.* [4].

A centrifuge constructed specially for materials processing research and related flow visualization, is the HIRB (High Inertial Rotating Behemoth) at the International Center for Gravity Materials Science and Applications in Clarkson University. It has a 1.5 m arm, with a maximum attainable rotation rate of 90 rpm and a maximum acceleration of 13.8 g. A complete description of this instrument is given by Deribail *et al.* [5]. The Erlangen University group constructed a centrifuge in 1980, with a 0.75 m arm and velocity range of 12–250 rpm, capable of generate up to 50 g. Subsequently, the centrifuge design was modified to incorporate two arms, one of 2.6 m and an other of 1.6 m. This centrifuge was used to test the effects of Coriolis and centrifugal forces in several crystal growing experiments. Some of the results are reported in Refs. 6 - 8. Many experiments were done in these centrifuges for the development of new materials like high-quality semiconductors for the microelectronics industry. An important source of information on the progress of understanding the physics of the phenomena occurring in rotating systems in the context of materials research is the series of books that contain the proceedings of the Clarkson conferences on centrifugal phenomena. [9, 10, 11].

In this paper we present the design and details of the construction of a centrifuge. Also we describe sample results obtained with this device. It is important to remark that in contrast with other centrifuges, this equipment was designed and constructed with the principal objective of studying the effects of centrifugal and Coriolis forces in fluid dynamics phenomena.

2. Definition and design criteria

The long-term objective of the project which encompasses the design and construction of the centrifuge, is the study of several physical phenomena that occur in a non-inertial frame as seen from the laboratory frame of reference. Of particular interest is the effect of virtual forces on the motion of nonisothermal flows. For this reason, one important design criterium is the modularity and flexibility to allow modifications or changes in the relative position of the components. In the two following subsections, we present the design criteria of the centrifuge, emphasizing the features that are required for the study of natural convection in cavities where a temperature difference is imposed. In this spirit, we will restrict the discussion to the study of flows in closed cavities where a temperature difference is imposed externally. The physical phenomena that occur in the centrifuge are modified by the presence of the centrifugal and Coriolis forces. The centrifugal force is a conservative force and has the form

$$F_{cent} = -\frac{\rho}{2} \nabla |\omega \times \mathbf{r}|^2,$$

where ρ is the density, \mathbf{r} is the distance from the rotation vector, and ω is the angular velocity. The Coriolis force is defined by the expression

$$F_{Coriolis} = 2\omega \times \mathbf{u},$$

where \mathbf{u} is the local velocity. From its definition, it is seen that the Coriolis force occurs only if the system is in motion and therefore, has an influence only under dynamic conditions.

2.1. Geometrical considerations

The phenomenon of natural convection in a rotating frame of reference depends fundamentally on the relative orientation and position of three vectors. First, there is unavoidable gravity acceleration vector, then the rotation vector, and finally the temperature gradient vector, which indicates the direction of the temperature difference imposed on the cavity. Ideally, we are interested in a situation in which the rotation vector is perpendicular to the temperature gradient vector, in such a way that the centrifugal force can be oriented along the axis of the cavity and parallel to the temperature gradient vector. This situation is illustrated in Fig. 1 for a natural convective cavity composed of a cylindrical container, where the plane walls are held at constant but different temperatures. In the absence of terrestrial gravity, this arrangement would lead to a simple situation where essentially the only new effect would be that of the Coriolis force. Although the generation of these physical conditions is not possible due to the ever present gravity force, the following very convenient arrangement can approximate these conditions: at the end of the arm of the centrifuge, a container that houses the experimental equipment is attached by a hinge that allows rotation around a horizontal axis. When the centrifuge is set in motion, the container aligns itself with the vector sum of the centrifugal and gravity forces, as shown in Fig. 2. Under these conditions the sum of conservative forces is parallel to the temperature gradient vector.

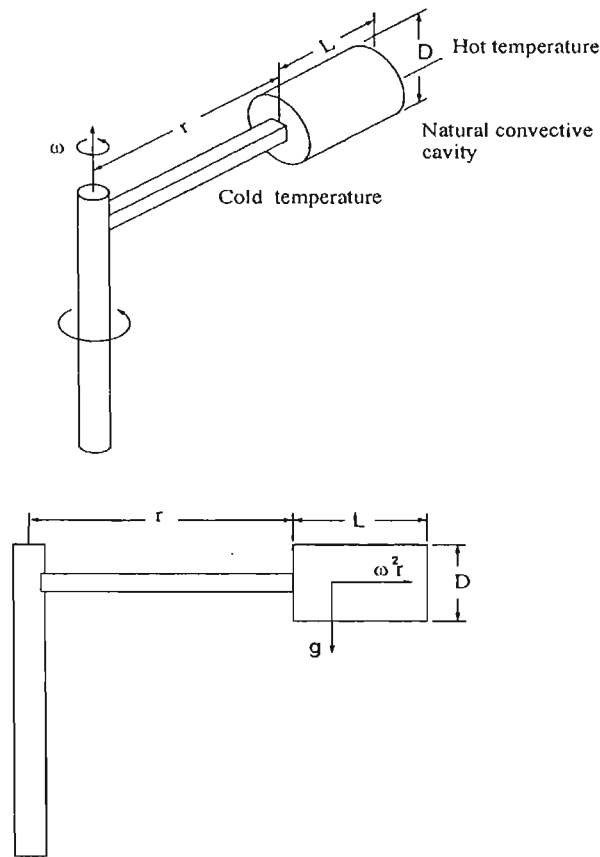


FIGURE 1. Ideal set up for testing the influence of Coriolis force in a natural convective cavity.

2.2. Physical considerations

The most basic information required for the design of the centrifuge are the ranges of the nondimensional parameters of relevance in the natural convective flows. As is well established, the qualitative properties of natural convective flow are described by two parameters: the Prandtl and Rayleigh numbers [12]. The Prandtl number is the ratio of kinematic viscosity ν to thermal diffusivity α (i.e. $Pr = \nu/\alpha$). Therefore, it indicates the ability of a material to transfer momentum as compared to its ability to transfer heat. We are interested in studying natural convection of liquid metals, air, water and Silicon oils, covering a range of Prandtl number from 10^{-2} to 10^2 . This requirement does not impose technical difficulties except for visualization. In the present design we restrict ourselves to transparent materials. The Rayleigh number Ra is defined by

$$Ra = g\beta\Delta TL^3/\alpha\nu,$$

where β is the volumetric expansion coefficient, L is a characteristic length of the cavity and ΔT is the temperature difference.

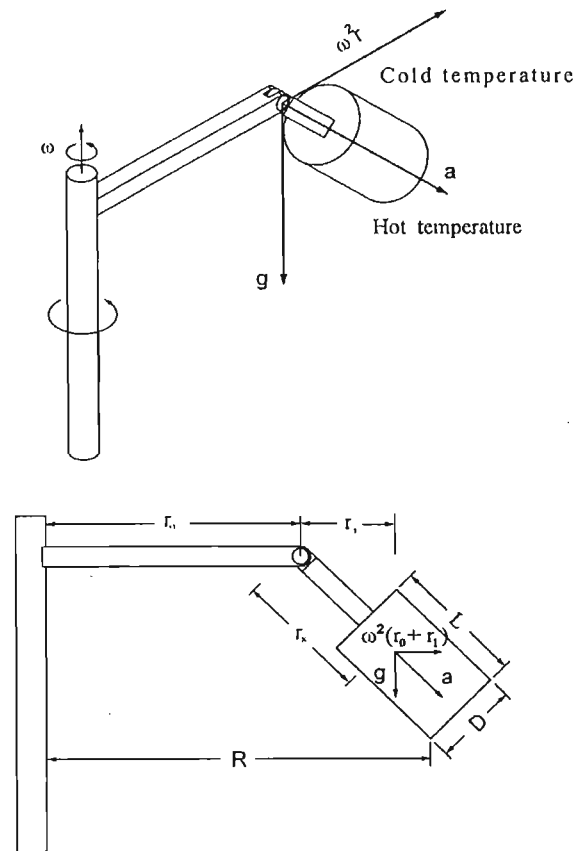


FIGURE 2. Realistic arrangement for observing the influence of Coriolis force in a centrifuge.

It is recognized now that the nonrotating natural convection in cavities exhibits essentially three different qualitative behaviors:

- a) nonconvective regime, where the velocity is zero and heat is transferred solely by conduction,
- b) steady state convection where the flow is laminar, and
- c) unsteady regime that includes chaotic and turbulent regimes.

Figure 3 shows a Ra vs aspect ratio ($\Gamma = L/D$) map indicating the regions where different qualitative flows occur, for the particular case of a cylindrical container with circular cross section and $Pr = 6.7$. Our interest is to design a device such that it allows us to observe the influence of rotation on all three (nonrotating) regimes. In a rotational flow, several nondimensional numbers have been defined [13]. In the context of the centrifuge project, the most relevant one is the Taylor number defined by

$$Ta = 4\omega^2 L^4/\nu^2.$$

This nondimensional parameter relates the effects of Coriolis and viscous forces, a vanishing Taylor number indicates no rotation. Qualitative modifications of natural convective patterns have been observed to occur for a fluid with $Pr = 0.13$ at a Rayleigh number of 10^5 , [7].

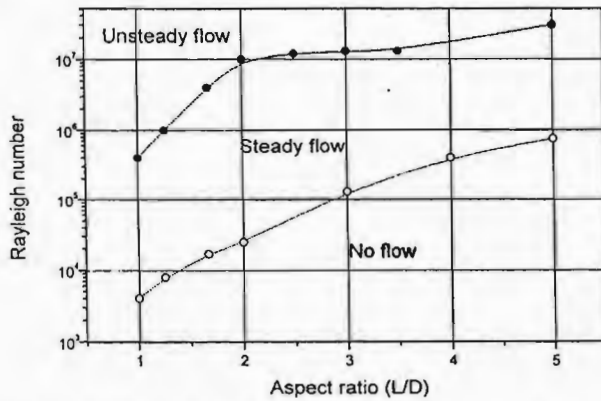


FIGURE 3. Rayleigh number versus aspect ratio map of qualitative dynamic behavior for a cylindrical container with $Pr = 6.7$. Adapted from Ref. 14.

De la Cruz [13] found that the Taylor number required to suppress oscillatory flows for a $Pr = 5$ fluid at a $Ra = 4 \times 10^5$ was $Ta = 5 \times 10^6$. In principle, it would be convenient to build a centrifuge capable of rotating at large enough rates to explore the reported modifications in the qualitative behavior of the natural convective flow. Therefore we established the range $0 < Ta < 10^8$ for working fluids with $\nu = 3.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ as a minimum design requirement for the centrifuge, given that the visualization equipment of the convective cavities imposes a minimum height of about 0.02 m . The rotation rate required to reach the desired ranges of Taylor numbers for the smaller cavity is approximately 80 rpm . The Ekman number is alternative notation for the Taylor number and is defined by $Ek = \nu/2\omega L^2$. Another nondimensional parameter is the Rossby number $Ro = U/2\Omega L$, where U is the local velocity of the system, L is the characteristic length and Ω is the rotational velocity. This number is the ratio between inertial and Coriolis forces. If $Ro \gg 1$, the influence of rotation is small. In the other case, when $Ro \ll 1$ the rotation motion determines the flow regime and its patterns. Boubnov and Golitsyn [12]. It would be desirable to predict the characteristic velocity of the flow. A tempting idea would be the use of the so-called free fall velocity which arises from the balance between inertial and buoyancy effects,

$$u = (g\beta \Delta T L)^{1/2}.$$

This expression however overestimates the velocity by a factor that depends on the aspect ratio of the container, since it does not take into account the influence of the walls. Experimental observations indicate that for aspect ratios of $L/D \sim 2$, and water as test fluid, the vertical velocity approaches is of order $u \sim 4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$.

Once the ranges of the variables presented in the previous paragraphs have been established, it is possible to determine the ranges of nondimensional parameters that describe the physical effects present in the system. Table I gives definitions and involved of nondimensional parameters including the ranges of these parameters that can be achieved with the centrifuge.

TABLE I. Main nondimensional parameters

Prandtl Pr	ν/α	$10^{-2}-10^2$
Rayleigh Ra	$g\beta\Delta TL^3/\nu\alpha$	10^5-10^7
Taylor Ta	$4\omega^2 L^4/\nu^2$	$0-10^9$
Ekman Ek	$\nu/2\omega L^2$	$3 \times 10^{-5}-\infty$
Rosby* Ro	$U/2\omega L$	10^{-4}
Reynolds* Re	UL/ν	$10^{-1}-30$
Froude Fr	$(\omega^2 L/g) \cdot (H/L)$	$0-10^{-1}$
Rotational Rayleigh Ra_r	$a\beta\Delta TL^3/\nu\alpha$	10^5-10^8

*We used the experimental velocity $U = 4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$, as the characteristic velocity.

3. Mechanical design and instrumentation

The main components of the centrifuge are the nonrotating components, the rotating structure, two baskets, a bridge, and a security fence. In this section we describe in detail the mechanical properties of these components. Here we also present the equipment housed in the experimental basket which was used to obtain the experimental results given in the last section of this article. The two most relevant features of the rotating system are an arm length of 1.5 m and a maximum angular speed of $\omega = 86 \text{ rpm}$ (9 rad/s).

3.1. Nonrotating components

The nonrotating components of the centrifuge are the base, the central support frame, the bearings, the motor, and the transmission system, as displayed in Fig. 4. The centrifuge base is a rectangular steel plate 0.6 m wide, 1.2 m long, and 0.012 m thick, which is fixed to the foundation by six expansion high resistance screws. The motor and the central support frame are anchored to the base. The transmission system is composed of two belts and two pulleys. The rotation of the centrifuge is generated by a 1 HP , three phase AC motor capable of developing a maximum torque of 142.35 Nm (1260 lb plg) at 1750 rpm . Its electrical characteristics are $(208 - 230)/460 \text{ V}$ and $4.2/2.1 \text{ A}$ in the stator. The motor velocity control is made by a digital inverter (VS mini C series), with frequency range of 0 to 400 Hz [16]. The power transmission uses V belt drivers of trapezoidal cross section with efficiency of $70 - 90\%$ to absorb shocks and operate at low bearing pressure. The transmission system has two aluminium pulleys with a diameter 0.152 m ($6''$), one of them fixed to the axis of rotation with a double belt. An important feature of the transmission system is the reduction of the mechanical vibrations to a minimum when the centrifuge is in operation.

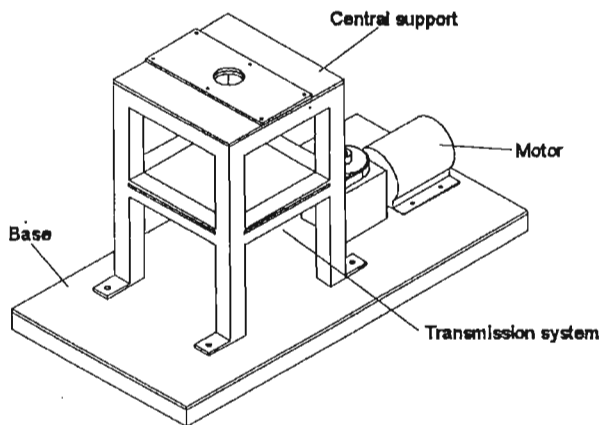


FIGURE 4. Nonrotating elements of the centrifuge. Bearings are under the plates of the central support frame and therefore not shown in the figure. Also the pulleys are hidden by the lower plate of the central support (see Fig. 5).

3.2. Rotating structure and power supply

This arrangement is composed of the shaft, and five modules: one central, two intermediate, and two terminal, as shown in Fig. 5. The shaft is a 4140 steel, 0.101 m (4") diameter and 1.10 m long rod that sits vertically in the central frame held by two bearings of 0.0762 m (3") diameter, and separated a distance of 0.328 m. The diameter of the lower extreme of the shaft was reduced to 0.038 m (1.5") to fit the pulleys and the lower bearings. All modules are made of structural carbon steel tubes with a rectangular 0.0254 m² (1" × 1") cross section. The intermediate and terminal modules are fixed at opposite sides of the central structure. The central module is a prism 0.4 m × 0.4 m × 0.6 m that holds the central shaft with two bearings sitting in two steel plates. This module also houses two batteries and

the DC/AC inverter. The intermediate modules are trapezoidal prisms; the intermediate ones having large cross sections 0.4 m × 0.4 m facing the central module of and a small cross section of 0.4 m × 0.14 m in contact with the terminal modules. The length of the intermediate modules is 0.645 m. The terminal modules are also trapezoidal prisms, the larger cross section is of 0.4 m × 0.14 m and the small cross section is of 0.4 m × 0.09 m, and their total length is 0.645 m. At far end of the terminal modules small steel plates that hold wall bearings are placed. This arrangement supports 0.53 m long stainless steel rods with a diameter of 0.02 m (9/8") that constitute shafts that allow horizontal rotation of the swinging baskets located at the end of the arms of the centrifuge. All modules are fixed with high resistance hexagonal head screws. As will be described in more detail below, the maximum total weight of each basket is 10 kg, and since the maximum rotation rate is 86 rpm and the arm length is 1.5 m, the upper limit of the centrifugal force exerted at the end of the arms is 1215 N.

Given the design of the centrifuge and in order to avoid the use of slipping rings, it was deemed necessary to mount on board the rotating section of the centrifuge a power source. This design strategy has the advantage of providing a versatile power supply that can support present and future power demands from the various instruments used in the data acquisition and visualization. The instruments that require electrical power are: the on-board CPU (power consumption ~ 50 W), the laser power source used in the visualization system (power consumption ~ 30 W), the thermoelectric devices required for maintaining constant temperature walls (power consumption ~ 8 W), and control circuits (power consumption ~ 2 W). Taking into account that of these instruments and allowing for future increases, it was estimated that the total power demand would be 200 W.

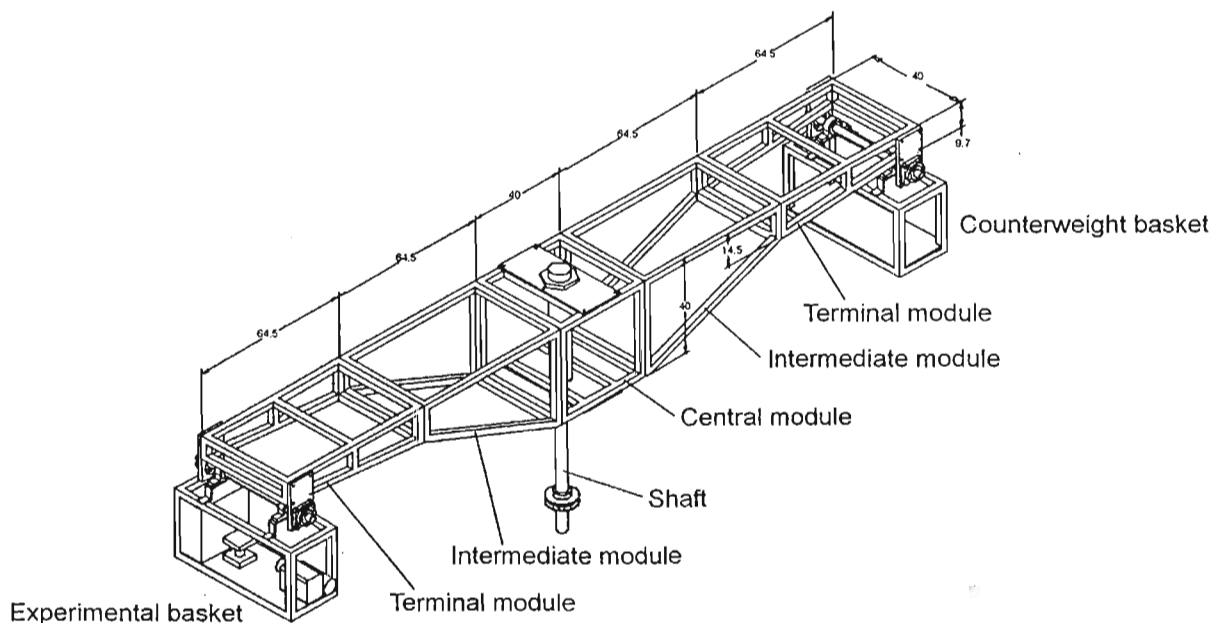


FIGURE 5. Rotating structure of the centrifuge.

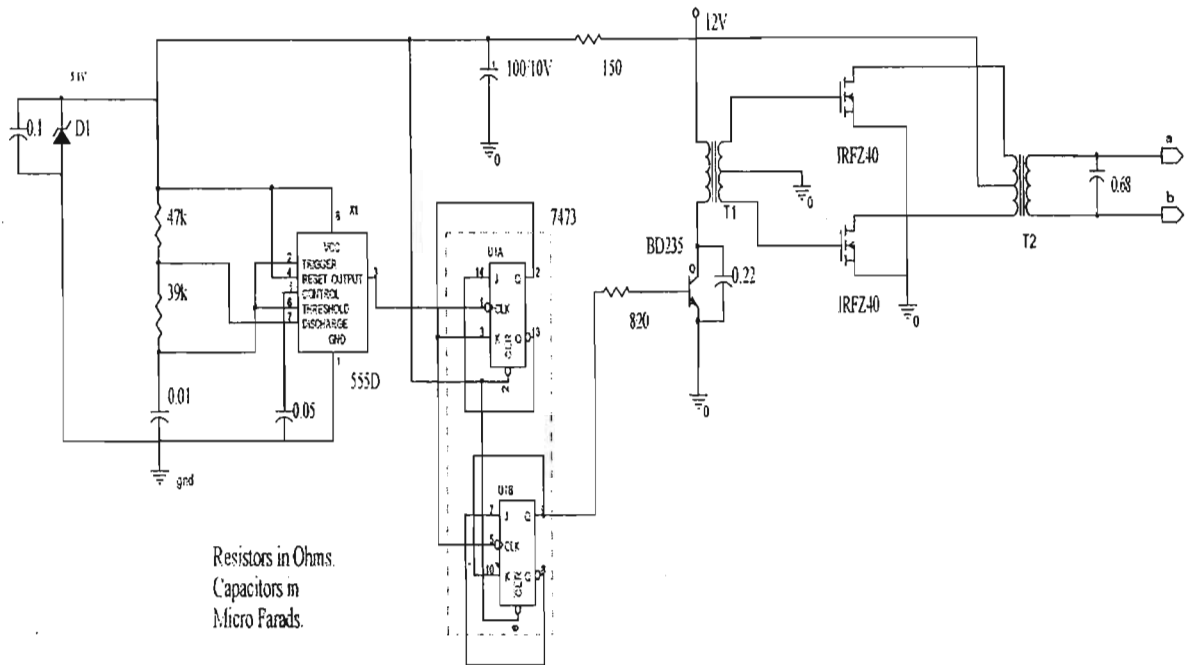


FIGURE 6. Electronic circuit of the DC/AC inverter.

The primary power source is constituted by two 12 V, 60 A *hr* capacity, lead-acid batteries located near the axis of rotation. With these design parameters and considering an autonomy of 3 hours, the DC/AC inverter was designed. Figure 6 shows the electronic circuit of this device. The alternating system is an RC oscillator composed of the U2(555) integrated circuit, R_1 and R_2 resistors, and C_4 capacitor. These components determine the oscillation frequency. The U1(7473) integrated circuit divides the frequency of the output signal of U2 by a factor of four with a duty cycle of 50%. In addition U1 controls the bipolar transistor Q_1 coupled in a common emitter configuration with the primary coil of transformer T_1 . This device and capacitor C_1 are the resonant load of the collector circuit. This array yields two signals with opposite phase and a long enough time delay to prevent the simultaneous conduction in the M_1 and M_2 MOSFET transistors. These devices are used as power amplifiers together with the T_2 transformer which increases the voltage to 125 Vac. C_5 smoothens the waveform of the output voltage.

There are two important features of the design of this DC/AC inverter that should be emphasized. In contrast with the voltage signal provided by the AC line which is a 125 V_{rms} , sine wave with a frequency of 60 Hz, the signal provided by the DC/AC inverter is a 160 V_{rms} square wave at 240 Hz. The wave form was chosen to let the power transistors work in a cut-and-saturation mode to minimize dissipation. Also the voltage and frequency have been tailored to the capacitive input of the CPU power supply to further enhance the power conversion and transfer.

3.3. Experimental and counterweight baskets

At the end of the arms of the centrifuge two rectangular baskets were set, one of them is the experimental and the other is the counterweight basket. When the centrifuge rotates, the position of the baskets will have a tilt due to the simultaneous action of the centrifugal and the gravity forces. The baskets are constructed with DEXION steel angle and have the same dimensions: 0.55 m long, 0.28 m height, and 0.22 m wide. The baskets are coupled to the arms by a horizontal shaft and two journal bearings 0.0254 m (1") in diameter and separated 0.22 m from each other. The journal bearings operate like a hinge giving the basket a free rotation around a horizontal axis. Its floor and walls are wooden pieces. Three rubber plates located in the center of the basket and fixed to the floor by screws constitute the counterweight. The center of mass of the counterweight is at the same geometrical position as that of the experimental basket. The weight of the basket is approximately 9.8 kg. The experimental basket was built with the same materials as the counterweight basket. Its floor is a wooden platform where cuts were made to accommodate the videocamera and the base of the cavity. Inside the experimental basket are located the optical arrangement for flow visualization composed by a laser lamp, a cylindrical prism, a collimating lens, and a cube beamsplitter. All components are located on the same side of the videocamera. As commented before, this arrangement sits on a custom-made support. Detailed description of the design of the visualization system is provided in the following section. Figure 7 shows the spatial distribution of the various parts of the equipment in the experimental basket.

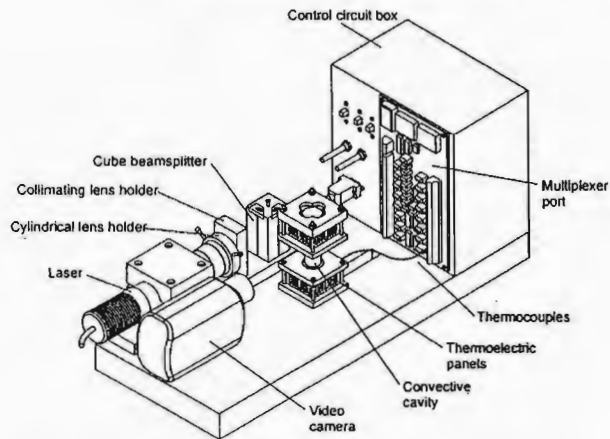


FIGURE 7. Distribution of the elements in the experimental basket.

3.4. Experimental cavity

The experimental basket holds the natural convection cavity and the visualization and control auxiliary equipment. The cavity is located at the center of the basket, seated on the floor. The control circuit and a multiplexer board are located on one side of the cavity and the videocamera on the other. The cavity is constituted of a lateral wall made of a pyrex tube of 17 mm inner diameter with 1.5 mm wall thickness and two flat upper and lower walls made of copper. The ends of the test cell are two copper pieces that house one thermoelectric device each. The temperatures of the ends are controlled to produce the desired axial temperature difference in the cavity. The thermoelectric characteristics are 8 W maximum power consumption at 12 Vdc and operating temperature range of $(-79 \text{ to } 79)^\circ\text{C}$. Next to each thermoelectric device and opposite to the cell, a thermal dissipator and a fan are affixed. This heat sink (or source) provides an ambient temperature zone for the thermoelectric devices. The height of the cell is 0.030 m and therefore, its aspect ratio $\Gamma = 1.76$. At a height of 0.0235 m from the bottom and diametrically opposed two small 0.005 m diameter glass tubes are located, through these two thermocouples Omega copper constantan "T" type are positioned to record the temperature of the convective flow. The thermocouples are located at a horizontal distance of 0.003 m from the cavity walls. The schematic diagram of the cavity is shown in Fig. 8.

The voltage of the thermoelectric devices is controlled with a electronic circuit that keeps constant but different temperatures at the top and bottom cavity walls. The electronic circuit is composed of two parts: a) the power circuit and b) the control circuit. The control circuit for one of the thermoelectric devices is shown in Fig. 9. Control is achieved by $U_1(35)$ integrated circuit operating in thermometer mode.

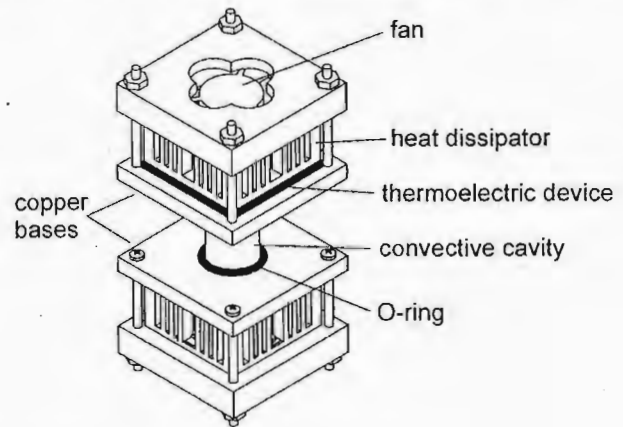


FIGURE 8. Schematic diagram of the cavity.

This circuit monitors the temperature of the thermoelectric face closer to the horizontal wall of the convective cell continuously and yields an output voltage proportional to the reading with a constant of $10 \text{ mV}/^\circ\text{C}$. An adjustable voltage divisor constituted by the resistances R_1 and R_3 and the potentiometer R_2 provides the set voltage. The output of this voltage divisor is applied to the input of the $U_2(358)$ differential amplifier which is used as a voltage comparator. Resistances R_4 , R_5 , R_6 , and R_7 together with their corresponding capacitors determine the gain and the response time. The output of this section is called the error signal and is fed into a Darlington power transistor (Q_1) that controls the electric current that goes through the thermoelectric device. The reference voltage is set with a variable resistance and the thermal sensors placed in direct contact with the thermoelectrics provide the input control signal. The control circuit generates the signal to maintain a temperature at the cavity flat wall of rises to $0.47^\circ\text{C}/\text{s}$ and oscillates around the set value with ripples less than $\pm 0.5^\circ\text{C}$.

3.5. On-board CPU and accessories

On the top of the central module of the centrifuge sits a tower that houses the on-board CPU and other instruments. A similar tower is fixed to the ceiling of the room and its lowermost face is separated 0.05 m from the uppermost face of the rotating tower fixed to the central module of the centrifuge. The rotating tower is 1.10 m high and has five shelves. In the first, the laser lamp power supply is located, the second compartment houses the on-board CPU and in the third shelf the hard disk is located. The rest of the space is empty at present in preparation for future use. The on-board CPU is a Pentium II and has one PCLab board. On top of the rotating structure, a circular UHF antenna that is plugged to the video camera output is located. At the end of the fixed structure and separated 0.0254 m (1") from the rotating structure another UHF antenna is placed. This antenna picks up the signal and sends it to the videorecorder and to the monitor to be displayed. The convective motion can be seen in real time.

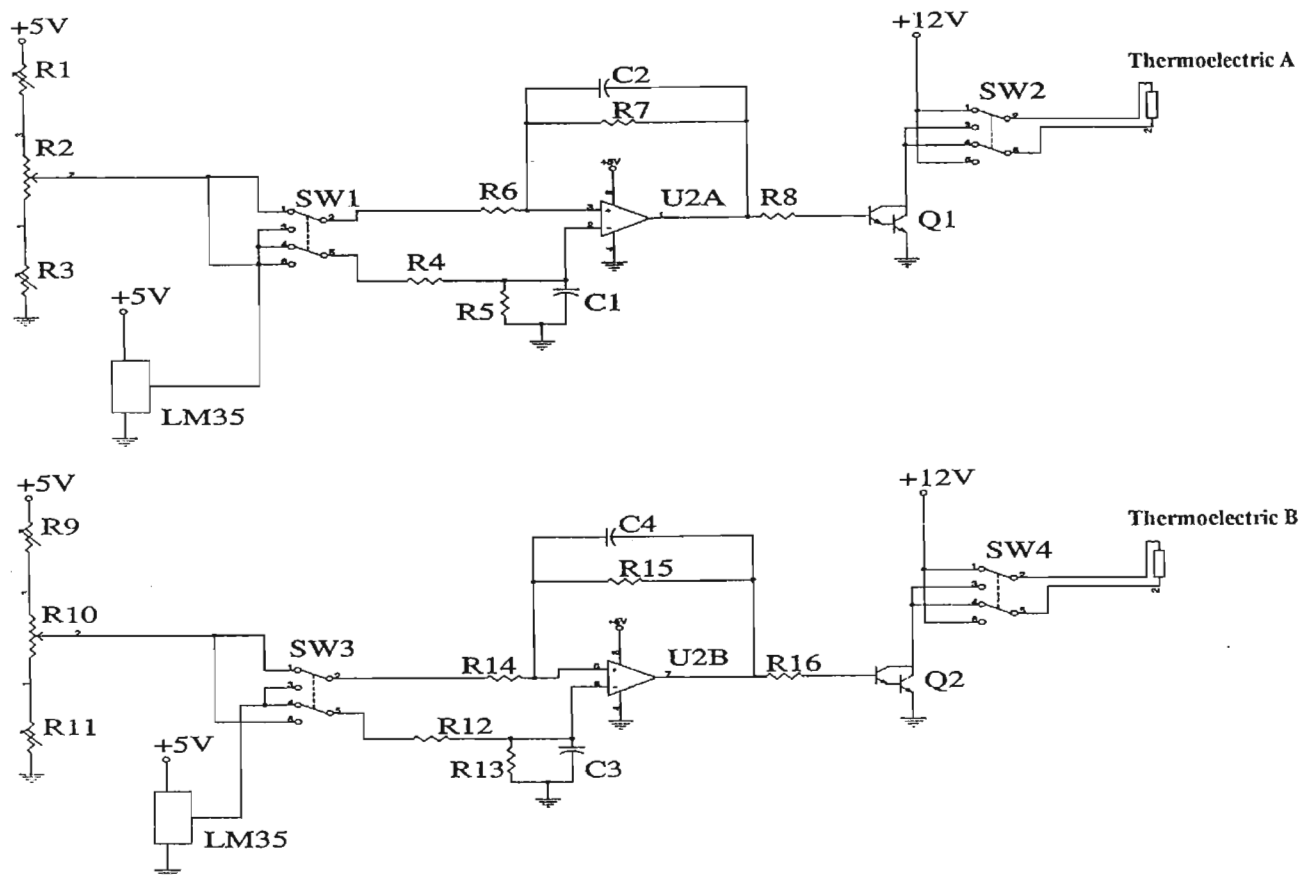


FIGURE 9. Diagram of the control circuit.

3.6. Security fences and bridge

Security fences were built around the centrifuge to protect the laboratory personnel. The fences are constructed with tubular steel tubes. The inner-rectangular area formed by the tubular frame, is covered with a stainless steel mesh, 0.01 m (3/8"). These accessories protect the rest of the area of the laboratory from possible accidents. To reach all of the instruments located at the center of the centrifuge a steel tubular bridge was situated over the centrifuge. Two in-built ladders are located at the bridge feet. The bridge has a loading capacity of more than 100 kg. All of these components are anchored to the floor of the laboratory.

3.7. Foundations

A special foundation platform was constructed to mount the centrifuge on, in order to reduce vibrations caused by other pieces of equipment in the laboratory and also to damp the self-originated vibration due to associated to the rotation of the centrifuge. The foundation area is a rectangular section with the following dimensions 1.5 m² and 0.18 m deep. The anti-vibration foundation is constructed with two alternated

layers of neoprene, polyfoam and cork. A concrete platform 0.11 m deep sits on top of the anti-vibratory sandwich. Finally, on the top of the concrete base, a stainless steel plate is anchored to the concrete. The wiring required to supply power for the motor is embedded in the concrete floor.

4. Instrumentation and sensors

The data acquisition system of the centrifuge is composed of independent arrangements that allow the recording of temperature at various locations of the convective cavity, acceleration at a position close to the cavity, and visualization at the midplane of the test. In this section we describe the instrumentation used to record these variables.

4.1. Temperature

The sensors used for monitoring the temperature are copper-constantan thermocouples (type T thermocouples). These sensors are recommended for measuring temperatures below 100 °C. The copper wire diameter is 0.43×10^{-3} m and the constantan wire diameter is 0.071×10^{-3} m. These sensors are duplex OMEGA [17] teflon insulated fine gage. Two ther-

mocouples are placed in the bottom plate and two in the top plate. One of the thermocouples in the bottom plate is placed in a small hole drilled at the center of the base of the convective cavity. A similar position is occupied by one of the thermocouples in the upper plate. These sensors measure the temperature near the bottom and top of the convective cavity. A thermocouple is located in the bottom plate near the upper face of the thermoelectric device to measure the temperature for control purposes. A similar arrangement is used for the top thermoelectric device.

Temperature readings were captured by an Advantech PCL-818L [18] card with a resolution of 12 bits, linearity of ± 1 bit, and maximum conversion rate of 40 kHz. The PCL-818L uses a PCLD-789 [19] amplifier/multiplexer board. This board is the front-end signal conditioning and channel multiplexing daughterboard for the analog input channel. An instrumentation amplifier provides a gain of 200. The multiplexer also contains a cold junction sensing circuit to allow direct measurement of thermocouple transducer $+24.4$ mV/°C at 0.0 V of 0.0 °C. The multiplexer board is fixed close to the electronic control circuit in the experimental basket. We use a flat cable 1.5 m long for connections between the PCLD-789 and PCL-818L, which is inside the on-board CPU fixed on the centrifuge central structure. After an experiment is completed and the centrifuge rotation has stopped, the data are sent via the laboratory network to a mainframe to be permanently stored. An overall view of the centrifuge is shown in the plate 1.

4.2. Acceleration

Another important variable in the centrifuge experimentation is the acceleration. Accelerometers are transducers which transform acceleration into an electrical signal. Variable capacitive accelerometers that measure acceleration signals down to zero hertz use micromachined silicon and variable capacitance elements; these devices have a high sensitivity and minimal response to thermal transients. Specifically, the sensors used are uniaxial K-Beam Kistler accelerometers type 8303A50 [20, 21], with typical sensitivities of approximately 19 mV/g at 30 Hz, 3 g rms and a bias voltage of 2.5 V. The exact sensitivity varies slightly with the individual device. The transverse sensitivity is approximately 1.0%, its reference range $\pm 50g$ peak, and output impedance $\leq 500 \Omega$.

Three accelerometers are used in the centrifuge. The first one is located in the external module of the centrifuge at a distance of $r = 1.472$ m from the axis of rotation. Its orientation is at 90° from the gravitational acceleration vector. This device measures only the centrifugal acceleration $\omega^2 r$. The second device is oriented parallel to \mathbf{g} and is placed on top of the basket. When the centrifuge is standing still, its horizontal distance to the axis of rotation is $r = 1.445$ m and its vertical distance to the basket axis of rotation is 0.0313 m. This accelerometer reads the terrestrial acceleration when rotation is zero. At the moment that the centrifuge is operated, the basket will tilt freely and this accelerometer will read a , the resultant acceleration of the vector sum of \mathbf{g} and

the centrifugal acceleration $\omega^2 r \mathbf{k}$ where \mathbf{k} is a unit horizontal vector pointing away from the rotating axis, ω is the rotation velocity, and r is the distance to the rotation axis. The third sensor is vertically aligned with the second accelerometer at a distance $r = 1.445$ m, from the centrifuge rotation axis and at a vertical separation of 0.228 m from the basket axis of rotation. This accelerometer sits at a position close (and dynamically equivalent) to the convective cavity. When the centrifuge is not rotating, its orientation is horizontal. This device also measures the acceleration a of the convective cavity. The acceleration data are sent from the centrifuge to the laboratory computer using two wireless WaveLan/IEEE Turbo 11 Mb PC Card.

4.3. Data acquisition software

The software package that we used to capture the data was Genie, a data acquisition and control software designed to run in the Microsoft Windows environment. Those system displayed the temperature histories of the two internal thermocouples, the four thermocouples located at the plates and that of the environment temperature. The readings of these seven thermocouples provide convenient, real time information to assess the progress of the experiment.

4.4. Visualization system

The flow visualization is a specialized tool used to better understand complex flow structures. Flow visualization is made using a planar light sheet projected onto a fluid suspension of reflecting particles and viewed at right angles to the plane of illumination. We created a light sheet with a uniform narrow thickness of 0.002 m. This illumination was created with an optical arrangement mounted on the experimental basket at the side of the cavity. The visualization system is composed of the following parts: a solid state 50 mW laser lamp, wavelength $\lambda = 543.5$ nm, a cylindrical prism 0.004 m in diameter, a collimating lens, and a cube beamsplitter (0.028 m \times 0.04 m \times 0.04 m). The laser lamp power supply is on-board and is situated on the first shelf of the central structure. The laser lamp is fixed on the platform on the experimental basket with a block base. This platform has three sections. One has a square section base (0.075 m \times 0.075 m \times 0.078 m) with a semicircular form in the middle to hold the laser lamp. The second section is a base that supports the collimating lens. The third section is a rectangular base (0.04 m \times 0.04 m \times 0.063 m) that holds a cube beamsplitter. All sections are fixed to the platform. A TR403 Sony CCD videocamera is also housed in the basket to capture the images of the flow in the experimental cavity. The video signal is transmitted to a UHF circular antenna located at the upper part of the central structure. This antenna is separated 0.025 m from the other UHF circular antenna situated on the fixed structure. The signal is transmitted between these two antennas. The fixed antenna is connected to a videorecorder and the signal is sent to an external TV monitor. The visualization system just described allows real time monitoring of the flow in the rotating cavity. The plate 2 shows the experimental basket.

4.5. Particles tracers

The tracers used to visualize the flow inside the cavity are liquid crystal particles. This tracers can be obtained in the form of slurries in water with diameters centered in the range of 10 to 15 μm from Hallcrest [22]. Liquid crystals are organic compounds that exhibit a behavior midway between an isotropic liquid and a nonisotropic crystalline solid. The convenience of using a specific kind of tracers is defined by their capacity of following the flow and of displaying the flow patterns. Although an in-depth analysis of the performance of the tracers can be extremely sophisticated as discussed, for instance, in Ref. 23, the overall performance of the tracers can be easily inferred from the cross validation of the experimental observations with corresponding numerical simulations. Also, we measure the fluid temperature with these liquid crystals in preliminary experiments.

5. Sample results

Once all data and image acquisition systems were working in a satisfactory manner, exploratory runs were performed to test the centrifuge as a unit. From these initial tests we present sample results of the acceleration as a function of time and rotation rate, temperature as function of time, for zero and a constant rotation rate, and two snap–shots of velocity fields as time functions. These results are not to be considered as exhaustive and not even a detailed description of the flow, but just as examples of the kind of scientific information that can be obtained with the device described in this article.

5.1. Acceleration

Using the sensors and auxiliary hardware and software described in Sec. 4.2 and Sec. 4.3, the centrifugal and the total acceleration were measured at three points by the centrifuge. Experimental measurements made with the accelerometer located at the extreme of one arm of the centrifuge yield readings that coincide with the calculated value of $\omega^2 r$ within less than 0.1 m/s^2 in all cases, and in most cases less than 0.04 m/s^2 , indicating the consistency between the accelerometer and tachometer readings. Accelerations at the quoted position as a function of time for two rotation rates, $\omega = 1.15 \text{ rad/s}$ and $\omega = 2.41 \text{ rad/s}$ are shown in Fig. 10. Two kinds of regimes are identified. One where time average acceleration is virtually independent of time and the acceleration displays electronic white noise with amplitude of $\pm 0.025 \text{ m/s}^2$. This regime exists for $t < 700 \text{ s}$ and $706 \text{ s} < t$ in Fig. 10. In the other regime which starts at $t = 720 \text{ s}$ when we change the rotation rate of the centrifuge, and lasts for six seconds, the acceleration displays an approximate linear increase. Given that the response time of the accelerometer is $1/30 \text{ s}$ for the calibration used, it can confidently be asserted that the acceleration readings reflect the inertia of the system.

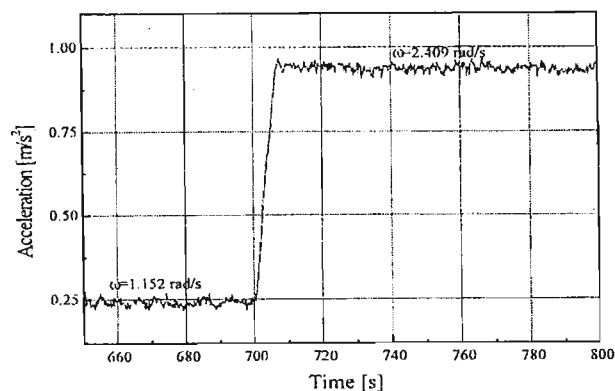


FIGURE 10. Acceleration as a function of time at the extreme of the arm.

The measurements from the accelerometers located in the experimental basket during the constant acceleration periods, which correspond to constant centrifuge rotation velocity, can be calculated using the formula

$$a = [g^2 + (\omega^2 R)^2]^{1/2},$$

where R is the distance from the sensor to the axis of rotation which can be numerically calculated from geometrical considerations as follows:

$$R = r_o + r_1$$

r_o is the length of the arm from the rotation axis to the basket shaft centerline; $r_1 = r_s \cos \alpha$, where r_s is the distance from the basket shaft to the sensor position and $\tan \alpha = g/(\omega^2 R)$. The difference between the experimental records from the two accelerometers in the baskets and the theoretical values does not exceed within 13%. The error in the measured acceleration is due to inherent electronic noise, orientation, inexact mounting, and bearing friction in the output reading.

5.2. Temperature and velocity measurements

In this section we present the temperature history as monitored by the internal thermocouples and the velocity fields at specific times. The working fluid is water at room temperature and therefore $Pr = 6$. The aspect ratio is $\Gamma = 1.76$ (see the Sec. 3.4). Figure 11 a) shows the temperature recorder by the internal thermocouples, T_1 and T_2 placed in the opposite place site of the cylinder cavity at the same distance from the bottom. In the first stage, there is not axial temperature difference in the cell ($Ra = 0$) and the centrifuge does not rotate ($Ta = 0$). At $t = 300 \text{ s}$ the second stage begins, the lower thermoelectric turned on to produce the axial temperature difference in the cavity of $0.158 \text{ }^\circ\text{C/mm}$, ($Ra = 2.25 \times 10^6$) and the centrifuge continues in stationary mode ($Ta = 0$). The third stage at $t = 1800 \text{ s}$ when the centrifuge is set in rotation with angular velocity of $\omega = 2.33 \text{ rad/s}$ (22 rpm) with $Ta = 1.71 \times 10^7$ having a $Ra_r = 3.25 \times 10^6$. The final stages begins at $t = 2700 \text{ s}$ when the centrifuge stops rotation having a $Ra = 2.06 \times 10^6$.

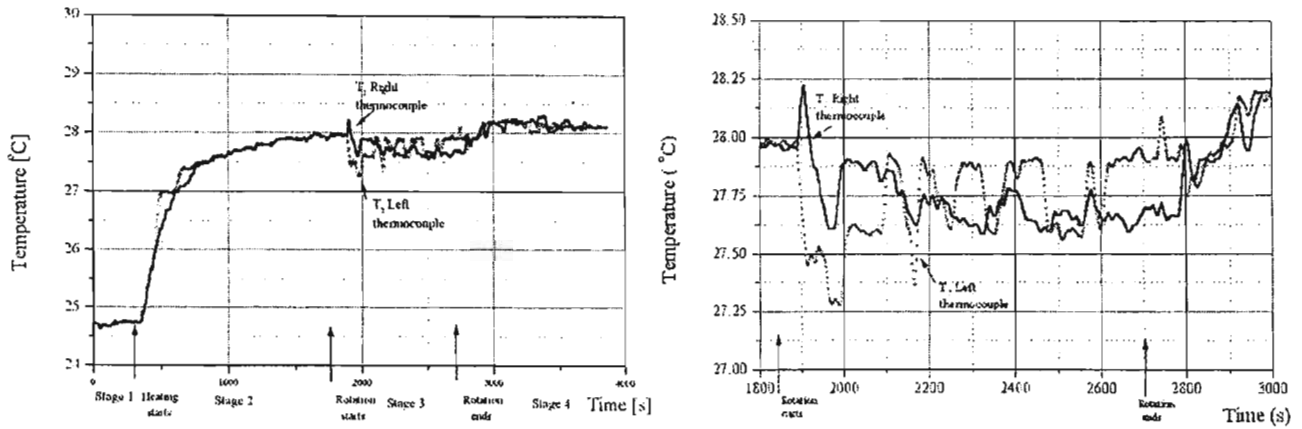


FIGURE 11. Temperature as a function of time a) during a sample experiment with four different stages. and b) amplification of the stage 3, $Ra_r = 3.25 \times 10^6$, $Pr = 6$, and $Ta = 1.71 \times 10^7$.

In the first stage the temperatures are almost constant. In the second stage the temperatures increase monotonically during the first 1300 s before attaining an almost constant temperature. A small temperature difference exists between the two thermocouples in the second stage. When the rotation begins the temperatures display a dramatic change in qualitative behavior. The temperature oscillates at a frequency of about 0.0033 Hz (see the amplification in Fig. 11.b). In the fourth stage, when rotation stops, the oscillation of the temperatures is damped, attaining a similar behavior of the one before onset of rotation [24]. Figures 12 a) and 12 b) show the mean velocity fields in the central plane of the cavity for two different states. In the upper left hand corners, we note a zone without vectors due to the thermocouples mounting system. Each mean velocity field in the average of 449 velocity fields of each velocity field is obtained from a cross correlation, made with the Flow Manager PIV software of Dantec, of a pair of images taken at time intervals of 0.033 s. In the Fig. 12 a) we can observe a single convective cell rotating in the counterclockwise direction. This pattern is obtained during the second stage, when $Ra = 2.25 \times 10^6$ and $Ta = 0$. The center of the convective cell is not positioned at the center of the cavity. At 0.65 of the cavity height a strong vertical

movement occurs at the right side. The velocity field shown in Fig. 12 b) corresponds to the rotation stage (third stage) with $Ra = 3.25 \times 10^6$ and $Ta = 1.71 \times 10^7$. The flow pattern displays a marked difference from the non-rotation pattern (Fig. 12 a). In the middle section of the cavity a general downward movement is observed. One can also note a diagonal movement in the center of the cavity. A comprehensive description of the flow without and with rotation, will be given in a future publication.

6. Concluding remarks

We have designed and constructed a low cost centrifuge. The instrumentation is versatile and can perform a variety of fluid dynamic experiments in a rotating frame of reference. The rotating velocity and arm length can be changed easily allowing a reasonably wide range of experimental conditions. The highest centrifugal acceleration is approximately 13 g. Using the centrifuge in its present configuration, we have been able to record temperature, acceleration, and images of particle tracers that contain information of the two dimensional velocity field. Future uses of the centrifuge could include crystal growth and material deposits with chemical baths, combustion and others.

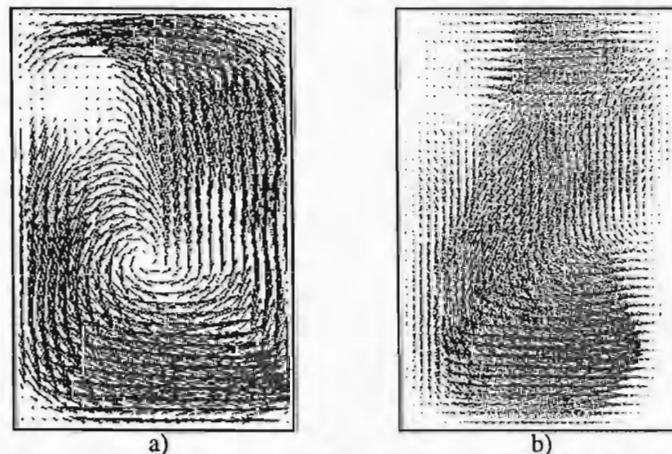


FIGURE 12. Convective flows a) in the nonrotating cavity, $Ra = 2.25 \times 10^6$, $Pr = 6$, $Ta = 0$ and $t = 1380$ s. and b) in rotating cavity, $Ra_r = 3.25 \times 10^6$, $Pr = 6$, $Ta = 1.71 \times 10^7$ and $t = 1920$ s.

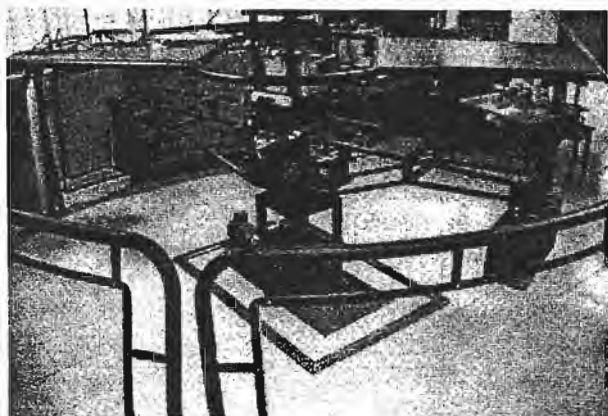


PLATE 1. Overall view of the centrifuge.

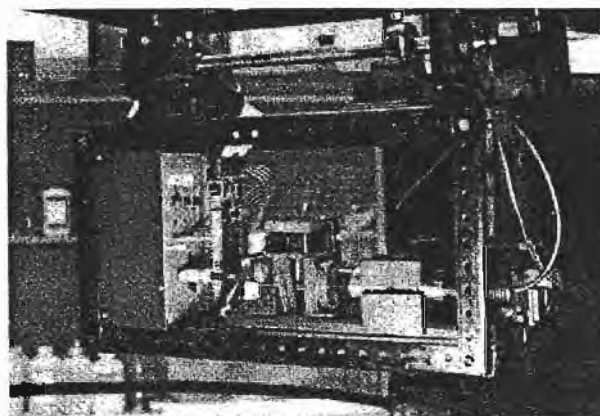


PLATE 2. Experimental basket.

Acknowledgments

Most of the centrifuge was built at Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, CIADET-UNAM. We wish to thank the assistance of Leopoldo Rufz, Alberto Caballero and Juan Arenas from CIADET-UNAM. The Engineering drawings were done by Luis Velázquez from CIADET-UNAM. Hector Perales from FC-UAEMor assisted in com-

puter and visualization tasks. We thank Guadalupe Huelsz for her crucial aid in PIV technique. Fernando Sierra from CIE-UNAM participated in the performance of the experimental runs and in the interpretation of results. A.A. Avramenko also participated in the analysis of experimental observations and also to Hugo Salas for his comments in the organization of the article. The financial support through CONACYT Group Project G0044E financial support is gratefully acknowledged.

1. B. V. Burdin, L. L. Regel, A. M. Turtchaninov, and O.V. Shumaev, *J. Cryst. Growth*. **119** (1992) 61.
2. R. Rodot, L. L. Regel and H. M. Turtchaninov, *J. Cryst. Growth*. **104** (1990) 280.
3. M. J. Paulin *et al.* in *Materials Processing in High Gravity*, edited by L. L. Regel and W. R. Wilcox, (Plenum Press, New York 1994), p. 213.
4. T. Hibiya, S. Nakamura, K. W. Yi and K. Kukimoto in: L. L. Regel, W. R. Wilcox (Eds), *Material Processing in High Gravity*, Plenum Press, New York (1994) 170.
5. R. Derebail, W. A. Arnold, G. J. Rosen, W. R. Wilcox and L. L. Regel in: L. L. Regel, W. R. Wilcox (Eds), *Material Processing in High gravity*, Plenum Press, New York (1994) 203.
6. G. Müller and G. Neumann, *J. Cryst. Growth*. **59** (1982) 548.
7. G. Müller, G. Neumann and W. Weber, *J. Cryst. Growth*. **119** (1992) 8.
8. W. Weber, G. Neumann, and G. Müller, *J. Cryst. Growth*. **100** (1990) 145.
9. L. L. Regel and W. R. Wilcox, *Materials Processing in High Gravity*, Plenum Press, New York (1994).
10. L. L. Regel and W. R. Wilcox, *Centrifugal Material Processing*, Plenum Press, New York (1997).
11. L. L. Regel and W. R. Wilcox, *Processing by Centrifugation*, Plenum Press, New York (2001).
12. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover. (1961).
13. B. M. Boubnov and G. S. Golitsyn, *Convection in Rotating Fluids*. Kluwer London. (1994).
14. G. Müller, G. Neumann and W. Weber, *J. Cryst. Growth*. **70** (1984) 78.
15. L. M. de la Cruz. Natural convection in a rotating cavity, B Sc. Physics Thesis UNAM (In spanish) (1996).
16. Yaskawa Electric Corp, *VS miniC Series ultra compact all digital inverter*. (1995).
17. Omega, *The Temperature Handbook*, 1998.
18. Advantech PCL-818L High performance low cost. Data Acquisition Card. User Manual PC-lab Card..(1995).
19. Advantech, *PCLD-789 Amplifier/Multiplexer Board User's manual*. (1992).
20. Kistler, *Advanced instrumentation for a world of applications*. (1998).
21. Kistler, *Operation Instructions K Beam capacitive accelerometers*. 1998.
22. Hallcrest, *The Hallcrest Handbook of Thermo-chromic Liquid Crystal Technology*, England (1996).
23. J. C. Agüi and J. Jimenez, *J. Fluid Mech*. **185** (1987) 447.
24. M. Vargas, E. Ramos, F. Sierra and A. Avramenko in: L. L. Regel, W. R. Wilcox (Eds). *Processing by Centrifugation*, Plenum Press, New York (2001).

Apéndice C

Publicación derivada de esta tesis

Steady natural convection in a cylindrical cavity, *International Communication of Heat and Mass Transfer*, **29**,2, 213-221,2002.



PII: S0735-1933(02)00312-3

STEADY NATURAL CONVECTION IN A CYLINDRICAL CAVITY

Minerva Vargas
Instituto Tecnológico de Zacatepec
A.P. 45, Zacatepec, Mor. C.P. 62780, México

F.Z. Sierra, E. Ramos
Centro de Investigación en Energía-UNAM
A.P. 34, Temixco, Mor., C.P. 62580, México

A. A. Avramenko
Institute of Engineering Thermophysics
Ukrainian National Academy of Sciences

(Communicated by J.P. Hartnett and W.J. Minkowycz)

ABSTRACT

We present a numerical and experimental study of steady natural convection in a small aspect ratio cylindrical cavity with circular cross section. The main objective of the present communication is to highlight some difficulties encountered when a comparison of theoretical and experimental velocity results is attempted. We keep the aspect ratio (radius/height), the Prandtl number and the Rayleigh number fixed to 0.28, 6 and 2.25×10^6 respectively and make observations in a vertical plane that contains the axis of symmetry of the cylinder with a particle image velocimetry (PIV) technique. The main structure present in the flow is a single non-axisymmetric cell with a horizontal rotation axis. Due to the symmetry of the geometry of the cavity and of the heating and cooling systems, the orientation of the convective structure is undefined by the boundaries. In order to make a theoretical-experimental comparison, it is necessary to make a full description of the three dimensional velocity field to find the plane that corresponds to the one observed in the experiment. © 2002 Elsevier Science Ltd

Introduction

The phenomenon of natural convection has been the subject of intense scientific research since the classical experiments of Bénard in the early 20th century. Confined natural convection is a phenomenon related to the well known Rayleigh-Bénard problem where the walls have determinant influence. The interest in this phenomenon arises on the one hand due to the large variety of dynamic behaviors that can be generated in simple experimental facilities and on the other, due to its many applications in technology. Out of these, two important examples are: crystal growth using the Czochralski method

where the fluid motion during the process of solidification has a determinant influence on the quality of the crystal [1], and the open and closed thermosyphon used in machinery cooling. Comprehensive descriptions of these devices can be found in Pioro and Pioro [2] and Japiske [3] respectively. The qualitative properties of the flow depend strongly on the geometry of the cavity and the boundary regions where heat is transferred to the system. Focussing the discussion on cylindrical cavities with circular cross section, heated and cooled at the lower and upper walls respectively, we have that the nondimensional parameters that describe qualitatively the natural convective flow are the Rayleigh (Ra) and Prandtl (Pr) numbers and the aspect ratio (A). It is now well established that for a given Prandtl number and aspect ratio, a pure conductive regime occurs for small Rayleigh numbers. Then, for Rayleigh numbers larger than a critical threshold Ra^{c1} steady motion sets in. If the Rayleigh number is increased further, then oscillatory, chaotic and turbulent flows are generated. Even in the relatively simple case of steady flow, convective patterns in cavities are difficult to describe and characterize. A more complete description of the flow described here together with a theoretical model for predicting the critical Rayleigh number for the generation of secondary cells is presented in Avramenko *et al.* [4]. Here, we consider a specific case of steady flow by fixing Ra , Pr and A and make an experimental observation of the velocity field in a vertical plane using PIV. Then, we calculate the velocity field numerically and attempt a theoretical-experimental comparison. Due to the axial symmetry of the system, the orientation of the experimental flow pattern is not known *a priori* and therefore it is required to calculate several vertical planes with different orientations to find the best fit. It is appropriate to point out here that since we are interested in a steady flow, the Eulerian velocity field obtained from a numerical integration can be directly compared to the Lagrangian velocity field observed in an experiment.

Experimental Facility

The cylindrical cavity is constituted by a lateral wall made of a pyrex tube 17 mm inner diameter with 1.5 mm wall thickness and two flat upper and lower end walls made of copper. The end walls house one thermoelectric device each. The voltage of the thermoelectric devices is controlled with an electronic circuit that keeps constant but different temperatures at the upper and lower cavity walls. One thermal dissipator and one fan are attached to each thermoelectric device as shown in Fig. 1. The height of the cavity is 30 mm and therefore, its aspect ratio (radius/height) is $A = 0.28$.

Flow visualization is made using a planar light sheet of 0.002 m thick, generated with a solid state laser lamp 50 mW and an optical group composed of a cylindrical prism 0.004 m diameter and a collimating lens. The light sheet is projected onto a fluid suspension of reflecting particles made of liquid crystal ranging from 10 to 15 μm diameter [5]. The plane of illumination was viewed and recorded at a right angle by a commercial video camera, and the images were analyzed with the DANTEC FlowMap Software. A detailed description of the experimental device can be found in Vargas *et al.* (2001) [6].

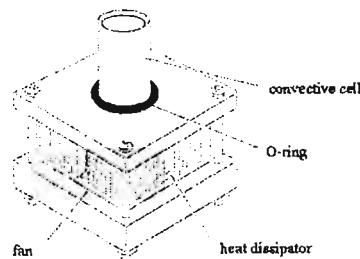


FIG.1
The experimental cylindrical container.

Numerical Calculations

The velocity, pressure and temperature fields as functions of the Cartesian coordinates (x, y, z) that describe the natural convective flow in the cavity are found by solving numerically the mass, momentum and energy equations for the steady motion of a newtonian, incompressible fluid, under the Boussinesq approximation. We use the state equation:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)), \quad (1)$$

where ρ and T denote density and temperature respectively. The subindex o indicates a reference state.

$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_0$ is the thermal expansion coefficient of the fluid at the reference state. The boundary

conditions considered are: the velocity vanishes at all rigid walls, and $T=T_h$, $T=T_c$ at lower and upper boundaries respectively. The lateral wall is considered adiabatic. The aspect ratio, the Rayleigh number and the Prandtl number are defined by:

$$A = \frac{R}{L}, \quad Ra = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\alpha\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}. \quad (2)$$

R and L are the radius and the height of the cavity respectively, ΔT is the temperature difference between lower and upper walls T_h-T_c , α is the thermal diffusivity and ν is the kinematic viscosity of the fluid, g is the acceleration of gravity. The numerical solution of the conservation equations with these boundary conditions was obtained with the code FLUENT V5.1, using a structured mesh of 2×10^4 control volumes, the largest of them being 1/1748 of the total volume.

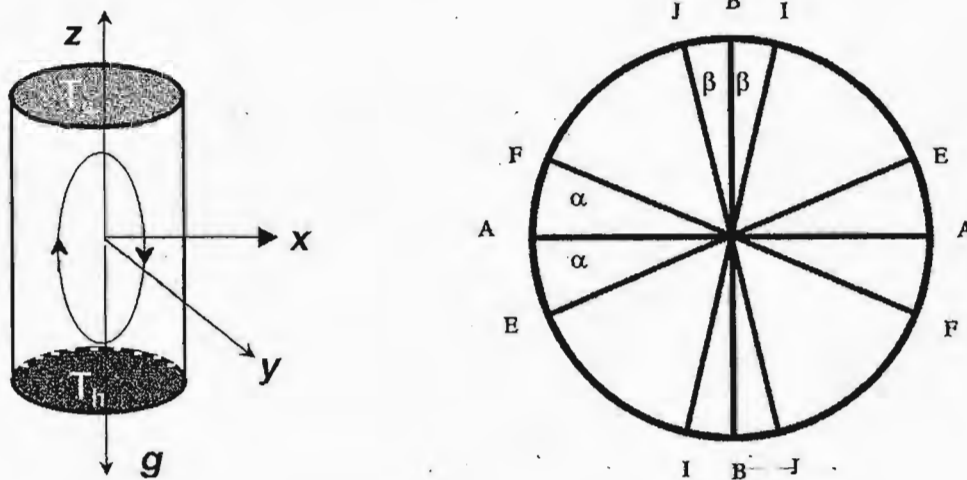


FIG. 2

Sketch of the cylindrical cavity with coordinate system and cross section indicating the orientation of the planes that contain the velocity fields shown in figures 3 to 7. Angles α and β , are 22.5 and 11.25 degree, respectively.

Results

It is convenient to describe first the three dimensional structure of the flow using information from the numerical solution. Once we have identified the natural convective patterns then we proceed to present the experimentally obtained two-dimensional velocity field. Finally, we find the best numerical field fit to the experimental velocity. Numerical calculations were made for Prandtl number 6 and a Rayleigh number of 2.25×10^6 . This corresponds to use water as a working fluid as well as temperature at the lower and upper walls are 31.2 °C and 26 °C, respectively. Under these conditions, the flow is laminar and steady [1].

The description of the numerical results is made by presenting the velocity fields in vertical planes that contain the axis of symmetry and are placed at different orientations (angles α , β) as shown in Fig. 2. Due to the symmetries of the governing equations and boundary conditions, the absolute orientation of the flow cannot be defined and only relative orientations are meaningful. Velocity field projections in selected planes are given in Figs. 3a, 3b and 3c; the velocity vectors are colored by z-velocity with red the largest positive velocity and blue the largest negative velocity. In Fig. 3a, obtained in plane AA, it is shown that the dominant convective pattern is a single clockwise convective cell. Two small counter rotating cells appear at the upper left and lower right corners respectively. The diameter of the secondary cells is approximately 1/6 of the diameter of the cavity.

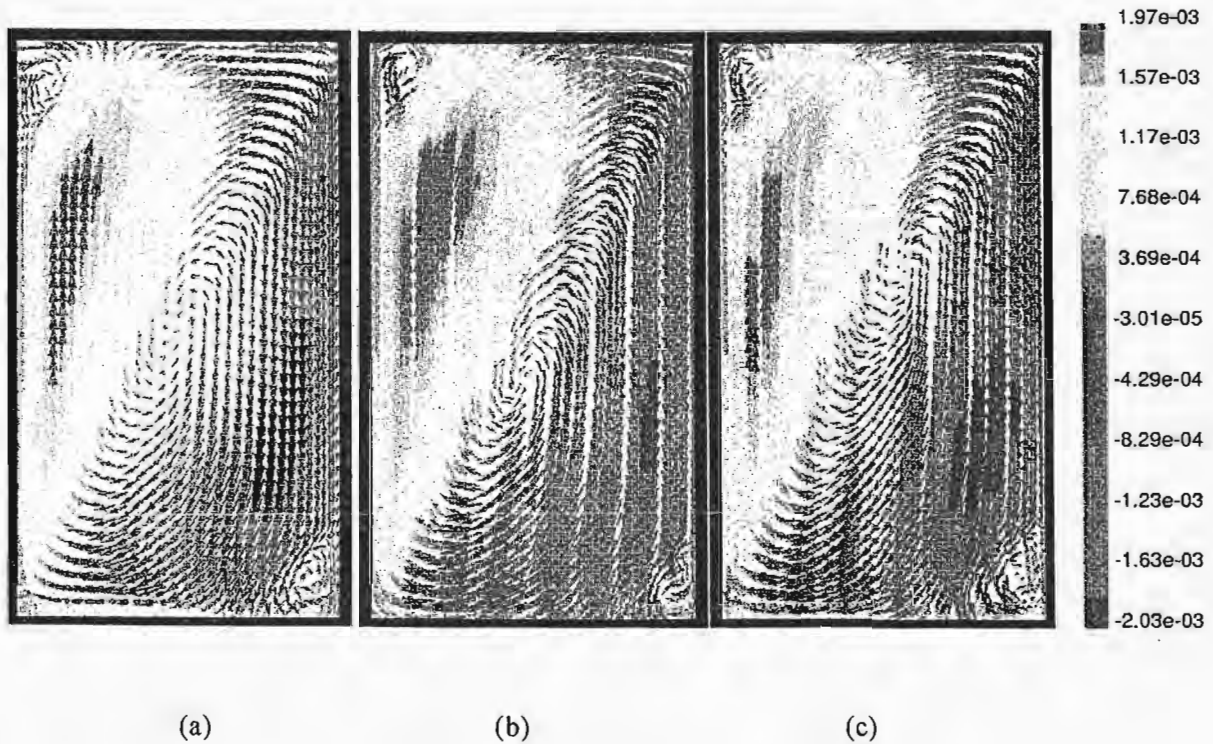


FIG. 3
 a) Velocity field in plane AA, b) Velocity field in plane EE,
 c) Velocity field in plane FF. Scale units are m/s.

Figures 3b and 3c show the velocity field in the in EE and FF planes, respectively. The flow structure is similar to that found in the AA plane. The rotation center of the cells in planes EE and FF are located at lower and higher positions than in the AA plane. The flow in the BB plane displays a much more complex convective pattern of four cells with two of them somewhat distorted as shown in Fig. 4. In order to describe the three-dimensional features of the flow in the vicinity of the BB plane, Fig. 5 shows the superimposed velocity fields in the II, BB and JJ planes. The descending flow regions in the upper half of the cavity run mostly near the vertical wall, then they merge near the center of the cavity to continue its descent in the lower half of the cavity. The ascending flows in the lower half of the cavity are located close to the lateral wall and merge in the region above the center of the cavity. A simplified artistic sketch of the main flow patterns in the cavity, in the region close to the BB plane, is displayed in Fig. 6. The arrows indicating the stream directions in this figure also are in agreement with the bar code. The flows are not confined to vertical planes since the horizontal velocity fields are present. Then, if the illumination of the flow is not strictly confined to a plane, but other regions of the cavity are also illuminated, the flow seems to be rotating along the vertical axis. This effect has been displayed in this figure, by trying to give volume to the set of planes of Fig. 5.

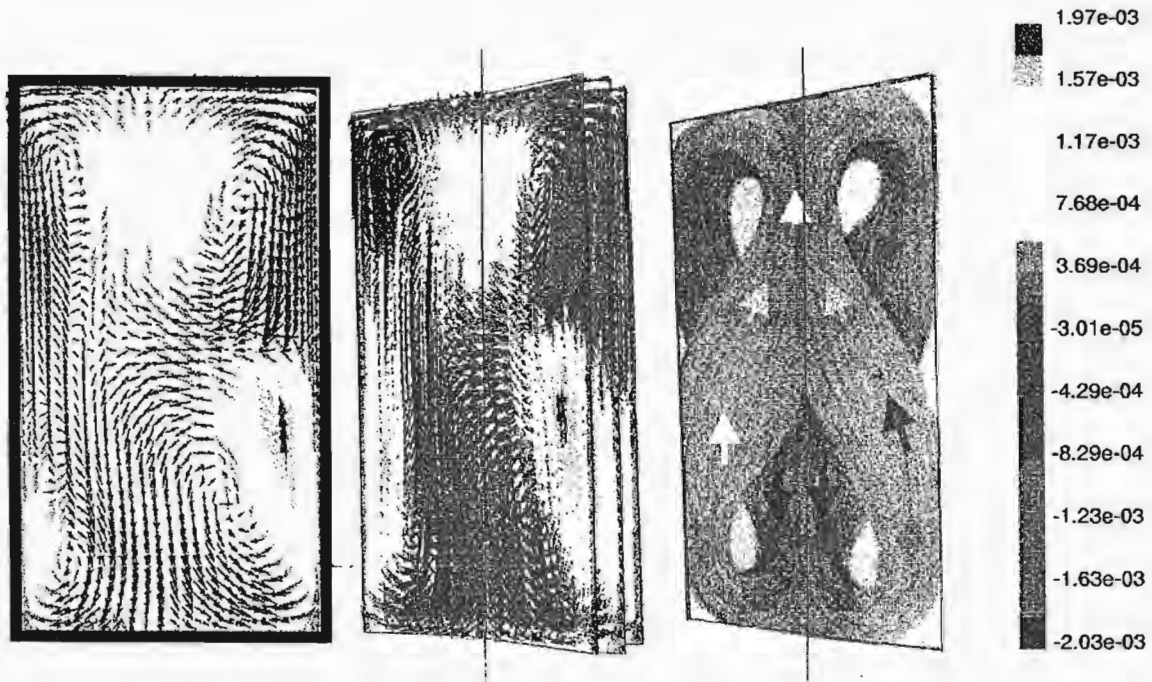


FIG. 4
Velocity field in plane BB.

FIG. 5
Superimposed velocity
fields in the II, BB and
JJ planes.

FIG. 6
Artistic sketch of the flow.

Experimental observations lasting typically 10 minutes were taken after the initial transients, which also last 10 min. The time resolution of the experiment is dictated by the camera sweep rate which is $\frac{1}{30}$ s. Experimental velocity fields are the average of 900 frames. As stated before, when experimental data on one vertical plane of the convective cell is obtained, the orientation of the observed plane is not known *a priori*. Visual inspection of the observation indicates that it corresponds to an orientation close to EE plane. A detailed qualitative and quantitative comparison of the EE plane, the best fit of the numerical prediction, against the experimental observation of the flow in the cylindrical cavity, is shown in the Figs. 7a, 7b, 7c and 7d. In the first two figures, 7a and 7b, we show the experimental velocity field and the numerical velocity field, respectively. In the two figures, a single mayor convective cell rotating clockwise can be identified. Defining horizontal and vertical local coordinates with the origin at the lower left corner of the plane, the center of rotation of the convective cell in Fig. 7a can be located at $x = R/1$ and $y = L/2.7$. The position of the convective cell center in Fig. 7b is at $x = R/1$ and $y = L/2.4$. The cell obtained in the numerical calculation is somewhat more elongated than that observed in the experiment. Also, in Fig. 7b, two small counter-rotating cells are clearly present in the upper left and lower right corners. These two vortex structures extent approximately $R/3$, $L/12$, in the horizontal and vertical directions respectively. The experimental velocity field in Fig. 7a also shows the small cells, although the insufficient number of tracers near the corners and the difficult optical access in those

locations prevent us from resolving their structure in detail. In spite of this, it can be asserted that the size of the cornered structures is about the same as that of the numerical solutions. The blank region near the top and next to the right hand wall of Fig. 7a, correspond to a thermocouple port and is optically inaccessible.

Profiles of the vertical velocity at various stations for experimental observations and numerical calculations are shown in Figs. 7c and 7d, respectively. Comparing these figures, the general qualitative agreement of the flows can be inferred. However, quantitative differences are found. A difference of a factor of three in the maximum upward velocity is obtained for the vertical velocity; also, the high downward velocity region on the right hand side observed is not displayed in the numerical calculation.

Quantitatively analyzed, the profiles of the vertical component of velocity of Figs. 7c and 7d correlate according to the factor [8]:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \right]}} \quad (3)$$

where X and Y represent the experimental and numerical data, with the maximum correlation as unity. The highest correlation was obtained for the station at $0.6L$, this is $r_{(0.6L)} = 0.96$, while the lowest correlation correspond to stations at $0.05L$ and $0.95L$ with $r_{(0.05L)} = 0.62$ and $r_{(0.95L)} = 0.76$, respectively. This result confirms that visualization from the lower and upper regions is not neat.

Discussion and Conclusions

A method of analysis for comparing numerical and experimental results of natural flows with symmetries and complex flow patterns was presented. It is argued that a full description of the three-dimensional flow pattern of the flow is required to attempt a comparison when experimentally available information is restricted to a single vertical plane. This situation arises due to the fact that the imposed boundary conditions are symmetric but the flow itself is asymmetric.

When the three dimensional description of the flow is available, then the experimental information can be compared with numerically calculated velocity fields in different planes, to find the best match by trial and error. This method was used to make a qualitatively satisfactory correspondence between an experimental observation and numerical calculation. The quantitative difference may be due to two oversimplifications in the theoretical model. One is related to the boundary conditions used. We

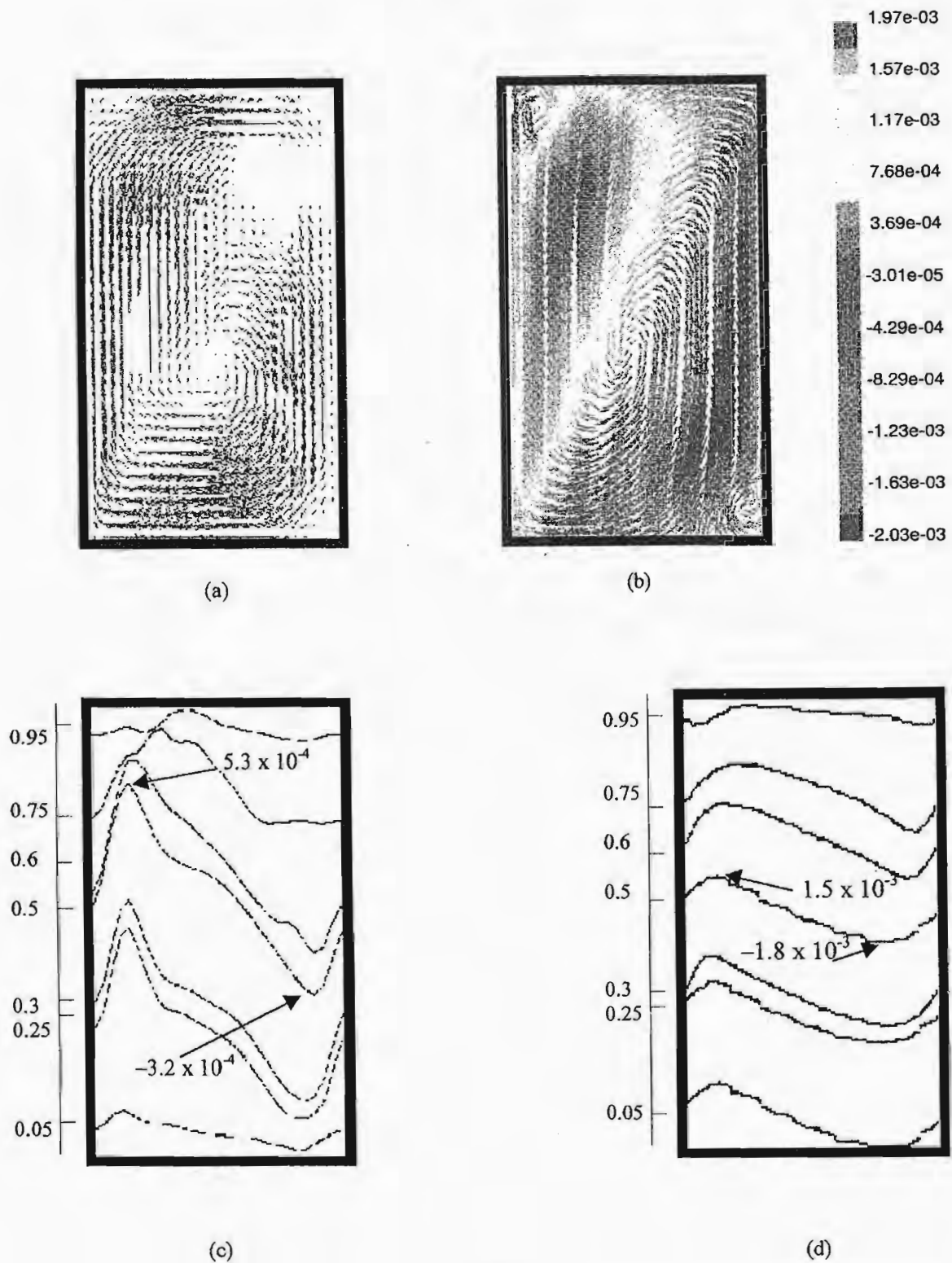


FIG. 7

a) Experimental velocity field, $Ra = 2.25 \times 10^6$, b) Numerical velocity field, $Ra = 2.25 \times 10^6$, c) Experimental profiles of vertical component of velocity for different stations $0.05L$, $0.25L$, $0.3L$, $0.5L$, $0.6L$, $0.75L$, $0.95L$, maximum and minimum values are indicated for profile at station $z = 0.5L$, d) Numerical profiles of vertical component of velocity field in plane EE, *ibid.* Scale units are m/s.

assumed that the vertical wall of the cavity is adiabatic, while in the experiment, heat is lost at this boundary. These experimental conditions would lead to a less intense convective motion, as effectively reported. The second simplification concerns the Boussinesq approximation. Another main constraint to achieve a neat comparison between numerical and experimental results is the 3-dimensionality of the flow. This causes that the visualization can not represent the full information about volumetric aspects of the flow. Despite a 3-D numerical solution was obtained for this flow, this contains idealizations that prevent a full quantitative agreement. It however helps to an interpretation of the stream characteristics.

Acknowledgments

Financial support has been granted by CONACyT through project G0044E, which is deeply appreciated. Technical support was provided by G. Hernández-Cruz, as well as technician Héctor Cortez kindly provided a helping hand during the mounting of software and hardware. The analysis of visualization through PIV software was aided by Dr. G. Huelsz, and finally Elisa Abundes was in charge of the artistic representation of the flow of Fig. 6.

References

1. G. Muller, G. Neumann and W. Weber, *J. Crystal Growth* **70**, 78-93 (1984).
2. L.S. Piro and I.L. Piro, *Industrial two-phase thermosyphons*, Begel House N.Y (1997).
3. D. Japikse, *Advances in Thermosyphon Technology. Advances in Heat Transfer*, (1973)
4. A.A. Avramenko, F.Z. Sierra, M. Vargas and E. Ramos, Natural convection in a cylindrical cavity, Submitted for publication, (2001).
5. *Handbook of Thermochromic Liquid Crystal Technology*, Hallcrest, New York (1991).
6. Vargas M., Ramos E, Ascanio G., Espejel R. Esquivel G. and Hernández-Cruz G., To appear in *Revista Mexicana de Física*, (2001).
7. G. Muller, Crystals growth, properties and applications, Vol 12: *Convection and inhomogeneities in crystal growth from the melt*, Springer (1988)
8. G.K. Bhattacharyya and R.A. Johnson: *Statistical concepts and methods*, Wiley (1977).

Apéndice D

Publicación derivada de esta tesis

Onset model of secondary flow in natural convection in a cylindrical cavity, Fluid Dynamics Research, in review.

Onset model of secondary flow in natural convection in a cylindrical cavity

A. A. Avramenko, F. Z. Sierra, Minerva Vargas, and E. Ramos
Center for Energy Research-UNAM,
Ap.P. 34, 62580 Temixco, Mor.
Mexico

February 8, 2003

Abstract

We have conducted a theoretical and numerical study of natural convection in cylindrical containers. The numerical results are mostly focussed in the case with aspect ratio (radius to height) of 0.25. The working fluid is assumed to have a Prandtl number of 6. At Rayleigh numbers slightly larger than the first critical Rayleigh number where the convective motion starts, a single, no-axisymmetric cell is formed. Increasing the Rayleigh number, small convective cells appear in the regions where the vertical flow of the main cell meets the horizontal boundaries of the container. The presence of the small convective cells defines a second critical Rayleigh number. We present a relatively simple analytical theory that predicts the second critical Rayleigh number as a function of the aspect ratio. Predictions obtained with the theory are in good agreement with numerical calculations for aspect ratio from 0.25 to 0.125

1 Introduction

Natural convection in slender containers heated from below and cooled from above can be conceived as a version of the classic Rayleigh-Benard problem where the walls play a determinant role in the definition of the qualitative properties of the flow, reducing the access of the system to large wavelength oscillations. For these reasons, the problem has been looked into using a plethora of theoretical and experimental tools. The case of a cylindrical container has special interest due to its applications in crystal growth using the Czochralski technique; it is well known that the dynamic behavior of the natural convective flow during the process of solidification has a determinant influence on the quality of the crystal (Müller (1988)). The actual conditions of the flow in crucibles is extremely complicated, involving rotation of the seed crystal, large temperature gradients, turbulent flows etc. Most of the experimental studies that have appeared in the literature use simple experimental techniques of diagnosis, due

to the inaccessibility of the usual optical access to the interior of the molten semiconductor. A few observations are available that use extremely sophisticated and expensive tools like X-ray visualization (Kakimoto(1995)). From the theoretical point of view, the majority of the analyses are numerical solutions of the balance equations, with varying degree of complexity, from the simplified geometry to the highly complex.

A stand adopted by many authors in the field is to go back to the basic phenomena and try to understand the basic dynamical properties of the natural convective flow. In order to understand the qualitative properties of these systems, models with simpler geometries and boundary conditions have been put forward, perhaps the simplest of all being that of a closed cylinder (Neumann (1990)). When the container is cylindrical and has small aspect ratio $A = \text{radius/height}$, the flow patterns have peculiarities due to the symmetry of the boundary conditions and the asymmetry of the length scales in the r and z directions. Also, in this case, at least in principle, there is a possibility of the existence of axially symmetric and non-axisymmetric flows and multiple stable and unstable flows that will determine the qualitative properties of the actual flows. The nondimensional numbers that describe qualitatively the flow are the Rayleigh (Ra) and Prandtl (Pr) numbers and the aspect ratio (A).

Müller *et al.*(1984) undertook an experimental and numerical study of buoyancy driven convection in vertical cylindrical cavities heated from below. They presented a comprehensive study of the qualitative properties of the flow in the (Ra, A, Pr) -space, and determined the regions in this space where at least three different qualitative flows exist. The experimental observations were made using water and molten gallium as working fluids. They reported the experimental determination of the first critical Rayleigh number Ra^{c1} above which a steady, no-axially symmetric flow ensues for aspect ratios smaller than $1/2$. (Note that in Müller's paper the aspect ratio is defined as height/diameter). As the Rayleigh number is increased, the flow displays an evolution from a single cell to a more complicated pattern of several steady cells. At still larger Rayleigh numbers, the cell pattern becomes unsteady. Also, they observed the formation of steady secondary cells near the bottom and top of the cavities and were able to define a second critical Rayleigh number Ra^{c2} that divides the regions of different qualitative behavior in the Ra vs aspect ratio map. They reported unsteady convection for $Ra > 10^7$ and aspect ratio smaller than $1/2$.

The first critical Rayleigh number Ra^{c1} for cavities with small aspect ratio has been calculated by a variety of methods (Charlson and Sani (1971), (1975), Gershuni and Zhukhovitskii (1976), Buell and Catton (1983)). Although the results are not free of criticism, due to the difficulty in solving the approximate balance equations, most workers in the field agree that the transition from no motion to steady motion in confined cylinders is well understood. The second critical Rayleigh number Ra^{c2} has been much less studied and many details of the flow are still unknown. The third critical Rayleigh number Ra^{c3} denotes the transition of steady flow to unsteady motion and is not fully understood even though numerical calculations have appeared in the literature for specific cases.

In this article, we present a numerical study that describes the steady nat-

ural convective motion in a cylinder of aspect ratio 0.25, for Rayleigh numbers smaller than 10^6 . Also, we present an analytical study for the same phenomenon for $0.1 < A < 0.5$ and $Ra < 10^6$. The range studied includes the transition observed at Ra^{c2} and numerical and analytical results are in good agreement.

2 General statement of the problem

We are interested in exploring the natural convective flow in a cylindrical container with diameter $2R$ and height L according to the schematic shown in figure 1. In cylindrical coordinates (r, θ, z) , the governing equations for the steady motion of a newtonian, incompressible fluid under the Boussinesq approximation are:

Mass conservation

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Momentum conservation:

r -direction:

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = \quad (2)$$

$$-\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right),$$

θ -direction:

$$u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \quad (3)$$

$$-\frac{1}{\rho_o} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right),$$

z -direction:

$$u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \quad (4)$$

$$-\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) - \frac{g}{\rho_o} (\rho - \rho_o).$$

The energy balance equation:

$$u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (5)$$

and the state equation:

$$\rho = \rho_o (1 - \beta \Delta T) \quad (6)$$

In the previous equations, u , p , ρ and T , denote velocity, pressure, density and temperature respectively. The subindex o indicates a reference state. The thermal diffusivity is α and ν is the kinematic viscosity. The acceleration of gravity, is g , $\beta = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho}{\partial T}|_o$ is the thermal expansion coefficient at a reference state and $\Delta T = T - T_o$.

The boundary conditions are: The velocity vanishes at all rigid walls and $T = T_h$, $T = T_c$ at bottom and top boundaries respectively. The lateral wall is considered adiabatic, *i.e.* $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$.

When the variables are expressed in nondimensional units,

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad t^* = \frac{t}{L^2/\nu}, \quad (u_r^*, u_\theta^*, u_z^*) = \frac{(u_r, u_\theta, u_z)}{\alpha/L}, \quad (7)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho_o \nu \alpha / L^3}, \quad T^* = \frac{T}{T_h - T_c}$$

The three parameters that describe the flow are: the aspect ratio, and the Rayleigh and Prandtl numbers defined by:

$$A = R/L, \\ Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\alpha\nu} \quad (8)$$

and

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

A trivial solution to the set of equations given above, can be found by assuming that the velocity vanishes everywhere. This is the hydrostatic solution. As is well known in natural convective problems, the first critical Rayleigh number Ra^{c1} marks the boundary between the motionless solution and the slow motion, steady flow. The first critical Rayleigh number has been found by several authors using variational methods and standard linear perturbation analyses and solving the equations for the perturbed quantities with numerical methods.

3 Numerical Results

The quantitative description of the flow can be done by means of the numerical solution of the balance equations (1) - (5) with the appropriate boundary conditions. In this work, this was done with the code FLUENT V5.1, using a structured mesh of 20,000 control volumes, the largest of them, being 1/1748 of the total volume.

3.1 The region $Ra \gtrsim Ra^{c1}$

We will describe in some detail the flow calculated with an aspect ratio $A = 0.25$ and $Ra = 5 \times 10^4$ which is slightly above the first critical Rayleigh number for this aspect ratio ($Ra^{c1} \sim 3 \times 10^4$). The Prandtl number used is 6 which corresponds to water at 24°C. For future reference, we are also interested in the case $Pr = 200$ which corresponds to Silicon Oil. It is expected that in the range of small Rayleigh numbers, the differences of the flows with the two Prandtl numbers explored be small. As will be discussed below, this was verified with sample numerical simulations.

The main feature of the flow is a single cell that covers most of the volume as shown in figure 2 where the velocity field is plotted as a function of position. The maximum value of the velocity in the cavity is approximately 29. This structure is not axisymmetric and its orientation is not fixed by the boundary conditions. In order to simplify the description, we shall call AA' plane, the plane where the large single cell is seen from the side (*i.e.* fig. 2) and BB' plane the plane oriented at an angle $\pi/2$ from the AA' plane. The orientation of these planes is defined in figures 3 a), b) and c) where the isolines of vertical velocity at horizontal planes $z^* = 0.25, 0.5$ and 0.75 are given respectively. The three-dimensional structure of the convective cell can be reconstructed by combining the information from figure 2 and figures 3. The major flow pattern is a non-axisymmetric convective cell whose geometry conforms with the curved walls of the cylindrical container. The component of the velocity field normal to AA' plane is less than 1 % of the component contained in the plane and thus, this is a symmetry plane in the sense that fluid parcels located on one side of the AA' plane, remain there permanently. Another symmetry of the velocity field in the AA' plane is the composition of a reflection around the $z^* = 0.5$ line and a reflection around the vertical axis. The plane $z^* = 0.5$ is also a plane of symmetry as can be seen from figures 3 by noting that the velocity distribution at $z^* = 0.25$ (figure 3 a)) is the same as that at $z^* = 0.75$ (figure 3 c)), with an orientation that differs by π . The centers of the vertical velocity distributions of figure 3 a) (and c)) are not located at the same distance from the center of the cylinder, indicating that the cell is slightly tilted with respect to the vertical. The temperature fields at the AA' and BB' planes are shown in figures 4 a) and b) respectively. The temperature field in figure 4 a) is not axisymmetric and reflects the fact that convection is the dominant heat transfer mechanism, while that in figure 4 b) corresponds to a perturbed conduction field.

Calculations were made for $Pr=200$ and the results obtained for the flow and temperature distributions are essentially the same to those described in this section.

3.2 The region $Ra \gtrsim Ra^{c2}$

Here, we shall describe the flow that occurs using the same aspect ratio than in the previous section but with a Rayleigh number of 7.5×10^5 . We present

the results obtained numerically with Prandtl number equal to 6. Numerical calculations were also made with $Pr = 200$. As in the previous section, in this range of Rayleigh numbers, the results were found to be qualitatively equal to those of $Pr=6$.

The velocity pattern that dominates the flow is a large cell similar to that described in the previous section, with velocities of the order of 195, but notably, two small cells are formed near the bottom and top walls; this is shown in figure 5 a). The velocity field is approximately symmetric with respect to the combined reflection with respect to the line $z^* = 0.5$ and reflection with respect to the vertical line. In the present case also, the orientation of the cell is not defined by the boundary conditions and we must start the description of the flow by defining orthogonal planes that present sharp dynamic differences. Planes AA' and BB' are defined in figures 6, where the isolines for the vertical component of the velocity are displayed as functions of r^* and θ^* for $z^* = 0.25, 0.5, 0.75$. The velocity field for the plane AA' is displayed in figure 5 a). The structure of the flow at the BB' vertical plane is a four cell system as shown in figure 5 b). The presence of the two small, symmetric cells is the hallmark of the flow in AA' plane in this region of Rayleigh numbers. For the particular case solved, $Ra = 7.5 \times 10^5$, the cells extend approximately 1/4 of the diameter in the r^* and z^* directions. Although for the present case, these vortices are a minor feature of the flow, these structures are important in the range $Ra > 10^6$ where the flow becomes more vigorous and even unsteady and therefore it is of interest here to describe the conditions when they first appear. More about this observation is given in the Discussion section. The vertical velocity distribution is shown in figures 6 a), b) and c) for three horizontal planes located at $z^* = 0.25, 0.5$ and 0.75 . As can be observed, the distribution of the isolines presented in figures 6 a) and 6 c) is practically equal, but rotated π around the vertical axis. In the lower plane ($z^* = 0.25$), the descending velocity region is oval-shaped while the ascending region is a concave, C-shaped region. In the upper plane, the shapes of the ascending and descending flows are inverted.

The three-dimensional structure of the flow, can be reconstructed by noting that, according to figures 6, the AA' plane is a plane of symmetry. The vertical velocity distribution for $z^* = 0.25$ and 0.75 are asymmetric with respect to the BB' line, but those obtained with $z^* = 0.5$ are symmetric with respect to the AA' and BB' lines. The three dimensional flow in the region not close to the top and bottom walls, can be conceived as being formed by two branches with a cross section that changes as a function of the vertical coordinate. In one branch the flow is mostly ascendent, while in the other, the flow is mostly descending. The cross section of the right hand side branch evolves from an oval shape to a concave shape. The left hand side branch presents a similar geometry but upside down.

As stated before, the presence of the small vortices in the plane AA' is the defining feature of the flow in this range of Rayleigh numbers and it is of interest to describe when and how they are formed, since they play an important role at higher Rayleigh numbers. The vortical structure can be defined by a local flow reversal in the region close to the corners (in the AA' plane). The range of

Ra used guaranties that we detect the inception of the vortical structures.

Figures 7 a) and b) show the temperature field as obtained from the two orientations described above. The thermal gradients are located mostly near the top and bottom walls and in these regions the temperature distribution displays an approximate symmetry with respect to the vertical axis.

4 Theoretical Analysis

The goal of the present section is to develop a theory to predict the appearance of the small cells at the corners of the AA' plane, and therefore, it is appropriate to make a local model. For the analysis presented in this section, it is more convenient to use the following, slightly different definition of the Rayleigh number than given above:

$$\mathcal{R}a = \frac{g\beta\nabla T R^4}{\alpha\nu} = RaA^3$$

with $\nabla T = \Delta T/R$, all other variables are scaled as shown in equations (7). We shall make a linear perturbation of the base flow defined by (an approximate) form of the flow described in Section 3.1 and calculate its stability. The result will be the determination of the smallest Rayleigh number at which the small cells appear near the top and bottom of the container. For clarity, the description of the method will be made in two parts contained in subsections 4.1 and 4.2. In subsection 4.1, we develop the guiding ideas of the method by solving a simpler (although unphysical) problem. First we do not take into account the conservation of mass equation. This means that we do ignore the convective terms in the momentum equation. Afterwards, in subsection 4.2 we solve the full problem.

4.1 Simplified model

In this subsection, we display the methodology of solution, using a simple model that ignores mass conservation; this allows us to manipulate the equations in a simpler way. In the following section we shall incorporate the mass conservation condition and solve the physically meaning, full problem following the line of reasoning presented in this subsection.

We will assume that the only velocity component of the flow is the vertical component and no pressure gradient is present. It is also assumed that the vertical component of velocity, u_z , and temperature T are given by:

$$u_z^* = u_z^\circ + u_z', \quad T^* = T^\circ + T'$$

where u_z° and T° are the base flow and the corresponding perturbations $u_z'(r, \theta, z)$ and $T'(r, \theta, z)$ are small in the sense that their products can be neglected. We note here that the previous assumptions are inconsistent with the mass conservation equation. As stated before, in the following subsection, we present a model which is fully consistent with all conservation equations. The equations for the perturbation variables become (dropping the primes):

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \mathcal{Ra}T = \frac{A}{\text{Pr}} \left(u_z \frac{\partial u_z^o}{\partial z} + u_z^o \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + u_z = 0 \quad (10)$$

In writing these equations, it has been assumed that for the small region under analysis, the base temperature field is a linear function of the vertical coordinate.

At this point, it is important to make the following observation. If we define the new variables:

$$\Phi = \sqrt{\mathcal{Ra}T} \quad \text{and} \quad \eta = \sqrt[4]{\mathcal{Ra}r}$$

and substitute them in the previous equations, we get:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u_z}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{A^2}{\sqrt{\mathcal{Ra}}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \Phi = \frac{A}{\sqrt{\mathcal{Ra}} \text{Pr}} \left(u_z \frac{\partial u_z^o}{\partial z} + u_z^o \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{A^2}{\sqrt{\mathcal{Ra}}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + u_z = 0 \quad (12)$$

Notice that if the nonlinear terms in equation (11) are neglected, the equations for u_z and Φ have the same form. This indicates that, at least for small departures from the base flow, it is reasonable to expect that $u_z \sim \Phi + \text{constant}$. This is a version of the Reynolds analogy.

With the previous observation in mind and returning to the original variables, we assume that the vertical velocity perturbation u_z and temperature T have the form:

$$u_z = T = R(r)Z(z)$$

we assume that the base flow, u_z^o , can be expressed as: $u_z^o = R^o(r)Z^o(z)$

Substituting these expressions in equation (9), and dividing by u_z , we get:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{A^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \sqrt{\mathcal{Ra}} = \frac{A}{\text{Pr}} \left(R^o \frac{dZ^o}{dz} + \frac{R^o Z^o}{Z} \frac{dZ}{dz} \right) \quad (13)$$

We shall attempt to solve this equation by separation of variables. To this end we rearrange it as follows:

$$\frac{A^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{A}{\text{Pr}} \left(R^o \frac{dZ^o}{dz} + \frac{R^o Z^o}{Z} \frac{dZ}{dz} \right) = -\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) - \sqrt{\mathcal{Ra}}. \quad (14)$$

and notice that the right hand side depends only on the coordinate r and that all terms of the left hand side of the equation depend on z , except for R^o which

is a function of r . In order to separate the variables, we take the average of R° over r , and define the variable:

$$\widehat{R}^\circ(\mathcal{R}a) = \int_0^1 R^\circ(r, \mathcal{R}a) dr$$

where the dependence of \widehat{R}° on $\mathcal{R}a$ has been emphasized. Assuming that R° can be replaced by \widehat{R}° , the left hand side of equation (14) is independent of r .

In terms of \widehat{R}° , equation (14) can be written as:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + (\sqrt{\mathcal{R}a} - k^2)R = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{\widehat{R}^\circ Z^\circ}{A \text{Pr}} \frac{dZ}{dz} - \left(\frac{\widehat{R}^\circ}{A \text{Pr}} \frac{dZ^\circ}{dz} - \frac{k^2}{A^2} \right) Z = 0 \quad (16)$$

where k is the separation constant. Equation (15) is a Bessel equation whose solution is:

$$R = J_0(s_2 r)$$

where J_0 is the Bessel function of order zero and $s_2 = \sqrt{\sqrt{\mathcal{R}a} - k^2}$ is the second zero of J_0 . Note that due to the appropriate choice of the scaling parameter s_2 , the form of the solution is such that presents the required properties at the two boundaries, namely:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = 0 \text{ at } r = 0 \text{ and } R = 0 \text{ at } r = 1$$

From this, we can write:

$$\mathcal{R}a_{cr}^{(2)} = [s_2^2 + k^2]^2 \quad (17)$$

In order to find the solution to equation (16) we define the variable:

$$H(z) = Z \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\widehat{R}^\circ}{A \text{Pr}} \int Z^\circ dz\right)$$

Writing equation (16) in terms of H , we get:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + f(z)H = 0$$

where:

$$f(z) = -\frac{b^2 (Z^\circ)^2}{4} - \frac{b}{2} \frac{dZ^\circ}{dz} + \frac{k^2}{A^2}$$

and

$$b = \frac{\widehat{R}^\circ}{A \text{Pr}}$$

Invoking the Rayleigh-Ritz variational principle (see for instance Jeading (1975)):

$$\frac{k^2}{A^2} = \frac{\int_0^{z_k} (\phi'^2 + f\phi^2) dz}{\int_0^{z_k} \phi^2 dz}, \quad (18)$$

where z_k is the dimension of the small vortex, and ϕ is a trial function. Since $Z^o = \sin(\pi m_o z)$, and $m_o = 1$ for the basic flow found in the determination of the first critical Rayleigh number (Catton(1985), Chandrasekar (1981)); then it is natural to take: $\phi = \sin(\pi m z)$ as the trial function. Here, m is a constant that defines the size of the small vortex and is as yet to be determined. In order to calculate the integrals in equation (18) we consider the relation $z_k = 1/m$. Integration of equation (18) yields:

$$\frac{k^2}{A^2} = 2(a_1 - a_2 b)$$

where:

$$a_1 = \frac{(\pi m)^2}{2}$$

$$a_2 = \frac{m^3 \sin(\pi/m)}{4m^2 - 1}$$

In order to fix the value of m , we interpret the set of equations (15) and (16) as an eigenvalue problem and require that m must be such that it minimizes k and due to equation (17) also should minimize $\mathcal{R}a_{cr}^{(2)}$. A simple calculation indicates that $m = 3.825 + 0.091\gamma - 3.33 \times 10^{-3}\gamma^2$ with $\gamma = 1/2A$, satisfies this condition.

Substituting equation (18) in equation (17), we get:

$$\mathcal{R}a_{cr}^{(2)} = \left[s_2^2 + 2A^2 \left(a_1 - a_2 \frac{\widehat{R}^o(\mathcal{R}a_{cr}^{(2)})}{A \text{Pr}} \right) \right]^2 \quad (19)$$

This expression allows us to calculate the critical Rayleigh number provided we express \widehat{R}^o in terms of the Rayleigh number. This is done by making the following considerations: Since the lateral walls of the cylinder are considered to be thermally insulated, it is expected that the thermal (and dynamic) boundary layers that form near the vertical walls are of constant width. A one dimensional, local analysis of the boundary layer flow near the wall (see the Appendix for details), results in the following expression:

$$\widehat{R}^o = \omega \mathcal{R}a = \frac{\varkappa_o}{1 + 0.018 \frac{A}{\text{Pr}}} \mathcal{R}a \quad (20)$$

with $\varkappa_o = 1/24$. Numerical calculations give $\widehat{R}^o = \mathcal{R}a/26$ for the particular case solved in section 3.2. This indicates that although simple, this model captures the correct dependence of \widehat{R}^o on the Rayleigh number.

Identifying \mathcal{Ra} with the second critical Rayleigh number in equation (20) and substituting in equation (19); the following expression for the second critical Rayleigh number as a function of the aspect ratio and Prandtl number is obtained:

$$\mathcal{Ra}_{cr}^{(2)} = \frac{8 \text{Pr} \gamma^3}{a_2^2 \omega^2} \left[4 \text{Pr} \gamma^3 + a_2 (a_1 + 4\gamma^2 s_2^2) \omega - 2\sqrt{2 \text{Pr} \gamma^3} \sqrt{2 \text{Pr} \gamma^3 + a_2 \omega (a_1 + 4\gamma^2 s_2^2)} \right] \quad (21)$$

The following simpler approximate expression can be obtained by noting that a_2 is small

$$\mathcal{Ra}_{cr}^{(2)} = \frac{\left(s_2^2 + \frac{a_1}{A^2}\right)^2}{1 + \frac{2\left(s_2^2 + \frac{a_1}{A^2}\right)a_2\omega}{A \text{Pr}}}$$

or:

$$\mathcal{Ra}_{cr}^{(2)} = \frac{(4\gamma^2 s_2^2 + a_1)^2}{1 + \frac{a_2 \omega \left(s_2^2 + \frac{a_1}{4\gamma^2}\right)}{\text{Pr} \gamma}} \quad (22)$$

4.2 Full model

We shall now assume that the base flow is defined by:

$$\mathbf{u}^o = (u_r^o, 0, u_z^o)$$

and that

$$u_z^o = u_z^o(r, z).$$

The mass balance equation in cylindrical coordinates and under the present assumptions is:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r^o)}{\partial r} + A \frac{\partial u_z^o}{\partial z} = 0,$$

therefore:

$$u_r^o = -\frac{A}{r} \int_0^r \left(\tau \frac{\partial u_z^o}{\partial z} \right) d\tau$$

which shows that the radial component of the base flow is a function of (r, z) and is of the same order of magnitude as $\partial u_z^o / \partial z$. The velocity and temperature fields \mathbf{u}^* and T^* are assumed to have the form

$$u_r^* = u_r^o + u_r', \quad u_z^* = u_z^o + u_z', \quad T^* = T^o + T'$$

substituting in the conservation equations and dropping the primes, the momentum and energy equations are:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \mathcal{R}a T = \frac{1}{\text{Pr}} \left(A u_z \frac{\partial u_z^\circ}{\partial z} + A u_z^\circ \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r^\circ \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + A^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + u_z = 0 \quad (24)$$

As before, it has been assumed that for the small region under analysis, the base temperature field is a linear function of the vertical coordinate.

As can be easily observed, the Reynolds analogy also holds in this case and therefore here we take

$$u_z = T = R(r)Z(z)$$

Expressing the base flow as $u_z^\circ = R^\circ(r)Z^\circ(z)$ and substituting in equation (23), we get:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{A^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \sqrt{\mathcal{R}a} = \frac{A}{\text{Pr}} \left(R^\circ \frac{dZ^\circ}{dz} + \frac{R^\circ Z^\circ}{Z} \frac{dZ}{dz} - \frac{A}{r} \frac{dZ^\circ}{dz} \frac{dR}{dr} \left(\int_0^r R^\circ r^* dr^* \right) \right).$$

We shall rearrange the previous equation as:

$$\frac{A^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{A}{\text{Pr}} \left(R^\circ \frac{dZ^\circ}{dz} + \frac{R^\circ Z^\circ}{Z} \frac{dZ}{dz} \right) = -\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{A}{r} \frac{dZ^\circ}{dz} \left(\int_0^r R^\circ r^* dr^* \right) \right) \frac{dR}{dr} \right) - \sqrt{\mathcal{R}a} \quad (25)$$

In order to make further progress we must incorporate plausible expressions for R° and Z° . First, we recall that our analysis concerns only a small zone close to the wall and therefore

$$Z^\circ = \sin(\pi z) \simeq \pi z$$

with this assumption, we note that the right hand side of eq.(25) depends only on coordinate r and that all terms of the left hand side of the equation depend on z , except for R° which is a function of r . In order to separate the variables, we take the average of R° over r , and define the variable:

$$\widehat{R}^\circ(\mathcal{R}a) = \int_0^1 R^\circ(r, \mathcal{R}a) dr$$

Substituting the two previous expressions, equation(25) can be separated to yield:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{Ar\pi}{2} \widehat{R}^\circ \right) \frac{dR}{dr} + \left(\sqrt{\mathcal{R}a} - k^2 \right) R = 0$$

expressing this equation in terms of the variable

$$\xi = -\frac{1}{4}A\pi\widehat{R}^\circ r^2$$

we get

$$\xi \frac{d^2 R(\xi)}{d\xi^2} + (1-\xi) \frac{dR(\xi)}{d\xi} - aR(\xi) = 0$$

where

$$a = \left(\frac{\sqrt{\mathcal{R}a}}{A\pi\widehat{R}^\circ} - \frac{k^2}{A\pi\widehat{R}^\circ} \right)$$

This equation is a particular case of the confluent hypergeometric equation whose solution is:

$$R = C_1 {}_1F_1(a, 1, \xi) + C_2 U(a, 1, \xi) \quad (26)$$

where ${}_1F_1$ is the confluent hypergeometric function and U is the second solution to the confluent hypergeometric equation. (See for instance Abramowitz and Stegun (1964)).

If we take in account expressions for a , b and ξ , the eq.(26) solution will be transformed in:

$$R = C_{11} F_1 \left(\frac{\sqrt{\mathcal{R}a}}{A\pi\widehat{R}^\circ} - \frac{k^2}{A\pi\widehat{R}^\circ}, 1, -\frac{1}{4}A\pi\widehat{R}^\circ r^2 \right) + C_2 U \left(\frac{\sqrt{\mathcal{R}a}}{A\pi\widehat{R}^\circ} - \frac{k^2}{A\pi\widehat{R}^\circ}, 1, -\frac{1}{4}A\pi\widehat{R}^\circ r^2 \right)$$

The U expression is:

$$U(a, 1, \xi) = \frac{\pi}{\sin(\pi b)} \left[\frac{{}_1F_1(a, b, \xi)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - \xi^{(1-b)} \frac{{}_1F_1(1+a-b, 2-b, \xi)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right]$$

then we shall assume that $C_2 = 0$.

Also, it should be remarked that ${}_1F_1$ displays a similar behavior than Bessel function J_\circ . Consequently,

$$R \sim {}_1F_1 \left(\frac{\sqrt{\mathcal{R}a}}{A\pi\widehat{R}^\circ} - \frac{k^2}{A\pi\widehat{R}^\circ}, 1, -\frac{1}{4}A\pi\widehat{R}^\circ r^2 \right).$$

Recalling that the velocity should vanish at the wall, $r = 1$, a relation between $\mathcal{R}a$, A and k can be determined from the expression:

$${}_1F_1 \left(\frac{\sqrt{\mathcal{R}a}}{A\pi\widehat{R}^\circ} - \frac{k^2}{A\pi\widehat{R}^\circ}, 1, -\frac{1}{4}A\pi\widehat{R}^\circ \right) = 0 \quad (27)$$

and it should be the second zero as well as for the case J_\circ . At this point, it is required to define \widehat{R}° as a function of ω and $\mathcal{R}a$; we choose the same function as in the simplified model eg. equation (20)

A solution to equation (27) can be found numerically and cast in the form:

$$Ra = (s\gamma^t + 2q\gamma^n k^w)^g$$

Ra is the Rayleigh number defined with the height of the cylinder L .

The symbol $\gamma = 1/2A$, and s, t, q, n, w and g are constants whose values are determined numerically. The details of the program used can be found in Krukovsky (1995 and 1996).

The numerical solution yields: $s = 52.3, t = 2.19, q = 1.368, n = 0.051, w = 0.988$ and $g = 2.03$.

Introducing the formula for k as a function of A, a_1, a_2 and b (the expression after equation (18)) and using the approximate values $w = 1.0$ and $g = 2.0$. A quadratic equation for Ra_L is obtained whose solution is:

$$Ra_L = \frac{4}{q^2 \omega^2 a_2^2} (2 \text{Pr}^2 \gamma^{6-2n} + \text{Pr} q s \gamma^{3+t-n} \omega a_2 + 2 \text{Pr} q^2 \gamma^3 \omega a_1 a_2) \pm 2 \text{Pr}^{3/2} \gamma^{9/2-2n} \sqrt{\text{Pr} \gamma^3 + q s \gamma^{t+n} \omega a_2 + 2 q^2 \gamma^{2n} \omega a_1 a_2} \quad (28)$$

An estimate for m is required. Using a similar method that we use in the subsection 4.1 yields:

$$m = 4.5125 - 0.05\gamma + 0.0375\gamma^2$$

Using this expression the following numerical values for the second critical Rayleigh number are found:

R/L	$Ra_{cr}^{(2)}$ eq.(28)	$Ra_{cr}^{(2)}$ eq.(22)
0.5	58 460	55 149
0.25	237 252	356 000
0.167	739 019	1 428 000
0.125	1 974 890	4 100 000
0.1	4 586 030	9 700 000

In order to assess the validity of this simplified theory, we compare the results from both models, the simplified and full versions, with available numerical calculations. Specific values of $Ra_{cr}^{(2)}$ as given in (22) are shown in figure 8 as functions of the aspect ratio. Starting the comparison of results with the simplified model for aspect ratios 0.1, 0.125 and 0.25 the agreement between theory and experiment is within a factor of approximately 1.5, while for aspect ratios of approximately 0.167, the difference is a factor of five. The comparison with the numerical results is made by calculating velocity fields for aspect ratios 0.125, 0.167 and 0.25 using Rayleigh numbers that are somewhat above and below the value predicted by the theory. The Rayleigh numbers for which the numerical calculations are performed are shown in the (A, Ra) map with down triangles. The results of the full model (Section 4.2) are displayed in the same figure. It can be observed that the critical Rayleigh numbers obtained with the model that takes into account mass conservation agrees well with numerical calculations.

5 Discussion and Conclusions

The convective patterns of laminar natural convective flow and temperature fields in a cylindrical cavity of aspect ratio 0.25 have been described for $Ra = 5.0 \times 10^4$ and $Ra = 7.5 \times 10^5$. In the two cases, the major feature of the flow is a non-axisymmetric convective cell, but for the case with higher Rayleigh number, there are also two smaller cells in the regions where the vertical flows meet the horizontal walls and turn. The numerical analysis presented in the previous paragraphs for $Pr = 6$, was also made using $Pr = 200$. It was found that the qualitative properties of the flows obtained are the same as those described above. This opens up the possibility of using Silicon Oil as working fluid in an experimental facility with characteristic distance of the order of few centimeters.

An analytical theory based on a local analysis was developed to predict the generation of the secondary structures. This local theory gives a reasonable prediction of the critical Rayleigh number at which the secondary cells appear as a function of the aspect ratio. Comparing the theory with numerical calculations gives good agreement, indicating that the important physical processes of the flow are captured by the model.

6 Appendix

Consider a natural convective flow close to a thermally insulated, vertical wall and define local axial (z) and normal (y) coordinates and the vertical velocity u_z . Assuming that a pseudotime t can be identified with the axial coordinate z through the relation $t = z/u_z$, and using the following nondimensional variables:

$$\xi = \frac{y}{R/2}, \quad \tau = \frac{t\nu}{R^2}, \quad v = \frac{u_z R}{\alpha}$$

The equation that governs this flow is:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{Ra}{2} + 4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \quad (29)$$

where v is the vertical velocity. The boundary conditions are:

$$v = 0 \quad \text{at the center of the cylinder, } \xi = -1$$

$$v = 0 \quad \text{at the wall, } \xi = 1$$

The solution to equation (29) is:

$$v = \frac{Ra}{16} \left\{ (1 - \xi^2) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \xi \right]}{(-1)^n \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)} \exp \left(-4\tau \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \right) \right\}$$

We should now evaluate the pseudotime $t = z/u_z$ in $z = L/2$, which in nondimensional units is $\tau = \text{Pr}/2A\hat{v}$, and average the previous expression over the transversal coordinate to obtain:

$$\hat{v} = \frac{\text{Ra}}{16} \left\{ \frac{2}{3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2} \exp\left(-2\frac{\text{Pr}}{A\hat{v}}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right) \right\}$$

Taking only the first term of the series, we finally get:

$$\hat{v} \simeq \frac{\text{Ra}/24}{1 + 0.018\frac{A}{\text{Pr}}}$$

It is interesting to note that the average solution to equation (29) without the first term on the right hand side is:

$$\hat{v} \simeq \text{Ra}/24$$

which is also a good approximation compared with the numerical value of $\text{Ra}/26$ obtained from a numerical calculation of a particular case.

7 References

1. Abramowitz M. and Stegun I. (1964) *Handbook of mathematical functions*. Dover.
2. Buell J.C. and Catton I. (1983) The effect of wall conduction on the stability of a fluid in a right circular cylinder heated from below. *Trans. ASME, J. Heat Transfer* **105**, 255-260.
3. Catton I. (1985) Natural convection in horizontally unbounded plane layer. *Natural Convection, Fundamentals and Applications*, Editors. Kakaç S. Aung W. Viskanta R. Springer-Verlag.
4. Chandrasekar S. (1981) *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover.
5. Charlson G.S. and Sani R.L. (1971) On thermoconvective stability in a bounded cylindrical fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transfer* **14**, 2157-2160.
6. Charlson G.S. and Sani R.L. (1975) Finite amplitude axisymmetric thermoconvective flows in a bounded cylindrical layer of fluid. *J. Fluid Mech.* **71**, 209-229.
7. Gershuni and Zhukhovitskii (1976) *Convective stability of incompressible fluids*. Keterpress Enterprises.
8. Jeading J.M.A. (1975) *Ordinary differential equations*. Elek Science, London.

9. Kakimoto K. (1995) Heat and mass transfer in semiconductor melts during single-crystal growth processes. *J. Appl. Phys.* **77** No 5, 1827-1842.
10. Krukovsky P.G. (1995) A universal approach to solutions of inverse heat transfer problems (method and software). Proc. 30th Heat Transfer Conf., New York, ASME **10** (HTD-Vol.312) 107-112.
11. Krukovsky P.G. (1996) Concerning a possibility of solution of inverse and optimization heat-transfer and fluid flow problems using PHOENICS and software FRIEND. The PHOENICS J. Computational Fluid Mech. and its Appl., **9**, No 4, 516-532.
12. Müller G. (1988) *Crystals growth, properties and applications*, Vol 12: *Convection and inhomogenities in crystal growth from the melt*. Springer.
13. Müller G., Neumann G. and Weber W. (1984) Natural convection in vertical Bridgman configurations. *J. Crystal Growth* **70**, 78-93.
14. Neumann G. (1990) Three-dimensional numerical simulation of buoyancy-driven convection in vertical cylinders heated from below. *J. Fluid Mech.* **214**, 559-578.

8 Figure legends

- Figure 1. Schematic of the cylindrical cavity indicating the coordinate system.
- Figure 2. Velocity field as a function of position in the plane AA' as defined in figure 2. $Ra = 5.0 \times 10^4$, $Pr = 6$, $A = 0.25$.
- Figure 3. Isolines of the vertical velocity component at horizontal planes located at: a) $z^* = 0.5$. b) $z^* = 1.0$ c) $z^* = 1.5$. $Ra = 5.0 \times 10^4$, $Pr = 6$, $A = 0.25$.
- Figure 4. Temperature field in: a) plane AA' as defined in figure 2. b) plane BB' as defined in figure 2. $Ra = 5.0 \times 10^4$, $Pr = 6$, $A = 0.25$.
- Figure 5. Velocity field as a function of position in: a) plane AA' as defined in figure 5. b) BB' as defined in figure 5. $Ra = 7.5 \times 10^5$, $Pr = 6$, $A = 0.25$.
- Figure 6. Isolines of the vertical velocity component at horizontal planes located at: a) $z^* = 0.5$. b) $z^* = 1.0$. c) $z^* = 1.5$. $Ra = 7.5 \times 10^5$, $Pr = 6$, $A = 0.25$.
- Figure 7. Temperature field in: a) plane AA' as defined in figure 5. b) plane BB' as defined in figure 5. $Ra = 7.5 \times 10^5$, $Pr = 6$, $A = 0.25$.
- Figure 8. Second critical Rayleigh number, Ra^{c2} as a function of A. Continuous lines, Present models (Equations 22 and 28) The down triangles correspond to the velocity vector fields computed numerically.

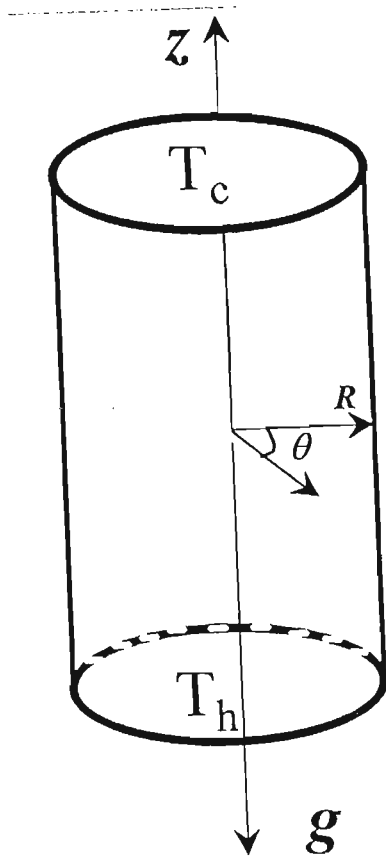
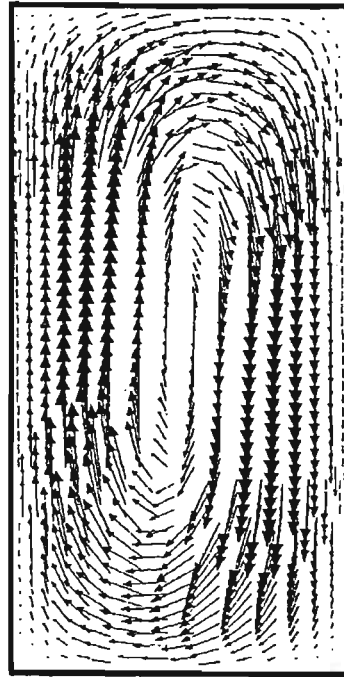


Figure 1



→ 29.1

Figure 2

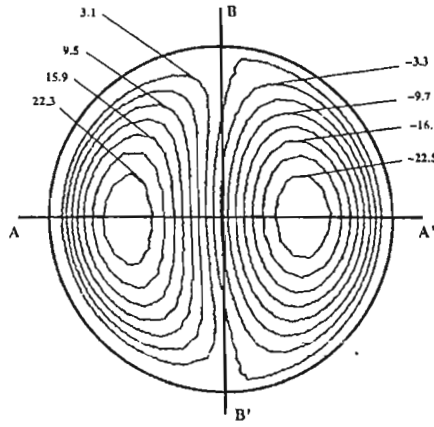


Figure 3 a)

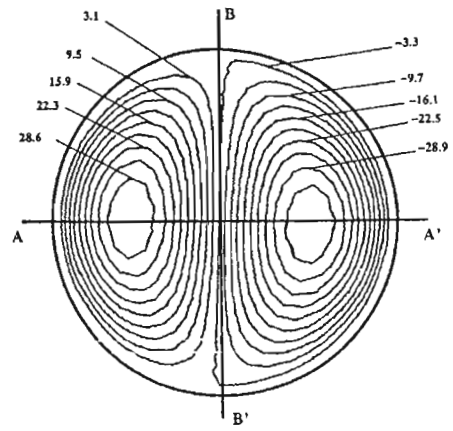


Figure 3 b)

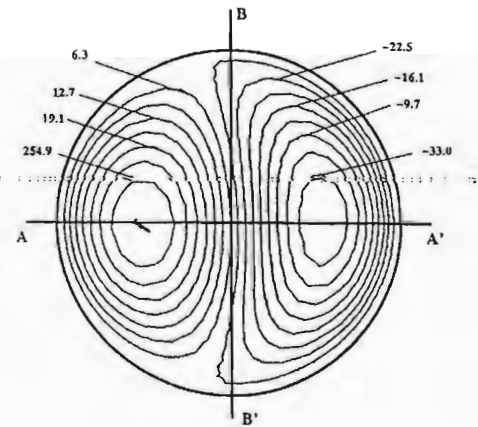


Figure 3 c)

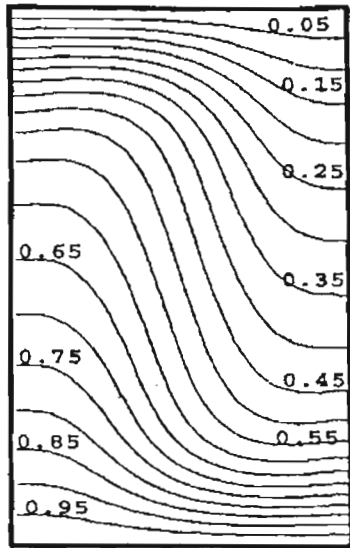


Figure 4 a)

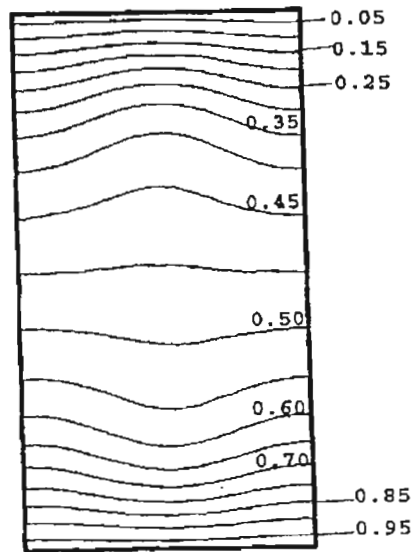
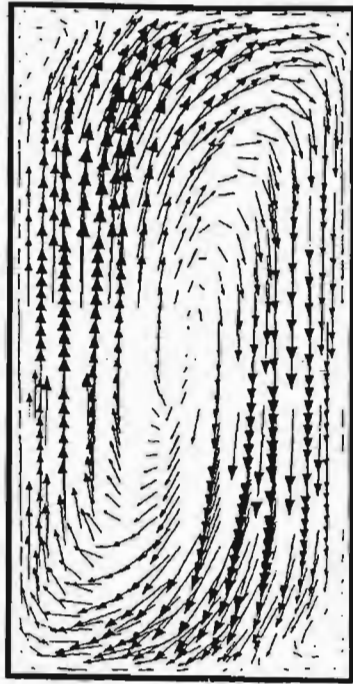
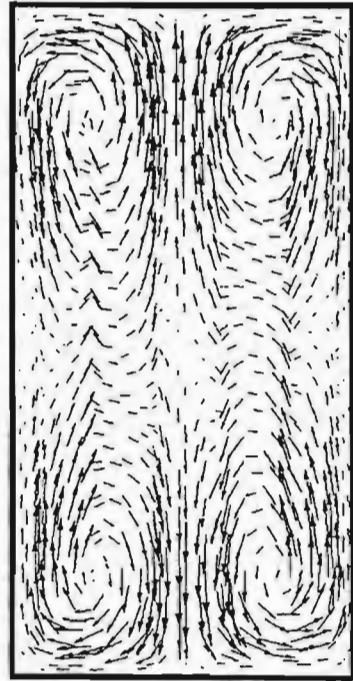


Figure 4 b)



→ 195.1

Figure 5 a)



→ 64.9

Figure 5 b)

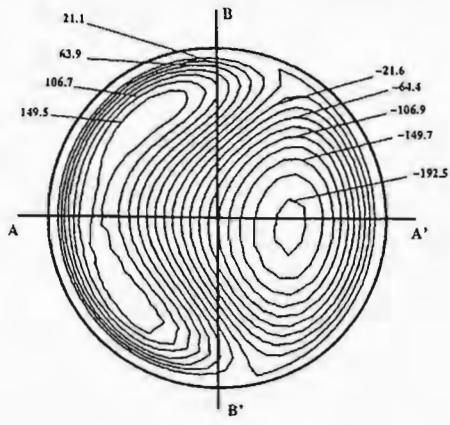


Figure 6 a)

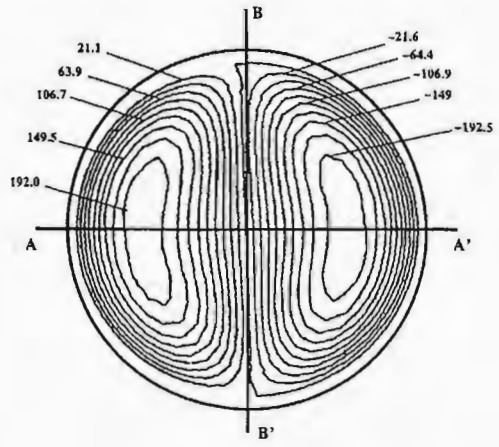


Figure 6 b)

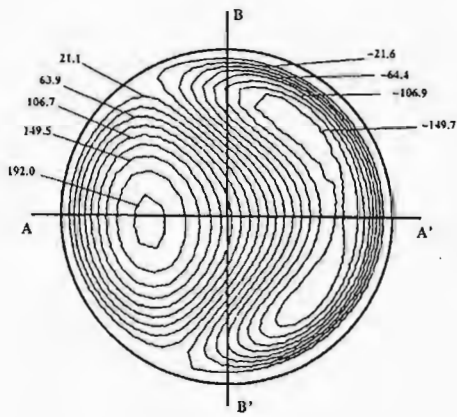


Figure 6 c)

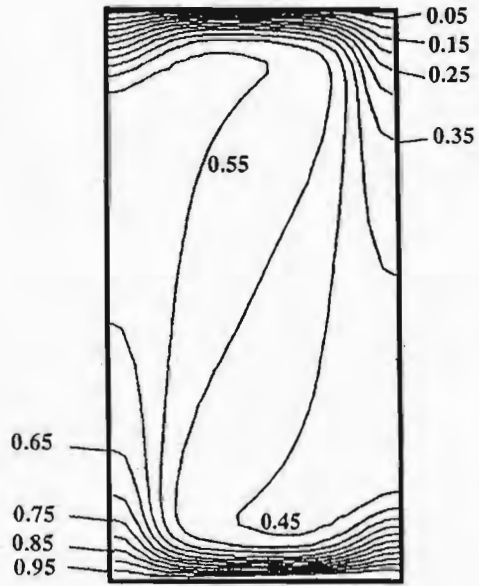


Figure 7 a)

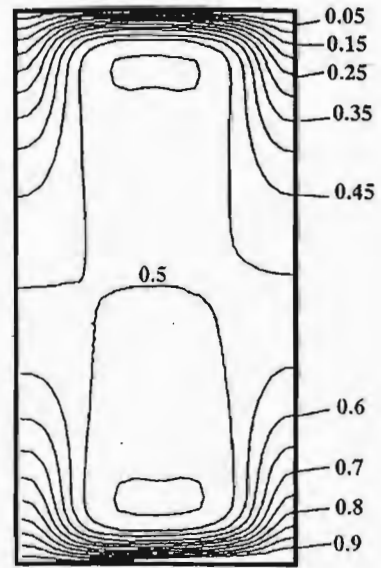
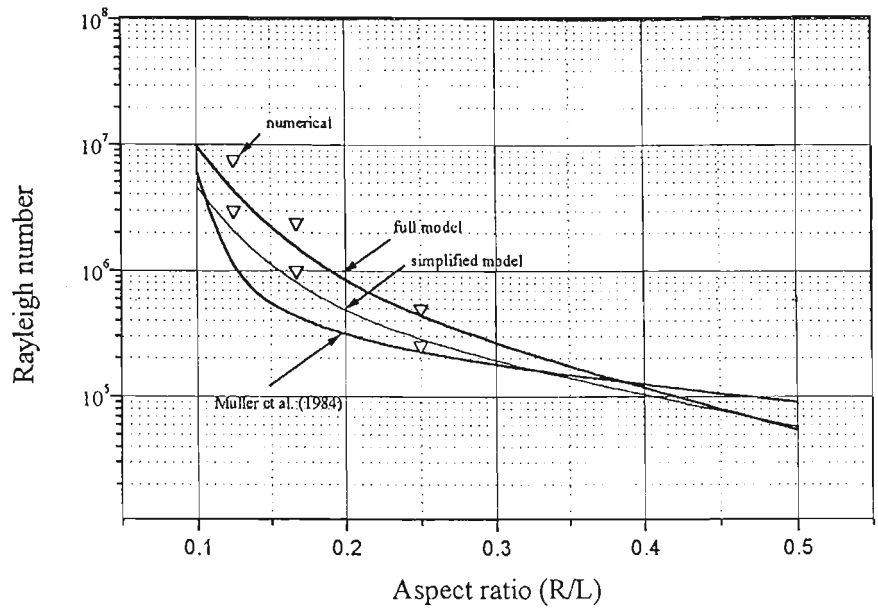


Figure 7 b)



∇ Temp. Máx \blacksquare Temp. Mín.

Apéndice E

Campos de velocidad

Se presenta la metodología empleada para obtener los campos de velocidad de las diferentes estructuras observadas en los experimentos exploratorios. La rotación del sistema es uno de los factores que dificulta el empleo de varias de las técnicas para medir la velocidad en un flujo (Anemometría Láser, Velocimetría por imágenes de partículas entre otras). Siendo necesario realizar diferentes procesos como la digitalización y la exportación de imágenes y distintos programas de análisis.

Digitalización Uno de los puntos importantes para proceder con el análisis de las imágenes de video es que si el flujo bajo investigación es lento $\leq 10^{-3} \text{ms}^{-1}$, es posible examinar sus imágenes temporalmente para lo cual se recomienda convertir las imágenes analógicas del video a digitales [94]. Todos los experimentos se filmaron con una cámara SONY Handycam TR403 que se ubicó perpendicular al plano de luz procedente del láser (ver figura 4.5). Simultáneamente se grabó el experimento en una cinta de video de 8 milímetros y se observaba el patrón de flujo convectivo en un monitor de televisión. Posteriormente, se analizó detalladamente la videofilmación identificándose las estructuras del patrón de flujo así como los intervalos de tiempo en que ocurrían. Los segmentos de video seleccionados se digitalizaron para obtener las imágenes de las estructuras del flujo y posteriormente analizarlas con el programa del equipo de PIV (velocimetría por imágenes de partículas). Una de las ventajas del equipo de video estándar es la grabación de secuencias de imágenes que se realiza a 30 Hz el cual es el formato requerido por NTSC, (National Television Standar Commitee). El término de video es comúnmente empleado para imágenes de uso exclusivo en televisión y típicamente se relaciona con la transmisión analógica de imágenes cuya información se codifica con el tiempo, línea a línea. El CCD de una cámara es un sensor electrónico que puede convertir la luz (fotones) en carga eléctrica (electrones). Este dispositivo está integrado por pixeles que pueden tener un arreglo en un arreglo lineal o rectangular. El pixel es el elemento fotosensible más pequeño.

Las imágenes analógicas captadas por la cámara SONY tienen una distribución de 640 píxeles de ancho y 480 píxeles de altura. Es conveniente mencionar que la resolución de la imagen no sólo depende de la cantidad de píxeles del CCD de la cámara, sino también de la distancia entre los centros denominada pixel pitch, así como del factor de apertura. Este último se define como la relación del área ópticamente sensible y el área total del pixel [94]. Estas características del CCD fueron omitidas en el manual por el fabricante de la cámara SONY Handycam. Por otra parte, debido a la geometría del recipiente y a la lente de la cámara, las imágenes tuvieron una distorsión óptica. Ésta se determinó al introducir en el interior del recipiente una malla rectangular de 17.5 mm de ancho y 30 mm de altura conformada por áreas de 25 mm². La malla se ubicó en el plano longitudinal medio donde el haz de luz procedente del láser ilumina el flujo. La mayor distorsión se encuentra cercana a las paredes del cilindro. El campo visual efectivo captado por la cámara de ese plano es 82%. En una computadora del laboratorio de transferencia de energía y masa del CIE se encuentra instalada una tarjeta AVID que permite digitalizar video o imágenes, así como editar videos con sonido y efectos especiales. Para identificar los intervalos de interés de la filmación, se hizo un análisis detallado con el programa TARGA 2000. Al omitir el color, la imagen de la videofilmación se presenta en tonos de gris; el tiempo entre los cuadros del video es de 1/30 s. A partir de una fuente de video y audio es factible convertir a un formato digital, lo cual se logró con el programa MCXpress. Las variables importantes en este proceso son las características de la imagen y el tiempo de digitalización. Las características de la imagen comprenden video, audio y color. El tamaño de las imágenes depende de opciones seleccionadas. Es posible elegir sin color y sonido quedando únicamente el video en tonos de gris con una resolución de 8 y 24 bits. Es conveniente mencionar que una imagen en tonos de gris con una resolución de 8 bits tiene un tamaño de 301 kB. Por otra parte, si la imagen tiene una resolución de 24 bits y además es a color su tamaño se incrementa a 500 kB aproximadamente. El tiempo de digitalización se refiere al intervalo de tiempo de una sección del video de interés. El fragmento de video o subclip que corresponde a la sección de video a digitalizar puede tener una duración que va desde milésimas de segundo a minutos. Una de las opciones del subclip es la creación de la serie de imágenes con formato bmp (bitmap pixel) que lo integran. Estas imágenes se almacenan en un archivo o se exportan vía red interna para almacenarse en otra computadora.

Procesos en el análisis de imágenes

La velocimetría por imágenes de partículas fundamenta su análisis en el movimiento de las partículas trazadoras en el fluido sembradas previamente. La velocidad se evalúa considerando la distancia recorrida por las

partículas trazadoras en un intervalo de tiempo. Las partículas tienen como característica principal una flotabilidad neutra además de dimensiones del orden de micras y un tamaño uniforme, lo cual les permite seguir fielmente el movimiento del fluido. El área de análisis se subdivide en otras de dimensiones más pequeñas, analizándose el movimiento de las partículas en cada subárea. El software utilizado es el Flow Manager V3.4 de DANTEC y lleva a cabo una serie de procesos para obtener los campos de velocidad. En este caso particular, las imágenes almacenadas en un archivo se importan al proyecto para analizarlas directamente con el software.

Base de datos y folder del proyecto Inicialmente se crea un proyecto al cual se le asigna un nombre distintivo para el usuario. Luego se crea una base de datos de donde se desprenden los niveles que constituyen la estructura del análisis. La rama principal del primer nivel recibe el nombre del folder del proyecto y sirve para almacenar considerables cantidades de datos. Posteriormente se crean otras ramas cada una de las cuales contendrá un proceso de análisis y toma de imágenes (éste último proceso no se realiza en la presente investigación). Después de crear la base de datos y el folder del proyecto, se selecciona el tipo de cámara a emplear y el láser a utilizar en esta técnica, en la librería de los dispositivos propuestos por el software. En este caso, las especificaciones de la cámara elegida corresponden a la cámara de video 640×480 píxeles y el láser seleccionado tiene una longitud de onda de 532 nm.

Control de adquisición La adquisición de datos puede realizarse automáticamente determinando inicialmente los parámetros que se buscan que se realicen consecutivamente. Los puntos importantes en el control de adquisición son exposición, paquetes (burst) y salida analógica. Con respecto al aspecto de exposición corresponde a la operación de sincronía entre láser y cámara. Hay tres parámetros importantes que se deben definir: el tiempo entre pulsos que es el intervalo de tiempo entre dos pulsos de luz láser, en los que la cámara fotográfica debidamente acoplada toma el par de fotos simultáneamente en cada pulsación. Además, la cantidad de pulsos que emite el láser; en caso de dos pulsos la cámara captará dos imágenes consecutivamente. Por último, el tiempo de duración de cada pulso, el cual es un parámetro fijo del programa y corresponde a $0.01 \mu s$. En este caso, cada imagen tiene una duración de $1/30$ s, por lo que el tiempo entre pulsos corresponde a $33333 \mu s$. El láser es continuo no opera por pulsos como sucede en el equipo de PIV, por lo que se considerará que sólo existen dos pulsos entre imágenes. Los otros aspectos referentes a paquete (burst) y señal analógica no se tuvieron en cuenta.

Campo de la imagen La relación entre las coordenadas reales definidas por el usuario y las coordenadas locales de la cámara definen el factor de es-

cala. Para fijar este factor se determina una distancia en milímetros entre dos puntos en una de las imágenes. Esta distancia se le suministra al programa el cual, en forma automática, calcula el factor de escala. En este caso se fijó una dimensión horizontal de 20 mm la cual corresponde al diámetro exterior del recipiente; observando detenidamente la imagen se tenía una inclinación de -1° . A la imagen que se va a analizar se le asigna el término de mapa de imagen.

Máscara La imagen tiene zonas que no son de interés o que pueden inducir algún error en la obtención del campo de velocidad. Para eliminarlas se procede a generar una máscara. En las zonas enmascaradas el programa asigna una velocidad cero, quedando visible únicamente las zonas donde existe flujo. Esta máscara se utiliza en todas las imágenes del proyecto. Con la primera imagen se procede a generar la máscara, la cual se aplica a todas las imágenes que se desean analizar.

Correlación Posteriormente se da inicio al cálculo de los campos vectoriales bidimensionales de velocidad. Las técnicas empleadas por el programa para el análisis de imágenes son: la correlación cruzada, la correlación adaptativa, y la autocorrelación. Se seleccionó la correlación cruzada, siendo sus fundamentos ampliamente discutidos en [95] y [94]. Este tipo de correlación se realiza entre dos imágenes. Se recomienda luego de efectuar la correlación cruzada, la verificación de que el máximo desplazamiento del grupo de partículas dentro del área de interrogación no sea mayor del 25 % de tamaño de dichas áreas. Para correlacionar se divide el área de análisis en subáreas de interrogación de tamaño ($m \times n$) pixeles; 16×16 , 32×32 , 64×64 , 128×128 y 256×256 . El procedimiento de esta rutina de correlación se aplicó en las etapas sin y con rotación de los ensayos realizados. En algunos de estos experimentos el recipiente cilíndrico tenía termopares internos y la zona del capilar obstruía el análisis de esa región. Por lo que en varios de los proyectos de análisis de las imágenes de estas etapas experimentales se probó dividir en subáreas de 32×32 pixeles, 32×16 pixeles y 16×16 pixeles. Las pruebas con subáreas de 64×64 pixeles y 128×128 pixeles proporcionaban un campo de vectores de velocidad muy burdo.

Selección de mapas de imágenes.- Antes de iniciar la rutina de correlación cruzada se procede a seleccionar los mapas de imágenes. Además de esta selección propia del programa se realizaron diferentes pruebas cambiando el intervalo de tiempo entre los dos mapas de imágenes, dependiendo de la etapa del experimento. Las pruebas realizadas consistieron en:

- El programa elige automáticamente dos mapas de imágenes que fueron captadas consecutivamente por la cámara. Se selecciona la imagen 1 y la imagen 2 y las correlaciona, las imágenes 3 y 4, las imágenes 5

y 6 y así sucesivamente. El intervalo de tiempo correspondiente entre imágenes es $\Delta t=0.033$ s.

- Se correlaciona la imagen 1 con la imagen 10, la imagen 2 con imagen 11, teniendo un intervalo de tiempo de $\Delta t=0.33$ s.
- Se correlaciona la imagen 1 con imagen 30, la imagen 2 con la imagen 31 y la imagen 3 con la imagen 32, teniendo un intervalo de tiempo $\Delta t=1$ s entre ellas.
- Con un intervalo de tiempo mayor $\Delta t=1.65$ s, correlacionando cada 50 imágenes, esto es imagen 1 con la imagen 50, la imagen 51 con la imagen 100, etc.

En estas últimas tres pruebas, la selección de mapas de imágenes se realiza manualmente. Posteriormente se procede a validar el campo de vectores resultantes denominado campo de vectores crudos de velocidad.

Resolución espacial.- El área de análisis se dividió en las subáreas de 16×16 píxeles y también en 32×16 píxeles. Para aumentar la resolución espacial, el programa tiene la opción de traslapar las subáreas en un 25 %, 50 % y 75 %. En el presente caso el traslape fue del 50 %. Al concluir la correlación cruzada al campo de velocidad resultante se le conoce como campo de vectores crudos de velocidad.

Validación por Picos Para detectar los vectores que erróneamente fueron calculados se realiza el proceso de validación de los desplazamientos más probables o validación por picos. En esta rutina se rechazan o se hacen válidos los vectores obtenidos. El procesador localiza en el plano de correlación el pico más alto que se considera como el desplazamiento más probable y el que le sigue en altura (segundo más probable). El cociente de ambos debe ser mayor o igual a 1.2. Cuando no se cumple esta condición, el vector es rechazado.

Validación por promedios movidos Esta rutina valida o rechaza vectores basándose en una comparación entre vectores vecinos. Los vectores rechazados pueden ser sustituidos por otros, estimados de valores que rodeen a tales vectores rechazados. El método consiste en calcular el promedio de la magnitud de los vectores en una vecindad rectangular del vector que se va a validar y compararlo con el vector seleccionado. Se fija una constante k que se determina al multiplicar el factor de aceptación a por la máxima diferencia entre cada vector del área de la vecindad y el vector promedio. La magnitud del factor de aceptación recomendada por el fabricante del equipo de PIV es un valor entre 0.1 y 0.01. Si el factor de aceptación es igual a 1 se validan

todos los vectores y si es igual a 0 todos los vectores se rechazan. Los aspectos que se pueden seleccionar en esta rutina son el tamaño de la vecindad, el factor de aceptación y las iteraciones en este proceso. Las opciones para el tipo de resultados son sustituir los vectores invalidados, no sustituir los vectores con las invalidaciones previas y validar en la frontera. Para este caso, el campo de velocidad de vectores crudos obtenido en la etapa de convección natural sin rotación para 1799 imágenes separadas en tres subproyectos de 600 imágenes cada uno. Se dividió el área de análisis en subáreas de 32×32 pixeles el campo de velocidad está conformado por 39×29 vectores, se rechazaron 32 vectores [96] y se sustituyeron 105 vectores. Para el análisis de las imágenes de la etapa con rotación analizaron 450 s de esta sección del experimento, se correlacionaron dos imágenes cada segundo para identificar el patrón de flujo en esta etapa.

Filtrado En esta rutina se sustituye cada uno de los vectores por un promedio uniforme pesado de los vectores con sus vecinos en un área de tamaño específico $m \times n$. El tamaño de la vecindad en esta rutina es 3×3 pixeles.

Estadística La estadística de los campos de velocidad filtrados permite obtener los vectores de velocidad promedio, la media en cada uno de las componentes u y v , la desviación estandar de la media y el coeficiente de correlación para cada una de las posiciones de los vectores en el campo. Entre las opciones que tiene ésta rutina se pueden incluir: a) todos los vectores, b) todos los vectores validados y c) todos los vectores validados (ningún vector sustituido). El programa Flow Manager genera numéricamente la matriz del campo de velocidad y la imagen del campo de velocidad correspondiente para cada una de las rutinas de correlación, validación por picos y promedios movidos, filtrado y estadística. En caso necesario estas matrices numéricas se pueden exportar para su análisis en otros programas.

Reconstrucción Con el programa MatLab se grafica la matriz numérica correspondiente al campo de velocidad de interés obtenido con el software Flow Manager. Se utiliza la función *quiver* teniendo como datos las componentes de velocidad u y v obteniéndose un campo de velocidad bidimensional de mayor calidad.

Comentarios sobre la escala de velocidad Préviamente se efectuaron mediciones de la velocidad del flujo convectivo en el interior del recipiente cilíndrico fijo con las coordenadas del laboratorio. Se utilizó la técnica de Anemometría láser y además se filmaron varios experimentos. El fluido de trabajo fue agua. Estas mediciones de velocidad tenían como propósito determinar la componente vertical en algunos puntos de interés a la mitad de la altura del cilindro. El sistema utilizado consistió de un láser Spectra Physics

de 1.5 W con una longitud de onda 514 nm, una caja de transmisión 60×41, un par de manipuladores y una fibra óptica de 5 m de longitud de Dantec que conduce los haces de luz a una probeta 2D de 60×55 con una separación entre haces de 38 mm. Los experimentos se filmaron con una cámara de video, posteriormente se digitalizaron las imágenes para conocer el patrón de flujo. El sistema empleado para la visualización fue un láser de 50mW con una longitud de onda de 532 nm, dos prismas cilíndricos y una cámara de video [90], [97] y [98]. El rango de números de Rayleigh estudiado fue $10^5 \leq Ra \leq 10^6$. La magnitud máxima de la componente vertical de velocidad en el cilindro es del orden de 10^{-4}ms^{-1} . Otra manera de determinar la escala de velocidad del flujo convectivo es marcando manualmente los centroides de las partículas del fluido en las imágenes del video ya digitalizadas e impresas. Se determina su trayectoria en un intervalo de tiempo conocido. Con estos dos procedimientos se tiene una mayor confiabilidad en la escala de los campos de velocidad proporcionados por el programa Flow Manager.