UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

" DEMOSTRACIONES SIN PALABRAS "

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

ROSARIO SANTILLÁN BALTAZAR

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA

Abril 2005

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Demostraciones sin palabras".

realizado por Rosario Santillán Baltazar

con número de cuenta 090520664 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. José Antonio Gómez Ortega
Propietario	Mat. Julieta del Carmen Verdugo Díaz
Propietario	Mat. María Juana Linares Altamirano
Suplente	Mat. Gabriel Gutiérrez García
Suplente	Mat. Esteban Rubén Hurtado Cruz

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

DEDICO ESTA TESIS A:

Mis padres: Norbertha Baltazar y Gilberto Santillán a quienes les tengo una gran admiración y cariño pues en todo momento están conmigo.

A mi esposo e hijos: Gabriel Gutiérrez García ejemplo a seguir, a quien le tengo una gran admiración y cariño por su apoyo incondicional en todo momento para que siempre logre mis metas. A mis pequeños Gabriel, Martín y Antonio por su existencia, cariño y por ser la razón de todas mis metas.

A mis hermanos: Rocío, Martín, Gilberto y Claudia que tanto quiero y admiro.

A mi director: José Antonio Gómez Ortega que admiro por brindarme su amistad, paciencia y apoyo en todo este tiempo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por formar miles de profesionistas en este país.

A todos mis amigos y amigas por su apoyo.

AGRADESCO A:

Mi director de tesis M. en C. José Antonio Gómez Ortega por su dirección y apoyo para que lograra otra de mis metas.

A mis sinodales: Mat. Julieta del Carmen Verdugo Díaz, Mat. María Juana Linares Altamirano, Mat. Gabriel Gutiérrez García y Mat. Esteban Rubén Hurtado Cruz por sus valiosas sugerencias.

A mis amigos, Isabel Salazar Solano y Jorge Lara Martínez con todo cariño por su apoyo.

Las ciencias no se han de aprender por el interés que de ellas se espera, sino, por la perfección que traen al hombre.

Quien poco sabe de una cosa, poco duda de ella.

De los diálogos de Pérez de Moya.

INDICE

INTRODUCCIÓN

Las demostraciones sin palabras empiezan a ser publicadas al rededor de 1975 por *Mathematical Association of America*, particularmente en la revista *Mathematics Magazine* y *The College Matematics Journal*. Las *demostraciones sin palabras* tienen ya una larga trayectoria historica, desde la antigua China, la Grecia clásica, la India del siglo XVII, hasta hoy en día.

Si bien es cierto que las *demostraciones sin palabras* parecen no ser tan formales como algunos desearían, didácticamente tienen mucho valor ya que nos ayudan a visualizar si cierta proposición en matemáticas es verdadera y en caso de ser así, nos sugiere como probar su veracidad o simplemente recordar su resultado mediante un gráfico.

La finalidad de este trabajo es dar a conocer un poco del material que existe de este tipo, aunque esta dirigido a estudiantes de bachillerato, también será util para los estudiantes de los primeros semestres de Ingeniería y de Ciencias, hasta para algunos profesores les revelarán algun secreto que no conocían, facilitando el proceso enseñanza-aprendizaje mediate algunas de éstas *demostraciones sin palabras*. Además dan una posible sugerencia de sus demostraciones formales; pues es más facil recordar un gráfico atractivo que sugiere él resultado, que simplemente un resultado sin asociación significativa.

Con esto no se pretende no ser formal, si no al contrario, se pretende que los jovenes cambien su actitud hacia las matemáticas, puesto que observando procedimientos más simples encuentren belleza en matematicas, y tal vez, sean atraidos por la facilidad con la que se pueden mostrar resultados importantes en matemáticas.

Algunos resultados que tratamos en este trabajo hacen referencia a: desigualdades, geometría, series, sumas de enteros, y trigonometría, que se considerán temas básicos en Matemáticas.

Doy gracias a la gente que ha aportado a la literatura matemática *Demostraciones sin palabras* en su afán de facilitarnos el entendimiento de las matemáticas; sin las cuales este trabajo no sería posible.

Desigualdades

- **Desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica**

  Charles D. Gallant

  Doris Shattschneider.

  Roland H. Eddy.

- **Desigualdad entre la media armónica, la media geométrica, la media aritmética y la media cuadrática**

  Roger B. Nelsen.

  Sidney H. Kung.

  Roger B. Nelsen.

- **La suma de un número positivo y su recíproco es mayor o igual que 2**

  Roger B. Nelsen (cuatro pruebas).

- **Regla de los números intermedios**

  Richard A. Gibbs.

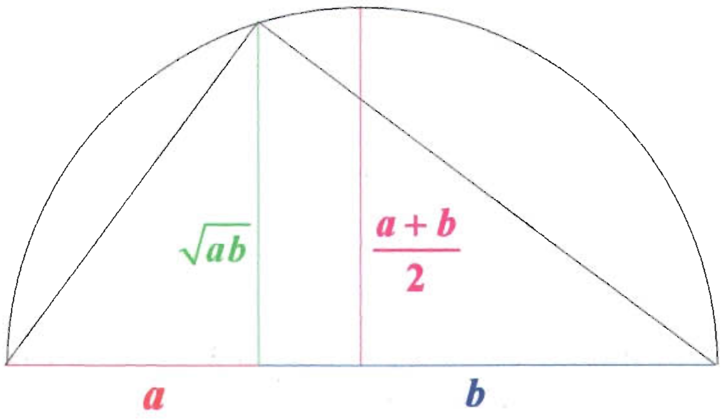
- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**

  Roger B. Nelsen.

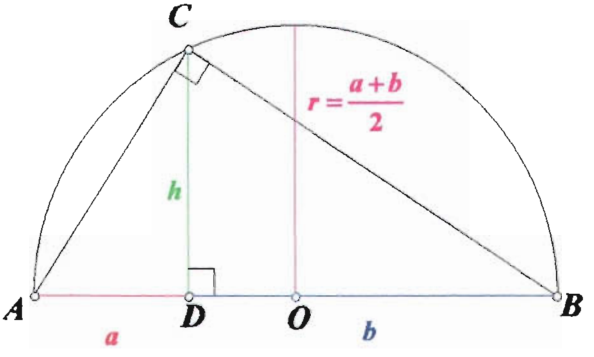
  But Ruma Falk.

DESIGUALDAD ENTRE LA MEDIA ARITMÉTICA Y LA MEDIA GEOMÉTRICA

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$



EXPLICACIÓN:

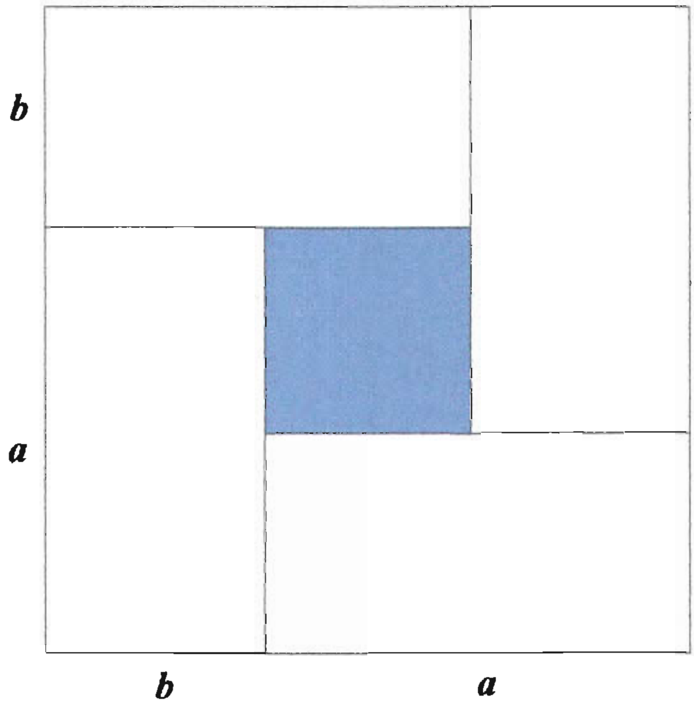


Tracemos el segmento $a+b$ y luego su punto medio al que llamaremos O, el cual es el centro de la circunferencia de radio $\frac{a+b}{2}$.

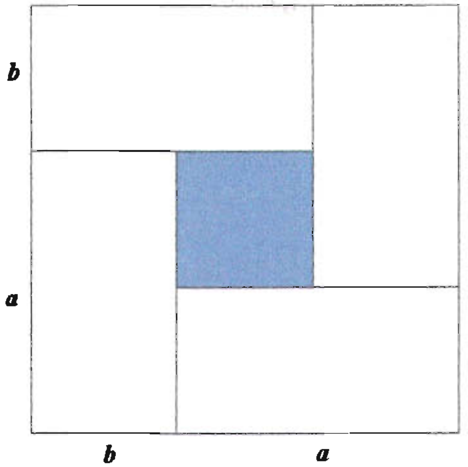
Tracemos la perpendicular a AB que pase por D, notemos que los triángulos ABC y ACD son semejantes, entonces, $\frac{h}{b} = \frac{a}{h}$ es decir $h = \sqrt{ab}$ que en longitud es menor o igual que r. Por lo tanto $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Observemos que, $h = r$ si sólo si $a = b$.

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$



EXPLICACIÓN:



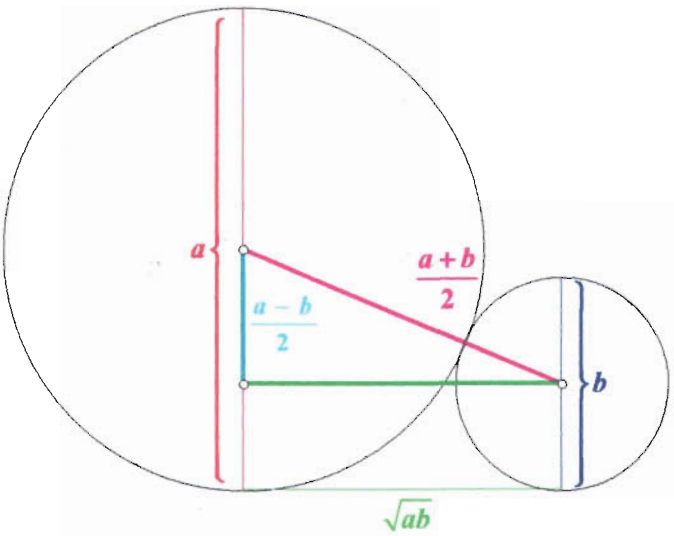
Observemos que el área del cuadrado mayor es $(a+b)^2$ el cual está compuesto por cuatro rectángulos de áreas ab y un rectángulo de área $(a-b)^2$.

Luego $(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$, entonces, $(a+b)^2 \geq 4ab$, que al despejar se obtiene: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

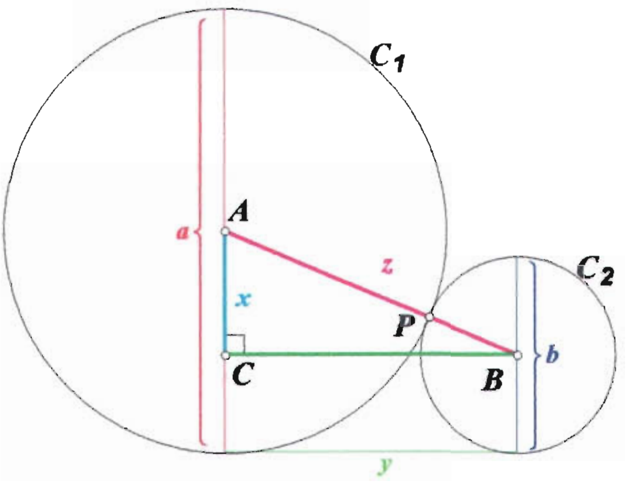
Notemos que $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ si y sólo si $(a-b)^2 = 0$ y esto sucede cuando $a = b$.

DESIGUALDAD ENTRE LA MEDIA ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$



EXPLICACIÓN:



Sea P el punto de tangencia de las circunferencias C_1 y C_2 con centros A y B respectivamente.

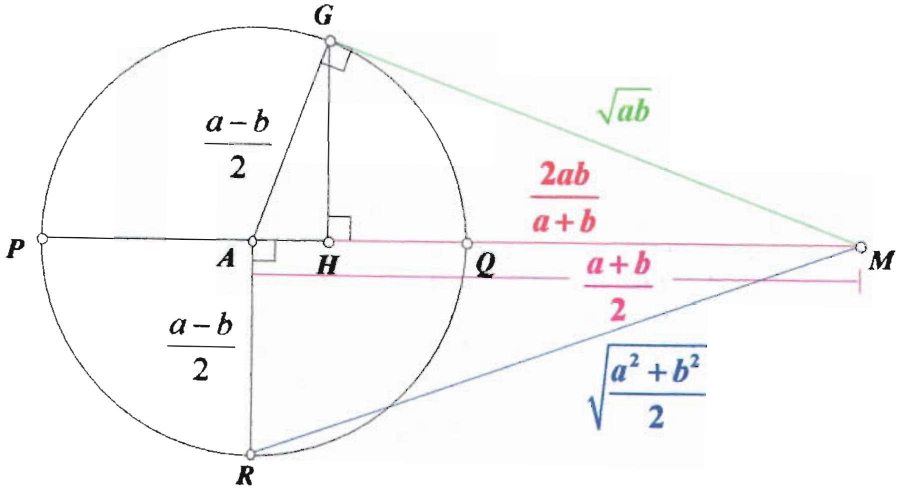
Consideremos diametros paralelos de C_1 y C_2, que tienen medidas a y b respectivamente, tracemos la perpendicular a los diámetros que pase por B y llamemos a la intersección del diámetro de C_1 con ésta perpendicular C. Nota que el triángulo BAC es rectángulo.

La medida del segmento AB es $z = \dfrac{a+b}{2}$, la resta de los radios de C_2 y C_1 es $x = \left|\dfrac{a-b}{2}\right| = AC$, y aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos $x^2 + y^2 = z^2$ es decir $\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$, luego $y = \sqrt{ab}$.

Pero como un cateto siempre es menor que su hipotenusa, asi que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

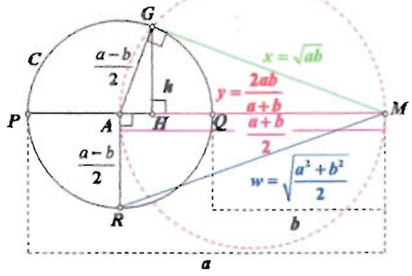
DESIGUALDAD ENTRE LA MEDIA ARMONICA, LA MEDIA GEOMÉTRICA, LA MEDIA ARITMÉTICA Y LA MEDIA CUADRÁTICA.

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



$PM = a,\ QM = b,\ a > b > 0$

EXPLICACIÓN:



Sea Q un punto sobre el segmento PM cuya longitud es a, de tal manera que el segmento QM tenga longitud b y sea C la circunferencia con centro en A y diámetro PQ, tracemos la perpendicular a PA que pase por A y sea R el punto de intersección de ésta con la circunferencia C. Tracemos la recta tangente a C que pase por M y llamemos G al punto de tangencia, entonces $AR = AG = \dfrac{a-b}{2}$, $AM = \dfrac{a+b}{2}$ donde $a > b > 0$.

Tracemos la altura del triángulo GAM que pase por G, cuyo pie de la altura le llamamos H.

Notemos que los triángulos rectángulos AHG, GHM y AGM son semejantes y llamemos a los segmentos $GM = x$, $HM = y$, $GH = h$ y $RM = w$.

En el triángulo ARM tenemos; $w^2 = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ que simplificando se obtiene $w = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

En el triángulo AGM tenemos; $\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ que simplificando se obtiene $x = \sqrt{ab}$.

De la semejanza entre AGM y GHM, tenemos que $\dfrac{HM}{GM} = \dfrac{GM}{AM}$, luego

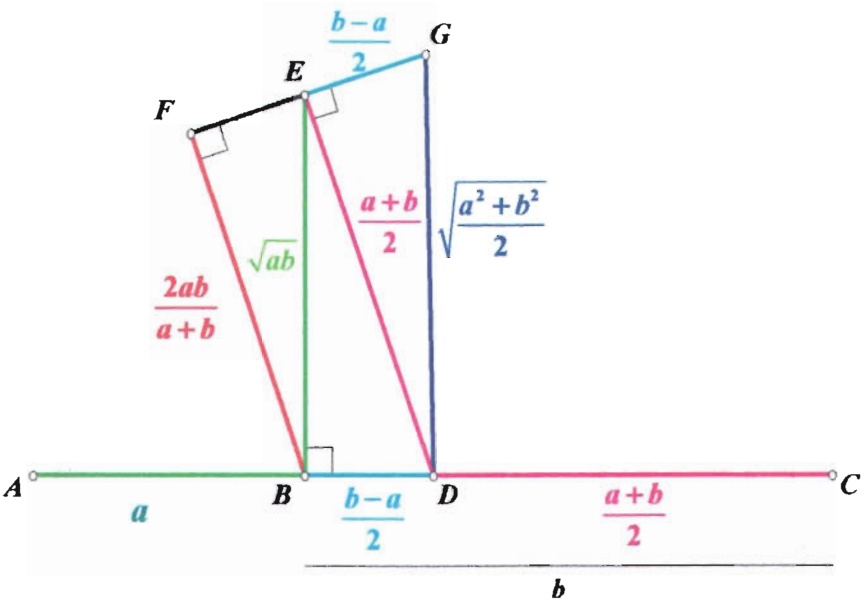
$$y = HM = \frac{GM^2}{AM} = \frac{x^2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Como los triángulo GHM, AGM y RAM son rectángulos se cumple que un cateto siempre es menor que su hipotenusa es decir, $\dfrac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$, $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$; y $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Por lo tanto $\dfrac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

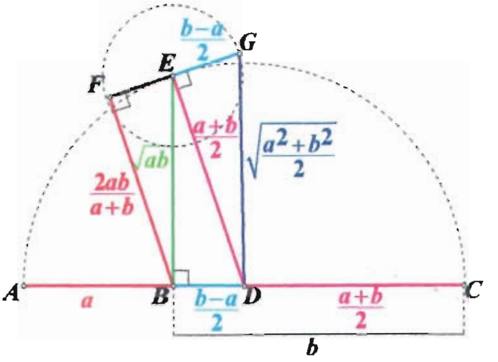
DESIGUALDAD ENTRE LA MEDIA ARMONICA, LA MEDIA GEOMÉTRICA, LA MEDIA ARITMÉTICAY LA MEDIA CUADRÁTICA

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



$$AB = a,\ BC = b$$
$$AD = DC = \frac{a+b}{2}$$
$$BE \perp AB,\ DE = AD$$
$$FE \perp ED,\ FB \parallel ED$$
$$EG = BD = \frac{b-a}{2}$$

EXPLICACIÓN:



Sea B un punto sobre el segmento AC cuya longitud es $a+b$, de tal manera que $AB = a$ y $BC = b$ y sea D el centro de la circunferencia con diámetro AC, entonces $BD = \dfrac{b-a}{2}$; llamemos E al punto de intersección de ésta circunferencia con la perpendicular a AC que pase por B. Tracemos la perpendicular a DE que pase por E y llamemos G al punto de intersección de ésta con la circunferencia con centro en E y radio $BD = \dfrac{b-a}{2}$, tracemos la perpendicular a EG que pase por B y llamemos F a la intersección de éstas dos últimas rectas.

Nombremos $GD = z$, $EB = y$ e $FB = x$.

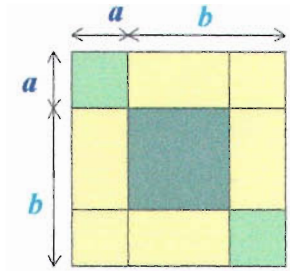
Como el triángulo DGC es rectángulo, entonces $DE^2 + EG^2 = z^2$, sustituyendo tenemos que $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2 = z^2$, entonces $z = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Notemos que los triángulos rectángulos EFB y DBE son semejantes por ser EB una transversal a las paralelas FB y DE, entonces $EB^2 + BD^2 = ED^2$, luego $y^2 + \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$, entonces $y = \sqrt{ab}$, también $\dfrac{DE}{EB} = \dfrac{EB}{FB}$, es decir $FB = \dfrac{EB^2}{DE}$ que sustituyendo tenemos que $x = \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{b+a}{2}\right)}$, entonces $x = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Pero un cateto siempre es menor que su hipotenusa, luego $x \leq y \leq \dfrac{a+b}{2} \leq z$.

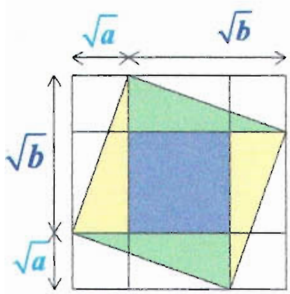
Por lo tanto $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



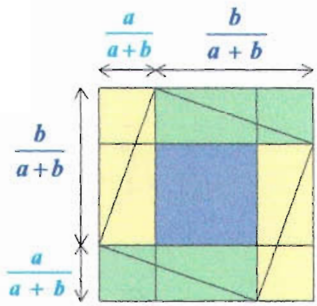
$$2a^2+2b^2 \geq (a+b)^2$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$



$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{a}\sqrt{b}$$

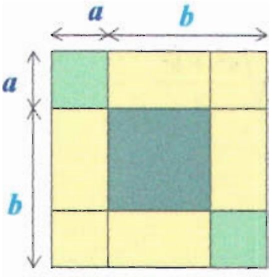
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$



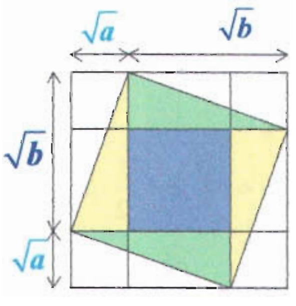
$$1 \geq 4\frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b}$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

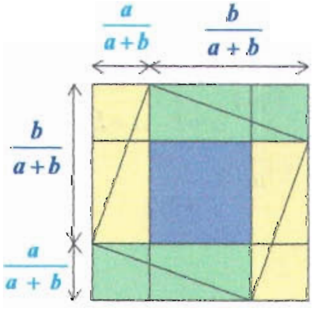
EXPLICACIÓN:



$$
\begin{aligned}
2a^2+2b^2 &= (a+b)^2+(b-a)^2 \\
\Rightarrow 2a^2+2b^2 &\geq (a+b)^2 \\
\Rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} &\geq \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{a+b}\right)^2 &= 4\frac{1}{2}\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2 \\
\Rightarrow \left(\sqrt{a+b}\right)^2 &\geq 4\frac{1}{2}\sqrt{a}\sqrt{b} \\
\Rightarrow \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}.
\end{aligned}
$$

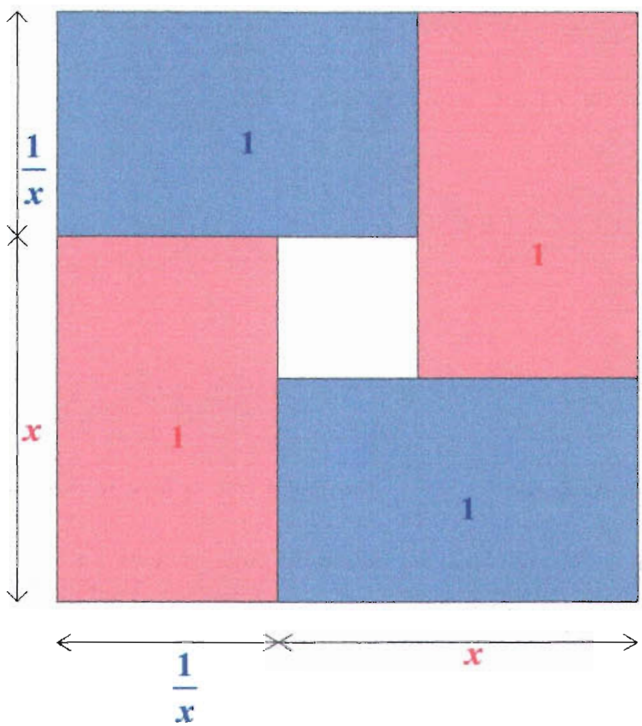


$$
\begin{aligned}
1 &= 4\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}+\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^2 \\
\Rightarrow 1 &\geq 4\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b} \\
\Rightarrow 1 &\geq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \\
\Rightarrow \sqrt{ab} &\geq \frac{2ab}{a+b}.
\end{aligned}
$$

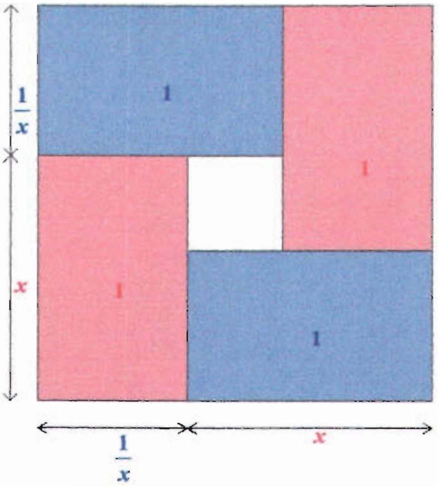
Por transitividad $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$.

LA SUMA DE UN NÚMERO POSITIVO Y SU RECÍPROCO ES MAYOR O IGUAL QUE 2

$$x > 0 \Longrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$



EXPLICACIÓN:



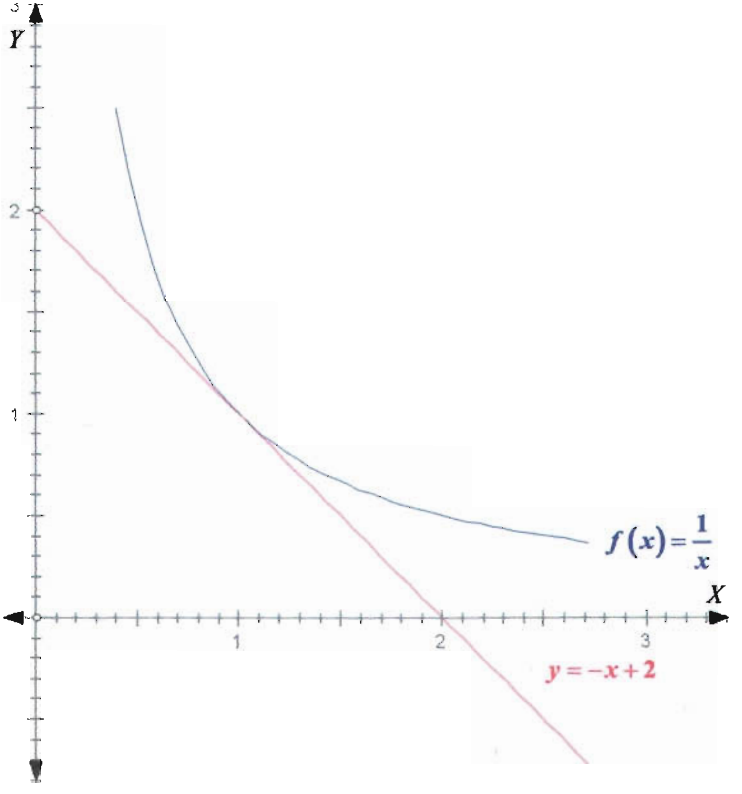
El área del cuadrado $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ es mayor que el área de los cuatro rectángulos de área 1, más el área del cuadrado cuya área es $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$, es decir $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 4+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$, entonces $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \geq 4$.

Por lo tanto $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

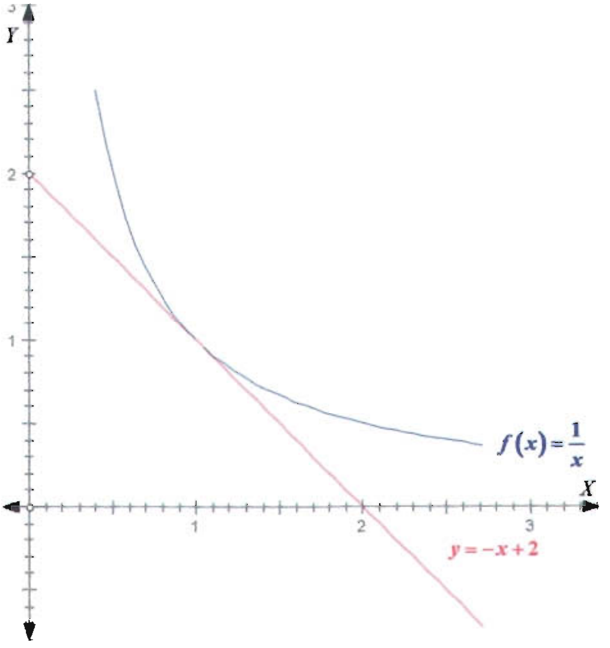
De hecho la igualdad ocurre cuando $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 0$, es decir cuando $x = 1$.

LA SUMA DE UN NÚMERO POSITIVO Y SU RECÍPROCO ES MAYOR O IGUAL QUE 2

$$x > 0 \Longrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$



EXPLICACIÓN:



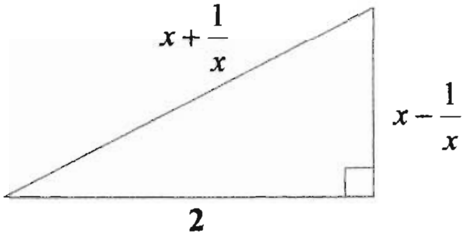
Notemos que la grafica de $f(x) = \frac{1}{x}$ es convexa ya que $f''(x) = 2x^{-3} > 0$, luego, la gráfica queda por arriba de la recta tangente en $(1,1)$, pero la recta tangente es $y = -x + 2$, por lo que $\frac{1}{x} \geq 2 - x$.

Por lo tanto $\frac{1}{x} + x \geq 2$.

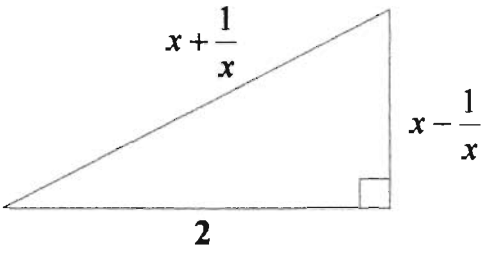
De hecho la igualdad ocurre cuando se intersectan las gráficas, es decir cuando $x = 1$.

LA SUMA DE UN NÚMERO POSITIVO Y SU RECÍPROCO ES MAYOR O IGUAL QUE 2

$$x > 0 \Longrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$



EXPLICACIÓN:

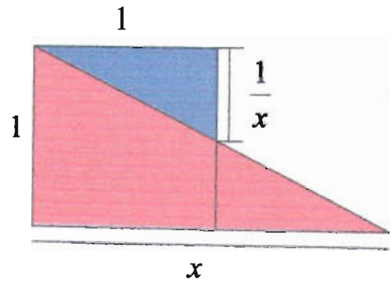


El triángulo es rectángulo ya que se cumple $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2^2$.

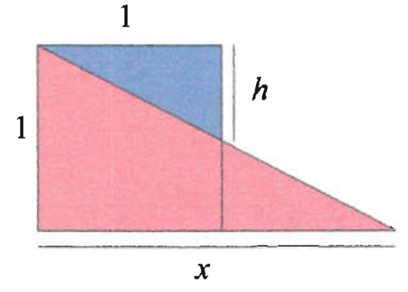
Y en un triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos, en particular $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

LA SUMA DE UN NÚMERO POSITIVO Y SU RECÍPROCO ES MAYOR O IGUAL QUE 2

$$x \geq 1 \Longrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$



EXPLICACIÓN:

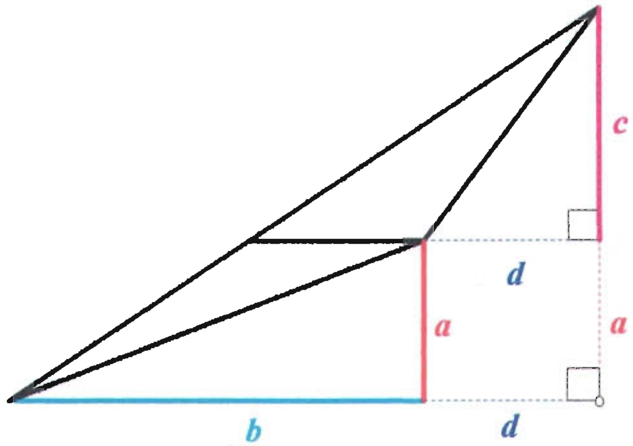


Por semejanza de triángulos tenemos que $\frac{h}{1} = \frac{1}{x}$. Es decir $h = \frac{1}{x}$. Luego el área de los dos triángulos es mas grande que 1.

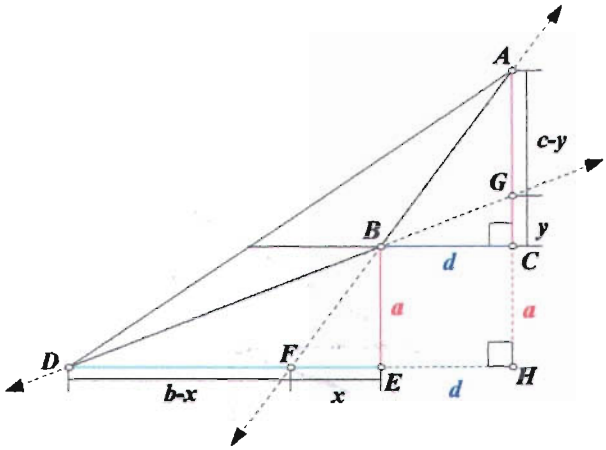
Es decir $\frac{1}{2x} + \frac{x}{2} \geq 1$, por lo tanto $\frac{1}{x} + x \geq 2$.

REGLA DE LOS NÚMEROS INTERMEDIOS

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},\ a, b, c, d > 0$$



EXPLICACIÓN 1:



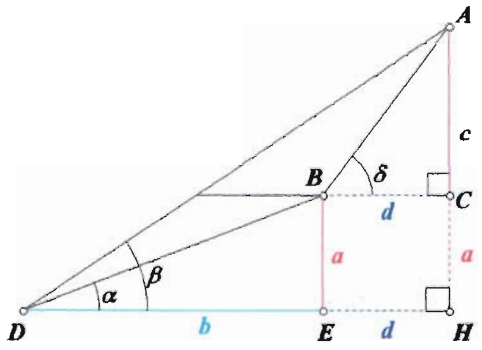
Los triángulos ABC y BFE son semejantes por lo que $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$, y como $x < b$, entonces, $\frac{a}{b} < \frac{a}{x} = \frac{c}{d}$.

Los triángulos AFH y ABC son semejantes por lo que $\frac{a+c}{x+d} = \frac{c}{d}$, y como $x < b$, entonces, $\frac{a+c}{b+d} < \frac{a+c}{x+d} = \frac{c}{d}$.

Finalmente los triángulos GDH y BDE son semejantes por lo que $\frac{a+y}{b+d} = \frac{a}{b}$, y como $y < c$, entonces, $\frac{a+c}{b+d} > \frac{a+y}{b+d} = \frac{a}{b}$.

Por lo tanto $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

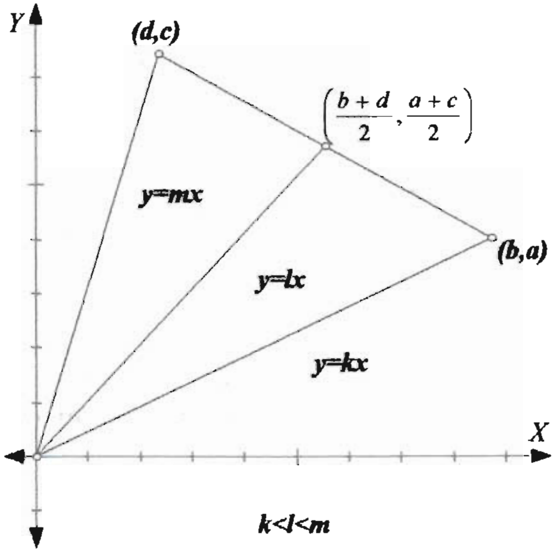
EXPLICACIÓN 2:



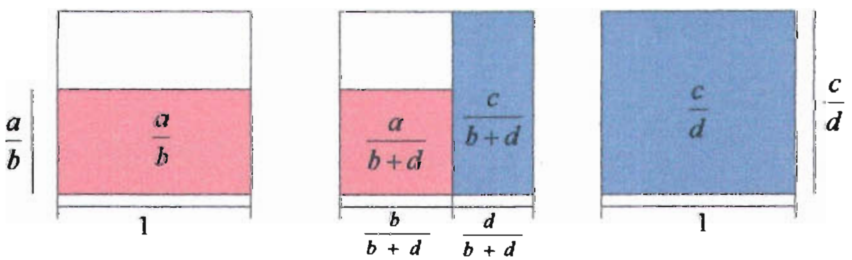
Si $\alpha = \measuredangle EDB$, $\beta = \measuredangle HDA$ y $\delta = \measuredangle CBA$, se tiene que $\alpha < \beta < \delta$ y como la función $tan\ x$ es creciente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, es tiene que $tan\ \alpha < tan\ \beta < tan\ \delta$ esto es: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

REGLA DE LOS NUMEROS INTERMEDIOS

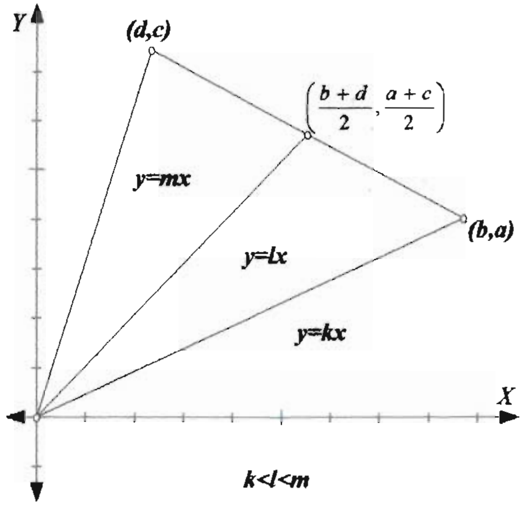
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}, \ a,b,c,d > 0$$



$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} < \frac{c}{d}$$



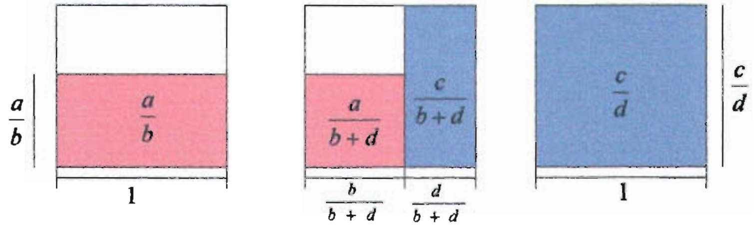
EXPLICACIÓN:



Unamos los puntos (d, c) y (b, a), y tracemos el punto medio del segmento el cual tiene coordenadas $\left(\frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$. Al unir tres puntos con el origen, la recta que pasa por el punto (d, c) tiene pendiente $m = \dfrac{c}{d}$, la que pasa por el punto medio tiene pendiente $l = \dfrac{a+c}{b+d}$ y la que pasa por (b, a) pendiente $k = \dfrac{a}{b}$.

Es claro que la recta que pasa por el punto medio quedará entre las rectas por los extremos, luego su pendiente estará entre las pendiantes de las rectas extremas.

Por lo tanto $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.



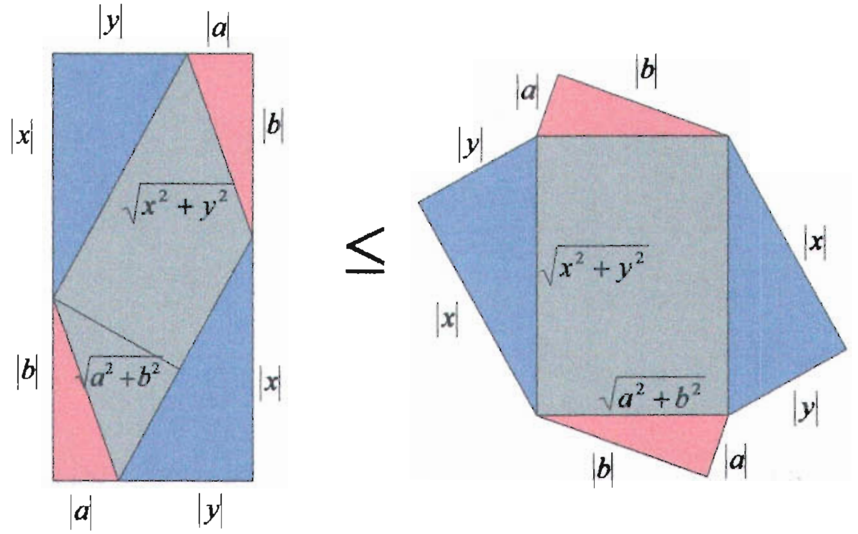
El primer rectángulo tiene área $\frac{a}{b}$ y el último tien área $\frac{c}{d}$ que es mayor a la del primero.

Para el rectángulo que esta enmedio, sobre su lado de medida 1 trazamos el segmento con medida $\frac{b}{b+d}$, es claro que el segmento restante mide $\frac{d}{b+d}$, forma los rectángulos con área $\frac{a}{b}\left(\frac{b}{b+d}\right)$ y $\frac{c}{d}\left(\frac{d}{b+d}\right)$, la suma de estas dos áreas está entre las dos áreas de los rectángulos que se formaron al pricipio.

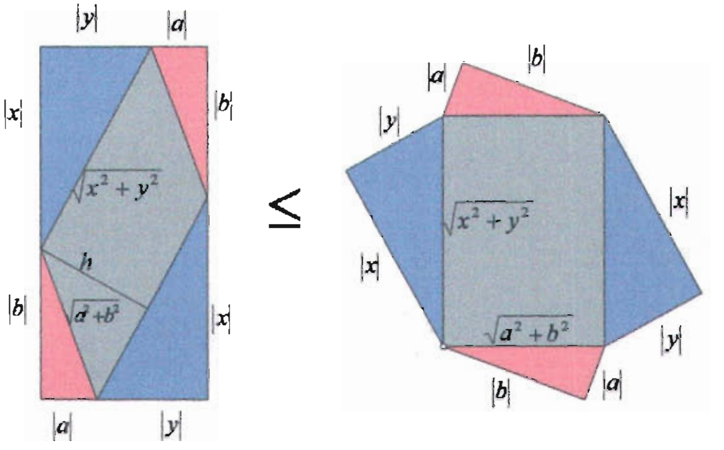
Por lo tanto $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

$$|ax+by| \leq \sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{x^2+y^2}$$



EXPLICACIÓN:

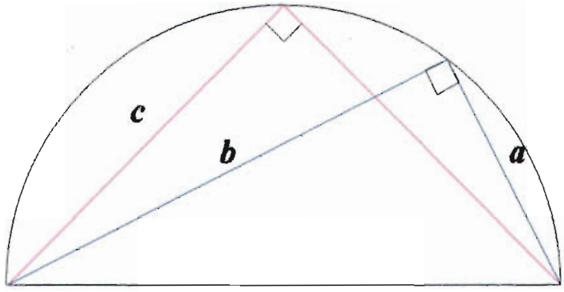


Si comparamos las áreas de las dos figuras tenemos que las áreas del rectángulo es $(|a|+|y|)(|b|+|x|)$ la cual es menor al área del poligóno formado por los mismos cuatro triángulos y un rectángulo con lados iguales a la del romboide, que al sumarlas tenemos: $2\left(\dfrac{|a|\,|b|}{2}+\dfrac{|x|\,|y|}{2}\right)+\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}$, que simplificando queda $|a|\,|x|+|b|\,|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}$. Por otro lado, por la desigualdad del triángulo tenemos $|ax+by|\leq|ax|+|by|=|a|\,|x|+|b|\,|y|$

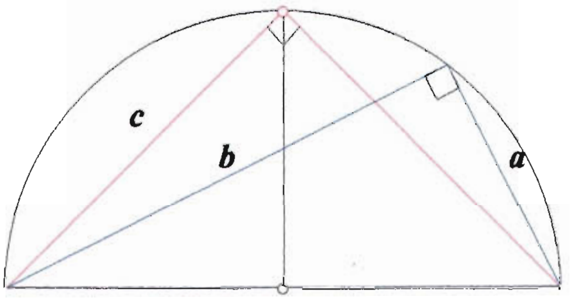
Por lo tanto $|ax+by|\leq\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}$.

UNA CONSTRUCCIÓN DE LA MEDIA CUADRÁTICA DE DOS NÚMEROS POSITIVOS a y b

$$c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$



EXPLICACIÓN:



Con los segmentos a y b construimos el triángulo rectángulo de catetos a y b. Después tracemos su circuncirculo que tiene centro en el punto medio de la hipotenusa, la perpendicular a la hipotenusa que pasa por el centro corta al circuncirculo en un punto que dista a los extremos de la hipotenusa en una cantidad c, la cuál cumple $c^2 + c^2 = a^2 + b^2$, luego $c = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

Geometría

- **Teorema de Pitágoras**

  Chou Pei Suan Ching.

  Bhãskara.

  Euclides.

  H. E. Dudeney.

  Games A. Garfield.

  Michael Hardy.

- **Un teorema pitagórico**

  Enzo R. Gentile.

- **Un teorema sobre triángulos rectangulos**

  Roland H. Eddy.

- **En un triángulo rectángulo ABC, la altura CD sobre la hipotenusa cumple**

  Sidney H. Kung.

- **Una cuadratura del circulo**

  Thomas Elsner.

- **Trisección de un segmento**

  Scott Coble.

- **Los ángulos de una estrella suman 180°**

  Fouad Nakhli.

- **Teorema de Viviani's**

  Samuel Wolf.

- **Cuerdas y tangentes con la misma longitud**

  Roland H. Eddy.

- **Distancia de un punto a una recta**

  R. L. Einsenman.

- **Áreas algebraicas**

  Shirley Wakim.

- **Completando el cuadrado**

  Charles D. Gallant.

- **Construcción de dos lunas cuya suma de sus áreas es igual a la de un triángulo rectángulo**

  Eugene A. Margerum.

- **El área de un arbelo**

  Roger B. Nelsen Lewis.

- **El área de un salinón**

  Roger B. Nelsen.

- **El volumen de un fragmento de una pirámide cuadrada.**

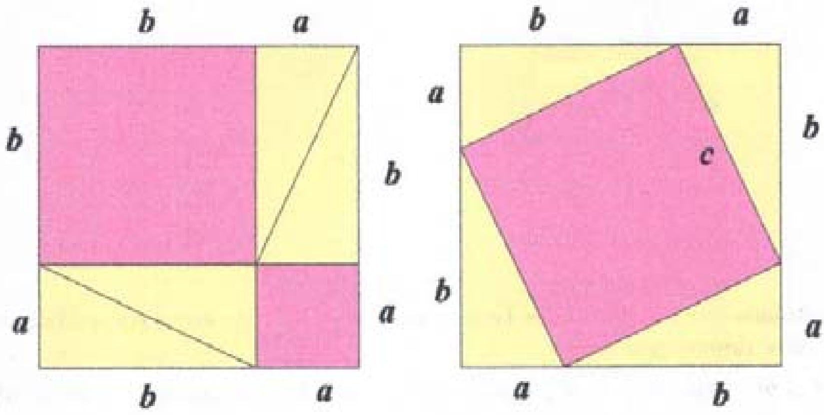
  Roger B. Nelsen.

- **El volumen de un hemisferio vía el principio de Cavalieri.**

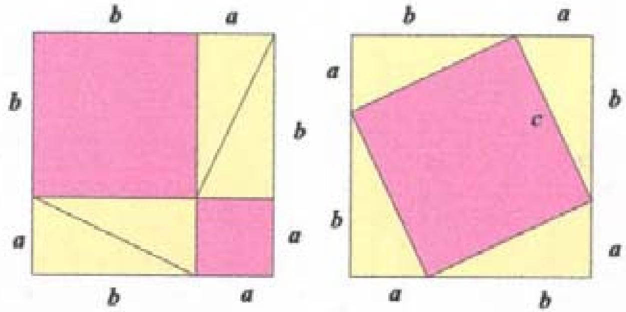
  Sidney H. Kung.

TEOREMA DE PITÁGORAS I

Si a, b, c son los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa c se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.



EXPLICACIÓN:



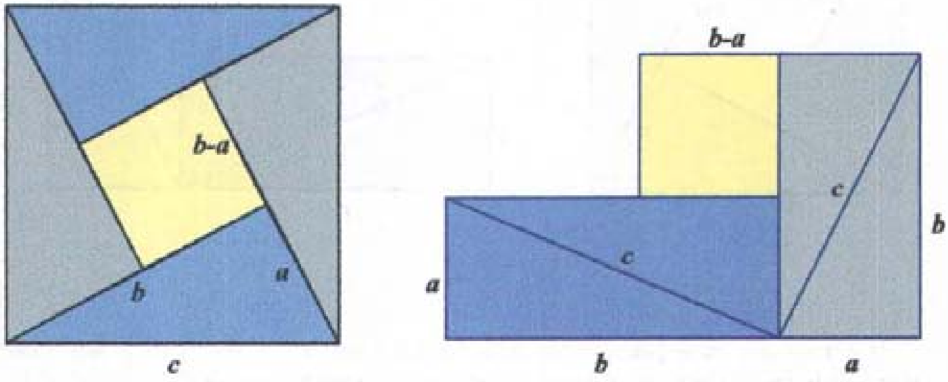
Notemos que los cuadrados tienen por lado $a+b$, las áreas respectivamente de ellos se descomponen así:

$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$, y $4\frac{ab}{2}+c^2=(a+b)^2$, entonces $a^2+b^2+2ab=4\frac{ab}{2}+c^2$.

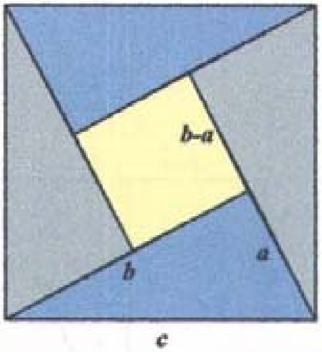
Por lo tanto $a^2+b^2=c^2$.

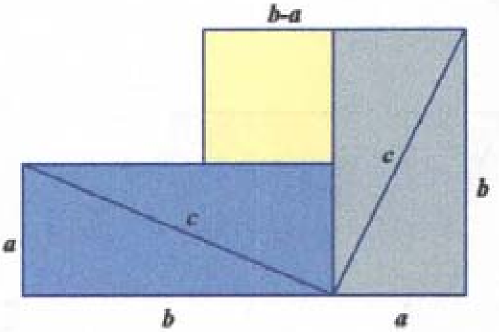
TEOREMA DE PITÁGORAS II

Si a, b, c son los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa c se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.



EXPLICACIÓN:

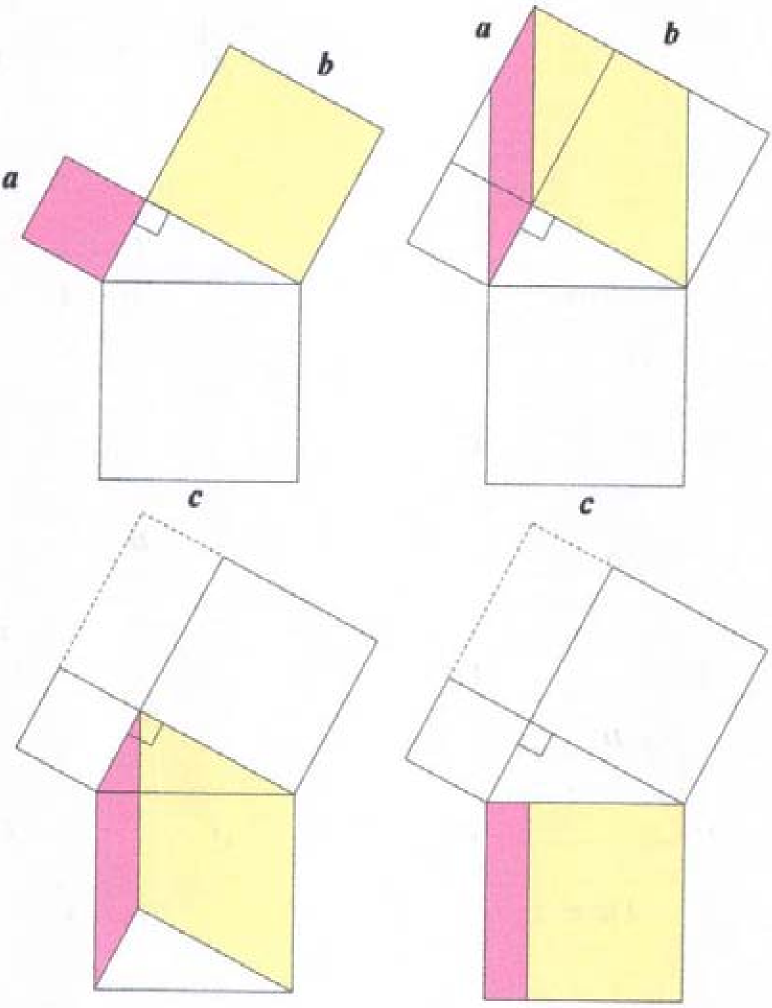




Notemos que en la primera figura el área del cuadrado es c^2 y en la segunda figura es la misma por estar formado con las mismas piezas, dos rectangulos de área ab y un cuadrado de área $(b-a)^2$, por lo que tenemos $c^2 = 2ab + (b-a)^2$. Desarrollando el binomio se tiene $c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$. Por lo tanto $c^2 = a^2 + b^2$

TEOREMA DE PITÁGORAS III

Si a, b, c son los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa c se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$



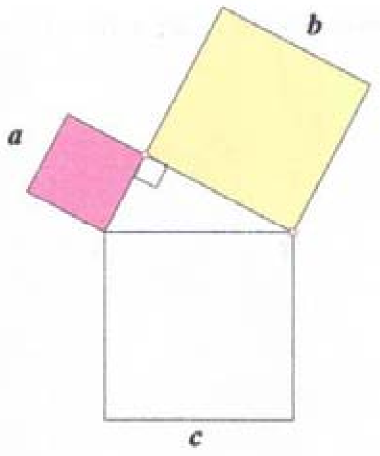


Figura1

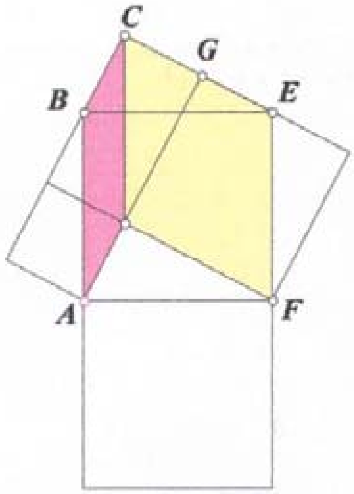


Figura 2

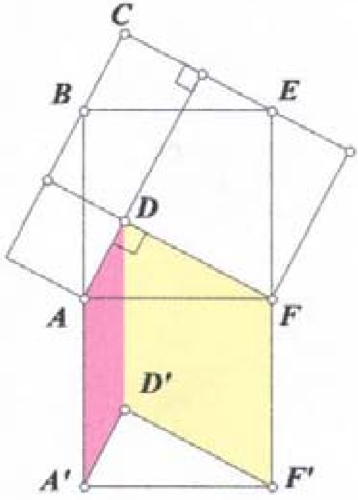


Figura 3

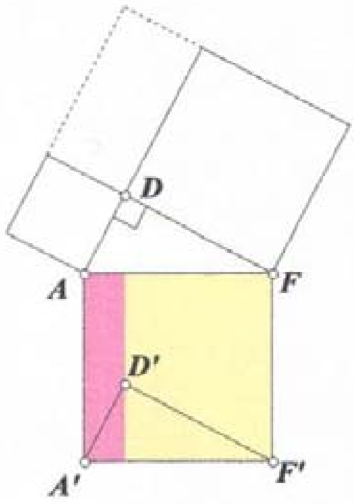


Figura 4

COMENTARIO:

(i) Dos paralelogramos tienen la misma área sí tienen la misma base y la misma altura.

(ii) Dos triángulos son congruentes si tienen sus lados y ángulos correspondientes iguales.

Existen tres criterios para decidir cuando dos triángulos son congruentes:

a) Dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, respectivamente iguales, son congruentes. Criterio (LAL).

b) Dos triángulos que tienen un lado igual, y respectivamente iguales los ángulos adyacentes a éste lado, son congruentes. Criterio (ALA).

c) Dos triángulos que tienen sus lados correspondientes iguales, son congruentes. Criterio (LLL).

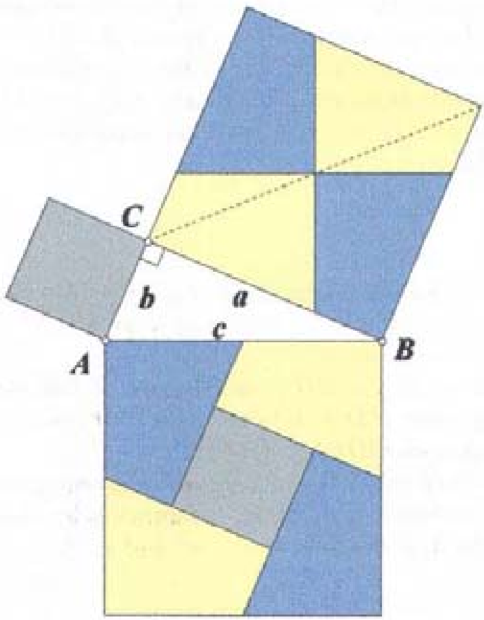
EXPLICACIÓN:

Notemos que el área sombreada en figura 1 y el área en la figura 2 son iguales a, $a^2 + b^2$ ya que el área del paralelogramo $ADCB$ es a^2 y el área del paralelogramo $DFEC$ es b^2 por (i).

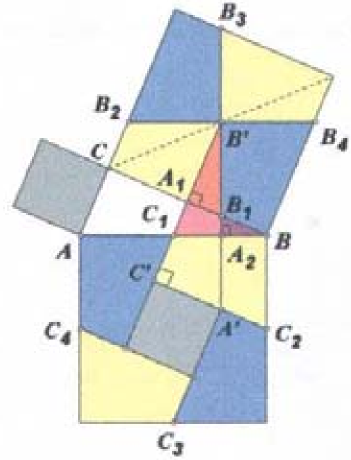
Como $CD = AB = AA' = DD'$, tenemos que el área de $ADCB$ es igual al área de $A'D'DA$ y como $CD = EF = FF' = DD'$, también son iguales las áreas de los paralelogramos $CDFE$ y $DD'F'F$.

Finalmente como las áreas de los triángulos congruentes AFD y $A'F'D'$ son iguales, tenemos que el área sombredad de la figura1 es igual al área de la figura sombreada de la figura 4, lo que nos da que $a^2 + b^2 = c^2$.

Si a, b, c son los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa c se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.



EXPLICACIÓN:



Dado el triángulo ABC de lados a, b y c, construimos un cuadrado en cada uno de sus lados y el punto medio de la diagonal del cuadrado de lado b lo llamamos B'.

Sean C_1, C_2, C_3 y C_4 los punto medios del cuadrado de lado c.

Tracemos lo siguiente:

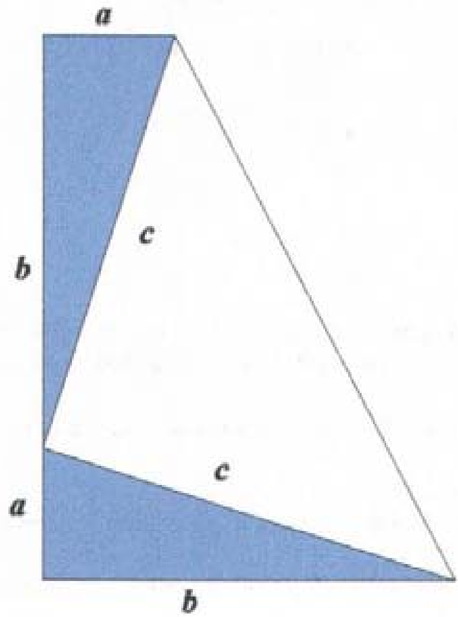
- La paralela a AC por C_1, siendo A_1 el punto de intersección de ésta con el lado CB.
- La paralela a CB por C_2, siendo C' el punto de intersección de ésta con la linea C_1A_1.
- La paralela a AC por C_3, siendo A' el punto de intersección de ésta con la linea C_2C'.
- La paralela a CB por C_4.
- Finalmente la paralela a AB por $B\prime$ y su perpendicular también por B'.

Como los triángulos A_2BB_1, A_1BC_1 y A_2BC_1 son semejantes, y como $A_1B' = A_1B = \frac{b}{2}$, entonces, los triángulos A_1BC_1 y A_2BC_1 son congruentes por lo que $B_1B' = C_1B = \frac{c}{2}$. Luego $B_1A' = BC_2 = \frac{c}{2}$, así que, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes, por lo que $C'A' = a$ y además los 4 cuadriláteros congruentes que forman al cuadrado de lado b, son los mismos 4 cuadriláteros que están en el cuadrado de lado c.

Por todo lo anterior $c^2 = a^2 + 4$ (el área del cuadrilátero), es decir, $c^2 = a^2 + b^2$.

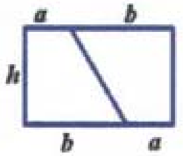
TEOREMA DE PITÁGORAS V

Si a, b, c son los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa c se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.

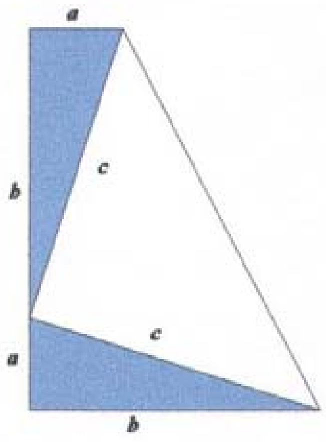


COMENTARIO:

(*i*) El área de un trapezoide de bases a y b, y altura h es $\dfrac{(a+b)\,h}{2}$.



(*ii*) El área del triángulo rectángulo de catetos a y b es $\dfrac{ab}{2}$.

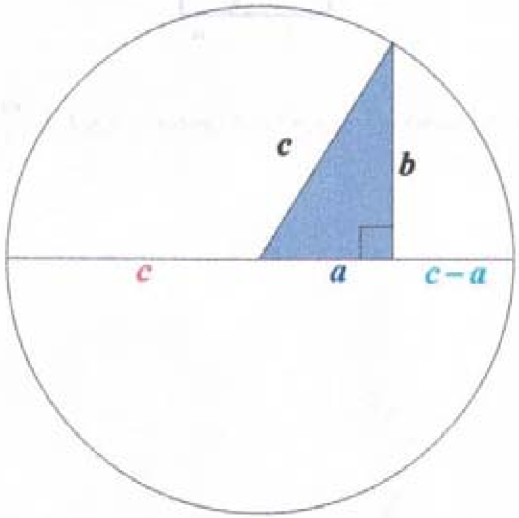


Notemos que el trapeziode esta formado por tres triángulos, dos de área $\dfrac{ab}{2}$, y otro de área $\dfrac{c^2}{2}$. Por otro lado el área del trapezoide es $\dfrac{(a+b)\,(a+b)}{2}$.

Por lo que, $\dfrac{(a+b)^2}{2} = 2\dfrac{ab}{2} + \dfrac{c^2}{2}$, luego $(a+b)^2 = 2ab + c^2$, finalmente si desarrollamos y simplificamos tenemos, $a^2 + b^2 = c^2$.

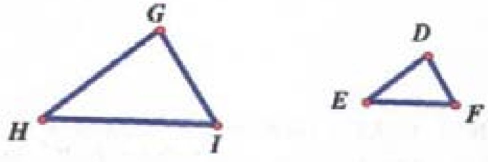
TEOREMA DE PITÁGORAS VI

Si a, b, c son los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa c se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.

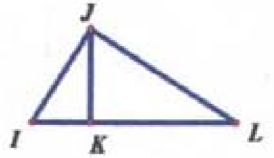


COMENTARIO:

(i) Si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales entonces sus lados correspondiente son proporcionales y los triángulos son semejantes. Si $\angle IHG = \angle FED$, $\angle GIH = \angle DFE$ y $\angle IGH = \angle FDE$ entonces $\frac{ED}{HG} = \frac{FD}{IG} = \frac{EF}{HI}$

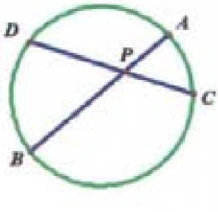


(ii) En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes a él, por ejemplo, los triángulos que resultan ser semejantes en la siguiente figura son $\triangle LJI \sim \triangle JKI \sim \triangle LKJ$.

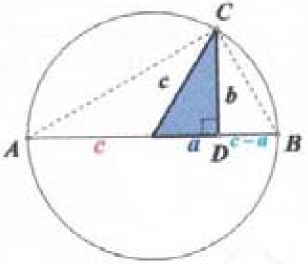


(iii) Un triángulo inscrito en una circunferencia donde uno de sus lados es el diámetro debe ser un triángulo rectángulo.

(iv) Si tenemos dos cuerda que se intersectan en un punto P dentro de la circunferencia, se cumple lo siguiente: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

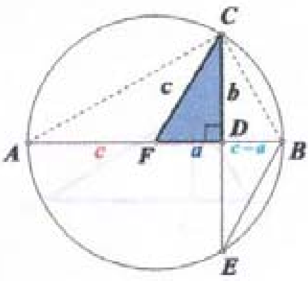


EXPLICACIÓN 1:



Notemos que BCA, CDA y BDC son semejantes por el (iii) y (ii). Por (i) tenemos que los lados de los triángulos CDA y BDC son proporcionales es decir: $\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$ despejando se tiene $c^2 - a^2 = b^2$ y finalmemte obtenemos $c^2 = a^2 + b^2$.

EXPLICACIÓN 2:



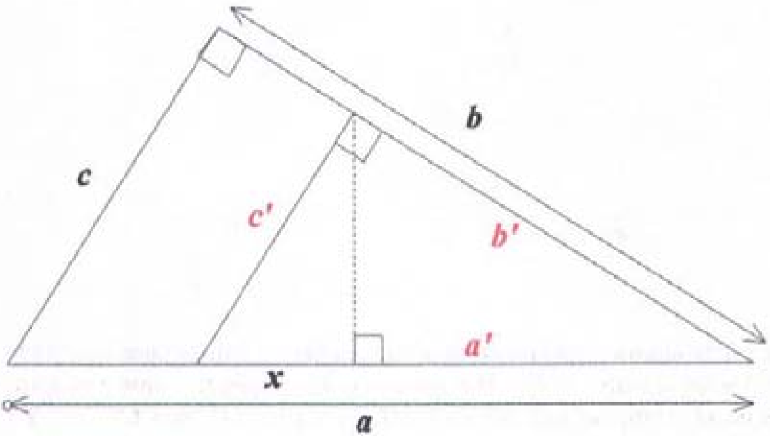
Notemos que $\angle BAC = \angle BEC$ por abrir el mismo arco y también $\angle BAC = \angle DCB$, pues los triángulos ABC y CBD son semejantes.

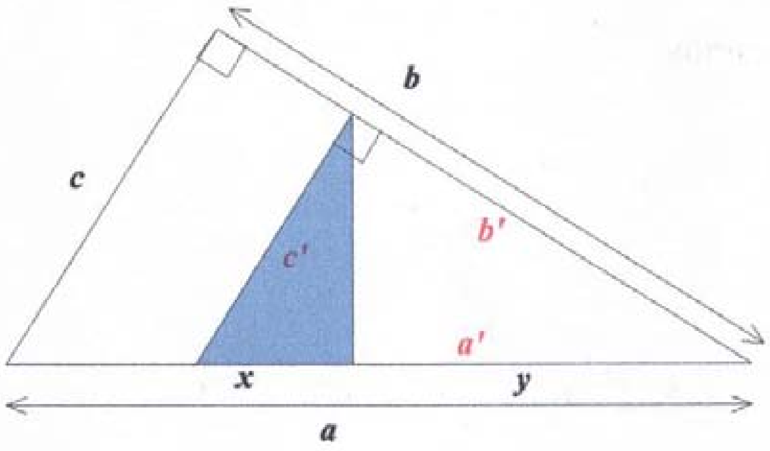
Entonces $\triangle BDC$ es congruente con $\triangle BDE$ por el criterio de (ALA).

Por (iv) tenemos $CD \cdot ED = BD \cdot AD$, y sustituyendo los valores tenemos $b \cdot b = (c+a)(c-a)$, desarrollando tenemos $b^2 = c^2 - a^2$, y finalmente tenemos $c^2 = a^2 + b^2$.

UN TEOREMA PITAGÓRICO

$$aa' = bb' + cc'$$

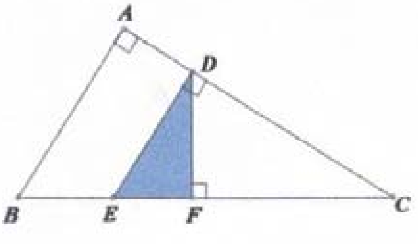




$$\frac{x}{c} = \frac{c'}{a} \Rightarrow ax = cc'$$
$$\frac{y}{b} = \frac{b'}{a} \Rightarrow ay = bb'$$
$$\therefore aa' = a(x+y) = bb' + cc'$$

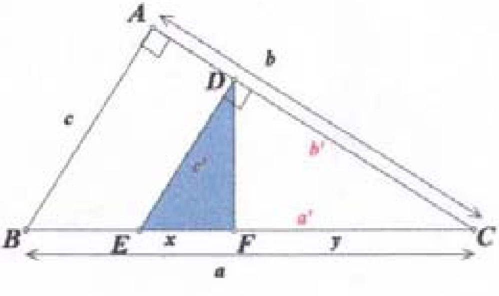
COMENTARIO:

(i) Si en el $\triangle ABC$, el segmento DE es paralelo a AB, entonces $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{BC}{EC} = \dfrac{AB}{DE}$.



(ii) En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes a él. Por ejemplo, los triangulos que resultan ser semejantes en el triángulo rectángulo CDE y altura DF son CDE, CFD y DFE.

EXPLICACIÓN:

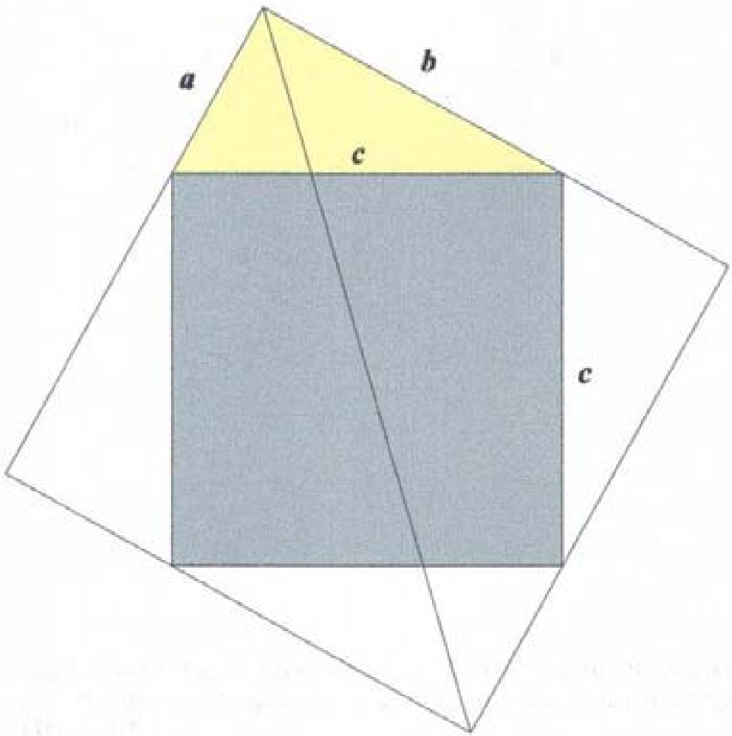


Notemos que el $\triangle CDE \sim \triangle CAB$ y como DF es una altura del $\triangle CDE$, entonces por semejanza de triángulos tenemos $\triangle FED \sim \triangle ABC$, $\dfrac{x}{c} = \dfrac{c'}{a}$ de lo que obtenemos $ax = cc'$ y también como $\triangle ABC \sim \triangle FDC$, $\dfrac{y}{b} = \dfrac{b'}{a}$ de lo que obtenemos $ay = bb'$.

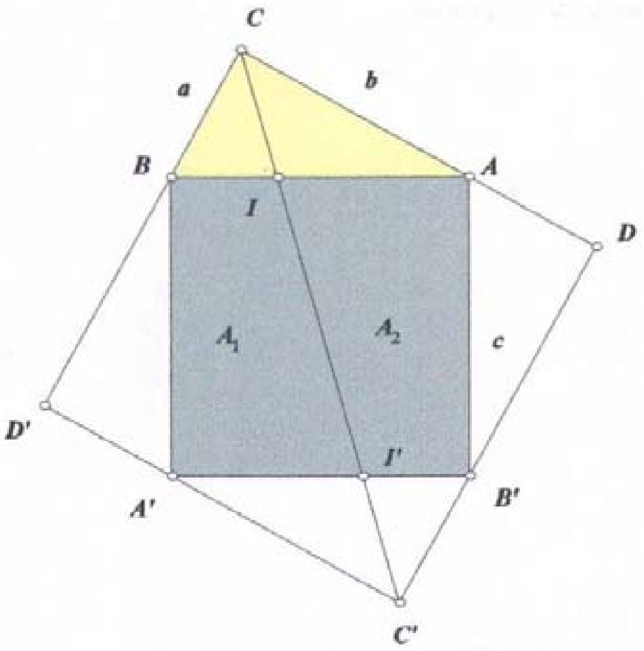
Por lo tanto, $cc' + bb' = ax + ay = a(x + y) = aa'$.

UN TEOREMA SOBRE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

La bisectriz interior del ángulo recto de un triángulo rectángulo biseca al área del cuadrado de la hipotenusa.



EXPLICACIÓN:

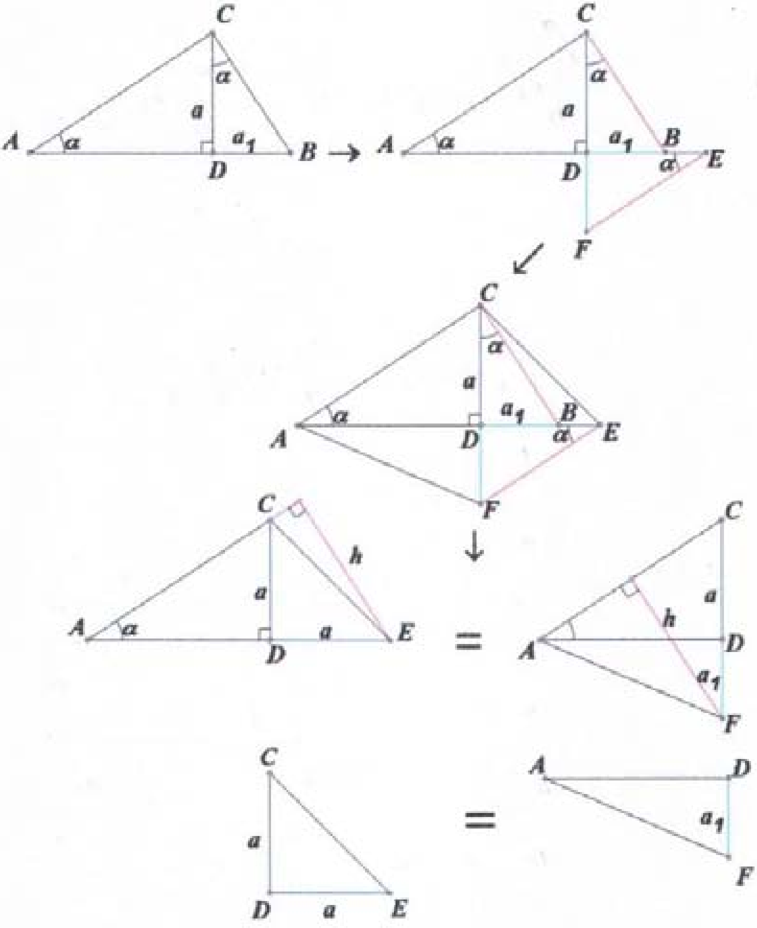


Tracemos el cuadrado $CD'C'D$, la bisectriz del ángulo C es la diagonal CC' del cuadrado anterior, luego también es la bisectriz del ángulo C'.

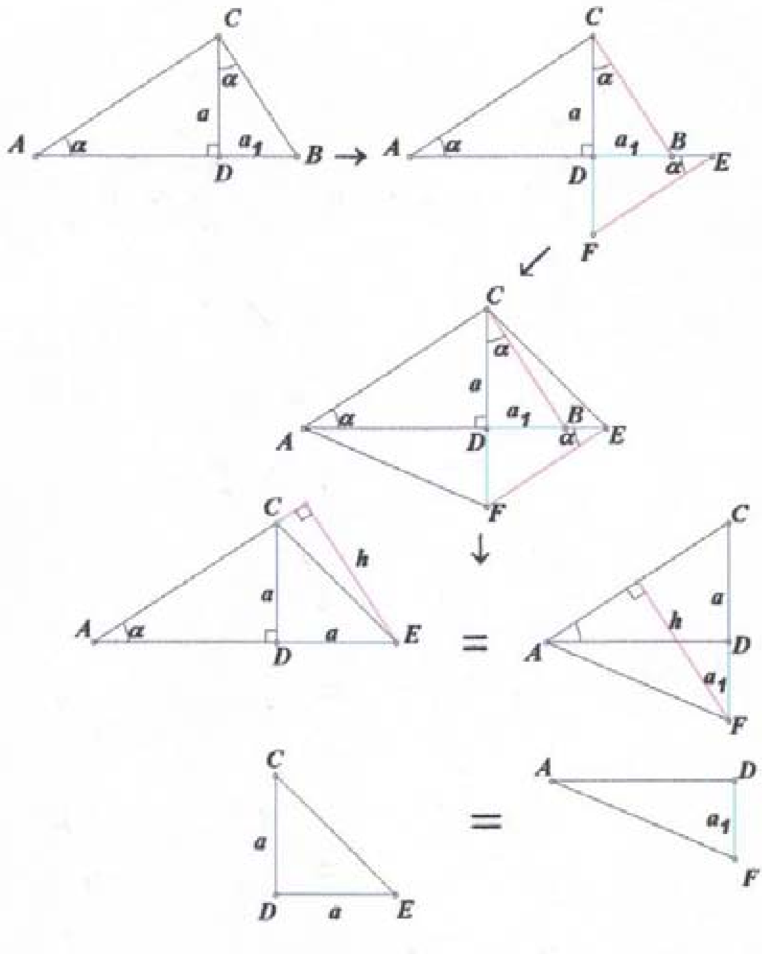
Luego $BI = B'I'$ y $AI = A'I'$ el área del trapecio A_1 es $\dfrac{(A'I' + BI) \cdot A'B}{2} = \dfrac{(AI + BI) \cdot A'B}{2} = \dfrac{A'B \cdot AB}{2} = \dfrac{c^2}{2}$.

Por lo tanto $A_1 = A_2 = \dfrac{c^2}{2}$.

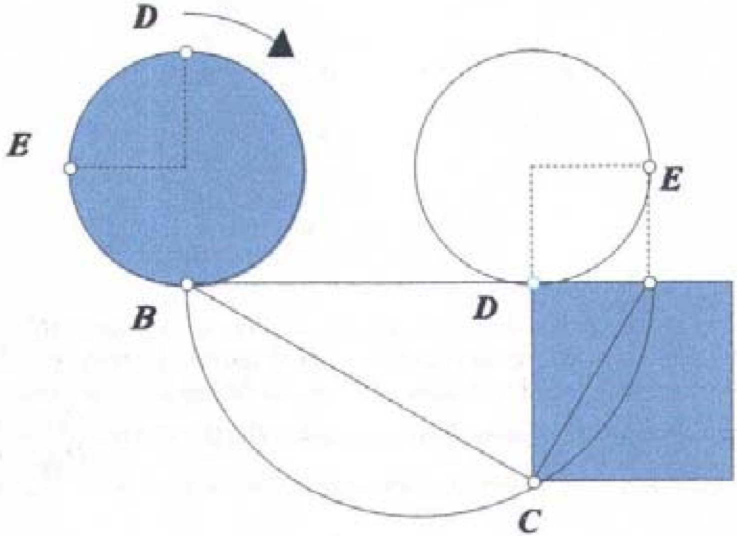
EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ABC, LA ALTURA CD SOBRE LA HIPOTENUSA CUMPLE $(CD)^2 = AD \cdot DB$



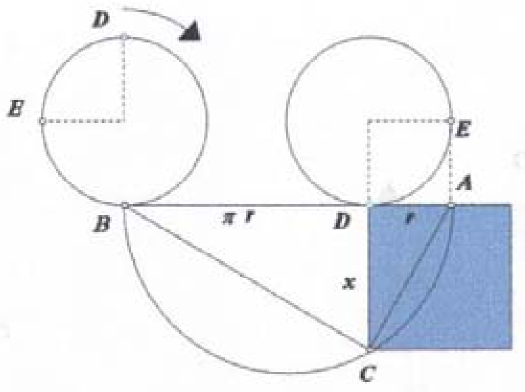
EXPLICACIÓN:



Notemos que $\Delta CDB \simeq \Delta EDF$ pues se construyó así, $AC \parallel FE$ por ser $\angle DAC = \angle DEF$, así que el área del triángulo ACE es igual al área del triángulo ACF por tener la misma base AC y la misma altura h. Estos dos triángulos de áreas iguales, tienen el triángulo en común ADC. Resulta que las áreas de los dos triángulos CDE y AFD tienen áreas iguales, por lo que $CD \cdot DE = AD \cdot DF$ y entonces $(DC)^2 = AD \cdot DF$.


D
E
B
D
E
C

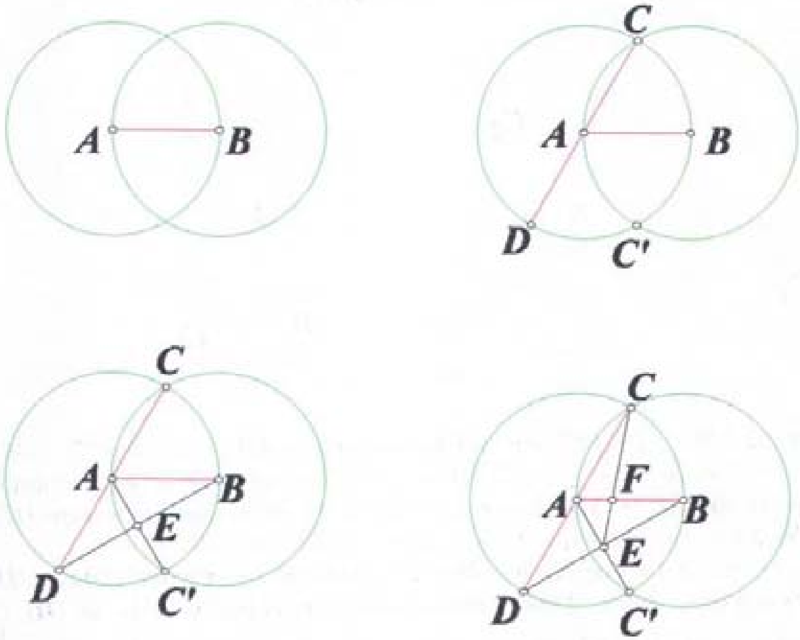
EXPLICACÍON:



Supongamos que el círculo tiene radio r y se gira sobre un segmento BD igual a la mitad del perímetro del círculo. DA es igual al radio del círculo y $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo de hipotunusa AB, donde DC es la perpendicular a AB por D, entonces por semejanza de los triángulos BCD y CAD, $\dfrac{DC}{DA} = \dfrac{BD}{CD}$ y dando los valores correspondientes a los segmentos tenemos $\dfrac{x}{r} = \dfrac{\pi r}{x}$, luego $x^2 = \pi r^2$.

Como el área del cuadrado es $x^2 = \left(r\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi r^2$, tenemos que es igual al área que la del círculo.

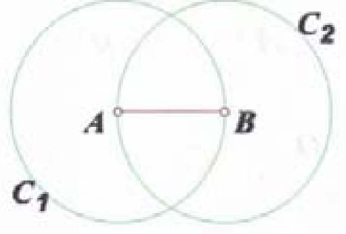
$$AF = \frac{1}{3}(AB)$$

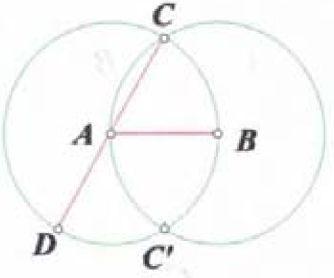


EXPLICACIÓN:

Muchos textos dan la construcción de la trisección de un segmento de recta basado en Euclides, el cual requiere de 9 elementos (6 circunferencias y 3 rectas). La siguiente construcción usa sólo 6 elementos (2 circunferencias y 4 rectas).

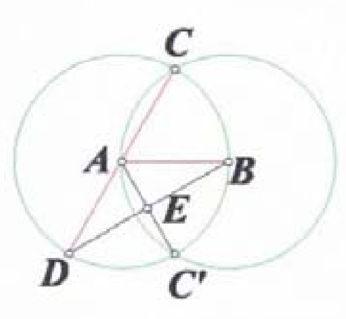
Sea AB el segmento que se desea dividir, C_1 y C_2 circunferencias de radios AB y centros A y B respectivamente. Sean C y C' los puntos de intersección de C_1 y C_2. Trazamos la secante CD que pasa por A.

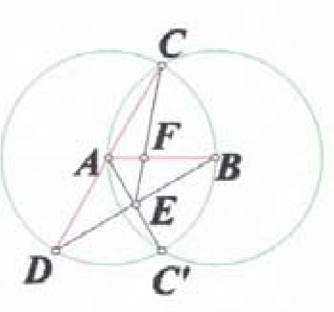




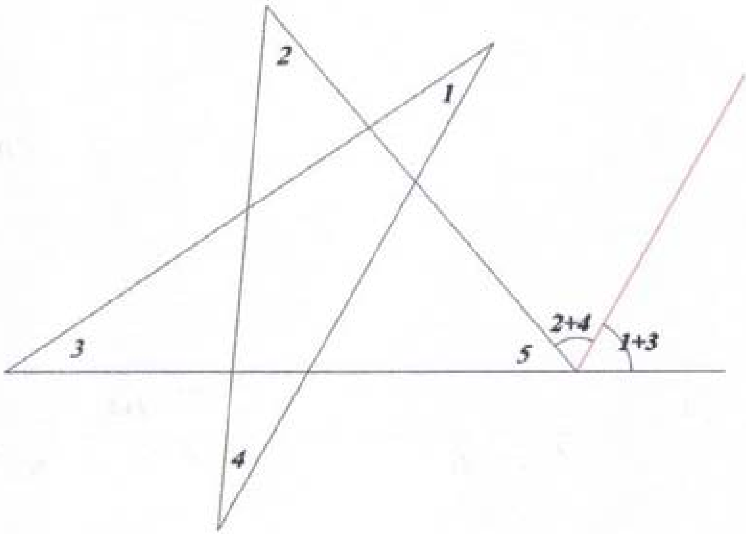
Como ΔABC y $\Delta ABC'$ son equiláteros ya que $AB = AC = AC' = BC = BC'$ son radios, se tiene que $\angle CAB = \angle BAC' = \angle C'AD = 60°$. Y también tenemos que $\Delta BAE \simeq \Delta DAE$ por el criterio LAL, de lo que se concluye $DE = EB$, o lo que es lo mismo que E es el punto medio del DB.

Como A es el punto medio de CD y B es el vértice opuesto a CD de ΔCDB, entonces BA es mediana. Análogamente como E es el punto medio de DB, CE es mediana de ΔCDB y la mediana CE divide al segmento BA en razón $\frac{1}{2}$ y por lo tanto $AF = \frac{1}{3}AB$.

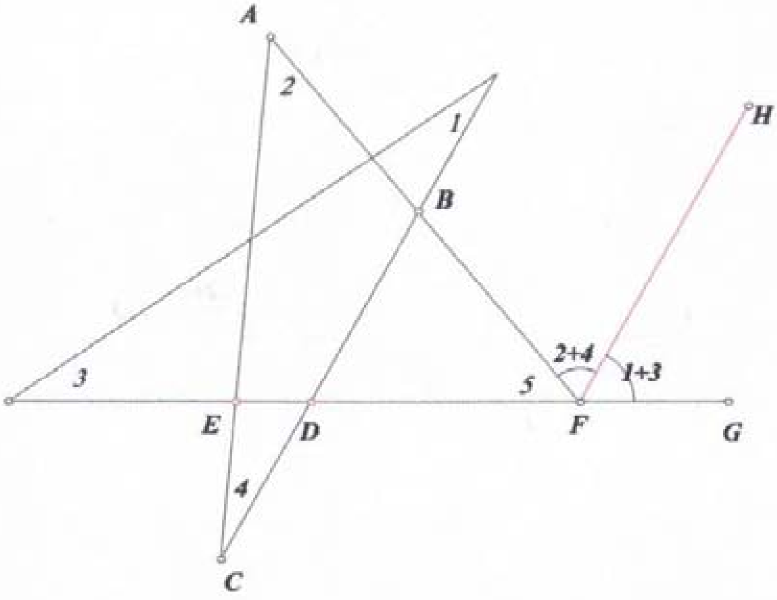




LOS ÁNGULOS DE LOS VÉRTICES DE UNA ESTRELLA SUMAN 180°



EXPLICACIÓN:



Prolongemos a EF hasta el punto G y tracemos una paralela FH a DB que pase por el punto F.

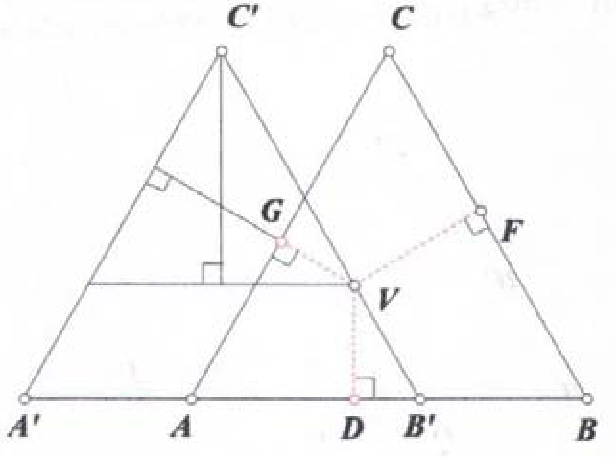
Tenemos que $\angle FDB = 1+3$ pues son los ángulos no adyacentes a $\angle BDE$ y $1+3 = \angle GFH$ pues son ángulos correspondientes.

También $\angle FBD = 2+4$ pues son los ángulos no adyacentes a $\angle ABC$ y $2+4 = \angle HFB$ pues son ángulos alternos internos.

Por lo tanto como los angulos $\angle GFB$ y $\angle BFD$ son suplementarios tenemos que:$180° = \angle GFB + \angle BFD = ((1+3)+(2+4))+5 = 1+2+3+4+5.$

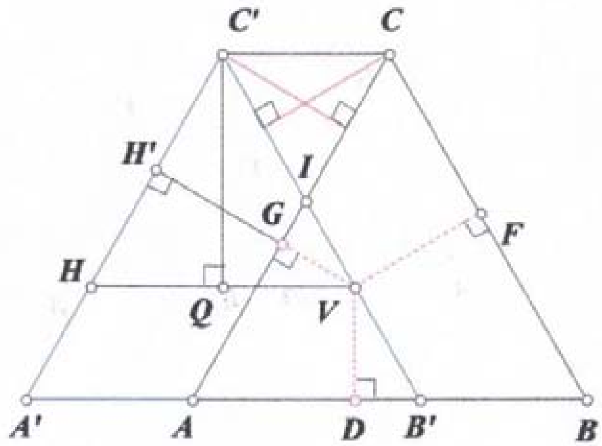
TEOREMA DE VIVIANI

Los segmentos perpendiculares a los lados desde un punto V que se encuentra en la frontera o dentro de un triángulo equilátero ABC suman la altura del triángulo.



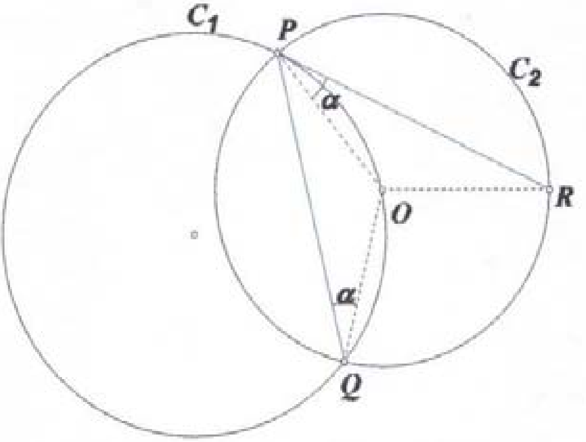
EXPLICACIÓN:

Construimos el triángulo equilátero $A'B'C'$ que sea congruente al triángulo ABC trazando $A'C' \parallel AC$ y $A'B' \parallel AB$, y sobre $B'C'$ tracemos la recta paralela a AB que pase por V y el punto donde se intersecta esta con $A'C'$ le llamamos H, tenemos que el triángulo HVC' es equilátero, luego si trazamos la perpendicular a AB que pase por C', obtenemos que $C'Q = H'V = H'G + GV$ son alturas del triángulo $VC'H$. Como $H'G + GV = VF + GV$ por ser $H'G$ y VF alturas del triángulo equilátero $CC'I$. Por lo tanto $DV + FV + GV = DV + H'G + GV = DV + C'Q$, que es igual a la altura del triángulo ABC.



CUERDAS Y TANGENTES CON LA MISMA LONGITUD

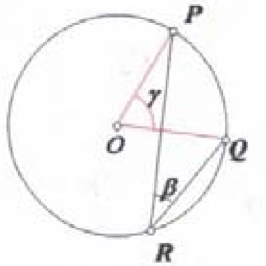
Si una circunferencia C_1 pasa por el centro O de otra circunferencia C_2, la longitud de la cuerda común PQ es de igual longitud que el segmento PR, el cual es tangente a C_1 y cuerda de C_2.

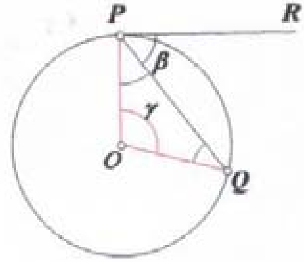


COMENTARIO:

(i) Todo ángulo inscrito $\angle QRP$ en una circunferencia, es igual a la mitad del ángulo central $\angle QOP$ que abarca el mismo arco, es decir $\beta = \frac{1}{2}\gamma$.

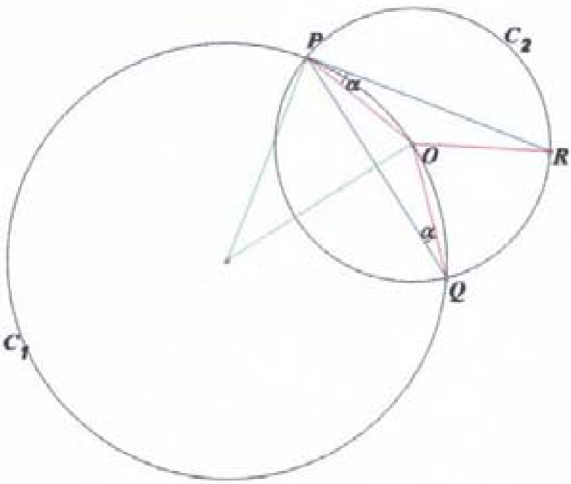
(ii) Todo ángulo semi-inscrito $\angle QPR$ en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central $\angle QOP$ que abarca el mismo arco, es decir $\beta = \frac{1}{2}\gamma$.





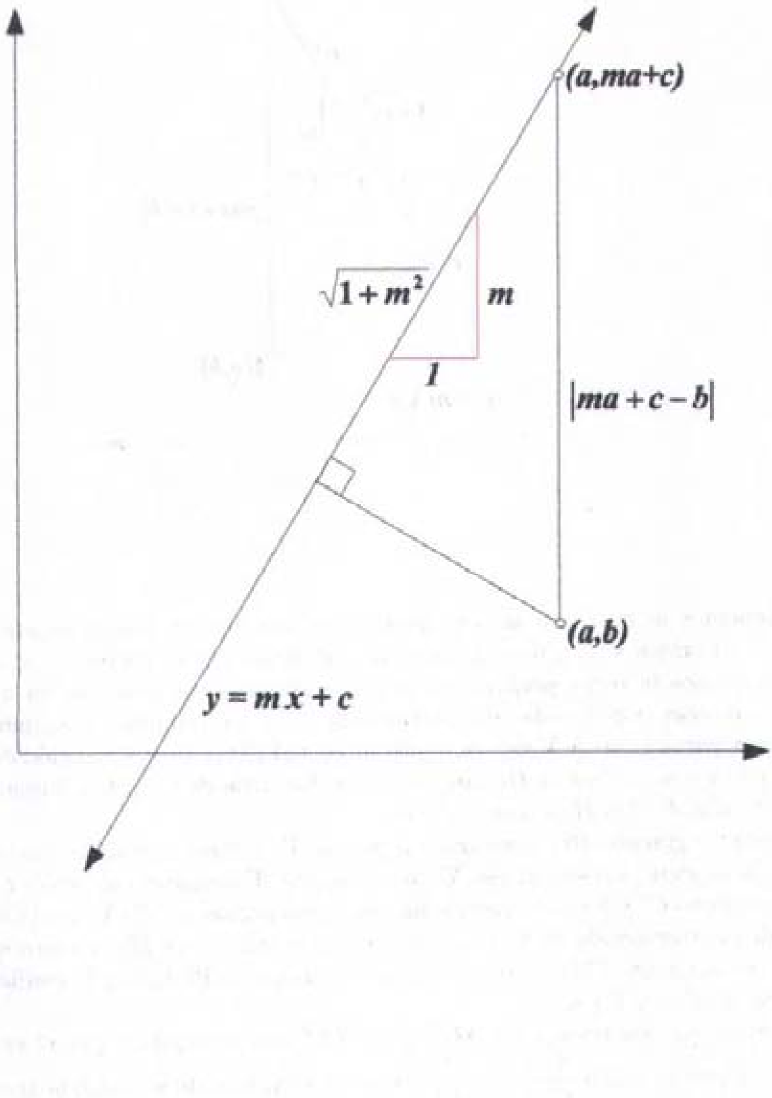
EXPLICACIÓN:

Notemos que por (i) y (ii) el $\angle OQP = \angle OPR = \alpha$. Como OP, OQ y OR son radios entonces los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle ORP$ son isóceles, por lo que $\angle PRO = \angle OPR = \alpha$ y el $\angle OQP = \angle QPO = \alpha$. De lo que resulta el $\triangle OQP$ y $\triangle OPR$ ser congruentes, por lo tanto $PQ = PR$.

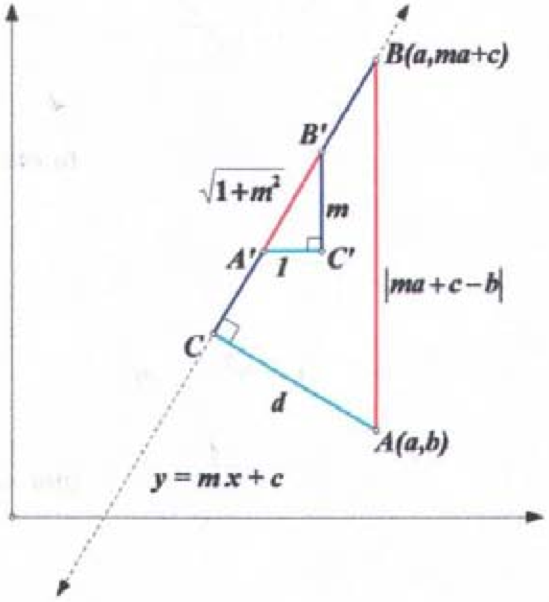


LA DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

$$\frac{d}{1} = \frac{|ma + c - b|}{1 + m^2}$$



EXPLICACIÓN:



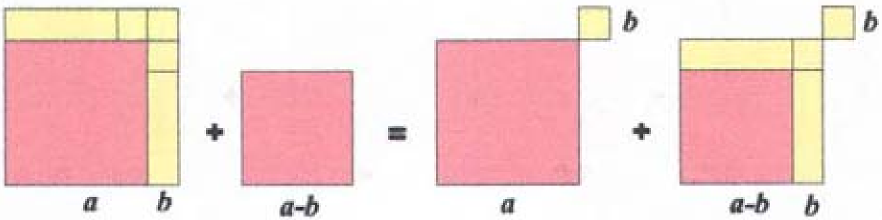
Si tenemos la ecuación de una recta $y = mx + c$ en forma pendiente y ordenada al origen y se quiere calcular la distancia de un punto $A(a, b)$ a esta recta, trazamos la recta perpendicular a $y = mx + c$ que pase por (a, b) y al punto de intersección de estas dos rectas lo llamamos C, también trazamos una recta recta paralela al eje Y que pase por (a, b) y al punto de intersección de ésta con la recta $y = mx + c$ es $B(a, ma + c)$. La distancia de C a A la llamaremos d, la distancia de A a B es $|ma + c - b|$.

Sobre el segmento BC ponemos un punto A', y trazamos un segmento de medida la unidad paralelo al eje X que pase por A' llamando al otro extremo de este segmeto C' y luego trazamos un segmento paraleo al eje Y que pase por C' donde la intersección de éste con la recta $y = mx + c$ es B', es claro que la medida del segmento $C'B'$ es m y usando el teorema de Pitágoras la medida del segmento $A'B' = \sqrt{1 + m^2}$.

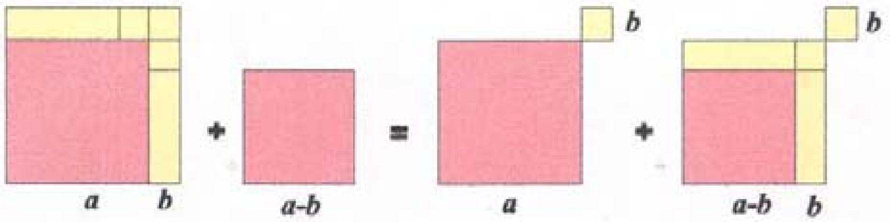
Notemos que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes por el criterio de AAA y por lo tanto $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ que en términos de su medida tenemos $\dfrac{d}{1} = \dfrac{|ma + c - b|}{\sqrt{1 + m^2}}$.

AREAS ALGEBRAICAS

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\left(a^2+b^2\right)$$



EXPLICACIÓN:

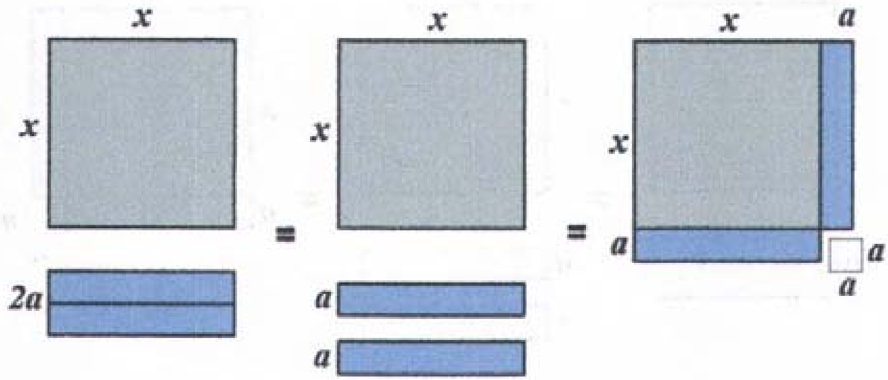


Notemos que el lado izquierdo de la igualdad se tiene que la suma de las áreas $(a+b)^2+(a-b)^2$, donde el cuadrado de área $(a+b)^2$ a su vez está formado por un cuadrado de área a^2 más dos rectángulos de área ab mas un cuadrado de de área b^2, entonces los rectangulos de área ab los colocamos en los lados del cuadrado de área $(a-b)^2$, de tal manera que va a quedar sobrepuesto un cuadrado de área b^2 el cual colocamos en la parte superior derecha del cuadrado con área $[(a-b)+b]^2$.

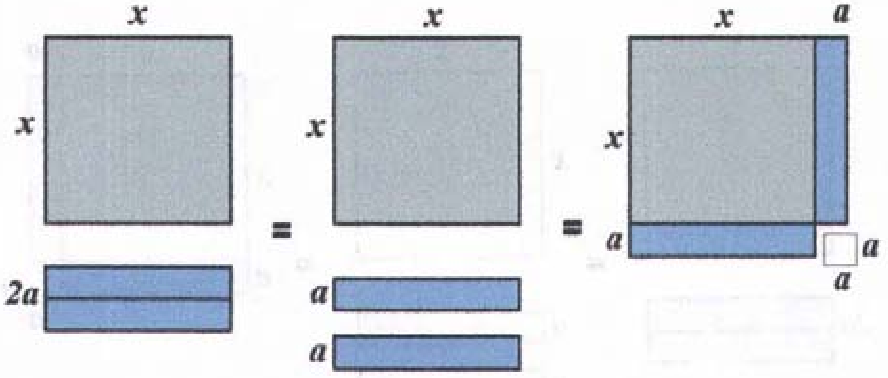
De lo que tenemos $(a+b)^2+(a-b)^2=\left(a^2+b^2\right)+[(a-b)+b]^2+b^2$, que al simplificar nos queda $(a+b)^2+(a-b)^2=\left(a^2+b^2\right)+a^2+b^2=2\left(a^2+b^2\right)$.

COMPLETANDO EL CUADRADO

$$x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$$



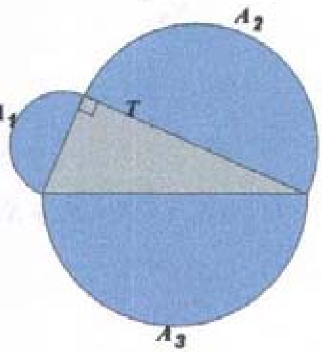
EXPLICACIÓN:



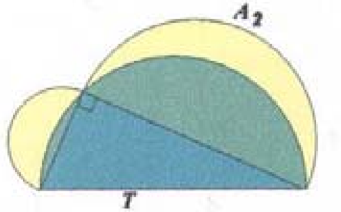
Notemos que el área del primer cuadrado más el área del rectángulo es $x^2 + 2ax$ que es igual al área del cuadrado x^2 más el área de los rectángulos $ax + ax$ que es igual al cuadrado de lado $x + a$ menos el área del cuadrado de lado a que es igual a $(x+a)^2 - a^2$.

Por lo tanto $x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$.

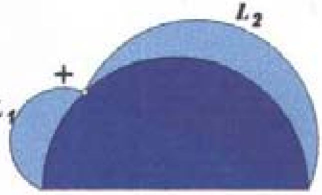
CONSTRUCCIÓN DE DOS LUNAS CUYA SUMA DE SUS ÁREAS ES IGUAL A LA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

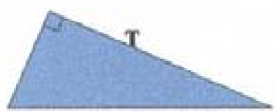


$A_1 + A_2 = A_3$



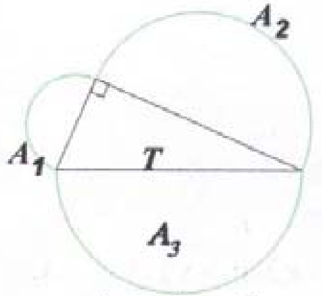
$(L_1 + S_1) + (L_2 + S_2) = T + S_1 + S_2$



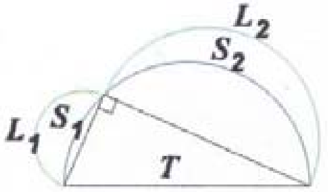


$L_1 + L_2 = T$

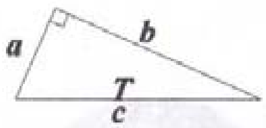
EXPLICACIÓN:



$$A_1 + A_2 = A_3$$



$$(L_1 + S_1) + (L_2 + S_2) = T + S_1 + S_2$$



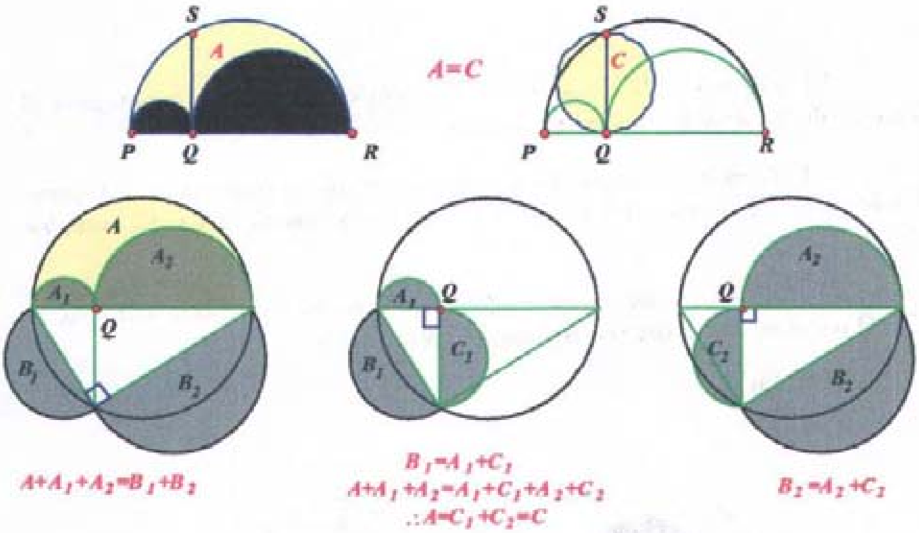
$$L_1 + L_2 = T$$

$$A_1 + A_2 = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2^2}\left(a^2+b^2\right)\right] = \frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = A_3,$$ Por lo tanto $A_1 + A_2 = A_3$

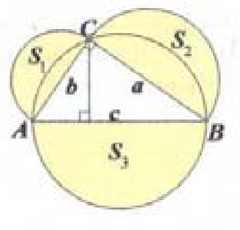
Se puede ver facilmente que $A_1 = L_1 + S_1$, $A_2 = L_2 + S_2$ y que $A_3 = T+S_1+S_2$, es decir $(L_1 + S_1)+(L_2 + S_2) = T+S_1+S_2$, por lo tanto $L_1+L_2 = T$.

EL ÁREA DE UN ÁRBELO

Teorema: Si P, Q y R tres puntos sobre una linea, donde Q se encuentra entre P y R. Tres semicirculos son dibujados arriba de la linea con diámetros PQ, QR y PR, un árbelo es una figura acotada por estos tres semi-circulos. Dibuja la recta QS perpendicular a PR que pase por Q. El área A del árbelo es igual al área C del circulo con diámetro QS.



COMENTARIOS:

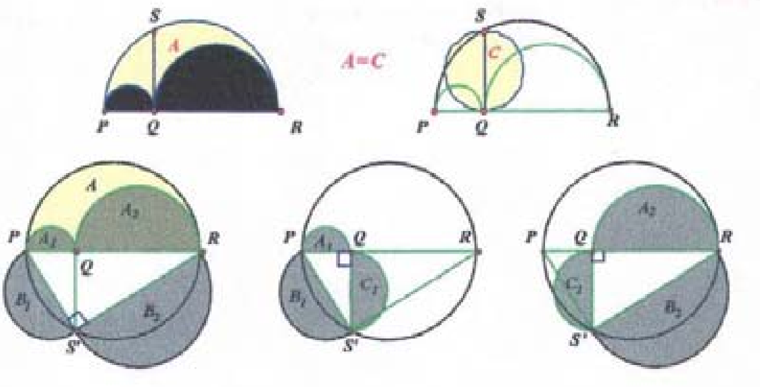


(*i*) El triángulo ABC inscrito en una circunferencia con hipotenusa el diámetro de la circunferncia es rectángulo.

(*ii*) Si ABC es un triángulo rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$. Entonces, las áreas de los semi-circulos S_1, S_2 y S_3 cumplen $S_1 + S_2 = S_3$.

(*iii*) Si CD es altura del trángulo ABC, entonces, los triángulos ABC, ACD y CBD resultan ser triángulos rectángulos semejantes.

EXPLICACIÓN:

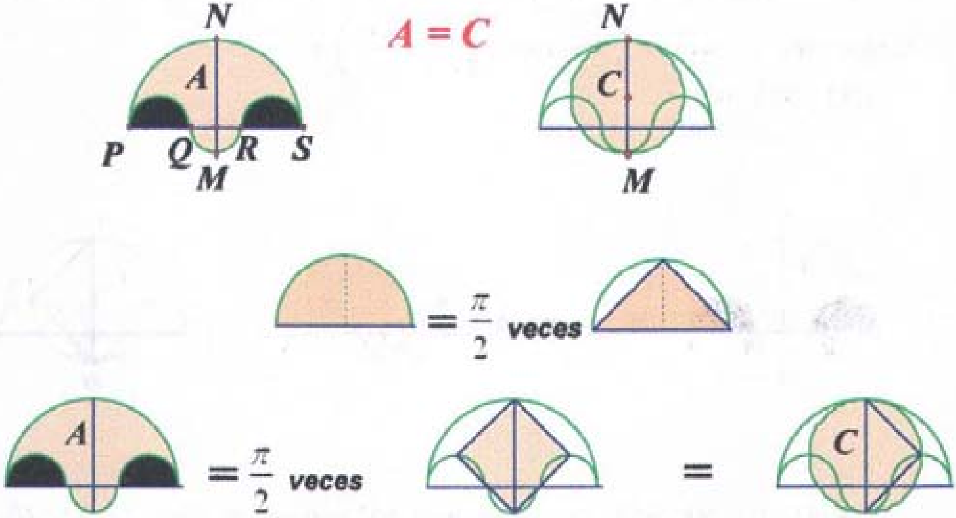


Si prolongamos al segmento SQ y a la intersección con la circunferencia la llamamos S' el triángulo RPS' es rectángulo y por el comentario (*ii*) y (*iii*) se cumple $B_1 + B_2 = A + A_1 + A_2$ pero a su vez $B_1 = A_1 + C_1$ y $B_2 = A_2 + C_2$ es decir $A_1 + C_1 + A_2 + C_2 = A + A_1 + A_2$ y simplificando tenemos $C_1 + C_2 = A$ pero $C_1 + C_2 = C$.

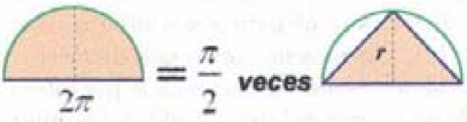
Por lo tanto, $C = A$.

EL ÁREA DE UN SALINÓN

Teorema:Si P, Q, R y S cuatro puntos sobre una linea respectivamente son tales que $PQ = RS$. Los semicirculos son dibujados arriba de la linea con diámetro PQ, RS y PS, y otro semicirculo con diámetro QR es dibujado por abajo de la linea, Un salinón es una figura acotada por estos cuatro semi-circulos. Si el eje de simetría de un salinón es intersectado en los puntos M y N. Entonces, el área A del salinón es igual al área del círculo C de diametro MN.

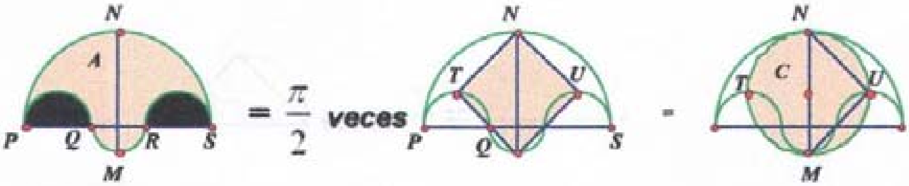


COMENTARIO:



El área del semi-circulo es $\frac{\pi r^2}{2}$ y el área del triángulo es $\frac{2r\,(r)}{2}$ que al multiplicar ésta última por $\frac{\pi}{2}$ tenemos $\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{2r\,(r)}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{2}$.

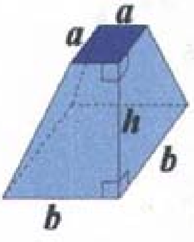
EXPLICACIÓN:



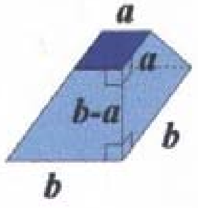
Por el comentario las áreas de la semi-circunferencias con diámetro PQ, QR, RS y PS son iguales a $\frac{\pi}{2}$ por las áreas de los triángulos PQT, RQM, RSU y PSN, respectivamente, de igual manera $\frac{\pi}{2}$ por el área del triángulo NMU, es igual al área de la semi-circunferencia con diámetro NM.

Por lo tanto el área del salinón A es igual al área de la circunferencia C de diámetro NM.

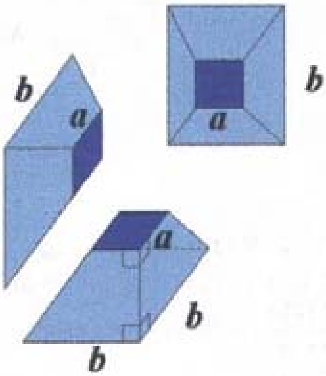
$$V(P_1) = \frac{h}{b-a} V(P_2) = \frac{h}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)\right] = \frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$$



P_1

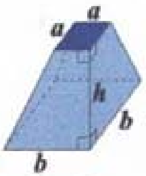


P_2

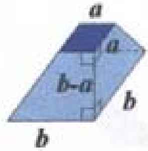


$3P_2$

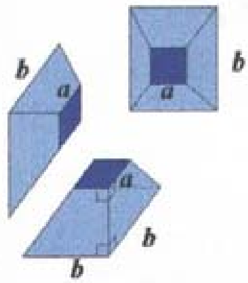
EXPLICACIÓN:



P_1



P_2



$3P_2$

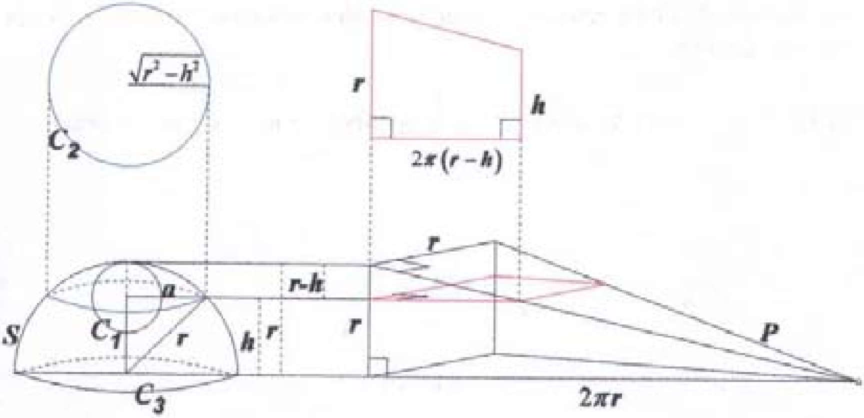
El volúmen de P_1 es $V(P_1) = Ch$ donde C depende de a y b.

El volúmen de P_2 es $V(P_1) = C(b-a)$ donde C es la misma que la anterior, por lo que $C = \dfrac{V(P_2)}{b-a}$, entonces, $V(P_1) = \dfrac{V(P_2)}{b-a}h = \dfrac{h}{b-a}V(P_2)$, pero $V(P_2) = \dfrac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$ por la construcción que se hizo.

Por lo tanto $V(P_1) = \dfrac{h}{b-a}\left[\dfrac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)\right] = \dfrac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right).$

EL VOLUMEN DE UN HEMISFERIO VÍA EL PRINCIPIO DE CAVALIERI

$$V_S = V_P = \frac{1}{3}r^2 2\pi r = \frac{2}{3}r^3$$

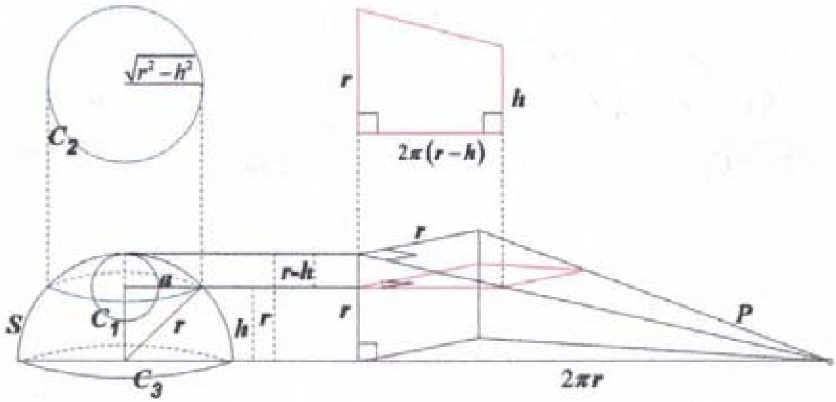


COMENTARIO:

(i) Principio de Cavalieri:

Si dos cuerpos S y P dispuestos entre dos planos paralelos, son tales que la sección que se obtiene al cortar dichos cuerpos por un plano paralelo a S y P resultan figuras de áreas iguales; entonces los dos volúmenes de estos cuerpos son también iguales.

(ii) El volumen de una piramide es $\frac{1}{3}$ del área de la base por la altura.



EXPLICACIÓN:

Para ver cuanto mide el radio a del circulo que resulta de cortar un hemisferio de radio r a la altura h, usamos el teorema de Pitágoras, para obtener es $a = \sqrt{r^2 - h^2}$, entonces dicho circulo tiene área $\pi\left(\sqrt{r^2-h^2}\right)^2 = \pi\left(r^2 - h^2\right)$. Construimos una pirámide con base cuadrada de área r^2 y con altura $2\pi r$, si cortamos a la misma altura h la pirámide y usando semajanza de triángulos tenemos un trapecio de área $\frac{1}{2}2\pi\left(r-h\right)\left(r+h\right) = \pi\left(r^2-h^2\right)$.

Por lo tanto usando el principio de Cavalier tenemos que $V_S = V_P = \frac{1}{3}r^2\left(2\pi r\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$.

OBSERVACIÓN:

De aquí se puede concluir entonces que el volumen de una esfera de radio r es igual a $2V_S = 2\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

S e r i e s

- **Series geométricas**

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$,Warren Page.

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{1}{2}$, Elizabeth M. Markham.

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}$, Rick Mabry.

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}$, Elizabeth M Markham.

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{1}{4}$, Elizabeth M Markham.

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}$, Benjamín G. Klein y Irl C. Bivens.

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^n=\frac{a}{1-r}$, J. H. Webb.

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^{2n}=\frac{1}{1-r^2}$, Sunday A. Ajose.

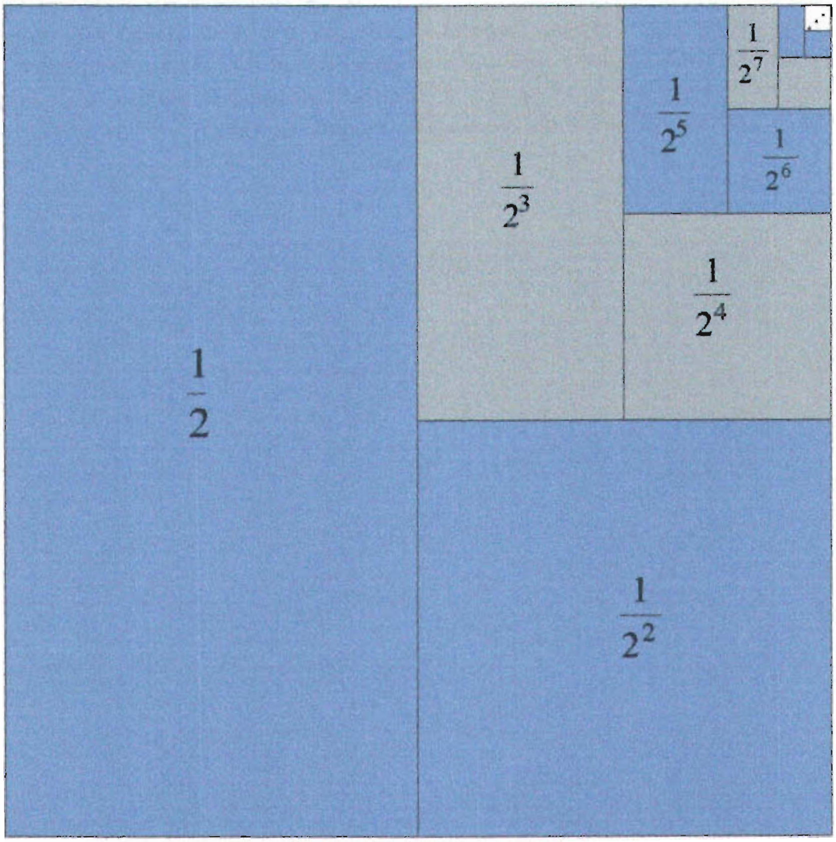
  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r\left(r-1\right)^n=1,$, Warren Page.

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nr^n=\frac{r}{\left(1-r\right)^2}, 0<r<1$, Stuart G. Swain.

- **La regla trapezoidal** (para funciones crecientes)

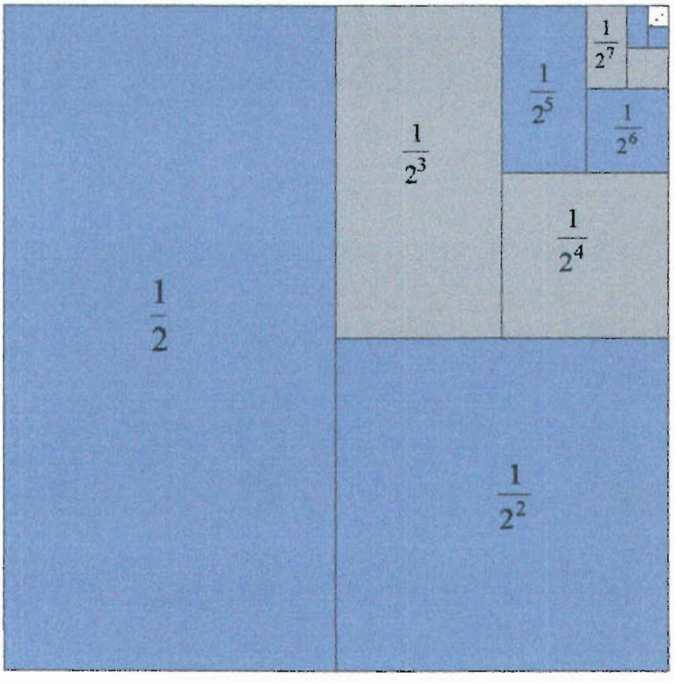
  Jesús Urías.

LA SERIE GEOMÉTRICA $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$



EXPLICACIÓN:

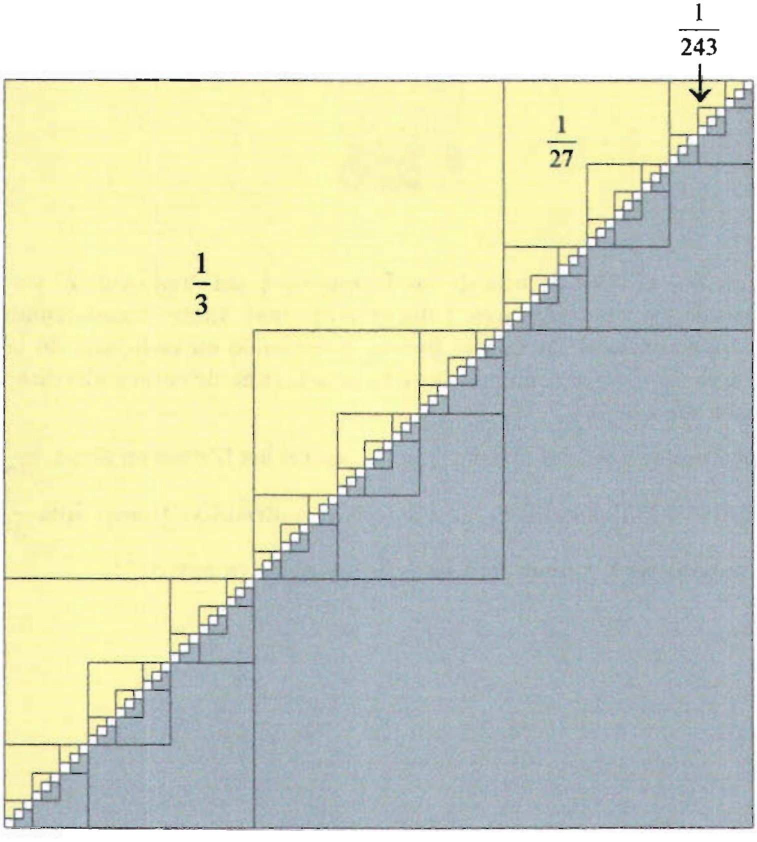
Tomamos un cuadrado de área 1. Un primer proceso consiste en que tracemos dos rectángulos de área $(1)\left(\frac{1}{2}\right)$ uniendo los puntos medios de los lados superior e inferior, y después tomamos el rectángulo de la derecha y unir los puntos medios de los lados derecho e izquierdo, de tal forma que obtenemos dos cuadrados de área $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^2}$. En el cuadrado superior volvemos a repetir el proceso, y así una infinidad de veces como sugiere la figura:



La suma de las áreas obtenidas después de varios pasos es: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}$ y quedando sin dividir un cuadrado de área $\frac{1}{2^{2n}}$.

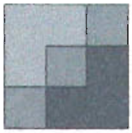
Por lo que, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}} = 1 - \frac{1}{2^{2n}}$.

Y esto claramente sugiere que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.


$\frac{1}{243}$
$\frac{1}{27}$
$\frac{1}{3}$

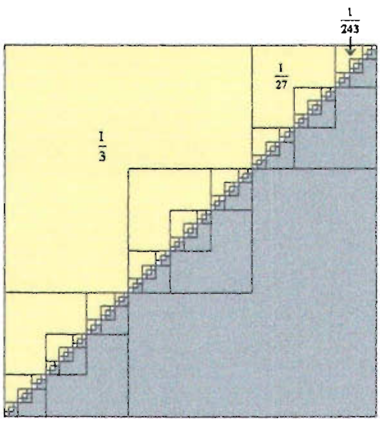
EXPLICACIÓN:

Dividimos un cuadrado de área 1 en tres partes de igual área, dos figuras en forma de L y una diagonal de tres cuadrados, como lo muestra la siguiente figura.



Tenemos que el área de una de las L, que es $\frac{1}{3}$ del área original y el área de cada uno de los cuadraditos es $\frac{1}{9}$ del área original. Luego a cada cuadradito diagonal lo dividimos de la misma forma, obteniendo en cada una de las tres partes un área de $\frac{1}{27}$, y si tomamos las 3 figuras L (una de cada cudradito) estas partes tienen área $3\left(\frac{1}{27}\right)$.

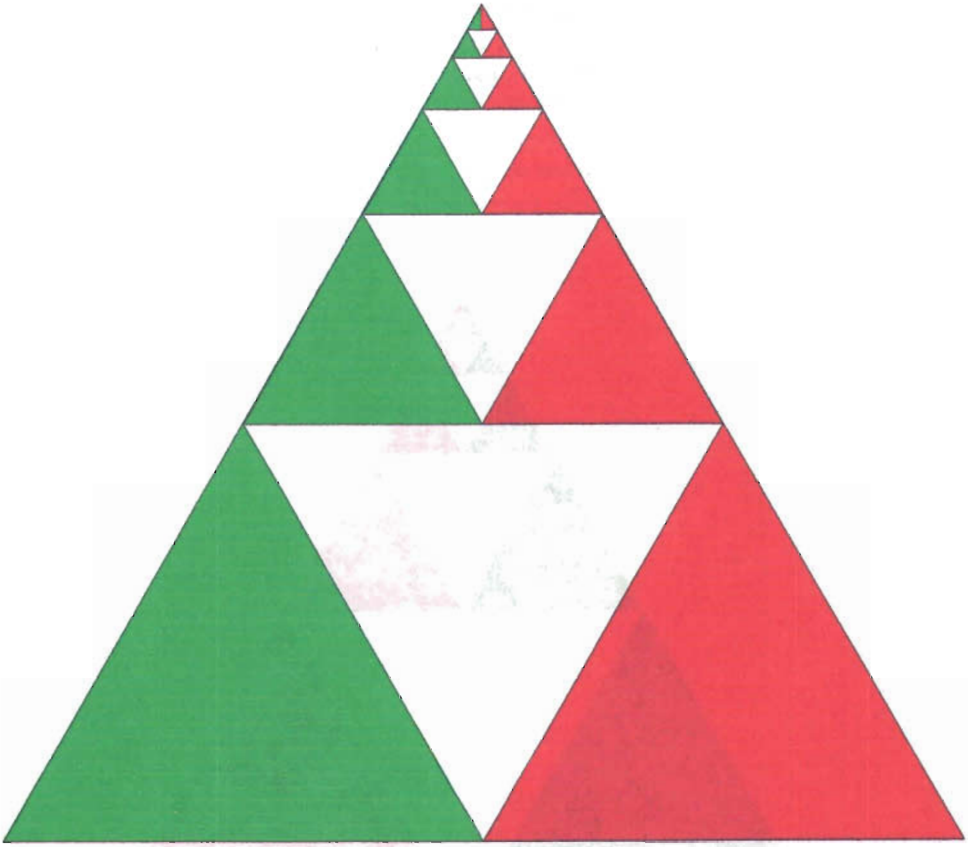
Este proceso se puede continuar y en el paso n las L's tienen áreas $\dfrac{1}{3^{2n-1}}$ (y hay tres de éstas). Los lados de uno de estos cuadraditos, tienen área $\dfrac{1}{3^{2n}}$, en el siguiente paso las L's tendrán área $\dfrac{1}{3^{2n+1}}$ y de estos hay 3^{n+1}.



Tenemos que :

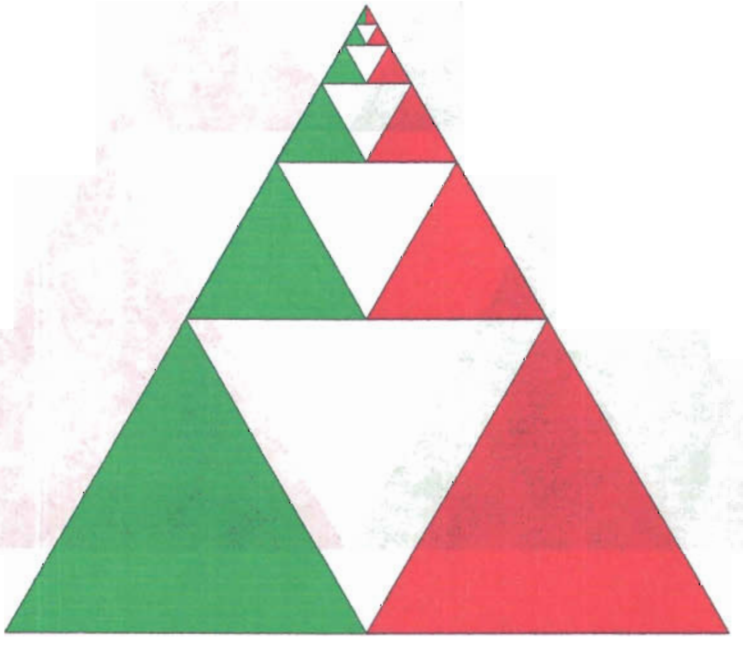
$2\left(\dfrac{1}{3}+3\dfrac{1}{27}+9\dfrac{1}{243}+\cdots\right)=1$, que será el área total del cuadrado original, entonces $2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1$. Por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$.

LA SERIE GEOMÉTRICA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$



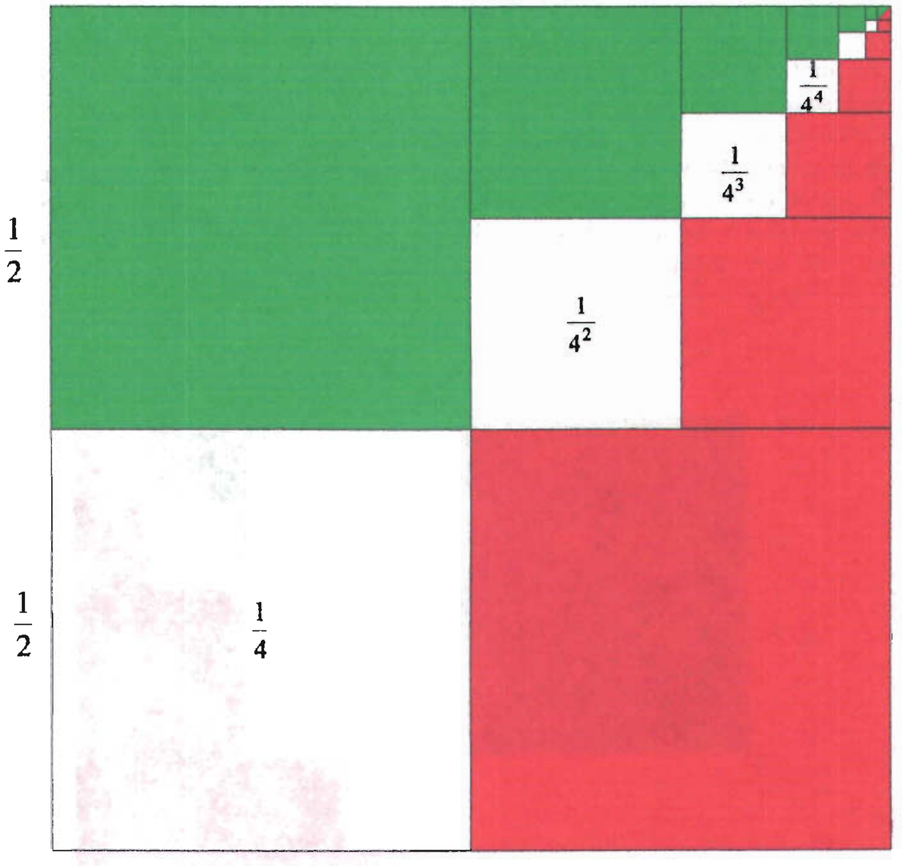
EXPLICACIÓN:

Tomamos los puntos medios de un triángulo equilátero de área 1, formamos cuatro triángulos equiláteros de igual área uno de los triángulos se colorea con verde, otro de blanco y el tercero de rojo, y en el restante de esos cuatro triángulos equiláteros, el superior en la figura, volvemos a tomar los puntos medios y obtenemos cuatro triángulos con la misma área y asi sucesivamente. Si tomamos un tríangulo de los tres restantes de la primera subdivisión y a éste agregamos un triángulo de los tres restantes de la segunda subdivisión y así sucesivamente como lo muestra la figura, tenemos que la suma de las áreas de los triángulos que se tomaron es decir de cada color es $\frac{1}{3}$ del área total.



$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{3}$$

LA SERIE GEOMETRICA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$

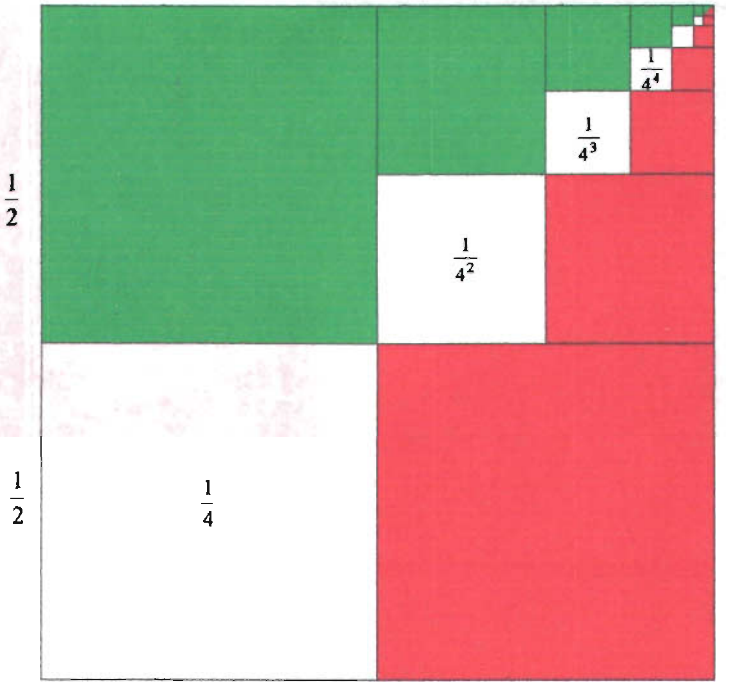


EXPLICACIÓN:

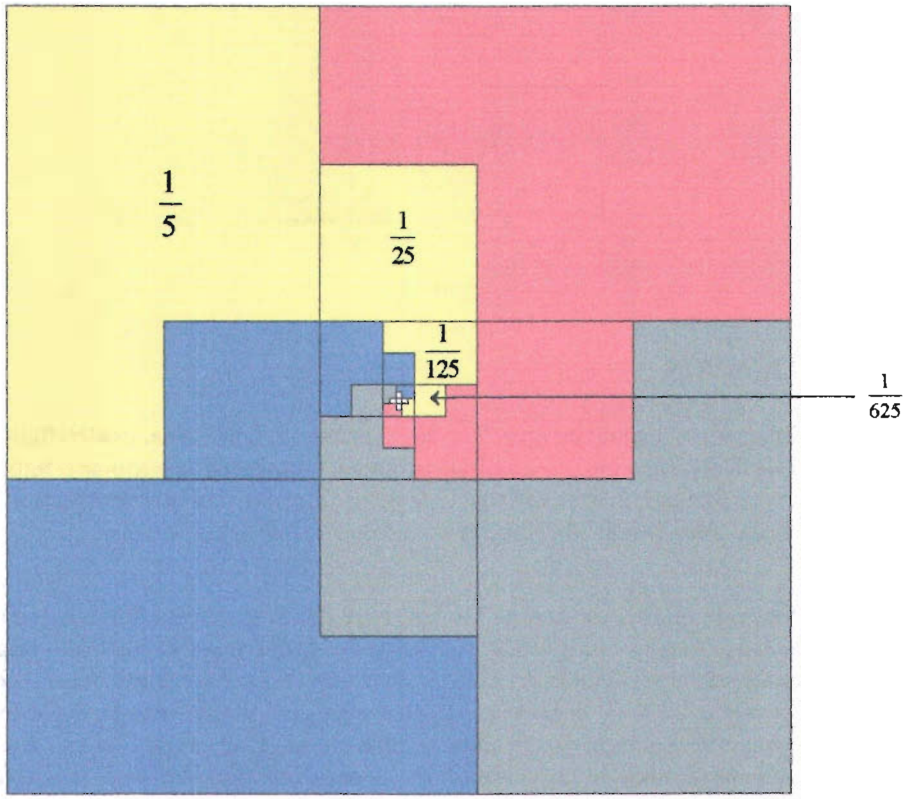
Tomamos los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 1 y formamos cuatro cuadrados de igual área (igual a $\frac{1}{4}$ del área total original). A tres de estos los coloreamos uno de verde, uno de blanco y el otro rojo.

Tomamos el cuadrado no coloreado, el superior derecho y volvamos a tomar los puntos medios de los lados de este último obteniendo cuatro cuadrados con la misma área ($\frac{1}{4^2}$ del área original) de nuevo a tres los coloreamos y al cuarto lo dividimos y así sucesivamente. Si tomamos un cuadrado de los tres restantes de la primera subdivisión y a éste agregamos un cuadrado de los tre restantes de la segunda subdivisión y así sucesivamente como lo muestra la figura, tenemos que la suma de las áreas de los cuadrados que se tomaron, es decir de cada color es $\frac{1}{3}$ del área total.

Luego, $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{1}{3}$.



LA SERIE GEOMÉTRICA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{4}$



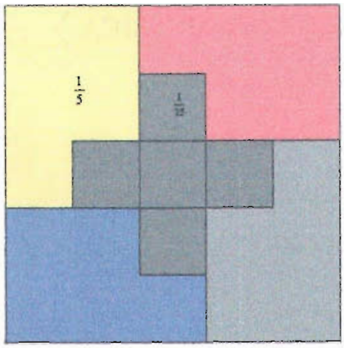


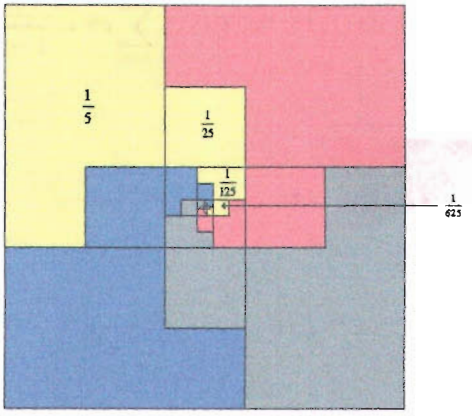
Figure 1:

EXPLICACIÓN:

Dividimos un cuadrado de área 1 en cinco partes de igual área, cuatro figuras en forma de L y una cruz de cuadrados, como lo muestra la siguiente figura, cada figura se forma con 5 cuadritos de área $\frac{1}{25}$. A cada una de estas figuras le asignamos un color (amarillo, rosa, gris claro, gris obscuro y azul).

Tenemos que el área de una de las L's, es $\frac{1}{5}$ del área del cuadrado original, además el área de cada cuadrado de la cruz es de $\frac{1}{25}$ del área del cuadrado original y al cuadrado central de la cruz lo dividimos de la misma forma, obteniendo cinco partes de igual área, cuatro figuras en forma de L y una cruz de 5 cuadrados. Nuevamente tenemos que el área de una de las L's, es $\frac{1}{125}$ del cuadrado original, además el área de un cuadrado de la cruz que tiene un área de $\frac{1}{625}$ del cuadrado original , y así sucesivamente como se muestra en la siguiente figura.

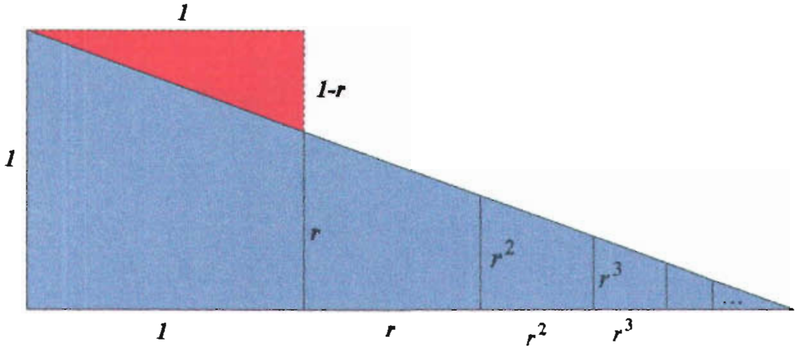
Luego habremos hecho dos cosas, una dividir el cuadrado en 4 partes iguales (las que tiene el mismo color) y cada parte se ha formado de la unión de figuras de áreas $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \cdots$ etc.



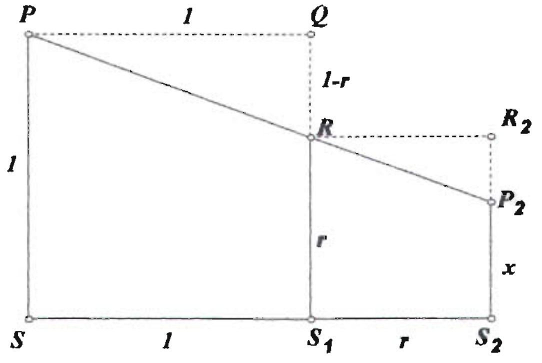
Lo que nos suguiere que:

$4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots\right) = 1$, que es el área total del cuadrado original, entonces $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n} = 1$. Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{4}$.

LA SERIE GEOMETRICA $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

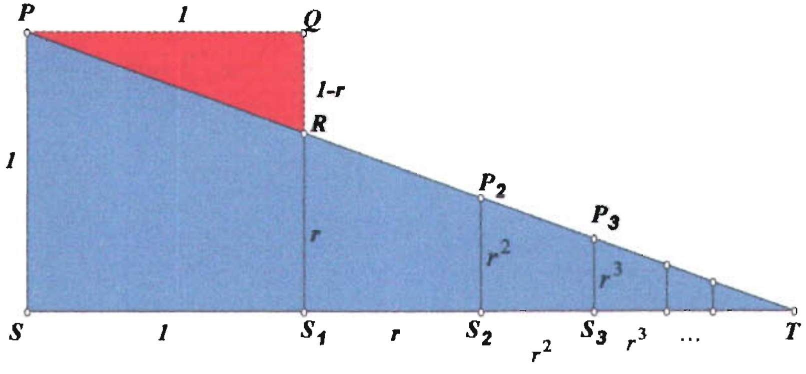


EXPLICACIÓN:



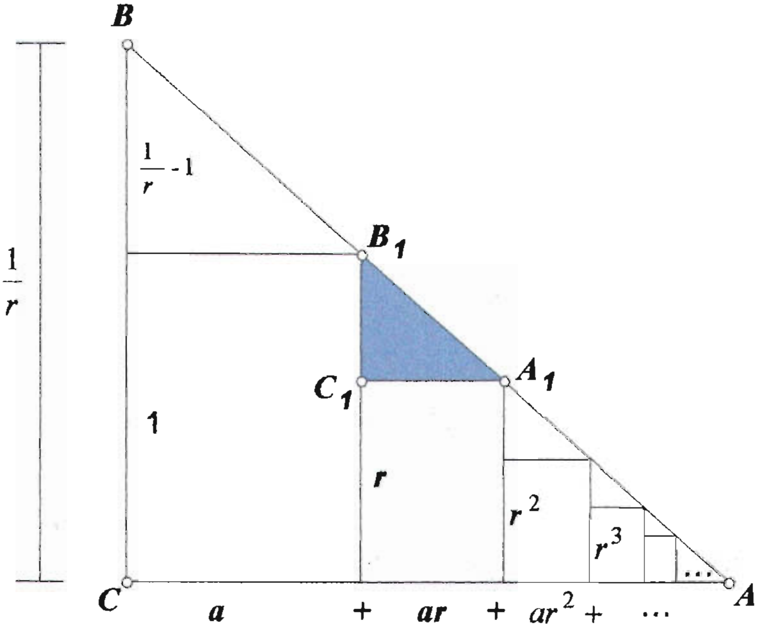
Como los triángulos PQR y RR_2P_2 son semejantes se tiene que: $\dfrac{QR}{PQ} = \dfrac{R_2P_2}{RR_2}$, luego $\dfrac{1-r}{1} = \dfrac{r-x}{r} = 1 - \dfrac{x}{r}$ por lo que $x = r^2$.

Ahora se procede análogamente, cada vez que se ha encontrado el valor de un segmento $P_nS_n = r^n$, se traza S_{n+1} de manera que $S_nS_{n+1} = r^n$ y se construye el P_{n+1}. No es difícil ver ahora que $P_{n+1}S_{n+1} = r^{n+1}$ (Usando la semejanza de triángulos $P_nR_{n+1}P_{n+1}$ y $P_{n+1}R_{n+2}P_{n+2}$).



Como los triángulos TSP y PQR son semejantes se cumple $\dfrac{TS}{SP} = \dfrac{PQ}{QR}$, por lo que nos da $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-r}$.

LA SERIE GEOMÉTRICA, $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$



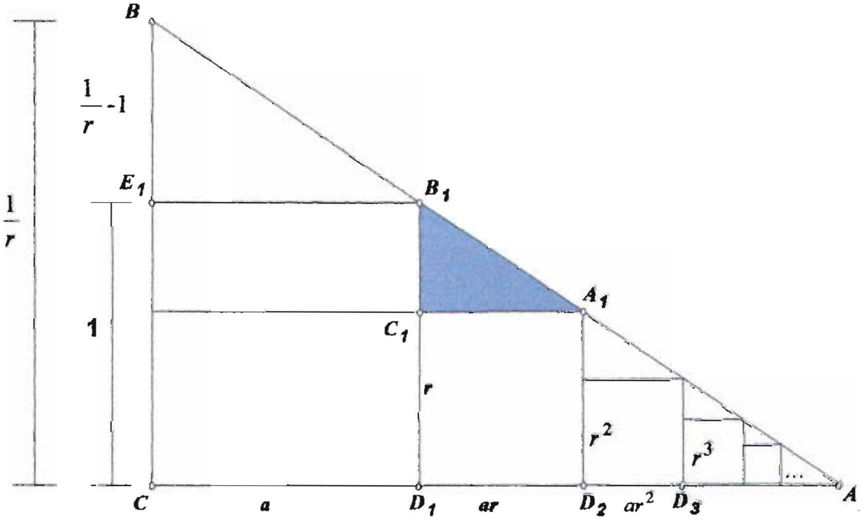
La semejanza entre ABC y $A_1B_1C_1$ nos muestra que: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$.

EXPLICACIÓN:

Tomemos un valor r en el intervalo $(0,1)$. Consideremos un punto C_1 sobre B_1D_1 de manera que $D_1C_1 = r$, trazamos una recta paralela a E_1B_1 que pase por C_1, entonces tenemos que los triángulos E_1B_1B y $C_1A_1B_1$ son semejantes, por lo que $\dfrac{C_1A_1}{1-r} = \dfrac{a}{\frac{1}{r}-1}$.

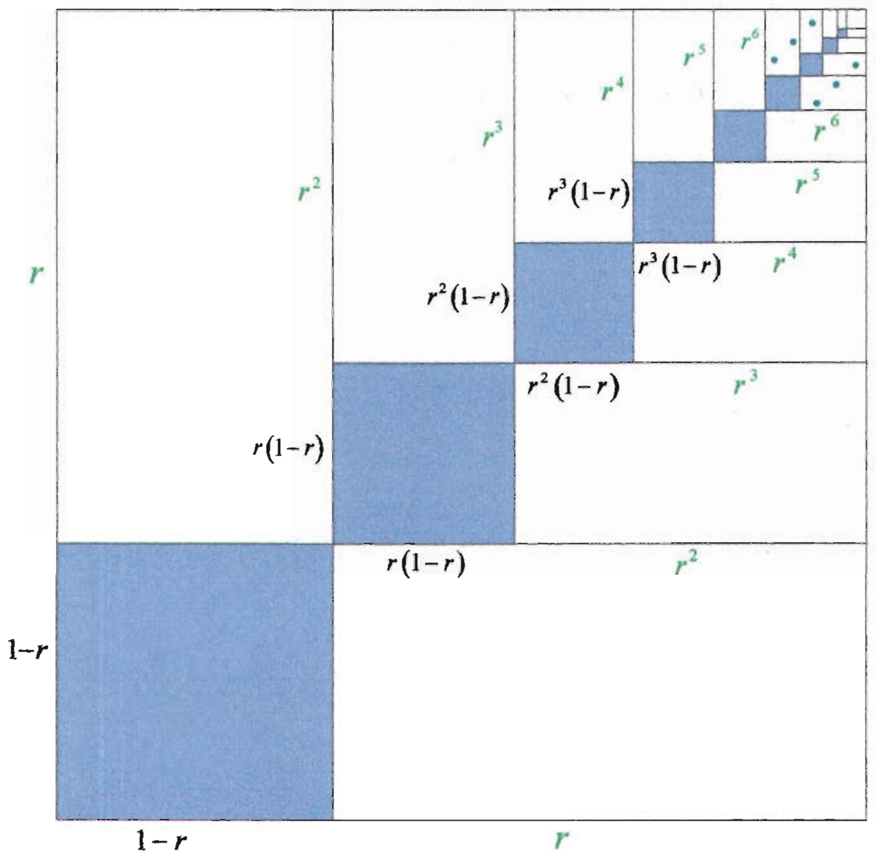
Por lo que $D_1D_2 = C_1A_1 = ar$, como $B_1D_1 = 1$ y $D_1C_1 = r$, entonces $B_1C_1 = 1-r$.

Con la misma proporción r tendremos que $D_2D_3 = ar^2$, $D_3D_4 = ar^3, \ldots$



Como $AC = a+ar+ar^2+\cdots$, $CB = \dfrac{1}{r}$ y los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son semejantes, se cumple que: $\dfrac{a+ar+ar^2+\cdots}{\frac{1}{r}} = \dfrac{ar}{1-r}$, luego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$.

LA SERIE GEOMETRICA $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} = \frac{1}{1-r^2}$



$$1 + r^2 + r^4 + \cdots = \frac{1}{1-r^2}$$

$$(1-r)^2 + r^2(1-r)^2 + r^4(1-r)^2 + \cdots = \frac{(1-r)^2}{(1-r)^2 + 2r(1-r)} = \frac{(1-r)^2}{1-r^2}$$

EXPLICACIÓN:

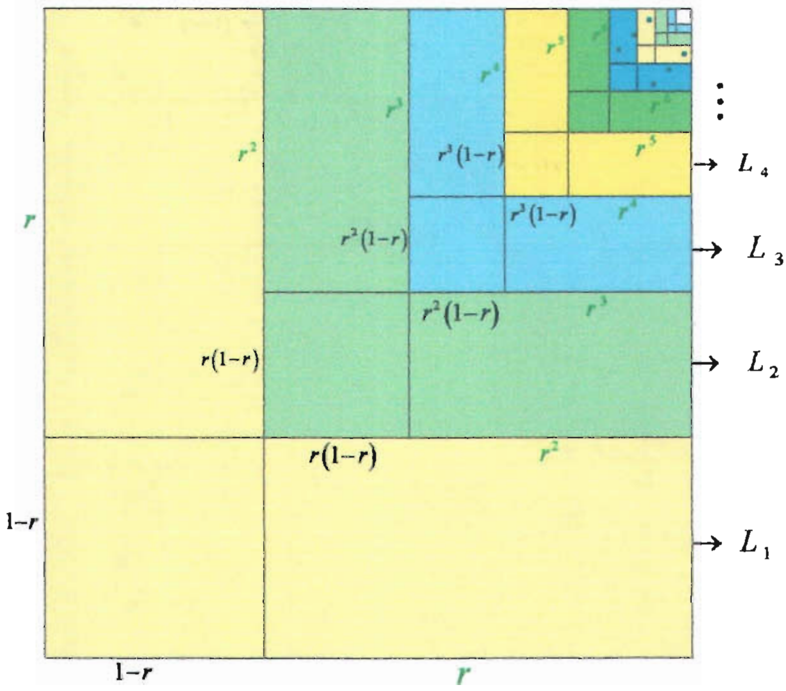
Al descomponer el cuadrado de área 1 en figuras en formas de L's, tenemos que: área $L_1 = (1-r)^2 + 2r(1-r)$,

área de $L_2 = r^2(1-r)^2 + 2r^2r(1-r) = r^2\left[(1-r)^2 + 2r(1-r)\right] = r^2 L_1$, repitiendo lo anterior tenemos que área $L_3 = r^4 L_1$ y así sucesivamente por lo que el área del cuadrado de lado 1 se puede escribir como sigue:

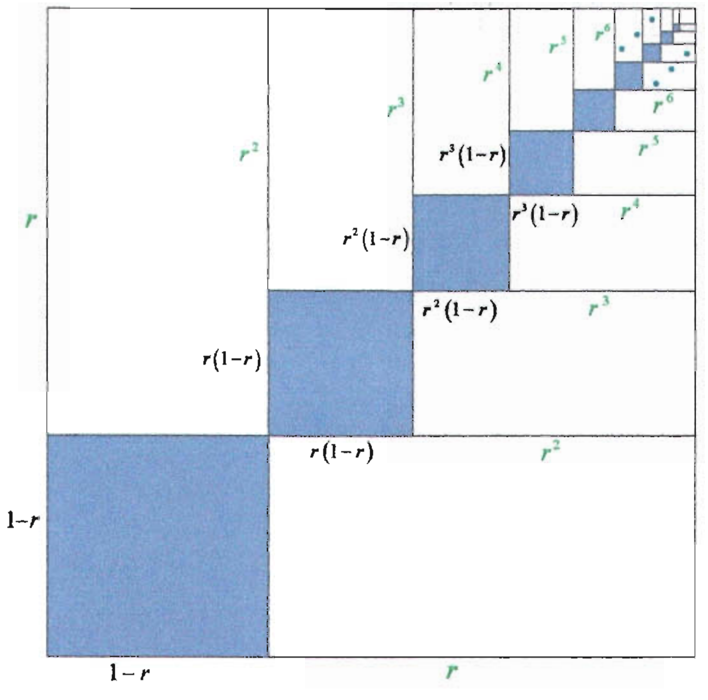
$1^2 =$**área** L_1+**área** L_2+**área** $L_3 + \cdots$

$= (\text{área } L_1)\left(1 + r^2 + r^4 + \cdots\right)$

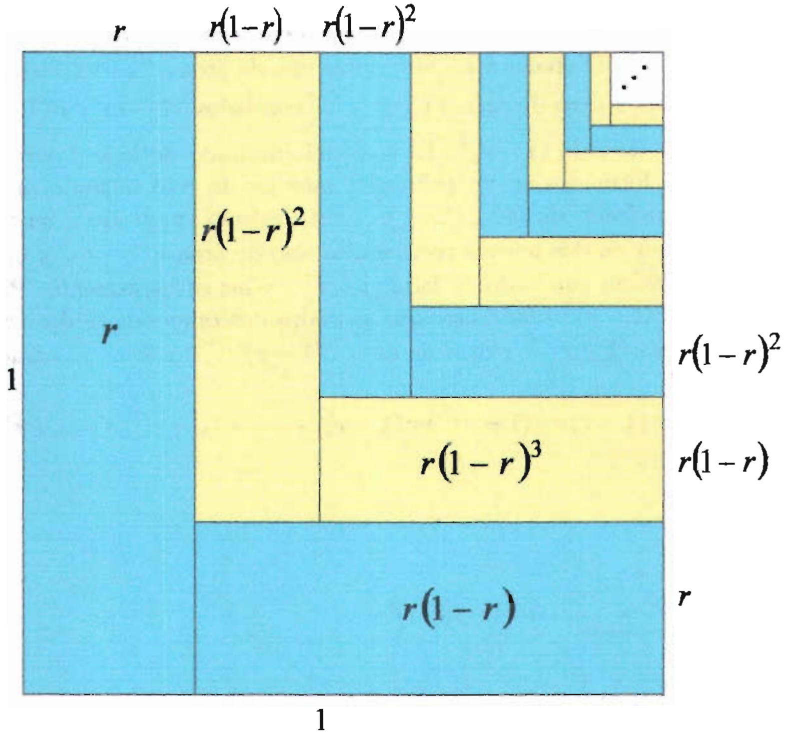
$$\therefore 1 + r^2 + r^4 + \cdots = \frac{1}{\text{área } L_1} = \frac{1}{(1-r)^2 + 2r(1-r)} = \frac{1}{1-r^2}.$$



Por otro lado la suma de las área sombredas de azules es: $(1-r)^2 + r^2(1-r)^2 + r^4(1-r)^2 + \cdots = (1-r)^2(1+r^2+r^4+\cdots)$ que sustituyendo lo anterior tenemos $(1-r)^2 + r^2(1-r)^2 + r^4(1-r)^2 + \cdots = (1-r)^2\left(\frac{1}{\text{área } L_1}\right) = \frac{(1-r)^2}{(1-r)^2 + 2r(1-r)} = \frac{(1-r)^2}{1-r^2}$.



LA SERIE GEOMÉTRICA $\sum_{n=0}^{\infty} r\,(1-r)^n = 1$

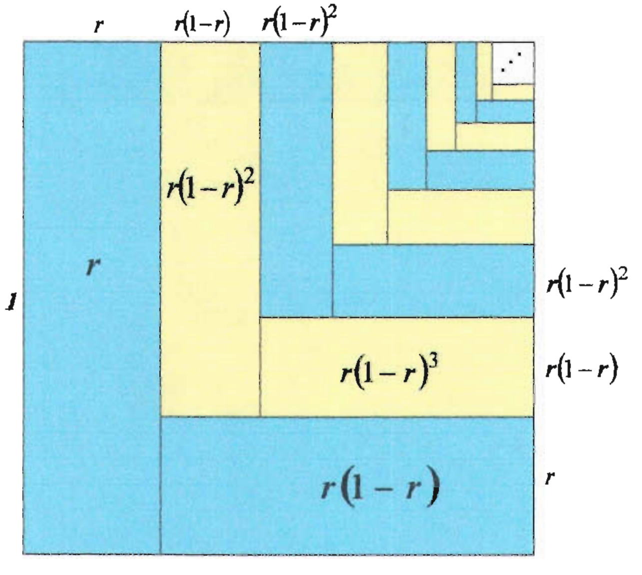


EXPLICACIÓN:

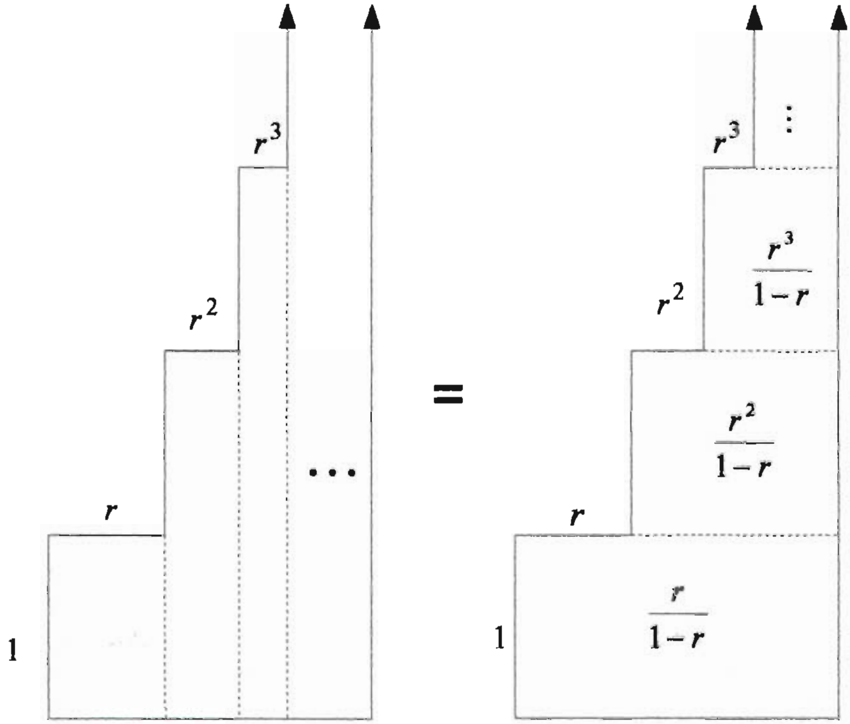
Formemos un rectángulo de área r (con lados 1 y r) y otro de área $r(1-r)$ (con lados r y $(1-r)$), el área del cuadrado de lado 1 es igual a la suma del área de estos dos rectángulos más el área del cuadrado de lado $(1-r)$, es decir $1^2 = r + r(1-r) + (1-r)^2$.

Si al cuadrado de lado $(1-r)$ lo descomponemos en la misma forma, con dos rectángulos proporcionales a los anteriores uno de área $r(1-r)^2$ (con lados $(1-r)$ y $r(1-r)$) y otro de área $r(1-r)^3$ $\left(\text{con lados } (1-r) \text{ y } r(1-r)^2\right)$ mas un cuadrado de lado $(1-r)^2$. El área del cuadrado de lado 1 será igual a los rectángulos formados en un principio, más los de este segundo proceso, mas un nuevo cuadrado de lado $(1-r)^2$. Este último cuadrado a su vez se podrá descomponer en dos nuevos rectángulos uno de área $r(1-r)^4$ y otro de área $r(1-r)^5$ más un cuadrado de lado $(1-r)^3$, y así sucesivamente. Para el cuadrado de lado $(1-r)^n$ tendremos que se podra descomponer en dos rectángulos uno de área $r(1-r)^{2n}$ y otro de área $r(1-r)^{2n+1}$ más un cuadrado de área $(1-r)^{2(n+1)}$.

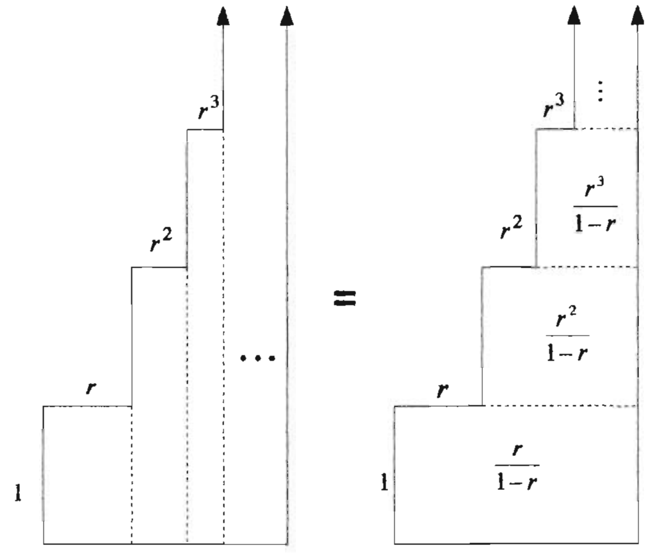
Luego $1 = r + r(1-r) + r(1-r)^2 + r(1-r)^3 + \cdots + r(1-r)^{2n} + r(1-r)^{2n+1} + (1-r)^{2(n+1)} + \cdots$.



ESCALERA DE GABRIEL $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$ para $0 < r < 1$



EXPLICACIÓN:



Notemos que la primera escalera esta formada por rectángulos vérticales y que la suma de las áreas de estos rectángulos vérticales es: $(1)\,r+(2)\,r^2+(3)\,r^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}nr^n$, pero si esta misma escalera la formamos con rectángulos horizontales la suma de las áreas de estos nuevos rectángulos es: $\left(r+r^2+r^3+\cdots\right)+\left(r^2+r^3+\cdots\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\sum_{n=2}^{\infty}r^n+\sum_{n=3}^{\infty}r^n+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}r^n.$

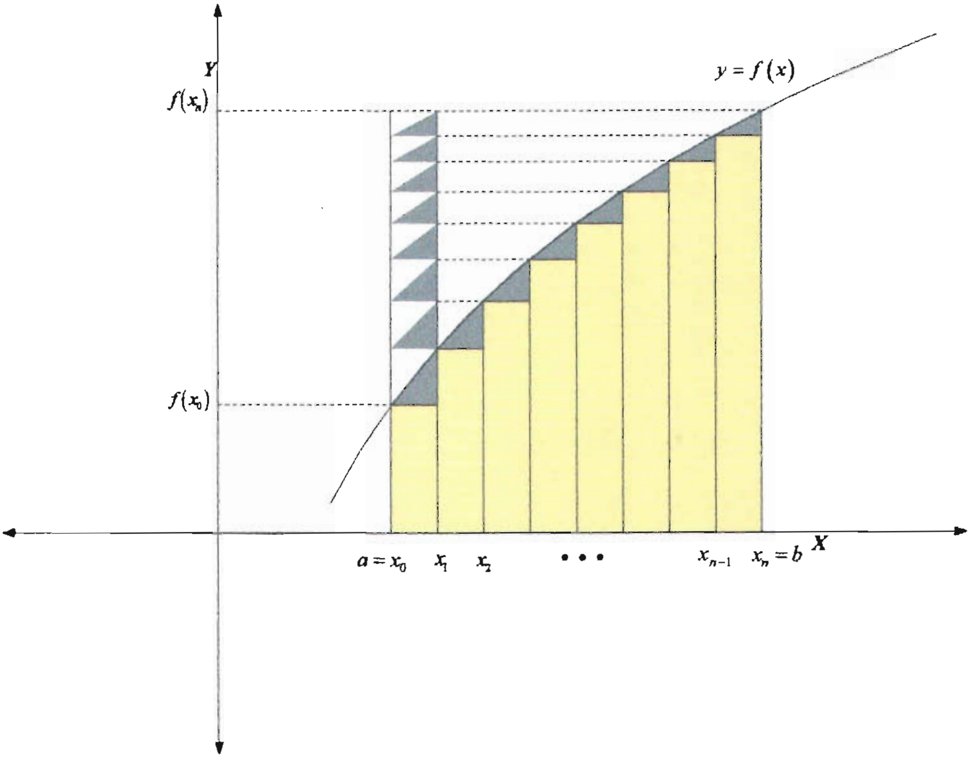
Como $\sum_{n=i}^{\infty}r^n=r^i\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{r^i}{1-r}$, luego
$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}r^n=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{r^i}{1-r}=\frac{1}{1-r}\sum_{i=1}^{\infty}r^i$ y esta serie en i es geométrica y como $0<r<1$, tenemos

$$=\frac{1}{1-r}\sum_{i=1}^{\infty}r^i=\frac{1}{1-r}\left(\frac{r}{1-r}\right)=\frac{r}{(1-r)^2}$$

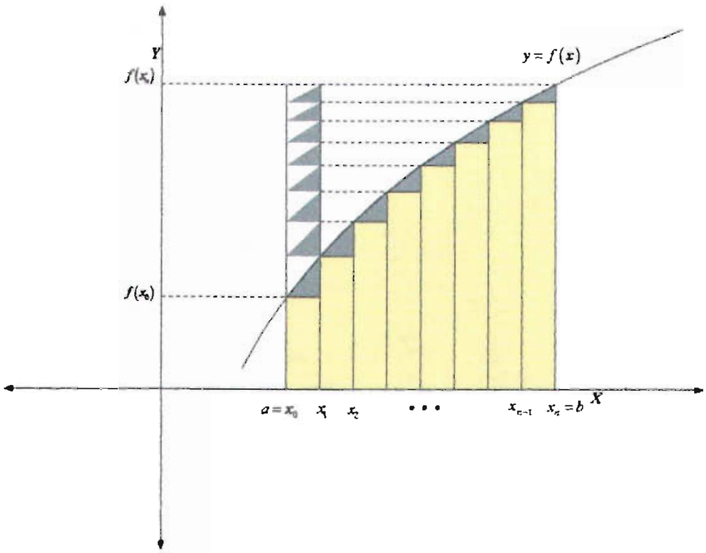
Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty}nr^n=\frac{r}{(1-r)^2}$.

LA REGLA TRAPEZOIDAL (PARA FUNCIONES CRECIENTES)

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i)\frac{b-a}{n}\right)+\frac{1}{2}\left[f(x_n)-f(x_0)\right]\frac{b-a}{n}$$



EXPLICACIÓN:



$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i)\frac{b-a}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)[f(x_{i+1})-f(x_i)]\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i)\frac{b-a}{n}\right)+\left(\frac{b-a}{n}\right)[f(x_{i+1})-f(x_i)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i)\frac{b-a}{n}\right)+\left(\frac{b-a}{n}\right)[f(x_n)-f(x_0)]$$

ya que $\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i+1})-f(x_i))]=f(x_n)-f(x_0)$ tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i)\frac{b-a}{n}\right)+[f(x_n)-f(x_0)]\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Sumas de enteros

- **Primeros enteros positivos**

  Martin Gardner.

  Ian Richards.

- **Primeros enteros impares**

  Nocomachus de Gerasa.

  José Antonio Gómez Ortega.

- **Cuadrados y suma de enteros**

  Martin Gardner.

- **Suma de cuadrados**

  Martin Gardner y Dan Kalman

  Sidney H. Kung.

  James O. Chilaka

  Pi-Chun-Chuang.

- **Sumas alternadas de cuadrados**

  Dave Logothetti.

  Steven L. Snover.

- **Cuadrados y suma de enteros**

  Hee Sik Kim.

- **Suma de cubos**

  Alan L. Fry.

  Solomon W. Golomb.

  J. Barry Love.

- **Una progresión aritmética cuya suma es igual al cuadrado de sus términos**

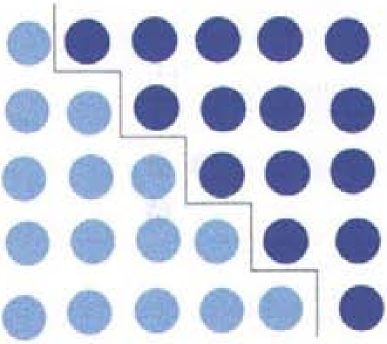
  C. L. Frenzen.

- **Progresión aritmética cuya suma es igual al cuadrado del número de sus términos**

  James O. Chilaka.

LA SUMA DE LOS PRIMEROS ENTEROS POSITIVOS

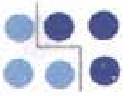
$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



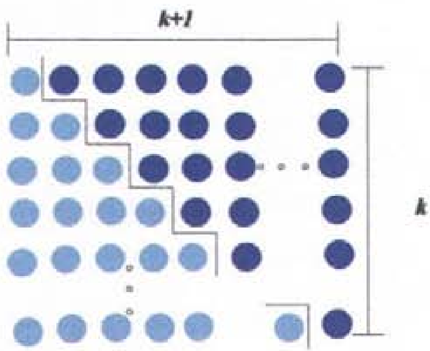
EXPLICACIÓN:

Para $n = 1$, es fácil ver que $\frac{1\,(2)}{2}$

Para $n = 2$, es fácil ver que $1 + 2 = \frac{2\,(3)}{2}$



Suponemos para $n = k$, es decir, $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k\,(k+1)}{2}$.



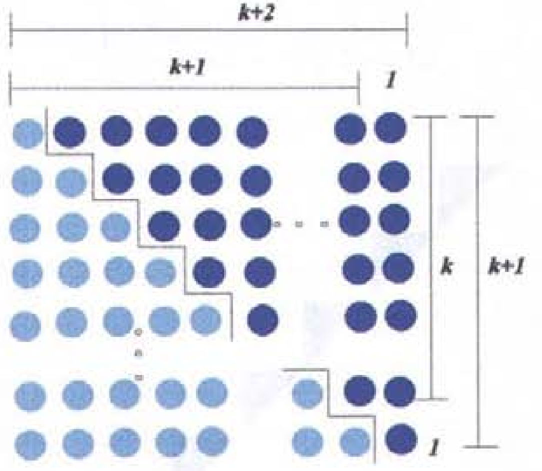
Por demostar para el caso en que $n = k + 1$, es decir $1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$.

Notemos lo siguiente: Hemos acomodado 2 veces la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1)$. Al hacer esto, recuperamos la suma $1 + 2 + 3 + \cdots k$, también dos veces y, además, dos veces $k + 1$; luego:

$2\,(1 + 2 + 3 + \cdots k + 1) = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots k) + 2\,(k+1)$

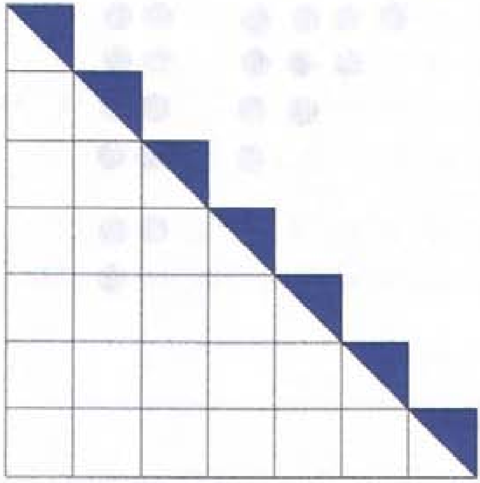
$= \frac{2k\,(k+1)}{2} + 2\,(k+1) = \left(\frac{k}{2} + 1\right)(2k+2) = (k+1)\,(k+2)$.

$\therefore 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$.


k+2
k+1
1
k
k+1
1

LA SUMA DE LOS PRIMEROS ENTEROS POSITIVOS

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

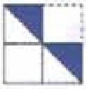


EXPLICACIÓN:

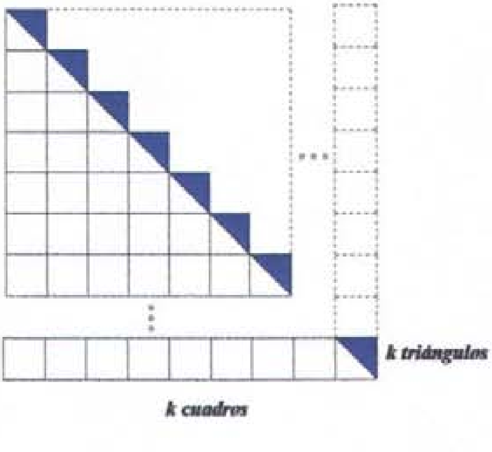
Tomemos cuadrados cuyos lados son de longitud 1.

Para $n = 1$, es fácil ver que $1 = \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2}$, donde $\frac{1^2}{2}$ es la mitad del área del cuadrado y $\frac{1}{2}$ es el área del triángulo.

Para $n = 2$, es fácil ver que $1 + 2 = \frac{2^2}{2} + \frac{2}{2}$ donde $\frac{2^2}{2}$ es la mitad del área del cuadrado de lado 2 y $\frac{2}{2}$ es el área de los dos triángulos.

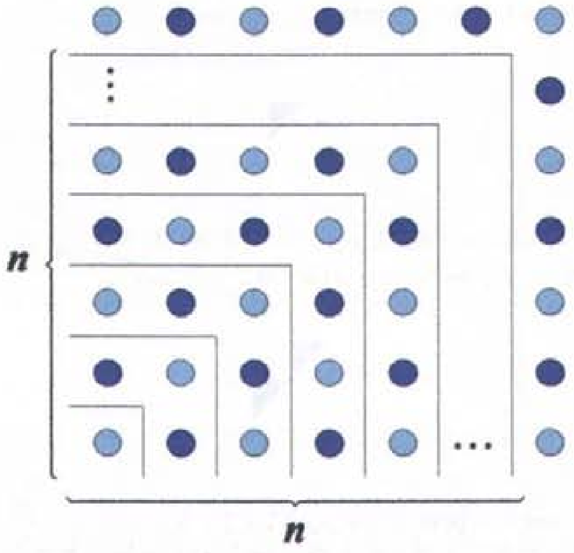


En general, tenemos para $n = k$, que $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}$, ya que los cuadrados cubren la mitad del área del cuadrado de lado k, y hay k triángulos que cubren un área de $\frac{k}{2}$.



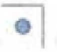
SUMA DE ENTEROS IMPARES

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

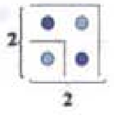


EXPLICACIÓN:

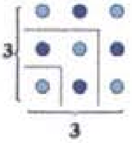
Tomemos una bola y observemos que se cumple $1 = 1^2$.



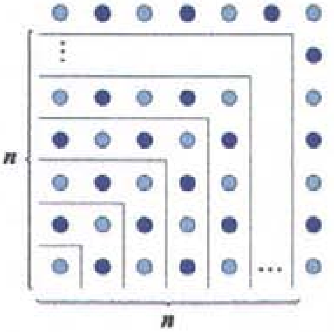
Tomemos $1+3$ bolas, de tal manera que se acomoden en forma de cuadrado y el total de bolas que tenemos es: $1+3 = 2^2$.



Tomemos $1+3+5$ bolas, de tal manera que se acomodan en forma de cuadrado y el total de bolas que tenemos es: $1+3+5 = 3^2$.

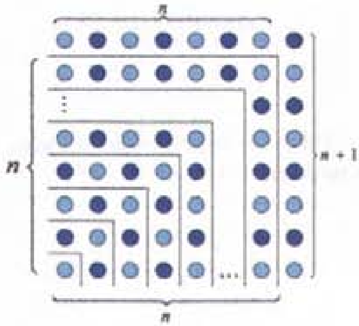


Supongamos que si tomamos $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ bolas, de manera que se acomodan en forma de cuadrado. El total de bolas es $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.



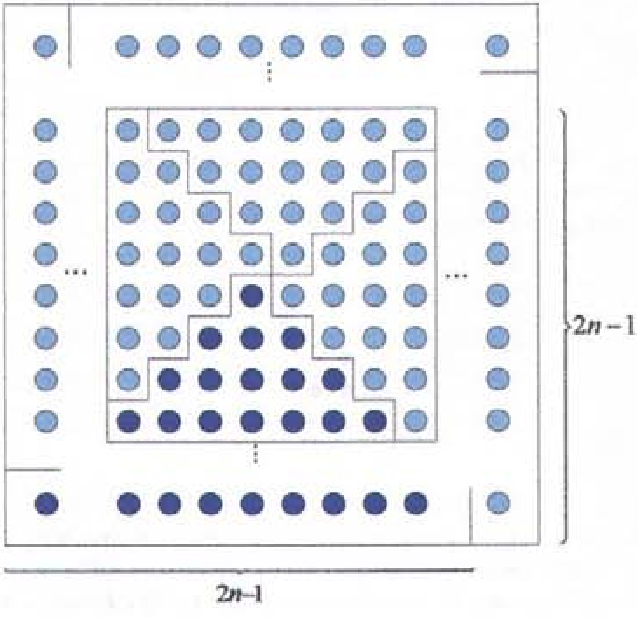
Veamos cómo cambia la igualdad $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ cuando se aumenta $2n+1$ bolas. Éstas las podemos separar en $n+1$ bolas, que pondremos en el renglón superior, y n bolas en la columna de la derecha, formando ahora un cuadrado de lado $n+1$, por lo que:

$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$.



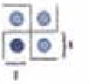
SUMA DE ENTEROS IMPARES

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{1}{4}(2n)^2=n^2$$

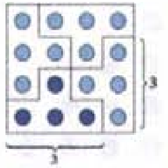


EXPLICACIÓN:

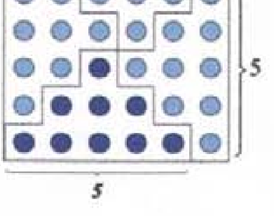
Tomemos cuatro bolas y formemos un cuadrado. Aquí vemos que se cumple $4 \cdot 1 = (2 \cdot 1)^2$.



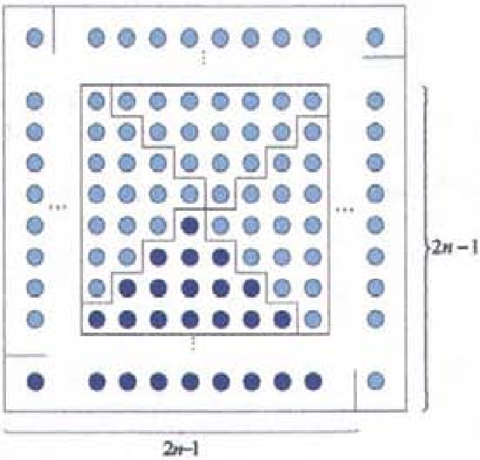
Tomemos $1+3 = 1+[2(2)-1]$ bolas, acomodándolas en forma de pirámide y a su vez las otras tres pirámides se acomodan en forma de cuadrado, como en la figura. Vemos que se cumple $4(1+3) = (2 \cdot 2)^2$.



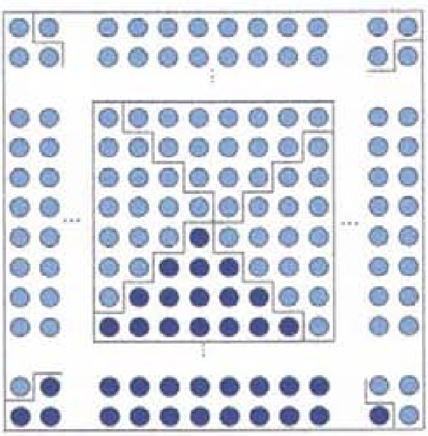
Tomemos $1+3+5 = 1+3+[2(3)-1]$ bolas, acomodandolas en forma de pirámide. Como antes, formemos cuatro pirámides, que se acomodan en forma de cuadrado como lo muestra la figura, de tal forma que se cumple $4(1+3+5) = [2 \cdot 3]^2$.



Supongamos ahora que cuando se toman $4\left[1+3+5+\cdots+(2n-1)\right]$ bolas, éstas se pueden acomodar en 4 pirámides, de manera que las cuatro pirámides se acomoden en forma de un cuadrado de lado $2n$, como lo muestra la siguiente figura.



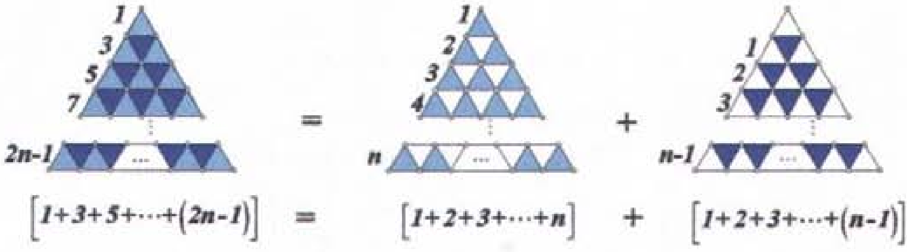
Veamos qué pasa cuando se acomodan otras $4(2n+1)$ bolas más, si sobre cada lado del cuadrado anterior se acumulan $2n+1$ de tales bolas, como se muestra en la siguiente figura.



Tenemos que el nuevo cuadrado es de lado $(2n+2)$ por lo que:
$4(1+3+\ldots+(2n-1)+(2n+1))=(2n+2)^2=\left[2(n+1)\right]^2.$

SUMA DE ENTEROS IMPARES

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n\,(n+1)}{2}+\frac{(n-1)\,(n)}{2}=n^2$$

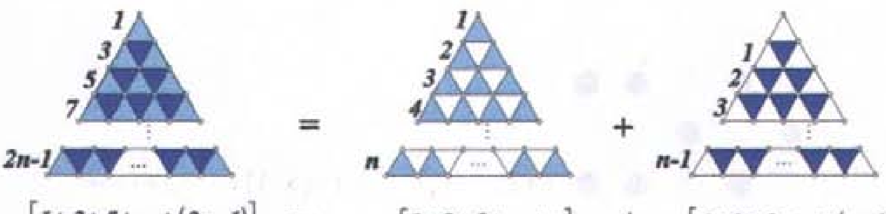


EXPLICACIÓN:

Tomemos primero un triángulo.Observemos que se cumple $1 = 1 + 0 = 1^2$.

Tomemos $1 + 3$ triángulos, de tal forma que los separemos en dos como lo muestra la siguiente figura. Veamos que se cumple $1 + 3 = (1 + 2) + 1 = \frac{2\,(3)}{2} + \frac{1\,(2)}{2} = 2^2$.

Si suponemos ahora que, cuando tomamos $1+3+5+\cdots+2n-1$ triángulos, los podemos separar en dos como lo muestra la siguiente figura.



$$\left[1+3+5+\cdots+(2n-1)\right] \quad = \quad \left[1+2+3+\cdots+n\right] \quad + \quad \left[1+2+3+\cdots+(n-1)\right]$$

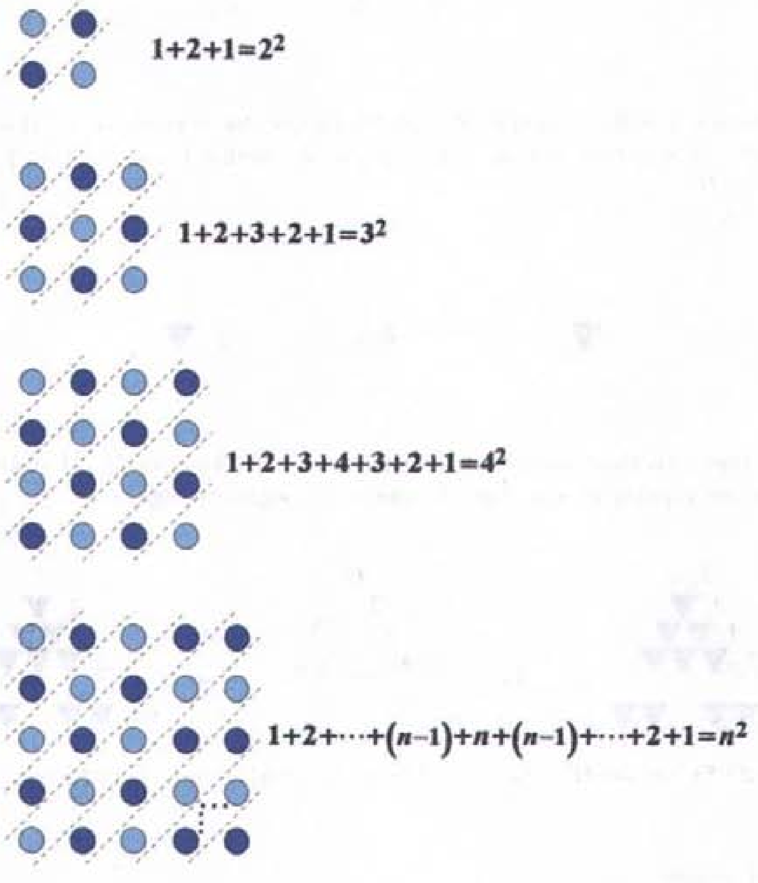
Algebraicamente como:

$$1 + 3 + 5 + (2n - 1) = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (1 + 2 + \cdots + (n - 1)) =$$
$$= \frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{(n-1)\,(n)}{2} = n^2.$$

Tenemos que cuando aumentamos otros $2n + 1$ triángulos, estos nuevos los podemos separar en $n + 1$, que aumentamos al primer triángulo, y n que aumentamos al segundo teniendo ahora que $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1) =$ $\left[\frac{n\,(n+1)}{2} + n + 1\right] + \left[\frac{(n-1)\,n}{2} + n\right] = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} + \frac{n\,(n+1)}{2} = (n+1)^2.$

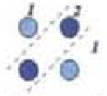
CUADRADOS Y SUMA DE ENTEROS

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = n^2.$$



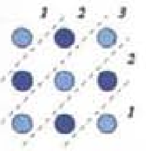
EXPLICACIÓN:

Tomemos $1+2+1$ bolas, de tal manera que se acomoden en forma de cuadrado. Así, el total de bolas que tenemos es: $1+2+1=2^2$.



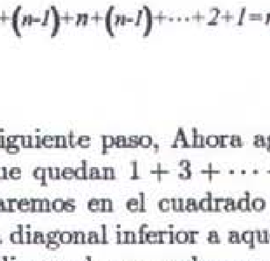
$1+2+1=2^2$

Tomemos $1+2+3+2+1$ bolas, de tal manera que se acomoden en forma de cuadrado y el total de bolas que tenemos son:



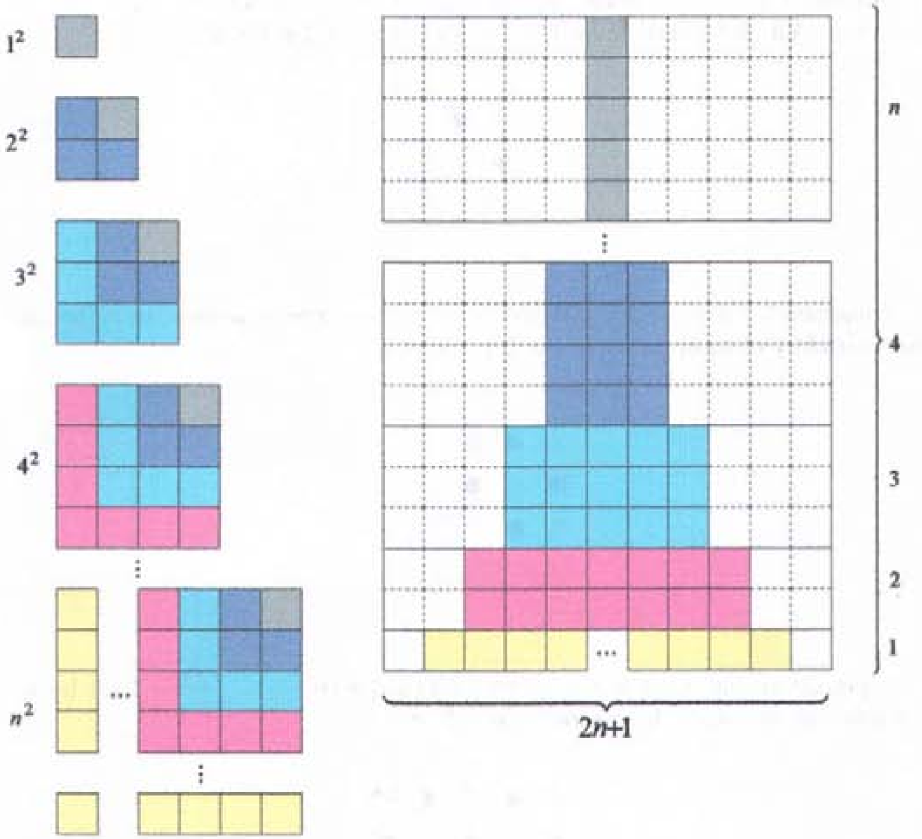
$1+2+3+2+1=3^2$

Supongamos que $1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)\cdots+3+2+1$ bolas se acomodan en forma de cuadrado de lado n.



$1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=n^2$

Veamos qué sucede en el siguiente paso, Ahora agregaremos $n+1$ y n, al cuadrado anterior de modo que quedan $1+3+\cdots+n+(n+1)+n+\cdots+3+2+1$ bolas, que acomodaremos en el cuadrado anterior, de la siguiente manera: pondremos $n+1$ en la diagonal inferior a aquella en la que teniamos n, y colocaremos n debajo de la diagonal que acabamos de introducir. así, queda ahora un cuadrado de lado $n+1$, por lo que: $1+2+\cdots n+(n+1)+n+\cdots+2+1=(n+1)^2$.



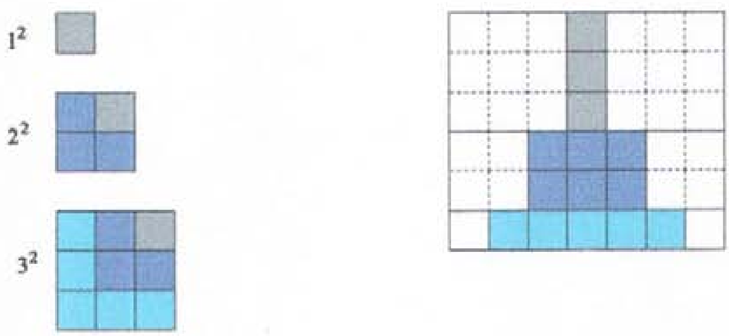
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{(2n+1)(1+2+3+\cdots n)}{3}$$

EXPLICACIÓN:

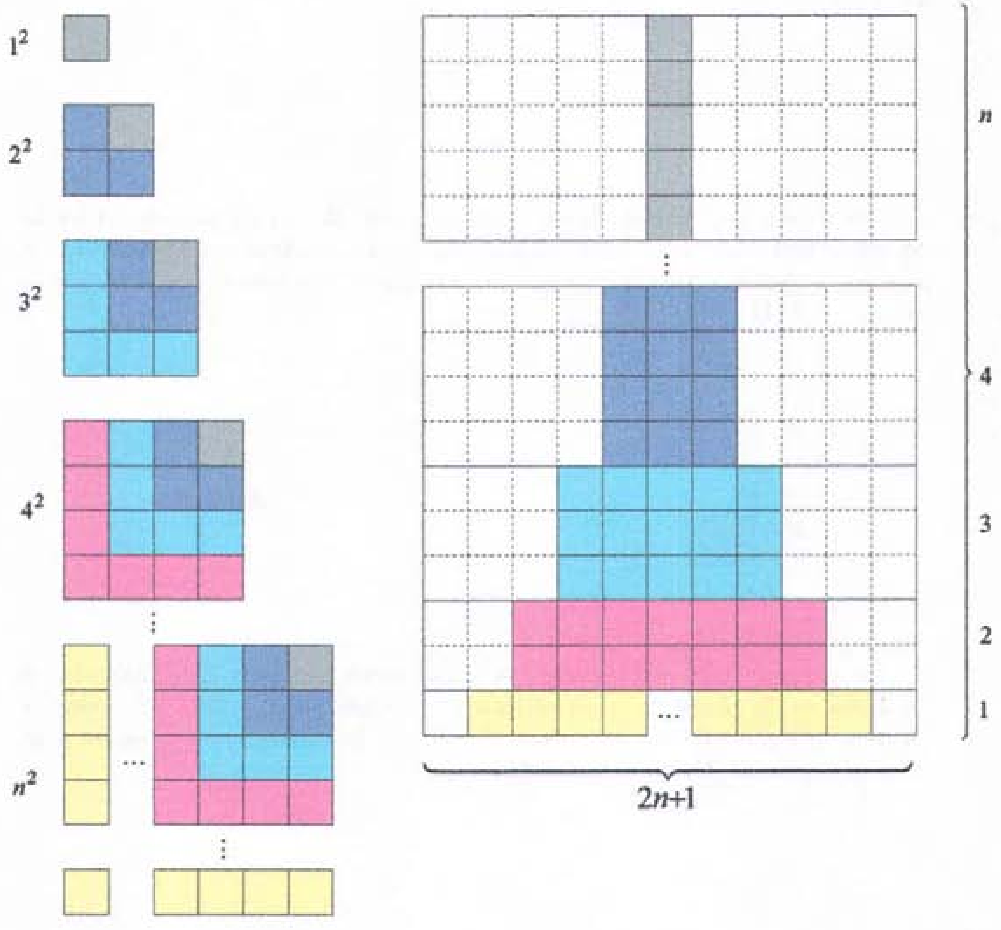
Tomemos un sumando, como lo muestra la figura inferior, luego es fácil ver que $1^2 = \dfrac{[2(1)+1](1)}{3} = 1$.

Tomemos $1^2 + 2^2$ cuadrados y formemos con ellos una pirámide. A los lados de la pirámide acomodemos dos copias de los cuadrados 1^2 y 2^2, como lo muestra la figura. De esta forma, el número de cuadrados que tenemos es: $1^2 + 2^2 = \dfrac{[2(2)+1](1+2)}{3} = 5$.

Tomemos $1^2 + 2^2 + 3^2$ cuadrados y formemos con ellos una pirámide. A los lados de la pirámide acomodemos dos copias de $1^2 + 2^2 + 3^2$, como lo muestra la figura, de tal forma que el número de cuadrados que tenemos es: $1^2 + 2^2 + 3^2 = \dfrac{[2(3)+1](1+2+3)}{3} = 14$.



Tomemos $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ cuadrados y formemos con ellos una pirámide. A los lados de la pirámide acomodemos $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$, como lo muestra la figura, de tal forma que el número de cuadrados que tenemos es: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{[2n+1](1+2+3+\cdots+n)}{3} = \frac{[2n+1][(n)(n+1)]}{6}$.



SUMA DE CUADRADOS

$$3\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)=\tfrac{1}{2}n\,(n+1)\,(2n+1)$$

$$\begin{pmatrix} n & n & \ldots & n & n \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ n & n-1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 2n+1 & 2n+1 & 0 & 0 & 0 \\ 2n+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXPLICACIÓN:

La suma de los elementos de cada una de las matrices es $1^2+2^2+\cdots n^2$. En cada una hay n entradas con el número n, $n-1$ entradas con el número $n-1$, etc.

$$\begin{pmatrix} n & n & \dots & n & n \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ n & n-1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Luego el resultado de la suma de las tres matrices es:

$$\begin{pmatrix} 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 2n+1 & 2n+1 & 0 & 0 & 0 \\ 2n+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

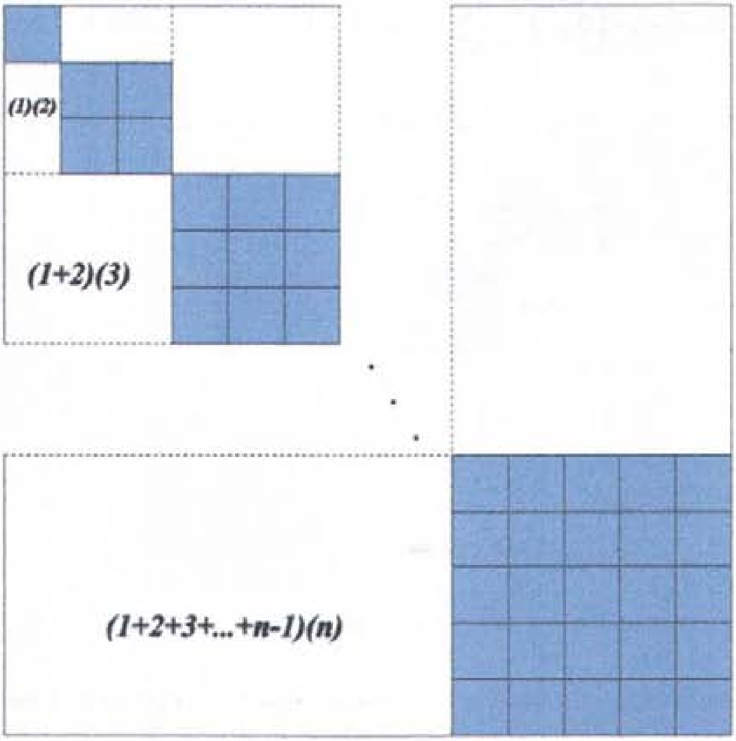
Hay $1+2+\cdots n=\dfrac{n\,(n+1)}{2}$ entradas diferentes de cero y cada una de las cuales tiene el valor $2n+1$. Luego, la suma de sus elementos es $\dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2}$.

La igualdad entre la suma de matrices y su resultado, se toma la suma entrada por entrada, luego tenemos la identidad:

$$3\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)=\frac{(n)\,(n+1)\,(2n+1)}{2}.$$

SUMA DE CUADRADOS

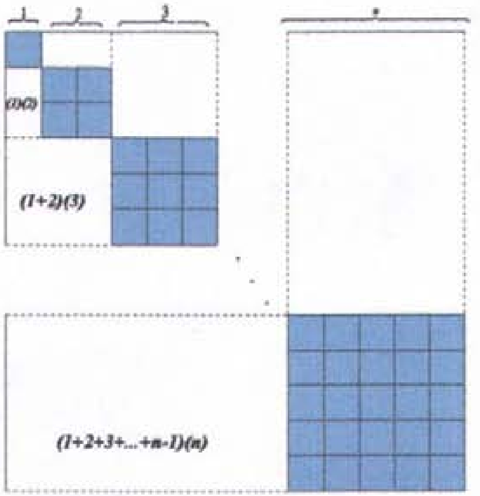
$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 - 2\sum_{k=1}^{n}(1+2+\cdots+k)(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$



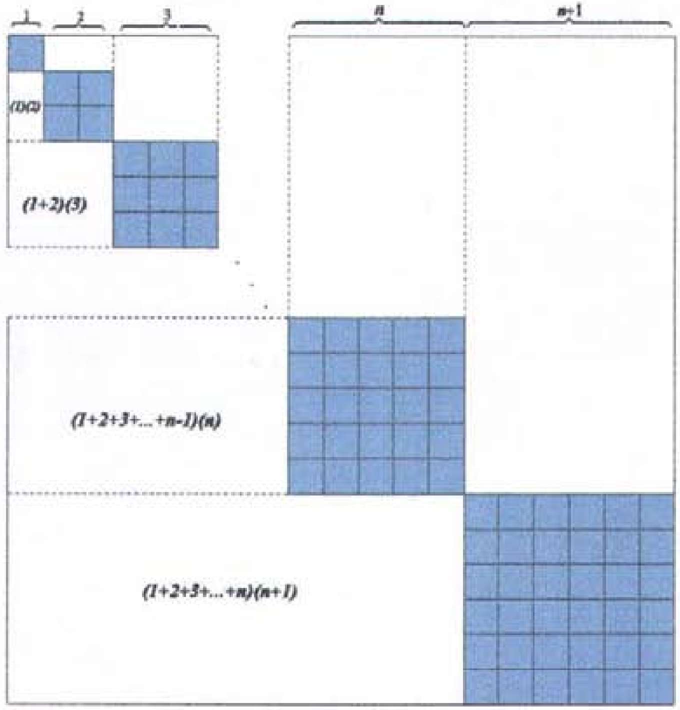
EXPLICACIÓN:

Hemos dividido el cuadrado de lado $1+2+\cdots+n$ en n cuadrados diagonales (de color azul) de lados $1, 2, \cdots, n$, y otros rectángulos que aparecen por parejas de áreas $(1)(2)$ y $(2)(1)$, $(1+2)(3)$ y $(3)(1+2), \ldots, (1+2+\cdots+n-1)(n)$ y $(1+2+\cdots+n-1)(n)$.

Sugiriendo que: $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}(1+2+\cdots+k)(k+1)$.



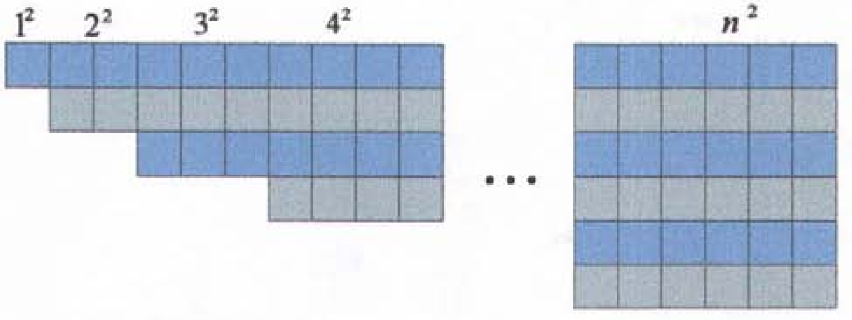
¿Qué sucede si aumentamos a nuestro cuadrado una figura L, formada por un cuadrado de lado $(n+1)$ y dos rectángulos de áreas $(1+2+\cdots+n)(n+1)$ y $(n+1)(1+2+\cdots+n)$? Formaríamos un cuadrado de lado $1+\cdots+n+(n+1)$.



En efecto, $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^2 + 2(1+2+\cdots+n)(n+1) =$
$= (1+2+\cdots+n)^2 + 2(1+2+\cdots+n)(n+1) + (n+1)^2$
$= (1+2+\cdots+n+n+1)^2.$

SUMA DE CUADRADOS

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

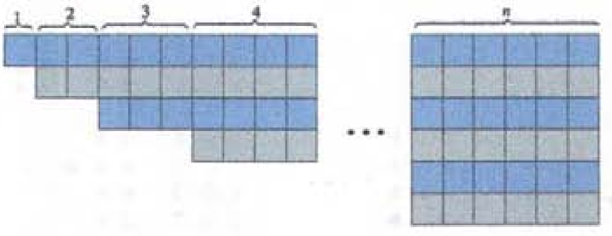


EXPLICACIÓN:

La figura nos sugiere que:
$1^2+2^2+\cdots+n^2 = (1+2+\cdots+n)+(2+3+\cdots+n)+\cdots+[(n-1)+n]+n$.
Para el caso $n=1$, tomemos la igualdad es: $1^2=1$.

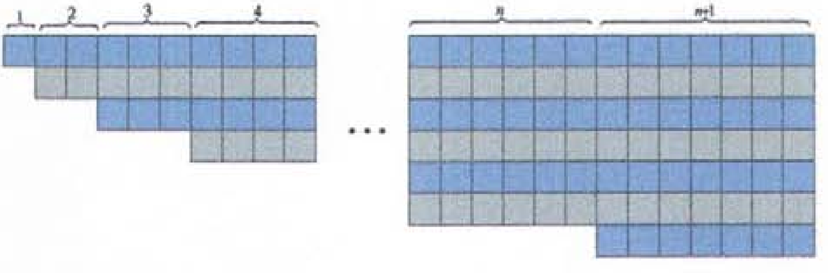
Para el caso $n=2$, la igualdad es: $1^2+2^2=(1+2)+2$.

Si suponemos la igualdad $1^2+2^2+\cdots+n^2 =$
$=(1+2+\cdots+n)+(2+3+\cdots+n)+\cdots+[(n-1)+n]+n$, al colocar



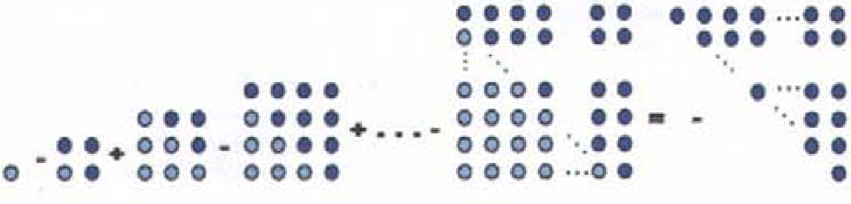
el siguiente cuadrado de lado $n+1$, los $(n+1)^2=(n+1)(n+1)$ cuadritos se pueden distribuir de la siguiente manera: en cada uno de los sumandos de la derecha, en la igualdad $1^2+2^2+\cdots+n^2=[1+2+\cdots+n]+[2+3+\cdots+n]+\cdots+[(n-1)+n]+n$, se colocan $(n+1)$ cuadritos es decir a cada sumando le agragamos $n+1$, quedandonos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}&[(1+2+\cdots+(n-1)+n)+(n+1)]\\&\quad+[(2+3+\cdots+(n-1)+n)+(n+1)]\\&\qquad+\cdots+[(n-1)+n+(n+1)]\\&\qquad\quad+[n+(n+1)]+n+1=1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2\end{aligned}$$



SUMAS ALTERNADAS DE CUADRADOS

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} T_n = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$



$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+2} T_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

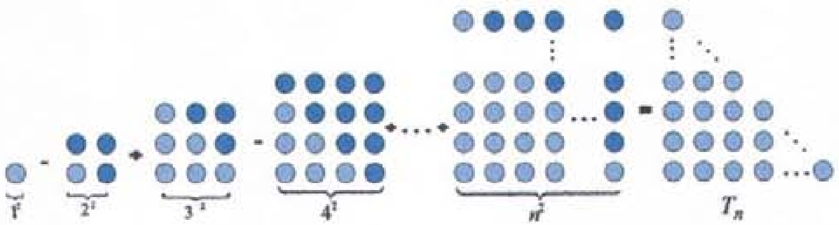
EXPLICACIÓN:

Representemos el cuadrado 1^2 con una pelota. Vemos que se cumple $(-1)^2 T_1 = \frac{(1)(2)}{2} = 1$, como lo muestra la siguiente figura:

Ahora tomemos los dos cuadrados 1^2 y 2^2 ; representemos nuevamente cada uno con pelotas, de tal forma que vayan quedando como sigue:

Luego, lo que nos queda es $(-1)^{2+1} T_2 = -1\frac{(2)(3)}{2} = -3$.

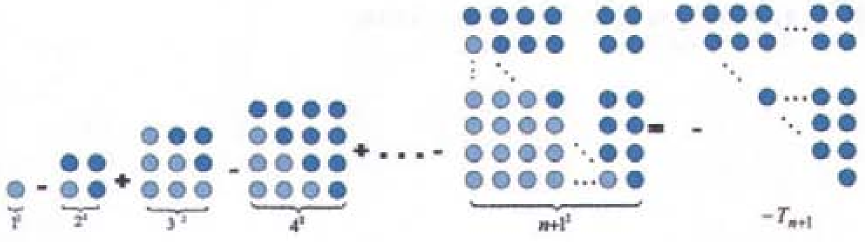
Si representamos a los n (con n impar) términos de la sumatoria $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n+1} k^2$ con pelotas y las acomodamos como lo muestra la figura siguiente, el total de pelotas que tenemos es:



$k^2 = T_{k-1} + T_k$, $T_0 = 0$, $T_k = \dfrac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + k$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (T_{k-1} + T_k) = T_1 - (T_2 + T_1) + (T_3 + T_2) - \ldots + T_n = (-1)^{n+1} T_n.$

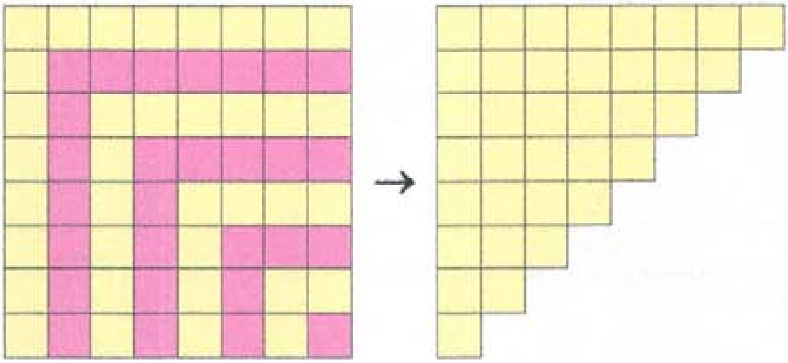
Si al arreglo anterior le restamos $(n+1)^2$ pelotas, donde n es impar y hacemos el mismo arreglo, el total de pelotas que nos quedan es:



$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+2}T_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

SUMAS ALTERNADAS DE CUADRADOS

$$n^2 - (n-1)^2 + \cdots + (-1)^{n-1}(1)^2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$



EXPLICACIÓN:

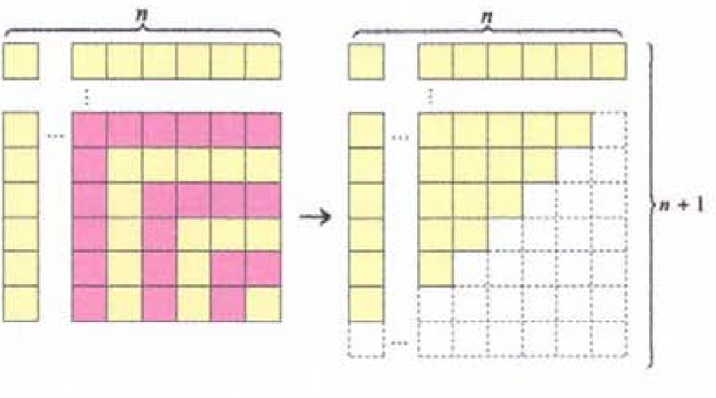
Tomemos 1^2, representándolo como un cuadrado, tal como lo muestra la siguiente figura. Veamos que se cumple:

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^k (1-k)^2 = \tfrac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Ahora tomemos $\sum_{k=0}^{2} (-1)^k (2-k)^2 = 2^2 - 1^2 + 0$ y, al igual que el caso anterior, representemos a cada sumando con cuadrados de esta forma, el total de la suma es:

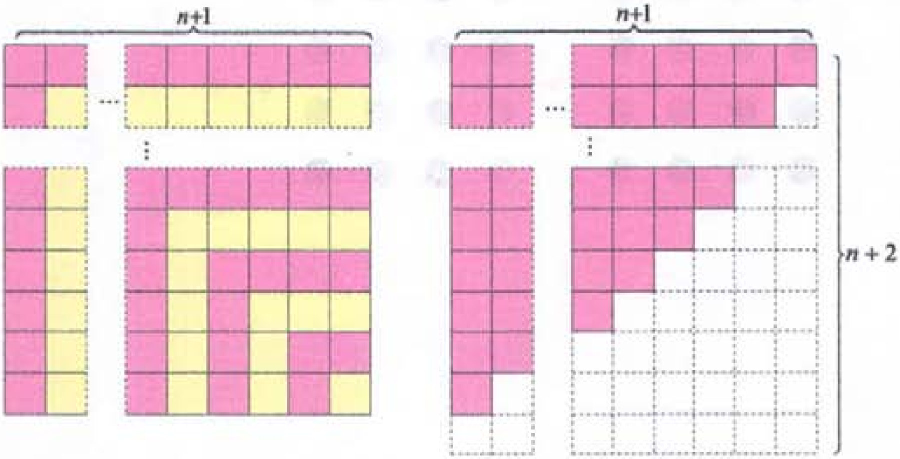
$$\sum_{k=0}^{2} (-1)^k (2-k)^2 = \tfrac{2(3)}{2} = 3.$$

Tomemos $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^2 = n^2 - (n-1)^2 + \cdots + (-1)^{n-1} 1^2$ cuadrados, cuyo el total es:



$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n-k)^2 = n^2-(n-1)^2+\cdots+(-1)^{n-1}1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

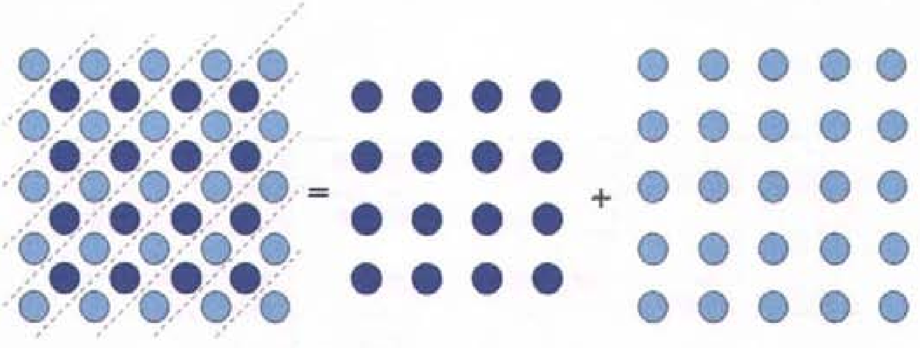
Veamos qué sucede si ahora se tienen los cuadros $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k[(n+1)-k]^2 = (n+1)^2-n^2+(n-1)^2-\cdots+(-1)^n 1^2$. El total de ellos es:



$$(n+1)^2-n^2+(n-1)^2+\cdots+(-1)^n(1)^2 = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k[(n+1)-k]^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

CUADRADOS Y SUMA DE ENTEROS

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)+(2n-1)+\cdots+3+1=(n)^2+(n+1)^2$$

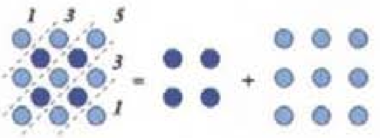


EXPLICACIÓN:

Tomemos $5 = 2(1^2) + 1$ bolas y las ocomadamos en diagonal de la forma $1 + 3 + 1$, como se observa en la parte izquierda de la figura siguiente y las reacomodamos en dos cuadrados, como lo muestra la parte derecha de la misma figura, por lo que el total de bolas es:

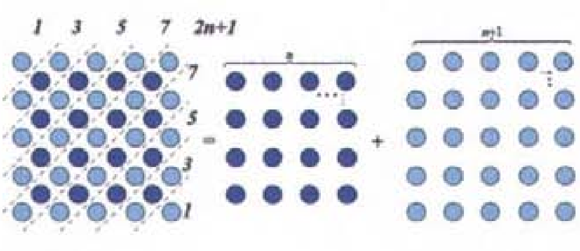
$$1 + 3 + 1 = 1^2 + 2^2$$

Nuevamente tomemos $13 = 2(2^2) + 5$ bolas y las acomadamos en diagonal de la forma $1 + 3 + 5 + 3 + 1$, como se observa en la parte izquierda de la figura siguiente y las reacomodamos en dos cuadrados, como lo muestra la parte derecha de la misma figura por lo que el total de bolas es:



$$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 2^2 + 3^2$$

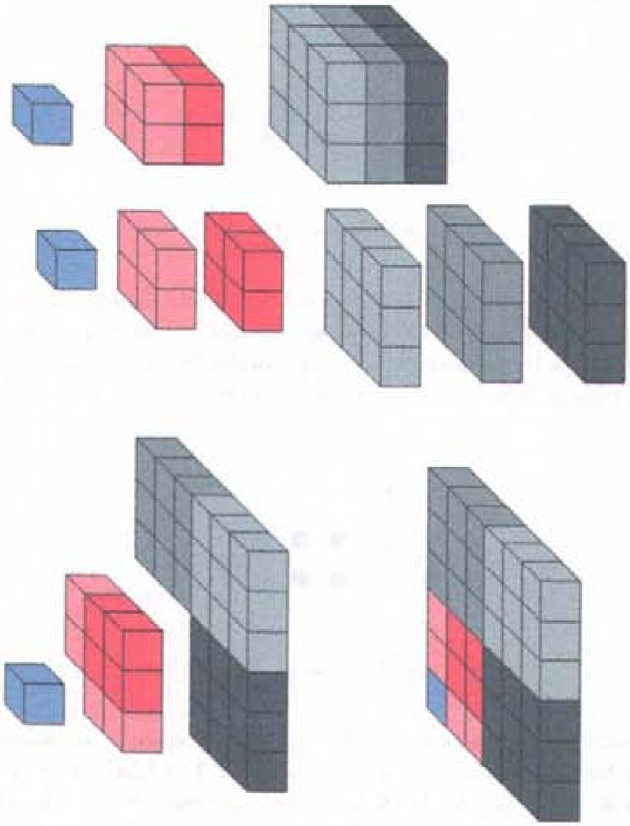
Para el caso que tengamos $2(n)^2 + (2n + 1)$ bolas y las acomadamos en diagonal de la forma $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n - 1) + \ldots 3 + 1$, como se observa en la parte izquierda de la figura siguiente y las reacomodamos en dos cuadrados, como lo muestra la parte derecha de la misma figura por lo que el total de bolas es:



$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n - 1) + \cdots + 3 + 1 = (n)^2 + (n + 1)^2$$

SUMA DE CUBOS

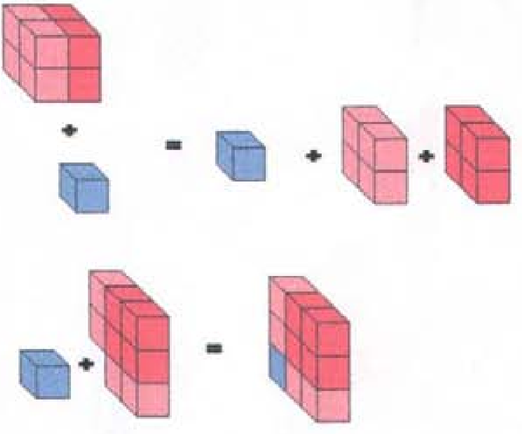
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$



EXPLICACIÓN:

Tomemos un cubo de volumen 1^3. En particular, éste es un paralelepípedo con lados $1, 1, 1$, es decir, de volumen $(1)^2(1)$.

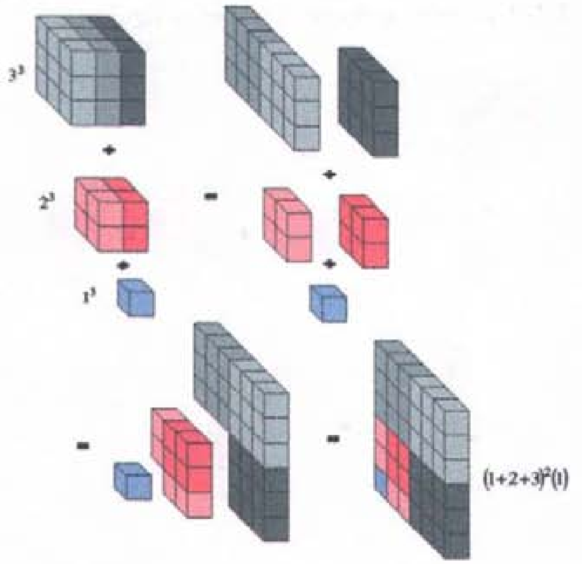
Ahora agreguemos al cubo anterior un cubo con volumen 2^3, es decir, tendremos la suma de los volúmenes $1^3 + 2^3$. Si al cubo con volumen 2^3 lo descomponemos en tres paralelepípedos uno con lados $2, 2, 1$, y dos con lados $2, 1, 1$, de tal forma que al unirlos con el cubo de volumen 1^3 formemos un paralelepípedo con lados $1 + 2, 1 + 2, 1$, como lo muestra la figura siguiente:



Resulta que al igualar los volúmenes nos da $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2(1)$.

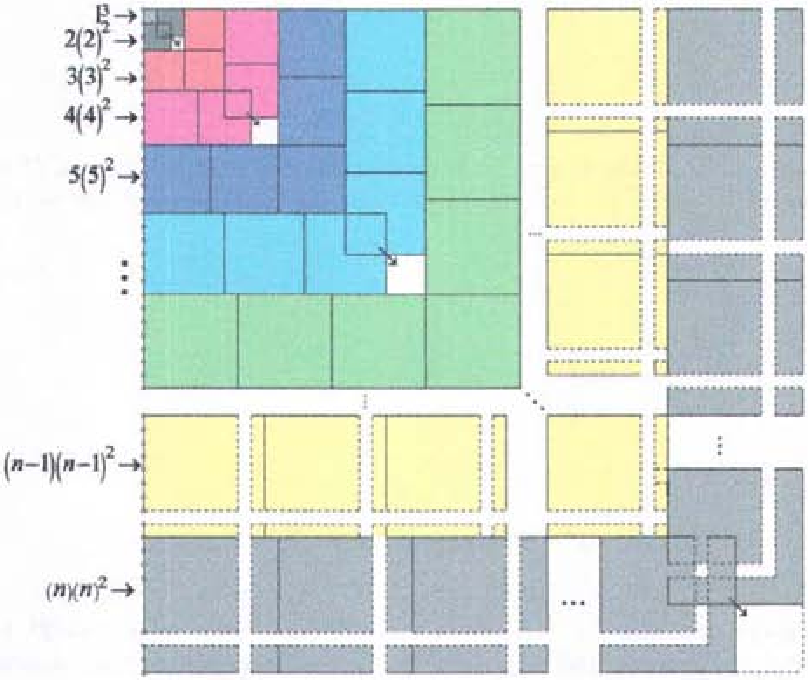
Si a los cubos anteriores le agregamos otro cubo con volumen 3^3 lo que resulta es la suma de los volúmenes $1^3 + 2^3 + 3^3$.

Ya teníamos $1^3 + 2^3$, que descompusimos en un paralelepípedo con volumen $(1+2)^2(1)$. Si como en el caso anterior, descomponemos el cubo de volumen 3^3 en tres paralelepípedos con volumen $(3)^2(1)$, para unirlos al paralelepípedo de volumen $(1+2)^2(1)$, como lo muestra la figura, tendremos que la suma de los volúmenes $1^3 + 2^3 + 3^3$ es equivalente a la suma del paralelepípedo de volumen $(1+2+3)^2(1)$.



SUMA DE CUBOS

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

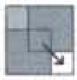


0

EXPLICACIÓN:

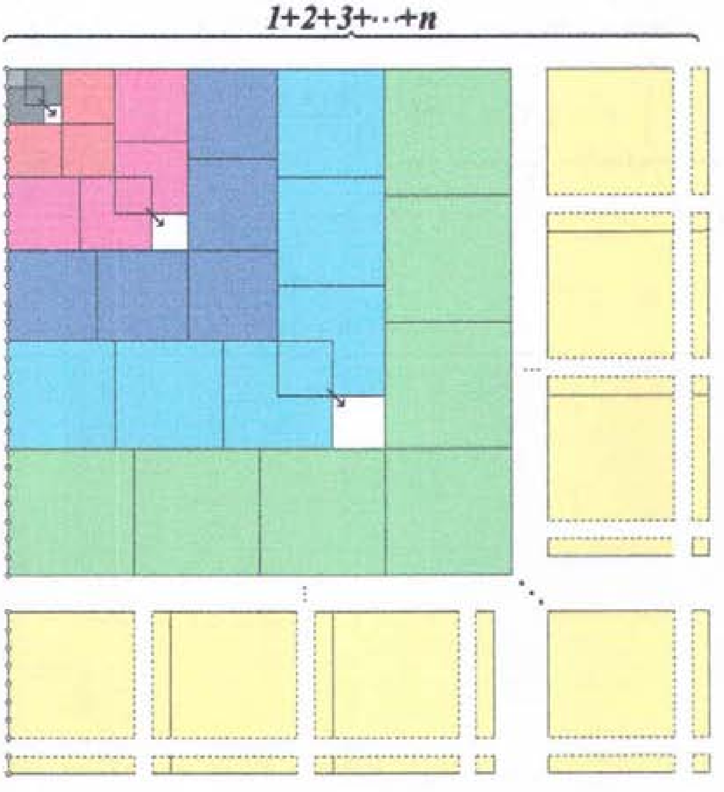
Tomemos un cuadrado de área 1^2 es decir, 1^3 veamos que efectivamente $1^2 = 1^3$, como se muestra en la siguiente figura.

Ahora, al cuadrado de área 1^2, le agregamos dos cuadrados de área 2^2 como lo muestra la figura. Es fácil ver que la suma las áreas de todos los cuadrados es:



$$1^3 + 2^3 = (1+2)^2 = \frac{[2(3)]^2}{4} = 9$$

Si ahora tomamos un cuadrado de área 1^2, dos cuadrados de área 2^2, luego le agregamos tres cuadrados de área 3^2 y así sucesivamente, hasta agregar n cuadrados de área n^2 y acomodamos todos estos cuadrados como lo muestra la figura, podemos ver con facilidad que la suma de todos ellos es $(1+2+3+\cdots n)^2$.

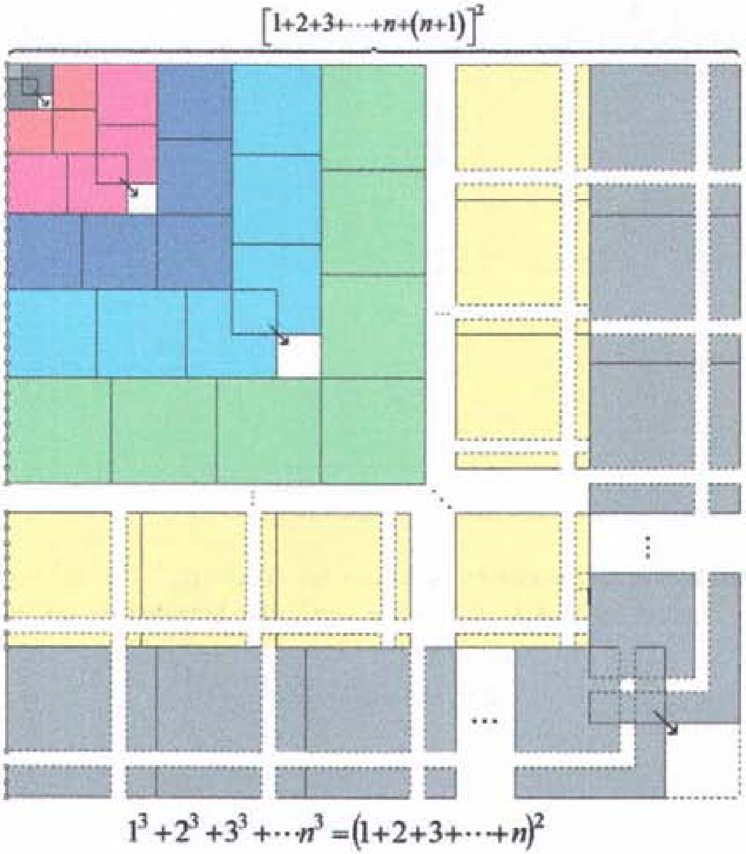


Lo que estábamos haciendo es sumar las áreas $1(1)^2 + 2(2)^2 + 3(3)^2 + \cdots n(n)^2$, que es igual a $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$. La igualdad de las áreas nos dice que:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

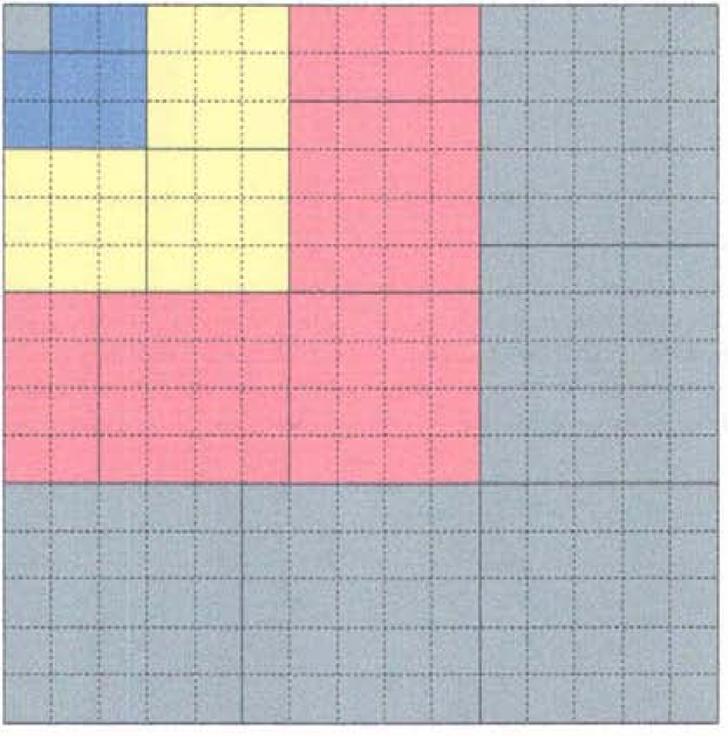
Si a la suma de las áreas anteriores le agregamos $(n+1)$ cuadrados de área $(n+1)^2$, la suma que tenemos es $1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = (1+2+\cdots+n)^2+(n+1)(n+1)^2 =$
$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)(n+1)^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$. Obteniendo el área total de los cuadrados, tenemos que:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = [1+2+3\cdots+n+(n+1)]^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$



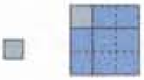
SUMA DE CUBOS

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$



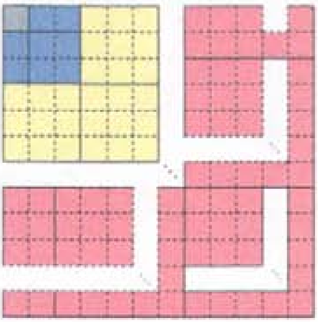
EXPLICACIÓN:

Tomemos un cuadrado de área 1^2, y veamos que es igual a una vez un cuadrado de área 1, como se muestra en la primera figura. Ahora tomemos un cuadrado de área 1^2, le agregamos dos cuadrados con área 2^2 y acomodemos todos los cuadros como lo muestra la segunda figura.



Es fácil ver que la suma de todas la áreas de los cuadros es: $1^3 + 2^3 = (1+2)^2 = \frac{[2(3)]^2}{4} = 9$.

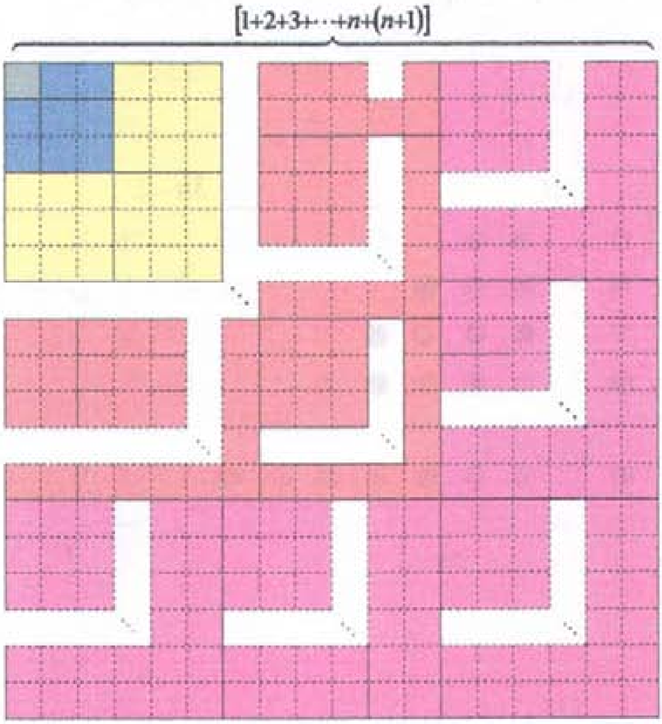
Tomemos nuevamente un cuadrado de área 1^2, agregamos dos cuadrados con área 2^2, luego le agregamos tres cuadrados de área 3^2, y así sucesivamente, hasta agregar n cuadrados de área n^2, con el siguente cuidado: si n es impar, se acomoda en la orilla, pero si n es par, dividimos uno de los cuadros en dos rectángulos iguales de lados n y $\frac{n}{2}$, acomodados como se ve a continuación:



Al final, los cuadrados han quedado acomodados en un cuadrado de lado $1+2+3+\cdots+n$, sin dejar huecos, por lo que la suma de las áreas de los cuadrados que acomodamos es $(1+2+3+\cdots+n)^2$.

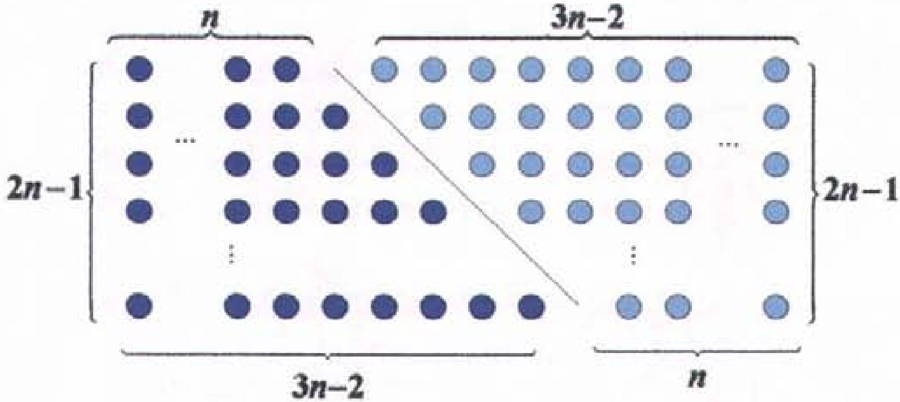
Por otro lado, hemos acomodado cuadrados cuyas áreas suman $1(1)^2 + 2(2)^2 + 3(3)^2 + \cdots + n(n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$. Por lo tanto $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$.

Si a la suma anterior le agregamos $(n+1)$ cuadrados de área $(n+1)^2$, la suma de las áreas que tenemos es $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$. Notemos que para este caso no se dividió ningún cuadro y que, con el procedimiento anterior, nos dará: $(1+2+3+\cdots+n)^2 + (n+1)(n+1)^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$.


[1+2+3+···+n+(n+1)]

UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA, CUYA SUMA ES IGUAL AL CUADRADO DE SUS TÉRMINOS

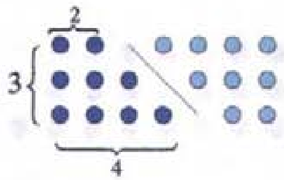
$$\sum_{k=n}^{3n-2} k = \frac{(2n-1)(n+3n-2)}{2} = (2n-1)^2$$



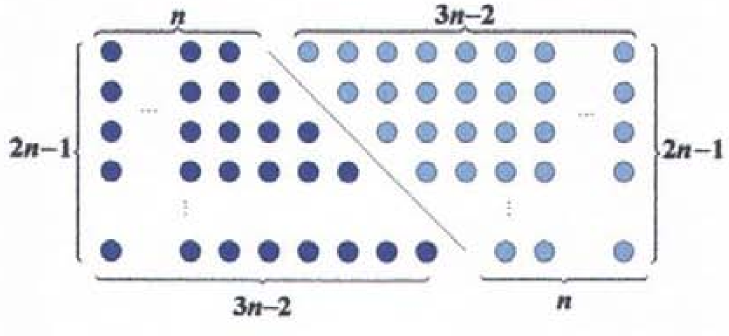
EXPLICACIÓN:

Cuando el número de bolas es $\sum\limits_{k=1}^{3(1)-2} k = 1$, el total de bolas que se tienen son $\dfrac{1\,(1+1)}{2} = [2\,(1)-1]^2$, como lo muestra la siguiente figura:

Cuando aumentamos al renglón del caso anterior una bola y dos renglones más, uno con 3 bolas y otro con 4 bolas , entonces, el número de bolas que tenemos es: $\sum\limits_{k=2}^{3(2)-2} k = 2+3+4$. Para encontrar el total de bolas, formemos un trapecio; el total de bolas que se tienen es: $\dfrac{3\,(2+4)}{2} = 3^2$, como lo muestra la siguiente figura:



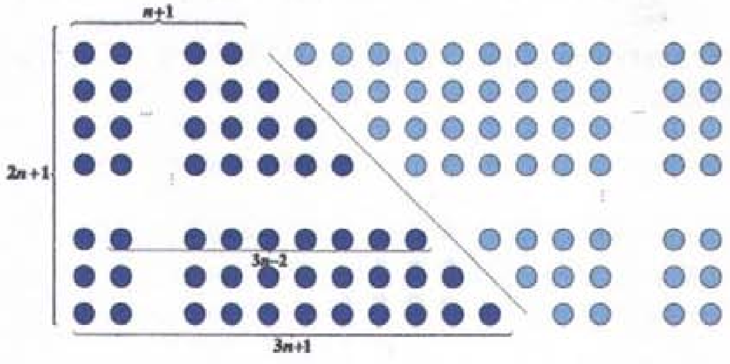
La suma $\sum\limits_{k=n}^{3n-2} k$ es igual a la mitad de la cantidad de bolas que hay en el rectángulo.



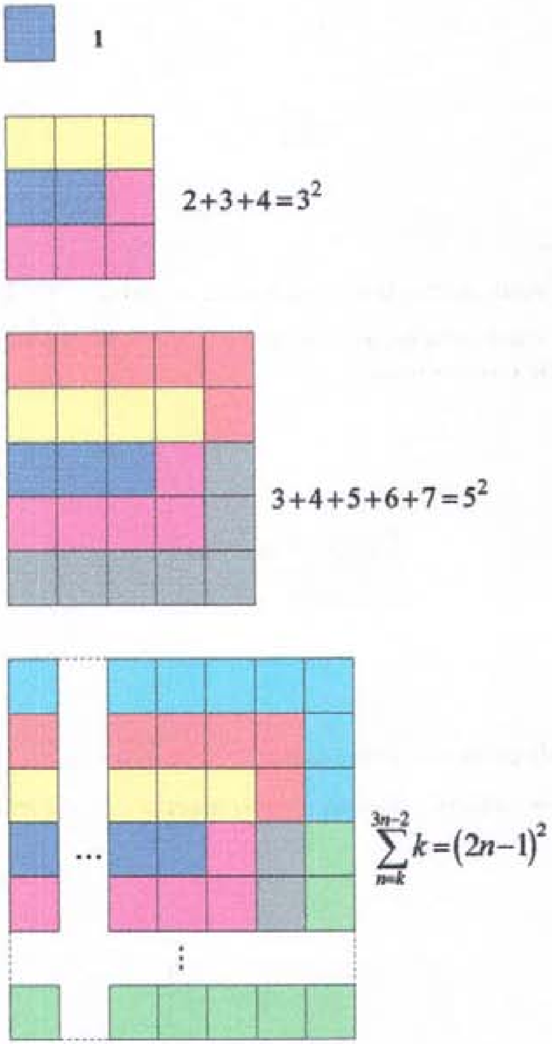
Donde el rectángulo tiene por lados $2n-1$ y $4n-2$; luego en él hay $(2n-1)(4n-2) = 2(2n-1)^2$ bolas, por lo que $\sum\limits_{k=n+1}^{3n-2} k = (2n-1)^2$.

Veamos qué sucede cuando aumentamos una bola a cada renglón y dos renglones más, uno con $3n$ bolas y otro con $3n+1$ bolas; es decir, el número de bolas a sumar es $\sum\limits_{k=n+1}^{3(n+1)-2} k = \sum\limits_{k=n+1}^{3n+1} k = (n+1) + [(n+1)+1] + \cdots + [(3n-2)+1] + 3n + (3n+1)$.

Como en el caso anterior, para encontara el total de bolas que se estan sumando, formemos un trapecio, como se muestra en la figura de abajo de tal forma que el número de bolas es: $\dfrac{(2n+1)[(n+1)+(3n+1)]}{2} = [2n+1]^2$.



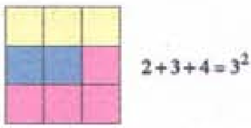
PROGRESIONES ARITMÉTICAS CUYA SUMA ES IGUAL AL CUADRADO DEL NÚMERO DE SUS TÉRMINOS



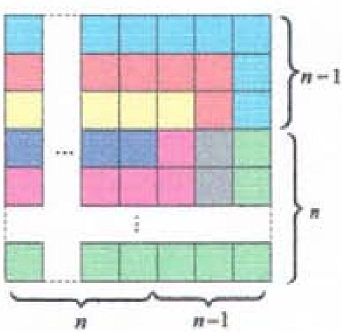
EXPLICACIÓN:

la suma de un solo cuadrado, es decir, $\sum_{k=1}^{3(1)-2} k = 1 = 1^2$, como lo muestra la figura:

Tomemos la suma de $2+3+4$ cuadrados, es decir, $\sum_{k=2}^{3(2)-2} k = 2+3+4$, y acomodemos los cuadrados como lo muestra la siguiente figura. Luego, es fácil ver que el total de cuadrados es:



Tomemos la siguiente suma de cuadros $\sum_{k=n}^{3(n)-2} k = n+(n+1)+\cdots+(3n-2)$ y acomodemos los cuadros como en el caso anterior. Observemos que el total de cuadros es:

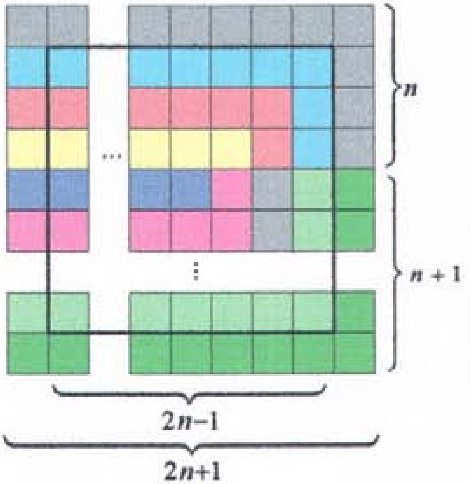


$$\sum_{k=n}^{3n-2} k = (2n-1)^2 \, , \, n = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

Observa que si al arreglo anterior agregamos $\sum_{k=n}^{3(n)-2} k = n + (n+1) + \cdots + (3n-2) = (2n-1)^2$, una capa más de cuadros en toda la orilla, de tal manera que no pierda su forma, la suma se transforma en:

$(n+1) + [(n+1)+1] + \cdots + [(3n-2)+2] + (3n+1) =$

$= (2n-1)^2 + (2n-1) + (3n) + 3n + 1 = 4n^2 + +4n + 1 = (2n+1)^2$



Trigonometría

- **Seno de la suma**
  Sindney H. Kung.

- **El coseno de la diferencia**
  William T. Webber y Matthew Bode.

- **Área y fórmulas de la diferencia**
  Sindney H. Kung.

- **La ley de los cosenos**
  Timothy A. Sipka.
  Sidney H. Kung.

- **La ley de los cosenos (vía teorema de Ptolomeo)**
  Sidney H. Kung.

- **Fórmulas del doble de un ángulo**
  Roger B. Nelsen.

- **Formula de la tangente para la mitad de un ángulo**
  R. J. Walker.

- **Formula del seno cuadrado y coseno cuadrado para la mitad de un ángulo**
  Paul Deierman.

- **Ecuación de Mollweide**
  H. Arthur Dekleine.

- **Una identidad trigonométrica**
  William Romaine.

- **Una sustitución para que las funciones seno y coseno se vean como funciones racionales**

  Roger B. Nelsen.

- **Una formula para** $a\ sen\ x + b\ cos\ x$

  Rick Mabry y Paul Deiermann.

- **Identidades trigonométricas diferencia-producto**

  Sidney H. Kung.

- **Identidades trigonométricas suma-producto**

  Sidney H. Kung.

- **Formula de duplicación de Einsenstein**

  Lin Tan.

- **El coseno de la suma vía la ley de los senos**

  James Kirby.

- **La ley de las tangentes**

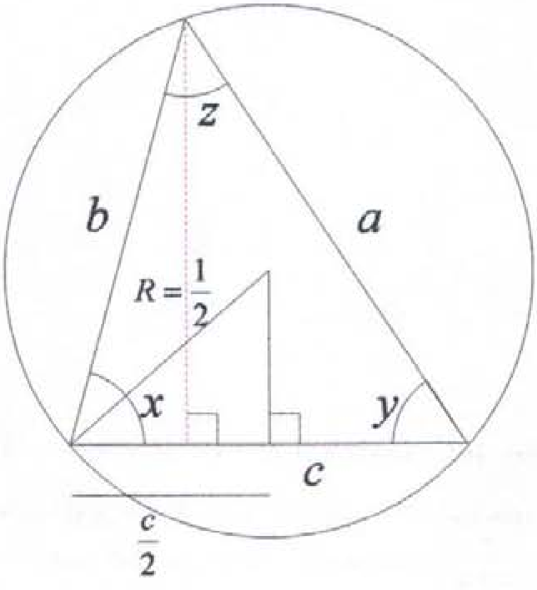
  Rex H. Wu.

- **Suma de arcotangentes**

  Edward M. Harris (dos pruebas).

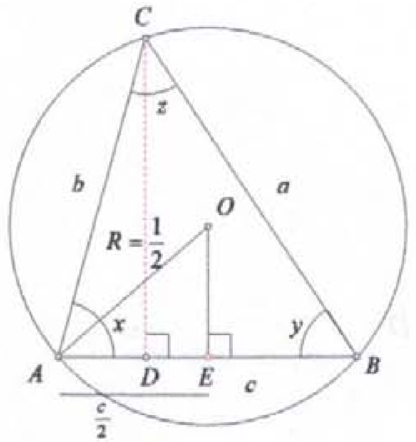
SENO DE LA SUMA

$sen(x+y) = cos\ x\ sen\ y + cos\ y\ sen\ x$, para $x+y<\pi$



$$sen\ (x+y) = sen\ (\pi - (x+y)) = sen\ z$$
$$sen\ z = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{1}{2}} = c$$
$$c = a\ cos\ y + b\ cos\ x,\ b = sen\ y,\ a = sen\ x$$
$$\therefore sen(x+y) = sen\ x\ cos\ y + sen\ y\ cos\ x.$$

EXPLICACIÓN:



Para el triángulo ABC trazamos la altura CD, entonces, $AD = b\ cos\ x$ y $DB = a\ cos\ y$.

Por otro lado aplicando la ley de los senos al triángulo ABC se tiene que $\dfrac{a}{sen\ x} = \dfrac{b}{sen\ y} = \dfrac{c}{sen\ z} = 2R$, de la última igualdad tenemos $sen\ z = \dfrac{\frac{c}{2}}{R} = \dfrac{c}{2(\frac{1}{2})} = c$, puesto que $R = \frac{1}{2}$. Además $sen\ x = \dfrac{a}{2R} = a$ y $sen\ y = \dfrac{b}{2R} = b$. Como $z = \pi - (x+y)$, tenemos que:

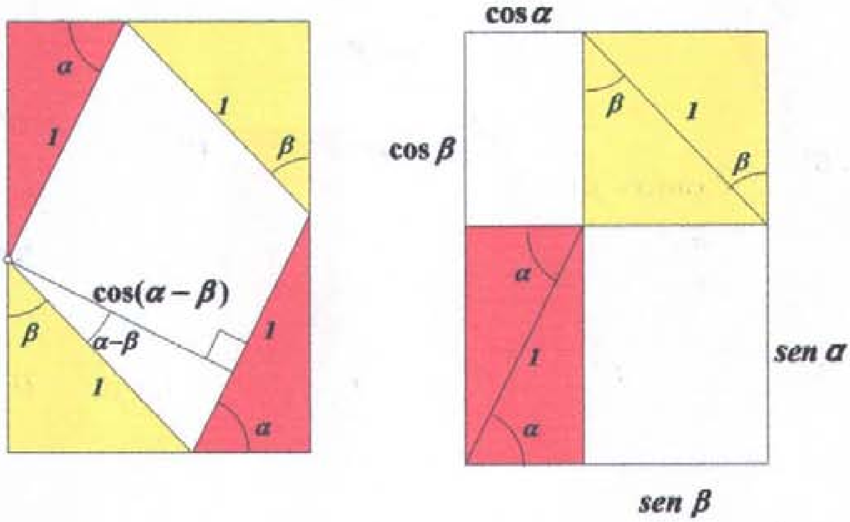
$sen\ (x+y) = sen\ (\pi - (x+y)) = sen\ z = c = AD + DB =$

$= b\ cos\ x + a\ cos\ y = sen\ y\ cos\ x + sen\ x\ cos\ y$.

Por lo tanto, $sen\ (x+y) = sen\ y\ cos\ x + sen\ x\ cos\ y$.

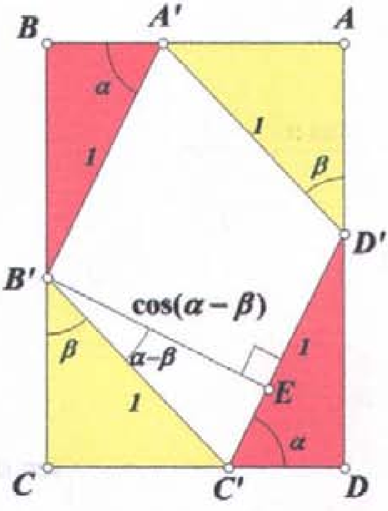
EL COSENO DE LA DIFERENCIA

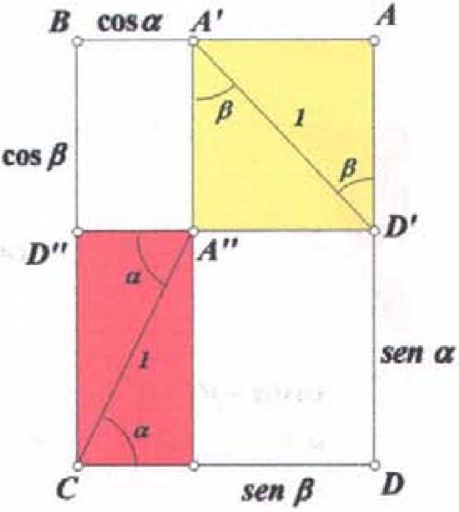
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$



El área del rombo blanco en el rectángulo de la izquierda es $\cos(\alpha - \beta)$ y es igual a la suma de las área de los rectángulos blancos en el rectángulo de la derecha .

EXPLICACIÓN:





Notemos que los dos rectángulos grandes son congruentes por lo que tienen la misma área.

El primer rectángulo esta formado por dos triángulos rojos cuyas áreas son: $\frac{(cos\ \alpha)(sen\ \alpha)}{2}$, dos triángulos amarillos de área $\frac{(cos\ \beta)(sen\ \beta)}{2}$ y un rombo blanco cuya área es $cos\ (\alpha - \beta)$.

ya que $\angle C'B'E + \angle EC'B' + \frac{\pi}{2} = \angle DC'E + \angle EC'B' + \angle B'C'C = \alpha + \angle EC'B' + (\frac{\pi}{2} - \beta)$, simplificando la primera igualdad con la tercera tenemos $\angle C'B'E = \alpha - \beta$, por lo que $B'E = cos\ (\alpha - \beta)$ es la altura del rombo blanco de lado 1.

El segundo rectángulo esta formado por un rectángulo rojo cuya área es $(cos\ \alpha)(sen\ \alpha)$, otro rectángulo amarillo cuya área es $(cos\ \beta)(sen\ \beta)$, además dos rectángulos blancos uno de ellos de área $(cos\alpha)\,(cos\beta)$ y el otro de área $(sen\alpha)\,(sen\beta)$.

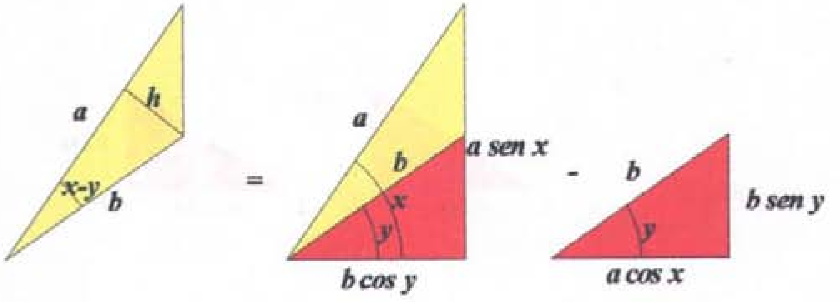
Luego igualando ambas áreas de los rectángulos grandes tenemos

$2[\frac{(cos\ \alpha)(sen\ \alpha)}{2}] + 2[\frac{(cos\ \beta)(sen\ \beta)}{2}] + cos\ (\alpha - \beta)$

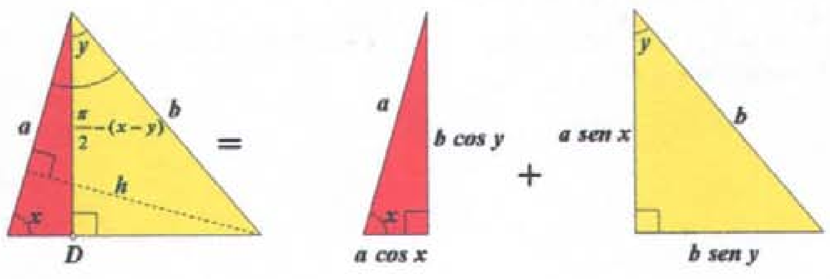
$= cos\ \alpha\ sen\ \alpha + cos\ \beta\ sen\ \beta + cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta.$

Por lo tanto, $cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta.$

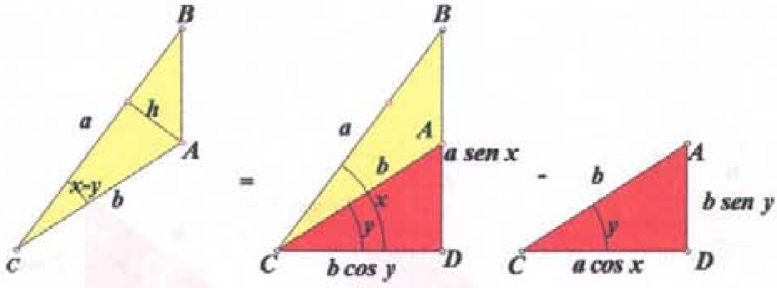
$$sen\ (x-y) = sen\ x\ cos\ y - cos\ x\ sen\ y$$



$$cos\ (x-y) = cos\ x\ cos\ y + sen\ x\ sen\ y$$



EXPLICACIÓN:



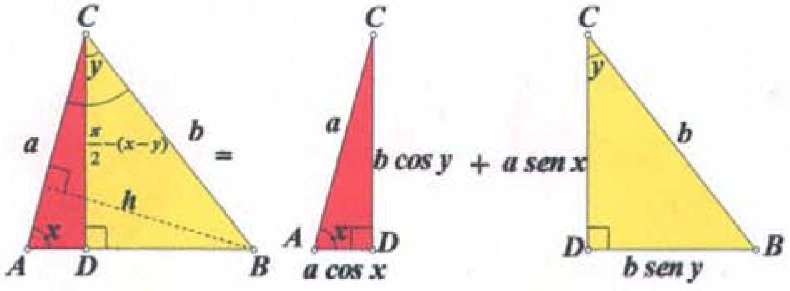
Para el triángulo ABC tenemos que $h = b\ sen\ (x-y)$ por lo que su área es $\dfrac{a[bsen(x-y)]}{2}$. Para el triángulo BCD tenemos $BD = a\ sen\ x$, $CD = a\ cos\ x$. Y para el triángulo DAC tenemos $CD = b\ cos\ y$, $AD = b\ sen\ y$.

Las áreas de los triángulos DBC y DAC son respectivamente $\frac{1}{2}(bcosy)(asenx)$ y $\frac{1}{2}(a\ cos\ x)(b\ sen\ y)$.

Luego el área del triángulo ABC es igual al área del triángulo DBC menos el área del triángulo DAC, es decir

$\dfrac{ab}{2}sen\ (x-y) = \dfrac{ab}{2}sen\ x\ cos\ y - \dfrac{ab}{2}cos\ x\ sen\ y$, simplificando: $sen(x-y) = sen\ x\ cos\ y - cos\ x\ sen\ y$.

EXPLICACIÓN:



Para el triángulo ABC tenemos que $h = b\ sen\ [\frac{\pi}{2} - (x-y)]$ ya que el $\angle ACB = (\frac{\pi}{2} - x) + y = \frac{\pi}{2} - (x-y)$, por lo que su área es $\dfrac{a[bsen[\frac{\pi}{2} - (x-y)]}{2} = \dfrac{ab}{2} cos\ (x-y)$, para el triángulo ADC tenemos $AD = a\ cos\ x$, $DC = a\ sen\ x$ y para el triángulo DBC tenemos $DC = b\ cos\ y$, $DB = b\ sen\ y$.

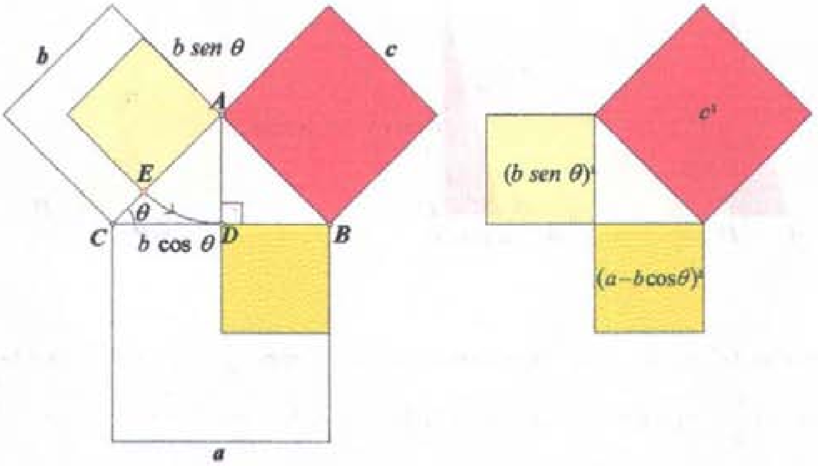
Notar que los triángulos ADC y DBC tienen como lado comun a DC, por lo que sus áreas respectivamente son $\frac{1}{2}(b\ cos\ y)(a\ cos\ x)$ y $\frac{1}{2}(a\ sen\ x)(b\ sen\ y)$.

Luego el área del triángulo ABC es igual al área del triángulo ADC más el área del triángulo DBC, es decir

$\dfrac{ab}{2} cos\ (x-y) = \dfrac{ab}{2} cos\ x\ cos\ y + \dfrac{ab}{2} sen\ x\ sen\ y$, simplificando: $cos(x-y) = cos\ x\ cos\ y + sen\ x\ sen\ y$.

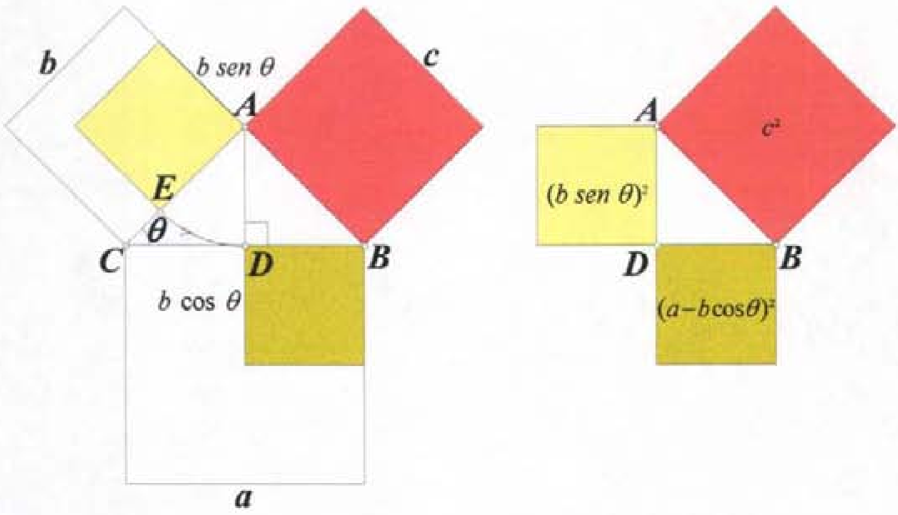
LA LEY DE LOS COSENOS I

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$



Para un triángulo de lados a, b y c se cumple que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$.

EXPLICACIÓN:

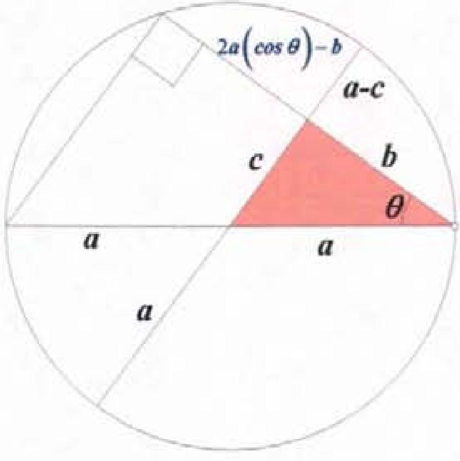


Para el triángulo ABC trazamos la altura AD y sobre el lado AC trazamos $AE = AD$, además tenemos que $AD = b\ sen\ \theta$, $CD = b\ cos\ \theta$ y $DB = CB - CD = a - b\ cos\ \theta$.

Aplicando Pitágoras al triángulo ADB tenemos que $c^2 = (AD)^2 + (DB)^2$ $= b^2 sen^2\theta + (a - b\ cos\ \theta)^2 = b^2 sen^2\theta + a^2 - 2abcos\ \theta + b^2 cos^2\theta$, por lo que $c^2 = b^2 + a^2 - 2abcos\ \theta$. Ya que $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$.

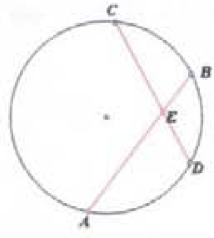
LA LEY DE LOS COSENOS II

Para un triángulo de lados a, b y c se cumple que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \theta$.



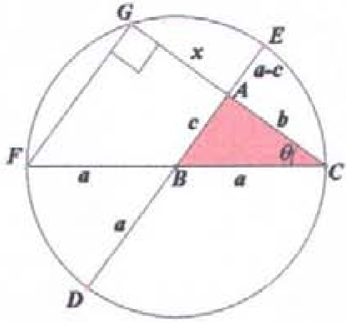
$$(a+c)\,(a-c) = b\,(2a\ cos\ \theta - b)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \theta.$$

COMENTARIO:



Si AB y CD son dos cuerdas de una circunferencia que se intersectan en E, entonces se cumple que $EC \cdot ED = EA \cdot EB$. Que se infiere de que los triángulos EAD y ECB son semejantes.

EXPLICACIÓN:

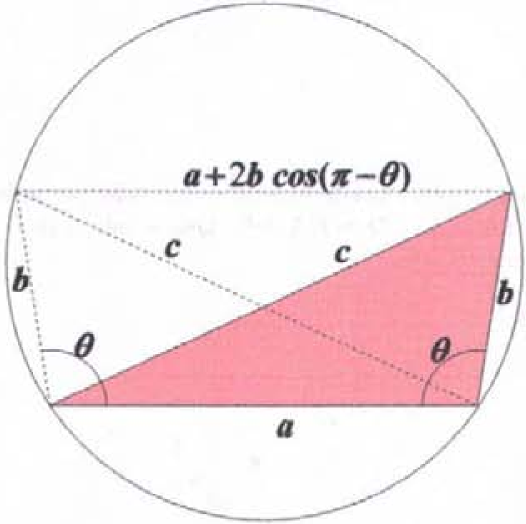


Para un triángulo ABC cuyos lados miden a, b y c, trazamos una circunferencia con centro en B y radio a, luego trazamos la recta AB y las intersecciones de ésta con la circunferencia las llamamos D y E, también trazamos la recta CB de tal forma que a la intersección de ésta con la circunferencia la llamamos F, por último trazamos una recta paralela a AB que pase por F, y a la intersección de ésta con la circunferencia la llamamos G. Como FC resulta ser diámetro de la circunferencia y G un punto sobre la circunferencia, entonces el triángulo FCG resulta ser triángulo rectángulo.

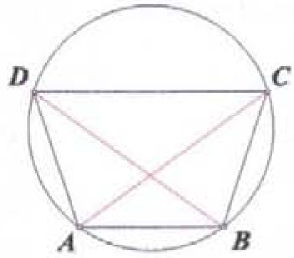
Para el triángulo FCG tenemos $x+b = 2a \cos\theta$, por lo que $x = (2a\cos\theta) - b$, por otro lado aplicando el comentario a las cuerdas GC y DE que se intersectan en A, tenemos $x \cdot b = (a+c)(a-c)$, que al sustituir el valor de x, se tiene $(2a \cos\theta - b) \cdot b = (a+c)(a-c)$, desarollando y despejando tenemos $c^2 = a^2 + b^2 - (2ab)\cos\theta$.

LA LEY DE LOS COSENOS III (VIA EL TEOREMA DE PTOLOMEO)

$$c \cdot c = b \cdot b + [a + 2b \cos (\pi - \theta)] \cdot a$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

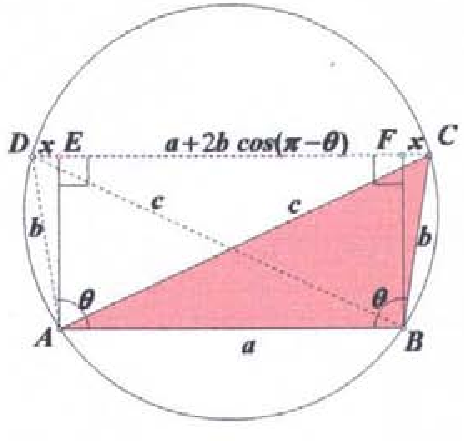


COMENTARIO:



El teorema de Ptolomeo dice que: El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si $AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$

EXPLICACIÓN:



Como $BC = DA$, entonces el segmento DC es paralelo a AB. Trazamos las rectas perpendiculares a AB que pasen por A y por B, respectivamente. A los puntos de intersección de las perpendiculares con DC los llamamos E y F.

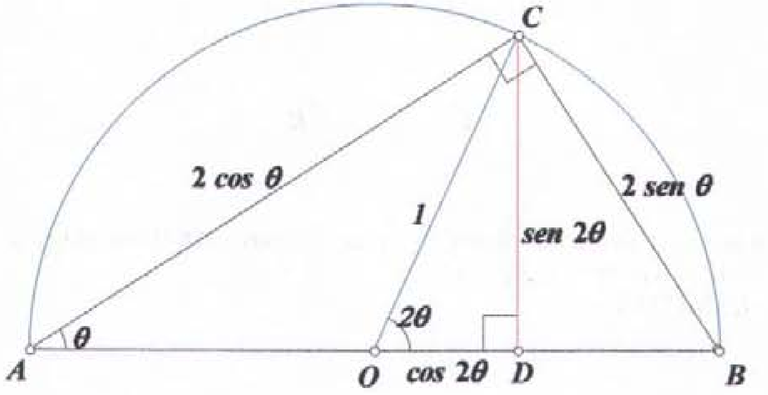
Como el ángulo $\angle ADE = \pi - \theta$, tenemos que $x = b \cos\,(\pi - \theta)$, ya que el triángulo AED es rectángulo, luego $DC = a + 2x = a + 2b\cos(\pi - \theta)$.

Usando el teorema de Ptolomeo $c^2 = a[a + 2b\cos(\pi - \theta)] + b^2$, finalmente usando que $\cos\,(\pi - \theta) = -\cos\,\theta$ y simplificando tenemos que:

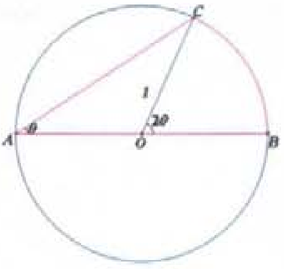
$$c^2 = a^2 + b^2 - (2ab)\cos\theta.$$

FÓRMULAS DEL DOBLE DE UN ÁNGULO

$$sen\ 2\theta = 2sen\ \theta\ cos\ \theta \ \text{ y } \ cos\ 2\theta = 2cos^2\theta - 1$$

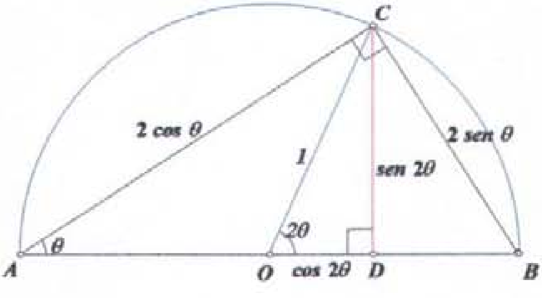


COMENTARIO:



El ángulo inscrito $\angle BAC$ en una circunferencia, es igual a la mitad de su ángulo central $\angle BOC$ que abarca el mismo arco, es decir $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$.

EXPLICACIÓN:



Como el ángulo $\angle BAC = \theta$, entonces por el comentario, tenemos que $\angle DOC = 2\theta$.

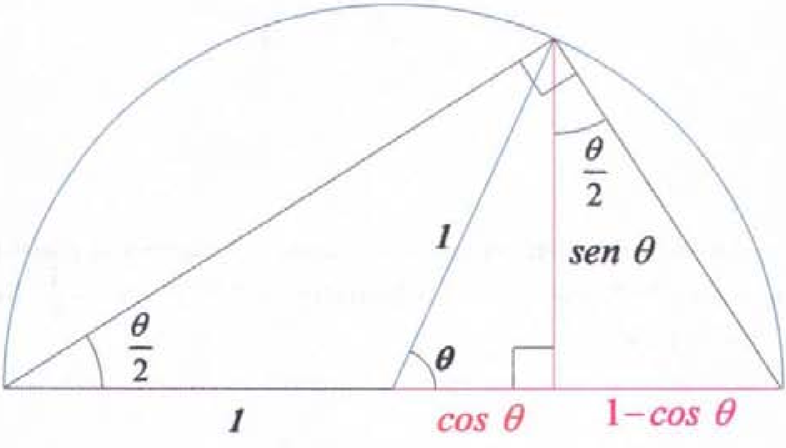
Para el triángulo ODC tenemos que $OD = cos\ 2\theta$, $DC = sen\ 2\theta$. Y para el triángulo ABC tenemos $BC = 2sen\ \theta$, $AC = 2\ cos\ \theta$ ya que $AB = 2$ el diámetro de la circunferencia y la hipotenusa del triángulo ABC.

Como el triángulo ABC es semejante al triángulo ACD, ya que DC es altura del triángulo ABC, tenemos que $\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB}$, es decir $\frac{sen 2\theta}{2cos\theta} = \frac{2sen\theta}{2}$ por lo tanto $sen\ 2\theta = 2sen\ \theta\ cos\ \theta$.

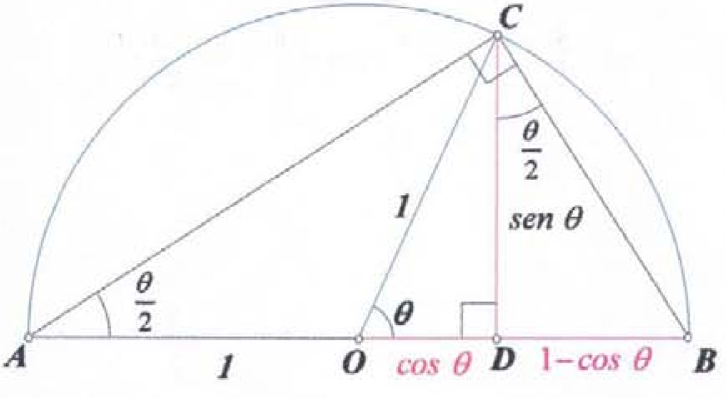
Notemos que $AD = AO + OD = 1 + cos\ 2\theta$, además como los triángulos ABC y ACD son semejantes, $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$, es decir $\frac{1+cos 2\theta}{2cos\theta} = \frac{2cos\theta}{2}$ por lo tanto $cos\ 2\theta = 2cos^2\theta - 1$.

FÓRMULA DE LA TANGENTE PARA LA MITAD DE UN ÁNGULO

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{sen\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{sen\theta}$$



EXPLICACIÓN:



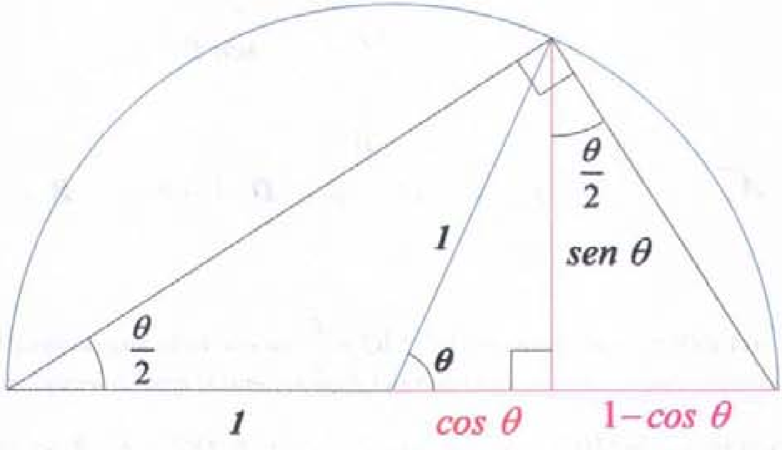
Como el $\angle DOC = \theta$, entonces el $\angle BAC = \frac{\theta}{2}$, ya que todo ángulo inscrito en una circunferencia, es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

Para el triángulo ODC tenemos que $OD = \cos\theta$, $DC = \operatorname{sen}\theta$, ya que es rectángulo pues DC es altura del triángulo ABC. Además $DB = OB - OD = 1 - \cos\theta$, y $AD = AO + OD = 1 + \cos\theta$. Luego en el triángulo ADC se tiene que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{DC}{AD} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$

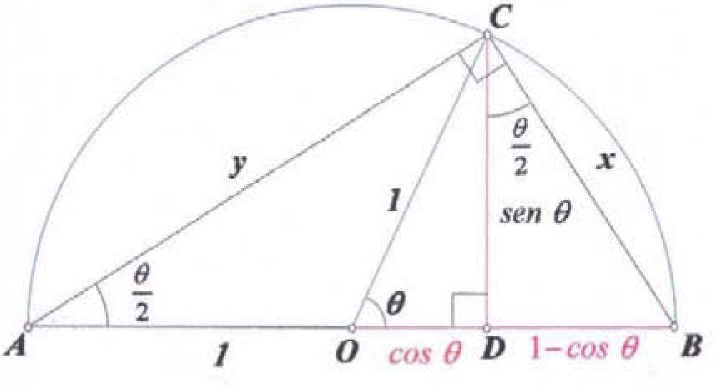
Por otro lado como los triángulos CDB y ADC son semejantes (de hecho ambos semejantes al triángulo ACB, ya que DC es su altura) el ángulo DCB es $\frac{\theta}{2}$, luego en el triángulo CDB tenemos $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{DB}{DC} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, por lo tanto $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

FÓRMULA DEL SENO CUADRADO Y COSENO CUADRADO PARA LA MITAD DE UN ÁNGULO

$$sen^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2} \quad y \ \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}$$



EXPLICACIÓN:



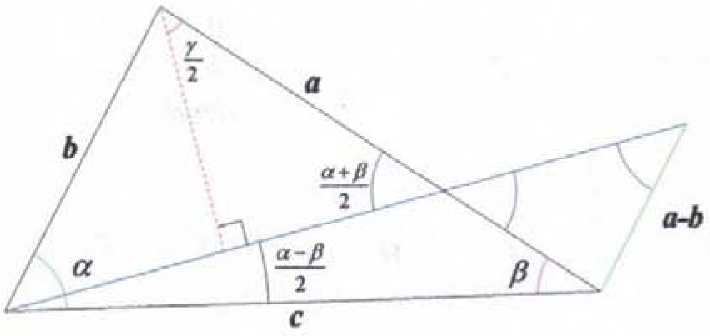
Como el $\angle DOC = \theta$, entonces el $\angle BAC = \frac{\theta}{2}$, ya que todo ángulo inscrito en una circunferencia, es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

Para el triángulo ODC tenemos que $OD = \cos\theta$, $DC = \operatorname{sen}\theta$, ya que es rectángulo pues DC es altura del $\triangle ABC$, además $DB = OB - OD = 1 - \cos\theta$, y $AD = AO + OD = 1 + \cos\theta$. Luego para el triángulo ACB se tiene que $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{2}$ y $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{AC}{AB} = \frac{y}{2}$ ya que AB es el diámetro de la circunferencia.

Por otro lado como los triángulos CDB y ACB son semejantes pues DC es altura del $\triangle ABC$ por lo que el $\angle DCB = \frac{\theta}{2}$ y $\frac{BC}{AB} = \frac{DB}{BC}$, es decir $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{x}{2} = \frac{1-\cos\theta}{x}$, por lo que $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{x^2}{4} = \frac{2[1-\cos\theta]}{4} = \frac{1-\cos\theta}{2}$. Análogamente como los triángulos ADC y ACB son semejantes, se tiene que, $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$, es decir $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{y}{2} = \frac{1+\cos\theta}{y}$, por lo tanto $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$.

ECUACIÓN DE MOLLWEIDE

$$(a-b)\ cos\ \tfrac{\gamma}{2} = c\ sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

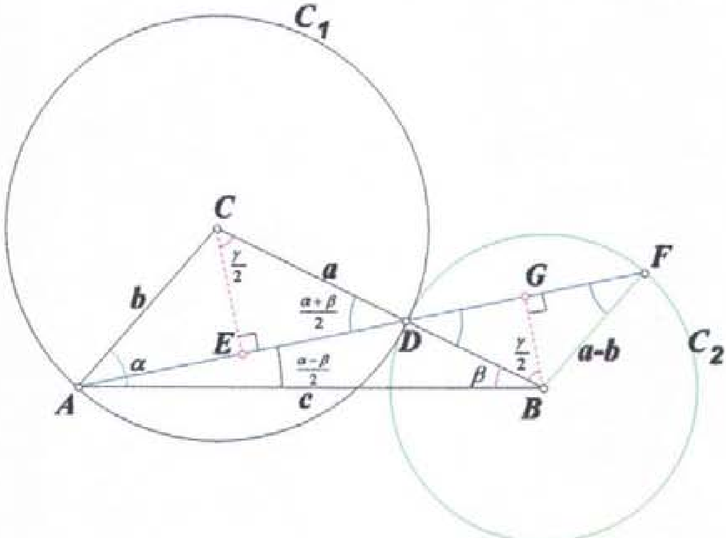


COMENTARIO:

El área de un triángulo ABC es $\dfrac{ab\ sen\ \gamma}{2}$, $\dfrac{bc\ sen\ \alpha}{2}$ ó $\dfrac{ac\ sen\ \beta}{2}$, donde α, β y γ son los ángulos opuestos a los lados a, b y c respectivamente.

OBSERVACIÓN:

Como $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ y $\frac{\pi}{2}+\frac{\gamma}{2}+\angle CDE=\pi$, tenemos que $\angle CDE=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\angle DBF$, entonces el $\angle BAD=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.



EXPLICACIÓN 1:

Trazamos la circunferencia C_1 con centro en C y radio b, llamamos D al punto de intersección de C_1 con el segmento CB, entonces $CD=b$ y $DB=a-b$.

Trazamos la circunferencia C_2 con centro en B y radio $a-b$, a la intersección de C_2 con la prolongación de AD la llamamos F.

Los triángulos ADC y DBF son triángulos isóceles y semejantes. Además CE y GB son alturas y bisectrices. Llamemos $h=GB$.

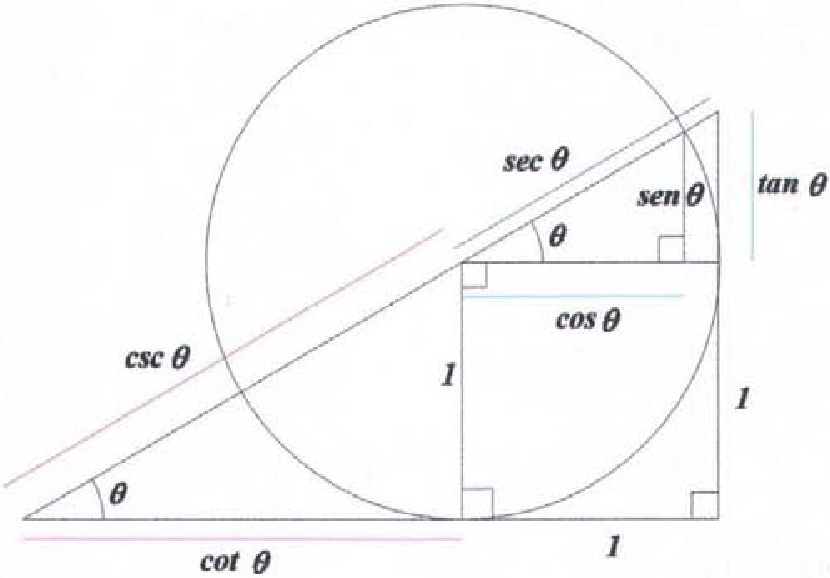
Por la observación, tenemos que $sen\ \dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{h}{c}$ y $cos\ \dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{h}{a-b}$, luego despejando h e igualando tenemos $(a-b)cos\ \dfrac{\gamma}{2}=c\ sen\ (\dfrac{\alpha-\beta}{2})$.

EXPLICACIÓN 2:

Por el comentario el área del triángulo ABF es: $\dfrac{AB \cdot AF sen\angle BAF}{2}$, pero también es: $\dfrac{AF \cdot BF sen\angle AFB}{2}$, por la observación los águlos $\angle BAF = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ y $\angle AFB = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, tenemos que $sen\ \angle AFB = sen\ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = cos\ \frac{\gamma}{2}$. Igualando las dos formas de encontrar el área y simplificando tenemos $c \cdot sen\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right) = (a-b)\, cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

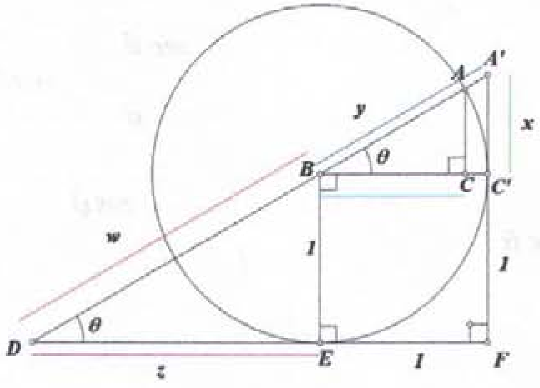
UNA IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

$$(tan\ \theta + 1)^2 + (cot\ \theta + 1)^2 = (sec\ \theta + csc\theta)^2$$

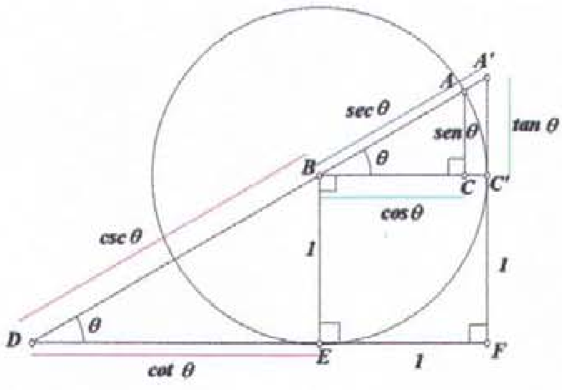


COMENTARIO:

Por identidades trigonométricas para el triángulo rectángulo ABC de hipotenusa 1, los catetos cumplen $AC = sen\ \theta$ y $BC = cos\ \theta$, y para el triángulo rectángulo $A'BC'$ tenemos $x = tan\ \theta$ e $y = sec\ \theta$ y como el triángulo rectángulo EBD es semejante al triángulo $C'A'B$ tenemos que, $\frac{DB}{BA'} = \frac{1}{tan\ \theta} = \frac{DE}{BC'}$ es decir $\frac{w}{sec\ \theta} = \frac{1}{tan\ \theta} = \frac{z}{1}$, por lo tanto $z = cot\ \theta$, $w = csc\ \theta$.



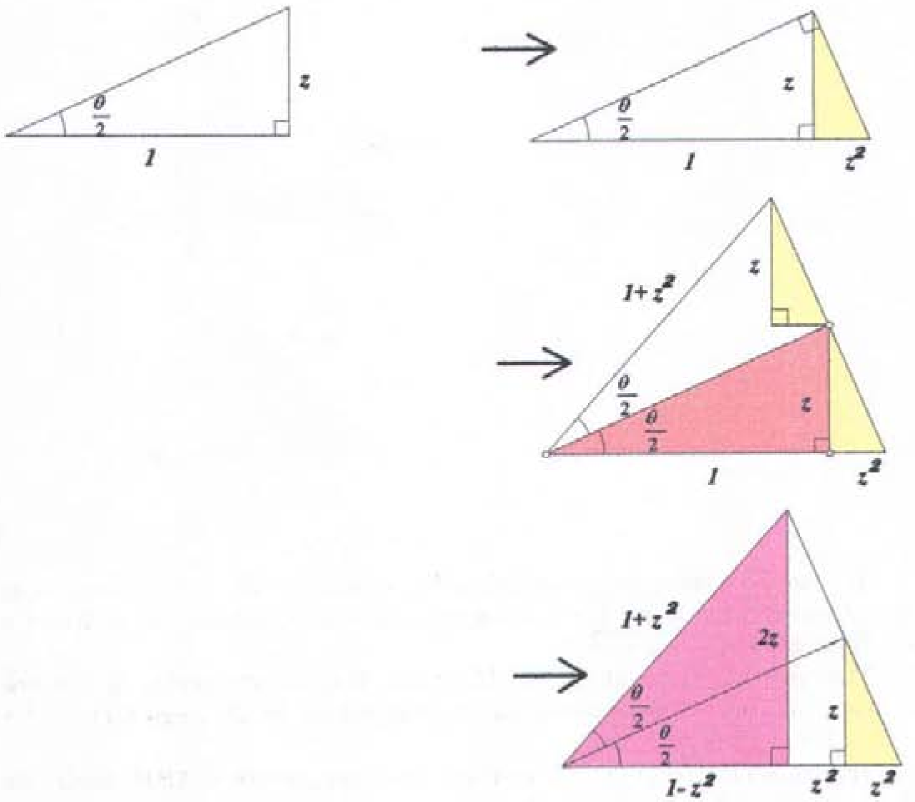
EXPLICACIÓN:



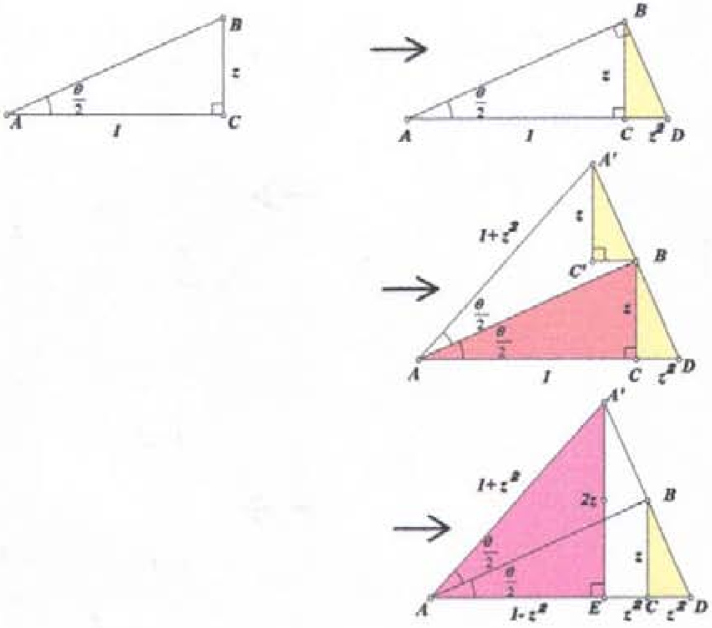
Por el comentario sabemos que $w = csc\ \theta$, $x = tan\ \theta$, $y = sec\ \theta$ y $z = cot\ \theta$ y por el teorema de Pitágoras en el triángulo DFA' tenemos:
$(tan\theta + 1)^2 = (cot\ \theta + 1)^2 + (csc\ \theta + sec\theta)^2$.

UNA SUSTITUCIÓN PARA QUE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO SE VEAN COMO FUNCIONES RACIONALES

$$z = tan\ \frac{\theta}{2} \Rightarrow sen\ \theta = \frac{2z}{1+z^2}\ \text{y}\ cos\ \theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$



EXPLICACIÓN:

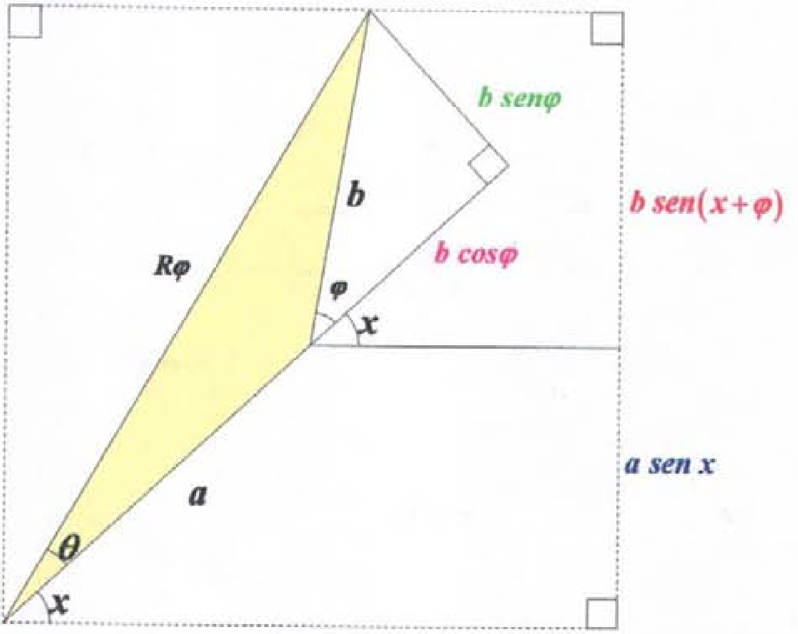


Tracemos un triángulo rectángulo ABC donde $\angle CAB = \frac{\theta}{2}$ y el cateto adyacente a este ángulo sea 1, y z la longitud del cateto opuesto, por el Teorema de Pitágoras $BA = \sqrt{1+z^2}$.

Tracemos BD perpendicular a AB, donde D es la intersección de ésta con la linea AC. Así ABD es rectángulo y semajante a BCD, luego $CD = z^2$ y $AD = 1 + z^2$.

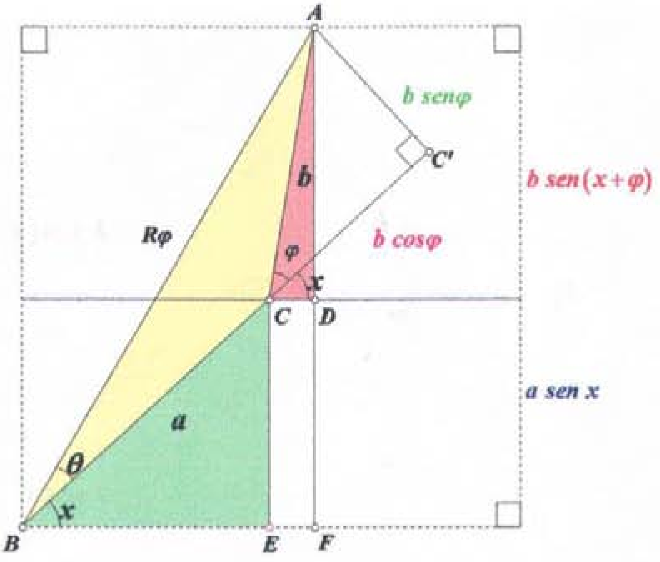
Tracemos un triángulo con vértices ABA' congruente a ABD donde uno de sus lados es $BA = \sqrt{1+z^2}$. Tracemos una recta paralela BC que pase por A' y una recta paralela a AC que pase por B, a la intersección de éstas le llamamos C'. La intersección de la recta $A'C'$ con el segmento AC le llamamos E. Notemos que los triángulos BCD y $A'C'B$ son congruentes por el criterio de ALA, por lo que $EC = z^2$, entonces, $AE = 1 - z^2$ y $A'E = 2z$.

Por lo que $tan\ \frac{\theta}{2} = \frac{z}{1}$, $sen\ \theta = \frac{2z}{1+z^2}$ y $cos\ \theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$.



$$R_\varphi = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\ cos\ \varphi};\ tan\ \theta = \frac{b\ sen\ \varphi}{a + b\ cos\ \varphi}$$
$$a\ sen\ x + b\ sen(x + \varphi) = R_\varphi\ sen(x + \theta)$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow tan\ \theta = \frac{b}{a}$$
$$a\ sen\ x + b\ cos\ x = \sqrt{a^2 + b^2}\ sen\ (x + \theta)$$

EXPLICACIÓN:



Consideremos al triángulo ABC y llamamos C' al pie de la altura de A sobre BC, entonces el triángulo ABC' es rectángulo, y por el teorema de Pitágoras tenemos que $(R_\varphi)^2 = (a + b\ cos\ \varphi)^2 + (b\ sen\ \varphi)^2$ que desarrollando y simplificando tenemos que $R_\varphi = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\ cos\ \varphi}$, también para el mismo triángulo tenemos que $tan\theta = \dfrac{b\ sen\ \varphi}{a + b\ cos\ \varphi}$.

Por otro lado por identidades trigonométricas, tenemos que para los triángulos rectángulos BEC, CDA y BFA que los segmentos $EC = a\ sen\ x$, $DA = b$ $sen\ (x + \varphi)$, luego $sen\ (x + \theta) = \dfrac{AF}{R_\varphi} = \dfrac{EC + DA}{R_\varphi} = \dfrac{a\ sen\ x + b\ sen\ (x + \varphi)}{R_\varphi}$, entonces tenemos que:

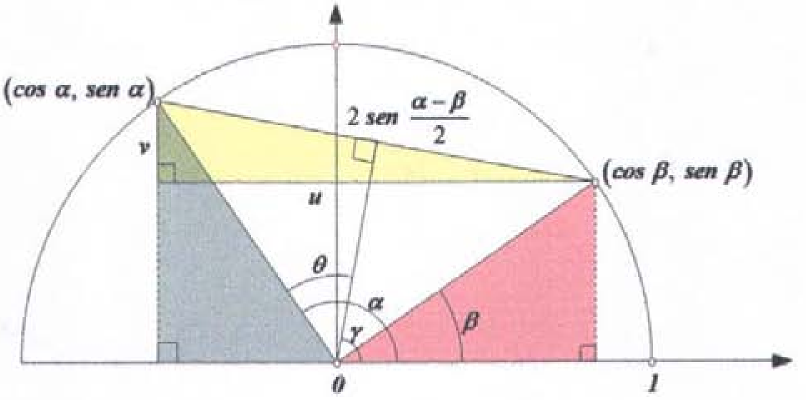
$a\ sen\ x + b\ sen\ (x + \varphi) = R_\varphi\ sen\ (x + \theta) = sen\ (x + \theta)\ \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\ cos\ \varphi}$, si $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, entonces, $a\ sen\ x + b\ cos\ x = sen\ (x + \theta)\ \sqrt{a^2 + b^2}$.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DIFERENCIA-PRODUCTO

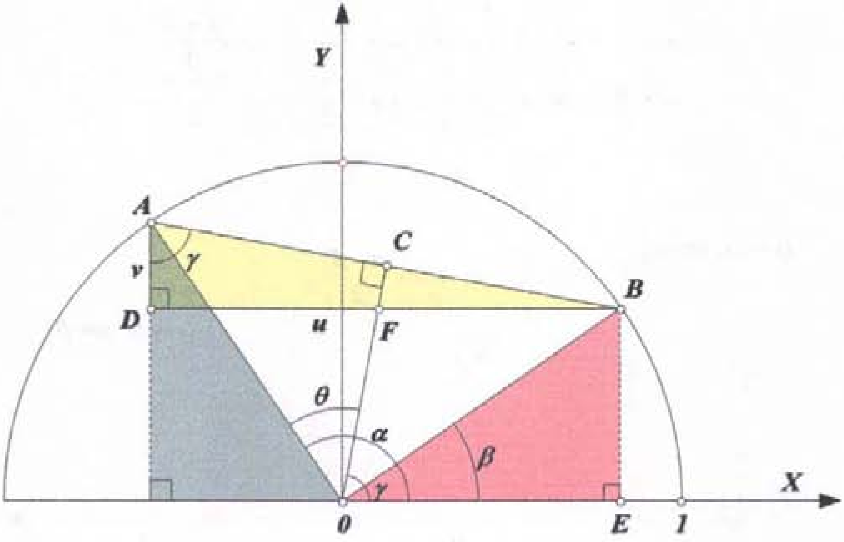
$$\theta = \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$sen\ \alpha - sen\ \beta = v = 2\ sen\ \frac{\alpha - \beta}{2}\ cos\ \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$cos\ \beta - cos\ \alpha = u = 2\ sen\ \frac{\alpha - \beta}{2}\ sen\ \frac{\alpha + \beta}{2}$$



EXPLICACIÓN:



Observemos que el triángulo OBA es isóceles y que si CO es perpendicular a AB, entonces, CO es bisectriz y mediana, por lo tanto $\angle COB = \angle COA = \dfrac{\alpha-\beta}{2} = \theta$ y $\angle EOC = \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \gamma$.

Como BD es paralela a OE y CO es una transversal, tenemos que $\angle BFC = \gamma$ y como los triángulos BCF y BDA son semejantes se tiene que $\angle BAD = \gamma$.

Es claro que: $u = BD = cos\ \beta - cos\ \alpha$ y $v = AD = sen\ \alpha - sen\ \beta$. Ahora calculemos u y v de otra manera en el triángulo rectángulo BDA.

Como, $sen\ \gamma = \dfrac{u}{AB}$ y $cos\ \gamma = \dfrac{v}{AB}$ tenemos que $u = AB\ sen\ \gamma$ y $v = AB\ cos\ \gamma$.

Para el triángulo rectángulo OAC tenemos que $sen\ \theta = AC$, y luego como $AC = CB$, entonces, $AB = 2\ sen\ \theta$, luego

$$u = AB\ sen\ \gamma = 2\ sen\ \theta\ sen\ \gamma = 2\ sen\ \frac{\alpha-\beta}{2}\ sen\ \frac{\alpha+\beta}{2}$$

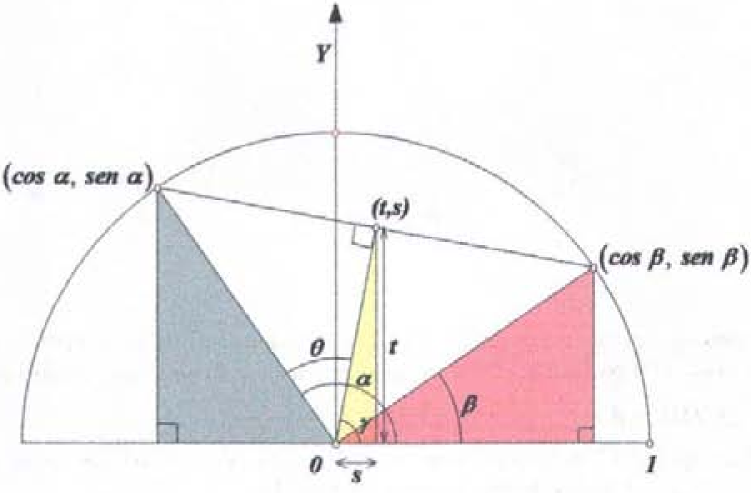
$$v = AB\ cos\ \gamma = 2\ sen\ \theta\ cos\ \gamma = 2\ sen\ \frac{\alpha-\beta}{2}\ cos\ \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Por todo lo anterior tenemos:

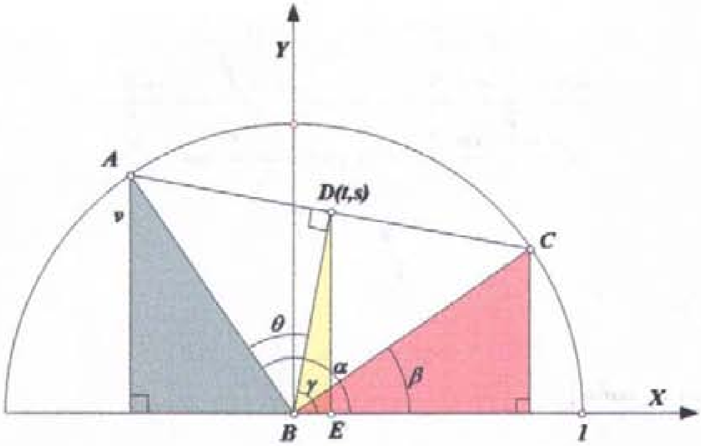
$$cos\ \beta - cos\ \alpha = 2\ sen\ \frac{\alpha-\beta}{2}\ sen\ \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$sen\ \alpha - sen\ \beta = 2\ sen\ \frac{\alpha-\beta}{2}\ cos\ \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\theta = \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$
$$\frac{sen\ \alpha + sen\ \beta}{2} = s = cos\ \frac{\alpha - \beta}{2}\ sen\ \frac{\alpha + \beta}{2}$$
$$\frac{cos\ \alpha + cos\ \beta}{2} = t = cos\ \frac{\alpha - \beta}{2}\ cos\ \frac{\alpha + \beta}{2}$$



EXPLICACIÓN:



Notemos que el triángulo ABC es isóceles y que si DB es perpendicular a AC, entonces, DB es bisectriz y mediana, por lo que D es punto medio de AC. Además $\angle CBD = \theta = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ y $\angle EBD = \gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

Es claro que si $C = (\cos\beta,\ \operatorname{sen}\beta)$ y $A = (\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)$, se tiene por lo anterior que $D = \left(\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}, \dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{2}\right)$.

Como $BD = \cos\theta$, en el triángulo rectángulo EDB tenemos que:

$\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{s}{\cos\theta}$, luego $s = \operatorname{sen}\gamma\cos\theta = \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

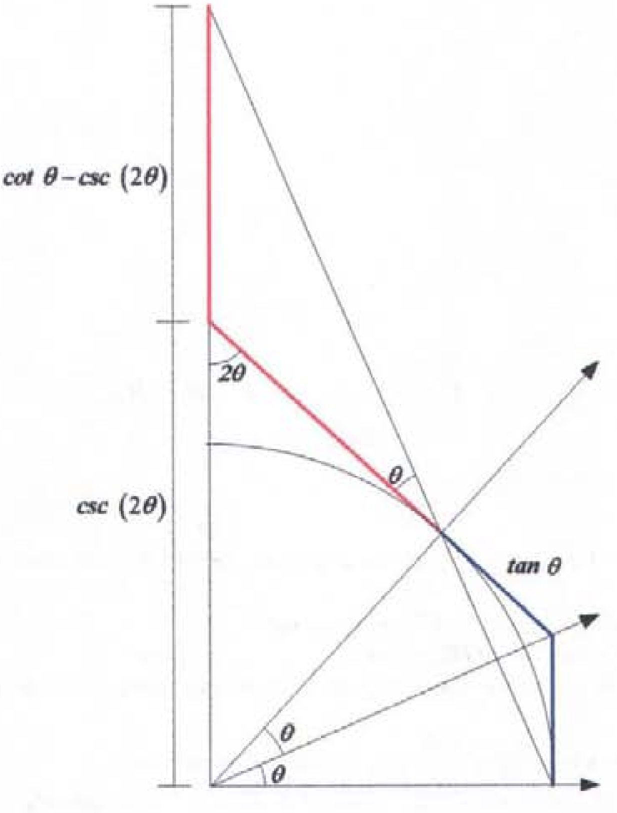
Por lo tanto $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{2} = s = \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

También, $\cos\gamma = \dfrac{t}{\cos\theta}$ luego $t = \cos\gamma\cos\theta = \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

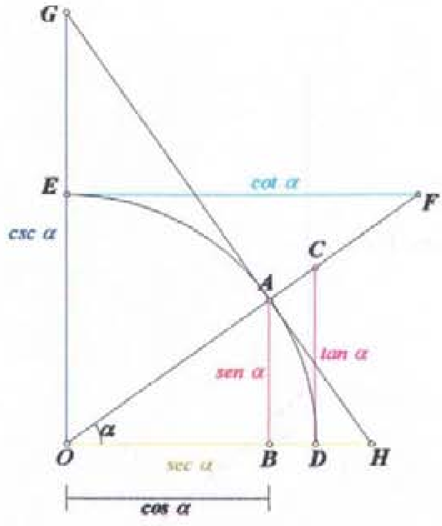
Por lo tanto $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} = t = \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

FÓRMULA DE DUPLICACIÓN DE EINSENSTEIN

$$2\ csc\ (2\theta) = tan\ \theta + cot\ \theta$$



COMENTARIO:



Tomemos un cuarto de circunferencia de radio 1 y veamos las siguiente relaciones:

(i) En el triángulo OAB sabemos que:
$AB = sen\ \alpha$ y $OB = cos\ \alpha$

(ii) En el triángulo OCD donde CD es una recta paralela a AB, se tiene que:

$tan\ \alpha = \dfrac{CD}{OD} = \dfrac{CD}{1}$ por lo tanto $CD = tan\ \alpha$.

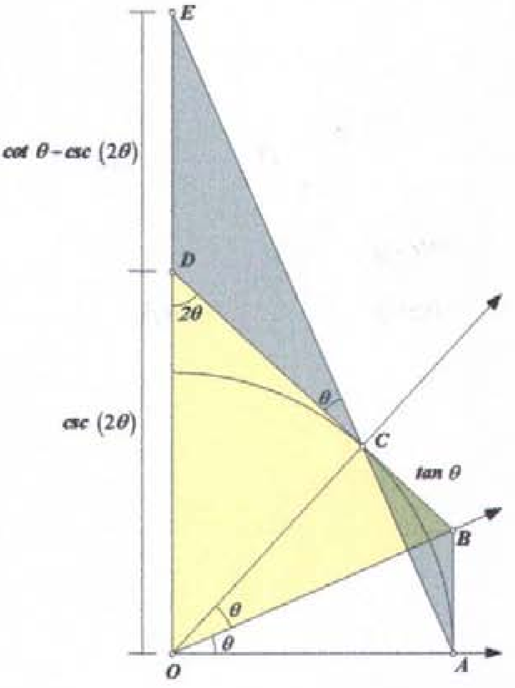
(iii) En el triángulo OEF donde EF es una recta paralela a OB, se tiene que:

$cot\ \alpha = \dfrac{EF}{OE} = \dfrac{EF}{1}$ por lo tanto $EF = cot\ \alpha$.

(iv) Como los triángulos OAB y OHA son semejantes, se tiene que:
$sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{OH}{1}$ por lo tanto $OH = sec\ \alpha$.

(v) Como los triángulos OAB y GOH son semejantes, se tiene que:
$csc\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha} = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{GO}{OA} = \dfrac{GO}{1}$ por lo tanto $GO = csc\ \alpha$.

EXPLICACIÓN:



Se tiene: $\angle ACB = \theta = \angle BAC$ (por ser semi-inscritos y abarcar el mismo arco de la circunferencia). $\angle ECD = \theta = \angle ACB$ (opuestos por el vértice).

$\angle DEC = \theta = \angle ECD$ (por ser DE y AB paralelas cortadas por la transversal AE).

Así que el triángulo DCE es isósceles y entonces $DE = DC$ y como además $\angle ODC = 2\theta$ es ángulo exterior del triángulo DCE.

Se tiene $\angle CBO = \angle BOD = \frac{\pi}{2} - \theta$, por lo que el triángulo OBD es isósceles.

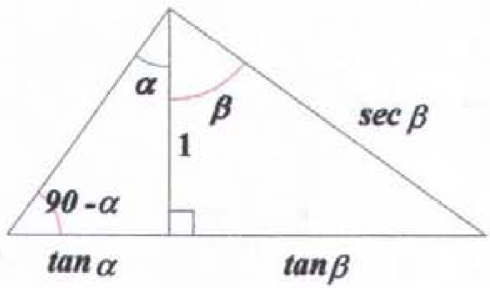
Luego $OD = BD = DC + CB = DE + CB = (OE - OD) + CB$.

Así $OD = (OE - OD) + CB$. Como $cot\ \theta = \dfrac{OE}{OA} = OE$ y como $csc\ (2\theta) = \dfrac{OD}{OC} = OD$, tenemos que $csc\ (2\theta) = [cot\ \theta - csc\ (2\theta)] + tan\ \theta$.

Por lo tanto, $2\ csc\ (2\theta) = tan\ \theta + cot\ \theta$.

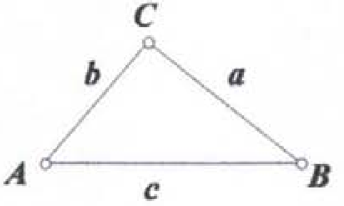
EL SENO DE LA SUMA VÍA LA LEY DE LOS SENOS

$$sen\,(\alpha+\beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha + sen\ \beta$$

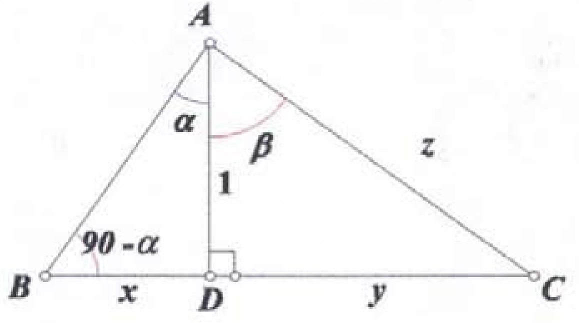


COMENTARIO:

Para el triángulo ABC se cumple la ley de los senos, es decir $\frac{sen\ A}{a} = \frac{sen\ B}{b} = \frac{sen\ C}{c}$



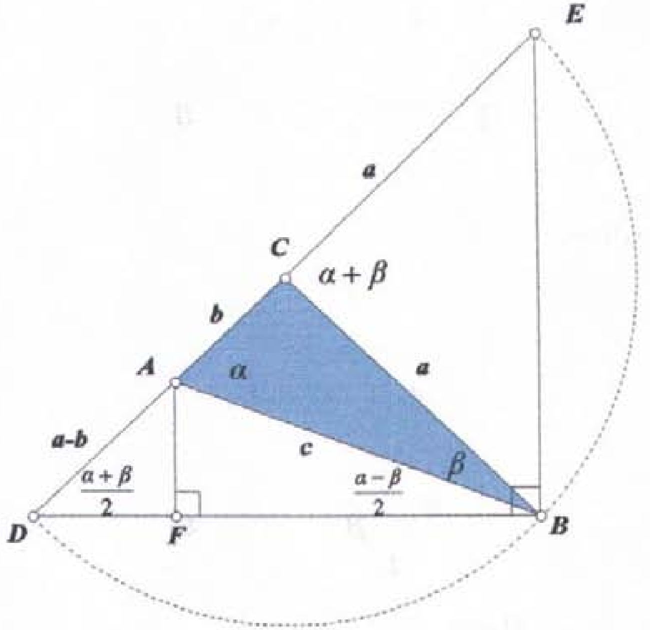
EXPLICACIÓN:



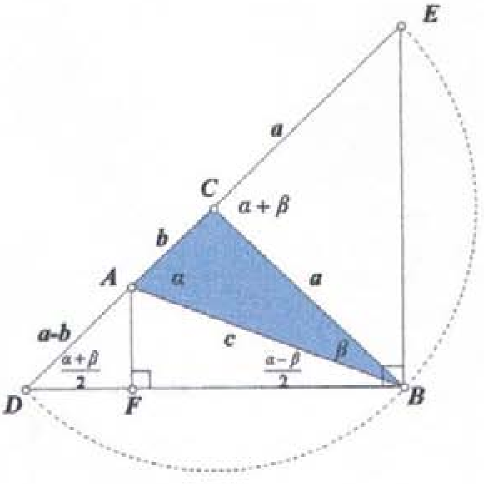
Tracemos el triángulo ABC de altura $AD = 1$, observemos que $tan\ \alpha = x$, $tan\beta = y$ y $sec\beta = z$, luego por el comentario tenemos que $\frac{sen\,(90^\circ - \alpha)}{sec\ \beta} = \frac{sen\,(\alpha + \beta)}{tan\ \alpha +\ tan\ \beta}$ y como $sen\ (90^\circ - \alpha) = cos\ \alpha$, luego $\frac{cos\ \alpha}{sec\ \beta} = \frac{sen\,(\alpha + \beta)}{tan\ \alpha +\ tan\ \beta}$, por lo anterior tenemos $sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta +\ cos\ \alpha\ sen\ \beta$.

LA LEY DE LAS TANGENTES

$$\frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{a+b}{a-b}$$



EXPLICACIÓN:



Sea ABC un triángulo cualquiera. Tracemos la circunferencia con centro en el punto C y radio a, tracemos el diámetro que pase por A y C, a las intersecciones de éste con la circunferencia llamalos D y E respectivamente.

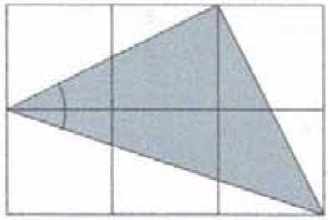
Tracemos los segmento DB, BE, la recta paralela a BE que pase por A y llamemos F a la intersección de ésta con DB.

El ángulo BCE es ángulo exterior del triángulo ABC por lo que su medida es $\alpha+\beta$ y a su vez es ángulo central BCE, por lo que el ángulo inscrito BDE mide $\frac{\alpha+\beta}{2}$ por abarcar el mismo arco que el ángulo central BCE. Es fácil ver que el triángulo DBC es isóceles por lo que los ángulos BDC y CBD son iguales, luego el ángulo ABD mide $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

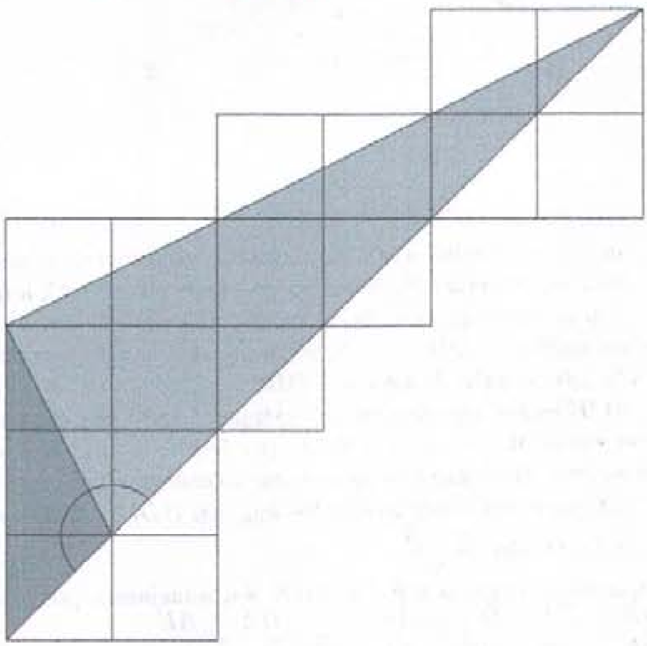
Notemos que los triángulos DFA y DBE son semejantes por lo que:
$\dfrac{DE}{DB}=\dfrac{DA}{DF}=\dfrac{DE-DA}{DB-DF}=\dfrac{AE}{FB}$, luego $\dfrac{DA}{DF}=\dfrac{AE}{FB}$.

Luego $\dfrac{tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\dfrac{\frac{AF}{DF}}{\frac{AF}{BF}}=\dfrac{BF}{DF}=\dfrac{AE}{DA}=\dfrac{a+b}{a-b}$.

Por lo tanto $\dfrac{tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\dfrac{a+b}{a-b}$.



$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$



$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$$

EXPLICACIÓN:

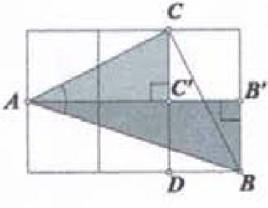


Fig.1

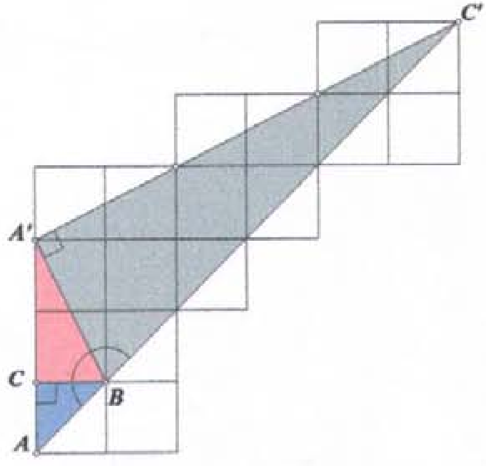


Fig.2

Notemos primero en la fig.1 que el triángulo rectángulo ABC es isóceles, pues $AC = BC$. por lo que $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ y $\angle BAC = \angle BAB' + \angle C'AC$.

Por otro lado, $tan\ \angle C'AC = \frac{1}{2}$ y $tan\ \angle BAB' = \frac{1}{3}$ por lo que nos lleva a que $arctan\ \frac{1}{2} + arctan\ \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

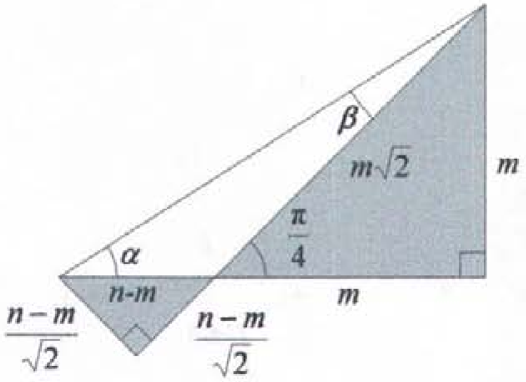
Notemos ahora en la fig. 2 que los triángulos ABC, $A'BC$ y $A'BC'$ son triángulos rectángulos y que:

$tan\ \angle CBA = 1$, $tan\ \angle A'BC = 2$ y $tan\ \angle C'BA' = 3$.

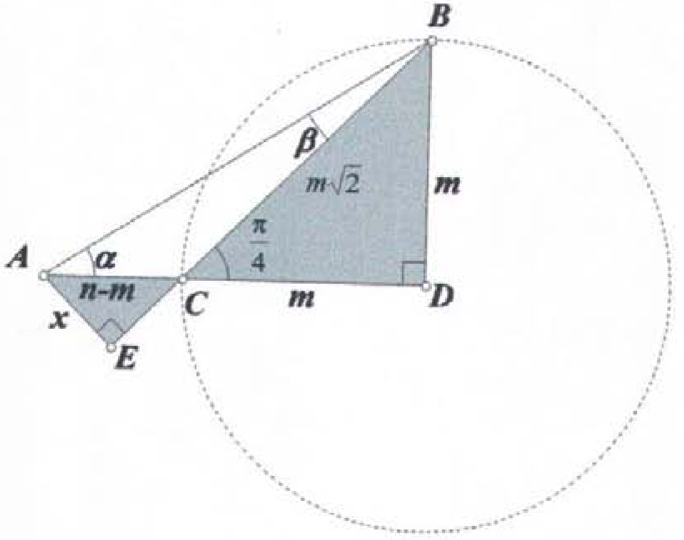
Además como A, B y C' son colineales tenemos que, por $\pi = \angle C'BA = \angle CBA + \angle A'BC + \angle C'BA'$. Luego $arctan\ 1 + arctan\ 2 + arctan\ 3 = \pi$.

SUMA DE ARCO TANGENTES

$$tan^{-1}\left(\frac{m}{n}\right)+tan^{-1}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)=\frac{\pi}{4}$$



EXPLICACIÓN:



Primero notemos que los triángulos BCD y CAE son triángulos rectángulos e isóceles.

También que el ángulo exterior al vértice C del triángulo ABC, mide $\frac{\pi}{4}$; por lo que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

En el triángulo ABE se observa que $tan\ \beta = \dfrac{AE}{EB} = \dfrac{\frac{n-m}{\sqrt{2}}}{\frac{n-m}{\sqrt{2}} + m\sqrt{2}} = \dfrac{n-m}{n+m}$.

Por lo que $\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = tan^{-1}\left(\dfrac{m}{n}\right) + tan^{-1}\left(\dfrac{n-m}{n+m}\right)$.

Bibliografía

- Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words I, exercises in visual thinking,* the Mathematical Association of America, 1993.

- Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words II, exercises in visual thinking,* the Mathematical Association of America, 2000.

- Bulajich Manfrino Radmila, Gómez Ortega José Antonio, *Geometría,* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, 2002.

Varios números de las revistas

- *Mathematics Magazine,* the Mathematical Association of America.

- *College Mathematics Journal.*

- *American Mathematical Monthly.*