

ÍNDICE

	Página
RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
1 REVISIÓN DE LITERATURA: MODELACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO DE AGUA HACIA DRENES AGRICOLAS	4
1.1 Introducción	4
1.2 Ecuación de Richards	4
1.3 Flujo subsuperficial del agua hacia drenes a cielo abierto	5
1.4 Infiltración del agua desde canales de riego	7
1.5 Resumen	9
2 ECUACIONES DE BASE	10
2.1 Introducción	10
2.2 Movimiento del agua en el dren	10
2.3 Movimiento del agua en el suelo	11
2.3.1 Ecuación de continuidad	11
2.3.2 Ley de Darcy	12
2.3.3 Ecuación general de transferencia de agua en el suelo	12
2.3.4 Ecuación de Richards	12
2.3.5 Ecuación de Fokker-Planck	13
2.4 Características hidrodinámicas	13
2.4.1 Combinación de ecuaciones de Van Genuchten y Brooks-Corey	14
2.4.2 Combinación de ecuaciones de Fujita-Parlange	15
2.5 Ecuación unidimensional de Boussinesq	15
2.6 Ecuación de Chezy para el calculo del flujo de agua en el canal de riego	16
2.7 Condiciones límite	17
2.7.1 Condición inicial	17
2.7.2 Condición de frontera excepto en el dren	17
2.7.3 Condición de frontera en el dren	18
2.8 Resumen	18
3 SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL POR EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO	19
3.1 Introducción	19
3.2 Revisión general del método del elemento finito	19
3.2.1 Funciones base	20



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

3.2.2	Método de Galerkin	20
3.3	Ecuación de Richards bidimensional	21
3.3.1	Condiciones límite	21
3.3.1.1	Condición inicial	22
3.3.1.2	Condiciones de frontera	22
3.4	Forma débil de la ecuación de Richards	23
3.5	Solución de la ecuación de Richards bidimensional por el método de los elementos finitos	23
3.5.1	Integración del espacio por el método de los elementos finitos	23
3.5.1.1	Discretización del dominio de solución	23
3.5.1.2	Desarrollo del esquema	24
3.5.1.3	Integración en el tiempo por el método de diferencias finitas	25
3.5.1.4	Flujo en la frontera del dren	26
3.6	Resumen	26
4	APLICACIONES	27
4.1	Introducción	27
4.2	Planteamiento del problema	27
4.3	Discretización del dominio de solución	27
4.4	Condiciones límite	28
4.4.1	Condición inicial	28
4.4.2	Condición de frontera	28
4.5	Simulación de la transferencia de agua de un canal de riego hacia un dren a cielo abierto	29
4.6	Resultados	29
4.6.1	Comparación de los resultados	29
4.6.2	Aplicaciones	32
4.7	Resumen	34
5	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	35
6	BIBLIOGRAFÍA	36
ANEXO A	Ecuación de continuidad	39
ANEXO B	El elemento triangular	42
ANEXO C	Algoritmo y programa numérico	44

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

	Página
1.1. Flujo hacia zanjas paralelas	6
1.2. Tanque experimental con sus respectivas líneas de potencial y superficie freática	8
1.3. Geometría y líneas de presión cero a diferentes tiempos	8
2.1. Geometría tridimensional de un sistema combinado de dren a cielo abierto y un canal de riego	11
2.2. Superficie de filtración hacia un dren a cielo abierto	18
3.1. Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional	21
4.1. Malla de elementos finitos	28
4.2. Relación entre el flujo en estado permanente obtenido con la solución numérica de la ecuación de Richards y el proporcionado por la solución analítica de la ecuación de Boussinesq. Suelo arcilloso	30
4.3. Relación entre el flujo en estado permanente obtenido con la solución numérica de la ecuación de Richards y el proporcionado por la solución analítica de la ecuación de Boussinesq. Suelo franco arcilloso	31
4.4. Relación entre el flujo en estado permanente obtenido con la solución numérica de la ecuación de Richards y el proporcionado por la solución analítica de la ecuación de Boussinesq. Suelo franco	32
4.5. Hidrogramas de salida en el dren para diferentes tirantes en el canal de riego en un suelo arcilloso	33
4.6. Líneas equipotenciales y posición de la superficie libre del agua a un día de simulación para un suelo arcilloso	33
4.7. Líneas equipotenciales y posición de la superficie libre del agua en régimen permanente para un suelo arcilloso.	33
A1. Volumen elemental representativo para el flujo a través del medio poroso	39
B1. Elemento triangular	42

ÍNDICE DE CUADROS

	Página
4.1. Valores de los parámetros de las características hidrodinámicas en tres suelos contrastantes	27
4.2. Tirante de agua en el dren (cm) cuando el régimen del flujo desde el canal de riego es permanente.	29
4.3. Comparación del flujo drenado en régimen permanente para un suelo arcilloso	30
4.4. Comparación del flujo drenado en régimen permanente para un suelo franco-arcilloso	31
4.5. Comparación del flujo drenado en régimen permanente para un suelo franco	31
4.6. Caudal de agua que circula en el canal de riego para diferentes tirantes comparado con el caudal infiltrado en régimen permanente en un kilómetro de longitud de canal construido sobre un suelo franco	34

RESUMEN

En este trabajo se ha estudiado la transferencia de agua entre un canal y un dren a cielo abierto mediante la solución numérica de la ecuación de Richards en su forma bidimensional, empleando el método del elemento finito para la integración en el espacio y un esquema en diferencias finitas implícito para la integración en el tiempo. Se ha propuesto un procedimiento para el cálculo de las pérdidas de agua por efecto de la infiltración que se presenta en un canal de riego construido sobre tierra. Se compara el flujo de agua en régimen permanente entre un canal de riego y un dren a cielo abierto, que resulta con la solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional, con el proporcionado por la solución analítica de la ecuación de Boussinesq unidimensional. Las pérdidas de agua por efecto de la infiltración que se presentan en el canal, debido a la presencia de un dren a cielo abierto paralelo, mostraron que éstas son despreciables en comparación con el gasto que circula por el canal. La comparación del flujo de agua en régimen permanente muestra que el enfoque tipo Boussinesq es una buena aproximación para calcular la transferencia de agua que se presenta entre un canal de riego y un dren a cielo abierto.

INTRODUCCIÓN

El drenaje agrícola consiste en la eliminación del exceso de agua en el suelo o en la superficie del mismo, siendo su objetivo inmediato hacer el suelo más útil para su uso. En la agricultura sus objetivos son aumentar la producción y mantener los rendimientos reduciendo los daños causados por excesos de agua en el terreno cultivado. La abundancia de agua en el suelo impide el buen desarrollo de las plantas, afectando el crecimiento radicular por falta de aireación y dificultando la capacidad de absorción de nutrientes. El mal drenaje afecta las condiciones físicas del suelo, las prácticas de cultivos, la salinidad y la alcalinidad, y hace que los cultivos sean más sensibles a enfermedades o plagas. La necesidad de drenaje superficial es el resultado de una combinación de ciertas condiciones climáticas e hidrológicas, del tipo de suelo, de la topografía y del uso de la tierra, por lo tanto, las precipitaciones excesivas, la escorrentía superficial en zonas altas y los desbordamientos de los ríos, pueden dar lugar al estancamiento del agua sobre el terreno en zonas bajas, especialmente cuando los suelos tienen baja velocidad de infiltración o mal drenaje interno.

El objetivo del presente trabajo es describir la transferencia de agua desde un canal de riego hacia un dren a cielo abierto mediante el uso de ecuaciones diferenciales parciales altamente no lineales. Para lograr el objetivo se desarrolla un código numérico utilizando la ecuación de Richards en forma bidimensional en un sistema combinado de un canal de riego y un dren a cielo abierto. La transferencia de agua en estos sistemas se presenta con relativa frecuencia en los distritos de riego del noroeste de México, y que genera la interrogante sobre la magnitud de la pérdida de agua en los canales de riego. La distribución de los capítulos es como sigue:

La revisión de literatura se presenta en el capítulo I, donde se indican los trabajos realizados por diferentes autores sobre la solución numérica de la ecuación de Richards, en una y en dos dimensiones, al utilizar especialmente el método del elemento finito. Así mismo se describe la ecuación de Boussinesq en una dimensión determinando el flujo de agua permanente hacia drenes. Se describen estudios publicados sobre la infiltración del agua desde canales de riego hacia una superficie freática profunda o hacia un dren adyacente estudiando la evolución de la superficie libre del agua.

En el capítulo II se presentan los conceptos y definiciones básicas sobre la transferencia de agua en un medio poroso; la cual esta gobernada por la ley de Darcy y por la ecuación de continuidad, cuya combinación permite obtener la ecuación general de transferencia de agua en el suelo obteniéndose así la ecuación de Richards al introducir el término de capacidad específica del suelo. Para el flujo del agua en el dren se indican las ecuaciones que rigen el flujo a superficie libre, conocidas como ecuaciones de Saint-Venant. Se describen las

características hidrodinámicas del suelo expresando el potencial de presión y la conductividad hidráulica como una función del contenido volumétrico de humedad del suelo mediante el estudio de dos pares de características hidrodinámicas: i) combinación de la difusividad de Fujita con la relación entre la conductividad hidráulica y la difusividad de Parlange, y ii) combinación de la conductividad de Brooks y Corey con la presión de Van Genuchten.

En el capítulo III se presentan las bases para resolver numéricamente la ecuación de Richards como una aproximación bidimensional del flujo del agua en un sistema combinado de un canal de riego y un dren a cielo abierto. Sujeta a condiciones de frontera, la ecuación de Richards se resuelve numéricamente integrándola en el espacio mediante una discretización por el método de los elementos finitos (Galerkin) y en el tiempo mediante una discretización por el método de diferencias finitas implícitas.

Los resultados de la aplicación del esquema numérico se muestran en el capítulo IV, donde se aplica la solución de elemento finito de la ecuación de Richards bidimensional utilizando las características hidrodinámicas de tres tipos de suelos contrastantes. Se muestran los resultados de la simulación numérica; en particular: i) los hidrogramas de entrada al dominio de solución desde el canal de riego y de salida hacia el dren a cielo abierto; ii) la comparación de gastos obtenidos mediante la solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional y la solución analítica de la ecuación de Boussinesq unidimensional, y iii) la configuración de las líneas equipotenciales con la evolución de la posición de la superficie libre del agua para tres tipos de suelos contrastantes.

CAPÍTULO I

REVISIÓN DE LITERATURA: MODELACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO DE AGUA A DRENES AGRÍCOLAS

1.1. Introducción

El objetivo del presente capítulo es describir algunos estudios desarrollados por varios autores sobre la transferencia de agua, en una y dos dimensiones, en sistemas, solos o combinados, de drenes a cielo abierto y canales de riego. Se mencionan los diferentes métodos utilizados, especialmente aquellos que utilizan el método del elemento finito, para resolver la ecuación de Richards en forma numérica y la ventaja que tiene ésta ecuación diferencial para describir el movimiento del agua en el suelo. Se estudia la teoría de drenaje agrícola y sus aplicaciones dando especial interés a la ecuación que determina el flujo de agua hacia drenes a cielo abierto y se enuncian algunos ejemplos que fueron utilizados para estudiar el movimiento de la superficie libre del agua, cuando se infiltra el agua desde un canal sin revestir hacia el medio poroso y finalmente llegar a una zanja de drenaje.

1.2. Ecuación de Richards

La ecuación de Richards se utiliza para describir el flujo de agua saturado y no saturado a través de medios porosos; es por eso que en la literatura actual podemos encontrar un marcado interés en desarrollar diferentes métodos de solución aplicables a ésta ecuación para encontrar una solución, así sea analítica o numéricamente. Algunos autores, entre ellos Celia *et al.* (1990), Ross (1990), Gottardi y Venutelli., (1992), Rathfelder y Abriola (1994), Pan y Wierenga (1995), tocci *et al.* (1997) y Williams *et al.* (2000), han desarrollado diferentes métodos de solución utilizando la ecuación de Richards en una dimensión.

El uso del método de elemento finito combinado con el método de diferencias finitas, aplicados a la ecuación de Richards, se han estado intensificando para estudiar el flujo bidimensional del agua hacia drenes subterráneos o drenes a cielo abierto. Allen y Murphy (1986) realizaron una técnica de colocación del método de elemento finito para resolver numéricamente esta ecuación no lineal simulando el flujo bidimensional en un medio poroso con saturación variada, en donde incluyen una condición inicial de valor en la frontera cuando se aplica riego a un lado del dominio.

Fipps *et al.* (1986) implementaron cuatro métodos para representar el movimiento del agua hacia drenes al usar la solución de elemento finito

resolviendo numéricamente la ecuación de Richards, para luego comparar la realización de cada método cuando se aplican tres condiciones diferentes: i) flujo paralelo desde un estanque superficial hacia drenes enterrados, ii) flujo transitorio hacia drenes paralelos, con la superficie libre del agua inicialmente horizontal y coincidiendo con la superficie del suelo, y iii) flujo transitorio hacia un dren interceptor a cielo abierto localizado entre dos canales con diferentes tirantes de agua.

Fipps y Skaggs (1989) investigaron la influencia del movimiento de agua hacia drenes subterráneos y zanjas de drenes laterales en dominios inclinados, con saturación variable y bajo condiciones de infiltración transitoria, usando la solución numérica de la ecuación bidimensional de Richards. Un experimento igual al anterior fue realizado por Nieber y Walter (1981) donde estudiaron la transferencia de agua en un dominio rectangular inclinado bajo condiciones de lluvia en toda la frontera superior, en la cual el agua se drena hacia una tubería en la parte más baja del dominio. Los resultados del experimento fueron comparados con los obtenidos en la solución numérica, cuando se resolvió numéricamente la ecuación de Richards bidimensional por los métodos de elementos finitos y diferencias finitas.

1.3. Flujo subsuperficial del agua hacia drenes a cielo abierto

El objetivo principal del drenaje agrícola es la eliminación del exceso de agua en la superficie y debajo de ésta, que afecta directamente el crecimiento de los cultivos, mediante el diseño y construcción de drenes que mantienen el nivel freático por debajo de la zona radicular. La mayoría de las ecuaciones que se utilizan para el diseño de drenes a cielo abierto se basan en las suposiciones de Dupuit-Forchheimer.

Dupuit en 1863 estudió el movimiento del agua freática, incluyendo el flujo hacia drenes, considerando lo siguiente: i) la capa de agua es una superficie libre que está en contacto y en equilibrio con la atmósfera, en la cual se comporta como una línea de corriente cuya presión es la atmosférica, ii) la velocidad del flujo es proporcional a la pendiente de la superficie libre del agua, pero es independiente de la profundidad del flujo, iii) el gradiente hidráulico en un punto cualquiera del dominio es igual a la pendiente de la superficie libre del agua en ese mismo punto, y iv) en sistemas de drenaje, como la ilustración 1.1, se considera que por simetría se estudia solamente lo que ocurre en un lado del dominio.

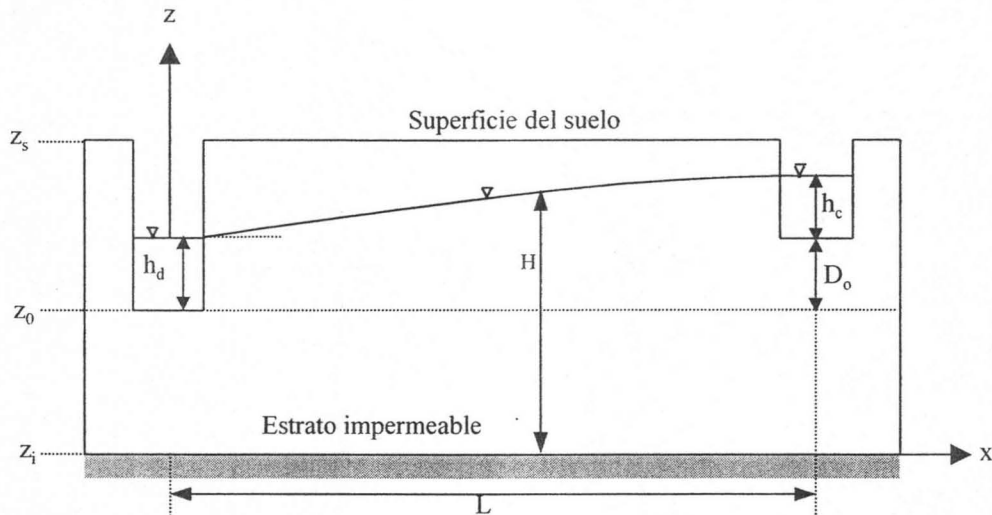


Ilustración 1.1. Flujo hacia zanjas paralelas.

Basándose en las suposiciones de Dupuit, Forchheimer (1885) desarrolló una ecuación general para la superficie libre aplicando la ecuación de continuidad al agua de una columna vertical en una zona de flujo, limitada superiormente por la superficie freática e inferiormente por una capa impermeable. Esta ecuación tiene la forma siguiente:

$$H^2 = \frac{(z_0 + D_0 + h_c)^2 - (z_0 + h_d)^2}{L} x + (z_0 + h_d)^2 \quad (1.1)$$

Demostrando que la superficie libre del agua tiene una forma parabólica. Si se toma un sistema de coordenadas rectangulares, xz , el cual representa el plano de flujo, las variables: H , z_0 y z_s son, respectivamente, la elevación de la superficie libre del agua [L], la elevación de la base de la zanja [L] y la elevación de la superficie del suelo [L], con respecto al nivel de referencia z_i . h_d es la elevación del agua en el dren [L], D_0 es la diferencia de elevación de la base de la zanja y la base del canal [L]; h_c es la elevación del agua en el canal [L].

Según Dieleman (1978) empleando éstas suposiciones se pueden obtener ecuaciones de flujo para estudiar la transferencia del agua en régimen permanente hacia zanjas paralelas, con recarga uniforme sobre la superficie del suelo, separadas a una distancia L , que penetran hacia un acuífero libre, homogéneo e isotrópico, hasta la base impermeable.

En la literatura actual es limitada la información existente sobre el movimiento del agua hacia drenes a cielo abierto cuando se resuelve numéricamente la ecuación de Richards en forma bidimensional. Tang y Skaggs (1977) resolvieron ésta ecuación usando el método de diferencias finitas para el flujo de agua entre dos zanjas conectados por un medio poroso, obteniendo resultados para varias condiciones iniciales y de frontera. También Vauclin *et al.* (1979) realizaron un

experimento en un dominio, que contiene un dren rectangular cuyo fondo coincide con la base impermeable, estudiando el movimiento bidimensional transitorio en relación con la recarga superficial y el movimiento de la superficie libre. De igual forma Ahmad *et al.* (1993) resolvieron numéricamente la ecuación de Richards bidimensional, sujeta a condiciones iniciales y de frontera, para un dominio con saturación variada, que inicialmente fue discretizado por el método de diferencias finitas, para estudiar el comportamiento del movimiento de la superficie libre del agua mientras el agua fluye hacia un dren a cielo abierto en forma rectangular, cuando fue aplicado una recarga debido a una lluvia en la superficie del dominio.

Saucedo *et al.* (2002) realizaron una solución de elemento finito para la ecuación de Richards bidimensional describiendo la transferencia de agua; en un sistema de drenaje agrícola subterráneo, la cual fue validada con una solución analítica exacta de la ecuación de Richards para una columna semi-infinita de suelo, sujeta a condición de flujo constante sobre la superficie del suelo, con el fin de describir la evolución temporal del perfil de humedad sobre el dren mientras la posición del frente de humedecimiento sea menor que la profundidad del dren. De la misma forma Fragoza *et al.* (2003) evaluaron la relación entre la capacidad de almacenamiento del suelo y la evolución de la lámina drenada, en un sistema de drenaje agrícola subterráneo, con la solución del método de elemento finito de la ecuación de Boussinesq y validada con una solución analítica sujeta a una condición de radiación en las fronteras.

1.4. Infiltración del agua desde canales de riego

Tradicionalmente los procesos de infiltración han sido relacionados a las prácticas de riego y al transporte del agua a través de canales sin revestir. Los modelos numéricos basados en la discretización por el método de elementos finitos o por el método de diferencias finitas no han sido usados extensivamente para resolver el problema de la infiltración del agua desde un cuerpo de agua en la superficie hacia el medio poroso.

Demetracopoulos y Hadjitheodorou (1996) estudiaron cuatro tipos de problemas para determinar la posición de la superficie libre del agua y la tasa de infiltración aplicando diferentes condiciones de frontera. Los autores concluyeron que el problema del flujo bidimensional se reduce en el medio poroso y homogéneo resolviendo numéricamente la ecuación de Laplace al utilizar el método de elemento de frontera, el cual puede ser usado para resolver puntos discretos sobre la frontera, localizando la superficie libre del agua, sin resolver el problema en el interior del dominio, mediante la solución iterativa de ecuaciones algebraicas.

Cooley (1983) utilizó la solución del elemento finito aplicada a problemas de flujo y saturación variable aplicando un método de solución para localizar la posición de la superficie libre del agua. Para comprobar el método de solución se realizaron siete ejemplos diferentes en los cuales se observó la evolución de la superficie libre del agua. Los primeros ejemplos se basaron en el modelo representado en la ilustración 1.2; en ellos se realizó el estudio del flujo de agua a través de diferentes

medios porosos desde un canal rectangular hacia una zanja paralela rectangular para diferentes fases de filtración.

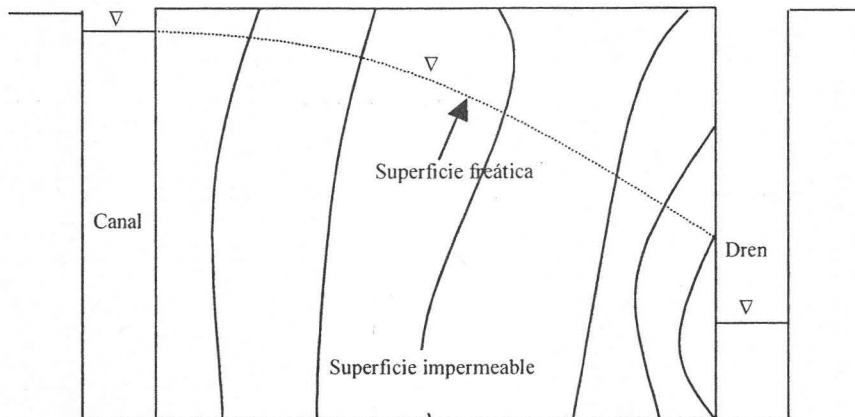


Ilustración 1.2. Tanque experimental con sus respectivas líneas de potencial y superficie freática.

Uno de los experimentos realizados, y que es de gran interés es el mostrado en la ilustración 1.3.

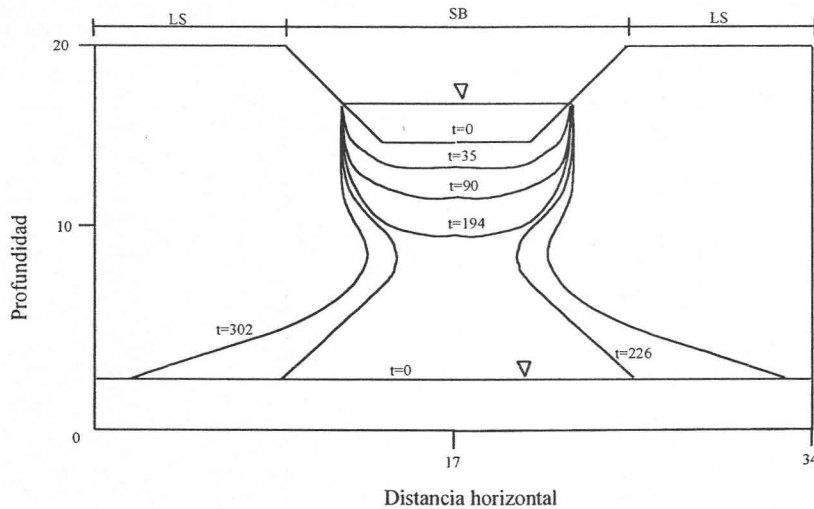


Ilustración 1.3. Geometría y líneas de presión cero a diferentes tiempos.

El dominio mostrado en la ilustración 1.3, permite apreciar la evolución del frente de humedecimiento y el movimiento de la superficie freática para diferentes tiempos de simulación cuando el agua se infiltra desde un canal de riego sin revestir.

1.5. Resumen

En este capítulo se revisa algunos de los estudios realizados por varios autores sobre la solución numérica de la ecuación de Richards unidimensional y bidimensional, así mismo, se revisa las ventajas y aplicaciones que tiene esta ecuación diferencial para describir el movimiento del agua en el suelo. Se describe la ecuación que se utiliza para conocer la descarga hacia drenes en un sistema de drenaje a cielo abierto y se enuncian algunos ejemplos que fueron utilizados para estudiar el movimiento de la superficie libre del agua, cuando se infiltra el agua desde un canal sin revestir hacia el medio poroso para finalmente llegar a una zanja de drenaje.

CAPÍTULO II

ECUACIONES DE BASE

2.1. Introducción

La estimación de la distribución espacial y variación temporal del contenido de humedad del suelo es de gran importancia para diversos estudios en ingeniería, en especial para el drenaje agrícola. Por esto en las últimas décadas se han estado estudiando detalladamente ecuaciones diferenciales parciales para simular el flujo del agua en el suelo. Una de esas ecuaciones es la ecuación de Richards, caracterizada por ser altamente no lineal, para la cual se han obtenido soluciones analíticas solamente en una cantidad limitada de casos específicos.

La ecuación de Richards se obtiene con la inclusión del término de capacidad específica en la ecuación general de transferencia de agua en el suelo, la cual resulta de la combinación de la ecuación de continuidad y la ley de Darcy. Además de las ecuaciones para el movimiento de agua en el suelo, en un sistema de drenaje agrícola, son también de importancia las ecuaciones que describen el movimiento del agua a superficie libre en el dren; conocidas como ecuaciones de Saint-Venant. El dominio de solución para la ecuación de Richards en un sistema de drenaje agrícola a cielo abierto se muestra en la ilustración 2.1.

2.2. Movimiento del agua en el dren

Las ecuaciones de Saint-Venant son utilizadas para describir el flujo unidimensional a superficie libre del agua en el dren y están constituidas por las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento respectivamente:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y} = q_D \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(J_o - J) - \frac{q_D}{gA} U \quad (2.2)$$

donde t es el tiempo [T]; y es la coordenada en la dirección principal del movimiento del agua dentro del dren [L]; U es la velocidad media [LT⁻¹]; A es el área hidráulica [L²]; Q es el gasto expresado como el producto de la velocidad media (U) por el área hidráulica (A) [L³T⁻¹]; el tirante, h se mide desde el fondo del dren hasta la superficie libre del agua dentro del mismo [L]; J_0 , es la pendiente topográfica del dren [LL⁻¹]; J es la pendiente de fricción [LL⁻¹]; q_D es el gasto unitario o volumen total de agua drenado por el suelo en la unidad de tiempo por unidad de longitud de dren [L²T⁻¹], y; g es la aceleración de la gravedad [LT⁻²].

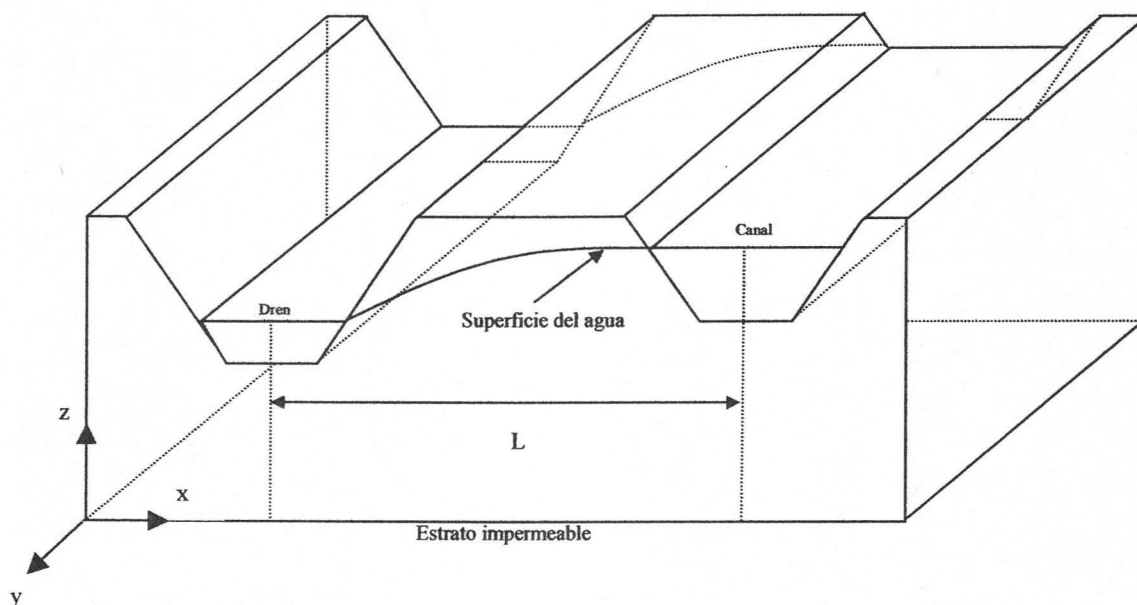


Ilustración 2.1. Geometría tridimensional de un sistema combinado de dren a cielo abierto y canal de riego.

2.3. Movimiento del agua en el suelo

2.3.1. Ecuación de continuidad

La ley de conservación de masa (anexo A) aplicada a un volumen elemental de suelo, considerado indeformable, conduce a la ecuación de continuidad, que tiene la forma siguiente:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.3)$$

donde \mathbf{q} es el gasto volumétrico unitario que atraviesa, en la unidad de tiempo, una superficie unitaria de suelo situada perpendicularmente en la dirección del movimiento del flujo de agua [L²T⁻¹]; θ es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo o contenido volumétrico de agua [L³L⁻³], también es una función

del potencial de presión; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ es el operador gradiente [L^{-1}]; x , y , z son las coordenadas espaciales [L] y; t es el tiempo [T].

2.3.2. Ley de Darcy

La ley de Darcy establece que el flujo del agua en un medio poroso es proporcional al gradiente hidráulico:

$$\mathbf{q} = -K(\psi)\nabla H \quad ; \quad H = \psi + z \quad (2.4)$$

donde ∇H es el gradiente hidráulico; $K = K(\psi)$ es la conductividad hidráulica, que depende de la naturaleza del suelo y del fluido que lo atraviesa, el cual es función del potencial de presión cuando el suelo no está saturado o está parcialmente saturado [LT^{-1}]; H es el potencial hidráulico, que es igual a la suma del potencial de presión del agua en el suelo, ψ , expresado como la altura de una columna equivalente de agua (positivo en la zona saturada y negativo en la zona no saturada del suelo), y del potencial gravitacional, relacionado por la coordenada vertical (z) medida a partir del estrato impermeable hacia arriba [L].

2.3.3. Ecuación general de transferencia de agua en el suelo

La ecuación general de transferencia de agua en el suelo resulta de la combinación de la ecuación 2.3 (ecuación de continuidad) y la ecuación 2.4 (ley de Darcy):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi)\nabla(\psi + z)] \quad (2.5)$$

que en forma desarrollada se escribe como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (2.6)$$

Esta ecuación diferencial parcial describe el flujo del agua en un medio poroso y expresa el contenido de humedad, (θ), y el potencial de presión, (ψ), como dos variables independientes. Una relación entre estas dos variables, $\theta = \theta(\psi)$, que permite expresar la ecuación diferencial en términos de una sola variable independiente es conocida como la característica de humedad del suelo o curva de retención de humedad

2.3.4. Ecuación de Richards

La ecuación de Richards (1931) es una ecuación diferencial parcial altamente no lineal, que describe el flujo de agua en los suelos parcialmente saturados, se

obtiene al introducir el concepto de capacidad específica, $C(\psi)$, en la ecuación general de transferencia de agua en el suelo (ecuación 2.5)

$$C(\psi) = d\theta / d\psi \quad (2.7)$$

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla [K(\psi) \nabla \psi] + \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.8)$$

2.3.5. Ecuación de Fokker-Planck

Es posible escribir la ecuación general de transferencia de agua en el suelo en función del contenido volumétrico de agua incluyendo el término de la difusividad hidráulica, la cual se define como:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} \quad (2.9)$$

Expresado en la ley de Darcy (ecuación 2.4)

$$q = -D(\theta) \nabla \theta - K(\theta) \nabla z \quad (2.10)$$

La ecuación general de transferencia de agua en el suelo (ecuación 2.5) toma la forma Fokker-Planck siguiente:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] + \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.11)$$

2.4. Características hidrodinámicas

La solución de la ecuación de Richards requiere de relaciones constitutivas para describir la interdependencia entre la presión, el grado de saturación y la conductividad hidráulica; Por tal razón, las propiedades hidrodinámicas del suelo son necesarias para resolver ecuaciones, ya sea analítica o numéricamente, que describan la transferencia de agua en el suelo representando el potencial de presión, ψ , y la conductividad hidráulica, K , como función del contenido volumétrico de agua en el suelo, θ .

Para representar éstas propiedades, Fuentes *et al.* (1992) recomiendan utilizar dos pares de características hidrodinámicas: i) combinación de la difusividad, $D(\theta)$, de Fujita (1952) con la relación entre la conductividad hidráulica, $K(\theta)$, y la difusividad, $D(\theta)$, de Parlange *et al.* (1982), y ii) la combinación de la conductividad hidráulica, $K(\theta)$, de Brooks y Corey (1964) y de la presión, $\theta(\psi)$, de Van Genuchten (1980) con la restricción de modelo de Burdine (1953) La primera combinación es mas conveniente en estudios teóricos (soluciones analíticas

exactas) y la segunda combinación es utilizada principalmente en estudios experimentales, como la modelación numérica de los procesos de transferencia de agua en el suelo, por la facilidad que tiene en identificar sus parámetros.

2.4.1. Combinación de ecuaciones de Van Genuchten y Brooks - Corey

Una de las formas más comunes de las relaciones constitutivas para describir la interdependencia entre la presión y la saturación es la curva de retención propuesta por Van Genuchten:

$$\Theta(\psi) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_d}\right)^n\right]^m} \quad (2.12)$$

donde Θ es el grado de saturación y se expresa como:

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.13)$$

donde θ_s es el contenido volumétrico de humedad a saturación [$L^3 L^{-3}$]; θ_r es el contenido de humedad residual [$L^3 L^{-3}$]; ψ_d , m y n son parámetros empíricos.

La ecuación 2.12 está sujeta a la condición de Burdine ($m = 1 - 2/n$) con el fin de disminuir el número de parámetros a identificar.

La conductividad de Brooks - Corey se expresa de la siguiente forma:

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (2.14)$$

donde K_s es la conductividad hidráulica a saturación [$L T^{-1}$] y η es un parámetro de forma empírico y positivo que puede calcularse con la relación propuesta por Fuentes (1992):

$$\eta = 2d \left(\frac{2}{mn} + 1 \right) \quad (2.15)$$

donde d es la dimensión fractal relativa a la dimensión de Euclides, que se define implícitamente en función de la porosidad del suelo (ϕ):

$$(1 - \phi)^d + \phi^{2d} = 1 \quad ; \quad (0 < \phi < 1, \quad 1/2 < d < 1) \quad (2.16)$$

2.4.2. Combinación de ecuaciones de Fujita - Parlange

El término difusivo de Fujita (1952) se define como:

$$D(\Theta) = \frac{K_s \lambda_c (1 - \alpha)}{(\theta_s - \theta_r) (1 - \alpha \Theta)^2} \quad (2.17)$$

donde α es un parámetro adimensional ($0 < \alpha < 1$) y λ_c es la escala de Bouwer (1964)

La conductividad de Parlange *et al.* (1982) se escribe como:

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \Theta \left[1 - \beta \frac{\int_1^\Theta D(\bar{\Theta}) d\bar{\Theta}}{\int_0^1 D(\Theta) d\Theta} \right] \quad (2.18)$$

donde β es un parámetro de forma definido como: $0 \leq \beta \leq 1$.

Al sustituir la ecuación 2.17 en la ecuación 2.18 se obtiene una expresión para $K(\theta)$:

$$K(\theta) = K_s \Theta \left[1 - \beta \frac{(1 - \Theta)}{(1 - \alpha \Theta)} \right] \quad (2.19)$$

La ecuación que define el potencial de presión, en función del contenido volumétrico de humedad, se deduce a partir de la expresión para la difusividad hidráulica:

$$\psi(\Theta) = \psi_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[\frac{1 - \alpha \Theta}{(1 - \alpha) \Theta} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[\frac{1 - \beta + (\beta - \alpha) \Theta}{(1 - \alpha) \Theta} \right] \right\} \quad (2.20)$$

donde $\psi_c = -\lambda_c$

2.5. Ecuación unidimensional de Boussinesq

Fragoza *et al.* (2003) dicen que considerando drenes con posición superior a la base impermeable se pueden obtener soluciones simplificadas para describir el flujo del agua utilizando la ecuación de Boussinesq. Suponiendo que las variaciones de la superficie libre del agua en la dirección longitudinal son despreciables, se describe la ecuación de Boussinesq unidimensional de la forma siguiente:

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_s (H - z_i) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R \quad (2.21)$$

donde $\mu(H)$ es la capacidad de almacenamiento del acuífero, K_s es la conductividad hidráulica a saturación [LT^{-1}], y R es el volumen de recarga por unidad de tiempo y por unidad de área del acuífero [LT^{-1}].

Sí se considera régimen permanente ($\partial H / \partial t = 0$), recarga cero ($R = 0$) y el nivel de referencia localizado en el estrato impermeable ($z_i = 0$) la ecuación 2.21 toma la forma siguiente:

$$q_b = -K_s H \frac{dH}{dx} = \text{constante} \quad (2.22)$$

donde q_b es el flujo en régimen permanente de la ecuación unidimensional de Boussinesq.

La ecuación 2.22 se resuelve con las siguientes condiciones:

en $x = 0$, $H = z_0 + h_d$; en $x = L$, $H = z_0 + D_0 + h_c$, obteniendo lo siguiente:

$$q_b \int_0^L dx = -K_s \int_{z_0+h_d}^{z_0+D_0+h_c} H dH \quad (2.23)$$

$$q_b L = -\frac{K_s}{2} \left[(z_0 + D_0 + h_c)^2 - (z_0 + h_d)^2 \right] \quad (2.24)$$

haciendo $H_c = z_0 + D_0 + h_c$ y $H_d = z_0 + h_d$ el flujo en régimen permanente hacia la zanja toma la forma:

$$q_b = -\frac{K_s}{2L} (H_c^2 - H_d^2) \quad (2.25)$$

2.6. Ecuación de Chezy para el cálculo del flujo de agua en el canal de riego

Para determinar el flujo de agua que se presenta en un canal de riego se puede utilizar la siguiente ecuación de Chezy:

$$Q = CA \sqrt{R_h S_0} \quad (2.26)$$

donde Q es el flujo de agua en el canal [L^3T^{-1}], A es el área hidráulica del canal [L^2], R_h es el radio hidráulico del canal [L], S_0 es la pendiente longitudinal del canal [L^{-1}], y C es el coeficiente de Chezy [$L^{1/2}T^{-1}$].

El coeficiente de Chezy se puede determinar mediante la siguiente fórmula de Bazin:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad (2.27)$$

donde m es un coeficiente que depende de la rugosidad del canal, que para un canal construido en tierra este valor de m tiene valor de 1:3.

2.7. Condiciones límite

2.7.1. Condición inicial

La condición inicial en el dominio de solución define el potencial de presión como una función conocida del espacio en $t = 0$:

$$\psi = \psi_0(x, z) \quad (2.28)$$

2.7.2. Condiciones de frontera excepto en el dren

Las condiciones de frontera excepto en el dren corresponden a todas aquellas fronteras que están fuera del dominio del dren, como las que se presentan en la superficie del suelo, en la frontera inferior, en el canal de riego y en las fronteras laterales del dominio de solución.

Las fronteras laterales son consideradas como fronteras impermeables, en las cuales no hay flujo horizontal a través de ellas. Estas fronteras son líneas divisorias del dominio, que por simetría lo dividen en dos partes iguales; para nuestro caso la primera frontera es la línea vertical que va desde la base del dren hasta el estrato impermeable y la segunda frontera es la línea vertical que va desde la base del canal de riego hasta el estrato impermeable.

Se presenta una frontera impermeable en la base del dominio debido a la presencia de un estrato impermeable, a cierta distancia de la superficie, la cual implica flujo nulo a través de ella.

En el canal de riego se puede tener una condición de frontera de primer orden cuando se conoce el tirante de una lámina de agua que se aplicará al dominio de solución.

2.7.3. Condición de frontera en el dren

Toda la frontera del dren es considerada como una superficie de filtración imponiéndose un tipo de frontera Dirichlet o Neumann, según la posición del nivel freático.

La superficie de filtración, en la frontera del dren, es una franja producida por la superficie libre del agua, que se define como una fracción de frontera del dren donde el agua brota hacia el dren (ver ilustración 2.2), por tal razón en dichos puntos la carga de presión es cero. La superficie de filtración varía de posición de acuerdo al cambio de la superficie libre del agua, puede aumentar debido a una recarga o puede disminuir debido al flujo mismo del agua en el dren.

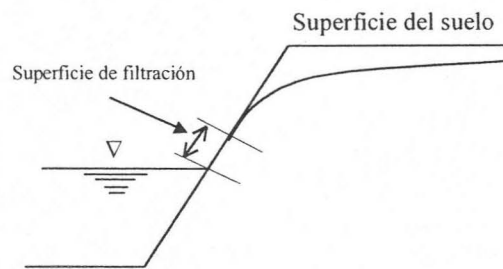


Ilustración 2.2. Superficie de filtración hacia un dren a cielo abierto

2.8. Resumen

En este capítulo se presentan los conceptos y ecuaciones de base para la transferencia de agua en el suelo. En este proceso se obtiene la ecuación bidimensional de Richards mediante la inclusión de la capacidad específica en la ecuación de transferencia de agua, que es una ecuación resultante entre la ecuación de continuidad y la ley de Darcy, así mismo se describen las propiedades hidrodinámicas de los suelos y las características que tienen como trasmisor de agua.

CAPÍTULO III

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL POR EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

3.1. Introducción

La modelación numérica del flujo de agua en suelos saturados y no saturados tiene su base principalmente en la solución de la ecuación de Richards (1931). La ecuación de Richards, que es una ecuación diferencial parcial, se caracteriza por ser altamente no lineal debido a la relación que existe entre la conductividad hidráulica y la capacidad de almacenamiento específico del agua en el suelo; por consiguiente, la integración numérica de esta ecuación requiere de una discretización fina en el espacio y en el tiempo tanto si se usa el método de los elementos finitos como si se recurre al método de diferencias finitas (Gottardi y Venutelli, 1992)

El objetivo de este capítulo es desarrollar una solución numérica para la ecuación de Richards bidimensional, en la forma de potencial de presión, discretizándola en el espacio y en el tiempo por los métodos de elementos finitos y diferencias finitas, respectivamente. El esquema numérico será aplicado en capítulos posteriores para describir la transferencia de agua entre un canal de tierra y un dren a cielo abierto, mostrando en particular el comportamiento de la superficie libre del agua para diferentes tiempos de simulación.

3.2. Revisión general del método del elemento finito

El método del elemento finito es un método de aproximación de funciones, de una o más variables. Según Zienkiewicz y Taylor (1994) con el método de los elementos finitos se resuelven problemas que vienen expresadas por ecuaciones diferenciales, en cierto dominio con condiciones iniciales y de frontera, que se imponen a la función o funciones incógnitas.

El método de los elementos finitos consiste en dividir el dominio en un número finito de partes o elementos, los cuales pueden ser rectángulos o triángulos (generalmente el más utilizado es el elemento triangular) Estos elementos contienen en sus esquinas los nodos, donde se resuelve las incógnitas del problema en general; por tal razón, una ventaja que tiene este método es su aplicación a cualquier región irregular obteniéndose soluciones globales.

Todo tratamiento por el método de los elementos finitos produce una función, f , aproximada a la función original, f , de la forma:

$$f(x, z, t) = \tilde{f}(x, z, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x, z) a_j(t) \quad (3.1)$$

donde $a_j(t)$ son los valores de la función aproximada o parámetros desconocidos, dependientes del tiempo y $\varphi_j(x, z)$ son funciones de interpolación o funciones base, expresadas en función de las variables independientes (x, z) , en los, n , nodos.

3.2.1. Funciones base

Las funciones base son utilizadas para definir la solución aproximada en cualquier punto dentro del elemento. Estas funciones algunas veces se denominan funciones piramidales o funciones "chapeau" por su aspecto gráfico, ya que es una función unitaria en un nodo en particular y cero en los demás, y están definidas como:

$$\varphi_j(x, z) = \delta(x_j, z_j) \quad (3.2)$$

donde $\delta(x_j, z_j)$ es la función delta de Kronecker, tomando el valor de uno cuando $(x, z) = (x_j, z_j)$ en cierto nodo y cero cuando $(x, z) \neq (x_j, z_j)$ en los otros nodos (Neuman 1973).

Las funciones de forma son fracciones de las funciones de base, que se definen sobre cada lado de un elemento, utilizadas en la discretización para el ensamble de las matrices globales. Para definir las funciones de forma bidimensionales es necesario definir las propiedades de un elemento triangular (ver anexo B)

3.2.2. Método de Galerkin

Según Zienkiewicz y Taylor (1994) el método de Galerkin consiste en utilizar funciones de peso iguales a las funciones de base, que al aplicarlo en conjunción con un esquema en elemento finito genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[A(f^{k-1})] \{f^k\} = \{B\} \quad (3.3)$$

donde $A(f^{k-1})$ es la matriz de coeficientes que contiene los componentes de la solución del nivel de tiempo anterior, f^k es el vector de coeficientes que van a ser determinados dependientes del tiempo y B es el vector de términos independientes.

Debido a que este método de Galerkin es un método aproximado, su resultado no es exactamente cero, por lo tanto se genera un residuo, R , muy pequeño en

todos los puntos del dominio, lo cual hace necesario realizar un procedimiento iterativo hasta que el valor máximo residual en un punto sea menor que una tolerancia fijada.

$$[R]^k = [B] - [A(f^{k-1})] \{f^k\} \quad (3.4)$$

El tratamiento por el método de Galerkin permite sustituir las funciones de forma en la forma débil de la ecuación de Richards.

3.3. Ecuación de Richards bidimensional

La siguiente es la ecuación de Richards (1931) en forma bidimensional y se resolverá numéricamente considerando la ilustración 3.1.

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (3.5)$$

Las variables de la ecuación 3.5 se describen en el capítulo II.

3.3.1. Condiciones límite

La ecuación de Richards bidimensional se resuelve sobre el dominio de la ilustración 3.1, que corresponde a un sistema combinado de un dren a cielo abierto y un canal de riego. El canal y el dren son de forma trapezoidal y se encuentran en lados opuestos del dominio, el cual fue dividido en dos partes iguales por su simetría y facilitar así la modelación numérica. La ecuación 3.5 está sujeta a las siguientes condiciones iniciales y de frontera.

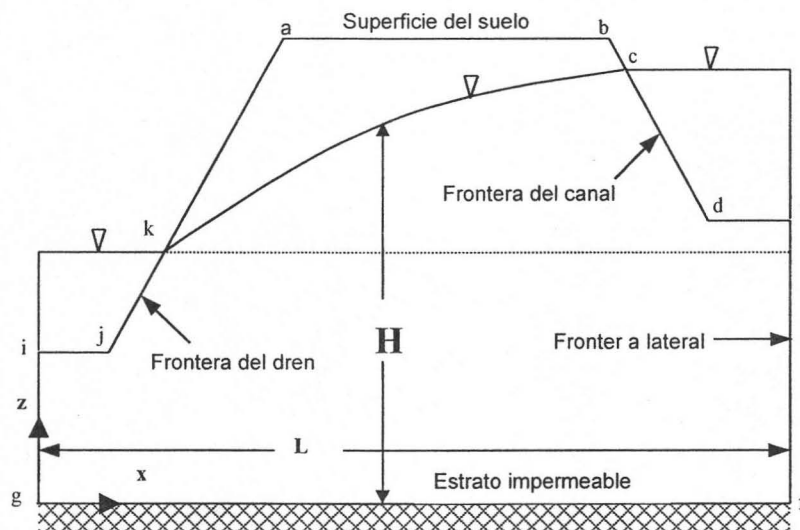


Ilustración 3.1. Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional

3.3.1.1. Condición inicial

La condición inicial en el dominio de solución se asigna teniendo en cuenta el potencial de presión como una función conocida del espacio, en $t = 0$.

$$\psi = \psi_0(x, z) \quad (3.6)$$

considerando distribución de presiones hidrostáticas

$$\psi = H + z \quad (3.7)$$

donde el eje z coincide con el estrato impermeable y H es la altura inicial de la superficie libre del agua (Saucedo *et al.* 2002)

3.3.1.2. Condiciones de frontera

El dominio de solución de la ilustración 3.1 consta de tres fronteras permeables (frontera superior, frontera del dren y frontera del canal de riego) y tres fronteras se consideran impermeables con flujo nulo (fronteras laterales y la frontera inferior)

Las fronteras \overline{ef} y \overline{gi} son fronteras laterales en las cuales se asume flujo nulo tipo Neumann:

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad z \in \overline{gi} \quad t > 0 \quad (3.8)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = L \quad z \in \overline{ef} \quad t > 0 \quad (3.9)$$

La frontera inferior \overline{fg} es considerada una frontera impermeable con flujo nulo:

$$-K(\psi) \frac{\partial (\psi + z)}{\partial z} = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad z = 0 \quad t > 0 \quad (3.10)$$

La condición de frontera en el dren (línea \overline{ijk}) es tratada como una superficie de filtración, en la cual los procedimientos de ajustes son comúnmente aplicados durante la solución iterativa para que la presión atmosférica se mantenga a lo largo de la superficie de filtración y las presiones negativas sean mantenidas por encima de ésta, con lo cual el flujo es dirigido fuera de él a través de la sección filtrante (Colley, 1983)

Neuman (1973) sugiere el tratamiento numérico de una superficie de filtración de la siguiente forma: Sí el nivel de la superficie libre del agua está por debajo de la base del dren se tiene en la frontera una condición de segundo orden con flujo

nulo. Cuando se eleva la superficie libre del agua, debido a una recarga hasta alcanzar los nodos en el dren, se produce una superficie de filtración en la frontera brotando agua hacia el dren. En ese momento la condición de frontera cambia a uno de primer orden con potencial cero, ya que para este caso en dichos nodos el potencial no debe exceder el valor de cero.

Igual que en la frontera del dren, en la frontera del canal de riego también se presentan condiciones de frontera de primer y segundo orden. La imposición de una condición de frontera de primer orden se realiza solamente para aquellos nodos que están por debajo del tirante de agua en el canal de riego cuyo potencial varía de acuerdo a la distancia de éste con respecto al fondo del canal de riego. Para los demás nodos en el canal se les impone una condición de frontera de segundo orden con flujo nulo (nodos por encima del tirante de agua) cuyo valor de potencial varía de acuerdo a la distribución de presiones.

3.4. Forma débil de la ecuación de Richards

Según Mori (1993) la forma débil de la ecuación de Richards bidimensional se obtiene al multiplicar la ecuación (3.1) por una función de peso (v), que es un conjunto de funciones arbitrarias de número igual al de las ecuaciones del problema, para luego integrar por partes utilizando el Teorema de Green, sobre un dominio de solución (\mathfrak{R}).

$$\int_R C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} v d\mathfrak{R} + \int_R K(\psi) \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] d\mathfrak{R} + \int_R K(\psi) \frac{\partial v}{\partial z} d\mathfrak{R} = \int_{\Gamma} q_n v d\Gamma \quad (3.11)$$

donde q_n es el flujo en dirección normal hacia fuera en una frontera bajo condición de Neumann, aplicada en la porción Γ del dominio \mathfrak{R} .

3.5. Solución de la ecuación de Richards bidimensional por el método de los elementos finitos

La ecuación de Richards bidimensional sujeta a condiciones de frontera se discretizará en el espacio por el método del elemento finito (Galerkin) y en el tiempo por el método de diferencias finitas implícito. Para la solución del sistema de ecuaciones algebraicas que resultan de la aplicación del método del elemento finito se utiliza el método de Cholesky (Colley, 1983)

3.5.1. Integración en el espacio por el método de los elementos finitos

3.5.1.1. Discretización del dominio de solución

La discretización de la ecuación 3.5 en el espacio se realiza por el método de los elementos finitos dividiendo el dominio en un número finito de elementos triangulares los cuales varían en tamaño, de acuerdo a su posición dentro del dominio, especialmente en zonas donde ocurren cambios apreciables en el

gradiente de presión (frontera superior, frontera del dren y frontera del canal de riego)

3.5.1.2. Desarrollo del esquema

Mori (1993) dice que para el desarrollo de la solución de elemento finito de la ecuación de Richards bidimensional se propone una solución como una combinación lineal de las funciones de base. Esta ecuación es escrita por separado para los nodos interiores y para los nodos en la frontera, los cuales están sujetos a una condición frontera Dirichlet no homogénea de primer orden, que tienen un valor inicialmente conocido del potencial y que pueden variar a través del tiempo.

$$\psi_n(x, z, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \varphi_j(x, z) + \sum_{j=n+1}^{n+v} b_j(t) \varphi_j(x, z) \quad (3.12)$$

Se sustituye la ecuación 3.12 en la forma débil de la ecuación de Richards (ecuación 3.11) teniendo en consideración lo siguiente:

- a. Se consideran funciones de peso, v , iguales a las funciones de base, φ , correspondientes a los nodos interiores.
- b. Se asume una variación lineal de las características hidrodinámicas sobre cada elemento, expresándola mediante las funciones de forma:

$$\hat{C} = \varphi_g C_g \quad \hat{K} = \varphi_g K_g \quad (3.13)$$

- c. Se utiliza un sistema de masa concentrado, con la finalidad de obtener una matriz diagonal y mejorar la estabilidad del esquema.

Al sustituir la solución de elemento finito en la forma débil de la ecuación de Richards se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\mathbf{M} \frac{da}{dt} + \mathbf{R}a = \mathbf{Q} - \mathbf{G} \quad (3.14)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa, \mathbf{R} es la matriz de rigidez, \mathbf{G} es la matriz de gravedad y \mathbf{Q} es un vector que contiene los flujos en los nodos de la frontera.

Cuando se utilizan funciones de base lineales las matrices de este sistema se determinan de la siguiente forma:

$$M_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[C_g \int_{\mathcal{R}} \bar{\varphi}_g \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k dR \right] = \sum C_j \frac{A^{(e)}}{3} \quad (3.15)$$

$$R_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[K_g \int_{\mathcal{R}} \varphi_g \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) dR \right] = \sum \frac{\bar{K}}{4A^{(e)}} (b_j b_k + c_j c_k) \quad (3.16)$$

$$G_k = K_g \int_{\mathcal{R}} \varphi_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} dR = \sum \frac{\bar{K}}{2} c_k \quad (3.17)$$

$$Q_k = \int_{\Gamma} q \varphi_k d\Gamma = \sum \frac{q L_j}{2} \quad (3.18)$$

donde C_j es la capacidad específica correspondiente al nodo j , $\bar{\varphi}$ son las funciones de masa concentrada; $A^{(e)}$ es el área del elemento; \bar{K} es la conductividad hidráulica promedio de cada elemento (promedio aritmético del valor de la conductividad hidráulica de los tres nodos correspondiente a cada elemento); q es el flujo que pasa a través de un elemento situado en la frontera bajo condición de Neumann cuyo lado es de longitud L_j ; b y c son factores geométricos definidos según las funciones de forma: $b_i = z_j^{(e)} - z_k^{(e)}$, $c_i = x_j^{(e)} - x_k^{(e)}$. Los subíndices i, j, k que corresponden a las esquinas del elemento triangular, corren sobre sus tres posibles permutaciones secuenciales.

3.5.1.3. Integración en el tiempo por el método de diferencias finitas

Para Saucedo *et al.* 2002 la integración en el tiempo del sistema de ecuaciones diferenciales (ecuación 3.14) se realiza utilizando una aproximación en diferencias finitas.

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^{k+\omega} = \frac{a^{k+1} - a^k}{\Delta t}, \quad (3.19)$$

donde da/dt es la derivada temporal, ω es un factor de ponderación en el tiempo (para un esquema implícito $\omega = 1$), k y Δt representan el nivel y el paso de tiempo, respectivamente. Las incógnitas se ponderan de la siguiente forma:

$$a^{k+\omega} = \omega a^{k+1} + (1-\omega)a^k \quad (3.20)$$

Sustituyendo en las matrices del sistema, se obtiene el siguiente esquema numérico para la ecuación de Richards bidimensional.

$$\left[\frac{\mathbf{M}^{k+\omega}}{\Delta t} + \omega \mathbf{R}^{k+\omega} \right] a^{k+1} = \left[\frac{\mathbf{M}^{k+\omega}}{\Delta t} - (1-\omega) \mathbf{R}^{k+\omega} \right] a^k - \mathbf{G}^{k+\omega} + \mathbf{Q}^{k+\omega} \quad (3.21)$$

3.5.1.4. Flujo en la frontera del dren

Los flujos en los nodos localizados en la frontera del dren son utilizados para conocer el gasto por unidad de longitud y para definir la condición de filtración, los cuales se determinan de la siguiente forma: Para una iteración ($m+1$) se obtiene usando la solución de elemento finito, para esa iteración y para la anterior (m) Se despeja el vector de flujo del esquema dado en la ecuación 3.21 y se evalúa para los nodos localizados sobre el dren:

$$\mathbf{Q} = \left[\frac{\mathbf{M}^{k+\omega}}{\Delta t} + \omega \mathbf{R}^{k+\omega} \right] a^{k+1} - \left[\frac{\mathbf{M}^{k+\omega}}{\Delta t} - (1-\omega) \mathbf{R}^{k+\omega} \right] a^k + \mathbf{G}^{k+\omega} \quad (3.22)$$

La suma de los flujos sobre los nodos que se encuentran en la superficie de filtración, permite calcular el hidrograma de descarga del dren.

3.6. Resumen

En el presente capítulo se desarrolla una solución de elemento finito para la ecuación bidimensional de Richards. El dominio de solución se define en relación con las zonas de flujo que se presentan entre un canal de riego y un dren a cielo abierto. Para resolver numéricamente la ecuación de Richards bidimensional se toman en cuenta las condiciones límites (condición inicial y condiciones de frontera), especialmente una condición de filtración en la frontera del dren. Se utiliza el método de los elementos finitos para la integración en el espacio, el cual permite incorporar las condiciones iniciales y de frontera de una forma sencilla en dominios irregulares, y se utiliza el método de diferencias finitas implícito para la integración en el tiempo.

CAPÍTULO IV

APLICACIONES

4.1. Introducción

La solución del elemento finito para la ecuación de Richards bidimensional es una herramienta útil para el análisis del flujo de agua a través de medios porosos. El objetivo de este capítulo es mostrar los resultados obtenidos en la simulación numérica de la ecuación de Richards bidimensional con la finalidad de obtener una solución aproximada del flujo de agua hacia un dren a cielo abierto. La simulación numérica se realizó para tres tipos de suelos mostrando el avance del frente de humedecimiento hacia un dren a cielo abierto, la configuración de las líneas equipotenciales y la posición de la superficie libre del agua.

4.2. Planteamiento del problema

Para la simulación numérica se seleccionaron tres suelos de texturas contrastantes con el fin de mostrar los hidrogramas de salida correspondientes en el dren para diferentes condiciones de tirante en el canal de riego. Los valores de los parámetros de las características hidrodinámicas de los tres suelos se obtuvieron de la literatura y se reportan en el cuadro 4.1.

Textura del suelo	θ_s (cm ³ /cm ³)	θ_r (cm ³ /cm ³)	K_s (cm/h)	η	m	ψ_d (cm)
Arcilla	0.525	0	0.010	61.17	0.0229	132.50
Franco-Arcilloso	0.475	0	0.150	19.30	0.0714	34.15
Franco	0.475	0	0.700	13.93	0.0989	19.20

Cuadro 4.1. Valores de los parámetros de las características hidrodinámicas en tres suelos contrastantes (Fuente: IMTA 1997, Manual de pequeñas zonas de riego)

4.3. Discretización del dominio de solución

El dominio de solución de la ilustración 4.1 está formado por un canal de riego de forma trapezoidal, situado en el extremo derecho, y un dren a cielo abierto, de igual forma localizado en el extremo izquierdo. La discretización del dominio de solución se realiza por el método de elementos finitos construyéndose una malla de elementos triangulares, que varían en tamaño, concentrándose en mayor cantidad en zonas donde se presentan cambios apreciables de potencial (frontera del dren y frontera del canal de riego) La ilustración 4.1 muestra la malla de elementos finitos, elaborado con el programa ARGUS ONE, el cual genera y

numera automáticamente los elementos con sus respectivos nodos. La malla tiene 7896 elementos y 4100 nodos; el número de nodos en el canal es de 35 y el número de nodos en el dren es de 48; el espacio máximo entre nodos de un mismo elemento en la dirección x es: $\Delta x_{\max} = 17.4 \text{ cm}$ y en la dirección z : $\Delta x_{\max} = 17.4 \text{ cm}$; el espacio mínimo entre nodos de un mismo elemento en la dirección x : $\Delta x_{\min} = 0.1 \text{ cm}$; y en la dirección z es: $\Delta x_{\min} = \Delta z_{\min} = 0.1 \text{ cm}$.

El dominio de solución, que está ubicado en el distrito de riego 038 Río Mayo en el estado de Sonora, tiene las siguientes características: profundidad 500 cm, ancho 1457.5 cm. El dren tiene profundidad de 200 cm, plantilla 150 cm, y talud 1:1.5. El canal de riego tiene profundidad 160 cm, plantilla 105 cm, y talud 1:1.5.

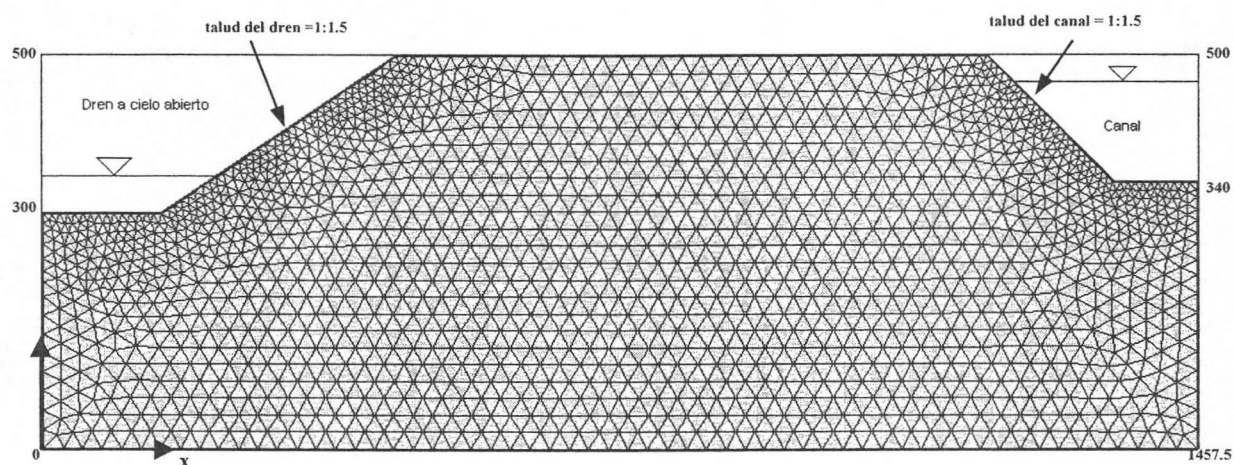


Ilustración 4.1. Malla de elementos finitos.

4.4. Condiciones límite

4.4.1. Condición inicial

Como condición inicial ($t = 0$), se considera al potencial de presión como una función conocida del espacio, la forma funcional es proporcionada teniendo en cuenta una distribución hidrostática de presiones conforme a la posición de cada nodo respecto al nivel inicial de la superficie libre de agua, el cual se ha considerado sin variaciones en la dirección horizontal. Esto es, en la superficie libre del agua se tiene ($z = 250 \text{ cm}$, $\psi = 0$); a partir de la cual el potencial de presión aumenta linealmente hasta la capa impermeable ($z = 0$, $\psi = 250 \text{ cm}$) y disminuye linealmente hasta la superficie del suelo ($z = 500 \text{ cm}$, $\psi = -250 \text{ cm}$)

4.4.2. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera que se utilizaron son las mostradas en el apartado 3.3.1.

4.5. Simulación de la transferencia de agua de un canal de riego a un dren a cielo abierto

Con la discretización de la ecuación de Richards por el método de los elementos finitos se elaboró un código numérico en lenguaje C++ (en el anexo C se muestra el algoritmo para la generación del código numérico)

En la simulación se tomaron en cuenta las siguientes condiciones:

- i) Para todas las simulaciones se consideró el flujo en régimen permanente, donde se aplicaron tirantes constantes en el canal de riego de: 20, 40, 60, 80, 100, 120, y 140 cm.
- ii) Se consideró un suelo homogéneo e isotrópico.
- iii) No hay recarga en la superficie del suelo.
- iv) El paso de tiempo máximo y mínimo depende del tipo del suelo: Para un suelo pesado como la arcilla el paso de tiempo máximo es de 300 segundos y para el suelo franco limoso 200 segundos; para todos los suelos el paso de tiempo mínimo fue de 0.01 segundos.

4.6. Resultados

4.6.1. Comparación de los resultados

Se utilizó la solución analítica de la ecuación unidimensional de Boussinesq en régimen permanente, proporcionada por la ecuación 1.5, con el objetivo de realizar una comparación con los resultados que se obtienen con el modelo desarrollado basado en la solución de elemento finito de la ecuación de Richards bidimensional.

En el cuadro 4.2 se muestra el tirante de agua producido en el dren a cielo abierto debido a la transferencia de agua, en régimen permanente, desde el canal de riego para diferentes tirantes y para los tres tipos de suelos.

Tirante en el canal (cm)	Tirante en el dren (cm)						
	20	40	60	80	100	120	140
Suelo arcilloso	0.009	0.010	0.012	0.013	0.015	0.016	0.017
Suelo franco arcilloso	0.032	0.038	0.043	0.049	0.054	0.058	0.063
Suelo franco	0.072	0.084	0.096	0.107	0.118	0.127	0.138

Cuadro 4.2. Tirante de agua en el dren (cm) cuando el régimen del flujo desde el canal de riego es permanente.

El tirante de agua formado en el dren a cielo abierto debido a la transferencia de agua en régimen permanente desde el canal de riego se incluye en la ecuación de

Boussinesq (ecuación 1.5) Este tirante se determinó por medio de iteraciones utilizando la ecuación de Chezy (ecuaciones 1.7 y 1.8) donde la pendiente asumida es de 0.0001 y el coeficiente m de la fórmula de Bazin es de 1.3, que corresponde a un dren construido en tierra.

En el cuadro 4.3 se muestra el flujo drenado en régimen permanente calculado con la simulación numérica de la ecuación bidimensional de Richards y con la solución analítica de la ecuación unidimensional de Boussinesq, para un suelo arcilloso y varios tirantes de agua en el canal. El gráfico correspondiente se muestra en la ilustración 4.2.

Tirante en el canal (cm)	Flujo de agua en régimen permanente $\times 10^{-5} (l/s/m)$						
	20	40	60	80	100	120	140
Solución con la ec. de Boussinesq	0.38	0.52	0.67	0.82	0.99	1.16	1.34
Solución con la ec. de Richards	0.38	0.54	0.70	0.88	1.04	1.22	1.40

Cuadro 4.3 Comparación del flujo drenado en régimen permanente para un suelo arcilloso.

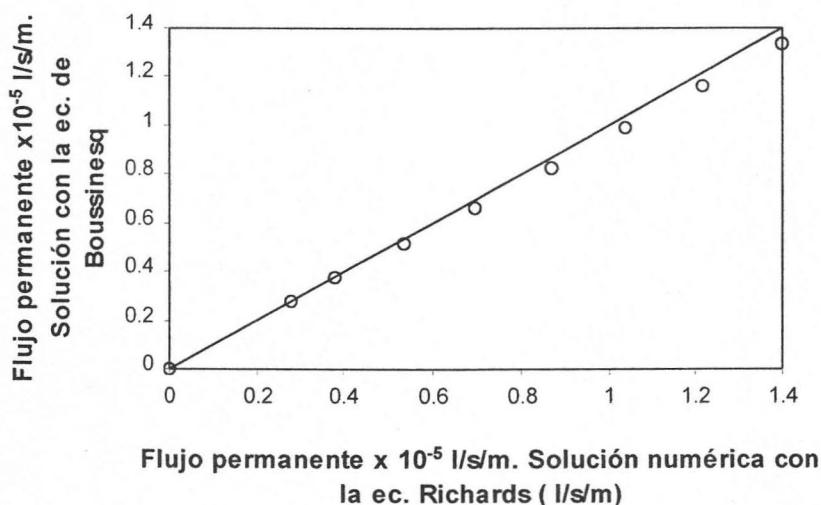


Ilustración 4.2. Relación entre el flujo en estado permanente obtenido con la solución numérica de la ecuación de Richards y el proporcionado por la solución analítica de la ecuación de Boussinesq. Suelo arcilloso.

Se realizaron las mismas simulaciones para los suelos con textura franco y franco-arcillosa. En el cuadro 4.4 y la ilustración 4.3 se muestran la relación entre los flujos drenados con la ecuación de Richards y con la ecuación de Boussinesq para un suelo franco arcilloso. En el cuadro 4.5 y la ilustración 4.4 se muestran los resultados para el suelo franco.

Tirante en el canal (cm)	Flujo de agua en régimen permanente $\times 10^{-5}$ (l/s/m)						
	20	40	60	80	100	120	140
Solución con la ec. de Boussinesq	5.66	7.77	10.01	12.35	14.81	17.38	20.07
Solución con la ec. de Richards	5.07	7.10	9.28	11.64	14.12	16.72	19.47

Cuadro 4.4 Comparación del flujo drenado en régimen permanente para un suelo franco arcilloso.

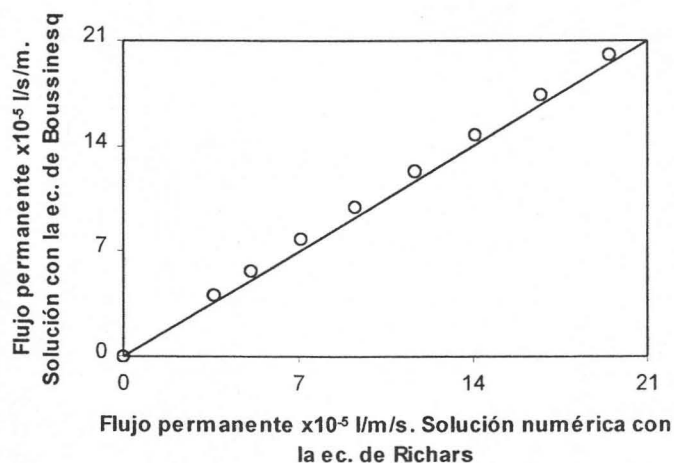


Ilustración 4.3. Relación entre el flujo en estado permanente obtenido con la solución numérica de la ecuación de Richards y el proporcionado por la solución analítica de la ecuación de Boussinesq. Suelo franco arcilloso.

Tirante en el canal (cm)	Flujo de agua en régimen permanente $\times 10^{-5}$ (l/s/m)						
	20	40	60	80	100	120	140
Solución con la ec. de Boussinesq	26.42	36.29	46.69	57.63	69.11	81.11	93.65
Solución con la ec. de Richards	25.25	34.95	45.27	56.17	67.67	79.71	92.32

Cuadro 4.5 Comparación del flujo drenado en régimen permanente para un suelo franco.

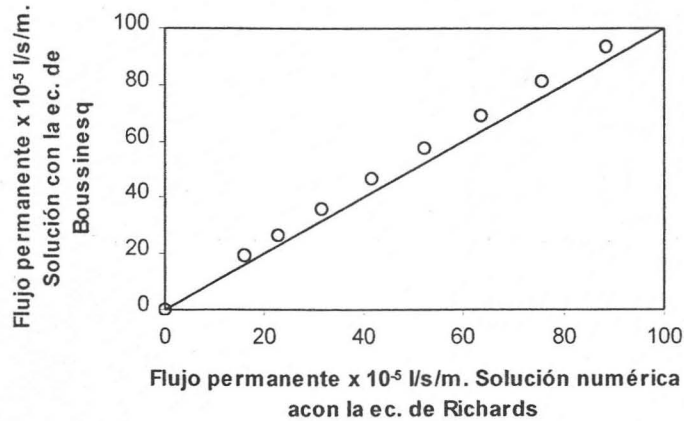


Ilustración 4.4. Relación entre el flujo en estado permanente obtenido con la solución numérica de la ecuación de Richards y el proporcionado por la solución analítica de la ecuación de Boussinesq. Suelo franco.

Los resultados obtenidos con la simulación numérica utilizando la ecuación de Richards y los obtenidos con la ecuación analítica de Boussinesq indican que la ecuación de Boussinesq es buena aproximación para determinar el flujo de agua en régimen permanente desde un canal a un dren a cielo abierto.

4.6.2. Aplicaciones

La aplicación del modelo desarrollado para describir el flujo del agua entre un canal de riego y un dren a cielo abierto permite obtener hidrogramas de salida hacia el dren e hidrogramas de entrada al dominio desde el canal de riego para diferentes tirantes en el mismo, líneas equipotenciales y posición de la superficie libre del agua. Por ejemplo, en la ilustración 4.5 se muestra el gasto, en litros por segundo por metro de longitud, que se filtra hacia el dren a cielo abierto desde un canal de riego en el cual se tiene diversos tirantes (140, 120, 100, 80, 60, 40 y 20 cm); asimismo, en las ilustraciones 4.6 y 4.7 se muestra la configuración de las líneas equipotenciales y la posición de la superficie libre de agua en un suelo arcilloso para un tiempo de simulación de un día y para régimen permanente, cuando se tiene un tirante en el canal de riego de 140 cm.

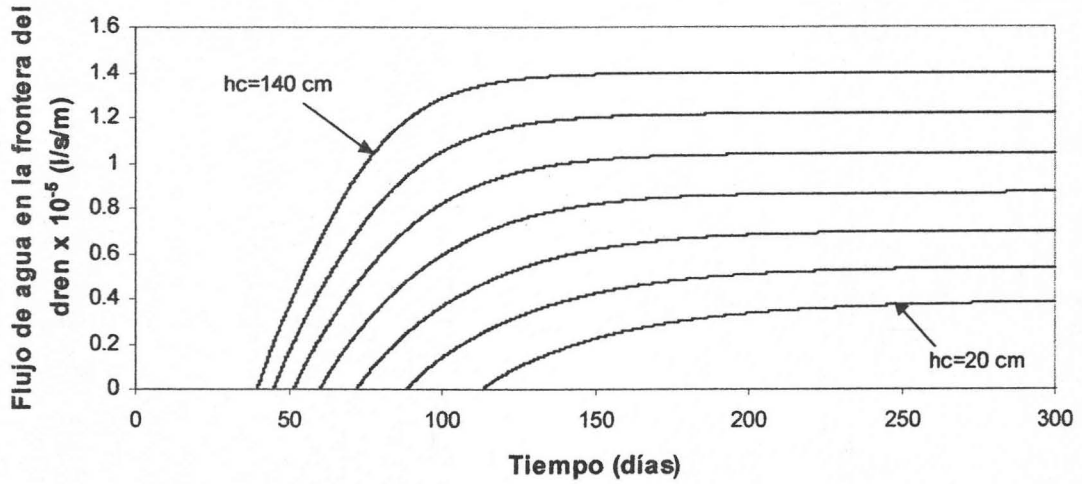


Ilustración 4.5. Hidrogramas de salida en el dren para diferentes tirantes en el canal de riego en un suelo arcilloso.

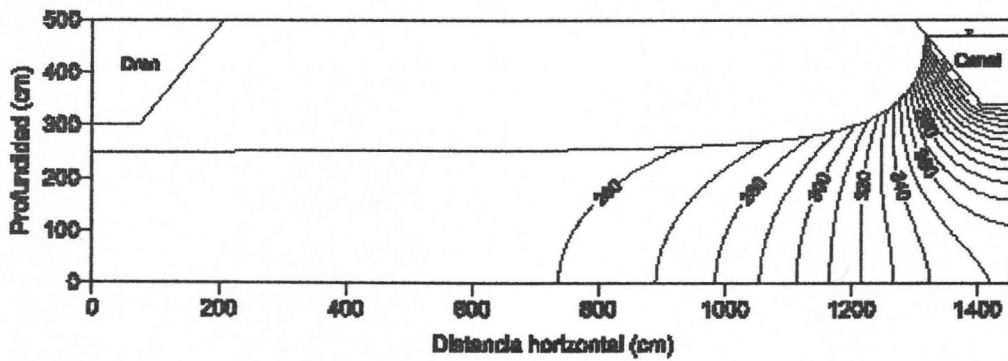


Ilustración 4.6 Líneas equipotenciales y posición de la superficie libre del agua a un día de simulación para un suelo arcilloso.

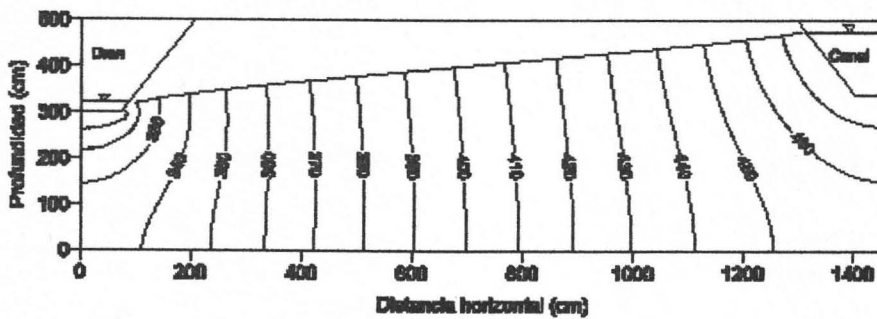


Ilustración 4.7 Líneas equipotenciales y posición de la superficie libre del agua en régimen permanente para un suelo arcilloso

	Tirante en el canal de riego (cm)						
	20	40	60	80	100	120	140
Caudal en el canal (l/s)	33.49	132.50	307.87	573.16	941.78	1426.65	2040.20
Caudal infiltrado en el canal ($l/s/km$)	0.253	0.35	0.45	0.56	0.68	0.80	0.92

Cuadro 4.6. Caudal de agua que circula en el canal de riego para diferentes tirantes comparado con el caudal infiltrado en régimen permanente en un kilómetro de longitud de canal construido sobre el suelo franco.

El caudal de agua que circula en el canal se estimó mediante la ecuación de Chezy (ecuaciones 1.7 y 1.8) considerando que la pendiente longitudinal para un kilómetro de canal es de 0.001 y el coeficiente m de la fórmula de Bazin es de 1.3 que corresponde a canales construidos en tierra.

4.7. Resumen

Se ha utilizado la ecuación de Richards bidimensional para simular numéricamente la transferencia de agua desde un canal de riego hacia un dren a cielo abierto. Los resultados de la aplicación del esquema numérico se muestran por medio de los hidrogramas correspondientes a la entrada y salida del flujo del agua del dominio de solución, para diferentes cargas en el canal de riego y para tres tipos de suelos. Se ilustra la configuración de las líneas equipotenciales y la posición de la superficie libre del agua para diferentes tiempos de simulación hasta que se alcanza el estado permanente en la transferencia de agua desde el canal hacia el dren. Se estima el flujo en régimen permanente con la ecuación unidimensional de Boussinesq para ser comparado con los obtenidos en la simulación numérica de la ecuación de Richards bidimensional. Se determina la magnitud de las pérdidas de agua en el canal de riego por efecto de la infiltración con respecto al caudal que circula en el mismo.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se ha estudiado la transferencia de agua entre un canal y un dren a cielo abierto mediante la solución numérica de la ecuación de Richards en su forma bidimensional, empleando el método del elemento finito para la integración en el espacio y un esquema en diferencias finitas implícito para la integración en el tiempo. Las conclusiones que se desprenden de este trabajo son:

Se ha propuesto un procedimiento para el cálculo de las pérdidas de agua por efecto de la infiltración que se presenta en un canal de riego construido sobre tierra. Los resultados obtenidos, debido a la presencia de un dren a cielo abierto paralelo al canal de riego, mostraron que las pérdidas son despreciables en comparación con el gasto que circula por el canal, cuando los valores de conductividad hidráulica a saturación se reportan en la bibliografía para tres tipos de suelos contrastantes. Sin embargo, es necesario realizar un análisis de factibilidad económica sobre la conveniencia de revestir el canal de riego con respecto a la pérdida de agua que se produce en el mismo por efecto de la infiltración.

El flujo de agua en régimen permanente entre un canal y un dren a cielo abierto, que resulta con la solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional, ha sido comparado con el proporcionado por la solución analítica de la ecuación de Boussinesq unidimensional, concluyéndose que el enfoque tipo Boussinesq es una buena aproximación para calcular la transferencia de agua que se presenta entre un canal de riego y un dren a cielo abierto. Así mismo se recomienda realizar pruebas experimentales para compararlos con los resultados numéricos y analíticos.

De los resultados de la aplicación del modelo se deduce que no se presentan inestabilidades en los resultados apreciables desde un punto de vista gráfico, en consecuencia el modelo puede ser utilizado con fines de identificación de pérdidas de agua en el sistema formado por un canal con un dren a cielo abierto adyacente.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ahmad, S., D. Kashyap y B. S. Mathur. *Mathematical Modeling of Saturated-Unsaturated Flow to Drains*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, vol. 119, num. 1, 1993, pp. 18-33.
2. Allen, M. B. y C. L. Murphy. *A Finite-Element Collocation Method for Variably Saturated Flow in Two Space Dimensions*. Water Resources Research, vol. 22, num. 11, 1986, pp. 1537-1542.
3. Brooks, R. H. y A. T. Corey. *Hydraulics Properties of Porous Media*. Hydrology Paper, num. 3, Colorado State University. Fort Collins, 1964.
4. Bouwer, H. *Rapid Field Measurement of Air Entry Value and Hydraulic Conductivity of Soils as Significant Parameters in Flow System Analysis*. Water Resources Research, vol. 36, 1964, pp. 411-424.
5. Burdine, N. T. *Relative Permeability Calculation From Size Distributions Data*. Transactions AIME, vol. 198, 1953, pp. 71-78.
6. Celia, M. A., E. T. Bouloutas y R. L. Zarba. *A General Mass-Conservative Numerical Solution for the Unsaturated Flow Equation*. Water Resources Research, vol. 26, num. 7, 1990, pp. 1483-1496.
7. Cooley, R. L. *Some New Procedures for Numerical Solution of Variably Saturated Flow Problems*. Water Resources Research, vol. 19, num. 5, 1983, pp. 1271-1285.
8. Demetracopoulos, A. C. y C. H. Hadjitheodorou. *Seepage From Surface Canals by Boundary Element Method*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, vol. 122, num. 1, 1996, pp. 40-48.
9. Dieleman, P. J. *Hidráulica Elemental del Agua en la Zona Saturada*. Principios y Aplicaciones del Drenaje, capítulo 6. International Institute for Land Reclamation and Improvement, Wageningen, Holanda, 1978.
10. Fipps, G. y R. W. Skaggs. *Influence of Slope on Subsurface Drainage of Hillsides*. Water Resources Research, vol. 25, num. 7, 1989, pp. 1717-1726.
11. Fipps, G., R. W. Skaggs y J. L. Nieber. *Drains as a Boundary Condition in Finite Elements*. Water Resources Research, vol. 22, num. 11, 1986, pp. 1613-1621.

12. Fragoza, F., C. Fuentes, M. Zavala, F. Zataráin, H. Saucedo y E. Mejía. *Drenaje Agrícola Subterráneo con Capacidad de Almacenamiento Variable*. Ingeniería Hidráulica en México, vol. 18, num. 3, 2003, pp. 81-93.
13. Freeze, R. A. y J. A. Cherry. *Groundwater*. Ed. Prentice Hall, 1979. E. U.
14. Fuentes, F., R. Haverkamp y J.Y. Parlange. *Constraints on Closed-form Soil-water Relationships*. Journal of Hydrology, vol. 134, 1992, pp. 117-142.
15. Fujita, H. *The Exact Pattern of a Concentration-dependent Diffusion in a Semi-Infinite Medium, part II*. Textile Research Journal, vol. 22, 1952, pp. 823-827.
16. Gottardi, G. y M. Venutelli. *Moving Finite Element Model for One-Dimensional Infiltration in Unsaturated Soil*. Water Resources Research, vol. 28, num. 12, 1992, pp. 3529-3267.
17. Mori, M. *The Finite Element Method and its Applications*. Macmillan, New York, 1993.
18. Neuman, S. P. *Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements*. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, HY12, Pap. 12, 1973, pp. 2233-2250.
19. Nieber, J. L. y M. F. Walter. *Two-Dimensional Soil Moisture Flow in a Sloping Rectangular Region: Experimental and Numerical Studies*. Water Resources Research, vol. 17, num. 6, 1981, pp. 1722-1730.
20. Pan, L. y P. J. Wierenga. *A Transformed Pressure Head-Based Approach to Solve Richards' Equation for Variably Saturated Soils*. Water Resources Research, vol. 31, num. 4, 1995, pp. 925-931.
21. Parlange, J. Y., R. D. Braddock, I. Lisle y R. E. Smith. *Three Parameter Infiltration Equation*. Soil Sci., vol. 11, 1982, pp. 170-174.
22. Rathfelder, K. y L. M. Abriola. *Mass Conservative Numerical Solutions of the Head-Based Richards' Equation*. Water Resources Research, vol. 30, num. 9, 1994, pp. 2579-2586.
23. Richards, L. A. *Capillary Conduction of Liquids Through Porous Mediums*. Physics, vol. 1, 1931, pp. 318-333.
24. Ross, P. J. *Efficient numerical methods for infiltration using Richards equation*. Water Resources Research, vol. 26, num. 2, 1990, pp. 279-290.
25. Saucedo, H., C. Fuentes, M. Zavala y M. Vauclin. *Una Solución de Elemento Finito para la Transferencia de Agua en un Sistema de Drenaje Agrícola*

- Subterráneo*. Ingeniería Hidráulica en México, vol. 17, num. 1, 2002, pp. 93-105.
26. Tang, Y. K. y R. W. Skaggs. *Experimental Evaluation of Theoretical Solutions for Subsurface Drainage and Irrigation*. Water Resources Research, vol. 13, num. 6, 1977, pp. 957-965.
27. Tocci, M. D., C. T. Kelley y C. T. Miller. *Accurate and Economical Solution of the Pressure-Head Form of Richards' Equation by the Method of Lines*. Advances in Water Resources Research, vol. 20, num. 1, 1997, pp. 1-4.
28. Van Genuchten, M. Th. *A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Solids*. Sci. Soc. Amer. Journal., vol. 44, 1980, pp. 892-898.
29. Vauclin, M., D. Khanji y G. Vachaud. *Experimental and Numerical Study of a Transient, Two-Dimensional Unsaturated-Saturated Water Recharge Problem*. Water Resources Research, vol. 15, num. 5, 1979, pp. 1089-1101.
30. Williams, G. A., C. T. Miller y C. T. Kelley. *Transformation Approaches for Simulating Flow in Variably Saturated Porous Media*. Water Resources Research, vol. 36, num. 4, 2000, pp. 923-934.
31. Zienkiewicz, O. C. y R. L. Taylor. *El Método de los Elementos Finitos*. Vol. 1 y 2. Ed. McGraw Hill. España.

ANEXO A

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La ley de conservación de masa es otra ley fundamental de la hidrodinámica; sin embargo, la aplicación de esta ley a un volumen elemental de suelo indeformable conduce a la ecuación de continuidad. Considerando el volumen elemental de la figura 2.2, que representa el medio poroso total, la ley de conservación de masa establece que la cantidad de masa de fluido existente dentro del volumen elemental (de dimensiones dx, dy, dz) no cambia en un tiempo, dt ; Entonces, la proporción de masa de fluido que entra al elemento es igual a la proporción de masa de fluido que sale del mismo menos la masa extraída por las raíces de las plantas. (Freeze y Cherry, 1979).

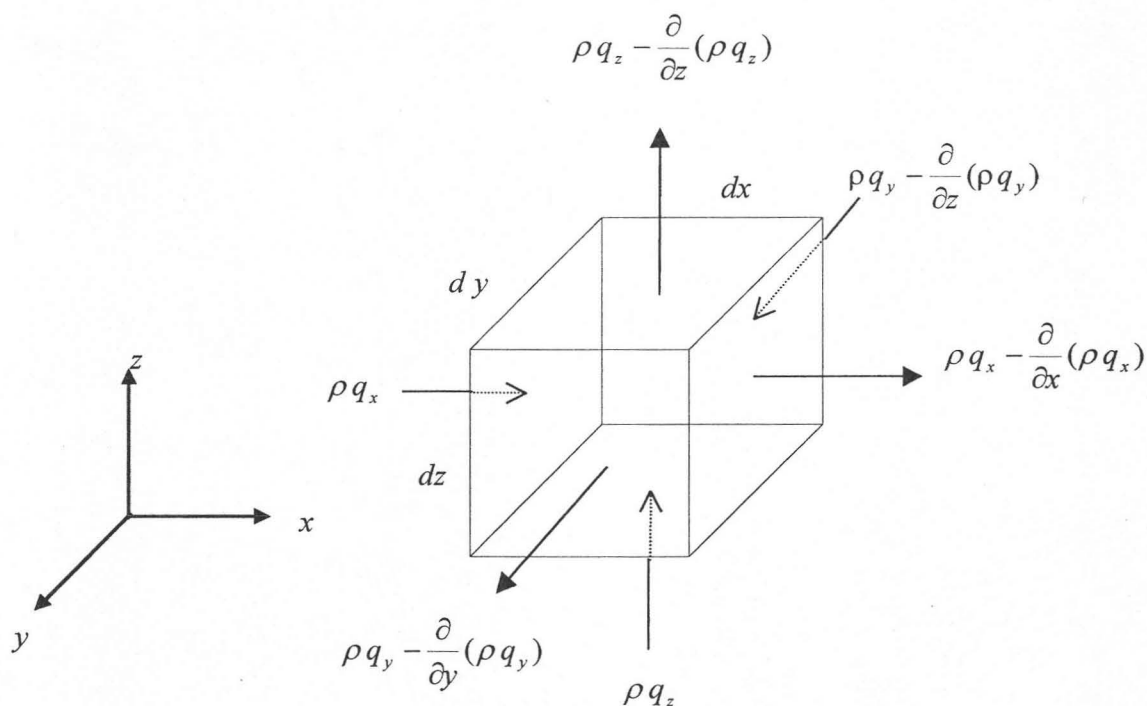


Ilustración A.1. Volumen elemental representativo para el flujo a través del medio poroso.

$$\text{Masa de agua entra en } t: \rho\theta \, dx \, dy \, dz \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Masa de agua transferida en } t + dt: -\frac{\partial}{\partial t}(\rho\theta) \, dx \, dy \, dz \quad (\text{A.2})$$

donde dx, dy, dz son las dimensiones del volumen elemental representativo [L]; ρ , es la densidad del fluido [ML⁻³]; θ , es el contenido volumétrico de agua [L³L⁻³] y; t es el tiempo [T].

La masa que entra al elemento en el tiempo t es:

$$\rho q_x dy dz + \rho q_y dx dz + \rho q_z dx dy \quad (A.3)$$

donde ρq_x es el flujo promedio sobre un lado del elemento representativo en la dirección x , [LT⁻¹], de manera similar se tiene el flujo promedio sobre los lados y y z .

La masa que sale del elemento en $t + dt$ es:

$$\left[\rho q_x - \frac{\partial(\rho q_x) dx}{\partial x} \right] dy dz + \left[\rho q_y - \frac{\partial(\rho q_y) dy}{\partial y} \right] dx dz + \left[\rho q_z - \frac{\partial(\rho q_z) dz}{\partial z} \right] dx dy \quad (A.4)$$

La diferencia de las ecuaciones A.2 y A.4, menos la masa extraída por las raíces de las plantas ρS , por unidad de volumen de suelo y en la unidad de tiempo, dan lugar a la cantidad de masa acumulada dentro del elemento en el tiempo $t + dt$.

$$\left[\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} \right] dx dy dz + \rho S dx dy dz \quad (A.5)$$

Si no hay otras pérdidas de masa, se puede igualar la ecuación A.2 con la ecuación A.5 resultando:

$$-\frac{\partial(\rho \theta)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} + \rho S \quad (A.6)$$

Entonces podemos escribir la ecuación (A.6) de la forma siguiente:

$$-\frac{\partial(\rho \theta)}{\partial t} = \nabla \cdot \rho \mathbf{q} + S \quad (A.7)$$

donde $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ es el gasto volumétrico unitario que atraviesa, en la unidad de tiempo, una superficie unitaria de suelo situada perpendicularmente en la dirección del movimiento del flujo de agua [L²T⁻¹]; y q_x, q_y, q_z son sus componentes siguiendo los ejes cartesianos [LT⁻¹].

El operador ∇ es definido como:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.8})$$

donde \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} son los vectores unitarios en las direcciones x , y , z , respectivamente

El cambio de la densidad puede ser despreciado obteniéndose la ecuación general de continuidad:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + S = 0 \quad (\text{A.9})$$

Asumiendo que no hay extracción de masa por las raíces de las plantas la ecuación A.10 se puede escribir también de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (\text{A.10})$$

ANEXO B

EL ELEMENTO TRIANGULAR

De acuerdo con Zienkiewicz y Taylor (1994) un elemento triangular se define, por ejemplo, por los nodos m, n, o (ilustración B.1), numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj:

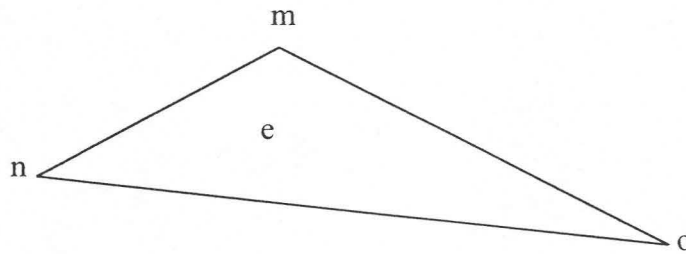


Ilustración B.1. Elemento triangular

$$a_m = x_m^{(e)} z_n^{(e)} - x_n^{(e)} z_m^{(e)}, \quad a_n = x_n^{(e)} z_o^{(e)} - x_o^{(e)} z_n^{(e)}, \quad a_o = x_o^{(e)} z_m^{(e)} - x_m^{(e)} z_o^{(e)} \quad (\text{B.1})$$

$$b_m = z_m^{(e)} - z_n^{(e)}, \quad b_n = z_n^{(e)} - z_o^{(e)}, \quad b_o = z_o^{(e)} - z_m^{(e)} \quad (\text{B.2})$$

$$c_m = x_n^{(e)} - x_m^{(e)}, \quad c_n = x_o^{(e)} - x_n^{(e)}, \quad c_o = x_m^{(e)} - x_o^{(e)} \quad (\text{B.3})$$

donde m, n, o representan los vértices del triángulo e.

El área de un elemento triangular está definido como:

$$A^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_m^{(e)} & z_m^{(e)} \\ 1 & x_n^{(e)} & z_n^{(e)} \\ 1 & x_o^{(e)} & z_o^{(e)} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (b_m c_n - c_m b_n) \quad (\text{B.4})$$

Entonces las derivadas de las funciones de forma, ξ , se calculan a partir de la siguiente expresión:

$$\xi_i(x, z) = \frac{1}{2A^{(e)}} (a_i + b_i x + c_i z) \quad (\text{B.5})$$

obteniéndose :

$$\frac{\partial \xi_i^{(e)}}{\partial x} = \frac{b_i}{2A^{(e)}} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial \xi_i^{(e)}}{\partial z} = \frac{c_i}{2A^{(e)}} \quad (\text{B.7})$$

donde el índice, i , toma los valores de las esquinas m, n, o de cada elemento para cada ciclo.

ANEXO C

ALGORITMO Y PROGRAMA NUMÉRICO

El procedimiento para la elaboración del algoritmo numérico consta de los siguientes pasos:

1. El código inicia en el tiempo cero (primera aproximación):

1.1. Generación de la malla de elementos finitos

1.1.1. Se dimensiona el dominio de solución, así como también el canal de riego y el dren a cielo abierto (Altura, base y talud)

1.1.2. Se divide el dominio de solución en elementos triangulares mediante la siguiente forma: Se enumeran los elementos triangulares con sus respectivos nodos en sentido contrario a las manecillas del reloj, se determinan los nodos en la frontera del dren y en la frontera del canal de riego, y por ultimo se determinan las coordenadas de cada nodo con respecto al origen situado en la parte inferior izquierda del dominio.

1.2. Condiciones iniciales y de frontera

1.2.1. Se especifica la condición inicial conocida para cada nodo del dominio; la cual es una distribución de cargas hidrostáticas de presiones en el espacio ($\psi = H + z$), donde z y H son, respectivamente, la distancia vertical del nodo y la distancia vertical de la superficie freática con respecto al nivel de referencia ubicado en el estrato impermeable.

1.2.2. Se determina el tiempo y el paso de tiempo requerido para la primera simulación.

1.2.3. Se especifican las constantes para la determinación de las características hidrodinámicas del suelo ($m, n, \theta_s, \theta_r, K_s, \eta, \psi_d$)

1.2.4. Con un valor de ponderación en el tiempo de $\omega = 1$ (esquema implícito), se especifica el siguiente nivel de tiempo.

1.3. Primera iteración

- 1.3.1. Se determinan las propiedades hidrodinámicas para cada nodo (conductividad hidráulica, contenido de humedad y el coeficiente de almacenamiento).
- 1.3.2. Se calcula la conductividad hidráulica media y el área de cada elemento triangular.
- 1.3.3. Se ensambla la matriz general de coeficientes y el vector de términos independientes.
- 1.3.4. Se incorporaron las condiciones de frontera, especialmente en el canal de riego y en el dren a cielo abierto, donde se especificaron los nodos sujetos a condición Dirichlet y Neumann.
- 1.3.5. Se determina el gasto que entra por el canal de riego y el gasto que sale por el dren.
- 1.3.6. Se resuelve el sistema de ecuaciones por el método de Cholesky, obteniendo un nuevo valor del potencial de presión para cada nodo del dominio (ψ_i^m)

1.4. Segunda iteración

- 1.4.1. Se especifica el potencial de presiones para el nuevo proceso iterativo, que es igual a resultado de la iteración anterior (ψ_i^m)
- 1.4.2. Se repiten los pasos del numeral 1.3, obteniendo un nuevo valor de (ψ_i^{m+1})
- 1.4.3. Se comparan los potenciales obtenidos en 1.3.6 y 1.4.2 y se obtiene el error relativo máximo, $E_{\max} = \max \left| \frac{\psi_i^{m+1} - \psi_{ii}^m}{\psi_{ii}^{m+1}} \right| \times 100$. Si este valor es menor a la máxima tolerancia propuesta de 0.0001 se continua con el siguiente nivel de tiempo, por el contrario se repiten los pasos 1.4 hasta que el error máximo para dos iteraciones consecutivas cumpla con la condición de tolerancia.

2. Segunda aproximación ($t + \Delta t$)

2.1. Se asigna el siguiente paso de tiempo.

2.2. Se actualiza el valor del potencial de presiones, en cada nodo del dominio, definiéndolo como el potencial inicial para una nueva aproximación,

$$\psi_{t+\Delta t}^m = \psi_t^m .$$

2.3. Se repiten los pasos de los numerales 1.3. y 1.4.

Al final de cada aproximación, el tiempo aumenta progresivamente ($t = t + dt$), hasta que el flujo desde el canal hasta el dren a cielo abierto se torne permanente.

El programa numérico realizado en lenguaje C++ se muestra a continuación:

```
class DOSD
{
public:
int **esq;
double **condrig;
double *b, *c, *X, *Z, *contgrav, *Kh, *Khe, *K, *B, *E, *Area, *Q, *Qdren, *V, *M;
double *potant, *potcen, *potest, *theta, *thetaini, *Cesp;
int *FrontDren, *FrontCanal, *nododren;
double w, profDominio, anchoDominio, tiranteCanal, H, altdren, altcanal,
baseCanal, baseDren;
double tiempo, dtimp, Timp, dt, dtini, Qdren, Qcanal;
long int tmvct, t;
int nnoto, nodo, nodosdren, nodoscanal, nodos, Elementos, sb, contaR, nivelt,
niveltimp, Dren, Canal;

void Datos ();void Matriz();void Choleski(double *);void Richards2D(); long int
Inve(int,int); void Pantalla(); void Coeficientes(double *); void Frontera(); void
Flujo();
};

void DOSD::Datos ()
{

int i, L, J;

ofstream Escribe;
ifstream Leer;

Escribe.open("c:\\resultados\\potenciales.txt",ios::trunc); Escribe.close();
Escribe.open("c:\\resultados\\caudales.txt",ios::trunc); Escribe.close();
```

```
sb=64; Elementos=7896; nnoto=4100; nodoscanal=35; nodosdren=48;
tmvct=Inve(nnoto,nnoto);
```

```
K=new double[tmvct+1]; M=new double[nnoto+1]; potant=new double[nnoto+1];
potcen=new double[nnoto+1]; potest=new double[nnoto+1]; theta=new
double[nnoto+1]; thetains=new double[nnoto+1]; Cesp=new double[nnoto+1];
Q=new double[nnoto+1]; Kh=new double[nnoto+1]; B=new double[nnoto+1];
b=new double[3+1]; X=new double[nnoto+1]; Z=new double[nnoto+1]; c=new
double[3+1]; contgrav=new double[3+1]; Area=new double[Elementos+1];
Khe=new double[Elementos+1]; V=new double[nnoto+1]; FrontDren=new
int[nfiltr+1]; FrontCanal=new int[nfiltr+1]; nodosdren=new int[nfiltr+1];
Qdren=new double[nnoto+1]; E=new double[nnoto+1];
```

```
contrig=new double *[3+1];
for (J = 1; J<= 3+1; J++) {contrig[J]=new double [3+1];}
for (J = 1; J<= 3+1; J++) {
    for (L = 1; L<=3+1; L++) { contrig[J][L]=0.; }
}
esq=new int *[Elementos+1];
for (J = 1; J<= Elementos+1; J++) { esq[J]=new int [3+1];}
for (J = 1; J<= Elementos+1; J++) {
    for (L = 1; L<=3+1; L++){ esq[J][L]=0.; }
}
for(i=1; i<=3; i++) {contgrav[i]=0.; b[i]=0.; c[i]=0.;}

for(i=1; i<=nnoto; i++) {X[i]=0.; Z[i]=0.; B[i]=0.;M[i]=0.;potant[i]=0.; potcen[i]=0.;
    potest[i]=0.; theta[i]=0.; E[i]=0.; thetains[i]=0.; Cesp[i]=0.;
    Kh[i]=0.; Q[i]=0.; V[i]=0.; Qdren[i]=0.;
}
```

```
for(i=1; i<=nodosdren; i++) {FrontDren[i]=0; nododren[i]=0;}
for(i=1; i<=nodoscanal; i++) {FrontCanal[i]=0;}
for(i=1; i<=Elementos; i++) {Area[i]=0.; Khe[i]=0.;}
for(t=1; t<=tmvct; t++) {K[t]=0.;}
dtini=0.01; dt=dtini;
```

```
Leer.open("c:\\Elementos.txt",ios::in);
for(i=1; i<=Elementos; i++) {Leer>>esq[i][1]>>esq[i][2]>>esq[i][3];}
Leer.close();
```

```
Leer.open("c:\\ nodos.txt",ios::in);
for(i=1; i<=nnoto; i++) {Leer>>X[i]>>Z[i];}
Leer.close();
```

```
Leer.open("c:\\ dren.txt",ios::in);
for(i=1; i<=nodosdren; i++) {Leer>>FrontDren[i];}
```

```
Leer.close();
```

```
Leer.open("c:\\ canal.txt",ios::in);  
for(i=1; i<=nodoscanal; i++) {Leer>>FrontCanal[i];}  
Leer.close();
```

```
altcanal=160.; altdren=200.; anchoDominio=1457.5; profDominio=500.;  
baseC=340.; tiempo=dtini; H=250.; tirante=140.;
```

```
for(i=1; i<=nnoto; i++) potant[i]=H-Z[i];  
Coeficientes(potant);  
for(i=1; i<=nnoto; i++)thetaini[i]=theta[i];
```

```
Canal=1; Dren=1;
```

```
if(Canal==1) {for(i=1; i<=nodoscanal; i++) {nodo=FrontCanal[i];  
potant[nodo]=tirante+baseCanal-Z[nodo];}  
}
```

```
if(Dren==1){  
for(i=1; i<=nodosdren; i++) {nodo=FrontDren[i];  
if(potant[nodo]>=0.) {nododren[nodo]=1;potant[nodo]=0.;}  
if(potant[nodo]<0.) nododren[nodo]=3;}  
}
```

```
Timp=2176.; dtimp=0.; nivelt=1; imprimir=0; w=1.;
```

```
do  
{  
Richards2D(); nivelt++;
```

```
Escribe.open("c: \\resultados\\caudales.txt",ios::app);  
Escribe<<"tiempo<<" " <<"dt<<" " <<"Qcanal<<" " <<"Qdren<<" " <<"endl;  
Escribe.close();
```

```
Escribe.open("c: \\resultados\\potenciales.txt",ios::app);  
Escribe<<"X " <<"Z " <<"potant " <<"potcen " <<"potest " <<"tiempo<<"endl;  
for(i=1; i<=nnoto; i++)Escribe<<"X[i]<<" " <<"Z[i]<<" " <<"potant[i]<<" " <<"potcen[i]<<"  
" " <<"potest[i]<<"endl;
```

```
tiempo+=dt;  
}while( tiempo<=100*24*3600.);  
}
```

```
void DOSD::Coeficientes(double *potcen)  
{  
double thetaS, thetaR, Ks, eta, m, n, psient;  
long int i;
```

```

for (i=1; i<=nnoto; i++){
    thetaS=0.525; thetaR=0.; Ks=0.01/3600.; eta=61.17; m=0.0229; n=2./(1.-
    m);psient=-132.5;
    if (potcen[i]>=0.) {theta[i]=thetaS; Kh[i]=Ks; Cesp[i]=0.;}
    if (potcen[i]<0.) {theta[i]=thetaR+(thetaS-thetaR)/pow((1+pow((potcen[i]/
        psient),n)),m);
        Kh[i]=Ks*pow(((theta[i]-thetaR)/(thetaS-thetaR)),eta);
        Cesp[i]=(-m*n*(thetaS- thetaR)/psient)*pow (1.0+ pow
        ((potcen[i]/ psient),n),-m-1.0)*pow((potcen[i]/psient),n-1.0);
        }}
}

```

```

void DOSD::Richards2D()

```

```

{
double aux,resR;
ofstream Escribe;

```

```

contaR=1;

```

```

do

```

```

{
if(contaR==1) {for (i=1; i<=nnoto; i++) {potcen[i]=potant[i];}}
if(contaR>1) {for (i=1; i<=nnoto; i++) {potcen[i]=potest[i];}}

```

```

Pantalla();
Coeficientes(potcen);
Matriz();
Choleski(potest);

```

```

resR=0.;

```

```

for (i=1; i<=nnoto; i++){
    if(fabs(potcen[i])>=0.00001){
        aux=fabs((potest[i]-potcen[i])/potcen[i]);
        if(resR<aux){resR=aux;}
    }}

```

```

gotoxy(1,24);

```

```

cout<<"

```

```

";
gotoxy(1,24);cout<<"resR "<<resR<<" "<<"flujoCanal "<<setprecision(8)
<<Qcanal<<" "<<"flujoDren "<<setprecision(8)<<QDren;

```

```

if(contaR>7) dt*=.7;

```

```

if(dt<0.1)dt=0.1;

```

```

contaR++;

```

```

if(contaR>50)break;

```

```

}while(resR>0.001);

```



```

if(contaR<4)dt*=1.2;

for(i=1; i<=nnoto; i++)potant[i]=potest[i];
}

void DOSD::Matriz ()
{
int i, j, e, l, J, L, invve, r, s, igl, jgl, bgl;

for(t=1; t<=tmvct; t++)K[t]=0.;
for(i=1; i<=nnoto; i++) { B[i]=0.;M[i]=0.;Q[i]=0.;E[i]=0.;}

for(e=1; e<=Elementos; e++) {
    l=esq[e][1]; J=esq[e][2]; L=esq[e][3];
    Khe[e]=(Kh[l]+Kh[J]+Kh[L])/3.;
    b[1]=Z[J]-Z[L]; b[2]=Z[L]-Z[l]; b[3]=Z[l]-Z[J];
    c[1]=X[L]-X[J]; c[2]=X[l]-X[L]; c[3]=X[J]-X[l];
    Area[e]=0.5*((b[3]*c[2])-(b[2]*c[3]));//Area[cm2]
    if(Area[e]<0)Area[e]=Area[e]*-1.;
    for (r=1;r<=3;r++) {
        for (s=1;s<=3;s++) {
            contrig[r][s]=(Khe[e]*(b[r]*b[s]+c[r]*c[s]))/(4.*Area[e]);
            igl=esq[e][r];jgl=esq[e][s];
            if(jgl>=igl){invve=Inve(igl,jgl); K[invve]+=contrig[r][s];}
        }
    }

    for (i=1;i<=3;i++){
        contgrav[i]=(Khe[e]*c[i])/2.;
        bgl=esq[e][i];
        B[bgl]+=contgrav[i];
        M[bgl]+=(Cesp[bgl]*Area[e])/3.;
    }
}

for(i=1; i<=nnoto; i++){
for(j=1; j<=nnoto; j++){
    invve=Inve(i,j);
    if(j>i){K[invve]=K[invve]*w;}
    if(i==j){K[invve]=(M[i]/dt)+(w*K[invve]);}
    } }

Flujo();

// ENSAMBLE FINAL //

for(i=1; i<=nnoto; i++){E[i]=((M[i]/dt)*potant[i])-B[i]+Q[i];}

```

```

Frontera();

}

void DOSD::Flujo()
{

ofstream Escribe;

int i, j;
int mv, hv;
QDren=0.; Qcanal=0.;

for(i=1;i<=nnoto;i++)V[i]=0.;

hv=sb; mv=1;
for(i=1; i<=nnoto; i++){
    for(j=i;j<=hv;j++){
        if(j>nnoto)break;
        V[i]+=K[mv]*potcen[j];
        if(j!=i){V[j]+=K[mv]*potcen[i];}
        mv++;}
    hv++;
}

if(Canal==1){
    for(i=1; i<=nodoscanal; i++){
        nodo=FrontCanal[i];
        if(Z[nodo]<=baseC+tirante){
            Q[nodo]=V[nodo]+B[nodo];
            if(Q[nodo]<0.)Q[nodo]=0.;
            Qcanal+=Q[nodo];
        }
    }
}

if(Dren==1){
    for(i=1; i<=nodosdren; i++){
        nodo=FrontDren[i];
        Qdren[nodo]=V[nodo]+B[nodo];
        if(potcen[nodo]>=0.) nododren[nodo]=1;
        if(Qdren[nodo]>0.) Qdren[nodo]=0.;
        if(potcen[nodo]<0.) nododren[nodo]=3;
        if(nododren[nodo]==1) {if(Qdren[nodo]<=0.)QDren+=Qdren[nodo];}
    }
}
}

```

```

void DOSD::Frontera()
{
int i, j, n, k, ivei, ivej, ivek;

if(Dren==1){
    for(i=1; i<=nodosdren; i++) {nodo=FrontDren[i];
        if(ndren[nodo]==1){
            potest[nodo]=0.;
            E[nodo]=potest[nodo];
            for(k=nodo-sb+1; k<=nodo-1; k++) {ivek=Inve(k,nodo);
                if(k>=1)E[k]=E[k]-K[ivek]*potest[nodo]; K[ivek]=0.;
            }
            for(j=nodo+1; j<=nodo+sb-1; j++) {ivej=Inve(nodo,j);
                if(j<=nnoto) E[j]=E[j]-K[ivej]*potest[nodo]; K[ivej]=0.;
            }
            ivei=Inve(nodo,nodo);
            K[ivei]=1.; E[nodo]=potest[nodo];
        }
    }

if(Canal==1){
    for(n=1; n<=nodoscanal; n++) {nodo=FrontCanal[n];
        potest[nodo]=tirante+baseCanal-Z[nodo];
        if(potest[nodo]>=0.) {E[nodo]=potest[nodo];
            for(k=nodo-sb+1; k<=nodo-1; k++) {ivek=Inve(k,nodo);
                if(k>=1) E[k]=E[k]-K[ivek]*potest[nodo]; K[ivek]=0.;
            }
            for(j=nodo+1; j<=nodo+sb-1; j++){ivej=Inve(nodo,j);
                if(j<=nnoto)E[j]=E[j]-K[ivej]*potest[nodo]; K[ivej]=0.;
            }
            ivei=Inve(nodo,nodo);
            K[ivei]=1.; E[nodo]=potest[nodo];
        }
    }

}

void DOSD::Choleski(double *potest)
{
long int i, j, jt, k1, k2;
long int ik, iveij, iveii, iveki, ivekj;
float sum,*Sol;

Sol=new float[nnoto+1];
for(i=1;i<=nnoto;i++) Sol[i]=0.0;

jt=sb; iveij=0;
for (i=1;i<=nnoto;i++) {

```

```

iveii=iveij+1;
for (j=i;j<=jt;j++){iveij++; k1=j-sb+1;
if (k1<i){if (k1<=0)k1=1;
sum=0;
for (int k=k1;k<=(i-1);k++){
iveki=Inve(k,i);
ivekj=Inve(k,j);
sum+=K[iveki]*K[ivekj];}
K[iveij]+=-sum;}
if(i==j){if (K[iveij]<0.0){
cout<<"error al resolver..."<<i<<" "<<" "<<K[iveij]<<endl;
continue;}
K[iveij]=pow(K[iveij],5);}
elseK[iveij]/=K[iveii];}
if (jt<nnoto)jt++;
}

```

```

for(i=1;i<=nnoto;i++)Sol[i]=E[i];
k2=sb; ik=0;
for (i=1;i<=nnoto;i++){
for (int k=i;k<=k2;k++){
ik++;
if (k==i) Sol[k]/=K[ik];
else Sol[k]+=-K[ik]*Sol[i];}
if (k2<nnoto) k2+=1;}
k2=0;
for (i=nnoto;i>=1;i--){
if (k2>0){
for (int k=(i+k2);k>=i+1;k--){
Sol[i]+=-K[ik]*Sol[k];
ik--;}
Sol[i]/=K[ik];
ik--;}
if (k2<(sb-1)) k2++;
}
}

```

```

for (i=1; i<=nnoto; i++) potest[i]=Sol[i];
}

```

```

long int DOSD::Inve(int i, int j)
{

```

```

long int ivec, L;

```

```

ivec=j-i+1+(i-1)*sb;

```

```

L=i-nnoto+sb-2;

```

```

if (L>=0){ivec=ivec-L*(L+1)/2;}

```

```

return ivec;

```

```

}

```

```
main (void)
{
DOSD RICH;
RICH.Datos();
return 0;
}
```