

01161

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN INGENIERÍA**

**RECONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDECES DE MARCOS A PARTIR DE  
SUS PARÁMETROS MODALES EXPERIMENTALES**

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ingeniería  
(Estructuras)  
presenta

Hugo Acevedo Morales

Director de tesis

Dr. José Alberto Escobar Sánchez

México D.F., mayo de 2005

m344691



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

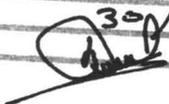
El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## RESUMEN

Se estudian algunos de los métodos directos que permiten reconstruir la matriz de rigideces de estructuras con o sin daño, usando como dato sus parámetros modales experimentales (frecuencias naturales y modos de vibración). El objetivo es definir un método con el cual se pueda reconstruir esta matriz usando el menor número posible de sus parámetros modales medidos experimentalmente. Para lograrlo se estudian modelos estructurales y se simula daño en algunos de sus elementos disminuyendo sus rigideces. Al aplicar los diferentes algoritmos para reconstruir su matriz de rigideces se varía el número de parámetros modales usados y se mide el error relativo que se genera respecto a la matriz de rigideces. Para elegir las formas modales que deben usarse para reconstruir una matriz de rigideces, se estudia la técnica de selección de formas modales basada en la energía de deformación modal máxima. Se obtiene que para los modelos estructurales estudiados, la información que proporcionan las formas modales asociadas a las frecuencias naturales mayores es fundamental para reconstruir de manera precisa su matriz de rigideces. Se estudia también el efecto de las incertidumbres en las mediciones de las propiedades dinámicas de una estructura debido a ruido. Se concluye que para obtener resultados precisos al reconstruir una matriz de rigideces, es necesario usar sus formas modales con mayor nivel de energía de deformación modal. En general, estas corresponden a las formas modales mayores.

## ABSTRACT

Some direct methods to fit the stiffness matrix, using as data its measured modal parameters (natural frequencies and vibration modal shapes) of damaged and no damaged structures are studied. The goal is to define a method from which the stiffness matrix can be fitted by using the smaller number of its measured modal parameters. In order to achieve it, several structural models are studied simulating damage in some of their structural elements decreasing its stiffness. In the use of the analysed algorithms, the number of modal parameters used was changed, and the relative error respect to the simulated stiffness matrix was computed. To choose the modal shapes used to fit the stiffness matrix, a modes selection strategy, based on the maximum modal strain energy is studied. It is demonstrated that by applying this approach to the studied structural models, to reconstruct the stiffness matrix, the more accurate results are obtained when the modes shapes are selected using the maximum strain energy. Additionally, the effect of uncertainties in the estimated modal parameters due to noise is studied. It is concluded that in order to achieve the more accurate results for reconstruct the stiffness matrix, is necessary to use the modal shapes with the higher modal strain energy. In general, these are the higher modal shapes.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e Impreso el contenido de mi trabajo recepcional.  
NOMBRE: Hugo Acevedo  
morales  
FECHA: 30/05/05  
FIRMA: 

## CONTENIDO

<b>RESUMEN.....</b>	<b>II</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>II</b>
<b>CONTENIDO.....</b>	<b>III</b>
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1 INTRODUCCIÓN.....	1
<b>CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES.....</b>	<b>3</b>
2.1 MÉTODOS BASADOS EN EL USO DE PARÁMETROS MODALES.....	3
2.1.1 Métodos directos.....	3
2.1.2 Métodos iterativos.....	4
2.2 OBJETIVOS Y ALCANCES.....	6
<b>CAPÍTULO 3. ANÁLISIS MODAL.....</b>	<b>7</b>
3.1 FRECUENCIAS Y MODOS NATURALES DE VIBRACIÓN.....	7
3.2 ANÁLISIS MODAL TRIDIMENSIONAL.....	10
3.3 CONDENSACIÓN ESTÁTICA DE GUYAN.....	11
<b>CAPÍTULO 4. MÉTODOS PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDECES.....</b>	<b>14</b>
4.1 MÉTODOS BASADOS EN LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.....	14
4.1.1 Algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.....	14
4.1.2 Algoritmo de Berman y Nagy.....	16
4.2 ALGORITMO DE LA MEZCLA DE MATRICES.....	18
4.3 ALGORITMO DE LA MATRIZ DE ERROR.....	19
4.4 CRITERIO DE SELECCIÓN DE FORMAS MODALES BASADO EN LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN MODAL MÁXIMA.....	20
<b>CAPÍTULO 5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN.....</b>	<b>24</b>
5.1 MÉTODOS DIRECTOS.....	24
5.1.1 Marco plano.....	24
5.1.2 Estructura tridimensional.....	30
5.2 APLICACIÓN DEL CRITERIO DE SELECCIÓN DE FORMAS MODALES BASADO EN LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN MODAL MÁXIMA.....	35
5.2.1 Marco plano.....	35
5.2.2 Estructura tridimensional.....	38
5.2.3 Marco plano asimétrico 1.....	40
5.2.4 Marco plano asimétrico 2.....	43
5.3 INCERTIDUMBRES EN LAS MEDICIONES DE LAS CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS DE UNA ESTRUCTURA POR EFECTOS DE RUIDO.....	47

**CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....51**  
**REFERENCIAS.....54**

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. INTRODUCCIÓN

Actualmente existen varios métodos para la detección de daño en estructuras que usan como dato sus parámetros modales experimentales. Algunos de estos métodos estiman el daño estructural en términos de la pérdida de rigidez de los elementos estructurales cuando estos han sufrido daño. La mayoría de los algoritmos de detección de daño efectúan una comparación entre la matriz de rigideces de la estructura para un estado inicial sano o dañado y la matriz de rigideces para un estado final dañado. La matriz de rigideces para el estado inicial se puede obtener a partir del modelo analítico de la estructura suponiendo que esta fue construida siguiendo las especificaciones del proyecto, o también, al igual que para el estado dañado, a partir de sus parámetros modales, frecuencias naturales de vibración y formas modales experimentales, correspondientes a ese estado.

Así, para poder evaluar el daño estructural, es necesario reconstruir la matriz de rigideces de la estructura teniendo como dato sus parámetros modales experimentales. Al aplicar los algoritmos para reconstruir la matriz de rigideces de una estructura, la matriz de rigideces global del modelo analítico se condensa a los grados de libertad primarios que es posible medir en la realidad. En el caso de estructuras de edificios, estos son generalmente los desplazamientos laterales de los entrepisos. A esta matriz se le llama matriz de rigidez lateral. La matriz de rigideces reconstruida también es una matriz condensada.

Entre los métodos que permiten reconstruir una matriz de rigideces a partir de sus parámetros modales están los “métodos directos”, en el presente trabajo se analizan algunos de estos.

Para revisar la efectividad de los métodos analizados, se estudian varios modelos estructurales, se simula daño estructural disminuyendo la rigidez de algunos de sus elementos y se construye su matriz de rigidez lateral. Se obtienen sus parámetros modales y se aplican los diferentes métodos para reconstruir su matriz de rigideces.

Por otro lado, al efectuar las mediciones de los parámetros modales correspondientes a un estado de daño en una estructura real no es fácil identificar el número total de frecuencias y formas modales correspondientes a todos los grados de libertad instrumentados. Más aún si se trata de una estructura con un gran número de grados de libertad. Esta característica se analiza para cada uno de los métodos estudiados, variando el número de frecuencias y formas modales que se usan para reconstruir la matriz de rigideces.

Al variar el número de parámetros modales usados para reconstruir la matriz de rigideces de los modelos estructurales estudiados, se usa el criterio de selección de formas modales basado en las frecuencias naturales mínimas. Es decir, para cualquier número de parámetros modales usados, estos corresponden siempre a las frecuencias naturales de menor valor.

En el presente trabajo se estudian diferentes técnicas para reconstruir la matriz de rigideces de una estructura a partir de sus características dinámicas medidas experimentalmente, entre ellas el criterio de selección de formas modales basado en la energía de deformación modal máxima. En él

se evalúa la energía de deformación modal de las formas modales del modelo estructural, para el modelo analítico y para el correspondiente al de daño simulado y se revisa la correlación existente entre las formas modales de los dos estados de la estructura. Para reconstruir la matriz de rigideces de una estructura se eligen las formas modales que almacenan el mayor nivel de energía y a la vez estén mejor correlacionadas.

Al reconstruir la matriz de rigideces de una estructura dañada, aplicando el criterio de selección de formas modales basado en la energía de deformación modal máxima, se aplican los mismos métodos directos presentados en el capítulo cuatro. La única diferencia es que, las formas modales utilizadas para reconstruir la matriz de rigideces se seleccionan de forma diferente.

Como índice para analizar la precisión de los diferentes métodos, se calcula el error relativo entre la matriz de rigideces obtenida por cada uno de los métodos aplicados y la matriz de rigideces obtenida de daño simulado y se discute acerca de su efectividad.

Se estudia también el efecto de las incertidumbres que afectan las mediciones de las características dinámicas de una estructura debido a ruido.

Finalmente se concluye que, para obtener resultados más precisos al reconstruir la matriz de rigideces de una estructura, usando el menor número posible de parámetros modales experimentales, es mejor una selección de formas modales basada en la energía de deformación modal máxima que una selección de formas modales basada en las frecuencias naturales mínimas.

## CAPÍTULO 2

### ANTECEDENTES

#### 2.1. MÉTODOS BASADOS EN EL USO DE PARÁMETROS MODALES

En la actualidad existen varios métodos que permiten reconstruir las matrices de masas y rigideces de una estructura dañada y poder así localizar y evaluar el daño estructural. Estos métodos se clasifican en dos grupos (Henning, 1998). El primero lo constituyen los métodos basados en el uso de parámetros modales. Este grupo, a su vez, se divide en: métodos directos y métodos iterativos. El segundo grupo de métodos se basa en el uso de las funciones de respuesta de frecuencia (FRF). Mediante estas técnicas, a través de pruebas dinámicas, se identifican las frecuencias naturales y formas modales de un sistema estructural. Se mide la excitación de las fuerzas que actúan sobre la estructura y sus correspondientes respuestas, el procesamiento de las señales obtenidas, a partir de las mediciones hechas, determina una función de respuesta de frecuencia.

##### 2.1.1. Métodos directos

La primera generación de algoritmos que apareció para reconstruir las matrices de masas y rigideces de una estructura con o sin daño, es la de los métodos directos. Estos algoritmos son sencillos de aplicar, consisten solamente en ecuaciones matriciales, función de las matrices de masas y rigideces del modelo analítico de una estructura y de sus parámetros modales obtenidos experimentalmente (frecuencias naturales y formas modales de vibración).

Dentro de los métodos directos comúnmente usados, están los métodos basados en los multiplicadores de Lagrange, los cuales se obtuvieron a partir de un estricto problema de optimización restringido. Estos métodos se basan en minimizar una función objetivo predefinida y sujeta a restricciones tales como la simetría de las matrices de masas y rigideces y de sus propiedades de ortogonalidad. Baruch (1978), por ejemplo, estableció una ecuación para reconstruir la matriz de rigideces de una estructura, mientras que Berman y Nagy (1983), propusieron expresiones para reconstruir las matrices de masas y rigideces. Las dos técnicas son representativas de esta familia de métodos.

La aplicación de estos métodos, sin embargo, está limitada ya que cuando se dispone de una cantidad incompleta de parámetros modales experimentales se obtienen matrices reconstruidas imprecisas (Saeed, 1997).

Otro de los métodos directos, es el de la *mezcla de matrices*, esta técnica supone que las formas modales experimentales correspondientes a todos los grados de libertad de la estructura son conocidas. Las inversas de las matrices de masas y rigideces reconstruidas se obtienen usando simultáneamente parámetros modales experimentales y parámetros modales del modelo analítico de la estructura. Link et al. (1986) y Caesar (1987) usaron la matriz de flexibilidad del modelo analítico de una estructura para reconstruir sus matrices dañadas de masas y rigideces a partir de sus parámetros modales, analíticos y experimentales.

Otra técnica representativa de esta familia de métodos es el de la *matriz de error*. En él se establece la diferencia entre la matriz de rigideces del modelo analítico y la desconocida matriz de rigideces reconstruida, suponiendo que la diferencia entre ellas es pequeña. Después de calcular la matriz de

pseudo-flexibilidad de una estructura usando los parámetros modales experimentales conocidos es posible obtener una matriz de error para las matrices de masas y rigideces. A partir de esta matriz de error se obtienen las matrices de masas y rigideces (Sidhu y Ewins, 1984).

La precisión de los resultados obtenidos al reconstruir una matriz de masas o rigideces con el uso de los métodos directos, depende de la calidad y cantidad de los datos obtenidos a partir un análisis modal experimental.

### 2.1.2. Métodos iterativos

Los fundamentos de los métodos iterativos para reconstruir la matriz de masas o rigideces de una estructura dañada o sin daño, son muy diferentes a los de los métodos directos. A diferencia de estos, que se basan en considerar las matrices globales de masas y rigideces de un sistema estructural, los métodos iterativos se basan en la naturaleza discretizada de un modelo de elementos finitos (EF). Este es un ensamble de elementos definidos por su geometría y propiedades del material que los constituye (parámetros de diseño).

La técnica básica de los métodos iterativos al reconstruir las matrices de masas y rigideces de una estructura dañada consiste en mejorar de manera iterativa la correlación entre un modelo de EF y un modelo experimental. Así, los métodos iterativos operan con base en un modelo de EF y uno de error que representa los cambios de un predefinido número de parámetros de diseño de la matriz que se va a reconstruir. El modelo de error se formula como un grupo de ecuaciones algebraicas lineales de la forma (Saeed, 1997):

$$[S^k] \{\Delta\phi^k\} = \{\varepsilon^k\} \quad (2.1)$$

donde:

$[S^k]$  = matriz de sensibilidad  
 $\{\Delta\phi^k\}$  = vector de cambios en los parámetros de diseño  
 $\{\varepsilon^k\}$  = vector residual

El superíndice en los términos de la ecuación (2.1) representa la  $k$ -ésima iteración. La matriz de sensibilidad contiene las derivadas de primer orden de los valores y vectores característicos con respecto a los parámetros de diseño. Los parámetros de diseño son los elementos individuales de las matrices de masas y rigideces. El vector residual  $\{\varepsilon^k\}$  representa la diferencia entre los parámetros modales obtenidos a partir de un modelo de EF de una estructura (ó modelo analítico) y los parámetros modales experimentales. El  $\{\varepsilon^k\}$  se obtiene mediante series de Taylor.

Fox y Kapoor (1968), propusieron un método para calcular la primera derivada de los valores característicos con respecto a los parámetros de diseño. Propusieron además dos métodos para obtener la primera derivada de los vectores característicos. Otros métodos para calcular la primera derivada de formas modales, han sido propuestos por Chu y Rudisill (1975), Ojalvo (1987) y Tan y Andrew (1989).

En las estructuras, generalmente el número de parámetros de diseño es diferente al número de parámetros modales experimentales, esto hace que la matriz  $[S^k]$  de la ecuación (2.1) no sea cuadrada. El caso en que existen más parámetros de diseño que parámetros modales experimentales fue considerado por Hart y Yao (1977) y Ojalvo et al. (1989). Ellos usaron la técnica de descomposición en

valores singulares (DVS) (Szabo, 1997), para calcular el vector  $\{\Delta\varphi^k\}$  en lugar de utilizar directamente la ecuación (2.1).

Cuando el número de parámetros de diseño es menor que el de parámetros modales experimentales, la solución a la ecuación (2.1) se obtiene minimizando la función (Saeed, 1997):

$$L(\{\Delta\varphi^k\}) = (\{\varepsilon^k\} - [S^k]\{\Delta\varphi^k\})^T (\{\varepsilon^k\} - [S^k]\{\Delta\varphi^k\}) \quad (2.2)$$

donde:

$L(\{\Delta\varphi^k\})$  = función optimización del vector de cambios en los parámetros de diseño

Derivando  $L(\{\Delta\varphi^k\})$  con respecto a  $\{\Delta\varphi^k\}$  y resolviendo la ecuación (2.2), el vector desconocido de variación de parámetros de diseño es (Saeed, 1997):

$$\{\Delta\varphi^k\} = ([S^k]^T [S^k])^{-1} [S^k]^T \{\varepsilon^k\} \quad (2.3)$$

Y el vector reconstruido de parámetros de diseño, a través de la  $k+1$ -ésima iteración se obtiene como (Saeed, 1997):

$$\{\varphi^{k+1}\} = \{\varphi^k\} + \{\Delta\varphi^k\} \quad (2.4)$$

Ya que los parámetros de diseño son los términos de las matrices de masas y rigideces, el proceso de reconstrucción iterativo de estas matrices es como sigue:

Habiendo calculado la matriz de sensibilidad  $[S^k]$  y el vector residual  $\{\varepsilon^k\}$ , si la matriz  $[S^k]$  es cuadrada, el vector  $\{\Delta\varphi^k\}$  se obtiene con la ecuación (2.1) y el vector reconstruido de parámetros de diseño con la (2.4). El proceso se repite hasta que la convergencia para una tolerancia especificada de error es alcanzada.

Si la matriz  $[S^k]$  no es cuadrada (número de parámetros de diseño mayor que el de parámetros modales experimentales conocidos), el vector  $\{\Delta\varphi^k\}$  se puede obtener al aplicar la DVS. El vector reconstruido de parámetros de diseño se obtiene con la ecuación (2.4).

Si el número de parámetros de diseño es menor que el de parámetros modales experimentales conocidos, el vector  $\{\Delta\varphi^k\}$  se obtiene con la ecuación (2.3). De igual forma, el vector reconstruido de parámetros de diseño se obtiene con la ecuación (2.4).

Así, mediante la aplicación de los métodos directos para reconstruir una matriz de rigideces y conociendo todos los parámetros modales experimentales para un estado condensado dañado de una estructura, es posible reconstruir de manera precisa su matriz de rigideces. Sin embargo, en el caso particular de estructuras con múltiples grados de libertad (gdl), no es posible identificar la totalidad de sus parámetros modales. Además, también es posible que por el mismo tamaño de la estructura, tampoco se puedan instrumentar todos sus gdl disponiendo así un número limitado de gdl medidos para reconstruir su matriz de rigideces.

## **2.2. OBJETIVOS Y ALCANCES**

En el presente trabajo se establecen como objetivos principales:

1. Revisar la efectividad de algunos de los métodos directos que permiten reconstruir la matriz de rigideces de una estructura.
2. Definir un método con el cual se pueda reconstruir la matriz de rigideces de una estructura usando el menor número posible de sus parámetros modales experimentales.
3. Establecer un criterio para evaluar el efecto de algunas de las incertidumbres que afectan los valores obtenidos de los parámetros modales experimentales de una estructura.

Para realizar lo anterior, se estudian diferentes modelos estructurales, se aplican las técnicas descritas para reconstruir sus matrices de rigideces y se analizan y discuten los resultados obtenidos.

## CAPÍTULO 3

### ANÁLISIS MODAL

Se estudian algunos de los métodos directos para reconstruir la matriz de rigideces de una estructura dañada o sin daño. Ya que estos métodos usan como dato las frecuencias naturales y formas modales de vibración obtenidos experimentalmente, en esta sección se presenta un resumen de conceptos y propiedades utilizados en el análisis modal estructural.

#### 3.1. FRECUENCIAS Y MODOS NATURALES DE VIBRACIÓN

Problema de valores y vectores característicos de una estructura (Chopra, 2001):

$$([K] - \omega^2[M])\{\Phi\} = 0 \quad (3.1)$$

donde:

$[K]$  = matriz de rigideces

$[M]$  = matriz de masas

$\omega^2$  = frecuencia natural circular cuadrada

$\{\Phi\}$  = vector modal

Las frecuencias naturales de vibración de un sistema estructural se pueden obtener a partir de la ecuación (3.1). Para que  $\{\Phi\} \neq 0$ , se debe cumplir que:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (3.2)$$

Al desarrollar el determinante (3.2), se obtiene una ecuación de grado igual al número de gdl del sistema donde la incógnita es  $\omega^2$ . Así, se tienen tantos valores de  $\omega^2$  como gdl tenga el sistema. Sustituyendo cada valor de la frecuencia  $\omega^2$  en la ecuación (3.1) se obtiene el vector modal o modo de vibración asociado a esa frecuencia. Estos vectores modales contienen valores relativos de la configuración deformada, entre los gdl del sistema estructural.

Para una estructura particular, se tendrá igual número de modos de vibración que número de gdl que la representen. Los modos de vibración representados como vectores columna se agrupan en una matriz cuadrada llamada matriz modal. Así, para un sistema estructural de  $N$  gdl, su matriz modal es:

$$[\Phi]_{NN} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1N} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_{N1} & \Phi_{N2} & \dots & \Phi_{NN} \end{bmatrix}$$

En cada término  $\Phi_{ni}$ , el subíndice  $n$  se refiere al grado de libertad y él  $i$  al modo de vibración.

Las frecuencias naturales cuadradas de vibración se representan en una matriz diagonal llamada matriz espectral. En esta, las frecuencias se representan en orden de valor ascendente, la correspondiente al término (1,1) es la menor. Para un sistema de  $N$  gdl la matriz de frecuencias de vibración al cuadrado es:

$$[\omega^2]_{NN} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Una aplicación fundamental del análisis modal consiste en que los desplazamientos de las masas de un sistema de varios gdl, cuando es sometido a una aceleración en su base, se pueden obtener sumando los desplazamientos debidos a la aportación de cada uno de los modos naturales de vibración. Es decir, cualquier configuración de desplazamientos  $X$  se puede expresar como una combinación lineal de los vectores modales  $\{\Phi\}_i$ . Así, para un sistema de  $N$  gdl, el desplazamiento de la masa correspondiente al gdl  $n$  es:

$$X_n = \sum_{i=1}^N a_i \{\Phi\}_i$$

Los modos de vibración poseen la propiedad de ortogonalidad respecto a las matrices de masas y rigideces. Estas propiedades son muy importantes para estudiar problemas dinámicos de sistemas estructurales de múltiples gdl. Para mostrar estas propiedades, la ecuación (3.1) se escribe como (Chopra, 2001):

$$[K]\{\Phi\} = \omega^2 [M]\{\Phi\} \quad (3.3)$$

Considerando dos diferentes modos de vibración y sus correspondientes frecuencias naturales. La  $i$ -ésima frecuencia y su modo deben satisfacer la ecuación (3.3), esto es:

$$[K]\{\Phi\}_i = \omega_i^2 [M]\{\Phi\}_i \quad (3.4)$$

Similarmente, para la  $j$ -ésima frecuencia de vibración y su modo correspondiente se tiene:

$$[K]\{\Phi\}_j = \omega_j^2 [M]\{\Phi\}_j \quad (3.5)$$

Premultiplicando los dos términos de la ecuación (3.4) por  $\{\Phi\}_j^T$ :

$$\{\Phi\}_j^T [K]\{\Phi\}_i = \omega_i^2 \{\Phi\}_j^T [M]\{\Phi\}_i \quad (3.6)$$

Premultiplicando los dos términos de la ecuación (3.5) por  $\{\Phi\}_i^T$  :

$$\{\Phi\}_i^T [K] \{\Phi\}_j = \omega_j^2 \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j \quad (3.7)$$

Considerando la propiedad de simetría de las matrices de masas y rigideces, al aplicar la transpuesta a los dos términos de la ecuación (3.6) se obtiene:

$$\{\Phi\}_i^T [K] \{\Phi\}_j = \omega_i^2 \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j \quad (3.8)$$

Restando la ecuación (3.7) de la (3.8):

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j = 0 \quad (3.9)$$

Si  $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ , para un sistema con frecuencias naturales reales, se tiene que  $\omega_i \neq \omega_j$ , y para que se satisfaga la ecuación (3.9) se debe cumplir que:

$$\{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j = 0 \quad (3.10)$$

Esta ecuación es conocida como la propiedad de ortogonalidad entre dos modos de vibración diferentes, con respecto a la matriz de masas.

Ya que los vectores modales contienen valores relativos de la configuración deformada de un sistema estructural, es conveniente normalizarlos. Un criterio de normalización para los elementos del  $i$ -ésimo vector modal  $\{\Phi\}_i$ , es (Paz, 1997):

$$\Phi_{ni} = \frac{\phi_{ni}}{\sqrt{\{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_i}} \quad (3.11)$$

donde:

$\phi_{ni}$  =  $n$ -ésima coordenada modal del  $i$ -ésimo modo

$\Phi_{ni}$  =  $n$ -ésima coordenada modal normalizada del  $i$ -ésimo modo

Para vectores modales normalizados, cuando  $i=j$ , la propiedad de ortogonalidad (3.10) se convierte en:

$$\{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_i = 1 \quad (3.12)$$

La condición de ortogonalidad de dos vectores modales respecto a la matriz de rigideces se obtiene a partir de la ecuación (3.3). Para el  $j$ -ésimo vector modal se tiene:

$$[K] \{\Phi\}_j = \omega_j^2 [M] \{\Phi\}_j \quad (3.13)$$

Premultiplicando los dos términos de esta ecuación por  $\{\Phi\}_i^T$  y tomando en cuenta la propiedad (3.10) se obtiene:

$$\{\Phi\}_i^T [K] \{\Phi\}_j = 0 \quad (3.14)$$

Esta ecuación es la condición de ortogonalidad de dos vectores modales respecto a la matriz de rigideces. Para vectores modales normalizados, si  $i=j$ , la propiedad (3.14) se convierte en:

$$\{\Phi\}_i^T [K] \{\Phi\}_i = \omega_i^2 \quad (3.15)$$

Es importante conocer estas propiedades de los vectores modales ya que los métodos directos usados para reconstruir una matriz de rigideces, basados en los multiplicadores de Lagrange se basan en el planteamiento de un problema de optimización sujeto a restricciones. Estas restricciones son precisamente el problema de valores y vectores característicos, las propiedades de ortogonalidad de los vectores modales y la propiedad de simetría de las matrices de masas y rigideces de una estructura.

### 3.2. ANÁLISIS MODAL TRIDIMENSIONAL

Una estructura real, ya sea plana o tridimensional, tiene un número infinito de gdl que pueden definir, para un instante dado, su configuración deformada. Sin embargo, no es necesario elegir tantos gdl como sea posible para definir el comportamiento elástico de un modelo estructural. En la realidad su respuesta de interés queda representada solamente por algunos de ellos. Por esta razón, es conveniente usar solamente los gdl necesarios que representen las deformaciones y fuerzas que realmente interesan.

La hipótesis establecida para modelos estructurales planos consiste en considerar sistemas de piso lo suficientemente rígidos para preservar como relevantes solo los desplazamientos laterales de entrepiso. De igual forma, si en un sistema estructural tridimensional se conserva esta hipótesis, el problema se reduce a considerar solo tres gdl por cada nivel, dos desplazamientos laterales y un giro respecto al eje vertical. Para este caso, en las fuerzas de inercia se incluyen los productos de los momentos de inercia de las masas con respecto al eje vertical y por sus correspondientes aceleraciones rotacionales.

En la matriz de masas de un modelo estructural tridimensional, los desplazamientos laterales de entrepiso están asociados a la masa traslacional del nivel correspondiente y el giro respecto al eje vertical está asociado a la inercia rotacional de la masa con respecto a ese eje. Considerando dos desplazamientos laterales de entrepiso y giro respecto al eje vertical como gdl de uno de los entrepisos de un sistema tridimensional, la submatriz de masas del  $l$ -ésimo nivel  $[M]_l$ , tiene la forma:

$$[M]_l = \begin{bmatrix} m_l & 0 & 0 \\ 0 & m_l & 0 \\ 0 & 0 & Ir_l \end{bmatrix}$$

donde:

$m_l$  = masa del nivel  $l$

$Ir_l$  = inercia rotacional de la masa del nivel  $l$

Cuando la masa  $m$  está distribuida uniformemente en planta y su radio de giro es  $r$ , su inercia rotacional se puede calcular como (Bazán y Meli, 2003):

$$Ir = m r^2$$

Para una planta rectangular de dimensiones  $a$  y  $b$  el radio de giro de su área es:

$$r = \sqrt{(a^2 + b^2)/12}$$

Para un sistema estructural tridimensional, las frecuencias de vibración se pueden calcular también con la ecuación (3.2). Los modos de vibración están formados ahora por desplazamientos y rotaciones, éstos deben de concordar con los gdl considerados y con el orden que estos tengan en las matrices de masas y rigideces del modelo estructural. Los modos de vibración deben de cumplir con las propiedades de la sección (3.1).

### 3.3. CONDENSACIÓN ESTÁTICA DE GUYAN

Ya que en las pruebas de vibración efectuadas en una estructura real no es posible medir en todos sus gdl, es necesario efectuar una reducción o condensación del total de éstos para tratar solo con los gdl primarios que definan adecuadamente su respuesta. En el caso de edificios, cuando existen sistemas de piso suficientemente rígidos en su plano que impidan los giros en los nudos viga-columna y se pueda considerar que solo existe traslación horizontal de tales sistemas, interesará medir solo esos gdl.

Las razones por las que se efectúa una condensación matricial, son en general, la gran cantidad de gdl que tiene la estructura, el interés de solo algunos de ellos o la cantidad de equipo insuficiente de que se dispone para medir el total de esos gdl.

Los gdl condensados de una estructura son los puntos donde se supone que se encuentra concentrada su masa. Después de la condensación de sus matrices, sólo los gdl primarios quedan representados en el modelo estructural. Existen algoritmos para determinar de manera automática los gdl primarios que deben elegirse en una estructura para lograr buenos resultados al obtener sus parámetros modales (Henshell y Ong, 1975).

Una de las técnicas más populares de este tipo es la condensación estática de Guyan (1965). Esta técnica ha sido una de las más usadas para la condensación matricial de las matrices que representan modelos analíticos de estructuras. Inicia de la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema estructural en el dominio del tiempo, sin considerar el amortiguamiento:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{f\} \quad (3.16)$$

donde:

$[M]$  = matriz de masas

$[K]$  = matriz de rigideces

$\{\ddot{X}\}$  = vector de aceleración

$\{X\}$  = vector de desplazamiento

$\{f\}$  = vector de cargas externas

Debido a que en la ecuación (3.16) se desprecia el término de inercia  $([M]\{\ddot{X}\})$ , esta técnica es llamada reducción estática. Particionando las matrices en gdl primarios o de interés  $n$ , y gdl secundarios  $s$ , se tiene:

$$\begin{bmatrix} [K_{nn}] & [K_{ns}] \\ [K_{sn}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_n\} \\ \{X_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_n\} \\ \{f_s\} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Desarrollando la ecuación inferior del sistema anterior se obtiene:

$$\{X_s\} = -[K_{ss}]^{-1} [K_{sn}] \{X_n\} + [K_{ss}]^{-1} \{f_s\} \quad (3.18)$$

Al suponer que no existen fuerzas externas aplicadas en los gdl secundarios, el segundo término del lado derecho de la ecuación (3.18) desaparece y la matriz de transformación de reducción de Guyan se expresa como:

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1} [K_{sn}] \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

donde:

$[T]$  = matriz de transformación de condensación

$[I]$  = matriz identidad

La matriz identidad que aparece en la ecuación (3.19) representa el hecho de que los gdl primarios se conservan al efectuar el proceso de condensación. Las matrices de masas y rigideces condensadas se obtienen como:

$$[M_C] = [T]^T [M_A] [T] \quad (3.20)$$

$$[K_C] = [T]^T [K_A] [T]$$

donde:

$[M_C]$  = matriz de masas condensada

$[K_C]$  = matriz de rigideces condensada

$[T]^T$  = transpuesta de la matriz de transformación

$[M_A]$  = matriz de masas del modelo analítico

$[K_A]$  = matriz de rigideces del modelo analítico

Existe otra forma de obtener la matriz de rigideces condensada  $[K_C]$  sin obtener previamente la matriz de transformación  $[T]$ . Si la ecuación (3.16) se particiona ahora de la forma siguiente (Tung y Christiano, 1993):

$$\begin{bmatrix} [K_{ss}] & [K_{sn}] \\ [K_{ns}] & [K_{nn}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_s\} \\ \{X_n\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_s\} \\ \{f_n\} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Resolviendo para  $\{X_s\}$  a partir de la ecuación superior del sistema (3.21) se obtiene:

$$\{X_s\} = -[K_{ss}]^{-1}([K_{sn}]\{X_n\} - \{f_s\}) \quad (3.22)$$

Sustituyendo la ecuación (3.22) en la ecuación inferior del sistema (3.21):

$$\left(-[K_{ns}][K_{ss}]^{-1}[K_{sn}] + [K_{mm}]\right)\{X_n\} = \{f_n\} - [K_{ns}][K_{ss}]^{-1}\{f_s\} \quad (3.23)$$

Suponiendo también que no existen fuerzas aplicadas en los gdl secundarios, la ecuación (3.23) se reduce a:

$$\left(-[K_{ns}][K_{ss}]^{-1}[K_{sn}] + [K_{mm}]\right)\{X_n\} = \{f_n\} \quad (3.24)$$

El término dentro del paréntesis del lado izquierdo de la ecuación (3.24) es la matriz de rigideces condensada, también llamada matriz de rigidez lateral. Es importante observar que en esta ecuación los términos de desplazamientos y fuerzas están expresados para los gdl primarios (condensados). La matriz de rigideces condensada es entonces:

$$[K_C] = [K_{mm}] - [K_{ns}][K_{ss}]^{-1}[K_{sn}] \quad (3.25)$$

Así, para calcular la matriz de rigideces condensada de una estructura, basta con particionar la matriz de rigideces global de acuerdo a la ecuación (3.21) y aplicar la ecuación (3.25). La misma técnica se puede seguir para condensar una matriz de masas.

Se incluye aquí esta técnica de condensación matricial ya que al reconstruir la matriz de rigideces de los modelos estructurales estudiados en el capítulo cinco, se efectúa una condensación de su matriz de rigideces global para considerar solo como gdl primarios los desplazamientos laterales de entrepiso. Esta condensación de la matriz de rigideces global a los desplazamientos laterales de entrepiso, debe ser acorde a los gdl medidos en la estructura con el fin de obtener sus parámetros modales experimentales.

## CAPÍTULO 4

### MÉTODOS PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDECES

#### 4.1. MÉTODOS BASADOS EN LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Se presentan los fundamentos teóricos de los métodos directos que se utilizan en este trabajo para reconstruir la matriz de rigideces de una estructura.

Todos los métodos basados en los multiplicadores de Lagrange tratan de minimizar una función objetivo sujeta a una serie de restricciones en las variables independientes. Consideran un problema de optimización restringido basado en la ecuación de equilibrio dinámico, las matrices de masas y rigideces del modelo analítico de la estructura y los parámetros modales obtenidos experimentalmente.

##### 4.1.1. Algoritmo de Baruch y Bar Itzhack

Baruch (1978), propuso un método para reconstruir la matriz de rigidez de una estructura dañada, aceptando que la matriz de masas es constante. La matriz de rigideces reconstruida se obtiene minimizando la norma de error entre esta matriz y la matriz de rigideces del modelo analítico de la estructura.

$$\gamma = \frac{1}{2} \| [M_A]^{-1/2} ([K_U] - [K_A])[M_A]^{-1/2} \| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{q=1}^n m_{iq}^{-1/2} \sum_{p=1}^n (k_{Upq} - k_{Aqp}) m_{pj}^{-1/2} \right]^2 \quad (4.1)$$

donde:

$\| \|$  = norma matricial

$[M_A]$  = matriz de masas del modelo analítico

$[K_A]$  = matriz de rigideces del modelo analítico

$[K_U]$  = matriz de rigideces reconstruida

$m_{ij}$  = elemento de  $[M_A]$

$k_{Aij}$  = elemento de  $[K_A]$

$k_{Uij}$  = elemento de  $[K_U]$

Sujeta a las siguientes restricciones, que satisfacen la simetría de la matriz de rigideces y el problema de valores y vectores característicos, respectivamente:

$$[K_U] = [K_U]^T \quad (4.2)$$

$$[K_U][\Phi_X] = [M_U][\Phi_X][\omega_X^2]$$

donde:

$[\omega_X^2]$  = matriz diagonal de frecuencias naturales cuadradas experimentales

$[\Phi_X]$  = matriz modal experimental  
 $[\Phi_X]^T$  = matriz transpuesta de la matriz  $[\Phi_X]$   
 $[K_U]^T$  = matriz transpuesta de la matriz  $[K_U]$   
 $[M_U]$  = matriz de masas reconstruida

Las matrices de masas y rigideces son de orden  $n \times n$ , además, la matriz de masas cumple con la propiedad de ortogonalidad, ecuación (3.12). Usando el método de los multiplicadores de Lagrange (Baruch, 1978), para incluir las restricciones (4.2), la función de Lagrange se define como:

$$\Psi = \gamma + 2\Pi[\Lambda_k]([K_U][\Phi_X] - [M_A][\Phi_X][\omega_X^2])\Pi + \Pi[\beta_k]([K_U] - [K_U]^T)\Pi \quad (4.3)$$

donde:

$$\Pi[\Lambda_k]([K_U][\Phi_X] - [M_A][\Phi_X][\omega_X^2])\Pi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \left( \sum_{r=1}^n k_{ir} \Phi_{rj} - \sum_{r=1}^n m_{ir} \sum_{q=1}^m \Phi_{rq} \omega_{qj}^2 \right)$$

$$\Pi[\beta_k]([K_U] - [K_U]^T)\Pi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\beta_k]_{ij} (k_{Uij} - k_{Uji})$$

$[\Lambda_k]$ ,  $[\beta_k]$  = matrices de multiplicadores de Lagrange

$\lambda_{ij}$  = elemento de  $[\Lambda_k]$

$\Phi_{ij}$  = elemento de  $[\Phi_X]$

$\omega_{ij}^2$  = elemento de  $[\omega_X^2]$

La matriz  $[\Lambda_k]$  es rectangular de orden  $n \times m$ , con  $n \geq m$ .  $[\beta_k]$  es una matriz antisimétrica de orden  $n \times n$ , es decir:

$$[\beta_k] = -[\beta_k]^T$$

La matriz modal experimental  $[\Phi_X]$  es una matriz de orden  $n \times n$ , además, como la matriz de frecuencias cuadradas es diagonal, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \omega_{pq}^2 &= \omega_{pp}^2 \quad \text{para } p = q \\ \omega_{pq}^2 &= 0 \quad \text{para } p \neq q \end{aligned}$$

Derivando parcialmente  $\Psi$  con respecto a  $k_{Uij}$  y resolviendo la ecuación se obtiene  $k_{Uij}$  para el valor mínimo de  $\Psi$ .

$$\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial k_{ij}} \right] = [M_A]^{-1} ([K_U] - [K_A][M_A]^{-1}) + 2[\Lambda_k][\Phi_X]^T + 2[\beta_k] = 0 \quad (4.4)$$

Sumando a la ecuación (4.4) su transpuesta para eliminar  $[\beta_k]$  se obtiene:

$$[K_U] = [K_A] - [M_A][\Lambda_k][\Phi_X]^T[M_A] - [M_A][\Phi_X][\Lambda_k]^T[M_A] \quad (4.5)$$

Sustituyendo (4.5) en la segunda condición (4.2):

$$[M_A][\Phi_X][\omega_X^2] = [K_U][\Phi_X] - [M_A][\Phi_X][\Lambda_k]^T[M_A][\Phi_X] \quad (4.6)$$

Esta ecuación se puede escribir como:

$$[M_A][\Lambda_k] = [K_U][\Phi_X] - [M_A][\Phi_X][\omega_X^2] - [M_A][\Phi_X][\Lambda_k]^T[M_A][\Phi_X] \quad (4.7)$$

Tomando la transpuesta a los dos términos de esta ecuación se obtiene:

$$[\Lambda_k]^T[M_A] = [\Phi_X]^T[K_U] - [\omega_X^2][\Phi_X]^T[M_A] - [\Phi_X]^T[M_A][\Lambda_k][\Phi_X]^T[M_A] \quad (4.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.7) y (4.8) en la ecuación (4.5):

$$\begin{aligned} [K_U] = & [K_A] - [K_A][\Phi_X][\Phi_X]^T[M_A] + 2[M_A][\Phi_X][\omega_X^2][\Phi_X]^T[M_A] + [M_A][\Phi_X][\Lambda_k]^T[M_A] \\ & [\Phi_X][\Phi_X]^T[M_A] - [M_A][\Phi_X][\Phi_X]^T[K_A] + [M_A][\Phi_X][\Phi_X]^T[M_A][\Lambda_k][\Phi_X]^T[M_A] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.7) y (4.8) en la ecuación (4.9):

$$\begin{aligned} [K_U] = & [K_A] - [K_A][\Phi_X][\Phi_X]^T[M_A] - [M_A][\Phi_X][\Phi_X]^T[K_A] + 2[M_A][\Phi_X][\Phi_X]^T[K_A] \\ & [\Phi_X][\Phi_X]^T[M_A] - [M_A][\Phi_X][\Phi_X]^T[M_A][\Lambda_k][\Phi_X]^T[M_A] - [M_A][\Phi_X][\Lambda_k]^T \\ & [M_A][\Phi_X][\Phi_X]^T[M_A] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Finalmente, sumando las ecuaciones (4.9) y (4.10) se obtiene la ecuación para obtener la matriz de rigideces reconstruida (Baruch, 1978).

$$\begin{aligned} [K_U] = & [K_A] - [K_A][\Phi_X][\Phi_X]^T[M_A] - [M_A][\Phi_X][\Phi_X]^T[K_A] + [M_A][\Phi_X][\Phi_X]^T \\ & [K_A][\Phi_X][\Phi_X]^T[M_A] + [M_A][\Phi_X][\omega_X^2][\Phi_X]^T[M_A] \end{aligned} \quad (4.11)$$

#### 4.1.2. Algoritmo de Berman y Nagy

Berman y Nagy (1983), establecieron las mismas suposiciones del algoritmo de Baruch y Bar Itzhack y reconstruyeron las matrices de masas y rigideces secuencialmente. Para reconstruir la matriz de masas de una estructura, se busca minimizar la diferencia entre las matrices  $[M_U]$  y  $[M_A]$ . El problema se define como la minimización de la norma de error entre estas dos matrices a través de la función:

$$\varphi_M = \left\| [M_A]^{-1/2} ([M_U] - [M_A])[M_A]^{-1/2} \right\| \quad (4.12)$$

Sujeta a la condición de ortogonalidad respecto a la matriz de masas reconstruida.

$$[\Phi_X]^T [M_U][\Phi_X] = [I] \quad (4.13)$$

Usando el método de los multiplicadores de Lagrange y considerando la restricción impuesta al problema a través de la ecuación (4.13), la función de Lagrange  $\Psi_M$  se expresa como:

$$\Psi_M = \varphi_M + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \left( [\Phi_X]^T [M_U][\Phi_X] - [I] \right)_{ij} \quad (4.14)$$

donde:

$\lambda_{ij}$  = multiplicador de Lagrange

La matrices de masas  $[M_A]$ ,  $[M_U]$  y la matriz modal  $[\Phi_X]$  son de orden  $n \times n$ .

Al derivar la ecuación (4.14) con respecto a los elementos de  $[M_U]$  y resolverla, usando la propiedad (4.13) se evalúan los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_{ij}$  y se obtiene la matriz de masas reconstruida  $[M_U]$ , la cual minimiza la norma (4.12) y satisface la condición impuesta por la ecuación (4.13). Esta matriz se obtiene como (Berman y Nagy, 1983):

$$[M_U] = [M_A] + [M_A][\Phi_X][m_A]^{-1} ([I] - [m_A])[m_A]^{-1} [\Phi_X]^T [M_A] \quad (4.15)$$

donde:

$$[m_A] = [\Phi_X]^T [M_A][\Phi_X]$$

La matriz de rigideces reconstruida se obtiene al minimizar la norma de error entre esta matriz y la matriz de rigideces del modelo analítico de la estructura, a través de la función:

$$\varphi_K = \left\| [M_A]^{-1/2} ([K_U] - [K_A])[M_A]^{-1/2} \right\| \quad (4.16)$$

Sujeta a las siguientes tres restricciones:

$$[K_U] = [K_U]^T$$

$$[\Phi_X]^T [K_U][\Phi_X] = [\omega_X^2] \quad (4.17)$$

$$[K_U][\Phi_X] = [M_A][\Phi_X][\omega_X^2]$$

Que garantizan la simetría de la matriz de rigideces, la propiedad de ortogonalidad respecto a la matriz de rigideces y el problema de valores y vectores característicos, respectivamente.

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, se define una matriz de multiplicadores de Lagrange para cada una de las restricciones impuestas al problema a través de las ecuaciones (4.17). La función de Lagrange se establece como:

$$\Psi_K = \varphi_K + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\Lambda_k]_{ij} \left( [K_U][\Phi_X] - [M_A][\Phi_X][\omega_X^2] \right)_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [\Lambda_o]_{ij} \left( [\Phi_X]^T [K_U][\Phi_X] - [\omega_X^2] \right)_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\Lambda_s]_{ij} \left( [K_U] - [K_U]^T \right)_{ij} \quad (4.18)$$

donde:

$[\Lambda_k], [\Lambda_o], [\Lambda_s]$  = matrices de multiplicadores de Lagrange

Al derivar la ecuación (4.18) con respecto a los elementos de  $[K_U]$  y resolverla, usando las restricciones (4.17) para eliminar los multiplicadores de Lagrange se obtiene la matriz de rigideces reconstruida como (Berman y Nagy, 1983):

$$[K_U] = [K_A] + ([\Delta] + [\Delta]^T) \quad (4.19)$$

donde:

$$[\Delta] = \frac{1}{2} [M_A][\Phi_X] \left( [\Phi_X]^T [K_A][\Phi_X] + [\omega_X^2] \right) [\Phi_X]^T [M_A] - [K_A][\Phi_X][\Phi_X]^T [M_A]$$

## 4.2. ALGORITMO DE LA MEZCLA DE MATRICES

El método de la mezcla de matrices se debe a Ross (1971) y Thoren (1972), posteriormente fueron desarrollados e introducidos por Caesar (1987) y Link et al. (1987).

Suponiendo que para una estructura se miden los modos de vibración para todos sus gdl, se pueden construir las matrices de masas y rigideces de la estructura directamente. Considerando que los vectores característicos están normalizados con respecto a la matriz de masas, las matrices de masas y rigideces se obtienen como:

$$[M_U]^{-1} = [\Phi_X][\Phi_X]^T = \sum_{i=1}^N \{\Phi_X\}_i \{\Phi_X\}_i^T \quad (4.20)$$

$$[K_U]^{-1} = [\Phi_X][\omega_X^2]^{-1}[\Phi_X]^T = \sum_{i=1}^N \frac{\{\Phi_X\}_i \{\Phi_X\}_i^T}{\omega_{Xi}^2}$$

donde:

$\{\Phi_X\}_i$  =  $i$ -ésimo vector modal experimental

$\omega_{Xi}^2$  =  $i$ -ésima frecuencia natural cuadrada experimental

Existen dos problemas al aplicar el método de la mezcla de matrices. Primero, el número de modos identificados es generalmente menor que el de gdl medidos de la estructura. Segundo, la respuesta de la

estructura puede ser solo medida en un número limitado de puntos. Sin embargo, la segunda dificultad puede ser parcialmente superada expandiendo las formas modales experimentales al número de gdl que se consideren en el modelo analítico de la estructura.

Caesar (1987) y Link et al. (1987) expandieron las formas modales medidas a los gdl del modelo analítico con el fin de tener las formas modales completas respecto al número de gdl considerados en ese modelo, también usaron datos del modelo analítico para suplir los modos experimentales no identificados. Bajo tales suposiciones, las matrices de masas y rigideces se obtienen como:

$$[M_U]^{-1} = \sum_{i=1}^m \{\Phi_X\}_i \{\Phi_X\}_i^T + \sum_{i=m+1}^N \{\Phi_A\}_i \{\Phi_A\}_i^T \quad (4.21)$$

$$[K_U]^{-1} = \sum_{i=1}^m \frac{\{\Phi_X\}_i \{\Phi_X\}_i^T}{\omega^2_{Xi}} + \sum_{i=m+1}^N \frac{\{\Phi_A\}_i \{\Phi_A\}_i^T}{\omega^2_{Ai}}$$

donde:

$m$  = número de modos identificados

$N$  = número de grados de libertad medidos

Si el número de modos identificados es menor que el total de número de modos considerados en el modelo analítico, las ecuaciones (4.2.2) se convierten en (Saeed, 1997):

$$[M_U]^{-1} = [M_A]^{-1} + \sum_{i=1}^m \{\Phi_X\}_i \{\Phi_X\}_i^T - \sum_{i=1}^m \{\Phi_A\}_i \{\Phi_A\}_i^T \quad (4.22)$$

$$[K_U]^{-1} = [K_A]^{-1} + \sum_{i=1}^m \frac{\{\Phi_X\}_i \{\Phi_X\}_i^T}{\omega^2_{Xi}} - \sum_{i=1}^m \frac{\{\Phi_A\}_i \{\Phi_A\}_i^T}{\omega^2_{Ai}}$$

### 4.3. ALGORITMO DE LA MATRIZ DE ERROR

Otro de los métodos directos para reconstruir una matriz de rigideces es el método de la matriz de error. Aquí se obtiene una matriz que contiene las diferencias entre los términos de la matriz de rigideces del modelo analítico y los términos desconocidos de la matriz de rigideces reconstruida. Conociendo la matriz de error se pueden obtener las matrices de masas y rigideces actualizadas correspondientes a un estado de daño estructural.

El método de la matriz de error es un grupo de técnicas que estiman directamente el error en las matrices de masas y rigideces suponiendo que éste es pequeño. Uno de los primeros trabajos sobre este tema es el de Sidhu y Ewins (1984), quienes definieron una expresión para la matriz de error como:

$$[\Delta K] = [K_U] - [K_A] \quad (4.23)$$

La matriz de error representa la diferencia entre las rigideces del modelo analítico y las obtenidas a partir de los parámetros modales experimentales (matriz reconstruida). Si alguno de los elementos estructurales se degrada en rigidez, los valores de  $[K_U]$  son menores que los de  $[K_A]$ .

Debido a lo incompleto de los datos experimentales, la matriz de error no puede ser obtenida directamente de esta ecuación. Sidhu y Ewins (1984) modificaron la ecuación anterior y expandieron la matriz de flexibilidad a través de series geométricas. La matriz de error se considera tomando los términos de primer orden de la expansión, esto es:

$$[\Delta K] \cong [K_A] \left( [K_A]^{-1} - [K_U]^{-1} \right) [K_A] \quad (4.24)$$

Una técnica similar puede también ser aplicada a la matriz de masas. Gysin (1986) usó las dos matrices de pseudo-flexibilidad  $[K_A]^{-1}$  y  $[K_U]^{-1}$  de la ecuación (4.24), usando además los datos modales experimentales para calcular las matrices de error como:

$$[\Delta K] \cong [K_A] \left( [\Phi_A] \left[ \frac{1}{\omega_A^2} \right] [\Phi_A]^T - [\Phi_X] \left[ \frac{1}{\omega_X^2} \right] [\Phi_X]^T \right) [K_A] \quad (4.25)$$

$$[\Delta M] \cong [M_A] \left( [\Phi_A] [\Phi_A]^T - [\Phi_X] [\Phi_X]^T \right) [M_A]$$

Una vez obtenidas las matrices de error  $[\Delta K]$  y  $[\Delta M]$  se obtienen las matrices reconstruidas de masas y rigideces aplicando la ecuación (4.23).

#### 4.4. CRITERIO DE SELECCIÓN DE FORMAS MODALES BASADO EN LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN MODAL MÁXIMA

Se presenta un método para seleccionar de un total de formas modales experimentales, el subgrupo que es conveniente usar para reconstruir la matriz de rigideces de una estructura. El método utiliza la energía de deformación almacenada por las formas modales de la estructura para sus estados sin daño y dañado. Se demuestra que una estrategia de selección de formas modales basada en la energía de deformación modal máxima, produce resultados más precisos al reconstruir la matriz de rigideces de una estructura, que una estrategia de selección de formas modales basada en las frecuencias mínimas.

Para elegir las formas modales y reconstruir la matriz de rigideces, se necesita correlacionar las formas modales experimentales con las correspondientes formas modales del modelo analítico de la estructura y elegir las que presenten la mayor correlación. Generalmente las primeras formas modales experimentales de una estructura son usadas en la correlación con el modelo analítico ya que estas son las mejor identificadas. Sin embargo, en algunos casos las formas modales de frecuencia más alta son críticas para reconstruir su matriz de rigideces y por tanto para localizar el daño estructural. Así que es necesario incluirlas para efectuar la correlación con el modelo analítico de la misma.

Se puede demostrar que en el caso de estructuras con un gran número de gdl, las formas modales de frecuencia más baja no tienen relevancia en el resultado obtenido al reconstruir su matriz de rigideces, por tanto, poco aportan al localizar daño estructural. Esto es importante, para tener un criterio sistemático de las formas modales más indicativas que deben elegirse al reconstruir la matriz de rigideces de una estructura dañada.

En el caso de estructuras con un comportamiento dominante global, tal como una viga en voladizo, la mejor información para reconstruir su matriz de rigideces la pueden contener las frecuencias más bajas, con mayor energía de deformación. Sin embargo, en estructuras donde puede dominar el comportamiento local de los elementos estructurales, tales como armaduras o marcos rígidos que están

formados por varios elementos en los cuales la masa de la estructura esta distribuida en todos ellos, la mayor energía de deformación no está distribuida en las frecuencias más bajas. En muchos casos, las formas modales que contienen información vital sobre un estado de daño, son las de más alta frecuencia (Kashangaki et al., 1992).

Estudios previos han indicado la importancia que tiene la evaluación de la energía modal de deformación en la detección y evaluación de daño estructural. La técnica de selección de formas modales ha sido estudiada por Kashangaki (1995) y Lim (1991).

Kashangaki (1995), presenta el método de parámetros de sensibilidad modal, basado en el cambio de sensibilidad en los términos de la matriz de rigideces de una estructura, usando los parámetros modales del modelo analítico de la misma. El método determina cuáles formas modales deben ser obtenidas experimentalmente y usadas para detectar y evaluar daño estructural.

Lim (1991), presenta un método de selección de formas modales basado en los valores de una forma modal, lo cual es una medida del nivel de energía requerido para excitar esa forma modal.

A continuación se presenta la teoría en que se fundamenta la selección de las formas modales de una estructura aplicando el criterio de la energía de deformación modal máxima para reconstruir su matriz de rigideces a partir de sus parámetros modales experimentales.

Si las formas modales experimentales están normalizadas respecto a la matriz de masas, las matrices de rigideces para los estados sin daño y con daño de la estructura, se pueden obtener aplicando la pseudo inversa de Moore-Penrose de una matriz, a la matriz de flexibilidades obtenida a partir de los parámetros modales, como (Scott et al., 1997):

$$\begin{aligned} [K^u] &= ([\Phi^u][\omega^u]^{-1}[\Phi^u]^T)^+ \\ [K^d] &= ([\Phi^d][\omega^d]^{-1}[\Phi^d]^T)^+ \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde:

$[K^u]$  = matriz de rigideces correspondiente al estado no dañado de la estructura

$[K^d]$  = matriz de rigideces correspondiente al estado dañado de la estructura

$[\Phi^u]$  = matriz modal correspondiente al estado no dañado de la estructura

$[\Phi^d]$  = matriz modal correspondiente al estado dañado de la estructura

$[\omega^u]$  = matriz diagonal de frecuencias circulares cuadradas correspondientes al estado no dañado de la estructura

$[\omega^d]$  = matriz diagonal de frecuencias circulares cuadradas correspondientes al estado dañado de la estructura

$[ ]^T$  = matriz transpuesta

$( )^+$  = matriz pseudo inversa de Moore-Penrose

La obtención de la matriz de rigideces de la estructura a partir de las ecuaciones (4.26) es equivalente a una condensación estática de esa matriz, con respecto a los gdl medidos en ella. Ya que el número de modos experimentales identificados en una estructura es en general más pequeño que el de gdl medidos, estas matrices no son cuadradas, por lo tanto, para obtener la matriz de rigideces se aplica una pseudo inversa a la matriz de flexibilidades.

La expresión general para evaluar la energía de deformación almacenada en una estructura cuya matriz de rigideces y vector de desplazamientos globales son conocidos, es (Scott et al., 1997):

$$U = \frac{1}{2} \{X\}^T [K] \{X\} \quad (4.27)$$

donde:

$U$  = energía de deformación

$[K]$  = matriz de rigideces global

$\{X\}$  = vector de desplazamientos globales

$\{X\}^T$  = transpuesta del vector  $\{X\}$

Y la energía de deformación modal almacenada en la forma modal  $j$  puede ser determinada como:

$$U_j = \frac{1}{2} \{\Phi_j\}^T [K] \{\Phi_j\} \quad (4.28)$$

donde:

$\{\Phi_j\}$  =  $j$ -ésima forma modal

$\{\Phi_j\}^T$  = transpuesta del vector  $\{\Phi_j\}$

Aplicando la ecuación (4.28) se obtiene la energía de deformación modal almacenada en cada una de las formas modales de la estructura, para sus estados sin daño y con daño. Cuando las formas modales están normalizadas con respecto a la matriz de masas y la matriz de rigideces es conocida, la energía de deformación modal de la estructura se obtiene sustituyendo las ecuaciones (4.26) en la ecuación (4.28). Para el estado sin daño de la estructura se obtiene:

$$U_j = \frac{1}{2} \{\Phi_j^u\}^T \left( [\Phi_j^u] [\omega^u]^{-1} [\Phi_j^u]^T \right)^+ \{\Phi_j^u\} \quad (4.29)$$

Similarmente, para el estado dañado:

$$U_j = \frac{1}{2} \{\Phi_j^d\}^T \left( [\Phi_j^d] [\omega^d]^{-1} [\Phi_j^d]^T \right)^+ \{\Phi_j^d\} \quad (4.30)$$

La energía de deformación modal aplicando la ecuación (4.29) se obtiene a partir de los parámetros modales obtenidos del modelo analítico de la estructura, la ecuación (4.30) se aplica con los parámetros modales obtenidos experimentalmente correspondientes a un estado dañado de la estructura.

Ya que la matriz de rigideces obtenida con alguna de las ecuaciones (4.26) puede no ser precisa debido a la cantidad incompleta de formas modales identificadas y utilizadas para obtenerla, las ecuaciones (4.29) y (4.30) que permiten calcular la energía de deformación modal, son una aproximación de la energía de deformación modal real. Esta energía se calcula solo con los parámetros modales identificados.

Para aplicar el criterio de selección de formas modales basado en la energía de deformación modal máxima. Los parámetros modales sin y con daño se comparan y se eligen aquellos que estén mejor correlacionados y a la vez almacenen la mayor cantidad de energía. Esto se puede lograr aplicando el criterio de correlación modal, *MAC* (por sus siglas *Modal Assurance Criterion*). Este criterio de

correlación entre los vectores modales de los estados sin daño y con daño de una estructura, se define como (Ewins, 1984):

$$MAC_{i,j} = \frac{(\{\Phi_i\}^T \{\Phi_j\})^2}{(\{\Phi_i\}^T \{\Phi_i\})(\{\Phi_j\}^T \{\Phi_j\})} \quad (4.31)$$

donde:

$\{\Phi_i\}$  =  $i$ -ésimo vector modal correspondiente a un estado sin daño

$\{\Phi_j\}$  =  $j$ -ésimo vector modal correspondiente a un estado con daño

Al evaluar este criterio de correlación, el  $i$ -ésimo vector modal sin daño puede o no corresponder al  $i$ -ésimo vector modal con daño, para obtener el más alto valor del  $MAC$ . El valor del  $MAC$  se expresa como un porcentaje, si este valor es de 100% existe una perfecta correlación entre ambos vectores modales, si el valor es 0% no existe correlación.

Resumiendo, para reconstruir la matriz de rigideces de una estructura dañada aplicando este criterio, se calcula la energía de deformación modal para cada uno de los vectores modales, para los estados con daño y sin daño de la estructura, se evalúa el criterio de correlación  $MAC$  entre esos vectores y se eligen aquellos que proporcionen el más alto valor del  $MAC$  y a la vez tengan el mayor nivel de energía.

No existe un número mínimo definido de formas modales que deben de utilizarse en cada caso particular para reconstruir la matriz de rigideces de una estructura. En el capítulo cinco del presente trabajo, se estudian varios modelos estructurales aplicando este criterio y se analizan los resultados obtenidos al usar un número variable de parámetros modales al reconstruir su matriz de rigideces.

## CAPÍTULO 5

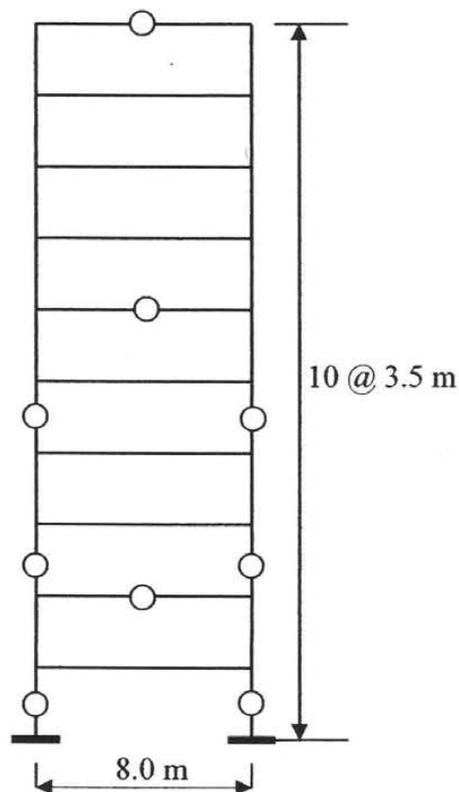
### EJEMPLOS DE APLICACIÓN

#### 5.1. MÉTODOS DIRECTOS

Con el fin de aplicar los métodos directos del capítulo cuatro para reconstruir una matriz de rigideces y comparar resultados con respecto a la matriz de rigideces obtenida para un estado de daño simulado, se estudian diferentes modelos estructurales, marcos planos regulares e irregulares en elevación y una estructura tridimensional de dos niveles propuesta por Sohn y Law (1997).

##### 5.1.1. Marco plano

La geometría de esta estructura y los elementos estructurales dañados simulados se muestran en la figura 5.1.



○ Elemento dañado

**Fig 5.1. Marco plano estudiado.**

Propiedades de la estructura: columnas 50x90 cm; traveses 40x90 cm; masa total por nivel 3 t-s<sup>2</sup>/m; módulo elástico del concreto 2.21x10<sup>6</sup> t/m<sup>2</sup>.

Se simula como daño estructural una reducción de rigidez del 30 % en los elementos indicados con un círculo en la figura 5.1. Para obtener la matriz de rigideces global del marco se desprecia la deformación axial en todos los elementos estructurales y se consideran treinta gdl. Veinte provienen de los giros de los nudos y diez de los desplazamientos laterales de entrepiso. Aplicando la matriz de transformación (ecuación 3.19), para condensar la matriz de rigideces global a los diez desplazamientos de entrepiso, se obtienen las matrices de rigideces condensadas, en t/m.

Para el modelo analítico  $[K_A]$ :

$$\begin{pmatrix} 63030 & -37480 & 11618 & -2398 & 495 & -102 & 21 & -4 & 0.9 & -0.1 \\ -37480 & 52361 & -35278 & 11164 & -2305 & 476 & -98 & 20 & -4 & 0.6 \\ 11618 & -35278 & 51907 & -35184 & 11144 & -2301 & 475 & -98 & 20 & -3 \\ -2398 & 11144 & -35184 & 51887 & -35180 & 11143 & -2301 & 474 & -95 & 15 \\ 495 & -2305 & 11144 & -35180 & 51886 & -35179 & 11143 & -2298 & 462 & -71 \\ -102 & 476 & -2301 & 11143 & -35179 & 51886 & -35177 & 11130 & -2239 & 342 \\ 21 & -98 & 475 & -2301 & 11143 & -35177 & 51874 & -35118 & 10844 & -1659 \\ -4 & 20 & -98 & 474 & -2298 & 11130 & -35118 & 51587 & -33728 & 8033 \\ 0.9 & -4 & 20 & -95 & 462 & -2239 & 10844 & -33728 & 44857 & -20117 \\ -0.1 & 0.6 & -3 & 15 & -71 & 342 & -1659 & 8033 & -20117 & 13459 \end{pmatrix}$$

Para el estado de daño simulado  $[K_S]$ :

$$\begin{pmatrix} 49828 & -31130 & 9859 & -2078 & 378 & -84 & 19 & -3.8 & 0.8 & -0.1 \\ -31130 & 44130 & -28979 & 8882 & -1617 & 358 & -79 & 16 & -3.3 & 0.5 \\ 9859 & -28979 & 43297 & -29751 & 8835 & -1957 & 434 & -89 & 18 & -2.6 \\ -2078 & 8882 & -29751 & 43854 & -28856 & 9307 & -2061 & 425 & -85 & 12.5 \\ 378 & -1617 & 8835 & -28856 & 44371 & -32457 & 11352 & -2340 & 467 & -69 \\ -84 & 358 & -1957 & 9307 & -32457 & 50509 & -34871 & 11064 & -2206 & 324 \\ 19 & -79 & 434 & -2061 & 11352 & -34871 & 50990 & -34916 & 10711 & -1573 \\ -3.8 & 16 & -89 & 425 & -2340 & 11064 & -34916 & 51453 & -33253 & 7645 \\ 0.8 & -3.3 & 18 & -85 & 467 & -2206 & 10711 & -33253 & 42592 & -18241 \\ -0.1 & 0.5 & -2.6 & 12.5 & -69 & 324 & -1573 & 7645 & -18241 & 11903 \end{pmatrix}$$

La matriz de masas  $[M]$ , no indicada aquí, es una matriz diagonal de orden 10x10 con una masa total por nivel de 3 t-s<sup>2</sup>/m.

Con estas matrices se obtienen las frecuencias naturales y formas modales para los estados sin y con daño del modelo estructural anterior y se aplican los algoritmos del capítulo cuatro para reconstruir su matriz de rigideces. Inicialmente se utilizan todos los parámetros modales experimentales. Después se fue disminuyendo el número de parámetros usados en el algoritmo de reconstrucción y se eliminaron en orden creciente las frecuencias naturales de mayor valor y sus formas modales correspondientes. Es

decir, se utilizó un criterio de selección de formas modales basado en las frecuencias naturales mínimas y sus correspondientes formas modales. Esto se hace con el fin de observar el error relativo que se genera en los términos de la matriz reconstruida al usar un número incompleto de parámetros modales en su reconstrucción, al compararla con la matriz de rigideces correspondiente al caso de daño simulado.

El error relativo se calculó solo para los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces, por ser representativos de los gdl para los que se condensó la matriz de rigideces global. El error relativo en porcentaje se calculó como:

$$\text{Error} = \frac{\text{valor aproximado} - \text{valor exacto}}{\text{valor exacto}} \times 100$$

El valor aproximado es el obtenido al aplicar los métodos de ajuste, el valor exacto es el calculado correspondiente al estado de daño simulado. Así, si el valor del error es positivo existe una sobreestimación del método aplicado respecto al daño simulado, en caso contrario existirá una subestimación.

A continuación se muestran los resultados obtenidos al aplicar los diferentes algoritmos para la reconstrucción de la matriz de rigideces del marco plano estudiado.

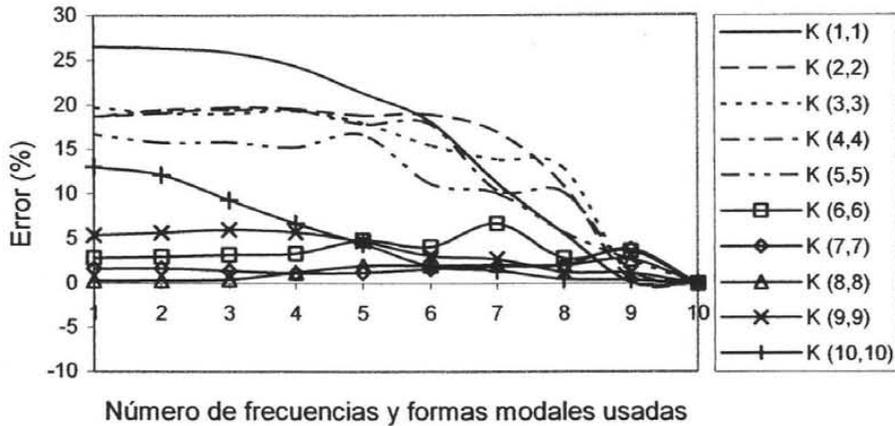
**Algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.** Al aplicar la ecuación 4.11 se obtuvo la matriz de rigideces reconstruida del marco. Los valores de las columnas de la tabla 5.1 representan las rigideces de los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces reconstruida y en cada columna se indica el número de parámetros modales que se utilizaron al aplicar el algoritmo de reconstrucción. Los valores de rigideces correspondientes a la columna de diez frecuencias y formas modales usadas, son las rigideces obtenidas en el caso de daño simulado, es decir, al usar el total de parámetros modales al reconstruir la matriz de rigideces se obtiene la matriz de rigideces de daño simulado.

**Tabla 5.1. Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack. Rigideces en  $1 \times 10^3$  t/m.**

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas									
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	49.8	49.8	52.5	55.4	58.8	60.4	61.9	62.7	62.9	63.0
K(2,2)	44.1	44.2	48.9	51.6	52.4	52.4	52.7	52.8	52.5	52.3
K(3,3)	43.3	43.6	48.8	49.2	49.9	51.0	51.6	51.5	51.5	51.8
K(4,4)	43.8	44.4	48.3	48.4	51.6	51.6	52.3	52.3	52.3	52.0
K(5,5)	44.3	45.5	46.9	48.8	49.3	51.7	51.1	51.3	51.3	51.7
K(6,6)	50.5	52.3	51.9	53.8	52.5	52.9	52.1	52.1	51.9	51.9
K(7,7)	50.9	52.9	52.0	51.9	51.8	51.6	51.5	51.6	51.8	51.8
K(8,8)	51.4	52.8	52.4	52.5	52.4	52.4	52.0	51.6	51.6	51.6
K(9,9)	42.5	43.0	43.1	43.7	43.9	44.5	45.0	45.1	44.9	44.8
K(10,10)	11.9	11.9	11.9	12.0	12.1	12.4	12.6	13.0	13.3	13.4

En la figura 5.2, cada una de las curvas representa la variación de error relativo de los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces reconstruida al variar el número de frecuencias y formas modales usadas en su reconstrucción. El valor de este error se incrementa a medida que se usa un número menor de parámetros modales al reconstruir la matriz de rigideces. Como se puede observar, se

necesita el total de parámetros modales para reconstruir de manera precisa la matriz de rigideces. Al usar nueve de estos parámetros el error relativo para los diez términos varía entre el 0 y 4%. Al usar ocho o menos parámetros este error está entre 0 y 27 %.

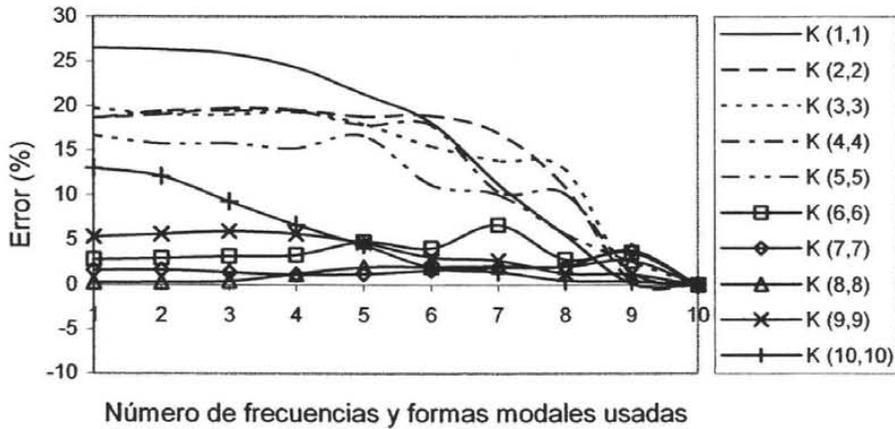


**Fig 5.2. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.**

**Algoritmo de Berman y Nagy.** En la tabla 5.2 y la figura 5.3 se presentan los resultados obtenidos. A pesar de que las expresiones usadas para reconstruir la matriz de rigideces con los algoritmos de Baruch y Bar Itzhack y de Berman y Nagy son diferentes entre sí, los valores de las rigideces y la variación del error relativo obtenidas por ambos métodos son prácticamente iguales entre sí. Por lo tanto, se establece para este caso la misma conclusión hecha respecto a los resultados obtenidos con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.

**Tabla 5.2. Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con el algoritmo de Berman y Nagy. Rigideces en  $1 \times 10^3$  t/m.**

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas									
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	49.8	49.8	52.7	55.3	58.5	60.4	62.0	62.7	62.9	63.0
K(2,2)	44.1	44.2	49.1	51.6	52.4	52.3	52.4	52.6	52.5	52.3
K(3,3)	43.2	43.6	49.1	49.5	50.2	51.2	51.7	51.6	51.5	51.8
K(4,4)	43.8	44.5	48.5	48.6	51.7	51.7	52.1	51.9	52.0	51.9
K(5,5)	44.3	45.5	47.0	48.7	49.2	50.5	50.8	51.5	51.7	51.8
K(6,6)	50.5	52.3	51.9	53.7	52.5	52.8	52.2	52.1	51.9	51.9
K(7,7)	50.9	53.0	52.0	51.9	51.8	51.5	51.5	51.7	51.8	51.8
K(8,8)	51.4	52.8	52.4	52.4	52.4	52.4	52.0	51.6	51.6	51.5
K(9,9)	42.5	43.1	43.1	43.6	43.9	44.5	45.0	45.1	44.9	44.8
(10,10)	11.9	11.9	11.9	12.0	12.1	12.4	12.6	13.0	13.3	13.4



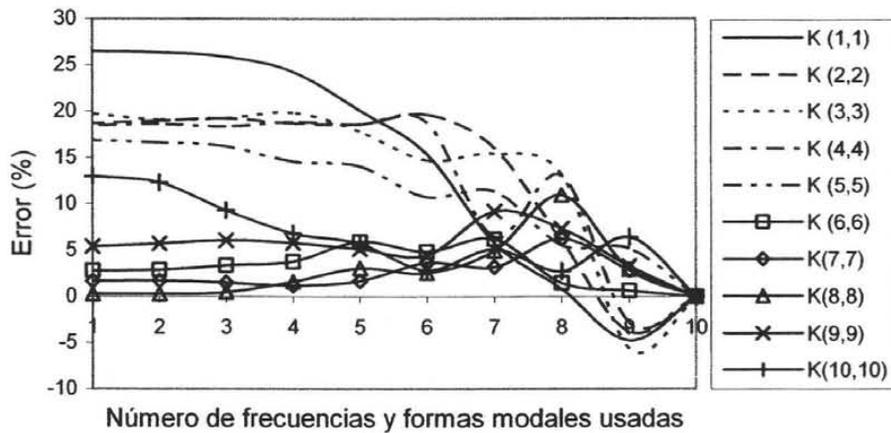
**Fig 5.3. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con el algoritmo de Berman y Nagy.**

**Mezcla de matrices.** Al aplicar este algoritmo (ecuaciones 4.22), al variar el número de parámetros modales utilizados para reconstruir la matriz de rigideces, se usan simultáneamente igual número de parámetros, experimentales y analíticos. Los resultados obtenidos con este algoritmo se presentan en la Tabla 5.3 y en la figura 5.4. En ésta se observa que es necesario el total de parámetros modales para obtener la matriz de rigideces de daño simulado. Al usar nueve parámetros modales, el error relativo en los diez términos varía entre 0 y 7%, cuando se usan menos de nueve parámetros el error relativo varía entre 0 y 27%.

Debe notarse en la figura 5.4 que existen varios términos para los cuales, a medida que se utiliza un mayor número de parámetros modales para reconstruir la matriz de rigideces, su error relativo aumenta.

**Tabla 5.3. Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con el algoritmo de la mezcla de matrices. Rigideces en  $1 \times 10^3$  t/m.**

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas									
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	49.8	47.4	50.2	52.6	57.4	59.8	61.9	62.7	62.9	63.0
K(2,2)	44.1	42.4	46.7	51.2	52.7	52.3	52.3	52.6	52.5	52.3
K(3,3)	43.2	40.8	49.0	49.9	49.6	51.0	51.8	51.6	51.5	51.8
K(4,4)	43.8	42.6	49.5	46.6	52.1	51.9	52.1	51.9	52.0	51.9
K(5,5)	44.3	46.6	46.8	49.3	49.1	50.6	50.8	51.5	51.7	51.8
K(6,6)	50.5	50.8	51.2	53.6	52.9	53.4	52.3	52.1	51.9	51.9
K(7,7)	50.9	52.4	54.1	52.5	52.8	51.8	51.5	51.7	51.8	51.8
K(8,8)	51.4	52.9	57.0	53.9	52.7	53.0	52.2	51.6	51.5	51.5
K(9,9)	42.5	43.9	45.7	46.4	44.4	44.7	45.0	45.1	45.0	44.8
K(10,10)	11.9	12.6	12.2	12.5	12.2	12.5	12.7	13.0	13.3	13.4



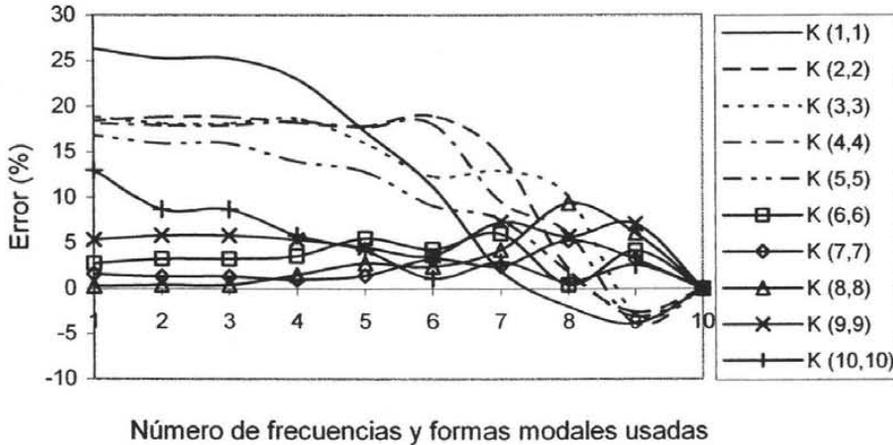
**Fig 5.4. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con el algoritmo de la mezcla de matrices.**

**Matriz de error.** Finalmente, con este cuarto algoritmo (ecuación 4.23), los resultados obtenidos se resumen en la tabla 5.4 y en la figura 5.5.

Según se aprecia en la figura 5.5, solo usando el total de parámetros modales se obtiene la matriz de rigideces de daño simulado. Al usar nueve parámetros modales, el error relativo en los diez términos varía entre 0 y 8%, al usar menos de nueve parámetros el error es muy variable, su valor está entre 0 y 26%. De esta misma figura se aprecia que existen términos en los cuales a mayor número de parámetros modales usados, su error relativo es mayor.

**Tabla 5.4. Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con el algoritmo de la matriz de error. Rigideces en  $1 \times 10^3$  t/m.**

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas									
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	49.8	47.9	48.8	50.8	55.4	58.4	61.3	62.4	62.4	62.9
K(2,2)	44.1	43.0	45.0	50.5	52.5	51.9	52.1	52.4	52.4	52.2
K(3,3)	43.2	42.0	47.6	48.8	48.6	50.2	51.3	51.1	51.1	51.4
K(4,4)	43.8	42.1	46.5	48.0	51.7	51.6	51.9	51.7	51.7	51.8
K(5,5)	44.3	43.0	45.1	47.7	48.4	50.0	50.5	51.4	51.4	51.8
K(6,6)	50.5	52.6	50.7	53.5	52.6	53.2	52.3	52.1	52.1	51.9
K(7,7)	50.9	52.6	53.6	52.2	52.6	51.7	51.4	51.6	51.6	51.8
K(8,8)	51.4	54.5	56.2	53.6	52.6	52.8	52.2	51.6	51.6	51.5
K(9,9)	42.5	45.6	45.0	45.6	44.1	44.5	44.8	45.0	45.0	44.8
K(10,10)	11.9	12.2	11.9	12.2	12.0	12.3	12.5	12.9	12.9	13.4



**Fig 5.5. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con el algoritmo de la matriz de error.**

De los resultados obtenidos al aplicar los diferentes algoritmos para reconstruir la matriz de rigideces del marco plano estudiado, se observa que solo usando el total de parámetros modales experimentales se puede obtener de forma precisa la matriz de rigideces correspondiente al daño simulado. De hecho, conociendo todos los parámetros modales experimentales de una estructura, su matriz de rigideces exacta se puede obtener a partir de (Paz, 1997):

$$[K]^{-1} = [\Phi_X] [\omega_X^2]^{-1} [\Phi_X]^T$$

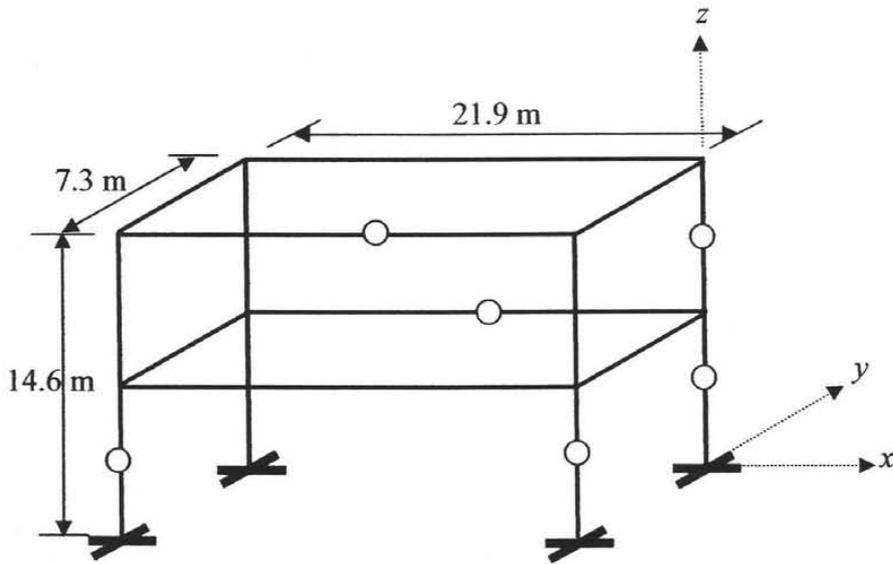
Es decir, si se conoce el total de parámetros modales experimentales de una estructura, no es necesario aplicar alguno de los algoritmos usados anteriormente para reconstruir su matriz de rigideces. Basta con aplicar la expresión anterior.

### 5.1.2. Estructura tridimensional

Se estudia el modelo propuesto por Sohn y Law (1997), mostrado en la Figura 5.6. Las propiedades de los elementos estructurales son: área de la sección transversal,  $0.01613 \text{ m}^2$ ; momento de inercia de la sección transversal,  $I=8.32 \times 10^{-5} \text{ m}^4$  y módulo elástico  $2.11 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ .

En los elementos con daño estructural simulado mostrados en la figura 5.6 se considera una reducción de su rigidez de 30%.

La matriz de rigideces global de la estructura se obtiene considerando seis grados de libertad por cada uno de sus nudos, tres desplazamientos laterales y tres giros, según los ejes de referencia indicados en la figura 5.6. Considerando los sistemas de piso de este modelo como diafragmas rígidos, se aplica la matriz de transformación (ecuación 3.19) y se condensa la matriz de rigideces global a tres grados de libertad por cada nivel de la estructura, dos desplazamientos horizontales según los ejes X y Y, y un giro de entrepiso respecto al eje Z. Se tiene así una matriz de rigideces condensada de orden  $6 \times 6$ . El orden de los gdl en los términos de la matriz de rigideces condensada de la estructura es: desplazamiento lateral en sentido X, desplazamiento lateral en sentido Y y giro de entrepiso respecto al eje Z, para cada entrepiso.



○ Elemento dañado

**Fig 5.6. Estructura tridimensional**

Considerando una masa total por nivel de  $3.3 \text{ t-s}^2/\text{m}$ , y de acuerdo con los gdl condensados de la estructura, se obtiene la siguiente matriz de masas  $[M]$  para esta estructura tridimensional.

$$\begin{pmatrix} 3.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 144.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 144.7 \end{pmatrix}$$

Las matrices de rigideces condensadas, en t/m, son:

Modelo analítico  $[K_A]$  :

$$\begin{pmatrix} 24.8 & 0.5 & -9 & -11.5 & -0.1 & 1.9 \\ 0.5 & 21.9 & 1.7 & -0.1 & -10.8 & 0.2 \\ -9.0 & 1.7 & 110.8 & 1.9 & 0.2 & -11.2 \\ -11.5 & -0.1 & 1.9 & 13.2 & 0.4 & -7.1 \\ -0.1 & -10.8 & 0.2 & 0.4 & 11 & 1.9 \\ 1.9 & 0.2 & -11.2 & -7.1 & 1.9 & 99.5 \end{pmatrix}$$

Estado de daño simulado  $[K_S]$ :

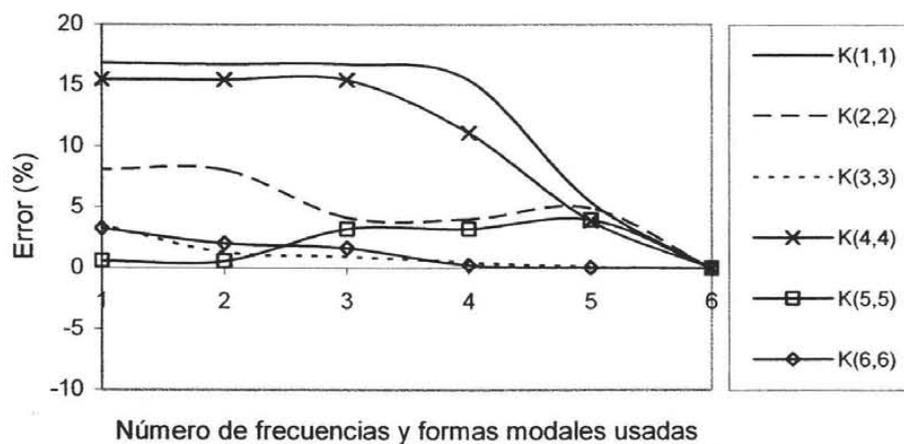
$$\begin{pmatrix} 21.2 & 0.4 & -8.5 & -9.9 & -0.1 & 1.9 \\ 0.4 & 20.2 & 1.8 & -0.1 & -10.8 & 0.2 \\ -8.5 & 1.8 & 107.8 & 1.9 & 0.2 & -11.7 \\ -9.9 & -0.1 & 1.9 & 11.4 & 0.3 & -7 \\ -0.1 & -10.8 & 0.2 & 0.3 & 11 & 1.5 \\ 1.9 & 0.2 & -11.7 & -7 & 1.5 & 88.8 \end{pmatrix}$$

Se obtienen los parámetros modales para el modelo analítico y para el caso de daño simulado y se aplican los algoritmos del capítulo cuatro para reconstruir la matriz de rigideces de esta estructura.

**Algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.** Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 5.5 y en la figura 5.7. Al usar seis parámetros modales se obtiene la matriz de rigideces de daño simulado. Al usar cinco de estos parámetros, el error relativo en los seis términos varía de 0 a 5%. Al usar menos de cinco de estos parámetros, el error relativo en los seis términos varía de 0 a 17%.

**Tabla 5.5. Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces de la estructura tridimensional, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack. Rigideces en t/m.**

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas					
	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	21.2	22.4	24.5	24.8	24.8	24.8
K(2,2)	20.2	21.3	21.0	21.1	21.9	21.9
K(3,3)	107.8	107.9	108.3	108.8	109.2	111.6
K(4,4)	11.4	11.9	12.7	13.2	13.2	13.2
K(5,5)	11.0	11.5	11.4	11.4	11.1	11.1
K(6,6)	88.8	88.9	89.0	90.3	90.6	91.7

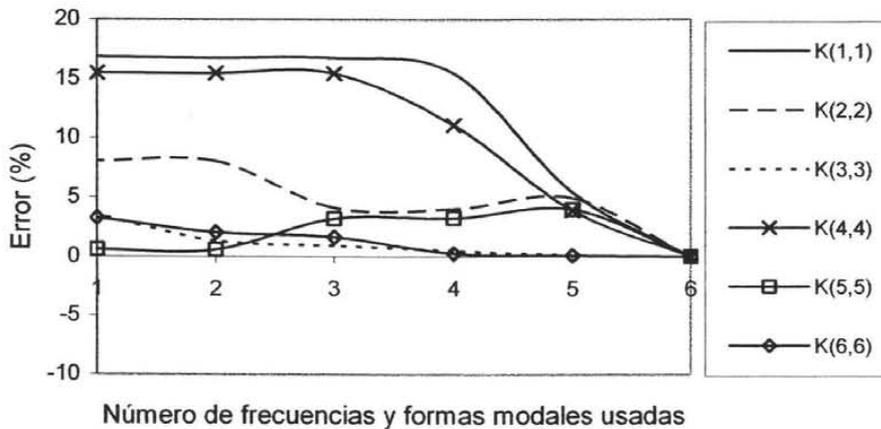


**Fig 5.7. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces de la estructura tridimensional, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.**

**Algoritmo de Berman y Nagy.** En la tabla 5.6 y la figura 5.8 se muestran los resultados obtenidos al aplicar este algoritmo. De manera análoga al caso del marco plano estudiado en el inciso 5.1.1, existe mucha similitud entre los resultados obtenidos con este algoritmo y el de Baruch y Bar Itzhack. Se establece la misma conclusión que se hizo respecto a los resultados obtenidos con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.

**Tabla 5.6. Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces de la estructura tridimensional, reconstruida con el algoritmo de Berman y Nagy. Rigideces en t/m.**

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas					
	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	21.2	22.4	24.5	24.8	24.8	24.8
K(2,2)	20.3	21.3	21.1	21.1	21.9	21.9
K(3,3)	107.8	107.9	108.3	108.8	109.2	111.6
K(4,4)	11.4	11.9	12.7	13.2	13.20	13.2
K(5,5)	11.0	11.5	11.4	11.4	11.1	11.1
K(6,6)	88.8	88.9	89.0	90.3	90.6	91.7

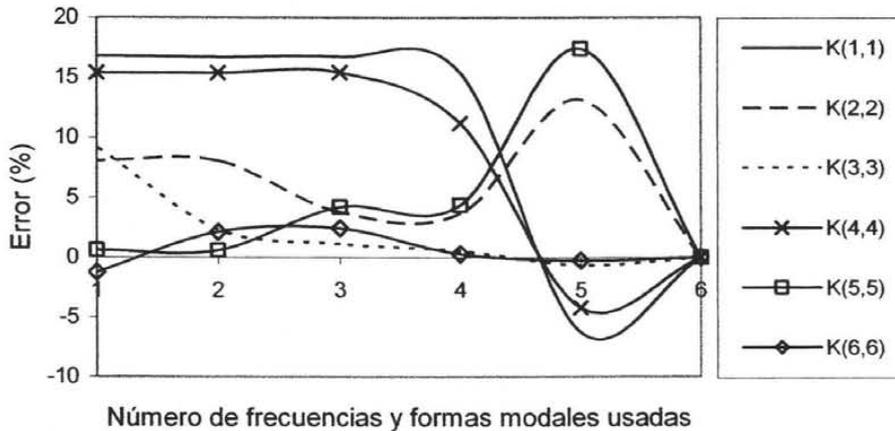


**Fig 5.8. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces de la estructura tridimensional, reconstruida con el algoritmo de Berman y Nagy.**

**Mezcla de matrices.** Los resultados obtenidos con este algoritmo se resumen en la tabla 5.7 y en la figura 5.9. En ella se aprecia que solo al usar todos los parámetros modales se obtiene la matriz de rigideces de daño simulado. Al usar cinco o menos parámetros el error relativo en los seis términos es muy variable, oscila entre 0 y 17%. Como ocurre en el caso del marco plano (sección 5.1.1), para esta estructura tridimensional también existen términos en los que existe mayor error relativo a mayor número de parámetros modales usados.

**Tabla 5.7. Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces de la estructura tridimensional, reconstruida con el algoritmo de la mezcla de matrices. Rigideces en t/m.**

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas					
	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	21.2	19.9	24.5	24.8	24.8	24.8
K(2,2)	20.2	22.9	21.0	21.0	21.9	21.9
K(3,3)	107.8	107.1	108.4	109.0	110.3	117.8
K(4,4)	11.4	10.9	12.7	13.2	13.2	13.2
K(5,5)	11.0	12.9	11.5	11.5	11.1	11.1
K(6,6)	88.8	88.6	89.1	91.0	90.7	87.7



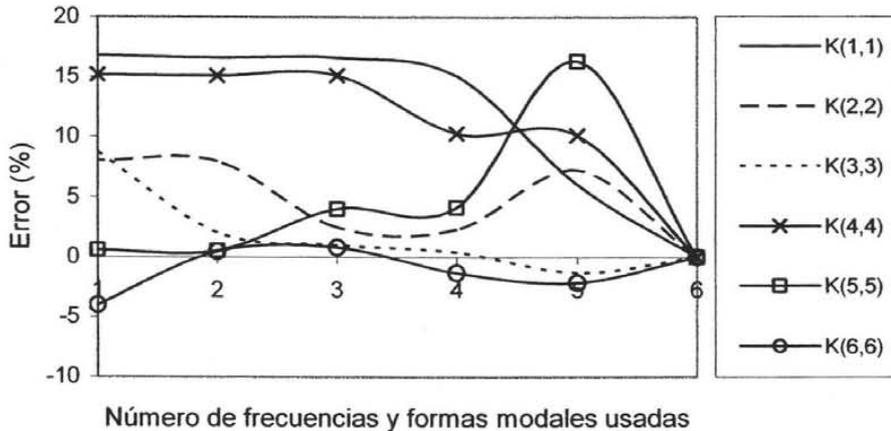
**Fig 5.9. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces de la estructura tridimensional, reconstruida con el algoritmo de la mezcla de matrices.**

**Matriz de error.** En la figura 5.10 se observa que se obtiene la matriz de rigideces de daño simulado solo al usar el total de parámetros modales. Al usar cinco o menos parámetros modales, el error relativo en los seis términos oscila entre 0 y 17%. También en este caso existen términos con mayor nivel de error relativo a mayor número de parámetros modales usados.

**Tabla 5.8. Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces de la estructura tridimensional, reconstruida con el algoritmo de la matriz de error. Rigideces en t/m.**

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas					
	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	21.2	22.5	24.4	24.8	24.8	24.8
K(2,2)	20.3	21.7	20.7	20.7	21.9	21.9
K(3,3)	107.8	106.4	108.2	108.9	110.0	117.3
K(4,4)	11.4	12.6	12.6	13.2	13.2	13.2
K(5,5)	11.0	12.8	11.5	11.5	11.1	11.1
K(6,6)	88.8	86.9	87.6	89.5	89.2	85.3

Con los resultados obtenidos al reconstruir la matriz de rigideces, tanto del marco plano (sección 5.1.1), como de la estructura tridimensional estudiada en la presente sección, se aprecia que con la aplicación de los algoritmos de Baruch y Bar Itzhack y de Berman y Nagy, el error relativo obtenido en los diferentes términos analizados de la matriz de rigideces reconstruida, tiene un patrón de variación mejor definido que el obtenido con los algoritmos de la mezcla de matrices y la matriz de error.



**Fig 5.10. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces de la estructura tridimensional, reconstruida con el algoritmo de la matriz de error.**

Al aplicar los algoritmos de Baruch y Bar Itzhack y de Berman y Nagy, en el caso del marco plano (sección 5.1.1), al usar nueve parámetros modales el error relativo en todos los términos es menor de 5 %. Con los algoritmos de la mezcla de matrices y la matriz de error se obtiene un error relativo mayor de 5 % en varios términos. Al usar menos de nueve parámetros modales, con los cuatro algoritmos se obtiene un error relativo que varía entre 0 y 27%.

En el caso de la estructura tridimensional, cuando se aplican los algoritmos de Baruch y Bar Itzhack y de Berman y Nagy, al usar cinco parámetros modales el error relativo máximo en varios de los términos es de 5 %. Con los algoritmos de la mezcla de matrices y la matriz de error se obtiene un error relativo mayor al 10% en varios términos. Al usar menos de cinco parámetros modales, con los cuatro algoritmos se obtiene un error relativo que varía entre 0 y 17%.

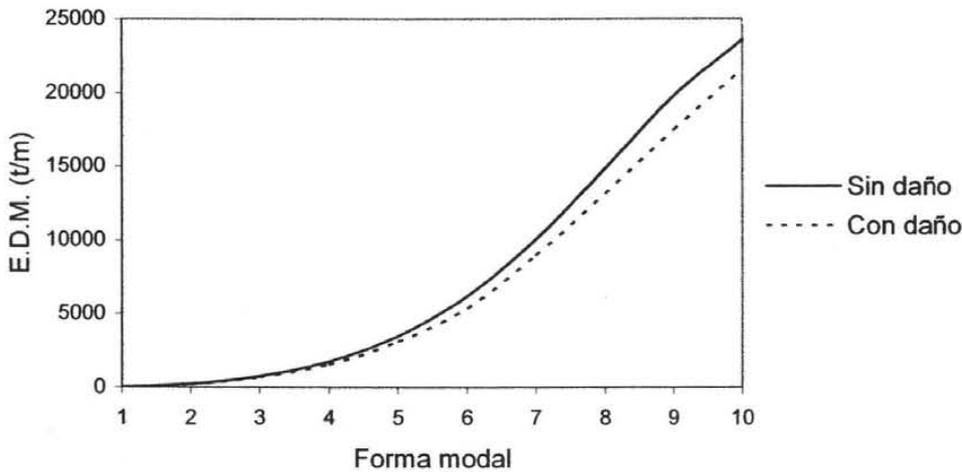
## 5.2. APLICACIÓN DEL CRITERIO DE SELECCIÓN DE FORMAS MODALES BASADO EN LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN MODAL MÁXIMA

Se estudian los ejemplos tratados en la sección 5.1, usando ahora el criterio de la energía de deformación modal máxima para seleccionar las formas modales que se utilizan para reconstruir la matriz de rigideces de la estructura.

### 5.2.1. Marco plano

Se aplica la ecuación (4.28) para evaluar la energía de deformación modal de los modos de vibración de la estructura, para sus dos estados, del modelo analítico sin daño y del estado de daño simulado. Se obtienen los valores mostrados en la figura 5.11. En esta figura se representa la variación de la energía

para cada uno de los estados de la estructura, en el eje horizontal están indicadas las formas modales y en el vertical el valor de su correspondiente energía de deformación modal (EDM). La energía está expresada en t/m.



**Fig 5.11. Variación de la energía de deformación modal en las formas modales de los dos estados de la estructura del marco plano.**

Al evaluar el criterio de correlación *MAC* (ecuación 4.31), entre los vectores modales de ambos estados de la estructura se obtienen los valores indicados en la tabla 5.9. En cada columna de esta tabla se indican los dos vectores modales mejor correlacionados y su respectivo valor del *MAC*. Se observa que existe correlación alta entre ambos grupos de vectores modales, el valor promedio de correlación es de 95%.

**Tabla 5.9. Valores del criterio de correlación *MAC* entre los vectores modales mejor correlacionados de los dos estados de la estructura del marco plano.**

Estado	Vectores modales									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Con y sin daño										
MAC (%)	99.9	99.8	99.7	99.7	98.5	98.2	96.4	95.5	83.5	84.9

Como se observa en la tabla 5.9, todos los vectores modales tienen una correlación cercana al 100%, pero en la figura 5.11, se aprecia que la energía de deformación modal es mayor a medida que la forma modal es superior. Por lo tanto, para reconstruir la matriz de rigideces de este marco plano se deberán usar las formas modales con mayor nivel de energía, estas son las formas modales superiores. Para analizar el error relativo que se genera con respecto al caso de daño simulado, al reconstruir la matriz de rigideces utilizando un número variable de las formas modales con mayor energía, se inicia reconstruyendo la matriz de rigideces con todas las formas modales de la estructura. Se eliminan después una a una, con su correspondiente frecuencia natural, aquellas formas modales que tienen el menor nivel de energía.

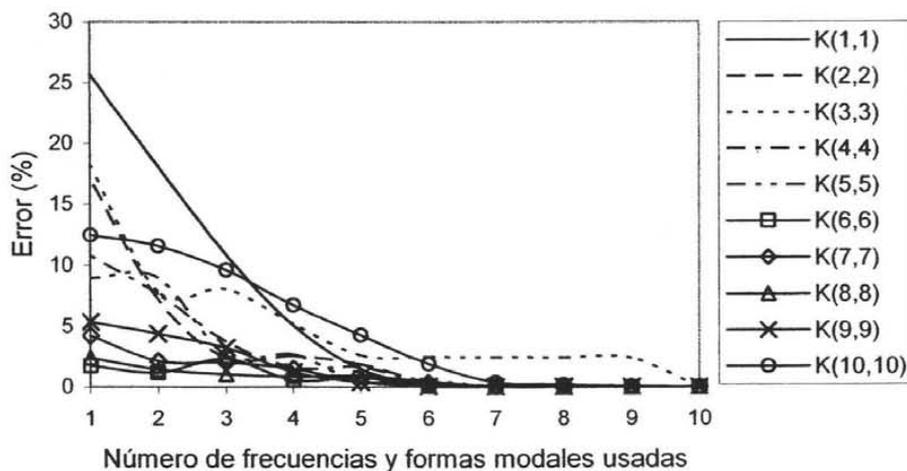
Para reconstruir la matriz de rigideces, se utiliza el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack ya que los resultados obtenidos en los modelos estructurales estudiados en la sección 5.1, muestran que es el que proporciona resultados más precisos.

Los resultados obtenidos para este ejemplo están indicados en la tabla 5.10 y en la figura 5.12. La tabla 5.10 contiene los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces, reconstruida con diferente número de parámetros modales, utilizando en todos los casos los parámetros modales con mayor nivel de energía de deformación modal.

La figura 5.12 muestra la variación de error relativo en cada uno de los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces cuando se ha usado un número variable de parámetros modales al reconstruir su matriz. En el eje horizontal se indica el número de parámetros modales usados, en todos los casos, el número indica las formas modales con mayor nivel de energía de deformación modal usadas. En el eje vertical se indica el valor correspondiente de error relativo en porcentaje.

**Tabla 5.10. Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack. Rigideces en  $1 \times 10^3$  t/m.**

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas									
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	49.8	49.8	49.8	49.8	49.9	50.6	52.3	55.2	58.8	62.6
K(2,2)	44.1	44.1	44.1	44.2	44.3	44.9	45.2	45.2	47.3	51.7
K(3,3)	42.3	43.3	43.3	43.3	43.3	43.4	44.5	45.7	45.6	49.9
K(4,4)	43.8	43.8	43.9	43.9	44.0	44.6	44.5	45.5	47.2	48.6
K(5,5)	44.4	44.4	44.4	44.4	44.6	44.5	45.5	45.5	48.3	48.3
K(6,6)	50.5	50.5	50.5	50.5	50.5	50.9	50.8	51.7	51.1	51.4
K(7,7)	51.0	51.0	50.9	51.0	51.1	51.2	51.7	52.0	52.1	53.1
K(8,8)	51.4	51.4	51.4	51.5	51.7	51.9	51.9	51.9	52.2	52.7
K(9,9)	42.6	42.6	42.6	42.6	42.6	42.7	43.1	43.9	44.4	44.8
K(10,10)	11.9	11.9	11.9	11.9	12.1	12.4	12.7	13.0	13.3	13.4



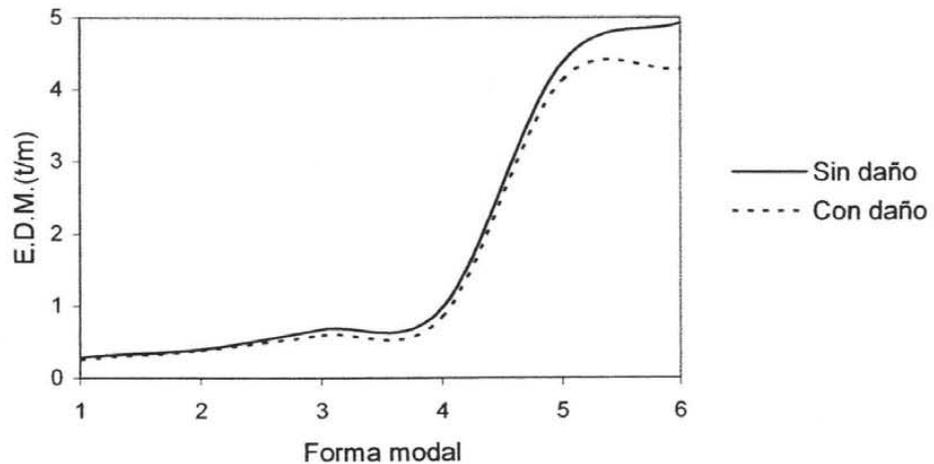
**Fig 5.12. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.**

En la figura 5.12 se observa que para este modelo estructural, cuando se usan cinco o más parámetros modales (los que tienen mayor nivel de energía), el error relativo en los diez términos analizados es menor que 5%. En este caso, los cinco o más parámetros modales utilizados corresponden a las formas modales superiores de la estructura. Esto se verifica en la figura 5.11.

### 5.2.2. Estructura tridimensional

Se aplica el criterio de selección de formas modales basado en la energía de deformación modal máxima a la estructura tridimensional estudiada en la sección 5.1.2. Se calcula la energía de deformación modal de los modos de vibración de los dos estados de la estructura y se aplica el criterio de correlación *MAC* entre los dos grupos de vectores modales. Los resultados obtenidos se resumen en la figura 5.13 y la tabla 5.11.

En la figura 5.13 se observa que la energía de deformación modal para los dos estados de la estructura varía proporcionalmente, excepto para la sexta forma modal donde existe mayor diferencia de energía entre los dos casos, el máximo nivel de energía de deformación modal lo tienen la quinta y sexta forma modal. En la tabla 5.11 se presentan los valores del criterio del *MAC* entre los vectores modales mejor correlacionados de los dos estados de la estructura, existe una correlación promedio de 88% entre ambos grupos de vectores modales. Para la quinta y sexta forma modal se obtienen los valores más bajos del *MAC*.



**Fig 5.13. Variación de la energía de deformación modal en las formas modales de los dos estados de la estructura tridimensional.**

**Tabla 5.11 Valores del criterio de correlación *MAC* entre los vectores modales mejor correlacionados de los dos estados de la estructura tridimensional.**

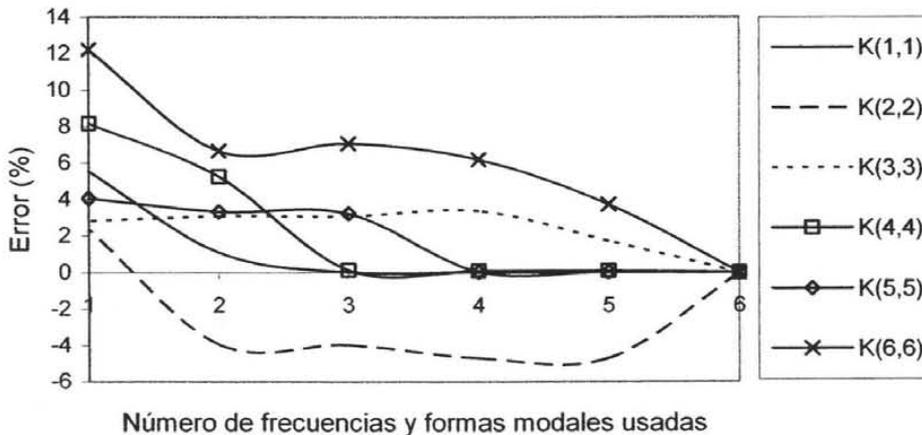
Estado	Vectores modales					
	1	2	3	4	5	6
Con y sin daño	1	2	3	4	5	6
MAC (%)	99.4	89.4	99.9	99.9	68.9	68.9

En este caso se aplica también el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack para reconstruir la matriz de rigideces de la estructura dañada.

Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 5.12, esta tabla contiene los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces para diferente número de parámetros modales usados en su reconstrucción, los de mayor nivel de energía en todos los casos. En la figura 5.14 se muestra la variación del error relativo para cada término de la diagonal principal de la matriz de rigideces, cuando varía el número de parámetros modales utilizados al reconstruir su matriz. En todos los casos se usan las formas modales con mayor nivel de energía.

**Tabla 5.12. Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces de la estructura tridimensional, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack. Rigideces en t/m.**

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas					
	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	21.2	21.2	21.2	21.2	21.4	22.4
K(2,2)	21.3	20.2	20.2	20.4	20.4	21.7
K(3,3)	107.8	109.6	111.4	111.1	111.1	110.8
K(4,4)	11.4	11.4	11.4	11.4	12.0	12.4
K(5,5)	11.0	11.0	11.0	11.3	11.4	11.5
K(6,6)	88.8	94.1	95.3	95.1	99.7	99.6



**Fig 5.14. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces de la estructura tridimensional, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.**

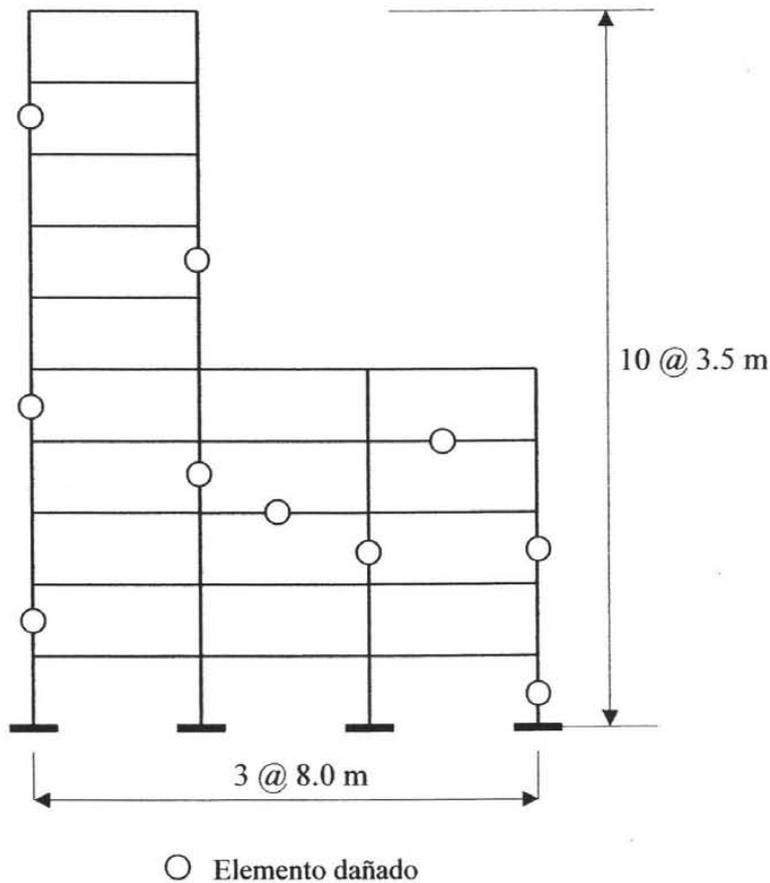
En la figura 5.14 se observa que al usar los seis parámetros modales se obtiene la matriz de rigideces correspondiente al caso de daño simulado, ya que para este caso el error relativo es cero en los seis términos analizados. Al usar de dos a cinco parámetros modales, el error relativo varía de 0 a 7% en los seis términos, al usar un solo parámetro modal el error en los seis términos oscila entre 2 y 13%.

### 5.2.3. Marco plano asimétrico 1

Se aplica el criterio de la energía de deformación modal máxima a dos modelos estructurales con asimetrías geométricas y variaciones importantes de masa y rigidez. Esto se hace con el fin de observar la variación de la energía de deformación modal y el nivel de correlación que existe en modelos estructurales de este tipo.

El procedimiento para reconstruir las matrices de rigideces de estos modelos estructurales asimétricos es similar al que se siguió en las secciones 5.2.1 y 5.2.2. Se presentan los resultados obtenidos en cada caso y al final de los mismos se hacen los comentarios respectivos.

El primero de estos modelos estructurales, es el marco plano de concreto reforzado mostrado en la figura 5.15. Éste tiene un cambio brusco en masa y rigidez entre los entrepisos quinto y sexto.



**Fig 5.15. Marco plano asimétrico 1**

Propiedades de la estructura: columnas del nivel 0 al nivel cinco 60x90 cm; columnas del nivel cinco al diez 50x80 cm; trabes 40x90 cm; masa total por nivel, del nivel cero al cinco 9.0 t-s<sup>2</sup>/m; del nivel cinco al diez 3.0 t-s<sup>2</sup>/m; módulo elástico del concreto 2.21x10<sup>6</sup> t/m<sup>2</sup>.

Los elementos con daño estructural simulado están indicados en la figura 5.15, se considera una reducción de rigidez de 30% en traveses y de 40% en columnas.

Las matrices de rigideces de la estructura, condensadas a los diez desplazamientos horizontales de entrepiso, en t/m, son:

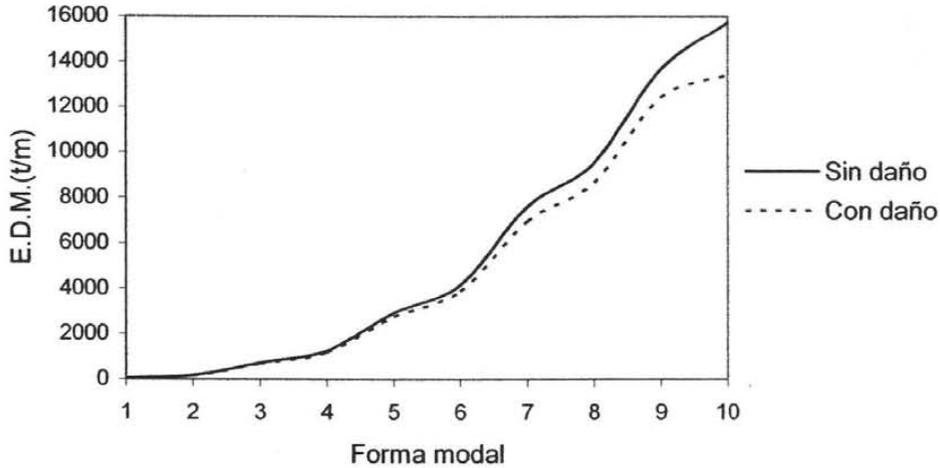
Modelo analítico  $[K_A]$ :

$$\begin{pmatrix} 142750 & -83920 & 24470 & -4710 & 730 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -83920 & 120080 & -79380 & 23130 & -3630 & 190 & -30 & 10 & 0 & 0 \\ 24470 & -79380 & 118750 & -77070 & 18840 & -1150 & 210 & -40 & 10 & 0 \\ -4710 & 23130 & -77070 & 108560 & -56620 & 6890 & -1280 & 240 & -40 & 10 \\ 730 & -3630 & 18840 & -56620 & 60340 & -25440 & 7020 & -1300 & 240 & -30 \\ 10 & 190 & -1150 & 6890 & -25440 & 37710 & -23840 & 6710 & -1220 & 180 \\ 0 & -30 & 210 & -1280 & 7020 & -23840 & 35780 & -23450 & 6530 & -940 \\ 0 & 10 & -40 & 240 & -1300 & 6710 & -23450 & 35590 & -22800 & 5050 \\ 0 & 0 & 10 & -40 & 240 & -1220 & 6530 & -22800 & 32150 & -14850 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -30 & 180 & -940 & 5050 & -14850 & 10590 \end{pmatrix}$$

Estado de daño simulado  $[K_S]$ :

$$\begin{pmatrix} 126100 & -71720 & 19110 & -3630 & 570 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -71720 & 100990 & -64520 & 18440 & -2880 & 150 & -30 & 0 & 0 & 0 \\ 19110 & -64520 & 98580 & -65110 & 16210 & -910 & 150 & -30 & 10 & 0 \\ -3630 & 18440 & -65110 & 96230 & -52110 & 6450 & -1110 & 210 & -40 & 10 \\ 570 & -2880 & 16210 & -52110 & 57400 & -24420 & 6350 & -1180 & 200 & -30 \\ -30 & 150 & -910 & 6450 & -24420 & 35190 & -21530 & 5950 & -1000 & 150 \\ 0 & -30 & 150 & -1110 & 6350 & -21530 & 32990 & -21760 & 5780 & -860 \\ 0 & 0 & -30 & 210 & -1180 & 5950 & -21760 & 32840 & -20620 & 4590 \\ 0 & 0 & 10 & -40 & 200 & -1000 & 5780 & -20620 & 29900 & -14240 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -30 & 150 & -860 & 4590 & -14240 & 10380 \end{pmatrix}$$

La matriz de masas  $[M]$  no indicada aquí, es una matriz diagonal de orden 10x10, con una masa total por nivel de 9 t-s<sup>2</sup>/m para los primeros cinco entrepisos y de 3 t-s<sup>2</sup>/m para los últimos cinco entrepisos.



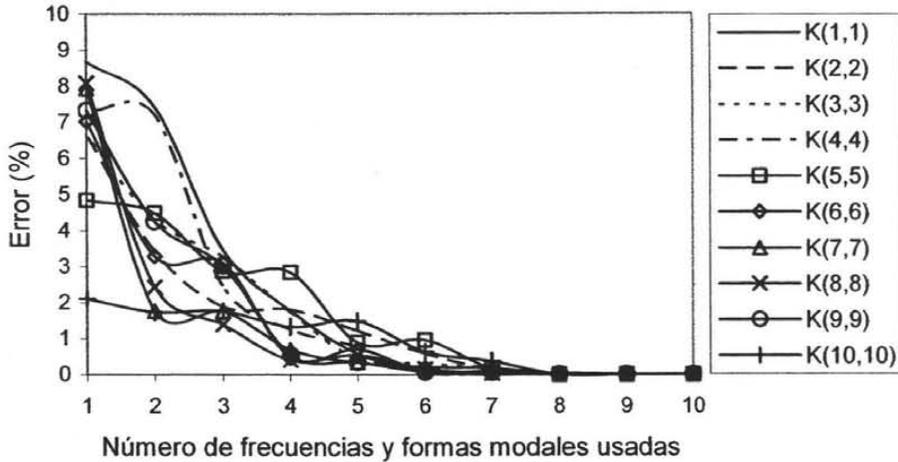
**Fig 5.16.** Variación de la energía de deformación modal en las formas modales de los dos estados del marco plano asimétrico 1.

**Tabla 5.13.** Valores del criterio de correlación *MAC* entre las vectores modales mejor correlacionados de los dos estados del marco plano asimétrico 1.

Estado	Vectores modales									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Con y sin daño	100	99.9	99.8	99.6	99.1	98.7	99.4	98.8	96.5	85.3
MAC (%)	100	99.9	99.8	99.6	99.1	98.7	99.4	98.8	96.5	85.3

**Tabla 5.14.** Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano asimétrico 1, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack. Rigideces en  $1 \times 10^3$  t/m.

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas									
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	126.1	126.0	126.0	126.1	126.2	126.8	128.3	130.4	135.4	137.0
K(2,2)	100.9	100.9	101.0	101.1	101.5	102.0	102.8	102.9	104.4	107.7
K(3,3)	98.5	98.5	98.6	98.7	98.8	99.7	100.2	101.8	102.8	105.1
K(4,4)	96.2	96.2	96.2	96.2	96.3	96.9	97.4	98.5	103.1	103.2
K(5,5)	57.4	57.4	57.4	57.4	57.9	57.9	59.0	59.0	59.9	60.1
K(6,6)	35.2	35.1	35.1	35.2	35.2	35.4	35.3	36.2	36.3	37.6
K(7,7)	32.9	32.9	32.9	33.0	33.0	33.1	33.2	33.5	33.5	35.6
K(8,8)	32.8	32.8	32.8	32.8	32.8	33.0	32.9	33.2	33.6	35.4
K(9,9)	29.9	29.9	29.9	29.9	29.9	30.0	30.0	30.8	31.1	32.0
K(10,10)	10.3	10.3	10.3	10.4	10.4	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5



**Fig 5.17. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano asimétrico 1, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.**

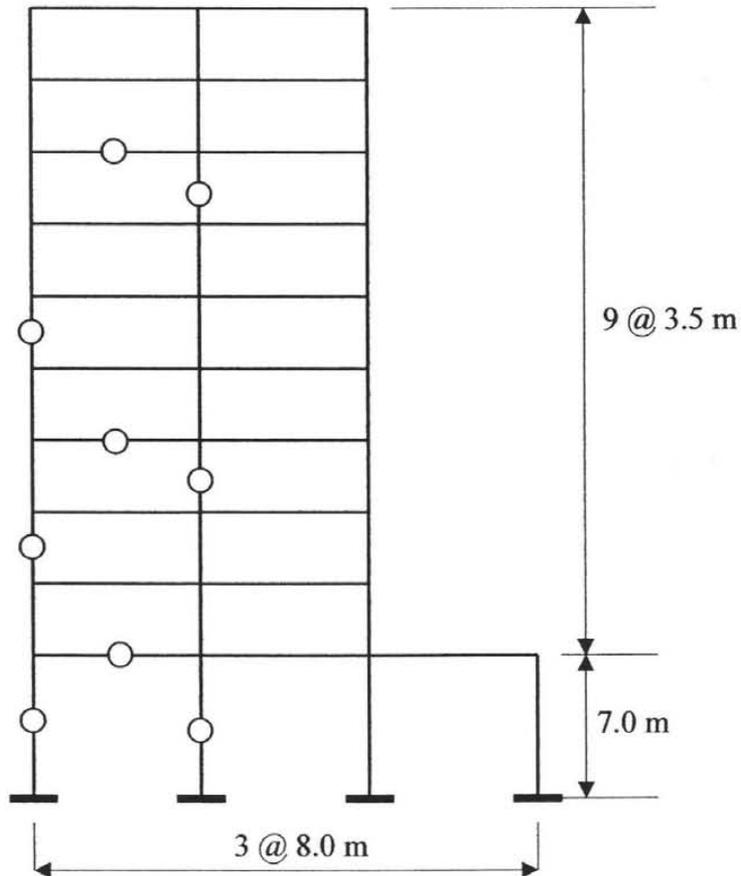
En la figura 5.16 se aprecia que la variación de energía de deformación modal para los dos estados de la estructura es siempre creciente, es decir, el mayor nivel de energía se concentra en las formas modales superiores. Estas formas modales son las que no deberán excluirse para obtener resultados precisos al reconstruir la matriz de rigideces de la estructura. En la tabla 5.13 se observa que la correlación promedio entre los vectores modales de los dos estados de la estructura es de 98%.

En la figura 5.17 se observa que al utilizar las ocho formas modales superiores de la estructura se obtiene la matriz de rigideces de daño simulado precisa, ya que para este caso el error relativo es cero. Lo anterior se puede comprobar en la figura 5.16, donde se aprecia que el nivel de energía de las dos primeras formas modales de la estructura es insignificante comparado con el nivel de energía que tienen todas las demás. Es importante observar en la figura 5.17, que al reconstruir la matriz de rigideces de la estructura usando al menos cuatro parámetros modales (las cuatro formas modales mayores), en los diez términos analizados se obtiene un error relativo inferior que el 3 %, lo cual puede considerarse aceptable.

Se concluye que para el marco plano asimétrico 1 y para el nivel de daño simulado estudiado, la asimetría geométrica y los cambios en masas y rigideces de la estructura no afectan el comportamiento siempre creciente de la variación de energía de deformación modal. Ésta siempre aumenta a medida que la forma modal es superior. La correlación entre los vectores modales tampoco se ve afectada, se obtienen valores del *MAC* cercanos a 100% en todas las formas modales.

#### 5.2.4. Marco plano asimétrico 2

En este modelo estructural de concreto reforzado existe variación de masa y rigidez entre los dos primeros entresijos. Su geometría y algunos elementos estructurales con daño simulado están representados en la figura 5.18.



○ Elemento dañado

**Fig 5.18. Marco plano asimétrico 2**

Propiedades de la estructura: columnas del primer entrespacio 75x110 cm; columnas de los demás entrespacios 60x90 cm ; traveses 40x90 cm ; masa total por nivel, del nivel cero al uno 9.0 t-s<sup>2</sup>/m; del nivel uno al diez 6.0 t-s<sup>2</sup>/m; módulo elástico del concreto 2.21x10<sup>6</sup> t/m<sup>2</sup>.

Los elementos con daño estructural simulado están indicados en la figura 5.18, se considera una reducción de rigidez de 30% en traveses y de 40% en columnas.

Matrices de rigideces condensadas del marco plano asimétrico 2, en t/m:

Modelo analítico  $[K_A]$ :

$$\begin{pmatrix} 65204 & -55895 & 17515 & -3546 & 726 & -151 & 32 & -7 & 1.4 & -0.2 \\ -55895 & 90987 & -59819 & 18309 & -3709 & 760 & -158 & 33 & -7 & 1 \\ 17515 & -59819 & 88350 & -59270 & 18193 & -3684 & 755 & -156 & 32 & -4.9 \\ -3546 & 18309 & -59270 & 88235 & -59246 & 18188 & -3682 & 754 & -152 & 23 \\ 726 & -3709 & 18193 & -59246 & 88230 & -59245 & 18186 & -3678 & 732 & -111 \\ -151 & 760 & -3684 & 18188 & -59245 & 88228 & -59240 & 18165 & -3579 & 540 \\ 32 & -158 & 755 & -3682 & 18186 & -59240 & 88207 & -59141 & 17700 & -2655 \\ -7 & 33 & -156 & 754 & -3678 & 18165 & -59141 & 87742 & -56918 & 13205 \\ 1.4 & -7 & 32 & -152 & 732 & -3579 & 17700 & -56918 & 76965 & -34775 \\ -0.2 & 1 & -4.9 & 23 & -111 & 540 & -2655 & 13205 & -34775 & 23777 \end{pmatrix}$$

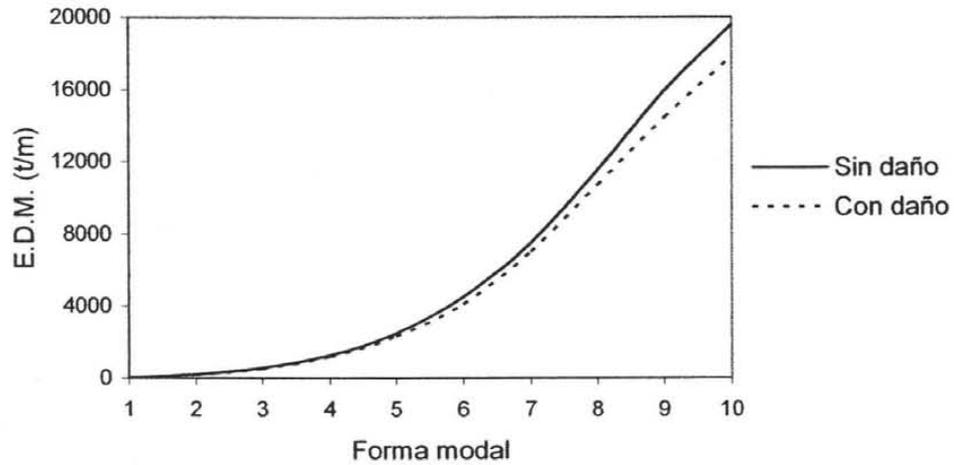
Estado de daño simulado  $[K_s]$ :

$$\begin{pmatrix} 56704 & -49746 & 15141 & -2997 & 629 & -123 & 27 & -6 & 1.2 & -0.2 \\ -49746 & 81980 & -52608 & 15277 & -3192 & 618 & -132 & 27 & -6 & 0.9 \\ 15141 & -52608 & 76314 & -51190 & 16393 & -3144 & 672 & -139 & 29 & -4.5 \\ -2997 & 15227 & -51190 & 79789 & -54684 & 16330 & -3374 & 669 & -141 & 22 \\ 629 & -3192 & 16393 & -54684 & 81340 & -54208 & 16349 & -3114 & 650 & -99 \\ -123 & 618 & -3144 & 16330 & -54208 & 82086 & -54931 & 16238 & -3391 & 513 \\ 27 & -132 & 672 & -3374 & 16349 & -54931 & 80440 & -53354 & 16850 & -2543 \\ -6 & 27 & -139 & 669 & -3114 & 16238 & -53354 & 81633 & -54878 & 12924 \\ 1.2 & -6 & 29 & -141 & 650 & -3391 & 16850 & -54878 & 75445 & -34560 \\ -0.2 & 0.9 & -4.5 & 22 & -99 & 513 & -2543 & 12924 & -34560 & 23747 \end{pmatrix}$$

La matriz de masas  $[M]$  no indicada aquí, es una matriz diagonal de orden  $10 \times 10$ , con una masa total de  $9 \text{ t-s}^2/\text{m}$  para el primer nivel y de  $6 \text{ t-s}^2/\text{m}$  para los nueve niveles restantes.

En la figura 5.19, se aprecia que la variación de energía de deformación modal para los dos estados del marco plano asimétrico 2 es siempre creciente a medida que la forma modal es superior.

El uso del mayor número posible de formas modales superiores permitirá reconstruir de manera más precisa la matriz de rigideces de la estructura. Esto se puede comprobar en la figura 5.20, para ocho parámetros modales usados, el error relativo es prácticamente cero en todos los términos. En concordancia con esto, la figura 5.19 muestra que el nivel de energía almacenada por las dos primeras formas modales de la estructura es muy pequeño comparado con el de las demás formas modales superiores.



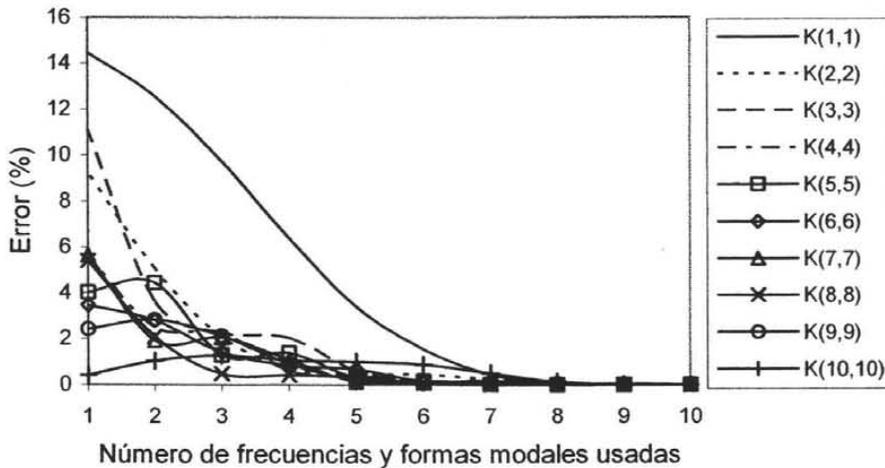
**Fig 5.19.** Variación de la energía de deformación modal en las formas modales de los dos estados del marco plano asimétrico 2.

**Tabla 5.15** Valores del criterio de correlación *MAC* entre los vectores modales mejor correlacionados de los dos estados del marco plano asimétrico 2.

Estado	Vectores modales									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Con y sin daño	100	99.9	99.7	99.5	99.4	99.4	99.4	98.9	98.1	99
MAC (%)	100	99.9	99.7	99.5	99.4	99.4	99.4	98.9	98.1	99

**Tabla 5.16.** Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano asimétrico 2, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack. Rigideces en  $1 \times 10^3$  t/m.

Término	Número de frecuencias y formas modales usadas									
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
K(1,1)	56.7	56.6	56.7	56.9	57.5	58.6	60.3	62.2	63.8	64.9
K(2,2)	81.9	81.9	82.0	82.1	82.3	82.3	82.5	83.6	86.1	89.5
K(3,3)	76.3	76.3	76.3	76.4	76.4	76.7	77.8	78.0	79.0	84.7
K(4,4)	79.7	79.8	79.8	79.8	79.9	80.1	80.2	81.5	81.7	84.2
K(5,5)	81.3	81.3	81.3	81.3	81.4	81.5	82.4	82.3	84.9	84.6
K(6,6)	82.0	82.1	82.1	82.2	82.2	82.6	82.7	83.2	84.3	84.9
K(7,7)	80.4	80.4	80.4	80.5	80.5	80.5	81.3	82.0	81.9	84.9
K(8,8)	81.6	81.6	81.6	81.6	81.6	81.9	81.9	82.0	83.3	86.0
K(9,9)	75.4	75.4	75.4	75.4	75.4	75.5	76.1	77.0	77.5	77.2
K(10,10)	23.7	23.7	23.7	23.8	23.9	23.9	23.9	24.0	23.9	23.8



**Fig 5.20. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano asimétrico 2, reconstruida con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.**

En la figura 5.20 se observa que al usar por lo menos los cinco parámetros modales con mayor nivel de energía, el error relativo en todos los términos es menor de 2%, excepto en el término (1,1), donde el error es de 4%. La tabla 5.15 muestra que la correlación de los vectores modales entre los dos estados de la estructura es muy alta, existe un valor promedio de correlación de 99%.

Se concluye que para el marco plano asimétrico 2 y para el nivel de daño simulado estudiado, las características de asimetría geométrica y la variación de masas y rigideces de esta estructura no afectan el comportamiento siempre creciente de la variación de energía de deformación modal. La correlación entre los vectores modales es muy cercana a 100% en todos ellos.

### 5.3. INCERTIDUMBRES EN LAS MEDICIONES DE LAS CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS DE UNA ESTRUCTURA POR EFECTOS DE RUIDO

Las características dinámicas de una estructura obtenidas experimentalmente se ven afectadas por diferentes tipos de incertidumbres. Dentro de las de mayor interés se tiene el caso de los elementos no estructurales que pueden aportar cierta rigidez a la estructura, por ejemplo el caso de pretilos y muros divisorios, que pueden modificar el período natural de vibración de la misma. Otro caso, es el efecto de interacción suelo-estructura que también afecta tales propiedades dinámicas, particularmente cuando se trata de estructuras desplantadas en suelos blandos. Y también, la presencia de ruido que afecta estas mediciones. A continuación se analiza el efecto de las incertidumbres debidas a este último caso.

Para considerar las incertidumbres debidas a la presencia de ruido en la obtención de las características dinámicas de una estructura, las frecuencias naturales y formas modales de vibración obtenidas para un estado de daño simulado son perturbadas con un cierto nivel de ruido. Sohn y Law (1997), propusieron una expresión para incluir en una forma modal experimental las incertidumbres debidas a efectos de ruido. La  $j$ -ésima forma modal perturbada se obtiene como:

$$\{\Phi_j\}_p = \{\Phi_j\} \left( 1 + \frac{R}{100} X \right) \quad (5.1)$$

donde:

$\{\Phi_j\}$  =  $j$ -ésima forma modal de daño simulado

$R$  = nivel de ruido en porcentaje

$X$  = número aleatorio con función de distribución de probabilidad normal, con media cero y varianza uno

Como un ejemplo de la consideración de las incertidumbres debidas al efecto de ruido en la obtención de los parámetros modales experimentales de una estructura, a continuación se estudia el marco plano tratado en la sección 5.1.1.

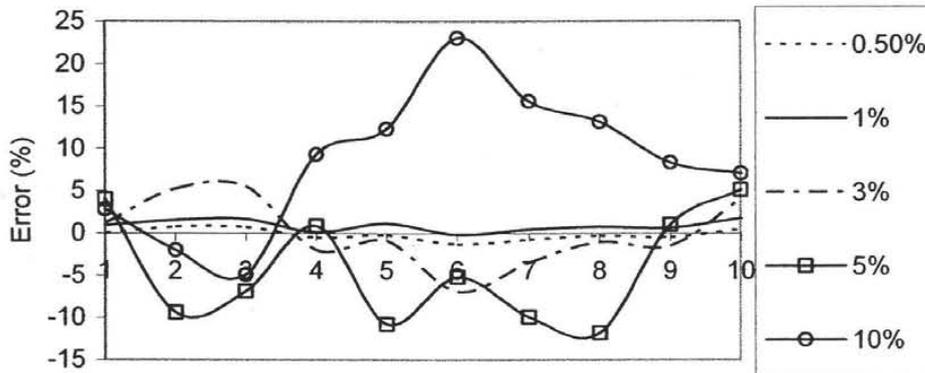
Con base en las formas modales de daño simulado obtenidas para este modelo estructural, se analizan diferentes niveles de ruido (0.5, 1, 3, 5 y 10%). Aplicando la expresión (5.1) se obtienen sus frecuencias naturales y formas modales perturbadas correspondientes a cada nivel de ruido y se reconstruye la matriz de rigideces para cada caso. La matriz de rigideces se reconstruye usando el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack. Se usa este algoritmo debido a que en los modelos estructurales estudiados en este capítulo fue el que proporcionó resultados más precisos.

La matriz de rigideces reconstruida para cada nivel de ruido se obtiene considerando el total de parámetros modales de la estructura. Con el fin de comparar las matrices de rigideces obtenidas a partir de daño simulado, con y sin efecto de ruido, se mide el error relativo que se genera entre estas dos matrices y se comentan los resultados obtenidos. Se analizan solamente los términos de la diagonal principal de estas matrices.

En la tabla 5.17 y la figura 5.21 se resumen los resultados obtenidos de este análisis. En las columnas de la tabla 5.17, se muestran los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces reconstruida con diferentes niveles de ruido. Estas rigideces se comparan con las obtenidas para el estado de daño simulado sin considerar efectos de ruido (sección 5.1.1), el error relativo entre ambos casos se representa en la figura 5.21. En esta figura, cada curva representa la variación de error relativo de los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces, reconstruida para un nivel de ruido específico. En el eje horizontal se indican los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces obtenida para los diferentes niveles de ruido considerados. El orden de los términos representados en este eje es el convencional al leer los términos de la diagonal principal de una matriz cuadrada, el primer término está ubicado en la esquina superior izquierda de la matriz. En el eje vertical de esta figura se indica el error relativo en cada término, asociado al nivel de ruido considerado.

**Tabla 5.17. Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con diferentes niveles de ruido. Rigideces en  $1 \times 10^3$  t/m.**

Término	Nivel de ruido				
	0.50%	1%	3%	5%	10%
K(1,1)	49.8	50.2	50.4	51.8	51.2
K(2,2)	44.4	44.8	46.4	39.9	43.2
K(3,3)	43.6	44.0	45.6	40.3	41.1
K(4,4)	43.6	43.9	42.9	44.2	47.9
K(5,5)	44.2	44.8	43.9	39.5	49.8
K(6,6)	49.8	50.4	47.0	47.8	62.1
K(7,7)	50.6	51.2	49.2	45.9	58.9
K(8,8)	51.3	51.8	50.9	45.3	58.2
K(9,9)	42.4	42.8	41.9	43.0	46.1
K(10,10)	11.9	12.1	12.3	12.5	12.7



Términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces

**Fig 5.21. Variación de error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con diferentes niveles de ruido.**

En la tabla 5.18 se indica el error relativo máximo obtenido para cada nivel de ruido considerado y el término correspondiente de la diagonal principal de la matriz de rigideces para el cual ocurre éste.

**Tabla 5.18. Error relativo máximo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces del marco plano, reconstruida con diferentes niveles de ruido**

Nivel de ruido considerado (%)	Error máximo (%)	Término
0.5	1.2	K(6,6)
1	1.7	K(10,10)
3	6.9	K(6,6)
5	10.7	K(5,5)
10	23.0	K(6,6)

ESTA TESIS NO SALL  
DE LA BIBLIOTECA

En general se puede decir que cuando los niveles de ruido considerados son menores que 1%, el error relativo máximo obtenido es inferior al 2%, lo cual se puede considerar como aceptable. Por otro lado, si los niveles de ruido están entre 3 y 10%, el valor del error relativo máximo obtenido varía entre el 6.90 y 23% que puede ser considerado como inaceptable.

Es importante aclarar que el efecto de ruido generado en las mediciones es un evento aleatorio, no existe forma de limitar la ocurrencia de un cierto nivel de ruido.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se estudiaron cuatro métodos directos para reconstruir la matriz de rigideces de estructuras con y sin daño. Así mismo, se estudió un criterio basado en la energía de deformación modal para seleccionar los parámetros modales que deben usarse para reconstruir de manera precisa esta matriz. También, se estudió el efecto de las incertidumbres que afectan las mediciones de las características dinámicas de una estructura debido a ruido.

Con base en los resultados obtenidos de los modelos estructurales estudiados, se establecen las siguientes conclusiones y recomendaciones.

Con los cuatro algoritmos analizados, la matriz de rigideces dañada de los modelos estructurales estudiados se obtuvo de manera precisa si se utiliza el total de parámetros modales correspondientes. Sin embargo, es interesante comentar cómo varía el error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces, reconstruida con diferente número de parámetros modales.

Al aplicar el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack (Baruch, 1978), al marco plano, al reconstruir su matriz de rigideces con nueve parámetros modales, se obtuvieron valores del error relativo inferiores al 4 %. Al usar menos de nueve parámetros modales, el valor del error relativo alcanzó el 27%. En el caso de la estructura tridimensional estudiada, al usar cinco o menos parámetros modales, el error relativo en sus seis términos llegó hasta 17%.

Los resultados obtenidos con el algoritmo de Berman y Nagy (Berman y Nagy, 1983), fueron prácticamente iguales a los obtenidos con el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack.

Con el algoritmo de la mezcla de matrices (Caesar, 1987 y Link et al. 1987), para el marco plano, al usar nueve parámetros modales existió una variación del error relativo hasta del 7%, al usar menos de nueve éste llegó a 27%. En la estructura tridimensional, al usar cualquier número incompleto de parámetros modales el error relativo varió hasta el 17%.

Para el marco plano, el algoritmo de la matriz de error (Sidhu y Ewins, 1984 y Gysin, 1986) al usar nueve parámetros modales el error relativo llegó hasta 8%, y al usar menos de nueve hasta 26%. Para la estructura tridimensional, con cualquier número incompleto de parámetros modales usados el error relativo llegó a ser de 17%.

Una característica importante de las gráficas que muestran la variación de error relativo de los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces reconstruida con los diferentes algoritmos, es que, los algoritmos de Baruch y Bar Itzhack y Berman y Nagy, presentaron un patrón de variación de error relativo mejor definido que el de los algoritmos de la mezcla de matrices y la matriz de error.

Al aplicar el criterio de selección de formas modales basado en la energía de deformación modal máxima, al reconstruir la matriz de rigideces de los modelos estructurales estudiados, las formas modales con las que se pudo reconstruir de manera más precisa su matriz de rigideces, fueron las formas modales superiores. Al usar este criterio, para cualquier número de parámetros modales usados, el nivel de error relativo obtenido en los términos analizados de la matriz, fue menor que el obtenido cuando las formas modales se eligieron con base en el criterio de formas modales mínimas.

Para el marco plano analizado con este criterio, al usar seis formas modales superiores el error relativo en ocho de sus términos fue menor que 1%, en los otros dos, de 3%.

En el caso de la estructura tridimensional, al usar entre dos y cinco de sus formas modales superiores, el error relativo fue menor que 5% en cinco de sus términos. Solo en uno de ellos fue de 7%.

En el marco plano asimétrico 1, al usar sus cinco formas modales superiores el error relativo fue menor de 2% en sus diez términos. En el marco plano asimétrico 2, al usar sus seis formas modales superiores el error relativo en sus diez términos fue menor de 3%.

En los modelos estructurales estudiados en este trabajo, solo se revisó el error relativo en los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces reconstruida. Sin embargo, al disminuir el número de parámetros modales usados, el error relativo en los términos que están fuera de la diagonal principal, fue mayor que en los términos de ésta. A medida que un término está más alejado de la diagonal principal, su error relativo aumentó.

Se revisaron varias técnicas de expansión modal (Avitabile y Heylen, 1998). Éstas se utilizan para expandir los grados de libertad de una matriz modal incompleta en sus grados de libertad. Los resultados obtenidos al expandir los grados de libertad de una matriz modal, son solo aproximados respecto a las formas modales obtenidas de daño simulado. En consecuencia, con estas técnicas de expansión modal no se obtuvieron resultados satisfactorios, motivo por el cual no se incluyeron en este trabajo.

Se estudió una técnica para considerar las incertidumbres que afectan la obtención experimental de las características dinámicas de una estructura por efectos de ruido. En el modelo estructural estudiado para tomar en cuenta estas incertidumbres se consideraron varios niveles de ruido (0.5, 1, 3, 5 y 10%). Se obtuvo que cuando el nivel de ruido es menor que 1%, el máximo error relativo generado respecto a daño simulado fue menor de 2%, considerado aceptable. Sin embargo, para niveles de ruido de entre 3 y 10%, el máximo error relativo varió entre 6.90 y 23%, considerado como inaceptable. Aunque el efecto provocado por este tipo de incertidumbres es un evento aleatorio, es importante darse cuenta del error que se puede generar en la estimación experimental de los parámetros modales de una estructura, y por consecuencia, en la reconstrucción de su matriz de rigideces.

En el presente trabajo se mostró, que al reconstruir la matriz de rigideces de una estructura aplicando el criterio de selección de formas modales basado en la energía de deformación modal máxima, se obtienen resultados satisfactorios. Así, en el marco plano estudiado en la sección 5.2.1, al usar seis de diez parámetros modales se obtuvo que el error relativo en ocho de los términos analizados fue menor que 1%, solo en dos de los términos fue de 3%. Por esta razón, es conveniente que futuros esfuerzos enfocados en el tema tratado en el presente trabajo, traten de obtener un método para estimar las formas modales superiores de una estructura, teniendo como dato las formas modales fundamentales que se identifican en la realidad.

Al aplicar el criterio de selección de formas modales basado en la energía de deformación modal máxima a los modelos estructurales estudiados, se observó que en todos los casos existen factores de correlación con valores cercanos a la unidad entre los vectores modales de los estados con y sin daño de estos modelos estructurales. Así lo demostró el criterio de correlación *MAC* calculado para cada caso. Con los parámetros modales experimentales que es posible identificar en una estructura real, el criterio de correlación de los parámetros modales conocidos, puede ser un indicador para tratar de estimar las formas modales no identificadas.

Como recomendaciones para futuros trabajos sobre este tema, se sugiere:

1. Estudiar otros métodos para reconstruir la matriz de rigideces de una estructura, específicamente los métodos iterativos así como los basados en funciones de respuesta de frecuencias. Particularmente, investigar los resultados obtenidos al usar un número incompleto de parámetros modales experimentales, los que se identifican en la realidad.
2. Establecer un método que permita estimar las formas modales superiores de una estructura a partir del conocimiento experimental de sus formas modales fundamentales. De esta manera, se puede aplicar el criterio de selección de formas modales basado en la energía de deformación modal máxima. En el presente trabajo se demostró su efectividad.

## REFERENCIAS

1. Avitabile P. y Heylen W., (1998), "Correlation considerations, degree of freedom correlation techniques, parte 5", memorias de la 16th IMAC, Santa Barbara, California.
2. Baruch M., (1978), "Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration test data", AIAA Journal, 16(1), pp. 1208-1210.
3. Bazán y Meli, (2003), "Diseño sísmico de edificios", Limusa.
4. Berman A. y Nagy E. J., (1983), "Improvement of large analytical model using test data", AIAA Journal, pp. 1168-1173.
5. Caesar B., (1987), "Updating system matrices using modal test data", memorias de la 5th IMAC, Londres, Inglaterra, pp. 453-459.
6. Chopra A. K., (2001), "Dynamics of structures, theory and applications to earthquake engineering", University of California at Berkeley, Prentice Hall.
7. Chu Y. y Rudisill C. S., (1975), "Numerical methods for evaluating the derivatives of eigenvalues and eigenvectors", AIAA Journal, pp. 834-837.
8. Ewins D. J., (1984), "Modal testing, theory and practice", Wiley.
9. Fox R. L. y Kapoor M. P., (1968), "Rate of change of eigenvalues and eigenvectors", AIAA Journal, 12(6), pp. 2426-2429.
10. Guyan R. J., (1965), "Reduction of stiffness and mass matrices", AIAA Journal, pp. 380.
11. Gysin H. P., (1986), "Critical application of the error matrix method for localization of finite element modelling inaccuracies", memorias de la 4th IMAC, Los Angeles, California, pp. 1339-1351.
12. Hart G. C. y Yao J.P., (1977), "System identification in structural dynamics", ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division, pp. 1089-1104.
13. Henning G., (1998), "Model updating of large structural dynamics models using measured response functions", tesis de doctorado, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London.
14. Henshell R. D. y Ong J. H., (1975), "Automatic masters for eigenvalue economization", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 3, pp. 375-383.
15. Kashangaki T. A., (1995), "Mode selection for damage detection using the modal sensitivity parameter", AIAA Paper No. 95-1342-CP, memorias de la 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Nueva Orleans, Los Angeles, abril, pp. 1535-1542.

16. Kashangaki T. A., Smith S. W. y Lim T. W., (1992), "Underlying modal data issues for detecting damage in truss structures", AIAA Paper No. 92-2264-CP, memorias de la 33th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, abril.
17. Lim T. W., (1991), "Sensor placement for on-orbit modal testing", AIAA Paper No. 91-1184-1cp, memorias de la 32th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, abril, pp. 2977-2985.
18. Link M., Weiland M. y Bassagan J. M., (1987), "Direct physical matrix identification as compared to phase resonance testing, an assessment based on practical application", memorias de la 5th IMAC, 804-811, Londres, Inglaterra.
19. Ojalvo I. U., (1987), "Efficient computation of mode shape derivatives for large dynamic systems", AIAA Journal, pp. 1386-1390.
20. Ojalvo U., Ting T., Pilon D. y Twomey W., (1989), "Practical suggestions for modifying math models to correlate with actual modal test results", memorias de la 7th IMAC, pp. 347-354. Las Vegas Nevada.
21. Paz M., (1997), "Structural dynamics", Speed Scientific School University of Louisville, International Thomson Publishing.
22. Ross R.G., (1971), "Synthesis of stiffness and mass matrices from experimental vibration modes", National Aeronautics and Space Engineering and Manufacturing Meeting, pp. 2627-2635, Society of Automotive Engineers.
23. Saeed Z. R., (1997), "Methods for updating numerical models in structural dynamics", tesis de doctorado, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London.
24. Scott W. D., Francois M. H., Lee D. P. y Charbel F., (1997), "Improved damage location accuracy using strain energy-based mode selection criteria", Los Alamos National Laboratory, Ecole Centrale Paris y University of Colorado.
25. Sidhu J. y Ewins D. J., (1984), "Correlation of finite element and modal test studies of a practical structure", memorias de la 2nd IMAC, Orlando, Florida, pp. 756-762.
26. Shon H. y Law K. H., (1997), "A bayesian probabilistic approach for structure damage detection", Department of Civil Engineering, Standford University, Standford, CA, U.S.A.
27. Szabo F. (1997), "Linear algebra, an introduction using mathematica, a harcourt science and technology company".
28. Tan R. C. E. y Andrew A. L., (1989), "Computing derivatives of eigenvalues and eigenvectors by simultaneous iteration", Institute of Mathematics and its Application, Journal of Numerical Analysis, 9(11), pp. 111-122.
29. Thoren A. R., (1972), "Derivation of mass and stiffness matrices from dynamic test data", AIAA, 1(72), pp. 346.
30. Tung A. y Christiano P., (1993), "Fundamentals of structural analysis", Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

31. Wilson E. L., (1991), "CAL-91, Computer assisted learning of static and dynamic analysis of structural systems", University of California, Berkeley California.

Dedico este trabajo a una mujer que decidió compartir su vida conmigo, a Edna.

Y a mis hijas, Ixchel y Anahí.

Agradezco:

Al posgrado en Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, la oportunidad que me dio de nutrir mis inquietudes de Ingeniero Civil. Nunca lo olvidaré.

La gran calidad humana y profesional del Dr. José Alberto Escobar Sánchez, su asesoría y apoyo en este trabajo.

La aportación hecha a este trabajo por mis sinodales revisores:

Dr. Roberto Gómez Martínez

Dr. Orlando Díaz López

Dr. Oscar López Bátiz

Dr. Juventino Carlos Reyes Salinas