UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TENSOR RELATIVISTA DE ENERGÍA - MOMENTO EN UNA TRANSFORMACIÓN FINITA DEL ESPACIO DE MINKOWSKI

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A :

LEONARDO ORTÍZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. ANGEL PRIETO RUIZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2005

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Leonardo Ortiz Hernández
FECHA: 03/05/06
FIRMA:

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"El tensor relativista de energía-momento en una transformación finita del espacio de Minkowski".

realizado por Ortíz Hernández Leonardo

con número de cuenta 09406317-6 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Angel Prieto Ruíz
Propietario	Dr. José Luis Jiménez Ramírez
Propietario	Dr. Raúl Patricio Esquivel Sirvent
Suplente	M. en C. Ignacio Campos Flores
Suplente	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

Hugo A. Rincón M.

Consejo Departamental de Física

M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ

A mis padres, con amor y gratitud.

Agradecimientos

Al Dr. Ángel Prieto Ruíz por sus comentarios y sugerencias que mejoraron significativamente este trabajo.

A "Dadi" por haberme escuchado en los buenos y malos momentos que pase durante la realización de este trabajo.

Al departamento de física por el espacio que me permitió ocupar durante la elaboración de este trabajo.

Índice general

Introducción III

1. El tensor de energía-momento **1**
1.1. Notación relativista 1
1.2. Las ecuaciones de Maxwell y la densidad de fuerza de Lorentz-Minkowski 3
1.3. El tensor de energía-momento del campo electromagnético, $T^{\mu}_{\ \nu}$ 5
1.3.1. Obtención de $T^{\mu}_{\ \nu}$ a partir de la densidad de fuerza de Lorentz-Minkowski 5
1.3.2. Una aplicación del vector de Poynting 9
1.3.3. El tensor de esfuerzos de Maxwell 10
1.4. Otra forma de escribir $T^{\mu}_{\ \nu}$ 12

2. El grupo propio de Lorentz **14**
2.1. Tipos de vectores y planos del espacio-tiempo 14
2.2. Transformaciones planas 16
2.3. El grupo de Lorentz 16
2.3.1. Rotaciones y reflexiones 17
2.3.2. Transformaciones ortocronas y antiortocronas 18
2.3.3. Subconjuntos del grupo de Lorentz 18
2.4. El grupo $L_+^{\uparrow}$ 19
2.5. El generador general de $L_+^{\uparrow}$ y el tensor de campo electromagnético 20

3. Exponencial del generador de $L_+^{\uparrow}$ **21**
3.1. El generador general G 22
3.2. Relación entre G y G^3 23
3.3. Transformación generada por un bivector 25

3.4. La exponencial de G cuando G es nilpotente de orden tres . . 28
3.5. Exponencial de G usando el isomorfismo entre $L_+^\uparrow$ y SO(3,C) . 28

4. La transformación $\Lambda^\mu{}_\nu = \exp(\lambda F^\mu{}_\nu)$ 38
4.1. La transformación finita generada por el tensor de campo electromagnético 38
4.2. El tensor de energía-momento es un operador de Λ 39
4.3. Λ es una transformación planar 41
4.4. Los operadores F y T en Λ 42
4.5. La transformación Λ cuando $F = F_C + F_R$ 43
4.6. La transformación Λ cuando $E^2 = B^2$ 46
4.6.1. Invariancia de la norma de p bajo Λ 47
4.6.2. El 4-vector Tp es nulo 48
4.6.3. Análisis del cambio del 4-momento, p, por componentes 49
4.7. La transformación Λ cuando $E^2 > B^2$ 54
4.7.1. La transformación Λ cuando $\mathbf{B} = 0$ 57
4.8. La transformación Λ cuando $B^2 > E^2$ 58
4.8.1. La transformación Λ cuando $\mathbf{E} = 0$ 60
4.9. 4-vectores asociados con el campo electromagnético 60

5. Conclusiones 62

A. Identidades donde intervienen F y F^* 66

B. Isomorfismo entre $L_+^\uparrow$ y SO(3,C) 68

C. Deducciones del capítulo 3 70

D. Deducciones del capítulo 4 75

Bibliografía 84

Introducción

En diversos trabajos[1] se ha calculado la expresión para $\Lambda^{\mu}_{\ \nu} \equiv e^{A^{\mu}_{\ \nu}}$, donde $A^{\mu}_{\ \nu}$ es un tensor antisimétrico de segundo rango en cuatro dimensiones. Esto se ha hecho para estudiar el grupo $L^{\uparrow}_{+}$ o bien para estudiar la acción de un campo electromagnético sobre una partícula con masa y carga. En el primer caso, $A^{\mu}_{\ \nu}$ se identifica como el generador general del grupo $L^{\uparrow}_{+}$, por lo que $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ es una transformación de Lorentz. En el segundo caso $A^{\mu}_{\ \nu}$ se indentifica como el tensor de campo electromagnético, $F^{\mu}_{\ \nu}$, en este caso, $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ también es una transformación de Lorentz, ya que ambas maneras de ver a $A^{\mu}_{\ \nu}$ son equivalentes[2]. En este trabajo, como elemento preparatorio para la discusión que nos interesa, también calcularemos la expresión para $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ con un método distinto a los usados en los trabajos citados anteriormente.

En los trabajos en los que se estudia la acción de un campo electromagnético sobre la partícula no se considera que $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ sea una transformación de Lorentz, hacer esta consideración es interesante ya que al ser $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ una transformación de Lorentz, la acción del campo sobre la partícula se puede estudiar en términos de las propiedades de dicha transformación.

En este trabajo también estudiaremos la acción de un campo electromagnético sobre una partícula con masa y carga tomando en cuenta que $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ es una transformación de Lorentz, de hecho esta característica de $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ será la base sobre la que haremos dicho estudio. Este enfoque hace posible analizar en términos geométricos (rotaciones en el espacio-tiempo) la acción del campo sobre la partícula, ya que una transformación de Lorentz tiene una interpretación geométrica bien definida. Bajo esta perspectiva y teniendo en cuenta que bajo ciertas circustancias, que se describirán en el capítulo 4, el 4-momento, p'^{μ}, de la partícula cuando ésta ha pasado un tiempo finito en

[1] Zeni y Rodrigues Jr (1990), Srinivasa (1996), p. 483, Fredsted (2001) y Caltenco *et al* (2002).

[2] Zwanziger (1965).

la región de campo, es $p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$ donde p^{ν} es el 4-momento inicial. p'^{μ} se puede ver como el resultado de la acción de un operador (transformación finita) sobre un 4-vector del espacio-tiempo. Con esta expresión para p'^{μ}, la transferencia de 4-momento del campo a la partícula es $\Delta p^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu} - p^{\mu}$ y se puede estudiar, por consiguiente, también en términos geométricos.

Con lo que se ha dicho hasta aquí, es claro que las características de Λ^{μ}_{ν} son esenciales para estudiar la acción del campo sobre la partícula. Puesto que, como se demostrará en el capítulo 4, F^{μ}_{ν} y el tensor de energía-momento del campo electromagnético, T^{μ}_{ν}, son operadores que aparecen en Λ^{μ}_{ν}, entonces, F^{μ}_{ν} y T^{μ}_{ν} tienen un papel esencial en la acción del campo sobre la partícula y consecuentemente en la transferencia de 4-momento del campo a la partícula. En efecto, como se mostrará en el capítulo 4, p'^{μ} depende de los 4-vectores $F^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$ y $T^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$. El 4-vector $F^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$ es la fuerza de Lorentz-Minkowski mientras que el 4-vector $T^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$ aún no se ha estudiado. Estudiar el 4-vector $T^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$ tiene interés ya que dicho estudio puede brindar elementos que permitan ampliar nuestra forma de ver la acción del campo sobre la partícula. Esta afirmación está basada en el hecho de que T^{μ}_{ν} es un elemento importante de la electrodinámica clásica y al mismo tiempo un operador de una transformación finita del espacio de Minkowski (transformación de Lorentz). Así, pues, *el objetivo de este trabajo es estudiar el papel de T^{μ}_{ν} como operador de Λ^{μ}_{ν}.*

El trabajo lo dividiremos en 5 capítulos.

En el Capítulo 1 haremos una breve exposición del papel usual que tiene el tensor de energía-momento del campo electromagnético en electrodinámica clásica. Algunos conceptos que introduzcamos en esta exposición los usaremos cuando estudiemos el papel de T^{μ}_{ν} como operador de Λ^{μ}_{ν} en el capítulo 4.

En el Capítulo 2 expondremos algunos aspectos geométricos del espacio-tiempo, el grupo $L^{\uparrow}_{+}$ y los tipos de transformaciones que existen en este grupo. Mostaremos la relación que existe entre $F^{\mu}{}_{\nu}$ y el generador general del grupo $L^{\uparrow}_{+}$ al que denotaremos como $G^{\mu}{}_{\nu}$. Hecho esto quedará claro que F^{μ}_{ν} genera transformaciones finitas, lo cual nos servirá de apoyo para encontrar la expresión para la exponencial de F^{μ}_{ν} en el capítulo 4.

En el Capítulo 3 analizaremos los operadores que determinan una transformación planar. Obtendremos la exponencial de $G^{\mu}{}_{\nu}$ cuando $G^{\mu}{}_{\nu}$ es nilpotente de orden tres. Encontraremos la exponencial de $G^{\mu}{}_{\nu}$ en el caso general usando el isomorfismo entre el grupo $L^{\uparrow}_{+}$ y el grupo SO(3,C). Esta exponencial la usaremos en el capítulo 4 para encontrar la exponencial de $F^{\mu}{}_{\nu}$.

En el Capítulo 4 demostraremos que $T^{\mu}{}_{\nu}$ aparece en $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$. Estudiaremos el papel que desempeña $T^{\mu}{}_{\nu}$ en $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ cuando ésta se aplica al 4-momento, p^{μ}, de una partícula de masa m y carga q. Analizaremos cómo se modifica p^μ bajo la acción del campo electromagnético mediante la aplicación de $\Lambda^\mu{}_\nu$ a p^μ.

Finalmente, en el Capítulo 5 presentaremos las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

El tensor de energía-momento del campo electromagnético

La descripción clásica de los fenómenos electromagnéticos tiene su base teórica en las ecuaciones de Maxwell y en la fuerza de Lorentz-Minkowski. Las primeras determinan el campo electromagnético a partir de la fuente que lo produce, la 4-corriente. La segunda expresa como actúa el campo electromagnético sobre una partícula cargada que tiene una velocidad inicial y una posición inicial conocidas. En este capítulo vamos a utilizar este conjunto de ecuaciones para obtener el tensor de energía-momento del campo electromagnético y las leyes de conservación de energía y momento del mismo. También explicaremos el significado de las componentes de este tensor y mostraremos como se usan en algunas situaciones concretas. Dicho significado lo usaremos en el capítulo 4 cuando analicemos el cambio del 4-momento de una partícula con masa y carga en un campo electromagnético.

1.1. Notación relativista

Los vectores del espacio-tiempo los llamaremos 4-vectores y los denotaremos con letras latinas minúsculas. En particular el 4-vector de posición es

$$x^{\mu} = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$$

con $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Para denotar los índices usaremos letras griegas y latinas, las cuales pueden tomar valores 0, 1, 2, 3 y 1, 2, 3 respectivamente.

La norma al cuadrado de un 4-vector x^μ es

$$x^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2, \tag{1.1}$$

por consiguiente el tensor métrico es

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = g_{\mu\nu}.$$

Mediante el tensor métrico el producto escalar de dos 4-vectores x^μ y y^μ se puede escribir como

$$x^\mu y_\mu = \sum_\nu x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \equiv x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu.$$

En la segunda igualdad de esta ecuación hemos utilizado la convención de Einstein de suma de índices repetidos.

Algunas veces usaremos la notación $x^\mu x_\mu = x^2$ y $x^\mu y_\mu = x \cdot y$. Es conveniente mencionar que para denotar el producto escalar de dos vectores del espacio ordinario (tres dimensiones espaciales) también usamos el punto y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$, sin embargo, esto no causará confusión ya que, la mayoría de veces, en el contexto en donde se utilice esta notación será claro cuando se trata de un caso u otro. Y las ocasiones en que pudiera haber confusión se hará la aclaración correspondiente.

Si s es la longitud de arco que recorre el vector de posición x^μ, entonces la 4-velocidad es

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}.$$

Por lo tanto

$$\dot{x}^\mu = \frac{dt}{ds}\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma\left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \tag{1.2}$$

con $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ la notación vectorial ordinaria. c denota la rapidez de la luz en el vacío. A la parte espacial de los 4-vectores la llamaremos 3-vectores, en particular $\mathbf{v}$ es la 3-velocidad.

El 4-momento de una partícula de masa m lo definimos como

$$p^\mu \equiv mc\dot{x}^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right), \tag{1.3}$$

donde $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ es su energía y $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ su 3-momento[1].

Los tensores los denotaremos con letras latinas mayúsculas. El rango más alto de los tensores que usaremos es dos. Cuando un tensor de segundo rango lo escribamos sin índices, lo cual realizaremos para hacer más compacta y fácil la notación, será una vez contravariante y una vez covariante. También utilizaremos la notación

$$A^n \equiv A^{\mu}_{(1)\ \nu} A^{\nu}_{(2)\ \alpha} ... A^{\tau}_{(n-1)\ \gamma} A^{\gamma}_{(n)\ \beta},$$

donde $A^{\mu\nu}$ es cualquier tensor de segundo rango. Por ejemplo,

$$A^3 \equiv A^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}{}_{\alpha} A^{\alpha}{}_{\beta}.$$

Además

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} \equiv I$$

con $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ la delta de Kronecker o la unidad en cuatro dimensiones[2].

El sistema de unidades que usaremos es el sistema de Heaviside-Lorentz[3], este sistema es el sistema gaussiano racionalizado[4].

1.2. Las ecuaciones de Maxwell y la densidad de fuerza de Lorentz-Minkowski

En electrodinámica clásica el campo electromagnético está determinado por las ecuaciones de Maxwell a partir de la fuente que lo produce, la corriente

[1] Cuando escribimos m nos referimos simplemente a la masa de un objeto sin hacer uso de los conceptos de masa en reposo o masa en movimiento. Una discusión sobre la forma de denotar la masa en relatividad especial puede verse en Okun (1989).

[2] La delta de Kronecker se define como

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = 1 \text{ si } \mu = \nu,\ 0 \text{ si } \mu \neq \nu.$$

[3] Jackson (1999), p. 778. Una referencia útil para ver con más detalle el sistema de unidades de Heaviside-Lorentz es Mason and Weaver (1962), ya que este libro está escrito completamente en dicho sistema.

[4] Panofsky and Phillips (1962) p. 461, Slater and Frank (1947), p. 205 y Wagnnes (2001) p. 452.

eléctrica. Las ecuaciones de Maxwell en forma covariante se escriben como[5]

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu, \tag{1.4}$$

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0. \tag{1.5}$$

La densidad de 4-corriente, j^μ, es

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) \tag{1.6}$$

con ρ la densidad volumétrica de carga y $\mathbf{j} \equiv \rho\mathbf{v}/c$ la densidad de corriente en tres dimensiones[6].

La densidad de la fuerza de Lorentz-Minkowski es

$$f^\mu = F^\mu_{\ \nu} j^\nu. \tag{1.7}$$

El tensor, $F^\mu_{\ \nu}$, es el tensor de campo electromagnético

$$F^\mu_{\ \nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

con $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ y $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ los campos vectoriales eléctrico y magnético respectivamente.

Utilizando (1.6) y (1.8) en (1.7) obtenemos

$$f^\mu = \left(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \rho\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)\right). \tag{1.9}$$

La componente temporal de (1.9) es el trabajo que hace el campo por unidad de densidad de carga; a este término también se le conoce como calor de Joule. La componente espacial es la fuerza que ejerce el campo sobre la fuente, ésta es la suma de la fuerza ejercida por el campo eléctrico sobre la densidad de carga y por el campo magnético sobre la densidad de corriente.

[5] Vamos a utilizar la notación

$$\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

[6] Si la densidad de corriente se define así y al operador diferencial, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, cuando $\mu = 0$, lo escribimos como $\frac{\partial}{\partial ct}$ y no como $\frac{\partial}{c\partial t}$, entonces en las ecuaciones de Maxwell no aparece la constante c. Nótese que $\mathbf{j}$ tiene las mismas dimensiones que ρ, sin embargo, esto no introduce contradicción alguna en las ecuaciones, además desde el punto de vista relativista es conveniente, ya que en este caso ρ y $\mathbf{j}$ forman un 4-vector naturalmente. Ver Jackson (1999), p. 778.

1.3. El tensor de energía-momento del campo electromagnético, $T^{\mu}_{\ \nu}$

Las leyes de conservación de energía y momento del campo electromagnético se expresan en forma covariante mediante el tensor de energía-momento del campo electromagnético.

A continuación vamos a obtener la expresión para $T^{\mu}_{\ \nu}$ a partir de la densidad de fuerza de Lorentz-Minkowski utilizando las ecuaciones de Maxwell[7].

1.3.1. Obtención de $T^{\mu}_{\ \nu}$ a partir de la densidad de fuerza de Lorentz-Minkowski

Si sustituimos (1.4) en (1.7) obtenemos[8]

$$f^{\mu} = -F^{\mu}_{\ \nu}\partial_{\alpha}F^{\nu\alpha}$$

o

$$f_{\mu} = -F_{\mu\nu}\partial_{\alpha}F^{\nu\alpha}. \tag{1.10}$$

Utilizando la igualdad

$$-F_{\mu\nu}\partial_{\alpha}F^{\nu\alpha} = \left(\partial_{\alpha}F_{\mu\nu}\right)F^{\nu\alpha} - \partial_{\alpha}\left(F_{\mu\nu}F^{\nu\alpha}\right)$$

(1.10) se puede escribir como

$$f_{\mu} = \left(\partial_{\alpha}F_{\mu\nu}\right)F^{\nu\alpha} - \partial_{\alpha}\left(F_{\mu\nu}F^{\nu\alpha}\right). \tag{1.11}$$

Escribamos $F_{\mu\nu}$ como una suma teniendo en cuenta que es antisimétrico:

$$\begin{aligned}\left(\partial_{\alpha}F_{\mu\nu}\right)F^{\nu\alpha} &= \frac{1}{2}\left(\partial_{\alpha}\left[F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu}\right]\right)F^{\nu\alpha} \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_{\alpha}F_{\mu\nu}\right)F^{\nu\alpha} - \frac{1}{2}\left(\partial_{\alpha}F_{\nu\mu}\right)F^{\nu\alpha}.\end{aligned}$$

[7] Ver Sommerfeld (1952), p. 255.

[8] Cuando se hace esta sustitución estamos asumiendo que el campo electromagnético en (1.7) es el debido a la 4-corriente que aparece en esta ecuación más el campo debido a otras fuentes distintas de ésta, es decir, asumimos que éste es el campo electromagnético total. Hacer esta sustitución es legítimo debido al principio de superposición de los campos.

Intercambiando $\alpha \rightarrow \nu$ y $\nu \rightarrow \alpha$ en el segundo término del lado derecho de la igualdad anterior, cambiando índices del tensor y su signo

$$(\partial_\alpha F_{\mu\nu}) F^{\nu\alpha} = \frac{1}{2} \left[(\partial_\alpha F_{\mu\nu}) - (\partial_\nu F_{\mu\alpha}) \right] F^{\nu\alpha}. \tag{1.12}$$

De (1.5) se sigue que

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} - \partial_\nu F_{\mu\alpha} = \partial_\mu F_{\alpha\nu}. \tag{1.13}$$

Sustituyendo (1.13) en (1.12) obtenemos

$$(\partial_\alpha F_{\mu\nu}) F^{\nu\alpha} = \frac{1}{2} (\partial_\mu F_{\alpha\nu}) F^{\nu\alpha}. \tag{1.14}$$

Insertando (1.14) en (1.11) encontramos

$$f_\mu = \frac{1}{2} (\partial_\mu F_{\alpha\nu}) F^{\nu\alpha} - \partial_\alpha (F_{\mu\nu} F^{\nu\alpha}).$$

Utilizando que

$$\partial_\mu (F_{\alpha\nu} F^{\alpha\nu}) = -2 (\partial_\mu F_{\alpha\nu}) F^{\nu\alpha},$$

entonces

$$f_\mu = -\frac{1}{4} \partial_\mu (F_{\alpha\nu} F^{\alpha\nu}) - \partial_\alpha (F_{\mu\nu} F^{\nu\alpha}).$$

Introduciendo el tensor métrico $g^{\mu\alpha}$ en la igualdad anterior, obtenemos

$$f^\mu = -\partial_\alpha \left[(F^\mu_\nu F^{\nu\alpha}) + \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} (F_{\tau\nu} F^{\tau\nu}) \right]. \tag{1.15}$$

El tensor entre corchetes es el tensor de energía-momento del campo electromagnético y usualmente se le denota por $T^{\mu\alpha}$. Así, la igualdad anterior se puede escribir como

$$f^\mu = -\partial_\alpha T^{\mu\alpha}. \tag{1.16}$$

En una región en donde no hay fuentes se cumple

$$\partial_\alpha T^{\mu\alpha} = 0.$$

Las componentes del tensor de energía-momento son

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} w & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & & & \\ S_2 & & -T_M^{ij} & \\ S_3 & & & \end{bmatrix}, \tag{1.17}$$

donde

$$w = \frac{E^2 + B^2}{2} \tag{1.18}$$

es la densidad de energía del campo electromagnético,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{1.19}$$

el vector de Poynting y

$$T_M^{ij} = \begin{bmatrix} E_1^2 + B_1^2 - \frac{E^2+B^2}{2} & E_1E_2 + B_1B_2 & E_1E_3 + B_1B_3 \\ E_1E_2 + B_1B_2 & E_2^2 + B_2^2 - \frac{E^2+B^2}{2} & E_2E_3 + B_2B_3 \\ E_1E_3 + B_1B_3 & E_2E_3 + B_2B_3 & E_3^2 + B_3^2 - \frac{E^2+B^2}{2} \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

el tensor de esfuerzos de Maxwell.

De (1.18) se sigue que la energía total que contiene un volumen V en donde exista un campo electromagnético es

$$\mathcal{E}_c = \int_V w dV. \tag{1.21}$$

La energía de un campo electrostático o magnetostático se obtiene de (1.21) cuando $\mathbf{B} = 0$ ó $\mathbf{E} = 0$ respectivamente.

La componente cero de (1.16) es

$$\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{1.22}$$

Si integramos (1.22) en un volumen V obtenemos

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \int\limits_V wdV}{\partial t} = -\int\limits_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} da - \int\limits_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV, \tag{1.23}$$

∂V denota la frontera de V y $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal hacia afuera de la superficie. De (1.23) se sigue que el cambio de energía del campo por unidad de tiempo en el volumen V es debido a menos la integral de superficie del vector de Poynting sobre la frontera de V y al trabajo que el campo hace sobre las cargas dentro del volumen. Por lo tanto, si (1.23) expresa la conservación de energía del campo electromagnético en presencia de fuentes, entonces el vector de Poynting representa un flujo de energía que sale de V[9]. La expresión (1.23) se conoce como teorema de Poynting.

La energía que fluye por unidad de área por unidad de tiempo es

$$\mathcal{F} = c\mathbf{S}. \tag{1.24}$$

La componente i de (1.16) es

$$\frac{\partial T_M^{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{c}\frac{\partial S_i}{\partial t} = f^i \tag{1.25}$$

con $i = 1, 2, 3$.

Si integramos (1.25) en un volumen V obtenemos

$$\int\limits_V f^i dV + \frac{1}{c}\frac{\partial \int\limits_V S_i dV}{\partial t} = \int\limits_{\partial V} T_M^{ij}\hat{n}_j da. \tag{1.26}$$

En esta ecuación también $\hat{\mathbf{n}}$ es hacia afuera de la superficie. Si en (1.26) hacemos tender el volumen a todo el espacio y suponemos que el campo electromagnético es cero en infinito, entonces la integral del lado derecho se hace cero

$$\int f^i dV + \frac{1}{c}\frac{\partial \int S_i dV}{\partial t} = 0. \tag{1.27}$$

Las integrales en esta ecuación abarcan todo el espacio. La primera es la fuerza sobre las fuentes o el cambio de momento de éstas. Ahora, si (1.26) expresa la conservación de momento del campo electromagnético en presencia de fuentes, entonces la segunda integral de (1.27) debe ser el momento que el campo cede a las fuentes. De aquí se sigue que la densidad de momento del campo electromagnético es

$$\mathbf{p}_c = \frac{\mathbf{S}}{c}. \tag{1.28}$$

Las expresiones (1.24) y (1.28) muestran que el flujo de energía del campo está relacionado con la densidad de momento de éste. Desde un punto de vista relativista esta relación es natural, ya en relatividad especial la energía y momento no son independientes sino parte de un mismo objeto matemático (4-vector) que podemos llamar energía-momento.

[9] Poynting (1920).

Teniendo en cuenta la discusión de (1.27) podemos interpretar el lado derecho de (1.26). Como el lado izquierdo es una fuerza, entonces el lado derecho también debe serlo, por consiguiente los elementos de T_M^{ij} son fuerzas por unidad de área. La interpretación usual es que T_M^{ij} es una fuerza por unidad de área en la dirección i sobre un elemento de superficie cuya normal tiene la dirección j. De manera que $T_M^{ij}\hat{n}_j$ es una fuerza por unidad de área en la dirección i. A esta fuerza contribuyen tres componentes en tres direcciones distintas[10]. Así, cuando integramos sobre toda la superficie obtenemos la fuerza total ejercida por el campo sobre ésta. Este razonamiento no impide que podamos hacer tender el volumen a cero, con lo cual, obtendríamos la fuerza que ejerce el campo sobre la superficie de un volumen muy pequeño. En este caso, si consideramos que dentro de este volumen sólo hay una carga o un número muy pequeño de estas, la integral $\int T_M^{ij}\hat{n}_j da$ sería una fuerza sobre la carga (o cargas) ejercida por el campo.

1.3.2. Una aplicación del vector de Poynting

De acuerdo con lo expuesto en la sección anterior, el vector de Poynting es proporcional al flujo de energía del campo, por lo que ambos tienen la misma dirección[11]. Por lo tanto, la energía del campo fluye en una dirección ortogonal a $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$.

En una onda plana electromagnética se cumple que[12] $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$ y $E^2 = B^2$. Por consiguiente, la magnitud del vector de Poynting, en este caso, es

$$S = |\mathbf{E}\times\mathbf{B}| = E^2.$$

Si $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_1 E$ y $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}}_3 B$, entonces

$$\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{e}}_2 E^2 \tag{1.29}$$

con $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ y $\hat{\mathbf{e}}_3$ la base canónica de un sistema de coordenadas cartesiano. Por otro lado, la densidad de energía del campo es

$$w = E^2. \tag{1.30}$$

Por lo tanto, sustituyendo (1.30) en (1.29) se tiene que

$$\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{e}}_2 w. \tag{1.31}$$

[10] Maxwell (1954), p. 278.
[11] Ver Poynting (1920) y Jackson (1999), p. 259.
[12] Wangsness (2001), p. 476.

De (1.24) y (1.31) se sigue que el flujo de energía por unidad de área por unidad de tiempo, en este caso, tiene la dirección de la propagación de la onda electromagnética.

Con lo que hemos dicho hasta aquí, es claro que una onda electromagnética tiene energía y momento. Por lo tanto, si ésta incide sobre un objeto, por ejemplo una pared, deberá transmitirle momento y energía. Calculemos cuanto momento le transmite por unidad de área por unidad de tiempo. Utilizando (1.28) y (1.31) resulta que

$$\mathbf{p}_c = -\frac{\hat{\mathbf{e}}_2 w}{c}.$$

Supongamos que la normal a la pared es $\hat{\mathbf{e}}_2$. En estas circusrancias la propagación del momento del campo tiene una dirección perpendicular a la pared. Así, pues, la magnitud del momento transmitido por la onda a la pared por unidad de área por unidad de tiempo, si es absorbida en su totalidad, es

$$p_{tran} = cp_c = S = E^2 \tag{1.32}$$

en la dirección de la propagación de la onda electromagnética. La magnitud del campo electromagnético en esta expresión está evaluado cuando la onda incide en la pared. A un elemento de superficie se le transmitirá este momento por unidad de tiempo.

1.3.3. El tensor de esfuerzos de Maxwell

De acuerdo con la interpretación que se hizó de T_M^{ij} en la sec. 1. 3. 1, la componente i de la fuerza total $\mathbf{F}$ sobre la superficie ∂V, que encierra un volumen V inmerso en un campo electromagnético, es

$$F^i = \int\limits_{\partial V} T_M^{ij} \hat{n}_j da = \int\limits_{\partial V} f^i da, \tag{1.33}$$

donde $f^i = T_M^{ij}\hat{n}_j$ son las componentes de la densidad de fuerza $\mathbf{f}$ cuya integral sobre toda la superficie es $\mathbf{F}$. La ecuación (1.33) también es válida para el caso electrostático y magnetostático, basta hacer $\mathbf{B} = 0$ o $\mathbf{E} = 0$ respectivamente.

Ya hemos dicho en sec. 1. 3. 1 que las componentes del tensor de esfuerzos de Maxwell son fuerzas por unidad de área. Investiguemos pues, como son estas fuerzas, por ejemplo, en el caso electrostático. Imaginemos un elemento de superficie y escojamos el sistema de coordenadas de tal manera que la dirección de la normal $\hat{\mathbf{n}}$ al elemento de superficie coincida con la dirección positiva del eje z, y que el vector $\mathbf{E}$ esté en el plano xz. Designando al ángulo entre la normal a la superficie y el campo eléctrico como θ, tenemos que las componentes del campo son

$$E_x = E\sin\theta \qquad E_y = 0 \qquad E_z = E\cos\theta. \tag{1.34}$$

Y por consiguiente el tensor de esfuerzos es

$$T_M^{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{E^2}{2}\cos 2\theta & 0 & \frac{E^2}{2}\sin 2\theta \\ 0 & -\frac{E^2}{2} & 0 \\ \frac{E^2}{2}\sin 2\theta & 0 & \frac{E^2}{2}\cos 2\theta \end{bmatrix}. \tag{1.35}$$

Para escribir de esta manera el tensor de esfuerzos se han utilizado las identidades trigonométricas $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

Usando (1.35) y que $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$, obtenemos

$$\mathbf{f} = \hat{\mathbf{e}}_1\frac{E^2}{2}\sin 2\theta + \hat{\mathbf{e}}_3\frac{E^2}{2}\cos 2\theta. \tag{1.36}$$

De la expresión anterior se sigue que la fuerza por unidad de área está en el plano determinado por $\hat{\mathbf{n}}$ y $\mathbf{E}$. La magnitud de esta fuerza es $\frac{E^2}{2}$. También podemos ver que $\mathbf{E}$ biseca al ángulo entre $\hat{\mathbf{n}}$ y la fuerza. Así mismo, de (1.36) podemos deducir que cuando $\mathbf{E}$ es paralelo a $\hat{\mathbf{n}}$ ($\theta = 0°$) la fuerza es ejercida en la dirección de la normal, por lo que esta fuerza se puede interpretar como una tensión que jala al elemento de superficie, mientras que cuando $\mathbf{E}$ está en el plano paralelo al elemento de superficie ($\theta = 90°$) la fuerza es paralela a la normal pero en dirección contraria, por lo que se puede interpretar como una presión sobre el elemento de superficie. Por último, cuando $\theta = 45°$ la fuerza es paralela al elemento de superficie, lo cual se puede interpretar como un esfuerzo cortante sobre el elemento de superficie.

Una explicación análoga se puede hacer para el caso magnetostático. En el caso general las componentes del tensor de esfuerzos de Maxwell se explican de manera análoga; esta explicación está basada en el principio de superposición de los efectos de los campos.

Ahora veamos como se puede utilizar el tensor de esfuerzos de Maxwell para calcular la fuerza que ejerce una onda electromagnética cuando ésta incide en un elemento de superficie de una pared y es absorbida en su totalidad.

Supongamos la misma configuración de la sec. 1. 3. 2. En estas condiciones, la fuerza por unidad de área en la dirección y es

$$f^2 = T_M^{2j}\hat{n}_j = T_M^{22} = -E^2. \tag{1.37}$$

Este resultado coincide con lo que ya habíamos obtenido utilizando la densidad de momento del campo. Ver (1.32).

1.4. Otra forma de escribir $T^{\mu}{}_{\nu}$

En esta sección vamos a escribir el tensor de energía-momento del campo electromagnético en términos del tensor de campo electromagnético y su dual.

El dual de un tensor, A, de segundo rango lo definimos como

$$(A^*)^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_{\alpha\beta}, \tag{1.38}$$

donde $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita[13]. Por consiguiente, el dual del tensor de campo electromagnético es[14]

$$F^{*\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

Utilizando (1.8) y (1.39) se encuentra que (ver apéndice A)

$$F^{*2} = F^2 - (E^2 - B^2)I. \tag{1.40}$$

En la secc. 1. 3. 1 anterior vimos que el tensor de energía-momento es (ver (1.15) y (1.16))

$$T = F^2 + \frac{1}{4}\left(F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu}\right)I. \tag{1.41}$$

Por otro lado (ver apéndice A)

$$F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} = 2\left(B^2 - E^2\right)I. \tag{1.42}$$

[13]Las componentes de este tensor son 1 para una permutación par de los índices 0, 1, 2 y 3 en ε^{0123}, -1 para una permutación impar y cero cuando dos índices son iguales.

[14]Las componentes del dual se calculan una a una usando la definición (1.38).

Usando (1.40), (1.41) y (1.42) obtenemos

$$T = \frac{1}{2}\left[F^2 + F^{*2}\right]. \tag{1.43}$$

Esta expresión la usaremos en el capítulo 4 cuando mostremos que T es un operador de la transformación generada por F.

Capítulo 2

El grupo propio de Lorentz

En este capítulo expondremos, algunos aspectos geométricos del espacio-tiempo, el grupo de Lorentz y exploraremos brevemente la relación del tensor de campo electromagnético con el grupo propio de Lorentz. Los conceptos que introduzcamos en este capítulo serán útiles cuando estudiemos la acción de la transformación generada por el tensor de campo electromagnético sobre el 4-momento de una partícula con masa y carga en el capítulo 4.

2.1. Tipos de vectores y planos del espacio-tiempo

La norma al cuadrado de un 4-vector x^μ (ver sec. 1. 1)

$$x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

nos permite clasificar a los 4-vectores del espacio-tiempo en tres tipos. Un vector x^μ es

temporal si $x^\mu x_\mu > 0$,

espacial si $x^\mu x_\mu < 0$,

nulo o luz si $x^\mu x_\mu = 0$.

Dos 4-vectores son ortogonales si su producto escalar es cero. En particular, un 4-vector nulo es ortogonal a sí mismo. Los 4-vectores nulos forman un cono llamado *cono de luz.* Se puede demostrar que todo 4-vector ortogonal a un 4-vector temporal es espacial[1].

[1] Ver Bacry (1967), p. 250.

Cualquier 4-vector x^μ del espacio-tiempo se puede expresar como una combinación lineal de los 4-vectores base

$$e_0^\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; e_1^\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; e_2^\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; e_3^\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

como

$$x^\mu = x^0 e_0^\mu + x^1 e_1^\mu + x^2 e_2^\mu + x^3 e_3^\mu. \tag{2.2}$$

Sean a^μ y b^μ dos 4-vectores linealmente independientes. Estos definen un plano. Sea x^μ cualquier 4-vector de este plano, entonces

$$x^\mu = \alpha a^\mu + \beta b^\mu \tag{2.3}$$

con α y β reales. El 4-vector x^μ es nulo si se cumple que

$$\alpha^2 a^2 + 2\alpha\beta\,(a \cdot b) + \beta^2 b^2 = 0. \tag{2.4}$$

Si al menos uno de los 4-vectores a^μ o b^μ no es nulo, por ejemplo a^μ, podemos dividir por a^2 y resolver para α. Haciendo esto se obtiene

$$\alpha = \frac{-a \cdot b \pm \sqrt{\Delta}}{a^2}\beta \tag{2.5}$$

con

$$\Delta = (a \cdot b)^2 - a^2 b^2. \tag{2.6}$$

A Δ lo llamaremos el discriminante de los 4-vectores a^μ y b^μ.

Los planos del espacio-tiempo se pueden clasificar de acuerdo al número de direcciones nulas que contienen. Esto se puede hacer usando el discriminante de los 4-vectores que los definen. De (2.5) se sigue que hay tres casos:

Caso 1) $\Delta > 0$. El plano tiene dos direcciones nulas. A este tipo de plano le llamaremos *hiperbólico*. Este corta al cono de luz y contiene 4-vectores de todos los tipos.

Caso 2) $\Delta = 0$. El plano tiene sólo una dirección nula, es decir, toca al cono de luz sólo en una dirección nula (en efecto, es tangente al cono de luz). A este tipo de planos los llamaremos *cilíndricos*. Supongamos que b^μ es nulo, es decir,

$$b^2 = 0. \tag{2.7}$$

Consecuentemente

$$\Delta = (a \cdot b)^2 = 0. \tag{2.8}$$

Por lo tanto, todo 4-vector a^μ de este plano es ortogonal a la dirección de b^μ. Excepto los vectores colineales a b^μ todos los 4-vectores de este plano son de tipo espacio.

Caso 3) $\Delta < 0$. El plano sólo contiene 4-vectores espaciales y no tiene más contacto con el cono de luz que el origen. A los planos con estas caractéristicas los llamaremos *espaciales.* Un ejemplo de este tipo de plano es el plano xy del espacio ordinario en coordenadas cartesianas.

2.2. Transformaciones planas

Un bivector w lo definimos como

$$w^\mu{}_\nu \equiv a^\mu b_\nu - a_\nu b^\mu \tag{2.9}$$

con a^μ y b^μ 4-vectores linealmente independientes. Este objeto matemático (tensor) genera rotaciones en el plano definido por los 4-vectores a^μ y b^μ. A estas rotaciones las llamaremos transformaciones planares, ya que dejan invariante el plano ortogonal al plano de rotación. La transformación planar generada por $w^\mu{}_\nu$ es

$$W^\mu_\nu = e^{\xi w^\mu{}_\nu}, \tag{2.10}$$

donde ξ es un parámetro real.

Usando el discriminante de los vectores que definen a $w^\mu{}_\nu$ clasificaremos a las transformaciones planares como sigue:

$\Delta > 0$ la transformación es hiperbólica o pura de Lorentz,

$\Delta = 0$ la transformación es cilíndrica,

$\Delta < 0$ la transformación es espacial ordinaria.

2.3. El grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz está formado por las transformaciones lineales $\Lambda^\mu{}_\nu$ que dejan invariante el producto escalar $x^\mu y_\mu$[2]. Este es un grupo de Lie real y lo denotaremos como L. A las transformaciones que forman este grupo

[2] Estas transformaciones engloban a las transformaciones planares.

las llamaremos transformaciones de Lorentz. Estas transforman al espacio-tiempo en sí mimo.

Sea x^μ un 4-vector del espacio-tiempo, el vector transformado bajo una transformación de Lorentz es

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{2.11}$$

Como por definición una transformación de Lorentz deja invariante el producto escalar, entonces se debe cumplir que

$$x'^\mu y'_\mu = x^\mu y_\mu,$$

es decir,

$$\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta y^\beta = x^\mu g_{\mu\beta} y^\beta. \tag{2.12}$$

Intercambiando en el lado izquierdo de (2.12) ν por μ obtenemos

$$\Lambda^\nu{}_\mu x^\mu g_{\nu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta y^\beta = x^\mu g_{\mu\beta} y^\beta.$$

Por lo tanto, las transformaciones de Lorentz deben satisfacer

$$\Lambda^\nu{}_\mu g_{\nu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta y^\beta = g_{\mu\beta}. \tag{2.13}$$

El grupo L se puede dividir en subconjuntos utilizando el determinante y la componente $\Lambda^0{}_0$ de las transformaciones que lo forman.

2.3.1. Rotaciones y reflexiones

De (2.13) se sigue que

$$(\det \Lambda)^2 = 1.$$

Por lo tanto

$$\det \Lambda = \pm 1. \tag{2.14}$$

Utilizando el valor del determinante de las transformaciones de Lorentz se puede dividir L en dos subconjuntos.

Los elementos del subconjunto con determinante igual a 1 son *rotaciones (de Lorentz)* y constituyen un grupo. A este grupo lo denotaremos como L_+.

Los elementos del subconjunto con determinante igual a -1 son *reflexiones* (*de Lorentz*) y no constituyen un grupo ya que éste no contiene a la identidad.

2.3.2. Transformaciones ortocronas y antiortocronas

Si en (2.13) hacemos $\mu = \nu = 0$ se obtiene

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^2{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^3{}_0\right)^2 = 1. \tag{2.15}$$

Por lo tanto, $\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 \geqslant 1$. Esta desigualdad implica que

$$\Lambda^0{}_0 \geqslant 1 \tag{2.16}$$

o

$$\Lambda^0{}_0 \leqslant -1. \tag{2.17}$$

A las transformaciones de Lorentz que cumplen $\Lambda^0{}_0 \geqslant 1$ se les llama *transformaciones de Lorentz ortocronas* mientras que a las que satisfacen $\Lambda^0{}_0 \leqslant -1$ se les llama *transformaciones de Lorentz antiortocronas.* Las primeras preservan el signo de x^0, es decir, la dirección del tiempo; las segundas lo invierten.

Las transformaciones ortocronas forman un subgrupo de L llamado *grupo ortocrono de Lorentz,* denotado por $L^{\uparrow}$, donde la dirección de la flecha indica la dirección del flujo del tiempo físico.

Las transformaciones antiortocronas forman un conjunto, denotado por $L^{\downarrow}$, que no es un grupo ya que no contiene a la identidad.

2.3.3. Subconjuntos del grupo de Lorentz

Combinando las posibilidades $\det \Lambda = \pm 1$ y $\Lambda^0{}_0 \leqslant -1$ ó $\Lambda^0{}_0 \geqslant 1$ se obtienen cuatro subconjuntos del grupo L:

a) Las rotaciones ortocronas ($\det \Lambda$=1, $\Lambda^0{}_0 \geqslant 1$). Este conjunto es denotado por $L^{\uparrow}_{+}$ y forma un grupo. Dicho grupo se le conoce como *grupo propio de Lorentz* y de los subconjuntos del grupo de Lorentz es el que nos interesa en este trabajo.

b) Las reflexiones ortocronas ($\det \Lambda = -1$, $\Lambda^0{}_0 \geqslant 1$). Este conjunto es denotado por $L^{\uparrow}_{-}$.

c) Las rotaciones antiortocronas ($\det \Lambda$=1, $\Lambda^0{}_0 \leq -1$). Este subconjunto es denotado por $L^{\downarrow}_{+}$.

d) Las reflexiones antiortocronas ($\det \Lambda = -1$, $\Lambda^0{}_0 \leq -1$). Este conjunto es denotado por $L^{\downarrow}_{-}$.

Los cuatro conjuntos son mutuamente disconexos, es decir, no se puede pasar de manera continua de cualquiera de estos conjuntos a otro distinto de él.

2.4. El grupo $L_+^\uparrow$

El grupo propio de Lorentz es un grupo de Lie real de seis parámetros α_i, β_i; $i = 1, 2, 3$. Sus generadores en su representación matricial son[3]

$$w_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad w_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad w_{30} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

$$w_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, w_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, w_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Utilizando la definición de bivector (2.9) tenemos que (2.18) y (2.19) se pueden escribir como[4]

$$(w_{10})^\mu{}_\nu = e_1^\mu e_{0,\nu} - e_{1,\nu} e_0^\mu \tag{2.20}$$

$$(w_{20})^\mu{}_\nu = e_2^\mu e_{0,\nu} - e_{2,\nu} e_0^\mu \tag{2.21}$$

$$(w_{30})^\mu{}_\nu = e_3^\mu e_{0,\nu} - e_{3,\nu} e_0^\mu \tag{2.22}$$

$$(w_{32})^\mu{}_\nu = e_3^\mu e_{2,\nu} - e_{3,\nu} e_2^\mu \tag{2.23}$$

$$(w_{13})^\mu{}_\nu = e_1^\mu e_{3,\nu} - e_{1,\nu} e_3^\mu \tag{2.24}$$

$$(w_{21})^\mu{}_\nu = e_2^\mu e_{1,\nu} - e_{2,\nu} e_1^\mu \tag{2.25}$$

De (2.20)-(2.25) se sigue que los generadores de $L_+^\uparrow$ en su representación matricial son bivectores que generan rotaciones en los planos definidos por los 4-vectores e_0^μ, e_i^μ; $i = 1, 2, 3$. (2.18) generan rotaciones hiperbólicas y (2.19) rotaciones planas ordinarias. Un ejemplo de la transformación generada por $(w_{10})^\mu{}_\nu$ es la transformación de Lorentz entre dos sistemas inerciales que se mueven uno con respecto al otro a una velocidad constante en la dirección x, y cuyos ejes coinciden para un tiempo dado, mientras que un ejemplo de

---

[3] El concepto de grupo de Lie y de los generadores de un grupo de Lie se pueden ver en Hladik (1999) p. 42.

[4] La coma en (2.20)-(2.25) se usa para separar el índice que denota a qué 4-vector base nos referimos, del índice que denota que el 4-vector es covariante.

la transformación generada por $(w_{21})^{\mu}{}_{\nu}$ es una rotación alrededor del eje z, en coordenadas cartesianas, un ángulo β_3 en el espacio ordinario.

La transformación infinitesimal de $L_{+}^{\uparrow}$ es[5]

$$\begin{aligned} \lambda^{\mu}{}_{\nu} &= I + \delta\alpha_1 (w_{10})^{\mu}{}_{\nu} + \delta\alpha_2 (w_{20})^{\mu}{}_{\nu} + \delta\alpha_3 (w_{30})^{\mu}{}_{\nu} \\ &\quad +\delta\beta_1 (w_{32})^{\mu}{}_{\nu} + \delta\beta_2 (w_{13})^{\mu}{}_{\nu} + \delta\beta_3 (w_{21})^{\mu}{}_{\nu}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde δ significa que los parámetros son pequeños. Cualquier elemento de $L_{+}^{\uparrow}$ se puede obtener a partir de la transformación infinitesimal como[6]

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \lim_{N\to\infty} \left(I + \frac{G^{\mu}{}_{\nu}}{N} \right)^{N} \equiv e^{G^{\mu}{}_{\nu}} \tag{2.27}$$

con

$$\begin{aligned} G^{\mu}{}_{\nu} &= \alpha_1 (w_{10})^{\mu}{}_{\nu} + \alpha_2 (w_{20})^{\mu}{}_{\nu} + \alpha_3 (w_{30})^{\mu}{}_{\nu} \\ &\quad +\beta_1 (w_{32})^{\mu}{}_{\nu} + \beta_2 (w_{13})^{\mu}{}_{\nu} + \beta_3 (w_{21})^{\mu}{}_{\nu} \end{aligned} \tag{2.28}$$

y valores adecuados de los parámetros α_i, β_i. A esta transformación se le llama transformación finita y es una rotación en los seis planos del espacio-tiempo. En lo que sigue a $G^{\mu}{}_{\nu}$ lo llamaremos generador general de $L_{+}^{\uparrow}$.

2.5. El generador general de $L_{+}^{\uparrow}$ y el tensor de campo electromagnético

Utilizando (2.18), (2.19) y la expresión (1.8) dada en la sec. 1. 2 para el tensor de campo electromagnético, tenemos que

$$\begin{aligned} F^{\mu}_{\nu} &= E_1 (w_{10})^{\mu}{}_{\nu} + E_2 (w_{20})^{\mu}{}_{\nu} + E_3 (w_{30})^{\mu}{}_{\nu} \\ &\quad +B_1 (w_{32})^{\mu}{}_{\nu} + B_2 (w_{13})^{\mu}{}_{\nu} + B_3 (w_{21})^{\mu}{}_{\nu}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Comparando (2.28) y (2.29) vemos que el tensor de campo electromagnético tiene la misma estructura matemática que el generador general de $L_{+}^{\uparrow}$[7]. Así, con F^{μ}_{ν} podemos generar el grupo $L_{+}^{\uparrow}$ por medio de (2.27) teniendo en cuenta que debemos sustituir $G^{\mu}{}_{\nu}$ por λF^{μ}_{ν} donde λ es un factor que hace adimensional el exponente.

[5]Una exposición sencilla de los conceptos de transformación infinitesimal y transformación finita se pueden ver en Hladik (1999) y Wybourne (1974).

[6]Wybourne (1974) p. 42.

[7]Esto ya ha sido planteado anteriormente por Zwanziger (1965).

Capítulo 3

Exponencial del generador general de $L_+^\uparrow$

En este capítulo vamos a calcular la exponencial del generador general de $L_+^\uparrow$. Esta exponencial la usaremos en el capítulo 4 para obtener la exponencial del tensor de campo electromagnético.

La expresión para la exponencial de G ya se ha calculado, hasta donde sabemos, por cuatro métodos distintos al que se va a exponer aquí. Esto ha sido realizado por J. R. Zeni y W. A. Rodrigues Jr. (1990), K.N. Snivasa Rao (1996)[1], John Fredsted (2001) y J. H. Caltenco *et al* (2002). Uno de los propósitos por el cual se calcula esta transformación en el primer y cuarto trabajo es encontrar la solución de la fuerza de Lorentz-Minkowski cuando el campo electromagnético es constante. En los otros dos no hay ninguna aplicación física y sólo se hace desde un punto de vista matemático. En el primer trabajo se usan fórmulas de recurrencia e inducción, en el segundo y cuarto se usan métodos de álgebra lineal, mientras que en el tercero, se usa la teoría de representaciones.

En este trabajo escribimos la exponencial del generador general de $L_+^\uparrow$ de una manera distinta a como se ha escrito en los trabajos arriba mencionados. Esta forma de escribir la transformación tiene un interés físico, ya que cuando se utiliza para estudiar la acción de un campo electromagnético sobre una partícula aparece explícitamente el tensor de energía-momento. Esta característica no es mencionada en ninguno de los trabajos citados anteriormente.

[1] p. 483.

3.1. El generador general G

Hemos visto en la sec. 2. 4 que el grupo $L_+^\uparrow$ tiene seis parámetros y seis generadores. Estos últimos generan rotaciones en los seis planos del espacio-tiempo. A cada rotación corresponde un parámetro, el ángulo de rotación. También vimos que el generador general de $L_+^\uparrow$ es

$$\begin{aligned} G^\mu{}_\nu &= \alpha_1 (w_{10})^\mu{}_\nu + \alpha_2 (w_{20})^\mu{}_\nu + \alpha_3 (w_{30})^\mu{}_\nu \\ &\quad +\beta_1 (w_{32})^\mu{}_\nu + \beta_2 (w_{13})^\mu{}_\nu + \beta_3 (w_{21})^\mu{}_\nu . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Utilizando (2.18) y (2.19) tenemos que

$$G^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & \beta_3 & -\beta_2 \\ \alpha_2 & -\beta_3 & 0 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_2 & -\beta_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Nos interesa encontrar una expresión para

$$\Lambda = e^G. \tag{3.3}$$

Una forma de proceder para encontrar esta expresión es escribir (3.3) como una serie de potencias

$$\Lambda = e^G = I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G^{2n}}{(2n)!}. \tag{3.4}$$

De la expresión anterior vemos que si encontramos una relación de recurrencia entre la primera y la tercera potencia de G, entonces podemos expresar Λ en términos de funciones hiperbólicas o trigonométricas y de potencias finitas de G.

Así pues, investiguemos bajo qué condiciones se cumple

$$G^3 = g(\alpha, \beta)\, G \tag{3.5}$$

con g una función escalar de los parámetros.

3.2. Relación entre G y G^3

Usando (2.18), (2.19) y la definición (1.44) se tiene que

$$\begin{aligned} w_{10}^* &= -w_{32}; \quad w_{32}^* = w_{10} \\ w_{20}^* &= -w_{13}; \quad w_{13}^* = w_{20} \\ w_{30}^* &= -w_{21}; \quad w_{21}^* = w_{30} \end{aligned} \tag{3.6}$$

De manera que el dual de G, escrito como una combinación lineal de los generadores de rotaciones en el espacio-tiempo, es

$$\begin{aligned} G^* &= (\alpha_1 w_{10} + \alpha_2 w_{20} + \alpha_3 w_{30} + \beta_1 w_{32} + \beta_2 w_{13} + \beta_3 w_{21})^* \\ &= \alpha_1 w_{10}^* + \alpha_2 w_{20}^* + \alpha_3 w_{30}^* + \beta_1 w_{32}^* + \beta_2 w_{13}^* + \beta_3 w_{21}^* \\ &= -\alpha_1 w_{32} - \alpha_2 w_{13} - \alpha_3 w_{21} \\ &\quad +\beta_1 w_{10} + \beta_2 w_{20} + \beta_3 w_{30}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

De (3.7) vemos que G^* contiene, al igual que G, las rotaciones en los seis planos de espacio-tiempo aunque con distinto parámetro y las rotaciones espaciales en sentido inverso.

De (3.7) también vemos que la operación de "dualidad" se realiza sobre los generadores de rotaciones en el espacio-tiempo. Por lo cual, lo que algunos textos de electrodinámica[2] y relatividad[3] en los que obtienen el dual del tensor de campo electromagnético (recordemos que G y el tensor de campo electromagnético tienen la misma estructura matemática) dicen acerca de la operación de dualidad (a saber, que corresponde a intercambiar $E_i \rightarrow B_i$ y $B_i \rightarrow -E_i$) puede causar confusión al hacer parecer que la operación de dualidad tiene algo que ver con las componentes del campo, sin embargo, como lo estamos haciendo aquí queda claro que la operación de dualidad se realiza sobre los generadores y no sobre las componentes del campo.

Escribamos (3.7) como

$$(G^*)^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \beta_2 & \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ \beta_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

[2] Jackson (1999), p. 556.

[3] Rindler, W., *Introduction to special relativity*, Claredon Press. Oxford, 1991, p. 109.

Con el mismo procedimiento con el que llegamos a (1.40), utilizando (3.2) y (3.8) se obtiene

$$G^{*2} = G^2 - \left(\alpha^2 - \beta^2\right) I, \tag{3.9}$$

donde hemos definido

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \tag{3.10}$$

y

$$\boldsymbol{\beta} \equiv (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\,. \tag{3.11}$$

Si multiplicamos (3.9) por G obtenemos

$$G^3 = G^{*2}G + \left(\alpha^2 - \beta^2\right) G. \tag{3.12}$$

De la expresión anterior se ve que existe una relación de la forma (3.5) si

$$G^{*2} = 0 \tag{3.13}$$

o

$$G^{*}G = 0. \tag{3.14}$$

La condición (3.13) se cumple si

$$\alpha^2 = 0$$

y

$$\beta^2 = 0$$

lo cual implica que G y G^* son cero. Por lo tanto, no tiene sentido considerar este caso. La condición (3.14) se cumple si

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0. \tag{3.15}$$

Esto se puede comprobar observando que $GG^* = G^*G = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})\, I$. Así, la condición para que podamos encontrar una relación de la forma (3.5) es

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \tag{3.16}$$

Cuando se cumple (3.14), G y G^* son tensores planos[4]. Así, cuando se cumple (3.5) la transformación generada por G es una transformación planar[5].

[4] Bacry (1967), p. 256.

[5] Una demostración detallada de esta afirmación se puede ver en Srinivasa (1996), p. 456.

3.3. Transformación generada por un bivector

Analicemos la transformación generada por un bivector w. Este análisis se aplica a la transformación generada por G cuando se cumple (3.5), ya que en este caso G es un bivector.

De acuerdo con (2.10) (ver la sec. 2. 2) la transformación generada por w es

$$\Lambda = e^{\alpha w}, \tag{3.17}$$

donde α es un parámetro real.

Para analizar Λ, apliquémosla a un 4-vector arbitrario x^μ del espacio-tiempo.

Para un bivector se cumple la relación (ver apéndice C)

$$w^3 = \Delta^2 w \tag{3.18}$$

con $\Delta^2 = (a \cdot b)^2 - (a \cdot a)(b \cdot b)$.

Utilizando (3.18) tenemos que

$$\begin{aligned} w^{2n+1} &= \Delta^{2n} w; \quad n = 0, 1, 2, \ldots &(3.19)\\ w^{2n} &= \Delta^{2(n-1)} w^2; \quad n = 1, 2, 3, \ldots &(3.20) \end{aligned}$$

Si escribimos (3.17) como serie de potencias tenemos

$$\Lambda = I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha w)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha w)^{2n}}{(2n)!}. \tag{3.21}$$

Usando (3.19) y (3.20) en (3.21) obtenemos

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left(I - \frac{1}{\Delta^2} w^2\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\Delta)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \frac{w}{\Delta} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\Delta)^{2n}}{(2n)!}\right) \frac{w^2}{\Delta^2} \\ &= \left(I - \frac{1}{\Delta^2} w^2\right) + (\cosh(\alpha\Delta)) \frac{w^2}{\Delta^2} + (\sinh(\alpha\Delta)) \frac{w}{\Delta}. &(3.22) \end{aligned}$$

Esta transformación tiene tres operadores. Apliquemos (3.22) a x y analicemos que papel cumple cada término en la transformación. Con este propósito calculemos w^2. Multiplicando w por sí mismo obtenemos

$$\left(w^2\right)^\mu{}_\nu = (a \cdot b)\left[a^\mu b_\nu + a_\nu b^\mu\right] - a^2 \left(b^\mu b_\nu\right) - b^2 \left(a^\mu a_\nu\right). \tag{3.23}$$

Utilizando w y (3.23) tenemos

$$(wx)^\mu = a^\mu (b \cdot x) - b^\mu (a \cdot x)$$

y

$$\left(w^2 x\right)^\mu = \left[(a \cdot b)(b \cdot x) - b^2 (a \cdot x)\right] a^\mu + \left[(a \cdot b)(a \cdot x) - a^2 (b \cdot x)\right] b^\mu. \quad (3.24)$$

Es importante mencionar que los 4-vectores $w^2 x$ y wx son ortogonales entre sí[6].

Por lo tanto, se cumple que

$$wx \cdot w^2 x = 0. \quad (3.25)$$

Por otro lado, tenemos que[7]

$$wx \cdot x = 0, \quad (3.26)$$

es decir, x también es ortogonal a wx. De manera que x y $w^2 x$ definen un plano ortogonal a wx. De hecho, $w^2 x$ es paralelo a la proyección de x sobre el

[6] Esto se puede demostrar como sigue:

$$\begin{aligned} & \left[\left(w^2\right)^\mu_\nu x^\nu\right] \cdot w_{\mu\beta} x^\beta \\ = & \left\{\left[(a \cdot b)(b \cdot x) - b^2 (a \cdot x)\right] a^\mu + \left[(a \cdot b)(a \cdot x) - a^2 (b \cdot x)\right] b^\mu\right\} \\ & \left[a_\mu (b \cdot x) - b_\mu (a \cdot x)\right] \\ = & (a \cdot b)(b \cdot x)^2 a^2 - (a \cdot b)^2 (b \cdot x)(a \cdot x) \\ & - b^2 a^2 (a \cdot x)(b \cdot x) + b^2 (a \cdot x)^2 (a \cdot b) \\ & + (a \cdot b)^2 (a \cdot x)(b \cdot x) - b^2 (a \cdot b)(a \cdot x)^2 \\ & - a^2 (b \cdot x)^2 (a \cdot b) + a^2 b^2 (b \cdot x)(a \cdot x) \\ = & 0 \end{aligned}$$

[7]

$$w^\mu_\nu x^\nu = a^\mu (b \cdot x) - b^\mu (a \cdot x).$$

Multiplicando la expresión anterior por x_μ obtenemos

$$\begin{aligned} x_\mu w^\mu_\nu x^\nu &= x_\mu \left[a^\mu (b \cdot x) - b^\mu (a \cdot x)\right] \\ &= (x \cdot a)(b \cdot x) - (x \cdot b)(a \cdot x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

plano de rotación. De lo anterior se sigue que w^2 y w producen una proyección sobre el plano, longitudinal y transversal a x respectivamente.

Hasta aquí sólo hemos considerado a^μ y b^μ no colineales. Si ponemos la condición $a \cdot b = 0$ podemos analizar con más precisión los términos que aparecen en (3.22). Con esta condición tenemos que

$$\frac{w^2}{\Delta^2}x = (\hat{a}\cdot x)\,\hat{a}^\mu + \left(\hat{b}\cdot x\right)\hat{b}^\mu, \tag{3.27}$$

$$\frac{w}{\Delta}x = -i\left[\hat{a}^\mu\left(\hat{b}\cdot x\right) - \hat{b}^\mu\,(\hat{a}\cdot x)\right], \tag{3.28}$$

$$\left(1-\frac{w^2}{\Delta^2}\right)x = x^\mu - (\hat{a}\cdot x)\,\hat{a}^\mu + \left(\hat{b}\cdot x\right)\hat{b}^\mu \tag{3.29}$$

con $\hat{a}^\mu$ y $\hat{b}^\mu$ 4-vectores unitarios en la dirección de a y b respectivamente. De (3.27)-(3.29) se sigue que el primer término de (3.22) produce una componente de x que no es afectada por la transformación. Esta componente no pertenece al plano de rotación. El segundo término de (3.22) nos da la proyección de x sobre el plano de rotación, a este 4-vector lo llamaremos proyección longitudinal de x sobre el plano de rotación, y el tercer término nos da un vector ortogonal a la proyección de x sobre el plano de rotación, a este 4-vector lo llamaremos proyección transversal de x sobre el plano de rotación. Las funciones de a, b y α que multiplican a (3.27) y (3.28) determinan la "magnitud" de la rotación de la proyección de x sobre el plano de rotación.

Si además de $a \cdot b = 0$, a o b es nulo, por ejemplo b, entonces $\Delta = 0$. En este caso de (3.18) se sigue que

$$w^3 = 0.$$

Por lo tanto, de (3.24) resulta

$$\left(w^2 x\right)^\mu = -a^2\,(b\cdot x)\,b^\mu,$$

es decir, el 4-vector resultante de aplicar w^2 a x tiene la dirección de b y es proporcional a menos la magnitud al cuadrado de a y a la proyección de x sobre b.

3.4. La exponencial de G cuando G es nilpotente de orden tres

De (3.12) vemos que cuando se cumple (3.5) y

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2=0, \tag{3.30}$$

entonces

$$G^3=0. \tag{3.31}$$

En este caso la exponencial de G se hace fácilmente, ya que (3.4) está truncada. Usando (3.31) en (3.4) obtenemos[8]

$$\Lambda=e^G=1+G+\frac{1}{2}G^2. \tag{3.32}$$

3.5. Exponencial de G usando el isomorfismo entre $L_+^\uparrow$ y SO(3,C)

En esta sección vamos a encontrar la exponencial del generador general del grupo $L_+^\uparrow$ utilizando el isomorfismo entre $L_+^\uparrow$ y SO(3,C)[9,10].

Primero encontremos cuál es el generador general de SO(3,C). Esto lo podemos hacer como sigue: de acuerdo con Macfarlane[11] la transformación más general de SO(3,C), escrita como multiplicación de dos rotaciones, es

$$R=R_sR_p=\exp\left[i\theta\left(\hat{n}\cdot T\right)\right]\exp\left[-\chi\left(\hat{n}'\cdot T\right)\right], \tag{3.33}$$

donde $R_p=\exp\left[-\chi\left(\hat{n}'\cdot T\right)\right]$ corresponde a una transformación pura de Lorentz mientras que $R_S=\exp\left[i\theta\left(\hat{n}\cdot T\right)\right]$ corresponde a una rotación espacial, ambas en $L_+^\uparrow$. Los vectores $\hat{n}$ y $\hat{n}'$ son las direcciones de los ejes de rotación. Las matrices T están dadas por[12]

$$\left(T^j\right)^{ik}=i\varepsilon^{ijk} \tag{3.34}$$

[8] Este tipo de transformación se conoce como una transformación de Lorentz intermedia o cilíndrica, ver Bacry (1967), p. 257.

[9] El grupo SO(3,C) es el grupo de rotaciones en tres dimensiones espaciales complejas. En el apéndice B se exponen algunos aspectos del isomorfismo entre $L_+^\uparrow$ y SO(3,C).

[10] Las fórmula explícitasde este isomofismo ha sido publicada en Macfarlane (1962). Nosotros vamos a utilizar esta fórmula para encontrar la exponencial del generador general de $L_+^\uparrow$ partiendo de la exponencial del generador general de SO(3,C).

[11] Macfarlane (1962), Ec. 138.

[12] Ib. Ec. 81.

con ε^{ijk} el tensor de Levi-Civita en tres dimensiones[13]. De (3.34) se sigue que

$$\mathcal{T}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{T}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{T}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.35}$$

Si definimos

$$i\mathcal{T}^i = \mathrm{t}^i, \tag{3.36}$$

entonces

$$\mathrm{t}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{t}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{t}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

Utilizando (3.36) tenemos

$$R_p = \exp\left[i\chi n'^1 \mathrm{t}^1 + i\chi n'^2 \mathrm{t}^2 + i\chi n'^3 \mathrm{t}^3\right] \tag{3.38}$$

y

$$R_S = \exp\left[\theta n^1 \mathrm{t}^1 + \theta n^2 \mathrm{t}^2 + \theta n^3 \mathrm{t}^3\right]. \tag{3.39}$$

Por lo tanto, los generadores de SO(3,C) son (3.37) e it^i. Así, el generador general de SO(3,C) es

$$G_{SO(3,C)} = \alpha_i i\mathrm{t}^i + \beta_i \mathrm{t}^i = (\beta_i + i\alpha_i)\,\mathrm{t}^i = \vartheta_i \mathrm{t}^i \tag{3.40}$$

con $\vartheta_i = \beta_i + i\alpha_i$. Los parámetros α_i corresponden a los parámetros de las rotaciones hiperbólicas mientras que los parámetros β_i corresponden a los de rotaciones espaciales. Se encuentra que (ver apéndice C)

$$G^3_{SO(3,C)} = \vartheta^2 G_{SO(3,C)} \tag{3.41}$$

con $\vartheta^2 = -\left(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2\right)$. De la expresión anterior se obtiene que

$$G^{2n+1}_{SO(3,C)} = \vartheta^{2n} G_{SO(3,C)}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.42}$$

y

$$G^{2n}_{SO(3,C)} = \vartheta^{2(n-1)} G^2_{SO(3,C)}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.43}$$

[13]Las componentes de este tensor son 1 para una permutación par de los índices 1, 2 y 3 en ε^{123}, -1 para una permutación impar y cero cuando dos índices son iguales.

La transformación generada por $G_{SO(3,C)}$ es $R = e^{G_{SO(3,C)}}$, escribiendo ésta como una serie de potencias tenemos

$$R = e^{G_{SO(3,C)}} = I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_{SO(3,C)}^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_{SO(3,C)}^{2n}}{(2n)!}. \tag{3.44}$$

Utilizando (3.42) y (3.43) obtenemos

$$R = I + \frac{G_{SO(3,C)}^2}{\Theta^2} - \cos(\Theta) \frac{G_{SO(3,C)}^2}{\Theta^2} + \sin(\Theta) \frac{G_{SO(3,C)}}{\Theta} \tag{3.45}$$

con $\Theta = \left(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Escribamos $G_{SO(3,C)}$ y $G_{SO(3,C)}^2$ explícitamente

$$G_{SO(3,C)} = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_3 & -\vartheta_2 \\ -\vartheta_3 & 0 & \vartheta_1 \\ \vartheta_2 & -\vartheta_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.46}$$

$$G_{SO(3,C)}^2 = \begin{bmatrix} -\vartheta_2^2 - \vartheta_3^2 & \vartheta_1\vartheta_2 & \vartheta_1\vartheta_3 \\ \vartheta_1\vartheta_2 & -\vartheta_1^2 - \vartheta_3^2 & \vartheta_2\vartheta_3 \\ \vartheta_1\vartheta_3 & \vartheta_2\vartheta_3 & -\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2 \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Utilizando (3.46) y (3.47) en (3.45) obtenemos

$$R = \tag{3.48}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{(\cos(\Theta)-1)}{\Theta^2}\left(\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2\right) & \frac{(1-\cos(\Theta))}{\Theta^2}\vartheta_1\vartheta_2 + \frac{\sin(\Theta)}{\Theta}\vartheta_3 & \frac{(1-\cos(\Theta))}{\Theta^2}\vartheta_1\vartheta_3 - \frac{\sin(\Theta)}{\Theta}\vartheta_2 \\ \frac{(1-\cos(\Theta))}{\Theta^2}\vartheta_1\vartheta_2 - \frac{\sin(\Theta)}{\Theta}\vartheta_3 & 1 + \frac{(\cos(\Theta)-1)}{\Theta^2}\left(\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2\right) & \frac{(1-\cos(\Theta))}{\Theta^2}\vartheta_2\vartheta_3 + \frac{\sin(\Theta)}{\Theta}\vartheta_1 \\ \frac{(1-\cos(\Theta))}{\Theta^2}\vartheta_1\vartheta_3 + \frac{\sin(\Theta)}{\Theta}\vartheta_2 & \frac{(1-\cos(\Theta))}{\Theta^2}\vartheta_2\vartheta_3 - \frac{\sin(\Theta)}{\Theta}\vartheta_1 & 1 + \frac{(\cos(\Theta)-1)}{\Theta^2}\left(\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2\right) \end{bmatrix}$$

Ahora utilizaremos (3.48) para encontrar la exponencial del generador general de $L_+^\uparrow$. Esto lo tenemos que hacer en dos pasos. Primero encontraremos a que transformación en SL(2,C)[14] corresponde (3.48) y después a que transformación en $L_+^\uparrow$ corresponde la transformación que obtengamos en SL(2,C). La fórmula que relaciona el homeomorfismo entre SL(2,C) y $L_+^\uparrow$ es[15]

$$\pm A = \frac{1 + \sigma^i \sigma^j R^{ij}}{\left[4\left(1 + Tr\left(R\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.49}$$

[14]Este grupo es el grupo de matrices unitarias complejas de 2×2.

[15]Macfarlane (1962), Ec. 134.

con R^{ij} en $L_+^\uparrow$, A en SL(2,C) y σ^i las matrices de Pauli. Las matrices de Pauli son[16]

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \; \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

Calculemos A. Desarrollando $\sigma^i \sigma^j R^{ij}$ y utilizando[17]

$$\sigma^j \sigma^k + \sigma^k \sigma^j = 2\delta^{jk}$$

y

$$\sigma^j \sigma^k = \delta^{jk} + i\epsilon^{jkl}\sigma^l$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma^i \sigma^j R^{ij} \;\; = \;\; & \left(R^{11} + R^{22} + R^{33}\right) 1 + i\sigma^3 \left(R^{12} - R^{21}\right) \\ & -i\sigma^2 \left(R^{13} - R^{31}\right) + i\sigma^1 \left(R^{23} - R^{32}\right). \end{aligned}$$

Utilizando (3.48) en la expresión anterior tenemos

$$\sigma^i \sigma^j R^{ij} = \left(1 + 2\cos\left(\Theta\right)\right) 1 + 2i\frac{\sin\left(\Theta\right)}{\Theta}\left(\sigma^1\vartheta_1 + \sigma^2\vartheta_2 + \sigma^3\vartheta_3\right).$$

Entonces

$$1 + \sigma^i \sigma^j R^{ij} = 2\left(1 + \cos\left(\Theta\right)\right) + 2i\frac{\sin\left(\Theta\right)}{\Theta}\left(\sigma^1\vartheta_1 + \sigma^2\vartheta_2 + \sigma^3\vartheta_3\right). \tag{3.51}$$

Usando (3.48) podemos ver que

$$Tr(R) = 1 + 2\cos\left(\Theta\right).$$

Así

$$1 + Tr(R) = 2\left(1 + \cos\left(\Theta\right)\right). \tag{3.52}$$

Por lo tanto, utilizando (3.51) y (3.52) en (3.49) obtenemos

$$\pm A = \frac{\left(1 + \cos\left(\Theta\right)\right) 1 + \frac{i\sin(\Theta)}{\Theta}\left(\sigma^i\vartheta_i\right)}{\left[2\left(1 + \cos\left(\Theta\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.53}$$

Escribamos (3.53) como

$$\pm A = \left(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2\right) 1 + \left(\varepsilon_3 + i\varepsilon_4\right)\sigma^i\vartheta_i \tag{3.54}$$

[16]Ib. Ec. 19.
[17]Ib. Ec. 20.

con

$$\varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = \left[\frac{1+\cos(\Theta)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.55}$$

y

$$\varepsilon_3 + i\varepsilon_4 = \frac{i\sin(\Theta)}{\Theta\left[2\left(1+\cos(\Theta)\right)\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.56}$$

Haciendo un poco de álgebra se obtiene que (ver apéndice C)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left[\cos(x) + \cosh(y) + 1 + \cos(x)\cosh(y)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.57}$$

y

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left[\cos(x) + \cosh(y) - 1 - \cos(x)\cosh(y)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.58}$$

con

$$x^2 = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \left\{\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2 + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.59}$$

$$y^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \left\{\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2 + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.60}$$

De manera análoga (ver apéndice C)

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= \frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\left[y\left(\cosh(y) - \cos(x) + 1 - \cos(x)\cosh(y)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\left[x\left(\cosh(y) - \cos(x) - 1 + \cos(x)\cosh(y)\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.61}$$

y

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 &= \frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\left[x\left(\cosh(y) - \cos(x) + 1 - \cos(x)\cosh(y)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\left[y\left(\cosh(y) - \cos(x) - 1 + \cos(x)\cosh(y)\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.62}$$

Escribamos (3.54) de una manera distinta como

$$\pm A = (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\,1 + (\varepsilon_3 + i\varepsilon_4)\begin{bmatrix} \vartheta_3 & \vartheta_1 - i\vartheta_2 \\ \vartheta_1 + i\vartheta_2 & -\vartheta_3 \end{bmatrix}.$$

Haciendo las operaciones correspondientes tenemos que

$$\pm A = \begin{bmatrix} m+in & p+iq \\ r+is & h+iw \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

con

$$\begin{aligned} m &= \varepsilon_1 + \varepsilon_3\beta_3 - \varepsilon_4\alpha_3 \\ n &= \varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \varepsilon_4\beta_3 \\ p &= \varepsilon_3\alpha_2 + \varepsilon_3\beta_1 - \varepsilon_4\alpha_1 + \varepsilon_4\beta_2 \\ q &= \varepsilon_4\alpha_2 + \varepsilon_4\beta_1 + \varepsilon_3\alpha_1 - \varepsilon_3\beta_2 \\ r &= \varepsilon_3\beta_1 - \varepsilon_3\alpha_2 - \varepsilon_4\alpha_1 - \varepsilon_4\beta_2 \\ s &= \varepsilon_3\alpha_1 + \varepsilon_3\beta_2 + \varepsilon_4\beta_1 - \varepsilon_4\alpha_2 \\ h &= \varepsilon_1 + \varepsilon_4\alpha_3 - \varepsilon_3\beta_3 \\ w &= \varepsilon_2 - \alpha_3\varepsilon_3 - \varepsilon_4\beta_3 \end{aligned} \tag{3.64}$$

De (3.63) se sigue que

$$\pm A^\dagger = \begin{bmatrix} m-in & r-is \\ p-iq & h-iw \end{bmatrix}, \tag{3.65}$$

donde $A^\dagger$ es la matriz daga de A[18]. De acuerdo con Macfarlane la transformación en $L_+^\uparrow$ que le corresponde a $\pm A$ está dada por[19]

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} Tr\left(\rho^\mu A \sigma_v A^\dagger\right) \equiv \Lambda\left(A\right)^\mu_\nu, \tag{3.66}$$

Donde

$$\rho^\mu = \left(\sigma^0, -\sigma\right) = \sigma_\mu.$$

Es claro que de (3.66) obtenemos la misma transformación de Lorentz si usamos $+A$ o $-A$, así podemos utilizar $+A$.

Haciendo el cálculo, se obtiene

$$\Lambda^0{}_0 = \frac{1}{2}\left(m^2+n^2+p^2+q^2+r^2+s^2+h^2+w^2\right)$$

$$\Lambda^0{}_1 = -pm - qn - hr - ws$$

[18]La matriz daga de A se obtiene tomando su transpuesta y su compleja conjugada.
[19]Macfarlane (1962), Ec. 60.

$$
\begin{aligned}
\Lambda^0{}_2 &= -pn + qm - hs + wr \\
\Lambda^0{}_3 &= \frac{1}{2}\left(-m^2 - n^2 + p^2 + q^2 - r^2 - s^2 + h^2 + w^2\right) \\
\Lambda^1{}_0 &= -rm - sn - hp - wq \\
\Lambda^2{}_0 &= rn - sm + hq - wp \\
\Lambda^3{}_0 &= \frac{1}{2}\left(-m^2 - n^2 - p^2 - q^2 + r^2 + s^2 + h^2 + w^2\right) \\
\Lambda^1{}_1 &= hm + wn + rp + sq \\
\Lambda^1{}_2 &= hn - wm - rq + sp \\
\Lambda^1{}_3 &= rm + sn - hp - wq \\
\Lambda^2{}_1 &= -hn + wm - rq + sp \\
\Lambda^2{}_2 &= hm + wn - rp - sq \\
\Lambda^2{}_3 &= -rn + sm + hq - wp \\
\Lambda^3{}_1 &= pm + qn - hr - ws \\
\Lambda^3{}_2 &= pn - qm - hs + wr \\
\Lambda^3{}_3 &= \frac{1}{2}\left(m^2 + n^2 - p^2 - q^2 - r^2 - s^2 + h^2 + w^2\right)
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Calculando los términos de (3.67), se obtiene

$$
\begin{aligned}
\Lambda^0{}_0 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \\
\Lambda^0{}_1 &= 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\alpha_1 - 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\beta_1 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3\right) \\
\Lambda^0{}_2 &= 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\alpha_2 - 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\beta_2 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1\right) \\
\Lambda^0{}_3 &= 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\alpha_3 - 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\beta_3 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2\right) \\
\Lambda^1{}_0 &= 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\alpha_1 - 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\beta_1 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\right) \\
\Lambda^2{}_0 &= 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\alpha_2 - 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\beta_2 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3\right) \\
\Lambda^3{}_0 &= 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\alpha_3 - 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\beta_3 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\right) \\
\Lambda^1{}_1 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2\right) \\
\Lambda^1{}_2 &= 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\beta_3 + 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\alpha_3 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2\right) \\
\Lambda^1{}_3 &= 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\left(-\beta_2\right) - 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\alpha_2 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3\right)
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

$$\Lambda^2{}_1 = 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\left(-\beta_3\right) - 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\alpha_3 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2\right)$$
$$\Lambda^2{}_2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 + \beta_2^2 - \beta_1^2 - \beta_3^2\right)$$
$$\Lambda^2{}_3 = 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\beta_1 + 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\alpha_1 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3\right)$$
$$\Lambda^3{}_1 = 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\beta_2 + 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\alpha_2 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3\right)$$
$$\Lambda^3{}_2 = 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)\left(-\beta_1\right) - 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)\alpha_1 + 2\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3\right)$$
$$\Lambda^3{}_3 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(\alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_3^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2\right)$$

Tenemos que

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & \beta_3 & -\beta_2 \\ \alpha_2 & -\beta_3 & 0 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_2 & -\beta_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.69}$$

$$G^* = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \beta_2 & \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ \beta_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.70}$$

$$G^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3 & \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 & \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 \\ \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 & \alpha_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \alpha_2^2 - \beta_1^2 - \beta_3^2 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 & \alpha_3^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

y

$$G^{*2} = \begin{bmatrix} \beta^2 & \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3 & \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 & \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 \\ \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 & \beta_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \beta_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 & \beta_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \end{bmatrix}. \tag{3.72}$$

Construyendo con (3.68) la matriz $\Lambda(A)^\mu{}_\nu$ y utilizando (3.68), (3.69)-(3.72) obtenemos

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\right)1 + 2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right)G \\ &\quad -2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right)G^* + \left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right)\left(G^2 + G^{*2}\right). \end{aligned} \tag{3.73}$$

Utilizando (3.57), (3.58), (3.61) y (3.62) se obtiene

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = \frac{\cosh(y) + \cos(x)}{2}, \tag{3.74}$$

$$2\left(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3\right) = \frac{y\sinh(y) + x\sin(x)}{x^2+y^2}, \tag{3.75}$$

$$-2\left(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4\right) = \frac{x\sinh(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2}, \tag{3.76}$$

$$\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = \frac{1}{2}\frac{\cosh(y) - \cos(x)}{x^2+y^2}. \tag{3.77}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{1}{2}\left(\cosh(y) + \cos(x)\right) I \\
&+ \frac{1}{x^2+y^2}\left(y\sinh(y) + x\sin(x)\right) G \\
&+ \frac{1}{x^2+y^2}\left(x\sinh(y) - y\sin(x)\right) G^* \\
&+ \frac{1}{x^2+y^2}\left(\cosh(y) - \cos(x)\right)\frac{1}{2}\left[G^2 + G^{*2}\right].
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Esta es *la expresión para la exponencial del generador general de $L_+^\uparrow$.*

Utilizando[20]

$$G^{*2} = G^2 + \left(x^2 - y^2\right) I$$

en (3.78) obtenemos

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{1}{x^2+y^2}\left[x^2\cosh(y) + y^2\cos(x)\right] I \\
&+ \frac{1}{x^2+y^2}\left[y\sinh(y) + x\sin(x)\right] G \\
&+ \frac{1}{x^2+y^2}\left[x\sinh(y) - y\sin(x)\right] G^* \\
&+ \frac{1}{x^2+y^2}\left[\cosh(y) - \cos(x)\right] G^2.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Esta es la expresión para la exponencial de G que aparece en otros trabajos[21], así, la expresión que obtuvimos coincide con la de otros autores, lo cual

[20] Esta expresión es equivalente a (3.9), para comprobarlo basta sustituir x^2 y y^2.

[21] Es oportuno mencionar que la expresión dada por J. R. Zeni y W. A. Rodriguez difiere de (3.79) por un signo en la función que multiplica al dual del generador. Sin embargo, el método que usan estos autores es correcto, además si reproduce el cálculo con el método que ellos dan se obtiene la expresión (3.79). Quizá la diferencia en el signo se debe a un error en la publicación o a un pequeño error algebraico al momento de hacer el cálculo.

ratifica que la fórmula dada por Macfarlane para el isomorfismo entre $L_+^\uparrow$ y SO(3,C) es correcta.

Capítulo 4

La transformación $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = e^{\lambda F^{\mu}{}_{\nu}}$

En este capítulo mostraremos que el tensor de energía-momento del campo electromagnético es parte de la transformación finita generada por el tensor de campo electromagnético y estudiaremos cómo actúa ésta sobre el 4-momento de una partícula de masa m y carga q, poniendo énfasis en el papel que juega el tensor de energía-momento en dicha transformación. De este análisis obtendremos que la densidad de energía del campo electromagnético, el vector de Poynting y el tensor de esfuerzos de Maxwell intervienen en el cambio de dirección en el espacio-tiempo del 4-momento de la partícula. En este estudio consideraremos que el campo electromagnético y la partícula están en el vacío.

4.1. La transformación finita generada por el tensor de campo electromagnético

La acción del campo electromagnético sobre una partícula de masa m y carga q queda determinada por la fuerza de Lorentz-Minkowski

$$\frac{dp^{\mu}}{ds} = \frac{q}{c} F^{\mu}{}_{\nu} \dot{x}^{\nu}.$$

Utilizando $p^{\mu} = mc\dot{x}^{\mu}$ y omitiendo los índices, la expresión anterior la podemos escribir como[1]

$$\frac{dp}{ds} = \frac{q}{mc^2} Fp. \tag{4.1}$$

[1]Cuando un 4-vector lo escribamos sin índice será contravariante. También, el producto $A^{\mu}{}_{\nu}a^{\nu}$ lo escribiremos, la mayoría de veces, sin índices, como Aa.

Si F no depende de s, entonces la solución de (4.1) es

$$p' = e^{\frac{q}{mc^2}sF}p \tag{4.2}$$

con p el 4-momento cuando $s = 0$.

Si el campo electromagnético depende de s, pero la región en donde la partícula permanece un tiempo finito es tal que podamos considerar el campo electromagnético como constante en dicha región[2], entonces es válido usar (4.2) para analizar la evolución de la partícula.

En la sec. 2. 5 vimos que $e^{\lambda F}$ es una transformación de Lorentz. Identificando λ con $\frac{q}{mc^2}s$, de (4.2) se sigue que p' y p están relacionados mediante una transformación de Lorentz:

$$p' = \Lambda p \tag{4.3}$$

con[3]

$$\Lambda = e^{\lambda F}. \tag{4.4}$$

4.2. El tensor de energía-momento es un operador de Λ

En la sec. 2. 5 vimos que el generador general G y el tensor de campo electromagnético tienen la misma estructura matemática, por lo que podemos utilizar la exponencial del generador general G encontrada en la sec. 3. 5 para encontrar la exponencial de λF.

De acuerdo con la sec. 2. 5 para encontrar (4.4) se debe sustituir λF por

[2]Una situación como esta sucede cuando hay un campo de radiación y la región en donde la partícula permanece un tiempo finito es muy pequeña comparada con la longitud de onda de la radiación.

[3]Denotar a la transformación $e^{\lambda F}$ con la misma letra que con la que denotamos a la transformación que genera G (ver (3.78)) está justificado en el hecho de que λF y G generan la misma transformación (ver la sec. 2. 5 y la sec. 4. 2).

G, $\lambda\theta$ por x y $\lambda\eta$ por y en

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2}\left(\cosh(y)+\cos(x)\right) I \\ &+\frac{1}{x^2+y^2}\left(y\sinh(y)+x\sin(x)\right) G \\ &+\frac{1}{x^2+y^2}\left(x\sinh(y)-y\sin(x)\right) G^* \\ &+\frac{1}{x^2+y^2}\left(\cosh(y)-\cos(x)\right)\frac{1}{2}\left[G^2+G^{*2}\right] \end{aligned} \tag{4.5}$$

con

$$\theta = \left[-\frac{E^2-B^2}{2}+\left\{\left(\frac{E^2-B^2}{2}\right)^2+(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\eta = \left[\frac{E^2-B^2}{2}+\left\{\left(\frac{E^2-B^2}{2}\right)^2+(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Los campos que satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío cumplen con la condición $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$[4]. Así pues, para campos en el vacío:

$$\begin{aligned} \Lambda &= e^{\lambda F} \\ &= \frac{1}{2}\left[\cosh(\lambda\eta)+1\right] I+\frac{1}{\eta}\sinh(\lambda\eta) F \\ &\quad +\frac{1}{\eta^2}\left[\cosh(y)-1\right]\frac{1}{2}\left[F^2+F^{*2}\right], \end{aligned} \tag{4.6}$$

ya que $\theta = 0$ y $\eta = (E^2-B^2)^{\frac{1}{2}}$.

En la sec. 1. 4 vimos que el tensor de energía-momento del campo electromagnético se puede escribir como

$$T = \frac{1}{2}\left[F^2+F^{*2}\right]. \tag{1.43}$$

[4]Una solución de las ecuaciones de Maxwell en el vacío para campos dependientes del tiempo son ondas electromagnéticas, en esta situación se cumple $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$, ver, por ejemplo, Panofsky (1962), p.187; una solución para campos independientes del tiempo es $\mathbf{E}\neq\mathbf{0}$ y $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ ó $\mathbf{E}=\mathbf{0}$ y $\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$, ver, por ejemplo, Sommerfeld (1952), p. 37, en los últimos dos casos también se cumple $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$.

Utilizando (1.43) en (4.5)

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left[\cosh(\lambda\eta) + 1\right] I + \frac{1}{\eta}\sinh(\lambda\eta)\, F + \frac{1}{\eta^2}\left[\cosh(\lambda\eta) - 1\right] T. \tag{4.7}$$

De (4.6) se puede afirmar que el tensor de energía-momento, T, es un operador de la transformación finita generada por F. Esta transformación puede ser hiperbólica, espacial ordinaria o cilíndrica dependiendo de que $\eta^2 > 0$, $\eta^2 < 0$ ó $\eta^2 = 0$ respectivamente (ver la sec. 4. 3).

4.3. Λ es una transformación planar

Tenemos que

$$FF^{*} = 0, \tag{4.8}$$

ya que siempre se cumple $FF^{*} = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\, I$ (ver (A.10)). En la sec. 3. 2 vimos que cuando $GG^{*} = 0$, la transformación generada por G es planar. Por lo cual, teniendo en cuenta que $G = \lambda F$, de (4.7) se sigue que Λ es planar. Esta característica de Λ se ve más claramente si la escribimos como sigue. Ya que

$$F^{*2} = F^2 - \eta^2 I \tag{1.40}$$

la expresión (4.6) se puede escribir como

$$\Lambda = \left[I - \frac{F^2}{\eta^2}\right] I + \frac{\sinh(\lambda\eta)}{\eta} F + \frac{\cosh(\lambda\eta)}{\eta^2} F^2. \tag{4.9}$$

Hay tres casos:

Caso A) $\eta^2 > 0$. La expresión (4.8) no cambia y Λ es una rotación hiperbólica.

Caso B) $\eta^2 < 0$. De (4.8) se deduce que

$$\Lambda = \left[I + \frac{F^2}{\zeta^2}\right] I + \frac{\sin(\lambda\zeta)}{\zeta} F - \frac{\cos(\lambda\zeta)}{\zeta^2} F^2 \tag{4.10}$$

con $\zeta = (B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}$, en este caso Λ es una rotación espacial ordinaria[5].

[5] Para llegar a esta expresión hemos usado que $\eta = i\zeta$, $\cosh(i\xi) = \cos(\xi)$ y $\sinh(i\xi) = i\sin(\xi)$.

Caso C) $\eta^2 = 0$. De (4.8) resulta

$$\Lambda = I + \lambda F + \frac{\lambda^2}{2} F^2, \tag{4.11}$$

en este caso Λ es una rotación cilíndrica. Para obtener (4.10) hemos expandido las funciones hiperbólicas que aparecen en (4.8) en serie de potencias de $\lambda\eta$ y tomado el límite $E^2 - B^2 \to 0$, despreciando las potencias mayores que $(\lambda\eta)^2$. Este procedimiento es válido, ya que si escribimos $\Lambda = e^{\lambda F} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda F)^n}{n!}$ y tenemos en cuenta que si $E^2 - B^2 \to 0$, entonces la serie está truncada y se reduce a (4.10), debido a que[6] $F^3 \to 0$ y por consiguiente $F^n \to 0$ con $n > 3$.

4.4. Los operadores F y T en Λ

Sustituyendo (4.6) en (4.3)

$$p' = \frac{1}{2}\left[\cosh(\lambda\eta) + 1\right] p + \frac{1}{\eta}\sinh(\lambda\eta)\, Fp + \frac{1}{\eta^2}\left[\cosh(\lambda\eta) - 1\right] Tp. \tag{4.12}$$

Así, p' depende del papel que tienen F y T en Λ.

Los 4-vectores p, Fp y Tp satisfacen (ver apéndice D)

$$(Fp)\, p = 0 \tag{4.13}$$

y

$$(Fp)\,(Tp) = 0. \tag{4.14}$$

De este modo, cuando aplicamos F a p obtenemos un 4-vector ortogonal a p, es decir, F es un operador transversal, además Fp es ortogonal al plano determinado por p y Tp.

Los operadores F y T son piezas importantes de la electrodinámica clásica, ya que aparecen en las ecuaciones de Maxwell, en las leyes de conservación, etc. F interviene en la fuerza de Lorentz-Minkowski. El papel de T como operador es el siguiente. Consideremos tres casos: $E^2 = B^2$, $E^2 > B^2$ y $E^2 < B^2$.

---

[6] Cuando $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, $F^3 = \left(E^2 - B^2\right) F$ (ver (A.10)). En consecuencia, si $E^2 - B^2 \to 0$, entonces $F^3 \to 0$.

El primer caso corresponde a un campo de radiación. Una situación bastante general en donde aparece un campo de radiación es en el campo electromagnético debido a una carga puntual acelerada, dicho campo, que resulta de los potenciales de Lienard-Wiechert, está constituido por un campo de Coulomb y por un campo de radiación[7], así pues, primero veremos algunas peculiaridades de la transformación finita asociada con el tensor de campo electromagnético correspondiente a los potenciales de Lienard-Wiechert para después pasar al estudio de la transformación finita asociada sólo con el campo de radiación.

4.5. La transformación Λ cuando $F = F_C + F_R$

El tensor de campo electromagnético en su forma matricial para los potenciales de Lienard-Wiechert puede reducirse a la forma

$$F = F_C + F_R,$$

donde

$$F_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es el tensor que corresponde al campo de Coulomb y

$$F_R = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & 0 & 0 \\ E_1 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & -B_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es el tensor que corresponde al campo de radiación con $E_1 = B_3$.

De acuerdo con la sec. 4. 3, $\Lambda = e^{\lambda F}$ es una rotación hiperbólica, ya que $\eta^2 = E_1^2 + E_2^2 - B_3^2 = E_2^2 > 0$. En consecuencia

$$\Lambda = e^{\lambda F} = \left[I - \frac{F^2}{E_2^2}\right] I + \frac{\sinh(\lambda E_2)}{E_2} F + \frac{\cosh(\lambda E_2)}{E_2^2} F^2.$$

Se puede demostrar que

$$\Lambda = \Lambda_R \Lambda_C \Lambda_R^{-1}, \tag{4.15}$$

[7]Barut (1980), p. 169.

donde

$$\Lambda_R = e^{\lambda F_R}$$

y

$$\Lambda_C = e^{\lambda F_C}.$$

Para demostrar que se cumple (4.14) se puede utilizar la identidad[8]

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

para dos matrices A y B de la misma dimensión y regulares. Si $B = \Lambda_R$ y $A = \lambda F_C$, entonces

$$\Lambda_R \Lambda_C \Lambda_R^{-1} = e^{\Lambda_R \lambda F_C \Lambda_R^{-1}}$$

y sólo basta mostrar que

$$\Lambda_R \lambda F_C \Lambda_R^{-1} = \lambda\left(F_C + F_R\right) \tag{4.16}$$

para que la igualdad (4.14) quede demostrada. Veamos pues, que (4.15) en efecto se cumple. Tenemos que

$$\Lambda_R = I + \lambda F_R + \frac{\lambda^2}{2} F_R^2, \tag{4.17}$$

ya que $F_R^3 = 0$ (ver (4.10)). De manera análoga

$$\Lambda_R^{-1} = I - \lambda F_R + \frac{\lambda^2}{2} F_R^2.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Lambda_R \lambda F_C \Lambda_R^{-1} &= \left(I + \lambda F_R + \frac{\lambda^2}{2} F_R^2\right) \lambda F_C \left(I - \lambda F_R + \frac{\lambda^2}{2} F_R^2\right) \\
&= \left(\lambda F_C + \lambda^2 F_R F_C + \frac{\lambda^3}{2} F_R^2 F_C\right)\left(I - \lambda F_R + \frac{\lambda^2}{2} F_R^2\right) \\
&= \lambda F_C + \lambda^2 \left(F_R F_C - F_C F_R\right) + \frac{\lambda^3}{2}\left(F_R^2 F_C + F_C F_R^2\right) \\
&\quad -\lambda^3 \left(F_R F_C F_R\right) + \frac{\lambda^4}{2}\left(F_R F_C F_R^2 - F_R^2 F_C F_R\right) \qquad (4.18) \\
&\quad +\frac{\lambda^5}{4} F_R^2 F_C F_R^2.
\end{aligned}$$

[8] Wybourne (1974), p. 15.

Por otra parte

$$F_R F_C = E_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_3 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$F_C F_R = E_2 \begin{bmatrix} 0 & -B_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Restando las últimas dos igualdades y recordando que $E_1 = B_3$

$$F_R F_C - F_C F_R = E_2 \begin{bmatrix} 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ E_1 & -B_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_2 F_R. \tag{4.19}$$

Multiplicando (4.18) por F_R por la izquierda

$$F_R^2 F_C = F_R F_C F_R + E_2 F_R^2. \tag{4.20}$$

Aplicando F_R por la derecha a (4.18)

$$F_C F_R^2 = F_R F_C F_R - E_2 F_R^2. \tag{4.21}$$

Sumando (4.19) y (4.20) obtenemos

$$F_R^2 F_C + F_C F_R^2 = 2 F_R F_C F_R. \tag{4.22}$$

Multiplicando (4.19) por F_R por la derecha y teniendo en cuenta que $F_R^3 = 0$

$$F_R^2 F_C F_R = F_R F_C F_R^2. \tag{4.23}$$

Aplicando F_R por la derecha a (4.22) y utilizando que $F_R^3 = 0$

$$F_R^2 F_C F_R^2 = 0. \tag{4.24}$$

Usando (4.18), (4.21), (4.22) y (4.23) en (4.17) resulta

$$\Lambda_R \lambda F_C \Lambda_R^{-1} = \lambda F_C + \lambda^2 E_2 F_R.$$

Si $\lambda = E_2^{-1}$, entonces

$$\Lambda_R \lambda F_C \Lambda_R^{-1} = \lambda \left(F_C + F_R\right). \tag{4.15}$$

Por lo tanto, si $\lambda = E_2^{-1}$, entonces Λ es equivalente a una transformación de similaridad del campo de Coulomb por el campo de radiación.

4.6. La transformación Λ cuando $E^2 = B^2$

En este caso Λ es la misma transformación que Λ_R, pero omitiremos el subíndice R en Λ y F para simplificar la notación.

Utilizando en (4.16)

$$T = F^2 + \frac{1}{4}\left(F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu}\right) I \tag{1.41}$$

y

$$F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} = 2\left(B^2 - E^2\right) I \tag{1.42}$$

obtenemos

$$\Lambda = I + \lambda F + \frac{1}{2}\lambda^2 T. \tag{4.25}$$

Recordando que en nuestro sistema de referencia $\mathbf{E} = (E_1, 0, 0)$ y $\mathbf{B} = (0, 0, B_3)$ con $E_1 = B_3$, el tensor de campo electromagnético y el tensor de energía-momento son

$$F = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & 0 & 0 \\ E_1 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & -B_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$T = \begin{bmatrix} w & 0 & -S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & T_M^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $w = E_1^2$ la densidad de energía del campo, $S_2 = -E_1^2$ la componente y del vector de Poynting y $T_M^{22} = -E_1^2$ una componente del tensor de esfuerzos de Maxwell.

Aplicando Λ a p

$$p' = p + \lambda F p + \frac{\lambda^2}{2} T p. \tag{4.26}$$

Escribamos el bivector[9] que genera a Λ: en general

$$\begin{aligned} F^{\mu}{}_{\nu} &= E_1\,(w_{10})^{\mu}{}_{\nu} + E_2\,(w_{20})^{\mu}{}_{\nu} + E_3\,(w_{30})^{\mu}{}_{\nu} \\ &\quad + B_1\,(w_{32})^{\mu}{}_{\nu} + B_2\,(w_{13})^{\mu}{}_{\nu} + B_3\,(w_{21})^{\mu}{}_{\nu}\,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

[9]En la sec. 2. 2 se da la definición de un bivector.

Como en este caso sólo hay componente x del campo eléctrico y componente z del campo magnético (2.29) se reduce a

$$F^{\mu}_{\nu} = E_1\,(w_{10})^{\mu}{}_{\nu} + B_3\,(w_{21})^{\mu}{}_{\nu}\,,$$

recordando que

$$(w_{10})^{\mu}{}_{\nu} = e_1^{\mu} e_{0,\nu} - e_{1,\nu} e_0^{\mu}, \tag{2.20}$$

$$(w_{21})^{\mu}{}_{\nu} = e_2^{\mu} e_{1,\nu} - e_{2,\nu} e_1^{\mu}, \tag{2.25}$$

resulta

$$\begin{aligned} F^{\mu}_{\nu} &= E_1\,(e_1^{\mu} e_{0,\nu} - e_{1,\nu} e_0^{\mu}) + B_3\,(e_2^{\mu} e_{1,\nu} - e_{2,\nu} e_1^{\mu}) \\ &= E_1\,[e_1^{\mu}\,(e_{0,\nu} - e_{2,\nu}) - e_{1,\nu}\,(e_0^{\mu} - e_2^{\mu})] \\ &= W^{\mu}_{\nu} \end{aligned}$$

con

$$W^{\mu}_{\nu} \equiv e_1^{\mu} k_{\nu} - e_{1,\nu} k^{\mu}$$

y

$$k^{\mu} \equiv E_1\,(e_0^{\mu} - e_2^{\mu})\,.$$

Como e_1^{μ} y k^{μ} son ortogonales y k^{μ} es nulo[10], entonces el discriminante $\Delta = (e_1 \cdot k) - (e_1^{\mu} e_{1,\mu})\,(k^{\mu} k_{\mu})$ es cero, esto ratifica que Λ es una transformación cilíndrica[11].

4.6.1. Invariancia de la norma de p bajo Λ

Se puede demostrar que $p'^2 = p^2$ de la siguiente manera: haciendo el producto interno de p' consigo mismo

$$\begin{aligned} p'^2 &= p^2 + 2\lambda\,(Fp)\,p + \lambda^2\left[(Tp)\,p + (Fp)^2\right] \\ &\quad + \lambda^3\,(Fp)\,(Tp) + \frac{\lambda^4}{4}\,(Tp)^2\,. \end{aligned}$$

[10] $k^{\mu} k_{\mu} = E_1^2\,(e_0^{\mu} - e_2^{\mu})\,(e_{0,\mu} - e_{2,\mu}) = E_1^2\,(e_0^{\mu} e_{0,\mu} + e_2^{\mu} e_{2,\mu}) = E_1^2\,(1-1) = 0.$

[11] En la sec. 2. 2 se clasificó a las transformaciones planares en: transformaciones hiperbólicas, espaciales ordinarias o cilíndricas dependiendo de que el discriminante de los 4-vectores que forman el bivector que genera la transformación sea mayor que cero, menor que cero o igual a cero, respectivamente.

Usando (4.12) y (4.13) en la expresión anterior

$$p'^2 = p^2 + \lambda^2 \left[(Tp)\, p + (Fp)^2\right] + \frac{\lambda^4}{4} (Tp)^2 . \tag{4.27}$$

Como $E^2 = B^2$

$$(Tp)\, p + (Fp)^2 = 0, \tag{4.28}$$

ya que en todo caso se cumple $(Tp)\, p + (Fp)^2 = -\frac{\left(E^2 - B^2\right)}{2} p^2$ (ver (D.1)). También

$$(Tp)^2 = 0, \tag{4.29}$$

ya que siempre se satisface $(Tp)^2 = \left[\left(\frac{E^2 - B^2}{2}\right)^2 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2\right] p^2$ (ver (D.2)). Utilizando (4.27) y (4.28) en (4.26)

$$p'^2 = p^2.$$

4.6.2. El 4-vector Tp es nulo

El tercer término del lado derecho de (4.25) es un 4-vector nulo. Esto se puede ver de dos maneras:

1) De (4.28) se sigue que Tp es nulo, ya que $Tp \neq (0, 0, 0, 0)$.

2) Proyectando a p sobre k y utilizando

$$p^{\mu} = \frac{\mathcal{E}}{c} \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \tag{4.30}$$

obtenemos

$$p^{\mu} k_{\mu} = E_1 \left(p^0 - p^2\right) = \frac{\mathcal{E}}{c} E_1 \left(1 + \frac{v_2}{c}\right). \tag{4.31}$$

Multiplicando (4.30) por el negativo de la norma al cuadrado de e_2^{μ} y por k^{μ}

$$\left(p^{\nu} k_{\nu}\right) k^{\mu} = \frac{\mathcal{E}}{c} E_1 \left(1 + \frac{v_2}{c}\right) k^{\mu} = \frac{\mathcal{E}}{c} E_1^2 \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{v_2}{c}\right) \\ 0 \\ -\left(1 + \frac{v_2}{c}\right) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Recordando que $w = E_1^2$, $S_2 = -E_1^2$ y $T_M^{22} = -E_1^2$ resulta

$$\left(p^{\nu} k_{\nu}\right) k^{\mu} = \frac{\mathcal{E}}{c} \begin{bmatrix} w - S_2 v_2 \\ 0 \\ S_2 + T_M^{22} v_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, aplicando T a p

$$Tp = \frac{\mathcal{E}}{c} \begin{bmatrix} w - S_2 v_2 \\ 0 \\ S_2 + T_M^{22} v_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

El lado derecho de las últimas dos expresiones es igual, por lo cual, Tp es un 4-vector nulo, ya que k^{μ} lo es. También, Tp es proporcional a la proyección de p sobre k^{μ} y al negativo de la norma al cuadrado de e_2^{μ}. El plano determinado por e_1^{μ} y k^{μ} es un plano cilíndrico[12] ya que contiene sólo una dirección nula, la dirección de k^{μ}, así Tp está sobre el plano de rotación y tiene la dirección de la única dirección nula que contiene dicho plano.

De (4.31) vemos que Tp es un 4-vector cuya única componente espacial distinta de cero es la componente y. Las peculiaridades de este 4-vector son una consecuencia de la forma de T, es decir, T proyecta a p en la intersección del cono de luz con el plano cty debido a que la densidad de energía, el vector de Poynting y el único elemento del tensor de esfuerzos de Maxwell distinto de cero tienen la misma magnitud y a que sólo hay flujo de momento, descrito por S_2, en la dirección menos y. Esto muestra que la propiedad que tiene T de proyectar un 4-vector sobre el cono de luz no tiene que ver con el 4-vector que se considere sino con las características del campo. Por lo cual, debido a estas características una parte del 4-momento p' es un 4-vector nulo, que puede interpretarse como la absorción o la generación de un 4-vector luz al actuar el campo Λ sobre p.

4.6.3. Análisis del cambio del 4-momento, p, por componentes

De (4.25), (4.29) y recordando que $\mathcal{E} = \gamma mc^2$, $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ y $\lambda = sq/mc^2$ se deduce que la componente cero de p' es

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \frac{s}{c}\gamma\,(q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}) + \frac{s}{c}\gamma\frac{sq^2}{2mc}\,(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v})\,. \tag{4.33}$$

De esta expresión vemos que $\mathcal{E}'$ es la suma de la energía inicial de la partícula, del trabajo que hace el campo sobre la carga en un tiempo $\frac{s}{c}\gamma$, dicho trabajo

[12] En la sec. 2. 1 se clasificó a los planos del espacio-tiempo de acuerdo al número de direcciones nulas que contienen. Teniendo en cuenta esta clasificación, el plano determinado por e_1^{μ} y k^{μ} es un plano cilíndrico.

depende de la orientación entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{v}$, y de la energía por unidad de tiempo[13] $\frac{sq^2}{2mc}\,(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v})$ multiplicada por el tiempo $\frac{s}{c}\gamma$, la cual depende de w y de la orientación entre $\mathbf{S}$ y $\mathbf{v}$. El término $(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v})$ tiene un valor máximo cuando $\mathbf{S}$ y $\mathbf{v}$ son antiparalelos y un valor mínimo cuando son paralelos.

Es interesante ver que si tenemos en cuenta que $\mathbf{S}$ representa un flujo de energía y que $\mathbf{v}$ define en cada punto una superficie bidimensional a la cual es ortogonal, la igualdad (4.32) la podemos interpretar de la siguiente manera: si consideramos una vecindad pequeña en el espacio-tiempo alrededor de la posición de la partícula, entonces la energía contenida en esa vecindad, $\mathcal{E}'$, después de que ha pasado un tiempo $\frac{s}{c}\gamma$ a partir de que el campo empezó a actuar sobre la partícula está constituida por la energía inicial de la partícula, $\mathcal{E}$, el trabajo que el campo ha realizado sobre la partícula, $\frac{s}{c}\gamma\,(q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})$, el cual está dentro de la vecindad ya que la partícula lo está, de la energía, $\frac{s}{c}\gamma\frac{sq^2}{2mc}w$, que es proporcional a la energía del campo contenida en la vecindad y de la energía, $-\frac{s}{c}\gamma\frac{sq^2}{2mc}\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}$, que ha fluido a través de la superficie cuya normal tiene la dirección de $\mathbf{v}$. De acuerdo con esta interpretación la igualdad (4.32) expresa la conservación local de energía en el sentido que dicha conservación es en una vecindad pequeña del espacio-tiempo.

Utilizando (4.32), el cambio de energía de la partícula, $\Delta\mathcal{E}{=}\mathcal{E}' - \mathcal{E}$, dividido por el tiempo, $\frac{s}{c}\gamma$, es[14]

$$\Delta\mathcal{E}/\left(\frac{s}{c}\gamma\right) = (q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}) + \frac{sq^2}{2mc}\,(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v})\,.$$

De esta expresión se sigue que cuando $\frac{s}{c}\gamma \to 0$ el cambio de energía en el tiempo $\frac{s}{c}\gamma$ se reduce a $(q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})$, que es la componente cero de la fuerza de Lorentz-Minkowski, en consecuencia para que w y $\mathbf{S}$ intervengan en la

---

[13] Las unidades de $\frac{sq^2}{2mc}\,(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v})$ son:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{sq^2}{2mc}\,(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v})\right] \\ = &\left[c\frac{sq^2}{2mc^2}\,(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v})\right] = \frac{longitud}{tiempo}\frac{(longitud)\,(carga)^2}{(fuerza)\,(longitud)}\frac{(fuerza)^2}{(carga)^2} \\ = &\frac{longitud}{tiempo}fuerza = \frac{energía}{tiempo}. \end{aligned}$$

[14] $\Delta\mathcal{E}/\left(\frac{s}{c}\gamma\right)$ se puede interpretar como un cambio promedio en la energía durante el tiempo $\frac{s}{c}\gamma$.

modificación de la energía de la partícula es necesario que el campo actúe sobre la partícula un tiempo finito.

Si la partícula inicialmente sólo tiene 3-velocidad en el plano yz, es decir, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}=0$, entonces

$$\Delta\mathcal{E}/\left(\frac{s}{c}\gamma\right) = \frac{sq^2}{2mc}\left(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v}\right).$$

En este caso $\Delta\mathcal{E}/\left(\frac{s}{c}\gamma\right)$ depende esencialmente de cómo actúa T sobre p.

Si la partícula inicialmente está en reposo en el laboratorio, es decir, $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, entonces

$$\Delta\mathcal{E}/\left(\frac{s}{c}\gamma\right) = \frac{sq^2}{2mc}w.$$

De esta expresión se sigue que si la intensidad del campo es mayor éste transmite más energía a la partícula, confirmando lo evidente.

Por otro lado, si la energía de la partícula cambia, entonces la energía del campo también debe cambiar, veamos cómo sucede esto. Por conservación de energía, la energía que gana la partícula debe ser igual a la que pierde el campo

$$\Delta\mathcal{E} = -\Delta\mathcal{E}_c$$

con $\mathcal{E}_c$ la energía del campo (ver (1.21)). En consecuencia

$$\mathcal{E}_c' = \mathcal{E}_c - \frac{s}{c}\gamma\left(q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\right) + \frac{s}{c}\gamma\frac{sq^2}{2mc}\left(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v}\right). \tag{4.34}$$

Por otro lado

$$\mathcal{E}_c = \int\limits_V w dV. \tag{1.21}$$

Utilizando (1.21) en (4.33)

$$\begin{aligned}\int\limits_V w_{final} dV &= \int\limits_V w_{inicial} dV - \frac{s}{c}\gamma\left(q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\right) \\ &\quad -\frac{s}{c}\gamma\frac{sq^2}{2mc}\left(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v}\right).\end{aligned} \tag{4.35}$$

La densidad w que aparece en el tercer término del lado derecho de (4.34), al igual que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{S}$, está evaluada en donde está definido p^{μ}, es decir, en el plano tangente a la curva descrita por la partícula. Así, w es un valor particular de $w_{inicial}$, ya que $w_{inicial}$, de la misma manera que w_{final}, tiene un valor en cada punto del espacio. Por lo tanto, el cambio de la energía del campo en todo el espacio se debe a efectos locales sobre la trayectoria de la partícula.

De (4.25), (4.29) y recordando que $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ y $\lambda = sq/mc^2$ se deduce que el cambio en las componentes espaciales de p es

$$\Delta p^1 = \frac{s}{c}\gamma q \left(E_1 + B_2 \frac{v^2}{c} \right), \tag{4.36}$$

$$\Delta p^2 = -\frac{s}{c}\gamma \left(q B_3 \frac{v^1}{c} \right) + \frac{s}{c}\gamma \frac{sq^2}{2mc^2} \left(S_2 + T_M^{22} \frac{v^2}{c} \right), \tag{4.37}$$

$$\Delta p^3 = 0. \tag{4.38}$$

El cambio en p^1 es la fuerza de Lorentz en la dirección x multiplicada por el tiempo $\frac{s}{c}\gamma$. Aquí no interviene T debido a que $S_1 = 0$ y $T_M^{11} = E_1^2 - B_3^2 = 0$. El cambio en p^2 es la fuerza de Lorentz en la dirección y multiplicada por el tiempo $\frac{s}{c}\gamma$ más la fuerza[15] $\frac{sq^2}{2mc^2}\left(S_2 + T_M^{22} \frac{v^2}{c} \right)$ multiplicada por el tiempo $\frac{s}{c}\gamma$, esta última depende del vector de Poynting, de $T_M^{22} = \frac{1}{2}\left(-E_1^2 - B_3^2\right)$ y de la velocidad $\mathbf{v}$. Mientras que en p^3 no hay cambio debido a que la fuerza de Lorentz en esa dirección es cero y a que $T_M^{33} = B_3^2 - E_1^2 = 0$.

Es interesante notar que si tenemos en cuenta que T^{ij} representa en el espacio ordinario un flujo de momento en la dirección i a través de una superficie cuya normal tiene la dirección j y que $\mathbf{v}$ define en cada punto una superficie bidimensional a la cual es ortogonal las igualdades (4.35), (4.36) y (4.37) las podemos interpretar de la siguiente manera: si consideramos una vecindad pequeña en el espacio-tiempo alrededor de la posición de la partícula, entonces el 3-momento, $\mathbf{p}'$, de la partícula después de que el campo ha actuado

[15]Las unidades de $\frac{sq^2}{2mc^2}\left(S_2 + T_M^{22} \frac{v^2}{c} \right)$ son:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{sq^2}{2mc^2} \left(S_2 + T_M^{22} \frac{v^2}{c} \right) \right] &= \frac{longitud\,(carga)^2}{masa\left(\frac{longitud}{tiempo}\right)^2} \frac{(fuerza)^2}{(carga)^2} \\
&= \frac{(tiempo)^2}{masa\,(longitud)}\,(fuerza)^2 \\
&= \frac{1}{fuerza}\,(fuerza)^2 = fuerza
\end{aligned}$$

sobre ésta un tiempo $\frac{s}{c}\gamma$ está formado por el 3-momento inicial de la partícula, $\mathbf{p}$, el 3-momento que el campo le transmite mediante la fuerza de Lorentz, $\frac{s}{c}\gamma\left(q\left(E_1 + B_2\frac{v^2}{c}\right), -qB_3\frac{v^1}{c}, 0\right)$, el 3-momento, $\frac{s}{c}\gamma\left(0, \frac{s}{c}\gamma\frac{sq^2}{2mc^2}S_2, 0\right)$, que es proporcional al 3-momento contenido en la vecindad y por el 3-momento, $\frac{s}{c}\gamma\left(0, \frac{s}{c}\gamma\frac{sq^2}{2mc^2}T_M^{22}\frac{v^2}{c}, 0\right)$ que ha fluido a traves de la superficie cuya normal tiene la dirección de $\mathbf{v}$. De acuerdo con esta interpretación las igualdades (4.35), (4.36) y (4.37) expresan la conservación local de 3-momento en el sentido de que dicha conservación es en una vecindad pequeña del espacio-tiempo.

Utilizando (4.35), (4.36) y (4.37) resulta que las componentes del cambio de 3-momento de la partícula divididas por el tiempo, $\frac{s}{c}\gamma$, son[16]

$$\Delta p^1 / \left(\frac{s}{c}\gamma\right) = q\left(E_1 + B_2\frac{v^2}{c}\right),$$

$$\Delta p^2 / \left(\frac{s}{c}\gamma\right) = -\left(qB_3\frac{v^1}{c}\right) + \frac{sq^2}{2mc^2}\left(S_2 + T_M^{22}\frac{v^2}{c}\right),$$

$$\Delta p^3 / \left(\frac{s}{c}\gamma\right) = 0.$$

De la misma manera que en el caso de la energía, si $\frac{s}{c}\gamma \to 0$, entonces el cambio del 3-momento en el tiempo $\frac{s}{c}\gamma$ es la componente espacial de la fuerza de Lorentz-Minkowski, por lo cual para que intervengan S_2 y T_M^{22} en la modificación del 3-momento es necesario que el campo actúe un tiempo finito sobre la partícula.

Si la partícula inicialmente sólo tiene 3-velocidad en el plano yz, es decir, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} = 0$, entonces $\Delta p^1/\left(\frac{s}{c}\gamma\right)$ y $\Delta p^2/\left(\frac{s}{c}\gamma\right)$ son los mismos que antes mientras que

$$\Delta p^2 / \left(\frac{s}{c}\gamma\right) = \frac{sq^2}{2mc^2}\left(S_2 + T_M^{22}\frac{v^2}{c}\right).$$

En este caso $\Delta p^2/\left(\frac{s}{c}\gamma\right)$ depende esencialmente de cómo actúa T sobre p.

Si la 3-velocidad de la partícula inicialmente no tiene componentes en el plano xy, es decir, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{S}\cdot\mathbf{v} = 0$, entonces

$$\Delta p^2 / \left(\frac{s}{c}\gamma\right) = \frac{sq^2}{2mc^2}S_2.$$

---

[16] $\frac{\Delta \mathbf{p}}{\left(\frac{s}{c}\gamma\right)}$ puede interpretarse como un cambio promedio en el 3-momento durante el tiempo $\frac{s}{c}\gamma$.

En este caso el cambio del 3-momento tiene la dirección del vector de Poynting. Por lo tanto, la modificación del 3-momento de una partícula que inicialmente se mueva en la dirección z tiene la dirección del vector de Poynting. Recordando que $S_2 = -E_1^2$ de la expresión anterior se sigue que

$$\Delta p^2 / \left(\frac{s}{c}\gamma\right) = -\frac{sq^2}{2mc^2} E_1^2. \tag{4.39}$$

Así, el cambio del 3-momento de la partícula en la dirección de la propagación de la onda electromagnética es proporcional a la densidad de energía del campo electromagnético en el punto en donde está situada dicha partícula. Un resultado similar se obtuvó en las sec. 1. 3. 2 y 1. 3. 3 cuando se calculó el momento transferido por una onda electromagnética a un elemento de superficie de una pared. Sin embargo, en (4.38) aparece la carga y la masa que son propiedades intrínsecas de la partícula.

4.7. La transformación Λ cuando $E^2 > B^2$

Aplicando (4.8) a p

$$p' = \left[I - \frac{F^2}{\eta^2}\right] p + \frac{\sinh(\lambda\eta)}{\eta} F p + \frac{\cosh(\lambda\eta)}{\eta^2} F^2 p. \tag{4.40}$$

Ya hemos dicho que Λ es una transformación planar y de acuerdo con la exposición hecha en la sec. 3. 3 del papel de los operadores que intervienen en una transformación planar: la componente de p ortogonal al plano de rotación, la cual no es modificada bajo la transformación y que denotaremos como $p_{\perp}$ es

$$p_{\perp} \equiv \left[I - \frac{F^2}{\eta^2}\right] p; \tag{4.41}$$

la proyección transversal de p sobre el plano de rotación, que llamaremos p_{Tra}, es

$$p_{Tra} \equiv \frac{1}{\eta} F p; \tag{4.42}$$

mientras que la proyección longitudinal de p sobre el plano de rotación, que denotaremos como $p_{\parallel}$, es

$$p_{\parallel} \equiv \frac{1}{\eta^2} F^2 p. \tag{4.43}$$

El plano de rotación está determinado por (4.41) y (4.42). Por otro lado, de

$$F^{*2} = F^2 - \eta^2 I \tag{1.40}$$

se tiene que

$$I - \frac{F^2}{\eta^2} = -\frac{F^{*2}}{\eta^2}. \tag{4.44}$$

De (4.40) y (4.41) se sigue que

$$\frac{F^{*2}}{\eta^2} p = -p_{\perp}. \tag{4.45}$$

Utilizando (4.42) y (4.44)

$$\begin{aligned} Tp &= \frac{1}{2}\left[F^2 + F^{*2}\right] p \\ &= \frac{\eta^2}{2}\left[p_{\parallel} - p_{\perp}\right]. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Por lo tanto, Tp es un 4-vector que resulta de hacer una reflexión de p con respecto al plano de rotación y multiplicar al 4-vector reflejado por $\frac{\eta^2}{2}$. En particular si $p_{\perp} = 0$, entonces

$$Tp = \frac{\eta^2}{2} p. \tag{4.47}$$

De (4.11), (4.41) y (4.45) se obtiene

$$\begin{aligned} p' - p &= \frac{1}{2}\left[\cosh(\lambda\eta) - 1\right] p \\ &\quad + \sinh(\lambda\eta)\, p_{Tra} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\cosh(\lambda\eta) - 1\right]\left(p_{\parallel} - p_{\perp}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cambio en la componente ortogonal al plano de rotación producido por T se cancela con el cambio debido a p y sólo queda

$$p' - p = \left[\cosh(\lambda\eta) - 1\right] p_{\parallel} + \sinh(\lambda\eta)\, p_{Tra}. \tag{4.48}$$

Así, la dirección de $\Delta p = p' - p$ es una combinación lineal de $p_{\parallel}$ y p_{Tra}. El 4-vector p_{Tra} es esencialmente la fuerza de Lorentz-Minkowski. Exploremos las características de $p_{\|}$. El cuadrado de F es (ver (A. 3))

$$F^2 = \begin{bmatrix} E^2 & -S_1 & -S_2 & -S_3 \\ S_1 & E_1^2 - B_2^2 - B_3^2 & T_M^{12} & T_M^{13} \\ S_2 & T_M^{21} & E_2^2 - B_1^2 - B_3^2 & T_M^{23} \\ S_3 & T_M^{31} & T_M^{32} & E_3^2 - B_1^2 - B_2^2 \end{bmatrix}. \tag{4.49}$$

El cuadrado de F^* es (ver (A. 4)

$$F^{*2} = \begin{bmatrix} B^2 & -S_1 & -S_2 & -S_3 \\ S_1 & B_1^2 - E_2^2 - E_3^2 & T_M^{12} & T_M^{13} \\ S_2 & T_M^{21} & B_2^2 - E_1^2 - E_3^2 & T_M^{23} \\ S_3 & T_M^{31} & T_M^{32} & B_3^2 - E_1^2 - E_2^2 \end{bmatrix}. \tag{4.50}$$

De (4.48) y (4.49) vemos que F^2 y F^{*2} tienen los mismos elementos fuera de la diagonal. Teniendo en cuenta esto y que

$$T = \frac{1}{2}\left[F^2 + F^{*2}\right] \tag{1.43}$$

se sigue que los elementos de la diagonal de T están formados por dos partes distintas: una que proviene de F^2 y otra de F^{*2}. Por supuesto, también los elementos de T fuera de la diagonal provienen de F^2 y de F^{*2}, sin embargo, como dichos elementos en ambos operadores son iguales no tiene sentido hacer una distinción cuando forman los elementos de T. Los elementos diagonales de T son: ρ, T_M^{11}, T_M^{22} y T_M^{33} (ver la sec. 1. 3. 1), los cuales podemos escribir como

$$\rho = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right) = \frac{1}{2}\left(\rho_E + \rho_B\right), \tag{4.51}$$

$$T_M^{11} = \frac{1}{2}\left[\left(E_1^2 - B_2^2 - B_3^2\right) + \left(B_1^2 - E_2^2 - E_3^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left[T_F^{11} + T_{F^*}^{11}\right], \tag{4.52}$$

$$T_M^{22} = \frac{1}{2}\left[\left(E_2^2 - B_1^2 - B_3^2\right) + \left(B_2^2 - E_1^2 - E_3^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left[T_F^{22} + T_{F^*}^{22}\right], \tag{4.53}$$

$$T_M^{33} = \frac{1}{2}\left[\left(E_3^2 - B_1^2 - B_2^2\right) + \left(B_3^2 - E_1^2 - E_2^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left[T_F^{33} + T_{F^*}^{33}\right]. \tag{4.54}$$

Aquí, hemos dividido a los elementos diagonales de T en la parte que proviene de F^2 y en la que proviene de F^{*2}. Utilizando (4.50)-(4.53) y (4.42) resulta

$$p_{\|} = \frac{1}{\eta^2}\frac{\mathcal{E}}{c}\begin{bmatrix} \rho_E - \mathbf{S}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c} \\ S_1 + T_F^{11}\frac{v^1}{c} + T_M^{12}\frac{v^2}{c} + T_M^{13}\frac{v^3}{c} \\ S_2 + T_M^{21}\frac{v^1}{c} + T_F^{22}\frac{v^2}{c} + T_M^{23}\frac{v^3}{c} \\ S_3 + T_M^{31}\frac{v^1}{c} + T_M^{32}\frac{v^2}{c} + T_F^{33}\frac{v^3}{c} \end{bmatrix}. \tag{4.55}$$

Por lo tanto, de (4.47) y (4.54) se sigue que una parte del cambio de la energía, el debido a $p_{\|}$ y por consiguiente relacionado con T, depende de la densidad de energía correspondiente al campo eléctrico, ρ_E, y de la orientación entre $\mathbf{S}$ y $\mathbf{v}$. Cuando $\mathbf{S}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma dirección dicho cambio es menor que cuando tienen direcciones contrarias. Si $\mathbf{S}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, el vector de Poynting no interviene en la modificación. La modificación en el 3-momento debido a $p_{\|}$ depende del vector de Poynting, de los elementos fuera de la diagonal del tensor de esfuerzos de Maxwell, de una parte de los elementos diagonales del tensor de esfuerzos de Maxwell, aquella que viene de F^2, y de la 3-velocidad de la partícula. En partícular si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces la modificación del 3-momento tiene la dirección del vector de Poynting; si además este 3-vector es cero, sólo hay modificación de la energía.

4.7.1. La transformación Λ cuando $\mathbf{B} = 0$

De (4.11) se deduce que

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left[\cosh\left(\lambda E\right) + 1\right] I + \frac{1}{E}\sinh\left(\lambda E\right) F + \frac{1}{E^2}\left[\cosh\left(\lambda E\right) - 1\right] T,$$

ya que $\eta = E$.

Es ilustrativo escribir el bivector[17] que genera a Λ: en general

$$\begin{aligned} F^{\mu}{}_{\nu} &= E_1\left(w_{10}\right)^{\mu}{}_{\nu} + E_2\left(w_{20}\right)^{\mu}{}_{\nu} + E_3\left(w_{30}\right)^{\mu}{}_{\nu} \\ &\quad + B_1\left(w_{32}\right)^{\mu}{}_{\nu} + B_2\left(w_{13}\right)^{\mu}{}_{\nu} + B_3\left(w_{21}\right)^{\mu}{}_{\nu}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Como en este caso sólo hay campo eléctrico (2.29) se reduce a

$$F^{\mu}{}_{\nu} = E_1\left(w_{10}\right)^{\mu}{}_{\nu} + E_2\left(w_{20}\right)^{\mu}{}_{\nu} + E_3\left(w_{30}\right)^{\mu}{}_{\nu},$$

recordando que

$$\left(w_{10}\right)^{\mu}{}_{\nu} = e_1^{\mu} e_{0,\nu} - e_{1,\nu} e_0^{\mu} \tag{2.20}$$

$$\left(w_{20}\right)^{\mu}{}_{\nu} = e_2^{\mu} e_{0,\nu} - e_{2,\nu} e_0^{\mu} \tag{2.21}$$

$$\left(w_{30}\right)^{\mu}{}_{\nu} = e_3^{\mu} e_{0,\nu} - e_{3,\nu} e_0^{\mu} \tag{2.22}$$

resulta

$$F^{\mu}{}_{\nu} = e^{\mu} e_{0,\nu} - e_{\nu} e_0^{\mu}$$

[17] En la sec. 2. 2 se da la definición de un bivector.

con $e^{\mu} \equiv E_1 e_1^{\mu} + E_2 e_2^{\mu} + E_3 e_3^{\mu}$. Por lo cual, F es un bivector determinado por e^{μ} y e_0^{μ}. Por lo tanto, cuando sólo hay campo eléctrico el 4-momento de la partícula es rotado, mediante una rotación hiperbólica, en el plano determinado por e^{μ} y e_0^{μ}.

Si escogemos nuestro sistema de referencia de manera que $\mathbf{E} = (E_1, 0, 0)$, la transformación

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left[\cosh(\lambda E_1) + 1\right] I + \frac{1}{E_1}\sinh(\lambda E_1)\, F + \frac{1}{E_1^2}\left[\cosh(\lambda E_1) - 1\right] T$$

es una rotación en el plano ctx. De aquí se sigue que sólo se modificarán la energía y la componente uno del 3-momento de la partícula. Las componentes dos y tres del 3-momento permanecen sin cambio.

4.8. La transformación Λ cuando $B^2 > E^2$

Aplicando (4.9) a p

$$p' = \left[I + \frac{F^2}{\zeta^2}\right] p + \frac{\sin(\lambda\zeta)}{\zeta} F p - \frac{\cos(\lambda\zeta)}{\zeta} F^2 p. \tag{4.56}$$

Teniendo en cuenta que Λ es una transformación planar y la exposición hecha en la sec. 3. 3 del papel de los operadores que intervienen en una transformación planar: la componente de p ortogonal al plano de rotación, la cual queda invariante bajo Λ y que denotaremos como $p_{\perp}$ es

$$p_{\perp} \equiv \left[I + \frac{F^2}{\zeta^2}\right] p; \tag{4.57}$$

la proyección transversal de p sobre el plano de rotación, que llamaremos p_{Tra}, es

$$p_{Tra} \equiv \frac{1}{\zeta} F p; \tag{4.58}$$

mientras que la proyección longitudinal de p sobre el plano de rotación, que denotaremos como $p_{\parallel}$, es

$$p_{\parallel} \equiv -\frac{1}{\zeta^2} F^2 p. \tag{4.59}$$

El plano de rotación está determinado por (4.57) y (4.58). Por otro lado, de

$$F^{*2} = F^2 - \eta^2 I \tag{1.40}$$

y de $\eta = i\zeta$ se tiene que

$$I + \frac{F^2}{\zeta^2} = \frac{F^{*2}}{\zeta^2}. \tag{4.60}$$

De (4.56) y (4.59) se sigue que

$$\frac{F^{*2}}{\zeta^2} p = p_{\perp}. \tag{4.61}$$

De (4.58) y (4.60)

$$\begin{aligned} Tp &= \frac{1}{2}\left[F^2 + F^{*2}\right] p \\ &= \frac{\zeta^2}{2}\left[p_{\perp} - p_{\parallel}\right]. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Por lo tanto, Tp es un 4-vector que resulta al hacer una inversión en la componente de p paralela al plano de rotación y multiplicar al 4-vector que resulte de dicha inversión por $\frac{\zeta^2}{2}$.

De (4.11), (4.57) y (4.61) se obtiene

$$\begin{aligned} p' - p &= \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda\zeta) - 1\right] p \\ &\quad + \sin(\lambda\zeta)\, p_T \\ &\quad - \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda\zeta) - 1\right]\left(p_{\perp} - p_{\parallel}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cambio en la componente ortogonal al plano de rotación producida por T se cancela con el cambio debido a p y sólo queda

$$p' - p = \left[\cos(\lambda\zeta) - 1\right] p_{\parallel} + \sin(\lambda\zeta)\, p_{Tra}. \tag{4.63}$$

Así, la dirección de $\Delta p = p' - p$ es una combinación lineal de $p_{\parallel}$ y p_{Tra}. El 4-vector p_{Tra} es esencialmente la fuerza de Lorentz-Minkowski. Exploremos las características de $p_{\parallel}$. La discusión sobre como están formados los elementos de T dada en la sec. 4. 7 también es válida en este caso. Por lo cual, de (4.48), (4.50)-(4.53) y (4.58) se sigue que

$$p_{\parallel} = -\frac{1}{\zeta^2}\frac{\mathcal{E}}{c}\begin{bmatrix} \rho_E - \mathbf{S}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c} \\ S_1 + T_F^{11}\frac{v^1}{c} + T_M^{12}\frac{v^2}{c} + T_M^{13}\frac{v^3}{c} \\ S_2 + T_M^{21}\frac{v^1}{c} + T_F^{22}\frac{v^2}{c} + T_M^{23}\frac{v^3}{c} \\ S_3 + T_M^{31}\frac{v^1}{c} + T_M^{32}\frac{v^2}{c} + T_F^{33}\frac{v^3}{c} \end{bmatrix}. \tag{4.64}$$

De (4.62) y (4.63) vemos que el cambio en la energía, debido a $p_{\parallel}$ y por consiguiente relacionado con T, depende la densidad de energía correspondiente al campo eléctrico y de la orientación entre el vector de Poynting y $\mathbf{v}$. Mientras que la modificación del 3-momento debida a $p_{\parallel}$ depende del vector de Poynting, de los elementos del tensor de esfuerzos fuera de la diagonal, de una parte de los elementos diagonales del tensor de esfuerzos de Maxwell, aquellos que provienen de F^2, así como de la velocidad. En particular si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces la modificación en el 3-momento tiene la dirección del vector de Poynting.

4.8.1. La transformación Λ cuando $\mathbf{E} = \mathbf{0}$

De (4.11) se obtiene

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda B) + 1\right] I + \frac{1}{B}\sin(\lambda B)\, F - \frac{1}{B^2}\left[\cos(\lambda B) - 1\right] T.$$

ya que $\eta{=}iB$. Ya que Λ es una transformación espacial ordinaria, cuando sólo hay campo magnético el 4-momento de la partícula sólo es rotado espacialmente y por consiguiente su componente temporal permanece sin cambio. Esto muestra el hecho conocido de que el campo magnético no realiza trabajo. Así, el hecho de que el campo magnético no realice trabajo podemos verlo como una consecuencia de que las transformaciones asociadas con éste son rotaciones espaciales.

Si escogemos nuestro sistema de referencia de manera que $\mathbf{B} = (B_1, 0, 0)$, la transformación

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda B_1) + 1\right] I + \frac{1}{B_1}\sin(\lambda B_1)\, F - \frac{1}{B_1^2}\left[\cos(\lambda B_1) - 1\right] T.$$

es una rotación en el plano yz. Por consiguiente, sólo se modificarán las componentes y y z del 3-momento de la partícula; la energía y el 3-momento en x no cambian.

4.9. 4-vectores asociados con el campo electromagnético

Cuando hicimos los cálculos para demostrar (D.2) encontramos que

$$w^2 - \mathbf{S}\cdot\mathbf{S} = \left(\frac{E^2 - B^2}{2}\right)^2 + (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2 \qquad (4.65)$$

$$S_1^2 - \left(T^{11}\right)^2 - \left(T^{12}\right)^2 - \left(T^{13}\right)^2 = -\left(\frac{E^2 - B^2}{2}\right)^2 - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2 \tag{4.66}$$

$$S_2^2 - \left(T^{21}\right)^2 - \left(T^{22}\right)^2 - \left(T^{23}\right)^2 = -\left(\frac{E^2 - B^2}{2}\right)^2 - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2 \tag{4.67}$$

$$S_3^2 - \left(T^{31}\right)^2 - \left(T^{32}\right)^2 - \left(T^{33}\right)^2 = -\left(\frac{E^2 - B^2}{2}\right)^2 - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2 \tag{4.68}$$

$$-wS_1 - S_1T_M^{11} - S_2T_M^{21} - S_3T_M^{31} = 0 \tag{4.69}$$

$$-wS_2 - S_1T_M^{12} - S_2T_M^{22} - S_3T_M^{32} = 0 \tag{4.70}$$

$$-wS_3 - S_1T_M^{13} - S_2T_M^{23} - S_3T_M^{33} = 0 \tag{4.71}$$

$$S_1S_2 - T_M^{11}T_M^{12} - T_M^{21}T^{22} - T_M^{31}T_M^{32} = 0 \tag{4.72}$$

$$S_1S_3 - T_M^{11}T_M^{13} - T_M^{21}T^{23} - T_M^{31}T_M^{33} = 0 \tag{4.73}$$

$$S_2S_3 - T_M^{12}T_M^{13} - T_M^{22}T^{23} - T_M^{32}T_M^{33} = 0 \tag{4.74}$$

Por otra parte, si se hace el producto interno de $T^{\mu}{}_{\nu}$con los 4-vectores base $e_0^{\nu} = (1,0,0,0)$, $e_1^{\nu} = (0,1,0,0)$, $e_2^{\nu} = (0,0,1,0)$, $e_3^{\nu} = (0,0,0,1)$ se obtiene

$$T^{\mu}{}_{\nu}e_0^{\nu} = S^{\mu} = (w, \mathbf{S})\,, \tag{4.75}$$

$$T^{\mu}{}_{\nu}e_1^{\nu} = P_1^{\mu} = \left(-S_1, T_M^{11}, T_M^{12}, T_M^{13}\right), \tag{4.76}$$

$$T^{\mu}{}_{\nu}e_2^{\nu} = P_2^{\mu} = \left(-S_2, T_M^{21}, T_M^{22}, T_M^{23}\right), \tag{4.77}$$

$$T^{\mu}{}_{\nu}e_3^{\nu} = P_3^{\mu} = \left(-S_3, T_M^{31}, T_M^{32}, T_M^{33}\right). \tag{4.78}$$

Así pues, resulta que las normas al cuadrado de estos cuatro 4-vectores son precisamente (4.64)-(4.67) mientras que los productos internos entre ellos son (4.68)-(4.73). Consecuentemente la igualdad (D.2) se cumple debido a las características de (4.74)-(4.77).

Los 4-vectores (4.68)-(4.73) no parecen tener algún significado físico inmediato, sin embargo, a S^{μ} se le puede dar una interpretación física interesante: para una onda plana electromagnética, el 3-vector $\mathbf{S}$ tiene la dirección de la propagación de la onda, y si tenemos en cuenta que dicha propagación tiene la rapidez de la luz y que S^{μ} tiene la misma estructura "matemática" que la densidad de corriente

$$j^{\mu} = (\rho, \mathbf{j})\,, \tag{1.6}$$

entonces, al menos para este caso, S^{μ} se puede interpretar como una corriente de energía del campo electromagnético en el espacio-tiempo.

Capítulo 5

Conclusiones

Las expresiones para $e^{\lambda F^{\mu}{}_{\nu}}$, de la forma:

$$e^{\lambda F^{\mu}{}_{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu} + \lambda F^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\lambda^2 T^{\mu}_{\nu}$$

cuando $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y $E^2 = B^2$ y

$$e^{\lambda F^{\mu}_{\nu}} = \frac{1}{2}\left[\cosh(\lambda\eta) + 1\right]\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{\eta}\sinh(\lambda\eta)\, F^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{\eta^2}\left[\cosh(\lambda\eta) - 1\right] T^{\mu}_{\nu}$$

cuando $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y $E^2 \neq B^2$, donde $\eta = (E^2 - B^2)^{\frac{1}{2}}$, muestran que el tensor de energía-momento del campo electromagnético, T^{μ}_{ν}, es un operador de la transformación finita, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = e^{\lambda F^{\mu}{}_{\nu}}$.

El cambio de dirección en el espacio-tiempo, en un tiempo finito, del 4-momento, $p^{\mu} = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right)$, de una partícula de masa m y carga q debido a un campo de radiación, es

$$\Delta p^{\mu} = \lambda F^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu} + \frac{1}{2}\lambda^2 T^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}.$$

Por lo que, la fuerza de Lorentz-Minkowski, $F^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}$, y por $T^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}$ tienen un papel esencial en dicho cambio. Para llegar a esta conclusión hemos supuesto que la longitud de onda de la radiación es muy grande comparada con la región en donde la partícula se mueve. Así, el campo puede considerarse constante en dicha región.

$T^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}$ es un 4-vector luz. Este hecho es una consecuencia de que para un campo de radiación en el vacío: $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y $E^2 = B^2$. En virtud de que

$T^{\mu}{}_{\nu}p^{\nu}$ es un 4-vector luz que resulta de la acción de $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ sobre p^{μ}, se puede interpretar como un 4-vector luz generado o absorbido debido a la acción de $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ sobre p^{μ}. El concepto de generar o absorber un 4-vector no causa confusión si entendemos ésto, simplemente, como la acción de un operador sobre un 4-vector que tiene como resultado otro 4-vector (el 4-vector generado o absorbido).

La transferencia de 4-momento del campo a la partícula, vista por componentes, es:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{s}{c}\gamma\left(q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\right) + \frac{s}{c}\gamma\frac{sq^2}{2mc}\left(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v}\right)$$

para la componente temporal y

$$\Delta\mathbf{p} = \frac{s}{c}\gamma q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right) + \frac{s}{c}\gamma\frac{sq^2}{2mc^2}\left(\mathbf{S} + T^{ij}_{M}\frac{v^j}{c}\right)$$

para la parte espacial. Así, el cambio de dirección de p^{μ} no sólo depende de los elementos de la fuerza de Lorentz-Minkowski, $q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$ y $q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)$, y del tiempo $\frac{s}{c}\gamma$ durante el cual el campo actúa sobre la partícula, sino también de $\frac{sq^2}{2mc}\left(w - \mathbf{S}\cdot\mathbf{v}\right)$, que se puede interpretar como una energía por unidad de tiempo que el campo transmite a la partícula, y de $\frac{sq^2}{2mc^2}\left(\mathbf{S} + T^{ij}_{M}\frac{v^j}{c}\right)$, que se puede interpretar como un 3-momento por unidad de tiempo que el campo transmite a la partícula; esta energía y este 3-momento transmitidos por unidad de tiempo están asociados con la acción de $T^{\mu}{}_{\nu}$ sobre p^{μ}. El hecho de que la densidad de energía del campo, el vector de Poynting y el tensor de esfuerzos de Maxwell intervengan en la modificación de la dirección del 4-momento de la partícula es interesante, ya que usualmente dicha modificación sólo se asocia con las componentes de la fuerza de Lorentz-Minkowski.

Siempre que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$, la transformación $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ asociada con el campo electromagnético es una rotación planar. En el caso de un campo de radiación dicha rotación tiene lugar en un plano tangente al cono de luz. Este plano está determinado por un 4-vector luz con componente espacial en la dirección del vector de Poynting y por un 4-vector espacial con componente temporal igual a cero y con componente espacial en la dirección del campo eléctrico.

Así, pues, se concluye que $T^{\mu}{}_{\nu}$, al igual que $F^{\mu}{}_{\nu}$, como operador de $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ tiene el papel de proyectar en una dirección del espacio-tiempo en donde hay cambio del 4-momento p^{μ}. Dicha dirección depende de las características del campo electromagnético en cuestión, de p^{μ} y de funciones cuadráticas del campo electromagnético, como la densidad de energía del campo, el vector de

Poynting y el tensor de esfuerzos de Maxwell. En particular, para un campo de radiación $T^{\mu}_{\ \nu}$ proyecta a p^{μ} sobre el cono de luz y consecuentemente una parte del cambio de p^{μ} es un 4-vector luz. La parte espacial de dicho 4-vector es paralela al vector de Poynting.

Tomando como base la expresión para $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ dada en este trabajo, Eq. (4.6), y teniendo en cuenta que $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ es una transformación de Lorentz y que mediante una tranformación de Lorentz es posible relacionar cantidades vectoriales que representan entidades físicas, en dos sistemas de referencia inerciales, se podría explorar la relación de dichas entidades físicas con las funciones del campo electromagnético que aparecen en $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$. Por ejemplo, si no hay campo magnético en nuestro sistema de referencia (sistema del laboratorio), K, y el campo eléctrico sólo tiene componente en x, entonces $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ es una rotación hiperbólica (boost) en el plano ctx. Por otro lado, es posible encontrar un sistema de referencia inercial, K', que se mueva con respecto a K con cierta velocidad de manera que la transformación de Lorentz que relaciona ambos sistemas inerciales sea precisamente $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$. Por supuesto, esta velocidad dependería del campo electromagnético en K. Bajo estas condiciones, la energía y consecuentemente la masa de una partícula cargada en K' dependería del campo electromagnético en K, sin embargo, para un observador en K' dicha masa sería simplemente la masa de la partícula y no le importaría si hay un campo electromagnético en otro sistema de referencia que tiene influencia sobre dicha masa. Así, con este planteamiento se podría explorar la dependencia de la masa de una partícula cargada en un sistema de referencia inercial con respecto al campo electromagnético en otro sistema de referencia inercial.

Tomando como base este trabajo se puede estudiar la transformación $e^{\lambda H^{\mu}_{\ \nu}}$ donde $H^{\mu}_{\ \nu}$ es un tensor con las mismas características matemáticas que $F^{\mu}_{\ \nu}$, pero construido con el vector de desplazamiento, **D**, y con el campo magnético, **H**, en lugar de **E** y **B**. La expresión para esta transformación se puede obtener a partir de la expresión para $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$, basta sustituir **E** por **D** y **B** por **H**. Se puede suponer que la transformación $e^{\lambda H^{\mu}_{\ \nu}}$ está relacionada con la acción del campo electromagnético en medios materiales homogéneos e isotrópicos sobre partículas con masa y carga, de manera análoga a $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ para el vacío, y explorar como intervienen las potencias de $H^{\mu}_{\ \nu}$ en dicha acción. Un aspecto interesante de este planteamiento es que en la expresión para $e^{\lambda H^{\mu}_{\ \nu}}$ aparece un término cuadrático que juega el papel del tensor de energía-momento, $T^{\mu}_{\ \nu}$, en $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$, por lo que se puede estudiar que relación tiene este término cuadrático con las expresiones que se han propuesto para el tensor de energía-momento para medios materiales. En este análisis se tiene que considerar que en un medio material homogéneo e isotrópico la velocidad de propagación de la luz es $u = \frac{c}{n}$ con n el índice de refracción del medio el cual se supone independiente de la frecuencia.

También, teniendo en cuenta que $p'^{\mu} = mc\frac{dx^{\mu}}{ds} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}p^{\nu}$ se puede estudiar la trayectoria de una partícula en un campo, basta integrar con respecto a s.

Apéndice A

Identidades donde intervienen F y F^*

Utilizando (1.8) obtenemos

$$F^2 =$$

$$\begin{bmatrix} E^2 & -(E_2B_3 - E_3B_2) & -(E_3B_1 - E_1B_3) & -(E_1B_2 - E_2B_1) \\ E_2B_3 - E_3B_2 & E_1^2 - B_2^2 - B_3^2 & E_1B_1 + E_2B_2 & E_1B_1 + E_3B_3 \\ E_3B_1 - E_1B_3 & E_1B_1 + E_2B_2 & E_2^2 - B_1^2 - B_3^2 & E_2B_2 + E_3B_3 \\ E_1B_2 - E_2B_1 & E_1B_1 + E_3B_3 & E_2B_2 + E_3B_3 & E_3^2 - B_1^2 - B_2^2 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

De manera análoga de (1.39) resulta que

$$F^{*2} =$$

$$\begin{bmatrix} B^2 & -(E_2B_3 - E_3B_2) & -(E_3B_1 - E_1B_3) & -(E_1B_2 - E_2B_1) \\ E_2B_3 - E_3B_2 & B_1^2 - E_2^2 - E_3^2 & E_1B_1 + E_2B_2 & E_1B_1 + E_3B_3 \\ E_3B_1 - E_1B_3 & E_1B_1 + E_2B_2 & B_2^2 - E_1^2 - E_3^2 & E_2B_2 + E_3B_3 \\ E_1B_2 - E_2B_1 & E_1B_1 + E_3B_3 & E_2B_2 + E_3B_3 & B_3^2 - E_1^2 - E_2^2 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Usando (1.19) y (1.20) en (A.1) y (A.2)

$$F^2 = \begin{bmatrix} E^2 & -S_1 & -S_2 & -S_3 \\ S_1 & E_1^2 - B_2^2 - B_3^2 & T_M^{12} & T_M^{13} \\ S_2 & T_M^{21} & E_2^2 - B_1^2 - B_3^2 & T_M^{23} \\ S_3 & T_M^{31} & T_M^{32} & E_3^2 - B_1^2 - B_2^2 \end{bmatrix}, \tag{A.3}$$

$$F^{*2}=\begin{bmatrix} B^2 & -S_1 & -S_2 & -S_3 \\ S_1 & B_1^2-E_2^2-E_3^2 & T_M^{12} & T_M^{13} \\ S_2 & T_M^{21} & B_2^2-E_1^2-E_3^2 & T_M^{23} \\ S_3 & T_M^{31} & T_M^{32} & B_3^2-E_1^2-E_2^2 \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

De (A.3) y (A.4) se sigue que

$$F^{*2}=F^2-\left(E^2-B^2\right)I. \tag{1.40}$$

Tenemos que

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-F^{\mu}_{\ \nu}F^{\nu}_{\ \mu}. \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned} F^{\mu}_{\ \nu}F^{\nu}_{\ \mu} &= F^{\mu}_{\ 0}F^{0}_{\ \mu}+F^{\mu}_{\ 1}F^{1}_{\ \mu}+F^{\mu}_{\ 2}F^{2}_{\ \mu}+F^{\mu}_{\ 3}F^{3}_{\ \mu} \\ &= F^{1}_{\ 0}F^{0}_{\ 1}+F^{2}_{\ 0}F^{0}_{\ 2}+F^{3}_{\ 0}F^{0}_{\ 3}+F^{0}_{\ 1}F^{1}_{\ 0} \\ &\quad +F^{2}_{\ 1}F^{1}_{\ 2}+F^{3}_{\ 1}F^{1}_{\ 3}+F^{0}_{\ 2}F^{2}_{\ 0}+F^{1}_{\ 2}F^{2}_{\ 1} \\ &\quad +F^{3}_{\ 2}F^{2}_{\ 3}+F^{0}_{\ 3}F^{3}_{\ 0}+F^{1}_{\ 3}F^{3}_{\ 1}+F^{2}_{\ 3}F^{3}_{\ 2}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Utilizando (1.8) en (A.6)

$$F^{\mu}_{\ \nu}F^{\nu}_{\ \mu}=2\left(E^2-B^2\right). \tag{A.7}$$

Insertando (A.7) en (A.5)

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=2\left(B^2-E^2\right). \tag{1.42}$$

Multiplicando (1.40) por F

$$F^3=\left(E^2-B^2\right)F+\left(FF^*\right)F^*. \tag{A.8}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} FF^* &= \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Utilizando (A.9) en (A.8)

$$F^3=\left(E^2-B^2\right)F+\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)F^*. \tag{A.10}$$

Apéndice B

Isomorfismo entre $L_+^\uparrow$ y SO(3,C)

El isomorfismo entre $L_+^\uparrow$ y SO(3,C) ha sido mencionado por varios autores[1], la investigación de la fórmulas que lo hacen explícito ha sido llevada a cabo por Macfarlane[2]. Macfarlane obtuvó estas fórmulas relacionando las transformaciones de SO(3,C) con las de SL(2,C) y por consiguiente con las de $L_+^\uparrow$. El lector interesado en los detalles puede consultar el artículo directamente. Para ilustrar la existencia de este isomorfismo escribiremos el álgebra de Lie que satisfacen los generadores de cada grupo.

La correspondencia entre los generadores de $L_+^\uparrow$ y SO(3,C) es

$$w_{10} \to S_{hc1}$$

$$w_{20} \to S_{hc2}$$

$$w_{30} \to S_{hc3}$$

$$w_{21} \to S_{sc3}$$

$$w_{13} \to S_{sc2}$$

$$w_{32} \to S_{sc1}$$

[1]Racah, G. *Nuovo Cimento Suppl.* **14**, 75 (1959); Roman, P. *Theory of Elementary Particles.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam. 1960, p. 60.

[2]Macfarlane (1962).

La forma matricial de los generadores de $L_+^\uparrow$ se puede ver en la sec. 2. 4. La forma matricial de los generadores de SO(3,C) es

$$S_{hc1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}; \qquad S_{sc1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

$$S_{hc2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad S_{sc2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

$$S_{hc3} = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad S_{sc3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

Haciendo las operaciones correspondientes se encuentra que

$$\begin{array}{rcll}
[w_{10}, w_{20}] &=& w_{21} & [S_{hc1}, S_{hc2}] = S_{sc3} \\
[w_{10}, w_{30}] &=& -w_{13} & [S_{hc1}, S_{hc3}] = -S_{sc2} \\
[w_{20}, w_{30}] &=& w_{32} & [S_{hc3}, S_{hc3}] = S_{sc1} \\
[w_{10}, w_{32}] &=& 0 & [S_{hc1}, S_{sc1}] = 0 \\
[w_{10}, w_{13}] &=& -w_{30} & [S_{hc1}, S_{sc2}] = -S_{hc3} \\
[w_{10}, w_{21}] &=& w_{20} & [S_{hc1}, S_{sc3}] = S_{hc2} \\
[w_{20}, w_{32}] &=& w_{30} & [S_{hc2}, S_{sc1}] = S_{hc3} \\
[w_{20}, w_{13}] &=& 0 & [S_{hc2}, S_{sc2}] = 0 \\
[w_{20}, w_{21}] &=& -w_{10} & [S_{hc2}, S_{sc3}] = -S_{hc3} \\
[w_{30}, w_{32}] &=& -w_{20} & [S_{hc3}, S_{sc1}] = -S_{hc2} \\
[w_{30}, w_{13}] &=& -w_{10} & [S_{hc3}, S_{sc2}] = -S_{hc3} \\
[w_{30}, w_{21}] &=& 0 & [S_{hc3}, S_{sc3}] = 0
\end{array}$$

El paréntesis cuadrado denota el conmutador. La igualdad entre relaciones de conmutación de los generadores de rotaciones espaciales de $L_+^\uparrow$ y las de los correspondientes en SO(3,C) es inmediato ver que se satisface, ya que los segundos son la parte espacial de los primeros. Así, de las relaciones de conmutación que escribimos anteriormente y teniendo en cuenta esta aclaración se concluye que los generadores de ambos grupos satisfacen la misma álgebra de Lie.

Apéndice C

Deducciones del capítulo 3

Sea

$$w^{\mu}{}_{\nu} = a^{\mu} b_{\nu} - a_{\nu} b^{\mu}$$

un bivector. Multiplicando $w^{\mu}{}_{\nu}$ por sí mismo

$$\begin{aligned}
\left(w^{2}\right)^{\mu}{}_{\nu} &= w^{\mu}{}_{\alpha} w^{\alpha}{}_{\nu} = \left[a^{\mu} b_{\alpha} - a_{\alpha} b^{\mu}\right]\left[a^{\alpha} b_{\nu} - a_{\nu} b^{\alpha}\right] \\
&= a^{\mu} b_{\nu} (a \cdot b) - a^{\mu} a_{\nu} \left(b^{2}\right) - b^{\mu} b_{\nu} \left(a^{2}\right) + a_{\nu} b^{\mu} (a \cdot b) \\
&= (a \cdot b)\left[a^{\mu} b_{\nu} + a_{\nu} b^{\mu}\right] - a^{2}\left(b^{\mu} b_{\nu}\right) - b^{2}\left(a^{\mu} a_{\nu}\right).
\end{aligned}$$

Multiplicando $(w^{2})^{\mu}{}_{\nu}$ por $w^{\mu}{}_{\nu}$

$$\begin{aligned}
\left(w^{3}\right)^{\mu}{}_{\lambda} &= \left(w^{2}\right)^{\mu}{}_{\nu} w^{\nu}{}_{\lambda} \\
&= \left[(a \cdot b)\left[a^{\mu} b_{\nu} + a_{\nu} b^{\mu}\right] - a^{2}\left(b^{\mu} b_{\nu}\right) - b^{2}\left(a^{\mu} a_{\nu}\right)\right]\left\{a^{\nu} b_{\lambda} - a_{\lambda} b^{\nu}\right\} \\
&= a^{\mu} b_{\lambda}\left[(a \cdot b)^{2}\right] + b^{\mu} b_{\lambda}\left[(a \cdot b)\, a^{2}\right] - b^{\mu} b_{\lambda}\left[(a \cdot b)\, a^{2}\right] - a^{\mu} b_{\lambda}\left[b^{2} a^{2}\right] \\
&\quad - a^{\mu} a_{\lambda}\left[(a \cdot b)\, b^{2}\right] - b^{\mu} a_{\lambda}\left[(a \cdot b)^{2}\right] + b^{\mu} a_{\lambda}\left[a^{2} b^{2}\right] + a^{\mu} a_{\lambda}\left[(a \cdot b)\, b^{2}\right] \\
&= a^{\mu} b_{\lambda}\left[(a \cdot b)^{2} - a^{2} b^{2}\right] - b^{\mu} a_{\lambda}\left[(a \cdot b)^{2} - a^{2} b^{2}\right] \\
&= \left[(a \cdot b)^{2} - a^{2} b^{2}\right]\left(a^{\mu} b_{\lambda} - a_{\lambda} b^{\mu}\right) = \Delta^{2} w^{\mu}{}_{\lambda} \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

con $\Delta^{2} = \left[(a \cdot b)^{2} - a^{2} b^{2}\right]$.

La igualdad (3.41) se puede obtener como sigue: tenemos que

$$\begin{aligned} G^3_{SO(3,C)} &= \vartheta_1^3\left(t^1\right)^3 + \vartheta_2^3\left(t^2\right)^3 + \vartheta_3^3\left(t^3\right)^3 + \vartheta_1^2\vartheta_2 t^1\left(t^1t^2+t^2t^1\right) \\ &+\vartheta_1^2\vartheta_3 t^1\left(t^1t^3+t^3t^1\right) + \vartheta_2^2\vartheta_1 t^2\left(t^1t^2+t^2t^1\right) \\ &+\vartheta_2^2\vartheta_3 t^2\left(t^3t^2+t^2t^3\right) + \vartheta_3^2\vartheta_1 t^3\left(t^1t^3+t^3t^1\right) \\ &+\vartheta_3^2\vartheta_2 t^3\left(t^2t^3+t^3t^2\right) \\ &+\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3\left(t^1t^2t^3+t^1t^3t^2+t^2t^3t^1+t^2t^1t^3+t^3t^1t^2+t^3t^2t^1\right). \end{aligned} \tag{C.1}$$

Por otro lado t^1, t^2 y t^3 satisfacen

$$\left(t^1\right)^3 = -t^1; \left(t^2\right)^3 = -t^2; \left(t^3\right)^3 = -t^3 \tag{C.2}$$

$$t^1t^3t^2 + t^2t^3t^1 = 0 \tag{C.3}$$

$$t^3t^2t^1 + t^1t^2t^3 = 0 \tag{C.4}$$

$$t^2t^1t^3 + t^3t^1t^2 = 0 \tag{C.5}$$

$$t^3\left(t^1t^3+t^3t^1\right) + t^2\left(t^1t^2+t^2t^1\right) = t^1 \tag{C.6}$$

$$t^1\left(t^1t^2+t^2t^1\right) + t^3\left(t^2t^3+t^3t^2\right) = -t^2 \tag{C.7}$$

$$t^1\left(t^1t^3+t^3t^1\right) + t^2\left(t^3t^2+t^2t^3\right) = -t^3 \tag{C.8}$$

Usando (C.2)-(C.8) en (C.1)

$$G^3_{SO(3,C)} = \vartheta^2 G_{SO(3,C)} \tag{3.41}$$

con $\vartheta^2 = -\left(\vartheta_1^2+\vartheta_2^2+\vartheta_3^2\right)$.

Ahora obtendremos las expresiones (3.57), (3.58), (3.61) y (3.62).

Para hacer esto, escribamos Θ como

$$\Theta = \left(\beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\cdot\beta\right)^{\frac{1}{2}} = (c+2id)^{\frac{1}{2}} = x + iy \tag{C.9}$$

con

$$x = \left[\frac{1}{2}\left(\left(c^2+4d^2\right)^{\frac{1}{2}} + c\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{C.10}$$

y

$$y = \left[\frac{1}{2}\left(\left(c^2+4d^2\right)^{\frac{1}{2}} - c\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{C.11}$$

Se cumple que

$$x^2 - y^2 = c; x^2 + y^2 = \left(c^2 + 4d^2\right)^{\frac{1}{2}}; xy = d.$$

Por otro lado, de (C.9) se sigue que

$$c = \beta^2 - \alpha^2 \tag{C.12}$$

y

$$d = \alpha \cdot \beta. \tag{C.13}$$

Utilizando (C.12) y (C.13) en (C.10) y (C.11)

$$x^2 = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \left\{ \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \right)^2 + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.59}$$

y

$$y^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \left\{ \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \right)^2 + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.60}$$

Tenemos[1]

$$\cos(\Theta) = \cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y). \tag{C.14}$$

Utilizando (C.14) en

$$\varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = \left[\frac{1 + \cos(\Theta)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.55}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 &= \left[\frac{1 + \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= [a + 2ib]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

con

$$a = \frac{1 + \cos(x)\cosh(y)}{2}$$

[1] Esta igualdad se puede ver en Afken (2001), p. 397.

y

$$b = \frac{-\sin(x)\sinh(y)}{4}.$$

Haciendo un poco de álgebra se encuentra que

$$\varepsilon_1 = \left[\frac{1}{2}\left(\left(a^2+4b^2\right)^{\frac{1}{2}}+a\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

y

$$\varepsilon_2 = \left[\frac{1}{2}\left(\left(a^2+4b^2\right)^{\frac{1}{2}}-a\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Se cumple que

$$\left(a^2+4b^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\cos(x)+\cosh(y)\right].$$

Por lo tanto

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left[\cos(x)+\cosh(y)+1+\cos(x)\cosh(y)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.57}$$

y

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left[\cos(x)+\cosh(y)-1-\cos(x)\cosh(y)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.58}$$

Ahora, haciendo un poco de álgebra vemos que

$$\varepsilon_3 + i\varepsilon_4 = \frac{i\sin(\Theta)}{\Theta\left[2\left(1+\cos(\Theta)\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.56}$$

se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3 + i\varepsilon_4 &= \frac{(y+ix)\left(1-\cos(\Theta)\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\left(x^2+y^2\right)} \\
&= \frac{(y+ix)\left(1-\cos(x)\cosh(y)+i\sin(x)\sinh(y)\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\left(x^2+y^2\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\left(x^2+y^2\right)}\left[(y+ix)(m+2in)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\left(x^2+y^2\right)}\left[(y+ix)(a_1+ib_1)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\left(x^2+y^2\right)}\left[(ya_1-xb_1)+i\left(xa_1+yb_1\right)\right].
\end{aligned}$$

Entonces

$$\varepsilon_3 = \frac{ya_1 - xb_1}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2)} \tag{C.15}$$

y

$$\varepsilon_4 = \frac{xa_1 + yb_1}{\sqrt{2}\,(x^2+y^2)}. \tag{C.16}$$

Recordando que

$$m = 1 - \cos(x)\cosh(y)\,,$$
$$n = \frac{\sin(x)\sinh(y)}{2},$$
$$a_1 = \left[\frac{1}{2}\left(\left(m^2+4n^2\right)^{\frac{1}{2}} + m\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$b_1 = \left[\frac{1}{2}\left(\left(m^2+4n^2\right)^{\frac{1}{2}} - m\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

y teniendo en cuenta que

$$\left(m^2+4n^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\cosh(y) - \cos(x)\right].$$

Entonces

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cosh(y) - \cos(x) + 1 - \cos(x)\cosh(y)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{C.17}$$

y

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cosh(y) - \cos(x) - 1 + \cos(x)\cosh(y)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{C.18}$$

Utilizando (C.17) y (C.18) en (C.15) y (C.16)

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 \;=\; & \frac{1}{2\,(x^2+y^2)}\left[y\left(\cosh(y) - \cos(x) + 1 - \cos(x)\cosh(y)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ & -\frac{1}{2\,(x^2+y^2)}\left[x\left(\cosh(y) - \cos(x) - 1 + \cos(x)\cosh(y)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3.61}$$

y

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 \;=\; & \frac{1}{2\,(x^2+y^2)}\left[x\left(\cosh(y) - \cos(x) + 1 - \cos(x)\cosh(y)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ & +\frac{1}{2\,(x^2+y^2)}\left[y\left(\cosh(y) - \cos(x) - 1 + \cos(x)\cosh(y)\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.62}$$

Apéndice D

Deducciones del capítulo 4

Derivando

$$p^{\mu}p_{\mu} = (mc)^2$$

con respecto a s, obtenemos

$$2\frac{dp}{ds}p = 0.$$

Utilizando

$$\frac{dp}{ds} = \frac{q}{mc^2}Fp \tag{4.1}$$

en la igualdad anterior, resulta

$$(Fp)\,p = 0. \tag{4.12}$$

Tenemos que

$$F^{\mu}_{\ \nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

De (1.17) se sigue que

$$T^{\mu}_{\ \nu} = \begin{bmatrix} w & -S_1 & -S_2 & -S_3 \\ S_1 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & T^{ij}_M & 0 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} w &= \frac{E^2+B^2}{2}, \qquad (1.18)\\ S_1 &= E_2B_3 - E_3B_2,\\ S_2 &= E_3B_1 - E_1B_3,\\ S_3 &= E_1B_2 - E_2B_1 \end{aligned}$$

y

$$T^{ij}_M = \begin{bmatrix} E_1^2+B_1^2-\frac{E^2+B^2}{2} & E_1E_2+B_1B_2 & E_1E_3+B_1B_3 \\ E_1E_2+B_1B_2 & E_2^2+B_2^2-\frac{E^2+B^2}{2} & E_2E_3+B_2B_3 \\ E_1E_3+B_1B_3 & E_2E_3+B_2B_3 & E_3^2+B_3^2-\frac{E^2+B^2}{2} \end{bmatrix}. \qquad (1.20)$$

Aplicando $F^\mu_{\ \nu}$ y $T^\mu_{\ \nu}$ a $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ obtenemos

$$(Fp)^\mu = \begin{bmatrix} E_1p^1+E_2p^2+E_3p^3 \\ E_1p^0+B_3p^2-B_2p^3 \\ E_2p^0-B_3p^1+B_1p^3 \\ E_3p^0+B_2p^1-B_1p^2 \end{bmatrix},$$

$$(Tp)^\mu = \begin{bmatrix} wp^0-S_1p^1-S_2p^2-S_3p^3 \\ S_1p^0+T^{11}_Mp^1+T^{12}_Mp^2+T^{13}_Mp^3 \\ S_2p^0+T^{21}_Mp^1+T^{22}_Mp^2+T^{23}_Mp^3 \\ S_3p^0+T^{31}_Mp^1+T^{32}_Mp^2+T^{33}_Mp^3 \end{bmatrix}.$$

Haciendo el producto interno de $(Tp)^\mu$ y $(Fp)^\mu$ resulta

$$\begin{aligned} (Tp)^\mu (Fp)_\mu &= \left(wp^0-S_1p^1-S_2p^2-S_3p^3\right)\left(E_1p^1+E_2p^2+E_3p^3\right)\\ &+\left(S_1p^0+T^{11}_Mp^1+T^{12}_Mp^2+T^{13}_Mp^3\right)\left(-E_1p^0-B_3p^2+B_2p^3\right)\\ &+\left(S_2p^0+T^{21}_Mp^1+T^{22}_Mp^2+T^{23}_Mp^3\right)\left(-E_2p^0+B_3p^1-B_1p^3\right)\\ &+\left(S_3p^0+T^{31}_Mp^1+T^{32}_Mp^2+T^{33}_Mp^3\right)\left(-E_3p^0-B_2p^1+B_1p^2\right). \end{aligned}$$

Realizando las multiplicaciones y agrupando términos

$$\begin{aligned}
(Tp)^{\mu}(Fp)_{\mu} = {} & (p^0)^2\{-S_1E_1 - S_2E_2 - S_3E_3\} \\
& + (p^1)^2\{-S_1E_1 + T_M^{21}B_3 - T_M^{31}B_2\} \\
& + (p^2)^2\{-S_2E_2 + T_M^{12}B_3 - T_M^{32}B_1\} \\
& + (p^3)^2\{-S_3E_3 + T_M^{13}B_2 - T_M^{23}B_1\} \\
& + p^0p^1\{wE_1 - T_M^{11}E_1 + S_2B_3 - T_M^{21}E_2 - S_3B_2 - T_M^{31}E_3\} \\
& + p^0p^2\{wE_2 - S_1B_3 - T_M^{12}E_1 - T_M^{22}E_2 + S_3B_1 - T_M^{32}E_3\} \\
& + p^0p^3\{wE_3 + S_1B_2 - T_M^{13}E_1 - S_2B_1 - T_M^{23}E_2 - T_M^{33}E_3\} \\
& + p^1p^2\{-S_1E_2 - S_2E_1 - T_M^{11}B_3 + T_M^{22}B_3 + T_M^{31}B_1 - T_M^{32}B_2\} \\
& + p^1p^3\{-S_1E_3 - S_3E_1 + T_M^{11}B_2 - T_M^{21}B_1 + T_M^{23}B_3 - T_M^{33}B_2\} \\
& + p^2p^3\{-S_2E_3 - S_3E_2 + T_M^{12}B_2 - T_M^{13}B_3 - T_M^{22}B_1 + T_M^{33}B_1\}.
\end{aligned}$$

Ahora

$$-S_1E_1 - S_2E_2 - S_3E_3 = -\mathbf{S}\cdot\mathbf{E} = 0,$$

ya que

$$\mathbf{S}{=}\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

También se cumple

$$\begin{aligned}
&-S_1E_1 + T_M^{21}B_3 - T_M^{31}B_2 = -(E_2B_3 - E_3B_2)E_1 + (E_1E_2 + B_1B_2)B_3 \\
&-(E_1E_3 + B_1B_3)B_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-S_2E_2 + T_M^{12}B_3 - T_M^{32}B_1 = -(E_3B_1 - E_1B_3)E_2 + (E_1E_2 + B_1B_2)B_3 \\
&-(E_2E_3 + B_2B_3)B_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-S_3E_3 + T_M^{13}B_2 - T_M^{23}B_1 = -(E_1B_2 - E_2B_1)E_3 + (E_1E_3 + B_1B_3)B_2 \\
&-(E_2E_3 + B_2B_3)B_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&wE_1 - T_M^{11}E_1 + S_2B_3 - T_M^{21}E_2 - S_3B_2 - T_M^{31}E_3 = (E^2 + B^2)E_1 - (E_1^2 + B_1^2)E_1 \\
&-(B_2^2 + B_3^2)E_1 - (E_2^2 + E_3^2)E_1 + (E_3B_3 + E_2B_2)B_1 - (E_3B_3 + E_2B_2)B_1 \\
&= (E^2 + B^2)E_1 - (E^2 + B^2)E_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&wE_2 - S_1B_3 - T_M^{12}E_1 - T_M^{22}E_2 + S_3B_1 - T_M^{32}E_3 = (E^2 + B^2)E_2 - (E_2^2 + B_2^2)E_2 \\
&-(B_1^2 + B_3^2)E_2 - (E_1^2 + E_3^2)E_2 + (E_1B_1 + E_3B_3)B_2 - (E_1B_1 + E_3B_3)B_2 \\
&= (E^2 + B^2)E_2 - (E^2 + B^2)E_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&wE_3 + S_1B_2 - T_M^{13}E_1 - S_2B_1 - T_M^{23}E_2 - T_M^{33}E_3 = (E^2 + B^2)E_3 - (E_3^2 + B_3^2)E_3 \\
&-(B_1^2 + B_2^2)E_3 - (E_1^2 + E_2^2)E_3 + (E_2B_2 + E_1B_1)B_3 - (E_2B_2 + E_1B_1)B_3 \\
&= (E^2 + B^2)E_3 - (E^2 + B^2)E_3 = 0
\end{aligned}$$

$$-S_1E_2 - S_2E_1 - T_M^{11}B_3 + T_M^{22}B_3 + T_M^{31}B_1 - T_M^{32}B_2 = -(E_2B_3 - E_3B_2)E_2$$
$$-(E_3B_1 - E_1B_3)E_1 - (E_1^2 + B_1^2 - w)B_3 + (E_2^2 + B_2^2 - w)B_3$$
$$+(E_1E_3 + B_1B_3)B_1 - (E_2E_3 + B_2B_3)B_2$$
$$= (-E_2^2 + E_1^2 - E_1^2 - B_1^2 + E_2^2 + B_2^2 + B_1^2 - B_2^2)B_3 + E_2E_3B_2$$
$$-E_1E_3B_1 + E_1E_3B_1 - E_2E_3B_2 = 0$$

$$-S_1E_3 - S_3E_1 + T_M^{11}B_2 - T_M^{21}B_1 + T_M^{23}B_3 - T_M^{33}B_2 = -(E_2B_3 - E_3B_2)E_3$$
$$-(E_1B_2 - E_2B_1)E_1 + (E_1^2 + B_1^2 - w)B_2 - (E_1E_2 + B_1B_2)B_1$$
$$+(E_2E_3 + B_2B_3)B_3 - (E_3^2 + B_3^2 - w)B_2$$
$$= (E_3^2 - E_1^2 + E_1^2 + B_1^2 - B_1^2 + B_3^2 - E_3^2 - B_3^2)B_2 - E_2E_3B_3$$
$$+E_1E_2B_1 - E_1E_2B_1 + E_2E_3B_3 = 0$$

$$-S_2E_3 - S_3E_2 + T_M^{12}B_2 - T_M^{13}B_3 - T_M^{22}B_1 + T_M^{33}B_1 = -(E_3B_1 - E_1B_3)E_3$$
$$-(E_1B_2 - E_2B_1)E_2 + (E_1E_2 + B_1B_2)B_2 - (E_1E_3 + B_1B_3)B_3$$
$$-(E_2^2 + B_2^2 - w)B_1 + (E_3^2 + B_3^2 - w)B_1$$
$$= (-E_3^2 + E_2^2 + B_2^2 - B_3^2 - E_2^2 - B_2^2 + E_3^2 + B_3^2)B_1 + E_1E_3B_3$$
$$-E_1E_2B_2 + E_1E_2B_2 - E_1E_3B_3 = 0$$

Por lo tanto

$$(Tp)^{\mu}(Fp)_{\mu} = 0. \tag{4.13}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
(Tp)^{\mu}p_{\mu} + (Fp)^{\mu}(Fp)_{\mu} \;=\; & \left(wp^0 - S_1p^1 - S_2p^2 - S_3p^3\right)p^0 \\
& - \left(S_1p^0 + T_M^{11}p^1 + T_M^{12}p^2 + T_M^{13}p^3\right)p^1 \\
& - \left(S_2p^0 + T_M^{21}p^1 + T_M^{22}p^2 + T_M^{23}p^3\right)p^2 \\
& - \left(S_3p^0 + T_M^{31}p^1 + T_M^{32}p^2 + T_M^{33}p^3\right)p^3 \\
& + \left(E_1p^1 + E_2p^2 + E_3p^3\right)^2 \\
& - \left(E_1p^0 + B_3p^2 - B_2p^3\right)^2 \\
& - \left(E_2p^0 - B_3p^1 + B_1p^3\right)^2 \\
& - \left(E_3p^0 + B_2p^1 - B_1p^2\right)^2.
\end{aligned}$$

Haciendo las multiplicaciones y agrupando términos

$$
\begin{aligned}
(Tp)^{\mu} p_{\mu} + (Fp)^{\mu} (Fp)_{\mu} = & \left(p^0\right)^2 \left(w - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2\right) \\
& + \left(p^1\right)^2 \left(-T_M^{11} + E_1^2 - B_3^3 - B_2^2\right) \\
& + \left(p^2\right)^2 \left(-T_M^{22} + E_2^2 - B_3^3 - B_1^2\right) \\
& + \left(p^3\right)^2 \left(-T_M^{33} + E_3^2 - B_2^3 - B_1^2\right) \\
& + p^0 p^1 \left\{-2S_1 + 2\left(E_2 B_3 - E_3 B_2\right)\right\} \\
& + p^0 p^2 \left\{-2S_2 + 2\left(E_3 B_1 - E_1 B_3\right)\right\} \\
& + p^0 p^3 \left\{-2S_3 + 2\left(E_1 B_2 - E_2 B_1\right)\right\} \\
& + p^1 p^2 \left\{-2T_M^{21} + 2\left(E_1 E_2 + B_1 B_2\right)\right\} \\
& + p^1 p^3 \left\{-2T_M^{31} + 2\left(E_1 E_3 + B_1 B_3\right)\right\} \\
& + p^2 p^3 \left\{-2T_M^{23} + 2\left(E_2 E_3 + B_2 B_3\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Ahora

$$w - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 = \left(\tfrac{E^2+B^2}{2}\right) - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 = -\left(\tfrac{E^2-B^2}{2}\right)$$

$$-T_M^{11}+E_1^2-B_3^3-B_2^2 = -\left(E_1^2 + B_1^2 - \left[\tfrac{E^2+B^2}{2}\right]\right)+E_1^2-B_3^3-B_2^2 = \left(\tfrac{E^2-B^2}{2}\right)$$

$$-T_M^{22}+E_2^2-B_3^3-B_1^2 = -\left(E_2^2 + B_2^2 - \left[\tfrac{E^2+B^2}{2}\right]\right)+E_2^2-B_3^3-B_1^2 = \left(\tfrac{E^2-B^2}{2}\right)$$

$$-T_M^{33}+E_3^2-B_2^3-B_1^2 = -\left(E_3^2 + B_3^2 - \left[\tfrac{E^2+B^2}{2}\right]\right)+E_3^2-B_2^3-B_1^2 = \left(\tfrac{E^2-B^2}{2}\right)$$

$$-2S_1 + 2\left(E_2 B_3 - E_3 B_2\right) = -2\left(E_2 B_3 - E_3 B_2\right) + 2\left(E_2 B_3 - E_3 B_2\right) = 0$$

$$-2S_2 + 2\left(E_3 B_1 - E_1 B_3\right) = -2\left(E_3 B_1 - E_1 B_3\right) + 2\left(E_3 B_1 - E_1 B_3\right) = 0$$

$$-2S_3 + 2\left(E_1 B_2 - E_2 B_1\right) = -2\left(E_1 B_2 - E_2 B_1\right) + 2\left(E_1 B_2 - E_2 B_1\right) = 0$$

$$-2T_M^{21} + 2\left(E_1 E_2 + B_1 B_2\right) = -2\left(E_1 E_2 + B_1 B_2\right) + 2\left(E_1 E_2 + B_1 B_2\right) = 0$$

$$-2T_M^{31} + 2\left(E_1 E_3 + B_1 B_3\right) = -2\left(E_1 E_3 + B_1 B_3\right) + 2\left(E_1 E_3 + B_1 B_3\right) = 0$$

$$-2T_M^{23} + 2\left(E_2 E_3 + B_2 B_3\right) = -2\left(E_2 E_3 + B_2 B_3\right) + 2\left(E_2 E_3 + B_2 B_3\right) = 0$$

Por lo tanto

$$(Tp)^{\mu} p_{\mu} + (Fp)^{\mu} (Fp)_{\mu} = -\left(\frac{E^2 - B^2}{2}\right) p^{\mu} p_{\mu}. \tag{D.1}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}(Tp)^{\mu}(Tp)_{\mu} &= \left(wp^0 - S_1p^1 - S_2p^2 - S_3p^3\right)^2 \\ &\quad - \left(S_1p^0 + T_M^{11}p^1 + T_M^{12}p^2 + T_M^{13}p^3\right)^2 \\ &\quad - \left(S_2p^0 + T_M^{21}p^1 + T_M^{22}p^2 + T_M^{23}p^3\right)^2 \\ &\quad - \left(S_3p^0 + T_M^{31}p^1 + T_M^{32}p^2 + T_M^{33}p^3\right)^2 .\end{aligned}$$

Realizando las multiplicaciones y agrupando términos

$$\begin{aligned}(Tp)^{\mu}(Tp)_{\mu} &= \left(p^0\right)^2\left(w^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2\right) \\ &\quad + \left(p^1\right)^2\left(S_1^2 - \left(T_M^{11}\right)^2 - \left(T_M^{21}\right)^2 - \left(T_M^{31}\right)^2\right) \\ &\quad + \left(p^2\right)^2\left(S_2^2 - \left(T_M^{12}\right)^2 - \left(T_M^{22}\right)^2 - \left(T_M^{32}\right)^2\right) \\ &\quad + \left(p^1\right)^2\left(S_3^2 - \left(T_M^{13}\right)^2 - \left(T_M^{23}\right)^2 - \left(T_M^{33}\right)^2\right) \\ &\quad +2p^0p^1\left\{-wS_1 - S_1T_M^{11} - S_2T_M^{21} - S_3T_M^{31}\right\} \\ &\quad +2p^0p^2\left\{-wS_2 - S_1T_M^{12} - S_2T_M^{22} - S_3T_M^{32}\right\} \\ &\quad +2p^0p^3\left\{-wS_3 - S_1T_M^{13} - S_2T_M^{23} - S_3T_M^{33}\right\} \\ &\quad +2p^1p^2\left\{S_1S_2 - T_M^{11}T_M^{12} - T_M^{21}T^{22} - T_M^{31}T_M^{32}\right\} \\ &\quad +2p^1p^3\left\{S_1S_3 - T_M^{11}T_M^{13} - T_M^{21}T^{23} - T_M^{31}T_M^{33}\right\} \\ &\quad +2p^2p^3\left\{S_2S_3 - T_M^{12}T_M^{13} - T_M^{22}T^{23} - T_M^{32}T_M^{33}\right\} .\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}&w^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2 = \left(\tfrac{E^2+B^2}{2}\right)^2 - \left(E_2B_3 - E_3B_2\right)^2 - \left(E_3B_1 - E_1B_3\right)^2 \\ &- \left(E_1B_2 - E_2B_1\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(E^4 + B^4 + 2E^2B^2\right) \\ &- \left(E_2^2B_3^2 + E_3^2B_2^2 + E_3^2B_1^2 + E_1^2B_3^2 + E_1^2B_2^2 + E_2^2B_1^2\right) \\ &+2\left(E_1B_1E_2B_2 + E_1B_1E_3B_3 + E_2B_2E_3B_3\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(E^4 + B^4 - 2E^2B^2 + 2E^2B^2\right) \\ &- \left\{E_1^2\left(B_2^2 + B_3^2\right) + E_2^2\left(B_1^2 + B_3^2\right) + E_3^2\left(B_1^2 + B_2^2\right)\right\} \\ &+2\left(E_1B_1E_2B_2 + E_1B_1E_3B_3 + E_2B_2E_3B_3\right) = \tfrac{1}{4}\left(E^2 - B^2\right)^2 + E^2B^2 \\ &- \left(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2\right)\left(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2\right) + \left\{\left(E_1B_1\right)^2 + \left(E_2B_2\right)^2 + \left(E_3B_3\right)^2\right\} \\ &+2\left(E_1B_1E_2B_2 + E_1B_1E_3B_3 + E_2B_2E_3B_3\right) = \left(\tfrac{E^2-B^2}{2}\right)^2 + \left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2\end{aligned}$$

$$S_1^2 - \left(T_M^{11}\right)^2 - \left(T_M^{21}\right)^2 - \left(T_M^{31}\right)^2 = \left(E_2B_3 - E_3B_2\right)^2 - \left(\tfrac{E_1^2-E_2^2-E_3^2+B_1^2-B_2^2-B_3^2}{2}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(E_1E_2+B_1B_2\right)^2-\left(E_1E_3+B_1B_3\right)^2=E_2^2B_3^2+E_3^2B_2^2-2E_2B_2E_3B_3\\
&-\tfrac{1}{4}\left(E_1^4+E_2^4+E_3^4+B_1^4+B_2^4+B_3^4\right)\\
&-\tfrac{1}{2}\left(\begin{array}{c} E_1^2B_1^2-E_1^2B_2^2-E_1^2B_3^2-E_2^2B_1^2\\ +E_2^2B_2^2+E_2^2B_3^2-E_3^2B_1^2+E_3^2B_2^2+E_3^2B_3^2\end{array}\right)\\
&-\tfrac{1}{2}\left(-E_1^2E_2^2-E_1^2E_3^2+E_2^2E_3^2-B_1^2B_2^2-B_1^2B_3^2+B_2^2B_3^2\right)\\
&-\left(E_1^2E_2^2+B_1^2B_2^2+2E_1B_1E_2B_2\right)-\left(E_1^2E_3^2+B_1^2B_3^2+2E_1B_1E_3B_3\right)\\
&=-\tfrac{1}{4}\left(\begin{array}{c} E_1^4+E_2^4+E_3^4+2\left(E_1^2E_2^2+E_1^2E_3^2+E_2^2E_3^2\right)\\ B_1^4+B_2^4+B_3^4+2\left(B_1^2B_2^2+B_1^2B_3^2+B_2^2B_3^2\right)\end{array}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}\left(E_1^2+E_2^2+E_3^2\right)\left(B_1^2+B_2^2+B_3^2\right)-\left\{\left(E_1B_1\right)^2+\left(E_2B_2\right)^2+\left(E_3B_3\right)^2\right\}\\
&-2\left(E_1B_1E_2B_2+E_1B_1E_3B_3+E_2B_2E_3B_3\right)=-\left(\tfrac{E^2-B^2}{2}\right)^2-\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&S_2^2-\left(T_M^{12}\right)^2-\left(T_M^{22}\right)^2-\left(T_M^{32}\right)^2=\left(E_3B_1-E_1B_3\right)^2-\left(E_1E_2+B_1B_2\right)^2\\
&-\left(\tfrac{E_2^2-E_1^2-E_3^2+B_2^2-B_1^2-B_3^2}{2}\right)^2-\left(E_2E_3+B_2B_3\right)^2=E_3^2B_1^2+E_1^2B_3^2-2E_1B_1E_3B_3\\
&-\left(E_1^2E_2^2+B_1^2B_2^2+2E_1B_1E_2B_2\right)-\tfrac{1}{4}\left(E_1^4+E_2^4+E_3^4+B_1^4+B_2^4+B_3^4\right)\\
&-\tfrac{1}{2}\left(\begin{array}{c} E_1^2B_1^2-E_1^2B_2^2+E_1^2B_3^2-E_2^2B_1^2\\ +E_2^2B_2^2-E_2^2B_3^2+E_3^2B_1^2-E_3^2B_2^2+E_3^2B_3^2\end{array}\right)\\
&-\tfrac{1}{2}\left(-E_1^2E_2^2+E_1^2E_3^2-E_2^2E_3^2-B_1^2B_2^2-B_2^2B_3^2+B_1^2B_3^2\right)\\
&-\left(E_2^2E_3^2+B_2^2B_3^2+2E_2B_2E_3B_3\right)\\
&=-\tfrac{1}{4}\left(\begin{array}{c} E_1^4+E_2^4+E_3^4+2\left(E_1^2E_2^2+E_1^2E_3^2+E_2^2E_3^2\right)\\ B_1^4+B_2^4+B_3^4+2\left(B_1^2B_2^2+B_1^2B_3^2+B_2^2B_3^2\right)\end{array}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}\left(E_1^2+E_2^2+E_3^2\right)\left(B_1^2+B_2^2+B_3^2\right)-\left\{\left(E_1B_1\right)^2+\left(E_2B_2\right)^2+\left(E_3B_3\right)^2\right\}\\
&-2\left(E_1B_1E_2B_2+E_1B_1E_3B_3+E_2B_2E_3B_3\right)=-\left(\tfrac{E^2-B^2}{2}\right)^2-\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&S_3^2-\left(T_M^{13}\right)^2-\left(T_M^{23}\right)^2-\left(T_M^{33}\right)^2=\left(E_1B_2-E_2B_1\right)^2-\left(E_1E_3+B_1B_3\right)^2\\
&-\left(E_2E_3+B_2B_3\right)^2-\left(\tfrac{E_3^2-E_1^2-E_2^2+B_3^2-B_1^2-B_2^2}{2}\right)^2=E_1^2B_2^2+E_2^2B_1^2-2E_1B_1E_2B_2\\
&-\left(E_1^2E_3^2+B_1^2B_3^2+2E_1B_1E_3B_3\right)-\left(E_2^2E_3^2+B_2^2B_3^2+2E_2B_2E_3B_3\right)\\
&-\tfrac{1}{4}\left(E_1^4+E_2^4+E_3^4+B_1^4+B_2^4+B_3^4\right)\\
&-\tfrac{1}{2}\left(\begin{array}{c} -E_1^2B_1^2-E_1^2B_2^2+E_1^2B_3^2+E_2^2B_1^2\\ +E_2^2B_2^2-E_2^2B_3^2-E_3^2B_1^2-E_3^2B_2^2+E_3^2B_3^2\end{array}\right)\\
&-\tfrac{1}{2}\left(E_1^2E_2^2-E_1^2E_3^2-E_2^2E_3^2+B_1^2B_2^2-B_1^2B_3^2-B_2^2B_3^2\right)
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} E_1^4 + E_2^4 + E_3^4 + 2\left(E_1^2E_2^2 + E_1^2E_3^2 + E_2^2E_3^2\right) \\ B_1^4 + B_2^4 + B_3^4 + 2\left(B_1^2B_2^2 + B_1^2B_3^2 + B_2^2B_3^2\right)\end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{2}\left(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2\right)\left(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2\right) - \left\{(E_1B_1)^2 + (E_2B_2)^2 + (E_3B_3)^2\right\}$$
$$-2\left(E_1B_1E_2B_2 + E_1B_1E_3B_3 + E_2B_2E_3B_3\right) = -\left(\frac{E^2-B^2}{2}\right)^2 - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2$$

$$wS_1 + S_1T_M^{11} + S_2T_M^{21} + S_3T_M^{31} = wS_1 + S_1\left(E_1^2 + B_1^2 - w\right)$$
$$+\left(E_3B_1 - E_1B_3\right)\left(E_1E_2 + B_1B_2\right) + \left(E_1B_2 - E_2B_1\right)\left(E_1E_3 + B_1B_3\right)$$
$$= \left(E_2B_3 - E_3B_2\right)\left(E_1^2 + B_1^2\right) + E_1B_1E_2E_3 + B_1^2E_3B_2 - E_1^2E_2B_3$$
$$-E_1B_1B_2B_3 + E_1^2E_3B_2 + E_1B_1B_2B_3 - E_1B_1E_2E_3 - B_1^2E_2B_3$$
$$= \left(E_2B_3 - E_3B_2\right)\left(E_1^2 + B_1^2\right) - \left(E_2B_3 - E_3B_2\right)B_1^2 - \left(E_2B_3 - E_3B_2\right)E_1^2$$
$$= 0$$

$$wS_2 + S_1T_M^{12} + S_2T_M^{22} + S_3T_M^{32} = wS_2 + \left(E_2B_3 - E_3B_2\right)\left(E_1E_2 + B_1B_2\right)$$
$$+S_2\left(E_2^2 + B_2^2 - w\right) + \left(E_1B_2 - E_2B_1\right)\left(E_2E_3 + B_2B_3\right)$$
$$= \left(E_3B_1 - E_1B_3\right)\left(E_2^2 + B_2^2\right) + E_2^2E_1B_3 + E_2B_2B_1B_3 - E_2B_2E_1E_3$$
$$-B_2^2E_3B_1 + E_2B_2E_1E_3 + B_2^2E_1B_3 - E_2^2E_3B_1 - E_2B_2B_1B_3$$
$$= \left(E_3B_1 - E_1B_3\right)\left(E_2^2 + B_2^2\right) - \left(E_3B_1 - E_1B_3\right)B_2^2 - \left(E_3B_1 - E_1B_3\right)E_2^2$$
$$= 0$$

$$wS_3 + S_1T_M^{13} + S_2T_M^{23} + S_3T_M^{33} = wS_3 + \left(E_2B_3 - E_3B_2\right)\left(E_1E_3 + B_1B_3\right)$$
$$+\left(E_3B_1 - E_1B_3\right)\left(E_2E_3 + B_2B_3\right) + S_3\left(E_3^2 + B_3^2 - w\right)$$
$$= \left(E_1B_2 - E_2B_1\right)\left(E_3^2 + B_3^2\right) + E_3B_3E_1E_2 + B_3^2E_2B_1 - E_3^2E_1B_2$$
$$-E_3B_3B_1B_2 + E_3^2E_2B_1 + E_3B_3B_1B_2 - E_3B_3E_1E_2 - B_3^2E_1B_2$$
$$= \left(E_1B_2 - E_2B_1\right)\left(E_3^2 + B_3^2\right) - \left(E_1B_2 - E_2B_1\right)B_1^2 - \left(E_1B_2 - E_2B_1\right)E_1^2$$
$$= 0$$

$$S_1S_2 - T_M^{11}T_M^{12} - T_M^{21}T_M^{22} - T_M^{31}T_M^{32} = \left(E_2B_3 - E_3B_2\right)\left(E_3B_1 - E_1B_3\right)$$
$$-T_M^{12}\left(T_M^{11} + T_M^{22}\right) - \left(E_1E_3 + B_1B_3\right)\left(E_2E_3 + B_2B_3\right) = E_3B_3E_2B_1$$
$$-B_3^2E_1E_2 - E_3^2B_1B_2 + E_3B_3E_1B_2 - T_M^{12}\left(E_1^2 + B_1^2 - w + E_2^2 + B_2^2 - w\right)$$
$$-E_3^2E_1E_2 - E_3B_3E_1B_2 - E_3B_3E_2B_1 - B_3^2B_1B_2 = -\left(E_1E_2 + B_1B_2\right)B_3^2$$
$$-\left(E_1E_2 + B_1B_2\right)E_3^2 + \left(E_1E_2 + B_1B_2\right)\left(E_3^2 + B_3^2\right) = 0$$

$$S_1S_3 - T_M^{11}T_M^{13} - T_M^{21}T^{23} - T_M^{31}T_M^{33} = \left(E_2B_3 - E_3B_2\right)\left(E_1B_2 - E_2B_1\right)$$
$$-T_M^{13}\left(T_M^{11} + T_M^{23}\right) - \left(E_1E_2 + B_1B_2\right)\left(E_2E_3 + B_2B_3\right) = E_2B_2E_1B_3$$
$$-E_2^2B_1B_3 - B_2^2E_1E_3 + E_2B_2E_3B_1 - T_M^{13}\left(E_1^2 + B_1^2 - w + E_3^2 + B_3^2 - w\right)$$
$$-E_2^2E_1E_3 - E_2B_2E_1B_3 - E_2B_2E_3B_1 - B_2^2B_1B_3 = -\left(E_1E_3 + B_1B_3\right)B_2^2$$

$- \left(E_1E_3 + B_1B_3\right) E_2^2 + \left(E_1E_3 + B_1B_3\right)\left(E_2^2 + B_2^2\right) = 0$

$S_2S_3 - T_M^{12}T_M^{13} - T_M^{22}T^{23} - T_M^{32}T_M^{33} = \left(E_3B_1 - E_1B_3\right)\left(E_1B_2 - E_2B_1\right)$
$-T_M^{23}\left(T_M^{22} + T_M^{33}\right) - \left(E_1E_2 + B_1B_2\right)\left(E_1E_3 + B_1B_3\right) = E_1B_1E_3B_2$
$-B_1^2E_2E_3 - E_1^2B_2B_3 + E_1B_1E_2B_3 - T_M^{23}\left(E_2^2 + B_2^2 - w + E_3^2 + B_3^2 - w\right)$
$-E_1^2E_2E_3 - E_1B_1E_2B_3 - E_1B_1E_3B_2 - B_1^2B_2B_3 = -\left(E_2E_3 + B_2B_3\right)B_1^2$
$- \left(E_2E_3 + B_2B_3\right)E_1^2 + \left(E_2E_3 + B_2B_3\right)\left(E_1^2 + B_1^2\right) = 0$

Por lo tanto

$$(Tp)^{\mu}(Tp)_{\mu} = \left[\left(\frac{E^2 - B^2}{2}\right)^2 + (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2\right] p^{\mu}p_{\mu}. \qquad \text{(D.2)}$$

Bibliografía

[1] Arfken G. B. and Weber H. J. *Mathematical Methods for Physicists.* Fifth Edition, Academic Press, 2001.

[2] Bacry H. *Ann. Phys.*, t. 8, (1963), n^0 3-4.

[3] Bacry H. *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symétries des Particules Elémentaires.* Gordon & Breach, 1967.

[4] Barut A. O. *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles.* Dover Publications, New York, 1980.

[5] Caltenco J. H, López-Bonilla J., Marco A. Martínez, Xeque-Morales A. *On the exponential function of a matriz,* Comunicación personal, (2002).

[6] Hamermesh M. *Group Theory.* Dover Publications, New York, 1962.

[7] Hill E. L. *Reviews of Modern Physics,* **23**, 253 (1951).

[8] Hladik J. *Spinors in Physics.* Springer, 1999.

[9] Jackson J. D. *Classical Electrodynamics.* Third edition, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[10] John Fredsted. *J. Math. Phys.* **42**, 4497 (2001).

[11] Landau y Lifshitz. *Teoría Clásica de los Campos.* Segunda Edición, Reverté, 1973.

[12] Macfarlane A. J. *J. Math. Phys.*, **3**, 1116 (1962).

[13] Mason, M. and Weaver, W. *The electromagnetic field.* Dover Publications, New York, 1929.

[14] Maxwell J. C. *Treatise of electricity and magnetism,* Vol. 2. Dover Inc., 1954.

[15] Miller Willard Jr. *Symmetry Groups and their Applications.* Academic Press, Inc., 1972.

[16] Okun' L. B. *Sov. Phys. Usp.* **32**, 7 (1989).

[17] Panofsky and Phillips. *Classical Electricity and Magnetism.* Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1962.

[18] Planck M. *Theory of Electricity and Magnetism.* The Macmillan Company, 1949.

[19] Poynting J. H. *Collected Scientific papers.* Cambrige, 1920.

[20] Rohrlich, F. *Classical Charged Particles.* Addison-Wesley, 1965.

[21] Slater C. J. and Frank H. N., *Electromagnetism,* Mc Graw-Hill book Company, INC. 1947.

[22] Sommerfeld A. *Electrodynamics.* Academic Press, New York, 1952.

[23] Srinivasa Rao K. N. *Linear Algebra and Group Theory for Physicists.* John Wiley & Sons, 1996.

[24] Synge, J., L., *Relativity: the especial theory,* North-Holland Publishing Company, 1979.

[25] Wangsness Roald K. *Campos electromagnéticos.* Limusa, 2001.

[26] Wybourne B. G. *Classical Groups for Physicists.* John Wiley & Sons, 1974.

[27] Zeni J. R. and Rodrigues Jr. W. A. *Hadronic J.* **13**, 317 (1990).

[28] Zwanziger, D. *Phy. Rev.* **139**. B 1318 (1965).