00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre el grado de diferenciabilidad de la variedad de puntos *p*-periódicos de una familia de transformaciones de un espacio de Banach

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

JOSÉ LINO SAMANIEGO MENDOZA

DIRECTOR DE TESIS: DR. SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO SÁNCHEZ

MÉXICO, D.F. AGOSTO, 2005

A mi compañera

María Antonieta

Por todos los días, todos los años

y tantas, tantas cosas...

A mis hijas

María Antonieta

María Alejandra

Quiero subrayar el influjo determinante ejercido sobre este trabajo por el **Dr. Santiago López de Medrano**, con quien he estado unido durante muchos años por una profunda amistad.

Deseo dar las gracias al **Dr. Marc Chaperon** por haberme permitido participar en su proyecto de investigación y por el apoyo durante la realización de este trabajo.

Agradezco a todos mis sinodales, el tiempo y las observaciones que, de manera definitiva, contribuyeron a mejorar el trabajo:

Dr. Alberto Verjovsky Sola
Dr. Héctor Fidencio Sánchez Morgado
Dr. Joaquín Delgado Fernández
Dr. Jorge Andrés Ize Lamache
Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

A las Doctoras:
Shirley Bromberg Silverstein
Ana Guzmán Gómez

Amigas por siempre y de quienes la tesis no sólo contiene sus profundas observaciones sino su espíritu.

Índice General

INTRODUCCIÓN 2

1. PRELIMINARES:
VECTORES PROPIOS Y VALORES PROPIOS. 12

2. SOBRE LA VARIEDAD DE PUNTOS PERIÓDICOS
DE PERIODO 2. 21

3. SOBRE LA VARIEDAD DE PUNTOS PERIÓDICOS
DE PERIODO p SOBRE $\mathbb{C}$. 29

4. SOBRE LA VARIEDAD DE PUNTOS PERIÓDICOS
DE PERIODO p SOBRE $\mathbb{R}$: CASO $E = \mathbb{C}$. 33

5. ESTABILIDAD DE SUBESPACIOS INVARIANTES. 42

6. SOBRE LA VARIEDAD DE PUNTOS PERIÓDICOS
DE PERIODO p SOBRE $\mathbb{R}$: CASO GENERAL 47

BIBLIOGRAFÍA 54

INTRODUCCIÓN.

En esta tesis se estudia un fenómeno especial de pérdida de diferenciabilidad: En una situación muy natural se tiene una familia de transformaciones de un alto orden de diferenciabilidad y que tiene todas las condiciones de regularidad y genericidad que uno pudiera desear. A partir de ésta se considera una variedad definida de manera también perfectamente natural, y resulta que el orden de diferenciabilidad de ésta es drásticamente inferior al de la familia original. (En un caso extremo se puede obtener una variedad que no es diferenciable). Esto contrasta fuertemente con otras situaciones similares conocidas en las cuales se pierde a lo más un orden de diferenciabilidad.

Presentaremos aquí los ejemplos clave donde se presenta esta pérdida de diferenciabilidad y que dan una cota superior al grado de diferenciabilidad que puede esperarse. También se demuestra un resultado positivo que da una cota inferior a dicho orden de diferenciabilidad. Cuando el orden de diferenciabilidad de la familia original es suficientemente grande estas dos cotas coinciden y se obtiene un resultado óptimo.

Específicamente, consideraremos familias de transformaciones en un espacio de Banach real E, parametrizadas por otro espacio de Banach real Λ. Supondremos que en un punto fijo de una de estas transformaciones la derivada de la transformación tiene un par de valores propios simples $\rho,\overline{\rho}$ que son raíces p-ésimas primitivas de la unidad, y que el espectro de esa derivada no contiene ninguna otra raíz p-ésima de la unidad. Supondremos adicionalmente que este valor propio simple varía efectivamente al variar el parámetro Esto requiere que el espacio de parámetros sea de dimensión real al menos 2. En estas condiciones se ve que el conjunto de órbitas p-periódicas forman una variedad en la vecindad del punto fijo en el espacio $E \times \Lambda$ si la familia de transformaciones es de clase al menos C^2.

Los ejemplos presentados en el capítulo 4 nos muestran que aún en el caso en que la familia sea de clase C^∞ no puede asegurarse que la variedad de puntos periódicos sea de clase C^{p-2}. En el caso $p = 3$ se ve que no es posible asegurar que la variedad sea diferenciable.

El resultado principal.

El resultado principal de esta tesis es un resultado positivo que nos asegura que si la familia de transformaciones es de clase C^k entonces la variedad de puntos p-periódicos es al menos de clase C^s donde $s = \text{mín}([(k-2)/2], p-3)$. Por los ejemplos del Capítulo 4 este valor es óptimo en lo que se refiere a la cota $p-3$. No se sabe aún si lo mismo sucede para la cota $[(k-2)/2]$. En consecuencia, sólo si k es por lo menos $2p-4$ tenemos el resultado óptimo $p-3$.

El resultado principal incluye, en particular, la *existencia de órbitas periódicas* en cualquier vecindad del punto fijo en el espacio $E \times \Lambda$. Pero además nos dice cuál es la estructura del conjunto de tales órbitas.

La demostración de este resultado se hace en dos partes: en el capítulo 4 demostraremos el caso en el cual el espacio E es de dimensión 2. En el capítulo 6 se demuestra el caso general, reduciéndolo al caso de dimensión 2. Esto permite abordar y resolver por separado dos de las problemáticas centrales que enfrenta la demostración. Los pasos de estas demostraciones tienen que combinarse de manera cuidadosa para evitar pérdidas adicionales de diferenciabilidad.

Los resultados preliminares.

Para apreciar mejor el resultado principal, y para adelantar algunos elementos sencillos de lo que será su demostración, se enuncian y demuestran tres resultados preliminares:

1) El Teorema 2.1 sobre el orden de diferenciabilidad de la variedad de puntos fijos. En este caso la variedad es del mismo orden de diferenciabilidad que la familia de transformaciones.

2) El Teorema 2.3 sobre el orden de diferenciabilidad de la variedad de puntos de periodo 2, bajo hipótesis análogas a las del resultado principal. En este caso la variedad es de clase C^{k-1} si la familia de transformaciones es de clase C^k.

3) El Teorema 3.2 sobre la variedad de puntos de periodo p en el caso de una familia holomorfa de transformaciones de un espacio de Banach complejo. En este caso no hay pérdida de diferenciabilidad y la variedad de puntos periódicos es también holomorfa.

Es a partir de estos resultados preliminares que resulta sorprendente el contraste con el resultado principal:

Teorema	Familia	Variedad de puntos	Clase de la variedad
2.1	C^k	fijos	k
2.3	C^k	de periodo 2	$k-1$
3.1	holomorfa	de periodo p	holomorfa
4.1, 6.1	C^k	de periodo p	$\text{mín}([(k-2)/2], p-3)$

Los resultados auxiliares.

Para la demostración de los resultados anteriores se utilizan algunos resultados sobre diagonalización simultánea de familias de endomorfismos lineales de un espacio de Banach real o complejo. En el Capítulo 1 se demuestra un resultado sobre la diagonalización de operadores en la vecindad de un operador con un valor propio simple, que incluye el hecho de que el valor propio depende analíticamente del operador. Se demuestra también el resultado de que si se tiene un operador de $\mathbb{R}^2$ con un valor propio no real, entonces se pueden escribir todos los operadores cercanos como operadores $\mathbb{C}$-lineales mediante conjugaciones que dependen analíticamente del operador. Esto se usará en el Capítulo 4 para demostrar el resultado principal cuando el espacio E es de dimensión 2.

En el Capítulo 5 se generalizan estos resultados para diagonalizar operadores con un subespacio invariante dado y se aplica este resultado para diagonalizar un operador con un valor propio simple complejo. Esto último es lo que se necesita en el capítulo 6 para la demostración del resultado principal en el caso general.

Metodología.

Esta tesis se enmarca dentro del proyecto de investigación iniciado por Marc Chaperon [CH]. Dentro de este proyecto se busca presentar y demostrar algunos resultados (tanto clásicos como nuevos) sobre bifurcaciones de transformaciones y flujos de manera geométrica y sobre la base de resultados básicos sobre operadores lineales y funciones diferenciables en espacios de Banach.

Las demostraciones de los resultados de esta tesis se basan en el Teorema de la Función Implícita y otros resultados básicos del Cálculo Diferencial en espacios de Banach. Las razones para esto están, además del interés en presentar un texto esencialmente autocontenido, en la naturaleza misma del problema abordado, el cual requiere un análisis cuidadoso y detallado que evite al máximo cualquier pérdida de diferenciabilidad adicional a la necesaria.

La única excepción a esta regla está en el Capítulo 5, donde se utiliza un resultado sobre el espectro de la diferencia de dos operadores que conmutan (Teorema 5.3) tomado del libro de Rudin [R] cuya demostración, que requiere de la Teoría de Álgebras de Banach, no se incluye. Desde que se escribió la primera versión de esta tesis se ha visto que es posible demostrar el Corolario 5.4, que es el que se utiliza en el Capítulo 6, sin utilizar ese teorema y dentro del contexto de los resultados del Capítulo 1, es decir, utilizando únicamente el Teorema de la Función Implícita. Sin embargo, hemos creído conveniente dejar en la presente versión todos los resultados ya que son interesantes en sí mismos.

Relación con otros trabajos sobre bifurcaciones.

Existe una enorme literatura sobre bifurcaciones de puntos fijos de transformaciones y de órbitas periódicas de flujos, la cual resulta casi imposible revisar minuciosamente en su totalidad.

Hemos revisado, sin embargo, una amplia y representativa franja de esa literatura, especialmente los trabajos de los especialistas más reconocidos y citados. Sobre la descomposición de operadores están los trabajos de Berger [B], Borisovich-Zvyagin-Sapronov [BZS], Dancer [D1], [D2], Dieudonné [Di], Gohberg-Krein [GK], Ize [I1], Kato [K1,K2] y Vainberg-Trenogin [VT]. Su utilización para la resolucion de problemas no lineales ha sido ampliamente utilizada (ver, por ejemplo: Chow-Hale [ChH], Dancer [D1], [D2], Golubitsky-Schaeffer [GS], Ize [I2], Vainberg-Trenogin [VT]).

Sobre bifurcación de transformaciones están los trabajos de Arnold [A], Chenciner [Ch], Chenciner-Iooss [ChI], Iooss [Io], Iooss-Adelmeyer [IA], Lanford [L] y Ruelle-Takens [RT].

Sobre la literatura revisada podemos concluir lo siguiente:

1) Sobre el resultado principal: grado de diferenciabilidad de la variedad de puntos periódicos de periodo $p \geq 3$:

En ninguno de estos trabajos se estudia la regularidad de esta variedad. En particular no aparece ninguna alusión al problema de la brusca caída de su grado de diferenciabilidad, ni a que se presente una situación nueva respecto al caso $p = 2$ ni, por supuesto, se señala solución alguna de este problema.

2) Sobre el resultado principal: existencia de puntos periódicos de periodo $p \geq 3$:

La mayoría de los trabajos consultados se ocupa sobre todo de la existencia de círculos invariantes en la vecindad de un punto fijo con las características de nuestro resultado principal, sobre todo para familias a un parámetro.

Un autor que se ocupa, del problema de la existencia de órbitas p-periódicas en el caso general de espacios de Banach es Iooss [Io] (ver también [IJ]).En el contexto de bifurcación de órbitas periódicas de flujos, principalmente en dimención finita, Arnold [A],Chenciner[Ch]. En [Io] se demuestran resultados sobre la existencia o no de puntos periódicos para transformaciones de $\mathbb{R}^2$ (pp. 105 a 123) que después se extienden a espacios de Banach (pp. 166 a 168) pero bajo la hipótesis (H2b) de que sólo haya uno o dos elementos del espectro en el círculo unitario. El parámetro siempre está en $\mathbb{R}$ y los resultados sobre existencia se refieren sobre todo a *ramas* de órbitas periódicas, es decir, familias de órbitas que dependen de un parámetro externo y que por lo general se desarrollan como funciones de potencias fraccionarias del parámetro original. Los resultados en términos generales son negativos: si $p > 4$ genéricamente no existen esas ramas. Por otra parte Iooss aborda el problema de la estabilidad o inestabilidad de esas órbitas periódicas, lo cual no se estudia en esta tesis. Se utilizan varias formas normales, la más general de las cuales se demuestra mediante una técnica de simetrización. Dentro de nuestro enfoque resulta más adecuado simetrizar después de obtener la variedad de puntos periódicos, tema que no desarrollaremos en esta tesis (ver notas después de la demostración de los teoremas 2.3 y 4.1).

Resumimos esquemáticamente en un cuadro las relaciones entre el libro de Iooss y esta tesis:

	Iooss	Tesis
	Hipótesis:	Hipótesis:
Parámetro	dimensión 1	dimensión ≥ 2.
Espectro en $\lvert z \rvert = 1$	Dos elementos	Cualquier número (sólo 2 raíces p-ésimas)
Espectro en $\lvert z \rvert > 1$	Ningún elemento	Cualquier número de elementos
	Conclusiones:	Conclusiones:
Existencia de p-órbitas	Existencia genérica si y sólo si $p \leq 3$	Existencia de una variedad
Estructura de p-órbitas	No se considera	Estructura diferenciable si y sólo si $p \neq 3$
Estabilidad de p-órbitas	Se analiza	No se considera
	Metodología:	Metodología:
Dimensión 2	Diversas formas normales	Sencillos cambios de variables
Reducción a dimensión 2	Teorema de la Variedad Central	Funciones implícitas y construcciones sencillas

Para familias a 2 parámetros de transformaciones en espacios de dimensión finita varios autores demuestran la existencia de p-órbitas cuando el parámetro está dentro de la *lengua de Arnold*. Ésta es la proyección de nuestra variedad de puntos p-periódicos en el espacio de parámetros. La singularidad que presenta la *lengua de Arnold* aparece para toda $p \geq 5$ y es debida al hecho de que esa proyección es singular sobre la variedad y no tiene que ver con el mayor o menor orden de diferenciabilidad de la variedad.

Otros trabajos abordan el caso de bifurcaciones de soluciones de ecuaciones cuando el valor propio no es simple ([CH], [GS], [I1]). En esta tesis sólo consideramos el caso en que el valor propio es simple. El caso de un valor propio múltiple se abordará posteriormente.

3) Sobre los resultados preliminares.

El Teorema 2.1 sobre los puntos fijos en la vecindad de un punto fijo simple es bien conocido. El Teorema 2.3 sobre los puntos periódicos de periodo 2 puede considerarse también como clásico y es en este caso donde se considera en algunos trabajos la variedad de puntos periódicos. Sin embargo, no hemos visto el enunciado preciso en la literatura. Por ejemplo, en [Io] sólo aparece enunciado en el caso en que el espacio E es de dimensión 1 o en un espacio de Banach arbitrario bajo hipótesis adicionales, siempre considerando que el espacio de parámetros es de dimensión 1. El Teorema 3.2 podría relacionarse con un resultado de Dancer, aunque éste estudia la bifurcación de las soluciones de una ecuación holomorfa, no específicamente la de los puntos periódicos de una familia de transformación. Es en ese contexto que Dancer considera la variedad de soluciones dentro del espacio $E \times \Lambda$, la cual es una variedad analítica que estudia, una vez reducido el problema a la dimensión finita, usando resultados sobre variedades analíticas singulares, sin plantear el problema de las condiciones para su regularidad. En todo caso el Teorema 3.2, aunque no lo hemos visto enunciado en la literatura, no plantea ninguna situación nueva respecto a resultados ampliamente conocidos.

4) Sobre los resultados auxiliares.

Los Teoremas 1.1 y 1.2 son bien conocidos y la Proposición 1.3 es una variante inmediata de un resultado muy conocido. El Teorema 5.1 puede considerarse como una variante del Teorema 3.16 del Capítulo IV, §3, sección 4, del libro de Kato [K1]. Sin embargo, no es posible deducir fácilmente el Teorema 5.1 de la tesis a partir del de Kato, ya que éste tiene dos hipótesis adicionales: una, la existencia de una curva cerrada simple rectificable que separa las dos partes del espectro y otra, que los resultados de este libro se refieren siempre a espacios vectoriales complejos. Si bien es posible darle la vuelta a estas hipótesis[1], esto requiere un trabajo adicional. En la tesis se demuestra este teorema a partir del Lema 5.2, debido a Chaperon [CH], que parece ser nuevo y que tiene otras implicaciones interesantes. El Corolario 5.4, que es el que se utilizará en el Capítulo 6, puede también demostrarse a partir de los resultados del Capítulo 1, lo cual requiere también un trabajo adicional.

Se han incluido también demostraciones elementales de las proposiciones 2.2 y 3.1, que son casos particulares de un resultado bien conocido, con el objeto de hacer autocontenida la presentación.

5) Sobre la metodología.

En la literatura sobre bifurcaciones de transformaciones es frecuente el uso de herramientas técnicas bien establecidas, como son la Teoría de Operadores de Fredholm, el Método de Lyapunov- Schmidt, la Teoría de Formas Normales y el Teorema de la Variedad Central. En esta tesis hemos buscado, como ya se dijo en el apartado sobre la metodología, utilizar siempre argumentos sencillos, dijéramos artesanales, adecuados a la problemática abordada. En nuestro contexto, esto permite la precisión necesaria para obtener los mejores resultados. En varios de los casos es posible identificar, *a posteriori*, algunas de las construcciones como casos particulares de esas técnicas. Sin embargo, consideramos que en términos generales no es suficiente con la aplicación directa de esas poderosas maquinarias para obtener los resultados de esta tesis, sino que, aún usándolas, se requeriría adicionar su uso con argumentos detallados como los aquí usados. En estas circunstancias es natural la elección de presentar simplemente los argumentos detallados.

Esto es especialmente claro en el caso del Teorema de la Variedad Central. Éste es un poderoso resultado que permite reducir un problema de bifurcaciones de transformaciones a un subespacio invariante mínimo en el cual tiene lugar la bifurcación, dejando a un lado un factor respecto al cual la dinámica es hiperbólica y por lo tanto estable. Pero este mismo hecho obliga a que,

[1] En [MM] se hace una formulación que evita las hipótesis sobre la curva y la de que el espacio sea complejo, pero estos dos puntos no están suficientemente aclarados en la demostración, quizá por razones de brevedad. Otros autores citan a Kato para el caso real sin mayor aclaración, una excepción es [I1], p.35.

en su aplicación al problema de las órbitas p-periódicas, haya que introducir una hipótesis muy fuerte, como es la de que no haya otros elementos del espectro en el círculo unitario, como hacen [Io] , [IJ]. La inclusión de hipótesis innecesarias no sólo restringe la posibilidad de aplicar estos resultados sino que, lo que es más importante, obscurece cuáles son los elementos esenciales de los que depende el resultado.

Relación con la primera versión de esta tesis.

A sugerencia de los sinodales se ha actualizado el resultado principal, incluyendo algunos avances obtenidos en colaboración con el profesor Marc Chaperon en los dos años transcurridos desde la primera versión de la tesis.

En ésta se obtenía para la variedad de puntos p-periódicos el orden de diferenciabilidad $\min([(k-3)/4],[(p-3)/2])$ y $\min([(k-3)/4],[(p-3)/2])$, en los Teoremas 4.1 y Teorema 6.1, respectivamente. (Por una errata, se enunciaron ambos teoremas con la misma conclusión, aunque se establecía claramente la diferencia en la demostración del segundo). Para llegar a ese resultado se utilizaba un Lema 4.2 en el que se estimaba el orden de diferenciabilidad de una función en coordenadas cartesianas respecto al mismo orden en coordenadas polares. En la versión actual se encuentra el orden de diferenciabilidad de la función sin pasar por estas coordenadas, las que sólo se utilizan para ver que la función es continua. Así, la problemática sobre la dife-renciabilidad y las coordenadas polares ya no aparece en la tesis, pero por tener interés en sí misma será objeto de otra publicación.

Para este cambio fueron importantes unos ejemplos de la Dra. Shirley Bromberg que mostraban una limitación esencial en el paso por las coordenadas polares. Posteriormente se vio que el Lema 4.2 podría mejorarse un poco (existen dos versiones de esta mejora, una debida a los doctores Shirley Bromberg y Santiago López de Medrano y otra al doctor Jorge Ize) pero que por esta vía sólo puede lograrse la cota $\min([(k-2)/3],p-3)$, mejor que la de la primera versión de la tesis pero inferior a la actual.

En la versión actual no hay diferencia entre la cota del Teorema 4.1 y la del Teorema 6.1. Para esto, se hace ver que en éste último se pueden embonar la pérdida de diferenciabilidad en la diagonalización de la derivada de la transformación en los puntos fijos y la pérdida debida a la factorización de la ecuación de los puntos periódicos, de manera que su efecto combinado sólo sea de un grado de diferenciabilidad.

Adicionalmente, en esta versión se han introducido referencias sugeridas por el doctor Jorge Ize y se han hecho correcciones menores sugeridas por los sinodales y por otras personas que han leído la tesis.

Capítulo 1

PRELIMINARES: VECTORES PROPIOS Y VALORES PROPIOS.

Notación y definiciones

Denotaremos por $gl\,(E)$ al espacio de endomorfismos continuos de un espacio de Banach E sobre un campo $\mathcal{K}$, que en este trabajo será el real ($\mathbb{R}$) o el complejo ($\mathbb{C}$).

$P(E)$ denotará al conjunto de rectas (subespacios vectoriales de dimensión 1) de E .

El espacio proyectivo $P(E)$ es equipado de una estructura de variedad analítica:

Construcción de la estructura analítica de P(E).

Dada $D_0 \in P(E)$ y $v_0 \in D_0 \backslash \{0\}$, recordemos el teorema de Hahn-Banach: existe $u \in E^*: = L(E,\mathcal{K})$ tal que

$$\|u\| = 1 \ y \ u(v_0) = \|v_0\| .$$

El núcleo S de u es entonces un *complemento topológico* de D_0.

La aplicación φ que a cada $(v,w) \in D_0 \times S$ le asocia $v+w$, esto es

$$\varphi : D_0 \times S \longrightarrow E$$

$$(v,w) \rightarrow \varphi\,(v,w) = v+w$$

es un isomorfismo, como puede verificarse directamente. Construiremos el inverso de φ.

Si

$$v' \in E \Rightarrow v' = v + w$$

tenemos que

$$u(v') = u(v)$$

Como $v \in D_0$, entonces $v = kv_0$, así que

$$\begin{aligned} u(v') &= ku(v_0) \\ &= k\,\|v_0\| \end{aligned}$$

Entonces

$$k = \frac{u(v')}{\|v_0\|}$$

$$\begin{aligned} w &= v' - v \\ &= v' - \frac{u\,(v')}{\|v_0\|}v_0 \end{aligned}$$

Así que

$$\varphi^{-1} : E \rightarrow D_0 \times S$$

queda dada por

$$v' \longmapsto (\frac{u(v')}{\|v_0\|}v_0, v' - \frac{u(v')}{\|v_0\|}v_0).$$

Toda recta $D \in P\,(E)$ que no está contenida en S intersecta al subespacio afín $v_0 + S$ en un único punto que escribiremos como $v_0 + \Phi_{S,v_0}(D)$.

Φ_{S,v_0} es una biyección del abierto

$$U_S := \{D \in P\,(E\,)/D \nsubseteq S\}$$

sobre S, esto es

$$\begin{gathered} \Phi_{S\,,v_0} : U_S \rightarrow S \\ D \longmapsto \Phi_{S\,,v_0}(D\,) = w\,. \end{gathered}$$

Estas biyecciones Φ_{S,v_0} son las cartas que forman un atlas de la estructura de variedad analítica, ya que es inmediato que el cambio de coordenadas, en la intersección de dos cartas, es analítico.∎

Teorema 1.1 . *Sea* $\alpha_0 \in \mathcal{K}$ *un valor propio simple de* $L_0 \in gL(E)$, *lo que significa que el subespacio propio asociado es una recta* D_0 *y que* α_0 *no pertenece al espectro del endomorfismo* $\overset{\circ}{L}_0$ *de* $\overset{\circ}{E} := E/D_0$ *inducido por* L_0. *Entonces existen un abierto* $\widetilde{\Omega} \ni L_0$ *de* $gL(E)$, *un abierto* $U \ni D_0$ *de* $P(E)$ *y una aplicación analítica*

$$\pi : \widetilde{\Omega} \to U$$

tales que, para toda $L \in \widetilde{\Omega}$, *la única recta propia* $D \in U$ *de* L *sea* $\pi(L)$. *Además, el valor propio* $\alpha(L)$ *correspondiente es también una función analítica de* $L \in \widetilde{\Omega}$.

Demostración: Seleccionemos una base $\{v_0\}$ de D_0 y un complemento topológico S de D_0. Esto nos permite la identificación

$$E \simeq \mathcal{K} \times S$$

mediante la aplicación

$$(t,w) \longmapsto tv_0 + w.$$

Con esta identificación todo elemento $L \in gL(E)$ se puede escribir como una "matriz"

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

con $a \in \mathcal{K}$ y $b \in S^*$, $c \in S$ y $d \in gL(S)$.

Dada D_0 podemos formar el espacio cociente $E/D_0 := \overset{\circ}{E}$ y podemos identificar

$$S \simeq \overset{\circ}{E}$$

usando la proyección canónica.

La matriz de L_0 tendrá la forma:

$$L_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & b_0 \\ 0 & \overset{\circ}{L}_0 \end{pmatrix}.$$

La invariancia bajo L de la recta $k(v_0+w), w \in S$ se escribe como:

$$\exists \alpha \in \mathcal{K} \text{ tal que } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene que

$$\alpha = a + bw$$

y

$$\begin{aligned} c + dw &= \alpha w \\ &= (a + bw\ )w\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos definir una aplicación

$$F(L,w) := c + dw\ -(a + bw\ )w$$

tal que la recta generada por $v_0{+}w$ es recta propia de L si, y sólo si,

$$F(L,w) = 0.$$

La aplicación

$$F : gL(E) \times S{\rightarrow}S \times \{0\}$$

así definida es polinomial y

$$F(L_0,0) = \ 0$$

además

$$\frac{\partial F}{\partial w}(L_0, 0\ ) = \mathring{L}_0 - \alpha_0 I$$

y como por hipótesis α_0 no está en el espectro de $\mathring{L}_0$ tenemos que $\frac{\partial F}{\partial w}(L_0,w)$ es un isomorfismo.

Existen $\widetilde{\Omega}$ vecindad de L_0 en $gL(E)$, V vecindad de 0 en S y

$$\varphi\text{:}\ \widetilde{\Omega} \longrightarrow V$$

analítica,tales que

$$F(L, \varphi\ (L\ )) = 0$$

para $L{\in}\widetilde{\Omega}$ y $\varphi\ (L\ )$ es el único punto $x \in V$ tal que

$$F(L, x) = 0$$

Ahora

$$\Phi_{S,v_0} : U_S \rightarrow S$$

es un difeomorfismo.Podemos entonces definir la función analítica

$$\pi : \widetilde{\Omega} \to U$$

como:

$$\pi = \Phi^{-1}_{S,v_0} \circ \varphi$$

donde

$$U = \Phi^{-1}_{S,v_0}(V)$$

Si $L \in \widetilde{\Omega}$ entonces $\pi(L)$ es la única recta propia de L en U. Además si aplicamos L a la recta $\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi(L) \end{pmatrix}$ y vemos su invariancia tenemos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi(L) \end{pmatrix} = \alpha(L) \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi(L) \end{pmatrix}$$

de donde

$$a + b\varphi(L) = \alpha(L)$$

por lo tanto el valor propio $\alpha(L)$ de L es una función analítica de $L \in \widetilde{\Omega}$.■

Observemos que $v_0 + \varphi(L)$ es un vector propio que depende analíticamente de L, con valor propio $\alpha(L)$.

Con las notaciones de la demostración del Teorema 1.1, definimos

$$P_1(L) : \mathcal{K} \times S \longrightarrow E$$

mediante

$$P_1(L)(t, w) := t(v_0 + \varphi(L)) + w$$

Claramente, $P_1(L)$ es invertible.

Definimos el endomorfismo

$$P_1(L)^* L := P_1(L)^{-1} \circ L \circ P_1(L)$$

de $\mathcal{K} \times S$. Entonces $P_1(L)^* L$ tiene la forma triangular

$$\begin{pmatrix} \alpha(L) & \beta(L) \\ 0 & \delta(L) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

donde $\beta(L) \in S^*$ y $\delta(L) \in gL(S)$. Con la identificación de $S \simeq \overset{\circ}{E}$ las aplicaciones

$$\beta : \tilde{\Omega} \longrightarrow \overset{\circ}{E}{}^*$$

$$\delta : \tilde{\Omega} \longrightarrow gL\,(\overset{\circ}{E})$$

son analíticas.

Ahora veamos que la triangulación (1.1) se puede mejorar para hacerla una diagonalización.

Teorema 1.2 *Bajo las hipótesis del teorema 1.1, existe un abierto* $\Omega_1 \ni L_0$ *de* $gL(E)$ *y una aplicación analítica* P *de* Ω_1 *en el espacio de los isomorfismos de* $\mathcal{K} \times \overset{\circ}{E}$ *en* E *tales que, para toda* $L \in \Omega_1$,

$$P(L)^* L = \begin{pmatrix} \alpha\,(L\,) & 0 \\ 0 & \delta\,(L\,) \end{pmatrix}.$$

El subespacio $P(L)(\{0\} \times \overset{\circ}{E})$ *es el único complemento de* $\pi(L)$ *que es estable bajo* L. *Finalmente, si* E *es ya de la forma* $\mathcal{K} \times \overset{\circ}{E}$ *y* L_0 *es ya diagonal;*

$$L_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \delta_0 \end{pmatrix}$$

entonces P *puede ser seleccionada de manera que*

$$P(L_0) = Id.$$

Demostración: Tomando en cuenta (1.1), buscamos construir, para L en una vecindad de L_0, un automorfismo $P_2(L)$ de $\mathcal{K} \times \overset{\circ}{E}$ tal que

$$P_2(L)^* \begin{pmatrix} \alpha(L) & \beta(L) \\ 0 & \delta(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(L) & 0 \\ 0 & \delta(L) \end{pmatrix}.$$

Lo buscamos de la forma

$$P_2(L) = \begin{pmatrix} 1 & -u_1 \\ 0 & Id_{\overset{\circ}{E}} \end{pmatrix},$$

con $u_1 \in \overset{\circ}{E}^*$. Su inversa es,

$$P_2(L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & Id_{\overset{\circ}{E}} \end{pmatrix}.$$

Así que

$$P_2(L)^* \begin{pmatrix} \alpha\ (L\ ) & \beta\ (L\ ) \\ 0 & \delta\ (L\ ) \end{pmatrix} = P_2(L)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha\ (L\ ) & \beta\ (L\ ) \\ 0 & \delta\ (L\ ) \end{pmatrix} P_2(L)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & Id_{\overset{\circ}{E}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\ (L\ ) & \beta\ (L\ ) \\ 0 & \delta\ (L\ ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u_1 \\ 0 & Id_{\overset{\circ}{E}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha\ (L\ ) & -u_1\alpha\ (L\ ){+}\beta\ (L\ ){+}u_1\delta\ (L\ ) \\ 0 & \delta\ (L\ ) \end{pmatrix}$$

por lo tanto la condición para la diagonalización (2) es:

$$u_1(\delta\ (L\ ){-}\alpha\ (L\ )){+}\beta\ (L\ ) = 0.$$

Como $\delta(L_0){=}\overset{\circ}{L}_0$ y $\alpha(L_0) = \alpha_0$, el abierto Ω_1 de $\tilde{\Omega}$ formado por los L tales que $\delta(L)-\ \alpha(L)$ es invertible contiene a L_0 y, para $L{\in}\Omega_1$, la única solución de la ecuación es

$$u(L) = -\beta\ (L\ ){\circ}(\delta\ (L\ ){-}\alpha\ (L\ ))^{-1}$$

que es una función analítica de L. La unicidad del complemento obtenido resulta de la de $u(L)$. Finalmente, si partimos de un L_0 diagonal, la construcción produce

$$P_2(L_0) = Id. \blacksquare$$

Finalmente demostraremos una Proposición que será utilizada en el Capítulo 4:

Proposición 1.3 *Sea A_0 un endomorfismo de un espacio vectorial real F de dimensión 2 cuyos valores propios α_0, $\overline{\alpha_0}$ son imaginarios. Existe, entonces, un abierto $W \ni A_0$ de $gl(F)$ una aplicación analítica*

$$\alpha : W \longrightarrow \mathbb{C}$$

que cumple

$$\alpha(A_0) = \alpha_0$$

y una aplicación analítica Q *de* W *en el espacio de isomorfismos de* $\mathbb{C}$ *en* $\mathbb{R}^2$ *tales que, para todo* $A \in W$,

$$Q(A)^*A$$

sea la transformación $\mathbb{C}$*-lineal*

$$z \longmapsto \alpha(A)z.$$

Demostración: Conjugando con un isomorfismo

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow F$$

podemos suponer que

$$F = \mathbb{R}^2.$$

Todo endomorfismo

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

define

$$A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

lineal complejo,con la misma matriz y por lo tanto los mismos valores propios.

Como α_0 es valor propio simple, podemos aplicar el Teorema 1.1, y obtener una vecindad W y una función

$$\alpha : W \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que

$$\alpha(A)$$

es valor propio de A. Por la observación del final de la demostración del Teorema 1.1 obtenemos una función

$$u : W \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

tal que

$$u(A)$$

es un vector propio asociado.

Definimos

$$\begin{aligned} \xi(A) &= \operatorname{Re} u(A) \\ \eta(A) &= \operatorname{Im} u(A), \end{aligned}$$

entonces la aplicación

$$Q(A) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definida por

$$\begin{aligned} Q(A)(1) &= \xi(A), \\ Q(A)(i) &= \eta(A). \end{aligned}$$

cumple que

$$Q(A)^* A$$

es la multiplicación por $\alpha(A)$, como se verifica fácilmente.■

Capítulo 2

SOBRE LA VARIEDAD DE PUNTOS PERIÓDICOS DE PERIODO 2.

Hipótesis y Notación.

Sean Λ y E dos espacios de Banach sobre $\mathcal{K}$. Se da una aplicación

$$h\colon (\lambda,x) \longmapsto h_\lambda(x)$$

de clase C^k en una vecindad del punto (λ_0,x_0) en $\Lambda\times E$, con valores en E, esto es, $h{:}\Lambda\times E \longmapsto E$, y suponemos que $h_{\lambda_0}(x_0) = x_0$.

Consideremos en primer lugar la función

$$F(\lambda,x) := h_\lambda(x) - x;$$

como

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda_0,x_0) = D\, h_{\lambda_0}(x_0) - Id_E,$$

el teorema de las funciones implícitas implica :

Teorema 2.1 *Bajo las hipótesis anteriores , si x_0 es un punto fijo no degenerado de h_{λ_0} , es decir , que 1 no pertenece al espectro de $Dh_{\lambda_0}\, x_0)$, existen un abierto $\Omega\ni\lambda_0$ de Λ , un abierto $U\ni x_0$ de E y una aplicación $\varphi{:}\Omega\longrightarrow U$ de clase C^k tales que , para todo $\lambda\in\Omega$, el único punto fijo de h_λ contenido en U es $\varphi(\lambda)$.*

Demostración:
Como x_0 es un punto fijo no degenerado de h_{λ_0} se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda_0,x_0)$$

es un isomorfismo, así que de acuerdo al teorema de las funciones implícitas existe una función $\varphi:\Omega\longrightarrow U$ de clase C^k tal que

$$F(\lambda,\varphi(\lambda)) = h_\lambda(\varphi(\lambda))-\varphi(\lambda) = 0,$$

y además $\varphi(\lambda)$ es el único punto fijo de h_λ contenido en U .■

Bajo las hipótesis anteriores, decimos que h es una *deformación* de h_{λ_0} en una vecindad de x_0; introduciendo el *desdoblamiento* asociado

$$\tilde{h} : (\lambda,x) \longrightarrow (\lambda,h_\lambda(x))$$

podemos expresar el teorema anterior en una forma más elegante: en una vecindad de (λ_0, x_0), los puntos fijos de $\tilde{h}$ forman la gráfica de una aplicación φ de clase C^k, esto es

$$\tilde{h}(\lambda,\varphi(\lambda)) = (\lambda,\varphi(\lambda)).$$

Ahora estudiaremos los *puntos periódicos de periodo 2* de $\tilde{h}$, es decir los puntos fijos de

$$\tilde{h}^2 = \tilde{h} \circ \tilde{h}.$$

Para esto, veamos en primer lugar el caso lineal.

Proposición 2.2 *(i) Los puntos periódicos de periodo 2 de un endomorfismo* $L \in gL(E)$ *forman un subespacio vectorial cerrado* F *invariante bajo* L, *suma directa de los subespacios propios de* L *asociados a los valores propios 1 y -1.*

(ii) Para que $L^2 - Id_E$ *sea un automorfismo, es necesario y suficiente que el espectro de* L *no contenga ni 1, ni -1.*

Demostración:

(i) Como F es el núcleo de $L^2{-}Id_E{\in}gL(E)$, F es un subespacio cerrado. Además F es invariante bajo L, ya que si $x{\in}F$, entonces $L^2\ x = x$ y $L(L^2\ x) = L\ x$ así que $L^2(L\ x) = L\ x$, esto implica que $L(F) \subset F$ de aquí la invariancia.

Denotaremos por $u{\in}gL(F)$ la restricción de L. Toda $x{\in}F$ se escribe como

$$x = \frac{x{+}u(x)}{2} + \frac{x{-}u(x)}{2},$$

y ya que

$$\begin{aligned} u(x{+}u(x)) &= u(x){+}u^2(x) \\ &= u(x){+}L^2x \\ &= x{+}u(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u(x{-}u(x)) &= u(x){-}u^2(x) \\ &= u(x){-}L^2x \\ &= -1(x{-}u(x)) \end{aligned}$$

se tiene que F es la suma de los subespacios propios de u asociados a los valores propios 1, -1; como esta suma es directa y un vector propio de L asociado al valor propio ± 1 pertenece a F, (i) está demostrado.

Nota: Si v es vector propio de L asociado al valor propio 1 entonces $Lv = v$ así que $L^2v = Lv$ y tenemos que $L^2v = v$ por lo tanto $v{\in}F$.

Si v está asociado al valor propio -1, entonces $Lv = -v$ así que $L^2v = $ $= -Lv = v$ y otra vez $v{\in}F$.

(ii) Como

$$\begin{aligned} L^2{-}Id_E &= (L{-}Id_E) \circ (L + Id_E) \\ &= (L + Id_E) \circ (L - Id_E) \end{aligned}$$

es claro que si L- Id_E ó L+ Id_E no es inyectivo (respectivamente suprayectivo) entonces $L^2 - Id_E$ tampoco lo es.■

Hipótesis del teorema sobre los puntos periódicos de periodo 2.

Suponemos:

a que k es al menos igual a 2;

b que x_0 es un punto fijo no degenerado de h_{λ_0} . Con las notaciones del teorema 2.1 el cambio de coordenadas C^k $(\lambda,\ x) \longrightarrow (\lambda,\ x-\varphi(\lambda))$nos permite suponer que

$$x_0 = 0 \text{ y } h_\lambda(0) \equiv 0$$

c que -1 es *valor propio simple* de $D\ h_{\lambda_0}(\ x_0)$; con las notaciones del teorema 1.2, aplicado a $L_0 = D\ h_{\lambda_0}(\ x_0)$ y $\alpha_0 = -1$ el cambio lineal de coordenadas $P(D\ h_{\lambda_0}(\ x_0))$ nos permite suponer que

$$E = \mathcal{K} \times \mathring{E} \ y \ Dh_{\lambda_0}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

donde, según la proposición 2.2, el espectro de d_0^2 no contiene a 1; en esta identificación, los puntos de E se denotarán como

$$(y,w) \in \mathcal{K} \times \mathring{E};$$

llamaremos $\alpha(\lambda) := \alpha(D\ h_\lambda(0))$,el valor propio de $D\ h_\lambda(0)$ obtenido siguiendo al valor propio -1 por el Teorema 1.1;

d que $D\ \alpha(\lambda_0)$ no es cero; podemos seleccionar una identificación de Λ con un producto $\mathcal{K} \times \mathring{\Lambda}$ (donde $\mathring{\Lambda}$ es un espacio de Banach) y denotando en esta identificación los puntos de Λ por (μ,ν), se tiene que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\lambda_0) \neq 0.$$

Teorema 2.3 *Bajo esas hipótesis y con esas identificaciones, los puntos periódicos de periodo 2 de* $\tilde{h}$ *forman, en una vecindad de* $(\lambda_0,\ x_0) = (\lambda_0, 0)$, *la unión de dos subvariedades: la subvariedad* $\Lambda \times \{0\}$ *formada por los puntos fijos de* $\tilde{h}$, *y una subvariedad de clase* C^{k-1} *modelada sobre* Λ , *que se escribe como la gráfica*

$$(\mu, w) = \varphi(\nu,y)$$

de una función implícita φ *de clase* C^{k-1} . *Los puntos comunes a estas dos subvariedades son los puntos* $(\lambda, 0)$ *tales que -1 sea valor propio de* $Dh_\lambda(0)$.

Demostración: Escribiendo las componentes de $h^2_\lambda(x)$ en la descomposición $E = \mathcal{K} \times \overset{\circ}{E}$ como:

$$h^2_\lambda(y, w) = (k_2(\lambda, y, w), l_2(\lambda, y, w))$$

tenemos que resolver el sistema de clase C^k

$$k_2(\lambda, y, w) = y$$

$$l_2(\lambda, y, w) = w.$$

Ya que

$$\frac{\partial l_2}{\partial w}(\lambda_0, 0, 0) = d^2_0$$

no tiene a 1 en su espectro, la segunda ecuación define la función implícita

$$w = W(\lambda, y)$$

que satisface

$$W(\lambda, 0) = 0\,;\ \frac{\partial W}{\partial y}(\lambda_0, 0) = 0 \tag{2.2}$$

La primera ecuación se satisface, por la unicidad de la función implícita, ya que $l_2(\lambda, 0, 0) = 0$, y la segunda debido a que

$$\frac{\partial W}{\partial y}(\lambda_0, 0) = (I - d^2_0)^{-1}\frac{\partial l_2}{\partial y}(\lambda_0, 0, 0) = 0$$

puesto que la última derivada es 0 por la forma diagonal (2.1) de $Dh_{\lambda_0}(0)$.

Sustituyendo $W(\lambda, y)$ en la primera ecuación tenemos:

$$k_2(\lambda, y, W(\lambda, y)) = y.$$

Esta ecuación tiene la solución trivial

$$y = 0$$

la cual da los puntos fijos, así que podemos factorizar y:

$$k_2(\lambda, y, W(\lambda, y)) = yg(\lambda, y)$$

y tenemos que resolver

$$g(\lambda, y) = 1$$

donde g es de clase C^{k-1} y satisface:

$$g(\lambda_0, 0) = 1\,; \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda_0, 0) = \frac{\partial^2 k_2}{\partial \lambda \partial y}(\lambda_0, 0, 0) = D\alpha^2(\lambda_0). \tag{2.3}$$

Para demostrar las primeras dos igualdades en (2.3) escribimos

$$\hat{k}_2(\lambda, y) := k_2(\lambda, y, W(\lambda, y)) = yg(\lambda, y).$$

Entonces

$$g(\lambda, 0) = \frac{\partial \hat{k}_2}{\partial y}(\lambda, 0)$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda_0, 0) = \frac{\partial^2 \hat{k}_2}{\partial \lambda \partial y}(\lambda_0, 0).$$

Por otro lado

$$\frac{\partial \hat{k}_2}{\partial y}(\lambda, 0) = \frac{\partial k_2}{\partial y}(\lambda, 0, 0) + \frac{\partial k_2}{\partial w}(\lambda, 0, 0)\frac{\partial W}{\partial y}(\lambda, 0).$$

De esta igualdad la primera ecuación en (2.3) se cumple ya que en $\lambda = \lambda_0$ el último sumando es 0 por (2.2) y el primer sumando es 1 debido a la forma diagonal (2.1) de $Dh_{\lambda_0}(0)$.

Además:

$$\frac{\partial^2 \hat{k}_2}{\partial \lambda \partial y}(\lambda_0, 0)$$

$$= \frac{\partial^2 k_2}{\partial \lambda \partial y}(\lambda_0, 0, 0) + \frac{\partial^2 k_2}{\partial \lambda \partial w}(\lambda_0, 0, 0)\frac{\partial W}{\partial y}(\lambda_0, 0) + \frac{\partial k_2}{\partial w}(\lambda_0, 0, 0)\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial y}(\lambda_0, 0)$$

donde los últimos dos sumandos son 0 por (2.2) y la forma diagonal (2.1) de $Dh_{\lambda_0}(0)$ y la segunda igualdad en (2.3) se cumple.

La última igualdad en (2.3) se demuestra como sigue:

Si escribimos

$$Dh^2_\lambda(0) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$$

y como $(r(\lambda), s(\lambda))$ al vector propio correspondiente a $\alpha(\lambda)$ que extiende a $(1,0)$, tenemos

$$a(\lambda)r(\lambda) + b(\lambda)s(\lambda) = \alpha(\lambda)^2 r(\lambda).$$

Tomando la derivada con respecto a λ en $\lambda = \lambda_0$, obtenemos

$$\begin{aligned} Da(\lambda_0)r(\lambda_0) + a(\lambda_0)Dr(\lambda_0) + Db(\lambda_0)s(\lambda_0) + b(\lambda_0)Ds(\lambda_0) \\ = D\alpha^2(\lambda_0)r(\lambda_0) + \alpha^2(\lambda_0)Dr(\lambda_0) \end{aligned}$$

Ya que

$$a(\lambda_0) = \alpha(\lambda_0)^2 = r(\lambda_0) = 1$$

y

$$b(\lambda_0) = 0$$

por (2.1) y

$$s(\lambda_0) = 0$$

tenemos que

$$Da(\lambda_0) = D\alpha^2(\lambda_0)$$

lo que queríamos demostrar.

Ahora, por la hipótesis (d) podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita a la ecuación

$$g(\lambda, y) = 1,$$

ya que por (2.3)

$$\frac{\partial g}{\partial \mu}(\lambda_0, 0) = \frac{\partial \alpha^2}{\partial \mu}(\lambda_0) = 2\alpha(0)\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\lambda_0) = -2\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\lambda_0) \neq 0$$

y resolver

$$\mu = M(\nu, y)$$

de clase $\mathbf{C}^{k-1}$. Entonces la variedad de puntos periódicos de periodo 2 está dada como la gráfica de la función

$$(\mu, w) = (M(\nu, y), W(M(\nu, y), \nu, y))$$

y el Teorema está demostrado.■

Notas:

1.- En principio podría pensarse que debería perderse dos grados de diferenciabilidad: uno al diagonalizar $Dh_\lambda(0)$ y otro al factorizar y en la función $\hat{k}_2(\lambda, y)$. El argumento anterior nos muestra que en este caso es suficiente con diagonalizar $Dh_{\lambda_0}(0)$ (lo cual no hace perder diferenciabilidad). Para el Teorema 6.1 esto no será suficiente y se utilizará un argumento diferente para ver que sólo se pierde un grado de diferenciabilidad. El argumento del Capítulo 6 también podría utilizarse en el Teorema 2.3.

2.- Bajo cambios de variables y reparametrizaciones se puede simplificar la forma de $h_\lambda(x)$ para que el coeficiente de z sea exactamente $\mu - 1$ y para que la función φ tenga una forma simétrica (es decir, que sea par en la variable y).

Capítulo 3

SOBRE LA VARIEDAD DE PUNTOS PERIÓDICOS DE PERIODO p SOBRE $\mathbb{C}$.

NOTACIÓN.

Con las notaciones de la sección anterior consideremos h_λ transformación holomorfa en espacios de Banach complejos. Dado un entero $p \geq 2$, se estudiarán los puntos periódicos de periodo p de $\widetilde{h}$, es decir, los puntos fijos de

$$\widetilde{h}^{p} := \widetilde{h} \circ \cdots \circ \widetilde{h}$$

(p-veces). Veamos en primer lugar el caso lineal.

Proposición 3.1 *(i) Los puntos periódicos de periodo p de un endomorfismo $L \in gL(E)$ forman un subespacio vectorial cerrado F invariante por L, suma directa de subespacios propios de L asociados a los valores propios raíces p-ésimas de la unidad.*

(ii) Para que $L^p - 1$ sea un automorfismo, es necesario y suficiente que el espectro de L no contenga ninguna raíz p-ésima de la unidad.

Demostración:

(i) Si $v \in F$ entonces $L^p(v) = v$, así que F es el núcleo de $L^p - Id \in gL(E)$, por lo tanto F es cerrado.

Ahora, si $v \in F$ entonces $L^p(v) = v$, aplicando L obtenemos

$$L(L^p(v)) = L(v)$$

rearreglando

$$L^p(L(v)) = L(v)$$

así que

$$L(v) \in F$$

y tenemos que

$$L(F) \subset F.$$

Por lo tanto F es invariante bajo L. Denotemos por $u \in gL(F)$ la restricción de L a F y por α una raíz primitiva $p-$ésima de la unidad por ejemplo

$$\alpha = \exp(2\pi i/p).$$

Entonces toda $v \in F$ se escribe como:

$$v = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} \alpha^{-kl} u^k(v)}{p}$$

ya que

$$\sum_{l=o}^{p-1} \alpha^{-kl} = \begin{cases} p & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leq k \leq p-1 \end{cases}.$$

Como

$$\begin{aligned} u\left(\frac{\sum_{k=0}^{p-1} \alpha^{-kl} u^k(v)}{p}\right) &= \frac{\sum_{k=0}^{p-1} \alpha^{-kl} u^{k+1}(v)}{p} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{p-1} \alpha^{-(k-1)l} u^k(v)}{p} \\ &= \alpha^l \frac{\sum_{k=0}^{p-1} \alpha^{-kl} u^k(v)}{p} \end{aligned}$$

se concluye el resultado como en el caso $p = 2$.

(ii) Se sigue el mismo criterio que para $p = 2$ observando que $L^p - 1$ es el producto conmutativo de los $L-\ \alpha$ con α raíz $p-$ésima de la unidad.∎

HIPÓTESIS:
Suponemos:

a que x_0 es un punto fijo no degenerado de h_{λ_0}; con las notaciones del teorema 2.1, el cambio holomorfo de coordenadas

$$(\lambda, x) \longmapsto (\lambda, x - \varphi(\lambda))$$

nos permite suponer que

$$x_0 = 0 \ \text{ y } h_\lambda(0) \equiv 0;$$

b que una raíz $p-$ésima primitiva α_0 de la unidad es un valor propio simple de $Dh_{\lambda_0}(0)$, y que el espectro de ésta no contenga otra raíz $p-$ésima de la unidad; con las notaciones del teorema 1.2, aplicado a $L_0 = Dh_{\lambda_0}(0)$, el cambio lineal de coordenadas $P(Dh_{\lambda_0}(0))$ nos permite suponer que

$$E = \mathbb{C} \times \mathring{E} \ y \ Dh_{\lambda_0}(0) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \delta_0 \end{pmatrix}$$

donde ponemos $\delta_0 = \delta(Dh_{\lambda_0}(0))$ (el espectro de δ_0 no contiene entonces raíces p-ésimas de la unidad); en estas identificaciones, los puntos de E se denotarán por

$$(y, z) \in \mathbb{C} \times \mathring{E};$$

ponemos

$$\alpha(\lambda) := \ \alpha(Dh_\lambda(0))$$

c que $D\ \alpha_0(\lambda_0)$ no se anula; podemos seleccionar una identificación de Λ con un producto $\mathbb{C} \times \mathring{\Lambda}$ (donde $\mathring{\Lambda}$ es un espacio de Banach), en la cual los puntos de Λ se denotarán por

$$(\mu, \nu) \in \mathbb{C} \times \mathring{\Lambda}.$$

tal que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\lambda_0) \neq 0;$$

Teorema 3.2 *Bajo estas hipótesis y con esas identificaciones, los puntos periódicos de periodo p de* $\tilde{h}$ *forman en una vecindad de* $(\lambda_0, x_0) = (\lambda_0, 0)$ *la unión de dos subvariedades holomorfas; la subvariedad* $\Lambda \times \{0\}$ *formada de los puntos fijos de* $\tilde{h}$*, y una subvariedad modelada sobre* Λ*, que se escribe como la gráfica*

$$(\mu, y) = \varphi(\nu, z)$$

de una funcion implícita holomorfa φ*. Los puntos comunes a esas dos subvariedades son los puntos* $(\lambda, 0)$ *tales que* α_0 *sea valor propio de* $Dh_\lambda(0)$.

Demostración: Es exactamente la del teorema 2.3, reemplazando $\tilde{h}^2$ por $\tilde{h}^p$. Obsérvese que en este caso es posible diagonalizar de una vez $D\,h_\lambda(0)$ para toda λ sin perder diferenciabilidad, por lo cual puede simplificarse mucho la demostración.■

Capítulo 4

SOBRE LA VARIEDAD DE PUNTOS PERIÓDICOS DE PERIODO p SOBRE $\mathbb{R}$: CASO $E = \mathbb{C}$.

Para comprender las dificultades que aparecen en la búsqueda de un resultado como el anterior en el caso real, comenzaremos dando unos ejemplos:

Ejemplo 1: Sean $E = \Lambda = \mathbb{C}$ considerado éste como espacio vectorial real. Sea ρ una raíz cúbica primitiva de la unidad. Definimos $h{:}\Lambda\times\mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ como

$$h(\lambda,z) = (\rho+\lambda)\ z-\overline{z}^2$$

la cual es de clase C^∞ como función real. ρ es valor propio simple de $Dh_0(0)$, siendo ρ y $\overline{\rho}$ sus únicos valores propios. Los puntos fijos de $\tilde{h}$ son de la forma $(\lambda,0)$. Sea

$$\varphi(z) = \overline{z}^2/z.$$

Afirmamos que los puntos periódicos de periodo 3 de h_λ son de la forma $(\varphi(z),z)$. En efecto, escribiendo

$$h(\lambda,z) = (\rho+\lambda-\varphi(z))\ z$$

vemos que, si $\lambda = \varphi(z)$ entonces $h_\lambda(z) = \rho\ z$. Pero como $\varphi(\rho\ z) = \varphi(z)$, también tenemos $\lambda = \varphi(\rho\ z)$, por lo tanto

$$h_\lambda^2(z) = h_\lambda(\rho\ z) = \rho^2\ z$$

y, por la misma razón

$$h_\lambda^3(z) = \rho^3\ z = z.$$

Luego los puntos periódicos de $\tilde{h}$ cerca del origen forman la gráfica de la función $\varphi(z)$, la cual, siendo homogénea de grado 1, pero no lineal, no puede ser derivable en $z = 0$. Es decir, la variedad de los puntos periódicos de esta transformación de clase C^∞, que satisface todas las condiciones análogas a las de los teoremas anteriores, ¡no es ni siquiera de clase C^1!

Ejemplo 2: Sean nuevamente $E = \Lambda = \mathbb{C}$ **y** ρ raíz p-ésima primitiva de la unidad. Definimos $h{:}\Lambda\times\mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ como

$$h(\lambda,z) = (\rho+\lambda)\ z-\overline{z}^{p-1}$$

la cual es de clase C^∞ como función real. ρ es valor propio simple de $Dh_0(0)$, siendo ρ y $\overline{\rho}$ sus únicos valores propios. Los puntos fijos de h_λ son de la forma $(\lambda,0)$. Sea

$$\varphi(z) = \overline{z}^{p-1}/z.$$

Como en el ejemplo anterior, es fácil ver que los puntos periódicos de periodo p de h_λ son de la forma $(\varphi(z),z)$ y la función $\varphi(z)$ es homogénea de grado $p-2$ pero no polinomial, por lo cual no tiene derivada de orden $p-2$ en el origen. La variedad de los puntos periódicos de esta transformación de clase $\mathbf{C}^\infty$ es de clase $\mathbf{C}^{p-3}$, pero no de clase $\mathbf{C}^{p-2}$.

Si intentáramos aplicar las ideas de la demostración de los teoremas anteriores, tendríamos que escribir

$$h_\lambda^p(z) = g(\lambda,z)z$$

donde ahora

$$g(\lambda, z) \in gL(\mathbb{R}^2).$$

Pero ahora la ecuación de los puntos periódicos no se puede escribir de la forma

$$g(\lambda, z) = 1,$$

a menos que $g(\lambda,z)$ sea una matriz conforme. Dicho de otro modo, podemos expresar

$$h_\lambda^p(z) = a_\lambda(z)\, z + b_\lambda(z)\overline{z},$$

con $a_\lambda(z)$, $b_\lambda(z) \in \mathbb{C}$; pero sólo en el caso de que podamos obtener una expresión así con $b_\lambda(z) = 0$ podríamos escribir la ecuación de los puntos fijos de la forma

$$a_\lambda(z) = 1.$$

Un problema adicional en el caso de espacios de Banach arbitrarios es que necesitamos reducir el problema a uno de dimensión 2, como en los teoremas anteriores lo redujimos a la dimensión 1. Para esto los resultados sobre vectores y valores propios que demostramos en el primer capítulo no serán suficientes, y necesitaremos demostrar un nuevo resultado sobre subespacios invariantes para el caso lineal.

Para poder abordar estos problemas uno a uno, empezaremos estudiando la situación más simple, en la cual los espacios de Banach reales E y Λ son de dimensión 2 (como en los ejemplos anteriores), luego el caso donde Λ es arbitrario y es E de dimensión 2 y finalmente, en el Capítulo 6 el caso general.

Caso $\mathbb{CC}$: $E = \Lambda = \mathbb{C}$ (considerado como espacio vectorial real).

Se da una aplicación

$$h_\lambda(z)$$

de clase C^k con $k \geq 2$, en una vecindad del punto $(\lambda_0,0)$ en $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, con valores en $\mathbb{C}$, y suponemos que

$$h_{\lambda_0}(0) = 0$$

.

Como anteriormente ponemos

$$\tilde{h}(\lambda,z) := (\lambda,h_\lambda(z)).$$

Además suponemos:

a que 0 es un punto fijo no degenerado de h_{λ_0} ; con las notaciones del Teorema 2.1 un cambio de coordenadas C^k nos permite suponer que

$$h_\lambda(0) = 0 ;$$

b que el complejificado de $Dh_{\lambda_0}(0)$ tiene como valores propios $\rho, \overline{\rho}$, raíces p-ésimas primitivas de la unidad con $p > 2$. Por los resultados del capítulo 1 podemos suponer que el complejificado de $Dh_\lambda(0)$ tiene valor propio $\alpha(\lambda)$ con $\alpha(\lambda_0) = \rho$ con $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de clase C^{k-1};

c que $D\alpha(\lambda_0)$ es un isomorfismo.

Teorema 4.1 *Bajo esas hipótesis y con esas identificaciones, los puntos periódicos de periodo* p *de* $\widetilde{h}$ *forman, en una vecindad de* $(\lambda_0, 0)$ *la unión de dos subvariedades: la subvariedad* $\mathbb{C} \times \{0\}$ *formada por los puntos fijos de* $\widetilde{h}$, *y una subvariedad de clase* C^s *modelada sobre* $\mathbb{C}$, *que se escribe como la gráfica*

$$\lambda = \varphi(z)$$

de una función implícita φ *de clase* C^s, *donde*

$$s = \text{mín}([(k-2)/2], p-3).$$

Demostración: La idea es la siguiente: Si se tuviera

$$h_\lambda(z) = u_\lambda(z) z$$

con $u_\lambda(z)$ de clase C^{k-1}, su p-ésima iterada sería de la misma forma:

$$h_\lambda^p(z) = a_\lambda(z) z$$

con $a_\lambda(z)$ de clase C^{k-1} y la variedad de puntos periódicos tendría como ecuación

$$a_\lambda(z) = 1$$

por lo tanto, estaría dada por una función implícita de clase C^{k-1}. Los ejemplos anteriores nos demuestran que esto no tiene por qué suceder en general: el término $\overline{z}^{p-1}$ hace que esto no sea posible y que la variedad de puntos periódicos sea a lo más de clase C^{p-3}. Es decir, que en la ecuación

$$h_\lambda^p(z) - z = 0$$

cuando tratamos de factorizar z no producimos una ecuación de clase C^{k-1}, sino una ecuación con un grado de diferenciabilidad mucho menor. Lo que sí podemos hacer es eliminar, mediante una conjugación, los términos $\overline{z}^j$ con

$$j \leq \text{mín}(p-3, k),$$

con lo cual el desarrollo de Taylor, hasta ese orden, es divisible por z.

Consideremos el desarrollo de Taylor de h_λ hasta el orden $s+2$:

$$h_\lambda(z) = T_1 + T_2 + \cdots + T_{s+2}$$

donde T_j es un polinomio homogéneo de orden j en $z, \overline{z}$ que tiene como coeficientes funciones de clase C^{k-j} de λ para $j \leq s+2$ y funciones de clase C^{k-s-2} de λ, $z, \overline{z}$ para $j = s+2$. El coeficiente $a_{ij}(\lambda)$ del término $z^i \overline{z}^j$ es, para $i + j < s + 2$, un multiplo constante de

$$\frac{\partial^{i+j} h_\lambda}{\partial z^i \partial \overline{z}^j}(0,0)$$

y para

$$i + j = s + 2$$

es una integral que contiene

$$\frac{\partial^{i+j} h_\lambda}{\partial z^i \partial \overline{z}^j}(z, \overline{z}).$$

En todos los casos, la parcial de orden $i+j$ con respecto a z y $\overline{z}$ es de clase C^{k-i-j}.

Paso 1.- Por la Proposición 1.3 podemos hacer un cambio de coordenadas de clase C^{k-1} (y lineal en z) tal que

$$Dh_\lambda(0) = \alpha(\lambda)$$

y por lo tanto que en T_1 el coeficiente de z es $\alpha(\lambda)$ y el coeficiente de $\overline{z}$ es 0. Este cambio no afecta el orden de diferenciabilidad de los subsecuentes coeficientes del desarrollo de Taylor.

Paso 2.- Ya que

$$s \leq p - 3,$$

mediante el cambio de coordenadas

$$z = z_1 + c(\lambda)\overline{z_1}^j,$$

de clase C^{k-j}, cuyo inverso es de la forma

$$z_1 = z - c(\lambda)\overline{z}^j + o(z^j)$$

podemos eliminar los coeficientes de $\overline{z}^j$ en T_j para

$$j = 2, \cdots, s+1.$$

En efecto, al conjugar mediante esta transformación, no cambian los términos de orden menor que j y el término en $\overline{z}^j$, $a_{0j}(\lambda)\ \overline{z}^j$ se transforma en

$$(a_{0j}(\lambda) - c(\lambda)((\overline{\alpha(\lambda)})^j - \alpha(\lambda)))\overline{z_1}^j.$$

Como $j < p-1$ el factor

$$\overline{\alpha(\lambda)}^j - \alpha(\lambda)$$

no se anula para λ cerca de λ_0 y se puede encontrar el valor de $c(\lambda)$ para que se anule el coeficiente de $\overline{z_1}^j$. La función $c(\lambda)$ tiene el mismo orden de diferenciabilidad que $a_{0j}(\lambda)$, es decir, es de clase C^{k-j}. Cada uno de estos cambios no afecta el orden de diferenciabilidad de los subsecuentes coeficientes del desarrollo de Taylor.

Agrupando todos los términos que contienen el factor z podemos escribir

$$\begin{aligned} h_\lambda(z) &= z(U(\lambda, z, \overline{z}) + a_{0s+2}(\lambda, z, \overline{z})\frac{\overline{z}^{s+2}}{z}) \\ &= zg(\lambda, z, \overline{z}) \end{aligned}$$

donde U y a_{0s+2} son funciones de clase C^{k-s-2} y entonces g es de clase C^s, ya que $\overline{z}^{s+2}/z$ es de clase C^s por ser homogénea de grado $s+1$ (¡pero, recordemos, no es de clase C^{s+1} por no ser polinomial!) y tenemos que

$$s \leq k - s - 2$$

ya que

$$s \leq \frac{k-2}{2}.$$

Se sigue por inducción que $h_\lambda^j(z)$ se puede escribir en la misma forma y, en particular , que

$$h_\lambda^p(z) = zg_p(\lambda, z, \overline{z})$$

donde g_p es una función de clase C^s.

Paso 3.- Aplicando el teorema de la función implícita a

$$g_p(\lambda, z, \overline{z}) = 1$$

y, observando que

$$Dh_\lambda^p(0) = \alpha(\lambda)^p$$

y que

$$g_p(\lambda,0,0) = \alpha(\lambda)^p,$$

por la hipótesis (c), tenemos que

$$\frac{\partial g_p}{\partial \lambda}(\lambda_0, 0, 0) = p\rho^{p-1} D\alpha(0)$$

es un isomorfismo y hemos demostrado el teorema.■

Caso $\Lambda\mathbb{C}$: Λ es espacio de Banach real arbitrario, $E = \mathbb{C}$ (considerado como espacio vectorial real).

Hipótesis y Notación.

Se da una aplicación

$$h\colon (\lambda,z) \longmapsto h_\lambda(z)$$

de clase C^k con $k \geq 2$, en una vecindad del punto (λ_0,z_0) en $\Lambda\times\mathbb{C}$, con valores en $\mathbb{C}$, esto es ,

$$h\colon\Lambda\times\mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C},$$

y supongamos que

$$h_{\lambda_0}(z_0) = z_0.$$

Como anteriormente ponemos

$$\tilde{h}(\lambda,z) \longrightarrow (\lambda,h_\lambda(z)).$$

Además suponemos:

a que z_0 es un punto fijo no degenerado de h_{λ_0}; con la notación del Teorema 2.1 el cambio de coordenadas C^k

$$(\lambda,z) \longrightarrow (\lambda,z-\varphi(\lambda))$$

nos permite suponer que

$$z_0 = 0 \text{ y } h_\lambda(0) \equiv 0 \ ;$$

b que el complejificado de $D\ h_{\lambda_0}(0)$ tiene como valores propios $\rho, \overline{\rho}$, raíces p-ésimas primitivas de la unidad con $p > 2$, como valores propios simples y que su espectro no contiene otra raíz p-ésima de la unidad. Por los resultados del capítulo 1 podemos suponer que el complejificado de $D\ h_\lambda(0)$ tiene valor propio $\alpha(\lambda)$ con $\alpha(0) = \rho$.

c que $D\ \alpha(\lambda_0)$ es suprayectiva; podemos entonces seleccionar una identificación de Λ con un producto $\mathbb{C} \times \mathring{\Lambda}$ (donde $\mathring{\Lambda}$ es un espacio de Banach) en la cual denotamos por

$$(\mu,\nu) \in \mathbb{C} \times \mathring{\Lambda}$$

los puntos de Λ, de modo que la aplicación lineal

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\lambda_0)$$

sea un isomorfismo.

Teorema 4.2 *Bajo esas hipótesis y con esas identificaciones, los puntos periódicos de periodo* p *de* $\tilde{h}$ *forman, en una vecindad de* $(\lambda_0,0)$ *la unión de dos subvariedades: la subvariedad* $\Lambda \times \{0\}$ *formada por los puntos fijos de* $\tilde{h}$, *y una subvariedad de clase* C^s *modelada sobre* Λ, *que se escribe como la gráfica*

$$\mu = \varphi(\nu, z)$$

de una función implícita φ *de clase* C^s, *donde*

$$s = [\min((k-2)/2, p-3))].$$

Los puntos comunes a esas dos subvariedades son los puntos $(\lambda, 0)$ *caracterizados por el hecho de que* ρ *sea valor propio de* $D\ h_\lambda(0)$.

Demostración: Para demostrar este Teorema es suficiente con observar que en todos los pasos de la demostración del Teorema anterior la diferenciabilidad respecto al parámetro ν no introduce ninguna dificultad adicional. y tenemos el teorema.∎

Notas.-

1.-Observemos que una vez hecho el paso 1 tenemos una familia que sólo es de clase C^{k-1} pero que sus coeficientes de Taylor siguen teniendo las propiedades de diferenciabilidad de la función original y el término de Taylor de orden 1 es $\alpha(\lambda)z$. El resto de la demostración de los Teoremas 4.1 y 4.2 siguen siendo válidos *bajo únicamente estos supuestos.* Es decir, hemos demostrado el siguiente resultado:

Hipótesis: Suponemos que

(i) h_λ es de clase C^{k-1} y Dh_λ es también de clase C^{k-1} y

(ii) $Dh_\lambda(0) = \alpha(\lambda)$.

Teorema 4.3 *El Teorema 4.2 sigue siendo válido si substituimos la hipótesis de que h_λ sea de clase C^k por las hipótesis (i) y (ii).*

Esta observación será crucial en el Capítulo 6, donde reduciremos una familia de transformaciones en un espacio de Banach arbitrario a una de dimensión 2 que no necesariamente es de clase C^k pero que sigue teniendo las propiedades (i) y (ii).

2.- Bajo cambios de variables y reparametrizaciones se puede simplificar la forma de $h_\lambda(x)$ para que el coeficiente de x sea exactamente $(\rho+\mu)$ y para que la función φ tenga una forma simétrica, es decir, que sea invariante bajo la acción de ρ como en los Ejemplos 1 y 2.

Para extender este resultado al caso general, donde E es un espacio de Banach real arbitrario necesitamos un resultado que nos permita aislar un subespacio de dimensión 2 donde actúa el valor propio del complejificado, así como en el Capítulo 2 se utilizaron los resultados del Capítulo 1 para aislar la recta propia de un valor propio real simple. Para esto se necesita generalizar los resultados del Capítulo 1 al caso de subespacios invariantes de dimensión mayor que 1, que es lo que veremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

ESTABILIDAD DE SUBESPACIOS INVARIANTES.

Si $K = \mathbb{R}$, por espectro de un endomorfismo entendemos aquí el espectro de su complejificado.

Teorema 5.1 *Sean L_0 un endomorfismo continuo en un espacio de Banach y F un subespacio cerrado de E con complemento cerrado y tal que F es invariante bajo L_0 . Si los endomorfismos A_0 y $\overset{\circ}{L}_0$ de F y $\overset{\circ}{E} := E/F$ inducidos por L_0 tienen espectros disjuntos, existe un abierto $\Omega_1 \ni L_0$ de $gl(E)$ y una aplicación analítica P de Ω_1 en el espacio de isomorfismos de $F \times \overset{\circ}{E}$ sobre E tales que, para toda $L \in \Omega_1$*

$$P(L)^*L = \begin{pmatrix} A(L) & 0 \\ 0 & D(L) \end{pmatrix}$$

las aplicaciones $A : \Omega_1 \longrightarrow gl(F)$ y $D : \Omega_1 \longrightarrow gl(\overset{\circ}{E})$ así definidas son entonces analíticas.

Demostración: Si S es un complemento topológico de F, podemos, como en la demostración del Teorema 1.2, identificarlo con $\overset{\circ}{E} = E/F$ e identificar

E con $F \times \overset{\circ}{E}$ de manera que

$$L_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ 0 & \overset{\circ}{L}_0 \end{pmatrix}$$

Si buscamos

$$P(L) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

y si ponemos

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$P(L)^{*}L = P(L)^{-1}LP(L) = \begin{pmatrix} A(L) & 0 \\ 0 & D(L) \end{pmatrix}$$

equivale a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u \\ v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A(L) & 0 \\ 0 & D(L) \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos

$$\begin{cases} a + bv = A(L), \\ au + b = uD(L), \\ c + dv = vA(L), \\ cu + d = D(L). \end{cases}$$

Eliminando las variables $A(L)$ y $D(L)$ obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} F(L,u) := au + b - u(cu+d) = 0 \\ G(L,v) := c + dv - v(a+bv) = 0. \end{array}\right\}$$

Estas son las funciones implícitas que debemos resolver. Como

$$\begin{cases} F(L_0,u) = A_0u + B_0 - u\dot{L}_0 \\ G(L_0,v) = \dot{L}_0v - v(A_0 + B_0v) \end{cases}$$

tenemos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(L_0,0)\delta u = A_0\delta u - \delta u\dot{L}_0 \\ \frac{\partial G}{\partial v}(L_0,0)\delta v = \dot{L}_0\delta v - \delta vA_0 \end{cases}$$

Lema 5.2 *Las aplicaciones* $u \longmapsto A_0 u - u\dot{L}_0$ *y* $v \longmapsto \dot{L}_0 v - vA_0$ *son automorfismos de* $L(\overset{\circ}{E}, F)$ *y de* $L(F, \overset{\circ}{E})$ *respectivamente.*

Demostración (en dimensión finita): Se trata de demostrar que los dos endomorfismos son inyectivos. Trataremos el primero, el segundo se deduce intercambiando F y $\overset{\circ}{E}$. Si $\mathcal{K}=\mathbb{R}$ se reduce al caso $\mathcal{K}=\mathbb{C}$ complejificando A_0 y $\overset{\circ}{L}_0$.

Como $A_0 u = u\overset{\circ}{L}_0$ tenemos que

$$(A_0 - \lambda)\, u = u\left(\overset{\circ}{L}_0 - \lambda\right)$$

y entonces

$$(A_0 - \lambda)^n\, u = u\left(\overset{\circ}{L}_0 - \lambda\right)^n$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Si λ es valor propio de $\overset{\circ}{L}_0$ y si n es suficientemente grande, deducimos que

$$(A_0 - \lambda)^n\, u$$

es cero sobre el subespacio característico E_λ de $\overset{\circ}{L}_0$ asociado a λ ; como λ no es valor propio de A_0, resulta que

$$u\,|_{E_\lambda} = 0$$

Ya que $\overset{\circ}{E} = \oplus_\lambda E_\lambda$ concluimos que $u = 0$.

Demostracion (en dimensión infinita): Consideremos los operadores siguientes:

$$G : u \longmapsto A_0 u$$

$$H : u \longmapsto u\overset{\circ}{L}_0$$

Se ve fácilmente que el espectro de G es igual al espectro de A_0 y que el espectro de H es igual al espectro de $\overset{\circ}{L}_0$:

$$\sigma(G) = \sigma(A_0)$$

$$\sigma(H) = \sigma\left(\mathring{L}_0\right).$$

como

$$GH = HG$$

tenemos

$$\sigma(G - H) \subset \sigma(G) - \sigma(H).$$

Aquí hemos aplicado el Teorema 11.23 de [R]:

Teorema 5.3 *([R], 11.23) Supongamos que A es un álgebra de Banach, y que para todas x, $y \in A$*

$$xy = yx.$$

Entonces

$$\sigma(x + y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$$

y

$$\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y).).$$

Entonces, como $\sigma(G) \cap \sigma(H) = \emptyset$

$$0 \notin \sigma(G - H)$$

y tenemos que $(G - H)$ es un isomorfismo.■

Fin de la demostración del teorema: El lema implica de una parte que existe un único

$$u_0 \in L(\mathring{E}, F)$$

tal que

$$F(L_0, u_0) = 0$$

y, de otra parte, que podemos aplicar el teorema de las funciones implícitas a las ecuaciones

$$F(L, u) = 0 \text{ y } G(L, v) = 0$$

en una vecindad de (L_0, u_0) y $(L_0, 0)$ respectivamente.

El endomorfismo así obtenido depende analíticamente de L y es un automorfismo para L en una vecindad de L_0 ya que

$$P(L_0) = \begin{pmatrix} 1 & u_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo es.■

Corolario 5.4 *Si el complejificado de un endomorfismo continuo L_0 de un espacio de Banach real E tiene una pareja de valores propios no reales simples conjugados*

$$(\alpha_0, \overline{\alpha_0})$$

y denotamos con $\overset{\circ}{E}_0$ el cociente de E por el plano invariante F correspondiente, existe un abierto $\Omega_2 \ni L_0$ de $gl(E)$ y una aplicación analítica P, de Ω_2 en el espacio de isomorfismos de $\mathbb{C} \times \overset{\circ}{E}_0$ sobre E tales que, para todo $L \in \Omega_2$

$$P_1(L)^* L = \begin{pmatrix} \alpha(L) & 0 \\ 0 & B(L) \end{pmatrix}$$

donde la aplicación analítica $\alpha : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ verifica

$$\alpha(L_0) = \alpha_0.$$

Si L_0 ya es de esta forma, podemos construir P_1 de manera que $P_1(L_0) = Id$.

Demostración: Es suficiente aplicar a $A(L) \in gl(F)$ (proporcionado por el Teorema 5.1) la Proposición 1.3.

Capítulo 6

SOBRE LA VARIEDAD DE PUNTOS PERIÓDICOS DE PERIODO p SOBRE $\mathbb{R}$: CASO GENERAL.

Caso general: Λ , E son espacios de Banach reales arbitrarios.

Hipótesis y Notación.

Se da una aplicación

$$h_\lambda(x)$$

de clase C^k con $k \geq 3$, en una vecindad del punto $(\lambda_0,\ x_0)$ en $\Lambda{\times}E$ con valores en E , y suponemos que

$$h_{\lambda_0}(x_0) = x_0.$$

Como anteriormente ponemos

$$\widetilde{h}(\lambda,x) = (\lambda,h_\lambda(x)).$$

Además suponemos:

a que x_0 es un punto fijo no degenerado de h_{λ_0}; con las notaciones del Teorema 2.1 el cambio de coordenadas C^k

$$(\lambda,x) \longrightarrow (\lambda,x-\varphi(\lambda))$$

nos permite suponer que

$$x_0 = 0 \text{ y } h_\lambda(0) = 0;$$

b que el complejificado de $D\ h_{\lambda_0}(0)$ tiene como valores propios $\rho,\overline{\rho}$, raíces p-ésimas primitivas de la unidad con $p > 2$, como valores propios simples y que su espectro no contiene otra raíz p-ésima de la unidad. Por los resultados del capítulo 1 podemos suponer que el complejificado de $D\ h_\lambda(0)$ tiene valor propio $\alpha\,(\lambda)$ con $\alpha\,(0) = \rho$. Por el Teorema de estabilidad de subespacios invariantes y con las notaciones del Corolario 5.4 , aplicado a $L_0 = D\ h_{\lambda_0}(0)$, el cambio de coordenadas $P\,(Dh_{\lambda_0}(0))$ nos permite suponer que

$$E = \mathbb{C} \times \overset{\circ}{E} \ y \ Dh_{\lambda_0}(0) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

donde hemos puesto

$$d_0 := \delta\,(Dh_{\lambda_0}(0))\,,$$

(el espectro de d_0 no contiene raíces p-ésimas de la unidad); bajo esta identificación, los puntos de E se denotarán por $(z,w) \in \mathbb{C} \times \overset{\circ}{E}$;

c que $D\ \alpha(\lambda_0)$ es suprayectiva; podemos entonces seleccionar una identificación de Λ con un producto $\mathbb{C} \times \overset{\circ}{\Lambda}$ (donde $\overset{\circ}{\Lambda}$ es un espacio de Banach) en la cual, si denotamos por

$$(\mu,\nu) \in \mathbb{C} \times \overset{\circ}{\Lambda}$$

los puntos de Λ, se tiene que la aplicación lineal

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}(\lambda_0)$$

es un isomorfismo.

Teorema 6.1 *Bajo esas hipótesis y con esas identificaciones, los puntos periódicos de periodo* p *de* $\tilde{h}$ *forman, en una vecindad de* $(\lambda_0,0)$ *la unión de dos subvariedades: la subvariedad* $\Lambda\times\{0\}$ *formada por los puntos fijos de* $\tilde{h}$, *y una subvariedad de clase* C^s *modelada sobre* Λ, *que se escribe como la gráfica*

$$(\boldsymbol{\mu}, w) = M\,(\nu,z)$$

de una función implícita M *de clase* C^s, *donde*

$$s = [\,\text{mín}\,((k-2)/2,p-3)].$$

Los puntos comunes a esas dos subvariedades son los puntos $(\lambda, 0)$ *caracterizados por el hecho de que* ρ *sea valor propio de* $D\ h_\lambda(0)$.

Demostración:

Paso 1. Por el Corolario 5.4, mediante un cambio de variables de clase C^{k-1} podemos suponer que $D\ h_\lambda(0)$ tiene la forma diagonal

$$Dh_\lambda(0) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & 0 \\ 0 & d(\lambda) \end{pmatrix}.$$

lo cual reduce el grado de diferenciabilidad de la familia. Pero veámoslo con más cuidado:

La nueva familia es de la forma

$$x \to P_1(Dh_\lambda(0))^{-1}(h_\lambda(P_1(Dh_\lambda(0))x)$$

por lo cual es de clase C^{k-1}. Pero su *derivada* es

$$P_1(Dh_\lambda(0))^{-1} \circ Dh_\lambda \circ P_1(Dh_\lambda(0))$$

que *sigue siendo de clase* C^{k-1}. En lo que sigue supondremos que h_λ misma tiene estas propiedades.

Paso 2. Escribiendo las componentes de $h^p_\lambda(x)$ en la descomposición $E = \mathbb{C} \times \mathring{E}$ como:

$$h^p_\lambda(z,w) = (k_p(\lambda, z, w), l_p(\lambda, z, w))$$

tenemos que resolver el sistema de clase C^k

$$\begin{aligned} k_p(\lambda, z, w) &= z \\ l_p(\lambda, z, w) &= w. \end{aligned}$$

Ya que

$$\frac{\partial l_p}{\partial w}(\lambda_0, 0, 0) = d_0^p$$

no tiene a 1 en su espectro, la segunda ecuación define la función implícita

$$w = W(\lambda, z)$$

que satisface:

$$W(\lambda, 0) = 0; \frac{\partial W}{\partial z}(\lambda, 0) = 0$$

La primera ecuación se cumple por la unicidad de la función implícita, ya que

$$l_p(\lambda, 0, 0) = 0$$

y la segunda se satisface ya que

$$\frac{\partial W}{\partial z}(\lambda, 0) = (I - d^{\,p}(\lambda))^{-1} \frac{\partial l_p}{\partial w}(\lambda, 0, 0) = 0$$

donde la segunda derivada es 0 debido a la forma diagonal de $Dh_\lambda(0)$. Sustituyendo $W(\lambda, z)$ en la primera ecuación obtenemos

$$k_p(\lambda, z, W(\lambda, z)) = z.$$

Esta ecuación también tiene la solución trivial

$$z = 0$$

la cual nos proporciona los puntos fijos.

Paso 3. Veremos ahora que el conjunto de puntos periódicos de periodo p es en todos los casos una variedad de clase C^0 :

Podemos escribir z en coordenadas polares, y definir

$$K(\lambda, r, \theta) = k_p(\lambda, re^{i\theta}, W(\lambda, re^{i\theta}))$$

que satisface

$$K(\lambda, 0, \theta) = 0,$$

por lo cual podemos factorizar

$$K(\lambda, r, \theta) = rG(\lambda, r, \theta)$$

donde

$$G : \Lambda \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

satisface:

$$(i)\ G \text{ es de clase } C^{k-1}$$

$$\begin{aligned} (ii)\ G(\lambda, 0, \theta) &= \alpha^p(\lambda)e^{i\theta} \\ (iii)\ \frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda, 0, \theta) &= D\alpha^p(\lambda)e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Para demostrar (i) observemos que

$$G(\lambda, r, \theta) = \int_0^1 \frac{\partial K}{\partial r}(\lambda, rt, \theta)dt$$

y

$$\frac{\partial K}{\partial r}(\lambda, r, \theta) =$$

$$= \frac{\partial k_p}{\partial z}(\lambda, re^{i\theta}, W(\lambda, re^{i\theta})e^{i\theta} + \frac{\partial k_p}{\partial w}(\lambda, re^{i\theta}, W(\lambda, re^{i\theta}))\frac{\partial W}{\partial z}(\lambda, re^{i\theta})e^{i\theta}$$

la cual es de clase C^{k-1} por el paso 1. Para demostrar (ii) tenemos que

$$G(\lambda, 0, \theta) = \frac{\partial K}{\partial r}(\lambda, 0, \theta) =$$

$$= \frac{\partial k_p}{\partial z}(\lambda, 0, 0)e^{i\theta} + \frac{\partial k_p}{\partial w}(\lambda, 0, 0)\frac{\partial W}{\partial z}(\lambda, 0)e^{i\theta} = \alpha^p(\lambda)e^{i\theta},$$

por la forma diagonal de $D\ h_\lambda(0)$. Para demostrar (iii) solamente tenemos que derivar (ii) con respecto de λ.

Ahora definimos

$$F(\lambda, r, \theta) = e^{-i\theta}G(\lambda, e, \theta)$$

así que la ecuación a resolver es

$$F(\lambda, r, \theta) = 1.$$

(ii) implica que

$$F(\lambda_0, 0, \theta) = 1.$$

La hipótesis (c), y por la descomposición de $\Lambda = \mathbb{C} \times \mathring{\Lambda}$ y $(\mu, \nu) \in \mathbb{C} \times \mathring{\Lambda}$, (iii) implica que

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(\lambda_0, 0, \theta) = \frac{\partial \alpha^p}{\partial \mu}(\lambda_0) = p\alpha^{p-1}\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\lambda_0)$$

es un isomorfismo. Por lo tanto podemos resolver la ecuación anterior para μ

$$\mu = \widetilde{M}(\nu, r, \theta)$$

de clase C^{k-1}.

Ya que $F(\lambda, 0, \theta)$ es independiente de θ se sigue que también lo es $\widetilde{M}(\nu, 0, \theta)$ por la unicidad del teorema de la función implícita. Por lo tanto $\widetilde{M}(\nu, r, \theta)$ define una función $M(\nu, z)$ que, por lo pronto, sólo podemos asegurar que sea continua.

Observemos que esto demuestra el Teorema cuando $s = 0$, esto es, cuando $k = 2, 3$ o $p = 3$.

Paso 4. Cuando $s > 0$, para factorizar por z y ver que $M(\nu, z)$ es suave tenemos que preparar la primer ecuación. El problema aquí es que, pensando la ecuación como la ecuación de puntos fijos de una familia de mapeos, es muy difícil simplificar directamente, ya que el origen es un punto fijo degenerado. Para evitar esto es conveniente pensarla como la ecuación de los puntos periódicos de una familia de transformaciones de $\mathbb{C}$: Definamos

$$\widehat{h_\lambda}(z) = k_1(\lambda, z, W(\lambda, z)).$$

Observemos que, si (z, w) es un punto periódico de h_λ también lo es $h_\lambda^j(z, w)$ para toda $j \geq 1$. Y por lo tanto, sus componentes deben satisfacer:

$$l_j(\lambda, z, w) = W(\lambda, k_j(\lambda, z, w)).$$

Así también debemos tener

$$\widehat{h_\lambda}^2(z) = \widehat{h_\lambda}(k_1(\lambda, z, W(\lambda, z)) = k_1(\lambda, k_1(\lambda, z, w), W(\lambda, k_1(\lambda, z, w)))$$

y

$$\widehat{h_\lambda}^2(z) = k_1(\lambda, k_1(\lambda, z, w), l_1(\lambda, z, w)) = k_2(\lambda, z, w).$$

Inductivamente llegamos a

$$\widehat{h_\lambda}^j(z) = k_j(\lambda, z, w).$$

En particular

$$\widehat{h_\lambda}^p(z) = k_p(\lambda, z, w) = z.$$

Por lo tanto z es un punto periódico de periodo p de $\widehat{h_\lambda}$.

$\widehat{h_\lambda}$ es de clase C^{k-1}. Pero su *derivada* es

$$\frac{\partial k_1}{\partial z}(\lambda, z, W(\lambda, z)) + \frac{\partial k_1}{\partial w}(\lambda, z, W(\lambda, z))\frac{\partial W}{\partial z}(\lambda, z)$$

que sigue siendo de clase $\mathbf{C}^{k-1}$ y en $(\lambda, 0)$ vale $\alpha(\lambda)$. Es decir, cumple las condiciones del Teorema 4.3 y podemos concluir que sus puntos periódicos de periodo p están también dados por una función implícita de clase C^s :

$$\mu = \widehat{M}(\nu, z)$$

Ya que los puntos periódicos de periodo p

$$(\mu, \nu, z, W(\mu, \nu, z))$$

de h_λ están contenidos en los de $\widehat{h_\lambda}$ y ambos están dados por el mismo tipo de función implícita, las dos funciones deben coincidir.

(Notemos que para establecer esta conclusión no requerimos de ninguna hipótesis sobre el grado de diferenciabilidad de ninguna de las dos funciones implícitas, solamente la continuidad de ambas ya que trabajamos en una vecindad de $(\lambda_0, 0)$.)

Por lo tanto el grado de diferenciabilidad de $M(\nu, z)$ es igual al grado de diferenciabilidad de la función $\widehat{M}(\nu, z)$ ∎

BIBLIOGRAFÍA.

[A] V.I. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires,* MIR, Moscú, *1980.*

[B] M.S. Berger, *Nonlinearity and Functional Analysis,* Academic Press, 1977.

[BZS] Y.G. Borisovich, V.G. Zvyagin, Y.I. Sapronov, *Nonlinear Fredholm maps and the Leray-Schauder theory,* Russian Math. Surveys, 32:4 (1977), 1-54.

[CH] M. Chaperon, *Quelques Fonctions Implicites*, manuscrito inédito, Universidad de París VII.

[Ch] A. Chenciner, *Bifurcations de diffeomorphismes de* $\mathbb{R}^2$ *au voisinage d´un point fixe elliptic, in les Houches Session XXXVI,* 1981, Iooss, Helleman, Stora, édit., North Holland, 1983.

[ChI] A. Chenciner, G. Iooss, *Bifurcations de tores invariantes,* Arch. Rational Mech Anal., 69:1 (1979), 109-198.

[ChH] S.N. Chow, J.K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory,* Springer-Verlag, 1996.

[D1] E.N. Dancer, *Bifurcation Theory in real Banach space,* Proc. London Math. Soc., 23:3 (1971), 699-734.

[D2] E.N. Dancer, *Bifurcation Theory for analytic operators,* Proc. London Math. Soc., 26:3 (1973), 359-384.

[Di] J. Dieudonné, *Sur les homomorphismes d´espaces normés,* Bull. Sci. Math., 67:2 (1943), 72-84.

[GK] I.C. Gohberg, M.G. Krein, *The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators,* Amer. Math. Soc. Transl. (2), 13 (1960), 185-264.

[GS] M. Golubitsky, D.G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, vol 1,* Springer-Verlag, 1985.

[Io] G. Iooss, *Bifurcations of Maps and Applications,* North-Holland, 1979.

[IA] G. Iooss, M. Adelmeyer, *Topics in Bifurcation Theory and Applications,* Singapore: World Scientific, *1992.*

[IJ] G. Iooss, D.D. Joseph, *Bifurcation and stability of nT-periodic solutions branching from T-periodic solutions at points of resonance*, Arch. Rational Mech. Anal. 66:2 (1977), 135-172..

[I1] J. Ize, *Bifurcation Theory for Fredholm Operators,* Memoirs A.M.S., 174, 1976.

[I2] J. Ize, *Topological Bifurcation,* Topological Nonlinear Analysis: Degree, Singularity and Variations, Editors: M. Matseu, A. Vignoli, Birkhauser (1995), 341-463.

[K1] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators,* Springer-Verlag, 1995.

[K2] T. Kato, *Perturbation Theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators,* Journal D ´Analyse Mathématique, 4 (1958), 261-322.

[L] O.E. Lanford, III, *Bifurcation of periodic solutions into invariant Tori: The work of Ruelle and Takens,* Lecture Notes in Math.,Vol. 322, Springer (1973), 159-192.

[MM] J.E. Marsden, M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Springer- Verlag, 1976.

[R] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc-Graw-Hill, Inc. 1991.

[RT] D. Ruelle, F. Takens, *On the Nature of Turbulence,* Commun. Phys., 20 (1971), 120-145.

[VT] M.M. Vainberg, V.A. Trenogin, *Theory of Branching of solutions of non-linear equations,* Noordholf Int. Pub., 1974.