

01162



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERÍA**

**“Propagación del oleaje en áreas semi-cerradas”**

**TESIS**

Como requisito para obtener el grado de

**Maestro en Ingeniería Civil**

**(Hidráulica)**

**Presenta**

**ROBERTO CARLOS CHÁVEZ MENDOZA**

**DIRECTOR DE TESIS**

**Dr. RODOLFO SILVA CASARÍN**



MÉXICO, D.F.

FEBRERO 2005

m. 342238



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# ÍNDICE

<b>1.</b>	<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1.	INTRODUCCIÓN.....	1
1.2.	OBJETIVOS Y ALCANCES.....	2
1.3.	ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO.....	3
<b>2.</b>	<b>TEORÍA LINEAL.....</b>	<b>5</b>
2.1.	ASPECTOS FUNDAMENTALES.....	5
2.1.1.	<i>Teoría del rayo.....</i>	8
2.1.2.	<i>Ecuación de la pendiente suave.....</i>	9
2.1.3.	<i>Modelos para aguas someras.....</i>	9
2.1.4.	<i>Modelos de refracción - difracción.....</i>	9
2.1.5.	<i>Modelos tipo Boussinesq.....</i>	9
2.1.6.	<i>Teoría de la onda solitaria.....</i>	10
2.1.7.	<i>Teoría cnoidal.....</i>	10
2.1.8.	<i>Teoría lineal.....</i>	10
2.2.	CONDICIONES DE CONTORNO.....	10
2.2.1.	<i>Condición de contorno cinemática.....</i>	11
2.2.2.	<i>Condición de dinámica de contorno.....</i>	15
2.2.3.	<i>Condición de contorno mixta de superficie libre.....</i>	15
2.3.	ONDAS DE PEQUEÑA AMPLITUD SOBRE FONDO CONSTANTE.....	19
2.3.1.	<i>Separación de la variable profundidad.....</i>	23
2.3.2.	<i>Condición de periodicidad espacial.....</i>	25
2.3.3.	<i>Solución general.....</i>	26
2.3.4.	<i>Caso 3-D.....</i>	27
2.3.5.	<i>Caso 2-D.....</i>	28
2.4.	TREN DE ONDAS PROPAGÁNDOSE EN AGUA SOBRE UNA CORRIENTE UNIFORME $U_0$ .....	29
2.4.1.	<i>Condición de contorno dinámica de superficie libre.....</i>	29
2.4.2.	<i>Condición de contorno cinemática de superficie libre.....</i>	31
2.5.	NOTAS.....	32
2.5.1.	<i>Nota 1. Problema regular de Sturm-Liouville.....</i>	32
2.5.2.	<i>Nota 2: Teoremas de la ecuación de Helmholtz.....</i>	33
2.5.3.	<i>Nota 3: Autovalores y autofunciones del problema en la variable <math>z</math> con <math>k^2 &gt; 0</math> y <math>k^2 &lt; 0</math>.....</i>	34
<b>3.</b>	<b>ECUACIÓN DE LA MILD SLOPE EXTENDIDA.....</b>	<b>37</b>
3.1.	INTRODUCCIÓN.....	37
3.2.	ECUACION DE LA MILD SLOPE MODIFICADA (MMSE).....	39
3.3.	RELACIÓN DE DISPERSIÓN.....	47
3.4.	DISIPACIÓN DE ENERGÍA.....	48
3.4.1.	<i>Fricción de fondo.....</i>	49
3.4.2.	<i>Rotura.....</i>	49
3.5.	ZONAS DE TIERRA.....	55

<b>4.</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA.....</b>	<b>57</b>
4.1.	INTRODUCCIÓN.....	57
4.2.	CONDICIONES DE FRONTERA.....	58
4.2.1.	<i>Condiciones de frontera de la costa.....</i>	<i>58</i>
4.2.2.	<i>Condiciones de frontera de radiación al infinito.....</i>	<i>60</i>
4.2.3.	<i>Condiciones de frontera abierta.....</i>	<i>63</i>
4.2.4.	<i>Condición de frontera parcialmente reflejante.....</i>	<i>67</i>
4.3.	DIFERENCIA FINITA.....	68
4.4.	MÉTODO DE GAUSS PARA RESOLVER MATRICES DE BANDA LARGA.....	70
4.5.	VERIFICACIÓN DEL MODELO.....	72
4.5.1.	<i>Interacción del oleaje con un grupo de pilas.....</i>	<i>73</i>
4.5.2.	<i>Resonancia en un puerto rectangular.....</i>	<i>77</i>
<b>5.</b>	<b>APLICACIÓN DEL MODELO.....</b>	<b>81</b>
5.1.	RESONANCIA EN PUERTOS.....	81
5.1.1.	<i>Modelos de resonancia en puertos: características generales.....</i>	<i>82</i>
5.2.	DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROGRAMA WAPO2D.....	84
5.2.1.	<i>Programa de preproceso BWAPO2D.....</i>	<i>84</i>
5.2.2.	<i>Programa de proceso WAPO2D.....</i>	<i>86</i>
5.2.3.	<i>Ficheros de entrada.....</i>	<i>87</i>
5.2.4.	<i>Ficheros de salida de BWAPO2D.....</i>	<i>90</i>
5.2.5.	<i>Parámetros de dimensionamiento de BWAPO2D y WAPO2D.....</i>	<i>93</i>
5.3.	EJEMPLOS DE APLICACIÓN.....	93
5.3.1.	<i>Caso 1: Puerto de Veracruz.....</i>	<i>94</i>
5.3.2.	<i>Caso 2: Puerto de Ensenada.....</i>	<i>99</i>
5.3.3.	<i>Caso 3: Puerto de Manzanillo.....</i>	<i>105</i>
<b>6.</b>	<b>CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>113</b>
6.1.	CONCLUSIONES.....	113
6.2.	FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACION.....	114
	<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>117</b>
	<b>ANEXO A: ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRODINAMICA.....</b>	<b>123</b>
A.1	INTRODUCCIÓN.....	123
A.2	ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.....	123
A.3	ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS RECTANGULARES.....	128
A.4	ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES.....	129
A.5	ECUACIÓN DE EULER.....	138
A.6	ECUACIÓN DE BERNOULLI.....	138



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1: En el fenómeno de refracción los frentes de ola se reacomodan por efecto de la batimetría de la costa.....	6
Figura 2-2: Cuando se produce el efecto de difracción se generan zonas donde las agitaciones del oleaje son reducidas, pues la difracción es una transferencia lateral de energía.....	6
Figura 2-3: Cuando se produce la reflexión del oleaje los niveles de agitación se incrementan notablemente. ....	7
Figura 2-4: La rotura del oleaje. ....	7
Figura 2-5: Obtención gráfica de las raíces reales. ....	35
Figura 2-6: Obtención gráfica de las raíces imaginarias puras de la ecuación de la dispersión.....	35
Figura 3-1: Perfil idealizado de la zona de rompiente para el modelo de disipación por rotura, Dally, W. Et al. (1985) .....	51
Figura 4-1: Orientación del sistema coordenado y malla para el dominio de computo. ....	73
Figura 4-2: Mapas que representan los campos de amplitud de onda adimensional para $kh=2\pi$ , $\theta=0$ considerando: a) solución analítica, b) aproximación de Kirby (1986), c) aproximación propuesta por Padé, d) aproximación parabólica de menor orden. ....	74
Figura 4-3: Corte sobre el eje de simetría vertical y horizontal del grupo de pilas para $kh=2\pi$ , $\theta=0$ .....	75
Figura 4-4: Distribución de la amplitud de onda para ángulo de incidencia $\theta=30^\circ$ .....	76
Figura 4-5: Corte sobre el eje de simetría vertical y horizontal del grupo de pilas para un ángulo de incidencia $\theta=30^\circ$ .....	76
Figura 4-6: Distribución de la amplitud de onda para ángulo de incidencia $\theta=45^\circ$ .....	77
Figura 4-7: Corte sobre el eje de simetría vertical y horizontal del grupo de pilas para un ángulo de incidencia $\theta=45^\circ$ .....	77
Figura 4-8: Geometría del puerto. ....	78
Figura 4-9: Solución presentada por Maa, Hsu et al. (1997), incluyendo los coeficientes de reflexión local.....	78
Figura 4-10: Mapa de coeficientes de reflexión obtenido con el modelo.....	79
Figura 4-11: Análisis de resonancia en el puerto mostrado en la Figura 4-8. ....	80
Figura 5-1: Malla con ejemplos de los números de identificación.....	85
Figura 5-2: Fichero con una lista de casos. ....	87
Figura 5-3: Fichero de condiciones generales. ....	88
Figura 5-4: Dirección del oleaje incidente desde profundidad constante según el valor de ID. ....	89
Figura 5-5 : Criterio de ubicación de las fronteras, ID.....	89
Figura 5-6: Fichero de batimetría.....	90

Figura 5-7: Fichero de resultados con la amplitud máxima de onda.....	92
Figura 5-8: Fichero de superficie libre instantánea.....	92
Figura 5-9: Batimetría del Puerto de Veracruz.....	95
Figura 5-10: Superficie libre instantánea caso a.....	96
Figura 5-11: Alturas de ola para a) $T = 20$ s, ángulo de incidencia $= 0^\circ$ ; b) $T = 20$ s, ángulo de incidencia $= -45^\circ$ ; c) $T = 30$ s, ángulo de incidencia $= 0^\circ$ y d) $T = 30$ s, ángulo de incidencia $= -45^\circ$ .....	97
Figura 5-12: Superficie libre instantánea caso b.....	98
Figura 5-13: Superficie libre instantánea caso c.....	98
Figura 5-14: Superficie libre instantánea caso d.....	99
Figura 5-15: Puerto de Ensenada; a) Batimetría, b) Vista general.....	100
Figura 5-16: Superficie libre instantánea caso e.....	101
Figura 5-17: Superficie libre instantánea caso f.....	102
Figura 5-18: Superficie libre instantánea caso g.....	103
Figura 5-19: Superficie libre instantánea caso h.....	104
Figura 5-20: Amplitudes de ola para a) $T = 20$ s, ángulo de incidencia $= 20^\circ$ ; b) $T = 20$ s, ángulo de incidencia $= 60^\circ$ ; c) $T = 30$ s, ángulo de incidencia $= 20^\circ$ y d) $T = 30$ s, ángulo de incidencia $= 60^\circ$ .....	105
Figura 5-21: Puerto de Manzanillo; a) batimetría, b) vista aérea.....	106
Figura 5-22: Superficie libre instantánea caso i.....	107
Figura 5-23: Superficie libre instantánea caso j.....	108
Figura 5-24: Superficie libre instantánea caso k.....	109
Figura 5-25: Superficie libre instantánea caso l.....	110
Figura 5-26: Amplitudes de ola para a) $T = 20$ s, ángulo de incidencia $= 0^\circ$ ; b) $T = 20$ s, ángulo de incidencia $= -45^\circ$ ; c) $T = 30$ s, ángulo de incidencia $= 0^\circ$ y d) $T = 30$ s, ángulo de incidencia $= -45^\circ$ .....	111
Figura A- 1: Cubo infinitesimal en un sistema ortonormal derecho.....	124
Figura A- 2: Nomenclatura empleada en el análisis.....	127
Figura A- 3 Esfuerzos sobre el volumen de control.....	132
Figura A- 4: Fuerzas que se desarrollan en un fluido entre dos placas.....	133
Figura A- 5 Esquema de deformaciones.....	134

## LISTA DE TABLAS

Tabla 2-1: Posibles soluciones a la ecuación de Laplace, basados en la técnica de separación de variables, Dean et al. (1984) .....	24
Tabla 3-1: Valores de los factores $\Gamma$ y $K$ , obtenidos experimentalmente para tres pendientes. ....	53
Tabla 5-1: Resumen de casos modelados. ....	94

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Amplitud de ola.
$a_x, a_y, a_z$	Componentes de la aceleración.
$a_0, a_1, a_2$	Parámetros de las condiciones de frontera.
$A$	Amplitud del tren de oleaje, parámetro de forma, área de las placas.
$A_0$	Amplitud incidente.
$Ak$	Componente de velocidad horizontal
$B$	Parámetro de forma.
$C_g$	Celeridad de grupo.
$C$	Celeridad de la onda.
$C_f$	Coefficiente de fricción.
$div$	Divergencia.
$e$	Número de Euler.
$E$	Energía de la onda por unidad de superficie.
$Ec_g$	Flujo de energía asociado a la altura de ola que la onda rompiendo trata de alcanzar.
$E_c$	Energía cinética.
$E_p$	Energía potencial.
$f_B$	Termino de disipación de energía por fondo.
$f_D$	Factor de disipación por rompiente.
$F$	Vector Fuerza.
$F_x, F_y, F_z$	Componentes del vector fuerza.
$F(x, y, z)$	Representación de una superficie.
$grad$	Gradiente.
$g$	Aceleración de la gravedad.
$h$	Profundidad.
$h(x, y, z)$	Fondo variable.
$H$	Altura de ola.
$H_e$	Altura de ola estable.
$H_i$	Altura de ola incidente.
$H_r$	Altura de ola reflejada.
$H_B$	Altura de rompiente.
$i$	Unidad compleja.
$k$	Constante de separación, número de onda, vector número de onda.
$K$	Coefficiente de decaimiento adimensional.
$k_0$	Número de onda en la frontera de lado mar.

$k_l$	Número de onda local.
$k_r$	Coefficiente de reflexión.
$k_x, k_y$	Componentes del vector número de onda.
$l$	Número de onda relativo a la dirección $x$ .
$L$	Longitud de onda.
$m$	Masa, número de onda relativo a la dirección $y$ .
$M(z)$	Función de profundidad.
$n$	Vector unitario normal a la superficie libre
$p$	Presión del fluido.
$q$	Modulo del vector número de onda.
$\bar{r}$	Vector de posición.
$t$	Variable tiempo.
$T$	Período de la onda.
$u, v, w$	Componentes del vector velocidad.
$\bar{u}, V$	Vector velocidad.
$U_u$	Velocidad de una corriente uniforme.
$Ur$	Número adimensional de Ursell.
$W$	Termino disipativo.
$\bar{W}$	Vorticidad del flujo.
$x, y$	Coordenadas horizontales.
$Y$	Separación entre las placas.
$X, Y, Z$	Ejes coordenados.
$z$	Coordenada vertical.
$\beta$	Cambio de fase.
$\delta(x)$	Tasa de disipación de energía por unidad de superficie
$\xi$	Desplazamiento vertical.
$\zeta$	Desplazamiento horizontal.
$\phi$	Modulo del potencial de velocidades.
$\phi(x, y, z, t)$	Potencial de velocidades.
$\phi^*$	Potencial de velocidades independiente del tiempo.
$\Phi(x, y, z, t)$	Potencial de velocidades que describe el flujo.
$\eta$	Desplazamiento de la superficie libre del agua sobre el nivel.
$\Gamma$	Factor de proporcionalidad.
$\varphi$	Amplitud compleja.
$\mu$	Constante de integración, viscosidad dinámica del agua.
$\theta_l$	Ángulo local que forma el tren de oleaje con la frontera.
$\rho$	Densidad del flujo.
$\pi$	Número pi.
$\sigma$	Frecuencia angular.

---

$\sigma_{ii}$	Esfuerzo normal.
$\tau$	Viscosidad cinemática del agua.
$\tau_{ii}$	Esfuerzo cortante.
$w$	Frecuencia angular.
$\Omega$	Fase del movimiento ondulatorio.
$\psi$	Potencial de velocidad.
$\psi_i$	Potencial de velocidades del oleaje incidente.
$\psi_l$	Potencial de velocidades total.
$\psi_r$	Potencial de velocidades del oleaje reflejado.
$\psi_s$	Potencial de velocidades del oleaje perturbado.
$\psi^-$	Potencial de velocidades que se transmite al dominio.
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Incremento en las direcciones $x$ , $y$ e $z$ .
$\nabla_h$	Gradiente horizontal, operador diferencial.
$\nabla$	Operador vectorial nabla, gradiente.
$\Re[ ]$	Parte real del argumento.



# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

---

### 1.1. INTRODUCCIÓN.

Por su posición geográfica México cuenta con una extensión litoral de aproximadamente 11,000 km. Sin embargo, pese al inmenso litoral, la explotación de los recursos marítimos no ha sido del todo eficiente; basta mencionar que el país cuenta con alrededor de 20 puertos importantes, es decir, un recinto portuario de importancia por cada 550 km de playa.

Para eficientar los aprovechamientos costeros es preciso concebir el tipo y número de estructuras a implementar, así como, identificar plenamente las características geográficas, topobatiométricas, meteorológicas y sociales del sitio.

En la realización de un buen diseño, es fundamental conocer a detalle los parámetros físicos que causarán solicitaciones a las obras; por lo tanto, es trascendental caracterizar el oleaje, régimen de mareas, corrientes marinas, vientos, escurrimientos, etc. Sin embargo, a menudo no se cuenta con registros sobre la magnitud y comportamiento de dichas variables, por lo que es práctica común implementar campañas de medición (de corta duración) y procesar los resultados mediante técnicas estadísticas para inferir el comportamiento de los fenómenos físicos en el tiempo.

Además, en el caso del oleaje, los registros existentes en general son para la condición de aguas profundas, razón por la que es esencial realizar su propagación hasta el sitio mismo donde se pretenden construir las estructuras. Para tal efecto, existen múltiples modelos capaces de analizar el comportamiento de las ondas que transitan hacia la costa. No obstante, debido a lo complejo que resulta la solución de sus ecuaciones de gobierno y la definición de las condiciones de frontera, dichos

métodos admiten simplificaciones; es decir, desprecian la presencia de algunos procesos que modifican el oleaje (refracción, difracción reflexión, etc.), pierden validez en la zona de rompientes, asumen fondo fijo, no simulan la propagación de ondas de larga duración, etc. Por lo anteriormente expuesto, es vital identificar claramente la problemática que se pretende examinar y elegir el modelo que con mayor fidelidad reproduzca las condiciones del medio físico.

Las modernas técnicas de simulación permiten modelar el comportamiento del oleaje en áreas semi cerradas. Al respecto, esta tesis presenta un modelo que resuelve la ecuación de la pendiente suave para condiciones de fronteras abiertas y de profundidad constante; con ello, es posible obtener para las condiciones de oleaje incidente: la distribución de la altura de ola y el perfil de la superficie libre.

La evaluación de los niveles de agitación que se pueden generar en áreas semi protegidas, es una tarea fundamental sobretodo en la concepción y diseño de puertos; pues de esta manera es posible establecer los arreglos en planta que resulten más convenientes para alcanzar estándares de operación adecuados, los cuales permitirán que las maniobras en el recinto portuario sean seguras y la operación rentable.

## 1.2. OBJETIVOS Y ALCANCES.

- Presentar los desarrollos teóricos que dan origen a la ecuación de la pendiente suave modificada.
- Presentar planteamientos para definir las condiciones de frontera de manera más sencilla y con mayor grado de precisión.
- Optimizar el esfuerzo computacional requerido para la modelación del comportamiento del oleaje que se propaga en fondo variable en áreas semi cerradas.
- Aplicar un modelo numérico basado en la ecuación de la pendiente suave modificada (implementado con condiciones de fronteras abiertas y de profundidad constante) para el análisis de propagación del oleaje en áreas semi cerradas.
- Comparar los resultados del modelo *WAPO2D* para ondas de corta y larga duración.

### 1.3. ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO.

En virtud de la poca disponibilidad de datos sobre el comportamiento de los parámetros oceanográficos y a la imperante necesidad de conocer el comportamiento del oleaje que se propaga en las proximidades de los recintos portuarios; en esta tesis se presenta un método que permite la simulación de ondas de larga duración en áreas semi cerradas. Al respecto, en primera instancia se presenta una breve descripción de los fenómenos que modifican el comportamiento del oleaje cuando este viaja desde aguas con profundidad indefinida hasta aguas someras. Se resumen también, las características de las principales teorías para analizar el oleaje, poniendo especial énfasis en el desarrollo de las ecuaciones de la teoría lineal o de Airy, donde se incluyen los tratamientos para las condiciones de frontera.

El tercer capítulo incluye el marco histórico sobre las investigaciones acerca de la ecuación de la pendiente suave. Sin embargo, el propósito fundamental del apartado consiste en exhibir los desarrollos matemáticos que conducen a la obtención de la ecuación de la pendiente suave modificada.

Una vez desarrollada la ecuación de la pendiente suave modificada, en el cuarto capítulo, se abordan los tratamientos para facilitar la definición de las condiciones de contorno, así como la discretización de las ecuaciones que se han de resolver mediante la técnica de eliminación Gaussiana a través de la implementación del programa *WAPO2D*. Finalmente, se presenta la validación del modelo numérico mediante la comparación de resultados de laboratorio y casos en los que la solución analítica es conocida.

En el quinto capítulo de este trabajo se presenta un resumen del fenómeno de resonancia en áreas semi cerradas y se aplica el modelo *WAPO2D* a las condiciones batimétricas de tres puertos (analizando diferentes condiciones de aproximación del oleaje incidente a través de las fronteras abiertas y de profundidad constante), para tal efecto, previamente se realiza una descripción sobre el funcionamiento del programa.

Finalmente, las conclusiones y futuras líneas de investigación se exhiben en el sexto capítulo. Cabe señalar que para reforzar el desarrollo del segundo capítulo se presenta el Anexo A.



## CAPÍTULO 2

# TEORÍA LINEAL

---

### 2.1. ASPECTOS FUNDAMENTALES.

Una ola es una perturbación producto de fuerzas generadoras (viento, atracción gravitatoria, corrientes, sismo, etc.) y restauradoras o de equilibrio (fuerza de Coriolis, gravitatoria, etc.) dentro de un medio continuo. El oleaje es creado esencialmente por la acción de los vientos sobre la superficie líquida en reposo.

Es importante aclarar que el oleaje no consiste en un tren de carácter sinusoidal de ondulaciones con longitudes, períodos y alturas constantes; sino que, se integra por muchos trenes con características específicas cada uno.

El oleaje procedente de aguas profundas, al aproximarse a la costa modifica su comportamiento al verse sensiblemente afectado por la batimetría de la playa y por la presencia de estructuras. Los principales fenómenos que modifican el comportamiento del oleaje en la vecindad de la costa son:

- Refracción.  
Definida como el cambio que experimenta en dirección de incidencia y altura un tren de oleaje al aproximarse a la costa (Figura 2-1), cuando el frente de ola tiende a hacerse paralelo a las curvas batimétricas variando continuamente su dirección y altura. En la refracción se produce una reducción en la celeridad, seguida por la disminución de la longitud y el aumento de la altura de ola.
- Difracción.  
Es una transferencia lateral de energía, ocurre cuando el oleaje es interrumpido por un obstáculo que impide su paso a la zona posterior del mismo. A medida que el oleaje se ve modificado por el obstáculo, la altura de

ola va disminuyendo y da origen a las denominadas zonas de luz, penumbra y sombra.

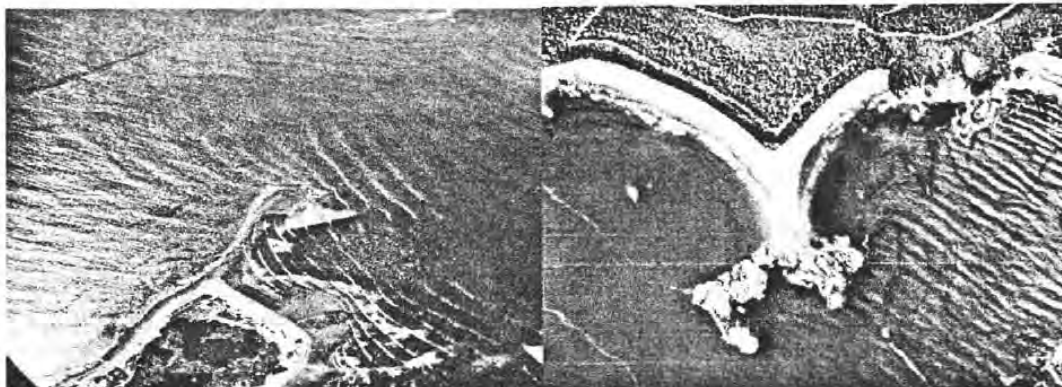


Figura 2-1: En el fenómeno de refracción los frentes de ola se acomodan por efecto de la batimetría de la costa.

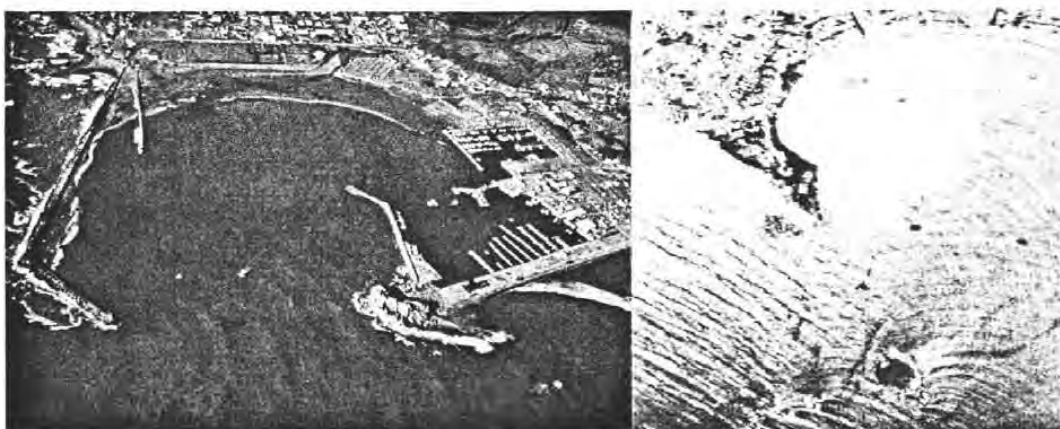


Figura 2-2: Cuando se produce el efecto de difracción se generan zonas donde las agitaciones del oleaje son reducidas, pues la difracción es una transferencia lateral de energía.

- Reflexión.

Se presenta cuando un oleaje no rompiente incide sobre una estructura, por lo tanto, una parte de la energía incidente es reflejada y la otra se transmite al interior de la estructura (si la estructura es permeable). Queda claro pues, que entre más vertical y lisa sea la estructura mayor será la reflexión.

En algunos sitios el efecto de la reflexión llega a ser sumamente importante pues puede generar resonancia, provocando niveles de agitación capaces de poner en riesgo las obras de infraestructura y/o limitando las maniobras que se llevan a cabo, reduciendo significativamente el nivel de operatividad.



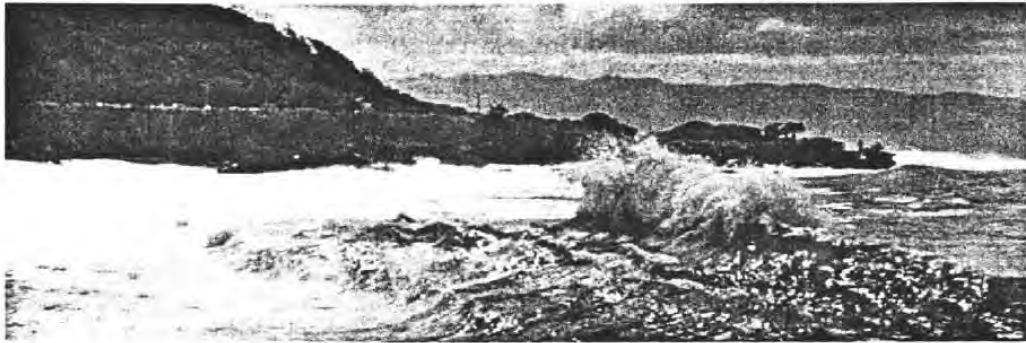


Figura 2-3: Cuando se produce la reflexión del oleaje los niveles de agitación se incrementan notablemente.

- Rompiente.  
Se presenta cuando un oleaje que se propaga desde aguas profundas sufre modificaciones en su comportamiento de acuerdo a lo descrito en 3.4.2. Cabe señalar, que el fenómeno de rompiente constituye una de las causas principales del transporte de sedimentos en la costa, pues su presencia induce una gran disipación de energía.

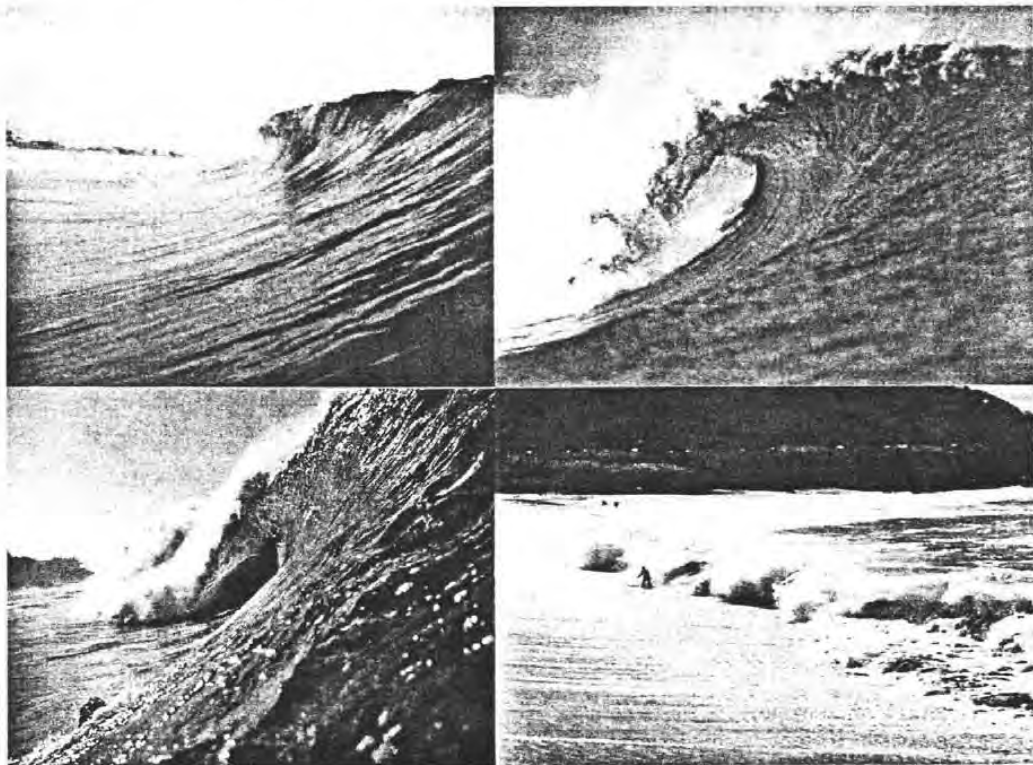


Figura 2-4: La rotura del oleaje.

Si la pendiente litoral es escasa, el oleaje que se propaga desde aguas profundas, al rozar con el fondo sufre un retraso en sus zonas bajas, mientras que las superiores avanzan. Este desequilibrio se va acentuando cada vez más y da origen, primero, a que la ola adquiera mayor altura, y luego, a que su cresta caiga hacia delante y rompa sobre la playa en un movimiento que en apariencia es como si la ola se arrollase y rodase sobre la arena marcándose una serie de fajas espumosas que avanzan a la misma velocidad y equidistantes, pero que desaparecen en la orilla conforme nuevas olas originan otras bandas parecidas.

Desde el punto de vista físico, existe una gran variedad de ondas, sin embargo, la generación de ellas en su mayoría se debe a la acción del viento sobre un cuerpo de agua. Por otro lado, la acción de las mareas origina ondas de largo período capaces de incitar resonancia en puertos y estuarios. Los maremotos constituyen otro generador de oleaje (tsunamis). Ante la gran variedad de fuerzas generadoras de oleaje, resulta imposible el tratamiento matemático del fenómeno mediante una solución general.

Una forma de dividir las teorías que representan la propagación de un tren de oleaje consiste en separar las que consideran fondo variable y las que no lo hacen. En las primeras se incluye la teoría del rayo, la ecuación de la pendiente suave, modelos para aguas someras, modelos de refracción-difracción y modelos tipo Boussinesq. Las aproximaciones de Stokes, la teoría lineal, la Cnoidal y la de la onda solitaria constituyen ejemplos de las teorías para fondo fijo. Es importante mencionar que las teorías que asumen fondo constante son incapaces de modelar los efectos de rotura, refracción y someramiento.

### 2.1.1. Teoría del rayo.

Modelo lineal que se fundamenta en la teoría óptica-geométrica. Define rayos como la línea tangente al vector número de onda y proporciona soluciones analíticas para geometrías sencillas. Para aplicarla se requieren datos de altura y período de ola en aguas profundas, características de la playa y dirección de aproximación. Genera resultados adecuados si se trabaja en aguas profundas donde  $d \gg L$ , pero pierde validez en zonas donde se cruzan los rayos (irrotacionalidad del número de onda), además, no permite el flujo lateral de energía a través del rayo.

### 2.1.2. Ecuación de la pendiente suave.

Acepta oleaje lineal y armónico, flujo irrotacional, se aplica a estudios de resonancia en puertos. Permite modelar los procesos de refracción y difracción en grandes cuerpos de agua, aun ante la presencia de batimetrías complejas, soluciones con medio poroso y diferentes ángulos de incidencia ya que puede manejar mallas inconstantes. Permite predecir las condiciones del oleaje en la zona de rotura, así como, los efectos de estructuras sumergidas, pero presenta problemas para definir las condiciones de frontera en la playa.

### 2.1.3. Modelos para aguas someras.

Se obtienen a través de la integración en la vertical de las ecuaciones de Euler. Aplicables cuando la profundidad del cuerpo de agua es muy pequeña comparada con la longitud de ola, para análisis de ondas largas y mareas. Permiten modelar efectos de rotura, tsunamis y análisis de huracanes. Incorporan los efectos de: la fuerza de Coriolis, fuerzas turbulentas mediante el concepto de viscosidad turbulenta, transmisión de energía del viento al agua, y fricción de fondo. Dado que los períodos son muy grandes, pueden despreciarse las componentes verticales de la velocidad y la aceleración.

### 2.1.4. Modelos de refracción - difracción.

Métodos no lineales con soluciones parabólicas que consideran que el campo de oleaje no varía sustancialmente para una dirección del tren de oleaje. Se pueden aplicar cuando se tienen batimetrías irregulares pues proporciona buenas aproximaciones cuando los efectos de refracción y difracción son muy importantes, tienen la capacidad de reproducir eficientemente la presencia de bajos u obstáculos.

### 2.1.5. Modelos tipo Boussinesq.

Resuelven las ecuaciones de Euler, para flujo irrotacional. Asumen que la profundidad es comparable con la altura de ola. Aplicable a estudios en la zona de surf, predicen los efectos de someramiento, refracción, rompiente, run up, movimiento natural de la costa y agitación en puertos. Además, permiten modelar tsunamis o problemas donde es importante saber como se mueve el fondo. Sin embargo, su precisión se reduce en grandes cuerpos de agua.

### 2.1.6. Teoría de la onda solitaria.

Asume que el desplazamiento de la superficie libre se presenta únicamente sobre el nivel de aguas tranquilas. Es aplicable en fondo plano, para estudiar tsunamis, ya que por su largo período, se asocia a largas longitudes de onda que permiten asumir que casi cualquier fondo es somero.

### 2.1.7. Teoría cnoidal.

Capaz de describir el campo de velocidades y presiones de una onda periódica y se resuelve mediante el uso de funciones Jacobianas elípticas. Aunque existen aproximaciones de diversos órdenes; la de primer orden describe adecuadamente las ondas de amplitud finita en aguas someras.

Se recomienda su uso cuando acaba el rango de validez de la teoría lineal (en aguas profundas) y tiene como límite la teoría de la onda solitaria, cuando la longitud de onda tiene al infinito (en aguas someras).

### 2.1.8. Teoría lineal.

La teoría de ondas de pequeña amplitud, teoría lineal o teoría de Airy es esencialmente lineal, pues asume despreciables los términos no lineales de la inercia conectiva. Se denomina de pequeña amplitud porque es teóricamente exacta cuando el movimiento tiende a cero, incluso si los términos de la inercia conectiva son considerados. De hecho, en este caso los términos no lineales son infinitesimales de orden más elevado que los términos lineales, Le Méhauté (1976).

A continuación, se desarrollan las ecuaciones que representan la propagación de ondas de pequeña amplitud sobre fondo horizontal impermeable.

## 2.2. CONDICIONES DE CONTORNO.

Resulta evidente la no existencia de una solución general para los sistemas de ecuaciones que describen el comportamiento del flujo, pero en algunos casos la solución se obtiene cuando se especifican las condiciones de contorno, como:

- La superficie libre donde generalmente la presión es conocida y es igual a la presión atmosférica local
- Las condiciones de contorno fijas que consideran que el flujo no circula a través de la frontera.

- Las condiciones de contorno infinitas que se presentan cuando el movimiento tiende a valores conocidos.

### 2.2.1. Condición de contorno cinemática.

Una expresión que representa la condición cinemática de contorno es derivada de la ecuación que describe la superficie del contorno. Toda superficie fija o móvil se puede expresar a partir de:

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (2.1)$$

si la superficie tiene variaciones en el tiempo, caso muy particular de una onda, entonces, la derivada total de la superficie con respecto al tiempo es nula.

$$\frac{DF(x, y, z, t)}{Dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{en F(x,y,z,t) = 0} \quad (2.2)$$

Recordando que:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w$$

entonces, la derivada total de la superficie con respecto al tiempo es:

$$\frac{DF(x, y, z, t)}{Dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{en F(x,y,z,t) = 0} \quad (2.4)$$

o en términos del operador vectorial nabla:



$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \bar{u} \cdot \nabla F = \bar{u} \cdot n |\nabla F| \quad (2.5)$$

donde  $n$  es el vector unitario normal a la superficie libre. Entonces,  $n$  y  $|\nabla F|$  se definen de acuerdo con las ecuaciones (2.6) y (2.7).

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (2.6)$$

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \quad (2.7)$$

Finalmente, la condición cinemática de contorno se puede expresar en términos de (2.8).

$$\bar{u} \cdot n = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} \quad \text{en } F(x, y, z, t) = 0 \quad (2.8)$$

### 2.2.1.1 Condición cinemática en el fondo.

Considerando la presencia de fondo impermeable:

$$\bar{u} \cdot n = 0 \quad (2.9)$$

resulta que (2.10) es la ecuación que describe el fondo.

$$F(x, y, z) = z + h(x, y) = 0 \quad (2.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.10) y (2.7) en (2.6):



$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = - \frac{\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (2.11)$$

realizando el producto punto de  $\bar{\mathbf{u}}$  por el vector unitario normal a la superficie y multiplicando por el denominador se logra:

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = (u, v, w) \cdot \mathbf{n} \quad (2.12)$$

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{en } z = -h(x, y) \quad (2.13)$$

$$w = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi \quad \text{en } z = -h(x, y) \quad (2.14)$$

Para fondo constante donde se cumple que  $h = cte$ , es decir no es función ni de  $x$  ni de  $y$  la expresión anterior se escribe como:

$$w = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (2.15)$$

### 2.2.1.2 Condición cinemática en la superficie libre.

Definiendo a  $\eta$  como el desplazamiento de la superficie libre del agua sobre el nivel  $z$ , es posible describir la superficie libre del agua mediante (2.16).

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad (2.16)$$

Si se sustituye (2.16) en (2.8):

$$\bar{u} \cdot n = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (2.17)$$

sustituyendo (2.16) en la ecuación que define el vector unitario normal a la superficie libre,  $n$ , se tiene:

$$n = \frac{-\frac{\partial h}{\partial x} i - \frac{\partial h}{\partial y} j + k}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (2.18)$$

multiplicando escalarmente  $\bar{u}$  y  $n$  e igualando el resultado con (2.17):

$$\bar{u} \cdot n = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{-\frac{\partial h}{\partial x} i - \frac{\partial h}{\partial y} j + k}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (2.19)$$

operando,

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (2.20)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (2.21)$$

### 2.2.2 Condición de dinámica de contorno.

La ecuación que define la condición dinámica de superficie libre es la ecuación de Bernoulli (A.74) que se obtiene considerando la segunda ley de Newton, y asumiendo que el fluido es incompresible y el flujo es irrotacional.

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (2.22)$$

O también:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (2.23)$$

Al considerar un flujo con movimiento irrotacional, los términos cuadráticos se desprecian, en consecuencia, la solución del problema consiste en determinar la función del potencial de velocidades  $\phi(x, y, z, t)$  que satisface las condiciones de contorno de superficie libre y de fondo.

### 2.2.3 Condición de contorno mixta de superficie libre.

Bajo la hipótesis de flujo incompresible ( $\text{div}V = 0$ ), la conservación de la masa se define como:

$$\nabla \bar{u} = 0 \quad (2.24)$$

donde el operador vectorial nabla y el vector  $\bar{u}$  son definidos por (2.25) y (2.26) respectivamente.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \quad (2.25)$$

$$\bar{u} = (u, v, w) \quad (2.26)$$

Por otro lado, la condición de irrotacionalidad en el flujo se expresa en términos de la expresión (2.27), donde  $\bar{W}$  mide la vorticidad del flujo.

$$\nabla \times \bar{u} = \bar{W} = 0 \quad (2.27)$$

Entonces, si el flujo es irrotacional se puede demostrar que existe una función potencial  $\phi(x, y, z, t)$  que cumple con:

$$\bar{u} = -\nabla \phi \quad (2.28)$$

bajo estas hipótesis se llega a la ecuación de Laplace o ecuación de conservación de masa.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) o de Laplace que gobierna el movimiento del fluido, es la ecuación en derivadas parciales a estudiar y para integrarla se deben establecer condiciones de frontera en el dominio de integración, tales como son: la condición cinemática de fondo impermeable de las ecuaciones (2.13) y (2.30), la condición cinemática de superficie libre obtenida en las expresiones (2.21) y (2.31) y la condición dinámica de superficie libre, que se ha considerado bajo presión atmosférica en las ecuaciones (2.23) y (2.32).

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{en } z = -h(x, y) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (2.31)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = 0 \quad \text{en } \eta(x, y, t) = 0 \quad (2.32)$$

Como ahora interesa conocer una condición de contorno mixta, las ecuaciones (2.31) y (2.32), se pueden combinar, resultando:

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right] \quad (2.33)$$

efectuando la derivada total de (2.33).

$$\begin{aligned} g \frac{\partial \eta}{\partial t} &= g \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$z = \eta(x, y, t)$$

la cual también se puede expresar como:

$$\begin{aligned} g \left( -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\text{en } z = \eta(x, y, t)$$

sustituyendo la ecuación (2.35) en (2.31):

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \left( -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.36)$$

$$\left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{en } z = \eta(x, y, t)$$

En virtud de que no es posible conocer a priori  $\eta = (x, y, z, t)$ , se puede hacer una estimación haciendo uso de una expansión de Taylor, tal que:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Phi_m = \varepsilon^1 \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots + \varepsilon^m \Phi_m \quad (2.37)$$

$$\eta = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \eta_m = \eta^1 \Phi_1 + \eta^2 \Phi_2 + \dots + \eta^m \Phi_m \quad (2.38)$$

donde  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño que tiene que ser evaluado, además cada potencial de velocidades debe cumplir con la ecuación de Laplace (2.39).

$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi_m = 0 \quad (2.39)$$

Entonces, las condiciones de contorno de superficie libre (2.32) y (2.35) son expandidas en series de Taylor sobre el nivel de reposo del agua  $\eta = 0$ :

$$\eta = -\frac{1}{g} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] \quad (2.40)$$

en  $z = 0$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left( -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\}$$



$$\left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.41)$$

### 2.3. ONDAS DE PEQUEÑA AMPLITUD SOBRE FONDO CONSTANTE.

La teoría de ondas de pequeña amplitud es una teoría lineal, donde los términos de inercia conectivos no lineales son considerados pequeños. Debido a que las ecuaciones son teóricamente exactas cuando el movimiento tiende a cero es denominada teoría de pequeña amplitud. Esta asunción es muy importante porque la elevación de la superficie libre puede ser despreciada a priori y tal solución es asumida como válida a pesar de que el movimiento del oleaje sea diferente de cero.

Considérese la expansión en series de Taylor de primer orden, de una onda viajando en la dirección  $X$  sobre un fondo horizontal donde se verifica la ecuación (2.42) y se puede expresar como (2.43).

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (2.43)$$

Como ya se menciona, en teoría lineal se desprecian los términos de segundo orden y mayores, entonces, las condiciones de contorno de superficie libre, dinámica y mixta, (2.40) y (2.41) respectivamente, se pueden escribir como:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.45)$$

Para la condición compleja del dominio de integración, se definen dos condiciones laterales que dependen del problema.

Si el movimiento del fluido es periódico, con período  $T$  y longitud de onda  $L$ , las condiciones laterales se reducen a una condición de periodicidad, de esta forma, la propagación sobre el eje  $X$  es:

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x + L, z, t) \quad (2.46)$$

donde  $\Phi(x, y)$  y la condición de periodicidad temporal puede ser considerada como una condición inicial del problema.

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x, z, t + T) \quad (2.47)$$

En lo sucesivo, se aplica el método de separación de variables<sup>1</sup> para encontrar las soluciones del problema de contorno definido por la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno definidas en (2.48) y las condiciones laterales.

$$z = 0 \quad (2.48)$$

$$z = -h$$

Dado que la ecuación de Laplace no incluye derivadas temporales, entonces el problema se reduce a un tren periódico  $T$  y la función potencial se transforma:

$$\Phi(x, z, t) = \Re \left[ \varphi^*(x, z) e^{i\omega t} \right] \quad (2.49)$$

<sup>1</sup> El método de separación de variables es una técnica clásica para resolver varios tipos de ecuaciones diferenciales parciales. La idea es, pensar una solución  $u(x, t)$  de una ecuación diferencial parcial como una combinación lineal infinita de funciones sencillas  $u_n(x, t)$ ,  $n=0,1,2,\dots$  que satisfacen la ecuación y ciertas condiciones en la frontera. (Ésta es una hipótesis razonable si la ecuación diferencial parcial y las condiciones en la frontera son lineales y homogéneas). Para determinar una solución de  $u_n(x, t)$ , suponemos que la podemos escribir con sus variables separadas, como:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$$

Al sustituir esta forma de solución en la ecuación diferencial parcial y usar las condiciones en la frontera, se obtienen, en muchos casos, dos ecuaciones diferenciales ordinarias en términos de las funciones incógnitas  $X_n(x)$  y  $T_n(t)$ . De esta forma el problema se ha reducido a la solución de una ecuación diferencial parcial que solo implica una variable.

donde  $\Re[ ]$  es la parte real de la función compleja y  $\sigma$  la frecuencia angular.

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (2.50)$$

Ahora, la ecuación de Laplace (2.29) se expresa como función de  $\phi^*$ .

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} = 0 \quad (2.51)$$

La separación de la variable tiempo no ha impedido que el problema de contorno continúe siendo una ecuación en derivadas parciales. Las condiciones de contorno, son homogéneas para la variable  $z$ , por lo que se cumple con la condición exigida para aplicar el método de separación de variables, es decir, es una ecuación diferencial lineal y homogénea, con condiciones de contorno lineales y homogéneas. Si ahora se considera la siguiente separación de variables.

$$\phi^*(x, z) = \phi(x) \cdot f(z) \quad (2.52)$$

Donde la función potencial plana  $\phi(x)$  es aun desconocida de las variables  $x$  e  $y$ . Un caso particular del problema rectangular es el movimiento que se realiza según el eje  $X$  que no está confinado en el sentido  $Y$ . Este caso conocido como de ondas de crestas largas, se reduce, al problema en dos dimensiones  $(x, z)$ .

Todos aquellos dominios que no son circulares o rectangulares no admiten una separación de la función potencial plana  $\phi(x, y)$ , entonces, el método aquí presentado pierde validez.

Sustituyendo la descomposición de la función potencial  $\phi^*$  en la ecuación de Laplace:

$$f(z) \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] + \phi(x) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.53)$$

si ahora se divide (2.53) por el producto  $\phi(x) f(z)$ :

$$\frac{1}{\phi(x)} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.54)$$

si el primer término de la ecuación solo es función de  $x$  y el segundo de  $z$ ; y definiendo a  $k$  como una constante:

$$\frac{1}{\phi(x)} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] = -\frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = -k^2 \quad (2.55)$$

generando las ecuaciones.

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 \cdot f(z) = 0 \quad (2.56)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] + k^2 \cdot \phi(x) = 0 \quad (2.57)$$

La expresión en derivadas parciales (2.57) se conoce como ecuación de Helmholtz. La constante se ha expresado  $-k^2$  porque, de esta forma se encuentra para  $k^2 > 0$  una dependencia en  $x$  que no es oscilatoria, sino exponencial (decreciente con la profundidad). Más adelante se consideraran los casos para  $k^2 < 0$  en los que el movimiento en  $z$  será oscilatorio, lo cual corresponde a los modos evanescentes.

Con la separación de (2.55) se obtiene un problema de contorno homogéneo con condiciones de contorno homogéneas en  $z$ . Por lo tanto, Aplicando las condiciones establecidas en (2.43) y (2.45):

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z} = \phi \frac{df(z)}{dz} = 0$$

$$\frac{df(z)}{dz} = 0 \quad (2.58)$$

$$z = -h$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} \phi^* = \phi \left[ \frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} f(z) \right] = 0$$

$$\frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} f(z) = 0 \quad (2.59)$$

$$z = 0$$

Se llega al problema de autovalores<sup>2</sup> del tipo Sturm- Liouville que se describe en el apartado 2.5.1, y además es regular. En la Tabla 2-1 presentan las posibles soluciones.

### 2.3.1. Separación de la variable profundidad.

La Tabla 2-1 contiene las posibles soluciones para la ecuación de Laplace, de ellas, se obvia la correspondiente a  $k^2 = 0$ , dado que la solución sería  $f(z) = D = 0$ . Para incluir las soluciones imaginaria y real en una sola, la primera se puede expresar como la correspondiente a  $k^2 > 0$  sin mas que hacer:

$$k^2 = -\mu^2 \quad -\mu^2 > 0 \quad (2.60)$$

y la solución se puede escribir como:

$$\begin{aligned} f(z) &= A \cos(\mu z) + B \operatorname{sen}(\mu z) \\ &= A \cos(ikz) + B \operatorname{sen}(ikz) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \end{aligned} \quad (2.61)$$

<sup>2</sup> Sea la matriz dada por:

$$A = [a_{jk}]$$

y considerando la ecuación:

$$Ax = \lambda x$$

donde  $\lambda$  es un escalar (número real o complejo) por determinarse y  $x$  es un vector también por determinarse. Ahora bien para toda  $\lambda$ , una solución es  $x = 0$ . A un escalar  $\lambda$  tal que  $Ax = \lambda x$  sea valida para algún vector  $x \neq 0$  se le llama eigenvalor de  $A$  y a este vector se le llama eigenvector de  $A$  correspondiente a este autovalor  $\lambda$ .

Adoptando la misma forma de solución para  $k^2 > 0$  y  $k^2 < 0$  la aplicación de la condición en el fondo (2.58), nos lleva a las siguientes ecuaciones.

$$k [Ae^{-kz} - Be^{kz}] = 0 \quad (2.62)$$

$$A = B \cdot e^{2kh} \quad (2.63)$$

$$f(z) = 2Be^{kh} \left[ \frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2} \right] = B \cdot \cosh k(h+z) \quad (2.64)$$

Tabla 2-1: Posibles soluciones a la ecuación de Laplace, basados en la técnica de separación de variables, Dean et al. (1984)

Carácter de la constante de separación $k$	Ecuación diferencial ordinaria	Solución.
Real $k^2 > 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z = 0$	$X(x) = A \cos kx + B \sin kx$ $Z(z) = Ce^{kz} + De^{-kz}$
$k^2 = 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$	$X(x) = Ax + B$ $Z(z) = Cz + D$
Imaginaria $k^2 > 0, k = i k $ $ k $ magnitud de $k$	$\frac{d^2 X}{dx^2} +  k ^2 X = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} +  k ^2 Z = 0$	$X(x) = Ae^{ k x} + Be^{- k x}$ $f(z) = C \cos  k z + D \sin  k z$

Si con este valor se entra a la condición de contorno mixta en la superficie  $z = 0$ , ecuación (2.59), se obtiene:

$$B'k \sinh kh - \frac{\sigma^2}{g} B' \cosh kh = 0 \quad (2.65)$$

despejando  $\sigma^2$ :

$$B'k \sinh(kh) = \frac{\sigma^2}{g} B' \cosh(kh) \quad (2.66)$$

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh)$$

La ecuación (2.66) tiene una solución real e infinitas soluciones imaginarias puras, conocidas como modos evanescentes para  $k$ , ver nota 3. La relación anterior se conoce como ecuación de la dispersión y permite identificar los autovalores del problema de contorno del problema estudiado. Usando los autovalores, se tienen las condiciones para analizar las soluciones del problema definido por (2.57).

### 2.3.2. Condición de periodicidad espacial.

La ecuación (2.57) debe cumplir con la condición de contorno lateral dada por la condición de periodicidad espacial dada por (2.67):

$$\phi(x) = \phi(x+L) \quad (2.67)$$

El problema en la dirección  $X$  no tiene la estructura del problema regular de Sturm-Liouville pues no tiene dos condiciones de contorno homogéneas y lineales. En este caso no se cumple el teorema por el cual a cada autovalor le corresponde una única autofunción. Pues, en la resolución de la ecuación diferencial se obtienen dos autofunciones (seno y coseno) linealmente independientes para el mismo autovalor. Entonces se trata de un problema singular o no regular de Sturm-Liouville y al cual se le puede aplicar a la mayoría de los teoremas correspondientes al problema regular y en particular el que aplica a la ortogonalidad de las autofunciones; aun cuando, en algunos casos, se necesita aplicar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

La solución de  $\phi(x)$  dada en la Tabla 2-1, se expresará en forma compleja, ante la posibilidad de aplicar el principio de superposición. En primera instancia, la solución adoptada en este desarrollo será:



$$\phi(x) = Ae^{\pm ikx} \quad (2.68)$$

al aplicar la condición de periodicidad espacial:

$$e^{\pm ikx} = e^{\pm ik(x+L)} \quad (2.69)$$

$$e^{\pm ikL} = 1 \quad (2.70)$$

que se puede expresar como:

$$\cos kL = 1 \quad (2.71)$$

$$\operatorname{sen} kL = 0 \quad (2.72)$$

y, en consecuencia.

$$kL = n\pi \quad n = 0, 2, 4, 6 \quad (2.73)$$

Las soluciones iniciales  $n = 0$  y  $n = 2$ , corresponden a las dos primeras repeticiones del movimiento periódico, por lo tanto, el número de onda se define como:

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (2.74)$$

### 2.3.3. Solución general.

De la ecuación (2.44), se obtiene una relación entre el potencial total  $\Phi(x, z, t)$ , y la superficie libre,  $\eta$ , dada por:

$$\eta = + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad z = 0 \quad (2.75)$$

$$\eta = \Re \left[ -\frac{i\sigma}{g} \cosh(kh) \cdot A \cdot e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (2.76)$$

lo que se busca es una solución periódica de la superficie libre que presente una onda progresiva, es decir:

$$\eta = \Re \left[ a \cdot e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (2.77)$$

donde,  $a$  es la amplitud del movimiento y vale la mitad de la altura de ola  $H$ , entonces:

$$a = \frac{H}{2} \quad (2.78)$$

al comparar (2.76) y (2.77), se obtiene:

$$A = -\frac{g}{i\sigma} \frac{a}{\cosh(kh)} \quad (2.79)$$

que al sustituir en el potencial total, se convierte en:

$$\Phi(x, z, t) = \Re \left[ -\frac{i g}{\sigma} a \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} e^{+i(kx - \sigma t)} \right] \quad (2.80)$$

o, tomando el signo negativo en el potencial total:

$$\Phi(x, z, t) = \Re \left[ -\frac{i g}{\sigma} a \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} e^{-i(kx - \sigma t)} \right] \quad (2.81)$$

### 2.3.4. Caso 3-D.

Es común emplear las expresiones de un tren de oleaje que se propaga oblicuamente en relación a los ejes coordenados  $(x, y)$ , donde el número de onda  $k$  se puede expresar como un vector  $k(k_x, k_y)$  de componentes:

$$k_x = |k_o| \cos \theta \quad (2.82)$$

$$k_y = |k_o| \operatorname{sen} \theta \quad (2.83)$$

$$|k_o| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (2.84)$$

Un punto  $P(x, y)$  del tren de oleaje con ubicación dada por el vector de posición  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$ , entonces, la fase del movimiento ondulatorio será:

$$\Omega = \bar{x} \cdot \bar{k} - \sigma = k_x x + k_y y - \sigma = \sqrt{|k_o|^2 - k_y^2} x + k_y y - \sigma \quad (2.85)$$

Al relacionar  $k_y$  con  $\lambda$  y  $q = \sqrt{k_o^2 + k_y^2}$ , entonces, el potencial total de un tren de ondas oblicuo es:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t, z) &= \frac{i g}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(\sqrt{k_o^2 - k_y^2} x + k_y y - \sigma t)} \\ &= \frac{i g}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(qx + \lambda y - \sigma t)} \end{aligned} \quad (2.86)$$

### 2.3.5. Caso 2-D.

Es el caso más sencillo de analizar, donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 \\ k_y = 0 \end{aligned} \quad (2.87)$$

y, el potencial de velocidades se convierte en:

$$\Phi(x, y, t, z) = \pm \frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(k_n x - \sigma t)} \quad (2.88)$$

#### 2.4. TREN DE ONDAS PROPAGÁNDOSE EN AGUA SOBRE UNA CORRIENTE UNIFORME $U_o$ .

Asumiendo que el potencial de velocidades representa una corriente uniforme  $U_o$  y una ola progresiva que satisface la ecuación de Laplace:

$$\phi = -U_o x + A \cosh k(h+z) \cos(kx - \sigma t) \quad (2.89)$$

La forma de esta solución garantiza la periodicidad del oleaje en el espacio y en el tiempo, además, cumple la condición de no flujo a través del fondo, (2.43). La ecuación (2.89) debe ser válida para las condiciones de contorno cinemática y dinámica de superficie libre.

##### 2.4.1. Condición de contorno dinámica de superficie libre.

Como se asume que la amplitud de la onda es pequeña, es posible, aproximar la ecuación de Bernoulli (2.22) a:

$$\left[ \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\eta(x,t)} = \left[ \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=0} \quad (2.90)$$

de la ecuación (2.89), la velocidad horizontal se expresa como:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = U_o + Ak \cosh k(h+z) \sin(kx - \sigma t) \quad (2.91)$$

en consecuencia, el término  $u^2$  se puede calcular mediante (2.92).

$$\begin{aligned} u^2 = & U_o^2 + 2AkU_o \cosh k(h+z) \sin(kx - \sigma t) + \\ & + A^2 k^2 \cosh^2 k(h+z) \sin^2(kx - \sigma t) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Asumiendo la hipótesis de que para ondas de pequeña amplitud, la componente de velocidad horizontal ( $Ak$ ) también es pequeña por lo que  $(Ak)^2$  es aun más pequeña, por lo que, despreciando el último término de (2.92) se obtiene:

$$u^2 = U_o^2 + 2AkU_o \cosh k(h+z) \operatorname{sen}(kx - \sigma t) \quad (2.93)$$

Como los términos cuadráticos de la velocidad vertical son del orden de  $(Ak)^2$ :

$$\frac{1}{2} \left[ U_o^2 + 2AkU_o \cosh kh \operatorname{sen}(kx - \sigma t) \right] + g\eta - A\sigma \cosh kh \operatorname{sen}(kx - \sigma t) = C(t) \quad (2.94)$$

y despejando a  $\eta(x,t)$ .

$$\eta(x, t) = -\frac{U_o^2}{2g} + \frac{A\sigma}{g} \left( 1 - \frac{U_o k}{\sigma} \right) \cosh kh \operatorname{sen}(kx - \sigma t) + C(t) \quad (2.95)$$

Para determinar el término  $C(t)$ , se realiza un promedio espacial de (2.95), considerando que el valor espacial promedio de  $\eta(x, z)$  y de  $\operatorname{sen}(kx - \sigma t)$  para un  $t$  arbitrario, son iguales a cero.

$$\bar{\eta}(x, t) = -\frac{U_o^2}{2g} + C(t) = 0 \quad (2.96)$$

$$\frac{U_o^2}{2g} = C(t) \quad (2.97)$$

Entonces, (2.98) define una ecuación para  $\eta(x, z)$ .

$$\eta(x, t) = \frac{A\sigma}{g} \left( 1 - \frac{U_o k}{\sigma} \right) \cosh kh \operatorname{sen}(kx - \sigma t) \quad (2.98)$$

De manera similar al caso de olas progresivas, se define:

$$\eta(x,t) = \frac{H}{2} \operatorname{sen}(kx - \sigma t) \quad (2.99)$$

sustituyendo (2.98) en (2.99), se obtiene que el valor de  $A$  es igual a:

$$A = \frac{Hg}{2\sigma \left(1 - \frac{U_o k}{\sigma}\right) \cosh kh} \quad (2.100)$$

haciendo uso de las ecuaciones (2.89) y (2.100) se puede definir el potencial de velocidades mediante:

$$\phi = -U_o x + \frac{gH \cosh k(h+z) \cos(kx - \sigma t)}{2\sigma \left(1 - \frac{U_o k}{\sigma}\right) \cosh kh} \quad (2.101)$$

donde el número de onda  $k$  continua como incógnita.

#### 2.4.2. Condición de contorno cinemática de superficie libre.

La condición de contorno cinemática de superficie libre al primer orden, es:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (2.102)$$

sustituyendo (2.98) y (2.101) en (2.102):

$$\left[ -\frac{H\sigma}{2} \cos(kx - \sigma t) \right] + \left[ U_o + \frac{gHk \cosh kh \cos(kx - \sigma t)}{2\sigma \left(1 - \frac{U_o k}{\sigma}\right) \cosh kh} \right] + \quad (2.103)$$

$$\left[ \frac{H}{2} k \cos(kx - \sigma t) \right] + \left[ \frac{gHk \tanh kh \cos(kx - \sigma t)}{2\sigma \left(1 - \frac{U_o k}{\sigma}\right)} \right] = 0$$

dividiendo (2.103) por  $\frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t)$  y despreciando los términos de orden  $(Hk)^2$ , se llega a:

$$-\sigma + U_o k + \frac{gk \tanh kh}{\sigma \left(1 - \frac{U_o k}{\sigma}\right)} = 0 \quad (2.104)$$

despejando  $\sigma$ :

$$\sigma^2 = \frac{gk \tanh kh}{\left(1 - \frac{U_o k}{\sigma}\right)^2} \quad (2.105)$$

la ecuación de la dispersión se puede expresar según (2.106)

$$\sigma^2 \left(1 - \frac{U_o k}{\sigma}\right)^2 = gk \tanh kh \quad (2.106)$$

## 2.5. NOTAS.

### 2.5.1. Nota 1. Problema regular de Sturm-Liouville.

La principal aplicación de la teoría de Sturm-Liouville es la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante el método de separación de variables.

Se conoce como problema de Sturm-Liouville al problema de contorno de segundo orden definido por:

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad a < x < b \quad (2.107)$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \quad (2.108)$$



$$\tau y(b) + \delta y'(b) = 0 \quad (2.109)$$

El problema de Sturm-Liouville se trata de un problema definido por una ecuación diferencia, lineal y homogénea, con condiciones de contorno lineales y homogéneas. donde  $a, b$  son finitos;  $p, p', q$  y  $r$  son continuas en el intervalo  $[a, b]$ , verificándose que  $p(x) > 0$  y  $r(x) > 0$  en el mismo intervalo.  $\alpha, \beta, \tau$  y  $\delta$  no son simultáneamente cero.  $a, b, p(x), r(x), \alpha, \beta, \tau$  y  $\delta$  son reales.

### 2.5.2. Nota 2: Teoremas de la ecuación de Helmholtz.

Es similar al problema regular de autovalores de Sturm-Liouville y todos los teoremas que a continuación se enuncian tienen su correspondiente en el problema de una dimensión.

- Todos los autovalores son reales.
- Existe infinito de autovalores, existe un autovalor mínimo, pero no un máximo.
- A un autovalor le puede corresponder más de una autofunción.
- Las autofunciones  $\phi_k(x, y)$  forman un conjunto completo en el dominio en el que han sido obtenidas. Cualquier función  $f(x, y)$  suave por tramos puede representarse por medio de una serie de Fourier generalizada de las autofunciones:

$$f(x, y) \approx \sum_k a_k \phi_k(x, y) \quad (2.110)$$

donde el término de suma expresa una combinación lineal de todas las autofunciones. La serie así obtenida converge en la medida que los coeficientes  $a_k$  se eligen correctamente.

- Las autofunciones pertenecientes a diferentes autovalores  $k_1$  y  $k_2$  son ortogonales (de peso unitario) en el dominio, es decir:

$$\iint_{\text{Dominio}} \phi_{k_1} \phi_{k_2} dx dy = 0 \quad k_1 \neq k_2 \quad (2.111)$$

- Un autovalor  $k$  puede ser relacionado con la autofunción por medio del coeficiente de Rayleigh.

$$k = \frac{-\oint \phi \nabla \phi \cdot \bar{n} \, ds + \iint_{\text{Dominio}} (\nabla \phi)^2 \, dx dy}{\iint_{\text{Dominio}} \phi^2 \, dx dy} \quad (2.112)$$

$\bar{n}$  es la normal exterior y  $\oint ds$  es una integral de línea cerrada sobre todo el contorno del dominio bidimensional estudiado.

### 2.5.3. Nota 3: Autovalores y autofunciones del problema en la variable $z$ con $k^2 > 0$ y $k^2 < 0$ .

Las soluciones a la ecuación de la dispersión (2.66), se pueden obtener gráficamente. En el primer caso,  $k^2 > 0$  la ecuación mencionada anteriormente tiene dos raíces reales. En la Figura 2-5 se ha presentado  $kh$  contra  $\frac{\sigma^2 h}{gkh}$  y  $\tanh(kh)$ , las dos partes de la dispersión.

Existen dos raíces reales  $\pm k$  que son los dos autovalores que tienen una única autofunción  $\cosh k(h+z)$ , por lo que solamente es necesario considerar la raíz positiva, comúnmente denotada como  $k_0$ .

Además la ecuación de la dispersión tiene raíces (autovalores) imaginarias puras, correspondientes a  $k^2 < 0$ .

$$k = i \cdot \mu \quad (2.113)$$

Sus soluciones se aprecian en la Figura 2-6. A diferencia de la raíz real y puesto que la función tangente tiene ramas infinitas; ahora se obtiene un número infinito de raíces  $\mu = \pm k_n$ , cuya correspondiente autofunción es  $\cosh[ik_n(h+z)] = \cos k_n(h+z)$ . Al igual que en el caso anterior, solamente se debe usar uno de los signos, en este caso se considerará la raíz negativa pues con ello se representan los modos oscilantes en vertical que se amortiguan al propagarse. Estas raíces se encuentran en los intervalos  $\frac{\pi}{2} < k_1 h < \pi, \frac{3\pi}{2} < k_2 h < 2\pi, \dots; \frac{(n-1)\pi}{2} < k_n h < n\pi$ .

Por definición, una onda viajará a una distancia de una longitud de onda  $L$ , en un período  $T$ , recordando que  $\sigma = \frac{2\pi}{T}$  y que  $k = \frac{2\pi}{L}$ , es evidente que la celeridad de propagación de la onda puede ser expresada como:

$$C = \frac{L}{T} = \frac{\sigma}{k} \quad (2.114)$$

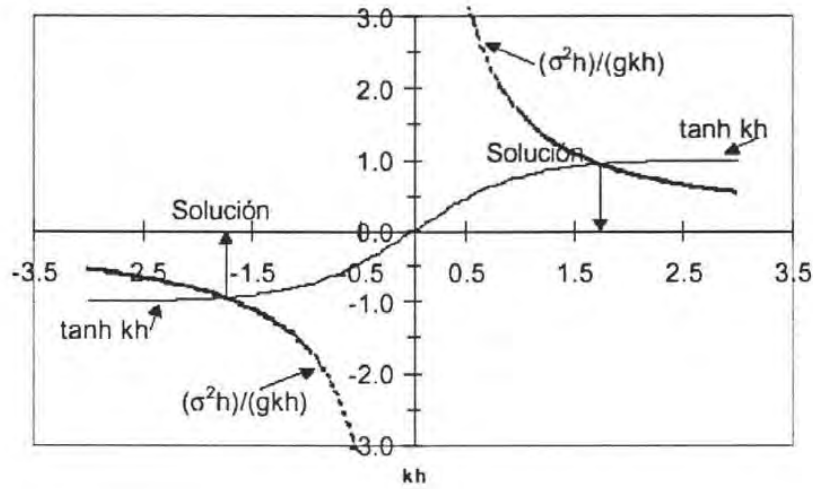


Figura 2-5: Obtención gráfica de las raíces reales.

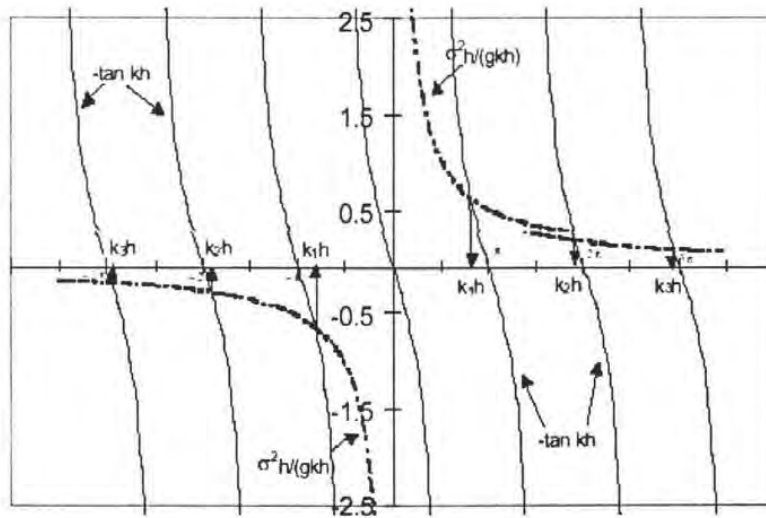


Figura 2-6: Obtención gráfica de las raíces imaginarias puras de la ecuación de la dispersión.



## CAPÍTULO 3

# ECUACIÓN DE LA MILD SLOPE MODIFICADA

---

### 3.1. INTRODUCCIÓN.

Con el objeto de analizar el comportamiento de un oleaje que se propaga desde aguas indefinidas hasta la costa y su comportamiento ante la presencia de estructuras, se han desarrollado múltiples modelos como son: la Teoría del Rayo, de Boussinesq, de Shallow Water Equation, la Mild Slope, entre otros.

En esta tesis se pretende emplear un modelo basado en la ecuación de la Mild Slope; modelo lineal, con soluciones numéricas, que acepta la presencia de oleaje lineal y armónico, con flujo irrotacional, que permite la derivación de ecuaciones para analizar corrientes y supone la importancia de los modos evanescentes en las proximidades de las estructuras. No obstante, su aplicación se ve limitada por la dificultad para definir las condiciones de frontera y por los grandes esfuerzos computacionales. A continuación, se presenta un resumen sobre los trabajos relativos a la deducción de la Mild Slope Equation.

Eckart (1952) fue el primero en proponer una forma de la ecuación de la Mild Slope (MSE) que satisfacía las condiciones de propagación del oleaje en aguas bajas. Posteriormente, Berkhoff (1972, 1976) derivó una ecuación de la Mild Slope sin restricciones en la profundidad. Otras formulaciones fueron efectuadas por: Smith y Sprinks (1975) con validez únicamente para pendientes de 1:3 y menores, por Lozano y Meyer (1976) y por Booij (1981) que empleó el principio variacional de Luke's. Por otro lado, Liu (1990), Jonsson (1979, 1981) y Dingemans (1985) efectuaron una revisión de la validez de las ecuaciones. Booij (1981), derivó una forma de ecuación de la Mild Slope que permite la inclusión de un campo de corrientes; más tarde Kirby (1983, 1984) y Dingemans (1985) realizaron correcciones

y discutieron respectivamente la validez de esta aproximación. Kirby (1986) derivó la llamada ecuación de la Mild Slope Extendida. Adicionalmente, Massel (1993), presentó una nueva aproximación que incluía los modos evanescentes.

Por otro lado, Panchang y Pearce (1991), Li y Anastasiou (1992), y Zhao y Anastasiou (1996) propusieron el uso de un modelo que se fundamenta en la técnica del Gradiente Conjugado (CG), el modelo resulta muy eficiente para resolver con un método de diferencias finitas sobre una malla regular la forma elíptica de la Ecuación de la Mild Slope. Con fundamento en la metodología de Panchang y Pearce (1991), Borthwick et al. (1997) propusieron una forma diferente de discretizar al área de modelado, la cual utiliza volúmenes finitos, no obstante, ahora la malla es discretizada utilizando un sistema quadtree.

La ecuación modificada de la Mild Slope fue desarrollada por Massel (1993), Chamberlain y Porter (1995), Kirby y Misra (1998) y Silva et al. (2002b), dicha ecuación, al considerar los términos de segundo orden que originalmente fueron despreciados por Berkhoff (1972), reproduce con más precisión la propagación de un tren de oleaje aun ante batimetrías complicadas como es el caso de fondo móvil. Esta formulación de la ecuación de la Mild Slope es del tipo elíptico y se le ha dado solución como un problema de valores de frontera. No obstante, otros autores que han desarrollado soluciones para la misma son Tsay y Liu (1983) quienes utilizaron un esquema de elemento finito. Radder (1979), Copeland (1985), Kirby (1986c), Martin et al. (1997) y Kaihatu (2001) han propuesto resolver la ecuación de la Mild Slope aproximándola con una ecuación de tipo parabólico o hiperbólico. Sin embargo, de acuerdo con Panchang et al. (1991), este tipo de soluciones básicamente presentan dos desventajas:

- El tren de oleaje debe tener una dirección principal y los efectos de difracción están restringidos solo a la dirección perpendicular.
- Se desprecia la componente del oleaje en la dirección contraria a la de propagación, es decir, la componente reflejada.

Por estas limitantes, dichas aproximaciones pierden validez si la batimetría o alguna estructura marítima genera una componente de reflexión importante, lo mismo sucede cuando el ángulo de incidencia es muy variable.

Recientemente, Panchang et al. (1991), Li y Anastasiou (1992) y Zhao y Anastasiou (1996) han utilizado técnicas iterativas de solución del tipo Gradiente Conjugado (CG) y Residuo Mínimo Generalizado (GMRES) adaptadas a mallas regulares; por otro lado, Borthwick et al. (1997) resolvió la ecuación modificada de la Mild Slope implementando técnicas iterativas a mallas de tipo jerárquico.



Rojanakamthorn et al. (1989, 1990), Losada et al. (1996a y 1996b) y Silva et al. (2002a). Silva et al. (2002a y 2002b), basados en la teoría de Sollit & Cross (1972) y asumiendo válida la suposición de que el fondo varía suavemente, propusieron una solución analítica de las ecuaciones básicas para oleaje en condiciones de rompiente y no rompiente viajando sobre un fondo poroso finito de geometría arbitraria. Así las cosas, presentaron el desarrollo de la ecuación de Mild Slope que conserva todos los términos de segundo orden y mostraron la validez del modelo tanto para pendientes con fondo permeable como impermeable con gran peralte. La solución propuesta también es capaz de describir las propiedades de disipación en fondos con ondulaciones porosas e impermeables. No obstante, la implementación numérica únicamente fue realizada para resolver problemas de tipo unidimensional mientras que los efectos de rotura sólo fueron parcialmente verificados por la falta de información de campo y/o laboratorio.

Sin embargo, como ya se ha señalado, la aplicación de la ecuación de la Mild Slope tiene como principal desventaja que su solución requiere de grandes esfuerzos computacionales, además, que la inclusión de las condiciones de frontera suele ser sumamente complicada, razón por la cual, se han desarrollado aproximaciones parabólicas e hiperbólicas enfocadas a estudiar condiciones en las que el efecto de alguno de los fenómenos es débil, buscando simplificar de esta manera el problema de propagación del oleaje.

### 3.2. ECUACION DE LA MILD SLOPE MODIFICADA (MMSE).

Silva et al. (2002b), estableció las siguientes hipótesis para desarrollar la ecuación de la Mild Slope modificada; flujo incompresible, homogéneo e irrotacional sobre un fondo  $h(x, y)$ , donde  $x, y$  son las coordenadas cartesianas horizontales. Además, se asume que el nivel medio del mar esta dado por  $z = 0$ , y que la dirección positiva de la coordenada cartesiana vertical es positiva hacia arriba.

Aceptando que el Laplaciano es la ecuación de gobierno del flujo, se tiene:

$$\nabla_h^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad -h(x, y) \leq z \leq 0 \quad (3.1)$$

donde:

$\Phi(x, y, z, t)$	potencial de velocidades que describe el flujo.
$\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$	operador diferencial.
$t$	variable tiempo.

Por otro lado, las condiciones de frontera necesarias para dar solución al problema de flujo son equivalentes a las empleadas en la teoría lineal. Así las cosas, (3.2) y (3.3) representan las condiciones de contorno dinámica y cinemática de superficie libre.

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad z = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad z = 0 \quad (3.3)$$

Donde:

- $g$       aceleración de la gravedad.
- $\eta$       constituye el desplazamiento de la superficie libre del agua.
- $\varphi$       representa la amplitud compleja.

La velocidad del flujo en la profundidad  $z = -h$ , esta dada por la condición de impermeabilidad en el fondo, es decir;

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi = 0 \quad z = -h(x, y) \quad (3.4)$$

Aplicando la ecuación linearizada de Bernoulli (Anexo A), es posible determinar la presión del flujo.

$$p = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + gz \right) \quad -h \leq z \leq 0 \quad (3.5)$$

Donde:

- $p$       presión del flujo.
- $\rho$       densidad del fluido.

Ahora bien, si se emplea la técnica de separación de variables, el potencial de velocidades que describe el flujo puede expresarse como sigue:

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, t) M(z) \quad (3.6)$$

donde

$$M(z) = \frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h} \quad (3.7)$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (3.8)$$

$$\sigma^2 - g\mathbf{k} \tanh(\mathbf{k}h) = 0 \quad (3.9)$$

- $\varphi$  es la amplitud compleja.  
 $T$  período del oleaje.  
 $\sigma$  frecuencia angular, según (3.8).  
 $\mathbf{k}$  número de onda, que debe obtenerse empleando la ecuación (3.9), relación de dispersión propuesta por Losada et al. 1996.  
 $h$  define la profundidad.

Para dar solución a (3.7), donde las variables dependientes son el potencial de velocidades  $\Phi(x, y, z, t)$ , y el desplazamiento de la superficie libre del agua  $\eta(x, y, t)$ . Se puede aplicar el principio variacional de Hamilton, de acuerdo a lo propuesto por Chamberlain y Porter (1995) y Silva (2001). Sin embargo, en este trabajo se utilizará la segunda identidad de Green a  $M(z)$  y  $\Phi(x, y, z, t)$ , como lo han hecho Smith y Sprinks (1975), Kirby (1986a), Mase y Takeba (1994) y Silva et al. (2002b).

$$\int_{-h}^0 M \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} dz - \int_{-h}^0 \Phi \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} dz - \left[ M \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Phi \frac{\partial M}{\partial z} \right]_{-h}^0 = 0 \quad (3.10)$$

Si ahora se sustituyen las ecuaciones (3.1) y (3.6) en el primer término de (3.10) se obtiene la expresión (3.11).

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^0 M \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} dz &= - \int_{-h}^0 M \nabla_h^2 \Phi dz = - \int_{-h}^0 M \nabla_h^2 (\varphi M) dz = - \int_{-h}^0 M \nabla_h (\nabla_h (\varphi M)) dz = \\
&= - \int_{-h}^0 M (\varphi \nabla_h^2 M + \nabla_h \varphi \nabla_h M + M \nabla_h^2 \varphi + \nabla_h M \nabla_h \varphi) dz = \\
&= - \int_{-h}^0 (M \varphi \nabla_h^2 M + 2M \nabla_h M \nabla_h \varphi + M^2 \nabla_h^2 \varphi) dz = \tag{3.11} \\
&= - \int_{-h}^0 (M \varphi \nabla_h^2 M + \nabla_h M^2 \nabla_h \varphi + M^2 \nabla_h^2 \varphi) dz = \\
&= - \int_{-h}^0 (M \varphi \nabla_h^2 M) dz - \int_{-h}^0 \nabla_h (M^2 \nabla_h \varphi) dz
\end{aligned}$$

Además, sustituyendo la expresión (3.7) en el segundo término de la ecuación (3.10) se llega a (3.12).

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^0 \Phi \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} dz &= \int_{-h}^0 \Phi \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh(\mathbf{k}h)} \right) dz = \\
&= \int_{-h}^0 \Phi \mathbf{k}^2 \frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh(\mathbf{k}h)} dz = \int_{-h}^0 \Phi \mathbf{k}^2 M dz \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Finalmente, si al tercer término de la expresión (3.10), se le sustituye la ecuación (3.4), se tiene:

$$\left[ M \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Phi \frac{\partial M}{\partial z} \right]_{-h}^0 = \left[ M \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Phi \frac{\partial M}{\partial z} \right]_{z=0} - \left[ M w - M \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi - \Phi \frac{\partial M}{\partial z} \right]_{z=-h} \tag{3.13}$$

si ahora, (3.7) se deriva respecto a  $z$ , agrupando y empleando la relación de la dispersión dada por (3.9), se llega a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\cosh(\mathbf{k}(h+z))}{\cosh(\mathbf{k}h)} \right) = \frac{\mathbf{k} \sinh(\mathbf{k}(h+z))}{\cosh(\mathbf{k}h)} = \\
&= \frac{\mathbf{k} \tanh(\mathbf{k}h) \sinh(\mathbf{k}(h+z))}{\sinh(\mathbf{k}h)} = \frac{\sigma^2 \sinh(\mathbf{k}(h+z))}{g \sinh(\mathbf{k}h)} \tag{3.14}
\end{aligned}$$

al evaluar (3.14) en  $z = 0$ , se determina que:

$$\left[ \frac{\partial M}{\partial z} \right]_{z=0} = \left[ \frac{\sigma^2}{g} M \right]_{z=0} \quad (3.15)$$

Por otro lado, combinando (3.2) y (3.3), es posible hallar la variación del potencial de velocidades respecto a la coordenada cartesiana vertical  $z$  :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (3.16)$$

Finalmente, el tercer término de la expresión (3.10), se convierte en:

$$\left[ M \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Phi \frac{\partial M}{\partial z} \right]_{-h}^0 = \left[ -\frac{1}{g} M \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Phi M \frac{\sigma^2}{g} \right]_{z=0} - \left[ M w - M \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi - \Phi \frac{\partial M}{\partial z} \right]_{z=-h} \quad (3.17)$$

Entonces, sustituyendo las expresiones (3.11), (3.12) y (3.17) en la ecuación(3.10) , se llega a:

$$\begin{aligned} & - \int_{-h}^0 (M \varphi \nabla_h^2 M) dz - \int_{-h}^0 \nabla_h (M^2 \nabla_h \varphi) dz - \int_{-h}^0 \Phi \mathbf{k}^2 M dz = \\ & = \left[ -\frac{1}{g} M \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Phi M \frac{\sigma^2}{g} \right]_{z=0} - \left[ M w - M \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi - \Phi \frac{\partial M}{\partial z} \right]_{z=-h} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si ahora se sustituye (3.16) en (3.18) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^0 \nabla_h (M^2 \nabla_h \varphi) dz + \int_{-h}^0 (M \varphi \nabla_h^2 M) dz + \int_{-h}^0 \Phi \mathbf{k}^2 M dz = \\ & = \left[ \frac{1}{g} M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M^2 \varphi \frac{\sigma^2}{g} \right]_{z=0} + \left[ M w - M \varphi \nabla_h h \cdot \nabla_h M - M^2 \nabla_h h \cdot \nabla_h \varphi - M \varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right]_{z=-h} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aplicando la regla de Leibnitz al primer término de la ecuación (3.19) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^0 \nabla_h (M^2 \nabla_h \varphi) dz = \nabla_h \cdot \int_{-h}^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz - (M^2 \nabla_h \varphi)_{z=0} \cdot \nabla_h 0 \\ & + (M^2 \nabla_h \varphi)_{z=-h} \cdot (\nabla_h (-h)) = \nabla_h \cdot \int_{-h}^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz - (M^2 \nabla_h \varphi \cdot \nabla_h h)_{z=-h} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.20) en la ecuación (3.19), resulta (3.21).

$$\begin{aligned}
& \nabla_h \cdot \int_h^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz - (M^2 \nabla_h \varphi \cdot \nabla_h h)_{z=-h} + \int_h^0 (M \varphi \nabla_h^2 M) dz + \int_h^0 \Phi \mathbf{k}^2 M dz = \\
& = \left[ \frac{1}{g} M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M^2 \varphi \frac{\sigma^2}{g} \right]_{z=0} + \left[ M w - M \varphi \nabla_h h \cdot \nabla_h M - M^2 \nabla_h h \cdot \nabla_h \varphi - M \varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right]_{z=-h}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Entonces, la igualdad anterior se puede escribir como sigue.

$$\begin{aligned}
& \nabla_h \cdot \int_h^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz + \int_h^0 (\varphi M \nabla_h^2 M) dz + \int_h^0 \mathbf{k}^2 M^2 \varphi dz = \\
& = \frac{1}{g} \left( M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M^2 \sigma^2 \varphi \right) \Big|_{z=0} + \left( M w - M \varphi \nabla_h h \cdot \nabla_h M - M \varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Por otra parte,  $M(z)$ , definida mediante la ecuación (3.7), satisface las siguientes ecuaciones:

$$\nabla_h M = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h h \tag{3.23}$$

$$\nabla_h^2 M = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial h^2} (\nabla_h h)^2 + \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
M \nabla_h^2 M &= M \frac{\partial^2 M}{\partial h^2} (\nabla_h h)^2 + M \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h \\
&= M \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h + \frac{\partial}{\partial h} \left( M \frac{\partial M}{\partial h} \right) (\nabla_h h)^2 - \left( \frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h h)^2
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Sustituyendo la ecuación (3.25) en la (3.22) se llega a;



$$\begin{aligned}
& \nabla_h \cdot \int_h^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz + \varphi \int_h^0 \left( M \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h \right) dz + \varphi \int_h^0 \left( \frac{\partial}{\partial h} \left( M \frac{\partial M}{\partial h} \right) (\nabla_h h)^2 \right) dz - \\
& - \varphi \int_h^0 \left( \left( \frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h h)^2 \right) dz + \int_h^0 \varphi \mathbf{k}^2 M^2 dz = \\
& = \left( \frac{1}{g} M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M^2 \varphi \frac{\sigma^2}{g} \right) \Big|_{z=0} + \left( Mw - M\varphi \nabla_h h \cdot \nabla_h M - M\varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Aplicando nuevamente la regla de Leibnitz al tercer término de la ecuación anterior;

$$\varphi \int_h^0 \frac{\partial}{\partial z} \left( M \frac{\partial M}{\partial h} \right) (\nabla_h h)^2 dz = \varphi \frac{\partial}{\partial h} \int_h^0 \left( \left( M \frac{\partial M}{\partial h} \right) (\nabla_h h)^2 \right) dz - (\varphi M \nabla_h M \cdot \nabla_h h)_{z=-h} \tag{3.27}$$

Si ahora, se sustituye la ecuación (3.27) en (3.26), se tiene;

$$\begin{aligned}
& \nabla_h \cdot \int_h^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz + \varphi \int_h^0 \left( M \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h \right) dz + \varphi \frac{\partial}{\partial h} \int_h^0 \left( \left( M \frac{\partial M}{\partial h} \right) (\nabla_h h)^2 \right) dz - \\
& - \varphi \int_h^0 \left( \left( \frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h h)^2 \right) dz + \int_h^0 \Phi \mathbf{k}^2 M dz = \\
& = \left[ \frac{1}{g} M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M^2 \varphi \frac{\sigma^2}{g} \right]_{z=0} + \left[ Mw - M\varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right]_{z=-h}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

de la expresión (3.28) se pueden definir las igualdades, (3.29), (3.30), (3.31) y la función (3.32).

$$I_1 = \int_h^0 M^2 dz \tag{3.29}$$

$$I_2 = \int_h^0 M \frac{\partial M}{\partial h} dz \tag{3.30}$$

$$I_3 = \int_h^0 \left( \frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 dz \quad (3.31)$$

$$r(h) = I_2 (\nabla_h^2 h) + (\nabla_h^2 h) \left( \frac{\partial I_2}{\partial h} \right) - (\nabla_h h)^2 I_3 \quad (3.32)$$

Finalmente, la ecuación (3.28), se puede escribir como en (3.33).

$$\nabla_h \cdot I_1 \nabla_h \varphi + (\mathbf{k}^2 I_1 + r(h)) \varphi = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \varphi \frac{\sigma^2}{g} \quad (3.33)$$

La igualdad anterior representa una extensión de la ecuación de la Mild Slope que depende del tiempo. No obstante, Para obtener una extensión de la ecuación de la Mild Slope independiente del tiempo, se recurre a la siguiente separación de variables.

$$\varphi(x, y, t) = \phi(x, y) e^{-\sigma t} \quad (3.34)$$

Finalmente, al sustituir la expresión (3.34) en la (3.33), se obtiene la ecuación de la Mild Slope modificada (MMSE), Chamberlain y Porter (1995).

$$\nabla_h \cdot (I_1 \nabla_h \phi) + (\mathbf{k}^2 I_1 + r(h)) \phi = 0 \quad (3.35)$$

Si a la ecuación anterior se le adiciona un término disipativo  $W$ , que permita cuantificar la pérdida de energía, surge:

$$\nabla_h \cdot (I_1 \nabla_h \phi) + ((\mathbf{k}^2 - i\sigma W) I_1 + r(h)) \phi = 0 \quad (3.36)$$

### 3.3. RELACIÓN DE DISPERSIÓN.

Al ser la teoría lineal<sup>3</sup> el fundamento teórico de la ecuación de la Mild Slope modificada (MMSE), el modelo se encuentra restringido únicamente a las condiciones en las que la misma tiene validez. En ese sentido, para las condiciones de aguas intermedias la relación de dispersión definida por la teoría lineal está dada por:

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (3.37)$$

Por otro lado, el número adimensional de Ursell definido por la ecuación (3.38) es un parámetro que se emplea comúnmente para medir la no linealidad del oleaje. Por ejemplo, la formulación de Stokes pierde validez cuando el oleaje se propaga en aguas someras, es decir, cuando el número de Ursell es mayor de 40.

$$Ur = \frac{HL^2}{h^3} \quad (3.38)$$

Donde:

- $Ur$  número adimensional de Ursell.
- $H$  representa la altura de ola local.
- $L$  es la longitud de onda.
- $h$  indica la profundidad.

Sin embargo, como gran cantidad de estructuras costeras se encuentran en aguas poco profundas, algunos investigadores han realizado simplificaciones con la intención de extender la aplicación del modelo a zonas de aguas someras, Hedges, T.S. (1976), propuso una modificación a la relación de dispersión lineal, (3.37), la cual incluye la dispersión debida a la amplitud máxima local,  $A$ .

<sup>3</sup> La teoría lineal de pequeña amplitud de Airy es la más empleada para el análisis de casos prácticos en la franja marítimo-costera, las consideraciones básicas para el desarrollo de esta teoría incluyen:

- i. El fluido es homogéneo e incompresible; en consecuencia su densidad es constante.
- ii. Los efectos por tensión superficial son nulos.
- iii. El efecto de la fuerza de Coriolis es despreciable.
- iv. La presión en la superficie libre del líquido es uniforme y constante.
- v. El fluido es ideal; por lo que la viscosidad es nula.
- vi. La onda en análisis no se relaciona con ningún otro movimiento del agua.
- vii. El fondo es horizontal, fijo e impermeable.
- viii. La amplitud de la onda es pequeña en relación con la profundidad y su forma invariable en el tiempo y el espacio.
- ix. Las ondas son de cresta indefinida y planas ( $x, z$ )

De las hipótesis anteriores, las tres primeras tienen validez para los proyectos de ingeniería, las tres siguientes pueden llegar a ser válidas para condiciones particulares, en tanto que, las tres últimas invalidan la aplicación de la teoría en profundidades reducidas.

$$\sigma^2 = gk \tanh \left( kh \left( 1 + \frac{A}{h} \right) \right) \quad (3.39)$$

$$A = |\phi| \quad (3.40)$$

donde  $\phi$  representa el modulo del potencial de velocidades.

Para condiciones de aguas poco profundas, la relación dada por (3.39) tiende a la dispersión para una onda solitaria.

$$\sigma^2 = gk^2 (h + A) \quad (3.41)$$

Recordando que en aguas profundas la profundidad  $h$  es mucho más grande que la amplitud máxima local  $A$ , en consecuencia, el cociente  $A/h$  tiende a cero, por lo tanto, la ecuación (3.39) se aproxima asintóticamente a la relación lineal de dispersión.

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (3.42)$$

### 3.4. DISIPACIÓN DE ENERGÍA.

Desde un punto de vista físico, cuando en algún punto del dominio, en el fondo o a través de la columna de agua, se presenta disipación de energía, el oleaje sufrirá los procesos de difracción y/o atenuación. Por tal motivo, es importante conocer las condiciones particulares de la problemática que se pretende resolver, para tomar eficientemente las decisiones respecto a la necesidad o no, de considerar en el análisis los efectos provocados por la disipación de energía.

Booij (1981) fue el primer investigador en introducir el término de disipación de energía en un modelo de propagación del oleaje, años más tarde, Dalrymple, R.A. et al. (1984a) propuso una extensión del mismo.

Así las cosas, dentro del término que representa la disipación de energía del oleaje es posible involucrar la ocurrencia de diversos fenómenos. En consecuencia el término disipativo  $W$  se integra por la suma de los efectos provocados por:

- El amortiguamiento del oleaje por presencia de capas laminares viscosas de fondo o de superficie.
- La pérdida de energía por la presencia de capa límite turbulenta en el fondo.
- El amortiguamiento por fricción de fondo.
- La disipación de energía debida a la rotura del oleaje.

Sin embargo, por ser los dos últimos factores los que mayor impacto tienen en el cálculo de la altura de ola, son los únicos que se tratarán a continuación.

### 3.4.1. Fricción de fondo.

En la naturaleza las condiciones del oleaje implican que la capa límite de fondo sea turbulenta. Para el modelo, la disipación de la energía se realiza utilizando un factor de fricción tipo Darcy-Weisbach, Kirby (1994), entonces el término de disipación de energía se puede escribir de la siguiente forma:

$$f_B = \frac{4}{3\pi} \frac{C_f a \sigma^2}{ng \sinh^3 kh} \quad (3.43)$$

$$n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (3.44)$$

donde:

- $C_f$  coeficiente de fricción.
- $f_B$  término de disipación de energía.
- $\sigma$  frecuencia angular.
- $n$  se calcula con (3.44).
- $a$  amplitud de onda  $H/2$ .

### 3.4.2. Rotura.

Uno de los efectos más impactantes producidos por el oleaje es el choque de las olas contra las costas escarpadas o la base de los acantilados. Al llegar la ola cerca del obstáculo, crece, se empina y disminuye de anchura, e impulsada por su misma velocidad pierde el equilibrio y se estrella con las peñas que forman la costa, elevándose de manera considerable liberando una gran cantidad de energía.

Si la pendiente del litoral es suave, las olas que se propagan desde aguas profundas, al rozar con el fondo sufren un retraso en sus zonas bajas, mientras que las superiores avanzan. Este desequilibrio se va acentuando cada vez más y da origen, primero, a que la ola adquiera mayor altura, y luego, a que su cresta caiga hacia delante y rompa sobre la playa, este fenómeno tiene lugar en la denominada zona de rompientes o surf. En consecuencia, la rotura del oleaje al impactar directamente en las corrientes litorales y el transporte de sedimentos, se constituye como uno de los procesos que más influye en el comportamiento hidrodinámico de la costa.

Debido a la importancia de la rotura del oleaje, se hace indispensable realizar modelos capaces de predecir un adecuado análisis de la misma, a fin de obtener; la altura y profundidad de rompiente, una delimitación la zona de rompientes, un estimado de la energía perdida y la capacidad de reconstitución de las ondas en el área de estudio.

En términos generales el estudio de la rotura del oleaje es complicado, sin embargo con ayuda de modelos numéricos, puede tratarse preferentemente de tres diferentes maneras:

- Modelos que limitan la altura de ola.
- Modelos de propagación de ondas solitarias.
- Modelos que determinan la variación espacial de la energía del oleaje.

Aquí, la rotura del oleaje será simulada con un modelo que determina la variación espacial de la energía del oleaje, pues ofrece una gran ventaja; puede describir tanto la rotura como la eventual recomposición de las ondas. Ya que en la naturaleza, una vez que una ola ha roto puede tener la suficiente energía como para volver a iniciar el movimiento oscilatorio e inclusive volver a romper

En la Figura 3-1 se presenta un modelo capaz de reproducir dicho fenómeno, dicho modelo desarrollado por Dally, W. et al. (1985), considera un perfil, que parte de aguas profundas, con una inclinación suave, hasta que posteriormente, ya en aguas bajas, cambia a horizontal. Sobre el citado perfil, se propaga una onda con características tales que la rotura inicia justo en el punto en que el perfil se vuelve horizontal. En tales condiciones la rotura continúa hasta que la ola alcanza una altura estable y reinicia el movimiento ondulatorio, es decir, se recompone.

La ecuación que gobierna el balance de energía de una onda propagándose en la dirección del eje  $X$  de acuerdo con las investigaciones de Dally, W. et al. (1985) esta dado por (3.45):



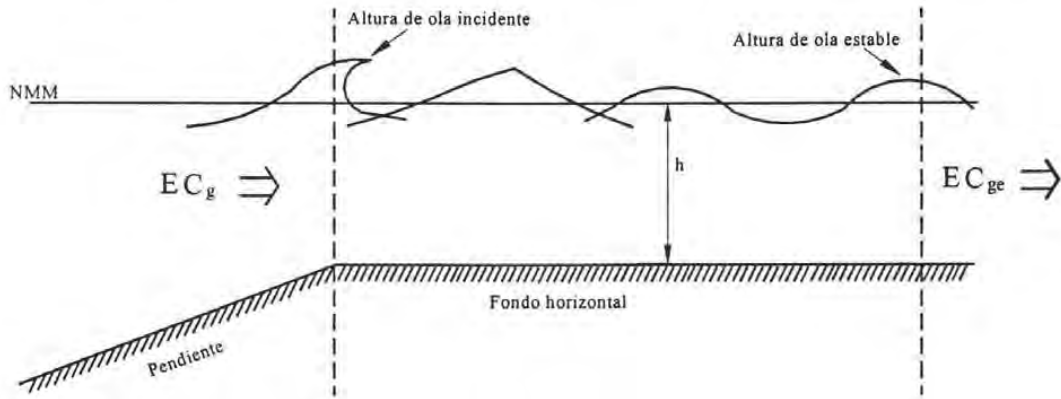


Figura 3-1: Perfil idealizado de la zona de rompiente para el modelo de disipación por rotura, Dally, W. Et al. (1985)

$$\frac{\partial}{\partial x}(EC_g) = -\delta(x) \quad (3.45)$$

donde:

$E$  energía de la onda por unidad de superficie.

$C_g$  celeridad de grupo.

$\delta(x)$  tasa de disipación de energía por unidad de superficie.

Además, la tasa de disipación de energía es proporcional a la diferencia entre el flujo de energía local y el flujo de energía asociado a la condición estable, es decir:

$$\frac{\partial EC_g}{\partial x} = -\frac{K}{h}(EC_g - (EC_g)_e) \quad (3.46)$$

$$EC_g = \left(\frac{1}{8}\rho g H^2\right)\sqrt{gh} \quad (3.47)$$

donde:

$K$  coeficiente de decaimiento adimensional,

Tabla 3-1.

$h$  profundidad considerando el fondo horizontal.



$E_{c_g}$  representa el flujo de energía asociado a la altura de ola que la onda rompiendo trata de alcanzar.

Horikawa, K. y C.T. Kuo (1966) comprobaron que la altura de ola estable  $H_e$  se alcanza siguiendo una relación dada por la profundidad  $h$  y el factor de proporcionalidad  $\Gamma$ :

$$H_e = h\Gamma \quad 0.35 \leq \Gamma \leq 0.50 \quad (3.48)$$

Si se reemplazan las expresiones (3.47) y (3.48) en (3.46), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} (H^2 \sqrt{h}) = -\frac{K}{h} (H^2 \sqrt{h} - \Gamma^2 h^{5/2}) \quad (3.49)$$

La igualdad anterior es una ecuación diferencial del tipo:

$$G' + P(x)G = Q(x) \quad (3.50)$$

donde:

$$G = H^2 \sqrt{h} \quad (3.51)$$

$$P(x) = \frac{K}{h} \quad (3.52)$$

$$Q(x) = K\Gamma^2 h^{3/2} \quad (3.53)$$

y su solución es:

$$Ge^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C \quad (3.54)$$

entonces:

$$\int P(x)dx = K \int h^{-1} dx \quad (3.55)$$

y con ello;

$$\int Qe^{\int P(x)dx} dx = K\Gamma^2 \int h^{3/2} e^{K \int h^{-1} dx} dx \quad (3.56)$$

No obstante, para aplicar este modelo de disipación se requiere el conocimiento de la expresión que describe la variación del fondo. Al respecto, Dally, W. et al. (1985) determinaron las soluciones de la ecuación (3.54) para tres escenarios:

- Fondo plano.
- Pendiente uniforme.
- Perfil de equilibrio (perfil de Dean).

$$G_{(x=0)} = H_B^2 h^{1/2} \quad (3.57)$$

Impusieron para los tres escenarios la condición inicial dada por (3.57) con el objeto de forzar la condición de rotura incipiente cuando  $x = 0$ . Por otro lado, Horikawa, K. y C.T. Kuo (1966) calibraron el modelo con mediciones de laboratorio, obteniendo valores que se presentan en la

Tabla 3-1. No obstante, Dally, W. et al. (1985) recomiendan utilizar como valores medios  $\Gamma = 0.40$  y  $K = 0.15$ .

Tabla 3-1: Valores de los factores  $\Gamma$  y  $K$ , obtenidos experimentalmente para tres pendientes.

Pendiente	$\Gamma$	$K$
1/80	0.350	0.100
1/65	0.355	0.115
1/30	0.475	0.275

Kirby, J.T. y R. A. Dalrymple (1986) adaptaron este modelo para aplicarlo a la simplificación parabólica de la ecuación de la Mild Slope Modificada (MMSE)

empleando el término de disipación,  $f_D$ , desarrollado por Dalrymple, R.A. et al. (1984a), entonces se define la ecuación de balance de energía, (3.58).

$$\frac{\partial EC_g}{\partial x} = -f_D E \quad (3.58)$$

y;

$$f_D = \frac{KC_g}{h} \left( 1 - \frac{E_e}{E} \right) \quad (3.59)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.47) y (3.48) en (3.59):

$$f_D = \frac{KC_g}{h} \left( 1 - \frac{H_e^2}{H^2} \right) = \frac{KC_g}{h} \left( 1 - \frac{(\Gamma h)^2}{H^2} \right) = \frac{KC_g}{h} \left[ 1 - \left( \frac{\Gamma h}{2A} \right)^2 \right] \quad (3.60)$$

donde:

$A$  está definido como en la ecuación (3.40).

$H$  altura de ola rompiente.

$f_D$  corresponde al factor de disipación incluido en la simplificación parabólica, Kirby, J.T. y R. A. Dalrymple (1994).

Con el fin de aplicar el mismo modelo de disipación en la ecuación modificada de la Mild Slope, ecuación (3.35), Silva et al. (2002) modificaron  $f_D$  para incluirlo dentro del término multiplicado por la función dada por (3.29). Así, dividiendo por  $CC_g$  y tomando  $K = 0.15$  y  $\Gamma = 0.4$  se llega a (3.61).

$$f_D = \frac{0.15k}{\sigma h} \left[ 1 - \left( \frac{0.4h}{H_B} \right)^2 \right] \quad (3.61)$$

El modelo de propagación que aquí se emplea considera que:

- Cuando  $H < 0.78h$  no se presenta rotura, por tanto  $f_D = 0$ .
- Cuando  $H \geq 0.78h$  inicia la rotura y  $f_D$  se calcula a partir de (3.61)
- La rotura continua hasta que  $H < 0.78h$ , donde  $f_D$  vuelve a ser nulo, de tal suerte que la ola reconstituida sigue propagándose hasta eventualmente

volver a romper, por ende el cálculo de la disipación de energía por rotura se convierte en un proceso iterativo.

### **3.5. ZONAS DE TIERRA.**

La existencia de islas o costas que sobresalen de la superficie libre del mar pueden generar zonas de rotura. Estas formaciones se tratan con la llamada "técnica de la película delgada" Dalrymple, R. A. et al. (1984b), la cual consiste en sustituir las zonas de tierra por bajos con profundidades muy pequeñas (del orden de un centímetro), esto se traduce en ondas pasando sobre el bajo con tan poca energía que resulta despreciable. Con esta técnica se logra que el modelo calcule en un solo paso tanto las islas como las zonas de aguas profundas, a la vez que considera la acción de las mismas en el flujo y se evitan inestabilidades numéricas durante la solución.



# CAPÍTULO 4

## IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

### 4.1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales parciales lineales pueden ser elípticas, parabólicas o hiperbólicas<sup>4</sup>. Las ecuaciones elípticas presentan condiciones iniciales, de borde, que son especificadas sobre una frontera cerrada, donde las derivadas se realizan con respecto a variables espaciales; en tanto que, las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas tienen al menos un límite o borde abierto.

Por lo anteriormente descrito, en este trabajo se emplea un modelo lineal elíptico para estudiar la transformación del oleaje en áreas semi-cerradas, auxiliado de una versión modificada del método de Maa, et al. (1997a) para resolver ecuaciones matriciales de banda extensa. Por ello es que a continuación se listan los tipos de aproximaciones para resolver ecuaciones parciales diferenciales elípticas:

1. La aproximación hiperbólica; se emplea para casos en estado transitorio, transforma la ecuación elíptica en dos ecuaciones hiperbólicas de pendiente suave con dependencia temporal. La velocidad de cálculo resulta ser mejor

---

<sup>4</sup> Sea la forma general de la ecuación lineal de segundo orden:

$$Au_{xx} + Bu_{yy} + Cu_{xy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

si:

$D < 0$  ecuación elíptica.

$D > 0$  ecuación hiperbólica.

$D = 0$  ecuación parabólica.

donde,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  y  $G$  pueden depender de  $(x, y)$  pero no de  $u$  ni de sus derivadas.

que en los métodos iterativos tradicionales y su eficiencia puede ser similar a la de los métodos iterativos avanzados.

2. Las Aproximaciones Mediante Métodos Iterativos Avanzados, no requieren gran memoria computacional con aceptable velocidad de convergencia. No obstante, la complejidad de los códigos computacionales limita las aplicaciones, además, cuando el dominio computacional es complejo y la selección del preconditionamiento no es exacta, el índice de convergencia se degrada.
3. Solución matricial directa. Al respecto, Dongarra, Bunch et al., (1979) proponen el algoritmo de Eliminación Gaussiana con Pivoteo parcial (EGP), basado en el método de Gauss que aunque no es fiable para resolver grandes grupos de matrices, es un método donde el tiempo computacional no se afecta por el tipo o complejidad de las condiciones de frontera.

El presente capítulo presenta la deducción de las condiciones de frontera, la discretización de las ecuaciones que han de ser resueltas mediante el procedimiento de eliminación gaussiana y finalmente los resultados que le dan validez y confiabilidad al modelo computacional empleado.

## **4.2. CONDICIONES DE FRONTERA.**

La correcta definición de las condiciones de contorno o frontera constituyen un parámetro que permite obtener buenos resultados cuando se realizan modelaciones matemáticas, así las cosas, a continuación se presentan tratamientos implementados para dar solución a la ecuación de la pendiente suave modificada.

### **4.2.1. Condiciones de frontera de la costa.**

La ecuación de la pendiente suave Berkhoff (1976) se constituye en la actualidad como uno de los modelos con mayor aceptación para reproducir de manera confiable el comportamiento que experimenta un tren de oleaje que se propaga de aguas profundas hacia la costa. En ese sentido, fue Berkhoff (1976) quien formuló la condición de frontera para la costa considerando básicamente dos parámetros: el coeficiente de desfase y el coeficiente de reflexión.

El coeficiente de desfase se define como el efecto producido por una onda que se desplaza entre la condición de la costa en el modelo y la condición física del mar en la dirección normal de la costa en aguas de profundidad constante Dickson, Herbers et al. (1995). Cabe señalar que frecuentemente el desfase que se presenta entre el oleaje que incide sobre una playa y el que refleja la misma se considera



nulo, situación que puede conducir a deficientes estimaciones del oleaje en aguas someras. Por otro lado, dado que la incidencia del oleaje sobre la playa no es siempre perpendicular, Surtherland y O'Donoghue (1998) desarrollaron métodos que permiten evaluar el desfase que se presenta entre el oleaje incidente y el reflejado cuando se trata de oleaje oblicuo.

La relación entre la amplitud del oleaje incidente y el reflejado se denomina como el coeficiente de reflexión (4.1); y cobra mayor importancia cuando el tren de oleaje se acerca a la costa o ante la presencia de estructuras portuarias modificando significativamente la amplitud de la ola y en el caso de los recintos portuarios se pueden presentar grandes agitaciones en la superficie libre debido al efecto de resonancia. Al respecto, se han presentado diversas alternativas para evaluar este coeficiente empleando diversos parámetros como son: pendiente de la playa, rugosidad de la playa, período y altura de ola. Por lo anteriormente expuesto, son muchos los autores que han presentado métodos para evaluar el coeficiente de reflexión del oleaje: Shore Protection Manual (1977); Dickson, Herbers et al. (1995); Dingemans (1997); Isaacson (1991); Cotter y Chakrabarti (1992); Isaacson, Papps et al. (1996). Por otro lado, Thompson, Chen et al. (1996) presentaron un resumen con valores para estimar el coeficiente de reflexión que permite caracterizar adecuadamente varios tipos de condiciones costeras.

$$k_r = \frac{H_r}{H_i} \quad (4.1)$$

Por otro lado, Isaacson y Qu (1990) incorporaron a la condición de frontera de la costa desarrollada por Berkhoff (1976) un tercer parámetro: la dirección de propagación del oleaje, para cuya estimación se tienen tres métodos principales.

- Berkhoff (1976); Chen (1986); Tsay, Zhu et al. (1989); Pos, Gonsalves et al. (1989); Xu y Panchang (1993); Thompson, Chen et al. (1996); Xu et al. (1996), han publicado una alternativa que presenta limitaciones pues solo es válida para ángulos de incidencia de cero grados.
- El método de Isaacson y Qu (1990) es capaz de evaluar adecuadamente la dirección de propagación del oleaje. Sin embargo, solo tiene aplicación en el caso de costas donde el coeficiente de reflexión es nulo; es decir su validez se limita a playas totalmente absorbentes. Además, considera que el tren de oleaje que se propaga hacia la costa lo hace con la dirección del gradiente del desfase, (4.2).

$$\tan \theta = \frac{\frac{\partial \arg(\psi)}{\partial y}}{\frac{\partial \arg(\psi)}{\partial y}} \quad (4.2)$$

- Isaacson, O'Sullivan et al. (1993) publicaron una alternativa para el cálculo de la dirección de propagación del oleaje, con validez cuando el valor absoluto del ángulo de incidencia es menor o igual a 40 grados, puesto que en otros casos no converge. Este método emplea información del campo de oleaje en la dirección tangente a la costa.

#### 4.2.2. Condiciones de frontera de radiación al infinito.

La solución de la ecuación de la pendiente suave se puede realizar implementando varios tipos de condiciones de frontera, por ejemplo, Rojanakamthorn, Isobe, et al (1989) señalan que la gran mayoría de estudios que proponen una solución en forma elíptica lo hacen asumiendo condiciones de frontera muy simples que permiten la transmisión del tren de oleaje por los contornos. Sin embargo, cuando el oleaje que incide sobre los contornos lo hace de manera oblicua a los mismos se induce un efecto de reflexión de gran importancia en el área de estudio, en consecuencia, los resultados de las modelaciones suelen ser imprecisos.

Al respecto, la condición de frontera en forma parabólica propuesta por Kirby (1989) presenta beneficios al hacer más transparentes los contornos al paso del oleaje que incide sobre ellos, más aun en el caso en el que la propagación se verifica oblicua a las fronteras.

La ecuación de la pendiente suave modificada dada por (3.36) ó (4.3) puede ser presentada en la forma de Helmholtz (4.3) ó (4.4), la cual fue rescrita por Dingemans (1997) desarrollando el operador de Laplace y despejando términos, hasta tener (4.7):

$$\nabla_h^2 \psi + K_c^2 \psi = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K_c^2 \psi = 0 \quad (4.4)$$

donde:

$$\psi = (I_1)^{1/2} \phi \quad (4.5)$$

$$K_c^2 = (k^2 + i\sigma W) + \frac{r(h)}{I_1} - \frac{\nabla^2 \sqrt{I_1}}{\sqrt{I_1}} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -K_c^2 \left( 1 + \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \quad (4.7)$$

así las cosas, apoyándose en el operador de una pseudo-diferencial es posible obtener la propagación del tren de oleaje a través de la dirección positiva del eje  $X$ .

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = iK_c \left( 1 + \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{1/2} \psi \quad (4.8)$$

Entonces, (4.8) puede ser resuelta para oleaje incidente sin importar el ángulo de aproximación a las fronteras.

$$\psi(x, y) = \zeta e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.9) en (4.8) se obtiene (4.10) que puede ser escrita como (4.11).

$$\frac{k_x}{K_c} = \left( 1 - \left( \frac{k_y}{K_c} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

$$l = (1 - m^2)^{1/2} \quad (4.11)$$

$$l = \frac{k_x}{K_c} \quad (4.12)$$

$$m = \frac{k_y}{K_c} \quad (4.13)$$

donde:

- $l$  denota al número de onda relativo a la dirección  $X$  y puede ser expresado como un vector según (2.82), (2.83) y (2.84).
- $m$  se define como el número de onda relativo a la dirección  $Y$ .

Si a (4.12) y (4.13) se les aplica un operador de correspondencia se obtiene (4.14) y (4.15).

$$il \square \frac{1}{K_c} \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.14)$$

$$im \square \frac{1}{K_c} \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.15)$$

Ahora bien, para valores pequeños de  $m$  ( $K_c \gg k_y$ ), la relación entre números de onda puede ser aproximada de múltiples formas, Panchang et al. (1991) propone la expresión (4.16), con lo que se genera (4.17), que corresponde a la condición de frontera más sencilla.

$$l = [1 + m^2]^{1/2} \approx 1 + O(\varepsilon)^2 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = iK_c \psi \quad (4.17)$$

Radder (1979) propone aproximar el número de onda  $l$  mediante una expansión lineal (4.18), generando una aproximación parabólica de menor orden (4.19).

$$l \approx \left[ 1 - \frac{1}{2} m^2 \right] + O(\varepsilon)^4 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = iK_c \left( \psi + \frac{1}{2K_c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (4.19)$$

Para hallar una aproximación parabólica de siguiente orden a (4.19), se recurre a una aproximación de Padé para relacionar  $l$ , llegando a (4.20).

$$l \approx \frac{1 - 0.75m^2}{1 - 0.25m^2} + O(\varepsilon)^4 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = iK_c \psi + \frac{3i}{4K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{4K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \quad (4.21)$$

Kirby (1986b) propone aproximar el valor de  $l$  mediante el uso del método minimax, en cuyo caso se obtiene (4.22) y la aproximación parabólica dada por (4.23).

$$l \approx \frac{a_0 - a_1 \varepsilon^2}{1 - b_1 \varepsilon^2} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = i a_0 K_c \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \quad (4.23)$$

Donde los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  dependen de la dirección de incidencia del oleaje sobre la frontera.

### 4.2.3. Condiciones de frontera abierta.

En este caso, el potencial total se define como la suma del oleaje que incide sobre la frontera y el oleaje perturbado (4.24), en cuyo caso es posible emplear la aproximación parabólica obtenida con el método minimax como una aproximación del oleaje perturbado; bajo esta consideración se obtiene (4.25), expresión donde las ondas perturbadas se propagan en dirección parcialmente opuesta a la dirección del oleaje incidente, es decir, el oleaje perturbado viaja hacia fuera del dominio.

$$\psi_i + \psi_s = \psi \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial x} = \frac{\partial (\psi - \psi_i)}{\partial x} = -iK_c \left( a_0 (\psi - \psi_i) + \frac{a_1}{K_c^2} \frac{\partial^2 (\psi - \psi_i)}{\partial^2 y} \right) + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 (\psi - \psi_i)}{\partial x \partial^2 y} \quad (4.25)$$

Así las cosas, el potencial de velocidades del oleaje incidente queda perfectamente definido por (4.26).

$$\psi_g = \frac{iHg}{2\sigma} \sqrt{I_1} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{[ik(x \cos \theta + y \sin \theta)]} \quad (4.26)$$

Y sustituyendo (4.26) en (4.25) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -K_c a_0 \psi - i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial^2 y} + \\ &+ i \left( K_c a_0 - \frac{k^2 a_1 \sin^2 \theta}{K_c} + \frac{k^3 a_2 \sin^2 \theta \cos \theta}{K_c^2} + k \cos \theta \right) \psi_i \approx \\ &\approx - \left( i K_c a_0 \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial^2 y} \right) + i (k + K_c) \psi^g \cos \theta \end{aligned} \quad (4.27)$$

#### 4.2.3.1 Potencial de velocidades incidente para profundidad constante.

Si se considera una profundidad constante a través de los contornos y también fuera del dominio de cálculo, la ecuación (4.27) representa satisfactoriamente las condiciones que se desean modelar, únicamente se tendrán que realizar variaciones a las coordenadas  $x$  o  $y$  dependiendo de los propósitos de la simulación

#### 4.2.3.2 Potencial de velocidades incidente para fondo fijo.

Mediante un desarrollo semejante es posible obtener las ecuaciones correspondientes para la dirección  $Y$ , considerando que:

- La profundidad de los contornos laterales es constante, situación que en casos reales generalmente no se presenta pues la profundidad decrece en la dirección de la playa.
- Los efectos asociados al fenómeno de reflexión correspondientes al lado tierra son despreciables.
- No se incluyen las condiciones de rotura del oleaje

Cabe señalar que cuando se presentan los fenómenos de rotura y/o disipación del oleaje y se aplican de manera combinada las expresiones de la sección 4.2.3 con la ecuación de gobierno dada por (4.3) en el interior del dominio, se forza el modelo y se obtiene como resultado una discontinuidad en toda la condición de frontera abierta. Una forma de salvar esta limitación consiste en considerar que en la dirección de la coordenada  $x$  se puede modificar la profundidad.

El tratamiento que a la condición de frontera lateral hacia mar adentro consiste en considerar que el potencial fuera del dominio se integra por la suma del oleaje incidente y el oleaje reflejado.

$$\psi_l = \psi_g + \psi_r \quad (4.28)$$

Entonces, el potencial de velocidades del oleaje reflejado se define por medio de (4.29), ecuación que incluye un coeficiente de reflexión definido por (4.1).

$$\psi_r = \frac{iHk_r g}{2\sigma} \sqrt{I_1} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-ik(x \cos \theta - y \sin \theta)} \quad (4.29)$$

Ahora bien, si los efectos de difracción y disipación son despreciados y se considera para la condición de frontera del lado mar una profundidad constante, es posible presentar (4.27) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial x} = ik \cos \theta (2\psi_l - \psi) \quad (4.30)$$

Mientras que la condición de frontera para el lado tierra se obtiene aceptando que el campo de oleaje se integra por el tren de oleaje que se aproxima y el tren de oleaje que la costa refleja, es decir:



$$\psi_i = A \left( e^{[ikx \cos \theta_i]} + k_r e^{[-ik(x \cos \theta_i - \beta)]} \right) \quad (4.31)$$

$$\sin \theta_i = \frac{k_0}{k_i} \sin \theta \quad (4.32)$$

donde:

- $A$  se define como la amplitud del tren de oleaje que se aproxima.
- $\beta$  constituye el cambio de fase. Debido a las complicaciones que se presentan para determinarlo normalmente se considera nulo.
- $\theta_i$  es el ángulo local que forma el tren de oleaje que se aproxima con la frontera, y puede ser determinado aplicando la ley de Snell, (4.32).
- $k_0$  denota el número de onda en la frontera de lado mar.
- $k_i$  representa el número de onda local, para el punto de interés.

Derivando parcialmente (4.31) en la dirección de  $x$ , se llega a:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = ikA \cos \theta_i \left( e^{[ikx \cos \theta_i]} - k_r e^{[-ik(x \cos \theta_i - \beta)]} \right) \quad (4.33)$$

Si la coordenada  $x$  se localiza en  $X = 0$ , y se sustituyen las ecuaciones del potencial de velocidades del oleaje incidente (4.26) y del reflejado (4.29) en (4.28), multiplicando por  $\psi_i$  el término del lado derecho de la ecuación resultante y derivando todo con respecto a  $\psi_i$ , se llega a (4.34):

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = ik \gamma_i \psi_i \cos \theta_i \quad (4.34)$$

y

$$\gamma_i = \frac{1 - k_r e^{[ik\beta]}}{1 + k_r e^{[ik\beta]}} \quad (4.35)$$

Resumiendo; las condiciones de frontera abierta para las fronteras  $x$ ,  $y$  serán:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \pm \left( iK_c a_0 \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \right) + 2ik_l \psi_l \cos \theta_l; \text{ en } \pm \text{ frontera } y \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \pm \left( iK_c a_0 \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) + 2ik_l \psi_l \cos \theta_l; \text{ en } \pm \text{ frontera } x \quad (4.37)$$

#### 4.2.4. Condición de frontera parcialmente reflejante.

Sucede cuando el tren de oleaje se refleja de manera parcial en las fronteras internas o externas, presentando en el caso límite las condiciones de fronteras totalmente absorbentes y totalmente reflejantes.

Para determinar las condiciones de contorno, es preciso definir un potencial en la frontera integrado por el potencial que se transmite y el que se refleja, de tal manera que en el interior del dominio se cumple con:

$$\psi = \psi^- + \psi_r = \psi^- (1 + k_r) \quad (4.38)$$

y fuera del dominio.

$$\psi = \psi^- (1 - k_r) \quad (4.39)$$

$$(1 + k_r) \frac{\partial \psi}{\partial x} = (1 - k_r) \left( ia_0 K_c \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{b_1}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (4.40)$$

o

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \gamma \left( ia_0 K_c \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{b_1}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (4.41)$$

Entonces, si el coeficiente de reflexión es nulo se tiene una condición de frontera totalmente absorbente, mientras que para condiciones de frontera totalmente reflejantes el citado coeficiente valdrá la unidad. Finalmente, las condiciones de frontera parcialmente reflejantes se expresan como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \gamma \left[ iK_c \left( a_0 \psi + \frac{a_1}{K_c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right]; \text{ en } + \text{ frontera } x \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \pm \gamma \left[ iK_c \left( a_0 \psi + \frac{a_1}{K_c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right]; \text{ en } \pm \text{ frontera } y \quad (4.43)$$

### 4.3. DIFERENCIA FINITA.

El método de diferencia finita consiste en aproximar la función por polinomios, donde las fórmulas resultantes pueden clasificarse de las siguientes formas:

1. En base al orden de la derivada, es decir, si se obtiene la primera, segunda, tercera, etc., derivada.
2. En base al orden de la diferencia, es decir, el grado del polinomio empleado en la deducción.
3. En base a los puntos de apoyo de la formula, es decir, si se emplean puntos antes, después o ambos lados de algún punto de interés. Clasificándose en tres tipos:
  - Diferencias hacia adelante, cuando se usan puntos adelante del punto de interés.
  - Diferencias hacia atrás, cuando se emplean puntos anteriores al punto de interés.
  - Diferencias centrales. Cuando se usan puntos tanto antes como después del punto de interés.

Puede demostrarse que mientras mayor sea el orden de la diferencia la formula es mas precisa. También puede demostrarse lo inverso para el orden de la derivada, es

decir, mientras mayor sea el orden de la derivada la formula es menos confiable. Por último respecto a los puntos de apoyo se puede demostrar que las formulas centrales son más confiables que cualquiera de las otras 2.

Para implementar numéricamente la ecuación de la pendiente suave modificada en dos dimensiones, se recurrió al empleo de la técnica de diferencia finita de segundo orden de aproximación, es decir, aproximando la ecuación mediante el empleo de un polinomio de segundo orden. Así las cosas, la ecuación de gobierno (3.36) ó (4.3) puede escribirse en forma discreta como (4.44).

$$\frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + K_c^2 \psi_{i,j} = 0 \quad (4.44)$$

Con el propósito de obtener una aproximación de segundo orden de la condición de frontera es necesario considerar una celda ficticia ubicada fuera de la malla, para lo que se hace necesario agregar una fila y una columna en el dominio de estudio. Así las cosas, mediante el uso de diferencias finitas hacia delante y centradas, la condición de frontera dada por (4.27) se puede expresar mediante (4.45).

$$\begin{aligned} \frac{(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})}{2\Delta x} &= i(k + K_c)\psi_g \cos\theta - iK_c a_0 \psi_{i,j} - i \frac{a_1}{K_c} \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \\ &+ \frac{a_2}{K_c^2} \frac{3(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) - 4(\psi_{i+1,j+1} - 2\psi_{i+1,j} + \psi_{i+1,j-1}) + \psi_{i+2,j+1} - 2\psi_{i+2,j} + \psi_{i+2,j-1}}{2\Delta x \Delta y^2} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Empleando las expresiones (4.44) y (4.45) para eliminar el punto ficticio dado por  $\psi_{i-1,j}$ , se obtiene la ecuación de contorno discretizada.

$$\begin{aligned} &\left( i \frac{a_1}{K_c} 2\Delta x - 3 \frac{a_2}{K_c^2} + \Delta x^2 \right) \psi_{i,j-1} + 4 \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+1,j+1} \left( \Delta y^2 - 8 \frac{a_2}{K_c^2} \right) \psi_{i+1,j} + 4 \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+1,j-1} - \\ &- 2 \left( \Delta y^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 \Delta x^2 K_c^2 (1 + 2ia_0) - 2i \frac{a_1}{K_c} \Delta x + 3 \frac{a_2}{K_c^2} \right) \psi_{i,j} + \\ &+ \left( i \frac{a_1}{K_c} 2\Delta x - 3 \frac{a_2}{K_c^2} + \Delta y^2 + \Delta x^2 \right) \psi_{i,j+1} + \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+2,j+1} - 2 \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+2,j} + \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+2,j-1} = \\ &= 2\Delta x \Delta y^2 i (k + K_c) \psi_g \cos\theta \end{aligned} \quad (4.46)$$

En las esquinas de la malla, las expresiones de segundo orden de diferencia finita se derivan a partir de las ecuaciones (4.3), (4.27), (4.36) y (4.37).

Cabe mencionar que (4.44) y las condiciones de frontera en diferencias finitas son aplicables para todos los puntos de la malla en el dominio de interés.

#### 4.4. MÉTODO DE GAUSS PARA RESOLVER MATRICES DE BANDA LARGA.

El método de Gauss consiste en reducir un conjunto de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas ( $Ax = b$ ) a un sistema triangular equivalente. El método consiste en formar elementos pivotes  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ . Ahora, si  $a_{kk}^{(k)} = 0$ , entonces esto puede ser solucionado cambiando la fila correspondiente. Puede ocurrir también que el elemento pivote sea no nulo, pero cercano a cero, de tal manera que usando este elemento como pivote se introduzcan errores que se propaguen a través de los cálculos.

Se dice que se realiza un pivoteo parcial si en la  $k$ -ésima etapa del proceso, definimos:

$$e_k = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}| \quad (4.47)$$

Si  $i$  es la fila para la cual se obtiene el máximo, entonces intercambiando las filas  $i$ ,  $k$  en  $A$  y  $b$ , y procedemos con la etapa  $k$  del proceso.

En el caso del pivoteo completo (4.48), el elemento pivote es buscado entre las filas y las columnas superiores a  $k$ , y por lo tanto deben cambiarse filas y columnas a la posición  $k$  correspondiente. Cuando se cambia una columna, cambia el orden de las incógnitas, luego al terminar el proceso, debe tenerse en cuenta este cambio.

$$c_{kk} = \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k)}| \quad (4.48)$$

Los avances computacionales han generado la técnica de la memoria virtual que se emplea para proporcionar la ilusión de un espacio de memoria mucho mayor que la memoria física de una computadora, permitiendo que los programas se hagan sin tener en cuenta el tamaño exacto de la memoria física

Sin embargo, debido a las deficiencias que presenta la técnica de la memoria virtual para calcular matrices de banda larga, el modelo utiliza una versión modificada del

método de Maa, et al. (1997a), el cuál intercambia información de una matriz de alto orden entre la memoria y el disco duro.

Ahora bien, la ecuación de cualquier matriz en forma de banda queda perfectamente definida por (4.49).

$$BX = G \quad (4.49)$$

donde:

- B** se define como la matriz banda de dimensión  $M \times N$ .
- N** representa el número de puntos de agua que tiene la malla, además, de ser la longitud de la matriz de banda que en aplicaciones prácticas oscila entre  $10^4 - 10^6$ .
- M** define el ancho de banda de la matriz que en las aplicaciones se encuentra en  $10^2 - 10^3$ , que se modifica en función de la alineación de la malla y geometría del dominio analizado. Un ancho de banda mínimo se logra al hacer la dimensión más larga del dominio paralela al eje  $X$ .
- X** matriz de incógnitas, con el potencial del oleaje en el dominio como variable y dimensión de  $N \times E$ .
- E** almacena las condiciones del oleaje para un mismo período, aceptando diferentes alturas de ola y direcciones de propagación. El orden de  $10 - 20$ .
- G** matriz de dimensiones de  $M \times E$  con las condiciones de frontera dadas.

Para dar solución a la ecuación de la matriz de banda larga se recurre al algoritmo de Eliminación Gaussiana con Pivoteo parcial (EGP) al cual se le ha implementado un procedimiento especial de almacenamiento capaz de reemplazar el requerimiento de memoria por uno en disco duro, ya que el método tradicional almacena la matriz de banda completa en la memoria, situación que llega a limitar las aplicaciones y reducir la eficiencia computacional. Por ejemplo, si se usa el algoritmo tradicional de Eliminación Gaussiana con Pivoteo parcial, se requieren 16 bytes para representar un número complejo y de 24 MB a 24 GB de memoria para almacenar la matriz.

El procedimiento especial de almacenamiento en disco duro que se aplica al método tradicional de Gauss escribe y lee datos del disco un número de veces muy reducido, aprovechando la mayor parte del tiempo de cómputo para trabajo numérico. Por ello, la eficiencia es ligeramente menor que cuando toda la matriz banda es levantada en la memoria, pero cuenta con la ventaja de que el proceso no depende de la cantidad de memoria disponible, aunque si de la capacidad del disco duro, a continuación se describen las dos etapas que emplea:



## 1. Primera etapa.

Se almacenan las diagonales de la matriz banda que no contienen elementos nulos, remplazando  $B$ , por una matriz compleja,  $Z$ , de dimensión  $49 \times N$  y una matriz entera,  $I$ , con tamaño  $49 \times N$ .

El problema de escasez de memoria se resuelve mediante la aplicación reiterada de una matriz de trabajo con dimensiones  $(M+Q) \times W$ , donde  $Q$  es el ancho de banda inferior y  $W$  se elige en función de la memoria computacional disponible, la cual usualmente oscila entre 4M y 10M. Como  $W \ll N$ , entonces, la matriz de trabajo es mucho más pequeña que la matriz banda. Además, sólo la operación de eliminación del método estándar de EGP es realizada en la matriz de trabajo.

Una vez que en cada matriz de trabajo se ha completado la eliminación con pivoteo parcial, los resultados se almacenan en un archivo binario del disco duro. Posteriormente, la matriz de trabajo es remplazada por el siguiente bloque de datos para adquirir las matrices  $Z$  e  $I$  y continuar el proceso (construyendo una nueva matriz de trabajo y realizando eliminación con pivoteo parcial). El procedimiento continúa hasta que la ecuación de la matriz banda es completamente procesada. Durante este método, la escritura de los archivos binarios y la lectura de las matrices  $Z$  e  $I$  son los únicos datos de entrada y salida en el disco duro, y por tanto, el número de veces que se escriben datos en el disco es limitado.

## 2. Segunda etapa.

Consiste en la sustitución, aquí el programa lee la última matriz de trabajo realizada y la resuelve generando los valores del potencial. El procedimiento de la sustitución retroactiva consta de leer y resolver todas las matrices realizadas en la etapa anterior.

### 4.5. VERIFICACIÓN DEL MODELO.

Para dar validez a un modelo es necesario comparar el comportamiento que exhibe el mismo para casos que en la literatura han sido previamente reportados, de esta forma, se tiene la certeza de manejar resultados con la suficiente validez teórica y en algunos casos practica. El modelo lineal elíptico para la predicción del oleaje en áreas semi-cerradas que se emplea en este trabajo ha sido validado para tres casos: Interacción del oleaje con un grupo de pilas, resonancia en un puerto rectangular y el modelo de Berkhoff; sin embargo, aquí solo se presentan los resultados obtenidos para las primeras dos condiciones.



#### 4.5.1. Interacción del oleaje con un grupo de pilas.

Se ha modelado la interacción de una onda monocromática con un grupo de cuatro pilas verticales sobre fondo horizontal caso para el que Linton y Evans (1990) han presentado una solución analítica.

Para la verificación de modelo se ha considerado que:

- El radio  $r$  de cada pila vale la mitad de la longitud de la ola incidente  $L$ .
- Los centros de los cilindros coinciden con las esquinas de un cuadrado de lado  $2L$ .
- El origen del sistema cartesiano global esta ubicado en el centro geométrico del arreglo de pilas.
- Los ejes  $X$  e  $Y$  se definen como en la Figura 4-1.
- La profundidad relativa con el nivel de superficie libre en reposo es  $kh = 2\pi$

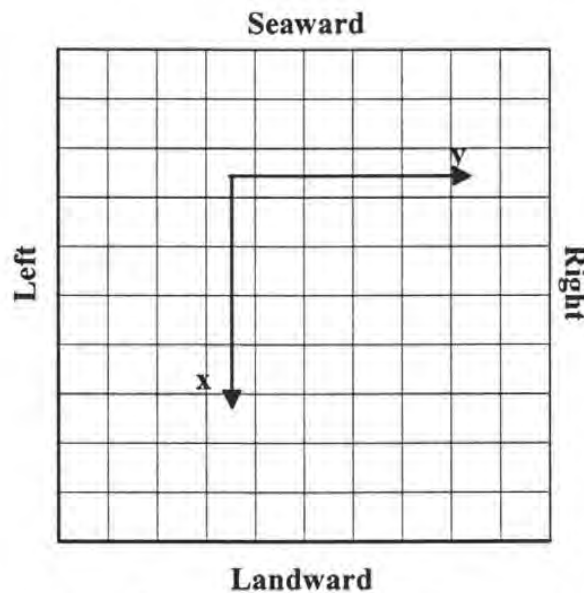


Figura 4-1: Orientación del sistema coordenado y malla para el dominio de cómputo.

Con el propósito de tener resultados comparables, se obtuvieron campos de amplitud de onda adimensional tanto de la solución analítica como de la numérica para ondas incidiendo con ángulo de  $0^\circ$ . La Figura 4-2a presenta los resultados de la solución analítica propuesta por Linton & Evans (1990).

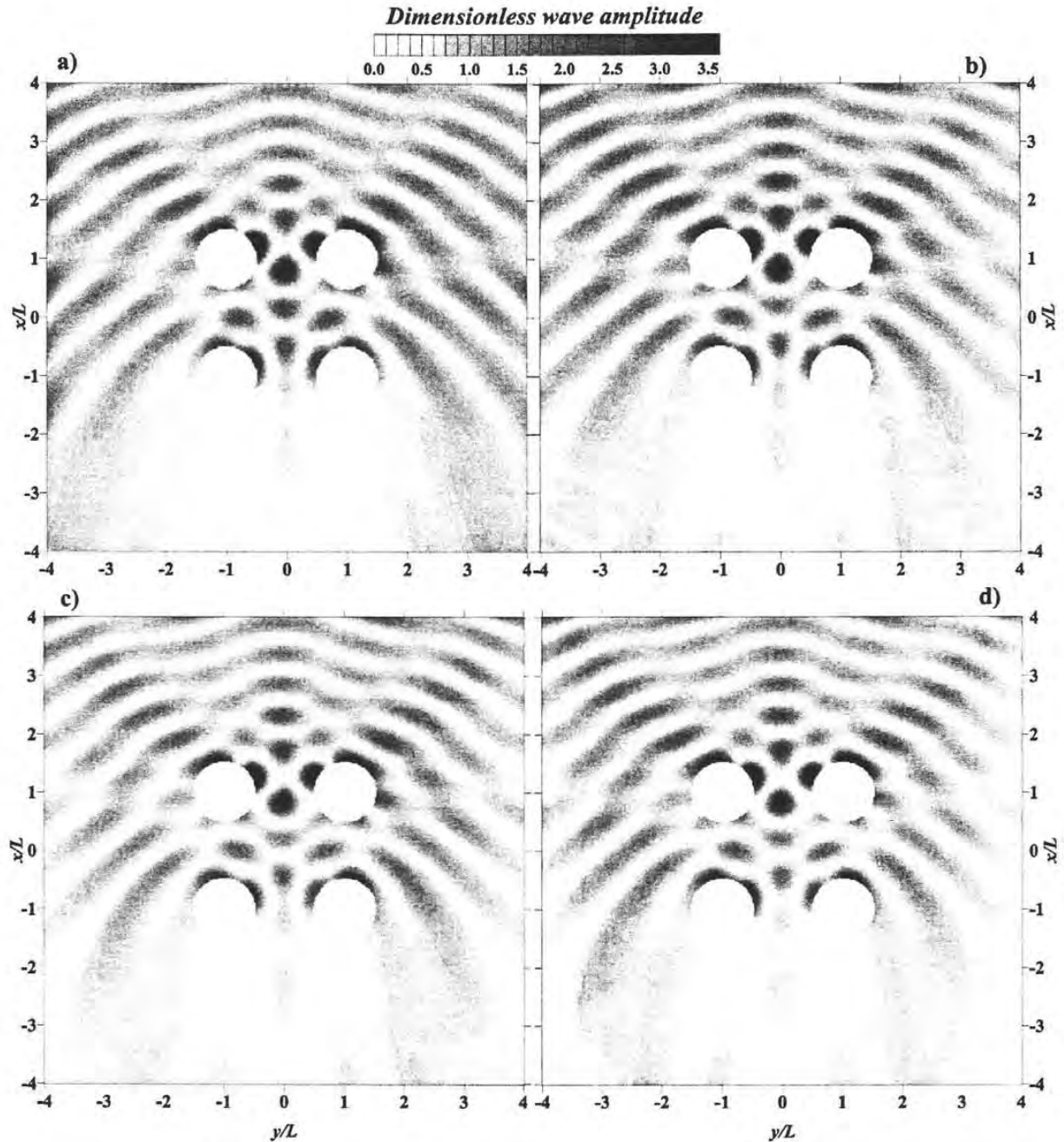


Figura 4-2: Mapas que representan los campos de amplitud de onda adimensional para  $kh = 2\pi$ ,  $\theta = 0$  considerando: a) solución analítica, b) aproximación de Kirby (1986), c) aproximación propuesta por Padé, d) aproximación parabólica de menor orden.

La Figura 4-2b contiene los resultados de las condiciones de frontera propuestas por Kirby (1986), (4.22), para una Apertura Direccional Máxima<sup>5</sup> igual a  $70^\circ$ , lo que implica el uso de los coeficientes  $a_0 = 0.994733030$ ,  $a_1 = 0.890064831$  y

<sup>5</sup> MDA: Maximum Direccional Aperture.

$a_2 = 0.451640568$ . Para obtener la Figura 4-2c se empleó la propuesta por Padé, (4.20) con  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0.75$  y  $a_2 = 0.25$ . Finalmente la Figura 4-2d se aproximó para las condiciones de frontera de menor orden dada por (4.18) y  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0.5$  y  $a_2 = 0$ . Los últimos parámetros que se han colocado corresponden a los del modelo presentado por Maa *et al.* (2002).

Aunque la estructura del campo de oleaje dispersado en este caso resulta complicada, es claro que todas las predicciones numéricas se encuentran íntimamente relacionadas con la solución analítica. No obstante, existen ciertas discrepancias: la predicción efectuada con las consideraciones de Kirby se ve afectada por pequeños efectos de reflexión en las fronteras externas, mientras que los resultados obtenidos a través de la aproximación de Padé presentan energy damping cerca de las fronteras externas.

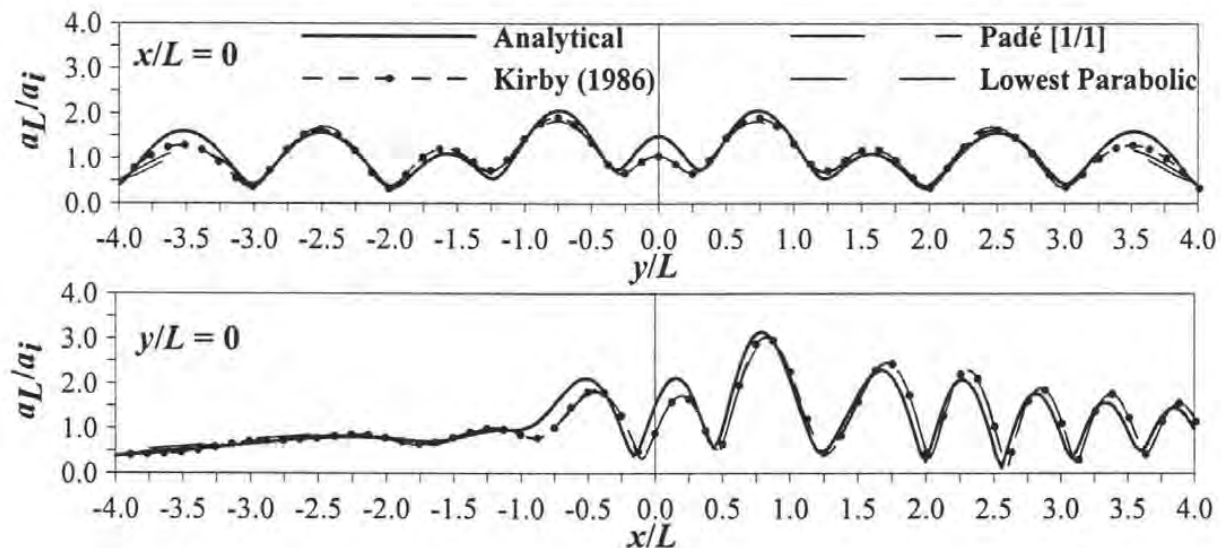


Figura 4-3: Corte sobre el eje de simetría vertical y horizontal del grupo de pilas para  $kh = 2\pi$ ,  $\theta = 0$ .

El trazo de los perfiles longitudinales y transversales de la amplitud de onda adimensional se presenta en la Figura 4-3. Los perfiles obtenidos mediante la predicción numérica propuesta para la aproximación de MDA igual a  $70^\circ$  resultan ligeramente más aproximados que los obtenidos a partir de los parámetros de Padé, y significativamente aproximados a los perfiles calculados con la aproximación parabólica de menor orden. Por esta razón, los siguientes ejemplos solo se valúan para la condición dada por la aproximación de MDA igual  $70^\circ$ .

La Figura 4-4 ilustra la distribución de la amplitud de onda adimensional que se genera cuando el oleaje incide sobre las pilas con un ángulo  $\theta = 30^\circ$  y los resultados para el caso en que el oleaje incide con un ángulo  $\theta = 45^\circ$  se pueden apreciar en la

Figura 4-6, nótese que en ambos casos, la predicción numérica y la solución analítica son similares, aunque aparecen pequeñas discrepancias entre las dos soluciones una vez que las ondas pasan la posición de las pilas.

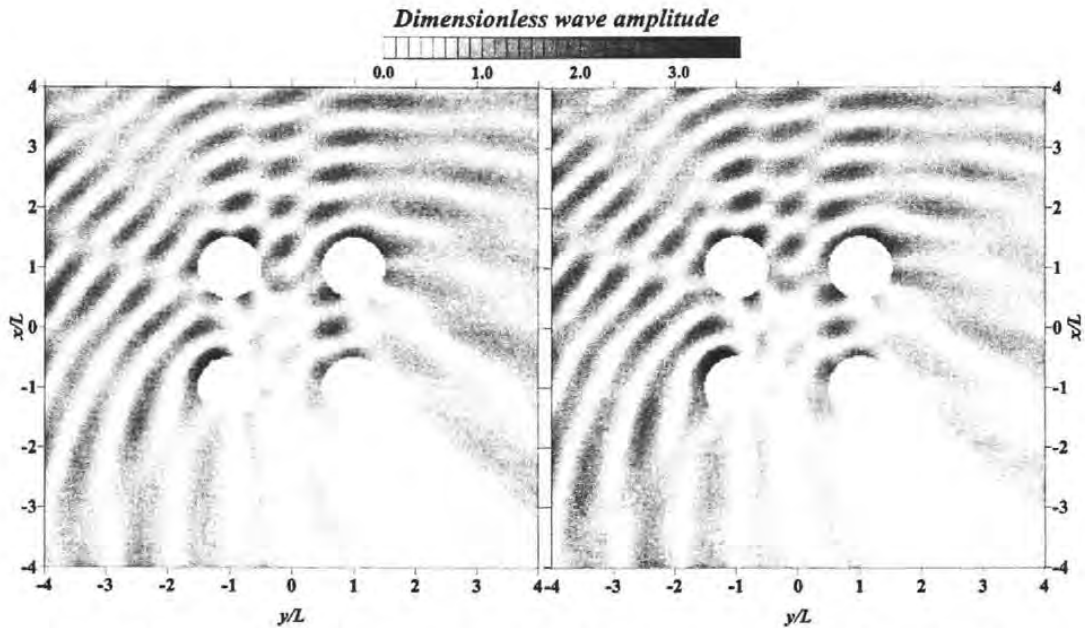


Figura 4-4: Distribución de la amplitud de onda para ángulo de incidencia  $\theta = 30^\circ$

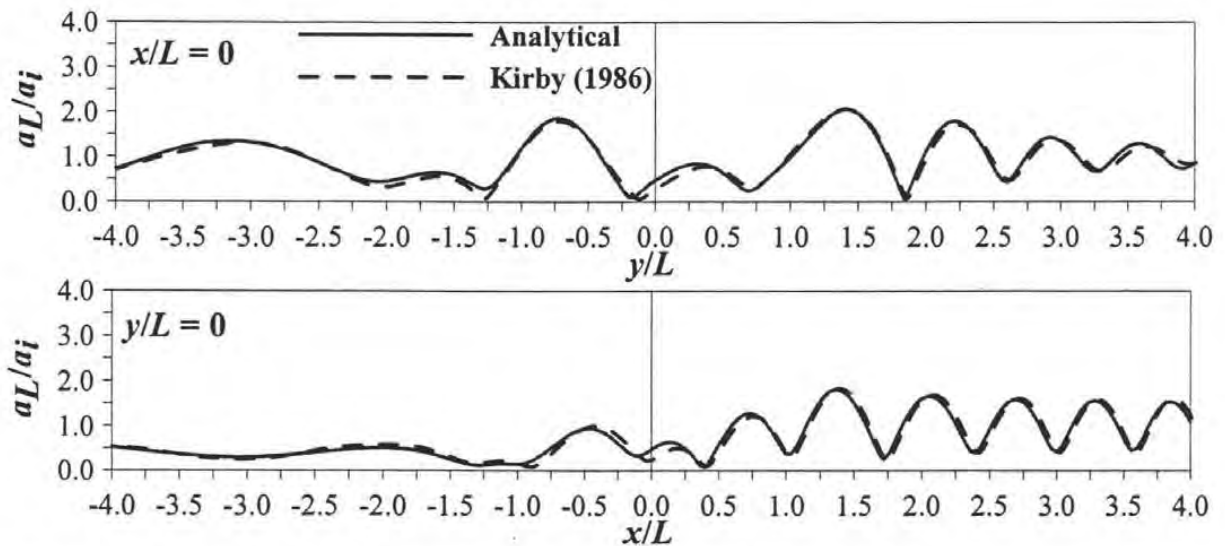


Figura 4-5: Corte sobre el eje de simetría vertical y horizontal del grupo de pilas para un ángulo de incidencia  $\theta = 30^\circ$ .

En la Figura 4-5 y Figura 4-7 se presenta la comparación de los cortes verticales efectuados sobre los ejes de simetría del grupo de pilas.

Se puede concluir después de comparar los resultados que ofrece el modelo y una solución analítica que la implementación numérica del modelo elíptico utilizado

para las condiciones de frontera mediante una aproximación parabólica y apertura direccional máxima de  $70^\circ$ , ofrece resultados adecuados cuando las fronteras son totalmente abiertas y el fondo es plano.

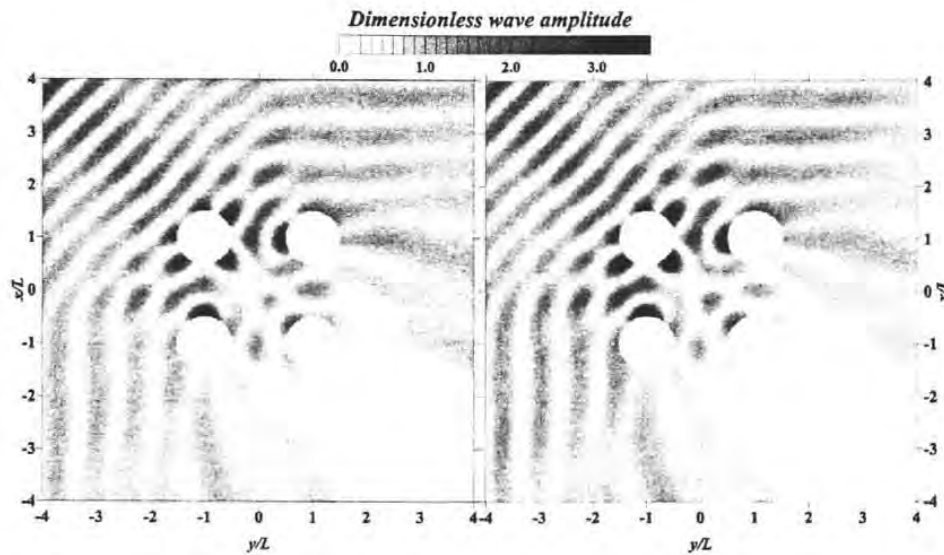


Figura 4-6: Distribución de la amplitud de onda para ángulo de incidencia  $\theta = 45^\circ$ .

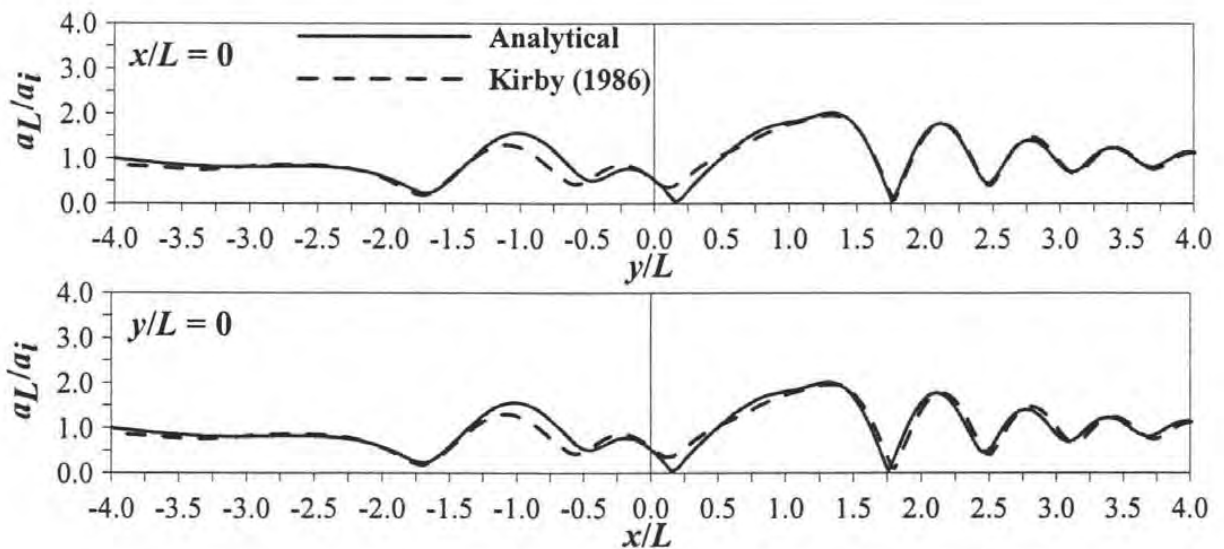


Figura 4-7: Corte sobre el eje de simetría vertical y horizontal del grupo de pilas para un ángulo de incidencia  $\theta = 45^\circ$ .

#### 4.5.2. Resonancia en un puerto rectangular.

Considerando un puerto, Figura 4-8, cuya geometría es de 0.3212 m de largo por 0.0605 m y 0.2576 m de profundidad en todo el dominio de cálculo; adicionalmente,



se considera un ángulo del oleaje incidente de cero grados y un altura de ola de 0.01 m.

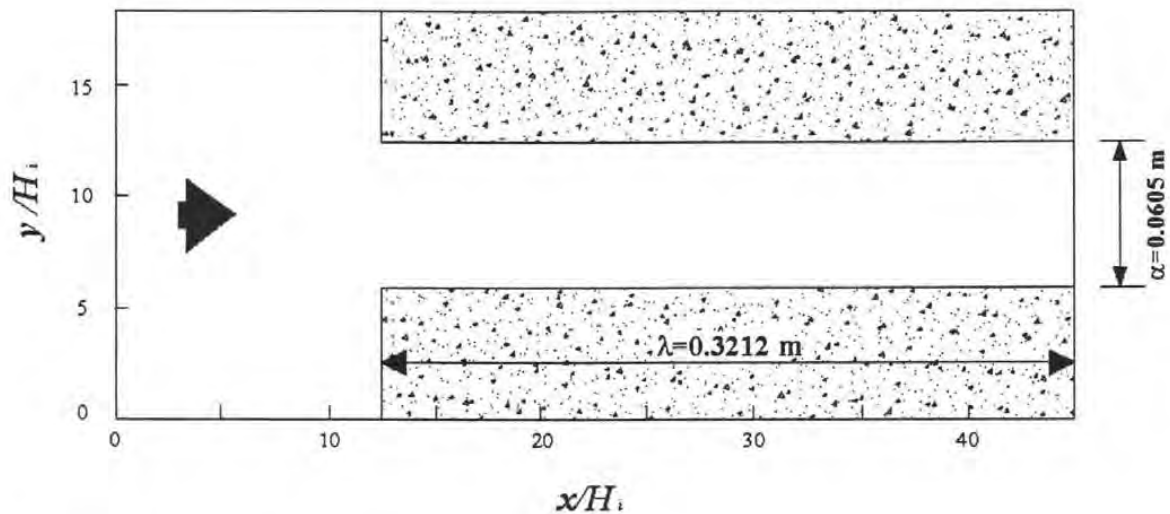


Figura 4-8: Geometría del puerto.

La solución del modelo presentado se comparó con la solución numérica de Maa, Hsu et al. (1997), Figura 4-9. Para tal efecto fue necesario construir una malla de cálculo con  $\Delta x = 0.1$  y  $\Delta y = 0$ , resultando de 450 por 100 celdas.

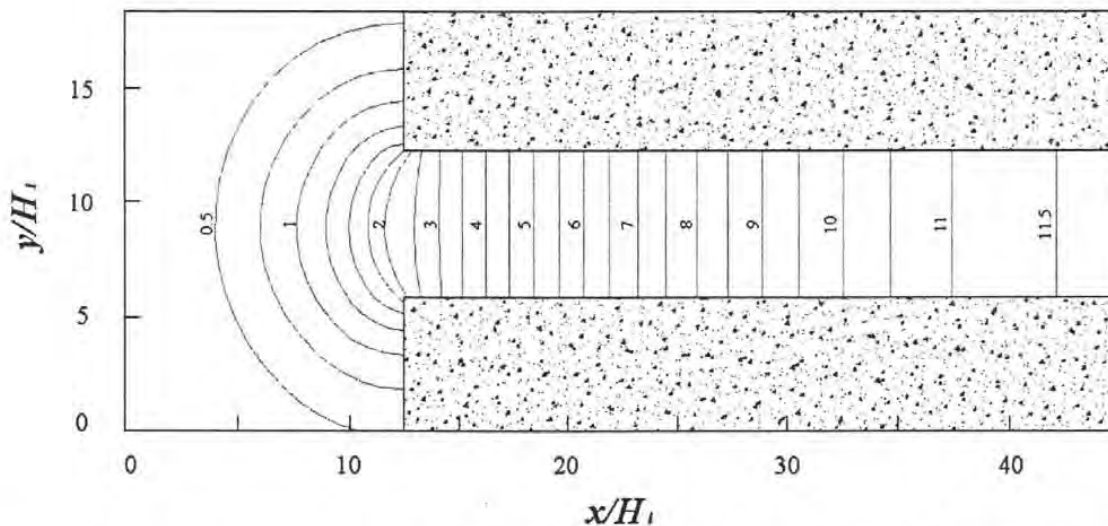


Figura 4-9: Solución presentada por Maa, Hsu et al. (1997), incluyendo los coeficientes de reflexión local.

Los resultados de los coeficientes de reflexión obtenidos con el modelo en análisis se presentan en la Figura 4-10, considerando las fronteras laterales fuera del puerto como totalmente reflejantes.

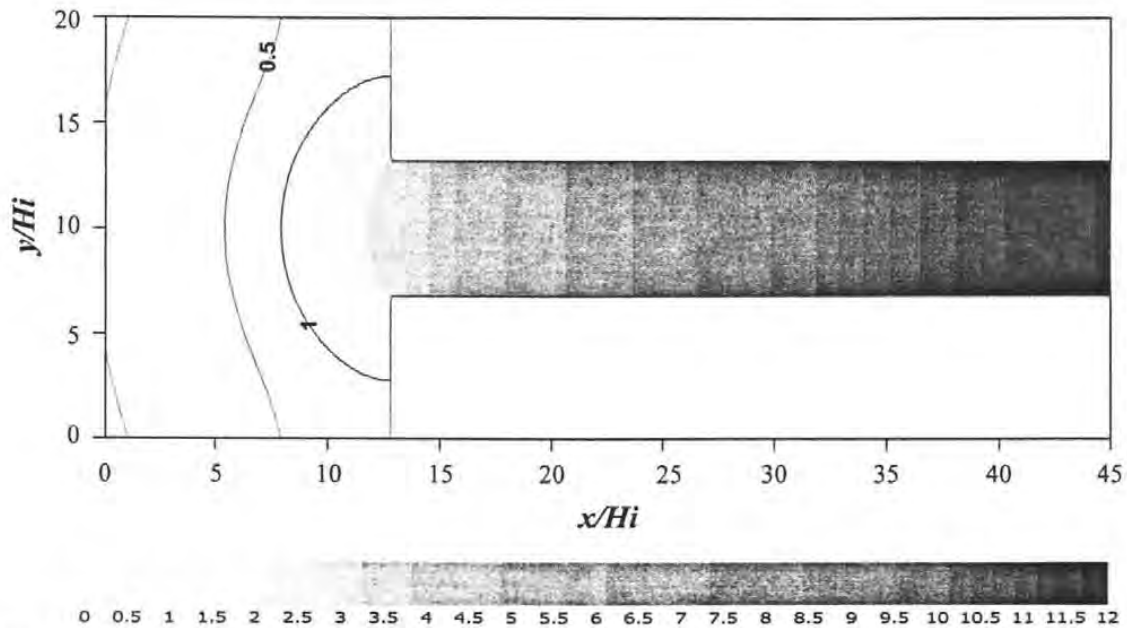


Figura 4-10: Mapa de coeficientes de reflexión obtenido con el modelo.

De la comparación entre la Figura 4-9 y Figura 4-10 se aprecia claramente la similitud entre ambos resultados, salvo que la primera no presenta información de la zona a la izquierda de la línea del coeficiente de reflexión igual a 0.5.

Con el propósito de tener una validación más completa, se simuló un análisis de resonancia para la batimetría mostrada en la Figura 4-8. Para ello se dibujaron, en la Figura 4-11, los valores del coeficiente de reflexión al final del puerto para varios períodos de onda incidente ( $k\lambda$  de 0 a 4) y se compararon con las soluciones numéricas de Maa, Hsu et al. (1997) y la analítica de Lee (1971).

En la Figura 4-11 se observa que los resultados obtenidos con el modelo aquí presentado son los más cercanos a la solución analítica (exacta), ya que presentan un error menor que los casos simulados por Maa, Hsu et al. (1997).

De los resultados de este caso se puede concluir que el modelo representa adecuadamente los fenómenos de resonancia y de propagación dentro de un puerto con fondo plano, además de que se apega adecuadamente a la solución analítica cuando se fijan las fronteras como totalmente reflejantes.

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**



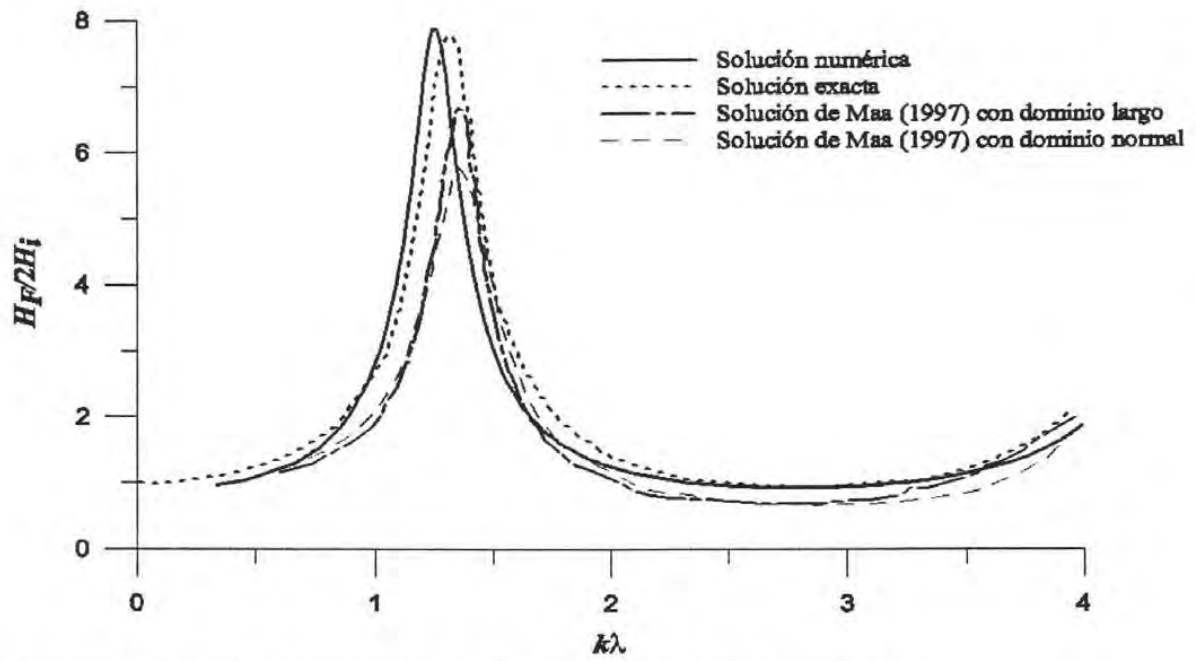


Figura 4-11: Análisis de resonancia en el puerto mostrado en la Figura 4-8.

LIBRO DE INVESTIGACIÓN  
CICLO 2011-2012  
FACULTAD DE INGENIERÍA

## CAPÍTULO 5

# APLICACIÓN DEL MODELO

---

### 5.1. RESONANCIA EN PUERTOS.

Todo cuerpo de agua semi-cerrado es susceptible a perturbaciones, ya sea por las fuerzas que ejerce el viento en la superficie libre o por ondas incidentes provenientes de la entrada. La energía se disipa con el rompimiento de las ondas, por efectos de fricción, absorción, y radiación hacia el mar. Las ondas son parcialmente reflejadas por los límites de la dársena, y cuando llegan a la entrada, son nuevamente reflejadas debido a fuerzas incidentes. Esta energía atrapada intensifica la agitación dentro de la dársena provocando en ocasiones resonancia y aumento en la amplitud de las ondas.

Los puertos que normalmente tienen períodos de resonancia del orden de minutos, no responden, o lo hacen muy ligeramente, a fuerzas externas de período de segundos, y por eso el oleaje siempre es menor dentro del puerto que fuera, dejan pasar prácticamente inalteradas las ondas de período largo (mareas) y amplifican las de período igual al período de resonancia.

Las perturbaciones llegan a ocasionar daños a las embarcaciones ancladas, a las estructuras de protección, o bien dificultar la navegación dentro y fuera de la dársena, por lo que es de gran importancia estudiar y predecir el comportamiento del cuerpo de agua en la planeación y desarrollo portuario. Por lo que se han realizado estudios teóricos sobre las oscilaciones inducidas por el oleaje y el efecto de resonancia en dársenas de profundidad constante y forma arbitraria

La funcionalidad de cualquier puerto está determinada esencialmente por la agitación en el interior del mismo. Las condiciones de estancia, carga y descarga de las embarcaciones, los esfuerzos sobre embarcaciones y amarras así como las cargas

a las que se ven sometidas las estructuras de defensa exterior, muelles, protecciones, etc., están condicionadas por la acción de las oscilaciones y las corrientes asociadas en el exterior y en el interior del puerto. Las oscilaciones presentes en las dársenas o ensenadas naturales del litoral tienen períodos que cubren desde los 6 a los 1200 segundos y sus consecuencias sobre la funcionalidad de los puertos varían considerablemente.

Entre los mecanismos capaces de inducir agitación de largo período en el interior de los puertos se encuentran: las ondas largas, las perturbaciones atmosféricas, los tsunamis, la transferencia no lineal de energía de las componentes de corto período a las de largo período, etc. Su presencia e incidencia sobre la actividad portuaria depende de varios factores propios de la zona donde se encuentre ubicado el puerto (clima marítimo, presencia o no de grupos, profundidad relativa a la que se encuentra el puerto, existencia o no de procesos de rotura en situación de temporal, proximidad del puerto a playas, etc); así como de características propias del puerto (geometría, calado, tipo de contorno, etc.). Además, es importante destacar que, el clima marítimo está siempre definido por la acción simultánea de las ondas de corto período y las de largo período.

#### **5.1.1. Modelos de resonancia en puertos: características generales.**

Existen, fundamentalmente, dos diferentes tipos de modelos para simular la agitación en el interior de los puertos: los basados en la solución de la ecuación de la pendiente suave (problemas fondo variable, teoría lineal y oleaje regular) y los del tipo Boussinesq (para oleaje irregular en profundidades relativamente reducidas). Sin embargo, en los dos casos las ecuaciones de gobierno se encuentran integradas en vertical, reduciendo el problema tridimensional a bidimensional.

En los estudios de ingeniería, el análisis del oleaje de onda larga y corta se analizan por separado. Donde, el análisis de la onda larga es en general lineal; por lo que los posibles acoplamientos entre los movimientos asociados a onda corta y larga no han sido hasta ahora considerados en el modelado. Esto porque las ecuaciones empleadas hasta ahora no consideran detalladamente la importancia de los efectos no lineales, limitando el rango de validez.

Se han creado modelos que permiten considerar el efecto simultáneo de las ondas de largo y corto período, con validez tanto en profundidades intermedias como someras simulando adecuadamente los efectos de las diferentes componentes del oleaje irregular incidente.

Los modelos anteriormente citados, consideran las interacciones no lineales entre componentes con carácter transitorio. Su fundamento son ecuaciones

completamente no lineales y débilmente dispersivas aplicables tanto en profundidades intermedias como bajas, tales ecuaciones se pueden aplicar para modelar ondas de amplitud finita con efectos débilmente dispersivos. Mejorando las características dispersivas de estas ecuaciones a través de la selección de un valor de referencia adecuado, éstas pueden ser aplicadas en profundidades intermedias. Estas ecuaciones también están integradas en vertical, sin embargo, su rango de aplicación es mucho mayor que los modelos anteriormente citados y, por tanto, su aplicación no se ve limitada a aguas someras. Estas nuevas ecuaciones pueden ser utilizadas con oleaje irregular considerando tanto componentes de ondas larga como de onda corta. Al tener un orden de no linealidad importante, son más precisas a la hora de describir ondas no lineales en profundidades reducidas donde los efectos de la dispersión son menos importantes.

Por las características mencionadas, los modelos en desarrollo pueden ser más adecuados para estudiar los movimientos asociados a onda corta y larga simultáneamente. Sin embargo, deben incluir mecanismos disipativos tales como rotura, fricción en el fondo o las pérdidas producidas en la boca. Asimismo, mecanismos como contornos absorbentes y reflejantes y contornos móviles capaces de describir el run up y run-down<sup>6</sup> en playas interiores o próximas al puerto.

La estimación del oleaje incidente y reflejado es un problema importante que afecta los resultados de los ensayos y el propio conocimiento del comportamiento de las obras marítimas. La dificultad del problema radica en la necesidad de estimar el oleaje incidente a partir de registros del campo de oleaje total que incluyen una reflexión desconocida de la estructura<sup>7</sup>. No es posible determinar con certeza el

---

<sup>6</sup> El run up; se define como la elevación máxima de levantamiento de las olas sobre el nivel del mar, inducido por la presencia de estructuras marítimas y/o la profundidad, por lo que en aguas profundas la profundidad no influye en su comportamiento. Este parámetro define la elevación de la corona de rompeolas, y, una estimación deficiente de su magnitud puede acarrear problemas de estabilidad y operatividad de las estructuras marítimas.

Los estudios al respecto establecen que los valores del run up (lamido) y de run-down (bajada) se incrementan cuando crecen los valores del número de Iribarren y Nogales  $\xi$  y con mayor rapidez si la rompiente es del tipo plunging.

$$\text{donde: } \xi = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{H/L_0}}$$

<sup>7</sup> Mediante la generación de oleaje irregular en laboratorio se efectúan ensayos unidireccionales y direccionales, a los 2-D y 3-D, y también a las campañas de medición en prototipo. Donde se puede neutralizar el oleaje reflejado para saber qué oleaje está incidiendo a la estructura estudiada y también conocer el oleaje reflejado. La mayoría de las técnicas no han sido publicadas y son auténticas “cajas negras” con una efectividad dudosa. Por ello, tanto los generadores de oleaje convencionales como los de absorción activa exigen disponer de técnicas fiables de análisis de oleaje incidente y reflejado.

La mayoría de las técnicas de análisis de oleaje incidente y reflejado están basadas en el método “2-point”. Sin embargo, el método tiene unas hipótesis básicas que sólo se cumplen utilizando simulaciones numéricas pero no

oleaje incidente si no se determina con precisión el oleaje reflejado; el oleaje incidente es la base de cálculo de la mayoría de los procedimientos de diseño actuales y el oleaje reflejado parece ser muy importante en algunas técnicas innovadoras recientemente desarrolladas. Los errores en la determinación del oleaje incidente y reflejado se traducen en errores experimentales y distorsiones del comportamiento estructural que afectan el riesgo y la eficiencia de los diseños estructurales y de los modelos conceptuales.

## 5.2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROGRAMA WAPO2D.

El programa *WAPO2D*, por sus siglas en inglés *WAve Propagation On the coast in 2 Dimensions* es capaz de resolver la ecuación de la pendiente suave modificada, (3.36) ó (4.3), a la cual se le aplican las condiciones de frontera desarrolladas y discretizadas en el capítulo 4. Este programa desarrollado en fortran 77 es capaz de generar y resolver el sistema de ecuaciones para estimar los potenciales de velocidades locales a lo largo y ancho de una malla computacional.

La información se introduce a través de una serie de ficheros como el *BWAPO2D* que es un programa de preproceso donde se construye la malla computacional. En tanto que los resultados se escriben en una serie de programas de salida.

### 5.2.1. Programa de preproceso BWAPO2D.

Este programa está diseñado para que a partir de unas condiciones iniciales e información batimétrica del área en estudio, se construya una base de datos con todas las condiciones iniciales que necesita el programa *WAPO2D* para su funcionamiento. Tiene una rutina principal y siete subrutinas.

- Rutina principal.  
Diseñada para que por pantalla se lea información relacionada con el nombre del fichero que tiene la información general de la corrida.
- Subrutina QUALBAT.  
Revisa que todas las celdas con profundidad negativa estén interconectadas y en caso que existan lagunas (celdas no conectadas al contorno desde donde se propaga el oleaje) les da un valor equivalente a tierra.
- Subrutina ASIGN.

Genera mallas con información relativa a coeficientes de reflexión, fricción y disipación en función de la información del fichero de entrada.

- Subrutina LEODATA.  
Lee de un fichero información tal como: nombre del fichero que contiene la batimetría, tipo de contorno (coeficiente de reflexión para diferentes zonas), información sobre el nivel de marea que deba añadirse o restarse a la batimetría y nivel mínimo que es considerado como tierra.
- Subrutina LEO\_GRID.  
Lee de un fichero los datos batimétricos de la malla de cálculo.
- Subrutina CHECK1.  
Revisa que al menos existan cuatro celdas contiguas con valor negativo, en caso que esto no se dé, convierte el número necesario de celdas con valor de agua para que esta condición se cumpla y les asigna un coeficiente de disipación muy alto.
- Subrutina KEY.  
Con el criterio mostrado en la Figura 5-1 asigna a cada celda un número que le identifica el tipo de condición, número y posición de sus celdas vecinas para luego ser utilizadas en la generación del sistema de ecuaciones.

	<b>NORTE</b>											
<b>OESTE</b>	06	02	02	02	17		16	02	02	02	07	<b>ESTE</b>
	03	01	01	01	01		01	01	01	01	05	
	03	01	01	01	39		38	01	01	01	05	
	28	01	01	34			33	01	01	01	29	
		33	01	01	37		36	01	01	34		
	16	01	01	01	01	35	01	01	01	01	27	
	03	01	01	01	01	35	01	01	01	01	05	
	08	04	04	03	19		18	03	03	03	09	
	<b>SUR</b>											

Figura 5-1: Malla con ejemplos de los números de identificación

- Subrutina CELL.  
Ordena las celdas y las numera consecutivamente, de Oeste a Este y de Norte a Sur eliminado de la numeración a las celdas que son tierra. En un fichero se escriben de acuerdo al orden dado la posición i, j en la malla de cálculo, en número de orden, la fricción, valor de disipación, valores relativos al coeficiente de reflexión en cada una de sus fronteras, la posición de sus vecinos y la profundidad de la celda ya corregida por el efecto de marea.

### 5.2.2. Programa de proceso WAPO2D.

Una vez construido el mapa de condiciones iniciales, se ejecuta el programa WAPO2D. Este programa tiene una rutina principal y ocho subrutinas.

- Rutina principal.  
Esta diseñada para que por pantalla se lea información relacionada con el nombre del fichero que tiene la información general de la corrida o la lista de casos a ser ejecutados.
- Subrutina LEODATA.  
Lee de un fichero el mapa de condiciones iniciales.
- Subrutina WVNUM.  
Evalúa los números de onda locales para todo el dominio.
- Subrutina ZKC.  
Evalúa los términos de disipación para todo el dominio de cálculo.
- Subrutina LATERAP.  
Evalúa el potencial de velocidades incidente, para fondo constante y variable.
- Subrutina COEFF.  
Se construye la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones.
- Subrutina SOLVER.  
Resuelve el sistema de ecuaciones utilizando el método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial.
- Subrutina ANGU.  
Se evalúa el ángulo del oleaje para cada celda del dominio.
- Subrutina GRD.  
Rutina diseñada para la escritura de resultados.

De manera general, a continuación se presenta el flujograma del programa

1. Desde pantalla se decide si es un caso individual o se leerá desde un archivo una lista de casos.
2. Si es caso único, lee desde pantalla el nombre del fichero con las condiciones generales, de lo contrario lee desde el fichero que contiene la lista de casos.



3. Va a la subrutina LEODATA y lee el mapa de condiciones iniciales.
4. Se calcula el número de onda para cada celda de acuerdo a la información dada en el fichero de condiciones generales.
5. Calcula los coeficientes de disipación (rotura y fricción de fondo).
6. Calcula el potencial de velocidades en las fronteras abiertas.
7. Calcula los coeficientes del sistema de ecuaciones.
8. Resuelve el sistema de ecuaciones con SOLVER.
9. Si en el archivo de condiciones generales se impuso la condición de rotura, se revisa que no exista ninguna celda donde se viole dicha condición. En caso que exista alguna celda donde el oleaje viole dicha condición se regresa al punto 4. Para los casos en los cuales se haya impuesto fricción de fondo y sin condición de rotura se realizan dos iteraciones a partir del punto 4.
10. Se calcula el ángulo local del oleaje para todos los puntos de la malla.
11. Se escriben los resultados.
12. En caso que se haya optado por la condición de múltiples casos, se regresa al punto 2 hasta que haya concluido con la lista.

### 5.2.3. Ficheros de entrada.

A los programas *BWAPO2D* y *WAPO2D* es preciso suministrar una serie de variables y ficheros como los que a continuación detallan

#### 5.2.3.1 Fichero de entrada con una lista de casos.

```
Test1.inp
Test2.inp
Test3.inp
.....
Test20.inp
```

Figura 5-2: Fichero con una lista de casos.

El formato de lectura tanto del nombre del fichero con la lista de casos como del nombre de cada fichero con las condiciones individuales es "A12". Con 20 como número máximo de ficheros de casos individuales (los programas *BWAPO2D* y *WAPO2D* tienen la opción de resolver casos individuales o una serie de casos) con la forma interna del fichero dada por Figura 5-2.

### 5.2.3.2 Fichero de condiciones generales.

**Línea de Comentario**	
CILA.GRD	Nombre del Fichero con la batimetría (en formato .grd)
TEST01A.DAT	Nombre del fichero de datos de salida con toda la información
TEST01B.DAT	Nombre del fichero de datos de salida (entrada para WAPO2D)
CASE01A.GRD	Nombre del Fichero de salida de amplitudes máximas (en formato .grd)
CASE01M.GRD	Nombre del Fichero de salida de superficie libre (en formato .grd)
CASE01A.DAT	Fichero de salida (posición (x,y), amplitud compleja, máxima y ángulo local)
0.5	Amplitud incidente (m)
8.68	Período de onda
0	Decisión sobre la implementación de la rotura (si = 1, no = 0)
1	Frontera de donde incide el oleaje (ID= 1 norte, 2 oeste, 3 este, 4 sur)
-45.0	Dirección del oleaje (0° = dirección normal a la frontera)
1	Criterio de aproximación del número de onda (Lineal=1, Hedges = 2)
0.01	Profundidad mínima a ser considerada como agua
0	Nivel de marea (m)
1	Número de regiones con diferente factor de fricción
0.0 1 1 121 121	Posición ij de inicio y final de cada región
1	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera norte
0.0 1,121	Valor y coordenadas de inicio y final
1	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera oeste
0.0 1,121	Valor y coordenadas de inicio y final
1	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera este
0.0 1,121	Valor y coordenadas de inicio y final
1	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera sur
0.0 1,121	Valor y coordenadas de inicio y final
1	Número de regiones con diferente factor de reflexión, interior (dominio)
1.0 1,1,121,121	Valor y posición ij de inicio y final de cada región

Figura 5-3: Fichero de condiciones generales.

La primera línea del fichero de condiciones generales es para escribir algún comentario o se puede dejar en blanco. Es importante recordar que la longitud del nombre de los ficheros debe de ser menor o igual a 12 caracteres y que la numeración de las celdas se hace de Oeste a Este y de Norte a Sur, denotando el número de fila con la letra "i" y el número de columna con la "j".

Conviene establecer que el signo de la dirección del oleaje incidente sobre las fronteras de profundidad constante se da en sentido inverso al movimiento de las manecillas del reloj, Figura 5-5, y que 0° corresponde a incidencia normal.

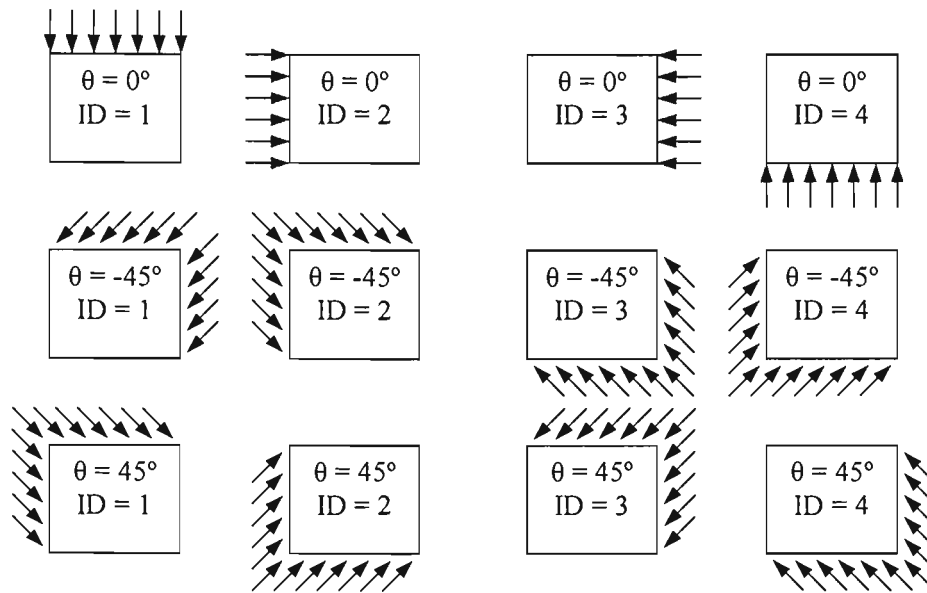


Figura 5-4: Dirección del oleaje incidente desde profundidad constante según el valor de ID.

Entonces, el valor del renglón 11, ID Figura 5-3, será definido en función de la dirección de incidencia del oleaje sobre las fronteras de profundidad constante, atendiendo a la Figura 5-5: 1 si se propaga desde la frontera Norte, 2 para el caso de la frontera Oeste, 3 si lo hace por el Este y 4 si se da por el Sur.

	NORTE, ID = 1	
OESTE ID = 2		ESTE ID = 3
	SUR ID = 4	

Figura 5-5 : Criterio de ubicación de las fronteras, ID.

### 5.2.3.3 Fichero de batimetría.

Es del tipo \*.grd, en formato ASCII, compatible con cualquier versión de Surfer y fácilmente se puede visualizar con otros programas como Matlab.

donde:

- DSAA texto que necesita surfer para identificar el fichero como tipo grd.
- NX número de filas.
- NY número de columnas.

Xmin	coordenada en $x$ donde empieza la batimetría.
Xmax	coordenada en $x$ donde termina la batimetría.
Ymin	coordenada en $y$ donde empieza la batimetría.
Ymax	coordenada en $y$ donde termina la batimetría.
Hmin	profundidad mínima.
Hmax	profundidad máxima.
H(i,j)	profundidad de la celda (i,j).

```

DSAA
NY NX
Ymin Ymax
Xmin Xmax
Hmin Hmax
H(NX,1) H(NX,2) H(NX,3) .....H(NX,NY)
H(NX-1,1) H(NX-1,2) H(NX-1,3) ..... H(NX-1,NY)
H(NX-2,1) H(NX-2,2) H(NX-2,3) ..... H(NX-2,NY)
.....
H(2,1) H(2,2) H(2,3).....H((2,NY)
H(1,1) H(1,2) H(1,3).....H((1,NY)
    
```

Figura 5-6: Fichero de batimetría.

#### 5.2.4. Ficheros de salida de BWAPO2D.

El programa genera dos ficheros de salida: El primer fichero, con la estructura del mapeo de condiciones iniciales tiene una estructura de orden cartesiano, mientras que el segundo, archivo de entrada para el programa *WAPO2D* tiene un orden secuencial de la numeración de celdas (de Oeste a Este y de Norte a Sur) y sin considerar las celdas de tierra que no entran al cálculo.

##### 5.2.4.1 Fichero intermedio con toda la información

A nivel de lista, en este fichero se escribe lo siguiente:

I,J,II,ID,FR,IDIS,G\_1,G\_2,G\_3,G\_4,NEI,H

donde

I	número de línea (dirección $x$ ).
J	número de columna (dirección $y$ ).
II	número de celda (sin eliminar las que corresponden a tierra).
ID	identificador del tipo de celda, Figura 5-1.
FR	valor local del factor de fricción.

IDIS	valor de disipación local. Es diferente de cero sólo cuando una celda originalmente es tierra y por razones de estabilidad numérica se ha convertido en valor de agua.
G_1, G_2, G_3 y G_4	valor $\gamma$ , local en las direcciones Norte, Oeste, Este y Sur, respectivamente (evaluado con la ecuación (4.35)).
NEI	proporciona la localización de las celdas vecinas.
H	profundidad local de la celda.

#### 5.2.4.2 Fichero intermedio de lectura para WAPO2D.

Ya numerada las celdas de Este a Oeste y de Norte a Sur y habiendo eliminado las celdas con valor de tierra, a nivel de lista, en este fichero se escribe lo siguiente:

I,J,II,ID,FR,G\_1,G\_2,G\_3,G\_4,NEI,H

En este caso la única variable que cambia de significado es II que es la posición consecutiva de la celda.

Al final del fichero, se escribe lo siguiente:

IMIT1,IMFT1,IMIT2,IMFT2  
 IMIL1,IMFL1,IMIL2,IMFL2  
 IMIR1,IMFR1,IMIR2,IMFR2  
 IMIB1,IMFB1,IMIB2,IMFB2

donde

IMIT1	sobre la frontera Norte, primera celda de agua.
IMFT1	sobre la frontera Norte, primera celda de tierra.
IMIT2	sobre la frontera Norte, última celda de agua.
IMFT2	sobre la frontera Norte, última celda de tierra.
IM1L1	sobre la frontera Oeste, primera celda de agua.
IMFL1	sobre la frontera Oeste, primera celda de tierra.
IMIL2	sobre la frontera Oeste, última celda de agua.
IMFL2	sobre la frontera Oeste, última celda de tierra.
IM1R1	sobre la frontera Este, primera celda de agua.
IMFR1	sobre la frontera Este, primera celda de tierra.
IMIR2	sobre la frontera Este, última celda de agua.
IMFR2	sobre la frontera Este, última celda de tierra.
IM1B1	sobre la frontera Sur, primera celda de agua.
IMFB1	sobre la frontera Sur, primera celda de tierra.
IMIB2	sobre la frontera Sur, última celda de agua.
IMFB2	sobre la frontera Sur, última celda de tierra.

## 5.2.4.3 Fichero de resultados con la amplitud máxima.

El fichero en formato grd para Surfer con los resultados de altura máxima está escrito de la siguiente forma

```

DSAA
NY,NX
0.,(NY-1.)*DY
0.,(NX-1.)*DX
ALTM, ALTM
A(NX,1) A(NX,2) A(NX,3) .....A(NX,NY)
A(NX-1,1) A(NX-1,2) A(NX-1,3) ..... A(NX-1,NY)
A(NX-2,1) A(NX-2,2) A(NX-2,3) ..... A(NX-2,NY)
.....
A(2,1) A(2,2) A(2,3).....A((2,NY)
A(1,1) A(1,2) A(1,3).....A((1,NY)

```

Figura 5-7: Fichero de resultados con la amplitud máxima de onda.

donde:

ALTM altura de ola mínima en el dominio.  
 ALTM altura de ola máxima en el dominio.  
 NX número de celdas en la dirección  $x$  .  
 NY número de celdas en la dirección  $y$  .  
 DX tamaño de celda en la dirección  $x$  .  
 DY tamaño de celda en la dirección  $y$  .  
 A(i,j) altura de ola local.

## 5.2.4.4 Fichero de resultados con la superficie libre instantánea

```

DSAA
NY,NX
0.,(NY-1.)*DY
0.,(NX-1.)*DX
SMI, SMA
S(NX,1) S(NX,2) S(NX,3) .....S(NX,NY)
S(NX-1,1) S(NX-1,2) S(NX-1,3) ..... S(NX-1,NY)
S(NX-2,1) S(NX-2,2) S(NX-2,3) ..... S(NX-2,NY)
.....
S(2,1) S(2,2) S(2,3).....S((2,NY)
S(1,1) S(1,2) S(1,3).....S((1,NY)

```

Figura 5-8: Fichero de superficie libre instantánea.

El fichero en formato *grd* para Surfer con los resultados de superficie libre instantánea está escrito como en la Figura 5-8.

donde:

SMI	superficie libre instantánea de ola mínima en el dominio.
SMA	superficie libre instantánea de ola máxima en el dominio.
S(i,j)	superficie libre instantánea de ola local.

#### 5.2.4.5 Fichero con amplitud compleja

Tiene en forma de lista la información de la posición  $x$ , posición  $y$ , amplitud compleja, amplitud máxima y ángulo local.

#### 5.2.5. Parámetros de dimensionamiento de BWAPO2D y WAPO2D.

Los parámetros que se pueden modificar para adecuar el programa a otros dominios más grandes o pequeños son:

dentro del programa principal;

NIJ	número máximo de celdas de agua.
IM	número de celdas en la dirección $x$ .
JM	número máximo de celdas en la dirección $y$ .
IW, JW	dimensiones para las submatrices.

dentro de la subrutina SOLVER;

NK	tamaño de las submatrices para resolver el sistema de ecuaciones por partes.
----	--

### 5.3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

El propósito fundamental de este trabajo consiste en analizar los resultados del programa *WAPO2D* en la propagación del oleaje en áreas semi-cerradas como pueden ser los recintos portuarios. Al respecto, se modelaron las batimetrías de los puertos de Veracruz, Manzanillo y Ensenada.

Se simularon para cada condición batimétrica cuatro escenarios, variando el ángulo de aproximación del oleaje y el período de la onda, pero suponiendo en todos los casos una ola con altura unitaria (1 m).



Las fronteras han sido consideradas abiertas y las direcciones de incidencia del oleaje se han seleccionado de forma tal que en una condición la incidencia de la onda es totalmente franca a la orientación del canal de navegación del puerto, mientras que la otra se eligió normal a la frontera de profundidad constante.

Tabla 5-1: Resumen de casos modelados.

SITIO	CASO	CONDICIONES		
		Período (S)	Angulo de Incidencia (°)	Frontera de Aplicación
Manzanillo	a	20	0	Oeste
	b	20	-45	Oeste
	c	30	0	Oeste
	d	30	-45	Oeste
Todos Santos	a	20	0	Oeste
	b	20	60	Oeste
	c	30	0	Oeste
	d	30	60	Oeste
Veracruz	a	20	0	Este
	b	20	-45	Este
	c	30	0	Este
	d	30	-45	Este

Además, Se han propuesto dos períodos de ola para cada una de las direcciones de aproximación del oleaje. La Tabla 5-1 muestra un resumen de los escenarios modelados. A continuación se presentan las condiciones iniciales y los resultados de la modelación para cada uno de los puertos.

### 5.3.1. Caso 1: Puerto de Veracruz.

El municipio de Veracruz se localiza en la parte medio oriente del estado del mismo nombre. Cuenta con una extensión territorial de 241 km<sup>2</sup>. Limita al Norte con los municipios de la Antigua y Paso de Ovejas, al Sur con Medellín de Bravo y Boca de Río, al Oeste con el de Manlio Fabio Altamirano y al Este con el Golfo de México.

El Puerto de Veracruz se encuentra ubicado en la posición 19° 12' 30" latitud Norte 96° 05' 00" longitud Oeste. La conexión entre el puerto y su zona de influencia económica es magnífica por la posición privilegiada en que se encuentra.

Su ubicación y condiciones batimétricas lo convierten en uno de los puertos más importantes de México. A partir de la carta 28302 publicada por la National Imagery and Mapping Agency fueron digitalizadas en AutoCAD las líneas batimétricas que configuran la zona de interés, y posteriormente, se manipularon

los datos para lograr un fichero del tipo \*.grd, en formato ASCII, y que en la Figura 5-9 se presenta con ayuda de Surfer 8.

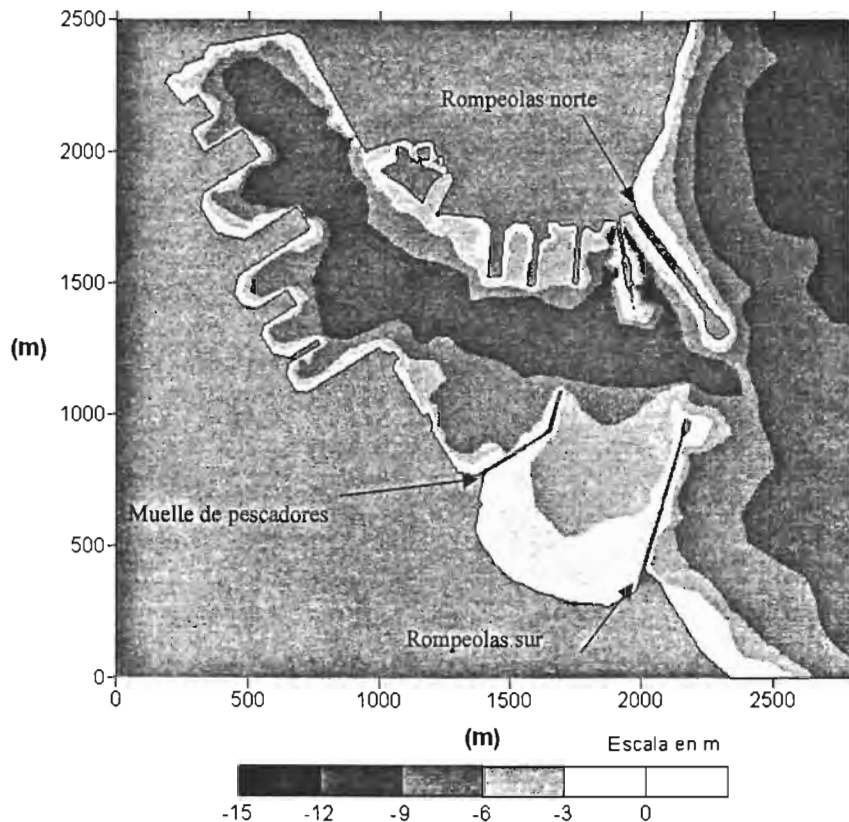


Figura 5-9: Batimetría del Puerto de Veracruz.

### Caso a.

El caso a consistió en modelar las condiciones batimétricas de la Figura 5-9 asumiendo que el oleaje incidente lo hace a través de la frontera de profundidad constante derecha (lado Este, identificada con el número 3), de manera normal ( $0^\circ$ ), con 0.5 m de amplitud, período de 20 segundos y considerando análisis de rotura.

Bajo este análisis y de acuerdo a la Figura 5-11a) se alcanzan alturas de ola del orden de dos metros en zonas muy próximas a los Rompeolas Sur y Norte, aunque la altura más representativa en el exterior del puerto oscila entre 1 y 1.5 m. El efecto de abrigo que los rompeolas producen al Puerto se ve reflejado en la propagación del oleaje al interior del mismo, de forma tal que en la zona comprendida entre el Muelle de Pescadores y los rompeolas la altura de ola oscila entre 0.20 m y 0.8 m.

No obstante, debido a la posición de incidencia del oleaje es posible apreciar al Sureste del Muelle de Pescadores (Figura 5-10 zona 1) ondas de aproximadamente 1 m de altura, mientras que en la región Oeste del Rompeolas Sur la zona de calmas

es evidente. En la zona 2, se observa el decaimiento del oleaje registrando valores medios de 0.20 m.

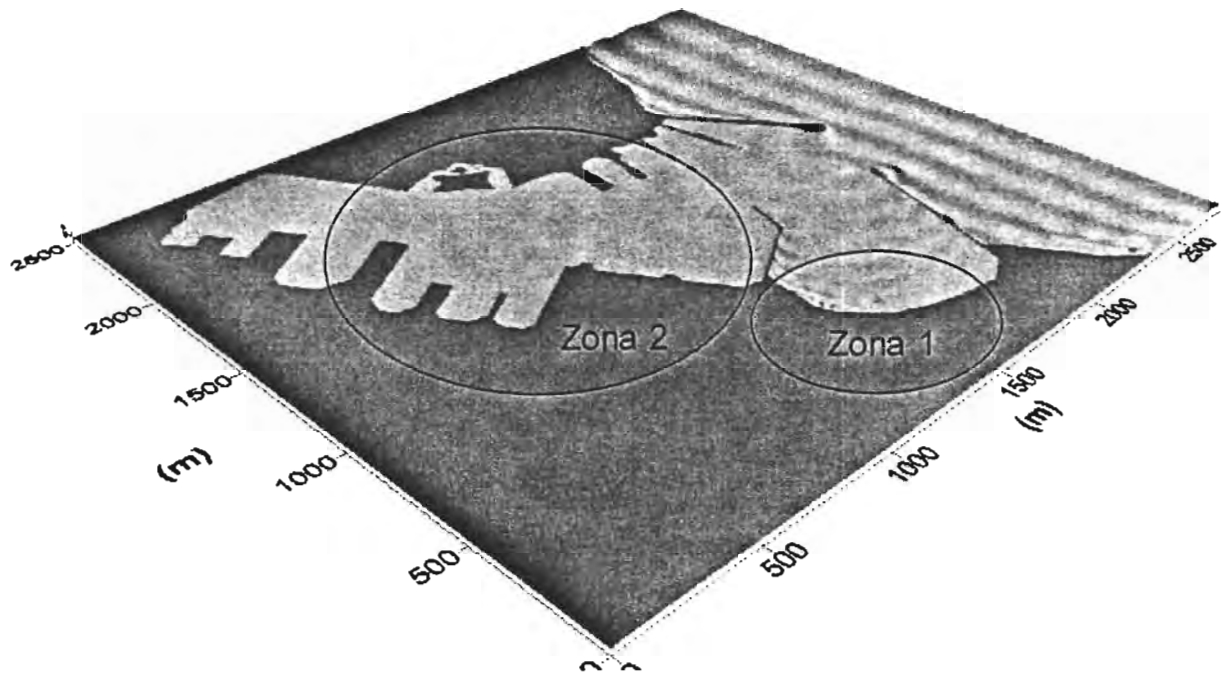


Figura 5-10: Superficie libre instantánea caso a.

### *Caso b.*

Para el caso b, Figura 5-11b) y Figura 5-12, se a considerado oleaje con un ángulo de aproximación de  $-45^\circ$  incidiendo a través de la frontera Este; y aunque la ocurrencia de un oleaje de magnitudes considerables en estas condiciones es reducida, el propósito fundamental de este escenario consistió en analizar la propagación del tren de oleaje para una situación desfavorable de la zona protegida por el Rompeolas Norte.

Los resultados del caso b indican que la altura promedio en el exterior del Puerto es de 1 m, salvo en zonas próximas al Rompeolas Sur (lado Este) donde se llegan a detectar elevaciones de 1.5 m. Ahora, la zona 3 de la Figura 5-12 ilustra claramente una región con oscilaciones del orden de 0.20 m gracias al efecto de difracción del oleaje producido por el Rompeolas Sur, mientras que en la zona 4 se alcanzan elevaciones promedio de 0.5 m. Cabe aclarar que aunque la magnitud de la onda se propaga un poco más hacia el Norte en el interior del Puerto, al igual que en el caso a, aquí también se tienen agitaciones menores a los 20 cm a la izquierda de la zona identificada con el número 2 en la Figura 5-10.

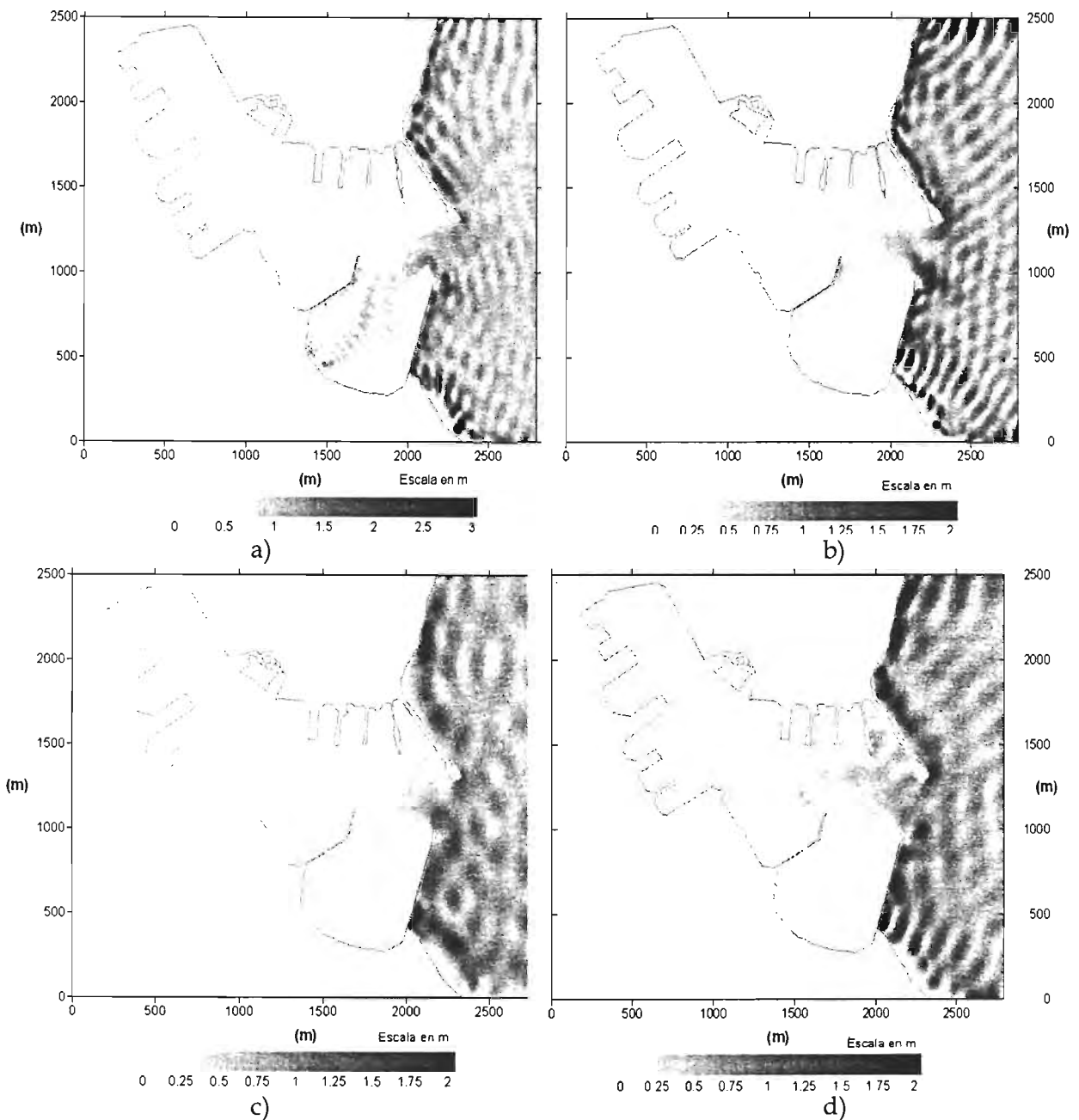


Figura 5-11: Alturas de ola para a)  $T = 20$  s, ángulo de incidencia  $= 0^\circ$ ; b)  $T = 20$  s, ángulo de incidencia  $= -45^\circ$ ; c)  $T = 30$  s, ángulo de incidencia  $= 0^\circ$  y d)  $T = 30$  s, ángulo de incidencia  $= -45^\circ$

### Caso c.

La diferencia entre los casos a y c radica únicamente en el cambio del período, así pues, el caso c contempla 30 s en lugar de 20 s, sin embargo, los resultados de la modelación son significativamente diferentes, pues en la Figura 5-11c) y en la Figura 5-13 se observa que la penetración del oleaje al interior del Puerto se incremento

notablemente respecto a sus similares. Ahora en la zona comprendida entre el Muelle de Pescadores y los Rompeolas se manifiesta una muy baja penetración del oleaje produciendo oscilaciones inferiores a los 10 cm, en tanto que en el Canal de Navegación se aprecian alturas de ola cercanas a los 0.40 m.

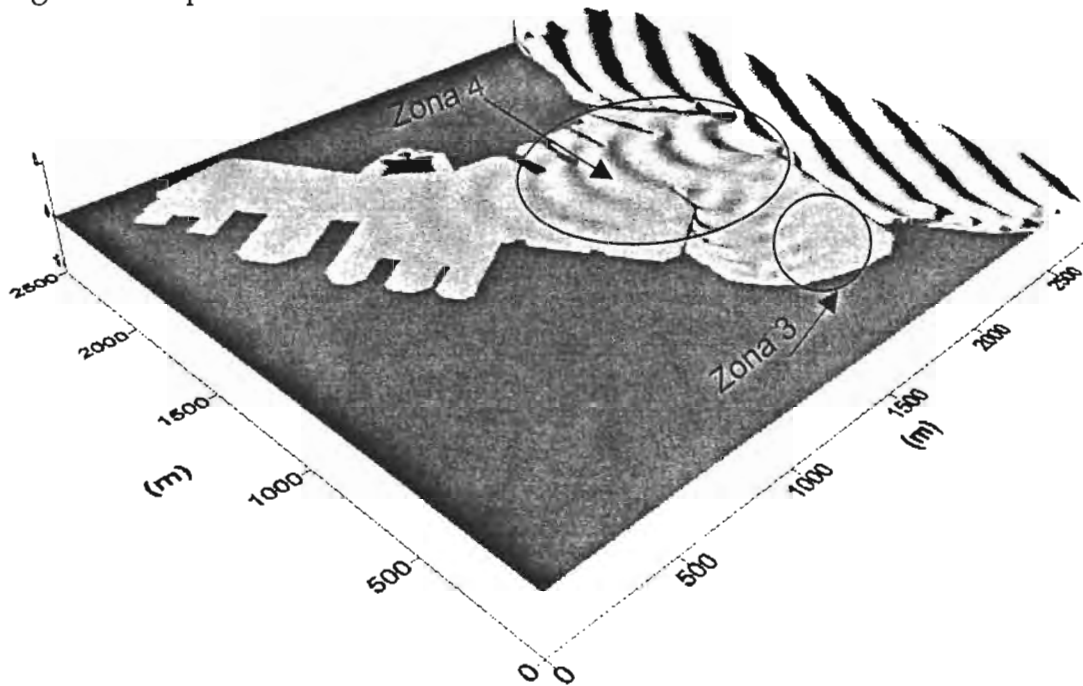


Figura 5-12: Superficie libre instantánea caso b.

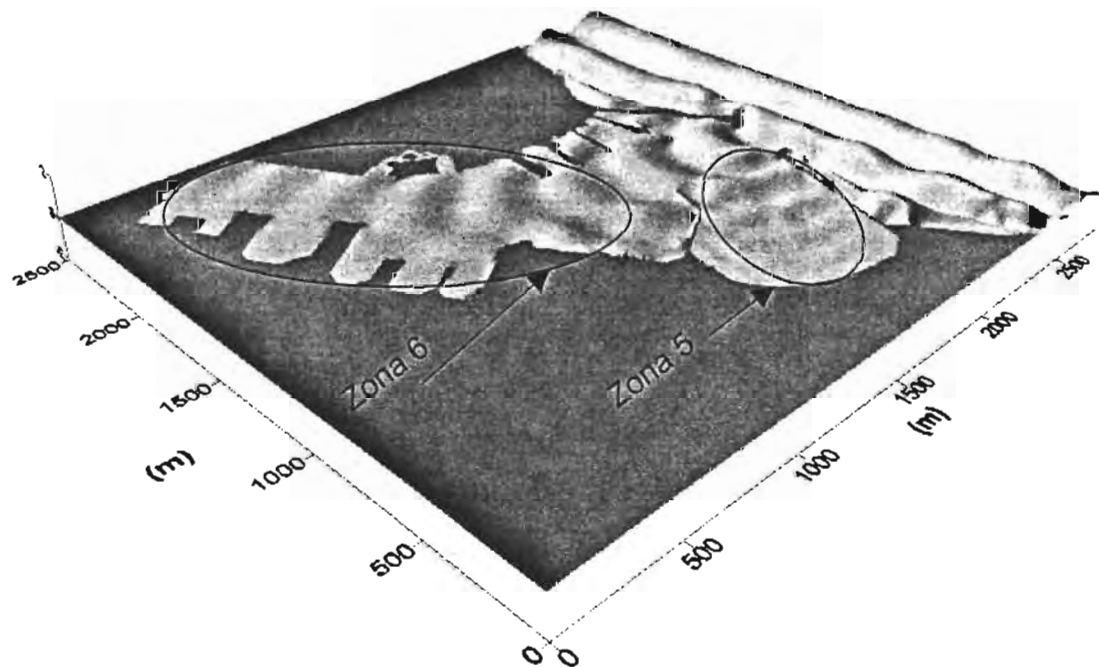


Figura 5-13: Superficie libre instantánea caso c.

A pesar de la poca agitación que se produce en la zona 5, la energía del oleaje incidente alcanza a generar oscilaciones de alrededor de 0.10 m en zonas donde para el caso a no se producían movimientos considerables, zona 6.

#### *Caso d.*

El caso d manifiesta la propagación de la onda por todas las áreas de navegación del Puerto, aunque claro, su distribución difiere de la presentada en el caso anterior, pues ahora las ondas que se impactan en las estructuras de la zona 8 provocan cierta agitación aun en el área comprendida entre el Rompeolas Sur y el Muelle de Pescadores, además, es precisamente en la zona 8 donde se tienen las mayores alturas de ola dentro del recinto portuario, pues en la zona exterior al Puerto estas oscilan entre 1 y 2 m. La zona 7 limita la superficie donde el oleaje se propaga con elevaciones que van desde 0.30 m (cerca de la zona 5) hasta 0.10 m, al comparar las zonas 7 y 6 se concluye que la condición de  $0^\circ$  de incidencia en la frontera Este es la que genera mayores perturbaciones en todo el recinto.

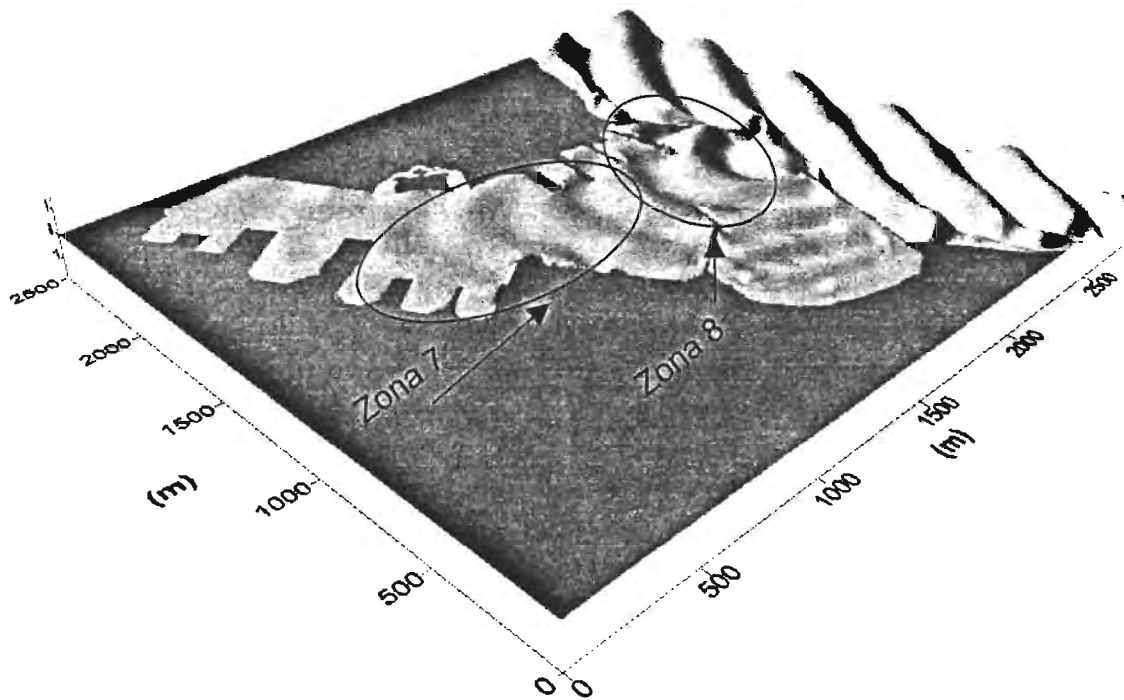


Figura 5-14: Superficie libre instantánea caso d.

#### 5.3.2. Caso 2: Puerto de Ensenada.

El Puerto de Ensenada se localiza al noroeste de México, en el estado de Baja California, a 110 kilómetros de la frontera de México con los Estados Unidos de Norteamérica y en la cabecera del Municipio de Ensenada. Su posición geográfica

se ubica en las coordenadas 31 51'30" Latitud Norte y 116 38'00" Longitud Oeste. Ensenada es un puerto dinámico, de vocación múltiple, importante por su actividad comercial, pesquera y turística.

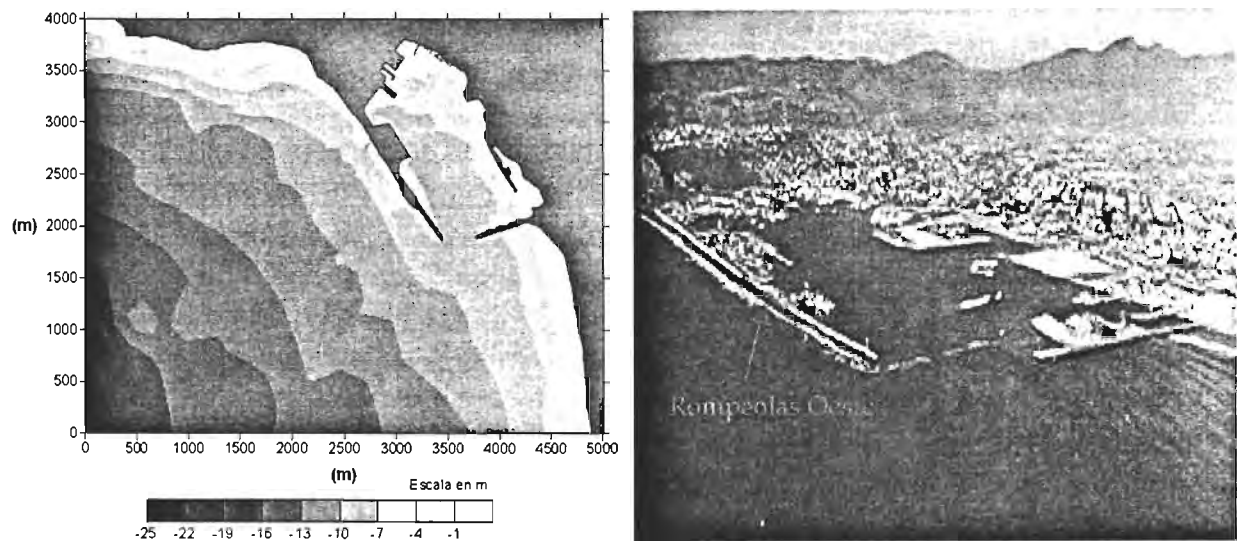


Figura 5-15: Puerto de Ensenada; a) Batimetría, b) Vista general.

### Caso e

Con la batimetría de la Figura 5-15a) se efectuó la propagación del oleaje desde la frontera con profundidad constante ubicada en el lado izquierdo (Oeste, número de identificación ID = 2), ángulo de incidencia de  $0^\circ$ , período de 20 segundos y altura de ola de 1 m. La Figura 5-16 presenta la condición de superficie libre instantánea obtenida mediante la aplicación del programa *WAPO2D* donde se aprecia con claridad como los frentes de ola se orientan paralelos al contorno de incidencia. Sin embargo, la posición del Rompeolas Oeste induce el fenómeno de reflexión del oleaje, principalmente en el extremo Este de la zona 9, Figura 5-20a), donde se manifiestan alturas de ola de aproximadamente 2.0 m y una superficie libre integrada por la superposición del oleaje incidente y el oleaje reflejado, es decir, su apariencia ya no denota paralelismo con la frontera izquierda.

Como el Rompeolas Oeste interrumpe el libre tránsito de las ondas genera además cierto efecto de difracción del oleaje, sobretodo en la última sección de la estructura, es decir, existe transferencia lateral de energía hacia la costa adyacente al Rompeolas Este. Adicionalmente, debe notarse que las máximas magnitudes de ola se presentan en las proximidades del rompeolas Oeste y en la zona con coordenadas  $x=4,500$ ,  $y=1,500$ .

Debido a la función protectora de los dos rompeolas, es que en el recinto portuario no se aprecia una penetración notable del oleaje; el alcance de la ola se limita a la zona 10 con elevaciones promedio de 10 cm de altura, no obstante, estas pequeñas



olas se atenúan gradualmente conforme se propagan en las áreas de navegación del Puerto hasta llegar a ser prácticamente imperceptibles.

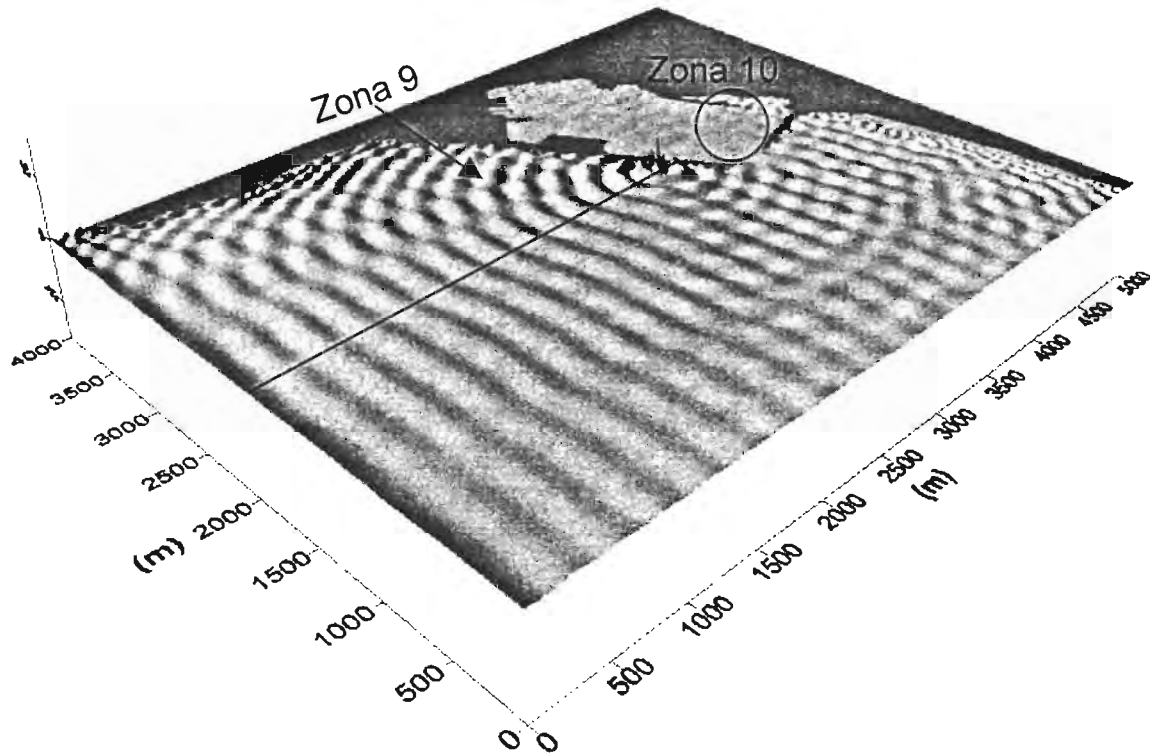


Figura 5-16: Superficie libre instantánea caso e.

### Caso f

Este escenario considera la batimetría de la Bahía de Todos Santos, Figura 5-15,  $60^\circ$  de ángulo de incidencia del oleaje a través de frontera Oeste, altura y período del oleaje de 1.0 metro y 20 segundos respectivamente. Los resultados de la modelación con el programa *WAPO2D* indican que el comportamiento de la altura de ola tendrá una distribución como en la Figura 5-20b), es decir, olas de aproximadamente 1.0 m en la zona 11 y de 2.0 m en las cercanías del Rompeolas Oeste, principalmente en el morro.

En esta alternativa es más relevante la difracción del oleaje a causa de los rompeolas, pues las ondas de la zona 12, Figura 5-17, al no ser obstaculizadas ni reflejadas en su proceso de propagación hacia la costa disipan energía gradualmente presentando elevaciones tan solo de 40 cm en promedio. Sin embargo, debido a las condiciones del oleaje incidente existe una componente del mismo que penetra de forma franca al Puerto. Así las cosas, en el centro de la zona 13 se aprecian oscilaciones de 1.0 m y de 40 cm en las fronteras de la misma.

Con el ángulo de incidencia de  $60^\circ$  se llegan a producir alturas de ola con 10 cm de promedio en el Puerto (a partir de la zona 13), pero también se aprecia una zona de calmas en la región protegida por el Rompeolas Oeste, lo mismo sucede en la parte posterior del Rompeolas Este.

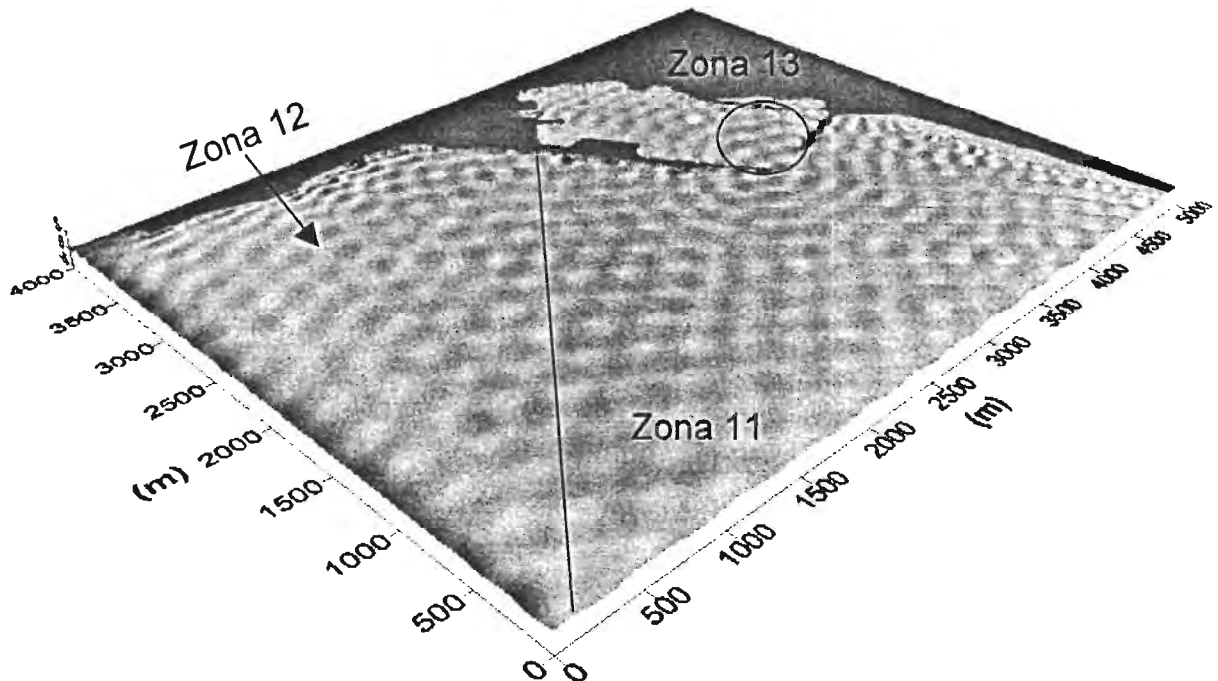


Figura 5-17: Superficie libre instantánea caso f.

#### Caso g.

Se genera al modificar el período del oleaje del caso e, esta alternativa implica un período de 30 segundos. Con estas consideraciones se pueden distinguir claramente dos regiones: el exterior del Puerto y el recinto protegido.

En el exterior del Puerto el comportamiento de la superficie libre es similar al del caso e, pues los frentes de ola se han alineado de forma perpendicular a la frontera Oeste, sin embargo, a diferencia del caso referido, aquí los efectos de difracción no son apreciables, por esa razón solo en la vecindad de las estructuras de protección y en la costa misma se presentan elevaciones superiores a 1 m (zona 14, zona 15 y zona 16), mientras que en el resto de la región se mantienen con un promedio de 50 cm. La superficie libre instantánea, Figura 5-18, presenta entonces un comportamiento regular en toda la región, abandonando el patrón de paralelismo solo en la cercanía de la costa y del Rompeolas Oeste.

En todo el recinto protegido se presenta una onda de 10 cm de altura en promedio, es decir, el Puerto exhibe un comportamiento radicalmente distinto para la

condición de ondas de larga duración, lo cual queda de manifiesto al comparar los resultados de este caso con los de la alternativa *e*, pues en la Figura 5-20a) se aprecia la presencia de olas de 10 cm solo en la parte posterior del Rompeolas Este.

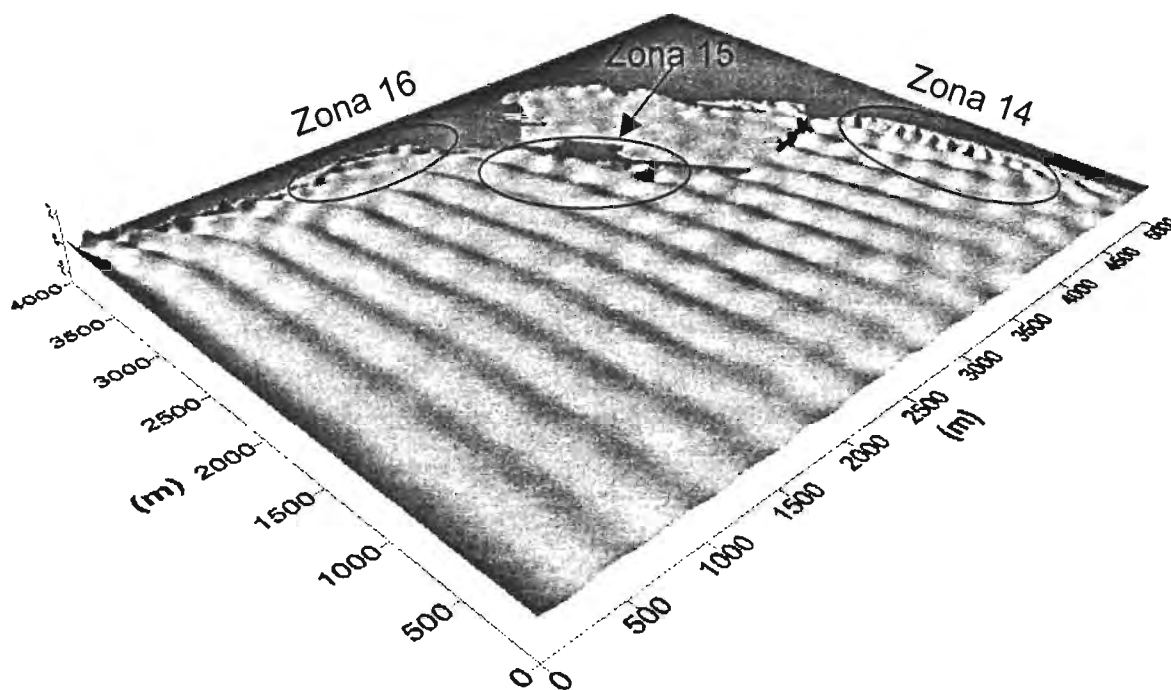


Figura 5-18: Superficie libre instantánea caso g.

#### Caso h.

Se modifico el período del oleaje incidente de 20 a 30 segundos y se mantuvieron las condiciones descritas en el caso f, los resultados de modelar esta alternativa se presentan en la Figura 5-19 y Figura 5-20d).

La superficie libre instantánea exhibe frentes de ola paralelos al ángulo de incidencia, no obstante, este patrón se modifica sustancialmente cuando se acerca la onda a los contornos de tierra. El efecto de reflexión inducido por el Rompeolas Oeste genera alturas de hasta 2.0 m en el lado mar, mientras que la difracción que experimenta el tren de ondas al verse obstaculizado por la misma estructura (principalmente la zona del morro) provoca elevaciones de hasta 1.5 m cerca del canal de acceso al recinto portuario.

El promedio de altura de ola que se presenta en la zona 17 es de .90 cm, y como ya se señalo, presenta una superficie libre relativamente alineada con el ángulo de  $60^\circ$ , además, en la costa Este se tiene una reducción gradual de la altura de ola en función de la configuración de las líneas batimétricas del sitio.

La zona 18 es ligeramente más pequeña que la zona 12, y el promedio de altura de ola se puede citar en 30 cm, lo cual implica una superficie libre relativamente más tranquila que en el caso *f*, pues ahora solo se aprecian algunos pequeños picos en la cercanía con la costa.

Es importante señalar que el oleaje que penetra a la zona 19 lo hace con magnitudes relativamente inferiores a las del *caso f*, pues en el centro de la región 19 se tienen olas de 70 cm en promedio y en los extremos de 30 cm; lo anterior se debe a que existe una incidencia franca sobre el canal de acceso del Puerto, pero se impacta con las instalaciones que encuentra en su trayectoria. El resto del Puerto presenta elevaciones promedio de 8 cm en todas las áreas de navegación, inclusive en la parte posterior del Rompeolas Oeste.

Con los resultados de los últimos cuatro casos se puede concluir que el modelo *WAPO2D* es capaz de modelar la propagación del oleaje de larga duración en áreas semi cerradas con resultados confiables.

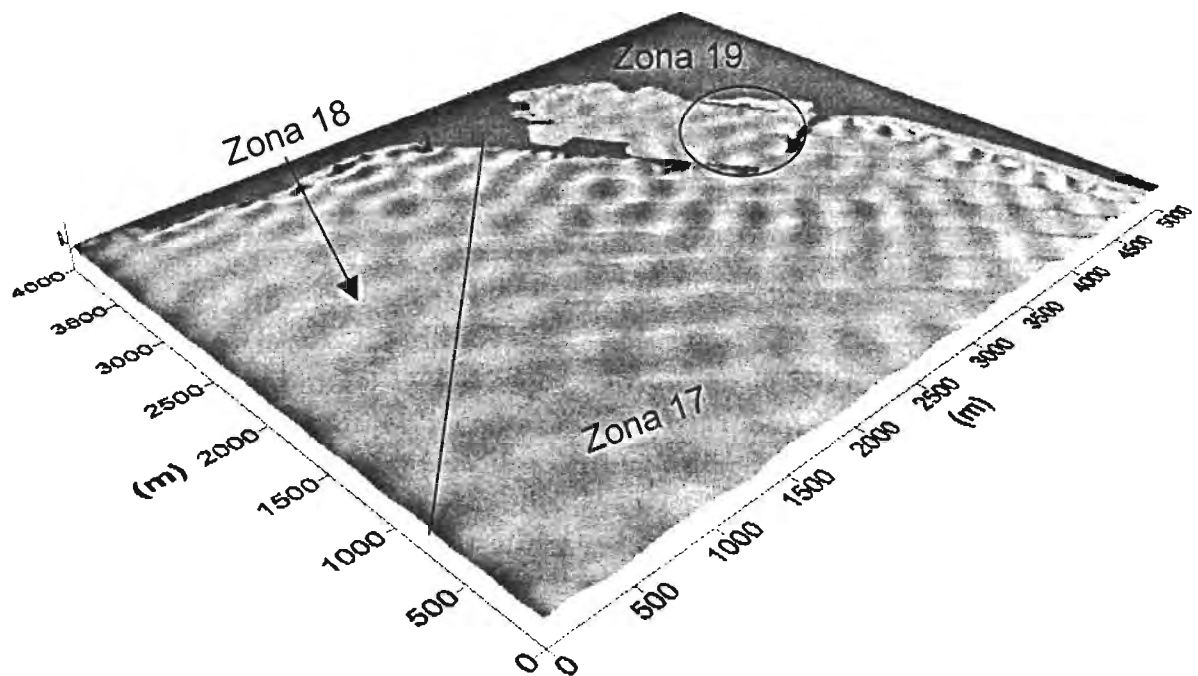


Figura 5-19: Superficie libre instantánea caso h.

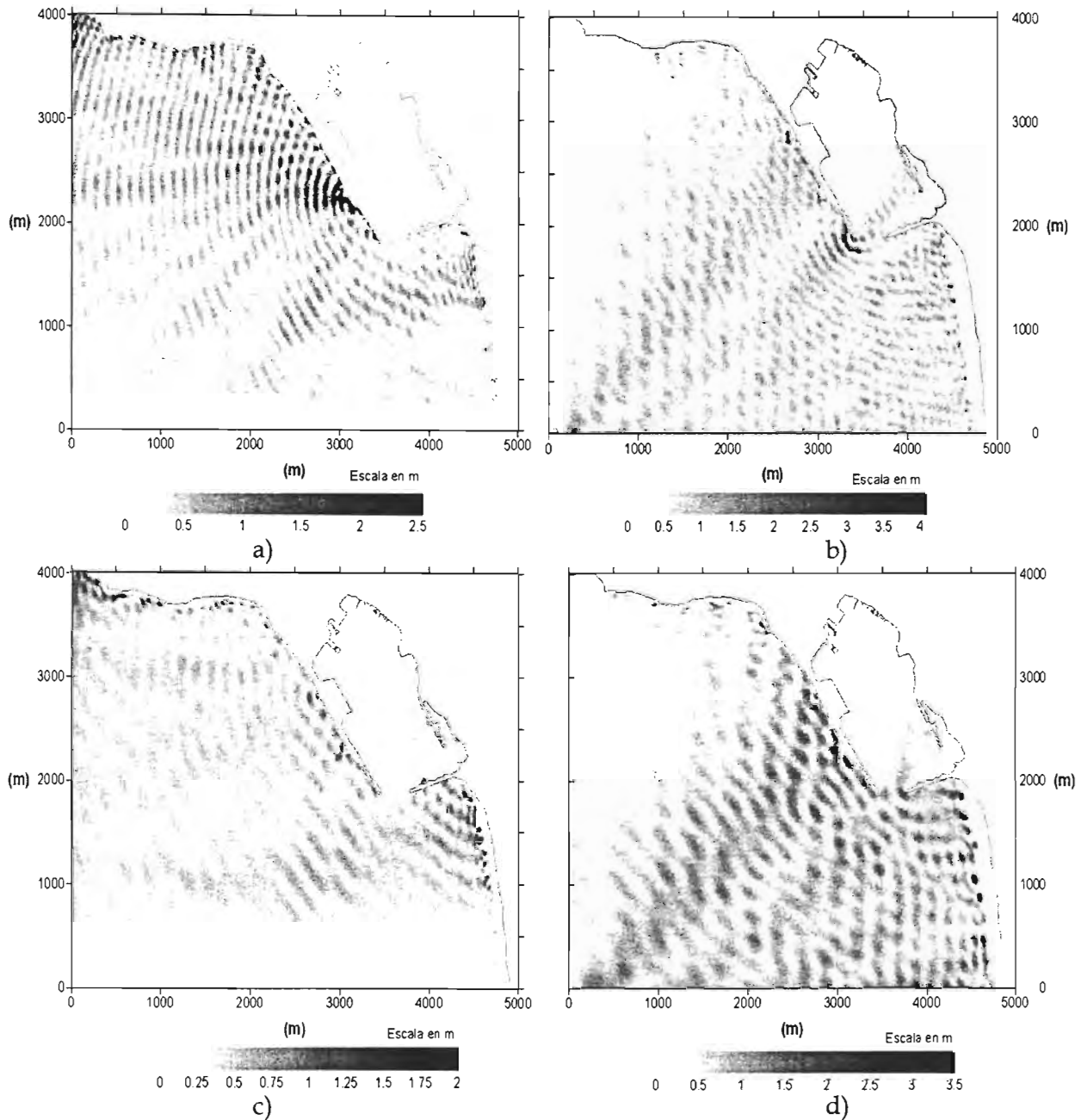


Figura 5-20: Amplitudes de ola para a)  $T = 20$  s, ángulo de incidencia  $= 20^\circ$ ; b)  $T = 20$  s, ángulo de incidencia  $= 60^\circ$ ; c)  $T = 30$  s, ángulo de incidencia  $= 20^\circ$  y d)  $T = 30$  s, ángulo de incidencia  $= 60^\circ$ .

### 5.3.3. Caso 3: Puerto de Manzanillo.

Este Puerto se ubica en el Estado de Colima, en las coordenadas geográficas: Latitud Norte  $19^\circ 03.45$  y Longitud Oeste  $104^\circ 18.08$ .

Manzanillo es el principal vínculo entre el Pacífico y el corredor industrial y comercial más importante del país, conformado por las zonas norte, occidente y centro, en donde se localizan los estados de Aguascalientes, San Luis Potosí, Jalisco, Guanajuato, Querétaro, Zacatecas, Nuevo León, Coahuila, Morelos, Estado de México y Distrito Federal. Por su posición estratégica, es ideal para el comercio internacional con Estados Unidos, Canadá, Centro y Sudamérica y con los países localizados en la Cuenca del Pacífico.

El Puerto de Manzanillo cuenta con un recinto portuario de 437 ha, mismas que incluyen zona de agua, muelles y zonas de almacenamiento. Actualmente cuenta con 17 posiciones de atraque, y 14 ha de áreas de almacenamiento equipadas con 13.5 km de vías férreas y 5.4 km de vialidades.

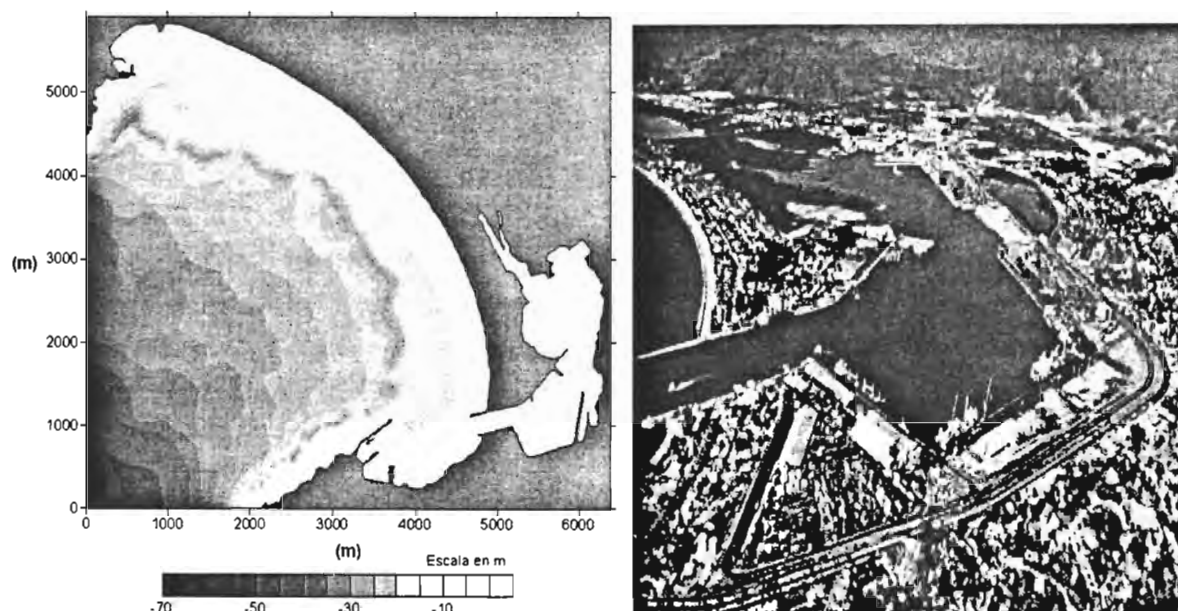


Figura 5-21: Puerto de Manzanillo; a) batimetría, b) vista aérea.

Para generar la batimetría del Puerto de Manzanillo se recurrió a una superficie de más de 6,000 m<sup>2</sup>, lo que la convierte en la malla de mayores dimensiones (respecto a Veracruz y Ensenada), los resultados se presentan en la Figura 5-21.

### *Caso i.*

Considera la modelación en el programa *WAPO2D* de las siguientes condiciones: batimetría del Puerto de Manzanillo, altura de ola de 1.0 m, período de 20 s, ángulo de incidencia de 0° a través de la frontera con profundidad constante Oeste identificada con el número 2. Las alturas de ola que se presentan en la Figura 5-26a) señalan elevaciones promedio de 10 cm, salvo en las proximidades de la costa donde llegan a ser de hasta 0.50 m.

Analizando simultáneamente la Figura 5-22 y la Figura 5-26a), se verifica la existencia de 4 zonas principales; de las cuales a continuación se detallan sus características más notables.

La zona 20 comprende prácticamente toda la región marina del sitio en análisis y se caracteriza por presentar frentes de ola sensiblemente paralelos a la frontera Oeste, su comportamiento es sumamente regular salvo en las proximidades de la costa donde incluso se percibe un incremento de 10 a 40 cm en la magnitud de la altura de ola.

Al Noroeste del Puerto se localiza la zona 21 en la que las agitaciones son de muy baja intensidad, lo anterior obedece a la posición que el sitio tiene ante la dirección de incidencia del oleaje, de tal manera que las ondas que ahí se presentan encuentran su génesis en la transferencia lateral de energía a partir de la zona 20

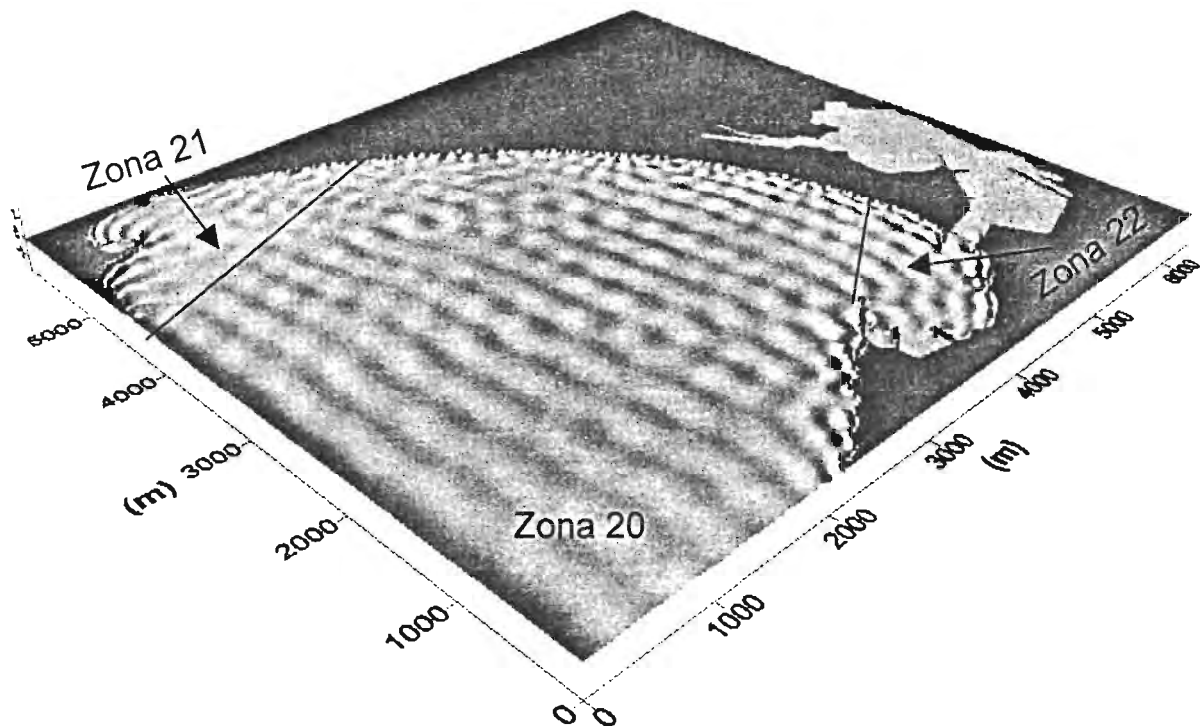


Figura 5-22: Superficie libre instantánea caso i.

La protección natural que tiene la zona 22 y su posición respecto al oleaje incidente, provocan que la onda que se propaga a partir de profundidades constantes sea difractada, generando una zona con oscilaciones prácticamente nulas, salvo en la posición del canal de navegación del Puerto donde se presentan olas de alrededor de 10 cm de altura.



Finalmente, para estas condiciones la zona del Puerto no presenta movimientos de consideración, y aunque por el canal de navegación ingresan pequeñas olas de 10 cm de altura, su energía no es suficiente para que se presenten oscilaciones considerables en todas las áreas de navegación del recinto.

### Caso j.

Suponiendo oleaje con una dirección de incidencia igual a  $-45^\circ$  a través de la frontera con profundidad constante Oeste, período y altura de ola de 20 segundos y 1 m respectivamente, se modeló la batimetría del Puerto de Manzanillo con el programa *WAPO2D*. Los resultados sobre el comportamiento de la altura de ola se presentan en la Figura 5-26b), mientras que el perfil de la superficie libre instantánea se muestra en la Figura 5-23.

Con el propósito de hacer más clara la presentación de los resultados de la modelación, la Figura 5-23 se dividió en tres zonas de las que a continuación se describen sus características.

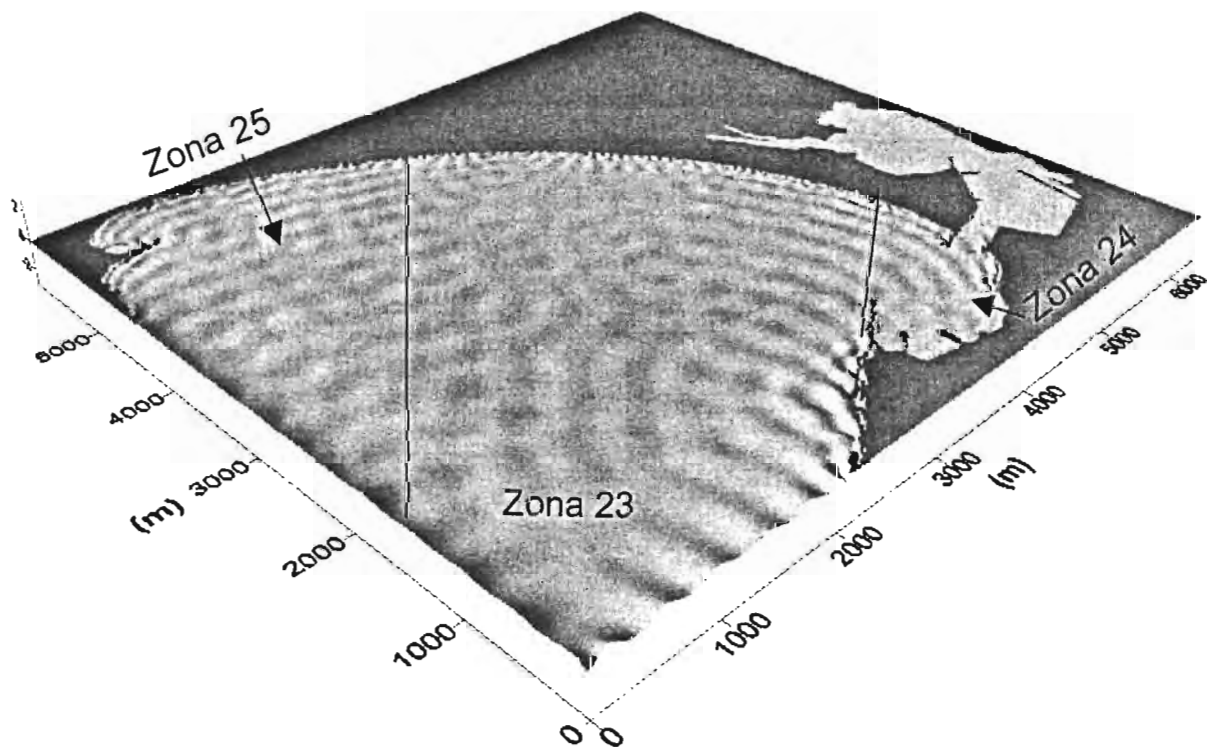


Figura 5-23: Superficie libre instantánea caso j.

La altura de ola promedio en la zona 23 es de 10 cm, salvo en la playa adyacente al Puerto donde alcanza los 30 cm y en la costa Este con hasta 60 cm de altura. El perfil

de la superficie libre instantánea agrupa los frentes de ola paralelos a la dirección de incidencia y muestra cierta turbulencia en la vecindad de la costa, ya que ahí se llevan a cabo procesos de rotura.

En la zona 24 los niveles de agitación son aun menores que en el caso anterior, pues su posición ante el oleaje incidente es ahora mucho menos franca, en el perfil de la superficie libre instantánea apenas se muestran ondas circulares producto de la cedencia lateral de energía y los registros de altura de ola exhiben oscilaciones de menos de 5 cm.

Por otro lado, en la zona 25 cerca de la frontera Oeste también se presenta una zona de calmas con alturas de ola casi imperceptibles a pesar de que los frentes de ola se alinean a la batimetría del sitio.

Debe notarse la poca penetración de las ondas al recinto portuario, la ocurrencia de estas se limita a solo una parte del canal de navegación del Puerto, sin que ello repercuta en niveles de agitación considerables.

#### *Caso k.*

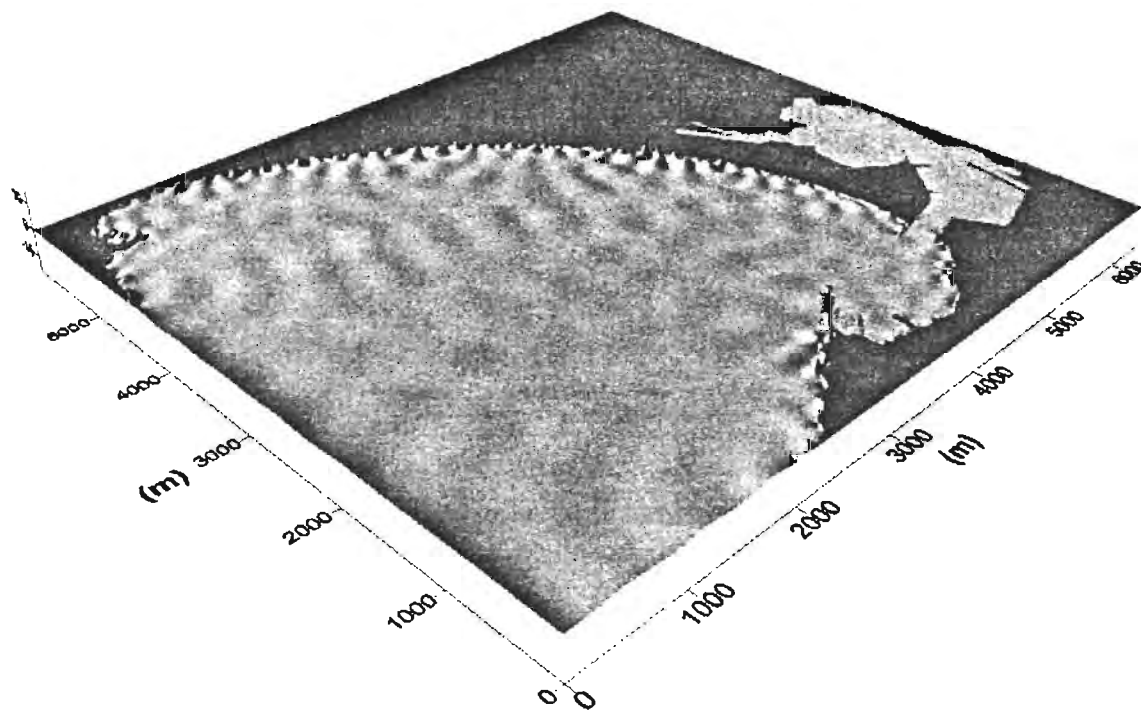


Figura 5-24: Superficie libre instantánea caso k.

Se analizan las mismas condiciones del caso i pero con ondas de larga duración, es decir, se incremento en 10 segundos el período del oleaje incidente. Con estas consideraciones se obtiene una superficie libre (Figura 5-24) con ningún patrón de

alineación, pero sin presentar grandes picos. La altura de ola, Figura 5-26c), en cambio, sufre modificaciones en cuanto a su magnitud, ya que ahora se presenta con 50 cm de promedio en toda la región de análisis, excepto en la frontera con la playa donde se presentan elevaciones de hasta 2.0 m; y en el interior del Puerto donde las oscilaciones continúan siendo muy pequeñas.

Es importante mencionar que para esta alternativa la penetración del oleaje al interior del Puerto es mayor que en el caso de onda de 20 segundos, ya que ahora la ola se propaga en todo el canal de navegación pero su influencia aun continúa siendo pequeña en el interior del Puerto. Adicionalmente, al comparar los resultados con los de las zonas 21 y 22 del *caso i* se observa claramente que el abrigo que en este casos existía, para la onda larga dejo de existir y se presentan agitaciones considerables.

### *Caso l*

Finalmente, modificando en 10 segundos el período de ola de las condiciones del caso *j*, se obtiene el comportamiento que la Figura 5-25d) exhibe en cuanto a la distribución de la altura de onda, donde es posible apreciar la baja respuesta del sitio a la condición de oleaje incidente con  $-45^\circ$  a través de la frontera Oeste.

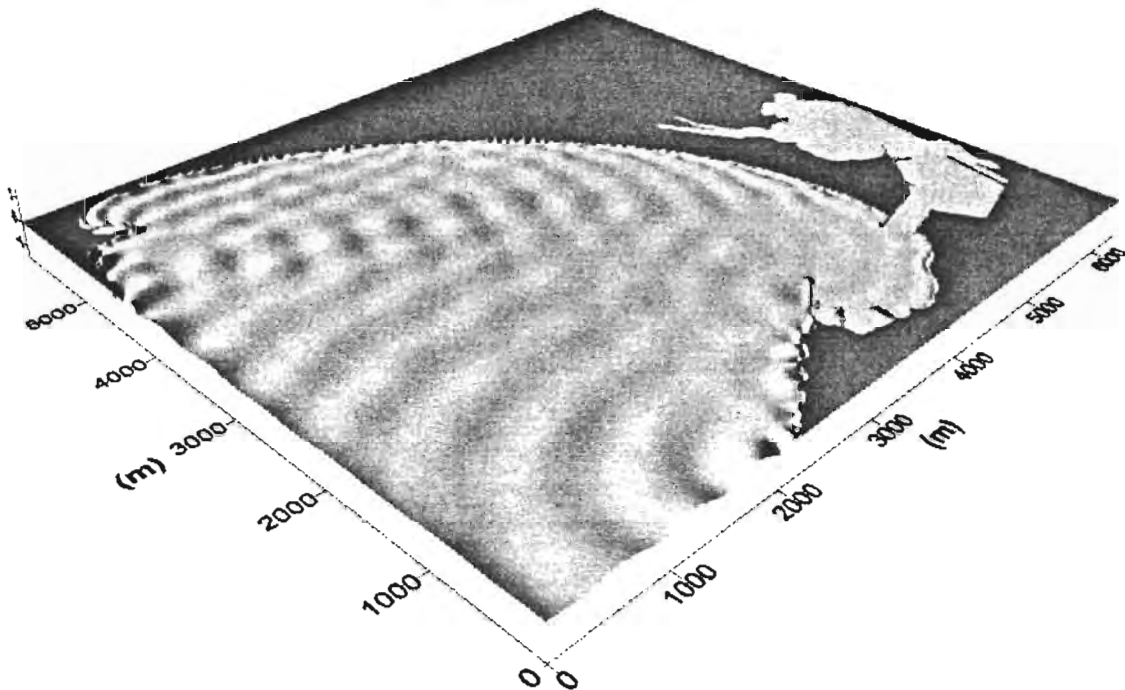


Figura 5-25: Superficie libre instantánea caso l.

En la región 24 del caso *j* y en el interior del Puerto se registran oscilaciones menores a los 5 cm, mientras que en el resto de las zonas de agua se alcanzan

alturas de 10 cm, lo cual se acentúa en la región Suroeste del Puerto. A pesar de lo anterior, la superficie libre instantánea definida por la Figura 5-25 exhibe un comportamiento sin patrón de alineación, pero busca ser paralela a la dirección de incidencia, solo que la configuración de la costa impide que esto suceda plenamente.

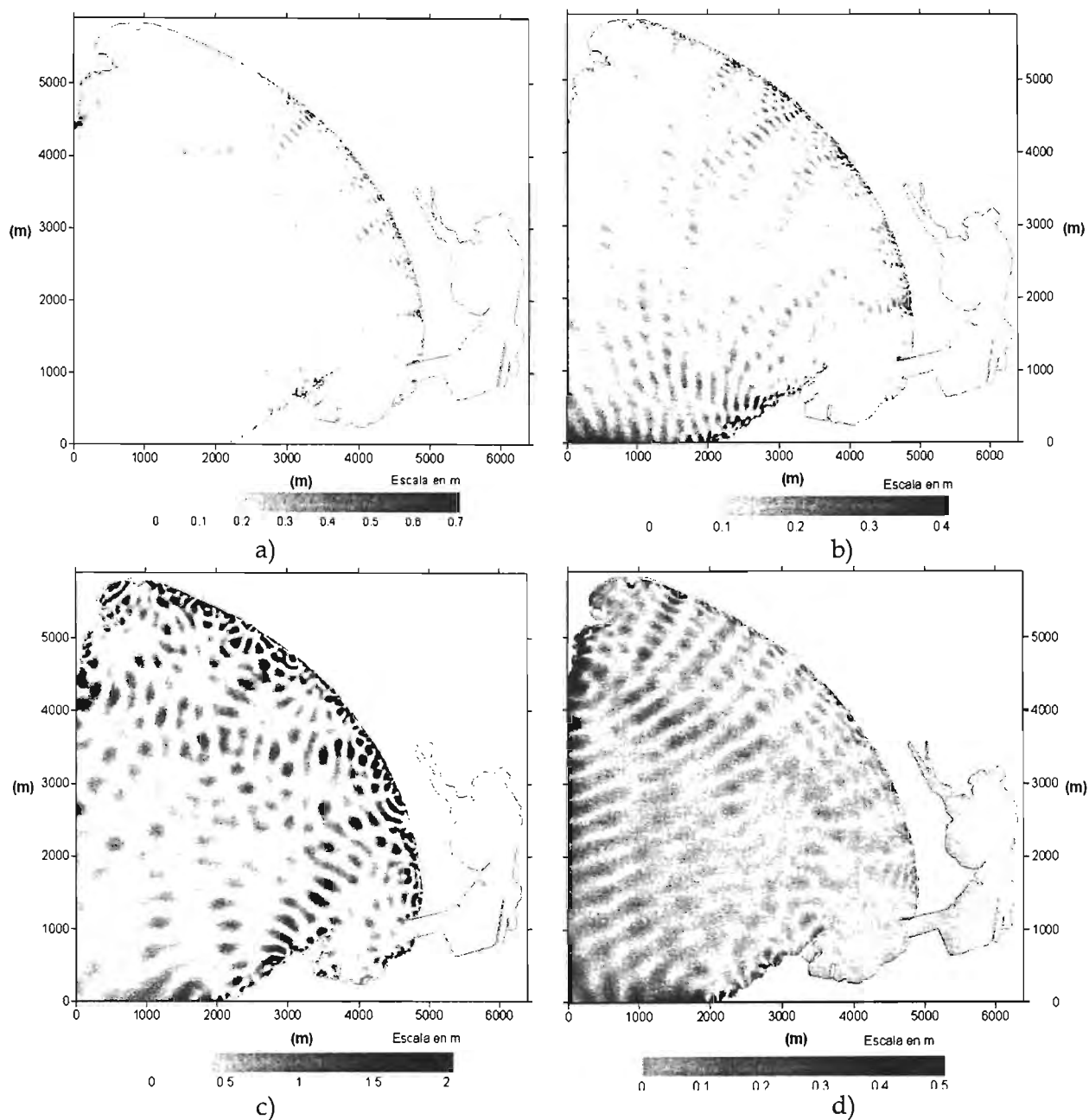


Figura 5-26: Amplitudes de ola para a)  $T = 20$  s, ángulo de incidencia  $= 0^\circ$ ; b)  $T = 20$  s, ángulo de incidencia  $= -45^\circ$ ; c)  $T = 30$  s, ángulo de incidencia  $= 0^\circ$  y d)  $T = 30$  s, ángulo de incidencia  $= -45^\circ$ .

Aunque el programa *WAPO2D* es capaz de modelar la propagación del oleaje en áreas semi cerradas las condiciones de frontera que se han postulado para modelar el Puerto de Manzanillo permiten una penetración apenas perceptible.

## CAPÍTULO 6

# CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.

---

### 6.1. CONCLUSIONES.

El oleaje que viaja desde aguas profundas hasta la costa sufre múltiples modificaciones en su comportamiento, por ello, cuando se pretenden realizar simulaciones matemáticas resulta fundamental elegir el modelo que con mayor fidelidad reproduzca las condiciones del medio físico. Para tal efecto, es trascendental conocer los fundamentos matemáticos y límites de aplicación del modelo, así como, tener un panorama general de los procesos que se verifican en el sitio.

Aunque existe un importante número de modelos para estudiar la propagación de ondas; la gran mayoría de ellos requiere de un gran esfuerzo computacional, lo que en ocasiones llega a limitar su uso. Al respecto, el modelo que aquí se ha presentado demostró ser eficiente en cuanto a precisión y tiempo de procesamiento de datos.

El tratamiento dado a las fronteras permite reducir sensiblemente los efectos de reflexión numérica, consiguiendo con ello simulaciones con mayor grado de precisión.

Los resultados de validación del modelo que aquí se presenta son comparables con los proporcionados por la solución analítica y por pruebas de laboratorio; en consecuencia, es posible asumir que el modelo puede emplearse para simular el comportamiento del oleaje en aguas someras y con fondo variable.

A la luz de los resultados, es posible establecer que el modelo *WAPO2D* permite la simulación con alto grado de confiabilidad de las ondas que se propagan: en las cercanías de la costa, en presencia de obstáculos, en áreas semi cerradas. De forma tal que el modelo utilizado se convierte en una poderosa herramienta en el diseño de puertos, pues puede predecir satisfactoriamente las modificaciones que experimenta el tren de oleaje: someramiento, refracción, difracción, reflexión, disipación de energía asociada a la presencia del fondo y a la rompiente del oleaje.

El programa *WAPO2D*, además, es capaz de modelar los casos de resonancia en puertos (asociado a un esfuerzo computacional relativamente bajo), situación que ayuda en la optimización de los recursos económicos, lo cual se refleja en un mejor aprovechamiento de los recursos costeros.

Con los resultados de la modelación de los puertos de Veracruz, Ensenada y Manzanillo es posible aseverar que la propagación del oleaje en áreas semi-cerradas será mayor cuando la onda incidente sea de larga duración, es decir, si un puerto tiene período de resonancia del orden de minutos, responderá ligeramente, a fuerzas externas de período de segundos. Sin embargo, cuando se presentan condiciones en que las ondas de largo período penetran al recinto, se pueden generar perturbaciones capaces de dificultar la navegación dentro y fuera del puerto, por lo que es de gran importancia estudiar y predecir el comportamiento del cuerpo de agua en la concepción, planeación y desarrollo de infraestructura portuaria.

Cabe mencionar la importancia que tiene la orientación de las obras de protección portuaria, pues los resultados para las direcciones de incidencia evaluadas en el caso del Puerto de Manzanillo se ha demostrado que aun para condiciones de ondas de larga duración, es posible, tener un recinto con agitaciones poco significativas.

## 6.2. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.

Queda pendiente comparar los resultados proporcionados por el modelo con los resultados de mediciones reales en áreas semi cerradas y extender el análisis a la presencia de ondas de marea, corrientes, extracciones y/o descargas que se pueden suscitar debido a las operaciones propias del puerto.

Resulta conveniente probar el modelo para las condiciones de oleaje irregular; sin embargo, para ello es preciso contar con registros reales de oleaje, pues de otra forma no se tendrían elementos para establecer comparación entre los resultados.



Establecer campañas de medición en sitios en los que se haya identificado resonancia del oleaje y comparar los resultados con los que proporcione el modelo, incluyendo onda de marea, corrientes, características del obstáculo (permeabilidad, talud, longitud, etc.) y en la medida de lo posible las características del fondo marino.



---

**REFERENCIAS.**

- Berkhoff, J. C. W. (1972). Computation of combined refraction diffraction. Proc. 13<sup>th</sup> Intl Conference on Coastal Engng. ASCE, Vancouver, Canada.
- Berkhoff, J. C. W. (1976). Mathematical models for simple harmonic linear water waves, wave diffraction and refraction. Ph. D. Dissertation, Publication No.163 Delf Hydraulic Laboratory.
- Booij, N. (1981). Gravity waves on water with non-uniform depth and current. Tesis Doctoral. Technical University of Delf.
- Borthwick, A., Yiu & K. Anastasiou. (1997). GRMS solution of mild-slope equation on quadtree grids. Proc. XVII IAHR Congress. San Francisco, USA.
- Copeland, G. J. M. (1985). A practical alternative to the mild-slope wave equation, Coastal Engineering, 9; 125-149.
- Chamberlain, P.G., Porter, D. (1995). The modified mild slope equation. J. Fluid Mech. 291, 393-407.
- Chávez, R. (2002). El proceso de diseño de longitud óptima de obras de protección aplicado a rompeolas y escolleras. Tesis de licenciatura, FI-UNAM.
- Chen, H. (1986). Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering. Applied Ocean Research Vol. 8. pp. 99-104.
- Dally, W., Dean, R., Dalrymple, R. (1985). Wave height variation across beaches of arbitrary profile. J. Geophysics Research Vol. 90 (C6), 11917- 11927.
- Dean, R. Y R. Dalrymple. (1984). Water wave mechanics for engineers and scientists. Word Scientific. Singapore.
- Dickson, W., T. Herbers y E. Thornton. (1995). Wave reflection from breakwater. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 121.
- Dingemans, M. (1997). Water wave propagation over uneven bottoms. Advanced Series on Ocean Engineering, Vol. 13. World Scientific, Singapore.

- Dongarra, A., J. Bunch, C. Moler y G Stewart. (1979). Linpack Users Guide. SIAM.
- Echavez A. G. (2003). Apuntes del curso: Modelos Hidráulicos. DEPMI, UNAM.
- Echavez A. Gabriel. (2002). Apuntes del curso: Mecánica de fluidos. DEPMI, UNAM.
- Hedges, T. (1976). An empirical modification to linear wave theory. Proc. Institute of Civil Engineering, Part 2. Vol. 61.
- Horikawa, K. & C. Kuo. (1966). A study of wave transformation inside surf zone. Proc. 10<sup>th</sup> Conference on Coastal Engineering. New York, EUA.
- Isaacson, M. (1991). Measurement of regular wave reflecting boundaries. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. Vol. 117.
- Isaacson, M. & S. Qu. (1990). Waves in a harbor with partially reflecting boundaries. Coastal Engineering. Vol. 14.
- Isaacson, M., D. Papps & E. Mansard. (1996). Oblique reflection characteristics of rubble mound structures. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. Vol. 122.
- Kahatu, J. M. (2001). Improvement of parabolic nonlinear dispersive wave model. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. Vol. 127.
- Kirby, J. T. and Dalrymple, R. A. (1986). Modeling waves in surf zone and around the islands. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE. Vol. 112.
- Kirby, J. T. and Dalrymple, R. A. (1994). Combined Refraction/Diffraction Model REF/DIF 1, Version 2.5. Documentation and User's Manual", Research Report No. CACR-94-22, Center for Applied Coastal Research, Department of Civil Engineering, University of Delaware, Newark, U.S.A.
- Kirby, J.T. (1986a). A general equation for waves over rippled beds. Journal of Fluid Mechanics. Vol. 162.
- Kirby, J.T. (1986b). Rational approximation in the parabolic equation for water waves. Coastal Engineering. Vol. 10.

- 
- Kirby, J.T. (1986c). Higher-order approximations in the parabolic equation method for water waves. *Journal of geophysics Research*. Vol. 91.
  - Kirby, J.T. (1989). A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations. *Coastal Engineering* 13, 211-218.
  - Le Méhauté Bernard. (1976). *An Introduction to hydrodynamics and water waves*. Springer-Verlag. New York, USA:
  - Li, B. y K. Anastasiou. (1992). Efficient elliptic solvers for the mild-slope equation using the multigrid technique. *Applied Ocean Research*. Vol. 13.
  - Linton, C., Evans, D. (1990). The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders. *J. Fluid Mechanics* 215, 549-569.
  - Losada, I., R. Silva & M. Losada. (1996a). 3-D non breaking regular wave interaction with submerged breakwaters. *Coastal Engineering*. Vol. 28.
  - Losada, I., R. Silva & M. Losada. (1996b). Interaction non breaking directional random waves with submerged breakwaters. *Coastal Engineering*. Vol. 28.
  - Lozano, C. & R. Meyer. (1976). Leakage and response of waves trapped by round islands. *The Physics of Fluids*. Vol. 19.
  - Maa, J. P.-Y., Maa, M.-H., Li, C. & He, Q. (1997a). Using the Gaussian Elimination Method for Large Banded Matrix Equations, Special Scientific Report, No. 135, Virginia Institute of Marine Science, Gloucester Point, VA 23062.
  - Maa, J., T. Hsu & H. Hwung. (1997). RDE model: A program for simulating water wave transformation for harbor planning. *Hdraulics and Ocean Engineering Dept. National Cheng-Kung University. Taiwan, Special scientific Report, no 136.*
  - Maa, J.P.-Y., Hsu T.-W. & Lee. D.-Y. 2002. The RIDE model: an enhanced computer program for wave transformation, *Ocean Engineering*, Volume (29), 1441-1458
  - Madsen, P.A. & Larsen, J. (1987). An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation. *Coastal Engineering*.

- 
- Martin, P., R. Dalrymple & J Kirby. (1997). Parabolic Modelling of water waves, in Gravity Waves in Water of Finite Depth Advances In Fluid Mechanics. Vol. 10.
  - Mase, H. & K. Takeba. (1994). Bragg scattering of gravity waves over porous rippled bed. 24<sup>th</sup> ICCE. ASCE. Kobe, Japan.
  - Massel, S.R. (1993). Extended refraction-diffraction equation for waves over rippled beds. J. Fluid Mech.
  - Mei, C. (1983). The applied dynamics of ocean surface waves. A. S. O. O. Engineering. World Scientific. New York.
  - Panchang, V.G. Ge, W., Cushman-Rosin, B. & Pearce, B.R. (1991). Solution to the mild slope wave problem by iteration. Applied Ocean Research. Vol. 13.
  - Porter, D., Staziker, D. (1995). Extension of the mild-slope equation. J. Fluid Mech.
  - Pos, J. J. Gonsalves & A. Holtzhausen. (1989). Short-Wave Penetration of Harbours: A Case study at Mossel Bay. 9<sup>th</sup> Annual Conference on Finite Element Method Stellenbosch, South Africa.
  - Radder, A. C. (1979). On the parabolic equation method for water wave propagation. Journal of Fluid Mech. 95(1), 159-176.
  - Rojanakamthorn, S., M. Isobe & A. Watanabe. (1989). A Mathematical Model of wave transformation over submerged breakwaters. Coastal Engineering Vol. 32.
  - Rojanakamthorn, S., M. Isobe & A. Watanabe. (1990). Modelling of wave transformation on submerged breakwaters. Proceedings 22<sup>nd</sup> ICCE, ASCE. New York, USA.
  - Salles, P. (2003a). Apuntes del curso: Hidráulica Marítima. DEPFI, UNAM.
  - Silva, R. (2003a). Apuntes del curso: Diseño de Estructuras Marítimas. DEPFI, UNAM.
  - Silva, R., A. Borthwick & E. Taylor. (2003). Numerical implementation of the harmonic modified mild slope equation.

- Silva, R., P. Salles & A. Palacio. (2002b). Linear waves propagating over a rapidly varying finite porous bed. *Coastal Engineering*. Vol. 44.
- Silva, R., P. Salles & G. Govaere. (2002a). Extended solution for waves travelling over a rapidly changing porous bottom. *Ocean Engineering*. Vol. 30.
- Smith, R., Sprinks, T. (1975). Scattering of surface waves by a conical island. *J. Fluid Mech.* 72, 373- 384.
- Sollit, C. & Cros. (1972). Wave transmission through permeable breakwaters. *Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Conference on Coastal Engineering*, ASCE. Vancouver, Canada.
- Thompson, E., H. Chen & L. Hadley. (1996). Validation of numerical model for wind waves and swell in harbors. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*. Vol. 122.
- Tsay, T. & P. Liu. (1989). A finite element model for wave refraction, diffraction, reflection and dissipation. *Applied Ocean Research*. Vol. 11.
- Tsay, T., W. Zhu & P. Liu. (1983). A finite element model for wave refraction and diffraction. *Applied Ocean Research*. Vol. 5.
- Xu, B. & Panchang, V. (1993). Outgoing boundary conditions for finite-difference elliptic water-wave models. *Proc. R. Soc. London. Series A*, 441: 575-588.
- Xu, B., Panchang, V. y Z. Demirbilek. (1996). Exterior reflections in elliptic harbor water models. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*. Vol. 122.
- Zhao, L. & K. Anastasiou. (1996). Modelling of wave propagation in the near shore region using the mild-slope equation with GMRES-based iterative solvers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. Vol. 23.





## **ANEXO A: ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRODINÁMICA.**

---

### **A.1 INTRODUCCIÓN.**

Con la finalidad de comprender las derivaciones matemáticas de los capítulos precedentes, ahora, se desarrollan las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica<sup>8</sup>.

Las ecuaciones básicas de la hidrodinámica se han empleado en la caracterización y estudio de fenómenos hidráulicos. Ya sea como ecuación de gobierno o para definir las condiciones de frontera.

Interesa primero la deducción de la ecuación de la continuidad o de la conservación de la masa para posteriormente llegar al Laplaciano. A continuación se describen las ecuaciones de Navier-Stokes que permiten generar las ecuaciones de Euler y finalmente la ecuación de Bernoulli.

### **A.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.**

Para demostrar la ecuación de la continuidad se recurre a un cubo infinitesimal dentro de un medio fluido, orientado por un sistema ortonormal derecho como el que se muestra en la figura A-1.

Entonces, la cantidad de masa del cubo en cualquier instante de tiempo  $t$  estará dada por el producto de la densidad del material y el volumen del cubo.

---

<sup>8</sup> La hidrodinámica es la ciencia que se encarga de estudiar el movimiento de líquidos desde el punto de vista macroscópico.

$$\rho \, dx \, dy \, dz \quad (\text{A. 1})$$

La cantidad de masa después de un intervalo de tiempo expresado por  $dt$ :

$$\left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx \, dy \, dz \quad (\text{A. 2})$$

y la variación de la cantidad de masa durante el mismo período de tiempo  $dt$ , para el cubo diferencial será:

$$\rho \, dx \, dy \, dz - \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx \, dy \, dz = - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx \, dy \, dz \, dt \quad (\text{A. 3})$$

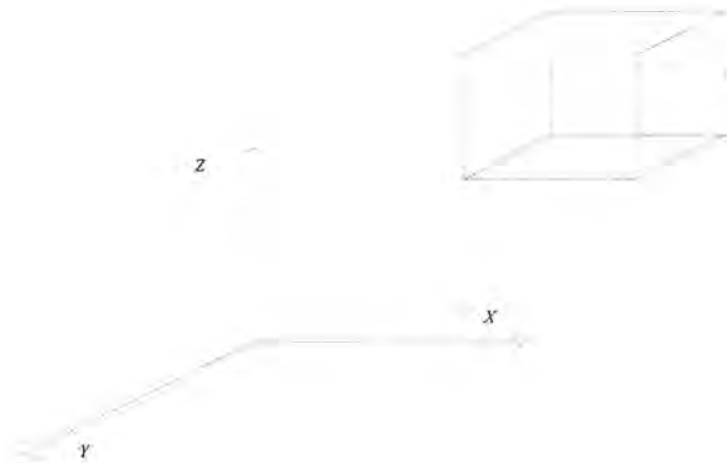


Figura A- 1: Cubo infinitesimal en un sistema ortonormal derecho.

Además, al analizar la variación de la masa a través de la entrada y salida de material a lo largo del eje  $X$  y empleando la nomenclatura de la figura A-2, se deduce fácilmente que la cantidad de masa que ingresa por la cara  $dydz$  de la izquierda, para  $dt$ , se puede expresar como:

$$\rho u \, dy \, dz \, dt \quad (\text{A. 4})$$

mientras que la cantidad de masa que sale por la cara  $dydz$ , de la derecha para el mismo tiempo es:

$$\left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dydzdt \quad (\text{A. 5})$$

de (A. 4) y (A.5), se puede obtener la diferencia de masa en el eje  $X$ , como:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt \quad (\text{A. 6})$$

de manera similar, para la variación en la masa para las direcciones restantes.

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz dt \quad (\text{A. 7})$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz dt \quad (\text{A. 8})$$

Entonces, para el intervalo de tiempo  $dt$  el cambio total de masa estará dado por la suma de las variaciones de cada dirección, según (A.9).

$$\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt \quad (\text{A. 9})$$

Al igualar las ecuaciones (A.3) y (A.9), se tiene:

$$\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx dy dz dt \quad (\text{A. 10})$$

ordenando y operando la ecuación anterior:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{A. 11})$$

Recordando el concepto de derivadas parciales al segundo término de la ecuación anterior, la variación de la masa a través de la dirección paralela al eje  $X$ , se puede expresar como:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (\text{A. 12})$$

Aplicando (A.12) en (A.11) y ordenando, se obtiene la expresión (A.13) que representa la forma mas general de la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (\text{A. 13})$$

Recordando al operador vectorial nabra  $\nabla$  (A.14), la divergencia (A.15) y el gradiente (A.16):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A. 14})$$

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } V \quad (\text{A. 15})$$

$$\text{Para } V(u, v, w) = u \bar{i} + v \bar{j} + w \bar{k}$$

$$\text{grad } \rho = \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \bar{k} \quad (\text{A. 16})$$

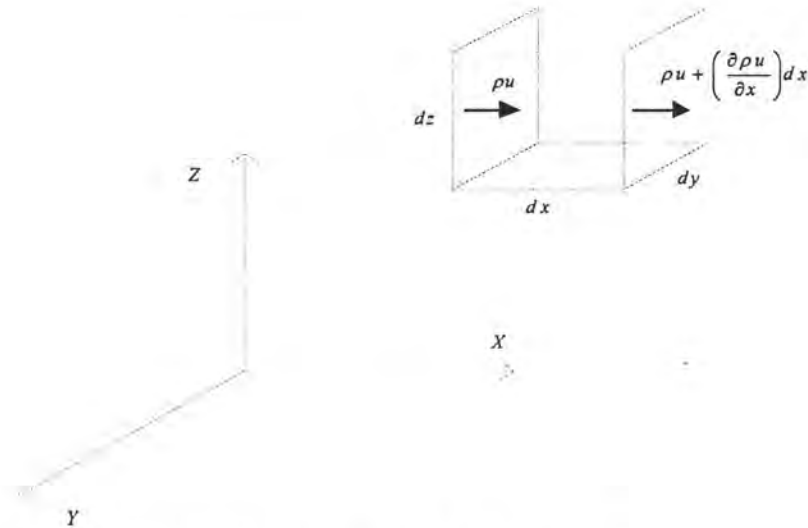


Figura A- 2: Nomenclatura empleada en el análisis.

Entonces, la ecuación (A.3) se puede escribir como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} V + V \operatorname{grad} \rho = 0 \quad (\text{A. 17})$$

Para el caso de flujo incompresible, la densidad del material es constante, es decir, la variación de la densidad con respecto al tiempo es nula.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{A. 18})$$

y además

$$\operatorname{grad} \rho = 0 \quad (\text{A. 19})$$

por simple inspección se deduce que:

$$\rho \operatorname{div} V = \operatorname{div} V = 0 \quad (\text{A. 20})$$

### A.3 ECUACIÓN DE LAPLACE<sup>9</sup> EN COORDENADAS RECTANGULARES.

Si tenemos un flujo irrotacional:

$$\text{rot } V = \nabla \times V = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \times (u \bar{i} + v \bar{j} + w \bar{k}) = 0 \quad (\text{A. 21})$$

entonces existe un potencial de velocidades  $\Phi$  que cumple con (A.22):

$$\begin{aligned} u &= \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \\ v &= \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ w &= \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{A. 22})$$

Manipulando la ecuación de continuidad (A.20), asumiendo densidad constante, flujo incomprensible y empleando los conceptos de (A.22) se obtiene la ecuación de Laplace (Laplaciano) en coordenadas rectangulares.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{A. 23})$$

<sup>9</sup> Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827). Matemático, astrónomo y físico francés cuya obra es reconocida en la actualidad por la importancia de sus aportaciones a la ciencia en campos tan diversos como: astronomía, análisis matemático, álgebra, teoría de probabilidades, electromagnetismo, termoquímica, estudio del movimiento, teoría de los gases, capilaridad, etc.

Entre sus aportaciones se encuentran: a) el desarrollo del concepto de potencial, una función cuya derivada direccional en cada punto es igual a la componente del campo de intensidad en la dirección dada. El Laplaciano de una función, verificada por el potencial, se encuentra en su mecánica celeste, b) La transformada de Laplace en que a una función de variable real  $f(t)$ , definida en el campo de los números reales, le hace corresponder una función  $L(f)$ , llamada transformada de Laplace, c) La demostración del teorema de D'Alembert sobre las formas de las raíces de las ecuaciones.



#### A.4 ECUACIÓN DE NAVIER<sup>10</sup>-STOKES<sup>11</sup>.

En principio, se considera la segunda ley de Newton<sup>12</sup> para la dirección  $x$ :

$$\sum F_x = m a_x \quad (\text{A. 24})$$

<sup>10</sup> Claude Louis Marie Henri Navier. Matemático e ingeniero francés que contribuyó notablemente al desarrollo de la hidrodinámica, nació el 10 Febrero de 1785 en Dijon, Francia y murió el 21 de agosto de 1836 en París, Francia.

En 1808 ingresó en el cuerpo de Ingenieros de Puentes y Calzadas, de cuya Academia fue nombrado profesor en 1819. En 1831 ganó la plaza de catedrático de análisis y mecánica de la Escuela Politécnica de París. Como académico tuvo una prolífica carrera investigadora. En 1823 publicó su trabajo esencial, *Sur les mouvements des fluides en ayant égard à l'adhésion des molécules*, en el que partiendo de un modelo molecular dedujo las importantes ecuaciones que describen el comportamiento de los fluidos llamados reales o viscosos (en contraposición a los ideales). Sus ecuaciones comparten el nombre de otro célebre matemático de la época, Stokes, quien las dedujo siguiendo un modelo de fluido como medio continuo

<sup>11</sup> Sir George Gabriel Stokes, nació el 13 de agosto de 1819 en Skreen (Irlanda), murió el 1 de febrero de 1903 en Cambridge (Inglaterra).

Estudió numerosos temas de hidrodinámica, estableció la teoría de la viscosidad de los fluidos y formulando la ley que lleva su nombre y que permite calcular el movimiento de pequeñas esferas en el seno de medios con elevada viscosidad. Contribuyó a la teoría ondulatoria de la luz con su ley sobre la refrangibilidad variable de la luz. Realizó el estudio de las radiaciones ultravioleta mediante los fenómenos de fluorescencia a que dan lugar. En 1896 propuso la idea de que los rayos X, recién descubiertos por Röntgen, eran radiaciones de tipo electromagnético.

<sup>12</sup> Sir Isaac Newton nació el 25 de Diciembre de 1642 en Lincolshire (Inglaterra) y murió en Londres, Kesington el 20 de Marzo de 1727.

En Cambridge fue elegido como miembro del Trinity College donde fijó su residencia y desde octubre de 1669 fue profesor Lucasiano de matemáticas, como titular de esa cátedra pronunció las famosas Lectures en las que expone casi todo el material de sus descubrimientos científicos. En 1671 fue designado miembro de la Real Sociedad de Londres.

Abandona la vida científica y solo ayuda a resolver problemas matemáticos de la época en cuya resolución deja constancia de su increíble habilidad. Por ejemplo, en 1716 fue desafiado para que obtuviera la trayectoria ortogonal de una familia de curvas tales como las que describe la Luna al girar a la vez en torno a la Tierra y con esta en torno al Sol, Newton lo resolvió en cinco horas y de paso estableció los principios para hallar las trayectorias.

donde  $F_x$  representa las fuerzas externas que actúan en la dirección  $X$ ,  $m$  la masa y  $a_x$  la aceleración de las partículas definida como el cambio que experimenta el vector velocidad en el tiempo para la dirección  $X$ .

$$a_x = \frac{D u}{D t} \quad u = u(x, y, z, t) \quad (\text{A. 25})$$

Donde  $u$  es la velocidad en función del tiempo y del espacio. En consecuencia, su derivada total se puede formular como:

$$\frac{D u}{D t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (\text{A. 26})$$

pero:

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad v = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (\text{A. 27})$$

entonces, la derivada total de la componente de la velocidad en el eje  $X$ , que representa la aceleración total sobre el mismo eje, es:

$$\frac{D u}{D t} = a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{A. 28})$$

De la ecuación anterior se pueden distinguir claramente dos tipos de términos que definen la aceleración; la aceleración local y la convectiva, según (A.29) y (A.30).

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{A. 29})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{A. 30})$$

La aceleración local representa el cambio de  $u$  observado en un punto determinado en el tiempo. Si el término de aceleración local es nulo, el fluido en estudio es

permanente; no permanente cuando la aceleración local es diferente de cero. Esto es fácil distinguir al no aparecer el tiempo en la expresión de la velocidad.

Un valor nulo de la aceleración convectiva implica un flujo uniforme que involucra líneas de corriente rectas y paralelas.

Con la definición de la aceleración total, la ecuación de movimiento en la dirección  $x$ , se puede escribir como:

$$\sum F_x = m \frac{D u}{D t} \quad (\text{A. 31})$$

Si ahora analizamos un volumen de control infinitamente pequeño, se concluirá fácilmente que existen tres posibles tensiones (una normal y dos tangenciales) para cada una de las seis caras del cubo. Así las cosas, sobre la cara  $x$  en  $x + \Delta x/2$ , las tensiones serán  $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ . Existen entonces, tres tensiones que son ejercidas sobre las caras del cubo, que incluyen la presión.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + \tau_{xx} \\ \sigma_{yy} &= -p + \tau_{yy} \\ \sigma_{zz} &= -p + \tau_{zz} \end{aligned} \quad (\text{A. 32})$$

Lo anterior, se puede observar con ayuda de la figura A-3. Las fuerzas de superficie se pueden formular como en (A.33) Siendo  $X$  la fuerza masica, actuando en la dirección de  $X$ .

$$\begin{aligned} &\left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \left( \sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z + \\ &+ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z \\ &- \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y \\ &+ \rho \Delta x \Delta y \Delta z X = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{D u}{D t} \end{aligned} \quad (\text{A. 33})$$

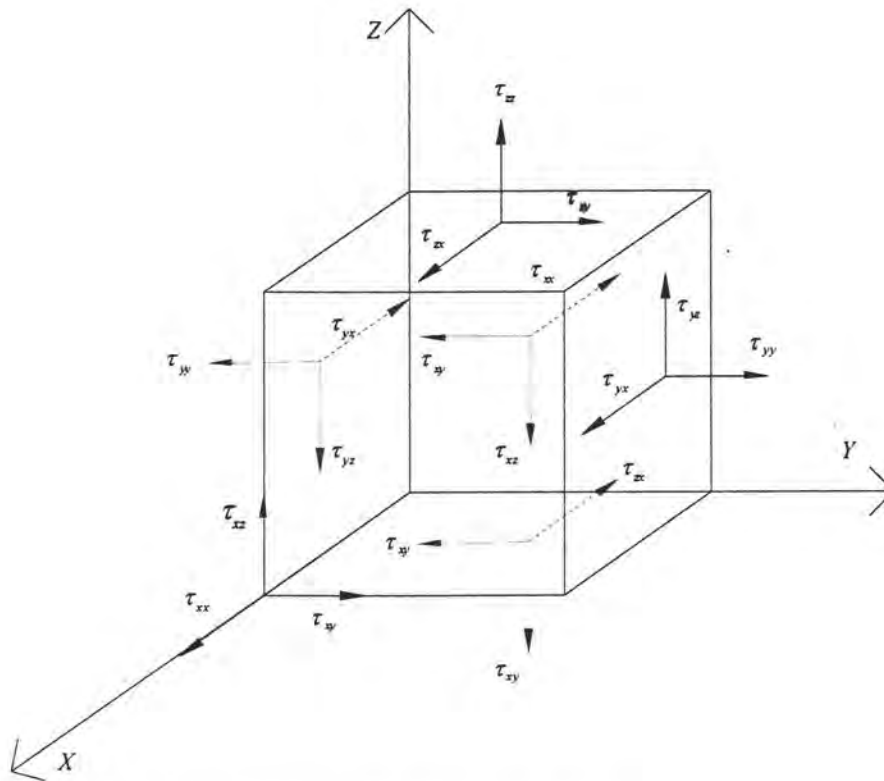


Figura A-3 Esfuerzos sobre el volumen de control.

Si se opera y se divide por el volumen del cubo, (A.33) se convierte en:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X \quad (\text{A. 34})$$

que en términos de (A.32), es:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + X \quad (\text{A. 35})$$

análogamente, se hallan las ecuaciones que rigen el movimiento para las dos direcciones restantes.

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + Y \quad (\text{A. 36})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + Z \quad (\text{A. 37})$$

Las últimas tres igualdades, se conocen como las ecuaciones de Saint Venant y aunque se han expresado en función de los esfuerzos tangenciales y normales, en problemas de hidrodinámica resulta mejor expresarlas en términos de las deformaciones que experimenta el fluido.

Por otro lado, al asumir que la propiedad física que caracteriza la resistencia de los fluidos a moverse es la viscosidad dinámica  $\mu$  y dada su importancia se procede a derivar mediante el siguiente ejemplo.

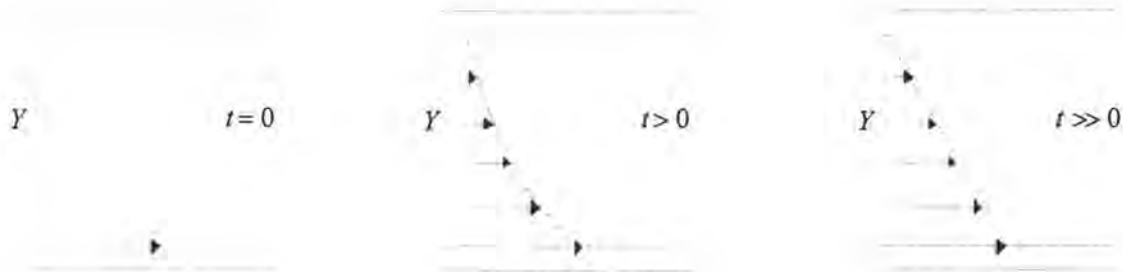


Figura A- 4: Fuerzas que se desarrollan en un fluido entre dos placas.

Considerando un fluido entre dos placas paralelas suficientemente largas de área  $A$ , con una pequeña separación  $y$ , como lo ilustra la figura A-4. Asumiendo, que la placa inferior inicialmente se encuentra estática, pero para el tiempo  $t = 0$  se pone en movimiento asociada con una velocidad constante  $V$ , podrá advertirse que cuando el tiempo transcurre el fluido se empieza a mover hasta alcanzar un perfil de velocidad con distribución uniforme. En este estado, se requiere la acción de una fuerza constante para mantener la velocidad de la placa inferior en el valor inicial de la velocidad.

$$F = \mu \frac{AV}{y} \quad (\text{A. 38})$$

Definiendo la velocidad angular y el esfuerzo cortante ejercido por el fluido

$$\text{Velocidad angular} = \frac{V}{y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{F}{A} = \tau \quad (\text{A. 39})$$

Finalmente el esfuerzo cortante actuante en la dirección  $X$  sobre la superficie normal a  $y$ , resulta:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A. 40})$$

Pero como el esfuerzo cortante debe estar completado por otro esfuerzo de igual magnitud que se aplique sobre la cara vertical del elemento (figura A-5) con la finalidad de evitar que el elemento se acelere en rotación con una velocidad angular infinita a medida que disminuyera su tamaño. Entonces para todas las direcciones se debe verificar que:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \end{aligned} \quad (\text{A. 41})$$

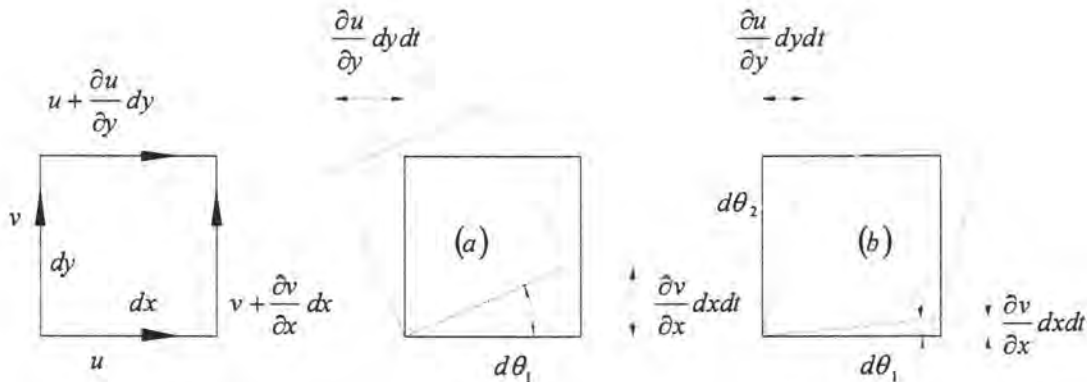


Figura A- 5 Esquema de deformaciones.

Si ahora se considera un fluido cortante con placas orientadas en la dirección del eje  $Y$  el esfuerzo cortante sobre la superficie del elemento, según la figura A-5 (b). El esfuerzo cortante  $\tau_{yx}$  sobre la superficie del elemento es:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A. 42})$$

Cualquier combinación de los flujos de la figura A-5 provoca esfuerzos viscosos que son la suma de las contribuciones independientes, entonces, para los planos  $(x, y)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, z)$  serán validas las relaciones dictadas por (A.43), (A.44) y (A.45) respectivamente.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{A. 43})$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (\text{A. 44})$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{A. 45})$$

De igual forma, los esfuerzos normales a los planos  $x$ ,  $y$  y  $z$  se expresan como:

$$\tau_{xx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{A. 46})$$

$$\tau_{yy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{A. 47})$$

$$\tau_{zz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A. 48})$$

Sustituyendo las últimas tres ecuaciones en las ecuaciones de movimiento (A.35), (A.36), (A.37), se tiene:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + X \quad (\text{A. 49})$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + X$$



$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + Y \quad (\text{A. 50})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Z \quad (\text{A. 51})$$

Si se asume que la viscosidad dinámica  $\mu$  es constante en todo el dominio, las tres expresiones anteriores se pueden simplificar como sigue:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + X \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + Y \quad (\text{A. 53})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + Z \quad (\text{A. 54})$$

Sin embargo, aplicando las propiedades vectoriales (A.52), (A.53) y (A.54) se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 V + \frac{\mu}{\rho} \nabla(\text{div} V) + \bar{X} \quad (\text{A. 55})$$

Para fluidos Newtonianos, la relación dinámica entre la viscosidad dinámica  $\mu$  y la densidad  $\rho$  se conoce como viscosidad cinemática.

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{A. 56})$$

Considerando la viscosidad cinemática  $\nu$  y la ecuación de la continuidad para flujo incompresible (A.20), en (A.52), (A.53), (A.54) se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes.

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X \quad (\text{A. 57})$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + Y \quad (\text{A. 58})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Z \quad (\text{A. 59})$$

de manera vectorial:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \bar{X} \quad (\text{A. 60})$$

## A.5 ECUACIÓN DE EULER<sup>13</sup>.

Si en la ecuación de Navier-Stokes se asume que los efectos de fricción son relativamente pequeños y que el flujo es no viscoso, es decir, si se desprecian las tensiones tangenciales del fluido, se obtiene la fórmula de Euler.

Expresando las fuerzas del volumen de control por unidad de masa como  $-g$  en la dirección vertical ( $z$ ) y nulas en las otras dos direcciones, se consigue:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{A. 61})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

## A.6 ECUACIÓN DE BERNOULLI.

Constituye una forma integrada de las ecuaciones de movimiento de Euler y proporciona una relación entre el campo de presiones y de cinemática. Para flujo incompresible, las ecuaciones del movimiento del fluido (ecuaciones de Euler) en el plano  $xz$ , se escriben Dean (1992):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{A. 62})$$

<sup>13</sup> Leonhard Euler nació el 15 de abril de 1707, en Basilea, Suiza y murió el 18 de septiembre de 1783, en St.Petersburg, Rusia.

A los 17 años se graduó de doctor y a los 19 años, envió dos disertaciones a la Academia de París, una sobre arboladura de barcos, y la otra sobre la filosofía del sonido. Obtuvo la cátedra de filosofía natural en 1730, en 1733 sucedió a su amigo Daniel Bernoulli.

Euler dio muestra de su talento cuando efectuó en tres días la resolución de un problema que la Academia necesitaba urgentemente, pese a que se le juzgaba insoluble en menos de varios meses de labor. Pero el esfuerzo realizado tuvo por consecuencia la pérdida de la vista de un ojo. Hacia los 30 años de edad, fue honrado por la Academia de París por sus disertaciones sobre el flujo y el reflujo de las mareas.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A. 63})$$

de la condición de flujo irrotacional en dos dimensiones.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{A. 64})$$

Relacionando las ecuaciones del movimiento del fluido en el plano  $xz$  con la condición dada por (A. 64).

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{u^2}{2} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{w^2}{2} \right)}{\partial x} \quad (\text{A. 65})$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{u^2}{2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left( \frac{w^2}{2} \right)}{\partial z} \quad (\text{A. 66})$$

Si existe un potencial de velocidades;

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{A. 67})$$

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Sustituyendo el potencial de velocidades en (A. 65) y (A. 66) y asumiendo que la densidad es uniforme a través del fluido, se logra:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \frac{P}{\rho} \right) = 0 \quad (\text{A. 68})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{P}{\rho} \right) = -g \quad (\text{A. 69})$$

integrando (A. 68) en  $x$  y (A. 69) en  $z$ :

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{P}{\rho} = C'(z, t) \quad (\text{A. 70})$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{P}{\rho} = -gz + C(x, t) \quad (\text{A. 71})$$

comparando las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$-gz + C(x, t) = C'(z, t) \quad (\text{A. 72})$$

En consecuencia,  $C$  no puede ser una función de  $x$ , puesto que  $C'$  y  $gz$  no dependen de  $x$ , concluyendo:

$$-gz + C(t) = C'(z, t) \quad (\text{A. 73})$$

por lo tanto, la ecuación de Bernoulli<sup>14</sup> resulta de sustituir (A. 73) en (A. 70)

<sup>14</sup> Daniel Bernoulli, nació el 8 de febrero de 1700 en Groningen, región del Nórdico y falleció el 17 de marzo de 1782 en Basilea, Suiza.

En el año 1731 extendió sus investigaciones para cubrir problemas de la vida y de la estadística de la salud. En 1733 regresó a Basilea donde enseñó anatomía, botánica, filosofía y física.

Su trabajo más importante fue en hidrodinámica que consideraba las propiedades más importantes del flujo de un fluido, la presión, la densidad y la velocidad y dio su relación fundamental conocida ahora como El Principio de Bernoulli o Teoría Dinámica de los fluidos. En su libro también da una explicación teórica de la presión del gas en las paredes de un envase:

"A lo largo de toda corriente fluida la energía total por la unidad de masa es constante, estando constituida por la suma de la presión, la energía cinética por unidad de volumen y la energía potencial igualmente por unidad de volumen".

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{P}{\rho} + gz = C(t) \quad (\text{A. 74})$$

---

También estableció la base de la teoría cinética de los gases. Entre los años 1725 y 1749 ganó diez premios por su trabajo en astronomía, gravedad, mareas, magnetismo, corrientes del océano y el comportamiento de una embarcación en el mar.