



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**FORMULACIÓN 3+1 EN
SIMETRÍA ESFÉRICA:
APLICACIONES NUMÉRICAS**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
F Í S I C O
P R E S E N T A :
JUAN CARLOS DEGOLLADO DAZA



DIRECTOR DE TESIS:
DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA

2005



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

m. 342546



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
 "Formulación 3+1 en Simetría esférica: aplicaciones numéricas"

realizado por Degollado Daza Juan Carlos

con número de cuenta 09711047-5 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
 Propietario Dr. Miguel Alcubierre Moya

Propietario Dr. Darío Núñez Zúñiga

Propietario Dr. Jorge Cervantes Cota

Suplente Dr. Alejandro Corichi Rodríguez Gil

Suplente Dr. José Antonio de Diego Onsurbe

Consejo Departamental de Física

M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ

Formulación 3+1 en Simetría esférica: aplicaciones numéricas

Índice general

Agradecimientos	iv
Introducción	v
1. Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General	1
1.1. Foliación del espacio-tiempo	1
1.2. Variables ADM	3
1.3. Descomposición ortogonal de tensores	5
1.4. Ecuaciones de Gauss-Codazzi y Codazzi-Mainardi	8
1.5. Proyección de las ecuaciones de Einstein	9
1.6. Principios variacionales y ecuaciones de Hamilton	12
1.7. Ecuaciones ADM	18
2. Condiciones de norma	20
2.1. Función de lapso	20
2.1.1. Foliación geodésica	21
2.1.2. Lapso maximal	21
2.1.3. Evasión de singularidades	24
2.1.4. Condiciones de foliación hiperbólicas	24
a) Foliación Armónica	25
b) Foliación $1+\log$	26
c) Bona-Massó modificado	26

2.2. Vector de corrimiento	27
2.2.1. Distorsión mínima	27
3. Hiperbolicidad	30
3.1. Ecuación de onda	30
3.2. Ecuación de advección	31
3.3. Sistemas hiperbólicos	32
4. Ecuaciones de Einstein en Simetría Esférica	35
4.1. Métrica	35
4.2. Materia	35
4.3. Ecuaciones de Einstein en simetría esférica	36
4.4. Hiperbolicidad de las ecuaciones de Einstein	39
5. Simulaciones numéricas	42
5.1. Códigos numéricos	42
5.1.1. Diferencias finitas	42
5.1.2. Consistencia	44
5.1.3. Convergencia	45
5.1.4. Estabilidad	45
5.2. Ecuaciones de Einstein en simetría esférica	46
5.2.1. Regularización	46
5.3. Programa OLLINSPHERE	48
5.4. Simulaciones numéricas, ejemplos	49
5.4.1. El espacio tiempo de Minkowski	49
5.4.2. El espacio-tiempo de Schwarzschild	51
6. Agujeros de gusano	55
6.1. El puente de Einstein-Rosen	55
6.2. Agujeros de gusano atravesables	56

6.2.1. Propiedades de un agujero de gusano atravesable	56
6.3. Estabilidad de un agujero de gusano	57
6.3.1. Campo fantasma	57
6.3.2. Agujero de gusano estático	57
6.3.3. Condiciones iniciales	59
6.3.4. Perturbación del agujero de gusano	59
6.4. Resultados de la simulación numérica	60
Bibliografía	68

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres: Leonardo Y Guadalupe por haberme permitido estudiar algo que me gusta, a mis hermanos: Laura, Angelica, Enrique y Marissa por haber estado allí en los momentos difíciles, a mis amigos: Hugo, Daniel y Enrique por brindarme su amistad incondicional, a Edna por su comprensión, al Dr. Alcubierre por su paciencia al revisar y corregir este trabajo, al Dr. Darío Núñez por sus enseñanzas y a todas aquellas personas que contribuyeron de alguna u otra forma al mejoramiento de este trabajo.

Introducción

La teoría general de la relatividad describe la naturaleza de los campos gravitacionales. Las ecuaciones de Einstein predicen fenómenos antes inesperados tales como el colapso gravitacional, las ondas gravitacionales y la expansión del universo. Las ecuaciones de Einstein consisten en 10 ecuaciones diferenciales parciales para las 10 componentes de la métrica, y no es fácil resolverlas incluso cuando se trata de sistemas que presentan altos grados de simetría. Por mucho tiempo se ha estudiado el problema de relatividad general encontrando soluciones exactas, desarrollando métodos de aproximación o simplificando las ecuaciones imponiendo simetrías, sin embargo, la forma *directa* es la integración numérica de las ecuaciones. Este campo de investigación es conocido como relatividad numérica.

La relatividad numérica, simulación computacional en la relatividad general, es un campo de investigación que está muy cercano a las observaciones físicas, tal como la astronomía de ondas gravitacionales.

Dificultades como evoluciones estables y de largo término, se suponía serían superadas escogiendo condiciones de frontera adecuadas y elecciones de norma convenientes, sin embargo, experimentos numéricos recientes, muestran que la formulación estándar no es la más adecuada para hacer cálculos numéricos, y el encontrar mejores formulaciones se ha convertido en uno de los principales temas de investigación.

Este trabajo pretende ser una introducción y una motivación para el estudio profundo de la relatividad numérica. En él se exponen las ideas principales sobre la formulación estándar de la relatividad general para hacer un análisis numérico, se dan nociones sobre el tipo de herramienta matemática y numérica para llevar a cabo este análisis y se estudia como caso particular las ecuaciones de Einstein en simetría esférica. Finalmente se estudia un sistema en el cual se pueden aplicar los conceptos desarrollados a lo largo del trabajo, un agujero de gusano.

El trabajo está estructurado como sigue: En el capítulo 1 se hace una revisión detallada de la descomposición 3+1 de relatividad general tal como fue concebida por Arnowitt-Deser y Misner [10] la cual requiere una distinción entre espacio y tiempo. En efecto el primer paso es elegir una

función tiempo que marque a las superficies espaciales, luego se introducen la función lapso y el vector de corrimiento que, junto con la métrica inducida sobre la hipersuperficie, constituyen lo que se conoce como variables ADM. El procedimiento descrito rompe la covarianza, no obstante este método permite separar las constricciones de las ecuaciones de movimiento, lo que nos permite resolver las ecuaciones de Einstein como un problema de evolución.

El capítulo 2 esta dedicado a discutir las condiciones de norma, que dicen básicamente como se debe construir nuestro espacio-tiempo a partir de las condiciones iniciales.

En el capítulo 3 se dan las nociones básicas sobre sistemas hiperbólicos y las bondades que tiene el escribir de esta forma un sistema de ecuaciones.

En el capítulo 4 se particulariza a estudiar un espacio-tiempo esféricamente simétrico y en el capítulo 5 se introducen los conceptos y herramientas necesarias para entender lo que hay detrás de una simulación numérica.

Finalmente en el capítulo 6 se muestra la evolución de un espacio-tiempo que posee un agujero de gusano y se estudia el efecto que tiene una perturbación en él.

Capítulo 1

Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General

1.1. Foliación del espacio-tiempo

Las ecuaciones de Einstein están escritas de manera tensorial, así que no es necesario formularlas en un sistema de coordenadas específico. Sin embargo, esta forma presenta también un desventaja pues escritas en su forma más general, resulta que constituyen un sistema de ecuaciones altamente no lineal de segundo orden y muy enredado.

En la actualidad, y con la ayuda de las computadoras, el sistema de ecuaciones de Einstein se resuelve de manera numérica. Sin embargo, como es bien sabido no basta “decirle” a la computadora que lo resuelva, es necesario enseñarle a hacerlo y para ello hay que escribir de manera conveniente las ecuaciones. La manera más común de hacerlo es formular el problema de Cauchy correspondiente, es decir, dadas unas condiciones iniciales, y unas ecuaciones de evolución queremos saber como evolucionan las variables.

En este capítulo se desarrollará una formulación conocida como la formulación 3+1 que nos permitirá tener a las ecuaciones de Einstein como un sistema de ecuaciones de evolución y ecuaciones de restricción, para ello es necesario introducir algunos conceptos que serán útiles en el transcurso de éste trabajo.

Para cada punto p en el espacio-tiempo se define el *futuro cronológico de p* como el conjunto $I^+(p)$ de todos los puntos en el espacio-tiempo que pueden ser conectados con p por medio de una curva temporal con dirección al futuro.

Se dice que una hipersuperficie tridimensional S es *acrónica* si $I^+(S) \cap S = \emptyset$, en otras palabras.

si no existen puntos (p, q) pertenecientes a S tales que $q \in I^+(p)$.

Nos interesa trabajar en hipersuperficies acrónicas S que sean regulares y tales que las curvas nulas o temporales que salen de ella cubran todo el espacio-tiempo. Las hipersuperficies con estas características se llaman hipersuperficies de Cauchy. Un espacio-tiempo que contiene una hipersuperficie de Cauchy global es llamado *globalmente hiperbólico*.¹

Una función temporal de Cauchy sobre un espacio tiempo M es una función t tal que cada hipersuperficie de nivel de t es una hipersuperficie de Cauchy. Por tanto un espacio tiempo que admite una función temporal de Cauchy es globalmente hiperbólico y todo espacio-tiempo globalmente hiperbólico admite una función temporal de Cauchy. Un conjunto de hipersuperficies de Cauchy no intersecantes que llenan el espacio-tiempo se llama una *foliación* del espacio-tiempo, así pues un espacio-tiempo globalmente hiperbólico siempre admite una foliación.

Se dice que una foliación es espacial si cada hipersuperficie lo es, la foliación representa una descripción particular de M que resulta de la evolución de un campo gravitacional y sus fuentes, esta descripción depende de la elección de los datos iniciales sobre una hipersuperficie Σ_{t_0} . La construcción de la familia de hipersuperficies, así como la elección de las curvas que pasan a través de Σ_t (a lo largo de las cuales los datos iniciales son propagados de una hipersuperficie a otra) se obtienen como elecciones de norma.

Dado n^a el vector unitario normal a las hipersuperficies Σ_t , la métrica g_{ab} del espacio-tiempo M induce una métrica γ_{ab} sobre cada Σ_t dada por:

$$\gamma_{ab} = g_{ab} + n_a n_b. \quad (1.1)$$

Sobre cada hipersuperficie los observadores cuya cuatro velocidad esta dada por el vector n^a están momentáneamente en reposo y "miden" sus distancias propias con la métrica γ_{ab} inducida. Hay que notar que γ_{ab} es un tensor "espacial" pues $\gamma_{ab} n^b = 0$. La métrica inversa es:

$$\gamma^{ab} = g^{ac} g^{bd} \gamma_{cd} = g^{ab} + n^a n^b. \quad (1.2)$$

Y su forma mixta es el operador unitario de proyección sobre la hipersuperficie

$$\gamma^a_b = g^a_b + n^a n_b. \quad (1.3)$$

¹En un espacio tiempo globalmente hiperbólico se tiene que $M = m \times R$, es decir es el producto cartesiano de una variedad tridimensional con R .

Un problema esencial en relatividad general es que no existe a priori una familia de hipersuperficies preferida para un campo gravitacional desconocido, este problema será discutido en el siguiente capítulo.

1.2. Variables ADM

Considerando un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, podemos foliarlo con hipersuperficies de Cauchy Σ_t parametrizadas por una función de tiempo global t . Las hipersuperficies quedan definidas por la condición $t = cte$. Un campo vectorial importante en la descomposición 3+1 es el vector t^μ que forma el conjunto de vectores tangentes a las curvas dibujadas por $x^i = cte$, con x^i las coordenadas espaciales. En el contexto de la formulación 3+1 de la Relatividad General, la dinámica del espacio-tiempo estará dada por la evolución de la tres-geometría. Las hipersuperficies representan una familia de subespacios Riemannianos de dimensión tres dotados de una métrica inducida sobre la variedad tridimensional. Resulta natural considerar a la tres-métrica inducida por g_{ab} sobre Σ_t como una variable dinámica.

Se asume que se puede definir un sistema de coordenadas adaptadas locales ² sobre Σ_t tal que $x^\nu = (t, x^1, x^2, x^3)$ representa también un sistema local de coordenadas de M , es decir, las hipersuperficies pueden representarse por el sistema de ecuaciones paramétricas $x^\mu = x^\mu(x^a, t)$. Al ser n^ν ortonormal a las hipersuperficies $t = cte$ existe una función α que relaciona ∇t y n^ν tal que

$$n = -\alpha \nabla t. \quad (1.4)$$

(∇ es la derivada covariante compatible con g_{ab}), la función escalar α se denomina *lapso* y se introduce para normalizar a n^ν .

El vector de corrimiento se define como la proyección del vector t^ν sobre la hipersuperficie Σ_t

$$\beta^\mu := \gamma^\mu_\nu t^\nu. \quad (1.5)$$

Por tanto el vector t^μ , se descompone ortogonalmente como:

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu, \quad (1.6)$$

Hay que notar que la elección de las funciones de lapso y corrimiento no están dadas a priori por la geometría de las hipersuperficies Σ_t sino se pueden fijar a cada instante de tiempo para indicar la forma en que evolucionan las hipersuperficies.³

²A partir de este momento se utilizan índices griegos para indicar que se ha escogido un sistema coordenado y corren de 0 a 3, mientras que los índices latinos toman valores de 1 a 3.

³Hay que notar sin embargo que se requiere que t^μ no sea tangente a la hipersuperficie.

Puesto que estamos considerando el sistema de coordenadas adaptadas podemos obtener las componentes contravariantes del vector $n_\alpha := (-\alpha, 0, 0, 0)$. Además, gracias a la condición de normalización, encontramos que su componente temporal covariante es $n^t = 1/\alpha$ y por la definición del vector de corrimiento:

$$\beta^t = 0,$$

lo cual implica por (1.6) que:

$$n^\alpha = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha). \quad (1.7)$$

Si se utilizan las componentes contravariantes del vector normal y la condición de normalización, se puede encontrar la componente g^{00} a partir de:

$$g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{00} \alpha^2 = -1.$$

por lo cual $g^{00} = -1/\alpha^2$.

La tres-métrica es:

$$\gamma^{ij} = g^{ij} + n^i n^j. \quad (1.8)$$

y si se escribe la métrica en forma matricial:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^i}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^i}{\alpha^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Por la definición de la métrica inducida sobre Σ_t tenemos:

$$g_{ij} = \gamma_{ij}, \quad (1.10)$$

$$g_{tt} = -\alpha^2 + \beta^i \beta_i, \quad (1.11)$$

donde se ha utilizado la tres-métrica para bajar el índice a β^i la forma matricial de la métrica es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta^i \beta_i & \beta_i \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Calculando g , el determinante de $g_{\mu\nu}$, se obtiene:

$$g = -\alpha^2 \gamma,$$

con γ el determinante de γ_{ij} . El elemento de línea queda como:

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta^i \beta_i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.13)$$

las variables α , β_i y γ_{ij} se conocen como variables ADM⁴, que corresponden a las diez componentes linealmente independientes de la métrica $g_{\mu\nu}$.

Un concepto fundamental en la formulación Einsteiniana de la gravedad es el de curvatura, así definimos la curvatura “extrínseca” o segunda forma fundamental como:

$$K_{ij} = \gamma_i^k \nabla_k n_j, \quad (1.14)$$

que se puede escribir en forma equivalente como:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma_{ij}, \quad (1.15)$$

donde \mathcal{L}_n se refiere a la derivada de Lie en dirección del vector normal⁵.

Basta utilizar la linealidad de la derivada de Lie para escribirla en términos del vector de corrimiento como:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} - D_j \beta_i - D_i \beta_j \right), \quad (1.16)$$

donde se ha introducido D_i que se refiere al operador de derivada covariante compatible con γ_{ij} . Es importante señalar que esta ecuación es puramente geométrica y corresponde a la evolución de la tres métrica:

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -2\alpha K_{ij} + D_j \beta_i + D_i \beta_j. \quad (1.17)$$

1.3. Descomposición ortogonal de tensores

Para estudiar la geometría intrínseca de la hipersuperficie Σ_t y poder estudiar la dinámica regida por las ecuaciones de Einstein, proyectamos los tensores definidos sobre $T_p(M)$ en $T_p(\Sigma_t)$, los espacios tangentes de M y Σ_t respectivamente.

⁴Arnowitt-Deser-Misner propusieron en éstas variables fundamentales en la descomposición 3+1.

⁵La curvatura extrínseca de una hipersuperficie no tiene significado para la tres geometría concebida por sí misma, adquiere su significado e importancia al ser considerada inmersa en una variedad de dimensión mayor.

Un 4-vector $\omega \in T_p(M)$ se descompone en componentes normales como :

$${}^4\omega = {}^3\omega + \omega_{\perp} \mathbf{n}.$$

donde $\omega_{\perp} := -n_{\mu} \omega^{\mu}$, y ${}^3\omega^{\alpha} = \gamma_{\beta}^{\alpha} \omega^{\beta}$.

En el caso en que tenemos un tensor de tipo $(1,1)$

$${}^3V_{\alpha}^{\beta} := \gamma_{\nu}^{\beta} \gamma_{\alpha}^{\mu} V_{\mu}^{\nu}, \quad (1.18)$$

es decir, simplemente proyectamos con el operador definido en (1.3) de tal manera que obtenemos

$${}^3V_{\alpha}^{\beta} = V_{\alpha}^{\beta} - V_{\perp}^{\beta} n_{\alpha} - V_{\alpha}^{\perp} n^{\beta} + V_{\perp}^{\perp} n_{\alpha} n^{\beta}, \quad (1.19)$$

puesto que es posible descomponer en componentes normales como:

$$V_{\alpha}^{\perp} = {}^3V_{\alpha}^{\perp} + n_{\alpha} V_{\perp}^{\perp},$$

$$V_{\perp}^{\beta} = {}^3V_{\perp}^{\beta} + n^{\beta} V_{\perp}^{\perp},$$

donde se ha utilizado:

$$V_{\perp}^{\perp} = -n_{\beta} V_{\perp}^{\beta} = n_{\mu} n^{\nu} V_{\nu}^{\mu}.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (1.19) se tiene finalmente:

$${}^3V_{\alpha}^{\beta} = V_{\alpha}^{\beta} - {}^3V_{\perp}^{\beta} n_{\alpha} - {}^3V_{\alpha}^{\perp} n^{\beta} - V_{\perp}^{\perp} n_{\alpha} n^{\beta}.$$

Así un tensor de tipo $(1,1)$ se puede descomponer como:

$$V_{\alpha}^{\beta} = {}^3V_{\alpha}^{\beta} + {}^3V_{\perp}^{\beta} n_{\alpha} + {}^3V_{\alpha}^{\perp} n^{\beta} + V_{\perp}^{\perp} n_{\alpha} n^{\beta}. \quad (1.20)$$

El tener un espacio dotado de una derivada es muy importante para realizar cálculos sobre ella, en especial para tener información acerca de su geometría, sin embargo la descomposición ortogonal de derivadas es un poco diferente, considérese la derivada de un 3-vector:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} {}^3\omega^{\nu} &= \nabla_{\mu} \gamma_{\sigma}^{\nu} \omega^{\sigma} \\ &= \omega^{\sigma} \nabla_{\mu} \gamma_{\sigma}^{\nu} + \gamma_{\sigma}^{\nu} \nabla_{\mu} \omega^{\sigma} \\ &= \gamma_{\sigma}^{\nu} \nabla_{\mu} \omega^{\sigma} + \omega^{\sigma} n_{\sigma} \nabla_{\mu} n^{\nu} + n^{\nu} \omega^{\sigma} \nabla_{\mu} n_{\sigma} \\ &= \gamma_{\sigma}^{\nu} \nabla_{\mu} \omega^{\sigma} - \omega_{\perp} \nabla_{\mu} n^{\nu} + n^{\nu} \omega^{\sigma} \nabla_{\mu} n_{\sigma} \\ &= \gamma_{\sigma}^{\nu} \nabla_{\mu} \omega^{\sigma} + \omega_{\perp} (K_{\mu}^{\nu} + a^{\nu} n_{\mu}) - n^{\nu} \omega^{\sigma} (K_{\mu\sigma} + a_{\sigma} n_{\mu}). \end{aligned}$$

El vector a^ν se define como: $a^\nu = n^\mu \nabla_\mu n^\nu$. Al proyectar la ecuación anterior es posible obtener una relación entre la proyección de la cuatro-derivada con la derivada definida en la hipersuperficie ⁶ mediante:

$$\gamma_\alpha^\mu \nabla_\mu {}^3\omega^\sigma = D_\alpha {}^3\omega^\sigma - n^{\sigma\lambda} K_{\alpha\lambda}. \quad (1.21)$$

donde se ha utilizado la definición $D_\alpha \omega^\mu := \gamma_\alpha^\nu \gamma_\lambda^\mu \nabla_\nu \omega^\lambda$ y la relación $\gamma_\lambda^\gamma \gamma_\alpha^\mu \nabla_\gamma \omega^\alpha = \gamma_\lambda^\gamma \gamma_\alpha^\mu \nabla_\gamma {}^3\omega^\alpha - \omega_\perp K_\lambda^\mu$.

Por otra parte se tiene la descomposición de $\nabla_\mu \omega^\nu$ como:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \omega^\nu &= \nabla_\mu ({}^3\omega^\nu + \omega_\perp n^\nu) \\ &= \nabla_\mu {}^3\omega^\nu + \omega_\perp \nabla_\mu n^\nu + n^\nu \nabla_\mu \omega_\perp \\ &= \nabla_\mu {}^3\omega^\nu + n^\nu \nabla_\mu \omega_\perp - \omega_\perp (K_\mu^\nu + a^\nu n_\mu), \end{aligned}$$

Si se escribe ahora:

$$\nabla_\mu = \gamma_\mu^\alpha \nabla_\alpha + n_\mu \nabla_\perp,$$

donde se ha tomado $\nabla_\perp := -n^\alpha \nabla_\alpha$, y si se sustituye en $\nabla_\mu \omega^\nu$ tendremos la expresión siguiente:

$$\nabla_\mu \omega^\nu = \gamma_\mu^\alpha \nabla_\alpha {}^3\omega^\nu + n_\mu \nabla_\perp {}^3\omega^\nu + n^\nu \gamma_\mu^\alpha \nabla_\alpha \omega_\perp + n^\nu n_\mu \nabla_\perp \omega_\perp - \omega_\perp (K_\mu^\nu + a^\nu n_\mu),$$

Que sustituyendo la expresión (1.21) y reordenando tendremos:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \omega^\nu &= D_\mu {}^3\omega^\nu - \omega_\perp K_\mu^\nu + n^\nu (D_\mu \omega_\perp - {}^3\omega^\alpha K_{\alpha\mu}) \\ &\quad + n_\mu (\nabla_\perp {}^3\omega^\nu - a^\nu \omega_\perp) + n^\nu n_\mu \nabla_\perp \omega_\perp. \end{aligned}$$

Se obtiene un resultado importante que utilizaremos más adelante al contraer μ y ν :

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \omega^\mu &= D_\mu {}^3\omega^\mu + n_\mu \nabla_\perp {}^3\omega^\mu \\ &= D_\mu {}^3\omega^\mu - {}^3\omega^\mu \nabla_\perp n_\mu \\ &= D_\mu {}^3\omega^\mu + {}^3\omega^\mu a_\mu. \end{aligned} \quad (1.22)$$

que tiene importancia pues relaciona las *divergencias* de una forma diferencial en ambas variedades.

⁶El operador D_α se define como la proyección de la cuatro-derivada ∇_α sobre la hipersuperficie Σ , y resulta además que es la derivada covariante compatible con γ_{ij}

1.4. Ecuaciones de Gauss-Codazzi y Codazzi-Mainardi

Con el propósito de obtener al tensor de curvatura definido sobre Σ_t en términos de la derivada definida sobre M y tener una expresión que podamos calcular, aplicamos D a una 3-forma y lo descomponemos en términos de la derivada ∇ como sigue:

$$\begin{aligned} D_\rho D_\beta^3 \omega_\mu &= \gamma_\rho^\alpha \gamma_\beta^\delta \gamma_\mu^\tau \nabla_\alpha (\gamma_\delta^\varepsilon \gamma_\tau^\theta \nabla_\varepsilon^3 \omega_\theta) \\ &= \gamma_\rho^\alpha \gamma_\beta^\delta \gamma_\mu^\tau [(\nabla_\alpha \gamma_\delta^\varepsilon) \gamma_\tau^\theta \nabla_\varepsilon^3 \omega_\theta + \gamma_\delta^\varepsilon (\nabla_\alpha \gamma_\tau^\theta) \nabla_\varepsilon^3 \omega_\theta + \gamma_\delta^\varepsilon \gamma_\tau^\theta \nabla_\alpha \nabla_\varepsilon^3 \omega_\theta] \end{aligned}$$

tomando en cuenta además que $\gamma_\rho^\alpha \gamma_\beta^\delta \nabla_\alpha \gamma_\delta^\varepsilon = -n^\varepsilon K_{\beta\varepsilon}$, relación que se obtiene inmediatamente al escribir $\gamma_\delta^\varepsilon$ como $\delta_\delta^\varepsilon + n^\varepsilon n_\delta$ e identificar términos, es posible simplificar y obtener

$$D_\rho D_\beta^3 \omega_\mu = -(\gamma_\mu^\theta n^\varepsilon K_{\rho\beta} + \gamma_\beta^\theta n^\rho K_{\mu\rho}) \nabla_\varepsilon^3 \omega_\theta + \gamma_\rho^\alpha \gamma_\beta^\delta \gamma_\mu^\tau \nabla_\alpha \nabla_\varepsilon^3 \omega_\theta.$$

Con la definición general del tensor de curvatura ${}^3R_{\rho\beta\nu}{}^\mu({}^3\omega_\mu) := (D_\rho D_\beta - D_\beta D_\rho){}^3\omega_\nu$, y la relación anterior se llega a:

$$\begin{aligned} (D_\rho D_\beta - D_\beta D_\rho){}^3\omega_\mu &= (K_{\mu\beta} K_\rho^\theta - K_{\mu\rho} K_\beta^\theta){}^3\omega_\theta + \gamma_\rho^\alpha \gamma_\beta^\delta \gamma_\mu^\tau (\nabla_\alpha \nabla_\varepsilon - \nabla_\varepsilon \nabla_\alpha){}^3\omega_\theta \\ &= (K_{\mu\beta} K_\rho^\theta - K_{\mu\rho} K_\beta^\theta){}^3\omega_\theta + \gamma_\rho^\alpha \gamma_\beta^\delta \gamma_\mu^\tau R_{\alpha\varepsilon\theta}{}^\sigma{}^3\omega_\sigma. \end{aligned}$$

lo que nos permite obtener la relación buscada:

$${}^3R_{\rho\beta\mu}{}^\alpha = K_{\mu\beta} K_\rho^\alpha - K_{\mu\rho} K_\beta^\alpha + \gamma_\rho^\beta \gamma_\beta^\delta \gamma_\mu^\tau R_{\tau\varepsilon\theta}{}^\alpha. \quad (1.23)$$

Para encontrar el escalar de curvatura simplemente contraemos los índices α , β y ρ , μ :

$$\begin{aligned} {}^3R &= K_{\mu\beta} K^{\beta\mu} - K^2 + \gamma^{\varepsilon\alpha} \gamma^{\theta\sigma} R_{\alpha\varepsilon\theta\sigma} \\ &= K_{\mu\beta} K^{\beta\mu} - K^2 + (g^{\varepsilon\alpha} + n^\varepsilon n^\alpha)(g^{\theta\sigma} + n^\theta n^\sigma) R_{\alpha\varepsilon\theta\sigma} \\ &= K_{\mu\beta} K^{\beta\mu} - K^2 + R + 2R^{\perp\perp}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde $2R^{\perp\perp} := n^\varepsilon n^\alpha R_{\varepsilon\sigma}$ y se utilizaron las propiedades de antisimetría del tensor de Riemman para cancelar el término $n^\varepsilon n^\alpha n^\theta n^\sigma R_{\alpha\varepsilon\theta\sigma}$.

En [12] se muestra que (1.24) se puede escribir en forma más conveniente como:

$$R = {}^3R + K_{\mu\beta} K^{\beta\mu} - K^2 - 2\nabla_\alpha (a^\alpha + K n^\alpha). \quad (1.25)$$

Esta es la forma más común de la ecuaciones de *Gauss-Codazzi* que dan la relación entre los escalares de curvatura definidos sobre cada variedad. Si, por otra parte, consideramos la derivada

de la curvatura extrínseca:

$$\begin{aligned}
D_\rho K_{\nu\mu} &= \gamma_\rho^\sigma \gamma_\nu^\alpha \gamma_\mu^\beta \nabla_\sigma K_{\alpha\beta} \\
&= \gamma_\rho^\sigma \gamma_\nu^\alpha \gamma_\mu^\beta \nabla_\sigma (\gamma_\alpha^\zeta \nabla_\zeta n_\beta) \\
&= \gamma_\rho^\sigma \gamma_\nu^\alpha \gamma_\mu^\beta ((\gamma_\alpha^\zeta \nabla_\sigma \nabla_\zeta n_\beta + \nabla_\sigma (\gamma_\alpha^\zeta) \nabla_\zeta n_\beta)) \\
&= K_{\rho\nu} n^\alpha \gamma_\mu^\beta \nabla_\alpha n_\beta - \gamma_\rho^\sigma \gamma_\nu^\zeta \gamma_\mu^\beta \nabla_\sigma \nabla_\zeta n_\beta,
\end{aligned}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
D_\rho K_{\nu\mu} - D_\nu K_{\rho\mu} &= -\gamma_\rho^\sigma \gamma_\nu^\zeta \gamma_\mu^\beta (\nabla_\sigma \nabla_\zeta - \nabla_\zeta \nabla_\sigma) n_\beta \\
&= -\gamma_\rho^\sigma \gamma_\nu^\zeta \gamma_\mu^\beta R_{\sigma\zeta\beta}^\alpha n_\alpha,
\end{aligned}$$

Obtenemos las ecuaciones de Codazzi-Mainardi.

$$D_\rho K_{\nu\mu} - D_\nu K_{\rho\mu} = -\gamma_\rho^\sigma \gamma_\nu^\zeta \gamma_\mu^\beta R_{\sigma\zeta\beta}^\alpha, \quad (1.26)$$

1.5. Proyección de las ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein se escriben como⁷:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

si proyectamos esta ecuación con un índice en dirección normal y otro en dirección de la hipersuperficie tenemos:

$$\gamma_\lambda^\mu n^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \gamma_{\lambda\nu} n^\nu = 8\pi \gamma_\lambda^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \quad (1.28)$$

Si contraemos la derivada de la curvatura extrínseca dada por las ecuaciones de Codazzi-Mainardi (1.26) tendremos:

$$\begin{aligned}
D_\rho K_\nu^\rho - D_\nu K &= -\gamma_\nu^\zeta \gamma^{\beta\sigma} R_{\sigma\zeta\beta\alpha} n^\alpha \\
&= -\gamma_\nu^\zeta n^\alpha R_{\zeta\alpha} - \gamma_\nu^\zeta n^\beta n^\sigma R_{\sigma\zeta\beta\alpha} n^\alpha \\
&= -\gamma_\nu^\zeta n^\alpha R_{\zeta\alpha}
\end{aligned}$$

donde, por la antisimetría del tensor de Riemman, el término $n^\beta n^\sigma R_{\sigma\zeta\beta\alpha} n^\alpha$ se anula y $K := K_\rho^\rho$.

Al sustituir en las proyecciones de las ecuaciones de Einstein (1.28) obtenemos:

$$D_\rho K_\lambda^\rho - D_\lambda K = 8\pi J_\lambda, \quad (1.29)$$

⁷Se considera el sistema geométrico de unidades en el cual la constante de gravitación universal G y la velocidad de la luz c son iguales a 1.

En donde hemos utilizado el vector de densidad de momentos definido como:

$$J_\lambda := \gamma_\lambda^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \quad (1.30)$$

A la relación (1.29) se le conoce como *constricción de momentos*.

Si proyectamos las ecuaciones (1.27) sobre la dirección normal con $n^\mu n^\nu$ encontramos.

$$\begin{aligned} n^\mu n^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R n^\mu n^\nu g_{\mu\nu} &= n^\mu n^\nu R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R \\ &= 8\pi n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \\ &= 8\pi\rho \end{aligned}$$

donde ρ es la densidad de materia que se define como $\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$. Utilizando (1.24) para sustituir $n^\mu n^\nu R_{\mu\nu}$ llegamos a:

$${}^3R - K_{\mu\lambda} K^{\beta\mu} + K^2 = 16\pi\rho. \quad (1.31)$$

La ecuación (1.31) es la *constricción hamiltoniana*.

Si tomamos la traza de las ecuaciones de Einstein obtenemos que

$$R_\sigma^\mu = -4\pi(\gamma_\sigma^\mu T - 2T_\sigma^\mu).$$

y después de proyectar sobre una hipersuperficie encontramos

$$\gamma_\mu^\alpha \gamma_\beta^\mu R_\sigma^\mu = -4\pi(\gamma_\beta^\alpha T - 2S_\beta^\alpha), \quad (1.32)$$

donde hemos definido $S_\beta^\alpha := \gamma_\mu^\alpha \gamma_\beta^\mu T_\sigma^\mu$. Al contraer los índices 2 y 3 en la ecuación (1.23) se obtiene:

$$R_{\rho\mu} := R_{\rho\sigma\mu}{}^\sigma = K_\rho^\alpha K_{\alpha\mu} - K_\alpha^\alpha K_{\rho\mu} + \gamma_\rho^\sigma \gamma_\alpha^\delta \gamma_\mu^\theta R_{\sigma\delta\theta}{}^\alpha. \quad (1.33)$$

El último término de esta ecuación lo podemos escribir también como:

$$\begin{aligned} \gamma_\rho^\sigma \gamma_\alpha^\delta \gamma_\mu^\theta R_{\sigma\delta\theta}{}^\alpha &= \gamma_\rho^\sigma \gamma_\mu^\theta (\delta_\alpha^\delta + n_\alpha n^\delta) R_{\sigma\delta\theta}{}^\alpha \\ &= \gamma_\rho^\sigma \gamma_\mu^\theta R_{\sigma\theta} + \gamma_\rho^\sigma \gamma_\mu^\theta R_{\sigma\perp\theta}{}^\perp. \end{aligned} \quad (1.34)$$

El siguiente paso es escribir estas ecuaciones en términos de las variables ADM, para ello contraemos el tensor de curvatura con el vector normal a las hipersuperficies:

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta n_\delta = \nabla_\alpha \nabla_\beta n_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha n_\gamma.$$

al proyectar con el vector normal:

$$\begin{aligned}
n^\lambda R_{\alpha\lambda\gamma}{}^\delta n_\delta &= n^\lambda \nabla_\alpha \nabla_\lambda n_\gamma - n^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\alpha n_\gamma \\
&= \nabla_\alpha (n^\lambda \nabla_\lambda n_\gamma) - (\nabla_\alpha n^\lambda) (\nabla_\lambda n_\gamma) + n^\lambda \nabla_\lambda (K_{\gamma\alpha} + a_\gamma n_\alpha) \\
&= \nabla_\alpha a_\gamma - (K_\alpha^\lambda + a^\lambda n_\alpha) (K_{\gamma\lambda} + a_\gamma n_\lambda) + n^\lambda \nabla_\lambda K_{\gamma\alpha} + n^\lambda \nabla_\lambda a_\gamma n_\alpha \\
&= \nabla_\alpha a_\gamma - K_\alpha^\lambda K_{\gamma\lambda} - a^\lambda n_\alpha K_{\gamma\lambda} + n^\lambda \nabla_\lambda K_{\gamma\alpha} + a^\lambda n_\alpha \nabla_\lambda a_\gamma + a_\gamma a^\alpha.
\end{aligned}$$

Podemos escribir entonces:

$$\gamma_\sigma^\alpha \gamma_\beta^\theta R_{\perp\theta}^{\sigma\perp} = \gamma_\theta^\alpha \gamma_\beta^\gamma \nabla^\theta a_\gamma - K^{\lambda\alpha} K_{\lambda\beta} + \gamma_\theta^\alpha \gamma_\beta^\gamma n^\lambda \nabla_\lambda K_\gamma^\theta + a_\gamma a^\alpha.$$

El tercer término lo podemos escribir, después de sumar y restar términos, como:

$$n^\lambda \nabla_\lambda K_\gamma^\theta = n^\lambda \nabla_\lambda K_\gamma^\theta - K_\gamma^\lambda \nabla_\lambda n^\theta + K_\lambda^\theta \nabla_\gamma n^\lambda + K_\gamma^\lambda \nabla_\lambda n^\theta - K_\lambda^\theta \nabla_\gamma n^\lambda,$$

si además introducimos la derivada de Lie $(\mathcal{L}_n \mathbf{K})_\gamma^\theta$ en la expresión anterior (que reconocemos como los primeros tres términos) y sustituimos $K_{\alpha\beta} = -\nabla_\beta n_\alpha - a_\alpha n_\beta$ encontramos:

$$\begin{aligned}
n^\lambda \nabla_\lambda K_\gamma^\theta &= (\mathcal{L}_n \mathbf{K})_\gamma^\theta - K_\gamma^\lambda (K_\lambda^\theta + a^\theta n_\lambda) + K_\lambda^\theta (K_\gamma^\lambda + a^\lambda n_\gamma) \\
&= (\mathcal{L}_n \mathbf{K})_\gamma^\theta + a^\lambda n_\gamma K_\lambda^\theta.
\end{aligned}$$

Al sustituir en términos de la derivada de Lie se obtiene:

$$\gamma_\beta^\theta \gamma_\sigma^\alpha R_{\perp\theta}^{\sigma\perp} = D^\alpha a_\beta - K^{\lambda\alpha} K_{\lambda\beta} + \gamma_\theta^\alpha \gamma_\beta^\lambda (\mathcal{L}_n \mathbf{K})_\gamma^\theta + a^\alpha a_\beta.$$

Llevando este resultado a

$$\gamma_\beta^\alpha \gamma_\mu^\sigma R_\sigma^\mu = {}^3 R_\beta^\alpha + K K_\beta^\alpha - K_\lambda^\alpha K_\beta^\lambda - \gamma_\theta^\alpha \gamma_\beta^\theta R_{\perp\theta}^{\sigma\perp}, \quad (1.35)$$

relación que se obtiene al sustituir (1.34) en (1.33) y subir el segundo índice tenemos que:

$$\gamma_\beta^\theta \gamma_\sigma^\alpha R_{\perp\theta}^{\sigma\perp} = {}^3 R_\beta^\alpha + K K_\beta^\alpha - D^\alpha a_\beta - \gamma_\theta^\alpha \gamma_\beta^\lambda (\mathcal{L}_n \mathbf{K})_\gamma^\theta - a^\alpha a_\beta. \quad (1.36)$$

La derivada de la curvatura a lo largo del vector normal esta dada por:

$$(\mathcal{L}_n \mathbf{K})_\gamma^\theta = n^\lambda \partial_\lambda K_\gamma^\theta - K_\gamma^\lambda \partial_\lambda n^\theta + K_\lambda^\theta \partial_\gamma n^\lambda,$$

Puesto que la derivada de Lie es invariante ante el intercambio de derivada covariante por derivada parcial. Sustituyendo $n^\mu = \frac{1}{\alpha}(\mu^\mu - \beta^\mu)$ es posible escribir [12]:

$$(\mathcal{L}_n \mathbf{K})_\gamma^\theta = n^\lambda \partial_\lambda K_\gamma^\theta - \frac{K_\gamma^\lambda}{\alpha} \partial_\lambda \beta^\theta + \frac{K_\lambda^\theta}{\alpha} \partial_\gamma \beta^\lambda + \frac{K_\gamma^\lambda n^\theta}{\alpha} \partial_\lambda \alpha. \quad (1.37)$$

Si ahora proyectamos sobre la hipersuperficie:

$$\gamma_\beta^\alpha \gamma_\beta^\gamma (\mathcal{L}_n \mathbf{K})_\gamma^\theta = \gamma_\beta^\alpha \gamma_\beta^\gamma n^\lambda \partial_\lambda K_\gamma^\theta - \frac{K_\beta^\lambda \gamma_\sigma^\alpha}{\alpha} \partial_\gamma \beta^\sigma + \frac{K_\sigma^\alpha \gamma_\beta^\gamma}{\alpha} \partial_\gamma \beta^\sigma, \quad (1.38)$$

podemos escribir (1.36) como:

$$\gamma_\beta^\alpha \gamma_\mu^\alpha R_\sigma^\mu = {}^3 R_\beta^\alpha + K K_\beta^\alpha - D^\alpha a_\beta - \gamma_\beta^\alpha \gamma_\beta^\gamma n^\lambda \partial_\lambda K_\gamma^\theta + \frac{K_\beta^\lambda \gamma_\sigma^\alpha}{\alpha} \partial_\gamma \beta^\sigma - \frac{K_\sigma^\alpha \gamma_\beta^\gamma}{\alpha} \partial_\gamma \beta^\sigma - a^\alpha a_\beta. \quad (1.39)$$

Al expresar la aceleración en términos del lapso [15]

$$a_\beta = \gamma_\beta^\alpha \nabla_\sigma (\ln(\alpha)) = \frac{D_\beta \alpha}{\alpha},$$

obtenemos su derivada como:

$$D^\alpha a_\beta = D^\alpha \left(\frac{D_\beta \alpha}{\alpha} \right) = \frac{D^\alpha D_\beta \alpha}{\alpha} - \frac{(D^\alpha \alpha)(D_\beta \alpha)}{\alpha^2},$$

resulta entonces que podemos sustituir $-D^\alpha a_\beta - a^\alpha a_\beta = -\frac{D^\alpha D_\beta \alpha}{\alpha}$ en las ecuaciones (1.32) y (1.39) para obtener

$${}^3 R_\beta^\alpha + K K_\beta^\alpha - \gamma_\beta^\alpha \gamma_\beta^\gamma n^\lambda \partial_\lambda K_\gamma^\theta + \frac{K_\beta^\lambda \gamma_\sigma^\alpha}{\alpha} \partial_\gamma \beta^\sigma - \frac{K_\sigma^\alpha \gamma_\beta^\gamma}{\alpha} \partial_\gamma \beta^\sigma - \frac{D^\alpha D_\beta \alpha}{\alpha} = -4\pi(\gamma_\beta^\alpha T - 2S_\beta^\alpha). \quad (1.40)$$

Hemos demostrado en (1.38) que los términos 3, 4 y 5 corresponden a la proyección de la derivada de Lie y por tanto es posible escribir:

$$\gamma_\beta^\alpha \gamma_\beta^\gamma (\mathcal{L}_n \mathbf{K})_\gamma^\theta = {}^3 R_\beta^\alpha + K K_\beta^\alpha - \frac{D^\alpha D_\beta \alpha}{\alpha}$$

que al utilizar la linealidad de la derivada de Lie y la expresión para el vector normal en términos del vector de corrimiento y el vector t^μ nos da la ecuación de evolución para \mathbf{K} :

$$\gamma_\beta^\alpha \gamma_\beta^\gamma \{ (\mathcal{L}_\beta \mathbf{K})_\gamma^\theta + (\mathcal{L}_t \mathbf{K})_\gamma^\theta \} = \alpha ({}^3 R_\beta^\alpha + K K_\beta^\alpha) - D^\alpha D_\beta \alpha + 4\pi(\gamma_\beta^\alpha T - 2S_\beta^\alpha).$$

Si escribimos esta ecuación en forma de componentes encontramos:

$$\partial_t K_j^i + \beta^l \partial_l K_j^i + K_l^i \partial_j \beta^l + K_j^l \partial_l \beta^i + D^i D_j \alpha - \alpha (R_j^i + K K_j^i) = 4\pi \alpha (\gamma_j^i T - 2S_j^i). \quad (1.41)$$

1.6. Principios variacionales y ecuaciones de Hamilton

Para la construcción de un hamiltoniano es necesaria la descomposición del espacio-tiempo en una familia de hipersuperficies espaciales. Los momentos canónicos conjugados son definidos como las variaciones de la lagrangiana con respecto a las derivadas temporales de la métrica

γ_{ij} (el parámetro t que etiqueta cada hipersuperficie). El propósito de esta sección es mostrar como a partir de principios variacionales definidos sobre la hipersuperficie, es posible recuperar la ecuaciones de Einstein obtenidas en la sección anterior simplemente aplicando el operador de proyección. Se verá que las ecuaciones de Hamilton dictan la dinámica de la métrica y su momento canónico conjugado.

La noción de formulación lagrangiana en teoría de campos es similar, en cierto sentido, a la que se tiene en mecánica clásica de partículas, ya que uno especifica el funcional de acción como una integral de la función lagrangiana (\mathcal{L}) sobre una trayectoria. El problema variacional en relatividad general es estudiar una región compacta Ω de la variedad tetradimensional M y considerar un campo tensorial que se anula en la frontera de Ω .

Para el caso que nos ocupa necesitamos construir un hamiltoniano para la acción gravitacional en términos de las variables ADM. Para ello utilizamos la ecuación (1.25) para escribir la lagrangiana gravitacional como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G &= \sqrt{-g}R \\ &= \alpha\sqrt{\gamma}\left({}^3R + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - K^2 - 2\nabla_\alpha(a^\alpha + K\eta^\alpha)\right).\end{aligned}\quad (1.42)$$

Si siguiendo los métodos convencionales se define el momento canónico conjugado de γ_{ab} como:

$$\pi^{ab} := \frac{\delta\mathcal{L}_G}{\delta\dot{\gamma}^{ab}} = -\sqrt{\gamma}(K^{ab} - K\gamma^{ab}).\quad (1.43)$$

Llevando a cabo la transformación de Legendre $\mathcal{H}_G = \pi^{ab}\dot{\gamma}^{ab} - \mathcal{L}_G(\pi^{ab}, \gamma^{ab})$ se obtiene la densidad hamiltoniana.

$$\mathcal{H}_G = \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2}\right) - \alpha\sqrt{\gamma}R + 2\pi^{ab}D_a\beta_b.\quad (1.44)$$

El Hamiltoniano en términos de las variables ADM y de los momentos conjugados es:

$$H = \int_\Omega \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2}\right) - \alpha R\sqrt{\gamma} + 2\pi^{ab}D_a\beta_b.\quad (1.45)$$

El último término contribuye sólo en la frontera pues completando la derivada total obtenemos

$$H_G = \int_\Omega \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2}\right) - \alpha R\sqrt{\gamma} - 2\sqrt{\gamma}\beta_a\left(D_a\frac{\pi^{ab}}{\sqrt{\gamma}}\right) + \sqrt{\gamma}D_a\left(\frac{\pi^{ab}\beta_b}{\sqrt{\gamma}}\right),\quad (1.46)$$

Como primer paso hacemos las variaciones con respecto a α ⁸, encontramos directamente:

$$\delta_\alpha H_G = \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2} - R\sqrt{\gamma}. \quad (1.47)$$

Notamos sin embargo que la densidad lagrangiana no contiene ninguna derivada temporal de α ó β_a así que sus momentos canónicos conjugados son cero y tenemos por lo tanto:

$$\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2} - R\sqrt{\gamma} = 0. \quad (1.48)$$

Si realizamos ahora la variación con respecto a β_a , por el argumento antes presentado obtenemos:

$$\delta_\beta H_G = D_a \frac{\pi^{ab}}{\sqrt{\gamma}} = 0. \quad (1.49)$$

Las ecuaciones (1.48) y (1.49) son las constricciones hamiltoniana y de momentos, pero que toman su forma usual una vez que consideramos la definición de π^{ab} . Al llevar a cabo la variación con respecto a π tendremos:

$$\delta_\pi H_G = \int_\Omega \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \delta_\pi \left(\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) - \delta_\pi (\alpha R \sqrt{\gamma}) - \delta_\pi (2\pi^{ab} D_a \beta_b).$$

Haciendo explícitamente la variación en el primer término se tiene:

$$\delta_\pi \left(\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) = (2\pi_{ab} - \pi \gamma_{ab}) \delta_\pi (\pi^{ab}), \quad (1.50)$$

mientras que la variación del segundo y tercer término es nula pues no dependen explícitamente de π .

Es posible entonces escribir la variación de la acción hamiltoniana como:

$$\delta_\pi H_G = \int_\Omega \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} (2\pi_{ab} - \pi \gamma_{ab}) \delta_\pi (\pi^{ab}) + 2D_a \beta_b \delta_\pi (\pi^{ab}).$$

La ecuación que dicta la dinámica de la métrica, la ecuación de Hamilton es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ab} &= \frac{\delta H_G}{\delta \pi^{ab}} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} (2\pi_{ab} - \pi \gamma_{ab}) + D_a \beta_b + D_b \beta_a. \end{aligned}$$

Para ver la relación que guarda esta última ecuación con la ecuación (1.16) es necesario conocer π_{ab} como función de K_{ab} (es el análogo de la transformación que se tiene en mecánica de partículas, tenemos las ecuaciones de Hamilton en términos de los momentos y coordenadas

⁸Decidimos considerar las variaciones con respecto a β_a , α , γ y π por separado para mayor claridad.

generalizadas y queremos recuperar las ecuaciones de Lagrange en términos de las coordenadas generalizadas y sus velocidades). Esta relación se obtiene a partir de (1.43), si se sustituye directamente en (1.51) y utilizando la relación entre las trazas de ambas variables $\pi = 2K\sqrt{\gamma}$ ec.(1.43) obtenemos :

$$\frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial t} = -2\alpha K_{ab} + D_a \beta_b + D_b \beta_a, \quad (1.51)$$

que no es otra ecuación que la (1.17), se ha recuperado la ecuación para la evolución temporal de la métrica.

Para hallar la ecuación de movimiento de π^{ab} se deben considerar las variaciones con respecto a γ_{ab} , escribimos entonces:

$$\begin{aligned} \delta_\gamma H_G = & \int_\Omega \alpha \delta_\gamma \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \left(\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \delta_\gamma \left(\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \\ & - \delta_\gamma (\alpha R \sqrt{\gamma}) + 2\delta_\gamma (D_{(b} \beta_{a)}) \pi^{ab} - 2\delta_\gamma \left[D_a \left(\beta_b \frac{\pi^{ab}}{\sqrt{\gamma}} \right) \right]. \end{aligned}$$

El primer término es la variación del determinante [18] que esta dada por:

$$\frac{\delta_\gamma \gamma}{\gamma} = \gamma^{ab} \delta_\gamma \gamma_{ab}. \quad (1.52)$$

Para variar el segundo término, aunque pareciera que no depende de γ_{ab} , hay que recordar que se tiene la relación $\pi_{ab} = \gamma_{bc} \gamma_{ad} \pi^{dc}$ y por tanto la dependencia de γ_{ab} está implícita. Una vez que se escribe esta dependencia y se introduce la variación, queda como:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \delta_\gamma \left(\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) &= \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \pi^{ab} \delta_\gamma (\gamma_{bc}) \gamma_{ad} \pi^{dc} + \pi^{ab} \gamma_{bc} \delta_\gamma (\gamma_{ab}) \pi^{dc} - \pi^{cd} \gamma_{cd} \pi^{ab} \delta_\gamma (\gamma_{ab}) \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \pi_c^a \pi^{cd} \delta_\gamma (\gamma_{ad}) + \pi_d^b \pi^{cd} \delta_\gamma (\gamma_{bc}) - \pi \pi^{ab} \delta_\gamma (\gamma_{ab}) \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} (\pi_c^a \pi^{cb} + \pi_d^b \pi^{ad} - \pi^{ab} \pi) \delta_\gamma (\gamma_{ab}). \end{aligned}$$

La variación del tercer término se lleva a cabo descomponiendo el escalar de curvatura como el tensor de Ricci multiplicado por la métrica y utilizando nuevamente la fórmula para la variación del determinante:

$$\begin{aligned}
\alpha\delta_\gamma(R\sqrt{\gamma}) &= \alpha \left(R_{ab}\gamma^{ab}\delta_\gamma(\sqrt{\gamma}) + \delta_\gamma(R_{ab})\gamma^{ab}\sqrt{\gamma} + \delta_\gamma(\gamma^{ab})R_{ab}\sqrt{\gamma} \right) \\
&= \alpha \left(-R_{cd}\gamma^{cd}\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\gamma_{ab}\delta_\gamma(\gamma^{ab}) + \delta_\gamma(R_{ab})\gamma^{ab}\sqrt{\gamma} + \delta_\gamma(\gamma^{ab})R_{ab}\sqrt{\gamma} \right) \\
&= \alpha \left(-\frac{R}{2}\gamma_{ab} + R_{ab} \right)\sqrt{\gamma}\delta_\gamma(\gamma^{ab}) + \delta_\gamma(R_{ab})\gamma^{ab}\sqrt{\gamma}.
\end{aligned}$$

En esta última relación obtenemos un término que requiere tratamiento independiente pues en él se encuentra implícita la métrica a través de los símbolos de Christoffel.

$$\begin{aligned}
\delta_\gamma(R_{ab})\gamma^{ab}\sqrt{\gamma} &= \delta_\gamma \left(\partial_a\Gamma_{ab}^d - \partial_b\Gamma_{ad}^d \right) \gamma^{ab}\sqrt{\gamma} \\
&= \left(\partial_d\delta_\gamma\Gamma_{ab}^d - \partial_b\delta_\gamma\Gamma_{ad}^d \right) \gamma^{ab}\sqrt{\gamma} \\
&= D_d \left(\gamma^{ab}\delta_\gamma\Gamma_{ab}^d \right) - D_d \left(\gamma^{ad}\delta_\gamma\Gamma_{ab}^b \right) \sqrt{\gamma} \\
&= D_d\{\mathfrak{I}V^d\}\sqrt{\gamma},
\end{aligned}$$

en donde se ha definido $\mathfrak{I}V^d$ como $\mathfrak{I}V^d := \gamma^{ab}\delta_\gamma\Gamma_{ab}^d - \gamma^{ad}\delta_\gamma\Gamma_{ab}^b$, término que será analizado independientemente. Por lo pronto escribimos $\alpha\delta_\gamma(R\sqrt{\gamma})$ como:

$$\alpha\delta_\gamma(R\sqrt{\gamma}) = \alpha \left[\left(R_{ab} - \frac{R}{2}\gamma_{ab} \right) \sqrt{\gamma}\delta_\gamma(\gamma^{ab}) + D_d\{\mathfrak{I}V^d\}\sqrt{\gamma} \right]$$

El último término necesita ser escrito en términos de β^c , lo que implica utilizar la métrica y por tanto si se ve afectado por la variación como:

$$\begin{aligned}
2\delta_\gamma \left(D_{(b}\beta_{a)}\pi^{ab} \right) &= 2\pi^{ab}\delta_\gamma(D_b\beta_a) \\
&= 2\pi^{ab} \left[\delta_\gamma(D_b\beta^c)\gamma_{ac} + D_b\beta^c\delta_\gamma(\gamma_{ac}) \right] \\
&= 2\pi^{ab} \left[\beta^d\gamma_{ac}\delta_\gamma(\Gamma_{db}^c) + D_b\beta^c\delta_\gamma(\gamma_{ac}) \right].
\end{aligned}$$

Podemos escribir fácilmente la variación total como:

$$\begin{aligned}
\delta_\gamma H_G &= \int_\Omega -\frac{\alpha}{2\sqrt{\gamma}}\gamma^{ab}\delta(\gamma_{ab}) \left(\pi^{cd}\pi_{cd} - \frac{\pi^2}{2} \right) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi_c^a\pi^{cb} - \frac{\pi^{ab}\pi}{2} \right) \delta_\gamma(\gamma_{ab}) \\
&\quad - \alpha \left[\left(R_{ab} - \frac{R}{2}\gamma_{ab} \right) \sqrt{\gamma}\delta_\gamma(\gamma^{ab}) \right] - \alpha \left[D_d\{\mathfrak{I}V^d\}\sqrt{\gamma} \right] \\
&\quad + 2\pi^{ab} \left[\beta^d\gamma_{ac}\delta_\gamma(\Gamma_{db}^c) \right] + 2\pi^{ab} \left[D_b\beta^c\delta_\gamma(\gamma_{ac}) \right]
\end{aligned}$$

Notamos que es posible escribir $[D_d\{\alpha\mathfrak{I}V^d\}\sqrt{\gamma}] - [D_d(\alpha)\mathfrak{I}V^d\sqrt{\gamma}]$ en lugar del término $\alpha [D_d\{\mathfrak{I}V^d\}\sqrt{\gamma}]$ esto lo hacemos para tener un término que sea posible eliminar dadas las condiciones de contorno.

El término resultante $\mathfrak{S}V^d$ lo descomponemos pues tiene implícitos en los símbolos de Christoffel términos que nos serán de utilidad para eliminar más términos en la frontera. escribimos así:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}V^c &= \gamma^{ab}\delta_\gamma\Gamma_{ab}^c - \gamma^{ac}\delta_\gamma\Gamma_{ab}^b \\
 &= \gamma^{ab}\left\{\frac{\gamma^{cd}}{2}[D_a(\delta_\gamma\gamma_{db}) + D_b(\delta_\gamma\gamma_{ad}) - D_d(\delta_\gamma\gamma_{ab})]\right\} \\
 &\quad - \gamma^{ac}\left\{\frac{\gamma^{bd}}{2}[D_a(\delta_\gamma\gamma_{db}) + D_b(\delta_\gamma\gamma_{ad}) - D_d(\delta_\gamma\gamma_{ab})]\right\} \\
 &= \frac{1}{2}[\gamma^{ab}\gamma^{cd} - \gamma^{ac}\gamma^{bd}]\{D_a(\delta_\gamma\gamma_{db}) + D_b(\delta_\gamma\gamma_{ad}) - D_d(\delta_\gamma\gamma_{ab})\}.
 \end{aligned}$$

Con este resultado podemos escribir $\mathfrak{S}V^c D_c\alpha$, una vez hechos los productos correspondientes, como:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}V^c D_c\alpha &= \frac{1}{2}\{\gamma^{ab}\gamma^{cd}D_c\alpha D_a(\delta_\gamma\gamma_{db}) + \gamma^{ab}\gamma^{cd}D_c\alpha D_b(\delta_\gamma\gamma_{ad}) - \gamma^{ab}\gamma^{cd}D_c\alpha D_d(\delta_\gamma\gamma_{ab}) + \\
 &\quad - \gamma^{ac}\gamma^{bd}D_c\alpha D_a(\delta_\gamma\gamma_{db}) - \gamma^{ac}\gamma^{bd}D_c\alpha D_b(\delta_\gamma\gamma_{ad}) + \gamma^{ac}\gamma^{bd}D_c\alpha D_d(\delta_\gamma\gamma_{ab})\} \\
 &= \{\gamma^{ab}D^d\alpha D_a(\delta_\gamma\gamma_{db}) - \gamma^{ab}D^d\alpha D_d(\delta_\gamma\gamma_{ab})\}.
 \end{aligned}$$

Donde se han sumado los términos equivalentes. Renombrando los índices mudos es posible simplificar aun más para escribir:

$$\mathfrak{S}V^c D_c\alpha = (\gamma^{db}D^a\alpha - \gamma^{ab}D^d\alpha)(D_d(\delta_\gamma\gamma_{ab})).$$

Por otra parte el término $D_d(\alpha)\mathfrak{S}V^d\sqrt{\gamma}$ se expresa como:

$$\begin{aligned}
 D_d(\alpha)\mathfrak{S}V^d\sqrt{\gamma} &= D_d\{(\gamma^{db}D^a\alpha - \gamma^{ab}D^d\alpha)(\delta_\gamma\gamma_{ab})\}\sqrt{\gamma} \\
 &\quad - D_d(\gamma^{db}D^a\alpha - \gamma^{ab}D^d\alpha)(\delta_\gamma\gamma_{ab})\sqrt{\gamma},
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

que contiene un término de derivada total que podemos eliminar al integrar sobre la frontera.

El término $2\pi^{ab}[\beta^d\gamma_{ac}\delta_\gamma(\Gamma_{db}^c)]$ lo descomponemos en términos de la métrica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 2\pi^{ab}[\beta^d\gamma_{ac}\delta_\gamma(\Gamma_{db}^c)] &= 2\pi^{ab}\beta^d\gamma_{ac}\left[\frac{1}{2}\gamma^{ca}(D_d(\delta_\gamma\gamma_{ab}) + D_b(\delta_\gamma\gamma_{ad}) - D_a(\delta_\gamma\gamma_{db}))\right] \\
 &= \pi^{ab}\beta^d[D_d(\delta_\gamma\gamma_{ab})].
 \end{aligned}$$

donde se encuentra que es posible eliminar un término en la frontera al escribir de manera equivalente:

$$2\pi^{ab}[\beta^d\gamma_{ac}\delta_\gamma(\Gamma_{db}^c)] = D_d\left[\frac{\pi^{ab}\beta^d(\delta_\gamma\gamma_{ab})}{\sqrt{\gamma}}\right]\sqrt{\gamma} - D_d\left(\frac{\pi^{ab}\beta^d}{\sqrt{\gamma}}\right)(\delta_\gamma\gamma_{ab})\sqrt{\gamma}. \tag{1.54}$$

Estamos listos entonces para escribir la variación del hamiltoniano como:

$$\begin{aligned}
\delta_\gamma H_G &= \int_\Omega -\frac{\alpha}{2\sqrt{\gamma}} \gamma^{ab} \left(\pi^{cd} \pi_{cd} - \frac{\pi^2}{2} \right) \delta(\gamma_{ab}) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi_c^a \pi^{cb} - \frac{\pi^{ab} \pi}{2} \right) \delta_\gamma(\gamma_{ab}) \\
&+ \alpha \left[\left(R^{ab} - \frac{R}{2} \gamma^{ab} \right) \sqrt{\gamma} \delta_\gamma(\gamma_{ab}) \right] - \left[D_d \{ \alpha \mathfrak{I} V^d \} \sqrt{\gamma} \right] \\
&+ D_d \left[(\gamma^{ab} D^a \alpha - \gamma^{ab} D^d \alpha) (\delta \gamma_{ab}) \right] \sqrt{\gamma} - D_d \left(\gamma^{ab} D^a \alpha - \gamma^{ab} D^d \alpha \right) (\delta \gamma_{ab}) \sqrt{\gamma} \\
&+ D_d \left[\frac{\pi^{ab} \beta^d (\delta \gamma_{ab})}{\sqrt{\gamma}} \right] \sqrt{\gamma} - D_d \left(\frac{\pi^{ab} \beta^d}{\sqrt{\gamma}} \right) (\delta \gamma_{ab}) \sqrt{\gamma} \\
&+ 2\pi^{ab} [D_b \beta^c \delta_\gamma(\gamma_{ac})].
\end{aligned}$$

Obtenemos así la ecuación de Hamilton para π^{ab} como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \pi^{ab} &= -\frac{\delta H_G}{\delta \gamma_{ab}} \\
&= \frac{\alpha}{2\sqrt{\gamma}} \gamma^{ab} \left(\pi^{cd} \pi_{cd} - \frac{\pi^2}{2} \right) - \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi_c^a \pi^{cb} - \frac{\pi^{ab} \pi}{2} \right) \\
&- \alpha \sqrt{\gamma} \left(R^{ab} - \frac{R}{2} \gamma^{ab} \right) + \left(D^b D^a \alpha - \gamma^{ab} D_d D^d \alpha \right) \sqrt{\gamma} \\
&+ D_d \left(\frac{\pi^{ab} \beta^d}{\sqrt{\gamma}} \right) \sqrt{\gamma} - 2\pi^{ac} D_c \beta^b.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Para obtener esta ecuación en términos de la curvatura extrínseca basta recordar la ecuación (1.43) y una sustitución de (1.51) en la ecuación (1.55) nos lleva a:

$$\partial_t K^{ab} = -\mathfrak{I}^c \partial_c K^{ab} - K^{ac} \partial^b \beta_c - K^{cb} \partial_c \mathfrak{I}^a - D^a D^b \alpha + \alpha (R^{ab} + K K^{ab} - 2K_c^a K^{cb}). \tag{1.56}$$

Recuperamos la ecuación de evolución para K pero esta vez se obtuvo de un principio puramente físico, las ecuaciones de Hamilton.

1.7. Ecuaciones ADM

Hemos mostrado que es posible obtener las ecuaciones de Einstein en su forma 3+1 utilizando dos métodos diferentes y hemos llegado a expresiones equivalentes de las mismas. Sin embargo, a lo largo de este trabajo siguiendo la forma usual de trabajar en el formalismo 3+1 decidimos utilizar las ecuaciones en términos de la métrica y de la curvatura extrínseca en vez de sus momentos canónicos, es por eso que a manera de conclusión escribimos las ecuaciones que serán

utilizadas a lo largo de esta tesis. Las ecuaciones de Einstein son 10 pero hemos mostrado que se dividen en dos grupos: 4 ecuaciones de constricción y 6 de evolución:

Las ecuaciones de constricción son:

$${}^3R - K_{\mu\beta}K^{\beta\mu} + K^2 = 16\pi\rho, \text{ (hamiltoniana)} \quad (1.57)$$

$$D_\rho K_\lambda^\rho - D_\lambda K = 8\pi J_\lambda, \text{ (momentos)} \quad (1.58)$$

Y las ecuaciones de evolución son:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_j \beta_i + D_i \beta_j, \quad (1.59)$$

y la ecuación para K :

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \beta_i \partial^l K_{lj} + K_{il} \partial_j \beta^l + K_{lj} \partial^l \beta_i \\ & - D_i D_j \alpha + \alpha \left(R_{ij} + K K_{ij} - 2K_j^l K_{il} \right) \\ & + 4\pi \alpha (\gamma_{ij} T - 2S_{ij}). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Con esto terminamos nuestra revisión de las ecuaciones ADM.

Capítulo 2

Condiciones de norma

2.1. Función de lapso

Uno de los problemas esenciales a los que se enfrenta uno cuando pretende resolver las ecuaciones de Einstein es escoger el sistema coordinado más conveniente, basta recordar que las ecuaciones presentan esta libertad de elección conocida como *libertad de norma*.

En el caso de simulaciones numéricas, una mala elección del sistema de coordenadas puede acarrear resultados incompletos e incluso puede evitar que se obtenga información necesaria para ver resultados físicos, en el sentido de que el código numérico se detiene y no permite ver que ocurre a tiempos posteriores. En el caso de la solución de Schwarzschild por ejemplo, se tienen dos tipos de singularidades, unas que existen en la naturaleza y otras que surgen debido a nuestra mala elección de coordenadas, sin embargo al resolver numéricamente ambas singularidades tienen la misma desventaja: el código numérico se detiene.

La libertad de norma en el caso geometrodinámico¹, se ve reflejada al escoger la función de lapso y el vector de corrimiento para construir la foliación del espacio tiempo. La función lapso, indica el tiempo propio medido por un observador que se mueve ortogonalmente a las hipersuperficies que constituyen la foliación (observadores eulerianos), mientras que el vector de corrimiento indica la forma en que las líneas de tiempo, cuyas coordenadas espaciales son constantes, se propagan de una hipersuperficie a otra.

La elección de la función lapso y vector de corrimiento se lleva a cabo de múltiples maneras. Por ejemplo en algunos casos se da una ecuación de evolución para el lapso, en algunos otros se

¹En el contexto de la formulación 3+1, la dinámica del espacio-tiempo estará dada por la evolución de la tres-geometría por eso el uso del término geometrodinámico

pide que satisfaga una ecuación algebraica o simplemente se le da un valor predeterminado, sin embargo, la elección no deja de ser arbitraria.

En las siguientes secciones se revisarán las condiciones más importantes que le son impuestas a la función de lapso.

2.1.1. Foliación geodésica

La elección más simple que podría hacerse al escoger una foliación para el espacio tiempo es considerar $\alpha = 1$ que corresponde a considerar que los observadores eulerianos se mueven en caída libre ² y que las hipersuperficies que constituyen la foliación son geodésicamente paralelas. Sin embargo, las líneas de mundo de los observadores eulerianos tienden a concentrarse debido básicamente al campo gravitacional. Para notar esto considérese la ecuación de evolución para la traza de la curvatura extrínseca:

$$\mathcal{L}_t(\text{tr}K) = -\gamma^{ab}D_aD_b\alpha + \alpha \left[K_{ab}K^{ab} + \frac{1}{2}(\rho + \text{tr}S) \right] + \mathcal{L}_\beta \text{tr}K. \quad (2.1)$$

La ecuación de evolución para el determinante de la 3-métrica, es decir el elemento de volumen, medido por los observadores eulerianos es:

$$\mathcal{L}_t \left(\ln(\gamma)^{\frac{1}{2}} \right) = -\alpha \text{tr}K + D_n \beta^n. \quad (2.2)$$

Cuando $\alpha = 1$ la convergencia de las geodésicas eulerianas $\text{tr}K = -\nabla_n n^a = \mathcal{L}_n(\ln(\gamma)^{\frac{1}{2}})$ tiende a crecer sin límite, al sustituir en (2.1) con $\beta = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t(\text{tr}K) &= \alpha \left[K_{ab}K^{ab} + \frac{1}{2}(\rho + \text{tr}S) \right] \\ &> 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

resultando entonces en una singularidad coordenada ($\gamma \rightarrow 0$).

La condición de foliación geodésica tiene como principal desventaja que al utilizarla para evolucionar, digase, un agujero negro, rápidamente encuentra la singularidad y por ende la evolución se detiene.

2.1.2. Lapso maximal

Debido a los inconvenientes que presenta la foliación geodésica, se propusieron nuevas condiciones para la función lapso. Lichnerowicz [7] propuso que un posible remedio era escoger el lapso de

²La aceleración de los observadores eulerianos $a^a = \gamma^{ab}D_b(\ln \alpha)$ será igual a cero pues $\alpha = 1$.

tal forma que $\text{tr}K = 0$ en la hipersuperficie inicial y, que continuara siendo cero durante la evolución. Si se considera esta condición en la ecuación (2.2) entonces el elemento de volumen de los observadores eulerianos es independiente del tiempo.

Por otra parte la condición $\text{tr}K = 0$ implica que el volumen en cualquier región Ω de la hipersuperficie Σ es un máximo relativo a cualquier otra hipersuperficie que coincide con Σ fuera de Ω .

Si se pide que $\text{tr}K = 0 = \partial_t(\text{tr}K)$, entonces de la ecuación de evolución para $\text{tr}K$ encontramos que se debe satisfacer la ecuación:

$$\Delta\alpha = \left[K_{ab}K^{ab} + \frac{1}{2}(\rho + \text{tr}S) \right] \alpha, \quad (2.4)$$

que es una ecuación lineal elíptica. Si además se satisface la constricción hamiltoniana, (2.2) toma la forma:

$$\Delta\alpha = \left[R - \frac{3}{2}(\rho - \text{tr}S) \right] \alpha, \quad (2.5)$$

y en el vacío:

$$\Delta\alpha - R\alpha = 0. \quad (2.6)$$

Para estudiar el comportamiento cualitativo de ésta ecuación, York [15] asume un espacio tiempo que contiene un agujero negro, que γ_{ab} es la métrica plana en coordenadas esféricas y que R es esféricamente simétrico y constante R_0 en una región de radio a alrededor del origen y cero fuera. La solución de (2.6) es:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\sinh x}{x \cosh x_0}, & 0 \leq x \leq x_0 \\ 1 + \frac{\tanh x_0 - x_0}{x}, & x \geq x_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

donde $x := r\sqrt{R_0}$, $x_0 := a\sqrt{R_0}$.

Si $x_0 = 0$, que corresponde a curvatura escalar cero, entonces $\alpha = 1$ en todos lados. Conforme x_0 crece el lapso comienza a caer en la región donde $R_0 \neq 0$ y luego comienza a crecer como $1 + \vartheta(1/r)$ conforme r tiende a infinito. El valor mínimo de α ocurre siempre en el origen y vale $\alpha_{\text{mín}} = 1/\cosh(x_0)$, así para valores grandes de x_0 el mínimo del lapso se comporta como e^{-x_0} .

Una vez que se entiende el comportamiento del lapso para este tipo de espacios, es natural preguntarse por ejemplo cual sería una correcta generalización del parámetro $x_0 = a\sqrt{R_0}$, o cual es la dependencia real entre el lapso y x_0 con el tiempo. Si llegáramos a tener una respuesta a estas preguntas podríamos decir entonces cuanto tarda el lapso en caer a cero y detener la evolución cerca de la región en donde el campo gravitacional es muy intenso y si este tiempo es menor al tiempo en que se alcanza una singularidad.

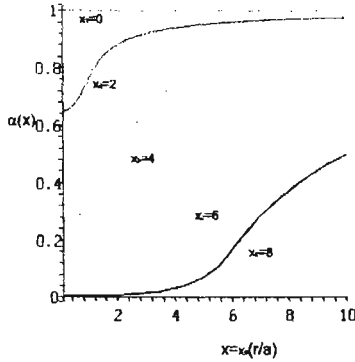


Figura 2.1: Se grafica el lapso como función de x , y se muestra como cae a cero cerca del origen

Para generalizar el parámetro x_0 en el caso esféricamente simétrico se escribe:

$$x_0 = \int_0^\infty \sqrt{\gamma_{rr} R} dr = a \sqrt{R(r=0)},$$

que al ser $R = \vartheta(1/r^4)$ y $\gamma_{rr} = 1 + \vartheta(1/r)$, x_0 es siempre real y finito.

Para el caso de un agujero negro de Schwarzschild, es sabido que el tiempo propio en alcanzar la singularidad desde el horizonte es $\tau_{cl} = \pi M$, (veáse Ref.[18] por ejemplo) mientras que el tiempo propio en el cual la foliación maximal detiene el colapso es:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \int \alpha_{min} dl = \int 1/\cosh(x_0) dl \approx 1,91M \leq \tau_{cl}. \quad (2.8)$$

El modelo predice entonces que el lapso colapsará y detendrá la evolución antes de que la singularidad sea alcanzada. El comportamiento cualitativo de α en el caso de espacio plano con curvatura constante (2.6) es similar a lo que ocurre en espacios-tiempo completos que son desarrollados con la condición de foliación maximal. Esto indica que las soluciones a (2.6) estarán determinadas principalmente por la curvatura escalar sobre las hipersuperficies y por tanto el colapso del lapso es debido a las propiedades generales de las ecuaciones elípticas y no depende de los detalles de los campos gravitacionales fuertes. Para que el tiempo propio $\int_0^\infty \alpha dr \rightarrow \infty$ a lo largo de la línea de mundo de un observador lejano del campo agujero negro y se tenga que $\int_0^\infty \alpha dr \leq \pi M$ en la región central, la función lapso debe aproximarse a cero muy rápidamente en el campo gravitacional fuerte, mientras que $\alpha \rightarrow 1$ en el infinito espacial. Este comportamiento de la foliación maximal se conoce como *evasión de singularidades*.

2.1.3. Evasión de singularidades

Si uno se restringe a sistemas de coordenadas correspondientes a observadores Eulerianos, las singularidades de la foliación deben corresponder a singularidades en las líneas temporales y viceversa. Esto es debido a que la métrica tridimensional inducida sobre cada hipersuperficie coincide con la métrica de los observadores normales. Considérese, por ejemplo, la línea temporal $x^i = x_0^i$ y el tiempo propio τ , a lo largo de esta línea. Supóngase, además, que el elemento de volumen $\sqrt{\gamma}$ se anula a un tiempo dado τ_* , $\sqrt{\gamma(\tau_*)} = 0$, ésta es una singularidad tanto en las líneas de tiempo como en la foliación pues la métrica sobre la hipersuperficie deja de ser invertible en esos puntos, lo que corresponde a un grave problema porque el algoritmo numérico se detiene y no es posible pasar a la siguiente hipersuperficie. Se dice que la línea $x^i = x_0^i$ tiende a concentrarse en una singularidad si $\sqrt{\gamma(\tau_*)}$ se anula y además su derivada con respecto al tiempo propio permanece acotada es decir: $|\partial_\tau \sqrt{\gamma(\tau_*)}| < B$ para alguna constante finita B . Esta condición se adopta con el fin de excluir singularidades que además, tienen un cambio repentino en el elemento de volumen.

2.1.4. Condiciones de foliación hiperbólicas

La familia de condiciones de foliación hiperbólicas se obtiene si se pide que el lapso satisfaga la ecuación de evolución conocida como condición de Bona-Massó, ya que fueron ellos quienes por primera vez probaron las bondades de esta ecuación [4] :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha^2 f(\alpha) \text{tr}K, \quad (2.9)$$

con $\frac{d}{dt} := (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)$, \mathcal{L}_β la derivada de Lie a lo largo del vector de corrimiento, $f(\alpha)$ una función de α y $\text{tr}K$ la traza de la curvatura extrínseca.

Al tomar la segunda derivada de (2.9) se obtiene:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\alpha^2 f(\alpha) \left[\frac{d\text{tr}K}{dt} - \alpha (2f + \alpha f') \text{tr}K^2 \right]. \quad (2.10)$$

que sustituyendo la ecuación de evolución de $\text{tr}K$

$$\frac{d\text{tr}K}{dt} = -D^2\alpha + \alpha \left[K_{ij}K^{ij} + \frac{1}{2}(\rho + \text{tr}S) \right].$$

encontramos que para el vacío:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \alpha^2 f(\alpha) D^2\alpha = -\alpha^3 f(\alpha) [K_{ij}K^{ij} - (2f + \alpha f') \text{tr}K^2], \quad (2.11)$$

que indica que el lapso satisface una ecuación de onda. La velocidad de onda asociada a esta ecuación es $\alpha f^{1/2}$ lo cual nos da una restricción, que f debe ser positiva.

Foliación armónica

De la ecuación (1.41) y recordando la expresión para la derivada del determinante utilizada anteriormente (1.52) se obtiene³:

$$\frac{d}{dt}\gamma_n^{1/2} = -\alpha\gamma_n^{1/2}trK. \quad (2.12)$$

Al tomar $f = 1$ en (2.9) y sustituir la expresión para trK se encuentra una relación entre α y $\gamma_n^{1/2}$:

$$\alpha = h(x^i)\gamma_n^{1/2}, \quad (2.13)$$

con $h(x^i)$ una función arbitraria independiente del tiempo.

La relación (2.13) se sigue para observadores que se mueven en dirección normal a las hipersuperficies y por tanto el elemento de volumen $\gamma_n^{1/2}$ es el asociado a ellos.

El tomar $f(\alpha) = 1$ en (2.9) nos conduce a la *condición de foliación armónica*, pues en [2] se muestra que esta condición es equivalente a:

$$\square^2 t = g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^0 = 0. \quad (2.14)$$

con \square^2 el operador D'Alambertiano, por lo que t , el tiempo coordenado, es una función armónica.

La condición (2.13) indica que para la foliación armónica el lapso mantiene una relación directa con el elemento de volumen. Esto implica que las líneas temporales serán regulares tanto como la foliación misma lo sea, pues el lapso tiende a cero de la misma forma que la raíz cuadrada del elemento de volumen. Esto es un viso de las propiedades de evasión de la singularidad que la foliación armónica posee.

Si se sustituye $\gamma_n^{1/2}(\tau_s)$ por su respectivo valor en términos de α dado por (2.13), se tiene una condición equivalente para representar una singularidad que además no presenta cambios repentinos en el tiempo propio, esto es:

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_s} (\tau - \tau_s)/\alpha \neq 0. \quad (2.15)$$

donde el límite es tomado sobre la línea $x^i = x_0^i$.

El intervalo de tiempo coordenado Δt transcurrido a lo largo de esta línea entre dos puntos $\tau = 0 (t = t_0)$ y $\tau = \tau_s$ esta dado por la integral:

$$\Delta t = \int_0^{\tau_s} 1/\alpha(\tau, x_0^i) d\tau. \quad (2.16)$$

Se sigue de (2.15) que el intervalo de tiempo propio no es nunca cero y por tanto, la singularidad no puede ser alcanzada por la condición armónica en un número finito de pasos de tiempo.

³Más adelante se dará la razón para utilizar el subíndice n el elemento de volumen.

Foliación 1+log

Si se considera $f(\alpha) = A/\alpha$ (con $A = ct\epsilon$) en (2.9) se obtiene que α es de la forma:

$$\alpha = h(x^i) + \ln(\gamma^{\frac{A}{2}}). \quad (2.17)$$

que tomando $h(x^i) = 1$ y $A = 2$ constituye la condición de foliación conocida como 1+log [2], que ha sido utilizada frecuentemente para evolucionar espacio-tiempo, que contienen un agujero negro, pues tiene características de evasión de singularidades similares a las que posee la condición de foliación maximal.

Evasión de singularidades

Alcubierre [2] muestra que las condiciones de foliación de Bona-Massó pueden evitar singularidades dependiendo de la forma que la función f en (2.13) tiene en el límite de α 's pequeñas.

Como caso particular se muestra que si f es de la forma $f = A\alpha^n$ para α pequeña y el elemento de volumen normal se comporta en términos del tiempo propio τ como $\gamma_n^{1/2} \approx (\tau_n - \tau)^m$, se obtienen diferentes comportamientos de $\gamma_n^{1/2}$ según las combinaciones de los parámetros, A , n y m :

Si $n < 0$ el lapso se anula antes del elemento de volumen, así que se tendrá una evasión de singularidades *fuerte* que es necesario para que las simulaciones no se detengan.

Si $n = 0$ y $Am > 1$ el lapso se anula con el elemento de volumen y la singularidad es alcanzada después de un tiempo coordenado infinito y la evasión de singularidad es sólo *marginal*.

Si $n > 0$, ó $n = 0$ junto con $Am < 1$, el lapso se anula con el elemento de volumen normal pero la singularidad es alcanzada en un tiempo coordenado finito así que no habrá evasión de la singularidad!

Bona-Massó modificado

En trabajos recientes [3] la condición de Bona y Massó fue modificada reemplazando el elemento de volumen normal por el elemento de volumen coordenado, es decir la evasión de la singularidad se refiere a aquellas en los que el elemento de volumen coordenado se anule. Esta condición es que el lapso satisfaga:

$$\partial_t \alpha = -\alpha f(\alpha)(\alpha K - D_a \beta^a). \quad (2.18)$$

Para entender la diferencia entre ambas condiciones es necesario recalcar la principal diferencia que existe entre los distintos de volumen. Cuando el elemento de volumen normal se anula, la

dirección normal a las hipersuperficies carece de significado y las hipersuperficies dejan de ser suaves⁴, cuando el elemento de volumen coordinado se anula, son solo las líneas de tiempo las que se cruzan. Para observar el tipo de singularidad de que se trata basta echar un vistazo a las ecuaciones de evolución del elemento de volumen para ambos observadores

$$\partial_t \ln \gamma_n^{1/2} = -\alpha K, \quad (2.19)$$

$$\partial_t \ln \gamma^{1/2} = -(\alpha K - D_a \beta^a). \quad (2.20)$$

Se sigue de estas ecuaciones que cuando $K \rightarrow \infty$, tendremos una singularidad desde el punto de vista de los observadores normales, mientras que para los observadores coordinados esta evasión depende del comportamiento de $D_a \beta^a$. Si K y $D_a \beta^a$ divergen pero mantienen su diferencia finita, no tendremos una singularidad. Para el caso en que el cambio en β^a es suave, la condición de Bona Massó modificada evadirá la singularidad tal como lo hace (2.9).

2.2. Vector de corrimiento

Además de considerar la foliación del espacio-tiempo, uno debe escoger también el vector de corrimiento para obtener una descripción completa de la dinámica de las hipersuperficies.

Es común escoger $\beta^a = 0$ para simplificar las ecuaciones, que es equivalente a considerar observadores cuyas líneas de mundo coinciden con las de los observadores eulerianos. Sin embargo una elección más inteligente puede llevar a simplificar la interpretación de resultados.

La evolución de γ_{ab} y K_{ab} depende no solo de la elección de la condición de foliación, sino también de como el sistema de coordenadas se mueve de una hipersuperficie a otra. En la sección siguiente se mostrará una breve descripción de una elección del vector de corrimiento conocida como distorsión mínima.

2.2.1. Distorsión mínima

El vector de corrimiento, al igual que la función de lapso, ha sido utilizado para simplificar la 3-métrica, con la idea de simplificar los cálculos en la formulación ADM.

El principal problema de utilizar únicamente la función lapso para evitar singularidades es que automáticamente introduce un estiramiento en las hipersuperficies, este estiramiento es representado por la expansión del vector t^a . Cuando el vector de corrimiento es cero, t^a es

⁴Recuérdese que una de las hipótesis al construir la foliación del espacio tiempo es que las hipersuperficies que la constituyen sean suaves.

simplemente proporcional al vector unitario normal a las hipersuperficies. Al introducir el vector de corrimiento se puede cambiar la expansión de t^a de tal forma que el estiramiento pueda ser distribuido uniformemente a través de toda la foliación. El criterio para β^a esta basado directamente en la variable $\tilde{\gamma}_{ab}$ (la métrica conforme definida como $\tilde{\gamma}_{ab} = (\det \gamma)^{-1/3} \gamma_{ab}$) de igual manera que la elección del lapso está basada en la traza de K . La expansión del vector t^a , se define como:

$$\Theta_{ab} = \perp_{(a} \nabla t_{b)}. \quad (2.21)$$

Recordando que:

$$t_b = \alpha n_b + \beta_b, \quad (2.22)$$

encontramos:

$$\Theta_{ab} = -\alpha K_{ab} + \frac{1}{2} D_{(a} \beta_{b)}. \quad (2.23)$$

Se define el tensor de distorsión Σ_{ab} como:

$$\Sigma_{ab} = \Theta_{ab} - \frac{1}{3} \text{tr} \Theta \gamma_{ab}. \quad (2.24)$$

Este tensor recibe su nombre porque contiene solo información acerca de la forma y no del tamaño de los elementos de volumen. Este tensor es básicamente la velocidad de la métrica conforme, pues de su definición se sigue que:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ab} &= -\alpha \left(K_{ab} - \frac{1}{3} \text{tr} K \gamma_{ab} \right) + \frac{1}{2} \left(D_a \beta_b + D_b \beta_a - \frac{2}{3} \gamma_{ab} D_c \beta^c \right) \\ &= \frac{1}{2} \perp \left(\mathcal{L}_t \gamma_{ab} - \frac{1}{3} \gamma_{ab} \text{tr} \mathcal{L}_t \gamma \right) \\ &= \frac{1}{2} (\gamma)^{1/3} \perp (\mathcal{L}_t \tilde{\gamma}_{ab}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

El propósito de la norma de mínima distorsión es usar el vector de corrimiento para alterar la forma del tensor de distorsión de tal forma que se minimizen los cambios promedio en las componentes de la 3-métrica, resultando en una suave evolución. La propuesta es hacerlo minimizando la integral de volumen del cuadrado del tensor de distorsión, $\Sigma_{ab} \Sigma^{ab}$, sobre una hipersuperficie con respecto a β^a . Este proceso conduce al vector de corrimiento como única solución a la ecuación:

$$D^b \Sigma_{ab} = 0. \quad (2.26)$$

Que escrita explícitamente en términos del vector de corrimiento es (Ref. [15]):

$$D^b D_b \beta_a + D^b D_a \beta_b - \frac{2}{3} D_a D_b \beta^b = D^b \left[2\alpha \left(K_{ab} - \frac{1}{3} \text{tr} K \gamma_{ab} \right) \right]. \quad (2.27)$$

Esto constituye un sistema de tres ecuaciones elípticas acopladas para las componentes del vector de corrimiento cuya solución es única para condiciones de frontera dadas.

Es importante señalar, además, que esta elección del vector de corrimiento surge de manera natural al considerar la variación del funcional $\Sigma_{ab}\Sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\gamma)^{\frac{2}{3}}\gamma^{ac}\gamma^{bd}\tilde{\gamma}_{ab}\tilde{\gamma}_{cd}$ sobre toda la hipersuperficie.

Como ejemplo de los efectos del vector de corrimiento, considérese una esfera sobre una hipersuperficie Σ_t cuyo volumen es preservado. Si el tensor de distorsión es cero entonces se obtendrá una esfera en la hipersuperficie $\Sigma_{t+\delta t}$ pero si el tensor de distorsión es diferente de cero entonces la esfera habrá degenerado en un elipsoide o en otra figura irregular: se habrá *distorsionado* [19]. El tensor de distorsión tiene cinco componentes independientes (por ser simétrico y de traza cero) que contienen el alargamiento relativo de dos de los ejes de la figura con respecto a un tercero, y los cambios de los ángulos entre tres pares de ejes.

El tensor σ_{ab} definido sobre una hipersuperficie como $\sigma_{ab} := K_{ab} - \frac{1}{3}trK\gamma_{ab}$ indica la deformación de la hipersuperficie y por la ecuación (2.27) uno puede considerar que ésta elección de β^a como una que globalmente compensa los efectos de $\alpha\sigma_{ab}$ sobre los cuales uno no tiene control.

Capítulo 3

Hiperbolicidad

Un intento para reformular las ecuaciones de Einstein para su análisis numérico es escribir las ecuaciones de evolución en forma hiperbólica. esto es motivado porque un sistema fuertemente hiperbólico posee propiedades de estar bien puesto como un problema de Cauchy, además de que en la frontera el sistema puede ser mejor estudiado si se conoce su velocidad característica (la velocidad de propagación de la información en ése sistema).

El sistema estándar ADM no constituye un sistema fuertemente hiperbólico de primer orden. Muchos procedimientos se llevan a cabo para escribir las ecuaciones de Einstein de tal manera que tengan un carácter fuertemente hiperbólico: por ejemplo, las ecuaciones de constricción se introducen al sistema y se ajustan para que el sistema sea fuertemente hiperbólico y en otros tratamientos se introducen nuevas variables, normalmente las derivadas espaciales de la métrica, y se les da el rango de variables independientes.

3.1. Ecuación de onda

Considérese la ecuación de onda en una dimensión:

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0, \quad (3.1)$$

que tiene por solución general una función u de la forma

$$u = f(x + ct) - g(x - ct), \quad (3.2)$$

donde las funciones f y g son arbitrarias. Considérese que a un tiempo $t = 0$ se tiene:

$$u = \eta(x), \quad (3.3)$$

$$\partial_t u = v(x), \quad (3.4)$$

El problema radica en resolver la ecuación (3.1) sujeta a las condiciones iniciales (3.3) y (3.4).

Sustituyendo (3.3) y (3.4) en (3.2) se obtienen las relaciones:

$$\eta(x) = f(x) + g(x), \quad (3.5)$$

$$v(x) = cf'(x) - cg'(x). \quad (3.6)$$

Integrando (3.6) encontramos:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_b^x v(\xi) d\xi.$$

De ésta ecuación y (3.5) se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{2}\eta(x) + \frac{1}{2c} \int_b^x v(\xi) d\xi, \quad (3.7)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\eta(x) - \frac{1}{2c} \int_b^x v(\xi) d\xi. \quad (3.8)$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.2) obtenemos finalmente:

$$u(x) = \frac{1}{2} \{ \eta(x+ct) + \eta(x-ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi) d\xi, \quad (3.9)$$

que es conocida como la solución de d'Alambert de la ecuación de onda unidimensional. Si se considera además que a $t = 0$, $v(x) = 0$, (3.9) toma la forma sencilla:

$$u(x) = \frac{1}{2} \{ \eta(x+ct) + \eta(x-ct) \}, \quad (3.10)$$

mostrando que la evolución de $u(x)$ es producida por dos pulsos de forma $u(x) = \frac{1}{2}\eta(x)$, cada uno moviéndose con velocidad c , uno hacia la derecha y otro hacia la izquierda.

Hay que notar que de la ecuación (3.1) se obtiene directamente por inspección la velocidad de propagación de la onda.

3.2. Ecuación de advección

El caso más simple de una ecuación hiperbólica es la ecuación lineal de advección:

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0. \quad (3.11)$$

La solución al problema de Cauchy para esta ecuación con condiciones iniciales $u(0, x) = u_0(x)$ es una onda viajando con velocidad a :

$$u(t, x) = u_0(x - at). \quad (3.12)$$

La solución cuando no se tienen fuentes es constante a lo largo de las *líneas características*, es decir, las curvas $X(t)$ en el plano (t, x) que satisfacen la ecuación ordinaria:

$$\frac{dX(t)}{dt} = a, \quad (3.13)$$

y cuando se introducen fuentes la velocidad a deja de ser constante.

3.3. Sistemas hiperbólicos

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{M} \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{N}, \quad (3.14)$$

esta bien puesto si tiene una solución $\mathbf{u}(t)$ al menos localmente, la solución es única y hay una dependencia continua de las soluciones sobre los datos de Cauchy¹, que indica que la norma de $\mathbf{u}(t)$ es acotada por una cierta función y por la norma inicial. Un sistema como (3.14)² se dice *débilmente hiperbólico* (Ref.[14]) si todos los eigenvalores de su matriz característica son reales y *fuertemente hiperbólico* si su matriz característica es diagonalizable, es decir tiene un conjunto de eigenvalores linealmente independientes. Si el sistema es fuertemente hiperbólico se puede decir entonces que el sistema de ecuaciones está bien puesto. El sistema se dice *simétricamente hiperbólico* si la matriz característica es, además hermitiana.

El problema de Cauchy para un sistema débilmente hiperbólico no está generalmente bien puesto, pero en los sistemas fuertemente y simétricamente hiperbólicos es posible garantizar la condición de continuidad de las soluciones con respecto a sus valores iniciales si la matriz característica es independiente de u .

Considérese por ejemplo, el caso de un sistema lineal de ecuaciones de la forma:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

¹Dados los datos iniciales esto significa que se cumple $\|u(t)\| \leq e^{\alpha t} \|u(t=0)\|$ para la norma de u donde $0 \leq t \leq \tau, \alpha = cte$.

² \mathbf{M} , la matriz característica y \mathbf{N} pueden ser funciones de u pero no de sus derivadas.

Donde \mathbf{u} es un vector de n dimensiones y \mathbf{A} una matriz constante de $n \times n$. El sistema es fuertemente hiperbólico si \mathbf{A} es diagonalizable con eigenvalores reales, de tal modo que se puede considerar la descomposición:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}, \quad (3.16)$$

donde \mathbf{D} es una matriz diagonal formada por los eigenvalores de \mathbf{A} y \mathbf{Q} es la matriz que se forma al colocar los eigenvectores de \mathbf{A} como columnas. Si se introducen las variables características³ definidas como $\mathbf{w} := \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{u}$ en (3.15) se obtiene:

$$\partial_t \mathbf{w} + \mathbf{D} \partial_x \mathbf{w} = 0. \quad (3.17)$$

Con esto se obtiene un sistema de ecuaciones de advección desacopladas:

$$\partial_t w^k + \lambda_k \partial_x w^k = 0, \quad (3.18)$$

cuyas soluciones son $w^k(t, x) = w^k(0, x - \lambda_k t)$. La solución $\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{w}$ de (3.15) se puede escribir de la forma

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum_{k=1}^n w^k(0, x - \lambda_k t) v^k. \quad (3.19)$$

Las curvas $X(t) = x_0 + \lambda_k t$ que satisfacen $\frac{dX(t)}{dt} = \lambda_k$ son las k -características. Cualquier variable característica w^k es constante a lo largo de cada k -característica. Para sistemas fuertemente hiperbólicos, se tienen n características diferentes que pasan por cada punto en el plano (t, x) .

Desde el punto de vista de las aplicaciones numéricas, el que un sistema sea hiperbólico no sólo es atractivo por estar bien puesto sino también porque permite obtener condiciones de contorno bien comportadas para simulaciones numéricas con fronteras artificiales con las cuales no podemos llegar a un valor real infinito [1].

Para mostrar el uso de estos conceptos, considérese nuevamente la ecuación de onda unidimensional.

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 \quad (3.20)$$

si se introducen las funciones $v_1 = \partial_x u$ y $v_2 = \partial_t u$ con el propósito de formar un sistema de primer orden y considerando que u satisface $\partial_x \partial_t u - \partial_t \partial_x u = 0$ podemos escribir ambas ecuaciones en forma matricial como:

$$\partial_t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

³Reciben también el nombre de "eingencaupos"

La matriz característica del sistema tiene los eigenvalores $\lambda_{1,2} = \pm c$. La matriz de cambio de base es:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & -c \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{c} \\ 1 & -\frac{1}{c} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Por otra parte, los eigencampos tienen la forma:

$$w_{\pm} = \frac{cv_1 \pm v_2}{2c}, \quad (3.23)$$

Las ecuaciones de evolución para los eigencampos son entonces de la forma:

$$\partial_t w_+ + c \partial_x w_+ = 0, \quad (3.24)$$

$$\partial_t w_- - c \partial_x w_- = 0. \quad (3.25)$$

Desde el punto de vista de las aplicaciones numéricas, el hacer un sistema hiperbólico es muy atractivo no solo por sus características de estar bien puesto, sino también por la experiencia que se tiene en sistemas hidrodinámicos descritos por sistemas hiperbólicos.

La velocidad característica se supone es la velocidad de propagación de la información en dicho sistema, por lo que resulta natural pensar que esas magnitudes son equivalentes a la información física del modelo que está siendo simulado. Se espera que la existencia de la velocidad característica del sistema nos dé un tratamiento mejorado de la frontera numérica, y provea de un problema de Cauchy bien puesto dentro de una región finita: el llamado problema de *valores iniciales y de frontera*.

El sistema de ecuaciones ADM estándar no constituye un sistema hiperbólico así que muchas formulaciones hiperbólicas de las ecuaciones de Einstein han sido propuestas (véase Ref. [14] y [1]). Para construir sistemas hiperbólicos los principales procedimientos son: introducir nuevas variables, normalmente las derivadas espaciales de la métrica, ajustar las ecuaciones utilizando las constricciones y restringir las condiciones de norma o reescalar algunas variables. Debido al primer paso el número de variables dinámicas fundamentales es siempre mayor que en ADM.

Sin embargo los sistemas hiperbólicos en el contexto de estabilidad numérica no dan una respuesta definitiva sobre precisión y estabilidad pues se conocen casos en los cuales las simulaciones de sistemas hiperbólicos explotan. La hiperbolicidad sí debe considerarse como una propiedad necesaria, aunque no siempre suficiente, para obtener estabilidad numérica.

Capítulo 4

Ecuaciones de Einstein en Simetría Esférica

4.1. Métrica

Los sistemas esféricamente simétricos, aunque simples, tienen gran importancia pues muchos sistemas astrofísicos presentan esta simetría.

Un espacio-tiempo se dice que es esféricamente simétrico si su métrica permanece invariante ante rotaciones. La métrica espacial sobre de cualquier espacio tiempo esféricamente simétrico tiene la forma general:

$$dl^2 = A(r, t)dr^2 + r^2B(r, t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

que en forma matricial se escribe como:

$$\gamma_{ab} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2B\sin^2(\theta) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

4.2. Materia

Si tenemos el tensor de energía momento $T_{\alpha\beta}$, su descomposición ortogonal esta dada por :

$$S_{\mu\nu} := \gamma_{\mu}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\beta}T_{\alpha\beta}, \quad (4.3)$$

$$J_\mu := -\gamma_\mu^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta}. \quad (4.4)$$

$$\rho := n^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta}. \quad (4.5)$$

Al tensor $S_{\mu\nu}$ se le llama *tensor de esfuerzos*, el vector J_μ es el vector de *densidad de momento* y ρ es la *densidad de energía* total medida por un observador euleriano.

En simetría esférica podemos escribir el tensor $S_{\mu\nu}$ en su forma mixta como:

$$S_b^a = \begin{bmatrix} S_A & 0 & 0 \\ 0 & S_B & 0 \\ 0 & 0 & S_B \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

con S_A y S_B funciones de r y t . Además:

$$J_a = (J_A, 0, 0). \quad (4.7)$$

Uno de los casos más sencillos de materia en el estudio de las ecuaciones de Einstein es el campo escalar o campo de Klein-Gordon y de él hallaremos más referencias en el capítulo 6 de este trabajo.

4.3. Ecuaciones de Einstein en simetría esférica

Una vez que tenemos la métrica hemos dado el primer paso para resolver las ecuaciones de Einstein. Ahora es necesario resolver las constricciones y utilizar las ecuaciones de evolución para hallar γ_{ab} y K_{ab} a tiempos posteriores.

Las ecuaciones de evolución para la métrica en simetría esférica son simplemente:

$$\partial_t A = -2\alpha A K_A, \quad (4.8)$$

$$\partial_t B = -2\alpha B K_B. \quad (4.9)$$

Mientras que las ecuaciones para la curvatura extrínseca son:

$$\begin{aligned} \partial_t K_A = & -\frac{\partial_r^2 \alpha}{A} + \frac{\partial_r \alpha \partial_r A}{2A^2} - \frac{2A\alpha \partial_r B}{Br} - \frac{\alpha \partial_r^2 B}{AB} + \frac{\alpha (\partial_r B)^2}{2AB^2} \\ & + \frac{\alpha \partial_r A}{Ar} + \frac{\alpha \partial_r A \partial_r B}{2AB} - \alpha K_A^2 + 2\alpha K_A K_B, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & \frac{\partial_r \alpha}{Ar} + \frac{\partial_r \alpha \partial_r B}{2AB} + \frac{\alpha}{Ar^2} + \frac{\alpha \partial_r^2 B}{2AB} - \frac{\alpha \partial_r A}{2A^2 r} \\ & - \frac{\alpha \partial_r A \partial_r B}{4A^2 B} - \frac{\alpha}{Br^2} - \alpha K_A K_B. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como se ha mencionado anteriormente, es necesario escoger la condición de foliación. Aquí se tomará que la función lapso satisfaga una ecuación de evolución de tal manera que se tenga un conjunto de cinco de variables independientes.

La condición de foliación Bona-Massó (2.9) se escribe como:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(K_A + 2K_B), \quad (4.12)$$

donde se ha sustituido $\text{tr}K = K_A + 2K_B$. Además se definen las variables D_A, D_B, D_α :

$$D_A := \frac{\partial_r A}{A}, \quad (4.13)$$

$$D_B := \frac{\partial_r B}{B}, \quad (4.14)$$

$$D_\alpha := \frac{\partial_r \alpha}{\alpha}. \quad (4.15)$$

Este cambio de variables se hace para escribir un sistema de ecuaciones de primer orden.

Siguiendo los métodos del capítulo anterior se sustituye D_A, D_B y D_α en (4.9), (4.8), (4.3) y (4.11) para obtener el sistema de ecuaciones de primer orden, el sistema se puede escribir entonces como:

$$\partial_t D_\alpha + \alpha f \partial_r K_A + 2\alpha f \partial_r K_B = -(f + \alpha f') \alpha D_\alpha (K_A + 2K_B). \quad (4.16)$$

$$\partial_t D_A + 2\alpha \partial_r K_A = -2\alpha D_\alpha K_A. \quad (4.17)$$

$$\partial_t D_B + 2\alpha \partial_r K_B = -2\alpha D_\alpha K_B. \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_A = & -\frac{\alpha}{A} [\partial_r (D_\alpha + D_B) + D_\alpha^2 - \frac{D_\alpha D_A}{2} - \frac{D_\alpha D_B}{2} + D_B^2 \\ & - \alpha K_A (K_A + 2K_B) - \frac{(D_A - 2D_B)}{r}] \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & -\frac{\alpha}{2A} [\partial_r D_B + D_\alpha D_B - \frac{D_A D_B}{2} + D_B^2 - 2\alpha K_B (K_A + 2K_B) \\ & + \frac{(2D_\alpha - D_A + 4D_B)}{r} - \frac{2(A - B)}{Br^2}] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Las constricción hamiltoniana tiene la forma:

$$C_H = -\partial_r D_B + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4} + AK_B(2K_A + K_B) + \frac{(D_A - 3D_B)}{r} + \frac{(A - B)}{Br^2} = 0. \quad (4.21)$$

y la constricción de momentos

$$C_m = -\partial_r K_B + \left(\frac{D_B}{2} + \frac{1}{r}\right)(K_A - K_B) = 0. \quad (4.22)$$

La matriz característica del sistema se escribe como:

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha f & 2\alpha f \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha \\ \alpha/A & 0 & \alpha/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha/2A & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

y el vector de variables es:

$$\mathbf{u} = \left(D_\alpha, D_A, D_B, K_A, K_B \right). \quad (4.24)$$

Resulta además, que es conveniente utilizar la traza $\text{tr}K = K_A + 2K_B$ y la "antitrazo" de la derivada espacial de la métrica $D := D_A - 2D_B$ en vez de las componentes K_A y D_A .

El sistema de ecuaciones de (4.16) a (4.20) se puede escribir en términos de $\text{tr}K$ y D como:

$$\partial_t D_\alpha + \alpha f \partial_r \text{tr}K = -(f + \alpha f') \alpha D_\alpha (\text{tr}K), \quad (4.25)$$

$$\partial_t D + 2\alpha \partial_r \text{tr}K - 8\alpha \partial_r K_B = -2\alpha D_\alpha (\text{tr}K - 4K_B), \quad (4.26)$$

$$\partial_t D_B + 2\alpha \partial_r K_B = -2\alpha D_\alpha K_B. \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \text{tr}K + \alpha \partial_r (D_\alpha + 2D_B) &= -\alpha [D_\alpha (D_\alpha - D/2) - D_B (D + D_B/2) - A(\text{tr}K)^2 \\ &\quad + 2(D_\alpha - D + D_B)/r - 2(A - B)/Br^2]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B + \alpha \partial_r D_B &= -\alpha [D_\alpha D_B - DD_B/2 - 2AK_B \text{tr}K \\ &\quad + (2D_\alpha - D + 2D_B)/r - 2(A - B)/Br^2]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Y las constricciones quedan como:

$$C_H = -\partial_r D_B + D_A D_B/2 + D_B^2/4 + AK_B(2K - 3K_B) + (D - D_B)/r + (A - B)/Br^2 = 0 \quad (4.30)$$

$$C_m = -\partial_r K_B + (D_B/2 + 1/r)(K - 3K_B) = 0 \quad (4.31)$$

La matriz característica para este caso es:

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & -8\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha \\ \alpha/A & 0 & 2\alpha/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha/2A & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Con el vector

$$\mathbf{u} : (D_\alpha, D, D_B, \text{tr}K, K_B). \quad (4.33)$$

4.4. Hiperbolicidad de las ecuaciones de Einstein

El concepto de hiperbolicidad es de gran importancia en el estudio de las ecuaciones de evolución asociadas con un problema de Cauchy. Que un sistema de ecuaciones sea débilmente hiperbólico implica que es causal, es decir que la solución en un punto del espacio-tiempo depende solamente de los datos en una región de soporte compacto del pasado de ése punto. Si el sistema es fuertemente hiperbólico, es posible demostrar que el sistema está bien puesto, es decir que las soluciones existen localmente, son únicas y son estables en el sentido de que pequeños cambios en las condiciones iniciales corresponden a pequeños cambios en las soluciones.

Con el propósito de observar si las ecuaciones anteriores constituyen un problema de valores iniciales bien puesto, se construye un sistema de ecuaciones de la forma $\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{M} \partial_r \mathbf{u} = \mathbf{G}$, con las ecuaciones de (4.25) a (4.29). Luego se obtienen los eigenvalores de la matriz característica \mathbf{M} . Estos eigenvalores son:

$$\lambda_1 = 0. \quad (4.34)$$

$$\lambda_{2,3} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{A}}, \quad (4.35)$$

$$\lambda_{4,5} \pm \alpha \sqrt{\frac{f}{A}}. \quad (4.36)$$

y los eigenvectores correspondientes:

$$v_1 = (0, 1, 0, 0, 0). \quad (4.37)$$

$$v_2 = \left(\frac{4f\sqrt{A}}{1-f}, \frac{8f\sqrt{A}}{1-f}, 2\sqrt{A}, \frac{4}{1-f}, 1 \right). \quad (4.38)$$

$$v_3 = \left(\frac{4f\sqrt{A}}{f-1}, \frac{8f\sqrt{A}}{f-1}, -2\sqrt{A}, \frac{4}{1-f}, 1 \right). \quad (4.39)$$

$$v_1 = \left(\sqrt{AJ}, 2\sqrt{\frac{A}{f}}, 0, 1, 0 \right), \quad (4.40)$$

$$v_5 = \left(-\sqrt{AJ}, -2\sqrt{\frac{A}{f}}, 0, 1, 0 \right). \quad (4.41)$$

Que constituyen un conjunto de vectores linealmente independientes, por lo que el sistema es fuertemente hiperbólico. Hay que resaltar, sin embargo, que si $f = 1$ (la condición de foliación armónica (2.13)) la matriz principal M (4.32) toma la forma:

$$M(f=1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & -8\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha \\ \alpha/A & 0 & 2\alpha/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha/2A & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Que solo tiene 3 eigenvectores linealmente independientes, por lo que el sistema deja de ser hiperbólico. Como se ha visto hay un problema para el caso $f = 1$, para remediarlo se considera el introducir las ecuaciones de constricción. En un principio esto parecería trivial pues se estaría agregando cero a una ecuación. Sin embargo veremos que si las introducimos adecuadamente podemos cambiar la estructura del sistema de ecuaciones. Utilizando las constricciones, la parte principal del sistema de evolución puede ser alterada modificando entradas en la tercera y quinta columna ya que las constricciones contienen elementos de estas columnas, el procedimiento es multiplicar las constricciones por ciertas funciones h 's y m 's y sumarlas a cada ecuación de evolución, después de agrupar los términos con las mismas variables

la matriz característica queda como:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_{D\alpha}\alpha/A & \alpha f & m_{D\alpha}\alpha \\ 0 & 0 & h_D\alpha/A & 2\alpha & (m_D - 8)\alpha \\ 0 & 0 & h_{D_B}\alpha/A & 0 & (2 + m_{D_B})\alpha \\ \alpha/A & 0 & (h_K + 2)\alpha/A & 0 & m_K\alpha \\ 0 & 0 & (1/2 + h_{K_B})\alpha/A & 0 & m_{K_B}\alpha \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

y los demás términos que contienen h 's y m 's corresponden a términos de las fuentes. Se han introducido los coeficientes de tal manera que tengamos que imponer solo condiciones que no dependan de los coeficientes métricos (como el término $h_K\alpha/A$), de esta manera no tenemos que pedir que h_K dependa de α y A . Los eigenvalores son:

$$\lambda_1 = 0, \quad (4.44)$$

$$\lambda_{2,3} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{A}} \frac{m_{K_B} \pm \sqrt{4 + 8h_{K_B} + m_{K_B}^2}}{2}. \quad (4.45)$$

$$\lambda_{4,5} \pm \alpha \sqrt{\frac{f}{A}}. \quad (4.46)$$

En este trabajo vamos a utilizar, la siguiente elección de constantes: $h_{D_a} = \bar{h}_D = h_{D_B} = h_{K_B} = 0$; $h_K = -2$ y $m_{D_a} = m_{D_B} = m_K = m_{K_B} = 0$; $m_D = 8$. De esta forma la matriz principal \mathbf{M} se escribe como:

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha \\ \alpha/A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha/2A & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Se encuentra que los eigenvalores son:

$$\lambda_{1,2} = \pm \alpha \sqrt{\frac{f}{A}}, \quad (4.48)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{A}}. \quad (4.49)$$

$$\lambda_5 = 0. \quad (4.50)$$

mientras que los correspondientes eigenvectores:

$$v_1 = \left(\sqrt{fA}, 2\sqrt{\frac{A}{f}}, 0, 1, 0 \right), \quad (4.51)$$

$$v_2 = \left(-\sqrt{fA}, -2\sqrt{\frac{A}{f}}, 0, 1, 0 \right), \quad (4.52)$$

$$v_3 = \left(0, 0, 2\sqrt{A}, 0, 1 \right), \quad (4.53)$$

$$v_4 = \left(0, 0, -2\sqrt{A}, 0, 1 \right), \quad (4.54)$$

$$v_5 = \left(0, 1, 0, 0, 0 \right). \quad (4.55)$$

Los eigenvalores son reales y para mostrar que los eigenvectores constituyen un conjunto linealmente independiente se calcula el determinante de la matriz formada por ellos.

$$\det(\mathbf{M}_{eigen}) = -8\sqrt{fA^2} \quad (4.56)$$

que es diferente de cero, por lo que ahora el sistema es fuertemente hiperbólico, nótese además que esto incluye el caso $f = 1$, pero excluye el $f = 0$, cosa que es deseable pues si se sigue esta última el lapso sería constante y no se tendrían las propiedades de evasión de singularidades.

Capítulo 5

Simulaciones numéricas

5.1. Códigos numéricos

5.1.1. Diferencias finitas

El método de las diferencias finitas es una aproximación clásica para hallar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales que gobiernan un modelo matemático de un sistema continuo. Básicamente, las derivadas son reemplazadas por aproximaciones en diferencias finitas, convirtiendo entonces un problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico fácilmente resoluble por métodos computacionales.

Para una derivada de p -ésimo orden el número mínimo de puntos de datos requeridos para deducir una aproximación por diferencias finitas es de $p+1$. Considérese por ejemplo que se requiere hacer una aproximación para la primera derivada de una función arbitraria. Es necesario pues contar con al menos dos puntos, digamos x_i y x_{i+1} y la función $f_i = f(x_i)$ y $f_{i+1} = f(x_{i+1})$. La expansión en serie de Taylor de f_{i+1} alrededor de x_i es:

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x f'_i + f''_i \frac{(\Delta x)^2}{2} + f'''_i \frac{(\Delta x)^3}{6} + f^{(4)}_i \frac{(\Delta x)^4}{24} \dots \quad (5.1)$$

hemos definido $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Resolviendo la ecuación anterior para la primera derivada tendremos:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (5.2)$$

Esta aproximación se conoce como *aproximación por diferencia hacia adelante*. El error de truncado que en este caso es proporcional al intervalo de la retícula pues el término que más

contribuye a este error es el lineal para Δx 's pequeñas.

De igual forma es posible expandir f_{i-1} alrededor de x_i en la forma:

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x f'_i + f''_i \frac{(\Delta x)^2}{2} - f'''_i \frac{(\Delta x)^3}{6} + f^{(4)}_i \frac{(\Delta x)^4}{24} \dots \quad (5.3)$$

que al resolver nuevamente para la primera derivada

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (5.4)$$

Si se toman ambas aproximaciones y se resta (5.4) de (5.2) se tiene:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\Delta x f'_i + O(\Delta x)^3, \quad (5.5)$$

que resolviendo para f'_i

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2. \quad (5.6)$$

que se conoce como *aproximación por diferencia central*. El error de truncamiento ahora es proporcional al cuadrado de Δx con lo cual se reduce el error con mayor rapidez que con las otras aproximaciones.

De manera similar se pueden obtener aproximaciones de diferencias para derivadas superiores, pero la deducción se hace más laboriosa, tanto al aumentar el número de términos como el número de derivadas. Como ilustración se deducirá la aproximación para la segunda derivada f''_i en términos de f_i , f_{i-1} , f_{i+1} . Para ello hay que sumar (5.4) con (5.2):

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + f''_i (\Delta x)^2 + f'''_i \frac{(\Delta x)^4}{12} + \dots \quad (5.7)$$

Si se resuelve para f''_i :

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2. \quad (5.8)$$

Las fórmulas de aproximación en diferencias finitas para derivadas parciales de funciones multidimensionales son esencialmente iguales a las diferenciación de funciones unidimensionales. Considérese una función bidimensional $f(x, y)$. La aproximación de diferencia para la derivada parcial con respecto a x , por ejemplo, puede deducirse fijando un valor constante y_i y considerando $f(x, y_i)$ como una función unidimensional. Por tanto, la aproximación de diferencia

central para las derivadas parciales se pueden escribir como:

$$f_x = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad (5.9)$$

en donde hemos utilizado $f_{ij} = f(x_i, y_j)$. Las aproximaciones de diferencia central para las segundas derivadas de $f(x, y)$ en (x_i, y_j) :

$$f_{xx} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (5.10)$$

$$f_{yy} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (5.11)$$

$$f_{xy} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{\Delta y \Delta x} \quad (5.12)$$

Es importante recalcar es que se ha reemplazado un problema de determinación de una función continua desconocida por un problema de resolución de una ecuación matricial para un conjunto de valores discretos, pues ahora las variables corresponden a la función evaluada en los puntos cercanos a (x_i, y_j) . Ésta es la esencia del método.

5.1.2. Consistencia

Se dice que un esquema discreto es *puntualmente consistente*, si el correspondiente operador discreto L_i^n , se aproxima al operador continuo L cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Para ser más precisos el esquema de diferencias finitas¹:

$$L_i^n u_i^n = G_i^n, \quad (5.13)$$

es puntualmente consistente con la ecuación diferencial

$$Lv = F, \quad (5.14)$$

en (x, t) si para cualquier función regular $f(x, t)$ se cumple:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} (Lf - F)_i^n - (L_i^n f(x_i, t^n) - G_i^n) = 0, \quad (5.15)$$

donde $x_i^n = n\Delta x$ y $t^n = n\Delta t$. Si $v(x, t)$ es una solución de la ecuación diferencial, el que el esquema sea consistente es equivalente a:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} (L_i^n v(x_i, t^n) - G_i^n) = 0. \quad (5.16)$$

¹Se escribe $u_i^n = u(x_i, t^n)$.

Por otra parte cualquier esquema de dos niveles se puede escribir como:

$$u^{n+1} = Qu^n + \Delta t G^n, \quad (5.17)$$

El esquema es *consistente en norma*, si la solución v a la ecuación diferencial satisface:

$$v^{n+1} = Qv^n + \Delta t G^n + \Delta t \tau^n, \quad (5.18)$$

con $\|\tau^n\| \rightarrow 0$ cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, τ^n juega el papel de error global de truncamiento global que surge, como su nombre lo indica, al cortar una aproximación de una función.

5.1.3. Convergencia

En contraste con la consistencia, que requiere que el operador discreto tienda al operador continuo, convergencia implica que la solución del sistema discreto se aproxime a la solución de sistema continuo después de un tiempo finito cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Se habla de dos tipos de convergencia para un esquema numérico, convergencia puntual y convergencia en norma, cuyo significado se dará a continuación.

Se dice que un esquema es *convergente en norma* en un tiempo $T = n\Delta t$ si para cualquier norma se cumple

$$\|u^n - v^n\| \rightarrow 0, \quad (5.19)$$

mientras $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.

El esquema en diferencias $L_t^n u(x_i, t^n) = G_i^n$ es convergente de orden (p, q) si a cualquier tiempo $T = n\Delta t$ se sigue que:

$$\|u^n - v^n\| = \mathcal{O}(\Delta x^p + \Delta t^q), \quad (5.20)$$

el rango de convergencia es p en x y q en t

Se ha mencionado ya que el error en las aproximaciones de diferencias finitas decrece incrementando la densidad del mallado, para aplicar el proceso a una situación en la cual no se conoce la solución exacta, es necesario estudiar la convergencia del método, de acuerdo al refinamiento de la malla, en un intento por estimar la magnitud de los errores ocurridos al producirse una aproximación.

5.1.4. Estabilidad

Las soluciones de una ecuación en diferencias se dice que permanece estable en la norma $\|\cdot\|$ si para cada tiempo T existe una constante $K \geq 0$ (que puede o no depender de T) y un real

$\delta_0 \geq 0$ tal que se cumple:

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\|. \quad (5.21)$$

para cada $n\Delta t \leq T$ y $0 \leq \Delta x \leq \delta_0$.

El resultado fundamental de la teoría de sistemas hiperbólicos lineales de valores iniciales, es el teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer, que dice que para un método consistente, la estabilidad es una condición necesaria y suficiente para convergencia, una prueba del teorema se encuentra en [11]. El que un esquema sea estable nos garantiza que el error de redondeo que cometemos al hacer una iteración permanecerá acotado y por tanto podemos confiar en la solución obtenida

5.2. Ecuaciones de Einstein en simetría esférica

Con el propósito de evolucionar las ecuaciones de Einstein es necesario escribirlas de tal forma que sea posible resolverlas numéricamente. La falta de regularidad en las variables geométricas en el origen es una fuente de serios problemas para la evolución de espacios-tiempo esféricamente simétricos.

5.2.1. Regularización

Es bien conocido que las coordenadas esféricas presentan una singularidad en el origen, de hecho no están definidas, y es necesario utilizar otra carta coordenada para completar un atlas. En el caso de pruebas numéricas esta desventaja se presenta con mayor intensidad pues es difícil llevar a cabo un proceso límite numéricamente, en un cociente por ejemplo. Si se quiere resolver las ecuaciones de Einstein en simetría esférica numéricamente, uno se tiene que asegurar que las ecuaciones sean regulares cerca del origen $r = 0$.

Existen dos tipos diferentes de condiciones de regularidad que las variables dinámicas $(A, B, D_A, D_B, K_A, K_B)$ deben satisfacer a $r = 0$: la primera condición es aquella que surge al imponer que las variables deben estar bien definidas en el origen, lo que implica el siguiente

comportamiento para r 's pequeñas:

$$A \sim A^0 + O(r^2), \quad (5.22)$$

$$B \sim B^0 + O(r^2), \quad (5.23)$$

$$D_A \sim O(r), \quad (5.24)$$

$$D_B \sim O(r), \quad (5.25)$$

$$K_A \sim K_A^0 + O(r^2), \quad (5.26)$$

$$K_B \sim K_B^0 + O(r^2), \quad (5.27)$$

con $\{A^0, B^0, K_A^0, K_B^0\}$ funciones que no dependen de r . Esto porque las funciones $\{A, B, K_A, K_B\}$ deben ser pares para que sus derivadas sean continuas en $r = 0$. Para imponer estas condiciones se quitó el origen de la malla, es decir el primer punto esta en $-dr/2$ y el segundo en $dr/2$, esto pidiendo que las variables $\{A, B, K_A, K_B\}$ sean pares y las funciones D_A y D_B impares en $r = 0$.

El segundo tipo de condiciones surge al mirar las ecuaciones de evolución, por ejemplo, si vemos las ecuaciones de la componente angular de la curvatura intrínseca y de la constricción hamiltoniana (que se reproducen a continuación por claridad)

$$\begin{aligned} \partial_r K_B = & -\frac{\alpha}{2A}[\partial_r D_B + D_A D_B - \frac{D_A D_B}{2} + D_B^2 - 2AK_B(K_A + 2K_B) \\ & + \frac{(2D_A - D_A + 4D_B)}{r} - \frac{2(A-B)}{Br^2}]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$-\partial_r D_B + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4} + AK_B(2K_A + K_B) + \frac{(D_A - 3D_B)}{r} + \frac{(A-B)}{Br^2} = 0. \quad (5.29)$$

parece que los términos $\frac{(A-B)}{Br^2}$, divergen dado el comportamiento que tienen cerca del origen. Lo mismo ocurre con la constricción de momentos

$$C_m = -\partial_r K_B + \left(\frac{D_B}{2} + \frac{1}{r}\right)(K_A - K_B) = 0, \quad (5.30)$$

con el término $(K_A - K_B)/r$.

Que el espacio-tiempo sea plano cerca del origen, implica que para pequeños valores de r se debe tener $A^0 = B^0$, $K_A^0 = K_B^0$. Esta condición surge porque cerca del origen debe ser posible escribir la métrica (4.1) como:

$$dl_{R \rightarrow 0}^2 = dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.31)$$

con R la distancia radial propia del origen. Una transformación local de coordenadas de R a r nos da la métrica de la forma

$$dl_{r \sim 0}^2 = \left(\frac{dR}{dr} \right)_{r=0}^2 (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)), \quad (5.32)$$

que implica que $A^0 = B^0$ y como se debe tener para todo tiempo, también se debe tener que $K_A^0 = K_B^0$.

El problema con esta condición es que se ha sobredeterminado el problema pues se pide que las derivadas de los coeficientes métricos se anulen en $r = 0$ y que ambas funciones sean iguales, hay tres condiciones para dos variables, de igual forma ocurre con las componentes de la curvatura intrínseca. Para resolver el problema se introduce la variable auxiliar definida como: $\lambda = (1 - \frac{A}{B})/r$. Pedir que el espacio sea plano en el origen es equivalente a pedir que λ sea de la forma $\lambda \sim O(r)$ cerca del origen, que puede ser implementado fácilmente si se pide que λ sea impar.

La constricción hamiltoniana toma entonces la forma:

$$\partial_r D_B = \frac{\lambda}{r} + AK_B(2K_A + K_B) + \frac{1}{r}(D_A - 3D_B) + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4}. \quad (5.33)$$

Mientras que la ecuación de evolución para K_B se escribe como:

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & -\frac{\alpha}{2A} \left[\partial_r D_B + D_\alpha D_B + D_B^2 - \frac{D_A D_B}{2} - \frac{1}{r}(D_A - 2D_\alpha - 4D_B - 2\lambda) \right] \\ & + \alpha K_B (K_A + 2K_B). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ahora los términos con los que se tenían problemas, tienen la forma de λ/r que no tiene el comportamiento patológico gracias a que λ es impar en $r = 0$. Sin embargo es necesario, para no sobreespecificar el problema dar la ecuación de evolución para λ , que puede obtenerse directamente de su definición y sustituir las derivadas temporales de los coeficientes métricos, la ecuación de evolución para λ es:

$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \left(\frac{K_A - K_B}{r} \right). \quad (5.35)$$

Parece que tenemos problemas con el último término, sin embargo, podemos quitarlo si sustituimos la constricción de momentos (4.21), de tal suerte que tengamos:

$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \left[\partial_r K_B - \frac{D_B}{2}(K_A - K_B) \right]. \quad (5.36)$$

5.3. Programa OLLINSPIHERE

El programa "OLLINSPIHERE" fue escrito para resolver las ecuaciones de Einstein en simetría esférica con diferentes formulaciones de las ecuaciones 3+1. El tipo de materia que se tiene es un

campo escalar con diferentes tipos de potencial de interacción. Se pueden implementar diferentes condiciones de norma tanto para el lapso (lapso maximal, geodésico, 1+log) como para el vector de corrimiento (cero, mínima distorsión). El código se encuentra regularizado según el proceso descrito anteriormente.

El código resuelve las ecuaciones utilizando el método de diferencias finitas a segundo orden en $\Delta x, \Delta t$. Para las ecuaciones de evolución de las variables de campo se utiliza el método de Runge-Kutta usual a segundo y cuarto orden, así como el método iterativo de Crank-Nicholson Ref. [17].

Las variables fundamentales que utiliza el código son α, β^r, A, B , las componentes mixtas de la curvatura extrínseca K_A y K_B y las derivadas espaciales de la métrica D_A, D_B .

5.4. Simulaciones numéricas, ejemplos

En esta sección se mostrarán algunos ejemplos cuya solución se conoce analíticamente con el propósito de observar el comportamiento del código numérico y corroborar que es posible reproducir los resultados obtenidos analíticamente. Los más sencillos son un espacio tiempo de Minkowski y un espacio que contiene un agujero negro, el de Schwarzschild.

5.4.1. El espacio tiempo de Minkowski

Para un espacio-tiempo plano o de Minkowski se tiene la métrica espacial $ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$, con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. En la simulación numérica se tomó como datos iniciales un espacio-tiempo de Minkowski en las coordenadas usuales es decir:

$$A = B = 1$$

$$D_A = D_B = 0.$$

$$K_A = K_B = 0.$$

Como era de esperarse el coeficiente métrico A permanece constante en $A = 1$ como lo muestra las figura 5.1.

Para observar el comportamiento del código para una evolución no trivial, se propone un lapso inicial de la forma:

$$\alpha_0 = 1 + r^2 \exp\left(-\frac{(r - r_0)^2}{\sigma^2}\right).$$

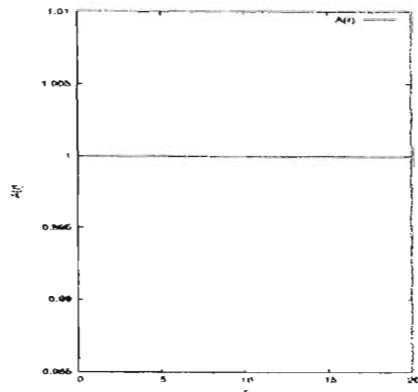


Figura 5.1: Se grafica el coeficiente métrico A . Se mantiene siempre en 1 pues es la solución de un espacio-tiempo tipo Minkowski.

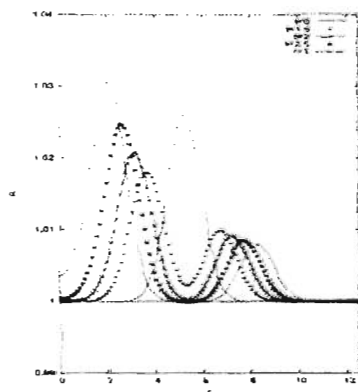


Figura 5.2: Cuando el lapso se perturba con una función de tipo gaussiana, el pulso inicial se divide en dos uno que se propaga hacia la derecha mientras que el otro lo hace a la izquierda.

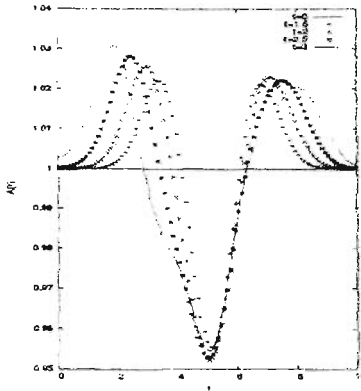


Figura 5.3: La perturbación en A se divide en dos pulsos que se propagan en direcciones opuestas y su amplitud crece con el tiempo.

que corresponde una perturbación gaussiana al lapso original de Minkowski. Luego se utiliza la condición de foliación armónica para evolucionar el lapso.

En las figuras 5.2 y 5.3 se muestran la evolución de α y de A en función de r .

5.4.2. El espacio-tiempo de Schwarzschild

Para espacios tiempo que contienen agujeros negros la métrica utilizada es:

$$ds^2 = \psi^4 \{ A dr^2 + Br^2 d\Omega^2 \},$$

con ψ un factor conforme independiente del tiempo. El espacio-tiempo de Schwarzschild, en las coordenadas isotrópicas estándar, se obtiene al tomar $A = B = 1$ y $\psi = (1 + M/2r)$. El horizonte en estas coordenadas está en $r = M/2$.

Este tipo de espacio-tiempo es más interesante en el sentido de que presenta una singularidad y nos permite ver entonces el comportamiento de los coeficientes métricos al escoger diferentes tipos de foliación, en la figura 5.4 se muestra, por ejemplo, la evolución de A y en la figura 5.5 se muestra la evolución de K_A para el caso en que se tomó la condición de foliación geodésica que corresponde a $\alpha = 1$ para todo t . nótese que el tiempo máximo es $t = 3$, pues el código falla en $t \sim \pi$, el tiempo que toma en llegar a la singularidad.

En las figuras 5.6 y 5.7 se muestran las mismas variables A y K_A pero en este caso se utilizó la condición de foliación maximal, así mismo se muestra en la fig 5.8 la evolución del lapso. Es

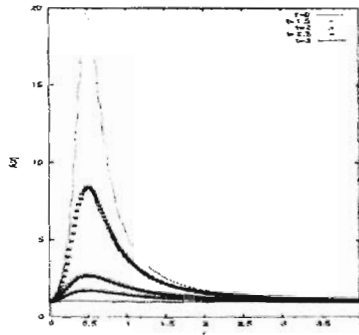


Figura 5.4: Para geodésica A en $t = 0$ es uno y conforme transcurre el tiempo, comienza a crecer desmesuradamente debido a que nos acercamos a la singularidad.

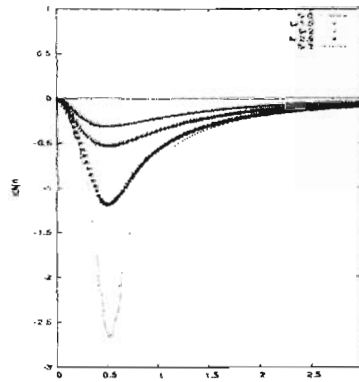


Figura 5.5: Para geodésica K_A tiene un pico debido a que nos acercamos a la singularidad.

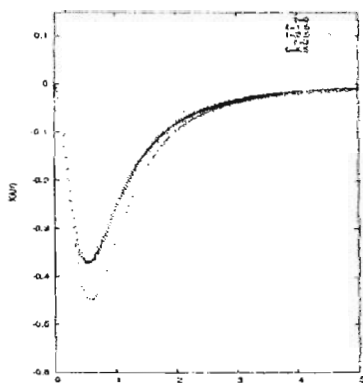


Figura 5.6: K_A a $t = 0$ es cero por las condiciones iniciales pero en el transcurso del tiempo el pico comienza a hacerse más agudo, tiende a infinito. es decir nos acercamos a la singularidad.

interesante notar el colapso del lapso (que el lapso caiga a cero) pues nos indica la presencia de la singularidad en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

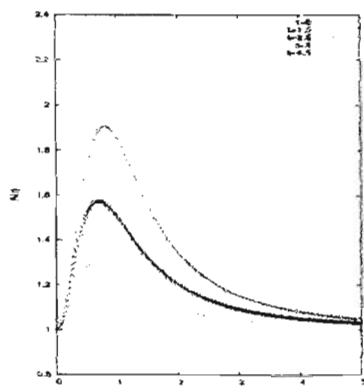


Figura 5.7: en el transcurso del tiempo A comienza a crecer con la condición maximal. nótese sin embargo, que nuestra evolución perdura más que en el caso de foliación geodésica Fig. 5.4 en un tiempo mayor A sólo ha crecido a 2.3.

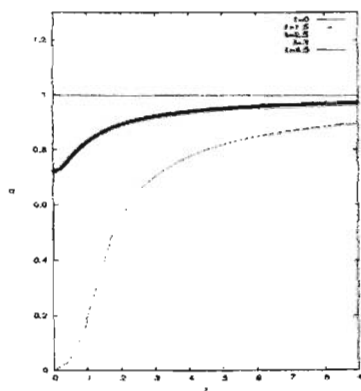


Figura 5.8: Se observa con la foliación maximal el lapso colapsa (cae repentinamente a cero) debido a la singularidad.

Capítulo 6

Agujeros de gusano

En las últimas décadas del siglo pasado la comunidad científica especuló acerca de la posibilidad de viajar en el tiempo y el poder recorrer grandes distancias en poco tiempo (véase por ejemplo [6], [9] y [16]). Aunque la relatividad especial de Einstein nos dice que nada puede viajar más rápido que la velocidad de la luz, no hay nada claro acerca de la prohibición de poder transportarse de un lugar a otro en un tiempo corto de tal forma que no se viole ninguna ley física. En este trabajo nos centraremos en el estudio de un atajo que podría ser utilizado para recorrer grandes distancias en poco tiempo, un agujero de gusano.

Formalmente un agujero de gusano es cualquier región compacta del espacio-tiempo con una frontera topológicamente no trivial. Igualmente se considera una solución de la ecuaciones de Einstein que posee una región que conecta dos universos o dos regiones distintas de un mismo universo.

6.1. El puente de Einstein-Rosen

En 1935 Einstein y Rosen encontraron que mediante un cambio de coordenadas conveniente podían “desaparecer” la singularidad en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Hay que recordar que en esas fechas no se tenía clara la diferencia entre una singularidad coordenada y una singularidad física o en la curvatura del espacio.

Considérese la métrica de Schwarzschild en las coordenadas usuales:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2 d\Omega^2. \quad (6.1)$$

Si tomamos $u^2 = r - 2M$ se puede escribir esto como:

$$ds^2 = -\frac{u^2}{u^2 + 2M} dt^2 + 4(u^2 + 2M) du^2 + (u^2 + 2M)^2 d\Omega^2.$$

con $u \in (-\infty, \infty)$. Aparentemente la singularidad ha desaparecido, sin embargo, este cambio de coordenadas sólo descarta la región que contiene la singularidad $r \in [0, 2M)$ y cubre dos veces la región asintóticamente plana $r \in [2M, \infty)$, la región cercana a $u = 0$ es interpretada como el puente que une dos regiones asintóticamente planas.

Para justificar esta interpretación consideremos una superficie esférica definida como aquella sobre la cual $u = cte$. El área de esta superficie es $4\pi(u^2 + 2M)^2$ esta área tiene un mínimo en $u = 0$, con $A(0) = 4\pi(2M)^2$. Uno define la parte más estrecha de la geometría como la garganta, mientras que la región cercana es llamada el puente o agujero de gusano de Schwarzschild.

6.2. Agujeros de gusano atravesables

La palabra atravesable se utiliza para indicar que un ser humano podría utilizar un agujero de gusano para viajar seguro en un tiempo razonable y regresar sin ser aplastado por efectos gravitacionales como las fuerzas de marea. En 1988 Thorne y Morris estudiaron en [8] la existencia de tales estructuras.

El estudio consiste en considerar las condiciones para las cuales se puede mantener abierto un agujero de gusano y considerar la posibilidad de viajar a través de él. Si alguien intentara cruzar el agujero de gusano de Schwarzschild inevitablemente encontraría la singularidad y sería despedazado por las fuerzas de marea.

6.2.1. Propiedades de un agujero de gusano atravesable

Es deseable que el agujero de gusano no presente problemas para ser utilizado como medio de transporte. Entre las propiedades que se le piden a un agujero de gusano para considerarlo atravesable son:

- La solución a las ecuaciones de Einstein debe tener una garganta que conecte dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo.
- No debe poseer un horizonte, pues de otra forma sería imposible un viaje en dos direcciones.
- Las fuerzas de marea que un viajero experimente al pasar a través de él deben ser lo suficientemente débiles para mantener con vida al viajero.

- El tiempo en atravesar el agujero de gusano debe ser finito y debe transcurrir un tiempo propio corto.
- Debe ser estable ante perturbaciones, es decir debe soportar que un viajero pase através de él.

Aunque en [8] se menciona que no se puede decir nada sobre la estabilidad de un agujero de gusano, en 2002 Shinkai y Hayward [13] estudiaron la solución estática de un agujero de gusano encontrada por Ellis [5], encontrando resultados muy interesantes aunque desalentadores. Encontraron que el agujero es inestable ante perturbaciones en el campo que lo mantiene abierto.

6.3. Estabilidad de un agujero de gusano

6.3.1. Campo fantasma

A pesar de que Thorne y Morris en [8] parecen haber mostrado la imposibilidad de los agujero de gusano, pues demuestran que la materia necesaria para mantener un agujero de gusano debe tener densidad de energía negativa, en teoría cuántica de campos se encuentra que este tipo de materia puede ser producto de fluctuaciones en el vacío cuántico. Una muestra de ello es el efecto Casimir [9], sin embargo, la cantidad de materia que se produce no podría ser utilizada para el mantenimiento de un agujero de gusano.

El tipo de materia utilizado en este trabajo es conocido como *campo fantasma* que es un campo escalar con tensor de energía momento:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \{\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta})\},$$

es decir con el signo opuesto al usual. A partir de las ecuaciones de conservación, $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$, se obtiene que la ecuación de evolución del campo ϕ es la ecuación de Klein-Gordon. La diferencia entre el campo fantasma y el de Klein-Gordon es que el primero tiene densidad de energía negativa por el signo de $T_{\mu\nu}$.

6.3.2. Agujero de gusano estático

Una vez que se tienen las ecuaciones de Einstein en simetría esférica es posible estudiar un agujero de gusano estático y esféricamente simétrico. Para simplificar las ecuaciones se considera una métrica esféricamente simétrica e independiente del tiempo de la forma

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2) d\Omega^2 \quad (6.2)$$

con l la distancia radial propia a la garganta. Hay que notar que al igual que en el caso estudiado para Schwarzschild, el área de las esferas $l = ct\epsilon$ tiene un mínimo en $l = b_0$ (el radio de la garganta).

Para propósitos numéricos es conveniente transformar la parte espacial de la métrica (6.2) a una que sea conformemente plana, es decir que tenga la forma:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \Psi^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (6.3)$$

Para hacerlo se debe pedir $dl^2 = \Psi^4 dr^2$ y $b_0^2 + l^2 = \Psi^4 r^2$. Resolviendo el sistema de ecuaciones, con la condición de que cuando r tiende a infinito Ψ tienda a 1, (límite asintótico plano) se obtiene:

$$\Psi = \frac{(4r + 1)^{1/2}}{2r}, \quad (6.4)$$

además de la relación entre r y la distancia radial propia a la garganta l :

$$l = r - \frac{1}{4r}.$$

Se había mencionado que la materia necesaria para mantener un agujero de gusano satisface la ecuación de Klein Gordon, $\square^2 \phi = 0$. El campo escalar sin masa que es la solución es¹:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{l}{b_0} \right). \quad (6.5)$$

La densidad de energía asociada al campo fantasma es:

$$\begin{aligned} \rho &= -T_t^t = -g^{tt} T_{tt} \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha^2} \left[\partial_t \phi^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \left(\frac{\partial_t \phi^2}{\alpha^2} + \gamma^{rr} \partial_r \phi^2 \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial_r \phi^2}{2A\Psi^4} \right), \end{aligned}$$

donde se utilizó que el campo es independiente del tiempo.

Se observa que la densidad de energía es negativa, por lo cual viola la condición fuerte de energía [16]. De aquí el nombre de campo fantasma y la primera complicación acerca de la existencia física de dicho campo.

¹Hay que resaltar que el tensor de energía momento satisface las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ para la métrica (6.2).

6.3.3. Condiciones iniciales

Se considera que el espacio-tiempo tiene originalmente un agujero de gusano estático y deseamos conocer como evoluciona con el tiempo. Nos interesa saber principalmente si esta configuración es estable (en la naturaleza se encuentran configuraciones que son estáticas pero son inestables, colocar un lápiz sobre su punta en un escritorio por ejemplo).

Hay que recordar, sin embargo, que al modificar la materia la resultante ya no es solución de las ecuaciones de Einstein y es necesario hacer algunos ajustes para que se satisfagan. Al hacer la descomposición 3+1 se obtuvieron seis ecuaciones de evolución y cuatro ecuaciones de constricción que nos decían básicamente que las condiciones iniciales no podían ser dadas arbitrariamente. Este es nuestro punto de partida: se imponen las ecuaciones iniciales $\text{tr}K = 0$, $K_B = 0$, $A = 1$, $D_A = 0$ y a continuación se obtiene una relación para B y D_B . Para ello se considera que se debe satisfacer la constricción hamiltoniana. Al resolver para el coeficiente métrico angular estamos permitiendo que el radio de la garganta cambie.

6.3.4. Perturbación del agujero de gusano

Consideramos como condiciones iniciales que el espacio-tiempo contiene un agujero de gusano y queremos saber su comportamiento ante pequeñas perturbaciones, que correspondería a un viajero tratando de atravesarlo.

El estudio consiste en considerar una perturbación en el campo fantasma de la forma:

$$\phi = \phi_0 + \delta_{\pm}, \quad (6.6)$$

con:

$$\delta_{\pm} = \pm A_0 \exp\left(-\frac{l_0^2}{\sigma^2}\right),$$

A_0 es la amplitud del pulso, σ su ancho y l_0 la distancia radial propia de r_0 definida como: $l_0 = \int_{r_0}^r \Psi^2 dr = (r - r_0)\left(\frac{1}{4r_0} + 1\right)$. Si mantenemos las condiciones iniciales $\text{tr}K = K_B = 0$, $A = 1$, $D_A = 0$ podemos utilizar las ecuaciones de evolución de Einstein para conocer el comportamiento del agujero de gusano ante dicha perturbación.

El radio de Shwarzschid o radio de área esta definido como:

$$R_{sch} = r\Psi^2\sqrt{E}, \quad (6.7)$$

indica el comportamiento de la garganta del agujero de gusano ya que da el radio de las esferas, al hacer cortes de espacio-tiempo a t y r constantes.

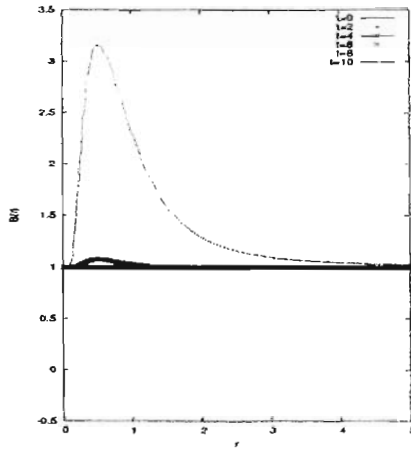


Figura 6.1: Se grafica el coeficiente métrico B , en un principio comienza en $B = 1$ y conforme transcurre el tiempo comienza a crecer cerca del radio de la garganta.

6.4. Resultados de la simulación numérica

Ya en [13] se tenía el antecedente de la inestabilidad de un agujero de gusano. Al estudiar este sistema se encuentra que el destino del agujero de gusano es colapsarse o abrirse indefinidamente, dependiendo del signo de la perturbación que se le aplica.

Se le aplica al campo una perturbación de la forma (6.6) con $A = 0.002$, $\sigma = 1.00$, $r_0 = 5.00$ y se hacen varias simulaciones numéricas utilizando diferentes resoluciones de la malla ($\Delta r = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$). En las figuras 6.1 y 6.2 se muestra la evolución de B y K_B para el caso en que la perturbación al campo es positiva, nótese como cerca de la garganta $r \sim 0.5$, B crece mientras que K_B presenta un pico muy pronunciado (en dirección opuesta) en el mismo valor.

En la figura 6.3 se muestra el comportamiento del lapso como función de r a diferentes tiempos. La condición de foliación utilizada fue la maximal y se nota como el lapso *siente* la garganta del agujero, conforme evoluciona cae a cero en $r \sim 0.5$. En la figura 6.4 se muestra también la evolución del campo fantasma el cambio no es significativo debido al tamaño de la amplitud de la perturbación.

Una de las formas que se tiene para checar la convergencia del código es refinar la malla y mirar las ecuaciones de constricción pues éstas deben converger a cero, la solución exacta. En la

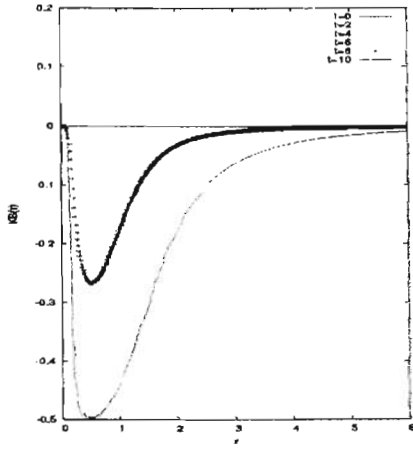


Figura 6.2: La componente de curvatura K_B comienza a hacerse cada vez más negativa conforme el transcurso del tiempo.

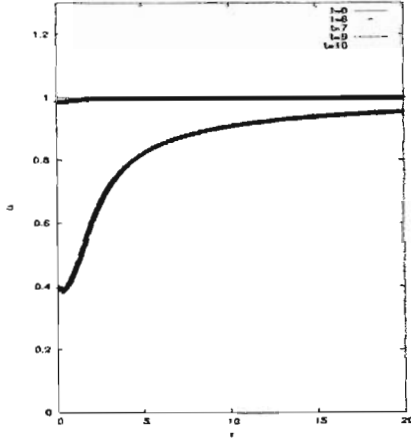


Figura 6.3: El colapso del lapso no es drástico cerca de la garganta.

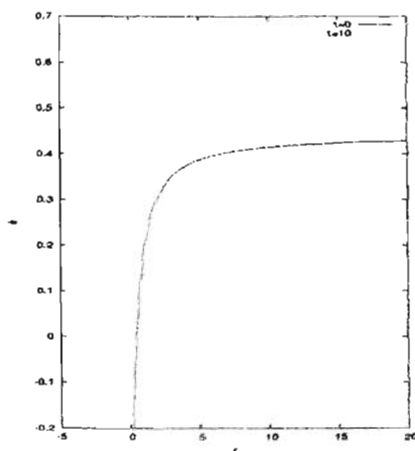


Figura 6.4: La perturbación del campo fantasma comienza a viajar hacia atrás del centro $r_0=0.5$.

figura 6.5 se encuentra graficada la norma de la constricción hamiltoniana² para las diferentes resoluciones de la malla utilizadas. Analíticamente las constricciones deben ser idénticamente cero, sin embargo debido a los errores numéricos, esto nunca es posible. Los valores diferentes de cero que adquieren, deben converger a cero conforme uno aumenta la resolución de la malla, en la misma figura se grafican el logaritmo de la norma de las constricciones como funciones del tiempo para las cuatro resoluciones, vemos la convergencia en norma al aumentar la resolución de la malla a segundo orden en Δr como se esperaba.

En la figura 6.6 se encuentra graficado el valor mínimo del radio de Schwarzschild como función de t y nos indica que la garganta se esta abriendo.

Por otra si parte consideramos una perturbación en el campo escalar del tipo δ_- con la misma amplitud, ancho y centrada en el mismo punto que el caso anterior obtenemos una evolución diferente.

En la figura 6.7 se muestra la evolución de B . Se encuentra un comportamiento de algún modo contrario a lo que ocurre en el caso anterior, el comportamiento de los coeficientes métricos y de curvatura es opuesto y lo más significativo es lo que le ocurre al agujero de gusano en si.

En la figura 6.8 se grafica el lapso maximal como función de r , se observa como tiende a cero al aproximarse al radio de la garganta. En la figura 6.9 esta graficado el mínimo del radio de

²La norma utilizada es la raíz de la media de los cuadrados definida como: $\|f\| := \left(\frac{\sum_i f_i^2}{N_i} \right)^{1/2}$

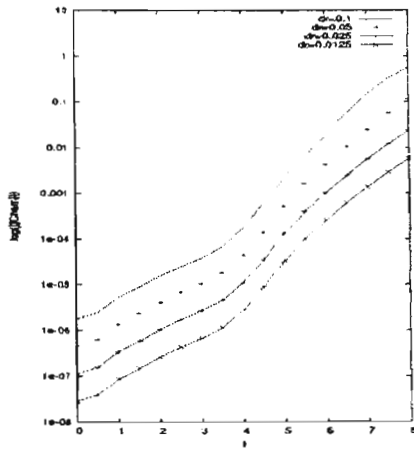


Figura 6.5: La convergencia del código puede chequearse utilizando diferentes resoluciones al graficar la norma de la constricción hamiltoniana.

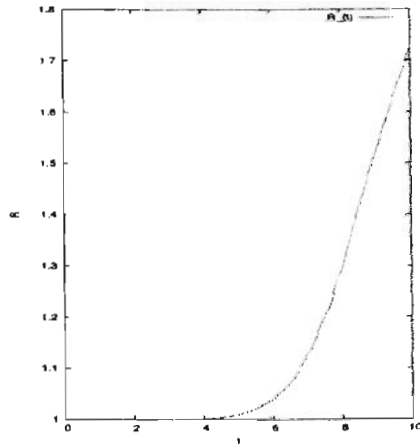


Figura 6.6: El radio de Schwarzschild indica el comportamiento del radio de la garganta, nótese como crece indefinidamente con el tiempo.

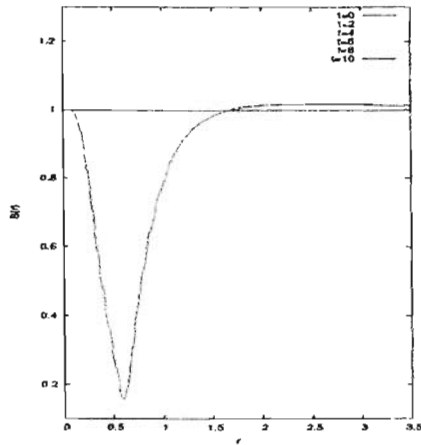


Figura 6.7: El coeficiente métrico B para el caso en que la perturbación es negativa. Comienza a tomar valores muy pequeños cerca del radio de la garganta.

Schwarzschild, en ésta gráfica se ve que su valor mínimo decrece, lo que nos indica que la garganta se está cerrando. Finalmente en la figura 6.10 se muestra la convergencia del código para este caso, utilizando el logaritmo de la norma de la constricción hamiltoniana.

Se ha encontrado que un agujero de gusano de la forma (6.3) es inestable ante perturbaciones en el campo que lo sustenta. Por un lado, cuando se perturba el agujero de gusano con un pulso de la forma δ_+ se encuentra que su garganta crece indefinidamente, mientras que si la perturbación es del tipo δ_- la garganta comienza a cerrarse.

Para imaginar la situación física que representaría el caso estudiado considérese que nos encontramos un agujero de gusano estático e intentamos atravesarlo, el resultado es que si lanzamos una nave espacial del mismo material que mantiene al agujero de gusano este se cerrará o se abrirá indefinidamente, dependiendo del signo de la perturbación.

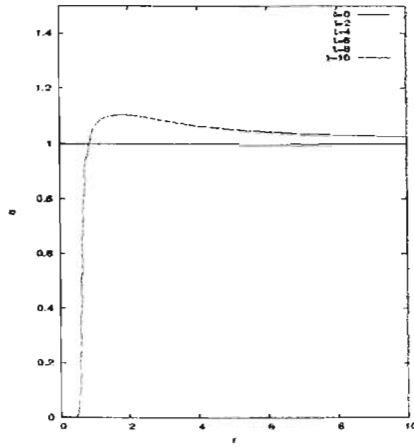


Figura 6.8: El colapso del lapso se observa desde un comienzo hasta que finalmente en $t = 10$ cae dramáticamente a cero.

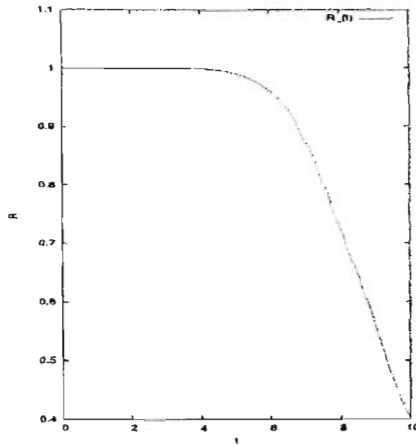


Figura 6.9: El valor mínimo del radio de Schwarzschild para la perturbación δ_- comienza a disminuir de manera monótona lo que nos indica que la garganta se cierra al aplicar una perturbación de éste tipo.

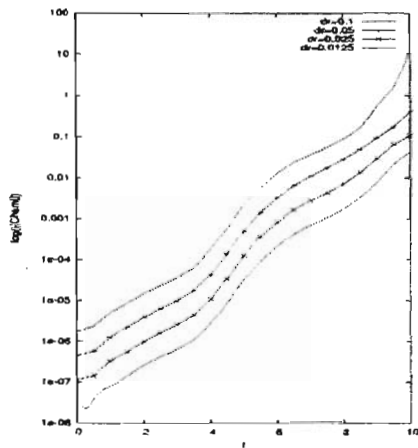


Figura 6.10: al igual que en la fig. 6.5, se grafica la contracción hamiltoniana para checar convergencia, pero en este caso se refiere a la perturbación de tipo δ_- .

Bibliografía

- [1] A. M. Abrahams and J. W. York. 3+1 general relativity in hyperbolic form. (1996). gr-qc/9601031.
- [2] Miguel Alcubierre. Hyperbolic slicings of spacetime: singularity avoidance and gauge shocks. *Class. Quantum Grav.*, **20**:607-624, (2003). gr-qc/0210050.
- [3] Miguel Alcubierre, Alejandro Corichi, José A. González, Darío Núñez, and Marcelo Salgado. A hyperbolic slicing condition adapted to Killing fields and densitized lapses. *Class. Quant. Grav.*, **20**:3951-3968, (2003). gr-qc/0303069.
- [4] C. Bona, E. Seidel J. Massó, and J. Stela. *Phys. Rev. Lett.*, **75**:600, (1995). gr-qc/9412071.
- [5] H. Ellis. Ether flow through a drain hole: A particle model in general relativity. *J. Math. Phys.*, **14**:104-118, (1973).
- [6] Robert W. Fuller and John A. Wheeler. Causality and multiply connected space-time. *Phys. Rev.*, **128**:919, (1962).
- [7] A. Lichnerowicz. *J. Math. Pure Appl.* **23**:919, (1944).
- [8] M. S. Morris and K. S. Thorne. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, **56**:395, (1988).
- [9] M. S. Morris and K. S. Thorne. Wormholes time machines, and weak energy condition. *Phys. Rev.*, **61**:1446, (1988).
- [10] S. Deser R. Arnowitt and W. Misner. in *Gravitation: An introduction to Current Research*. John Wiley, (1962).
- [11] R. Richtmyer and K.W. Morton. *Difference methods for initial value problems*. Interscience publishers, (1967).

- [12] M. Salgado. Formalismo 3+1 de la relatividad general y formalismo de tetradas con aplicaciones numéricas. *Proc. del III taller de la DGSFM*, (2003).
- [13] H. Shinkai and S. Hayward. Fate of the first traversible wormhole: black-hole collapse or inflationary expansion. (2002). gr-qc/0205041.
- [14] H. Shinkai and G. Yoneda. Re-formulating the einstein equations for stable numerical simulations. *Progress in Astronomy and Astrophysics*, (2002). gr-qc/0209111.
- [15] L. Smarr and J. York. Kinematical conditions in the construction of spacetime. *Phys. Rev. D*, 17:2529, (1978).
- [16] M. V. Visser. *Lorentzian Wormholes*. AJP Press, (1995).
- [17] S. A. Teukolsky W. H. Press, B. P. Flannery and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, England., (1988).
- [18] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, U.S.A., (1984).
- [19] J. York. *Sources of Gravitational Radiation*. editado por L. Smarr, Cambridge University Press, Cambridge, England., (1979).