



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EXTRAPOLACION DEL INDICE DE REFRACCION PARA
VIDRIOS OPTICOS EN EL RANGO ENTRE 0.365 MICRAS A
2.325 MICRAS"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
F I S I C A
P R E S E N T A
CRISTEL YOLOXOCHITL RAMIREZ CORRAL



DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MARTHA ROSETE AGUILAR

2005



m. 343136



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Ramírez Corral Cristtel Yoloxochitl

FECHA: 15-04-06

FIRMA: [Firma]

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Extrapolación del índice de refracción para vidrios ópticos en el rango entre 0.365 micras a 2.325 micras"

realizado por Ramírez Corral Cristtel Yoloxochitl

con número de cuenta 09629449-5 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Dra. Martha Rosete Aguilar

Martha Rosete Aguilar

Propietario

Dr. Alejandro Cornejo Rodríguez

A. Cornejo R.

Propietario

Dr. Salvador Cuevas Cardona

[Firma]

Suplente

Dr. José Rufino Díaz Uribe

[Firma]

Suplente

Dr. Dario Moreno Osorio

[Firma]

Consejo Departamental de Física



Alicia Zarzosa Pérez

M. EN C. ALICIA ZARZOSA PÉREZ

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la UNAM por haberme brindado los mejores estudios y profesores de todo el país, desde que estaba en la Prepa 5 y por haberme dejado representarla dignamente tanto académicamente como deportivamente.

Agradezco muchísimo a mi directora de tesis, la doctora Martha Rosete Aguilar por haberme ayudado tanto con esta tesis y también en lo personal, ya que siempre ha estado conmigo desde que inicie este trabajo.

Agradezco a mis sinodales, el Dr. Alejandro Cornejo Rodríguez, el Dr. Salvador Cuevas Cardona, el Dr. Rufino Díaz Uribe, y el Dr. Darío Moreno Osorio por haberse tomado el tiempo necesario para leer mi tesis y corregirme.

Agradezco a todos mis profesores a lo largo de todos mis estudios desde pequeña, por que sin ellos no hubiera logrado llegar a obtener este título.

Agradezco a mi familia, a mi mamá y a mi papá quienes siempre me han apoyado aunque no siempre estuvieron de acuerdo en todo conmigo, a mis hermanas Janet, Charlotte y Michelle y a mi hermano Alberto con quienes he pasado muchísimos momentos agradables, siempre han cuidado de mí y siempre han sido un buen ejemplo a seguir.

Agradezco en especial a mi mejor amiga Leonor por haberme ayudado en toda la carrera, desde primer semestre, y siempre haber estado conmigo en todo momento ayudándome en todos los aspectos, y a Nacho por ayudarme y darme buenos consejos en la última parte de la carrera y también con mi trabajo de tesis. De la prepa quiero agradecer a mis amigas Amalia y Fabiola con quienes pase los mejores momentos tanto de estudio como de entrenamiento y de danza.

Agradezco a todos mis compañeros de la Fac. que siempre me acompañaron: Mercedes, Cesar, Vasthi, Laura, Hugo, Cinthia, Kike, Selene, Eliut, Olivia, Luis, Lucia, Marusia, Manuel, Jhonatan, Ilse, Fermin, Angel, Verónica, Carla, Edgar, Carolina.

Agradezco también a todos mis compañeros del equipo de atletismo por todas las cosas que pasamos juntos, todos los viajes a competencias. Desde los más chicos: Dianita Marcela, Claudette, Alicia, Carmina, Paola, Rodrigo, Chucho, Roberto, y los grandes: Astrid, Diana, Anisia, Anaid, Judith, Angeles, Pablo, Juan, Gonzalo, Victor, Elohin, Rael, Sergio, Fabian, Edgar, Ricardo, Carla, Jaime, Israel, Francisco, y a todos los demás 120 atletas del equipo que no pongo por falta de espacio, y los que ya no entrenan ahora pero en algún momento conviví con ellos. Les agradezco por que siempre me animaron a seguir adelante con todas las ganas que le echan diario, sin importar que estuvieran muy cansados o tuvieran muchas tareas y exámenes.

INTRODUCCIÓN	3
1. DISPERSIÓN DE LOS VIDRIOS ÓPTICOS	6
1.1 ABERRACIÓN CROMÁTICA	6
1.2 POTENCIA PARA UN MULTIPLETE	8
1.3 ACROMATIZACIÓN	9
1.4 ESPECTRO SECUNDARIO	12
1.5 RELACIÓN LINEAL DE ABBE	13
1.6 ECUACIONES DE DISPERSIÓN	17
1.6.1 La ecuación de dispersión de Cauchy	18
1.6.2 La ecuación de dispersión de Herzberger	19
1.6.3 La ecuación de dispersión de Sellmeier	24
1.7 EL MÉTODO DE GEFFCKEN	25
1.7.1 Cálculo de los valores de δ	26
1.7.2 Extrapolación del índice de refracción	28
2 ECUACIÓN DE ABBE PARA UNA BANDA ESPECTRAL INFINITESIMAL	32
2.1 DEFINICIÓN DEL NÚMERO DE ABBE Y LA DISPERSION RELATIVA PARCIAL	33
2.2 ECUACIÓN LINEAL DE ABBE PARA UNA BANDA ESPECTRAL INFINITESIMAL	35
2.3 ECUACIÓN CUADRÁTICA DE ABBE PARA UNA BANDA ESPECTRAL INFINITESIMAL	37
3 ACROMATIZACIÓN DE DOBLETES	48
3.1 DOBLETES ACROMÁTICOS	49
3.2 ECUACIONES DE ACROMATIZACIÓN USANDO EXPRESIONES FINITAS DE P Y V	50
3.3 ESPECTRO SECUNDARIO	52
3.4 ECUACIONES DE ACROMATIZACIÓN USANDO EXPRESIONES DIFERENCIALES DE P Y V	54

3.5 ESPECTRO SECUNDARIO EXPRESADO EN TÉRMINOS DE DEFINICIONES DIFERENCIALES DE P Y V	55
3.6 DISEÑO DE DOBLETES ACROMÁTICOS Y EVALUACIÓN DEL ESPECTRO SECUNDARIO	56
3.7 CÁLCULO DE CURVATURAS Y ESPECTRO SECUNDARIO DE DOBLETES ACROMÁTICOS USANDO LAS DEFINICIONES DIFERENCIALES DE P Y V	58
CONCLUSIONES	60
REFERENCIAS	62
APÉNDICE A. Método de mínimos cuadrados.	64
APÉNDICE B. Ajuste polinomial de las funciones E, F y G.	68
APÉNDICE C. Método de Runge-Kutta.	70
APÉNDICE D. Obtención de las gráficas A1 y A2.	75
APÉNDICE E. Tabla de valores de ν y ρ para 101 vidrios del catálogo Schott del 2004.	77

Introducción

El desarrollo de nuevos materiales en la actualidad, es de gran importancia para el avance de la óptica. Un ejemplo importante es la utilización de vidrios especiales para la corrección de las aberraciones cromáticas, que son un aspecto considerable en el diseño de sistemas ópticos.

No obstante, los vidrios ópticos especiales son muy caros, no se obtienen en grandes cantidades y es muy difícil trabajar con ellos, por esta razón, el uso de estos materiales especiales no es muy común en muchos sistemas. Por lo tanto, es necesaria una teoría de acromatización con la cual se pueda trabajar con vidrios normales que son los que comúnmente se utilizan.

Entre las aberraciones cromáticas se encuentran las de primer y segundo orden, las cuales regularmente se describen en términos de algunas propiedades de los vidrios, que son: el índice de refracción, la dispersión relativa parcial y el número de Abbe, como se muestra en el primer capítulo de este trabajo. Las definiciones de estas propiedades regularmente están basadas en el espectro de banda finita, que normalmente es la banda entre las líneas F (486.13nm) y C (656.28nm) del espectro visible.

Sin embargo, la utilización de los sistemas ópticos en muchos casos se hace sobre casi todo el espectro entre 365nm y 2325nm aproximadamente, por lo tanto es necesario tener conocimiento de dichas propiedades en un intervalo mayor del espectro. En el primer capítulo, también se muestran las diferentes ecuaciones de dispersión que han sido derivadas por diferentes autores (de las cuales en esta tesis se utiliza la de Sellmeier como

referencia, usada por la mayoría de las compañías de vidrios), así como la manera de obtener el número de Abbe y la dispersión relativa parcial.

Para analizar estas propiedades J. L. Rayces y M. Rosete-Aguilar [1] utilizaron el postulado de Abbe que habla sobre la linealidad de la gráfica de la dispersión relativa parcial contra el número de Abbe, para lo cual propusieron nuevas definiciones diferenciales de la dispersión relativa parcial, P , y el número de Abbe, V . Además propusieron una ecuación diferencial basada en las nuevas definiciones de P y V para extrapolar el índice de refracción y su derivada en la región del espectro entre 0.365 micras y 2.325 micras, suponiendo que existe una relación lineal entre ambas propiedades en su forma diferencial. Esta ecuación representa una familia de vidrios ideal, tal que dado el índice de refracción y el número de Abbe a cualquier longitud de onda, se puedan determinar los índices para todas las longitudes de onda. En dicho trabajo mostraron que el postulado de Abbe no es válido para la región del ultravioleta.

El objetivo principal de esta tesis es derivar una nueva ecuación diferencial para vidrios normales, suponiendo una “relación cuadrática” entre las propiedades ya mencionadas, para esto se utiliza el catálogo de vidrios Schott de 1992, el cual contiene los datos de 202 vidrios normales. La derivación y solución de esta ecuación diferencial se presenta en el capítulo 2. Resolviendo esta nueva ecuación diferencial podemos extrapolar el índice de refracción para longitudes de onda entre 0.365 micras y 2.325 micras, con un error más pequeño que con la obtenida con el ajuste lineal. En el segundo capítulo se hace una comparación entre las soluciones encontradas con la ecuación derivada en esta tesis y las soluciones obtenidas por J. L. Rayces y M. Rosete-Aguilar [1], basándose (en ambos casos) en la solución que se obtiene a partir de la ecuación de Sellmeier.

Si bien las ecuaciones de dispersión presentadas en el capítulo 1 permiten la extrapolación del índice de refracción, estas ecuaciones sólo pueden usarse cuando se conocen tres valores del índice de refracción (ecuación de Cauchy) o cuando se conocen cuatro valores del mismo (ecuación de Herzberger o de Sellmeier). Sin embargo, ninguna de ellas es útil

cuando se pretende extrapolar el índice de refracción de un vidrio “ficticio” que es aquél que se genera al variar el vidrio en un proceso de optimización de un sistema óptico, o de vidrios “reales” es decir aquellos vidrios cuyos índices varían ligeramente de los valores del catálogo de vidrios. El método de Geffcken presentado en el capítulo 1 se utiliza para la extrapolación de índices de refracción de los vidrios “reales”, para lo cual es necesario medir el índice de refracción del vidrio “real” para dos longitudes de onda. Se mostrará, entonces, que este método no puede aplicarse para la extrapolación del índice de refracción de vidrios “ficticios”. La ecuación diferencial propuesta en esta tesis permitiría la extrapolación del índice de refracción de vidrios ficticios.

En el tercer capítulo se desarrolla la teoría para diseñar dobletes acromáticos cementados con los valores obtenidos de la dispersión relativa parcial y el número de Abbe, diferenciales, utilizando vidrios normales. Usando las definiciones diferenciales de P y V se evalúa el espectro secundario de tales diseños y se compara con el cálculo usando las definiciones finitas de P y V . Finalmente en este capítulo se han tabulado los valores diferenciales del número de Abbe, V° , y la dispersión relativa parcial, \hat{P} , para los vidrios del catálogo de Schott del 2004 que consta de 101 vidrios. Con los datos proporcionados en estas tablas y con las ecuaciones presentadas en el capítulo 3 es posible diseñar dobletes acromáticos y evaluar la magnitud del espectro secundario en la región espectral entre 0.365micras y 2.325micras.

1

Dispersión de los vidrios ópticos

Se ha supuesto que la invención de los vidrios ópticos esta ligada a los Fenicios, quienes mezclaron primero arena y algas, y quemaron la mezcla para obtener una sustancia transparente. La aplicación de estos vidrios fue conocida primero en Roma. Al final del siglo XX el vidrio fue utilizado para hacer telescopios y otros instrumentos ópticos. Newton descubrió que el índice de refracción del vidrio es diferente para distintas longitudes de onda, en uno de sus artículos habla de sus experimentos con un prisma, lo cual hace claro que el color y el índice de refracción están conectados, y que la luz blanca, puede ser considerada como una mezcla de luz de diferentes longitudes de onda. Estas observaciones llevaron a la conclusión de que el índice de refracción de cualquier medio depende de la longitud de onda de la luz. A esta propiedad se le llama dispersión.

1.1. Aberración cromática.

El hecho de que luz blanca sea dispersada al atravesar un vidrio provoca que tanto la distancia focal como la amplificación de una lente delgada simple varíen con la longitud de onda. En este trabajo sólo nos enfocaremos al primero, es decir, al cambio de la distancia focal con la longitud de onda. En una lente simple, la distancia entre los puntos focales correspondientes a las longitudes de onda extremas en un intervalo espectral se conoce como aberración cromática longitudinal, como se muestra en la figura 1.1(a). La corrección

de la aberración cromática longitudinal normalmente se realiza haciendo coincidir los puntos focales f_R (rojo) y f_B (azul) correspondientes a las longitudes de onda extremas del intervalo espectral. Cuando un sistema óptico está corregido de esta manera se dice que el sistema óptico es acromático, ver figura 1.1(b). A la separación entre los puntos focales comunes f_R y f_B y el punto focal f_Y (amarillo) se le conoce como espectro secundario. En esta tesis se diseñarán y estudiarán sistemas ópticos formados por dos lentes que forman un sistema acromático y al que simplemente llamaremos doblete acromático.

Cuando se hacen coincidir tres o cuatro puntos focales del sistema óptico se dice que el sistema es apocromático o superacromático respectivamente. Estos sistemas no se tratarán en este trabajo.

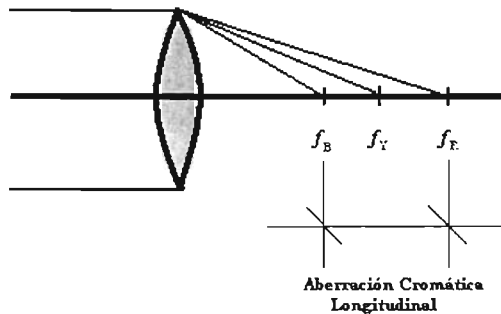


Figura 1.1.a. Lente Simple

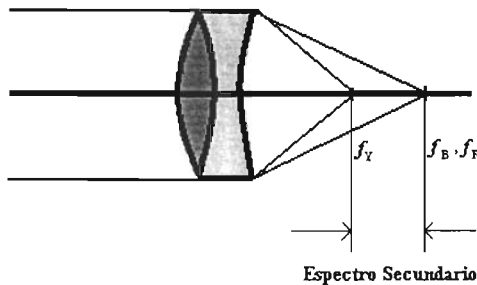


Figura 1.1.b. Doblete Acromático

1.2. Potencia para un múltiple.

La ecuación de Gauss para una lente delgada [2,3] establece que la distancia focal depende del índice de refracción y de los radios de curvatura de las superficies esféricas que forman la lente de la siguiente forma:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n - n_m}{n_m} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.1)$$

en donde n es el índice de refracción de la lente y n_m es el índice de refracción del medio que rodea a la lente. Si la lente está en aire, entonces $n_m = 1$. Por otro lado, la potencia para la lente se define como

$$K = \frac{1}{f} \quad (1.2)$$

Sea $c = \frac{1}{R}$ la curvatura de la superficie esférica, entonces de las ecuaciones (1.1) y (1.2) tenemos

$$K = \frac{1}{f} = (n - 1)(c_1 - c_2) \quad (1.3)$$

Se puede mostrar que para dos lentes delgadas en contacto, la potencia del doblete está dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (1.4)$$

$$\therefore K = K_1 + K_2 \quad (1.5)$$

Entonces para un múltiple, que consiste en un conjunto de varias lentes en contacto, tenemos que la potencia está dada por

$$K = \sum K_i = \sum (n_i - 1)C_i \quad (1.6)$$

donde $C_i = c_i - c_{i+1}$ es usada como una abreviación de la diferencia de las dos curvaturas sucesivas de las lentes.

1.3. Acromatización

Newton midió la dispersión tanto de un vidrio *crown* como la de un prisma que contenía agua y encontró que ambos producen casi la misma dispersión por lo que llegó a la conclusión errónea de que todos los vidrios tienen la misma dispersión y que por lo tanto no era posible que un sistema óptico estuviera corregido de color; esto es, no era posible corregir la aberración cromática longitudinal.

Sin embargo, antes de Newton en Venecia ya habían experimentado agregando plomo a la mezcla usual de silicio y potasio, y a la cual se le llamó vidrio *flint* y fue utilizado principalmente para jarrones, vasos de vidrio, y otros objetos lujosos. Este vidrio tiene una dispersión muy alta comparada con la dispersión del vidrio *crown* usual.

Según Herzberger [4], Chester Moor Hall fue el primero (1733) que combinó dos lentes, una tipo *crown* y una tipo *flint*, para diseñar una lente acromática, que es una lente corregida para dos colores.

Entonces, para que en un sistema de dos lentes los focos f_R y f_B coincidan, es necesario que f_R (rojo) sea igual a f_B (azul), esto es

$$1/f_R = 1/f_B \quad (1.7)$$

Utilizando el subíndice 1 para la primera lente y el subíndice 2 para la segunda lente tenemos que los índices de refracción para las longitudes de onda extremas λ_R y λ_B están dados por n_{1R} y n_{1B} , respectivamente, para la lente 1 y por n_{2R} y n_{2B} para la lente 2.

Sustituyendo la ecuación (1.6) en la ecuación (1.7) tenemos:

$$(n_{1R} - 1)C_1 + (n_{2R} - 1)C_2 = (n_{1B} - 1)C_1 + (n_{2B} - 1)C_2 \quad (1.8).$$

Entonces

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{n_{2B} - n_{2R}}{n_{1B} - n_{1R}} \quad (1.9)$$

La distancia focal del doblete está relacionada regularmente con la longitud de onda del amarillo (Y), que se encuentra aproximadamente a la mitad de las longitudes de onda de los extremos rojo y azul, entonces tenemos que $1/f_{1Y} = (n_{1Y} - 1)C_1$ y $1/f_{2Y} = (n_{2Y} - 1)C_2$ encontrando que

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(n_{2Y} - 1)f_{2Y}}{(n_{1Y} - 1)f_{1Y}} \quad (1.10)$$

Igualando las ecuaciones (1.9) y (1.10) obtenemos

$$\frac{f_{2Y}}{f_{1Y}} = - \frac{(n_{1Y} - 1)(n_{2B} - n_{2R})}{(n_{1B} - n_{1R})(n_{2Y} - 1)} \quad (1.11)$$

Sustituyendo las letras Y, B y R por las longitudes de onda d, F y C (ver Tabla 1.1) en la ecuación (1.11) tenemos que:

$$\frac{f_{2d}}{f_{1d}} = - \frac{(n_{1d} - 1)(n_{2F} - n_{2C})}{(n_{1F} - n_{1C})(n_{2d} - 1)} \quad (1.12)$$

en donde d, F y C se refieren a la línea amarilla d del Helio (587.57nm), a la línea azul del hidrógeno F (486.13nm) y a la media de las dos líneas rojas del hidrógeno C (656.28nm).

Tabla 1.1. Líneas del espectro para refractometría

Nombre	Color	Elemento	$\lambda(\text{nm})$
s	Infrarrojo	Cs	852.11
A'	Rojo	K	769.90
			768.20
			766.49
b	Rojo	He	706.52
C	Rojo	H	656.28
D	Amarillo	Na	589.59
			589.29
			589.00
d	Amarillo	He	587.57
e	Verde	Hg	546.07
F	Azul	H	486.13
g	Violeta	Hg	435.83
G'	Violeta	H	434.05
h	Violeta	Hg	404.66
m	Ultravioleta	Hg	365.01

Se define la siguiente cantidad:

$$V_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \quad (1.13)$$

A la cantidad V se le conoce como el *número de Abbe* o el número V o el poder de dispersión recíproca del vidrio. Tomando la ecuación (1.13) y sustituyéndola en la ecuación (1.12) tenemos

$$\frac{f_{2d}}{f_{1d}} = -\frac{V_{1d}}{V_{2d}} \quad (1.14)$$

Sustituyendo la ecuación (1.2) en la ecuación (1.14) tenemos que

$$\frac{K_{1d}}{K_{2d}} = -\frac{V_{1d}}{V_{2d}} \quad (1.15)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{K_{1d}}{V_{1d}} + \frac{K_{2d}}{V_{2d}} = 0 \quad (1.16)$$

Recordando que la ecuación (1.16) se obtuvo de igualar las potencias de la lente para las longitudes de onda λ_F y λ_C , la podemos escribir como

$$K_C - K_F = \frac{K_{1d}}{V_{1d}} + \frac{K_{2d}}{V_{2d}} = \sum_{i=1}^2 \frac{K_{id}}{V_{id}} = 0 \quad (1.17)$$

Resolviendo las ecuaciones (1.5) y (1.16) simultáneamente se obtienen las potencias de cada una de las lentes para que el doblete sea acromático dadas por

$$K_{1d} = \frac{V_{1d}}{V_{1d} - V_{2d}} K_d, \quad K_{2d} = -\frac{V_{2d}}{V_{1d} - V_{2d}} K_d \quad (1.18)$$

Como se puede observar, en un doblete acromático es condición necesaria que las potencias de la primera lente y de la segunda lente sean de signo contrario. La lente crown debe ser positiva y la lente flint debe ser negativa, si se quiere tener una potencia positiva.

1.4. Espectro secundario.

En la figura 1.1(b) podemos observar que en un doblete acromático hay un remanente de color, dado por la distancia entre los focos comunes f_C y f_F y el foco f_d . A este remanente se le conoce como espectro secundario. En general si quisiéramos reducir este remanente de color sería necesario hacer coincidir el foco, f_λ , para una tercera longitud de onda, λ , con los focos comunes f_C y f_F [5]. Para lo cual es necesario que se satisfaga la ecuación (1.17), esto es

$$K_\lambda - K_C = \frac{K_{1d}}{V_{1d\lambda}} + \frac{K_{2d}}{V_{2d\lambda}} = \sum_{i=1}^2 \frac{K_{id}}{V_{id\lambda}} = 0 \quad (1.19)$$

en donde

$$V_{d\lambda} = \frac{n_d - 1}{n_\lambda - n_C} \quad (1.20)$$

Las ecuaciones (1.17) y (1.19) deben satisfacerse simultáneamente para que el doblete esté corregido de color para tres longitudes de onda, por lo tanto

$$\frac{K_{1d}}{K_{2d}} = -\frac{V_{1d}}{V_{2d}} = -\frac{V_{1d\lambda}}{V_{2d\lambda}} \quad (1.21)$$

De la ecuación (1.21) tenemos

$$\frac{V_{1d}}{V_{1d\lambda}} = \frac{V_{2d}}{V_{2d\lambda}} \quad (1.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.13) y (1.20) en la ecuación (1.22) tenemos

$$\frac{n_{2\lambda} - n_{2C}}{n_{2F} - n_{2C}} = \frac{n_{1\lambda} - n_{1C}}{n_{1F} - n_{1C}} \quad (1.23)$$

en donde la razón entre los índices de refracción dada por

$$P = \frac{n_\lambda - n_c}{n_F - n_c} \quad (1.24)$$

es conocida como la *dispersión relativa parcial* del vidrio. Sustituyendo (1.24) en (1.23) tenemos

$$P_2 = P_1 \quad (1.25)$$

La ecuación (1.25) establece que para que coincidan los focos para tres longitudes de onda es necesario que la dispersión relativa parcial del vidrio de la primera lente sea igual a la dispersión relativa parcial del vidrio para la segunda lente.

1.5. Relación lineal de Abbe.

Joseph Von Fraunhofer [2,4] investigó las líneas oscuras fijas en el espectro solar, y las líneas brillantes correspondientes en el espectro de absorción de otras fuentes de luz. Kirchoff y Bunsen [4] relacionaron estas líneas con los elementos químicos involucrados. Esto hizo posible la determinación de la longitud de onda de la luz. La razón de que Newton no viera estas líneas se debió probablemente a que el prisma que utilizó no era ópticamente perfecto. Fraunhofer desarrolló instrumentos para la medición exacta de los índices de refracción de los vidrios, y fundó la primera fábrica de vidrios cerca de Munich, comenzando una investigación de la influencia de los elementos químicos, encontrando que casi todos los vidrios tenían algo en común. La dispersión relativa parcial P_λ era una función lineal del número V , lo cual quiere decir que existen dos funciones A_1 y A_2 [4,6] tales que para todos los vidrios ópticos se tiene que

$$P_\lambda = A_1(\lambda)V + A_2(\lambda) \quad (1.26)$$

Si esto es correcto, entonces el índice para una longitud de onda, y el número de Abbe para otra, determinarán la dispersión del vidrio óptico completamente. Además, de la ecuación (1.6) tenemos que

$$K_d = \sum K_{id} = \sum (n_{id} - 1)C_i \quad (1.27)$$

y

$$K_C - K_F = \sum (n_C - n_F)C_i \quad (1.28)$$

Multiplicando y dividiendo cada término del miembro derecho de la ecuación (1.28) por K_{id} obtenemos

$$K_C - K_F = \sum \frac{K_{id}}{V_i} \quad (1.29)$$

Entonces, a partir de las ecuaciones anteriores, y multiplicando y dividiendo esta vez por $K_C - K_F$ y por K_{id} podemos reescribir la ecuación (1.19) de la siguiente forma

$$K_\lambda - K_C = \sum (n_\lambda - n_C)C_i = \sum \frac{K_{id}}{V_i} P_i \quad (1.30)$$

Entonces, para un solo vidrio tenemos

$$K = K_d \quad (1.31)$$

$$K_C - K_F = \frac{K_d}{V} \quad (1.32)$$

y

$$K_\lambda - K_C = \frac{K_d}{V} P \quad (1.33)$$

Despejando P de la ecuación (1.33) y sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación (1.26) encontramos

$$K_\lambda - K_C = A_2(\lambda)(K_C - K_F) + A_1(\lambda)K_d \quad (1.34)$$

Si K está corregida para los dos colores F y C entonces $K_C - K_F = 0$ y de la ecuación (1.34) tenemos

$$A_1(\lambda) = (K_\lambda - K_C)_i / K_d \quad (1.35)$$

Las cantidades A_1 y A_2 se tienen que encontrar empíricamente (como se muestra en el apéndice D), y están dadas por:

$$A_1(\lambda) = 0.002459 - 0.007841\lambda^2 + 0.000867/(\lambda^2 - 0.035) - 0.000199/(\lambda^2 - 0.035)^2 \quad (1.36)$$

$$A_2(\lambda) = -2.052895 + 0.124839\lambda^2 + 0.382922/(\lambda^2 - 0.035) + 0.004920/(\lambda^2 - 0.035)^2 \quad (1.37)$$

Esto quiere decir que la corrección para un tercer color γ será posible solo si la función universal $A_1(\lambda)$ se hiciera cero para un valor de λ diferente de F y C . Sin embargo, como se muestra en la figura 1.2.a. esto no es posible ya que no existe ningún valor de $A_1(\lambda)$, diferente de F y C , para el cual este término se haga igual a cero.

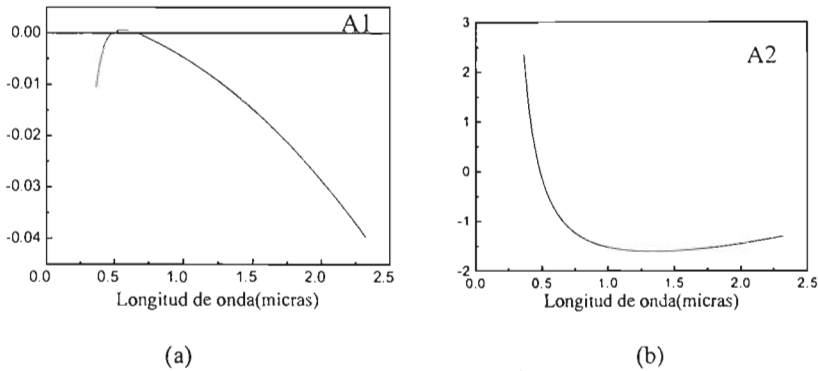


Figura 1.2. Gráficas de las funciones $A_1(\lambda)$ y $A_2(\lambda)$ contra la longitud de onda

Si llamamos vidrios ordinarios a los vidrios que cumplen con la ecuación (1.26), podemos decir que el espectro secundario no puede ser corregido en un múltiplete si se usan vidrios ordinarios. Esta misma conclusión se discute más adelante utilizando la figura 1.3. Por lo tanto Ernst Abbe indujo al químico Otto Schott, a investigar sistemáticamente la influencia de distintos elementos químicos en las cualidades ópticas del vidrio. encontrando que existe una conexión entre la composición química y la dispersión.

Aproximadamente a finales de los 1880, un nuevo vidrio secreto llamado X fue insertado en las lentes de un microscopio diseñado por Abbe, y se encontró que el espectro secundario fue reducido en un gran porcentaje. En 1890 un artículo de Abbe finalmente reveló la respuesta, él había utilizado fluorita, lo que nos lleva a lo que él llamó corrección apocromática (término que le dio a la corrección de los tres colores).

Un arreglo apocromático corregido ópticamente, la cual consiste de dos lentes, debe resolver simultáneamente las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 K_1 + K_2 &= K \\
 \frac{K_1}{V_1} + \frac{K_2}{V_2} &= 0 \\
 \frac{K_1}{V_1} P_1 + \frac{K_2}{V_2} P_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.38}$$

las cuales se cumplen sólo si $P_1 = P_2$.

En la figura 1.3 se ha hecho una gráfica de P vs V para todos los vidrios del catálogo de Schott, en donde la dispersión relativa parcial P , ha sido calculada para las líneas espectrales C , s y F y el número de Abbe para las líneas espectrales d , C y F . En la figura 1.3 se observa que prácticamente la mayoría de los vidrios caen sobre una línea recta, lo que hace imposible que los vidrios que satisfacen la ecuación (1.26) también cumplan con la condición $P_1 = P_2$. Por lo tanto para la mayoría de los vidrios ordinarios no es posible corregir el espectro secundario.

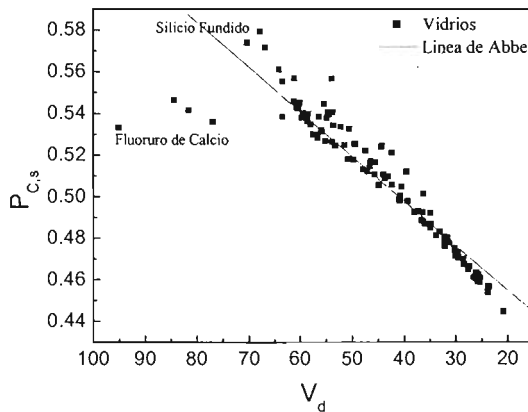


Figura 1.3. P contra V para los vidrios del catálogo Schott.

1.6 Ecuaciones de dispersión.

Entonces, como ya se dijo, la dispersión del color, que ocurre debido a la refracción en el límite entre dos sustancias diferentes, es una evidencia directa de la dependencia del índice de refracción n con la longitud de onda. Las curvas obtenidas graficando n vs λ para vidrios de distintas sustancias ópticas, serán distintas en detalle, pero todas tendrán la misma forma [7], ver figura 1.4.

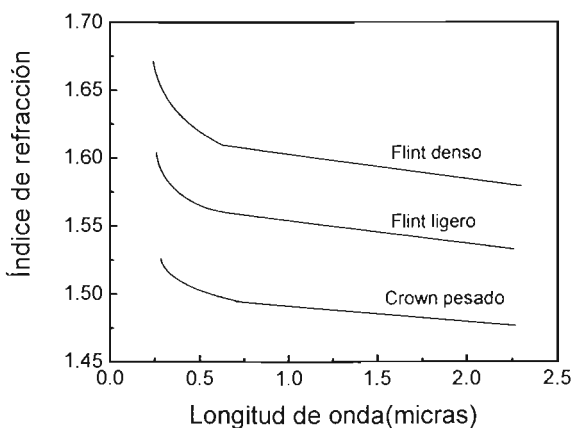


Figura 1.4. Dispersión en algunos vidrios

Como se puede observar, el índice de refracción aumenta al disminuir la longitud de onda, la razón de incremento es más grande a longitudes de onda cortas, i.e. la dispersión aumenta al disminuir la longitud de onda, esto es debido a que la dispersión $dn/d\lambda$ es la tangente de la curva, que aumenta monótonamente hacia λ s pequeñas. Se puede ver también que para diferentes sustancias, la curva a una longitud de onda dada es normalmente más inclinada entre más grande sea el índice de refracción, y por último, la curva para una sustancia, en general no puede ser obtenida de la curva de otra sustancia por un cambio en la escala de coordenadas. Consecuentemente, la dispersión de sustancias diferentes, se dice que es irracional, ya que no hay una relación simple entre las distintas curvas.

Todas las sustancias transparentes muestran una dispersión normal en la región del visible. La magnitud del índice de refracción puede ser un poco diferente en varias sustancias, pero su cambio con la longitud de onda siempre muestra las características ya descritas. En general, entre más grande sea la densidad de la sustancia más grande es el índice de refracción y su dispersión, sin embargo existen algunas excepciones dentro de estas características en algunas sustancias.

1.6.1. La ecuación de dispersión de Cauchy.

El primer intento exitoso para representar la curva de la dispersión normal por medio de una ecuación fue hecho por Cauchy en 1836 [8], dada como sigue

$$\text{Cauchy: } n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} \quad (1.39)$$

donde a , b y c , son constantes características de cualquier sustancia. Esta ecuación representa las curvas de la región del visible, con una buena precisión. Para encontrar los valores de las constantes es necesario saber el valor de n para tres diferentes λ 's. Entonces se pueden encontrar tres ecuaciones, las cuales, resueltas simultáneamente, nos dan los valores de a , b y c . La teoría en la que basó Cauchy su razonamiento después se mostró que era falsa, sin embargo aún es considerada en algunos casos de dispersión normal.

Antiguamente se había mostrado que cada curva de dispersión tiene una asíntota para valores pequeños de λ , indicando la absorción en la región del ultravioleta. Sin embargo, cada una tiene una asíntota en el lejano infrarrojo, pero esta asíntota está tan lejos, que se puede asumir que está en el infinito. La teoría requiere que la curva de dispersión sea función de λ^2 . Esto llevó a obtener la fórmula de Cauchy y la de Neumann-Kettler, que eran aproximadas por series.

$$\text{Neumann-Kettler: } n = a + b\lambda^2 + \dots + \frac{c}{\lambda^2} + \frac{d}{\lambda^4} + \dots \quad (1.40)$$

1.6.2. La ecuación de dispersión de Herzberger

Una formulación con sólo cuatro constantes es preferible a tres, para poder reproducir los índices de refracción con la precisión necesaria, tal que para un vidrio dado, los cuatro coeficientes puedan encontrarse en los datos ópticos n_d y V del vidrio y viceversa.

Las curvas de dispersión tienen diferentes asíntotas, pero todas ellas son positivas. Por lo tanto Herzberger [4], utilizando la ecuación (1.40), encontró un valor óptimo para $\lambda=0.187$ y $\lambda^2=0.035$ sugiriendo

$$n = \mu_0 + \mu_1 \lambda^2 + \frac{\mu_2}{\lambda^2 - 0.035} + \frac{\mu_3}{(\lambda^2 - 0.035)^2} \quad (1.41)$$

como fórmula de la dispersión. Esta fórmula es una aproximación de la ecuación

$$n = \frac{a}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_2^2} \quad (1.42)$$

donde λ_1 está en el ultravioleta y λ_2 está en el infrarrojo y es muy grande. La aplicación de esta fórmula fuera del visible se vuelve inadecuada si nos aproximamos a la región del ultravioleta, mientras que la aplicación en la región del infrarrojo más allá de 1μ seguirá dando una aproximación satisfactoria. Sin embargo, aunque la extrapolación de esta fórmula hacia el ultravioleta nos da valores inadecuados del índice de refracción (comparados con los obtenidos con la ecuación de Sellmeier, que se muestra mas adelante), aun así se pueden determinar los errores cromáticos con suficiente precisión.

Asumimos entonces que un vidrio óptico esta dado por cuatro de sus datos, entonces si n es conocida para cuatro longitudes de onda, la sustitución de λ_i en (1.41) nos dará cuatro ecuaciones lineales para encontrar cuatro coeficientes μ_x , para ese tipo de vidrio.

Existe otro método de mayor importancia teórica en el cual se denota a n_A , n_C , n_F y n_h como los índices del vidrio para dichas longitudes de onda respectivamente. Se encontró empíricamente [4], que n en función de λ satisface una ecuación de la forma

$$n_\lambda = B_{A'} n_{A'} + B_C n_C + B_F n_F + B_h n_h \quad (1.43)$$

en donde las B_i son funciones de λ que son independientes del tipo de vidrio. Como se asumió que los índices de refracción de todos los materiales están dados por una fórmula de la forma (1.41), podemos considerar las funciones B_i como funciones del mismo tipo, por ejemplo

$$B_{A'} = \beta_{A'0} + \beta_{A'1} \lambda^2 + \frac{\beta_{A'2}}{\lambda^2 - .035} + \frac{\beta_{A'3}}{(\lambda^2 - .035)^2} \quad (1.44)$$

Esta fórmula tiene cuatro constantes, pero es obvio que $B_{A'}$ debe de cumplir con cuatro condiciones, es decir que debemos tener $B_{A'} = 1$ para $\lambda = \lambda_{A'}$ y $B_{A'} = 0$ para $\lambda = \lambda_C, \lambda_F$ y λ_h , esto determina las cuatro constantes completamente y nos permite calcularlas como la solución de cuatro ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} \beta_{A'0} + \beta_{A'1} \lambda_{A'}^2 + \frac{\beta_{A'2}}{\lambda_{A'}^2 - .035} + \frac{\beta_{A'3}}{(\lambda_{A'}^2 - .035)^2} &= 1 \\ \beta_{A'0} + \beta_{A'1} \lambda_C^2 + \frac{\beta_{A'2}}{\lambda_C^2 - .035} + \frac{\beta_{A'3}}{(\lambda_C^2 - .035)^2} &= 0 \\ \beta_{A'0} + \beta_{A'1} \lambda_F^2 + \frac{\beta_{A'2}}{\lambda_F^2 - .035} + \frac{\beta_{A'3}}{(\lambda_F^2 - .035)^2} &= 0 \\ \beta_{A'0} + \beta_{A'1} \lambda_h^2 + \frac{\beta_{A'2}}{\lambda_h^2 - .035} + \frac{\beta_{A'3}}{(\lambda_h^2 - .035)^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

Análogamente podemos encontrar los coeficientes B_C, B_F y B_h . Entonces, las ecuaciones (1.45) y sus ecuaciones análogas nos dan cuatro sistemas de ecuaciones para encontrar los coeficientes B_i , la matriz de cada sistema es

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{A'}^2 & \frac{1}{\lambda_{A'}^2 - .035} & \frac{1}{(\lambda_{A'}^2 - .035)^2} \\ 1 & \lambda_C^2 & \frac{1}{\lambda_C^2 - .035} & \frac{1}{(\lambda_C^2 - .035)^2} \\ 1 & \lambda_F^2 & \frac{1}{\lambda_F^2 - .035} & \frac{1}{(\lambda_F^2 - .035)^2} \\ 1 & \lambda_h^2 & \frac{1}{\lambda_h^2 - .035} & \frac{1}{(\lambda_h^2 - .035)^2} \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

Si tomamos la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{A'0} & \beta_{C0} & \beta_{F0} & \beta_{h0} \\ \beta_{A'1} & \beta_{C1} & \beta_{F1} & \beta_{h1} \\ \beta_{A'2} & \beta_{C2} & \beta_{F2} & \beta_{h2} \\ \beta_{A'3} & \beta_{C3} & \beta_{F3} & \beta_{h3} \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

Estas dos matrices en conjunción nos dan

$$\Lambda \mathbf{B} = \mathbf{E} \quad (1.48)$$

donde \mathbf{E} es la matriz identidad

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de esto tenemos que

$$\mathbf{B} = \Lambda^{-1} \quad (1.49)$$

Entonces el problema de hallar los coeficientes β_{ij} de las cantidades B_i se reduce a encontrar la matriz inversa de Λ . De la ecuación (1.41) y la regla de multiplicación de matrices se puede describir la ecuación como

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 & \frac{1}{\lambda^2 - .035} & \frac{1}{(\lambda^2 - .035)^2} \end{bmatrix} \mathbf{B} = (B_{A'} \quad B_C \quad B_F \quad B_h) \quad (1.50)$$

Los coeficientes μ_x en la ecuación (1.41) se pueden obtener en comparación con la ecuación (1.43), y se pueden reemplazar las B_i por su forma en la ecuación (1.44), entonces tenemos

$$\begin{aligned}
 \mu_0 + \mu_1 \lambda^2 + \frac{\mu_2}{\lambda^2 - .035} + \frac{\mu_3}{(\lambda^2 - .035)^2} = & n_{A'} \left(\beta_{A'0} + \beta_{A'1} \lambda^2 + \frac{\beta_{A'2}}{\lambda^2 - .035} + \frac{\beta_{A'3}}{(\lambda^2 - .035)^2} \right) + \\
 & n_C \left(\beta_{C0} + \beta_{C1} \lambda^2 + \frac{\beta_{C2}}{\lambda^2 - .035} + \frac{\beta_{C3}}{(\lambda^2 - .035)^2} \right) + \\
 & n_F \left(\beta_{F0} + \beta_{F1} \lambda^2 + \frac{\beta_{F2}}{\lambda^2 - .035} + \frac{\beta_{F3}}{(\lambda^2 - .035)^2} \right) + \\
 & n_h \left(\beta_{h0} + \beta_{h1} \lambda^2 + \frac{\beta_{h2}}{\lambda^2 - .035} + \frac{\beta_{h3}}{(\lambda^2 - .035)^2} \right) +
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Esto nos lleva a la ecuación matricial

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} n_{A'} \\ n_C \\ n_F \\ n_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \tag{1.52}$$

que determina los coeficientes μ_x .

Se toma en cuenta la identidad entre las funciones B_i , que es la siguiente

$$B_{A'} + B_C + B_F + B_h = 1 \tag{1.53}$$

La ecuación (1.53) es de gran importancia, por el hecho de que si remplazamos los índices n_i por $n_i - 1$ se mantiene para cualquier número en la fórmula. Entonces el ajuste de las curvas de dispersión para los vidrios y para otras sustancias se vuelve casi perfecta para el espectro visible, comparando los resultados obtenidos con los datos que se obtienen con la ecuación de Sellmeier, la cual se verá posteriormente.

Ahora la pregunta es ¿Qué tan significativas son las desviaciones de la línea de Abbe (ec.(1.26))? Se han hecho muchos intentos de construir vidrios que se desvíen lo suficiente, por ejemplo el flint denso y varios materiales transparentes, para probar que la dispersión de los vidrios ópticos no está determinado completamente por dos datos. Durante los 1930s Herzberger hizo un estudio extenso de esto, y concluyó que todas las formas de las sustancias transparentes pueden darse por cuatro datos independientes. Como propuso usando el índice de una longitud de onda media, el valor V , y las desviaciones $\delta(\lambda)$ (que es la desviación de cualquier vidrio hacia la línea de Abbe, fig 1.3) en el rojo y en el

ultravioleta. Encontró que la desviación de la ecuación (1.26) para cualquier longitud de onda esta dada nuevamente por dos funciones universales A_3 y A_4 tales que

$$\begin{aligned} P_\lambda &= A_1(\lambda)V + A_2(\lambda) + \delta_\lambda \\ \delta_\lambda &= A_3(\lambda)\delta_{\lambda'} + A_4(\lambda)\delta_h \end{aligned} \quad (1.54)$$

Las cuatro funciones $A_i(\lambda)$ fueron encontradas primero empíricamente, pero consistentes con la idea teórica de la fórmula de la dispersión general. Entonces para la mayoría de los vidrios tenemos

$$P_\lambda = (n_\lambda - n_F)/(n_F - n_C) = A_1V + A_2 \quad (1.55)$$

y para todos los vidrios, de la fórmula (1.54) tenemos

$$P_\lambda = A_1V + A_2 + A_3\delta_{\lambda'} + A_4\delta_h \quad (1.56)$$

donde las A_i son funciones universales, V y P_λ están dadas por las ecuaciones (1.13) y (1.55), respectivamente.

Si $\lambda = \lambda_{\lambda'}$, de la ecuación (1.54) tenemos que $A_3(\lambda_{\lambda'})=1$ y $A_4(\lambda_{\lambda'})=0$. Sustituyendo en la ecuación (1.56) tenemos

$$P_{\lambda'} = A_{1\lambda'}V + A_{2\lambda'} + \delta_{\lambda'}$$

donde $A_i(\lambda_{\lambda'})$ se denota como $A_{i\lambda'}$, e igualmente las otras.

Análogamente para $\lambda = \lambda_h$ se requiere que $A_{3h}=0$, $A_{4h}=1$. Si $\lambda = \lambda_F$ entonces de la ecuación (1.54) $P_F=0$. Evaluando $P_F=0$ en la ecuación (1.55) escogemos $A_{1F} = A_{2F} = A_{3F} = A_{4F}=0$. Rescribiendo la ecuación (1.56) como sigue

$$n_\lambda - n_F = A_1(n_D - 1) + (A_2 + A_3\delta_{\lambda'} + A_4\delta_h)(n_F - n_C) \quad (1.57)$$

y haciendo $\lambda = \lambda_C$, tenemos

$$n_C - n_F = A_{1C}(n_D - 1) + (A_{2C} + A_{3C}\delta_{\lambda'} + A_{4C}\delta_h)(n_F - n_C) \quad (1.58)$$

Esta relación se satisface si escogemos

$$A_{1C} = 0, \quad A_{2C} = -1, \quad A_{3C} = A_{4C} = 0$$

Ahora tenemos suficientes condiciones para determinar A_3 y A_4 , asumiendo que son funciones del tipo (1.41).

1.6.3. La ecuación de dispersión de Sellmeier

La ecuación de Cauchy no puede representar la curva de dispersión en una región de dispersión anómala. La primera ecuación de una mayor aplicabilidad fue obtenida postulando un mecanismo por el que el medio puede afectar la velocidad de las ondas de luz. Se asumió que el medio contiene partículas limitadas por fuerzas elásticas, haciendo que vibren con una frecuencia definida ν_0 . A esto se le llama frecuencia natural, i.e. con la que vibran en ausencia de cualquier fuerza periódica. Entonces, el paso de las ondas de luz a través del medio pone en acción una fuerza periódica sobre las partículas, que causa que estas vibren. Si la frecuencia de la onda de luz ν no coincide con ν_0 , las vibraciones serán forzadas a tener una amplitud pequeña y una frecuencia ν . Al acercarse la frecuencia de la luz a ν_0 , la respuesta de las partículas será grande y se creará una amplitud muy grande por resonancia cuando $\nu = \nu_0$ exactamente. La investigación matemática de este mecanismo fue hecha en 1871 por Sellmeier [8], quien obtuvo la siguiente ecuación

$$n^2 = 1 + \frac{A\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \quad (1.59)$$

La cual contiene dos constantes, A y λ_0 , la constante A no se relaciona con las constantes de la ecuación de Herzberger y λ_0 se refiere a la frecuencia natural de las partículas, por la ecuación $\nu_0\lambda_0 = c$. Entonces λ_0 es la longitud de onda en el vacío correspondiente a ν_0 . Para que exista la posibilidad de diferentes frecuencias naturales, la ecuación se puede escribir en una serie de términos

$$n^2 = 1 + \frac{A_0 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} + \frac{A_1 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \dots = 1 + \sum_i \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \quad (1.60)$$

en donde $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ corresponden a las posibles frecuencias naturales. Las constantes A_i , son proporcionales al número de osciladores vibrando a esas frecuencias.

La ecuación de Sellmeier representa una gran mejora sobre la de Cauchy y es de hecho idéntica a la ecuación encontrada con la teoría de Helmholtz, con ciertas simplificaciones, la cual es

$$n^2 + \kappa_0^2 = 1 + \sum_i \frac{A_i \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_i^2) + g_i \lambda^2 (\lambda^2 - \lambda_i^2)} \quad (1.61)$$

donde $\kappa_0 = \alpha \lambda / 4\pi$, α es el coeficiente de absorción y g_i es una medida de la fuerza de fricción. La ecuación de Sellmeier no sólo toma en cuenta la dispersión anómala, sino que también da una mejor precisión de n en las regiones lejos de las bandas de absorción.

La ecuación de Sellmeier utilizada en esta tesis para calcular los índices de refracción de los vidrios está dada por

$$n^2(\lambda) - 1 = \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda^2}{\lambda^2 - C_3} \quad (1.62)$$

en donde $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ son constantes que provee el fabricante en el catálogo de vidrios y que son evaluadas a partir de los índices de refracción medidos experimentalmente.

1.7. El método de Geffcken

La descripción de la dispersión parcial de los vidrios ópticos que se desvían de su comportamiento normal con la ayuda de la función δ es descrita por el método de Geffcken

[9], este método de cálculo, aunque permite una gran precisión en la interpolación para todas las longitudes de onda ha sido utilizado muy poco en el pasado.

Geffcken demostró que el método de la función δ puede ser adaptado por medio de una transformación a cualquier diagrama elegido.

Los vidrios normales son por definición, aquellos que a cualquier longitud de onda δ_x es cero.

1.7.1 Cálculo de los valores de δ .

Geffcken propuso la siguiente ecuación:

$$s_x = (1 - D_x)s_1 + R_x(s_2 - s_1) + D_x\delta_x \quad (1.63)$$

en donde $s = n-1$, n es el índice de refracción, R y D son coeficientes que dependen sólo de la longitud de onda y no de la composición del vidrio, y δ es la función de desviación. El subíndice x indica que el parámetro se utiliza para la longitud de onda λ_x , en tanto que los subíndices 1 y 2 son usados para longitudes de onda definidas (por ejemplo $\lambda_1=0.656\mu\text{m}$ (C), y $\lambda_2=0.486\mu\text{m}$ (F)).

El comportamiento de los vidrios con respecto a la dispersión parcial se representa por la función δ_x , por lo tanto podemos describir la ecuación (1.63) como:

$$P_x = R_x - D_x \left(V - \frac{\delta_x}{s_2 - s_1} \right) \quad (1.64)$$

donde
$$P_x = \frac{s_x - s_1}{s_2 - s_1} = \frac{n_x - n_1}{n_2 - n_1} \quad (1.65)$$

y

$$V = \frac{s_1}{s_2 - s_1} = \frac{n_1 - 1}{n_2 - n_1} \text{ es el número de Abbe} \quad (1.66).$$

Para calcular los valores de los coeficientes R y D el método postula que para dos vidrios seleccionados 1 y 2 los cuales son vidrios normales $\delta_x = 0$, entonces

$$P_{1x} - P_{2x} = -D_x(V_1 - V_2) \quad (1.67)$$

i.e.
$$D_x = -\frac{P_{1x} - P_{2x}}{V_1 - V_2} \quad (1.68)$$

y

$$R_x = P_{1x} + D_x V_1 \quad (1.69)$$

Para tales vidrios podemos rescribir la ecuación (1.64) en su forma simple

$$P_x = R_x - D_x V \quad (1.70)$$

la cual corresponde a la ecuación de Abbe. Entonces para vidrios normales la ecuación (1.63) se simplifica a

$$s_{x\text{norm}} = (1 - D_x)s_1 + R_x(s_2 - s_1) \quad (1.71)$$

donde *norm* se refiere al índice normal. Y para cualquier otro tipo de vidrio tenemos

$$s_x = s_{x\text{norm}} + \delta_x D_x \quad (1.72)$$

Y el índice de refracción está dado por

$$n = 1 + s_x. \quad (1.73)$$

Se utilizan dos grupos de valores para los coeficientes D_x y R_x [10], que son derivados usando los valores experimentales de Franz Reitmayer [11]. El primer conjunto se da para longitudes de onda de $\lambda_1 = 0.486\mu\text{m}$ a $\lambda_2 = 0.656\mu\text{m}$ (sistema estándar I), y el segundo para longitudes de onda de $\lambda_1 = 0.656\mu\text{m}$ a $\lambda_2 = 1.014\mu\text{m}$ (sistema estándar II). La elección de longitudes de onda es arbitraria, sin embargo se utilizan éstas ya que las del primer sistema son las que se han trabajado por mucho tiempo, y en las del segundo sistema la línea Hg ($1.014\mu\text{m}$) puede ser medida fácilmente.

De acuerdo a la ecuación (1.64), $\frac{\delta_x D_x}{s_2 - s_1}$ es la distancia en la dirección P de los puntos P_x

vs. V , de los vidrios reales con respecto a la línea normal de vidrios, entonces δ_x , el cual

para un vidrio dado es distinguido por la distancia en el diagrama PV por el factor constante s_2-s_1 , puede ser atribuido también como criterio de la dispersión parcial anómala. Para calcular la función δ_x , se resuelve la ecuación (1.63) para esta función.

$$\delta_x = \frac{s_x - (1 - D_x)s_1 - R_x(s_2 - s_1)}{D_x} \quad (1.74)$$

donde los valores de s utilizados son medidos experimentalmente y posteriormente reportados en el catálogo de vidrios.

1.7.2 Extrapolación del índice de refracción.

Dados dos vidrios cualesquiera del catálogo, por ejemplo SF2 y SK16. Con estos dos vidrios se calcula la pendiente D_x y la ordenada al origen de la línea de Abbe, R_x , dadas por las ecuaciones (1.68) y (1.69) respectivamente. Supongamos ahora que tenemos el vidrio F2 del catálogo de vidrios. La cantidad que se desvía el vidrio F2 de la línea normal de Abbe está dada por la ecuación (1.74). Las cantidades D_x y R_x sólo dependen de la longitud de onda y ya han sido calculadas para los vidrios SF2 y SK16, mientras que las s 's están relacionadas con los índices de refracción del vidrio F2 dados en el catálogo, a saber: $s_x = n_x - 1$, $s_1 = n_{1x} - 1$ y $s_2 = n_{2x} - 1$. Por lo tanto se conocen todos los parámetros necesarios para calcular la desviación del vidrio F2 de la línea de Abbe la cual está dada por δ_x .

Ahora bien para extrapolar los valores reales del índice de refracción del vidrio F2, los cuales pueden diferir ligeramente de los valores proporcionados por el catálogo es necesario conocer el índice de refracción para dos longitudes de onda del vidrio real F2. Estos valores deben ser medidos experimentalmente y forman parte de la información proporcionada por el fabricante en el momento de comprar el vidrio. A partir de los dos

valores del índice de refracción del vidrio real F2 se calculan nuevas s_1 y s_2 y sustituyéndolas en la ecuación (1.63), junto con los valores de D_x y R_x calculados anteriormente, es posible extrapolar el índice de refracción para la longitud de onda x , del vidrio F2.

Como ejemplo tenemos los índices de refracción del vidrio real F2 para las longitudes de onda F y C por lo tanto podemos extrapolar para 365nm. Entonces, tomando los índices del vidrio SF2: $n_{365} = 1.70027, n_F = 1.66123, n_C = 1.64210$, del vidrio SK16: $n_{365} = 1.64559, n_F = 1.62756, n_C = 1.61727$ y del vidrio F2: $n_{365} = 1.66623, n_F = 1.63208, n_C = 1.61503$ podemos obtener P y V para cada vidrio

$$P_1 = \frac{n_x - n_1}{n_2 - n_1} = \frac{1.70027 - 1.64210}{1.66123 - 1.64210} = 3.04077$$

$$P_2 = \frac{1.64559 - 1.61727}{1.62756 - 1.61727} = 2.75219$$

$$V_1 = \frac{n_1 - 1}{n_2 - n_1} = \frac{1.64210 - 1}{0.01913} = 33.56508$$

$$V_2 = \frac{1.61727 - 1}{0.01029} = 59.98737$$

Sustituyendo en las ecuaciones (1.68) y (1.69) obtenemos los valores de D_x y R_x como

$$D_x = -\frac{P_{1x} - P_{2x}}{V_1 - V_2} = \frac{-3.04077 - 2.75219}{33.56508 - 59.98737} = 0.01092$$

$$R_x = P_x + D_x V_1 = 3.04077 + 0.01092(33.56508) = 3.40736$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1.74) tenemos:

$$\delta_x = \frac{s_x - (1 - D_x)s_1 - R_x(s_2 - s_1)}{D_x} = \frac{0.66623 - 0.98908(0.61503) - 3.40736(0.01705)}{0.01092} = -0.01642$$

Entonces, si los índices medidos para el vidrio real F2 son $n_F = 1.63307, n_C = 1.61600$, el índice de refracción para este vidrio a 365nm será, según la ecuación (1.63):

$$n_x = (0.98908)0.61600 + 3.40736(0.01707) + (-0.01642)0.0192 + 1 = 1.66726$$

como se puede ver en la tabla 1.2.

A continuación se muestran algunas tablas con los valores extrapolados a diferentes longitudes de onda, con dos pares de vidrios distintos, los valores extrapolados se muestran con negritas.

Tabla 1.2. Extrapolación del índice de refracción usando el método de Geffcken para el vidrio F2, usando los vidrios del catalogo: SF2, SK16 y F2.

	0.365 μm	línea F 0.4861 μm	línea C 0.6563 μm	0.7 μm	1.0 μm	2.0 μm
SF2 índices catalogo	1.70027	1.66123	1.6421	1.63938	1.62892	1.61454
SK16 índices catalogo	1.64559	1.62756	1.61727	1.61569	1.60893	1.59476
F2 índices catalogo	1.66623	1.63208	1.61503	1.61259	1.60307	1.58918
F2 datos reales	1.66726	1.63307	1.61600	1.61357	1.60404	1.59013

Tabla 1.3. Extrapolación del índice de refracción usando el método de Geffcken para el vidrio F2, usando los vidrios del catalogo: K5, SF6 y F2.

	0.365 μm	línea F 0.4861 μm	línea C 0.6563 μm	0.7 μm	1.0 μm	2.0 μm
K5 índices catalogo	1.54412	1.52860	1.51982	1.51847	1.51276	1.50107
SF6 índices catalogo	1.89700	1.82775	1.79609	1.79174	1.77568	1.75771
F2 índices catalogo	1.66623	1.63208	1.61503	1.61259	1.60307	1.58918
F2 datos reales	1.66726	1.63307	1.61600	1.61357	1.60404	1.59013

En resumen, en este capítulo se ha mostrado que el uso de vidrios ópticos que satisfacen la relación lineal de Abbe, es decir que se encuentran sobre o muy cerca de una línea recta en

la gráfica de P contra V , es imposible hacer coincidir más de dos longitudes de onda en un foco común, esto quiere decir que existe una aberración cromática residual conocida como espectro secundario. También se ha mostrado que a partir del diseño de un doblete acromático se obtiene de forma natural el número de Abbe, y al intentar hacer coincidir los focos para tres longitudes de onda, se obtiene también de forma natural la dispersión relativa parcial y la condición de que ésta tenga que ser igual para ambos vidrios.

Se han descrito varias fórmulas de dispersión de los vidrios ópticos de las cuales en esta tesis usaremos la fórmula de dispersión de Sellmeier para comparar nuestros resultados obtenidos para la extrapolación de vidrios del catálogo.

Adicionalmente, se ha descrito un método para el cálculo de la extrapolación del índice de refracción, llamado método de Geffcken, que a diferencia de los otros métodos de dispersión permite extrapolar el índice de refracción de vidrios reales y con el que podremos comparar los resultados obtenidos con el método que se propone en esta tesis para este tipo de vidrios.

2

Ecuación de Abbe para una banda espectral infinitesimal

Para hacer la clasificación de los vidrios ópticos existentes en el catálogo Schott de 1992 [12], se tienen que saber varias propiedades de los mismos, de entre las más importantes están el índice de refracción (n), el número de Abbe (V) y la dispersión relativa parcial (P), las cuales se relacionan a aberraciones cromáticas en el espectro visible. Como el número de Abbe y la dispersión relativa parcial están dados a partir del índice de refracción, y como la variación de la longitud de onda del índice de refracción ocupa todo el espectro, se puede saber los valores de V y P para cualquier región del espectro [2], en particular en el espectro visible, dando las definiciones de V y P como siguen:

$$V_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}, \quad P_{F,d} = \frac{n_F - n_d}{n_F - n_C} \quad (2.1)$$

respectivamente, en donde n es el índice de refracción y los subíndices d , F y C se refieren a las longitudes de onda espectrales: 587.6nm , 486.1nm y 656.3nm respectivamente. En esta definición se utilizan líneas en el visible, donde normalmente se corrige la aberración cromática. La dispersión relativa parcial se tabula en el catálogo de Schott para cada vidrio y para 12 pares de longitudes de onda x, y :

$$P_{x,y} = \frac{n_x - n_y}{n_F - n_C} \quad (2.2)$$

Una relación lineal mostrada por Abbe se aplica a la mayoría de los vidrios:

$$P_{x,y} = a_{x,y}V_d + b_{x,y} \quad (2.3)$$

A la ecuación (2.3) se le llama ecuación lineal de Abbe discutida en la sección 1.5. Los vidrios que satisfacen la ecuación de Abbe con una aproximación razonable son llamados vidrios normales, entonces la línea que representa esta ecuación, es la línea de los vidrios normales, y los que no cumplen con esta ecuación se les llama vidrios especiales. En el catálogo de Schott [12] se muestran tabulados los parámetros $a_{x,y}$ y $b_{x,y}$ para cinco pares de longitudes de onda.

2.1 Definición del número de Abbe y la dispersión relativa parcial

Para una banda espectral infinitesimal se utiliza una nueva definición de V y P , al derivarlas se utilizan los subíndices 0, 1 y 2 para denotar las longitudes de onda utilizadas en la definición anterior.

$$V = \frac{n_0 - 1}{n_1 - n_2}, \quad P = \frac{n_1 - n_0}{n_1 - n_2} \quad (2.4)$$

donde n_0 , n_1 y n_2 son los índices de refracción del vidrio a las longitudes de onda λ_0 , $\lambda_1 = \lambda_0 - \Delta\lambda$, y $\lambda_2 = \lambda_0 + \Delta\lambda$, respectivamente, y $\Delta\lambda$ es la mitad del ancho de banda.

El índice de refracción se expande en una serie de Taylor para longitudes de onda en orden creciente y decreciente, como sigue:

$$n_1 = n_0 - \frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda + \frac{1}{2!}\frac{d^2n}{d\lambda^2}(\Delta\lambda)^2 - \frac{1}{3!}\frac{d^3n}{d\lambda^3}(\Delta\lambda)^3 + \dots \quad (2.5)$$

$$n_2 = n_0 + \frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda + \frac{1}{2!}\frac{d^2n}{d\lambda^2}(\Delta\lambda)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3n}{d\lambda^3}(\Delta\lambda)^3 + \dots \quad (2.6)$$

Por lo tanto las diferencias en el índice de refracción son:

$$n_1 - n_0 = -\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda + \frac{1}{2!}\frac{d^2n}{d\lambda^2}(\Delta\lambda)^2 - \frac{1}{3!}\frac{d^3n}{d\lambda^3}(\Delta\lambda)^3 + \dots \quad (2.7)$$

$$n_1 - n_2 = -2\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda - \frac{2}{3!}\frac{d^3n}{d\lambda^3}(\Delta\lambda)^3 + \dots \quad (2.8)$$

Cuando la ecuación (2.8) es sustituida en la ecuación (2.4) y despreciamos las derivadas de orden mayor a dos, el número V está dado por:

$$V = -\frac{1}{2}\frac{n_0 - 1}{\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda} \quad (2.9)$$

Y el número V diferencial es definido como:

$$V_\lambda = -\frac{1}{2}\frac{n_0 - 1}{\frac{dn}{d\lambda}} \quad (2.10)$$

Entonces

$$V \cong \frac{1}{\Delta\lambda}V_\lambda \quad (2.11)$$

Por lo tanto el número V es inversamente proporcional al ancho de banda, incluso cuando esto no se muestre explícitamente en la ecuación.

Del mismo modo, de la definición de la dispersión relativa parcial, ecuación (2.4) y usando las expansiones dadas en las ecuaciones (2.7) y (2.8) tenemos que:

$$P = \frac{-\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda + \frac{1}{2!}\frac{d^2n}{d\lambda^2}(\Delta\lambda)^2 - \frac{1}{3!}\frac{d^3n}{d\lambda^3}(\Delta\lambda)^3 + \dots}{-2\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda - \frac{2}{3!}\frac{d^3n}{d\lambda^3}(\Delta\lambda)^3 - \dots} \quad (2.12)$$

Despreciando las derivadas de orden superior al segundo nos lleva a:

$$P = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{\frac{d^2n}{d\lambda^2}}{\frac{dn}{d\lambda}}\Delta\lambda \quad (2.13)$$

Definiendo la dispersión relativa parcial diferencial como:

$$\hat{P}_\lambda = -\frac{1}{4} \frac{\frac{d^2 n}{d\lambda^2}}{\frac{dn}{d\lambda}} \quad (2.14)$$

entonces

$$P \cong \frac{1}{2} + \hat{P}_\lambda \Delta\lambda \quad (2.15)$$

2.2 Ecuación lineal de Abbe para una banda espectral infinitesimal.

La relación lineal de Abbe [1] entre el número (V) y la dispersión relativa parcial (P) se presenta en el caso general como:

$$P = aV + b \quad (2.16)$$

En la ecuación (2.16) las expresiones finitas para V y P son reemplazadas por las aproximaciones dadas por las ecuaciones (2.11) y (2.15), las cuales nos llevan a

$$\hat{P}_\lambda = \frac{a}{(\Delta\lambda)^2} \hat{V}_\lambda + \frac{2b-1}{2\Delta\lambda} \quad (2.17)$$

Los valores de los parámetros a y b de las líneas normales dependen de las longitudes de onda λ_0 , λ_1 y λ_2 seleccionadas anteriormente. Cuando $\Delta\lambda \rightarrow 0$ los parámetros dependen solamente de λ_0 ; por lo tanto es posible definir las siguientes funciones

$$A(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{a}{(\Delta\lambda)^2} \quad B(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{2b-1}{2\Delta\lambda}$$

Con estas definiciones la ecuación lineal de Abbe se transforma en

$$\hat{P}_\lambda = A(\lambda)\hat{V}_\lambda + B(\lambda) \quad (2.18)$$

Los parámetros $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ son evaluados con el método de mínimos cuadrados para todos los vidrios del catálogo Schott. En la figura 2.1 se muestra la gráfica de estos parámetros

como función de la longitud de onda. Para estas gráficas se ajusta una función polinomial a los parámetros $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ dados por:

$$A(\lambda) = -0.216216 + \frac{1.16202}{\lambda} - \frac{2.25194}{\lambda^2} + \frac{2.06013}{\lambda^3} - \frac{1.00081}{\lambda^4} + \frac{0.257608}{\lambda^5} - \frac{0.0302137}{\lambda^6} \quad (2.19)$$

$$B(\lambda) = 26.4654 - 136.77\lambda + 311.25\lambda^2 - 380.969\lambda^3 + 268.215\lambda^4 - 109.209\lambda^5 + 23.996\lambda^6 - 2.20936\lambda^7 \quad (2.20)$$

con la longitud de onda en unidades de micra.

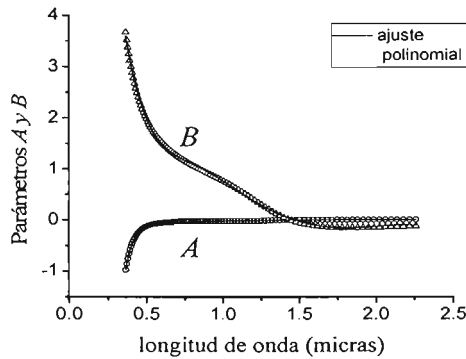


Figura 2.1. Parámetros A y B como función de la longitud de onda. La línea continua muestra el ajuste polinomial dado por las ecuaciones (2.19) y (2.20).

En la ecuación lineal para una banda espectral diferencial (2.18) sustituimos las ecuaciones (2.10) y (2.14), obteniendo la ecuación diferencial para un vidrio normal dada por:

$$\frac{d^2 n(\lambda)}{d\lambda^2} + 4B(\lambda) \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} - 2A(\lambda)n(\lambda) = -2A(\lambda) \quad (2.21)$$

la cual es una ecuación de segundo orden no homogénea. Esta ecuación puede escribirse de la siguiente forma

$$n'' + 4B(\lambda)n' - 2\{n(\lambda) - 1\}A(\lambda) = 0 \quad (2.22)$$

en donde

$$n'' = \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad \text{y} \quad n' = \frac{dn}{d\lambda} \quad (2.23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.19) y (2.20) en la ecuación (2.22) y usando el método de Runge-Kutta (apéndice C), se resuelve numéricamente esta ecuación diferencial, para obtener el índice de refracción extrapolado, a partir de las condiciones iniciales n_0 y n'_0 .

2.3 Ecuación cuadrática de Abbe para una banda espectral infinitesimal

Como se puede observar más adelante en la figura 2.3 la gráfica de \hat{P} vs \hat{V} para longitudes de onda en la región del azul y el UV ya no se ajusta a una línea recta sino a una curva, por lo tanto en esta sección supondremos que la relación entre \hat{P}_λ y \hat{V}_λ es cuadrática, con el objeto de disminuir el error en la extrapolación del índice de refracción y su derivada que se obtiene al utilizar la ecuación (2.22). De tal manera que ahora tenemos

$$\hat{P}_\lambda = E(\lambda)\hat{V}_\lambda^2 + F(\lambda)\hat{V}_\lambda + G(\lambda) \quad (2.24)$$

De igual forma a como se obtuvieron los parámetros $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ para la ecuación lineal, los parámetros $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ y $G(\lambda)$ para el ajuste cuadrático son calculados con el método de mínimos cuadrados (apéndice A) para todos los vidrios del catálogo Schott. En la figura 2.2 se muestran las gráficas de estos parámetros. Después se ajusta un polinomio a cada uno de estos parámetros cuyas ecuaciones se muestran en el apéndice B. Para el ajuste de las funciones polinomiales a los parámetros E , F y G , se utilizó el programa Matemática.

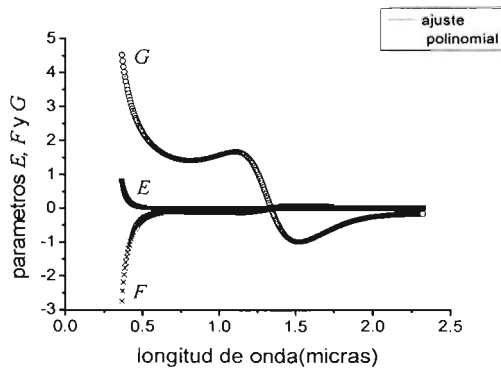


Figura 2.2. Parámetros E , F y G contra la longitud de onda. Las líneas continuas muestran el ajuste dado por las ecuaciones (B.1), (B.2) y (B.3) del apéndice B.

Sustituyendo las ecuaciones (2.10) y (2.14) en la ecuación (2.24) tenemos

$$-\frac{1}{4} \frac{d^2 n}{\frac{dn}{d\lambda}} = E(\lambda) \left(-\frac{1}{2} \frac{n-1}{\frac{dn}{d\lambda}} \right)^2 + F(\lambda) \left(-\frac{1}{2} \frac{n-1}{\frac{dn}{d\lambda}} \right) + G(\lambda) \quad (2.25)$$

$$-\frac{1}{4} \frac{n''}{n'} = E(\lambda) \frac{1}{4} \frac{(n-1)^2}{n'^2} - \frac{1}{2} F(\lambda) \left(\frac{n-1}{n'} \right) + G(\lambda) \quad (2.26)$$

$$\frac{n''}{n'} = -E(\lambda) \frac{(n-1)^2}{n'^2} + 2F(\lambda) \left(\frac{n-1}{n'} \right) - 4G(\lambda) \quad (2.27)$$

$$n'' = -E(\lambda) \frac{(n-1)^2}{n'} + 2F(\lambda)(n-1) - 4G(\lambda)n' \quad (2.28)$$

donde $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ y $G(\lambda)$ están dadas en las ecuaciones B1, B2 y B3 del apéndice B, respectivamente. La ecuación diferencial (2.28) se resuelve para extrapolar el índice de refracción utilizando el método de Runge-Kutta (apéndice C).

En la figura 2.3 se muestran gráficas de P_λ contra ν_λ para los 202 vidrios del catálogo de Schott [12], y para ocho longitudes de onda distintas. Asimismo en la figura 2.3 se han graficado los valores de P_λ contra ν_λ dadas por las ecuaciones (2.18) y (2.24) que corresponden al ajuste lineal y cuadrático respectivamente. Como podemos observar en la figura 2.3, en el cercano IR, los vidrios se alinean a lo largo de una línea bien definida con una pendiente pequeña. En el visible, la gráfica es similar a la gráfica de P vs ν con una banda espectral finita, es decir, es casi una línea recta con su pendiente incrementando para longitudes de onda cortas. Mientras que en el azul y en el cercano ultravioleta la línea tiende a ser una curva, dejando de parecerse a una línea recta. Como podemos observar en el cercano UV se obtiene un mejor ajuste a los valores de P_λ y ν_λ con el ajuste cuadrático.

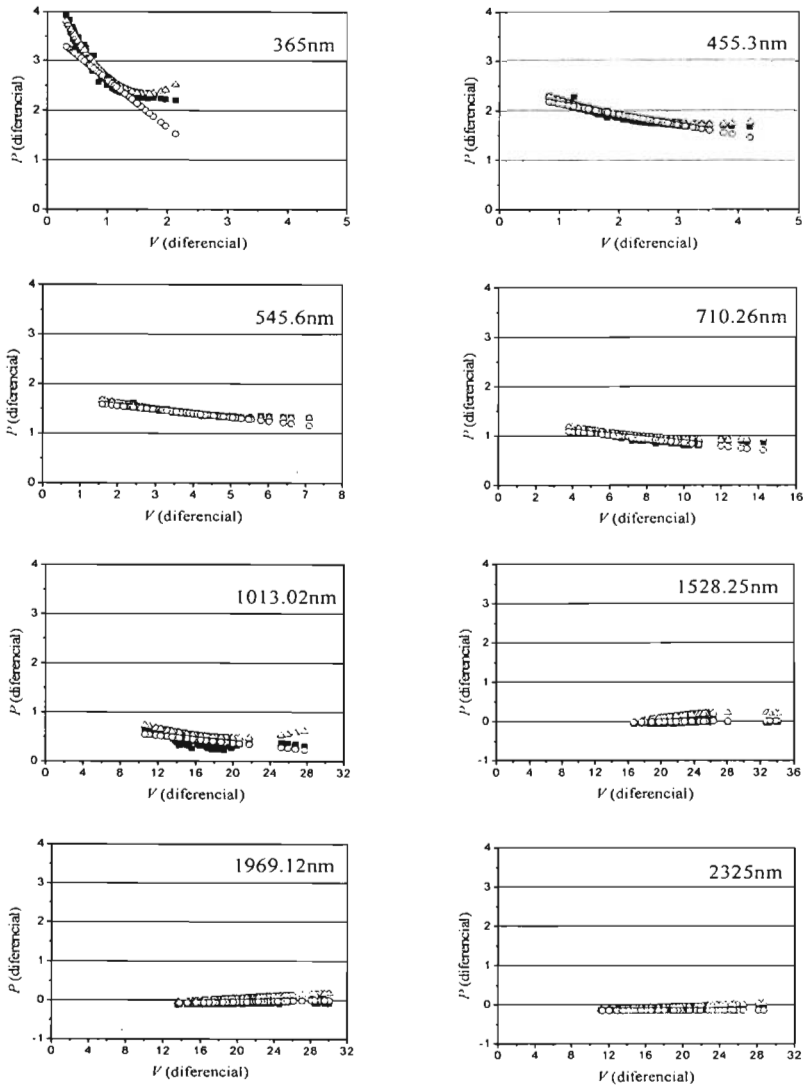


Figura 2.3. P_λ contra V_λ para diferentes longitudes de onda. El ajuste lineal se muestra con círculos, el ajuste cuadrático se muestra con triángulos y los vidrios del catálogo se muestran con cuadrados negros.

Como ejemplos se han analizado 6 vidrios del catálogo de Schott: K5, SF6, F2, SF59, SF19 y FK54. Para cada uno de estos vidrios se ha extrapolado el índice de refracción y su derivada en el intervalo entre 0.365 micras y 2.325 micras tomando como condiciones iniciales el índice de refracción y su derivada a una longitud de onda de $0.5\mu\text{m}$. En la figura 2.4, se muestra una gráfica de P_λ vs. V_λ , así como los vidrios seleccionados para cuatro longitudes de onda. El valor de la derivada para cada uno de estos vidrios se ha calculado a partir de la derivada de la ecuación de Sellmeier (1.55). Las condiciones iniciales para cada uno de estos vidrios se muestran en la tabla 2.1.

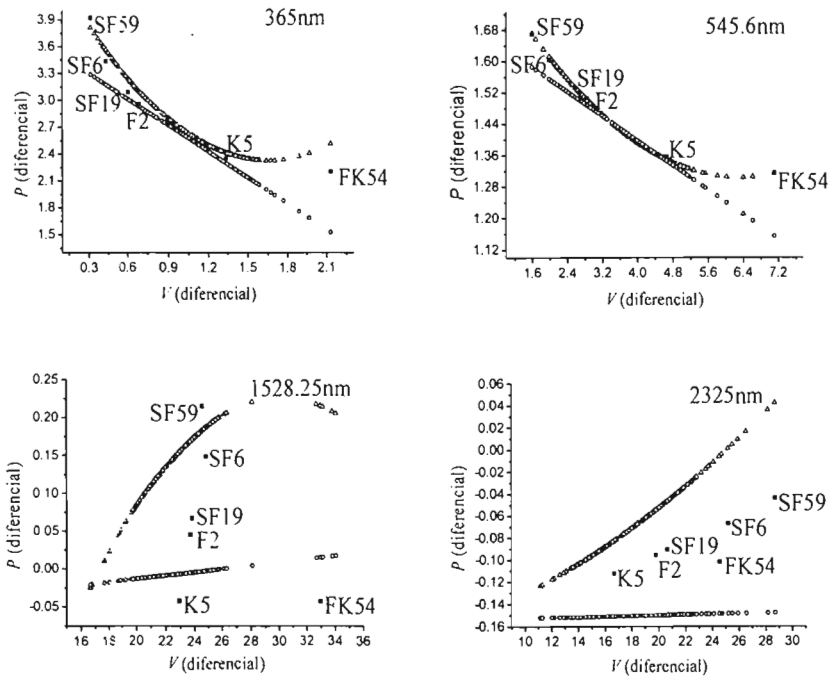


Figura 2.4. P_λ contra V_λ para cuatro longitudes de onda. Se muestran los vidrios analizados. El ajuste lineal se muestra con círculos, el ajuste cuadrático se muestra con triángulos y los vidrios del catálogo se muestran con cuadrados negros

Tabla 2.1. Condiciones iniciales para la extrapolación de índices de refracción.

Vidrio	$n (0.5\mu m)$	$\frac{dn}{d\lambda} (0.5\mu m)$
FK54	1.43976	-0.0397652
K5	1.52754	-0.0732366
F2	1.62994	-0.147306
SF19	1.67855	-0.175642
SF6	1.82366	-0.279784
SF59	1.97990	-0.419736

Como se muestra en la Tabla 2.1 las condiciones iniciales se toman para $\lambda_0=0.5\mu m$ y a partir de este valor se extrapolará el índice de refracción hacia longitudes de onda pequeñas y grandes cubriendo el intervalo entre $0.365\mu m$ y $2.325\mu m$. Definimos λ_f como la longitud de onda final del intervalo de extrapolación, i.e., el intervalo (λ_0, λ_f) . El intervalo espectral entre $0.365\mu m$ y $2.325\mu m$ se divide en dos intervalos; el primero de $0.5\mu m$ a $0.365\mu m$ y el segundo de $0.5\mu m$ a $2.325\mu m$. En el primer intervalo el número de pasos en el método de Runge-Kutta para ir de la condición inicial λ_0 hasta λ_f es igual a 10000, i.e., $max = 10000$. En el segundo intervalo se toma $max = 100$. En la tabla 2.2 se muestran los ejemplos de la aproximación a la solución de la ecuación diferencial (2.28) dado por las ecuaciones (C.17) y (C.18) para cada vidrio analizado, en la tabla solo se muestran los resultados para 3 longitudes de onda. En la tabla 2.3 también se muestran los valores del índice de refracción obtenidos con la ecuación de Sellmeier, con el objeto de poder comparar los resultados obtenidos tanto con la extrapolación obtenida con la ecuación (2.22) (el ajuste lineal) y con la ecuación (2.28) (ajuste cuadrático).

Al resolver la ecuación diferencial para extrapolar el índice de refracción se encuentran varios errores de aproximación, entre los cuales están: 1) proponemos una sola ecuación diferencial que describe a todos los vidrios del catalogo. Este promedio está dado por los parámetros $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ para el ajuste lineal y por los parámetros $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ y $G(\lambda)$ para el ajuste cuadrático, los cuales se han obtenido a través del ajuste de mínimos cuadrados. 2) Se ajustan funciones a los parámetros $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ y a los parámetros $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ y $G(\lambda)$. 3) La solución de las ecuaciones diferenciales se obtiene utilizando el método numérico de Runge-Kutta.

Tabla 2.2. Solución numérica lineal [1] y cuadrática del índice de refracción y su derivada también evaluadas con la fórmula de Sellmeier.

vidrio	longitud de onda(μm)	Solución Numérica lineal $n(\lambda)$	Solución Numérica cuadrática $nc(\lambda)$	Solución con Sellmeier $n(\lambda)$	Solución Numérica lineal $n'(\lambda)$	Solución Numérica cuadrática $nc'(\lambda)$	Solución con Sellmeier $n'(\lambda)$
FK54	0.365	1.447659	1.448553	1.448559	-0.082263	-0.107463	-0.105234
	1.000	1.430796	1.43152	1.431533	-0.009335	-0.007663	-0.007911
	2.325	1.420923	1.423507	1.422078	-0.007578	-0.006416	-0.008591
K5	0.365	1.544272	1.544135	1.544125	-0.206061	-0.202256	-0.203258
	1.000	1.512743	1.512708	1.512762	-0.013372	-0.013659	-0.013738
	2.325	1.49906	1.498477	1.496565	-0.010796	-0.011458	-0.014892
F2	0.365	1.665792	1.665653	1.666233	-0.484580	-0.481276	-0.485521
	1.000	1.602801	1.602908	1.60307	-0.021061	-0.021077	-0.020620
	2.325	1.582152	1.58223	1.584659	-0.016887	-0.017744	-0.014750
SF19	0.365	1.722874	1.723021	1.72257	-0.605357	-0.612016	-0.599925
	1.000	1.646631	1.646941	1.647044	-0.024130	-0.023761	-0.023384
	2.325	1.623167	1.623882	1.627374	-0.019323	-0.020048	-0.015183
SF6	0.365	1.896121	1.897869	1.897031	-1.013025	-1.069245	-1.047845
	1.000	1.774391	1.775751	1.775619	-0.034956	-0.032589	-0.032576
	2.325	1.741114	1.74501	1.743025	-0.027901	-0.027723	-0.014933
SF59	0.365	2.090424	2.095	2.096054	-1.568224	-1.710909	-1.761355
	1.000	1.90753	1.910688	1.910345	-0.048979	-0.043166	-0.044314
	2.325	1.861685	1.870914	1.883506	-0.038993	-0.037088	-0.015384

Tabla 2.3. Comparación de la solución a la ecuación diferencial lineal [1] y cuadrática con la obtenida con Sellmeier.

vidrio	longitud de onda(μm)	Error en $n(\lambda)$ $n(\lambda)-n(\lambda)$	Error en $nc(\lambda)$ $nc(\lambda)-n(\lambda)$	Error en $n'(\lambda)$ $n'(\lambda)-n'(\lambda)$	Error en $nc'(\lambda)$ $nc'(\lambda)-n'(\lambda)$
FK54	0.365	0.0009	6E-06	-0.02297129	0.0022293
	1.000	0.000737	1.3E-05	0.0014242	-0.0002484
	2.325	0.001155	-0.001429	-0.0010123	-0.0021747
K5	0.365	-0.000147	-1E-05	0.002803	-0.0010019
	1.000	1.9E-05	5.4E-05	-0.0003659	-7.84E-05
	2.325	-0.002495	-0.001912	-0.0040965	-0.0034344
F2	0.365	0.000441	0.00058	-0.0009409	-0.0042447
	1.000	0.000269	0.000162	0.0004403	0.0004566
	2.325	0.002507	0.002429	0.0021368	0.0029932
SF19	0.365	-0.000304	-0.000451	0.0054324	0.0120914
	1.000	0.000413	0.000103	0.0007454	0.000377
	2.325	0.004207	0.003492	0.0041401	0.0048644
SF6	0.365	0.00091	-0.000838	-0.03482	0.0214
	1.000	0.001228	-0.000132	0.0023799	1.27E-05
	2.325	0.001911	-0.001985	0.0129673	0.0127891
SF59	0.365	0.00563	0.001054	-0.193131	-0.050446
	1.000	0.002815	-0.000343	0.00466579	-0.00114721
	2.325	0.021821	0.012592	0.0236091	0.0217038

Los errores en la extrapolación del índice de refracción como función de la longitud de onda se muestran en la figura 2.5. Se han graficado con círculos a las diferencias entre el índice de refracción dado por la ecuación de Sellmeier y el índice de refracción extrapolado con la ecuación diferencial (2.22) obtenida con el ajuste lineal. Y con triángulos a las diferencias del índice de refracción calculado con Sellmeier y el índice de refracción extrapolado con la ecuación diferencial (2.28) obtenida con el ajuste cuadrático.

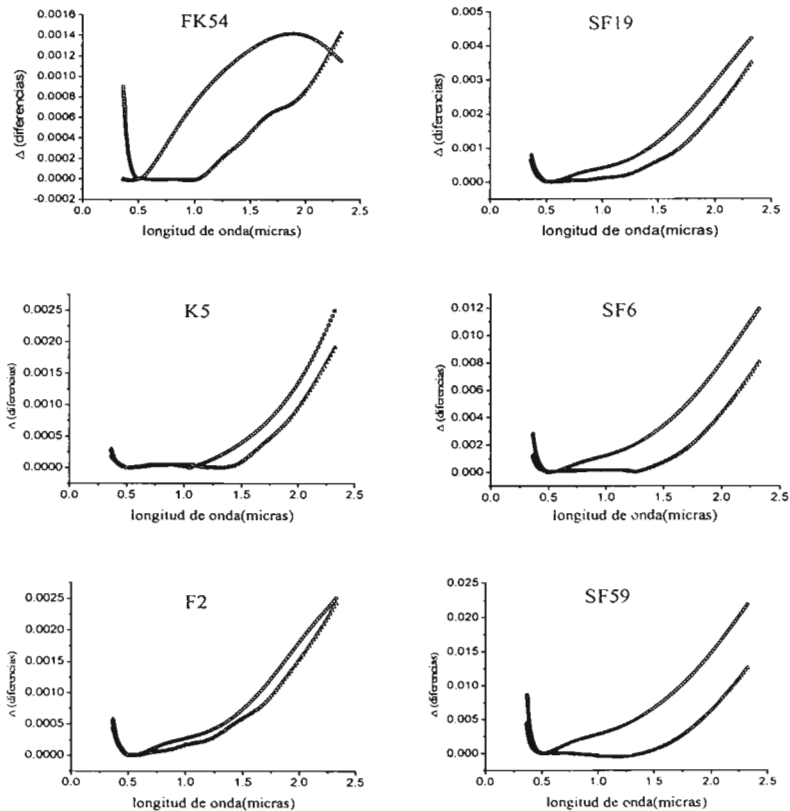


Figura 2.5. Diferencias entre el índice de refracción, usando la ecuación diferencial con el ajuste lineal (círculos) y con el ajuste cuadrático (triángulos), y los índices de refracción del catálogo.

Tomando los datos obtenidos con el método de la ecuación diferencial cuadrática, podemos hacer una comparación entre este método y el método de Geffcken, que se menciona en el capítulo 1. Tomamos como ejemplo el vidrio F2 cuyos datos reales para dos longitudes de onda, h y F, son proporcionados por el fabricante y los cuales están dados en la tabla 2.4. Para extrapolar el índice de refracción con la ecuación diferencial (2.28) es menester evaluar las condiciones iniciales, n_o y n'_o , las cuales se desconocen y no pueden ser evaluadas usando la ecuación de dispersión de Sellmeier. A continuación se describe la forma de evaluar las condiciones iniciales, para el vidrio F2 con datos reales, utilizando el método de Herzberger.

Tabla 2.4. Extrapolación del índice de refracción usando el método de Geffcken para el vidrio F2, usando los vidrios del catalogo: SF2, SK16 y F2 (los valores extrapolados se muestran en negritas).

	línea h 0.40466 μm	línea F 0.4861 μm	línea C 0.6563 μm	línea A' 0.768195 μm
SF2 índices catalogo	1.68233	1.66123	1.6421	1.63603
SK16 índices catalogo	1.63773	1.62756	1.61727	1.61367
F2 índices catalogo	1.65064	1.63208	1.61503	1.60956
F2 datos reales	1.65158	1.63307	1.61600	1.61054

Del capítulo 1 se tiene que

$$B = \Lambda^{-1} \tag{1.49}$$

donde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{A'}^2 & \frac{1}{\lambda_{A'}^2 - .035} & \frac{1}{(\lambda_{A'}^2 - .035)^2} \\ 1 & \lambda_C^2 & \frac{1}{\lambda_C^2 - .035} & \frac{1}{(\lambda_C^2 - .035)^2} \\ 1 & \lambda_F^2 & \frac{1}{\lambda_F^2 - .035} & \frac{1}{(\lambda_F^2 - .035)^2} \\ 1 & \lambda_h^2 & \frac{1}{\lambda_h^2 - .035} & \frac{1}{(\lambda_h^2 - .035)^2} \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

Resolviendo la inversa de la matriz A para las longitudes de onda A' , h , C y F tenemos

$$B = \begin{bmatrix} -9.74861 & 2.38231 & 17.4175 & -9.05123 \\ 12.814 & -2.00675 & -18.9281 & 8.12078 \\ 2.00579 & -0.824948 & -3.95883 & 2.77798 \\ -0.13143 & 0.0887451 & 0.272355 & -0.22967 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Las columnas de la matriz B nos dan los coeficientes de las funciones B_i , ec. (1.44)

$$B_{A'} = -9.74861 + 12.814\lambda^2 + \frac{2.00579}{\lambda^2 - .035} - \frac{0.13143}{(\lambda^2 - .035)^2} \quad (2.30)$$

$$B_h = 2.38231 - 2.00675\lambda^2 - \frac{0.824948}{\lambda^2 - .035} + \frac{0.0887451}{(\lambda^2 - .035)^2} \quad (2.31)$$

$$B_C = 17.4175 - 18.9281\lambda^2 - \frac{3.95883}{\lambda^2 - .035} + \frac{0.272355}{(\lambda^2 - .035)^2} \quad (2.32)$$

$$B_F = -9.05123 + 8.12078\lambda^2 + \frac{2.77798}{\lambda^2 - .035} - \frac{0.22967}{(\lambda^2 - .035)^2} \quad (2.33)$$

Entonces de la tabla 2.4 y la ecuación (1.43) tenemos

$$n_\lambda = B_{A'}1.61054 + B_h1.65158 + B_C1.61600 + B_F1.63307 \quad (2.34)$$

Tomando como condición inicial $\lambda=0.5 \mu\text{m}$ y sustituyendo en las ecuaciones (2.30-2.33) se obtiene

$$n_{0.5} = B_{A'}1.61054 + B_h1.65158 + B_C1.61600 + B_F1.63307 = 1.63079 \quad (2.35)$$

donde $B_{A'} = -0.05912$, $B_h = -0.03649$, $B_C = 0.16425$, $B_F = 0.93128$.

Ahora podemos obtener la derivada de la ecuación (2.34) como sigue

$$\begin{aligned}
 n'_\lambda = & 1.61054 \left(25.628\lambda - \frac{4.01158\lambda}{(\lambda^2 - .035)^2} + \frac{0.52572\lambda}{(\lambda^2 - .035)^3} \right) + \\
 & 1.65158 \left(-4.0135\lambda + \frac{1.649896\lambda}{(\lambda^2 - .035)^2} - \frac{0.3549804\lambda}{(\lambda^2 - .035)^3} \right) + \\
 & 1.61600 \left(-37.8562\lambda + \frac{7.91766\lambda}{(\lambda^2 - .035)^2} - \frac{1.08942\lambda}{(\lambda^2 - .035)^3} \right) + \\
 & 1.63307 \left(16.24156\lambda - \frac{5.55596\lambda}{(\lambda^2 - .035)^2} + \frac{0.91868\lambda}{(\lambda^2 - .035)^3} \right) +
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

Entonces la derivada para $\lambda=0.5 \mu\text{m}$ es

$$n'_{0.5} = -0.147452 \tag{2.37}$$

Los valores del índice de refracción y su derivada dados en (2.35) y (2.37) son las condiciones iniciales para el vidrio F2 con datos reales tabulados en la tabla 2.4.

A partir de estos datos se resuelve la ecuación diferencial cuadrática con el método de Runge-Kutta, obteniéndose los valores de la tabla 2.5 en la columna referida como ecuación diferencial.

Tabla 2.5. Comparación del índice de refracción extrapolado para el vidrio F2 real con el método de Geffcken (Tabla 1.2) y el método de la ecuación diferencial (con $0.5\mu\text{m}$ como condición inicial).

	Geffcken	Ecuación diferencial	Diferencia $\Delta n = n_{\text{Geff}} - n_{\text{dif}}$
$0.365\mu\text{m}$	1.66726	1.66654	0.00072
$0.7\mu\text{m}$	1.61357	1.61338	0.00019
$1.0\mu\text{m}$	1.60404	1.60373	0.00031
$2.0\mu\text{m}$	1.59013	1.58845	0.00168

Como se ha visto en este capítulo la relación lineal de Abbe deja de ser lineal en el espectro azul y UV, por lo que hemos propuesto una nueva ecuación diferencial la cual fue obtenida a partir de la suposición de que existe una relación cuadrática entre la dispersión relativa parcial y el número de Abbe. Con esta nueva ecuación diferencial ha sido posible disminuir el error en la extrapolación del índice de refracción para longitudes de onda hacia la región

del azul y el ultravioleta. Los resultados obtenidos con esta nueva ecuación diferencial son comparados con los resultados obtenidos con el método de Geffcken para el vidrio F2, del cual se conocen los valores reales del índice de refracción para dos longitudes de onda medidos por el fabricante. Las condiciones iniciales del índice de refracción y su derivada para el vidrio F2 con datos reales, que se requieren para poder realizar la extrapolación, se han calculado utilizando el método de Herzberger.

Haciendo una comparación entre los valores extrapolados por el método de Geffcken y la ecuación diferencial (cuadrática) se obtiene una diferencia en el índice de refracción de 0.002.

3

Acromatización de dobletes

En el capítulo 2 se utilizaron las definiciones diferenciales de la dispersión relativa parcial, \hat{P} , y el número de Abbe, \hat{V} , propuestas por J.L. Rayces and M. Rosete-Aguilar [1], para obtener una ecuación diferencial para la dispersión de vidrios normales que nos permita extrapolar el índice de refracción y su derivada. En este capítulo se desarrolla la teoría para el diseño de dobletes acromáticos en términos de las definiciones diferenciales de \hat{P} y \hat{V} [5]. Se muestran algunos ejemplos de diseño de dobletes acromáticos usando la definición finita del número de Abbe dada por la ecuación (1.13) del capítulo 1, y usando la definición diferencial del número de Abbe dada por la ecuación (3.10) del capítulo 3. Adicionalmente se evalúa el espectro secundario residual usando las expresiones finitas y diferenciales. Finalmente se calculan los valores diferenciales de \hat{P} y \hat{V} para 101 vidrios del Catálogo de Schott del 2004 [13], la tabla se presenta en el apéndice E. Los valores de \hat{P} y \hat{V} han sido tabulados para 18 longitudes de onda desde 365nm hasta 2325.4nm y con los cuales se han diseñado los dobletes acromáticos que se representan en este capítulo. Se presentan ejemplos de dobletes diseñados en tres regiones del espectro: visible, ultravioleta e infrarrojo.

Finalmente es importante mencionar que en muchas aplicaciones el valor del espectro secundario es comparable con las aberraciones de Seidel [2], por lo que su corrección es de gran importancia.

3.1 Dobletes Acromáticos

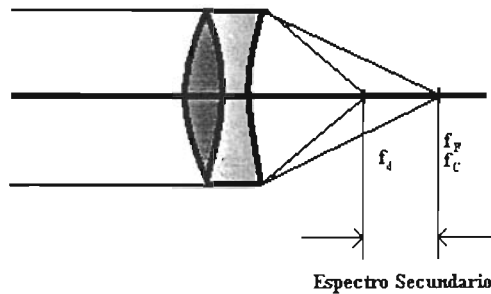


Figura 3.1. Doblete cementado de vidrio Crown y vidrio Flint.

Una lente que está corregida para una sola longitud de onda -para aplicaciones láser, por ejemplo- se describe como **monocromática**. En ese tipo de lente las aberraciones cromáticas permanecen. Con una lente **acromática** es posible corregir la aberración cromática longitudinal combinando elementos de lentes convergentes y divergentes, hechos de distintos tipos de cristales ópticos, que dan diferente dispersión de color. Es decir, en un acromático, dos colores coinciden en el plano de enfoque de la imagen.

Aunque existen muchos métodos para la corrección de las aberraciones cromáticas, el método que emplea dos lentes en contacto, uno hecho de vidrio crown y el otro de vidrio flint, es el más común y es el que consideraremos. La forma usual de tal doblete acromático se muestra en la figura 3.1. La lente de vidrio crown, que tiene una potencia positiva, tiene la misma dispersión que la lente de vidrio flint, la cual tiene una potencia pequeña y negativa. La potencia resultante es entonces positiva, mientras la dispersión se neutraliza, por lo tanto trae a todos los colores al mismo foco aproximadamente. La posibilidad de

acromatizar tal combinación depende del hecho de que las dispersiones producidas por diferente tipo de vidrio no son proporcionales a las desviaciones que produce. En otras palabras las potencias dispersivas difieren para diferentes materiales.

Las curvas de dispersión típicas, con la variación de n con el color (curva de brillo, que es una magnitud sensorial de la luz), y las líneas de Fraunhofer se muestran en la figura 3.2 [8]. El pico de la curva de brillo se encuentra cercana a la línea d , por esta razón el índice n_d es escogido regularmente como el índice base para el trazo de rayos y para la especificación de distancias focales. Otros dos índices uno de cada lado de n_d , son escogidos para propósitos de acromatización.

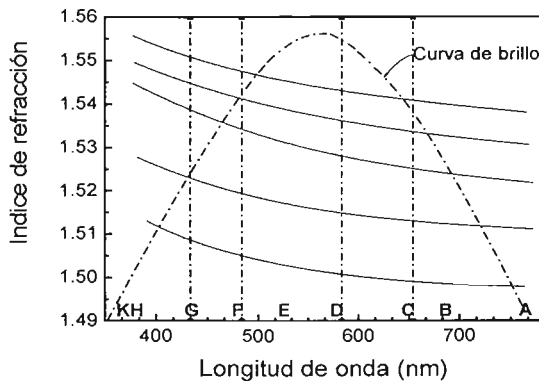


Figura 3.2. Curva de la luminosidad estándar de la luz.

3.2 Ecuaciones de acromatización usando expresiones finitas de P y V.

Como se vió en el capítulo 1 para dos lentes delgadas en contacto la distancia focal resultante o la potencia de la combinación de las dos lentes para una longitud de onda λ_d esta dada por las ecuaciones (1.4) y (1.5).

$$\frac{1}{f_d} = \frac{1}{f_{1d}} + \frac{1}{f_{2d}} \quad (1.4)$$

$$K_d = K_{1d} + K_{2d} \quad (1.5)$$

donde el índice 1 se refiere a la lente del vidrio crown, y el índice 2 se refiere a la lente del vidrio flint.

Sustituyendo la ecuación (1.3) en las ecuaciones (1.4) y (1.5) la potencia del doblete está dada por:

$$K_d = (n_{1d} - 1)C_1 + (n_{2d} - 1)C_2 \quad (3.1)$$

con $C_i = c_i - c_{i+1}$.

Como ya se mostró en el capítulo 1, para que los focos f_C y f_F coincidan es necesario que se satisfaga la ecuación (1.17).

$$K_C - K_F = \frac{K_{1d}}{V_{1d}} + \frac{K_{2d}}{V_{2d}} = 0 \quad (1.17)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1.5) y (1.17) se obtienen las potencias de cada una de las lentes para que el doblete sea acromático y las cuales están dadas por la ecuación (1.18)

$$K_{1d} = \frac{V_{1d}}{V_{1d} - V_{2d}} K_d, \quad K_{2d} = -\frac{V_{2d}}{V_{1d} - V_{2d}} K_d \quad (1.18)$$

Las ecuaciones (1.18) son las expresiones para las potencias de cada una de las lentes del doblete usando las expresiones finitas de la dispersión relativa parcial y el número de Abbe.

3.3 Espectro secundario.

El espectro secundario, para el doblete formado por dos lentes delgadas en contacto, está dado por la ecuación (1.30) [5].

$$K_\lambda - K_C = \frac{K_{1d}}{V_{1d}} P_{1\lambda,C} + \frac{K_{2d}}{V_{2d}} P_{2\lambda,C} \quad (1.30)$$

en particular calculando el espectro secundario para $\lambda = \lambda_d$ y sustituyendo la ecuación (1.18) en la ecuación (1.30) tenemos:

$$K_d - K_C = \frac{K_{1d}}{V_{1d}} P_{1d,C} + \frac{K_{2d}}{V_{2d}} P_{2d,C} = \left(\frac{P_{2d,C} - P_{1d,C}}{V_{2d} - V_{1d}} \right) K_d = \left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right) \frac{1}{f_d} \quad (3.2)$$

Por otro lado tenemos que:

$$K_d - K_C = \frac{1}{f_d} - \frac{1}{f_C} = \frac{f_C - f_d}{f_d f_C} \quad (3.3)$$

Igualando las ecuaciones (3.3) y (3.2) y despejando la diferencia de los focos, f_d y f_C tenemos que el espectro secundario está dado por:

$$\Delta f = f_C - f_d = \left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right) f_C \cong \frac{P_2 - P_1}{V_2 - V_1} f_d \quad (3.4)$$

debido a que f_C es aproximadamente igual a f_d .

De la ecuación (3.4) tenemos que el valor del espectro secundario se puede calcular a partir de la pendiente de la línea recta que se obtiene en la gráfica de P contra V y multiplicando por la distancia focal del doblete, f_d .

Calcularemos el valor aproximado del espectro secundario dado por la ecuación (3.4) tomando dos vidrios, BK7 y LLF1, que caen muy cercanamente a la línea de Abbe en la gráfica P vs. V . Los valores de P y V en la región visible C-F para estos dos vidrios están dados por:

Para el vidrio BK7:

$$V_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} = \frac{1.51689 - 1}{1.52238 - 1.51432} = 64.17$$

$$P_{d,c} = \frac{n_d - n_C}{n_F - n_C} = \frac{1.51680 - 1.51432}{1.52238 - 1.51432} = 0.30769$$

Para el vidrio LLF1:

$$V_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} = \frac{1.54814 - 1}{1.55655 - 1.54457} = 45.75$$

$$P_{d,c} = \frac{n_d - n_C}{n_F - n_C} = \frac{1.54814 - 1.54457}{1.55655 - 1.54457} = 0.298$$

Calculando la pendiente de la línea recta que une estos dos puntos tenemos:

$$\frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{0.298 - 0.30769}{45.75 - 64.17} \approx 0.0005 = \frac{1}{2000}$$

Estos dos puntos están muy cerca de la línea de Abbe, por lo tanto la pendiente de esta línea es aproximadamente igual a $1/2000$. Todos aquellos vidrios localizados cerca de esta línea producirán un espectro secundario en el espectro visible, i.e, en el rango C-F, dado por:

$$f_C - f_d = \frac{\Delta P}{\Delta V} f = \frac{f}{2000} \quad (3.5)$$

Para cualquier otro rango del espectro desde el cercano ultravioleta al cercano infrarrojo la pendiente de la recta que une a los dos vidrios seleccionados será diferente y por lo tanto deberá evaluarse para cada caso particular.

3.4 Ecuaciones de acromatización usando expresiones diferenciales de P y V.

Sustituyendo el número de Abbe diferencial en la ecuación (1.17) tenemos que el cambio en la potencia entre λ_c y λ_f está dado por [5]:

$$\delta K(\Delta\lambda) = K_C - K_F = \frac{K_{1d}}{V_{1d}}(\Delta\lambda) + \frac{K_{2d}}{V_{2d}}(\Delta\lambda) = \left(\frac{K_{1d}}{V_{1d}} + \frac{K_{2d}}{V_{2d}} \right) (\Delta\lambda) \quad (3.6)$$

donde

$$V_d = -\frac{1}{2} \frac{n_d - 1}{\frac{dn_d}{d\lambda}} \quad (3.7)$$

Sustituyendo la ecuación (3.7) en la ecuación (3.6) tenemos:

$$\delta K(\Delta\lambda) = \left(\frac{2K_{1d}n'_{1d}}{-(n_{1d} - 1)} + \frac{2K_{2d}n'_{2d}}{-(n_{2d} - 1)} \right) (\Delta\lambda) \quad (3.8)$$

Para que la combinación sea acromática, hacemos la distancia focal resultante, la misma para F y para C. Esto quiere decir, hacer $K_C = K_F$.

$$\delta K(\Delta\lambda) = \left(\frac{2K_{1d}n'_{1d}}{-(n_{1d} - 1)} + \frac{2K_{2d}n'_{2d}}{-(n_{2d} - 1)} \right) (\Delta\lambda) = 0 \quad (3.9)$$

Para diseñar un doblete acromático se deben satisfacer las ecuaciones (1.5) y (3.9):

$$K_{1d} + K_{2d} = K_d \quad (1.5)$$

$$\frac{K_{1d}}{V_{1d}} + \frac{K_{2d}}{V_{2d}} = \frac{K_{1d}n'_{1d}}{(n_{1d} - 1)} + \frac{K_{2d}n'_{2d}}{(n_{2d} - 1)} = 0 \quad (3.10)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1.5) y (3.10) las potencias para cada una de las lentes que forman el doblete, en términos del número de Abbe diferencial, estarán dadas por

$$K_{1d} = \frac{K_d \hat{V}_{1d}}{\hat{V}_{1d} - \hat{V}_{2d}} \quad (3.11)$$

y

$$K_{2d} = -\frac{K_d \hat{V}_{2d}}{\hat{V}_{1d} - \hat{V}_{2d}} \quad (3.12)$$

3.5 Espectro secundario expresado en términos de definiciones diferenciales de P y V.

La aberración cromática residual, también llamada *espectro secundario*, es despreciable en las lentes acromáticas, donde la calidad de la imagen ya no se nota defectuosa. Sin embargo, las características del espectro secundario, dependen notablemente de la distancia focal y del tipo de lente. A mayor distancia focal y mayor apertura (luminosidad de las lentes), la degradación es más notable para el espectro secundario. Esto puede ser tan severo que el espectro secundario sea el factor principal limitante de calidad de imagen.

La expresión finita del espectro secundario está dada por la ecuación (3.4). Sustituyendo las expresiones diferenciales de P y V en la ecuación (3.4) tenemos:

$$\Delta f = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\hat{V}_1 - \hat{V}_2} f (\Delta \lambda)^2 \quad (3.13)$$

donde

$$\hat{P}_\lambda = -\frac{1}{4} \frac{\frac{d^2 n}{d\lambda^2}}{\frac{dn}{d\lambda}} \quad (3.14)$$

En este caso $\Delta\lambda$ se expresa en micras, y las unidades del espectro secundario se dan en las unidades de la distancia focal. Nótese que las unidades de \hat{P} y \hat{V} son $1/\mu\text{m}$ y μm respectivamente.

Realizando el cálculo del espectro secundario para el ejemplo anterior tenemos

$$\Delta f = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\hat{V}_1 - \hat{V}_2} f (\Delta\lambda)^2 = \frac{1.17 - 1.35}{6.18 - 3.59} \times 100\text{mm} \times (0.0851\mu\text{m})^2 = 0.05\text{mm}$$

Y con las expresiones finitas (ver ecuación 3.5), el espectro secundario está dado por:

$$\Delta f \approx \frac{f}{2000} = 0.05\text{mm}$$

3.6 Diseño de dobletes acromáticos y evaluación del espectro secundario.

Supongamos un doblete cementado de tal manera que la curvatura de la segunda superficie de la primera lente es igual a la curvatura de la primera superficie de la segunda lente. Adicionalmente supongamos que la última superficie del doblete es plana, i.e. $c_3 = 0$, entonces de las ecuaciones (1.3) tenemos que las curvaturas están dadas por

$$c_1 = \frac{K_{d1}}{n_{d1} - 1} + c_2 \quad (3.15)$$

$$c_2 = \frac{K_{d2}}{n_{d2} - 1} \quad (3.16)$$

en donde el subíndice d se refiere a la longitud de onda λ_d , y los subíndices 1 y 2 se refieren a la primera y segunda lente. Nótese que el subíndice d puede referirse a cualquier longitud de onda, de tal manera que de forma más general podríamos excluir este subíndice.

Como ejemplo seleccionamos los vidrios BK7 y F2 para diseñar un doblete acromático con una distancia focal de $f = 100\text{mm}$, i.e, una potencia igual a $K = 0.01\text{mm}^{-1}$. Seleccionamos la longitud de onda del diseño igual a $\lambda = 587.6\text{nm}$. Para esta longitud de onda los índices de refracción son $n_1 = 1.5168$, $n_2 = 1.62004$. El número de Abbe diferencial esta dado por $\hat{V}_1 = 6.18$ para el vidrio BK7 y $\hat{V}_2 = 3.59$ para F2. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores obtenemos

$$K_1 = \frac{K\hat{V}_1}{\hat{V}_1 - \hat{V}_2} = \frac{0.01(6.18)}{6.18 - 3.59} = 0.0238$$

$$K_2 = -\frac{K\hat{V}_2}{\hat{V}_1 - \hat{V}_2} = -\frac{0.01(3.59)}{6.18 - 3.59} = -0.0138$$

Sustituyendo los valores para las potencias de las lentes en las ecuaciones (3.15) y (3.16), las curvaturas obtenidas para el doblete utilizando la definición diferencial del número de Abbe están dadas por:

$$c_2 = \frac{K_2}{n_2 - 1} = \frac{-0.0138}{1.62004 - 1} = -0.0223$$

$$c_1 = \frac{K_1}{n_1 - 1} + c_2 = \frac{0.0238}{1.5168 - 1} - 0.0223 = 0.0238$$

Si se utilizan las definiciones finitas de P y V en el intervalo espectral C-F se puede obtener las curvaturas utilizando las ecuaciones (1.18) y las cuales resultan iguales a:

$$c_1 = 0.0236$$

$$c_2 = -0.0211$$

$$c_3 = 0$$

Como podemos observar las curvaturas del diseño del doblete acromático obtenidas con las expresiones diferenciales de \hat{P} y \hat{V} son aproximadamente iguales a las curvaturas del doblete obtenidas con expresiones finitas de P y V .

3.7 Cálculo de curvaturas y espectro secundario de dobletes acromáticos usando las definiciones diferenciales de P y V .

Se ha realizado el cálculo de la dispersión relativa parcial y el número de Abbe diferenciales para 101 vidrios del catálogo de Schott del 2004 y para 18 longitudes de onda. Adicionalmente para cada vidrio se ha calculado su índice de refracción para cada una de las 18 longitudes de onda. Estos valores se han escrito en la línea donde se indica el nombre del vidrio. Estos resultados se muestran en el apéndice E. Con esta tabla es posible diseñar dobletes acromáticos y evaluar la cantidad de espectro secundario para un par de vidrios seleccionados. Se cubrió el rango espectral entre 365nm y 2130nm. Los resultados obtenidos para el diseño de varios dobletes acromáticos se presentan a continuación en una serie de tablas.

En las tablas 3.1, 3.3 y 3.4 se dan los resultados de las potencias de cada una de las lentes de un doblete acromático y sus curvaturas suponiendo que la tercera curvatura del doblete es igual a cero, usando las definiciones diferenciales de P y V dadas en la tabla del apéndice E. También se tabula el espectro secundario para estos dobletes. En la tabla 3.2 se dan los resultados para los mismos dobletes de la tabla 3.1 pero usando las definiciones finitas.

Tabla 3.1. Diseño de dobletes acromáticos con una potencia $K_d = 1/f = 100^{-1}$ y en el rango espectral C-F, utilizando las definiciones diferenciales V y P dadas por las ecuaciones (2.10) y (2.24) respectivamente.

	$K_{1d} (mm^{-1})$	$K_{2d} (mm^{-1})$	$c_1 (mm^{-1})$	$c_2 (mm^{-1})$	$\Delta f (mm)$
BK7-LLF1	0.0361	-0.0261	0.0222	-0.0476	0.05
BK10-BAF3	0.0342	-0.0242	0.0272	-0.0416	0.05
LAK7-SF56	0.0186	-0.0086	0.0176	-0.0109	0.05
K5-F2	0.0265	-0.0165	0.0241	-0.0267	0.04
PSK3-SF4	0.0181	-0.0081	0.0220	-0.0107	0.05

Tabla 3.2. Diseño de dobletes acromáticos con una potencia $K_d=100^{-1}$ y en el rango espectral C-F, utilizando las definiciones finitas V y P dadas por las ecuaciones (2.1).

	$K_{1d} (mm^{-1})$	$K_{2d} (mm^{-1})$	$c_1 (mm^{-1})$	$c_2 (mm^{-1})$	$\Delta f(mm)$
BK7-LLF1	0.0348	-0.0248	0.0221	-0.0452	0.05
BK10-BAF3	0.0330	-0.0230	0.0268	-0.0394	0.05
LAK7-SF56	0.0180	-0.0080	0.0174	-0.0103	0.05
K5-F2	0.0257	-0.0157	0.0239	-0.0254	0.04
PSK3-SF4	0.0177	-0.0077	0.0219	-0.0102	0.05

Tabla 3.3. Diseño de dobletes acromáticos con una potencia $K_d = 1/f=100^{-1}$ y en el rango espectral IR, con $\lambda = 852.1 \text{ nm}$ y $\Delta\lambda =0.0851$, utilizando las definiciones diferenciales V y P.

	$K_1 (mm^{-1})$	$K_2 (mm^{-1})$	$c_1 (mm^{-1})$	$c_2 (mm^{-1})$	$\Delta f(mm)$
BK7-LLF1	0.0581	-0.0481	0.0246	-0.0893	0.04
BK10-BAF3	0.0546	-0.0446	0.0332	-0.0779	0.04
LAK7-SF56	0.0226	-0.0126	0.0186	-0.0165	0.02
K5-F2	0.0351	-0.0251	0.0268	-0.0414	0.03
PSK3-SF4	0.0234	-0.0134	0.0247	-0.0182	0.03

Tabla 3.4. Diseño de dobletes acromáticos con una potencia $K_d = 1/f=100^{-1}$ y en el rango espectral UV, con $\lambda = 404.7 \text{ nm}$ y $\Delta\lambda =0.0851$, utilizando las definiciones diferenciales V y P.

	$K_1 (mm^{-1})$	$K_2 (mm^{-1})$	$c_1 (mm^{-1})$	$c_2 (mm^{-1})$	$\Delta f(mm)$
BK7-LLF1	0.0287	-0.0187	0.0213	-0.0329	0.27
BK10-BAF3	0.0266	-0.0166	0.0247	-0.0274	0.31
LAK7-SF56	0.0157	-0.0057	0.0166	-0.0067	0.47
K5-F2	0.0220	-0.0120	0.0255	-0.0184	0.31
PSK3-SF4	0.0157	-0.0057	0.0206	-0.0071	0.41

Con el análisis anterior podemos calcular las potencias, curvaturas y espectro secundario para un doblete acromático cementado usando vidrios normales en cualquier región del espectro entre $0.365\mu m$ y $2.325\mu m$, con un error pequeño comparado con los valores obtenidos utilizando las expresiones finitas, con la ventaja de que en este trabajo ya se han obtenido los valores de P y V diferenciales para todos los vidrios, haciendo el cálculo más sencillo que cuando se utilizan las expresiones finitas.

Conclusiones

En este trabajo se propuso una nueva ecuación diferencial que se basa en la relación cuadrática entre la dispersión relativa parcial (\hat{P}) y el número de Abbe (\hat{V}), que se convierte en una curva cerca del ultravioleta, aunque en la mayor parte del espectro permanece casi sobre una línea, tomando en consideración los resultados obtenidos anteriormente por J. L. Rayces y M. Rosete-Aguilar [1], en el que se analiza una relación lineal entre \hat{P} y \hat{V} .

Con esta ecuación es posible determinar el índice de refracción para cualquier longitud de onda de cualquier vidrio ordinario, en el rango espectral entre 0.365 micras y 2.325 micras, haciendo una extrapolación a partir de cualquier índice de una longitud de onda dada. Utilizando esta ecuación se reduce el error comparado con la solución recursiva, de los datos obtenidos usando la relación lineal.

Comparando los índices extrapolados a partir de la ecuación diferencial con los índices extrapolados con el método de Geffcken, se observa un resultado mejor con el método de Geffcken, para el caso de vidrios “reales”, sin embargo dicho método no puede ser utilizado cuando no se tienen los datos del vidrio que se está usando, es decir cuando se tiene un vidrio “ficticio”. Entonces, para este caso, con la ecuación diferencial propuesta en esta tesis es posible extrapolar del índice de refracción para estos vidrios ficticios utilizando solamente el índice de refracción para cierta longitud de onda y su derivada..

Para obtener dichos resultados fue necesario hacer uso de herramientas matemáticas al hacer el análisis y para resolver las ecuaciones diferenciales presentadas. También fue necesario el uso de la óptica geométrica y un amplio análisis sobre las ecuaciones de dispersión en los vidrios.

Por último, se derivaron ecuaciones para el diseño de dobletes acromáticos aplicando las ecuaciones diferenciales obtenidas anteriormente con ayuda de la teoría para lentes delgadas, en donde se muestra que las soluciones obtenidas con las ecuaciones diferenciales son del orden de las soluciones que se obtienen utilizando las ecuaciones finitas, con un error muy pequeño. A partir de estos resultados se muestran ejemplos con algunos vidrios ordinarios en distintas regiones del espectro. Con las mismas ecuaciones diferenciales también se mostró una ecuación para la obtención del espectro secundario en los sistemas ópticos utilizando solamente vidrios ordinarios.

Referencias

- [1] Juan L. Rayces and Martha Rosete-Aguilar, "Differential equation for normal glass dispersion and evaluation of the secondary spectrum". *Appl. Opt.*, **30**(110), (1999), 2028-2039.
- [2] Hecht and Zajac., *Optics*. Adison-Wesley Edition, USA, (1974).
- [3] Hardy and Perrin, *The principles of optics*. Mc Graw-Hill Inc., New York, (1932).
- [4] Max Herzberger, *Modern Geometrical Optics*. Interscience Publishers Inc., New York, (1958).
- [5] Martha Rosete-Aguilar, "Correction of the secondary spectrum using standard glasses". *SPIE*, **2774**, (1996), 378-386.
- [6] M. Herzberger, "Dispersion of optical glass". *JOSA*, **32**, (1942), 70-77.
- [7] R. W. Ditchburn, *Óptica*. Editorial Reverté S.A., España, (1982).
- [8] Francis A. Jenkins and Harvey E. White, *Fundamentals of Optics*. Mc. Graw-Hill Inc., USA, (1976).
- [9] W. Geffcken, "The partial dispersion of glasses". *Opt. Acta*, **12**, (1965), 275-303.
- [10] W. Geffcken, "Partial dispersion of glasses Part 3". *Appl. Opt.*, **12**(12), (1973), 2978-2990.
- [11] V. F. Reitmayer, "Lichtbrechung und Dispersion optischer Gläser im unsichtbaren Spektralgebiet". *Optik 13*, **12**, (1956), 545-559.
- [12] Schott optical glass catalog, Schott glaswerke, Germany, (1992).
- [13] Schott optical glass catalog, Schott glaswerke, Germany, (2004).
- [14] R. W. Hamming, *Numerical methods for scientists and engineers*. Dover Publications Inc, New York, (1973).
- [15] Boyce y Diprima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa, México, (1974).

- [16] R. Kingslake and H. Conrady, "A refractometer for the near infrared". *JOSA*, 27, (1937), 257-262.

Apéndice A

Método de mínimos cuadrados

Si tenemos un conjunto de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ y la curva ajustada tiene las desviaciones d_1, d_2, \dots, d_n a cada punto de los datos, el método de mínimos cuadrados [14] produce el mejor ajuste de la curva. Este método utiliza básicamente una ecuación $f(x) = B + Ax$ en el caso en que la gráfica es una línea recta. La n debe ser mayor o igual a 2 en el caso de la recta para poder encontrar los parámetros A y B. Cuando se obtienen las primeras derivadas de la desviación (Π) en la línea, se tiene que

$$\Pi = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_{n-1}^2 + d_n^2 = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (b + ax_i)]^2 \quad (\text{A.1})$$

Si suponemos que $\Pi = 0$, entonces la desviación tiene un mínimo. Tomando la primera derivada de Π , la ecuación sería como sigue

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i - (b + ax_i)] = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i - (b + ax_i)] x_i = 0 \quad (\text{A.3})$$

Entonces encontramos los dos valores desconocidos por el proceso siguiente;

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n b + \sum_{i=1}^n ax_i \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i = \sum_{i=1}^n bx_i + \sum_{i=1}^n ax_i^2 \quad (\text{A.5})$$

entonces, sea $x = V$ y $y = P$

$$\sum_{i=1}^n P_i = b \sum_{i=1}^n 1 + a \sum_{i=1}^n V_i \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{i=1}^n P_i V_i = b \sum_{i=1}^n V_i + a \sum_{i=1}^n V_i^2 \quad (\text{A.7})$$

por lo tanto

$$b = \frac{-\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \sum_{i=1}^n y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i\right)}{-n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad (\text{A.8})$$

$$a = \frac{-n \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{-n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad (\text{A.9})$$

En el caso en el que la grafica sea una curva, el método de mínimos cuadrados utiliza la ecuación $f(x) = G + Fx + Ex^2$ la cual es una parábola, en este caso la n debe ser mayor o igual a 3 para encontrar los parámetros E, F y G. Obteniendo las primeras derivadas de la desviación (Π) en la parábola se tiene lo siguiente

$$\Pi = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_{n-1}^2 + d_n^2 = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n \left[y_i - \left(\sum_{i=1}^n G + \sum_{i=1}^n Fx_i + \sum_{i=1}^n Ex_i^2 \right) \right]^2 \quad (\text{A.10})$$

Suponemos que $\Pi = 0$, entonces la desviación tiene un mínimo. Si tomamos la primera derivada de Π , la ecuación sería como sigue

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - \left(\sum_{i=1}^n G + \sum_{i=1}^n Fx_i + \sum_{i=1}^n Ex_i^2 \right) \right] = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - \left(\sum_{i=1}^n G + \sum_{i=1}^n Fx_i + \sum_{i=1}^n Ex_i^2 \right) \right] x_i = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - \left(\sum_{i=1}^n G + \sum_{i=1}^n Fx_i + \sum_{i=1}^n Ex_i^2 \right) \right] x_i^2 = 0 \quad (\text{A.13})$$

Entonces podemos saber los tres valores desconocidos por el proceso siguiente;

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n G + \sum_{i=1}^n Fx_i + \sum_{i=1}^n Ex_i^2 \quad (\text{A.14})$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i = \sum_{i=1}^n Gx_i + \sum_{i=1}^n Fx_i^2 + \sum_{i=1}^n Ex_i^3 \quad (\text{A.15})$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i^2 = \sum_{i=1}^n Gx_i^2 + \sum_{i=1}^n Fx_i^3 + \sum_{i=1}^n Ex_i^4 \quad (\text{A.16})$$

entonces, sea $x = V$ y $y = P$

$$\sum_{i=1}^n P_i = G \sum_{i=1}^n 1 + F \sum_{i=1}^n V_i + E \sum_{i=1}^n V_i^2 \quad (\text{A.17})$$

$$\sum_{i=1}^n P_i V_i = G \sum_{i=1}^n V_i + F \sum_{i=1}^n V_i^2 + E \sum_{i=1}^n V_i^3 \quad (\text{A.18})$$

$$\sum_{i=1}^n P_i V_i^2 = G \sum_{i=1}^n V_i^2 + F \sum_{i=1}^n V_i^3 + E \sum_{i=1}^n V_i^4 \quad (\text{A.19})$$

por lo tanto

$$G = \frac{\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \sum_{i=1}^n x_i^3 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \right) \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i \right) \sum_{i=1}^n x_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \sum_{i=1}^n y_i + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) \sum_{i=1}^n y_i}{-\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^3 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \sum_{i=1}^n x_i^4} \quad (\text{A.20})$$

$$F = \frac{\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 \sum_{i=1}^n y_i x_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \sum_{i=1}^n x_i + n \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \right) \sum_{i=1}^n x_i^3 - n \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i \right) \sum_{i=1}^n x_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \sum_{i=1}^n y_i + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) \sum_{i=1}^n y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^3 - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \sum_{i=1}^n x_i^2 + n \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \sum_{i=1}^n x_i^4 - n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \sum_{i=1}^n x_i^4}$$

(A.21)

$$E = \frac{\left(-\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^2 + n \sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \left(-n \sum_{i=1}^n y_i x_i + \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right) - \left(-\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + n \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(-n \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i \right)}{-\left(-\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^2 + n \sum_{i=1}^n x_i^3 \right)^2 + \left(-\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + n \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(-\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 + n \sum_{i=1}^n x_i^4 \right)}$$

(A.22)

Apéndice B

Ajuste polinomial de las funciones E, F y G.

Haciendo un ajuste polinomial con el programa mathematica en las graficas de la figura 2.2 para los parámetros $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ y $G(\lambda)$ obtenemos las siguientes funciones

El parámetro E está dado por:

$$E(\lambda) = e_0 + \frac{e_1}{\lambda} + \frac{e_2}{\lambda^2} + \frac{e_3}{\lambda^3} + \frac{e_4}{\lambda^4} + \frac{e_5}{\lambda^5} + \frac{e_6}{\lambda^6} + \frac{e_7}{\lambda^7} + \frac{e_8}{\lambda^8} + \frac{e_9}{\lambda^9} + \frac{e_{10}}{\lambda^{10}} + \frac{e_{11}}{\lambda^{11}} + \frac{e_{12}}{\lambda^{12}} + \frac{e_{13}}{\lambda^{13}} + \frac{e_{14}}{\lambda^{14}} \quad (\text{B.1})$$

en donde:

$$\begin{aligned} e_0 &= 15.68673955, e_1 = -204.54548, e_2 = 1189.721738, e_3 = -4092.78307340, e_4 = 9313.64357656, \\ e_5 &= -14856.32250861, e_6 = 17165.01726612, e_7 = -14625.10883535, e_8 = 9253.95436444, \\ e_9 &= -4336.21402940, e_{10} = 1484.06113691, e_{11} = -360.38573103, e_{12} = 58.79672764, \\ e_{13} &= -5.77754704, e_{14} = 0.25833566. \end{aligned}$$

El parámetro F está dado por:

$$F(\lambda) = f_0 + f_1\lambda + f_2\lambda^2 + f_3\lambda^3 + f_4\lambda^4 + f_5\lambda^5 + f_6\lambda^6 + f_7\lambda^7 + f_8\lambda^8 + f_9\lambda^9 + f_{10}\lambda^{10} + f_{11}\lambda^{11} + f_{12}\lambda^{12} + f_{13}\lambda^{13} + f_{14}\lambda^{14} \quad (\text{B.2})$$

en donde:

$$\begin{aligned} f_0 &= -1591.10708, f_1 = 21402.17549, f_2 = -130779.73775, f_3 = 480148.53360, \\ f_4 &= -1181877.35655, f_5 = 2062160.68210, f_6 = -2630094.68148, f_7 = 2491761.14974, \end{aligned}$$

$$f_8 = -1763274.49018, f_9 = 928260.00365, f_{10} = -358224.66833, f_{11} = 98376.793934, \\ f_{12} = -18195.06694, f_{13} = 2031.003232, f_{14} = -103.3450017.$$

El parámetro G está dado por:

$$G(\lambda) = g_0 + g_1\lambda + g_2\lambda^2 + g_3\lambda^3 + g_4\lambda^4 + g_5\lambda^5 + g_6\lambda^6 + g_7\lambda^7 + g_8\lambda^8 + g_9\lambda^9 + g_{10}\lambda^{10} + \\ + g_{11}\lambda^{11} + g_{12}\lambda^{12} + g_{13}\lambda^{13} + g_{14}\lambda^{14} + g_{15}\lambda^{15} + g_{16}\lambda^{16} + g_{17}\lambda^{17} + g_{18}\lambda^{18} + g_{19}\lambda^{19} + g_{20}\lambda^{20} \quad (\text{B.3})$$

en donde:

$$g_0 = 608.6918007, \quad g_1 = -6483.2452946, \quad g_2 = 28487.3037859, \quad g_3 = -63427.4709985, \\ g_4 = 63427.4709985, \quad g_5 = 3767.7780647, \quad g_6 = -57963.9511483, \quad g_7 = 8552.7934035, \\ g_8 = 53966.1635738, \quad g_9 = -8723.4080441, \quad g_{10} = -52905.4916252, \quad g_{11} = 10830.5873977, \\ g_{12} = 52224.5898037, \quad g_{13} = -26348.0198924, \quad g_{14} = -41309.0832516, \quad g_{15} = 64223.6792953, \\ g_{16} = -42015.1721754, \quad g_{17} = 15963.2107112, \quad g_{18} = -3666.7561108, \quad g_{19} = 475.7063682, \\ g_{20} = -26.919616355.$$

Apéndice C

Método de Runge-Kutta

Utilizando la ecuación diferencial (2.22), para un vidrio normal

$$n'' + 4B(\lambda)n' - 2\{n(\lambda) - 1\}A(\lambda) = 0 \quad (\text{C.1})$$

Y tomando como condiciones iniciales

$$\lambda_1 \quad (\text{C.2})$$

$$n(\lambda_1) \quad (\text{C.3})$$

$$n'(\lambda_1) = \left. \frac{dn}{d\lambda} \right|_{\lambda_1} \quad (\text{C.4})$$

sea

$$n'' \equiv F(\lambda, n, n') \quad (\text{C.5})$$

Sea h el incremento dado por

$$h = \frac{\lambda_f - \lambda_i}{\max - 1} \quad (\text{C.6})$$

Dadas estas condiciones se escribe ahora el algoritmo de Runge-Kutta [15]

Sea

$$x_0 = \lambda_1 \quad (\text{C.7})$$

$$y_0 = n(\lambda_1) \quad (\text{C.8})$$

$$y'_0 = n'(\lambda_1) \quad (\text{C.9})$$

$$K_1 = \frac{h}{2} F(x_n, y_n, y'_n) \quad (\text{C.10})$$

$$L_1 = \frac{h}{2} \left(y'_n + \frac{K_1}{2} \right) \quad (\text{C.11})$$

$$K_2 = \frac{h}{2} F\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + L_1, y'_n + K_1\right) \quad (C.12)$$

$$K_3 = \frac{h}{2} F\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + L_1, y'_n + K_2\right) \quad (C.13)$$

$$L_2 = \frac{h}{2} (y'_n + K_3) \quad (C.14)$$

$$K_4 = \frac{h}{2} F(x_n + h, y_n + L_2, y'_n + 2K_3) \quad (C.15)$$

entonces los valores de λ , n y n' están dados por

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (C.16)$$

$$y_{n+1} = y_n + h[y'_n + (K_1 + K_2 + K_3)/3] \quad (C.17)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/3 \quad (C.18)$$

C.1. Como ejemplo se realiza el cálculo de Runge-Kutta para el vidrio FK54.

Se toman como condiciones iniciales

$$x_0 = \lambda_1 = 0.5\mu$$

$$\lambda_f = 2.325\mu$$

$$\max = 100$$

A partir de la ecuación (C.6) se calcula h como:

$$h = \frac{\lambda_f - \lambda_i}{\max} = \frac{2.325 - 0.5}{100 - 1} = 0.01843$$

Por otro lado, las condiciones iniciales se calculan utilizando la ecuación de dispersión de Sellmeier, obteniendo

$$y_0 = n(\lambda_1) = 1.439762$$

$$y'_0 = n'(\lambda_1) = -3.976512 \times 10^{-2}$$

Con la ecuación diferencial lineal tenemos

$$n''(\lambda) \equiv F(\lambda, n, n') = -4B(\lambda)n' + 2(n-1)A(\lambda)$$

en donde A y B están dadas por las ecuaciones (2.19) y (2.20). Entonces:

$$K_1 = \frac{0.01843}{2} F(0.5, 1.439762, -3.976512 \times 10^{-2}) = 1.913357 \times 10^{-3}$$

$$L_1 = \frac{0.01843}{2} \left(-3.976512 \times 10^{-2} + \frac{1.913357 \times 10^{-3}}{2} \right) = -3.577044 \times 10^{-4}$$

$$K_2 = \frac{0.01843}{2} F\left(0.5 + \frac{0.01843}{2}, 1.439762 - 3.577044 \times 10^{-4}, -3.976512 \times 10^{-2} + 1.913357 \times 10^{-3}\right) = 1.782147 \times 10^{-3}$$

$$K_3 = \frac{0.01843}{2} F\left(0.5 + \frac{0.01843}{2}, 1.439762 - 3.577044 \times 10^{-4}, -3.976512 \times 10^{-2} + 1.782147 \times 10^{-3}\right) = 1.791424 \times 10^{-3}$$

$$L_2 = \frac{0.01843}{2} (-3.976512 \times 10^{-2} + 1.791424 \times 10^{-3}) = -3.500104 \times 10^{-4}$$

$$K_4 = \frac{0.01843}{2} F(0.5 + 0.01843, 1.439762 + -3.500104 \times 10^{-4}, -3.976512 \times 10^{-2} + 2(1.791424 \times 10^{-3})) = 1.667753 \times 10^{-3}$$

Por lo tanto, para el primer paso tenemos

$$x_1 = 0.5 + 0.01843 = 0.5184343$$

$$y_1 = 1.439762 + 0.01843 \left[-3.976512 \times 10^{-2} + (1.913357 \times 10^{-3} + 1.782147 \times 10^{-3} + 1.791424 \times 10^{-3}) / 3 \right] = 1.439063$$

$$y_1' = -3.976512 \times 10^{-2} + (1.913357 \times 10^{-3} + 2(1.782147 \times 10^{-3}) + 2(1.791424 \times 10^{-3}) + 1.667753 \times 10^{-3}) / 3 = -3.618907 \times 10^{-2}$$

Para el caso cuadrático

$$n''(\lambda) \equiv F(\lambda, n, n') = -E(\lambda) \frac{(n-1)^2}{n'} + 2F(\lambda)(n-1) - 4G(\lambda)n'$$

E, F y G están dadas por las ecuaciones B1, B2 y B3 respectivamente. Entonces

$$K_1 = \frac{0.01843}{2} F(0.5, 1.439762, -3.976512 \times 10^{-2}) = 2.195451 \times 10^{-3}$$

$$L_1 = \frac{0.01843}{2} \left(-3.976512 \times 10^{-2} + \frac{1.913357 \times 10^{-3}}{2} \right) = -3.56404 \times 10^{-4}$$

$$K_2 = \frac{0.01843}{2} F\left(0.5 + \frac{0.01843}{2}, 1.439762 - 3.56404 \times 10^{-4}, -3.976512 \times 10^{-2} + 2.195451 \times 10^{-3}\right) = 2.009869 \times 10^{-3}$$

$$K_3 = \frac{0.01843}{2} F\left(0.5 + \frac{0.01843}{2}, 1.439762 - 3.56404 \times 10^{-4}, -3.976512 \times 10^{-2} + 2.009869 \times 10^{-3}\right) = 2.018355 \times 10^{-3}$$

$$L_2 = \frac{0.01843}{2} (-3.976512 \times 10^{-2} + 2.018355 \times 10^{-3}) = -3.479184 \times 10^{-4}$$

$$K_4 = \frac{0.01843}{2} F(0.5 + 0.01843, 1.439762 + -3.479184 \times 10^{-4}, -3.976512 \times 10^{-2} + 2(2.018355 \times 10^{-3})) \\ = 1.852654 \times 10^{-3}$$

Por lo tanto, para el primer paso tenemos

$$x_1 = 0.5 + 0.01843 = 0.5184343$$

$$y_1 = 1.439762 + 0.01843 \left[-3.976512 \times 10^{-2} + (2.195451 \times 10^{-3} + 2.009869 \times 10^{-3} + 2.018355 \times 10^{-3}) / 3 \right] = 1.439068$$

$$y'_1 = -3.976512 \times 10^{-2} + (2.195451 \times 10^{-3} + 2(2.009869 \times 10^{-3}) + 2(2.018355 \times 10^{-3}) + 1.852654 \times 10^{-3}) / 3 \\ = -3.573027 \times 10^{-2}$$

Haciendo el calculo con la formula de Sellmeier se obtienen los siguientes resultados

$$y_1 = 1.439067$$

$$y'_1 = -3.574774 \times 10^{-2}$$

Continuando este proceso hasta llegar a λ_f , tenemos que para el caso lineal

$$x_{n+1} = 2.32496$$

$$y_{n+1} = 1.420923$$

$$y'_{n+1} = -7.578418 \times 10^{-3}$$

Para el caso cuadrático

$$x_{n+1} = 2.32496$$

$$y_{n+1} = 1.423507$$

$$y'_{n+1} = -6.416053 \times 10^{-3}$$

Realizando el cálculo con Sellmeier tenemos

$$x_{n+1} = 2.32496$$

$$y_{n+1} = 1.422078$$

$$y'_{n+1} = -8.590656 \times 10^{-3}$$

En el caso en que extrapolamos hacia UV tomamos como

$$\lambda_f = 0.365\mu$$
$$\max = 100$$

De nuevo a partir de la ecuación (C.6) se calcula h como:

$$h = \frac{\lambda_i - \lambda_f}{\max} = \frac{0.5 - 0.365}{100 - 1} = 0.0013636$$

Tomando las mismas condiciones iniciales para el caso lineal obtenemos para el primer paso

$$x_1 = 0.4986364$$
$$y_1 = 1.439816$$
$$y'_1 = -0.0400468$$

El resultado obtenido utilizando Sellmeier es

$$y_1 = 1.439817$$
$$y'_1 = -0.040088$$

Continuando la extrapolación hasta λ_f , para el caso lineal tenemos

$$x_{n+1} = 0.365001$$
$$y_{n+1} = 1.447659$$
$$y'_{n+1} = -0.08226261$$

En el caso cuadrático, para el primer paso se obtiene

$$x_1 = 0.4986364$$
$$y_1 = 1.439816$$
$$y'_1 = -0.04008784$$

Extrapolando hasta λ_f , para el caso cuadrático obtenemos

$$x_{n+1} = 0.365001$$
$$y_{n+1} = 1.448553$$
$$y'_{n+1} = -0.1074632$$

Utilizando el método de Sellmeier tenemos

$$x_{n+1} = 0.365001$$
$$y_{n+1} = 1.448559$$
$$y'_{n+1} = -0.1052339$$

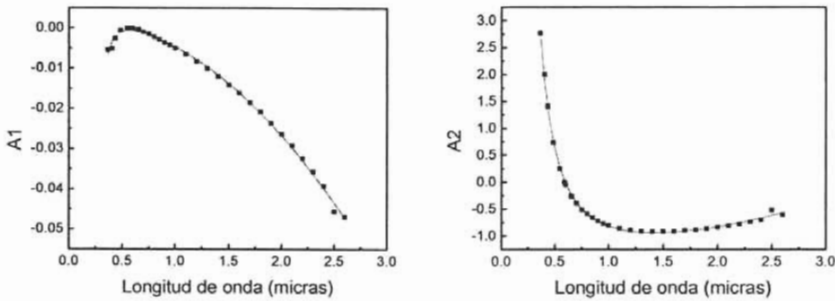
Apéndice D

Obtención de las graficas A1 y A2

Con ayuda de los datos publicados por Kingslake and Conrady [16], y Herzberger [6] de 17 vidrios, seleccionados de varios catálogos como son: Schott, Chance-Parsons, Parra-Mantois, y Bausch and Lomb, se obtienen los datos de estos vidrios para la siguiente ecuación, en el rango espectral entre $0.365 \mu\text{m}$ y $2.6 \mu\text{m}$.

$$\frac{n_\lambda - n_d}{n_d - 1} = A1 + \frac{A2}{v_d} \quad (\text{D.1})$$

Tomando los datos de los 17 vidrios podemos obtener por medio del método de mínimos cuadrados los valores de las funciones A1 y A2, obteniéndose las siguientes graficas para cada función



Ajuste de las funciones A1 y A2, el ajuste se muestra con una línea y los datos con puntos.

Tomando las graficas anteriores y haciendo un ajuste en Origin para una función del tipo de la ecuación (1.40) obtenemos las ecuaciones para estas dos funciones

$$A1 = 0.0297 - 0.00742\lambda^2 - \frac{0.00008}{\lambda^2 - .035} - \frac{0.00007}{(\lambda^2 - .035)^2} \quad (\text{D.2})$$

$$A_2 = -1.3803 + 0.1107\lambda^2 + \frac{0.43769}{\lambda^2 - .035} - \frac{0.00249}{(\lambda^2 - .035)^2} \quad (\text{D.3})$$

Haciendo una comparación con las ecuaciones obtenidas por Herzberger [3], las cuales son:

$$A_1(\lambda) = 0.002459 - 0.00784\lambda^2 + \frac{0.000867}{\lambda^2 - 0.035} - \frac{0.000199}{(\lambda^2 - 0.035)^2} \quad (\text{D.4})$$

$$A_2(\lambda) = -2.052895 + 0.12483\lambda^2 + \frac{0.382922}{\lambda^2 - 0.035} + \frac{0.004920}{(\lambda^2 - 0.035)^2} \quad (\text{D.5})$$

En el capítulo 1 se muestran las gráficas de las ecuaciones obtenidas por Herzberger.

Apéndice E

**Tabla de valores de \hat{V} y \hat{P} para 101 vidrios del
catálogo de Schott del 2004**

Tabla E.1 Valores de \hat{P} y \hat{P} diferenciales para 101 vidrios del catálogo de Schott de 2004 y para 18 longitudes de onda en el rango 365nm y 2325nm.

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
N-FK5	1.46181	1.46738	1.47312	1.47855	1.47912	1.48137	1.4841	1.48534	1.48569	1.48601	1.48743	1.48749	1.48914	1.49227	1.49266	1.49593	1.49893	1.50401
\hat{P}_d	13.51	16.26	19.88	19.72	19.04	15.3	10.64	8.96	8.54	8.19	6.82	6.76	5.55	3.99	3.84	2.89	2.31	1.67
P_d	-0.12	-0.12	-0.08	0.17	0.23	0.48	0.8	0.94	0.97	1	1.14	1.14	1.29	1.52	1.55	1.77	1.95	2.23
N-FK51	1.46958	1.47271	1.47608	1.47959	1.47999	1.48165	1.48379	1.4848	1.48508	1.48534	1.48651	1.48656	1.48794	1.49056	1.49088	1.49365	1.49618	1.50046
\hat{P}_d	24.75	28.74	32.94	28.34	26.83	20.11	13.23	10.97	10.43	9.97	8.21	8.15	6.63	4.73	4.55	3.41	2.71	1.97
P_d	-0.1	-0.1	-0.03	0.27	0.33	0.58	0.88	1	1.04	1.07	1.19	1.19	1.33	1.55	1.57	1.78	1.95	2.22
N-PK51	1.50987	1.51312	1.51665	1.52045	1.52089	1.52278	1.52527	1.52646	1.5268	1.52711	1.52849	1.52855	1.53019	1.53333	1.53372	1.53704	1.54009	1.54527
\hat{P}_d	25.94	30.03	33.81	27.57	25.92	18.95	12.23	10.09	9.58	9.14	7.5	7.44	6.04	4.28	4.13	3.08	2.45	1.77
P_d	-0.1	-0.09	-0.02	0.31	0.37	0.62	0.91	1.03	1.06	1.09	1.21	1.22	1.35	1.57	1.59	1.8	1.97	2.25
N-PK52A	1.47966	1.48279	1.48616	1.48971	1.49012	1.49184	1.49408	1.49514	1.49544	1.49571	1.49695	1.497	1.49845	1.50123	1.50157	1.50451	1.5072	1.51175
\hat{P}_d	25.32	29.43	33.55	28.21	26.62	19.73	12.87	10.64	10.11	9.66	7.94	7.88	6.4	4.56	4.39	3.28	2.61	1.89
P_d	-0.1	-0.1	-0.03	0.29	0.35	0.6	0.9	1.02	1.05	1.08	1.2	1.2	1.33	1.56	1.58	1.79	1.96	2.23
N-PSK3	1.52375	1.52954	1.53558	1.54154	1.54218	1.54482	1.54812	1.54965	1.55008	1.55048	1.55224	1.55232	1.5544	1.55836	1.55884	1.56303	1.56687	1.57342
\hat{P}_d	14.81	17.65	21.09	19.63	18.77	14.56	9.82	8.19	7.8	7.46	6.17	6.12	4.99	3.56	3.43	2.56	2.04	1.47
P_d	-0.12	-0.11	-0.06	0.22	0.28	0.54	0.85	0.98	1.02	1.05	1.18	1.18	1.32	1.56	1.59	1.8	1.99	2.28
N-PSK53	1.59217	1.59732	1.6028	1.60851	1.60917	1.61191	1.61547	1.61717	1.61764	1.61808	1.62005	1.62014	1.62247	1.62694	1.62749	1.63224	1.63662	1.64409
\hat{P}_d	18.88	22.23	25.7	21.93	20.72	15.41	10.05	8.31	7.89	7.54	6.19	6.14	4.98	3.53	3.4	2.53	2.01	1.44
P_d	-0.11	-0.1	-0.04	0.29	0.34	0.6	0.9	1.02	1.06	1.09	1.21	1.22	1.35	1.58	1.61	1.83	2.01	2.31
N-BK7	1.48921	1.49495	1.50091	1.50669	1.50731	1.5098	1.51289	1.51432	1.51472	1.51509	1.51673	1.5168	1.51872	1.52238	1.52283	1.52669	1.53023	1.53627
\hat{P}_d	13.94	16.68	20.11	19.18	18.4	14.46	9.86	8.25	7.86	7.52	6.23	6.18	5.05	3.61	3.48	2.6	2.07	1.49
P_d	-0.12	-0.12	-0.07	0.2	0.26	0.52	0.84	0.97	1	1.03	1.17	1.17	1.31	1.55	1.58	1.8	1.99	2.29
N-BK10	1.4706	1.47647	1.48252	1.48827	1.48887	1.49127	1.49419	1.49552	1.49589	1.49623	1.49775	1.49782	1.49959	1.50296	1.50337	1.5069	1.51014	1.51562
\hat{P}_d	13.08	15.74	19.21	18.95	18.27	14.64	10.14	8.53	8.14	7.8	6.49	6.44	5.28	3.79	3.65	2.74	2.18	1.58
P_d	-0.12	-0.12	-0.08	0.18	0.23	0.49	0.81	0.94	0.98	1.01	1.14	1.15	1.29	1.53	1.56	1.78	1.96	2.25

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
N-K5	1.49656	1.50146	1.50664	1.51197	1.51257	1.51507	1.51829	1.51981	1.52024	1.52064	1.52241	1.52249	1.52458	1.5286	1.5291	1.53338	1.53734	1.54413
\bar{v}_λ	16.67	19.66	22.93	20.05	19.01	14.29	9.39	7.78	7.39	7.06	5.8	5.76	4.67	3.31	3.18	2.36	1.87	1.34
\bar{P}_λ	-0.11	-0.1	-0.04	0.27	0.33	0.58	0.89	1.02	1.05	1.08	1.21	1.22	1.35	1.59	1.62	1.85	2.04	2.35
K7	1.48553	1.49046	1.49565	1.50091	1.5015	1.50394	1.50707	1.50854	1.50895	1.50934	1.51105	1.51112	1.51314	1.517	1.51748	1.52159	1.52539	1.5319
\bar{v}_λ	16.16	19.16	22.53	20	18.99	14.37	9.5	7.88	7.49	7.16	5.89	5.84	4.75	3.37	3.24	2.41	1.91	1.37
\bar{P}_λ	-0.12	-0.11	-0.05	0.26	0.32	0.57	0.88	1.01	1.04	1.07	1.2	1.21	1.35	1.59	1.61	1.84	2.03	0.26
K10	1.47507	1.48008	1.48536	1.49076	1.49137	1.49389	1.49713	1.49867	1.4991	1.4995	1.50129	1.50137	1.50349	1.50756	1.50807	1.51243	1.51649	1.52351
\bar{v}_λ	15.59	18.45	21.61	19.02	18.04	13.59	8.94	7.4	7.03	6.71	5.51	5.47	4.43	3.13	3.01	2.22	1.75	1.24
\bar{P}_λ	-0.11	-0.11	-0.05	0.26	0.32	0.58	0.89	1.02	1.06	1.09	1.22	1.22	1.37	1.61	1.64	1.88	2.1	2.46
N-ZK7	1.48062	1.48637	1.49233	1.49813	1.49876	1.50129	1.50445	1.50592	1.50633	1.50671	1.50839	1.50847	1.51045	1.51423	1.5147	1.51869	1.52237	1.52865
\bar{v}_λ	13.63	16.38	19.76	18.67	17.88	13.95	9.45	7.89	7.52	7.19	5.95	5.9	4.81	3.43	3.31	2.47	1.96	1.41
\bar{P}_λ	-0.12	-0.12	-0.07	0.21	0.27	0.53	0.85	0.98	1.01	1.04	1.18	1.18	1.32	1.56	1.59	1.81	2.01	2.31
N-BAK1	1.54556	1.55032	1.55543	1.56088	1.56151	1.56421	1.56778	1.56949	1.56997	1.57041	1.57241	1.5725	1.57487	1.57944	1.58	1.58488	1.5894	1.59716
\bar{v}_λ	18.89	22.12	25.22	20.79	19.56	14.31	9.22	7.59	7.2	6.87	5.63	5.58	4.51	3.19	3.07	2.27	1.8	1.28
\bar{P}_λ	-0.11	-0.1	-0.02	-0.31	0.37	0.62	0.92	1.04	1.08	1.11	1.23	1.24	1.37	1.61	1.63	1.86	2.05	2.36
N-BAK2	1.51387	1.51871	1.52385	1.52919	1.5298	1.53234	1.53564	1.53721	1.53765	1.53806	1.53988	1.53996	1.54211	1.54626	1.54677	1.55117	1.55524	1.56221
\bar{v}_λ	17.48	20.56	23.81	20.49	19.38	14.46	9.46	7.82	7.43	7.09	5.83	5.78	4.69	3.32	3.2	2.37	1.88	1.35
\bar{P}_λ	-0.11	-0.1	-0.04	0.28	0.34	0.59	0.9	1.02	1.06	1.09	1.21	1.22	1.36	1.59	1.62	1.84	2.03	2.33
N-BAK4	1.54044	1.54561	1.55111	1.55688	1.55755	1.56034	1.564	1.56575	1.56624	1.5667	1.56874	1.56883	1.57125	1.57591	1.57649	1.58149	1.58614	1.59415
\bar{v}_λ	17.22	20.26	23.36	19.76	18.64	13.79	8.94	7.38	7	6.68	5.48	5.43	4.39	3.1	2.98	2.2	1.74	1.23
\bar{P}_λ	-0.11	-0.1	-0.03	0.29	0.35	0.61	0.91	1.04	1.07	1.1	1.23	1.24	1.37	1.62	1.65	1.88	2.08	2.42
N-SK2	1.57881	1.58378	1.58914	1.5949	1.59558	1.59847	1.6023	1.60413	1.60465	1.60513	1.60729	1.60738	1.60993	1.61486	1.61547	1.62073	1.62561	1.63399
\bar{v}_λ	19.2	22.42	25.43	20.71	19.45	14.16	9.09	7.48	7.1	6.77	5.54	5.5	4.44	3.14	3.02	2.24	1.77	1.26
\bar{P}_λ	-0.11	-0.09	-0.02	0.32	0.38	0.63	0.93	1.05	1.08	1.11	1.23	1.24	1.37	1.61	1.64	1.86	2.05	2.36

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
N-SK4	1.58282	1.58835	1.59422	1.60032	1.60102	1.60393	1.60774	1.60954	1.61005	1.61052	1.61262	1.61272	1.61521	1.61999	1.62059	1.62569	1.63041	
\bar{P}_λ	17.31	20.43	23.69	20.29	19.18	14.27	9.31	7.69	7.31	6.97	5.73	5.68	4.6	3.26	3.13	2.33	1.84	-----
P_λ	-0.11	-0.1	-0.04	0.28	0.34	0.6	0.9	1.03	1.06	1.09	1.22	1.22	1.36	1.6	1.62	1.85	2.04	-----
N-SK5	1.55966	1.56539	1.5714	1.57747	1.57815	1.58094	1.58451	1.58619	1.58666	1.5871	1.58904	1.58913	1.59142	1.59581	1.59635	1.60101	1.60529	1.6126
\bar{P}_λ	16.02	19.04	22.45	20.06	19.07	14.48	9.6	7.97	7.58	7.24	5.97	5.92	4.81	3.42	3.3	2.46	1.95	1.4
P_λ	-0.12	-0.11	-0.05	0.25	0.31	0.57	0.88	1	1.04	1.07	1.2	1.2	1.34	1.57	1.6	1.82	2	2.3
N-SK10	1.5931	1.59837	1.604	1.61	1.61071	1.61368	1.61759	1.61947	1.62	1.62049	1.62268	1.62278	1.62538	1.6304	1.63102	1.63639	1.64136	1.6499
\bar{P}_λ	18.56	21.77	24.87	20.55	19.34	14.16	9.12	7.51	7.13	6.8	5.57	5.53	4.47	3.15	3.04	2.25	1.78	1.27
P_λ	-0.11	-0.1	-0.02	0.31	0.37	0.62	0.92	1.04	1.08	1.11	1.23	1.24	1.37	1.61	1.64	1.86	2.05	2.37
N-SK11	1.53598	1.54131	1.54693	1.55266	1.5533	1.55597	1.55939	1.56101	1.56146	1.56188	1.56376	1.56384	1.56605	1.57029	1.57081	1.57531	1.57945	1.58653
\bar{P}_λ	16.49	19.53	22.91	20.22	19.19	14.48	9.56	7.93	7.54	7.2	5.93	5.88	4.78	3.39	3.27	2.43	1.93	1.39
P_λ	-0.12	-0.11	-0.05	0.26	0.32	0.58	0.88	1.01	1.04	1.07	1.2	1.21	1.34	1.58	1.61	1.83	2.01	2.31
N-SK14	1.57336	1.57903	1.58502	1.59113	1.59182	1.59467	1.59834	1.60007	1.60056	1.60101	1.60302	1.60311	1.60548	1.61003	1.61059	1.61542	1.61988	1.62748
\bar{P}_λ	16.59	19.63	22.99	20.24	19.2	14.47	9.54	7.91	7.52	7.18	5.91	5.86	4.76	3.38	3.25	2.42	1.92	1.38
P_λ	-0.11	-0.11	-0.05	0.26	0.32	0.58	0.89	1.01	1.05	1.08	1.2	1.21	1.35	1.58	1.61	1.83	2.01	2.31
N-SK15	1.59268	1.59822	1.60411	1.61027	1.61098	1.61396	1.61785	1.6197	1.62022	1.6207	1.62286	1.62296	1.62552	1.63044	1.63105	1.6363	1.64115	1.64948
\bar{P}_λ	17.57	20.72	23.95	20.31	19.18	14.2	9.23	7.62	7.24	6.91	5.67	5.62	4.55	3.22	3.1	2.3	1.82	1.3
P_λ	-0.11	-0.1	-0.03	0.29	0.35	0.61	0.91	1.03	1.07	1.09	1.22	1.23	1.36	1.6	1.63	1.85	2.04	2.35
N-SK16	1.5892	1.59523	1.60157	1.60799	1.60871	1.61167	1.61548	1.61727	1.61777	1.61824	1.62032	1.62041	1.62286	1.62756	1.62814	1.63313	1.63773	1.64559
\bar{P}_λ	15.97	19.01	22.41	19.93	18.93	14.33	9.47	7.86	7.47	7.14	5.88	5.83	4.74	3.37	3.24	2.41	1.91	1.37
P_λ	-0.12	-0.11	-0.05	0.26	0.32	0.57	0.88	1.01	1.04	1.07	1.2	1.21	1.34	1.58	1.61	1.83	2.02	2.32
N-KF9	1.49608	1.50095	1.50616	1.5117	1.51234	1.51507	1.51867	1.5204	1.52089	1.52134	1.52337	1.52346	1.52587	1.53056	1.53114	1.53621	1.54095	1.54925
\bar{P}_λ	16.81	19.7	22.54	18.74	17.64	12.94	8.32	6.85	6.49	6.19	5.06	5.02	4.04	2.83	2.72	2	1.56	1.09
P_λ	-0.11	-0.1	-0.03	0.31	0.36	0.62	0.93	1.06	1.09	1.12	1.25	1.26	1.4	1.65	1.69	1.94	2.17	2.57

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
N-BALF4	1.55068	1.55577	1.56124	1.56707	1.56776	1.57065	1.57448	1.57631	1.57683	1.57731	1.57946	1.57956	1.58212	1.58707	1.58769	1.59301	1.59798	1.60658
ρ_{λ}	17.82	20.87	23.81	19.63	18.46	13.5	8.67	7.14	6.77	6.46	5.28	5.24	4.23	2.97	2.86	2.1	1.65	1.17
P_{λ}	-0.11	-0.1	-0.02	0.31	0.37	0.63	0.93	1.05	1.09	1.12	1.24	1.25	1.39	1.63	1.66	1.9	2.11	2.47
N-BALF5				1.53529	1.53598	1.53885	1.54255	1.5443	1.5448	1.54525	1.5473	1.54739	1.54982	1.55451	1.5551	1.56016	1.56491	
ρ_{λ}	-----	-----	-----	18.23	17.29	13.02	8.55	7.07	6.72	6.41	5.26	5.21	4.21	2.96	2.84	2.09	1.63	-----
P_{λ}	-----	-----	-----	0.26	0.32	0.58	0.9	1.03	1.07	1.1	1.23	1.24	1.39	1.65	1.68	1.94	2.18	-----
N-SSK2	1.59149	1.59685	1.6026	1.6088	1.60953	1.61264	1.61678	1.61877	1.61933	1.61985	1.62219	1.62229	1.62507	1.63046	1.63112	1.63691	1.64231	1.65166
ρ_{λ}	18.22	21.32	24.2	19.69	18.49	13.44	8.6	7.07	6.7	6.39	5.22	5.18	4.18	2.93	2.82	2.08	1.63	1.15
P_{λ}	-0.11	-0.1	-0.02	0.32	0.38	0.63	0.93	1.06	1.09	1.12	1.25	1.25	1.39	1.64	1.66	1.9	2.11	2.47
N-SSK5	1.62581	1.63128	1.6372	1.64371	1.64449	1.64785	1.65237	1.65455	1.65517	1.65574	1.65833	1.65844	1.66152	1.6675	1.66824	1.67471	1.68078	1.6914
ρ_{λ}	18.91	22.03	24.69	19.5	18.24	13.09	8.29	6.79	6.44	6.14	5	4.96	3.99	2.79	2.68	1.96	1.54	1.07
P_{λ}	-0.11	-0.09	-0.01	0.34	0.4	0.65	0.95	1.07	1.11	1.14	1.26	1.27	1.41	1.66	1.69	1.94	2.17	2.57
N-SSK8	1.58594	1.59137	1.59723	1.6036	1.60436	1.60759	1.61192	1.61401	1.6146	1.61515	1.61762	1.61773	1.62067	1.62641	1.62713	1.63336	1.63922	
ρ_{λ}	17.81	20.78	23.47	18.88	17.7	12.78	8.13	6.66	6.32	6.02	4.9	4.86	3.91	2.72	2.62	1.91	1.49	-----
P_{λ}	-0.11	-0.09	-0.01	0.33	0.39	0.64	0.95	1.07	1.11	1.14	1.27	1.27	1.42	1.68	1.71	1.97	2.21	-----
N-LAK7	1.61875	1.62499	1.63156	1.63828	1.63904	1.6422	1.64628	1.64821	1.64875	1.64925	1.6515	1.6516	1.65425	1.65935	1.65998	1.6654	1.67041	1.67898
ρ_{λ}	16.24	19.3	22.64	19.8	18.76	14.08	9.24	7.65	7.27	6.95	5.71	5.66	4.6	3.26	3.14	2.33	1.85	1.32
P_{λ}	-0.12	-0.11	-0.04	0.27	0.33	0.59	0.89	1.02	1.05	1.08	1.21	1.22	1.35	1.59	1.62	1.84	2.03	2.33
N-LAK8	1.67294	1.68075	1.6889	1.6971	1.69802	1.70181	1.70668	1.70897	1.70962	1.71022	1.71288	1.713	1.71616	1.72222	1.72297	1.72944	1.73544	1.74573
ρ_{λ}	14.07	16.86	20.03	17.9	17	12.87	8.5	7.04	6.69	6.39	5.26	5.21	4.23	2.99	2.88	2.14	1.69	1.21
P_{λ}	-0.12	-0.11	-0.05	0.26	0.32	0.58	0.89	1.02	1.05	1.08	1.21	1.22	1.36	1.6	1.63	1.86	2.05	2.37
N-BALF4	1.55068	1.55577	1.56124	1.56707	1.56776	1.57065	1.57448	1.57631	1.57683	1.57731	1.57946	1.57956	1.58212	1.58707	1.58769	1.59301	1.59798	1.60658
ρ_{λ}	17.82	20.87	23.81	19.63	18.46	13.5	8.67	7.14	6.77	6.46	5.28	5.24	4.23	2.97	2.86	2.1	1.65	1.17
P_{λ}	-0.11	-0.1	-0.02	0.31	0.37	0.63	0.93	1.05	1.09	1.12	1.24	1.25	1.39	1.63	1.66	1.9	2.11	2.47

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
N-LAK9	1.65294	1.66032	1.66804	1.67584	1.67672	1.68033	1.68497	1.68716	1.68777	1.68834	1.69089	1.691	1.69401	1.69979	1.70051	1.70667	1.71238	1.72219
ρ_{λ}	14.45	17.28	20.47	18.23	17.31	13.09	8.63	7.15	6.8	6.49	5.34	5.3	4.3	3.04	2.93	2.17	1.72	1.23
ρ_{λ}	-0.12	-0.11	-0.05	0.26	0.32	0.58	0.89	1.02	1.05	1.08	1.21	1.22	1.36	1.6	1.63	1.86	2.05	2.37
N-LAK10	1.6789	1.6867	1.69488	1.70324	1.70419	1.70815	1.71328	1.71572	1.71641	1.71705	1.7199	1.72003	1.72341	1.72995	1.73077	1.7378	1.74437	1.75578
ρ_{λ}	14.23	17	20.02	17.48	16.55	12.37	8.08	6.67	6.34	6.05	4.96	4.92	3.98	2.8	2.69	1.98	1.56	1.09
ρ_{λ}	-0.12	-0.11	-0.04	0.27	0.33	0.59	0.91	1.04	1.07	1.1	1.23	1.24	1.38	1.63	1.66	1.91	2.13	2.5
N-LAK12	1.64541	1.65107	1.65713	1.66366	1.66443	1.66772	1.67209	1.67418	1.67478	1.67533	1.67779	1.6779	1.68083	1.68647	1.68717	1.69321	1.69881	1.70842
ρ_{λ}	18.8	22.05	25.07	20.34	19.09	13.86	8.88	7.3	6.92	6.6	5.4	5.36	4.33	3.05	2.94	2.18	1.72	1.23
ρ_{λ}	-0.11	-0.1	-0.02	0.32	0.38	0.63	0.93	1.05	1.08	1.11	1.24	1.24	1.38	1.61	1.64	1.86	2.05	2.36
LAKL12	1.64179	1.64862	1.65581	1.66319	1.66403	1.66751	1.67201	1.67415	1.67475	1.6753	1.67779	1.6779	1.68084	1.6865	1.68719	1.69323	1.69881	1.70839
ρ_{λ}	15.4	18.29	21.43	18.7	17.71	13.27	8.7	7.2	6.84	6.53	5.36	5.32	4.31	3.05	2.94	2.18	1.72	1.23
ρ_{λ}	-0.12	-0.11	-0.04	0.27	0.33	0.59	0.9	1.02	1.06	1.09	1.22	1.22	1.36	1.6	1.63	1.85	2.05	2.36
N-LAK14	1.65783	1.66554	1.67357	1.68157	1.68246	1.68612	1.69077	1.69296	1.69358	1.69415	1.69669	1.6968	1.6998	1.70554	1.70625	1.71237	1.71803	1.72772
ρ_{λ}	13.91	16.7	19.94	18.06	17.19	13.1	8.7	7.22	6.87	6.56	5.4	5.36	4.36	3.09	2.97	2.21	1.75	1.25
ρ_{λ}	-0.12	-0.12	-0.06	0.25	0.31	0.57	0.88	1.01	1.04	1.07	1.2	1.21	1.35	1.59	1.62	1.84	2.04	2.36
N-LAK21	1.60776	1.61416	1.62086	1.62759	1.62834	1.63143	1.63538	1.63724	1.63776	1.63825	1.6404	1.64049	1.64303	1.6479	1.6485	1.65367	1.65844	1.66658
ρ_{λ}	15.53	18.53	21.96	19.7	18.73	14.22	9.43	7.83	7.44	7.11	5.86	5.81	4.72	3.35	3.23	2.4	1.91	1.37
ρ_{λ}	-0.12	-0.11	-0.05	0.25	0.31	0.57	0.88	1.01	1.04	1.07	1.2	1.2	1.34	1.58	1.61	1.83	2.02	2.32
N-LAK22	1.61916	1.62488	1.631	1.63747	1.63823	1.64141	1.6456	1.6476	1.64816	1.64868	1.65103	1.65113	1.65391	1.65925	1.65991	1.66562	1.67091	1.67997
ρ_{λ}	17.78	20.91	23.99	19.99	18.82	13.83	8.93	7.36	6.99	6.67	5.46	5.42	4.39	3.1	2.98	2.21	1.75	1.25
ρ_{λ}	-0.11	-0.1	-0.03	0.3	0.36	0.62	0.92	1.04	1.07	1.1	1.23	1.23	1.37	1.6	1.63	1.85	2.04	2.35
N-LAK33A	1.71278	1.72047	1.72855	1.7369	1.73786	1.74186	1.74707	1.74956	1.75025	1.7509	1.7538	1.75393	1.75737	1.76398	1.7648	1.77188	1.77844	1.78973
ρ_{λ}	15.16	18.08	21.17	18.21	17.21	12.79	8.33	6.87	6.53	6.23	5.11	5.07	4.1	2.9	2.79	2.07	1.63	1.17
ρ_{λ}	-0.12	-0.11	-0.04	0.28	0.34	0.6	0.91	1.03	1.07	1.1	1.23	1.23	1.37	1.61	1.64	1.86	2.06	2.38

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
N-LAK34	1.68925	1.69695	1.705	1.71315	1.71407	1.71787	1.72277	1.72509	1.72574	1.72634	1.72904	1.72916	1.73235	1.73847	1.73923	1.74576	1.75179	1.76215
\bar{P}_λ	14.6	17.5	20.72	18.33	17.39	13.09	8.61	7.13	6.78	6.47	5.32	5.28	4.28	3.03	2.92	2.17	1.72	1.23
P_λ	-0.12	-0.11	-0.05	0.26	0.32	0.58	0.89	1.02	1.05	1.08	1.21	1.22	1.36	1.6	1.62	1.85	2.04	2.35
LLF1	1.51865	1.52354	1.52884	1.5347	1.53541	1.53845	1.54256	1.54456	1.54513	1.54566	1.54803	1.54814	1.55098	1.55655	1.55725	1.56333	1.5691	1.57932
\bar{P}_λ	17.54	20.42	22.86	17.94	16.76	11.97	7.54	6.16	5.84	5.56	4.51	4.47	3.59	2.49	2.39	1.74	1.35	0.93
P_λ	-0.11	-0.09	-0.01	0.35	0.41	0.66	0.96	1.09	1.12	1.15	1.29	1.29	1.44	1.71	1.74	2.01	2.26	2.71
N-BAF3	1.54998	1.55574	1.56192	1.5685	1.56927	1.57254	1.57689	1.57899	1.57958	1.58013	1.58261	1.58272	1.58569	1.59149	1.59222	1.59857	1.60462	
\bar{P}_λ	15.75	18.46	21.1	17.43	16.39	11.96	7.64	6.26	5.94	5.65	4.6	4.56	3.66	2.53	2.43	1.76	1.36	-----
P_λ	-0.11	-0.1	-0.02	0.31	0.37	0.63	0.94	1.08	1.11	1.14	1.28	1.29	1.44	1.72	1.75	2.04	2.31	-----
N-BAF4	1.57092	1.57685	1.58323	1.59016	1.59099	1.59452	1.59926	1.60156	1.60222	1.60282	1.60556	1.60568	1.60897	1.61542	1.61624	1.62337	1.6302	
\bar{P}_λ	15.91	18.61	21.06	16.94	15.88	11.44	7.24	5.91	5.6	5.33	4.33	4.29	3.43	2.36	2.27	1.63	1.25	-----
P_λ	-0.11	-0.09	-0.01	0.33	0.39	0.65	0.96	1.09	1.13	1.16	1.3	1.3	1.46	1.75	1.78	2.09	2.39	-----
N-BAF10	1.63524	1.64094	1.64714	1.65404	1.65488	1.65849	1.6634	1.66578	1.66645	1.66708	1.6699	1.67003	1.67341	1.68	1.68083	1.68801	1.69479	
\bar{P}_λ	18.41	21.41	23.86	18.53	17.3	12.31	7.75	6.33	6	5.71	4.64	4.6	3.69	2.57	2.47	1.8	1.4	
P_λ	-0.11	-0.09	-0	0.35	0.41	0.67	0.96	1.09	1.12	1.15	1.28	1.29	1.43	1.69	1.72	1.98	2.22	
N-BAF51	1.61873	1.6239	1.62961	1.63619	1.63701	1.64059	1.64551	1.64792	1.6486	1.64924	1.65211	1.65224	1.65568	1.66243	1.66328	1.67066	1.67765	
\bar{P}_λ	19.91	22.86	24.87	18.47	17.15	12.01	7.47	6.08	5.75	5.47	4.44	4.4	3.52	2.44	2.34	1.7	1.32	
P_λ	-0.1	-0.08	0.02	0.38	0.44	0.69	0.98	1.1	1.14	1.17	1.3	1.3	1.45	1.71	1.74	2.01	2.26	
N-BAF52	1.57475	1.58067	1.58702	1.59381	1.59461	1.59801	1.60254	1.60473	1.60535	1.60593	1.60852	1.60863	1.61173	1.6178	1.61856	1.62522	1.63156	
\bar{P}_λ	16	18.77	21.42	17.57	16.51	12	7.65	6.26	5.94	5.65	4.6	4.56	3.65	2.53	2.43	1.76	1.35	
P_λ	-0.11	-0.1	-0.02	0.32	0.38	0.64	0.95	1.08	1.11	1.15	1.28	1.29	1.44	1.72	1.75	2.05	2.33	
LF5	1.54966	1.55445	1.55975	1.56594	1.56672	1.57014	1.57489	1.57723	1.57789	1.57851	1.58132	1.58144	1.58482	1.59147	1.5923	1.59965	1.60667	1.61926
\bar{P}_λ	19.06	21.91	23.72	17.3	16.03	11.13	6.86	5.57	5.27	5.01	4.05	4.01	3.2	2.2	2.11	1.52	1.17	0.8
P_λ	-0.1	-0.08	0.02	0.39	0.45	0.7	1	1.12	1.16	1.19	1.32	1.33	1.47	1.75	1.78	2.07	2.34	2.83

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
N-F2	1.58137	1.58744	1.5941	1.60167	1.60261	1.60668	1.61229	1.61506	1.61585	1.61658	1.6199	1.62005	1.62408	1.63208	1.6331	1.6421	1.65086	
$\bar{\nu}_\lambda$	15.87	18.36	20.23	15.31	14.24	9.99	6.18	5.01	4.74	4.5	3.63	3.6	2.86	1.94	1.86	1.32	1	
ρ_λ	-0.1	-0.08	0.01	0.37	0.43	0.69	1	1.13	1.17	1.2	1.35	1.35	1.51	1.82	1.86	2.2	2.54	
F2	1.58465	1.58958	1.59513	1.6019	1.60279	1.60671	1.61227	1.61503	1.61582	1.61656	1.61989	1.62004	1.62408	1.63209	1.6331	1.64203	1.65062	1.66623
$\bar{\nu}_\lambda$	19.82	22.53	23.72	16.33	15.03	10.22	6.2	5.01	4.73	4.49	3.62	3.59	2.85	1.95	1.87	1.34	1.02	0.69
ρ_λ	-0.1	-0.07	0.04	0.43	0.49	0.74	1.02	1.15	1.18	1.21	1.35	1.35	1.5	1.79	1.82	2.12	2.41	2.95
F4	1.58151	1.58642	1.59195	1.59866	1.59954	1.60342	1.60891	1.61164	1.61242	1.61315	1.61644	1.61659	1.62058	1.62848	1.62948	1.63829	1.64677	1.66216
$\bar{\nu}_\lambda$	19.75	22.5	23.74	16.4	15.1	10.28	6.24	5.04	4.76	4.52	3.64	3.61	2.87	1.96	1.88	1.35	1.03	0.69
ρ_λ	-0.1	-0.07	0.04	0.43	0.49	0.73	1.02	1.15	1.18	1.21	1.35	1.35	1.5	1.79	1.82	2.12	2.41	2.95
F5	1.56934	1.57427	1.57979	1.58636	1.58721	1.59093	1.59616	1.59874	1.59948	1.60017	1.60328	1.60342	1.60718	1.61462	1.61556	1.62381	1.63174	1.64607
$\bar{\nu}_\lambda$	19.23	21.97	23.44	16.61	15.34	10.54	6.44	5.22	4.93	4.68	3.78	3.74	2.98	2.04	1.96	1.41	1.08	0.73
ρ_λ	-0.1	-0.07	0.03	0.41	0.47	0.72	1.01	1.14	1.17	1.2	1.34	1.34	1.49	1.77	1.81	2.1	2.38	2.9
N-BASF2	1.62552	1.63109	1.63734	1.64484	1.64581	1.65007	1.65607	1.65905	1.65991	1.6607	1.6643	1.66446	1.66883	1.67752	1.67862	1.68839	1.6979	
$\bar{\nu}_\lambda$	18.75	21.34	22.68	15.99	14.76	10.11	6.16	4.98	4.7	4.46	3.59	3.56	2.82	1.92	1.84	1.3	0.99	----
ρ_λ	-0.09	-0.07	0.04	0.41	0.47	0.73	1.02	1.15	1.18	1.22	1.36	1.36	1.52	1.82	1.86	2.2	2.53	
N-BASF64	1.66373	1.66988	1.67667	1.68453	1.68551	1.68982	1.69578	1.69871	1.69955	1.70033	1.70384	1.704	1.70824	1.7166	1.71765	1.72691	1.7358	1.75185
$\bar{\nu}_\lambda$	17.96	20.66	22.46	16.57	15.37	10.71	6.62	5.37	5.08	4.83	3.91	3.87	3.09	2.12	2.03	1.46	1.12	0.75
ρ_λ	-0.1	-0.08	0.02	0.39	0.45	0.7	1	1.12	1.16	1.19	1.32	1.33	1.48	1.76	1.8	2.09	2.38	2.93
N-LAF2	1.70582	1.71169	1.71816	1.72563	1.72656	1.73064	1.73627	1.73903	1.73981	1.74054	1.74383	1.74397	1.74791	1.75562	1.75659	1.76501	1.77297	1.78704
$\bar{\nu}_\lambda$	19.92	23	25.07	18.5	17.17	11.99	7.44	6.06	5.73	5.46	4.43	4.39	3.51	2.44	2.34	1.71	1.32	0.92
ρ_λ	-0.1	-0.08	0.02	0.38	0.44	0.69	0.98	1.1	1.14	1.17	1.29	1.3	1.44	1.7	1.73	1.99	2.24	2.68
N-LAF3	1.68061	1.68653	1.69297	1.70017	1.70105	1.70485	1.71001	1.71252	1.71323	1.71389	1.71687	1.717	1.72055	1.72748	1.72834	1.73585	1.74292	1.7553
$\bar{\nu}_\lambda$	18.99	22.09	24.56	18.92	17.64	12.52	7.87	6.43	6.09	5.8	4.72	4.68	3.76	2.62	2.52	1.84	1.44	1
ρ_λ	-0.11	-0.09	3.37E-4	0.36	0.42	0.67	0.96	1.09	1.12	1.15	1.28	1.28	1.42	1.67	1.7	1.96	2.19	2.59

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
N-LAF7	1.70344	1.71021	1.71772	1.72659	1.72773	1.73272	1.73972	1.7432	1.74419	1.74511	1.74931	1.7495	1.75459	1.76473	1.76602	1.77742	1.78852	
P_{λ}	17.27	19.86	21.39	15.34	14.18	9.75	5.96	4.81	4.55	4.32	3.47	3.44	2.73	1.85	1.78	1.26	0.95	
P_{λ}	-0.1	-0.08	0.03	0.41	0.47	0.72	1.02	1.15	1.18	1.22	1.36	1.36	1.52	1.83	1.86	2.2	2.53	
LAFN7	1.70211	1.70934	1.71726	1.72642	1.72758	1.73264	1.7397	1.74319	1.74419	1.74511	1.74931	1.7495	1.75458	1.76465	1.76592	1.77714	1.78796	1.80763
P_{λ}	16.03	18.67	20.47	15.02	13.91	9.64	5.92	4.8	4.54	4.31	3.48	3.44	2.74	1.87	1.8	1.29	0.98	0.66
P_{λ}	-0.11	-0.09	0.02	0.39	0.45	0.71	1.01	1.14	1.17	1.2	1.34	1.35	1.5	1.79	1.82	2.13	2.42	2.97
N-LAF21				1.76893	1.76997	1.77435	1.78019	1.78301	1.7838	1.78454	1.78785	1.788	1.79195	1.79961	1.80056	1.80884	1.81658	
P_{λ}	-----	-----	-----	17.63	16.56	12.04	7.7	6.32	5.99	5.71	4.66	4.62	3.73	2.61	2.51	1.84	1.44	-----
P_{λ}	-----	-----	-----	0.32	0.38	0.64	0.94	1.06	1.1	1.13	1.26	1.26	1.4	1.65	1.68	1.93	2.15	-----
N-LAF32	1.75017	1.75777	1.76591	1.77475	1.7758	1.78032	1.7864	1.78934	1.79017	1.79094	1.79441	1.79457	1.79872	1.80679	1.8078	1.81657	1.82481	1.83925
P_{λ}	16.22	19.12	21.73	17.39	16.29	11.72	7.43	6.09	5.77	5.5	4.48	4.44	3.57	2.49	2.39	1.75	1.37	0.96
P_{λ}	-0.12	-0.1	-0.01	0.33	0.39	0.65	0.95	1.08	1.11	1.14	1.27	1.28	1.42	1.67	1.7	1.96	2.19	2.59
N-LAF33	1.74262	1.74968	1.75732	1.76584	1.76689	1.77138	1.77751	1.78049	1.78134	1.78213	1.78567	1.78582	1.79006	1.79834	1.79937	1.80838	1.81686	1.83175
P_{λ}	17.34	20.29	22.67	17.49	16.31	11.56	7.25	5.92	5.61	5.34	4.34	4.3	3.45	2.4	2.31	1.69	1.32	0.92
P_{λ}	-0.11	-0.09	-0	0.36	0.42	0.67	0.97	1.09	1.12	1.15	1.28	1.29	1.43	1.69	1.72	1.97	2.2	2.6
N-LAF34	1.73085	1.73824	1.7461	1.75447	1.75546	1.75962	1.76515	1.7678	1.76855	1.76924	1.77236	1.7725	1.77621	1.78337	1.78426	1.79197	1.79914	
P_{λ}	16.23	19.19	22.06	18.17	17.08	12.46	7.99	6.57	6.24	5.95	4.86	4.82	3.89	2.74	2.63	1.94	1.53	-----
P_{λ}	-0.12	-0.1	-0.02	0.31	0.37	0.63	0.93	1.05	1.09	1.12	1.25	1.25	1.39	1.63	1.66	1.89	2.1	-----
N-LAF35				1.72588	1.72683	1.73086	1.7362	1.73876	1.73948	1.74015	1.74317	1.7433	1.74688	1.75381	1.75467	1.76212	1.76907	
P_{λ}	-----	-----	-----	18.07	16.99	12.41	7.96	6.55	6.21	5.92	4.84	4.8	3.88	2.72	2.62	1.93	1.52	-----
P_{λ}	-----	-----	-----	0.31	0.37	0.63	0.93	1.06	1.09	1.12	1.25	1.25	1.39	1.63	1.66	1.9	2.1	-----
N-LAF36	1.75555	1.76246	1.77001	1.77862	1.77969	1.78435	1.79076	1.79389	1.79479	1.79561	1.79935	1.79951	1.804	1.81277	1.81387	1.82345	1.83251	
P_{λ}	18.05	21	23.14	17.33	16.11	11.29	7.03	5.72	5.42	5.15	4.18	4.15	3.32	2.3	2.21	1.61	1.25	-----
P_{λ}	-0.11	-0.09	0.01	0.38	0.44	0.69	0.98	1.1	1.14	1.17	1.3	1.3	1.44	1.7	1.73	1.99	2.23	-----

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
LASFN9	1.80055	1.80657	1.81363	1.82293	1.8242	1.82997	1.83834	1.84256	1.84377	1.84489	1.85002	1.85025	1.8565	1.869	1.87059	1.88468	1.89842	
$\bar{\nu}_\lambda$	22.47	24.85	24.74	15.56	14.2	9.39	5.59	4.49	4.23	4.01	3.22	3.19	2.52	1.71	1.63	1.16	0.88	----
$\bar{\rho}_\lambda$	-0.08	-0.05	0.09	0.48	0.54	0.77	1.06	1.18	1.21	1.24	1.38	1.39	1.54	1.84	1.88	2.2	2.53	----
N-LASF31	1.83529	1.84153	1.84862	1.85736	1.85851	1.86358	1.87075	1.87429	1.8753	1.87624	1.88048	1.88066	1.88577	1.89577	1.89702	1.90794	1.91823	1.93628
$\bar{\nu}_\lambda$	22.42	25.29	26.34	17.96	16.53	11.25	6.87	5.57	5.26	5.01	4.05	4.02	3.21	2.23	2.14	1.56	1.22	0.85
$\bar{\rho}_\lambda$	-0.09	-0.06	0.05	0.43	0.49	0.73	1.01	1.12	1.16	1.18	1.31	1.31	1.45	1.7	1.73	1.97	2.2	2.57
N-LASF40	1.78601	1.79298	1.80074	1.80999	1.81118	1.81643	1.8238	1.82745	1.82849	1.82946	1.83385	1.83404	1.83934	1.84982	1.85114	1.86276	1.87391	
$\bar{\nu}_\lambda$	18.72	21.51	23.04	16.3	15.05	10.32	6.31	5.11	4.83	4.59	3.7	3.67	2.92	2	1.92	1.38	1.06	----
$\bar{\rho}_\lambda$	-0.1	-0.08	0.03	0.41	0.47	0.72	1.01	1.14	1.17	1.2	1.33	1.34	1.49	1.77	1.8	2.09	2.38	----
N-LASF41	1.78859	1.79608	1.80423	1.81338	1.8145	1.81936	1.82599	1.82923	1.83014	1.831	1.83484	1.83501	1.83961	1.84859	1.84972	1.8595	1.8687	1.88487
$\bar{\nu}_\lambda$	17.37	20.26	22.52	17.24	16.06	11.35	7.11	5.8	5.5	5.23	4.25	4.21	3.38	2.35	2.26	1.65	1.29	0.9
$\bar{\rho}_\lambda$	-0.11	-0.09	0	0.36	0.42	0.68	0.97	1.09	1.13	1.16	1.29	1.29	1.43	1.69	1.72	1.97	2.2	2.59
N-LASF43	1.75901	1.76662	1.77488	1.78413	1.78526	1.79018	1.79691	1.8002	1.80113	1.802	1.80592	1.8061	1.81081	1.82006	1.82122	1.83138	1.84105	
$\bar{\nu}_\lambda$	16.43	19.22	21.44	16.43	15.31	10.81	6.75	5.5	5.21	4.95	4.01	3.98	3.18	2.2	2.11	1.53	1.18	----
$\bar{\rho}_\lambda$	-0.11	-0.09	0	0.36	0.42	0.68	0.98	1.11	1.14	1.17	1.3	1.31	1.46	1.73	1.76	2.04	2.3	----
N-LASF44	1.7607	1.76801	1.7759	1.78455	1.7856	1.79006	1.79609	1.79901	1.79983	1.8006	1.80405	1.8042	1.80831	1.81631	1.8173	1.82595	1.83404	
$\bar{\nu}_\lambda$	17.13	20.07	22.62	17.87	16.72	11.98	7.58	6.21	5.89	5.61	4.57	4.53	3.65	2.55	2.45	1.8	1.41	----
$\bar{\rho}_\lambda$	-0.11	-0.09	-0.01	0.34	0.4	0.66	0.95	1.08	1.11	1.14	1.27	1.27	1.41	1.66	1.69	1.93	2.14	----
N-LASF45	1.75487	1.76104	1.76809	1.77689	1.77805	1.78325	1.79066	1.79436	1.79541	1.7964	1.80087	1.80107	1.80649	1.81727	1.81863	1.83069	1.84235	
$\bar{\nu}_\lambda$	20.54	23.09	23.87	16.02	14.71	9.92	5.99	4.83	4.56	4.33	3.48	3.45	2.74	1.87	1.79	1.28	0.97	----
$\bar{\rho}_\lambda$	-0.09	-0.06	0.06	0.44	0.5	0.75	1.03	1.16	1.19	1.22	1.36	1.36	1.51	1.8	1.84	2.15	2.45	----
N-LASF46	1.84404	1.85185	1.86069	1.87157	1.873	1.87939	1.88851	1.89307	1.89438	1.89559	1.90113	1.90137	1.90811	1.92157	1.92328	1.9385	1.95339	
$\bar{\nu}_\lambda$	18.01	20.5	21.5	14.6	13.42	9.06	5.46	4.4	4.15	3.94	3.16	3.13	2.48	1.68	1.61	1.14	0.86	----
$\bar{\rho}_\lambda$	-0.1	-0.07	0.05	0.44	0.5	0.75	1.04	1.17	1.2	1.23	1.37	1.38	1.54	1.85	1.89	2.23	2.57	----

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
N-SF1	1.67021	1.67641	1.6835	1.6924	1.69358	1.69889	1.70651	1.71035	1.71145	1.71247	1.71715	1.71736	1.72307	1.73458	1.73605	1.7492	1.76221	
\bar{P}_d	18.12	20.41	21.1	14.05	12.89	8.64	5.18	4.16	3.92	3.72	2.97	2.95	2.32	1.56	1.49	1.04	0.78	----
P_d	-0.09	-0.06	0.06	0.45	0.51	0.76	1.06	1.19	1.22	1.25	1.4	1.4	1.57	1.9	1.94	2.31	2.69	----
SF1	1.67352	1.67855	1.68449	1.69258	1.69371	1.69888	1.70647	1.71031	1.71142	1.71245	1.71715	1.71736	1.7231	1.73463	1.7361	1.74918	1.76198	1.78581
\bar{P}_d	22.62	24.99	24.46	14.78	13.43	8.76	5.17	4.14	3.9	3.7	2.96	2.93	2.31	1.56	1.49	1.06	0.8	0.52
P_d	-0.08	-0.04	0.1	0.5	0.56	0.79	1.07	1.2	1.23	1.26	1.4	1.4	1.56	1.86	1.9	2.24	2.57	3.23
SF2	1.61003	1.61494	1.62055	1.62766	1.62861	1.63289	1.63902	1.64209	1.64297	1.64379	1.64752	1.64769	1.65222	1.66124	1.66238	1.6725	1.68231	1.70028
\bar{P}_d	20.85	23.49	24.12	15.85	14.52	9.72	5.83	4.7	4.43	4.21	3.38	3.35	2.65	1.8	1.73	1.23	0.94	0.62
P_d	-0.09	-0.06	0.06	0.46	0.51	0.76	1.04	1.17	1.2	1.23	1.37	1.37	1.53	1.82	1.85	2.17	2.47	3.05
N-SF4	1.70434	1.71052	1.71773	1.72717	1.72846	1.73432	1.74286	1.74718	1.74843	1.74959	1.75489	1.75513	1.76163	1.77478	1.77646	1.7916	1.80666	
\bar{P}_d	19.22	21.38	21.44	13.56	12.37	8.16	4.83	3.87	3.65	3.46	2.76	2.73	2.14	1.43	1.37	0.96	0.71	----
P_d	-0.08	-0.05	0.08	0.48	0.54	0.78	1.07	1.2	1.24	1.27	1.42	1.42	1.59	1.92	1.97	2.35	2.74	----
SF4	1.70789	1.71294	1.71904	1.72765	1.72888	1.73457	1.743	1.7473	1.74853	1.74969	1.75496	1.7552	1.76166	1.77469	1.77636	1.79122	1.80587	1.83332
\bar{P}_d	23.8	25.95	24.68	14.28	12.93	8.33	4.87	3.89	3.67	3.47	2.77	2.74	2.16	1.45	1.39	0.98	0.74	0.48
P_d	-0.07	-0.03	0.12	0.52	0.58	0.81	1.09	1.21	1.24	1.28	1.41	1.42	1.58	1.89	1.93	2.27	2.62	3.31
N-SF5	1.62935	1.63554	1.64249	1.6508	1.65188	1.65661	1.6633	1.66664	1.66759	1.66848	1.67253	1.6727	1.67763	1.6875	1.68876	1.69999	1.71104	
\bar{P}_d	16.94	19.33	20.6	14.55	13.42	9.18	5.57	4.49	4.24	4.03	3.23	3.2	2.53	1.7	1.63	1.15	0.86	----
P_d	-0.1	-0.07	0.03	0.42	0.48	0.73	1.03	1.16	1.2	1.23	1.38	1.38	1.55	1.87	1.91	2.28	2.65	----
SF5	1.63289	1.63785	1.64359	1.65104	1.65206	1.65664	1.66327	1.66661	1.66757	1.66846	1.67251	1.67269	1.67764	1.6875	1.68876	1.69987	1.71067	1.73057
\bar{P}_d	21.45	24	24.24	15.46	14.12	9.36	5.58	4.49	4.23	4.01	3.22	3.19	2.52	1.71	1.64	1.17	0.88	0.58
P_d	-0.09	-0.05	0.08	0.47	0.53	0.77	1.05	1.18	1.21	1.24	1.38	1.38	1.54	1.83	1.87	2.19	2.5	3.11
N-SF6	1.74895	1.75541	1.76307	1.77341	1.77486	1.78144	1.79114	1.79608	1.7975	1.79883	1.80491	1.80517	1.81265	1.82784	1.82979	1.8474	1.86503	
\bar{P}_d	19.66	21.61	21.2	12.95	11.77	7.69	4.52	3.61	3.4	3.22	2.56	2.54	1.99	1.32	1.26	0.88	0.65	----
P_d	-0.08	-0.04	0.1	0.5	0.56	0.8	1.09	1.22	1.25	1.29	1.43	1.44	1.61	1.95	2	2.39	2.81	----

Class/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
SF6	1.75302	1.75813	1.76444	1.7738	1.77517	1.78157	1.79117	1.79609	1.79751	1.79884	1.80491	1.80518	1.81264	1.82776	1.8297	1.84709	1.86434	1.89704
ρ_λ	25.21	27.06	24.85	13.66	12.31	7.83	4.54	3.61	3.4	3.22	2.56	2.54	1.99	1.33	1.27	0.89	0.67	0.43
P_λ	-0.07	-0.02	0.15	0.55	0.6	0.83	1.1	1.23	1.26	1.29	1.43	1.44	1.6	1.92	1.96	2.32	2.69	3.44
N-SF8	1.64448	1.6506	1.65753	1.666	1.66711	1.67203	1.67904	1.68254	1.68355	1.68448	1.68874	1.68893	1.69413	1.70456	1.70589	1.71776	1.72946	
ρ_λ	17.59	19.95	20.97	14.43	13.28	9	5.43	4.37	4.13	3.92	3.14	3.11	2.45	1.65	1.58	1.11	0.83	----
P_λ	-0.09	-0.07	0.05	0.43	0.49	0.74	1.04	1.17	1.21	1.24	1.38	1.39	1.56	1.88	1.92	2.28	2.65	----
N-SF10	1.67981	1.68597	1.69308	1.70217	1.70339	1.70891	1.71688	1.7209	1.72206	1.72314	1.72806	1.72827	1.73429	1.74644	1.74799	1.76193	1.77575	
ρ_λ	18.56	20.77	21.18	13.8	12.63	8.41	5.01	4.02	3.79	3.59	2.87	2.84	2.24	1.5	1.43	1	0.75	----
P_λ	-0.09	-0.05	0.07	0.46	0.52	0.77	1.06	1.19	1.23	1.26	1.41	1.41	1.58	1.91	1.95	2.33	2.71	----
SF10	1.68218	1.6875	1.69378	1.70227	1.70345	1.70887	1.71681	1.72085	1.722	1.72309	1.72803	1.72825	1.7343	1.74649	1.74805	1.76199	1.77577	
ρ_λ	21.65	23.94	23.52	14.31	13.01	8.49	5	4	3.77	3.58	2.85	2.83	2.22	1.49	1.43	1	0.75	----
P_λ	-0.08	-0.04	0.1	0.5	0.56	0.79	1.08	1.2	1.24	1.27	1.41	1.41	1.58	1.9	1.94	2.3	2.67	----
SF11	1.73294	1.73843	1.74506	1.75445	1.75579	1.762	1.77126	1.77598	1.77735	1.77862	1.78446	1.78471	1.79189	1.80646	1.80834	1.8252	1.84205	
ρ_λ	22.69	24.73	23.5	13.57	12.28	7.9	4.6	3.67	3.45	3.27	2.6	2.57	2.02	1.34	1.28	0.89	0.66	----
P_λ	-0.07	-0.03	0.12	0.53	0.58	0.82	1.1	1.22	1.26	1.29	1.44	1.44	1.61	1.95	1.99	2.38	2.78	
SF14	1.71211	1.71756	1.72407	1.73313	1.73441	1.74033	1.7491	1.75357	1.75486	1.75606	1.76157	1.76181	1.76858	1.7823	1.78406	1.7999	1.8157	
ρ_λ	22.16	24.3	23.41	13.78	12.49	8.08	4.72	3.77	3.55	3.36	2.67	2.65	2.08	1.39	1.32	0.92	0.69	----
P_λ	-0.08	-0.03	0.11	0.52	0.57	0.81	1.09	1.22	1.25	1.29	1.43	1.44	1.6	1.94	1.98	2.36	2.77	----
N-SF15	1.65267	1.65899	1.66616	1.67494	1.67609	1.68122	1.68854	1.69221	1.69327	1.69425	1.69872	1.69892	1.70438	1.71537	1.71677	1.72934	1.74179	
ρ_λ	17.26	19.57	20.53	14.06	12.93	8.75	5.27	4.23	3.99	3.79	3.03	3	2.37	1.59	1.52	1.06	0.79	----
P_λ	-0.09	-0.07	0.05	0.43	0.49	0.75	1.05	1.18	1.22	1.25	1.39	1.4	1.57	1.9	1.94	2.31	2.7	----
SF15	1.65598	1.66115	1.66719	1.67516	1.67626	1.68125	1.68853	1.69221	1.69327	1.69425	1.69875	1.69895	1.70444	1.71547	1.71687	1.72942	1.74174	
ρ_λ	21.39	23.8	23.74	14.81	13.5	8.88	5.26	4.22	3.98	3.77	3.01	2.99	2.35	1.59	1.52	1.07	0.81	----
P_λ	-0.08	-0.05	0.09	0.48	0.54	0.78	1.07	1.19	1.23	1.26	1.4	1.4	1.56	1.87	1.91	2.26	2.61	----

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
N-SF19	1.62384	1.63018	1.63723	1.64552	1.64657	1.6512	1.6577	1.66092	1.66185	1.66271	1.66661	1.66678	1.67154	1.68106	1.68228	1.6931	1.70375	
P_{λ}	16.38	18.78	20.26	14.65	13.56	9.35	5.71	4.61	4.35	4.13	3.31	3.28	2.6	1.75	1.68	1.18	0.88	----
P_{λ}	-0.1	-0.08	0.03	0.4	0.46	0.72	1.03	1.16	1.19	1.23	1.37	1.38	1.55	1.87	1.91	2.28	2.65	----
N-SF56	1.7301	1.73664	1.74431	1.75442	1.75581	1.76213	1.77137	1.77606	1.77742	1.77868	1.78444	1.7847	1.79178	1.80615	1.808	1.82461	1.84123	
P_{λ}	18.86	20.9	20.85	13.08	11.92	7.84	4.63	3.7	3.49	3.3	2.63	2.61	2.04	1.36	1.3	0.91	0.67	----
P_{λ}	-0.08	-0.05	0.09	0.48	0.54	0.79	1.08	1.21	1.25	1.28	1.43	1.43	1.61	1.94	1.99	2.38	2.79	----
SF56A	1.73406	1.73925	1.74559	1.75473	1.75606	1.7622	1.77136	1.77605	1.7774	1.77866	1.78444	1.7847	1.79179	1.80616	1.808	1.82451	1.8409	
P_{λ}	24.11	26.09	24.42	13.8	12.46	7.98	4.64	3.7	3.48	3.3	2.63	2.6	2.04	1.37	1.31	0.91	0.68	----
P_{λ}	-0.07	-0.02	0.13	0.54	0.59	0.82	1.1	1.22	1.26	1.29	1.43	1.43	1.6	1.92	1.96	2.33	2.7	----
SFL57	1.78487	1.79171	1.79989	1.81117	1.81276	1.82007	1.8309	1.83643	1.83803	1.83952	1.84635	1.84666	1.85509	1.87228	1.87451	1.89458	1.91485	
P_{λ}	19.51	21.33	20.64	12.32	11.18	7.25	4.24	3.38	3.18	3.01	2.39	2.37	1.85	1.23	1.17	0.81	0.6	----
P_{λ}	-0.07	-0.03	0.11	0.51	0.57	0.81	1.1	1.23	1.27	1.3	1.45	1.45	1.63	1.98	2.03	2.45	2.89	----
N-SF57	1.78502	1.7919	1.80011	1.81138	1.81296	1.82023	1.831	1.83649	1.83808	1.83956	1.84635	1.84665	1.85503	1.87211	1.87432	1.89425	1.91437	
P_{λ}	19.38	21.22	20.6	12.37	11.23	7.29	4.26	3.4	3.2	3.03	2.41	2.38	1.86	1.24	1.18	0.81	0.6	----
P_{λ}	-0.07	-0.04	0.11	0.51	0.57	0.81	1.1	1.23	1.27	1.3	1.45	1.45	1.63	1.98	2.03	2.44	2.88	----
SF57	1.79026	1.79539	1.80187	1.81185	1.81335	1.82038	1.83102	1.8365	1.83809	1.83957	1.84636	1.84666	1.85503	1.87205	1.87424	1.89395	1.91363	
P_{λ}	26.55	28.08	25	13.18	11.83	7.45	4.28	3.4	3.2	3.03	2.41	2.38	1.87	1.24	1.19	0.83	0.62	----
P_{λ}	-0.06	-0	0.17	0.57	0.62	0.84	1.12	1.24	1.27	1.31	1.45	1.45	1.62	1.95	1.99	2.37	2.76	----
N-SF64	1.65993	1.66607	1.67306	1.68176	1.68291	1.68806	1.69544	1.69914	1.7002	1.70119	1.7057	1.7059	1.71142	1.7225	1.72392	1.73658	1.7491	
P_{λ}	18.01	20.34	21.13	14.22	13.06	8.79	5.27	4.24	4	3.79	3.03	3.01	2.37	1.59	1.52	1.07	0.8	----
P_{λ}	-0.09	-0.06	0.05	0.44	0.5	0.75	1.05	1.18	1.22	1.25	1.39	1.4	1.57	1.89	1.93	2.3	2.68	----
SF66				1.88055	1.88231	1.89069	1.90361	1.91033	1.91228	1.9141	1.92248	1.92285	1.93324	1.95454	1.9573	1.98231	2.00771	
P_{λ}	----	----	----	12.23	10.9	6.72	3.81	3.02	2.84	2.68	2.12	2.1	1.64	1.08	1.03	0.71	0.52	----
P_{λ}	----	----	----	0.61	0.66	0.87	1.14	1.26	1.3	1.33	1.48	1.48	1.66	2.01	2.06	2.48	2.94	----

Glass/wav	2325.4	1970.0	1529.6	1060.0	1014.0	852.1	706.0	656.3	643.8	632.8	589.3	587.6	546.1	486.1	480.0	435.8	404.7	365.0
N-KZFS2	1.52239	1.53011	1.53798	1.54546	1.54625	1.54944	1.55337	1.55519	1.5557	1.55617	1.55827	1.55836	1.56082	1.56554	1.56612	1.57114	1.5758	1.58383
ρ_λ	10.96	13.39	16.52	16.11	15.49	12.23	8.35	6.98	6.65	6.36	5.26	5.22	4.25	3.02	2.91	2.16	1.7	1.21
P_λ	-0.13	-0.13	-0.08	0.19	0.25	0.51	0.84	0.98	1.01	1.04	1.18	1.19	1.34	1.59	1.62	1.87	2.08	2.43
KZFSN4	1.57428	1.5817	1.58943	1.59732	1.59822	1.60198	1.60689	1.60924	1.6099	1.61052	1.61328	1.6134	1.61669	1.62309	1.62389	1.63086	1.63744	1.64905
ρ_λ	12.61	15.19	18.01	15.68	14.84	11.04	7.16	5.9	5.59	5.33	4.36	4.32	3.48	2.43	2.33	1.7	1.32	0.91
P_λ	-0.13	-0.11	-0.05	0.28	0.34	0.61	0.92	1.05	1.09	1.12	1.26	1.26	1.42	1.68	1.72	1.99	2.23	2.67
N-KZFS4	1.57535	1.58233	1.58971	1.59739	1.59828	1.60199	1.60688	1.60922	1.60988	1.61049	1.61324	1.61336	1.61664	1.62301	1.6238	1.63071	1.63722	1.64866
ρ_λ	13.51	16.05	18.7	15.95	15.06	11.13	7.19	5.92	5.62	5.35	4.37	4.34	3.49	2.44	2.35	1.72	1.34	0.93
P_λ	-0.12	-0.11	-0.04	0.29	0.35	0.61	0.93	1.06	1.09	1.12	1.26	1.26	1.41	1.67	1.7	1.97	2.2	2.61
KZFSN5	1.61108	1.6188	1.62692	1.63548	1.63649	1.64075	1.64645	1.6492	1.64998	1.6507	1.65397	1.65411	1.65803	1.66571	1.66668	1.67512	1.68318	1.6976
ρ_λ	12.91	15.48	18.05	14.99	14.09	10.25	6.52	5.34	5.06	4.82	3.92	3.88	3.11	2.15	2.06	1.49	1.15	0.78
P_λ	-0.13	-0.11	-0.03	0.32	0.38	0.64	0.95	1.09	1.12	1.15	1.29	1.3	1.45	1.73	1.76	2.05	2.33	2.82
N-KZFS11	1.59699	1.60439	1.61223	1.62044	1.62139	1.6254	1.6307	1.63324	1.63396	1.63462	1.63762	1.63775	1.64132	1.64828	1.64915	1.65671	1.66384	1.67636
ρ_λ	13.22	15.71	18.26	15.42	14.54	10.69	6.88	5.66	5.36	5.11	4.17	4.14	3.33	2.32	2.23	1.63	1.27	0.89
P_λ	-0.12	-0.1	-0.03	0.3	0.36	0.62	0.93	1.06	1.1	1.13	1.26	1.27	1.42	1.68	1.71	1.97	2.21	2.61
KZFS12	1.6497	1.65749	1.6658	1.67488	1.67598	1.68072	1.68717	1.69033	1.69122	1.69206	1.69583	1.696	1.70054	1.70951	1.71064	1.7206	1.73016	1.74747
ρ_λ	13.65	16.23	18.5	14.59	13.63	9.7	6.07	4.94	4.68	4.45	3.6	3.57	2.85	1.96	1.88	1.35	1.03	0.7
P_λ	-0.12	-0.1	-0.01	0.35	0.41	0.67	0.98	1.11	1.15	1.18	1.32	1.32	1.48	1.77	1.8	2.11	2.39	2.93
SF57HT	1.79026	1.79539	1.80187	1.81185	1.81335	1.82038	1.83102	1.8365	1.83809	1.83957	1.84636	1.84666	1.85503	1.87205	1.87424	1.89395	1.91363	1.95133
ρ_λ	26.55	28.08	25	13.18	11.83	7.45	4.28	3.4	3.2	3.03	2.41	2.38	1.87	1.24	1.19	0.83	0.62	0.39
P_λ	-0.06	-0	0.17	0.57	0.62	0.84	1.12	1.24	1.27	1.31	1.45	1.45	1.62	1.95	1.99	2.37	2.76	3.56
SF57HHT	1.79026	1.79539	1.80187	1.81185	1.81335	1.82038	1.83102	1.8365	1.83809	1.83957	1.84636	1.84666	1.85503	1.87205	1.87424	1.89395	1.91363	1.95133
ρ_λ	26.55	28.08	25	13.18	11.83	7.45	4.28	3.4	3.2	3.03	2.41	2.38	1.87	1.24	1.19	0.83	0.62	0.39
P_λ	-0.06	-0	0.17	0.57	0.62	0.84	1.12	1.24	1.27	1.31	1.45	1.45	1.62	1.95	1.99	2.37	2.76	3.56