

01170



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**

**“OBTENCIÓN DE PATRONES DE RECONOCIMIENTO  
VISUAL EN EL CICLO CARDIACO”**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**  
**(ELÉCTRICA)**

PRESENTA:

**MARÍA ESTELA AUDELO VUCOVICH**

DIRECTOR DE TESIS

M. en C. GUILLERMO VÁZQUEZ COUTIÑO



MÉXICO D.F.

JUNIO 2005

m 345694



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## AGRADECIMIENTOS

### **FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES Cuautitlán-UNAM**

Por todas las facilidades en tiempo y materiales que se me brindaron.

### **CENTRO DE CÓMPUTO DE LA FESC-UNAM**

A todo el personal del centro de cómputo que de alguna forma contribuyeron a la realización de esta tesis.

### **M. en C. GUILLERMO VÁZQUEZ COUTIÑO**

Por dirigir este trabajo.

### **AL HONORABLE JURADO**

Por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: María Estela  
Andela Vázquez

FECHA: 27 - Junio - 05

FIRMA: [Firma]

# DEDICATORIAS

## **A Dios**

Por acompañarme y guiarme a lo largo del camino

## **A María Luisa, mi hija**

Por ser la razón de mi existencia

## **A mis padres**

Ramón Audelo Landazury y María Estela Vucovich Pavlovich  
Por su gran amor y apoyo incondicional

## **A mis hermanos**

Belinda, Ramón e Irasema por su compañía

## **A mis amigos**

Por compartir conmigo los buenos y malos momentos

# ÍNDICE

	página
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	i
<b>RESUMEN</b>	iii
<b>CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN</b>	
1.1 Antecedentes	1
1.2 Formulación del problema	6
1.3 Objetivo	7
1.4 Organización del trabajo	8
<b>CAPÍTULO II ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO</b>	
2.1 Generalidades	9
2.2 Sistemas dinámicos	10
2.3 Espacio-fase	12
2.4 Atractores	15
2.5 Exponente de Lyapunov	18
2.6 Entropía	20
2.7 Exponente de Hurst	22
2.8 Dimensiones	24
<b>CAPÍTULO III ELECTROCARDIOGRAFÍA</b>	
3.1 Potenciales bioeléctricos	30
3.2 El corazón	36
3.3 Sistema específico de conducción cardiaca	39
3.4 El electrocardiógrafo	40
3.5 El electrocardiograma	45
3.6 Trastornos del ritmo cardiaco	48
<b>CAPÍTULO IV RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	
4.1 Obtención de datos	51
4.2 Inspección visual	52
4.3 Distribución de probabilidad	55
4.4 Análisis espectral	57
4.5 Recurrencia y determinismo	60
4.6 Dimensiones	63
4.7 Atractores	64
4.8 Índices	72
4.9 Software empleado	76

## **CAPITULO V CONCLUSIONES**

5.1 Conclusiones

77

## **CAPITULO VI BIBLIOGRAFÍA**

81

# LISTA DE FIGURAS

	página
2.1 Procedimiento para determinar los vectores de estado del sistema	14
2.2 Determinación del h óptimo con información mutua	15
2.3 Atractor puntual	16
2.4 Atractor de ciclo límite	17
2.5 Atractor toroidal	17
2.6 Atractores del ciclo cardíaco	18
2.7 Diagrama de Hurst	23
2.8 Autosemejanza	26
2.9 Proceso fractal	26
2.10 Dimensión de correlación	29
3.1 Análogo eléctrico de la membrana	30
3.2 Potencial de membrana	31
3.3 Tipos de células	32
3.4 Potenciales	33
3.5 Etapas del potencial de acción	34
3.6 Cambios de resistencia	35
3.7 Modelo eléctrico de la membrana	36
3.8 El corazón	37
3.9 Sistema de conducción cardíaca	39
3.10 Derivaciones de Waller	41
3.11 Derivaciones de Einthoven	42
3.12 Papel para electrocardiógrafo	42
3.13 Derivaciones del plano frontal	43
3.14 Derivaciones precordiales	44
3.15 Electrocardiograma de un corazón normal	45
3.16 Activación auricular y septal	47
3.17 Activación de los ventrículos y las regiones central y apical del ventrículo izquierdo	47
3.18 Activación basal y posterior del ventrículo izquierdo y del septo	47
3.19 Repolarización ventricular	47
3.20 Componentes del ciclo cardíaco	48
3.21 Electrocardiograma de un corazón con fibrilación auricular	49
3.22 Electrocardiograma de un corazón con fibrilación supraventricular	49
4.1 Gráfico de los registros: A)19830A; B)19830B	52
4.2 Gráfico de registros de sujetos sanos	53
4.3 Gráfico del registro 4015 sujeto con fibrilación auricular	53
4.4 Gráfico del registro 4908 sujeto con fibrilación auricular	53
4.5 Gráfico del registro 8215 sujeto con fibrilación auricular	54
4.6 Gráfico del registro 801 sujeto con fibrilación supraventricular	54
4.7 Gráfico del registro 807 sujeto con fibrilación supraventricular	54
4.8 Gráfico del registro 853 sujeto con fibrilación supraventricular	55
4.9 Histogramas de registros de sujetos saludables	56

4.10	Histogramas de registros de sujetos con fibrilación auricular	56
4.11	Histogramas de registros de sujetos con fibrilación supraventricular	56
4.12	Frecuencia de registros de sujetos saludables	59
4.13	Frecuencia de registros de sujetos con fibrilación auricular	59
4.14	Frecuencia de registros de sujetos con fibrilación supraventricular	60
4.15	Gráficos de recurrencia de registros de sujetos saludables	62
4.16	Gráficos de recurrencia de registros de sujetos con fibrilación auricular	63
4.17	Gráficos de recurrencia de registros de sujetos con fibrilación supraventricular	63
4.18	Atractores del mismo registro con diferente retardo	65
4.19	Núcleo del atractor	66
4.20	Atractor de registro de sujeto sano	66
4.21	Atractor de registro de sujeto con fibrilación auricular	66
4.22	Núcleo del atractor de sujeto sano	67
4.23	Núcleo del atractor de sujeto con fibrilación auricular	67
4.24	Núcleo del atractor de sujeto con fibrilación auricular	67
4.25	Ángulo de inclinación del núcleo	68
4.26	Atractores de diez registros de sujetos sanos	69
4.27	Atractores de diez registros de sujetos con fibrilación auricular	70
4.28	Atractores de diez registros de sujetos con fibrilación supraventricular	71

## RESUMEN

El ciclo cardíaco es estudiado por procedimientos que podemos considerar clásicos: conocida la morfología de la señal, por la experiencia, se sabe si la situación es normal o patológica. Sin embargo, se ha encontrado que existe información importante que no se descubre en el electrocardiograma, de ahí la necesidad de estudiar la información de la señal por los métodos matemáticos de la dinámica no lineal y por la teoría del caos; en este trabajo se analizaron treinta series de tiempo del ciclo cardíaco (diez de sujetos sanos, diez de sujetos con fibrilación auricular y diez con fibrilación supraventricular) con las herramientas de la teoría del caos con el objetivo principal de obtener patrones de reconocimiento visual (atractores) y determinar propiedades métricas que permitan diferenciar entre los tres tipos de sujetos.

En este estudio se comprobó, a lo largo de los diferentes análisis realizados que el ciclo cardíaco es un sistema con un comportamiento mixto (periodico-caótico); que los atractores obtenidos a partir de graficar la señal contra la primera derivada nos ayudan en la identificación de los tres tipos de registros como patrones de reconocimiento visual y la relación encontrada en forma de desigualdad de la entropía de Kolmogorov y los exponentes de Hurst y Lyapunov se puede utilizar como criterio de diagnóstico. Además, se ha demostrado que la utilización de la representación en el espacio-fase puede constituir una herramienta útil para el problema de la clasificación de sistemas fisiológicos.

### 1.1 Antecedentes

El ciclo cardiaco como sistema dinámico se ha venido estudiando, desde hace aproximadamente tres décadas con las herramientas de la teoría del caos y la geometría fractal.

En el Instituto Tecnológico de Massachussets el fisico Richard J. Cohen y sus colegas diseñaron [1] una simulación por computadora de los ritmos cardiacos y descubrieron que la duplicación de periodos es un indicio de la proximidad de un ataque cardiaco. En la Universidad de McGill de Montreal, el fisiólogo Leon Glass y colaboradores llevaron a cabo un estudio experimental que ha revelado datos muy interesantes sobre el comportamiento de las células cardiacas. Los investigadores aislaron un grupo de este tipo de células de embriones de pollo, las cuales transferidas a un medio de cultivo apropiado, laten espontáneamente con un ritmo regular que se registra con la ayuda de diminutos electrodos; estos últimos sirven también para enviar a las células pulsos de corriente en las diversas fases del ciclo espontáneo de latidos. Si se asume que la dinámica del movimiento del corazón puede ser representada por una ecuación diferencial que describe la evolución en el tiempo, la representación del oscilador cardiaco en un diagrama de fases describirá un atractor de ciclo límite. Un estímulo eléctrico desplazará el oscilador hacia un nuevo punto en el espacio-fase, distancia que puede ser medida experimentalmente [2].

Glass y colaboradores observaron que, al aplicarse un campo eléctrico fuerte, el latido siguiente ocurre más pronto o después de lo normal. Si se aplican impulsos periódicos, el agregado celular se encuentra solicitado por dos fuerzas de periodos diferentes: una con el ritmo intrínseco de las células cardiacas y la otra con el ritmo provocado por la corriente eléctrica aplicada externamente. El latido cardiaco que se produce dependerá de la relación existente entre los dos periodos. En ciertos casos,

las células laten una, dos o tres veces seguidas por cada dos impulsos externos, pero en otras circunstancias la contracción es aparentemente aleatoria, produciendo formas irregulares, caóticas. Estas experiencias son interesantes porque muestran que se puede inducir caos en un sistema artificial que simula los procesos cardiacos. Además, cuando se comparan las dinámicas observadas en el experimento, con las que detecta el electrocardiograma (ECG), existe una notable similitud. Glass ha llegado a la conclusión de que muchos problemas patológicos de los humanos son producto de lo que él ha dado en llamar enfermedades dinámicas. Este tipo de enfermedades, que es el caso de las cardíacas, resultan de cambios en las variables fisiológicas que normalmente se responsabilizan de los procesos rítmicos, las cuales de repente fluctúan de manera caótica [3]. En el hombre adulto, el ritmo cardiaco normal es de 60 a 100 latidos por minuto. Hay dos grandes categorías de problemas rítmicos. Por una parte está la aceleración de la frecuencia cardiaca, taquicardia, y por la otra la desaceleración del ritmo a menos de 60 latidos, que se conoce como braquicardia. Los síntomas de cualquiera de los dos tipos de enfermedades van desde la fatiga al esfuerzo, hasta la muerte súbita. Este último caso, se refiere a la fibrilación ventricular, que se manifiesta por una anarquía total de la contracción de las fibras musculares y es antecedida por un ritmo cardiaco caótico [4].

Al principio, el comportamiento caótico fue considerado como algo perjudicial e indeseable ya que se pensaba que la preservación de las condiciones estáticas en el medio interno del organismo permitían mantener su equilibrio [5]; sin embargo, sabemos que la célula como un sistema abierto está caracterizada por estados de equilibrio dinámico y presenta variaciones locales y temporales de las variables fisiológicas que la caracterizan, por lo que, podemos pensar, que las variables que son objeto de control de los diferentes sistemas de regulación asociados con los sistemas biológicos oscilen alrededor de ciertos valores programados presentando además cierto desorden aparente (alta variabilidad), por lo que es imposible que la variable controlada se mantenga constante aún en ausencia de perturbaciones, ya que si esto ocurriera la célula se habría convertido en un sistema aislado y entonces no tendría manera de mantener su orden a expensas del intercambio de energía con los alrededores [6].

En Harvard el profesor Ary Goldberger y colaboradores han estudiado a lo largo de casi tres décadas, el intervalo del ritmo cardiaco (RR) y la variabilidad de la frecuencia cardiaca (VFC) utilizando las herramientas de la teoría del caos, comparando sujetos saludables con sujetos enfermos [7][8], contrastando sujetos de diferente edad y sexo [9], estudiando el efecto de la altitud [10], detectando apnea [11], estudiándolos como forma fractal [12], en sujetos enfermos [13], contrastando dos técnicas de meditación [14]; son muchos y muy variados los estudios que ha realizado el equipo del profesor Goldberger; y lo que ha concluido a partir de los resultados obtenidos es que una alta variabilidad (caos) en el corazón se presenta cuando es aún joven y saludable y a medida que va envejeciendo o se está próximo a alguna patología (arritmia) esta variabilidad tiende cada vez más a un comportamiento regular, más periódico; siendo el corazón un sistema dinámico, cuando está libre de patologías presenta una aperiodicidad o gran fluctuación en la frecuencia cardiaca; además, la fibrilación ventricular que es causa de muerte súbita, es relativamente periódica; en cambio, la muerte súbita que sucede en sujetos sanos puede verse como una transición de lo caótico a lo periódico.

En cuanto al género y la edad en los estudios que el doctor Goldberger realizó, a sujetos jóvenes, sujetos de mediana edad y sujetos viejos de ambos sexos, concluyó que el espectro de potencia decrece con la edad en ambos géneros. También mediante cambios en las frecuencias y amplitudes identificó correctamente a pacientes con apnea y a pacientes que no la padecían. En cuanto a los fractales, son útiles para entender la estructura espacio-temporal del ciclo cardiaco y analizando las diferentes estructuras, tal vez sea posible identificar pacientes de alto riesgo; encontrando además que el sistema eléctrico del corazón (red de Purkinje) tiene arquitectura fractal (auto semejanza) lo cual es muy útil para su estudio. En el análisis espectral de sujetos adultos jóvenes meditando con dos técnicas tradicionales, encontraron que la amplitud de las oscilaciones es mas grande durante la meditación que en estado de pre-meditación con ambas técnicas.

En todas la investigaciones realizadas utilizando las herramientas de la teoría del caos, el profesor Goldberger encontró que los gráficos obtenidos en el espacio-fase de series de tiempo de sujetos saludables tenían un grado de complejidad mayor que

el de los enfermos y la estructura era de atractor extraño, en cambio los registros de sujetos con cardiopatías mostraban un gráfico en espacio-fase con un atractor más periódico.

En un estudio de Álvarez y Farbiarz [15], sobre la variabilidad de la frecuencia respiratoria se encontró que hay disminución de la complejidad del sistema cuando se presentan patologías y que los estímulos del sistema nervioso autónomo sobre la frecuencia respiratoria disminuyen la variabilidad con respecto al estado basal, independientemente de si el estímulo es simpático o parasimpático; Cross y Cotton investigaron la regeneración de células hematopoyéticas [16] en la médula ósea después de la exposición a quimioterapia e identificaron la presencia de una dinámica caótica en esta situación; Canals y Labra [17] estudiaron la dinámica de algunas enfermedades infecciosas en Chile encontrando baja complejidad y similitud topológica entre los atractores; Lerma, Olivares, Contreras y Jose [18] estudiaron la VFC reconstruyendo el atractor con retardo de un minuto; Richter y Shreiber [19] reconstruyeron en el espacio-fase series de tiempo del ciclo cardiaco con diferentes retardos, encontrando que esta técnica ayuda a revelar aspectos que permanecen ocultos en el ECG; ahora bien, no se puede generalizar afirmando que el caos es sinónimo de salud, ya que no todas las patologías funcionan de la misma manera [20], existen patologías con tendencias caóticas.

La teoría del caos que muchos consideran trata sobre la impredecibilidad, también versa sobre la predictibilidad de los sistemas, aún de los más inestables. Los sistemas caóticos no son aleatorios aunque lo parezcan; pueden ser deterministas perturbados por variables de tipo estocástico o estocásticos perturbados por variables de tipo determinista. En ambos casos [21] el resultado neto es el mismo, por cuestiones puramente formales se trabaja con la primera alternativa; lo realmente importante es calcular el grado de determinismo o aleatoriedad que exhibe la serie de tiempo estudiada.

La teoría del caos está plagada de extraños patrones que yacen bajo una conducta aparentemente aleatoria e impredecible. Este conjunto de patrones se conoce como atractor porque atrae hacia sí la evolución del sistema hacia determinados estados;

algunos de estos atractores exhiben formas extrañas al graficarse, por lo que se llaman atractores extraños.

La teoría del caos no hace énfasis en el desorden del sistema, sino precisamente en el orden que exhibe. Establece que los sistemas dinámicos no lineales y complejos son inherentemente impredecibles pero al mismo tiempo, garantiza que, a menudo, la manera de expresar dicho sistema no radica en las ecuaciones exactas que lo controlan, sino en las representaciones gráficas de su conducta mediante atractores extraños.

## **1.2 Formulación del problema**

En las últimas décadas, se han estudiado los sistemas biológicos como sistemas dinámicos no lineales con las herramientas matemáticas de la teoría del caos determinístico, generando atractores en el espacio-fase como una técnica visual para reconocer la complejidad de una señal.

En el caso específico del corazón, este es estudiado por procedimientos que podemos considerar clásicos: conocida la morfología de la señal, por la experiencia, se sabe si la situación es normal o patológica. Sin embargo, se ha encontrado que existe información importante que no se descubre en el electrocardiograma (ECG), por lo que se necesita estudiar la información de la señal por los métodos matemáticos de la dinámica no lineal y por la teoría caótica determinista, para obtener atractores y determinar índices o propiedades métricas que permitan conocer la complejidad del sistema y su posible evolución en el tiempo.

### 1.3 Objetivo

Dada la importancia de visualizar el ritmo cardiaco desde una óptica diferente a la del tradicional electrocardiograma (ECG), el objetivo de esta tesis es analizar series de tiempo del corazón como un sistema dinámico no lineal y encontrar patrones de reconocimiento visual que nos ayuden, no sólo a distinguir entre el comportamiento de un corazón sano y otro con patologías, sino también para entender el comportamiento del corazón como un sistema altamente sensible a las condiciones iniciales (caótico). Para que el trabajo fuera completo, se analizaron series de tiempo de sujetos sanos, series de tiempo de sujetos con fibrilación auricular y series de tiempo de sujetos con fibrilación supraventricular; el *software* utilizado fue CDA y VRA, al utilizar este *software* se buscó, no sólo la obtención de los patrones de reconocimiento visual, sino también algún invariante que nos permitiera distinguir entre un corazón sano y otro con patologías.

#### **1.4 Organización del trabajo**

En el CAPITULO II se presentan someramente algunos conceptos, fórmulas y definiciones acerca de la dinámica no lineal, los cuales se utilizan a lo largo de esta tesis. Por ejemplo: cómo y para qué se reconstruye el espacio-fase; al evolucionar en el tiempo el sistema dinámico genera en el espacio-fase una estructura (atractor), ¿por qué es de interés?; el exponente de Lyapunov predice si un sistema converge o diverge; el exponente de Hurst mide la persistencia del sistema y cuantifica el grado de complejidad de la señal; la dimensión de correlación y la dimensión fractal nos ayudan en la identificación de las series de tiempo; el gráfico de recurrencia nos indica la recurrencia y determinismo que tiene nuestro sistema, la entropía nos habla de la información.

En el CAPITULO III se complementan los conceptos necesarios para el desarrollo de esta tesis en cuanto al corazón como sistema y su funcionamiento. Se explica cómo es el comportamiento eléctrico de la célula, cómo se generan y miden los potenciales bioeléctricos, el comportamiento del sistema específico de conducción cardiaca; cómo se obtiene el ECG, como se interpreta y cómo se identifican en el ECG los trastornos del ritmo cardiaco.

En el CAPITULO IV se explica cómo se obtuvieron los datos y cómo se prepararon para el análisis; cómo se realizó la inspección visual de los gráficos; el análisis estadístico y finalmente el análisis de la complejidad del sistema para la obtención de resultados. Se analizan los resultados comparando los obtenidos a partir de sujetos sanos con los obtenidos de sujetos con patologías para encontrar diferencias entre ellos.

En el CAPITULO V se dan las conclusiones basadas en los resultados obtenidos y expuestos en el CAPITULO IV, resumiendo las principales aportaciones y dando una perspectiva de este estudio.

### **2.1 Generalidades**

Una serie de tiempo está definida como una colección de mediciones de cierto fenómeno o experimento registradas secuencialmente a través del tiempo; los tipos de datos de las series de tiempo pueden ser:

1. Continuos o discretos

Continuos: observaciones hechas continuamente en el tiempo.

Discretos: observaciones hechas sólo en intervalos de tiempo con un espaciamiento bien definido y preferentemente equidistante.

2. Estacionarios o no estacionarios

Estacionarios: datos que fluctúan alrededor de un valor constante, con tendencia horizontal.

No estacionarios: datos con una tendencia ascendente o descendente.

3. Determinísticos o estocásticos

Determinísticos: datos que pueden ser predecidos exactamente.

Estocásticos: datos que son sólo parcialmente determinados por valores pasados, tienden a ser descritos con una distribución de probabilidad.

Uno de los problemas que intentan resolver las series de tiempo es el de la predicción; esto es, dada una serie  $\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ , el objetivo es describir el comportamiento e investigar el mecanismo generador de la serie temporal y buscar posibles patrones temporales que permitan sobrepasar la incertidumbre del futuro [22].

**El primer paso** para analizar una serie de tiempo es graficarla, ya que esto nos permite realizar una inspección visual identificando la tendencia, la estacionariedad y las variaciones irregulares. Al graficar debemos detectar lo siguiente:

1. Tendencia: representa el comportamiento predominante de la serie.

2. Variación estacional: representa un movimiento periódico de la serie de tiempo.
3. Variaciones irregulares: representan todos los tipos de movimientos de una serie de tiempo que no sea tendencia, variaciones estacionales y fluctuaciones cíclicas.
4. Datos fuera de intervalo (error craso): se refiere a puntos de la serie que se escapan de lo normal y corresponden a un comportamiento anormal del fenómeno (sin incidencias futuras) o a un error de medición. Por lo que se deben omitir o reemplazar por otro valor antes de analizar la serie.

**El segundo paso** es analizar estadísticamente los datos calculando la media, moda, mediana, la varianza, los histogramas, ... etc., para tratar de construir un modelo que explique la estructura y la evolución de una variable a lo largo del tiempo.

**El tercer paso** es la estimación y cálculo de índices o propiedades métricas y la aplicación de procedimientos gráficos que nos permitan determinar si una serie de tiempo aparentemente aleatoria puede corresponder a comportamiento caótico a partir del análisis de un sistema determinista no lineal. Estas herramientas nos permitirán estudiar el sistema que originó la serie de tiempo y su posible evolución [23].

El análisis tradicional de series de tiempo (pasos 1 y 2) tiene limitaciones cuando evaluamos sistemas biológicos tales como latidos de corazón, ya que obtenemos información limitada mediante la inspección visual del electrocardiograma y los resultados estadísticos (contrastando una serie de un sujeto saludable con otra de un sujeto con falla cardiaca) son casi idénticos; por lo que, actualmente, la tendencia de los investigadores es analizar los datos desde el punto de vista del sistema dinámico de origen, aplicando la teoría del caos y la geometría fractal para evaluar la complejidad del sistema.

## **2.2 Sistemas Dinámicos**

Un sistema dinámico es aquel que evoluciona en el tiempo ya sea en forma lineal o no lineal y puede ser: conservativo, esto es, que mantiene constante su energía,

disipativo donde la energía no se conserva y autónomo, en el cual, el campo vectorial que define al sistema dinámico no depende del tiempo.

A finales del siglo diecinueve, el matemático francés Henry Poincaré descubrió, que en un sistema cerrado, pequeños cambios en las condiciones iniciales podían dar origen a resultados diferentes e impredecibles, en contraposición con la teoría de Isaac Newton en la que los sistemas cerrados son muy ordenados y predecibles. Henry Poincaré reveló hacia finales del siglo XIX, que la alta sensibilidad a las condiciones iniciales, asociada con el concepto de caos es la esencia de un sistema no lineal. El descubrimiento de Poincaré, quedó en el olvido hasta que fue redescubierto y utilizado por el meteorólogo Edward Lorenz en 1960 en sus estudios de predicción del tiempo donde concluyó que no se puede predecir el estado del tiempo sobre periodos largos ya que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales producían diferentes comportamientos en series de tiempo meteorológicas; esto fue el inicio de la teoría del caos, herramienta muy utilizada para analizar sistemas biológicos [24].

Ahora bien, ¿cuál es la diferencia entre un sistema lineal y un sistema no lineal? En sistemas lineales, la salida ( $y$ ) está determinada por la entrada ( $x$ ) de acuerdo a una simple ecuación de la forma  $y = mx + b$ . Los sistemas lineales se distinguen por dos principios importantes que son: proporcionalidad y superposición. La proporcionalidad nos dice que la salida sostiene una relación de línea recta con la entrada. La superposición se refiere a que todos los componentes del sistema mantienen una relación individual entrada-salida [25].

Los sistemas no lineales violan los principios de proporcionalidad y superposición; cualquier ecuación, en la cual existan procesos iterativos, esto es, que el valor actual de la salida sea el siguiente valor de la entrada y donde pequeños cambios puedan tener efectos dramáticos y no esperados, no sostiene los principios de proporcionalidad y superposición.

Los sistemas biológicos exhiben un comportamiento no lineal por lo que, frecuentemente resulta difícil predecir su comportamiento frente a un estímulo dado. Existen muchos modelos matemáticos que sirven para describir el comportamiento

de sistemas valiéndose de distintas ecuaciones; sin embargo, muchos de estos modelos no se ajustan adecuadamente al comportamiento de los sistemas reales debido a que, como se mencionó, tienen dinámica no lineal. Para tratar de solucionar el problema se han desarrollado herramientas computacionales de análisis con las que podemos reconstruir el espacio-fase y obtener las trayectorias del sistema y el atractor, determinando además, índices como el exponente de Lyapunov, el exponente de Hurst, la entropía de Kolmogorov, la dimensión de correlación y gráficas de recurrencia. Todas estas técnicas están compiladas en la teoría del caos y la geometría fractal.

### **2.3 Espacio-fase**

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, se obtiene un conjunto de observaciones del proceso, estructuradas como una serie de tiempo univariada. Para obtener la información del proceso de estudio, Packard et al [26] sugieren una reconstrucción del espacio-fase (espacio matemático constituido por las variables que describen un sistema dinámico) donde cada punto del espacio-fase representa un posible estado del sistema.

La evolución en el tiempo de un sistema se representa con una trayectoria en el espacio-fase. Existen varias técnicas para desarrollarlas: una de ellas se logra graficando las diferentes variables del sistema en un gráfico de coordenadas; otra es relacionando una función contra la derivada de dicha función y otra más consiste en representar una función contra sí misma introduciendo un desfase [27].

¿Cómo podemos reconstruir el espacio-fase y los flujos en él, a partir exclusivamente de los datos  $x(t)$  medidos? En cualquier instante, la posición del sistema en el espacio-fase está dada por las coordenadas  $(x,y)$ , mientras que la serie de tiempo nos proporciona solamente los valores de  $x$  a cada instante. Si graficamos  $dx/dt$  contra  $x$  obtendremos la trayectoria del sistema en el plano fase; con esto describiremos el flujo del sistema con base exclusivamente en los datos medidos [28].

Ahora bien, dada una serie de tiempo  $x(t)$  ¿cómo podemos calcular su derivada, es decir  $dx/dt$ ? Los datos de los fenómenos que nos interesan son colectados

periódicamente (diaria, semanal, mensual, etc.) a través de la observación en campo o a través de dispositivos electrónicos vinculados a equipos de cómputo, de tal forma que las mediciones  $x(t)$  en realidad consisten de una secuencia de observaciones realizadas a intervalos discretos de tiempo  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Existen varios métodos [29] para obtener aproximaciones a la derivada de una función a partir de una serie de valores, las características de estos métodos son: una aproximación polinomial, deducción de fórmulas y calcular la longitud de paso que minimice los errores.

Utilizando una de las definiciones posibles de derivada de una función  $x$  en un punto  $t$  observamos lo siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (1)$$

La definición anterior se puede extender para el cálculo de la derivada de la serie de tiempo observada:

$$\frac{dx_t}{dt} = \frac{x_{(t+h)} - x_{(t)}}{h} \quad (2)$$

La aproximación anterior llamada de diferencias hacia delante es la expresión común dada en cálculo para la derivada, una mejor aproximación es la de diferencias centradas en la cual se combinan ciertas series de Taylor con las que podemos obtener:

$$\frac{dx_t}{dt} = \frac{x_{(t+h)} - x_{(t-h)}}{2h} \quad (3)$$

y reconstruir en el espacio-fase toda la información relevante acerca de la dinámica del fenómeno en estudio con una serie de tiempo, ya que si contamos con una medición  $x(t)$  y calculamos su derivada con respecto al tiempo es decir  $dx(t)/dt$  tendremos tanto una medición directa de  $x$  como un valor calculado de  $f(x,y)$ .

La segunda técnica es la representación en el espacio-fase introduciendo un retardo, normalmente se utiliza el tiempo como referencia de la evolución del estado del sistema y un espacio vectorial de dos dimensiones que describe la trayectoria. Cada punto de este espacio vectorial representa el estado del sistema en un instante y

está formado por dos coordenadas: la magnitud y su primera derivada respecto al tiempo [30].

Si definimos [31] un vector  $x$  que representa un punto en el espacio-fase como  $x = (x, \Delta x)$  donde  $x$  puede ser una muestra de tensión o intensidad y  $\Delta x$  la diferencia entre dos muestras sucesivas. Entonces definimos  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^2$  que representa un estado instantáneo del espacio-fase del sistema. Si se toman  $N+1$  muestras de la señal a frecuencia de muestreo constante es posible definir  $x_i$  con  $i=1,2,\dots,N$  donde cada índice representa un estado instantáneo del sistema tal como se muestra en la figura 2.1

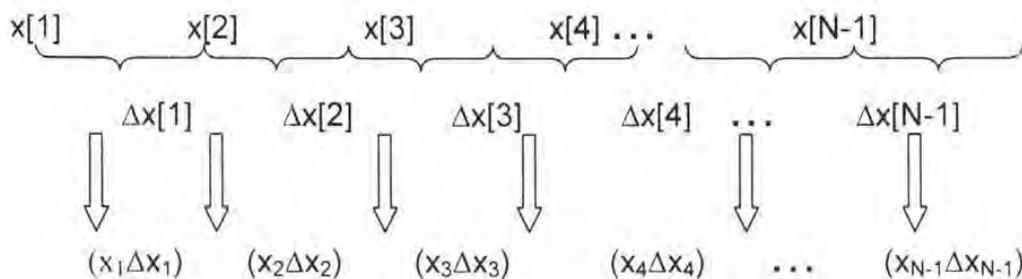


Figura 2.1 Procedimiento para determinar los vectores de estado del sistema

La función de información mutua puede ser usada, según Fraser y Swinney [32], para determinar el valor óptimo del retardo para la reconstrucción del espacio-fase. Encontrar el tiempo óptimo de retardo es muy difícil; si es muy corto, las coordenadas usadas para cada vector reconstruido podrían no ser lo suficientemente independientes para transportar nueva información acerca de la trayectoria del sistema en el espacio; si el tiempo es muy largo las coordenadas podrían llegar a ser aleatorias con respecto a cada una de las otras.

Lo ideal es que, dado el estado del sistema  $x(t)$ , nos proporcione un máximo de información con  $x(t+T)$ ; donde el primer mínimo, ver figura 2.2, podría ser considerado como el tiempo de retardo ideal. Existen algunos caminos para calcular la distancia entre dos vectores  $N$ -dimensionales: distancia Euclidiana, distancia

mínima y distancia máxima. El más utilizado es el de distancia Euclidiana. Si la dimensión es 1 los tres métodos producen el mismo resultado.

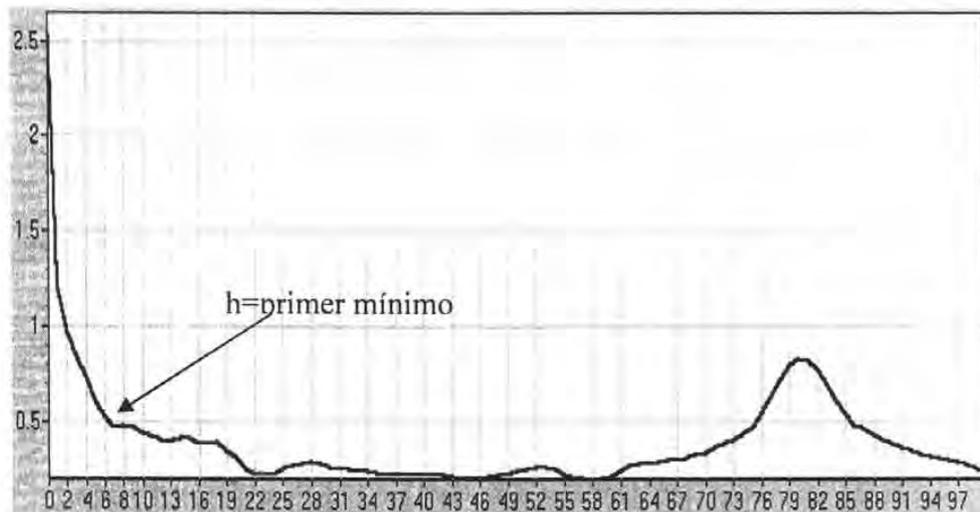


Figura 2.2 Determinación del  $h$  óptimo con información mutua

Esta técnica de representar una serie de tiempo medida u observada como una sucesión de puntos en un espacio de  $m$  dimensiones se conoce como un incrustamiento de rezagos en el tiempo. El Teorema de incrustamiento o inmersión de Takens [26][33] establece que la dinámica reconstruida del sistema dinámico es geoméricamente similar a la dinámica original tanto para sistemas dinámicos continuos como para sistemas dinámicos discretos. La sucesión de vectores creados al incrustar una serie de tiempo se conoce como la trayectoria reconstruida,  $m$  se conoce como la dimensión de incrustamiento y  $h$  como el rezago de incrustamiento. El espacio-fase está compuesto por tantas dimensiones (o variables) como se necesite para describir el movimiento de un sistema.

## 2.4 Atractores

En matemáticas decimos [34] que un punto  $\alpha$  es un atractor para la función  $f(x)$  si existe una vecindad alrededor de  $\alpha$  tal que las órbitas de los puntos en la vecindad convergen a  $\alpha$ . En el análisis de sistemas dinámicos se llama atractor a la estructura que se genera en el espacio-fase al evolucionar en el tiempo el sistema dinámico generado por las  $n$  variables del proceso. Según Moon [35] un atractor es un

conjunto de puntos o un subespacio en el espacio de estados hacia el cual una historia de tiempo se aproxima asintóticamente.

Los siguientes son ejemplos [1][24] clásicos de atractores:

- **Atractor Puntual:** Este atractor es el resultado de un sistema cuyas variables tienden a un valor estable. Un ejemplo de atractor de punto fijo podría ser el péndulo real, el cual tiene fricciones y resistencia del aire por lo que termina parándose, la dinámica del sistema queda representada gráficamente en el espacio-fase bidimensional por una espiral que tras varios giros muere en el origen de coordenadas: velocidad y posición nulas. Como el péndulo está limitado a oscilar de un lado al otro en una sola dirección se dice que tiene un grado de libertad (figura 2.3).

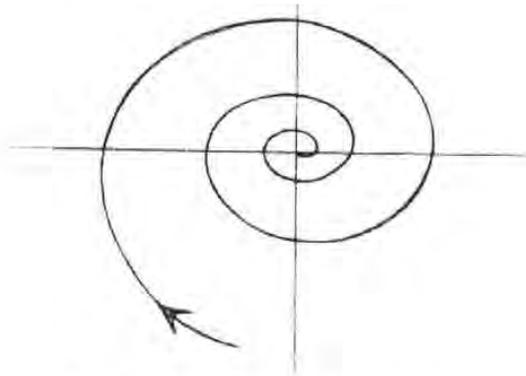


Figura 2.3 Atractor puntual

- **Atractor de Ciclo Límite:** Este atractor es el resultado de un sistema periódico donde las trayectorias que describen las variables son siempre iguales, siendo predecible su comportamiento en el tiempo. Un ejemplo de atractor de ciclo límite podría ser el péndulo forzado, o sea un reloj con pila eléctrica con la que se compensa la pérdida de energía. El atractor en este caso es una elipse con brazos espirales en el exterior y en el interior que terminan en un bucle cerrado hacia el cual convergen las trayectorias vecinas (figura 2.4).

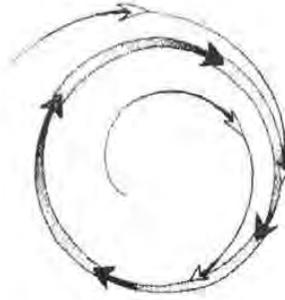


Figura 2.4 Atractor de ciclo límite

- **Atractor Toroidal:** Cuando el sistema es cuasiperiódico genera un atractor similar al del ciclo límite, pero las trayectorias no siempre pasan por los mismos puntos, apreciándose el comportamiento no uniforme. Un ejemplo de atractor toroidal sería un circuito eléctrico donde tenemos dos ciclos límites (A y B) separados, que interactúan entre sí. Si ignoramos el ciclo A, el movimiento del ciclo B tendrá un atractor de ciclo límite simple. Asimismo, si ignoramos el ciclo B, el movimiento de A tendrá un atractor de ciclo límite simple. Pero, si los dos interactúan, el tamaño del espacio-fase aumenta y los ciclos límite antes independientes se entrelazan. Es como si el ciclo A fuera impulsado en un círculo por el ciclo B. El resultado de que un ciclo impulse a otro en círculos es la generación de una figura con forma de rosquilla llamada atractor toroidal; el cual es una estructura más compleja y evolucionada que los atractores anteriores (figura 2.5).

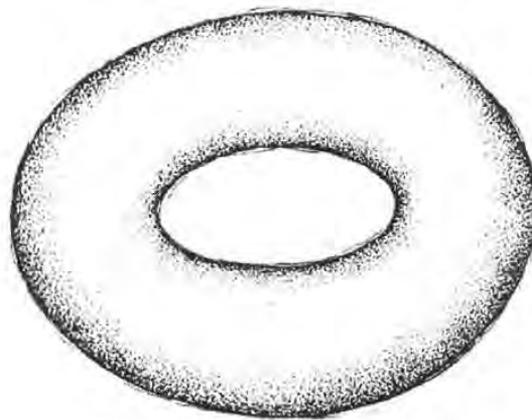


Figura 2.5 Atractor toroidal

- **Atractor Extraño:** En 1987 Moon [35] lo definió como el atractor característico de los sistemas con comportamiento caótico; pero, en 1991 Brindley [36] llamó la atención sobre el hecho de que “aunque por algún tiempo los conceptos de atractor extraño y comportamiento caótico eran vistos como sinónimos, se ha reconocido la existencia de atractores extraños no caóticos en osciladores forzados no lineales cuasiperiódicos”.

El término extraño se refiere a la estructura del atractor y la palabra caótico se refiere al comportamiento de las trayectorias sobre el atractor; el atractor es caótico si las órbitas cercanas al mismo divergen con el tiempo [37].

En la figura 2.6 se presentan dos atractores extraños, el primero es de un paciente con fibrilación auricular y el segundo es de un paciente con fibrilación supraventricular.

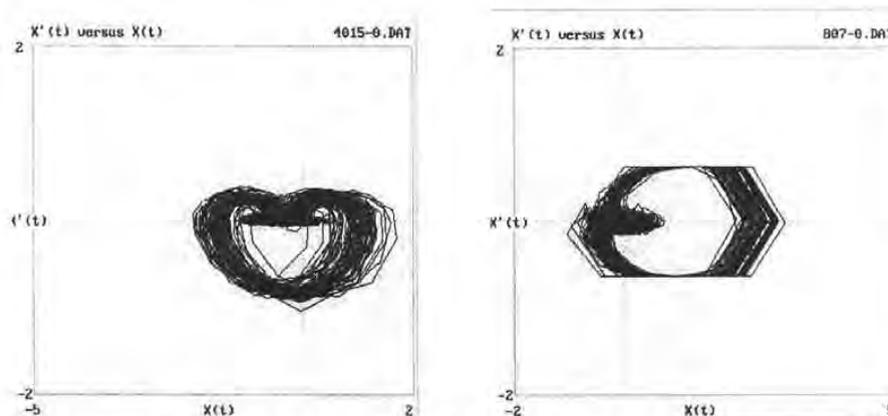


Figura 2.6 Atractores del ciclo cardiaco

## 2.5 Exponente de Lyapunov

Un sistema es estable, si cuando se le produce una perturbación, su trayectoria a través del espacio de estados cambia sólo un poco. El matemático ruso A. M. Lyapunov encontró [38] que se puede usar un simple número para representar el cambio causado por una perturbación. Dividió el tamaño de la perturbación en un instante dado por su tamaño en un momento anterior. Entonces, realizó la misma operación a varios intervalos y promedió los resultados; esta cantidad se conoce con el nombre de exponente de Lyapunov, el cual describe cuanto cambiará, en

promedio, una perturbación. Si el exponente de Lyapunov es menor de cero las perturbaciones mueren a la salida y el sistema es estable, si es mayor de cero se desarrollan las perturbaciones y el sistema es inestable. Todos los sistemas caóticos tienen un exponente de Lyapunov mayor de cero, de aquí que sean siempre inestables.

Considerando dos puntos alineados en la dirección  $\alpha$  y separados por una distancia  $L_\alpha(t)$  en un tiempo  $t$ , si denotamos por  $L_\alpha(t+\tau)$  la distancia en un tiempo  $t+\tau$ , el exponente de Lyapunov está definido por la proporción de expansión media:

$$\lambda_\alpha \equiv \frac{1}{\tau} \log \frac{L_\alpha(t+\tau)}{L_\alpha(t)} \quad (4)$$

si  $\lambda_\alpha$  es positivo los dos puntos se separan exponencialmente;  $\alpha$  especifica la dirección y necesitamos tantos  $\alpha$  como grados de libertad tenga el sistema [39]. Esto es, en un espacio-fase  $d$ -dimensional, necesitamos  $d$  exponentes de Lyapunov  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ . La dimensión de Lyapunov o fractal del sistema está dada por la fórmula:

$$D = j - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d}{\lambda_d} \quad (5)$$

donde se colocan los  $\lambda$  en orden de magnitud ascendente y  $d$  es el entero más pequeño, tal que se cumpla la siguiente condición:

$$d \equiv \min \left\{ n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0 \right\} \quad \text{donde } n \in \mathbf{N} \quad (6)$$

Los exponentes positivos se asocian con una alta sensibilidad a las condiciones iniciales (caos o divergencia), mientras que los exponentes negativos miden la convergencia exponencial de las trayectorias sobre el atractor.

Las magnitudes de los exponentes de Lyapunov cuantifican la dinámica del atractor desde el punto de vista de la información en bits. Dichos exponentes miden la rapidez con la cual en un proceso se crea o destruye información, expresando la misma en bits de información por unidad de tiempo. Su recíproco,  $\frac{1}{\lambda}$ , es el límite de predictibilidad de un sistema [33].

El exponente de Lyapunov mide cómo los puntos vecinos de cualquier sistema dinámico se separan unos de otros, mide cómo se descomponen las correlaciones del sistema y cuán rápidamente se difunden los efectos de una pequeña perturbación.

Los exponentes de Lyapunov nos indican la razón de expansión ( $\lambda > 0$ ) o de contracción ( $\lambda < 0$ ) que sufre una figura de determinada señal y de esta manera se puede analizar su comportamiento. Por lo anterior, es difícil calcular exponentes de Lyapunov negativos, ya que el transitorio debido a ellos desaparece rápidamente, mientras que el debido a los positivos es más duradero. Por esta razón, se puede calcular el máximo exponente de Lyapunov con cierto margen de error tolerable; utilizándose para estimar la sensibilidad de un fenómeno a las condiciones iniciales [40].

## 2.6 Entropía

El concepto de entropía apareció en la física introducido por el físico alemán Rudolf Clausius durante el siglo XIX y corresponde a una medida del desorden que presentan las moléculas de un gas. En matemáticas [41] se usa una definición más abstracta basada en la información; dada una variable aleatoria discreta  $X$  que tiene una determinada distribución de probabilidades  $p(x)$ , la entropía de  $X$  es una medida de la información que recibimos y está dada por:

$$H(X) = -\sum_{x \in X} p(x) \log_b p(x) = \sum_{x \in X} p(x) \log_b \frac{1}{p(x)} = E \left[ \log_b \frac{1}{p(x)} \right] \quad (7)$$

la base del logaritmo ( $b$ ) es la unidad en que se mide la información.

La entropía conjunta de dos variables aleatorias está dada por:

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log_2 p(x, y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log_2 \frac{1}{p(x, y)} = \\ &= -E[\log_2 p(x, y)] \end{aligned} \quad (8)$$

La información mutua entre X y Y,  $I(X;Y)$ , es la medida de la cantidad de información que una variable aleatoria contiene sobre la otra y se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 I(X;Y) &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} = D(p(x,y) // p(x)p(y)) = \\
 &= E_{p(x,y)} \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Ahora bien, la relación entre información mutua y entropía se deduce de la siguiente manera:

Dado que

$$p(x,y) = p(y)p\left(\frac{x}{y}\right) \tag{10}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 I(X;Y) &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 \frac{p(y)p\left(\frac{x}{y}\right)}{p(x)p(y)} = \\
 &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 p\left(\frac{x}{y}\right) - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 p(x) = \\
 &= - \sum_{x \in X} p(x) \log_2 p(x) - \left[ - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 p\left(\frac{x}{y}\right) \right] = H(X) - H\left(\frac{X}{Y}\right)
 \end{aligned} \tag{11}$$

por lo tanto

$$I(X;Y) = I(Y;X) = H(X) - H\left(\frac{X}{Y}\right) = H(Y) - H\left(\frac{Y}{X}\right) \tag{12}$$

Por simetría se obtiene:

$$I(X;Y) = H(Y) - H\left(\frac{Y}{X}\right) \tag{13}$$

La información mutua y la entropía [42] definen la información aportada por una variable aleatoria sobre otra, el conocimiento de Y reduce la incertidumbre sobre X. Partiendo de la entropía de la información de Shannon, Kolmogorov-Sinai elaboraron el concepto de entropía generada por unidad de tiempo, la cual demostraron que

podía utilizarse para detectar el caos. La entropía de Kolmogorov-Sinai permite predecir:

1. El nivel de incertidumbre en los siguientes  $n$  eventos.
2. La medida en que se pierde la precisión en las predicciones en función de cómo se incrementa el horizonte de predicción.
3. La rapidez con que se pierde información sobre un sistema.

La entropía de Kolmogorov-Sinai a semejanza con la entropía termodinámica, mide la pérdida de información que experimenta el sistema en su evolución y se expresa en bits/s. En sistemas deterministas no hay pérdida de información, en consecuencia la entropía es nula, mientras que en sistemas aleatorios se pierde toda la información por lo que la entropía tiende a infinito y en sistemas caóticos toma valores altos pero finitos.

## **2.7 Exponente de Hurst**

Para conocer la persistencia de un sistema, esto es, la autosemejanza de una serie consigo misma al evolucionar en el tiempo; debemos calcular el exponente de Hurst. Harold E. Hurst estudió series temporales relacionadas con el caudal del río Nilo y los problemas relacionados con el almacenamiento de agua (figura 2.7). Con este motivo, inventó un método estadístico que describió con todo detalle en su libro "Long-Term Storage: An Experimental Study", 1965; Hurst investigó muchos fenómenos naturales y utilizó una relación adimensional  $R/S$  donde  $R$  indica el rango (la diferencia entre el valor de la descarga máxima acumulada de un lago y la mínima, a lo largo de un periodo de estudio) y  $S$  la desviación típica de los valores observados de las descargas [33].

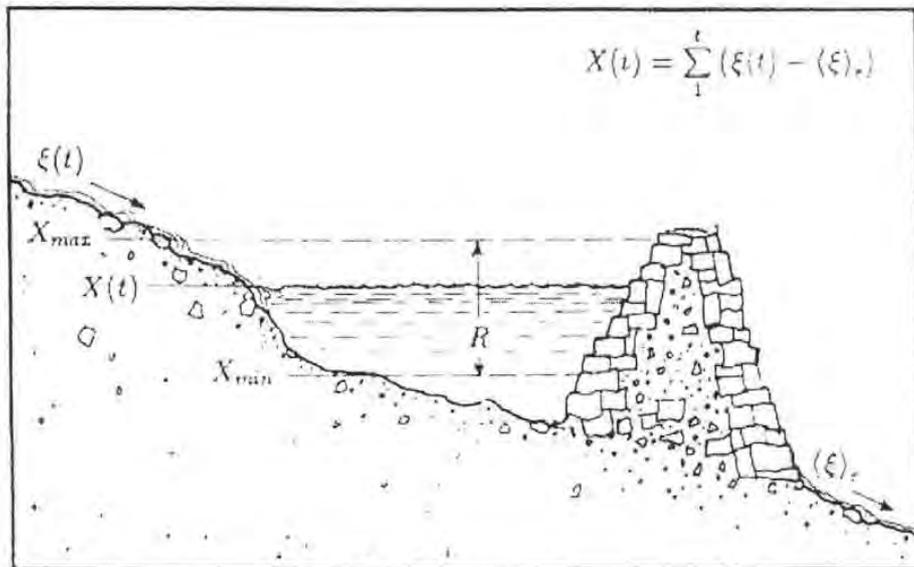


Figura 2.7 Diagrama de Hurst

Para calcular R debemos obtener los valores de:

$$\xi_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t) \quad (14)$$

donde  $\xi_{\tau}$  es el flujo promedio en  $\tau$  años

$$X(t) = \sum_{i=1}^t \{ \xi(i) - \xi_{\tau} \} \quad (15)$$

que representa la desviación acumulada durante un periodo t

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t) \quad (16)$$

que significa el rango

$$S = \left( \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{ \xi(t) - \xi_{\tau} \}^2 \right)^{1/2} \quad (17)$$

que representa la desviación acumulada

$$R/S = (\tau_2)^H \quad (18)$$

Donde R/S es el rango reescalado y H el exponente de Hurst.

Los pasos para obtener el exponente de Hurst son los siguientes:

- 📖 Descomponer la serie en un conjunto de intervalos de una amplitud temporal determinada,  $\tau_H$ .
- 📖 Calcular la media para cada intervalo y las desviaciones acumuladas de esta media.
- 📖 Determinar la amplitud normalizada (R/S) arriba descrita.
- 📖 A cada valor de  $\tau_H$  se asigna el valor promedio de R/S sobre todos los subintervalos que determina.
- 📖 Se elige otro  $\tau_H$  y se procede de modo semejante, de modo que se obtiene un conjunto de valores  $\tau_H$  y sus R/S asociados.

El cálculo práctico puede hacerse graficando  $\log(R/S)_{\tau_H}$  vs  $\log(\tau_H)$  donde la pendiente de la recta obtenida es el exponente de Hurst. Valores de  $0.5 < H < 1$  son indicativos de persistencia (un periodo de crecimiento es seguido de otro análogo), mientras que los valores de  $0 < H < 0.5$  corresponden a un comportamiento antipersistente (un periodo de crecimiento es seguido por otro de decrecimiento), las curvas tienden a oscilar de modo errático se trata de un sistema más complejo; un valor de  $H = 0.5$  indica aleatoriedad de la señal. Podemos decir que el exponente de Hurst es una medida de la complejidad del sistema y de la información que conserva al cabo de cierto tiempo.

## 2.8 Dimensiones

La geometría clásica, a pesar de su gran utilidad, tiene limitaciones cuando se pretende medir estructuras naturales. Para medir la superficie de una piedra, trataríamos de aproximarla a una esfera o a un cubo; de igual manera, si deseamos saber cual es la superficie de absorción del intestino, la medida cambiará según la resolución que se utilice para hacerlo, ya que el intestino presenta pliegues. Una línea irregular que tiende a llenar un espacio bidimensional tiene una dimensión fraccionaria entre 1 y 2, así como un plano que se pliega tiende a llenar un espacio tridimensional teniendo una dimensión fraccionaria entre 2 y 3. Mandelbrot [43] bautizó esta dimensión fraccionaria con el nombre de fractal; una forma fractal tiene una característica básica que contribuye a reconocerla y que se llama de

autosemejanza, lo cual quiere decir que dicha forma consiste en un motivo geométrico que se repite a sí mismo a cualquier escala que se le observe (figura 2.8). A pesar de ser muy complejos en virtud de su detalle infinito, los fractales pueden ser generados por procedimientos relativamente simples; la matemática sueca H. von Koch propuso en 1904, una curva que cumple los requisitos para ser un fractal y que se construye sencillamente: se parte de un segmento de recta de longitud 1 y en su tercio medio se construye un triángulo equilátero. La longitud de la línea es ahora  $4/3$ , si se repite la operación se obtiene la figura con una longitud  $(4/3)^2$  y reiterándola infinitas veces se llega a una forma fractal de longitud infinita y cuyos extremos están separados por la misma distancia que el segmento inicial de longitud 1 [39].

Un atractor, como forma geométrica, no puede estar sobre una superficie, ya que de ser así llegaría un momento en que las trayectorias, al no ser paralelas, forzosamente se cruzarían. Este atractor debe tener más de dos dimensiones, que son las que corresponden a una superficie y al mismo tiempo menos de tres dimensiones porque no puede ocupar la totalidad del espacio-fase; luego entonces un atractor extraño es una figura geométrica de dimensión mayor que dos y menor que tres, o sea una situación intermedia entre una superficie y un volumen. Para concebirla es necesario salir de la geometría de Euclides donde las dimensiones son números enteros, para dar cabida a formas irregulares o fragmentadas que puedan ser caracterizadas con dimensiones que no sean enteros. Muchos sistemas tienen características fractales: en el sistema circulatorio, la repetida ramificación de las venas y arterias puede parecer caótica pero, si se ve detenidamente, se nota que la misma y compleja ramificación se repite en vasos sanguíneos cada vez más pequeños hasta llegar a los capilares; en la figura 2.9 vemos un proceso fractal en el latido del corazón encontrado por Goldberger A.L. [44], en el cual se aprecia la autosemejanza a cualquier escala. De esta manera, podemos decir que la dimensión fractal es un índice que permite cuantificar mejor las características geométricas de los objetos.

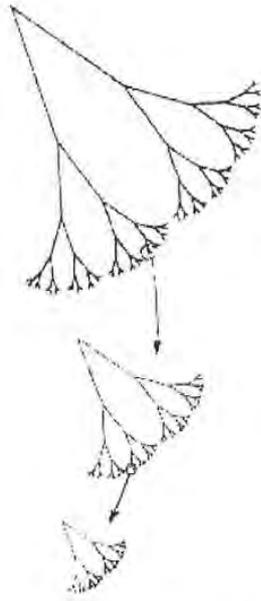


Figura 2.8 Autosemejanza

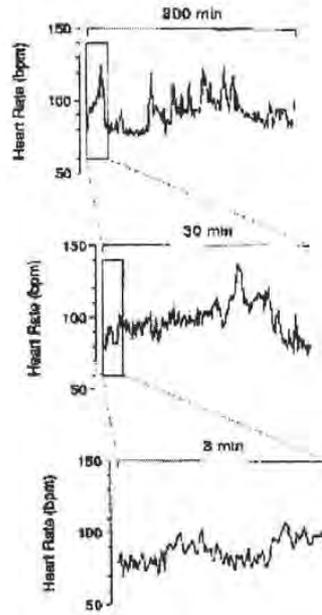


Figura 2.9 Proceso fractal

- **Dimensión de similitud**

La dimensión de similitud no está restringida a enteros; cuando una forma está compuesta de  $b$  formas similares de tamaño  $1/a$ , la dimensión de similitud [28] para la forma está dada por:

$$D_s = \frac{\log b}{\log a} \quad (19)$$

La dimensión de similitud no está definida para formas que no tienen una similitud estricta; para estos casos se utiliza la dimensión de Hausdorff.

- **Dimensión de Hausdorff**

Si tenemos los números reales  $D > 0$  y  $\varepsilon > 0$  y cubrimos un conjunto  $E$  con esferas de diámetro más pequeño que  $\varepsilon$ , denotando los radios de las esferas por  $r_1, r_2, \dots, r_k$  la dimensión de Hausdorff está dada por:

$$M_D(E) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \sum_k r_k^D \quad (20)$$

La dimensión de Hausdorff para el conjunto  $E$  está definida por  $D_H$

- **Dimensión de capacidad**

La dimensión de capacidad es una dimensión fraccional introducida por Kolmogorov, parecida a la dimensión Hausdorff en cuanto a la idea del recubrimiento.

Si consideramos una forma como un conjunto cerrado en un espacio euclidiano d-dimensional y cubrimos el conjunto con esferas d-dimensionales de radio  $1/\varepsilon$ , la dimensión de capacidad  $D_c$  estará dada por:

$$D_c \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{donde } N(\varepsilon) \text{ es el número mínimo de esferas} \quad (21)$$

Esta definición parece muy diferente de la de Hausdorff pero tienen una relación estrecha; si consideramos un recubrimiento eficiente, la medida D-dimensional de la forma es estimada como  $N(\varepsilon)\varepsilon^D$ ; para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño es equivalente a la siguiente relación:

$$N(\varepsilon) \propto \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{D_c} \quad (22)$$

En el límite de  $\varepsilon \rightarrow 0$  la medida D-dimensional diverge si D es más pequeño que  $D_c$  y converge si D es más grande que  $D_c$ . De aquí que la definición de dimensión de capacidad podría parecer una versión especial de la dimensión de Hausdorff con la restricción de que los radios de las esferas son los mismos. La dimensión de capacidad a veces coincide con la dimensión de Hausdorff pero algunas veces difiere por lo que tenemos la siguiente relación para cualquier forma:

$$D_c \geq D_H \quad (23)$$

- **Dimensión fractal**

Las dimensiones mencionadas anteriormente son rigurosas, sin embargo, están definidas en el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  y longitud cero y se utilizan en formas geométricas básicas con características de longitud tales como círculos, segmentos de línea, cuadrados y cubos; sin embargo, para determinar la dimensión fractal de espacios bidimensionales o tridimensionales se utiliza la siguiente ecuación:

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (24)$$

Donde  $N(r)$  es el número total de segmentos y D es la dimensión fractal.

- **Dimensión de correlación**

La dimensión de correlación es un tipo de dimensión probabilística, la cual depende del refinado del recubrimiento con  $N(\varepsilon)$  elementos de volumen (esferas, cubos, etc.) de diámetro  $r$ , sobre la figura (señal, curva característica, etc.) que describe el comportamiento de un sistema, y es igual a:

$$d_c := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r} \quad (25)$$

donde  $C(r)$  es la correlación dada por

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} H(\xi_{i,j}) \quad (26)$$

como una función de la distancia entre dos puntos del espacio representado en la figura 2.1 y la función de Heaviside esta dada por:

$$H(\xi_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \left| r - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\| \leq \varepsilon \right. \\ \\ 1 & \Leftrightarrow \left| r - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\| > \varepsilon \right. \end{cases} \quad (27)$$

donde  $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathfrak{R}$

Para sistemas no lineales la dimensión de correlación no necesariamente es un valor entero. Con series de tiempo, la dimensión de correlación se calcula como la pendiente de la región más lineal de  $\ln C(r)$  vs  $\ln(r)$ , debido a que el hecho de tener una cantidad finita de datos distorsiona el cálculo de  $d_c$  para valores extremos de  $r$  [45].

En general, para calcular la integral de correlación de un conjunto de puntos, se deberá utilizar a cada uno de los puntos como de referencia y se deberá de contar cuantos de los otros puntos se encuentran a una distancia  $r$ , lo cual sugiere que la integral de correlación de un conjunto de puntos dispersos dentro de un volumen  $d$ -dimensional deberá ser proporcional a  $r^{d_c}$ , es decir

$$C(r) = Ar^{d_c} \quad \text{donde } A \text{ es una constante de proporcionalidad} \quad (28)$$

o bien,  $C(r) \approx r^{d_c}$

Si tomamos el logaritmo de ambos lados obtendremos:

$$\log C(r) = d_c \log(r) + \text{constante} \quad (29)$$

Por lo tanto, para determinar el valor de  $d_c$  [46], conocido como dimensión de correlación, simplemente se deberá graficar  $C(r)$  contra  $r$ , empleando escala logarítmica, calculando la pendiente de las curvas resultantes para varios valores de  $r$ . La ecuación (28) también se conoce como regla de escalamiento. En la figura 2.10 se muestra la dimensión de correlación de los latidos de un corazón con fibrilación supraventricular, normal y con fibrilación auricular respectivamente.

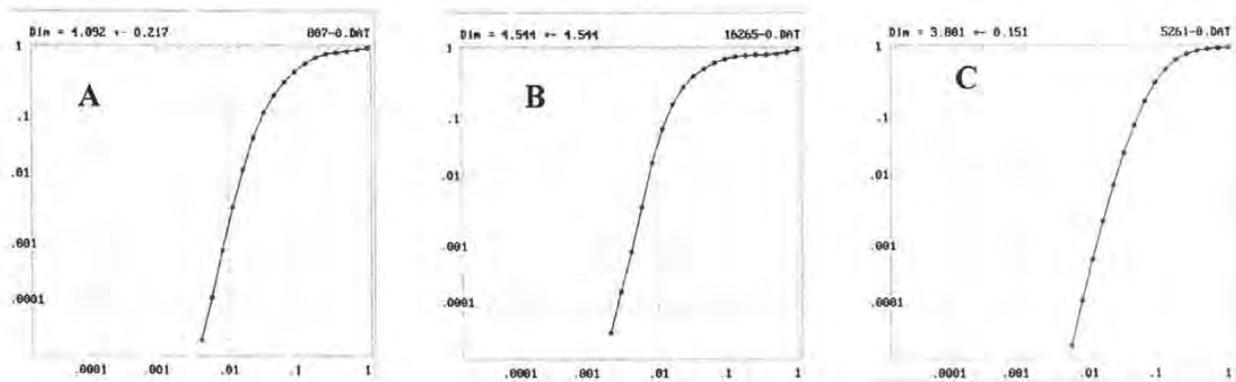


Figura 2.10 Dimensión de correlación

Las técnicas arriba descritas integran el marco teórico para el análisis de sistemas dinámicos no lineales, el cual se utilizó en el análisis de los resultados obtenidos a partir de las 30 series de tiempo de ECG y que se presentan en el capítulo IV.

### 3.1 Potenciales Bioeléctricos

Los potenciales bioeléctricos son voltajes iónicos producidos como resultado de la actividad electroquímica de ciertos tipos especiales de células, denominadas excitables (nerviosas, musculares y algunas glándulas). Su registro requiere del empleo de transductores capaces de convertir los flujos iónicos en corrientes eléctricas que proporcionen información complementaria para el diagnóstico y tratamiento médico.

La célula está formada por una membrana celular, un citoplasma que contiene diversos organelos y un núcleo central. La membrana se comporta como un capacitor en combinación con una resistencia (figura 3.1) y además trabaja como barrera selectiva para las diferentes sustancias químicas de los organelos de la célula permitiendo el paso a través de ella, de los iones pero no de las partículas aniónicas y proteicas [47].

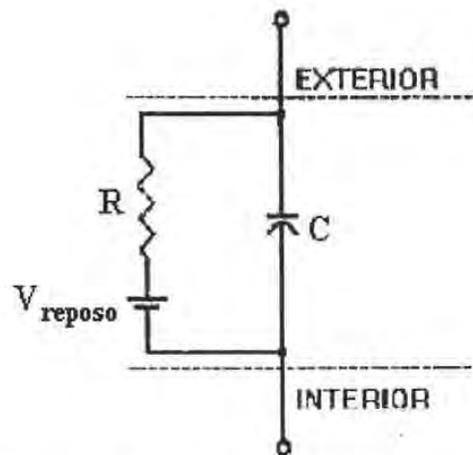


Figura 3.1 Análogo eléctrico de la membrana

Las sustancias atraviesan la membrana celular a través de dos procesos: la difusión y el transporte activo. La difusión es el movimiento continuo y al azar de las moléculas de las sustancias causado por los movimientos cinéticos de la materia y el

transporte activo es el movimiento de sustancias producido por procesos químicos que proporcionan la energía necesaria para originar este movimiento, el cual depende de procesos enzimáticos ocurridos en la membrana. Durante este proceso se desplazan moléculas contra un gradiente de concentración, de presión o eléctrico. Existe un mecanismo de transporte activo de sodio y potasio en todas las células; el cual es más eficaz para transportar sodio que potasio de manera que siempre mantiene un gradiente de concentración a través de la membrana celular, a pesar de que existe movimiento neto de sodio hacia el interior de la célula y de potasio hacia la parte externa de la misma.

La diferencia de concentración iónica determinada por el transporte activo y por la permeabilidad selectiva de la membrana generan el potencial de membrana, el potencial umbral y el potencial de acción.

#### ◆ Potencial de Membrana

El potencial de membrana o potencial de reposo (figura 3.2) es la diferencia de potencial entre uno y otro lado de la membrana, debida a la distribución asimétrica de las cargas eléctricas, la cual a su vez es el resultado de la diferencia de concentración iónica determinada por el transporte activo y por la permeabilidad selectiva de la membrana.

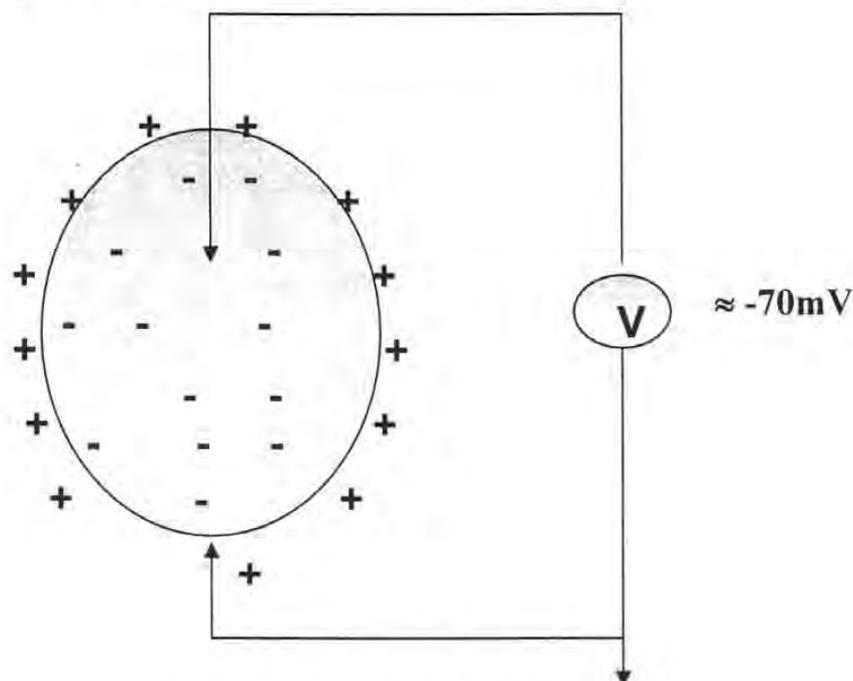


Figura 3.2 Potencial de membrana

Al acumularse un exceso de iones negativos dentro de la membrana celular y un número igual de iones positivos inmediatamente fuera de la misma, se desarrolla un potencial de membrana y cuando el flujo neto de iones es cero, es decir cuando la membrana se encuentra en reposo, se dice que está polarizada.

Se ha comprobado que el potencial de membrana en reposo varía entre  $-70$  a  $-95$  mV. Las cargas iónicas positivas y negativas están dispuestas contra la membrana revistiéndola, lo cual causa un efecto semejante al que ocurre cuando se carga un condensador eléctrico donde la matriz lipídica de la célula es el dieléctrico. Como la capacidad de un condensador para conservar cargas eléctricas es inversamente proporcional al espesor de la membrana (de 7 a 15 nm), la capacitancia de la membrana celular es muy grande para su superficie, aproximadamente de  $1\mu\text{ F/cm}^2$ .

#### ◆ Potencial Umbral

El potencial umbral es el valor del potencial transmembrana a partir del cual se genera un potencial de acción. En la figura 3.3 se observa que las células automáticas o de respuesta lenta poseen un potencial de reposo inestable que de forma automática va despolarizándose y al alcanzar el potencial umbral generan un potencial de acción que va a transmitirse a las células vecinas. Por el contrario, las células de respuesta rápida o de trabajo poseen un potencial de reposo estable, por lo que necesitan un estímulo externo que lo sitúe en el potencial umbral para, posteriormente, generar un potencial de acción que hará contraerse al miocito.

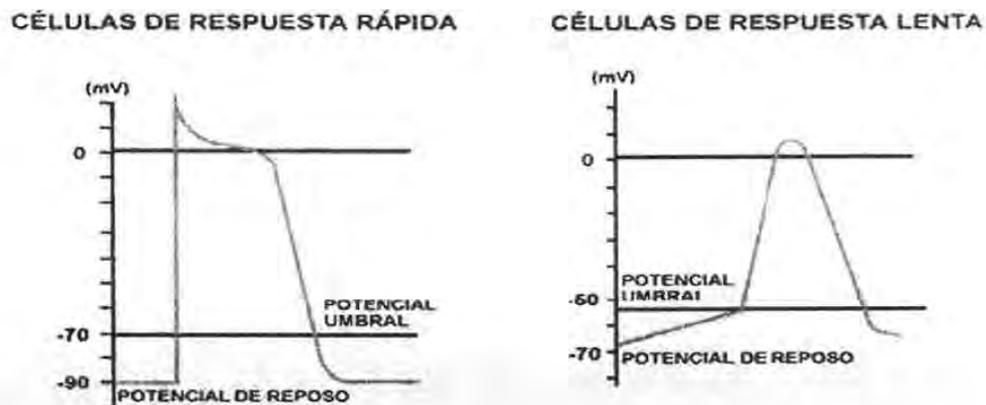


Figura 3.3 Tipos de células

La despolarización parcial de una membrana excitable inicia un potencial de acción sólo cuando la fuerza del estímulo es suficiente para despolarizar el potencial de membrana hasta un nivel crítico, denominado potencial de umbral (figura 3.4).

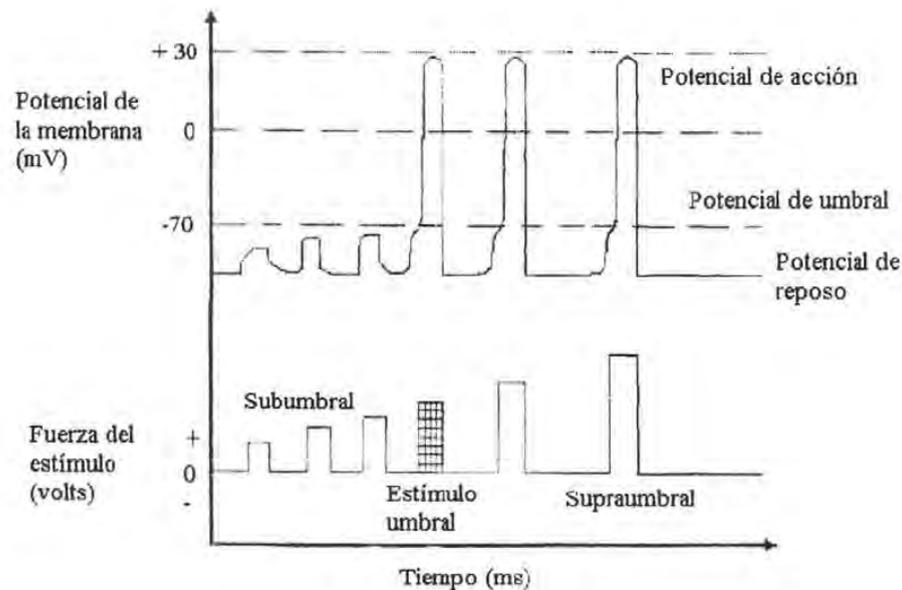


Figura 3.4 Potenciales

#### ◆ Potencial de Acción

Las células vivas se caracterizan por responder a estímulos o a cambios en el medio; esta capacidad se llama excitabilidad. Se encuentra especialmente desarrollada en las células nerviosas o neuronas y en las células musculares. Se produce en la membrana celular, y consiste en una serie de cambios térmicos, iónicos, metabólicos, eléctricos que se propagan a lo largo de toda ella. El potencial de acción proviene de esta serie de cambios rápidos que se producen en el potencial de membrana de las células excitables teniendo la propiedad de extenderse por toda la superficie celular; cuando las células nerviosas o musculares son excitadas, el potencial de reposo o membrana sufre una alteración rápida la cual dura una pequeña fracción de segundo (aproximadamente  $1/1000$  s) para regresar de inmediato a su valor de reposo.

El potencial de acción se presenta en dos etapas separadas, ver figura 3.5:

1. **Despolarización.**- La despolarización de la membrana celular ocurre cuando la célula es excitada, debido a que la permeabilidad de la membrana para los iones  $\text{Na}^+$  aumenta bruscamente. De esta manera, muchos iones de  $\text{Na}^+$  penetran en el interior de la fibra llevando consigo suficientes cargas positivas para causar la desaparición total del potencial normal de reposo. El estado positivo dentro de la fibra recibe el nombre de potencial invertido.
2. **Repolarización.**- Casi inmediatamente después de producida la despolarización, los poros de la membrana vuelven a ser impermeables a los iones de  $\text{Na}^+$  y se eleva bruscamente la permeabilidad de la membrana a los iones de  $\text{K}^+$ . Esto provoca el movimiento de cargas positivas desde el interior de la membrana hacia el exterior, lo que restaura la carga negativa en el interior de la misma. En consecuencia, el potencial invertido desaparece y se reestablece el potencial normal de membrana en reposo.

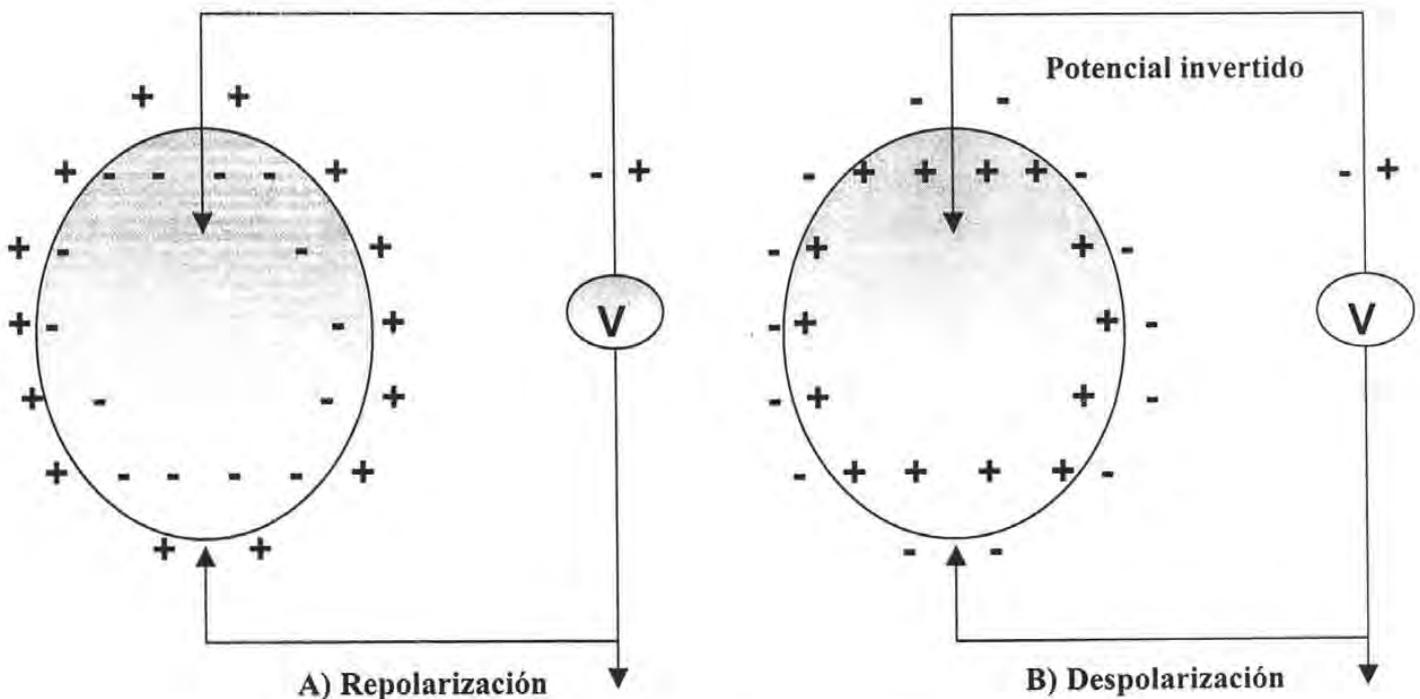


Figura 3.5 Etapas del potencial de acción

La despolarización parcial de una membrana excitable inicia un potencial de acción, sólo cuando la fuerza del estímulo umbral es suficiente para despolarizar el potencial de membrana hasta un nivel crítico llamado potencial de umbral. Los estímulos más débiles que éste, se denominan estímulos subumbrales y no inician un potencial de acción; los estímulos supraumbrales provocan potenciales de acción, ya que son de magnitud superior que los estímulos umbral. Para identificar o distinguir la naturaleza del estímulo, se considera el número de potenciales de acción transmitidos por unidad de tiempo, o sea la frecuencia de los potenciales de acción no su tamaño (figura 3.4).

La rapidez con la que se lleva a cabo el potencial de acción depende del valor de la resistencia en el modelo, ya que el capacitor puede tardar en cargarse; la resistencia interna disminuye al aumentar el diámetro de la fibra. Antes de desencadenarse el potencial de acción se tienen cambios en las corrientes debidas a la despolarización y no a la conductancia del  $\text{Na}^+$  y  $\text{K}^+$ ; el potencial de acción se desencadena antes de que exista cambio en la conductancia al  $\text{Na}^+$ . En el transcurso del potencial de acción existen variaciones en el valor de la resistencia  $R$ , sin cambiar la magnitud de la capacitancia  $C$  (figura 3.6).

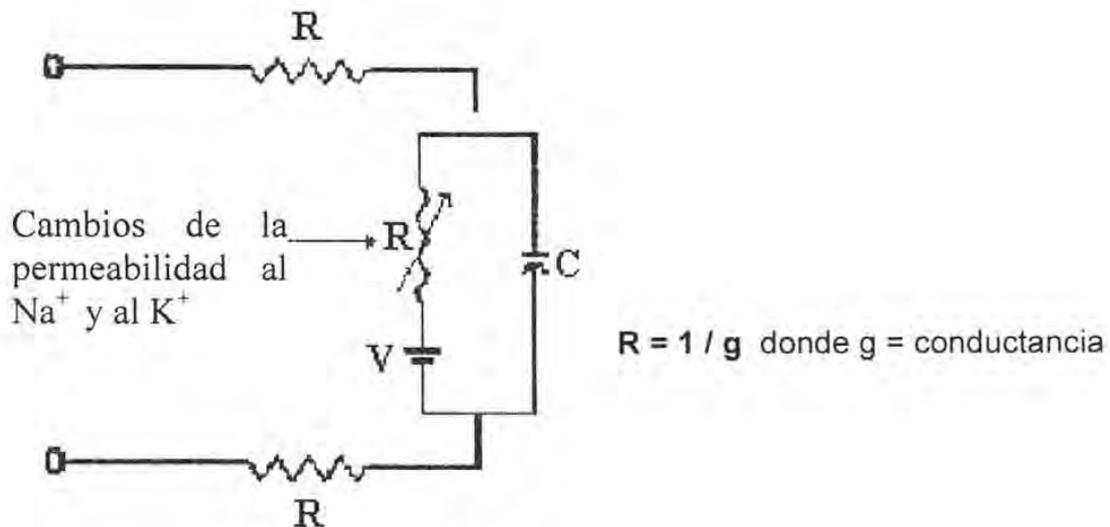


Figura 3.6 Cambios de resistencia

Los factores que afectan el comportamiento eléctrico de la membrana se muestran en la figura 3.7, representando los cambios de permeabilidad de la membrana a los iones  $K^+$ ,  $Na^+$  y  $Cl^-$  durante un potencial de acción.

Las mediciones de los potenciales de acción son difíciles de realizar porque requieren la colocación precisa de un electrodo dentro de la célula; para evitar este proceso invasor, la forma más utilizada de medir biopotenciales es mediante la colocación sobre la piel de un dispositivo que convierte los cambios iónicos en señales eléctricas, de manera que registre el efecto combinado de un gran número de potenciales de acción.

Los parámetros de magnitud y frecuencia de cada señal bioeléctrica difieren de las demás, por lo que es necesario que cada sistema de registro sea específico para cada señal; en el caso del músculo cardíaco, su señal tiene una amplitud de 0.5 – 4 mV, un rango de frecuencia de 0.01 – 250 hz. y su potencial de acción tiene una duración de 150 a 300 ms.

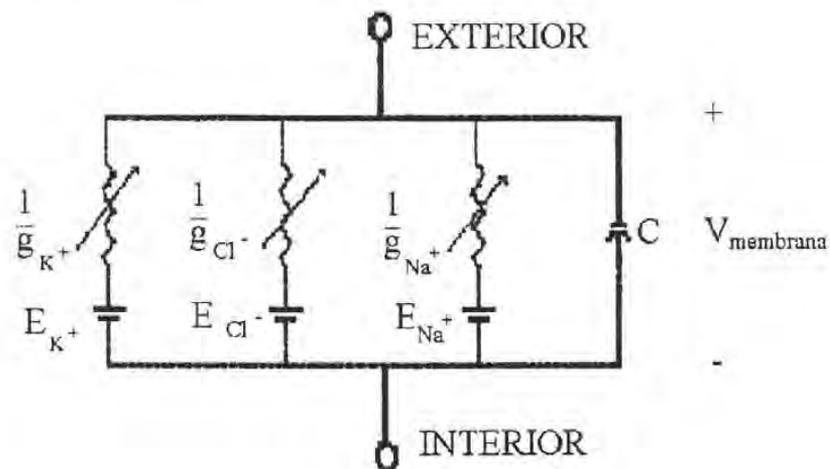


Figura 3.7 Modelo eléctrico de la membrana

### 3.2 El Corazón

El corazón humano tiene el tamaño aproximado de un puño. Se localiza por detrás de la parte inferior del esternón, y se extiende hacia la izquierda de la línea media del cuerpo. Es de forma más o menos cónica, con la base dirigida hacia arriba, hacia el lado derecho y algo hacia atrás; la punta está en contacto con la pared del tórax en

el quinto espacio intercostal. Se mantiene en esta posición gracias a la unión con las grandes venas y arterias, y a estar incluido en el pericardio, que es un saco de pared doble con una capa que envuelve al corazón y otra que se une al esternón, al diafragma y a las membranas del tórax.

El corazón, ver figura 3.8, es una bomba doble en la que la sangre circula por dos sistemas paralelos independientes, cada uno formado por una aurícula y un ventrículo; respecto a su posición anatómica, estos sistemas reciben el nombre de corazón derecho y corazón izquierdo. La sangre circula a través del cuerpo y regresa al corazón, vía el sistema corporal de venas, para entrar en la aurícula derecha, esta sangre sin oxígeno acarrea el bióxido de carbono y es llamada sangre venosa. De la aurícula derecha la sangre pasa al ventrículo derecho vía la válvula tricúspide, que permanece abierta hasta que el ventrículo se contrae; esto es, cuando el músculo del ventrículo empuja la sangre hacia la arteria pulmonar a través de la válvula pulmonar. Cuando la contracción del ventrículo se ha completado, la válvula pulmonar se cierra para evitar reflujos de la sangre hacia el ventrículo [48].

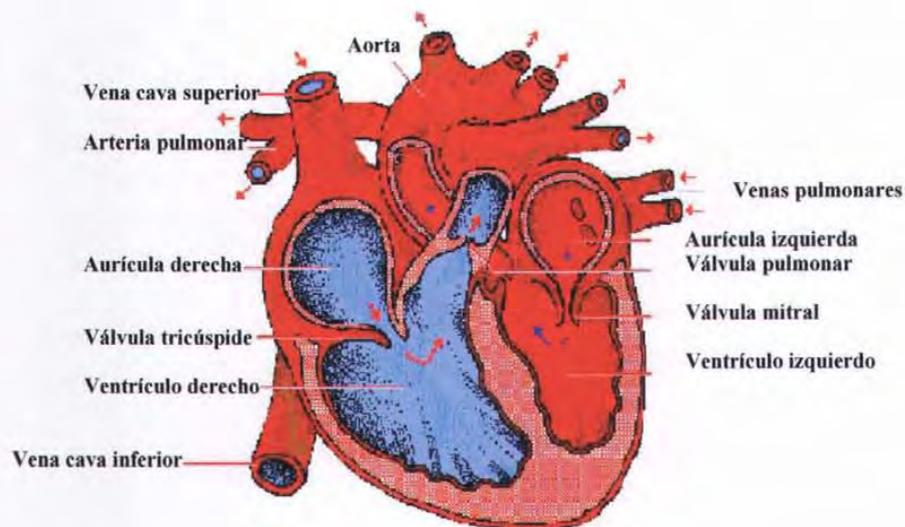


Figura 3.8 El corazón

La sangre de la arteria pulmonar pasa por los pulmones donde descarga el bióxido de carbono y absorbe el oxígeno por la acción de los capilares. Esta sangre

reoxigenada, sangre arterial, regresa al corazón a través de las venas pulmonares y fluye hacia la aurícula izquierda. Enseguida pasa a través de la válvula mitral hacia el ventrículo izquierdo. Cuando el músculo del ventrículo izquierdo se contrae, impulsa la sangre hacia la arteria aorta a través de la válvula aórtica y posteriormente circula a través de las ramificaciones de la misma hacia todo el cuerpo.

El corazón podría considerarse como una bomba electromecánica; es decir, un sistema que genera de forma automática el impulso cardíaco y lo transmite a todas las células de trabajo denominadas miocitos, y éstas, con su contracción o acortamiento impulsan la sangre para que se distribuya por todo el organismo. El funcionamiento del corazón como bomba se divide en dos fases:

- **Sístole:** Es el término usado para describir la contracción rítmica del corazón, específicamente de los ventrículos; es decir, la acción por la cual la sangre pasa del corazón hacia la arteria pulmonar y la aorta. La presión de la sangre durante esta fase es alrededor de 120 mmHg en el ventrículo izquierdo y de 25 mmHg en el derecho.
- **Diástole:** Es el término empleado para describir la dilatación de las cavidades del corazón, durante la cual el músculo ventricular se encuentra relajado y las cavidades llenas de sangre. Durante la fase diastólica las válvulas aórtica y pulmonar se cierran, para evitar que la sangre de cualquiera de estas arterias regrese a los ventrículos.

El músculo cardíaco es de dos tipos y cada uno de ellos actúa de manera diferente:

1. **Músculo cardíaco ordinario.**- Forma la mayor parte de los músculos del corazón y se trata de un músculo involuntario que actúa automáticamente. Tiene como función llevar a cabo el mecanismo de la contracción.
2. **Músculo cardíaco especial o autónomo.**- Actúa de forma espontánea e independiente de la voluntad, su función es estimular al músculo cardíaco ordinario. La excitación de cualquier parte de este músculo se transmite a todo el corazón, provocando contracciones rítmicas de sístole y diástole en el músculo ordinario. Este sistema de músculo cardíaco especializado también se denomina red de conducción cardíaca.

### 3.3 Sistema Específico de Conducción Cardíaca

El sistema específico de conducción consta de un sistema de generación del impulso eléctrico (células automáticas) y un sistema de conducción que transmite el impulso eléctrico desde el origen hasta cada una de las células (células de trabajo) y además está constituido por diferentes estructuras (figura 3.9). El nódulo sinusal es la estructura del sistema de conducción con pendiente de despolarización diastólica más rápida; sus células son las que antes alcanzan el potencial umbral y por ello, es en el nódulo sinusal donde se genera el impulso eléctrico que se distribuirá por todas las demás células.

El impulso una vez generado se distribuye por la aurícula derecha y posteriormente por la izquierda, provocando la contracción de ambas aurículas. El impulso alcanza el nodo aurículo-ventricular situado por debajo de la inserción de la válvula septal y de la válvula tricúspide y a continuación llega a una estructura corta denominada haz de His. El haz de His se bifurca en dos ramas, derecha e izquierda, que a la vez se subdividen hasta formar la red encargada (red de Purkinje) de transmitir el impulso eléctrico a las células musculares de los ventrículos [49].

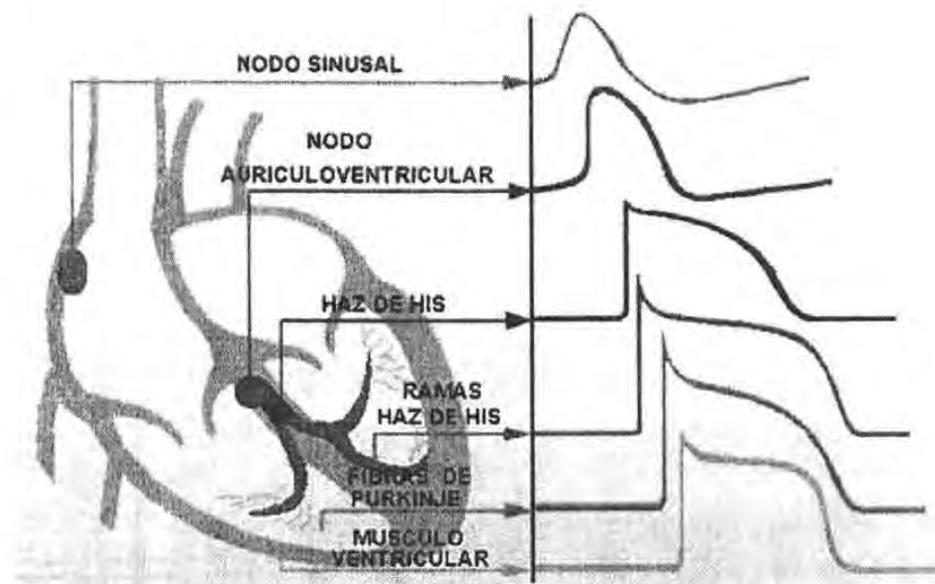


Figura 3.9 Sistema de conducción cardíaca

El fenómeno eléctrico generado durante el proceso de conducción del estímulo del músculo especializado al músculo ordinario, puede ser registrado en forma de un electrocardiograma (ECG), el cual refleja la propagación eléctrica de la despolarización y la repolarización en las cámaras. Estos fenómenos de despolarización y repolarización se llevan a cabo en distintos tiempos y velocidades, dependiendo del nivel en que se encuentran en el sistema de conducción; en consecuencia, la suma total de cada una de estas propagaciones da origen al registro que conocemos como ECG.

### **3.4 El Electrocardiógrafo**

Los latidos del corazón son motivados por cambios de tensión eléctrica en sus fibras musculares los cuales pueden detectarse por un voltímetro. Augustus D. Waller midió el electrocardiograma humano en 1887 usando el electrómetro capilar de Lippmann; él seleccionó cinco posiciones (las cuatro extremidades y la boca) para los electrodos. De esta manera obtuvo una impedancia lo suficientemente baja para maximizar la señal del electrocardiograma (ECG). Los cinco puntos medidos producen diez diferentes conexiones (derivaciones), ver figura 3.10, de los cuales él seleccionó cinco (dos de ellos son iguales a las conexiones de Einthoven que se mencionan en el párrafo siguiente).

Willem Einthoven también usó el electrómetro capilar en su primer registro ECG; pero su esencial contribución a la tecnología de registro de ECG fue el desarrollo y aplicación de un galvanómetro en 1903. El sistema de registro de ECG de Einthoven (figura 3.11) es una aplicación de las diez derivaciones de Waller. El ECG representa el registro gráfico en la superficie corporal de la actividad eléctrica cardíaca. Para que el trabajo del músculo cardíaco sea efectivo, las células musculares cardíacas deben contraerse sincronizadamente al ser estimuladas por un impulso eléctrico. Para ello, se precisa de un sistema complejo de generación automática de impulsos y un sistema de conducción de los mismos capaz de transmitirlos desde su origen hasta cada una de las células musculares cardíacas. Estos dos sistemas de producción y conducción de estímulos reciben el nombre de sistema específico de conducción (ya descrito en la sección anterior).

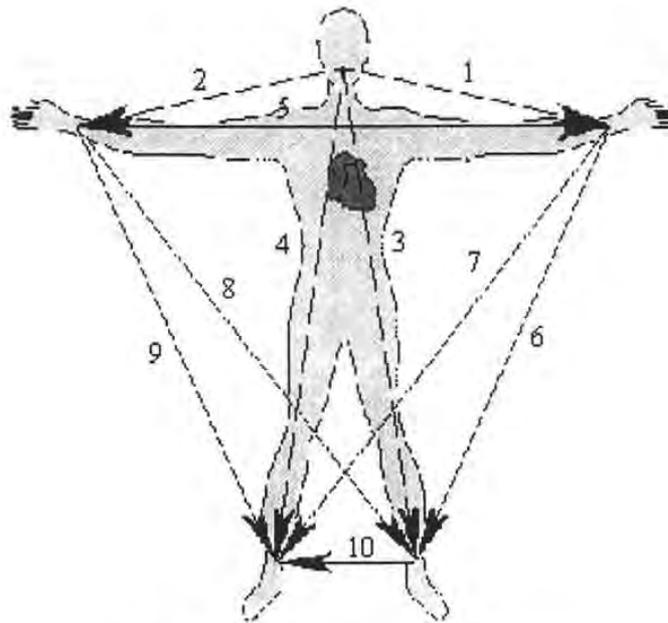


Figura 3.10 Derivaciones de Waller

El electrocardiógrafo permite registrar la actividad eléctrica cardíaca a partir de una serie de terminales o electrodos conectados en la superficie del cuerpo del paciente. La señal es amplificada y posteriormente enviada a un oscilógrafo capaz de modificar la posición de un elemento de registro gráfico que se mueve al paso de un papel milimétrico.

Las diferencias de potencial se interpretan con movimientos de la aguja hacia arriba o abajo en consonancia con la polaridad registrada y la magnitud del potencial, mientras que en el papel se obtiene un trazo con ondas positivas y negativas que reflejan la actividad cardíaca observada desde los diferentes terminales o electrodos [50].

Se utiliza un papel especial milimétrico en forma de cuadrícula, de manera que el tiempo se mide sobre el eje de las abscisas y el voltaje sobre el de las ordenadas; cada cinco milímetros (5 cuadros), hay en el papel una línea más gruesa conformando cuadros de 5 mm de lado (figura 3.12). La velocidad del papel es de 25 mm/s, con lo que cada milímetro en el eje de abscisas supone 0.04 s de tiempo y cada 5 mm son 0.2 s. Cada milivolt (mV) registrado se traduce en un desplazamiento de la aguja de 10 mm en el eje de ordenadas. Los parámetros anteriores son los

utilizados de una manera estándar en cualquier electrocardiógrafo y de hecho son los que se utilizan de una manera convencional, pero tanto la velocidad del papel como la calibración del voltaje registrado, en función del potencial, son programables y modificables.

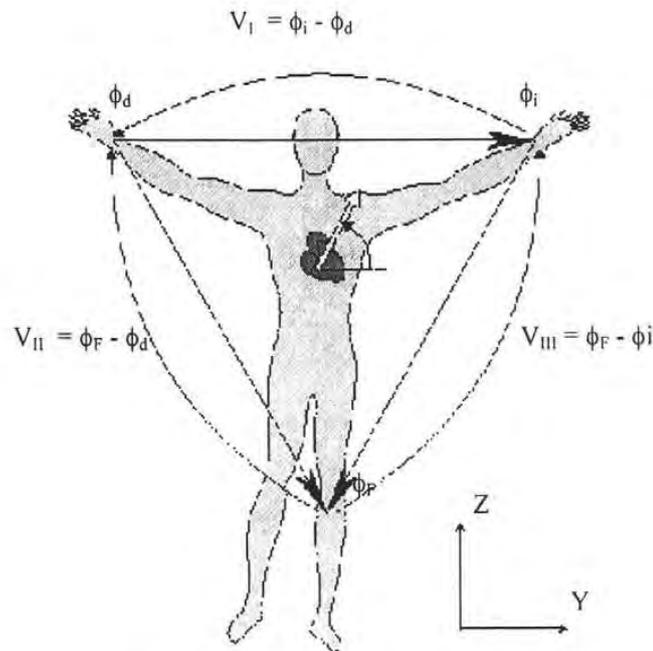


Figura 3.11 Derivaciones de Einthoven

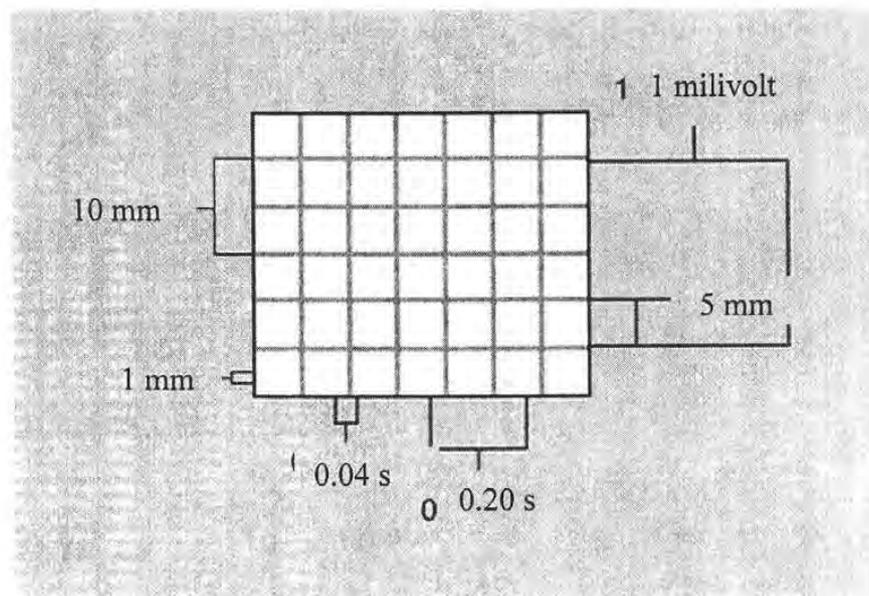


Figura 3.12 Papel para electrocardiógrafo

## ◆ Derivaciones

Podemos definir las derivaciones del ECG como puntos de observación de los diferentes fenómenos eléctricos que ocurren en el corazón. Cada una de ellas registrará la despolarización y repolarización cardíacas. Clasificaremos las derivaciones en función del plano en el que estén observando la actividad eléctrica, es decir, derivaciones del plano frontal y derivaciones del plano horizontal [51].

### 1. Derivaciones en el plano frontal

Las derivaciones del plano frontal van a registrar los vectores con dirección arriba-abajo e izquierda-derecha, ver figura 3.11. Son de dos tipos: derivaciones bipolares estándar y derivaciones monopolares de los miembros. Mediante las derivaciones bipolares estándar se valora la diferencia de potencial eléctrico que hay entre dos puntos. Para su registro, se colocan electrodos en brazo derecho, brazo izquierdo y pierna izquierda, y un cuarto electrodo en pierna derecha que es neutro (toma de tierra). La derivación *I* representa el electrodo explorador situado a  $0^\circ$  en el hexágono de Bayley. En la *II* se encuentra a  $60^\circ$  y en la *III* a  $120^\circ$ . Las derivaciones monopolares de los miembros registran el potencial total en un punto determinado del cuerpo. Se denomina *aVL* cuando el electrodo explorador se encuentra a  $-30^\circ$ , *aVR* con electrodo a  $40^\circ$  y *aVF* cuando está a  $90^\circ$ , ver figura 3.13.

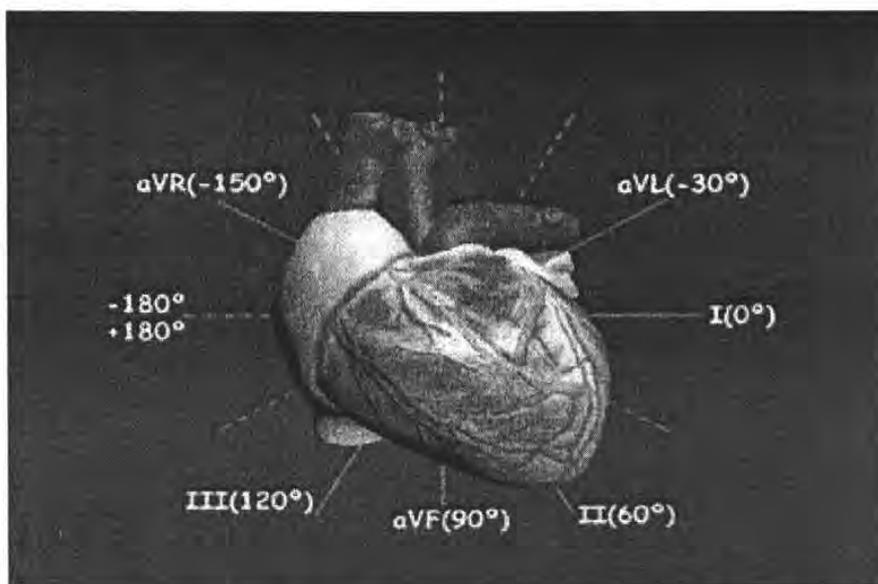


Figura 3.13 Derivaciones del plano frontal

## 2. Derivaciones en el plano horizontal

Las derivaciones del plano horizontal o derivaciones precordiales monopolares, ver figura 3.14, registran los vectores con direcciones izquierda-derecha y anterior-posterior y representan la actividad eléctrica cardíaca en esas direcciones. El electrodo explorador de la derivación V1 se sitúa en el cuarto espacio intercostal derecho pegado al borde esternal derecho. El electrodo de V2 se coloca en el cuarto espacio intercostal izquierdo pegado al borde izquierdo del esternón. El electrodo de V4 se posiciona en el quinto espacio intercostal izquierdo a nivel de la línea medioclavicular, mientras que el electrodo V3 se debe colocar en el punto medio entre V2 y V4. El electrodo V5 debe situarse en el quinto espacio intercostal a nivel de la línea axilar anterior y el V6 en el mismo espacio intercostal a nivel de su intersección con la línea axilar media.

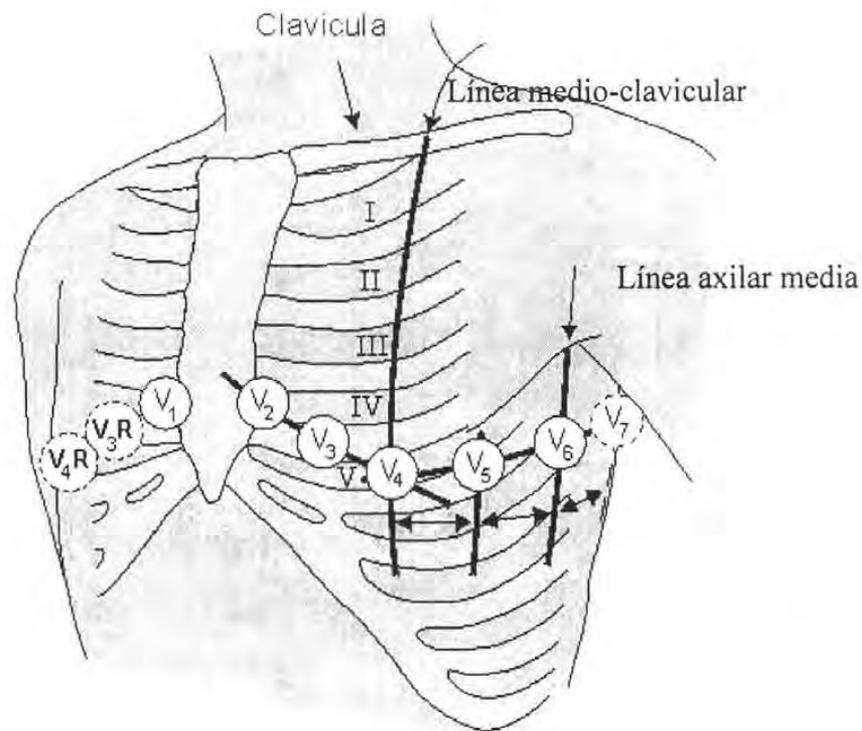


Figura 3.14 Derivaciones precordiales

### 3.5 El Electrocardiograma

El electrocardiograma, ECG, es una gráfica de las variaciones de potencial eléctrico recogido en la superficie del cuerpo. Los cambios de este potencial eléctrico durante un ciclo cardiaco describen una curva característica (figura 3.15), formada por una serie de ondas que ascienden o descienden en relación con la línea basal (nivel isoelectrico).

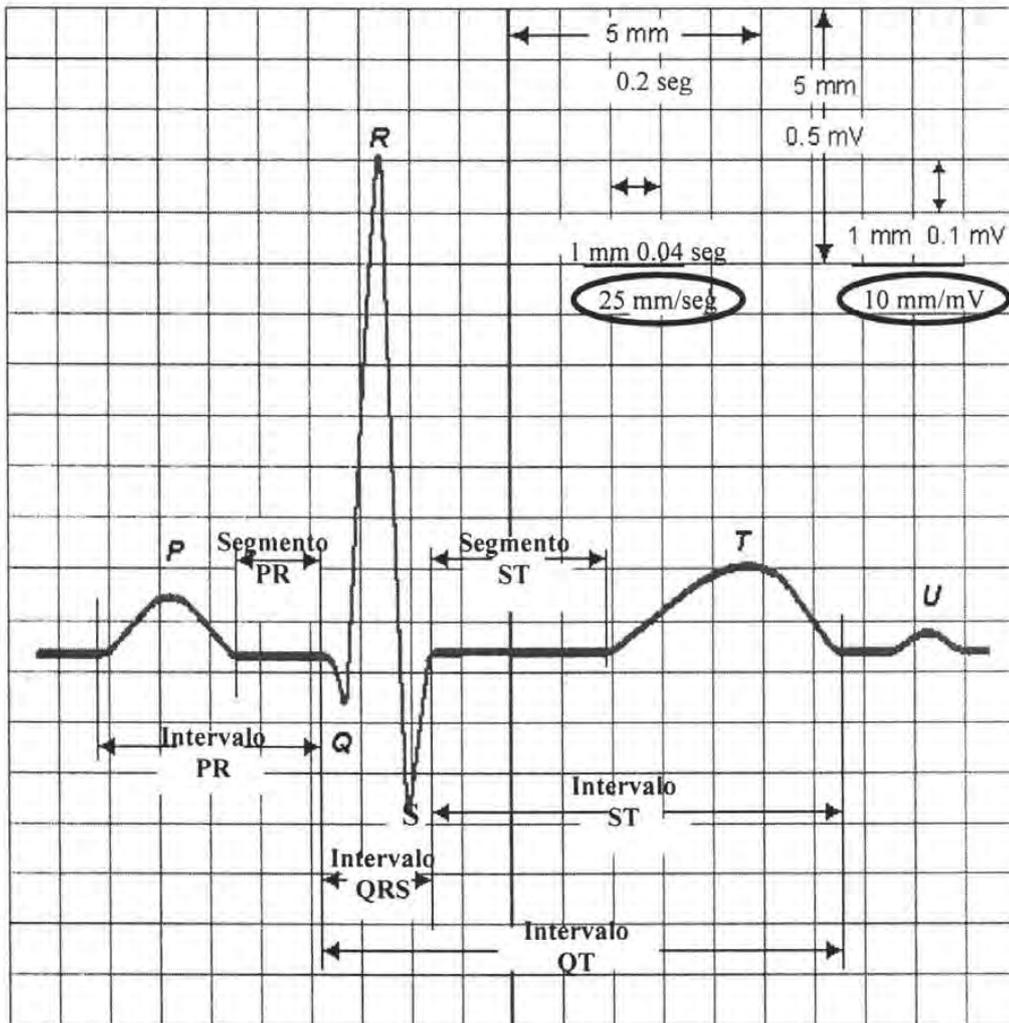


Figura 3.15 ECG de un corazón normal

#### Componentes del Ciclo Cardíaco

El ciclo cardíaco está compuesto de la despolarización cardíaca, el sistema de conducción y un campo eléctrico generado por un dipolo, los cuales se explican con

base en los componentes [52] del ECG y están representados en las figuras 3.16 a 3.20.

- ❖ **La onda P** es una onda sinusoidal irregular que refleja la descarga eléctrica que se origina y propaga por las aurículas, representando la activación eléctrica (despolarización) de la aurícula iniciada en el nodo sino auricular (SA) y también indicando que los atrios (las dos cavidades superiores del corazón) se están contrayendo para bombear la sangre hacia fuera; tiene una duración  $<0.12$  s y una altura  $<2.5$  mm. La onda P puede ser positiva, negativa, difásica, presentar una muesca, ser plana o faltar por completo.
- ❖ **El intervalo PR** (o PQ) representa el tiempo requerido por la despolarización auricular y la conducción del impulso a través del nodo auriculoventricular (AV); el **segmento PR** representa el retardo fisiológico debido a la transmisión del impulso a través del nodo AV; normalmente este segmento es isoelectrico o ligeramente negativo; tiene una duración que varía de 0.12 a 0.24 s. Cuando existe una depresión importante en este segmento, se habla de una onda de repolarización auricular (Ta)
- ❖ **El complejo ventricular o complejo QRS** que muestra el paso de la onda eléctrica a los ventrículos y la activación de éstos, representa la despolarización de los ventrículos e indica que los ventrículos (las dos cavidades inferiores del corazón) se están contrayendo para bombear la sangre hacia fuera; tiene una duración  $<0.12$  s. Cualquier onda positiva dentro del complejo QRS se llama onda R; una onda negativa situada antes de la onda R se llama onda Q; una onda negativa situada después de la onda R se llama onda S.
- ❖ **El intervalo QRS** corresponde al tiempo que requiere la despolarización de los ventrículos. **El intervalo QR** también llamado tiempo de activación ventricular corresponde a la propagación de la onda de despolarización desde el endocardio hasta la superficie epicardica.
- ❖ **El segmento ST** representa un periodo de inactividad eléctrica después de que la totalidad del miocardio, se despolarizó e indica la cantidad de tiempo que transcurre desde que acaba una contracción de los ventrículos hasta que empieza el periodo de reposo anterior en el que los ventrículos comienzan a

contraerse para el siguiente latido. Puede ser isoelectrico o puede estar desplazado hacia arriba o hacia abajo, respecto a la línea basal. El punto donde termina el complejo QRS y se inicia el segmento ST se designa con la letra J.

- ❖ **La onda T** representa el fin de la despolarización, o en otras palabras la repolarización de ambos ventriculos e indica el periodo de reposo de los ventriculos. Puede ser positiva, negativa, difásica, bicúspide o plana.

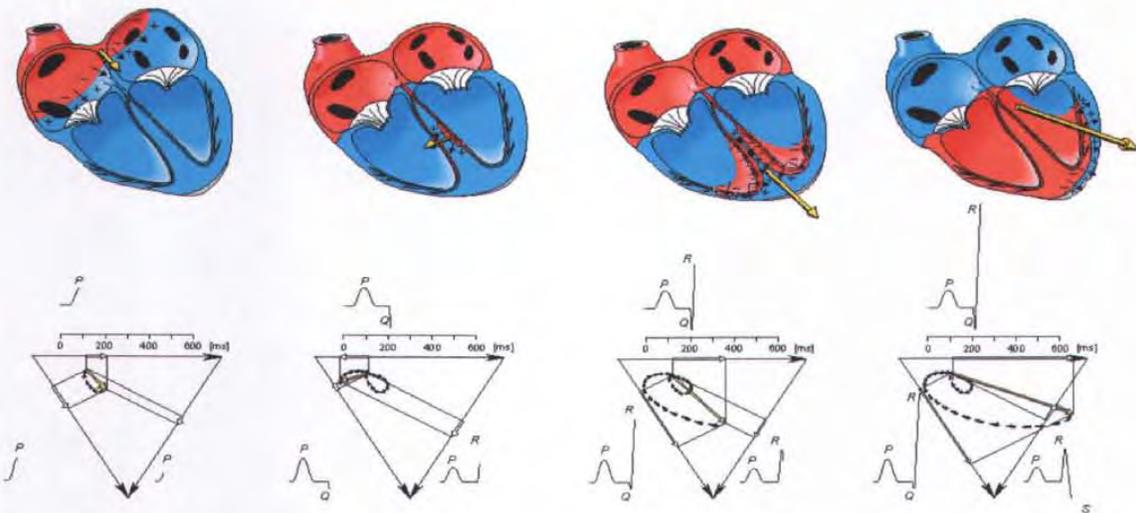


Figura 3.16 Activación auricular y septal

Figura 3.17 Activación de los ventriculos y las regiones central y apical del ventriculo izquierdo

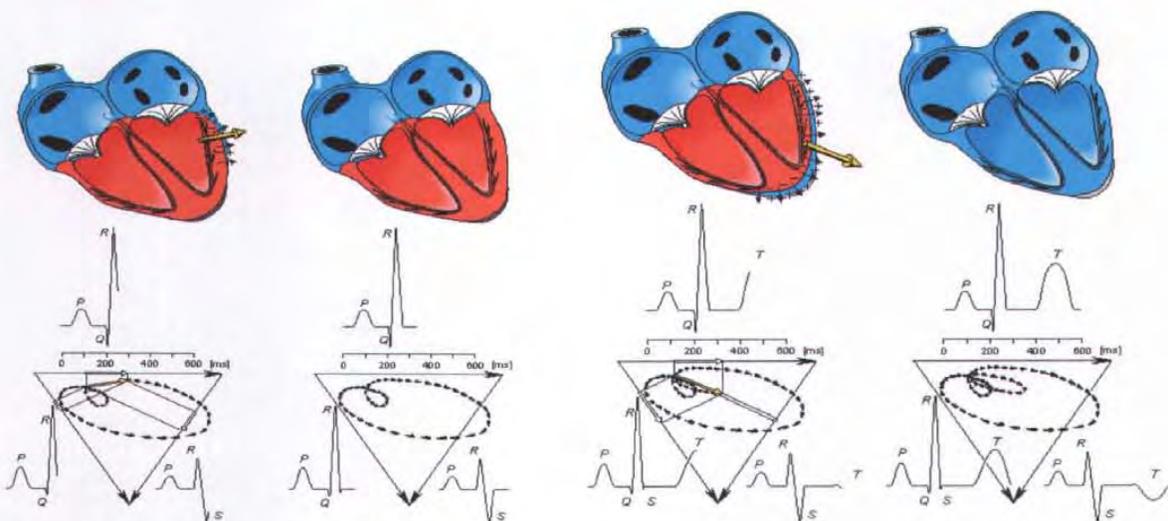


Figura 3.18 Activación basal y posterior del ventriculo izquierdo y del septo

Figura 3.19 Repolarización ventricular

- ❖ **El intervalo QT** muestra el tiempo que se requiere para la despolarización y repolarización de los ventrículos. **El intervalo TP** representa el estado de reposo del músculo cardíaco, durante el cual no hay actividad eléctrica, y el trazo se vuelve una línea horizontal plana, llamada línea basal o isoeletrica.
- ❖ **La onda U** es una pequeña elevación redondeada que sigue a la onda T en ocasiones principalmente en las derivaciones V3 y V4.
- ❖ **El intervalo RR** representa la distancia (o sea, el tiempo en milisegundos) entre los máximos de dos ondas R positivas.

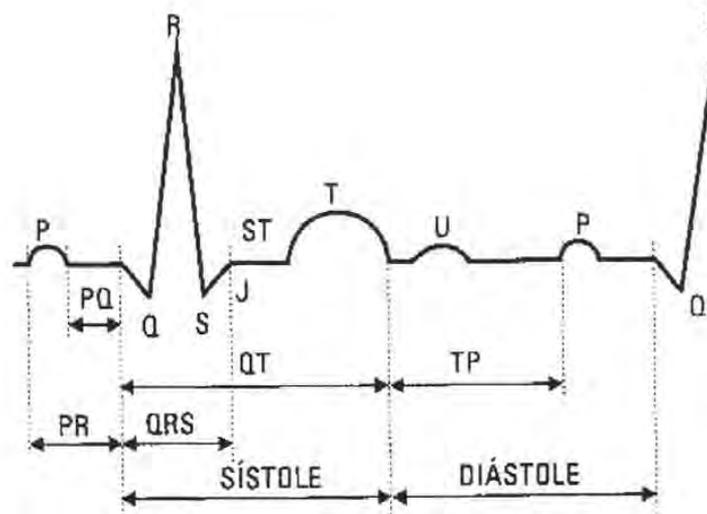


Figura 3.20 Componentes del ciclo cardíaco

### 3.6 Trastornos del Ritmo Cardíaco

Durante el ritmo sinusal normal todos los miocitos del corazón están sujetos a un estímulo eléctrico periódico, los frentes de activación auricular se desplazan de una manera homogénea a través de fibras miocárdicas auriculares, dispuestas de manera que constituyen una serie de vías eléctricamente preferenciales para llevar los impulsos eléctricos del nodo sinusal al nodo aurículo-ventricular. Cuando esta condición se altera estamos hablando de trastornos del ritmo cardíaco o arritmias.

La fibrilación auricular es una alteración del ritmo cardíaco (figura 3.21) secundaria a la pérdida de la función sinusal en presencia de una activación auricular caótica. En

este caso, las vías eléctricamente preferenciales quedan inutilizadas por el aumento de la presión dentro de la aurícula y la activación de las aurículas se vuelve desordenada e ineficaz para desencadenar una contracción muscular eficaz y no bombean eficientemente la sangre. Esta sangre puede quedar estancada y favorecer la formación de coágulos que se pueden desprender y viajar a cualquier parte del cuerpo [48].

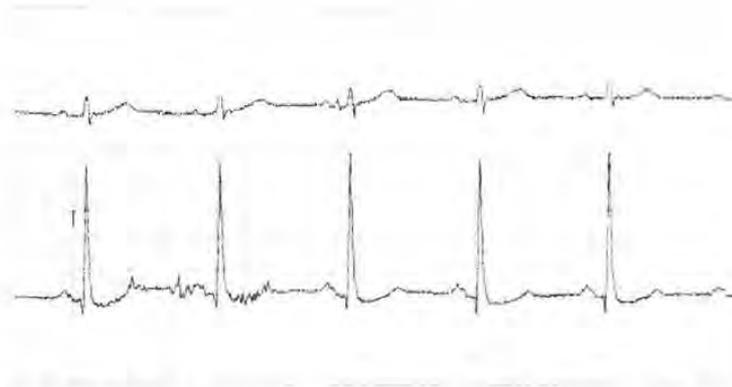


Figura 3.21 ECG de un corazón con fibrilación auricular

La fibrilación supraventricular [53] es una arritmia que se caracteriza por una actividad eléctrica completamente desorganizada (figura 3.22) que hace que el corazón, en vez de latir, tenga una actividad mecánica similar a un temblor fino que no es suficiente ni adecuado para bombear sangre. Esta arritmia es la más grave de todas, es causa de muerte súbita y se presenta en muchas condiciones cardiológicas agudas.

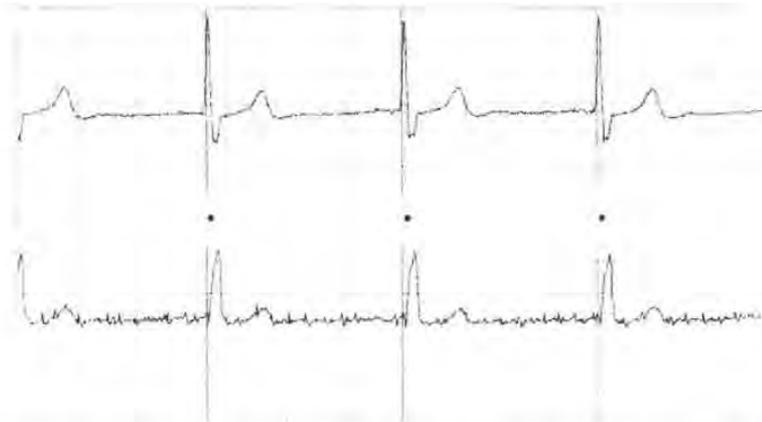


Figura 3.22 ECG de un corazón con fibrilación supraventricular

Desde el punto de vista de la teoría del caos [54] podemos suponer que el errático temblor del corazón (fibrilación) es una forma de caos, ya que el latido irregular no es completamente aleatorio pues resulta de un tipo específico de deteriorización en la actividad eléctrica del corazón. Basándonos en esta hipótesis, podemos afirmar que la mayoría de los ataques al corazón se pueden predecir, ya que el corazón actúa como un sistema caótico determinístico y como tal tiene patrones de reconocimiento de la oscilación que precede a la fibrilación supraventricular. Dichos patrones serían de gran utilidad para detectar pacientes de alto riesgo.

#### 4.1 Obtención de datos

Se evaluaron 10 series de tiempo de sujetos saludables, 10 de sujetos con fibrilación auricular y 10 de sujetos con fibrilación supraventricular; dichas series de tiempo fueron obtenidas de registros de la página PhysioNet del Health's National Center, los cuales fueron desarrollados en el laboratorio de arritmia del Hospital Beth Israel de Boston y en el Instituto Tecnológico de Massachussets.

Los registros analógicos fueron tomados en el laboratorio de arritmia del Hospital Beth Israel de Boston usando un equipo ambulatorio con un ancho de banda de 0.1 a 40 Hz. Cada registro individual tiene una duración de 10 horas y contiene dos señales de ECG (derivación II y V2), los datos fueron tomados a razón de 250 datos por segundo con una resolución de 12 bits cubriendo un intervalo de  $\pm 10$  mV. Los registros analógicos fueron digitalizados en el Instituto Tecnológico de Massachussets utilizando un convertidor analógico-digital, obteniéndose un archivo secuencial binario con tres columnas de datos (tiempo en segundos, señal II en mV y señal V2 en mV) por cada registro individual.

Los registros arriba mencionados se bajaron de la página de PhysioNet y se separaron las tres columnas dejando solamente en un archivo la columna de la señal de la derivación II (ya mencionada en el capítulo III) y convirtiendo el archivo a tipo dat para poder analizarlo; de esta manera se obtuvieron 10 series de tiempo de sujetos saludables con 7680 datos cada una, 10 series de tiempo de sujetos con fibrilación auricular con 15000 datos cada una y 10 series de tiempo de sujetos con fibrilación supraventricular con 7680 datos cada una.

Las 30 series de tiempo fueron analizadas con el *software* abajo mencionado y estudiados los resultados con el fin de caracterizar los registros cardiacos, observando los gráficos obtenidos y la variación en los diferentes índices y

propiedades métricas para obtener patrones de reconocimiento visual y algún invariante para distinguir entre los tres tipos de sujetos.

#### 4.2 Inspección visual

Como se explico en el capítulo II el primer paso para analizar una serie de tiempo es graficarla y eso fue lo primero que se hizo; se graficaron todas las series de tiempo y se realizó una inspección visual por intervalos de 1000 datos, en algunos casos se realizó a 400 datos para poder detectar puntos fuera de lo normal, tendencia y variación.

El sistema que originó las series de tiempo es el ciclo cardiaco lo que nos lleva a pensar que es muy difícil que todas las series de tiempo de cada base de datos, aún las de sujetos saludables, sean iguales. Apoyando esta idea se encontraron en las series de sujetos saludables 4 con comportamiento completamente diferente a las demás; la mitad de cada serie tenía una forma gráfica diferente a la otra mitad por lo que se dividió cada una de estas en dos; la primera mitad se identificó con la letra "A" y la otra mitad con la letra "B". Ver la figura 4.1 A y B.

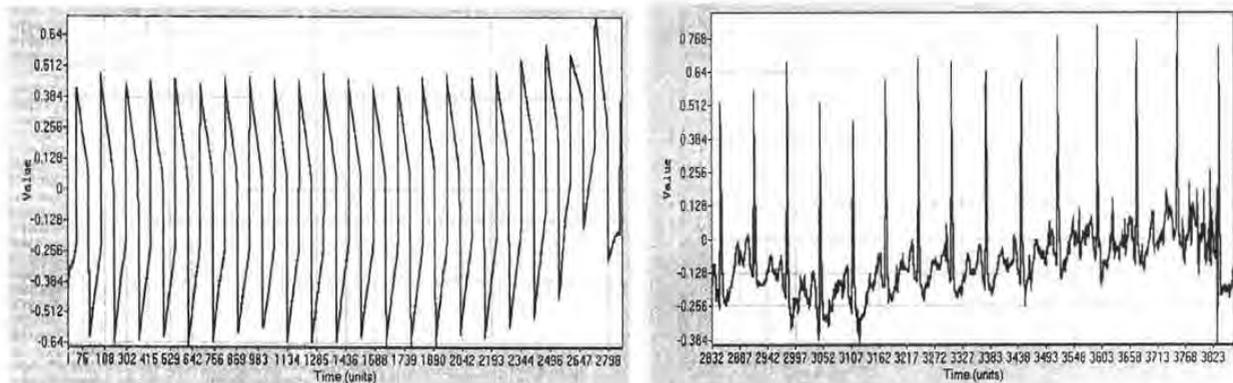


Figura 4.1 Registros: A)19830A; B)19830B

De la inspección visual se deduce que los registros identificados con la letra A son *datos fuera de intervalo* ya que parecen corresponder a un comportamiento anormal de la serie y tienen una tendencia diferente a la de un ECG (ver figura 4.2), por lo que no se consideraron relevantes y no se utilizaron para este estudio; todas las series de tiempo de sujetos saludables son similares en la tendencia y variación.

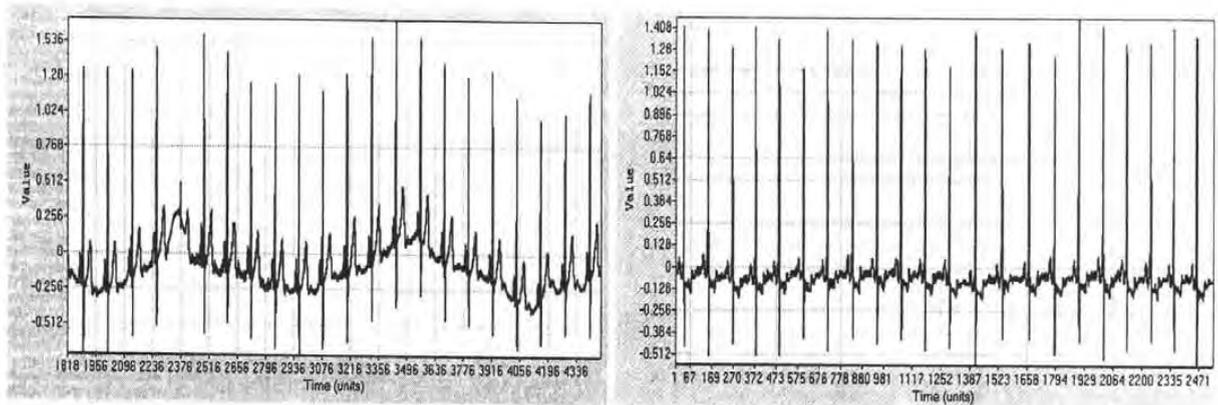


Figura 4.2 Registros de sujetos sanos

En las series de tiempo de sujetos con fibrilación auricular no se detectaron *datos fuera de intervalo* y el periodo es semejante en todas las series, observando que tenían cierto patrón de comportamiento con diferencias entre sí. Ver las figuras 4.3, 4.4 y 4.5.

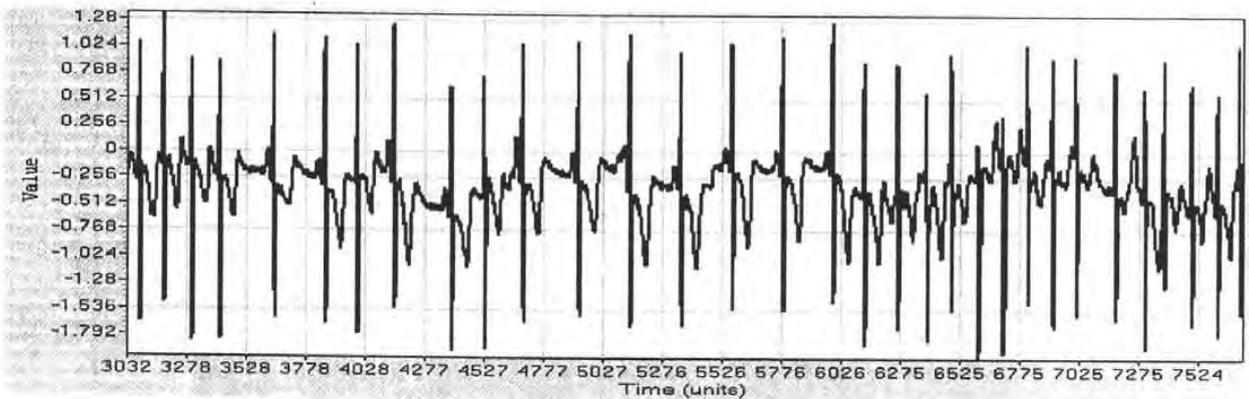


Figura 4.3 Registro 4015 sujeto con fibrilación auricular

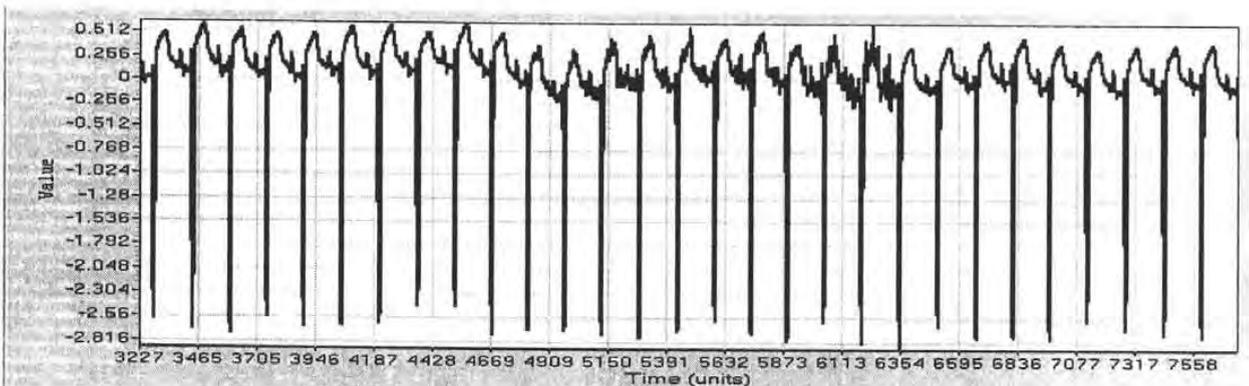


Figura 4.4 Registro 4908 sujeto con fibrilación auricular

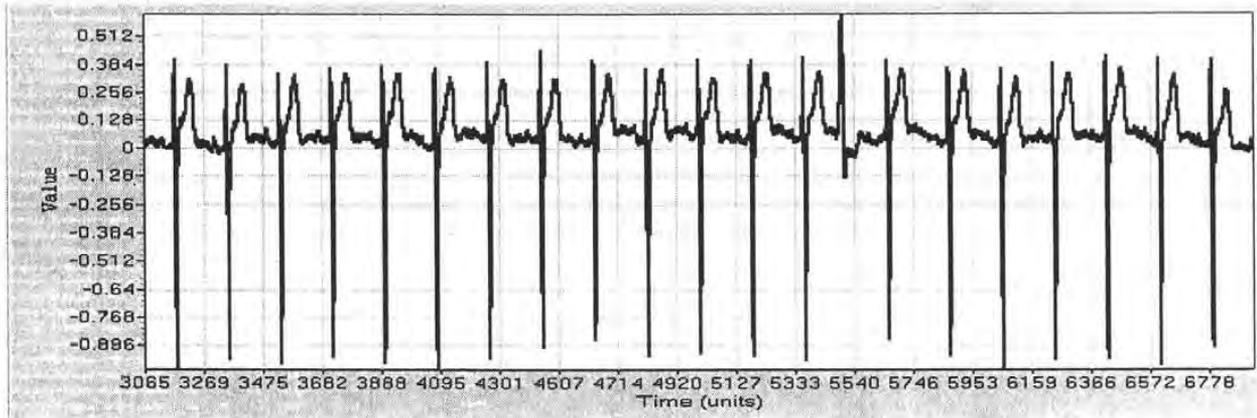


Figura 4.5 Registro 8215 sujeto con fibrilación auricular

En las series de tiempo de sujetos con fibrilación supraventricular no se detectaron *datos fuera de intervalo*, el comportamiento predominante de estas series es diferente entre sí, por lo que no se puede hablar de una tendencia (ver las figuras 4.6, 4.7 y 4.8).

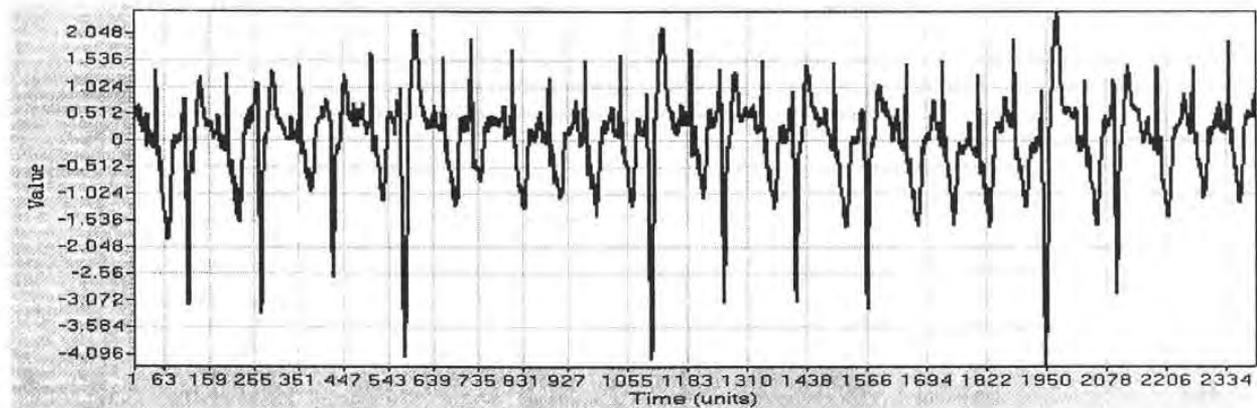


Figura 4.6 Registro 801 sujeto con fibrilación supraventricular

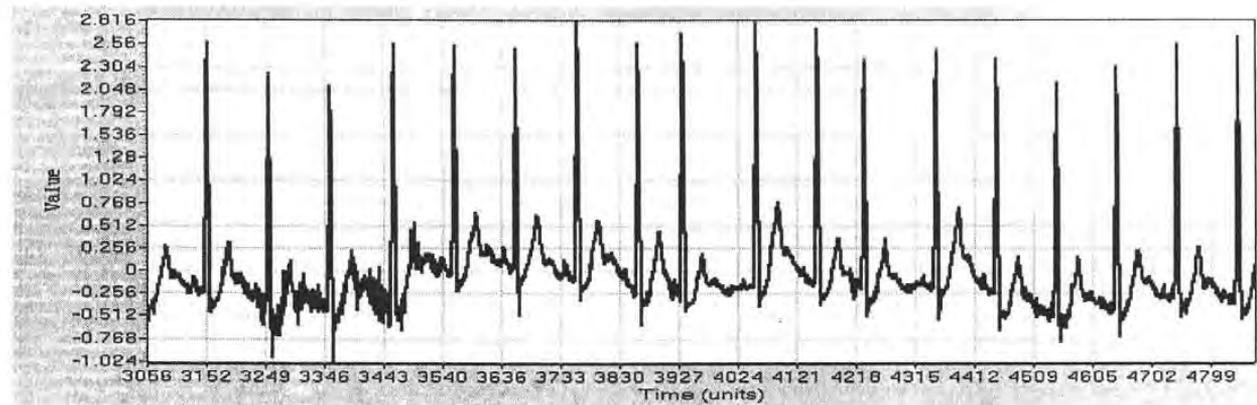


Figura 4.7 Registro 807 sujeto con fibrilación supraventricular

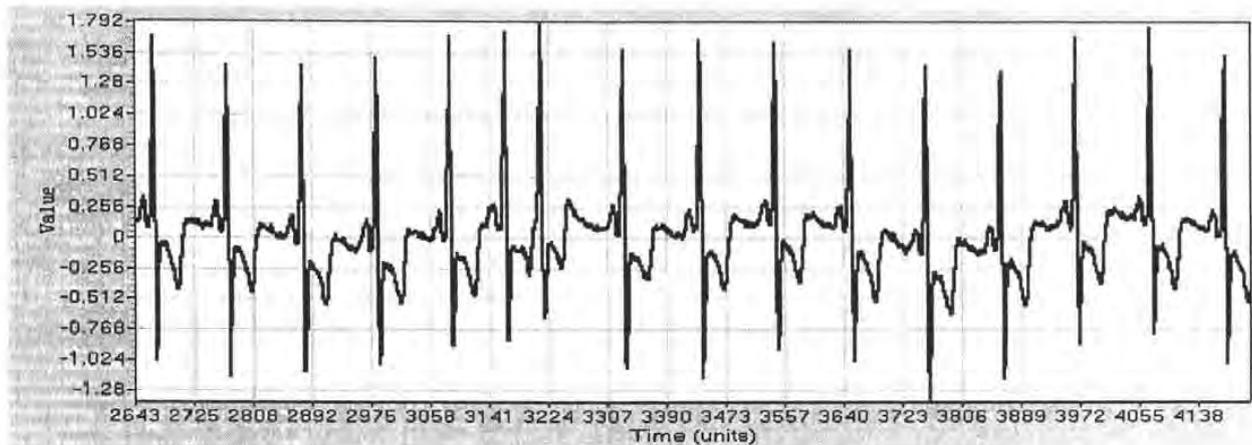


Figura 4.8 Registro 853 sujeto con fibrilación supraventricular

En la inspección visual se encontró que todas las series de tiempo son estacionarias, que el sistema es determinista perturbado por variables de tipo estocástico y que los diferentes tipos de registros tienen cierto patrón de comportamiento, aunque, si vemos detenidamente las figuras 4.1B, 4.2, 4.3 y 4.7 parecen casi iguales a pesar de ser de diferente tipo de registro, por lo que podemos concluir que es muy difícil para el ojo inexperto diferenciar los tres tipos de sujetos a partir de la inspección visual.

### 4.3 Distribución de probabilidad

La distribución de probabilidad muestra la frecuencia de los datos obtenidos ordenándose de acuerdo a su valor; los datos estocásticos tienden a ser descritos con la distribución de probabilidad.

Dependiendo de la forma del histograma obtenido es el tipo de sistema; para un comportamiento puramente estocástico se obtiene una distribución que puede ser Gaussiana, la cual se muestra como una simple curva en forma de campana, o no Gaussiana, como por ejemplo la distribución de Lévy; en el caso de un comportamiento caótico se genera la llamada distribución de Wigner.

Los comportamientos periódicos o multiperiodicos suelen dar un simple histograma con picos en las orillas; cuando el número de estados es mayor y no tienen una distribución simétrica se trata de un comportamiento caótico.

En las figuras 4.9, 4.10 y 4.11 se muestran los histogramas obtenidos a partir de sujetos saludables, sujetos con fibrilación auricular y sujetos con fibrilación supraventricular, respectivamente.



Figura 4.9 Histogramas de registros de sujetos saludables



Figura 4.10 Histogramas de registros de sujetos con fibrilación auricular

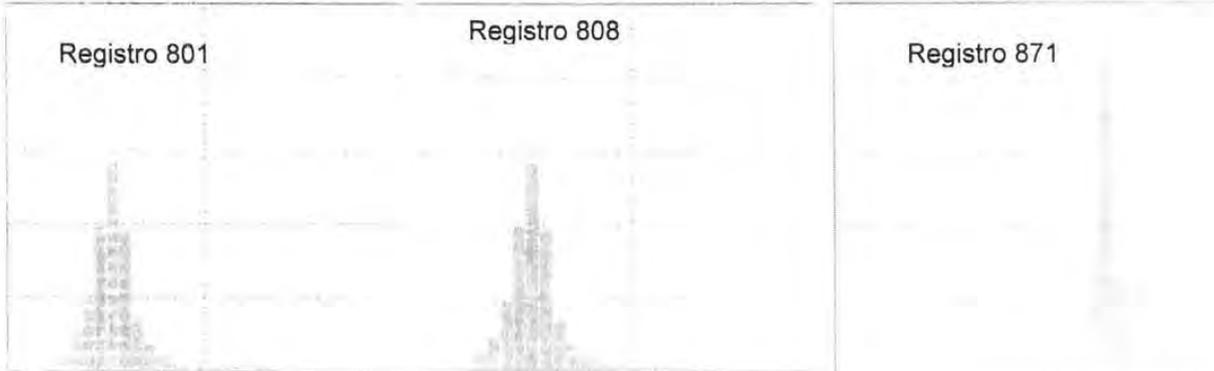


Figura 4.11 Histogramas de registros de sujetos con fibrilación supraventricular

A partir del análisis del histograma podemos decir que las series de tiempo no presentan comportamiento estocástico y las gráficas de distribución de probabilidad no son de utilidad para distinguir entre los diferentes tipos de sujetos.

#### 4.4 Análisis espectral

El análisis espectral consiste en tomar una señal continua y separar las frecuencias que la componen para diferenciar entre un espectro continuo y un espectro discontinuo; para realizar este análisis se utiliza la transformada de Fourier.

Gracias a los trabajos del matemático francés Fourier (1822) y del matemático alemán Dirichlet (1829) mediante la suma de vibraciones armónicas simples es posible construir una nueva vibración por compleja que sea; del teorema de Fourier [55] se deduce que cualquier vibración  $x(t)$  que esté definida en un periodo de tiempo de  $T$  segundos y de la cual dispongamos de  $N$  muestras, puede reconstruirse mediante la suma de ondas armónicas

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \quad (30)$$

El teorema de Fourier asigna a cada frecuencia armónica  $f_k$  dos amplitudes,  $a_k$  y  $b_k$ , una para la onda armónica coseno y otra para la onda armónica seno. Por lo que la representación espectral completa tiene que reunir las dos amplitudes de cada frecuencia, ello se consigue mediante la definición matemática de la amplitud compleja

$$X_k = a_k - ib_k \quad (31)$$

con lo que la serie compleja de Fourier queda determinada por

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N/2} X_k e^{i(2\pi kt / T)} \quad (32)$$

donde

$$e^{i(2\pi kt / T)} = \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + i \text{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad (33)$$

A  $X_k$  se le llama la transformada de Fourier de  $x(t)$  y puede valuarse mediante

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i(2\pi kr/N)} \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (34)$$

de esta manera se pueden calcular los coeficientes  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$  que definen a la vibración  $x(t)$  y la representación espectral se define mediante el calculo del módulo  $X_k$

$$X_k^2 = a_k^2 + b_k^2 \quad (35)$$

Si una señal no es periódica, en vez de una sumatoria de componentes espaciados a intervalos  $1/T$  se tiene una integral con espaciamiento  $1/T$  nulo y los coeficientes de Fourier discretos  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$  se transforman en las funciones continuas  $A(\omega)$  y  $B(\omega)$ , las cuales se denominan las componentes de la transformada de Fourier de  $x(t)$  y están definidas por las integrales:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{sen} \omega t dt \quad (36)$$

y la serie de Fourier (30) se convierte en la integral de Fourier o la transformada inversa de Fourier

$$x(t) = 2 \left( \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \text{sen} \omega t d\omega \right) \quad (37)$$

donde la función compleja está definida por

$$X(\omega) = A\omega - iB(\omega) \quad (38)$$

y la forma compleja de la transformada de Fourier de  $x(t)$  es

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (39)$$

Aún cuando la señal no sea periódica, sus componentes ocuparán una cierta banda de frecuencias; por lo cual se realizó el cálculo de la transformada discreta de Fourier mediante el algoritmo de la transformada rápida de Fourier y su representación gráfica como el cuadrado de la amplitud en función de la frecuencia. La gráfica que resulta de un sistema caótico o aleatorio tiene una tendencia a subir y es ancha; en el caso de un sistema periódico se producen pocos picos o uno sólo y estos son prácticamente discretos.

En las figuras 4.12, 4.13 y 4.14 se muestran los gráficos de frecuencia obtenidos a partir de sujetos saludables, sujetos con fibrilación auricular y sujetos con fibrilación supraventricular, respectivamente.

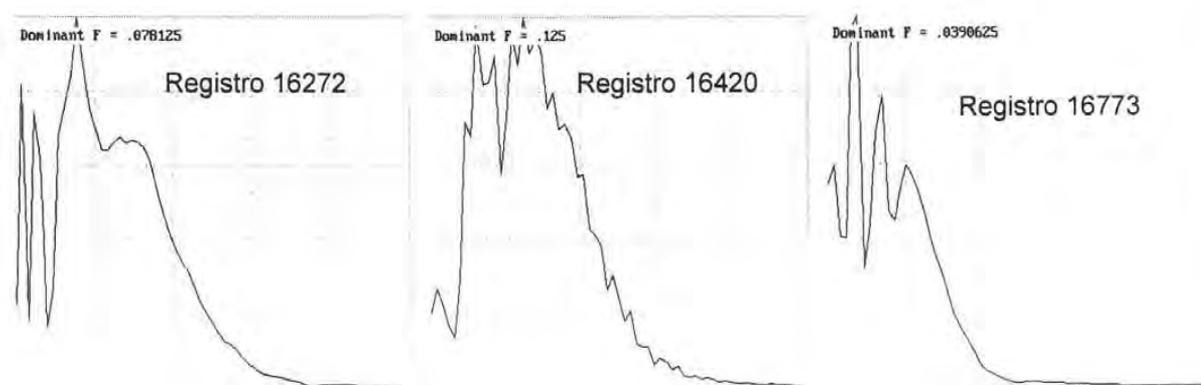


Figura 4.12 Frecuencia de registros de sujetos saludables



Figura 4.13 Frecuencia de registros de sujetos con fibrilación auricular

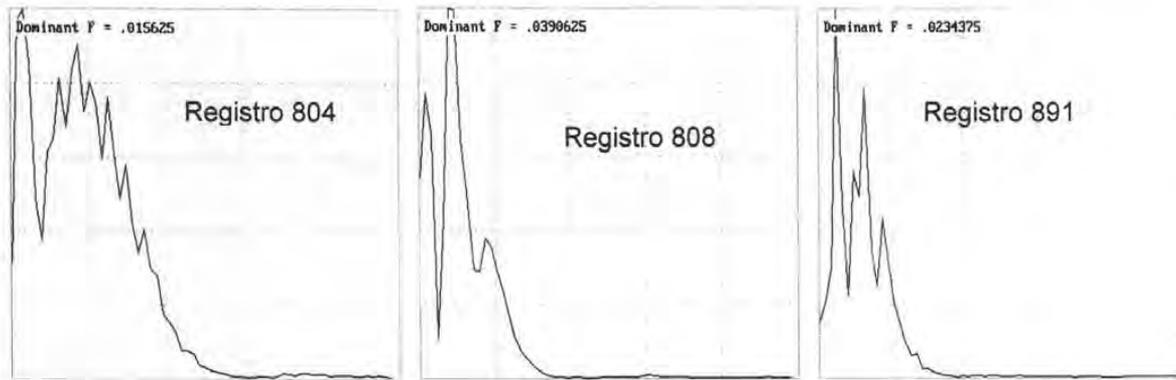


Figura 4.14 Frecuencia de registros de sujetos con fibrilación supraventricular

A partir del análisis de la frecuencia podemos decir que todas las series de tiempo presentan comportamiento predominantemente periódico, con un cierto componente de caoticidad. De hecho el corazón humano presenta un comportamiento dinámico mixto. Desafortunadamente, no podemos, a partir del espectro de Fourier diferenciar los tres tipos de sujetos.

#### 4.5 Recurrencia y Determinismo

Se analizaron los resultados obtenidos encontrando que no existen diferencias significativas entre los tres tipos de sujetos desde el punto de vista estadístico; el porcentaje de recurrencia y determinismo es alto en todas las series de tiempo (ver tablas 4.1, 4.2 y 4.3); las series de sujetos sanos y las de sujetos con fibrilación supraventricular tienen resultados casi iguales por lo que no podemos diferenciarlos a partir de estos datos.

Sin embargo, estos resultados nos permiten asegurar que el ciclo cardiaco es un sistema cuyo comportamiento dinámico es mixto, esto es, predominantemente periódico y con un cierto componente de caoticidad.

Tabla 4.1 Registros de sujetos saludables

<b>REGISTRO</b>	<b>RECURRENCIA, %</b>	<b>DETERMINISMO, %</b>
16272	63.481	80.204
16420	81.116	92.041
16773	64.246	84.375
17052	82.044	92.854
18177	52.082	64.503
18184	62.749	80.263
19088B	50.444	95.154
19090B	68.907	97.161
19140B	56.253	95.170
19830B	59.271	64.692
<b>Mínimo</b>	50.444	64.503
<b>Máximo</b>	82.044	97.161
<b>Promedio</b>	64.059	84.642
<b>Varianza</b>	116.963	149.197

Tabla 4.2 Registros de sujetos con fibrilación auricular

<b>REGISTRO</b>	<b>RECURRENCIA, %</b>	<b>DETERMINISMO, %</b>
4015	76.852	93.670
4126	92.067	95.597
4746	71.815	93.663
4908	63.656	92.458
4936	66.556	92.145
5121	64.252	92.120
6453	80.941	94.220
8215	83.902	94.689
8378	78.785	91.769
8455	85.934	95.379
<b>Mínimo</b>	63.656	91.769
<b>Máximo</b>	92.067	95.597
<b>Promedio</b>	76.476	93.571
<b>Varianza</b>	94.111	1.965

Tabla 4.3 Registros de sujetos con fibrilación supraventricular

REGISTRO	RECURRENCIA, %	DETERMINISMO, %
801	52.135	71.139
804	81.102	93.397
805	63.881	88.480
807	67.546	87.058
808	60.561	84.787
810	85.104	93.663
853	67.902	88.237
871	54.840	83.889
881	68.031	88.376
891	52.343	80.418
<b>Mínimo</b>	52.135	71.139
<b>Máximo</b>	85.104	93.663
<b>Promedio</b>	65.345	85.944
<b>Varianza</b>	126.249	43.251

Se observa, a partir del estudio de los gráficos de recurrencia visual [56] de los tres tipos de sujetos (figuras 4.15 a 4.17), que, tal vez existen pequeñas diferencias en dichos gráficos, pero no son lo suficientemente notables como para poder ser utilizados en la práctica clínica como patrones de reconocimiento visual.



Figura 4.15 Gráficos de recurrencia de registros de sujetos saludables



Figura 4.16 Gráficos de recurrencia de registros de sujetos con fibrilación auricular



Figura 4.17 Gráficos de recurrencia de registros de sujetos con fibrilación supraventricular

#### 4.6 Dimensiones

Las dimensiones de correlación de los registros de sujetos saludables fueron desde 2.97 a 4.54; en registros de sujetos con fibrilación auricular fueron desde 3.74 a 4.63 y los registros de sujetos con fibrilación supraventricular fueron desde 3.43 a 4.45.

Las dimensiones de capacidad de los registros de sujetos saludables fueron desde 1.60 a 2.54; en registros de sujetos con fibrilación auricular fueron desde 1.10 a 2.32 y los registros de sujetos con fibrilación supraventricular fueron desde 1.24 a 2.14.

Las dimensiones de correlación y de capacidad son buenas aproximaciones a la dimensión fractal, en este trabajo se prefirió considerar que la dimensión de correlación es una mejor aproximación a la dimensión fractal. Es bien sabido que el

cálculo de la dimensión fractal nos da una cota mínima al número de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas que se tendrían que proponer para modelar nuestro sistema. La dimensión fractal, también nos da una cota máxima del número de ecuaciones diferenciales ordinarias, que es dos veces la dimensión fractal más uno.

Los resultados obtenidos en el análisis de sistemas dinámicos de las series de tiempo de sujetos saludables, de sujetos con fibrilaciones auriculares y de sujetos con fibrilaciones ventriculares, arrojan valores de la dimensión fractal (dimensión de correlación) que van de aproximadamente 2.97 a 4.63, lo que indica que el sistema bajo estudio y su atractor "no son tan complejos", esto es, presentan baja dimensionalidad.

Algo que se puede concluir del cálculo de la dimensión fractal en el estudio de electrocardiogramas de sujetos sanos y con las cardiopatías estudiadas en esta investigación, es que dicha dimensión no se puede usar como un indicador de la salud del corazón del sujeto en estudio, porque los intervalos en los que se encuentran los valores de la dimensión fractal están traslapados casi completamente.

#### **4.7 Atractores**

Se analizaron las 30 series de tiempo, reconstruyendo el espacio-fase; esta parte del estudio se realizó de forma exhaustiva buscando un patrón de reconocimiento para el cual no se necesitarán manejar muchos parámetros ya que la mala selección de estos puede arrojar diferentes resultados.

Al reconstruir el sistema, a partir de graficar  $x'(t)$  vs  $x(t)$  y  $x(t-n)$  vs  $x(t)$ , se encontró que graficando  $x'(t)$  vs  $x(t)$  se obtiene el mismo atractor aún cambiando los parámetros, en cambio al graficar  $x(t-n)$  vs  $x(t)$  la forma del atractor cambia en función del retardo, en la figura 4.18 se ven los atractores del mismo registro con retardo de 1, 2 y 4 respectivamente.



Figura 4.18 Atractores del mismo registro con diferente retardo

Se graficaron todas las series de tiempo de los tres tipos de sujetos y se comprobó lo anterior, por lo que se eligieron los atractores obtenidos a partir de graficar  $x'(t)$  vs  $x(t)$ .

Haciendo una valoración geométrica de dichos atractores podemos asumir que existe una asociación significativa con la clase de registro; el atractor extraño que obtenemos y que representa las ondas P, QRS, y T del ECG es cuasiperiódico, aparentando ciclos límite sobrepuestos con una parte central a la que llamamos núcleo del atractor y que, dependiendo del tipo de registro, puede ser la onda P o T [57].

Dicho núcleo nos permite diferenciar entre registros de sujetos saludables y registros de sujetos con fibrilación auricular ya que tiene diferente ángulo de inclinación e independientemente del tipo de registro (normal o fibrilación auricular) el núcleo casi siempre está en el origen de coordenadas, por lo cual tomamos como línea base el eje de las abscisas, en la figura 4.19 identificamos con la letra "A" dicho núcleo.

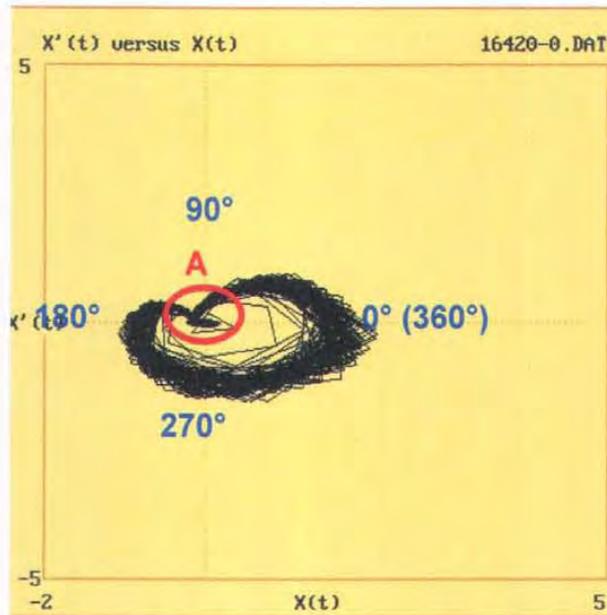


Figura 4.19 Núcleo del atractor

En la forma de los atractores (registros de sujetos sanos y registros de sujetos con fibrilación auricular) encontramos tres casos:

1. El núcleo, al formarse, se enlaza con el cuerpo del atractor formando una curva en forma de "V" (figuras 4.20 y 4.21).

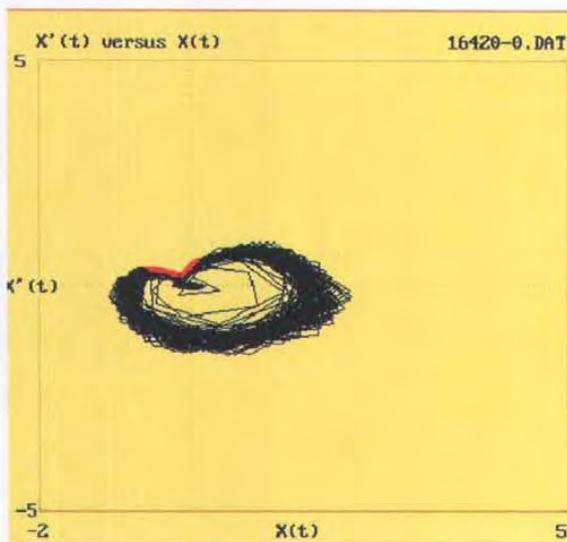


Figura 4.20 Atractor de registro de sujeto sano

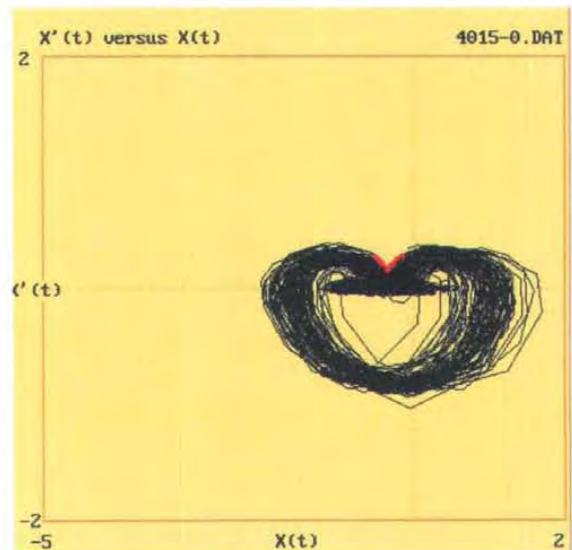


Figura 4.21 Atractor de registro de sujeto con fibrilación auricular

2. El núcleo al formarse enmascara la "V" (figuras 4.22 y 4.23).

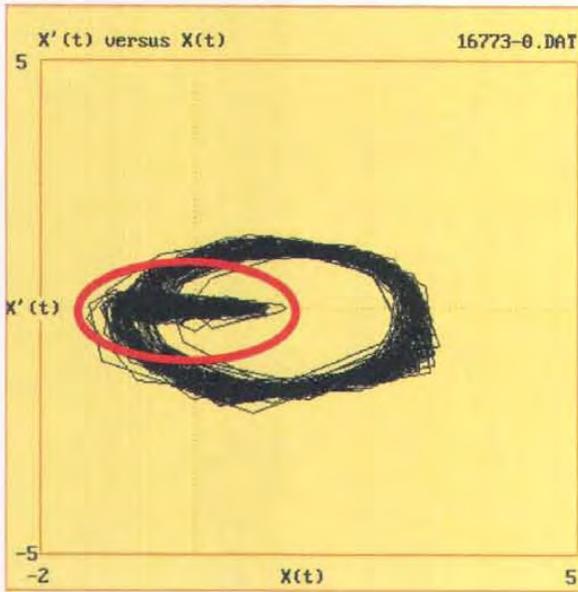


Figura 4.22 Núcleo del atractor de sujeto sano

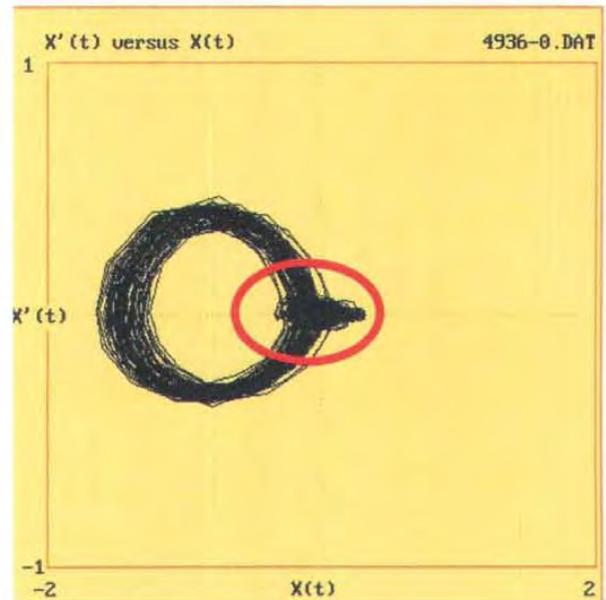


Figura 4.23 Núcleo del atractor de sujeto con fibrilación auricular

3. El núcleo está separado de la "V", esta forma sólo se da en registros de sujetos con fibrilación auricular (figura 4.24).

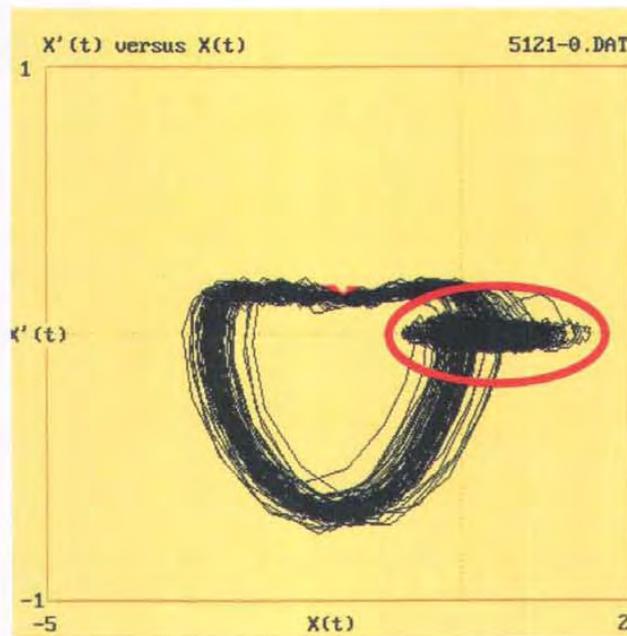


Figura 4.24 Núcleo del atractor de sujeto con fibrilación auricular

El ángulo de inclinación del núcleo se mide trazando las tangentes a cada una de las curvas que forman la "V", después se traza la bisectriz del ángulo  $\theta$  generado por las tangentes y por último se mide el ángulo  $\phi$  de la línea base hasta la bisectriz el cual es el ángulo de inclinación del núcleo (figura 4.25). Cuando no es posible identificar la "V" como en el caso 2, se toma directamente la posición del núcleo (figuras 4.22 y 4.23). En el caso 3 se puede determinar el ángulo de inclinación de dos formas: se calcula por medio de la "V" o directamente por la posición del núcleo (figura 4.24).

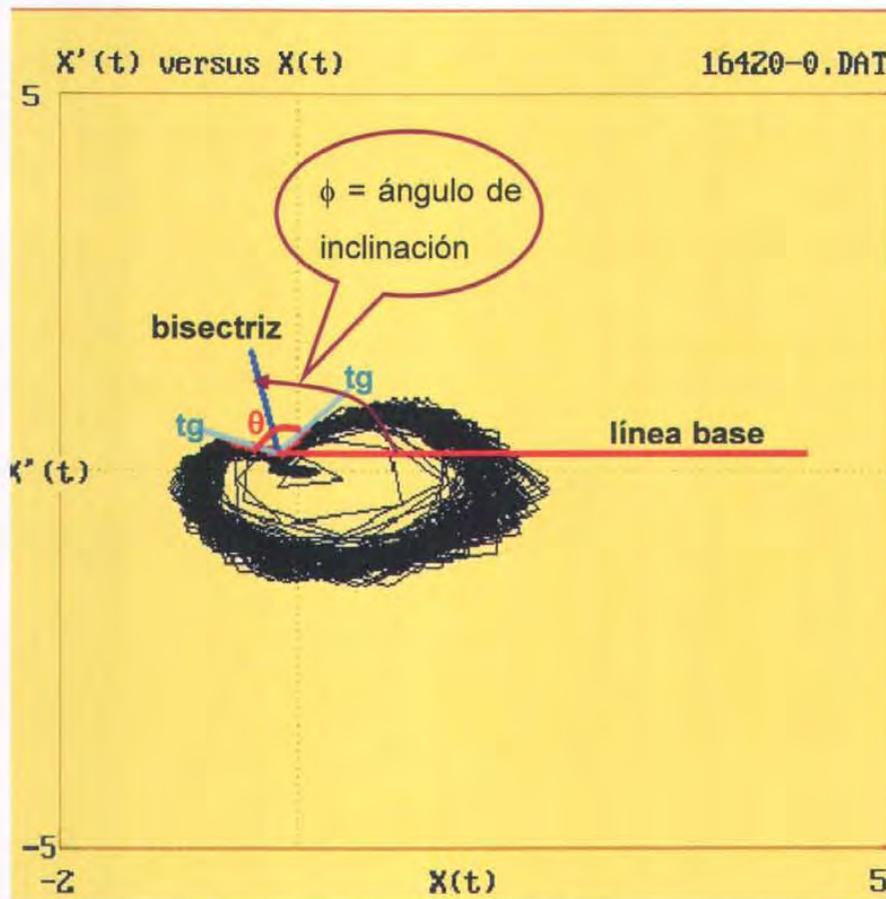


Figura 4.25 Ángulo de inclinación del núcleo

Los atractores obtenidos a partir de series de tiempo de sujetos saludables se muestran en la figura 4.26, los obtenidos a partir de sujetos con fibrilación auricular en la figura 4.27 y los obtenidos a partir de sujetos con fibrilación supraventricular en la figura 4.28.

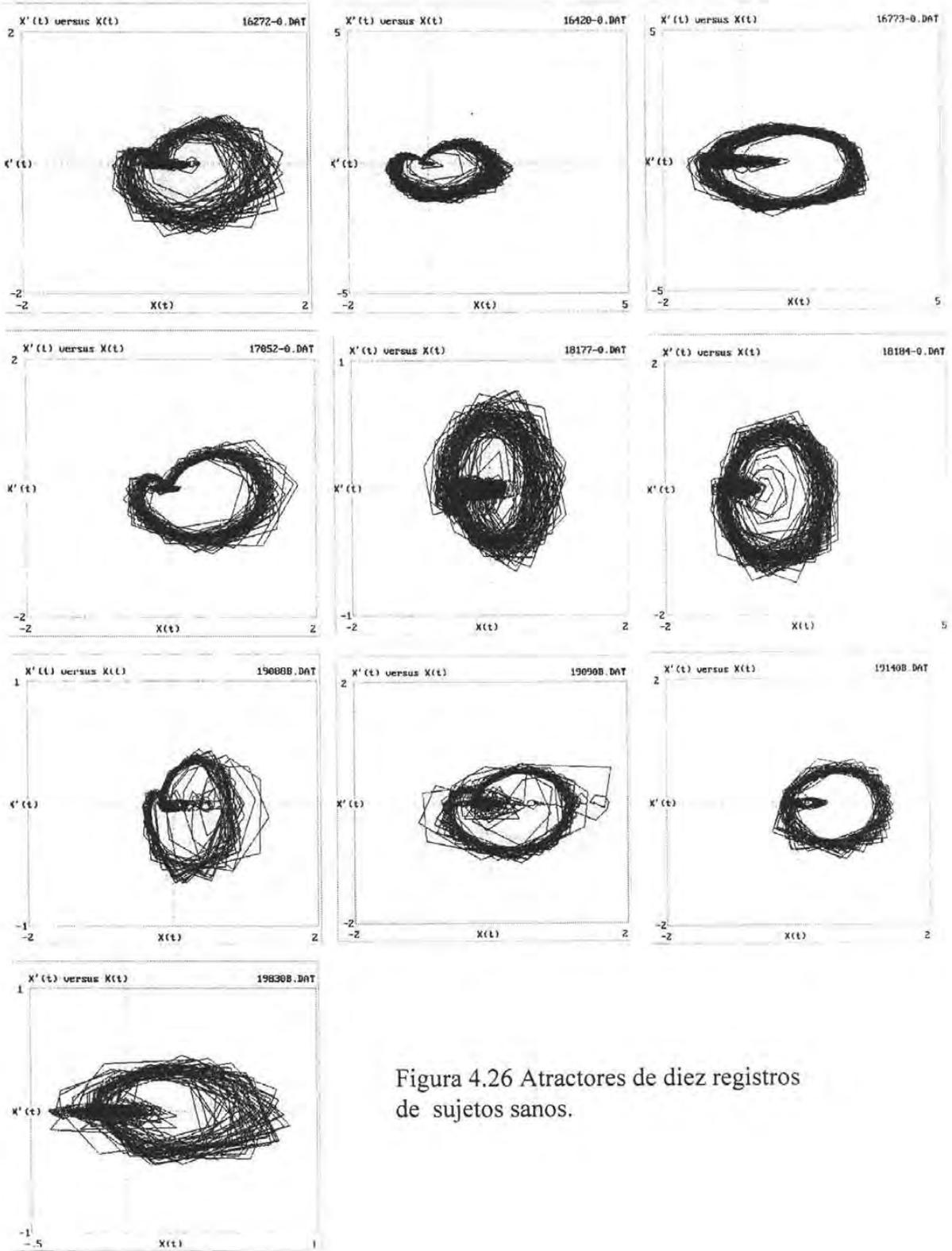


Figura 4.26 Atractores de diez registros de sujetos sanos.

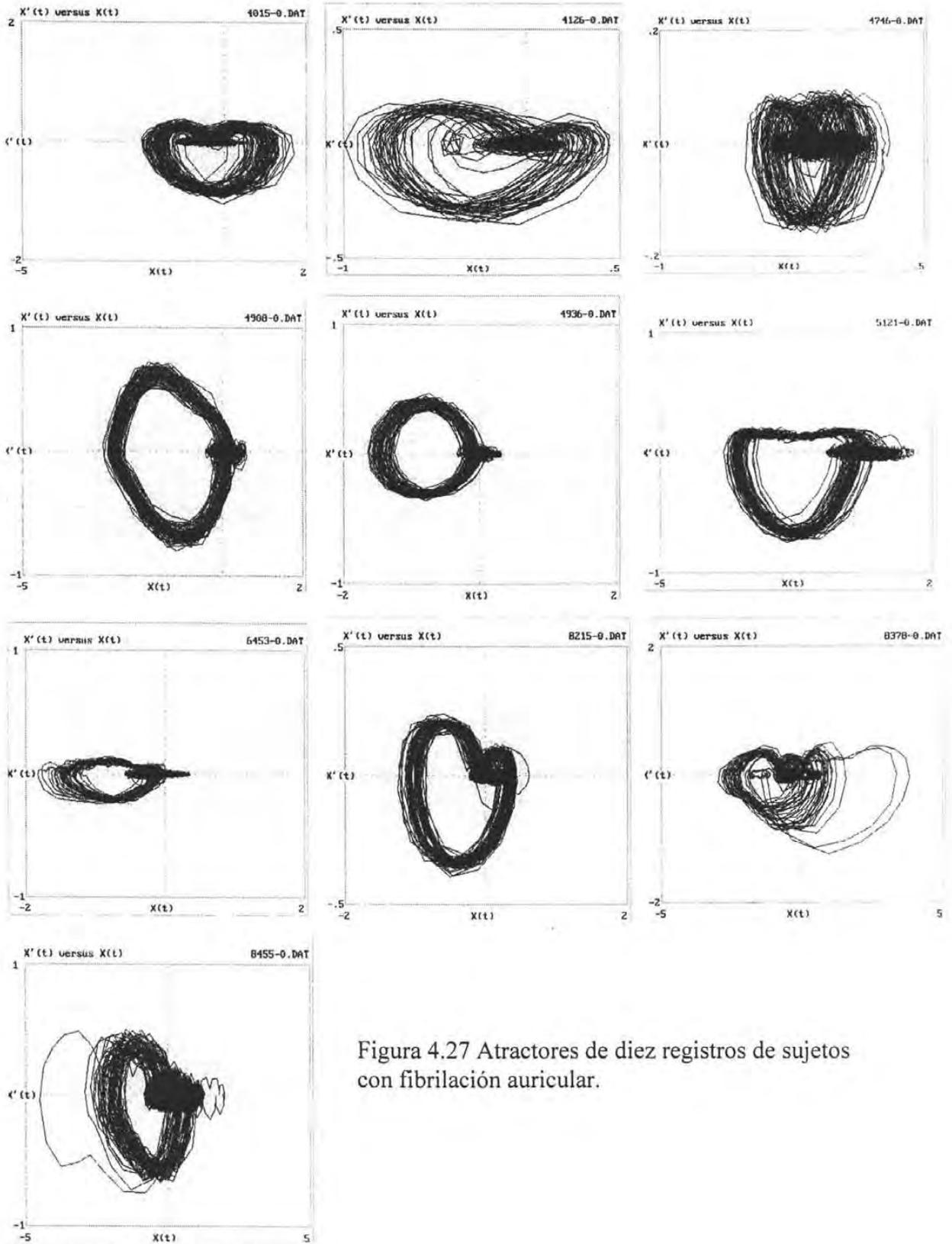


Figura 4.27 Atractores de diez registros de sujetos con fibrilación auricular.

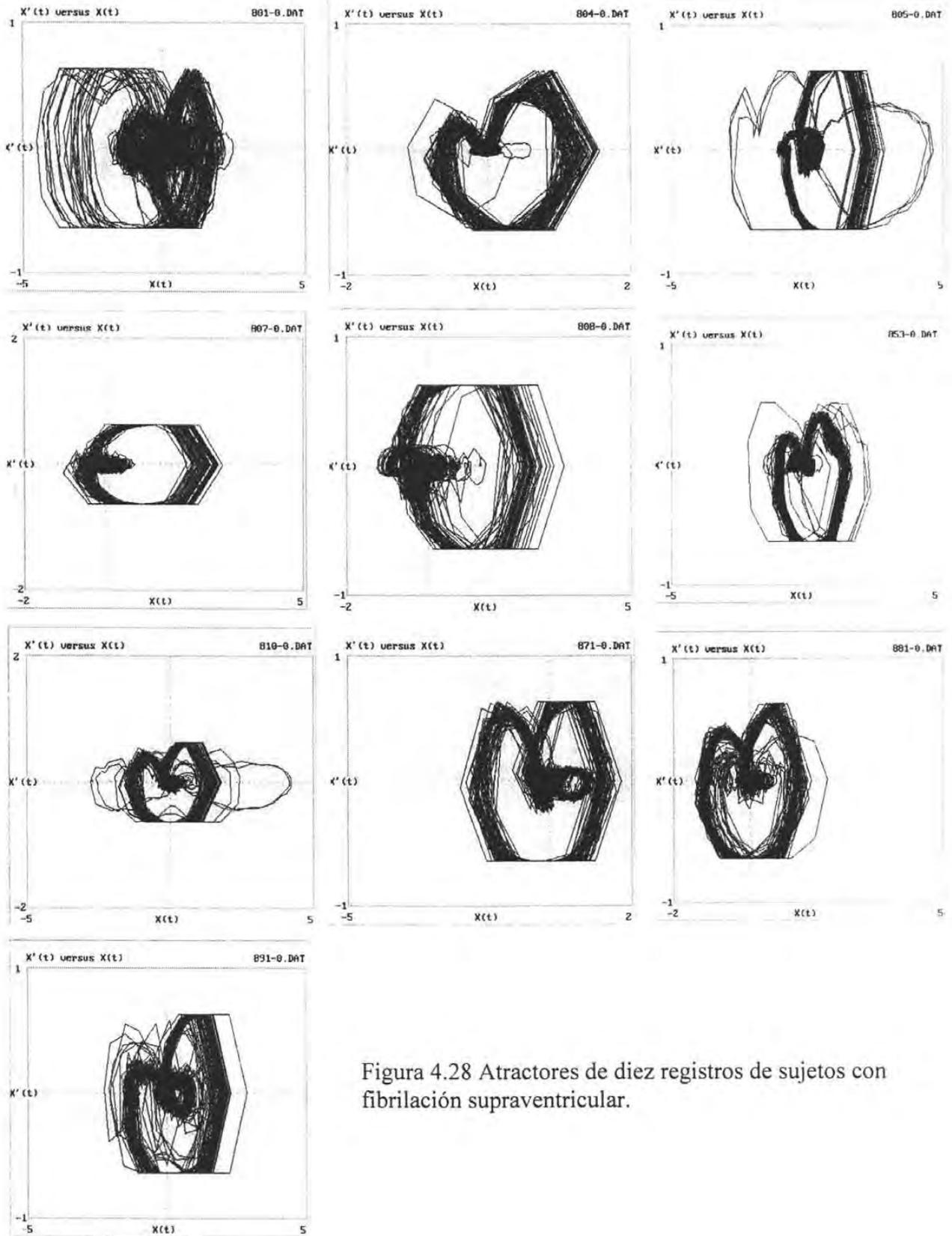


Figura 4.28 Atractores de diez registros de sujetos con fibrilación supraventricular.

Se midieron los ángulos de inclinación del núcleo de los atractores de los registros de sujetos saludables y se encontró que tienen el ángulo de inclinación entre  $105^\circ$  y  $180^\circ$  también se midieron los ángulos de inclinación del núcleo de los atractores de los registros de sujetos con fibrilación auricular encontrando que tienen el ángulo de inclinación entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ .

El núcleo de los atractores de las series de sujetos con fibrilación supraventricular es más complejo por lo que es difícil medir el ángulo, razón por la cual no se utilizó para identificar este tipo de registros.

A partir del estudio de los atractores podemos decir que el ángulo de inclinación del núcleo nos sirve para diferenciar los registros de sujetos saludables y los registros de sujetos con fibrilación auricular pero no nos ayuda en la identificación de sujetos con fibrilación supraventricular.

Para la identificación de los registros de sujetos con fibrilación supraventricular se utilizó la forma del atractor, ya que, contrario a lo que dice la literatura, si tienen estructura; la forma de la estructura con líneas más largas dando la apariencia de que el atractor fue cortado, es distintiva de estos registros.

#### **4.8 Índices**

Después de obtener los atractores se estudiaron los resultados de los índices calculados tratando de encontrar un invariante para reconocer y diferenciar de una manera objetiva los tres tipos de sujetos.

Los resultados obtenidos en cuanto a la complejidad del sistema fueron muy variados; los índices más representativos de cada tipo de sujeto fueron: el exponente de Hurst, el exponente de Lyapunov y la entropía de Kolmogorov los cuales se muestran en las tablas 4.4, 4.5 y 4.6.

Tabla 4.4 Registros de sujetos saludables

<b>REGISTRO</b>	<b>EXPONENTE de HURST</b>	<b>EXPONENTE de LYAPUNOV</b>	<b>ENTROPIA de KOLMOGOROV</b>
16272	0.143218	0.188 ± 0.022	0.402
16420	0.100700	0.133 ± 0.025	0.435
16773	0.185523	0.229 ± 0.020	0.387
17052	0.150269	0.173 ± 0.024	0.402
18177	0.173075	0.299 ± 0.020	0.382
18184	0.152736	0.277 ± 0.022	0.419
19088B	0.181950	0.221 ± 0.041	0.371
19090B	0.160410	0.205 ± 0.031	0.387
19140B	0.183221	0.274 ± 0.033	0.453
19830B	0.165266	0.359 ± 0.033	0.451

Tabla 4.5 Registros de sujetos con fibrilación auricular

<b>REGISTRO</b>	<b>EXPONENTE de HURST</b>	<b>EXPONENTE de LYAPUNOV</b>	<b>ENTROPIA de KOLMOGOROV</b>
4015	0.305474	0.169 ± 0.013	0.299
4126	0.357973	0.154 ± 0.013	0.343
4746	0.480336	0.298 ± 0.527	0.309
4908	0.394344	0.150 ± 0.013	0.311
4936	0.277070	0.170 ± 0.013	0.238
5121	0.493220	0.117 ± 0.012	0.191
6453	0.520334	0.180 ± 0.013	0.299
8215	0.320890	0.126 ± 0.013	0.205
8378	0.406488	0.097 ± 0.012	0.253
8455	0.364836	0.121 ± 0.012	0.363

Tabla 4.6 Registros de sujetos con fibrilación supraventricular

REGISTRO	EXPONENTE de HURST	EXPONENTE de LYAPUNOV	ENTROPIA de KOLMOGOROV
801	0.385779	0.340 ± 0.020	0.468
804	0.170472	0.163 ± 0.022	0.437
805	0.324585	0.140 ± 0.019	0.373
807	0.294647	0.256 ± 0.020	0.424
808	0.327828	0.215 ± 0.019	0.379
810	0.284541	0.126 ± 0.018	0.364
853	0.264511	0.167 ± 0.019	0.329
871	0.270939	0.220 ± 0.021	0.377
881	0.226256	0.212 ± 0.022	0.425
891	0.247046	0.231 ± 0.022	0.320

Los resultados del exponente de Hurst obtenidos a partir de sujetos saludables se compararon con los obtenidos a partir de sujetos con fibrilación auricular, no encontrándose diferencias, también se compararon con los de sujetos con fibrilación supraventricular y tampoco se encontraron diferencias. Asimismo, los resultados del exponente de Lyapunov y de la entropía de Kolmogorov no presentan diferencias significativas entre los tres tipos de sujetos; aunque a partir de los resultados del exponente de Hurst y la entropía de Kolmogorov podemos afirmar que todas las series de tiempo no son aleatorias sino periódicas, con cierto grado de caoticidad y antipersistentes.

Se estudiaron los resultados de las tablas 4.4, 4.5 y 4.6 hasta encontrar una relación entre los tres índices que nos permitiera diferenciar cada tipo de registro. Las relaciones son las siguientes:

Para los registros de sujetos saludables

$$K > L > H \quad \circ \quad L > H < K \quad (40)$$

Para los registros de sujetos con fibrilación auricular

$$H > K > L \quad \circ \quad L < H > K \quad (41)$$

Para los registros de sujetos con fibrilación supraventricular

$$K > H > L \quad \circ \quad L < H < K \quad (42)$$

donde

**H** = exponente de Hurst

**L** = exponente de Lyapunov

**K** = entropía de Kolmogorov

En este capítulo se pudo comprobar a lo largo de los diferentes análisis realizados que el ciclo cardíaco es un sistema con un alto grado de periodicidad, lo cual se verificó mediante el porcentaje de determinismo que en general es alto, con los espectros de Fourier, ya que en los tres tipos de registros se observó la existencia de una frecuencia dominante y al "filtrar" los datos optimizando la funcional del proyector de la serie de tiempo original (ECG) sobre una función de aproximación mediante la técnica de componentes principales [58], se observó en la mayoría de los casos la existencia de un ciclo límite.

Aunque en la mayor parte de los casos se generan ciclos límite en el espacio-fase mediante la técnica de componentes principales, para el propósito de generar patrones de reconocimiento visual que permitan distinguir una dolencia dinámica de otra, es preferible generar los atractores extraños en espacio-fase sin filtrar a partir de graficar  $x'(t)$  vs  $x(t)$ . Además, la relación encontrada entre la entropía de Kolmogorov y los índices de Hurst y Lyapunov se puede utilizar como criterio de diagnóstico.

## Software empleado

- 📖 **Chaos Data Analyzer (CDA).**- Es una herramienta que consiste de 19 programas que nos ayudan en el análisis de series de tiempo. El objetivo principal es encontrar caos determinístico con ayuda de cálculos de distribución de probabilidad, exponente de Hurst, exponente de Lyapunov, dimensión de correlación y gráficos en el espacio-fase entre otras.
- 📖 **Visual Recurrence Analysis (VRA).**- Es una herramienta para análisis topológico, análisis o evaluación cualitativa y cuantitativa y predicciones en series de tiempo caóticas no lineales; nos permite encontrar el valor óptimo del retardo y de la dimensión de incrustación por medio de los métodos de información mutua promedio y falsos vecinos cercanos para la reconstrucción del espacio de estado. El gráfico de recurrencia nos ayuda en el análisis de periodicidad, estacionariedad, determinismo y complejidad del sistema dinámico.

### **5.1 Conclusiones**

En la presente tesis se han estudiado y analizado series de tiempo obtenidas a partir del ciclo cardiaco de sujetos saludables y sujetos con cardiopatías. Dicho estudio se realizó con técnicas de la dinámica no lineal reconstruyendo en el espacio-fase el sistema de origen para encontrar patrones de reconocimiento visual y algún invariante que nos permitiera distinguir entre un sujeto saludable y otro con cardiopatías.

Los siguientes resultados obtenidos aportan elementos que ayudan en la caracterización de registros del ciclo cardiaco:

1. La forma de los histogramas obtenidos a partir de la distribución de probabilidad nos permiten decir que las series estudiadas no son estrictamente periódicas (en el sentido de periodicidad pura) ni estocásticas ya que las bandas obtenidas son anchas, no tienen distribución simétrica y tienen un número de estados mayor de diez. Los histogramas de los tres tipos de sujetos no muestran diferencias significativas.
2. En los gráficos de frecuencia obtenidos a partir de la transformada rápida de Fourier se observan varios picos anchos bien definidos lo cual nos podría indicar en los términos de la literatura de teoría del caos "clásica" que se trata de sistemas caóticos aunque dichos gráficos no aportan elementos para diferenciar los tres tipos de registros. En realidad lo que sucede es que aún no se han desarrollado técnicas que permitan clasificar y diferenciar sistemas dinámicos con comportamiento mixto. Por ejemplo, sistemas dinámicos del tipo caótico-aleatorio, caótico-periódico o caótico-multiperiódico, etc.
3. Los resultados del análisis estadístico tampoco nos apoyan para diferenciar los tres tipos de sujetos, aunque el porcentaje de recurrencia y determinismo en los sujetos sanos y los sujetos con fibrilación supraventricular es casi el

mismo y menor que el de los sujetos con fibrilación auricular. Los resultados de recurrencia y determinismo nos hablan de sistemas que podrían ser cuasiperiódicos, ya que el % de determinismo es alto, pero no 100%, por lo que el tipo de sistema con el que se está tratando es eminentemente mixto, predominantemente periódico y con un cierto componente de caoticidad.

4. Los gráficos de recurrencia obtenidos a partir de los tres tipos de sujetos no muestran grandes diferencias entre sí.
5. Los resultados obtenidos en cuanto a la dimensión fractal (dimensión de correlación) arrojan valores que van de aproximadamente 2.97 a 4.63, lo que indica que el sistema bajo estudio y su atractor "no son tan complejos", esto es, presentan baja dimensionalidad. Algo que se puede concluir del cálculo de la dimensión fractal en el estudio de electrocardiogramas de sujetos sanos y con las cardiopatías estudiadas en esta investigación, es que dicha dimensión no se puede usar como un indicador de la salud del corazón del sujeto en estudio, porque los intervalos en los que se encuentran los valores de la dimensión fractal están traslapados casi completamente.
6. Se reconstruyó el sistema de origen a partir de graficar  $x'(t)$  vs  $x(t)$ , obteniendo atractores extraños cuasiperiódicos que parecían ciclos límite sobrepuestos, con una región densa que llamamos núcleo del atractor, el cual nos permitió diferenciar entre registros de sujetos saludables y registros de sujetos con fibrilación auricular, ya que tiene diferente ángulo de inclinación. El ángulo de inclinación de los registros de sujetos saludables mide entre  $105^\circ$  y  $180^\circ$  y el de los registros de sujetos con fibrilación auricular mide entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . En los registros de sujetos con fibrilación supraventricular el ángulo de inclinación del núcleo no nos permite identificarlos, en cambio, la forma de sus atractores con líneas más largas dando la apariencia de un atractor con cortes es distintivo de estos registros.
7. Los resultados obtenidos, en cuanto a la complejidad del sistema, fueron muchos y muy variados; después de estudiarlos detenidamente se seleccionó la entropía de Kolmogorov y los índices de Hurst y de Lyapunov, comparando los resultados entre los tres tipos de sujetos para diferenciarlos de una

manera objetiva, y se encontró que existe una relación entre ellos que podemos utilizar como criterio de diagnóstico. La relación encontrada es:

Registros de sujetos saludables	$K > L > H$ $\bullet$ $L > H < K$
Registros de sujetos con fibrilación auricular	$H > K > L$ $\bullet$ $L < H > K$
Registros de sujetos con fibrilación supraventricular	$K > H > L$ $\bullet$ $L < H < K$

donde

**H** = exponente de Hurst

**L** = exponente de Lyapunov

**K** = entropía de Kolmogorov

También a partir de los resultados del exponente de Hurst y la entropía de Kolmogorov podemos afirmar que todas las series de tiempo no son aleatorias sino caóticas, tienen cierto grado de determinismo y son antipersistentes.

- Al finalizar este trabajo consideramos que, para estudios posteriores, se deben tomar los ECG de sujetos de los cuales se conozca su estado de salud, su ingesta de medicamentos, su edad y sexo para controlar los parámetros del estudio.

En este estudio se comprobó, a lo largo de los diferentes análisis realizados que el ciclo cardíaco es un sistema con un comportamiento mixto (periodico-caótico); que los atractores obtenidos a partir de graficar  $x'(t)$  vs  $x(t)$  nos ayudan en la identificación de los tres tipos de registros como patrones de reconocimiento visual y la relación de los tres índices se puede utilizar como criterio de diagnóstico. Además, se ha demostrado que la utilización de la representación en el espacio-fase puede constituir una herramienta útil para el problema de la clasificación de sistemas fisiológicos.

Este trabajo fue presentado en:

1. THIRD INTERNATIONAL WORKSHOP GRAPHS-OPERADS-LOGIC en la sesión de póster, "Strange attractors in phase space from electrocardiographic data", el 9 de febrero de 2004 en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán-UNAM.
2. VII MEXICAN SYMPOSIUM ON MEDICAL PHYSICS, en la sesión de póster, "Generation of new recognition patterns in phase space from electrocardiographic data", el 18 de marzo de 2004 en Guanajuato México.
3. THE FIRST INTERNATIONAL CONFERENCE ON NONLINEAR, FRACTIONAL AND STOCHASTIC DYNAMICS en la sesión de póster, "On the existence of recognition patterns in the form of strange attractors in ventricular fibrillation", el 28 de enero de 2005 en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán-UNAM.

- [1] J. Briggs and D. Peat, *"Espejo y Reflejo: del Caos al Orden,"* CONACYT, México, 1991.
- [2] M.R. Guevara, A. Shrier and L. Glass, *"Phase Resetting of Spontaneously Beating Embryonic Ventricular Heart Cell Aggregates,"* American Journal of Physiology, vol. 251, no. 20, pp. H1298-H1305, 1986.
- [3] L. Glass and P. Hunter, *"There is a Theory of Heart,"* Physica D, vol. 43, pp. 1-16, 1990.
- [4] A.C. Guyton and J.E. Hall, *"Tratado de Fisiología Médica,"* Interamericana, Mc Graw-Hill, México, 1997.
- [5] J. Morales and W. Fariñas, *"El Orden Dinámico del Organismo: ¿Un Nuevo Concepto en la Medicina?,"* Memorias II Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica, Sociedad Cubana de Bioingeniería, artículo 00384, 2001.
- [6] A. D'Alessandro, *"Sistema Vascular Periférico,"* Ediciones Nueva Física, Caracas, 1995.
- [7] A.L. Goldberger, D.R. Rigney, and B.J. West, *"Chaos and Fractals in Human Physiology,"* Scientific American, vol. 262, no. 2, pp. 43-49, Feb 1990.
- [8] S.M. Pincus and A.L. Goldberger, *"Physiological Time Series Analysis: What does Regularity Quantify?,"* American Journal of Physiology, vol. 266, no. 4, pp. H1643-H1656, 1994.
- [9] S.M. Ryan, A.L. Goldberger, S.M. Pincus, J. Mietus and L.A. Lipsitz, *"Gender and Age-Related Differences in Heart Rate Dynamics: Are Women more Complex than Men?,"* Journal American College of Cardiology, vol. 24, no. 7, pp. 1700-1707, 1994.
- [10] L.A. Lipsitz, F. Hashimoto, L.P. Lubowsky, J. Mietus, G. Moody, O. Appenzeller and A.L. Goldberger, *"Heart Rate and Respiratory Rhythm Dynamics on Ascent to High Altitude,"* British Heart Journal, vol. 74, no. 4, pp. 390-396, 1995.
- [11] J.E. Mietus, C.K. Peng, P.C. Ivanov and A.L. Goldberger, *"Detection of Obstructive Sleep Apnea from Cardiac Interbeat Interval Time Series,"* Computers in Cardiology, Cambridge, Massachusetts, vol. 27, pp. 753-756, 2000.
- [12] A.L. Goldberger, *"Fractal Variability versus Pathologic Periodicity: Complexity loss and Stereotypy in Disease,"* Perspectives in Biology & Medicine, Chicago, vol. 40, no. 4, pp. 543-561, 1997.
- [13] K.K. Ho, G.B. Moody, C.K. Peng, J.E. Mietus, M.G. Larson, D. Levy and A.L. Goldberger, *"Predicting Survival in Heart Failure Case and Control Subjects by Use of Fully Automated Methods for Deriving Nonlinear and Conventional Indices of Heart Rate Dynamics,"* Circulation American Heart Association, vol. 96 no. 3, pp. 842-848, 1997.
- [14] C.K. Peng, J. Mietus, Y. Liu, G. Khalsa, P.S. Douglas, H. Benson and A.L. Goldberger, *"Exaggerated Heart Rate Oscillations During two Meditation Techniques,"* International Journal Cardiology, vol. 70, pp. 101-107, 1999.

- [15] D.L. Álvarez y J. Farbiarz, "Efecto del Sistema Nervioso Autónomo sobre la Variabilidad de la Frecuencia Respiratoria," *Latreia* vol. 13, no. 2, pp. 97, Junio 2000.
- [16] S.S. Cross and D.W. Cotton, "Chaos and Antichaos in Pathology," *Human Pathology*, vol. 25, no. 7, pp. 630-637, Jul 1994.
- [17] M. Canals y F. Labra, "Análisis No-lineal de la Dinámica de Enfermedades Infecciosas en Chile," *Revista Médica de Chile*, vol. 127, no. 9, pp. 1086-1092, 1999.
- [18] C. Lerma, D. Olivares, C. Contreras y M. Jose, "Sistema de Análisis no Lineal de la Variabilidad de la Frecuencia Cardíaca", *Electro* 2001, pp. 113-118, 2001.
- [19] M. Richter and T. Schreiber, "Phase Space Embedding of Electrocardiograms," *Chaos*, vol. 1, pp. 1-6, 1998.
- [20] R.C. Eberhart, "Chaos Theory for the Biomedical Engineer," *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, vol. 8, no. 3, pp. 41-45, Sept 2000.
- [21] C. Monroy, "Teoría del Caos," Alfaomega Grupo Editor, México, 1997.
- [22] M. Arellano, "Introducción al Análisis Clásico de Series de Tiempo," [en línea] <http://www.5campus.com>.
- [23] S. Arita, K. Yoshii, S. Ishihara and T. Takeda, "Time Series Analysis of Electrocardiogram and Pulse Wave Responses," *International Journal Chaos Theory Applied*, vol. 7, no. 1-2, pp. 81-84, 2002.
- [24] J. Farbiarz y D.L. Alvarez, "Complejidad, Caos y Sistemas Biológicos," *Academia Nacional de Medicina de Colombia*, vol. 22, no. 1, pp. 52-55, mayo 2000.
- [25] P. Grassberger, T. Schreiber and C. Schaffrath, "Non-linear Time Sequence Analysis," *International Journal Bifurcation and Chaos*, vol. 1, pp. 521-529, 1991.
- [26] F. Takens, "Detecting Strange Attractors in Turbulence," *Lecture notes in Mathematics, Dynamical Systems and Turbulence*, vol. 898, pp. 366, Springer, Berlin, 1981.
- [27] T. Schreiber, "Interdisciplinary Application of Nonlinear Time Series Methods," *Physics Reports*, vol. 308, no. 1, pp. 1-64, 1999.
- [28] H.D.I. Abarbanel, "Analysis of Observed Chaotic Data," Springer, Verlag New York, 1995.
- [29] W.A. Smith, "Elementary Numerical Analysis," Prentice-Hall, 1988.
- [30] P. Grassberger and I. Procaccia, "Dimensions and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach," *Physica D*, vol. 13, no. 1-2, pp. 34-54, 1984.
- [31] L.I. Eguiluz, M. Mañana y J.C. Lavadero, "Clasificación de Perturbaciones Mediante la Representación en el Espacio Fase," *Jornadas Hispano-Lusas Ing. Eléctrica*, Madrid Julio 2001.
- [32] A.M. Fraser and H.L. Swinney, "Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information," *Physical Review A*, vol. 33, pp. 1134-1138, 1991.
- [33] J. Feder, "Fractals," Department of Physics University of Oslo, Plenum Press, 1988.
- [34] <http://mathworld.wolfram.com>
- [35] F.C. Moon, "Chaotic Vibrations," John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [36] J. Brindley and T. Kapitaniak, "Existence and Characterization of Strange

- Nonchaotic Attractors in Nonlinear Systems*," Chaos, Solitons and Fractals, vol. 1, no. 4, pp. 323-330, 1991.
- [37] T. Kapitaniak, "On Strange Nonchaotic Attractors and Their Dimensions," Chaos, Solitons and Fractals, vol. 1, no. 1, pp. 67-71, 1991.
- [38] J.P. Eckmann and D. Ruelle, "Fundamental Limitations for Estimating Dimensions and Lyapunov Exponents in Dynamical Systems," Physica D, vol. 56, pp. 185-187, 1992.
- [39] H. Takayasu, "Fractals in the Physical Sciences," Manchester University Press, New York, 1990.
- [40] E. Aurell, G. Boffetta, A. Crisanti, G. Paladin, and A. Vulpiani, "Predictability in the Large: an Extension of the Concept of Lyapunov Exponent," Journal of Physics A, vol. 30, no. 1, pp. 1-26, 1997.
- [41] P. Grassberger and I. Procaccia, "Estimation of the Kolmogorov Entropy from a Chaotic Signal," Physical Review A, vol. 28, no. 4, pp. 2591-2593, 1983.
- [42] J.S. Richman and J.R. Moorman, "Physiological Time Series Analysis using Approximate Entropy and Sample Entropy," American Journal Physiology, vol. 278, no. 6, pp. H2039-H2049, 2000.
- [43] B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature," Wh Freeman, New York, 1983.
- [44] A.L. Goldberger, "Non-linear Dynamics for Clinicians. Chaos Theory, Fractals and Complexity at Bedside," Lancet, vol. 347, pp. 1312-1314, 1996.
- [45] A. Galka, T. Maab and G. Pfister, "Estimating the Dimensions of High Dimensional Attractors: a Comparison between two Algorithms," Physical Review Letter vol. 121, pp. 237-251, 1998.
- [46] M.E. Skinner, C.M. Pratt and T. Vybiral, "A Reduction in the Correlation Dimension of Heartbeat Intervals Precedes Imminent Ventricular Fibrillation in Human Subjects," American Heart Journal vol. 125, pp. 731-743, 1993.
- [47] T. García, A. Jiménez, R. Ortiz y M. Peña, "Potenciales Bioeléctricos: Origen y Registro," Universidad Autónoma Metropolitana, México D.F. 1998.
- [48] D. Sodi, "Nuevas Bases de la Electrocardiografía," Prensa Médica Mexicana, México D.F. 1951.
- [49] T. Phillips and P. N. Plowman, "Cardiology," Elsevier Science Publishing Co, New York. 1987.
- [50] E. Cabrera, "Teoría y Práctica de la Electrocardiografía," Prensa Médica Mexicana, México D. F. 1958.
- [51] P. I. Aaronson y J. P. Ward, "El Sistema Cardiovascular en Esquemas," Ars Medica, Argentina. 2001.
- [52] D.I. Vanegas, "Avances en el Diagnóstico y Tratamiento de las Arritmias Cardíacas. Reconstrucción Tridimensional y Mapeo Electromagnético del Corazón," Revista Colombiana de Cardiología vol. 11, pp. 6-11, Nov 2004.
- [53] A.A. Armoundas, A.Feldman, R. Mukkamala and R.J. Cohen, "A Single Equivalent Moving Dipole Model: an Efficient Approach for Localizing sites of Origin of Ventricular Electrical Activation," Annals of Biomedical Engineering, vol. 31, pp. 564-576, 2003.
- [54] H.V. Huikuri, T.H. Makikallio and J. Perkiomaki, "Measurement of Heart Rate Variability by Methods Based Nonlinear Dynamics," Journal Electrocardiology, vol. 36, pp. 95-99, 2003.

- [55] [http://www.biopsychology.org/tesis\\_esteve/apendices/fourier/tfour.htm](http://www.biopsychology.org/tesis_esteve/apendices/fourier/tfour.htm)
- [56] J.P. Zbilut, N. Thomasson and C.L. Webber, "Recurrence Quantification Analysis as a Tool for Nonlinear Exploration of Nonstationary Cardiac Signals," *Medical Engineering Physics* vol. 24, pp. 53-60, 2002.
- [57] T.A. Denton, G.A. Diamond, S. Khan and H. Karagueuzian, "Can the Techniques of Nonlinear Dynamics Detect Chaotic Behavior in Electrocardiographic Signals?," *Journal Electrocardiology* vol. 24, pp. 84-90, 1992.
- [58] A. Giuliani, M. Colafranceschi, C.L. Webber and J.P. Zbilut, "A Complexity Score Derived from Principle Components Analysis of Nonlinear Order Measures," *Physica A*, vol. 301, pp. 567-588, 2001.