01168

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

USO DE MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN EN PROBLEMAS DE INGENIERÍA CIVIL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

(INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES)

P R E S E N T A:

ALAN PAZ MARTINEZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. IDALIA FLORES DE LA MOTA

MÉXICO, D.F., ABRIL DE 2005

DEDICATORIAS

A mi esposa, Ana:
Eres la razón que me motiva a seguir adelante.
Te amo.

A mis padres:
Su amor y cariño han hecho posible el alcanzar esta meta en mi vida.

A mis hermanas, Mari y Gabi:
Porque siempre puedo contar con ustedes en cualquier situación.

A la Sra. Claudia Moralest:
Por todos los consejos que de usted recibí.

A mi tía "Trini" †:
Sé que desde el cielo cuidas de todos nosotros.

A mis amigos del posgrado:
El haberlos conocido fue una de las experiencias más gratas de mi vida. Espero que sigamos en contacto.

A mis compañeros y amigos de la ENP 4:
De ustedes he aprendido bastante.

A la familia Luna:
Por todo el apoyo brindado.

AGRADECIMIENTOS

A mi Alma Mater, la Universidad Nacional Autónoma de México, por formarme profesionalmente y desarrollarme en el campo docente dentro de la institución educativa más importante del país.

A **CONACyT** por la beca otorgada para poder llevar a cabo mis estudios de maestría.

A la Dra. Idalia Flores de la Mota por la guía y tiempo dedicado en la realización y revisión de este trabajo, así como la visión tan amplia que nos brinda de la Investigación de Operaciones a todos los que hemos sido sus alumnos.

A la M.I. Mayra Elizondo Cortés por haberme enseñado los fundamentos de la Teoría de Redes, pero sobre todo por ser una excelente amiga.

A los profesores que generosamente aceptaron ser miembros de mi jurado: M.I. Rubén Téllez Sánchez, Dr. José de Jesús Acosta Flores y Dr. Ricardo Aceves García.

OBJETIVO

Hacer una descripción de los métodos y técnicas de optimización haciendo énfasis en su aplicación dentro del contexto de la Ingeniería Civil, y que sirva como una guía o fuente bibliográfica tanto a estudiantes como a profesionales del área.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 1

1. PROGRAMACIÓN LINEAL APLICADA A ALGUNOS PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN Y ESTRUCTURAS 3

1.1 MÉTODO GRÁFICO 5
Ejemplo 1.1 Construcción de vivienda 6
Ejemplo 1.2 Armadura de peso mínimo 9
Ejemplo 1.3 Mezcla de agregados 14
Ejemplo 1.4 Resistencia a compresión de una columna 17
Ejemplo 1.5 Sistema de andamios 19

1.2 EL MÉTODO SIMPLEX 22
1.2.1 Forma estándar de programación lineal 23
Ejemplo 1.6 24

1.3 ALGORITMO SIMPLEX 25
Ejemplo 1.7 26
Ejemplo 1.8 30
Ejemplo 1.9 31

1.4 VARIABLES ARTIFICIALES 32
1.4.1 El método de la M 33
Ejemplo 1.10 33
1.4.2 El método de las dos fases 35
Ejemplo 1.11 35

1.5 CASOS ESPECIALES DEL MÉTODO SIMPLEX 38
1.5.1 Degeneración 39
1.5.2 Soluciones óptimas alternativas 39
1.5.3 Solución no acotada 40
1.5.4 Solución no factible o inconsistente 40

1.6 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE MANERA GRÁFICA 41
Ejemplo 1.12 41

1.7 DUALIDAD 46
Ejemplo 1.13 47
Ejemplo 1.14 47

2. ALGORITMOS DE REDES, PERT Y CPM EN PROYECTOS DE INGENIERÍA CIVIL 51

2.1 EL PROBLEMA DE TRANSPORTE 52

2.2 ALGORITMO DE TRANSPORTE 54
2.2.1 Determinación de una solución factible inicial 54
2.2.2 Determinación de la variable de entrada 55
2.2.3 Determinación de la variable de salida 56
Ejemplo 2.1 Transporte de material 56

2.3 FLUJO MÁXIMO 75
2.3.1 Algoritmo de Ford y Fulkerson 75
Ejemplo 2.2 Flujo máximo en una red hidráulica 77

2.3.2 Modelo matemático para el problema de flujo máximo 86
Ejemplo 2.3 86

2.4 PERT Y CPM EN PROYECTOS DE INGENIERÍA CIVIL 87
2.4.1 El método CPM 88
Ejemplo 2.4 Proyecto: construcción de una bodega 91
2.4.2 La técnica PERT 98
Ejemplo 2.5 99

3. PROBLEMAS DE INGENIERÍA CIVIL QUE SE PUEDEN RESOLVER CON PROGRAMACIÓN DINÁMICA 103

3.1 CONCEPTOS IMPORTANTES 103
Ejemplo 3.1 Diseño de un tanque de agua 104
Ejemplo 3.2 Construcción de plantas de energía 110

3.2 CÁLCULOS EN EL SENTIDO DE RETROCESO 113
Ejemplo 3.3 Construcción de plantas de energía (cálculos en el sentido de retroceso) 113
Ejemplo 3.4 Obtención de la geometría de una armadura 115
Ejemplo 3.5 Línea de tubería 124

4. PROGRAMACIÓN NO LINEAL Y PROBLEMAS DE DISEÑO 127

4.1 OPTIMIZACIÓN NO RESTRINGIDA 127
4.1.1 Concavidad y convexidad de funciones de una variable 128
4.1.2 Condiciones necesarias y suficientes para funciones de una variable 129
4.1.3 Concavidad y convexidad de funciones de *n* variables 129
4.1.4 Condiciones necesarias y suficientes para funciones de *n* variables 130
Ejemplo 4.1 Problema de dinámica estructural 132

4.2 OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA 134
4.2.1 Problemas con restricciones de igualdad 135
Ejemplo 4.2 Diseño de una estructura de volumen máximo 136
4.2.2 Problemas con restricciones de desigualdad 141
Ejemplo 4.3 Diseño de una armadura de peso mínimo 142

4.3 CONDICIONES DE KUHN-TUCKER 151

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 153

APÉNDICE 155

BIBLIOGRAFÍA 163

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

La tarea fundamental de los ingenieros es la de mejorar las soluciones existentes a problemas que se presentan en la naturaleza o encontrar otras para los que todavía no están resueltos. El objetivo de todo ingeniero implica el deseo de conseguir una solución adecuada para los problemas con los cuales pueda enfrentarse; de hecho, esto se encuentra arraigado en la misma profesión.

En la actualidad, la práctica de la Ingeniería Civil se enfrenta con retos cada vez mayores. Estos retos consisten en llevar a cabo obras cada vez mejores: más funcionales, más resistentes, más seguras, más económicas, etc. Sin embargo, tradicionalmente al ingeniero civil solamente se le dota, en su formación profesional, de conocimientos que le permiten llevar a cabo parcialmente su función. Es decir, no siempre logra alcanzar el mejor de sus objetivos planteados; ya sea que trate de obtener el mejor diseño posible de una estructura, la selección de los materiales más económicos, pero al mismo tiempo los más resistentes o cualquiera otra que sea su meta.

Los métodos y técnicas de optimización son las herramientas que le permiten al ingeniero civil encontrar no sólo una solución adecuada a un problema determinado sino la mejor de todas ellas. Hace no mucho tiempo ha surgido una tendencia creciente en cuanto a la aplicación de diferentes métodos de optimización que se pueden aplicar a las diferentes áreas de la Ingeniería Civil: análisis y diseño de estructuras, hidráulica, mecánica de suelos y administración de la construcción. Estos métodos están probando su eficiencia y es por ello que muchos centros educativos y universidades a nivel mundial han invertido una gran cantidad de recursos para lograr que estos métodos formen parte del curriculum en los planes de estudio de las diversas carreras de ingeniería.

En México la utilización de los métodos de optimización es relativamente reciente y no existen muchos trabajos técnicos al respecto; esto se debe principalmente a que los ingenieros civiles no tienen una base sólida de las técnicas y métodos de optimización que se pueden utilizar en el área y, por otro lado, no existen investigadores de operaciones que se encuentren interesados en difundirlos para un área de la ingeniería en particular. Los cursos curriculares que existen al respecto a nivel licenciatura muestran una separación muy marcada entre el área ingenieril y la de optimización en las distintas universidades e institutos de educación superior. Muchas veces los planes de estudio de la carrera de Ingeniería Civil incluyen uno o dos cursos de métodos de optimización o de investigación de operaciones, pero el enfoque que se les da a estos cursos –que es el del ámbito financiero o industrial- causa que los mismos estudiantes pierdan el interés ya que no encuentran la aplicación que se les puede dar en algunas de las áreas de la ingeniería.

Por lo anterior, en el presente trabajo se tiene el objetivo de hacer una descripción de los métodos y técnicas de optimización haciendo énfasis en su aplicación dentro del contexto de la Ingeniería Civil, y que sirva como una guía tanto a estudiantes como a profesionales del área. Para la comprensión de estos métodos se considera que es necesario que el lector cuente con los conocimientos equivalentes a los que se han adquirido a la mitad de la licenciatura, principalmente los referentes a cálculo diferencial, estática, análisis y diseño de estructuras, planificación, entre otras.

La metodología que se aplica en el desarrollo de este trabajo consiste principalmente en la introducción al lector acerca de la idea principal en la cual está basada el método de optimización así como la descripción de su algoritmo. Las demostraciones matemáticas de los métodos no se desarrollan debido a que se considera que es más importante la aplicación práctica de los mismos, lo cual es la esencia fundamental de la ingeniería. Una vez que se ha descrito el método se procede a la aplicación de los mismos mediante una serie de ejemplos en los cuales se resuelven problemas típicos del área civil. Cabe mencionar que la mayoría de estos ejemplos corresponden al ámbito estructural debido a que se considera que es ahí donde la optimización ha tenido su mayor aplicación.

El presente trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

Capítulo 1.- Se exponen los conceptos básicos de la programación lineal y la solución obtenida mediante el método gráfico de algunos problemas sencillos, principalmente de resistencia de materiales y análisis de estructuras. Se describe la aplicación del método simplex a problemas en general junto con los diferentes casos que se pueden presentar en su uso, así también como el concepto de dualidad.

Capítulo 2.- Se explican varios conceptos de la teoría de redes que son necesarios para lograr un mejor entendimiento del algunos algoritmos y técnicas que se pueden aplicar para resolver problemas de Ingeniería Civil que se pueden modelar precisamente como una red. Específicamente se aborda el problema de transporte, flujo máximo, así como la técnica PERT y el método CPM, los cuales se utilizan principalmente para la planeación y el control de proyectos de obra civil.

Capítulo 3.- Se trata lo relativo a cómo algunos problemas de Ingeniería Civil, principalmente de tipo estructural y de asignación de recursos, por presentar un carácter recursivo, se pueden abordar desde el enfoque de la programación dinámica. Se explican los conceptos más importantes que la componen: estado, etapa, función de recursividad, etc.

Capítulo 4.- Se exponen los métodos clásicos de optimización no lineal, lo cuales están basados en la herramienta matemática del cálculo diferencial. Se muestran ejemplos del área que se pueden resolver con tales métodos para modelos con restricciones y sin restricciones.

Apéndice.- Se expone el uso y manejo del software "LINDO" para programación lineal resolviendo algunos ejemplos del capítulo 1.

CAPÍTULO 1

I. PROGRAMACIÓN LINEAL APLICADA A ALGUNOS PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN Y ESTRUCTURAS

La programación lineal es una técnica para la creación de modelos matemáticos que tiene como fin la optimización de recursos escasos. Por optimización se puede entender el beneficio máximo o la mínima pérdida o perjuicio que se puede tener en un proceso o fenómeno La programación lineal tiene su aplicación en la industria, en el transporte, economía, diversas ramas de la ingeniería, etc.

Por ejemplo, en la ingeniería civil la programación lineal se puede utilizar para la optimización de redes de agua potable (problema hidráulico), para la optimización del peso de sistemas estructurales (problema estructural), para el diseño óptimo de mezclas de concreto (problema de construcción), para la optimización de pilotes de un edificio que se encuentre ubicado en un tipo de suelo con características especiales (problema geotécnico), etc. En este capítulo principalmente se hace énfasis en la formulación de la programación lineal de algunos problemas de construcción y estructuras cuya solución se obtiene de manera gráfica.

Un modelo de programación lineal sirve para encontrar la mejor solución (solución óptima), dentro de un conjunto de posibles soluciones, de un problema o fenómeno que se presente, el cual puede tener una serie de restricciones para su solución.

En general, un modelo de programación lineal tiene las siguientes características:

Variables: son las incógnitas del problema que se tratan de determinar. A las variables de un problema de programación lineal se les conoce con el nombre de variables de decisión, variables de control o variables de diseño.

Función objetivo: es la representación de la meta que se trata de optimizar, es decir, de maximizar o minimizar, en términos de las variables de decisión.

Restricciones: es el conjunto de requisitos o limitantes que se deben satisfacer en la solución del problema.

Existen varias formas de expresar un programa lineal:

$$Máx\ o\ mín\ Z = cx \ldots (1.1)$$
$$\text{Sujeto a}$$
$$Ax\{=,\leq,\geq\}b \ldots (1.2)$$
$$x \geq 0 \ldots (1.3)$$

donde la función lineal (1.1) es la función objetivo, (1.2) es el conjunto de desigualdades que constituyen las restricciones y (1.3) son las condiciones de no negatividad para las variables de decisión.

En la formulación anterior **x** es un vector columna de *n componentes* que representa a las variables de decisión:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

c es un vector renglón de *n componentes* llamado vector de costos unitarios:

$$c = [c_1 c_2 \ldots c_n]$$

b es un vector columna de *m componentes* que se le suele llamar vector de recursos disponibles:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A es una matriz de orden $m \times n$ llamada matriz de coeficientes tecnológicos.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

En términos matriciales el programa lineal se puede escribir de la siguiente forma:

$$Máx\ o\ mín\ [c_1c_2\dots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sujeto a

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \{=, \le, \ge\} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La forma matricial se puede desarrollar quedando de la siguiente manera:

$$Máx\ ó\ mín\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$sujeto\ a$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{=, \le, \ge\} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{=, \le, \ge\} b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{=, \le, \ge\} b_m$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$$

Por último, el programa lineal también se puede representar en términos de sumatorias:

$$Máx\ ó\ Mín\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$sujeto\ a$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \{=, \le, \ge\}\ b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

1.1 MÉTODO GRÁFICO

El método gráfico es una herramienta que permite encontrar la solución óptima de un problema de programación lineal que conste de dos variables. El método gráfico permite la visualización general del problema con mucha claridad.

Es importante tener en cuenta los siguientes conceptos al utilizar el método gráfico:

Solución factible: es el conjunto de valores de las variables (x_1 y x_2, por ejemplo) que satisfacen todas las restricciones.

Región factible: es el conjunto de todas las soluciones factibles.

Solución óptima: es la solución factible que proporciona el máximo o el mínimo valor de Z (función objetivo).

Restricción activa: Si tiene una restricción $g(x)\{\leq , \geq\}b$, ésta se llama activa cuando los valores x satisfacen estrictamente la igualdad $g(x) = b$.

Restricción inactiva: Si tiene una restricción $g(x)\{\leq , \geq\}$ b, ésta se llama inactiva cuando los valores x satisfacen solamente la inecuación $g(x)\{<, >\}b$.

Para trabajar gráficamente es necesario la determinación de una región factible, la cual es un conjunto de posibles soluciones que satisfacen todas las restricciones del modelo. La región factible será la intersección de los espacios de solución para cada una de las restricciones.

Ejemplos:

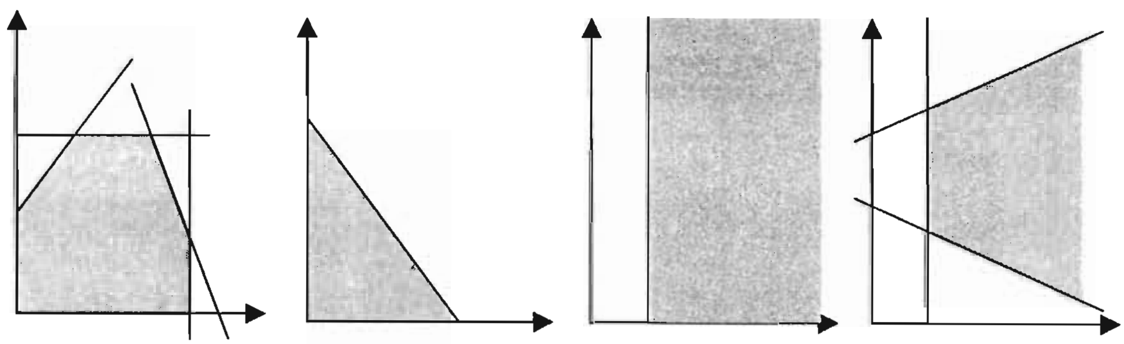


Fig. 1.1 Algunos ejemplos de regiones factibles y restricciones

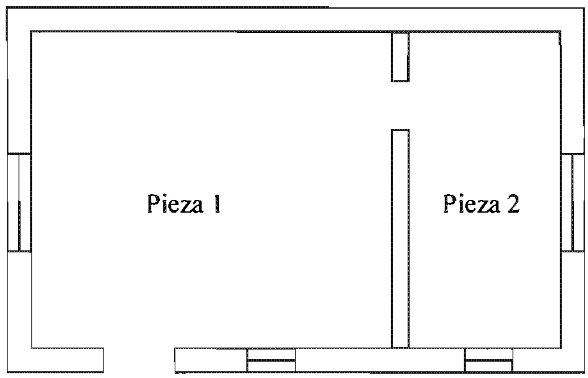
Una vez que se ha definido la región factible se procede a obtener la solución óptima, que por lo general se encuentra en la frontera o en una de las esquinas (punto extremo) de la región factible. La solución óptima se puede obtener de dos formas:

1) ***Se evalúa la función objetivo en cada punto extremo de la región factible. La solución será aquella que brinde el menor o el mayor valor (dependiendo si se trata de un problema de minimización o maximización) de la función objetivo.***

2) ***Se iguala la recta de la función objetivo (Z) a una constante (k) y se va variando este valor con el fin de desplazar dicha recta hasta que pase por la región factible o toque uno de sus puntos extremos en donde Z adopte el máximo o mínimo valor.***

Ejemplo 1.1 Construcción de vivienda

Una compañía constructora va a participar en un proceso de licitación para la edificación de viviendas unifamiliares de tipo popular. Dichas viviendas deben contar con una pieza habitable y otra en donde se puedan tener el servicio de cocina (o baño) y, de acuerdo a lo establecido en el Reglamento de Construcciones, el área mínima de la vivienda debe ser de 24 m^2. Las bases también indican que el área máxima para la pieza habitable debe ser de 24 m^2 y de 6 m^2 para la otra pieza. La compañía ha estimado que la ganancia neta por m^2 construido de la pieza habitable sería de $300 y de $400 para la otra pieza. Formular el problema de programación lineal y encontrar gráficamente la solución que maximiza la ganancia de la compañía por cada vivienda construida.



Planta tipo de la vivienda unifamiliar

Formulación del modelo de programación lineal

Los primero que se tiene que hacer para formular el modelo de programación lineal es pasar del lenguaje coloquial al lenguaje matemático. Será necesario entonces la definición de las variables de decisión, de la función objetivo y de cada una de las restricciones.

Variables de decisión

En el enunciado del problema se puede observar que todo gira en torno a las áreas de las piezas de la vivienda

Sean,

x_1: número de metros cuadrados de la pieza habitable (pieza 1)
x_2: número de metros cuadrados de la cocina (pieza 2)

Función objetivo

El objetivo es maximizar la ganancia neta que se tendría al construir la vivienda. La aportación por cada m^2 construido de la pieza habitable es de $300, mientras que la cocina tiene una aportación de $400. La función objetivo, que se puede representar como Z, es función de las variables x_1 y x_2 y se establece como:

$Z = 300x_1 + 400x_2$

Ya que el objetivo es maximizar dicha función, se tiene

$\text{Max } Z = 300x_1 + 400x_2$

Restricciones

Las restricciones son las "limitantes" que aparecen en el problema. La primera restricción que se tiene es que el área mínima de la vivienda debe ser 24 m^2. Como el área total de la vivienda es la suma de las áreas de la pieza habitable y de la cocina, entonces esta restricción se puede expresar de la siguiente manera:

$x_1 + x_2 \geq 24$ (área total de la vivienda)

Otra restricción que se tiene es que el área máxima de la pieza habitable debe ser de 24 m^2, la cual se puede expresar así:

$x_1 \leq 24$ (pieza habitable)

También se tiene que el área máxima para la cocina es de 6 m^2:

$x_2 \leq 6$ (cocina)

Por último, las áreas de las piezas de la vivienda no pueden ser negativas, por lo cual es necesario especificar también las restricciones de no negatividad:

$x_1 \geq 0$ (no negatividad)
$x_2 \geq 0$ (no negatividad)

Entonces, el modelo de programación lineal que se tiene es:

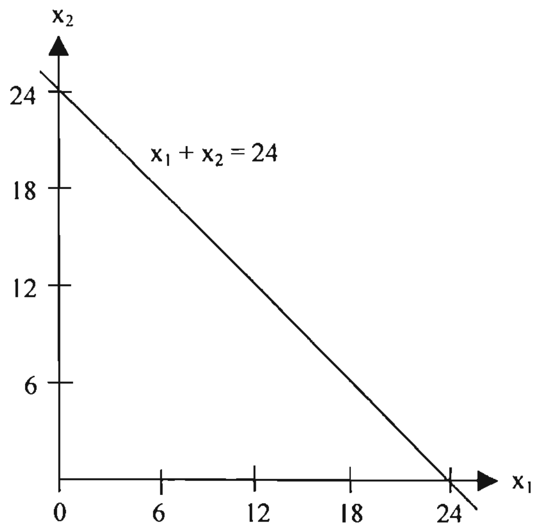
Max $Z = 300x_1 + 400x_2$	
Sujeto a	
$x_1 + x_2 \geq 24$	(área total de la vivienda)
$x_1 \leq 24$	(pieza habitable)
$x_2 \leq 6$	(cocina)
$x_1, x_2 \geq 0$	(no negatividad)

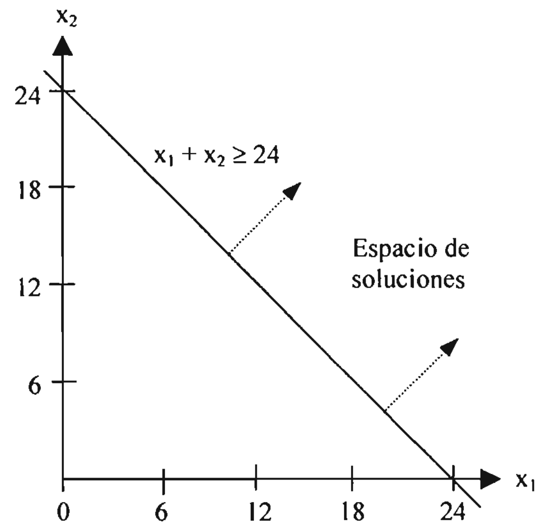
Solución gráfica

El primer paso para encontrar la solución del problema de manera gráfica es determinar la región factible. Para ello es necesario conocer el espacio de soluciones que tiene cada una de las restricciones del problema.

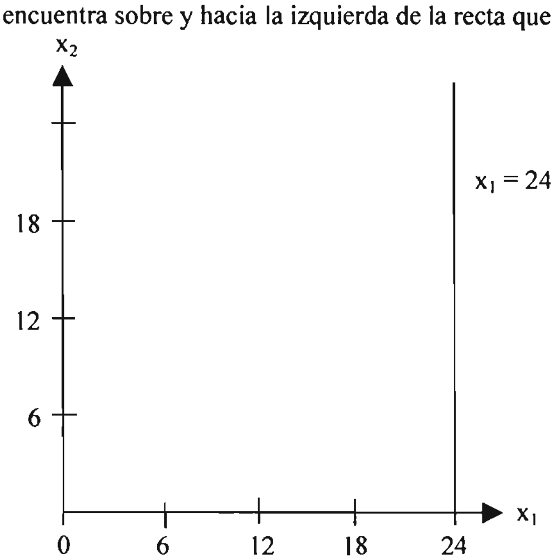
Las restricciones de no negatividad limitan a que la región factible se encuentre siempre en el primer cuadrante del plano cartesiano en el cual se deben representar cada una de las restricciones.

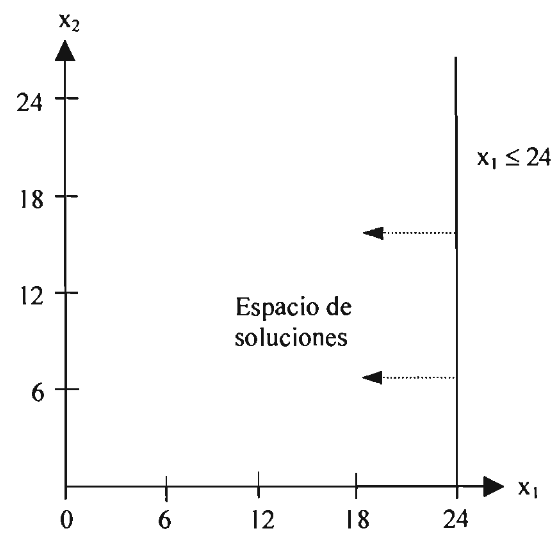
Se traza la primera restricción del problema y para conocer si su espacio de soluciones esta por arriba o por abajo se evalúa el origen (0,0) en ella; si se satisface la desigualdad significa que la dirección del espacio de soluciones de la restricción incluye al origen, en caso contrario, ésta debe estar del lado opuesto. En esta caso, al evaluar el origen resulta que la desigualdad no se satisface, es decir, no incluye al origen y por lo tanto el espacio de soluciones se encuentra en y por arriba de la recta



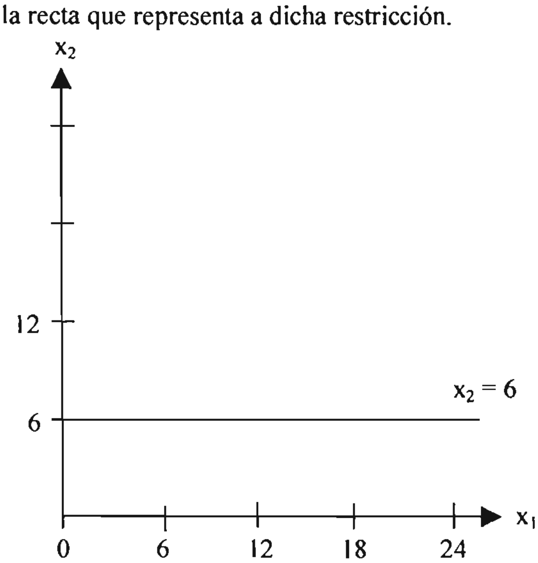


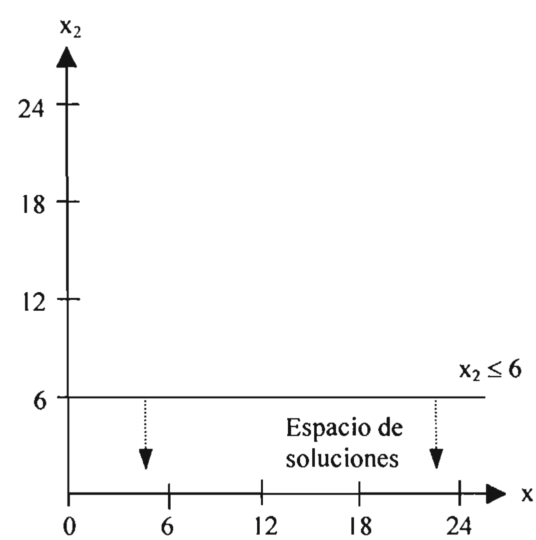
De la misma manera se traza la restricción 2. Al evaluar el origen en la misma se observa que la restricción se satisface, lo que indica que el espacio de soluciones incluye al origen y por lo tanto dicho espacio se encuentra sobre y hacia la izquierda de la recta que representa a la restricción.



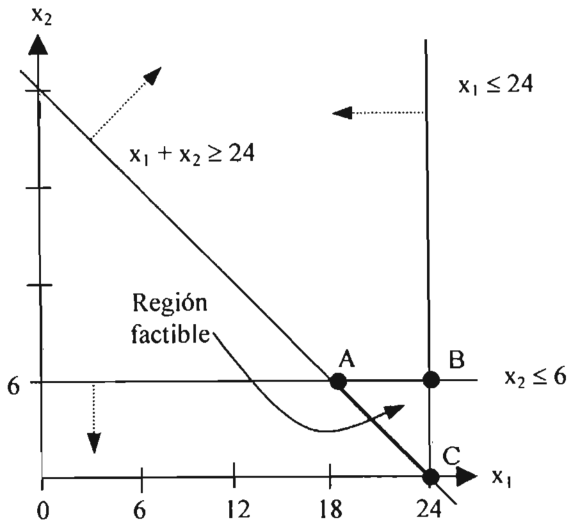


Al evaluar el origen en la tercera restricción resulta que el espacio de soluciones se encuentra en y hacia abajo de la recta que representa a dicha restricción.





La región factible resulta ser la intersección de los espacios de solución de las tres restricciones.



La región factible tiene forma triangular en este caso y cada una de sus esquinas es un **punto extremo.**

La solución óptima se obtiene al evaluar la función objetivo, Z, en cada uno de estos puntos extremos y se toma aquel que proporcione el máximo valor de la misma.

Para punto A(18, 6) $\Rightarrow Z = 300(18) + 400(6) = 7800$

Para punto B(24, 6) $\Rightarrow Z = 300(24) + 400(6) = 9600$

Para punto C(24, 0) $\Rightarrow Z = 300(24) + 400(0) = 7200$

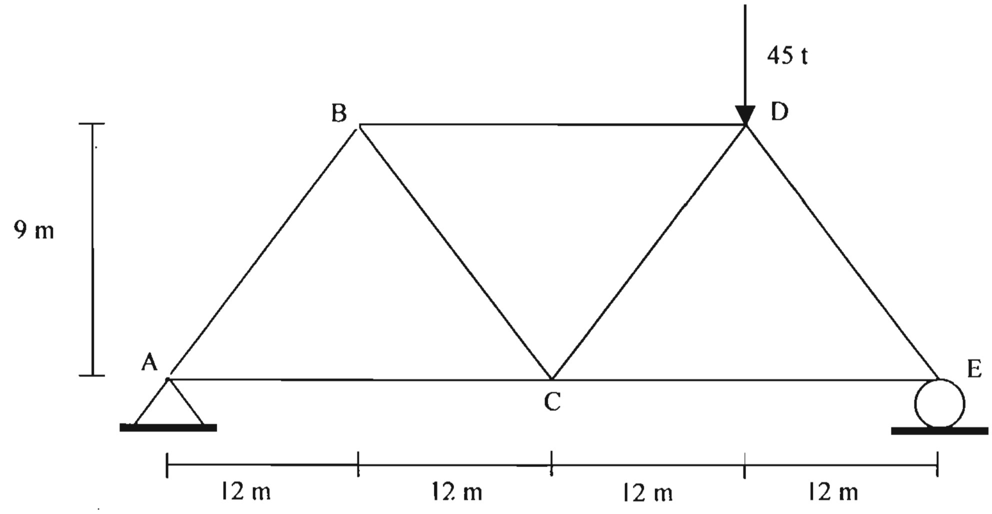
El punto que proporciona el máximo valor de Z es el punto C, por lo tanto la solución óptima del problema es:

$$\boxed{\begin{array}{l} Z^* = 9600 \\ x_1 = 24 \\ x_2 = 6 \end{array}}$$

Esta solución significa que la vivienda unifamiliar debe contar con una pieza habitable de 24 m^2 y una pieza para usarse como cocina de 6 m^2 para que la ganancia de la compañía constructora por cada vivienda de este tipo que construya sea de $9600.

Ejemplo 1.2 Armadura de peso mínimo

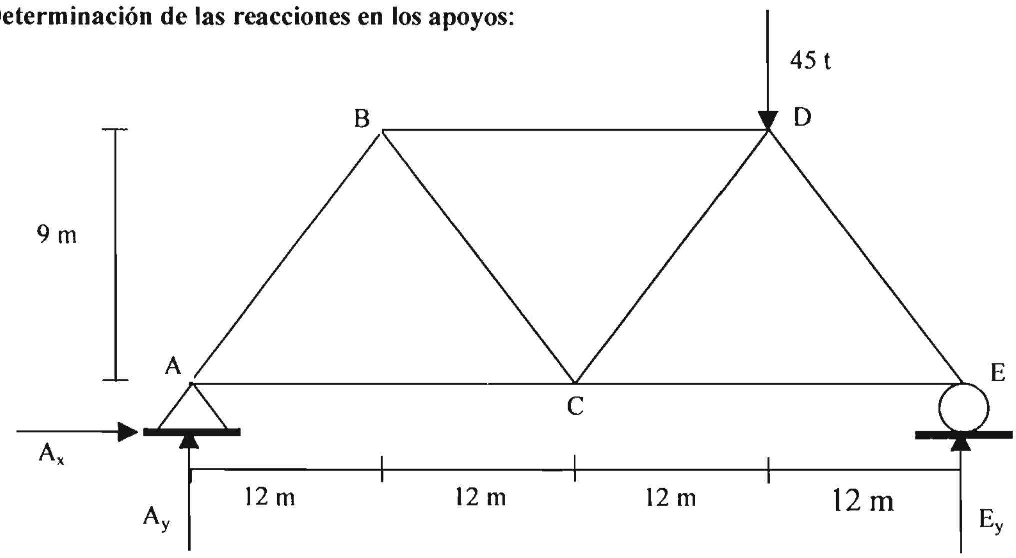
Considere una armadura isostática de acero como la que se muestra a continuación. Se desea diseñar tal estructura para que tenga un peso mínimo bajo la suposición de que se tiene la misma sección transversal para los miembros que se encuentren a tensión y la misma sección para todos los miembros que trabajen a compresión. La densidad del acero que se va a utilizar es 7850 kg/m^3 y los esfuerzos permisibles a tensión y compresión tienen valores de 2520 kg/cm^2 y 3150 kg/cm^2 respectivamente. Formular el programa lineal y encontrar la solución gráficamente.



Análisis de la armadura

Antes de formular el modelo de programación lineal es necesario realizar el análisis estructural de la armadura para determinar las fuerzas en las barras, y por tanto, los esfuerzos que actúan en ellas.

Determinación de las reacciones en los apoyos:



Por ecuaciones de la estática:

$\sum F_x = 0$	$\sum F_y = 0$	$\sum M_A = 0$
$A_x = 0$ T	$A_y + E_y - 45 = 0$	$45\,(36) - 48\,E_y = 0$

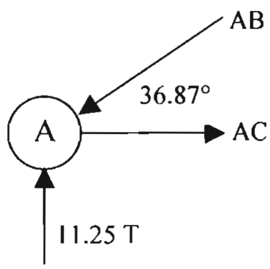
Resolviendo se obtiene:

$A_x = 0$ T
$A_y = 11.25$ T
$E_y = 33.75$ T

Fuerzas en las barras:

La determinación de las fuerzas en la barras se realizará con el método de los nodos.

Nodo *"A"*



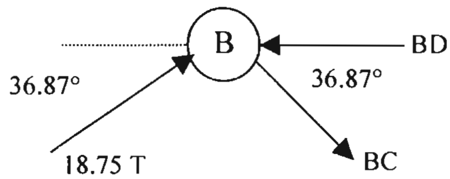
$\sum F_y = 0$

11.25 – AB sen 36.87° = 0
AB = 18.75 T

$\sum F_x = 0$

AC – AB cos 36.87° = 0
AC = 15 T

Nodo *"B"*



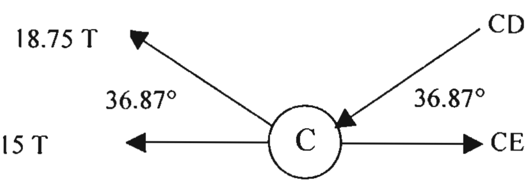
$\sum F_y = 0$

18.75 sen 36.87° - BC sen 36.87° = 0
BC = 18.75 T

$\sum F_x = 0$

18.75 cos 36.87°- BD + 18.75 cos 36.87° = 0
BD = 30 T

Nodo *"C"*



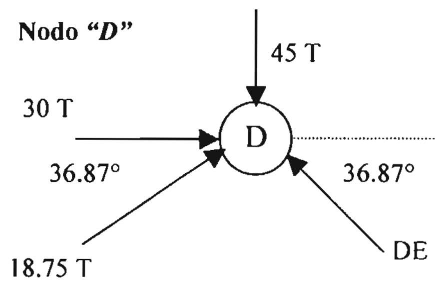
$\sum F_y = 0$

18.75 sen 36.87°- CD sen 36.87°= 0
CD = 18.75 T

$\sum F_x = 0$

-15 – 18.75 cos 36.87°- 18.75 cos 36.87° + CE = 0
CE = 50 T

Nodo *"D"*



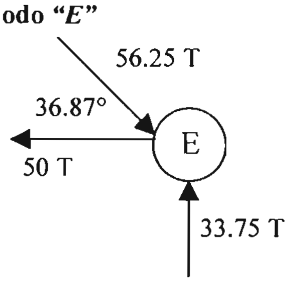
$\sum F_x = 0$

30 + 18.75 cos 36.87°- DE cos 36.87° = 0
DE = 56.25 T

$\sum F_y = 0$

18.75 sen 36.87° + 56.25 sen 36.87° – 45 = 0
0 = 0

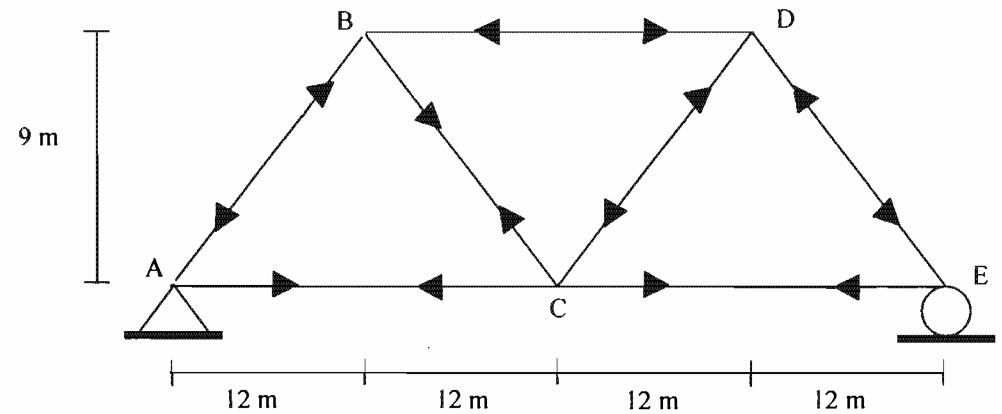
Nodo *"E"*



$$\sum F_x = 0$$
-50 + 56.25 cos 36.87° = 0
0 = 0

$$\sum F_y = 0$$
33.75 - 56.25 sen 36.87° = 0
0 = 0

Se cumple el equilibrio en todos los nodos y los elementos trabajan de la siguiente manera:



Elemento	Longitud (cm)	Forma de trabajo	Esfuerzo (kg/cm^2)	Esfuerzo permisible (kg/cm^2)
AB	1500	Compresión	18750/A_c	3150
AC	2400	Tensión	15000/A_t	2520
BD	2400	Compresión	30000/A_c	3150
BC	1500	Tensión	18750/A_t	2520
CD	1500	Compresión	18750/A_c	3150
CE	2400	Tensión	50000/A_t	2520
DE	1500	Compresión	56250/A_c	3150

Formulación del modelo de programación lineal

Función objetivo

El peso total de la armadura es igual a la suma del peso de cada elemento, es decir, la densidad (0.00785 kg/cm^3) por el volumen de cada uno de los miembros de la armadura (longitud, en cm, multiplicada por el área en cm^2). Es importante plantear todo el modelo de programación lineal en unidades compatibles, de lo contrario se obtendrían resultados erróneos.

La función objetivo resulta ser:

$$\text{Min } Z = 0.00785[(1500)(A_c) + (2400)(A_t) + (2400)(A_c) + (1500)(A_t) + (1500)(A_c) + (2400)(A_t) + (1500)(A_c)]$$

$$\text{Min } Z = 54.17A_c + 49.46A_t$$

Variables de decisión

Se puede observar que para minimizar el peso de la estructura la función objetivo quede expresada en función de las variables A_c y A_t, que son las variables de decisión.

A_c : área del elemento trabajando a compresión
A_t : área del elemento trabajando a tensión

Restricciones

Se plantea una restricción para cada elemento de tal forma que su esfuerzo actuante no sea mayor que el permisible, dependiendo de que trabaje a tensión o a compresión.

$18750/A_c \leq 3150$ (Elemento AB)
$15000/A_t \leq 2520$ (Elemento AC)
$30000/A_c \leq 3150$ (Elemento BD)
$18750/A_t \leq 2520$ (Elemento BC)
$18750/A_c \leq 3150$ (Elemento CD)
$50000/A_t \leq 2520$ (Elemento CE)
$56250/A_c \leq 3150$ (Elemento DE)

De donde al despejar las variables A_c y A_t las restricciones quedan como:

$A_c \geq 5.95$ (Elemento AB)
$A_t \geq 5.95$ (Elemento AC)
$A_c \geq 9.52$ (Elemento BD)
$A_t \geq 7.44$ (Elemento BC)
$A_c \geq 5.95$ (Elemento CD)
$A_t \geq 19.84$ (Elemento CE)
$A_c \geq 17.85$ (Elemento DE)

Entonces el modelo final queda establecido de la siguiente manera:

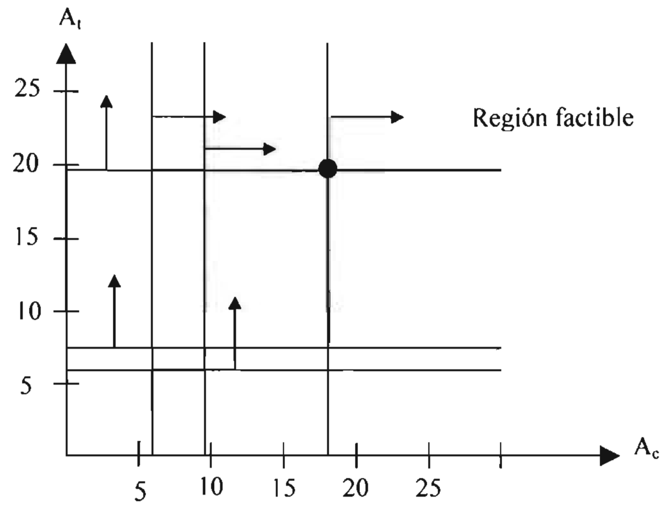
Min $Z = 54.17A_c + 49.46A_t$
Sujeto a
$A_c \geq 5.95$ (Elemento AB)
$A_t \geq 5.95$ (Elemento AC)
$A_c \geq 9.52$ (Elemento BD)
$A_t \geq 7.44$ (Elemento BC)
$A_c \geq 5.95$ (Elemento CD)
$A_t \geq 19.84$ (Elemento CE)
$A_c \geq 17.85$ (Elemento DE)
$A_c, A_t \geq 0$ (No negatividad)

Las restricciones de no negatividad impiden precisamente pensar en elementos estructurales con área negativa, lo cual no tendría sentido.

Solución gráfica:

Se establece la región factible, para esto se trazan cada una de las ecuaciones de restricción sobre el plano cartesiano. Las flechas indican el espacio de solución para cada restricción. Como ya se ha mencionado una manera de conocer la dirección de esas flechas es evaluando el origen (0,0) en cada una de las restricciones; si se satisface la desigualdad significa que la dirección del espacio de soluciones de la restricción incluye al origen, en caso contrario, ésta debe estar del lado opuesto.

Si una recta pasa por el origen será necesario evaluar su ecuación en otro punto para saber si el origen está incluido en el espacio de soluciones de la restricción y de esta manera determinar hacia dónde se encuentra dicho espacio.



El único punto extremo que se tiene para la región factible corresponde a $A_c = 17.85$ cm^2, $A_t = 19.84$ cm^2.

Al evaluar la función objetivo en dicho punto óptimo se obtiene el peso mínimo de la armadura:

$Z^* = 54.17\ A_c + 49.46\ A_t = 54.17(17.85) + 49.46(19.84) = 1948.22$ kg

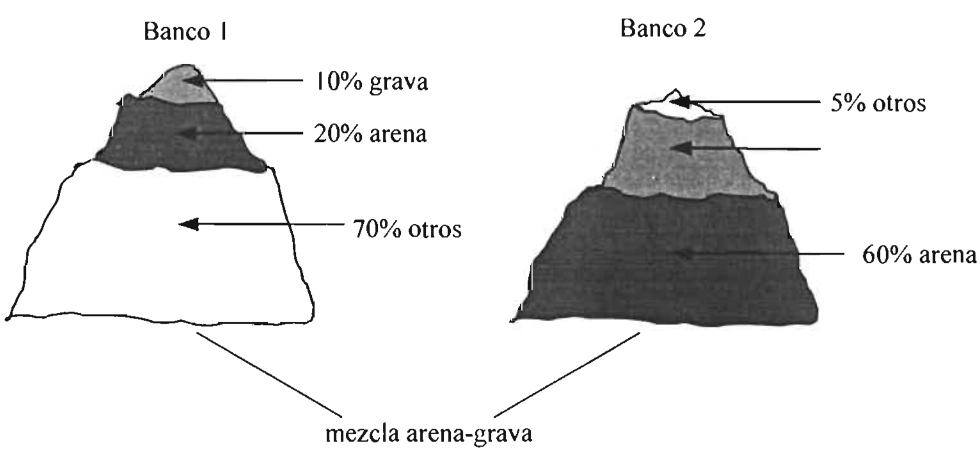
En este caso las restricciones activas resultaron ser la sexta y la séptima.

La solución óptima es entonces:

$Z^* = 1948.22$
$A_c = 17.85$
$A_t = 19.84$

Ejemplo 1.3 Mezcla de agregados

Una empresa de agregados ha sido contratada para entregar una mezcla de arena-grava al sitio de una obra. La cantidad de mezcla que se debe entregar para la realización de la obra se encuentra entre los 600 y 1000 m^3. Las especificaciones para dicha mezcla indican que ésta debe contener no más de 50% de arena ni menos de 30% de grava. La empresa cuenta con dos bancos de los cuales puede obtener la mezcla. El primer banco es de baja calidad ya que su contenido está formado por 20 por ciento de arena, 10 por ciento de grava y el resto de otros materiales. El segundo banco es de mejor calidad y contiene 60 por ciento de arena, 35 por ciento de grava y el resto lo constituyen también otros materiales. El costo de la entrega de la mezcla arena-grava al sitio es de \$100 por m^3 si ésta proviene del primer banco, y de \$300 por m^3 si proviene del segundo banco. Formular el modelo de programación lineal que minimiza el costo de la entrega de la mezcla y encontrar los solución mediante el método gráfico.



Variables de decisión

El problema consiste en determinar la cantidad de material que debe provenir de cada banco que tiene la empresa con el fin de minimizar el costo de la entrega.

Sean,

x_1: número de m^3 de material (mezcla) que proviene del banco 1
x_2: número de m^3 de material (mezcla) que proviene del banco 2

Función objetivo

Se debe minimizar el costo de entrega de la mezcla arena-grava. Si el material proviene del banco 1 el costo de entrega es de $100/m^3, mientras que si proviene del banco 2 es de $300/m^3. Entonces, la función objetivo se puede establecer como:

$$Z = 100x_1 + 300x_2$$

Restricciones

La primera restricción es que la cantidad mínima de mezcla que se debe entregar es de 600 m^3. Como dicha cantidad es la aportación de ambos bancos, se tiene que:

$x_1 + x_2 \geq 600$ (cantidad mínima a entregar)

La segunda restricción se refiere a la cantidad máxima de mezcla que se puede entregar es de 1000 m^3:

$x_1 + x_2 \leq 1000$ (cantidad máxima entregar)

La siguiente restricción indica que el porcentaje de arena en la mezcla debe ser a lo más del 50%. El material del banco 1 contiene 20% de arena, mientras que el material del banco 2 contiene 60% de arena. Entonces, matemáticamente la restricción queda expresada de la siguiente manera:

$$0.2x_1 + 0.6x_2 \leq 0.5(x_1 + x_2)$$

Reordenando, se tiene:

$-0.3x_1 + 0.10x_2 \leq 0$ (arena)

Con respecto a la cantidad de grava, el porcentaje de éste en la mezcla no debe ser menor que el 30%. El material del banco 1 contiene 10% de grava y el que proviene del banco 2 contiene 35%. Entonces:

$$0.1x_1 + 0.35x_2 \geq 0.3(x_1+x_2)$$

Reordenando,

$-0.2x_1 + 0.03x_2 \geq 0$ (grava)

Al final, únicamente se especifican las variables de no negatividad:

$x_1, x_2 \geq 0$ (no negatividad)

Por lo que el modelo de programación lineal es:

$Z = 100x_1 + 300x_2$	
Sujeto a	
$x_1 + x_2 \geq 600$	(cantidad mínima a entregar)
$x_1 + x_2 \leq 1000$	(cantidad máxima entregar)
$-0.3x_1 + 0.10x_2 \leq 0$	(arena)
$-0.2x_1 + 0.03x_2 \geq 0$	(grava)
$x_1, x_2 \geq 0$	(no negatividad)

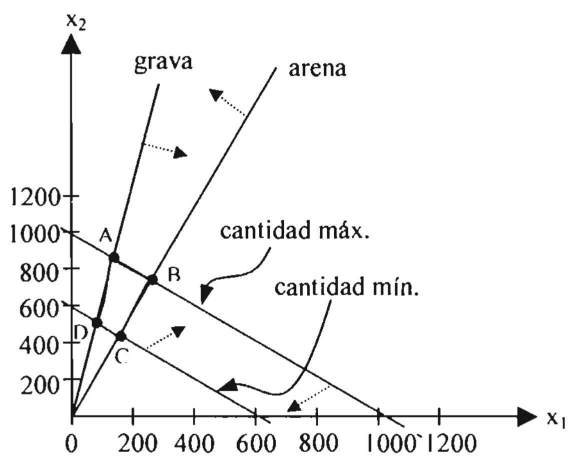
Solución gráfica

Se trazan cada una de las líneas que representan a las restricciones.

La restricción correspondiente a la cantidad mínima no incluye al origen, por lo que su espacio de soluciones se encuentra hacia arriba de la recta.

El espacio de soluciones para la restricción de la cantidad máxima incluye al origen y, por lo tanto, dicho espacio se encuentra por debajo de la recta que representa a la restricción.

Para el caso en el que la recta pasa por el origen, como sucede para las restricciones correspondientes a la arena y la grava, es necesario evaluar un punto que se encuentre por arriba o abajo de la recta con el fin de determinar si el espacio de soluciones incluye a tal punto o no.



En la figura anterior se observa que la región factible tiene cuatro puntos extremos: A, B, C y D.

Se evalúa la función objetivo en cada uno de estos puntos:

Para punto A(130.4, 869.6) $\Rightarrow Z = 100(130.4) + 300(869.6) = 273920$
Para punto B(250, 750) $\Rightarrow Z = 100(250) + 300(750) = 250000$
Para punto C(150, 450) $\Rightarrow Z = 100(150) + 300(450) = 150000$
Para punto D(78.3, 521.7) $\Rightarrow Z = 100(78.3) + 300(521.7) = 164340$

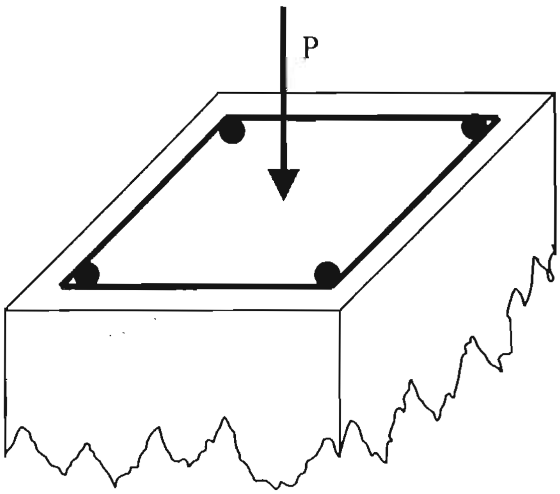
El punto que proporciona el mínimo valor de Z es el punto C, por lo tanto la solución óptima del problema es:

$Z^* = 150000$
$x_1 = 150$
$x_2 = 450$

La solución anterior indica que para la mezcla arena-grava, 150 m^3 de material deben provenir banco 1, mientras que del banco 2 de deben tomar 450 m^3 con el fin de que el costo de la entrega sea el mínimo para la empresa con un valor de $150000.

Ejemplo 1.4 Resistencia a compresión de una columna

Se desea determinar la carga axial de compresión máxima de diseño que puede soportar una columna de concreto con un esfuerzo a compresión de $f'_c = 250$ kg/cm^2. La columna debe cumplir las siguientes condiciones: la cuantía de acero (ρ) se debe encontrar dentro del intervalo de 0.01 a 0.04, la cantidad mínima de refuerzo longitudinal que se puede utilizar es la correspondiente a 4 barras del número 4 y, por cuestiones arquitectónicas, el área total de la sección transversal no debe sobrepasar los 1200 cm^2. Formule el programa lineal y encuentre la solución gráficamente.



Función objetivo

La resistencia de diseño a compresión axial está dada por la expresión:

$P_{RO} = 0.70\ P_{ro}$

Donde P_{ro} es la resistencia nominal, que a su vez está definida como:

$P_{ro} = (f''_c)\ (A_g) + (A_s)\ (f_y)$

A_g: área total de la sección
A_s: área del acero de refuerzo longitudinal
f_y: esfuerzo de fluencia del acero (4200 kg/cm^2)
$f''_c = 0.85\ f^*_c$, si $f^*_c \leq 250$ kg/cm^2
A su vez $f^*c = 0.8\ f'c = 0.8\ (250$ kg/cm$^2) = 200$ kg/cm^2

Entonces la función objetivo es:

$P_{RO} = 0.70[(0.85)\ (200)\ (A_g) + (A_s)\ (4200)]$

$P_{RO} = 119A_g + 4200A_s$

Variables de decisión

Se puede observar que la función objetivo se encuentra expresada en términos de las variables de decisión que definen al área total de la sección transversal y al área de acero.

A_g: área total de la sección
A_s: área del acero de refuerzo longitudinal

Restricciones

Se debe cumplir que:

$0.01 \leq \rho \leq 0.04$, la cuantía de acero está definida como $\rho = \dfrac{A_s}{A_g}$

De donde se obtienen la siguientes restricciones:

$A_s \geq 0.01\ A_g$ (cuantía mínima)
$A_s \leq 0.04\ A_g$ (cuantía máxima)

Otra de las restricciones indica que se utilizarán, como mínimo 4 barras del número 4. Cada barra o varilla tiene un área de 1.27 cm^2 entonces:

$A_s \geq 4\ \phi\ \#\ 4$
$A_s \geq 4\ (1.27)$
$A_s \geq 5.08$ (refuerzo longitudinal)

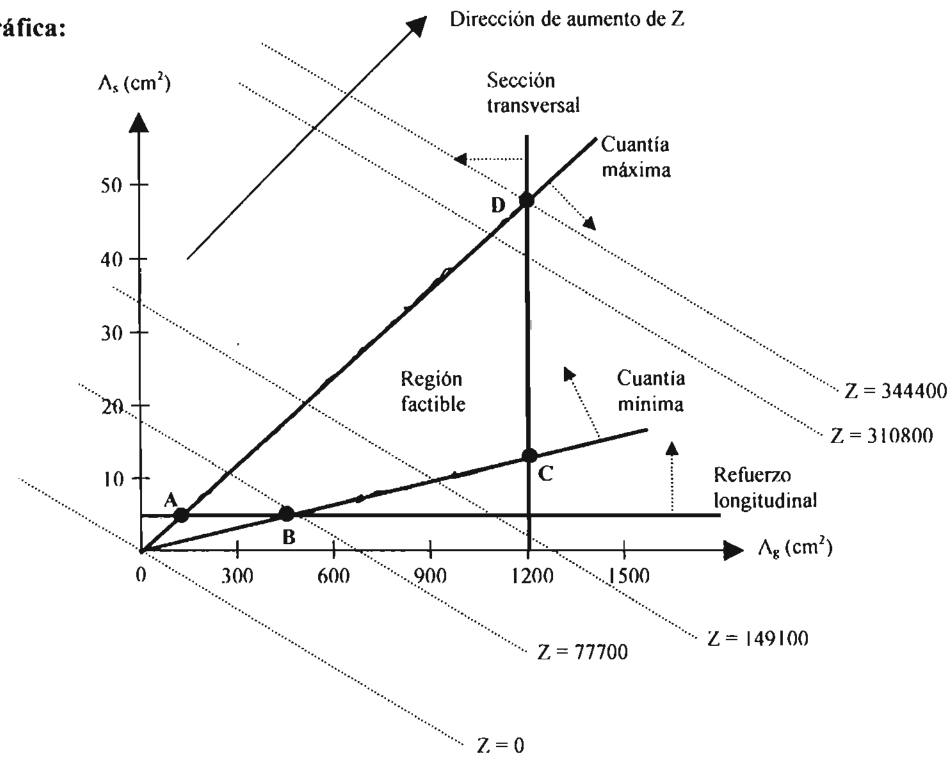
Finalmente, la última restricción se refiere al área máxima de la sección transversal que puede tener la columna:

$A_g \leq 1200$ (sección transversal)

El modelo de programación lineal queda establecido de la siguiente manera:

Max $Z = 119A_g + 4200A_s$
Sujeto a
$A_s \geq 0.01\ A_g$
$A_s \leq 0.04\ A_g$
$A_s \geq 5.08$
$A_g \leq 1200$
$A_s, A_g \geq 0$

Solución gráfica:



En la figura anterior que la región factible se encuentra delimitado por los segmentos de línea que unen a los puntos ABCD. Cualquier punto dentro de esta región es por tanto una posible solución. Sin embargo, lo que se está buscando es el punto que proporciona el mayor valor de Z. Por lo tanto, es importante identificar la dirección en que se incrementa la función Z, ya que se trata de un problema de maximización. El punto óptimo se puede encontrar asignando valores crecientes a Z, en forma de ensayos, hasta que se encuentre el mayor valor de Z sin salir de la región factible.

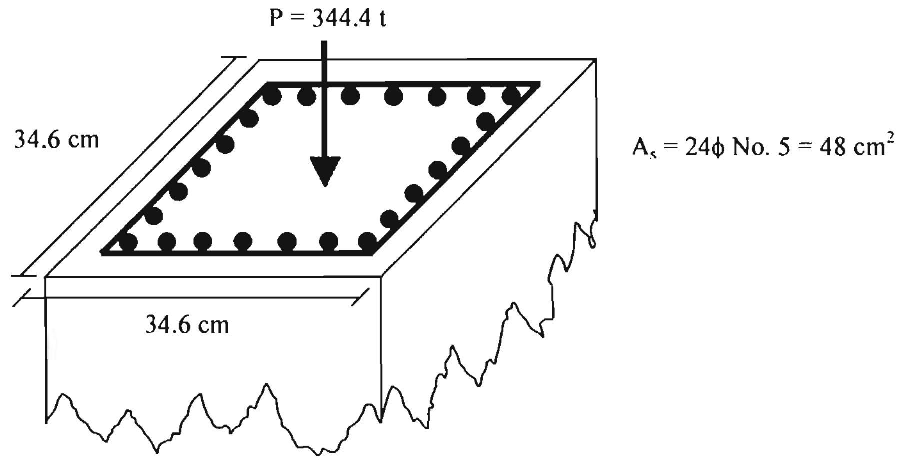
En la figura anterior se puede observar que la recta Z con el valor más grande pasa por el punto de intersección de las rectas $A_g = 1200$ y $A_s = 0.04\ A_g$ (punto D).

$A_g = 1200 \Rightarrow A_s = 48$, que al sustituirlos en la función objetivo se obtiene:

$Z = 119A_g + 4200A_s = 119(1200) + 4200(48) = 344400$

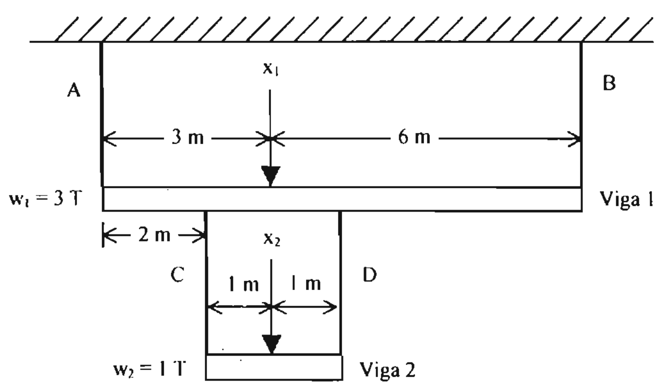
Las restricciones que resultan activas en este caso son precisamente $A_g \leq 1200$ y $A_s \leq 0.04\ A_g$, ya que la solución encontrada ($A_g = 1200$ y $A_s = 48$) hace que se cumplan exactamente las igualdades $A_g = 1200$ y $A_s = 0.04\ A_g$.

Entonces, la carga axial máxima de compresión de la columna es de 344400 kg o 344.4 t y sería necesario tener una sección de área trasversal de 1200 cm^2 y un área de refuerzo longitudinal de 48 cm^2.
Una propuesta para el diseño sería una columna cuadrada de 34.6 cm × 34.6 cm armada con 24 barras del número 5:



Ejemplo 1.5 Sistema de andamios

Un sistema de andamios consiste de dos vigas y cuatros cuerdas como se muestra en la figura. Se sabe que la cuerda A puede resistir una carga de al menos 6 toneladas, mientras que la cuerda B puede resistir a lo más una carga de 5 toneladas, cada una de las cuerdas C y D pueden tomar una carga de 2.5 toneladas. Si las cargas que actúan en las vigas 1 y 2 son respectivamente x_1 y x_2, formular el programa lineal que maximiza la carga total que puede ser soportada por el sistema y encontrar la solución gráficamente. Suponga que los pesos de las vigas 1 y 2 son de 3 toneladas y 1 tonelada respectivamente, y que los pesos de las cuerdas son despreciables.



Variables de decisión

El problema se define en términos de las cargas que soportan ambas vigas del sistema:

x_1: carga en la viga 1
x_2: carga en la viga 2

Función objetivo

La función objetivo consiste en maximizar la carga total del sistema:

Max $Z = x_1 + x_2$

Restricciones

Las restricciones del problema son:

$T_A \geq 6$ (cuerda A)
$T_B \leq 5$ (cuerda B)
$T_C \leq 2.5$ (cuerda C)
$T_D \leq 2.5$ (cuerda D)

Las restricciones también deben estar expresadas en términos de las variables de decisión x_1 y x_2, para ello es necesario realizar el **análisis estructural** del sistema de andamios.

Análisis de la estructura

Considerando que los pesos de las vigas actúan en el centro de ellas, las ecuaciones de equilibrio vertical y de momentos (con respecto al extremo izquierdo de las vigas) son las siguientes:

Para la viga 2

$T_C + T_D = x_2 + w_2$ ...(1)
$x_2 + w_2 - 2T_C = 0$ ...(2)

Al despejar T_C de 2:

$$\boxed{T_C = \frac{x_2}{2} + \frac{w_2}{2}} \quad ...(4)$$

Al sustituir (4) en (1) y despejar T_D se obtiene:

$$\boxed{T_D = \frac{x_2}{2} + \frac{w_2}{2}} \quad ...(5)$$

Para la viga 1

$T_A + T_B = x_1 + w_1 + T_C + T_D$ ...(6)

$3x_1 + 4.5w_1 - 9T_B + 2T_C + 4T_D = 0$ ...(7)

Al sustituir (4) y (5) en (7) y despejar T_B se obtiene:

$$\boxed{T_H = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}w_2} \quad ...(8)$$

Al sustituir (4), (5) y (8) en (6) y despejar T_A se obtiene:

$$\boxed{T_A = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}w_2} \quad ...(9)$$

Al sustituir $w_1 = 3$ y $w_2 = 1$ en (4), (5), (8) y (9) las restricciones quedan como:

Cuerda A: $\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \geq 6 \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 \geq 11.5$

Cuerda B: $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \leq 5 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 9.5$

Cuerda C: $\frac{x_2}{2} + \frac{1}{2} \leq 2.5 \Rightarrow x_2 \leq 4$

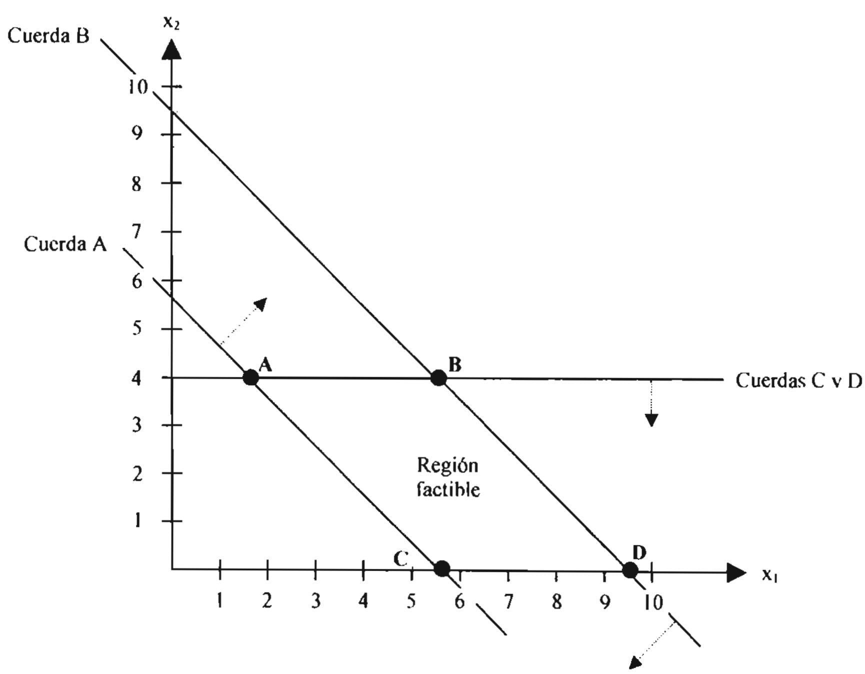
Cuerda D: $\frac{x_2}{2} + \frac{1}{2} \leq 2.5 \Rightarrow x_2 \leq 4$

La restricción para las cuerdas C y D es la misma.

El programa lineal completo es:

Max $Z = x_1 + x_2$
Sujeto a
$2x_1 + 2x_2 \geq 11.5$ (Cuerda A)
$x_1 + x_2 \leq 9.5$ (Cuerda B)
$x_2 \leq 4$ (Cuerdas C y D)
$x_1, x_2 \geq 0$

Solución gráfica:



Los puntos extremos de la región factible son:

A(1.75,4)
B(5.5,4)
C(5.75,0)
D(9.5,0)

Al evaluar la función objetivo en cada uno de estos puntos se obtiene lo siguiente:

Punto A: Z = 1.75 + 4 = 5.75
Punto B: Z = 5.5 + 4 = 9.5
Punto C: Z = 5.75 + 0 = 5.75
Punto D: Z = 9.5 + 0 = 9.5

Se puede observar que los puntos que maximizan la función objetivo son B y D, esto es, el sistema puede soportar una carga máxima de 9.5 toneladas. Este caso especial de programación lineal recibe el nombre de "soluciones alternativas óptimas" u "óptimos alternativos"; de hecho, cualquier punto del segmento BD maximiza a Z, y esto se debe principalmente a que la función objetivo es paralela a alguna de las restricciones.

1.2 EL MÉTODO SIMPLEX

El método simplex es un procedimiento general para resolver problemas de programación lineal que fue creado en 1947 por George Dantzig. Este método es algebraico e iterativo pero sus principios se basan en la geometría del problema específico a resolver. El método simplex resuelve problemas de maximización o minimización sujetos a ciertas restricciones. Lo que hace el método es buscar las soluciones en la frontera de la región factible, mejorando el valor de la función objetivo con cada iteración que se lleve a cabo hasta alcanzar el óptimo.

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra la región factible correspondiente a un problema de maximización sujeto a tres restricciones y con óptimo en el punto C:

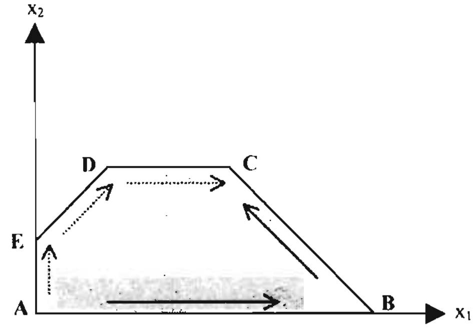


Fig. 1.2 Recorrido del método simplex

Lo que hace el método simplex es iniciar en un punto extremo factible, como lo es el origen, y moverse hacia otro punto hasta alcanzar el óptimo. La dirección hacia donde se desplace depende principalmente de los coeficientes de las variables en la función objetivo. En este caso, si el coeficiente de x_1 es mayor que el de x_2 en la función objetivo, el movimiento sería de **A** a **B** porque de esta forma se incrementaría el valor de la función al aumentar al valor de x_1. Al encontrase en **B**, el movimiento sería hacia **C** en donde se supone se encuentra el óptimo. Si el coeficiente de x_2 fuera mayor que el de x_1, el movimiento sería el descrito por las flechas punteadas.

La ventaja del método simplex sobre el método gráfico es que los modelos de programación lineal no tienen que estar limitados solamente al uso de dos variables de decisión.

Para trabajar con el método simplex es necesario expresar el problema de programación lineal en **forma estándar**.

1.2.1 Forma estándar de programación lineal

Se dice que un modelo de programación lineal se encuentra en forma estándar si tiene las siguientes propiedades:

- Todas las restricciones son ecuaciones (igualdades) con lado derecho no negativo.
- Todas las variables son no negativas
- Las función objetivo es de maximización o de minimización.

Al expresar un modelo de programación lineal en forma estándar es necesario tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

1) Una restricción del tipo $\leq$ puede convertirse en igualdad (o ecuación) mediante la adición de una variable de holgura (S).

Ejemplo:

$2x_1 + 3x_2 \leq 5$
es equivalente a
$2x_1 + 3x_2 + S_1 = 5$, con $S_1 \geq 0$

2) Una restricción del tipo $\geq$ puede convertirse en igualdad (o ecuación) mediante la resta de una variable de exceso o superávit (S).

Ejemplo:

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 \geq 15$

es equivalente a

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 - S_1 = 15$, con $S_1 \geq 0$

3) El lado derecho de una restricción se puede hacer no negativo al multiplicarla por -1. Al hacer esto, la desigualdad $\geq$ se convierte en $\leq$, y la desigualdad $\leq$ se convertirá en $\geq$.

Ejemplos:

$2x_1 + 3x_2 \leq -5$
es equivalente a
$-2x_1 - 3x_2 \geq 5$

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 \geq -15$
es equivalente a
$-x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 \leq 15$

4) Toda igualdad puede descomponerse en dos desigualdades $\geq$ y $\leq$.

Ejemplo:

$8x_1 - 5x_2 = 4$
es equivalente a
$8x_1 - 5x_2 \geq 4$

y

$8x_1 - 5x_2 \leq 4$

5) Una variable no restringida (o irrestricta) es aquella que puede tomar valores negativos, cero y positivos. La variable no restringida se expresa como la diferencia de dos variables no negativas.

Ejemplo:

Sea x_i una variable no restringida, entonces x_i se puede expresar como

$x_i = x_i' - x_i''$
con $x_i', x_i'' \geq 0$

La expresión $x_i = x_i' - x_i''$ debe sustituirse en la función objetivo y en las restricciones al momento de resolver el problema.

6) La maximización de Z es equivalente a la minimización de -Z y viceversa.

Ejemplos:

Max $Z = 2x_1 + 4x_2 - 3x_3$
es equivalente a
Min $-Z = -2x_1 - 4x_2 + 3x_3$

Min $Z = 10x_1 - 6x_2$
es equivalente a
Max $-Z = -10x_1 + 6x_2$

Ejemplo 1.6

Expresar el siguiente modelo de programación lineal en forma estándar:

Max $z = x_1 + 4x_2 - 3x_3$
Sujeto a
$2x_1 - 10x_2 + 5x_3 \geq -5$
$-6x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$
$x_1 + x_2 - 2x_3 = 10$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_3 no restringida

como $x_3 = x_3' - x_3''$, por la consideración 5), ésta se sustituye en todo el modelo quedando éste como:

Max $z = x_1 + 4x_2 - 3x_3' + 3x_3''$
Sujeto a
$2x_1 - 10x_2 + 5x_3' - 5x_3'' \geq -5$
$-6x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' \leq 4$
$x_1 + x_2 - 2x_3' + 2x_3'' = 10$
$x_1, x_2, x_3', x_3'' \geq 0$

Al aplicar la consideración 3) a la restricción $2x_1 - 10x_2 + 5x_3' - 5x_3'' \geq -5$, queda como:

$-2x_1 + 10x_2 - 5x_3' + 5x_3'' \leq 5$

Y por la consideración 1) se convierte en:

$\mathbf{-2x_1 + 10x_2 - 5x_3' + 5x_3'' + S_1 \leq 5}$

Al aplicar la consideración 1) a la restricción $-6x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' \leq 4$, queda como:

$\mathbf{-6x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' + S_2 \leq 4}$

La última restricción queda igual, $\mathbf{x_1 + x_2 - 2x_3' + 2x_3'' = 10}$

Entonces, el modelo de programación lineal en forma estándar es:

Max $z = x_1 + 4x_2 - 3x_3' + 3x_3''$
Sujeto a
$-2x_1 + 10x_2 - 5x_3' + 5x_3'' + S_1 \leq 5$
$-6x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' + S_2 \leq 4$
$x_1 + x_2 - 2x_3' + 2x_3'' = 10$
$x_1, x_2, x_3', x_3'' \geq 0$

I.3 ALGORITMO SIMPLEX

El algoritmo simplex es un procedimiento iterativo que se puede manejar de forma tabular y en el cual con cada iteración se obtiene un mejor valor de la función objetivo.

Un modelo de programación lineal en forma estándar está formado por m ecuaciones lineales con n incógnitas y se tiene que $m < n$.

Definiciones

Variables no básicas: son las $n - m$ variables a las cuales se les asigna valores cero.

Variables básicas: son las restantes m variables cuyos valores se obtienen al resolver las m ecuaciones resultantes. Dichas m ecuaciones deben producir una solución única.

Solución básica: es la solución única que resulta de hacer $n - m$ variables igual a cero.

Solución básica factible: es la solución básica que satisface las restricciones de no negatividad.

Solución básica no factible: es la solución básica que no satisface las restricciones de no negatividad.

El número máximo de posibles soluciones básicas está dado por:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Variable de entrada: es una variable no básica que formará parte del conjunto de variables básicas en una iteración determinada.

Variable de salida: es una variable básica actual que saldrá de la solución básica en una iteración determinada.

Condición de optimalidad: Para problemas de maximización (minimización) indica que la solución óptima se alcanza cuando todos los coeficientes de las variables no básicas del renglón z son no negativos (no positivos), para alcanzar está condición es necesario seleccionar como variable de entrada a aquella variable no básica con el coeficiente más negativo (más positivo) en el renglón z. Si existe algún empate, éste se puede romper arbitrariamente.

Condición de factibilidad: Indica que tanto para problemas de maximización como de minimización, la variable de salida será aquella variable básica con la menor razón o cociente no negativo ni infinito que resulta de dividir su valor en la columna lado derecho entre el valor de su respectivo elemento de la columna de la variable de entrada en la tabla simplex. Los empates se rompen arbitrariamente.

Los pasos del algoritmo simplex son los siguientes:

Paso 0. Determinar una solución básica factible inicial (las variables básicas iniciales son las variables de holgura).

Paso 1. Seleccionar una variable de entrada empleando la condición de optimalidad. Detenerse si no existe variable de entrada.

Paso 2. Seleccionar una variable de salida utilizando la condición de factibilidad.

Paso 3. Determinar una nueva solución básica mediante operaciones de Gauss-Jordan. Regresar al paso 1.

Ejemplo 1.7

Determinar la solución del siguiente modelo de programación lineal:

Max $z = 3x_1 + x_2$
Sujeto a
$x_1 - 2x_2 \leq 10$
$2x_1 + x_2 \leq 24$
$x_1 - x_2 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

El problema queda expresado en forma estándar de la siguiente manera:

Max $z = 3x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \Rightarrow$ Max $z - 3x_1 - x_2 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 = 0$
Sujeto a
$x_1 - 2x_2 + s_1 = 10$
$2x_2 + x_2 + s_2 = 24$
$x_1 - x_2 + s_3 = 5$
$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Del modelo anterior se observa que **las variables de holgura tienen coeficientes con valor cero en la función objetivo**.

Iteración 1

Paso 0. Determinación de la solución básica factible inicial

Lo primero que se hace es acomodar la forma estándar en la tabla simplex

Solución básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución (lado derecho)
z	1	-3	-1	0	0	0	0
s_1	0	1	-2	1	0	0	10
s_2	0	2	-1	0	1	0	24
s_3	0	1	-1	0	0	1	5

base

Las variables de holgura son las que proporcionan la solución básica factible inicial, ya que al asignar valores cero a las variables no básicas x_1 y x_2, la columna solución proporciona los valores de las holguras directamente: $\mathbf{s_1 = 10}$, $\mathbf{s_2 = 24}$ y $\mathbf{s_3 = 5}$.

Paso 1. Selección de la variable de entrada

La variable de entrada, por tratarse de un problema de maximización, es aquella que tiene el coeficiente más negativo en el renglón z. De la tabla simplex se puede observar que la variable de entrada resulta ser $\mathbf{x_1}$.

Paso 2. Selección de la variable de salida

De acuerdo a la condición de factibilidad, la variable de salida será aquella variable no básica con la mínima razón (no negativa ni infinita) que se obtiene al dividir su valor en la columna "lado derecho" entre el valor que le corresponde en la columna de la variable de entrada.

Variable de entrada

	Solución básica factible	x_1	Solución (lado derecho)	Razón
	s_1	1	10	10/1 = 10
	s_2	2	24	24/2 = 12
Variable de salida →	s_3	1	5	5/1 = 1 (mínima)

De la tabla anterior se puede observar que la variable básica $\mathbf{s_3}$ es la que tiene la menor razón, por tanto, es la variable de salida.

Las nuevas variables básicas son (s_1, s_2, x_1).

Paso 3. Determinación de una nueva solución básica mediante operaciones de Gauss-Jordan

Una vez que se han determinado las variables de entrada y de salida, en la tabla simplex original se asocia una **columna pivote** con la variable de entrada y un **renglón pivote** con la variable de salida. La intersección de ellos origina el **elemento pivote**.

Columna pivote

Solución básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución (lado derecho)	
z	1	-3	-1	0	0	0	0	
s_1	0	1	-2	1	0	0	10	
s_2	0	2	-1	0	1	0	24	
s_3	0	1	-1	0	0	1	5	← Renglón pivote

Elemento pivote

Las operaciones de Gauss-Jordan incluyen dos tipos de cálculos.

1. Cálculo pera obtener el nuevo renglón pivote

El nuevo renglón pivote se obtiene simplemente normalizando el renglón pivote actual, es decir, dividiendo éste entre el valor del elemento pivote.

$$\boxed{\text{Nuevo renglón pivote} = \text{renglón pivote actual} \div \text{elemento pivote}}$$

2. El cálculo para obtener los renglones restantes

Como el objetivo es hacer ceros todos los elementos de la columna pivote (a excepción del elemento pivote), los nuevos renglones se obtienen de la siguiente manera.

Nuevo renglón = renglón actual – (su coeficiente en la columna pivote) × (nuevo renglón pivote)

Los cálculos para cada uno de los renglones se muestran a continuación.

Para el renglón pivote:

Renglón pivote s_3 actual:	(0 1 -1 0 0 1 | 5)
÷ (elemento pivote): 1	
= Nuevo renglón pivote x_1:	(0 1 -1 0 0 1 | 5)

En la siguiente tabla se muestra el nuevo renglón pivote en donde la variable de entrada x_1 reemplaza a la variable de salida s_3.

Solución básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución (lado derecho)	
z								
s_1								
s_2								
x_1	0	1	-1	0	0	1	5	← Nuevo renglón pivote

Para el renglón z:

Renglón z actual:	(1 -3 -1 0 0 0 | 0)
- (-3) × Nuevo renglón pivote:	(0 3 -3 0 0 3 | 15)
= Nuevo renglón z:	(1 0 -4 0 0 3 | 15)

Para el renglón s_1:

Renglón s_1 actual:	(0 1 -2 1 0 0 | 10)
- (1) × Nuevo renglón pivote:	(0 -1 1 0 0 -1 | -5)
= Nuevo renglón s_1:	(0 0 -1 1 0 -1 | 5)

Para el renglón s_2:

Renglón s_2 actual:	(0 2 1 0 1 0 | 24)
- (2) × Nuevo renglón pivote:	(0 -2 2 0 0 -2 | -10)
= Nuevo renglón s_2:	(0 0 3 0 1 -2 | 14)

Una vez que se han llevado a cabo las operaciones de Gauss-Jordan, la nueva tabla simplex, con la nueva solución básica (s_1, s_2, x_1), queda de la siguiente forma:

Solución básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución (lado derecho)
z	1	0	-4	0	0	3	15
s_1	0	0	-1	1	0	-1	5
s_2	0	0	3	0	1	-2	14
x_1	0	1	-1	0	0	1	5

De la tabla anterior se observa que la nueva solución básica es $s_1 = 5$, $s_2 = 14$, $x_1 = 5$ con un valor en la función objetivo de $z = 15$.

La solución obtenida no es la óptima ya que en el renglón z la variable no básica x_2 tiene coeficiente negativo (-4), por lo tanto, es necesario realizar otra iteración.

Iteración 2

Paso 1. Selección de la variable de entrada

La variable de entrada es x_2 por tener el coeficiente más negativo en el renglón z. De hecho, es la única con coeficiente negativo.

Paso 2. Selección de la variable de salida

Se selecciona la variable de salida de acuerdo con el criterio de la mínima razón.

Variable de entrada

	Solución básica factible	x_2	Solución (lado derecho)	Razón
	s_1	-1	5	5/-1 = -5 (No tomar en cuenta)
Variable de salida →	s_2	3	14	14/3 = 4.6667 (mínima)
	x_1	-1	5	5/-1 = -5 (No tomar en cuenta)

La variable con la mínima razón resultó ser s_2 y es por tanto la variable de salida. Las variables s_1 y x_1 no se toman en cuenta por tener razones negativas.

Las nuevas variables básicas son (s_1, x_2, x_1)

Paso 3. Determinación de una nueva solución básica mediante operaciones de Gauss-Jordan

Se identifican en primer lugar la columna pivote, el renglón pivote y el elemento pivote.

Columna pivote

Solución básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución (lado derecho)	
z	1	0	-4	0	0	3	15	
s_1	0	0	-1	1	0	-1	5	
s_2	0	0	3	0	1	-2	14	← Renglón pivote
x_1	0	1	-1	0	0	1	5	

Elemento pivote

Se realizan las operaciones de Gauss-Jordan para cada uno de los renglones de la tabla.

Para el renglón pivote:

Renglón pivote s_2 actual:	(0 1 3 0 1 -2 | 14)
÷ (elemento pivote): 3	
= Nuevo renglón pivote x_2:	(0 1 3 0 1/3 -2/3 | 14/3)

La variable de entrada x_2 debe reemplazar a la variable de salida s_2 en la nueva tabla simplex.

Solución básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución (lado derecho)	
z								
s_1								
x_2	0	0	1	0	1/3	-2/3	14/3	← Nuevo renglón pivote
x_1								

Para el renglón z:

Renglón z actual:	(1	0	-4	0	0	3	15)
- (-4) × Nuevo renglón pivote:	(0	0	4	0	4/3	-8/3	56/3)
= Nuevo renglón z:	(1	0	0	0	4/3	1/3	101/3)

Para el renglón s_1:

Renglón s_1 actual:	(0	0	-1	1	0	-1	5)
- (-1) × Nuevo renglón pivote:	(0	0	1	0	1/3	-2/3	14/3)
= Nuevo renglón s_1:	(0	0	0	1	1/3	-5/3	29/3)

Para el renglón x_1:

Renglón x_1 actual:	(0	1	-1	0	0	1	5)
- (-1) × Nuevo renglón pivote:	(0	0	1	0	1/3	-2/3	14/3)
= Nuevo renglón x_1:	(0	1	0	0	1/3	1/3	29/3)

La nueva tabla simplex, con la nueva solución básica (s_1, x_2, x_1), queda de la siguiente forma:

Solución básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución (lado derecho)
z	1	0	0	0	4/3	1/3	101/3
s_1	0	0	0	1	1/3	-5/3	29/3
x_2	0	0	1	0	1/3	-2/3	14/3
x_1	0	1	0	0	1/3	1/3	29/3

Esta tabla simplex es la óptima ya que los coeficientes de las variables no básicas (s_2 y s_3) tienen coeficientes no negativos en el renglón z.

La solución óptima obtenida es entonces:

$$\boxed{\begin{aligned} z &= 101/3 = 33.6667 \\ x_1 &= 29/3 = 9.6667 \\ x_2 &= 14/3 = 4.6667 \end{aligned}}$$

Ejemplo 1.8

Determinar la solución del siguiente problema de minimización:

Min $z = x_1 - 2x_2 - x_3$
Sujeto a
$3x_2 + x_3 \leq 120$
$x_1 - x_2 - 4x_3 \leq 80$
$-3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Se expresa el problema en forma estándar:

Min $z = x_1 - 2x_2 - x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \Rightarrow$ Min $z - x_1 + 2x_2 + x_3 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 = 0$
Sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_2 + x_3 + s_1 \quad\quad &= 120 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \quad + s_2 \quad &= 80 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \quad\quad + s_3 &= 100 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

En la práctica se acostumbra aplicar el método simplex en un sólo proceso como se mostrará a continuación.

Iteración	Solución básica factible	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Solución (lado derecho)	Razón	Notas
	z	1	-1	2	1	0	0	0	0		
0	s_1	0	0	3	1	1	0	0	120	120/3 = 40	VE: x_2
	s_2	0	1	-1	-4	0	1	0	80		VS: s_1
	s_3	0	-3	1	2	0	0	1	100	100/1 = 100	
	z	1	-1	0	1/3	-2/3	0	0	-80		
1	x_2	0	0	1	1/3	1/3	0	0	40	40/(1/3) = 120	VE: x_3
	s_2	0	1	0	-11/3	1/3	1	0	120		VS: s_3
	s_3	0	-3	0	5/3	-1/3	0	1	60	60/(5/3) = 36	
	z	1	-2/5	0	0	-3/5	0	-1/5	-92		
2	x_2	0	3/5	1	0	2/5	0	-1/5	28		
	s_2	0	-28/5	0	0	-2/5	1	11/5	252		
	x_3	0	-9/5	0	1	-1/5	0	3/5	36		

En donde:

VE: Variable de entrada
VS: Variable de salida
Nuevo renglón pivote ————
Renglón pivote, columna pivote

Elemento pivote

La solución alcanzada en la iteración número 2 es la óptima, ya que en un problema de minimización ésta se tiene cuando todos los coeficientes de las variables no básicas (x_1, s_1 y s_3) son no positivos.

La solución óptima es:

$z = -92$
$x_1 = 0$
$x_2 = 28$
$x_3 = 36$

Es importante señalar que la solución de la variable x_1 no aparece directamente en la tabla, es decir, no forma parte del conjunto de las variable básicas. Sin embargo, cuando esto sucede se indica su valor igual a cero por tratarse de una variable de decisión.

Ejemplo 1.9

Resolver el siguiente problema de maximización:

Max $z = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4$
Sujeto a
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 10$
$2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 \leq 6$
$-x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 20$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Se expresa el problema en forma estándar:

$\text{Min } z = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$
$\Rightarrow \text{Min } z - x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 = 0$
Sujeto a
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + s_1 = 10$
$2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 + s_2 = 6$
$-x_1 + 5x_2 - 6x_3 + s_3 = 100$
$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Iteración	Solución básica factible	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Solución (lado derecho)	Razón	Notas
	z	1	-1	-4	2	-3	0	0	0	0		
	s_1	0	1	2	4	-1	1	0	0	10	10/2 = 5	VE: x_2
0	s_2	0	2	-5	1	1	0	1	0	6		VS: s_3
	s_3	0	-1	5	-6	0	0	0	1	20	20/5 = 4	
	z	1	-9/5	0	-14/5	-3	0	0	4/5	16		
	s_1	0	7/5	0	32/5	-1	1	0	-2/5	2		VE: x_4
1	s_2	0	1	0	-5	1	0	1	1	26	26/1 = 26	VS: s_2
	x_2	0	-1/5	1	-6/5	0	0	0	1/5	4		
	z	1	6/5	0	-89/5	0	0	3	19/5	94		
	s_1	0	12/5	0	7/5	0	1	1	3/5	28	28/(7/5) = 20	VE: x_3
2	x_4	0	1	0	-5	1	0	1	1	26		VS: s_1
	x_2	0	-1/5	1	-6/5	0	0	0	1/5	4		
	z	1	222/7	0	0	0	89/7	110/7	80/7	450		
	x_3	0	12/7	0	1	0	5/7	5/7	3/7	20		
3	x_4	0	67/7	0	0	1	25/7	32/7	22/7	126		
	x_2	0	13/7	1	0	0	6/7	6/7	5/7	28		

En donde:

VE: Variable de entrada
VS: Variable de salida
Nuevo renglón pivote ————
Renglón pivote, columna pivote

Elemento pivote

La solución alcanzada en la iteración número 3 es la óptima, ya que todos los coeficientes de las variables no básicas (x_1, s_1, s_2 y s_3) son no negativos; hay que recordar que se trata de un problema de maximización.

La solución óptima es:

$z = 450$
$x_1 = 0$
$x_2 = 28$
$x_3 = 20$
$x_4 = 126$

1.4 VARIABLES ARTIFICIALES

Hasta el momento solamente se han analizado ejemplos en donde las restricciones de los problemas son del tipo "≤" y en donde las variables se holgura proporcionan una solución básica factible inicial. Sin embargo, muchos de los problemas de programación lineal pueden tener restricciones del tipo "=" o "≥" y, en dicho caso, tales restricciones no presentan holguras que permitan dar inicio a una solución básica factible. Cuando se presentan estos casos es conveniente hacer uso de lo que se conoce como **variables artificiales**, las cuales juegan el papel de holguras en la primera iteración y posteriormente se van eliminando en las subsecuentes iteraciones.

Una forma sencilla de expresar en forma estándar una restricción del tipo = ó ≥ es mediante las siguientes regla:

1) Para restricción del tipo "=", sumar una variable artificial (R).
2) Para restricción del tipo "≥", restar una variable de exceso (S) y sumar una variable artificial (R).
3) Para restricción del tipo "≤", sumar una variable de holgura (S)

Existen dos métodos para resolver problemas de programación lineal que presentan variables artificiales: el **método de la M** y el **método de las dos fases**. Su procedimiento se describe a continuación.

1.4.1 El método de la M

El método de la M tiene como base la penalización con valores muy grandes (M) de las variables artificiales en la función objetivo.

Para la aplicación del método se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Expresar las restricciones del problema en forma estándar siguiendo las reglas 1) o 2) descritas previamente.
2. Para maximización: penalizar en la función objetivo a las variables artificiales con coeficientes negativos muy grandes (-MR). Para minimización: penalizar en la función objetivo a las variables artificiales con coeficientes positivos muy grandes (+MR).
3. Despejar a las variables artificiales (R) de las restricciones y sustituirlas en la función objetivo para que ésta quede expresada en términos de M y de las variables tanto de decisión como de holgura o exceso.
4. Aplicar el método simplex.

El único problema que puede presentar el método de la M es que requiere un poco más de manipulaciones algebraicas al momento de realizar las operaciones de Gauss-Jordan.

El método se describe con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.10

Resolver el problema de programación lineal de minimización:

Min $z = 2x_1 + 4x_2$
Sujeto a
$x_1 + 2x_2 = 8$
$2x_1 - x_2 \geq 6$
$-x_1 + 2x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$

Paso 1
Las restricciones del problema quedan expresadas de la siguiente forma:
$x_1 + 2x_2 + R_1 = 8$ (se aplica regla 1)
$2x_1 - x_2 - s_1 + R_2 = 6$ (se aplica regla 2)
$-x_1 + 2x_2 + s_2 = 2$ (se aplica regla 3)

Paso 2

Se penalizan las variables artificiales en la función objetivo. Por tratarse de un problema de minimización los coeficientes (M) de las variables artificiales deben positivos.

Min $z = 2x_1 + 4x_2 + MR_1 + MR_2$

Paso 3
Se despejan las variables artificiales de las restricciones y se sustituyen en la función objetivo.

$R_1 = 8 - x_1 - 2x_2$
$R_2 = 6 - 2x_1 + x_2 + s_1$
$z = 2x_1 + 4x_2 + M(8 - x_1 - 2x_2) + M(6 - 2x_1 + x_2 + s_1)$
$z = 2x_1 + 4x_2 + 8M - Mx_1 - 2Mx_2 + 6M - 2Mx_1 + Mx_2 + Ms_1$
$z = (2 - 3M)x_1 + (4 - M)x_2 + Ms_1 + 14M$
$z - (2 - 3M)x_1 - (4 - M)x_2 - Ms_1 = 14M$

Finalmente, el problema queda expresado así:

Min $z - (2 - 3M)x_1 - (4 - M)x_2 - Ms_1 = 14M$
Sujeto a
$x_1 + 2x_2 + R_1 = 8$
$2x_1 - x_2 - s_1 + R_2 = 6$
$-x_1 + 2x_2 + s_2 = 2$
$x_1, x_2, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0$

Paso 4
Se aplica el método simplex

Iteración	Solución básica factible	z	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Solución (lado derecho)	Razón	Notas
	z	1	-2 +3M	-4 + M	-M	0	0	0	14M		
0	R_1	0	1	2	0	1	0	0	8	8/1 = 8	VE: x_1
	R_2	0	2	-1	-1	0	1	0	6	6/2 = 3	VS: R_2
	s_2	0	-1	2	0	0	0	1	2		
	z	1	0	-5 + (5/2)M	-1 + (1/2)M	0	1 – (3/2)M	0	6 + 5M		
1	R_1	0	0	5/2	1/2	1	-1/2	0	5	5/(5/2) = 2	VE: x_2
	x_1	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	0	3		VS: R_1
	s_2	0	0	3/2	-1/2	0	1/2	1	5	5/(3/2) = 3.3	
	z	1	0	0	0	2 – M	-M	0	16		
2	x_2	0	0	1	1/5	2/5	-1/5	0	2		
	x_1	0	1	0	-2/5	1/5	2/5	0	4		
	s_2	0	0	0	-4/5	-3/5	4/5	1	2		

En donde:
VE: Variable de entrada
VS: Variable de salida
Nuevo renglón pivote
Renglón pivote, columna pivote

Elemento pivote

La solución óptima es:

$z = 16$
$x_1 = 4$
$x_2 = 2$

Es importante señalar que por tratarse de un problema de minimización, la variable de entrada es aquella con el coeficiente más positivo en el renglón z. Por ejemplo, en la iteración cero las variables candidatas a entrar son x_1 (-2 + 3M) y x_2 (-4 + M). Se puede observar que la primera es más positiva (hay que recordar que M representa a un número muy grande).

En la iteración número 2 se alcanza la solución óptima porque los coeficientes de las variables no básicas son no positivos.

1.4.2 El método de las dos fases

El método de las dos fases es un método alternativo al de la M debido a que éste último puede presentar errores de redondeo cuando se utiliza algún programa de computadora, ya que es necesario indicar un valor para la M y el problema se presenta al decidir qué tan grande debe ser este valor.

En el método de las dos fases los problemas se resuelven en dos etapas. En la primera fase se encuentra una solución básica factible inicial y, en la segunda fase, se continua a partir de la solución inicial para resolver el problema original.

Los pasos del método son los siguientes:

Primera fase:

1. Se expresan las restricciones del problema en forma estándar (añadiendo las variables de holgura, exceso o artificiales que sean necesarias).
2. Se establece una función objetivo (r) que minimiza la suma de las variables artificiales del problema, esto se hace independientemente si el problema es de maximización o de minimización.
3. Se despejan las variable artificiales de las restricciones y se sustituyen en la función objetivo r.
4. Se resuelve este problema de minimización con el método simplex. Si el valor obtenido de r es positivo, no existe solución factible. De lo contrario, se pasa a la fase dos.

Segunda fase:

5. Se eliminan las columnas correspondientes a las variables artificiales de la tabla óptima obtenida en la fase anterior.
6. Se plantea la función objetivo del problema original, y las restricciones a las que estará sujeta se obtienen de cada renglón de la tabla que se tiene del paso anterior.
7. Se despejan de estas restricciones las variables de decisión que originalmente tiene el problema y se sustituyen en la función objetivo. La función objetivo obtenida junto con las restricciones generan la tabla simplex inicial de la segunda fase.
8. Se aplica el método simplex para obtener la solución final.

El método se describe con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.11

Resolver el problema de programación lineal de maximización:

Max $z = 2x_1 + x_2$
Sujeto a
$2x_1 + 3x_2 \geq 6$
$2x_1 + x_2 \leq 6$
$-x_1 + x_2 = 0$
$x_1, x_2 \geq 0$

Fase I

Paso 1
Las variables del problema en forma estándar quedan expresadas así:

$$\begin{array}{llll} 2x_1 + 3x_2 - s_1 + R_1 & & & = 6 \\ 2x_1 + x_2 & + s_2 & & = 6 \\ -x_1 + x_2 & & + R_2 & = 0 \end{array}$$

Paso 2
Se tienen dos variables artificiales que deben aparecer en la función objetivo, r, que minimiza su suma.

$$\text{Min } r = R_1 + R_2$$

Paso 3
Se despejan las variables artificiales de las restricciones del paso 1 y se sustituyen en la función objetivo.

$$R_1 = 6 - 2x_1 - 3x_2 + s_1$$
$$R_2 = x_1 - x_2$$

$$r = 6 - 2x_1 - 3x_2 + s_1 + x_1 - x_2$$
$$r = 6 - x_1 - 4x_2 + s_1$$

Paso 4
Entonces, el problema a resolver con el método simplex es:

$$\text{Min } r = 6 - x_1 - 4x_2 + s_1 \Rightarrow \min r + x_1 + 4x_2 - s_1 = 6$$

Sujeto a

$$\begin{array}{llll} 2x_1 + 3x_2 - s_1 + R_1 & & & = 6 \\ 2x_1 + x_2 & + s_2 & & = 6 \\ -x_1 + x_2 & & + R_2 & = 0 \end{array}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

Iteración	Solución básica factible	r	x_1	x_2	s_1	R_1	s_2	R_2	Solución (lado derecho)	Razón	Notas
	r	1	1	4	-1	0	0	0	6		
0	R_1	0	2	3	-1	1	0	0	6	6/3 = 2	VE: x_2
	s_2	0	2	1	0	0	1	0	6	6/1 = 6	VS: R_2
	R_2	0	-1	1	0	0	0	1	0	0/1 = 0	
	r	1	5	0	-1	0	0	-4	6		
1	R_1	0	5	0	-1	1	0	-3	6	6/5 = 1.2	VE: x_1
	s_2	0	3	0	0	0	1	-1	6	6/3 = 2	VS: R_1
	x_2	0	-1	1	0	0	0	1	0		
	r	1	0	0	0	-1	0	-1	0		
2	x_1	0	1	0	-1/5	1/5	0	-3/5	6/5		
	s_2	0	0	0	3/5	-3/5	1	4/5	12/5		
	x_2	0	0	1	-1/5	1/5	0	2/5	6/5		

En la iteración 2 se obtiene la solución óptima de la primera fase ya que los coeficientes de las variables no básicas son no positivos y el valor obtenido de **r** es cero.

Se continua con la siguiente fase.

Fase II

Paso 5
La tabla óptima de la fase anterior es entonces:

Solución básica factible	r	x_1	x_2	s_1	R_1	s_2	R_2	Solución (lado derecho)
r	1	0	0	0	-1	0	-1	0
x_1	0	1	0	-1/5	1/5	0	-3/5	6/5
s_2	0	0	0	3/5	-3/5	1	4/5	12/5
x_2	0	0	1	-1/5	1/5	0	2/5	6/5

De esta tabla se eliminan las columnas correspondientes a las variables artificiales, R_1 y R_2, quedando como:

Solución básica factible	r	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución (lado derecho)
r	1	0	0	0	0	0
x_1	0	1	0	-1/5	0	6/5
s_2	0	0	0	3/5	1	12/5
x_2	0	0	1	-1/5	0	6/5

Paso 6
La función objetivo original es

Max $z = 2x_1 + x_2$

Y de la tabla anterior se obtienen las restricciones a las que estará sujeta

$x_1 - (1/5)s_1 = 6/5$
$(3/5)s_1 + s_2 = 12/5$
$x_2 - (1/5)s_1 = 6/5$
$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Paso 7
De las restricciones se despejan las variables x_1 y x_2 y se sustituyen en la función objetivo

$x_1 = (6/5) + (1/5)s_1$
$x_2 = (6/5) + (1/5)s_1$

y éstas se sustituyen en la función objetivo original

$z = 2x_1 + x_2$
$z = 2[(6/5) + (1/5)s_1] + [(6/5) + (1/5)s_1]$
$z = (18/5) + (3/5)s_1 \Rightarrow z - (3/5)s_1 = 18/5$

La tabla simplex asociada a la Fase II resulta ser entonces:

Solución básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución (lado derecho)
z	1	0	0	-3/5	0	18/5
x_1	0	1	0	-1/5	0	6/5
s_2	0	0	0	3/5	1	12/5
x_2	0	0	1	-1/5	0	6/5

Paso 8
Se aplica el método simplex para obtener la solución final

Iteración	Solución básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución (lado derecho)	Razón	Notas
	z	1	0	0	-3/5	0	18/5		
	x_1	0	1	0	-1/5	0	6/5		VE: s_1
0	s_2	0	0	0	3/5	1	12/5	(12/5)/(3/5) = 4	VS: s_2
	x_2	0	0	1	-1/5	0	6/5		
	z	1	0	0	0	1	6		
	x_1	0	1	0	0	1/3	2		
1	s_1	0	0	0	1	5/3	4		
	x_2	0	0	1	0	1/3	2		

En donde:

VE: Variable de entrada
VS: Variable de salida
Nuevo renglón pivote
Renglón pivote, columna pivote

Elemento pivote

La solución óptima es:

$z = 6$
$x_1 = 2$
$x_2 = 2$

Como en esta etapa se resuelve un problema de maximización, la variable de entrada en la iteración cero corresponde a la que tiene el coeficiente más negativo en el renglón z, y en este caso resulta ser s_1.

La solución óptima se alcanza en una iteración, ya que los coeficientes de las variables no básicas son no negativos.

Es importante mencionar que puede presentarse el caso de que en la tabla óptima de la fase I aparezcan variables artificiales como básicas con valor cero, cuando esto sucede es necesario asegurarse de que éstas no se vuelvan positivas durante la fase II. Para ello se debe forzar a la variable artificial a salir durante una iteración en la cual el coeficiente de su restricción en la columna pivote sea positivo o negativo.

1.5 CASOS ESPECIALES DEL MÉTODO SIMPLEX

Cuando se trabaja con el método simplex se pueden presentar algunos de los siguientes casos:

- Degeneración
- Soluciones óptimas alternativas o múltiples

- Solución no acotada
- Solución no factible o inconsistente

1.5.1 Degeneración

La degeneración se presenta cuando en la tabla simplex existe un empate de razón mínima para decidir la variable de salida. Dicho empate se puede romper de manera arbitraria. Una característica de la degeneración es que una de las variables básicas tendrá valor cero en la siguiente iteración.

La degeneración se origina por la existencia de al menos una restricción redundante en el modelo matemático debido a una mala construcción del mismo.

En la figura 1.3 se puede apreciar la degeneración. Las restricciones pasan por el punto óptimo; sin embargo, la existencia de la segunda restricción no influye para nada en la delimitación de la región factible, es decir, es una restricción redundante.

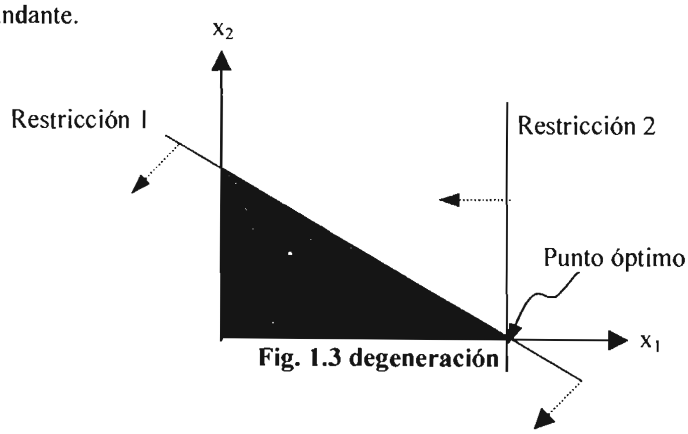


Fig. 1.3 degeneración

1.5.2 Soluciones óptimas alternativas

Un problema de programación lineal tiene soluciones óptimas múltiples o alternativas cuando una de las restricciones es paralela a la función objetivo.

Las soluciones óptimas alternativas se identifican cuando en una iteración de la tabla simplex en la cual se ha alcanzado una solución óptima aparece al menos una variable no básica con coeficiente cero en el renglón z. Otras soluciones óptimas se pueden obtener realizando iteraciones adicionales en las cuales se elige como variable de entrada a aquella variable no básica con coeficiente cero.

En la figura 1.4 se muestra que la función objetivo es paralela a la restricción 3. Cualquier punto que pertenezca al segmento DE, que delimita a la región factible, será una solución óptima.

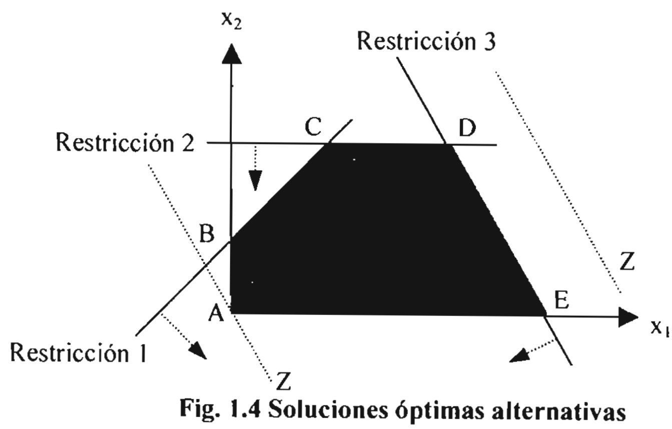


Fig. 1.4 Soluciones óptimas alternativas

1.5.3 Solución no acotada

La solución no acotada se presenta cuando los valores de las variables pueden incrementarse infinitamente sin violar ninguna restricción del problema, generándose un espacio de soluciones que no esta acotado en por lo menos una dirección.
Debido a lo anterior, el valor de la función objetivo también aumentará (para el caso de maximización) o disminuirá (para el caso de minimización) indefinidamente.

La forma de reconocer una solución no acotada es que en cualquier iteración de la tabla simplex las restricciones tienen coeficientes no positivos en la columna correspondiente a alguna variable no básica. Si el coeficiente en tal columna del renglón z es negativo (para maximización) o positivo (para minimización), entonces, el valor de la función objetivo es no acotado también.

En la figura 1.5 se puede observar que el valor de x_2 puede crecer de manera indefinida (ocasionando que Z crezca también indefinidamente), lo que significa que la región factible no esta acotada en dicha dirección.

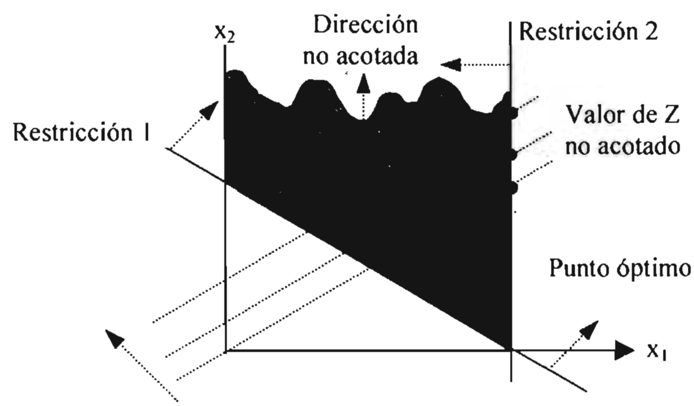


Fig. 1.5 Solución no acotada

1.5.4 Solución no factible o inconsistente

Este caso se puede presentar en algunos problemas de programación lineal en donde es necesario el uso de variables artificiales. El problema de la inconsistencia se debe a que las restricciones no se pueden satisfacer de manera simultánea y, por lo tanto, no existe una región factible.

La forma de identificar una solución no factible es que en la solución óptima obtenida con el método de la M o en la fase I del método de las dos fases aparezca al menos una variable artificial mayor que cero.

En la figura 1.6 se muestra la inconsistencia de un problema que genera que no se tenga una región factible.

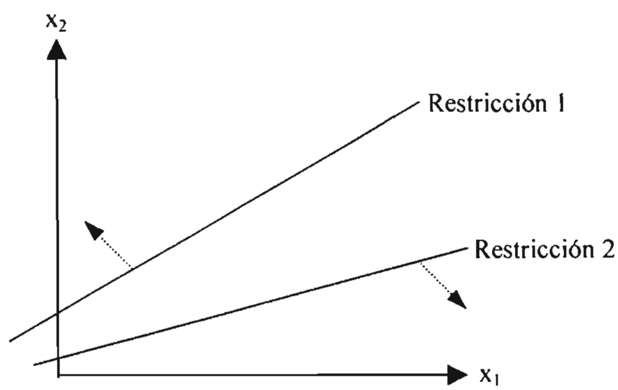


Fig. 1.6 Solución no factible

I.6 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE MANERA GRÁFICA

El análisis de sensibilidad consiste en estudiar el efecto de realizar cambios en los parámetros de un modelo de programación lineal considerando una solución óptima determinada.

Los efectos que se analizan son los siguientes:

1. Cambios en los coeficientes de la función objetivo
2. Cambios en los lados derechos de las restricciones
3. Determinación de los precios duales

La forma más sencilla de realizar un análisis de sensibilidad es mediante la representación gráfica. Por esta razón es que se considera el siguiente ejemplo de programación lineal con dos variables de decisión.

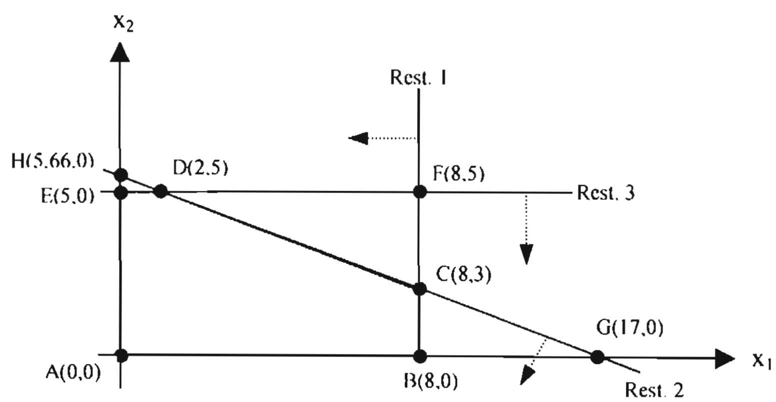
Ejemplo 1.12

Realizar el análisis de sensibilidad de manera gráfica del siguiente problema de programación lineal.

Max $z = 4x_1 + 2x_2$
Sujeto a
$2x_1 \leq 16$ ...(1)
$x_1 + 3x_2 \leq 17$ ...(2)
$x_2 \leq 5$ ...(3)
$x_1, x_2 \geq 0$

De manera gráfica se ha determinado que la solución óptima del problema se encuentra en el punto extremo C.

$Z^* = 32$
$x_1 = 8$
$x_2 = 3$



En la figura se muestran todos los puntos de intersección de cada una de las restricciones con los ejes y entre ellas mismas.

Cambios en los coeficientes de la función objetivo

En esta parte del análisis lo que se busca es determinar el rango en el cual los coeficientes de la función objetivo pueden variar manteniendo inalterada la solución óptima del problema.

Como el problema analizado es de dos variables, éste se puede representar como:

Max $z = c_1x_1 + c_2x_2$

Donde,
c_1: coeficiente de la variable x_1

c_2: coeficiente de la variable x_2

Se debe establecer la razón $\frac{c_2}{c_1}$, para cada una de las **restricciones que se intersectan en el punto extremo C**, en el cual se encuentra la solución óptima del problema que proporciona el máximo valor de z. Las restricciones que se intersectan en el punto C son la 1 y la 2, entonces:

Para la restricción 1, la razón es $\frac{0}{2}$

Para la restricción 2, la razón es $\frac{3}{1}$

Lo anterior se puede expresar algebraicamente con la siguiente relación:

$$\boxed{\frac{0}{2} \leq \frac{c_2}{c_1} \leq \frac{3}{1}}$$

De la función objetivo $c_1 = 4$, y al sustituir en la relación algebraica, se tiene

$$0 \leq \frac{c_2}{4} \leq 3$$

Y al multiplicar por 4,

$\mathbf{0 \leq c_2 \leq 12}$, que es el rango de variación del coeficiente de la variable x_2 de la función objetivo.

Para obtener el rango de c_1 se puede invertir la relación algebraica, quedando expresada como:

$$\frac{2}{0} \geq \frac{c_1}{c_2} \geq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{2}{0}$$

De la función objetivo $c_2 = 2$, y al sustituir en la relación:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{2} \leq \infty$$

Y al multiplicar por 2,

$\mathbf{\frac{2}{3}} \leq c_1 \leq \infty$, que es el rango de variación del coeficiente de la variable x_1 de la función objetivo.

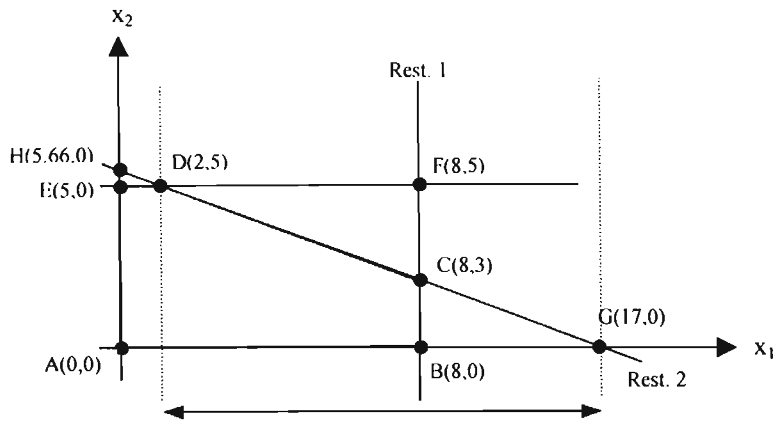
Cambios en los lados derechos de las restricciones

En esta parte del análisis de obtienen los rangos de variación que pueden tener cada una de las restricciones en sus lados derechos sin alterar la solución óptima.

Se analizan primero las restricciones que pasan por el punto óptimo C: restricciones 1 y 2.

Restricción 1

Para la restricción 1 se determinan los puntos que delimitan el rango de factibilidad de cambio que puede tener esta restricción. Los puntos que se consideran son los primeros puntos de intersección que tenga la otra restricción que pasa por el punto C (restricción 2) y con los cuales la restricción 1 se encontraría si se desplazara hacia la izquierda o hacia la derecha.



Rango de factibilidad para la restricción 1

En la figura se puede observar que cuando la restricción 1 se desplaza hacia la izquierda el primer punto de intersección que tiene la restricción 2 con el cual se encontraría es el **punto D**, mientras que el desplazarse hacia la derecha el primer punto de intersección de la restricción 2 con el cual se encontraría es el **punto G**.

Al evaluar la restricción 1 en estos puntos se obtiene:

Punto D(2,5) $\Rightarrow 2x_1 = 2(2) = 4$

Punto G(17,0) $\Rightarrow 2x_1 = 2(17) = 34$

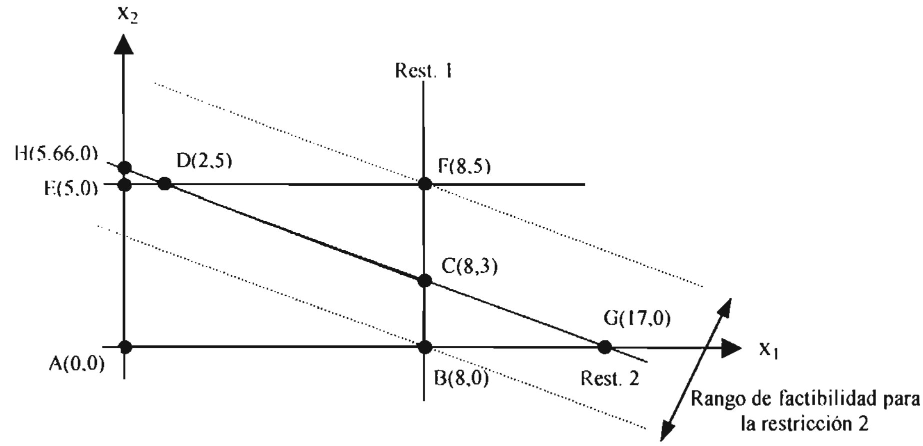
Entonces el rango de variación o de cambio que tiene el lado derecho de la restricción 1 es:

4 ≤ LD Rest. 1 ≤ 34

Restricción 2

Para la restricción 2 también se determinan los puntos que delimitan su rango de factibilidad de cambio. Los puntos que se consideran en este caso son los primeros puntos de intersección que tenga la restricción 1 con los cuales se encontraría la segunda restricción si se desplazara hacia arriba o hacia abajo.

En la figura siguiente se puede observar que cuando la restricción 2 se desplaza hacia abajo el primer punto de intersección que tiene la restricción 1 con el cual se encontraría es el **punto B**, mientras que el desplazarse hacia la arriba el primer punto de intersección de la restricción 1 con el cual se encontraría es el **punto F**.



Al evaluar la restricción 2 en estos puntos se obtiene:

Punto B(8,0) $\Rightarrow x_1 + 3x_2 = 8 + 3(0) = 8$

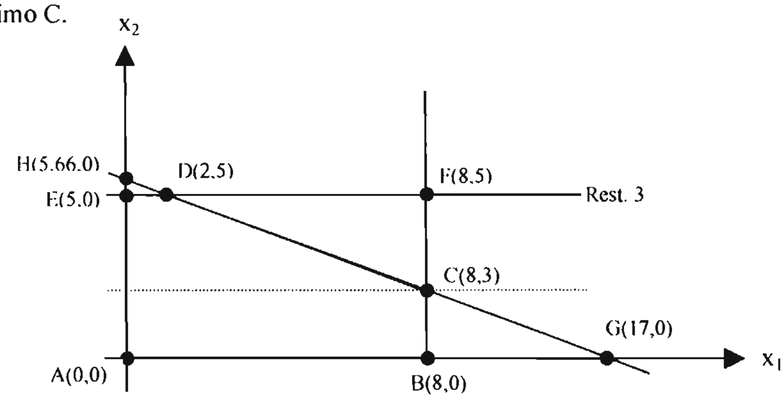
Punto F(8,5) $\Rightarrow x_1 + 3x_2 = 8 + 3(5) = 23$

Entonces el rango de variación o de cambio que tiene el lado derecho de la restricción 2 es:

8 ≤ LD Rest. 2 ≤ 23

Restricción 3

El análisis que se hace para la restricción 3 difiere del correspondiente a las restricciones 1 y 2, ya que ésta no pasa por le punto óptimo C.



La restricción 3 solamente se puede mover hacia abajo hasta llegar al punto óptimo, mientras que hacia arriba se podría desplazar hasta el infinito.

La restricción 3 evaluada en el punto C da como resultado:

Punto C(8,3) $\Rightarrow x_2 = 3$

Entonces el rango de variación de la restricción es:

3 ≤ LD Rest. 3 ≤ ∞

Precios duales

Un precio dual representa el costo que se tendría en la función objetivo por cada unidad de cambio en el lado derecho de una restricción determinada (respetando el rango de cambio de la misma).

Restricción 1

El precio dual se expresaría de la siguiente manera:

$$y_1 = \frac{cambio\ en\ Z\ de\ D\ a\ G}{cambio\ en\ rest.\ 1\ de\ D\ a\ G}$$

Al evaluar la función objetivo en los puntos D y G se tiene:

Punto D(2,5) $\Rightarrow 4x_1 + 2x_2 = 4(2) + 2(5) = 18$
Punto G(17,0) $\Rightarrow 4x_1 + 2x_2 = 4(17) + 2(0) = 68$

Entonces, $y_1 = \dfrac{68-18}{34-4} = \dfrac{50}{30} = 1.6667$

Lo anterior significa que cada unidad de cambio dentro del rango $4 \leq$ LD Rest. $1 \leq 34$ de la restricción alterará el valor óptimo de Z en 1.6667 unidades.

Restricción 2

Para la restricción 2, el precio dual se obtiene de:

$$y_2 = \frac{cambio\ en\ Z\ de\ B\ a\ F}{cambio\ en\ rest.\ 2\ de\ B\ a\ F}$$

Al evaluar la función objetivo en los puntos B y F se tiene:

Punto B(8,0) $\Rightarrow 4x_1 + 2x_2 = 4(8) + 2(0) = 32$
Punto F(8,5) $\Rightarrow 4x_1 + 2x_2 = 4(8) + 2(5) = 42$

Entonces, $y_2 = \dfrac{42-32}{23-8} = \dfrac{10}{15} = 0.6667$

Restricción 3

Como el límite superior del rango de cambio de la restricción 3 no está definido (es infinito), el precio dual correspondiente es simplemente cero.

$y_3 = 0$

El análisis de sensibilidad del problema se puede resumir en las siguientes tablas.

Cambios en los coeficientes de Z

Variable	Coeficiente	Valor mínimo	Valor máximo
x_1	4	2/3	Infinito
x_2	2	0	12

Cambios en los lados derechos de las restricciones y precios duales

Restricción	Lado derecho	Valor mínimo	Valor máximo	Precio dual
1	16	4	34	1.6667
2	17	8	23	0.6667
3	5	3	Infinito	0

1.7 DUALIDAD

Hasta el momento el tipo de problema de programación lineal que se ha estado analizando recibe el nombre de **problema primal**. El **problema dual** es uno que se encuentra asociado con el primal, es decir, ambos poseen propiedades muy estrechamente relacionadas. Si se conoce la solución óptima de alguno de ellos, inmediatamente la solución del otro se puede obtener. Lo anterior significa que la solución de un problema de programación lineal se puede conocer al resolver ya sea el problema primal o el dual pero, en algunas ocasiones resulta más sencillo encontrar su solución de este último.

En esta sección se muestran las diferentes relaciones primal-dual.

Considere el siguiente **problema primal** de ***m*** **restricciones** y ***n*** **variables**, su correspondiente **problema dual** tendrá ***m*** **variables** y ***n*** **restricciones**.

Problema primal

Max $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Sujeto a

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$

$x_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

Problema dual

Min $w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_mx_m$

Sujeto a

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2$

$\vdots$

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n$

$y_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$

De los modelos anteriores se puede observar varias relaciones, como que el dual se formula transponiendo las columnas y renglones del primal, que la función objetivo del dual es de minimización en lugar de maximización, que los coeficientes de la función objetivo del dual son los lados derechos de las restricciones del primal, que las restricciones del dual son del tipo ≥ en lugar de ≤.

En general, las **reglas de correspondencia** para las relaciones primal-dual con respecto al tipo de función objetivo, tipo de variables, tipo de restricciones, etc., para un determinado modelo se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 1.1 Reglas de correspondencia para las relaciones Primal-Dual

PROBLEMA PRIMAL	PROBLEMA DUAL
Matriz de coeficientes técnicos: **A**	Matriz de coeficientes técnicos: $\mathbf{A}^T$
Coeficiente de la variable *i* en la función objetivo	Lado derecho de la i-ésima restricción
Lado derecho de la i-ésima restricción	Coeficiente de la variable *i* en la función objetivo
n variables	***n*** restricciones
m restricciones	***m*** variables
Función objetivo: ***Max z***	Función objetivo: ***Min w***
Variable *i*: ≥ 0	i-ésima restricción: ≥
Variable *i*: ≤ 0	i-ésima restricción: ≤
Variable *i*: **no restringida**	i-ésima restricción: =
i-ésima restricción: ≤	Variable *i*: ≥ 0
i-ésima restricción: ≥	Variable *i*: ≤ 0
i-ésima restricción: =	Variable *i*: **no restringida**
Función objetivo: ***Min z***	Función objetivo: ***Max w***
Variable *i*: ≥ 0	i-ésima restricción: ≤
Variable *i*: ≤ 0	i-ésima restricción: ≥
Variable *i*: **no restringida**	i-ésima restricción: =
i-ésima restricción: ≤	Variable *i*: ≤ 0
i-ésima restricción: ≥	Variable *i*: ≥ 0
i-ésima restricción: =	Variable *i*: **no restringida**

Ejemplo 1.13

Escribir el dual del siguiente problema de programación lineal

Max $z = 10x_1 + 20x_2$
Sujeto a
$x_1 + 2x_2 \leq 100$
$2x_1 + 6x_2 \leq 50$
$2x_1 + 3x_2 \leq 30$
$3x_2 \leq 15$
$x_1, x_2 \geq 0$

El problema primal tiene m = 4 restricciones y n = 2 variables, lo que significa que el problema dual tendrá 4 variables (y_1, y_2, y_3, y_4) y 2 restricciones.

Los lados derechos de las restricciones del primal son los coeficientes de la función objetivo del dual, la cual será de minimización ya que la correspondiente al primal es de maximización.

Min $w = 100y_1 + 50y_2 + 30\,y_3 + 15y_4$

La matriz de coeficientes técnicos del problema dual es la matriz de coeficientes transpuesta del problema primal,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Al multiplicar esta matriz por el vector columna de variables duales se obtienen los lados derechos de las restricciones del problema dual que tendrán signo $\geq$, ya que las variables de decisión del primal (x_1 y x_2) son mayores o iguales que cero. Los lados derechos de las restricciones duales son los coeficientes que se tienen en la función objetivo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \{\geq\} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Como todas las restricciones del primal son del tipo $\leq$, cada variable dual será mayor o igual que cero. Por lo tanto, el modelo dual resulta ser:

Min $w = 100y_1 + 50y_2 + 30\,y_3 + 15y_4$
Sujeto a
$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 10$
$2y_1 + 6y_2 + 3y_3 + 3y_4 \geq 20$
$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Ejemplo 1.14

Escribir el dual del siguiente problema de programación lineal

Min $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$
Sujeto a
$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 10$
$-4x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 20$
$x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 15$

x_1, x_2 no restringidas
$x_3 \geq 0$
$x_4 \leq 0$

El problema primal tiene m = 3 restricciones y n = 4 variables, lo que significa que el problema dual tendrá 3 variables (y_1, y_2, y_3) y 4 restricciones.

Los lados derechos del primal serán los coeficientes de la función objetivo dual, la cual a su vez será de maximización:

Max $w = 10y_1 + 20y_2 + 15y_3$

La primera restricción tiene como coeficientes los correspondientes a la primera columna de la matriz de coeficientes técnicos primal y como la primera variable primal (x_1) es no restringida, el signo de esta restricción será "=". El lado derecho de esta primera restricción es el coeficiente de la variable x_1 en la función objetivo primal.

$2y_1 - 4y_2 + y_3 = 1$

La segunda restricción tiene como coeficientes los correspondientes a la segunda columna de la matriz de coeficientes técnicos primal y como la segunda variable primal (x_2) es no restringida, el signo de esta restricción será "=". El lado derecho de la restricción es el coeficiente de la variable x_2 en la función objetivo primal.

$4y_1 + 5y_2 + 3y_3 = 2$

La tercera restricción tiene como coeficientes los correspondientes a la tercera columna de la matriz de coeficientes técnicos primal y como la tercera variable primal (x_3) es mayor o igual que cero, el signo de esta restricción será "≤". El lado derecho de la restricción es el coeficiente de la variable x_3 en la función objetivo primal.

$6y_1 + y_2 - 7y_3 \leq 3$

La cuarta restricción tiene como coeficientes los correspondientes a la cuarta columna de la matriz de coeficientes técnicos primal y como la cuarta variable primal (x_4) es menor o igual que cero, el signo de esta restricción será "≥". El lado derecho de la restricción es el coeficiente de la variable x_4 en la función objetivo primal.

$y_1 - 2y_2 + 5y_3 \geq 4$

La primera restricción primal tiene signo "≥", esto implica que la primera variable dual, y_1, sea mayor o igual que cero. La segunda restricción primal tiene signo "≤", esto implica que la segunda variable dual, y_2, sea menor o igual que cero. Por último, la tercera restricción primal tiene signo "=", por lo que la tercera variable dual, y_3, debe ser no restringida.

Problema primal	**Problema dual**
Min $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$	Max $w = 10y_1 + 20y_2 + 15y_3$
Sujeto a	Sujeto a
$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 10$	$2y_1 - 4y_2 + y_3 = 1$
$-4x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 20$	$4y_1 + 5y_2 + 3y_3 = 2$
$x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 15$	$6y_1 + y_2 - 7y_3 \leq 3$
x_1, x_2 no restringidas	$y_1 - 2y_2 + 5y_3 \geq 4$
$x_3 \geq 0$	$y_1 \geq 0$
$x_4 \leq 0$	$y_2 \leq 0$
	y_3 no restringida

Otras relaciones primal-dual que se pueden establecer se refieren a la solución óptima y el análisis de sensibilidad. Dichas relaciones se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 1.2 Relaciones Primal-Dual relativas a la solución óptima y el análisis de sensibilidad

PROBLEMA PRIMAL	PROBLEMA DUAL
z óptimo	w óptimo
Holgura o exceso de la i-ésima restricción	Costo reducido de la variable *i*
Costo reducido de la variable *i*	Holgura o exceso de la i-ésima restricción
Cambio en el coeficiente de la variable i en la función objetivo	Cambio en el lado derecho de la i-ésima restricción
Cambio en el lado derecho de la i-ésima restricción	Cambio en el coeficiente de la variable i en la función objetivo
Precio dual de la i-ésima restricción	Valor óptimo de la variable i
(Valor óptimo de la variable i) (-1)	Precio dual de la i-ésima restricción

CAPÍTULO 2

2. ALGORITMOS DE REDES, PERT Y CPM EN PROYECTOS DE INGENIERÍA CIVIL

Una red es simplemente un conjunto de nodos conectados entre sí mediante ramas o arcos. En **Ingeniería Civil** las redes se utilizan para modelar y resolver algunos problemas como pueden ser:

- La distribución de flujo a través de un sistema de alcantarillado a agua potable (hidráulica).
- El diseño del trazo de las calles de una determinada ciudad (ingeniería de tránsito).
- El análisis de una armadura (estructuras).
- El control y administración de proyectos (construcción).
- Muchas otras más.

Por otro lado, PERT y CPM se utilizan como herramientas para la planeación y el control de proyectos de obra civil.

A continuación se dan algunas definiciones básicas sobre redes.

Red: conjunto de nodos conectados por un conjunto de arcos.

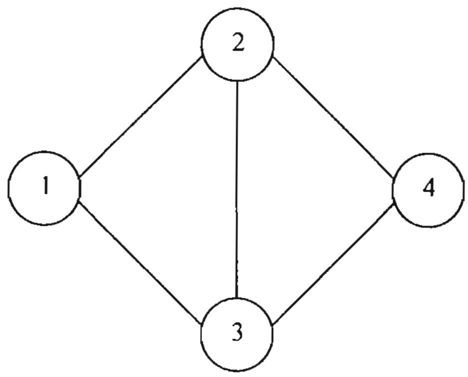


Fig. 2.1 Configuración de una red

En la figura anterior se presenta una configuración típica de una red que consta de cuatro nodos y cinco arcos. El conjunto de nodos es N = {1, 2, 3, 4} y el conjunto de arcos es A = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

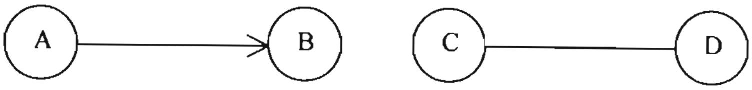
Red dirigida: es la red que solamente tiene arcos dirigidos.

Red no dirigida: es la red que tiene todos sus arcos no dirigidos.

Arco: es la unión entre dos nodos.

Arco dirigido: es el arco en el cual se permite el flujo en una dirección determinada.

Arco no dirigido: es el que no tiene una dirección específica.

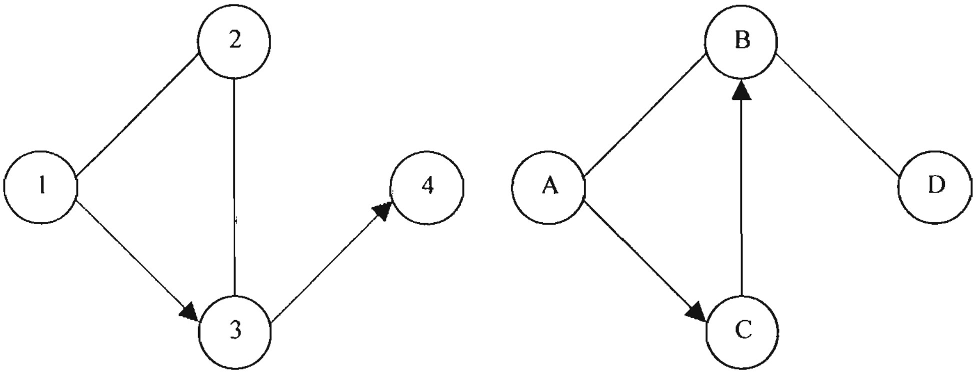


a) **Fig. 2.2 Tipos de arcos** b)

En la figura 2.2 a) el flujo ocurre del nodo A hacia el nodo B y, por lo tanto, el arco AB es dirigido. En la figura 2.2 b) el flujo es factible tanto del nodo C al D como del D al C; sin embargo, solamente se elige una dirección y si ésta es del nodo D al nodo C, entonces el arco DC sería dirigido y, en consecuencia, el arco CD sería no dirigido.

Trayectoria: es el "camino" a través de arcos para llegar de un nodo a otro. Si todos los arcos son dirigidos las trayectorias pueden ser dirigidas y no dirigidas.

Trayectoria dirigida: es el "camino" del nodo *i* al nodo j a través de arcos cuya dirección (tengan o no) es hacia el nodo *j* de tal manera que el flujo de *i* a *j* es factible.



a) b)

Fig. 2.3 Trayectorias dirigidas

En la figura anterior se muestran dos ejemplos de trayectorias dirigidas. En a) el flujo del nodo 1 al nodo 4 es factible, esto significa que la trayectoria de 1 a 4 es una trayectoria dirigida. En b) también se tiene una trayectoria dirigida debido a que el flujo del nodo A al nodo D puede ser factible.

Trayectoria no dirigida: Una trayectoria no dirigida del nodo *i* al nodo *j* es una sucesión de arcos cuya dirección (tengan o no) puede ser hacia *j* o desde *j*. En general, una trayectoria no dirigida tiene arcos hacia el nodo *j* y otros desde el nodo *j*, es decir, hacia *i*.

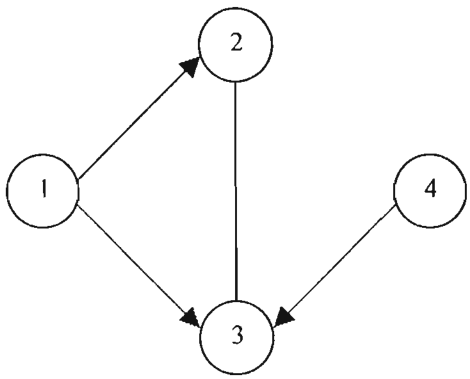


Fig. 2.4 Trayectorias no dirigidas

La trayectoria del nodo 1 al nodo 4 es una trayectoria no dirigida debido a que no existe ningún camino por el cual sea posible llegar de 1 a 4.

2.1 EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

El problema de transporte surge de la necesidad de distribuir un material o un bien entre dos localidades diferentes. Es decir, el bien se transporta de un grupo de **orígenes** que tienen **oferta** del bien a un grupo de **destinos** que **demandan** dicho bien. Sin embargo, se tiene un costo por unidad del bien o material transportado del origen al destino y el objetivo es disminuir el costo total del transporte.

En **Ingeniería Civil** el problema de transporte se puede presentar en varias situaciones, por ejemplo: en un proyecto hidráulico en el cual se requiera llevar agua de varias fuentes hacia distintas localidades que requieran del líquido, en el caso que se requiera transportar materiales de distintos bancos hacia varios frentes de obra o el llevar el recurso humano hacia el sitio en donde se requiera para llevar a cabo determinada tarea, etc., etc.

En general, el problema de transporte se puede representar mediante una red como la de la figura 2.5 que consta de m orígenes; cada uno con una oferta a_i, y n destinos; cada uno con una demanda b_j. Los orígenes se encuentran unidos a los destinos mediante arcos (i, j) que indican el costo c_{ij} y la cantidad x_{ij} enviada del origen i al destino j.

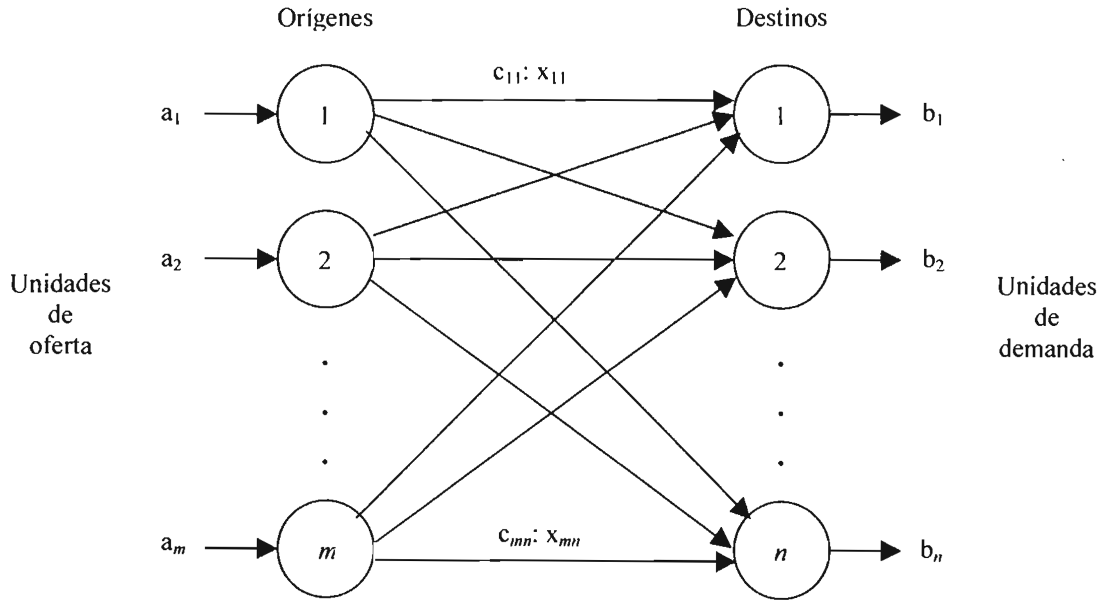


Fig. 2.5 Red del modelo de transporte

Matemáticamente el modelo del problema de transporte se puede expresar de la siguiente manera:

Minimizar $z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j$$

El primer conjunto de restricciones se refiere a la oferta mientras que el segundo conjunto de restricciones se refiere a la demanda. Lo que indican estas restricciones es simplemente que la oferta debe ser igual a la demanda, y en tal caso se tiene un modelo de transporte equilibrado.

El problema de transporte es un problema de programación lineal y por lo tanto se puede encontrar la solución mediante el método simplex; sin embargo, debido a la estructura del modelo se ha desarrollado un método más eficiente y sencillo conocido simplemente como **algoritmo de transporte** o algoritmo **"saltando la piedra"** (stepping stone algorithm).

2.2 ALGORITMO DE TRANSPORTE

Las etapas o pasos del algoritmo de transporte son los siguientes:

Paso 1. Determinación de una solución factible inicial.

Paso 2. Determinación de la variable de entrada mediante la condición de optimalidad del método simplex que indica que ésta será aquella variable no básica con el coeficiente más positivo (por tratarse de minimización). Detenerse si no existe variable de entrada; de lo contrario, ir al paso 3.

Paso 3. Determinación de la variable de salida de entre las variables de la solución básica actual aplicando la condición de factibilidad del método simplex; obtener una nueva solución básica y regresar al paso 2.

2.2.1 Determinación de una solución factible inicial

La solución básica factible inicial tendrá m + n – 1 variables básicas. Si una o más de las variables básicas tienen valor cero, la solución inicial será **degenerada**.

Los métodos más usuales que se utilizan para determinar la solución factible inicial son:

- Método de la esquina noroeste
- Método del costo mínimo
- Método de Vogel

De los tres métodos es el de Vogel el que proporciona la solución factible inicial más cercana al óptimo; sin embargo, es también el que mayor número de operaciones requiere. Por otro lado, el método de la esquina noroeste es el más sencillo de aplicar pero, la solución factible inicial que proporciona es la más alejada del óptimo.

Para alcanzar dicha solución de manera práctica se puede utilizar una **tabla de transporte** que tiene la siguiente forma:

Tabla 2.1 Tabla de transporte

Destinos

		1	2	j	n	Oferta
Orígenes	1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{1i} x_{1i}	c_{1n} x_{1n}	a_1
	2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{2i} x_{2i}	c_{2n} x_{2n}	a_2
	i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	c_{ii} x_{ii}	c_{in} x_{in}	a_i
	m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{mj} x_{mj}	c_{mn} x_{mn}	a_m
Demanda		b_1	b_2	b_i	b_n	

Para la determinación de la solución factible inicial se requiere que el problema esté balanceado, es decir, que la oferta sea igual a la demanda. Si la oferta es mayor que la demanda se debe agregar a la tabla de transporte un destino ficticio (columna) que absorba el exceso de demanda y que tenga costos de transporte unitarios iguales a cero porque dicho destino no existe. Por otro lado, si la demanda es mayor que la oferta será necesario agregar un origen ficticio (renglón) que cubra el déficit y también sus costos de transporte unitarios serán iguales a cero.

Método de la esquina noroeste

Los pasos de este método son los siguientes:

Paso 1. Se hace la primera esquina noroeste (variable x_{11}) igual a la menor de entre la oferta (en el renglón correspondiente) y la demanda (en la columna correspondiente) y se ajustan éstas restándoles la cantidad asignada a la esquina noroeste.

Paso 2. Si la oferta queda en cero se tacha su renglón correspondiente; si es la demanda la que queda en cero se tacha su columna correspondiente. Si la oferta y la demanda quedan en cero simultáneamente, se tacha solamente una de ellas y la otra se queda con el valor cero.

Paso 3. De la nueva matriz que queda se busca la nueva esquina noroeste y se regresa al paso 1 hasta que solamente quede sin tachar un renglón o una columna.

Método del costo mínimo

Paso 1. Se busca el cuadro con el menor costo y se le asigna el menor de entre los valores de la oferta y la demanda correspondientes, después se ajustan tal oferta y tal demanda. Si existen cuadros que tengan el mismo costo mínimo, el empate se rompe arbitrariamente.

Paso 2. Si la oferta queda en cero se tacha su renglón correspondiente; si es la demanda la que queda en cero se tacha su columna correspondiente. Si la oferta y la demanda quedan en cero simultáneamente, se tacha solamente una de ellas y la otra se queda con el valor cero.

Paso 3. Con la nueva matriz que queda se regresa al paso 1 hasta que solamente quede sin tachar un renglón o una columna.

Método de Vogel

Paso 1. Para cada renglón de la tabla se determina su penalidad. En cada renglón se buscan los dos costos más pequeños y al mayor de ellos se le resta el menor para obtener dicha penalidad. Para cada columna también se determina su correspondiente penalidad con el mismo procedimiento

Paso 2. De entre las penalizaciones de los renglones y las columnas se localiza la mayor (si hay un empate éste se rompe arbitrariamente). Si la mayor penalización se tiene en una columna (renglón) se busca en dicha columna (renglón) el cuadro con el menor costo y se le asigna el menor de entre los valores de la oferta y la demanda correspondientes, después se ajustan tal oferta y tal demanda y se tacha el renglón o la columna satisfechos. Si la oferta y la demanda quedan en cero simultáneamente, se tacha solamente una de ellas y la otra se queda con el valor cero.

Paso 3. Con la nueva matriz que queda se regresa al paso 1 hasta que la solución sea completa.

2.2.2 Determinación de la variable de entrada

Su utiliza el método de multiplicadores.

Para cada una de las variables básicas, x_{ij}, se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$u_i + v_j = c_{ij}$

Al hacer una $u_i = 0$ se pueden determinar todos los valores de u_i y v_j.

Conocidos dichos valores de los multiplicadores, se determina para cada variable no básica, x_{ij}, los valores:
$u_i + v_j - c_{ij}$

De estos valores el más positivo corresponderá a la **variable de entrada**.

2.2.3 Determinación de la variable de salida

A partir del cuadro o celda correspondiente a la variable de entrada se construye un circuito que tiene las siguientes características:

- Consta únicamente de segmentos horizontales y verticales.
- Es cerrado. Comienza en la celda o cuadro de la variable de entrada y termina ahí mismo.
- Cada esquina del circuito corresponde a una variable básica de la solución actual, a excepción de aquella en donde se encuentra la variable de entrada.
- El recorrido del circuito puede ser en el mismo sentido o contrario al de las manecillas del reloj.
- Solamente existe un circuito para una determinada variable de entrada.

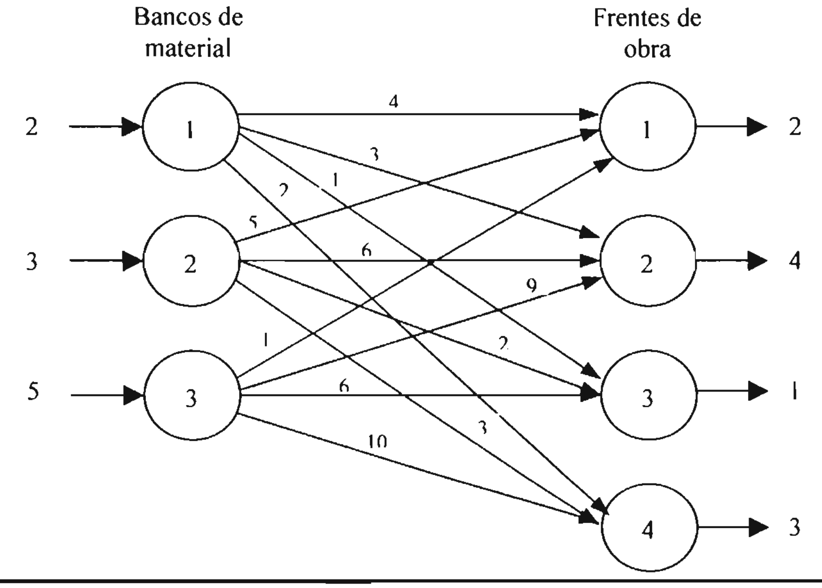
Una vez que se ha establecido el circuito se asignan alternativamente los signos "+" y "–" a cada una de las celdas que corresponden a las esquinas del circuito. Se debe comenzar con el signo "+" en la celda correspondiente a la variable de entrada.

De entre las variables que en su celda tienen asignado el signo "–", la **variable de salida** será aquella con el menor valor (los empates se rompen arbitrariamente).

La nueva solución se obtiene al sumar o restar, dependiendo del signo asignado a la correspondiente celda, el valor de la variable de salida a cada una de las celdas que forman las esquinas del circuito (a excepción, lógicamente, de en la que se encuentra la variable de salida).

Ejemplo 2.1 Transporte de material

Una compañía de agregados cuenta con tres bancos de material. La compañía ha sido contratada para surtir de material a cuatro frentes de obra distintos. La oferta diaria que pueden ofrecer los bancos de material es de 2, 3 y 5 m^3 respectivamente, mientras que la demanda diaria de cada uno de los frentes de obra es de 2, 4, 1 y 3 m^3 respectivamente. Los costos de transporte por m^3 de material , en miles de pesos, entre los bancos y los frentes así como las unidades de oferta y demanda se muestran en la siguiente red:



Se desea minimizar el costo de transporte de material de los bancos hacia los frentes. Resolver el problema mediante el algoritmo de transporte y plantear el modelo de programación lineal.

Solución:

Paso 1 del método de transporte. Determinación de una solución factible inicial

La solución inicial se obtendrá con cada uno de los tres métodos descritos anteriormente con el fin de comparar la proximidad que ofrecen con la solución óptima del problema.

Método de la esquina noroeste

La tabla de transporte con la que se va a trabajar es la siguiente:

Frentes

Bancos	1	2	3	4	Oferta
1	4	3	1	2	2
2	5	6	2	3	3
3	1	9	6	10	5
Demanda	2	4	1	3	10 \ 10

Se puede observar que el problema está equilibrado ya que la oferta total es igual a la demanda total.

Paso 1 del método de la esquina noroeste

Se hace la primera esquina noroeste igual a la menor de entre la oferta (en el renglón correspondiente) y la demanda (en la columna correspondiente) y se ajustan éstas restándoles la cantidad asignada a la esquina noroeste (2).

	1	2	3	4	Oferta
1	4 / 2	3	1	2	~~2~~ 0
2	5	6	2	3	3
3	1	9	6	10	5
Demanda	~~2~~ 0	4	1	3	

Paso 2 del método de la esquina noroeste

Si la oferta queda en cero se tacha su renglón correspondiente; si es la demanda la que queda en cero se tacha su columna correspondiente. Si la oferta y la demanda quedan en cero simultáneamente, se tacha solamente una de ellas y la otra se queda con el valor cero.

	1	2	3	4	Oferta
1	4 / 2	3	1	2	~~2~~ 0
2	5	6	2	3	3
3	1	9	6	10	5
Demanda	~~2~~ 0	4	1	3	

En la tabla se puede observar que tanto la oferta como la demanda quedan con valor cero al ser ajustadas. En este caso se decide arbitrariamente tachar la columna de la demanda y dejar a la oferta con el valor cero.

Paso 3 del método de la esquina noroeste

De la nueva matriz que queda se busca la nueva esquina noroeste y se regresa al paso 1 hasta que solamente quede sin tachar un renglón o una columna. La nueva esquina noroeste corresponde a la variable x_{12}.

Paso 1 del método de la esquina noroeste.

A la nueva esquina noroeste se le asigna el menor valor de entre 4 y 0, y se ajustan la oferta y la demanda; sin embargo, éstas no sufren cambios ya que la cantidad asignada a la esquina noroeste es cero.

	1	2	3	4	Oferta
1	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	~~2~~ ~~0~~ 0
2	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	3
3	$\boxed{1}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	5
Demanda	~~2~~ 0	~~4~~ 4	1	3	

Paso 2 del método de la esquina noroeste

El valor que queda en cero es el correspondiente a la oferta y, por lo tanto, se tiene que tachar su renglón.

	1	2	3	4	Oferta
~~1~~	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	~~2~~ ~~0~~ ~~0~~
2	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	3
3	$\boxed{1}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	5
Demanda	~~2~~ 0	~~4~~ 4	1	3	

Paso 3 del método de la esquina noroeste

La matriz que se ha obtenido es ahora de 2 × 3 y la nueva esquina noroeste corresponde a la variable x_{21}. Se regresa al paso 1.

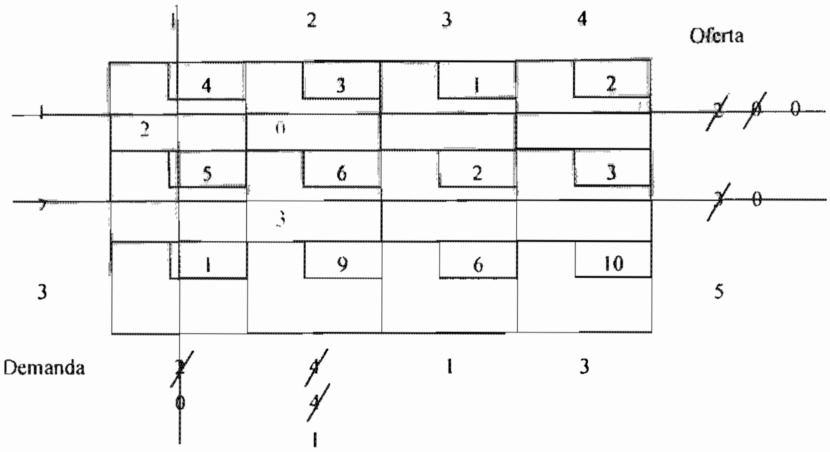
Paso 1 del método de la esquina noroeste.

A la nueva esquina noroeste se le asigna el menor valor de entre 4 y 3, y se ajustan los valores de la oferta y la demanda restándoles el valor de 3.

	1	2	3	4	Oferta
~~1~~	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	~~2~~ ~~0~~ ~~0~~
2	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$ 3	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	~~3~~ 0
3	$\boxed{1}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	5
Demanda	~~2~~ 0	~~4~~ ~~4~~ 1	1	3	

Paso 2 del método de la esquina noroeste

El valor que queda en cero es el correspondiente a la oferta, se tiene que tachar su renglón.

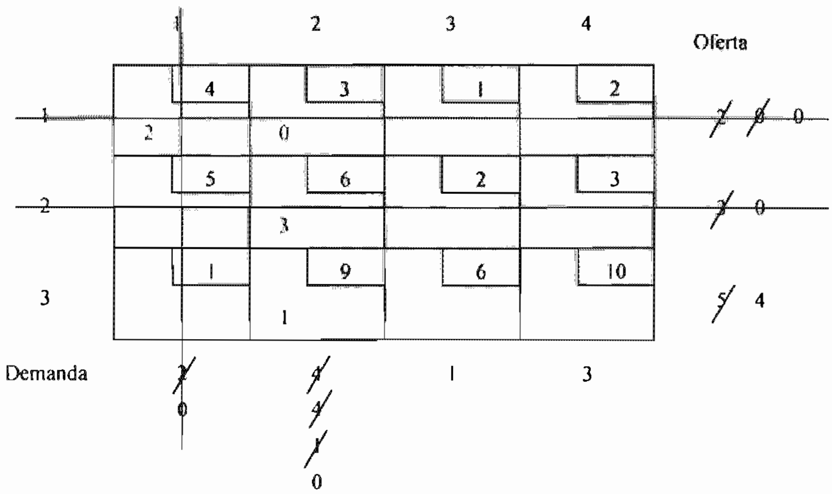


Paso 3 del método de la esquina noroeste

La matriz que se ha obtenido es ahora de 1×3 y la nueva esquina noroeste corresponde a la variable x_{32}. Se regresa al paso 1.

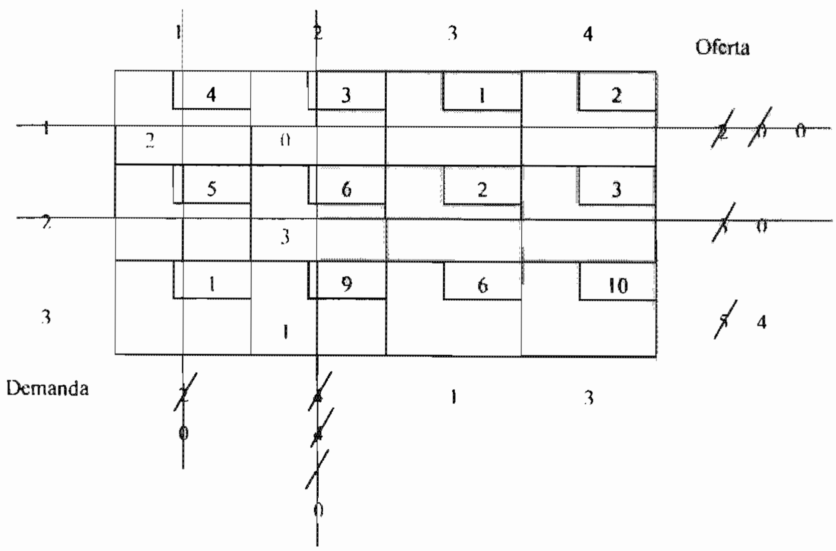
Paso 1 del método de la esquina noroeste.

A la nueva esquina noroeste se le asigna el menor valor de entre 1 y 5, y se ajustan los valores de la oferta y la demanda.



Paso 2 del método de la esquina noroeste

El valor que queda en cero es el correspondiente a la demanda, se tiene que tachar su columna.

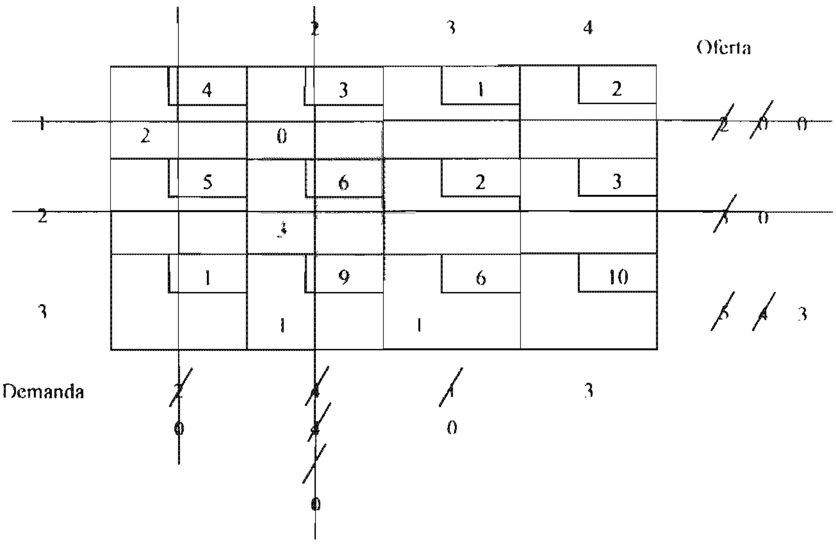


Paso 3 del método de la esquina noroeste

La matriz que se ha obtenido es ahora de 1×2 y la nueva esquina noroeste corresponde a la variable x_{33}. Se regresa al paso 1

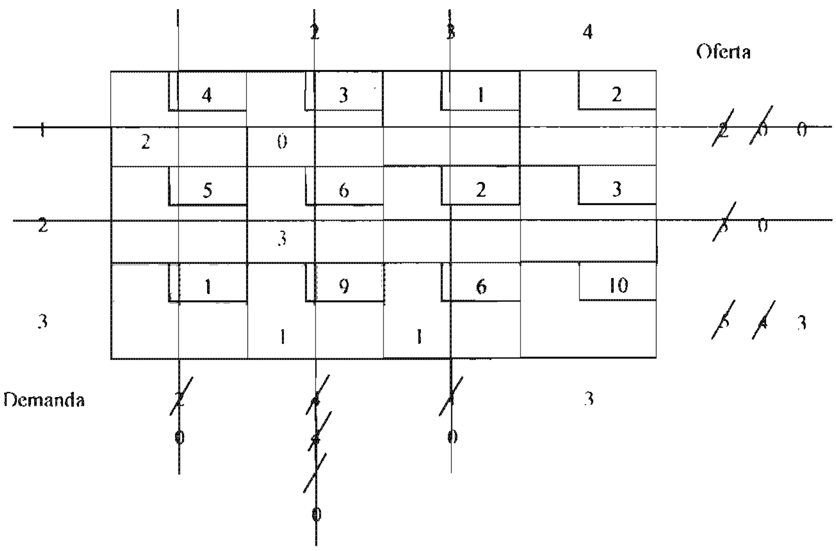
Paso 1 del método de la esquina noroeste.

A la nueva esquina noroeste se le asigna el menor valor de entre 1 y 4, y se ajustan los valores de la oferta y la demanda.



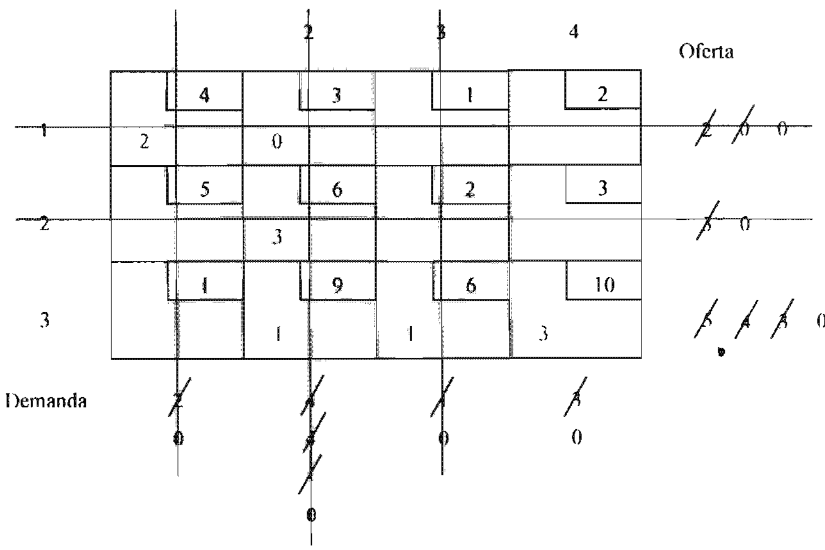
Paso 2 del método de la esquina noroeste

El valor que queda en cero es el correspondiente a la demanda, se tiene que tachar su columna.



Paso 3 del método de la esquina noroeste

Se puede observar que solamente se ha quedado sin tachar un renglón (o columna) y que para la última esquina noroeste (x_{34}) la oferta es igual a la demanda, por lo que la asignación sería de 3 y tanto la oferta como la demanda quedan en cero.



Se cumple que la solución factible inicial tiene $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ variables básicas.

El costo de transporte asociado a esta solución inicial es:

$z = 2(4) + 0(3) + 3(6) + 1(9) + 1(6) + 3(10) = 71$ (miles de pesos)

Entonces, con el método de la esquina noroeste se comenzaría a aplicar el algoritmo de transporte a partir de la siguiente solución:

$z = 71$
$x_{11} = 2$
$x_{12} = 0$
$x_{22} = 3$
$x_{32} = 1$
$x_{33} = 1$
$x_{34} = 3$

Método del costo mínimo

		Frentes				
		1	2	3	4	Oferta
Bancos	1	4	3	1	2	2
	2	5	6	2	3	3
	3	1	9	6	10	5
	Demanda	2	4	1	3	10 \ 10

Paso 1 del método del costo mínimo

Se busca el cuadro con el menor costo y se le asigna el menor de entre los valores de la oferta y la demanda correspondientes, después se ajustan tal oferta y tal demanda. Si existen cuadros que tengan el mismo costo mínimo, el empate se rompe arbitrariamente.

Los cuadros correspondientes a x_{13} y x_{31} tienen el costo mínimo (1); como existe un empate, éste se rompe arbitrariamente y se asigna a x_{31} el valor de 2. Se ajustan la oferta y la demanda.

	1	2	3	4	Oferta
1	4	3	1	2	2
2	5	6	2	3	3
3	1 2	9	6	10	~~5~~ 3
Demanda	~~2~~ 0	4	1	3	

Paso 2 del método del costo mínimo

Como la demanda es la que queda en cero, se tacha su columna correspondiente.

	1	2	3	4	Oferta
1	[4]	[3]	[1]	[2]	2
2	[5]	[6]	[2]	[3]	3
3	[1] 2	[9]	[6]	[10]	~~5~~ 3
Demanda	~~2~~ 0	4	1	3	

Paso 3 del método del costo mínimo

La matriz que ahora queda es de 3 × 3 y se regresa al paso 1.

Paso 1 del método del costo mínimo

El cuadro con menor costo (1) es el correspondiente a x_{13}. A dicho cuadro se le asigna el menor valor de 1 y 2 y se ajustan la oferta y la demanda.

		2	3	4	Oferta
1	[4]	[3]	[1] 1	[2]	~~2~~ 1
2	[5]	[6]	[2]	[3]	3
3	[1] 2	[9]	[6]	[10]	~~5~~ 3
Demanda	~~2~~ 0	4	~~1~~ 0	3	

Paso 2 del método del costo mínimo

Como la demanda es la que queda en cero, se tacha su columna correspondiente.

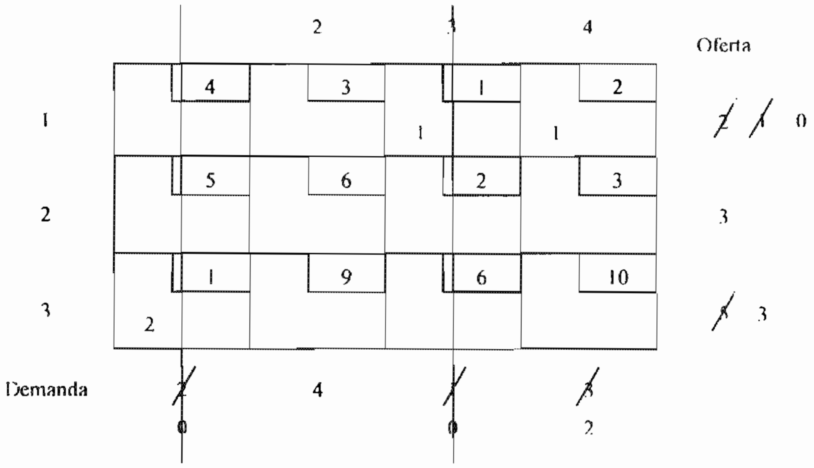
		2	3	4	Oferta
1	[4]	[3]	[1] 1	[2]	~~2~~ 1
2	[5]	[6]	[2]	[3]	3
3	[1] 2	[9]	[6]	[10]	~~5~~ 3
Demanda	~~2~~ 0	4	~~1~~ 0	3	

Paso 3 del método del costo mínimo

La matriz se ha reducido al orden de 3 × 2. Se regresa al paso 1.

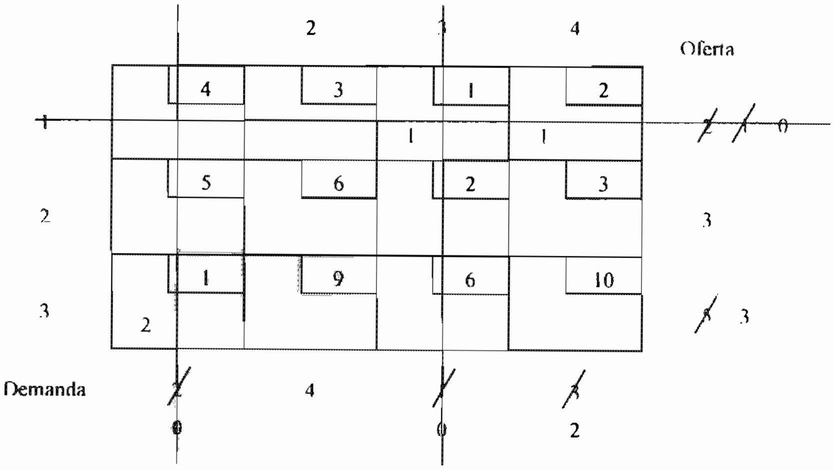
Paso 1 del método del costo mínimo

El menor de los costos es ahora de 2 y corresponde al cuadro x_{14}. A dicho cuadro se le asigna el valor de 1 y se ajustan la oferta y la demanda.



Paso 2 del método del costo mínimo

En este caso es la oferta la que al ser ajustada queda con valor de cero y, por tanto, se tiene que tachar el primer renglón.

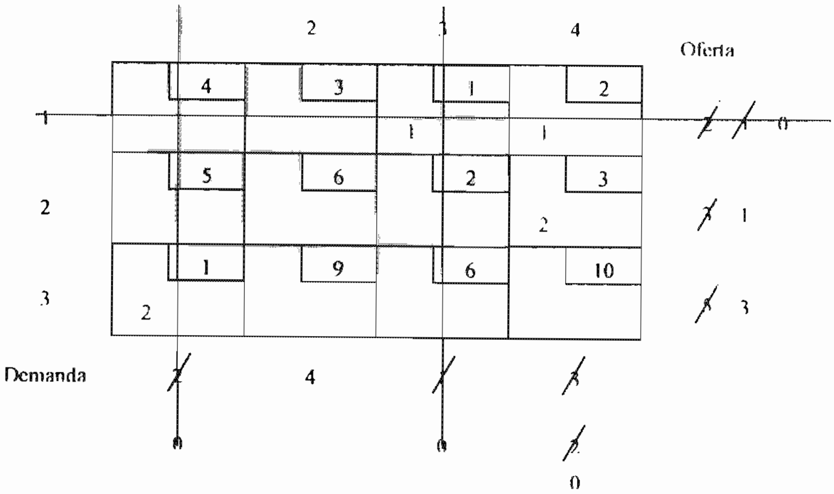


Paso 3 del método del costo mínimo

La matriz que ahora se tiene es de 2×2 y se regresa al paso 1.

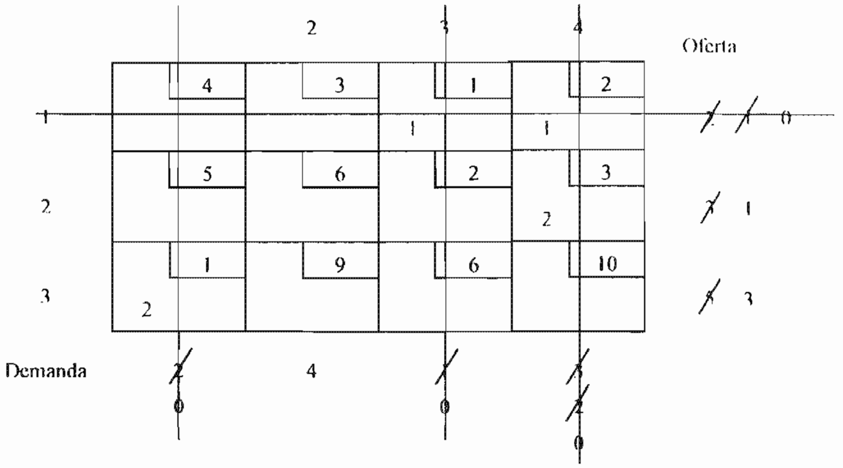
Paso 1 del método del costo mínimo

El menor de los costos es 3 y corresponde al cuadro x_{24}. A este cuadro se le asigna el valor 2 y se ajustan oferta y demanda.



Paso 2 del método del costo mínimo

La demanda es la que queda en cero y se tacha la cuarta columna.

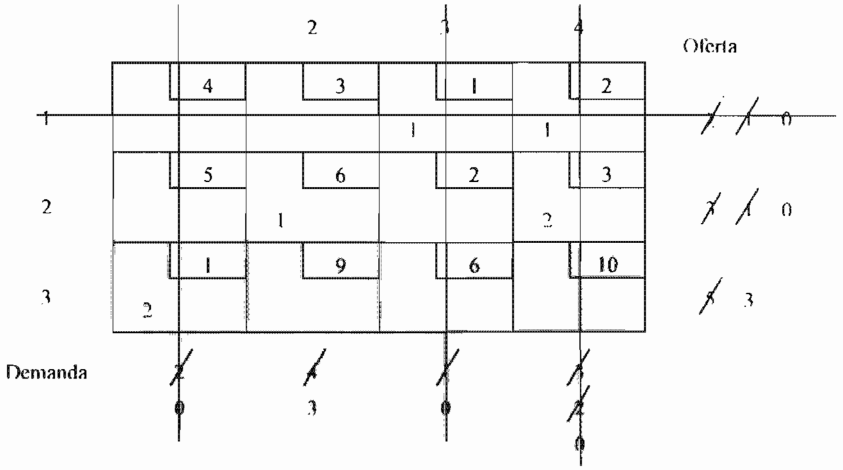


Paso 3 del método del costo mínimo

La matriz que se tiene en este momento es de orden 2 × 1. Se regresa al paso 1.

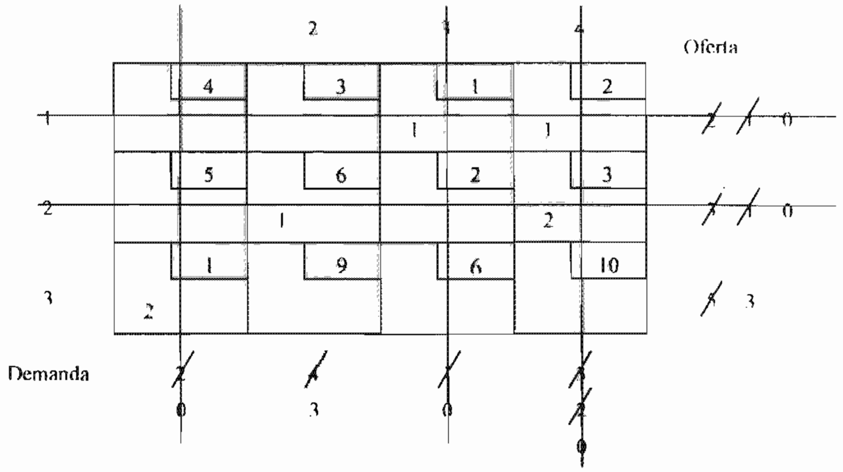
Paso 1 del método del costo mínimo

El menor de los dos costos que quedan es 6 y corresponde a x_{22}. A este cuadro se le asigna el valor 1 y se ajustan la oferta y la demanda.



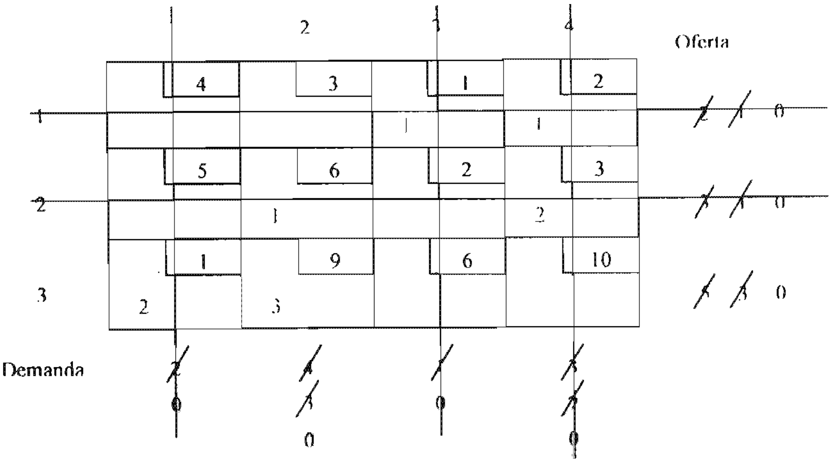
Paso 2 del método del costo mínimo

Debido a que la oferta es la que se hace cero, se tiene tachar el segundo renglón.



Paso 3 del método del costo mínimo

Se puede observar que solamente se ha quedado sin tachar el cuadro correspondiente a x_{32} y que también la oferta es igual a la demanda, por lo que la asignación es de 3 y tanto la oferta como la demanda quedan en cero.



El costo de transporte asociado a esta solución inicial es:

$z = 1(1) + 1(2) + 1(6) + 2(3) + 2(1) + 3(9) = 44$ (miles de pesos)

Entonces, con el método del mínimo costo se comenzaría a partir de la siguiente solución:

$z = 44$
$x_{13} = 1$
$x_{14} = 1$
$x_{22} = 1$
$x_{24} = 2$
$x_{31} = 2$
$x_{32} = 3$

Método de Vogel

Frentes

		1	2	3	4	Oferta
Bancos	1	4	3	1	2	2
	2	5	6	2	3	3
	3	1	9	6	10	5
Demanda		2	4	1	3	10 \ 10

Paso 1 del método de Vogel

Se determinan las penalidades para cada renglón y columna de la tabla de transporte. Para obtener una penalidad se buscan los dos costos más pequeños (de una columna o un renglón) y al mayor de ellos se le resta el menor.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	4	3	1	2	2	2 − 1 = 1
2	5	6	2	3	3	3 − 2 = 1
3	1	9	6	10	5	6 − 1 = 5
Demanda	2	4	1	3		
Penalidad	4 − 1 = 3	6 − 3 = 3	2 − 1 = 1	3 − 2 = 1		

Paso 2 del método de Vogel

De entre todas las penalidades se busca la mayor, que en este caso corresponde al renglón 3 con un valor de 5. Para este renglón se busca el cuadro que tenga el menor costo que resulta ser 1, entonces, a dicho cuadro se le asigna el menor de los valores de entre su correspondiente oferta y demanda (5 y 2). Se procede a ajustar la oferta y la demanda.

	1	2	3	4	Oferta
1	4	3	1	2	2
2	5	6	2	3	3
3	1 2	9	6	10	~~5~~ 3
Demanda	~~2~~ 0	4	1	3	

Debido a que la demanda de la primera columna es satisfecha, se le tiene que tachar.

		2	3	4	Oferta
1	4	3	1	2	2
2	5	6	2	3	3
3	1 2	9	6	10	~~5~~ 3
Demanda	~~2~~ 0	4	1	3	

Paso 3 del Método de Vogel

La matriz resultante es ahora de 3 × 3 y con ella se regresa al paso 1.

Paso 1 del método de Vogel

Ahora, nuevamente es necesario determinar las penalidades para los tres renglones de la matriz resultante así como para las columnas 2, 3 y 4.

		2	3	4	Oferta	Penalidad
1	4	3	1	2	2	2 − 1 = 1
2	5	6	2	3	3	3 − 2 = 1
3	1 2	9	6	10	~~5~~ 3	9 − 6 = 3
Demanda	~~2~~ 0	4	1	3		
Penalidad		6 − 3 = 3	2 − 1 = 1	3 − 2 = 1		

Paso 2 del método de Vogel

Se puede observar que existe un empate para la mayor penalidad (con valor de 3) entre el renglón 3 y la columna 2; éste se rompe arbitrariamente y se escoge a la columna 2. Para esta columna el menor costo se tiene en el cuadro x_{12}, por lo tanto a éste se le asigna el menor de entre los valores de la oferta (2) y la demanda (4).

		2	3	4	Oferta
1	4	3 2	1	2	2
2	5	6	2	3	3
3	1 2	9	6	10	~~5~~ 3
Demanda	~~2~~ 0	4	1	3	

Se ajustan la oferta y la demanda.

		2	3	4	Oferta
1	4	3 2	1	2	~~2~~ 0
2	5	6	2	3	3
3	1 2	9	6	10	~~5~~ 3
Demanda	~~2~~ 0	~~4~~ 2	1	3	

Como se satisface la oferta se tacha el renglón 1.

		2	3	4	Oferta
~~1~~	~~4~~	~~3 2~~	~~1~~	~~2~~	~~2 0~~
2	5	6	2	3	3
3	1 2	9	6	10	~~5~~ 3
Demanda	~~2~~ 0	~~4~~ 2	1	3	

Paso 3 del método de Vogel

La matriz resultante es de orden 2 × 3 y se regresa al paso 1.

Paso 1 del método de Vogel

Se obtienen las penalidades de los renglones 2 y 3 y de las columnas 2, 3 y 4.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 2	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	~~2~~ 0	
2	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	3	3 − 2 = 1
3	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	~~5~~ 3	9 − 6 = 3
Demanda	~~2~~ 0	~~4~~ 2	1	3		
Penalidad		9 − 6 = 3	6 − 2 = 4	10 − 3 = 7		

Paso 2 del método de Vogel

La mayor penalidad se tiene para la columna 4 con un valor de 7. En este columna el cuadro con el menor costo es el correspondiente a x_{24}, se le asigna el valor de 3 y se ajustan oferta y demanda.

	1	2	3	4	Oferta
1	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 2	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	~~2~~ 0
2	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 3	~~3~~ 0
3	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	~~5~~ 3
Demanda	~~2~~ 0	~~4~~ 2	1	~~3~~ 0	

Se puede observar que tanto la oferta como la demanda se satisfacen, pero sólo se puede tachar o el renglón o la columna. Arbitrariamente se decide tachar la columna 4.

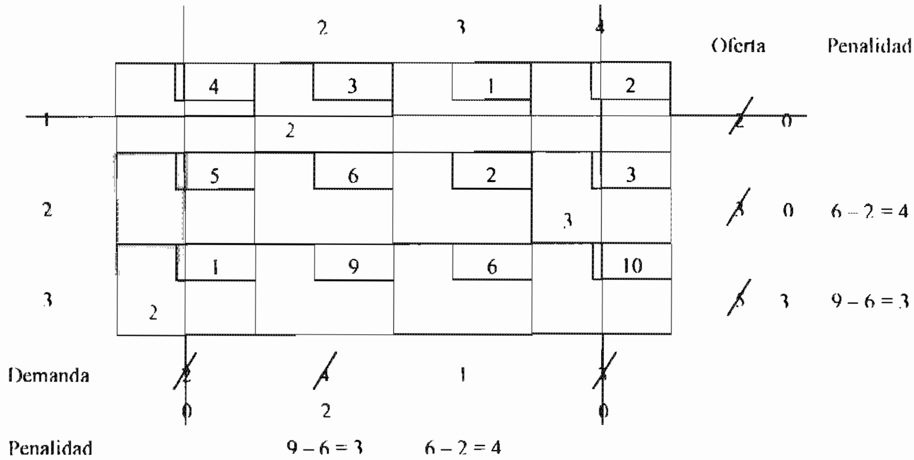
	1	2	3	4	Oferta
1	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 2	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	~~2~~ 0
2	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 3	~~3~~ 0
3	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	~~5~~ 3
Demanda	~~2~~ 0	~~4~~ 2	1	~~3~~ 0	

Paso 3 del método de Vogel

La matriz obtenida es del orden 2 × 2 y se regresa al paso 1

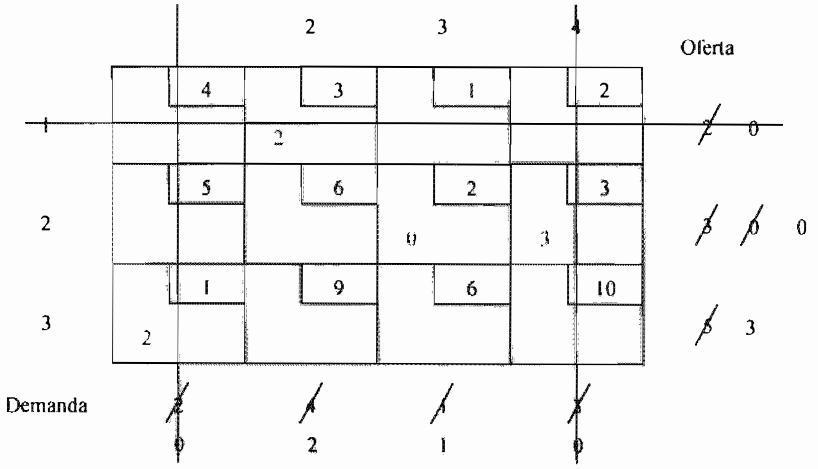
Paso 1 del método de Vogel

Se determinan las penalidades para los renglones 2 y 3 así como para las columnas 2 y 3.

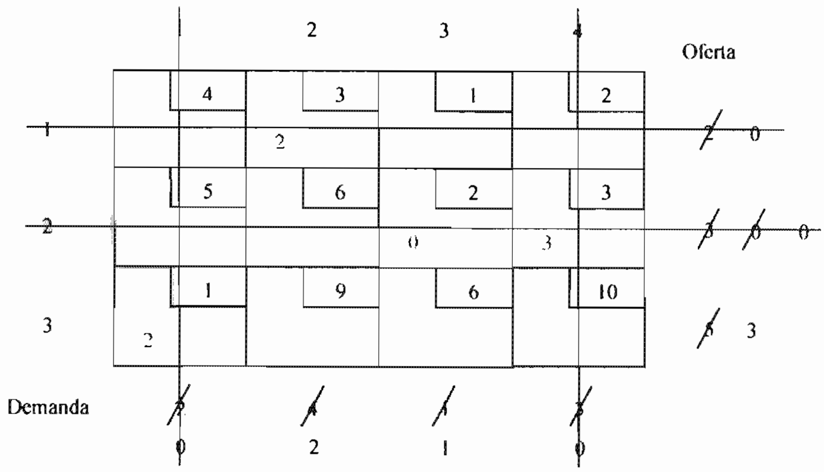


Paso 2 del método de Vogel

Nuevamente se tiene un empate para la mayor penalidad entre el renglón 2 y la columna 3. Se escoge arbitrariamente al renglón 2. Entonces, al cuadro correspondiente a x_{23}, el cual tiene el menor costo (2), se le asigna el valor de 0 y se ajustan oferta y demanda correspondientes.



Debido a que la oferta es la que queda con valor 0 se tacha el renglón 2.

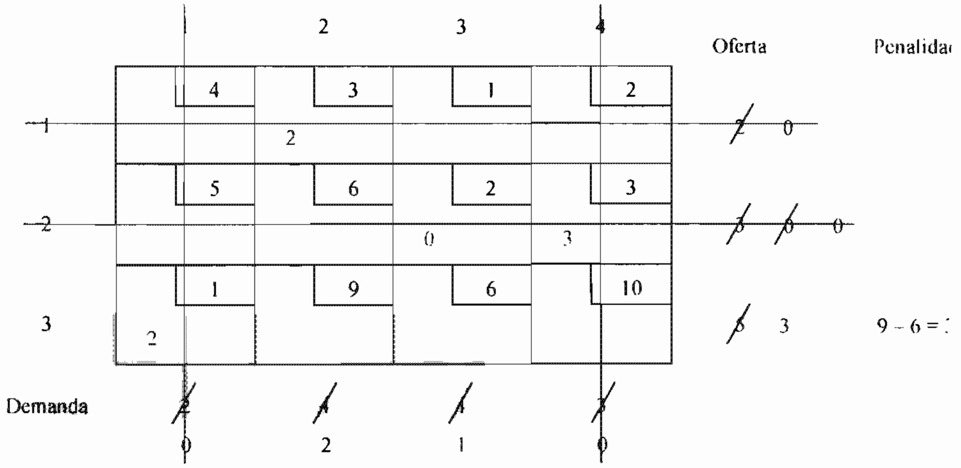


Paso 3 del método de Vogel

Solamente queda un renglón y se regresa al paso 1.

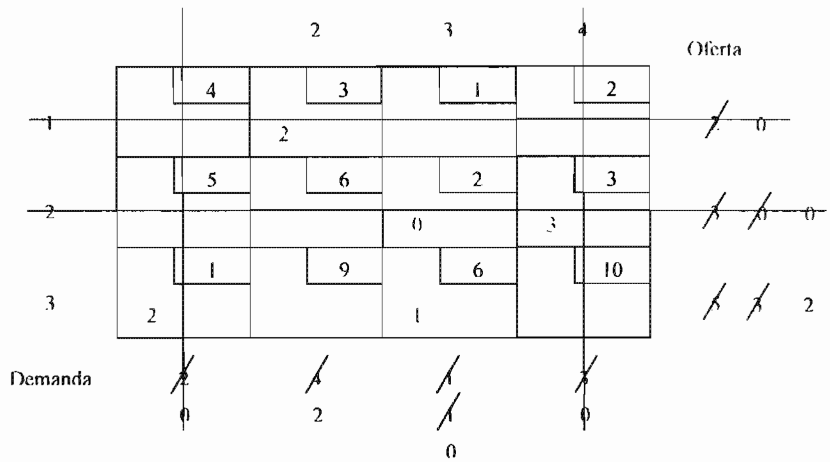
Paso 1 del método de vogel

Se obtiene solamente la penalidad del renglón 3, ya que para las columnas 2 y 3 esto no es posible.

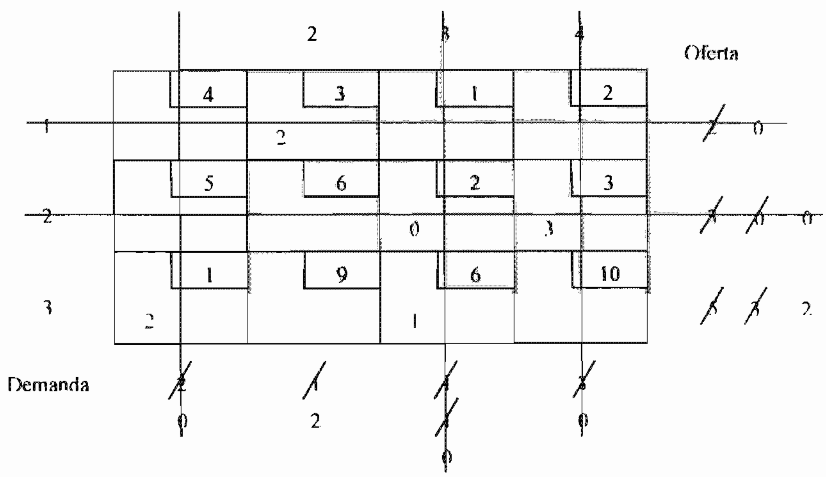


Paso 2 del método de Vogel

Se asigna al cuadro correspondiente a x_{33} el valor de 1 y se ajustan oferta y demanda.

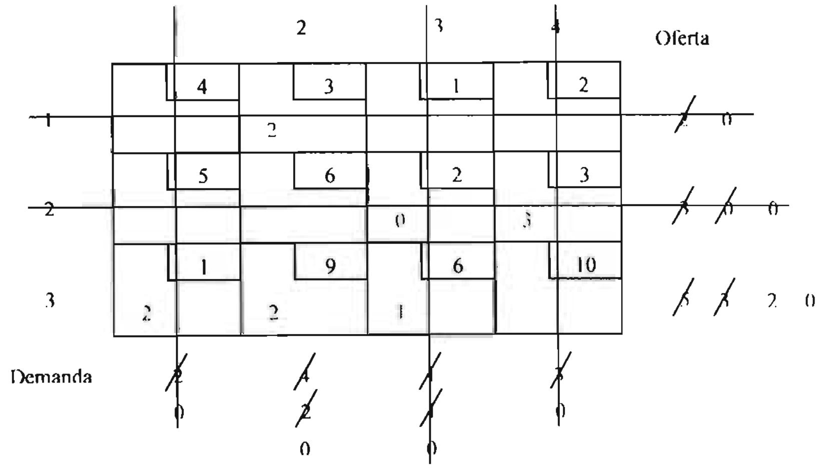


La demanda de la columna 3 queda satisfecha y, por tanto, ésta se tiene que tachar.



Paso 3 del método de Vogel

Se puede observar que solamente se ha quedado sin tachar el cuadro correspondiente a x_{32} y que la oferta es igual a la demanda, por lo que la asignación es de 2 y tanto la oferta como la demanda quedan satisfechas simultáneamente.



El costo de transporte asociado a esta solución inicial es:

$z = 2(3) + 0(2) + 3(3) + 2(1) + 2(9) + 1(6) = 41$ (miles de pesos)

Entonces, la solución inicial con la que se comenzaría es:

$z = 41$
$x_{12} = 2$
$x_{23} = 0$
$x_{24} = 3$
$x_{31} = 2$
$x_{32} = 2$
$x_{33} = 1$

Se puede apreciar que la mejor solución inicial es proporcionada por el método de Vogel (por generar el valor de z más pequeño) y que la peor solución se obtiene con el método de la esquina noroeste (debido a que proporciona la z más grande). En la práctica solamente es necesario encontrar la solución inicial con alguno de los métodos descritos.

Se considerará en este ejemplo la solución inicial obtenida con el método de la esquina noroeste.

Iteración 1

Paso 2 del método de transporte: determinación de la variable de entrada

La solución con la cual es parte es:

4	3	1	2
2	0		
5	6	2	3
	3		
1	9	6	10
	1	1	3

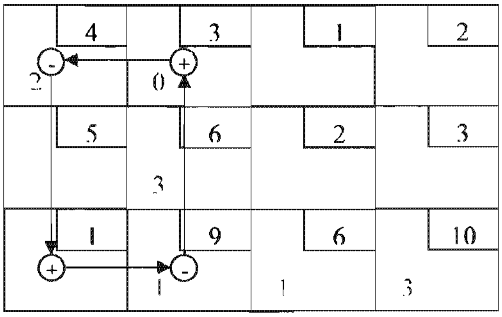
Se utiliza el método de los multiplicadores para determinar la variable de entrada. Esto se muestra en la siguiente tabla:

Se hace arbitrariamente $u_1 = 0$

Variable básica	$u_i + v_j = c_{ij}$	Valores de u_i y v_j	Variable no básica	$u_i + v_j - c_{ij}$
x_{11}	$u_1 + v_1 = 4$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4$	x_{13}	$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 0 - 1 = -1$
x_{12}	$u_1 + v_2 = 3$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 3$	x_{14}	$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 4 - 2 = 2$
x_{22}	$u_2 + v_2 = 6$	$v_2 = 3 \Rightarrow u_3 = 6$	x_{21}	$u_2 + v_1 - c_{21} = 3 + 4 - 5 = 2$
x_{32}	$u_3 + v_2 = 9$	$v_2 = 3 \Rightarrow u_3 = 6$	x_{23}	$u_2 + v_3 - c_{23} = 3 + 0 - 2 = 1$
x_{33}	$u_3 + v_3 = 6$	$u_3 = 6 \Rightarrow v_3 = 0$	x_{24}	$u_2 + v_4 - c_{24} = 3 + 4 - 3 = 4$
x_{34}	$u_3 + v_4 = 10$	$u_3 = 6 \Rightarrow v_4 = 4$	x_{31}	$u_3 + v_1 - c_{31} = 6 + 4 - 1 = 9$

La variable de entrada es la variable no básica más positiva: x_{31}

Paso 3 del método de transporte: determinación de la variable de salida



El circuito comienza en la celda correspondiente a la variable de entrada, x_{31}, a la cual se le asigna el signo positivo. Las otras esquinas del circuito las forman las celdas correspondientes a las variables básicas x_{32}, x_{12} y x_{11}; los signos se van alternando. De las celdas con signo negativo se toma a aquella con el valor más pequeño como variable de salida, que en este caso resulta ser $x_{32} = 1$.

La nueva solución se obtiene al sumar o restar el valor de la variable de salida (1) a cada una de las esquinas que forman el circuito (a excepción de la variable x_{32}, que es la de salida).

4 1	3 1	1	2
5	6 3	2	3
1 1	9	6 1	10 3

Con esta nueva solución se regresa al paso 2.

Iteración 2

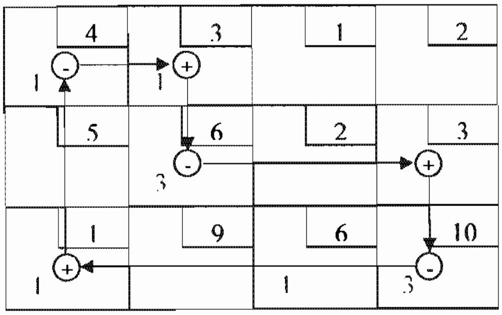
Paso 2 del método de transporte: determinación de la variable de entrada

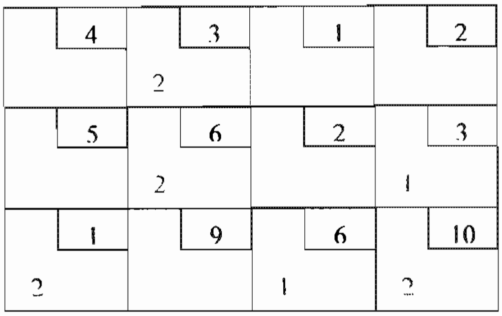
Se hace arbitrariamente $u_1 = 0$

Variable básica	$u_i + v_j = c_{ij}$	Valores de u_i y v_j	Variable no básica	$u_i + v_j - c_{ij}$
x_{11}	$u_1 + v_1 = 4$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4$	x_{13}	$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 9 - 1 = 8$
x_{12}	$u_1 + v_2 = 3$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 3$	x_{14}	$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 13 - 2 = 11$
x_{22}	$u_2 + v_2 = 6$	$v_2 = 3 \Rightarrow u_2 = 3$	x_{21}	$u_2 + v_1 - c_{21} = 3 + 4 - 5 = 2$
x_{31}	$u_3 + v_1 = 1$	$v_1 = 4 \Rightarrow u_3 = -3$	x_{23}	$u_2 + v_3 - c_{23} = 3 + 9 - 2 = 10$
x_{33}	$u_3 + v_3 = 6$	$u_3 = -3 \Rightarrow v_3 = 9$	x_{24}	$u_2 + v_4 - c_{24} = 3 + 13 - 3 = 13$
x_{34}	$u_3 + v_4 = 10$	$u_3 = -3 \Rightarrow v_4 = 13$	x_{32}	$u_3 + v_2 - c_{32} = -3 + 3 - 9 = 9$

La variable de entrada es la variable no básica más positiva: x_{24}

Paso 3 del método de transporte: determinación de la variable de salida





La variable de salida es $x_{11} = 1$

Nueva solución

Se regresa al paso 2.

Iteración 3

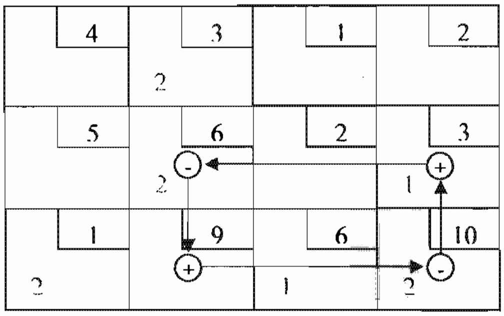
Paso 2 del método de transporte: determinación de la variable de entrada

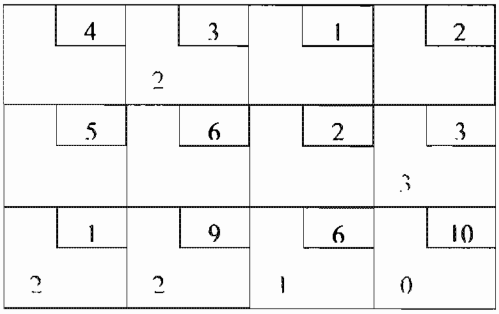
Se hace arbitrariamente $u_1 = 0$

Variable básica	$u_i + v_j = c_{ij}$	Valores de u_i y v_j	Variable no básica	$u_i + v_j - c_{ij}$
x_{12}	$u_1 + v_2 = 3$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 3$	x_{11}	$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 9 - 4 = -13$
x_{22}	$u_2 + v_2 = 6$	$v_2 = 3 \Rightarrow u_2 = 3$	x_{13}	$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 4 - 1 = -5$
x_{24}	$u_2 + v_4 = 3$	$u_2 = 3 \Rightarrow v_4 = 0$	x_{14}	$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 0 - 2 = -2$
x_{34}	$u_3 + v_4 = 10$	$v_4 = 0 \Rightarrow u_3 = 10$	x_{21}	$u_2 + v_1 - c_{21} = 3 - 9 - 5 = -11$
x_{33}	$u_3 + v_3 = 6$	$u_3 = 10 \Rightarrow v_3 = -4$	x_{23}	$u_2 + v_3 - c_{23} = 3 - 4 - 2 = -3$
x_{31}	$u_3 + v_1 = 1$	$u_3 = 10 \Rightarrow v_1 = -9$	x_{32}	$u_3 + v_2 - c_{32} = 10 + 3 - 9 = 4$

La variable de entrada es la variable no básica más positiva: x_{32}

Paso 3 del método de transporte: determinación de la variable de salida





La variable de salida es $x_{22} = 2$ Nueva solución

Se regresa al paso 2

Iteración 4

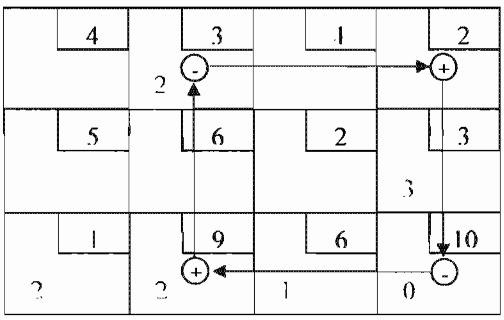
Paso 2 del método de transporte: determinación de la variable de entrada

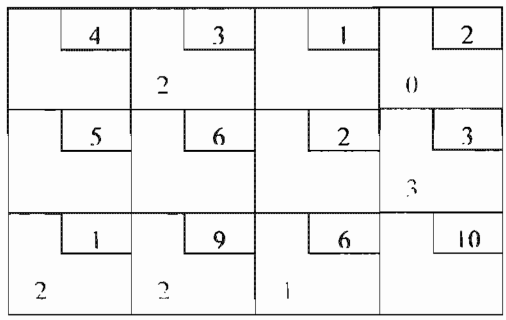
Se hace arbitrariamente $u_1 = 0$

Variable básica	$u_i + v_j = c_{ij}$	Valores de u_i y v_j	Variable no básica	$u_i + v_j - c_{ij}$
x_{12}	$u_1 + v_2 = 3$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 3$	x_{11}	$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 5 - 4 = -9$
x_{32}	$u_3 + v_2 = 9$	$v_2 = 3 \Rightarrow u_3 = 6$	x_{13}	$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 0 - 1 = -1$
x_{31}	$u_3 + v_1 = 1$	$u_3 = 6 \Rightarrow v_1 = -5$	x_{14}	$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 4 - 2 = 2$
x_{33}	$u_3 + v_3 = 6$	$u_3 = 6 \Rightarrow v_3 = 0$	x_{21}	$u_2 + v_1 - c_{21} = -1 - 5 - 5 = -11$
x_{34}	$u_3 + v_4 = 10$	$u_3 = 6 \Rightarrow v_4 = 4$	x_{22}	$u_2 + v_2 - c_{22} = -1 + 3 - 6 = -4$
x_{24}	$u_2 + v_4 = 3$	$v_4 = 4 \Rightarrow u_2 = -1$	x_{23}	$u_2 + v_3 - c_{23} = -1 + 0 - 2 = -3$

La variable de entrada es la variable no básica más positiva: x_{14}

Paso 3 del método de transporte: determinación de la variable de salida





La variable de salida es $x_{34} = 0$ Nueva solución

Se regresa al paso 2

Iteración 5

Paso 2 del método de transporte: determinación de la variable de entrada

Se hace arbitrariamente $u_1 = 0$

Variable básica	$u_i + v_j = c_{ij}$	Valores de u_i y v_j	Variable no básica	$u_i + v_j - c_{ij}$
x_{12}	$u_1 + v_2 = 3$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 3$	x_{11}	$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 5 - 4 = -9$
x_{14}	$u_1 + v_4 = 2$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_4 = 2$	x_{13}	$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 0 - 1 = -1$
x_{24}	$u_2 + v_4 = 3$	$v_4 = 2 \Rightarrow u_2 = 1$	x_{21}	$u_2 + v_1 - c_{21} = 1 - 5 - 5 = -9$
x_{32}	$u_3 + v_2 = 9$	$v_2 = 3 \Rightarrow u_3 = 6$	x_{22}	$u_2 + v_2 - c_{22} = 1 + 3 - 6 = -2$
x_{31}	$u_3 + v_1 = 1$	$u_3 = 6 \Rightarrow v_1 = -5$	x_{23}	$u_2 + v_3 - c_{23} = 1 + 0 - 2 = -1$
x_{33}	$u_3 + v_3 = 6$	$u_3 = 6 \Rightarrow v_3 = 0$	x_{34}	$u_3 + v_4 - c_{34} = 6 + 2 - 10 = -2$

Como todas las variables básicas son no positivas, se tiene la solución óptima:

$z^* = 41$ (miles)
$x_{12} = 2$
$x_{14} = 0$
$x_{24} = 3$
$x_{31} = 2$
$x_{32} = 2$
$x_{33} = 1$

La solución anterior indica que es necesario enviar 2 m^3 de material del banco 1 al frente 2, 3 m^3 del banco 2 al frente 4, 2 m^3 del banco 3 al frente 1, 2 m^3 del banco 3 al frente 2 y 1 m^3 del banco 3 al frente 3 con un costo de transporte de \$41000.

El modelo de programación lineal para este problema de transporte es el siguiente:

$$\text{Min } z = 4x_{11} + 3x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 5x_{21} + 6x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + x_{31} + 9x_{32} + 6x_{33} + 10x_{34}$$

Sujeto a

$$\begin{array}{llll}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & & = 2 \text{ (oferta del nodo 1)} \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & & = 3 \text{ (oferta del nodo 2)} \\
 & & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = 5 \text{ (oferta del nodo 3)} \\
x_{11} & + x_{21} & + x_{31} & = 2 \text{ (demanda del nodo 1)} \\
x_{12} & + x_{22} & + x_{32} & = 4 \text{ (demanda del nodo 2)} \\
x_{13} & + x_{23} & + x_{33} & = 1 \text{ (demanda del nodo 3)} \\
x_{14} & + x_{24} & + x_{34} & = 3 \text{ (demanda del nodo 4)}
\end{array}$$

$x_{ij} \geq 0$

Al resolver el problema de programación lineal se obtiene la misma solución.

2.3 FLUJO MÁXIMO

Como su nombre lo indica, en este problema se busca determinar el flujo máximo que se puede hacer pasar a través de una red desde un nodo origen o fuente hasta un nodo destino con las restricciones de que cada arco tiene solamente cierta capacidad. La capacidad puede representar, por ejemplo, el gasto hidráulico en un sistema de tuberías, el aforo vehicular en una carretera, la corriente en una red eléctrica, etc.

El algoritmo que se utiliza para resolver el problema de flujo máximo es el de Ford y Fulkerson conocido como algoritmo de etiquetas.

2.3.1 algoritmo de Ford y Fulkerson

Este algoritmo consiste básicamente de dos etapas o fases:

1) Fase de etiquetas
2) Fase de modificación del flujo

Fase de etiquetas

Al inicio del algoritmo ningún nodo cuenta con etiqueta.

Paso 1. Al nodo fuente, N_s, se le asigna la etiqueta $[s^+, \delta_s = \infty]$.

Paso 2. A los nodos vecinos, N_j, del nodo fuente se les asigna la etiqueta $[s^+, \delta_j]$.

$\delta_j = g_{sj}$

g_{sj}: es la capacidad actual no saturada del arco que une el nodo origen (N_s) con el nodo vecino (N_j).

El primer elemento de la etiqueta siempre indica el nodo de donde se proviene.

Paso 3. Para los nodos vecinos N_k al nodo N_j que no tengan etiqueta y en los cuales se cumple que el flujo actual (x_{jk}) no excede la capacidad máxima, u_{jk}, se les asigna la siguiente: [j^+, δ_k].

$\delta_k = \min [\delta_j, g_{jk}]$
g_{jk}: es la capacidad actual no saturada del arco que une al nodo N_j con el nodo N_k.

Si existen nodos N_k vecinos al nodo N_j que queden sin etiqueta y para los cuales se tenga un flujo ficticio opuesto, x_{kj}, positivo se les asigna la siguiente: [j^-, δ_k].

$\delta_k = \min [\delta_j, x_{kj}]$

El signo "+" o "-" de las etiquetas indican si el flujo en los arcos se debe aumentar o disminuir en la segunda parte del algoritmo.

El proceso de etiquetado debe repetirse hasta llegar al nodo destino, N_t, de la red al cual se le asigna la etiqueta [k^+, δ_t], o hasta que sea imposible etiquetar nodos intermedios de la red.

Fase de modificación de flujo

Paso 4. Dada la etiqueta del nodo destino, [k^+, δ_t], modificar el flujo del arco que une al nodo N_k con el nodo destino N_t de la siguiente manera:

$x'_{kt} = x_{kt} \pm \delta_t$
donde,
x'_{kt} : nuevo flujo del arco que une los nodos N_k y N_t.
x_{kt}: flujo actual del arco que une los nodos N_k y N_t.
δ_t: segundo elemento de la etiqueta del nodo destino.

A continuación, modificar la capacidad no saturada del arco que une al nodo N_k con el nodo destino N_t.

$g'_{kt} = g_{kt} - \delta_t = u_{kt} - x'_{kt}$
donde,
g'_{kt}: nueva capacidad no saturada del arco que une los nodos N_k y N_t.
g_{kt}: capacidad no saturada actual del arco que une los nodos N_k y N_t.
u_{kt}: capacidad máxima del arco que une los nodos N_k y N_t.

Paso 5. Trasladarse al nodo N_k cuya etiqueta es [j^+, δ_k] y modificar el flujo del arco que une al nodo N_j con el nodo N_k de la siguiente manera:

$x'_{jk} = x_{jk} \pm \delta_t$
donde,
x'_{jk} : nuevo flujo del arco que une los nodos N_j y N_k.
x_{jk}: flujo actual del arco que une los nodos N_j y N_k.
δ_t: segundo elemento de la etiqueta del nodo destino.

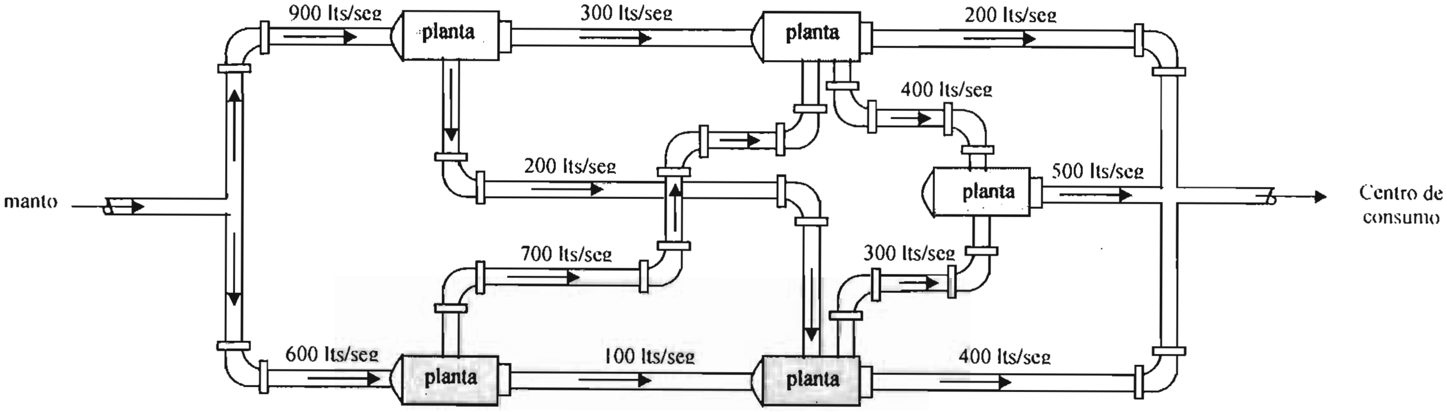
A continuación, modificar la capacidad no saturada del arco que une al nodo N_k con el nodo destino N_t.

$g'_{jk} = g_{jk} - \delta_t = u_{jk} - x'_{jk}$
donde,
g'_{jk}: nueva capacidad no saturada del arco que une los nodos N_j y N_k.
g_{jk}: capacidad no saturada actual del arco que une los nodos N_j y N_k.
u_{jk}: capacidad máxima del arco que une los nodos N_j y N_k.

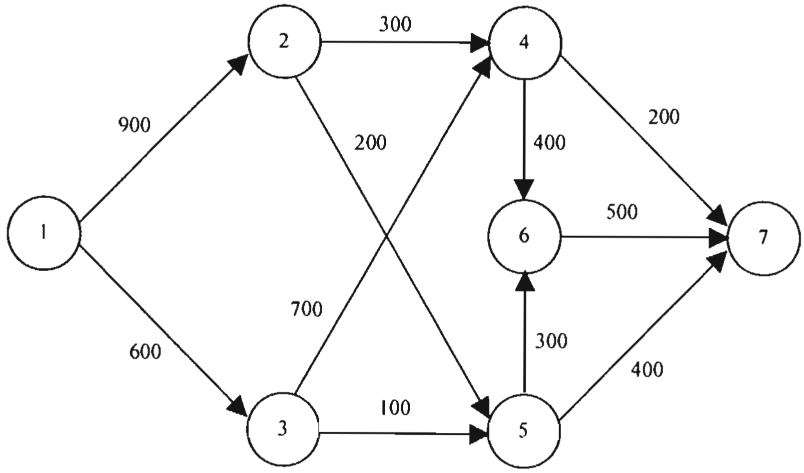
Paso 6. Trasladarse al nodo N_j y repetir el proceso hasta alcanzar el nodo origen o fuente N_s. Regresar al paso 1 de la fase de etiquetas.

Ejemplo 2.2 Flujo máximo en una red hidráulica

Se extrae agua de un manto la cual tiene que ser trasladada hacia un centro de consumo. Durante su recorrido el líquido pasa por cinco plantas de tratamiento y en cada una de ellas el agua es redirigida. La conducción se lleva a cabo mediante tuberías que cuentan con limitantes en cuanto al gasto hidráulico se refiere. Se desea conocer el flujo máximo (gasto hidráulico en litros/segundo) que puede pasar por la red. En el siguiente esquema se presentan los gastos hidráulicos máximos correspondientes a cada tramo de tubería.



El manto, el centro de consumo y las plantas de tratamiento representan los nodos de la red; las tuberías, los arcos de la misma.



Iteración 1

Fase de etiquetas

Paso 1

Al nodo fuente, N_s, se le asigna la etiqueta $[s^+, \delta_s = \infty]$.
El nodo fuente es N_1 y se le asigna la etiqueta $[1^+, \infty]$.

Paso 2

A los nodos vecinos, N_j, del nodo fuente se les asigna la etiqueta $[s^+, \delta_j]$.
Los nodos vecinos que están conectados al nodo 1 son los nodos N_2 y N_3.
Para el nodo N_2, $s^+ = 1^+$ y $\delta_j = \delta_2 = g_{12} = 900$, entonces, su etiqueta es $N_2 = [1^+, 900]$.

Para el nodo N_3, $s^+ = 1^+$ y $\delta_j = \delta_3 = g_{13} = 600$, entonces, su etiqueta es $N_3 = [1^+, 600]$.

Paso 3
Para los nodos vecinos N_k al nodo N_j que no tengan etiqueta y en los cuales se cumple que el flujo actual (x_{jk}) no excede la capacidad máxima, u_{jk}, se les asigna la siguiente: $[j^+, \delta_k]$.
$\delta_k = \min [\delta_j, g_{jk}]$

Al nodo N_4, que aun no tiene etiqueta, se puede llegar por el nodo N_2 o por el nodo N_3. Si se decide llegar por el nodo N_2, entonces, $N_j = N_2$ y $N_k = N_4$. Su etiqueta estaría formada por $j^+ = 2^+$ y $\delta_4 = \min [\delta_2, g_{24}] = \min [900, 300] = 300$. Por lo tanto, la etiqueta para el nodo N_4 es $N_4 = [2^+, 300]$.

Al nodo N_5, que aun no tiene etiqueta, se puede llegar por el nodo N_2 o por el nodo N_3. Si se decide llegar por el nodo N_3, entonces, $N_j = N_3$ y $N_k = N_5$. Su etiqueta estaría formada por $j^+ = 3^+$ y $\delta_5 = \min [\delta_3, g_{35}] = \min [600, 100] = 100$. Por lo tanto, la etiqueta para el nodo N_5 es $N_5 = [3^+, 100]$.

Al nodo N_6 se puede llegar desde el nodo N_4 o N_5. Se decide llegar por el nodo N_4, por lo que $N_j = N_4$ y $N_k = N_6$. Su etiqueta estaría formada por $j^+ = 4^+$ y $\delta_6 = \min [\delta_4, g_{46}] = \min [300, 400] = 300$. Por lo tanto, la etiqueta para el nodo N_6 es $N_6 = [4^+, 300]$.

El único nodo que falta por etiquetar es el nodo destino, N_7, al cual se le asigna la etiqueta $[k^+, \delta_t]$. Al nodo N_7 se puede llegar desde N_4, N_5 o N_6. Se decide llegar por el nodo N_6, entonces, $N_k = N_6$ y $N_t = N_7$. Su etiqueta estaría formada por $k^+ = 6^+$ y $\delta_t = \delta_7 = \min [\delta_6, g_{67}] = \min [300, 500] = 300$. Por lo tanto, la etiqueta para el nodo N_7 es $N_7 = [6^+, 300]$.

En resumen, se puede afirmar que la etiqueta de un nodo está formada por dos elementos. El primer elemento indica el nodo por el cual se llega, mientras que el segundo elemento es el menor valor que resulta de comparar el segundo elemento de la etiqueta del nodo por el cual se llega y la capacidad no saturada actual del arco que une los nodos en cuestión.

Tomando en cuenta lo anterior, las etiquetas de los nodos se pueden determinar directamente en forma tabular como se muestra a continuación:

Nodo N_j	Nodo N_k	δ_j	g_{jk}	Etiqueta N_k
N_1	N_1	_	_	$[1^+, \infty]$
N_1	N_2	∞	900	$[1^+, 900]$
N_1	N_3	∞	600	$[1^+, 600]$
N_2	N_4	900	300	$[2^+, 300]$
N_3	N_5	600	100	$[3^+, 100]$
N_4	N_6	300	400	$[4^+, 300]$
N_6	N_7	300	500	$[6^+, 300]$

Fase de modificación de flujo

Paso 4
Dada la etiqueta del nodo destino, $[k^+, \delta_t]$, modificar el flujo del arco que une al nodo N_k con el nodo destino N_t de la siguiente manera: $x'_{kt} = x_{kt} \pm \delta_t$

El nodo destino tiene la etiqueta $N_7 = [6^+, 300]$ con $\delta_t = \delta_7 = 300$ y el flujo actual x_{67} es nulo. Por lo tanto el nuevo flujo del arco que va del nodo N_6 al nodo N_7 es $x'_{67} = x_{67} + \delta_7 = 0 + 300 = 300$. La nueva capacidad no saturada del arco es $g'_{kt} = g_{kt} - \delta_t = u_{kt} - x'_{kt}$. Es decir, $g'_{67} = 500 - 300 = 200$ ó como $u_{67} = 500$ y $x'_{67} = 300$, entonces, $g'_{67} = 500 - 300 = 200$.

Paso 5

Trasladarse al nodo N_k cuya etiqueta es $[j', \delta_k]$ y modificar el flujo del arco que une al nodo N_j con el nodo N_k de la siguiente manera: $x'_{jk} = x_{jk} \pm \delta_t$

Hay que trasladarse al nodo N_6 con etiqueta $N_6 = [4^+, 300]$ y modificar el flujo del arco que une los nodos N_4 y N_6. El nuevo flujo es $x'_{46} = x_{46} + \delta_7 = 0 + 300 = 300$. La nueva capacidad no saturada del arco es $g'_{jk} = g_{jk} - \delta_t = u_{jk} - x'_{jk}$. Es decir, $g'_{46} = 400 - 300 = 100$ ó como $u_{46} = 400$ y $x'_{46} = 300$, entonces, $g'_{46} = 400 - 300 = 100$.

Hay que trasladarse ahora al nodo N_4 con etiqueta $N_4 = [2^+, 300]$ y modificar el flujo del arco que une los nodos N_2 y N_4. El nuevo flujo es $x'_{24} = x_{24} + \delta_7 = 0 + 300 = 300$. La nueva capacidad no saturada del arco es $g'_{jk} = g_{jk} - \delta_t = u_{jk} - x'_{jk}$. Es decir, $g'_{24} = 300 - 300 = 0$ ó como $u_{24} = 300$ y $x'_{24} = 300$, entonces, $g'_{24} = 300 - 300 = 0$.

Paso 6
Trasladarse al nodo N_j y repetir el proceso hasta alcanzar el nodo origen o fuente N_s. Regresar al paso 1 de la fase de etiquetas.

Hay que trasladarse al nodo N_2 con etiqueta $N_2 = [1^+, 900]$ y modificar el flujo del arco que une los nodos N_1 y N_2. El nuevo flujo es $x'_{12} = x_{12} + \delta_7 = 0 + 300 = 300$. La nueva capacidad no saturada del arco es $g'_{sj} = g_{sj} - \delta_t = u_{sj} - x'_{sj}$. Es decir, $g'_{12} = 900 - 300 = 600$ ó como $u_{12} = 900$ y $x'_{12} = 300$, entonces, $g'_{12} = 900 - 300 = 600$.

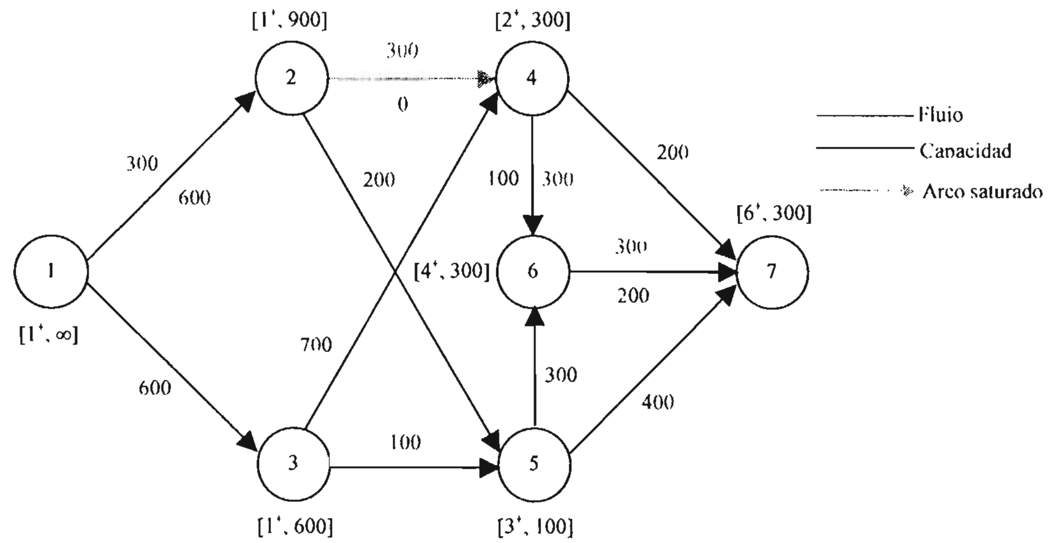
Como ya se ha alcanzado el nodo origen se tiene que regresar al paso 1 de la fase de etiquetas.

La fase de modificación de flujo y de capacidades también se puede determinar directamente en forma tabular:

Etiqueta del nodo N_k	Nuevo flujo $x'_{jk} = x_{jk} \pm \delta_t$	Nueva capacidad no saturada $g'_{jk} = g_{jk} - \delta_t$	$g'_{jk} = u_{jk} - x'_{jk}$
$N_7 = [6^+, 300]$	$x'_{67} = 0 + 300 = 300$	$g'_{67} = 500 - 300 = 200$	$g'_{67} = 500 - 300 = 200$
$N_6 = [4^+, 300]$	$x'_{46} = 0 + 300 = 300$	$g'_{46} = 400 - 300 = 100$	$g'_{46} = 400 - 300 = 100$
$N_4 = [2^+, 300]$	$x'_{24} = 0 + 300 = 300$	$g'_{24} = 300 - 300 = 0$	$g'_{24} = 300 - 300 = 0$
$N_2 = [1^+, 900]$	$x'_{12} = 0 + 300 = 300$	$g'_{12} = 900 - 300 = 600$	$g'_{12} = 900 - 300 = 600$

De la tabla se puede observar que únicamente cuatro arcos sufren modificaciones , y de éstos solamente el arco que une los nodos N_2 y N_4 queda saturado. El resto de las arcos de la red no tienen alteraciones en sus g_{jk}.

El nuevo flujo y la nueva capacidad no saturada se convierten en actuales para la siguiente iteración. La nueva configuración de la red queda de la siguiente manera:



Iteración 2

Fase de etiquetas

Paso 1
Al nodo fuente se le asigna la etiqueta $[1^+, \infty]$.

Paso 2
A los nodos vecinos, N_j, del nodo fuente se les asigna la etiqueta $[s^+, \delta_j]$.
Los nodos vecinos que están conectados al nodo 1 son los nodos N_2 y N_3.
Para el nodo N_2, $s^+ = 1^+$ y $\delta_j = \delta_2 = g_{12} = 600$, entonces, su etiqueta es $N_2 = [1^+, 600]$.
Para el nodo N_3, $s^+ = 1^+$ y $\delta_j = \delta_3 = g_{13} = 600$, entonces, su etiqueta es $N_3 = [1^+, 600]$.

Paso 3
Para los nodos vecinos N_k al nodo N_j que no tengan etiqueta y en los cuales se cumple que el flujo actual (x_{jk}) no excede la capacidad máxima, u_{jk}, se les asigna la siguiente: $[j^+, \delta_k]$.
$\delta_k = \min [\delta_j, g_{jk}]$

Al nodo N_4, que aun no tiene etiqueta, solamente se puede llegar ahora por el nodo N_3, entonces, $N_j = N_3$ y $N_k = N_4$. Su etiqueta estaría formada por $j^+ = 3^+$ y $\delta_4 = \min [\delta_3, g_{34}] = \min [600, 700] = 600$. Por lo tanto, la etiqueta para el nodo N_4 es $N_4 = [3^+, 600]$.

Al nodo N_5, que aun no tiene etiqueta, todavía se puede llegar por el nodo N_2 o por el nodo N_3. Si se decide llegar por el nodo N_3, entonces, $N_j = N_3$ y $N_k = N_5$. Su etiqueta estaría formada por $j^+ = 3^+$ y $\delta_5 = \min [\delta_3, g_{35}] = \min [600, 100] = 100$. Por lo tanto, la etiqueta para el nodo N_5 es $N_5 = [3^+, 100]$.

Al nodo N_6 se puede llegar desde el nodo N_4 o N_5. Se decide llegar por el nodo N_4, por lo que $N_j = N_4$ y $N_k = N_6$. Su etiqueta estaría formada por $j^+ = 4^+$ y $\delta_6 = \min [\delta_4, g_{46}] = \min [600, 100] = 100$. Por lo tanto, la etiqueta para el nodo N_6 es $N_6 = [4^+, 100]$.

El único nodo que falta por etiquetar es el nodo destino, N_7, al cual se le asigna la etiqueta $[k^+, \delta_t]$. Al nodo N_7 se puede llegar desde N_4, N_5 o N_6. Se decide llegar por el nodo N_6, entonces, $N_k = N_6$ y $N_t = N_7$. Su etiqueta estaría formada por $k^+ = 6^+$ y $\delta_t = \delta_7 = \min [\delta_6, g_{67}] = \min [100, 200] = 100$. Por lo tanto, la etiqueta para el nodo N_7 es $N_7 = [6^+, 100]$.

En forma tabular las etiquetas quedan determinadas de la siguiente forma:

Nodo N_j	Nodo N_k	δ_j	g_{jk}	Etiqueta N_k
N_1	N_1	_	_	$[1^+, \infty]$
N_1	N_2	∞	600	$[1^+, 600]$
N_1	N_3	∞	600	$[1^+, 600]$
N_3	N_4	600	700	$[3^+, 600]$
N_3	N_5	600	100	$[3^+, 100]$
N_4	N_6	600	100	$[4^+, 100]$
N_6	N_7	100	200	$[6^+, 100]$

Fase de modificación de flujo

Paso 4
Dada la etiqueta del nodo destino, $[k^+, \delta_t]$, modificar el flujo del arco que une al nodo N_k con el nodo destino N_t de la siguiente manera: $x'_{kt} = x_{kt} \pm \delta_t$

El nodo destino tiene la etiqueta $N_7 = [6', 100]$ con $\delta_t = \delta_7 = 100$ y el flujo actual x_{67} es 300. Por lo tanto el nuevo flujo del arco que va del nodo N_6 al nodo N_7 es $x'_{67} = x_{67} + \delta_7 = 300 + 100 = 400$. La nueva capacidad no saturada del arco es $g'_{kt} = g_{kt} - \delta_t = u_{kt} - x'_{kt}$. Es decir, $g'_{67} = 200 - 100 = 100$ ó como $u_{67} = 500$ y $x'_{67} = 400$, entonces, $g'_{67} = 500 - 400 = 100$.

Paso 5
Trasladarse al nodo N_k cuya etiqueta es $[j^{+}, \delta_k]$ y modificar el flujo del arco que une al nodo N_j con el nodo N_k de la siguiente manera: $x'_{jk} = x_{jk} \pm \delta_t$

Hay que trasladarse al nodo N_6 con etiqueta $N_6 = [4^{+}, 100]$ y modificar el flujo del arco que une los nodos N_4 y N_6. El nuevo flujo es $x'_{46} = x_{46} + \delta_7 = 300 + 100 = 400$. La nueva capacidad no saturada del arco es $g'_{jk} = g_{jk} - \delta_t = u_{jk} - x'_{jk}$. Es decir, $g'_{46} = 100 - 100 = 0$ ó como $u_{46} = 400$ y $x'_{46} = 400$, entonces, $g'_{46} = 400 - 400 = 0$.

Hay que trasladarse ahora al nodo N_4 con etiqueta $N_4 = [3^{+}, 600]$ y modificar el flujo del arco que une los nodos N_3 y N_4. El nuevo flujo es $x'_{34} = x_{34} + \delta_7 = 0 + 100 = 100$. La nueva capacidad no saturada del arco es $g'_{jk} = g_{jk} - \delta_t = u_{jk} - x'_{jk}$. Es decir, $g'_{34} = 700 - 100 = 600$ ó como $u_{34} = 700$ y $x'_{34} = 100$, entonces, $g'_{34} = 700 - 100 = 600$.

Paso 6
Trasladarse al nodo N_j y repetir el proceso hasta alcanzar el nodo origen o fuente N_s. Regresar al paso 1 de la fase de etiquetas.

Hay que trasladarse al nodo N_3 con etiqueta $N_3 = [1^{+}, 600]$ y modificar el flujo del arco que une los nodos N_1 y N_3. El nuevo flujo es $x'_{13} = x_{13} + \delta_7 = 0 + 100 = 100$. La nueva capacidad no saturada del arco es $g'_{sj} = g_{sj} - \delta_t = u_{sj} - x'_{sj}$. Es decir, $g'_{13} = 600 - 100 = 500$ ó como $u_{13} = 600$ y $x'_{13} = 100$, entonces, $g'_{12} = 600 - 100 = 500$.

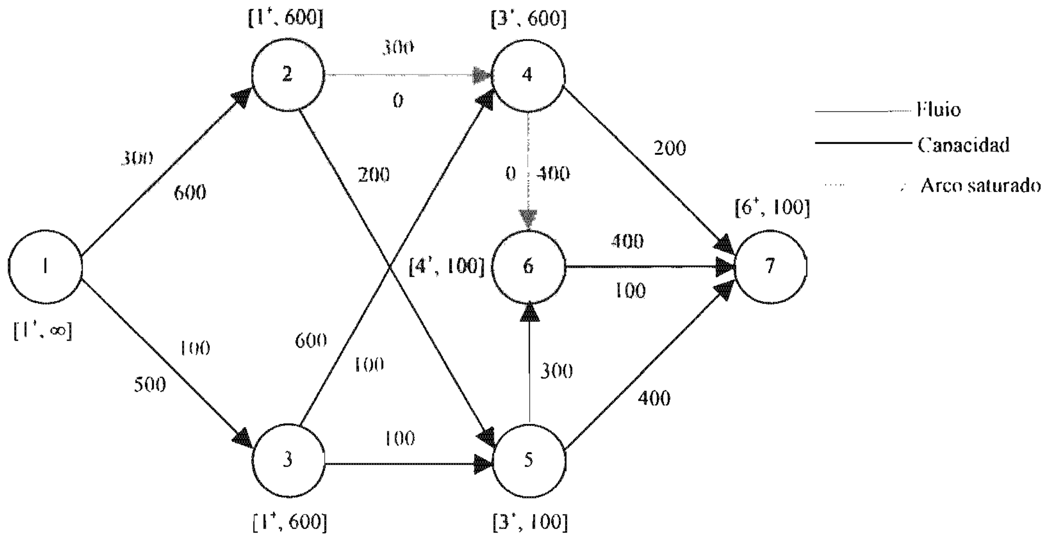
Como ya se ha alcanzado el nodo origen se tiene que regresar al paso 1 de la fase de etiquetas.

En forma tabular se tiene:

Etiqueta del nodo N_k	Nuevo flujo $x'_{jk} = x_{jk} \pm \delta_t$	Nueva capacidad no saturada $g'_{jk} = g_{jk} - \delta_t$	$g'_{jk} = u_{jk} - x'_{jk}$
$N_7 = [6^{+}, 100]$	$x'_{67} = 300 + 100 = 400$	$g'_{67} = 200 - 100 = 100$	$g'_{67} = 500 - 400 = 100$
$N_6 = [4^{+}, 100]$	$x'_{46} = 300 + 100 = 400$	$g'_{46} = 100 - 100 = 0$	$g'_{46} = 400 - 400 = 0$
$N_4 = [3^{+}, 600]$	$x'_{34} = 0 + 100 = 100$	$g'_{34} = 700 - 100 = 600$	$g'_{34} = 700 - 100 = 600$
$N_3 = [1^{+}, 600]$	$x'_{13} = 0 + 100 = 100$	$g'_{13} = 600 - 100 = 500$	$g'_{13} = 600 - 100 = 500$

Únicamente cuatro arcos sufren modificaciones, y de éstos solamente el arco que une los nodos N_4 y N_6 queda saturado. El resto de las arcos de la red no tienen alteraciones en sus g_{jk}.

La nueva configuración de la red queda de la siguiente manera:



Para las demás iteraciones se presentan las fases de etiquetas y modificación de flujo en forma tabular.

Iteración 3

Fase de etiquetas

Nodo N_j	Nodo N_k	δ_j	g_{jk}	Etiqueta N_k
N_1	N_1	_	_	$[1^+, \infty]$
N_1	N_2	∞	600	$[1^+, 600]$
N_1	N_3	∞	500	$[1^+, 500]$
N_3	N_4	500	600	$[3^+, 500]$
N_3	N_5	500	100	$[3^+, 100]$
N_5	N_6	100	300	$[5^+, 100]$
N_6	N_7	100	100	$[6^+, 100]$

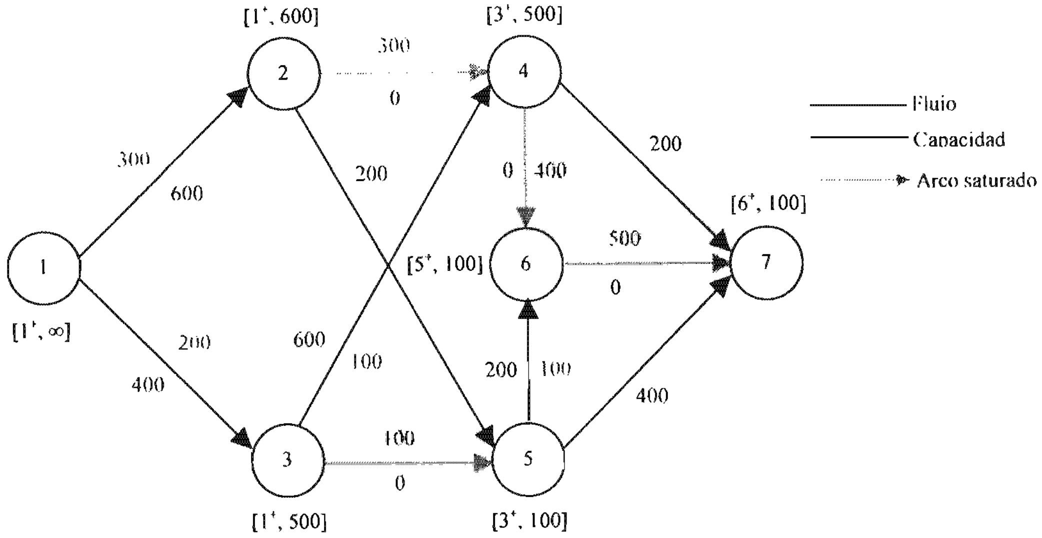
Nótese que la única forma de llegar al nodo N_4 es a partir del nodo N_3. También, únicamente se puede llegar al nodo N_6 a partir del nodo N_5. Se eligió llegar al nodo destino a partir del nodo N_6.

Fase de modificación de flujo

Etiqueta del nodo N_k	Nuevo flujo $x'_{jk} = x_{jk} \pm \delta_t$	Nueva capacidad no saturada $g'_{jk} = g_{jk} - \delta_t$	$g'_{jk} = u_{jk} - x'_{jk}$
$N_7 = [6^+, 100]$	$x'_{67} = 400 + 100 = 500$	$g'_{67} = 100 - 100 = 0$	$g'_{67} = 500 - 500 = 0$
$N_6 = [5^+, 100]$	$x'_{56} = 0 + 100 = 100$	$g'_{56} = 300 - 100 = 200$	$g'_{56} = 300 - 100 = 200$
$N_5 = [3^+, 100]$	$x'_{35} = 0 + 100 = 100$	$g'_{35} = 100 - 100 = 0$	$g'_{34} = 100 - 100 = 0$
$N_3 = [1^+, 500]$	$x'_{13} = 100 + 100 = 200$	$g'_{13} = 500 - 100 = 400$	$g'_{13} = 600 - 200 = 400$

Quedan saturados el arco que une los nodos N_6 y N_7 y el arco que une los nodos N_3 y N_4.

La nueva configuración de la red queda de la siguiente manera:



Iteración 4

Fase de etiquetas

Nodo N_j	Nodo N_k	δ_j	g_{jk}	Etiqueta N_k
N_1	N_1	_	_	$[1^+, \infty]$
N_1	N_2	∞	600	$[1^+, 600]$
N_1	N_3	∞	400	$[1^+, 400]$
N_2	N_5	600	200	$[2^+, 200]$
N_3	N_6	200	200	$[5^+, 200]$
N_3	N_4	400	600	$[3^+, 400]$
N_5	N_7	200	400	$[5^+, 200]$

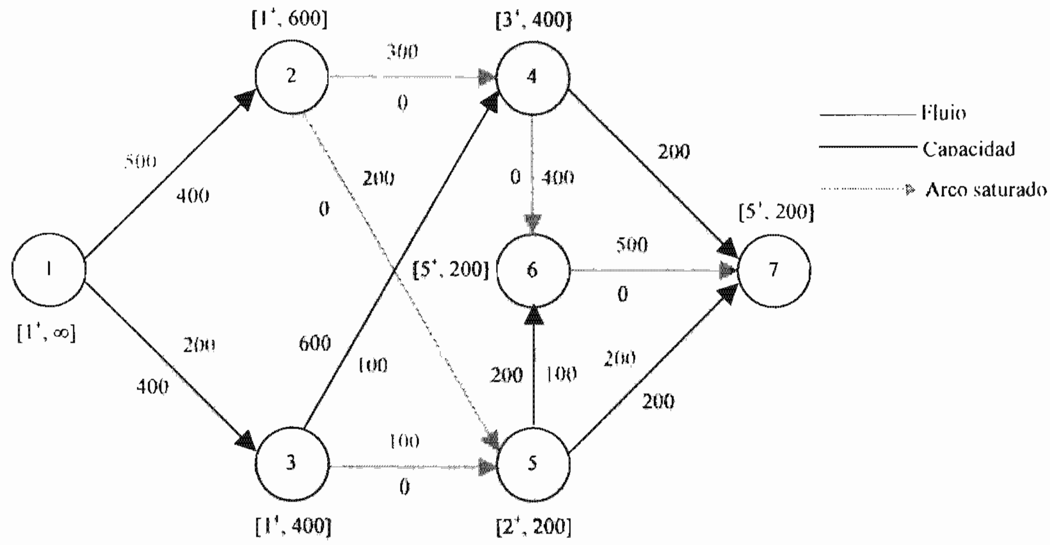
Al nodo N_4 únicamente se puede llegar a partir del nodo N_3; al nodo N_5, a partir del nodo N_2; al nodo N_6, a partir del nodo N_5, y al nodo N_7 a partir de los nodos N_4 y N_5, pero se escoge llegar a partir del nodo N_5.

Fase de modificación de flujo

Etiqueta del nodo N_k	Nuevo flujo $x'_{jk} = x_{jk} \pm \delta_t$	Nueva capacidad no saturada $g'_{jk} = g_{jk} - \delta_t$	$g'_{jk} = u_{jk} - x'_{jk}$
$N_7 = [5^+, 200]$	$x'_{57} = 0 + 200 = 200$	$g'_{57} = 400 - 200 = 200$	$g'_{57} = 400 - 200 = 200$
$N_5 = [2^+, 200]$	$x'_{25} = 0 + 200 = 200$	$g'_{25} = 200 - 200 = 0$	$g'_{25} = 200 - 200 = 0$
$N_2 = [1^+, 600]$	$x'_{12} = 300 + 200 = 500$	$g'_{12} = 600 - 200 = 400$	$g'_{12} = 900 - 500 = 400$

Queda saturado el arco que une los nodos N_2 y N_5.

La nueva configuración de la red queda de la siguiente manera:



Iteración 5

Fase de etiquetas

Nodo N_j	Nodo N_k	δ_j	g_{jk}	Etiqueta N_k
N_1	N_1	_	_	[1', ∞]
N_1	N_2	∞	400	[1', 400]
N_1	N_3	∞	400	[1', 400]
N_3	N_4	400	600	[3', 400]
N_4	N_7	400	200	[4', 200]

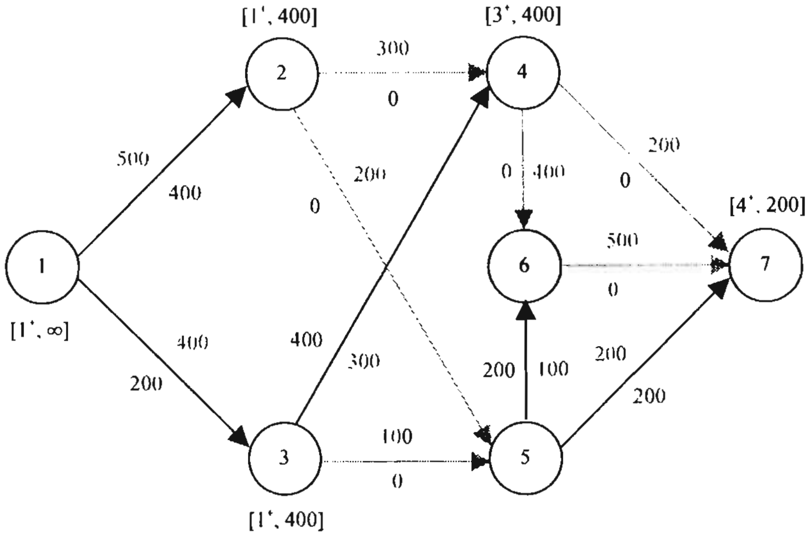
Al nodo N_4 únicamente se puede llegar a partir del nodo N_3 y al nodo N_7 sólo se puede llegar a partir del nodo N_4.

Fase de modificación de flujo

Etiqueta del nodo N_k	Nuevo flujo $x'_{jk} = x_{jk} \pm \delta_t$	Nueva capacidad no saturada $g'_{jk} = g_{jk} - \delta_t$	$g'_{jk} = u_{jk} - x'_{jk}$
N_7 = [4', 200]	$x'_{47} = 0 + 200 = 200$	$g'_{47} = 200 - 200 = 0$	$g'_{47} = 200 - 200 = 0$
N_4 = [3', 400]	$x'_{34} = 100 + 200 = 300$	$g'_{34} = 600 - 200 = 400$	$g'_{34} = 700 - 300 = 400$
N_3 = [1', 400]	$x'_{13} = 200 + 200 = 400$	$g'_{13} = 400 - 200 = 200$	$g'_{13} = 600 - 400 = 200$

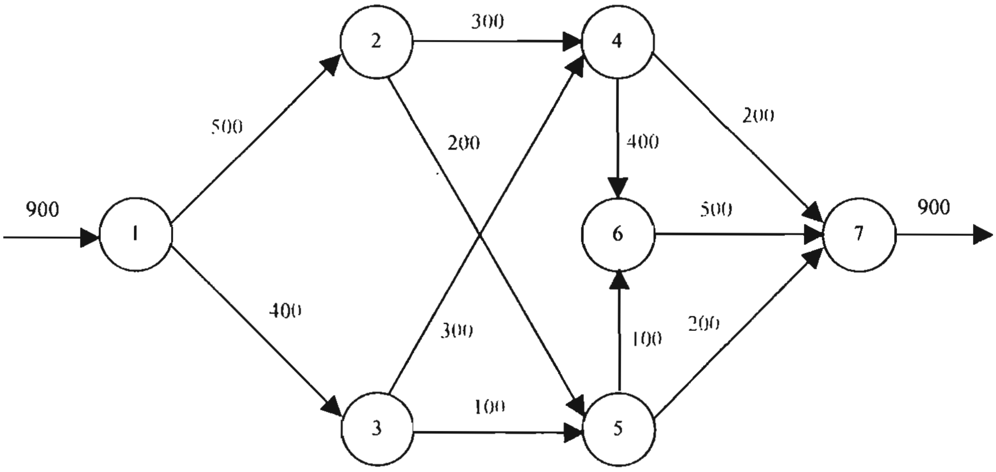
Queda saturado el arco que une los nodos N_4 y N_7.

La nueva configuración de la red queda de la siguiente manera:



Como ya no fue posible etiquetar nodos intermedios (N_5 y N_6) el proceso termina. Además, en la gráfica se puede apreciar que no existe ninguna trayectoria para ir del nodo N_1 al nodo N_7.

El flujo máximo que puede circular por la red es 900 lts/s, el cual entra en el nodo N_1 y sale por el nodo N_7.



Entonces, la solución es:

Flujo máximo = 900 lts/s
x_{12} = 500 lts/s
x_{13} = 400 lts/s
x_{24} = 300 lts/s
x_{25} = 200 lts/s
x_{34} = 300 lts/s
x_{35} = 100 lts/s
x_{46} = 400 lts/s
x_{47} = 200 lts/s
x_{56} = 100 lts/s
x_{57} = 200 lts/s
x_{67} = 500 lts/s

2.3.2 Modelo matemático del problema de flujo máximo

Para una red con m nodos y n arcos (i, j), cada uno con una capacidad u_{ij}, el problema de flujo máximo se puede modelar de la siguiente manera:

Min f
Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = \begin{cases} f, \ si \ i = 1 \\ 0, si \ i \neq 1 \ o \ m \\ \text{-}f, \ si \ i = m \end{cases}$$

$$x_{ij} \leq u_{ij} \quad i, j = 1, 2, \ldots, m$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

f representa un arco que va del nodo destino de la red al nodo origen o fuente de la misma.

El primer conjunto de restricciones simplemente se refiere al principio de conservación de flujo:

Flujo que entra en un nodo = Flujo que sale del mismo nodo

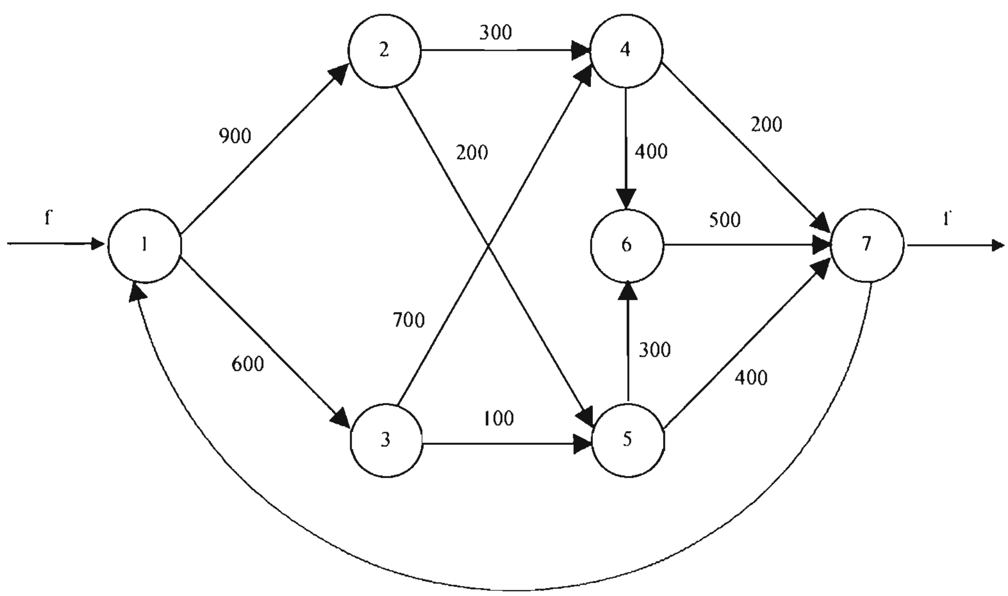
El siguiente conjunto de restricciones tiene que ver con la capacidad de cada uno de los arcos de la red. Finalmente, aparecen las restricciones de no negatividad.

Ejemplo 2.3

Plantear el modelo matemático del problema de flujo máximo de la red hidráulica del problema anterior.

Solución:

El flujo que entra en el nodo fuente debe ser el mismo que sale del nodo destino. Se debe establecer un arco que va del nodo destino al nodo origen y el valor de f se iguala a la variable que define al flujo por dicho arco.



$f = x_{71}$

La función objetivo es:

Max $f \Rightarrow$ Max x_{71}

Para cada nodo se aplica el principio de conservación de flujo.

Para el nodo 1: $f = x_{12} + x_{13} \Rightarrow x_{71} - x_{12} - x_{13} = 0$
Para el nodo 2: $x_{12} = x_{24} + x_{25} \Rightarrow x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$
Para el nodo 3: $x_{13} = x_{34} + x_{35} \Rightarrow x_{13} - x_{34} - x_{35} = 0$
Para el nodo 4: $x_{24} + x_{34} = x_{46} + x_{47} \Rightarrow x_{24} + x_{34} - x_{46} - x_{47} = 0$
Para el nodo 5: $x_{25} + x_{35} = x_{56} + x_{57} \Rightarrow x_{25} + x_{35} - x_{56} - x_{57} = 0$
Para el nodo 6: $x_{46} + x_{56} = x_{67} \Rightarrow x_{46} + x_{56} - x_{67} = 0$
Para el nodo 7: $x_{47} + x_{57} + x_{67} = f \Rightarrow x_{47} + x_{57} + x_{67} - x_{71} = 0$

Se plantean las restricciones correspondientes a la capacidad de flujo de cada arco.

$x_{12} \leq 900$
$x_{13} \leq 600$
$x_{24} \leq 300$
$x_{25} \leq 200$
$x_{34} \leq 700$
$x_{35} \leq 100$
$x_{46} \leq 400$
$x_{47} \leq 200$
$x_{56} \leq 300$
$x_{57} \leq 400$
$x_{67} \leq 500$

Y, finalmente, se indican las restricciones de no negatividad.

$x_{12}, x_{13}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{46}, x_{47}, x_{56}, x_{57}, x_{67} \geq 0$

Al resolver este problema de programación lineal se obtiene la misma solución que con el algoritmo de Ford y Fulkerson.

2.4 CPM Y PERT EN PROYECTOS DE INGENIERÍA CIVIL

Un proyecto de Ingeniería Civil se compone de un conjunto de actividades que se encuentran relacionadas entre sí y que al llevarlas a cabo se consigue un bien como puede ser un edificio, una presa, una carretera, etc. En la planeación, ejecución y control de este tipo de proyectos se utilizan dos herramientas muy importantes que son el método CPM (Critical Path Method ó Método de la ruta Crítica) y la técnica PERT (Program Evaluation and Review Technique ó Técnica de Revisión y Evaluación de Programas).

Básicamente, ambas herramientas sirven para:

- Dar una visión global del desarrollo de cada una de las actividades que forman el proyecto, así como la apreciación de las relaciones que existen entre éstas para lograr un mejor control.
- Indicar cuáles son los puntos críticos que pudieran poner en peligro la consecución a tiempo del proyecto.
- La evaluación y consecuencias de posibles cambios en el proyecto.

El principal uso de CPM y PERT se concentra en el área de construcción y edificación de un proyecto determinado. El análisis del mismo consta de la siguientes fases:

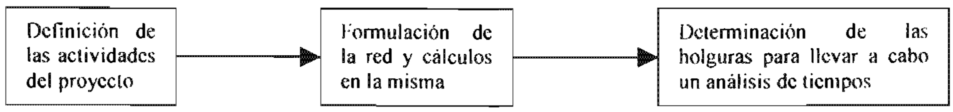


Fig. 2.6 Fases del análisis de un proyecto

La diferencia fundamental entre CPM Y PERT radica en que en el primero las duraciones de las actividades son deterministas, mientras que para el segundo, tienen un carácter probabilístico.

2.4.1 El método CPM

El primer paso para la utilización del método de la ruta crítica consiste en formular una tabla o matriz de precedencias en donde se indican todas las actividades que forman el proyecto y su respectiva duración así como las actividades que les deben preceder a cada una de ellas. A partir de la tabla se traza la red CPM, la cual es una red dirigida en donde cada **arco** representa una **actividad** y cada **nodo** representa un **evento** que indica la terminación de una actividad y el inicio de otra.

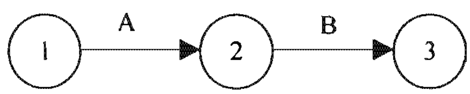


Fig. 2.7 Actividades y eventos

En la figura 2.7 se presentan dos actividades: *A* y *B*. El nodo 1 es el evento que indica el comienzo de la actividad *A*, mientras que el nodo 2 es el evento que indica la terminación de la actividad *A* y el inicio de la actividad *B*; es decir, que la actividad *B* únicamente puede comenzar hasta que haya concluido la actividad *A*.

A continuación se mencionan algunas consideraciones importantes a la hora de construir la red que representa al proyecto:

"En la red una actividad cualquiera únicamente puede quedar representada por un solo arco (flecha)".

"La longitud de los arcos se puede trazar arbitrariamente ya que no representan proporcionalmente la duración de una actividad".

"Toda actividad tiene un nodo inicial y un nodo final"

"Dos o más actividades que tienen el mismo inicial no deben tener el mismo nodo final"

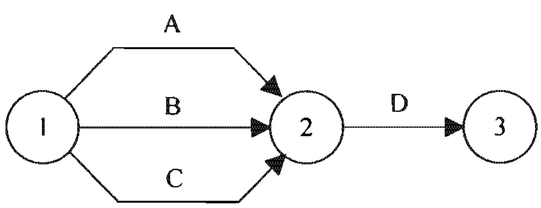


Fig. 2.8 Representación incorrecta

La figura 2.8 es una representación errónea que muestra este tipo de situaciones ya que tres actividades se ejecutan simultáneamente y tienen el mismo evento (nodo) final. Es decir, la actividad D solamente puede comenzar hasta que terminan A, B y C, pero éstas tienen el mismo nodo inicial.

Para corregir la representación anterior es necesario la introducción de ***actividades ficticias***. Una actividad ficticia se caracteriza por no consumir tiempo y es necesaria para mantener las relaciones lógicas en la red.

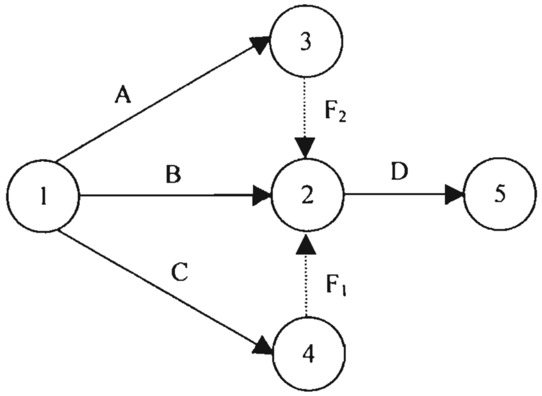


Fig. 2.9 Representación correcta

La situación de la figura 2.8 se corrige mediante la introducción de las actividades ficticias F_1 y F_2 que se representan mediante flechas punteadas y que logran dos objetivos: 1) que las actividades A, B y C ya no tengan el mismo nodo final y, 2) que se mantengan las relaciones de precedencia para la actividad D.

"Para una correcta formulación de la red es necesario contestar las siguientes preguntas conforme se añade una actividad determinada: 1) ¿Cuáles son las actividades que preceden a ésta?, 2) ¿Qué actividades se pueden desarrollar simultáneamente con ésta? y, 3) ¿Qué actividades deben seguir a ésta?"

Cálculos en la red

Una vez que se ha representado el proyecto mediante una red comienza la etapa de cálculos cuyo objetivo es determinar qué actividades son críticas en el proyecto y cuáles no lo son. Una ***actividad crítica*** es aquella que si sufre una demora provoca un retraso en la terminación del proyecto y se caracteriza por no tener ningún ***tiempo de holgura***. Conocidas las actividades críticas se determina la ***ruta crítica***, la cual es el conjunto de las mismas que conectan el nodo inicial de la red con el nodo final.

Los cálculos para determinar la ruta crítica se dividen en dos etapas:

Primera etapa: llamada "cálculos hacia delante" debido a se comienza en el nodo inicial de la red y se va avanzando de nodo en nodo hasta llegar al final de la red. En esta etapa se determina para cada evento (nodo) el ***Tiempo de Inicio más Cercano***, TIC_i. Si $i = 1$ para el evento inicial, entonces se hace $TIC_1 = 0$. Para el resto de los eventos j se determina:

$$TIC_j = \max_i \{TIC_i + D_{ij}\}$$

Donde D_{ij} es la duración de la actividad (i,j).

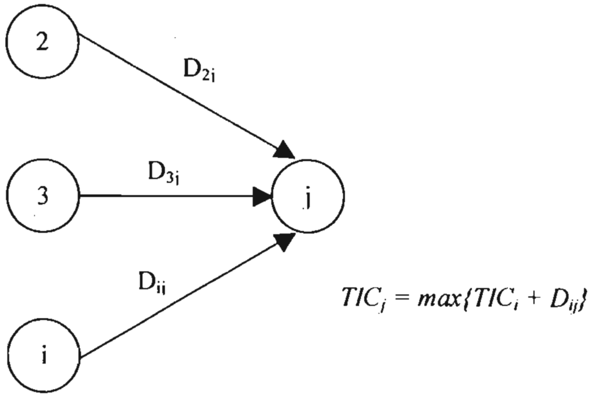


Fig. 2.10 Tiempo de Inicio más Cercano

El tiempo de inicio más cercano es el tiempo en el que va a ocurrir un evento si todas las actividades que lo preceden comienzan lo más pronto posible.

Segunda etapa: llamada "cálculos hacia atrás" debido a que se comienza en el nodo final de la red y se termina en el nodo inicial de la misma. Para cada nodo se determina el ***Tiempo de Terminación más Lejano***, ***TTL_i***. Si $i = n$ es el evento o nodo final, se hace $TTL_n = TIC_n$ para iniciar el cálculo hacia atrás. Para cualquier otro evento i:

$$TTL_i = \min_j \{TTL_j - D_{ij}\}$$

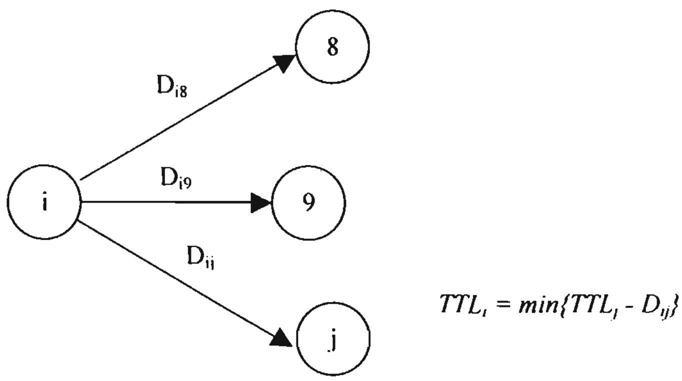


Fig. 2.11 Tiempo de Terminación más Lejano

El tiempo de terminación más lejano es el último momento en que un evento puede ocurrir sin provocar el retraso de la terminación del proyecto más allá de su tiempo esperado.

En la práctica, tanto el *TIC* como el *TTL* se muestran dentro del nodo que representa al evento en cuestión.

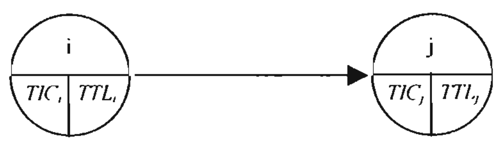


Fig. 2.12 Representación de los tiempos de los eventos

De la misma manera que se definen tiempos para cada uno de los eventos (nodos), también para cada una de las actividades (arcos) se definen los tiempos más cercanos y lejanos de inicio y terminación:

Tiempo de Inicio más Cercano (IC_{ij}): Es el tiempo más cercano en el que puede comenzar a ejecutarse la actividad (i,j).

$$IC_{ij} = TIC_i$$

Tiempo de Terminación más Cercano (TC_{ij}): Es el tiempo más cercano en el cual puede completarse la actividad (i,j).

$$TC_{ij} = TIC_i + D_{ij}$$

Tiempo de Inicio más Lejano (IL_{ij}): Es el tiempo más tardío o lejano en el cual se tiene que comenzar a ejecutar la actividad (i,j).

$$IL_{ij} = TTL_j - D_{ij}$$

Tiempo de Terminación más Lejano (TL_{ij}): Es el tiempo más lejano o tardío en el cual debe terminar la actividad (i,j).

$TL_{ij} = TTL_j$

Una manera práctica de representar los tiempos anteriores de las actividades es la siguiente:

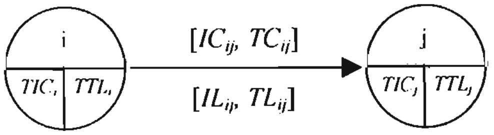


Fig. 2.12 Representación de los tiempos de las actividades

Determinación de las holguras

Una ***holgura*** está definida como el tiempo en que se puede demorar una actividad sin que quede afectado el tiempo total requerido para la conclusión del proyecto.

Se tienen dos tipos de holguras:

Holgura total (HT_{ij}): Es la diferencia entre el tiempo máximo para realizar una actividad ($TTL_j - TIC_i$) y su duración (D_{ij}). Cuando la holgura total para una actividad es igual a cero, es una indicación de que se trata de una ***actividad crítica***. La holgura total se puede determinar de las siguientes maneras:

$HT_{ij} = TTL_j - TIC_i - D_{ij}$

$HT_{ij} = IL_{ij} - IC_{ij}$

$HT_{ij} = TL_{ij} - TCij$

Holgura libre (HL_{ij}): Es la parte de la holgura total que se puede utilizar sin afectar el tiempo de inicio más cercano (IC_{ij}) y la holgura de las actividades sucesivas. Esta holgura se define, entonces, suponiendo que todas las actividades comienzan tan pronto como sea posible:

$HL_{ij} = TIC_j - TIC_i - D_{ij}$

Se deben tener en cuenta dos consideraciones acerca de esta holgura:

1) Si $HL_{ij} = HT_{ij}$, la actividad se puede realizar en cualquier parte dentro del intervalo (TIC_i, TTL_j) sin provocar ningún conflicto en el proyecto.

2) Si $HL_{ij} < HT_{ij}$, el inicio de la actividad (i,j) se puede demorar no más de HL_{ij} en relación con el valor de TCI_i sin causar ningún conflicto en el proyecto. Cualquier demora mayor que HL_{ij} (pero menor que HT_{ij}) debe ir acompañada de una demora igual en relación con TIC_j en el momento del inicio de las actividades que salen del nodo j.

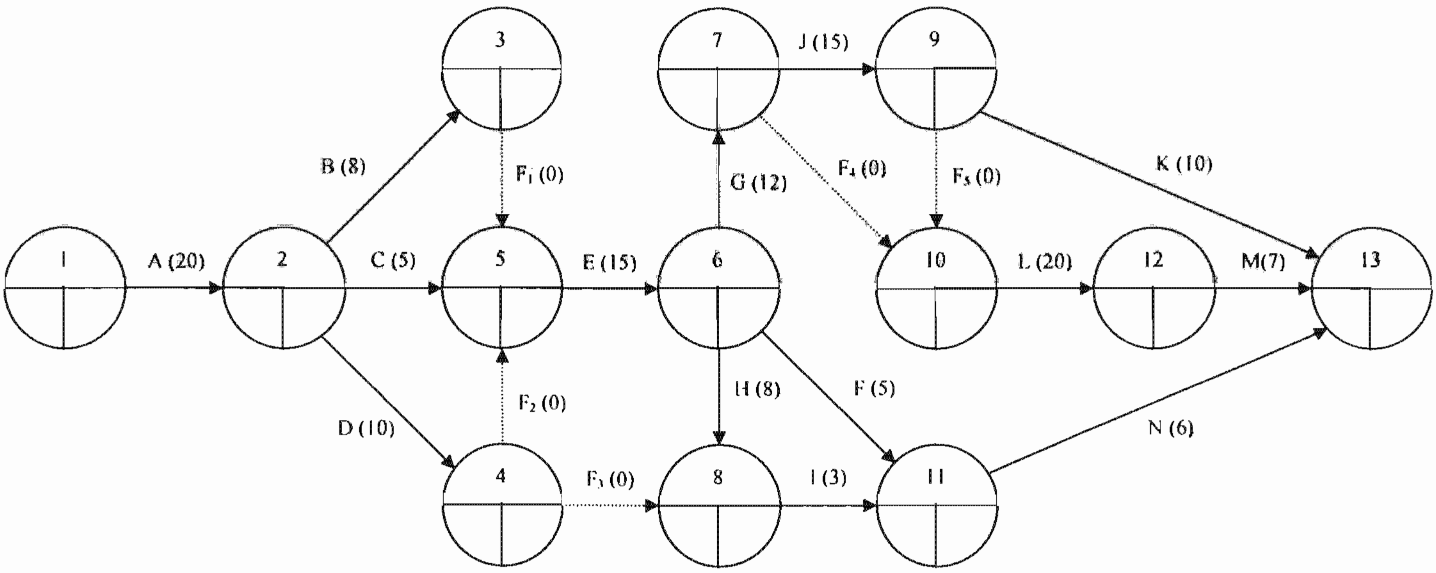
Ejemplo 2.4 Proyecto: construcción de una bodega

Una compañía tiene a su cargo la construcción de una bodega. Del proyecto se conocen las actividades o trabajos que se deben realizar así como su respectiva secuencia, es decir, se tiene la matriz de precedencias. Se desea determinar la ruta crítica del proyecto para conocer las actividades que no pueden sufrir demora así como el programa de tiempos del proyecto.

La tabla o matriz de precedencias es la siguiente:

Actividad	Nombre	Duración (días)	Precedentes
A	Solicitud de premisos	20	-
B	Limpieza del terreno	8	A
C	Preparación del drenaje	5	A
D	Excavación	10	A
E	Cimentación	15	B, C, D
F	Firme	5	E
G	Columnas	12	E
H	Instalación hidrosanitaria	8	E
I	Relleno	3	H, D
J	Muros	15	G
K	Instalación eléctrica	10	J
L	Estructura metálica	20	G, J
M	Techado	7	L
N	Pisos	6	F, I

Con base en las consideraciones descritas anteriormente se traza la red que representa al proyecto de construcción.



En la red se muestran las actividades que forman el proyecto junto con sus respectivas duraciones. Las flechas punteadas representan actividades ficticias que no tienen duración pero que se utilizan para mantener las relaciones de precedencia.

Se procede a continuación a realizar los cálculos en la red.

Primera etapa

En la primera etapa se determina el tiempo de inicio más cercano (TIC) para cada evento o nodo.

$$TIC_j = \max_i \{TIC_i + D_{ij}\}$$

Nodo 1
Se comienza con $TIC_1 = 0$

Nodo 2
$TIC_2 = TIC_1 + D_{12} = 0 + 20 = 20$

Nodo 3
$TIC_3 = TIC_2 + D_{23} = 20 + 8 = 28$

Nodo 4
$TIC_4 = TIC_2 + D_{24} = 20 + 10 = 30$

Nodo 5
$TIC_5 = \max\{TIC_2 + D_{25}, TIC_3 + D_{35}, TIC_4 + D_{45}\} = \max\{20 + 5, 28 + 0, 30 + 0\} = 30$

Nodo 6
$TIC_6 = TIC_5 + D_{56} = 30 + 15 = 45$

Nodo 7
$TIC_7 = TIC_6 + D_{67} = 45 + 12 = 57$

Nodo 8
$TIC_8 = \max\{TIC_4 + D_{48}, TIC_6 + D_{68}\} = \max\{30 + 0, 45 + 8\} = 53$

Nodo 9
$TIC_9 = TIC_7 + D_{79} = 57 + 15 = 72$

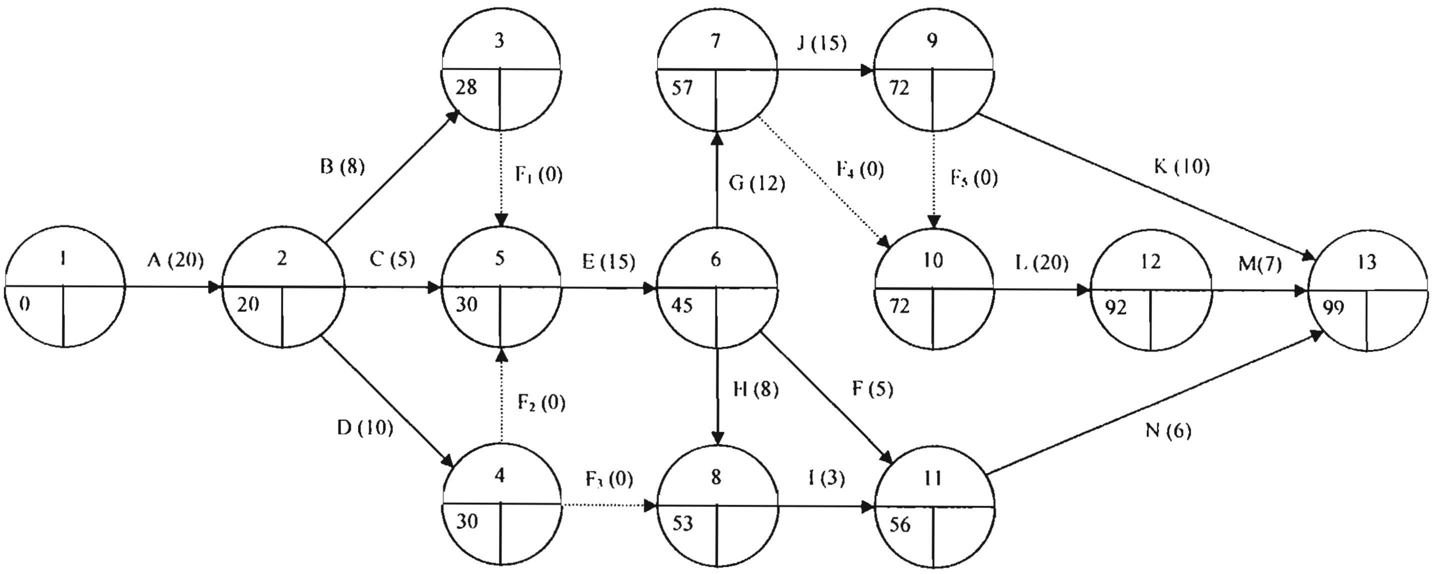
Nodo 10
$TIC_{10} = \max\{TIC_7 + D_{710}, TIC_9 + D_{910}\} = \max\{57 + 0, 72 + 0\} = 72$

Nodo 11
$TIC_{11} = \max\{TIC_6 + D_{611}, TIC_8 + D_{811}\} = \max\{45 + 5, 53 + 3\} = 56$

Nodo 12
$TIC_{12} = TIC_{10} + D_{1012} = 72 + 20 = 92$

Nodo 13
$TIC_{13} = \max\{TIC_9 + D_{913}, TIC_{11} + D_{1113}, TIC_{12} + D_{1213}\} = \max\{72 + 10, 56 + 6, 92 + 7\} = 99$

Los resultados de esta etapa se indican en el extremo izquierdo inferior de cada uno de los nodos:



Segunda etapa

En la segunda etapa se determina el tiempo de terminación más lejano (TTL) para cada evento o nodo.

$$TTL_i = \min_j \left\{ TTL_j - D_{ij} \right\}$$

Los cálculos comienzan con el nodo final de la red y haciendo $TTL_{13} = TIC_{13}$

Nodo 13
$TTL_{13} = 99$

Nodo 12
$TTL_{12} = TTL_{13} - D_{1213} = 99 - 7 = 92$

Nodo 11
$TTL_{11} = TTL_{13} - D_{1113} = 99 - 6 = 93$

Nodo 10
$TTL_{10} = TTL_{12} - D_{1012} = 92 - 20 = 72$

Nodo 9
$TTL_9 = \min\{TTL_{13} - D_{913}, TTL_{10} - D_{910}\} = \min\{99 - 10, 72 - 0\} = 72$

Nodo 8
$TTL_8 = TTL_{11} - D_{811} = 93 - 3 = 90$

Nodo 7
$TTL_7 = \min\{TTL_{10} - D_{710}, TTL_9 - D_{79}\} = \min\{72 - 0, 72 - 15\} = 57$

Nodo 6
$TTL_6 = \min\{TTL_{11} - D_{611}, TTL_8 - D_{68}, TTL_7 - D_{67}\} = \min\{93 - 5, 90 - 8, 57 - 12\} = 45$

Nodo 5
$TTL_5 = TTL_6 - D_{56} = 45 - 15 = 30$

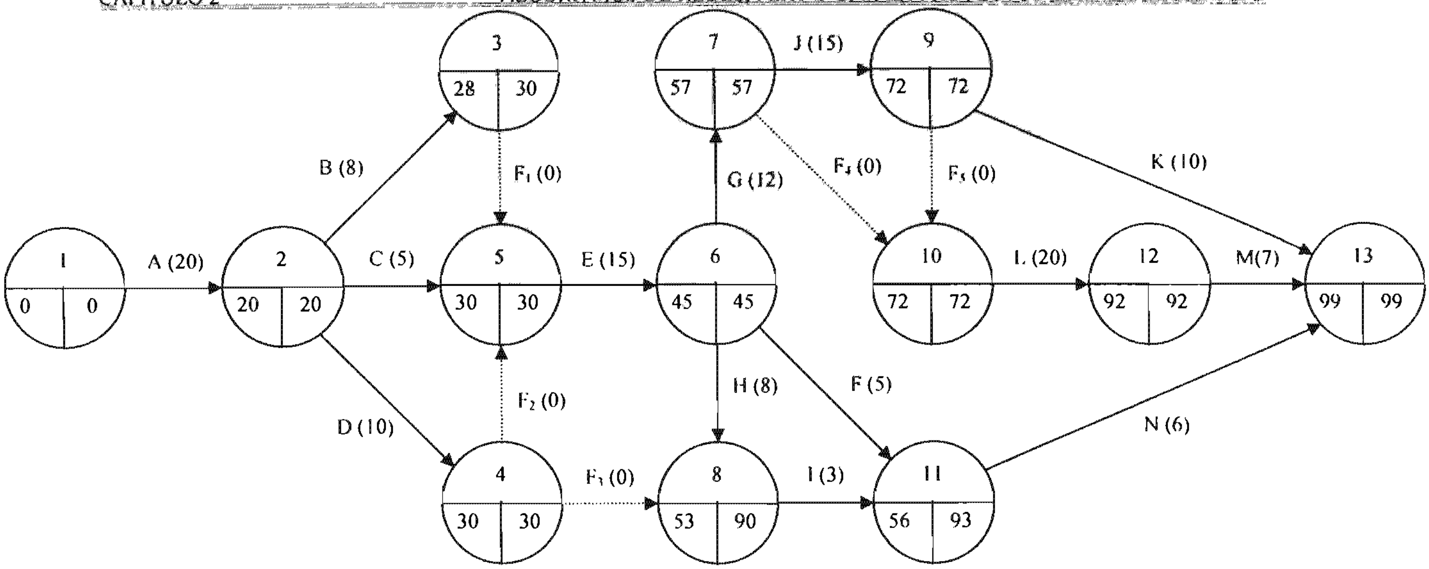
Nodo 4
$TTL_4 = \min\{TTL_8 - D_{48}, TTL_5 - D_{45}\} = \min\{90 - 0, 30 - 0\} = 30$

Nodo 3
$TTL_3 = TTL_5 - D_{35} = 30 - 0 = 30$

Nodo 2
$TTL_2 = \min\{TTL_5 - D_{25}, TTL_4 - D_{24}, TTL_3 - D_{23}\} = \min\{30 - 5, 30 - 10, 30 - 8\} = 20$

Nodo 1
$TTL_1 = TTL_2 - D_{12} = 20 - 20 = 0$

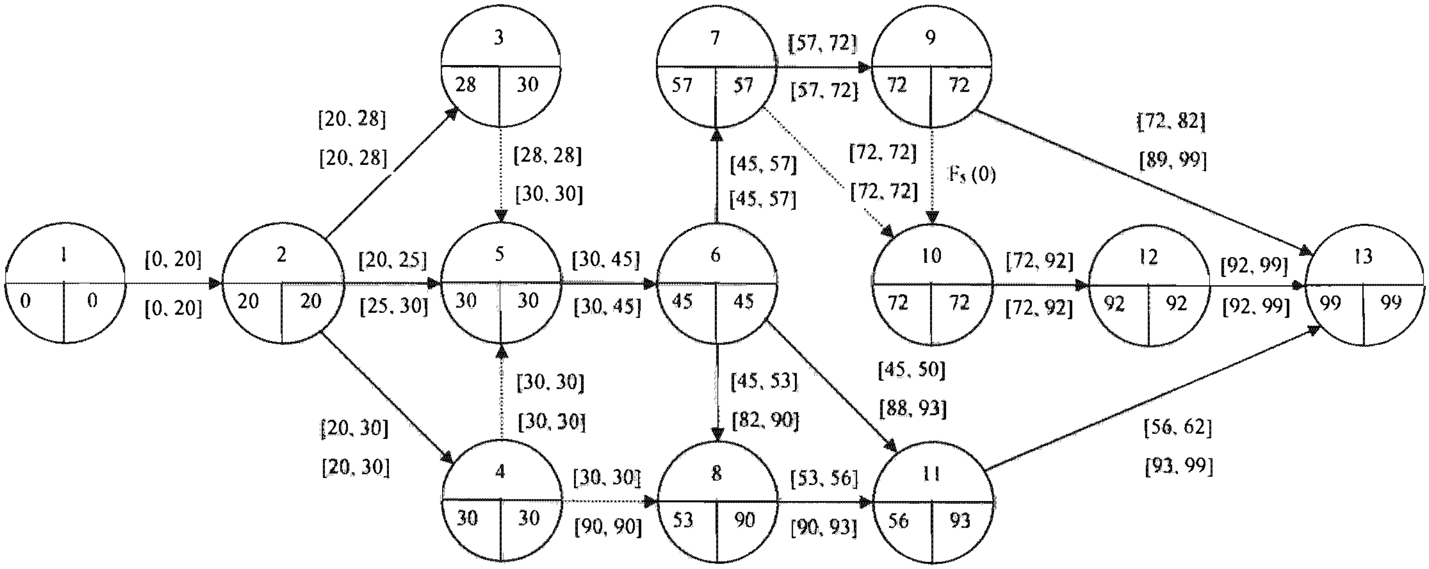
Los resultados de esta etapa se indican en el extremo derecho inferior de cada uno de los nodos:



Una vez que están definidos los tiempos de los eventos, se calculan los tiempos para cada una de las actividades: IC, TC, IL, TL. Dichos tiempos se muestran en la siguiente tabla:

Actividad	D_{ij}	$IC_{ij} = TIC_i$	$TC_{ij} = TIC_i + D_{ij}$	$IL_{ij} = TTL_j - D_{ij}$	$TL_{ij} = TTL_j$
A	20	0	0 + 20 = 20	20 – 20 = 0	20
B	8	20	20 + 8 = 28	30 – 8 = 22	30
C	5	20	20 + 5 = 25	30 – 5 = 25	30
D	10	20	20 + 10 = 30	30 – 10 = 20	30
E	15	30	30 + 15 = 45	45 – 15 = 30	45
F	5	45	45 + 5 = 50	93 – 5 = 88	93
G	12	45	45 + 12 = 57	57 – 12 = 45	57
H	8	45	45 + 8 = 53	90 – 8 =82	90
I	3	53	53 + 3 = 56	93 – 3 = 90	93
J	15	57	57 + 15 = 72	72 – 15 = 57	72
K	10	72	72 + 10 = 82	99 – 10 = 89	99
L	20	72	72 + 20 = 92	92 – 20 = 72	92
M	7	92	92 + 7 = 99	99 – 7 = 92	99
N	6	56	56 + 6 = 62	99 – 6 = 93	99

Los tiempos para cada actividad se muestran junto a su respectivo arco:



Conocidos todos los tiempos se procede al cálculos de las holguras y al análisis de los tiempos.

Holguras

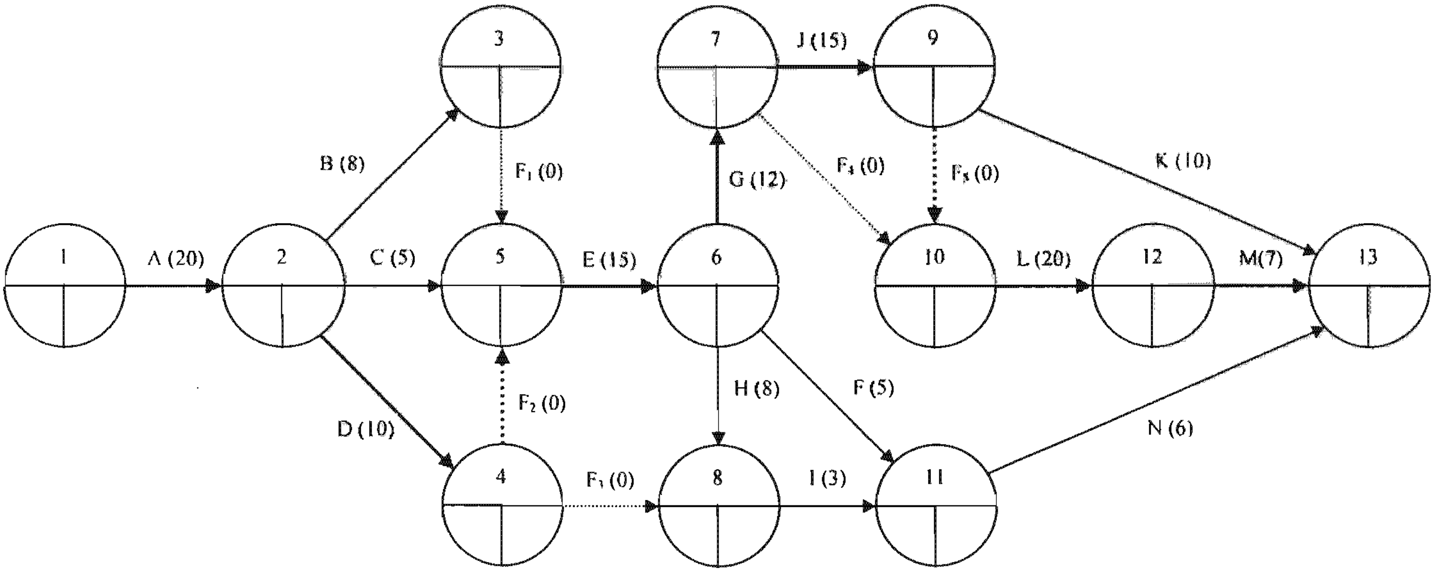
Actividad	D_{ij}	IC_{ij}	TC_{ij}	IL_{ij}	TL_{ij}	$HT_{ij} = IL_{ij} - IC_{ij}$ $HT_{ij} = TL_{ij} - TC_{ij}$	$HL_{ij} = TIC_j - TIC_i - D_{ij}$	*¿Actividad crítica?*
A	20	0	20	0	20	0	0	Sí
B	8	20	28	22	30	2	0	No
C	5	20	25	25	30	5	5	No
D	10	20	30	20	30	0	0	Sí
E	15	30	45	30	45	0	0	Sí
F	5	45	50	88	93	43	6	No
G	12	45	57	45	57	0	0	Sí
H	8	45	53	82	90	37	0	No
I	3	53	56	90	93	37	0	No
J	15	57	72	57	72	0	0	Sí
K	10	72	82	89	99	17	17	No
L	20	72	92	72	92	0	0	Sí
M	7	92	99	92	99	0	0	Sí
N	6	56	62	93	99	37	37	No

La **ruta crítica** la forman las actividades: A, D, E, G, J, L y M.

Es decir, la secuencia de nodos es:

1 →2→ 4 → 5 → 6 → 7 → 9 → 10 → 12 → 13

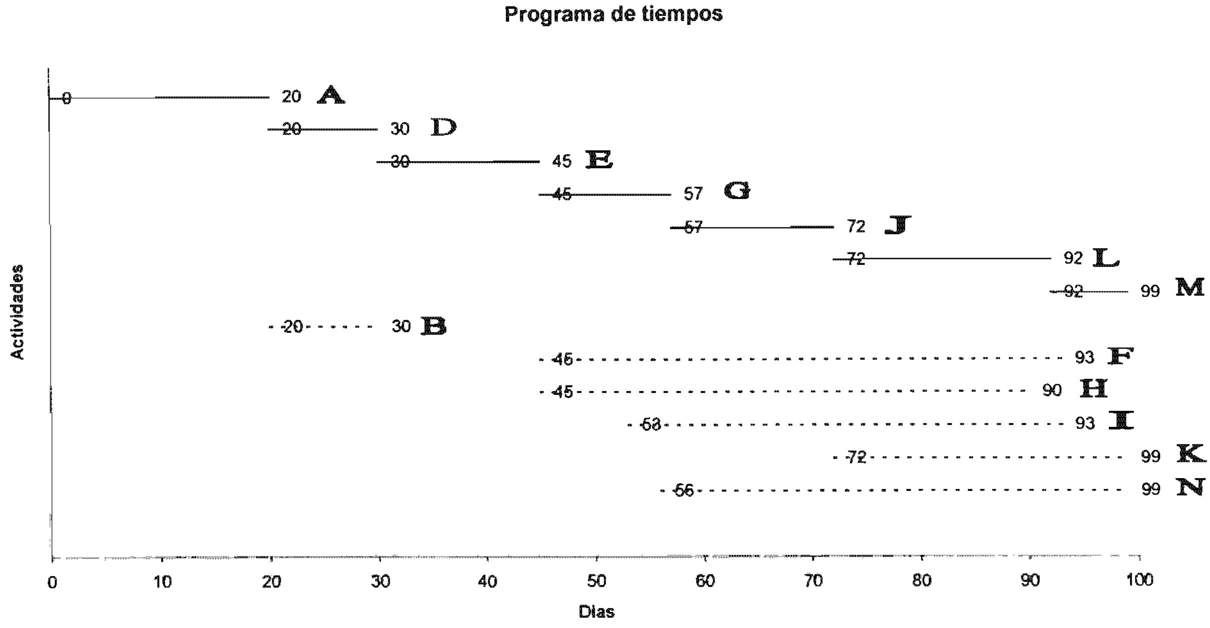
La suma de la duración de las actividades críticas es igual a la duración del proyecto (99 días).



Se puede observar que en la ruta crítica se tienen actividades ficticias, pero éstas no afectan el proyecto debido a que su duración es nula.

Programa de tiempos del proyecto

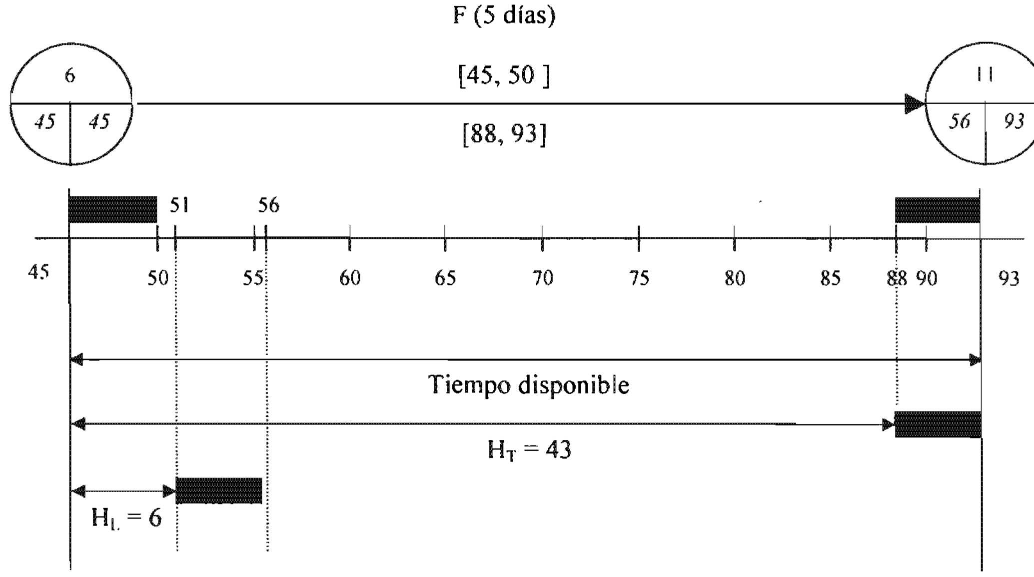
El programa de tiempos es una gráfica que se construye a partir del IC y TL de cada actividad. Dicha gráfica permite visualizar de manera global el tiempo que se tiene para realizar cada actividad así como la reprogramación de las mismas dentro de dicho lapso. Las actividades críticas se muestran con líneas continuas mientras que las actividades no críticas aparecen como líneas punteadas.



Representación gráfica de las holguras

Las holguras se pueden representar gráficamente con el fin de analizar el intervalo d tiempo en el cual se puede reprogramar una actividad determinada.

Considérese la actividad "F", su holgura se pude representar de la siguiente manera:



Como la holgura total es 43, esto indica que la actividad "F" Puede comenzar tan temprano como en el día 45 o tan tarde como en el día 88. Debido a que la holgura libre es 6, el hecho de comenzar la actividad "F" entre los días 45 y 51 no provoca ningún efecto sobre la actividad inmediatamente siguiente ("N"). Sin embargo, si la actividad se inicia en el día 51 + δ < 88, el tiempo de inicio más cercano (TIC) de la actividad "N" se tiene que llevar hacia delante cuando menos en δ para conservar la relación de precedencia entre "F" y "N".

Si hubiera resultado que $H_T = H_L$ para la actividad "F" significaría que ésta se puede programar en cualquier momento entre el día IC = 45 y el día TL = 93 sin causar ningún conflicto en el proyecto.

2.4.2 La técnica PERT

En la técnica PERT se considera que el tiempo en que se realiza una determinada actividad de un proyecto tiene carácter probabilístico. Es decir, se hace la suposición de que la duración de la actividad sigue una *distribución de probabilidad beta* , quedando definida con la siguiente expresión:

$$t_i = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}$$

donde,
t_i : Tiempo esperado de la actividad i
a_i : Tiempo optimista para realizar la actividad i
b_i : Tiempo pesimista para realizar la actividad i
m_i : Tiempo más probable para la actividad i

Y la variancia de la actividad está expresada como:

$$\sigma_i^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

donde,
σ_i^2 : Variancia de la actividad i

Así, se determinan los tiempos esperados y las variancias de todas las actividades. La ruta crítica se determina de la misma manera que con CPM.

Debido al supuesto de que el tiempo de duración del proyecto sigue una distribución normal, N(μ, σ), se tiene que:

$$T_p = \sum_i t_i \qquad \text{y} \qquad \sigma_p^2 = \sum_i \sigma_i^2$$

donde,
T_p: duración del proyecto considerando las actividades que forman la ruta crítica
σ_p^2 : variancia del proyecto considerando las actividades que forman la ruta crítica

También, $\mu = T_p, \sigma = \sqrt{\sigma_p^2}$
En caso de que se tengan varias rutas críticas en el proyecto se debe considerar aquella con la variancia más grande.

La probabilidad de que el proyecto se termine antes o en un tiempo programado, *TP*, se expresa de la siguiente manera:

$$P(X \le TP) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{TP-\mu}{\sigma}\right) = P\left(z \le \frac{TP-\mu}{\sigma}\right)$$

en donde z es la distribución normal con media 0 y variancia 1.

Ejemplo 2.5

En un proyecto de construcción se han podido determinar los tiempos pesimista, optimista y más probable de las actividades que lo conforman. Dichos tiempos, expresados en meses, se muestran en la siguiente tabla:

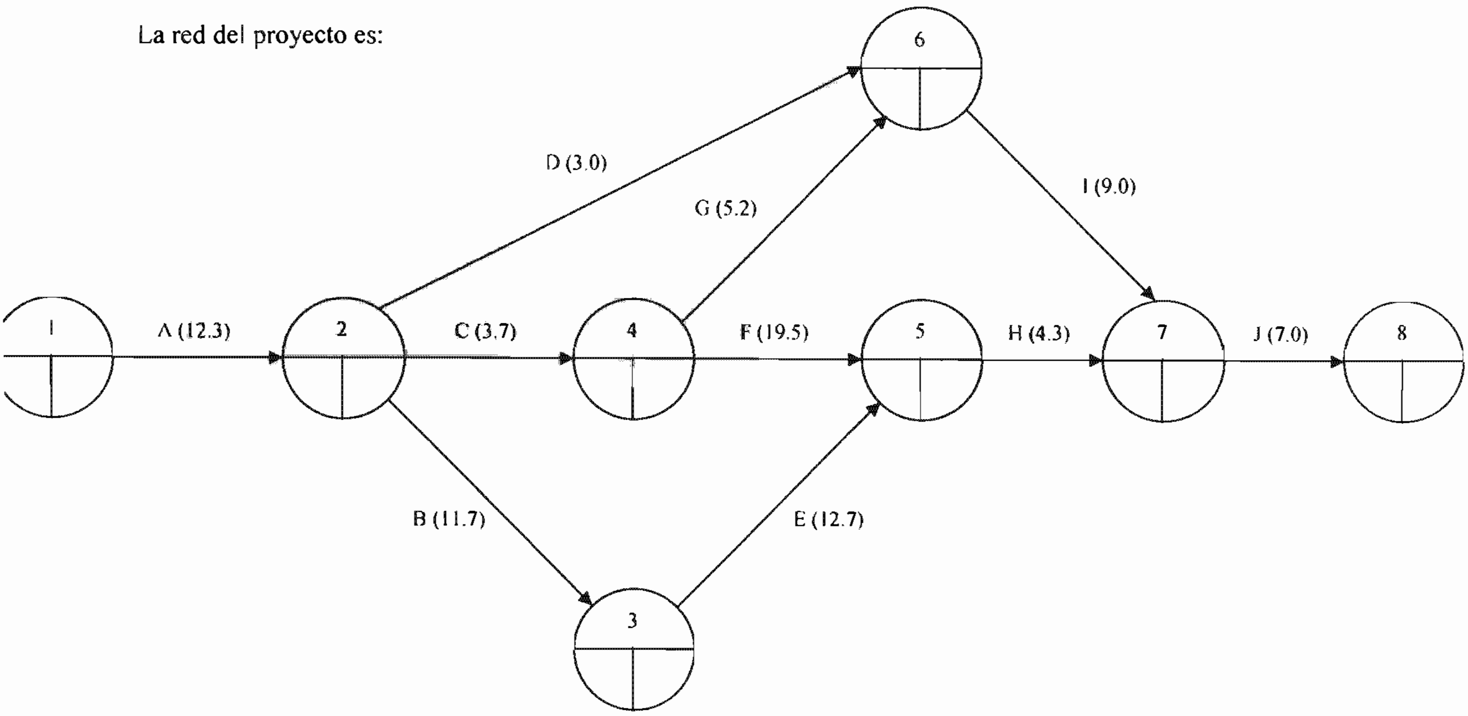
Actividad	Nombre	Precedentes	a	m	b
A	Diseño	-	10	12	16
B	Selección del lugar	A	2	8	36
C	Selección de proveedores	A	1	4	5
D	Selección de personal	A	2	3	4
E	Preparación del lugar	B	8	12	20
F	Fabricar estructuras	C	15	18	30
G	Preparar material	C	3	5	8
H	Instalar estructuras	E, F	2	4	8
I	Adiestrar	D, G	6	9	12
J	Obtención de permisos	H, I	4	6	14

Determinar la ruta crítica y la probabilidad de terminar el proyecto dentro de 55 meses.

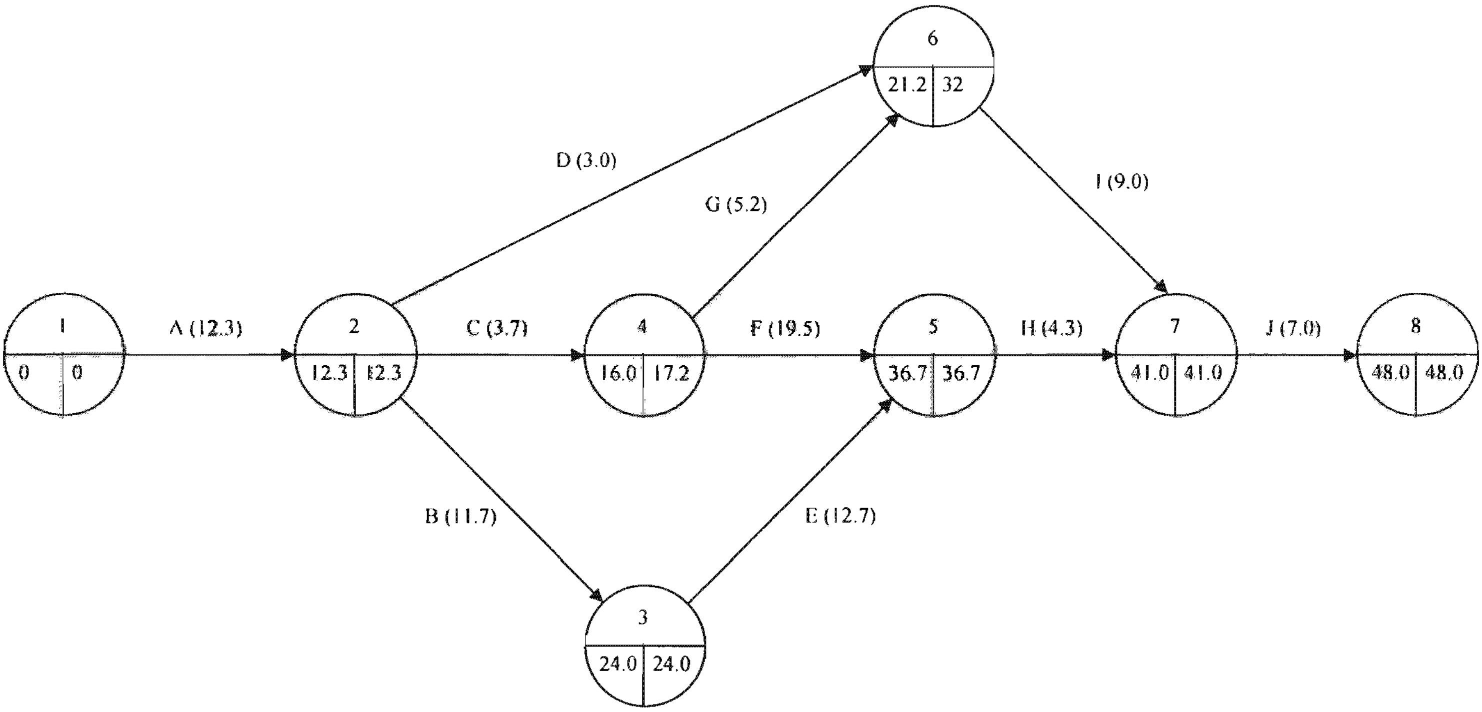
Se calculan los tiempos esperados de cada actividad así como sus variancias.

Actividad	Nombre	Precedentes	a	m	b	t_i	σ_i^2
A	Diseño	-	10	12	16	12.3	1
B	Selección del lugar	A	2	8	36	11.7	32.11
C	Selección de proveedores	A	1	4	5	3.7	0.44
D	Selección de personal	A	2	3	4	3.0	0.11
E	Preparación del lugar	B	8	12	20	12.7	4.00
F	Fabricar estructuras	C	15	18	30	19.5	6.25
G	Preparar material	C	3	5	8	5.2	0.69
H	Instalar estructuras	E, F	2	4	8	4.3	1.00
I	Adiestrar	D, G	6	9	12	9.0	1.00
J	Obtención de permisos	H, I	4	6	14	7.0	2.78

La red del proyecto es:



Los resultados de los cálculos de $TIC_j = \max_i \{TIC_i + D_{ij}\}$ y $TTL_i = \min_j \{TTL_j - D_{ij}\}$ para cada evento se muestran a continuación:



En la siguiente tabla se muestran los tiempos para cada actividad y su respectiva holgura:

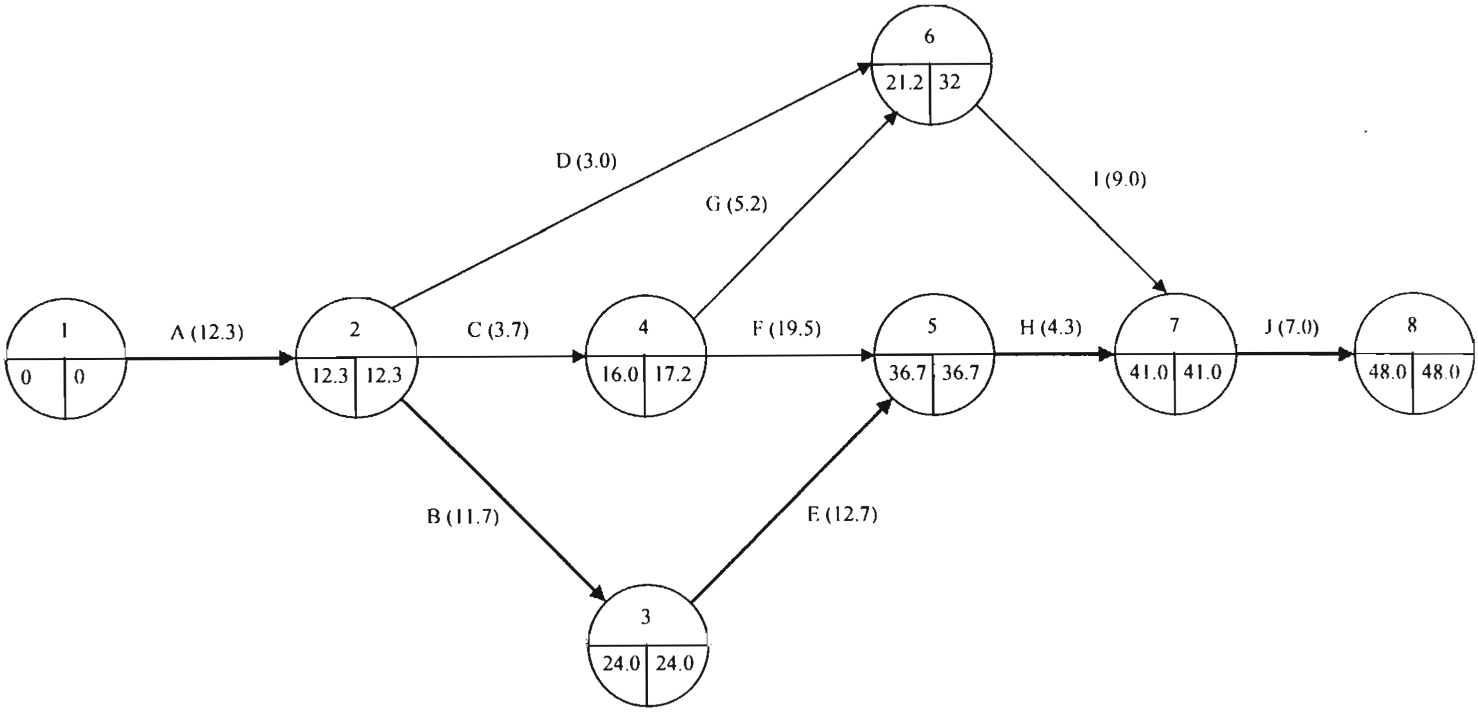
Actividad	D_{ij}	$IC_{ij} = TIC_i$	$TC_{ij} = TIC_i + D_{ij}$	$IL_{ij} = TTL_j - D_{ij}$	$TL_{ij} = TTL_j$	$HT_{ij} = IL_{ij} - IC_{ij}$ $HT_{ij} = TL_{ij} - TC_{ij}$	$HL_{ij} = TIC_j - TIC_i - D_{ij}$	*¿Actividad crítica?*
A	12.3	0	0 + 12.3 = 12.3	12.3 – 12.3 = 0	12.3	0	0	Sí
B	11.7	12.3	12.3 + 11.7 = 24	24 – 11.7 = 12.3	24	0	0	Sí
C	3.7	12.3	12.3 + 3.7 = 16	17.2 – 3.7= 13.5	17.2	1.2	0	No
D	3.0	12.3	12.3 + 3 = 15.3	32 – 3 = 29	32	16.7	5.9	No
E	12.7	24	24 + 12.7 = 36.7	36.7 – 12.7 = 24	36.7	0	0	Sí
F	19.5	16	16 + 19.5 = 35.5	36.7 – 19.5 = 17.2	36.7	1.2	1.2	No
G	5.2	16	16 + 5.2 = 21.2	32 – 5.2 = 26.8	32	10.8	0	No
H	4.3	36.7	36.7 + 4.3 = 41	41 – 4.3 = 36.7	41	0	0	Sí
I	9.0	21.2	21.2 + 9 = 30.2	41 – 9 = 32	41	10.8	10.8	No
J	7.0	41	41 + 7 = 48	48 – 7 = 41	48	0	0	Sí

La **ruta crítica** la forman las actividades: A, B, E, H, J.

Es decir, la secuencia de nodos es:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8$

La suma de la duración de las actividades es igual a la duración del proyecto: 48 meses.



La probabilidad de terminar el proyecto dentro de TP = 55 meses es:

$$P(X \leq TP) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{TP-\mu}{\sigma}\right) = P\left(z \leq \frac{TP-\mu}{\sigma}\right)$$

en donde,

$\mu = T_p = 12.3 + 11.7 + 12.7 + 4.3 + 7 = 48$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_p^2}$$

$\sigma_p^{\,2} = 1 + 32.11 + 4 + 1 + 2.78 = 40.89 \Rightarrow \sigma = 6.39$

$$P(X \leq 55) = P\left(\frac{X-48}{6.39} \leq \frac{55-48}{6.39}\right) = P\left(z \leq 1.10\right)$$

De cualquier tabla de distribución de probabilidad normal se obtiene que:

$P(z \leq 1.10) = 0.86$

CAPÍTULO 3

3. PROBLEMAS DE INGENIERÍA CIVIL QUE SE PUEDEN RESOLVER CON PROGRAMACIÓN DINÁMICA

La programación dinámica es una técnica que no se ha explotado ampliamente en las diferentes áreas de la ingeniería. Propiamente, esta técnica no consta de una serie de algoritmos que se puedan aplicar para la solución de problemas, sino más bien se basa en una forma de pensar que tiene su idea principal en la **recurrencia**, con la cual un problema se puede analizar y descomponer en subproblemas o etapas que tienen la misma estructura que el problema original pero que son más sencillos de resolver.

En la naturaleza la recurrencia o recursividad se presenta, por ejemplo, en los fractales, las conchas de algunos caracoles, la formación de imágenes infinitas mediante espejos, etc. En todos estos casos, una de las partes tiene la misma estructura que el conjunto en su totalidad.

En la **Ingeniería Civil** su principal aplicación en el área de las estructuras, aunque también se le ha utilizado para resolver algunos problemas de hidráulica y en la administración de proyectos de construcción.

La programación dinámica se puede considerar como un enfoque matemático de los procesos de decisión de etapas múltiples en los cuales se llevan a cabo una serie de decisiones que afectan a un sistema y su respuesta a futuras decisiones. Un determinado tipo de decisión puede generar un resultado pero, algunos resultados son mejores que otros. Lo que se persigue es lograr el mejor resultado mediante la mejor secuencia de decisiones. Lo que se busca es, entonces, la mejor decisión en cada paso o etapa de dicha secuencia. Si en cada etapa se puede observar y analizar el estado del sistema y las decisiones que se deben tomar en consecuencia, no es necesario considerar la cadena de decisiones pasadas o futuras. En otras palabras, con esta técnica se descompone un problema de N variables en N problemas de una variable que se resuelven con menor esfuerzo que el problema original. Tal descomposición se basa en lo que se conoce como el **Principio de Optimalidad**, establecido por Richard Bellman a principios de 1950:

"Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que sea el estado inicial y las decisiones iniciales, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión".

O con menos formalidad:

"Si no haces lo mejor que puedes con lo que pareces tener, nunca harás lo mejor que podrías haber hecho con lo que deberías haber tenido".

3.1 CONCEPTOS IMPORTANTES

Se han mencionado, anteriormente, dos conceptos fundamentales de la programación dinámica:

Etapa: es la parte del problema que tiene un conjunto de alternativas mutuamente excluyentes, de las cuales se selecciona la mejor.

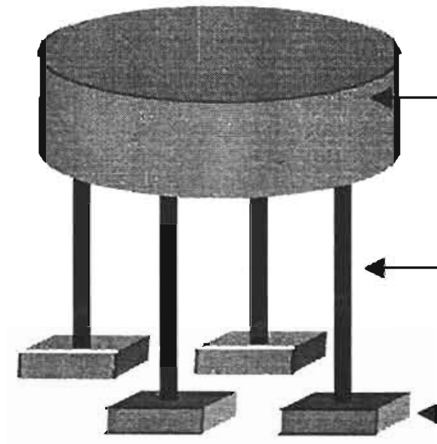
Estado: es el que refleja la condición o "estado" de las restricciones que enlazan las etapas. Representa la "liga" entre las etapas de tal forma que cuando cada etapa se optimiza por separado la decisión resultante es automáticamente factible para el problema completo.

La definición de estado es quizás el concepto más difícil de entender debido a que depende del problema que se tenga que resolver.

En este capítulo se presentan algunos ejemplos sencillos dentro del contexto de la Ingeniería Civil que se resuelven empleando la programación dinámica con el objetivo de mostrar la forma central en como ésta funciona.

Ejemplo 3.1 Diseño de un tanque de agua

Se desea encontrar el diseño más económico de un tanque para almacenar 100000 litros de agua. El sistema estructural completo consta de un tanque, cuatro columnas y una cimentación para transmitir las cargas al suelo.



El diseño involucra la selección de los tipos más adecuados para el tanque, las columnas y la cimentación. Se tienen siete tipos de tanques, tres tipos de columnas y tres tipos de cimentación. Los datos para cada uno de los tipos se presentan en las siguientes tablas.

Cimentación

Tipo de cimentación	Carga actuante ($kg_f \times 1000$)	Costo ($)	Peso propio ($kg_f \times 1000$)
1. Zapatas aisladas	220	5000	60
	200	4000	45
	180	3000	35
	140	2500	25
	120	500	20
2. Pilotes de concreto	220	3500	55
	200	3000	40
	180	2500	30
	140	1500	20
	120	1000	15
3. Pilotes de acero	220	3000	10
	200	2500	9
	180	2000	8
	140	2000	6
	120	1500	5

Columnas

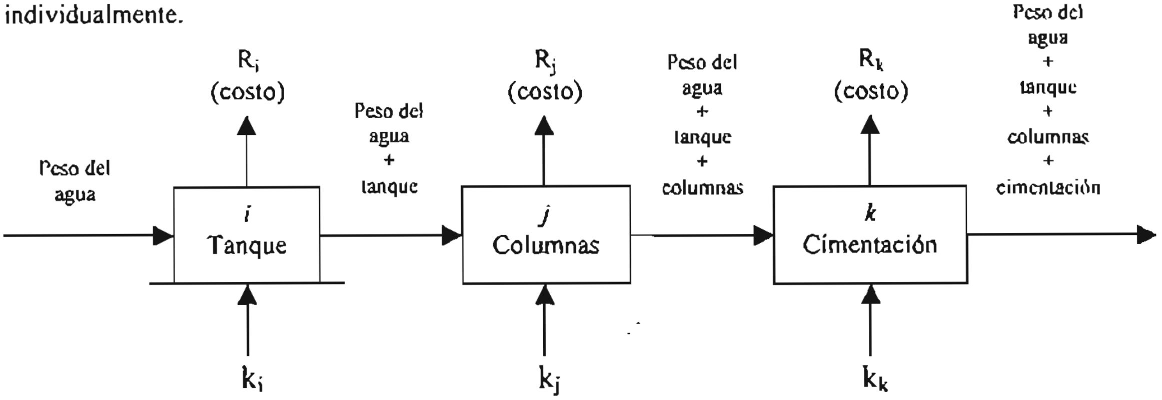
Tipo de columnas	Carga actuante ($kg_f \times 1000$)	Costo ($)	Peso propio ($kg_f \times 1000$)
1. Concreto	150	6000	70
	130	5000	70
	110	4000	70
	100	3000	40
2. Concreto reforzado clase II	150	8000	70
	130	6000	70
	110	4000	70
	100	3000	40
3. Columnas de acero	150	15000	50
	130	10000	50
	110	9000	30
	100	8000	20

Tanque

Tipo de tanque	Carga actuante ($kg_f \times 1000$)	Costo ($)	Peso propio ($kg_f \times 1000$)
1. Cilíndrico de concreto reforzado	100	5000	50
2. Esférico de concreto reforzado	100	8000	30
3. Rectangular de concreto reforzado	100	6000	50
4. Cilíndrico de acero	100	9000	30
5. Esférico de acero	100	15000	10
6. Rectangular de acero	100	12000	30
7. Cilíndrico con domo hemisférico de concreto reforzado	100	10000	10

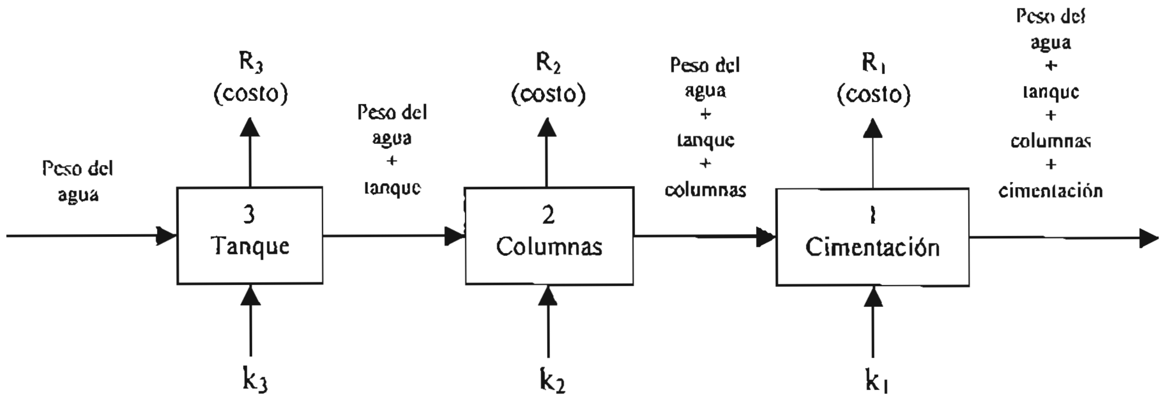
Solución:

El problema se descompone en tres etapas (tanque, columnas y cimentación) que se optimizan individualmente.



La optimización de cualquier componente (etapa) afecta necesariamente a cualquiera de los subsecuentes componentes. Por ejemplo, la optimización del componente *j* (columnas) ejerce una influencia en el diseño del siguiente componente *k*; esto debe evitarse. Una forma de lograrlo es comenzando por optimizar el último componente *k* del sistema el cual no ejerce influencia en ningún componente subsecuente. Posteriormente, se consideran a los dos últimos componentes (*k* y *j*) para optimizarlos como una sola unidad que no ejerce influencia en componentes subsecuentes. Se continua de esta manera hasta agrupar todos los componentes del sistema. Debido a que se comienza con optimizar al componente *k*, a éste se le puede asignar el número 1; 2 para el componente *j*; 3, para el componente *i*.

Entonces, el problema se puede modelar como el siguiente proceso de decisión de tres etapas:



Etapas y alternativas

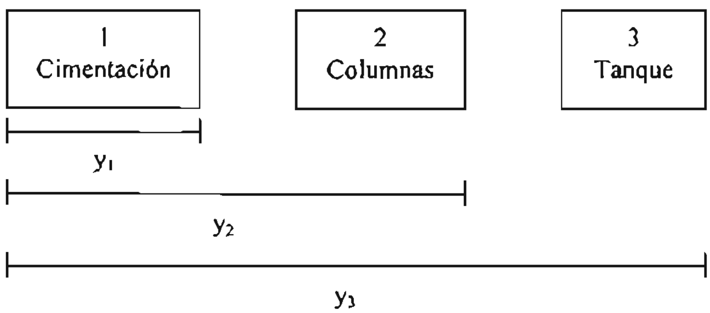
Cada uno de los componentes del sistema es una etapa independiente de las demás pero que se encuentran entrelazadas de tal forma que la solución factible para una de ellas lo es también para todo el problema. En este ejemplo cada etapa representa una parte del sistema estructural (cimentación, columnas y tanque). La primera etapa, cimentación, tiene tres alternativas que corresponden al tipo de subestructura que se puede tener: $k_1 = 1$ representa zapatas aisladas, $k_1 = 2$ representa pilotes de concreto y $k_1 = 3$ representa pilotes de acero. Por otro lado, la segunda y tercera etapas tienen tres y siete alternativas respectivamente.

Estados

Las etapas se entrelazan entre sí mediante los valores de los estados que se tienen para cada una de ellas y que aparecen en la función recursiva. En este ejemplo, los estados están definidos por las cargas que actúan en cada una de las subestructuras y para las cuales se tiene un costo específico.

Los estados para las etapas 1, 2 y 3 se pueden definir de la siguiente manera:

y_1: carga que soporta la cimentación
y_2: carga que soporta la cimentación y las columnas
y_3: carga que soporta la cimentación, las columnas y el tanque



Ecuación recursiva o de retorno

La ecuación recursiva o de retorno (R_1, R_2 y R_3) es, en este ejemplo, el costo que se tiene para una alternativa dada de la etapa que se esté analizando. En cualquiera de las etapas debe quedar dicha función en términos de los estados correspondientes a la misma.

A continuación se describen los cálculos para cada una de las etapas.

Etapa 1. Cimentación

Los valores del estado y_1 pueden ser: 220, 200, 180, 140 y 120. Cuando $y_1 = 220$ la mejor alternativa es la tercera (pilotes de acero) debido a que tiene el menor costo (\$3000). Cuando $y_1 = 200$ la mejor alternativa sigue siendo la tercera con un costo de \$2500 y así para cada uno de los restantes valores que puede tener y_1.

La ecuación recursiva o de retorno se puede expresar de la siguiente manera:

Mínimo costo para la etapa 1 dado el estado y_1 = min{(costo de la alternativa factible)}

El costo de la alternativa factible es simplemente el costo de soportar una carga determinada.

O también, en términos matemáticos:

$f_1(y_1) = min\ \{R_1(k_1)\}$

donde k_1 representa las alternativas para la etapa 1 que, como se había mencionado, puede tomar tres valores.

Los cálculos para esta etapa se pueden efectuar en forma tabular:

y_1	$R_1(k_1)$			Solución óptima	
	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$f_1(y_1)$	k_1*
220000	5000	3500	3000	3000	3
200000	4000	3000	2500	2500	3
180000	3000	2500	2000	2000	3
140000	2500	1500	2000	1500	2
120000	500	1000	1500	500	1

Etapa 2. Columnas

La ecuación recursiva debe estar ligada con los cálculos realizados en la etapa previa, pero debe quedar expresada en función del estado y_2. Es decir:

Mínimo costo para la etapa 2 dado el estado y_2 = min{(costo de la alternativa factible para la etapa 2) + (costo de la etapa 1 dado su estado y_1)}

O también:

$f_2(y_2) = \min\{R_2(k_2) + f_1(y_1)\}$

En otras palabras, lo que se busca es el mínimo que resulta de la suma del costo por la cantidad de carga que soporta el tipo de columna (alternativa) más el costo correspondiente a dicha carga y el peso propio de las columnas que tiene que ser soportado por la cimentación (etapa anterior). Es decir que la ecuación recursiva se expresa al final como:

$$f_2(y_2) = \min\{R_2(k_2) + f_1(y_2 + w_2(k_2))\}$$

Como se puede observar, debido a que la ecuación recursiva o de retorno debe quedar expresada en términos de y_2, debe sustituirse y_1 por $y_2 + w_2(k_2)$. Y $w_2(k_2)$ representa el peso propio correspondiente al tipo de columnas que se tienen como alternativas.

Los valores que puede tomar y_2 son: 150000, 130000, 110000 y 100000. Por otro lado, k_2 puede tener los valores 1, 2 ó 3 dependiendo del tipo de columna que se elija como alternativa.

Para y_2 = 150000, se tiene:
$f_2(y_2) = \min\{R_2(k_2) + f_1(y_2 + w_2(k_2))\}$
$f_2(150000) = \min\{R_2(1) + f_1(150000 + w_2(1)), R_2(2) + f_1(150000 + w_2(2)), R_2(3) + f_1(150000 + w_2(3))\}$
$w_2(1)$ = 70000, es el peso propio de las columnas de concreto reforzado clase I, dado el estado y_2 = 150000
$w_2(2)$ = 70000, es el peso propio de las columnas de concreto reforzado clase II, dado el estado y_2 = 150000
$w_2(3)$ = 50000, es el peso propio de las columnas de acero, dado el estado y_2 = 150000
Entonces,
$f_2(150000) = \min\{6000 + f_1(150000 + 70000), 8000 + f_1(150000 + 70000), 15000 + f_1(150000 + 50000)\}$
$f_1(150000 + 70000) = f_1(220000)$
$f_1(150000 + 50000) = f_1(200000)$
De la tabla de la etapa 1 se tiene que $f_1(220000) = 3000$ y $f_1(200000) = 2500$
Por lo tanto,
$f_1(150000) = \min\{6000 + 3000, 8000 + 3000, 15000 + 2500\} = 9000$, y la alternativa óptima resulta ser $k_2 = 1$

Para y_2 = 130000, se tiene:

$f_2(130000) = \min\{R_2(1) + f_1(130000 + w_2(1)), R_2(2) + f_1(130000 + w_2(2)), R_2(3) + f_1(130000 + w_2(3))\}$
$w_2(1) = 70000$, es el peso propio de las columnas de concreto reforzado clase I, dado el estado $y_2 = 130000$
$w_2(2) = 70000$, es el peso propio de las columnas de concreto reforzado clase II, dado el estado $y_2 = 130000$
$w_2(3) = 50000$, es el peso propio de las columnas de acero, dado el estado $y_2 = 130000$
$f_2(130000) = \min\{5000 + f_1(130000 + 70000), 6000 + f_1(130000 + 70000), 10000 + f_1(130000 + 50000)\}$
De la tabla de la etapa 1 se tiene que $f_1(200000) = 2500$ y $f_1(180000) = 2000$
Por lo tanto,
$f_1(130000) = \min\{5000 + 2500, 6000 + 2500, 10000 + 2000\} = 7500$, y la alternativa óptima resulta ser $k_2 = 1$

Para $y_2 = 110000$, se tiene:
$f_2(110000) = \min\{R_2(1) + f_1(110000 + w_2(1)), R_2(2) + f_1(110000 + w_2(2)), R_2(3) + f_1(110000 + w_2(3))\}$
$w_2(1) = 70000$, es el peso propio de las columnas de concreto reforzado clase I, dado el estado $y_2 = 110000$
$w_2(2) = 70000$, es el peso propio de las columnas de concreto reforzado clase II, dado el estado $y_2 = 110000$
$w_2(3) = 30000$, es el peso propio de las columnas de acero, dado el estado $y_2 = 110000$
$f_2(110000) = \min\{4000 + f_1(110000 + 70000), 4000 + f_1(110000 + 70000), 9000 + f_1(110000 + 30000)\}$
De la tabla de la etapa 1 se tiene que $f_1(180000) = 2000$ y $f_1(140000) = 1500$
Por lo tanto,
$f_1(110000) = \min\{4000 + 2000, 4000 + 2000, 9000 + 1500\} = 6000$, y las alternativas óptimas resultan ser $k_2 = 1$ y $k_2 = 2$

Para $y_2 = 100000$, se tiene:
$f_2(100000) = \min\{R_2(1) + f_1(100000 + w_2(1)), R_2(2) + f_1(100000 + w_2(2)), R_2(3) + f_1(100000 + w_2(3))\}$
$w_2(1) = 40000$, es el peso propio de las columnas de concreto reforzado clase I, dado el estado $y_2 = 100000$
$w_2(2) = 40000$, es el peso propio de las columnas de concreto reforzado clase II, dado el estado $y_2 = 100000$
$w_2(3) = 20000$, es el peso propio de las columnas de acero, dado el estado $y_2 = 100000$
$f_2(100000) = \min\{3000 + f_1(100000 + 40000), 3000 + f_1(100000 + 40000), 8000 + f_1(100000 + 20000)\}$
De la tabla de la etapa 1 se tiene que $f_1(140000) = 1500$ y $f_1(120000) = 500$
Por lo tanto,
$f_1(100000) = \min\{3000 + 1500, 3000 + 1500, 8000 + 500\} = 4500$, y las alternativas óptimas resultan ser $k_2 = 1$ y $k_2 = 2$

Los cálculos en forma tabular son:

y_2	$R_2(k_2) + f_1(y_2 + w_2(k_2))$			Solución óptima	
	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$f_2(y_2)$	k_2*
150000	6000 + 3000 = 9000	8000 + 3000 = 11000	15000 + 2500 = 17500	9000	1
130000	5000 + 2500 = 7500	6000 + 2500 = 8500	10000 + 2000 = 12000	7500	1
110000	4000 + 2000 = 6000	4000 + 2000 = 6000	9000 + 1500 = 10500	6000	1, 2
100000	3000 + 1500 = 4500	3000 + 1500 = 4500	8000 + 500 = 8500	4500	1,2

Etapa 3. Tanque

Para esta última etapa solamente se considera $y_3 = 100000$, que es el peso del agua que debe soportar la estructura en su conjunto (tanque, columnas y cimentación).

En esta etapa se tienen siete alternativas correspondientes a cada uno de los diferentes tipos de tanque que se pueden utilizar.

La ecuación recursiva o de retorno se puede expresar ahora como:

$f_3(y_3) = \min\{R_3(k_3) + f_2(y_2)\}$

pero, $y_2 = y_3 + w_3(k_3)$

Entonces,

$$f_3(y_3) = min\{R_3(k_3) + f_2(y_3 + w_3(k_3))\}$$

La cual indica que se busca el minimo que resulta de la suma del costo por la cantidad de carga que soporta el tipo de tanque (alternativas k_3 = 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7) más el costo correspondiente a dicha carga y el peso propio del tanque que tiene que ser soportado por las columnas y la cimentación.

Para y_3 = 100000 se tiene:

$f_3(100000) = \min\{R_3(1) + f_2(100000 + w_3(1)), R_3(2) + f_2(100000 + w_3(2)), R_3(3) + f_2(100000 + w_3(3)), R_3(4) + f_2(100000 + w_3(4)), R_3(5) + f_2(100000 + w_3(5)), R_3(6) + f_2(100000 + w_3(6)), R_3(7) + f_2(100000 + w_3(7))\}$

con:
$w_3(1) = 50000$
$w_3(2) = 30000$
$w_3(3) = 50000$
$w_3(4) = 30000$
$w_3(5) = 10000$
$w_3(6) = 30000$
$w_3(7) = 10000$

$f_3(100000) = \min\{5000 + f_2(100000 + 50000), 8000 + f_2(100000 + 30000), 6000 + f_2(100000 + 50000), 9000 + f_2(100000 + 30000), 15000 + f_2(100000 + 10000), 12000 + f_2(100000 + 30000), 10000 + f_2(100000 + 10000)\}$

De la tabla de la etapa 2 se tiene que $f_2(150000) = 9000$, $f_2(130000) = 7500$ y $f_2(110000) = 6000$

Por lo tanto,

$f_3(100000) = \min\{5000 + 9000, 8000 + 7500, 6000 + 9000, 9000 + 7500, 15000 + 6000, 12000 + 7500, 10000 + 6000\} = 14000$, y la alternativa óptima es $k_3 = 1$

En forma tabular:

y_3	$R_3(k_3) + f_2(y_3 + w_3(k_3))$							Solución óptima	
	$k_3 = 1$	$k_3 = 2$	$k_3 = 3$	$k_3 = 4$	$k_3 = 5$	$k_3 = 6$	$k_3 = 7$	$f_3(y_3)$	k_3*
100000	5000 + 9000 = 14000	8000 + 7500 = 15500	6000 + 9000 = 15000	9000 + 7500 = 16500	15000 + 6000 = 21000	12000 + 7500 = 19500	10000 + 6000 = 16000	14000	1

El costo óptimo de la estructura resulta ser de $14000 y las alternativas óptimas para cada elemento del sistema (tanque, columnas y cimentación) se obtienen de la siguiente manera:

Para y_3 = 100000 la alternativa óptima es $k_3 = 1$ y el estado y_2 es:
$y_2 = y_3 + w_3(k_3)$
$y_2 = 100000 + w_3(1)$
$y_2 = 100000 + 50000 = 150000$

Para y_2 = 150000 la alternativa óptima es $k_2 = 1$ y el estado y_1 es:
$y_1 = y_2 + w_2(k_2)$
$y_1 = 150000 + w_2(1)$
$y_1 = 150000 + 70000 = 220000$

Para $y_1 = 220000$ la alternativa óptima es $k_1 = 3$.

Estos cálculos también se pueden realizar directamente en forma tabular:

y_3	k_3*	$y_2 = y_3 + w_3(k_3)$	k_2*	$y_1 = y_2 + w_2(k_2)$	k_1*
100000 →	1	100000 + 50000 = 150000 →	1	150000 + 70000 = 220000 →	3

La solución óptima es:

$(k_1^*, k_2^*, k_3^*) = (3, 1, 1)$

Es decir que se deben utilizar **pilotes de acero** para la cimentación, **columnas de concreto clase I** y un **tanque cilíndrico de concreto reforzado**. El costo de dicha estructura sería de \$3000 + \$6000 + \$5000 = \$ 14000, que es el mismo que el valor obtenido en la etapa 3. Como se puede observar los cálculos son recursivos ya que para una etapa actual se utiliza la información de la etapa inmediata anterior.

Ejemplo 3.2 Construcción de plantas de energía

Se tiene planeado construir tres plantas generadoras de energía. El presupuesto total disponible es de 30 millones de unidades monetarias y los niveles de inversión para cada planta pueden ser de 0, 10, 20 o 30 millones de unidades monetarias. La energía que se puede obtener de cada planta de acuerdo al nivel de inversión se muestra en la siguiente tabla:

Propuesta	Nivel de inversión (millones de unidades monetarias)	Planta generadora 1 R_1	Planta generadora 2 R_2	Planta generadora R_3
1	0	0 unidades de energía	0 unidades de energía	0 unidades de energía
2	10	2	1	3
3	20	4	5	5
4	30	6	6	6

Se desea encontrar la política óptima de inversión en las plantas que maximiza la cantidad de energía que se puede obtener.

Solución:

Etapas y alternativas

Cada planta generadora de energía representa una etapa. Es decir, se tiene un sistema constituido por tres etapas. La primera etapa es la planta 1, la segunda etapa es la planta 2 (y ya está considerada la planta 1) y la tercera etapa es la planta 3 (y ya están consideradas las plantas 2 y 1). En cada etapa se tienen cuatro alternativas que corresponden a diferentes niveles de inversión:

Alternativa 1: invertir 0 millones de unidades monetarias en una determinada planta.
Alternativa 2: invertir 10 millones de unidades monetarias en una determinada planta.
Alternativa 3: invertir 20 millones de unidades monetarias en una determinada planta.
Alternativa 4: invertir 30 millones de unidades monetarias en una determinada planta.

Estados

En cada una de las etapas el estado correspondiente puede tomar diversos valores que representan la cantidad de dinero (unidades monetarias) con que se cuenta. El presupuesto mínimo asignado es de 0 millones de unidades mientras que el presupuesto máximo asignado con el que se puede contar es de 30 millones de unidades monetarias. Es decir, los estados para cada etapa pueden tener los siguientes conjuntos de valores: para la etapa 1, $y_1 = \{0, 10, 20, 30\}$; para la etapa 2, $y_2 = \{0, 10, 20, 30\}$; para la etapa 3, $y_3 = \{0, 10, 20, 30\}$.

Ecuación recursiva o de retorno

Para la etapa 1, la ecuación recursiva es simplemente la cantidad de energía obtenida con determinada alternativa elegida (nivel de inversión o cantidad de dinero que se requiere) dado un valor del estado (presupuesto asignado o cantidad de dinero que se tiene). Matemáticamente se puede expresar de la siguiente manera:

$$f_1(y_1) = max\{R_1(k_1)\}$$

Para la etapa 2, la ecuación recursiva representa la cantidad de energía obtenida con determinada alternativa dado un valor del estado más la cantidad óptima de energía que se podría obtener de la etapa anterior al utilizar la diferencia existente entre la cantidad que tiene de dinero y la que se requiere en la alternativa considerada. En términos matemáticos:

$$f_2(y_2) = max\{R_2(k_2) + f_1(y_2 - k_2)\}$$

De la misma manera, para la etapa 3 la ecuación recursiva es:

$$f_3(y_3) = max\{R_3(k_3) + f_2(y_3 - k_3)\}$$

De manera general la ecuación recursiva para cualquier etapa que no sea la primera se puede expresar como:

$$f_j(y_j) = \max\{R_j(k_j) + f_{j-1}(y_j - k_j) \mid k_j \le y_j\}, \text{ para } j = 2, 3$$

La restricción $k_j \le y_j$ nos indica que no se pueden considerar las alternativas que requieren más dinero del que se tiene (¡No se puede comprar algo que cuesta \$10 si únicamente se cuenta con \$5!).

A continuación se muestran los cálculos realizados directamente en forma tabular:

Etapa 1. Planta 1

La ecuación recursiva es:

$$f_1(y_1) = \max\{R_1(k_1)\}$$

k_1: representa a las alternativas (el nivel de inversión o cantidad de dinero que se requiere)
y_1: el estado que se tiene en esta etapa (el presupuesto asignado o la cantidad de dinero con el que se cuenta)

y_1	$R_1(k_1)$				Solución óptima	
	$k_1 = 0$	$k_1 = 10$	$k_1 = 20$	$k_1 = 30$	$f_1(y_1)$	k_1*
0	0	-	-	-	0	0
10	0	2	-	-	2	10
20	0	2	4	-	4	20
30	0	2	4	6	6	30

Obsérvese, por ejemplo, que con un presupuesto asignado de 0 millones de u.m. solamente se puede cubrir la primera alternativa, que requiere un nivel de inversión de 0 millones de u.m.; el resto de las alternativas se convierten automáticamente en no factibles. Con un presupuesto asignado de 10 millones de u.m. se cubren las dos primeras alternativas que requieren de 0 y 10 millones de u.m. respectivamente; el resto de las alternativas son no factibles (¡están más allá de la cantidad de dinero con que se cuenta!). Y el análisis es el mismo para el resto de los valores del estado y_1.

Etapa 2. Planta 2

La ecuación recursiva es:

$f_2(y_2) = \max\{R_2(k_2) + f_1(y_2 - k_2)\}$

y_2	$R_2(k_2) + f_1(y_2 - k_2)$				Solución óptima	
	$k_2 = 0$	$k_2 = 10$	$k_2 = 20$	$k_2 = 30$	$f_2(y_2)$	k_2*
0	0 + 0 = 0	-	-	-	0	0
10	0 + 2 = 2	1 + 0 = 1	-	-	2	0
20	0 + 4 = 4	1 + 2 = 3	5 + 0 = 5	-	5	20
30	0 + 6 = 6	1 + 4 = 5	5 + 2 = 7	6 + 0 = 6	7	20

Obsérvese, por ejemplo, el último renglón de la tabla en donde se tiene asignado una cantidad de dinero de 30 millones de u.m. Si se considera la alternativa de invertir 20 millones de u.m. en la planta 2, ésta generará una cantidad de **5 unidades de energía**, pero todavía se cuenta con 10 millones de u.m. (diferencia entre lo que se tiene de dinero y lo que se requiere) para invertirlo en la planta 1. De la tabla de la planta 1 se observa que cuando se cuenta con 10 millones de u.m. la cantidad máxima de energía que se puede obtener es de **2 unidades de energía**. Por lo tanto, para $k_2 = 20$ dado $y_2 = 30$ la ecuación recursiva proporciona un valor de 7.

Etapa 3. Planta 3

La ecuación recursiva es:

$f_3(y_3) = \max\{R_3(k_3) + f_2(y_3 - k_3)\}$

y_3	$R_3(k_3) + f_2(y_3 - k_3)$				Solución óptima	
	$k_3 = 0$	$k_3 = 10$	$k_3 = 20$	$k_3 = 30$	$f_3(y_3)$	k_3*
0	0 + 0 = 0	-	-	-	0	0
10	0 + 2 = 2	3 + 0 = 3	-	-	3	10
20	0 + 5 = 5	3 + 2 = 5	5 + 0 = 5	-	5	0, 10, 20
30	0 + 7 = 7	3 + 5 = 8	5 + 2 = 7	6 + 0 = 6	8	10

De hecho, en la tabla anterior solamente sería necesario realizar los cálculos correspondientes al último renglón ($y_3 = 30$) debido a que se requiere que al final se utilicen los 30 millones de u.m. disponibles.

La solución óptima es:

y_3	k_3*	$y_2 = y_3 - k_3$*	k_2*	$y_1 = y_2 - k_2$*	k_1*
30 →	$\boxed{10}$	30 − 10 = 20 →	$\boxed{20}$	20 − 20 = 0 →	$\boxed{0}$

(k_1*, k_2*, k_3*) = (0, 20, 10)

Dicha solución indica que se tiene que tomar la opción de invertir 0 millones de unidades monetarias en la planta 1 para obtener 0 unidades de energía, 20 millones de unidades monetarias en la planta 2 para obtener 5 unidades de energía y, finalmente, 10 millones de unidades monetarias en la planta 3 para obtener 3 unidades de energía. La energía total obtenida es de 0 + 5 + 3 = 8 unidades de energía con un nivel de inversión requerido 0 + 20 + 10 = 30 millones de unidades monetarias. Los resultados anteriores coinciden con lo que se tiene en el último renglón correspondiente a la etapa 3.

3.2 CÁLCULOS EN EL SENTIDO DE RETROCESO

En los ejemplos anteriores los cálculos se han realizado en el sentido de avance, es decir, calculando primero la etapa 1, a continuación la etapa 2, luego la etapa 3 y así sucesivamente. Sin embargo, en muchas ocasiones los cálculos de los problemas de programación dinámica pueden comenzar en la última etapa y terminar en la primera, es decir, los cálculos se llevan a cabo en el sentido de retroceso. Esto se debe principalmente a que algunas veces los cálculos y la manera de establecer la ecuación recursiva o de retorno se vuelven más sencillos. Por lo tanto, el sentido de avance o de retroceso depende de la forma en que resulte más sencillo realizar los cálculos. La diferencia principal entre ambos sentidos de cálculo se encuentra en la **definición de los estados**. Así, para el ejemplo anterior se tiene que:

y_1: abarca el presupuesto de la planta 1
y_2: abarca el presupuesto de las plantas 1 y 2
y_3: abarca el presupuesto de las plantas 1, 2 y 3

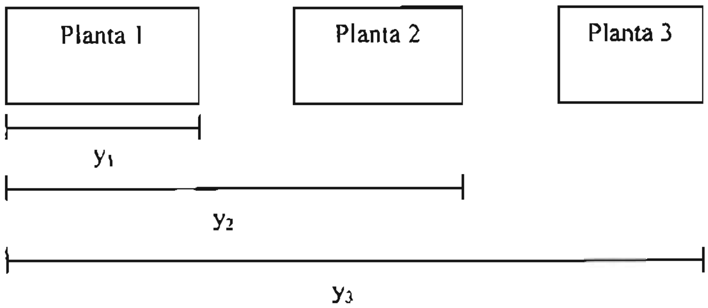


Fig. 3.1 Cálculos en el sentido de avance

En el siguiente ejemplo que se realizará los cálculos se realizan en el sentido de retroceso. Es decir:

y_3: abarca el presupuesto de la planta 3
y_2: abarca el presupuesto de las plantas 2 y 3
y_1: abarca el presupuesto de las plantas 1, 2 y 3

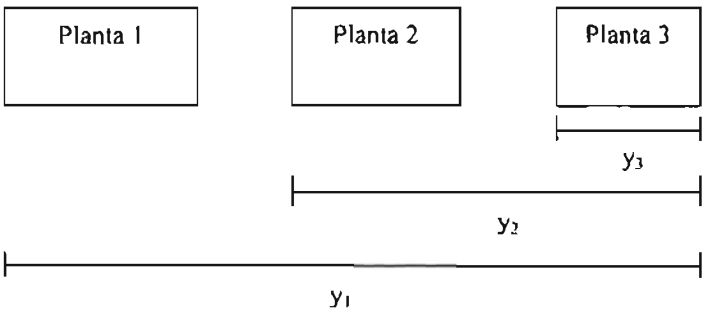


Fig. 3.2 Cálculos en el sentido de retroceso

Ejemplo 3.3 Construcción de plantas de energía (cálculos en sentido de retroceso)

Se resolverá a continuación el ejemplo 3.2 realizando los cálculos en sentido de retroceso.

Solución:

Se comienza, ahora, con la etapa 3 en donde la ecuación recursiva es:

$f_3(y_3) = \max\{R_3(k_3)\}$

$f_3(y_3)$: es la cantidad óptima (máxima) obtenida de la planta 3 dado el estado y_3.

Para las etapas 2 y 1 la ecuación recursiva es:

$f_j(y_j) = \max\{R_j(k_j) + f_{j+1}(y_j - k_j) \mid k_j \leq y_j\}$, para j = 1, 2

$f_2(y_2)$: es la cantidad óptima (máxima) obtenida de las plantas 2 y 3 dado el estado y_2.

$f_1(y_1)$: es la cantidad óptima (máxima) obtenida de las plantas 1, 2 y 3 dado el estado y_1.

Los cálculos se realizan en forma tabular:

Etapa 3. Planta 3

y_3	$R_3(k_3)$				Solución óptima	
	$k_3 = 0$	$k_3 = 10$	$k_3 = 20$	$k_3 = 30$	$f_3(y_3)$	k_3^*
0	0	-	-	-	0	0
10	0	3	-	-	3	10
20	0	3	5	-	5	20
30	0	3	5	6	6	30

Etapa 2. Planta 2

y_2	$R_2(k_2) + f_3(y_2 - k_2)$				Solución óptima	
	$k_2 = 0$	$k_2 = 10$	$k_2 = 20$	$k_2 = 30$	$f_2(y_2)$	k_2^*
0	0 + 0 = 0	-	-	-	0	0
10	0 + 3 = 3	1 + 0 = 1	-	-	3	0
20	0 + 5 = 5	1+ 3 = 4	5 + 0 = 5	-	5	0, 20
30	0 + 6 = 6	1 + 5 = 6	5 + 3 = 8	6 + 0 = 6	8	20

Obsérvese que, como en el ejemplo anterior, la diferencia entre el dinero que se tiene y lo que se requiere para determinada alternativa se utiliza para obtener la energía óptima de la etapa anterior (etapa 3).

Etapa 1. Planta 1

y	$R_1(k_1) + f_2(y_1 - k_1)$				Solución óptima	
	$k_1 = 0$	$k_1 = 10$	$k_1 = 20$	$k_1 = 30$	$f_1(y_1)$	k_1^*
0	0 + 0 = 0	-	-	-	0	0
10	0 + 3= 3	2 + 0 = 2	-	-	3	0
20	0 + 5 = 5	2 + 3 = 5	4 + 0 = 4	-	5	0, 10
30	0 + 8 = 8	2 + 5 = 7	4 + 3 = 7	6 + 0 = 6	8	0

Nuevamente, se puede observar que para la última tabla es suficiente con hacer los cálculos para el estado y_1 = 30 debido a que al final se tiene que utilizar todo el recurso disponible (30 millones de unidades monetarias).

La solución óptima es:

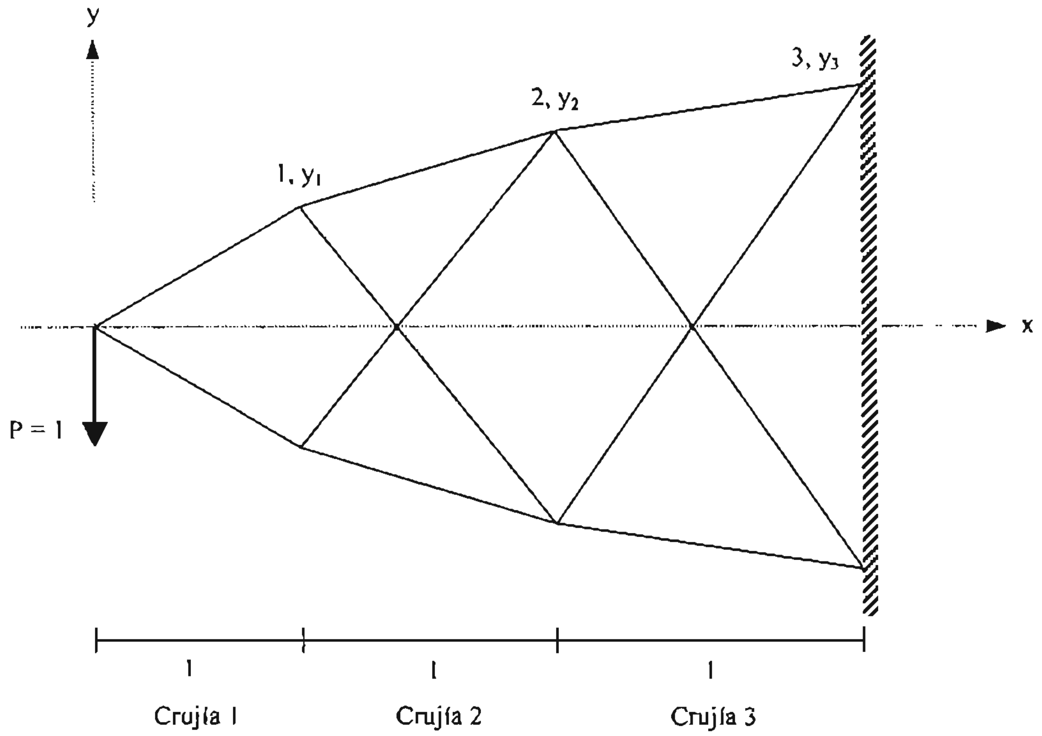
y_1	k_1^*	$y_2 = y_1 - k_1^*$	k_2^*	$y_3 = y_2 - k_2^*$	k_3^*
30 →	0	30 − 0 = 30 →	20	30 − 20 = 10 →	10

$(k_1^*, k_2^*, k_3^*) = (0, 20, 10)$, con una cantidad máxima de energía obtenida de 8 unidades (ver último renglón de la tabla correspondiente a la etapa 3).

La cual es la misma solución que en el ejemplo anterior.

Ejemplo 3.4 Obtención de la geometría de una armadura

Se desea optimizar el diseño de la geometría de una armadura como la que se muestra a continuación:



Las crujías están numeradas de izquierda a derecha del 1 al 3. La configuración de la armadura está definida por las coordenadas x, y de los nodos. Se considera que las crujías tienen una longitud unitaria y que la armadura es simétrica con respecto al eje x. En el extremo izquierdo actúa una carga vertical unitaria y en el extremo derecho la armadura se encuentra empotrada. Debido a que la armadura es estáticamente determinada, la fuerza axial en cada una de las barras depende de la geometría que está dada por las ordenadas y_1, y_2, y_3 de la cuerda superior. En otras palabras, las fuerzas en las barras de la crujía i solamente dependen de y_{i-1} y y_i. La restricción que presenta el problema es que cada y_i solamente puede tomar los valores de 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.

Se trata de minimizar el costo del diseño que se asigna a cada barra de la armadura.

Solución:

Una forma de determinar el costo de diseño de las barras es considerando uno costo unitario por unidad de volumen, así como un esfuerzo a tensión o a compresión unitario. De tal manera que:

$$f = \frac{F}{A}$$

$$1 = \frac{F}{A}$$

A = F

Multiplicando ambos lados por la longitud, L:

L A = F L

V = F L

Es decir que el volumen de cualquier barra es el producto de su fuerza axial y de su longitud. Debido a que se está considerando un costo de una unidad por unidad de volumen, el costo de cada barra es el producto de su longitud y el valor absoluto de su carga axial:

C = |F| L

Debido a que, como se mencionó anteriormente, y_{i-1} y y_i determinan las fuerzas axiales y las longitudes de las barras que se encuentran en la crujía i, el costo de la misma es función de ambas variables. Si se representa tal costo como $C_i(y_{i-1}, y_i)$, el costo de las primeras i crujías es:

$C_1(y_0 = 0, y_1) + C_2(y_1, y_2) + ... + C_i(y_{i-1}, y_i)$

Si $f_i(y_i)$ es el mínimo de la expresión anterior, entonces:

$\boldsymbol{f_1(y_1) = min\{C_1(0, y_1)\}}$

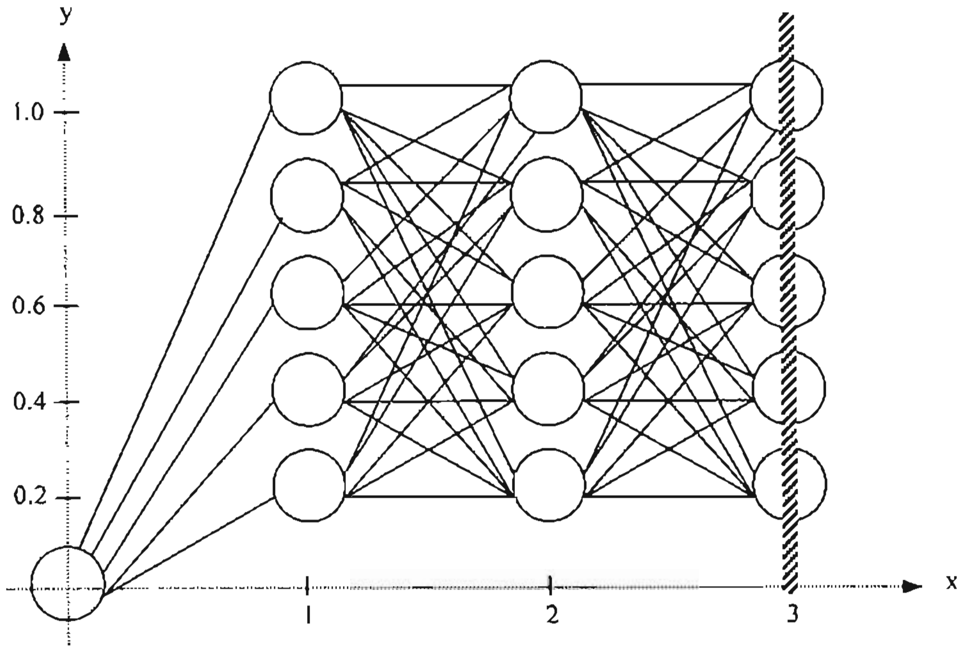
y,

$\boldsymbol{f_i(y_i) = min\{C_i(y_{i-1}, y_i) + f_{i-1}(y_{i-1})\}, i = 2 , 3}$

Lo cual representa el mínimo costo de las primeras i crujías si su extremo derecho se fija en (i, y_i). Y si para un valor fijo de y_i se hace una elección arbitraria de y_{i-1}, el costo del segmento de (i, y_i) a $(i-1, y_{i-1})$ queda representado por $C_i(y_{i-1}, y_i)$, mientras que el costo del recorrido restante de $(i-1, y_{i-1})$ a $(0, 0)$ es $f_{i-1}(y_{i-1})$.

Otra forma de encontrar el diseño óptimo es mediante la enumeración exhaustiva. Es decir, se tienen que analizar y comparar todas las posibles rutas o caminos que corresponden a un diseño diferente.

En la siguiente figura se muestran las diferentes posibilidades que suman entre todas ellas 125. Por lo cual, esta forma de encontrar el diseño óptimo no sería adecuada, ya que se tendría que hacer un análisis estructural para cada una de las posibilidades.



Por lo tanto, resulta mejor resolver el problema mediante programación dinámica utilizando las ecuaciones recursivas definidas previamente:

$f_1(y_1) = \min\{C_1(0, y_1)\}$

$f_i(y_i) = \min\{C_i(y_{i-1}, y_i) + f_{i-1}(y_{i-1})\}$, $i = 2, 3$

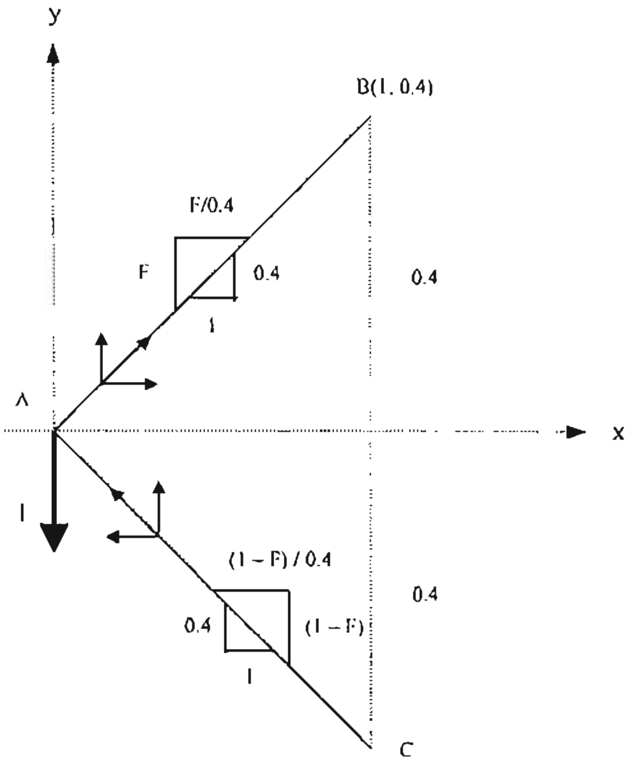
Las crujías de la armadura representan las **etapas del sistema**. Los valores de y_i representan los **estados**, en donde para cada y_i (fijo) se tienen cinco alternativas, $y_{i-1} = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$, excepto para la etapa 1, en donde $y_{i-1} = y_0 = 0$.

Al utilizar las funciones anteriores es importante definir las expresiones $C_1(0, y_1)$ y $C_i(y_{i-1}, y_i)$ en términos de y_i y y_{i-1} de tal forma que permitan determinar el costo de las barras de la crujía *i* (etapa *i*) sin necesidad de llevar a cabo los análisis estructurales correspondientes.

Por ejemplo, para la etapa 1 (crujía 1), se tiene como única alternativa $y_0 = 0$, mientras que los posibles estados de y_1 son: 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0.

Si se considera $y_1 = 0.4$, para conocer el costo asociado a la crujía 1 se tiene que realizar el análisis de las fuerzas en las barras:

Por conservación de proyecciones se tiene:



Por $\sum F_y = 0$

$-1 + F + AC_y = 0$

$AC_y = 1 - F \Rightarrow AC_x = (1 - F)/0.4$

Por $\sum F_x = 0$

$$\frac{F}{0.4} - \frac{(1-F)}{0.4} = 0$$

$F - (1 - F) = 0$

$F - 1 + F = 0$

$F = 0.5$

$$\therefore \; AB = \sqrt{(AB_x)^2 + (AB_y)^2}$$

con $AB_y = F = 0.5$

$AB_x = F / 0.4 = 0.125$

$AB = 1.346 \rightarrow$ Fuerza axial en la barra

La barra AC es simétrica a la barra AB, por lo que:

$AC = 1.346 \rightarrow$ Fuerza axial en la barra

La longitud de ambas barras es:

$$L = \sqrt{(1)^2 + (0.4)^2} = 1.0770$$

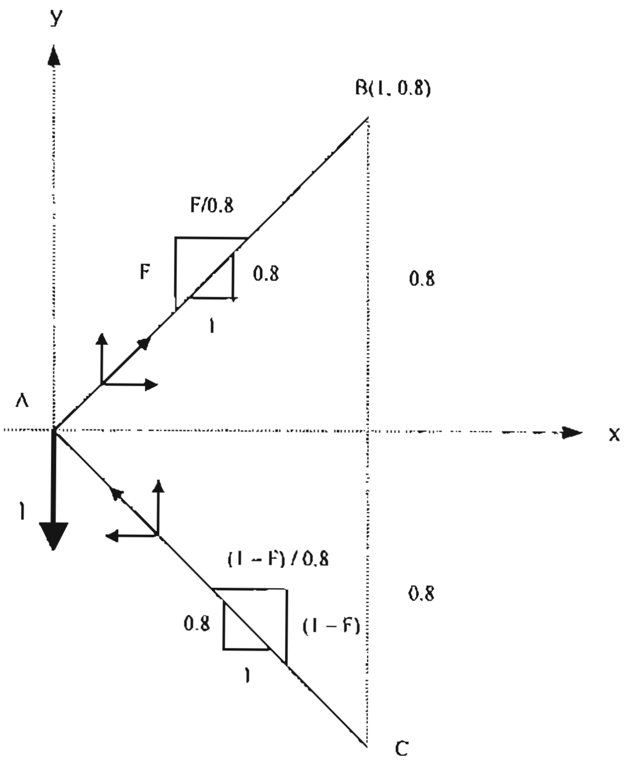
El costo de diseño de una barra se definió como $C = |F|L$, por lo tanto:

Costo de la crujía = (2) (Fuerza) (Longitud)

Costo de la crujía = (2) (1.346) (1.0770) = 2.90

Es decir que cuando $y_{II} = 0$ y $y_I = 0.4$, el costo de diseño es de 2.90

Ahora, considerando $y_I = 0.8$, se tendría:



Por $\sum F_y = 0$
$-1 + F + AC_y = 0$
$AC_y = 1 - F \Rightarrow AC_x = (1 - F)/0.8$

Por $\sum F_x = 0$

$$\frac{F}{0.8} - \frac{(1-F)}{0.8} = 0$$

$F - (1 - F) = 0$
$F - 1 + F = 0$
$F = 0.5$

$$\therefore AB = AC = \sqrt{\left(\frac{0.5}{0.8}\right)^2 + (0.5)^2} = 0.80 \rightarrow \text{Fuerza axial en las barras}$$

$$L = \sqrt{(1)^2 + (0.8)^2} = 1.281$$

Costo de la crujía = (2) (0.80) (1.281) = 2.05

Se puede apreciar que para cualquier valor de y_I el costo de la crujía I es:

Costo de la crujía = $2\sqrt{\left(\frac{0.5}{y_1}\right)^2 + (0.5)^2}\sqrt{(1)^2 + y_1^2}$

Costo de la crujía = $2\sqrt{\frac{0.25}{y_1^2} + 0.25}\sqrt{1 + y_1^2}$

(Costo de la crujía)^2 = $4\left(\frac{0.25}{y_1^2} + 0.25\right)(1 + y_1^2)$

(Costo de la crujía)^2 = $4\left(0.25 + 0.25y_1^2 + \frac{0.25}{y_1^2} + 0.25\right)$

(Costo de la crujía)^2 = $y_1^2 + \frac{1}{y_1^2} + 2$

Costo de la crujía = $\sqrt{y_1^2 + \frac{1}{y_1^2} + 2}$

Factorizando,

Costo de la crujía = $\sqrt{y_1^2 + \frac{1}{y_1^2} + 2} = \sqrt{\left(y_1 + \frac{1}{y_1}\right)\left(y_1 + \frac{1}{y_1}\right)}$

Costo de la crujía = $\sqrt{\left(y_1 + \frac{1}{y_1}\right)^2}$

Costo de la crujía = $y_1 + \frac{1}{y_1}$

Es decir,

$$\boxed{C_1(0, y_1) = y_1 + \frac{1}{y_1}}$$

De manera similar se puede llegar a determinar que:

$$C_i(y_{i-1}, y_i) = i(1 + y_{i-1}^2)/y_i - (i-2)y_i \quad para\ i > 1,\ \frac{y_i}{i} < \frac{y_{i-1}}{i-1}$$

y

$$C_i(y_{i-1}, y_i) = (i-1)(1 + y_i^2)/y_{i-1} - (i+1)y_{i-1} \quad para\ i > 1,\ \frac{y_i}{i} > \frac{y_{i-1}}{i-1}$$

Las ecuaciones recursivas se convierten, entonces, en:

$$f_1(y_1) = \min\left\{y_1 + \frac{1}{y_1}\right\}$$

$$f_i(y_i) = \min\left\{\frac{i(1+y_{i-1}^2)}{y_i} - (i-2)(y_i) + f_{i-1}(y_{i-1})\right\} \qquad para\ \ i = 2,3\ \ con\ \frac{y_i}{i} < \frac{y_{i-1}}{i-1}$$

y

$$f_i(y_i) = \min\left\{\frac{(i-1)(1+y_i^2)}{y_{i-1}} - (i+1)(y_{i-1}) + f_{i-1}(y_{i-1})\right\} \qquad para\ \ i = 2,3\ \ con\ \frac{y_i}{i} > \frac{y_{i-1}}{i-1}$$

En caso de que $\frac{y_i}{i} = \frac{y_{i-1}}{i-1}$, se puede aplicar cualquiera de las dos últimas expresiones.

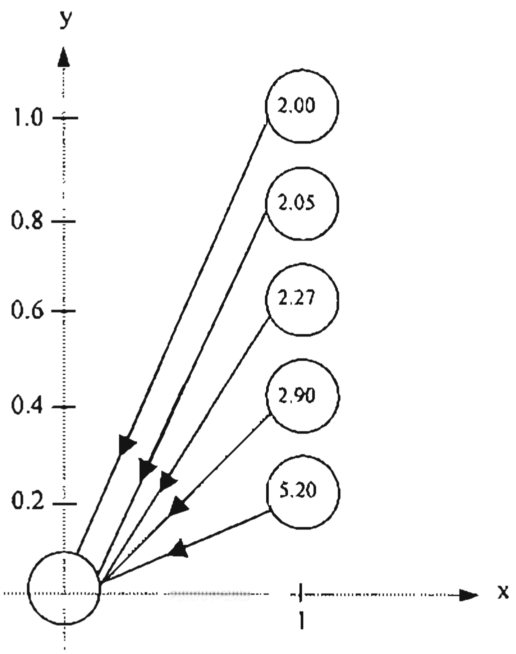
Los cálculos se realizan en forma tabular en el sentido de avance.

Etapa 1. Crujía 1

$$f_1(y_1) = \min\left\{y_1 + \frac{1}{y_1}\right\}$$

y_1	$y_1 + \frac{1}{y_1}$	Solución óptima	
	$y_0 = 0$	$f_1(y_1)$	y_0*
0.2	5.20	5.20	0
0.4	2.90	2.90	0
0.6	2.27	2.27	0
0.8	2.05	2.05	0
1.0	2.00	2.00	0

Estos resultados se pueden representar esquemáticamente de la siguiente manera:



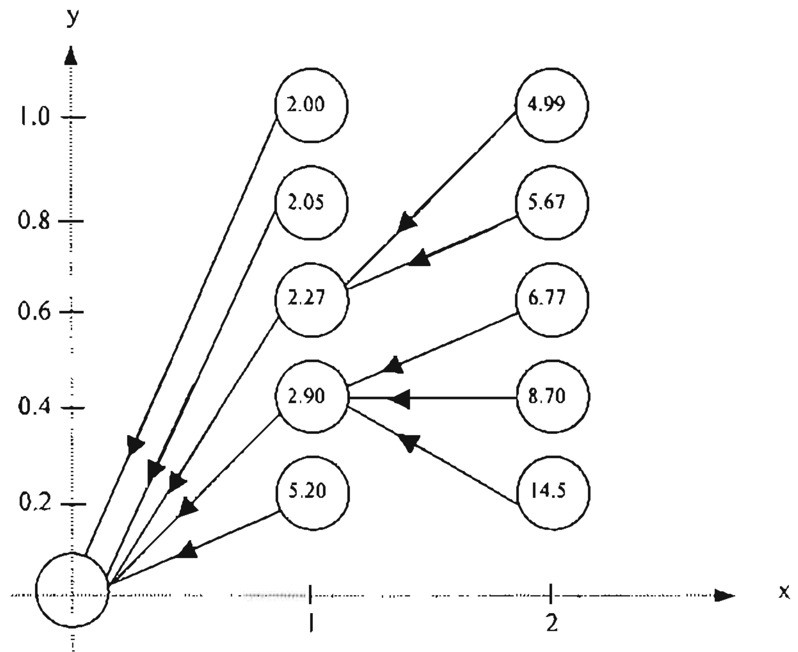
Etapa 2. Crujía 2

$$f_2(y_2) = \min\left\{\frac{2(1+y_1^2)}{y_2} + f_1(y_1)\right\}, \quad para \quad \frac{y_2}{2} < \frac{y_1}{1}$$

$$f_2(y_2) = \min\left\{\frac{(1+y_2^2)}{y_1} - y_1 + f_1(y_1)\right\}, \quad para \quad \frac{y_2}{2} > \frac{y_1}{1}$$

y_2	$C_2(y_1,y_2) + f_1(y_1)$					Solución óptima	
	$y_1 = 0.2$	$y_1 = 0.4$	$y_1 = 0.6$	$y_1 = 0.8$	$y_1 = 1.0$	$f_2(y_2)$	y_1^*
0.2	10.4 + 5.2 = 15.6	11.6 + 2.9 = 14.5	13.6 + 2.27 = 15.87	16.4 + 2.05 = 18.45	20 + 2 = 22	14.5	0.4
0.4	5.2 + 5.2 = 10.4	5.8 + 2.9 = 8.7	6.8 + 2.27 = 9.07	8.2 + 2.05 = 10.25	10 + 2 = 12	8.7	0.4
0.6	6.6 + 5.2 = 13.2	3.87 + 2.9 = 6.77	4.53 + 2.27 = 6.8	5.47 + 2.05 = 7.52	6.67 + 2 = 8.67	6.77	0.4
0.8	8 + 5.2 = 13.2	2.9 + 2.9 = 5.8	3.4 + 2.27 = 5.67	4.10 + 2.05 = 6.15	5 + 2 = 7	5.67	0.6
1.0	9.8 + 5.2 = 15	4.6 + 2.9 = 7.5	2.72 + 2.27 = 4.99	3.28 + 2.05 = 5.33	4 + 2 = 6	4.99	0.6

Esquemáticamente:



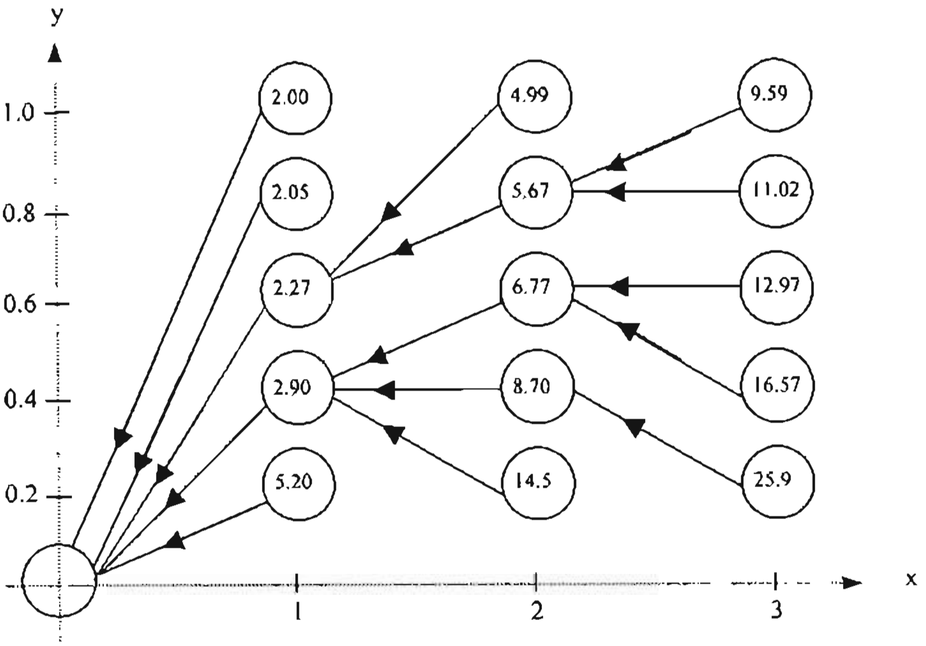
Etapa 3. Crujía 3

$$f_3(y_3) = \min\left\{\frac{3(1+y_2^2)}{y_3} - y_3 + f_2(y_2)\right\}, \quad para \quad \frac{y_3}{3} < \frac{y_2}{2}$$

$$f_3(y_3) = \min\left\{\frac{2(1+y_3^2)}{y_2} - 4y_2 + f_2(y_2)\right\}, \quad para \quad \frac{y_3}{3} > \frac{y_2}{2}$$

y_3	$C_3(y_2,y_3) + f_2(y_2)$					Solución óptima	
	$y_2 = 0.2$	$y_2 = 0.4$	$y_2 = 0.6$	$y_2 = 0.8$	$y_2 = 1.0$	$f_3(y_3)$	y_2^*
0.2	15.4 + 14.5 = 29.9	17.2 + 8.7 = 25.9	20.2 + 6.77 = 26.97	24.4 + 5.67 = 30.07	29.8 + 4.99 = 34.79	25.9	0.4
0.4	10.8 + 14.5 = 25.3	8.3 + 8.7 = 17.0	9.8 + 6.77 = 16.57	11.9 + 5.67 = 17.57	14.6 + 4.99 = 19.59	16.57	0.6
0.6	12.8 + 14.5 = 27.3	5.2 + 8.7 = 13.9	6.2 + 6.77 = 12.97	7.6 + 5.67 = 13.27	9.4 + 4.99 = 14.39	12.97	0.6
0.8	15.6 + 14.5 = 30.1	6.6 + 8.7 = 15.3	4.3 + 6.77 = 11.07	5.35 + 5.67 = 11.02	6.7 + 4.99 = 11.69	11.02	0.8
1.0	19.2 + 14.5 = 33.7	8.4 + 8.7 = 17.1	4.27 + 6.77 = 11.04	3.92 + 5.67 = 9.59	5.0 + 4.99 = 9.99	9.59	0.8

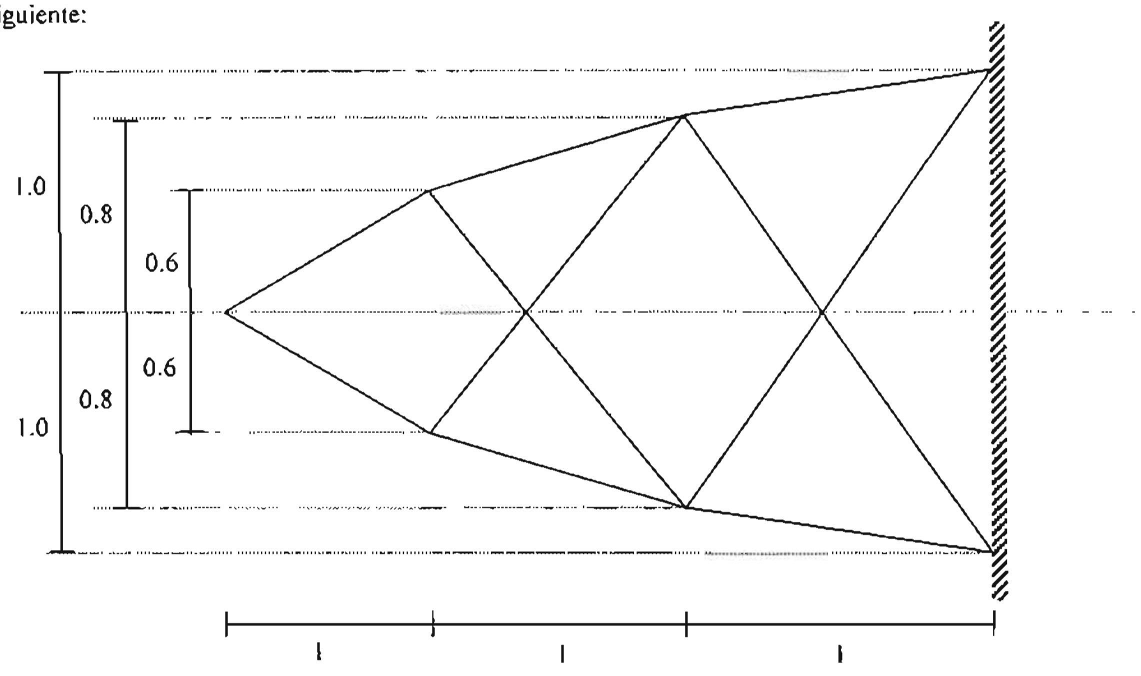
Esquemáticamente:



De la figura anterior se puede observar que, en la etapa 3, el menor de los costos que se tiene para la armadura es de 9.59 con:

$y_3 = 1.0 \Rightarrow y_2 = 0.8 \Rightarrow y_1 = 0.6$

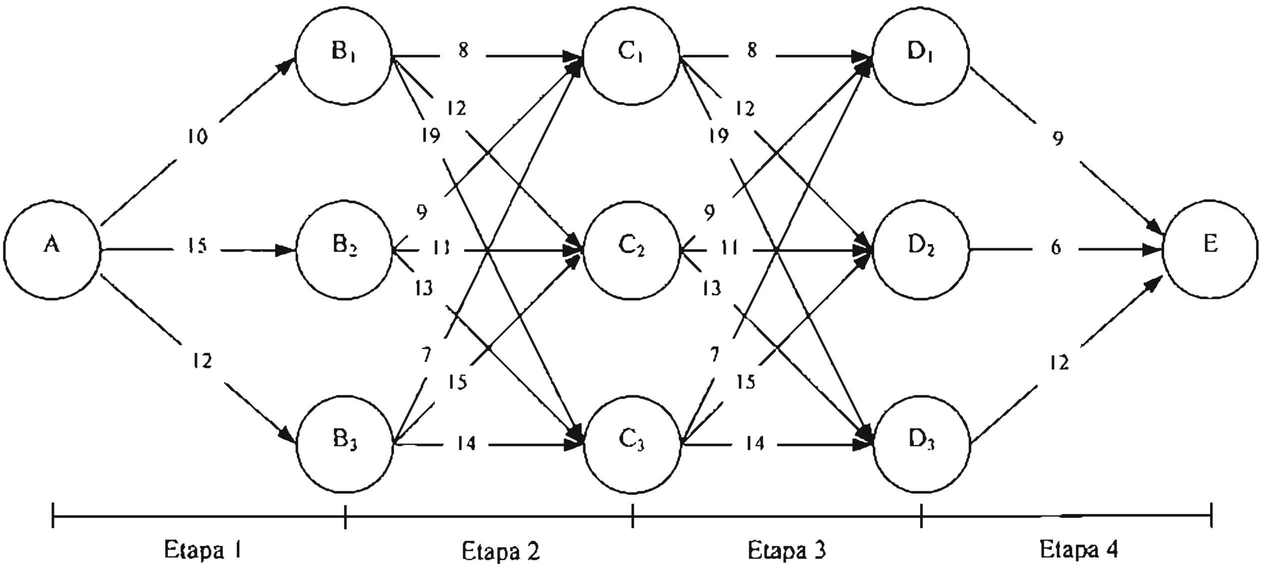
Es decir que la geometría óptima (diseño óptimo) de la armadura que proporciona el menor costo es la siguiente:



Si, por ejemplo, el valor de y_3 estuviera restringido a 0.4, el costo mínimo de la armadura sería de 16.57 con $y_2 = 0.6$ y $y_1 = 0.4$

Ejemplo 3.5 Línea de tubería

Una línea de tuberías para conducción de agua se va a establecer entre los puntos (ciudades) A y E. La línea de tubería debe pasar por uno de los nodos B_1, B_2 y B_3, por uno de los C_1, C_2 y C_3 y por uno de D_1, D_2 y D_3. Los costos asociados con cada segmento de la línea de tubería junto con las etapas en que se puede dividir el problema se muestran a continuación:



Determinar el conjunto de segmentos que minimiza el costo de la línea de tubería.

Solución:

El problema se puede resolver en el sentido de avance o de retroceso. Se decide arbitrariamente resolverlo en **el sentido de retroceso**.

Los estados, y, quedan definidos por los nodos origen en cada una de las **etapas**, mientras que las **alternativas**, k, son los nodos destino.

Las ecuaciones recursivas o de retorno que se van a utilizar son las siguientes:

Para la etapa 4:

$f_4(y_4) = \min\{C_4(k_4)\}$

donde,

$y_4 = \{D_1, D_2, D_3\} \rightarrow$ nodos origen

$k_4 = \{E\} \rightarrow$ nodo detino

Para el resto de las etapas:

$f_j(y_j) = \min\{C_j(k_j) + f_{j+1}(k_j)\}$, $j = 1, 2, 3$

$C_j(k_j)$: es el costo del segmento de tubería que va del nodo origen y_j a la alternativa como nodo destino k_j.

Etapa 4 (j = 4)

y_4	$C_4(k_4)$	Solución óptima	
	$k_4 = E$	$f_4(k_4)$	k_4*
D_1	9	9	E
D_2	6	6	E
D_3	12	12	E

Etapa 3 (j = 3)

y_3	$C_3(k_3) + f_4(k_3)$			Solución óptima	
	$k_3 = D_1$	$k_3 = D_2$	$k_3 = D_3$	$f_3(y_3)$	k_3*
C_1	8 + 9 = 17	12 + 6 = 18	19 + 12 = 31	17	D_1
C_2	9 + 9 = 18	11 + 6 = 17	13 + 12 = 25	17	D_2
C_3	7 + 9 = 16	15 + 6 = 21	14 + 12 = 26	16	D_1

Etapa 2 (j = 2)

y_2	$C_2(k_2) + f_3(k_2)$			Solución óptima	
	$k_2 = C_1$	$k_2 = C_2$	$k_2 = C_3$	$f_2(y_2)$	k_2*
B_1	8 + 17 = 25	12 + 17 = 29	19 + 16 = 35	25	C_1
B_2	9 + 17 = 26	11 + 17 = 28	13 + 16 = 29	26	C_1
B_3	7 + 17 = 24	15 + 17 = 32	14 + 16 = 30	24	C_1

Etapa 1 (j = 1)

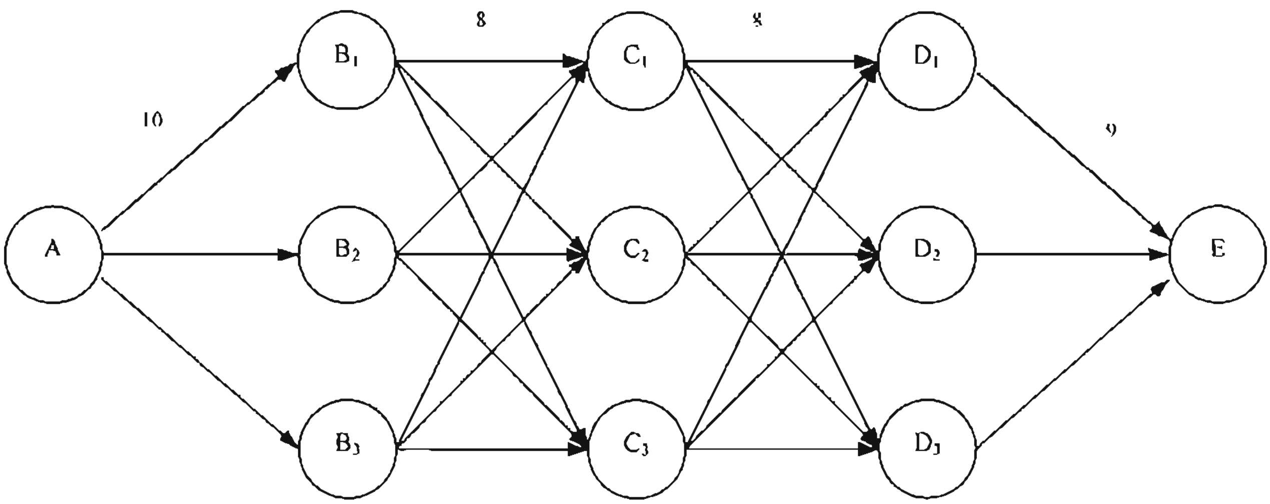
y_1	$C_1(k_1) + f_2(k_1)$			Solución óptima	
	$k_1 = B_1$	$k_1 = B_2$	$k_1 = B_3$	$f_1(y_1)$	k_1*
A	10 + 25 = 35	15 + 26 = 41	12 + 24 = 36	35	B_1

De esta última tabla se obtiene directamente el costo mínimo de la línea de tubería: 35

La solución óptima es:

y_1	k_1*	y_2	k_2*	y_3	k_3*	y_4	k_4*
A →	$\boxed{B_1}$ →	B_1 →	$\boxed{C_1}$ →	C_1 →	$\boxed{D_1}$	D_1 →	$\boxed{E}$

Es decir, la línea de tubería con el menor costo que conecta a las ciudades A y E es:



Costo = 10 + 8 + 8 + 9 = 35

CAPÍTULO 4

4. PROGRAMACIÓN NO LINEAL Y PROBLEMAS DE DISEÑO

La mayoría de los problemas relativos a la **Ingeniería Civil**, principalmente los que tienen que ver con el diseño, son de carácter no lineal. Por esta razón los métodos de programación no lineal son quizá la herramienta más importante para resolver tales problemas.

Básicamente, se tienen dos tipos de enfoques para atacar problemas no lineales: el **enfoque clásico** y los **métodos numéricos**. En ambos, los modelos matemáticos pueden ser condicionados o incondicionados.

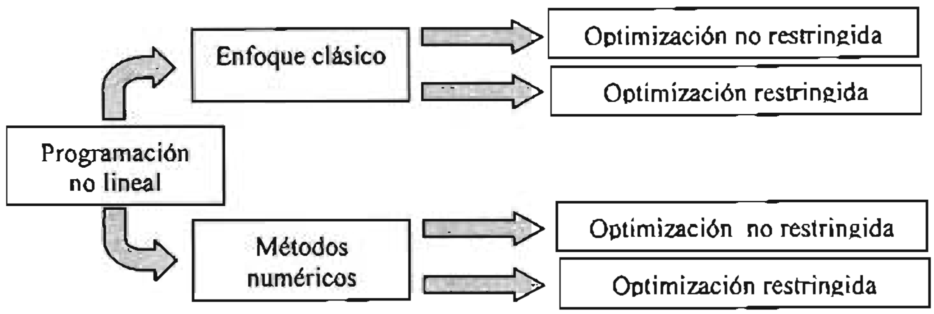


Fig. 4.1 La programación no lineal

En este capítulo, por razones de extensión, solamente se aborda el enfoque clásico, el cual requiere que el lector tenga nociones básicas de cálculo de una y de varias variables.

Los ejemplos que se muestran pertenecen principalmente al área de estructuras ya que son precisamente éstos en donde ha tenido su mayor aplicación la programación no lineal aunque en la actualidad su uso también es muy frecuente en las áreas de mecánica de suelos e hidráulica.

4.1 OPTIMIZACIÓN NO RESTRINGIDA

La optimización incondicionada consiste, como su nombre lo indica, en encontrar los valores de las variables de control que maximizan o minimizan el valor de una función objetivo, la cual no se encuentra sujeta a ninguna restricción. En otras palabras, los que se busca son los puntos extremos de una función.

Un punto x^0 es un **máximo** si $f(x^0+\Delta x)\leq f(x^0)$, en donde Δx es un valor suficientemente pequeño (positivo o negativo). Es decir, x^0 es un máximo debido a que el valor de f en cualquier punto de la vecindad de x^0 no excede a $f(x^0)$.

Un punto x^0 es un **mínimo** si $f(x^0+\Delta x)\geq f(x^0)$. Es decir, x^0 es un mínimo debido a que el valor de f en cualquier punto de la vecindad de x^0 no es menor que $f(x^0)$.

Un punto óptimo (máximo o mínimo) puede ser local o global. Un **máximo global** es el mayor de todos los máximos que puede tener la función en un intervalo determinado. Un **mínimo global** es el menor de los mínimos que puede tener la función en un intervalo determinado.

Por ejemplo, considérese la gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. En dicha figura se pueden identificar los siguiente puntos:

x^A: es un punto extremo del intervalo.
x^B: es un máximo global debido a que $f(x^B)=\max\{f(x^B), f(x^D)\}$.
x^C: es un mínimo local.

x^D: es un máximo local
x^E: es un punto de inflexión (tiene pendiente cero, pero no es máximo ni mínimo).
x^F: es un mínimo global debido a que $f(x^F) = \min\{f(x^C), f(x^F)\}$.
x^G: es un punto extremo del intervalo.

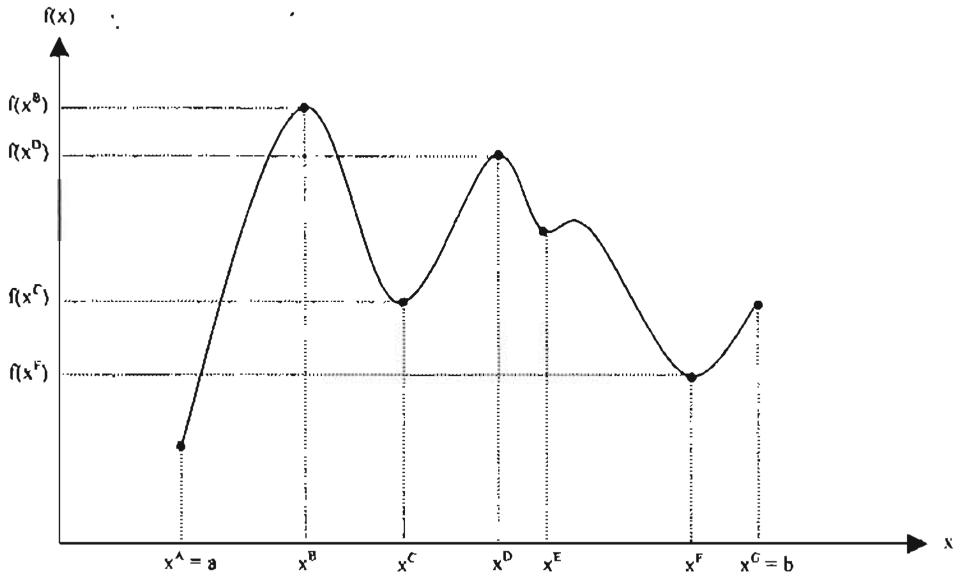


Fig. 4.2 Máximos y mínimos de una función

4.1.1 Concavidad y convexidad de funciones de una variable

Una **función** es **convexa** en el intervalo de x, $a \le x \le b$, si para cualquier valor de θ, entre cero y uno, $0 \le \theta \le 1$, se cumple que:

$$f(\theta a + (1-\theta)b) \le \theta f(a) + (1-\theta) f(b)$$

El valor de x se define en términos de a, b y θ.

$$x = \theta a + (1-\theta)b$$

En la siguiente figura se muestra la prueba de convexidad para una función $f(x)$.

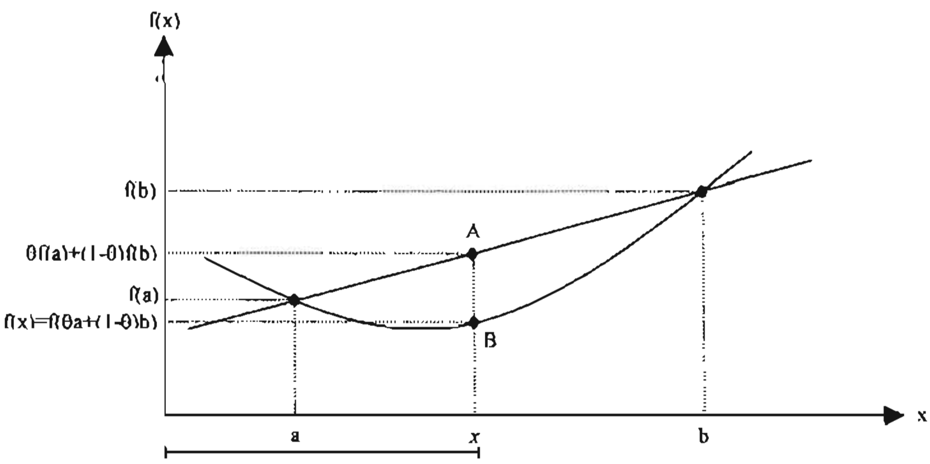


Fig. 4.3 Convexidad de una función

El punto B representa a $f(x) = f(\theta a + (1-\theta)b)$, mientras que el punto A representa a $\theta f(a) + (1-\theta)f(b)$. Debido a que $B \leq A$, la condición de convexidad se satisface para un valor dado de x.

Una **función es cóncava** en un intervalo de x, $a \leq x \leq b$, si para cualquier valor de θ, entre cero y uno, $0 \leq \theta \leq 1$, se cumple que:

$$f(\theta a + (1-\theta)b) \geq \theta f(a) + (1-\theta)f(b)$$

4.1.2 Condiciones necesarias y suficientes para funciones de una variable

Las condiciones necesarias y suficientes son aquellas que debe cumplir un punto x^0 para que sea un punto extremo (máximo, mínimo o punto de inflexión).

Condición necesaria

La primera derivada de $f(x)$ evaluada en x^0 es igual a cero.

$$\boxed{f'(x^0) = 0}$$

Condiciones suficientes

x^0 es un mínimo si $f^n(x^0) > 0$ y n es un entero par.
x^0 es un máximo si $f^n(x^0) < 0$ y n es un entero par.
x^0 es un punto de inflexión si $f^n(x^0) \neq 0$ y n es un entero non.

4.1.3 Concavidad y convexidad de funciones de n variables

Sea $f(x)$ una función de n variables, es decir, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Una función f(x) es una **función convexa** si satisface la siguiente inecuación:

$f(\theta x^1 + (1-\theta)x^2) \leq \theta f(x^1) + (1-\theta)f(x^2)$, para $0 \leq \theta \leq 1$ y en donde,

$x = \theta x^1 + (1-\theta)x^2$, o en forma matricial:

$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} + (1-\theta) \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$, en caso de que se tratase de una función bivariada.

Una función f(x) es una **función cóncava** si satisface la siguiente inecuación:

$f(\theta x^1 + (1-\theta)x^2) \geq \theta f(x^1) + (1-\theta)f(x^2)$, para $0 \leq \theta \leq 1$

Notación

Si f es una función de dos variables, entonces, se denota como $f(x_1, x_2)$.

Un punto x^l se representa como:

$$x^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix}$$

donde,

x_1^1 : valor de la variable x_1 para el punto 1.

x_2^1 : valor de la variable x_2 para el punto 1.

Un punto x^2 se representa como:

$$x^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$$

donde,

x_1^2 : valor de la variable x_1 para el punto 2.

x_2^2 : valor de la variable x_2 para el punto 2.

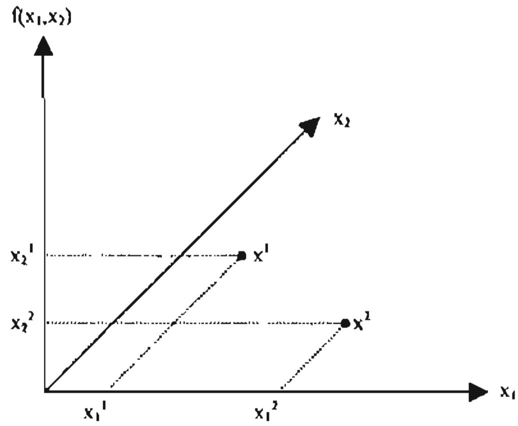


Fig. 4.4 Representación de un punto para una función bivariada

4.1.4 Condiciones necesarias y suficientes para funciones de n variables

Condición necesaria

La condición necesaria para que el punto $x^0 = \lfloor x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0 \rfloor$ sea un punto extremo (máximo, mínimo o punto de inflexión) de $f(x)$ es que:

$$\boxed{\nabla f(x^0) = 0}$$

Es decir, que en un punto extremo el gradiente evaluado en el punto x^0 se anula.

Condiciones suficientes

Las condiciones suficientes para que x^0 sea un punto extremo son:

Para un mínimo

Si la matriz Hessiana, H, evaluada en x^0 es **positiva definida**, entonces, x^0 es un mínimo.

La matriz Hessiana se define como:

$$H(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

La matriz hessiana es **positiva definida** si su k-ésimo menor principal es positivo. El k-ésimo menor principal de $H_{n \times n}$ está dado por:

$$\begin{vmatrix} h_{11} h_{12} \cdots h_{1k} \\ h_{21} h_{22} \cdots h_{2k} \\ \vdots \\ h_{k1} h_{k2} \cdots h_{kk} \end{vmatrix},\ k = 1,2,\ldots,n$$

Es decir, se tiene que cumplir lo siguiente:

Para $k = 1$, $|h_{11}| > 0$

Para $k = 2$, $\begin{vmatrix} h_{11} h_{12} \\ h_{21} h_{22} \end{vmatrix} > 0$

Para $k = 3$, $\begin{vmatrix} h_{11} h_{12} h_{13} \\ h_{21} h_{22} h_{23} \\ h_{31} h_{32} h_{33} \end{vmatrix} > 0$

Si el k-ésimo menor principal de H es no negativo (≥ 0), la matriz es **positiva semidefinida**.

La función que satisface la condición de la matriz hessiana positiva definida es una **función convexa**.

Para un máximo

Si la matriz Hessiana, H, evaluada en x^0 es **negativa definida**, entonces, x^0 es un máximo.

La matriz hessiana es **negativa definida** si su k-ésimo menor principal tiene el signo $(-1)^k$.

Es decir, se tiene que cumplir lo siguiente:

Para $k = 1$, $|h_{11}| < 0$

Para $k = 2$, $\begin{vmatrix} h_{11} h_{12} \\ h_{21} h_{22} \end{vmatrix} > 0$

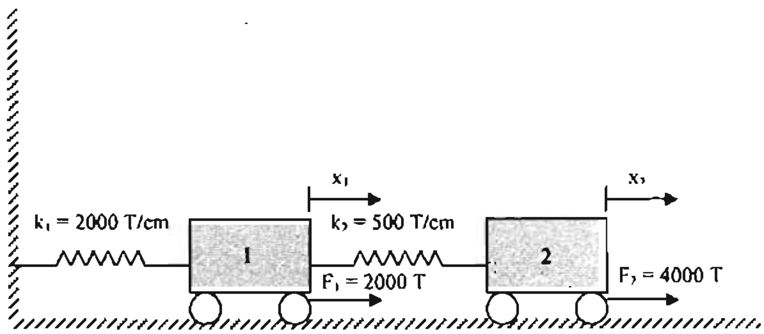
Para $k = 3$, $\begin{vmatrix} h_{11} h_{12} h_{13} \\ h_{21} h_{22} h_{23} \\ h_{31} h_{32} h_{33} \end{vmatrix} < 0$

Si el k-ésimo menor principal de H es cero o tiene el signo $(-1)^k$, la matriz es **negativa semidefinida**.

La función que satisface la condición de la matriz hessiana negativa definida es una **función cóncava**.

Ejemplo 4.1 Problema de dinámica estructural

Determinar los desplazamientos de un sistema estructural representado por masas y resortes con los siguientes datos:



La energía potencial del sistema es:

$EP = E_e - E_p$

donde,

EP: Energía potencial del sistema

E_e: Energía elástica de los resortes

$E_e = \frac{1}{2} k e^2$

e: Enlongación o desplazamiento relativo

E_p: Energía potencial debida a la fuerza aplicada

$E_p = Wx$

x: Desplazamiento de la masa (carro)

W: fuerza que actúa sobre la masa

Función objetivo

Al sustituir datos para la energía potencial del sistema se tiene

$$EP = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 - W_1 x_1 - W_2 x_2$$

Como se puede observar, la expresión está en función de los desplazamientos de las masas. Tales desplazamientos, a partir del equilibrio , se obtienen cuando la energía potencial del sistema es mínima, por lo cual la función objetivo es:

$$Min\ f(x) = \frac{1}{2}(2000)x_1^2 + \frac{1}{2}(500)(x_2^2 - 2x_1 x_2 + x_1^2) - 2000x_1 - 4000x_2$$

Condición necesaria

Se debe cumplir que el gradiente de $f(x)$ evaluado en x^0 sea nulo.

$$\nabla f(x^0) = 0$$

Solución

A partir de la condición anterior se encuentra el punto x^0:

$$\nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(x)}{x_1} = 2000x_1 - 500x_2 + 500x_1 - 2000 = 2500x_1 - 500x_2 - 2000$$

$$\frac{\partial f(x)}{x_2} = 500x_2 - 500x_1 - 4000$$

Se obtiene el sistema,

$$\begin{aligned} 2500x_1 - 500x_2 - 2000 &= 0 \\ -500x_1 + 500x_2 - 4000 &= 0 \end{aligned}$$

que al resolverse proporciona el punto buscado.

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Es decir, los desplazamientos que minimizan la energía potencial del sistema son:

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1 = 3 \\ &x_2 = 11 \\ &\textit{con } EP = -25000 \text{ T-cm} \end{aligned}}$$

Condición suficiente

La condición suficiente se utiliza para verificar si el punto encontrado se trata de un máximo o un mínimo.

Se determina, en primer lugar, la matriz hessiana de la función $f(x)$:

$$H(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$H(x)=\begin{pmatrix}2500 & -500\\ -500 & 500\end{pmatrix}$$

Al ser evaluada esta matriz en el punto x^0 se obtiene:

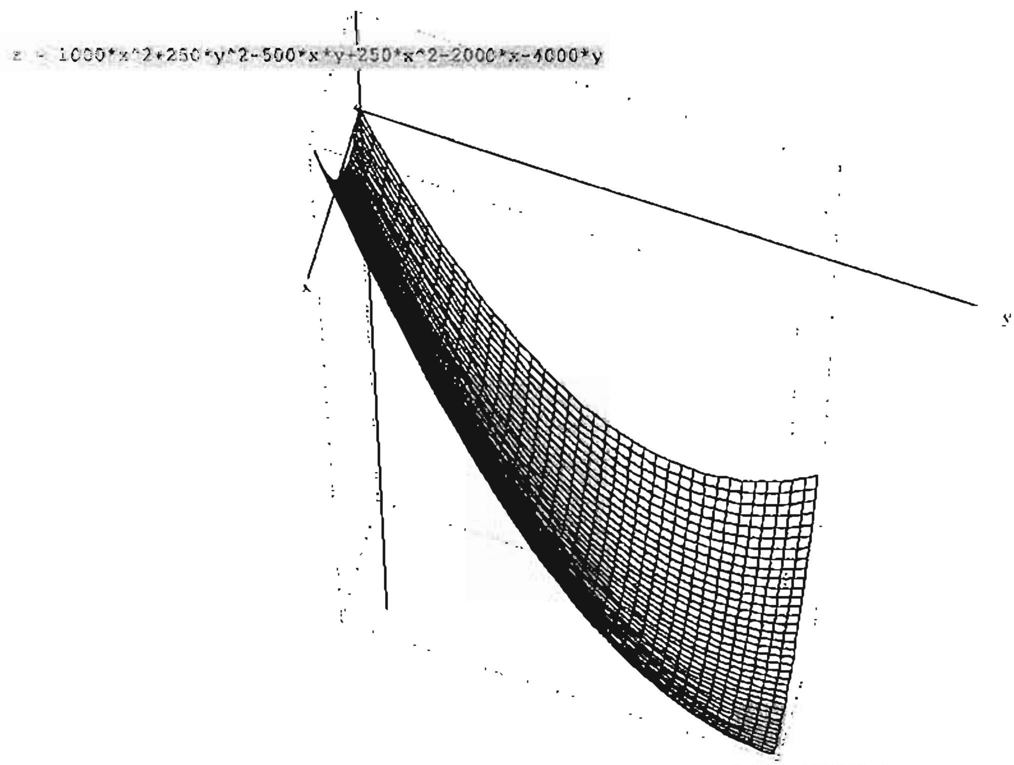
$$H(x^0)=\begin{pmatrix}2500 & -500\\ -500 & 500\end{pmatrix}$$

El k-ésimo menor principal de *$H(x^0)$* es:

$$\begin{vmatrix}2500 & -500\\ -500 & 500\end{vmatrix}=1\ 250\ 000-250\ 000=100\ 000>0$$

Debido a que este menor principal es positivo, *$H(x^0)$* es positiva definida. Se verifica, entonces, que el punto $x^0=\begin{bmatrix}3\\ 11\end{bmatrix}$ es un mínimo.

En la siguiente figura se muestra la solución del problema.



4.2 OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA

La optimización restringida es aquella en donde se trata de encontrar el óptimo (máximo o mínimo) de una función objetivo no lineal que se encuentra sujeta a restricciones de la forma =, ≤ o ≥. La mayoría de los problemas de optimización de diseño en ingeniería son de esta clase.

La forma clásica de un programa no lineal restringido es la siguiente:

$z = f(x)$
Sujeto a
$g_i(x)\{=,\leq,\geq\} = b_i \quad con\ i = 1,\ 2,\ldots,m$
siendo x un vector de n variables de control o de decisión
$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

El método más común para determinar el óptimo de un programa no lineal con restricciones es el que se conoce como **Método de Lagrange**.

4.2.1 Problemas con restricciones de igualdad (restricciones activas)

Un problema con restricciones activas tiene la forma:

$$Max, Min\ \ z = f(x)$$
$$g_i(x) = b_i$$

o lo que es lo mismo:

$$Max, Min\ \ z = f(x)$$
$$g_i(x) - b_i = 0$$

Para aplicar el **Método de Lagrange** es necesario determinar, en primera instancia, la **función lagrangeana o función de Lagrange**, la cual está definida como:

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(g_i(x) - b_i\right)$$

Los parámetros λ_i se conocen como **multiplicadores de Lagrange** y se encuentran asociados a cada una de las m restricciones del problema.

Las **condiciones necesarias** para el óptimo son:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \end{aligned}}$$

Las **condiciones suficientes** se establecen de la siguiente manera:

$$\text{Sea } H^{B} = \left(\frac{O|P}{P^{T}|Q}\right)_{(m+n)\times(m+n)}$$

donde,

$$P = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla g_m(x) \end{pmatrix}_{m\times n}$$

y

$$Q = \left(\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n} \quad \textit{para toda } i \textit{ y } j$$

H^B se conoce como la **matriz hessiana en la frontera.**

Dado el punto estacionario *(x^0, λ^0)*, para la función de Lagrange *$L(x, \lambda)$* y la matriz hessiana en la frontera H^B evaluada en *(x^0, λ^0)*, entonces x^0 es:

a) Un ***máximo*** si, comenzando con el menor principal del determinante de orden *$(2m+1)$*, los últimos *$(n-m)$* menores principales del determinante de H^B forman una configuración de signos alternos comenzando con *$(-1)^{m+1}$*.

b) Un ***mínimo*** si, comenzando con el menor principal del determinante de orden *$(2m+1)$*, los últimos *$(n-m)$* menores principales del determinante de H^B tienen el signo de *$(-1)^m$*.

Sin embargo, algunas veces un punto estacionario puede no satisfacer las condiciones de suficiencia anteriores, pero sin que esto no signifique que no sea un punto extremo (máximo o mínimo). Existen otras condiciones que son tanto necesarias como suficientes, pero su aplicación en la mayoría de los casos resulta no factible.

Se define la matriz

$$\Delta = \left(\frac{O \,|\, P}{P^T \,|\, Q - \mu I} \right)$$ evaluada en el punto estacionario *(x^0, λ^0)*

donde μ es un parámetro desconocido e I es la matriz identidad. Entonces,

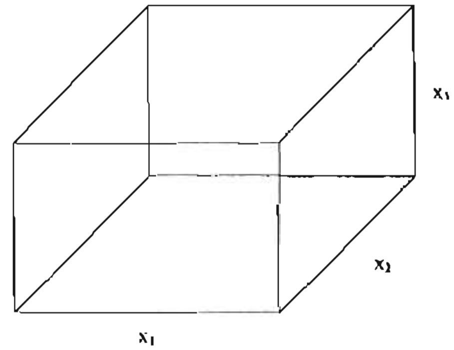
1) x^0 es un punto máximo si cada una de las *$(n-m)$* raíces μ_i del polinomio $|\Delta| = 0$ son negativas.

2) x^0 es un punto mínimo si cada una de las *$(n-m)$* raíces μ_i del polinomio $|\Delta| = 0$ son positivas.

Ejemplo 4.2 Diseño de una estructura de volumen máximo

Se desea construir una estructura de forma cúbica con el máximo volumen posible. Las aristas de la estructura son miembros rígidos que se obtendrán de una pieza de 12 metros de longitud.

Las variables de control o de decisión son x_1, x_2 y x_3, que representan respectivamente la longitud, profundidad y altura de la estructura cúbica.



Función objetivo

La función objetivo es el producto de las tres dimensiones de la estructura.

$$V = f(x) = x_1 x_2 x_3$$

Restricciones

La única restricción del problema está dada por la cantidad del recurso disponible.

$$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 12$$

Modelo matemático

Con la anterior y las restricciones de no negatividad, se tiene el siguiente modelo matemático:

$Max\ f(x) = x_1 x_2 x_3$
Sujeto a
$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Función de Lagrange

La función de Lagrange está dada como:

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(g_i(x) - b_i \right)$$

con $m = 1$ debido a que solamente existe una restricción.

Entonces,

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda_1 \left(g_1(x) - b_1 \right)$$
$$L(x,\lambda) = x_1 x_2 x_3 - \lambda_1 (x_1 + x_2 + x_3 - 3)$$

Condiciones necesarias

Para el punto o puntos críticos es necesario que:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$$

donde $j = 3$ debido a que se tienen tres variables de decisión

Entonces,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2x_3 - \lambda_1 = 0\ldots(1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1x_3 - \lambda_1 = 0\ldots(2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = x_1x_2 - \lambda_1 = 0\ldots(3)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0\ldots(4)$$

Punto estacionario

Despejando x_2 de (1), se tiene:

$$x_2 = \frac{\lambda_1}{x_3}$$

Despejando x_1 de (2), se tiene:

$$x_1 = \frac{\lambda_1}{x_3}$$

Por lo tanto, $x_1 = x_2 = \frac{\lambda_1}{x_3}\ldots(5)$

La ecuación (3) se puede escribir como

$x_1^2 - \lambda_1 = 0$; por lo tanto,

$x_1 = x_2 = \lambda_1^{1/2}$

De la ecuación (5) se tiene que,

$$\frac{\lambda_1}{x_3} = \lambda_1^{1/2}$$

de donde $x_3 = \lambda_1^{1/2}$

Al sustituir $x_1 = x_2 = x_3 = \lambda_1^{1/2}$ en la ecuación (4) se obtiene

$$\lambda_1^{1/2} + \lambda_1^{1/2} + \lambda_1^{1/2} = 3$$
$$3\lambda_1^{1/2} = 3$$
$$\lambda_1^{1/2} = 1$$
$$\lambda_1 = \sqrt{1}$$
$$\lambda_1 = 1$$

Entonces, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$

El punto estacionario es $(x^0, \lambda^0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \lambda_1^0) = (1,1,1,1)$

Condiciones suficientes

Se determina la matriz hessiana en la frontera:

$$H^B = \left(\frac{O|P}{P^T|Q} \right)_{(m+n)(m+n)}$$

$$P = (\nabla g_1(x))_{1\times 3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \end{pmatrix} = (1 \ \ 1 \ \ 1)$$

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$H^B = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & x_3 & x_2 \\ 1 & x_3 & 0 & x_1 \\ 1 & x_2 & x_1 & 0 \end{array} \right)$$

Se evalúa H^B en el punto estacionario (x^0, λ^0), con lo cual se obtiene:

$$H^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificación del máximo o mínimo

Se procede, ahora, a determinar si el punto x^0 es un máximo o un mínimo. Para ello se analizan los últimos *(n-m) = 3 – 1 = 2* menores principales del determinante de H^B comenzando con el menor principal del determinante de orden *(2m+1) = 2 + 1 = 3.*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

El punto $x^0 = (1,1,1)$ no satisface las condiciones suficientes, pero esto no significa que no sea un punto extremo.

Se utiliza, ahora, la condición necesaria y suficiente,

$$\Delta = \left(\frac{O|P}{P^T|Q - \mu I} \right)$$

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0-\mu & x_3 & x_2 \\ 1 & x_3 & 0-\mu & x_1 \\ 1 & x_2 & x_1 & 0-\mu \end{array} \right)$$

Para (x^0, λ^0), se tiene que

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -\mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\mu & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\mu \end{array} \right)$$

Se determina, ahora, $|\Delta| = 0$:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\mu & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\mu \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} -\mu & 1 & 1 \\ 1 & -\mu & 1 \\ 1 & 1 & -\mu \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mu & 1 \\ 1 & 1 & -\mu \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -\mu & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\mu \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -\mu & 1 \\ 1 & 1 & -\mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta| = 0 - 1\left[\mu^2 + 1 + 1 + \mu - 1 + \mu\right] + 1\left[-\mu + 1 - \mu - 1 - 1 - \mu^2\right] - 1\left[1 + 1 + \mu^2 - 1 + \mu + \mu\right]$$

$$|\Delta| = 0 - \left[\mu^2 + 2\mu + 1\right] + \left[-\mu^2 - 2\mu - 1\right] - \left[\mu^2 + 2\mu + 1\right]$$

$$|\Delta| = -(\mu^2 + 2\mu + 1) - (\mu^2 + 2\mu + 1) - (\mu^2 + 2\mu + 1) = -3(\mu^2 + 2\mu + 1) = -3\mu^2 - 6\mu - 3 = 0$$

$$3\mu^2 + 6\mu + 3 = 0$$

Las raíces de la expresión anterior son:

$\mu_1 = -1$
$\mu_2 = -1$

Como las $(3-1) = 2$ raíces μ_i del polinomio $|\Delta| = 0$ son negativas, entonces $x^0 = (1,1,1)$ es un **punto máximo**.

El volumen máximo resulta ser $V = x_1 x_2 x_3 = (1)(1)(1) = 1\ m^3$.

4.2.2 Problemas con restricciones de desigualdad

Un problema con restricciones de desigualdad tiene la siguiente forma:

$$Max, Min \;\; z = f(x)$$
$$g_i(x)\{\leq,\geq\}0$$
$$con \;\; i = 1,2,\ldots,m$$
$$y \;\; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Si existen restricciones de no negatividad, $x \geq 0$, se consideran incluidas en las m restricciones.

El método que se utiliza para resolver este tipo de problemas es el **método de Lagrange extendido**, el cual se aplica de la siguiente manera:

Paso 1. Se resuelve el problema sin restricciones

Max o Min $z = f(x)$

Si el óptimo obtenido satisface todas las restricciones se ha encontrado la solución. De lo contrario, se hace $k = 1$ y se continua con el paso 2.

Paso 2. Se activan (se convierten en igualdades) cualquiera de las k restricciones y se resuelve por el método de los multiplicadores de Lagrange $f(x)$ sujeto a las k restricciones activas. Si la solución encontrada es factible respecto al resto de las restricciones, deténgase, se tiene un óptimo local. De lo contrario, se activa otro conjunto de k restricciones y se repite el paso. Si ya se han analizado todos los conjuntos de k restricciones activas sin encontrar una solución, ir al paso 3.

Paso 3. Si $k = m$, detenerse no existen soluciones factibles. De lo contrario, se hace $k = k + 1$ y se regresa al paso 2.

La desventaja de este procedimiento es que no garantiza que se encuentre el óptimo global a pesar de que el problema analizado posea un óptimo único.

Una forma alternativa de encontrar el óptimo global es mediante el siguiente procedimiento:

Paso 1. Se resuelve el problema sin restricciones

Max o Min $z = f(x)$

Paso 2. Se identifican todos los conjuntos de 1 restricción activa que se pueden formar. Se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver $f(x)$ sujeto a cada uno de los conjuntos de 1 restricción activa.

Paso 3. Se identifican, ahora, todos los conjuntos de 2 restricciones que se pueden formar. Se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver $f(x)$ sujeto a cada uno de los conjuntos de 2 restricciones activas.

$\vdots$

Se continua de esta manera hasta que se han considerado todos los posibles conjuntos de m restricciones activas. El óptimo global es el mejor óptimo que resulta de comparar todos los óptimos (locales) obtenidos en cada paso.

La desventaja de este procedimiento es que solamente es práctico para resolver problemas con pocas restricciones, ya que si esto no es así, resulta computacionalmente muy tedioso y complicado.

Por ejemplo, un problema de tres restricciones (incluidas las de no negatividad) tiene los siguientes conjuntos de restricciones activas:

- Tres conjuntos de una restricción activa:

Primer conjunto = {Restricción 1}, Segundo conjunto = {Restricción 2}, Tercer conjunto = {Restricción 3}

- Tres conjuntos de dos restricciones activas:

Primer conjunto = {Restricción 1 y Restricción 2}, Segundo conjunto = {Restricción 2 y Restricción 3}, Tercer conjunto = {Restricción 1 y Restricción 3}

- Un conjunto de tres restricciones activas:

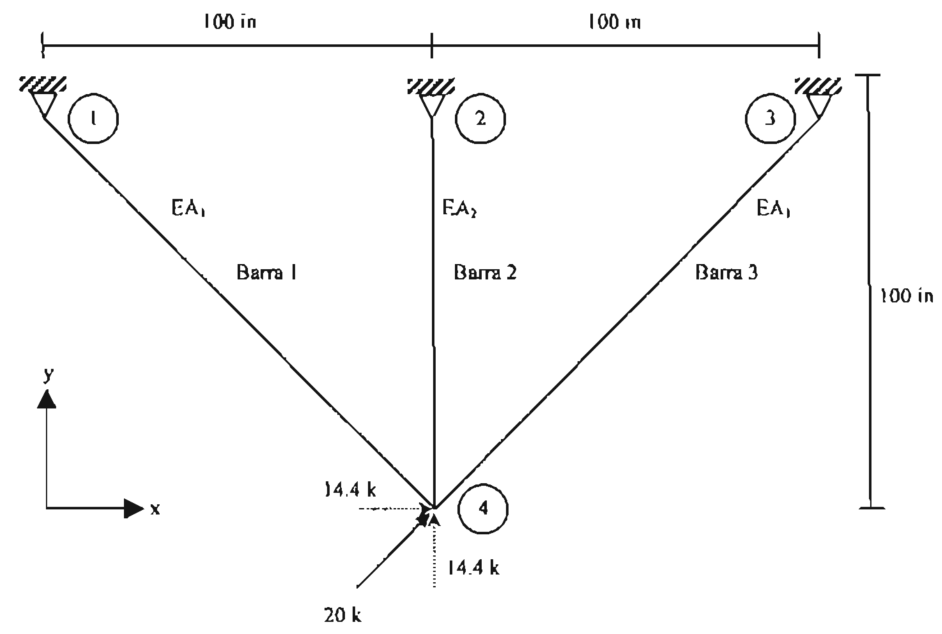
Primer conjunto = {Restricción 1, Restricción 2 y Restricción 3}

En total, se tendría que aplicar siete veces el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar el óptimo global.

Ejemplo 4.3 Diseño de una armadura de peso mínimo

Se desea obtener las áreas de las secciones transversales de los miembros de una armadura indeterminada de tal forma que ésta tenga el menor peso posible. Los miembros a tensión y a compresión están limitados a un esfuerzo máximo de 20 ksi (kilolibras por pulgada cuadrada) y 15 ksi respectivamente. Los elementos 1 y 3 tienen las mismas áreas en su sección transversal ($A_1 = A_3$).

En la siguiente figura se muestra la armadura con sus propiedades geométricas y las cargas a las que está sometida:



Función objetivo

El problema consiste en minimizar el volumen y, por tanto, el peso de la armadura. El volumen total es la suma de las longitudes de cada elemento por su correspondiente área de sección transversal.

$$V = 141.42A_1 + 100A_2 + 141.42A_1$$

Entonces, la función objetivo es:

$$Min\ z = 283A_1 + 100A_2$$

Restricciones

Las restricciones están vinculadas con los esfuerzos axiales que cada barra (elemento) puede soportar. El esfuerzo es igual a la fuerza axial de tensión o compresión dividida por el área de la sección transversal, $\sigma = F/A$. Por lo tanto, es necesario determinar las fuerzas axiales en las barras mediante un análisis estructural.

Análisis estructural

El procedimiento para llevar a cabo el análisis estructural de forma matricial es el siguiente:

a) Establecer un sistema general de coordenadas x-y.
b) Numerar los nodos de la estructura incluyendo apoyos
c) Formar la matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \ldots k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \ldots k_{2n} \\ \vdots & & \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} \ldots k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$$

De esta matriz se tacha renglón y columna de la rigidez de nodo (k_{ii}) con desplazamientos restringidos.

d) Determinar la matriz B_{ij} para cada elemento o barra que sale de los nodos libres, es decir, de los nodos que no tienen restricciones en sus desplazamientos.

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ ml & m^2 \end{bmatrix}$$

donde,

$$l = \frac{x_i - x_j}{L_{ij}}$$

$$m = \frac{y_i - y_j}{L_{ij}}$$

e) Obtener las rigideces de barra y de nodo

$$\boxed{k_{ij} = k_{ji} = \frac{-EA}{L} B_{ij}} \rightarrow \text{rigidez de barra}$$

$$\boxed{k_{ii} = \sum_{i} \frac{EA}{L} B_{ij}} \rightarrow \text{rigidez de nodo}$$

f) Se realiza el ensamble del sistema

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} = \sum_{i=1} \frac{EA}{L} B_{ij} & k_{12} = \frac{-EA}{L} B_{12} \ldots k_{1n} = \frac{-EA}{L} B_{1n} \\ k_{21} = k_{12} & k_{22} = \sum_{i=2} \frac{EA}{L} B_{ij} \ldots k_{2n} = \frac{-EA}{L} B_{2n} \\ \vdots & \\ k_{n1} = k_{1n} & k_{n2} = k_{2n} \ldots k_{nn} = \sum_{i=n} \frac{EA}{L} B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$$

donde,

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \end{bmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \end{bmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{bmatrix} \Delta_{nx} \\ \Delta_{ny} \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \end{bmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \end{bmatrix}, \ldots, P_n = \begin{bmatrix} P_{nx} \\ P_{ny} \end{bmatrix}$$

g) Resuelto el sistema, se conocen los desplazamientos y se procede a determinar las fuerzas en las barras:

$$p_{ij} = \left(\frac{EA}{L} \right)_{ij} R_{ij} (\Delta_i - \Delta_j) = p_{ji}$$

con

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix}$$

Para el caso de la armadura en cuestión el análisis estructural es el siguiente:

Se tacha renglón y columna de la rigidez de nodo de los nodos 1, 2 y 3 (k_{11}, k_{22} y k_{33}) debido a que sus desplazamientos se encuentran restringidos

$$\begin{bmatrix} \cancel{P_1} \\ \cancel{P_2} \\ \cancel{P_3} \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{k_{11}} & \cancel{k_{12}} & \cancel{k_{13}} & \cancel{k_{14}} \\ \cancel{k_{21}} & \cancel{k_{22}} & \cancel{k_{23}} & \cancel{k_{24}} \\ \cancel{k_{31}} & \cancel{k_{32}} & \cancel{k_{33}} & \cancel{k_{34}} \\ \cancel{k_{41}} & \cancel{k_{42}} & \cancel{k_{43}} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{\Delta_1} \\ \cancel{\Delta_2} \\ \cancel{\Delta_3} \\ \Delta_4 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$$

Por lo que,

$$[P_4] = [k_{44}][\Delta_4]$$

A continuación se determinan las coordenadas de los nodos y las incidencias de las barras que son datos necesarios para determinar sus rigideces.

Coordenadas de nodos

Nodo	x	y
1	0	100
2	100	100
3	200	100
4	100	0

Incidencias de las barras			
Barra	I	J	L
1	4	1	141.421
2	4	2	100
3	4	3	141.421

Determinación de las rigideces de barra:

Barra	*l*	*m*	k_{ij}
4-1	$\frac{100-0}{141.421}=0.7071$	$\frac{0-100}{141.421}=-0.7071$	$k_{41}=\frac{-EA_1}{141.421}\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$
4-2	$\frac{100-100}{100}=0$	$\frac{0-100}{100}=-1$	$k_{42}=\frac{-EA_2}{100}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
4-3	$\frac{100-200}{141.421}=-0.7071$	$\frac{0-100}{141.421}=-0.7071$	$k_{43}=\frac{-EA_1}{141.421}\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$

Ensamble del sistema

$$\begin{bmatrix}P_{4x}\\ P_{4y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{EA_1(0.5)}{141.421}+\frac{EA_1(0.5)}{141.421} & \frac{EA_1(-0.5)}{141.421}+\frac{EA_1(0.5)}{141.421}\\ \frac{EA_1(-0.5)}{141.421}+\frac{EA_1(0.5)}{141.421} & \frac{EA_1(0.5)}{141.421}+\frac{EA_2(1)}{100}+\frac{EA_1(0.5)}{141.421}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_{4x}\\ \Delta_{4y}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}P_{4x}\\ P_{4y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.007071EA_1 & 0\\ 0 & 0.007071EA_1+0.01EA_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_{4x}\\ \Delta_{4y}\end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema se obtienen los desplazamientos del nodo 4

$$0.007071EA_1\ \Delta_{4x}=14.142$$
$$(0.007071EA_1+0.01EA_2)\Delta_{4y}=14.142$$

$$\begin{bmatrix}\Delta_{4x}\\ \Delta_{4y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{14.142}{0.007071EA_1}\\ \dfrac{14.142}{0.007071EA_1+0.01EA_2}\end{bmatrix}$$

A partir de estos desplazamientos se obtienen las fuerzas en las barras.

Barra 1 o elemento 4-1

$$p_{41}=\frac{EA_1}{141.421}\begin{bmatrix}0.7071 & -0.7071\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{14.142}{0.007071EA_1}\\ \dfrac{14.142}{0.007071EA_1+0.01EA_2}\end{bmatrix}$$

$$p_{41} = \frac{EA_1}{141.421}\left[(0.7071)\left(\frac{14.142}{0.007071EA_1}\right) - 0.7071\left(\frac{14.142}{0.007071EA_1 + 0.01EA_2}\right)\right]$$

$$p_{41} = \frac{EA_1}{141.421}\left(\frac{1414.2}{EA_1} - \frac{10}{0.007071EA_1 + 0.01EA_2}\right)$$

$$p_{41} = 10 - \frac{10EA_1}{EA_1 + 1.41421EA_2}$$

$$p_{41} = 10 - \frac{10A_1}{A_1 + 1.41421A_2}$$

El esfuerzo en la barra es:

$$\sigma_{41} = \frac{p_{41}}{A_1} = \frac{10}{A_1} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{10A_1}{A_1 + 1.41421A_2}\right)$$

$$\boxed{\sigma_{41} = \frac{10}{A_1} - \frac{10}{A_1 + \sqrt{2}A_2}}$$

Tal esfuerzo resulta ser de tensión.

Barra 2 o elemento 4-2

$$p_{42} = \frac{EA_2}{100}\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{14.142}{0.007071EA_1} \\ \dfrac{14.142}{0.007071EA_1 + 0.01EA_2}\end{bmatrix}$$

$$p_{42} = \frac{EA_2}{100}\left(\frac{-14.142}{0.007071EA_1 + 0.01EA_2}\right)$$

$$p_{42} = \frac{-14.142EA_2}{0.7071EA_1 + EA_2} = \frac{-14.142A_2}{0.7071A_1 + A_2}$$

El esfuerzo en la barra es:

$$\sigma_{42} = \frac{p_{42}}{A_2} = \frac{1}{A_2}\left(\frac{-14.142A_2}{0.7071A_1 + A_2}\right)$$

$$\sigma_{42} = \frac{-14.142}{0.7071A_1 + A_2}$$

$$\boxed{\sigma_{42} = \frac{-20}{A_1 + \sqrt{2}A_2}}$$

El esfuerzo resulta ser de compresión.

Barra 3 o elemento 4-3

$$p_{43} = \frac{EA_1}{141.421}\begin{bmatrix}-0.7071 & -0.7071\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{14.142}{0.007071EA_1} \\ \dfrac{14.142}{0.007071EA_1 + 0.01EA_2}\end{bmatrix}$$

$$p_{43} = \frac{EA_1}{141.421}\left[(-0.7071)\left(\frac{14.142}{0.007071EA_1}\right) - 0.7071\left(\frac{14.142}{0.007071EA_1 + 0.01EA_2}\right)\right]$$

$$p_{43} = \frac{EA_1}{141.421}\left(\frac{-1414.2}{EA_1} - \frac{10}{0.007071EA_1 + 0.01EA_2}\right)$$

$$p_{43} = -10 - \frac{10EA_1}{EA_1 + 1.41421EA_2}$$

$$p_{43} = -10 - \frac{10A_1}{A_1 + 1.41421A_2}$$

El esfuerzo en la barra es:

$$\sigma_{43} = \frac{p_{43}}{A_1} = -\frac{10}{A_1} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{10A_1}{A_1 + 1.41421A_2}\right)$$

$$\sigma_{43} = -\frac{10}{A_1} - \frac{10}{A_1 + 1.41421A_2}$$

$$\boxed{\sigma_{43} = -\frac{10}{A_1} - \frac{10}{A_1 + \sqrt{2}A_2}}$$

El esfuerzo resulta ser de compresión.

Modelo matemático

Una vez que se han determinado los esfuerzos en las barras, el modelo matemático queda establecido de la siguiente manera:

$Min\ z = 283A_1 + 100A_2$
Sujeto a

$\frac{10}{A_1}-\frac{10}{A_1+\sqrt{2}A_2}\leq 20$ Esfuerzo en la barra 1

$\frac{-20}{A_1+\sqrt{2}A_2}\leq -15$ Esfuerzo en la barra 2

$-\frac{10}{A_1}-\frac{10}{A_1+\sqrt{2}A_2}\leq -15$ Esfuerzo en la barra 3

$A_1, A_2 \geq 0$ Restricciones de no negatividad

O también, reordenando se tiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} Min\ z = 283A_1 + 100A_2 \\ Sujeto\ a \\ A_1^2 + 1.414A_1A_2 - 0.707A_2 \geq 0 \\ A_1 + 1.414A_2 \geq 1.333 \\ -A_1^2 - 1.414A_1A_2 + 1.333A_1 + 0.943A_2 \geq 0 \\ A_1, A_2 \geq 0 \end{array}}$$

Como se puede observar, se trata de un modelo de programación no lineal con restricciones de desigualdad, el cual se resuelve con el método de Lagrange extendido.

- Primero, se resuelve el problema sin restricciones.

$Min\ z = 283A_1 + 100A_2$

La solución es:

$A_1^0 = 0$
$A_2^0 = 0$
$z^0 = 0$

Esta solución viola la segunda restricción

$A_1 + 1.414A_2 \geq 1.333$
$0 \geq 1.333$

Así que no puede ser un óptimo local y se tiene que descartar de la solución.

- Se resuelve el problema sujeto a la primera restricción activa.

$Min\ z = 283A_1 + 100A_2$
$Sujeto\ a$
$A_1^2 + 1.414A_1A_2 - 0.707A_2 = 0$

La solución resulta ser no factible.

- Se resuelve el problema sujeto a la segunda restricción activa.

$$Min\ z = 283A_1 + 100A_2$$
Sujeto a
$$A_1 + 1.414A_2 = 1.333$$

La solución es:

$$A_1^0 = 0$$
$$A_2^0 = 0.943$$
$$z^0 = 94.3$$

Esta solución viola la primera restricción

$$A_1^2 + 1.414A_1A_2 - 0.707A_2 \geq 0$$
$$-0.67 \geq 0$$

Y por tanto, se descarta.

Se considera, ahora, el problema de minimizar la función objetivo sujeta a los conjuntos formados por dos restricciones.

- Se resuelve el problema sujeto a la primera y segunda restricciones activas.

$$Min\ z = 283A_1 + 100A_2$$
Sujeto a
$$A_1^2 + 1.414A_1A_2 - 0.707A_2 = 0$$
$$A_1 + 1.414A_2 = 1.333$$

La solución es:

$$\boxed{\begin{array}{l} A_1^0 = 0.364 \\ A_2^0 = 0.686 \\ z^0 = 171.46 \end{array}}$$

Esta solución no viola la tercera restricción

$$-A_1^2 - 1.414A_1A_2 + 1.333A_1 + 0.943A_2 \geq 0$$
$$0.65 \geq 0$$

Por lo tanto, se tiene un óptimo local.

- Se resuelve el problema sujeto a la primera y tercera restricciones activas.

$$Min\ z = 283A_1 + 100A_2$$
Sujeto a
$$A_1^2 + 1.414A_1A_2 - 0.707A_2 = 0$$
$$-A_1^2 - 1.414A_1A_2 + 1.333A_1 + 0.943A_2 = 0$$

La solución es no factible.

- Se resuelve, a continuación, el problema sujeto a la segunda y tercera restricciones activas.

$$Min\ z = 283A_1 + 100A_2$$
Sujeto a
$$A_1 + 1.414A_2 = 1.333$$
$$-A_1^2 - 1.414A_1A_2 + 1.333A_1 + 0.943A_2 = 0$$

La solución obtenida es:

$$\boxed{\begin{aligned} A_1^0 &= 1.333 \\ A_2^0 &= 0 \\ z^0 &= 377 \end{aligned}}$$

Esta solución satisface la primera restricción

$$A_1^2 + 1.414A_1A_2 - 0.707A_2 \geq 0$$
$$1.78 \geq 0$$

Por lo tanto, se tiene un óptimo local.

Ya no es necesario continuar con el análisis, ya que el introducir las tres restricciones no tendría sentido.

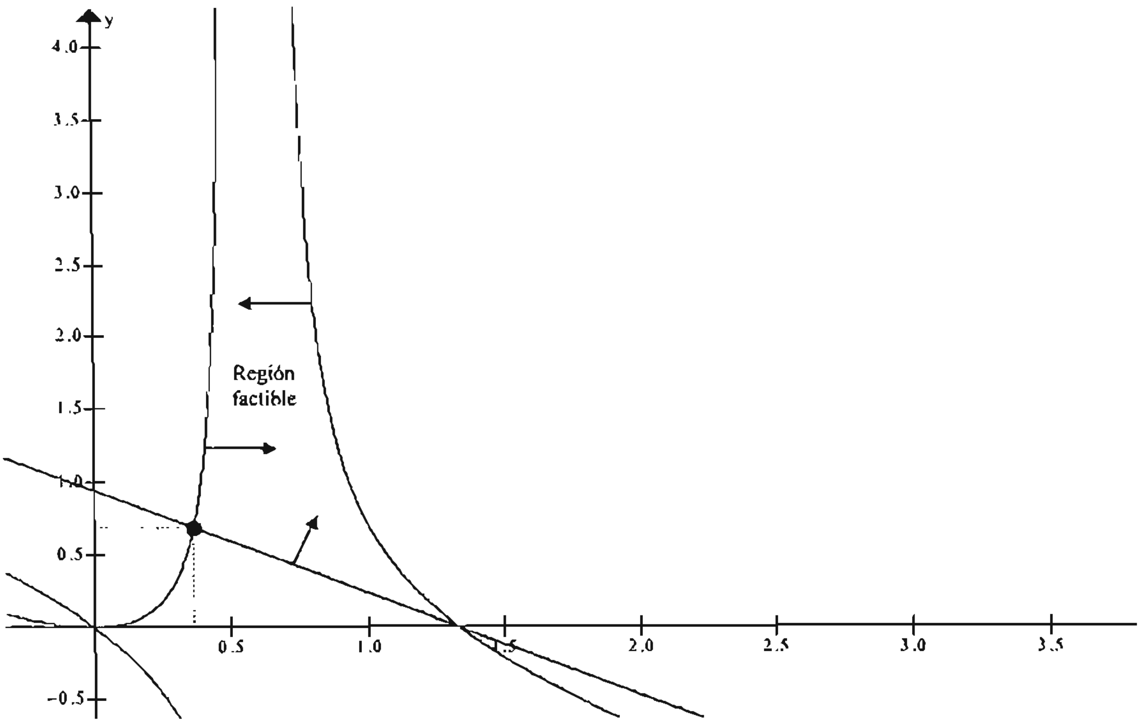
De los dos óptimos obtenidos el mejor (que es el óptimo global) es:

$$\boxed{\begin{aligned} z^* &= 171.46\ in^3 \\ A_1^* &= 0.364\ in^2 \\ A_2^* &= 0.686\ in^2 \end{aligned}}$$

Si se considera que la densidad para el acero es de *0.283 lb/in³*, el mínimo peso que puede tener la armadura es:

$$Peso = 0.283\frac{lb}{in^3}\left[(141.42\ in)(0.364\ in^2) + (100\ in)(0.686\ in^2) + (141.42\ in)(0.364\ in^2)\right] = 48.5\ libras$$

En la siguiente figura se muestra la solución gráfica del problema.



4.3 CONDICIONES DE KUHN-TUCKER

Las condiciones de Kuhn-Tucker se desarrollaron a partir del concepto de los multiplicadores de Lagrange. Estas condiciones se utilizan para determinar si un punto estacionario es un máximo global o un mínimo global.

El modelo matemático lineal tiene la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&z = f(x) \\
&g_i(x) \le b_i \quad i = 1,2,\ldots \\
&g_i(x) \ge b_k \quad k = 1,2,\ldots \\
&g_i(x) = b_m \quad m = 1,2,\ldots \\
&x \ge 0
\end{aligned}
$$

Y la función lagrangeana es:

$$L(x,\lambda,\mu,\nu) = f(x) + \sum_i \lambda_i \left(b_i - g_i(x)\right) + + \sum_k \mu_k \left(b_k - g_k(x)\right) + \sum_m \nu_m \left(b_m - g_m(x)\right)$$

El procedimiento para determinar un punto crítico es el mismo que se utiliza para los multiplicadores de Lagrange con restricciones activas o de igualdad. Una vez que se ha encontrado dicho punto se aplican las condiciones de Kuhn-Tucker como prueba para determinar si se trata de un óptimo global.

En las tablas 4.1 y 4.2 se resuman dichas condiciones

Tabla 4.1 Condiciones de Kuhn-Tucker para un mínimo global

Las condiciones necesarias y suficientes para un mínimo global son:

1. $x_j \geq 0$ y $\dfrac{\partial L}{\partial x_j} \geq 0$

2. (a) Si $\lambda_i = 0$, entonces $b_i - g_i(x) \geq 0$ (restricción inactiva)
   (b) Si $b_i - g_i(x) = 0$, entonces $\lambda_i \leq 0$ (restricción activa)

3. (a) Si $\mu_k = 0$, entonces $b_k - g_k(x) \leq 0$ (restricción inactiva)
   (b) Si $b_k - g_k(x) = 0$, entonces $\mu_k \geq 0$ (restricción activa)

4. v_m es irrestricta en signo, $-\infty \leq v_m \leq \infty$, $b_m - g_m(x) = 0$

5. $f(x)$ es una función convexa

6. (a) $g_i(x)$ es una función convexa
   (b) $g_k(x)$ es una función cóncava
   (c) $g_m(x)$ es una función lineal

Tabla 4.2 Condiciones de Kuhn-Tucker para un máximo global

Las condiciones necesarias y suficientes para un máximo global son:

1. $x_j \geq 0$ y $\dfrac{\partial L}{\partial x_j} \geq 0$

2. (a) Si $\lambda_i = 0$, entonces $b_i - g_i(x) \geq 0$ (restricción inactiva)
   (b) Si $b_i - g_i(x) = 0$, entonces $\lambda_i \geq 0$ (restricción activa)

3. (a) Si $\mu_k = 0$, entonces $b_k - g_k(x) \leq 0$ (restricción inactiva)
   (b) Si $b_k - g_k(x) = 0$, entonces $\mu_k \leq 0$ (restricción activa)

4. v_m es irrestricta en signo, $-\infty \leq v_m \leq \infty$, $b_m - g_m(x) = 0$

5. $f(x)$ es una función cóncava

6. (a) $g_i(x)$ es una función convexa
   (b) $g_k(x)$ es una función cóncava
   (c) $g_m(x)$ es una función lineal

Las condiciones 1 y 4 son necesarias para un óptimo global y, por tanto, también pueden utilizarse para determinar el punto crítico. Las condiciones 5 y 6, si se satisfacen, indican que tal punto es un óptimo global, es decir, son condiciones de suficiencia.

Sin embargo, las aplicación de las condiciones de Kuhn-Tucker no resulta práctico debido al gran número de cálculos numéricos que se tienen que llevar a cabo. La importancia de éstas radica en que sienta las bases del desarrollo de varios algoritmos de programación no lineal.

CONCLUSIONES
Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se presentaron los métodos y técnicas de optimización más comunes que se pueden aplicar para resolver algunos problemas propios de la Ingeniería Civil.

Mediante este trabajo se hace una contribución para reducir la falta de fuentes bibliográficas referentes a la optimización aplicada a la ingeniería. Al enseñar los métodos de optimización dentro del contexto de las diferentes áreas de la ingeniería – en este caso la civil- se puede lograr una mejor compresión de ellos por parte de los estudiantes y profesionales del área al observar su aplicación a problemas específicos, lo cual actualmente no sucede debido al enfoque tradicional que se le ha dado a la optimización.

En muchas universidades de Estados Unidos y de Europa la optimización ha rendido frutos precisamente por el grado de especialización que ha logrado en cada uno de los diferentes campos del conocimiento. Por ejemplo, existen programas académicos de Ingeniería Civil en los cuales los cursos de diseño óptimo tienen carácter obligatorio. Estos países cuentan, también, con líneas de investigación muy importantes en lo referente al diseño óptimo en diferentes campos como la aeronáutica, la ingeniería sísmica, la geotécnia, etc.

Desafortunadamente, en nuestro país son muy pocas las personas que se han aventurado a utilizar los métodos y técnicas de optimización en el área civil. Este conjunto de personan los forman solamente algunos investigadores del Instituto de Ingeniería de la UNAM concentrados básicamente en las áreas de sismología, hidráulica y mecánica de suelos. Las líneas de investigación en estas áreas son innovadoras ya que en ellas se está logrando explotar la funcionalidad Optimización-Ingeniería. Por estas razones se debería dar prioridad a la enseñanza de la Investigación de Operaciones dentro del enfoque de cada uno de los programas de ingeniería.

A través del desarrollo de este trabajo se puede apreciar cómo la optimización demuestra ser una herramienta práctica y valiosa para resolver algunos problemas típicos de la Ingeniería Civil. Sin embargo, es verdad que faltan muchos ejemplos en donde se muestre la utilidad de los métodos presentados a otras áreas como la hidráulica y la geotécnia. La tarea de diseñar o recopilar dichos ejemplos no es fácil, pero a medida que se desarrollen se enriquecerán fuentes de consulta como la que se está presentando.

Sería también conveniente mostrar la aplicación de un método de optimización específico para la solución de un caso práctico de la Ingeniería Civil como podría ser el diseño sísmico de un edificio, la configuración geométrica óptima de un puente, la optimización de zonas de riesgo sísmico, la minimización de costos de una obra civil, etc.

Por oto lado, es necesario desarrollar software de optimización. Si bien es cierto que existe software comercial, muy poco o casi nada se ha realizado al respecto de algunas áreas específicas de la ingeniería. Lo anterior puede marcar una línea de investigación muy importante que nos pondría a la par con lo que se está haciendo en otros países.

También, es importante mencionar que otras ramas de la Investigación de Operaciones como la programación entera, los métodos estocásticos y las técnicas heurísticas se están empleando para resolver problemas complejos de la ingeniería.

Por último, se tiene que crear un modelo que permita determinar un índice para evaluar de alguna forma los beneficios de la aplicación de los métodos de optimización dentro de loa ámbitos respectivos de las diferentes carreras de ingeniería con las que se cuenta actualmente. De la misma forma es necesario incentivar la difusión mediante diversos medios, principalmente con producción bibliográfica, de la Investigación de Operaciones hacia otras áreas, no solamente la ingenierieles, sino aquellas como la medicina, la biología, las ciencias computacionales, las humanidades, etc.

Falta aún mucho por desarrollar, pero el entender la aplicación de los métodos y técnicas de optimización a campos específicos facilitará el camino.

APÉNDICE

SOFTWARE PARA PROGRAMACIÓN LINEAL

La teoría del método simplex ha facilitado su implantación en muchos programas de computadoras debido principalmente a las operaciones matriciales en las cuales está basado. A pesar de que el algoritmo se puede realizar a mano, en algunos problemas que utilizan un número importante ya sea de variables o de restricciones, su utilización resulta muy tediosa.

Debido al gran avance que se ha tenido en las últimas décadas en la ingeniería de software y hardware han surgido un gran número de herramientas de cómputo comerciales para resolver problemas de optimización. Con respecto a la programación lineal, algunos de los paquetes más utilizados son: **Solver de Microsoft Excel, Lindo, Lingo, QSB**, etc.

En el presente trabajo se describe brevemente el uso de **LINDO** para resolver algunos problemas de programación lineal por considerar a este programa como el que mayor sencillez brinda al momento de formular el modelo matemático así como su fácil interpretación de resultados.

Los problemas que se resuelven son los mismos que se han tratado en el capítulo de programación de lineal.

USO DE LINDO

El programa LINDO fue desarrollado por Lindo Systems Inc. Sus siglas significan Linear Interactive and Discrete Optimizer (Optimizador Discreto y Lineal Interactivo). LINDO, además de resolver problemas de programación lineal, también puede resolver problemas de programación entera, mixta y cuadrática.

Algunas de sus características más sobresalientes son las siguientes:

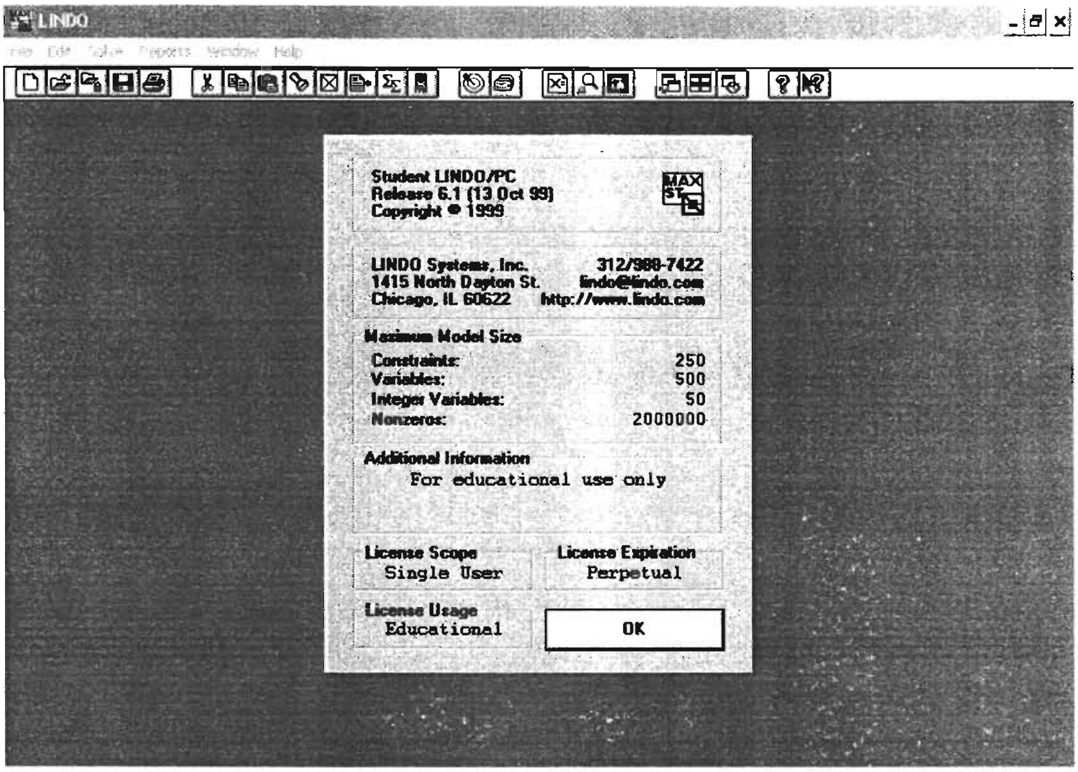
- Fácil de modelación de los problemas, ya que éstos se escriben prácticamente como ecuaciones.
- Solución de problemas de hasta 500 variables y 250 restricciones en la versión estudiantil (la cual se puede descargar del sitio www.lindo.com).
- Uso de comentarios dentro de la formulación del modelo.
- Análisis de sensibilidad.
- Otras características más avanzadas.

Se muestra a continuación la solución del ejemplo 1.7 con LINDO.

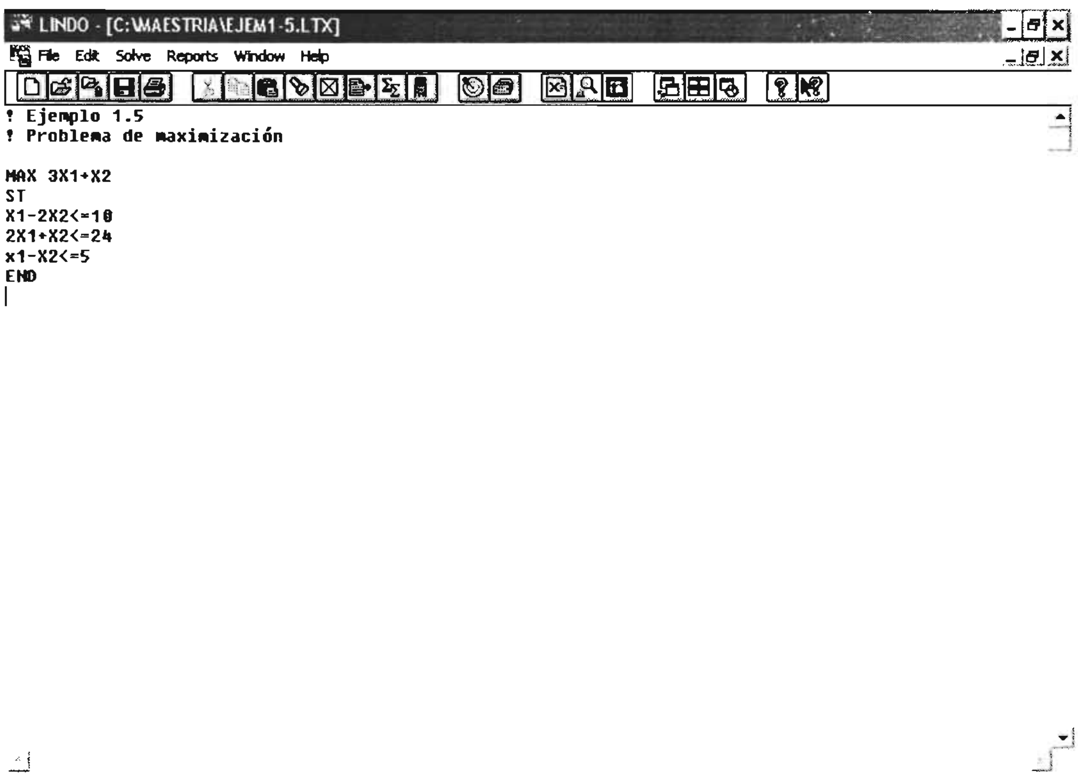
El modelo a resolver es el siguiente:

Max $z = 3x_1 + x_2$
Sujeto a
$x_1 - 2x_2 \leq 10$
$2x_1 + x_2 \leq 24$
$x_1 - x_2 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

Al abrir el programa la primera pantalla que aparece es la siguiente.



Después se puede introducir el problema de la siguiente forma:



Las primeras dos líneas se utilizaron para hacer comentarios del problema a resolver. Cualquier comentario que se quiera realizar debe comenzar con el signo de interrogación ¡.

Los comentarios son opcionales.

Después de los comentarios se introduce la función objetivo que se quiera maximizar (MAX) o minimizar (MIN). Hay que observar que solamente se debe especificar el lado derecho de la ecuación $z = 3x_1 + x_2$.

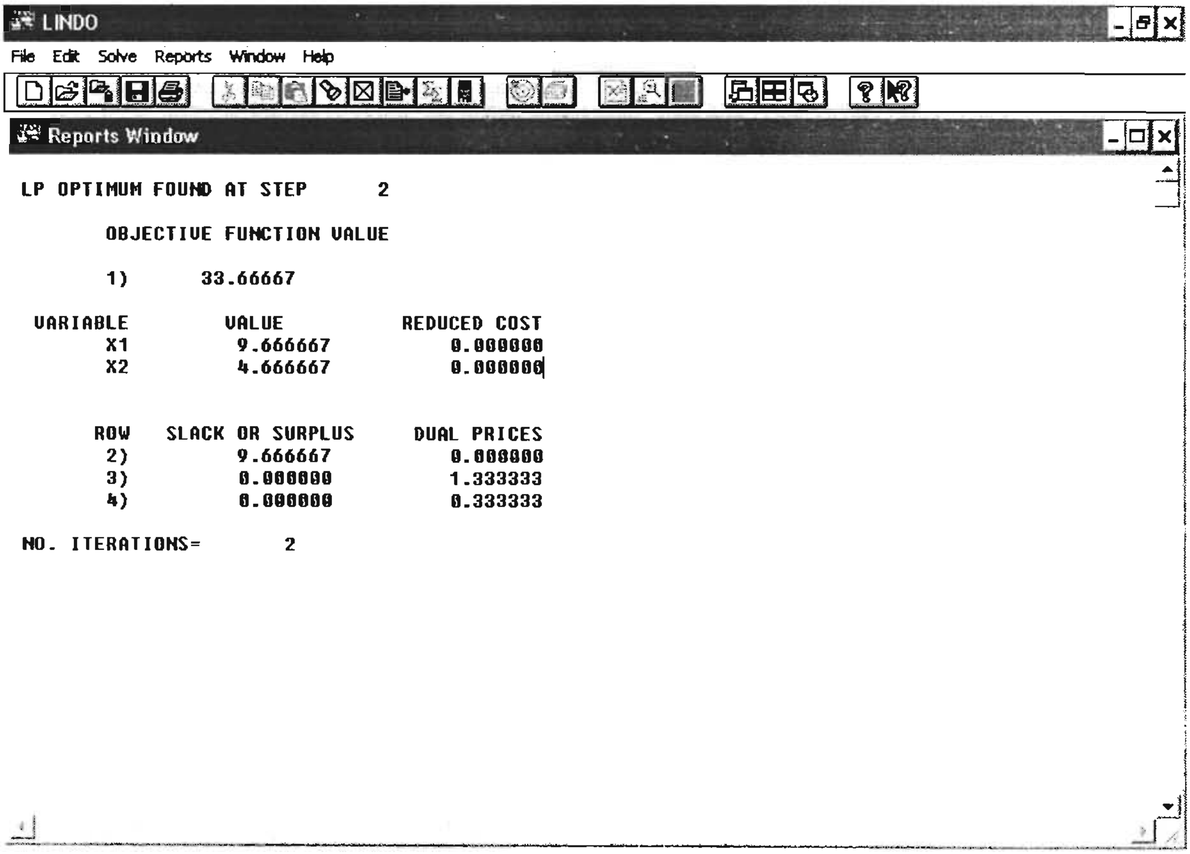
En la siguiente línea se escribe el texto **subject to** o simplemente **st** para indicarle al programa las restricciones a las que estará sujeto el problema.

Las siguientes líneas se utilizan para especificar cada una de las restricciones. Es importante aclarar que los signos de las desigualdades se deben escribir como <= y no con el símbolo ≤.; lo mismo se aplica para desigualdades del tipo "mayor o igual que". No es necesario indicar las restricciones de no negatividad para las variables de decisión.

Después de la introducción de las restricciones se escribe en la última línea la instrucción **END** para indicar que se ha finalizado la introducción del problema que **LINDO** resolverá.

Para obtener la solución del problema se tiene que recurrir al menú **Solve** e indicar la opción **solve.** Otra forma consiste simplemente con la combinación de teclas **Ctrl+s** o mediante el icono que representa a un "blanco".

Al momento de hacer la corrida LINDO pregunta si se desea hacer el análisis de sensibilidad del problema en cuestión. En el ejemplo se indicó que no se realizara dicho análisis. Inmediatamente se genera una ventana de reporte en donde se indica la solución encontrada.



La primera y la última de las líneas en la ventana de reporte indican que la solución óptima se alcanzó después de dos iteraciones, al igual que cuando se aplicó el método simplex en forma tabular.

A continuación aparece el valor de la función objetivo ($z = 33.6667$), e inmediatamente después los valores de las variables de decisión ($x_1 = 9.6667$ y $x_2 = 4.6667$).

La columna **reduced cost** (costos reducidos) tiene relación con la dualidad del problema, esto se describe un poco más adelante. Sin embargo, se puede afirmar que los costos reducidos del problema en cuestión, llamado problema primal, son los valores de las holguras para cada restricción de su correspondiente problema dual.

La última parte que aparece en la ventana de reportes se refiere a las restricciones del problema. Cada renglón se refiere a una restricción, tres en este caso. La primera columna **Slack or surplus** (holgura o exceso) hace referencia a la diferencia que se tiene entre los dos lados de cada restricción. Por ejemplo, para la primera restricción $x_1 - 2x_2 \leq 10$, al sustituir los valores de las variables de decisión encontradas se tendría:

$9.6667 - 2\,(4.6667) + s_1 = 10$
$s_1 = 9.6667$

Es decir que dicha columna indica los valores de las variables de holgura o exceso para cada restricción del problema.

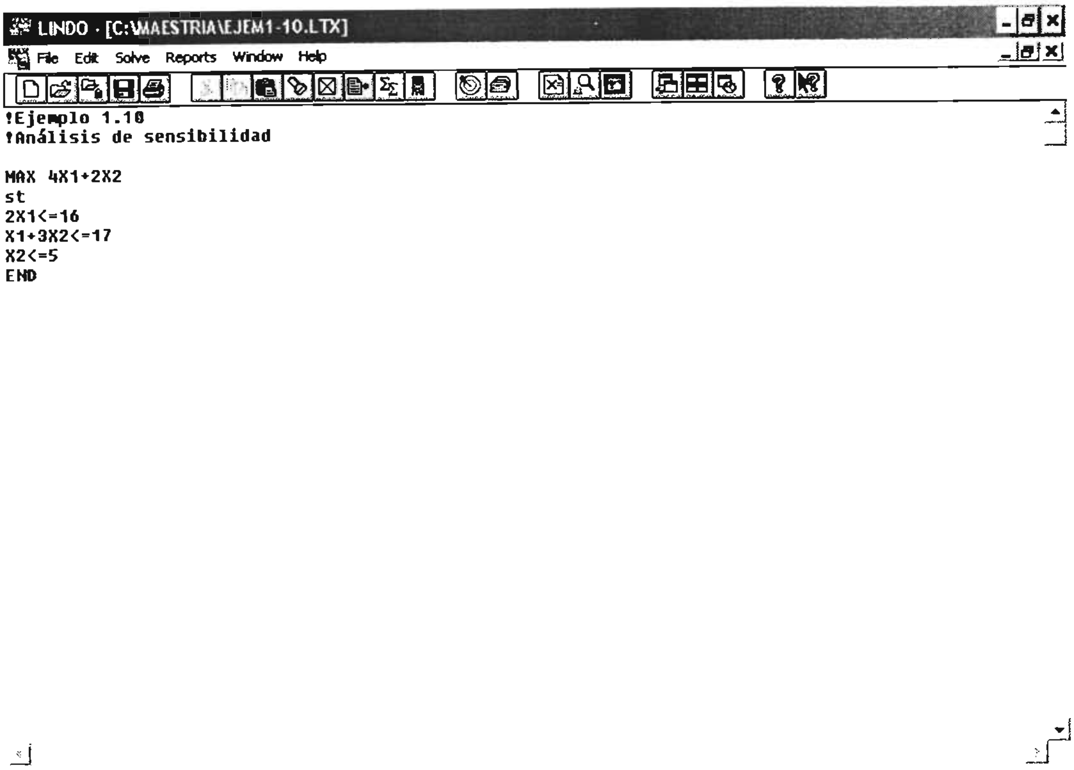
La columna **dual prices** (precios duales) tiene que ver nuevamente con el correspondiente problema dual y el análisis de sensibilidad. Los precios duales de este problema original o primal corresponden a las soluciones óptimas que tendrán las variables del problema dual. Recuerde también que un precio dual representa el costo que se tendría en la función objetivo por cada unidad de cambio en el lado derecho de una restricción determinada.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD CON LINDO

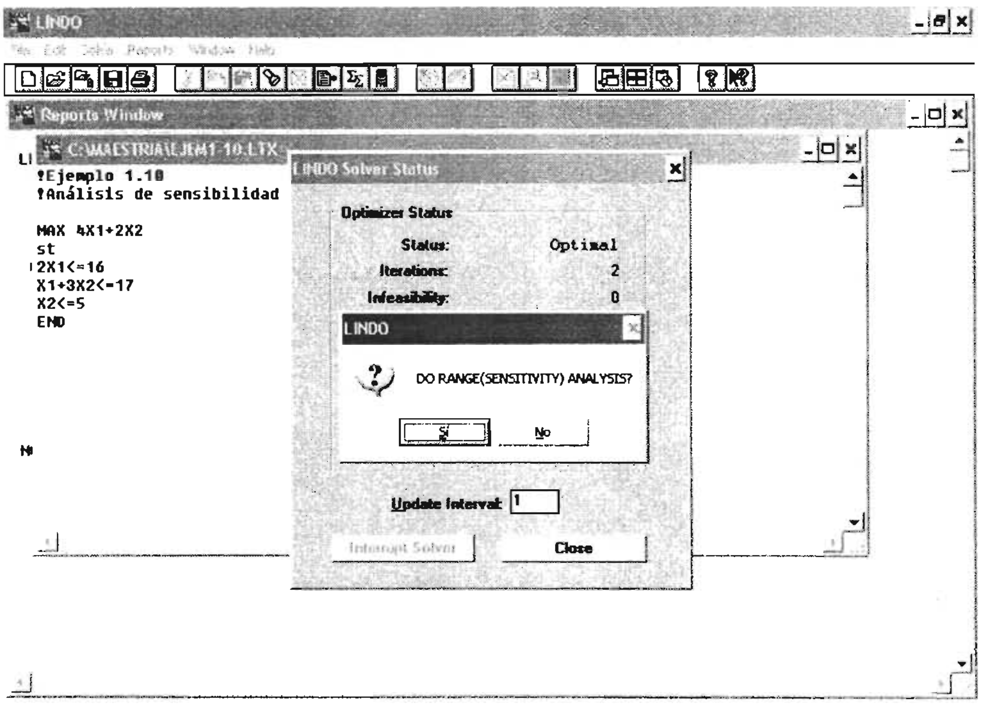
Para mostrar el análisis de sensibilidad que se puede llevar a cabo con **LINDO** se resolverá el ejemplo 1.12 del cual ya se conocen los resultados.

Max $z = 4x_1 + 2x_2$
Sujeto a
$2x_1 \leq 16$
$x_1 + 3x_2 \leq 17$
$x_2 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

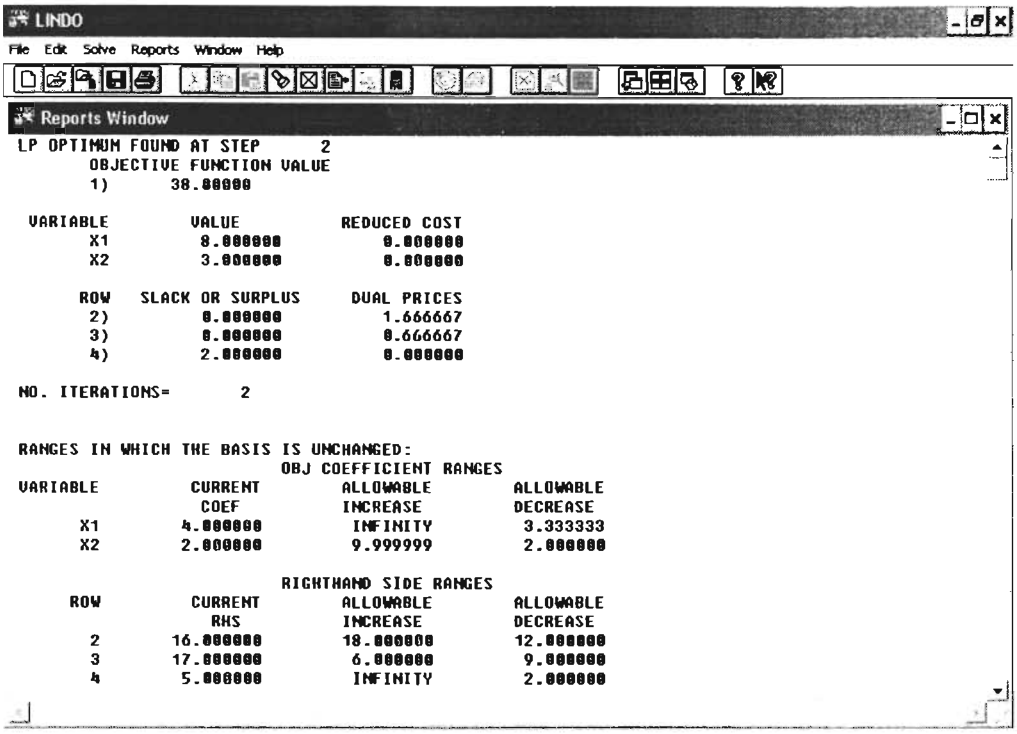
Se introduce el modelo en el programa:



Al momento de resolver el problema **LINDO** pregunta si se desea hacer un análisis de sensibilidad, se indica la opción "sí".



En la ventana de reporte se muestran los resultados tanto de la solución óptima como del análisis de sensibilidad.



Se puede observar que la solución óptima es $Z^* = 38$ con $x_1 = 8$ y $x_2 = 3$.

A continuación de la solución óptima aparece el análisis de los cambios en los coeficientes de la función objetivo. En la primera columna se muestran los coeficientes reales que tienen las variables en la función objetivo. Las siguientes dos columnas indican el incremento y decremento que pueden tener dichos coeficientes respectivamente.

Por ejemplo, para la **variable x_1** su coeficiente real es 4 y puede tener un incremento infinito, con lo cual su valor máximo también sería de infinito; el decremento que puede tener es de 3.3333, con lo que su valor mínimo sería de 0.6667. De la misma forma, la **variable x_2** tendría un valor máximo de 12 y un valor mínimo de 0.

Estos resultados son los mismos a los obtenidos cuando se lleva a cabo el análisis de manera gráfica:

Cambios en los coeficientes de Z

Variable	Coeficiente	Valor mínimo	Valor máximo
x_1	4	2/3	Infinito
x_2	2	0	12

En la última parte de la ventana aparece el análisis de los cambios en los lados derechos de las restricciones.

Cada renglón corresponde a una de las restricciones del problema. La primera columna muestra los valores de los lados derechos, mientras que las siguientes dos indican el incremento y decremento respectivamente que pueden tener dichos valores.

Por ejemplo, para la restricción 1 el lado derecho tiene un valor de 16 y puede incrementarse en 18 unidades, por lo que su valor máximo sería de 34; el decremento que puede tener es de 12 unidades, y su valor mínimo sería de 4.

Los precios duales para cada restricción aparecen en la columna inmediata a las holguras, a continuación de la solución óptima.

Tanto los resultados obtenidos para los cambios en los lados derechos de las restricciones, como los de los precios duales, son idénticos al análisis se sensibilidad realizado de forma gráfica.

Cambios en los lados derechos de las restricciones y precios duales

Restricción	Lado derecho	Valor mínimo	Valor máximo	Precio dual
1	16	4	34	1.6667
2	17	8	23	0.6667
3	5	3	Infinito	0

RELACIONES PRIMAL-DUAL RELATIVAS A LA SOLUCIÓN ÓPTIMA Y EL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD CON LINDO

Considere el problema primal del ejemplo 1.12 del cual se conoce su solución óptima y su análisis de sensibilidad, y su correspondiente problema dual.

Problema primal
Max $z = 4x_1 + 2x_2$
Sujeto a
$2x_1 \leq 16$
$x_1 + 3x_2 \leq 17$
$x_2 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

Problema dual
Min $w = 16y_1 + 17y_2 + 5y_3$
Sujeto a
$2y_1 + y_2 \geq 4$
$3y_2 + y_3 \geq 2$
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

La solución del dual con su respectivo análisis de sensibilidad es:

```
LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
Reports Window
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      38.00000

 VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
       Y1          1.666667          0.000000
       Y2          0.666667          0.000000
       Y3          0.000000          2.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)          0.000000         -8.000000
       3)          0.000000         -3.000000

NO. ITERATIONS=        2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
      Y1       16.000000        18.000000        12.000000
      Y2       17.000000         6.000000         9.000000
      Y3        5.000000         INFINITY         2.000000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS           INCREASE         DECREASE
       2        4.000000         INFINITY         3.333333
       3        2.000000         9.999999         2.000000
```

Con estos resultados y los anteriores que se tenían del problema primal se pueden corroborar las relaciones primal-dual.

En la siguiente tabla se muestran dichas relaciones.

PROBLEMA PRIMAL	**PROBLEMA DUAL**	**RESULTADO**
Z óptimo	Z óptimo	38
Holgura o exceso de la *i-ésima restricción*	Costo reducido de la *variable i*	**RESULTADO**
1ª. Restricción 2ª. Restricción 3ª. Restricción	y_1 y_2 y_3	0 0 2
Costo reducido de la *variable i*	Holgura o exceso de la *i-ésima restricción*	**RESULTADO**
x_1 x_2	1ª. Restricción 2ª. Restricción	0 0
Cambio en el coeficiente de la *variable i* en la función objetivo	Cambio en el lado derecho de la *i-ésima restricción*	**RESULTADO**
x_1 x_2	1ª. Restricción 2ª. Restricción	Entre 2/3 e ∞ Entre 0 y 12
Cambio en el lado derecho de la *i-ésima restricción*	Cambio en el coeficiente de la *variable i* en la función objetivo	**RESULTADO**
1ª. Restricción 2ª. Restricción 3ª. Restricción	y_1 y_2 y_3	Entre 4 y 34 Entre 8 y 23 Entre 3 e ∞
Precio dual de la *i-ésima restricción*	Valor óptimo de la *variable i*	**RESULTADO**
1ª. Restricción 2ª. Restricción 3ª. Restricción	y_1 y_2 y_3	1.6667 0.6667 0
(Valor óptimo de la *variable i*) (-1)	Precio dual de la *i-ésima restricción*	**RESULTADO**
x_1 x_2	1ª. Restricción 2ª. Restricción	-8 -3

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA DE INGENIERÍA

[1] "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Diario Oficial de la Federación, D.D.F., México, D.F., 1993.

[2] "Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto", Diario Oficial de la Federación, D.D.F., México, D.F., 1993.

[3] Meli, Roberto, "Diseño Estructural", Limusa, México, D.F., 1987.

[4] Gallagher, R. H. y Zienkiewicz, O. C, "Optimal Structural Design", 1st. Edition, John Wiley and Sons. 1977.

[5] Wagner, G., "CPM y PERT Aplicados a la Construcción", 3a. Edición, Gustavo Gili, S.A., 1979.

[6] Gutkowski, W., "Discrete Structural Optimization", International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures – No. 373, Springer Wien, New York, 1997.

[7] Sotelo Ávila, Gilberto, "Hidráulica General", Limusa, México, 1991.

[8] García Rivera, Rodrígo, "Métodos de Diseño de Redes de Alcantarillado", Tesis de Maestría en Ingeniería (Investigación de Operaciones), Fac. Ingeniería, DEPFI UNAM, Departamento de Sistemas, 2002.

BIBLIOGRAFÍA DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

[9] Taha, Hamdy A., "Investigación de Operaciones", 5a. Edición, Alfaomega, México, 2002.

[10] Blumendfeld, Dennis, "Operations Research Handbook", CRC Press, 2001.

[11] Bazaraa, Mokhtar S., "Nonlinear Programming : Theory and Algorithms", 2d. Edition , John Wiley and Sons, 1993.

[12] McCormick, Garth P., "Nonlinear Programming, Theory, Algorithms, and Applications", John Wiley and Sons, 1983.

[13] Hillier F. S. y Lieberman G. J., "Investigación de Operaciones", 7a. Edición, Mc Graw-Hill, 2002.

[14] Flores de la Mota, Idalia, "Teoría de Redes", Fac. Ingeniería, DEPFI UNAM, Departamento de Sistemas, 2001.

[15] Flores de la Mota Idalia, "Apuntes de Programación Dinámica", Fac. Ingeniería, DEPFI UNAM, Departamento de Sistemas, 2003.