

01174



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA**

ESTADO LIBRE ASOCIADO
DE LA BAHÍA DE
CARTAGENA

**“SIMULACIÓN YACIMIENTO-FRACTURA
HIDRÁULICA-POZO EN YACIMIENTOS
DE GAS”**

TESIS

Que para obtener el grado de:
MAESTRO EN INGENIERÍA PETROLERA

PRESENTA:

ING. MAURICIO ACOSTA ZAMUDIO

**DIRECTOR DE TESIS : DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO
ASESOR: DR. SERGIO BERUMEN CAMPOS**

MÉXICO, D.F. MAYO 2005

m343727



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Con profundo amor y agradecimiento, por su sacrificio

A mis Padres

Juanita Zamudio Álvarez

(†) Isidoro Acosta Chávez

A mi pequeña hija

Nayeli Montserrat Acosta Rangel

A mi corazón

María de la Luz Rangel Durán

*A todos los que contribuyeron de una u otra forma a la realización de este trabajo,
Muchas Gracias*

En especial a los Doctores Fernando Samaniego Verduzco y Sergio Berumen campos

ÍNDICE

	PÁGINA
RESUMEN.	iv
LISTA DE FIGURAS.	vii
LISTA DE TABLAS.	x
I. Introducción.	1
II. Antecedentes.	4
III. Modelo matemático del flujo de gas en el yacimiento, fractura y tubería vertical.	
III.1 Ecuación de flujo en el yacimiento.	7
III.1.1 Transformación de coordenadas de la ecuación de flujo de gas en el yacimiento.	10
III.1.2 Ecuación de flujo de gas en el yacimiento en términos Adimensionales.	13
III.2 Ecuación de flujo en la fractura hidráulica.	16
III.2.1 Transformación de coordenadas del modelo de fractura.	19
III.2.2 Ecuación de flujo de gas en la fractura hidráulica en términos Adimensionales.	21
III.3 Ecuación de continuidad y de estado en la tubería vertical.	23
III.4 Ecuación de conservación de energía en la tubería vertical.	27
IV. Modelo numérico del flujo de gas en el yacimiento, fractura y tubería vertical.	
IV.1 Ecuación en diferencias finitas en el yacimiento.	29
IV.2 Ecuación en diferencias finitas en la fractura hidráulica.	31
IV.3 Ecuación en diferencias finitas en la tubería vertical.	33
V. Desarrollo del modelo numérico.	
V.1 Método de solución en el yacimiento.	35
V.2 Método de solución en la fractura hidráulica.	41
V.3 Método de solución en la tubería vertical.	49
V.4 Validación de la solución.	50
VI. Discusión y análisis de resultados.	52

VII. Conclusiones y recomendaciones.	79
Nomenclatura.	81
Bibliografía.	86
Apéndice A. Coordenadas Elípticas.	89
Apéndice B. Mapeo Conformal.	92
Apéndice C. Organización del modelo de cómputo.	95
Apéndice D. Listado del programa de cómputo.	97

RESUMEN

Se realizó este estudio con el propósito de tener una herramienta práctica en yacimientos de gas, que permita simular adecuadamente el comportamiento del sistema yacimiento-fractura hidráulica-pozo; dado que no se cuenta hasta el día de hoy con un simulador que permita integrar estos conceptos.

El estudio se realizó mediante un modelo matemático en dos dimensiones para el caso del yacimiento y la fractura hidráulica vertical, utilizando coordenadas elípticas y la técnica matemática del mapeo conformal; el modelo se solucionó mediante métodos numéricos de computación. Se utilizaron las subrutinas Sparse y NSPIV para resolver las ecuaciones en diferencias finitas. Así mismo se usó un modelo de flujo lineal para la tubería vertical.

Es este trabajo se considera que la fractura hidráulica es de conductividad infinita, y que el pozo produce bajo condiciones de producción constante, debido a que se asume que estas condiciones se cumplen en yacimientos de gas de baja permeabilidad.

Los resultados de este trabajo se obtuvieron a través de la simulación de períodos de producción.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA		PÁGINA
1.	Planteamiento del problema.....	3
2.	Mapeo conformal en un yacimiento homogéneo.....	12
3.	Esquema del modelo de flujo de la fractura vertical.....	17
4.	Transformación de coordenadas de un modelo de fractura vertical.....	18
5.	Modelo físico de la tubería.....	23
6.	Comportamiento del inverso del gasto adimensional de un pozo que presenta una fractura hidráulica de conductividad infinita, el cual produce a presión constante.....	57
7.	Comportamiento del inverso del gasto adimensional de un pozo que presenta una fractura hidráulica de conductividad infinita considerando el sistema yacimiento-tubería vertical, para condiciones de presión constante.....	58
8.	Validación con el simulador, del comportamiento del inverso del gasto adimensional de un yacimiento homogéneo a presión constante (Wattenbarger).....	57
9.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 656$ pies y $x_f = 200$ pies.....	58
10.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 984$ pies y $x_f = 200$ pies.....	59
11.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 200$ pies.....	59
12.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 656$ pies y $x_f = 200$ pies.....	60
13.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 984$ pies y $x_f = 200$ pies.....	60
14.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 200$ pies.....	61

15.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 656$ pies y $x_f = 200$ pies.....	61
16.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 984$ pies y $x_f = 200$ pies.....	62
17.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 200$ pies.....	62
18.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 656$ pies y $x_f = 300$ pies.....	63
19.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 984$ pies y $x_f = 300$ pies.....	63
20.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 300$ pies.....	64
21.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 656$ pies y $x_f = 300$ pies.....	64
22.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 984$ pies y $x_f = 300$ pies.....	65
23.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 300$ pies.....	65
24.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 656$ pies y $x_f = 300$ pies.....	66
25.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 984$ pies y $x_f = 300$ pies.....	66
26.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 300$ pies.....	67
27.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 984$ pies y $x_f = 200$ pies.....	68
28.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 984$ pies y $x_f = 300$ pies.....	69
29.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 984$ pies y $x_f = 200$ pies.....	69

30.	Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ día, $r_e = 984$ pies y $x_f = 300$ pies.....	70
31.	Comportamiento del gasto de producción con $x_f = 200$ pies y radio de drene de 656, 984 y 1312 pies.....	71
32.	Comportamiento de la Acumulada de producción con $x_f = 200$ pies y radio de drene de 656, 984 y 1312 pies.....	71
33.	Comportamiento del gasto de producción con $x_f = 300$ pies y radio de drene de 656, 984 y 1312 pies.....	72
34.	Comportamiento de la Acumulada de producción con $x_f = 300$ pies y radio de drene de 656, 984 y 1312 pies.....	72
35.	Comportamiento del gasto de producción con $x_f = 200$ y 300 pies y radio de drene de 984 pies.....	73
36.	Comportamiento de la Acumulada de producción con $x_f = 200$ y 300 pies y radio de drene de 984 pies.....	74
37.	Comportamiento del gasto de producción en la tubería vertical con $x_f = 200$ pies en función de la profundidad y el tiempo de producción.....	75
38.	Comportamiento del gasto de producción en la tubería vertical con $x_f = 300$ pies en función de la profundidad y el tiempo de producción.....	75
39.	Efecto de considerar la presión constante en el fondo y en la cabeza del pozo sobre el gasto instantáneo.....	76
40	Comportamiento de la presión de fondo fluyendo con $x_f = 200$ y 300 pies y un radio de drene de 984 pies.....	77
A. 1	Coordenadas elípticas.....	89
B. 1	Mapeo Conformal.....	93

LISTA DE TABLAS

TABLA		PÁGINA
1.	Datos utilizados en el análisis de resultados.....	78

I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad un gran número de yacimientos de gas que se encuentran en explotación son de baja permeabilidad. Para mejorar estas condiciones en la vecindad del pozo, es necesario efectuar fracturas hidráulicas. El objetivo de las fracturas hidráulicas es crear un patrón de alta conductividad dentro de la formación, llamada fractura, el cual permite incrementar la productividad del pozo.

Cuando se tienen yacimientos múltiples de gas de baja permeabilidad, y se explota y fractura hidráulicamente en sólo un yacimiento, es necesario esperar largos períodos de tiempo hasta alcanzar el agotamiento de la reserva del mismo y poder después explotar los demás. Una alternativa de explotación hoy día para este tipo de condiciones es el de explotar simultáneamente el mayor número de yacimientos posibles en el mismo pozo, con su respectiva fractura hidráulica en cada uno de ellos.

Lo anterior acarrea el problema de poder caracterizar adecuadamente cada uno de los yacimientos que se están explotando a través de un pozo determinado. El avance de la informática ha resultado en la creación de programas de cómputo, que permiten efectuar simulaciones del comportamiento del flujo de gas en cada una de las capas y en la tubería de producción.

En la actualidad no se cuenta con un simulador que permita integrar el comportamiento del flujo de gas de un yacimiento con la fractura hidráulica de conductividad infinita y la tubería vertical (figura 1), por lo que el objetivo principal de este trabajo es desarrollar una metodología para incorporar estos dos conceptos,

primeramente en un yacimiento y después extenderlo a varios yacimientos en el mismo pozo.

Cuando se extiende el estudio a varios yacimientos, el modelo yacimiento-tubería permite determinar el gasto individual de gas por yacimiento, e investigar bajo que alternativa de explotación se presenta el fenómeno de inyección de gas de una formación a otra.

El flujo de un fluido en un medio poroso homogéneo e isotrópico, frecuentemente será radial o lineal, dependiendo de las condiciones de flujo de la formación en la vecindad del pozo y/o la geometría del área de drene. Pero en un área cercana a una fractura vertical con una frontera interna elíptica, el flujo será elíptico. Es por eso que en este estudio se utilizarán coordenadas elípticas, para obtener la solución en el yacimiento con la fractura hidráulica.

En el Capítulo I y II se presentan la introducción y los antecedentes respectivamente. En los antecedentes se revisa y analiza la literatura existente. En el Capítulo III se establecen los modelos matemáticos tanto para el yacimiento, la fractura hidráulica, así como para la tubería vertical. En el Capítulo IV se presentan los modelos numéricos (ecuaciones en diferencias finitas) para el yacimiento, la fractura hidráulica y para la tubería vertical. En el Capítulo V se desarrollan los modelos numéricos (métodos de solución) para el yacimiento, la fractura hidráulica y la tubería vertical y en el Capítulo VI se discuten y analizan los resultados. Por último el Capítulo VII se establecen las conclusiones y recomendaciones de este estudio.

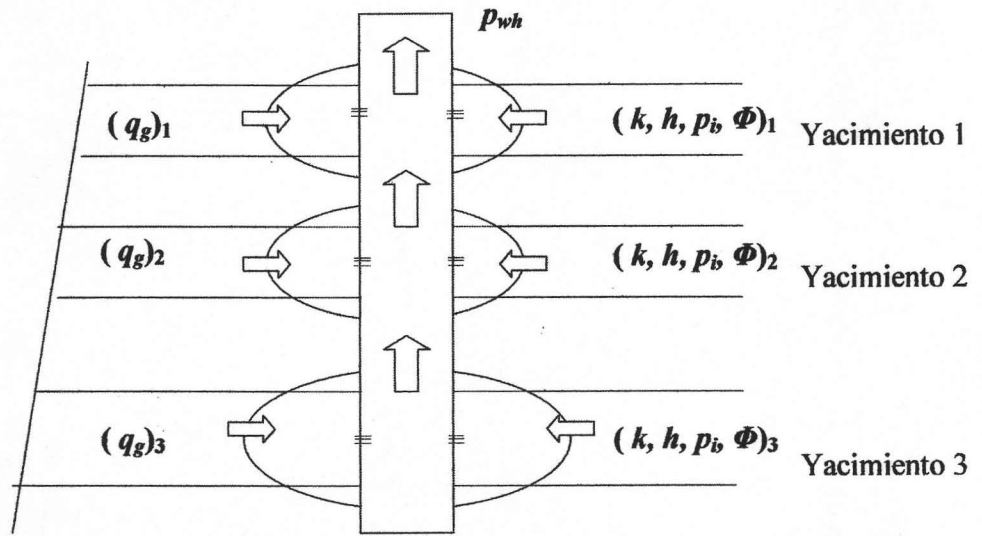


Figura 1. Planteamiento del problema

II. ANTECEDENTES

Los primeros intentos para analizar el flujo de gas, se basaron en modificar la teoría de flujo de líquido existente. El desarrollo de la descripción del flujo de gas en medios porosos, ha estado relacionado a la dificultad de linealizar la ecuación diferencial parcial no lineal que gobierna este fenómeno.

Muskat¹ aproximó la solución de esta ecuación mediante el uso del concepto de radio de drene.

Aronofsky y Jenkins² concluyeron que la producción de un gas ideal a gasto constante en un sistema radial se puede aproximar por la solución para líquidos de Van Everdingen y Hurst, siempre que el tiempo adimensional sea evaluado considerando la compresibilidad y viscosidad inicial de gas.

Ramey³ desarrolló un método para calcular el efecto de turbulencia cuando se tiene almacenamiento y daño en el pozo.

En 1966, Al-Hussainy, Ramey y Crawford⁴ presentaron una transformación que considera la variación de la viscosidad y la compresibilidad de los gases reales con respecto a la variación de la presión. Esta función se conoce como potencial de gas real o pseudopresión ($p_p(p)$). La producción de gas real puede correlacionarse en términos de éste concepto y de esta manera, observar que es similar al flujo de líquidos, como se describe en las soluciones para la ecuación de difusión⁴.

En 1967, Wattenbarger⁵ realizó un estudio partiendo de la teoría matemática de las pruebas de incremento y decremento de presión con el propósito de extender los conceptos de pseudopresión para gases reales. En este trabajo se consideraron los efectos siguientes en las pruebas de presión en pozos de gas de: 1) La variación de

las propiedades de un gas real con la presión, 2) el daño de la formación alrededor del pozo, 3) el almacenamiento, 4) flujo turbulento o no darciano, en las vecindades del pozo y 5) la fractura hidráulica vertical de conductividad infinita en el mismo.

Wattenbarger⁵ menciona que en las pruebas de presión en pozos de gas, la fractura hidráulica vertical resulta en un efecto de daño negativo aparente, similar al caso de flujo de líquidos.

Montiel⁶ y Berumen⁷ plantean las ecuaciones necesarias para simular la tubería vertical y el yacimiento, en pozos que producen simultáneamente de varios capas a gasto o presión constante en la frontera interna.

Coats⁸ y cols., presentan uno de los primeros trabajos en donde se analiza el flujo de fluidos en medios porosos teniendo fronteras elípticas.

Otro de los trabajos clásicos en flujo elíptico es el presentado por Prats⁹ y cols., considerando flujo de fluidos compresibles hacia un pozo con fractura hidráulica vertical en un yacimiento elíptico cerrado, produciendo a presión constante; adicionalmente también presentó una solución para tiempos grandes para el caso de gasto constante.

Fikri¹⁰ et al, obtuvieron soluciones analíticas para problemas de flujo elíptico que son aplicables a pozos con fractura vertical de conductividad infinita, yacimientos de forma elíptica, y yacimientos anisotrópicos produciendo a gasto o presión constante. Estos autores presentaron tablas y curvas tipo para estos casos.

El método de curvas tipo fue utilizado por Gringarten¹¹ y cols. para calcular la longitud de la fractura empleando soluciones para el flujo hacia pozos con fractura hidráulica vertical y producción a gasto constante, considerando que la fractura es de conductividad infinita.

Cinco L., Samaniego y Domínguez¹² presentaron curvas tipo para producción a gasto constante para fracturas hidráulicas de capacidad de flujo finitas, considerando el flujo de un fluido ligeramente compresible. Sus curvas tipo proveen el primer paso para evaluar las fracturas de capacidad finita de flujo.

Agarwal¹³ y *col/s.* realizaron un estudio en donde presentan curvas tipo con producción del pozo tanto para gasto constante como para presión constante, analizando pozos con fracturas hidráulicas masivas (de gran longitud, o "MHF").

Por último Bennett¹⁴ presenta un estudio de pozos fracturados con conductividad finita en yacimientos múltiples. El autor analiza el sistema del yacimiento con y sin comunicación entre capas, para ambos modos de producción –gasto constante y producción constante. También presenta soluciones analíticas para verificar sus resultados.

III. MODELO MATEMÁTICO DEL FLUJO DE GAS EN EL YACIMIENTO, FRACTURA Y TUBERÍA VERTICAL

III.1. ECUACIÓN DE FLUJO EN EL YACIMIENTO

Para encontrar una ecuación que sea representativa del flujo de gas a través del yacimiento es necesario apoyarse en principios o leyes físicas: una ecuación de continuidad o conservación de masa, una ecuación de transporte que represente la conservación de momento y una ecuación de estado.

La ley de conservación de energía no se considera, ya que se supone que el flujo ocurre bajo condiciones isotérmicas en el yacimiento.

Mediante un balance macroscópico de materia se puede obtener la ecuación de continuidad¹⁵:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho), \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

donde el vector \mathbf{v} representa la velocidad macroscópica del fluido.

La ecuación de Forchheimer¹⁶ se utiliza como la ecuación de transporte general, la cual considera efectos viscosos e inerciales para situaciones de flujo de alta velocidad o no laminar:

$$-\nabla p = \frac{\mu}{k} \bar{\mathbf{v}} + \beta \rho |\bar{\mathbf{v}}| \bar{\mathbf{v}}$$

Considerando únicamente flujo radial, esta ecuación puede expresarse como

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{k} v_r + \beta \rho |v_r| v_r$$

Una forma conveniente de la ecuación de Forchheimer es,

$$v_r = -|\delta| \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

donde el coeficiente de flujo de alta velocidad, δ , depende de la presión y del gradiente de presión, y adquiere valores menores que la unidad cuando las fuerzas inerciales son importantes,

$$|\delta| = \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta \rho k |v|}{\mu}\right)}, \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

siendo β el factor de turbulencia o coeficiente inercial.

En esta ecuación se observa que para flujo laminar, β tiende a cero, $|\delta|$ es igual a la unidad y la ecuación de transporte es idéntica a la ecuación conocida de Darcy.

La ecuación de estado para flujo de gas real se obtiene a partir de la ley general de gases reales:

$$\rho = \frac{pM}{zRT}, \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

donde el factor de compresibilidad del gas z , esta en función de la presión y la temperatura.

Algunas suposiciones importantes que se consideran en la derivación de las ecuaciones que constituyen el modelo matemático, son las siguientes:

- a) Se tiene un pozo vertical que penetra totalmente un estrato circular horizontal, de espesor constante, cerrado al flujo en la cima y en la base.

- b) El flujo es isotérmico a través del estrato.
- c) La porosidad y la permeabilidad son independientes de la presión así como de la posición del estrato.
- d) Efectos gravitacionales despreciables.
- e) No existe deslizamiento entre las moléculas del gas a través de la interfase gas-matriz.

Considerando flujo radial y combinando las ecuaciones (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4) se puede obtener la expresión siguiente

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \delta \frac{\partial p_p(p)}{\partial r} \right] = \frac{\phi \mu c_g}{k} \frac{\partial p_p(p)}{\partial t}, \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

donde $p_p(p)$ es la función de pseudopresión⁴ de los gases reales definida como:

$$p_p(p) = 2 \int_{p_m}^p \frac{p}{\mu(p)Z(p)} dp. \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

La ecuación (3.5) describe el flujo de gases reales a través del medio poroso y considera efectos no laminares así como flujo tipo Darcy.

Las condiciones iniciales y de frontera para un yacimiento cerrado se definen a continuación¹⁷:

Condición inicial.

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_p(r, t) = p_p(p_i), \quad r_w \leq r \leq \infty. \quad \dots\dots\dots(3.7a)$$

Condición de frontera interior.

$$r \left. \frac{\partial p_p(p)}{\partial r} \right|_{r=r_w} = \frac{p_{sc} T}{\pi \Gamma_{sc} k h} q_{sc}, \quad t > 0. \quad \dots\dots\dots(3.7b)$$

Condición de frontera exterior.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_p(r, t) = p_p(p_i), \quad t > 0. \quad \dots\dots\dots(3.7c)$$

III.1.1 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DE LA ECUACIÓN DE FLUJO DE GAS EN EL YACIMIENTO

Debido a la simetría de un sistema radial, éste puede ser convenientemente transformado a coordenadas logarítmicas a fin de observar en forma detallada el comportamiento de algunas variables de interés en la vecindad del pozo. Para lograr lo anterior partimos de la ecuación diferencial parcial del flujo de gas a través de medios porosos (3.5) expresada en forma general y posteriormente, en coordenadas cartesianas x, y, z^{18} :

$$\operatorname{div}(\delta |\nabla p_p(p)|) = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p_p(p)}{\partial t}. \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

Para el cálculo numérico real es deseable emplear un sistema de coordenadas el cual sea compatible con la geometría del sistema físico. Para el caso de un pozo cuya área de drene es radial, es conveniente emplear coordenadas radiales logarítmicas.

En los casos considerados en este trabajo, la coordenada z puede eliminarse debido a la geometría del sistema. El problema se reduce entonces al flujo bidimensional en el plano x, y .

Si la transformación del plano x, y al plano u, v (plano de cálculo) es de tipo especial, la ecuación (3.8) puede escribirse de una forma general y simple. La transformación requerida es del tipo " mapeo conformal ", tal y como se aplica a funciones de variable compleja¹⁹. Por lo tanto la forma general de la ecuación (3.8) en el plano u, v puede expresarse en la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\delta_u \frac{\partial p_p(p)}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\delta_v \frac{\partial p_p(p)}{\partial v} \right] = \frac{\phi \mu c}{k} J(u, v) \frac{\partial p_p(p)}{\partial t}, \quad \dots\dots\dots(3.9)$$

donde $J(u, v)$ es el Jacobiano de la transformación x, y con respecto a u, v .

El Jacobiano es la relación entre las áreas en el plano real x, y y en el plano complejo u, v (en la vecindad de un punto) y para la transformación radial logarítmica se calcula de la siguiente forma⁵:

$$J(u, v) = \frac{Area(x, y)}{Area(u, v)} = \frac{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|}{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|} = r_w^2 e^{2u}, \quad \dots\dots\dots(3.10)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} x &= r_w e^u \cos v \\ y &= r_w e^u \operatorname{sen} v \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.11)$$

El mapeo conformal equivalente para esta transformación es:

$$W_1 = \operatorname{Ln} \left(\frac{Z_1}{r_w} \right), \quad \dots\dots\dots(3.12)$$

donde W_1 y Z_1 son complejos en los planos u, v y x, y respectivamente. La geometría de esta transformación se muestra en la figura 2.

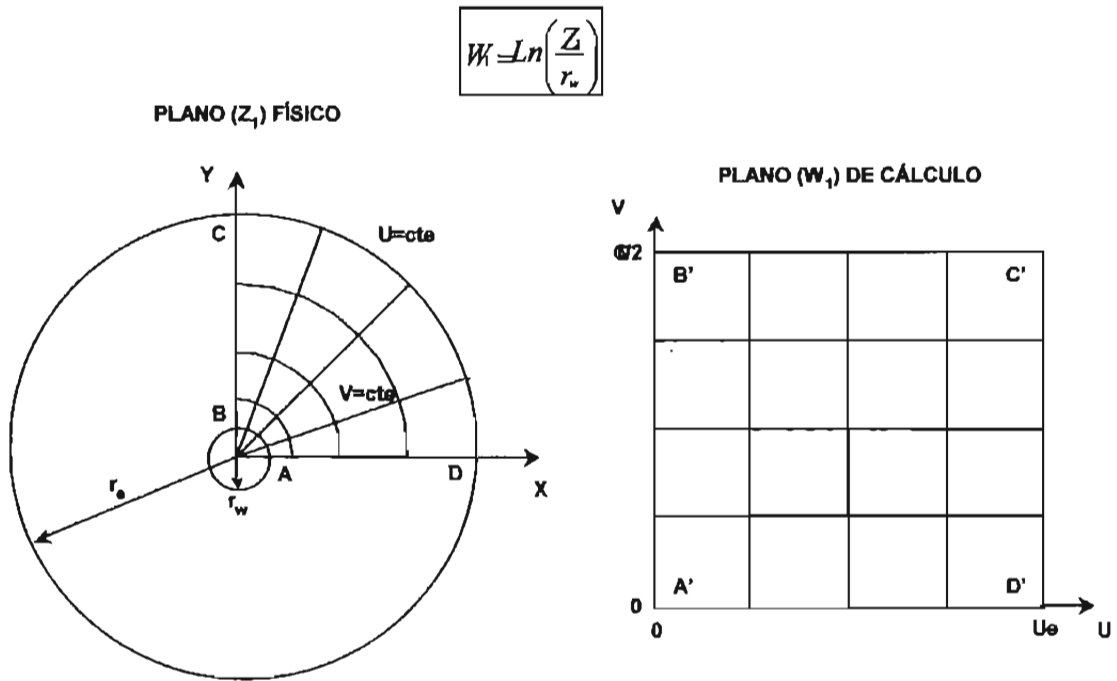


Figura 2. Mapeo conformal en un yacimiento homogéneo

Considerando a la geometría del plano x, y como simetría radial y $\delta_u = 1$ las derivadas de v desaparecen y la ecuación (3.9) se reduce a la forma familiar para la transformación radial logarítmica:

$$\frac{\partial^2 p_p(p)}{\partial u^2} = e^{2u} \frac{\phi \mu c_g r_w^2}{k} \frac{\partial p_p(p)}{\partial t} \dots\dots\dots(3.13)$$

Este mismo resultado se obtiene si se substituyen las ecuaciones (3.11) en (3.8). Sin embargo la forma de la ecuación (3.9) es útil para muchas transformaciones²⁰ de dos dimensiones, como la que se utilizará para modelar la fractura hidráulica.

III.1.2 ECUACIÓN DE FLUJO DE GAS EN EL YACIMIENTO EN TÉRMINOS ADIMENSIONALES

Mediante la regla de la cadena se tiene⁷:

$$\frac{\partial p_p(p)}{\partial u} = \left(\frac{\partial p_p(p)}{\partial p_{pD}(p)} \right) \left(\frac{\partial p_{pD}(p)}{\partial u} \right), \quad \dots\dots\dots(3.14)$$

$$\frac{\partial p_p(p)}{\partial t} = \left(\frac{\partial p_p(p)}{\partial p_{pD}(p)} \right) \left(\frac{\partial p_{pD}(p)}{\partial t} \right), \quad \dots\dots\dots(3.15)$$

donde la derivada $\partial p_p(p)/\partial p_{pD}(p)$ puede evaluarse a partir de la definición de pseudopresión adimensional ($p_{pD}(p)$), dada por las siguientes ecuaciones:

$$p_{pD}(p) = \frac{\pi h T_{sc} k}{q_{sc} p_{sc} T} [p_p(p_i) - p_p(p)] \quad \dots\dots\dots(3.16)$$

$$p_{pD}(p) = \frac{p_p(p_i) - p_p(p(r,t))}{p_p(p_i) - p_p(p_w)}. \quad \dots\dots\dots(3.17)$$

La ecuación (3.16) es para el caso de producción a gasto másico constante y la ecuación (3.17) es para el caso en que se tienen condiciones de presión constante en el pozo (frontera interior).

Por lo tanto la $\partial p_p(p)/\partial p_{pD}(p)$ nos queda:

$$\frac{\partial p_p(p)}{\partial p_{pD}(p)} = - \frac{q_{sc} p_{sc} T}{\pi h T_{sc} k}$$

Si sustituimos esta derivada en las ecuaciones (3.14) y (3.15) y estas a su vez en la ecuación (3.13), se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial^2 p_{pD}(p)}{\partial u^2} = e^{2u} \frac{\phi \mu_g r_w^2}{k} \frac{\partial p_{pD}(p)}{\partial t} \dots\dots\dots(3.18)$$

Arreglando el término de la derecha y multiplicando por $(\mu_g / \mu_i c_i)$,

$$\begin{aligned} e^{2u} \frac{\phi \mu_g r_w^2}{k} \frac{\partial p_{pD}(p)}{\partial t} &= \frac{e^{2u}}{\frac{k}{\phi \mu_g r_w^2}} \frac{\partial p_{pD}(p)}{\partial t} \\ &= \frac{\mu_g}{\mu_i c_i} e^{2u} \frac{1}{\frac{k}{\phi \mu_i c_i r_w^2}} \frac{\partial p_{pD}(p)}{\partial t} \end{aligned}$$

Si el grupo $k / \phi \mu_i c_i r_w^2$ es constante, este puede introducirse en la derivada del tiempo, obteniéndose,

$$\alpha_D e^{2u} \frac{\partial p_{pD}(p)}{\partial \left(\frac{k t}{\phi \mu_i c_i r_w^2} \right)}$$

donde α_D se define como la variable adimensional:

$$\alpha_D = \frac{\mu_g}{\mu_i c_i} \dots\dots\dots(3.19)$$

Además se sabe que el término entre paréntesis es el tiempo adimensional t_D , por lo que se llega a la expresión siguiente:

$$\alpha_D e^{2u} \frac{\partial p_{pD}(p)}{\partial t_D} \dots\dots\dots(3.20)$$

donde

$$t_D = \frac{k t}{\phi \mu_i c_i r_w^2}$$

Entonces, finalmente la ecuación de flujo (3.18) en términos adimensionales resulta ser como sigue:

$$\frac{\partial^2 p_{pD}(p)}{\partial u^2} = e^{2u} \alpha_D \frac{\partial p_{pD}(p)}{\partial t_D} \dots\dots\dots(3.21)$$

Las condiciones iniciales y de frontera en forma adimensional son¹⁷:

Condición inicial.

$$\lim_{t_D \rightarrow 0} p_{pD}(u_D, t_D) = 0, \quad 0 \leq u_D \leq u_{eD} \dots\dots\dots(3.21a)$$

Condición de frontera interior.

$$\left(\frac{\partial p_{pD}}{\partial u_D} \right)_{u_D=0} = -1, \quad \dots\dots\dots(3.21b)$$

Condición de frontera exterior.

$$\left(\frac{\partial p_{pD}}{\partial u_D} \right)_{u_D=u_{eD}} = 0, \quad \dots\dots\dots(3.21c)$$

La ecuación diferencial en (3.21) es una ecuación diferencial parcial no lineal del tipo parabólico. La no-linealidad se debe a:

- El cambio significativo en compresibilidad y viscosidad con la presión, considerado en α_D .

Dicho de otra forma, estas variables dependen de P_{pD} , la variable dependiente. Como es de esperarse, la solución de la ecuación diferencial se obtiene numéricamente, como se vera posteriormente.

Otro aspecto de importancia que se debe señalar en esta ecuación es que los gradientes de presión de segundo orden se manejan rigurosamente a través del potencial de gas real $p_p(p)$.

III.2 ECUACIÓN DE FLUJO EN LA FRACTURA HIDRÁULICA

Es común fracturar hidráulicamente pozos de gas a fin de incrementar la capacidad de flujo en la vecindad del pozo. Aunque las formas de estas fracturas son indudablemente complicadas, las fracturas reales a menudo se idealizan como planos horizontales o verticales que intersecan al pozo. En este trabajo se considera una fractura hidráulica vertical en un yacimiento. Las fracturas verticales tienen más probabilidades de ocurrir en formaciones profundas (mayor a 1000 m) que las fracturas horizontales.

Se supone que la fractura penetra totalmente la formación productora, pero no lo hace en las formaciones impermeables que se encuentran alrededor de esta. Esto da al sistema una simetría, la cual resultará en que haya flujo solo en la dirección horizontal. La figura 3 ilustra la simetría de este sistema.

El problema se simplifica matemáticamente, suponiendo una conductividad de flujo infinita dentro de la fractura. Esta suposición se justifica en casos donde la conductividad de flujo en la fractura es suficientemente alta, comparada con la permeabilidad de la formación. La conductividad de flujo en la fractura depende principalmente del ancho de la fractura y de la permeabilidad que tiene el material sustentante que se encuentra llenando la fractura. Probablemente habrá muchos casos prácticos en los que la suposición de capacidad de flujo infinita no es

razonable, por lo que el modelo matemático considerado no es un caso general para una fractura vertical.

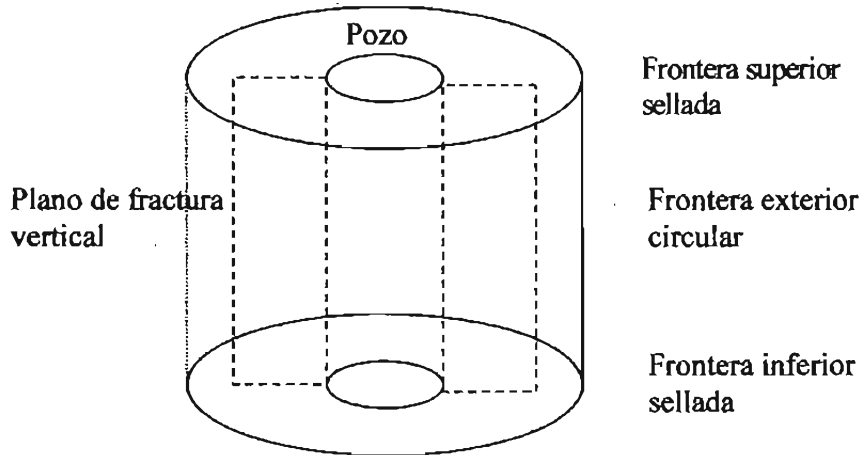


Figura 3. Esquema del modelo de flujo de la fractura vertical

Por las condiciones de flujo descritas anteriormente, no se tiene un gradiente de presión dentro de la fractura, así que la presión es uniforme a través de ella en cualquier instante de tiempo. Además, es razonable pensar que la forma y el tamaño del pozo no es importante comparados con la fractura. Se supone que todo el gas que fluye hacia dentro del pozo lo hace a través del flujo en la fractura hidráulica..

La condición de frontera para la fractura vertical de conductividad de flujo infinita puede ser expresada como sigue, para los planos x , y mostrados en la Figura 4⁶:

$$p(x, 0, t) = p(t)_{\text{pozo}}; \quad -x_f \leq x \leq x_f \quad \dots\dots\dots(3.22)$$

$$q_{\text{pozo}} = 2 \int_{-x_f}^{x_f} \delta_y \frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{p T_s}{Z p_s T} \Big|_{y=0} dx \quad \dots\dots\dots(3.23)$$

$$= \int_{-x_f}^{x_f} \delta_y kh \frac{\partial p_p(p)}{\partial y} \frac{T_s}{p_s T} \Big|_{y=0} dx. \quad \dots\dots\dots(3.24)$$

$$W_2 = \cosh^{-1} \left(\frac{Z_2}{x_f} \right)$$

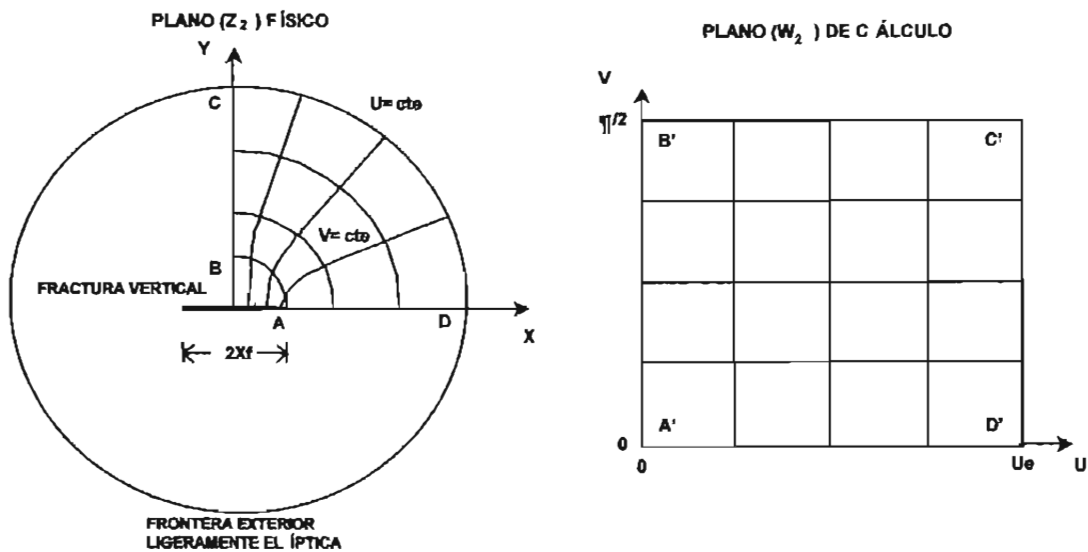


Figura 4. Transformación de coordenadas de un modelo de fractura vertical

III.2.1 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DEL MODELO DE FRACTURA

La geometría de un pozo fracturado verticalmente se ha mostrado en la figura 3. Nuevamente se establece que sólo se está considerando flujo horizontal; por lo tanto el modelo puede reducirse a un problema en dos dimensiones. Este tipo de sistema se ha resuelto anteriormente para líquidos en el plano x, y^{21} ; esto es, no se usaron coordenadas especiales. Sin embargo, es deseable tener un espaciamiento más fino de puntos en la malla cerca de la fractura donde los gradientes (y derivadas de mayor orden) son mayores, lo cual permite reducir el error de truncamiento numérico, que depende de las derivadas de $p_p(p)$, así como del espaciamiento punto-malla. Para cumplir con una localización favorable de puntos en la malla, se emplearon las coordenadas elípticas (Apéndice A). Este sistema de coordenadas se ha usado por otros autores para resolver problemas numéricos y analíticos similares^{8,9}. Las coordenadas x, y están dadas por:

$$\begin{aligned} x &= x_f \cosh u \cos v \\ y &= x_f \sinh u \sin v \end{aligned} \dots\dots\dots(3.25)$$

Usando este sistema de coordenadas es equivalente al mapeo conformal:

$$W_2 = \cosh^{-1} \left(\frac{Z_2}{x_f} \right) \dots\dots\dots(3.26)$$

El cual se muestra en la Figura 4. Este mapeo de conformación tiene significado físico, ya que las líneas de las constantes u, v son las líneas de flujo y las líneas equipotenciales respectivamente, de un fluido de incompresible fluyendo dentro de la

fractura en el plano x, y . En el apéndice A y B se hace el desarrollo de las coordenadas elípticas y el mapeo conformal

Ya que esta transformación puede representarse por un mapeo conformal, la forma general de la ecuación (3.9) puede emplearse:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\delta_u \frac{\partial p_p(p)}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\delta_v \frac{\partial p_p(p)}{\partial v} \right] = \frac{\phi \mu c_g}{k} J(u, v) \frac{\partial p_p(p)}{\partial t} \quad \dots\dots\dots(3.27)$$

Substituyendo el Jacobiano:

$$J(u, v) = x_f^2 (\sinh^2 u + \sen^2 v) \quad \dots\dots\dots(3.28)$$

Entonces la ecuación (3.27) queda:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\delta_u \frac{\partial p_p(p)}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\delta_v \frac{\partial p_p(p)}{\partial v} \right] = \frac{\phi \mu c_g}{k} x_f^2 (\sinh^2 u + \sen^2 v) \frac{\partial p_p(p)}{\partial t} \quad \dots\dots\dots(3.29)$$

La cual será la ecuación diferencial que se resolverá en el plano u, v .

Para un fluido compresible, este problema no puede reducirse a una dimensión.

Debido a la simetría del sistema de flujo, en el plano de calculo u, v puede tomarse como un solo cuadrante del plano x, y , como se muestra en la figura 4.

III.2.2 ECUACIÓN DE FLUJO DE GAS EN LA FRACTURA HIDRÁULICA EN TÉRMINOS ADIMENSIONALES

Definiendo adicionalmente a la ecuación (3.16) las variables adimensionales siguientes, referidas a presión constante:

Tiempo adimensional evaluado con base en la longitud media de la fractura, t_{DXf} :

$$t_{DXf} = \frac{\kappa t}{\phi \mu_i c_i x_f^2} \dots\dots\dots(3.30)$$

y, gasto adimensional:

$$q_D = \frac{p_{sc} T q_{sc}(r, t)}{\pi k h T_{sc} [p_p(p_i) - p_p(p_w)]} \dots\dots\dots(3.31)$$

En la ecuación (3.29), se substituye la expresión para el tiempo adimensional t_{DXf} (Ec. 3.30) y para la pseudopresión adimensional (Ec. 3.16), considerando condiciones de flujo laminar $\delta_u = \delta_v = 1$, desarrollando y simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial^2 p_{pD}(p)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 p_{pD}(p)}{\partial v^2} = \alpha_D (\sinh^2 u + \sen^2 v) \frac{\partial p_{pD}(p)}{\partial t_{DXf}}, \dots\dots\dots(3.32)$$

El gasto adimensional q_D correspondiente al gasto dimensional q expresado por la ecuación (3.24) se obtiene a partir de la ecuación (3.30) para gasto adimensional a presión constante:

$$\frac{q_D \pi k h T_{sc} [p_p(p_i) - p_p(p_w)]}{p_{sc} T} = \frac{k h T_{sc}}{p_{sc} T} \int_{-x_f}^{x_f} \frac{\partial p_p(p)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx$$

$$q_D = \frac{p_{sc} T}{q_D \pi k h T_{sc} [p_p(p_i) - p_p(p_w)]} \frac{k h T_{sc}}{p_{sc} T} \int_{-x_f}^{x_f} \frac{\partial p_p(p)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx$$

$$q_D = \frac{1}{\pi [p_p(p_i) - p_p(p_w)]} \int_{-x_f}^{x_f} \frac{\partial p_p(p)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx. \quad \dots\dots\dots(3.33)$$

Ahora se substituye la definición de pseudopresión adimensional a presión constante:

$$q_D = \frac{1}{\pi [p_p(p_i) - p_p(p_w)]} \int_{-x_f}^{x_f} \frac{\partial [p_p(p_i) - p_{pD}(p)(p_p(p_i) - p_p(p_w))]}{\partial y} \Big|_{y=0} dx$$

$$q_D = -\frac{(p_p(p_i) - p_p(p_w))}{\pi [p_p(p_i) - p_p(p_w)]} \int_{-x_f}^{x_f} \frac{\partial [p_{pD}(p)]}{\partial y} \Big|_{y=0} dx$$

$$q_D = -\frac{1}{\pi} \int_{-x_f}^{x_f} \frac{\partial [p_{pD}(p)]}{\partial y} \Big|_{y=0} dx. \quad \dots\dots\dots(3.34)$$

III.3 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD Y DE ESTADO EN LA TUBERÍA VERTICAL

El movimiento de un fluido desde el punto de vista macroscópico, puede describirse geoméricamente dentro de la tubería vertical si se conoce la posición de cada elemento puntual del fluido a través del tiempo. Este movimiento se determina utilizando ciertos principios físicos como son: una ecuación de continuidad, una ley de movimiento y energía y finalmente una ecuación termodinámica de estado.

Estos principios físicos se expresan matemáticamente como un sistema de ecuaciones diferenciales. Para que el problema del movimiento quede determinado en forma completa, es necesario fijar un conjunto de condiciones iniciales y de frontera a través del sistema yacimiento-tubería. El modelo físico de la tubería se muestra en la figura 5.

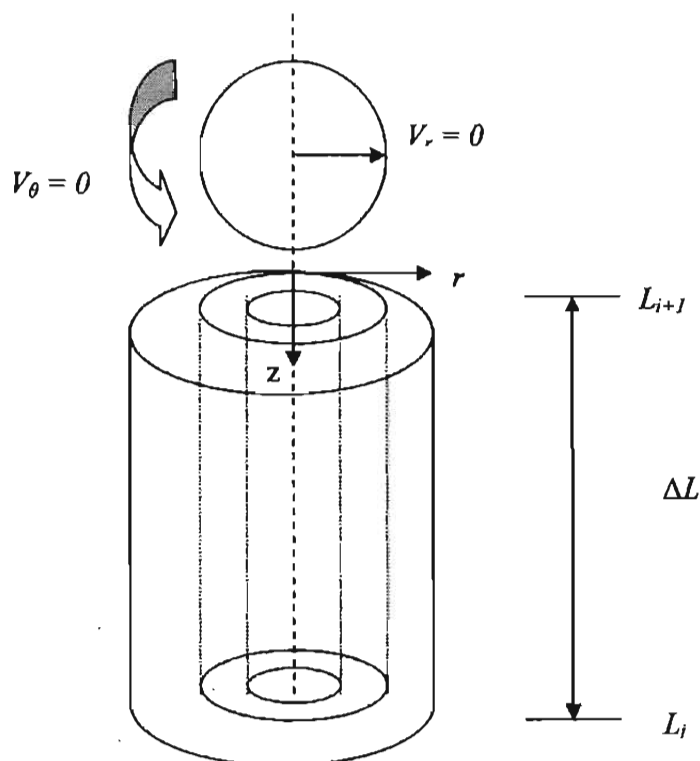


Figura 5. Modelo físico de la tubería

De un balance másico en un volumen de control y haciendo uso de coordenadas cilíndricas, que son las coordenadas naturales para describir las posiciones en una tubería circular en la que, por simetría de flujo y condiciones de flujo laminar se tiene que $V_\theta = V_r = 0$ y además elegimos como sistema una envoltura cilíndrica de espesor Δr y longitud L (Figura 5), e incorporamos un término fuente o sumidero, se puede obtener la siguiente ecuación de continuidad⁷:

$$-\frac{\partial}{\partial L}(\rho V_z) - \frac{W^*}{A\Delta L} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \dots\dots\dots(3.35)$$

El término de acumulación de masa, $\partial \rho / \partial t$ permite observar los efectos transitorios de flujo en la tubería a tiempos muy cortos, lo cual hace posible determinar el efecto de almacenamiento en la tubería a condiciones dinámicas, es decir, en presencia de gradientes de temperatura y pérdidas de energía por fricción.

El segundo término de la ecuación (3.35) corresponde a la masa introducida o pérdida en la tubería, causada por producción o inyección en el estrato; el signo negativo de este término indica que cuando existe inyección, gasto positivo en la formación, el sistema integrado por los nodos en la tubería, pierde masa. Por otro lado, el primer término representa el ritmo de cambio másico sobre la longitud de la tubería ΔL .

Además, es conveniente expresar la ecuación de continuidad en términos de gasto volumétrico de gas⁶. El gasto volumétrico q , y el gasto másico W , pueden expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} q &= V_z A \\ W &= \rho q = V_z \rho A, \dots\dots\dots(3.36) \end{aligned}$$

donde A es el área de la sección transversal al flujo en el interior de la tubería.

Rearreglando la ecuación (3.36):

$$V_z \rho A = W / A$$

Si sustituimos la expresión obtenida en la ecuación de continuidad, (3.35),

finalmente tendremos la ecuación de continuidad en función del gasto másico:

$$-\frac{\partial W}{\partial L} - \frac{W^*}{\Delta L} = A \frac{\partial \rho}{\partial t} \dots\dots\dots(3.37)$$

Por otro lado, la ecuación de estado se obtiene a partir de la ley general de los gases reales:

$$\rho = \left(\frac{p}{ZRT} \right) M \dots\dots\dots(3.38)$$

Se sabe además que el volumen molar, V_m , puede expresarse a través de la siguiente ecuación:

$$V_m = \frac{V}{n} = \frac{zRT}{p} \dots\dots\dots(3.39)$$

Además la densidad, puede definirse en términos de volumen molar de la siguiente fórmula:

$$\rho = \frac{M}{V_m} \dots\dots\dots(3.40)$$

En la misma forma, el gasto másico puede expresarse como:

$$W^* = q\rho = q \frac{M}{V_m} \dots\dots\dots(3.41)$$

A partir de la ecuación (3.39) se observa que:

$$R = \left(\frac{p}{zT} \right) V_m = \frac{P_{sc}}{T_{sc}} V_m = \text{constante} \quad \dots\dots\dots(3.42)$$

Es decir,

$$V_m = \frac{RT_{sc}}{P_{sc}}, \quad z_{sc} = 1$$

Así, el gasto másico expresado en la ecuación (3.41) puede obtenerse como se muestra a continuación:

$$W^* = q \frac{Mp_{sc}}{RT_{sc}}. \quad \dots\dots\dots(3.43)$$

Si sustituimos la ecuación (3.38) y la ecuación (3.41) en la ecuación de continuidad obtenida anteriormente (3.37), se obtiene:

$$-\frac{\partial q}{\partial L} - \frac{q^*}{\Delta L} = A \frac{T_{sc}}{P_{sc}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{zT} \right) \quad \dots\dots\dots(3.44)$$

Si en un punto fijo de la tubería, la temperatura permanece constante a través del tiempo, y el área de la tubería es $A = \pi d^2 / 4$, la ecuación de continuidad a lo largo de la tubería será:

$$-\frac{\partial q}{\partial L} - \frac{q^*}{\Delta L} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{T_{sc}}{P_{sc}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{zT} \right) \quad \dots\dots\dots(3.45)$$

Finalmente la ecuación anterior en unidades prácticas queda⁷:

$$-\frac{\partial q}{\partial L} - \frac{q^*}{\Delta L} = \frac{0.193d^2}{T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{z} \right) \quad \dots\dots\dots(3.46)$$

III.4 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE ENERGÍA EN LA TUBERÍA VERTICAL

A partir de un balance macroscópico de energía en un volumen de control en la tubería, Smith¹⁷, obtuvo la ecuación general siguiente:

$$q = 0.2 \times 10^6 \left[\frac{d^5}{\gamma T_z f L} (p_2^2 - e^s p_1^2) \frac{S}{(e^s - 1)} \right]^{1/2}, \quad \dots\dots\dots(3.47)$$

donde:

$$S = 0.0375 \frac{\gamma L}{T_z}. \quad \dots\dots\dots(3.48)$$

Aún cuando esta ecuación se planteó considerando algunas propiedades promedio, al resolver en forma discreta, es posible considerar las propiedades en puntos definidos a lo largo de la tubería. El factor f que aparece en la ecuación de energía llamado factor de fricción, depende de las fuerzas viscosas y de movimiento actuando en sentido opuesto a la dirección de flujo del fluido sobre la pared interior de la tubería. Su magnitud depende de la velocidad, viscosidad y densidad del gas, así como de las propiedades del conducto, como lo son el diámetro y rugosidad de la superficie interior del mismo. Esta dependencia se ha establecido en términos del grupo adimensional conocido como número de Reynolds (R_e):

$$R_e = \frac{dV_z \rho}{\mu}. \quad \dots\dots\dots(3.49)$$

Con ayuda de las ecuaciones (3.36), (3.40), (3.41), así como también de la expresión $M=28.97\gamma$, se puede expresar el número de Reynolds como:

$$R_e = 0.0201 \frac{\gamma q}{d\mu}. \quad \dots\dots\dots(3.50)$$

El factor de fricción se puede calcular mediante la correlación de Colebrook³⁵, la cual utiliza un procedimiento iterativo en función del número de Reynolds y la rugosidad relativa de la tubería:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.74 - 2 \log \left(\frac{2.87}{d} + \frac{18.7}{R_e \sqrt{f}} \right) \dots\dots\dots(3.52)$$

Las condiciones iniciales y de frontera se definirán a continuación⁷:

a). Condiciones iniciales.

a.1). Se especifica la presión y gasto en la cabeza del pozo cerrado.

$$\left. \begin{aligned} p(0,t) &= p_{whs} & , & & t = 0 \\ q(0,t) &= 0 & , & & t = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.53)$$

a.2). La distribución de presiones a lo largo de la tubería, es causada por la columna estática de gas y a la presión en superficie p_{whs} , expresada por medio de la siguiente ecuación:

$$p_{ws} = p_{whs} e^{\left(\frac{0.01875 \mu L}{z \bar{T}} \right)} , \quad t = 0 \dots\dots\dots(3.54)$$

b). Condiciones de frontera.

b.1). Se establece la presión fluyendo constante en la cabeza del pozo,

$$p(0,t) = p_{whf} , \quad t > 0 \dots\dots\dots(3.55)$$

b.2). Se especifica el gasto constante en la superficie e igual a cero, para fines de simular pruebas de incremento de presión, después de un tiempo de producción t_p ,

$$q(0,t) = 0 , \quad t > t_p \dots\dots\dots(3.56)$$

IV MODELO NUMÉRICO DEL FLUJO DE GAS EN EL YACIMIENTO, FRACTURA Y TUBERÍA VERTICAL

IV.1 ECUACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS EN EL YACIMIENTO

En la sección III.1 se obtuvo la expresión que representa la ecuación diferencial no lineal para flujo de gas real a través de medios porosos, la cual relaciona los cambios de potencial con el tiempo a lo largo del espacio. En la sección III.1.1 y III.1.2 el espacio radial se transformó en forma logarítmica, y la ecuación quedó expresada en términos de la transformación $u = \ln r_D$ y de las variables adimensionales, como se puede observar en la ecuación (3.21).

La transformación en función de la variable u convierte el dominio radial de $r_w < r < r_e$ en un dominio normalizado de $0 < u < u_e$, lo que permite simplificar la forma discreta de la ecuación (3.21). Esta transformación distribuye en forma logarítmica los nodos en el dominio de r_D , mediante un espaciamiento constante en la coordenada u , concentrando los núcleos de los nodos en las vecindades del pozo, donde precisamente se manifiestan los gradientes de presión más fuertes, requiriéndose ahí, una representación exacta de las derivadas de la ecuación (3.15). Conforme la distancia radial aumenta, los gradientes de presión son suaves, y la separación entre nodos calculada por ésta transformación, se hace creciente.

Para transformar la ecuación diferencial continua (3.21), a la forma discreta, es necesario disponer de un esquema numérico para evaluar las derivadas en espacio y tiempo que en ella aparecen. La literatura indica^{22,23,24} que una ecuación diferencial de este tipo puede aproximarse en forma discreta mediante diferencias centrales en

espacio y diferencias regresivas en tiempo. Así, la representación discreta de la ecuación (3.21) queda de la forma siguiente:

$$\frac{\delta_{i+1/2}^{n+1} (p_{pD}(p)_{i+1}^{n+1} - p_{pD}(p)_i^{n+1}) - \delta_{i-1/2}^{n+1} (p_{pD}(p)_i^{n+1} - p_{pD}(p)_{i-1}^{n+1})}{(\Delta u)^2} = \alpha_i^{n+1} e^{2u_i}$$

$$\left(\frac{p_{pD}(p)_i^{n+1} - p_{pD}(p)_i^n}{\Delta t_D} \right) + O\{(\Delta u)^2, t\}, \dots\dots\dots(4.1)$$

donde el subíndice i se refiere a la posición en espacio y el subíndice n a la etapa del tiempo.

La ecuación exacta (4.1) puede escribirse en la forma aproximada en diferencias finitas siguiente:

$$\delta_{i-1/2}^{n+1} p_{pD}(p)_{i-1}^{n+1} - \left(\delta_{i-1/2}^{n+1} + \delta_{i+1/2}^{n+1} + \alpha_i^{n+1} e^{2u_i} \lambda_i \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} \right) p_{pD}(p)_i^{n+1}$$

$$+ \delta_{i+1/2}^{n+1} p_{pD}(p)_{i+1}^{n+1} = \alpha_i^{n+1} e^{2u_i} \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} p_{pD}(p)_i^n \dots\dots\dots(4.2)$$

Las condiciones iniciales y de frontera (Ec. 3.21) expresada en diferencias finitas son las siguientes:

Condición inicial.

$$p_{pD}(p)_i^0 = 0, \quad 1 \leq i \leq N+1, \quad \dots\dots\dots(4.2a)$$

Condición de frontera interna de producción del pozo a gasto másico constante.

$$-\frac{p_{pD}(p)_2^{n+1} - p_{pD}(p)_0^{n+1}}{2\Delta u} = 1. \quad \dots\dots\dots(4.2b)$$

Condición de frontera externa.

$$-\frac{p_{pD}(p)_{N+2}^{n+1} - p_{pD}(p)_N^{n+1}}{2\Delta u} = 0. \quad \dots\dots\dots(4.2c)$$

IV.2 ECUACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS EN LA FRACTURA HIDRÁULICA

Por un proceso similar de aproximación como el que se utilizó para el modelo de flujo radial, el equivalente a la ecuación (3.29) en diferencias finitas puede escribirse, en la forma siguiente ⁵:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta u^2} \left[\delta_{u_{i+1/2,j}} (p_p(p)_{i+1,j} - p_p(p)_{i,j}) - \delta_{u_{i-1/2,j}} (p_p(p)_{i,j} - p_p(p)_{i-1,j}) \right]^{n+1} \\ & + \frac{1}{\Delta v^2} \left[\delta_{v_{i,j+1/2}} (p_p(p)_{i,j+1} - p_p(p)_{i,j}) - \delta_{v_{i,j-1/2}} (p_p(p)_{i,j} - p_p(p)_{i,j-1}) \right]^{n+1} \\ & = \left(\frac{\phi\mu c}{k} \right)_{i,j}^{n+1} x_f^2 (\sinh^2 u + \sen^2 v) \frac{1}{\Delta t} (p_p(p)_{i,j}^{n+1} - p_p(p)_{i,j}^n) \quad \dots\dots\dots(4.3) \end{aligned}$$

Expresada en función de los parámetros adimensionales la ecuación (4.3) queda:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta u^2} \left[\delta_{u_{i+1/2,j}} (p_{pD}(p)_{i+1,j} - p_{pD}(p)_{i,j}) - \delta_{u_{i-1/2,j}} (p_{pD}(p)_{i,j} - p_{pD}(p)_{i-1,j}) \right]^{n+1} \\ & + \frac{1}{\Delta v^2} \left[\delta_{v_{i,j+1/2}} (p_{pD}(p)_{i,j+1} - p_{pD}(p)_{i,j}) - \delta_{v_{i,j-1/2}} (p_{pD}(p)_{i,j} - p_{pD}(p)_{i,j-1}) \right]^{n+1} \\ & = \left(\frac{\mu c}{\mu_{gi} c_{gi}} \right)_{i,j}^{n+1} (\sinh^2 u + \sen^2 v) \frac{1}{\Delta t_{DX_f}} (p_{pD}(p)_{i,j}^{n+1} - p_{pD}(p)_{i,j}^n) \quad \dots\dots\dots(4.4) \end{aligned}$$

donde i, j y n se refieren a u, v y t , respectivamente. El lado izquierdo de la ecuación se ha reescrito completamente en pasos de tiempo $n+1$, en vez de emplear un promedio ponderado entre $n+1$ y n . Esto hace que la ecuación sea estrictamente implícita y tiene la ventaja de ser simple, con mayor estabilidad y de más rápida

convergencia, comparada con el uso de derivadas ponderadas promedio como es el caso del lado izquierdo de la ecuación. Los coeficientes se evalúan en $n+1$, de acuerdo con Fox²⁵. El orden de exactitud de este método de solución en diferencias finitas es $o(\Delta u^2, \Delta v^2, \Delta t)$ cuando δ_u y δ_v son iguales a 1, por el contrario, cuando existe turbulencia, el orden de exactitud disminuye, siendo de $o(\Delta u, \Delta v, \Delta t)$.

La condición de frontera en el pozo es complicada por la especificación de una condición de presión frente a la formación productora y una condición de gasto en la superficie. Estas condiciones están dadas por las ecuaciones (3.22) y (3.24). La integración de la expresión 3.24 para el gasto aportado por la formación productora da como resultado la expresión siguiente:

$$q_{sf} = 4 \frac{T_s}{p_s T} kh \frac{1}{\Delta u} \sum_{j=0}^{N_f} A(j) \left[\frac{3}{2} \delta_{u_{1/2}} (p_{pD}(p)_{1,j} - p_{pD}(p)_{0,j}) - \frac{1}{2} \delta_{u_{3/2}} (p_{pD}(p)_{2,j} - p_{pD}(p)_{1,j}) \right]^{n+1} \Delta v \dots \dots \dots (4.5)$$

donde $A(j)$ representa coeficientes dados por la regla de Bode's²⁶. Esta integración numérica es similar a la forma familiar de la regla de Simpson's, pero de once puntos y treceavo orden de exactitud en este caso.

En forma adimensional, considerando condiciones de flujo laminar, $\delta_{u_{1/2}} = \delta_{u_{3/2}} = 1$, la ecuación (4.4) queda:

$$q_D = 2 \frac{\Delta v}{\Delta u} \sum_{j=0}^{N_f} A(j) \left[-3 p_{pD}(p)_{0,j} + 4 p_{pD}(p)_{1,j} - p_{pD}(p)_{2,j} \right]^{n+1} \dots \dots \dots (4.6)$$

La condición de frontera para la fractura vertical de conductividad de flujo infinita, puede representarse por medio de la expresión siguiente⁵:

$$P_{pD}(P)_{0,j}^{n+1} = P_{pD}(P)_{0,0}^{n+1} \quad j = 1, N_j. \quad \dots\dots\dots(4.7)$$

A lo largo de la parte superior e inferior del plano u, v , se considera una condición de no-flujo en la dirección v debido a la simetría de flujo en el plano x, y . Una condición de flujo se aplica también en la frontera externa (yacimientos cerrados). Aplicando el método de imágenes, estas condiciones de no-flujo son aproximadas nuevamente con una exactitud de segundo orden:

$$P_{pD}(P)_{i,1}^{n+1} = P_{pD}(P)_{i,-1}^{n+1} \quad i = 0, N_i, \quad \dots\dots\dots(4.8a)$$

$$P_{pD}(P)_{i,N_{j+1}}^{n+1} = P_{pD}(P)_{i,N_{j-1}}^{n+1} \quad i = 0, N_i, \quad \dots\dots\dots(4.8b)$$

$$P_{pD}(P)_{N_{i+1},j}^{n+1} = P_{pD}(P)_{N_{i-1},j}^{n+1} \quad j = 0, N_j. \quad \dots\dots\dots(4.8c)$$

IV.3 ECUACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS EN LA TUBERÍA VERTICAL

La ecuación de continuidad para el flujo de gas reales a través de la tubería, quedó expresada mediante la ecuación (3.44), en la que no se consideran los cambios de temperatura con la presión. Conviene enfatizar que bajo algunas condiciones de flujo de gas, a tiempos cortos pueden presentarse cambios de temperatura respecto a la presión²⁷, dT/dp , por lo que este efecto llamado Joule-Thompson, podría influir en la solución del problema de flujo de gases en la tubería. Este efecto no se incluirá en este trabajo. La ecuación (3.44) puede resolverse en diferencias finitas explícitamente para el gasto en forma regresiva⁷:

$$q_k^{n+1} = \frac{0.193 d_k^2 \Delta L}{T_k \Delta t} \left[\left(\frac{p}{L} \right)_k^{n+1} - \left(\frac{p}{L} \right)_k^n \right] + q_k^{*n+1} + q_{k+1}^{n+1} \quad \dots\dots\dots(4.9)$$

Por otra parte, la ecuación de energía (3.45), expresada en diferencias finitas, en términos de presión queda en la siguiente forma:

$$p_k^{n+1} = \left[\frac{\gamma_g \Delta L (e^s - 1) (q_k^2 T_k z_k f_k)^{n+1}}{0.04 \times 10^{12} d_k^5 S} + e^s p_{k-1}^{2^{n+1}} \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots(4.10)$$

Donde:

$$S = 0.0375 \frac{\gamma_g \Delta L}{(T_k z_k)^{n+1}}$$

$$f_k^{n+1} = f(\text{Re}^{n+1}, \varepsilon)$$

y

$$\text{Re}^{n+1} = 0.0201 \frac{\gamma_g q_k^{n+1}}{d_k \mu_k^{n+1}}$$

V. DESARROLLO DEL MODELO NUMÉRICO

En este capítulo se presenta en forma condensada el desarrollo necesario para poder solucionar las ecuaciones en diferencias finitas para el yacimiento, la fractura y la tubería vertical.

V.1 MÉTODO DE SOLUCIÓN EN EL YACIMIENTO

La ecuación en diferencias finitas, expresada en la ecuación (4.2), resulta ser fuertemente no lineal, por lo que es necesario aplicar una formulación totalmente implícita. Con ello se podrán evaluar las funciones de potencial al mismo nivel de tiempo que la incógnita (potencial) que se pretende conocer en cada nodo, donde la ecuación es aplicada dentro del dominio discretizado. Un esquema apropiado de linealización es el método iterativo de Newton-Raphson, el cual se describe a continuación²⁸:

Definiendo una función F_i a partir de la ecuación (4.2), e igualándola a cero,

$$F_i(p_{pD}(p)_{i-1}^{n+1}, p_{pD}(p)_i^{n+1}, p_{pD}(p)_{i+1}^{n+1}) = \delta_{i-1/2}^{n+1} p_{pD}(p)_{i-1}^{n+1} - \left(\delta_{i-1/2}^{n+1} + \delta_{i+1/2}^{n+1} + \alpha_i^{n+1} e^{2u_i} \lambda_i \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} \right) p_{pD}(p)_i^{n+1} + \delta_{i+1/2}^{n+1} p_{pD}(p)_{i+1}^{n+1} + \alpha_i^{n+1} e^{2u_i} \lambda_i \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} p_{pD}(p)_i^n = 0. \quad \dots\dots\dots(5.1)$$

Aproximando F_i^k alrededor de la iteración k en el nivel de tiempo $n+1$, mediante una serie de Taylor truncada, de la que se retienen solamente los términos de menor orden, se obtiene:

$$F_i^{k+1} = F_i^k + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{pD}(p)}\right)_{i-1}^k \psi p_{pD}(p)_{i-1}^{k+1} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{pD}(p)}\right)_i^k \psi p_{pD}(p)_i^{k+1} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{pD}(p)}\right)_{i+1}^k \psi p_{pD}(p)_{i+1}^{k+1} \\ \psi p_{pD}(p)_{i+1}^{k+1} = 0 \quad \dots\dots\dots(5.2)$$

Escribiendo la ecuación anterior en términos de F_i^k ,

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{pD}(p)}\right)_{i-1}^k \psi p_{pD}(p)_{i-1}^{k+1} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{pD}(p)}\right)_i^k \psi p_{pD}(p)_i^{k+1} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{pD}(p)}\right)_{i+1}^k \psi p_{pD}(p)_{i+1}^{k+1} \quad \dots\dots(5.3)$$

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{pD}(p)}\right)_j^k \psi p_{pD}(p)_j^{k+1} = -F_i^k \quad \dots\dots\dots(5.4)$$

En donde,

$$\psi p_{pD}(p)_j^{k+1} = p_{pD}(p)_j^{k+1} - p_{pD}(p)_j^k$$

Por otro lado, la ecuación (5.1) evaluada al nivel de iteración k , toma la siguiente

forma,

$$F_i^k = \delta_{i-1/2}^k p_{pD}(p)_{i-1}^k - \left(\delta_{i-1/2}^k + \delta_{i+1/2}^k + \alpha_i^k e^{2u_i} \lambda_i \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} \right) p_{pD}(p)_i^k + \delta_{i+1/2}^k p_{pD}(p)_{i+1}^k + \\ \alpha_i^k e^{2u_i} \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} p_{pD}(p)_i^n \quad \dots\dots\dots(5.5)$$

Arreglando esta ecuación, se puede escribir convenientemente de la siguiente

manera,

$$F_i^k = \delta_{i-1/2}^k (p_{pD}(p)_{i-1}^k - p_{pD}(p)_i^k) + \delta_{i+1/2}^k (p_{pD}(p)_{i+1}^k - p_{pD}(p)_i^k) + \\ \alpha_i^k e^{2u_i} \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} (p_{pD}(p)_i^n - p_{pD}(p)_i^k)$$

Al aplicar la ecuación (5.3) a cada nodo de la malla, y un nivel de iteración k , se

obtiene el siguiente resultado,

$$\begin{array}{cccccccc|c|cccc|c}
\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_D(p)_1}\right) & \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_D(p)_2}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & \psi \cdot P_{pD}(p)_1 & \kappa+1 & F_1 \\
\left(\frac{\partial F_2}{\partial p_D(p)_1}\right) & \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_D(p)_2}\right) & \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_D(p)_3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \psi \cdot P_{pD}(p)_2 & & F_2 \\
0 & \left(\frac{\partial F_3}{\partial p_D(p)_2}\right) & \left(\frac{\partial F_3}{\partial p_D(p)_3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \psi \cdot P_{pD}(p)_3 & & F_3 \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & = & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & - & \bullet \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\partial F_{N-1}}{\partial p_D(p)_{N-2}}\right) & \left(\frac{\partial F_{N-1}}{\partial p_D(p)_{N-1}}\right) & \left(\frac{\partial F_{N-1}}{\partial p_D(p)_N}\right) & \psi \cdot P_{pD}(p)_{N-1} & & F_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\partial F_N}{\partial p_D(p)_{N-1}}\right) & \left(\frac{\partial F_N}{\partial p_D(p)_N}\right) & \psi \cdot P_{pD}(p)_N & & F_N
\end{array}$$

El proceso iterativo continúa hasta que el valor absoluto de la diferencia entre dos vectores solución sucesiva sea menor que una tolerancia predeterminada, obteniéndose la convergencia para la solución buscada en el nivel de tiempo de análisis. Para probar la convergencia, se calcula la siguiente expresión después de cada iteración,

$$\left| \overline{p_{pD}(p)}^{(k+1)} - \overline{p_{pD}(p)}^{(k)} \right| < \xi$$

Si se cumple esta condición de convergencia, entonces

$$\overline{p_{pD}(p)}^{(n+1)} = \overline{p_{pD}(p)}^{(k)}$$

y se procede de forma similar para el siguiente paso de tiempo²⁹.

V.1.1 EVALUACIÓN DE LOS ELEMENTOS DEL JACOBIANO

Considerando por el momento que $\delta_{i-1/2}^k = \delta_{i+1/2}^k = 1$ (Flujo laminar), entonces la ecuación (5.5), queda:

$$F_i^k = p_{pD}(p)_{i-1}^k - \left(2 + \alpha_i^k e^{2u_i} \lambda_i \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} \right) p_{pD}(p)_i^k + p_{pD}(p)_{i+1}^k + \alpha_i e^{2u_i} \lambda_i \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} p_{pD}(p)_i^n. \dots\dots\dots(5.7)$$

Derivando la ecuación (5.7) con respecto a $p_{pD}(p)_{i-1}$, al nivel de iteración k , en el nodo i , resulta¹⁷:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{pD}(p)_{i-1}} \right)^k = 1. \dots\dots\dots(5.8)$$

Lo anterior representa los términos correspondientes a la diagonal inferior de la matriz Jacobiana.

Derivando nuevamente la ecuación (5.7), pero ahora con respecto a $p_{pD}(p)_i$, se tiene:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{pD}(p)_i} \right)^k = - \left(2 + \alpha_i^k e^{2u_i} \lambda_i \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} \right), \dots\dots\dots(5.9)$$

el cual corresponde a los elementos de la diagonal principal de la matriz.

Finalmente, derivando (5.7) con respecto a $p_{pD}(p)_{i+1}$, se tiene,

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{pD}(p)_{i+1}} \right)^k = 1, \dots\dots\dots(5.10)$$

con lo que se puede obtener los elementos de la diagonal superior.

V.1.2 ACOPLAMIENTO DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA

Se necesita ahora obtener la forma particular que adquiere la ecuación en diferencias finitas en las celdas de las fronteras, $i=1$ e $i=N+1$, debido al acoplamiento de las condiciones de frontera.

Haciendo $i=1$ en la ecuación (5.7) y reorganizando queda¹⁷:

$$-\left(2 + \alpha_1^k e^{2u_1} \lambda_1 \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D}\right) p_{pD}(p)_1^k + p_{pD}(p)_2^k = -p_{pD}(p)_0^k + \alpha_1 e^{2u_1} \lambda_1 \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} p_{pD}(p)_1^n \dots\dots(5.11)$$

Para $2 \leq i \leq N$ la ecuación (5.7) queda:

$$p_{pD}(p)_{i-1}^k - \left(2 + \alpha_i^k e^{2u_i} \lambda_i \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D}\right) p_{pD}(p)_i^k + p_{pD}(p)_{i+1}^k = -\alpha_i e^{2u_i} \lambda_i \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} p_{pD}(p)_i^n \dots\dots(5.12)$$

Finalmente, para $i=N+1$ la ecuación (5.7) queda:

$$p_{pD}(p)_N^k - \left(2 + \alpha_{N+1}^k e^{2u_{N+1}} \lambda_{N+1} \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D}\right) p_{pD}(p)_{N+1}^k + p_{pD}(p)_{N+2}^k = -\alpha_N e^{2u_{N+1}} \lambda_{N+1} \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} p_{pD}(p)_{N+1}^n \dots\dots\dots(5.13)$$

La condición de frontera externa para un yacimiento cerrado, de la ecuación (4.2c) es:

$$p_{pD}(p)_{N+2}^k = p_{pD}(p)_N^k$$

Substituyendo en (5.13) y simplificando:

$$2p_{pD}(p)_N^k - \left(2 + \alpha_{N+1}^k e^{2u_{N+1}} \lambda_{N+1} \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D}\right) p_{pD}(p)_{N+1}^k = -\alpha_{N+1} e^{2u_{N+1}} \lambda_{N+1} \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t_D} p_{pD}(p)_{N+1}^n \dots(5.13.a)$$

V.2 MÉTODO DE SOLUCIÓN EN LA FRACTURA HIDRÁULICA

Resolver la ecuación en diferencias finitas en un modelo de dos dimensiones es considerablemente más complicado que para un modelo de una dimensión. La matriz de coeficientes correspondiente a la ecuación (4.3), es una matriz pentadiagonal, para un ordenamiento normal de las ecuaciones y de las incógnitas.

El método que se usará para linealizar la ecuación en diferencias finitas en dos dimensiones será el de Newton-Raphson y la solución de la matriz pentadiagonal se realizará por medio de la subrutina Sparse la cual hace uso del ordenamiento D4 para una mayor eficiencia de solución y las subrutinas NSPIV y NSPIVE.

El procedimiento de solución de Newton-Raphson es muy similar al descrito anteriormente para una dimensión, solamente extendido a dos dimensiones, y se discute a continuación:

La ecuación (4.4), si se considera $\delta_{u_{i+1/2,j}} = \delta_{u_{i-1/2,j}} = \delta_{u_{i,j-1/2}} = \delta_{u_{i,j+1/2}} = 1$ puede expresarse en la forma siguiente:

$$\frac{1}{\Delta u^2} [p_{pD}(p)_{i-1,j} - 2p_{pD}(p)_{i,j} + p_{pD}(p)_{i+1,j}]^{n+1} + \frac{1}{\Delta v^2} [p_{pD}(p)_{i,j-1} - 2p_{pD}(p)_{i,j} + p_{pD}(p)_{i,j+1}]^{n+1}$$

$$= \left(\frac{\mu c}{\mu_{gi} c_{gi}} \right)_{i,j}^{n+1} (\sinh^2 u + \sin^2 v) \frac{1}{\Delta t_{DX_j}} (p_{pD}(p)_{i,j}^{n+1} - p_{pD}(p)_{i,j}^{n+1}). \quad \dots\dots\dots(5.14)$$

Las condiciones de frontera (4.7) y (4.8) se pueden expresar también de la manera siguiente:

En la dirección u

$$p_{pD}(p)_{0,j}^{n+1} = p_{pD}(p)_{0,0}^{n+1}, \quad j = 1, N_j, \quad \dots\dots\dots(5.15a)$$

$$\frac{p_{pD}(p)_{N+2,j}^{n+1} - p_{pD}(p)_{N,j}^{n+1}}{2\Delta u} = 0, \quad \dots\dots\dots(5.15b)$$

En la dirección v

$$\frac{p_{pD}(p)_{i,2}^{n+1} - p_{pD}(p)_{i,0}^{n+1}}{2\Delta v} = 0, \quad i = 1, N_i, \quad \dots\dots\dots(5.15c)$$

$$\frac{p_{pD}(p)_{i,N+2}^{n+1} - p_{pD}(p)_{i,N}^{n+1}}{2\Delta v} = 0, \quad \dots\dots\dots(5.15d)$$

y

$$q_{sf} = 2 \frac{T_s}{P_s T} kh \frac{1}{\Delta u} \sum_{j=0}^{N_j} A(j) [-3p_{pD}(p)_{0,j} + 4p_{pD}(p)_{1,j} - p_{pD}(p)_{2,j}]^{n+1} \Delta v. \quad \dots\dots\dots(5.16)$$

Definiendo la función F_{ij} a partir de la ecuación (5.14), e igualándola a cero, se obtiene:

$$F_{ij}(p_{pD}(p)_{i,j-1}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i-1,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i+1,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i,j+1}^{n+1}) = \frac{p_{pD}(p)_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta v^2} + \frac{p_{pD}(p)_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta u^2} - \left[\frac{2}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_j}} + \frac{2}{\Delta v^2} \right]_{n+1} p_{pD}(p)_{i,j}^{n+1} + \frac{p_{pD}(p)_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta u^2} + \frac{p_{pD}(p)_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta v^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_j}} p_{pD}(p)_{i,j}^n = 0, \quad \dots\dots\dots(5.17)$$

donde
$$\eta_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{\mu c}{\mu_{gi} c_{gi}} \right)_{i,j}^{n+1} \dots\dots\dots(5.18)$$

El proceso iterativo resulta al expandir $F_{i,j}^{n+1}$ en series de Taylor alrededor de la iteración k , y conservar solo los términos de menor orden²⁸:

$$F_{ij}(p_{pD}(p)_{i,j-1}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i-1,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i+1,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i,j+1}^{n+1}) \approx F_{i,j}^k + \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial p_{pD}(p)_{i,j-1}} \right)^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i,j-1}^{k+1} + \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial p_{pD}(p)_{i-1,j}} \right)^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i-1,j}^{k+1} + \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial p_{pD}(p)_{i+1,j}} \right)^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i+1,j}^{k+1} + \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial p_{pD}(p)_{i,j+1}} \right)^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i,j+1}^{k+1} = 0, \dots\dots\dots(5.19)$$

$i=1,2,\dots,I$
 $j=1,2,\dots,J$
 $n=1,2,\dots$
 $k=1,2,\dots$

por lo tanto:

$$\left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial p_{pD}(p)_{i,j-1}} \right)^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i,j-1}^{k+1} + \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial p_{pD}(p)_{i-1,j}} \right)^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i-1,j}^{k+1} + \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial p_{pD}(p)_{i+1,j}} \right)^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i+1,j}^{k+1} + \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial p_{pD}(p)_{i,j+1}} \right)^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i,j+1}^{k+1} = -F_{i,j}^k, \dots\dots\dots(5.20)$$

donde
$$\psi \cdot p_{pD}(p)_{i,j}^{k+1} = p_{pD}(p)_{i,j}^{k+1} - p_{pD}(p)_{i,j}^k$$

Escrita en forma compacta la ecuación (5.20), se tiene:

$$f_{i,j}^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i,j-1}^{k+1} + c_{i,j}^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i-1,j}^{k+1} + a_{i,j}^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i,j}^{k+1} + b_{i,j}^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i+1,j}^{k+1} + e_{i,j}^k \psi \cdot p_{pD}(p)_{i,j+1}^{k+1} = -F_{i,j}^k. \dots\dots\dots(5.21)$$

La definición de los coeficientes f_{ij} , c_{ij} , a_{ij} , b_{ij} , y e_{ij} se establece al igualar las ecuaciones (5.20) y (5.21).

Por ejemplo, para una malla de 5 columnas por 3 renglones, se genera para un ordenamiento normal de las incógnitas y de las ecuaciones, cuando se barre la malla de cálculo en forma secuencial por renglones, o bien por columnas, el sistema de ecuaciones, Ec. (5.20), genera una matriz pentadiagonal, de la forma siguiente:

$$\begin{array}{cccccc|c|c|c}
 a_{1,1} & b_{1,1} & & & & & e_{1,1} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{1,1} & F_{1,1} \\
 c_{2,1} & a_{2,1} & b_{2,1} & & & & e_{2,1} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{2,1} & F_{2,1} \\
 & c_{3,1} & a_{3,1} & b_{3,1} & & & e_{3,1} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{3,1} & F_{3,1} \\
 & & c_{4,1} & a_{4,1} & b_{4,1} & & e_{4,1} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{4,1} & F_{4,1} \\
 & & & c_{5,1} & a_{5,1} & & e_{5,1} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{5,1} & F_{5,1} \\
 f_{1,1} & & & & a_{2,2} & b_{2,2} & & \psi \cdot p_{pD}(p)_{1,2} & F_{1,2} \\
 & f_{2,1} & & & c_{2,2} & a_{2,2} & b_{2,2} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{2,2} & F_{2,2} \\
 & & f_{3,1} & & c_{3,2} & a_{3,2} & b_{3,2} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{3,2} & F_{3,2} \\
 & & & f_{4,1} & c_{4,2} & a_{4,2} & b_{4,2} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{4,2} & F_{4,2} \\
 & & & & f_{5,1} & c_{5,2} & a_{5,2} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{5,2} & F_{5,2} \\
 & & & & & f_{1,2} & & \psi \cdot p_{pD}(p)_{1,3} & F_{1,3} \\
 & & & & & & f_{2,2} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{2,3} & F_{2,3} \\
 & & & & & & & c_{3,3} & a_{3,3} & b_{3,3} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{3,3} & F_{3,3} \\
 & & & & & & & & f_{4,2} & c_{4,3} & a_{4,3} & b_{4,3} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{4,3} & F_{4,3} \\
 & & & & & & & & & & c_{5,3} & a_{5,3} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{5,3} & F_{5,3} \\
 & & & & & & & & & & & & & & f_{5,2} & c_{5,3} & a_{5,3} & \psi \cdot p_{pD}(p)_{5,3} & F_{5,3}
 \end{array}$$

Como se indicó en el procedimiento para el yacimiento, el proceso iterativo comúnmente se inicia con la solución del nivel de tiempo previo, y termina al cumplirse los criterios de convergencia equivalentes; es decir, se debe de cumplir que:

$$\left| \overline{p_{pD}(p)}^{(k+1)} - \overline{p_{pD}(p)}^{(k)} \right| < \xi$$

V.2.1 EVALUACIÓN DE LOS ELEMENTOS DEL JACOBIANO

De la ecuación (5.17):

$$\begin{aligned} & \frac{P_{pD}(p)_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta v^2} + \frac{P_{pD}(p)_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta u^2} - \left[\frac{2}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_j}} + \frac{2}{\Delta v^2} \right]^{n+1} P_{pD}(p)_{i,j}^{n+1} + \frac{P_{pD}(p)_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta u^2} \\ & + \frac{P_{pD}(p)_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta v^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX}} P_{pD}(p)_{i,j}^n = 0. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(5.17a)$$

Derivando la ecuación (5.17a) con respecto a $P_{pD}(p)_{i,j-1}$, $P_{pD}(p)_{i-1,j}$, $P_{pD}(p)_{i,j}$, $P_{pD}(p)_{i+1,j}$, $P_{pD}(p)_{i,j+1}$, , al nivel de iteración k , en el nodo i, j , resulta:

$$f_{i,j} = \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial P_{pD}(p)_{i,j-1}} \right)^k = \frac{1}{(\Delta v)^2} \quad \dots\dots\dots(5.22)$$

$$c_{i,j} = \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial P_{pD}(p)_{i-1,j}} \right)^k = \frac{1}{(\Delta u)^2} \quad \dots\dots\dots(5.23)$$

$$b_{i,j} = \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial P_{pD}(p)_{i+1,j}} \right)^k = \frac{1}{(\Delta u)^2} \quad \dots\dots\dots(5.24)$$

$$e_{i,j} = \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial P_{pD}(p)_{i,j+1}} \right)^k = \frac{1}{(\Delta v)^2} \quad \dots\dots\dots(5.25)$$

y

$$a_{i,j} = \left(\frac{\partial F_{i,j}}{\partial P_{pD}(p)_{i,j}} \right)^k = - \left[\frac{2}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_j}} + \frac{2}{\Delta v^2} \right] \quad \dots\dots\dots(5.26)$$

V.2.1 ACOPLAMIENTO DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA

A continuación se discuten las ecuaciones en diferencias finitas para las direcciones en u y v , que se emplean en las coordenadas elípticas.

Para la dirección en u :

Si $i = 1$, de la ecuación (5.17):

$$F_{ij}(p_{pD}(p)_{1,j-1}^{n+1}, p_{pD}(p)_{0,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{1,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{2,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{1,j+1}^{n+1}) = \frac{p_{pD}(p)_{1,j-1}^{n+1}}{\Delta v^2} + \frac{p_{pD}(p)_{0,j}^{n+1}}{\Delta u^2}$$

$$- \left[\frac{2}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} + \frac{2}{\Delta v^2} \right]^{n+1} p_{pD}(p)_{1,j}^{n+1} + \frac{p_{pD}(p)_{2,j}^{n+1}}{\Delta u^2} + \frac{p_{pD}(p)_{1,j+1}^{n+1}}{\Delta v^2}$$

$$+ \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} p_{pD}(p)_{1,j}^n = 0$$

Esta ecuación puede arreglarse en la forma siguiente:

$$\frac{p_{pD}(p)_{1,j-1}^{n+1}}{\Delta v^2} - \left[\frac{2}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} + \frac{2}{\Delta v^2} \right]^{n+1} p_{pD}(p)_{1,j}^{n+1} + \frac{p_{pD}(p)_{2,j}^{n+1}}{\Delta u^2} + \frac{p_{pD}(p)_{1,j+1}^{n+1}}{\Delta v^2}$$

$$= - \frac{p_{pD}(p)_{0,j}^{n+1}}{\Delta u^2} - \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} p_{pD}(p)_{1,j}^n \dots\dots\dots(5.27)$$

Para $i = N+1$, substituyendo en la ecuación (5.17):

$$\begin{aligned}
F_{ij}(p_{pD}(p)_{N+1,j-1}^{n+1}, p_{pD}(p)_{N,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{N+1,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{N+2,j}^{n+1}, p_{pD}(p)_{N+1,j+1}^{n+1}) &= \frac{p_{pD}(p)_{N+1,j-1}^{n+1}}{\Delta v^2} + \frac{p_{pD}(p)_{N,j}^{n+1}}{\Delta u^2} \\
- \left[\frac{2}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} + \frac{2}{\Delta v^2} \right]^{n+1} & p_{pD}(p)_{N+1,j}^{n+1} + \frac{p_{pD}(p)_{N+2,j}^{n+1}}{\Delta u^2} + \frac{p_{pD}(p)_{N+1,j+1}^{n+1}}{\Delta v^2} \\
+ \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} & p_{pD}(p)_{N+1,j}^n = 0
\end{aligned}$$

Y substituyendo la condición de frontera (5.15b) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{pD}(p)_{N+1,j-1}^{n+1}}{\Delta v^2} + 2 \frac{p_{pD}(p)_{N,j}^{n+1}}{\Delta u^2} - \left[\frac{2}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} + \frac{2}{\Delta v^2} \right]^{n+1} & p_{pD}(p)_{N+1,j}^{n+1} + \frac{p_{pD}(p)_{N+1,j+1}^{n+1}}{\Delta v^2} \\
+ \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} & p_{pD}(p)_{N+1,j}^n = 0. \dots\dots\dots(5.28)
\end{aligned}$$

Para la dirección en v :

Para $j = 1$, substituyendo en la ecuación (5.17) :

$$\begin{aligned}
F_{ij}(p_{pD}(p)_{i,0}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i-1,1}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i,1}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i+1,1}^{n+1}, p_{pD}(p)_{i,2}^{n+1}) &= \frac{p_{pD}(p)_{i,0}^{n+1}}{\Delta v^2} + \frac{p_{pD}(p)_{i-1,1}^{n+1}}{\Delta u^2} \\
- \left[\frac{2}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} + \frac{2}{\Delta v^2} \right]^{n+1} & p_{pD}(p)_{i,1}^{n+1} + \frac{p_{pD}(p)_{i+1,1}^{n+1}}{\Delta u^2} + \frac{p_{pD}(p)_{i,2}^{n+1}}{\Delta v^2} \\
+ \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\sinh^2 u + \sen^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} & p_{pD}(p)_{i,1}^n = 0;
\end{aligned}$$

substituyendo la condición de frontera (5.15c) en la ecuación anterior:

$$2 \frac{P_{pD}(p)_{i,0}^{n+1}}{\Delta v^2} + \frac{P_{pD}(p)_{i-1,1}^{n+1}}{\Delta u^2} - \left[\frac{2}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} + \frac{2}{\Delta v^2} \right]^{n+1} P_{pD}(p)_{i,1}^{n+1} + \frac{P_{pD}(p)_{i+1,1}^{n+1}}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} P_{pD}(p)_{i,1}^n = 0. \quad \dots\dots\dots(5.29)$$

Para $j = N+1$, substituyendo en la ecuación (5.17):

$$F_{ij}(P_{pD}(p)_{i,N}^{n+1}, P_{pD}(p)_{i-1,N+1}^{n+1}, P_{pD}(p)_{i,N+1}^{n+1}, P_{pD}(p)_{i+1,N+1}^{n+1}, P_{pD}(p)_{i,N+2}^{n+1}) = \frac{P_{pD}(p)_{i,N}^{n+1}}{\Delta v^2} + \frac{P_{pD}(p)_{i-1,N+1}^{n+1}}{\Delta u^2} - \left[\frac{2}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} + \frac{2}{\Delta v^2} \right]^{n+1} P_{pD}(p)_{i,N+1}^{n+1} + \frac{P_{pD}(p)_{i+1,N+1}^{n+1}}{\Delta u^2} + \frac{P_{pD}(p)_{i,N+2}^{n+1}}{\Delta v^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} P_{pD}(p)_{i,N+1}^n = 0;$$

Similarmete, substituyendo la condición de frontera (5.15d) en la ecuación anterior:

$$\frac{P_{pD}(p)_{i-1,N+1}^{n+1}}{\Delta u^2} - \left[\frac{2}{\Delta u^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} + \frac{2}{\Delta v^2} \right]^{n+1} P_{pD}(p)_{i,N+1}^{n+1} + \frac{P_{pD}(p)_{i+1,N+1}^{n+1}}{\Delta u^2} + 2 \frac{P_{pD}(p)_{i,N+2}^{n+1}}{\Delta v^2} + \frac{\eta_{i,j}^{n+1}(\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v)}{\Delta t_{DX_f}} P_{pD}(p)_{i,N+1}^n = 0. \quad \dots\dots\dots(5.30)$$

V.3 MÉTODO DE SOLUCIÓN EN LA TUBERÍA VERTICAL

Dado que los gastos de flujo y las presiones deberán balancearse en cada uno de los nodos del sistema, se seleccionó un proceso iterativo en cuanto a presiones en la tubería de tal forma que se cumplieran simultáneamente las ecuaciones de difusión en los yacimientos y las ecuaciones de continuidad y conservación de energía, en la tubería. El esquema de iteración global controla todos los procesos de solución dentro de cada una de las etapas de tiempo en la simulación, las presiones de fondo fluyendo así obtenidas frente a cada una de las formaciones, son aplicadas como condición de frontera en la solución del problema de la fractura hidráulica de conductividad infinita, dentro de cada uno de los yacimientos; la solución del esquema global, se encuentra condicionada a tener presión superficial constante, sin embargo, puede tratarse como una función del tiempo, si es que se desea simular el comportamiento del sistema bajo compresión.

Tanto los gastos como las presiones son calculados implícitamente sobre el nivel de tiempo, la viscosidad, el factor de desviación del gas, número de Reynolds y el factor de fricción, son evaluados en cada uno de los nodos de la tubería, para cada iteración global, estos valores se consideran funciones de la presión y de la temperatura.

La evaluación del factor de desviación se realiza mediante la ecuación de estado de Redlich-Kwong³⁰. La evaluación de la viscosidad del gas se lleva a cabo mediante la correlación de Lee³¹ y el factor de fricción es calculado por medio de la ecuación de Colebrook³⁵.

V.4 VALIDACIÓN DE LA SOLUCIÓN

Se utilizaron dos procedimientos para determinar si las ecuaciones en diferencias finitas y por lo tanto la simulación esté proporcionando resultados correctos. El primero de ellos es el comparar con resultados ya existentes en la literatura, y el segundo es un procedimiento sugerido por Wattenbarger⁵, el cual se discutirá posteriormente.

En la literatura existen resultados limitados para condiciones de producción a presión constante para un caso de un pozo que es interceptado por una fractura hidráulica de conductividad infinita, para tiempos adimensionales t_{DXf} mayores a uno. Bennet¹⁴ publica resultados obtenidos en forma numérica para tiempos adimensionales t_{DXf} mayores a uno. Al igual que muchos otros autores (como Bennet), el trabajo clásico en la literatura a presión constante que sirve para comparar es el de Agarwal¹³, en el que se publica resultados en una curva tipo de la presión adimensional para un pozo con una fractura de conductividad finita para tiempos adimensionales t_{DXf} menores a uno. En nuestro caso la conductividad de la fractura como ya se mencionó, se considera como infinita, condición que se cumple para una conductividad igual o superior a 500.

Por otro lado, Wattenbarger sugiere que debido a la disponibilidad limitada de datos publicados en la literatura para tiempos adimensionales t_{DXf} mayores a uno, para presión constante en la frontera interna, se puede aprovechar la generalidad de la ecuación (3.9), la ecuación puede aplicarse tanto al modelo que considera flujo radial como al que considera la existencia de una fractura hidráulica; el modelo en dos dimensiones de la fractura hidráulica puede modificarse para evaluar el Jacobiano de la transformación para condiciones de flujo radial dado por la ecuación (3.10). Llevando a

cabo lo anterior, la solución para flujo radial pudo calcularse con el modelo en dos dimensiones, considerando propiedades del fluido constante.

Los resultados y análisis de los mismos se presentan en el siguiente capítulo.

VI. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este trabajo se investigó cual sería el efecto de considerar la presión constante en la cabeza del pozo incluyendo los fenómenos de flujo en la tubería.

A fin de caracterizar la variación del gasto instantáneo adimensional en función del valor de presión constante, se utilizó la normalización de éste con la presión inicial, esto es

$$p_D(p)^* = \frac{P_{wf}}{p_i}$$

Con el programa se realizaron varias corridas con los datos que se muestran en la Tabla 1. En cada corrida se usó una longitud de fractura diferente de (x_f), 50, 100 y 300 pies de longitud para comprobar que los resultados que arroja el simulador son correctos; cada una de las corridas se comparó con la gráfica de Agarwal a presión y propiedades del fluido constante, las cuales se muestran en la figura 6.

Para poder comparar con la curva tipo de Agarwal, el programa se modificó para que corriera, sin considerar los efectos de la tubería.

En la figura 6 se muestran las corridas para los tres casos que corresponden a una longitud de fractura de 50, 100 y 300 pies, pudiéndose observar que las tres curvas a tiempos adimensionales pequeños tienden a un valor específico que no corresponden a los valores obtenidos por Agarwal. Estos errores a tiempos pequeños son causados aparentemente por la incapacidad de representar la función de gradiente continua $p_p(p)$ con el modelo numérico discretizado⁵, debido a los errores de truncamiento inherentes a las soluciones de las ecuaciones en diferencias finitas¹⁴. Después, en cada caso de longitud de fractura, eventualmente la solución de esta tesis se aproxima a la solución propuesta por Agarwal, esto como puede observarse en la figura 6 se verifica a un

tiempo adimensional t_{DXf} aproximadamente de $3E-4$. Para $t_{DXf} > 3E-4$ el error relativo entre los casos corridos y la curva de Agarwal es de un promedio de 1%; finalmente a valores cercanos a $t_{DXf} = 1$ (inicia aproximadamente a un $t_{DXf} = 3E-1$), nuevamente el error tiende a aumentar manteniéndose al final en un error promedio del 5%.

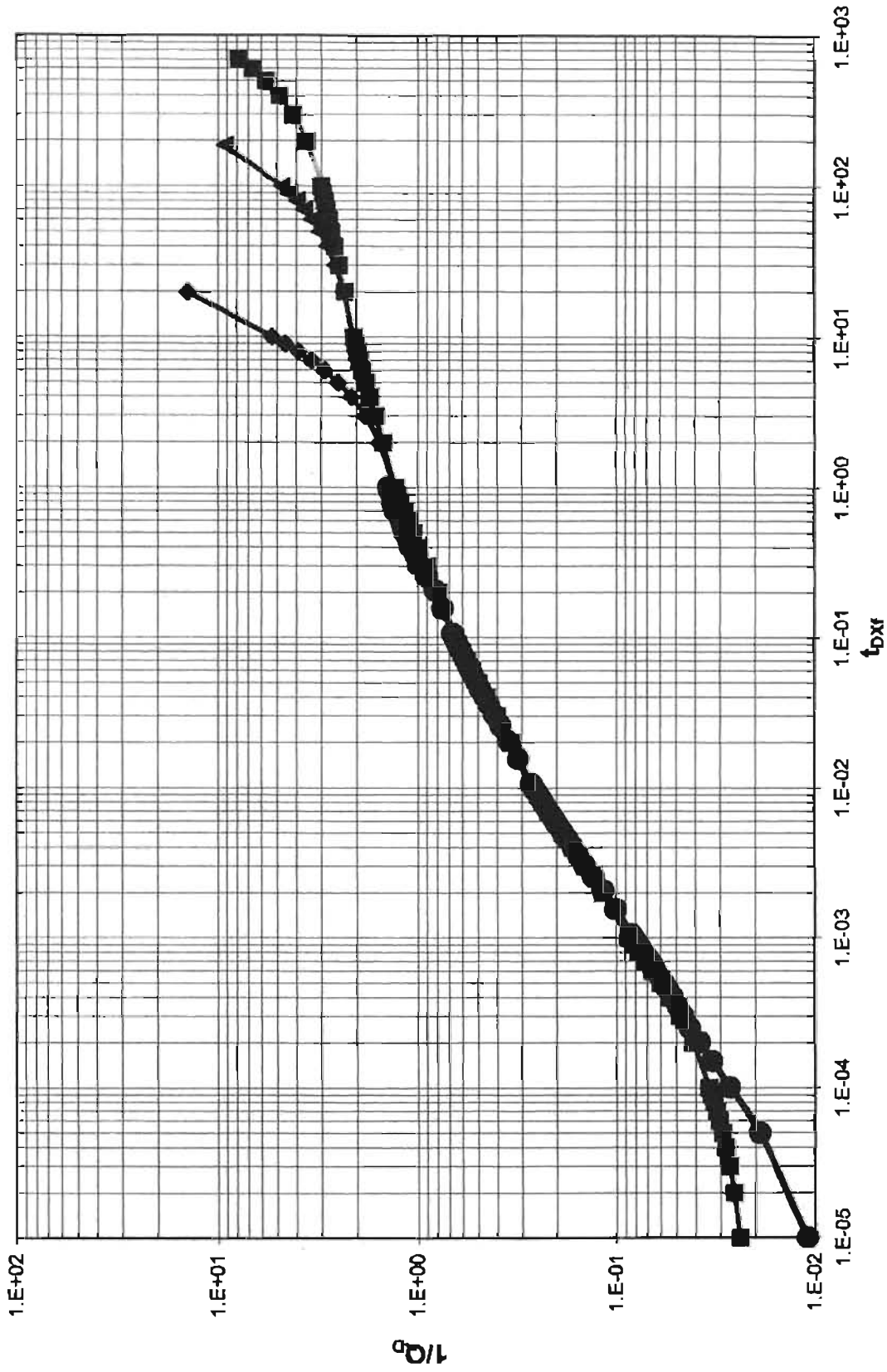
Cuando se acopló la fractura hidráulica con la tubería vertical se hicieron las mismas tres simulaciones descritas con anterioridad para las longitudes de fractura ya mencionadas. Los resultados se muestran en la figura 7. En ella se puede observar que los resultados calculados por el simulador para una longitud de fractura de 300 pies, comienzan aproximadamente a un $t_{DXf}=4E-5$, ya que a tiempos menores el fenómeno de flujo crítico en la tubería se hace presente (a tiempos demasiado cortos los valores del gasto instantáneo resultan poco realistas), cabe mencionar que este fenómeno se hace presente en las otras dos curvas mostradas ($x_f = 50$ y 100 pies) con la diferencia de que a menor longitud de fractura es mayor el t_{DXf} en el que comienza la curva y por lo tanto, el fenómeno de flujo crítico dura más tiempo. Se observa también, que el error relativo al inicio de esta curva con respecto a los datos de la curva de Agarwal es alto, disminuyendo conforme aumenta el tiempo adimensional de la fractura hasta un valor promedio de 1% ($t_{DXf} > 3E-4$); después, a valores cercanos a un $t_{DXf} = 1$ (inicia aproximadamente a un $t_{DXf} = 3E-1$) nuevamente el error tiende a aumentar, manteniéndose al final en un error promedio del 5%.

Resulta interesante mencionar que dado que en la literatura no existen datos tabulados a presión constante a tiempos adimensionales mayores a uno (a excepción de los datos tabulados por Bennett), no podemos asegurar que las curvas a $t_{DXf} > 1$ tengan un comportamiento correcto (Las curvas tanto para la fractura hidráulica como para el sistema fractura hidráulica-pozo, siguen un mismo patrón). Sin embargo, si se observan

cuidadosamente las curvas de longitud de fractura de 50, 100 y 300 pies se verá que tienen una tendencia muy similar a las curvas tipo presentadas por Gringarten¹¹ las cuales representan el comportamiento de fracturas verticales de capacidad infinita a gasto constante; se dice que el comportamiento de la pseudopresión adimensional para condiciones de producción a gasto constante es ligeramente menor al inverso del gasto adimensional a presión constante, hasta antes de alcanzar el régimen pseudoestacionario^{5,13}. Estas curvas¹¹ están en función de la relación x_e/x_f (Radio de drene)/ x_f (Longitud de fractura).

En nuestro caso se maneja un radio de drene de 1000 pies y tres longitudes de fractura los cuales dan una relación x_e / x_f de 3.33, 10 y 20 para $x_f = 300, 100$ y 50 pies respectivamente.

El segundo procedimiento de comprobación del simulador es el sugerido por Wattenbarger, ya citado anteriormente, en que se realiza el cambio del Jacobiano en la ecuación (3.9), realizado esto, los datos de entrada en el simulador son modificados apropiadamente, lo que permite reproducir el comportamiento de la curva de la figura 8 reportada por Wattenbarger, en donde se muestra el comportamiento de un yacimiento homogéneo a presión y propiedades del fluido constantes. Esta reproducción de la curva anterior constituye un elemento de verificación del programa de computo. Cabe mencionar que igualmente se tienen problemas de errores de truncamiento, por lo que solamente se pudo simular con un $t_D > 100$



AGARWAL $X_f=50$ pies $X_f=100$ pies $X_f=300$ pies

Figura 6. Comportamiento del inverso del gasto del pozo adimensional de un pozo que presenta una fractura hidráulica de conductividad infinita, el cual produce a presión constante

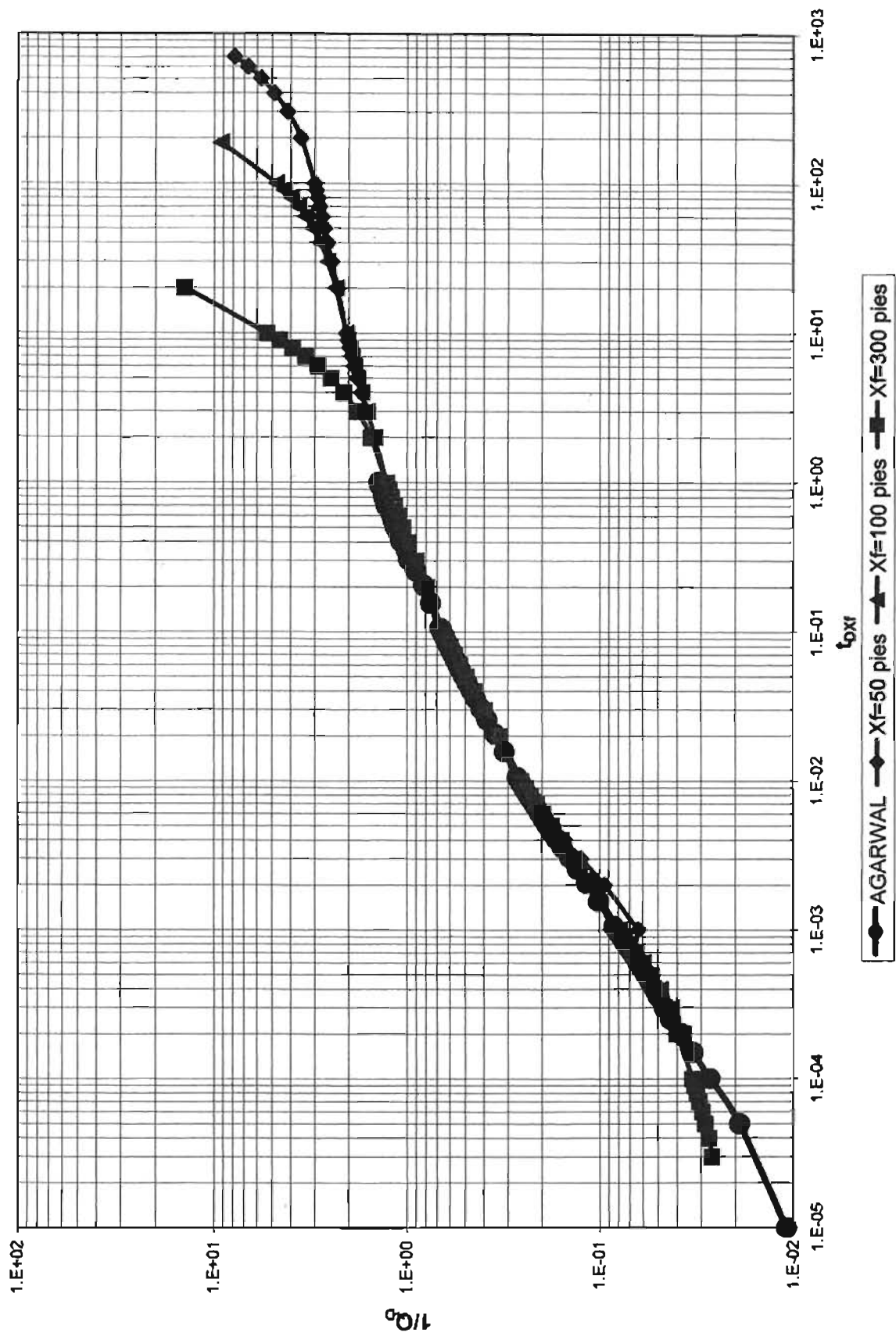


Figura 7. Comportamiento del inverso del gasto adimensional de un pozo que presenta una fractura hidráulica de conductividad infinita considerando el sist. yac-tubería vertical, para condiciones de pres. constante

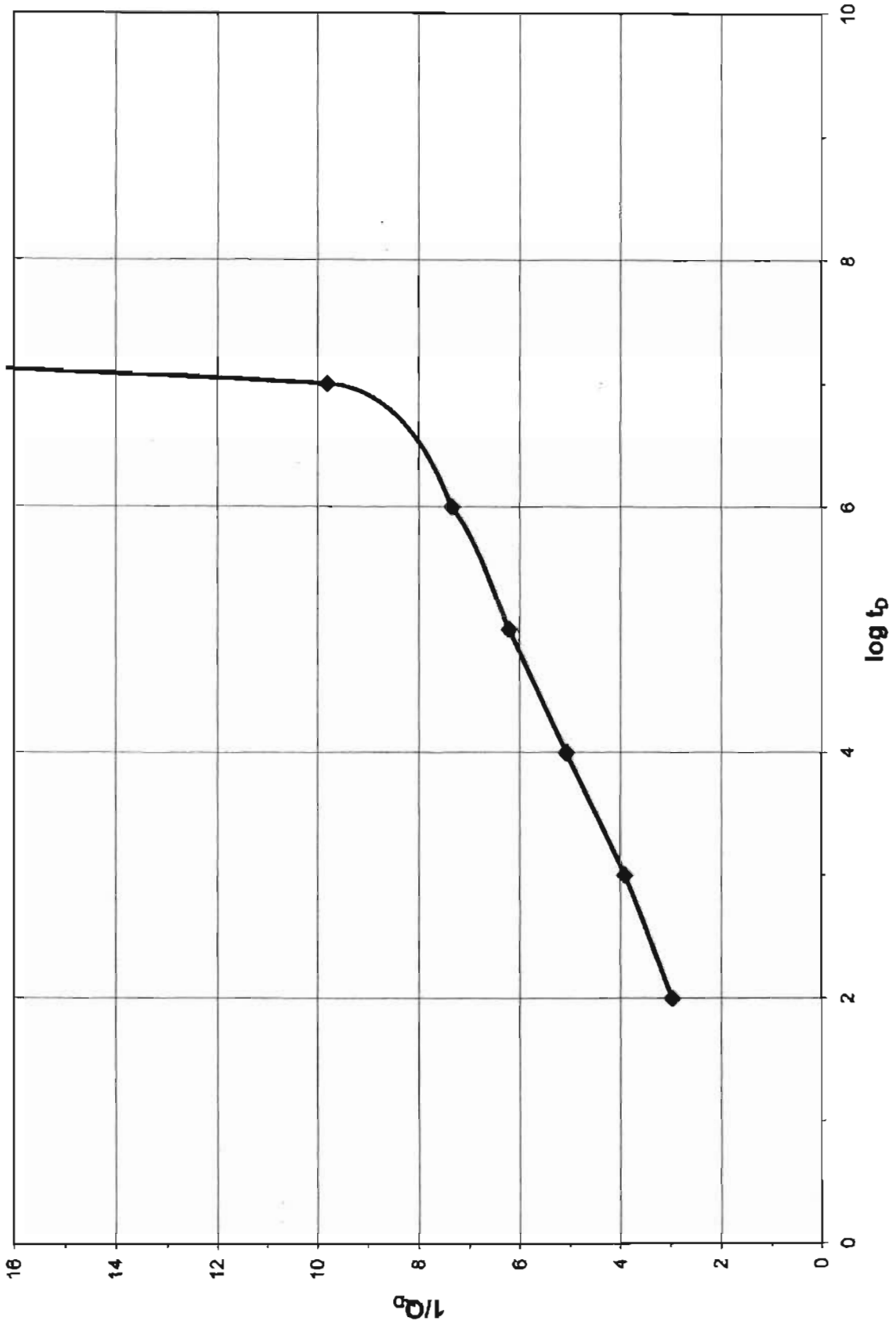


Figura 8. Validación con el simulador, del comportamiento del inverso del gasto adimensional de un yacimiento homogéneo a presión constante (Waltzenberger)

A continuación se presentan gráficas en coordenadas cartesianas del comportamiento de presión (psia) en el yacimiento, como resultado de realizar la transformación de las coordenadas elípticas que maneja el simulador. También se muestran gráficas del comportamiento de presión en el yacimiento usando el mapeo conformal y por último se muestran gráficas del comportamiento de producción y acumulada vs. tiempo. Lo anterior se realiza para longitudes de fractura de 200 y 300 pies así como para radios de drenaje de 656, 984 y 1312 pies (200, 300 y 400 m respectivamente) a diferentes tiempos de producción. Las unidades en los ejes coordenados están en pies.

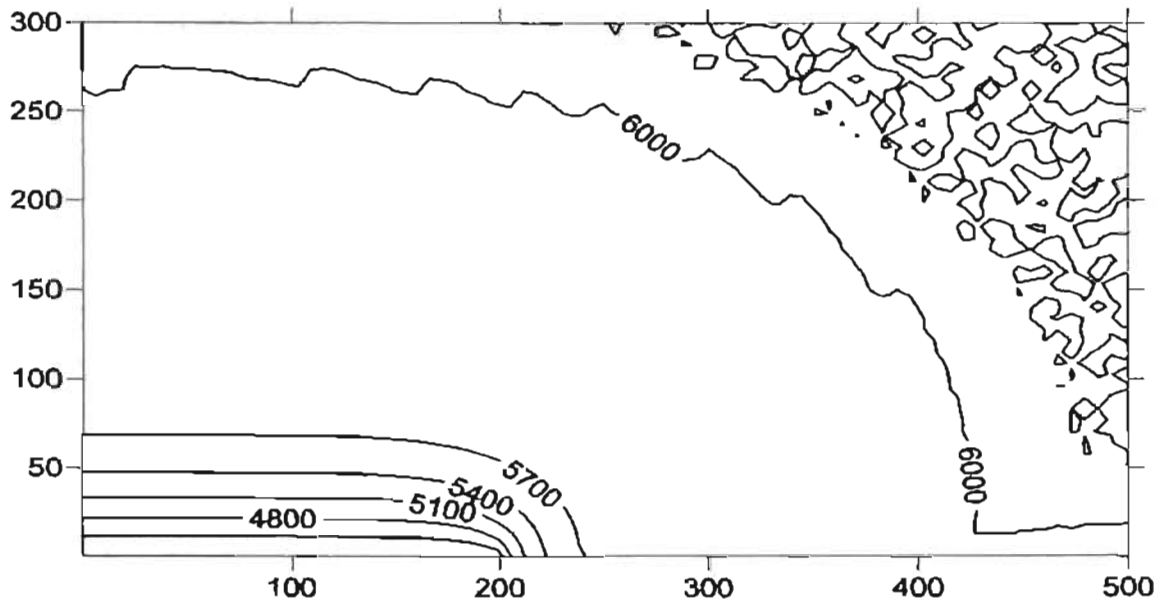


Figura 9. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 656$ pies y $x_f = 200$ pies

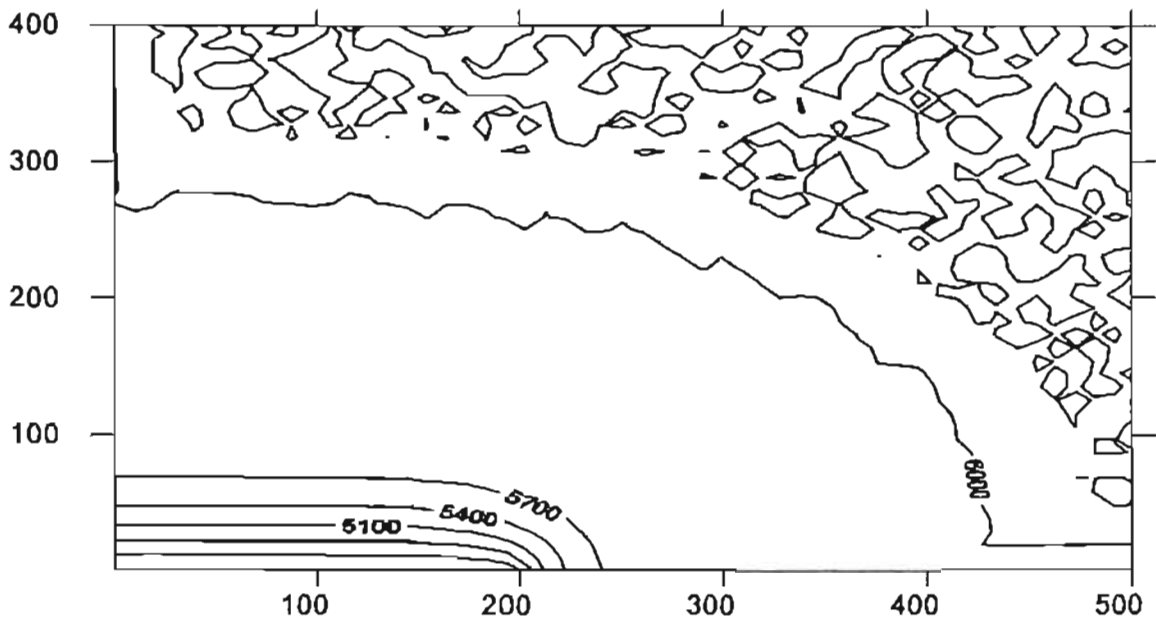


Figura 10. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 984$ pies y $x_f = 200$ pies

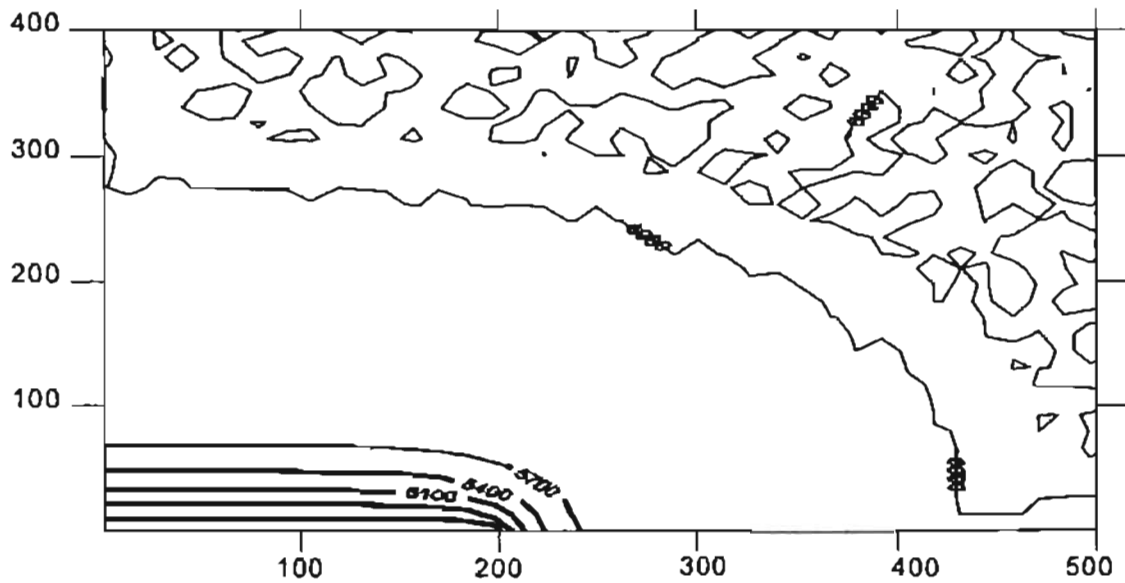


Figura 11. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 200$ pies

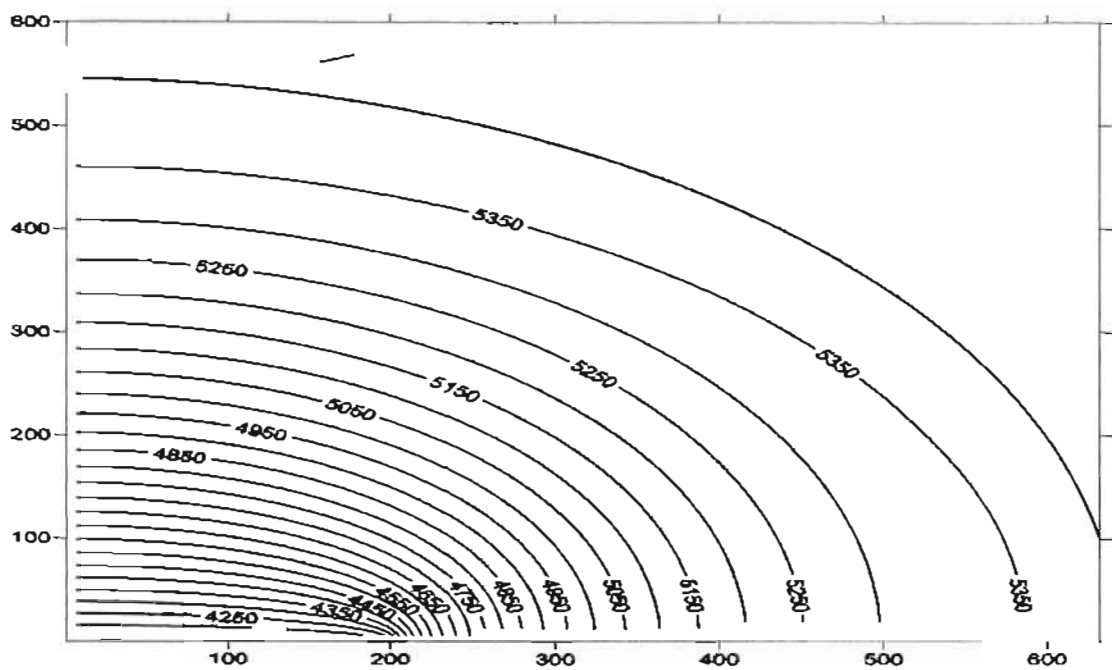


Figura 12. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 656$ pies y $x_f = 200$ pies

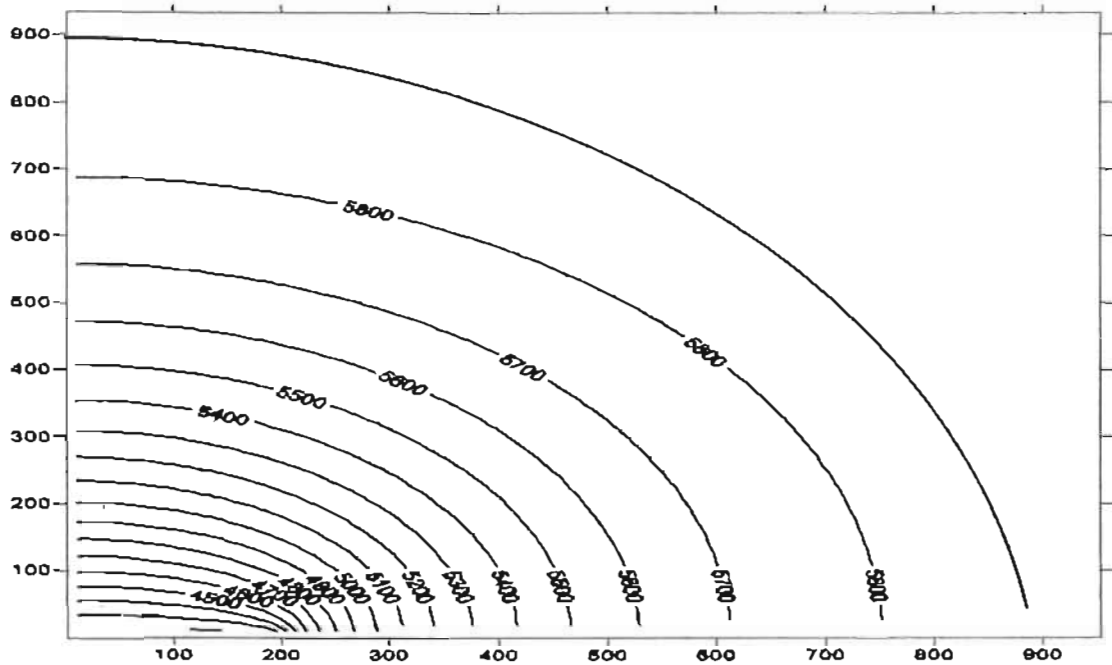


Figura 13. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 984$ pies y $x_f = 200$ pies

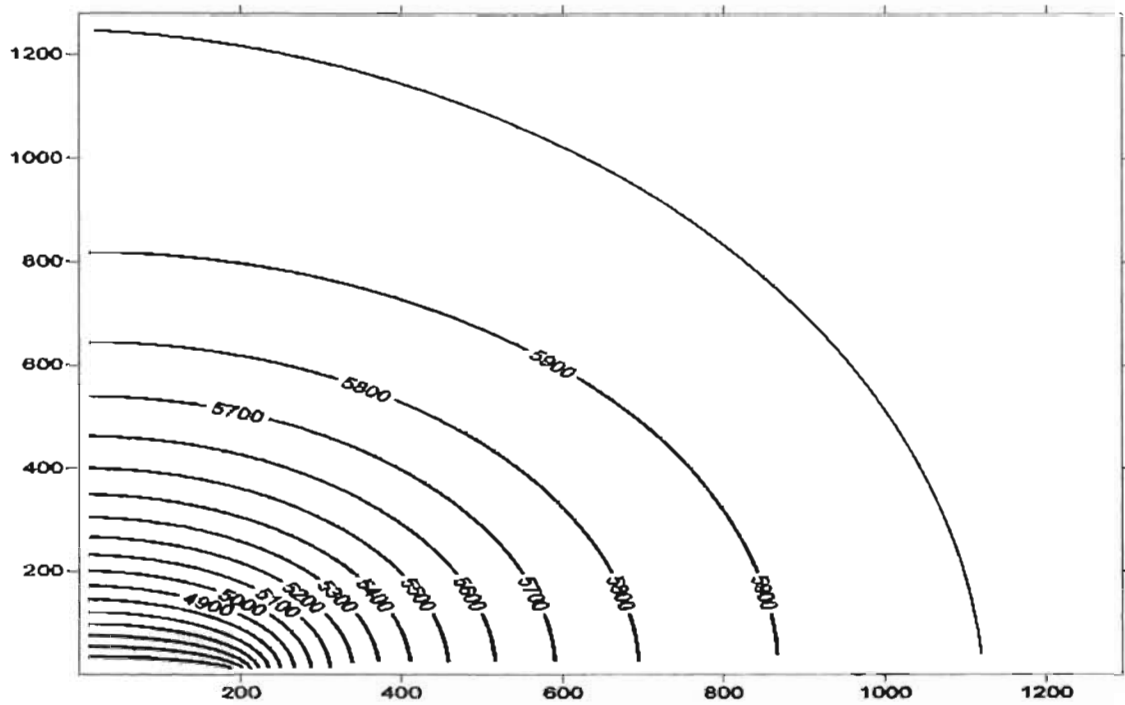


Figura 14. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 200$ pies

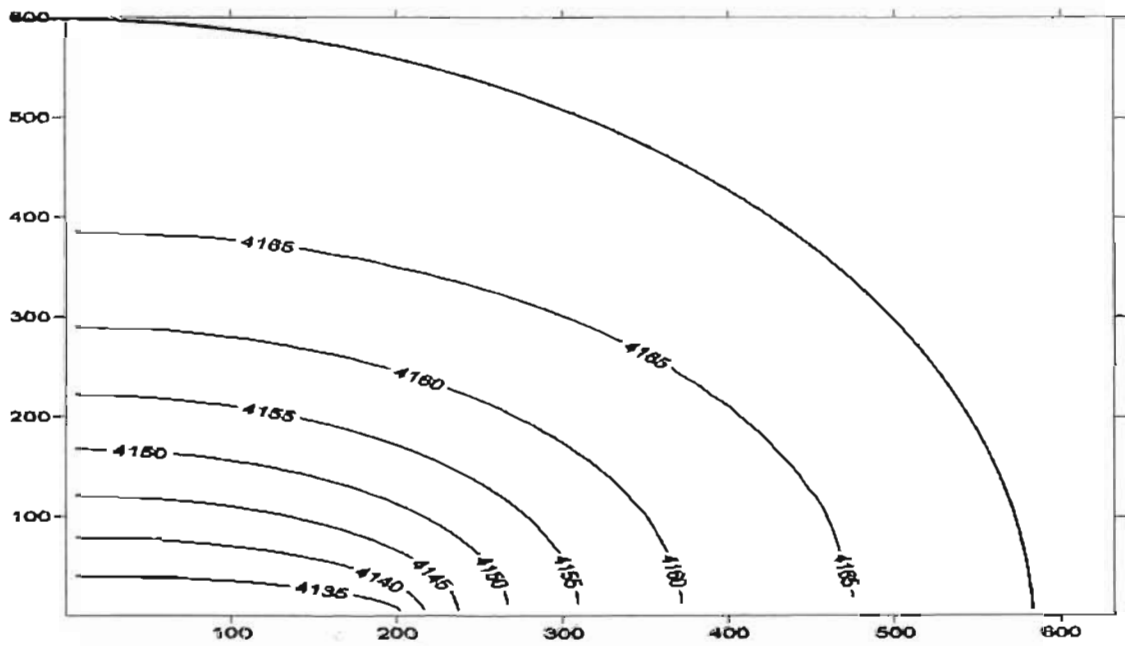


Figura 15. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 656$ pies y $x_f = 200$ pies

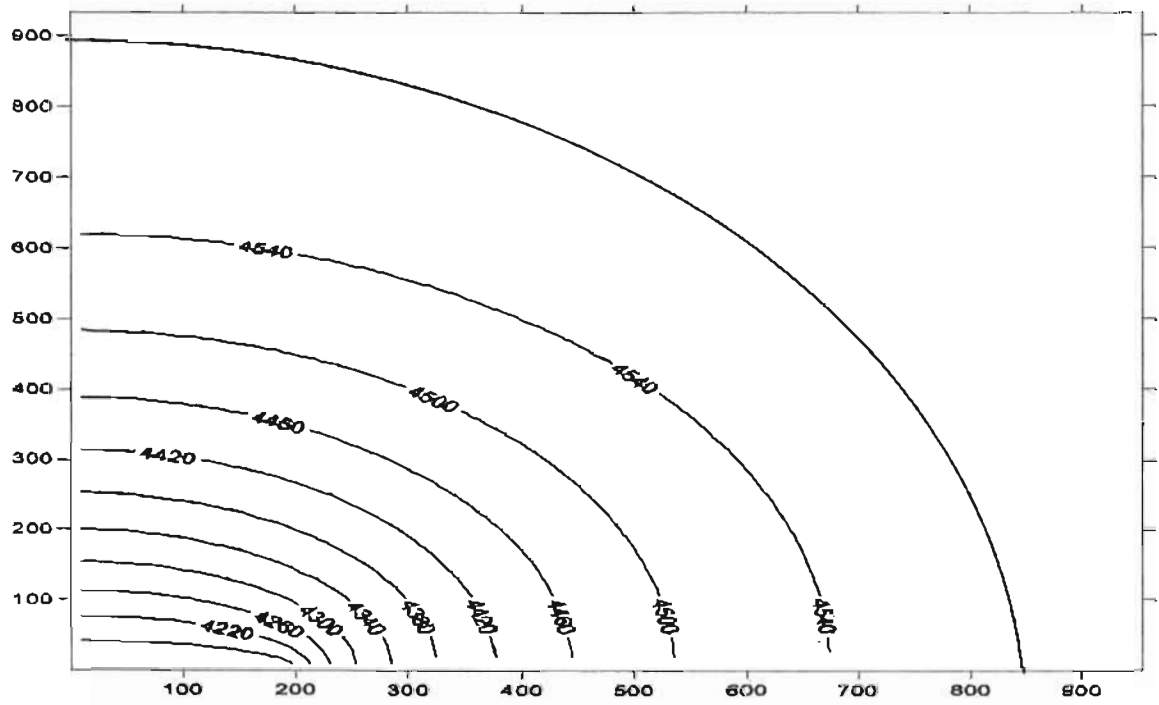


Figura 16. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 984$ pies y $x_f = 200$ pies

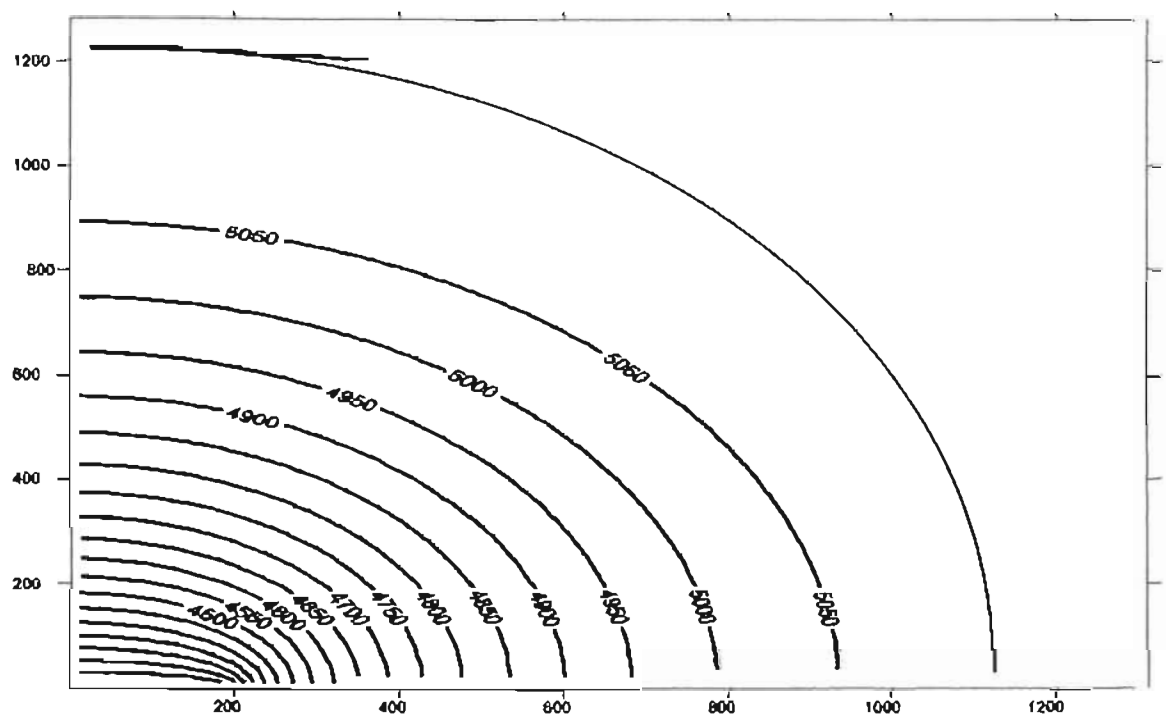


Figura 17. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 200$ pies

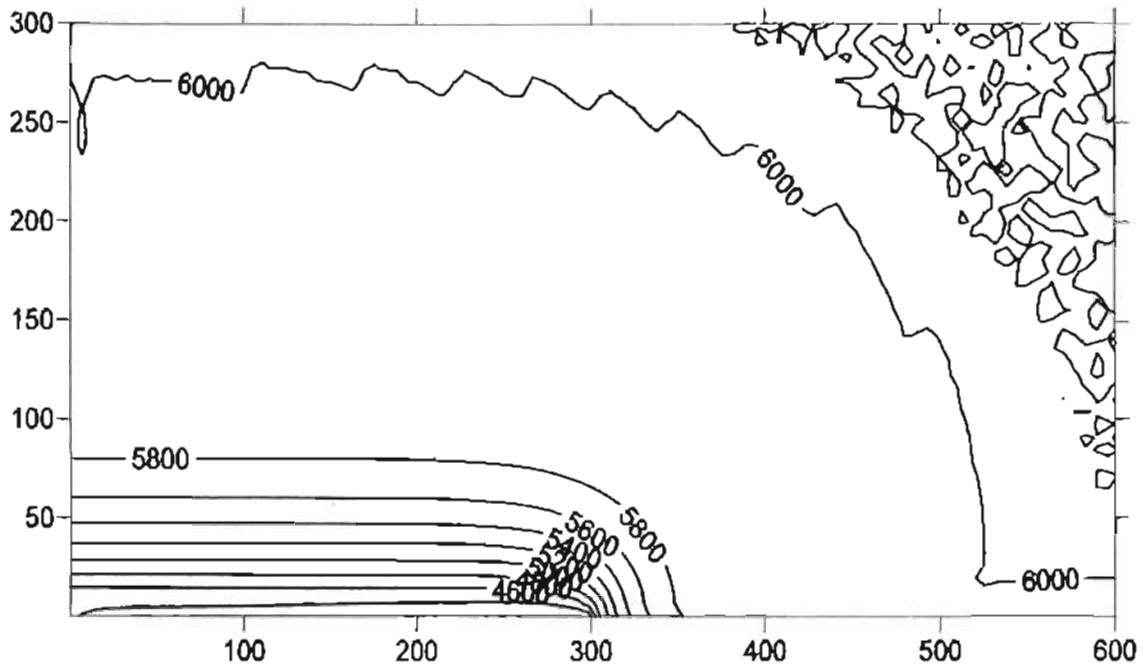


Figura 18. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 656$ pies y $x_f = 300$ pies

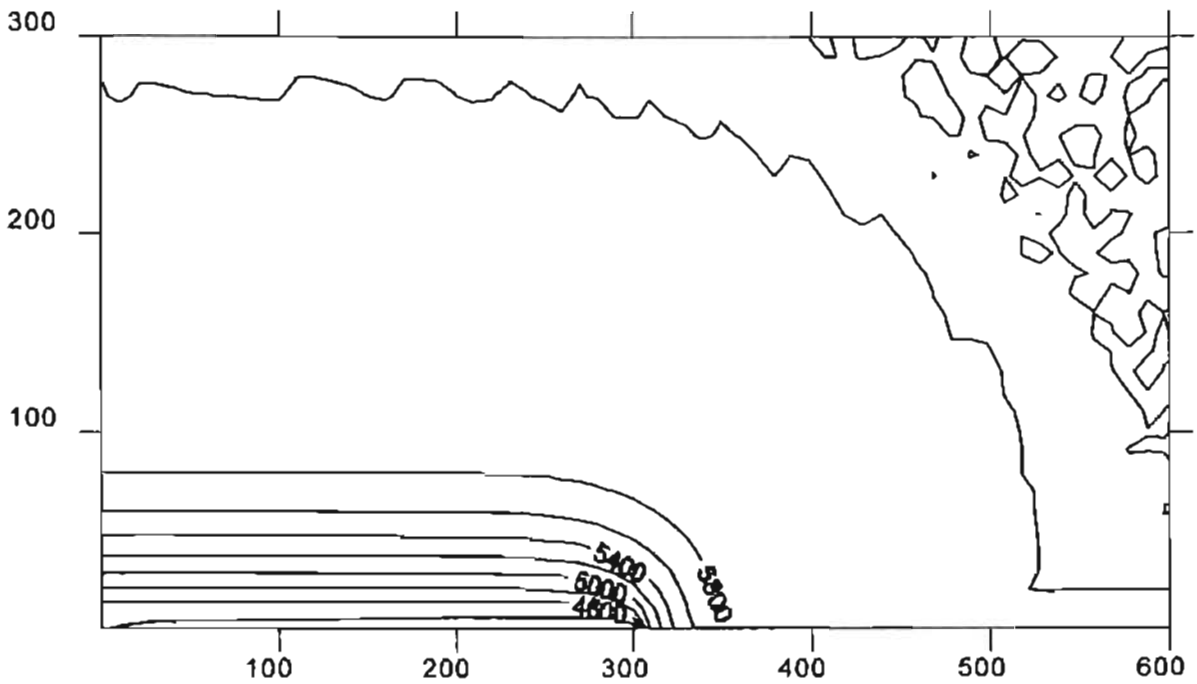


Figura 19. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 984$ pies y $x_f = 300$ pies

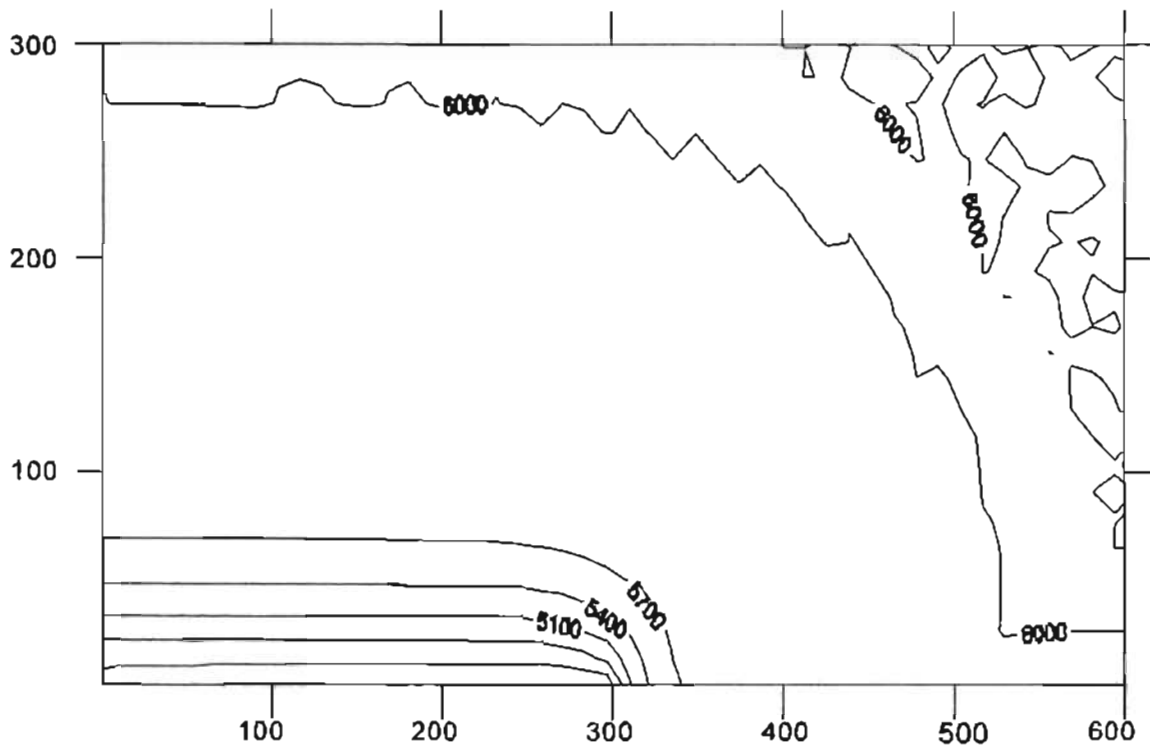


Figura 20. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 300$ pies

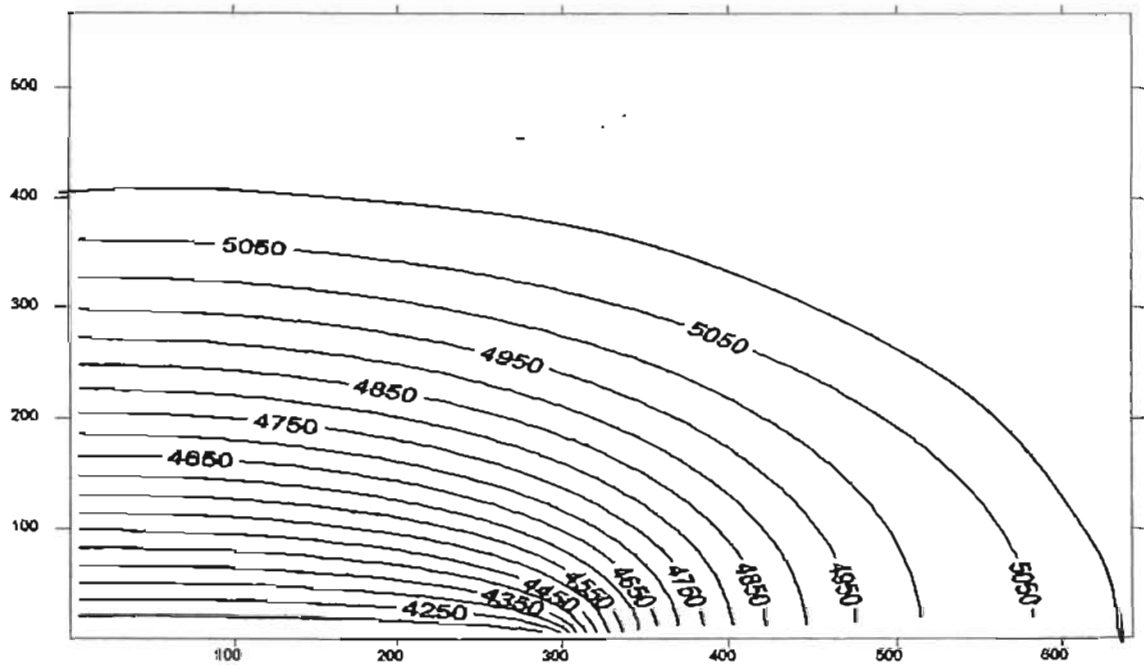


Figura 21. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 656$ pies y $x_f = 300$ pies

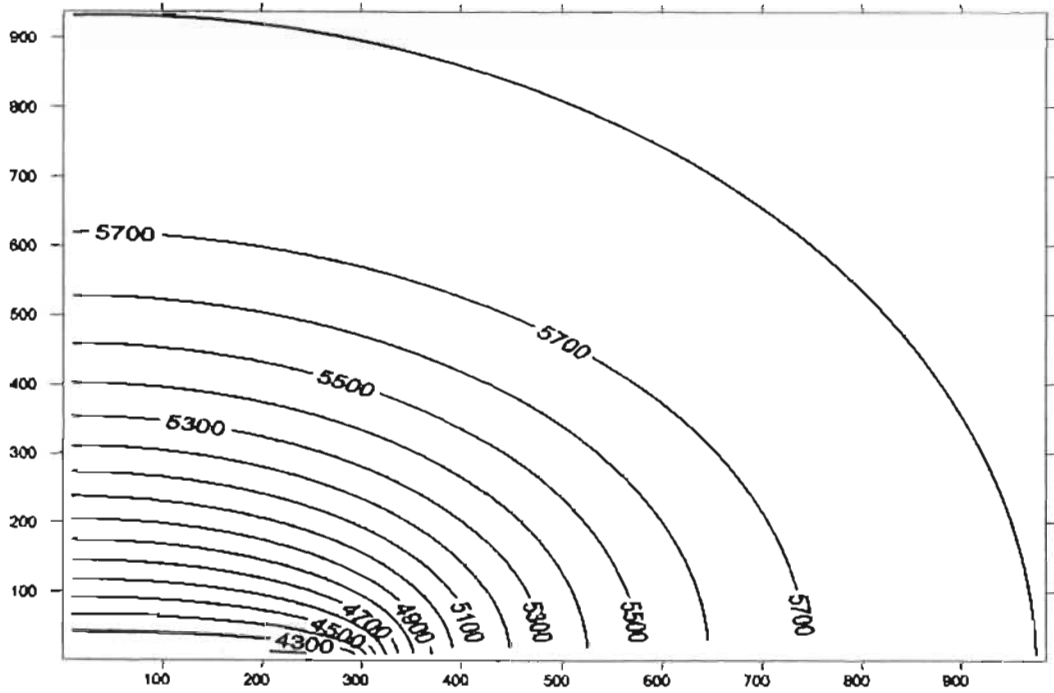


Figura 22. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 984$ pies y $x_f = 300$ pies

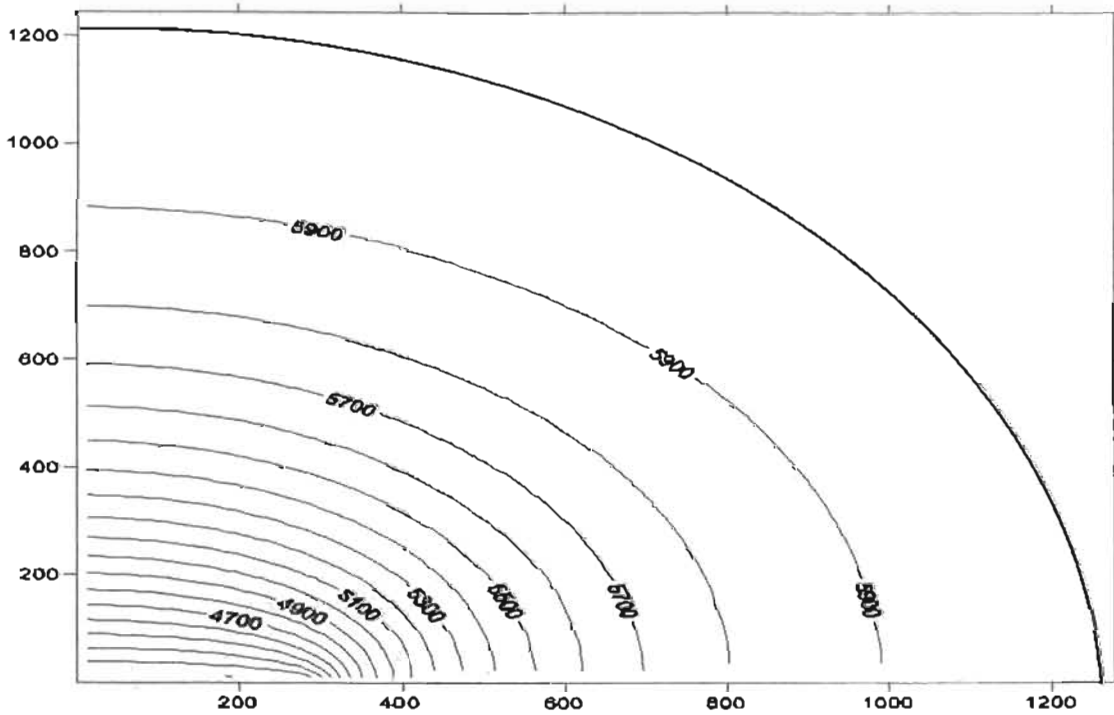


Figura 23. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 300$ pies

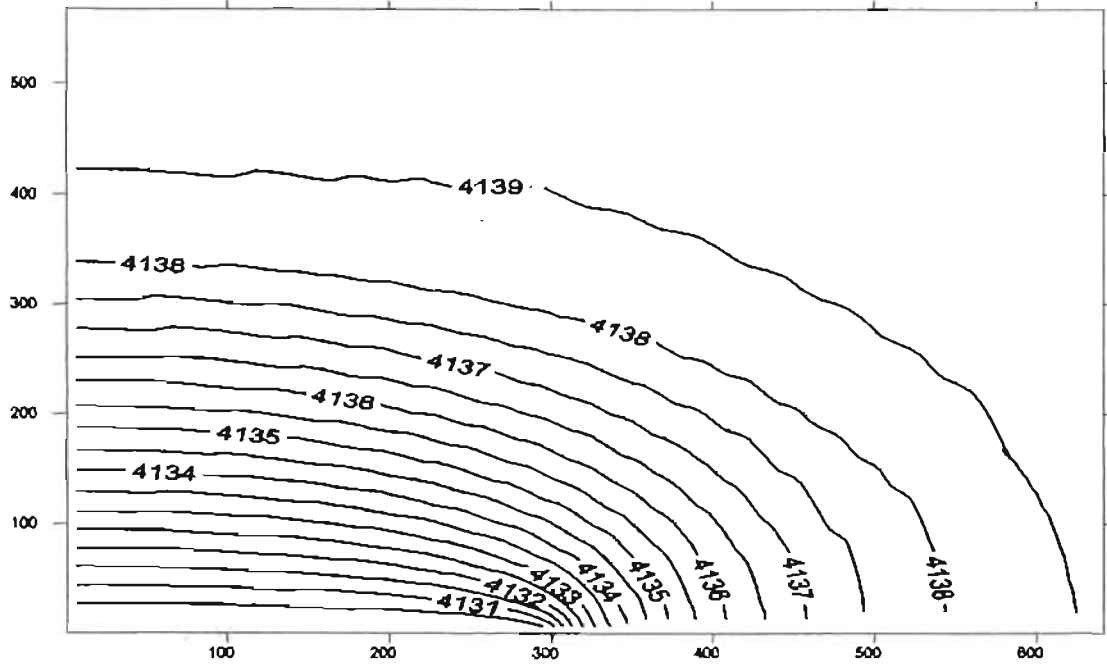


Figura 24. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 656$ pies y $x_f = 300$ pies

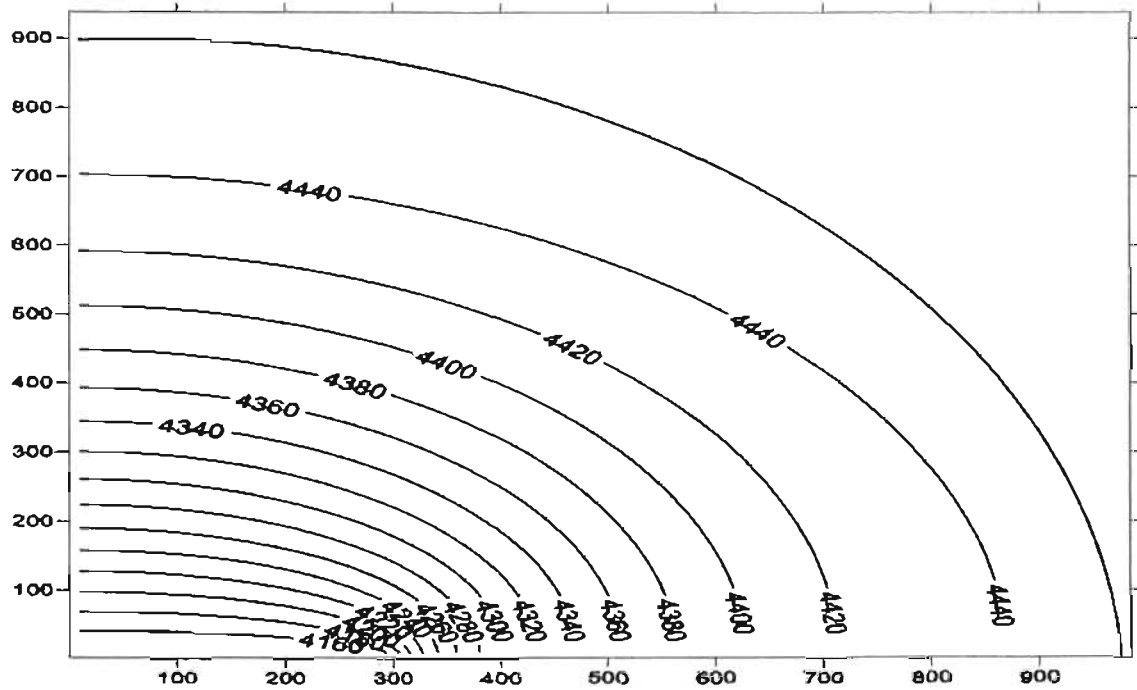


Figura 25. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 984$ pies y $x_f = 300$ pies

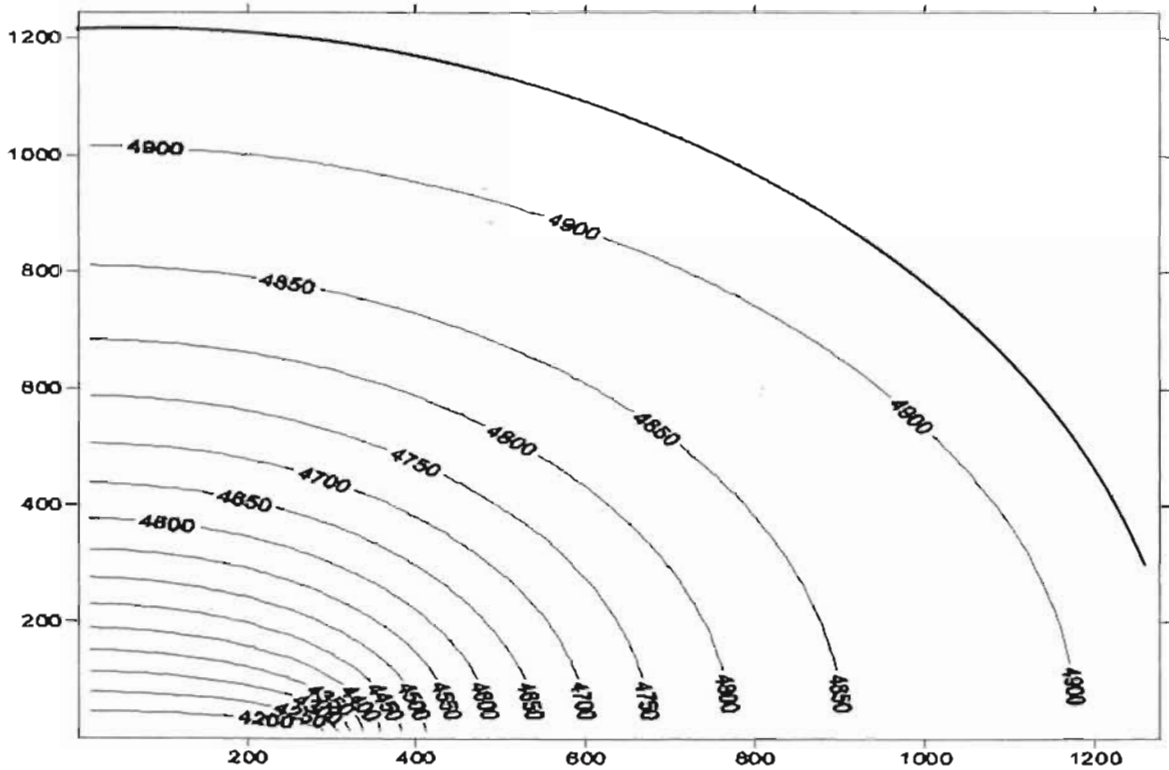


Figura 26. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1000$ días, $r_e = 1312$ pies y $x_f = 300$ pies

Se observa en las figuras 9 – 17 que cuando tenemos tiempos de producción pequeños (1 día), una longitud de fractura de 200 pies y diferentes radios de drene, las curvas que representan el comportamiento de presión en el yacimiento tiende a tomar una forma elíptica siguiendo el patrón de la fractura hidráulica. A tiempos de producción mayores (100 días), longitud de fractura de 200 pies y diferentes radios de drene, el comportamiento de la presión en el yacimiento tiende a dejar su forma elíptica y a depresionarse lentamente a medida que el radio de drene es mayor. Cuando el tiempo de producción es igual a 1000 días, la longitud de fractura de 200 pies y diferentes radios de drene, el comportamiento de la presión en el yacimiento se aproxima a la

forma radial e igualmente el yacimiento se depresiona lentamente conforme el radio de drene es mayor.

Realizando un análisis similar con los mismos tiempos de producción y radios de drene mencionados anteriormente con la diferencia de que la longitud de fractura es igual a 300 pies (figuras 18 - 26) se obtiene en forma general que, las curvas que representan el comportamiento de presión en el yacimiento sigue el mismo patrón anterior con la variación de que la forma elíptica tiende a durar más tiempo y a que el yacimiento se depresiona más rápidamente.

Por otro lado, el efecto de flujo transitorio en el yacimiento se puede observar al graficar el comportamiento de presiones, en coordenadas u, v del mapeo conformal (unidades adimensionales en los ejes coordenados), como se muestra en las figuras 27-30.

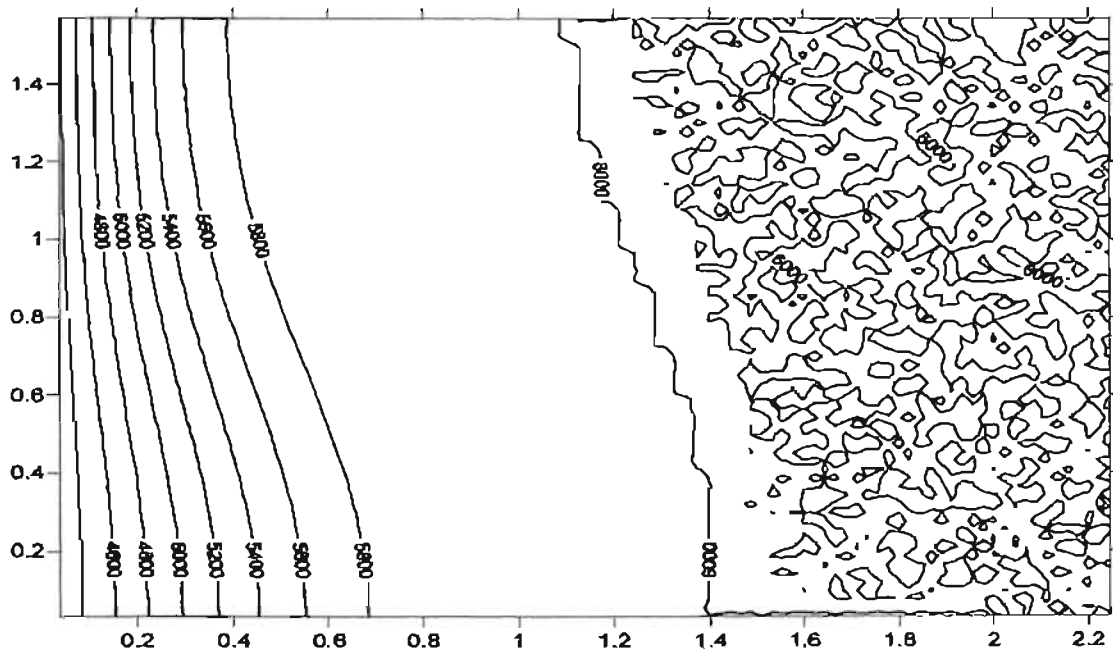


Figura 27. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 984$ pies y $x_f = 200$ pies

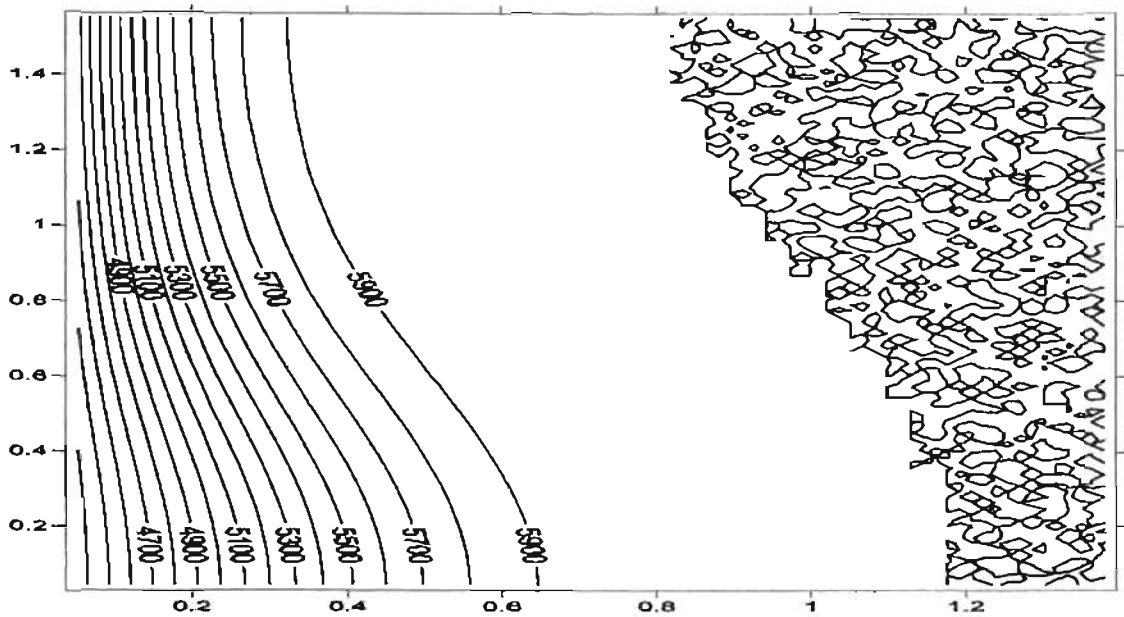


Figura 28. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 1$ día, $r_e = 984$ pies y $X_f = 300$ pies

Para 100 días de producción se ha alcanzado prácticamente el flujo pseudoestacionario, como se observa en las figuras 29 y 30.

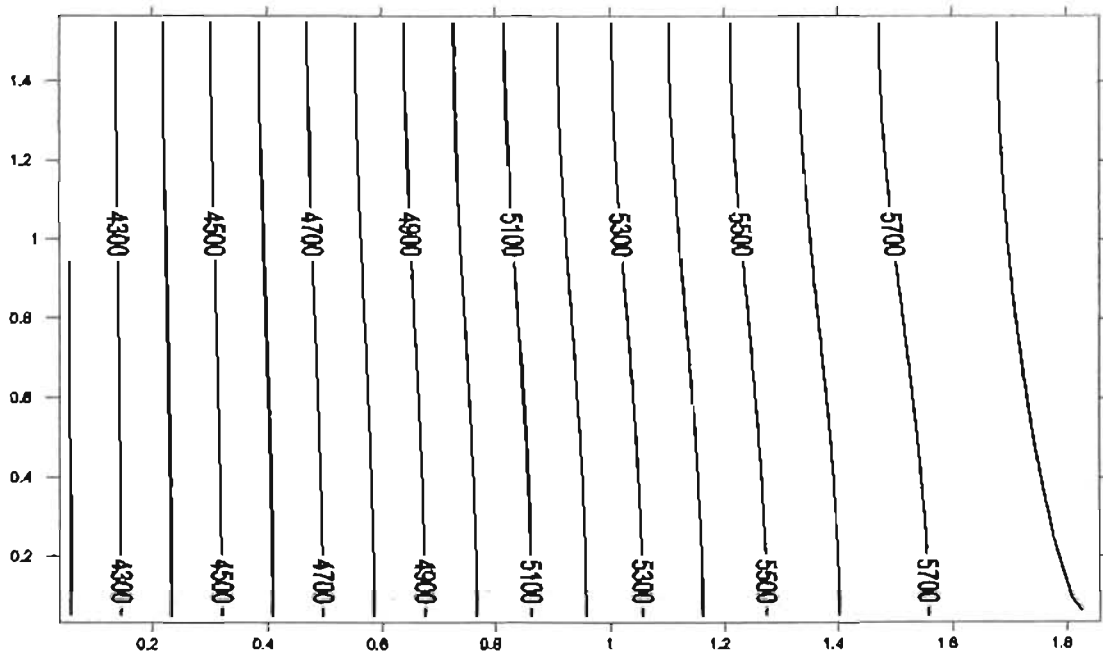


Figura 29. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 984$ pies y $X_f = 200$ pies

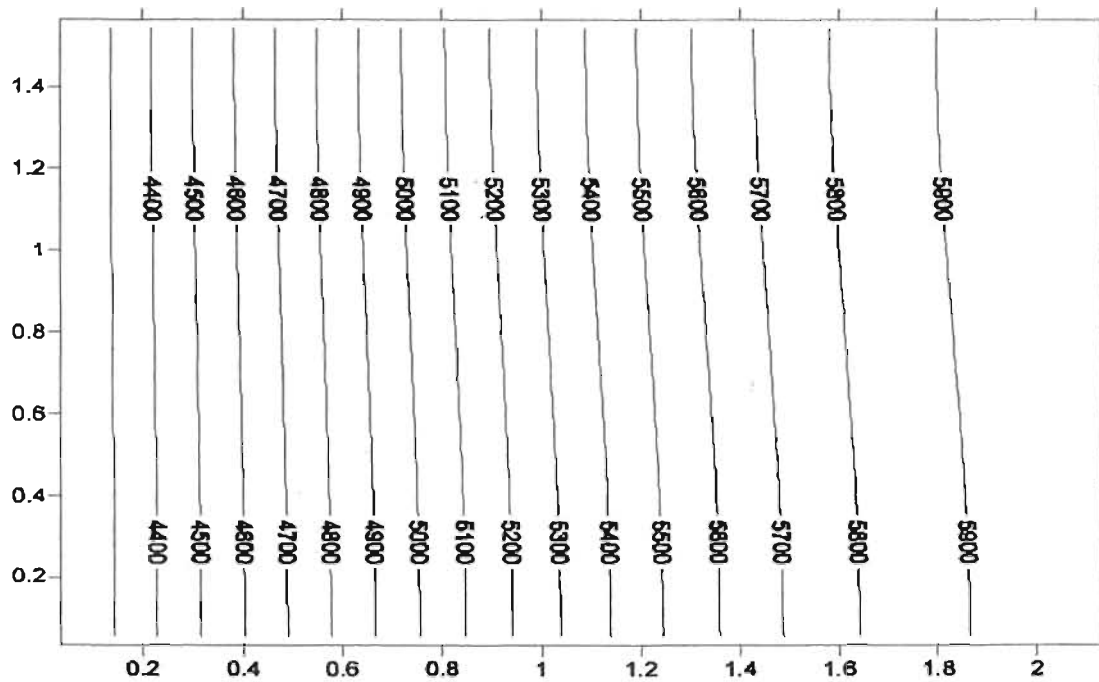


Figura 30. Comportamiento de la presión en el yacimiento $t_p = 100$ días, $r_e = 984$ pies y $X_f = 300$ pies

A continuación se muestra el comportamiento de producción en el yacimiento y su producción acumulada así como el comportamiento de producción en la tubería vertical (figuras 31 - 40).

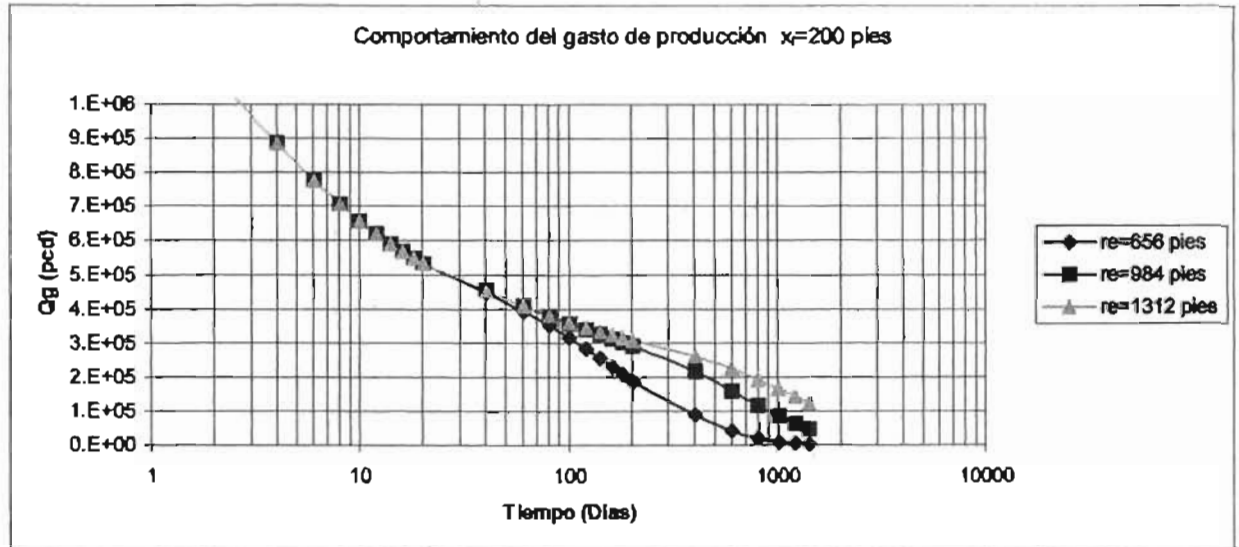


Figura 31. Comportamiento del gasto de producción con $x_r=200$ pies y radio de drenaje de 656, 984 y 1312 pies.

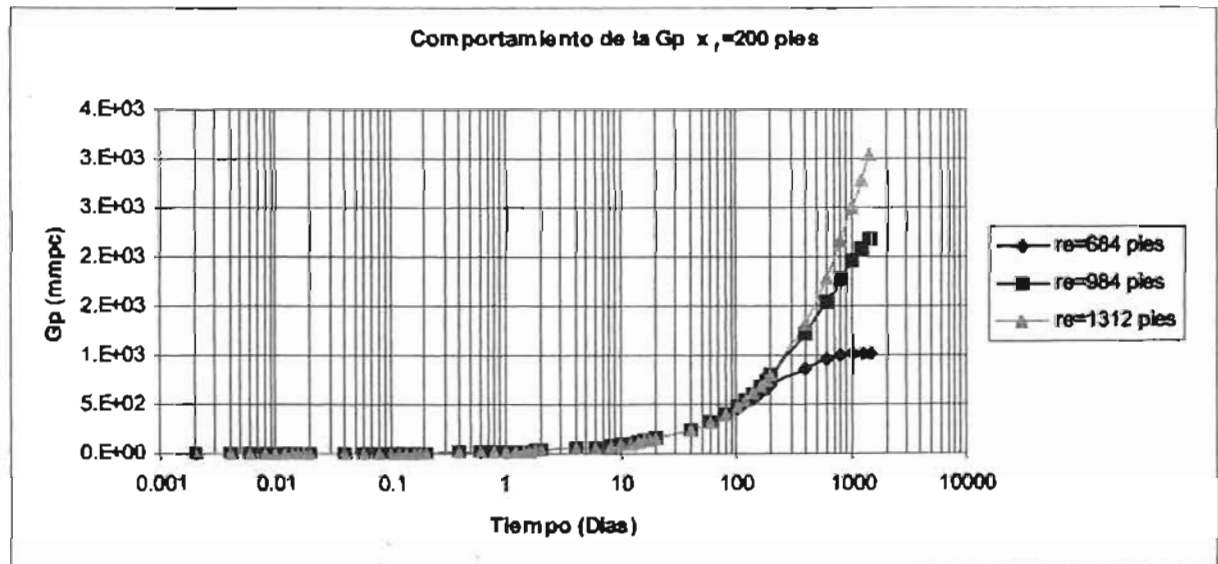


Figura 32. Comportamiento de la Acumulada de producción con $x_r=200$ pies y radio de drenaje de 656, 984 y 1312 pies.

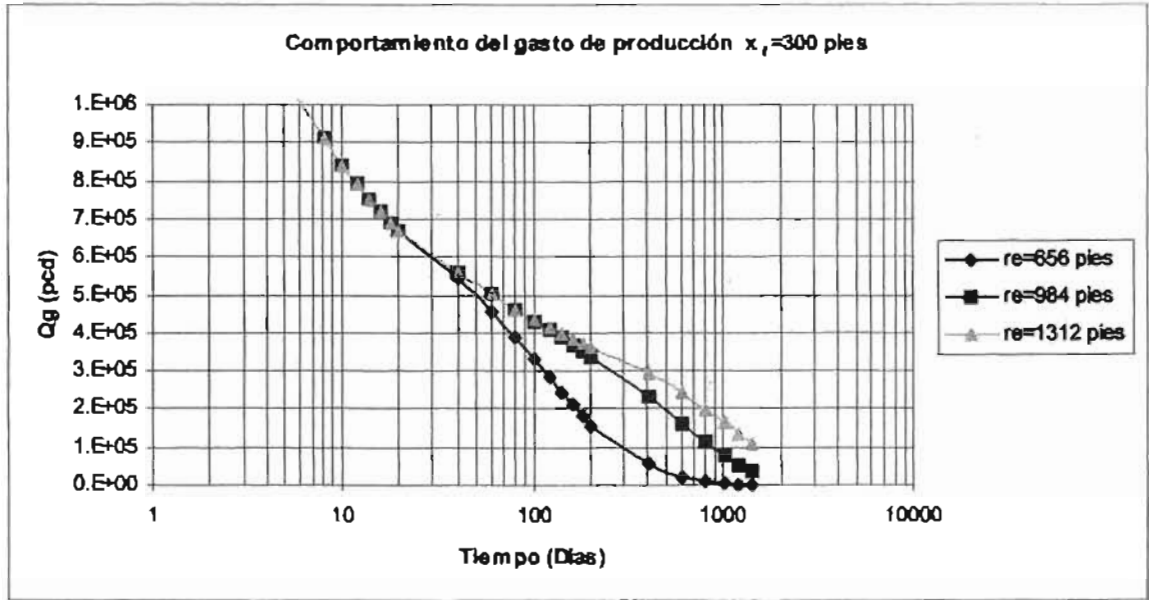


Figura 33. Comportamiento del gasto de producción con $x_f = 300$ pies y radio de drenaje de 656, 984 y 1312 pies.

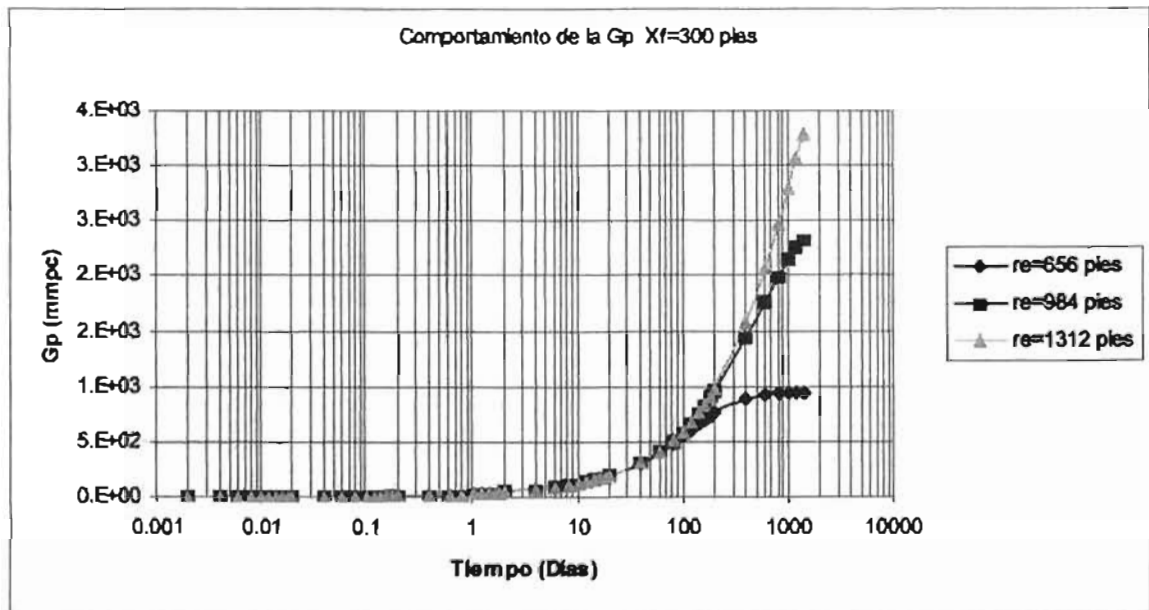


Figura 34. Comportamiento de la Acumulada de producción con $x_f = 300$ pies y radio de drenaje de 656, 984 y 1312 pies.

Cuando se tiene una longitud de fractura de 200 pies se observa que, cuando el radio de drene es mayor el gasto es mayor y por lo tanto su acumulada también lo es, esto se empieza a notar a partir de 50 días de producción, y se debe a que en este tiempo los efectos transitorios finalizan empezándose a sentir las fronteras del yacimiento.

Cuando la longitud de fractura es igual a 300 pies el tiempo de producción al cual los gastos de gas empiezan a diferenciarse se reduce a 30 días siendo mayores los gastos a radios de drene mayores, esto se explica debido a que el efecto transitorio se alcanza más rápidamente como consecuencia de la longitud de fractura.

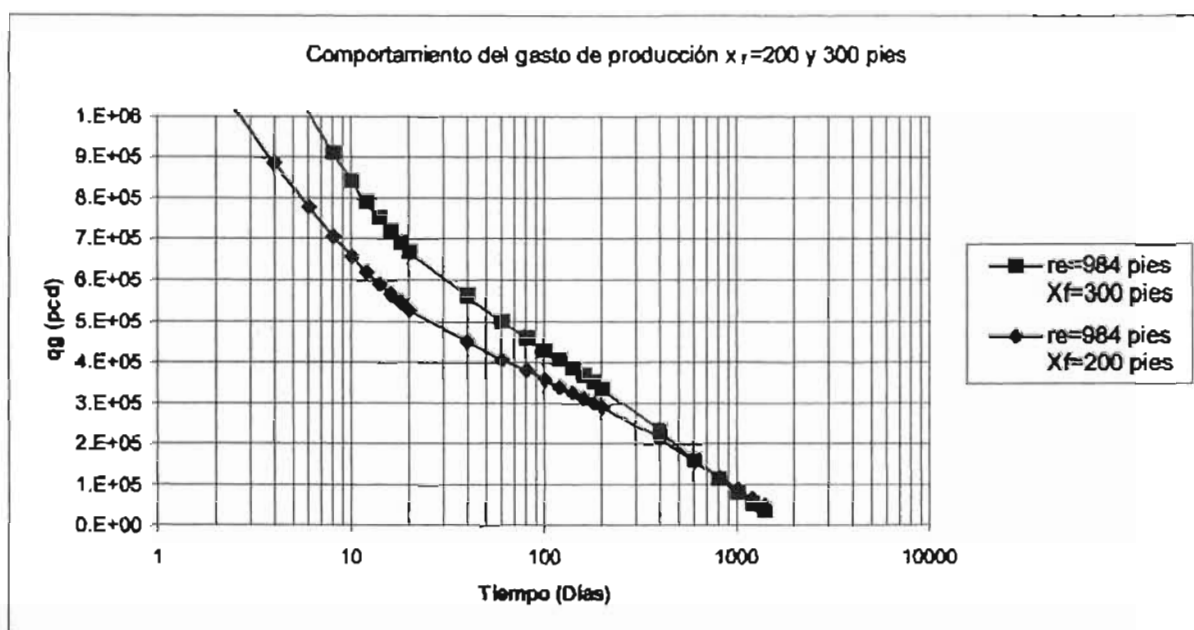


Figura 35. Comportamiento del gasto de producción con $x_f=200$ y 300 pies y radio de drene de 984 pies.

En la figura 35 se tiene el comportamiento de producción de un área de drene de 984 pies (300 metros) y una longitud de fractura de 200 y 300 pies, observándose que se tienen mejores gastos a mayor longitud de fractura, a los 300 días aproximadamente los gastos de producción son similares. Esto se debe a que el efecto de la fractura dura hasta los 300 días, teniéndose después el efecto solamente del yacimiento.

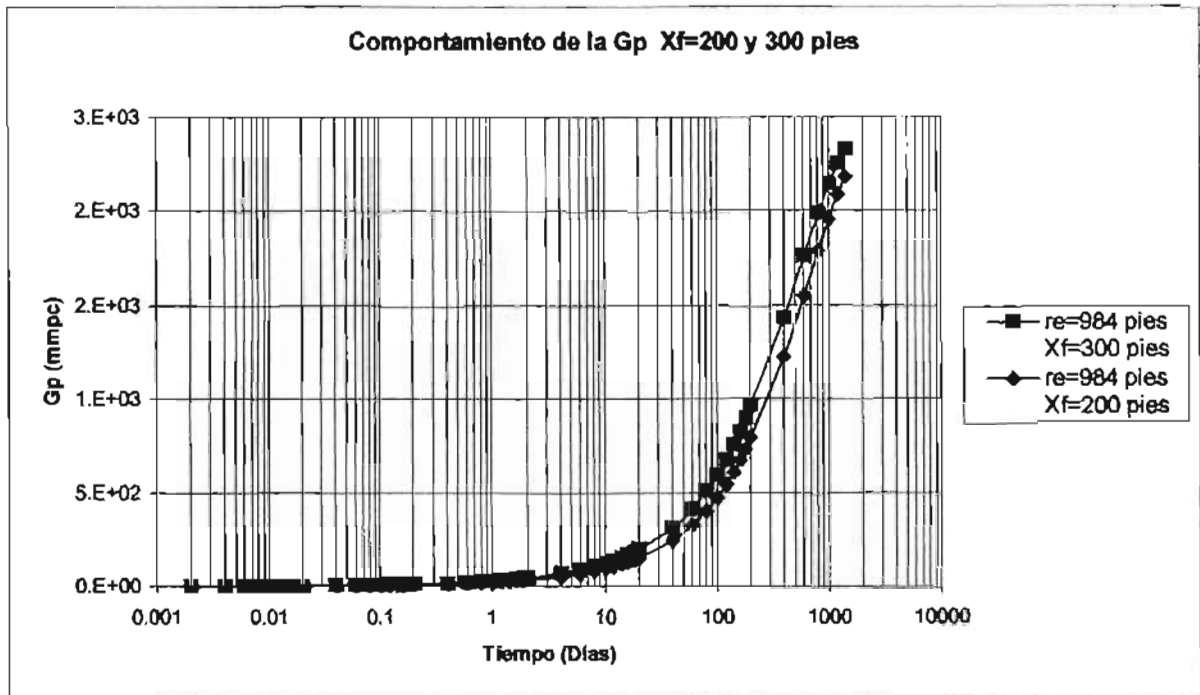


Figura 36. Comportamiento de la Acumulada de producción con $x_f=200$ y 300 pies y radio de drenaje de 984 pies.

En la figura 36 se muestra que cuando se tiene un radio de drenaje similar pero una longitud de fractura diferente, la acumulada tiene un comportamiento ligeramente mejor cuando la fractura es mayor.

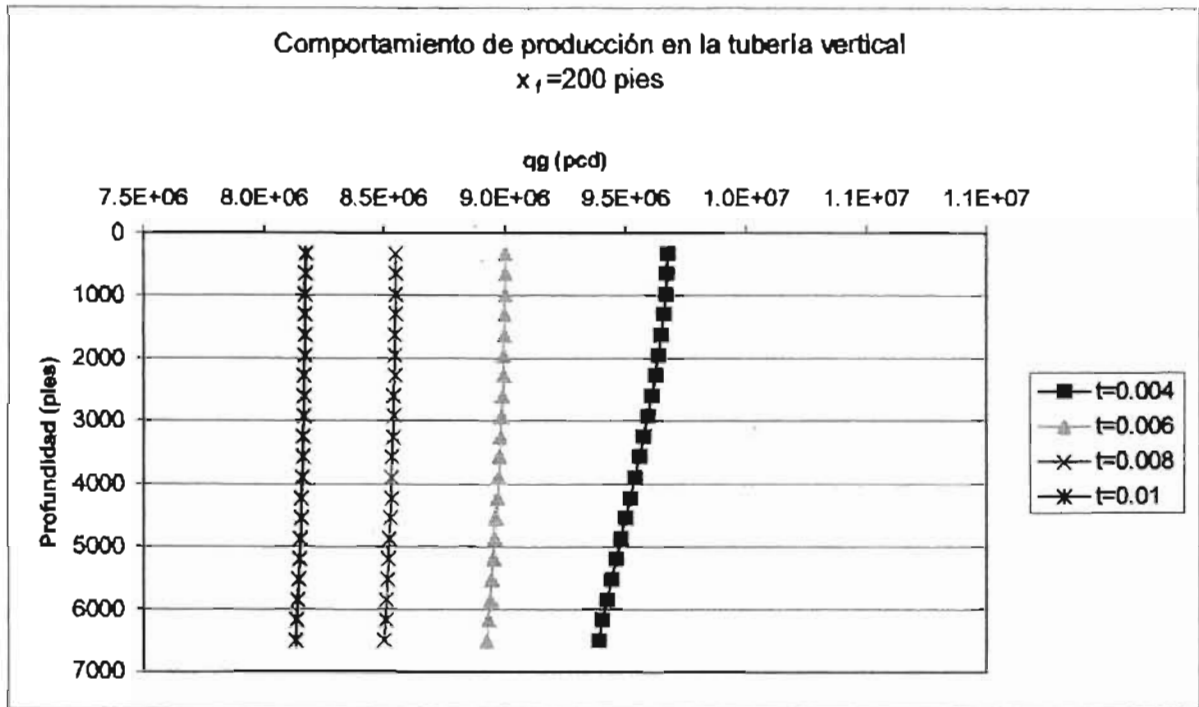


Figura 37. Comportamiento del gasto de producción en la tubería vertical con $x_f = 200$ pies en función de la profundidad y el tiempo de producción.

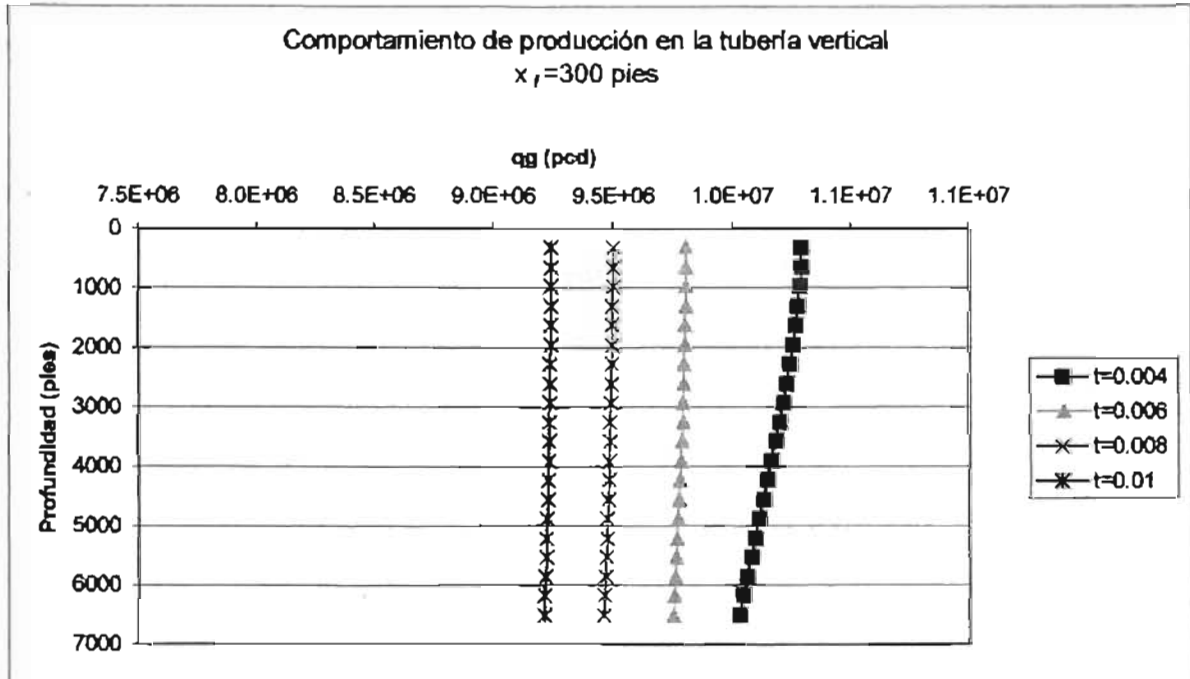


Figura 38. Comportamiento del gasto de producción en la tubería vertical con $x_f = 300$ pies en función de la profundidad y el tiempo de producción.

En la figura 37 y 38 se tiene el gasto de producción en la tubería vertical en función de la profundidad y del tiempo. En ellas se observa que los efectos transitorios son notorios a medida que el tiempo es pequeño y la profundidad menor. Al tiempo de 0.01 días prácticamente ya se tiene flujo pseudoestacionario. Esto se debe a que el fenómeno de almacenamiento en la tubería influye directamente en el valor de q_{sc} . Los fenómenos de almacenamiento tratados de esta manera se determinan por el comportamiento global del sistema, por lo que se tiene una ventaja importante al analizar el comportamiento de pozos de gas en esta forma.

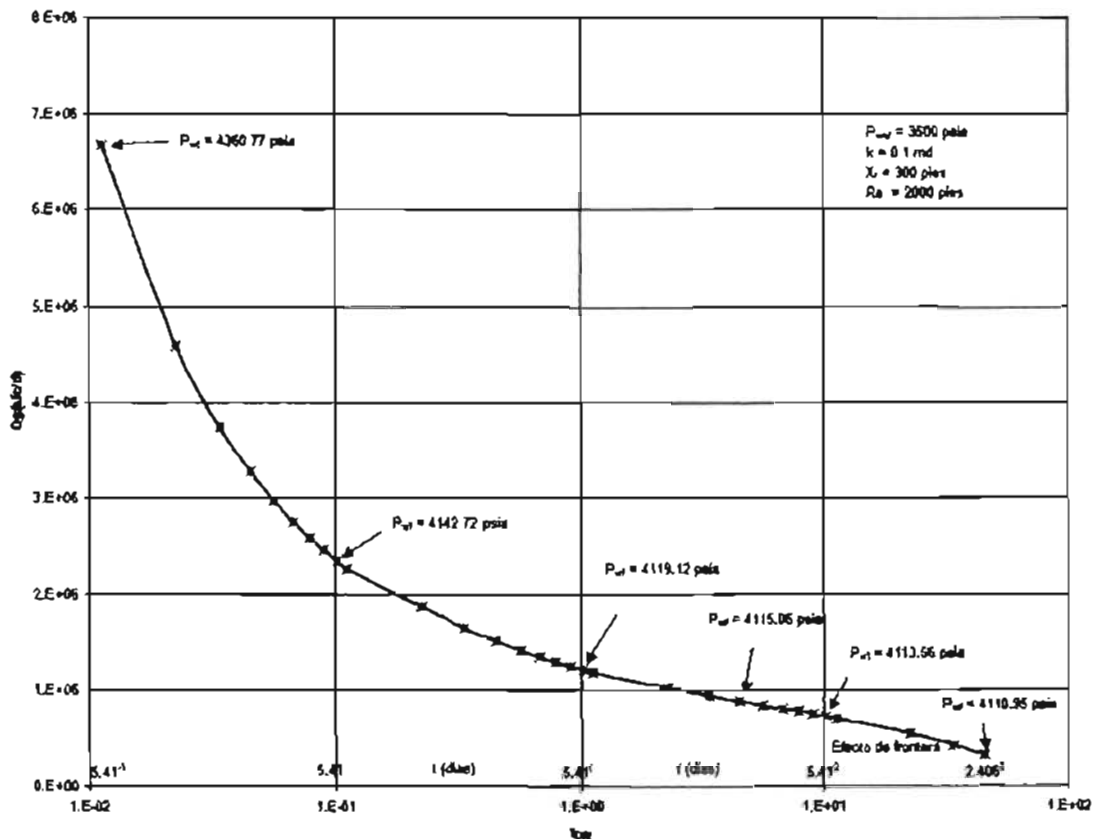


Figura 39. Efecto de considerar la presión constante en el fondo y en la cabeza del pozo sobre el gasto instantáneo.

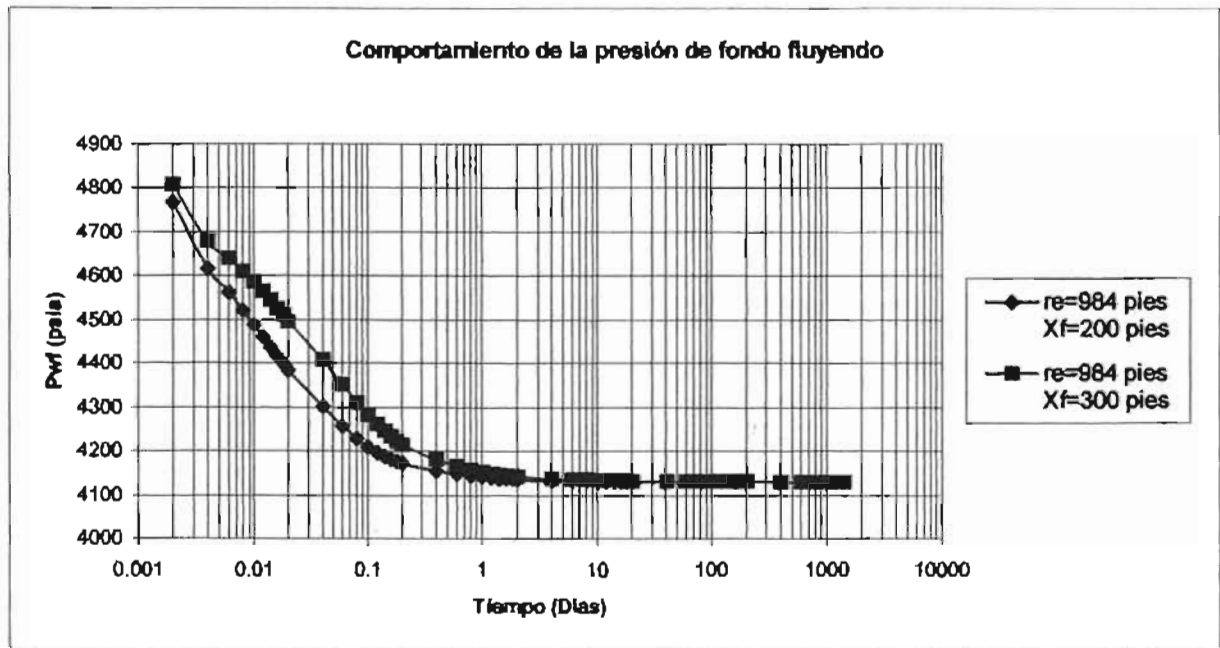


Figura 40. Comportamiento de la presión de fondo fluyendo con $x_f = 200$ y 300 pies y un radio de drene de 984 pies.

En la Figura 39 se muestra al gasto instantáneo q_{sc} contra el tiempo adimensional t_{DXf} para el caso de una presión de fondo fluyendo constante de 3500 lb/pg^2 ; en ella se observa que el gasto instantáneo va disminuyendo en función del tiempo adimensional como se espera y que la presión de fondo fluyendo se mantiene prácticamente constante a valores de t_{DXf} mayores a 1 . También se observa al final de la curva el efecto de frontera, el cual da como resultado que el gasto tienda a disminuir más rápidamente que cuando se presenta para condiciones de flujo transitorio. En la figura 40 también se puede observar este comportamiento considerando un radio de drene de 984 pies (300 metros) y una longitud de fractura de 200 y 300 pies.

k , md	0.1
Φ , fracción	0.18
h , pies	17
p_i , psia	6000
p_{whf_i} , psia	3500
T , °R	655
γ , fracción	0.7
r_w , pies	0.333
d_i , pulgadas	1.9
x_r , pies	50, 100 y 300
r_e , pies	656, 984, 1000 y 1312

TABLA 1. Datos utilizados en el análisis de resultados

Las propiedades del gas, z y C_g , se calculan mediante la ecuación de estado de Redlich-Kwong³⁰ o bien a través del método de Standing-Katz. La viscosidad se obtiene a partir de la correlación de Lee³¹.

VII. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El objetivo principal de este trabajo fue el de integrar por medio de un simulador numérico el comportamiento del sistema yacimiento-fractura hidráulica-pozo, bajo un sistema de producción a presión constante, en coordenadas elípticas y usando la técnica matemática del mapeo conformal.

Las principales conclusiones obtenidas son:

1. Se logró ajustar aceptablemente las curvas generadas por las corridas del programa para un yacimiento con longitudes de fractura de 50, 100 y 300 pies, con las curvas tipo de Agarwal para fracturas de conductividad finita a presión constante.
2. A tiempos pequeños la simulación en el yacimiento, no se ajusta con Agarwal, debido a errores de truncamiento en la solución de las ecuaciones en diferencias finitas.
3. Se observa que cuando se acopla el yacimiento con la tubería vertical, las curvas tipo que se generan para 50, 100 y 300 pies no se ajustan a las curvas tipo de Agarwal a tiempos adimensionales pequeños, debido al fenómeno de flujo crítico en la tubería vertical y a que solamente consideran el efecto del yacimiento.
4. La forma de las curvas que representan el comportamiento de presión en el yacimiento es elíptica a medida que el tiempo de producción es pequeño y la longitud de fractura es corta.

5. El flujo transitorio en el yacimiento se puede observar al graficar el comportamiento de presión obtenido por el mapeo conformal. A tiempos de producción pequeños se observa flujo transitorio ($t_p < 100$ días)
6. Los gastos de producción y su acumulada son mayores a longitudes de fractura y radios de drenaje mayores.
7. El comportamiento del gasto en superficie y yacimiento no son iguales a tiempos cortos, debido al fenómeno de almacenamiento.
8. se observa que, el flujo transitorio en la tubería tiene poca duración pasando a flujo pseudoestacionario a tiempos cortos.
9. Es posible realizar análisis para condiciones en que se da el flujo cruzado entre estratos
10. Se recomienda extender el estudio a fracturas de conductividad finita.

NOMENCLATURA

c	= Compresibilidad isotérmica
d	=Diámetro interno de la tubería
e	=número neperiano, 2.71828183
f	=factor de fricción para flujo en tuberías
h	= Espesor de la formación
J	= Jacobiano
k	= Permeabilidad al gas
L	=Longitud de la tubería o profundidad
M	=peso molecular del gas
n	=número de moles
n	=nivel de tiempo
$p_p(p)$	= Pseudopresión de gases reales
p_{pD}	= Pseudopresión adimensional de gases reales
p	= Presión
p_{sc}	= Presión a condiciones estandar
p_{whf}	= Presión en la cabeza del pozo, fluyendo
p_{whs}	= Presión en la cabeza del pozo, cerrado
q	= Gasto de producción de gas
q^*	= Gasto introducido o perdido por un estrato
q_D	= Gasto adimensional
r	= Distancia radial
r_D	= Radio adimensional

r_e	= Radio de la frontera externa
R	= Constante de la ley de los gases
R_e	= número de Reynolds
t	= tiempo
t_D	= tiempo adimensional
t_{DXf}	= tiempo adimensional para la fractura
t_p	= tiempo de producción
T	= Temperatura
u, v	= Coordenadas espaciales de computo
v, v_r	= Velocidad macroscópica del gas
V_m	= Volumen molar
W_1, Z_1	= Variables complejas
W_2, Z_2	= Variables complejas
x, y, z	= Coordenadas espaciales cartesianas
x_f	= $\frac{1}{2}$ de la longitud de la fractura vertical
z	= Factor de compresibilidad del gas
z	= Dirección de flujo vertical en la tubería

SUBÍNDICES Y SUPERÍNDICES

<i>cy</i>	= Condiciones de yacimiento
<i>D</i>	= Adimensional
<i>e</i>	= Frontera externa
<i>g</i>	= Gas
<i>i</i>	= Inicial o índice de discretización en la dirección de flujo <i>u</i>
<i>j</i>	= Índice de discretización en la dirección de flujo <i>v</i>
<i>k</i>	= Nivel de iteración, o índice de discretización del espacio en la tubería vertical
<i>n</i>	= Índice de discretización del nivel de paso de tiempo
<i>p</i>	= Producción
<i>r</i>	= Dirección radial
<i>sc</i>	= Condiciones estándar de presión y temperatura $p = 14.7 \text{ psia}$, $T = 520 \text{ }^\circ\text{R}$
<i>w</i>	= Pozo
<i>whf</i>	= Cabeza del pozo fluyendo
<i>whs</i>	= Cabeza del pozo cerrado
<i>f</i>	= Referente a la fractura

NOMENCLATURA GRIEGA

α_D	= Difusividad adimensional
β	= Parámetro de turbulencia
γ	= Densidad relativa del gas (al aire)
δ	= Factor de flujo de alta velocidad
ξ	= Tolerancia en la solución del sistema matricial
ζ	= Rugosidad relativa de la tubería
λ	= Relación del tiempo con respecto al espacio u
μ	= Viscosidad del gas
ρ	= Densidad del gas
ω	= Gasto másico del gas
π	= Número phi, 3.1416...
η	= Variable de difusión adimensional, Ecuación 5.18
ϕ	= porosidad de la formación
θ	= Dirección angular de la tubería

OPERADORES

Δ	= Variación en diferencias finitas, incremento o decremento
∇	= Operador laplaciano
∂	= Operador derivada parcial
d	= Operador derivada total
ψ	= Operador para la diferencia de potenciales en niveles de iteración consecutivas
\int	= Operador integral
Σ	= Operador sumatoria

BIBLIOGRAFÍA

1. Muskat, M.: "The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media". McGraw-Hill Book Co., Inc., New York (1937).
2. Aronofsky, J. S. y Jenkins, R.: "A Simplified Analysis of Unsteady Radial Gas Flow", *Trans.*, AIME (1954) Vol. 201, 149-154.
3. Ramey, H. J. Jr.: "Non -Darcy Flow and Wellbore Storage Effects in Pressure Build-up and Draw-down of Gas Wells", *Trans.*, AIME (1965) Vol. 234, 223.
4. Al-Hussainy, R, Ramey, H. J. Jr., Crawford, P. B.: "The Flow of Real Gases Through Porous Media", *JPT* (Mayo 1966) 624-636.
5. Wattenbarger, R. A.: "Effects of Turbulence, Wellbore Damage, Wellbore Storage, and Vertical Fractures on Gas Well Testing", Tesis Doctoral, Universidad de Stanford, Stanford, CA, (Mayo 1967), 139 pag.
6. Montiel, H. D.: "Explotación Simultánea de Yacimientos de Gas por una Sola Tubería", Tesis de Maestría, DEPMI-UNAM (Mayo 1977).
7. Berumen, C. S.: "Análisis del Comportamiento de Yacimientos de Gas que Producen a Condiciones de Presión Constante", Tesis de Maestría, DEPMI-UNAM (Julio 1987).
8. Coats, K. H., Tek, M. R., and Katz, D. L. : "Unsteady-State Liquid Flow Through Porous Media Having Elliptic Boundaries", *Trans.*, AIME (1959) Vol. 216, 460.
9. Prats, M. : "Effect of Vertical Fracture on Reservoir Behavior-Incompressible Fluid Case", *Trans.*, AIME (1961) Vol. 222, 105.
10. Fikri K., y Brigham, W. E.: "Transient Flow in Elliptical Systems", *Trans.*, AIME (1979) Vol. 225, 401.
11. Gringarten, A. C., Ramey, H. J. Jr., y Raghavan, R.: "Unsteady-State Pressure Distribution Created By a Well With a Single Infinite-Conductivity Vertical Fracture" *SPEJ* (Agosto, 1974) 347-360; *Trans.*, AIME, Vol. 257.
12. Cinco, L. H., Samaniego, V. F. y Domínguez, A. N.: "Transient Pressure Behavior for a Well With a Finite-Conductivity Vertical Fracture" *SPEJ* (Agosto, 1978) 253-264.

13. Agarwal, R. G., Carter, R. D., y Pollock, C. B.: "Evaluation and Performance Prediction of Low-Permeability Gas Wells Stimulated by Massive Hydraulic Fracturing", *JPT* (Marzo, 1979) 362-372
14. Bennett, C. O.: "Analysis of Fractured Wells", Tesis Doctoral, Universidad de Tulsa, Tulsa, Ok, (Mayo 1981), 335 pag.
15. Bird, R. B., Stewart, W. E. y Lightfoot, E. N.: "*Transport Phenomena*", John Wiley and Sons, Inc., New York (1960).
16. Scheidegger, A. E.: "*The Physics of Flow Through Porous Media*", McMillan, New York, 1960.
17. Samaniego, V. F.: "Apuntes de Yacimientos de Gas", DEPI, UNAM (2003).
18. Spiegel, M. R.: "*Theory and Problems of Vector Analysis*", Schaum Publishing Co., New York (1959).
19. Churchill, R. V.: "*Complex Variables and Applications*", McGraw-Hill Book Co., New York, N. Y. (1960) .
20. Earlougher, R. C.: "Behavior of Transient Reservoir Pressures Considering Two-Phase Flow Concepts and Well Interference", Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford, Cal. (1966).
21. Russell, P. G., Truitt, N. E. : "Transient Pressure Behavior in Vertically Fractured Reservoirs", *Trans.*, AIME (1964) Vol. 231, 1159.
22. Samaniego, V., F.: "An Investigation of Transient Flow of Reservoir Fluids Considering Pressure Dependent Rock and Fluids Properties", Tesis Doctoral, Stanford University, Stanford, California, (1974).
23. Von Rosenberg, D., U.: "*Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*", Publishing Division Gerald L. Farrar & Associates, Inc. Tulsa (1977).
24. Demidovich, B., P. y Maron, I., A.: "*Computational Mathematics*", MIR Publishers Moscow, (1976).
25. Fox, L. : "*Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*", Addison-Wesley Publishing Co., London (1962).
26. Abramowitz, y Stegun, : "*Handbook of Mathematical Functions*", National Bureau of Standards, Washington, D. C. (1964).
27. Godsberg, V.: "Real properties of Natural Gas Provide Base for Thermal Hydraulic Analysis of Gas Pipelines", *OEGJ*. Julio-9, 1984

28. Rodríguez, D. L. G. F.: "Apuntes de Fundamentos de Simulación de Yacimientos", DEPMI, UNAM (2003).
29. Forsythe, G. E. and Wasow, W. R.: "*Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*"; John Wiley and Sons, Inc., New York, N. Y. (1960).
30. "*Engineering Data Book*", Natural Gasoline Supply Men's Association, Tulsa, Oklahoma (1957).
31. Lee, A., L., González, M., H., y Eakin, B., E.: "The Viscosity of Natural Gases", *Trans.*, AIME (1966) Vol. 237, 997.
32. Morse, P. M. y Feshbach, H.: "*Methods of Theoretical Physics*", McGraw-Hill, N. Y., (1953).
33. Kreyszig, E.: "*Advanced Engineering Mathematics*", Tercera Edición, Wiley International Edition, New York (1972) 490-491
34. Chin W., C.: "*Modern Reservoir Flow and Well Transient Analysis*", Gulf Publishing Company (1993).
35. Colebrook, C. F.: "Turbulent Flow in Pipes With Particular Reference to the Transition Region Between the Smooth and Rough Pipe Laws", *Inst. Civil Eng. J.*, 11, 133

APÉNDICE A

Coordenadas elípticas (u, v, z)

En un sistema coordenado cilíndrico elíptico tenemos

$$\begin{aligned} x &= a \cosh u \cos v \\ y &= a \sinh u \sin v \\ z &= z \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(A. 1)$$

La familia de superficies coordenadas son las siguientes (ver Fig. A. 1):

1. Cilindros elípticos, $u = \text{constante}$, $0 \leq u < \infty$.
2. Cilindros hiperbólicos, $v = \text{constante}$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
3. Planos paralelos al plano x, y , $z = \text{constante}$, $-\infty < z < \infty$

Haciendo $z = 0$ e invirtiendo las ecuaciones (A. 1), y elevando al cuadrado cada lado,

$$x^2 = a^2 \cosh^2 u \cos^2 v, \quad \dots\dots\dots(A. 2)$$

$$y^2 = a^2 \sinh^2 u \sin^2 v, \quad \dots\dots\dots(A. 3)$$

de los cuales

$$\frac{x^2}{a^2 \cosh^2 u} + \frac{y^2}{a^2 \sinh^2 u} = 1. \quad \dots\dots\dots(A. 4)$$

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 v} = 1. \quad \dots\dots\dots(A. 5)$$

Para $u = \text{constante}$, la ecuación (A. 4) resulta como una familia de elipses con x como el eje mayor y focos igual a " a ". Para $v = \text{constante}$, la ecuación (A. 5) da una familia de hipérbolas con puntos focales sobre el eje x e iguales a " a "³². En la figura A. 1 podemos observar las coordenadas cilíndricas elípticas.

Analizando la ecuación (A. 4), se tiene la explicación siguiente:

Eje mayor de la elipse: $A^2 = (a \cosh u)^2$

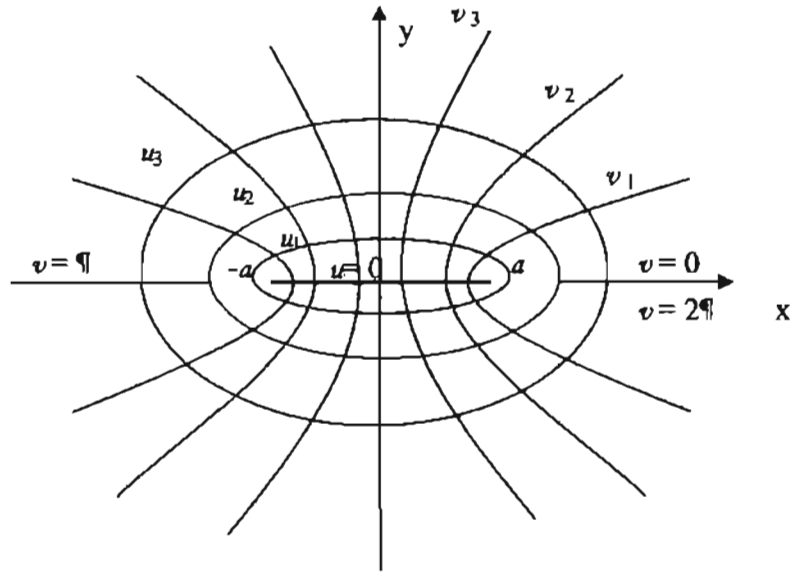


Figura A. 1 Coordenadas elípticas

Eje menor de la elipse: $B^2 = (a \sinh u)^2$

Por lo tanto:

$A = a \cosh u$, Los extremos del eje mayor son $(\pm a \cosh u, 0)$ (A. 6)

$B = a \sinh u$, Los extremos del eje menor son $(0, \pm a \sinh u)$ (A. 7)

Comprobando que a es el foco:

$$a^2 = A^2 - B^2 = (a \cosh u)^2 - (a \sinh u)^2 = a^2(\cosh^2 u - \sinh^2 u) = a^2$$

$a^2 = a^2$, p.l.q.c.

De la ecuación (A. 6):

$$\cosh u = A/a$$
$$u = \cosh^{-1}\left(\frac{A}{a}\right)$$

Analizando la ecuación (A. 5), se tiene la explicación siguiente:

Vértice de la hipérbola: $V^2 = (a \cos v)^2$

Extremos de la hipérbola: $E^2 = (a \sin v)^2$

Por lo tanto:

$V = a \cos v$, Los extremos del vértice son $(\pm a \cos v, 0)$ (A. 8)

$E = a \sin v$, Los extremos son $(0, \pm a \sin v)$ (A. 9)

Comprobando que a es el foco de la hipérbola:

$$a^2 = A^2 + B^2 = (a \cos v)^2 + (a \sin v)^2 = a^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = a^2$$

$$a^2 = a^2, \text{ p.l.q.c.}$$

De la ecuación (A. 8):

$$\cos v = V/a$$
$$v = \cos^{-1}\left(\frac{V}{a}\right)$$

APÉNDICE B

Mapeo Conformal

Si una función compleja $w = f(z)$ se define en un dominio D del plano z , entonces a cada punto en D corresponde un punto en el plano w . De esta manera tenemos un *mapeo* de D dentro del rango de valores de $f(z)$ en el plano w . Si $f(z)$ es una función analítica, el mapeo dado por $f(z)$ es *conformal* (conservación de ángulos), excepto en los puntos donde la derivada de $f(z)$ es cero.

El mapeo conformal es importante en la ingeniería matemática, debido a que éste es un método común para resolver problemas de valores en la frontera en la teoría del potencial en dos dimensiones, para transformar una región de flujo complicada en una más simple.

Discutiendo lo anterior en una manera más detallada, si una función continua real $y = f(x)$ de una variable real x puede mostrarse graficando la curva en el plano xy ; esta curva es llamada la gráfica de la función. En el caso de una función compleja

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy) \quad \dots\dots\dots(B.1)$$

la situación es más complicada, debido a que cada una de las variables complejas w y z se representa geoméricamente por puntos en el plano complejo. Esto sugiere el uso de dos planos complejos separados para las dos variables: uno el plano z , en el cual el punto $z = x + iy$ se grafica, y el otro el plano w , al cual le corresponde el punto $w = u + iv$ en donde igualmente se grafica. En esta forma la función f asigna a cada z en su dominio un valor $w = f(z)$ en el plano w . Esta relación así definida se llama un mapeo (o

transformación) del dominio de f dentro del plano w , o más precisamente, un mapeo del dominio de f sobre el rango de f en el plano w ³³.

Afortunadamente, existen muchas transformaciones f ya definidas por muchos autores en la literatura fuera de la industria petrolera, de las cuales podemos tomar ventaja, por ejemplo de Hildebrand (1948), Kober (1957) y Spiegel (1964) ³⁴.

En nuestro caso la transformación $w = u + iv = \cosh^{-1}(z/a)$ viene de coordenadas elípticas, por lo tanto del apéndice A obtenemos que:

$$u = \cosh^{-1}\left(\frac{A}{a}\right), \dots\dots\dots(B. 2)$$

Donde A es el semieje mayor de las elipses confocales y a es el foco de éstas.

Y,

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{V}{a}\right), \dots\dots\dots(B. 3)$$

Donde V es el vértice de la familia de hipérbolas y a es el foco de las mismas.

Analizando la ecuación (B. 2),

Si $A = a$, entonces $u = \cosh^{-1}(1) = 0$,

Para $A > a$, entonces $u = \cosh^{-1}(>1)$, por lo que $u > 0$

Si $A = R_c$, entonces $u_c = \cosh^{-1}\left(\frac{R_c}{a}\right)$, donde $R_c =$ Radio de drene

Analizando la ecuación (B. 3),

Si $V = a$, entonces $v = \cos^{-1}(1) = 0$, y

Si $V = 0$, entonces $v = \cos^{-1}(0) = 90^\circ = \pi/2$,

Las consideraciones anteriores nos dan la transformación mostrada en la siguiente figura.

$$W_2 = \cosh^{-1} \left(\frac{Z_2}{x_f} \right)$$

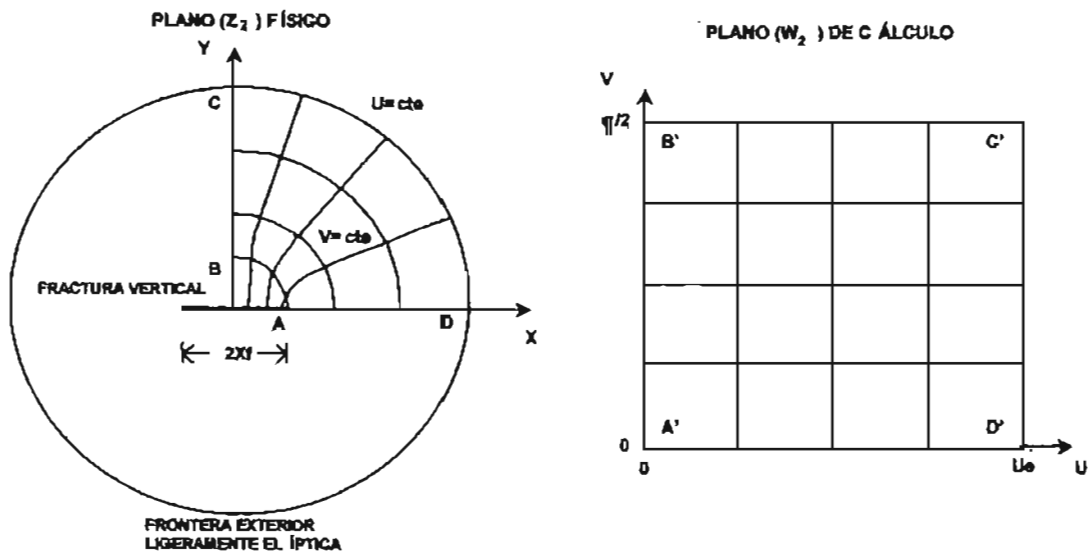


Figura B.1 Mapeo Conformal

APÉNDICE C

Organización del modelo de cómputo

Se pretende explicar aquí en forma global la estructura y el desarrollo del programa de cómputo del modelo bidimensional elíptico desarrollado.

El programa tiene la capacidad de que tan solo cambiando una instrucción, se pueden hacer corridas para analizar exclusivamente el medio poroso, ignorando o despreciando los efectos de la tubería y de esta manera se puede validar empleando las soluciones existentes en la literatura; mientras que por otro lado se pueden acoplar los efectos de la tubería, con los fenómenos del yacimiento y estudiar el comportamiento global del sistema tubería-yacimiento, el cual es el objetivo de este trabajo.

En la primera parte del programa principal, se verifica la lectura de datos y se genera un arreglo de presión-potencial-difusividad adimensional, comprendido entre cero y la presión inicial del yacimiento a la temperatura del mismo (se considera flujo isotérmico en el medio poroso). Para lograr esto último se lleva a cabo una integración numérica del potencial del gas real, en la que el valor de z se calcula mediante la ecuación de Estado de Redlich-Kwong (EERK). La viscosidad del gas se calcula a través de la correlación de Lee y cols, mientras que la compresibilidad del gas se calcula como $c = 1/p - (1/z)(\partial z/\partial p)$ donde la derivada $\partial z/\partial p$ es evaluada analíticamente de la EERK.

La solución del sistema matricial se lleva a cabo mediante las subrutinas de Sparse y NSPIV, y la solución en cada nivel de iteración se calcula en términos de $p_{pD}(p)$. La tolerancia utilizada para la convergencia de la solución fue de $10E-4$.

En la dirección u se utilizó diferente número de nodos para discretizar el espacio poroso, esto en función de la longitud de fractura o bien del radio de drene, mientras que en la

dirección v se usó un número fijo de nodos. La forma en que se realizó fue la sugerida por Bennett.

Los pasos de tiempo utilizados fueron constantes de nueve por cada ciclo logarítmico.

La solución del esquema global, se encuentra condicionada a tener presión superficial constante sin embargo, puede tratarse como una función del tiempo, si es que se desea simular el comportamiento del sistema bajo compresión.

La tubería vertical fue subdividida verticalmente con espaciamiento no uniformes; es decir, se condicionó a tener el mismo número de nodos entre cada uno de los estratos.

Fue necesario un nodo imagen en el fondo, para establecer la condición de cierre en su parte inferior. El número de nodos en la tubería es $5N + 1$, donde N representa en número de capas en explotación, aunque puede modificarse para usar el número de nodos que se quiera.

El programa se corrió en Fortran 95.

APÉNDICE D

Listado del programa de computo

```

| PWHF  PRESION EN LA SUPERFICIE FLUYENDO. (lb/pg2)
| PWH5  PRESION EN LA SUPERFICIE CERRADO, (lb/pg2)
| TIM   TIEMPO LIMITE DE PREDICCIÓN, DIAS
| GG    GRADIENTE GEOTERMICO GR/P
| PC    PRESION CRITICA PSIA
| TC    TEMPERATURA CRITICA GR
| EPSI  RECIPROCO DE LA RUGOSIDAD RELATIVA ADIMENSIONAL
| SG    DENSIDAD RELATIVA DEL GAS
| NYAC  NUMERO DE YACIMIENTOS
| M     NUMERO DE PUNTOS ARREGLO PSEUDOPRESION-PRESION
| NX    NUMERO DE NODOS EN LA DIRECCION U
| NY    NUMERO DE NODOS EN LA DIRECCION V
| IMP   VARIABLE DE CONTROL IMP= 0 METODO SEMIIMPLICITO
|       IMP= 1 METODO IMPLICITO
| PRO(I) PROFUNDIDAD C/U YACIMIENTOS P
| PI(I)  PRESION INICIAL C/U YACIMIENTOS PSIA
| SW(I)  SATURACION DE AGUA C/U YACIMIENTOS, PSIA
| PER(I) PERMEABILIDADES MD
| PHI(I) POROSIDADES
| H(I)   ESPEORES P
| RW(I)  RADIOS FRETE C/U YACIMIENTOS P
| RE(I)  RADIO EXTERIOR P
| PL(I)  PRESION EN ARREGLO SPLINE PSIA
| AML(I) PSEUDOPRESION EN ARREGLO SPLINE MMPSIA2/CP
| Q(K)   GASTOS SCF/D
| PWF(K) PRESION EN LOS NODOS DE TUBERIA PSIA
| AMD(I,J,K) PSEUDO PRESION ADIMENSIONAL I=NO.YAC. , J,K=NODO YAC.
| VAR    VARIABLE PARA CONTROLAR INCREMENTOS DE TIEMPO VAR=1.
| DINT   DIAMETRO INTERIOR TUBERIA DE PRODUCCION * PG *
| LCPV   NO DATOS DE CONTRAPRESION ADICIONALES AL INICIAL
|       SI LCPV = 0 CONTRAPRESION CONSTANTE IGUAL A INICIAL
| LAJ    VARIABLE DE CONTROL SI LAJ= 1, IMPRIME GASTOS, TIEMPOS
|       Y PRODUCCION ACUMULADA CON LA INFORMACION EMPLEADA
|       SI LAJ= 0 IMPRIME DISTRIBUCIONES Y PERFILES DE PRESION
| DELT   INCREMENTO EN LOS PASOS DE TIEMPO DURANTE LA SIMULACION.
|       SE ELIGE ESTA OPCION CUANDO SE QUIEREN PASOS DE TIEMPO
|       UNIFORMES. ( VAR = 0 )

```

program twodimension

```

DOUBLE PRECISION TI
CHARACTER*12 ARCH
CHARACTER*1 FFF,LF
CHARACTER TIT*40
PARAMETER(MP=20, L1=5, NY=500, NN=500)
DIMENSION PRO(L1), PI(L1), PER(L1), PHI(L1), H(L1), RW(L1), &
RE(L1), VI(L1), CGI(L1), DXD(L1), AMI(L1), TDA(L1), QD(L1), &
QP(L1), QPA(L1), QPY(L1), Q(L1), SW(L1), TY(L1), NXN(L1), &
TD(L1), OI(L1), GP(500), TPO(500), QGW(500)
DIMENSION AML(MP), PL(MP), BB(MP), CC(MP), DD(MP), BTI(MP), CTI(MP), DTI(MP)
DIMENSION PLBD(L1,MP), AMLBD(L1,MP), BBD(L1,MP), CBD(L1,MP), &
DBD(L1,MP), BTIBD(L1,MP), CTIBD(L1,MP), DTIBD(L1,MP)
DIMENSION XD(L1, NN, NY), AMD(L1, NN, NY), ALFA(L1, NN, NY), YD(L1, NN, NY), &
P(L1, NN, NY), RADIO(L1, NN)
DIMENSION FRA(L1), DYD(L1), DX(L1, NN, NY), DXX(NN, NY)

```



```

DIMENSION AA(NN), BA(NN), DA(NN), W(NN), G(NN), AMDA(NN)
DIMENSION PROF(26), T(26), ZP(26), PWS(26), ZWS(26), VWS(26), &
PWF(26), ZWF(26), VWF(26), Q(26), FFM(26), PWFA(26), &
DI(26), CPVA(500), TCPVA(500), QPN(500), GPP(500), &
QPNY(500), GPY(500), ACP(500), BCP(500), CCP(500), &
P1C(500), TD1(L1,500), QDI(L1,500)

```

integer los

==== PARA SPARSE

```

PARAMETER (NX=500,NR=NX,NZ=NY,MX=500,MY=500,N=NX*NY,MAX=NX**2*NY,MA=5*N,&
MXYD=N,MRT=MAX+N,MXYDP=N+1,MIT=2*N+MAX+2,MIP=NX+NY-1)
Dimension FF(MX,MY),DEI(MX,MY),DEM(X,MX,MY),DEPX(MX,MY),DEMY(MX,MY),DEPY(MX,MY)
Dimension A1(MA),B1(MXYD),X1(MXYD),R1(MXYD),C1(MXYD),RTEMP(MRT),DX1(MX,MY)
INTEGER IC(MXYD),NC(MXYD),IA(MXYDP),JA(MA),ITEMP(MIT)
INTEGER IND(MX,MY),IPLANE(MIP)
Dimension C(MX,MY),CF(MX,MY),F(MX,MY),B(MX,MY),A(MX,MY),A2(MX,MY),E(MX,MY)
COMMON /DIMAX/ MX1, MY1
COMMON /SSPAR/ MA1, MXYD1, MXYDP1, MRT1, MIT1, MIP1, MAX1

```

```

MX1 = MX
MY1 = MY
MA1 = MA
MXYD1 = MXYD
MXYDP1 = MXYDP
MRT1 = MRT
MIT1 = MIT
MIP1 = MIP
MAX1 = MAX
NPASS = 0

```

```

1 FORMAT(8F10.4)
2 FORMAT(6I5)
3 FORMAT(10X,'YACIMIENTO',2X,I2,7X,F12.1)
4 FORMAT(10X,I5,2F12.2,E16.6)
5 FORMAT(10X,I5,6(E16.6))
55 FORMAT(8X, I3,1X,I3, 4X,F9.3,F9.3,4X, F10.1)
6 FORMAT(10X,'TIEMPO',3X, F8.3,2X,'DIAS',/,)
7 FORMAT(10X,'COMPORTAMIENTO EN LA TUBERIA',/, 13X,'NODO',6X,'PROF. 5X,'PRESION',11X,'GASTO')
8 FORMAT(10X,'COMPORTAMIENTO EN YACIMIENTOS',/,)
1227 FORMAT(10X,'NODOS',10X, 'DIST. (FT)', 10X, 'PRESION'&
/,10X,'U',3X,'V',10X,'U',7X,'V',11X,'(PSIA)')
9 FORMAT (20A4)
FFF = CHAR(12)
LF = CHAR(10)
777 FORMAT(A12)
778 FORMAT(10X, A40)

```

```

OPEN(3,FILE='c:\dat57f7slm.dat',STATUS='OLD',IOSTAT=ios)
READ(3,*,iosat=ios)PWHF,PWHS,TIM,GG,EPSI,SG,VAR,DELT
write(*,*)ios
READ(3,*,iosat=ios)NYAC, M, IMP, LCPV, LAJ
DO 3000 I=1,200
GPY(I) = 0.0
QPNY(I) = 0.0
3000 CONTINUE
530 READ(3,'(a40)',IOSTAT=IOS,END=1000)TIT
write(*,*)IOS,' titulo=',TIT,' '
write(*,*)'....'
DO 3001 I = 1, NYAC
3001 READ(3,*) PRO(I),PI(I),SW(I), PER(I),PHI(I),H(I),RW(I),RE(I),FRA(I)
READ(3,*) DIINT

```

```

IF(LCPV.GE.1)THEN
DO 531 I = 1, LCPV
  READ (3,*) TCPVA(I), CPVA(I)
531 CONTINUE
  CALL SPLINE(LCPV, TCPVA, CPVA, ACP,BGP,CCP)
ENDIF


---


OPEN(5,FILE="C:\salidagas5.dat",STATUS="REPLACE")
1331 WRITE(5,1333)
DO 1332 I=1,NYAC
1332 TY(I) = GG * PRO(I) + 60.0

1333 FORMAT(////,10X,'M A Z',//,10X,'SIMULACION DE LA FRACTURA',//)
  WRITE (5,13) TIT
  13 FORMAT(//,5X,A40)
  WRITE (5,1200)PWHF,PWHS,TIM,GG,EPSI,SG,VAR,DELTA
1200 FORMAT(10X,'PRESION FLUYENDO EN SUPERFICIE',11X,'=',F12.6,' PSIA' / &
10X,'PRESION CERRADO EN SUPERFICIE', 12X,'=',F12.6,' PSIA' / &
10X,'TIEMPO LIMITE DE PREDICCION', 14X,'=',F12.6,' DIAS' / &
10X,'GRADIENTE GEOTERMICO', 21X,'=',F12.6,' GR/PIE' / &
10X,'RECIPROCO RUGOSIDAD RELATIVA ADIMENSIONAL ',F12.6, / &
10X,'DENSIDAD RELATVA DEL GAS', 16X,'=',F12.6, / &
10X,'INCREMENTO EXPONENCIAL PASOS DE TIEMPO',3X,'=',F12.6, / &
10X,'INCREMENTO CONSTANTE DE PASOS DE TIEMPO',2X,'=',F12.6, /)

1210 FORMAT(10X,'NUMERO DE YACIMIENTOS', 20X, ' ',15/ &
10X,'NUMERO DE PUNTOS ARREGLO M(P) VS P', 7X,' ',15/ &
10X,'NUMERO DE NODOS DIRECCION Y(V)', 11X,' ',15/ &
10X,'NUMERO DE NODOS DIRECCION X(U)', 11X,' ',15/ &
10X,'METODO DE SOLUCION', 23X, ' ',15 / &
' (0=SEMIMPLICIT,1=IMPLICIT)/ &
10X,'NUMERO DE CONTRAPRESIONES', 16X, ' ',15 / &
' (0=PWH CONSTANTE,1=PWH VARIABLE)/ &
10X,'IMPRESION DE RESULTADOS', 18X, ' ',15 / &
' (1=SALIDA SIMPLE,0=SALIDA DETALLADA)/)

1219 FORMAT(10X,'NIVEL CONTRAPRESION (PSIA)', /)
1220 FORMAT(10X,15,2X,F15.6)
1230 FORMAT(10X,'YACIMIENTO',12X, 5(15, 8X))
1228 FORMAT(10X,'')
1228 FORMAT(10X,'')
1225 FORMAT(21X,'',5X,'',5X, '-',5X,'-',5X,'-',5X,'-')
1231 FORMAT(10X,'PROFUNDIDAD(FT) ', 5(F10.3,3X))
1232 FORMAT(10X,'PRESION INICIAL(PSIA)', 5(F10.3,3X))
1233 FORMAT(10X,'PERMEABILIDAD(MD) ', 5(F10.3,3X))
1229 FORMAT(10X,'SATURACION AGUA(FRAC)', 5(F10.3,3X))
1234 FORMAT(10X,'POROSIDAD(FRAC) ', 5(F10.3,3X))
1235 FORMAT(10X,'ESPESOR NETO(FT) ', 5(F10.3,3X))
1236 FORMAT(10X,'RADIO POZO(FT) ', 5(F10.3,3X))
1237 FORMAT(10X,'RADIO DRENE(FT) ', 5(F10.3,3X))
1238 FORMAT(10X,'DIAMETRO TP(IN) ', F10.3)
1239 FORMAT(10X,'TEMPERATURA YAC.(GF)', 5(F10.3,3X))
1242 FORMAT(10X,'FRACTURA YAC.(FT) ', 5(F10.3,3X))

14 WRITE(5,1230)(I, I = 1, NYAC)
  WRITE(5,1228)
  WRITE(5,1242)(FRA(I), I = 1, NYAC)
  WRITE(5,1231)(PRO(I), I = 1, NYAC)
  WRITE(5,1232)(PI(I), I = 1, NYAC)
  WRITE(5,1239)(TY(I), I = 1, NYAC)

```

```

WRITE(5,1233)(PER(I), I = 1, NYAC)
WRITE(5,1229)(SW(I), I = 1, NYAC)
WRITE(5,1234)(PHI(I), I = 1, NYAC)
WRITE(5,1235)(H(I), I = 1, NYAC)
WRITE(5,1236)(RW(I), I = 1, NYAC)
WRITE(5,1237)(RE(I), I = 1, NYAC)
WRITE(5,1238) DINT

```

```

DO 12 I=1,NYAC
12 PHI(I) = (1.0 -SW(I))*PHI(I)

```

```

GPGA = 0.0
PC=739.30434 -152.91591*SG+88.90295*SG**2
TC=268.01896+75.90413*SG+135.09103*SG**2
Z=1.0

```

```

IF(PI(1).EQ.0.) GO TO 1000

```

```

DO 1010 I=1,NYAC
  DEIN =PI(I)/(M-1)
  PL(1) =0.
  AML(1) = 0.
  DM = 0.0
  ARG= 0.0
  TE = GG * PRO(I)+520.
  DO 1012 J=2 ,M
    PL(J) = (J-1)*DEIN
    PEZ = PL(J)
    Z= RKW(Z,PEZ,TE,PC,TC)
    V= BEE( PEZ,TE,SG, Z)
    ARG= ARG

```

```

!   CALCULO DE LA SEUDOPRESION AML(J)
  ARG = 2.*PEZ/(Z*V)
  DM =(ARGA +ARG)*DEIN/Z + DM
1012  AML(J) = DM/1.**6
  CALL SPLINE(M,PL,AML,BB,CC,DD)
  CALL SPLINE(M,AML,PL,BTI,CTI,DTI)

```

```

!   CALCULO DEL VOLUMEN ORIGINAL DE C/U DE LOS YACS (VOLUMETRICO)
  FACVO=0.02827*Z*TE/PI(I)
  O(I)=3.1416*RE(I)**2*H(I)*PHI(I)/(1000000.*FACVO)
  OI(I) = O(I)/35.314

```

```

DO 1011 J=1,M
  PLBD(I,J)=PL(J)
  AMLBD(I,J)=AML(J)
  BBD(I,J)=BB(J)
  CBD(I,J)=CC(J)
  DBD(I,J)=DD(J)
  BTIBD(I,J)=BTI(J)
  CTIBD(I,J)=CTI(J)
1011  DTIBD(I,J)=DTI(J)
1010 CONTINUE

```

```

!   IMPRIME LOS VALORES DEL VOLUMEN ORIGINAL DE TODOS LOS YACIMIENTOS
  WRITE(5, 1240) (O(I), I = 1, NYAC)
  WRITE(5, 1241) (OI(I), I = 1, NYAC)
1240 FORMAT(10X,VOLUMEN ORIG.(MMSCF) , 5(F10.3, 3X))
1241 FORMAT(10X,VOLUMEN ORIG.(MMSCM) , 5(F10.3, 3X),/)

```

```

! CALCULA MALLA PARA C/U DE LOS YACIMIENTOS

```

```

DO 20 I=1,NYAC
  RDM= RE(I)/FRA(I)
  UN=LOG(RDM+SQRT((RDM)**2-1.))
  UB=1.2
  U=UB/UN
  NXB=31
  NYB=31
  DXD(I)= (UN*U)/(NXB)
  NXN(I)=AINT((UN-UB)/DXD(I)+NXB)
  RDM1= SINH(UN*U)
  DYD(I)=LOG(RDM1+SQRT((RDM1)**2-1.))/(NYB)
20  NYN= NYB

```

! ESTABLECE CONDICIONES INICIALES C/U YACIMIENTOS

```

DO 60 I=1,NYAC
  QPA(I)=0.0
  DO 60 K=1,NYN
  DO 60 J=1,NXN(I)
    XD(I,J,K)=DXD(I)*(J)
    YD(I,J,K)=DYD(I)*(K)
    AMD(I,J,K)=1.0
    ALFA(I,J,K)=1.0
60  DX(I,J,K)=1.0

```

```

DO 70 I=1,NYAC
  S=PI(I)

```

! INTERPOLACION POLINOMIO PSEUDOPRESION FUNCION PRESION

```

DO 1020 J=1,M
  BB(J)=BBD(I,J)
  CC(J)=CBD(I,J)
  DD(J)=DBD(I,J)
  PL(J)=PLBD(I,J)
1020  AML(J)=AMLBD(I,J)
  AMI(I)=SEVAL(M,S,PL,AML,BB,CC,DD)
70  CONTINUE

```

! CALCULA POSICION DE LOS NODOS EN LA TUBERIA

```

K=1
DO 80 I=1,NYAC
  IF(I.LE.1)GO TO 90
  A1A=PRO(I-1)
  GO TO 100
90  A1A=0.0
100  B1B=(PRO(I)-A1A)/5.
  DO 110 J=1,5
    PROF(K)=A1A+J*B1B
110  K=K+1
80  CONTINUE
  PROF(K)=A1A+6.*B1B
  NNT=5*NYAC+1

```

! ESTABLECE CONDICIONES INICIALES EN LA TUBERIA, [PWS(K) Y PWF(K) Z Y V PARA C/NODO]

```

DO 160 J=1,2
  IF(J-1)130,130,140
130  PWH=PWHS
  GO TO 150
140  PWH=PWHF
150  PWHN=PWH
  DO 160 K=1, NNT
    T(K)=520.+GG*PROF(K)

```

TE=T(K)

I CALCULA FACTOR DE DESVIACION ECUACION DE REDLICH-KWONG

Z= RKW(Z,PWHN,TE,PC,TC)

I CALCULA VISCOSIDAD CORRELACION DE LEE

```
V=BEE(PWHN,TE,SG,Z)
ZP(K)=Z
SUMZ=0.0
SUMT=0.0
DO 170 I=1,K
    SUMZ=SUMZ+ZP(I)
170    SUMT=SUMT+ T(I)
    ZAV=SUMZ/K
    TAV=SUMT/K
    PWHN=PWH*EXP(0.01875*SG*PROF(K)/(ZAV*TAV))
    IF(J-1)180,180,180
180    PWS(K)=PWHN
    ZWS(K)=ZP(K)
    VWS(K)=V
    GO TO 160
190    PWF(K)=PWHN
    ZWF(K)=ZP(K)
    VWF(K)=V
160 CONTINUE
```

TIA=0.0
TI= 0.007240425
L=0
LL=0

I VISCOSIDAD Y COMPRESIBILIDAD INICIALES C/U YACIMIENTOS

```
DO 200 I=1,NYAC
    TDA(I)=0.0
    PY=PI(I)
    TE=T(5*I)
    Z= RKW(Z,PY,TE,PC,TC)
    V=BEE(PY,TE,SG,Z)
    VI(I)=V
    CG=COM(PY,TE,PC,TC,Z)
200 CGI(I)=CG
```

I MODELO EN DIFERENCIAS FINITAS

I DISTRIBUCION DE PSEUDOPRESION ADIMENSIONAL C/U YACIMIENTOS

```
480 DO 210 I=1,NYAC
    TD(I)=.006328*PER(I)*TV/(PH(I)*VI(I)*CGI(I)*FRA(I)**2)
    TD1(I,L+1)=TD(I)
    DETI=TD(I)-TDA(I)
```

I PSEUDOPRESION ADIMENSIONAL EN LA FRONTERA INTERNA

```
PF=PWF(5*I)
DO 1030 J=1,M
    BB(J)=BBD(I,J)
    CC(J)=CBD(I,J)
    DD(J)=DBD(I,J)
    PL(J)=PLBD(I,J)
```

```

1030 AML(J)=AMLBD(I,J)
      AMF=SEVAL(M,PF,PL,AML,BB,CC,DD)
      AMDF=AMF/AMI(I)

```

I GENERA COEFICIENTES 'F','C','A','B','E'

```

715  DO J = 2,NYN-1
      DO K = 2,NXN(I)-1

```

```

      CF(K, 1)=0.
      C(K, 1) =1./DXD(I)**2
      B(K, 1) =1./DXD(I)**2
      E(K, 1) =2./DYD(I)**2

```

```

      CF(K, J)=1./DYD(I)**2
      C(K, J) =1./DXD(I)**2
      B(K, J) =1./DXD(I)**2
      E(K, J) =1./DYD(I)**2

```

```

      CF(NXN(I), J)=1./DYD(I)**2
      C(NXN(I), J) =2./DXD(I)**2
      B(NXN(I), J) =0.
      E(NXN(I), J) =1./DYD(I)**2

```

```

      CF(K, NYN)=2./DYD(I)**2
      C(K, NYN) =1./DXD(I)**2
      B(K, NYN) =1./DXD(I)**2
      E(K, NYN) =0.

```

```

      END DO
    END DO

```

```

      CF(1, 1)=0.
      C(1, 1) = 0.
      B(1, 1) =1./DXD(I)**2
      E(1, 1) =2./DYD(I)**2

```

```

    DO J = 2,NYN-1
      CF(1, J)= 1./DYD(I)**2
      C(1, J) = 0.
      B(1, J) =1./DXD(I)**2
      E(1, J) =1./DYD(I)**2
    END DO

```

```

      CF(NXN(I), 1)=0.
      C(NXN(I), 1) =2./DXD(I)**2
      B(NXN(I), 1) =0.
      E(NXN(I), 1) =2./DYD(I)**2

```

```

      CF(1, NYN) =2./DYD(I)**2
      C(1, NYN) =0.
      B(1, NYN) =1./DXD(I)**2
      E(1, NYN) =0

```

```

      CF(NXN(I), NYN)=2./DYD(I)**2
      C(NXN(I), NYN) =2./DXD(I)**2
      B(NXN(I), NYN) =0.
      E(NXN(I), NYN) =0.

```

```

    DO J = 1,NYN
      DO K = 1,NXN(I)
        A(K,J)={-2./DXD(I)**2+((SINH(XD(I,K,J)))**2+(SIN(YD(I,K,J)))**2)*(ALFA(I,K,J))/DETI+ 2./DYD(I)**2)

```

```

      A2(K,J)= ((SINH(XD(I,K,J)))**2+(SIN(YD(I,K,J)))**2)*ALFA(I,K,J)/DETI
    END DO
  END DO

```

! FUNCION DE RESIDUOS

```

      DO J = 1,NYN
        F(1,J)= -AMDF/DXD(I)**2-A2(1,J)*AMD(I,1,J)
      END DO
719   DO J = 1,NYN
        DO K = 2,NXN(I)
          F(K,J)= -A2(K,J)*AMD(I,K,J)
        END DO
      END DO

```

```

      DO J = 1,NYN
        DO K = 1,NXN(I)
720   DEMX(K, J) = C(K, J)
        DEMY(K, J) = CF(K, J)
        DEPX(K, J) = B(K, J)
        DEPY(K, J) = E(K, J)
        DEI(K, J) = A(K, J)
        FF(K, J) = F(K, J)
      END DO
    END DO

```

```

      DO 745 J=1,NYN
        DO 745 K=1,NXN(I)
          DXX(K,J)=DX(I,K,J)
745   CONTINUE

```

Call

SPARSE(NXN,NYN,FF,DEI,DEMX,DEPX,DEMY,DEPY,A1,B1,X1,RTEMP,ITEMP,IA,JA,R1,C1,IC,NC,IND,IPLANE,D
X1,NPASS)

```

      DO 746 J=1,NYN
        DO 746 K=1,NXN(I)
          DX(I,K,J)=DX1(K,J)
746   CONTINUE

```

IF(IMP.EQ.0) GO TO 776

! CRITERIO DE CONVERGENCIA PARA RECALCULAR COEFICIENTES MATRIZ

```

      TOLER =0.00001
      DO 750 J=1,NYN
        DO 750 K=1,NXN(I)
          VAL1 =ABS(DX(I,K,J)-DXX(K,J))
          IF(VAL1-TOLER)750,776,776
750   CONTINUE

```

GO TO 780

! RECALCULA VARIABLE DE DIFUSION ADIM. FUNCION DE PRESION

```

776   DO 1040 K=1, M
        BTI(K)=BTIBD(I,K)
        CTI(K)=CTIBD(I,K)
        DTI(K)=DTIBD(I,K)
        PL(K)=PLBD(I,K)
1040   AML(K)=AMLBD(I,K)

```

```

DO 360 J=1, NXN(I)
DO 360 K=1, NYN
S = DX(I,J,K)* AMI(I)
P(I,J,K)=SEVAL(M,S,AML,PL,BTI,CTI,DTI)
S=P(I,J,K)
TE=T(5*I)
Z= RKW(Z,S,TE,PC,TC)
V=BEE(S,TE,SG,Z)
CG=COM(S,TE,PC,TC,Z)
360 ALFA(I,J,K)=V*CG/(VI(I)*CGI(I))
IF(IMP.GT.0) GO TO 715

```

! CALCULA EL GASTO ADIMENSIONAL

```
780 Z1= (2.0/3.1416)*(DYD(I)/DXD(I))
```

! 13VO ORDEN 11 PUNTOS

```

SUMA1= 18067.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,1)-DX(I,2,1))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,11)-DX(I,2,11))) &
+106300.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,2)-DX(I,2,2))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,10)-DX(I,2,10))) &
-48525.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,3)-DX(I,2,3))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,9)-DX(I,2,9))) &
+272400.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,4)-DX(I,2,4))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,8)-DX(I,2,8))) &
-260550.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,5)-DX(I,2,5))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,7)-DX(I,2,7))) &
+427368.*(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,6)-DX(I,2,6))

```

```

SUMA2= 18067.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,11)-DX(I,2,11))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,21)-DX(I,2,21))) &
+106300.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,12)-DX(I,2,12))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,20)-DX(I,2,20))) &
-48525.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,13)-DX(I,2,13))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,19)-DX(I,2,19))) &
+272400.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,14)-DX(I,2,14))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,18)-DX(I,2,18))) &
-260550.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,15)-DX(I,2,15))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,17)-DX(I,2,17))) &
+427368.*(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,16)-DX(I,2,16))

```

```

SUMA3= 18067.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,21)-DX(I,2,21))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,31)-DX(I,2,31))) &
+106300.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,22)-DX(I,2,22))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,30)-DX(I,2,30))) &
-48525.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,23)-DX(I,2,23))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,29)-DX(I,2,29))) &
+272400.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,24)-DX(I,2,24))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,28)-DX(I,2,28))) &
-260550.*((-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,25)-DX(I,2,25))+(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,27)-DX(I,2,27))) &
+427368.*(-3.*(AMDF)+4.*DX(I,1,28)-DX(I,2,28))

```

```
SUMA=SUMA1+SUMA2 +SUMA3
```

```
QD(I)=Z1*SUMA*(5./299376.)
```

! CALCULO DEL GASTO EN CADA YACIMIENTO

```

DO 3600 J=1,NXN(I)
DO 3600 K=1, NYN
S = DX(I,J,K)* AMI(I)
3600 P(I,J,K) = SEVAL(M,S,AML,PL,BTI,CTI,DTI)
QPA(I) = QP(I)
QPY(I) = QD(I)*PER(I)*H(I)*(AMI(I)-AMF)*1.**6/(1.42288*T(5*I))

```

```
QP(I) = QPA(I) + 0.5*(QPY(I)- QPA(I))
```

```

QDI(I,L+1) = (1.-AMDF)/QD(I)
CALL SPLINE(M,PL,AML,BB,CC,DD)

```

210 CONTINUE

! APLICA ECUACION DE CONTINUIDAD EN TUBERIA, GASTO EN C/U NODOS


```

| GOTO 475
  KEN=NYAC+1
  NP1=NNT-1
  KAN=5
  Q(NNT)=0.0
  DI(NNT) = 24.* RW(NYAC)
  FFM(NNT)= 0.0
  DO 380 I=1,NP1
    K=NP1-I+1
    IF(KAN-5)390,400,400
390  QE=0.0
    KAN=KAN+1
    GO TO 410
400  K1=K/5
    QE=QP(K1)
    KAN=1
    KEN=KEN-1
410  DI(K) = DINT
    Q(K)=QE+Q(K+1)+.193*DI(K)**2*(PROF(K+1)-PROF(K))/(T(K)*(TI-TIA)) &
      *(PWF(K)/ZWF(K)-PWS(K)/ZWS(K))

| CALCULA EL NUMERO DE REYNOLDS

  REN=ABS(.0201*Q(K)*SG/(DI(K)*VWF(K)))

| CALCULA EL FACTOR DE FRICCION DE MOODY CORRELACION COLEBROOK

  FF1=BOODY(EPSI,REN)
  IF(Q(K))380,411,411
411  FF1=FF1

| CONVIERTE EL FACTOR DE FANNING A MOODY

380 FFM(K)= 4.* FF1

| APLICA ECUACION DE CONSERVACION DE ENERGIA' R.V. SMITH, PRESION C/U N.

  DO 420 K=1,NNT
    IF(K-1)430,430,440
430  X=PROF(K)
    P1=PWHF
    IF(LCPV.GE.1.AND.LGT.0 ) P1=SEVAL(LCPV, TI, TCPVA, CPVA, ACP, BCP, CCP)
    GO TO 450
440  X=PROF(K)-PROF(K-1)
    P1=PWF(K-1)
450  PWFA(K)=PWF(K)
    S=.0375*SG*X/(T(K)*ZWF(K))
    PWF(K)= (Q(K)**2*SG*T(K)*ZWF(K)*FFM(K)*X*(EXP(S)-1.)/( .04* &
      DI(K)**5*S**10.**12)+P1**2*EXP(S))**.5
    PWH=PWF(K)
    TE=T(K)
    Z= RKW(Z,PWH,TE,PC,TC)
    V=BEE(PWH,TE,SG,Z)
    ZWF(K)=Z
420 VWF(K)=V

| CRITERIO DE CONVERGENCIA SISTEMA TUBERIA-YACIMIENTOS
  CON=CON+1
  TOLER = 0.010
  DO 470 K=1,NNT
    VAL=ABS(PWF(K)-PWFA(K))
    IF(VAL-TOLER)470,480,480

```

470 CONTINUE

```
QGGG = 0.0
WRITE(5, 1228)
WRITE(5, 778) TIT
WRITE(5,6)TI
DO 490 I=1,NYAC
  TDA(I)=TD(I)
  QGGG = QGGG + QPY(I)
  GPGA = GPGA +(TI- TIA)* QPY(I)
490 CONTINUE
  WRITE(5,491) QGGG

P1=PWHF
IF(LCPV.GE.1) P1C(L+1) = SEVAL(LCPV,TI, TCPVA, CPVA ACP, BCP, CCP)
P1 = P1C(L+1)
WRITE(5,492) P1
491 FORMAT(10X, 'GASTO TOTAL SCF/D =', 2X, F12.1,/,)
492 FORMAT(10X, 'PRESION CABEZA =', 2X, F12.1, 2X,'PSIA')
DO 493 I = 1, NYAC
  WRITE (5,3)I,QPY(I)
493 CONTINUE
GP(L+1) = ABS(GPGA/10.**5)
QGWL(L+1) = QGGG
TPO(L+1) = TI
WRITE(5,7)
WRITE(5,1226)
DO 500 K=1,NNT
  WRITE(5,4)K,PROF(K),PWF(K),Q(K)
  PWS(K)=PWF(K)
  ZWS(K)=ZWF(K)
500 VWS(K)=VWF(K)
  WRITE(5, 1228)
  WRITE(5,8)
  WRITE(5,1227)
  WRITE(5,1228)

DO 520 I=1,NYAC
  WRITE(5,16) I
16 FORMAT(3X,/, "YACIMIENTO", 2X, I2,/,)
  DO 520 J=1, NXN(I)
    DO 520 K=1, NYN
      520 WRITE (5,55) J,K, XD(I,J,K), YD(I,J,K), P(I,J,K)

540 CONTINUE
GPGM = GPGA / 35.314E08
QPN(L+1) = ABS(QPY(1))
GPP(L+1) = ABS(GPGM)
PCPOZ = PWHF
IF(LCPV.GT.0.AND.LGT.0)PCPOZ = CPVA(L)

DO 550 I=1, NYAC
550 TDA(I) = TD(I)
DO 560 K=1, NNT
  PWS(K) = PWF(K)
  ZWS(K) = ZWF(K)
560 VWS(K) = VWF(K)
570 DO 510 I=1,NYAC
  DO 510 J=1,NXN(I)
    DO 510 K=1,NYN
```

```
510 AMD(I,J,K)=DX(I,J,K)
```

```
! INCREMENTA EL NIVEL DE TIEMPO
```

```
580 TIA=TI
```

```
    L=L+1
```

```
    LL=LL+1
```

```
    IF(VAR.GT.0.) TI=EXP(L*VAR)
```

```
    IF(VAR.EQ.0.) TI=TI+DELT
```

```
    IF((TI-TIM).GT.0.0)THEN
```

```
        DO 2000 I=1,L
```

```
            QPNY(I) = QPNY(I) + QPN(I)
```

```
            GPY(I) = GPY(I) + GPP(I)
```

```
2000    CONTINUE
```

```
        GO TO 1000
```

```
    ENDIF
```

```
    LA=LL+1
```

```
    IF (LA.LT.10) GOTO 480
```

```
    DELT=10*DELT
```

```
    LL=0
```

```
    GO TO 480
```

```
1000 WRITE(5, 1228)
```

```
    WRITE(5,600)
```

```
600 FORMAT(10X,'NIVEL',2X,'TIEMPO',5X,'GASTO',11X,'GP',10X,'TDXF',9X,'1/QD',10X,'TDXF',9X,'1/QD',12X &
```

```
    ,'TDXF',11X,'1/QD'
```

```
    1/,17X,'(DIAS)',5X,'(SCFD)',7X,'(MMSCF)')
```

```
    WRITE(5, 1228)
```

```
    IF(LCPV.EQ.0) THEN
```

```
        DO 601 I = 1, L
```

```
601    P1C(I) = PWHF
```

```
    ENDIF
```

```
    DO 3009 I = 1, L
```

```
        WRITE(5,15)I, TPO(I), QGW(I), GP(I), (TD1(K,I), QDI(K,I),K=1,NYAC)
```

```
3009 CONTINUE
```

```
    15 FORMAT (10X,I3,F8.2,8(E14.5))
```

```
    CLOSE(3)
```

```
    CLOSE(5)
```

```
    STOP
```

```
    END program twodimension
```

```
! CALCULA EL FACTOR DE DESVIACION MEDIANTE LA ECUACION DE REDLICH KWONG
```

```
    FUNCTION RKW(ZRK,P,T,PPC,PTC)
```

```
6    FORMAT(40X,'NO CONVERGE FACTOR DESVIACION')
```

```
    A=(0.4278/PPC)**0.6*(PTC/T)**1.25
```

```
    B=0.0887*PTC/(PPC*T)
```

```
    DO 50 I=1,40
```

```
!    EMPLEANDO EL METODO ITERATIVO DE NEWTON RAPHSON HASTA ETIQUETA 60
```

```
    F=1.0/(1.0-B*P/ZRK)-A**2*P/(ZRK*(1.0+B*P/ZRK))-ZRK
```

```

RKW=ZRK
TOLER=0.001
IF(ABS(F),LE.TOLER)GO TO 60
DERFZ=A**2*P/(ZRK**2*(1.0+B*P/ZRK)**2)-B*P/(ZRK**2*(1.0-B*P/ZRK)**2)-1.0
50 ZRK=ZRK-F/DERFZ
WRITE(6,6)
60 RETURN
END

```

| CALCULA EL FACTOR DE FRICCION MEDIANTE ECUACION DE COLEBROOK

```

FUNCTION BOODY(EPSI,RE)

7 FORMAT(10X,'NO CONVERGE BOODY')
L=1
FF=1./((4.*ALOG10(EPSI)+2.28)**2)
40 AF=4.*ALOG10(EPSI)+2.28-4.*ALOG10(1.+4.67*EPSI/(RE*FF**.5))-1./FF**.5
TOLER=0.001
IF(ABS(AF),LE.TOLER)GO TO 10
IF(L-40)20,20,30
20 APF=4.056362*EPSI/((1.+4.67*EPSI/(RE*FF**.5))*RE*FF**.5)+1./((2.*FF**.5)
FF=FF-AF/APF
L=L+1
GO TO 40
30 WRITE(5,7)
10 BOODY=FF
RETURN
END

```

| CALCULA COEFICIENTES DE POLINOMIOS CUBICOS LIBREMENTE APOYADOS

```

SUBROUTINE SPLINE(N,X,Y,B,C,D)

DIMENSION X(N),Y(N),B(N),C(N),D(N)
NM1=N-1
NM2=N-2
D(1)=X(2)-X(1)
C(2)=(Y(2)-Y(1))/D(1)
DO 10 I=2,NM1
D(I)=X(I+1)-X(I)
B(I)=2.*(D(I-1)+D(I))
C(I+1)=(Y(I+1)-Y(I))/D(I)
C(I)=C(I+1)-C(I)
10 CONTINUE
C(1)=0.
C(N)=0.
DO 20 I=3,NM1
T=D(I-1)/B(I-1)
B(I)=B(I)-T*D(I-1)
C(I)=C(I)-T*C(I-1)
20 CONTINUE
C(NM1)=C(NM1)/B(NM1)
DO 30 IB=2,NM2
I=N-IB
C(I)=(C(I)-D(I)*C(I+1))/B(I)
30 CONTINUE
B(N)=(Y(N)-Y(NM1))/D(NM1)+D(NM1)*C(NM1)
D(N)=0.

```

```

DO 40 I=1,NM1
B(I)=(Y(I+1)-Y(I))/D(I)-D(I)*(C(I+1)+2.*C(I))
D(I)=(C(I+1)-C(I))/D(I)
C(I)=3.*C(I)
40 CONTINUE
RETURN
END

```

! INTERPOLA CON POLINOMIOS CUBICOS LIBREMENTE APOYADOS

```

FUNCTION SEVAL(N,U,X,Y,B,C,D)

DIMENSION X(N),Y(N),B(N),C(N),D(N)
DATA K/1/
IF(K.GE.N)K=1
IF(U.GE.X(K).AND.U.LE.X(K+1)) GO TO 70
IF(U.GT.X(1)) GO TO 20
SEVAL=Y(1)+B(1)*(U-X(1))
RETURN
20 I=0
J=N+1
30 K=(I+J)/2
IF(U-X(K))40,50,60
40 J=K
GO TO 30
50 SEVAL=Y(K)
RETURN
60 I=K
IF(I.LT.J-1) GO TO 30
70 DX=U-X(K)
SEVAL=Y(K)+DX*(B(K)+DX*(C(K)+DX*D(K)))
RETURN
END

```

! CALCULA LA VISCOSIDAD DEL GAS CON LA CORRELACION DE LEE

```

FUNCTION BEE(P,T,SG,ZRK)

AMW=28.97*SG
X=3.5+986.0/T+0.01*AMW
Y=2.4-0.2*X
AK=(9.4+0.02*AMW)*T**1.5/(209.0+19.0*AMW+T)
ROG=0.0433*SG*P/(ZRK*T)
VIS=AK**2.718281**(X*ROG**Y)/10000.0
BEE=VIS
RETURN
END

```

! CALCULA LA COMPRESIBILIDAD MEDIANTE DERIVADA DE REDLICH KWONG

```

FUNCTION COM(P,T,PPC,PTC,ZRK)

A=(.4278/PPC)**.5*(PTC/T)**1.25
B=0.0867*PTC/(PPC*T)
DZRKP=ZRK/(P+(1.0-(B*P/ZRK)**2)**2)/((1.0+B*P/ZRK)**2 &
+B/ZRK**2-A**2*(1.0-B*P/ZRK)**2)/((1.0+B*P/ZRK)/ZRK**2 &

```

```

-B*P/(ZRK)**3)))
CG=1.0/P-DZRKP/ZRK
COM=CG
RETURN
END

```

SUBROUTINAS FRACTURA

SUBROUTINSPARSE(NXN, NYN, FF, DEI, DEMX, DEPX, DEMY, DEPY, A1, B1, X1, RTEMP, ITEMP, IA, JA, R1, C1, IC, NC, & IND, IPLANE, DX1, NPASS)

```

DIMENSION DEMX(MX,MY), DEPX(MX,MY), DEMY(MX,MY), DEPY(MX,MY)
DIMENSION DX1(MX,MY), FF(MX,MY), DEI(MX,MY)
DIMENSION B1(MXYD), X1(MXYD), RTEMP(MRT), A1(MA)
INTEGER IA(MXYDP), JA(MA), R1(MXYD), C1(MXYD), IC(MXYD)
INTEGER ITEMP(MIT), NC(MXYD), IND(MX,MY), IPLANE(MIP)
COMMON /DIMAX/ MX,MY
COMMON /SSPAR/ MA, MXYD, MXYDP, MRT, MIT, MIP, MAX

```

```

N = NXN * NYN
JB = NXN
If (NPASS .EQ. 1) GoTo 1

```

```

K = 0
DO J = 1, NYN
  DO I = 1, NXN
    K = K + 1
    KK = 1
    If (I .NE. 1) KK = KK + 1
    If (I .NE. NXN) KK = KK + 1
    If (J .NE. 1) KK = KK + 1
    If (J .NE. NYN) KK = KK + 1
    NC(K) = KK
  END DO
END DO

```

Call D4(NXN, NYN, IPLANE, IND)

```

IA(1) = 1
KK = 0
DO J = 1, NYN
  DO I = 1, NXN
    KK = KK + 1
    IA(KK + 1) = IA(KK) + NC(KK)
    KM = KK - JB
    KP = KK + JB
    KC1 = IA(KK)
    JA(KC1) = KK
    M = 1
    If (I .EQ. NXN) GoTo 315
    LM = M
    JA(KC1 + LM) = KK + LM
    M = M + 1
315   If (I .EQ. 1) GoTo 325
    LM = M
    JA(KC1 + LM) = KK - 1
    M = M + 1
325   If (J .EQ. 1) GoTo 335
    LM = M
    JA(KC1 + LM) = KM

```

```

      M = M + 1
335   If (J.EQ. NYN) GoTo 345
      LM = M
      JA(KC1 + LM) = KP
345   KOR = IND(I, J)
      R1(KOR) = KK
      C1(KOR) = KK
      IC(KK) = KOR
300   END DO
      END DO

1   KK = 0
      DO J = 1, NYN
          DO I = 1, NXN
              KK = KK + 1
              KM = KK - JB
              KP = KK + JB
              KC1 = IA(KK)
              A1(KC1) = DEI(I, J)
              M = 1
              If (I.EQ. NXN) GoTo 115
              LM = M
              A1(KC1 + LM) = DEPX(I, J)
              M = M + 1
115   If (I.EQ. 1) GoTo 125
              LM = M
              A1(KC1 + LM) = DEMX(I, J)
              M = M + 1
125   If (J.EQ. 1) GoTo 135
              LM = M
              A1(KC1 + LM) = DEMY(I, J)
              M = M + 1
135   If (J.EQ. NYN) GoTo 145
              LM = M
              A1(KC1 + LM) = DEPY(I, J)
145   B1(KK) = FF(I, J)
200   END DO
      END DO

      Call NSPIV(N, A1, B1, X1, R1, C1, IA, MAX, JA, IC, RTEMP, ITEMP, IERR)

      K = 0
      DO J = 1, NYN
          DO I = 1, NXN
              K = K + 1
              DX1(I, J) = X1(K)
400   END DO
      END DO

      NPASS = 1

```

End SUBROUTINE SPARSE

SUBROUTINE D4(NXN, NYN, IPLANE, IND)
 I ESTA SUBROUTINA PREPARA EL ORDEN DE ELIMINACION DE LAS
 I ECUACIONES EN LA SUBROUTINA NSPIV, CONFORME AL ALGORITMO
 I DE ORDENAMIENTO D4 DE PRICE Y COATS.

```

      INTEGER IPLANE(MIP), IND(MX, MY)
      COMMON /DIMAX/ MX, MY

```

```
COMMON /SSPAR/ MA,MXYD, MXYDP, MRT, MIT, MIP, MAX
```

```
N = NXN*NYN
IJSUM = NXN+NYN+1
I = 0
DO 10 J=3, IJSUM,2
  I = I+1
10  IPLANE(I) = J
  DO 20 J=4, IJSUM,2
    I = I+1
20  IPLANE(I) = J
    IN=0
    DO 30 L=1, IJSUM-2
      KI = MAX0(IPLANE(L)-NXN-1, 1)
      KF = MIN0(IPLANE(L)-2, NYN)
      IF (IPLANE(L)-NXN-1.GT.1) THEN
        KI=IPLANE(L)-NXN-1
      ELSE
        KI=1
      END IF
      IF (IPLANE(L)-2.LT.NYN) THEN
        KF=IPLANE(L)-2
      ELSE
        KF=NYN
      END IF

      DO 40 K=KI, KF
        I = IPLANE(L)-K-1
        IN = IN+1
        IND(I,K) = IN
40  IND(I,K) = IN
30  CONTINUE
    RETURN
```

```
End SUBROUTINE D4
```

```
SUBROUTINE NSPIV(N,A1,B1,X1,R1,C1,IA, MAX,JA,IC,RTEMP,ITEMP,IERR)
```

```
  DIMENSION A1(1),B1(1),X1(1),RTEMP(1)
  INTEGER IA(1),JA(1),R1(1),C1(1),IC(1),ITEMP(1)
  INTEGER IU,JU,U,Y,P
```

```
!  ESTA SUBRUTINA USA ELIMINACION GAUSSIANA DISPERSA CON
!  INTERCAMBIO DE COLUMNAS PARA RESOLVER UN SIST LINEAL
```

```
Y = 1
U = Y + N
P = 1
IU = P + N + 1
JU = IU + N + 1
```

```
Call NSPVI(N,A1,B1,X1,R1,C1,IA, MAX,&
  JA,IC,RTEMP(Y),ITEMP(P),ITEMP(IU),ITEMP(JU),RTEMP(U),IERR)
RETURN
```

```
End SUBROUTINE NSPIV
```

```
SUBROUTINE NSPVI(N,A1,B1,X1,R1,C1,IA, MAX,JA,IC,Y,P,IU,JU,U,IERR)
```



```

REAL*8 LKI
DIMENSION A1(1),B1(1),U(1),X1(1),Y(1)
INTEGER C1(1),IA(1),IC(1),IU(1),JA(1),JU(1),P(1),R1(1)
INTEGER CK,PK,PPK,PV,V,VI,VJ,VK

If (N.EQ. 0) GoTo 1001

ONE = 1.D0
ZERO = 0.D0
DO J = 1,N
  X1(J) = ZERO
END DO

IU(1) = 1
JUPTR = 0

DO K = 1,N
  P(N + 1) = N + 1
  VK = R1(K)
  JMIN = IA(VK)
  JMAX = IA(VK + 1) - 1

  If (JMIN.GT. JMAX) GoTo 1002
  J = JMAX
201  JAJ = JA(J)
  VJ = IC(JAJ)
  X1(VJ) = A1(J)

  PPK = N + 1
30  PK = PPK
  PPK = P(PK)

  If ((PPK - VJ).LT. 0) GoTo 30
  If ((PPK - VJ).EQ. 0) GoTo 1003
  If ((PPK - VJ).GT. 0) GoTo 41
41  P(VJ) = PPK
  P(PK) = VJ
  J = J - 1
  If (J.GE. JMIN) GoTo 201

  VI = N + 1
  YK = B1(VK)
50  VI = P(VI)
  If (VI.GE. K) GoTo 110
  LKI = -X1(VI)
  X1(VI) = ZERO
  YK = YK + LKI * Y(VI)
  PPK = VI
  JMIN = IU(VI)
  JMAX = IU(VI + 1) - 1
  If (JMIN.GT. JMAX) GoTo 50
  DO J = JMIN,JMAX
    JUJ = JU(J)
    VJ = IC(JUJ)
    If (X1(VJ) .NE. ZERO) GoTo 90
    If ((VJ - PPK).LT. 0) GoTo 60
    If ((VJ - PPK).EQ. 0) GoTo 90
    If ((VJ - PPK).GT. 0) GoTo 70
60  PPK = VI
70  PK = PPK
  PPK = P(PK)

```

```

      IF ((PPK - VJ) .LT. 0) GoTo 70
      IF ((PPK - VJ).EQ. 0) GoTo 80
      IF ((PPK - VJ).GT. 0) GoTo 80
80    P(VJ) = PPK
      P(PK) = VJ
      PPK = VJ
90    X1(VJ) = X1(VJ) + LK1 * U(J)
109  END DO
      GoTo 50
110  IF (VI .GT. N) GoTo 1004
      XPVMAX = Abs(X1(VI))
      MAXC = VI
      NZCNT = 0
      PV = VI
120  V = PV
      PV = P(PV)
      IF (PV .GT. N) GoTo 130
      NZCNT = NZCNT + 1
      XPV = Abs(X1(PV))
      IF (XPV .LE. XPVMAX) GoTo 120
      XPVMAX = XPV
      MAXC = PV
      MAXCL = V
      GoTo 120
130  IF (XPVMAX.EQ. ZERO) GoTo 1004
      IF (VI.EQ. K) GoTo 140
      IF (VI .EQ. MAXC) GoTo 140
      P(MAXCL) = P(MAXC)
      GoTo 150
140  VI = P(VI)
150  DK = ONE / X1(MAXC)
      X1(MAXC) = X1(K)
      I = C1(K)
      C1(K) = C1(MAXC)
      C1(MAXC) = I
      CK = C1(K)
      IC(CK) = K
      IC(I) = MAXC
      X1(K) = ZERO
      Y(K) = YK * DK
      IU(K + 1) = IU(K) + NZCNT
      IF (IU(K + 1) .GT. (MAX + 1)) GoTo 1005
      IF (VI .GT. N) GoTo 170
      J = VI
160  JUPTR = JUPTR + 1
      JU(JUPTR) = C1(J)
      U(JUPTR) = X1(J) * DK
      X1(J) = ZERO
      J = P(J)
      IF (J .LE. N) GoTo 160

170  END DO
      K = N
      DO I = 1,N
      YK = Y(K)

      JMIN = IU(K)
      JMAX = IU(K + 1) - 1
      IF (JMIN .GT. JMAX) GoTo 190

      DO J = JMIN,JMAX
      I J = J

```

```

      ! JU = JUJ
      JUJ = JU(J)
      JUJ = IC(JUJ)
      YK = YK - U(J) * Y(JUJ)
180  END DO
190  Y(K) = YK
      CK = C1(K)
      X1(CK) = YK
      K = K - 1
      END DO

      IERR = IU(N + 1) - IU(1)
      PRINT*, "IERR 0=", IERR
      RETURN
1001 IERR = 0
      PRINT*, "IERR 1 =", IERR
      RETURN
1002 IERR = -K
      PRINT*, "IERR 2=", IERR
      RETURN
1003 IERR = -(N + K)
      PRINT*, "IERR 3=", IERR
      RETURN
1004 IERR = -(2 * N + K)
      PRINT*, "IERR 4=", IERR
      RETURN
1005 IERR = -(3 * N + K)
      PRINT*, "IERR 5=", IERR
      RETURN

```

End SUBROUTINE NSPVI