

01173



# Universidad Nacional

Autónoma de México

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIMEI SECCIÓN MECÁNICA

*Balaceo Estático de un Mecanismo  
Espacial de Paralelogramo*

*TESIS*

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA (MECÁNICA)

Presenta

Juan Sánchez Cano

Tutor

**M. en I. Francisco Cuenca Jiménez**

Cd. Universitaria, México D.F.

Junio 2005

---

m345624



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

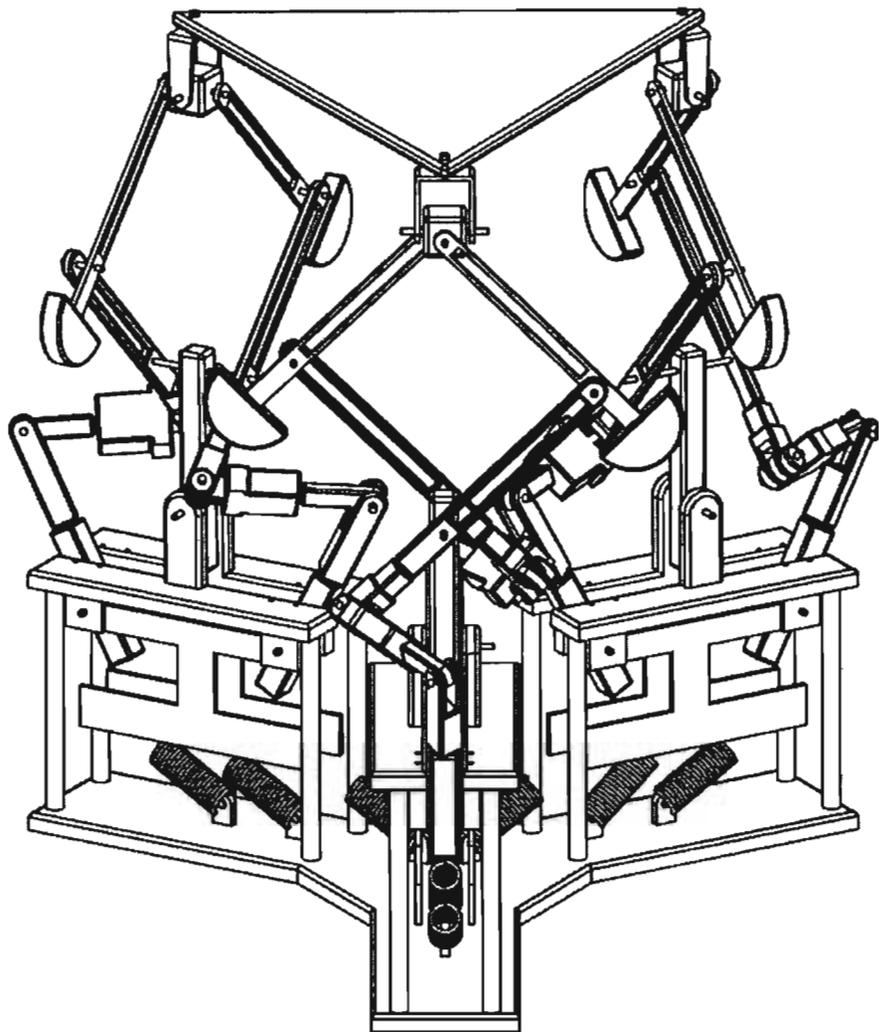
Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Balaneo Estático de un Mecanismo *Espacial de Paralelogramo*

Juan Sánchez Cano



Universidad Nacional Autónoma de México | Tesis Maestría  
DIMEI – Sección Mecánica | Diseño Mecánico



A la Dirección General de Bibliotecas de la  
 UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el  
 contenido de mi trabajo recepcional.  
 NOMBRE: JUAN SANCHEZ CAND  
 FECHA: 16 JUNIO 2005  
 FIRMA: 

# Índice general

<b>1. Generalidades</b>	<b>1</b>
1.1. Definición del Problema . . . . .	1
1.2. Restricciones . . . . .	1
1.3. Hipótesis . . . . .	2
1.4. Justificación . . . . .	2
1.5. Objetivo General . . . . .	2
1.6. Objetivos Específicos . . . . .	2
1.7. Metodología . . . . .	3
1.8. Mecanismos en Paralelo . . . . .	3
1.9. Movimiento y Restricciones . . . . .	4
1.10. Arquitectura . . . . .	5
1.11. Grados de Libertad . . . . .	7
<b>2. Cinemática</b>	<b>8</b>
2.1. Introducción . . . . .	8
2.2. Posición . . . . .	9
2.2.1. Marcos de Referencia . . . . .	9
2.2.2. Ángulo $\theta_{4i}$ . . . . .	13
2.2.3. Ángulo $\theta_{10i}$ . . . . .	17
2.2.4. Ángulo $\theta_{7i}$ . . . . .	19
2.2.5. Ángulo $\theta_{12i}$ . . . . .	20
2.2.6. Ángulo $\theta_{14i}$ . . . . .	21
2.2.7. Ángulo $\theta_{16i}$ . . . . .	22
2.3. Velocidad . . . . .	24
2.3.1. Velocidad de $\theta_{4i}$ . . . . .	25
2.3.2. Velocidad de $\theta_{10i}$ . . . . .	27
2.3.3. Velocidad de $\theta_{7i}$ . . . . .	29
2.3.4. Velocidad de $\theta_{12i}$ . . . . .	30
2.3.5. Velocidad de $\theta_{14i}$ . . . . .	33
2.3.6. Velocidad de $\theta_{16i}$ . . . . .	34
2.4. Mecanismo Adicional (MA) . . . . .	37
2.4.1. Posición y Velocidad del MA (eslabón 3 <sub>i</sub> ) . . . . .	38
2.4.2. Posición y Velocidad del MA (eslabón 1 <sub>i</sub> ) . . . . .	42

<b>3. Balanceo Estático</b>	<b>47</b>
3.1. Introducción . . . . .	47
3.2. Balanceo Estático de Mecanismos . . . . .	48
3.3. Balanceo Estático de la Plataforma . . . . .	49
3.3.1. Sistema Equivalente . . . . .	49
3.3.2. Energía Potencial Debido a la Gravedad . . . . .	51
3.3.3. Energía Potencial Debido a los Resortes . . . . .	54
3.3.4. Condiciones de Balanceo . . . . .	58
3.4. Datos de la Plataforma Espacial . . . . .	59
<b>4. Análisis Estático</b>	<b>62</b>
4.1. Introducción . . . . .	62
4.2. El Principio del Trabajo Virtual . . . . .	62
4.2.1. Desplazamiento Virtual . . . . .	63
4.3. Desplazamiento Virtual de los Vectores . . . . .	68
4.3.1. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W0i}$ . . . . .	68
4.3.2. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W1i}$ . . . . .	69
4.3.3. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W2i}$ . . . . .	70
4.3.4. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W3i}$ . . . . .	71
4.3.5. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W4i}$ . . . . .	72
4.3.6. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W5i}$ . . . . .	73
4.3.7. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{WAi}$ . . . . .	74
4.3.8. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{WBi}$ . . . . .	74
4.3.9. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{WCi}$ . . . . .	76
4.3.10. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{WDi}$ . . . . .	76
4.3.11. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{WP}$ . . . . .	77
4.3.12. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{R0i}$ . . . . .	78
4.3.13. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{RAi}$ . . . . .	79
4.3.14. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{RCi}$ . . . . .	79
4.3.15. Desplazamiento Virtual para los Torques . . . . .	79
4.4. Expresión para el Trabajo Virtual . . . . .	80
4.5. Determinación del Equilibrio Estático . . . . .	87
4.5.1. Vector $\mathbf{F}_{R0i}$ : . . . . .	92
4.5.2. Vector $\mathbf{F}_{RAi}$ : . . . . .	92
4.5.3. Vector $\mathbf{F}_{RCi}$ : . . . . .	92
<b>A. Ecuación Trascendental</b>	<b>98</b>
<b>B. Generación de Trayectoria</b>	<b>100</b>
<b>C. Matriz de Solución</b>	<b>103</b>

# Índice de figuras

1-1. Junta rotacional . . . . .	4
1-2. Plataforma espacial . . . . .	5
1-3. Eslabonamiento de cinco barras . . . . .	6
1-4. Grados de libertad . . . . .	7
2-1. Base local ( $0 - 6_i$ ) . . . . .	10
2-2. Base local ( $6_i - 12_i$ ) . . . . .	11
2-3. Base local ( $12_i - 15_i$ ) . . . . .	12
2-4. Base local ( $M - 18_i$ ) . . . . .	12
2-5. Cadena cinemática $\mathbf{r}_{D_i}$ . . . . .	14
2-6. Proyección $z - x$ . . . . .	14
2-7. Proyección $y - x$ . . . . .	15
2-8. Posición $\theta_{4_i}$ . . . . .	16
2-9. Cadena cinemática $\mathbf{r}_{I_i}$ . . . . .	17
2-10. Posición $\theta_{10_i}$ . . . . .	19
2-11. Posición $\theta_{7_i}$ . . . . .	20
2-12. Posición $\theta_{12_i}$ . . . . .	22
2-13. Posición $\theta_{14_i}$ . . . . .	23
2-14. Posición $\theta_{16_i}$ . . . . .	24
2-15. Velocidad $\theta_{4_i}$ . . . . .	27
2-16. Velocidad $\theta_{10_i}$ . . . . .	29
2-17. Velocidad $\theta_{7_i}$ . . . . .	30
2-18. Velocidad $\theta_{12_i}$ . . . . .	33
2-19. Velocidad $\theta_{14_i}$ . . . . .	35
2-20. Velocidad $\theta_{16_i}$ . . . . .	37
2-21. Mecanismo adicional . . . . .	38
2-22. MA con eslabón $3_i$ . . . . .	39
2-23. Posición $\theta_{23_i}$ . . . . .	40
2-24. MA con eslabón $1_i$ . . . . .	43
2-25. Posición $\theta_{29_i}$ . . . . .	44
3-1. Sistema equivalente . . . . .	50
3-2. Distribución de la masa . . . . .	51
3-3. Vector de gravedad ( $a$ ) . . . . .	52
3-4. Vector de gravedad ( $b$ ) . . . . .	53

3-5. Resorte eslabón $0_i$ . . . . .	55
3-6. Resorte eslabón $3_i$ . . . . .	56
3-7. Resorte eslabón $1_i$ . . . . .	57
4-1. Desplazamiento virtual . . . . .	64
4-2. Vectores ( $a$ ) . . . . .	65
4-3. Vectores ( $b$ ) . . . . .	66
4-4. Vectores ( $c$ ) . . . . .	67
4-5. Equilibrio estático . . . . .	95
4-6. Torques . . . . .	96
A-1. . . . .	98

# Agradecimientos

A mi familia, por su apoyo incondicional.

A mi Tutor, M. en I. Francisco Cuenca Jiménez, por su tiempo, consejos y conocimientos transmitidos.

A CONACyT, por la beca que me otorgo, con la cual pude realizar mis estudios de maestría.

# Resumen

El balanceo estático para una plataforma espacial de seis grados de libertad es desarrollado en esta tesis. La arquitectura de dicha plataforma consta de una base móvil conectada a la base fija por medio de tres cadenas cinemáticas idénticas de eslabonamiento de cinco barras.

Con base en lo desarrollado en esta tesis es posible definir al *balanceo estático* como un sistema de ecuaciones que relacionan parámetros geométricos e inerciales de la plataforma. Dichos parámetros al ser satisfechos permiten que el peso de los eslabones, que conforman la plataforma, no produzcan torque o fuerza en las juntas de la misma. Cuando está se encuentra en reposo.

La plataforma espacial caso de estudio, presenta una arquitectura particular que ocasiono complicaciones para determinar las condiciones asociadas con el balanceo estático.

Por lo tanto, la problemática es planteada y resuelta satisfactoriamente al adicionar eslabones a la plataforma.

El balanceo estático de la plataforma espacial es obtenido al satisfacer el sistema de ecuaciones mediante elementos elásticos y contrapesos.

Previo al balanceo estático es desarrollado un *análisis cinemático* para la plataforma espacial, obteniendo posición y velocidad.

Por medio de un *análisis estático* se demuestra que los parámetros geométricos e inerciales al ser modificados generan el equilibrio estático de las fuerzas externas que actúan sobre la plataforma espacial.

# Lista de Símbolos

GDL	Grados de libertad
$d_{ji}$	Distancia $j$ de la cadena cinemática $i$
$\theta_{ji}$	Ángulo $j$ de la cadena cinemática $i$
$\mathcal{L}$	Movilidad del mecanismo (GDL)
$\mathbf{T}_{zi}$	Matriz de transformación homogénea
$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$	Marco de referencia inercial
$(\mathbf{x}_{ji}, \mathbf{y}_{ji}, \mathbf{z}_{ji})$	Base local $j$ de la cadena cinemática $i$
$\mathbf{r}_{Di}$	Lazo cinemático $D$ de la cadena cinemática $i$
$\mathbf{r}_{Ii}$	Lazo cinemático $I$ de la cadena cinemática $i$
$\mathbf{T}_{016i}$	Producto de matrices homogéneas para llegar a la base 16, partiendo del marco inercial de la cadena cinemática $i$
$\mathbf{T}_{OM}$	Vector que parte del marco inercial al centro de la base móvil
$\mathbf{T}_{M18i}$	Vector que parte del centro de la base móvil a un vértice de la misma
$s$	Seno
$c$	Coseno
$t$	Tangente
MA	Mecanismo Adicional
$\mathbf{U}_{ji}$	Vector unitario del cuerpo $j$ de la cadena cinemática $i$
$\mathbf{R}_{Gji}$	Vector de posición del centro de gravedad del cuerpo $j$ de la cadena cinemática $i$
$V_g$	Energía Potencial correspondiente a la fuerza de gravedad
$\mathbf{W}_{ji}^T$	Vector de peso del cuerpo $j$ de la cadena cinemática $i$
$m_{ji}$	Masa del cuerpo $j$ de la cadena cinemática $i$
$\mathbf{U}_{Gji}$	Vector unitario de gravedad del cuerpo $j$ de la cadena cinemática $i$
$V_R$	Energía Potencial correspondiente a la fuerza elástica
$V_T$	Energía Potencial Total
$T_{ji}$	Condición de balanceo $j$ de la cadena cinemática $i$
$\delta \mathbf{R}_{zi}$	Desplazamiento virtual de la matriz $i$
$\delta \mathbf{R}_{ji}$	Desplazamiento virtual del vector $j$ de la cadena cinemática $i$
$\delta \theta_{ji}$	Desplazamiento virtual del ángulo $j$ de la cadena cinemática $i$
$\mathbf{T}$	Torque

---

# Capítulo 1

---

## Generalidades

En este capítulo se plantea la justificación y problemática del tema a desarrollar, así como el objetivo general y la metodología a seguir. Además de que serán descritos algunos conceptos básicos referentes al movimiento y la arquitectura de esta plataforma.

### 1.1. Definición del Problema

Dada la estructura cinemática de una plataforma espacial de seis grados de libertad, deducir las condiciones asociadas con el balanceo estático de la misma, al adicionar elementos elásticos al sistema.

### 1.2. Restricciones

- Únicamente será desarrollado el análisis de balanceo desde el punto de vista estático.
- La obtención de las condiciones asociadas con el balanceo estático de la plataforma espacial será por medio de un método energético.

## 1.3. Hipótesis

Las condiciones asociadas con el balanceo estático de la plataforma espacial son deducidas de la energía potencial total del sistema.

Así que, “El satisfacer plenamente cada una de las condiciones, ocasionará el balanceo estático de la plataforma espacial.”

## 1.4. Justificación

El balanceo estático de mecanismos ha sido un tema de investigación por varios años [26], el cual presenta una ventaja al generar un torque/fuerza cero en las juntas actuadas del mecanismo, cuando este permanece en reposo, debido a que la energía potencial del sistema se mantiene constante para cualquier configuración del sistema.

La mayoría de los mecanismos analizados por investigadores de este tema, presentan arquitecturas que permiten simplificar el análisis del mismo debido a que actúan en un plano vertical, lo cual facilita la aplicación de la metodología desarrollada para el balanceo estático.

En esta tesis se ha seleccionado una plataforma de movimiento espacial que admite la exploración del **balanceo estático** para casos donde tal arquitectura no actúa en un plano vertical de movimiento.

Así es como surge la iniciativa de aplicar y demostrar la veracidad del balanceo estático, dando origen al tema de tesis “**Balanceo Estático de un Mecanismo Espacial de Paralelogramo.**”

## 1.5. Objetivo General

Establecer un sistema de ecuaciones que generen el balanceo estático de la plataforma espacial, para cualquier configuración posible de la misma.

## 1.6. Objetivos Específicos

- Resolver la cinemática inversa de la plataforma espacial mediante la creación de ecuaciones de forma cerrada, usando matrices de transformación homogéneas.
- Obtener la velocidad de cada eslabón de la plataforma, derivando con respecto al tiempo las ecuaciones de posición.

- Determinar la energía potencial debido a la gravedad y a los elementos elásticos del sistema.
- Agrupar los parámetros que forman la energía potencial total del sistema, en función de los ángulos que varían con respecto al tiempo. Para determinar las condiciones asociadas con el balanceo estático de la plataforma espacial.
- Construir la expresión que determina el trabajo virtual para la plataforma espacial.
- Demostrar que los parámetros modificados en el balanceo estático, al ser sustituidos en la expresión del trabajo virtual, generan el equilibrio estático de fuerzas externas que actúan sobre la plataforma espacial.

## 1.7. Metodología

1. Análisis cinemático.
  - a) Análisis de posición.
  - b) Análisis de velocidad.
2. Balanceo estático.
  - a) Determinar la energía potencial total del sistema.
  - b) Obtener condiciones de balanceo.
3. Análisis estático.
  - a) Desarrollar los desplazamientos virtuales.
  - b) Obtener ecuaciones de equilibrio estático.

## 1.8. Mecanismos en Paralelo

Existen sistemas mecánicos complejos que son formados por muchos componentes interconectados por juntas y elementos de fuerza como resortes, amortiguadores y actuadores. La literatura moderna [31], se refiere a este tipo de sistemas como sistema de multicuerpos. Algunos ejemplos de estos sistemas de multicuerpos pueden ser mecanismos, robots, vehículos, estructuras espaciales y sistemas biomecánicos. Actualmente se desarrollan centros de maquinado multigrados con alta velocidad y precisión.

Una plataforma espacial típica consiste en un plato móvil que está conectado a una base fija, por medio de varias cadenas cinemáticas, las cuales son controladas por actuadores acoplados

a la base fija. Debido a que la carga externa puede ser distribuida entre los actuadores tienen gran capacidad de carga.

El diseño de mecanismos muy similares llamados manipuladores en paralelo data de 1962, cuando Gough y Whitehall [2], inventan la maquina universal para prueba de neumáticos. Stewart [3], diseña una plataforma para usarse como simulador de vuelo en 1965. Hunt [4], hace un estudio sistemático de la cinemática de manipuladores en paralelo. Desde entonces, el estudio de los manipuladores en paralelo ha sido tema de estudio para varios investigadores.

## 1.9. Movimiento y Restricciones

Sistemas tales como mecanismos, robots, vehículos, estructuras espaciales y biomecánicas están formados por varios cuerpos conectados por diferentes tipos de juntas y elementos de fuerza. Las juntas son comúnmente usadas para controlar la movilidad del sistema y restringir dichos movimientos solo en las direcciones deseadas. Los elementos de fuerza son componentes adicionados al sistema tales como resortes, amortiguadores y actuadores. Con la combinación de tales juntas y elementos de fuerzas es posible diseñar sistemas de multicuerpos capaces de desarrollar ciertas tareas, las cuales pueden tener un nivel de complejidad. Por tanto el correcto estudio del movimiento de los cuerpos del sistema, es una parte crucial en la fase del diseño.

Los sistemas mecánicos en general son diseñados para operaciones específicas establecidas por su arquitectura. Los cuerpos que integran dichos sistemas no son libres de tener un desplazamiento arbitrario debido a las restricciones ocasionadas por las juntas o elementos de fuerzas que los unen. Un elemento de fuerza no reduce el número de coordenadas independientes necesarias para describir la configuración del sistema, contrario a lo que ocasionan las juntas debido a que impiden el movimiento en algunas direcciones. La plataforma caso de estudio solo hace uso de juntas de tipo rotacional.

La figura 1-1, hace mención a este tipo de junta, es común representarla con la letra **R** y es definida como la unión de dos elementos donde uno rota con respecto al otro alrededor de un eje definido por la geometría de la junta. En esta tesis se usará el término eslabón para hacer referencia a los elementos que están unidos por las juntas.

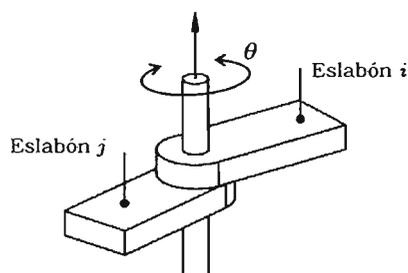


Figura 1-1 Junta rotacional

## 1.10. Arquitectura

La siguiente plataforma mostrada en la figura 1-2 presenta una estructura cinemática muy similar al diseño original expuesto por Inoue, Tsusaka y Fukuizumi [1], el cual consiste en un arreglo en paralelo de tres cadenas cinemáticas idénticas de eslabonamiento de pantógrafo, que están distribuidas en forma de un triángulo equilátero (Base fija) en un arreglo angular de  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  y  $240^\circ$  ( $\delta_{1i}$ ) en el otro extremo de cada pantógrafo existe una junta esférica que une cada uno de los vértices de un triángulo (Base móvil), al eslabonamiento de pantógrafo. Originando así la plataforma en paralelo caso de estudio en esta tesis.

Debido a que, las tres cadenas cinemáticas son idénticas, solo será descrita a detalle una de ellas. En la figura 1-3, es mostrado dicho eslabonamiento, se usan números para diferenciar entre cada uno de los eslabones e irán acompañados de un iterador  $i$ , que tomará valores del 1 al 3, para hacer referencia a que cadena cinemática pertenece.

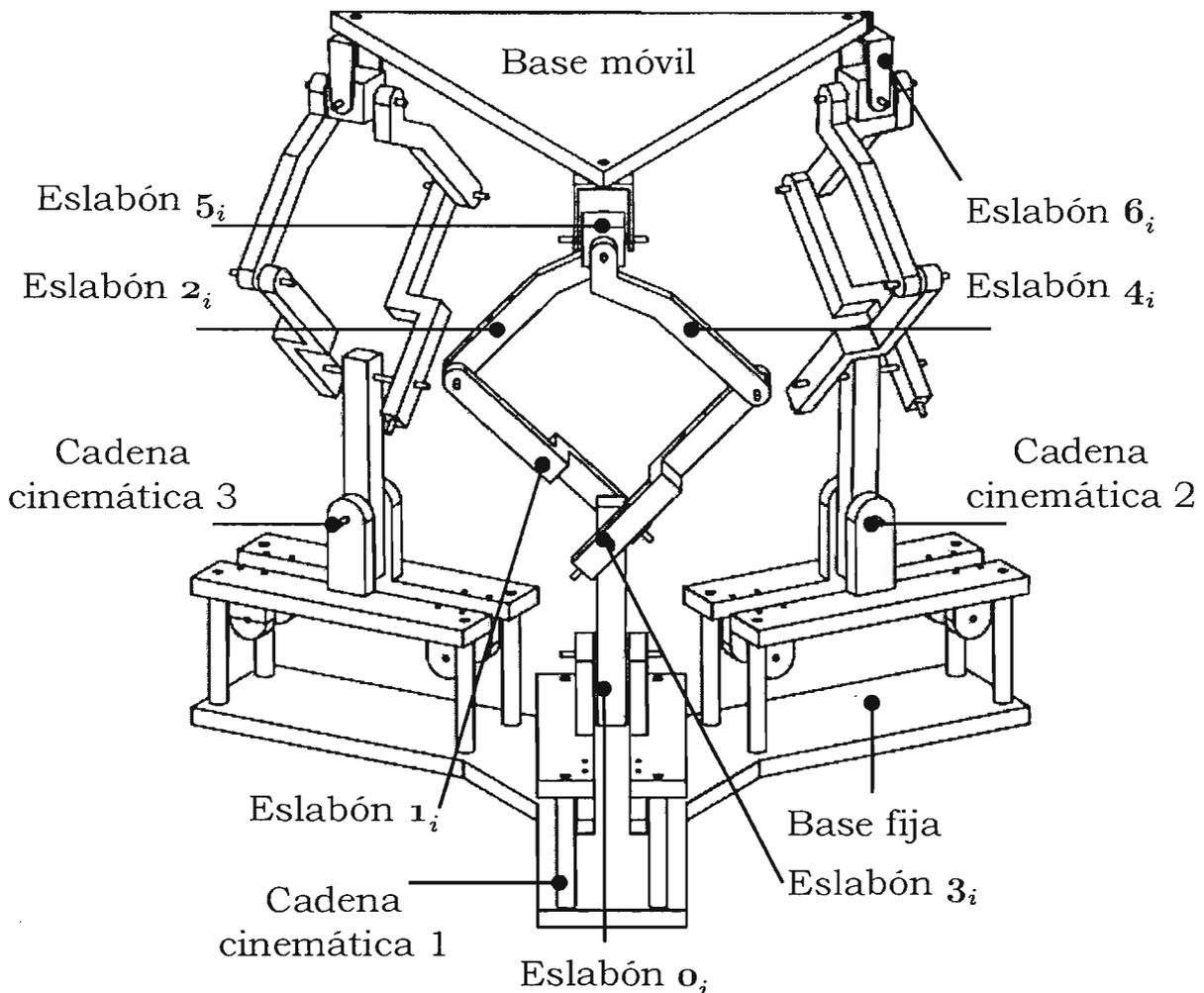


Figura 1-2 Plataforma espacial

La figura 1-3, muestra el eslabonamiento de pantógrafo, que es comúnmente analizado como un mecanismo de cinco barras con eslabones de longitud igual. Además muestra los ángulos que describen el movimiento de los eslabones. La tabla siguiente hace referencia a la nomenclatura usada para describir los componentes y datos del mecanismo

Eslabón	Distancia
0 de la cadena $i$	$d_5$ de la cadena $i$
1 de la cadena $i$	$d_8$ de la cadena $i$
2 de la cadena $i$	$d_{11}$ de la cadena $i$
3 de la cadena $i$	$d'_8$ de la cadena $i$
4 de la cadena $i$	$d'_{11}$ de la cadena $i$

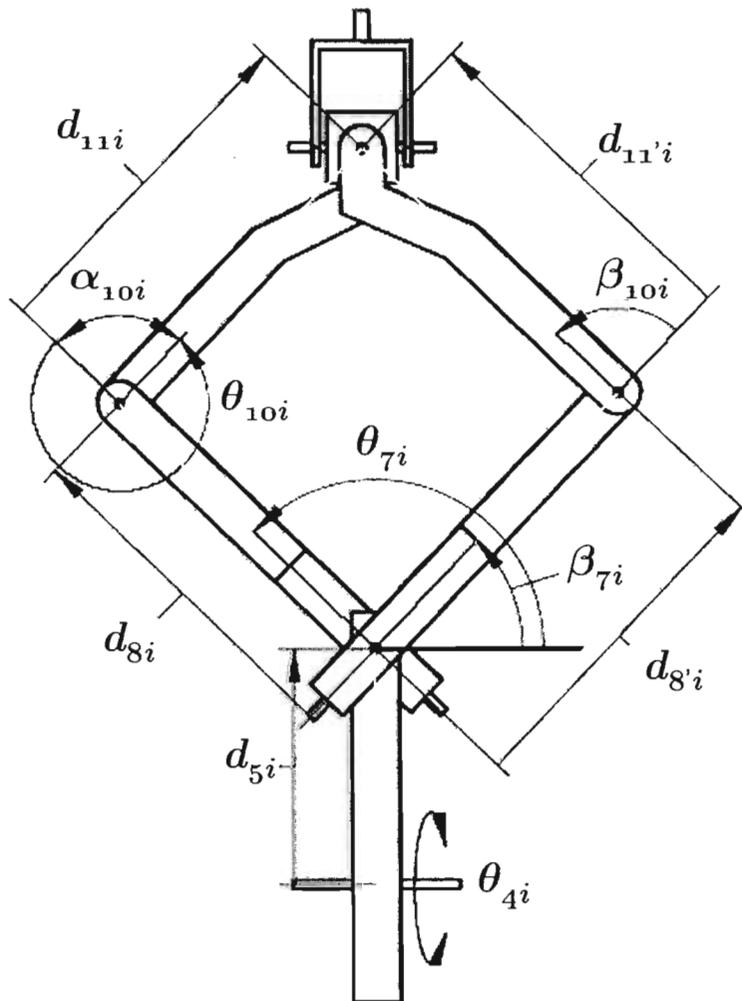


Figura 1-3 Eslabonamiento de cinco barras

## 1.11. Grados de Libertad

Los grados de libertad (GDL)  $\mathcal{L}$  del mecanismo en paralelo, caso de estudio, puede ser determinada con la aplicación de la formula de Chebyshev-Grübler-Kutzbach:

$$\mathcal{L} = 6(b - g - 1) + \sum_k f_k \tag{1.1}$$

donde,  $b$  y  $g$  son respectivamente, número de cuerpos (incluyendo la base), número de juntas del mecanismo y  $f_k$  el número de grados de libertad de la junta  $k$ . Dada la particular estructura de la plataforma es necesario hacer la siguiente consideración según [26], *cada eslabonamiento de cinco barras es cinemáticamente equivalente a un eslabonamiento plano RR*, la figura 1-4 hace referencia a esto.

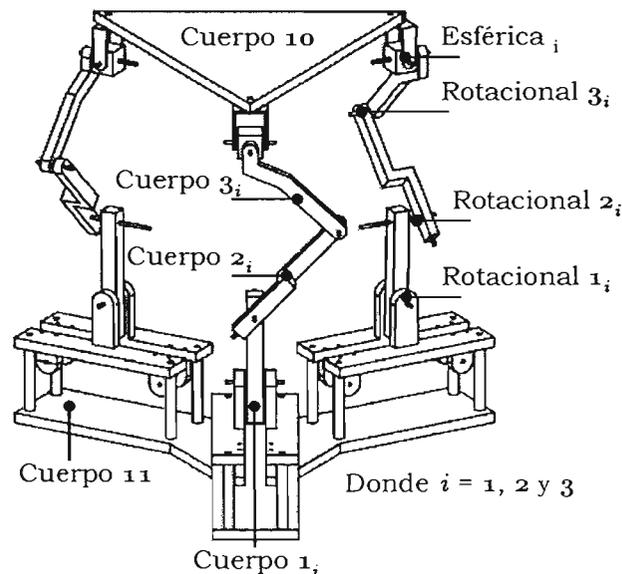


Figura 1-4 Grados de libertad

De la figura 1-4 se tiene los siguientes datos:

$$\begin{aligned} b &= 11 \\ g &= 12 \\ \sum_k f_k &= 18 \end{aligned}$$

sustituyendo en ec.(1.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 6(11 - 12 - 1) + 18 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto la plataforma espacial, caso de estudio es un mecanismo de seis grados de libertad.

---

# Capítulo 2

---

## Cinemática

### 2.1. Introducción

El análisis cinemático se enfoca a los aspectos geométricos de los eslabones y su movimiento, sin importarle las causas que lo originan. En este capítulo solamente se desarrolla el análisis de posición y velocidad de la plataforma espacial, debido a que el análisis estático mediante el método de trabajo virtual que más tarde será desarrollado, no requiere de expresiones que describan la aceleración de los elementos del sistema y solo requiere del análisis de posición y velocidad. La determinación de la posición y orientación de los eslabones del sistema es desarrollado en el análisis de posición. En este primer paso todas las variables requeridas por los desplazamientos son determinadas. El segundo paso es el análisis de velocidad. Donde las expresiones obtenidas en el análisis de posición son derivadas con respecto al tiempo, para así determinar la velocidad de los elementos del sistema.

La plataforma espacial puede ser representada esquemáticamente desde un punto de vista mecánico, como una cadena cinemática de cuerpos rígidos (eslabones) conectados por juntas. Un extremo de la cadena esta unida a la base, mientras un efector final es adicionado al otro extremo. El problema de la cinemática inversa es desarrollado y resuelto mediante el uso de matrices de transformación homogéneas, por ser un arreglo en paralelo es posible dejar las expresiones algebraicas generalizadas por medio del iterador  $i$  que tomará valores de 1, 2 y 3 para hacer referencia a la cadena cinemática correspondiente. Se presentan gráficas que describen el comportamiento de cada ángulo de las cadenas cinemáticas. Un polinomio de quinto grado fue empleado para suavizar la trayectoria propuesta para la plataforma espacial, las ecuaciones son desarrolladas en el Apéndice B.

## 2.2. Posición

La posición de un cuerpo rígido en el espacio es expresada en términos de la posición de un punto del cuerpo con respecto a un marco de referencia (traslación), mientras la orientación está expresada en términos de las componentes de los vectores unitarios de un marco de referencia adherido al cuerpo con respecto a otro marco de referencia (rotación).

A continuación son definidas las matrices de transformación homogéneas empleadas en este análisis:

### Matrices de traslación

$$\mathbf{T}_{z1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z2}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z3}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

### Matrices de rotación

$$\mathbf{T}_{z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & 0 \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

### 2.2.1. Marcos de Referencia

El análisis inicia relacionando todos los eslabones del sistema con respecto al marco de referencia inercial  $(x_0, y_0, z_0)$ , lo cual se logra con la creación de bases adheridas a cada eslabón del sistema, que serán llamadas "bases locales"  $(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji})$ . Donde  $j =$  número de base,  $i =$  número de cadena cinemática.

Las matrices de traslación ec.(2.1) son usadas para describir la distancia entre bases y las de rotación ec.(2.2) son usadas cuando es necesario cambiar de dirección. El uso de matrices homogéneas es sistemático, basta con ir ordenando los productos de estas, mientras se recorre la arquitectura de la plataforma. Estos productos son agrupados en parejas y renombrados por la letra **T** (transformación) se adiciona un subíndice que indica las bases involucradas.

Como ejemplo, se desarrolla el uso de las transformaciones homogéneas para llegar a la base local 4<sub>i</sub>, partiendo del marco de referencia inercial (ver figura 2-1):

1. Para formar la base  $(x_{1i}, y_{1i}, z_{1i})$  a partir de la base  $(x_0, y_0, z_0)$ , se alinea hacia una de las cadenas de la plataforma, girando alrededor del eje  $z_0$  el ángulo  $\delta_{1i}$ , esto es  $\mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})$ .

2. Para formar la base  $(x_{2i}, y_{2i}, z_{2i})$  a partir de la base  $(x_{1i}, y_{1i}, z_{1i})$ , se desplaza una distancia  $d_{2i}$  a través del eje  $x_{1i}$ , esto es  $T_{z1}(d_{2i})$ .
3. Para formar la base  $(x_{3i}, y_{3i}, z_{3i})$  a partir de la base  $(x_{2i}, y_{2i}, z_{2i})$ , se desplaza una distancia  $d_{3i}$  a través del eje  $z_{2i}$ , esto es  $T_{z3}(d_{3i})$ .
4. Para formar la base  $(x_{4i}, y_{4i}, z_{4i})$  a partir de la base  $(x_{3i}, y_{3i}, z_{3i})$ , se gira un ángulo  $-\theta_{4i}$  (regla de la mano derecha) alrededor del eje  $y_{3i}$ , esto es  $T_{z5}(-\theta_{4i})$ .

Finalmente, ya es posible escribir:

$$\begin{aligned} T_{02i} &= T_{z6}(\delta_{1i}) T_{z1}(d_{2i}) \\ T_{24i} &= T_{z3}(d_{3i}) T_{z5}(-\theta_{4i}) \end{aligned}$$

A continuación son mostradas una serie de figuras que describen la arquitectura de una de las cadenas cinemáticas de la plataforma espacial. Dichas figuras presentan la ubicación de cada una de las bases locales generadas, para desarrollar el análisis de posición. La figura 2-1, muestra la base fija de la plataforma espacial, el eslabón  $0_i$ , el eslabón  $1_i$ , el marco de referencia inercial y las seis posteriores bases locales. La distancia  $d_{5i}$  es un desplazamiento a través del eje  $z_{4i}$ , la distancia  $d_{6i}$  es una desplazamiento a través del eje  $x_{5i}$ . Como se puede observar en la figura este ocurre en sentido negativo,  $-d_{6i}$ .

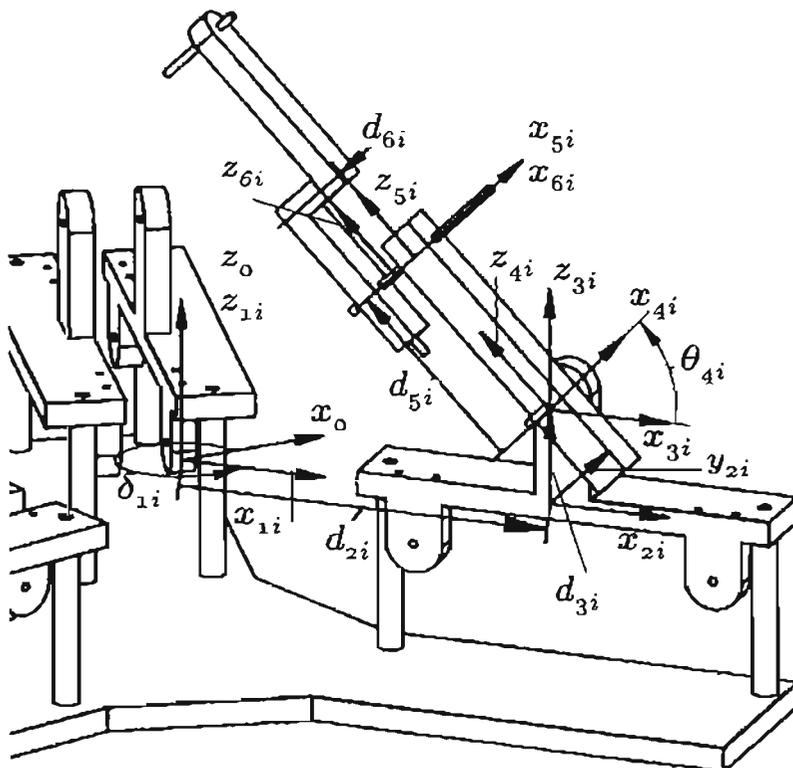


Figura 2-1 Base local (0 - 6,)

La figura 2-2, muestra los eslabones  $0_i$ ,  $1_i$ ,  $2_i$  y los ángulos  $\theta_{7i}$ ,  $\theta_{10i}$  y  $-\theta_{12i}$  (regla de la mano derecha). Este último es la primer rotación de la junta esférica, que une al mecanismo de pantógrafo con la base móvil. La distancia  $d_{8i}$  es un desplazamiento a través del eje  $y_{7i}$ , la distancia  $d_{9i}$  ocurre a través del eje  $x_{8i}$  en sentido negativo, esto es  $-d_{9i}$ . Finalmente la distancia  $d_{11i}$  es a través del eje  $y_{10i}$ .

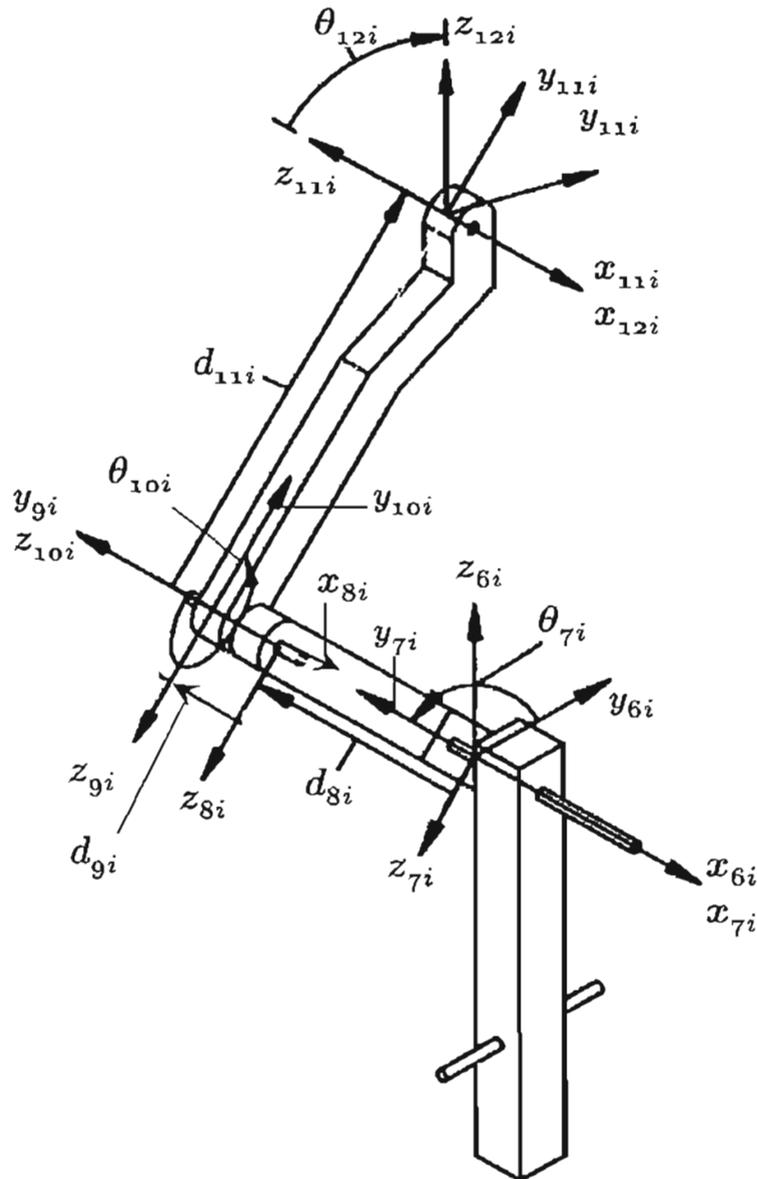


Figura 2-2 Base local ( $6_i - 12_i$ )

La figura 2-3, muestra los eslabones  $2_i$ ,  $5_i$ ,  $6_i$ , la base móvil y los ángulos  $\theta_{14i}$  y  $\theta_{16i}$ , que son los dos giros restantes de la junta esférica. La distancia  $d_{13i}$  es a través del eje  $x_{12i}$  y la distancia  $d_{15i}$  es a través del eje  $z_{14i}$ .

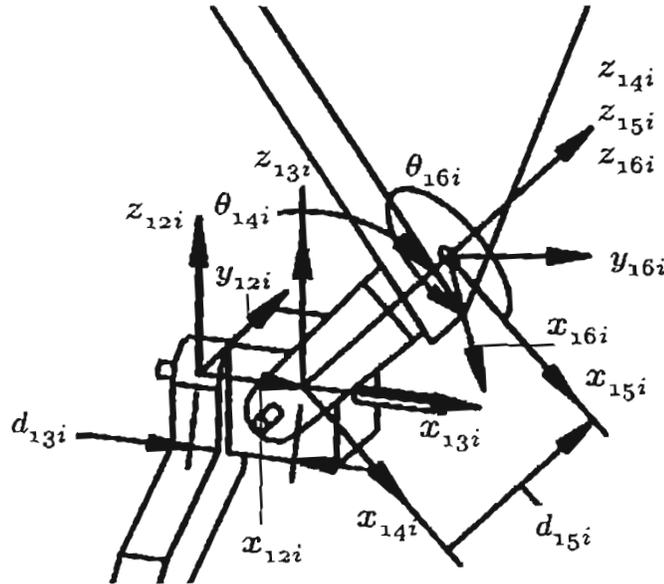


Figura 2-3 Base local ( $12_i - 15_i$ )

La figura 2-4, presenta el plato móvil con su base local  $(x_M, y_M, z_M)$ , los ángulos  $\delta_{17i}$  y  $\theta_{16i}$ . Cabe mencionar que las bases locales  $(x_{18i}, y_{18i}, z_{18i}) = (x_{16i}, y_{16i}, z_{16i})$ . La distancia  $d_{18i}$  ocurre a través del eje  $x_{17i}$ .

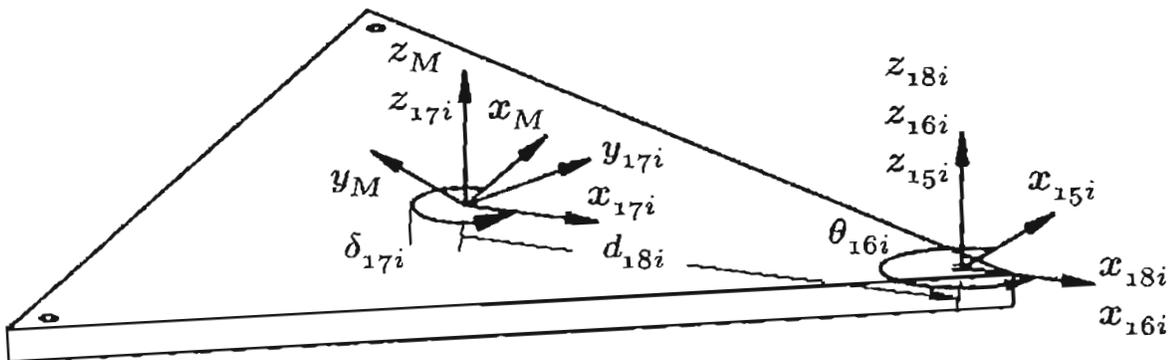


Figura 2-4 Base local ( $M - 18_i$ )

De las figuras anteriores se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{02i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z1}(d_{2i}) \\
 \mathbf{T}_{24i} &= \mathbf{T}_{z3}(d_{3i})\mathbf{T}_{z5}(-\theta_{4i}) \\
 \mathbf{T}_{46i} &= \mathbf{T}_{z3}(d_{5i})\mathbf{T}_{z1}(-d_{6i}) \\
 \mathbf{T}_{68i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{7i})\mathbf{T}_{z2}(d_{8i}) \\
 \mathbf{T}_{810i} &= \mathbf{T}_{z1}(-d_{9i})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{10i}) \\
 \mathbf{T}_{1012i} &= \mathbf{T}_{z2}(d_{11i})\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{12i}) \\
 \mathbf{T}_{1214i} &= \mathbf{T}_{z1}(d_{13i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{14i}) \\
 \mathbf{T}_{1416i} &= \mathbf{T}_{z3}(d_{15i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{16i}) \\
 \mathbf{T}_{0M} &= \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z4}(\psi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\phi) \\
 \mathbf{T}_{M18i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{17i})\mathbf{T}_{z1}(d_{18i})
 \end{aligned}$$

A continuación se define el problema cinemático inverso:

**Cinemática inversa.**- Dada la posición  $(x, y, z)$  del centroide de la base móvil y los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \phi)$  que definen la orientación de la misma. Hallar los ángulos  $\theta_{4i}, \theta_{7i}, \theta_{10i}, \theta_{12i}, \theta_{14i}$  y  $\theta_{16i}$  que definen el movimiento de las juntas.

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

**Datos:**  $\delta_{1i}, d_{2i}, d_{3i}, d_{5i}, d_{6i}, d_{8i}, d_{9i}, d_{11i}, d_{13i}, d_{15i}, \delta_{17i}$  y  $d_{18i}$ .

**Incógnitas:**  $\theta_{4i}, \theta_{7i}, \theta_{10i}, \theta_{12i}, \theta_{14i}$ , y  $\theta_{16i}$ .

Como se puede ver los ángulos  $(\theta)$  son parámetros que no son constantes, por lo tanto en las subsecciones siguientes son determinadas las expresiones algebraicas que describen el movimiento de cada uno de estos ángulos.

### 2.2.2. Ángulo $\theta_{4i}$

Para determinar el movimiento de la junta rotacional descrita por  $\theta_{4i}$ , se genera el vector  $\mathbf{r}_{Di}$ . La figura 2-5, que describe la ubicación de este vector.

Se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{T}_{0M} = \mathbf{T}_{z1}(x) \mathbf{T}_{z2}(y) \mathbf{T}_{z3}(z) \mathbf{T}_{z6}(\psi) \mathbf{T}_{z5}(\theta) \mathbf{T}_{z6}(\phi) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{T}_{M18i} = \mathbf{T}_{z6}(\delta_{17i})\mathbf{T}_{z1}(d_{18i}) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{r}_{d15i} = [0, 0, -d_{15i}, 1]^T$$

$$\mathbf{r}_{D_i} = \mathbf{T}_{0M} \mathbf{T}_{M18i} \mathbf{T}_{z6}(-\theta_{16i}) \mathbf{r}_{d15i}$$

Es necesario determinar la proyección del mecanismo de pantógrafo, sobre la plataforma fija, la cual será considerada como un triángulo equilátero. Para esto se muestran las figuras 2-6 y 2-7.

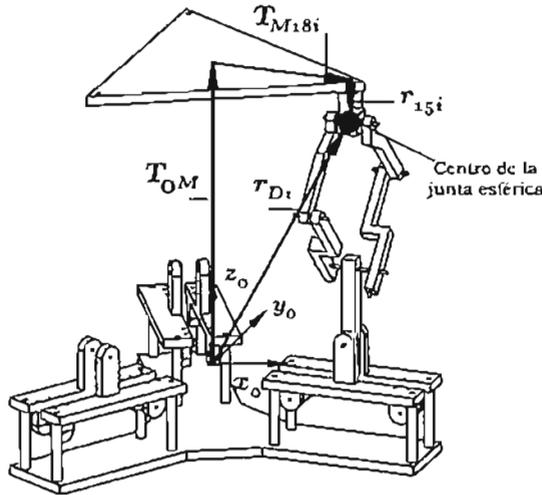


Figura 2-5 Cadena cinemática  $r_{D_i}$

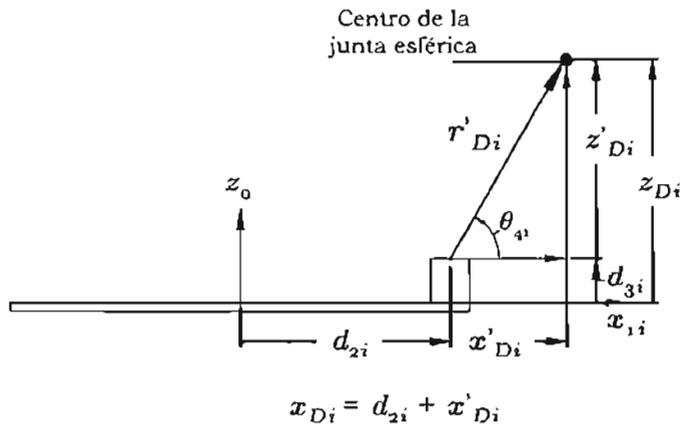


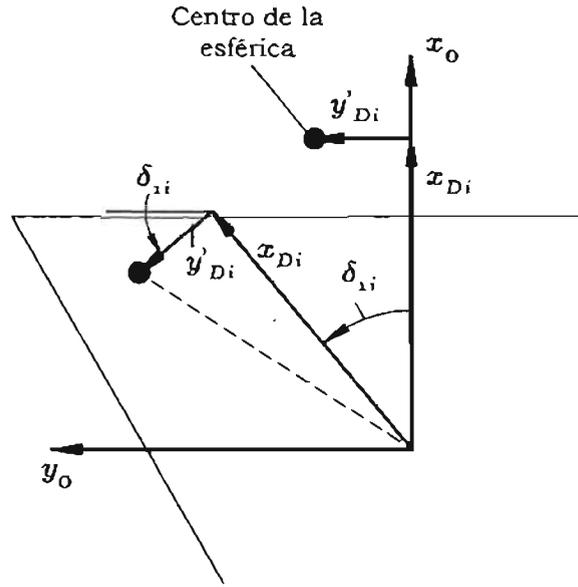
Figura 2-6 Proyección  $z - x$

Con base en las figuras 2-5, 2-6 y 2-7 se determina el siguiente sistema de ecuaciones, donde  $s = \text{seno}$ ,  $c = \text{coseno}$  y  $t = \text{tangente}$ .

$$r_{D_i} = \begin{bmatrix} x_{D_i} \\ y_{D_i} \\ z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d_{2i} + x'_{D_i}) c\delta_{1i} - y'_{D_i} s\delta_{1i} \\ (d_{2i} + x'_{D_i}) s\delta_{1i} + y'_{D_i} c\delta_{1i} \\ d_{3i} + z'_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde:

$$\begin{aligned} x_{D_i} &= x + d_{18i} c\theta c(\delta_{17i} + \phi) c\psi - d_{15i} c\psi s\theta - d_{18i} s(\delta_{17i} + \phi) s\psi \\ y_{D_i} &= y + d_{18i} c\psi s(\delta_{17i} + \phi) + d_{18i} c\theta c(\delta_{17i} + \phi) s\psi - d_{15i} s\theta s\psi \\ z_{D_i} &= z - d_{13i} c\theta - d_{18i} c(\delta_{17i} + \phi) s\theta \end{aligned}$$

Figura 2-7 Proyección  $y - x$ 

de ec.(2.5) se obtiene:

$$(d_{2i} + x'_{Di}) c\delta_{1i} - y'_{Di} s\delta_{1i} = x_{Di} \quad (2.6)$$

$$(d_{2i} + x'_{Di}) s\delta_{1i} + y'_{Di} c\delta_{1i} = y_{Di} \quad (2.7)$$

$$d_{3i} + z'_{Di} = z_{Di} \quad (2.8)$$

de ec.(2.6) se resuelve para  $y'_{Di}$ ,

$$y'_{Di} = \frac{x_{Di} - (d_{2i} + x'_{Di}) c\delta_{1i}}{-s\delta_{1i}} \quad (2.9)$$

sustituyendo ec.(2.9) en ec.(2.7)

$$(d_{2i} + x'_{Di}) s\delta_{1i} + \left( \frac{x_{Di} - (d_{2i} + x'_{Di}) c\delta_{1i}}{-s\delta_{1i}} \right) c\delta_{1i} = y_{Di}$$

$$(d_{2i} + x'_{Di}) \left( s\delta_{1i} + \frac{(c\delta_{1i})^2}{s\delta_{1i}} \right) - \frac{c\delta_{1i}}{s\delta_{1i}} x_{Di} = y_{Di}$$

resolviendo para  $x'_{Di}$ ,

$$d_{2i} + x'_{Di} = \frac{y_{Di} + \frac{c\delta_{1i}}{s\delta_{1i}} x_{Di}}{\left( s\delta_{1i} + \frac{(c\delta_{1i})^2}{s\delta_{1i}} \right)}$$

$$x'_{Di} = x_{Di} c\delta_{1i} + y_{Di} s\delta_{1i} - d_{2i} \quad (2.10)$$

sustituyendo ec.(2.10) en ec.(2.9) para determinar  $y'_{Di}$

$$\begin{aligned} y'_{Di} &= -\frac{1}{s\delta_{1i}}(x_{Di} - (x_{Di} c\delta_{1i} + y_{Di} s\delta_{1i}) c\delta_{1i}) \\ &= x_{Di} \left( \frac{c^2 \delta_{1i}}{s\delta_{1i}} - \frac{1}{s\delta_{1i}} \right) + y_{Di} c\delta_{1i} \\ y'_{Di} &= y_{Di} c\delta_{1i} - x_{Di} s\delta_{1i} \end{aligned} \quad (2.11)$$

y de ec.(2.8) obtenemos:

$$z'_{Di} = z_{Di} - d_{3i} \quad (2.12)$$

por lo tanto  $\theta_{4i}$  queda definida por la expresión:

$$\boxed{\theta_{4i} = \tan^{-1} \left( \frac{z'_{Di}}{x'_{Di}} \right) - \frac{\pi}{2}} \quad (2.13)$$

Se tienen los datos siguientes:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \delta_{171} = 0^\circ \\ \delta_{12} &= \delta_{172} = 120^\circ \\ \delta_{13} &= \delta_{173} = 240^\circ \\ d_{21} &= d_{181} = 0.2 \text{ m} \\ d_{22} &= d_{182} = 0.2 \text{ m} \\ d_{23} &= d_{183} = 0.2 \text{ m} \\ d_{31} &= 0.55 \text{ m} \\ d_{32} &= 0.55 \text{ m} \\ d_{33} &= 0.55 \text{ m} \end{aligned}$$

En la figura 2-8 se muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{4i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{41}$ , la línea gris a  $\theta_{42}$  y la punteada es para  $\theta_{43}$ .

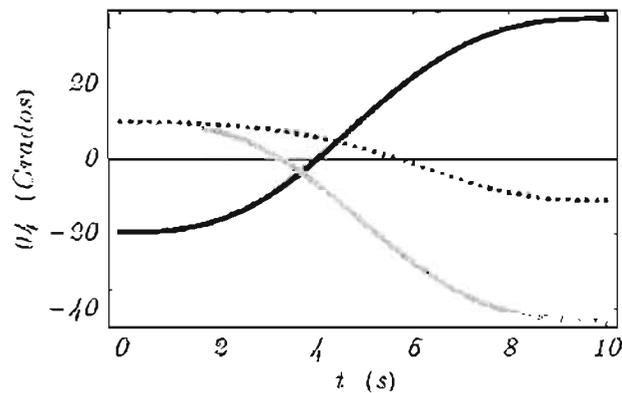


Figura 2-8 Posición  $\theta_{4i}$

### 2.2.3. Ángulo $\theta_{10i}$

Para determinar el movimiento de la junta rotacional descrita por  $\theta_{10i}$ , se genera el vector  $r_{7i}$ , el cual ocupa la misma posición que el vector  $r_{D_i}$  (ver figura 2-9). Se usa la siguiente igualdad:

$$r_{7i} = r_{D_i} \tag{2.14}$$

donde

$$r_{7i} = T_{02i} T_{24i} T_{46i} T_{68i} T_{810i} T_{1012i} r_{d13i}$$

$$r_{d13i} = [d_{13i}, 0, 0, 1]^T$$

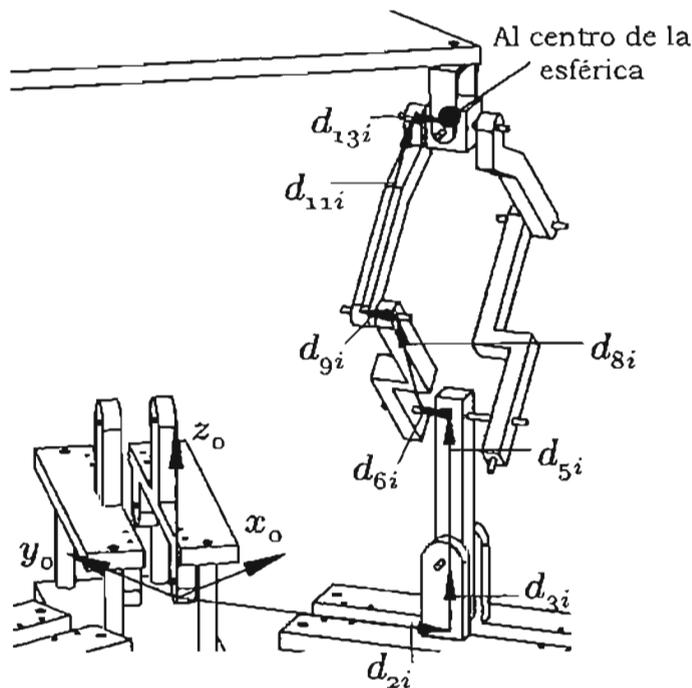


Figura 2-9 Cadena cinemática  $r_{7i}$

De la ec.(2.14) se conocen las primeras tres transformaciones del lado izquierdo. Para hayar  $\theta_{10i}$ , se pasan estas transformaciones al lado derecho quedando:

$$T_{68i} T_{810i} T_{1012i} r_{d13i} = (T_{46i})^{-1} (T_{24i})^{-1} (T_{02i})^{-1} T_{0M} T_{M18i} T_{z6}(-\theta_{16i}) r_{d15i}$$

$$\begin{bmatrix} d_{13i} - d_{9i} \\ d_{8i} c\theta_{7i} + d_{11i} (c\theta_{10i} c\theta_{7i} - s\theta_{10i} s\theta_{7i}) \\ d_{8i} s\theta_{7i} + d_{11i} (c\theta_{7i} s\theta_{10i} + c\theta_{10i} s\theta_{7i}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''_{rD_i} \\ y''_{rD_i} \\ z''_{rD_i} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

El lazo derecho de la ec.(2.15), ya es conocido y se renombra para simplificar los ćalculos, quedando como:

$$x''_{rDi} = d_{6i} - (d_{3i} - z + d_{15i}c\theta + d_{18i}c(\delta_{17i} + \phi)s\theta)s\theta_{4i} + c\theta_{4i}(-d_{2i} + xc\delta_{1i} + ys\delta_{1i} + c(\delta_{1i} - \psi) \\ (d_{18i}c\theta c(\delta_{17i} + \phi) - d_{15i}s\theta) + d_{18i}s(\delta_{17i} + \phi)s(\delta_{1i} - \psi))$$

$$y''_{rDi} = c\delta_{1i} - x s\delta_{1i} + d_{18i}c(\delta_{1i} - \psi)s(\delta_{17i} + \phi) + (-d_{18i}c\theta c(\delta_{17i} + \phi) + d_{15i}s\theta)s(\delta_{1i} - \psi)$$

$$z''_{rDi} = -d_{5i} - c\theta_{4i}(d_{3i} - z + d_{15i}c\theta + d_{18i}c(\delta_{17i} + \phi)s\theta) - s\theta_{4i}(-d_{2i} + xc\delta_{1i} + ys\delta_{1i} + c(\delta_{1i} - \psi) \\ (d_{18i}c\theta c(\delta_{17i} + \phi) - d_{15i}s\theta) + d_{18i}s(\delta_{17i} + \phi)s(\delta_{1i} - \psi))$$

de la ec.(2.15) se utilizan las componentes "y" y "z":

$$d_{8i}c\theta_{7i} + d_{11i}(c\theta_{10i}c\theta_{7i} - s\theta_{10i}s\theta_{7i}) = y''_{rDi} \quad (2.16)$$

$$d_{8i}s\theta_{7i} + d_{11i}(c\theta_{7i}s\theta_{10i} + c\theta_{10i}s\theta_{7i}) = z''_{rDi} \quad (2.17)$$

se elevan al cuadrado las ecuaciones (2.16) y (2.17):

$$\begin{aligned} (d_{8i}c\theta_{7i} + d_{11i}(c\theta_{10i}c\theta_{7i} - s\theta_{10i}s\theta_{7i}))^2 &= (y''_{rDi})^2 \\ (d_{8i}s\theta_{7i} + d_{11i}(c\theta_{7i}s\theta_{10i} + c\theta_{10i}s\theta_{7i}))^2 &= (z''_{rDi})^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

sumando ambas ecuaciones:

$$(d_{8i})^2 + (d_{11i})^2 + 2(d_{8i}d_{11i})c\theta_{10i} = (y''_{rDi})^2 + (z''_{rDi})^2 \quad (2.19)$$

despejando  $c\theta_{10i}$ :

$$c\theta_{10i} = \left( \frac{(y''_{rDi})^2 + (z''_{rDi})^2 - ((d_{8i})^2 - (d_{11i})^2)}{2(d_{8i}d_{11i})} \right) \quad (2.20)$$

a partir de la identidad  $c^2\theta_{10i} + s^2\theta_{10i} = 1$ , se obtiene  $s\theta_{10i}$ :

$$s\theta_{10i} = \sqrt{1 - c^2\theta_{10i}} \quad (2.21)$$

usando las ecs.(2.20) y (2.21) se obtiene la funci3n tangente,  $\alpha_{10i} = \tan^{-1}\left(\frac{s\theta_{10i}}{c\theta_{10i}}\right)$  con base en la figura 1-3 se determina  $\theta_{10i}$ :

$$\boxed{\theta_{10i} = 2\pi - \alpha_{10i}} \quad (2.22)$$

Se tienen los datos siguientes:

$$\begin{aligned} d_{111} = d_{81} &= 0.15 \text{ m} \\ d_{112} = d_{82} &= 0.15 \text{ m} \\ d_{113} = d_{83} &= 0.15 \text{ m} \\ d_{91} &= 0.0177 \text{ m} \\ d_{92} &= 0.0177 \text{ m} \\ d_{93} &= 0.0177 \text{ m} \\ d_{131} &= 0.02635 \text{ m} \\ d_{132} &= 0.02635 \text{ m} \\ d_{133} &= 0.02635 \text{ m} \end{aligned}$$

La figura 2-10, muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{10i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{101}$ , la línea gris a  $\theta_{102}$  y la punteada es para  $\theta_{103}$ .

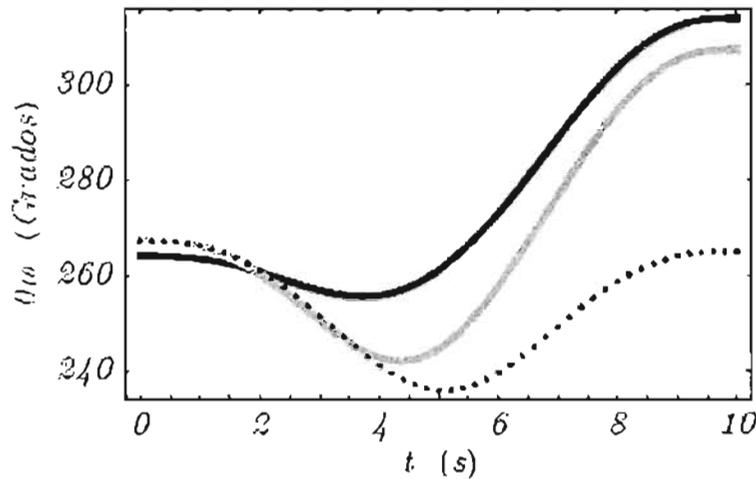


Figura 2-10 Posición  $\theta_{10i}$

### 2.2.4. Ángulo $\theta_{7i}$

Una vez calculado  $\theta_{10i}$  mediante la ec.(2.22), la junta rotacional descrita por  $\theta_{7i}$  es determinada por medio de las ecs (2.16) y (2.17). Las cuales son agrupadas para  $c\theta_{7i}$  y  $s\theta_{7i}$ , quedando:

$$\begin{aligned} (d_{8i} + d_{11i} c\theta_{10i}) c\theta_{7i} - (d_{11i} s\theta_{10i}) s\theta_{7i} &= y''_{rDi} \\ (d_{11i} s\theta_{10i}) c\theta_{7i} + (d_{8i} + d_{11i} c\theta_{10i}) s\theta_{7i} &= z''_{rDi} \end{aligned}$$

renombrando términos conocidos:

$$A_i c\theta_{7i} - B_i s\theta_{7i} = y''_{rDi} \tag{2.23}$$

$$B_i c\theta_{7i} + A_i s\theta_{7i} = z''_{rDi} \tag{2.24}$$

donde:

$$A_i = d_{8i} + d_{11i} c\theta_{10i}$$

$$B_i = d_{11i} s\theta_{10i}$$

a partir de ecs.(2.23) y (2.24), respectivamente se tiene lo siguiente:

$$c\theta_{7i} = \left( \frac{A_i y''_{rDi} + B_i z''_{rDi}}{(A_i)^2 + (B_i)^2} \right) \tag{2.25}$$

$$s\theta_{7i} = \left( \frac{A_i z''_{rDi} - B_i y''_{rDi}}{(A_i)^2 + (B_i)^2} \right) \tag{2.26}$$

finalmente se obtiene  $\theta_{7i}$ :

$$\theta_{7i} = \tan^{-1} \left( \frac{s\theta_{7i}}{c\theta_{7i}} \right) \quad (2.27)$$

En la figura 2-11 se muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{7i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B. en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{71}$ , la línea gris a  $\theta_{72}$  y la punteada es para  $\theta_{73}$ .

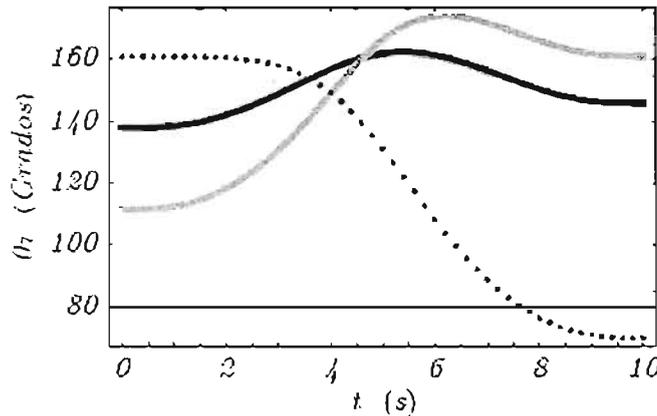


Figura 2-11 Posición  $\theta_{7i}$

### 2.2.5. Ángulo $\theta_{12i}$

Para determinar el movimiento de la junta rotacional descrita por  $\theta_{12i}$ , se usa la siguiente igualdad:

$$\mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1214i} \mathbf{T}_{1416i} = \mathbf{T}_{0M} \mathbf{T}_{M18i} \quad (2.28)$$

como ya son conocidas las primeras cinco transformaciones del lado izquierdo, es posible simplificar ec.(2.28). Pasando dichas transformaciones al otro extremo, esto es:

$$\mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1214i} \mathbf{T}_{1416i} = (\mathbf{T}_{810i})^{-1} (\mathbf{T}_{68i})^{-1} (\mathbf{T}_{46i})^{-1} (\mathbf{T}_{24i})^{-1} (\mathbf{T}_{02i})^{-1} \mathbf{T}_{0M} \mathbf{T}_{M18i}$$

$$\begin{bmatrix} h_{11i} & h_{12i} & h_{13i} & h_{14i} \\ h_{21i} & h_{22i} & h_{23i} & h_{24i} \\ h_{31i} & h_{32i} & h_{33i} & h_{34i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11i} & a_{12i} & a_{13i} & a_{14i} \\ a_{21i} & a_{22i} & a_{23i} & a_{24i} \\ a_{31i} & a_{32i} & a_{33i} & a_{34i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

de la ec.(2.29) se toman los elementos (2,4) y (3,4), donde  $h_{24i} = d_{11i} + d_{15i} c\theta_{14i} s\theta_{12i}$  y  $h_{34i} = d_{15i} c\theta_{12i} c\theta_{14i}$ , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$d_{11i} + d_{15i} c\theta_{14i} s\theta_{12i} = a_{24i} \quad (2.30)$$

$$d_{15i} c\theta_{12i} c\theta_{14i} = a_{34i} \quad (2.31)$$

donde los datos conocidos son:

$$a_{24i} = -d_{8i} c\theta_{10i} - x(s\theta_{10i}(c\delta_{1i} c\theta_{7i} s\theta_{4i} - s\delta_{1i}s\theta_{7i}) + c\theta_{10i}(c\theta_{7i}s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s\theta_{4i}s\theta_{7i})) - d_{5i} s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - d_{3i}c\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + zc\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + d_{2i}s_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + y(c\delta_{1i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - s\delta_{1i} s\theta_{4i} s(\theta_{10i} + \theta_{7i})) + d_{18i} c\delta_{17i}(-c\theta_{4i} c\phi s\theta s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + (c\delta_{1i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - s\delta_{1i} s\theta_{4i} s(\theta_{10i} + \theta_{7i}))(c\psi s\phi + c\theta c\phi s\psi) - (s\theta_{10i}(c\delta_{1i}c\theta_{7i}s\theta_{4i} - s\delta_{1i} s\theta_{7i}) + c\theta_{10i}(c\theta_{7i}s\delta_{1i} + c\delta_{1i} s\theta_{4i}s\theta_{7i}))(c\theta c\phi c\psi - s\phi s\psi)) + d_{18i}s\delta_{17i}(c\theta_{4i}s\theta s(\theta_{10i} + \theta_{7i})s\phi + (s\theta_{10i}(c\delta_{1i} c\theta_{7i}s\theta_{4i} - s\delta_{1i}s\theta_{7i}) + c\theta_{10i}(c\theta_{7i}s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s\theta_{4i}s\theta_{7i})) (c\theta c\psi s\phi + c\phi s\psi) + (c\delta_{1i}c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - s\delta_{1i}s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}))(c\phi c\psi - c\theta s\phi s\psi))$$

$$a_{34i} = d_{8i}s\theta_{10i} + s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) (-yc\delta_{1i} + xs\delta_{1i} - d_{18i}c(\delta_{1i} - \psi) s(\delta_{17i} - \phi) + d_{18i}c\theta c(\delta_{17i} - \phi) s(\delta_{1i} - \psi) - c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) (d_{5i} + c\theta_{4i}(d_{3i} - z + d_{18i}c(\delta_{17i} - \phi) s\theta + s\theta_{4i}(-d_{2i} + x c\delta_{1i} + d_{18i}c\theta c(\delta_{17i} - \phi) c(\delta_{1i} - \psi) + ys\delta_{1i} + d_{18i}s(\delta_{17i} - \phi) + \phi s(\delta_{1i} - \psi))))$$

de ec.(2.31) obtenemos,

$$c\theta_{14i} = \frac{a_{34i}}{d_{15i} c\theta_{12i}} \quad (2.32)$$

sustituyendo ec.(2.32) en ec.(2.30)

$$d_{11i} + a_{34i} \tan \theta_{12i} = a_{24i} \quad (2.33)$$

finalmente se obtiene  $\theta_{12i}$ :

$$\theta_{12i} = \tan^{-1} \left( \frac{a_{24i} - d_{11i}}{a_{34i}} \right) \quad (2.34)$$

Se tienen los datos siguientes:

$$\begin{aligned} d_{51} &= 0.1 \text{ m} \\ d_{52} &= 0.1 \text{ m} \\ d_{53} &= 0.1 \text{ m} \\ d_{151} &= 0.060875 \text{ m} \\ d_{152} &= 0.060875 \text{ m} \\ d_{153} &= 0.060875 \text{ m} \end{aligned}$$

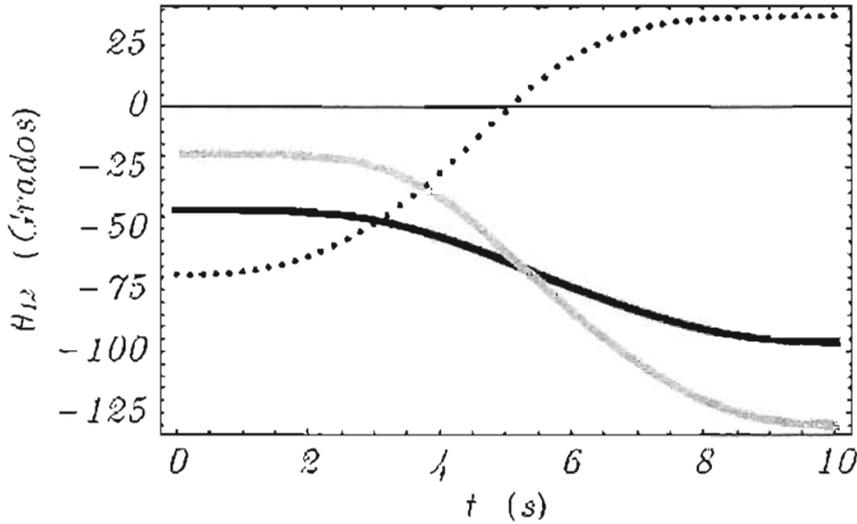
La figura 2-12, muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{12i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B. en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{121}$ , la línea gris a  $\theta_{122}$  y la punteada es para  $\theta_{123}$ .

## 2.2.6. Ángulo $\theta_{14i}$

Para determinar el movimiento de la junta rotacional descrita por  $\theta_{14i}$ , de la ec.(2.29) se igualan los elementos (1,4) y (3,4), donde  $h_{14i} = d_{13i} + d_{15i} s\theta_{14i}$  obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$d_{13i} + d_{15i} s\theta_{14i} = a_{14i} \quad (2.35)$$

$$d_{15i} c\theta_{12i} c\theta_{14i} = a_{34i} \quad (2.36)$$

Figura 2-12 Posición  $\theta_{12i}$ 

donde:

$$a_{14i} = d_{6i} + d_{9i} - (d_{3i} - z + d_{18i}c(\delta_{17i} + \phi) s\theta) s\theta_{4i} + c\theta_{4i}(-d_{2i} + xc\delta_{1i} + d_{18i}c\theta c(\delta_{17i} + \phi) c(\delta_{1i} - \psi) + ys\delta_{1i} + d_{18i}s(\delta_{17i} + \phi) s(\delta_{1i} - \psi)) \quad (2.37)$$

despejando  $s\theta_{14i}$ , y  $c\theta_{14i}$  de ecs.(2.35) y (2.36) se obtiene:

$$s\theta_{14i} = \frac{a_{14i} - d_{13i}}{d_{15i}}$$

$$c\theta_{14i} = \frac{a_{34i}}{d_{15i} c\theta_{12i}}$$

finalmente se obtiene  $\theta_{14i}$ :

$$\theta_{14i} = \tan^{-1} \left( \frac{(a_{14i} - d_{13i}) c\theta_{12i}}{a_{34i}} \right) \quad (2.38)$$

Se tienen los datos siguientes:

$$d_{61} = 0.00865 \text{ m}$$

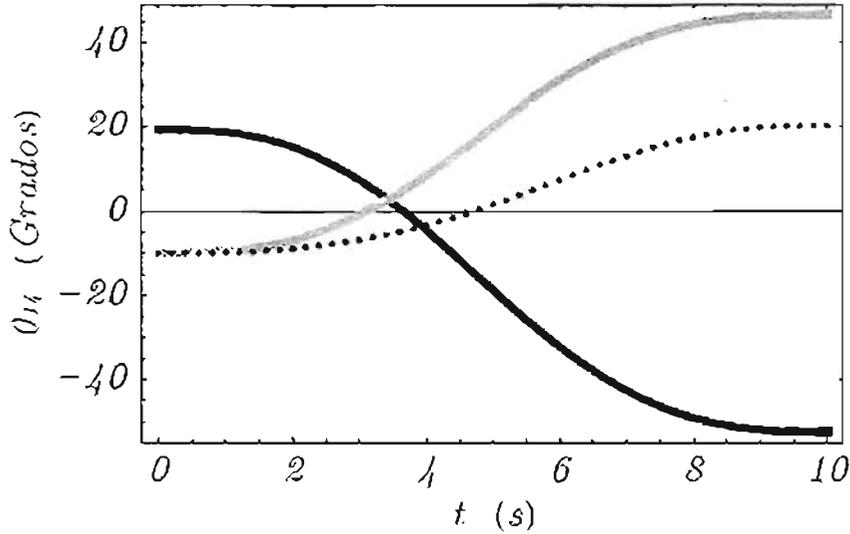
$$d_{62} = 0.00865 \text{ m}$$

$$d_{63} = 0.00865 \text{ m}$$

La figura 2-13 muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{14i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B. en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{141}$ , la línea gris a  $\theta_{142}$  y la punteada es para  $\theta_{143}$ .

### 2.2.7. Ángulo $\theta_{16i}$

Para determinar el movimiento de la junta rotacional descrita por  $\theta_{16i}$ , de la ec.(2.29) se igualan los elementos (2,1) y (3,1), donde  $h_{21i} = c\theta_{12i} c\theta_{16i} - c\theta_{16i} s\theta_{12i} s\theta_{14i}$  y  $h_{31i} = -c\theta_{12i}$

Figura 2-13 Posición  $\theta_{14i}$ 

$c\theta_{16i} s\theta_{14i} - s\theta_{12i} s\theta_{16i}$  obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$-c\theta_{16i} s\theta_{12i} s\theta_{14i} + c\theta_{12i} s\theta_{16i} = a_{21} \quad (2.39)$$

$$-c\theta_{12i} c\theta_{16i} s\theta_{14i} - s\theta_{12i} s\theta_{16i} = a_{31} \quad (2.40)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_{21i} = & c\delta_{17i}(-c\theta_{4i} c\phi s\theta s(\theta_{10i} + \theta_{7i})) + c(\delta_{1i} - \psi)(-c\theta c\phi s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i})) + c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) \\ & s\phi - (c\theta c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) c\phi + s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) s\phi)s(\delta_{1i} - \psi) + s\delta_{17i}(c\theta_{4i}s\theta(s\theta_{10i} + \theta_{7i}) \\ & s\phi + (c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) s\delta_{1i} + c\delta_{1i} s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}))(c\theta c\psi s\phi + c\phi s\psi) + (c\delta_{1i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) \\ & - s\delta_{1i}s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}))(c\phi c\psi - c\theta s\phi s\psi)) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} a_{31i} = & s\delta_{17i}(c\theta_{4i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) s\theta s\phi + c(\delta_{1i} - \psi)(-c\phi s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + c\theta c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) s\theta_{4i}s\phi) \\ & - (c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) c\phi s\theta_{4i} + c\theta s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) s\phi)s(\delta_{1i} - \psi)) + c\delta_{17i}(-c\theta_{4i}c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) c\phi \\ & s\theta) - (c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) s\delta_{1i} s\theta_{4i} + c\delta_{1i} s(\theta_{10i} + \theta_{7i}))(c\psi s\phi + c\theta c\phi s\psi) + (-c\delta_{1i}c(\theta_{10i} + \\ & \theta_{7i})s\theta_{4i}) + s\delta_{1i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}))(c\theta c\phi c\psi - s\phi s\psi)) \end{aligned} \quad (2.42)$$

resolviendo para  $c\theta_{16i}$  y  $s\theta_{16i}$  de ecs.(2.39) y (2.40) respectivamente:

$$\begin{aligned} c\theta_{16i} &= -\frac{1}{s\theta_{14i}}(a_{31} c\theta_{12i} + a_{21} s\theta_{12i}) \\ s\theta_{16i} &= a_{21} c\theta_{12i} - a_{31} s\theta_{12i} \end{aligned}$$

finalmente se obtiene  $\theta_{16i}$ :

$$\boxed{\theta_{16i} = \tan^{-1} \left( \frac{s\theta_{16i}}{c\theta_{16i}} \right)} \quad (2.43)$$

La figura 2-14 muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{16i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B. en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{161}$ , la línea gris a  $\theta_{162}$  y la punteada es para  $\theta_{163}$ .

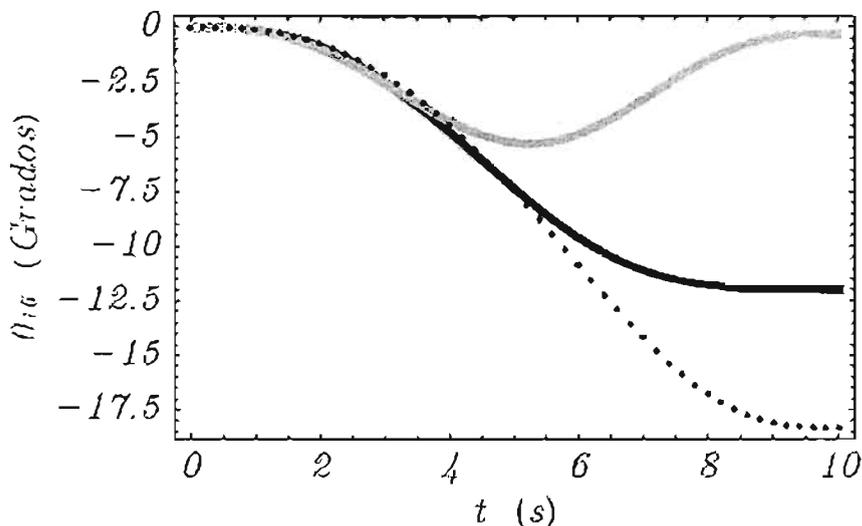


Figura 2-14 Posición  $\theta_{16i}$

De esta manera es como se desarrolló el análisis de posición para la plataforma espacial y ahora ya son conocidas las ecuaciones que describen la orientación de cada uno de los eslabones del sistema.

## 2.3. Velocidad

El problema cinemático inverso para la velocidad es:

Dada la velocidad  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  del centroide de la base móvil y la velocidades angulares  $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$  que definen la velocidad angular de la misma. Hallar la velocidad de los ángulos  $\dot{\theta}_{4i}$ ,  $\dot{\theta}_{7i}$ ,  $\dot{\theta}_{10i}$ ,  $\dot{\theta}_{12i}$ ,  $\dot{\theta}_{14i}$  y  $\dot{\theta}_{16i}$  que definen la velocidad de las juntas.

En el análisis de velocidad, se asume que la posición y la orientación de los cuerpos ya son totalmente conocidos y que son resultado del análisis de posición. La velocidad de un punto o un cuerpo rígido que experimenta movimiento, puede ser obtenida por la derivada respecto al tiempo. Con base en las ecuaciones obtenidas en el análisis de posición, se obtendrá la velocidad al derivar con respecto al tiempo cada una de ellas.

### 2.3.1. Velocidad de $\theta_{4i}$

De la ec.(2.13):

$$\theta_{4i} = \tan^{-1} \left( \frac{z'_{Di}}{x'_{Di}} \right) - \frac{\pi}{2}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} t \left( \theta_{4i} + \frac{\pi}{2} \right) &= \frac{z'_{Di}}{x'_{Di}} \\ -\cot \theta_{4i} &= \frac{z'_{Di}}{x'_{Di}} \\ \frac{1}{-t\theta_{4i}} &= \frac{z'_{Di}}{x'_{Di}} \end{aligned}$$

Resolviendo para  $x'_{Di}$ :

$$x'_{Di} = -z'_{Di} t\theta_{4i} \quad (2.44)$$

al derivar ec.(2.44) respecto al tiempo:

$$\dot{x}'_{Di} = -\dot{z}'_{Di} t\theta_{4i} - z'_{Di} \sec^2 \theta_{4i} \dot{\theta}_{4i} \quad (2.45)$$

resolviendo para  $\dot{\theta}_{4i}$ :

$$\dot{\theta}_{4i} = \frac{\dot{x}'_{Di} + \dot{z}'_{Di} t\theta_{4i}}{-z'_{Di} \sec^2 \theta_{4i}} \quad (2.46)$$

lo cual también es igual a:

$$\dot{\theta}_{4i} = \frac{-c^2 \theta_{4i}}{z'_{Di}} \left( \dot{x}'_{Di} + \dot{z}'_{Di} t\theta_{4i} \right)$$

quedando finalmente:

$$\dot{\theta}_{4i} = c_{0i} \left( \dot{x}'_{Di} + \dot{z}'_{Di} t\theta_{4i} \right) \quad (2.47)$$

donde:

$$\begin{aligned} c_{0i} &= \frac{-c^2 \theta_{4i}}{z'_{Di}} \\ x'_{Di} &= x_{Di} c\delta_{1i} + y_{Di} s\delta_{1i} - d_{2i} \\ \dot{x}'_{Di} &= \dot{x}_{Di} c\delta_{1i} + \dot{y}_{Di} s\delta_{1i} \\ z'_{Di} &= z_{Di} - d_{3i} \\ \dot{z}'_{Di} &= \dot{z}_{Di} \end{aligned}$$

A continuación se determinan  $\dot{x}_{Di}$ ,  $\dot{y}_{Di}$  y  $\dot{z}_{Di}$ . Se tiene la ecuación y su derivada respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} x_{Di} &= x - d_{15i} c\psi s\theta + d_{18i} s\delta_{17i} (-c\theta c\psi s\phi - c\phi s\psi) + d_{18i} c\delta_{17i} (c\theta c\phi c\psi - s\phi s\psi) \\ \dot{x}_{Di} &= C_{1i} \dot{x} + C_{2i} \dot{y} + C_{3i} \dot{z} + C_{4i} \dot{\psi} + C_{5i} \dot{\theta} + C_{6i} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 C_{1i} &= 1 \\
 C_{2i} &= 0 \\
 C_{3i} &= 0 \\
 C_{4i} &= -d_{18i} c\psi s(\delta_{17i} + \phi) + (-d_{18i} c\theta c(\delta_{17i} + \phi) + d_{15i}s\theta) s\psi \\
 C_{5i} &= -c\psi(d_{15i}c\theta + d_{18i}c(\delta_{17i} + \phi)s\theta) \\
 C_{6i} &= -d_{18i}(c\theta c\psi s(\delta_{17i} + \phi) + c(\delta_{17i} + \phi)s\psi)
 \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
 y_{Di} &= y - d_{15i}s\theta s\psi + d_{18i}c\delta_{17i}(c\psi s\phi + c\theta c\phi s\psi) + d_{18i}s\delta_{17i}(c\phi c\psi - c\theta s\phi s\psi) \\
 \dot{y}_{Di} &= D_{1i} \dot{x} + D_{2i} \dot{y} + D_{3i} \dot{z} + D_{4i} \dot{\psi} + D_{5i} \dot{\theta} + D_{6i} \dot{\phi}
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 D_{1i} &= 0 \\
 D_{2i} &= 1 \\
 D_{3i} &= 0 \\
 D_{4i} &= c\psi(d_{18i} c\theta c(\delta_{17i} + \phi) - d_{15i} s\theta) - d_{18i} s(\delta_{17i} + \phi)s\psi \\
 D_{5i} &= -(d_{15i} c\theta + d_{18i} c(\delta_{17i} + \phi) s\theta) s\psi \\
 D_{6i} &= d_{18i}(c(\delta_{17i} + \phi)c\psi - c\theta s(\delta_{17i} + \phi)s\psi)
 \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
 z_{Di} &= z - d_{15i} c\theta - d_{18i} c\delta_{17i} c\phi s\theta + d_{18i} s\delta_{17i} s\theta s\phi \\
 \dot{z}_{Di} &= E_{1i} \dot{x} + E_{2i} \dot{y} + E_{3i} \dot{z} + E_{4i} \dot{\psi} + E_{5i} \dot{\theta} + E_{6i} \dot{\phi}
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 E_{1i} &= 0 \\
 E_{2i} &= 0 \\
 E_{3i} &= 1 \\
 E_{4i} &= 0 \\
 E_{5i} &= -d_{18i} c\theta c(\delta_{17i} + \phi) + d_{15i} s\theta \\
 E_{6i} &= d_{18i} s\theta s(\delta_{17i} + \phi)
 \end{aligned}$$

finalmente la velocidad de  $\theta_{4i}$  es obtenida sustituyendo ecs.(2.48), (2.49) y (2.50) en (2.47):

$$\boxed{\dot{\theta}_{4i} = F_{1i} \dot{x} + F_{2i} \dot{y} + F_{3i} \dot{z} + F_{4i} \dot{\psi} + F_{5i} \dot{\theta} + F_{6i} \dot{\phi}} \tag{2.51}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 F_{1i} &= c_{0i} (C_{1i} c\delta_{1i} + D_{1i} s\delta_{1i} + E_{1i} t\theta_{4i}) \\
 F_{2i} &= c_{0i} (C_{2i} c\delta_{1i} + D_{2i} s\delta_{1i} + E_{2i} t\theta_{4i}) \\
 F_{3i} &= c_{0i} (C_{3i} c\delta_{1i} + D_{3i} s\delta_{1i} + E_{3i} t\theta_{4i}) \\
 F_{4i} &= c_{0i} (C_{4i} c\delta_{1i} + D_{4i} s\delta_{1i} + E_{4i} t\theta_{4i}) \\
 F_{5i} &= c_{0i} (C_{5i} c\delta_{1i} + D_{5i} s\delta_{1i} + E_{5i} t\theta_{4i}) \\
 F_{6i} &= c_{0i} (C_{6i} c\delta_{1i} + D_{6i} s\delta_{1i} + E_{6i} t\theta_{4i})
 \end{aligned}$$

La figura 2-15 muestra la gráfica que describe la velocidad de los ángulos  $\theta_{4i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B. en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{41}$ , la línea gris a  $\dot{\theta}_{42}$  y la punteada es para  $\dot{\theta}_{43}$ .

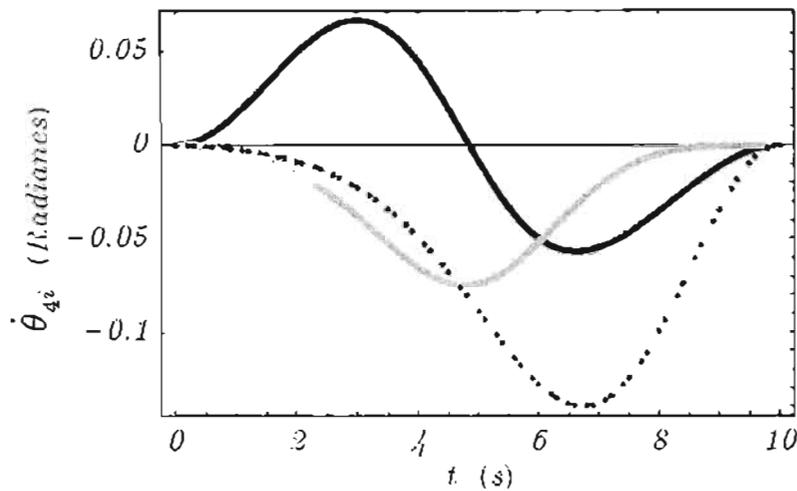


Figura 2-15 Velocidad  $\theta_{4i}$

### 2.3.2. Velocidad de $\theta_{10i}$

De ec.(2.20)

$$c\theta_{10i} = \left( \frac{(y''_{rD_i})^2 + (z''_{rD_i})^2 - ((d_{8i})^2 + (d_{11i})^2)}{2(d_{8i} d_{11i})} \right)$$

se tiene:

$$2(d_{8i} d_{11i}) c\theta_{10i} = (y''_{rD_i})^2 + (z''_{rD_i})^2 - ((d_{8i})^2 + (d_{11i})^2)$$

al derivar:

$$-2(d_{8i} d_{11i}) s\theta_{10i} \dot{\theta}_{10i} = 2(y''_{rD_i} \dot{y}''_{rD_i} + z''_{rD_i} \dot{z}''_{rD_i})$$

resolviendo para  $\dot{\theta}_{10i}$ :

$$\dot{\theta}_{10i} = \frac{y''_{rD_i} \dot{y}''_{rD_i} + z''_{rD_i} \dot{z}''_{rD_i}}{-(d_{8i} d_{11i}) s\theta_{10i}}$$

quedando finalmente:

$$\dot{\theta}_{10i} = c_{1i}(y''_{rD_i} \dot{y}'_{rD_i} + z''_{rD_i} \dot{z}'_{rD_i}) \quad (2.52)$$

donde:

$$c_{1i} = -\frac{1}{(d_{8i} d_{11i}) s\theta_{10i}}$$

A continuación se determinan  $\dot{y}''_{rD_i}$  y  $\dot{z}''_{rD_i}$ . Se tiene la ecuación y su derivada respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} y''_{rD_i} &= yc\delta_{1i} - xs\delta_{1i} + d_{18i}c(\delta_{1i} - \psi) s(\delta_{17i} + \phi) + (-d_{18i}c\theta c(\delta_{17i} + \phi) + d_{15i}s\theta s(\delta_{1i} - \psi)) \\ \dot{y}''_{rD_i} &= H_{1i} \dot{x} + H_{2i} \dot{y} + H_{3i} \dot{z} + H_{4i} \dot{\psi} + H_{5i} \dot{\theta} + H_{6i} \dot{\phi} + H_{7i} \dot{\theta}_{4i} \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde:

$$\begin{aligned} H_{1i} &= -s\delta_{1i} \\ H_{2i} &= c\delta_{1i} \\ H_{3i} &= 0 \\ H_{4i} &= c(\delta_{1i} - \psi)(d_{18i} c\theta c(\delta_{17i} + \phi) - d_{15i} s\theta) + d_{18i} s(\delta_{17i} + \phi)s(\delta_{1i} - \psi) \\ H_{5i} &= (d_{15i} c\theta + d_{18i} c(\delta_{17i} + \phi) s\theta) s(\delta_{1i} - \psi) \\ H_{6i} &= d_{18i}(c(\delta_{17i} + \phi) c(\delta_{1i} - \psi) + c\theta s(\delta_{17i} + \phi) s(\delta_{1i} - \psi)) \\ H_{7i} &= 0 \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} z''_{rD_i} &= -d_{5i} - c\theta_{4i} (d_{3i} - z + d_{15i} c\theta + d_{18i} c(\delta_{17i} + \phi) + \phi s\theta) - s\theta_{4i}(-d_{2i} + x c\delta_{1i} + \\ &\quad y s\delta_{1i} + c(\delta_{1i} - \psi)(d_{18i} c\theta c(\delta_{17i} + \phi) - d_{15i} s\theta) + d_{18i} s(\delta_{17i} + \phi) s(\delta_{1i} - \psi)) \\ \dot{z}''_{rD_i} &= I_{1i} \dot{x} + I_{2i} \dot{y} + I_{3i} \dot{z} + I_{4i} \dot{\psi} + I_{5i} \dot{\theta} + I_{6i} \dot{\phi} + I_{7i} \dot{\theta}_{4i} \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde:

$$\begin{aligned} I_{1i} &= -c\delta_{1i} s\theta_{4i} \\ I_{2i} &= -s\delta_{1i} s\theta_{4i} \\ I_{3i} &= c\theta_{4i} \\ I_{4i} &= s\theta_{4i}(d_{18i} c(\delta_{1i} - \psi) s(\delta_{17i} + \phi) + (d_{18i} c\theta c(\delta_{17i} + \phi) + d_{15i} s\theta)s(\delta_{1i} - \psi)) \\ I_{5i} &= d_{18i}c\delta_{17i}c\phi(-c\theta c\theta_{4i} + c(\delta_{1i} - \psi)s\theta s\theta_{4i}) + c\theta_{4i}(d_{15i} s\theta + d_{18i} c\theta s\delta_{17i} s\phi) + \\ &\quad c(\delta_{1i} - \psi) s\theta_{4i}(d_{15i} c\theta - d_{18i} s\delta_{17i} s\phi) \\ I_{6i} &= d_{18i}((c\theta_{4i} s\theta + c\theta c(\delta_{1i} - \psi) s\theta_{4i}) s(\delta_{17i} + \phi) - c(\delta_{17i} + \phi) s\theta_{4i}s(\delta_{1i} - \psi)) \\ I_{7i} &= (d_{31} + d_{15i} c\theta + d_{18i} c(\delta_{17i} + \phi) s\theta) s\theta_{4i} + c\theta_{4i}(d_{2i} + c(\delta_{1i} - \psi)(-d_{18i} c\theta c \\ &\quad (\delta_{17i} + \phi) + d_{15i}s\theta) - d_{18i}s(\delta_{17i} + \phi)s(\delta_{17i} + \phi)s(\delta_{1i} - \psi)) - c\theta_{4i}(c\delta_{1i} x + \\ &\quad s c\delta_{1i} y) - s\theta_{4i} z \end{aligned}$$

finalmente la velocidad de  $\theta_{10}$ , es obtenida sustituyendo ec.(2.51), (2.53) y (2.54) en (2.52):

$$\boxed{\dot{\theta}_{10i} = J_{1i} \dot{x} + J_{2i} \dot{y} + J_{3i} \dot{z} + J_{4i} \dot{\psi} + J_{5i} \dot{\theta} + J_{6i} \dot{\phi}} \quad (2.55)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 J_{1i} &= c_{1i}(H_{1i} y''_{rD_i} + I_{1i} z''_{rD_i} + F_{1i}(I_{7i} z''_{rD_i})) \\
 J_{2i} &= c_{1i}(H_{2i} y''_{rD_i} + I_{2i} z''_{rD_i} + F_{2i}(I_{7i} z''_{rD_i})) \\
 J_{3i} &= c_{1i}(H_{3i} y''_{rD_i} + I_{3i} z''_{rD_i} + F_{3i}(I_{7i} z''_{rD_i})) \\
 J_{4i} &= c_{1i}(H_{4i} y''_{rD_i} + I_{4i} z''_{rD_i} + F_{4i}(I_{7i} z''_{rD_i})) \\
 J_{5i} &= c_{1i}(H_{5i} y''_{rD_i} + I_{5i} z''_{rD_i} + F_{5i}(I_{7i} z''_{rD_i})) \\
 J_{6i} &= c_{1i}(H_{6i} y''_{rD_i} + I_{6i} z''_{rD_i} + F_{6i}(I_{7i} z''_{rD_i}))
 \end{aligned}$$

La figura 2-16 muestra la gráfica que describe la velocidad de los ángulos  $\theta_{10i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B. en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{101}$ , la línea gris a  $\dot{\theta}_{102}$  y la punteada es para  $\dot{\theta}_{103}$ .

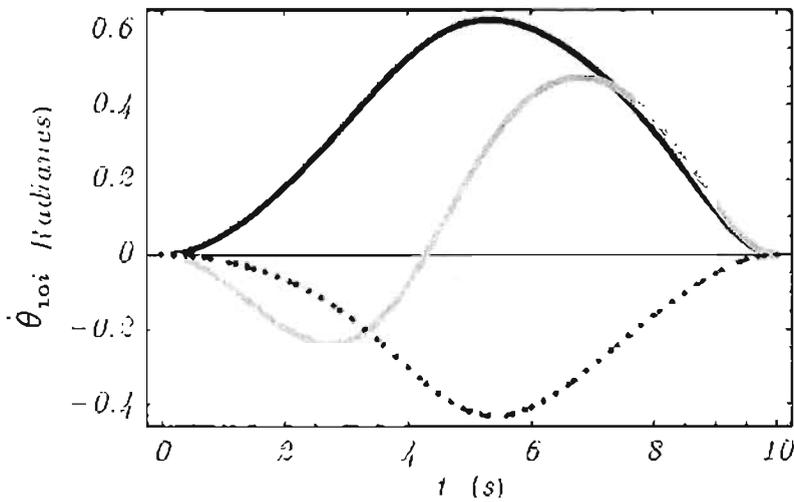


Figura 2-16 Velocidad  $\theta_{10i}$

### 2.3.3. Velocidad de $\theta_{7i}$

De ec.(2.24)  $B_i c\theta_{7i} + A_i s\theta_{7i} = z''_{rD_i}$ . Se tiene lo siguiente  $B_i c\theta_{7i} + A_i s\theta_{7i} - z''_{rD_i} = 0$ , sustituyendo los valores  $A_i = d_{8i} + d_{11i} c\theta_{10i}$ , y  $B_i = d_{11i} s\theta_{10i}$ , queda:

$$d_{11i} s\theta_{10i} c\theta_{7i} + (d_{8i} + d_{11i} c\theta_{10i}) s\theta_{7i} - z''_{rD_i} = 0$$

al derivar:

$$d_{11i} c\theta_{7i} c\dot{\theta}_{10i} - d_{11i} s\theta_{10i} s\dot{\theta}_{7i} + (d_{8i} + d_{11i} c\theta_{10i}) c\dot{\theta}_{7i} - d_{11i} s\theta_{10i} s\dot{\theta}_{7i} - \ddot{z}_{rD_i} \quad (2.56)$$

finalmente la velocidad de  $\theta_{7i}$  es obtenida sustituyendo ecs.(2.51), (2.54) y (2.55) en (2.56):

$$\boxed{\dot{\theta}_{7i} = -\frac{1}{c_{2i}} \left( K_{1i} \dot{x} + K_{2i} \dot{y} + K_{3i} \dot{z} + K_{4i} \dot{\psi} + K_{5i} \dot{\theta} + K_{6i} \dot{\phi} \right)} \quad (2.57)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 K_{1i} &= d_{11i} J_{1i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - I_{1i} - F_{1i} I_{7i} \\
 K_{2i} &= d_{11i} J_{2i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - I_{2i} - F_{2i} I_{7i} \\
 K_{3i} &= d_{11i} J_{3i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - I_{3i} - F_{3i} I_{7i} \\
 K_{4i} &= d_{11i} J_{4i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - I_{4i} - F_{4i} I_{7i} \\
 K_{5i} &= d_{11i} J_{5i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - I_{5i} - F_{5i} I_{7i} \\
 K_{6i} &= d_{11i} J_{6i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - I_{6i} - F_{6i} I_{7i} \\
 c_{2i} &= d_{8i} c\theta_{7i} + d_{11i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i})
 \end{aligned}$$

La figura 2-17 muestra la gráfica que describe la velocidad de los ángulos  $\theta_{7i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B. en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{71}$ , la línea gris a  $\dot{\theta}_{72}$  y la punteada es para  $\dot{\theta}_{73}$ .

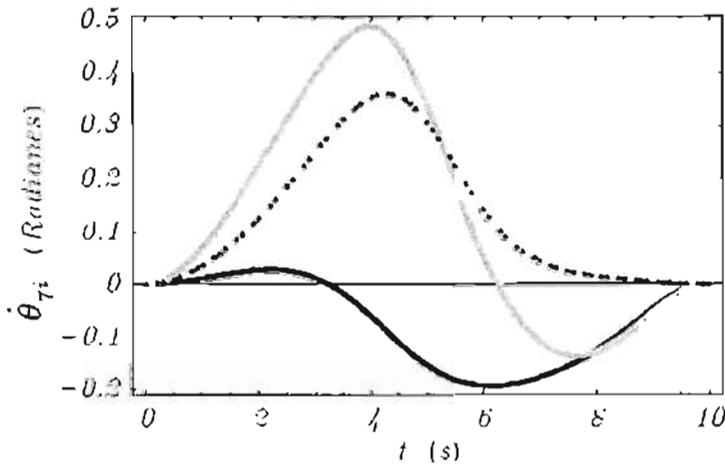


Figura 2-17 Velocidad  $\theta_{7i}$

### 2.3.4. Velocidad de $\theta_{12i}$

De ec.(2.33):

$$d_{11i} + a_{34i} \theta_{12i} = a_{24i}$$

derivando:

$$\dot{a}_{34i} t\theta_{12i} + a_{34i} \sec^2 \theta_{12i} \dot{\theta}_{12i} = \dot{a}_{24i}$$

y resolviendo para  $\dot{\theta}_{12i}$ :

$$\dot{\theta}_{12i} = \frac{\dot{a}_{24i} - \dot{a}_{34i} t\theta_{12i}}{a_{34i} \sec^2 \theta_{12i}} \tag{2.58}$$

es necesario determinar  $\dot{a}_{24i}$  y  $\dot{a}_{34i}$ . Derivando  $a_{24i}$ :

$$\dot{a}_{24i} = L_{1i}\dot{x} + L_{2i}\dot{y} + L_{3i}\dot{z} + L_{4i}\dot{\psi} + L_{5i}\dot{\theta} + L_{6i}\dot{\phi} + L_{7i}\dot{\theta}_{4i} + L_{8i}\dot{\theta}_{7i} + L_{9i}\dot{\theta}_{10i} \tag{2.59}$$

donde:

$$L_{1i} = c\delta_{1i}s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i})$$

$$L_{2i} = c\delta_{1i}c\theta_{10i} + \theta_{7i} - s\delta_{1i}s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i})$$

$$L_{3i} = c\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i})$$

$$L_{4i} = d_{18i}c(\delta_{1i} - \psi)c\theta c(\theta_{10i} + \theta_{7i})c(\delta_{17i} - \phi) + s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i})s(\delta_{17i} - \phi) + d_{18i}(-c\theta c(\delta_{17i} - \phi)s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + c(\theta_{10i} + \theta_{7i})s(\delta_{17i} - \phi))s(\delta_{1i} - \psi)$$

$$L_{5i} = d_{18i}c(\delta_{17i} - \phi)((-c\theta c\theta_{4i} + c(\delta_{1i} - \psi)s\theta s\theta_{4i})s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + c(\theta_{10i} + \theta_{7i})s\theta s(\delta_{1i} - \psi))$$

$$L_{6i} = d_{18i}(s(\theta_{10i} + \theta_{7i})((c\theta_{4i}s\theta + c\theta c(\delta_{1i} - \psi)s\theta_{4i})s(\delta_{17i} - \phi) - c(\delta_{17i} - \phi)s\theta_{4i}s(\delta_{1i} - \psi) + c(s(\theta_{10i} + \theta_{7i}))c(\delta_{17i} - \phi)c(\delta_{1i} - \psi) + c\theta s(\delta_{17i} - \phi)s(\delta_{1i} - \psi)))$$

$$L_{7i} = s(\theta_{10i} + \theta_{7i})((d_{3i} + d_{18i}c(\delta_{17i} - \phi)s\theta s\theta_{4i} + c\theta_{4i}(d_{2i} - d_{18i}(c\theta c(\delta_{17i} - \phi)c(\delta_{1i} - \psi) + s(\delta_{17i} - \phi)s(\delta_{1i} - \psi)))) - c\theta_{4i}(c\delta_{1i}x + s\delta_{1i}y) - s\theta_{4i}z)$$

$$L_{8i} = -c\theta_{10i}(c\theta_{7i}(d_{5i} + c\theta_{4i}(d_{3i} + d_{18i}c(\delta_{17i} - \phi)s\theta) + s\theta_{4i}(-d_{2i} + d_{18i}c\psi(c\delta_{17i}c\delta_{1i}c\theta c\phi + c\phi s\delta_{17i}s\delta_{1i} - c\delta_{1i}c\theta s\delta_{17i}s\phi + c\delta_{17i}s\delta_{1i}s\phi))) + d_{18i}c\psi s\theta_{7i}(-c\theta c\delta_{17i} + \phi s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s\delta_{17i} + \phi) + s\theta_{10i}(s\theta_{7i}(d_{5i} + (-d_{2i} + d_{18i}c\psi(c\delta_{1i}c\theta c\delta_{17i} + \phi + c\phi s\delta_{17i}s\delta_{1i}))s\theta_{4i} + c\theta_{4i}(d_{3i} - d_{18i}s\delta_{17i}s\theta s\phi) + d_{18i}c\delta_{17i}(c\theta c\theta_{7i}c\phi c\psi s\delta_{1i} + s\theta_{7i}(c\theta_{4i}c\phi s\theta + c\psi s\delta_{1i}s\theta_{4i}s\phi)) - d_{18i}c\theta_{7i}c\psi(c\theta s\delta_{17i}s\delta_{1i}s\phi + c\delta_{1i}s\delta_{17i} + \phi)) - d_{18i}(c\theta c\delta_{17i} + \phi(c\theta_{10i} + \theta_{7i}s\delta_{1i}s\theta_{4i} + c\delta_{1i}s\theta_{10i} + \theta_{7i} + (-c\delta_{1i}c\theta_{10i} + \theta_{7i}s\theta_{4i} + s\delta_{1i}s\theta_{10i} + \theta_{7i})s\delta_{17i} + \phi)s\psi + (-c\delta_{1i}c\theta_{10i} + \theta_{7i}s\theta_{4i} + s\delta_{1i}s\theta_{10i} + \theta_{7i})x - (c\theta_{10i} + \theta_{7i}s\delta_{1i}s\theta_{4i} + c\delta_{1i}s\theta_{10i} + \theta_{7i})y + c\theta_{4i}\theta_{10i} + \theta_{7i}z$$

$$L_{9i} = -c\theta_{10i}(c\theta_{7i}(d_{5i} + c\theta_{4i}(d_{3i} + d_{18i}c\delta_{17i} + \phi s\theta) + s\theta_{4i}(-d_{2i} + d_{18i}c\psi(c\delta_{17i}c\delta_{1i}c\theta c\phi + c\phi s\delta_{17i}s\delta_{1i} - c\delta_{1i}c\theta s\delta_{17i}s\phi + c\delta_{17i}s\delta_{1i}s\phi))) + d_{18i}c\psi s\theta_{7i}(-c\theta c\delta_{17i} + \phi s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s\delta_{17i} + \phi) + s\theta_{10i}(d_{5i} + s\theta_{7i}(d_{5i} + (-d_{2i} + d_{18i}c\psi(c\delta_{1i}c\theta c\delta_{17i} + \phi + c\phi s\delta_{17i}s\delta_{1i}))s\theta_{4i} + c\theta_{4i}(d_{3i} - d_{18i}s\delta_{17i}s\theta s\phi) + d_{18i}c\delta_{17i}c\theta c\theta_{7i}c\phi c\psi s\delta_{1i} + s\theta_{7i}(c\theta_{4i}c\phi s\theta + c\psi s\delta_{1i}s\theta_{4i}s\phi) - d_{18i}c\theta_{7i}c\psi(c\theta s\delta_{17i}s\delta_{1i}s\phi + c\delta_{1i}s\delta_{17i} + \phi)) - d_{18i}(c\theta c\delta_{17i} + \phi(c\theta_{10i} + \theta_{7i}s\delta_{1i}s\theta_{4i} + c\delta_{1i}s\theta_{10i} + \theta_{7i} + (-c\delta_{1i}c\theta_{10i} + \theta_{7i}s\theta_{4i} + s\delta_{1i}s\theta_{10i} + \theta_{7i})s\delta_{17i} + \phi)s\psi + (-c\delta_{1i}c\theta_{10i} + \theta_{7i}s\theta_{4i} + s\delta_{1i}s\theta_{10i} + \theta_{7i})x - (c\theta_{10i} + \theta_{7i}s\delta_{1i}s\theta_{4i} + c\delta_{1i}s\theta_{10i} + \theta_{7i})y + c\theta_{4i}c\theta_{10i} + \theta_{7i}z$$

Derivando  $a_{34i}$ :

$$\ddot{a}_{34i} = M_{1i}\ddot{x} + M_{2i}\ddot{y} + M_{3i}\ddot{z} + M_{4i}\ddot{\psi} + M_{5i}\ddot{\theta} + M_{6i}\ddot{\phi} + M_{7i}\ddot{\theta}_{4i} + M_{8i}\ddot{\theta}_{7i} + M_{9i}\ddot{\theta}_{10i} \quad (2.60)$$

donde:

$$M_{1i} = c\theta_{7i}(s\delta_{1i}s\theta_{10i} - c\delta_{1i}c\theta_{10i}s\theta_{4i}) + (c\theta_{10i}s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s\theta_{10i}s\theta_{4i})s\theta_{7i}$$

$$M_{2i} = -c\theta_{10i} + \theta_{7i}s\delta_{1i}s\theta_{4i} - c\delta_{1i}s\theta_{10i} + \theta_{7i}$$

$$M_{3i} = c\theta_{4i}c\theta_{10i} + \theta_{7i}$$

$$M_{4i} = 1/4 d_{18i}((c\theta c\delta_{17i} + \phi((( -c\delta_{1i} - \theta_{10i} - \theta_{4i} - \theta_{7i} - \psi) + c\delta_{1i} - \theta_{10i} + \theta_{4i} - \theta_{7i} - \psi - c\delta_{1i} + \theta_{10i} - \theta_{4i} + \theta_{7i} - \psi + c\delta_{1i} + \theta_{10i} + \theta_{4i} + \theta_{7i} - \psi - 4c\delta_{1i} - \psi s\theta_{10i} + \theta_{7i})) + 4s\delta_{17i} + \phi((c\theta_{10i} + \theta_{7i} c\delta_{1i} - \psi s\theta_{4i} - s\theta_{10i} + \theta_{7i}s\delta_{1i} - \psi))))$$

$$M_{5i} = -d_{18i} c\delta_{17i} + \phi (c\theta_{10i} + \theta_{7i}(c\theta c\theta_{4i} - c\delta_{1i} - \psi s\theta s\theta_{4i}) + s\theta s\theta_{10i} + \theta_{7i}s\delta_{1i} - \psi)$$

$$M_{6i} = d_{18i}(-c\delta_{17i} + \phi(c\delta_{1i} - \psi s\theta_{10i} + \theta_{7i} + c\theta_{10i} + \theta_{7i} s\theta_{4i}s\delta_{1i} - \psi) + s\delta_{17i} + \phi(c\theta_{10i} + \theta_{7i} (c\theta_{4i}s\theta + c\theta c\delta_{1i} - \psi s\theta_{4i}) - c\theta s\theta_{10i} + \theta_{7i}s\delta_{1i} - \psi))$$

$$M_{7i} = c(\theta_{10i} + \theta_{7i})((d_{3i} + d_{18i} c(\delta_{17i} - \phi) s\theta) s\theta_{4i} + c\theta_{4i}(d_{2i} - d_{18i}(c\theta c\delta_{17i} + \phi c\delta_{1i} - \psi + s\delta_{17i} + \phi s\delta_{1i} - \psi)) - c\theta_{4i}(c\delta_{1i}x + s\delta_{1i}y) - s\theta_{4i}z)$$

$$M_{8i} = c\theta_{7i}s\theta_{10i}(d_{5i} + d_{3i}c\theta_{4i} - d_{2i}s\theta_{4i}) + c_{10i}(d_{5i} + d_{3i}c\theta_{4i})s\theta_{7i} - d_{2i}c\theta_{10i}s\theta_{4i}s\theta_{7i} + d_{18i}c\theta_{10i}c\phi c\psi s\delta_{17i}s\delta_{1i}s\theta_{4i}s\theta_{7i} + d_{18i}c\delta_{1i}c\theta c\delta_{17i} + \phi c\psi s\theta_{4i}s\theta_{10i} + \theta_{7i} + d_{18i}c\theta c\psi s\delta_{17i}s\delta_{1i}s\theta_{10i}s\theta_{7i}s\phi - d_{18i}c\theta_{10i}c\theta_{4i}s\delta_{17i}s\theta_{7i}s\theta s\phi + d_{18i}c\theta_{7i}s\delta_{17i}(c\phi c\psi - s\delta_{1i}s\theta_{10i}s\theta_{4i} - (c\theta_{10i}c\theta c\psi s\delta_{1i} + c\theta_{4i}s\theta_{10i}s\theta)s\phi) + d_{18i}c\delta_{17i}(c\theta_{10i} + \theta_{7i}c\theta c\phi s\delta_{1i} + s\theta_{10i} + \theta_{7i}(c\theta_{4i}c\phi s\theta + c\psi s\delta_{1i} s\theta_{4i}s\phi)) - d_{18i}c\delta_{1i}c\theta_{10i} + \theta_{7i}c\psi s\delta_{17i} + \phi - d_{18i}(c\theta c\delta_{17i} + \phi(c\delta_{1i}c\theta_{10i} + \theta_{7i} - \delta_{1i}s\theta_{4i}s\theta_{10i} + \theta_{7i})) + (c\theta_{10i} + \theta_{7i}s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s\theta_{4i}s\theta_{10i} + \theta_{7i})s\delta_{17i} + \phi)s\psi + (c\theta_{10i} + \theta_{7i} s\delta_{1i} + c\delta_{1i} s\theta_{4i} s\theta_{10i} + \theta_{7i})x + (-c\delta_{1i} c\theta_{10i} + \theta_{7i} + s\delta_{1i} s\theta_{4i} s\theta_{10i} + \theta_{7i}) y - c\theta_{4i}s\theta_{10i} + \theta_{7i}z$$

finalmente la velocidad de  $\theta_{12i}$  es obtenida sustituyendo ecs.(2.51), (2.55), (2.57), (2.59) y (2.60) en (2.58):

$$\boxed{\dot{\theta}_{12i} = N_{1i}\dot{x} + N_{2i}\dot{y} + N_{3i}\dot{z} + N_{4i}\dot{\psi} + N_{5i}\dot{\theta} + N_{6i}\dot{\phi}} \quad (2.61)$$

donde:

$$N_{1i} = (c_{3i}(-(K_{1i}L_{8i}) + c_{2i}(L_{1i} + F_{1i}L_{7i} + J_{1i}L_{9i}) - (-(K_{1i}M_{8i}) + c_{2i}(M_{1i} + F_{1i}M_{7i} + J_{1i}M_{9i}))t\theta_{12i}))/c_{2i}$$

$$N_{2i} = (c_{3i}(-(K_{2i}L_{8i}) + c_{2i}(L_{2i} + F_{2i}L_{7i} + J_{2i}L_{9i}) - (-(K_{2i}M_{8i}) + c_{2i}(M_{2i} + F_{1i}M_{7i} + J_{2i}M_{9i}))t\theta_{12i}))/c_{2i}$$

$$N_{3i} = (c_{3i}(-(K_{3i}L_{8i}) + c_{2i}(L_{3i} + F_{3i}L_{7i} + J_{3i}L_{9i}) - (-(K_{3i}M_{8i}) + c_{2i}(M_{3i} + F_{1i}M_{7i} + J_{3i}M_{9i}))t\theta_{12i}))/c_{2i}$$

$$N_{4i} = (c_{3i}(-(K_{4i}L_{8i}) + c_{2i}(L_{4i} + F_{4i}L_{7i} + J_{4i}L_{9i}) - (-(K_{4i}M_{8i}) + c_{2i}(M_{4i} + F_{1i}M_{7i} + J_{4i}M_{9i}))t\theta_{12i}))/c_{2i}$$

$$N_{5i} = (c_{3i}(-(K_{5i}L_{8i}) + c_{2i}(L_{5i} + F_{5i}L_{7i} + J_{5i}L_{9i}) - (-(K_{5i}M_{8i}) + c_{2i}(M_{5i} + F_{1i}M_{7i} + J_{5i}M_{9i}))t\theta_{12i}))/c_{2i}$$

$$N_{6i} = (c_{3i}(-(K_{6i}L_{8i}) + c_{2i}(L_{6i} + F_{6i}L_{7i} + J_{6i}L_{9i}) - (-(K_{6i}M_{8i}) + c_{2i}(M_{6i} + F_{1i}M_{7i} + J_{6i}M_{9i}))t\theta_{12i}))/c_{2i}$$

$$c_{3i} = 1/(a_{34i} \sec^2 \theta_{12i})$$

La figura 2-18 muestra la gráfica que describe la velocidad de los ángulos  $\theta_{12i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B. en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{121}$ , la línea gris a  $\dot{\theta}_{122}$  y la punteada es para  $\dot{\theta}_{123}$ .

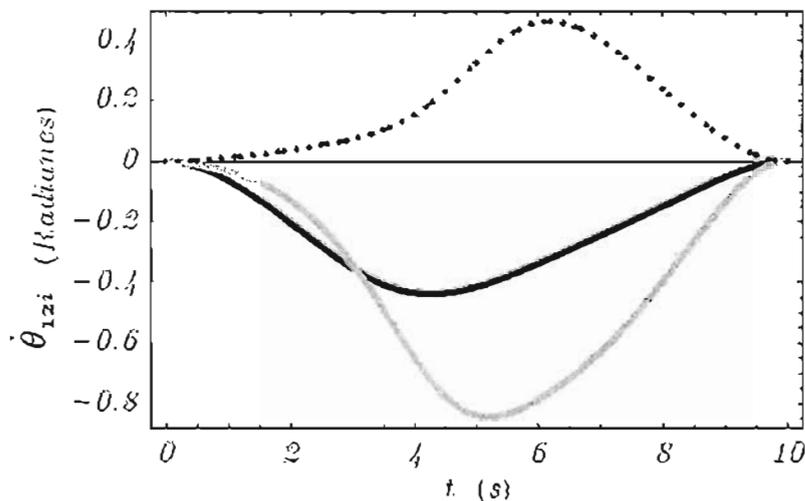


Figura 2-18 Velocidad  $\theta_{12i}$

### 2.3.5. Velocidad de $\theta_{14i}$

De ec (2.35)

$$d_{13i} + d_{15i} s\theta_{14i} = a_{14i}$$

derivando respecto al tiempo:

$$d_{15i} c\theta_{14i} \dot{\theta}_{14i} = \dot{a}_{14i} \quad (2.62)$$

resolviendo para  $\dot{\theta}_{14i}$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{14i} &= \frac{\sec \theta_{14i} \dot{a}_{14i}}{d_{15i}} \\ &= c_{4i} \dot{a}_{14i} \end{aligned} \quad (2.63)$$

derivando la ec.(2.37):

$$\dot{a}_{14i} = S_{1i} \dot{x} + S_{2i} \dot{y} + S_{3i} \dot{z} + S_{4i} \dot{\psi} + S_{5i} \dot{\theta} + S_{6i} \dot{\phi} + S_{7i} \dot{\theta}_{4i} \quad (2.64)$$

donde:

$$\begin{aligned} c_{4i} &= \frac{\sec \theta_{14i}}{d_{15i}} \\ S_{1i} &= 0 \\ S_{2i} &= 0 \\ S_{3i} &= 0 \\ S_{4i} &= d_{18i} c\theta_{4i} (-c\delta_{1i} - \psi s(\delta_{17i} + \phi) + c\theta c(\delta_{17i} + \phi) s\delta_{1i} - \psi) \\ S_{5i} &= -d_{18i} c(\delta_{17i} + \phi) (c\theta_{4i} c\delta_{1i} - \psi s\theta + c\theta s\theta_{4i}) \\ S_{6i} &= d_{18i} (-c\theta c\theta_{4i} c(\delta_{1i} + \psi) + s\theta s\theta_{4i}) s(\delta_{17i} + \phi) + d_{18i} c\theta_{4i} c(\delta_{17i} + \phi) s(\delta_{1i} + \psi) \\ S_{7i} &= -c\theta_{4i} (d_{3i} + d_{18i} c(\delta_{17i} + \phi) s\theta) + s\theta_{4i} (d_{2i} - d_{18i} (c\theta c(\delta_{17i} + \phi) c(\delta_{1i} + \psi) + \\ & \quad s(\delta_{17i} + \phi) s(\delta_{1i} + \psi) - s\theta_{4i} (c\delta_{1i} x + s\delta_{1i} y) + c\theta_{4i} z) \end{aligned}$$

finalmente la velocidad de  $\theta_{14i}$  es obtenida sustituyendo ec.(2.51) y (2.64) en (2.63):

$$\boxed{\dot{\theta}_{14i} = T_{1i} \dot{x} + T_{2i} \dot{y} + T_{3i} \dot{z} + T_{4i} \dot{\psi} + T_{5i} \dot{\theta} + T_{6i} \dot{\phi}} \quad (2.65)$$

donde:

$$\begin{aligned} T_{1i} &= c_{4i} S_{1i} + c_{4i} F_{1i} S_{7i} \\ T_{2i} &= c_{4i} S_{2i} + c_{4i} F_{2i} S_{7i} \\ T_{3i} &= c_{4i} S_{3i} + c_{4i} F_{3i} S_{7i} \\ T_{4i} &= c_{4i} S_{4i} + c_{4i} F_{4i} S_{7i} \\ T_{5i} &= c_{4i} S_{5i} + c_{4i} F_{5i} S_{7i} \\ T_{6i} &= c_{4i} S_{6i} + c_{4i} F_{6i} S_{7i} \end{aligned}$$

La figura 2-19 muestra la gráfica que describe la velocidad de los ángulos  $\theta_{14i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B. en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{141}$ , la línea gris a  $\dot{\theta}_{142}$  y la punteada es para  $\dot{\theta}_{143}$ .

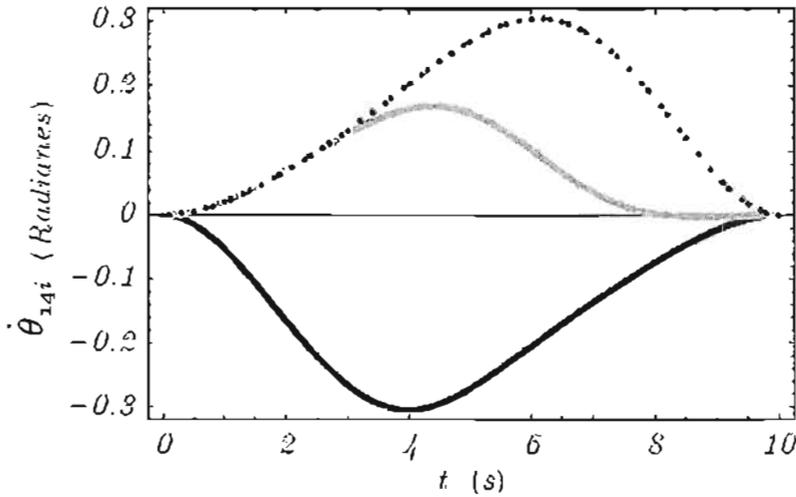
### 2.3.6. Velocidad de $\theta_{16i}$

De ec.(2.39)

$$-c\theta_{16i} s\theta_{12i} s\theta_{14i} + c\theta_{12i} s\theta_{16i} = a_{21i}$$

derivando respecto al tiempo:

$$s\theta_{16i} s\theta_{12i} s\theta_{14i} \dot{\theta}_{16i} - c\theta_{16i} c\theta_{12i} s\theta_{14i} \dot{\theta}_{12i} - c\theta_{16i} s\theta_{12i} c\theta_{14i} \dot{\theta}_{14i} \dot{\theta}_{16i} - s\theta_{12i} s\theta_{16i} \dot{\theta}_{12i} + c\theta_{12i} c\theta_{16i} = \dot{a}_{21i} \quad (2.66)$$

Figura 2-19 Velocidad  $\theta_{14i}$ 

resolviendo para  $\dot{\theta}_{16i}$

$$\dot{\theta}_{16i} = \frac{(a_{21} + (c\theta_{12i}c\theta_{16i}s\theta_{14i} + s\theta_{12i}s\theta_{16i})\dot{\theta}_{12i} + c\theta_{14i}c\theta_{16i}s\theta_{12i}\dot{\theta}_{14i})}{(c\theta_{12i}c\theta_{16i} + s\theta_{12i}s\theta_{14i}s\theta_{16i})}$$

finalmente:

$$\dot{\theta}_{16i} = c_{6i}(a_{21} + (c\theta_{12i}c\theta_{16i}s\theta_{14i} + s\theta_{12i}s\theta_{16i})\dot{\theta}_{12i} + c\theta_{14i}c\theta_{16i}s\theta_{12i}\dot{\theta}_{14i}) \quad (2.67)$$

donde:

$$c_{6i} = \frac{1}{(c\theta_{12i}c\theta_{16i} + s\theta_{12i}s\theta_{14i}s\theta_{16i})}$$

derivando la ec.(2.41):

$$\dot{a}_{21i} = Q_{1i}\dot{x} + Q_{2i}\dot{y} + Q_{3i}\dot{z} + Q_{4i}\dot{\psi} + Q_{5i}\dot{\theta} + Q_{6i}\dot{\phi} + Q_{7i}\dot{\theta}_{4i} + Q_{8i}\dot{\theta}_{7i} + Q_{8i}\dot{\theta}_{10i} \quad (2.68)$$

donde:

$$Q_{1i} = 0$$

$$Q_{2i} = 0$$

$$Q_{3i} = 0$$

$$Q_{4i} = s\delta_{17i}(c(\delta_{1i} - \psi)(c\phi s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - c\theta c(\theta_{10i} + \theta_{7i})s\phi) + (c\theta_{10i} + \theta_{7i}c\phi + c\theta s\theta_{4i}s\theta_{10i} + \theta_{7i}s\phi)s(\delta_{1i} - \psi)) + c\delta_{17i}(c\psi(c\theta c\phi(c\delta_{1i}c\theta_{10i} + \theta_{7i} - s\delta_{1i}s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i})) + (c(\theta_{10i} + \theta_{7i})s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}))s\phi) + (c\theta c\phi(c(\theta_{10i} + \theta_{7i})s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i})) + (-c\delta_{1i}c\theta_{10i} + \theta_{7i} + s\delta_{1i}s\theta_{4i}(\theta_{10i} + \theta_{7i}))s\phi)s\psi)$$

$$Q_{5i} = c(\delta_{17i} + \phi) ((-c\theta c\theta_{4i} + c\delta_{1i} - \psi s\theta s\theta_{4i})s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + c\theta_{10i} + \theta_{7i} s\theta s(\delta_{1i} - \psi))$$

$$Q_{6i} = s\delta_{17i}(c\theta_{4i}c\phi s\theta s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + c(\delta_{1i} - \psi)(c\theta c\phi s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) - c(\theta_{10i} + \theta_{7i})s\phi) + (c\theta c(\theta_{10i} + \theta_{7i})c\phi + s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i}))s(\delta_{1i} - \psi)) + c\delta_{17i}(c\phi s\delta_{17i}(-c\psi s\theta_{4i}s\theta_{10i} + \theta_{7i} + c(\theta_{10i} + \theta_{7i})s\psi) + s\phi(c\theta_{4i}s\theta s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + c\theta s\delta_{1i}(c(\theta_{10i} + \theta_{7i})c\psi + s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i})s\psi) + c\delta_{1i}(s\theta_{4i}s(\theta_{10i} + \theta_{7i})(c\theta c\psi s\phi + c\phi s\psi) + c(\theta_{10i} + \theta_{7i})(c\phi c\psi - c\theta s\phi s\psi))))$$

$$Q_{7i} = s(\theta_{10i} + \theta_{7i})(c(\delta_{17i} + \phi)(-c\theta c\theta_{4i}c(\delta_{1i} - \psi) + s\theta s\theta_{4i}) - c\theta_{4i}s(\delta_{17i} + \phi)s(\delta_{1i} - \psi))$$

$$Q_{8i} = s\delta_{17i}(c\theta_{4i}c(\theta_{10i} + \theta_{7i})s\theta s\phi + c(\delta_{1i} - \psi)(-c\phi s(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + c\theta c(\theta_{10i} + \theta_{7i})s\theta_{4i}s\phi) - (c(\theta_{10i} + \theta_{7i})c\phi s\theta_{4i} + c\theta s\theta_{10i} + \theta_{7i}s\phi)s(\delta_{1i} - \psi)) + c\delta_{17i}(s\theta_{10i}(c\theta_{4i}c\phi s\theta s\theta_{7i} + c(\delta_{1i} - \psi)(c\theta c\phi s\theta_{4i}s\theta_{7i} - c\theta_{7i}s\phi) + (c\theta c\theta_{7i}c\phi + s\theta_{4i}s\theta_{7i}s\phi)s(\delta_{1i} - \psi)) + c\theta_{10i}(-c\theta_{4i}c\theta_{7i}c\phi s\theta + c\psi(c\theta c\phi(-c\delta_{1i}c\theta_{7i}s\theta_{4i} + s\delta_{1i}s\theta_{7i}) - (c\theta_{7i}s\delta_{1i}s\theta_{4i} + c\delta_{1i}s\theta_{7i})s\phi) - (c\theta c\phi(c\theta_{7i}s\delta_{1i}s\theta_{4i} + c\delta_{1i}s\theta_{7i}) + (-c\delta_{1i}c\theta_{7i}s\theta_{4i} + s\delta_{1i}s\theta_{7i})s\phi)s\psi))$$

finalmente la velocidad de  $\theta_{16i}$  es obtenida sustituyendo ecs. (2.51), (2.55), (2.57), (2.61), (2.65) y (2.68) en (2.67):

$$\boxed{\dot{\theta}_{16i} = R_{1i} \dot{x} + R_{2i} \dot{y} + R_{3i} \dot{z} + R_{4i} \dot{\psi} + R_{5i} \dot{\theta} + R_{6i} \dot{\phi}} \quad (2.69)$$

donde:

$$R_{1i} = c_{5i}(Q_{1i} + F_{1i} Q_{7i} + J_{1i} Q_{8i} - (K_{1i} Q_{8i})/c_{2i} + T_{1i} c\theta_{14i} c\theta_{16i} s\theta_{12i} + N_{1i} c\theta_{12i} c\theta_{16i} s\theta_{14i} + N_{1i} s\theta_{12i} s\theta_{16i})$$

$$R_{2i} = c_{5i}(Q_{2i} + F_{2i} Q_{7i} + J_{2i} Q_{8i} - (K_{2i} Q_{8i})/c_{2i} + T_{2i} c\theta_{14i} c\theta_{16i} s\theta_{12i} + N_{2i} c\theta_{12i} c\theta_{16i} s\theta_{14i} + N_{2i} s\theta_{12i} s\theta_{16i})$$

$$R_{3i} = c_{5i}(Q_{3i} + F_{3i} Q_{7i} + J_{3i} Q_{8i} - (K_{3i} Q_{8i})/c_{2i} + T_{3i} c\theta_{14i} c\theta_{16i} s\theta_{12i} + N_{3i} c\theta_{12i} c\theta_{16i} s\theta_{14i} + N_{3i} s\theta_{12i} s\theta_{16i})$$

$$R_{4i} = c_{5i}(Q_{4i} + F_{4i} Q_{7i} + J_{4i} Q_{8i} - (K_{4i} Q_{8i})/c_{2i} + T_{4i} c\theta_{14i} c\theta_{16i} s\theta_{12i} + N_{4i} c\theta_{12i} c\theta_{16i} s\theta_{14i} + N_{4i} s\theta_{12i} s\theta_{16i})$$

$$R_{5i} = c_{5i}(Q_{5i} + F_{5i} Q_{7i} + J_{5i} Q_{8i} - (K_{5i} Q_{8i})/c_{2i} + T_{5i} c\theta_{14i} c\theta_{16i} s\theta_{12i} + N_{5i} c\theta_{12i} c\theta_{16i} s\theta_{14i} + N_{5i} s\theta_{12i} s\theta_{16i})$$

$$R_{6i} = c_{5i}(Q_{6i} + F_{6i} Q_{7i} + J_{6i} Q_{8i} - (K_{6i} Q_{8i})/c_{2i} + T_{6i} c\theta_{14i} c\theta_{16i} s\theta_{12i} + N_{6i} c\theta_{12i} c\theta_{16i} s\theta_{14i} + N_{6i} s\theta_{12i} s\theta_{16i})$$

La figura 2-20 muestra la gráfica que describe la velocidad de los ángulos  $\theta_{16i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{161}$ , la línea gris a  $\theta_{162}$  y la punteada es para  $\theta_{163}$ .

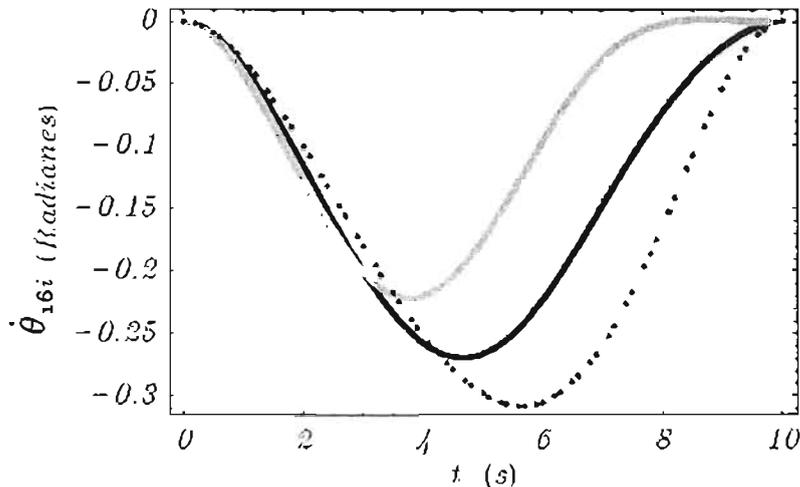


Figura 2-20 Velocidad  $\theta_{16i}$

## 2.4. Mecanismo Adicional (MA)

El análisis cinemático en sus dos primeras etapas ya estaría terminado en este punto, sin embargo la obtención de las condiciones de balanceo para la arquitectura original propuesta de la plataforma espacial, no generaron ecuaciones que permitieran su equilibrio estático. Esto debido a que las ecuaciones que determinan la energía potencial de los elementos elásticos no permiten relacionar el peso de los eslabones con los resortes en planos distintos. Estas ecuaciones funcionan correctamente si ambos elementos se encuentran en el mismo plano de movimiento. Por lo tanto es necesario que todos los eslabones a los cuales les serán adicionados elementos elásticos se encuentren en un mismo plano.

Es así como se genera un mecanismo adicional que hace la tarea de cambiar rotaciones del plano  $(y-z)$  al plano  $(x-z)$ , dicho mecanismo es un arreglo de dos barras unidas a un extremo del eslabon  $1i$  o  $3i$ , como se puede ver en la figura 2-21. La longitud de cada barra es resultado de la síntesis del **mecanismo adicional (MA)** y como se muestra a continuación el anexar este mecanismo a la plataforma espacial no afecta los grados de libertad de la misma.

Solo es necesario demostrar que al incluir el mecanismo adicional al eslabonamiento de cinco barras no agrega o resta grados de libertad a dicho arreglo, para deducir que la plataforma espacial seguirá necesitando de 6 entradas de movimiento para lograr una configuración completa.

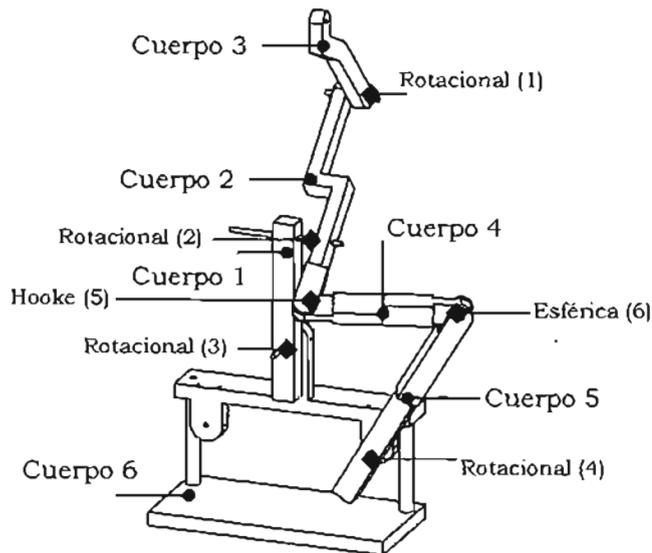


Figura 2-21 Mecanismo adicional

Se usará la ec.(1.1) y será necesario hacer la misma consideración que en el capítulo uno, “cada eslabonamiento de cinco barras es cinemáticamente equivalente a un eslabonamiento plano RR.” A simple vista podemos determinar que los GDL de mecanismo plano RR al adicionarle la rotación  $\theta_{4i}$ , lo hace un mecanismo de tres grados de libertad, con esto en mente, el resultado del análisis de GDL del mecanismo propuesto en la figura 2-21 debe de ser 3-DGL.

$$\mathcal{L} = 6(b - g - 1) + \sum_k f_k$$

donde:

$$b = 6, \quad g = 6, \quad \sum_k f_k = 9$$

por lo tanto:

$$\mathcal{L} = 3$$

### 2.4.1. Posición y Velocidad del MA (eslabón 3<sub>i</sub>)

La figura 2-22 muestra las bases locales generadas para el MA, como las transformaciones necesarias para llegar a la base local 6<sub>i</sub> ya son conocidas, tales bases no aparecen. De la figura se puede deducir lo siguiente:

$$\mathbf{T}_{020i} \mathbf{T}_{2022i} \mathbf{T}_{z5}(-\theta_{23i}) \mathbf{r}_{d24i} + d_{B_i} \mathbf{U}_{B_i} = \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}'_{46i} \mathbf{T}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{P3i} \quad (2.70)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{020i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{19i}) \mathbf{T}_{z1}(d_{20i}) & \mathbf{T}_{2022i} &= \mathbf{T}_{z6}(-\delta_{21i}) \mathbf{T}_{z3}(d_{22i}) \\ \mathbf{T}'_{46i} &= \mathbf{T}_{z3}(d_{5i}) \mathbf{T}_{z1}(d_{6i}) & \mathbf{r}_{P3i} &= [x_{P3i}, -s_{3i}, 0, 1]^T \\ \mathbf{r}_{d24i} &= [0, 0, d_{24i}, 1]^T & \mathbf{U}_{B_i} &= \text{vector unitario} \end{aligned}$$

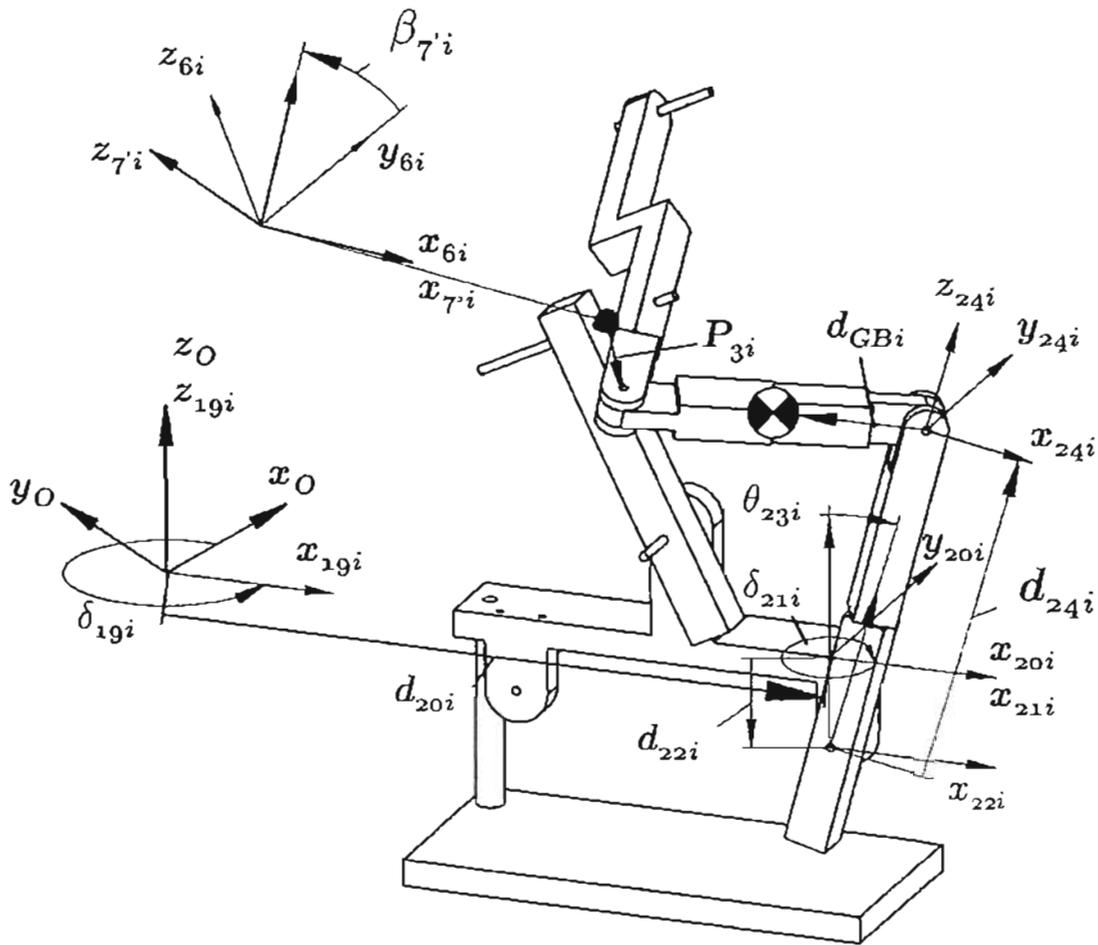


Figura 2-22 MA con eslabón 3<sub>i</sub>

La propuesta de la ec.(2.70) facilita el análisis del MA ya que la junta esférica y hooke ya no serán evaluadas como tales. La ec. de posición del ángulo  $\theta_{23i}$ , se obtienen a partir de la magnitud de la barra  $B$  ( $d_{Bi}$ ) de la manera siguiente:

$$\|d_{Bi} \mathbf{U}_{Bi}\| = \|\mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}'_{46i} \mathbf{T}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{P3i} - \mathbf{T}_{020i} \mathbf{T}_{2022i} \mathbf{T}_{z5}(-\theta_{23i}) \mathbf{r}_{d24i}\| \quad (2.71)$$

donde:

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}'_{46i} \mathbf{T}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{P3i} - \mathbf{T}_{020i} \mathbf{T}_{2022i} \mathbf{T}_{z5}(-\theta_{23i}) \mathbf{r}_{d24i}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \|d_{Bi} \mathbf{U}_{Bi}\| &= \|\mathbf{U}\| \\ \sqrt{(d_{Bi} \mathbf{U}_{Bi})^T (d_{Bi} \mathbf{U}_{Bi})} &= \sqrt{(\mathbf{U})^T (\mathbf{U})} \\ (d_{Bi})^2 (\mathbf{U}_{Bi})^T (\mathbf{U}_{Bi}) &= (\mathbf{U})^T (\mathbf{U}) \\ (\mathbf{U})^T (\mathbf{U}) - (d_{Bi})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

sustituyendo las definiciones de las transformaciones de ec.(2.71) en ec.(2.72) y factorizando para el ángulo  $\theta_{23i}$  tomando como conocidos  $\theta_{4i}$  y  $\theta_{7i}$ :

$$G_{1i} c(\theta_{23i}) + G_{2i} s(\theta_{23i}) + G_{3i} = 0 \quad (2.73)$$

donde:

$$G_{1i} = 2d_{24i} (d_{22i} - d_{3i} + c\theta_{4i} (-d_{5i} + s_{3i} s\beta_{7i})) - (d_{6i} + x_{P3i})s\theta_{4i}$$

$$G_{2i} = d_{24i} (-2(d_{20i} c\delta_{21i} + s_{3i} c\beta_{7i} s(\delta_{19i} - \delta_{1i} - \delta_{21i}))) + 2c(\delta_{19i} - \delta_{1i} - \delta_{21i})(d_{2i} + (d_{6i} + x_{P3i})c\theta_{4i} - d_{5i}s\theta_{4i} + s_{3i}s\beta_{7i}s\theta_{4i}))$$

$$G_{3i} = (d_{20i}^2 + d_{24i}^2 + d_{2i}^2 + (d_{22i} - d_{3i})^2 + d_{5i}^2 - d_{B_i}^2 + s_{3i}^2 + (d_{6i} + x_{P3i})^2 - 2 d_{5i} s_{3i} s\beta_{7i} + 2c\theta_{4i}((-d_{22i} + d_{3i})d_{5i} + d_{2i}(d_{6i} + x_{P3i}) + (d_{22i} - d_{3i})s_{3i}s\beta_{7i}) + 2d_{20i}s_{3i}c\beta_{7i}s(\delta_{19i} - \delta_{1i}) + 2((-d_{2i}d_{5i} - (d_{22i} - d_{3i})(d_{6i} + x_{P3i}) + d_{2i}s_{3i}s\beta_{7i})s\theta_{4i} - 2d_{20i}c(\delta_{19i} - \delta_{1i})((d_{2i} + (d_{6i} + x_{P3i})c(\theta_{4i}) - d_{5i}s\theta_{4i} + s_{3i}s\beta_{7i}s\theta_{4i}))$$

finalmente  $\theta_{23i}$  queda expresado por la ecuación<sup>1</sup> siguiente:

$$\theta_{23i} = \tan^{-1} \left( \frac{G_{2i}}{G_{1i}} \right) \pm \cos^{-1} \left( \frac{-G_{3i}}{\sqrt{(G_{1i})^2 + (G_{2i})^2}} \right) \quad (2.74)$$

La figura 2-23 muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{23i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{231}$ , la línea gris a  $\theta_{232}$  y la punteada es para  $\theta_{233}$ .

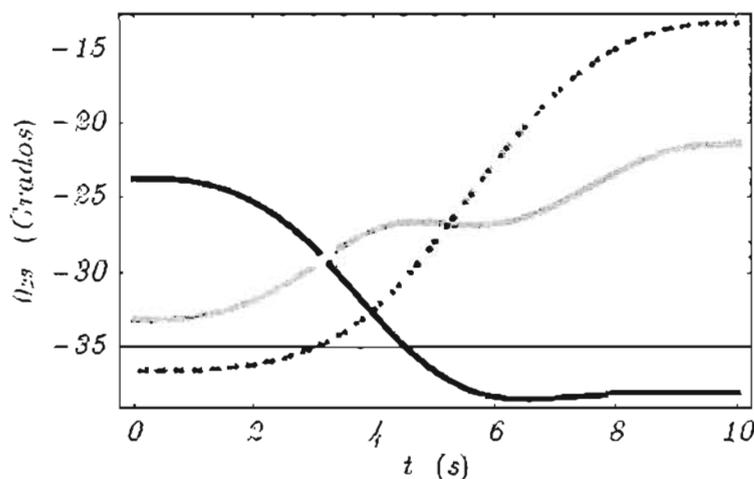


Figura 2-23 Posición  $\theta_{23i}$

<sup>1</sup>la solución para ecuaciones de está forma, se describe en el Apéndice A.

Ahora se determina la velocidad, derivando la ec.(2.73):

$$\dot{G}_{1i} c(\theta_{23i}) - G_{1i} s(\theta_{23i}) \dot{\theta}_{23i} + \dot{G}_{2i} s(\theta_{23i}) + G_{2i} c(\theta_{23i}) \dot{\theta}_{23i} + \dot{G}_{3i} = 0 \quad (2.75)$$

donde:

$$\dot{G}_{1i} = 2d_{24i} s_{3i} c\beta_{7i} c\theta_{4i} \dot{\beta}_{7i} - 2d_{24i} ((d_{6i} + x_{P3i})c\theta_{4i} + (-d_{5i} + s_{3i} s\beta_{7i})s\theta_{4i}) \dot{\theta}_{4i}$$

$$\dot{G}_{2i} = 2 d_{24i} s_{3i} (s(\delta_{19i} - \delta_{1i} - \delta_{21i}) s\beta_{7i} + c(\delta_{19i} - \delta_{1i} - \delta_{21i}) c\beta_{7i} s\theta_{4i}) \dot{\beta}_{7i} - 2d_{24i} c(\delta_{19i} - \delta_{1i} - \delta_{21i})(c\theta_{4i}(d_{5i} - s_{3i} s\beta_{7i}) + (d_{6i} + x_{P3i})s\theta_{4i}) \dot{\theta}_{4i}$$

$$\begin{aligned} \dot{G}_{3i} = & -2s_{3i}(d_{20i} s(\delta_{19i} - \delta_{1i}) s\beta_{7i} + c\beta_{7i}(d_{5i} + (-d_{22i} + d_{3i})c\theta_{4i} + (-d_{2i} + d_{20i}(c\delta_{19i} - \delta_{1i})) \\ & s\theta_{4i})) \dot{\beta}_{7i} - 2(c\theta_{4i}(d_{2i} d_{5i} + (d_{22i} - d_{3i})(d_{6i} + x_{P3i}) - d_{2i} s_{3i} s\beta_{7i} + d_{20i}c(\delta_{19i} - \delta_{1i}) \\ & (-d_{5i} + s_{3i} s\beta_{7i})) + ((-d_{22i} + d_{3i})d_{5i} + d_{2i}(d_{6i} + x_{P3i}) - d_{20i}(d_{6i} + x_{P3i})c(\delta_{19i} - \delta_{1i}) \\ & + (d_{22i} - d_{3i}) s_{3i} s\beta_{7i}) s\theta_{4i}) \dot{\theta}_{4i} \end{aligned}$$

al agrupar ec.(2.75) en función de cada parámetro que varía con respecto al tiempo tenemos:

$$G_{4i} \dot{\theta}_{4i} + G_{5i} \dot{\beta}_{7i} + G_{6i} \dot{\theta}_{23i} = 0$$

donde:

$$\beta_{7i} = (\theta_{7i} + \theta_{10i}) - 2\pi$$

$$\dot{\beta}_{7i} = \dot{\theta}_{7i} + \dot{\theta}_{10i}$$

sustituyendo  $\dot{\beta}_{7i}$  en ec.(2.75):

$$G_{4i} \dot{\theta}_{4i} + G_{5i} (\dot{\theta}_{7i} + \dot{\theta}_{10i}) + G_{6i} \dot{\theta}_{23i} = 0 \quad (2.76)$$

resolviendo para  $\dot{\theta}_{23i}$ :

$$\dot{\theta}_{23i} = -\frac{1}{G_{6i}} \left( G_{4i} \dot{\theta}_{4i} + G_{5i} (\dot{\theta}_{7i} + \dot{\theta}_{10i}) \right) \quad (2.77)$$

donde:

$$\begin{aligned} G_{4i} = & -2(c\theta_{4i}(d_{2i} d_{5i} + (d_{22i} - d_{3i})(d_{6i} + x_{P3i}) + d_{24i}(d_{6i} + x_{P3i})c\theta_{23i} - d_{2i} s_{3i} s\beta_{7i} + (d_{5i} - \\ & s_{3i} s\beta_{7i})(-d_{20i}c(\delta_{19i} - \delta_{1i}) + d_{24i}(c\delta_{19i} - \delta_{1i} - \delta_{21i})s\theta_{23i})) + (-d_{22i}d_{5i} + d_{3i}d_{5i} + d_{2i} \\ & d_{6i} + d_{2i}x_{P3i} - d_{24i}d_{5i}c\theta_{23i} + s_{3i}(d_{22i} - d_{3i} + d_{24i}c\theta_{23i})s\beta_{7i} + (d_{6i} + x_{P3i})(-d_{20i}(c\delta_{19i} \\ & - \delta_{1i}) + d_{24i} c(\delta_{19i} - \delta_{1i} - \delta_{21i}) s\theta_{23i}))s\theta_{4i} \end{aligned}$$

$$G_{5i} = -s_{3i}(2s\beta_{7i}(d_{20i}s(\delta_{19i} - \delta_{1i}) - d_{24i}s(\delta_{19i} - \delta_{1i} - \delta_{21i})s\theta_{23i}) + 2c\beta_{7i}(d_{5i} - (d_{22i} - d_{3i} + d_{24i}c\theta_{23i})c\theta_{4i} - (d_{2i} - d_{20i}c(\delta_{19i} - \delta_{1i}) + d_{24i}c(\delta_{19i} - \delta_{1i} - \delta_{21i})s\theta_{23i}))s\theta_{4i}))$$

$$G_{6i} = c\theta_{23i}G_{2i} - G_{1i}s\theta_{23i}$$

La velocidad de  $\theta_{23i}$ , queda expresada al sustituir  $\dot{\theta}_{4i}$ ,  $\dot{\theta}_{7i}$  y  $\dot{\theta}_{10i}$  en ec.(2.77) y agrupando en  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\phi}$ :

$$\dot{\theta}_{23i} = \frac{1}{G_{6i}} \left( G_{7i} \dot{x} + G_{8i} \dot{y} + G_{9i} \dot{z} + G_{10i} \dot{\psi} + G_{11i} \dot{\theta} + G_{12i} \dot{\phi} \right) \quad (2.78)$$

donde:

$$\begin{aligned} G_{7i} &= \frac{G_{5i} K_{1i}}{c_{2i}} - F_{1i} G_{4i} - G_{5i} J_{1i} \\ G_{8i} &= \frac{G_{5i} K_{2i}}{c_{2i}} - F_{2i} G_{4i} - G_{5i} J_{2i} \\ G_{9i} &= \frac{G_{5i} K_{3i}}{c_{2i}} - F_{3i} G_{4i} - G_{5i} J_{3i} \\ G_{10i} &= \frac{G_{5i} K_{4i}}{c_{2i}} - F_{4i} G_{4i} - G_{5i} J_{4i} \\ G_{11i} &= \frac{G_{5i} K_{5i}}{c_{2i}} - F_{5i} G_{4i} - G_{5i} J_{5i} \\ G_{12i} &= \frac{G_{5i} K_{6i}}{c_{2i}} - F_{6i} G_{4i} - G_{5i} J_{6i} \end{aligned}$$

#### 2.4.2. Posición y Velocidad del MA (eslabón $1_i$ )

La figura 2-24 muestra las bases locales generadas para el MA, como las transformaciones necesarias para llegar a la base local  $6i$  ya son conocidas, tales bases no aparecen. De la figura se puede deducir lo siguiente:

$$\mathbf{T}_{026i} \mathbf{T}_{2628i} \mathbf{T}_{z5}(-\theta_{29i}) \mathbf{r}_{d30i} + d_{Di} \mathbf{U}_{Di} = \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{P1i} \quad (2.79)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{026i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{25i}) \mathbf{T}_{z1}(d_{26i}) & \mathbf{T}_{2628i} &= \mathbf{T}_{z6}(-\delta_{27i}) \mathbf{T}_{z13}(d_{28i}) \\ \mathbf{r}_{d30i} &= [0, 0, d_{30i}, 1]^T & \mathbf{r}_{P1i} &= [-x_{P1i}, -s_{1i}, 0, 1]^T \\ \mathbf{U}_{Di} &= \text{vector unitario} \end{aligned}$$

La propuesta de la ec.(2.79) facilita el análisis del MA ya que la junta esférica y hooke ya no serán evaluadas como tales. La ec. de posición del ángulo  $\theta_{29i}$ , se obtienen a partir de la magnitud de la barra  $D$  ( $d_{Di}$ ) de la manera siguiente:

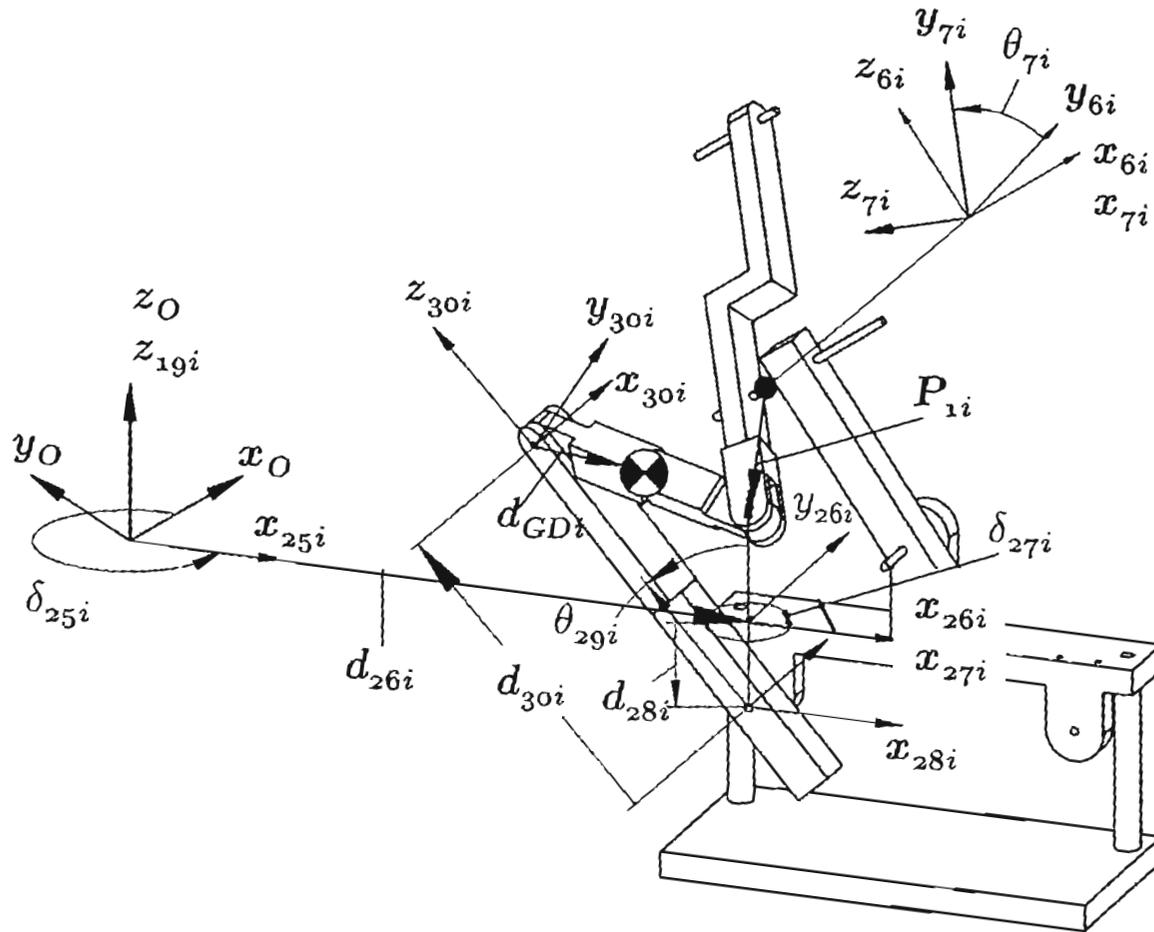


Figura 2-24 MA con eslabón 1;

$$\|d_{D_i} U_{D_i}\| = \|\mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{P_{1i}} - \mathbf{T}_{026i} \mathbf{T}_{2628i} \mathbf{T}_{z5}(-\theta_{29i}) \mathbf{r}_{d_{30i}}\|$$

donde:

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{P_{1i}} - \mathbf{T}_{026i} \mathbf{T}_{2628i} \mathbf{T}_{z5}(-\theta_{29i}) \mathbf{r}_{d_{30i}}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \|d_{D_i} U_{D_i}\| &= \|\mathbf{V}\| \\ \sqrt{(d_{D_i} U_{D_i})^T (d_{D_i} U_{D_i})} &= \sqrt{(\mathbf{V})^T (\mathbf{V})} \\ (d_{D_i})^2 (U_{D_i})^T (U_{D_i}) &= (\mathbf{V})^T (\mathbf{V}) \\ (\mathbf{V})^T (\mathbf{V}) - (d_{D_i})^2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Sustituyendo las definiciones de las transformaciones de ec.(2.79) en ec.(2.80) y factorizando para el ángulo  $\theta_{29i}$ , tomando como conocidos  $\theta_{4i}$  y  $\theta_{7i}$ :

$$G_{13i} c(\theta_{29i}) + G_{14i} s(\theta_{29i}) + G_{15i} = 0 \quad (2.81)$$

donde:

$$\begin{aligned} G_{13i} &= 2 d_{30i}(d_{28i} - d_{3i} + (d_{6i} + x_{P1i}) s\theta_{4i} + c\theta_{4i}(-d_{5i} + s_{1i} s\theta_{7i})) \\ G_{14i} &= 2d_{30i}(-d_{26i}c\delta_{27i} + s_{1i}c\theta_{7i}s(\delta_{1i} - \delta_{25i} + \delta_{27i})) + c(\delta_{1i} - \delta_{25i} + \delta_{27i})(d_{2i} - (d_{6i} + x_{P1i}) \\ &\quad c\theta_{4i} - d_{5i} s\theta_{4i} + s_{1i} s\theta_{4i} s\theta_{7i})) \\ G_{15i} &= d_{26i}^2 + d_{2i}^2 + d_{30i}^2 + (d_{28i} - d_{3i})^2 + d_{5i}^2 - d_{D1}^2 + s_{1i}^2 + (d_{6i} + x_{P1i})^2 - 2(d_{28i}d_{5i} - d_{3i}d_{5i} \\ &\quad + d_{2i}(d_{6i} + x_{P1i}))c\theta_{4i} - 2 d_{26i} s_{1i}c\delta_{25i} c\theta_{7i}s\delta_{1i} - 2(d_{2i}d_{5i} - (d_{28i} - d_{3i})(d_{6i} + x_{P1i}))s \\ &\quad \theta_{4i} + 2d_{26i} s\delta_{1i}s\delta_{25i}(-d_{2i} + (d_{6i} + x_{P1i})c\theta_{4i} + d_{5i}s\theta_{4i}) - 2s_{1i}(d_{5i} + (-d_{28i} + d_{3i})c\theta_{4i} \\ &\quad - d_{2i} s\theta_{4i} + d_{26i} s\delta_{1i} s\delta_{25i} s\theta_{4i})s\theta_{7i} - 2d_{26i} c\delta_{1i}(-s_{1i} c\theta_{7i} s\delta_{25i} + c\delta_{25i}(d_{2i} - (d_{6i} + \\ &\quad x_{P1i})c\theta_{4i} - d_{5i}s\theta_{4i} + s_{1i}s\theta_{4i}s\theta_{7i})) \end{aligned}$$

finalmente  $\theta_{29i}$  queda expresado por la ecuación siguiente:

$$\theta_{29i} = \tan^{-1} \left( \frac{G_{14i}}{G_{13i}} \right) \pm \cos^{-1} \left( \frac{-G_{15i}}{\sqrt{(G_{13i})^2 + (G_{14i})^2}} \right) \quad (2.82)$$

La figura 2-25 muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{29i}$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B en un tiempo de 10 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{291}$ , la línea gris a  $\theta_{292}$  y la punteada es para  $\theta_{293}$ .

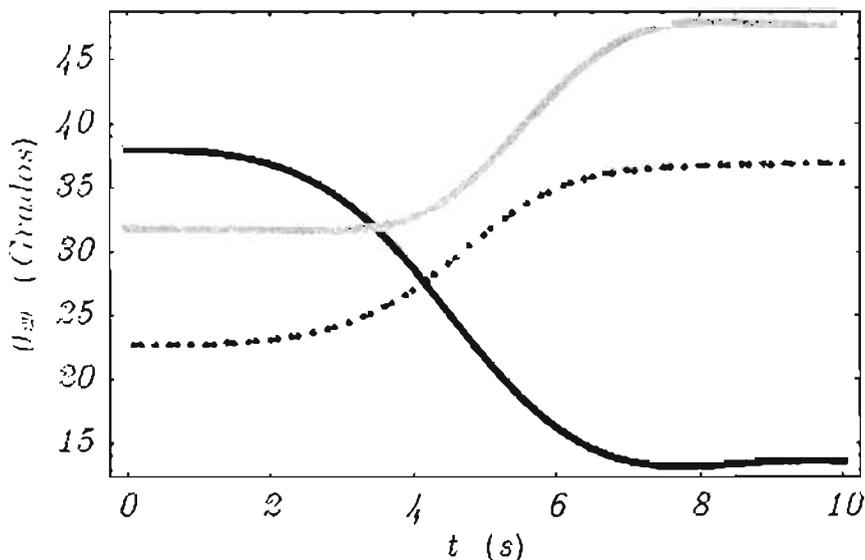


Figura 2-25 Posición  $\theta_{29i}$

Ahora se determina la velocidad, derivando la ec.(2.81):

$$\dot{G}_{13i} c(\theta_{29i}) - G_{13i} s(\theta_{29i}) \dot{\theta}_{29i} + \dot{G}_{14i} s(\theta_{29i}) + G_{14i} c(\theta_{29i}) \dot{\theta}_{29i} + \dot{G}_{15i} = 0 \quad (2.83)$$

donde:

$$\dot{G}_{13i} = (2d_{30i}(d_{6i} + x_{P1i})c\theta_{4i} + s\theta_{4i}(d_{5i} - s_{1i})s\theta_{7i})\dot{\theta}_{4i} + 2d_{30i}s_{1i}c\theta_{4i}c\theta_{7i}\dot{\theta}_{7i}$$

$$\dot{G}_{14i} = -(d_{30i} c(\delta_{1i} - \delta_{25i} + \delta_{27i}) (-2(d_{6i} + x_{P1i})s\theta_{4i} + 2c\theta_{4i}(d_{5i} - s_{1i}s\theta_{7i}))\dot{\theta}_{4i} + 2d_{30i}s_{1i} (c(\delta_{1i} - \delta_{25i} + \delta_{27i})c\theta_{7i}s\theta_{4i} - s(\delta_{1i} - \delta_{25i} + \delta_{27i})s\theta_{7i})\dot{\theta}_{7i}$$

$$\dot{G}_{15i} = -2(s\theta_{4i}((-d_{28i} + d_{3i})d_{5i} - d_{2i}(d_{6i} + x_{P1i}) + d_{26i}(d_{6i} + x_{P1i})c(\delta_{1i} - \delta_{25i}) + (d_{28i} - d_{3i})s_{1i}s\theta_{7i}) + c\theta_{4i}(d_{2i}d_{5i} - (d_{28i} - d_{3i})(d_{6i} + x_{P1i}) - d_{2i}s_{1i}s\theta_{7i} + d_{26i}c(\delta_{1i} - \delta_{25i})(-d_{5i} + s_{1i}s\theta_{7i})))\dot{\theta}_{4i} - 2s_{1i}(c\theta_{7i}(d_{5i} + (-d_{28i} + d_{3i})c\theta_{4i} + (-d_{2i} + d_{26i}c(\delta_{1i} - \delta_{25i})s\theta_{4i}) - d_{26i}s(\delta_{1i} - \delta_{25i})s\theta_{7i})\dot{\theta}_{7i}$$

al agrupar ec.(2.83) en función de cada parámetro que varía con respecto al tiempo se tiene:

$$G_{16i} \dot{\theta}_{4i} + G_{17i} \dot{\theta}_{7i} + G_{18i} \dot{\theta}_{29i} = 0 \quad (2.84)$$

resolviendo para  $\dot{\theta}_{29i}$ :

$$\dot{\theta}_{29i} = -\frac{1}{G_{18i}} \left( G_{16i} \dot{\theta}_{4i} + G_{17i} \dot{\theta}_{7i} \right) \quad (2.85)$$

donde:

$$G_{16i} = -2((-((d_{28i} - d_{3i})d_{5i}) - d_{2i}(d_{6i} + x_{P1i}) - d_{30i}d_{5i}c\theta_{29i} - (d_{6i} + x_{P1i})(-(d_{26i}c(\delta_{1i} - \delta_{25i} + d_{30i})c(\delta_{1i} - \delta_{25i} + \delta_{27i})s\theta_{29i}))s\theta_{4i} + s_{1i}(d_{28i} - d_{3i} + d_{30i}c\theta_{29i})s\theta_{4i}s\theta_{7i} + c\theta_{4i}(d_{2i}d_{5i} - (d_{28i} - d_{3i})(d_{6i} + x_{P1i}) - d_{30i}(d_{6i} + x_{P1i})c\theta_{29i} - d_{2i}s_{1i}s\theta_{7i} + (d_{26i}c(\delta_{1i} - \delta_{25i}) - d_{30i}c(\delta_{1i} - \delta_{25i} + \delta_{27i})s\theta_{29i})(-d_{5i} + s_{1i}s\theta_{7i})))$$

$$G_{17i} = -(s_{1i}(2c\theta_{7i}(d_{5i} - (d_{28i} - d_{3i} + d_{30i}c\theta_{29i})c\theta_{4i} - (d_{2i} - d_{26i}c(\delta_{1i} - \delta_{25i}) + d_{30i}c(\delta_{1i} - \delta_{25i} + \delta_{27i})s\theta_{29i})s\theta_{4i}) + 2(-(d_{26i}s(\delta_{1i} - \delta_{25i}) + d_{30i}s(\delta_{1i} - \delta_{25i} + \delta_{27i})s\theta_{29i})s\theta_{7i}))$$

$$G_{18i} = c\theta_{29i} G_{14i} - G_{13i} s\theta_{29i}$$

La velocidad de  $\theta_{29i}$  queda expresada al sustituir  $\dot{\theta}_{4i}$ ,  $\dot{\theta}_{7i}$  y  $\dot{\theta}_{10i}$  en ec.(2.85) y agrupando en  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\phi}$ :

$$\dot{\theta}_{29i} = \frac{1}{G_{18i}} \left( G_{19i} \dot{x} + G_{20i} \dot{y} + G_{21i} \dot{z} + G_{22i} \dot{\psi} + G_{23i} \dot{\theta} + G_{24i} \dot{\phi} \right) \quad (2.86)$$

donde:

$$\begin{aligned}G_{19i} &= \frac{G_{17i} K_{1i}}{c_{2i}} - F_{1i} G_{16i} \\G_{20i} &= \frac{G_{17i} K_{2i}}{c_{2i}} - F_{2i} G_{16i} \\G_{21i} &= \frac{G_{17i} K_{3i}}{c_{2i}} - F_{3i} G_{16i} \\G_{22i} &= \frac{G_{17i} K_{4i}}{c_{2i}} - F_{4i} G_{16i} \\G_{23i} &= \frac{G_{17i} K_{5i}}{c_{2i}} - F_{5i} G_{16i} \\G_{24i} &= \frac{G_{17i} K_{6i}}{c_{2i}} - F_{6i} G_{16i}\end{aligned}$$

---

# Capítulo 3

---

## Balanceo Estático

### 3.1. Introducción

Las primeras aplicaciones para estructuras en paralelo fueron los simuladores de movimiento y la máquina universal de pruebas para neumáticos [13] y [14] posteriormente en robótica [15] y [16]. Las características principales de los mecanismos en paralelo son que su efector final está unido a la base por medio de varias cadenas cinemáticas y que todos sus actuadores pueden ser colocados sobre o alrededor de su base. Esto les permite desplazar grandes cargas y presentan propiedades dinámicas muy aceptables. Es común que dichos mecanismos requieran de poderosos actuadores para mover dichas cargas, además del peso de sus eslabones. Una de sus aplicaciones más comerciales son los simuladores de vuelo, los cuales requiere que la plataforma móvil, permanezca en equilibrio lo que demanda que los actuadores induzcan una fuerza considerable. Reducir dichas fuerzas es posible con el balanceo estático.

En este capítulo, se plantea el balanceo estático para un mecanismo espacial de paralelogramo de seis grados de libertad, primeramente se define que es el balanceo estático, para posteriormente desarrollar la metodología que permite deducir las condiciones asociadas con el balanceo del mecanismo.

## 3.2. Balanceo Estático de Mecanismos

Según [12], el balanceo de mecanismos ha sido un tema de investigación muy importante por varias décadas [17]. Se dice que un mecanismo tiene sus *fuerzas en equilibrio* cuando el total de fuerzas aplicadas sobre la base es constante para cualquier movimiento del mecanismo. En otras palabras, un mecanismo está balanceado cuando su centro global de masa permanece fijo, para cualquier movimiento. Estas condiciones son muy importantes en maquinaria, debido a que el desequilibrio ocasionaría vibraciones, mismas que inducirían efectos indeseables. Dentro de este contexto, un mecanismo o un manipulador se dice que tiene un *balanceo estático*, cuando el peso de los eslabones no produce algún torque (o fuerza) en los actuadores bajo las condiciones de equilibrio, para cualquier configuración del mecanismo o manipulador. Estas condiciones también son llamadas como *compensación gravitacional*. Manipuladores seriales con compensadores gravitacionales fueron diseñados en [18]-[22] usando contrapesos, resortes, y algunos levas y/o poleas. Manipuladores paralelos planos fueron balanceados usando contrapesos en [23]. Un compensador gravitacional híbrido fue diseñado en [24]. Una aproximación general para el equilibrio de eslabones en el plano usando resortes fue presentado en [25]. Cuando son usados resortes, el balanceo estático puede ser definido como el conjunto de condiciones para los cuales el total de energía potencial en el mecanismo, incluyendo la energía gravitacional y la energía acumulada en los resortes, son constantes para cualquier configuración del mecanismo.

Generalmente [12], un mecanismo espacial de  $n$ -GDL está formado por  $n$ -cuerpos móviles y un eslabón fijo. Por otra parte, el vector de posición del centro de masa de cada eslabón móvil con respecto al marco de referencia fijo será definido por  $\mathbf{R}_{Gji}$  y la masa del  $i$ -ésimo eslabón móvil por  $m_{ji}$ . El vector de posición del centro de masa del mecanismo con respecto al marco de referencia fijo, será denotado por  $\mathbf{R}_G$  y puede ser escrito como:

$$\mathbf{R}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n_b} m_{ji} \mathbf{R}_{Gji} \quad (3.1)$$

donde  $M$  es la masa total de los eslabones móviles,

$$M = \sum_{i=1}^{n_b} m_{ji} \quad (3.2)$$

En general, el vector  $\mathbf{R}_G$  será una función de la configuración del mecanismo, es decir,

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_G(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.3)$$

donde  $\boldsymbol{\theta}$  es el vector que incluye todas las coordenadas de las juntas del mecanismo. Siguiendo con esta notación, las condiciones para el equilibrio de las fuerzas del mecanismo pueden ser escritas como:

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_{Gt} \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{R}_{Gt}$  es un vector constante arbitrario, es decir, un vector que es independiente de las coordenadas de las juntas del vector  $\boldsymbol{\theta}$ . De la misma forma, si elementos no elásticos son usados, las condiciones para el balanceo estático pueden ser escritas como:

$$\mathbf{e}_z^T \mathbf{R}_G = R_t \quad (3.5)$$

donde  $R_t$  es una constante arbitraria, y  $\mathbf{e}_z$  es un vector orientado en la dirección de la gravedad. Cuando elementos elásticos son usados, el total de la energía potencial del mecanismo, es denotado por  $V_T$  y es definida como la suma de la energía potencial gravitacional y la energía potencial de los elementos elásticos y se puede escribir como:

$$V_T = g\mathbf{e}_z^T \sum_{i=1}^{n_b} m_{ji} \mathbf{R}_{Gji} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_s} k_j (s_j - s_j^0)^2 \quad (3.6)$$

donde  $g$  es la magnitud de la aceleración de la gravedad,  $n_s$  es el número de elementos linealmente elásticos en el sistema,  $k_j$  es la rigidez del  $j$ -ésimo elemento elástico,  $s_j$  es la longitud del  $j$ -ésimo elemento elástico, y  $s_j^0$  es la longitud sin deformar. Como se menciona anteriormente, cuando elementos elásticos son usados, la condición de balanceo estático hace que la energía potencial total del sistema permanezca constante, lo cual puede ser escrito como:

$$V_T = V_c \quad (3.7)$$

donde  $V_c$  es una constante arbitraria.

En sistemas mecánicos articulados, los componentes elásticos pueden ser resortes, los cuales pueden proveer una compensación exacta de las fuerzas gravitacionales para todas las configuraciones [18], [20]. Esta compensación usualmente requiere que la longitud efectiva sin deformar del resorte sea igual a cero. Como es mostrado en [20], esta suposición no representa un problema en particular y es generalmente simple de implementar en un sistema práctico.

### 3.3. Balanceo Estático de la Plataforma

El balanceo estático de plataformas en paralelo es planteado por Streit [28], Wang [29], por Ebert-Uphoff y Gosselin [27]. Estos artículos discuten varios métodos de cómo lograr el balanceo y dan sugerencias para la construcción de tales mecanismos. Todos requieren de la deducción de ecuaciones de balanceo. El balanceo estático de la plataforma caso de estudio, es determinado de manera independiente o seccionada. Para esto es necesario crear un sistema equivalente. En las secciones siguientes se describe a detalle cómo es que se obtiene el balanceo estático de este sistema equivalente y por lo tanto el balanceo estático de la plataforma espacial. La figura 3-1, hace mención al sistema a balancear.

#### 3.3.1. Sistema Equivalente

El primer paso es redistribuir la masa total de la base móvil entre los tres mecanismos de pantógrafo, de forma tal, que cada uno tenga una fracción equivalente de esta masa. La figura 3-2, hace mención a esta acción. Los valores a determinar son  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ . Aplicando el concepto de centro de masa se tiene:

$$m_P \mathbf{r}_{Gp} = m_1 \mathbf{r}_{G1} + m_2 \mathbf{r}_{G2} + m_3 \mathbf{r}_{G3} \quad (3.7)$$

$$m_P = m_1 + m_2 + m_3 \quad (3.8)$$

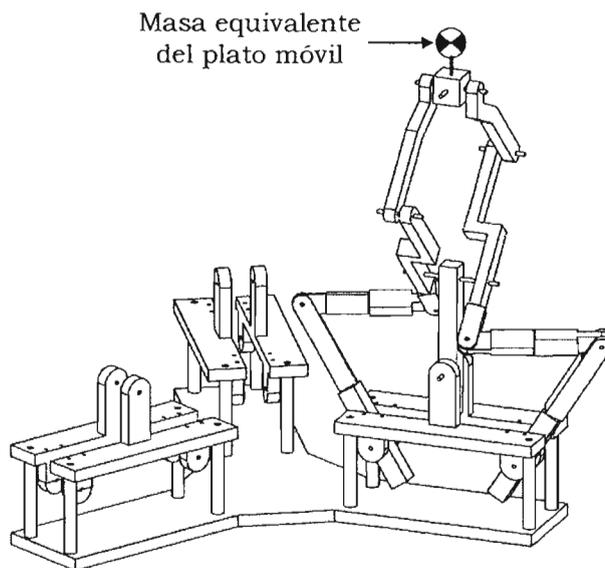


Figura 3-1 Sistema equivalente

Para este caso los vectores  $\mathbf{r}_{G1}$ ,  $\mathbf{r}_{G2}$ ,  $\mathbf{r}_{G3}$  y la masa  $m_P$ , son datos obtenidos del diseño. La relación siguiente genera la distribución de la masa:

$$m_P \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = m_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + m_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

resolviendo para  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  de ec.(3.9) se tiene:

$$m_1 = \frac{(m_P(x_P(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_P) + x_3(-y_2 + y_P)))}{(x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(-y_1 + y_3))}$$

$$m_2 = \frac{(m_P(x_P(-y_1 + y_3) + x_3(y_1 - y_P) + x_1(-y_3 + y_P)))}{(x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(-y_1 + y_3))}$$

$$m_3 = \frac{(m_P(x_P(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_P) + x_2(-y_1 + y_P)))}{(x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(-y_1 + y_3))}$$

se tiene los datos siguientes:

$$m_P = 2.61085 \text{ kg}$$

$$x_P = 0 \qquad x_1 = 0.2 \text{ m } c\delta_{11} \qquad x_2 = 0.2 \text{ m } c\delta_{12} \qquad x_3 = 0.2 \text{ m } c\delta_{13}$$

$$y_P = 0 \qquad y_1 = 0.2 \text{ m } s\delta_{11} \qquad y_2 = 0.2 \text{ m } s\delta_{12} \qquad y_3 = 0.2 \text{ m } s\delta_{13}$$

$$z_P = -0.060875 \text{ m} \qquad z_1 = -0.060875 \text{ m} \qquad z_2 = -0.060875 \text{ m} \qquad z_3 = -0.060875 \text{ m}$$

Por lo tanto la masa equivalente del plato móvil es:

$$m_1 = m_2 = m_3 = 0.870283 \text{ kg}$$

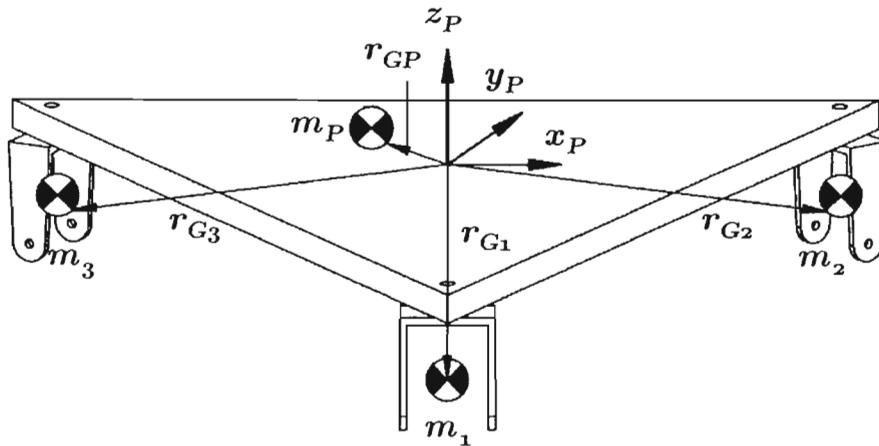


Figura 3-2 Distribución de la masa

### 3.3.2. Energía Potencial Debido a la Gravedad

La energía potencial correspondiente a la gravedad es denotado por  $V_g$ , la cual es la suma de los vectores que hacen referencia al centro de gravedad de cada eslabón medido desde el marco de referencia inercial por el peso del eslabón correspondiente. A continuación con base en las figuras 3-3 y 3-4 se desarrolla esta suma:

$$V_g = \mathbf{W}_{0i}^T \mathbf{R}_{G0i} + \mathbf{W}_{1i}^T \mathbf{R}_{G1i} + \mathbf{W}_{2i}^T \mathbf{R}_{G2i} + \mathbf{W}_{3i}^T \mathbf{R}_{G3i} + \mathbf{W}_{4i}^T \mathbf{R}_{G4i} + \mathbf{W}_{5i}^T \mathbf{R}_{G5i} + \mathbf{W}_{Ai}^T \mathbf{R}_{GAi} + \mathbf{W}_{Bi}^T \mathbf{R}_{GBi} + \mathbf{W}_{Ci}^T \mathbf{R}_{GCi} + \mathbf{W}_{Di}^T \mathbf{R}_{GDi} \quad (3.10)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{G0i} &= \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{r}_{G0i} \\ \mathbf{r}_{G0i} &= [\mathbf{x}_{G0i}, \mathbf{y}_{G0i}, \mathbf{z}_{G0i}, 1]^T \\ \mathbf{W}_{0i} &= [0, 0, m_{0i}, 0]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{G1i} &= \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{G1i} \\ \mathbf{r}_{G1i} &= [\mathbf{x}_{G1i}, \mathbf{y}_{G1i}, \mathbf{z}_{G1i}, 1]^T \\ \mathbf{W}_{1i} &= [0, 0, m_{1i}, 0]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{G2i} &= \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{r}_{G2i} \\ \mathbf{r}_{G2i} &= [\mathbf{x}_{G2i}, \mathbf{y}_{G2i}, \mathbf{z}_{G2i}, 1]^T \\ \mathbf{W}_{2i} &= [0, 0, m_{2i}, 0]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{G3i} &= \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46Pi} \mathbf{T}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{G3i} \\ \mathbf{r}_{G3i} &= [\mathbf{x}_{G3i}, \mathbf{y}_{G3i}, \mathbf{z}_{G3i}, 1]^T \\ \mathbf{W}_{3i} &= [0, 0, m_{3i}, 0]^T \end{aligned}$$

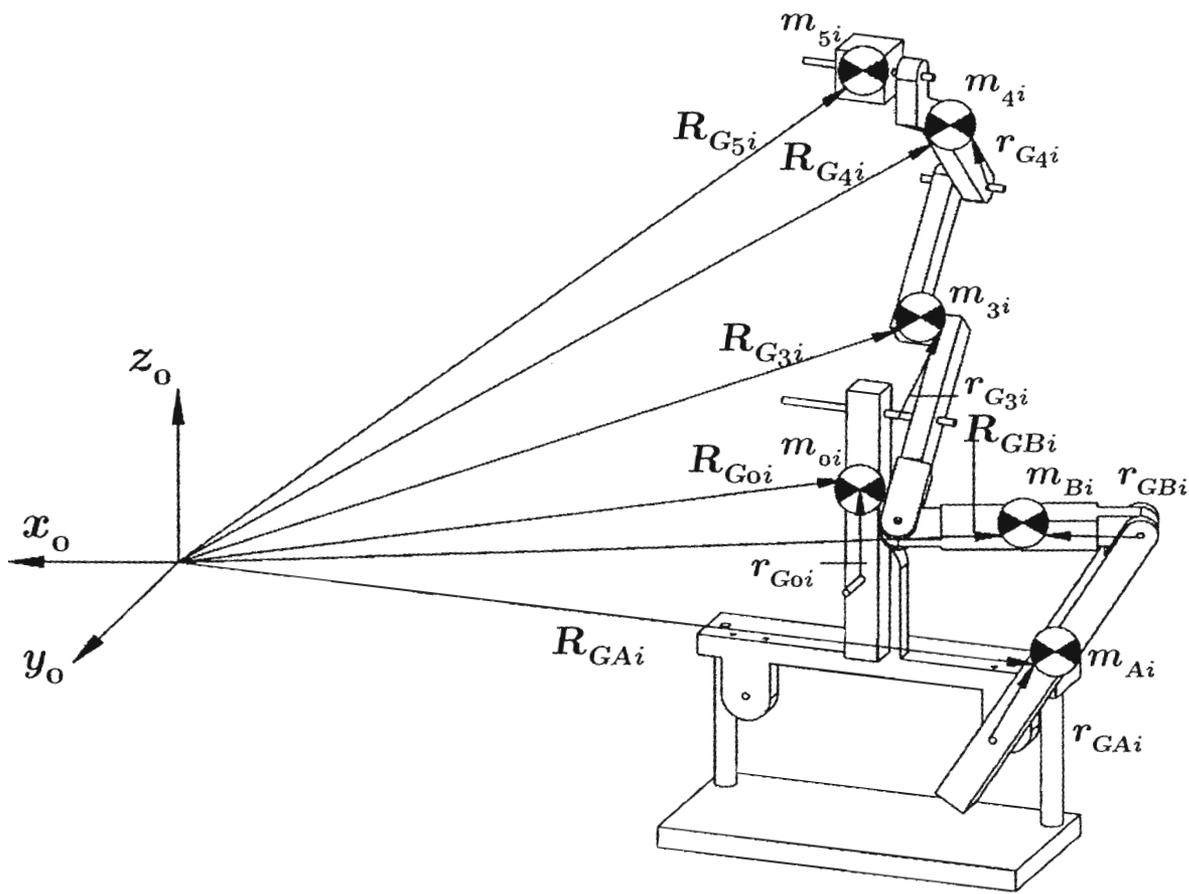


Figura 3-3 Vector de gravedad (a)

$$P_{3i} = T_{02i} T_{24i} T_{46Pi} T_{z4} (\beta_{7i}) r_{P3i}$$

$$r_{P3i} = [-x_{P3i}, -s_{3i}, 0, 1]^T$$

$$R_{G4i} = T_{02i} T_{24i} T_{46Pi} T_{68Pi} T_{810Pi} r_{G4i}$$

$$r_{G4i} = [x_{4i}, y_{4i}, z_{4i}, 1]^T$$

$$W_{4i} = [0, 0, m_{4i}, 0]^T$$

$$R_{G5i} = T_{02i} T_{24i} T_{46i} T_{68i} T_{810i} T_{1012i} r_{d13i}$$

$$r_{d13i} = [d_{13i}, 0, 0, 1]^T$$

$$W_{5i} = [0, 0, m_{5i}, 0]^T$$

donde:

$m_{5i}$  = masa equivalente de plato móvil + masa de la junta esférica

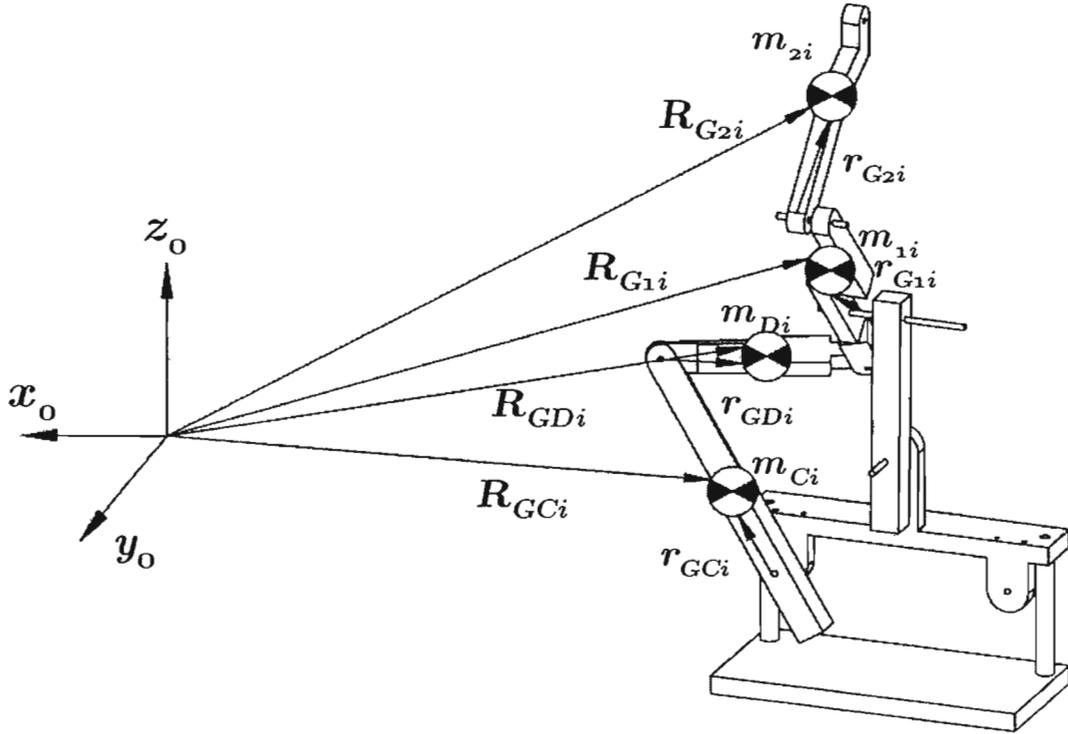


Figura 3-4 Vector de gravedad (b)

$$R_{GBi} = T_{020i} T_{2022i} T_{z5}(\theta_{23i}) r_{d24i} + d_{GBi} U_{GBi}$$

$$U_{GBi} = \frac{(P_{3i} - P_{4i})}{d_{Bi}}$$

$$W_{Bi} = [0, 0, m_{Bi}, 0]^T$$

$$R_{GAi} = T_{020i} T_{2022i} T_{z5}(\theta_{23i}) r_{GAi}$$

$$r_{GAi} = [x_{GAi}, y_{GAi}, z_{GAi}, 1]^T$$

$$W_{Ai} = [0, 0, m_{Ai}, 0]^T$$

$$P_{4i} = T_{020i} T_{2022i} T_{z5}(\theta_{23i}) r_{d24i}$$

$$r_{d24i} = [0, 0, d_{24i}, 1]$$

$$R_{GD_i} = T_{026i} T_{2628i} T_{z5}(\theta_{29i}) r_{d30i} + d_{GD_i} U_{GD_i}$$

$$U_{GD_i} = \frac{(P_{1i} - P_{2i})}{d_{Di}}$$

$$W_{Di} = [0, 0, m_{Di}, 0]^T$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{GCi} &= \mathbf{T}_{026i} \mathbf{T}_{2628i} \mathbf{T}_{z5}(\theta_{29i}) \mathbf{r}_{GCi} \\ \mathbf{r}_{GCi} &= [\mathbf{x}_{GCi}, \mathbf{y}_{GCi}, \mathbf{z}_{GCi}, 1]^T \\ \mathbf{W}_{Ci} &= [0, 0, m_{Ci}, 0]^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{1i} &= \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{P1i} \\ \mathbf{r}_{P1i} &= [-\mathbf{x}_{P1i}, -s_{1i}, 0, 1]^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{2i} &= \mathbf{T}_{026i} \mathbf{T}_{2628i} \mathbf{T}_{z5}(\theta_{29i}) \mathbf{r}_{d30i} \\ \mathbf{r}_{d30i} &= [0, 0, d_{30i}, 1]^T\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}V_g &= g m_{0i}(d_{3i} + z_{G0i} c\theta_{4i} + x_{G0i} s\theta_{4i}) + g m_{1i}(d_{3i} + d_{5i} c\theta_{4i} + z_{G1i} c\theta_{4i} c\theta_{7i} - d_{6i} s\theta_{4i} + \\ &x_{G1i} s\theta_{4i} + y_{G1i} c\theta_{4i} s\theta_{7i}) + g m_{2i}(d_{3i} + d_{5i} c\theta_{4i} - d_{6i} s\theta_{4i} - d_{9i} s\theta_{4i} + x_{G2i} s\theta_{4i} + \\ &d_{8i} c\theta_{4i} s\theta_{7i} + y_{G2i}(c\theta_{4i} c\theta_{7i} s\theta_{10i} + c\theta_{10i} c\theta_{4i} s\theta_{7i}) + z_{G2i}(c\theta_{10i} c\theta_{4i} c\theta_{7i} - c\theta_{4i} s\theta_{10i} \\ &s\theta_{7i})) + g m_{3i}(d_{3i} + d_{5i} c\theta_{4i} + z_{G3i} c\theta_{4i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) + d_{6i} s\theta_{4i} + x_{G3i} s\theta_{4i} + y_{G3i} c\theta_{4i} \\ &s(\theta_{10i} + \theta_{7i})) + g m_{4i}(d_{3i} + d_{5i} c\theta_{4i} + d_{6i} s\theta_{4i} + d_{9i} s\theta_{4i} + x_{G4i} s\theta_{4i} + d_{8i} c\theta_{4i} s(\theta_{10i} + \\ &\theta_{7i}) + y_{G4i}(-(c\theta_{4i} c(\theta_{10i} + \theta_{7i}) s\theta_{10i}) + c\theta_{10i} c\theta_{4i} s(\theta_{10i} + \theta_{7i})) + z_{G4i}(c\theta_{10i} c\theta_{4i} c(\theta_{10i} \\ &+ \theta_{7i}) + c\theta_{4i} s\theta_{10i} s(\theta_{10i} + \theta_{7i}))) + g m_{5i}(d_{3i} + d_{5i} c\theta_{4i} + d_{13i} s\theta_{4i} - d_{6i} s\theta_{4i} - d_{9i} s\theta_{4i} \\ &+ d_{8i} c\theta_{4i} s\theta_{7i} + d_{11i}(c\theta_{4i} c\theta_{7i} s\theta_{10i} + c\theta_{10i} c\theta_{4i} s\theta_{7i})) + g m_{Ai}(d_{22i} + z_{GAi} c\theta_{23i} - x_{GAi} \\ &s\theta_{23i}) + g m_{Bi}(d_{22i} + d_{24i} c\theta_{23i} + (d_{GBi}(-d_{22i} + d_{3i} - d_{24i} c\theta_{23i} + d_{5i} c\theta_{4i} + d_{6i} s\theta_{4i} + \\ &x_{P3i} s\theta_{4i} - y_{P3i} c\theta_{4i} s(\theta_{10i} + \theta_{7i}))))/dB_i) + g m_{Ci}(d_{28i} + z_{GCi} c\theta_{29i} - x_{GCi} s\theta_{29i}) + g m_{Di} \\ &(d_{28i} + d_{30i} c\theta_{29i} + (d_{GD_i}(-d_{28i} + d_{3i} - d_{30i} c\theta_{29i} + d_{5i} c\theta_{4i} - d_{6i} s\theta_{4i} - x_{P1i} s\theta_{4i} - y_{P1i} \\ &c\theta_{4i} s\theta_{7i}))/dD_i)\end{aligned}\tag{3.11}$$

### 3.3.3. Energía Potencial Debido a los Resortes

Los resortes adicionales a la plataforma espacial son mostrados en las figuras (3-5)-(3-7), los cuales son introducidos entre un eslabón y la base fija. A continuación se muestra la nomenclatura usada para determinar los parámetros usados para obtener la energía potencial debida a los elementos elásticos:

- $h_{ji}$ — línea formada entre los puntos A y B.
- $s_{ji}$ — línea formada entre los puntos A y el punto C.
- $e_{ji}$ — línea formada entre los puntos B y el punto C.
- $k_{ji}$ — coeficiente de rigidez del resorte.
- $\gamma_{ji}$ — ángulo formado entre las líneas  $h_{ji}$  y  $s_{ji}$ .
- $\alpha_{ai}$ — ángulo formado entre la horizontal y la línea  $h_{ai}$
- $\delta_{ai}$ — ángulo formado entre el eje  $x_{4i}$  y la línea  $s_{ai}$

Con base en la figura 3-5 el ángulo  $\gamma_{0i}$ , queda expresado de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \theta_{4i} + \delta_{0i} &= \alpha_{0i} + \gamma_{0i} \\ \gamma_{0i} &= \theta_{4i} + \delta_{0i} - \alpha_{0i} \end{aligned} \tag{3.12}$$

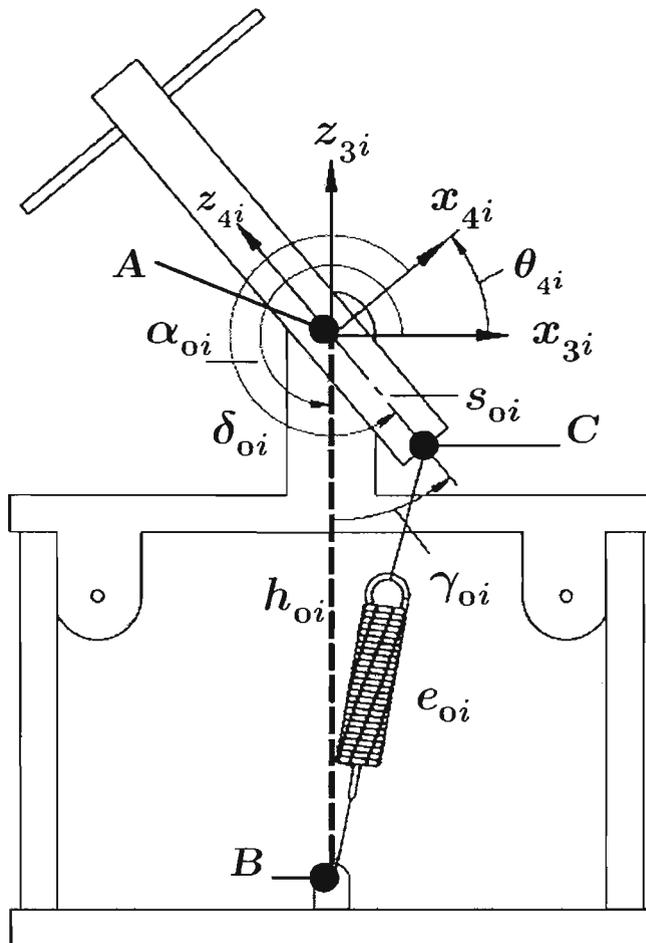


Figura 3-5 Resorte eslabón  $0_i$

Con base en la figuras 3-6 y 3-7 se determina que  $\gamma_{Ai}$  y  $\gamma_{Ci}$  son iguales al ángulo que determina su orientación, debido a que esta variación es medida con respecto al eje "z ." por lo tanto, se tiene que:

$$\gamma_{Ai} = \theta_{23i} \tag{3.13}$$

$$\gamma_{Ci} = \theta_{29i} \tag{3.14}$$

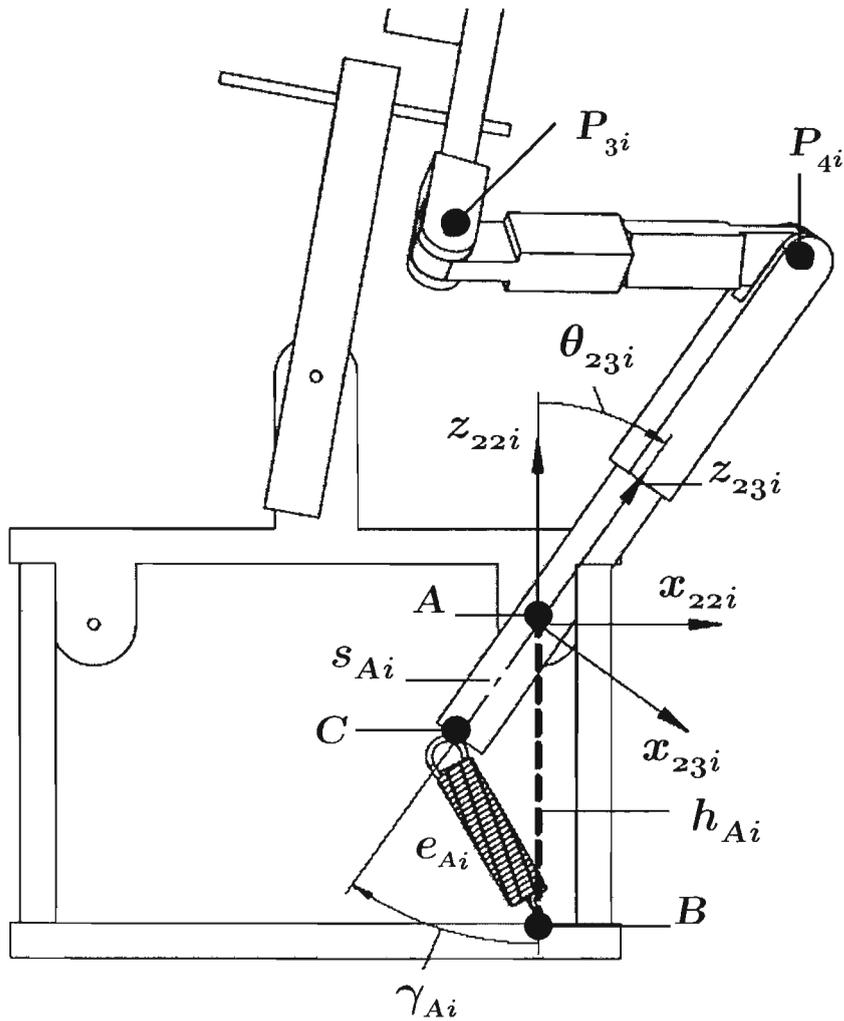


Figura 3-6 Resorte eslabón  $3_i$

Por lo tanto, la expresión que determina la energía potencial de los elementos elásticos adicionados a la plataforma espacial es la siguiente:

$$V_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (k_{0i} e_{0i}^2 + k_{Ai} e_{Ai}^2 + k_{Ci} e_{Ci}^2)$$

donde la longitud del resorte es denotada por la distancia  $e_{ji}$ , la cual puede ser expresada en función del ángulo  $\gamma_{ji}$ , donde:  $j = 0, A, C, i = 1, 2, 3$ . Usando la ley de cósenos se tiene:

$$\begin{aligned} e_{0i}^2 &= (h_{0i})^2 + (s_{0i})^2 - 2(h_{0i} s_{0i}) \cos(\gamma_{0i}) \\ e_{Ai}^2 &= (h_{Ai})^2 + (s_{Ai})^2 - 2(h_{Ai} s_{Ai}) \cos(\theta_{23i}) \\ e_{Ci}^2 &= (h_{Ci})^2 + (s_{Ci})^2 - 2(h_{Ci} s_{Ci}) \cos(\theta_{29i}) \end{aligned}$$

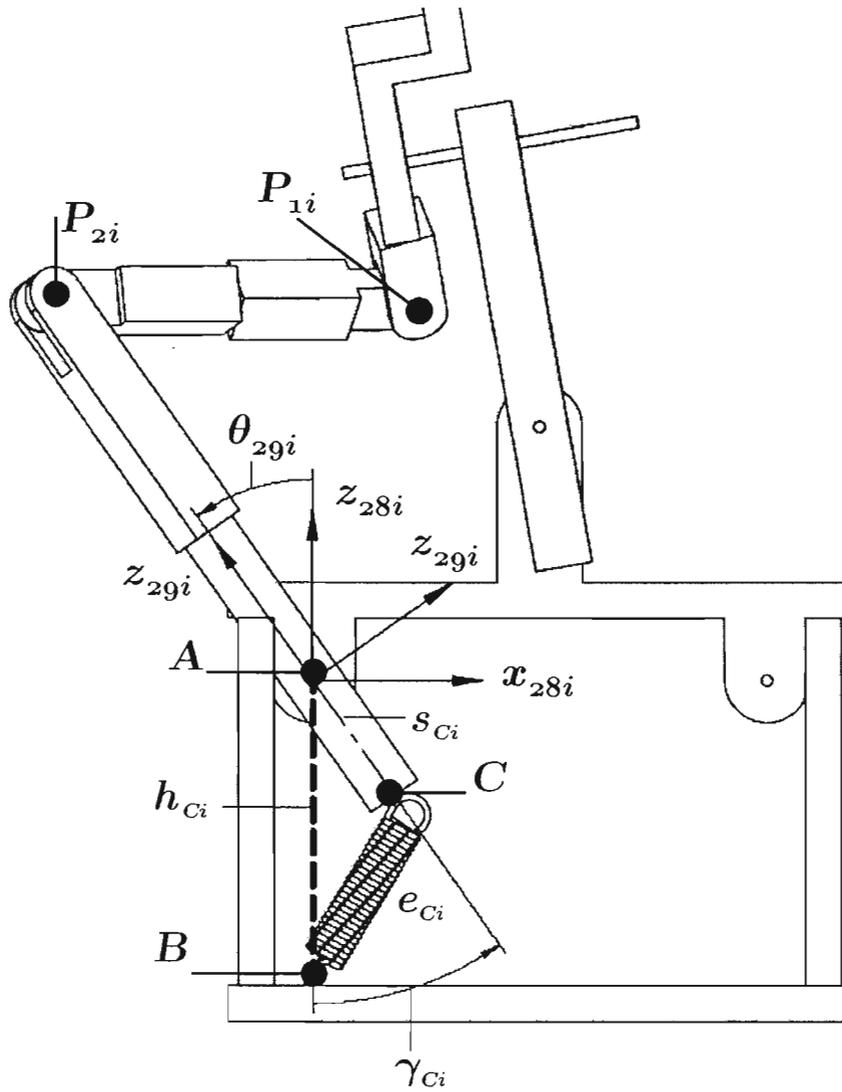


Figura 3-7 Resorte eslabón 1<sub>i</sub>

sustituyendo:

$$V_r = \frac{1}{2}(k_{0i}((h_{0i})^2 + (s_{0i})^2 - 2(h_{0i} s_{0i}) c(\theta_{4i} + \delta_{0i} - \alpha_{0i})) + k_{A_i}((h_{A_i})^2 + (s_{A_i})^2 - 2(h_{A_i} s_{A_i}) c\theta_{23i}) + k_{C_i}((h_{C_i})^2 + (s_{C_i})^2 - 2(h_{C_i} s_{C_i}) c\theta_{29i})) \quad (3.15)$$

La energía potencial total es la suma de ec.(3.11) y (3.15).

$$V_T = V_g + V_r \quad (3.16)$$

### 3.3.4. Condiciones de Balanceo

Las condiciones de balanceo, son ecuaciones que surgen al ir agrupando términos que dependen de una misma variable (ángulo que varía con respecto al tiempo), a continuación se escribe la energía potencial total en función de las juntas del mecanismo.

$$\begin{aligned}
 V_T = & T_0 + T_{1i} c(\theta_{4i}) s(\theta_{10i}) s(\theta_{7i}) + T_{2i} c(\theta_{10i}) c(\theta_{4i}) s(\theta_{7i}) + T_{3i} c(\theta_{4i}) s(\theta_{7i}) + \\
 & T_{4i} c(\theta_{4i}) c(\theta_{7i}) s(\theta_{10i}) + T_{5i} c(\theta_{10i}) c(\theta_{4i}) c(\theta_{7i}) + T_{6i} c(\theta_{4i}) c(\theta_{7i}) + \\
 & T_{7i} s(\theta_{4i}) + T_{8i} s(\theta_{29i}) + T_{9i} c(\theta_{23i}) + T_{10i} c(\theta_{4i}) + T_{11i} c(\theta_{29i}) + T_{12i} s(\theta_{23i})
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 T_0 = & \frac{(h_{0i})^2 k_{0i}}{2} + \frac{(h_{Ai})^2 k_{Ai}}{2} + \frac{(h_{Ci})^2 k_{Ci}}{2} + d_{3i} g m_{0i} + d_{3i} g m_{1i} + d_{3i} g m_{2i} + \\
 & d_{3i} g m_{3i} + d_{3i} g m_{4i} + d_{3i} g m_{5i} + d_{3i} g m_{0i} + d_{3i} g m_{1i} + d_{3i} g m_{2i} + d_{3i} g \\
 & m_{3i} + d_{3i} g m_{4i} + d_{3i} g m_{5i} + d_{22i} g m_{Ai} + d_{22i} g m_{Bi} - \frac{d_{22i} d_{GBi} g m_{Bi}}{d_{Bi}} + \\
 & \frac{d_{3i} d_{GBi} g m_{Bi}}{d_{Bi}} + d_{28i} g m_{Ci} + d_{28i} g m_{Di} - \frac{d_{28i} d_{GD_i} g m_{Di}}{d_{Di}} + \frac{d_{3i} d_{GD_i} g m_{Di}}{d_{Di}} + \\
 & \frac{k_{0i} (s_{0i})^2}{2} + \frac{k_{Ai} (s_{Ai})^2}{2} + \frac{k_{Ci} (s_{Ci})^2}{2}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$T_{1i} = g(m_{2i} z_{G2i} + m_{3i} z_{G3i}) \tag{3.19}$$

$$T_{2i} = g \left( \frac{d_{8i} m_{4i} + d_{11i} m_{5i} - (d_{GBi} m_{Bi} s_{3i})}{d_{Bi}} + m_{2i} y_{G2i} + m_{3i} y_{G3i} \right) \tag{3.20}$$

$$T_{3i} = g \frac{(d_{8i} d_{Di}(m_{2i} + m_{5i}) - d_{GD_i} m_{Di} s_{1i} + d_{Di} m_{1i} y_{G1i} + d_{Di} m_{4i} y_{G4i})}{d_{Di}} \tag{3.21}$$

$$T_{4i} = T_{2i} \tag{3.22}$$

$$T_{5i} = T_{1i} \tag{3.23}$$

$$T_{6i} = g(m_{1i} z_{G1i} + m_{4i} z_{G4i}) \tag{3.24}$$

$$T_{7i} = (g(d_{9i} d_{Bi} d_{Di}(m_{2i} - m_{4i} + m_{5i}) + d_{6i} d_{Di}(d_{Bi}(m_{1i} + m_{2i} - m_{3i} - m_{4i} + m_{5i}) - d_{GBi} m_{Bi}) + d_{6i} d_{Bi} d_{GD_i} m_{Di} d_{Bi} d_{Di}(d_{13i} m_{5i} + m_{0i} x_{G0i} + m_{1i} x_{G1i} + m_{2i} x_{G2i} + m_{3i} x_{G3i} + m_{4i} x_{G4i}) + d_{Bi} d_{GD_i} m_{Di} x_{P1i} - d_{Di} d_{GBi} m_{Bi} x_{P3i}) + d_{Bi} d_{Di} h_{0i} k_{0i} s_{0i} s(\alpha_{0i} - \delta_{0i}))/d_{Bi} d_{Di} \quad (3.25)$$

$$T_{8i} = -g m_{Ci} x_{GCi} \quad (3.26)$$

$$T_{9i} = (d_{24i}(d_{Bi} - d_{GBi})g m_{Bi})/d_{Bi} - h_{Ai} k_{Ai} s_{Ai} + g m_{Ai} z_{GAi} \quad (3.27)$$

$$T_{10i} = (d_{5i} g(d_{Bi} d_{Di}(m_{1i} + m_{2i} + m_{3i} + m_{4i} + m_{5i}) + d_{Di} d_{GBi} m_{Bi} + d_{Bi} d_{GD_i} m_{Di}) + d_{Bi} d_{Di} g m_{0i} z_{G0i} - d_{Bi} d_{Di} h_{0i} k_{0i} s_{0i} c(\alpha_{0i} - \delta_{0i}))/d_{Bi} d_{Di} \quad (3.28)$$

$$T_{11i} = (d_{30i}(d_{Di} - d_{GD_i})g m_{Di})/d_{Di} - h_{Ci} k_{Ci} s_{Ci} + g m_{Ci} z_{GCi} \quad (3.29)$$

$$T_{12i} = -g m_{Ai} x_{GAi} \quad (3.30)$$

Cuando todos los coeficientes que multiplican a las variables que dependen del tiempo se hacen cero, la energía potencial total llega a ser constante para cualquier configuración del mecanismo. Es decir:

$$V_T = T_0$$

Las condiciones de balanceo para la plataforma espacial pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} T_{ji} &= 0 \\ j &= 1, \dots, 12 \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.4. Datos de la Plataforma Espacial

Recordar que para el balanceo estático de la plataforma se determinaron ecuaciones que resuelven para un sistema equivalente a la plataforma espacial. Así que el balanceo estático de la misma será cuando el iterador  $i$  sea desarrollado para todos sus valores

Del sistema de ecuaciones que determinan el balanceo estático del sistema equivalente hay dos ecuaciones que se repiten (3.22 y 3.23). Por lo tanto, el sistema ahora es de 10 ecuaciones.

Este sistema de ecuaciones solo se puede resolver para un máximo de 10 incógnitas así que hay que definir bien cuales serán.

Los coeficientes de rigidez son las incógnitas principales para el balanceo estático ( $k_{0i}$ ,  $k_{Ai}$  y  $k_{Ci}$ ) ecs.(3.28), (3.27) y (3.29) respectivamente.

Si la arquitectura de la plataforma espacial permitiera el balanceo estático, solo restaría sustituir todos los datos físicos de la misma y así las 7 ecuaciones restantes serian igual a cero y se comprobaría que la plataforma espacial estaría balanceada estáticamente. Pero para este caso no ocurrió así, entonces es necesario satisfacer esas ecuaciones. Se optó por modificar los centros de gravedad de algunos eslabones (contrapesos). Con base en este criterio, es como se determinan que los datos siguientes son datos fijos:

$\delta_{1i} = 0^\circ$ ,	$\delta_{17i} = 0^\circ$ ,	$\delta_{19i} = 0^\circ$ ,	$\delta_{21i} = 0^\circ$ ,
$\delta_{25i} = 0$ ,	$\delta_{27i} = 0$ ,	$d_{2i} = 0.2 \text{ m}$ ,	$\delta_{0i} = 270^\circ$ ,
$d_{5i} = 0.1 \text{ m}$ ,	$d_{6i} = 0.00865 \text{ m}$ ,	$d_{8i} = 0.15 \text{ m}$ ,	$d_{9i} = 0.0177 \text{ m}$
$d_{11i} = 0.15 \text{ m}$ ,	$d_{3i} = 0.055 \text{ m}$ ,	$d_{13i} = 0.02635 \text{ m}$ ,	$d_{15i} = 0.060875 \text{ m}$ ,
$d_{18i} = 0.2 \text{ m}$ ,	$d_{20i} = 0.28 \text{ m}$ ,	$d_{22i} = -0.034662 \text{ m}$ ,	$d_{24i} = 0.164682 \text{ m}$ ,
$d_{26i} = 0.09 \text{ m}$ ,	$d_{28i} = -0.03466 \text{ m}$ ,	$d_{30i} = 0.164682 \text{ m}$ ,	$d_{Bi} = d_{Di} = 0.13953 \text{ m}$ ,
$d_{GBi} = d_{GDi} = 0.06976 \text{ m}$ ,	$d_{GDi} = 0.06976 \text{ m}$ ,	$m_{0i} = 0.17031 \text{ kg}$ ,	$m_{1i} = 0.17296 \text{ kg}$ ,
$m_{2i} = 0.11278 \text{ kg}$ ,	$m_{3i} = 0.17295 \text{ kg}$ ,	$m_{4i} = 0.11278 \text{ kg}$ ,	$m_{5i} = 0.87028 \text{ kg}$ ,
$m_{Ai} = 0.21524 \text{ kg}$ ,	$m_{Bi} = 0.13037 \text{ kg}$ ,	$m_{Ci} = 0.21523 \text{ kg}$ ,	$m_{Di} = 0.13037 \text{ kg}$ ,
$x_{P1i} = 0.0277 \text{ m}$ ,	$s_{1i} = 0.07 \text{ m}$ ,	$x_{P3i} = 0.0277 \text{ m}$ ,	$s_{3i} = 0.07 \text{ m}$ ,
$g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,	$h_{0i} = 0.14 \text{ m}$ ,	$h_{Ai} = 0.05034 \text{ m}$ ,	$h_{Ci} = 0.05034 \text{ m}$
$s_{0i} = 0.04 \text{ m}$ ,	$s_{Ai} = 0.045 \text{ m}$ ,	$s_{Ci} = 0.045 \text{ m}$ ,	$\alpha_{0i} = 270^\circ$

Por lo tanto las ecuaciones quedan en función de las distancias del centro de gravedad de los eslabones, de la manera siguiente:

Tres ecuaciones que dependen de distancias en el eje "x":

$$x_{GAi} = 0$$

$$x_{GCi} = 0$$

$$2.0766 \times 10^{-18} + x_{G0i} + 1.0155 x_{G1i} + 0.6622 x_{G2i} + 1.0155 x_{G3i} + 0.6622 x_{G4i} = 0$$

Dos ecuaciones que dependen de distancias en el eje "y":

$$0.8262 + y_{G1i} + 0.6520 y_{G4i} = 0$$

$$1.267 + y_{G2i} + 1.5335 y_{G3i} = 0$$

Dos ecuaciones que dependen de distancias en el eje "z":

$$z_{G2i} + 1.5336 z_{G3i} = 0$$

$$z_{G1i} + 0.6520 z_{G4i} = 0$$

Tres ecuaciones que resuelven para los coeficientes de rigidez:

$$k_{0i} = 275.4018 + 298.3466 z_{G0i}$$

$$k_{Ai} = 46.4924 + 932.0933 z_{GAi}$$

$$k_{Ci} = 46.4924 + 932.09334 z_{GCi}$$

Debido a la arquitectura que posee la plataforma espacial se considera que los contrapesos deben ubicarse en los eslabones 2 y 4<sub>i</sub>, por lo tanto se sustituyen los datos siguientes para dejar que las ecuaciones resuelvan para los nuevos centros de gravedad de dichos eslabones.

$$\begin{aligned}
 x_{G1i} &= -0.0120, & z_{G1i} &= 0, \\
 x_{G3i} &= 0.0120, & z_{G3i} &= 0, \\
 y_{G1i} &= 0.0413, & z_{GAi} &= 0.0562, \\
 y_{G3i} &= 0.0413, & z_{GCi} &= 0.0562, \\
 z_{G0i} &= 0.0410, & x_{G2i} &= 0
 \end{aligned}$$

Se obtiene la matriz de solución siguiente:

$$\left[ \begin{array}{c}
 z_{G2i} = 0 \\
 z_{G4i} = 0 \\
 x_{GCi} = 0 \\
 1.3304 + y_{G2i} = 0 \\
 1.3304 + y_{G4i} = 0 \\
 1.3304 + y_{G2i} = 0 \\
 3.1358 \times 10^{-18} + x_{G4i} = 0 \\
 k_{Ai} = 98.882 \\
 k_{Ci} = 98.882 \\
 k_{0i} = 287.653
 \end{array} \right] \quad (3.31)$$

Finalmente se determina un sistema de ecuaciones que se resuelve para los coeficientes de rigidez de los resortes y determinan la ubicación de los centros de gravedad para los eslabones correspondientes. Esta misma información es sustituida en el análisis estático a desarrollar en el capítulo siguiente y con ello es demostrado el balanceo estático de la plataforma espacial.

En el apéndice C, es desarrollado un nuevo análisis para las condiciones de balanceo.

---

# Capítulo 4

---

## Análisis Estático

### 4.1. Introducción

El *principio del trabajo virtual* representa una poderosa herramienta para derivar las ecuaciones estáticas y dinámicas de los sistemas de multicuerpos [31]. Establece que si un cuerpo rígido está en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas externas y se le aplica un desplazamiento arbitrario a partir de la posición de equilibrio, el trabajo realizado por las fuerzas externas durante el desplazamiento será cero. El principio del trabajo virtual es desarrollado en este capítulo para demostrar el equilibrio estático de las fuerzas externas que actúan sobre la plataforma espacial, al sustituir los valores obtenidos en el balanceo estático.

### 4.2. El Principio del Trabajo Virtual

El principio del trabajo virtual [31], representa una gran herramienta para derivar ecuaciones estáticas y dinámicas de sistemas de multicuerpos. A diferencia de la mecánica Newtoniana, el principio del trabajo virtual no requiere considerar las fuerzas de restricción o de reacción, solo requiere cantidades de trabajo escalar para definir las ecuaciones estáticas y dinámicas. Este principio puede ser usado para derivar sistemáticamente un mínimo de ecuaciones de movimiento de sistemas de multicuerpos mediante la eliminación de las fuerzas de restricción. En el uso del principio de trabajo virtual, la importancia de los conceptos de desplazamiento virtual y fuerzas generalizadas deben ser tomadas en cuenta y usadas para formular las fuerzas

generalizadas de varios elementos de fuerza, tales como resortes, amortiguadores y fuerzas de fricción. El principio de trabajo virtual puede ser usado para obtener un número de ecuaciones igual al número de grados de libertad del sistema, de este modo provee un procedimiento sistemático para obtener la forma reducida de las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico. El principio del trabajo virtual para un análisis dinámico [32], es escrito para un sistema de cuerpos en la forma:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i)^T \delta \mathbf{R}_i + (\mathbf{M}_i - (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i))^T \delta \boldsymbol{\varphi}_i \right\} = 0 \quad (4.1)$$

donde:

- $n$  = número de cuerpos.
- $\mathbf{F}_i$  = fuerza externa aplicada al cuerpo  $i$ .
- $\mathbf{M}_i$  = momento externo aplicado al cuerpo  $i$ .
- $\delta \mathbf{R}_i$  = desplazamiento virtual traslacional del centro de masa del cuerpo.
- $\delta \boldsymbol{\varphi}_i$  = desplazamiento virtual rotacional del cuerpo.

La ecuación anterior declara que un sistema de cuerpos lleva a cabo un movimiento tal, como para mantener la suma algebraica del trabajo virtual de todos los efectos de trabajo e inercia igual a cero. Las fuerzas que producen trabajos son todas las fuerzas aplicadas, incluso las fuerzas de fricción. Para el análisis estático la ec.(4.1) se define como:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{R}_i + \mathbf{M}_i^T \delta \boldsymbol{\varphi}_i \right\} = 0$$

#### 4.2.1. Desplazamiento Virtual

El *desplazamiento virtual* es definido como un desplazamiento infinitesimal que es compatible con las restricciones cinemáticas impuestas al movimiento del sistema. Los desplazamientos virtuales son imaginarios en el sentido de que se asume que ocurren cuando el tiempo permanece fijo [31]. Esto es, que para el caso de la plataforma espacial la configuración de la misma depende solamente de sus juntas variables y no explícitamente del tiempo. Considere el ejemplo mostrado en la figura 4-1. El vector de posición para un punto arbitrario  $\mathbf{P}$  sobre el cuerpo rígido  $i$  está dado por:

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R} + \mathbf{R}_{z5}(\theta) \mathbf{r}_2 \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{R}$  es el vector de posición de la base  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$  con respecto a la base  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ ,  $\mathbf{r}_2$  es el vector de posición del punto  $\mathbf{P}$  con respecto a la base  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$  y  $\mathbf{R}_{z5}(\theta)$  es la matriz de transformación dada por:

$$\mathbf{R}_{z5}(\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

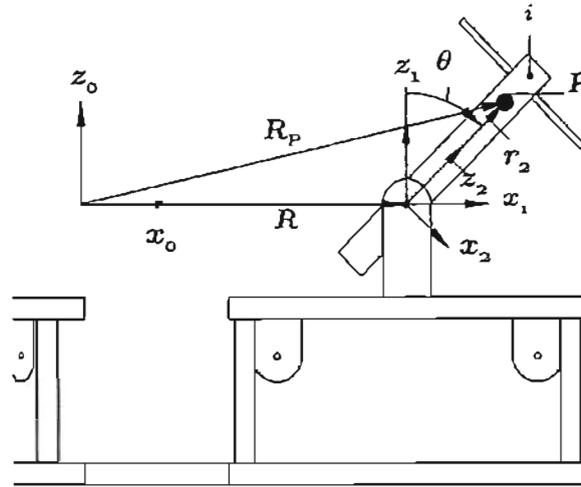


Figura 4-1 Desplazamiento virtual

donde  $\theta$  es el ángulo que define la orientación del cuerpo. Un cambio virtual en el vector de posición del punto P de la ec.(4.2) es expresado como  $\delta R_p$  y está dado por:

$$\delta R_p = \delta R + \delta R_{z5}(\theta) r_2 \tag{4.4}$$

donde:

$$\delta R_{z5}(\theta) = \begin{bmatrix} -s\theta \delta\theta & 0 & c\theta \delta\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -c\theta \delta\theta & 0 & -s\theta \delta\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\theta & 0 & c\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -c\theta & 0 & -s\theta \end{bmatrix} \delta\theta = \frac{\partial R_{z5}(\theta)}{\partial \theta} \delta\theta$$

la ec.(4.4) puede ser escrita como:

$$\delta R_p = \delta R + \frac{\partial R_{z5}(\theta)}{\partial \theta} r_2 \delta\theta = \frac{\partial R_{z5}(\theta)}{\partial \theta} r_2 \delta\theta \tag{4.5}$$

donde  $\delta R = 0$ , ya que este vector no depende de variables de desplazamiento lineal o angular.

Las variables que generan desplazamiento son  $\theta_{4i}$ ,  $\theta_{7i}$ ,  $\beta_{7i}$ ,  $\theta_{10i}$ ,  $\beta_{10i}$ ,  $\theta_{12i}$ ,  $\theta_{14i}$ ,  $\theta_{16i}$ ,  $\theta_{23i}$  y  $\theta_{29i}$ . Por lo tanto, los desplazamientos virtuales solo existirán para aquellos vectores que dependen de estas variables. A continuación se definen las matrices de rotación y su respectivo desplazamiento virtual, las cuales serán utilizadas posteriormente.

$$R_{z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x \end{bmatrix}$$

$$R_{z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$R_{z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta R_{z4}(\theta_x) = \frac{\partial}{\partial \theta_x} R_{z4}(\theta_x) \delta \theta_x$$

$$\delta R_{z5}(\theta_y) = \frac{\partial}{\partial \theta_y} R_{z5}(\theta_y) \delta \theta_y \tag{4.7}$$

$$\delta R_{z6}(\theta_z) = \frac{\partial}{\partial \theta_z} R_{z6}(\theta_z) \delta \theta_z$$

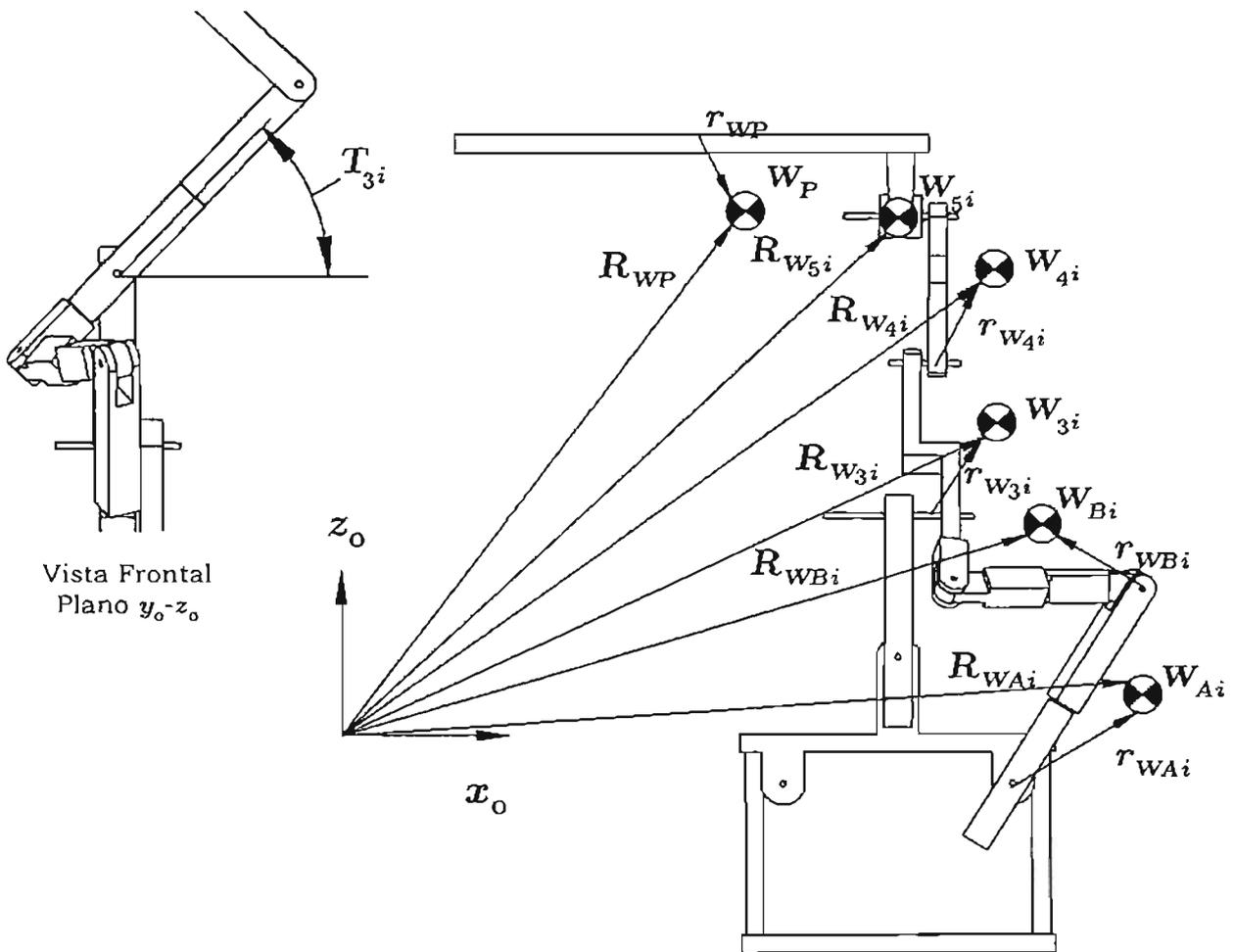


Figura 4-2 Vectores (a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{z4}(\theta_x)}{\partial \theta_x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\theta_x & -c\theta_x \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x \end{bmatrix} \\ \frac{\partial R_{z5}(\theta_y)}{\partial \theta_y} &= \begin{bmatrix} -s\theta_y & 0 & c\theta_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -c\theta_y & 0 & -s\theta_y \end{bmatrix} \\ \frac{\partial R_{z6}(\theta_z)}{\partial \theta_z} &= \begin{bmatrix} -s\theta_z & -c\theta_z & 0 \\ c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.8}$$

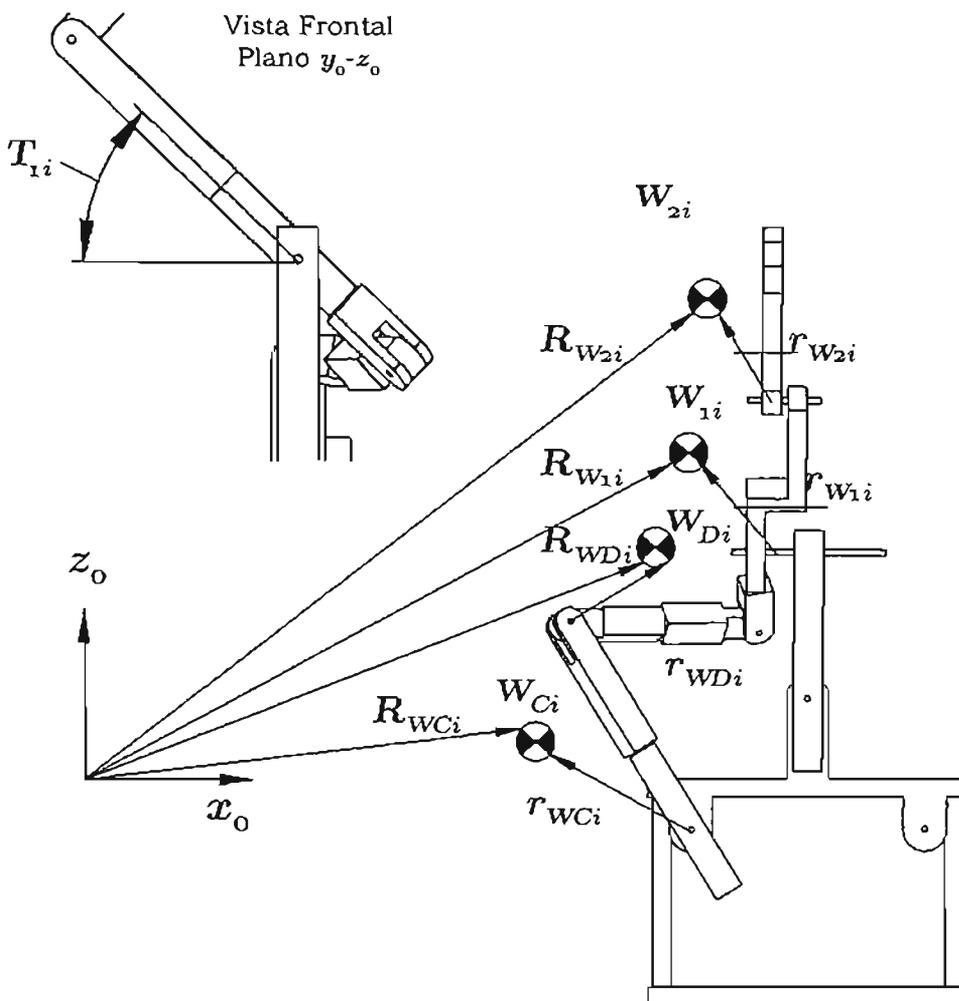


Figura 4-3 Vectores (b)

Con ayuda de las figuras (4-2)-(4-4) se desarrolla la siguiente sumatoria, donde son relacionadas todas las fuerza y torques que actúan en la plataforma espacial:

$$\begin{aligned}
 \delta W = & \sum_{j=0}^6 \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{ji})^T \delta \mathbf{R}_{W_{ji}} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Ai})^T \delta \mathbf{R}_{W_{Ai}} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Bi})^T \delta \mathbf{R}_{W_{Bi}} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Ci})^T \delta \mathbf{R}_{W_{Ci}} + \\
 & \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Di})^T \delta \mathbf{R}_{W_{Di}} + (\mathbf{W}_P)^T \delta \mathbf{R}_{WP} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{ROi})^T \delta \mathbf{R}_{ROi} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{RAi})^T \delta \mathbf{R}_{RAi} + \\
 & \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{RCi})^T \delta \mathbf{R}_{RCi} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{T}_{1i})^T \delta \theta_{1i} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{T}_{3i})^T \delta \theta_{3i} \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

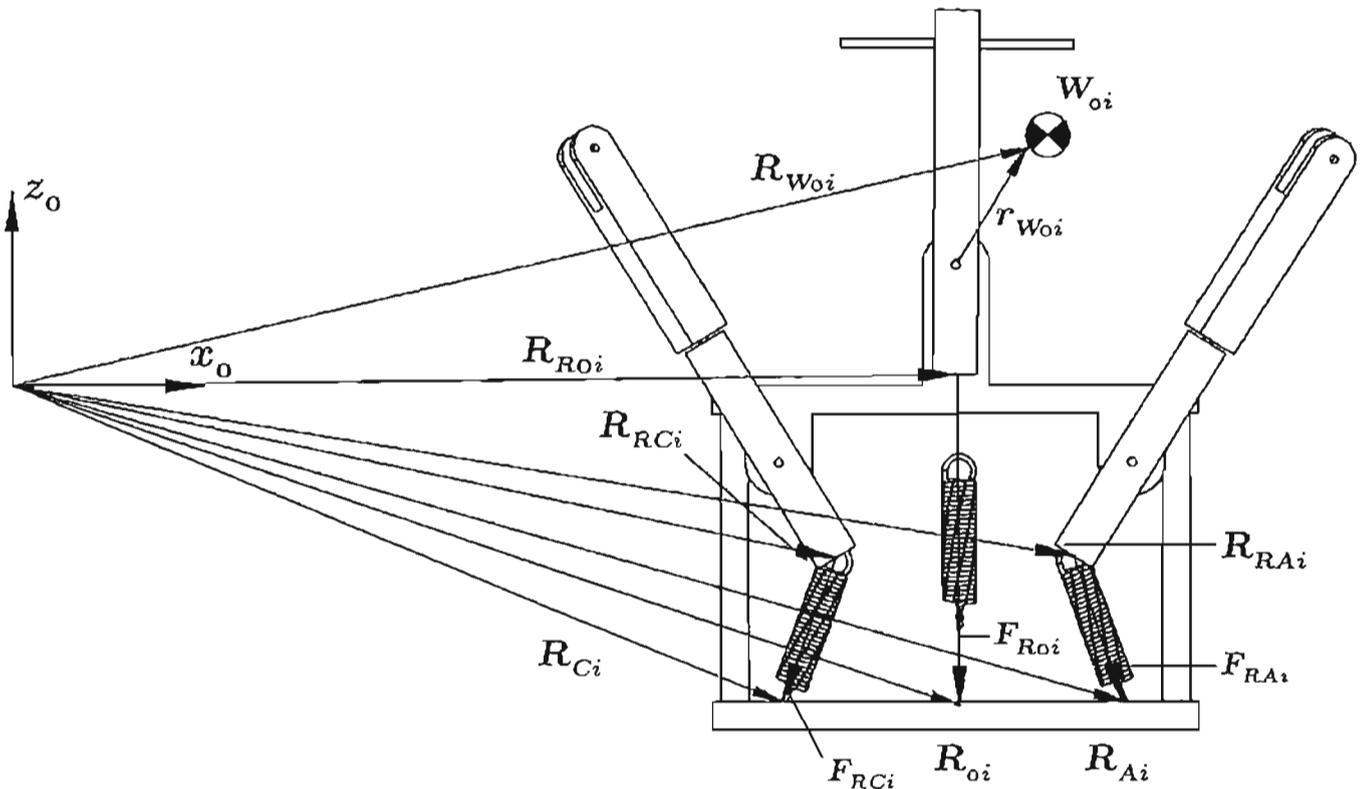


Figura 4-4 Vectores (c)

donde:

- $\mathbf{W}_{ji}$  = Peso del eslabón  $j$  de la cadena  $i$
- $\mathbf{W}_{Ai}$  = Peso del eslabón  $A$  de la cadena  $i$
- $\mathbf{W}_{Bi}$  = Peso del eslabón  $B$  de la cadena  $i$
- $\mathbf{W}_{Ci}$  = Peso del eslabón  $C$  de la cadena  $i$
- $\mathbf{W}_{Di}$  = Peso del eslabón  $D$  de la cadena  $i$

- $\mathbf{W}_P$  = Peso de la plataforma móvil  
 $\mathbf{F}_{R0i}$  = Fuerza en el resorte del eslabón 0 de la cadena  $i$   
 $\mathbf{F}_{RAi}$  = Fuerza en el resorte del eslabón  $A$  de la cadena  $i$   
 $\mathbf{F}_{RCi}$  = Fuerza en el resorte del eslabón  $C$  de la cadena  $i$   
 $\mathbf{T}_{1i}$  = Torque en la barra 1 de la cadena  $i$   
 $\mathbf{T}_{3i}$  = Torque en la barra 3 de la cadena  $i$

### 4.3. Desplazamiento Virtual de los Vectores

Con base en el ejemplo desarrollado en la sección desplazamiento virtual, es como son determinados los desplazamientos virtuales para la ec.(4.9) los cuales son desarrollados en el orden que aparecen en esta ecuación, comenzando por la siguiente suma:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^5 \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{ji})^T \delta \mathbf{R}_{Wji} &= \sum_{j=1}^3 (\mathbf{W}_{0i})^T \delta \mathbf{R}_{W0i} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{1i})^T \delta \mathbf{R}_{W1i} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{2i})^T \delta \mathbf{R}_{W2i} + \\
 &\sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{3i})^T \delta \mathbf{R}_{W3i} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{4i})^T \delta \mathbf{R}_{W4i} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{5i})^T \delta \mathbf{R}_{W5i} + \\
 &\sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Ai})^T \delta \mathbf{R}_{WAi} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Bi})^T \delta \mathbf{R}_{WBi}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

#### 4.3.1. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W0i}$

$$\mathbf{R}_{W0i} = \mathbf{R}_{d2i} + \mathbf{R}_{d3i} + \mathbf{R}'_{W0i} \tag{4.11}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{d2i} &= [d_{2i}, 0, 0]^T \\
 \mathbf{r}_{d3i} &= [0, 0, d_{3i}]^T \\
 \mathbf{r}_{W0i} &= [x_{G0i}, y_{G0i}, z_{G0i}]^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{d2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{r}_{d2i} \\
 \mathbf{R}_{d3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{r}_{d3i} \\
 \mathbf{R}'_{W0i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{r}_{W0i}
 \end{aligned}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.11) es:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{R}_{W0i} &= \delta\mathbf{R}'_{W0i} \\ &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{r}_{W0i} \\ \delta\mathbf{R}_{W0i} &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{W0i} \delta\theta_{4i}\end{aligned}\quad (4.12)$$

$$\mathbf{U}_{1i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \left( \frac{\partial}{\partial\theta_{4i}} \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \right)$$

### 4.3.2. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W1i}$

$$\mathbf{R}_{W1i} = \mathbf{R}_{d2i} + \mathbf{R}_{d3i} + \mathbf{R}_{d5i} + \mathbf{R}_{d6i} + \mathbf{R}'_{W1i}\quad (4.13)$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{d5i} &= [0, 0, d_{5i}]^T \\ \mathbf{r}_{d6i} &= [-d_{6i}, 0, 0]^T \\ \mathbf{r}_{W1i} &= [x_{G1i}, y_{G1i}, z_{G1i}]^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{d5i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{r}_{d5i} \\ \mathbf{R}_{d6i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{r}_{d6i} \\ \mathbf{R}'_{W1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{W1i}\end{aligned}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.13) es:

$$\delta\mathbf{R}_{W1i} = \delta\mathbf{R}_{d5i} + \delta\mathbf{R}_{d6i} + \delta\mathbf{R}'_{W1i}\quad (4.14)$$

donde:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{R}_{d5i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{r}_{d5i} \\ &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d5i} \delta\theta_{4i}\end{aligned}\quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{R}_{d6i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{r}_{d6i} \\ &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d6i} \delta\theta_{4i}\end{aligned}\quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{R}'_{G1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{G1i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta\mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{G1i} \\ &= \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{G1i} \delta\theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G1i} \delta\theta_{7i}\end{aligned}\quad (4.17)$$

$$\mathbf{U}_{2i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \left( \frac{\partial}{\partial\theta_{4i}} \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \right) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i})$$

$$\mathbf{U}_{3i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \left( \frac{\partial}{\partial\theta_{7i}} \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \right)$$

sustituyendo ecs.(4.15), (4.16) y (4.17) en (4.14)

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{G1i} &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d5i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d6i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{G1i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G1i} \delta \theta_{7i} \\ &= (\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{G1i}) \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G1i} \delta \theta_{7i}\end{aligned}\quad (4.18)$$

### 4.3.3. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W2i}$

$$\mathbf{R}_{W2i} = \mathbf{R}_{d2i} + \mathbf{R}_{d3i} + \mathbf{R}_{d5i} + \mathbf{R}_{d6i} + \mathbf{R}_{d8i} + \mathbf{R}_{d9i} + \mathbf{R}'_{W2i} \quad (4.19)$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{d8i} &= [0, d_{8i}, 0]^T \\ \mathbf{r}_{d9i} &= [-d_{9i}, 0, 0]^T \\ \mathbf{r}_{W2i} &= [x_{G2i}, y_{G2i}, z_{G2i}]^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{d8i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{d8i} \\ \mathbf{R}_{d9i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{d9i} \\ \mathbf{R}'_{W2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{10i}) \mathbf{r}_{W2i} \\ &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i}) \mathbf{r}_{W2i}\end{aligned}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.19) es:

$$\delta \mathbf{R}_{W2i} = \delta \mathbf{R}_{d5i} + \delta \mathbf{R}_{d6i} + \delta \mathbf{R}_{d8i} + \delta \mathbf{R}_{d9i} + \delta \mathbf{R}'_{W2i} \quad (4.20)$$

donde:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{d8i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{d8i} \\ &= \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{d8i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{d8i} \delta \theta_{7i}\end{aligned}\quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{d9i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{d9i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{d9i} \\ &= \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{d9i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{d9i} \delta \theta_{7i}\end{aligned}\quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}'_{W2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i}) \mathbf{r}_{W2i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i}) \mathbf{r}_{W2i} \\ &= \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{W2i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{W2i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i})\end{aligned}\quad (4.23)$$

$$\mathbf{U}_{4i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \left( \frac{\partial}{\partial \theta_{4i}} \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \right) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i})$$

$$\mathbf{U}_{5i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \left( \frac{\partial}{\partial (\theta_{7i} + \theta_{10i})} \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i}) \right)$$

sustituyendo ecs.(4.15), (4.16), (4.21), (4.22) y (4.23) en (4.20):

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{W2i} &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d5i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d6i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{d8i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{d8i} \delta \theta_{7i} + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{d9i} \delta \theta_{4i} + \\
&\quad \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{d9i} \delta \theta_{7i} + \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{W2i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{W2i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i}) \\
&= (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{W2i}) \delta \theta_{4i} + (\mathbf{U}_{3i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \\
&\quad \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{W2i}) \delta \theta_{7i} + \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{W2i} \delta \theta_{10i}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

#### 4.3.4. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W3i}$

$$\mathbf{R}_{W3i} = \mathbf{R}_{d2i} + \mathbf{R}_{d3i} + \mathbf{R}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i} + \mathbf{R}'_{W3i} \tag{4.25}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_{d6i} &= [d_{6i}, 0, 0]^T \\
\mathbf{r}_{W3i} &= [x_{G3i}, y_{G3i}, z_{G3i}]^T \\
\mathbf{R}'_{d6i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{r}'_{d6i} \\
\mathbf{R}'_{W3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{W3i}
\end{aligned}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.25) es:

$$\delta \mathbf{R}_{G3i} = \delta \mathbf{R}_{d5i} + \delta \mathbf{R}'_{d6i} + \delta \mathbf{R}'_{W3i} \tag{4.26}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}'_{d6i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{r}'_{d6i} \\
&= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}'_{d6i} \delta \theta_{4i}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

con base en la figura 1-3, se obtiene la relación siguiente:

$$\begin{aligned}
\beta_{7i} &= (\theta_{7i} + \theta_{10i}) - 2\pi \\
&= \beta'_{7i} - 2\pi
\end{aligned}$$

donde:

$$\beta'_{7i} = \theta_{7i} + \theta_{10i}$$

el desplazamiento virtual para  $\beta'_{7i}$  es:

$$\delta \beta'_{7i} = \delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i}$$

Así:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}'_{W3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{W3i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{W3i} \\
&= \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{W3i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{W3i} \delta \beta'_{7i}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\mathbf{U}_{6i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \left( \frac{\partial}{\partial \theta_{4i}} \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \right) \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i})$$

$$\mathbf{U}_{7i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \left( \frac{\partial}{\partial \beta'_{7i}} \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \right)$$

sustituyendo ecs.(4.15), (4.27) y (4.28) en (4.26):

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{W3i} &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d5i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}'_{d6i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{W3i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{W3i} \delta \beta'_{7i} \\ &= (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{W3i}) \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{W3i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i})\end{aligned}\quad (4.29)$$

#### 4.3.5. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W4i}$

$$\mathbf{R}_{W4i} = \mathbf{R}_{d2i} + \mathbf{R}_{d3i} + \mathbf{R}_{d5i} + \mathbf{R}'_{d6i} + \mathbf{R}'_{d8i} + \mathbf{R}'_{d9i} + \mathbf{R}'_{W4i} \quad (4.30)$$

con base en la figura 1-3, se obtiene la relación siguiente:

$$\beta_{10i} = 2\pi - \theta_{10i}$$

por otra parte al hacer la suma  $\beta_{7i} + \beta_{10i}$  se tiene:

$$\begin{aligned}\beta_{7i} + \beta_{10i} &= (\theta_{7i} + \theta_{10i} - 2\pi) + (2\pi - \theta_{10i}) \\ &= \theta_{7i}\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_{d9i} &= [d_{9i}, 0, 0]^T \\ \mathbf{r}_{W4i} &= [x_{G4i}, y_{G4i}, z_{G4i}]^T \\ \mathbf{R}'_{d8i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{d8i} \\ \mathbf{R}'_{d9i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}'_{d9i} \\ \mathbf{R}'_{W4i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i} + \beta_{10i}) \mathbf{r}_{W4i} \\ &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{W4i}\end{aligned}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.30) es:

$$\delta \mathbf{R}_{W4i} = \delta \mathbf{R}_{d5i} + \delta \mathbf{R}'_{d6i} + \delta \mathbf{R}'_{d8i} + \delta \mathbf{R}'_{d9i} + \delta \mathbf{R}'_{W4i} \quad (4.31)$$

donde:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}'_{d8i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{d8i} \\ &= \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{d8i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{d8i} \delta \beta'_{7i} \\ &= \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{d8i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{d8i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i})\end{aligned}\quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}'_{d9i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}'_{d9i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}'_{d9i} \\ &= \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}'_{d9i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}'_{d9i} \delta \beta'_{7i} \\ &= \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}'_{d9i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}'_{d9i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i})\end{aligned}\quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}'_{W4i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{G4i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{W4i} \\
&= \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{W4i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{W4i} \delta \theta_{7i}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

sustituyendo ecs.(4.15), (4.27), (4.32), (4.33) y (4.34) en (4.31):

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{W4i} &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d5i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}'_{d6i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{d8i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{d8i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}'_{d9i} \delta \theta_{4i} + \\
&\quad \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}'_{d9i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{W4i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{W4i} \delta \theta_{7i} \\
&= (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}'_{d9i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{W4i}) \delta \theta_{4i} + \\
&\quad (\mathbf{U}_{7i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}'_{d9i}) + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{W4i}) \delta \theta_{7i} + \mathbf{U}_{7i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}'_{d9i}) \delta \theta_{10i}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

#### 4.3.6. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{W5i}$

$$\mathbf{R}_{W5i} = \mathbf{R}_{d2i} + \mathbf{R}_{d3i} + \mathbf{R}_{d5i} + \mathbf{R}_{d6i} + \mathbf{R}_{d8i} + \mathbf{R}_{d9i} + \mathbf{R}_{d11i} + \mathbf{R}_{d13i} \tag{4.36}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{d11i} &= [0, d_{11i}, 0]^T \\
\mathbf{r}_{d13i} &= [d_{3i}, 0, 0]^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{d11i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i}) \mathbf{r}_{d11i} \\
\mathbf{R}_{d13i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i}) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{12i}) \mathbf{r}_{d13i} \\
&= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i}) \mathbf{r}_{d13i}
\end{aligned}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.36) es:

$$\delta \mathbf{R}_{W5i} = \delta \mathbf{R}_{d5i} + \delta \mathbf{R}_{d6i} + \delta \mathbf{R}_{d8i} + \delta \mathbf{R}_{d9i} + \delta \mathbf{R}_{d11i} + \delta \mathbf{R}_{d13i} \tag{4.37}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{d11i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i}) \mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i}) \mathbf{r}_{d11i} \\
&= \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{d11i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{d11i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i})
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{d13i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i}) \mathbf{r}_{d13i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i} + \theta_{10i}) \mathbf{r}_{d13i} \\
&= \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{d13i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{d13i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i})
\end{aligned} \tag{4.39}$$

sustituyendo ecs.(4.15), (4.16), (4.21), (4.22), (4.38) y (4.39) en (4.37):

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{W5i} &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d5i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d6i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{d8i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{d8i} \delta \theta_{7i} + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{d9i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{d9i} \delta \theta_{7i} + \\
&\quad \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{d11i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{d11i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i}) + \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{d13i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{d13i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i}) \\
&= (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{4i} (\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i})) \delta \theta_{4i} + (\mathbf{U}_{3i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \\
&\quad \mathbf{U}_{5i} (\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i})) \delta \theta_{7i} + (\mathbf{U}_{5i} (\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i})) \delta \theta_{10i}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

### 4.3.7. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{WAi}$

$$\mathbf{R}_{WAi} = \mathbf{R}_{d20i} + \mathbf{R}_{d22i} + \mathbf{R}'_{WAi} \quad (\text{Ec. 29})$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{d20i} &= [d_{20i}, 0, 0]^T \\ \mathbf{r}_{d21i} &= [0, 0, d_{21i}]^T \\ \mathbf{r}_{GWAi} &= [x_{GAi}, y_{GAi}, z_{GAi}]^T \\ \\ \mathbf{R}_{d20i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{19i}) \mathbf{r}_{d20i} \\ \mathbf{R}_{d22i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{19i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{21i}) \mathbf{r}_{d21i} \\ \mathbf{R}'_{WAi} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{19i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{21i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{23i}) \mathbf{r}_{WAi} \end{aligned}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(Ec. 29) es:

$$\delta \mathbf{R}_{WAi} = \delta \mathbf{R}'_{WAi} \quad (4.41)$$

donde:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}'_{WAi} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{19i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{21i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{23i}) \mathbf{r}_{WAi} \\ &= \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{GWAi} \delta \theta_{23i} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{U}_{8i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{19i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{21i}) \left( \frac{\partial}{\partial \theta_{23i}} \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{23i}) \right)$$

sustituyendo ec.(4.42) en (4.41):

$$\delta \mathbf{R}_{GAi} = \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{GAi} \delta \theta_{23i} \quad (4.43)$$

### 4.3.8. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{WBi}$

$$\mathbf{R}_{WBi} = \mathbf{R}_{d20i} + \mathbf{R}_{d22i} + \mathbf{R}_{d24i} + d_{WBi} \mathbf{U}_{WBi} \quad (4.44)$$

donde (los puntos  $P_{3i}$  y  $P_{4i}$ , con base en la figura 3-6):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{d24i} &= [0, 0, d_{24i}]^T \\ \mathbf{r}_{P3i} &= [x_{s3i}, -y_{s3i}, 0]^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{3i} = \mathbf{R}_{d2i} + \mathbf{R}_{d3i} + \mathbf{R}_{d5i} + \mathbf{R}'_{d6i} + \mathbf{R}_{P3i} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{P}_{4i} = \mathbf{R}_{d20i} + \mathbf{R}_{d22i} + \mathbf{R}_{d24i} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{d24i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{19i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{21i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{23i}) \mathbf{r}_{d24i} \\ \mathbf{U}_{WBi} &= \frac{1}{d_{Bi}} (\mathbf{P}_{3i} - \mathbf{P}_{4i}) \\ \mathbf{R}_{P3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{P3i} \end{aligned}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.44) es

$$\delta \mathbf{R}_{WB_i} = \delta \mathbf{R}_{d24i} + d_{WB_i} \delta \mathbf{U}_{WB_i} \quad (4.47)$$

donde:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{d24i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{19i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{21i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{23i}) \mathbf{r}_{d24i} \\ &= \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{d24i} \delta \theta_{23i} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\delta \mathbf{U}_{WB_i} = \frac{1}{d_{B_i}} (\delta \mathbf{P}_{3i} - \delta \mathbf{P}_{4i}) \quad (4.49)$$

El desplazamiento virtual para la ec.(4.45) es:

$$\delta \mathbf{P}_{3i} = \delta \mathbf{R}_{d5i} + \delta \mathbf{R}'_{d6i} + \delta \mathbf{R}_{P3i} \quad (4.50)$$

donde:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{P3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{P3i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta \mathbf{R}_{z4}(\beta_{7i}) \mathbf{r}_{P3i} \\ &= \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{P3i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{P3i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

sustituyendo ecs.(4.15), (4.27) y (4.51) en (4.50):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{P}_{3i} &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d5i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}'_{d6i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{P3i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{P3i} \delta \beta'_{7i} \\ &= (\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{P3i}) \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{P3i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

El desplazamiento virtual para la ec.(4.46) es:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{P}_{4i} &= \delta \mathbf{R}_{d24i} \\ &= \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{d24i} \delta \theta_{23i} \end{aligned} \quad (4.53)$$

sustituyendo ec.(4.52) y (4.53) en (4.49):

$$\delta \mathbf{U}_{WB_i} = \frac{1}{d_{B_i}} [(\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{P3i}) \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{P3i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i}) - \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{d24i} \delta \theta_{23i}] \quad (4.54)$$

sustituyendo ec.(4.48) y (4.54) en (4.47):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{WB_i} &= \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{d24i} \delta \theta_{23i} + \\ &\quad \frac{d_{WB_i}}{d_{B_i}} [(\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{P3i}) \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{P3i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i}) - \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{d24i} \delta \theta_{23i}] \\ &= \left(1 - \frac{d_{WB_i}}{d_{B_i}}\right) \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{d24i} \delta \theta_{23i} + \frac{d_{WB_i}}{d_{B_i}} [(\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{P3i}) \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{P3i} \\ &\quad (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i})] \end{aligned} \quad (4.55)$$

### 4.3.9. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{WCi}$

$$\mathbf{R}_{WCi} = \mathbf{R}_{d26i} + \mathbf{R}_{d28i} + \mathbf{R}'_{WCi} \quad (4.56)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{d26i} &= [d_{26i}, 0, 0]^T \\ \mathbf{r}_{d28i} &= [0, 0, d_{28i}]^T \\ \mathbf{r}_{WCi} &= [x_{GCi}, y_{GCi}, z_{GCi}]^T \\ \\ \mathbf{R}_{d26i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{25i}) \mathbf{r}_{d26i} \\ \mathbf{R}_{d28i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{25i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{27i}) \mathbf{r}_{d28i} \\ \mathbf{R}'_{WCi} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{25i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{27i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{29i}) \mathbf{r}_{WCi} \end{aligned}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.56) es:

$$\delta \mathbf{R}_{WCi} = \delta \mathbf{R}'_{WCi} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{25i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{27i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{29i}) \mathbf{r}_{WCi} \\ &= \mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{WCi} \delta \theta_{29i} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{U}_{9i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{25i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{27i}) \left( \frac{\partial}{\partial \theta_{29i}} \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{29i}) \right)$$

### 4.3.10. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{WDi}$

$$\mathbf{R}_{WDi} = \mathbf{R}_{d26i} + \mathbf{R}_{d28i} + \mathbf{R}_{d30i} + d_{WDi} \mathbf{U}_{WDi} \quad (4.59)$$

donde (los puntos  $P_{1i}$  y  $P_{2i}$ , con base en la figura 3-7):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{d30i} &= [0, 0, d_{30i}]^T \\ \mathbf{r}_{P1i} &= [-x_{s1i}, -y_{s1i}, 0]^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{1i} = \mathbf{R}_{d2i} + \mathbf{R}_{d3i} + \mathbf{R}_{d5i} + \mathbf{R}_{d6i} + \mathbf{R}_{P1i} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{P}_{2i} = \mathbf{R}_{d26i} + \mathbf{R}_{d28i} + \mathbf{R}_{d30i} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{d30i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{25i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{27i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{29i}) \mathbf{r}_{d30i} \\ \mathbf{U}_{WDi} &= \frac{1}{d_{Di}} (\mathbf{P}_{1i} - \mathbf{P}_{2i}) \\ \mathbf{R}_{P1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{P1i} \end{aligned}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.59) es:

$$\delta \mathbf{R}_{WDi} = \delta \mathbf{R}_{d30i} + d_{WDi} \delta \mathbf{U}_{WDi} \quad (4.62)$$

donde:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{d30i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{25i}) \mathbf{R}_{z5}(-\delta_{27i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{29i}) \mathbf{r}_{d30i} \\ &= \mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{d30i} \delta \theta_{29i}\end{aligned}\quad (4.63)$$

$$\delta \mathbf{U}_{WDi} = \frac{1}{d_{Di}} (\delta \mathbf{P}_{1i} - \delta \mathbf{P}_{2i}) \quad (4.64)$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.60) es:

$$\delta \mathbf{P}_{1i} = \delta \mathbf{R}_{d5i} + \delta \mathbf{R}_{d6i} + \delta \mathbf{R}_{P1i} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{P1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{P1i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \delta \mathbf{R}_{z4}(\theta_{7i}) \mathbf{r}_{P1i} \\ &= \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{P1i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{P1i} \delta \theta_{7i}\end{aligned}\quad (4.66)$$

sustituyendo ecs.(4.15), (4.16) y (4.66) en (4.65):

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{P}_{1i} &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d5i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{d6i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{P1i} \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{P1i} \delta \theta_{7i} \\ &= (\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{P1i}) \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{P1i} \delta \theta_{7i}\end{aligned}\quad (4.67)$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.61) es:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{P}_{2i} &= \delta \mathbf{R}_{d30i} \\ &= \mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{d30i} \delta \theta_{29i}\end{aligned}\quad (4.68)$$

sustituyendo ec.(4.67) y (4.68) en (4.64):

$$\delta \mathbf{U}_{WDi} = \frac{1}{d_{Di}} [(\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{P1i}) \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{P1i} \delta \theta_{7i} - \mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{d30i} \delta \theta_{29i}] \quad (4.69)$$

sustituyendo ec.(4.63) y (4.69) en (4.62):

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{WDi} &= \mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{d30i} \delta \theta_{29i} + \\ &\quad \frac{d_{wDi}}{d_{Di}} [(\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{P1i}) \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{P1i} \delta \theta_{7i} - \mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{d30i} \delta \theta_{29i}] \\ &= \left(1 - \frac{d_{wDi}}{d_{Di}}\right) \mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{d30i} \delta \theta_{29i} + \frac{d_{wDi}}{d_{Di}} [(\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{P1i}) \delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{P1i} \delta \theta_{7i}]\end{aligned}\quad (4.70)$$

#### 4.3.11. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{WP}$

$$\mathbf{R}_{WP} = \mathbf{R}_{OM} + \mathbf{R}_{WM} \quad (4.71)$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{WM} &= [x_{GM}, y_{GM}, z_{GM}]^T \\ \mathbf{R}_{0M} &= [x, y, z]^T \\ \mathbf{R}_{WM} &= \mathbf{R}_{z6}(\psi) \mathbf{R}_{z5}(\theta) \mathbf{R}_{z6}(\phi) \mathbf{r}_{WM}\end{aligned}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.71) es:

$$\delta \mathbf{R}_{WP} = \delta \mathbf{R}_{0M} + \delta \mathbf{R}_{WM} \quad (4.72)$$

donde:

$$\delta \mathbf{R}_{0M} = [\delta x, \delta y, \delta z]^T \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{WM} &= \delta \mathbf{R}_{z6}(\psi) \mathbf{R}_{z5}(\theta) \mathbf{R}_{z6}(\phi) \mathbf{r}_{WM} + \mathbf{R}_{z6}(\psi) \delta \mathbf{R}_{z5}(\theta) \mathbf{R}_{z6}(\phi) \mathbf{r}_{WM} + \mathbf{R}_{z6}(\psi) \mathbf{R}_{z5}(\theta) \delta \mathbf{R}_{z6}(\phi) \mathbf{r}_{WM} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial \psi} \mathbf{R}_{z6}(\psi) \delta \psi \right) \mathbf{R}_{z5}(\theta) \mathbf{R}_{z6}(\phi) \mathbf{r}_{WM} + \mathbf{R}_{z6}(\psi) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{R}_{z5}(\theta) \delta \theta \right) \mathbf{R}_{z6}(\phi) \mathbf{r}_{WM} + \mathbf{R}_{z6}(\psi) \\ &\quad \mathbf{R}_{z5}(\theta) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{R}_{z6}(\phi) \delta \phi \right) \mathbf{r}_{WM}\end{aligned} \quad (4.74)$$

sustituyendo ec.(4.73) y (4.74) en (4.72):

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{WP} &= \delta \mathbf{R}_{0M} + \left( \frac{\partial}{\partial \psi} \mathbf{R}_{z6}(\psi) \delta \psi \right) \mathbf{R}_{z5}(\theta) \mathbf{R}_{z6}(\phi) \mathbf{r}_{WM} + \mathbf{R}_{z6}(\psi) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{R}_{z5}(\theta) \delta \theta \right) \mathbf{R}_{z6}(\phi) \mathbf{r}_{WM} + \\ &\quad \mathbf{R}_{z6}(\psi) \mathbf{R}_{z5}(\theta) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{R}_{z6}(\phi) \delta \phi \right) \mathbf{r}_{WM} \\ &= \delta \mathbf{R}_{0M} + \mathbf{U}_{1M} \mathbf{r}_{WM} \delta \psi + \mathbf{U}_{2M} \mathbf{r}_{WM} \delta \theta + \mathbf{U}_{3M} \mathbf{r}_{WM} \delta \phi\end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\mathbf{U}_{1M} = \left( \frac{\partial}{\partial \psi} \mathbf{R}_{z6}(\psi) \right) \mathbf{R}_{z5}(\theta) \mathbf{R}_{z6}(\phi)$$

$$\mathbf{U}_{2M} = \mathbf{R}_{z6}(\psi) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{R}_{z5}(\theta) \right) \mathbf{R}_{z6}(\phi)$$

$$\mathbf{U}_{3M} = \mathbf{R}_{z6}(\psi) \mathbf{R}_{z5}(\theta) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{R}_{z6}(\phi) \right)$$

#### 4.3.12. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{P0i}$ :

$$\mathbf{r}_{P0i} = [0, 0, -d_{s0i}]^T$$

$$\mathbf{R}_{R0i} = \mathbf{R}_{d2i} + \mathbf{R}_{d3i} + \mathbf{R}_{P0i} \quad (4.76)$$

$$\mathbf{R}_{P0i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{r}_{P0i}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.76) es:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{R0i} &= \delta \mathbf{R}_{P0i} \\ &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{r}_{P0i} \\ &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{P0i} \delta \theta_{4i}\end{aligned}\quad (4.77)$$

#### 4.3.13. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{RAi}$

$$\mathbf{r}_{PAi} = [0, 0, -d_{sAi}]^T$$

$$\mathbf{R}_{RAi} = \mathbf{R}_{d20i} + \mathbf{R}_{d22i} + \mathbf{R}_{PAi} \quad (4.78)$$

$$\mathbf{R}_{PAi} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{19i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{21i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{23i}) \mathbf{r}_{PAi} \quad (4.79)$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.78) es:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{RAi} &= \delta \mathbf{R}_{PAi} \\ &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{19i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{21i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{23i}) \mathbf{r}_{PAi} \\ &= \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{PAi} \delta \theta_{23i}\end{aligned}\quad (4.80)$$

#### 4.3.14. Desplazamiento Virtual del Vector $\mathbf{R}_{RCi}$

$$\mathbf{r}_{PCi} = [0, 0, -d_{sCi}]^T$$

$$\mathbf{R}_{RCi} = \mathbf{R}_{d26i} + \mathbf{R}_{d28i} + \mathbf{R}_{PCi} \quad (4.81)$$

$$\mathbf{R}_{PCi} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{25i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{27i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{29i}) \mathbf{r}_{PCi}$$

el desplazamiento virtual para la ec.(4.81) es:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{RCi} &= \delta \mathbf{R}_{PCi} \\ &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{25i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{27i}) \delta \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{29i}) \mathbf{r}_{PCi} \\ &= \mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{PCi} \delta \theta_{29i}\end{aligned}\quad (4.82)$$

#### 4.3.15. Desplazamiento Virtual para los Torques

Los desplazamientos virtuales están asociados al vector de velocidad angular de la siguiente manera [33]:

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{\theta} &= \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\end{aligned}\quad (4.83)$$

donde  $q$  son las coordenadas generalizadas. Obteniendo el desplazamiento virtual de  $\omega_{1i}$ :

$$\begin{aligned}
 \omega_{1i} &= (\omega_{1i} \mathbf{x}_{7i}) \\
 &= \dot{\theta}_{7i} \mathbf{x}_{7i} \\
 &= \dot{\theta}_{7i} (\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{x}_0) \\
 \delta\theta_{1i} &= \frac{\partial \omega_{1i}}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 + \frac{\partial \omega_{1i}}{\partial \dot{q}_2} \delta q_2
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

donde  $q_1 = \theta_{4i}$  y  $q_2 = \theta_{7i}$ .

$$\begin{aligned}
 \delta\theta_{1i} &= \frac{\partial \omega_{1i}}{\partial \dot{\theta}_{4i}} \delta\theta_{4i} + \frac{\partial \omega_{1i}}{\partial \dot{\theta}_{7i}} \delta\theta_{7i} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{4i}} \left( \dot{\theta}_{7i} \mathbf{x}_{7i} \right) \delta\theta_{4i} + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{7i}} \left( \dot{\theta}_{7i} \mathbf{x}_{7i} \right) \delta\theta_{7i} \\
 &= \mathbf{x}_{7i} \delta\theta_{7i}
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

ahora  $\omega_{3i}$ :

$$\begin{aligned}
 \omega_{3i} &= (\omega_{3i} \mathbf{x}'_{7i}) \\
 &= \dot{\beta}_{7i} \mathbf{x}'_{7i} \\
 &= \dot{\beta}_{7i} (\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{x}_0) \\
 \beta_{7i} &= (\theta_{7i} + \theta_{10i}) - 2\pi \\
 \dot{\beta}_{7i} &= \left( \frac{d\theta_{7i}}{dt} + \frac{d\theta_{10i}}{dt} \right) \\
 &= \dot{\theta}_{7i} + \dot{\theta}_{10i} \\
 \delta\theta_{3i} &= \frac{\partial \omega_{3i}}{\partial \dot{\theta}_{4i}} \delta\theta_{4i} + \frac{\partial \omega_{3i}}{\partial \dot{\beta}_{7i}} \delta\beta_{7i} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{4i}} \left( \dot{\beta}_{7i} \mathbf{x}'_{7i} \right) \delta\theta_{4i} + \frac{\partial}{\partial \dot{\beta}_{7i}} \left( \dot{\beta}_{7i} \mathbf{x}'_{7i} \right) \delta\beta_{7i} \\
 &= \mathbf{x}'_{7i} \delta\beta_{7i} \\
 &= \mathbf{x}'_{7i} (\delta\theta_{7i} + \delta\theta_{10i})
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

## 4.4. Expresión para el Trabajo Virtual

El primer paso es desarrollar la ec.(4.9) Para después sustituir los desplazamientos virtuales obtenidos en la sección anterior. Ec. (4.9) es igual a:

$$\begin{aligned}
\delta W = & \sum_{j=1}^3 (\mathbf{W}_{0i})^T \delta \mathbf{R}_{W0i} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{1i})^T \delta \mathbf{R}_{W1i} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{2i})^T \delta \mathbf{R}_{W2i} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{3i})^T \delta \mathbf{R}_{W3i} + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{4i})^T \delta \mathbf{R}_{W4i} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{5i})^T \delta \mathbf{R}_{W5i} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Ai})^T \delta \mathbf{R}_{WAi} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Bi})^T \delta \mathbf{R}_{WBi} + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Ci})^T \delta \mathbf{R}_{WCi} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Di})^T \delta \mathbf{R}_{WDi} + (\mathbf{W}_P)^T \delta \mathbf{R}_{WP} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{R0i})^T \delta \mathbf{R}_{R0i} + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{RAi})^T \delta \mathbf{R}_{RAi} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{RCi})^T \delta \mathbf{R}_{RCi} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{T}_{1i})^T \delta \theta_{1i} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{T}_{3i})^T \delta \theta_{3i}
\end{aligned} \tag{4.87}$$

sustituyendo ecs.(4.12), (4.18), (4.24), (4.29), (4.35), (4.40), (4.43), (4.55), (4.58), (4.70), (4.75), (4.77), (4.80), (4.82), (4.85) y (4.86) en (4.87):

$$\begin{aligned}
\delta W = & \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{0i})^T (\mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{W0i} \delta \theta_{4i}) + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{1i})^T ((\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{W1i})\delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{W1i} \delta \theta_{7i}) + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{2i})^T [(\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i}(\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{W2i})\delta \theta_{4i} + (\mathbf{U}_{3i}(\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \\
& \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{W2i})\delta \theta_{7i} + \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{W2i} \delta \theta_{10i}] + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{3i})^T ((\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{W3i})\delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{W3i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i})) + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{4i})^T [(\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i}(\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}'_{d9i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{W4i})\delta \theta_{4i} + (\mathbf{U}_{7i}(\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}'_{d9i}) + \\
& \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{W4i})\delta \theta_{7i} + \mathbf{U}_{7i}(\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}'_{d9i})\delta \theta_{10i}] + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{5i})^T [(\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i}(\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{4i}(\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i}))\delta \theta_{4i} + (\mathbf{U}_{3i} \\
& (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{5i}(\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i}))\delta \theta_{7i} + \mathbf{U}_{5i}(\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i})\delta \theta_{10i}] + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Ai})^T (\mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{WAi} \delta \theta_{23i}) + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Bi})^T \left[ \left( 1 - \frac{d_{WB_i}}{d_{B_i}} \right) \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{d24i} \delta \theta_{23i} + \right. \\
& \left. \frac{d_{WB_i}}{d_{B_i}} ((\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{P3i})\delta \theta_{4i} + \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{P3i} (\delta \theta_{7i} + \delta \theta_{10i})) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Ci})^T (\mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{WCi} \delta\theta_{29i}) + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{W}_{Di})^T \left[ \left( 1 - \frac{d_{WDi}}{d_{Di}} \right) \mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{d30i} \delta\theta_{29i} + \frac{d_{WDi}}{d_{Di}} ((\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{P1i}) \delta\theta_{4i} + \right. \\
& \left. \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{P1i} \delta\theta_{7i}) \right] + \\
& (\mathbf{W}_P)^T \delta \mathbf{R}_{OM} + \\
& (\mathbf{W}_P)^T (\mathbf{U}_{1M} \mathbf{r}_{WM} \delta\psi + \mathbf{U}_{2M} \mathbf{r}_{WM} \delta\theta + \mathbf{U}_{3M} \mathbf{r}_{WM} \delta\phi) + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{R0i})^T (\mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{P0i} \delta\theta_{4i}) + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{RAi})^T (\mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{PAi} \delta\theta_{23i}) + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{RCi})^T (\mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{PCi} \delta\theta_{29i}) + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{T}_{1i} \mathbf{x}_{7i})^T (\mathbf{x}_{7i} \delta\theta_{7i}) + \\
& \sum_{i=1}^3 (\mathbf{T}_{3i} \mathbf{x}'_{7i})^T (\mathbf{x}'_{7i} (\delta\theta_{7i} + \delta\theta_{10i}))
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Agrupando en función de los desplazamientos virtuales de las juntas de la PE:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{W} = & \sum_{i=1}^3 [(\mathbf{W}_{0i})^T (\mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{W0i}) + \\
& (\mathbf{W}_{1i})^T (\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{W1i}) + \\
& (\mathbf{W}_{2i})^T (\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{W2i}) + \\
& (\mathbf{W}_{3i})^T (\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{W3i}) + \\
& (\mathbf{W}_{4i})^T (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}'_{d9i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{W4i}) + \\
& (\mathbf{W}_{5i})^T (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{4i} (\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i})) + \\
& (\mathbf{W}_{Bi})^T \left( \frac{d_{WB_i}}{d_{B_i}} (\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{P3i}) \right) + \\
& (\mathbf{W}_{Di})^T \left( \frac{d_{WD_i}}{d_{D_i}} (\mathbf{U}_{1i}(\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{P1i}) \right) + \\
& (\mathbf{F}_{R0i})^T \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{P0i} \delta\theta_{4i} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((\mathbf{W}_{1i})^T \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{W1i} + \\
& (\mathbf{W}_{2i})^T (\mathbf{U}_{3i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{W2i}) + \\
& (\mathbf{W}_{3i})^T (\mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{G3i}) + \\
& (\mathbf{W}_{4i})^T (\mathbf{U}_{7i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}'_{d9i}) + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{W4i}) + \\
& (\mathbf{W}_{5i})^T (\mathbf{U}_{3i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{5i} (\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i})) + \\
& (\mathbf{W}_{Bi})^T \left( \frac{d_{WB_i}}{d_{Bi}} \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{P3i} \right) + \\
& (\mathbf{W}_{Di})^T \left( \frac{d_{WD_i}}{d_{Di}} \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{P1i} \right) \delta\theta_{7i} + \\
& ((\mathbf{W}_{2i})^T (\mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{W2i}) + \\
& (\mathbf{W}_{3i})^T (\mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{W3i}) + \\
& (\mathbf{W}_{4i})^T (\mathbf{U}_{7i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i})) + \\
& (\mathbf{W}_{5i})^T (\mathbf{U}_{5i} (\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i})) + \\
& (\mathbf{W}_{Bi})^T \left( \frac{d_{WB_i}}{d_{Bi}} \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{P3i} \right) \delta\theta_{10i} + \\
& ((\mathbf{W}_{A1})^T (\mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{WA1}) + \\
& (\mathbf{W}_{Bi})^T \left( 1 - \frac{d_{WB_i}}{d_{Bi}} \right) \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{d25i} + \\
& (\mathbf{F}_{RA1})^T (\mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{PA1}) \delta\theta_{23i} \\
& ((\mathbf{W}_{Ci})^T (\mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{WCi}) + \\
& (\mathbf{W}_{Di})^T \left( 1 - \frac{d_{WD_i}}{d_{Di}} \right) \mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{d30i} + \\
& (\mathbf{F}_{RCi})^T (\mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{PCi}) \delta\theta_{29i} + \\
& (\mathbf{W}_P)^T \delta \mathbf{R}_{OM} + \\
& (\mathbf{W}_P)^T (\mathbf{U}_{1M} \mathbf{r}_{WM}) \delta\psi + \\
& (\mathbf{W}_P)^T (\mathbf{U}_{2M} \mathbf{r}_{WM}) \delta\theta + \\
& (\mathbf{W}_P)^T (\mathbf{U}_{3M} \mathbf{r}_{WM}) \delta\phi + \\
& \sum_{i=1}^3 T_{1i} \delta\theta_{7i} + \sum_{i=1}^3 T_{3i} (\delta\theta_{7i} + \delta\theta_{10i})
\end{aligned} \tag{4.89}$$

donde:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}_{7i})^T (\mathbf{x}_{7i}) &= 1 \\
(\mathbf{x}'_{7i})^T (\mathbf{x}'_{7i}) &= 1
\end{aligned}$$

quedando finalmente:

$$\begin{aligned} \delta W = & \sum_{i=1}^3 [h_{1i} \delta\theta_{4i} + h_{2i} \delta\theta_{7i} + h_{3i} \delta\theta_{10i} + h_{4i} \delta\theta_{23i} + h_{5i} \delta\theta_{29i}] + h_{6i} \delta\psi + h_{7i} \delta\theta + h_{8i} \delta\phi + \\ & (\mathbf{W}_P)^T \delta \mathbf{R}_{OM} + \sum_{i=1}^3 T_{1i} \delta\theta_{7i} + \sum_{i=1}^3 T_{3i} (\delta\theta_{7i} + \delta\theta_{10i}) \end{aligned} \quad (4.90)$$

donde:

$$\begin{aligned} h_{1i} = & (\mathbf{W}_{0i})^T (\mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{W0i}) + \\ & (\mathbf{W}_{1i})^T (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{W1i}) + \\ & (\mathbf{W}_{2i})^T (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{W2i}) + \\ & (\mathbf{W}_{3i})^T (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{W3i}) + \\ & (\mathbf{W}_{4i})^T (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}'_{d9i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{W4i}) + \\ & (\mathbf{W}_{5i})^T (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{4i} (\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i})) + \\ & (\mathbf{W}_{Bi})^T \left( \frac{d_{WB_i}}{d_{B_i}} (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}'_{d6i}) + \mathbf{U}_{6i} \mathbf{r}_{P3i}) \right) + \\ & (\mathbf{W}_{Di})^T \left( \frac{d_{WD_i}}{d_{D_i}} (\mathbf{U}_{1i} (\mathbf{r}_{d5i} + \mathbf{r}_{d6i}) + \mathbf{U}_{2i} \mathbf{r}_{P1i}) \right) + \\ & (\mathbf{F}_{R0i})^T \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{P0i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{2i} = & (\mathbf{W}_{1i})^T \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{W1i} + \\ & (\mathbf{W}_{2i})^T (\mathbf{U}_{3i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{W2i}) + \\ & (\mathbf{W}_{3i})^T (\mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{W3i}) + \\ & (\mathbf{W}_{4i})^T (\mathbf{U}_{7i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}'_{d9i}) + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{W4i}) + \\ & (\mathbf{W}_{5i})^T (\mathbf{U}_{3i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}_{d9i}) + \mathbf{U}_{5i} (\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i})) + \\ & (\mathbf{W}_{Bi})^T \left( \frac{d_{WB_i}}{d_{B_i}} \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{P3i} \right) + \\ & (\mathbf{W}_{Di})^T \left( \frac{d_{WD_i}}{d_{D_i}} \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{P1i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{3i} = & (\mathbf{W}_{2i})^T (\mathbf{U}_{5i} \mathbf{r}_{W2i}) + \\ & (\mathbf{W}_{3i})^T (\mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{W3i}) + \\ & (\mathbf{W}_{4i})^T (\mathbf{U}_{7i} (\mathbf{r}_{d8i} + \mathbf{r}'_{d9i})) + \\ & (\mathbf{W}_{5i})^T \mathbf{U}_{5i} (\mathbf{r}_{d11i} + \mathbf{r}_{d13i}) + \\ & (\mathbf{W}_{Bi})^T \left( \frac{d_{WB_i}}{d_{B_i}} \mathbf{U}_{7i} \mathbf{r}_{P3i} \right) \end{aligned}$$

$$h_{4i} = (\mathbf{W}_{Ai})^T (\mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{WAi}) + (\mathbf{W}_{Bi})^T \left( 1 - \frac{d_{WB_i}}{d_{B_i}} \right) \mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{d24i} + (\mathbf{F}_{RAi})^T (\mathbf{U}_{8i} \mathbf{r}_{PAi})$$

$$h_{5i} = (\mathbf{W}_{Ci})^T (\mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{WCi}) + (\mathbf{W}_{Di})^T \left( 1 - \frac{d_{WD_i}}{d_{D_i}} \right) \mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{d30i} + (\mathbf{F}_{RCi})^T (\mathbf{U}_{9i} \mathbf{r}_{PCi})$$

$$h_6 = (\mathbf{W}_P)^T (\mathbf{U}_{1M} \mathbf{r}_{WM})$$

$$h_7 = (\mathbf{W}_P)^T (\mathbf{U}_{2M} \mathbf{r}_{WM})$$

$$h_8 = (\mathbf{W}_P)^T (\mathbf{U}_{3M} \mathbf{r}_{WM})$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^3 [ h_{1i}, h_{2i}, h_{3i}, h_{4i}, h_{5i} ] \begin{bmatrix} \delta\theta_{4i} \\ \delta\theta_{7i} \\ \delta\theta_{10i} \\ \delta\theta_{23i} \\ \delta\theta_{29i} \end{bmatrix} + [ \mathbf{W}_P, h_6, h_7, h_8 ] \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta\psi \\ \delta\theta \\ \delta\phi \end{bmatrix} + [ T_{11}, T_{31}, T_{12}, T_{32}, T_{13}, T_{33} ] \begin{bmatrix} \delta\theta_{71} \\ \delta\theta_{71} + \delta\theta_{101} \\ \delta\theta_{72} \\ \delta\theta_{72} + \delta\theta_{102} \\ \delta\theta_{73} \\ \delta\theta_{73} + \delta\theta_{103} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

finalmente la expresión que define el trabajo virtual para la PE es:

$$\delta W = \sum_{i=1}^3 \mathbf{h}_{ai} \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{h}_b \delta \mathbf{p} + \mathbf{T} \delta \mathbf{s} \quad (4.92)$$

donde:

$$\mathbf{h}_{ai} = [ h_{1i}, h_{2i}, h_{3i}, h_{4i}, h_{5i} ]$$

$$\mathbf{h}_b = [ \mathbf{W}_P, h_6, h_7, h_8 ]$$

$$\mathbf{T} = [ T_{11}, T_{31}, T_{12}, T_{32}, T_{13}, T_{33} ]$$

$$\delta \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} \delta \theta_{4i} \\ \delta \theta_{7i} \\ \delta \theta_{10i} \\ \delta \theta_{23i} \\ \delta \theta_{29i} \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta \psi \\ \delta \theta \\ \delta \phi \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \delta \theta_{71} \\ \delta \theta_{71} + \delta \theta_{101} \\ \delta \theta_{72} \\ \delta \theta_{72} + \delta \theta_{102} \\ \delta \theta_{73} \\ \delta \theta_{73} + \delta \theta_{103} \end{bmatrix}$$

Como se puede ver en la ec.(4.92) para tener completa toda la información que agrupa esta expresión, es necesario determinar los desplazamientos virtuales para los ángulos que requiere, para ello haremos uso de la siguiente definición [33]:

$$\delta \theta = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \quad (4.93)$$

donde  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$ ,  $q_4 = \psi$ ,  $q_5 = \theta$  y  $q_6 = \phi$ . Por lo tanto para determinar el desplazamiento virtual de un ángulo, hay que obtener la derivada parcial de la velocidad del mismo con respecto a la variable  $q$ . Así que serán usadas las expresiones obtenidas en el análisis de velocidad para cada ángulo, ecs.(2.51), (2.57), (2.55), (2.78) y (2.86) respectivamente:

$$\dot{\theta}_{4i} = F_{1i} \dot{x} + F_{2i} \dot{y} + F_{3i} \dot{z} + F_{4i} \dot{\psi} + F_{5i} \dot{\theta} + F_{6i} \dot{\phi}$$

$$\dot{\theta}_{7i} = -\frac{1}{c_{2i}} \left( K_{1i} \dot{x} + K_{2i} \dot{y} + K_{3i} \dot{z} + K_{4i} \dot{\psi} + K_{5i} \dot{\theta} + K_{6i} \dot{\phi} \right)$$

$$\dot{\theta}_{10i} = J_{1i} \dot{x} + J_{2i} \dot{y} + J_{3i} \dot{z} + J_{4i} \dot{\psi} + J_{5i} \dot{\theta} + J_{6i} \dot{\phi}$$

$$\dot{\theta}_{23i} = \frac{1}{G_{6i}} G_{7i} \dot{x} + G_{8i} \dot{y} + G_{9i} \dot{z} + G_{10i} \dot{\psi} + G_{11i} \dot{\theta} + G_{12i} \dot{\phi}$$

$$\dot{\theta}_{29i} = \frac{1}{G_{18i}} \left( G_{19i} \dot{x} + G_{20i} \dot{y} + G_{21i} \dot{z} + G_{22i} \dot{\psi} + G_{23i} \dot{\theta} + G_{24i} \dot{\phi} \right)$$

aplicando definición (4.93), para  $\dot{\theta}_{4i}$ :

$$\begin{aligned}\delta\theta_{4i} &= \frac{\partial\dot{\theta}_{4i}}{\partial\dot{x}} \delta x + \frac{\partial\dot{\theta}_{4i}}{\partial\dot{y}} \delta y + \frac{\partial\dot{\theta}_{4i}}{\partial\dot{z}} \delta z + \frac{\partial\dot{\theta}_{4i}}{\partial\dot{\psi}} \delta\psi + \frac{\partial\dot{\theta}_{4i}}{\partial\dot{\theta}} \delta\theta + \frac{\partial\dot{\theta}_{4i}}{\partial\dot{\phi}} \delta\phi \\ &= F_{1i} \delta x + F_{2i} \delta y + F_{3i} \delta z + F_{4i} \delta\psi + F_{5i} \delta\theta + F_{6i} \delta\phi\end{aligned}\quad (4.94)$$

por lo tanto el desplazamiento virtual para los ángulos restantes queda como:

$$\delta\theta_{7i} = -\frac{1}{c_{2i}} (K_{1i} \delta x + K_{2i} \delta y + K_{3i} \delta z + K_{4i} \delta\psi + K_{5i} \delta\theta + K_{6i} \delta\phi) \quad (4.95)$$

$$\delta\theta_{10i} = J_{1i} \delta x + J_{2i} \delta y + J_{3i} \delta z + J_{4i} \delta\psi + J_{5i} \delta\theta + J_{6i} \delta\phi \quad (4.96)$$

$$\delta\theta_{23i} = \frac{1}{G_{6i}} (G_{7i} \delta x + G_{8i} \delta y + G_{9i} \delta z + G_{10i} \delta\psi + G_{11i} \delta\theta + G_{12i} \delta\phi) \quad (4.97)$$

$$\delta\theta_{29i} = \frac{1}{G_{18i}} (G_{19i} \delta x + G_{20i} \delta y + G_{21i} \delta z + G_{22i} \delta\psi + G_{23i} \delta\theta + G_{24i} \delta\phi) \quad (4.98)$$

además:

$$\begin{aligned}\delta\theta_{7i} + \delta\theta_{10i} &= \left( J_{1i} - \frac{K_{1i}}{c_{2i}} \right) \delta x + \left( J_{2i} - \frac{K_{2i}}{c_{2i}} \right) \delta y + \left( J_{3i} - \frac{K_{3i}}{c_{2i}} \right) \delta z + \\ &\quad \left( J_{4i} - \frac{K_{4i}}{c_{2i}} \right) \delta\psi + \left( J_{5i} - \frac{K_{5i}}{c_{2i}} \right) \delta\theta + \left( J_{6i} - \frac{K_{6i}}{c_{2i}} \right) \delta\phi \\ &= S_{1i} \delta x + S_{2i} \delta y + S_{3i} \delta z + S_{4i} \delta\psi + S_{5i} \delta\theta + S_{6i} \delta\phi\end{aligned}\quad (4.99)$$

donde:

$$\begin{aligned}S_{1i} &= \left( J_{1i} - \frac{K_{1i}}{c_{2i}} \right) & S_{2i} &= \left( J_{2i} - \frac{K_{2i}}{c_{2i}} \right) & S_{3i} &= \left( J_{3i} - \frac{K_{3i}}{c_{2i}} \right) \\ S_{5i} &= \left( J_{5i} - \frac{K_{5i}}{c_{2i}} \right) & S_{6i} &= \left( J_{6i} - \frac{K_{6i}}{c_{2i}} \right) & S_{4i} &= \left( J_{4i} - \frac{K_{4i}}{c_{2i}} \right)\end{aligned}$$

## 4.5. Determinación del Equilibrio Estático

Todos los desplazamientos virtuales del sistema han sido determinados, por lo tanto la expresión final para el trabajo virtual es construida. La cual se resuelve para la magnitud de los torques ( $\mathbf{T}$ ).

Al sustituir todos los datos físicos de la plataforma y condiciones obtenidas del balanceo estático dentro de esta expresión final determinan que las fuerzas externas que actúan sobre la plataforma espacial están en equilibrio estático y con ello es demostrada la veracidad de los datos obtenidos en el capítulo 3.

Se tiene lo siguiente:

$$\delta \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} \delta \theta_{4i} \\ \delta \theta_{7i} \\ \delta \theta_{10i} \\ \delta \theta_{23i} \\ \delta \theta_{29i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1i} \delta x + F_{2i} \delta y + F_{3i} \delta z + F_{4i} \delta \psi + F_{5i} \delta \theta + F_{6i} \delta \phi \\ -\frac{1}{c_{2i}}(K_{1i} \delta x + K_{2i} \delta y + K_{3i} \delta z + K_{4i} \delta \psi + K_{5i} \delta \theta + K_{6i} \delta \phi) \\ J_{1i} \delta x + J_{2i} \delta y + J_{3i} \delta z + J_{4i} \delta \psi + J_{5i} \delta \theta + J_{6i} \delta \phi \\ \frac{1}{G_{6i}}(G_{7i} \delta x + G_{8i} \delta y + G_{9i} \delta z + G_{10i} \delta \psi + G_{11i} \delta \theta + G_{12i} \delta \phi) \\ \frac{1}{G_{18i}}(G_{19i} \delta x + G_{20i} \delta y + G_{21i} \delta z + G_{22i} \delta \psi + G_{23i} \delta \theta + G_{24i} \delta \phi) \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\delta \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} F_{1i} & F_{2i} & F_{3i} & F_{4i} & F_{5i} & F_{6i} \\ -\frac{K_{1i}}{c_{2i}} & -\frac{K_{2i}}{c_{2i}} & -\frac{K_{3i}}{c_{2i}} & -\frac{K_{4i}}{c_{2i}} & -\frac{K_{5i}}{c_{2i}} & -\frac{K_{6i}}{c_{2i}} \\ J_{1i} & J_{2i} & J_{3i} & J_{4i} & J_{5i} & J_{6i} \\ \frac{G_{7i}}{G_{6i}} & \frac{G_{8i}}{G_{6i}} & \frac{G_{9i}}{G_{6i}} & \frac{G_{10i}}{G_{6i}} & \frac{G_{11i}}{G_{6i}} & \frac{G_{12i}}{G_{6i}} \\ \frac{G_{19i}}{G_{18i}} & \frac{G_{20i}}{G_{18i}} & \frac{G_{21i}}{G_{18i}} & \frac{G_{22i}}{G_{18i}} & \frac{G_{23i}}{G_{18i}} & \frac{G_{24i}}{G_{18i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta \psi \\ \delta \theta \\ \delta \phi \end{bmatrix}$$

finalmente:

$$\boxed{\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{M}_{eli} \delta \mathbf{p}} \quad (4.100)$$

donde:

$$M_{e1i} = \begin{bmatrix} \frac{F_{1i}}{K_{1i}} & \frac{F_{2i}}{K_{2i}} & \frac{F_{3i}}{K_{3i}} & \frac{F_{4i}}{K_{4i}} & \frac{F_{5i}}{K_{5i}} & \frac{F_{6i}}{K_{6i}} \\ c_{2i} & c_{2i} & c_{2i} & c_{2i} & c_{2i} & c_{2i} \\ J_{1i} & J_{2i} & J_{3i} & J_{4i} & J_{5i} & J_{6i} \\ \frac{G_{7i}}{G_{7i}} & \frac{G_{8i}}{G_{8i}} & \frac{G_{9i}}{G_{9i}} & \frac{G_{10i}}{G_{10i}} & \frac{G_{11i}}{G_{11i}} & \frac{G_{12i}}{G_{12i}} \\ \frac{G_{6i}}{G_{19i}} & \frac{G_{6i}}{G_{20i}} & \frac{G_{6i}}{G_{21i}} & \frac{G_{6i}}{G_{22i}} & \frac{G_{6i}}{G_{23i}} & \frac{G_{6i}}{G_{24i}} \\ \frac{G_{18i}}{G_{18i}} & \frac{G_{18i}}{G_{18i}} & \frac{G_{18i}}{G_{18i}} & \frac{G_{18i}}{G_{18i}} & \frac{G_{18i}}{G_{18i}} & \frac{G_{18i}}{G_{18i}} \end{bmatrix}$$

$$\delta p = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta \psi \\ \delta \theta \\ \delta \phi \end{bmatrix}$$

Además se tiene lo siguiente:

$$\delta s = \begin{bmatrix} \delta \theta_{71} \\ \delta \theta_{71} + \delta \theta_{101} \\ \delta \theta_{72} \\ \delta \theta_{72} + \delta \theta_{102} \\ \delta \theta_{73} \\ \delta \theta_{73} + \delta \theta_{103} \end{bmatrix}$$

donde  $\delta s$ , es igual a :

$$\delta s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c_{21}}(K_{11} \delta x + K_{21} \delta y + K_{31} \delta z + K_{41} \delta \psi + K_{51} \delta \theta + K_{61} \delta \phi) \\ S_{11} \delta x + S_{21} \delta y + S_{31} \delta z + S_{41} \delta \psi + S_{51} \delta \theta + S_{61} \delta \phi \\ -\frac{1}{c_{22}}(K_{12} \delta x + K_{22} \delta y + K_{32} \delta z + K_{42} \delta \psi + K_{52} \delta \theta + K_{62} \delta \phi) \\ S_{12} \delta x + S_{22} \delta y + S_{32} \delta z + S_{42} \delta \psi + S_{52} \delta \theta + S_{62} \delta \phi \\ -\frac{1}{c_{23}}(K_{13} \delta x + K_{23} \delta y + K_{33} \delta z + K_{43} \delta \psi + K_{53} \delta \theta + K_{63} \delta \phi) \\ S_{13} \delta x + S_{23} \delta y + S_{33} \delta z + S_{43} \delta \psi + S_{53} \delta \theta + S_{63} \delta \phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{K_{11}}{c_{21}} & -\frac{K_{21}}{c_{21}} & -\frac{K_{31}}{c_{21}} & -\frac{K_{41}}{c_{21}} & -\frac{K_{51}}{c_{21}} & -\frac{K_{61}}{c_{21}} \\ S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} & S_{51} & S_{61} \\ -\frac{K_{12}}{c_{22}} & -\frac{K_{22}}{c_{22}} & -\frac{K_{32}}{c_{22}} & -\frac{K_{42}}{c_{22}} & -\frac{K_{52}}{c_{22}} & -\frac{K_{62}}{c_{22}} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & S_{42} & S_{52} & S_{62} \\ -\frac{K_{13}}{c_{23}} & -\frac{K_{23}}{c_{23}} & -\frac{K_{33}}{c_{23}} & -\frac{K_{43}}{c_{23}} & -\frac{K_{53}}{c_{23}} & -\frac{K_{63}}{c_{23}} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{43} & S_{53} & S_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta \psi \\ \delta \theta \\ \delta \phi \end{bmatrix}$$

finalmente:

$$\boxed{\delta s = M_{e2} \delta p} \tag{4.101}$$

donde:

$$M_{e2} = \begin{bmatrix} -\frac{K_{11}}{c_{21}} & -\frac{K_{21}}{c_{21}} & -\frac{K_{31}}{c_{21}} & -\frac{K_{41}}{c_{21}} & -\frac{K_{51}}{c_{21}} & -\frac{K_{61}}{c_{21}} \\ S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} & S_{51} & S_{61} \\ -\frac{K_{12}}{c_{22}} & -\frac{K_{22}}{c_{22}} & -\frac{K_{32}}{c_{22}} & -\frac{K_{42}}{c_{22}} & -\frac{K_{52}}{c_{22}} & -\frac{K_{62}}{c_{22}} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & S_{42} & S_{52} & S_{62} \\ -\frac{K_{13}}{c_{23}} & -\frac{K_{23}}{c_{23}} & -\frac{K_{33}}{c_{23}} & -\frac{K_{43}}{c_{23}} & -\frac{K_{53}}{c_{23}} & -\frac{K_{63}}{c_{23}} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{43} & S_{53} & S_{63} \end{bmatrix}$$

$$\delta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta \psi \\ \delta \theta \\ \delta \phi \end{bmatrix}$$

sustituyendo ec.(4.100) y (4.101) en (4.92)

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^3 h_{oi} M_{e1i} \delta \mathbf{p} + h_b \delta \mathbf{p} + \mathbf{T} M_{e2} \delta \mathbf{p} = 0 \\ &= \left( \sum_{i=1}^3 h_{ai} M_{e1i} + h_b + \mathbf{T} M_{e2} \right) \delta \mathbf{p} = 0 \end{aligned} \quad (4.102)$$

ya que  $\delta \mathbf{p} \neq 0$ , se tiene:

$$\sum_{i=1}^3 h_{ai} M_{e1i} + h_b + \mathbf{T} M_{e2} = 0 \quad (4.103)$$

resolviendo para  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} M_{e2} (M_{e2})^{-1} &= - \left( \sum_{i=1}^3 h_{ai} M_{e1i} + h_b \right) (M_{e2})^{-1} \\ \mathbf{T} &= - \left( \sum_{i=1}^3 h_{ai} M_{e1i} + h_b \right) (M_{e2})^{-1} \end{aligned}$$

finalmente el torque  $\mathbf{T}$  queda expresado por

$$\boxed{\mathbf{T} = - (h_{a1} M_{e11} + h_{a2} M_{e12} + h_{a3} M_{e13} + h_b) (M_{e2})^{-1}} \quad (4.104)$$

Se tienen las siguientes definiciones:

$$W_{ji} = [0, 0, -m_{ji} g]^T \quad (4.105)$$

$$W_{A_i} = [0, 0, -m_{A_i} g]^T \quad (4.106)$$

$$W_{B_i} = [0, 0, -m_{B_i} g]^T \quad (4.107)$$

$$W_{C_i} = [0, 0, -m_{C_i} g]^T \quad (4.108)$$

$$W_{D_i} = [0, 0, -m_{D_i} g]^T \quad (4.109)$$

$$W_P = [0, 0, -m_P g]^T \quad (4.110)$$

Con base en la figura 4-4, es posible deducir lo siguiente:

4.5.1. Vector  $F_{R0i}$ :

$$\begin{aligned}
 F_{R0i} &= f_{R0i} U_{R0i} \\
 &= k_{0i} (\ell_f - \ell_i) U_{R0i} \\
 &= k_{0i} (\ell_f) U_{R0i} \\
 &= (k_{0i} e_{0i}) U_{R0i} \\
 U_{R0i} &= \frac{(\mathbf{R}_{0i} - \mathbf{R}_{R0i})}{e_{0i}} \\
 F_{R0i} &= (k_{0i} e_{0i}) \frac{(\mathbf{R}_{0i} - \mathbf{R}_{R0i})}{e_{0i}} \\
 &= k_{0i} (\mathbf{R}_{0i} - \mathbf{R}_{R0i})
 \end{aligned} \tag{4.111}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{0i} &= [x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}]^T \\
 \mathbf{R}_{R0i} &= \mathbf{R}_{d2i} + \mathbf{R}_{d3i} + \mathbf{R}_{P0i}
 \end{aligned}$$

4.5.2. Vector  $F_{RAi}$ :

$$\begin{aligned}
 F_{RAi} &= f_{RAi} U_{RAi} \\
 &= (k_{Ai} e_{Ai}) U_{RAi} \\
 U_{RAi} &= \frac{(\mathbf{R}_{Ai} - \mathbf{R}_{RAi})}{e_{Ai}} \\
 F_{RAi} &= k_{Ai} (\mathbf{R}_{Ai} - \mathbf{R}_{RAi})
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{Ai} &= [x_{Ai}, y_{Ai}, z_{Ai}]^T \\
 \mathbf{R}_{RAi} &= \mathbf{R}_{d20i} + \mathbf{R}_{d22i} + \mathbf{R}_{P.Ai}
 \end{aligned}$$

4.5.3. Vector  $F_{RCi}$ :

$$\begin{aligned}
 F_{RCi} &= f_{RCi} U_{RCi} \\
 &= (k_{Ci} e_{Ci}) U_{RCi} \\
 U_{RCi} &= \frac{(\mathbf{R}_{ACi} - \mathbf{R}_{RCi})}{e_{Ci}} \\
 F_{RCi} &= k_{Ci} (\mathbf{R}_{ACi} - \mathbf{R}_{RCi})
 \end{aligned}$$

donde:

$$\mathbf{R}_{Ci} = [x_{Ci}, y_{Ci}, z_{Ci}]^T$$

$$\mathbf{R}_{RCi} = \mathbf{R}_{d26i} + \mathbf{R}_{d28i} + \mathbf{R}_{PCi}$$

A continuación son mostrados los datos sustituidos en la formulación del método del trabajo virtual.

Análisis Estático.nb

1

## Datos

```

In[88]:=
In[89]:= Off[General::"spell"];
δ11 = 0;
δ12 = 120 * Degree;
δ13 = 240 * Degree;
d21 = d22 = d23 = 200 / 1000;
d31 = d32 = d33 = 55 / 1000;
d51 = d52 = d53 = 100 / 1000;
d61 = d62 = d63 = 0.65 / 1000;
d81 = d82 = d83 = 0.15;
d91 = d92 = d93 = 17.7 / 1000;
d111 = d112 = d113 = 0.15;
d131 = d132 = d133 = 26.35 / 1000;
d151 = d152 = d153 = 60.675 * 1000;
d221 = d222 = d223 = -0.03466191683171596;
d241 = d242 = d243 = 0.16468154440195779;
d201 = d202 = d203 = 280 / 1000;
d261 = d262 = d263 = 120 / 1000;
d281 = d282 = d283 = -0.03466191683171596;
d301 = d302 = d303 = 0.16468154440195779;
d81 = d82 = d83 = 0.1395299046141606;
d81 = d82 = d83 = 0.1395299046141606;
yP11 = yP12 = yP13 = 70 / 1000;
yP31 = yP32 = yP33 = 70 / 1000;
xP11 = xP12 = xP13 = 27.7 / 1000;
xP31 = xP32 = xP33 = 27.7 / 1000;
β71 = (θ71 - θ101) - 2 * P1;
β72 = (θ72 - θ102) - 2 * P1;
β73 = (θ73 - θ103) - 2 * P1;
δ171 = 0;
δ172 = 120 * Degree;
δ173 = 240 * Degree;
δ191 = 0;
δ192 = 120 * Degree;
δ193 = 240 * Degree;
δ211 = δ212 = δ213 = 0;
δ251 = 0;
δ252 = 120 * Degree;
δ253 = 240 * Degree;
δ271 = δ272 = δ273 = 0;
d181 = d182 = d183 = 200 / 1000;

Datos1 = {
  grav -> 9.81,

```

```

m01 → 0.17031000997, m02 → 0.17031000997, m03 → 0.17031000997,
m11 → 0.17295721422, m12 → 0.17295721422, m13 → 0.17295721422,
m21 → 0.11278087110, m22 → 0.11278087110, m23 → 0.11278087110,
m31 → 0.17295721422, m32 → 0.17295721422, m33 → 0.17295721422,
m41 → 0.11278087110, m42 → 0.11278087110, m43 → 0.11278087110,
m51 → 0.07598201246, m52 → 0.07598201246, m53 → 0.07598201246,
mA1 → 0.21523660592, mA2 → 0.21523660592, mA3 → 0.21523660592,
mB1 → 0.13037270907, mB2 → 0.13037270907, mB3 → 0.13037270907,
mC1 → 0.21523660592, mC2 → 0.21523660592, mC3 → 0.21523660592,
mD1 → 0.13037270907, mD2 → 0.13037270907, mD3 → 0.13037270907,
xG01 → 0, xG02 → 0, xG03 → 0,
yG01 → 0, yG02 → 0, yG03 → 0,
zG01 → 0.04106351475, zG02 → 0.04106351475, zG03 → 0.04106351475,
xG11 → -0.01202047537, xG12 → -0.01202047537, xG13 → -0.01202047537,
yG11 → 0.04133159593, yG12 → 0.04133159593, yG13 → 0.04133159593,
zG11 → 0, zG12 → 0, zG13 → 0,
xG21 → 0, xG22 → 0, xG23 → 0,
yG21 → -1.3304164023868361,
yG22 → -1.3304164023868361, yG23 → -1.3304164023868361,
zG21 → 0, zG22 → 0, zG23 → 0,
xG31 → 0.01202047537, xG32 → 0.01202047537, xG33 → 0.01202047537,
yG31 → 0.04133159593, yG32 → 0.04133159593, yG33 → 0.04133159593,
zG31 → 0, zG32 → 0, zG33 → 0,
xG41 → 0, xG42 → 0, xG43 → 0,
yG41 → -1.3304164023868361,
yG42 → -1.3304164023868361, yG43 → -1.3304164023868361,
zG41 → 0, zG42 → 0, zG43 → 0,
xG51 → 0, xG52 → 0, xG53 → 0,
yG51 → 0, yG52 → 0, yG53 → 0,
zG51 → 0, zG52 → 0, zG53 → 0,
xGA1 → 0, xGA2 → 0, xGA3 → 0,
yGA1 → 0, yGA2 → 0, yGA3 → 0,
zGA1 → 0.05620634017, zGA2 → 0.05620634017, zGA3 → 0.05620634017,
xGC1 → 0, xGC2 → 0, xGC3 → 0,
yGC1 → 0, yGC2 → 0, yGC3 → 0,
zGC1 → 0.05620634017, zGC2 → 0.05620634017, zGC3 → 0.05620634017,
xs11 → 27.7 / 1000, xs12 → 27.7 / 1000, xs13 → 27.7 / 1000,
ys11 → 70 / 1000, ys12 → 70 / 1000, ys13 → 70 / 1000,
xs31 → 27.7 / 1000, xs32 → 27.7 / 1000, xs33 → 27.7 / 1000,
ys31 → 70 / 1000, ys32 → 70 / 1000, ys33 → 70 / 1000,
ds01 → 40 / 1000, ds02 → 40 / 1000, ds03 → 40 / 1000,
dsA1 → 45 / 1000, dsA2 → 45 / 1000, dsA3 → 45 / 1000,
dsC1 → 45 / 1000, dsC2 → 45 / 1000, dsC3 → 45 / 1000,
mF → 2.38290292515,
xGM → 0,
yGM → 0,
zGM → -0.06087499999999999,
x1F1 → 27.7 / 1000, x1F2 → 27.7 / 1000, x1F3 → 27.7 / 1000,
s11 → 70 / 1000, s12 → 70 / 1000, s13 → 70 / 1000,
s31 → 70 / 1000, s32 → 70 / 1000, s33 → 70 / 1000,
dGB1 → 0.06975900298, dGB2 → 0.06975900298, dGB3 → 0.06975900298,

```

```

dσD1 → 0.06975900298, dσD2 → 0.06975900298, dσD3 → 0.06975900298,
x01 → 200 / 1000, x02 → - $\frac{1}{10}$ , x03 → - $\frac{1}{10}$ ,
y01 → 0, y02 →  $\frac{\sqrt{3}}{10}$ , y03 → - $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ,
z01 → -85 / 1000, z02 → - $\frac{17}{200}$ , z03 → - $\frac{17}{200}$ ,
k01 → 287.65302875737495, k02 → 287.65302875737495, k03 → 287.65302875737495.
kA1 → 98.88195427697732, kA2 → 98.88195427697732, kA3 → 98.88195427697732.
kC1 → 98.88195427697732, kC2 → 98.88195427697732, kC3 → 98.88195427697732,
xA1 → 280 / 1000, xA2 → - $\frac{7}{50}$ , xA3 → - $\frac{7}{50}$ ,
yA1 → 0, yA2 →  $\frac{7\sqrt{3}}{50}$ , yA3 → - $\frac{7\sqrt{3}}{50}$ ,
zA1 → -85 / 1000, zA2 → - $\frac{17}{200}$ , zA3 → - $\frac{17}{200}$ ,
xC1 → 120 / 1000, xC2 → - $\frac{3}{50}$ , xC3 → - $\frac{3}{50}$ ,
yC1 → 0, yC2 →  $\frac{3\sqrt{3}}{50}$ , yC3 → - $\frac{3\sqrt{3}}{50}$ ,
zC1 → -85 / 1000, zC2 → - $\frac{17}{200}$ , zC3 → - $\frac{17}{200}$ .
d211 → -0.03466191883171596,
d212 → -0.03466191883171596, d213 → -0.03466191883171596
};

```

De la figura 4-5 se puede deducir que la magnitud de los torques requeridos para mantener el equilibrio estático de la plataforma espacial es casi cero, cuando está recorren la trayectoria descrita en el Apéndice B en un tiempo de 10 seg. Al ya estar balanceada estáticamente la plataforma.

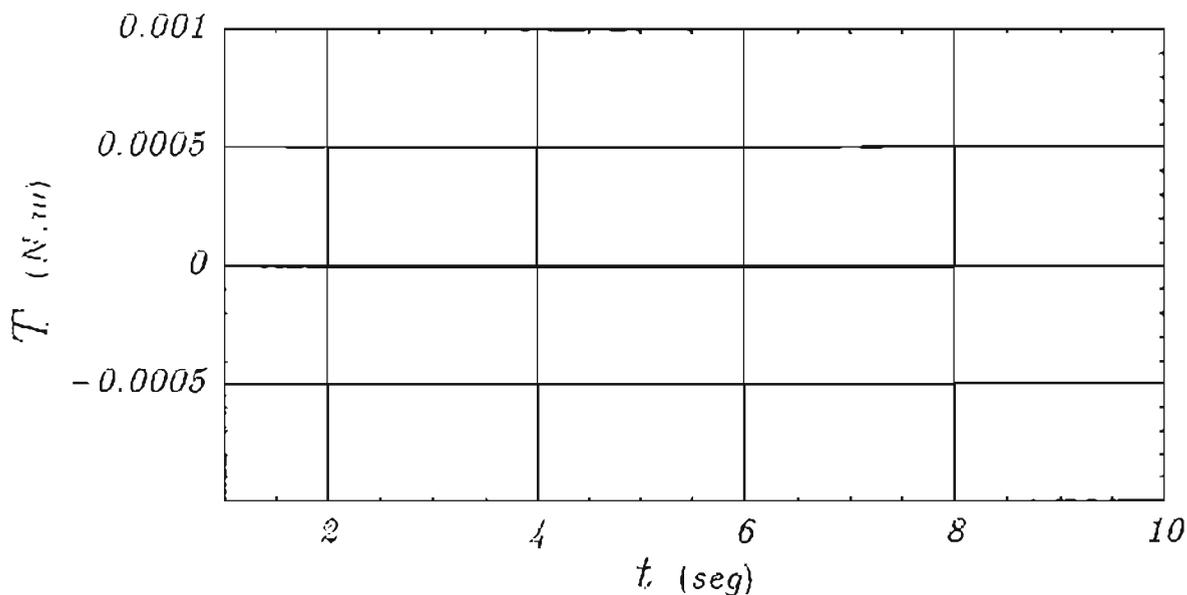


Figura 4-5 Equilibrio estático

A continuación se muestra la figura 4-6, que describe el comportamiento de los torques  $T_1$  y  $T_3$  de la plataforma espacial, al recorrer la trayectoria descrita en el Apéndice B. La línea negra corresponde a  $T_{11}$  y  $T_{31}$ , la línea punteada a  $T_{12}$  y  $T_{32}$  y la línea gris a  $T_{13}$  y  $T_{33}$ .

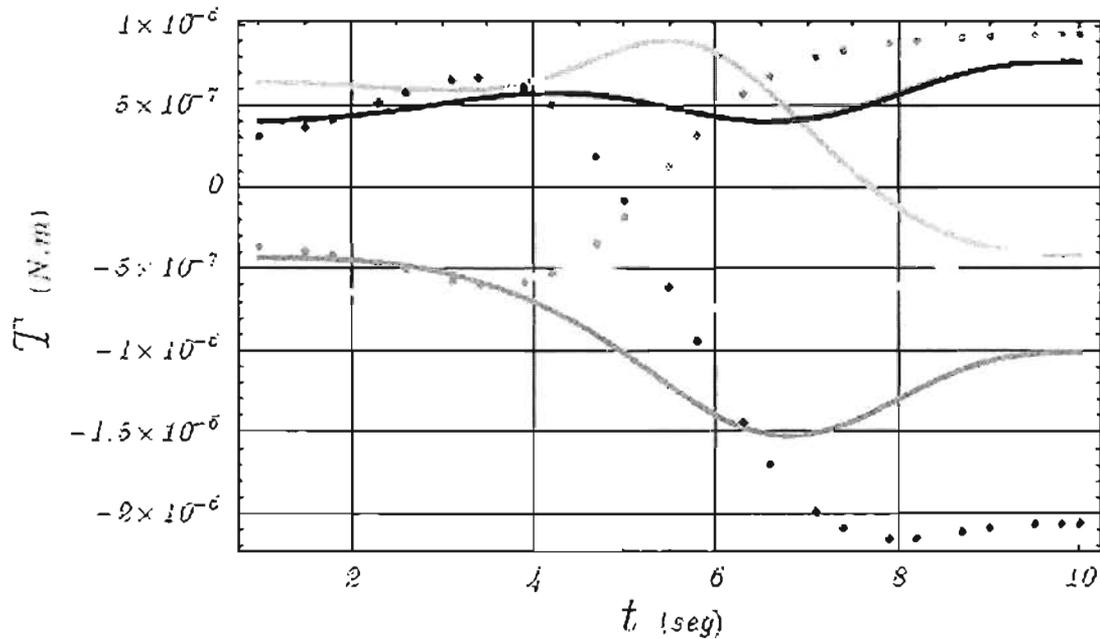


Figura 4-6 Torques

Como se puede ver en las figuras 4-5 y 4-6 los valores para los torques pueden ser considerados como cero, los datos obtenidos del balanceo estático permiten equilibrar las fuerzas externas que actúan sobre la plataforma espacial, logrando con ello que el centro global de masa del sistema permanezca fijo para cualquier configuración posible de la misma.

# Conclusiones

El problema cinemático inverso para la plataforma espacial es resuelto en el capítulo 2, mediante el uso de matrices de transformación homogéneas. Obteniendo posición y velocidad por medio de expresiones cerradas.

La arquitectura original de la plataforma espacial es modificada, esto es desarrollado en la sección 2.4. Mecanismo Adicional.

Dichas modificaciones permiten que los parámetros que forman la energía potencial total del sistema, al ser agrupados en función de los ángulos que varían con respecto al tiempo, originen un sistema de ecuaciones para el balanceo estático, posible de satisfacer.

Al resolver tales ecuaciones son obtenidos valores de centros de gravedad, masa y coeficientes de rigidez.

El equilibrio estático de las fuerzas externas que actúan sobre la plataforma espacial, es demostrado al sustituir los datos físicos de la plataforma junto con los valores obtenidos en el balanceo estático en la expresión del trabajo virtual del sistema. Lo cual es más evidente al ver la gráfica en la figura 4-5.

Con la certeza de que este sistema de ecuaciones resuelve satisfactoriamente para el balanceo estático de la plataforma espacial, es como en el Apéndice C es desarrollado un nuevo análisis de los parámetros involucrados en el balanceo estático y con ello se presenta una posible arquitectura para la plataforma espacial balanceada estáticamente.

Por lo tanto es posible concluir que la arquitectura que finalmente se muestra aquí, no requiere de alguna fuerza externa para mantener su equilibrio estático con respecto a una orientación en particular.

---

# Apéndice A

---

## Ecuación Trascendental

Considerando la ecuación:

$$Ac\psi + Bs\psi = C \quad (\text{A.1})$$

se tiene:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}c\psi + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}s\psi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{A.2})$$

por lo tanto, considerando el triángulo rectángulo mostrado en la figura A-1 se tiene:

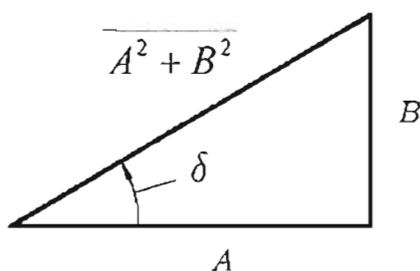


Figura A-1

$$c\delta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{A.3})$$

$$s\delta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{A.4})$$

siendo  $s = \text{seno}$ ,  $c = \text{coseno}$

de donde:

$$c\delta c\psi + c\delta s\psi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$c(\psi - \delta) = c\epsilon$$

$$c(\psi - \delta) = c(-\epsilon)$$

debido a que  $\psi - \delta = \epsilon$  tienen el mismo coseno, por lo tanto:

$$\text{arc cos } c(\psi - \delta) = \text{arc cos}(c\epsilon)$$

$$\psi - \delta = \epsilon$$

$$\psi - \delta = -\epsilon \quad (\text{A.5})$$

así:

$$\psi = \delta \pm \epsilon \quad (\text{A.6})$$

también:

$$c\epsilon = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

donde:

$$\text{arc cos}(c\epsilon) = \text{arc cos}\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$$

$$\epsilon = \text{arc cos}\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \quad (\text{A.7})$$

de ec.(A.4):

$$\frac{s\delta}{c\delta} = \frac{B}{A}$$

$$\tan\delta = \frac{B}{A}$$

$$\delta = \text{arc tan}\left(\frac{B}{A}\right) \quad (\text{A.8})$$

sustituyendo ec.(A.7) y (A.8) en (A.6), se obtiene la ecuación de transformación en términos del ángulo de salida:

$$\boxed{\psi = \text{arc tan}\left(\frac{B}{A}\right) \pm \text{arc cos}\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)} \quad (\text{A.9})$$

---

# Apéndice B

---

## Generación de Trayectoria

El propósito de generar una trayectoria [30], es establecer los puntos de referencia, al sistema de control de movimiento del mecanismo. Lo cual asegura que el mecanismo recorrerá el camino planeado. Esto consiste en generar una sucesión del tiempo para los valores obtenidos por la interpolación de una ecuación polinomial de la trayectoria deseada. Se usa un polinomio de quinto grado para suavizar la trayectoria:

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \\ \dot{s}(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \\ \ddot{s}(t) &= 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \end{aligned} \tag{B.1}$$

para  $t = t_0$  se tienen los valores:

$$\begin{aligned} s(t_0) &= 0 \\ \dot{s}(t_0) &= 0 \\ \ddot{s}(t_0) &= 0 \end{aligned} \tag{B.2}$$

al sustituirlos en las ecuaciones B.1 se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \implies a_0 = 0 \\ 0 &= a_1 \implies a_1 = 0 \\ 0 &= 2a_2 \implies a_2 = 0 \end{aligned} \tag{B.3}$$

para  $t = t_f$  se tienen los valores:

$$\begin{aligned} s(t_f) &= \|p_f - p_i\| \\ \dot{s}(t_f) &= 0 \\ \ddot{s}(t_f) &= 0 \end{aligned} \tag{B.4}$$

al sustituirlos euaciones B.2, B.3 y B.4 en B.1 se tiene:

$$\begin{aligned} \|p_f - p_i\| &= a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \\ 0 &= 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 \\ 0 &= 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 \end{aligned}$$

el sistema de ecuaciones queda de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3 t_f^2 & 4 t_f^3 & 5 t_f^4 \\ 6 t_f & 12 t_f^2 & 20 t_f^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|p_f - p_i\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

al resolver el sistema de la ec.(B.5) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_3 &= 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 \\ a_4 &= -15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 \\ a_5 &= 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \end{aligned}$$

Finalmente son obtenidas las ecuaciones que suavizan la trayectoria:

$$\begin{aligned} s(t) &= \|p_f - p_i\| \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] \\ \dot{s}(t) &= \|p_f - p_i\| \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] \\ \ddot{s}(t) &= \|p_f - p_i\| \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

donde la trayectoria planeada es una recta, que consta de un punto inicial ( $p_i$ ) y un punto final ( $p_f$ ), las ecuaciones que describen una recta, según [30] son:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_i + \frac{s(t)}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i) \\ v(t) &= \frac{\dot{s}(t)}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i) \\ a(t) &= \frac{\ddot{s}(t)}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Finalmente las ecuaciones de la trayectoria ya suavizadas resultan a sustituir en ecs.(B.7) las ecs. (B.6):

$$p(t) = p_i + \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (p_f - p_i) \quad (\text{B.8})$$

$$v(t) = \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (p_f - p_i) \quad (\text{B.9})$$

$$a(t) = \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (p_f - p_i) \quad (\text{B.10})$$

donde  $p_i = (x_i, y_i, z_i)$  y  $p_f = (x_f, y_f, z_f)$

Para la orientación:

$$\varphi(t) = \beta_i + \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (\beta_f - \beta_i) \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{\varphi}(t) = \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (\beta_f - \beta_i) \quad (\text{B.12})$$

$$\ddot{\varphi}(t) = \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (\beta_f - \beta_i) \quad (\text{B.13})$$

donde  $\beta_i = (\psi_i, \theta_i, \phi_i)$  y  $\beta_f = (\psi_f, \theta_f, \phi_f)$

---

# Apéndice C

---

## Matriz de Solución

En esta sección se muestran los resultados obtenidos al modificar los datos físicos de la plataforma espacial, para obtener una arquitectura que cumpla con las restricciones físicas y que sea posible la construcción de cada elemento de la misma.

El primer paso es simplificar lo más posible la geometría de los eslabones. Debido a que el sistema de ecuaciones (3.31) es tajante al declarar que el centro de gravedad de los eslabones no debe variar en los ejes  $x$  y  $z$  sino tan solo en el eje  $y$ . Así que primeramente serán evaluados eslabones de geometría muy simple.

Como es de suponerse, existen muchos parámetros que conforman la plataforma espacial, en la tabla siguiente son citados aquellos considerados como datos que no deben cambiar, las distancias son en metros y la gravedad en  $m/s^2$ .

$\delta_{11} = 0^\circ,$	$\delta_{17i} = 0^\circ,$	$\delta_{19i} = 0^\circ,$	$\delta_{21i} = 0^\circ,$
$\delta_{25i} = 0^\circ,$	$\delta_{27i} = 0^\circ,$	$d_{2i} = 0.2,$	$d_{3i} = 0.055,$
$d_{5i} = 0.1,$	$d_{6i} = 0.039,$	$d_{8i} = 0.15,$	$d_{9i} = 0.017,$
$d_{11i} = 0.15,$	$d_{13i} = 0.022,$	$d_{15i} = 0.057175,$	$d_{18i} = 0.2,$
$d_{20i} = 0.28,$	$d_{22i} = -0.0349,$	$d_{24i} = 0.134,$	$d_{26i} = 0.12,$
$d_{28i} = -0.0349,$	$d_{30i} = 0.134,$	$d_{B_i} = 0.12237,$	$d_{D_i} = 0.12237,$
$g = 9.81,$	$\delta_{a_i} = 270^\circ,$	$\alpha_{a_i} = 270^\circ,$	$x_{G0i} = 0,$
$x_{G1i} = 0,$	$z_{G1i} = 0,$	$x_{G3i} = 0,$	$z_{G3i} = 0$

Ahora estos datos son sustituidos en las ecs.(3.19) - (3.30). Se tienen expresiones que dependen de la masa, distancias del centro de gravedad de los eslabones y de los parámetros de los resortes. Se han eliminado dos ecuaciones que aparecen repetidas, por lo tanto las ecuaciones restantes son las siguientes:

Cuatro ecuaciones que exigen que la distancia del centro de gravedad para el eje correspondiente sea cero.

$$\begin{aligned}
 m_{2i} z_{G2i} &= 0 \\
 m_{4i} z_{G4i} &= 0 \\
 m_{A_i} x_{GA_i} &= 0 \\
 m_{C_i} x_{GC_i} &= 0
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Tres ecuaciones que están en función de datos de masas y distancias:

$$\begin{aligned}
 m_{1i} + 8.1719 d_{GD_i} m_{D_i} + m_{2i}(0.5641 - 25.641 x_{G2i}) &= m_{3i} + 0.5641 m_{4i} + 8.1719 d_{GB_i} m_{B_i} + \\
 &25.641 m_{4i} x_{G4i} \\
 m_{2i} + m_{5i} + 6.6666 m_{1i} y_{G1i} + 6.6666 m_{4i} y_{G4i} &= 54.4796 d_{GD_i} m_{D_i} y_{P1i} \\
 m_{4i} + m_{5i} + 6.6666 m_{2i} y_{G2i} + 6.6666 m_{3i} y_{G3i} &= 54.4796 d_{CB_i} m_{B_i} y_{P3i}
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Y finalmente tres ecuaciones que determinan el coeficiente de rigidez para los resortes:

$$\begin{aligned}
 (1.3147 - 10.7439 d_{GB_i}) m_{B_i} + 9.81 m_{A_i} z_{GA_i} &= h_{A_i} k_{A_i} s_{A_i} \\
 (1.3147 - 10.7439 d_{GD_i}) m_{D_i} + 9.81 m_{C_i} z_{GC_i} &= h_{C_i} k_{C_i} s_{C_i}
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}
 0.981 m_{1i} + 0.981 m_{2i} + 0.981 m_{3i} + 0.981 m_{4i} + \\
 0.981 m_{5i} + 8.0166 d_{GB_i} m_{B_i} + 8.0166 d_{GD_i} m_{D_i} + 9.81 m_{0i} z_{G0i} &= h_{0i} k_{0i} s_{0i}
 \end{aligned}$$

Como se puede ver, el sistema de ecuaciones no permite el uso exclusivo de resortes para lograr el balanceo estático de la plataforma. Por lo tanto es necesario el uso de contrapeso y serán alterados los valores de masa y centros de gravedad para las ecuaciones que lo permiten.

los datos siguientes, hacen que la plataforma espacial pueda ser construida:

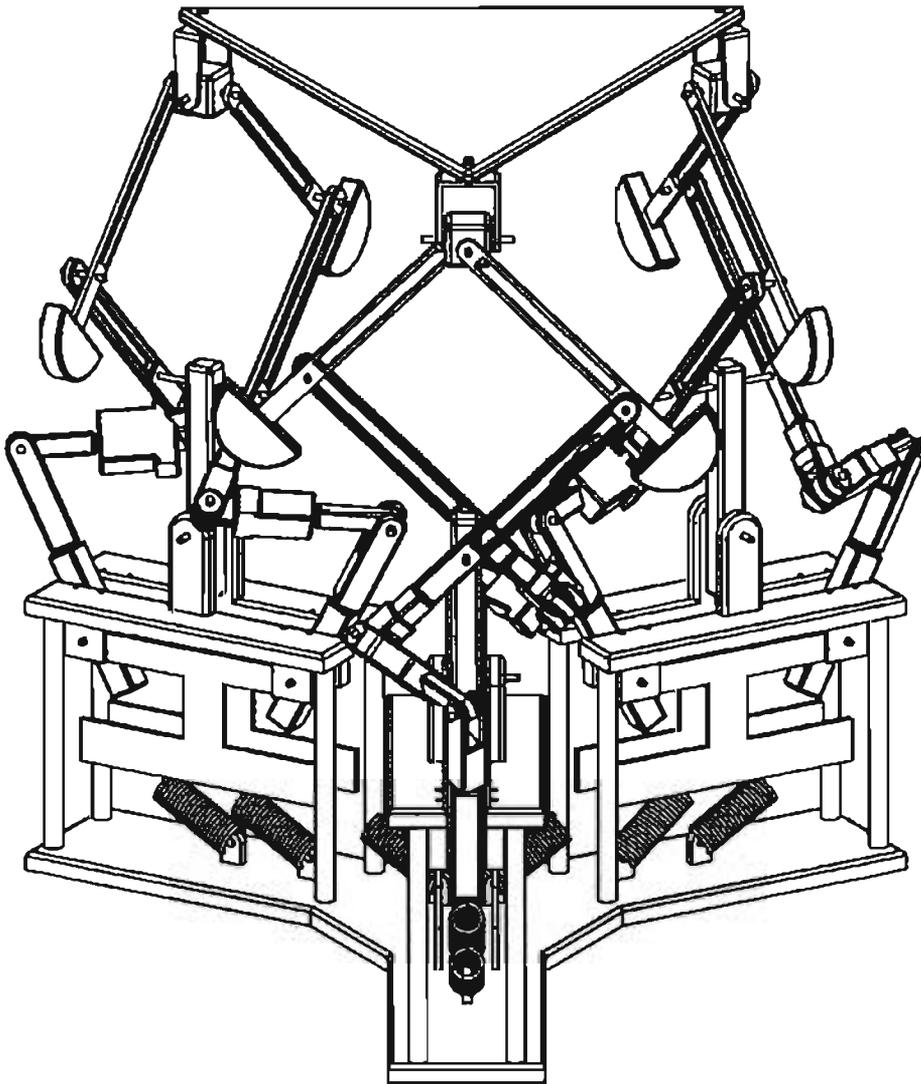
$$\begin{aligned}
 d_{GB_i} = 0.0805, & \quad d_{GD_i} = 0.0805, & \quad m_{0i} = 0.17031, & \quad m_{1i} = 0.1844, & \quad m_{2i} = 0.1, \\
 m_{3i} = 0.1844, & \quad m_{4i} = 0.1, & \quad m_{5i} = 0.15, & \quad m_{A_i} = 0.21524, & \quad m_{B_i} = 0.4134, \\
 m_{C_i} = 0.21524, & \quad m_{D_i} = 0.4134, & \quad y_{P1i} = 0.09, & \quad y_{P3i} = 0.09, & \quad z_{G0i} = 0.041, \\
 y_{G1i} = -0.04888, & \quad y_{G3i} = -0.04888, & \quad z_{GA_i} = 0.05621, & \quad z_{GC_i} = 0.05621, & \quad h_{0i} = 0.13, \\
 h_{A_i} = 0.0728, & \quad h_{C_i} = 0.0728, & \quad s_{0i} = 0.072, & \quad s_{A_i} = 0.03, & \quad s_{C_i} = 0.03
 \end{aligned}$$

Al sustituir estos datos en las ecs.(C.1), (C.2) y (C.3) finalmente obtenemos la siguiente matriz de soluciones:

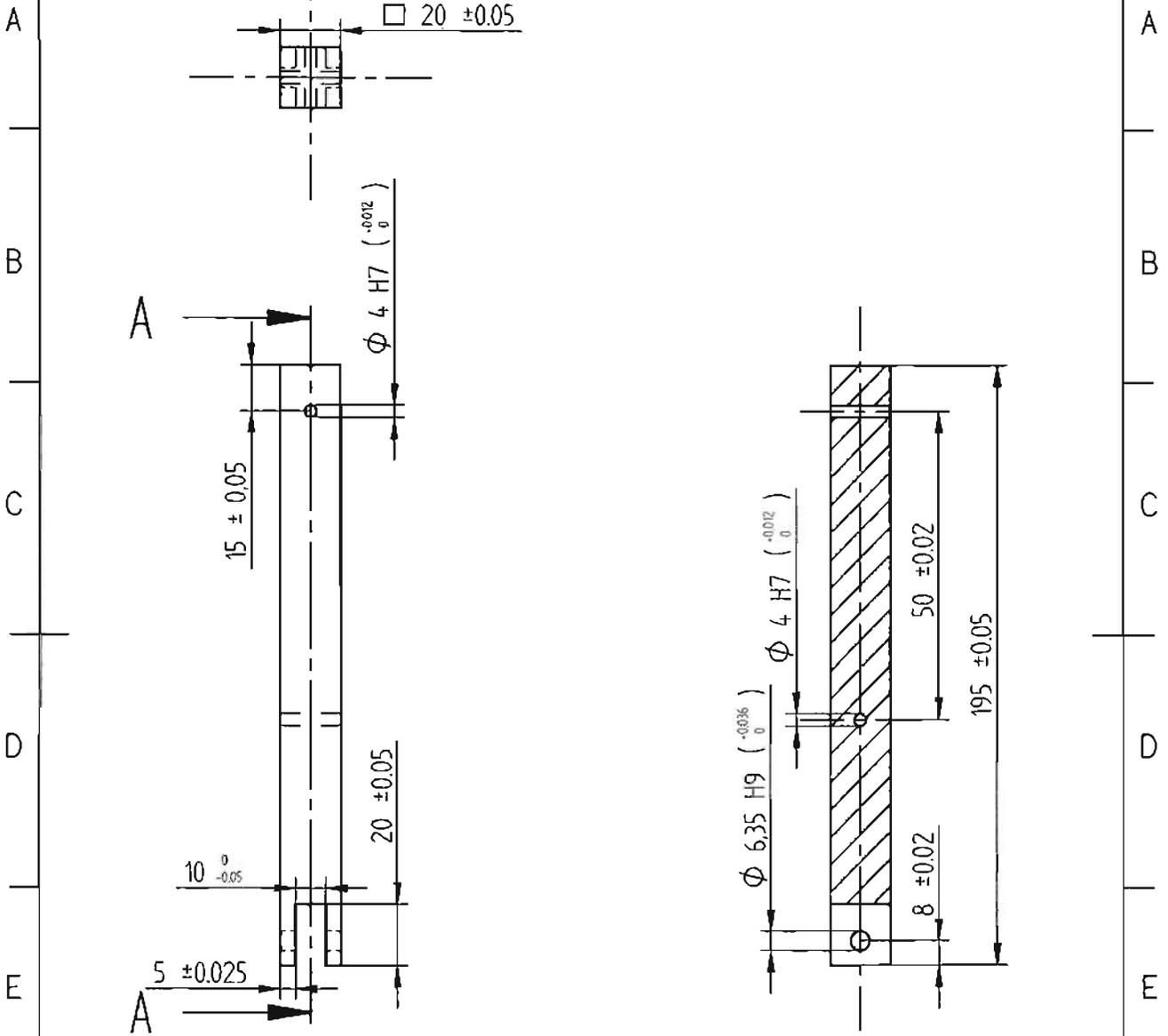
$$\left[ \begin{array}{rcl} z_{G2i} & = & 0 \\ z_{G4i} & = & 0 \\ x_{GAi} & = & 0 \\ x_{GCi} & = & 0 \\ 0.0401 + y_{G4i} & = & 0 \\ 0.0401 + y_{G2i} & = & 0 \\ x_{G2i} + x_{G4i} & = & 0 \\ k_{Ai} & = & 139.4895 \\ k_{C1} & = & 139.4895 \\ k_{0i} & = & 139.6700 \end{array} \right] \quad (C.4)$$

Finalmente son presentados los dibujos de detalle de los eslabones de la plataforma espacial que cumplen con las restricciones físicas que cita la matriz de soluciones (C.4).

# Dibujos de detalle y ensamble

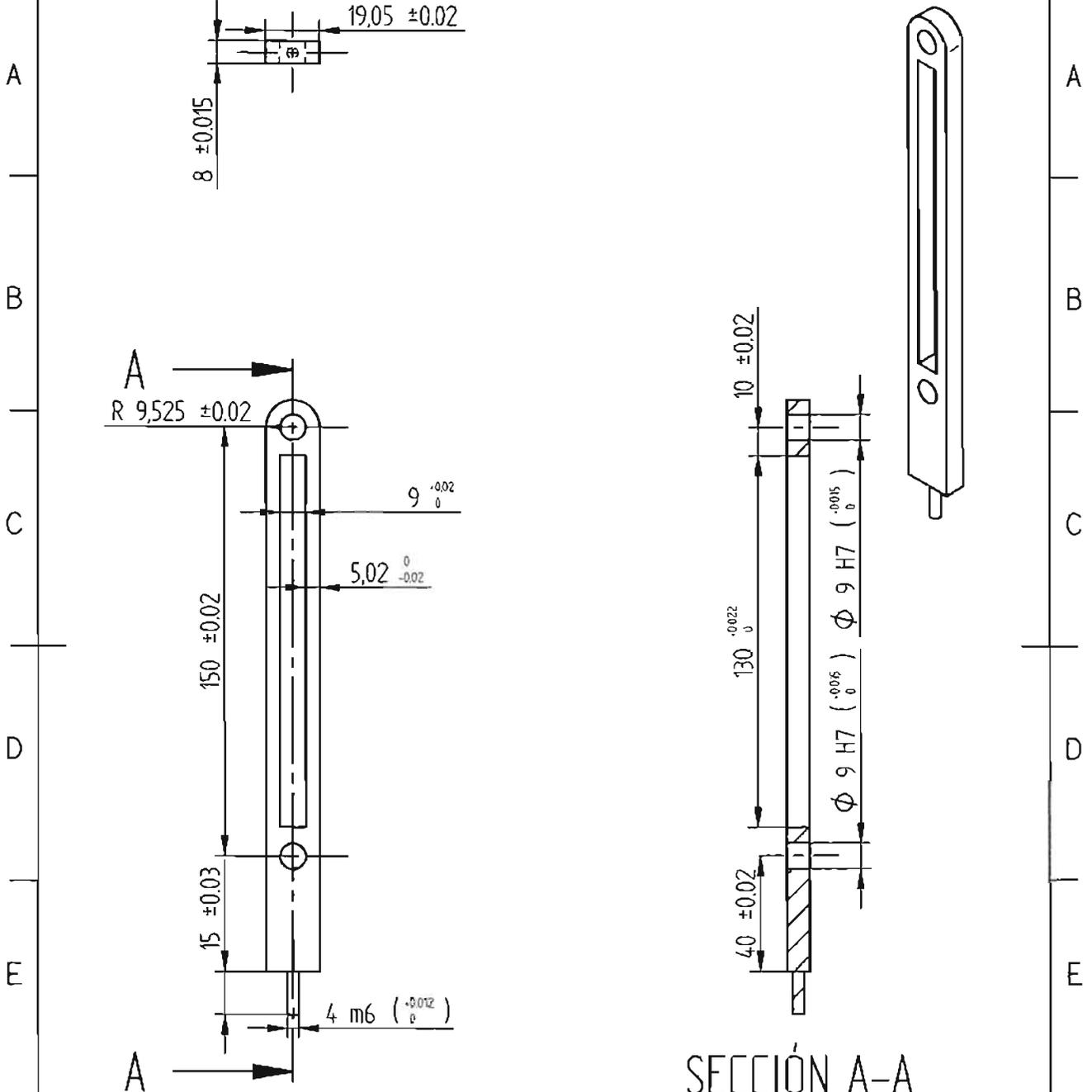


De la plataforma espacial balanceada  
estáticamente con resortes y contrapesos



SECCIÓN A-A

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESE: S/E ACT: mm	ESLABÓN 0	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 1



SECCIÓN A-A

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC. S/E ACT: mm	ESLABÓN 1 y 3	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 2

A

B

C

D

E

F

A

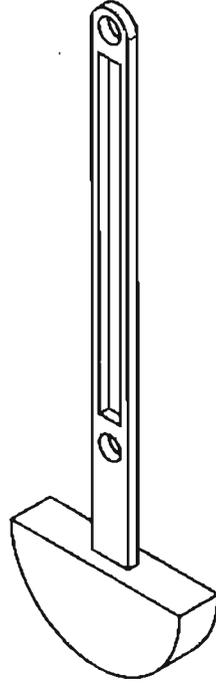
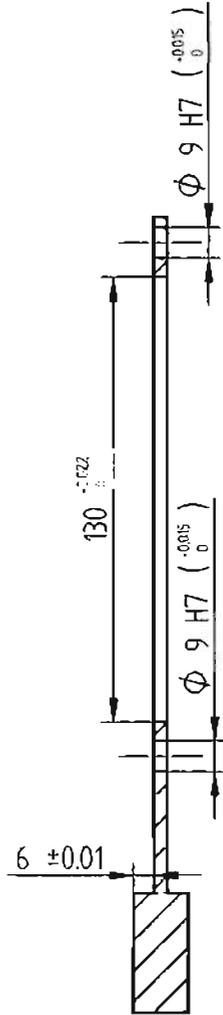
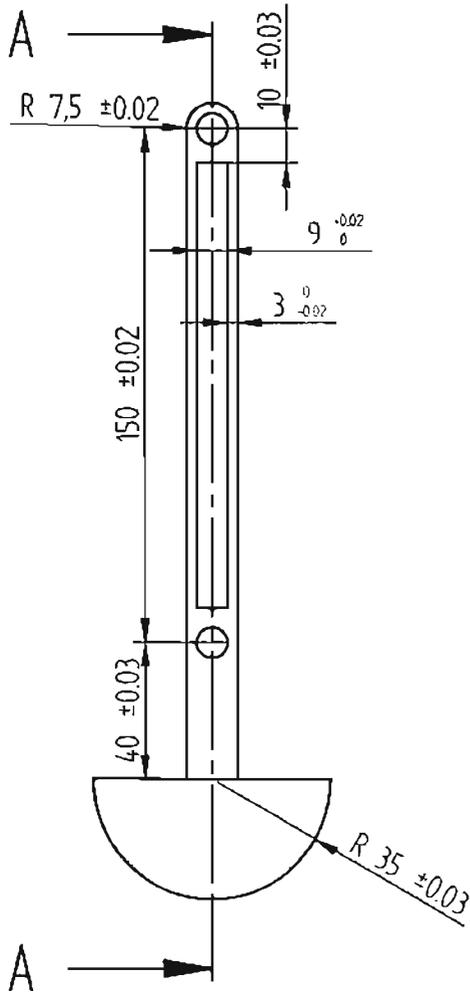
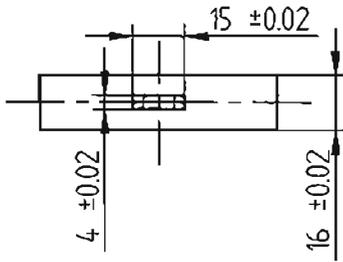
B

C

D

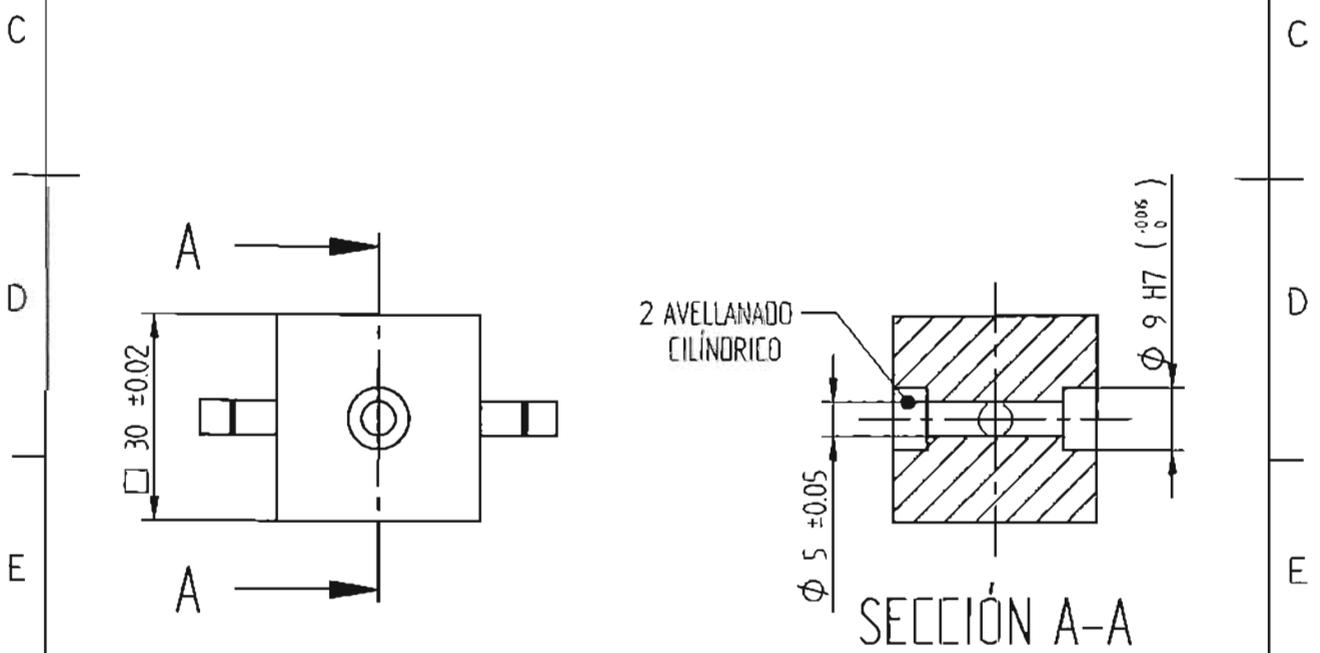
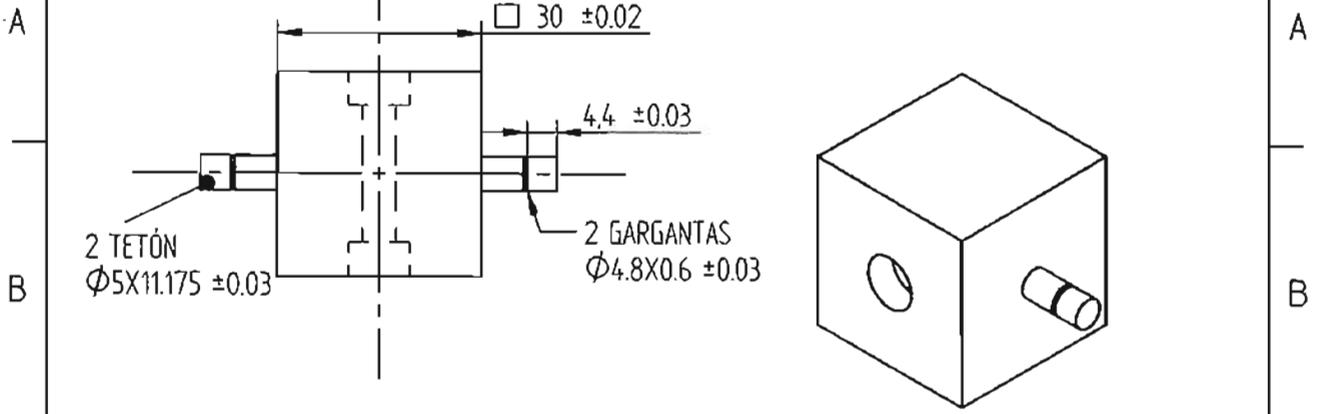
E

F

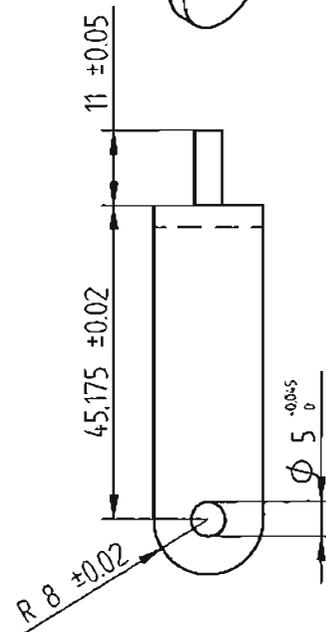
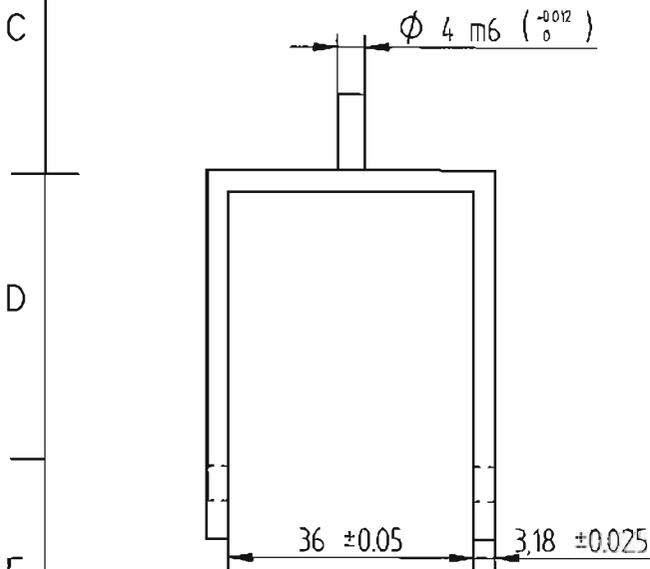
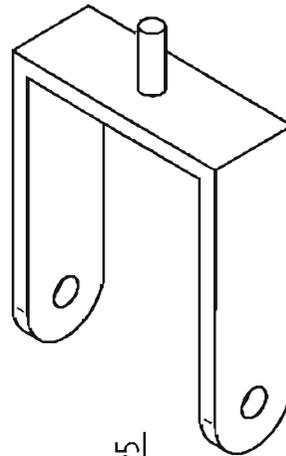
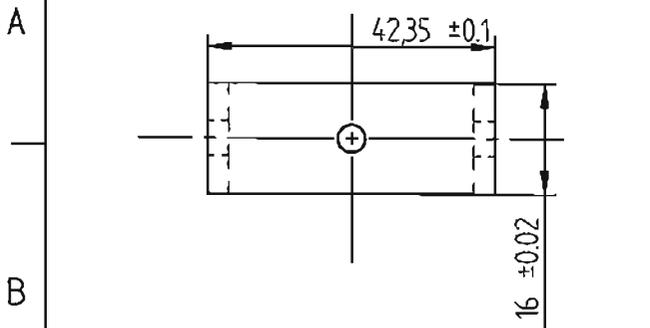


SECCIÓN A-A

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT: mm	ESLABÓN 2 y 4	DIBUJO. JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4	DIBUJO NO. 3	



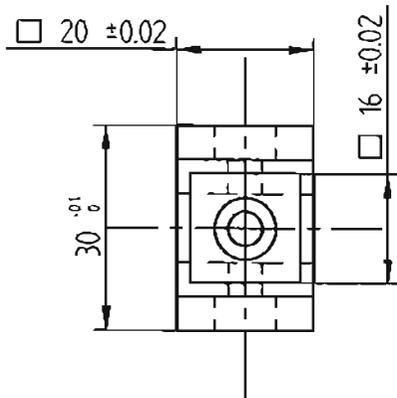
MATERIAL ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT: mm	ESLABÓN 5	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 4



F

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT. mm	ESLABÓN 6	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 5

A



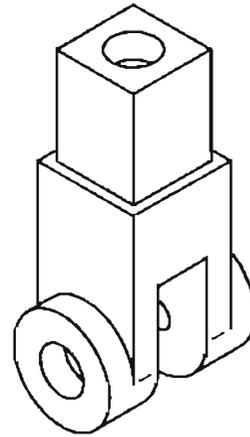
B

C

D

E

F



A

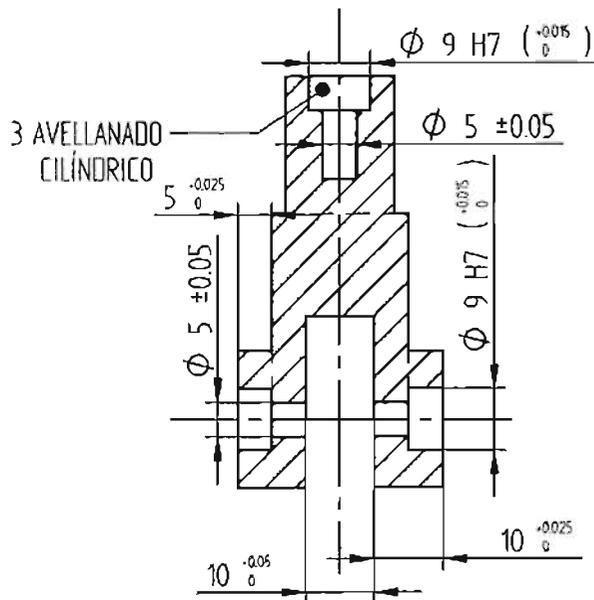
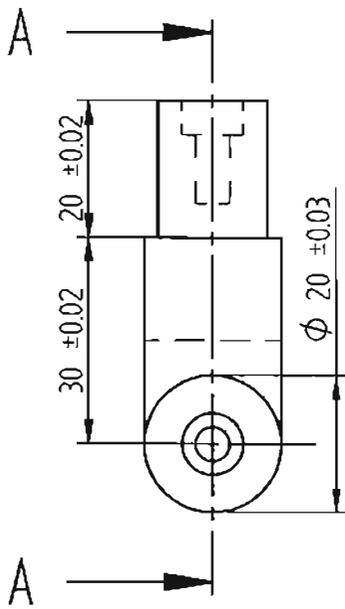
B

C

D

E

F



SECCIÓN A-A

MATERIAL: COLD ROLLED	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC. S/E ACT: mm	ESLABÓN 7	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 6

A

B

C

D

E

F

A

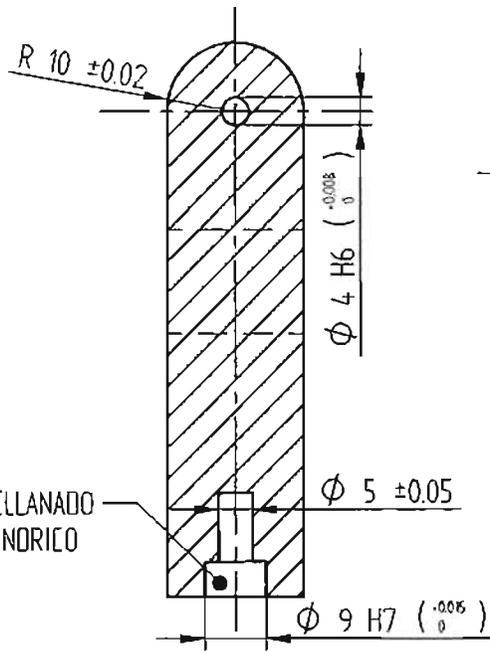
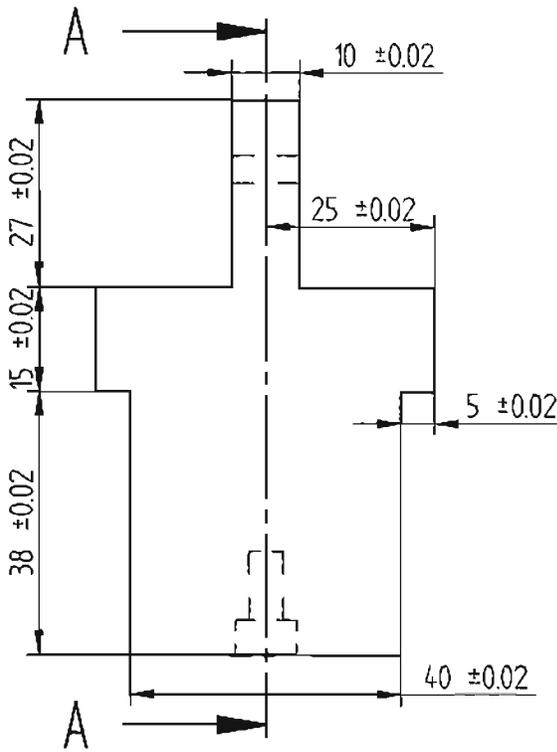
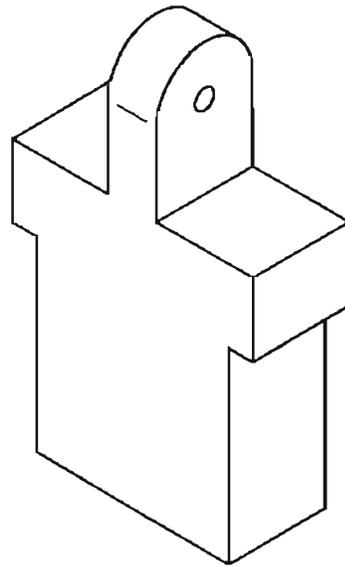
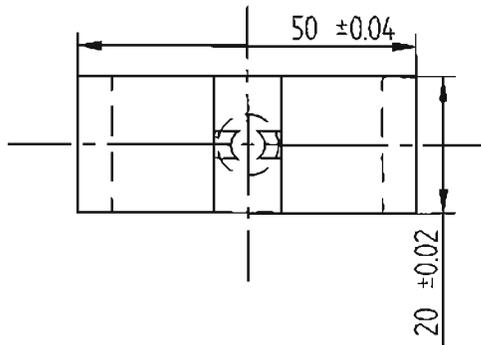
B

C

D

E

F



SECTION A-A

MATERIAL: COLD ROLLED	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT: mm	ESLABÓN B	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 7

A

B

C

D

E

F

A

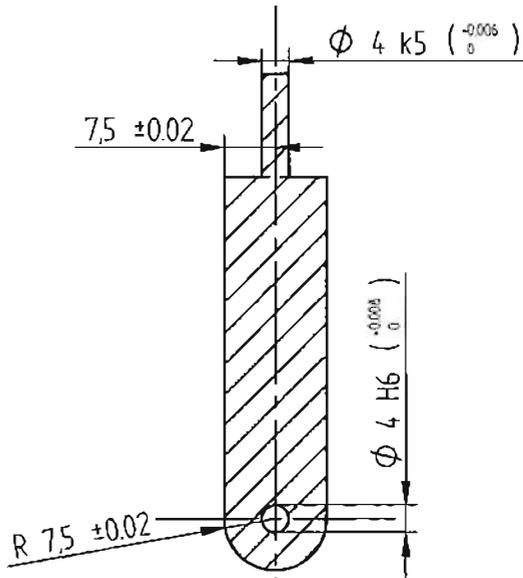
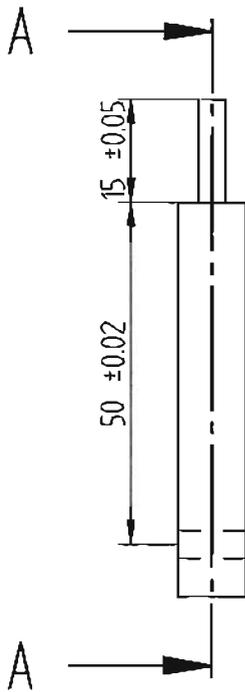
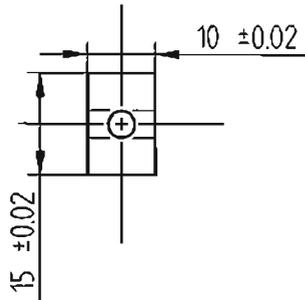
B

C

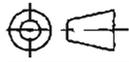
D

E

F



SECCIÓN A-A

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT: mm	ESLABÓN Bp	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 8

A

B

C

D

E

F

A

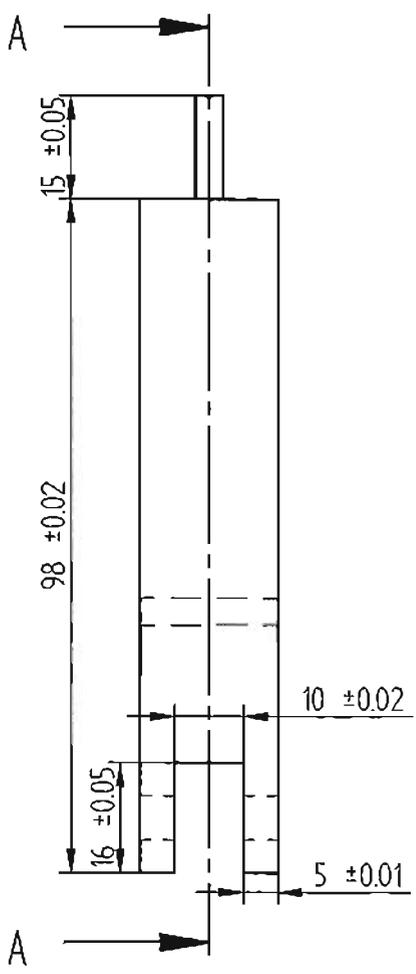
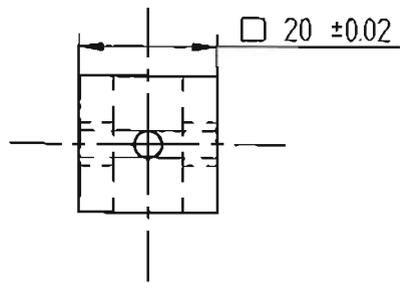
B

C

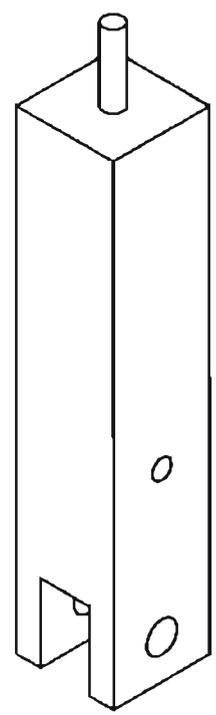
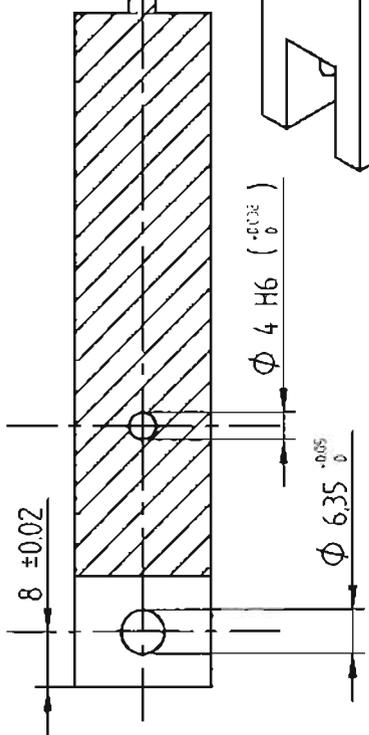
D

E

F



Φ 4 k5 ( $\begin{smallmatrix} -0.006 \\ 0 \end{smallmatrix}$ )



SECCIÓN A-A

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT. mm	ESLABÓN A	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 9

A

B

C

D

E

F

A

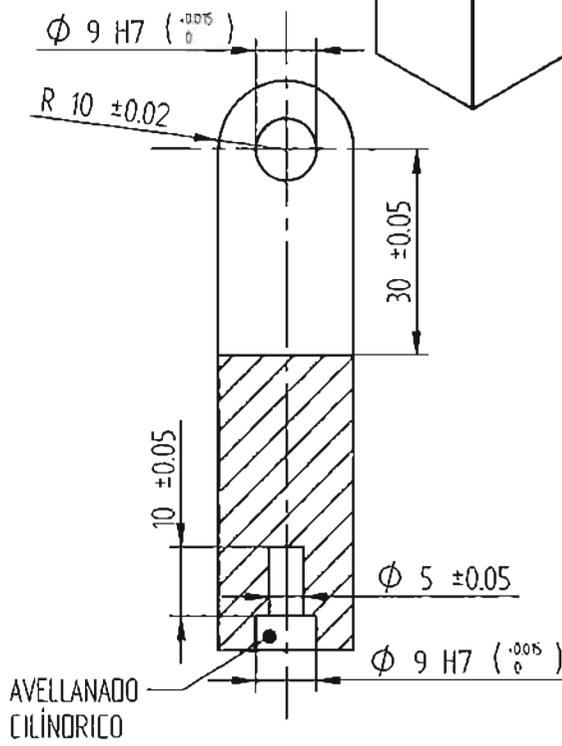
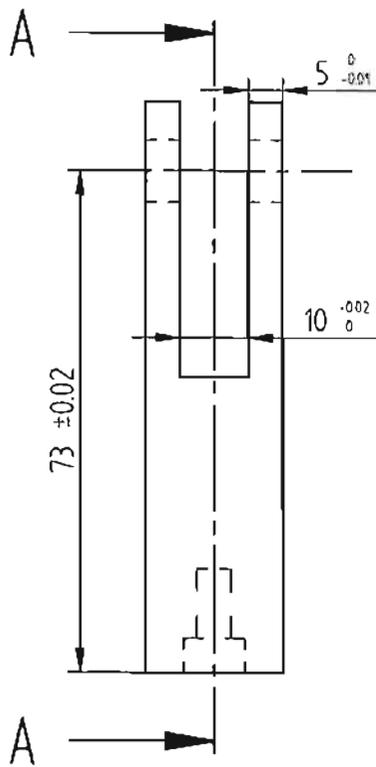
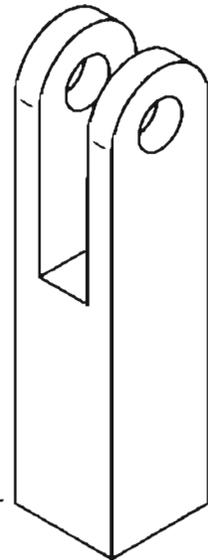
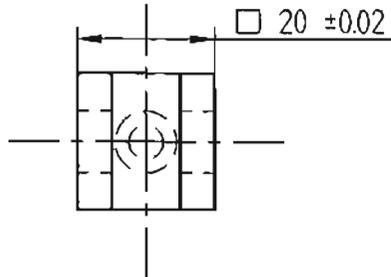
B

C

D

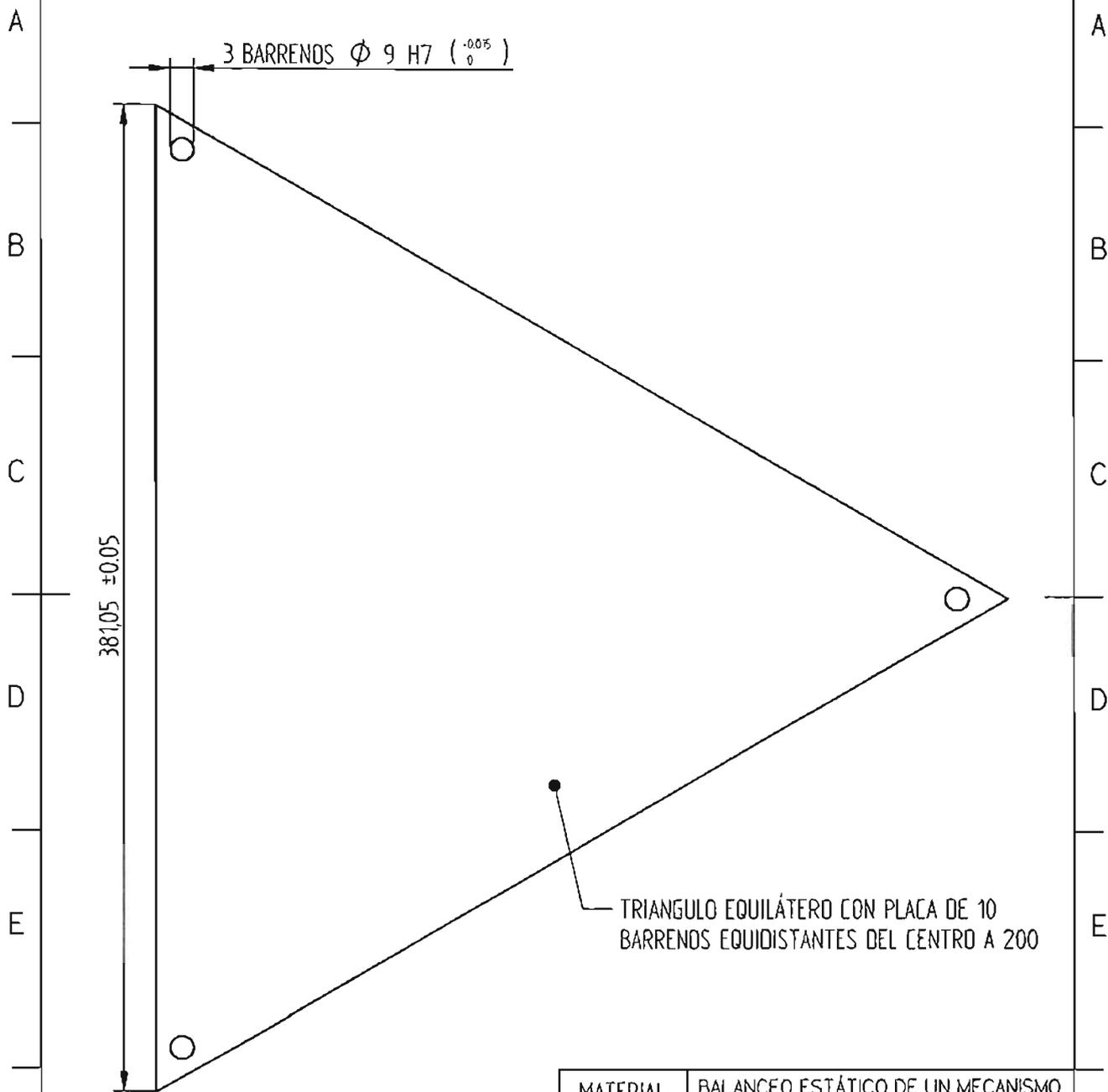
E

F



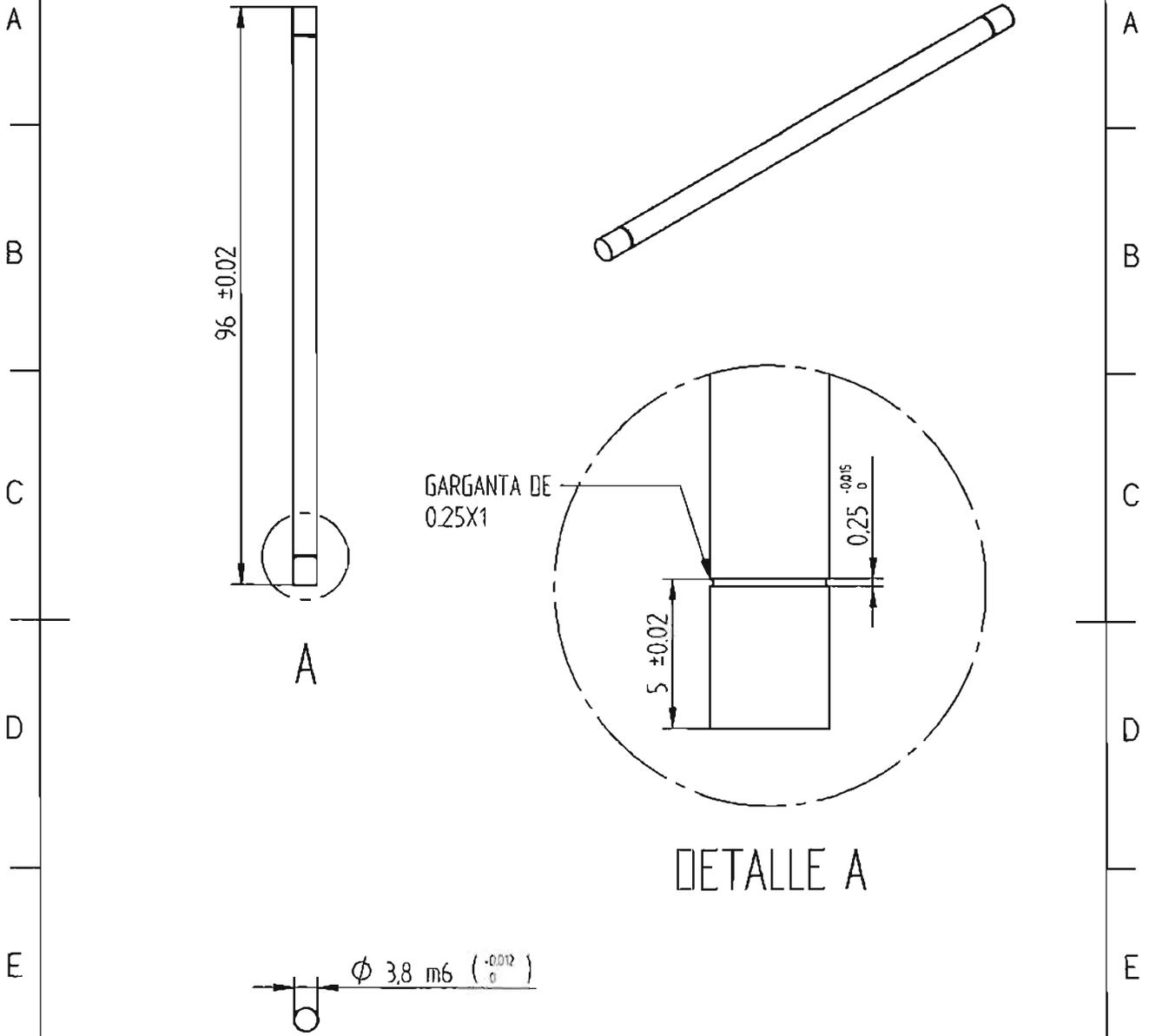
SECCIÓN A-A

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT. mm	ESLABÓN Ap	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 10



TRIANGULO EQUILÁTERO CON PLACA DE 10  
 BARRENOS EQUIDISTANTES DEL CENTRO A 200

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT: mm	<b>BASE MÓVIL</b>	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. <b>11</b>



A

B

C

D

E

F

A

B

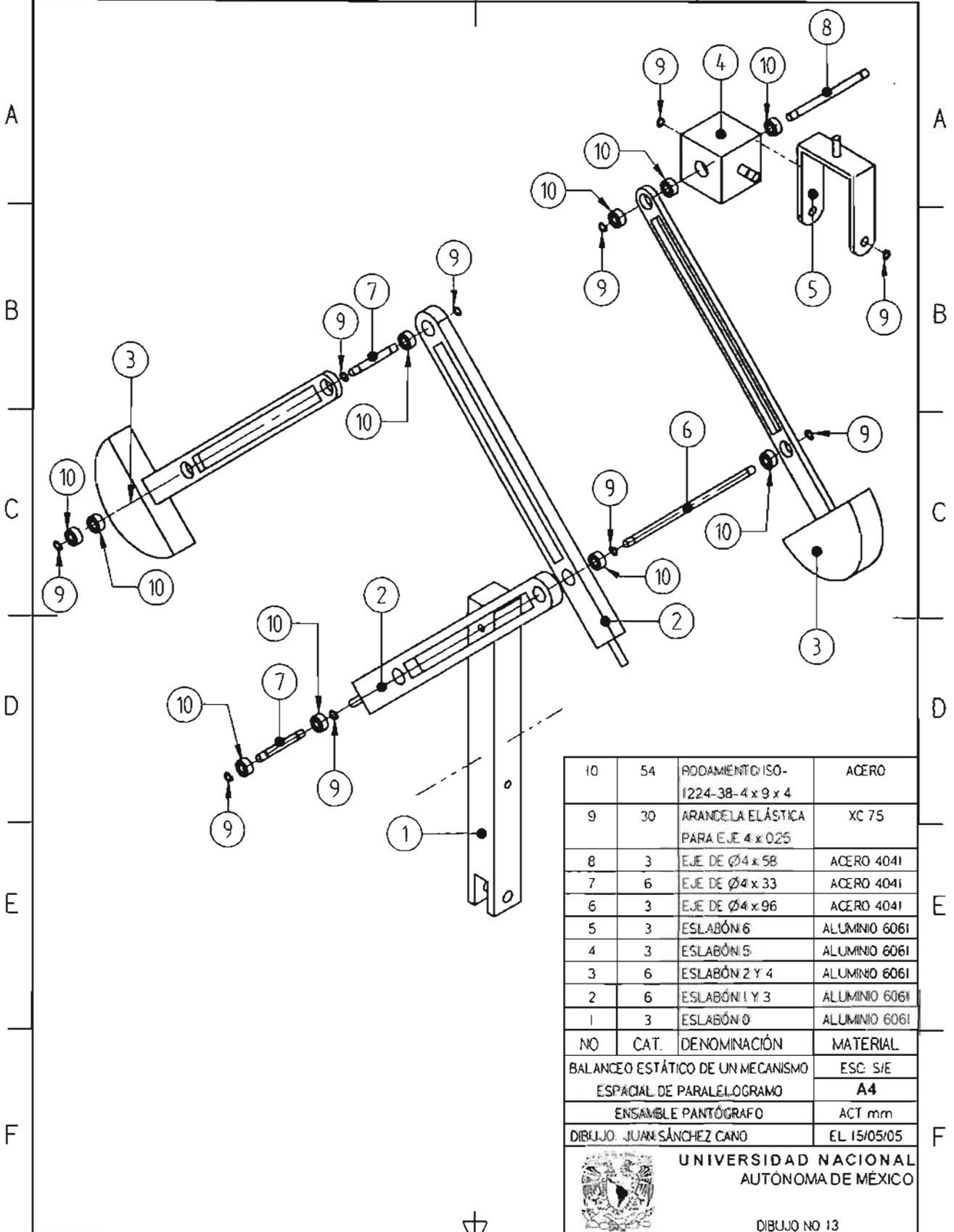
C

D

E

F

MATERIAL: ACERO ANSI-SAE 4140	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT: mm	EJE 6	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 12



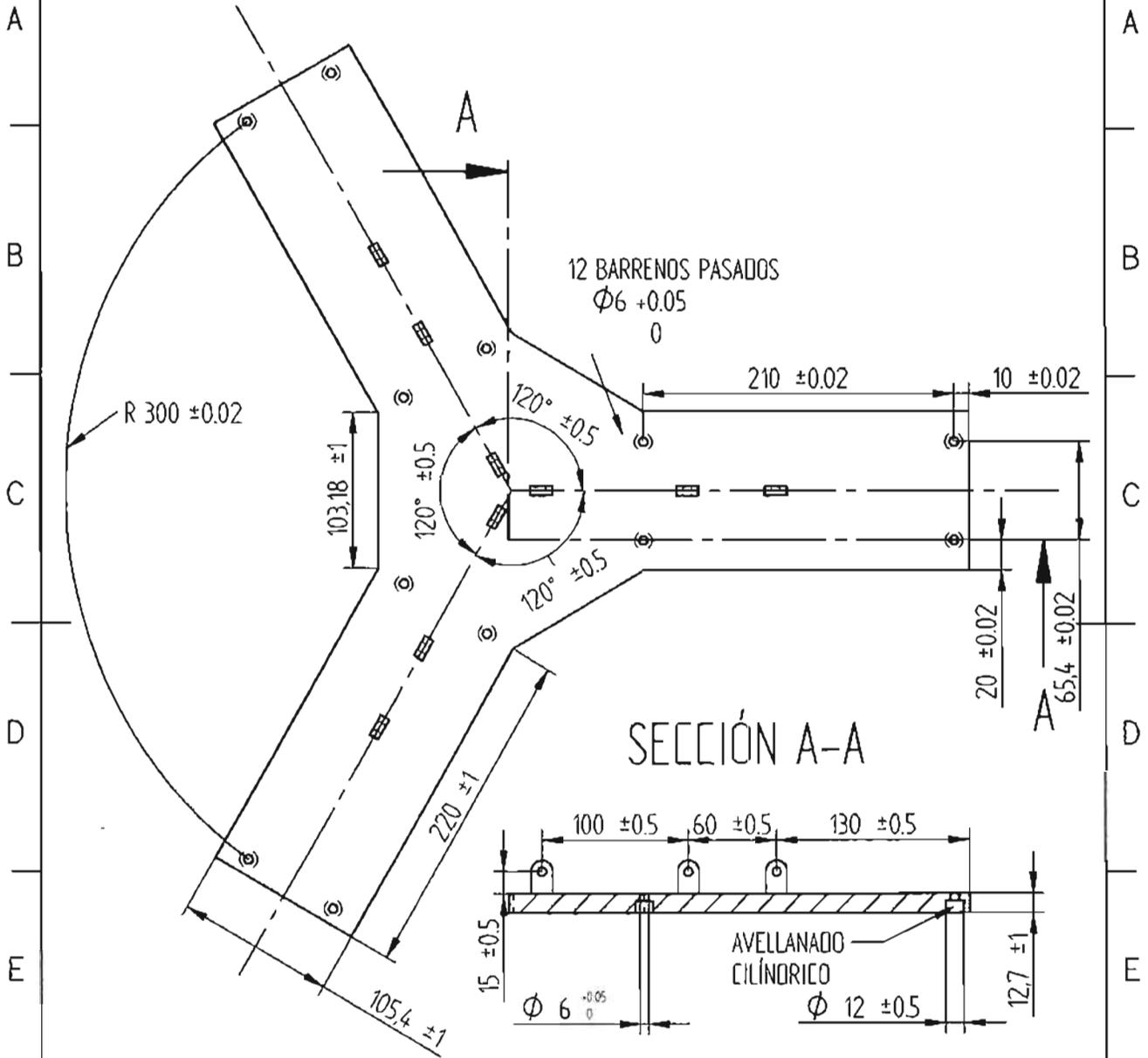
10	54	RODAMIENTO ISO-1224-38-4x9x4	ACERO
9	30	ARANDELA ELÁSTICA PARA EJE 4x0.25	XC 75
8	3	EJE DE Ø4x58	ACERO 4041
7	6	EJE DE Ø4x33	ACERO 4041
6	3	EJE DE Ø4x96	ACERO 4041
5	3	ESLABÓN 6	ALUMINIO 6061
4	3	ESLABÓN 5	ALUMINIO 6061
3	6	ESLABÓN 2 Y 4	ALUMINIO 6061
2	6	ESLABÓN 1 Y 3	ALUMINIO 6061
1	3	ESLABÓN 0	ALUMINIO 6061

NO	CAT.	DENOMINACIÓN	MATERIAL
BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO			ESC. S/E
ENSAMBLE PANTÓGRAFO			A4
DIBUJO: JUAN SÁNCHEZ CANO			ACT mm
			EL 15/05/05

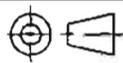


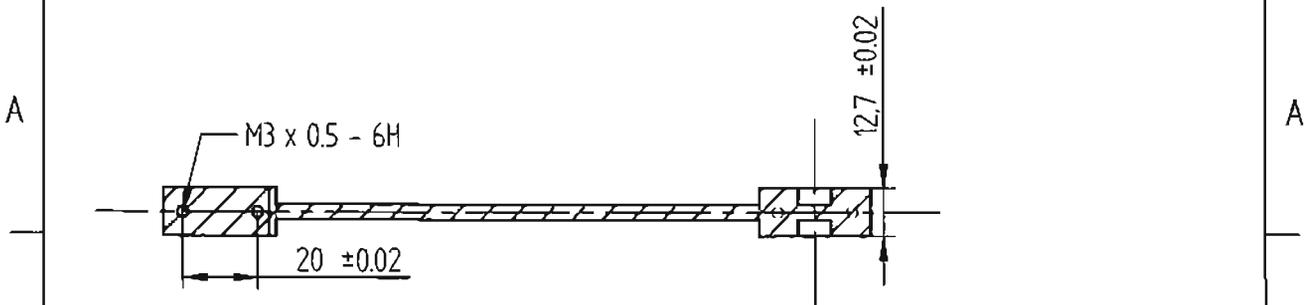
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



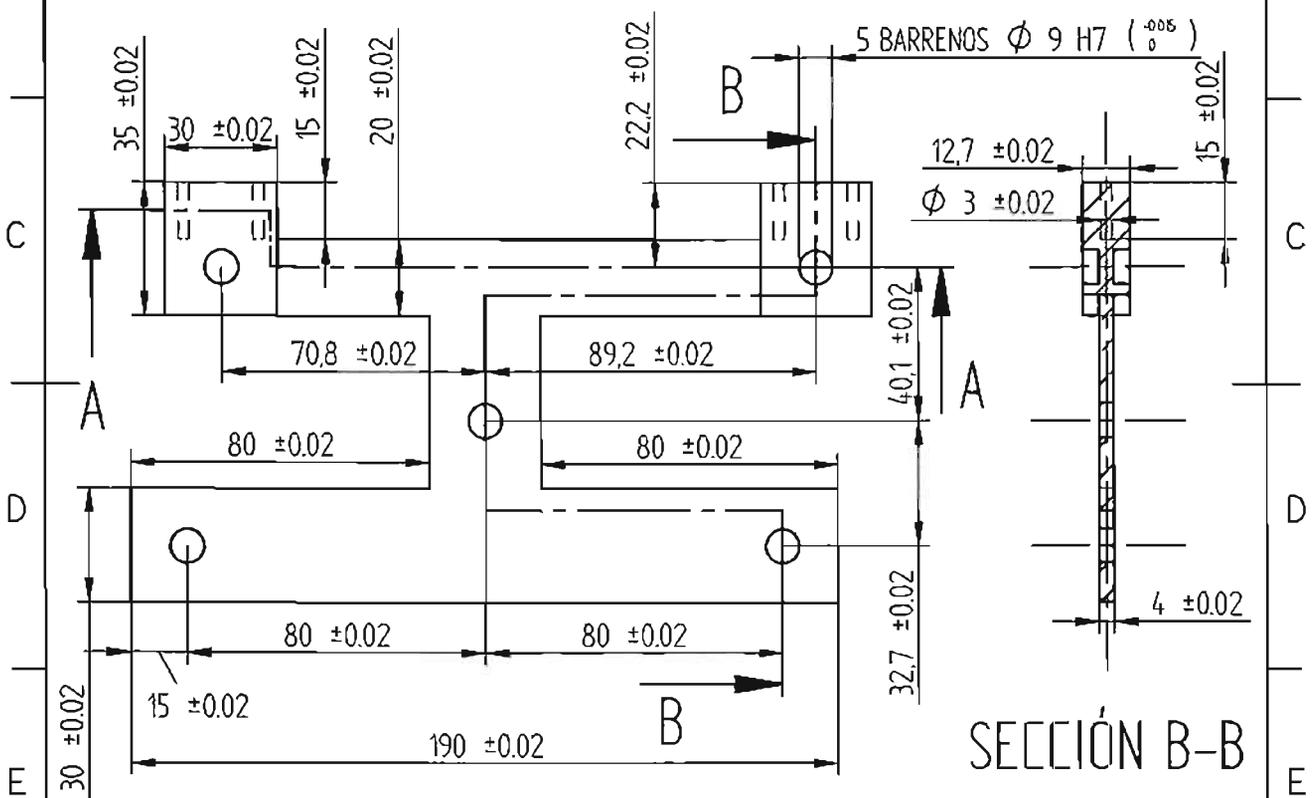


SECCIÓN A-A

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT: mm	BASE 1	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 15

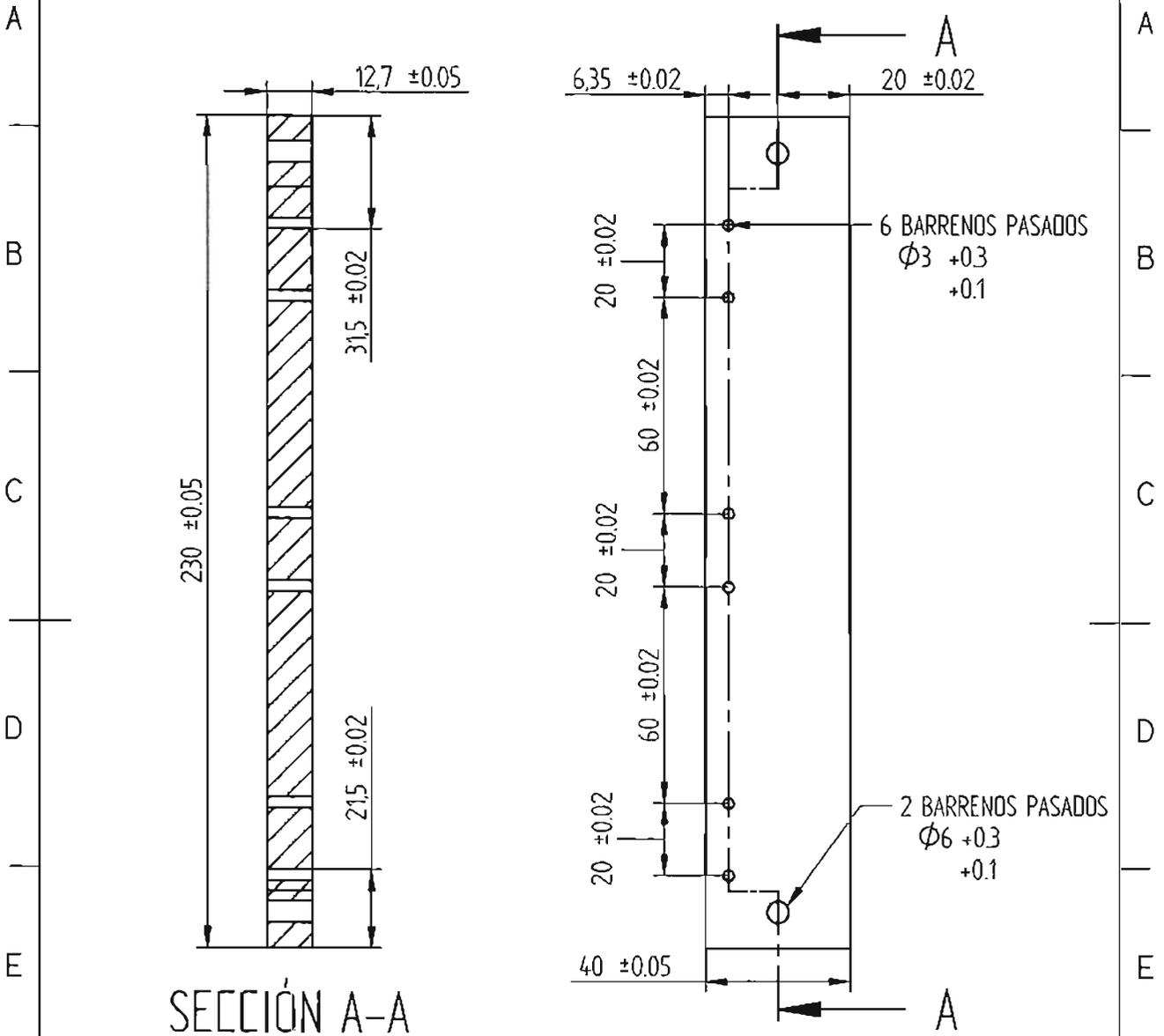


### SECCIÓN A-A

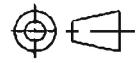


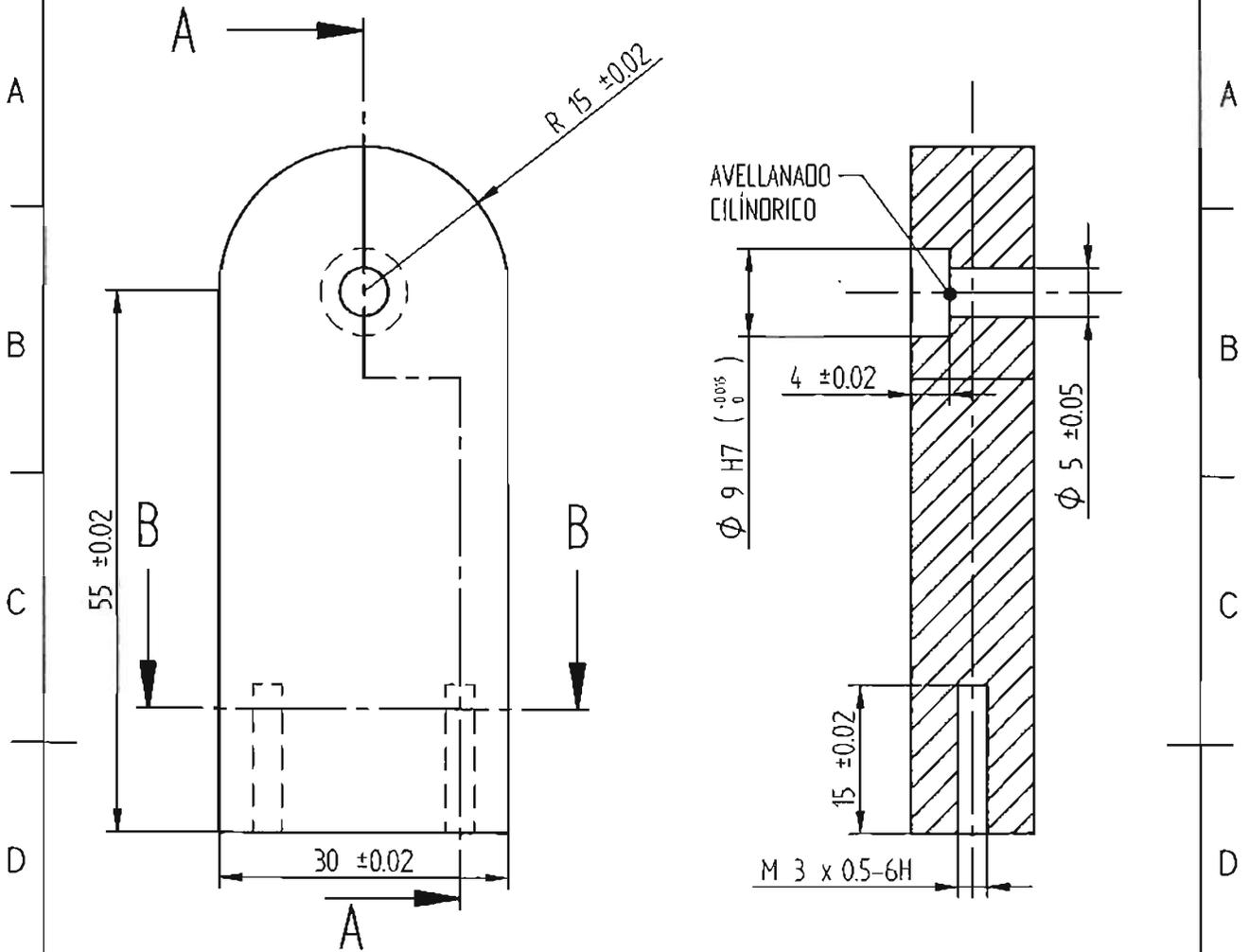
### SECCIÓN B-B

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT: mm	BASE 2	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 16

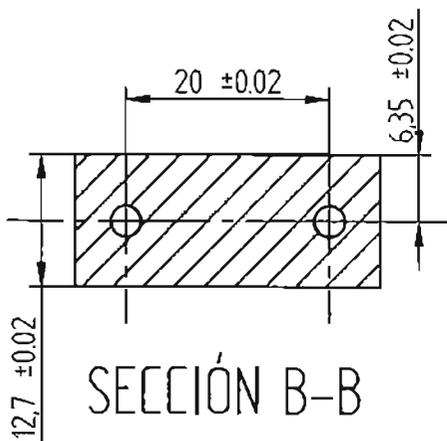


SECCIÓN A-A

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC. S/E ACT mm	BASE 3	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 17



SECCIÓN A-A



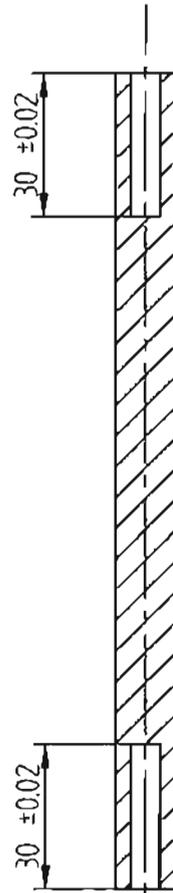
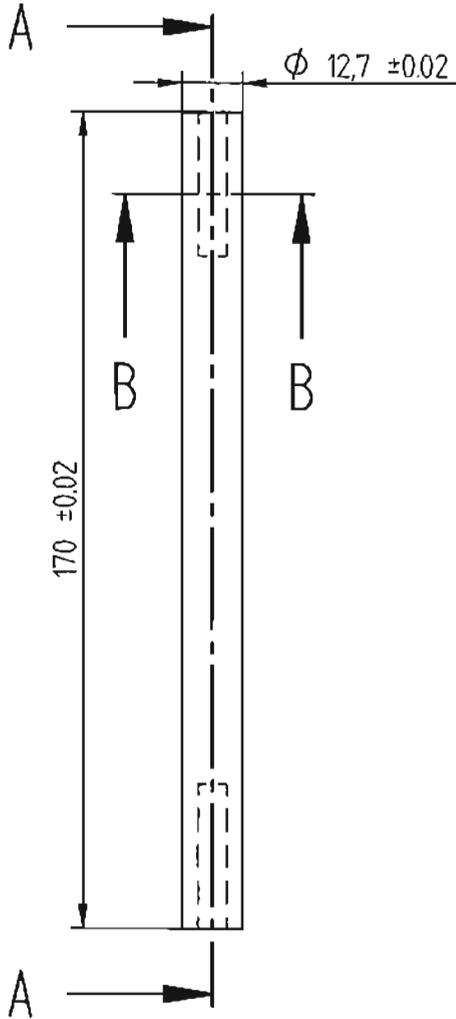
SECCIÓN B-B

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESE: S/E ACT: mm	BASE 4	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 18

# SECCIÓN B-B

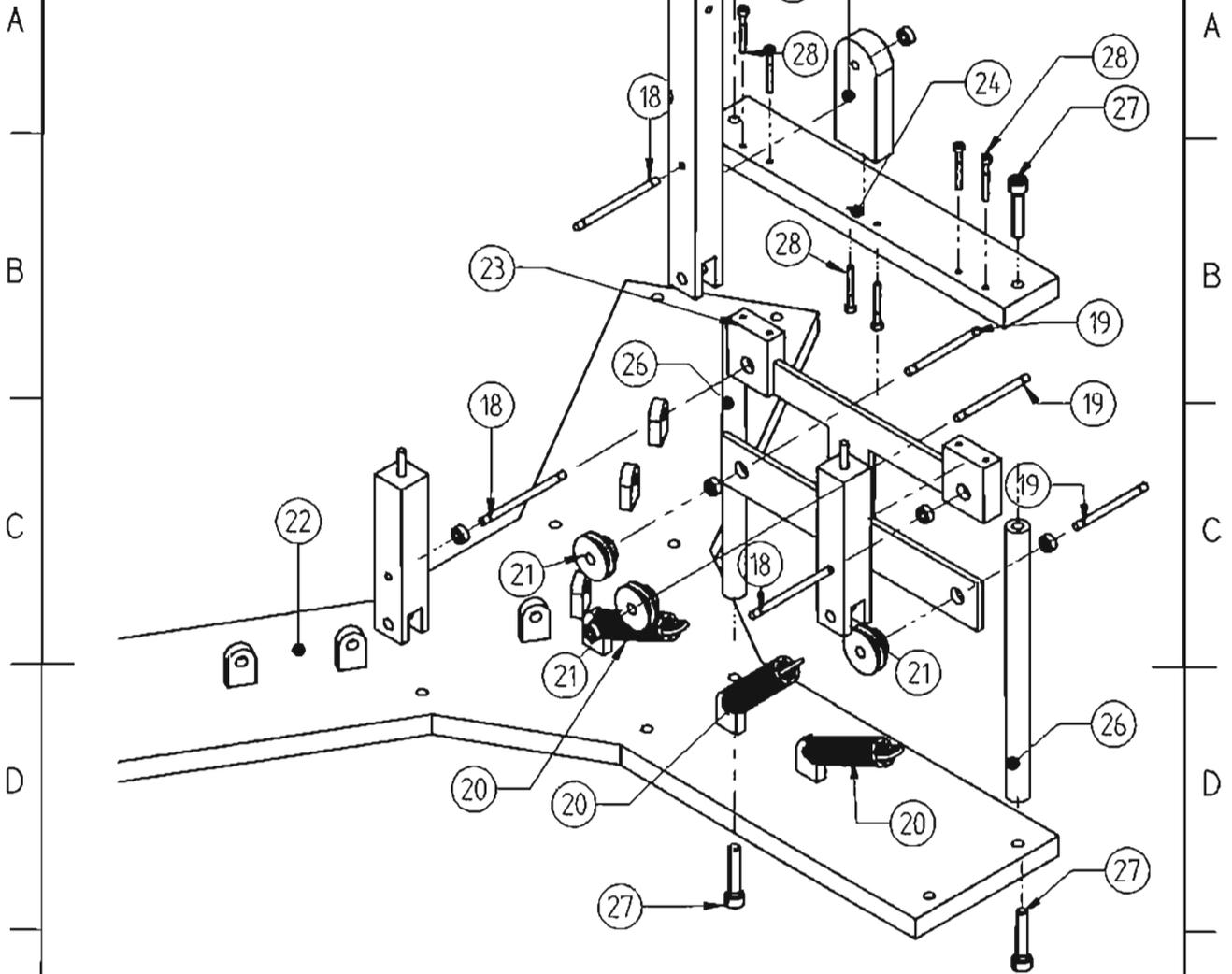


M6 x 1 - 6g



# SECCIÓN A-A

MATERIAL: ALUMINIO 6061	BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE PARALELOGRAMO	
ESC: S/E ACT: mm	POSTE	DIBUJO: JSC EL: 15/05/05
		<b>UNIVERSIDAD NACIONAL</b> AUTÓNOMA DE MÉXICO
A4		DIBUJO NO. 19



28	72	TORNILLO ISO DHC M3 x 0.5, NF E 27-161	E 26
27	24	TORNILLO ISO DHC M6 x 1, NF E 27-161	E 26
26	12	POSTE	ALUMINIO 6061
25	6	BASE 4	ALUMINIO 6061
24	6	BASE 3	ALUMINIO 6061
23	6	BASE 2	ALUMINIO 6061
22	1	BASE 1	ALUMINIO 6061
21	9	POLEA ACANALADA G1214-18700	COBRE
20	9	RESORTE A TENSION GUTERKUNST-22x15x742X	ACERO DURO XC 80 1
19	9	EJE DE Ø4 x 521	ACERO 4041
18	9	EJE DE Ø4 x 608	ACERO 4041
NO. CAT		DENOMINACIÓN	MATERIAL

ESC. SE BALANCEO ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL DE APARTELEGRAMA

ACT. mm ENSAMBLE RESORTES

DIBUJO. JSC

EL. 15/05/05



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIBUJO NO. 20

A4

# Bibliografía

- [1] H. Inoue, Y. Tsusaka, and T. Fukuizumi, "Parallel manipulator," in *Proc. Robotics Research: The Third Int. Sym.*, O.D. Fuageras and G. Giralt, Eds. Cambridge, MA: MIT Press, 1986, pp. 321-327.
- [2] Gough, V.E. and whitehall, S. G., 1962, "Universal Tyre Test Machine," *Proc. 9th International Technical Congress, F.I.S.I.T.A.*, p. 177 (Institution of Mechanical Engineers).
- [3] Stewart, D., 1965, "A Platform with Six Degrees of Freedom," *Proc. Inst. Mech. Eng. London*, Vol. 180, pp. 371-386.
- [4] Hunt, K. H., 1983, "Structural Kinematics of In-Parallel-Actuated Robot Arms," *ASME J. Mec. Transm. Autom. Des.*, Vol. 105, pp. 705-712.
- [5] Clearly, K. and Arai, T., 1991, "A Prototype Parallel Manipulator: Kinematics, Construction, Software, Workspace Results, and Singularity Analysis," *Proc. IEEE International Conference on Robotic and Automation*, Vol. 1, pp. 561-571.
- [6] Fichter, E. F., 1986, "A Stewart Platform Based Manipulator: General Theory and Practical Construction," *Int. J. Robot. Res.*, Vol. 5, pp. 157-182.
- [7] Grffis, M. and Duffy, J., 1989, "Forward Displacement Analysis of a Class of Stewart Platforms," *J. Robot. Syst.*, Vol. 6, pp. 703-720.
- [8] Innocenti, C. and Parenti-Castelli, V., 1990, "Direct Position Analysis of the Stewart Platform Mechanism," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 25, pp. 611-612.
- [9] Mohamed, M. G. and Duffy, J., 1985, "A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel, Robotic Manipulators," *ASME J. Mech. Transm. Autom. Des.*, Vol. 107, pp. 226-229.
- [10] Naua, P., Waldron, K. J., and Murthy, V., 1990, "Direct Kinematic Solution of a Stewart Platform," *IEEE Trans. Robot Autom.*, Vol. 6, pp. 438-444.
- [11] Zhang, C. and Song, S. M., 1994, "Forward Position Analysis of Nearly General Stewart Platforms," *ASME J. Mech. Des.*, Vol. 116, pp. 54-60.
- [12] Thierry Laliberté, Clément M. Gosselin and Martin Jean, "Static Balancing of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 4, No. 4, December 1999.

- [13] V.E. Gough and S. G. Whitehall, "Universal tyre test machine," in *Proc. 9th Int. Tech. Congr. F.I.S.I.T.A.*, May 1962.
- [14] D. Stewart, "A platform with six degree freedom," *Proc. Inst. Mech. Eng.*, vol. 180, no. 5, pp. 371-378, 1965
- [15] K. H. Hunt, "Structural kinematics of in-parallel-actuated robot arms," *ASME J. Mechanisms, Transmissions, Automat. Des.*, vol. 105, no. 4, pp. 705-712, 1983.
- [16] E. F. Ficher, "A Stewart platform-based manipulator: General theory and practical construction," *Int. J. Robot. Res.*, vol 5, no. 2, pp. 157-182, 1986.
- [17] G. G. Lowen, F. R. Tepper, and R. S. Berkof, "Balancing of linkages-An update," *Mechanism Mach. Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 213-220, 1983.
- [18] R. H. Nathan, "A constant force generation mechanism," *ASME J. Mechanisms, Transmissions, Automat. Des.*, vol. 107, no. 4, pp 508-512, 1985.
- [19] J. M. Hervé, "Device for counter-balancing the forces due to gravity in a robot arm," U. S. Patent 4 620 829. May 1986.
- [20] D. A. Streit, and B. J. Gilmore, "Perfect spring equilibrator for rotatable bodies," *ASME J. Mechanisms, Transmissions, Automat. Des.*, vol. 11, no. 4, pp. 451-458, 1989.
- [21] N. Ulrich and V. Kumar, "Passive mechanical gravity compensation for robot manipulators," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Sacramento, CA, 1991, pp. 1536-1541.
- [22] G. J. Walsh, D. A. Streit, and B. J. Gilmore, "Spatial spring equilibrator theory," *Mechanism Mach. Theory*, vol. 26, no. 2, pp. 155-170, 1991.
- [23] M. Jean and C. M. Gosselin, "Static balancing of planar parallel manipulators," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Minneapolis, MN, 1996, pp. 3732-3737.
- [24] H. Kazerooni and S. Kim, "A new architecture for direct drive robots," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Philadelphia, PA, 1988, pp. 442-445.
- [25] D. A. Streit and E. Shin, "Equilibrators for planar linkages," in *Proc. ASME Mechanisms Conf.*, Chicago, II, 1990, vol. DE-25, pp. 21-28.
- [26] Bruno Monsarrat and Clément M. Gosselin, "Workspace Analysis and Optimal Design of a 3-Leg 6-DOF Parallel Platform Mechanism," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 19, No. 6, December 2003
- [27] I. Ebert-Uphoff, C. M. Gosselin, and T. Laliberté. "Static balancing of a class of spatial parallel platform mechanisms," in *1998 ASME Design Engineering Technical Conferences*, no. DETC/MECH-5964, Sept 1998.

- [28] D. A. Streit. "Spatial manipulator and six degree of freedom platform spring equilibrators theory," in *Second National Conference on Applied Mechanisms and Robotics*, vol. VIII.B, pp. 1-1 - 1-6, 1991.
- [29] J. Wang. "Kinematic analysis, dynamic analysis and static balancing of planar and spatial parallel mechanisms or manipulators with revolute actuators." PhD thesis, Laval University, Québec, Canada, 1998
- [30] L. Sciavicco and B. Siciliano, "Modelling and Control of Robot Manipulators." Springer-Verlag London Limited 2000, pp. 203-208.
- [31] Ahmed A. Shabana, "Computational Dynamics." Jhon Wiley & Sons, INC. 2001.
- [32] Vladimir S. & Michael Vasek, 1996, *Kinematics and Dynamics of Machinery*, John Wiley & Sons.
- [33] Greenwood, D. T., *Principles of Dynamics*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.