



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Deformación Elástica de un Cascarón Esférico Sujeto a un Campo de Presión Uniforme"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

EDAHI ANTONIO GUTIERREZ REYES



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE IZE LAMACHE

2005



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

m342115



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
 "Deformación Elástica de un Cascarón Esférico Sujeto a un Campo de Presión Uniforme"

realizado por Gutiérrez Reyes Edahí Antonio

con número de cuenta 09561118-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Jorge Ize Lamache

Propietario Dr. Juan Manuel Lozano Mejía

Propietario Dr. Carlos Arturo Vargas Guadarrama

Suplente Dr. Arturo Olvera Chavez

Suplente Dr. Guillermo Pablo Pulos Cárdenas

**Consejo Departamental de Física**

**M. EN C. ALICIA ZARZOSA PÉREZ**  
 Coordinadora de Licenciatura  
 FACULTAD DE CIENCIAS  
 DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Deformación Elástica de un Cascarón Esférico  
Sujeto a un Campo de Presión Uniforme

Edahí Antonio Gutiérrez Reyes

2005

## Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que me han ayudado a concluir mi licenciatura. En especial al Dr. Jorge Ize Lamache, quien fue mi profesor y director de tesis, gracias por todo.

A mis sinodales, el Dr. Juan Manuel Lozano Mejía, el Dr. Carlos Arturo Vargas Guadarrama, el Dr. Arturo Olvera Chavez, el Dr. Guillermo Pablo Pulos Cárdenas, por su amabilidad al leer este trabajo y tenerme un poco de paciencia.

A mi tía Adela quien me ha ayudado tanto en todos los aspectos, a Eduardo por sus consejos y buenos ratos, a mi Madre y Hermana que tanto quiero, a mi tía Justina y mi abuelita Juana, A mis primos Sol, Rami y mi tía Elvia. A Cesar Agilar, Carlos Garcia, Leticia, Eduardo Huesca y a Dalia Cervantes, por su amistad que tanto aprecio .

A mis profesores de la Facultad de Ciencias a quienes tanto admiro por su dedicación y compromiso.

A todos los miembros del Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS

A CONACYT, por la beca que me otorgó como parte del proyecto G25427-E, Matemáticas no Lineales en la Física y la Ingeniería.

Y a todas las personas que he perdido en el camino, muchas gracias.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Ecuaciones de John a primer orden</b>	<b>11</b>
2.1. Termodinámica de las deformaciones . . . . .	11
2.2. Estimaciones del Tensor de Esfuerzos . . . . .	14
2.3. Ecuaciones Constitutivas . . . . .	16
2.4. Ecuaciones de Equilibrio . . . . .	22
2.5. Ecuaciones de Compatibilidad . . . . .	38
<b>3. Ecuaciones de Deformación</b>	<b>43</b>
3.1. Deducción . . . . .	43
3.2. Soluciones Triviales . . . . .	52
3.3. Solución en la Teoría Lineal . . . . .	54
3.4. Condiciones de Frontera . . . . .	58
<b>4. Análisis del problema</b>	<b>61</b>
4.1. Ecuaciones de Deformación, una breve introducción . . . . .	61
4.2. Integración por partes en la esfera . . . . .	63
4.3. Formalismo de Hilbert . . . . .	64
4.4. Propiedades de los operadores A,B . . . . .	75
4.4.1. Existencia de A,B . . . . .	75
<b>5. Las ecuaciones de bifurcación</b>	<b>91</b>
5.1. La ecuaciones de bifurcación . . . . .	91
5.2. Propiedades de la parte lineal $L_\lambda$ . . . . .	95
5.3. Método de Liapunov-Schmidt . . . . .	97
5.4. Equivariancia de las Ecuaciones . . . . .	99
5.5. Existencia de las soluciones . . . . .	108

5.5.1. Grado topológico . . . . .	108
5.6. Soluciones en el caso que $Ker L_{\lambda_k^m} = [u_k^m]$ . . . . .	118
5.7. Regularidad de las soluciones . . . . .	126
<b>6. Gráfica de las soluciones</b> . . . . .	<b>129</b>
6.1. Ecuaciones de Gauss y Weingarten . . . . .	130
6.2. Cálculos Numéricos . . . . .	139
6.3. Resultados . . . . .	141
6.3.1. Comentarios Finales . . . . .	155
<b>7. Conclusiones</b> . . . . .	<b>157</b>
<b>A. El Espectro del Laplaciano</b> . . . . .	<b>161</b>
A.1. Espectro de $-\Delta$ . . . . .	161
A.2. Funciones Hipergeométricas . . . . .	162
A.3. Teoría de Sturm-Liouville . . . . .	169
A.4. Los primeros once valores propios . . . . .	177
<b>B. Geometría Diferencial</b> . . . . .	<b>205</b>
B.1. Tensores, covariantes y contravariantes . . . . .	205
B.1.1. Símbolos de Christoffel . . . . .	208
B.1.2. Transformación de los Símbolos de Christoffel . . . . .	210
B.2. Derivada Covariante . . . . .	211
B.3. Parámetros Diferenciales de Beltrami . . . . .	212
B.4. Formulas de Mainardi-Codazzi . . . . .	213
B.5. Métrica de la Superficie Media . . . . .	216
B.6. Geometría de la Esfera . . . . .	218
<b>C. Programa</b> . . . . .	<b>223</b>
C.1. Descripción de Funciones . . . . .	223
C.2. Código . . . . .	225
C.3. Ejemplo . . . . .	227

# Capítulo 1

## Introducción

El propósito de esta tesis es el de hacer un estudio sobre los posibles estados deformados de un cascarón esférico cuando lo sometemos a un campo de presión externo. Este tema se encuentra ampliamente estudiado en los artículos [Baginski 1], [Baginski 3], [John], [Knightly&Sather], [Koiter]. Conceptualmente no existe ninguna dificultad para entender el problema, simplemente se tiene un cascarón esférico soportado sobre un plano horizontal sobre el cual actúa un campo de presión uniforme.

Históricamente, Euler plantea el problema de una barra sobre la cual actúa una tensión horizontal. Se encuentra que para valores de la tensión menores a un cierto valor crítico, la barra no sufre deformaciones verticales, a dicho estado se le llama la solución trivial. Pero a medida que la tensión aumenta más allá de la tensión crítica, aparecen nuevos estados en los que la barra se puede encontrar, donde se tiene deformación vertical.

Desde esta perspectiva, una parte importante del problema es saber cual es la tensión crítica que la estructura puede soportar sin que se presente el combamiento. La otra parte consiste en saber como son los estados deformados. En nuestro caso tenemos varios objetivos en mente. Por un lado construir un modelo para los cascarones elásticos lo suficientemente elaborado como para que permita la existencia de estados deformados. Por otro lado, encontrar la presión crítica donde se esperan cambios de estructura, y posteriormente conocer la forma que tomará la superficie después de la deformación.

En esta tesis se utilizan las ecuaciones de John de orden más bajo [John], las cuales son deducidas y manipuladas en los capítulos (2),(3). Esto se hace de manera autocontenida, a excepción de las estimaciones de John, puesto



que para su deducción son necesarios elementos de la teoría de ecuaciones elípticas, tema que se encuentra fuera de los objetivos de la tesis. Se deducen bajo la suposición de que hay deformaciones pequeñas, pero a diferencia de los modelos para placas delgadas tales como los modelos de Von Kármán [Ciarlet], no se hacen suposiciones acerca del tamaño de los desplazamientos, ni se supone una simetría con respecto al eje  $z$ .

Las ecuaciones de John se deducen a partir de la elasticidad tridimensional. Para ello se hace uso del concepto de superficie media, lo que permite reducir el problema de un cuerpo tridimensional a uno bidimensional. Las ecuaciones de John forman un sistema de cuatro ecuaciones tensoriales que junto a las ecuaciones constitutivas (que relacionan las tensiones con las deformaciones), forman un sistema cerrado de doce ecuaciones.

El primer par de las ecuaciones de John corresponden al balance de esfuerzos y momentos, y el otro par son las llamadas ecuaciones de compatibilidad. Estas surgen de consideraciones geométricas; es decir, son las ecuaciones de Gauss y Mainardi-Codazzi, condiciones necesarias para que dadas la primera y segunda formas fundamentales de una superficie, estas en efecto representen una superficie.

Cabe mencionar que el sistema de ecuaciones es aproximado, inclusive las ecuaciones de compatibilidad. Esto tiene la consecuencia desagradable, que la primera y segunda formas fundamentales de la superficie deformada, al ser soluciones aproximadas, no satisfacen las ecuaciones de compatibilidad exactas y por ende no representan una superficie. Este hecho es observado en el artículo [Koiter, pág 21, ec 5.13].

En el capítulo (3) se demuestra que es posible reducir el sistema de doce ecuaciones, a sólo dos en términos de la función de esfuerzos  $f$  y la función de curvatura  $w$  junto con las condiciones de frontera apropiadas para un cascarón simplemente soportado sobre un plano horizontal. Este estudio se encuentra en el apéndice del artículo [Knightly&Sather, pág 360-364].

Para obtener las condiciones a la frontera, se hace un balance de fuerzas entre la componente total en la dirección  $z$  de las fuerzas externas y las tensiones internas en la dirección  $z$  sobre la frontera. Las ecuaciones de deformación tienen soluciones triviales, las cuales se encuentra que corresponden a una esfera de radio menor al de la esfera no deformada.

En el capítulo (4), utilizando las técnicas usuales del análisis funcional, es posible encontrar la formulación débil de las ecuaciones de deformación. Se hace un estudio del espacio de energía  $H$  y de los operadores abstractos encontrados en el transcurso de la formulación y se encuentra que las

ecuaciones en el espacio abstracto  $H$  toman la forma

$$f + \alpha Aw + \frac{1}{2}B(w, w) = 0$$

$$w - \alpha Af - \lambda Aw - B(w, f) = 0$$

donde la existencia de los operadores  $A$  y  $B$  está garantizada por el lema de Riesz. El operador lineal  $A : H \rightarrow H$  es compacto y autoadjunto, además el espectro de  $A$  está relacionado con el espectro  $-\Delta$ , en el sentido que si  $-\Delta u = \mu u$  entonces  $\mu Au = u$ . El operador bilinear  $B : H \times H \rightarrow H$  tiene la propiedad que  $(B(u, v), w)$  es simétrico para el producto escalar definido en el espacio  $H$ . El parámetro  $\alpha$  es constante y vale  $\frac{R}{h\gamma}$  donde  $h$  es el espesor de la cáscara y  $R$  el radio de la esfera. La variable  $\lambda$  es el parámetro libre relacionado con la presión externa.

En el capítulo (5), se reduce el problema de encontrar estados de deformación a encontrar bifurcaciones de la ecuación

$$L_\lambda w + \alpha Q(w) + C(w) = 0$$

donde  $L_\lambda w$  es un operador de Fredholm y lineal,  $Q(w)$  es la parte cuadrática y  $C(w)$  es la parte cúbica. Sabemos que las posibles soluciones no triviales de la ecuación anterior se dan para los valores de  $\lambda_k$  tales que el operador  $L_{\lambda_k}$  es no invertible es decir  $\dim Ker L_{\lambda_k} = n \neq 0$ . Se demuestra que la presión crítica donde es posible la existencia de estados deformados es  $\lambda_c = \min\{\lambda_n | \lambda_n = \mu_n + \frac{\alpha^2}{\mu_n}, \mu_n \in \sigma(-\Delta)\}$ , que pone de manifiesto la relación entre el operador lineal  $L_\lambda$  y  $-\Delta$ , es decir,  $L_{\lambda_k} w = 0$  si  $-\Delta w = \mu_k w$ .

En este mismo capítulo se aplica el método de Liapunov-Schmidt para obtener las ecuaciones de bifurcación: esencialmente se propone que la solución es la combinación lineal  $w = u \oplus U$  donde  $u \in Ker L_{\lambda_k}$  y  $U$  al complemento, hecho que da una ecuación en el núcleo y otra en el complemento. El principio de contracción de Banach garantiza la existencia de  $U$ . De esta manera demostrar la existencia de estados deformados, se reduce a demostrar la existencia de soluciones a un sistema de ecuaciones de dimensión  $n$  en el núcleo del operador.

Para demostrar la existencia de estados deformados se aplica la teoría del grado topológico, la cual da resultados de existencia en función de la dimensión del kernel y las propiedades de la parte cuadrática y cúbica. Se encuentra que las soluciones genéricas están dadas cuando  $\dim Ker L_{\lambda_k} = 1$ ; este caso es estudiado con detalle. Una vez demostrada la existencia de la

solución débil, se demuestra que es  $C^\infty$  y es solución fuerte, estos son los llamados teoremas de regularidad.

Finalmente, en el capítulo (6) se realizan cálculos numéricos para encontrar las superficies de los distintos estados deformados. Del hecho que el método de Liapunov-Schmidt encuentra la solución en la vecindad de la presión crítica, es posible recuperar la primera y segunda formas fundamentales de la superficie deformada.

Es un hecho conocido en geometría diferencial, que es posible recuperar la superficie  $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ , si se satisfacen las ecuaciones de compatibilidad. Aquí encontramos el problema que las formas fundamentales de la esfera deformada satisfacen ecuaciones de compatibilidad aproximadas y no las exactas; como consecuencia, el sistema de ecuaciones que recupera el campo de desplazamientos no es consistente (las ecuaciones de Gauss (B.4)). Sin embargo, lo que se propone en esta tesis es considerar sólo la mitad de las ecuaciones, las cuales son consistentes, y dan toda la información geométrica para encontrar lo que podría pensarse es la superficie deformada, de hecho la superficie encontrada es una aproximación a  $O(\varepsilon\theta^2)$ .

Los cálculos numéricos son originales, pese a la dificultad conceptual de no poder recuperar el campo de desplazamientos, de manera formal a través de la primera y segunda formas fundamentales. En [Baginski 4], Baginski utiliza un método numérico de Galerkin para hallar la solución exacta de las ecuaciones de deformación, con ello pretende continuar las ramas de bifurcación más allá de la presión crítica, de igual manera recupera la superficie deformada de las ecuaciones de Gauss y Weingarten.

Nuestros calculos numéricos son independientes, y sólo recuperan la superficie en la vecindad del parámetro partiendo de un analisis a primer orden, lo que permite apreciar con más claridad la simetría de las soluciones.

Se incluyen tres apéndices, en el apéndice (A) se hace un estudio detallado del espectro del laplaciano  $-\Delta$  sobre cascarones esféricos. Los valores propios son solución a la ecuación  $P_\nu^m(z_0) = 0$ , que son las funciones de Legendre como función de  $\nu$ . Este tema se encuentra ampliamente discutido en el artículo [Baginski 2]. El principal resultado de este apéndice es el siguiente: si  $\nu_k^m$  es la  $k$ -ésima raíz de la ecuación  $P_\nu^m(z_0) = 0$ , entonces las 11 primeras raíces son simples y están ordenadas por las desigualdades

$$1 < \nu_1^0 < \nu_1^1 < \nu_1^2 < \nu_2^0 < \nu_1^3 < \nu_2^1 < \nu_1^4 < \nu_2^2 < \nu_3^0 < \nu_1^5 < \min(\nu_2^3, \nu_1^6).$$

La consecuencia es que para cascarones, la dimensión del  $\text{Ker } L_\lambda$  es uno para los primeros once estados deformados.

El apéndice (B) toca los temas de análisis tensorial y geometría diferencial utilizados a lo largo de la tesis, aplicados en particular a la geometría de la esfera. En estos apéndices se puede encontrar todo lo necesario para entender la tesis.

El apéndice (C) contiene el código utilizado en la obtención de las gráficas.



## Capítulo 2

# Ecuaciones de John a primer orden

En este capítulo se hace una deducción de las ecuaciones de John a primer orden. El orden de exposición es el siguiente: En la primera parte se obtienen las ecuaciones constitutivas, para ello se requieren estudiar las propiedades termodinámicas de las deformaciones, esta parte se hace con poco detalle pero sirve para justificar la relación que existe entre los esfuerzos, la energía libre de Gibbs y el tensor de deformación. A continuación se obtienen las ecuaciones de equilibrio bajo la suposición que los esfuerzos varían de manera lineal en la dirección normal a la superficie media. Y por último se obtienen las ecuaciones de compatibilidad que es una condición necesaria que debe satisfacer toda superficie.

### 2.1. Termodinámica de las deformaciones

Consideremos un cuerpo elástico que parte de un estado inicial sin deformación a otro con deformación. El propósito de esta sección es calcular el trabajo realizado por una deformación infinitesimal.

El sistema de coordenadas, utilizado en la descripción de cáscaras, consta de los parámetros que describen la superficie media  $(u^1, u^2)$  y una componente que es perpendicular a la superficie media  $u$ . Llamaremos  $E_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}$ , la primera y segunda formas fundamentales de la superficie media. Como se demuestra en el apéndice de geometría (B.24) la métrica del sistema de coordenadas

referido a la superficie media está dada por

$$G_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} - 2uL_{\alpha\beta} + u^2M_{\alpha\beta}, \quad G_{3\alpha} = G_{\alpha 3} = 0, \quad G_{33} = 1$$

donde se toma la convención que las letras griegas toman valores 1, 2 y las latinas 1, 2, 3. Una forma de escribir la expresión anterior es

$$G_{ij} = \delta_i^\alpha \delta_j^\beta G_{\alpha\beta} + \delta_i^3 \delta_j^3$$

donde  $\delta_i^j$  es la delta de Kronecker. Cualquier punto en la vecindad de la superficie media puede ser localizado dando un punto sobre la superficie y la coordenada  $u$  en la dirección normal. Sea  $g_{ij}$  la métrica del cascarón deformado y  $G_{ij}$  la métrica del cascarón sin deformar. Sean  $U^i$  las coordenadas curvilíneas,  $X_i$  las coordenadas espaciales en el estado no deformado y  $x_i$  las coordenadas espaciales del estado deformado.

Definimos el tensor de deformación como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij})$$

Del hecho que la métrica define la longitud de arco,  $ds^2 = g_{ij}dU^i dU^j$  y  $dS^2 = G_{ij}dU^i dU^j$  para el estado deformado y el no deformado respectivamente, entonces  $ds^2 - dS^2 = (g_{ij} - G_{ij})dU^i dU^j$ .

En el caso de tratarse de deformaciones infinitesimales hacemos el siguiente análisis. Sea  $u_i = x_i - X_i$ , se llama vector de desplazamientos de la cáscara. En este caso  $dS^2 = \sum_{i=1}^3 dX_i^2$ ,  $ds^2 = \sum_{i=1}^3 (dX_i + du_i)^2$ . Usando el hecho que  $du_i = \sum_{k=1}^3 u_{i,k} dx_k$  implica que a primer orden en  $u_{i,k}$  se tiene  $ds^2 - dS^2 = 2 \sum_{k,i=1}^3 \varepsilon_{ik} dx_i dx_k$  donde hemos llamado al tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ik}$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i})$$

Supongamos que el cuerpo no deformado sufre una deformación  $\delta u_i$ . Suponemos que las fuerzas internas están dadas por  $F_i = t^{ik}_{;k}$ . Esta última expresión sirve como definición del tensor de esfuerzos, el cual tiene una interpretación de fuerzas actuando sobre elementos diferenciales de área. Ahora el trabajo

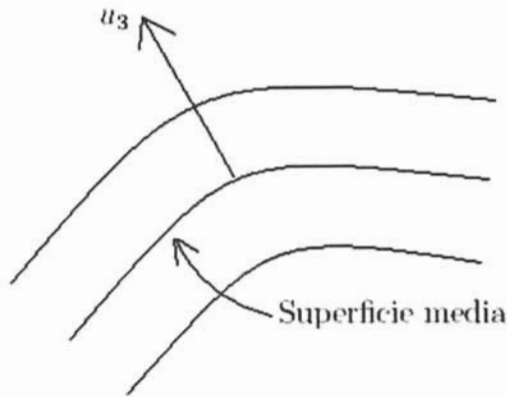


Figura 2.1: Superficie media

realizado por las tensiones internas por unidad de volumen vale  $t^{ik}{}_{,k}\delta u_i$ . Y la suma total de trabajos internos está dada por

$$\int_{\bar{V}} \delta R d\bar{V} = \int_V t^{ik}{}_{,k} \delta u_i dV$$

Integrando por partes, y considerando que los términos de superficie se pueden hacer cero al mandar la superficie al infinito y pedir que el tensor de esfuerzos sea cero, se tendría

$$\int_{\bar{V}} \delta R d\bar{V} = - \int_V t^{ik} \delta u_{i,k} dV = - \int_V t^{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV$$

Si permitimos que el volumen ocupe todo el espacio

$$\delta R = - \sqrt{\frac{g}{G}} t^{ik} \delta \varepsilon_{ik}$$

porque  $d\bar{V} = \sqrt{g} dU^1 dU^2 dU^3$ ,  $dV = \sqrt{G} dU^1 dU^2 dU^3$ . Ahora, en un proceso reversible se tiene  $dU = TdS - dR = TdS + \sqrt{\frac{g}{G}} t^{ik} d\varepsilon_{ik}$ , donde  $U$  es la energía interna. Introduciendo la energía libre de Gibbs como  $W = U - TS$  se tiene que

$$dW = -SdT + \sqrt{\frac{g}{G}} t^{ik} d\varepsilon_{ik}.$$



Por lo que se concluye

$$t^{ik} = \sqrt{\frac{G}{g}} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}}$$

a temperatura constante. De tal forma, si conocemos una expresión para la energía libre de Gibbs en términos del tensor de deformaciones (2.3) podemos recuperar el tensor de esfuerzos internos con la ecuación anterior.

## 2.2. Estimaciones del Tensor de Esfuerzos

En el artículo de John [John], se aplican técnicas de la teoría de las ecuaciones elípticas para obtener estimaciones a priori de los esfuerzos y sus derivadas, es decir, se calcula el orden de magnitud para las derivadas de tensor de esfuerzos

$$t_{k_1 k_2, i_1 i_2 \dots i_n}$$

A continuación se enuncian los resultados obtenidos por John para dichas estimaciones. En la tesis no se demuestran sus estimaciones, debido a que el estudio general de las ecuaciones elípticas se encuentra fuera de los propósitos de esta tesis.

Se define el parámetro  $\theta$  de la siguiente manera

$$\theta = \max \left( \frac{h}{D}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \sqrt{\varepsilon} \right) \quad (2.1)$$

donde  $h$  es la distancia de la superficie media en dirección normal a una de las caras de la cáscara,  $D$  es la distancia mínima de un punto sobre la superficie hasta la frontera de la superficie media,  $\varepsilon$  es la magnitud máxima de la deformación que pueda sufrir el cascarón,  $R$  es el radio de curvatura media de la superficie en el punto en cuestión. El término  $\frac{h}{D}$  es una medida de los efectos de borde, si estamos lejos de la frontera se espera que los efectos de borde sean pequeños. El término  $\frac{h}{R}$  es pequeño por el hecho que la placa es delgada. El término  $\sqrt{\varepsilon}$  será pequeño bajo la suposición que tenemos deformaciones pequeñas. Se define el parámetro  $\lambda$  como

$$\lambda = \frac{h}{\theta} = \min \left( D, \sqrt{hR}, \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}} \right).$$

Se asocia a las derivadas del tensor de esfuerzos  $t_{k_1 k_2, i_1 i_2 \dots i_n}$  la cantidad

$$\mu = \delta_{k_1}^3 + \delta_{k_2}^3 - \delta_{i_1}^3 - \delta_{i_2}^3 - \dots - \delta_{i_n}^3$$

donde  $\delta_i^j$  es el símbolo de Kronecker. Y definimos el exponente

$$\pi = \begin{cases} \mu & \text{si } \mu \geq 0 \\ \frac{1}{2}((-1)^\mu - 1) & \text{si } \mu < 0 \end{cases}$$

Entonces la regla general para la derivada de los esfuerzos es

$$t_{k_1 k_2, i_1 i_2 \dots i_n} = O(\varepsilon \lambda^{-n-\pi} h^\pi) \quad (2.2)$$

o bien

$$t_{k_1 k_2, i_1 i_2 \dots i_n} = O(\varepsilon \lambda^{-n} \theta^\pi).$$

Respecto a las coordenadas de la superficie media y por el hecho que el espesor de la cáscara es pequeño, podemos hacer un desarrollo de Taylor en la coordenada  $u$  normal a la superficie media, de tal forma que el tensor de esfuerzos se escribe como

$$t_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} u + O(\varepsilon \theta^2)$$

donde  $\tau_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}|_{u=0}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta,3}|_{u=0}$ . Para las derivadas de orden más alto se usa la regla de John para  $t_{\alpha\beta,33}$  con  $\mu = -2$ ,  $\pi = 0$ ,  $n = 2$  y por lo tanto  $O(t_{\alpha\beta,33} h^2) = h^2 O(\frac{\varepsilon}{\lambda^2}) = O(\varepsilon \theta^2)$ .

Se observa que el tensor de esfuerzos y su derivada calculada sobre la superficie media, están relacionados con los esfuerzos y momentos totales que actúan sobre una placa de espesor  $2h$ , como se muestra a continuación

$$\eta_{\alpha\beta} = \int_{-h}^h t_{\alpha\beta} du = 2h \tau_{\alpha\beta} + O(\varepsilon h \theta^2)$$

$$m_{\alpha\beta} = \int_{-h}^h t_{\alpha\beta} u du = \frac{2}{3} h^3 \sigma_{\alpha\beta} + O(\varepsilon h^2 \theta^2).$$

Lo que implica que a primera aproximación, suponiendo que  $\varepsilon, \theta, h$  son pequeños

$$\eta_{\alpha\beta} = 2h \tau_{\alpha\beta}$$

$$m_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} h^3 \sigma_{\alpha\beta}.$$

Este resultado se utilizará para hacer la conexión con las ecuaciones obtenidas por Koiter [Koiter] por métodos variacionales, las cuales sirven de base para obtener las ecuaciones de deformación, utilizadas en esta tesis para la deformación del cascarón esférico.

### 2.3. Ecuaciones Constitutivas

A continuación se derivan las ecuaciones constitutivas que relacionan los tensores de esfuerzo  $\tau_{\alpha\beta}$  y momento  $\sigma_{\alpha\beta}$  con los tensores de deformación  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  y curvatura  $\rho_{\alpha\beta}$ .

Como en el artículo de John [John] suponemos una expansión en serie de Taylor de la energía libre de Gibbs  $W$ . Utilizaremos indistintamente las representaciones covariantes y mixtas de los tensores involucrados en las deducciones, es decir, emplearemos  $t_{\alpha\beta}$  o su representación mixta  $t_{\alpha}^{\beta} = g^{\beta\kappa} t_{\alpha\kappa}$ . Consideraremos que el estado no deformado del cuerpo corresponde al estado en el cual no hay fuerzas externas, entonces cuando el tensor de deformación es idénticamente cero  $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ , los esfuerzos internos también son cero. Como  $t_i^k = \sqrt{\frac{G}{g}} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i^k}$  por lo dicho anteriormente se tiene que las derivadas de la energía libre de Gibbs son cero  $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i^k} = 0$ . Y por lo tanto en el desarrollo de la serie de Taylor de  $W$  no aparecen potencias de  $\varepsilon_i^k$ , es decir, no hay términos lineales. Además, como la energía libre es un escalar, cada término del desarrollo de Taylor también debe ser un escalar. Con las componentes del tensor  $\varepsilon_i^k$  se pueden formar dos escalares de segundo orden  $s_1^2 = (\varepsilon_i^i)^2$  y  $s_2 = \varepsilon_k^i \varepsilon_i^k$ . Por lo tanto el desarrollo en serie debe ser de la forma

$$W = \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_i^i)^2 + \mu \varepsilon_k^i \varepsilon_i^k + O(\varepsilon^3)$$

$$W = \frac{\lambda}{2} s_1^2 + \mu s_2 + O(\varepsilon^3)$$

donde se tomó  $W_0 = 0$ , la energía de referencia. Las cantidades  $\lambda, \mu$  se llaman coeficientes de Lamé. Dichos coeficientes se pueden expresar en términos del módulo de Young  $E$  y el módulo de Poisson  $\nu$ , dados por  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  y  $\lambda = \frac{E}{3(1-2\nu)} - \frac{E}{3(1+\nu)} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$  véase [Landau, ec 5.9]. Si escogemos las unidades de fuerza tales que  $E = 1$ , se encuentra que la energía libre se escribe como

$$W = \frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu s_1^2 + (1-2\nu)s_2) + O(\varepsilon^3). \quad (2.3)$$

donde  $s_1 = \varepsilon_i^i$ ,  $s_2 = \varepsilon_j^i \varepsilon_i^j$ ,  $s_3 = \varepsilon_j^i \varepsilon_k^j \varepsilon_i^k$  y  $\nu$  es el módulo de Poisson. El tensor de esfuerzos se puede expresar como

$$t_i^m = \left(\frac{G}{g}\right)^{1/2} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i^m} \quad (2.4)$$

y utilizando la regla de la cadena se tiene que

$$t_i^m = \left(\frac{G}{g}\right)^{1/2} \left( W_{s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \varepsilon_m^i} + W_{s_2} \frac{\partial s_2}{\partial \varepsilon_m^i} + W_{s_3} \frac{\partial s_3}{\partial \varepsilon_m^i} \right) \quad (2.5)$$

**Teorema 2.1** *La ecuación constitutiva que relaciona el tensor de deformación con el tensor de esfuerzos se encuentra dado a primer orden por la siguiente expresión*

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2hE} [(1 + \nu)\tau_{\alpha\beta} - \nu\tau_m^m G_{\alpha\beta}]. \quad (2.6)$$

**Prueba.** La prueba consiste en calcular cada término de la ecuación (2.5). El término  $\left(\frac{G}{g}\right)^{1/2}$  se aproxima al calcular el determinante de  $g_i^m$ , esto es por que  $\det(g_i^m) = \det(G^{jk}g_{ki}) = \det(G^{jk})\det(g_{ki}) = \frac{g}{G}$ , la primera igualdad se sigue porque  $g_{ik}$  es un tensor de orden dos en la métrica  $G_{ij}$  y se pueden aplicar las reglas para subir y bajar los índices al multiplicar por  $G^{jk}$ . Para calcular el determinante anterior, se nota que

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}).$$

Para tener un tensor mixto respecto a la métrica sin deformar, multiplicamos por el tensor métrico por lo que

$$\varepsilon_i^j = G^{jk}\varepsilon_{ik} = \frac{G^{jk}}{2}(g_{ik} - G_{ik}) = \frac{1}{2}(g_i^j - \delta_i^j)$$

donde la primera igualdad vale por las propiedades del tensor métrico. Por lo que  $g_i^j = 2(\varepsilon_i^j + \frac{\delta_i^j}{2})$ . En forma matricial

$$g_i^j = 2 \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 + \frac{1}{2} & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_2^1 & \varepsilon_2^2 + \frac{1}{2} & \varepsilon_2^3 \\ \varepsilon_3^1 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_3^3 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

calculando el determinante de la matriz

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\det(g_i^j) &= \left(\varepsilon_1^1 + \frac{1}{2}\right) \left( \left(\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}\right) \left(\varepsilon_3^3 + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon_3^2\varepsilon_2^3 \right) \\ &- \varepsilon_1^2 \left( \varepsilon_2^1 \left(\varepsilon_3^3 + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon_3^1\varepsilon_2^3 \right) + \varepsilon_1^3 \left( \varepsilon_2^1\varepsilon_3^2 - \left(\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}\right) \varepsilon_3^1 \right) \end{aligned}$$

desarrollando los productos

$$\begin{aligned} \det(g_i^j) = & 1 + 2(\varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^3) + 4(\varepsilon_1^1\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^1\varepsilon_3^3 + \varepsilon_2^2\varepsilon_3^3 - \varepsilon_2^2\varepsilon_3^3 - \varepsilon_1^3\varepsilon_3^1 - \varepsilon_1^2\varepsilon_2^1) \\ & + (\varepsilon_1^1\varepsilon_2^2\varepsilon_3^3 + \varepsilon_1^2\varepsilon_3^1\varepsilon_2^3 + \varepsilon_1^3\varepsilon_2^1\varepsilon_3^2 - \varepsilon_3^3\varepsilon_1^2\varepsilon_2^1 - \varepsilon_2^2\varepsilon_1^3\varepsilon_3^1) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\det(g_i^j) = \frac{g}{G} = 1 + O(\varepsilon)$$

y

$$\left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} = \sqrt{1 + O(\varepsilon)} = 1 + O(\varepsilon) \quad (2.7)$$

A partir de las definiciones de los escalares  $s_1, s_2, s_3$  en términos de  $\varepsilon_i^j$ , se pueden calcular sus derivadas, es decir

$$\frac{\partial s_1}{\partial \varepsilon_m^i} = \frac{\partial \varepsilon_j^j}{\partial \varepsilon_m^i} = \delta_i^j \delta_j^m = \delta_i^m$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial \varepsilon_m^i} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_m^i} (\varepsilon_\beta^\alpha \varepsilon_\alpha^\beta) = \varepsilon_\beta^\alpha \frac{\partial \varepsilon_\alpha^\beta}{\partial \varepsilon_m^i} + \varepsilon_\alpha^\beta \frac{\partial \varepsilon_\beta^\alpha}{\partial \varepsilon_m^i} = \varepsilon_\beta^\alpha \delta_i^\beta \delta_\alpha^m + \varepsilon_\alpha^\beta \delta_i^\alpha \delta_\beta^m = 2\varepsilon_i^m$$

de manera similar

$$\frac{\partial s_3}{\partial \varepsilon_m^i} = 3\varepsilon_\beta^m \varepsilon_i^\beta.$$

Las derivadas de la energía libre se calculan de la serie de Taylor para  $W$  (2.3) por lo que

$$W_{s_1} = \frac{\nu s_1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + O(\varepsilon^2)$$

$$W_{s_2} = \frac{(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + O(\varepsilon^2)$$

Por lo tanto la expresión para el tensor de esfuerzos a orden 2 se obtiene al sustituir estos resultados en la ecuación (2.5)

$$t_i^m = \frac{1}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (2\nu s_1 \delta_i^m + 2(1 - 2\nu) \varepsilon_i^m) + O(\varepsilon^2)$$

$$t_i^m = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_j^j \delta_i^m + \frac{1}{1 + \nu} \varepsilon_i^m + O(\varepsilon^2). \quad (2.8)$$

Resolviendo para  $\varepsilon_i^m$ , multiplicamos por  $\delta_i^m$ , se tiene, sumando sobre  $m = 1, 2, 3$

$$t_m^m = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_j^j \delta_m^m + \frac{1}{1+\nu} \varepsilon_j^j = \frac{\varepsilon_j^j}{1-2\nu}$$

y por lo tanto

$$\varepsilon_i^m = (1+\nu)t_i^m - \nu t_m^m \delta_i^m + O(\varepsilon^2)$$

o bien valuando sobre la superficie media

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (1+\nu)\tau_{\alpha\beta} - \nu \tau_m^m G_{\alpha\beta} + O(\varepsilon^2).$$

Que escrita en términos del tensor de esfuerzos  $\eta_{\alpha\beta} = 2h\tau_{\alpha\beta}$  y desprecian- do los términos  $O(\varepsilon^2)$  por el hecho que son pequeños se tiene el resultado

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2hE} [(1+\nu)\eta_{\alpha\beta} - \nu \eta_m^m G_{\alpha\beta}],$$

donde se multiplicó por el módulo de Young  $E$  para recuperar las unidades de fuerza convenientes.

■

A continuación deduciremos otra ecuación constitutiva que relaciona el tensor de momentos  $m_{\alpha\beta}$  con el tensor de curvatura  $\rho_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}$ .

Se requiere de la siguiente observación, donde se muestra como se conectan los símbolos de Christoffel de la esfera deformada con los de la esfera no deformada.

**Observación 2.1** Sean  $\bar{\Gamma}_{jk}^i$  los símbolos de Christoffel de la superficie deformada, si

$$C_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ir} (g_{rj;k} + g_{rk;j} - g_{jk;r}) \quad (2.9)$$

donde la derivada covariante se toma respecto a la superficie sin deformar, y  $g_{ij}$  es el tensor métrico de la superficie deformada, entonces

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + C_{jk}^i$$

**Prueba.**

La prueba de este resultado se sigue al desarrollar las derivadas covariantes en la definición de  $C_{jk}^i$ , es decir, ver (B.15)

$$C_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ir} (g_{rj;k} - g_{rj} \Gamma_{rk}^\gamma - g_{r\gamma} \Gamma_{jk}^\gamma)$$

$$\begin{aligned}
& +g_{rk,j} - g_{\gamma k}\Gamma_{rj}^{\gamma} - g_{r\gamma}\Gamma_{kj}^{\gamma} \\
& -g_{jk,r} + g_{\gamma k}\Gamma_{jr}^{\gamma} + g_{j\gamma}\Gamma_{kr}^{\gamma}
\end{aligned}$$

Por la simetría del tensor métrico y la de los símbolos de Christoffel en sus dos primeros índices, se cancelan varios términos y por lo tanto

$$C_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{ir}(g_{rj,k} + g_{rk,j} - g_{jk,r}) - g^{ir}g_{r\gamma}\Gamma_{kj}^{\gamma}.$$

Usando el hecho que el primer término es la definición del símbolo de Christoffel en la métrica  $g_{ik}$ , ver (B.10), y que  $g^{ir}g_{r\gamma} = \delta_{\gamma}^i$  se tienen que

$$C_{jk}^i = \bar{\Gamma}_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i.$$

■

**Lema 2.1** *Sea  $g_{\alpha\beta}$  la métrica en términos de la superficie media deformada, entonces del tensor de curvatura  $\rho_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}$ , donde  $\bar{b}_{\alpha\beta}$ ,  $b_{\alpha\beta}$  son las segundas formas fundamentales en los sistemas de la superficie deformada y la no deformada respectivamente, entonces*

$$\rho_{\alpha\beta} = -(\varepsilon_{\alpha\beta;3})_{u=0}$$

**Prueba.** Por la expresión que se demuestra en el apéndice (B.25), que en el caso de la superficie deformada se escribe como

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^3$$

Con esta observación se tiene que

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^3 + C_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}^3 \quad (2.10)$$

donde se usó (B.25) para la superficie no deformada. El término  $C_{\alpha\beta}^3 = \frac{1}{2}g^{3r}(g_{r\alpha;\beta} + g_{r\beta;\alpha} - g_{\alpha\beta;r})$ , se reduce observando que en las coordenadas de la superficie media, se tiene que  $g^{3\alpha} = 0$  para  $\alpha = 1, 2$  y  $g^{33} = g_3^3 = 1$  en  $u = 0$ , ver (B.24). Entonces

$$C_{\alpha\beta}^3 = \frac{1}{2}(g_{3\alpha;\beta} + g_{3\beta;\alpha} - g_{\alpha\beta;3}) = -\frac{1}{2}(g_{\alpha\beta;3})|_{u=0}$$

y por lo tanto al sustituir en (2.10) se obtiene

$$\rho_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta;3} = -(\varepsilon_{\alpha\beta;3})|_{u=0} \quad (2.11)$$

donde se usa el hecho que  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta})$  y que la derivada covariante de  $G_{\alpha\beta}$  es cero, ver (B.18). ■

Con esto tenemos el siguiente teorema

**Teorema 2.2** *Si  $m_{\alpha\beta}$  es el tensor de momentos y  $\rho_{\alpha\beta}$  el tensor de curvatura entonces la ecuación constitutiva que relaciona dichos tensores está dada a orden dos por*

$$m_{\alpha\beta} = \frac{-2h^3 E}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)\rho_{\alpha\beta} + \nu\rho_\gamma^\gamma G_{\alpha\beta}] \quad (2.12)$$

**Prueba.**

Sustituyendo la ecuación (2.6) en (2.11) y haciendo uso del desarrollo en Taylor para el tensor de esfuerzos

$$t_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}u + O(\varepsilon\theta^2)$$

para obtener la derivada  $t_{\alpha\beta,3} = \sigma_{\alpha\beta}$ , se tiene la ecuación constitutiva

$$\rho_{\alpha\beta} = -(1+\nu)\sigma_{\alpha\beta} + \nu\sigma_\gamma^\gamma G_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

Esta ecuación se puede invertir para obtener  $\sigma_{\alpha\beta}$  en función de  $\rho_{\alpha\beta}$ . Para ello multiplicando por  $G^{\lambda\beta}$ , se tiene

$$\rho_\alpha^\lambda = -(1+\nu)\sigma_\alpha^\lambda + \nu\sigma_\gamma^\gamma \delta_\alpha^\lambda$$

Si multiplicamos por  $\delta_\lambda^\alpha$

$$\rho_\alpha^\alpha = -(1+\nu)\sigma_\alpha^\alpha + \nu\sigma_\gamma^\gamma 2$$

donde se usó el hecho que  $\delta_\lambda^\alpha \delta_\alpha^\lambda = 2$ . De donde se obtiene

$$\sigma_\gamma^\gamma = \frac{\rho_\gamma^\gamma}{(\nu-1)}$$

Sustituyendo en (2.13) se tiene

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{-1}{1-\nu^2} ((1-\nu)\rho_{\alpha\beta} + \nu\rho_\gamma^\gamma G_{\alpha\beta})$$

o multiplicando por  $\frac{2}{3}Eh^3$ , en términos del tensor de momentos

$$m_{\alpha\beta} = \frac{-2h^3 E}{3(1-\nu^2)} ((1-\nu)\rho_{\alpha\beta} + \nu\rho_\gamma^\gamma G_{\alpha\beta})$$



donde se multiplicó por módulo de Young  $E$  para recuperar las unidades de fuerza apropiadas. ■

**Nota:** En lo sucesivo se tendrán cuatro tipos de derivadas covariantes, ; será la derivada covariante en la representación del espacio respecto a la superficie sin deformar, ; ; será la derivada covariante respecto a la métrica de la superficie deformada, | será la derivada covariante sobre la superficie media sin deformar y || la derivada covariante sobre la superficie media deformada.

## 2.4. Ecuaciones de Equilibrio

Requerimos del teorema de la divergencia en sistemas generalizados de coordenadas. La idea básica es el darse cuenta que cualquier cantidad invariante es independiente del sistema de coordenadas utilizado. El teorema de la divergencia involucra precisamente una relación integral entre dos invariantes, la divergencia  $A^\alpha_{;\alpha}$  y el producto escalar  $A^\alpha n_\alpha$ . En coordenadas cartesianas se expresa como

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

En un sistema arbitrario el resultado es válido por el hecho de ser invariantes

$$\int_V A^\alpha_{;\alpha} dV = \int_S A^\alpha n_\alpha dS.$$

Los esfuerzos internos están dados por  $f^\alpha = t^{\alpha\beta}_{;\beta}$ . La interpretación de la cantidad  $t^{\alpha\beta} n_\beta$  es la componente de fuerza por unidad de area en dirección  $\mathbf{x}_\alpha$ , sobre el elemento de superficie con normal  $\mathbf{n}$ . Después de la deformación la suma de fuerzas tanto externas como internas debe ser cero, por lo tanto

$$\int_{\bar{S}} t^{\alpha\beta} n_\beta dS - \int_{\bar{S}} p n^\alpha dS = 0$$

donde  $p$  es la presión externa uniforme. Al aplicar el teorema de la divergencia, el segundo término del balance de fuerzas es cero, puesto que el gradiente de una constante es cero, por lo tanto

$$\int_{\bar{V}} t^{\alpha\beta}_{;;\beta} dV = 0$$

donde las derivadas covariantes se toman respecto a la superficie deformada. Se obtienen las ecuaciones de equilibrio

$$t^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0.$$

Desarrollando las derivadas covariantes en términos de los símbolos de Christoffel (ver B.16 )

$$0 = t^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + t^{k\beta}\bar{\Gamma}_{k\beta}^{\alpha} + t^{\alpha k}\bar{\Gamma}_{k\beta}^{\beta}.$$

Usando la conexión para los símbolos de Christoffel  $\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + C_{jk}^i$  se tiene que

$$t^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + t^{k\beta}(\Gamma_{k,\beta}^{\alpha} + C_{k\beta}^{\alpha}) + t^{\alpha k}(\Gamma_{k\beta}^{\beta} + C_{k\beta}^{\beta}) = 0$$

y por lo tanto las ecuaciones de equilibrio respecto a la métrica de la superficie sin deformar son

$$t^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + t^{k\beta}C_{k\beta}^{\alpha} + t^{\alpha k}C_{k\beta}^{\beta} = 0. \quad (2.14)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir de manera compacta, tal y como se demuestra en el siguiente teorema

**Teorema 2.3** *Si se define el pseudo tensor de esfuerzos en sus tres formas equivalentes debidas a las propiedades del tensor métrico de subir y bajar índices (B.2)*

$$\begin{aligned} T_i^m &= \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} t_i^m - W\delta_i^m \\ T_i^m &= \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} t_s^m g_i^s - W\delta_i^m \\ T_i^m &= \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} t^{ms} g_{si} - W\delta_i^m \end{aligned} \quad (2.15)$$

las ecuaciones de equilibrio toman la forma

$$T_{i;m}^m = 0.$$

**Prueba.** Se tiene por las propiedades del tensor métrico de subir y bajar índices que  $t_s^m g_i^s = g_{ks} t^{km} g_i^s = t^{km} g_{ki}$ , cambiando el índice mudo se puede escribir como  $t^{sm} g_{si}$ . Por lo tanto

$$T_{i;m}^m = \left( \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} t^{ms} g_{si} - W\delta_i^m \right)_{;m}$$

$$T_{i;m}^m = \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} t^{ms} g_{si} + \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} (t^{ms}{}_{;m} g_{si} + t^{ms} g_{si;m}) - W_{;i} \quad (2.16)$$

El término  $W_{;i}$  se calcula de la siguiente manera: Como  $W(\varepsilon_{sm})$  depende del tensor de deformación, su derivada covariante con respecto a  $u_i$  vale

$$W_{;i} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{sm}} \varepsilon_{sm;i},$$

por el hecho que la derivada covariante de un campo escalar coincide con la derivada parcial ordinaria.

De la ecuación (2.4) escrita de la forma

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{sm}} = \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} t^{sm}$$

se tiene que

$$W_{;i} = \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} t^{ms} \varepsilon_{ms;i} = \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} t^{ms} \frac{1}{2} g_{ms;i} \quad (2.17)$$

donde se usa el hecho que  $\varepsilon_{ms} = \frac{1}{2}(g_{ms} - G_{ms})$  y la derivada covariante  $G_{sm;i} = 0$  (B.18). Además

$$\left(\sqrt{\frac{g}{G}}\right)_{,m} = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} \left(\frac{g_{,m}}{g} - \frac{G_{,m}}{G}\right)$$

Como se muestra en el apéndice de geometría diferencial (B.11)  $g_{,m} = 2g\bar{\Gamma}_{rm}^r$ ,  $G_{,m} = 2G\Gamma_{rm}^r$  y por lo tanto

$$\left(\sqrt{\frac{g}{G}}\right)_{,m} = \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} (\bar{\Gamma}_{rm}^r - \Gamma_{rm}^r) = \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} C_{rm}^r$$

Usando el hecho que  $t^{ms}$  satisface la ecuación de equilibrio, (2.14):

$$t^{ms}_{;m} = -t^{rs} C_{rm}^m - t^{mr} C_{rm}^s.$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.16)

$$T_{i;m}^m = \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} \left( C_{mr}^r t^{ms} g_{si} - t^{rs} C_{rm}^m g_{si} - t^{mr} C_{rm}^s g_{si} + t^{ms} g_{si;m} - \frac{1}{2} t^{ms} g_{sm;i} \right)$$

Los dos primeros términos se cancelan por el hecho que están sumando índices mudos, es decir  $C_{mr}^r t^{ms} = C_{mk}^k t^{ms} = C_{rk}^k t^{rs} = C_{rm}^m t^{rs}$ , y notando que de la definición para los coeficientes  $C_{jk}^i$

$$C_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ir} (g_{rj;k} + g_{rk;j} - g_{jk;r})$$

renombrando índices

$$C_{rm}^s = \frac{1}{2} g^{s\lambda} (g_{\lambda r;m} + g_{\lambda m;r} - g_{rm;\lambda})$$

multiplicando por el factor  $g_{si}$

$$C_{rm}^s g_{si} = \frac{1}{2} \delta_i^\lambda (g_{\lambda r;m} + g_{\lambda m;r} - g_{rm;\lambda})$$

$$C_{rm}^s g_{si} = \frac{1}{2} (g_{ir;m} + g_{im;r} - g_{rm;i})$$

contrayendo por  $-t^{mr}$  se tiene que los índices  $r, m$  se pueden permutar y por lo tanto

$$-C_{rm}^s g_{si} t^{mr} = -t^{mr} g_{ir;m} + \frac{1}{2} t^{mr} g_{rm;i}$$

se obtiene el resultado

$$T_{i;m}^m = \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} \left(-t^{mr} g_{ir;m} + \frac{1}{2} t^{mr} g_{rm;i} + t^{ms} g_{si;m} - \frac{1}{2} t^{ms} g_{sm;i}\right) = 0.$$

■

Es un buen momento para dar las condiciones de frontera sobre la superficie deformada en el interior. Es decir, no se consideran las condiciones de frontera en los bordes, estas serán consideradas en el siguiente capítulo. Suponemos que la única fuerza externa que actúa sobre el cascarón es la presión, la cual supondremos uniforme. Por lo tanto las condiciones de frontera son de la forma

$$\begin{aligned} t^{\alpha 3} &= t_\alpha^3 = 0, \quad t^{33} = t_3^3 = -p \\ \alpha &= 1, 2, \quad u = h \\ t^{m3} &= 0 \quad \text{para } u = -h. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Para el tensor de pseudo esfuerzos (2.15) se tiene

$$T_i^3 = \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} t_s^3 g_i^s - W \delta_i^3$$

implica

$$\begin{aligned} T_\alpha^3 &= 0, \quad T_3^3 = -\left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} p - W \\ \alpha &= 1, 2, \quad u = h \\ T_\alpha^3 &= 0, \quad T_3^3 = -W \quad \text{para } u = -h. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Para obtener las ecuaciones que describen la deformación de la superficie media, se consideran como variables independientes  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\rho_{\alpha\beta}$ ,  $\tau_{\alpha\beta}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$  definidos sobre la superficie deformada, dando un total de doce variables. Las doce ecuaciones que darán el sistema cerrado son las seis ecuaciones constitutivas, tres ecuaciones de balance de fuerzas y las tres ecuaciones de compatibilidad. A continuación derivamos las ecuaciones de equilibrio. De la ecuación de balance en términos del pseudo tensor de esfuerzos  $T_{i;m}^m = 0$ , tomando la convención que los índices con letra griega toman los valores 1, 2, las primeras dos ecuaciones de equilibrio se pueden reescribir como

$$T_{\alpha;i}^i = T_{\alpha;\beta}^\beta + T_{\alpha;3}^3 = T_{\alpha;\beta}^\beta + T_{\alpha,3}^3 - T_\beta^3 \Gamma_{\alpha 3}^\beta = 0,$$

donde en la última igualdad se usó la definición de derivada covariante para el término  $T_{\alpha;3}^3 = T_{\alpha,3}^3 - T_\beta^3 \Gamma_{\alpha 3}^\beta$  (Apendice B.14). Por otro lado, se tiene la fórmula para los símbolos de Christoffel, ver apéndice(B.10)

$$\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} (g_{\lambda\alpha,\gamma} + g_{\gamma\lambda,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\lambda})$$

Como se muestra en el apéndice de geometría (B.24), la métrica referida a la superficie media está dada por

$$g_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} - 2ub_{\alpha\beta} + u^2 m_{\alpha\beta}$$

donde  $e_{\alpha\beta}$ ,  $b_{\alpha\beta}$ ,  $m_{\alpha\beta}$  son las primera, segunda, tercera formas fundamentales de la superficie deformada. y  $g_{\alpha 3} = 0$  para  $\alpha = 1, 2$  y  $g_{33} = 1$ . Esto implica que

$$g_{\alpha\beta,3} = g_{\alpha\beta|3} = -2b_{\alpha\beta}$$

Sustituyendo esta expresión en la definición de los símbolos de Christoffel sobre la superficie media se tiene que

$$\Gamma_{\alpha 3}^\beta = \frac{g^{\beta\lambda}}{2} (g_{\lambda\alpha,3} + g_{3\lambda,\alpha} - g_{\alpha 3,\lambda}) = \frac{g^{\beta\lambda}}{2} (-2b_{\lambda\alpha}) = -b_\alpha^\beta$$

del hecho que  $g_{3\lambda,\alpha} = g_{\alpha 3,\lambda} = 0$  y  $g_{\alpha\beta,3} = -2b_{\alpha\beta}$ . Por lo que las ecuaciones de equilibrio valuadas sobre la superficie media se escriben como

$$T_{\alpha|\beta}^\beta + T_{\alpha,3}^3 + T_\beta^3 b_\alpha^\beta = 0 \quad (2.20)$$

El siguiente teorema da una ecuación aproximada a la ecuación de equilibrio (2.20) en términos del tensor de esfuerzo sobre la superficie media  $\tau_{\alpha\beta}$ .

**Teorema 2.4** Sea  $\tau_{\alpha\beta}$  el tensor de esfuerzos valuado sobre la superficie media y teniendo en cuenta que  $T_{\alpha}^{\beta} = t_{\alpha}^{\beta} + O(t^2)$ , entonces los términos de la ecuación (2.20) tienen los siguientes ordenes

$$T_{\alpha|\beta}^{\beta} = \tau_{\alpha|\beta}^{\beta} + O(\varepsilon\theta^2/\lambda) \quad (2.21)$$

$$T_{\alpha}^3 = \tau_{\alpha}^3 + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon\theta) \quad (2.22)$$

$$T_{\beta}^3 b_{\alpha}^{\beta} = O(\varepsilon\theta^2/\lambda) \quad (2.23)$$

$$T_{\alpha,3}^3 = O(\varepsilon\theta^2/\lambda) \quad (2.24)$$

Y por lo tanto la ecuación de equilibrio (2.20) a primer orden en  $\varepsilon$  sobre la superficie media es

$$\tau_{\alpha|\beta}^{\beta} = O(\varepsilon\theta^2/\lambda)$$

En términos del tensor de esfuerzos sobre la cáscara  $\eta_{\alpha\beta} = 2h\tau_{\alpha\beta}$ , y del hecho que  $\varepsilon, \theta$  son pequeños se pueden despreciar el lado derecho de la ecuación anterior, es decir

$$\eta_{\alpha|\beta}^{\beta} = 0 \quad (2.25)$$

**Prueba.** En el artículo de John [John, ec (20)] se encuentra la siguiente representación para el tensor de pseudo esfuerzos

$$T_i^m = t_i^m + 2(1 + \nu)t_s^m t_i^s + (1 - 4\nu)t_j^j t_i^m - \frac{1}{2}((1 + \nu)t_s^r t_r^s - \nu t_r^r t_s^s)\delta_i^m + O(t^3)$$

Este resultado muestra que a primer orden

$$T_i^m = t_i^m + O(t^2). \quad (2.26)$$

En particular para  $u = 0, m = 3, i = \alpha$  y recordando (2.8), donde se ve que  $O(t) = O(\varepsilon)$ , se tiene la primera parte de (2.22)

$$T_{\alpha}^3 = \tau_{\alpha}^3 + O(\varepsilon^2). \quad (2.27)$$

(2.21) se obtiene al derivar (2.26) y valuar sobre la superficie media, por el hecho que  $T_{\alpha|\beta}^{\beta} = \tau_{\alpha|\beta}^{\beta} + 2O(t)O(t_{\alpha\kappa;\beta})$ . De la regla de John con  $\mu = 0, \pi = 0, n = 1$  se tiene  $t_{\alpha\kappa;\beta} = O(\varepsilon/\lambda)$  y por la relación constitutiva (2.8) se tiene que  $O(t) = O(\varepsilon)$ , y por lo tanto  $T_{\alpha|\beta}^{\beta} = \tau_{\alpha|\beta}^{\beta} + 2O(\varepsilon^2/\lambda)$ . De la definición para  $\theta$  (2.1) se tiene que  $\theta^2 = O(\varepsilon)$  implicando (2.21).

Para obtener la segunda parte de (2.22), tenemos de las condiciones de frontera (2.18),  $t_{\beta 3} = 0$  para  $u = -h$ . Se puede aplicar el teorema del

valor intermedio, con lo cual  $t_{\beta 3} = O(t_{\beta 3,3})h$  y de la regla de John para  $t_{\beta 3,3}$  con  $\mu = 0, \pi = 0, n = 1$  se tiene  $t_{\beta 3,3} = O(\varepsilon/\lambda)$  y como consecuencia  $t_{\beta 3} = O(\varepsilon/\lambda)h = O(\varepsilon\theta)$ , y sobre la superficie media  $\tau_\alpha^3 = O(\varepsilon\theta)$ . Y como  $T_\alpha^3 = O(\tau_\alpha^3)$  se tiene que

$$T_\beta^3 = O(\varepsilon\theta). \quad (2.28)$$

La primera y segunda formas fundamentales para la esfera se calculan en el apéndice (B.28),(B.29), donde se observa que dependen de  $R$  únicamente

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= O(R^2) \\ g^{\alpha\beta} &= O\left(\frac{1}{R^2}\right) \\ b_{\alpha\beta} &= O(R) \\ b_\alpha^\beta &= g^{\kappa\beta}b_{\alpha\kappa} = O\left(\frac{1}{R}\right) = O(\theta/\lambda) \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde se usó la definición de  $\theta$ , véase (2.1), para encontrar el orden de  $R$ ,  $\theta^2 = O(h/R)$  y por lo tanto  $1/R = O(\theta^2/h) = O(\theta/\lambda)$ .

Para probar (2.23) se usan (2.22) y (2.29), por lo que

$$T_\beta^3 b_\alpha^\beta = O(\varepsilon\theta^2/\lambda).$$

Para estimar el segundo término  $T_{\alpha,3}^3$  (2.24), utilizamos las condiciones de frontera  $T_\alpha^3 = 0$  para  $u = \pm h$  (2.19), escritas en términos de serie de Taylor

$$\begin{aligned} T_\alpha^3 &= (T_\alpha^3)_{u=0} + h(T_{\alpha,3}^3)_{u=0} + \frac{h^2}{2}(T_{\alpha,33}^3)_{u=0} + \frac{h^3}{6}(T_{\alpha,333}^3)_{u=v_1} = 0 \\ T_\alpha^3 &= (T_\alpha^3)_{u=0} - h(T_{\alpha,3}^3)_{u=0} + \frac{h^2}{2}(T_{\alpha,33}^3)_{u=0} - \frac{h^3}{6}(T_{\alpha,333}^3)_{u=v_2} = 0 \end{aligned}$$

valuadas en  $h, -h$  respectivamente y algunos valores intermedios  $v_1, v_2$ . Con esto se tendrían dos ecuaciones en  $h$  y  $-h$  que al restarlas implican que

$$h(T_{\alpha,3}^3)_{u=0} + \frac{h^3}{6}(T_{\alpha,333}^3)_{u=0} + O(h^5) = 0$$

Utilizando la regla de John para  $t_{3\alpha,333}$  con  $\mu = -2, \pi = 0, n = 3$  se tiene  $h^2 T_{\alpha,333}^3 = O(h^2 \varepsilon \lambda^{-3}) = O(\varepsilon \theta^2 / \lambda)$ , y por lo tanto

$$(T_{\alpha,3}^3)_{u=0} = O(h^2 |T_{\alpha,333}^3|) = O(\varepsilon \theta^2 / \lambda)$$

Sustituyendo estas estimaciones en la ecuación (2.20) se obtiene la primera ecuación de equilibrio, la cual se puede interpretar como el balance de esfuerzos tangenciales a la superficie media.

$$\tau_{\alpha|\beta}^\beta = O(\varepsilon \theta^2 / \lambda) \quad (2.30)$$

Con lo que se prueba el teorema ■

Para obtener la otra ecuación, que tiene la interpretación de balance de momentos respecto a la superficie media, consideremos la tercera ecuación de balance

$$T_{3;i}^i = T_{3,i}^i + T_3^l \Gamma_{li}^i - T_l^i \Gamma_{3i}^l = 0, \quad (2.31)$$

donde el lado izquierdo se desarrolló usando la definición de derivada covariante para un tensor mixto de orden 2 (B.17).

Si usamos la convención de que los índices con letra griega toman los valores 1, 2, y los índices con letras latinas toman los valores 1, 2, 3, entonces la ecuación se escribe como

$$T_{3,\alpha}^\alpha + T_{3,3}^3 + T_3^l \Gamma_{l\alpha}^\alpha + T_3^l \Gamma_{l3}^3 - T_l^\alpha \Gamma_{3\alpha}^l - T_l^3 \Gamma_{33}^l = 0.$$

Los símbolos de Christoffel con índice 3 doble se anulan (B.27), por lo tanto

$$T_{3,\alpha}^\alpha + T_{3,3}^3 + T_3^l \Gamma_{l\alpha}^\alpha - T_l^\alpha \Gamma_{3\alpha}^l = 0$$

Usando nuestra convención de índices griegos para 1, 2 se tiene

$$T_3^l \Gamma_{l\alpha}^\alpha = T_3^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha + T_3^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha$$

y

$$T_l^\alpha \Gamma_{3\alpha}^l = T_\beta^\alpha \Gamma_{3\alpha}^\beta + T_3^\alpha \Gamma_{3\alpha}^3.$$

Como consecuencia

$$T_{3,\alpha}^\alpha + T_{3,3}^3 + T_3^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha + T_3^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - T_\beta^\alpha \Gamma_{3\alpha}^\beta - T_3^\alpha \Gamma_{3\alpha}^3 = 0.$$

Cancelando el último término por tener índice 3 doble y notando que  $T_{3,\alpha}^\alpha = T_{3,\alpha}^\alpha + T_3^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha$

$$T_{3,\alpha}^\alpha + T_{3,3}^3 + T_3^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - T_\beta^\alpha \Gamma_{3\alpha}^\beta = 0.$$

Usando el hecho que  $\Gamma_{\alpha 3}^\beta = -b_\alpha^\beta$  valuado sobre la superficie media

$$T_{3|\alpha}^\alpha + T_{3,3}^3 - T_3^3 b_\alpha^\alpha + T_\beta^\alpha b_\alpha^\beta = 0. \quad (2.32)$$

Esta es la ecuación de balance de momentos valuada sobre la superficie media  $u = 0$ . De esta ecuación se tiene el siguiente teorema

**Teorema 2.5** Sean  $\sigma^{\alpha\beta}$ ,  $\tau^{\alpha\beta}$  los tensores de momento y esfuerzo respectivamente, calculados sobre la superficie media. Los términos de la ecuación (2.32) sobre la superficie media tienen las siguientes estimaciones



1.  $T_3^3 = O(\varepsilon\theta^2)$
2.  $T_\beta^\alpha = \tau_\beta^\alpha + O(\varepsilon\theta^2)$
3.  $T_3^3 b_\alpha^\alpha = O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2)$
4.  $T_{3|\alpha}^\alpha = \frac{1}{2}h^2 \sigma^{\alpha\gamma} |_{\gamma\alpha} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2)$
5.  $T_{3,3}^3 = -\frac{h^2}{6} \sigma^{\beta\gamma} |_{\beta\gamma} + \tau^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} - \frac{p}{2h} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2)$

Con estas estimaciones se obtiene la ecuación aproximada de momentos

$$\frac{1}{3}h^2 \sigma^{\alpha\gamma} |_{\gamma\alpha} - \frac{p}{2h} + \tau^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} + \tau_\beta^\alpha b_\alpha^\beta = O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2).$$

En términos de los esfuerzos y momentos totales se tiene la ecuación de momento

$$m^{\alpha\gamma} |_{\gamma\alpha} + \eta^{\alpha\beta} (\rho_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}) = p. \quad (2.33)$$

**Prueba.**

**Prueba 1.** Para probar la estimación (1) utilizamos la relación (2.26) lo que implica  $T_3^3 = t_3^3 + O(t^2)$  y por lo tanto  $T_3^3 = O(t_3^3)$ . Como  $t_3^3 = 0$  para  $u = -h$ , por el teorema del valor intermedio implica que  $t_3^3 = O(t_{33,3})h$ , de la regla de John con  $\mu = 1, \pi = 1, n = 1$  se tiene  $t_{33,3} = O(\varepsilon\theta/\lambda)$  y por lo tanto  $t_3^3 = O(\varepsilon\theta h/\lambda) = O(\varepsilon\theta^2)$ . ■

**Prueba 2.** La estimación (2) se prueba de (2.26), es decir,  $T_\alpha^\beta = t_\alpha^\beta + O(t^2)$ . Por la relación (2.8),  $O(t) = O(\varepsilon)$ , y por la definición de  $\theta$ , (2.1),  $O(\varepsilon) = O(\theta^2)$  y por lo tanto  $T_\alpha^\beta = t_\alpha^\beta + O(\varepsilon\theta^2)$ . ■

**Prueba 3.** La estimación (3) se sigue de (1) y del hecho que para la esfera (B.29),  $b_\alpha^\beta = O(\frac{1}{R}) = O(\theta/\lambda) = O(h/\lambda^2)$ , por la definición de  $\theta$  (2.1). ■

**Prueba 4.** Para la estimación (4) usamos las condiciones de frontera (2.19) escritas en términos de su serie de Taylor, es decir

$$T_\beta^3 = (T_\beta^3)_{u=0} + u(T_{\beta,3}^3)_{u=0} + \frac{1}{2}u^2(T_{\beta,33}^3)_{u=0} +$$

$$\frac{1}{6}u^3(T_{\beta,333}^3)_{u=0} + \frac{1}{24}u^4(T_{\beta,3333}^3)_{u=0} + O(h^5) = 0$$

para  $u = h, -h$ . Si sumamos estas dos ecuaciones sólo quedan las potencias pares y por lo tanto

$$(T_{\beta}^3)_{u=0} = -\frac{1}{2}h^2(T_{\beta,33}^3)_{u=0} - \frac{1}{24}h^4(T_{\beta,3333}^3)_{u=0} + O(h^6)$$

Notamos que  $T_3^\alpha = G_{3j}T^{\alpha j}$  por la propiedad del tensor métrico de subir índices, y por (B.24)  $G_{33} = 1$  y  $G_{3\alpha} = 0$ , implica  $T_3^\alpha = T^{\alpha 3}$  y de hecho sobre la superficie media  $(T_3^\alpha)_{u=0} = (T^{\alpha 3})_{u=0} = (G^{\alpha\beta}T_{\beta}^3)_{u=0} = E^{\alpha\beta}(T_{\beta}^3)_{u=0}$  donde  $E_{\alpha\beta} = (G_{\alpha\beta})_{u=0}$ . Multiplicando la ecuación anterior por  $E^{\alpha\beta}$  y usando el hecho que  $(T_3^\alpha)_{u=0} = E^{\alpha\beta}(T_{\beta}^3)_{u=0}$  se tiene que

$$(T_3^\alpha)_{u=0} = -\frac{1}{2}h^2G^{\alpha\beta}(T_{\beta,33}^3)_{u=0} - \frac{1}{24}h^4G^{\alpha\beta}(T_{\beta,3333}^3)_{u=0} \quad (2.34)$$

Primero se requiere la siguiente observación

**Observación 2.2** *Las estimaciones de John valen lo mismo para las derivadas parciales como para las derivadas covariantes, en particular*

$$T_{\beta,33}^3 = T_{\beta,33}^3 + O\left(\frac{\varepsilon\theta^2h}{\lambda}\right)$$

Es decir

$$T_{\beta,33}^3 = O(T_{\beta,33}^3)$$

**Prueba.** Calculamos  $T_{\beta,33}^3$  de la definición de la derivada covariante

$$T_{\beta;j}^3 = T_{\beta,j}^3 + T_k^3\Gamma_{\beta j}^k$$

lo que implica

$$T_{\beta;3}^3 = T_{\beta,3}^3 + T_k^3\Gamma_{\beta 3}^k.$$

Por otro lado la derivada covariante de un tensor de orden dos se calcula en el apéndice (B.15) y por lo tanto

$$T_{\beta;ij}^3 = (T_{\beta;i}^3)_{;j} = (T_{\beta;i}^3)_j + T_{k;i}^3\Gamma_{\beta j}^k + T_{\beta;k}^3\Gamma_{ij}^k$$

En el caso particular que  $i = j = 3$  se tiene

$$T_{\beta,33}^3 = (T_{\beta,3}^3)_{;3} + T_{k;3}^3\Gamma_{\beta 3}^k + T_{\beta;k}^3\Gamma_{33}^k$$

Por el hecho que la métrica está dada respecto a la superficie media, los términos  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  con índice 3 repetido al menos dos veces son cero (B.27),

$$T_{\beta;33}^3 = (T_{\beta,3}^3 + T_{\alpha}^3 \Gamma_{\beta 3}^{\alpha})_{,3} + T_{\alpha;3}^3 \Gamma_{\beta 3}^{\alpha}$$

$$T_{\beta;33}^3 = T_{\beta,33}^3 + T_{\alpha}^3 (\Gamma_{\beta 3}^{\alpha})_{,3} + T_{\alpha,3}^3 \Gamma_{\beta 3}^{\alpha} + (T_{\alpha,3}^3 + T_{\gamma}^3 \Gamma_{\alpha 3}^{\gamma}) \Gamma_{\beta 3}^{\alpha}$$

Usando el hecho que  $(\Gamma_{\beta 3}^{\alpha})_{,3} = -(b_{\beta}^{\alpha})_{,3} = 0$  para  $u = 0$  por la fórmula (B.26)

$$T_{\beta;33}^3 = T_{\beta,33}^3 - 2T_{\alpha,3}^3 b_{\beta}^{\alpha} + T_{\gamma}^3 b_{\alpha}^{\gamma} b_{\beta}^{\alpha}.$$

valuada sobre la superficie media  $u = 0$ . Utilizando los hechos que en el caso de la esfera

- $E^{\alpha\beta} = O(\frac{1}{R^2}) = O(\frac{\theta^2}{\lambda^2})$
- $b_{\alpha}^{\beta} = O(\frac{1}{R}) = O(\frac{\theta}{\lambda})$
- $T_{\alpha}^3 = O(\varepsilon\theta)$
- $T_{\alpha,3}^3 = O(\frac{\varepsilon\theta^2}{\lambda})$

Las primeras dos estimaciones valen por (B.28) y (B.29), la tercera por (2.22) y la cuarta por (2.24), por lo tanto

$$T_{\beta;33}^3 = T_{\beta,33}^3 - 2O\left(\frac{\varepsilon\theta^2}{\lambda}\right)O\left(\frac{\theta}{\lambda}\right) + O(\theta\varepsilon)O\left(\frac{\theta^2}{\lambda^2}\right)$$

de donde se concluye que

$$T_{\beta;33}^3 = T_{\beta,33}^3 + O\left(\frac{\varepsilon\theta^3}{\lambda^2}\right)$$

■

Para estimar  $E^{\alpha\beta} h^4 (T_{\beta,3333}^3)_{u=0} = O(h^4 (T_{\beta 3,3333}))$  en la ecuación (2.34), usamos la regla de John (2.2) con  $\mu = -3, \pi = -1, n = 4$  y por lo tanto  $O(h^4 (T_{\beta 3,3333})) = \frac{h\theta^2\varepsilon}{\lambda}$ . de aquí que la ecuación (2.34) se escribe como

$$(T_3^{\alpha})_{u=0} = -\frac{1}{2}h^2 E^{\alpha\beta} (T_{\beta;33}^3)_{u=0} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda).$$

Por otro lado, del par de ecuaciones de equilibrio en la forma  $T_{\beta;\gamma}^{\gamma} + T_{\beta;3}^3 = 0$ , tomando la derivada covariante respecto al índice 3, multiplicando por  $E^{\alpha\beta}$ , se tiene que  $E^{\alpha\beta} T_{\beta;33}^3 = -E^{\alpha\beta} T_{\beta;\gamma 3}^{\gamma}$  y por lo tanto

$$(T_3^{\alpha})_{u=0} = \frac{1}{2}h^2 E^{\alpha\beta} (T_{\beta;\gamma 3}^{\gamma})_{u=0} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda).$$

Por el hecho que  $T^{\gamma\alpha}{}_{;\gamma 3} = T^{\gamma\alpha}{}_{,\gamma 3} + O(t^2)_{;\gamma 3}$  que se obtiene al derivar (2.26), además  $O(t^2)_{;\gamma 3} = O(t)O(t_{\alpha\gamma;\gamma 3}) = O(\varepsilon)O(\varepsilon h/\lambda^2)$  al utilizar la regla de John con  $\mu = -1, \pi = -1, n = 2$  y de la definición de  $\theta$  mostrando que  $\varepsilon = O(\theta^2)$ .

$$(T_3^\alpha)_{u=0} = \frac{1}{2}h^2 E^{\alpha\beta} (t_{\beta;\gamma 3}^\gamma)_{u=0} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda).$$

$$(T_3^\alpha)_{u=0} = \frac{1}{2}h^2 E^{\alpha\beta} E^{\gamma\mu} (t_{\mu\beta;\gamma 3})_{u=0} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda).$$

que es equivalente por la propiedad (B.2) aplicada al índice  $\mu$ . Dado que  $(t_{\mu\beta;\gamma 3})_{u=0} = \sigma_{\mu\beta}$  implica  $t_{\mu\beta;\gamma 3} = \sigma_{\mu\beta;\gamma}$

$$(T_3^\alpha)_{u=0} = \frac{1}{2}h^2 E^{\alpha\beta} E^{\gamma\mu} \sigma_{\mu\beta|\gamma} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda).$$

Usando la propiedad del tensor métrico tanto que su derivada covariante vale cero (para poder entrar o salir de la derivada covariante como constante), así como su propiedad de subir y bajar índices (B.2) se tiene que

$$(T_3^\alpha)_{u=0} = \frac{1}{2}h^2 \sigma^{\alpha\gamma}{}_{|\gamma} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda).$$

Tomando la derivada covariante y contrayendo respecto a  $\alpha$  se obtiene

$$(T_{3|\alpha}^\alpha)_{u=0} = \frac{1}{2}h^2 \sigma^{\alpha\gamma}{}_{|\gamma\alpha} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2). \quad (2.35)$$

Ya que la derivada covariante de los términos en  $h^4$  están representados por  $h^4 T_{3333\alpha}^{3\alpha}$  y por las estimaciones de John con  $\mu = -3, \pi = -1, n = 5$  se tiene  $h^4 T_{3333\alpha}^{3\alpha} = h^4 O(\varepsilon\lambda^{-5}h/\lambda) = O(h\varepsilon\theta^2/\lambda^2)$ . Con esto se prueba la estimación (4) ■

**Prueba 5.** Para probar (5) utilizamos las condiciones de frontera (2.19) en la definición del tensor de pseudo-esfuerzos  $T_i^m = \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} t_i^m - W\delta_i^m$ , se tendría que  $T_3^3 + \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} p + W = 0$  del hecho que  $t_3^3 = -p$  para  $u = h$  y  $T_3^3 + W = 0$  para  $u = -h$ . Tenemos los siguientes desarrollos de Taylor valuados en  $h, -h$  respectivamente

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{k!} (T_{3,(3,k)}^3)_{u=0} h^k + \sum \frac{1}{k!} (W_{3,(3,k)})_{u=0} h^k + \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} p \Big|_{u=h} &= 0 \\ \sum \frac{1}{k!} (T_{3,(3,k)}^3)_{u=0} (-1)^k h^k + \sum \frac{(-1)^k}{k!} (W_{3,(3,k)})_{u=0} h^k &= 0 \end{aligned}$$

Si restamos el par de ecuaciones sólo quedan las potencias impares y dividiendo por  $2h$  se tienen la siguiente ecuación

$$(T_{3,3}^3 + W_{,3})_{u=0} + \frac{h^2}{3!}(T_{3,333}^3 + W_{,333})_{u=0} + \frac{1}{2h} \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} p \Big|_{u=h} + h^4(T_{3,33333}^3 + W_{,33333})_{u=0} + O(h^6) = 0 \quad (2.36)$$

Las estimaciones del último término se calculan con la fórmula de John con  $\mu = -3, \pi = -1, n = 5$  de tal forma que  $h^4 T_{33,33333} = h^4 O(\varepsilon \frac{\lambda^{-4}}{h}) = \frac{h^3}{\lambda^4} \varepsilon = \frac{h}{\lambda^2} \theta^2 \varepsilon$

$$h^4 (T_{33,33333})_{u=0} = \frac{\varepsilon \theta^2 h}{\lambda^2}$$

Para  $W_{,33333}$  se usa el hecho que  $W_{,3} = \left(\frac{g}{G}\right)^{1/2} t^{mk} \varepsilon_{mk,3}$  dada en (2.17) y la relación lineal entre  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  y  $t_{\alpha\beta}$  (2.8), se tiene que  $W_{,3} = O(t^{mk}) O(\varepsilon_{mk,3}) = O(\varepsilon) O(t_{mk,3})$  implica  $h^4 W_{,33333} = h^4 O(\varepsilon) O(t_{33,33333})$ , donde utilizando la regla de John con  $\mu = -3, \pi = -1, n = 5$  implica

$$h^4 (W_{,33333})_{u=0} = O\left(\frac{\varepsilon^2 h^3}{\lambda^4}\right) = O\left(\frac{\varepsilon^2 \theta^2 h}{\lambda^2}\right)$$

El mismo argumento utilizado anteriormente implica que

$$h^2 W_{,333} = h^2 O(\varepsilon) O(t_{33,333})$$

con la regla de John con  $\mu = -1, \pi = -1, n = 3$  implica  $t_{33,333} = O\left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2 h}\right)$  por lo que

$$h^2 (W_{,333})_{u=0} = O(\varepsilon \theta^2 h / \lambda^2)$$

con ello (2.36) se escribe como

$$(T_{3,3}^3 + W_{,3})_{u=0} = -\frac{h^2}{6} (T_{3,333}^3)_{u=0} - \frac{p}{2h} + O(\varepsilon \theta^2 h / \lambda^2). \quad (2.37)$$

A continuación mostramos que podemos cambiar las derivadas parciales por derivadas covariantes en la ecuación anterior. Se tiene que  $h^2 T_{3,333}^3 = h^2 T_{3,333}^3 + O(\theta^2 \varepsilon h / \lambda^2)$  porque  $T_{3,333}^3 = T_{3,333}^3 + O(T_{3,33}^3) O(\Gamma)$ , pero  $O(\Gamma) = O(1/R) = O\left(\frac{\theta}{\lambda}\right)$  y de la regla de John con  $\mu = 0, \pi = 0, n = 2$  implica

$O(T_{3,33}^3) = O(\frac{\varepsilon}{\lambda^2})$ , se concluye que  $T_{3,333}^3 = T_{3,333}^3 + O(\frac{\varepsilon}{\lambda^2})O(\frac{\theta}{\lambda})$  y del hecho que  $\lambda = h/\theta$  se obtiene el resultado, por lo que la ecuación anterior toma la forma

$$(T_{3,3}^3 + W_{,3})_{u=0} = -\frac{h^2}{6}(T_{3,333}^3)_{u=0} - \frac{p}{2h} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2). \quad (2.38)$$

El término  $T_{3,333}^3$  se manipula como sigue. De las ecuaciones de equilibrio  $T_{i;m}^m = 0$ , usando la convención que los índices con letra griega toman los valores 1, 2, y las letras latinas los valores 1, 2, 3, se tiene que

$$E^{\alpha\beta}T_{\beta;\gamma}^\gamma + E^{\alpha\beta}T_{\beta;3}^3 = 0$$

Por estar sobre la superficie media,  $E^{\alpha\beta}$  sube los índices en cada término de la ecuación anterior dado que entra en la derivada covariante como constante, ya que  $E^{\alpha\beta}_{;\gamma} = 0$ , por lo tanto

$$T^{\gamma\alpha}_{;\gamma} + T^{3\alpha}_{;3} = 0$$

Tomando la derivada covariante respecto  $\alpha$  y contrayendo

$$T^{\gamma\alpha}_{;\gamma\alpha} + T^{3\alpha}_{;3\alpha} = 0$$

Si  $a^{\alpha\beta}$  es un tensor simétrico entonces

$$a^{\alpha\beta}_{;\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}_{;\beta\alpha}$$

Por el hecho que se está sumando sobre ambos índices. Con esto la ecuación de equilibrio se puede escribir como

$$T^{\gamma\alpha}_{;\gamma\alpha} + (T^{3\alpha}_{;\alpha})_{;3} = 0$$

$$T^{\gamma\alpha}_{;\gamma\alpha} + (T^{3\alpha}_{;\alpha} + T^{33}_{;3})_{;3} - T^{33}_{;33} = 0$$

El segundo término es la ecuación de equilibrio y vale cero, por lo tanto

$$T^{\gamma\alpha}_{;\gamma\alpha} = T^{33}_{;33} = G^{j3}T^3_{j;33} = T^3_{3;33}$$

del hecho que la métrica con respecto a la superficie media es cero excepto para  $j = 3$ . Por lo que la ecuación (2.37) se escribe como

$$(T_{3,3}^3 + W_{,3})_{u=0} = -\frac{h^2}{6}(T^{\gamma\alpha}_{;\gamma\alpha 3})_{u=0} - \frac{p}{2h} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2).$$

usando el hecho que  $(T^{\gamma\alpha}_{;\gamma\alpha 3})_{u=0} = \sigma^{\gamma\alpha}|_{\gamma\alpha} + O(t^2)|_{\alpha\beta 3}$  al derivar (2.26) y que  $h^2 O(t^2)|_{\alpha\beta 3} = 2h^2 O(t)O(t^{\alpha\beta})|_{\alpha\beta 3} = h^2 O(\varepsilon)O(t_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2 3}) = h^2 O(\varepsilon)O(\varepsilon/\lambda^2 h) = O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2)$  por la regla de John con  $\mu = -1, \pi = -1, n = 3$ , y por lo tanto

$$(T^3_{3,3} + W_{,3})_{u=0} = -\frac{h^2}{6}\sigma^{\gamma\alpha}|_{\gamma\alpha} - \frac{p}{2h} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2). \quad (2.39)$$

El término  $(W_{,3})_{u=0}$  de la ecuación (2.39) se estima por medio de las fórmulas (2.11) y (2.17) y de la estimación para  $(\frac{g}{G})^{1/2} = 1 + O(\varepsilon)$  (2.7), como se ilustra a continuación: Por (2.17)

$$(W_{,3})_{u=0} = \left( \left( \frac{g}{G} \right)^{1/2} t^{mk} \varepsilon_{mk,3} \right)_{u=0}$$

notando que el término  $t^{mk} \varepsilon_{mk,3}$  se puede escribir como

$$t^{mk} \varepsilon_{mk,3} = t^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta,3} + 2t^{3\alpha} \varepsilon_{3\alpha,3} + t^{33} \varepsilon_{33,3}.$$

De la relación (2.8),  $\varepsilon_{ij} = O(t_{ij})$  y  $O(t) = O(\varepsilon)$  por lo que  $t^{3\alpha} \varepsilon_{3\alpha,3} = O(t^{3\alpha})O(t_{3\alpha,3}) = O(\varepsilon\theta)O(\varepsilon/\lambda) = O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2)$  donde se usó (2.22) y la regla de John con  $\mu = 0, \pi = 0, n = 1$ . El término  $t^{33} \varepsilon_{33,3} = O(t^{33})O(t_{33,3}) = O(\varepsilon\theta^2)O(\varepsilon\theta/\lambda) = O(\varepsilon^2\theta^2 h/\lambda^2)$  donde se usó la estimación (1) enunciada en este teorema. Y por lo tanto

$$t^{mk} \varepsilon_{mk,3} = t^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta,3} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2).$$

Usando (2.11)

$$(W_{,3})_{u=0} = -(t^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta})_{u=0} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2).$$

Al estar valuada sobre la superficie media  $(t^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta})_{u=0} = \tau^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}$ , por lo que

$$(W_{,3})_{u=0} = -\tau^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2).$$

Sustituyendo en (2.39) implica que

$$(T^3_{3,3})_{u=0} = -\frac{h^2}{6}\sigma^{\alpha\gamma}|_{\alpha\gamma} - \frac{p}{2h} + \tau^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} + O(\varepsilon\theta^2 h/\lambda^2). \quad (2.40)$$

Con lo que se prueba la estimación (5). ■

Sustituyendo las estimaciones (2),(3),(4),(5), en la ecuación (2.32) y despreciando los términos en  $O(\varepsilon\theta^2h/\lambda^2)$  se tiene la ecuación

$$\frac{1}{2}h^2\sigma^{\alpha\gamma}|_{\gamma\alpha} - \frac{h^2}{6}\sigma^{\alpha\gamma}|_{\alpha\gamma} - \frac{p}{2h} + \tau^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta} + \tau_{\beta}^{\alpha}b_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

$$\frac{1}{3}h^2\sigma^{\alpha\gamma}|_{\gamma\alpha} - \frac{p}{2h} + \tau^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta} + \tau_{\beta}^{\alpha}b_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

Multiplicando por  $2h$  y usando el hecho que  $\eta_{\alpha\beta} = 2h\tau_{\alpha\beta}$ ,  $m_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}h^3\sigma_{\alpha\beta}$ .

$$m^{\alpha\gamma}|_{\gamma\alpha} + \eta^{\alpha\beta}(\rho_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}) = p,$$

donde en este caso  $b_{\alpha\beta}$  es el tensor métrico de la superficie sin deformar. Con esto se prueba el teorema ■



## 2.5. Ecuaciones de Compatibilidad

Hasta el momento disponemos de 6 ecuaciones constitutivas, y 3 ecuaciones de balance de fuerzas y momentos. Las variables que estamos considerando sobre la superficie son:  $\varepsilon_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta}$ , cada tensor con 3 variables independientes, dando un total de 12 ecuaciones. Para completar el sistema de ecuaciones se requieren 3 ecuaciones más. Las cuales serán obtenidas de consideraciones geométricas. Tanto la superficie deformada como la superficie no deformada, deben satisfacer la ecuación de Gauss (B.20) así como la de Mainardi (B.19)

De la ecuación de Mainardi (B.19) se tiene que

$$\bar{b}_{\alpha\beta|\lambda} - \bar{b}_{\alpha\lambda|\beta} = 0$$

$$L_{\alpha\beta|\lambda} - L_{\beta\alpha|\lambda} = 0$$

para la superficie deformada y la superficie no deformada respectivamente. Trabajando la primera ecuación y expresando las derivadas covariantes con respecto a los símbolos de Christoffel (B.15) se tiene

$$\bar{b}_{\alpha\beta|\lambda} = \bar{b}_{\alpha\beta,\lambda} - \bar{b}_{\kappa\beta}\bar{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\kappa} - \bar{b}_{\alpha\kappa}\bar{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\kappa}.$$

Sustituyendo la conexión para los símbolos de Christoffel  $\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + C_{jk}^i$  en la ecuación anterior se obtiene

$$\bar{b}_{\alpha\beta|\lambda} = \bar{b}_{\alpha\beta,\lambda} - \bar{b}_{\kappa\beta}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\kappa} - \bar{b}_{\alpha\kappa}\Gamma_{\beta\lambda}^{\kappa} - \bar{b}_{\kappa\beta}C_{\alpha\lambda}^{\kappa} - \bar{b}_{\alpha\kappa}C_{\beta\lambda}^{\kappa}.$$

Identificando los primeros tres términos del lado derecho de la ecuación anterior como la derivada covariante del tensor  $\bar{b}_{\alpha\beta}$  respecto a la superficie no deformada, se tiene

$$\bar{b}_{\alpha\beta|\lambda} = \bar{b}_{\alpha\beta|\lambda} - \bar{b}_{\kappa\beta}C_{\alpha\lambda}^{\kappa} - \bar{b}_{\alpha\kappa}C_{\beta\lambda}^{\kappa}$$

y de manera análoga permutando índices se tiene que

$$\bar{b}_{\alpha\lambda|\beta} = \bar{b}_{\alpha\lambda|\beta} - \bar{b}_{\kappa\lambda}C_{\alpha\beta}^{\kappa} - \bar{b}_{\alpha\kappa}C_{\lambda\beta}^{\kappa}$$

tomando la diferencia e igualando a cero

$$\bar{b}_{\alpha\beta|\lambda} - \bar{b}_{\alpha\lambda|\beta} - \bar{b}_{\kappa\beta}C_{\alpha\lambda}^{\kappa} + \bar{b}_{\kappa\lambda}C_{\alpha\beta}^{\kappa} = 0.$$

Usemos el hecho que el tensor de curvatura se define como  $\rho_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta}$  donde hemos llamado  $L_{\alpha\beta}$  la segunda forma fundamental de la superficie no deformada. Entonces  $\bar{b}_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta}$ , por lo que

$$\rho_{\alpha\beta|\lambda} + L_{\alpha\beta|\lambda} - \rho_{\alpha\lambda|\beta} - L_{\alpha\lambda|\beta} - (\rho_{\kappa\beta} + L_{\kappa\beta})C_{\alpha\lambda}^{\kappa} + (\rho_{\alpha\kappa} + L_{\alpha\kappa})C_{\alpha\beta}^{\kappa} = 0.$$

Usando el hecho que  $L_{\alpha\beta|\lambda} - L_{\alpha\lambda|\beta} = 0$

$$\rho_{\alpha\beta|\lambda} - \rho_{\alpha\lambda|\beta} = (\rho_{\kappa\beta} + L_{\kappa\beta})C_{\alpha\lambda}^{\kappa} - (\rho_{\alpha\kappa} + L_{\alpha\kappa})C_{\alpha\beta}^{\kappa}$$

$$\rho_{\alpha\beta|\lambda} - \rho_{\alpha\lambda|\beta} = \bar{b}_{\kappa\beta}C_{\alpha\lambda}^{\kappa} - \bar{b}_{\alpha\kappa}C_{\alpha\beta}^{\kappa}$$

Por (2.29) se tiene que  $\bar{b}_{\kappa\beta} = O(R)$ . Por la definición (2.9)

$$C_{\alpha\lambda}^{\kappa} = O(g^{\alpha\beta})O(g_{\alpha\beta,\gamma}) = O\left(\frac{1}{R^2}\right)O(\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma}) = O\left(\frac{1}{R^2}\right)O(t_{\alpha\beta,\gamma}) = O\left(\frac{1}{R^2}\right)O(\varepsilon/h)$$

donde se usa el hecho que  $g_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}$  y la relación lineal entre el tensor de esfuerzos  $t_{\alpha\beta}$  y el tensor de deformación  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  y la regla de John con  $\mu = 0, \pi = 0, n = 1$ . Por lo tanto el término del lado derecho de la ecuación anterior vale  $O\left(\frac{1}{R}\right)O(\varepsilon/h) = O(\varepsilon\theta^2/h\lambda)$ , donde se usó el hecho que  $O(1/R) = O(\theta^2/h)$ . Por lo tanto

$$\rho_{\alpha\beta|\lambda} - \rho_{\alpha\lambda|\beta} = O(\varepsilon\theta^2/h\lambda)$$

Sólo hay dos ecuaciones no triviales para  $\beta \neq \lambda$ , usando la propiedad del tensor de permutación dada en la observación (B.1) se pueden escribir como

$$\epsilon^{\beta\mu} \rho_{\sigma\mu|\beta} = 0$$

Contrayendo esta ecuación por  $\varepsilon^{\alpha\sigma}$  se obtiene

$$\varepsilon^{\alpha\sigma} \epsilon^{\beta\mu} \rho_{\sigma\mu|\beta} = 0. \quad (2.41)$$

Finalmente de la ecuación de Gauss para la curvatura dada en la forma (B.23)

$$\bar{b}_{11}\bar{b}_{22} - \bar{b}_{12}\bar{b}_{12} = \frac{1}{2}(g_{12,21} + g_{21,12} - g_{11,22} - g_{22,11}) + g_{\lambda\mu} (\bar{\Gamma}_{12}^{\mu}\bar{\Gamma}_{21}^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{11}^{\mu}\bar{\Gamma}_{22}^{\lambda})$$

Usamos el hecho que  $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + C_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\kappa}(g_{\kappa\alpha|\beta} + g_{\beta\kappa|\alpha} - g_{\alpha\beta|\kappa})$  donde  $\bar{g}^{\mu\kappa}g_{\kappa\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu}$  es el tensor recíproco, y después de sustituir se encuentra que (véase [John])

$$\bar{b}_{11}\bar{b}_{22} - \bar{b}_{12}\bar{b}_{12} = \frac{1}{2}(g_{12|21} + g_{21|12} - g_{11|22} - g_{22|11})$$

$$+\frac{1}{2}g_{\alpha}^{\alpha}(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) + g_{\lambda\mu} (C_{12}^{\mu}C_{21}^{\lambda} - C_{11}^{\mu}C_{22}^{\lambda}). \quad (2.42)$$

Se tienen las siguientes estimaciones

$$O(g_{\alpha\beta}) = O(\varepsilon)$$

$$O(g^{\alpha\beta}) = O(1/\varepsilon)$$

$$O(g_{\alpha\beta,\lambda}) = O(t_{\alpha\beta,\lambda}) = O(\varepsilon\theta/\lambda)$$

$$O(C_{\alpha\beta}^{\kappa}) = O(g^{\kappa\lambda})O(g_{\alpha\beta,\lambda}) = O(\theta/\lambda)$$

$$O(g_{\alpha\beta})O(C^2) = O(\varepsilon\theta^2/\lambda^2)$$

La primera vale porque  $g_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}$ , la segunda porque  $g^{k\alpha}g_{k\beta} = \delta_{\beta\alpha}$  es el tensor recíproco y por lo tanto  $O(g^{k\alpha}) = \frac{1}{O(g_{k\beta})} = O(\frac{1}{\varepsilon})$ . La tercera por las estimaciones de John con  $\mu = 1, \pi = 1, n = 1$ , la cuarta por la definición (2.9), la quinta se obtiene haciendo el cálculo y usando lo hecho que  $\bar{b}_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta}$  y  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta})$  y que  $G_{\alpha\beta|\gamma} = 0$  por (B.18), la ecuación (2.42) se escribe como

$$\begin{aligned} &(\rho_{11} + L_{11})(\rho_{22} + L_{22}) - (\rho_{12} + L_{12})(\rho_{21} + L_{21}) \\ &= \gamma_{12|21} + \gamma_{21|12} - \gamma_{11|22} - \gamma_{22|11} + \frac{1}{2}g_{\alpha}^{\alpha}(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) + O(\varepsilon\theta^2/\lambda^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} + \rho_{11}L_{22} + L_{11}\rho_{22} - \rho_{12}L_{21} - L_{12}\rho_{21} + L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} \\ &= \gamma_{12|21} + \gamma_{21|12} - \gamma_{11|22} - \gamma_{22|11} + \frac{1}{2}g_{\alpha}^{\alpha}(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) + O(\varepsilon\theta^2/\lambda^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} + \rho_{11}L_{22} + L_{11}\rho_{22} - \rho_{12}L_{21} - L_{12}\rho_{21} \\ &= \gamma_{12|21} + \gamma_{21|12} - \gamma_{11|22} - \gamma_{22|11} + (\frac{1}{2}g_{\alpha}^{\alpha} - 1)(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) + O(\varepsilon\theta^2/\lambda^2). \end{aligned}$$

En términos del tensor de permutación se observa que

$$\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\sigma}\epsilon^{\beta\mu}\rho_{\alpha\beta}\rho_{\sigma\mu}$$

$$\rho_{11}L_{22} + L_{11}\rho_{22} - \rho_{12}L_{21} - L_{12}\rho_{21} = \epsilon^{\alpha\sigma}\epsilon^{\beta\mu}L_{\alpha\beta}\rho_{\sigma\mu}$$

$$\gamma_{12|21} + \gamma_{21|12} - \gamma_{11|22} - \gamma_{22|11} = -\epsilon^{\alpha\sigma}\epsilon^{\beta\mu}\gamma_{\alpha\beta|\sigma\mu}.$$

Del hecho que  $(\frac{1}{2}g_\alpha^\alpha - 1) \approx 0$  y despreciando los términos de orden  $O(\varepsilon\theta^2/\lambda^2)$ , se obtiene la forma final de las ecuaciones de compatibilidad

$$\varepsilon^{\alpha\sigma}\varepsilon^{\beta\mu}\left[\gamma_{\alpha\beta|\sigma\mu} + L_{\alpha\beta}\rho_{\sigma\mu} + \frac{1}{2}\rho_{\alpha\beta}\rho_{\sigma\mu}\right] = 0. \quad (2.43)$$

Los términos en  $O(\varepsilon\theta^2)$  han sido omitidos en la forma final de las ecuaciones, por lo que el sistema es una aproximación válida siempre y cuando  $\varepsilon, \theta$  sean pequeños. De la definición del parámetro  $\theta$  se tiene que  $\theta = \max\left(\frac{h}{D}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \sqrt{\varepsilon}\right)$ , aquí se ve que tres cosas tienen que pasar, primero que el término  $\frac{h}{D}$  sea pequeño, y como  $D$  es la distancia del punto de la superficie a la frontera, entonces la aproximación vale lejos de la frontera, segundo,  $h/R$  pequeño implica que estamos considerando un cascarón delgado, y por último  $\sqrt{\varepsilon}$  pequeño implica que consideramos deformaciones pequeñas. Si estas tres cosas suceden, entonces con seguridad podemos despreciar los términos en  $O(\varepsilon\theta^2)$ .

Si en las ecuaciones constitutivas consideramos cascarones de espesor  $h$  en lugar de  $2h$  como se ha hecho hasta el momento, se encuentra que (2.6) y (2.12) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{hE} [(1 + \nu)\tau_{\alpha\beta} - \nu\tau_m^m G_{\alpha\beta}] \\ m_{\alpha\beta} &= -Eh^3\gamma^2 [(1 - \nu)\rho_{\alpha\beta} + \nu\rho_\gamma^\gamma G_{\alpha\beta}] \end{aligned}$$

donde  $\gamma^2 = \frac{1}{12(1-\nu^2)}$ . Si llamamos  $\tilde{a}_{\alpha\beta}, \tilde{b}_{\alpha\beta}$  a la primera y segunda formas fundamentales de la esfera sin deformar respectivamente, el sistema de ecuaciones completo se verá como sigue

$$\varepsilon^{\alpha\sigma}\varepsilon^{\beta\mu}\left[\gamma_{\alpha\beta|\sigma\mu} + \tilde{b}_{\alpha\beta}\rho_{\sigma\mu} + \frac{1}{2}\rho_{\alpha\beta}\rho_{\sigma\mu}\right] = 0$$

$$\varepsilon^{\alpha\sigma}\varepsilon^{\beta\mu}\rho_{\sigma\mu|\beta} = 0$$

$$m^{\alpha\gamma}{}_{|\gamma\alpha} + \eta^{\alpha\beta}(\rho_{\alpha\beta} + \tilde{b}_{\alpha\beta}) = p$$

$$\eta_{\alpha|\beta}^\beta = 0$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{hE} [(1 + \nu)\tau_{\alpha\beta} - \nu\tau_m^m \tilde{a}_{\alpha\beta}]$$

$$m_{\alpha\beta} = -\frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)} [(1 - \nu)\rho_{\alpha\beta} + \nu\rho_\gamma^\gamma \tilde{a}_{\alpha\beta}]$$



# Capítulo 3

## Ecuaciones de Deformación

A continuación se hace una deducción de las ecuaciones de deformación para el problema de una esfera sometida a un campo de presión uniforme. Originalmente se tiene un sistema de 4 ecuaciones tensoriales, el primer par de ellas son las llamadas ecuaciones de compatibilidad Mainardi-Codazzi, que son condiciones que deben satisfacer la primera y segunda formas fundamentales, con el fin de que estas representen una superficie. El otro par corresponde al balance de esfuerzos obtenidas en el capítulo anterior. Dicho sistema es reducido a dos ecuaciones por el hecho de que las ecuaciones (3.2),(3.3) pueden ser resueltas en términos de la función de curvatura  $W$  y la función de esfuerzos  $F$ . Junto con las ecuaciones constitutivas que relacionan los esfuerzos con las deformaciones, el sistema de ecuaciones se reduce a dos ecuaciones para  $W, F$ .

### 3.1. Deducción

Partimos de las ecuaciones de John de orden más bajo planteadas como en el capítulo anterior

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} \left[ \gamma_{\alpha\beta|\sigma\mu} + \tilde{b}_{\alpha\beta} \rho_{\sigma\mu} + \frac{1}{2} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\sigma\mu} \right] = 0 \quad (3.1)$$

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} \rho_{\sigma\mu|\beta} = 0 \quad (3.2)$$

$$m_{|\alpha\beta}^{\alpha\beta} + (\tilde{b}_{\alpha\beta} + \rho_{\alpha\beta}) \eta^{\alpha\beta} = p \quad (3.3)$$

$$\eta_{|\beta}^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.4)$$

y las ecuaciones constitutivas

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh} [(1 + \nu)\eta_{\alpha\beta} - \nu\tilde{a}_{\alpha\beta}\eta_{\gamma}^{\gamma}] \quad (3.5)$$

$$m^{\alpha\beta} = -Eh^3\gamma^2 [(1 - \nu)\rho^{\alpha\beta} + \nu\tilde{a}^{\alpha\beta}\rho_{\gamma}^{\gamma}]. \quad (3.6)$$

El tensor de deformación y el tensor de curvatura se definen respectivamente como

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta} - \tilde{a}_{\alpha\beta}) \quad (3.7)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - \tilde{b}_{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

donde hemos llamado  $\bar{a}_{\alpha\beta}, \bar{b}_{\alpha\beta}$  la primera y segunda formas fundamentales de la esfera deformada y  $\tilde{a}_{\alpha\beta}, \tilde{b}_{\alpha\beta}$  de la esfera sin deformar y  $\gamma^2 = \frac{1}{12(1-\nu^2)}$ .

**Teorema 3.1** *Las ecuaciones (3.2) y (3.4) tienen por solución*

$$\rho_{\alpha\beta} = W_{|\alpha\beta} + KW\tilde{a}_{\alpha\beta} \quad (3.9)$$

$$\eta^{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}F_{|\sigma\mu} + KF\tilde{a}^{\alpha\beta} \quad (3.10)$$

respectivamente y donde  $W, F$  son dos funciones dos veces derivables,  $K = \frac{1}{R^2}$ .

**Prueba.** Verificamos que son soluciones al sustituir y recordando que las derivadas covariantes para  $\tilde{a}_{\alpha\beta}$  y  $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$  son cero como se muestra en el apéndice de geometría (B.18),(B.32). Primero para (3.2) se tiene que

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}\rho_{\sigma\mu|\beta} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}(W_{|\sigma\mu\beta} + KW_{,\beta}\tilde{a}_{\sigma\mu}) = 0.$$

Para  $\alpha = \theta$  tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^{\theta\phi}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}(W_{|\phi\mu\beta} + KW_{,\beta}\tilde{a}_{\phi\mu}) &= \tilde{\varepsilon}^{\theta\phi}\left(\tilde{\varepsilon}^{\theta\phi}\left(W_{|\phi\phi\theta} + \frac{1}{R^2}W_{,\theta}\tilde{a}_{\phi\phi}\right) + \tilde{\varepsilon}^{\phi\theta}W_{|\phi\theta\phi}\right) \\ &= (\tilde{\varepsilon}^{\theta\phi})^2(W_{|\phi\phi\theta} + \text{sen}^2\theta W_{,\theta} - W_{|\phi\theta\phi}) = 0 \end{aligned}$$

por la fórmula de Ricci demostrada en el caso de la esfera (B.34). Para  $\alpha = \phi$  tenemos

$$\tilde{\varepsilon}^{\phi\theta}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}(W_{|\theta\mu\beta} + K\tilde{a}_{\theta\mu}W_{,\beta}) = \tilde{\varepsilon}^{\phi\theta}(\tilde{\varepsilon}^{\theta\phi}W_{|\theta\phi\theta} + \tilde{\varepsilon}^{\theta\theta}(W_{|\theta\theta\phi} + KW_{,\phi}\tilde{a}_{\theta\theta}))$$

$$= (\tilde{\varepsilon}^{\phi\theta})^2 (-W_{|\theta\phi\theta} + W_{,\phi} + W_{|\theta\theta\phi}) = 0$$

Sustituyendo la fórmula para  $\eta^{\alpha\beta}$  en la ecuación(3.4) se tiene que

$$\eta_{|\beta}^{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} F_{|\sigma\mu\beta} + K F_{,\beta} \tilde{a}^{\alpha\beta}.$$

Para  $\alpha = \theta$  se tiene que

$$\begin{aligned} &= \tilde{\varepsilon}^{\theta\phi} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} F_{|\phi\mu\beta} + K F_{,\beta} \tilde{a}^{\theta\beta} = \tilde{\varepsilon}^{\theta\phi} \tilde{\varepsilon}^{\theta\phi} F_{|\phi\phi\theta} + \tilde{\varepsilon}^{\theta\phi} \tilde{\varepsilon}^{\phi\theta} F_{|\phi\theta\phi} + K F_{,\theta} \tilde{a}^{\theta\theta} \\ &= \frac{1}{R^4 \text{sen}^2\theta} (F_{|\phi\phi\theta} - F_{|\phi\theta\phi} + F_{,\theta}) = 0. \end{aligned}$$

Para  $\alpha = \phi$  se tiene que

$$\begin{aligned} &= \tilde{\varepsilon}^{\phi\theta} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} F_{|\theta\mu\beta} + K F_{,\phi} \tilde{a}^{\phi\beta} = \tilde{\varepsilon}^{\phi\theta} (\tilde{\varepsilon}^{\theta\phi} F_{|\theta\phi\theta} + \tilde{\varepsilon}^{\phi\theta} F_{|\theta\theta\phi}) + \frac{1}{R^4 \text{sen}^2\theta} F_{,\phi} \\ &\quad \frac{1}{R^4 \text{sen}^2\theta} (-F_{|\theta\phi\theta} + F_{|\theta\theta\phi} + F_{,\phi}) = 0 \end{aligned}$$

donde se utilizaron las identidades

$$W_{|\phi\phi\theta} = W_{|\phi\theta\phi} - K \tilde{a}_{\phi\phi} W_{,\theta}$$

$$W_{|\theta\theta\phi} = W_{|\theta\phi\theta} - K \tilde{a}_{\theta\theta} W_{,\phi}$$

y por lo tanto

$$\eta_{|\beta}^{\alpha\beta} = 0.$$

■

Si derivamos estas expresiones, la primera respecto a  $\theta$  y a  $\phi$  la segunda, y sumando se tiene que

$$W_{|\phi\phi\theta\theta} + W_{|\theta\theta\phi\phi} = W_{|\phi\theta\phi\theta} + W_{|\theta\phi\theta\phi} - K (\tilde{a}_{\phi\phi} W_{|\theta\theta} + \tilde{a}_{\theta\theta} W_{|\phi\phi}).$$

Si definimos

$$\delta W = \tilde{a}^{\alpha\sigma} \tilde{a}^{\beta\mu} W_{|\sigma\mu\alpha\beta},$$

utilizando el hecho que en el caso de la esfera sólo  $\tilde{a}^{\theta\theta}$ ,  $\tilde{a}^{\phi\phi}$  son diferentes de cero por lo tanto desarrollando la suma para índices repetidos se tiene

$$\begin{aligned} &\tilde{a}^{\alpha\sigma} \tilde{a}^{\beta\mu} W_{|\sigma\mu\alpha\beta} = (\tilde{a}^{\theta\theta})^2 W_{|\theta\theta\theta\theta} + \\ &(\tilde{a}^{\phi\phi})^2 W_{|\phi\phi\phi\phi} + \tilde{a}^{\theta\theta} \tilde{a}^{\phi\phi} (W_{|\phi\phi\theta\theta} + W_{|\theta\theta\phi\phi}) + K (\tilde{a}^{\theta\theta} W_{|\theta\theta} + \tilde{a}^{\phi\phi} W_{|\phi\phi}) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\delta W = \tilde{\Delta}^2 W + K \tilde{\Delta} W.$$



**Lema 3.1**

$$m^{\alpha\beta}{}_{|\alpha\beta} = -Eh^3\gamma^2(\tilde{\Delta}^2W + 2K\tilde{\Delta}W)$$

**Prueba.** Partimos de la ecuación constitutiva (3.6)

$$m^{\alpha\beta} = c\rho^{\alpha\beta} + d\rho_{\gamma}^{\alpha}\tilde{a}^{\alpha\beta}$$

donde  $c = -Eh^3\gamma^2(1 - \nu)$ ,  $d = -Eh^3\gamma^2\nu$ . Calculando la segunda derivada covariante del primer término

$$c\rho^{\alpha\beta}{}_{|\alpha\beta} = c\tilde{a}^{k\alpha}\tilde{a}^{l\beta}(\rho_{kl})_{|\alpha\beta} = c\tilde{a}^{k\alpha}\tilde{a}^{l\beta}(W_{|kl\alpha\beta} + K\tilde{a}_{kl}W_{|\alpha\beta})$$

donde se pasó el tensor  $\rho^{\alpha\beta}$  a su forma covariante (índices abajo) al contraer por el tensor métrico (B.2), luego estos salen de la derivada covariante como constantes por el hecho que su derivada covariante es cero (B.18).

$$c\rho_{|\alpha\beta}^{\alpha\beta} = c(\delta W + K\tilde{a}^{\alpha\beta}W_{|\alpha\beta}) = c(\tilde{\Delta}^2W + 2K\tilde{\Delta}W)$$

tenemos

$$d\tilde{a}^{\alpha\beta}(\rho_{\gamma}^{\alpha})_{|\alpha\beta} = d\tilde{a}^{k\gamma}\tilde{a}^{\alpha\beta}(W_{|k\gamma} + KW\tilde{a}_{k\gamma})_{|\alpha\beta}$$

donde se usa el hecho que  $\rho_{\gamma}^{\alpha} = \tilde{a}^{k\gamma}\rho_{k\gamma}$ . Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} d\tilde{a}^{k\gamma}\tilde{a}^{\alpha\beta}(W_{|k\gamma\alpha\beta} + KW_{|\alpha\beta}\tilde{a}_{k\gamma}) &= d(\tilde{a}^{k\gamma}\tilde{a}^{\alpha\beta}W_{|k\gamma\alpha\beta} + 2K\tilde{a}^{\alpha\beta}W_{|\alpha\beta}) \\ &= d(\tilde{\Delta}^2W + 2K\tilde{\Delta}W) \end{aligned}$$

donde se usó el hecho que  $\tilde{a}^{k\gamma}\tilde{a}_{k\gamma} = 2$ , y por lo tanto

$$m^{\alpha\beta}{}_{|\alpha\beta} = (c + d)(\tilde{\Delta}^2W + 2K\tilde{\Delta}W) = -Eh^3\gamma^2(\tilde{\Delta}^2W + 2K\tilde{\Delta}W)$$

■

**Lema 3.2**

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}\gamma_{\alpha\beta|\sigma\mu} = \frac{1}{Eh}(\tilde{\Delta}^2F + 2K\tilde{\Delta}F)$$

**Prueba.** De la ecuación constitutiva (3.5), tenemos

$$\gamma_{\alpha\beta} = c\eta_{\alpha\beta} + d\eta_k^k\tilde{a}_{\alpha\beta}$$

con  $c = \frac{1}{Eh}(1 + \nu)$ ,  $d = -\frac{1}{Eh}\nu$ . Queremos calcular lo siguiente

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} \gamma_{\alpha\beta|\sigma\mu} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} (c\eta_{\alpha\beta|\sigma\mu} + d(\eta_k^k)_{|\sigma\mu} \tilde{a}_{\alpha\beta}). \quad (3.11)$$

Para calcular el primer término notamos que  $\eta_{\alpha\beta} = \tilde{a}_{\alpha k} \tilde{a}_{\beta l} \eta^{kl}$  que se consigue por las propiedades del tensor métrico (B.2) para obtener una expresión contravariante (índices arriba) para  $\eta_{\alpha\beta}$ . Por (3.10) se tiene que  $\eta^{kl} = \tilde{\varepsilon}^{k\sigma} \tilde{\varepsilon}^{l\mu} F_{|\sigma\mu} + KF \tilde{a}^{kl}$  lo que implica

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} &= \tilde{a}_{\alpha k} \tilde{a}_{\beta l} (\tilde{\varepsilon}^{ki} \tilde{\varepsilon}^{lj} F_{|ij} + KF \tilde{a}^{kl}) \\ &= \tilde{\varepsilon}_{\alpha}^i \tilde{\varepsilon}_{\beta}^j F_{|ij} + K \tilde{a}_{\alpha\beta} F \\ \eta_{\alpha\beta} &= \tilde{a}^{ik} \tilde{a}^{jl} \tilde{\varepsilon}_{k\alpha} \tilde{\varepsilon}_{l\beta} F_{|ij} + K \tilde{a}_{\alpha\beta} F \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde se usó el hecho que  $\tilde{a}_{\alpha k} \tilde{\varepsilon}^{ki} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha}^i$ ,  $\tilde{a}_{\beta l} \tilde{a}^{kl} = \delta_{\alpha}^k$  y por lo tanto

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} \eta_{\alpha\beta|\sigma\mu} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} (\tilde{a}^{ik} \tilde{a}^{jl} \tilde{\varepsilon}_{k\alpha} \tilde{\varepsilon}_{l\beta} F_{|ij\sigma\mu} + K \tilde{a}_{\alpha\beta} F_{|\sigma\mu}).$$

Usando el hecho que  $\tilde{\varepsilon}^{\alpha k} \tilde{\varepsilon}_{\beta k} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ ,  $\tilde{\varepsilon}^{k\alpha} \tilde{\varepsilon}_{\beta k} = -\delta_{\alpha}^{\beta}$  y además

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} \tilde{a}_{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}_{\beta}^{\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} = \tilde{a}^{\sigma k} \tilde{\varepsilon}_{\beta k} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} = \tilde{a}^{\sigma k} \delta_k^{\mu} = \tilde{a}^{\sigma\mu}$$

en la primera igualdad se nota que el tensor métrico  $\tilde{a}_{\alpha\beta}$  está contrayendo la primera componente del tensor  $\varepsilon^{\alpha\sigma}$  y por lo tanto baja el índice, es decir  $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{a}_{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}_{\beta}^{\sigma}$ . Con estas simplificaciones se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} \eta_{\alpha\beta|\sigma\mu} &= \delta_k^{\sigma} \delta_l^{\mu} \tilde{a}^{ik} \tilde{a}^{jl} F_{|ij\sigma\mu} + \tilde{a}^{\sigma\mu} KF_{|\sigma\mu} \\ \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} \eta_{\alpha\beta|\sigma\mu} &= \tilde{a}^{i\sigma} \tilde{a}^{j\mu} F_{|ij\sigma\mu} + \tilde{a}^{\sigma\mu} KF_{|\sigma\mu} = \tilde{\Delta}^2 F + 2K \tilde{\Delta} F. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha}^{\alpha} &= \tilde{a}_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} = \tilde{a}_{\alpha\beta} (\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} F_{|\sigma\mu} + KF \tilde{a}^{\alpha\beta}) \\ &= \tilde{a}^{\sigma\mu} F_{|\sigma\mu} + 2KF = \tilde{a}^{ij} F_{|ij} + 2KF \\ \eta_{\alpha}^{\alpha} &= \tilde{a}^{\sigma\mu} F_{|\sigma\mu} + 2KF = \tilde{a}^{ij} F_{|ij} + 2KF. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por lo tanto

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} (\eta_k^k)_{|\sigma\mu} = \tilde{a}_{\alpha\beta} (\tilde{a}^{ij} F_{|ij\sigma\mu} + 2KF_{|\sigma\mu})$$

y por lo tanto

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}\tilde{a}_{\alpha\beta}(\eta_k^k)|_{\sigma\mu} = \tilde{a}^{\sigma\mu}\tilde{a}^{ij}F_{|ij\sigma\mu} + 2K\tilde{a}^{\sigma\mu}F_{|\sigma\mu} = \tilde{\Delta}^2F + 2K\tilde{\Delta}F.$$

Sustituyendo estos resultados en (3.11) se prueba que

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}\gamma_{\alpha\beta}|_{\sigma\mu} = \frac{1}{Eh}(\tilde{\Delta}^2F + 2K\tilde{\Delta}F)$$

■

A continuación hacemos la reducción de las 12 ecuaciones de John a sólo dos en términos de la función de curvatura  $W$  y la función de esfuerzos  $F$ . Del lema(3.2) la ecuación (3.1) se escribe como

**Teorema 3.2** *La ecuación (3.1) se escribe como*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Eh}(\tilde{\Delta}^2F + 2K\tilde{\Delta}F) - \frac{1}{R}(\tilde{\Delta}W + 2KW) + \\ & \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}W_{|\alpha\beta}W_{|\sigma\mu} + KW\tilde{\Delta}W + K^2W^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

**Prueba.**

$$\frac{1}{Eh}(\tilde{\Delta}^2F + 2K\tilde{\Delta}F) + \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} \left[ -\frac{\tilde{a}_{\alpha\beta}}{R}\rho_{\sigma\mu} + \frac{1}{2}\rho_{\alpha\beta}\rho_{\sigma\mu} \right] = 0$$

donde se usó el hecho que en el caso de la esfera  $\tilde{b}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{R}\tilde{a}_{\alpha\beta}$  (véase B.29). Trabajando el término

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{R}\tilde{a}^{\sigma\mu}\rho_{\sigma\mu} + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}\rho_{\alpha\beta}\rho_{\sigma\mu} \\ & = -\frac{1}{R}\tilde{a}^{\sigma\mu}(W_{|\sigma\mu} + KW\tilde{a}_{\sigma\mu}) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}(W_{|\alpha\beta} + KW\tilde{a}_{\alpha\beta})(W_{|\sigma\mu} + KW\tilde{a}_{\sigma\mu}) \\ & = -\frac{1}{R}(\tilde{\Delta}W + 2KW) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}(W_{|\alpha\beta}W_{|\sigma\mu} + KWW_{|\alpha\beta}\tilde{a}_{\sigma\mu} + KWW_{|\sigma\mu}\tilde{a}_{\alpha\beta} + K^2W^2\tilde{a}_{\alpha\beta}\tilde{a}_{\sigma\mu}) \\ & = -\frac{1}{R}(\tilde{\Delta}W + 2KW) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}W_{|\alpha\beta}W_{|\sigma\mu} + \frac{1}{2}(KWW_{|\alpha\beta}\tilde{a}^{\alpha\beta} + KWW_{|\sigma\mu}\tilde{a}^{\sigma\mu}) + \frac{1}{2}K^2W^2\tilde{\varepsilon}_{\beta\mu}\tilde{\varepsilon}^{\beta} \\ & = -\frac{1}{R}(\tilde{\Delta}W + 2KW) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}W_{|\alpha\beta}W_{|\sigma\mu} + KW\tilde{\Delta}W + K^2W^2 \end{aligned}$$

donde se usaron los hechos

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}\tilde{a}_{\sigma\mu} = \tilde{a}^{\alpha\beta}$$

$$W_{|\alpha\beta}\tilde{a}^{\alpha\beta} = \tilde{\Delta}W$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\beta\mu}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu} = 2$$

Por lo tanto (3.1) se reduce como

$$\frac{1}{Eh}(\tilde{\Delta}^2F + 2K\tilde{\Delta}F) - \frac{1}{R}(\tilde{\Delta}W + 2KW) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}W_{|\alpha\beta}W_{|\sigma\mu} + KW\tilde{\Delta}W + K^2W^2 = 0.$$

■

De igual forma para la tercera ecuación de John(3.3)

**Teorema 3.3** *La ecuación (3.3) se escribe como*

$$\begin{aligned} & Eh^3\gamma^2(\tilde{\Delta}^2W + 2K\tilde{\Delta}W) + \frac{1}{R}(\tilde{\Delta}F + 2KF) - \\ & K(F\tilde{\Delta}W + W\tilde{\Delta}F) - \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}F_{|\sigma\mu}W_{|\alpha\beta} - 2K^2WF = -p. \end{aligned} \quad (3.15)$$

**Prueba.** Se tiene a partir de la ecuación (3.3) y el lema (3.1),

$$-Eh^3\gamma^2(\tilde{\Delta}^2W + 2K\tilde{\Delta}W) + \left(-\frac{1}{R}\tilde{a}_{\alpha\beta} + \rho_{\alpha\beta}\right)\eta^{\alpha\beta} = p$$

Trabajando el término

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{1}{R}\tilde{a}_{\alpha\beta} - \rho_{\alpha\beta}\right)(\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}F_{|\sigma\mu} + KF\tilde{a}^{\alpha\beta}) \\ & = -\left(\frac{1}{R}\tilde{a}_{\alpha\beta} - W_{|\alpha\beta} - KW\tilde{a}_{\alpha\beta}\right)(\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}F_{|\sigma\mu} + KF\tilde{a}^{\alpha\beta}) \\ & = -\frac{1}{R}(\tilde{a}^{\sigma\mu}F_{|\sigma\mu} + 2KF) + \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}F_{|\sigma\mu}W_{|\alpha\beta} + KF\tilde{a}^{\alpha\beta}W_{|\alpha\beta} + KW\tilde{a}^{\sigma\mu}F_{|\sigma\mu} + 2K^2WF. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación completa después de multiplicar por un signo menos, se escribe como

$$Eh^3\gamma^2(\tilde{\Delta}^2W + 2K\tilde{\Delta}W) + \frac{1}{R}(\tilde{\Delta}F + 2KF) -$$

$$K(F\tilde{\Delta}W + W\tilde{\Delta}F) - \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}F_{|\sigma\mu}W_{|\alpha\beta} - 2K^2WF = -p.$$

■

Estas ecuaciones serán manipuladas un poco más. Para ello se requieren las siguientes observaciones. Tomando la ecuación (3.4) se tiene que

$$\eta_{|\beta}^{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}F_{|\sigma\mu\beta} + KF_{,\beta}\tilde{\alpha}^{\alpha\beta} = 0$$

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}F_{|\sigma\mu\beta} = -KF_{,\beta}\tilde{\alpha}^{\alpha\beta}$$

de igual forma tomando la ecuación (3.2)

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}\rho_{\sigma\mu|\beta} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}(W_{|\sigma\mu\beta} + KW_{,\beta}\tilde{\alpha}_{\sigma\mu}) = 0$$

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\sigma}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}W_{|\sigma\mu\beta} = -\tilde{\alpha}^{\alpha\beta}KW_{,\beta}$$

Con esto se pueden hacer las siguientes observaciones:

### Observación 3.1

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\lambda}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}(W_{|\lambda\mu}W_{,\alpha})_{|\beta} + \frac{1}{2}K\tilde{\alpha}^{\alpha\beta}W_{,\alpha}W_{,\beta} =$$

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\lambda}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}(W_{|\lambda\mu\beta}W_{,\alpha} + W_{|\lambda\mu}W_{|\alpha\beta}) + \frac{1}{2}K\tilde{\alpha}^{\alpha\beta}W_{,\alpha}W_{,\beta} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\lambda}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}W_{|\lambda\mu}W_{|\alpha\beta}$$

### Observación 3.2

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\lambda}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}(F_{|\lambda\mu}F_{,\alpha})_{|\beta} + \frac{1}{2}K\tilde{\alpha}^{\alpha\beta}F_{,\alpha}F_{,\beta} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\lambda}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}F_{|\lambda\mu}F_{|\alpha\beta}$$

### Observación 3.3

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\lambda}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}(F_{|\lambda\mu}W_{,\alpha})_{|\beta} + \frac{1}{2}K\tilde{\alpha}^{\alpha\beta}F_{,\alpha}W_{,\beta} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\lambda}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}F_{|\lambda\mu}W_{|\alpha\beta}$$

Con esto las ecuaciones (3.14), (3.15) se escriben como

$$\frac{1}{Eh}(\tilde{\Delta}^2F + 2K\tilde{\Delta}F) - \frac{1}{R}(\tilde{\Delta}W + 2KW) +$$

$$\frac{1}{2}(\tilde{\varepsilon}^{\alpha\lambda}\tilde{\varepsilon}^{\beta\mu}W_{|\lambda\mu}W_{,\alpha})_{|\beta} + \frac{1}{2}K\tilde{\nabla}W \cdot \tilde{\nabla}W + KW\tilde{\Delta}W + K^2W^2 = 0 \quad (3.16)$$

$$Eh^3\gamma^2(\tilde{\Delta}^2W + 2K\tilde{\Delta}W) + \frac{1}{R}(\tilde{\Delta}F + 2KF) -$$

$$K(F\tilde{\Delta}W + W\tilde{\Delta}F) - (\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}W_{|\lambda\mu}F_{,\alpha})_{|\beta} - K\tilde{\nabla}W \cdot \tilde{\nabla}F - 2K^2WF = -p. \quad (3.17)$$

Donde se usó el hecho que  $\tilde{a}^{\alpha\beta}u_{,\alpha}v_{,\beta} = \nabla u \cdot \nabla v$ . Se pueden obtener ecuaciones adimensionales si hacemos

$$F = Eh^3\gamma^2\tilde{f}, \quad W = h\gamma\tilde{w} \quad (3.18)$$

definidas sobre la esfera unitaria. En ese caso (3.16) se escribe como

$$h^2\gamma^2(\tilde{\Delta}^2\tilde{f} + 2K\tilde{\Delta}\tilde{f}) - \frac{h\gamma}{R}(\tilde{\Delta}\tilde{w} + 2K\tilde{w}) +$$

$$\frac{h^2\gamma^2}{2} \left[ (\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\tilde{w}_{|\lambda\mu}\tilde{w}_{,\alpha})_{|\beta} + K\tilde{\nabla}\tilde{w} \cdot \tilde{\nabla}\tilde{w} + 2K\tilde{w}\tilde{\Delta}\tilde{w} + 2K^2\tilde{w}^2 \right] = 0.$$

Recordando que  $a^{\alpha\beta} = \frac{1}{R^2}\tilde{a}^{\alpha\beta}$  y multiplicando por  $R^4$

$$(\Delta^2\tilde{f} + 2\Delta\tilde{f}) - \frac{R}{h\gamma}(\Delta\tilde{w} + 2\tilde{w}) +$$

$$\frac{1}{2} \left[ (\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\tilde{w}_{|\lambda\mu}\tilde{w}_{,\alpha})_{|\beta} + \nabla\tilde{w} \cdot \nabla\tilde{w} + 2\tilde{w}\Delta\tilde{w} + 2\tilde{w}^2 \right] = 0.$$

Si llamamos

$$\{\tilde{w}, \tilde{w}\} = (\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\tilde{w}_{|\lambda\mu}\tilde{w}_{,\alpha})_{|\beta} + \nabla\tilde{w} \cdot \nabla\tilde{w} + 2\tilde{w}\Delta\tilde{w} + 2\tilde{w}^2$$

entonces

$$(\Delta^2\tilde{f} + 2\Delta\tilde{f}) - \frac{R}{h\gamma}(\Delta\tilde{w} + 2\tilde{w}) + \frac{1}{2}\{\tilde{w}, \tilde{w}\} = 0.$$

De igual forma para (3.17)

$$Eh^3\gamma^2\frac{h\gamma}{R^4}(\Delta^2\tilde{w} + 2\Delta\tilde{w}) + \frac{Eh^3\gamma^2}{R^3}(\Delta\tilde{f} + 2\tilde{f}) -$$

$$\frac{Eh^3\gamma^2h\gamma}{R^4} \left[ (\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\tilde{w}_{|\lambda\mu}\tilde{f}_{,\alpha})_{|\beta} + \tilde{f}\Delta\tilde{w} + \tilde{w}\Delta\tilde{f} + \nabla\tilde{w} \cdot \nabla\tilde{f} + 2\tilde{w}\tilde{f} \right] = -p.$$

Multiplicando por  $\frac{Eh^3\gamma^2h\gamma}{R^4}$

$$(\Delta^2\tilde{w} + 2\Delta\tilde{w}) + \frac{R}{h\gamma}(\Delta\tilde{f} + 2\tilde{f}) -$$

$$\left[ (\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\tilde{w}_{|\lambda\mu}\tilde{f}_{,\alpha})_{|\beta} + \tilde{f}\Delta\tilde{w} + \tilde{w}\Delta\tilde{f} + \nabla\tilde{w} \cdot \nabla\tilde{f} + 2\tilde{w}\tilde{f} \right] = -p\frac{R^4}{Eh^3\gamma^2h\gamma}.$$

si definimos

$$\lambda = \frac{pR^3}{2Eh^3\gamma^2} \quad (3.19)$$

$$\alpha = \frac{R}{h\gamma} \quad (3.20)$$

Las ecuaciones de deformación serán:

$$(\Delta^2 \tilde{f} + 2\Delta \tilde{f}) - \alpha(\Delta \tilde{w} + 2\tilde{w}) + \frac{1}{2} \{ \tilde{w}, \tilde{w} \} = 0$$

$$(\Delta^2 \tilde{w} + 2\Delta \tilde{w}) + \alpha(\Delta \tilde{f} + 2\tilde{f}) - \{ \tilde{f}, \tilde{w} \} = -2\alpha\lambda$$

donde

$$\{ \tilde{f}, \tilde{w} \} = (\varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\mu} \tilde{w}_{|\lambda\mu} \tilde{f}_{,\alpha})_{|\beta} + \tilde{f} \Delta \tilde{w} + \tilde{w} \Delta \tilde{f} + \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \tilde{f} + 2\tilde{w} \tilde{f}$$

Se tiene que  $\tilde{w} = 0$ ,  $\tilde{f} = -\lambda$  son soluciones a dichas ecuaciones, por lo tanto si hacemos  $w = \tilde{w}$ ,  $\tilde{f} = -\lambda + f$  y usando el hecho que

$$\{-\lambda + f, w\} = -\lambda(\Delta w + 2w) + \{f, w\}$$

las ecuaciones toman la forma

$$(\Delta^2 f + 2\Delta f) - \alpha(\Delta w + 2w) + \frac{1}{2} \{w, w\} = 0 \quad (3.21)$$

$$(\Delta^2 w + 2\Delta w) + \alpha(\Delta f + 2f) + \lambda(\Delta w + 2w) - \{f, w\} = 0. \quad (3.22)$$

El propósito de la siguiente sección es tratar de convencer al lector que las condiciones sobre la frontera  $w = \Delta w = f = \Delta f = 0$  corresponden al caso en que el cascarón se encuentra soportado sobre un plano horizontal.

## 3.2. Soluciones Triviales

Las soluciones triviales corresponden al caso

$$\tilde{f} = -\lambda = -\frac{pR^3}{2Eh^3\gamma^2}, \quad w = 0.$$

Y como  $F = Eh^3\gamma^2\tilde{f}$  y  $W = h\gamma\tilde{w}$  se tiene que  $F = -\frac{pR^3}{2}$ ,  $W = 0$ . Estas soluciones constantes permiten obtener el tensor de esfuerzos. De la ecuación (3.10) y usando el hecho que  $F_{|\sigma\mu} = 0$  para  $F$  constante, se tiene que

$$\eta^{\alpha\beta} = -\frac{pR}{2}\tilde{a}^{\alpha\beta}$$

o bien su versión covariante

$$\eta_{\alpha\beta} = -\frac{pR}{2}\tilde{a}_{\alpha\beta}$$

donde  $\tilde{a}^{\alpha\beta}$  es el tensor métrico de la esfera sin deformar de radio  $R$ . Por la relación constitutiva (3.5) y usando el hecho que  $\eta_\gamma^\gamma = -pR$ , se encuentra el tensor de deformaciones

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh} \left( -(1+\nu)\frac{pR}{2}\tilde{a}_{\alpha\beta} + \nu pR\tilde{a}_{\alpha\beta} \right)$$

es decir

$$\gamma_{\alpha\beta} = -\frac{pR}{2Eh}(1-\nu)\tilde{a}_{\alpha\beta}$$

Por la definición (3.7)  $2\gamma_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\alpha\beta} - \tilde{a}_{\alpha\beta}$ , siendo  $\bar{a}_{\alpha\beta}$  la métrica de la superficie deformada, la cual puede ser encontrada realizando el despeje, es decir

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = R^2 \left( 1 - \frac{pR}{Eh}(1-\nu) \right) a_{\alpha\beta}$$

donde  $a_{\alpha\beta}$  es la métrica de la esfera unitaria. La métrica resultante corresponde a una esfera de radio  $\tilde{R}$  dado por

$$\tilde{R} = R \left( 1 - \frac{pR}{Eh}(1-\nu) \right)^{1/2} \quad (3.23)$$

Si suponemos presiones pequeñas, podemos aproximar este radio como

$$\tilde{R} = R - \frac{pR^2}{2Eh}(1-\nu).$$

La solución  $W = 0$  en (3.9) implica que  $\rho_{\alpha\beta} = 0$ , y por la relación constitutiva (3.6)  $m_{\alpha\beta} = 0$ , implica que el tensor de momentos es cero en cada punto de la cáscara, en cierto sentido el cascarón se comporta como una membrana



al no oponer resistencia a momentos externos. Por la definición del tensor de curvatura (3.8), se tiene que  $\bar{b}_{\alpha\beta} = \tilde{b}_{\alpha\beta}$ , es decir, el tensor de curvatura no sufre cambios y corresponde al de una esfera de radio  $R$  sin deformar. Se sabe que si la solución es una esfera entonces  $\bar{b}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{R}\tilde{a}_{\alpha\beta}$ .

Ciertamente la primera y segunda forma fundamentales encontradas para la superficie deformada no satisfacen las condiciones de compatibilidad exactas (B.19),(B.23). Esto se debe a que las soluciones encontradas satisfacen ecuaciones de compatibilidad aproximadas (3.1),(3.2) y la superficie representan una solución a  $O(\varepsilon\theta^2)$ .

Esta observación está señalada en el artículo de Koiter [Koiter, pág 360-364]. Sin embargo, las ecuaciones encontradas deben ser válidas para una esfera completa, e intuitivamente se espera que esta se contraiga, es decir la solución será una esfera de radio menor. Para comprender mejor la física del problema, a continuación estudiaremos la solución a nuestro problema en el caso de la teoría lineal de membranas.

### 3.3. Solución en la Teoría Lineal

Si nos reducimos al caso de la teoría lineal, se tiene que el tensor de momentos es despreciable en comparación al tensor de esfuerzos. Supondremos además simetría con respecto al eje  $z$ . En ese caso la ecuación (3.3) se reduce a

$$\eta^{\alpha\beta}\bar{b}_{\alpha\beta} = p$$

donde suponemos que  $\rho_{\alpha\beta} = 0$ , y por lo tanto  $\bar{b}_{\alpha\beta} = \tilde{b}_{\alpha\beta}$ . Para una cáscara de espesor  $h$ , radio  $R$ , y escritas en términos de una base de vectores unitarios se tiene que

$$-\frac{h}{R}(\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}) = p. \quad (3.24)$$

Esta ecuación es análoga a la conocida ecuación de Laplace que determina la diferencia de presión entre dos medios, debida a la tensión superficial que actúa en la superficie de separación. Además, si la cáscara está soportada sobre un plano horizontal, llamaremos  $Q_z(\theta)$  a la resultante dirigida según el eje  $z$  de todas las fuerzas externas que actúan sobre la parte de la cáscara situada por encima del paralelo  $\theta = \theta_0$ . Esta fuerza deberá compensarse con la proyección sobre el eje  $z$  de la tensión  $2\pi R \text{sen}\theta h \tau_{\theta\theta}$  ejercida sobre la circunferencia  $2\pi R \text{sen}\theta$  correspondiente al ángulo  $\theta$  de la esfera, es decir

$$2\pi R \text{sen}^2\theta h \tau_{\theta\theta} = Q_z(\theta). \quad (3.25)$$

Las ecuaciones (3.24), (3.25) determinan los esfuerzos resultantes. Una vez conocidos estos, se puede encontrar el tensor de deformaciones por medio de las relaciones constitutivas escritas en términos de una base de vectores unitarios en coordenadas esféricas (son equivalentes a (3.5))

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\tau_{\theta\theta} - \nu\tau_{\phi\phi}), \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{E}(\tau_{\phi\phi} - \nu\tau_{\theta\theta}), \quad u_{\theta\phi} = 0 \quad (3.26)$$

En la teoría lineal se tiene que el tensor de deformaciones vale

$$u_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i})$$

donde  $u_i$  son las componentes del vector de desplazamientos. El tensor de deformaciones se puede escribir en coordenadas esféricas en términos de desplazamientos (ver[Landau, ec (1.17)]) , como

$$\begin{aligned} u_{rr} &= u_{r,r}, \quad u_{\theta\theta} = u_{\theta,\theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} u_{\phi,\phi} + \frac{u_\theta}{r} \cot\theta + \frac{u_r}{r}, \\ 2u_{\theta\phi} &= \frac{1}{r} (u_{\phi,\theta} - u_\phi \cot\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} u_{\theta,\phi}, \quad 2u_{r\theta} = u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} u_{r,\theta}, \\ 2u_{r\phi} &= \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} u_{r,\phi} + u_{\phi,r} - \frac{u_\phi}{r}. \end{aligned}$$

Con simetría en  $\phi$  se tiene que

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left( \frac{du_\theta}{d\theta} + u_r \right), \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{R} (u_\theta \cot\theta + u_r) \quad (3.27)$$

Con lo que se obtiene una ecuación diferencial para los desplazamientos. A continuación derivamos la ecuación correspondiente a una membrana simplemente soportada. Hay dos casos que nos son de interés, el primero es cuando tenemos una esfera completa, en este caso se supone que hay simetría tanto en  $\phi$  como  $\theta$ , implica que los únicos desplazamientos distintos de cero son  $u_r$ . El otro caso corresponde a un segmento de esfera soportado . Primero haremos la esfera completa. Calculando las cargas totales externas debidas a la presión en la componente  $z$ , y despreciando los efectos de la gravedad, se tiene que

$$Q_z(\theta) = - \int_0^{2\pi} \int_0^\theta p \cos\theta R^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi = -2\pi p R^2 \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}$$

Por lo que la ecuación (3.25) implica que

$$h\tau_{\theta\theta} = -\frac{pR}{2}$$

y por la ecuación (3.24) se tiene que

$$h\tau_{\phi\phi} = -\frac{pR}{2}$$

Estas dos expresiones son independientes de si trata de una esfera completa o sólo un cascarón, además, equivalen a pedir que

$$\eta_{\alpha\beta} = -\frac{pR}{2}\tilde{a}_{\alpha\beta}.$$

El tensor de deformación se calcula con (3.26) y por lo tanto

$$u_{\theta\theta} = u_{\phi\phi} = -\frac{1}{E}(1-\nu)\frac{pR}{2h}, \quad u_{\theta\phi} = 0$$

Denotemos por  $\beta$  al factor de la ecuación anterior

$$\beta = \frac{1}{E}(1-\nu)\frac{pR}{2h}$$

En una esfera completa  $u_{\theta} = 0$ , y no hay dependencia en  $\theta$  por lo tanto de la ecuación (3.27) se tiene que

$$u_r = Ru_{\theta\theta} = -R\beta$$

por lo que el radio de la esfera deformada es

$$\tilde{R} = R + u_r = R\left(1 - \frac{1}{E}(1-\nu)\frac{pR}{2h}\right) = R(1 - \beta)$$

que coincide con (3.23) para presiones pequeñas. En el caso de un cascarón de esfera soportado sobre un plano horizontal, ya no se pide la simetría en  $\theta$ , por lo que las ecuaciones (3.27) se escriben como

$$-R\beta = \frac{du_{\theta}}{d\theta} + u_r$$

$$-R\beta = u_{\theta}\cot\theta + u_r$$

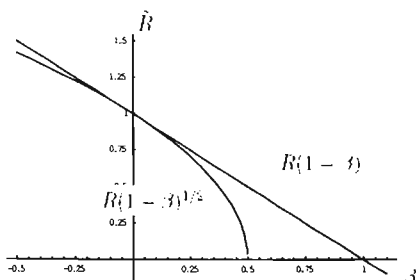


Figura 3.1: Dependencia del radio de la esfera deformada  $\tilde{R}$  respecto al parámetro  $\beta$  para la teoría lineal y para la solución trivial.

Estas ecuaciones tienen por solución

$$u_{\theta} = C \operatorname{sen} \theta, \quad u_r = -R\beta - C \cos \theta$$

Para hallar la constante de integración, usamos la condición que sólo hay desplazamiento horizontal en  $\theta = \theta_0$ , lo cual equivale a pedir que

$$u_r \cos \theta - u_{\theta} \operatorname{sen} \theta = 0 \text{ para } \theta = \theta_0.$$

Por lo que se encuentra que  $C = -R\beta \cos \theta_0$ . Por lo tanto

$$u_{\theta} = -R\beta \cos \theta_0 \operatorname{sen} \theta$$

$$u_r = -R\beta(1 - \cos \theta_0 \cos \theta).$$

La superficie deformada se encuentra con la expresión

$$\mathbf{x} = R\hat{\mathbf{e}}_r + u_{\theta}\hat{\mathbf{e}}_{\theta} + u_r\hat{\mathbf{e}}_r$$

donde después de algunos cálculos se encuentra que vale

$$\mathbf{x} = R(1 - \beta)\hat{\mathbf{e}}_r + R\beta \cos \theta_0 \hat{\mathbf{z}}$$

Esta es la ecuación de una esfera con radio  $\tilde{R} = R(1 - \beta)$  y centro  $z = R\beta \cos \theta_0$ . Podemos concluir que el único efecto que causó poner una condición al desplazamiento, fue la de provocar una traslación rígida. De esta manera, decir que una cáscara esférica está soportada, equivale sólo a pedir que se cumpla la condición (3.25) y por otro lado, hecho implícito en la teoría de membranas, que los momentos resultantes en la frontera de la cáscara sean cero. En la figura (3.1) se muestran las gráficas de los radios predichos por la teoría lineal y la solución trivial calculada.

### 3.4. Condiciones de Frontera

Para obtener las condiciones de frontera (la cáscara soportada por un plano horizontal) para las ecuaciones de deformación, procedemos de manera análoga al caso lineal. El equilibrio entre la componente vertical de la fuerza total sobre el cascarón deberá compensarse con la componente vertical del tensor de esfuerzos sobre la circunferencia  $\theta = \theta_0$ , es decir, se tiene la ecuación (3.25)

$$2\pi R \operatorname{sen}^2 \theta h \tau_{\theta\theta} = Q_z(\theta)$$

donde

$$Q_z(\theta) = - \int_0^{2\pi} \int_0^\theta p \cos \theta R^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi = -2\pi p R^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2}$$

por lo que

$$h \tau_{\theta\theta} = -\frac{pR}{2}.$$

Si tomamos la ecuación (3.3), es decir,  $m_{|\alpha\beta}^{\alpha\beta} + (\tilde{b}_{\alpha\beta} + \rho_{\alpha\beta})\eta^{\alpha\beta} = p$ , al suponer que la cáscara se encuentra simplemente soportada, entonces no hay momentos resultantes en la frontera, es decir,  $m^{\alpha\beta} = 0$  y por la relación constitutiva (3.5)  $\rho_{\alpha\beta} = 0$  se tiene que  $\tilde{b}_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} = p$ , usando el hecho que para la esfera  $\tilde{b}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{R}\tilde{a}_{\alpha\beta}$  y escritas en una base de vectores tangentes unitarios se tiene que  $\frac{h}{R}(\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}) = -p$  y por lo tanto

$$h \tau_{\phi\phi} = -\frac{pR}{2}.$$

Por lo que obtenemos que el tensor de esfuerzos sobre la frontera debe valer

$$\eta_{\alpha\beta} = -\frac{pR}{2}\tilde{a}_{\alpha\beta}$$

En nuestras ecuaciones, una manera de pedir que  $\eta_{\alpha\beta} = -\frac{pR}{2}\tilde{a}_{\alpha\beta}$  y que  $m_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} = 0$  en la frontera del cascarón, por las ecuaciones (3.9),(3.10) es que

$$W = 0, \quad W_{|\alpha\beta} = 0$$

$$F = -\frac{pR^3}{2}, \quad F_{|\alpha\beta} = 0$$

En particular

$$W = 0, \quad \Delta W = 0$$

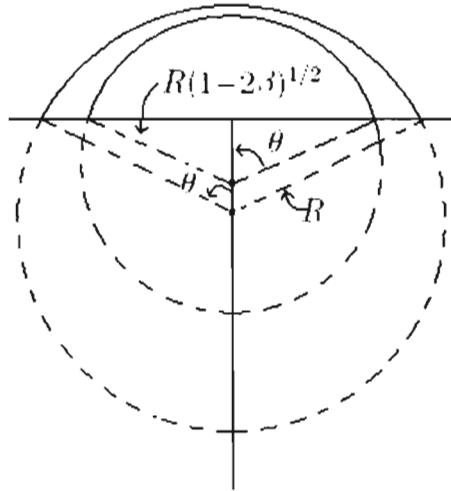


Figura 3.2: Esfera Deformada

$$F = -\frac{pR^3}{2}, \quad \Delta F = 0.$$

O en términos de las funciones adimensionales  $f = w = \Delta f = \Delta w = 0$ .

Estas condiciones dan los esfuerzos correctos para mantener el balance siempre y cuando  $Q_z(\theta_0)$  sea más o menos constante, esto depende de que ni el área de la cáscara ni la dirección de la normal varíen mucho. También satisface la hipótesis de que no hay momentos en la frontera. Como vimos en la solución utilizando la teoría lineal, la condición sobre los desplazamientos sólo produce una traslación rígida de la superficie, por lo que esperamos que la solución trivial a nuestro problema sea una esfera de radio  $\tilde{R} = R(1-2\beta)^{1/2}$  y centro  $z = R(1 - (1 - 2\beta)^{1/2}) \cos \theta_0$  ( ver figura [3.2]). Sin embargo para conocer la forma analítica de la superficie deformada esperaremos hasta el capítulo (6).



# Capítulo 4

## Análisis del problema

En este capítulo se toman las ecuaciones de deformación encontradas en el capítulo anterior y enunciadas más adelante como (4.1), (4.2), con condiciones de Dirichlet en la frontera y la condición inestable que el laplaciano también es cero en la frontera que corresponden al caso de un cascarón soportado, llamada formulación clásica y utilizando las técnicas usuales del análisis funcional, se encuentra la formulación débil del problema, esto es integrando las ecuaciones sobre el cascarón. El par de ecuaciones definen un operador de energía, el cual tiene asociado el espacio de energía, se muestra que es equivalente al espacio de Sobolev  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Sobre este espacio de energía se tiene definido un producto escalar. Se definen el operador lineal  $A$  y el operador bilineal  $B$  obtenidos al aplicar el lema de Riesz al funcional lineal y bilineal de la formulación débil. Se demuestra la existencia y la unicidad de los operadores  $A, B$ , además se prueba que son autoadjuntos. Se estudia el espectro del operador  $A$  y se muestra que  $\mu$  es un valor propio si  $-\mu\Delta u = u$  y viceversa. Se prueba que el funcional  $B(u, v, w) = (B(u, v), w)$  es simétrico para funciones suaves  $u, v, w$ .

### 4.1. Ecuaciones de Deformación, una breve introducción

El problema de un cascarón esférico inmerso en un campo de presión uniforme, tal como se pretende estudiar, está gobernado por las ecuaciones de orden más bajo de John [John], las cuales se reducen al siguiente par de



ecuaciones.

$$\Delta^2 f + 2\Delta f - \alpha(\Delta w + 2w) + \frac{1}{2}\{w, w\} = 0 \quad (4.1)$$

$$\Delta^2 w + 2\Delta w + \alpha(\Delta f + 2f) - \{w, -\lambda + f\} = 0 \quad (4.2)$$

definidas sobre el dominio  $\Omega$  que es un cascarón esférico unitario. Estas ecuaciones son de carácter adimensional. Como condiciones de frontera se pide que tanto  $w$  como  $f$  valgan cero en la frontera, así como  $\Delta w, \Delta f = 0$ . Por estar definidas sobre una superficie, los operadores se definen en términos de la métrica de la superficie.

$w$  está relacionado con la segunda forma fundamental de la esfera deformada y se le llama función de curvatura.  $f$  se relaciona con el esfuerzo sobre dicha esfera unitaria y recibe el nombre de función de esfuerzos.  $\alpha$  es un parámetro geométrico que supondremos constante.

$\lambda$  es el parámetro libre relacionado con la presión

$$\alpha = \frac{R}{h\gamma}, \quad \lambda = \frac{pR^3}{2Eh^3\gamma^2}.$$

Además

$$\{u, v\} = (\varepsilon^{\sigma\kappa}\varepsilon^{\beta\mu}u|_{\kappa\mu}v_{,\sigma})|_{\beta} + \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v + v\Delta u + 2uv$$

El operador de Laplace-Beltrami está dado por

$$\Delta w = a^{\alpha\beta}w|_{\alpha\beta}$$

$$\nabla u \cdot \nabla v = a^{\alpha\beta}u_{,\alpha}v_{,\beta}$$

$E$  es el módulo de Young y  $p$  es la presión externa.

Tomemos la siguiente representación de la esfera unitaria

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \text{sen}\theta \cos\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Entonces los coeficientes del tensor métrico serán  $a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}$  o

bien la matriz inversa  $a^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \end{pmatrix}$ . El laplaciano sobre dicha esfera toma la forma

$$\Delta u = \frac{1}{\text{sen}\theta} \left( (\text{sen}\theta u_{,\theta})_{,\theta} + \left( \frac{1}{\text{sen}\theta} u_{,\phi} \right)_{,\phi} \right)$$

para una función  $u$  definida sobre la esfera. Se ve claramente que  $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$ , es decir, es lineal.

Por definición  $\nabla u \cdot \nabla v = a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} v_{,\beta}$ , donde se toma en cuenta la sumatoria sobre índices repetidos. En el caso particular de la esfera unitaria se tiene

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_{,\theta} v_{,\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} u_{,\phi} v_{,\phi}$$

A continuación expresaremos este problema clásico como un problema en espacios de Hilbert. Para ello será necesario realizar integraciones sobre la esfera y disponer de un teorema de integración por partes.

## 4.2. Integración por partes en la esfera

**Teorema 4.1** Sean  $u, v$  dos funciones definidas sobre el cascarón esférico con valor cero en la frontera, entonces

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = \int_{\Omega} \Delta v u d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$$

**Prueba.** Nuestro dominio es un cascarón esférico. Por la representación adoptada tenemos que  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  y por lo tanto las integrales de superficie se pueden expresar como integrales en el plano en una región rectangular.

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} v \frac{1}{\sqrt{g}} \left( (\operatorname{sen} \theta u_{,\theta})_{,\theta} + \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} u_{,\phi} \right)_{,\phi} \right) \sqrt{g} d\theta d\phi$$

Como estamos en el plano vale el teorema de Green considerandolo en el caso especial de regiones rectangulares

$$\int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} v u_{,\theta} d\theta d\phi = - \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} u v_{,\theta} d\theta d\phi + \int_0^{2\pi} u v \Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta_0} d\phi$$

$$\int_{\epsilon}^{\theta_0} \int_0^{2\pi} v u_{,\phi} d\theta d\phi = - \int_{\epsilon}^{\theta_0} \int_0^{2\pi} u v_{,\phi} d\theta d\phi - \int_{\epsilon}^{\theta_0} u v \Big|_{\phi=2\pi}^{\phi=0} d\theta$$

Integrando el primer término de la integral respecto a  $\theta$  y el segundo respecto a  $\phi$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u v d\Omega &= - \int_{\epsilon}^{\theta_0} \int_0^{2\pi} \left( \operatorname{sen}\theta u_{,\theta} v_{,\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} u_{,\phi} v_{,\phi} \right) d\theta d\phi \\ &+ \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta u_{,\theta} v \Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta_0} d\phi - \int_{\epsilon}^{\theta_0} \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} u_{,\phi} v \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\theta \end{aligned}$$

En la primera integral el término  $v \operatorname{sen}\theta$  vale cero en  $\theta = 0$  así como en  $\theta = \theta_0$  debido a la condición de frontera  $u, v = 0$ . La segunda integral tomada de  $\theta = \epsilon$  a  $\theta = \theta_0$  vale cero por periodicidad y por lo tanto se puede tomar el límite cuando  $\epsilon = 0$ , debido a esto las integrales simples son cero y se tiene que

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$$

repetiendo el argumento se llega a

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = \int_{\Omega} u \Delta v d\Omega$$

■

### 4.3. Formalismo de Hilbert

Las soluciones clásicas pertenecen al espacio  $C_0^4(\Omega)$ . Para construir un espacio de Hilbert es necesario definir un producto interno sobre un espacio de Banach, y con ello una métrica. Otra forma de construir espacios que contengan las funciones que son solución a nuestro problema es considerar un operador en un espacio de Hilbert y definir una norma de energía asociada a ese operador, luego completar nuestro espacio, es decir, hacerlo cerrado. El camino que seguiremos será via los espacios de Sobolev, los cuales se definen a partir de una norma tipo energía. Demostraremos que los operadores asociados a nuestro problema clásico, son equivalentes en norma a cierto tipo de espacio de Sobolev. Por el momento hemos de pasar de un formalismo clásico a uno en espacios de Hilbert.

**Definición 4.1**

$$(u, v) = \int_{\Omega} (\Delta u \Delta v + 2u \Delta v) d\Omega \quad (4.3)$$

$$(Au, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - 2uv) d\Omega \quad (4.4)$$

$$(B(u, v), w) = \int_{\Omega} \{u, v\} w d\Omega \quad (4.5)$$

La primera ecuación está definiendo un producto interno, la segunda y tercera definen operadores en forma integral que surgirán de manera natural de nuestras ecuaciones clásicas.

Ahora tomemos la ecuación (4.1) multipliquemos por una función  $\phi$  en el espacio de trabajo que será  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  e integremos sobre el cascarón. Se tendría

$$\int_{\Omega} \left( \Delta(\Delta f + 2f)\phi - \alpha(\Delta w + 2w)\phi + \frac{1}{2}\{w, w\}\phi \right) d\Omega = 0$$

Notamos el siguiente hecho

$$(f, \phi) + \alpha(Aw, \phi) + \frac{1}{2}(B(w, w), \phi) = \int_{\Omega} \left( (\Delta f + 2f)\Delta\phi + \alpha(\nabla w \cdot \nabla\phi - 2w\phi) + \frac{1}{2}\{w, w\}\phi \right) d\Omega$$

De donde se ve que al aplicar los teoremas de integración por partes en la esfera, la primera ecuación clásica implica

$$(f, \phi) + \alpha(Aw, \phi) + \frac{1}{2}(B(w, w), \phi) = 0 \quad (4.6)$$

Donde además de  $f, w = 0$  se pide también que  $\Delta f, \Delta w = 0$ , en  $\theta_0$ .

Ahora tomemos la ecuación (4.2) y realicemos el mismo procedimiento

$$\int_{\Omega} (\Delta(\Delta w + 2w)\phi + \alpha(\Delta f + 2f)\phi - \{w, -\lambda + f\}\phi) d\Omega = 0$$

Notamos que

$$\{w, -\lambda + f\} = \{w, f\} - \lambda(\Delta w + 2w)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (\Delta(\Delta w + 2w)\phi + \alpha(\Delta f + 2f)\phi - \{w, f\}\phi - \lambda(\Delta w + 2w)\phi) d\Omega = 0$$

De una observación análoga a la utilizada en la ecuación (4.1), ya que  $f = w = \Delta f = \Delta w = 0$  en  $\theta = \theta_0$  y la periodicidad de todas las funciones en  $\phi$

$$(w, \phi) - \alpha(Af, \phi) - \lambda(Aw, \phi) - (B(w, f), \phi) = 0 \quad (4.7)$$

es la formulación débil al problema clásico.

A continuación haremos evidentes ciertas propiedades de nuestros operadores  $A, B$ , definidos en forma integral sobre un espacio de funciones. Quedan, además, por verificar detalles formales, como que el producto interno que definimos satisface las propiedades de producto escalar así como la existencia de los operadores  $A, B$ . Se probará que la norma definida para (4.3) es equivalente a la norma de  $H^2(\Omega)$

**Teorema 4.2**  $(u, v) = \int_{\Omega} (\Delta u \Delta v + 2u \Delta v) d\Omega$  es un producto escalar sobre el espacio de funciones  $C^2(\Omega)$  y valor cero en la frontera ( $\theta = \theta_0$ ).

**Prueba.**

1. Es bilineal porque  $\Delta$  es lineal
2. De los teoremas de integración por partes  
 $\Rightarrow (u, v) = \int_{\Omega} (\Delta u \Delta v - 2\nabla u \cdot \nabla v) d\Omega$ . Es decir es simétrico.
3.  $(u, u) = \int_{\Omega} (|u|^2 + 2u\Delta u) d\Omega \geq 0$  y es cero  $\Leftrightarrow u = 0$ .

■

Para ver la propiedad (3) se prueba lo siguiente.

**Lema 4.1** Sobre un casquete esférico y para  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  se cumplen las desigualdades de Poincaré

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \mu_1^{-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \quad (4.8)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \leq \mu_1^{-1} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 d\Omega \quad (4.9)$$

donde  $\mu_1$  es el primer valor propio de  $-\Delta$ , con condiciones de Dirichlet en la frontera.

**Prueba.** Sean  $u_n$  tales que  $\Delta u_n = -\lambda_n u_n$  funciones propias del laplaciano en un segmento de esfera  $\Omega$ ,  $n \neq 0$ . Sobre  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  el operador  $-\Delta$  es autoadjunto y positivo, y por lo tanto sus funciones propias forman una base completa en la norma  $L^2$  [Canavati, pág 195, X.3]. El producto en la norma  $L^2$  se define como  $(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} uv d\Omega$ .  $\Rightarrow u = \sum_n (u_n, u)_{L^2} u_n$ . Además el teorema de Parseval nos dice lo siguiente,  $\int_{\Omega} u^2 d\Omega = \sum_n (u_n, u)^2$  véase [Canavati, pág 37, I.29].

Utilizando los teoremas de integración y la expansión de  $u$  en la base  $\{u_n\}$  tenemos que

$$\int |\nabla u|^2 = - \int u \Delta u = \int \sum_n (u_n, u) u_n \sum_m (u_m, u) \lambda_m u_m$$

Y como estamos en una base ortogonal se reduce a  $\sum_n (u_n, u)^2 \lambda_n$ , es decir

$$\int |\nabla u|^2 = \sum_n (u_n, u)^2 \lambda_n$$

Sea  $\mu_1$  el valor propio más pequeño, lo que permite acotar la integral por abajo.

$$\int |\nabla u|^2 \geq \mu_1 \sum_n (u_n, u)^2 = \mu_1 \int u^2$$

$$\Rightarrow \int u^2 < \mu_1^{-1} \int |\nabla u|^2,$$

con esto se prueba la primera desigualdad de Poincaré. De manera similar  $\int |\Delta u|^2$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int |\Delta u|^2 d\Omega &= \int \left( \sum_n (u_n, u) \lambda_n u_n \right) \left( \sum_m (u_m, u) \lambda_m u_m \right) d\Omega \\ &= \sum_n (u_n, u)^2 \lambda_n^2 \geq \mu_1 \sum_n (u_n, u)^2 \lambda_n = \mu_1 \int |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

de donde se sigue la segunda desigualdad de Poincaré, es decir

$$\int |\Delta u|^2 \geq \mu_1^2 \int u^2$$

■ De las desigualdades de Poincaré (4.8),(4.9) tendríamos que  $\int |\Delta u|^2 + 2u\Delta u = \int |\Delta u|^2 - 2|\nabla u|^2 \geq (\mu_1 - 2) \int |\nabla u|^2 \geq \mu_1(\mu_1 - 2) \int u^2$ . De las propiedades del espectro de  $-\Delta$ ,  $\mu_n \geq 2$  véase el apéndice (A.6), y por lo tanto la siguiente desigualdad es válida,

$$\int |\Delta u|^2 + 2u\Delta u \geq \mu_1(\mu_1 - 2) \int u^2 \quad (4.10)$$

De esta desigualdad se sigue que  $(u, u) > 0$  y es cero  $\Leftrightarrow u = 0$  en  $L^2(\Omega)$ . Por lo tanto  $(u, v) = \int_{\Omega} (\Delta u \Delta v + 2u\Delta v) d\Omega$  es un producto escalar.

A continuación veremos la equivalencia entre la norma

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + 2u\Delta u) d\Omega \quad (4.11)$$

y la norma de Sobolev

$$\|u\|_{2,2}^2 = \int_{\Omega} (a^{\alpha\beta} a^{\sigma\kappa} u|_{\alpha\beta} u|_{\sigma\kappa} + |\nabla u|^2 + u^2) d\Omega \quad (4.12)$$

Pero antes enunciemos la siguiente observación que se demuestra en el apéndice B referente a la parte de geometría diferencial (B.31).

**Observación 4.1** sea  $w$  una función al menos  $C^2$  sobre la esfera, entonces sus derivadas covariantes de orden dos respecto a las variables  $\theta, \phi$  están dadas por:

1.  $w|_{\theta\theta} = w_{,\theta\theta}$
2.  $w|_{\theta\phi} = w_{,\theta\phi} - w_{,\phi} \cot\theta$
3.  $w|_{\phi\phi} = w_{,\phi\phi} + w_{,\theta} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

**Lema 4.2**

$$\int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + u^2) d\Omega \leq C_1 \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + 2u\Delta u) d\Omega$$

**Prueba.** Se utilizará repetidamente la desigualdad (4.9) y el teorema de integración por partes. Se tiene que

$$\int |\Delta u|^2 = \int (|\Delta u|^2 + 2u\Delta u) + 2 \int |\nabla u|^2$$

$$\begin{aligned} &\leq \int (|\Delta u|^2 + 2u\Delta u) + \frac{2}{\mu_1} \int (|\Delta u|^2 + 2u\Delta u) + \frac{2 \cdot 2}{\mu_1} \int |\nabla u|^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{2}{\mu_1}\right) \int (|\Delta u|^2 + 2u\Delta u) + \left(\frac{2}{\mu_1}\right)^2 \int |\Delta u|^2 \end{aligned}$$

repetiendo el argumento  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int |\Delta u|^2 &\leq \left(1 + \frac{2}{\mu_1} + \left(\frac{2}{\mu_1}\right)^2 + \dots\right) \int (|\Delta u|^2 + 2u\Delta u) \\ &\Rightarrow \int |\Delta u|^2 \leq \frac{1}{1 - \frac{2}{\mu_1}} \int (|\Delta u|^2 + 2u\Delta u) \end{aligned} \quad (4.13)$$

utilizando (4.10)

$$\Rightarrow \int |\Delta u|^2 + u^2 \leq \frac{1}{\mu_1 - 2} \left(\mu_1 + \frac{1}{\mu_1}\right) \int (|\Delta u|^2 + 2u\Delta u)$$

Se puede mejorar esta desigualdad notando lo siguiente,

$$C_1 = \frac{1}{(\mu_1 - 2)\mu_1} (\mu_1^2 + 1) \leq \left(\frac{\mu_1 - 1}{\mu_1 - 2}\right)^2$$

Porque

$$(\mu^2 + 1)(\mu - 2) \leq \mu(\mu - 1)^2$$

Con esto se prueba la desigualdad ■

#### Lema 4.3

$$\|u\|_{2,2}^2 = \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + u^2) d\Omega - \cot\theta_0 \int_0^{2\pi} |u_{,\theta}(\theta_0, \phi)|^2 d\sigma$$

donde  $d\sigma = \text{sen}\theta_0 d\phi$ .

**Prueba.** Como

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,2}^2 &= \int_{\Omega} (a^{\alpha\beta} a^{\sigma\kappa} u|_{\alpha\beta} u|_{\sigma\kappa} + |\nabla u|^2 + u^2) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} ((a^{\theta\theta})^2 u|_{\theta\theta}^2 + 2a^{\theta\theta} a^{\phi\phi} u|_{\theta\phi}^2 + (a^{\phi\phi})^2 u|_{\phi\phi}^2 + a^{\theta\theta} u_{,\theta}^2 + a^{\phi\phi} u_{,\phi}^2 + u^2) d\Omega \end{aligned}$$



y por otro lado

$$|\Delta u|^2 = (a^{\theta\theta})^2 u|_{\theta\theta}^2 + 2a^{\theta\theta} a^{\phi\phi} u|_{\theta\theta} u|_{\phi\phi} + (a^{\phi\phi})^2 u|_{\phi\phi}^2$$

completando cuadrados dentro de la integral, esta se puede escribir como

$$\int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + u^2 + 2a^{\theta\theta} a^{\phi\phi} (u|_{\theta\phi}^2 - u|_{\theta\theta} u|_{\phi\phi})) + |\nabla u|^2) d\Omega.$$

Consideremos el término

$$I = \int_{\Omega_{\epsilon}} 2a^{\theta\theta} a^{\phi\phi} (u|_{\theta\phi}^2 - u|_{\theta\theta} u|_{\phi\phi}) d\Omega \quad (4.14)$$

donde  $\Omega_{\epsilon} = \{\epsilon \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ . Además  $u|_{\theta=\theta_0} = 0$  y  $u$  periódica en  $\phi$ .

Desarrollando todo en términos de la métrica explícita para la esfera y las derivadas covariantes dadas por la observación 4.1, con esto el término (4.14) se puede escribir como

$$\int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^{\theta_0} \frac{2}{\text{sen}\theta} \left( u_{\theta\phi}^2 - u_{\theta\theta} u_{\phi\phi} - \cot\theta (u_{\phi}^2)_{\theta} + \cot^2\theta u_{\phi}^2 - \frac{1}{2} (u_{\theta}^2)_{\theta} \text{sen}\theta \cos\theta \right) d\theta d\phi$$

Ahora hacemos las siguientes observaciones

1.  $\frac{u_{\theta\phi} u_{\theta\phi}}{\text{sen}\theta} = \left( \frac{u_{\theta\phi} u_{\phi}}{\text{sen}\theta} \right)_{\theta} - \frac{u_{\phi\theta\theta} u_{\phi}}{\text{sen}\theta} + \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} u_{\phi} u_{\phi\theta}$
2.  $u_{\theta\theta} u_{\phi\phi} = (u_{\theta\theta} u_{\phi})_{\phi} - u_{\phi\theta\theta} u_{\phi}$

entonces

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^{\theta_0} \left( \left( \frac{u_{\phi\theta} u_{\phi}}{\text{sen}\theta} \right)_{\theta} - \frac{(u_{\theta\theta} u_{\phi})_{\phi}}{\text{sen}\theta} - \frac{\cos\theta}{2} \left( \frac{u_{\phi}^2}{\text{sen}^2\theta} + u_{\theta}^2 \right)_{\theta} \right) d\theta d\phi$$

El tercer término dentro de la integral es la derivada con respecto a  $\theta$  de la norma del gradiente y por lo tanto se puede integrar por partes respecto a  $\theta$  con términos no nulos en la frontera. El primer término se integra respecto a  $\theta$ , y el segundo respecto a  $\phi$ . Las integrales respecto a  $\phi$  valuadas en la frontera valen cero por periodicidad. Además en  $\theta = 0$  tanto  $u|_{\theta_0}$ ,  $u_{\phi}|_{\theta_0} = 0$  lo que implica  $|\nabla u|^2 = u_{\theta}^2$  en  $\theta = \theta_0$ . Por lo tanto

$$I = - \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^{\theta_0} |\nabla u|^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi + 2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{u_{\phi\theta} u_{\phi}}{\text{sen}\theta} - \frac{\cos\theta}{2} |\nabla u|^2 \right) \Big|_{\theta=\epsilon}^{\theta=\theta_0} d\phi$$

$$= - \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2 d\Omega - \cos \theta_0 \int_0^{2\pi} u_\theta^2(\theta_0, \phi) d\phi + (\text{Términos en } \theta = \epsilon)$$

y por lo tanto

$$\|u\|_{2,2}^2 = \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + u^2) d\Omega - \cot \theta_0 \int_0^{2\pi} |u_{,\theta}(\theta_0, \phi)|^2 d\sigma + (\text{Términos en } \theta = \epsilon)$$

Donde  $d\sigma = \text{sen} \theta_0 d\phi$ , y el término en  $\theta = \epsilon$  es

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\text{sen} \epsilon} (u_\phi^2)_\theta - \cos \epsilon |\nabla u|^2 \right) |_{\theta=\epsilon} d\phi$$

que se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\text{sen} \epsilon} (\text{sen}^2 \theta |\nabla u|^2)_\theta - \frac{1}{\text{sen} \epsilon} (\text{sen}^2 \theta u_\theta^2)_\theta - \cos \epsilon |\nabla u|^2 \right) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \epsilon |\nabla u|^2 - 2 \cos \epsilon (u_\theta^2) + \text{sen} \epsilon (|\nabla u|^2)_\theta - \text{sen} \epsilon (u_\theta^2)_\theta) d\phi \\ &= \cos \epsilon \int_0^{2\pi} (|\nabla u|^2 - 2u_\theta^2) d\phi + \text{sen} \epsilon \int_0^{2\pi} ((|\nabla u|^2)_\theta - (u_\theta^2)_\theta) d\phi \end{aligned}$$

Para ver que los términos en  $\epsilon$  valen cero consideramos lo siguiente. Para  $u \in C^2$  se tendría que tanto  $|\nabla u|^2$  como  $u_\theta^2$  son diferenciables respecto a  $\theta$ . Lo que implicaría que la segunda integral es finita y  $\text{sen}(\epsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Para la primera integral hacemos las siguientes expansiones de Taylor a primer orden

- $|\nabla u|^2(\epsilon, \phi) = |\nabla u|^2(0, \phi) + \epsilon(\dots)$
- $u_\theta^2(\epsilon, \phi) = u_\theta^2(0, \phi) + \epsilon(\dots)$

En el polo norte, es decir en  $\theta = 0$ ,  $(\nabla u) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}$  ya que sólo se toma la parte tangencial sobre la superficie. Además como  $u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta +$

$u_x z_\theta \Rightarrow u_\theta(0, \phi) = (\text{sen } \phi)u_x - (\text{cos } \phi)u_y \Rightarrow \int_0^{2\pi} 2u_\theta^2(0, \phi) d\phi = 4\pi \left(\frac{u_x^2 + u_y^2}{2}\right) = 2\pi |\nabla u|^2(0, \phi) = \int_0^{2\pi} |\nabla u|^2 d\phi$ . Por lo tanto el término en  $\theta = \epsilon$  tiende a cero y

$$\int_{\Omega} (a^{\alpha\beta} a^{\sigma\kappa} u_{|\alpha\beta} u_{|\sigma\kappa} + |\nabla u|^2 + u^2) d\Omega = \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + u^2) d\Omega - \text{cos } \theta_0 \int_0^{2\pi} u_\theta^2(\theta_0, \phi) d\phi$$

■

**Lema 4.4** *la desigualdad de traza es la siguiente*

$$\int_{\partial\Omega} (u_{,\theta}|_{\theta=\theta_0})^2 d\sigma \leq C_0 \|u\|_{2,2}^2$$

**Prueba.** Primero probaremos que

$$\int_{\partial\Omega} u^2 d\Omega \leq C \left( \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} u^2 d\Omega \right).$$

Sean  $V_i$  una cubierta de la frontera del cascarón. Para ello consideremos una partición de la unidad definida sobre la esfera unitaria  $\{\varphi_i(X)\}_1^N$  tales que

1.  $\varphi_i(X) = 0$  si  $X$  no pertenece a  $V_i$ .
2.  $\sum_i \varphi_i(X) = 1$  para todo  $X$  en  $\Omega$ .

Y por lo tanto

$$\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma = \sum_i \int_{\partial\Omega \cap V_i} \varphi_i(X) u^2 d\Omega.$$

Consideremos una familia de transformaciones  $\alpha_i : V_i \rightarrow U_i \in R^2$ . Donde  $U_i$  es el hemisferio superior de un disco con centro en el origen, tal como se muestra en la figura(4.1).

En ese nuevo espacio se tiene que

$$u(x) - u(a) = \int_0^{x_n} u_{x_n} dx_n$$

tomando cuadrados

$$u^2(a) \leq 2 \left( \int_0^{x_n} u_{x_n} dx_n \right)^2 + 2u^2(x).$$

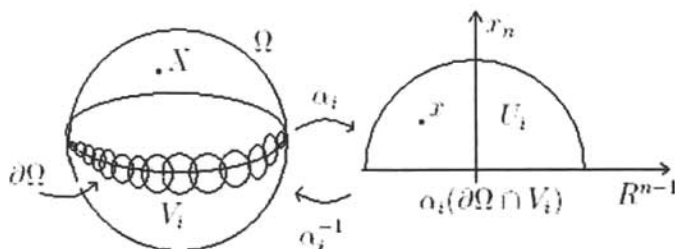


Figura 4.1: Desigualdad de traza

Utilizando la desigualdad de Schwarz que afirma que  $(\int f dx)^2 \leq \int f^2 dx \int 1^2 dx$  se tiene que

$$u^2(a) \leq 2\alpha \int_0^\alpha u_{x_n}^2 dx_n + 2u^2(x).$$

Integrando sobre  $x$  de 0 a  $\alpha$

$$\alpha u^2(a) \leq 2\alpha^2 \int_0^\alpha u_{x_n}^2 dx_n + 2 \int_0^\alpha u^2(x) dx.$$

Integrando sobre la proyección del disco, es decir  $\alpha_i(\partial\Omega \cap V_i)$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_i(\partial\Omega \cap V_i)} u^2(a) da &\leq 2\alpha \int_{U_i(\alpha)} u_{x_n}^2 dU_i + \frac{2}{\alpha} \int_{U_i(\alpha)} u^2 dU_i \\ \int_{\alpha_i(\partial\Omega \cap V_i)} u^2(a) da &\leq 2\alpha \int_{U_i(\alpha)} |\nabla_x u|^2 dU_i + \frac{2}{\alpha} \int_{U_i(\alpha)} u^2 dU_i \end{aligned}$$

donde  $U_i(\alpha)$  es el segmento de disco definido de 0 a  $\alpha$ . Con este resultado podemos hacer lo siguiente: al regresar a la esfera cada una de las integrales y sumarlas implica que

$$\sum_i \int_{(\partial\Omega \cap V_i)} \varphi_i u^2(a) da \leq \sum_i \left( 2\alpha \int_{\alpha_i^{-1}U_i(\alpha)} \varphi_i |\nabla_x u|^2 dV_i + \frac{2}{\alpha} \int_{\alpha_i^{-1}U_i(\alpha)} \varphi_i u^2 dV_i \right)$$

el resultado es válido porque  $|\nabla u|^2$  es invariante bajo cambios de coordenadas. Por lo tanto

$$\int_\Omega u^2 d\sigma \leq 2 \left( \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + \frac{1}{\alpha} \int_\Omega u^2 d\Omega \right).$$

En el caso que  $u = u_{,\theta}$  se tiene que

$$\int_{\Omega} u_{,\theta}^2 d\sigma \leq 2 \left( \alpha \int_{\Omega} \nabla(u_{,\theta}) \cdot \nabla(u_{,\theta}) d\Omega + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} u_{,\theta}^2 d\Omega \right)$$

$$\int_{\Omega} u_{,\theta}^2 d\sigma \leq 2 \left( \alpha \int_{\Omega} a^{\alpha\beta} u_{,1\alpha} u_{,1\beta} d\Omega + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} u_{,\theta}^2 d\Omega \right)$$

Usando el hecho que  $u_{,\alpha\beta} = u_{|\alpha\beta} + u_{,k}\Gamma_{\alpha\beta}^k$  de la definición de derivada covariante (B.14)

$$\int_{\Omega} u_{,\theta}^2 d\sigma \leq 2 \left( \alpha \int_{\Omega} a^{\alpha\beta} (u_{|1\alpha} + u_{,k}\Gamma_{1\alpha}^k) (u_{|1\beta} + u_{,k}\Gamma_{1\beta}^k) d\Omega + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} u_{,\theta}^2 d\Omega \right).$$

En el lado derecho todos los miembros son elementos de la norma de Sobolev y por lo tanto

$$\int_{\Omega} u_{,\theta}^2 d\sigma \leq C \|u\|_{2,2}^2$$

■

**Teorema 4.3**  $\|u\|^2$  y  $\|u\|_{2,2}^2$  son equivalentes, es decir

$$C_1^{-1} \|u\|_{2,2}^2 \leq \|u\|^2 \leq 2(1 + C_0 \cot\theta_0) \|u\|_{2,2}^2$$

**Prueba.** Del lema (4.2) se tendría

$$C_1^{-1} \|u\|_{2,2}^2 \leq C_1^{-1} \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + u^2) d\Omega \leq \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + 2u\Delta u = \|u\|^2$$

Del lema (4.3) se tiene que

$$\int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + u^2) d\Omega = \|u\|_{2,2}^2 + \cot\theta_0 \int_0^{2\pi} |u_{,\theta}(\theta_0, \phi)|^2 d\sigma.$$

La desigualdad de traza nos dice que  $\int_{\partial\Omega} (u_{,\theta}|_{\theta=\theta_0})^2 d\sigma \leq C_0 \|u\|_{2,2}^2$ . Lo que implicaría

$$\int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + u^2) d\Omega \leq \|u\|_{2,2}^2 (1 + C_0 \cot\theta_0)$$

Además

$$\|u\|^2 = \int |\Delta u|^2 + 2u\Delta u \leq 2 \int |\Delta u|^2 + u^2 \leq 2(1 + C_0 \cot\theta_0) \|u\|_{2,2}^2.$$

De donde podemos concluir que las normas  $\| \cdot \|_{2,2}$  y  $\| \cdot \|$  son equivalentes y que el espacio de trabajo es  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  debido a que es el espacio que se obtiene al completar el espacio de funciones  $C^2(\Omega)$  con valor cero en la frontera, bajo la norma  $\| \cdot \|_{2,2}$  o la norma  $\| \cdot \|$ . ■

## 4.4. Propiedades de los operadores A,B

La formulación débil de las ecuaciones de deformación, define de manera implícita dos operadores en términos de funcionales lineales dados en las definiciones (4.4),(4.5). Para probar la existencia y la unicidad de los operadores A, B, se hace uso del lema de Riesz [Canavati, pág 67, III.4]. En esta sección se prueba además, que dichos operadores son acotados, el operador A es lineal autoadjunto y compacto. Además el espectro de este operador esta relacionado con el espectro del laplaciano de tal manera que si  $\mu$  es un valor propio del operador Laplaciano  $-\Delta$ , entonces  $\frac{1}{\mu}$  es un valor propio del operador A.

### 4.4.1. Existencia de A,B

El operador B fué definido por un funcional bilineal dado en el espacio de trabajo por  $(B(u, v), w) = \int \{u, v\} w d\Omega$ , donde el término en corchetes es

$$\{u, v\} = (\varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma})|_{\beta} + a^{\sigma\mu} u_{,\sigma} v_{,\mu} + u\Delta v + v\Delta u + 2uv.$$

No obstante requerimos de una fórmula diferente para probar sus propiedades, misma que se enuncia en el siguiente lema

#### Lema 4.5

$$\{u, v\} = \Delta u \Delta v - a^{\sigma\mu} a^{\kappa\beta} u_{|\kappa\mu} v_{|\sigma\beta} + u\Delta v + v\Delta u + 2uv$$

#### Prueba.

$$\{u, v\} = (\varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma})|_{\beta} + a^{\sigma\mu} u_{,\sigma} v_{,\mu} + u\Delta v + v\Delta u + 2uv$$

El tensor antisimétrico es tal que sólo  $\varepsilon^{\theta\phi} = -\varepsilon^{\phi\theta} = \frac{1}{\text{sen } \theta}$  son diferentes de cero y todas sus derivadas covariantes son cero, es decir  $\varepsilon^{\alpha\beta}_{|\gamma} = 0$  como se muestra en el apéndice (B.32). Para el tensor métrico se tiene  $a^{\theta\theta} = 1$ ,  $a^{\phi\phi} = \frac{1}{\text{sen}^2 \theta}$  y cero las demás componentes. Si expandemos todas las sumas del primer término teniendo en cuenta que un cambio de índices produce un cambio de signo se tiene

$$(\varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma})|_{\beta} =$$

$$(\varepsilon^{\theta\phi})^2 (v_{,\theta}(u_{|\phi\phi\theta} - u_{|\theta\phi\theta}) + v_{,\phi}(u_{|\theta\theta\phi} - u_{|\phi\theta\theta}) + u_{|\theta\theta}v_{|\phi\phi} - 2u_{|\phi\theta}v_{|\phi\theta} + u_{|\phi\phi}v_{|\theta\theta})$$

Usando las definiciones para la derivada covariante se tienen los siguientes hechos demostrados en el apéndice de geometría (B.34)

- $u_{|\phi\phi\theta} - u_{|\theta\phi\theta} = -\text{sen}^2\theta u_{,\theta}$
- $u_{|\theta\theta\phi} - u_{|\phi\theta\theta} = -u_{,\phi}$

$$(\varepsilon^{\sigma\kappa}\varepsilon^{\beta\mu}u_{|\kappa\mu}v_{,\sigma})_{|\beta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta} (-\text{sen}^2\theta u_{,\theta}v_{,\theta} - u_{,\phi}v_{,\phi} + u_{|\theta\theta}v_{|\phi\phi} - 2u_{|\phi\theta}v_{|\phi\theta} + u_{|\phi\phi}v_{|\theta\theta})$$

$$(\varepsilon^{\sigma\kappa}\varepsilon^{\beta\mu}u_{|\kappa\mu}v_{,\sigma})_{|\beta} = -a^{\sigma\mu}u_{,\sigma}v_{,\mu} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} (u_{|\theta\theta}v_{|\phi\phi} - 2u_{|\phi\theta}v_{|\phi\theta} + u_{|\phi\phi}v_{|\theta\theta})$$

Notamos los siguientes hechos

$$a^{\sigma\mu}a^{\kappa\beta}u_{|\kappa\mu}v_{|\sigma\beta} = a^{\theta\theta}a^{\theta\theta}u_{|\theta\theta}v_{|\theta\theta} + 2a^{\phi\phi}a^{\theta\theta}u_{|\theta\phi}v_{|\theta\phi} + a^{\phi\phi}a^{\phi\phi}u_{|\phi\phi}v_{|\phi\phi}.$$

Como  $\Delta u = a^{\theta\theta}u_{|\theta\theta} + a^{\phi\phi}u_{|\phi\phi}$  tenemos que

$$\Delta u \Delta v = a^{\theta\theta}a^{\theta\theta}u_{|\theta\theta}v_{|\theta\theta} + a^{\theta\theta}a^{\phi\phi}(u_{|\theta\theta}v_{|\phi\phi} + v_{|\theta\theta}u_{|\phi\phi}) + a^{\phi\phi}a^{\phi\phi}u_{|\phi\phi}v_{|\phi\phi}$$

$$\Rightarrow \Delta u \Delta v - a^{\sigma\mu}a^{\kappa\beta}u_{|\kappa\mu}v_{|\sigma\beta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta} (u_{|\theta\theta}v_{|\phi\phi} + v_{|\theta\theta}u_{|\phi\phi} - 2u_{|\phi\theta}v_{|\phi\theta})$$

y por lo tanto

$$(\varepsilon^{\sigma\kappa}\varepsilon^{\beta\mu}u_{|\kappa\mu}v_{,\sigma})_{|\beta} = -a^{\sigma\mu}u_{,\sigma}v_{,\mu} + \Delta u \Delta v - a^{\sigma\mu}a^{\kappa\beta}u_{|\kappa\mu}v_{|\sigma\beta}$$

de donde se concluye que

$$\{u, v\} = \Delta u \Delta v - a^{\sigma\mu}a^{\kappa\beta}u_{|\kappa\mu}v_{|\sigma\beta} + u \Delta v + v \Delta u + 2uv$$

■

Para ver que el funcional  $(B(u, v), w)$  es acotado requerimos ver que  $\|u\|_0 \leq C \|u\|_{2,2}$  lo cual se puede ver de los teoremas de encaje de Sobolev [Ize 2, nota 2.3]  $H^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\Omega)$  para  $m > k + \frac{n}{p}$ . A continuación lo enunciamos:

**Definición 4.2** Se dice que  $\Omega$  tiene la propiedad del cono si existen números  $\mu, h \geq 0$  tales que para todo  $y \in \Omega$  existe  $w_y \subset S^{n-1}$  (esfera de dimensión  $n-1$ ) con  $\text{Area}(w_y) \geq \mu$  tal que  $y + t\xi \in \Omega$  cuando  $\xi \in w_y$  y  $t \in [0, h]$ . En particular si  $\partial\Omega \in C^1$  entonces  $\Omega$  tiene la propiedad del cono.

En espacios de Sobolev con norma  $L^p$ , con las definiciones de espacios de Sobolev y espacios  $L^p$  dadas por  $H^{m,p}(\Omega) = \{u : \int (D^\alpha u)^p \leq \infty, |\alpha| \leq m\}$  y  $L^p(\Omega) = \{v : (\int v^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$  y  $\Omega$  con la propiedad del cono se tiene que  $H^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega})$  con  $|u|_k \leq C \|u\|_{m,p}$  si  $m > k + \frac{n}{p}$ . En particular con  $p = 2, m = 2, n = 2$  se tendría que  $k$  debe ser cero. Por lo tanto  $|u|_0 \leq C \|u\|_{2,2} \leq \tilde{C} \|u\|_H$ .

Se tiene lo necesario para probar que el funcional  $(B(u, v), w)$  es acotado.

**Lema 4.6**

$$\int_{\Omega} \{u, v\} w d\Omega \leq C \|u\| \|v\| \|w\|$$

**Prueba.** Se tiene que

$$\int_{\Omega} \{u, v\} w d\Omega = \int_{\Omega} (\Delta u \Delta v - a^{\sigma\mu} a^{\kappa\beta} u_{|\kappa\mu} v_{|\sigma\beta} + u \Delta v + v \Delta u + 2uv) w d\Omega$$

Ahora

$$\left| \int_{\Omega} \{u, v\} w d\Omega \right| \leq \max_{\Omega} |w| \int |\{u, v\}| d\Omega \leq |w|_0 \int |\{u, v\}| d\Omega$$

Por el teorema de encaje de Sobolev se tendría

$$\left| \int_{\Omega} \{u, v\} w d\Omega \right| \leq C \int_{\Omega} |\{u, v\}| d\Omega \|w\|$$

Por otro lado

$$\int_{\Omega} |\{u, v\}| d\Omega \leq \int_{\Omega} |\Delta u| |\Delta v| + \int_{\Omega} |a^{\sigma\mu} a^{\kappa\beta} u_{|\kappa\mu} v_{|\sigma\beta}| d\Omega +$$

$$\int_{\Omega} |u| |\Delta v| + |v| |\Delta u| + 2|u| |v| d\Omega$$



Las desigualdades (4.10) y (4.13) equivalen a decir

$$\int |\Delta u|^2 \leq C_1 \|u\|^2$$

$$\int u^2 \leq C_2 \|u\|^2$$

Aplicaremos la desigualdad de Hölder en cada uno de los términos.

$$\Rightarrow \int uv \leq \left( \int u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \|u\| \|v\|$$

$$\int u \Delta v \leq \left( \int u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int \Delta v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 \|u\| \|v\|$$

$$\int \Delta u \Delta v \leq \left( \int \Delta u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int \Delta v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3 \|u\| \|v\|$$

Ahora el término

$$\int_{\Omega} |a^{\sigma\mu} a^{\kappa\beta} u_{|\kappa\mu} v_{|\sigma\beta}| d\Omega \leq \left( \int (a^{\sigma\mu})^2 u_{|\kappa\mu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int (a^{\kappa\beta})^2 v_{|\sigma\beta}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

El lado derecho de esta desigualdad son elementos de la norma de Sobolev (4.12) y por lo tanto

$$\int_{\Omega} |a^{\sigma\mu} a^{\kappa\beta} u_{|\kappa\mu} v_{|\sigma\beta}| d\Omega \leq C_4 \|u\|_{2,2} \|v\|_{2,2} \leq \tilde{C}_4 \|u\| \|v\|$$

y por lo tanto

$$\left| \int_{\Omega} \{u, v\} w d\Omega \right| \leq C \|u\| \|v\| \|w\|$$

■

Para la cuestión de la existencia de los operadores  $A, B$  es necesario enunciar y aplicar el lema de Riesz [Canavati, pág 67, III.4].

**Lema 4.7** Sea  $H$  espacio de Hilbert y sea  $\varphi$  un funcional lineal y acotado  $\varphi : H \rightarrow R$  entonces existe un único  $y \in H$  tal que  $\varphi(x) = (y, x)$  para todo  $x \in H$  y además  $|\varphi| = \|y\|$ .

**Teorema 4.4** *El operador  $B(u, v)$  existe, es bilineal en  $u, v$  y acotado.*

**Prueba.**

Consideremos  $\varphi_{u,v}(w) = \int \{u, v\} w d\Omega \leq C(u, v) \|w\|$ . El lema de Riesz implica que  $\varphi_{u,v}(w) = (B(u, v), w)$  para  $B(u, v) \in H$  y es único debido al lema (4.5). Se ve que  $(B(u, v), w)$  es bilineal en  $u, v$ . Como  $|\varphi_{u,v}(w)| = \|B(u, v)\|$  entonces

$$\|B(u, v)\| = \sup_{\|w\|=1} |(B(u, v), w)| \leq C \int |\{u, v\}| d\Omega \leq C \|u\| \|v\|$$

tenemos que  $B : H \times H \rightarrow H$  es acotado ■

**Teorema 4.5** *El operador  $A$  definido por medio de*

$$(Au, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - 2uv) d\Omega$$

*$A : H \rightarrow H$  existe y es lineal y acotado, es decir,  $(Au, v) \leq C \|u\| \|v\|$ .*

**Prueba.**

Se tiene lo siguiente

$$|(Au, v)| \leq \int_{\Omega} (|\nabla u| |\nabla v| + 2|u| |v|) d\Omega \leq \int_{\Omega} (|a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} v_{,\beta}| + 2|u| |v|) d\Omega$$

Utilizando la desigualdad de Hölder

$$|(Au, v)| \leq \left( \int a^{\alpha\beta} u_{,\alpha}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int a^{\alpha\beta} v_{,\alpha}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left( \int u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int v^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

De la definición del tensor métrico se tiene que  $a^{\alpha\beta} \geq 0$ . El primer término de la última desigualdad es parte de la métrica de Sobolev  $\| \cdot \|_{2,2}$  que ya se probó es equivalente a la norma definida en (4.11) y el segundo término se sabe que es acotado y por lo tanto

$$|(Au, v)| \leq \tilde{C} \|u\| \|v\|$$

Sea  $\varphi_u(v) = \int (\nabla u \cdot \nabla v - 2uv) d\Omega$ , es un funcional lineal tanto en  $u$  como en  $v$  y acotado. Por el lema de Riesz se tiene que  $\varphi_u(v) = (A(u), v)$  y por ser lineal en  $u$  se tiene que  $A$  es lineal. Además

$$|\varphi_u(v)| = \|A(u)\| = \sup_{\|v\|=1} (A(u), v) \leq \tilde{C} \|u\|.$$

■

ESTA TESIS NO SALIÓ  
DE LA BIBLIOTECA

Haremos las siguientes observaciones

**Observación 4.2**  $A : H \rightarrow H$  es un operador compacto y autoadjunto.

$$(Au, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - 2uv) d\Omega$$

**Prueba.** Este funcional visto como un producto escalar define una norma de energía, la cual se vé que es equivalente a la norma del espacio  $H_0^1(\Omega)$  dado que el primer valor propio de  $A$  es mayor que 2 y por lo tanto el producto escalar es positivo. Es decir, la norma está definida para elementos  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ . De los teoremas de encaje de Sobolev se tiene que  $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  de manera compacta. Las soluciones a nuestro problema pertenecen a  $H^2(\Omega)$ . Si tomamos una sucesión acotada en  $H^2(\Omega)$  al aplicar el operador  $A$  hay una subsucesión que será a su vez convergente porque  $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  de manera compacta. Por lo tanto  $A$  es compacto en  $H^2(\Omega)$ . De la definición de  $A$  se ve  $(Au, v) = (u, Av)$  y por lo tanto es autoadjunto. ■

Con esta información podemos utilizar el teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos [Canavati, pág 195]. El conjunto de valores propios de  $A$  forman una sucesión creciente.

**Observación 4.3** Si  $\mu_0 Av = v$  es decir, un problema de valores y funciones propias del operador  $A$ , entonces  $(\mu_0, v)$  es solución del problema  $-\Delta v = \mu_0 v$  con condiciones de Dirichlet, e inversamente.

**Prueba.** Sea  $\mu_0 Av = v$  y tomemos el producto escalar con una  $\phi$  en el espacio de trabajo

$$\mu_0(Av, \phi) = (v, \phi)$$

Desarrollando los productos escalares

$$\mu_0 \int (\nabla v \cdot \nabla \phi - 2v\phi) d\Omega = \int (\Delta v \Delta \phi + 2v\Delta \phi) d\Omega$$

Aplicando los teoremas de integración por partes

$$\mu_0 \int (-v\Delta \phi - 2v\phi) d\Omega = \int (\Delta v \Delta \phi + 2\phi \Delta v) d\Omega$$

por lo tanto

$$\int_{\Omega} (\Delta v + \mu_0 v) (\Delta \phi + 2\phi) d\Omega = 0.$$

De las propiedades del espectro del Laplaciano sabemos que  $-2$  no es un valor propio. Por lo tanto el operador  $(\Delta + 2I)$  es uno a uno y sobre. Si  $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  entonces  $(\Delta v + \mu_0 v)$  es ortogonal a todo el espacio de trabajo y por lo tanto debe ser cero.

Inversamente si  $-\Delta v = \mu_0 v$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned}(\Delta v, \phi) &= \int (\nabla v \cdot \nabla \phi - 2v\phi) d\Omega = \int (-\Delta v \phi - 2v\phi) d\Omega = (\mu_0 - 2) \int v\phi d\Omega \\(v, \phi) &= \int (\Delta v \Delta \phi + 2v\Delta \phi) d\Omega = \int \Delta \phi (2v - \mu_0 v) d\Omega = -(2 - \mu_0) \int \phi \Delta v d\Omega \\ &= \mu_0 (\mu_0 - 2) \int \phi v d\Omega.\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mu_0(\Delta v, \phi) = (v, \phi)$  para toda  $\phi$  en el espacio de trabajo, lo cual implica que  $\mu_0 A v = v$ . ■

El siguiente teorema nos dice que el funcional  $(B(u, v), w)$  es simétrico en  $u, v, w$ . Da una fórmula explícita para calcular dicho funcional en términos de los operadores  $\Delta, \Delta^2$  y un término de frontera en derivadas respecto a  $\theta$ . La demostración es un poco larga y requiere algo de manipulación algebraica basada en argumentos de simetría. La idea consiste en dividir el funcional original en varios términos, probar que cada término es simétrico y realizar las integraciones por partes correspondientes.

**Definición 4.3** Dado el funcional  $B(u, v, w) = \int_{\Omega} \{u, v\} w d\Omega$

$$\int_{\Omega} \{u, v\} w d\Omega = \int_{\Omega} \left( (\varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma})_{|\beta} + a^{\sigma\mu} u_{,\sigma} v_{,\mu} + u\Delta v + v\Delta u + 2uv \right) w d\Omega$$

se definen

1.  $B_1(u, v, w) = \int_{\Omega} (\varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma})_{|\beta} w d\Omega$
2.  $B_2(u, v, w) = \int_{\Omega} (a^{\sigma\mu} u_{,\sigma} v_{,\mu} + u\Delta v + v\Delta u + 2uv) w d\Omega$
3.  $B_{21}(u, v, w) = \int_{\Omega} (u\Delta v + v\Delta u + 2uv) w d\Omega$
4.  $B_{22}(u, v, w) = \int_{\Omega} a^{\sigma\mu} u_{,\sigma} v_{,\mu} w d\Omega$

**Observación 4.4**  $B(u, v, w) = B_1(u, v, w) + B_2(u, v, w)$ .  $B_2(u, v, w)$  ya es simétrico en  $u, v$ , lo que es evidente de su definición dada en (4.3.2)

**Lema 4.8** *El funcional  $B_2(u, v, w)$  es simétrico en  $u, v, w$  y de hecho*

$$B_2(u, v, w) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (uv\Delta w + uw\Delta v + vw\Delta u) + 2uvw \right) d\Omega$$

y en particular

$$B_{22}(u, v, w) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (uw\Delta w - uw\Delta v - vw\Delta u) d\Omega$$

**Prueba.**

Consideremos el término de  $B_{22}$

$$\int_{\Omega} a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} v_{,\beta} w d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \left( \text{sen}\theta u_{,\theta} v_{,\theta} w + \frac{1}{\text{sen}\theta} u_{,\phi} v_{,\phi} w \right) d\theta d\phi$$

Si integramos el primer término respecto  $\theta$  y el segundo respecto  $\phi$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} (v_{\theta\theta} w \text{sen}\theta + w_{,\theta} v_{,\theta} \text{sen}\theta + \cos\theta v_{,\theta} w) u d\theta d\phi + \int_0^{2\pi} (\text{sen}\theta v_{,\theta} w u) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta_0} d\phi + \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\text{sen}\theta} (v_{,\phi\phi} w + w_{,\phi} v_{,\phi}) u d\theta d\phi + \int_0^{\theta_0} \left( \frac{1}{\text{sen}\theta} v_{,\phi} w u \right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\theta \end{aligned}$$

El segundo término de frontera es cero por periodicidad en  $\phi$ , y el primer término es cero porque  $u, v, w|_{\theta=\theta_0} = 0$  y  $\text{sen}\theta|_{\theta=0} = 0$ . Recordando que sobre una esfera unitaria  $\Delta v = v_{,\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} v_{,\theta} + \frac{1}{R^2 \text{sen}^2\theta} v_{,\phi\phi}$  y que  $d\Omega = \text{sen}\theta d\theta d\phi$  la integral se escribe como

$$= - \int_{\Omega} uw\Delta v d\Omega - \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \left( \text{sen}\theta w_{,\theta} v_{,\theta} + \frac{1}{\text{sen}\theta} w_{,\phi} v_{,\phi} \right) u d\theta d\phi$$

y por lo tanto

$$\int_{\Omega} a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} v_{,\beta} w d\Omega = - \int_{\Omega} uw\Delta v d\Omega - \int_{\Omega} a^{\alpha\beta} w_{,\alpha} v_{,\beta} u d\Omega$$

$$B_{22}(u, v, w) = - \int_{\Omega} uw\Delta v d\Omega - B_{22}(w, v, u) \quad (4.15)$$

Por la simetría entre  $u, v$  tendríamos

$$\int_{\Omega} a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} v_{,\beta} w d\Omega = - \int_{\Omega} v w \Delta u d\Omega - \int_{\Omega} a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} w_{,\beta} v d\Omega$$

$$B_{22}(u, v, w) = - \int_{\Omega} v w \Delta u d\Omega - B_{22}(u, w, v) \quad (4.16)$$

Por lo que tenemos tres formas distintas de escribir  $B_2$

$$B_2(u, v, w) = 2 \int_{\Omega} u v w d\Omega + \int_{\Omega} (u \Delta v + v \Delta u) w d\Omega - \int_{\Omega} u w \Delta v d\Omega - \int_{\Omega} a^{\alpha\beta} v_{,\alpha} w_{,\beta} u d\Omega$$

$$B_2(u, v, w) = 2 \int_{\Omega} u v w d\Omega + \int_{\Omega} (u \Delta v + v \Delta u) w d\Omega - \int_{\Omega} v w \Delta u d\Omega - \int_{\Omega} a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} w_{,\beta} v d\Omega$$

$$B_2(u, v, w) = 2 \int_{\Omega} u v w d\Omega + \int_{\Omega} (u \Delta v + v \Delta u) w d\Omega + \int_{\Omega} a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} v_{,\beta} w d\Omega$$

Sumando las dos primeras ecuaciones y restando la tercera se tendría

$$B_2(u, v, w) = 2 \int_{\Omega} u v w d\Omega - \int_{\Omega} a^{\alpha\beta} (u_{,\alpha} v_{,\beta} w + u_{,\alpha} w_{,\beta} v + v_{,\alpha} w_{,\beta} u) d\Omega$$

y por lo tanto  $B_2(u, v, w)$  es simétrico.

De la definición (4.3) y usando el hecho que  $B_2$  es simétrico en  $u, v, w$  se tiene

$$B_{22}(w, v, u) = B_2(w, v, u) - B_{21}(w, v, u) = B_2(u, v, w) - B_{21}(w, v, u) =$$

$$B_{21}(u, v, w) + B_{22}(u, v, w) - B_{21}(w, v, u)$$

Y usando (4.15)

$$-B_{22}(u, v, w) - \int_{\Omega} u w \Delta v d\Omega = B_{21}(u, v, w) + B_{22}(u, v, w) - B_{21}(w, v, u)$$

lo que implica

$$2B_{22}(u, v, w) = - \int_{\Omega} u w \Delta v d\Omega + B_{21}(w, v, u) - B_{21}(u, v, w)$$

y de (4.3.3)

$$B_{22}(u, v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (uv\Delta w - uw\Delta v - vw\Delta u) d\Omega \quad (4.17)$$

y como  $B_2(u, v, w) = B_{21}(u, v, w) + B_{22}(u, v, w)$  se tiene que

$$B_2(u, v, w) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (uv\Delta w + uw\Delta v + vw\Delta u) + 2uvw \right) d\Omega \quad (4.18)$$

■

**Lema 4.9** *Sea*

$$B_1(u, v, w) = \int_{\Omega} (\varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma})_{|\beta} w d\Omega$$

entonces  $B_1$  es simétrico en  $u, v, w$  y de hecho, para funciones lisas

$$\begin{aligned} B_1(u, v, w) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u\Delta v\Delta w + v\Delta u\Delta w + w\Delta u\Delta v) d\Omega - \\ &\quad \frac{1}{4} \int_{\Omega} (uv\Delta^2 w + uw\Delta^2 v + vw\Delta^2 u) d\Omega + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_{,\theta} v_{,\theta} w_{,\beta} \text{sen}\theta_0 d\phi \end{aligned}$$

**Prueba.** Primero veremos que en efecto  $B_1$  es simétrico en  $u, v, w$ . Sea  $\varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma} = A^\beta$  entonces de la definición de derivada covariante tenemos que

$$\begin{aligned} B_1(u, v, w) &= \int_{\Omega} A^\beta_{|\beta} w d\Omega = \int_{\Omega} (A^\beta_{,\beta} + A^k \Gamma_{k\beta}^\beta) w d\Omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} (A^\beta_{,\beta} + A^\theta \cot\theta) w \text{sen}\theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

Ahora realizaremos una integración por partes con respecto a cada índice del primer término de la integral

$$\int_{\Omega} A^\beta_{,\beta} w d\Omega = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} (A^\beta w_{,\beta} \text{sen}\theta + A^\beta (\text{sen}\theta)_{,\beta} w) d\theta d\phi + \int_{\partial\Omega_\beta} w \text{sen}\theta d\partial\Omega_\beta,$$

donde estamos usando la siguiente notación:  $\partial\Omega_1$  son los segmentos de recta  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  para  $\theta = 0$  y  $\theta = \theta_0$  respectivamente y por lo tanto  $d\partial\Omega_1 = \pm d\phi$  con el signo más o menos dependiendo del sentido en que se recorra la curva. De igual manera  $\partial\Omega_2$  son las rectas  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  en  $\phi = 0, \phi = 2\pi$  respectivamente, y  $d\partial\Omega_2 = \pm d\theta$ .

El término de frontera es cero por lo siguiente: en  $\theta = 0$  se tiene que  $\text{sen}\theta = 0$ , en  $\theta = \theta_0$  se tiene que  $w = 0$ , y por lo tanto no hay integrales en  $d\phi$ , además es cero por periodicidad para las integrales en  $d\theta$ . Y por lo tanto

$$B_1(u, v, w) = \int_{\Omega} A_{|\beta}^{\beta} w d\Omega = - \int_{\Omega} A^{\beta} w_{,\beta} d\Omega = - \int_{\Omega} \varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma} w_{,\beta} d\Omega \quad (4.19)$$

y por lo tanto  $B_1$  es simétrico en  $v, w$ . Ahora veremos que es simétrico en  $u, w$  y se seguirá la simetría en  $u, v, w$ . Desarrollando la derivada covariante del lado derecho de la igualdad anterior,

$$B_1(u, v, w) = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} (u_{,\kappa\mu} - u_{,j} \Gamma_{\kappa\mu}^j) v_{,\sigma} w_{,\beta} \text{sen}\theta d\theta d\phi.$$

Si llamamos  $T^{\kappa\mu} = \varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} v_{,\sigma} w_{,\beta}$

$$B_1(u, v, w) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} T^{\kappa\mu} (-u_{,\kappa\mu} + u_{,j} \Gamma_{\kappa\mu}^j) \text{sen}\theta d\theta d\phi. \quad (4.20)$$

Integrando por partes, el primer término se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} -T^{\kappa\mu} u_{,\kappa\mu} \text{sen}\theta d\theta d\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} (T^{\kappa\mu} (\text{sen}\theta)_{,\mu} + \text{sen}\theta T^{\kappa\mu}_{,\mu}) u_{,\kappa} d\theta d\phi - \\ &\int_{\partial\Omega_{\mu}} T^{\kappa\mu} \text{sen}\theta u_{,\kappa} d\partial\Omega_{\mu} \end{aligned}$$

Haremos las siguientes manipulaciones en los términos de la primera integral, del lado derecho de la ecuación (4.20). Despejando la derivada del tensor  $T^{\kappa\mu}$  de la expresión para su derivada covariante (B.16) se tiene que  $T^{\kappa\mu}_{,\mu}$  se puede escribir como

$$T^{\kappa\mu}_{,\mu} = T^{\kappa\mu}_{|\mu} - T^{\alpha\mu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\kappa} - T^{k\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu}$$



por lo que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \left( T^{\kappa\mu}(\text{sen}\theta)_{,\mu} + \text{sen}\theta(T_{|\mu}^{\kappa\mu} - T^{\alpha\mu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\kappa} - T^{\kappa\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu}) \right) u_{,\kappa} d\theta d\phi - \int_{\partial\Omega_\mu} T^{\kappa\mu} \text{sen}\theta u_{,\kappa} d\partial\Omega_\mu$$

El término  $\text{sen}\theta T^{\alpha\mu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\kappa} u_{,\kappa}$  se cancela con el segundo término de (4.20), por lo que  $B_1$  se escribe como

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \left( T^{\kappa\mu}(\text{sen}\theta)_{,\mu} + \text{sen}\theta(T_{|\mu}^{\kappa\mu} - T^{\kappa\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu}) \right) u_{,\kappa} d\theta d\phi - \int_{\partial\Omega_\mu} T^{\kappa\mu} \text{sen}\theta u_{,\kappa} d\partial\Omega_\mu$$

El término  $T^{\kappa\mu}(\text{sen}\theta)_{,\mu}$  es distinto de cero sólo cuando  $\mu = 1$  y vale  $T^{\kappa 1} \cos\theta$ . Usando el hecho que en el caso de la esfera se tiene que  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \neq 0$  sólo si  $\beta = 2, \alpha = 1$  (ver (B.31)) y  $\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot\theta$ , implica que  $T^{\kappa\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} = T^{\kappa 1} \cot\theta$  con  $\mu = 2, \alpha = 1$ . Así que  $B_1$  se escribe como

$$B_1(u, v, w) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \left( T^{\kappa 1} \cos\theta + \text{sen}\theta(T_{|\mu}^{\kappa\mu} - T^{\kappa 1} \cot\theta) u_{,\kappa} \right) d\theta d\phi - \int_{\partial\Omega_\mu} T^{\kappa\mu} \text{sen}\theta u_{,\kappa} d\partial\Omega_\mu$$

$$\int_{\Omega} T^{\kappa\mu} u_{|\kappa\mu} d\Omega = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} T_{|\mu}^{\kappa\mu} u_{,\kappa} \text{sen}\theta d\theta d\phi + \int_{\partial\Omega_\mu} T^{\kappa\mu} \text{sen}\theta u_{,\kappa} d\partial\Omega_\mu \quad (4.21)$$

El término de frontera es cero por el siguiente argumento: Las integrales en  $d\theta$  son cero por periodicidad, para las integrales en  $d\phi$  tenemos que en  $\theta = 0$ ,  $\text{sen}\theta = 0$ . Resta por ver que pasa en  $\theta = \theta_0$  para la integral en  $d\phi$  que corresponde al valor del índice  $\mu = 2$ . Ahora,

$$T^{k2} u_{,\kappa} = (\epsilon^{12})^2 w_{,1} (v_{,1} u_{,2} - v_{,2} u_{,1})$$

que al valuarlo en  $\theta_0$  notamos que  $u(\theta_0) = 0$ , en particular no depende de  $\phi$ , por lo cual  $u_{,2} = v_{,2} = 0$ . Por lo tanto  $T^{\kappa 2} u_{,2} = 0$  en  $\theta = \theta_0$  y no hay término de frontera.

Recordando que

$$T^{k\mu} = \varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} v_{,\sigma} w_{,\beta},$$

usando la regla del producto para la derivada covariante, teniendo en cuenta que  $\varepsilon_{|\gamma}^{\alpha\beta} = 0$  como se muestra en el apéndice (B.32), y el resultado anterior de integración por partes se tiene

$$\begin{aligned} B_1(u, v, w) &= - \int \varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} v_{,\sigma} w_{,\beta} u_{|k\mu} d\Omega = \int_{\Omega} (\varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} v_{,\sigma} w_{,\beta})_{|\mu} u_{,k} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} (v_{,\sigma} w_{|\beta\mu} + v_{|\sigma\mu} w_{,\beta}) u_{,k} d\Omega. \end{aligned}$$

Si observamos que  $\varepsilon^{\beta\mu} w_{|\beta\mu} = \varepsilon^{\theta\phi} (w_{|\theta\phi} - w_{|\phi\theta}) = 0$  entonces

$$B_1(u, v, w) = \int_{\Omega} \varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} v_{|\sigma\mu} w_{,\beta} u_{,k} d\Omega$$

y por lo tanto es simétrico en  $w, u$  y como ya era simétrico en  $v, w$  es simétrico en  $u, v, w$ .

Ahora veremos como encontrar la expresión enunciada en el teorema.

De (4.19)

$$B_1(u, v, w) = \int_{\Omega} (\varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma})_{|\beta} w d\Omega = - \int_{\Omega} \varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma} w_{,\beta} d\Omega.$$

Usaremos la identidad  $\varepsilon^{\sigma\kappa} \varepsilon^{\beta\mu} = a^{\sigma\beta} a^{k\mu} - a^{\sigma\mu} a^{k\beta}$  que se prueba en el apéndice (B.33). Por lo que tenemos,

$$\begin{aligned} B_1(u, v, w) &= \int_{\Omega} (a^{\sigma\mu} a^{k\beta} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma} w_{,\beta} - a^{\sigma\beta} a^{k\mu} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma} w_{,\beta}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (a^{\sigma\mu} a^{k\beta} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma} w_{,\beta} - a^{\sigma\beta} v_{,\sigma} w_{,\beta} \Delta u) d\Omega. \end{aligned}$$

El segundo término de la integral ya lo conocemos y es  $B_{22}(v, w, \Delta u)$  que de hecho ya sabemos como expresarlo en términos de  $\Delta$ . El primer término lo definiremos como  $B_{11}(u, v, w) = \int_{\Omega} a^{\sigma\mu} a^{k\beta} u_{|\kappa\mu} v_{,\sigma} w_{,\beta}$  y buscaremos expresarlo en términos de  $\Delta$ . El primer paso será integrar por partes a  $B_{11}$ .

Sea  $T^{k\mu} = a^{\sigma\mu} a^{k\beta} v_{,\sigma} w_{,\beta}$ , entonces

$$B_1(u, v, w) = B_{11}(u, v, w) - B_{22}(v, w, \Delta u) \quad (4.22)$$

$$B_{11}(u, v, w) = \int_{\Omega} T^{k\mu} u_{|k\mu} d\Omega = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} T_{|\mu}^{k\mu} u_{,k} \text{sen}\theta d\theta d\phi + \int_{\partial\Omega_{\mu}} T^{k\mu} \text{sen}\theta u_{,k} d\partial\Omega_{\mu}.$$

Con los mismos argumentos que usamos en (4.21)

$$= - \int_{\Omega} a^{\sigma\mu} a^{k\beta} (v_{,\sigma} w_{|\beta\mu} + v_{|\sigma\mu} w_{,\beta}) u_{,k} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\mu}} T^{k\mu} \text{sen}\theta u_{,k} d\partial\Omega_{\mu}$$

donde se usó el hecho que  $a_{|k}^{\sigma\mu} = 0$ , ver apéndice (B.18), y por lo tanto sale de la derivada covariante. Entonces

$$B_{11}(u, v, w) = - \int_{\Omega} (a^{\sigma\mu} a^{k\beta} w_{|\beta\mu} v_{,\sigma} u_{,k} + a^{k\beta} w_{,\beta} u_{,k} \Delta v) d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\mu}} T^{k\mu} \text{sen}\theta u_{,k} d\partial\Omega_{\mu}$$

$$B_{11}(u, v, w) = -B_{11}(w, v, u) - B_{22}(u, w, \Delta v) + \int_{\partial\Omega_{\mu}} T^{k\mu} \text{sen}\theta u_{,k} d\partial\Omega_{\mu} \quad (4.23)$$

Sabemos que  $B_1(w, v, u) = B_1(u, v, w)$  por la simetría de  $B_1$  y además que  $B_1(u, v, w) = B_{11}(u, v, w) - B_{22}(v, w, \Delta u) \Rightarrow B_{11}(w, v, u) = B_{11}(u, v, w) - B_{22}(v, w, \Delta u) + B_{22}(v, u, \Delta w)$ . Sustituyendo en (4.23) tenemos que

$$2B_{11}(u, v, w) = B_{22}(v, w, \Delta u) - B_{22}(v, u, \Delta w) - B_{22}(u, w, \Delta v) + \int_{\partial\Omega_{\mu}} T^{k\mu} \text{sen}\theta u_{,k} d\partial\Omega_{\mu}$$

y sustituyendo en (4.22) tenemos que

$$B_1(u, v, w) = -\frac{1}{2} (B_{22}(v, w, \Delta u) + B_{22}(v, u, \Delta w) + B_{22}(u, w, \Delta v)) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{\mu}} T^{k\mu} \text{sen}\theta u_{,k} d\partial\Omega_{\mu}$$

El término de frontera está dado por

$$\int_{\partial\Omega_{\mu}} a^{\sigma\mu} a^{k\beta} v_{,\sigma} w_{,\beta} u_{,k} \text{sen}\theta d\partial\Omega_{\mu}$$

Las integrales en  $d\theta$  son cero por periodicidad en  $\phi$ , las integrales en  $d\phi$  para  $\theta = 0$  se tiene que  $\text{sen}(\theta = 0) = 0$  y por lo tanto sólo queda ver cuando  $\theta = \theta_0$ . Evaluando este término cuando  $\mu = \theta$

$$\int_0^{2\pi} a^{\theta\theta} v_{,\theta} a^{\beta\beta} w_{,\beta} u_{,\beta} \text{sen}\theta_0 d\phi$$

como en la frontera  $u_{,\phi}(\theta_0) = 0$  se tiene que el término de frontera se escribe como

$$\int_0^{2\pi} a^{\theta\theta} a^{\theta\theta} v_{,\theta} w_{,\theta} u_{,\theta} \text{sen}\theta_0 d\phi = \int_0^{2\pi} v_{,\theta} u_{,\theta} w_{,\theta} \text{sen}\theta_0 d\phi$$

Tenemos todo para calcular  $B_1$ . Aplicando el resultado de la ecuación (4.17) se tendría que  $B_1$  vale para funciones  $u, v, w$  suaves

$$\begin{aligned} B_1(u, v, w) &= -\frac{1}{4} \int_{\Omega} (vu\Delta^2 w + uw\Delta^2 v + vw\Delta^2 u) d\Omega + \\ &\frac{1}{2} \int_{\Omega} (v\Delta u\Delta w + w\Delta u\Delta v + u\Delta v\Delta w) d\Omega + \\ &\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} v_{,\theta} u_{,\theta} w_{,\theta} \text{sen}\theta_0 d\phi \end{aligned}$$

■

Con los lemas (4.9) y (4.8) podemos probar el siguiente resultado

**Teorema 4.6**

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{u, v\} w d\Omega &= \int_{\Omega} \left( 2uvw + \frac{1}{2}(uv\Delta w + vw\Delta u + uw\Delta v) \right) d\Omega + \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u\Delta v\Delta w + v\Delta u\Delta w + w\Delta u\Delta v) d\Omega &- \frac{1}{4} \int_{\Omega} (uv\Delta^2 w + uw\Delta^2 v + vw\Delta^2 u) d\Omega + \\ \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_{,\theta} v_{,\theta} w_{,\theta} \text{sen}\theta_0 d\phi \end{aligned}$$

**Prueba.** Como  $\int_{\Omega} \{u, v\} w d\Omega = B(u, v, w) = B_1(u, v, w) + B_2(u, v, w)$  de los lemas anteriores se tiene el resultado para funciones suaves y por densidad, para funciones en el espacio de trabajo, y se tiene también la simetría de  $B(u, v, w)$ . ■



# Capítulo 5

## Las ecuaciones de bifurcación

En este capítulo se pretende resolver la ecuación  $L_\lambda w + \alpha Q(w) + C(w) = 0$  para  $w$  en el espacio de trabajo  $H$ . Se hace un estudio de la parte lineal, en particular se prueba que si  $-\Delta v = \mu v$  entonces  $v \in \text{Ker} L_\lambda$ , el cual es de dimensión finita. Se encuentra el valor crítico  $\lambda_c$ , valor para el cual existe el combamiento. Se muestra que  $\lambda_c$  es función del espectro del laplaciano y del parámetro  $\alpha$ . Se aplica el método de Liapunov-Schmidt para obtener las ecuaciones de bifurcación. Se aplica la teoría del grado topológico para demostrar la existencia de soluciones a las ecuaciones de bifurcación. El caso  $m = 1$ , donde  $m = \dim \text{Ker}(L_{\lambda_n})$ , se desarrolla completamente puesto que dichas soluciones representan los casos genéricos al problema de la esfera deformada.

### 5.1. La ecuaciones de bifurcación

De las ecuaciones (4.6) y (4.7) hemos reducido el problema a dos ecuaciones en espacios de Hilbert en términos del operador lineal y acotado  $A(u)$ , y el operador bilineal y acotado  $B(u, v)$  dadas a continuación

$$f + \alpha Aw + \frac{1}{2}B(w, w) = 0 \quad (5.1)$$

$$w - \alpha Af - \lambda Aw - B(w, f) = 0 \quad (5.2)$$

donde  $A$  y  $B$  están dados implícitamente por las definiciones (4.4) y (4.5). Bajo este formalismo es posible reducir el par de ecuaciones a una sola ecuación

como se hace a continuación. Despejando  $f$  de (5.1):  $f = -\alpha Aw - \frac{1}{2}B(w, w)$  y sustituyendo en (5.2) se tiene que

$$w - \alpha A(-\alpha Aw - \frac{1}{2}B(w, w)) - \lambda Aw - B(w, -\alpha Aw - \frac{1}{2}B(w, w)) = 0$$

que se reduce a

$$w - \lambda Aw + \alpha^2 A^2 w + \alpha \left( \frac{1}{2} A(B(w, w)) + B(w, Aw) \right) + \frac{1}{2} B(w, B(w, w)) = 0 \quad (5.3)$$

Si hacemos las siguientes definiciones

**Definición 5.1** Sea  $w \in H$  ( $H$  el espacio de trabajo), entonces definimos

1.  $L_\lambda w = w - \lambda Aw + \alpha^2 A^2 w$
2.  $Q(w) = \frac{1}{2} A(B(w, w)) + B(w, Aw)$
3.  $C(w) = \frac{1}{2} B(w, B(w, w))$

Entonces se tiene que la ecuación (5.3) se escribe como

$$L_\lambda w + \alpha Q(w) + C(w) = 0 \quad (5.4)$$

De hecho se observa que  $L_\lambda w$  es la parte lineal de la ecuación,  $Q(w)$  es de orden  $O(\|w\|^2)$  la parte cuadrática y  $C(w)$  de orden  $O(\|w\|^3)$  la parte cúbica. Además se nota que  $A(w)$ ,  $Q(w)$ ,  $C(w)$  son el gradientes de los funcionales  $a(w) = \frac{1}{2}(A(w), w)$ ,  $q(w) = \frac{1}{3}(Q(w), w)$ ,  $c(w) = \frac{1}{4}(C(w), w)$  respectivamente.

Algunas propiedades de estos operadores se enuncian en el siguiente teorema

**Teorema 5.1** Sean  $Q, C$  definidos como arriba, entonces

1.  $Q$  es el gradiente del funcional  $q(w) = \frac{1}{3}(Q(w), w) = \frac{1}{2}(B(w, w), Aw)$  y su derivada de Fréchet vale

$$Q'(w)h = AB(w, h) + B(w, Ah) + B(h, Aw)$$

además

$$Q(w + h) - Q(w) = Q'(w)h + Q(h).$$

2.  $C$  es el gradiente del funcional  $c(w) = \frac{1}{4}(C(w), w) = \frac{1}{8}(B(w, w), B(w, w))$  y su derivada de Fréchet vale

$$C'(w)h = B(w, B(w, h)) + \frac{1}{2}B(h, B(w, w))$$

además

$$C(w+h) - C(w) = C'(w)h + C'(h)w + C(h).$$

### Prueba.

A continuación calcularemos las derivadas de Fréchet para los operadores  $Q(w), C(w)$ . Suponemos por el momento que  $h \in H$ ,  $\|h\| \leq \varepsilon$  pequeño. Se usa el hecho que  $B(u, v)$  es simétrico en  $u, v$ , bilineal y acotado, y para  $A(w)$  que es lineal y acotado.

$$Q(w+h) - Q(w) = Q'(w)h + O(\|h\|^2)$$

De las definiciones de  $Q(w)$  y  $C(w)$  se tiene que

$$Q(w+h) - Q(w) = \left( \frac{1}{2}AB(w+h, w+h) + B(w+h, A(w+h)) \right) - \frac{1}{2}A(B(w, w)) - B(w, Aw)$$

Simplificando tenemos

$$Q(w+h) - Q(w) = AB(w, h) + B(h, Aw) + B(w, Ah) + \frac{1}{2}AB(h, h) + B(h, Ah)$$

y por lo tanto

$$Q'(w)h = AB(w, h) + B(w, Ah) + B(h, Aw)$$

y se observa que

$$Q(w+h) - Q(w) = Q'(w)h + Q(h).$$

De manera similar

$$C(w+h) - C(w) = \frac{1}{2}B(w+h, B(w+h, w+h)) - \frac{1}{2}B(w, B(w, w))$$

Expandiendo las formas bilineales y simplificando se tiene

$$= B(w, B(w, h)) + \frac{1}{2}B(h, B(w, w)) + B(h, B(w, h)) +$$



$$\frac{1}{2}B(w, B(h, h)) + \frac{1}{2}B(h, B(h, h))$$

Los términos de orden  $O(\|h\|)$  dan la derivada de Fréchet y por lo tanto

$$C'(w)h = B(w, B(w, h)) + \frac{1}{2}B(h, B(w, w))$$

y además se observa que

$$C(w+h) - C(w) = C'(w)h + C'(h)w + C(h)$$

Que tanto  $Q, C$  son el gradiente de los funcionales enunciados en el teorema (5.1) se prueba como sigue: Como  $3q(w) = (Q(w), w)$ , es decir

$$\begin{aligned} 3q(w) &= \left( \frac{1}{2}AB(w, w), w \right) + (B(w, Aw), w) \\ &= \frac{1}{2}(B(w, w), Aw) + (B(w, w), Aw) = \frac{3}{2}(B(w, w), Aw) \end{aligned}$$

donde se usó el hecho que  $A$  es autoadjunto y  $(B(u, v), w)$  es simétrico. La derivada de Fréchet de  $q(w)$  serán los términos lineales en  $h$  de la cantidad  $q(w+h) = \frac{1}{2}(B(w+h, w+h), A(w+h))$  es decir

$$q'(w)h = \frac{1}{2}[(AB(w, w), h) + (AB(w, h), w) + (AB(h, w), w)]$$

$$q'(w)h = \frac{1}{2}(AB(w, w), h) + (B(w, Aw), h)$$

y por lo tanto

$$Q(w) = q'(w) = \frac{1}{2}AB(w, w) + B(w, Aw).$$

Mismo argumento para  $C(w)$ . Se tiene que  $c(w) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}B(w, B(w, w)), w) = \frac{1}{8}(B(w, w), B(w, w))$  donde se usó el hecho que  $(B(u, v), w)$  es simétrico. La derivada de Fréchet de  $c(w)$  serán los términos lineales en  $h$  de la cantidad  $c(w+h) = \frac{1}{8}(B(w+h, w+h), B(w+h, w+h))$ , es decir

$$c'(w)h = \frac{1}{8}[2(B(w, w), B(w, h)) + 2(B(h, w), B(w, w))]$$

donde se usó la simetría de  $B(u, v)$ . Y por la simetría del producto escalar se tiene que

$$c'(w)h = \frac{1}{2}(B(w, w), B(w, h)) = \frac{1}{2}(B(w, B(w, w)), h)$$

y por lo tanto

$$c'(w) = C(w)$$

■

## 5.2. Propiedades de la parte lineal $L_\lambda$

A continuación se observa en que manera se relaciona el espectro de la parte lineal  $L_\lambda$  con el espectro del operador  $A$  y este a su vez con el espectro del laplaciano.

**Lema 5.1** *Sea  $L_\lambda v = v - \lambda Av + \alpha^2 A^2 v$  entonces  $L_\lambda$  es un operador lineal autoadjunto. Además si  $L_{\lambda_n} v = 0 \Leftrightarrow \lambda_n = \mu_n + \frac{\alpha^2}{\mu_n}$  donde  $\mu_n \in \sigma(-\Delta)$  y con las mismas funciones propias.*

**Prueba.** De la observación (4.4.1) sabemos que el operador  $A$  es compacto y autoadjunto. Notamos que  $L_\lambda$  puede ser escrito de la siguiente manera

$$L_\lambda v = \left( (\alpha A - \frac{\lambda}{2\alpha} I)^2 + \frac{4\alpha^2 - \lambda^2}{4\alpha^2} I \right) v$$

Y utilizando el hecho que  $A$  es autoadjunto tenemos que

$$(L_\lambda v, v) = \left\| (\alpha A - \frac{\lambda}{2\alpha} I)v \right\|^2 + \frac{4\alpha^2 - \lambda^2}{4\alpha^2} \|v\|^2$$

Además observamos que si  $\lambda^2 < 4\alpha^2$  entonces  $(L_\lambda v, v) \geq C_0 \|v\|^2$  por lo que  $L_\lambda$  es uno a uno. En ese caso, como  $A$  es compacto, entonces  $L_\lambda$  es invertible.  $A$  autoadjunto implica que  $A^2$  también es autoadjunto y por lo tanto  $L_\lambda$  es autoadjunto. Además,  $L_\lambda$  es de la forma  $I$ -compacto, y por lo tanto el núcleo de  $L_\lambda$  es de dimensión finita y  $L_\lambda$  es un operador de Fredholm satisfaciendo la alternativa de Fredholm. Por otro lado, para  $|\lambda| > 2\alpha$ ,  $L_\lambda v = v - \lambda Av + \alpha^2 A^2 v$  se puede factorizar de la forma

$$L_\lambda v = (I - \mu^+ A)(I - \mu^- A)v \tag{5.5}$$

con  $\begin{cases} \mu^+ + \mu^- = \lambda \\ \mu^+ \mu^- = \alpha^2 \end{cases}$  Lo que implica  $\mu^{+2} - \lambda\mu^+ + \alpha^2 = 0$  y la misma ecuación para  $\mu^-$ . Entonces

$$\begin{cases} 2\mu^+ = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha^2} \\ 2\mu^- = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha^2} \end{cases} \text{ y despejando } \lambda \text{ en función de } \mu \text{ se tiene que}$$

$$\lambda = \mu^\pm + \frac{\alpha^2}{\mu^\pm}.$$

Supongamos que  $L_\lambda v = 0 \Leftrightarrow (L_\lambda v, \phi) = 0$  entonces de la factorización (5.5) se tiene que

$$\begin{cases} (I - \mu^+ A)v = 0 \\ \acute{o}(I - \mu^- A)v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu^+ Av = v \\ \acute{o}\mu^- Av = v \end{cases} \Leftrightarrow \mu^+ \acute{o}\mu^- \in \sigma(-\Delta)$$

debido a la observación 2. ■

**Lema 5.2** Sea  $\lambda_c = \min\{\lambda_n | \lambda_n = \mu_n + \frac{\alpha^2}{\mu_n}, \mu_n \in \sigma(-\Delta)\}$   
entonces

1. si  $\mu_{n-1}\mu_n < \alpha^2 < \mu_n\mu_{n+1} \Rightarrow \lambda_c = \lambda_n$
2. si  $\alpha^2 = \mu_{n+1}\mu_n \Rightarrow \lambda_c = \lambda_{n+1} = \lambda_n = \mu_n + \frac{\alpha^2}{\mu_n} = \mu_n + \mu_{n+1}$

**Prueba.** Por definición de los valores propios  $0 < \mu_{n-1} \leq \mu_n \leq \mu_{n+1}$  para  $n = 2, 3, \dots$ . Ahora sea

$$\lambda_{n+j} - \lambda_n = \mu_{n+j} + \frac{\alpha^2}{\mu_{n+j}} - \mu_n - \frac{\alpha^2}{\mu_n} = (\mu_{n+j} - \mu_n)(\mu_{n+j}\mu_n - \alpha^2) \frac{1}{\mu_{n+j}\mu_n} \quad (5.6)$$

donde  $j \in J^+ \cup J^-$  tales que  $J^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$  y  $J^- = \{-1, -2, \dots, -(n-1)\}$ . Para encontrar el mínimo definido como arriba sobre un conjunto discreto de  $\mu_n$ 's, tenemos las siguientes desigualdades que son válidas porque  $\mu_n \leq \mu_{n+1}$  por definición de los valores propios.

$$\begin{aligned} \mu_{n-1}\mu_n &< \alpha^2 < \mu_n\mu_{n+1} \\ \mu_{n-2}\mu_n &< \alpha^2 < \mu_n\mu_{n+2} \\ &\vdots \\ \mu_{n-j}\mu_n &< \alpha^2 < \mu_n\mu_{n+j} \end{aligned}$$

En la última desigualdad del lado izquierdo  $1 \leq j \leq n-1$  y para el lado derecho  $j = 1, 2, \dots$ . Como  $\mu_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces siempre existe

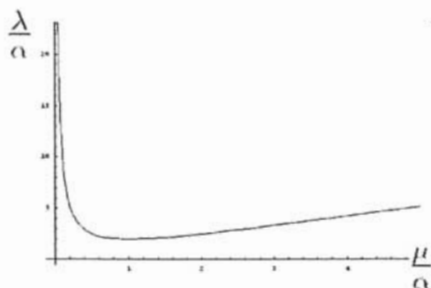


Figura 5.1:  $\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\mu}{\alpha} + \frac{\alpha}{\mu}$

una  $n$  tal que  $\mu_{n-1}\mu_n \leq \alpha^2 \leq \mu_n\mu_{n+1}$ . La ecuación (5.6) siempre tiene un mínimo, lo cual es evidente al ver la gráfica  $\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\mu}{\alpha} + \frac{\alpha}{\mu}$  (figura(5.1)) que siempre tiene un mínimo para  $\mu = \alpha$ .

Notamos lo siguiente: en la ecuación (5.6) si  $j \in J^+$  las dos diferencias son positivas ó cero si  $\mu_{n+j} = \mu_n$  y por lo tanto  $\lambda_{n+j} - \lambda_n \geq 0$  si  $j \in J^+$ . Si  $j \in J^-$ , las dos diferencias son negativas ó cero y su producto positivo y por lo tanto  $\lambda_{n+j} - \lambda_n \geq 0$ . Por lo tanto  $\lambda_n \leq \lambda_{n+j}$  para  $j \in J^+ \cup J^-$  si  $\mu_{n-1}\mu_n < \alpha^2 < \mu_n\mu_{n+1}$ , es decir,  $\lambda_n$  es un mínimo. En el caso que  $\alpha^2 = \mu_{n+1}\mu_n$ , esto mismo implica la serie de desigualdades

$$\mu_{n-j}\mu_n \leq \alpha^2 \leq \mu_n\mu_{n+j}$$

La ecuación (5.6) implica que  $\lambda_{n+1} = \lambda_n$ . Podemos aplicar el argumento utilizado en el otro caso teniendo en cuenta que  $j \neq 1$  y con esto acabamos de probar el lema

1. si  $\mu_{n-1}\mu_n < \alpha^2 < \mu_n\mu_{n+1} \Rightarrow \lambda_c = \lambda_n$
2. si  $\alpha^2 = \mu_{n+1}\mu_n \Rightarrow \lambda_c = \lambda_{n+1} = \lambda_n = \mu_n + \frac{\alpha^2}{\mu_n} = \mu_n + \mu_{n+1}$

■

### 5.3. Método de Liapunov-Schmidt

Lo que se ha hecho hasta el momento es tomar el par ecuaciones (5.1),(5.2) y reducirlas a una sola ecuación en un espacio de Hilbert. La ecuación consta

de la parte lineal que depende del parámetro libre  $\lambda$ . Hemos visto cómo su espectro está relacionado con el espectro de  $\Delta$ , el operador de Laplace-Beltrami.

En los problemas elásticos, en particular en el combamiento de estructuras, lo que se tiene es una ecuación diferencial compuesta de un operador lineal más términos no lineales y un parámetro libre que se asocia con cargas externas. Se conoce la solución trivial al problema elástico, en el cual la estructura es capaz de resistir todas las cargas externas en virtud de que estas son compensadas por los esfuerzos internos. Pero a medida que aumenta la carga, puede suceder, y de hecho sucede en la elasticidad no lineal, que la estructura se comba. A la presión donde sucede el combamiento le llamaremos presión crítica. Para resolver las ecuaciones de deformación en la vecindad de la presión crítica utilizaremos el método de Liapunov-Schmidt que resuelve un problema no lineal en la vecindad del parámetro donde se sucede el combamiento. En el apéndice A se demuestra que las funciones

$$u_k^m = c_k^m P_{\nu_k^m}^m(\cos \theta) \cos m\phi$$

$$v_k^m = d_k^m P_{\nu_k^m}^m(\cos \theta) \sin m\phi$$

forman una base del espacio de trabajo

$$H = \left\{ w \mid w = \sum_{k=1} \left[ a_k^0 u_k^0 + \sum_{m=1} (a_k^m u_k^m + b_k^m v_k^m) \right] \right\} \quad (5.7)$$

donde  $c_k^m$  y  $d_k^m$  son tales que  $(u_k^m, u_j^m) = \delta_k^j \delta_n^m, (v_k^m, v_j^m) = \delta_k^j \delta_n^m$ , además  $(u_k^m, v_j^m) = 0$  para enteros  $(m, n, k, j > 0)$ . En particular

$$(u_k^m, u_k^m) = \int_{\Omega} (\Delta u_k^m)^2 + 2u_k^m \Delta u_k^m d\Omega = 1$$

que después de algunos cálculos y considerando que  $\Delta u_k^m = -\mu_k^m u_k^m$  se encuentra que

$$c_k^m = \frac{1}{(\pi \mu_k^m (\mu_k^m - 2) \int_{z_0}^1 P_{\nu_k^m}^m(z)^2 dz)^{1/2}} \quad (5.8)$$

donde  $z_0 = \cos \theta_0$ .

## 5.4. Equivariancia de las Ecuaciones

Para probar la equivariancia de la ecuación (5.4) se requieren algunos resultados previos acerca de la teoría de representaciones de grupos.

**Lema 5.3** *Sea  $g \rightarrow T_g$  una representación unitaria de un grupo  $G$  en un espacio de Hilbert  $W$  con producto interior  $(\cdot, \cdot)$  y sea  $F$  un operador continuo en  $W$ . Suponga que  $F$  es el gradiente de un funcional  $f : W \rightarrow R$  y que  $f$  es invariante bajo  $G$  en el sentido que  $f(T_g w) = f(w)$  para todo  $g \in G$  y todo  $w \in W$ . Entonces  $F$  es equivariante bajo la representación  $g \rightarrow G$  en el sentido que  $T_g F(w) = F(T_g w)$ .*

### Prueba.

Como  $F$  es el gradiente de  $f$  se tiene que  $f(w+h) - f(w) = (Fw, h) + O(h^2) = (T_g Fw, T_g h)$  donde se usó el hecho que la representación es unitaria  $(T_g w, T_g h) = (w, h)$ . Por la invariancia  $f(w) = f(T_g w)$ , la derivada de Fréchet vale  $f(T_g(w+h)) - f(T_g w) = (F(T_g w), T_g h) + O(h^2)$  y como la derivada de Fréchet es única, se tiene que  $T_g F(w) = F(T_g w)$ . ■

Consideraremos el grupo de rotaciones que dejan fijo al eje  $z$ , junto con la reflexión  $(\phi \rightarrow -\phi)$  en  $R^2$ . Este grupo de simetrías se llama  $O(2)$ . Sea  $g \rightarrow G$  la representación de  $O(2)$  en  $H$  (5.7), dada por

$$(T_g w) = w(g^{-1}x), \quad x \in \Omega, w \in H \quad (5.9)$$

donde  $g^{-1}$  representa el inverso de  $g$  en  $O(2)$ . De hecho en  $L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (T_g u)(T_g v) d\Omega = \int_{\Omega} uv d\Omega \quad (5.10)$$

es decir, la representación es unitaria en  $L^2(\Omega)$ . De hecho es unitaria en la norma dada por el teorema (4.2), como se prueba a continuación: Como  $w \in H$  implica que  $w, \Delta w \in L^2(\Omega)$ , es fácil ver que

$$T_g(\Delta w) = \Delta(T_g w), \quad w \in H \quad (5.11)$$

Si la rotación asociada a cierto  $g$  está dada por  $\psi$ , entonces en coordenadas esféricas  $T_g w(\theta, \phi) = w(r, \theta, \phi - \psi)$  y para la reflexión  $Kw(\theta, \phi) = w(\theta, -\phi)$ . Sobre la base de  $H$  dada por  $u_k^m, v_k^m$  se tiene  $T_g u_k^m = \cos m\psi u_k^m + \sin m\psi v_k^m$  y  $Ku_k^m = u_k^m$ . Por lo tanto,  $T_g u_k^m$  es función propia de  $\Delta$  y lo mismo para  $v_k^m$ . Sea  $u_k$  función propia del Laplaciano  $\Delta u_k = -\mu_k u_k$  y sea  $\tilde{u}_k = T_g u_k$  entonces

$T_g(\Delta\bar{u}_k) = -\mu_k\bar{u}_k = \Delta\bar{u}_k = \Delta(T_g u_k)$  y como las  $u_k$  generan  $H$  se tiene el resultado. Como la norma (4.2) es  $(u, v) = \int \Delta u \Delta v + 2u \Delta v d\Omega$ , y está dada en términos del Laplaciano, se sigue que la representación  $g \rightarrow G$  es unitaria en la representación  $H$  con norma  $(\cdot, \cdot)$ , es decir

$$(T_g u, T_g v) = (u, v). \quad (5.12)$$

También se tiene que todas las funciones son periódicas en  $\phi$ , por lo que el funcional  $\int_0^{2\pi} u_{,\theta} v_{,\theta} w_{,\theta} d\phi$  en  $\theta = \theta_0$  es invariante bajo el grupo de simetrías utilizado.

**Lema 5.4** *Los operadores  $A, Q, C$  son equivariantes bajo la representación  $g \rightarrow G$  en  $H$  definido por (5.7), es decir  $T_g Q(w) = Q(T_g w)$  para todo  $g \in O(2)$  y todo  $w \in H$  (con relaciones similares para  $A, C$ ).*

**Prueba.** Utilizaremos el lema (5.3) para la representación unitaria dada en (5.9). Como  $A$  es autoadjunto,  $A$  es el gradiente del funcional  $a(w) = \frac{1}{2}(Aw, w)$ . Por (5.10), (5.12) se tiene que

$$\begin{aligned} a(T_g w) &= - \int_{\Omega} [\Delta(T_g w) + 2T_g w] T_g w d\Omega = - \int_{\Omega} T_g [\Delta(w) + 2w] T_g w d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} [\Delta(w) + 2w] w d\Omega = a(w) \end{aligned}$$

es decir,  $a(w)$  es invariante, entonces por el lema (5.3)  $A(T_g w) = T_g A(w)$ . Por otro lado, como  $((B(u, v), w))$  es simétrico, entonces  $B(w, w)$  es el gradiente del funcional  $b(w) = \frac{1}{3}(B(w, w), w)$ . Si llamamos

$$N(w) = \frac{1}{4}[8w^2 + 6w\Delta w + 6(\Delta w)^2 - 3w\Delta^2 w]$$

entonces para funciones suaves el teorema (4.6) y la propiedad (5.11), junto con la invariancia de la medida  $d\Omega$  da como resultado

$$\begin{aligned} b(T_g w) &= \frac{1}{3} \int_{\Omega} (T_g w)(x) N(T_g w)(x) d\Omega + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (T_g w_{,\theta})^3 d\phi \\ &= \frac{1}{3} \int_{\Omega} w(g^{-1}x) N(w(g^{-1}x)) d\Omega + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (w_{,\theta})^3 d\phi \\ &= \frac{1}{3} \int_{\Omega} w N(w) d\Omega + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (w_{,\theta})^3 d\phi = b(w) \end{aligned}$$

y por lo tanto  $b(w)$  es invariante y, por el lema (5.3),  $B(T_g w, T_g w) = T_g B(w, w)$ . Finalmente por el teorema (5.1),  $Q$  es el gradiente de  $q(w) = \frac{1}{2}(B(w, w), Aw)$  y  $C$  es el gradiente de  $c(w) = \frac{1}{4}(C(w), w) = \frac{1}{8}\|B(w, w)\|^2$  los resultados anteriores implican la invariancia de  $q(w)$  y  $c(w)$  y por lo tanto  $Q, C$  son equivariantes. ■

Con estos resultados se sigue el siguiente teorema

**Teorema 5.2** *La ecuación (5.4) es equivariante bajo la acción de grupo  $O(2)$ , es decir*

$$T_g(L_\lambda w + \alpha Q(w) + C(w)) = L_\lambda(T_g w) + \alpha Q(T_g w) + C(T_g w).$$

*Esto quiere decir que si  $w$  es solución, también  $T_g w$  lo es.*

Buscaremos soluciones con cierta simetría. Se observa que la ecuación (5.4)

$$L_\lambda w + \alpha Q(w) + C(w) = 0$$

es equivariante bajo representaciones  $g \rightarrow T_g$  de  $O(2)$  el grupo de rotaciones con el eje  $z$  fijo, donde  $T_g w = w(g^{-1}x)$ , o en términos de  $(\theta, \phi)$  se tiene que  $(\tau w)(\phi, \theta) \equiv w(\phi - \tau, \theta)$ , para  $g \in O(2)$  y  $w \in H$ . La equivariancia implica que cada solución sin simetría respecto al eje  $z$  genera una familia de soluciones dependientes de un parámetro. Para evitar este problema se considera que la soluciones se encuentran en el espacio

$$W = \{w | w \in H, w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^m u_k^m\}.$$

La ecuación (5.4) es equivariante bajo reflexiones  $(\phi \rightarrow -\phi)$ , en particular manda funciones pares en  $\phi$  a funciones pares en  $-\phi$ , por lo tanto puede restringirse a  $W$ . Lo que implica que buscamos soluciones con un plano de simetría.

Sea  $N = \{u | L_{\lambda_n} u = 0, u \in W\}$ ,  $N$  es el núcleo del operador y forma un subespacio lineal de  $W$ . Dicho subespacio está generado por la base  $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ , es decir  $N = [z_1, z_2, \dots, z_m]$ ,  $N$  tiene dimensión finita debido al hecho que  $L_\lambda$  es un operador de Fredholm. Los  $\{z_i\}$  son tales que  $L_{\lambda_n} z_i = 0$ . Entonces se tiene la siguiente descomposición del espacio:  $W = N \oplus N^\perp$ . El método de Liapunov Schmidt, consiste en descomponer la ecuación en el núcleo y el complemento del núcleo. Si  $w \in W$  entonces  $w = u + U$  donde



$u \in N, U \in N^\perp$ . Tomemos la ecuación (5.4) y reescribamosla como se ilustra a continuación

$$\begin{aligned}L_\lambda w &= w - \lambda Aw + \alpha^2 A^2 w \\L_{\lambda_n} w &= w - \lambda_n Aw + \alpha^2 A^2 w\end{aligned}$$

Tomando la diferencia

$$L_\lambda w - L_{\lambda_n} w = -(\lambda - \lambda_n)Aw.$$

Sea  $\eta = \lambda - \lambda_n$  lo que implica

$$L_\lambda w = L_{\lambda_n} w - \eta Aw \quad (5.13)$$

Definimos los operadores de proyección ortogonal  $S : W \rightarrow N$  y  $I - S : W \rightarrow N^\perp$  sobre el núcleo y su complemento respectivamente. Con esto la ecuación (5.4) se escribe como

$$L_{\lambda_n}(u + U) - \eta A(u + U) + \alpha Q(u + U) + C(u + U) = 0$$

$$L_{\lambda_n}U - \eta A(u) - \eta A(U) + \alpha Q(u + U) + C(u + U) = 0. \quad (5.14)$$

Hacemos las siguientes observaciones

1.  $L_{\lambda_n}U \in N^\perp$ , porque para todo  $v \in N$  se tiene que  $(L_{\lambda_n}U, v) = (U, L_{\lambda_n}v) = 0$  porque  $L_{\lambda_n}$  es autoadjunto y por lo tanto  $L_{\lambda_n}U \perp N$ . Por lo que al proyectar en  $N$  sucede que  $S(L_{\lambda_n}U) = 0$ .
2.  $A(U) \in N^\perp$ , por lo siguiente: Sea  $v \in N$  y consideremos  $(v, AU) = (Av, U)$  porque  $A$  es autoadjunto. Pero si  $v \in N$ , entonces  $Av = \mu^{-1}v$  (lema 5.1) y por lo tanto  $(Av, U) = \mu^{-1}(v, U) = 0$  es decir  $AU \in N^\perp$ . Por lo que al proyectar en  $N$  sucede que  $S(AU) = 0$ .
3.  $A(u) \in N$ . Sea  $u \in N$ , entonces  $\mu_n Au = u$  y por lo tanto  $\mu_n A^2 u = Au$  y por lo tanto  $Au \in N$ . Por lo que al proyectar en  $N$  sucede que  $S(Au) = Au$ .

Proyectando la ecuación (5.14) sobre  $N$  y teniendo en cuenta las observaciones hechas anteriormente tenemos lo siguiente.

$$-\eta Au + S[\alpha Q(u + U) + C(u + U)] = 0 \quad (5.15)$$

Y proyectando la ecuación (5.14) sobre el complemento de  $N$

$$L_{\lambda_n}U - \eta AU + (I - S)[\alpha Q(u + U) + C(u + U)] = 0. \quad (5.16)$$

A continuación mostraremos que la ecuación (5.16) define una contracción, y entonces por el teorema de contracción de Banach, tiene un único punto fijo, lo que es equivalente a encontrar  $U(u)$  tal que satisface la ecuación (5.16).

**Teorema 5.3** *Teorema de contracción de Banach*

1. Sea  $H : B \rightarrow B$  un operador  $H$  definido sobre un espacio de Banach  $B$ , entonces si  $\|H(x) - H(x')\| \leq K \|x - x'\|$  y  $\|H(x)\| < R$  y  $K < 1$  para  $\|x\|, \|x'\| < R$  se tiene que  $H$  posee un único punto fijo  $\bar{x} = H(\bar{x})$  en la bola de radio  $R$ .
2. Sea  $H(x, y) : B \times E \rightarrow B$ ,  $B$  espacio de Banach. Si  $\|H(x, y) - H(x', y)\| \leq K \|x - x'\|$  con  $K < 1$ ,  $\|x\|, \|x'\| \leq R$  para todo  $y \in \theta$ ,  $\theta \subset E$  se tiene entonces que existe un único  $\bar{x}(y)$  con  $\bar{x}(y) = H(\bar{x}(y), y)$  continua en  $y$  y además es Lipchitz.

**Teorema 5.4** *La ecuación*

$$L_{\lambda_n}U - \eta AU + (I - S)[\alpha Q(u + U) + C(u + U)] = 0$$

define una contracción, si  $\eta$  es pequeño.

**Prueba.** Como  $U \in N^\perp$  se tiene que  $L_{\lambda_n}U$  es un operador lineal e invertible.  $L_{\lambda_n}^{-1}$  es lineal y acotado. En adelante se usará el hecho que  $\|A(w)\| \leq C \|w\|$  y que  $\|B(u, v)\| \leq C \|u\| \|v\|$ . Por lo mencionado arriba, la ecuación (5.16) se escribe como

$$U = L_{\lambda_n}^{-1}(\eta AU - (I - S)[\alpha Q(u + U) + C(u + U)])$$

y se puede ver como el problema  $U = H(U, u)$  con  $H(U, u)$  dado por el lado derecho de la ecuación anterior. Que  $H$  sea contracción quiere decir que  $\|H(U) - H(U')\| \leq C \|U - U'\|$ . Desarrollando los operadores  $Q(u + U)$  y  $C(u + U)$  en términos de sus derivadas de Fréchet enunciadas en el teorema (5.1) se tiene

$$H(U) = L_{\lambda_n}^{-1}(\eta AU - (I - S)[\alpha Q(u) + \alpha Q'(u)U + \alpha Q(U) +$$

$$C(u) + C'(u)U + \frac{1}{2}B(u, B(U, U)) + B(U, B(u, U)) + C(U) \Big].$$

Calculando lo anterior para una  $U'$  y tomando la diferencia se tiene

$$H(U) - H(U') = L_{\lambda_n}^{-1} \left( \eta A(U - U') - (I - S) \left[ \alpha Q'(u)(U - U') + \alpha Q(U) - \alpha Q(U') + \right. \right.$$

$$C'(u)(U - U') + \frac{1}{2}B(u, B(U, U) - B(U', U')) +$$

$$\left. B(U, B(u, U)) - B(U', B(u, U')) + C(U) - C(U') \right] \Big)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|H(U) - H(U')\| &\leq C_1 |\eta| \|U - U'\| + \\ C_2 \Big( \|U - U'\| \|Q'(u) + C'(u)\| + \|Q(U) - Q(U')\| + \|C(U) - C(U')\| + \\ &\frac{1}{2} \|B(u, B(U - U', U + U'))\| + \\ &\|B(U, B(u, U)) - B(U', B(u, U'))\| \Big). \end{aligned}$$

El término

$$\begin{aligned} \|B(U, B(u, U)) - B(U', B(u, U'))\| &= \\ \|B(U - U', B(u, U)) + B(U', B(u, U) - B(u, U'))\| & \\ \leq C \|U - U'\| (\|u\| \|U\| + \|U'\| \|u\|). \end{aligned}$$

El término  $\|B(u, B(U - U', U + U'))\| \leq C_3 \|u\| \|U - U'\| \|U + U'\|$ .

Ahora  $Q(U) = \frac{1}{2}A(B(U, U)) + B(U, AU)$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} Q(U) - Q(U') &= \frac{1}{2}A(B(U, U) - B(U', U')) + B(U, AU) - B(U', AU') \\ &= \frac{1}{2}A(B(U - U', U + U')) + \frac{1}{2}(B(U - U', A(U + U')) + B(U + U', A(U - U'))) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|Q(U) - Q(U')\| \leq C_4 \|U + U'\| \|U - U'\|.$$

Para acotar el término  $C(U) - C(U') = \frac{1}{2}B(U, B(U, U)) - \frac{1}{2}B(U', B(U', U'))$  consideramos que

$$\begin{aligned} & B(U - U', B(U, U) + B(U', U')) = \\ & B(U, B(U, U)) + B(U, B(U', U')) - B(U', B(U, U)) - B(U', B(U', U')) \\ & B(U + U', B(U, U) - B(U', U')) = \\ & B(U, B(U, U)) - B(U, B(U', U')) + B(U', B(U, U)) - B(U', B(U', U')) \end{aligned}$$

la suma

$$= 2(B(U, B(U, U)) - B(U', B(U', U')))$$

y por lo tanto

$$C(U) - C(U') = \frac{1}{4} [B(U - U', B(U, U) + B(U', U')) + B(U + U', B(U - U', U + U'))]$$

$$\|C(U) - C(U')\| \leq C_6 \|U - U'\| (\|U\|^2 + \|U'\|^2) + C_7 \|U + U'\|^2 \|U - U'\|$$

Y como pedimos que  $\|U\|, \|U'\| \leq R$ ,  $|\eta| < \eta_0$ ,  $\|u\| \leq r$  entonces

$$H(U, \eta, u) = L_{\lambda_n}^{-1} (\eta AU - (I - S) [Q(u + U) + C(u + U)])$$

define una contracción y por el teorema de contracción de Banach existe una única  $U = U(u, \eta)$  tal que  $U(u, \eta) = H(U(u, \eta), u, \eta)$  ■

En el curso de la demostración de ciertas desigualdades se requiere de la siguiente observación

**Observación 5.1** Si  $x, y$  son dos números reales y positivos y  $x, y \leq R$ ,  $R$  una constante positiva entonces

$$(x + y)^n \leq C(x^n + y^n)$$

para alguna  $C, y x, y \in R^+$ .

Si tomamos la familia de rectas  $x = \alpha y$  con  $0 \leq \alpha \leq \infty$  en  $x \geq 0, y \geq 0$ , se tendrá que la desigualdad que nos interesa toma la forma  $(1 + \alpha)^n x^n \leq C(1 + \alpha^n)x^n$ , por lo que basta tomar  $C > \frac{(1+\alpha)^n}{(1+\alpha^n)}$  para todo  $\alpha \in [0, \infty]$ . Observamos que el lado derecho de esta desigualdad tiene un máximo para  $\alpha = 1$  y por lo tanto basta tomar  $C > 2^{n-1}$  para tener la desigualdad.

Como  $u \in N$ , el núcleo del operador  $S$ , se tiene que  $u$  puede expresarse como combinación lineal de los vectores base de  $N$ . Es decir  $u = \sum_{i=1}^m \xi_i z_i$  lo que implica  $\|u\|^2 = (u, u) = (\sum_{i=1}^m \xi_i z_i, \sum_{i=1}^m \xi_i z_i) = \sum_{i=1}^m \xi_i^2 = |\xi|^2$ . Con esto en mente tenemos el siguiente resultado

**Teorema 5.5** Si  $U = U(\xi, \eta)$  es tal que  $U(\xi, \eta) = H(U(\xi, \eta), \xi, \eta)$  entonces  $\|U\| \leq k_1 |\xi|^2$  es decir  $U = O(\|u\|^2)$

**Prueba.** Tenemos que

$$\|H(U, \xi, \eta)\| = \|L_{\lambda_n}^{-1} (\eta AU - (I - S) [\alpha Q(u + U) + C(u + U)])\|$$

y por lo tanto

$$\|U\| \leq C_1 \eta \|U\| + C_2 (\alpha \|Q(u + U)\| + \|C(u + U)\|). \quad (5.17)$$

Ahora como

$$\begin{aligned} Q(u + U) &= \frac{1}{2} A(B(u + U, u + U)) + B(u + U, A(u + U)) \\ &= \frac{1}{2} A(B(u, u) + 2B(u, U) + B(U, U)) + B(u, Au) + B(u, AU) + B(U, Au) + B(U, AU) \end{aligned}$$

implica que

$$\|Q(u + U)\| \leq C_Q (\|u\|^2 + 2\|u\| \|U\| + \|U\|^2).$$

De la observación (5.1) se llega al siguiente resultado

$$\|Q(u + U)\| \leq C_q (\|u\|^2 + \|U\|^2).$$

A continuación realizamos un procedimiento análogo para  $C(u + U)$

$$\begin{aligned} C(u + U) &= \frac{1}{2} B(u + U, B(u + U, u + U)) = \frac{1}{2} B(u + U, B(u, u) + 2B(u, U) + B(U, U)) \\ &= \frac{1}{2} B(u, B(u, u)) + B(u, B(u, U)) + \frac{1}{2} B(u, B(U, U)) + \\ &\quad \frac{1}{2} B(U, B(u, u)) + B(U, B(u, U)) + \frac{1}{2} B(U, B(U, U)) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|C(u+U)\| \leq C_B (\|u\|^3 + 3\|u\|^2\|U\| + 3\|u\|\|U\|^2 + \|U\|^3)$$

$$\|C(u+U)\| \leq C_b (\|u\|^3 + \|U\|^3).$$

Aplicando estas desigualdades a la desigualdad (5.17) se tiene

$$\|U\| \leq C_1\eta\|U\| + C_2(\alpha C_q(\|u\|^2 + \|U\|^2) + C_b(\|u\|^3 + \|U\|^3))$$

y por lo tanto

$$\|U\| (1 - C_1\eta - \alpha C_2 C_q \|U\| - C_b \|U\|^2) \leq C_3(1 + \|u\|) \|u\|^2$$

$$\|U\| \leq \frac{C_3(1 + \|u\|)}{(1 - C_1\eta - \alpha C_2 C_q \|U\| - C_b \|U\|^2)} \|u\|^2.$$

Y como  $\|U\| \leq R$  y  $|\eta| \leq \eta_0$  podemos acotar por una constante, lo que nos dá el resultado

$$\|U\| \leq k_1 \|u\|^2.$$

■

El teorema (5.5) implica que  $U(u) = O(\|u\|^2)$ . Junto con el hecho que

$$Q(u+U) = Q(u) + Q'(u)U + Q(U)$$

$$C(u+U) = C(u) + C'(u)U + C'(U)u + C(U)$$

permite hacer la siguiente observación

**Observación 5.2** 1.  $Q(u) = O(\|u\|^2)$ ,  $Q'(u)U = O(\|u\|^3)$ ,  $Q(U) = O(\|u\|^4)$

2.  $C(u) = O(\|u\|^3)$ ,  $C'(u)U = O(\|u\|^4)$ ,  $C'(U)u = O(\|u\|^5)$ ,  $C(U) = O(\|u\|^6)$

Ahora pasemos a obtener las ecuaciones de bifurcación. Tomemos la ecuación en el núcleo de la parte lineal (5.15). Sabemos que  $A$  es lineal y todo  $u \in N$  es una función propia, es decir  $\mu Au = u$

$$-\frac{\eta}{\mu}u + S[\alpha Q(u+U) + C(u+U)] = 0 \quad (5.18)$$

$$L_\lambda U - (I - S)[\alpha Q(u+U) + C(u+U)] = 0 \quad (5.19)$$

Lo que implica que

$$U = -L_{\lambda}^{-1}((I - S)(\alpha Q(u + U) + C(u + U)))$$

Con  $\|U\| \leq k_1 \|u\|^2$ . Sea

$$U_0 = -L_{\lambda}^{-1}\alpha(I - S)Q(u)$$

y por lo tanto  $\|U_0\| = O(\|u\|^2)$ . Esto implica que

$$U - U_0 = -L_{\lambda}^{-1}(I - S)(\alpha Q'(u)U + \alpha Q(U) + C(u + U))$$

donde observamos que  $\|U - U_0\| = O(\|u\|^3)$  y notando que

$$\begin{aligned} Q(u + U) &= Q(u + U_0 + U - U_0) \\ &= Q(u + U_0) + Q'(u + U_0)(U - U_0) + Q(U - U_0) = Q(u + U_0) + O(\|u\|^4) \\ &= Q(u) + Q'(u)U_0 + O(\|u\|^4) \end{aligned}$$

tenemos que la ecuación de bifurcación (5.18) se puede escribir como

$$-\frac{\eta}{\mu}u + S[\alpha Q(u) + \alpha Q'(u)U_0 + C(u)] + O(\|u\|^4) = 0 \quad (5.20)$$

## 5.5. Existencia de las soluciones

A continuación se utilizará la teoría del grado topológico para probar la existencia de soluciones a la ecuación de bifurcación (5.20).

### 5.5.1. Grado topológico

**Definición 5.2** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  una región del espacio euclidiano de dimensión  $n$ . Pedimos que  $\Omega$  sea abierta y acotada. Sobre  $\Omega$  tomamos una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y tal que  $f|_{\partial\Omega} \neq 0$ . Sea  $\{x_i\}$  el conjunto de puntos tales que  $f(x_i) = 0$ , supongamos que  $f$  es  $C^1$  y que  $Df(x_i)$ , la matriz jacobiana de  $f$ , es invertible para cada  $x_i$ . Si esto se cumple, entonces se define el grado topológico de  $f$  en la región  $\Omega$  como

$$\deg(f, \Omega) = \sum_{f(x_i)=0} \text{sign}(\det Df(x_i)).$$

Si  $Df(x_i)$  no es invertible, se toma  $\epsilon$  tal que  $Df(x)$  sea invertible para toda  $x$  tal que  $f(x) = \epsilon$ , (lema de Sard), véase [Dubrovin, pág 79, §10]. En ese caso se puede definir  $\deg(f; \Omega)$  como  $\deg(f - \epsilon; \Omega)$ . Si  $f$  es continua se toma una aproximación  $C^1$  de  $f$ .

Tenemos las siguientes propiedades del grado topológico, véase [Dubrovin, pág 103, §13].

### Propiedades

1. Si  $\deg(f, \Omega) \neq 0$  entonces existe un  $x_0 \in \Omega$  tal que  $f(x_0) = 0$ .
2. Se dice que dos funciones  $f_1$  y  $f_2$  son homotópicas si y sólo si existe  $f(t, x) : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow R^n$  continua tal que  $f(t, x) \neq 0$  en  $\partial\Omega$ , con  $f(0, x) = f_1(x)$  y  $f(1, x) = f_2(x)$ , entonces  $\deg(f_1; \Omega) = \deg(f_2; \Omega)$ .
3. Si  $\Omega_1 \subset \Omega$  es tal que  $f(x) \neq 0$  en  $\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_1$ , entonces  $\deg(f, \Omega) = \deg(f, \Omega_1)$ .
4. Si  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$  y  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , con  $f(x) \neq 0$  en  $\partial\Omega_i$  entonces  $\deg(f; \Omega) = \deg(f; \Omega_1) + \deg(f; \Omega_2)$ .
5. Si  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  donde  $\Omega_1 \in R^n$  y  $\Omega_2 \in R^m$ . Sea  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ , entonces  $\deg(f; \Omega_1 \times \Omega_2) = \deg(f_1; \Omega_1)\deg(f_2; \Omega_2)$ .

Supongamos que tenemos la ecuación

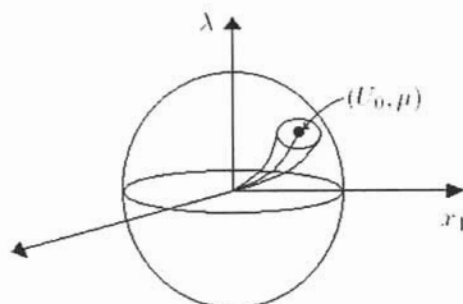
$$\lambda x_1 - N(x_1) - H(\lambda, x_1) = 0 \quad (5.21)$$

donde  $x_1 \in R^n$ ,  $N$  es una función homogénea de grado  $s$ , es decir  $N(tx_1) = t^s N(x_1)$  siendo  $t$  un escalar,  $s > 1$ ,  $\|H(\lambda, x_1)\| = o(\|x_1\|^s)$ . El problema consiste en saber si tal ecuación (5.21) tiene soluciones o no.

**Definición 5.3** Sea  $U_0$  con  $\|U_0\| = 1$ . Decimos que  $U_0$  es un rayo característico si existe  $\mu \in R$  y  $N(U_0) = \mu U_0$ .

Con esta definición podemos construir la siguiente curva paramétrica que llamaremos rayo. Si  $\begin{cases} \lambda = t^{s-1}\mu \\ x_1 = tU_0 \end{cases}$  entonces  $\lambda x_1 - N(x_1) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ .



Figura 5.2: Rayo característico  $(\mu, U_0)$ 

Se puede probar que la solución, si la hay, se encuentra en la vecindad de los rayos característicos. Por la propiedad (1) el problema de que existan soluciones a la ecuación (5.21) diferentes de cero en una vecindad del rayo característico, equivale a demostrar que el grado del siguiente par de funciones es diferente de cero, si dicho grado está definido:

$$\deg(\lambda^2 + \|x_1\|^2 - r^2, \lambda x_1 - N(x_1) - H(\lambda, x_1); \text{vecindad cónica del rayo}).$$

Supongamos que  $(\mu, U_0)$  es un rayo aislado. Tomemos  $R^n = \langle U_0 \rangle \oplus \langle U_0 \rangle^\perp$ . Sea el operador de proyección ortogonal  $P : R^n \rightarrow \langle U_0 \rangle^\perp$ . Para la región  $|\lambda|^2 + \|x_1\|^2 \leq r^2 + \rho^2$ , una bola con centro en el origen, y tomando  $r, \rho \ll 1$ , el par de funciones

$$(|\lambda|^2 + \|x_1\|^2 - r^2, \lambda x_1 - N(x_1) - H(\lambda, x_1))$$

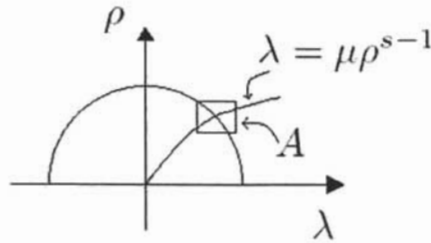
no tienen ceros en la frontera de la región  $\mathcal{U}$ , donde

$$\mathcal{U} \equiv \text{vecindad del rayo} \cap \text{Bola}$$

por lo tanto el grado del par está definido en la región  $\mathcal{U}$ . Como hemos supuesto que  $\|H(\lambda, x_1)\| = o(N(x_1))$ , entonces para  $r \ll 1$ ,  $\|x_1\|$  pequeño, se tiene que  $H$  es despreciable frente a  $N$ , lo que reduce el cálculo del grado a

$$\deg(\lambda^2 + \|x_1\|^2 - r^2, \lambda x_1 - N(x_1); \mathcal{U})$$

además

Figura 5.3: Índice alrededor de  $U_0$ 

$$\lambda x_1 - N(x_1) = -P_{x_1} N(x_1) \oplus \left( \lambda - N \left( \frac{x_1}{\|x_1\|} \right) \cdot \frac{x_1}{\|x_1\|} \|x_1\|^{s-1} \right) \|x_1\| \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

donde  $P_{x_1}$  es la proyección sobre el complemento ortogonal de  $\frac{x_1}{\|x_1\|}$ . Aplicando la propiedad (2) y observando el hecho que  $\|x_1\| > 0$ , podemos realizar las siguientes deformaciones

$$\lambda x_1 - N(x_1) \approx -PN(U) \oplus (\lambda - \mu \|x_1\|^{s-1})$$

con  $U \in$  (vecindad de  $U_0$  en  $S^{n-1}$ ) y  $\|U\| = 1$ . Y por lo tanto el grado que debemos calcular se reduce a

$$\deg(\lambda^2 + \|x_1\|^2 - r^2, -PN(U), (\lambda - \mu \|x_1\|^{s-1}); A, U_0)$$

$\rho = \|x_1\|$  y donde  $A$  es un cuadrado alrededor de la intersección de las curvas  $\lambda = \mu\rho^{s-1}$  y la circunferencia  $\lambda^2 + \rho^2 = r^2$ . Vease figura(5.3). Utilizando la propiedad (5), sobre las variables  $\lambda, \rho = \|x_1\|$ , se tiene que el jacobiano es

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\lambda, \rho)} = \det \begin{pmatrix} 2\lambda & 2\rho \\ 1 & -\mu(s-1)\rho^{s-2} \end{pmatrix} = -\mu(s-1)2\lambda\rho^{s-2} - 2\rho.$$

El grado definido en una vecindad de un punto recibe el nombre de índice, y se reduce al signo del determinante jacobiano. En este caso se observa que su signo es siempre negativo para  $\mu \neq 0$  y para  $\mu = 0$ , la razón es que  $\lambda$  es vecino a  $\mu$ , es decir  $\lambda\mu > 0$ , es decir

$$\text{Indice}(\lambda^2 + \|x_1\|^2 - r^2, \lambda - \mu \|x_1\|^{s-1}; A) = -1$$

por lo que

$$\deg(\lambda^2 + \|x_1\|^2 - r^2, x_1 - N(x_1) - H(\lambda, x_1); \mathcal{U}) = -\text{Indice}(-P(N(U)); U_0).$$

Por lo tanto si el índice es diferente de cero hay solución a la ecuación (5.21). Calculemos el índice en varios casos cuyos resultados se enuncian en los teoremas (5.6), (5.7), (5.8), (5.9).

El caso más sencillo es cuando se puede usar el teorema de la función implícita (Como es el caso del artículo de Baginski, véase [Baginski 1]).

Más precisamente, retomando las consideraciones anteriores, sea  $r = \|x_1\|$  y  $U$  definido por  $x_1 = rU$ ,  $U \in (\text{vecindad de } U_0 \text{ en } S^{n-1})$ , podemos proyectar la ecuación (5.21) sobre la dirección  $U$  y su complemento ortogonal, obteniendo

$$-PN(rU) - PH(\lambda, rU) \oplus \lambda r - N(rU) \cdot U - H(\lambda, rU) \cdot U.$$

Si definimos  $\mu$  por la relación  $\lambda = r^{s-1}\mu$ , y dividiendo por  $r^s$ , la ecuación se vuelve

$$F(r, U, \mu) = -PN(U) - \frac{PH(\lambda, rU)}{r^s} \oplus \mu - N(U) \cdot U - \frac{H(\lambda, rU) \cdot U}{r^s}.$$

Se estudia esa ecuación en la vecindad de  $U_0$  tal que  $N(U_0) = \mu_0 U_0$ , por lo tanto para  $\mu$  vecino a  $\mu_0$  y  $r$  tan chico que  $\frac{H(\lambda, rU)}{r^s}$  sea pequeño comparado a los otros términos. Supongamos que  $DPN(U_0)$ , la matriz Jacobiana de  $PN(U)$  en  $U_0$ , sea invertible, entonces, como  $PN(U_0) = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} F(r, U, \mu) &= -DPN(U_0)(U - U_0) - o(r) - o(\|U - U_0\|^2) \oplus \\ &\mu - \mu_0 - (N(U) - N(U_0)) \cdot U - N(U_0) \cdot (U - U_0) + o(r). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} D_{(U, \mu)} F(0, U_0, \mu_0) &= -DPN(U_0)(U - U_0) \oplus \\ &\mu - \mu_0 - DN(U_0)(U - U_0) \cdot U - \mu_0 U_0 \cdot (U - U_0). \end{aligned}$$

Con la suposición  $DPN(U_0)$  invertible se tiene que la matriz  $D_{(U, \mu)} F(0, U_0, \mu_0)$  es invertible. Por el teorema de la función implícita se tiene por lo tanto una única solución  $U = U(r)$ ,  $\mu = \mu(r)$  en el cono  $\mathcal{U}$  dando una curva vecina al rayo .

**Teorema 5.6** Dada la ecuación  $\lambda x_1 - N(x_1) - H(\lambda, x_1) = 0$ , donde  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $N(tx_1) = t^s N(x_1)$  siendo  $t$  un escalar,  $s > 1$ ,  $\|H(\lambda, x_1)\| = o(\|x_1\|^s)$ . Sea  $U_0$  tal que  $N(U_0) = \mu_0 U_0$ . Si la matriz  $DPN(U_0)$  es invertible entonces la ecuación (5.21) tiene una única solución  $U = U(r)$ ,  $\mu = \mu(r)$ .

Ahora calculemos otros casos. Se tiene que  $P(N(U)) \in \mathbb{R}^{n-1}$  porque  $P$  es una proyección. Supongamos que  $N(x)$  es el gradiente de alguna función  $\phi$  al menos diferenciable. Como  $N(tx) = t^s N(x) \Rightarrow \nabla\phi(tx) = t^s \nabla\phi$ . Si hacemos una integración de línea sobre la curva  $C$  teniendo en cuenta que  $N$  es homogénea de grado  $s$

$$\frac{1}{t} \int_C \nabla\phi(tx) t dx = t^s \int_C \nabla\phi(x) dx$$

lo que implica que

$$\phi(tx) \Big|_{r_1}^{r_2} = t^{s+1} \phi(x) \Big|_{r_1}^{r_2}$$

para dos puntos cualesquiera  $r_1, r_2$  y por lo tanto  $\phi(tx) = t^{s+1} \phi(x)$  y si derivamos esta última expresión respecto a  $t$  y valuamos en  $t = 1$  se tiene que  $\nabla\phi(x) \cdot x = (s+1)\phi(x)$ , es decir

$$\phi(x) = \frac{N(x) \cdot x}{s+1}.$$

Supongamos que  $U_0$  es un extremo aislado de  $\phi$ , entonces  $P(N(U_0)) = 0$  sobre los  $U$  tales que  $\|U\| = 1$ . Si examinamos la matriz Hessiana de  $\phi$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{n-1} \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x_{n-1}} \end{pmatrix} = D_x(PN(U_0))$$

dicha matriz da el carácter de un punto crítico, es decir, si se trata de un mínimo o de un máximo. Para ello se diagonaliza la matriz y si todos sus valores propios son positivos tenemos un máximo de  $-PN(U)$  y además

$$\text{sign det} D_x(PN(U_0)) = 1.$$

Si todos sus valores propios son negativos se tiene un mínimo de  $-PN(U)$  y

$$\text{sign det} D_x(PN(U_0)) = (-1)^{n-1}.$$

En ambos casos el índice es diferente de cero y por lo tanto existe una solución. Por lo tanto tenemos el siguiente teorema

**Teorema 5.7** Dada la ecuación  $\lambda x_1 - N(x_1) - H(\lambda, x_1) = 0$ , donde  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $N(tx_1) = t^s N(x_1)$  siendo  $t$  un escalar,  $s > 1$ ,  $\|H(\lambda, x_1)\| = o(\|x_1\|^s)$ . Si  $N(x) = \nabla \phi$  y  $\phi(x) = \frac{N(x) \cdot x}{s+1}$ , entonces

$$\text{Indice}(-P(N(U)); U_0) = \begin{cases} (-1)^{n-1} & U_0 \text{ mínimo} \\ 1 & U_0 \text{ máximo} \end{cases}$$

En todos los casos se tiene que el índice es diferente de cero en un punto crítico aislado y por lo tanto el grado también, entonces la ecuación (5.21) tiene solución.

Hay otro caso de interés en el cual no sabemos que  $N = \nabla \phi$ . En este caso hacemos el siguiente análisis. Buscaremos soluciones en toda la bola

$$\text{deg}(\|x\|^2 + \lambda^2 - r^2, \lambda x - N(x) - H(\lambda, x); \|x\|^2 + \lambda^2 < r^2 + \rho^2).$$

Este grado es cero por lo siguiente: Para la primera ecuación se nota que  $\|x\|^2 + \lambda^2 - \tau r^2 \neq 0$  sobre  $\|x\|^2 + \lambda^2 = r^2 + \rho^2$  para  $\tau \in [0, 1]$   $\|x\|^2 + \lambda^2 + \tau \epsilon^2 \neq 0$  en  $\|x\|^2 + \lambda^2 \leq r^2 + \rho^2$  para  $\tau \in [0, 1]$  y por lo tanto podemos hacer las siguientes deformaciones

$$\|x\|^2 + \lambda^2 - r^2 \approx \|x\|^2 + \lambda^2 \approx \|x\|^2 + \lambda^2 + \epsilon^2$$

donde se ve que esa primera componente es siempre diferente de cero en la bola, por lo que el grado es cero. Como  $(x = 0, \lambda = \pm r)$  es una solución aislada y tomamos  $r, \rho$  suficientemente pequeños entonces sólo los términos lineales son importantes en la ecuación de bifurcación y por lo tanto el cálculo del grado se reduce a

$$\text{deg}(\|x\|^2 + \lambda^2 - r^2, rx; \mathcal{U} \cap \{\|x\|^2 + \lambda^2 < r^2 + \rho^2\})$$

donde  $\mathcal{U}$  es una vecindad cónica de  $(0, \lambda)$  con  $\lambda > 0$  y donde se hizo la deformación  $\lambda x \rightarrow rx$ , que es válida si  $\lambda > 0$ . Tenemos la siguiente homotopía

$$\text{deg}(\tau \|x\|^2 + \lambda^2 - r^2, rx; \mathcal{U} \cap \{\|x\|^2 + \lambda^2 < r^2 + \rho^2\}) =$$

$$\text{deg}(\lambda^2 - r^2; \lambda \in (0, r + \epsilon)) \cdot \text{deg}(rx; \|x\| \leq \epsilon) = 1.$$

En el caso  $\lambda < 0$

$$\text{deg}(\tau \|x\|^2 + \lambda^2 - r^2, -rx; \mathcal{U} \cap \{\|x\|^2 + \lambda^2 < r^2 + \rho^2\}) =$$

$$\deg(\lambda^2 - r^2; -\lambda \in (-r - \epsilon, 0)) \cdot \deg(-rx; \|x\| \leq \epsilon) = (-1)^{n+1}.$$

Ahora veamos que pasa con el grado respecto a toda la bola

$$\begin{aligned} \deg(\|x\|^2 + \lambda^2 - r^2, \lambda x - N(x) - H(\lambda, x); \|x\|^2 + \lambda^2 < r^2 + \rho^2) = \\ - \sum_{U_j} \text{Indice}(-PN(U); U_j) + 1 + (-1)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

donde  $U_j$  son todos los posibles conos característicos, y como dicho grado es cero se tiene que

$$\sum_{U_j} (-1)^{n-1} \text{Indice}(-PN(U); U_j) = 1 + (-1)^{n-1}.$$

y por lo tanto si  $n$ , la dimensión del espacio, es impar la suma de índices es diferente de cero y por lo tanto hay solución a la ecuación (5.21).

**Teorema 5.8** Dada la ecuación  $\lambda x_1 - N(x_1) - H(\lambda, x_1) = 0$ , donde  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $N(tx_1) = t^s N(x_1)$  siendo  $t$  un escalar,  $s > 1$ ,  $\|H(\lambda, x_1)\| = o(\|x_1\|^s)$ . Si  $n$  es impar entonces la ecuación (5.21) tiene solución.

Hay otro caso más que se puede analizar: Supongamos que  $N(x_1) = 0$  implica  $x_1 = 0$ , es decir  $\lambda = 0$  es un rayo característico. Entonces

**Teorema 5.9** Si  $N(x_1) = 0$  implica  $x_1 = 0$  y  $s$  es par, entonces hay bifurcación para  $\lambda > 0$  y  $\lambda < 0$ .

**Prueba.** Tomando una bola  $B_\epsilon = \{\|x_1\| \leq \epsilon\}$ , entonces

$$\deg(\lambda x_1 - N(x_1) - H(\lambda, x_1); B_\epsilon)$$

está bien definido si  $\epsilon$  es pequeño: en efecto, para  $\|x_1\| = \epsilon$ ,  $\lambda = 0$ , la parte dominante es  $N(x_1)$  el cual tiene ceros sólo en  $x_1 = 0$ . Por lo tanto para  $\lambda$  pequeño, el grado está definido. El hecho que  $s$  sea par implica que ese grado es par [Ize 1, pág 356]. Para  $\lambda \neq 0$  y pequeño, el índice de la solución trivial es  $\deg(\lambda x_1; B_\epsilon) = (\text{signo } \lambda)^n = \pm 1$  el cual no es par. Esta diferencia implica que hay otra solución (además de  $x_1 = 0$ ) ■

Con los teoremas (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), podemos probar el siguiente teorema

**Teorema 5.10** *la ecuación de bifurcación (5.20)*

$$-\frac{\eta}{\mu}u + S[\alpha Q(u) + \alpha Q'(u)U_0 + C(u)] + O(\|u\|^4) = 0$$

Tiene soluciones distintas de cero, si  $SQ(u) \neq 0$  para  $u \neq 0$ , o si  $SQ(u) \equiv 0$  y  $m$  es impar.

**Prueba.** Se tiene que  $u \in N$ ,  $U_0 = -L_\lambda^{-1}\alpha(I - S)Q(u)$ . Sustituyendo  $u = \sum_{i=1}^m \xi_i z_i$ , y tomando el producto  $(\cdot, z_j)$  se tienen las siguiente ecuaciones para  $1 \leq j \leq m$

$$-\frac{\eta}{\mu}\xi_j + \alpha \left( Q \left( \sum_i \xi_i z_i \right) + Q' \left( \sum_i \xi_i z_i \right) U_0 + \frac{1}{\alpha} C \left( \sum_i \xi_i z_i \right), z_j \right) + O(|\xi|^4) = 0$$

Recordando que  $Q(u) = \frac{1}{2}A(B(u, u)) + B(u, Au)$ ,  $C(u) = \frac{1}{2}B(u, B(u, u))$ ,  $A$  lineal,  $B$  bilineal se tiene que

$$Q \left( \sum_i \xi_i z_i \right) \cdot z_j = \sum_{k,l} \xi_k \xi_l \left( \frac{1}{2}A(B(z_k, z_l)) + \frac{1}{\mu_l}B(z_k, z_l), z_j \right)$$

si definimos

$$C_{klj} = \left( \frac{1}{2}A(B(z_k, z_l)) + \frac{1}{\mu_l}B(z_k, z_l), z_j \right)$$

**Observación 5.3** *Se puede ver que  $C_{klj}$  es simétrico respecto a los tres índices por lo siguiente*

$$(A(B(z_k, z_l)), z_j) = (B(z_k, z_l), Az_j) = \frac{1}{\mu_j}(B(z_k, z_l), z_j)$$

La simetría se sigue por el teorema(4.6), ya que aquí  $z_j \in N = \ker L_{\lambda_n}$ , con  $\lambda_n = \mu_j + \frac{\alpha}{\mu_j}$  para todo  $j = 1, 2, \dots, m$ . Por lo tanto  $\mu_j = \mu_k = \mu_l$  y  $C_{klj} = \frac{3}{2\mu_j}B(z_k, z_l, z_j)$ .

Tenemos que

$$(SQ(u), z_j) = \sum_{k,l} \xi_k \xi_l C_{klj}.$$

Los términos cúbicos, incluyendo  $Q'(u)U_0$ , se tratan de manera similar, por lo que las ecuaciones de bifurcación quedan como

$$-\frac{\eta}{\mu}\xi_j + \alpha \sum_{k,l} \xi_k \xi_l C_{klj} + \frac{1}{2} \sum_{klm} \xi_k \xi_l \xi_m \tilde{C}_{klmj} + O(|\xi|^4) = 0.$$

Sea  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , entonces se puede escribir como una ecuación vectorial

$$\lambda \xi - \alpha N(\xi) - \frac{1}{2} M(\xi) + O(|\xi|^4) = 0,$$

donde  $N(\xi)$  es homogénea de grado 2 y  $M(\xi)$  es homogénea de grado 3. En el caso  $SQ(u) \neq 0$  para todo  $u \neq 0$  se tiene que el término que domina es  $N(\xi)$ , que por ser de grado 2, para tener bifurcación basta probar que  $N(\xi) = \nabla \phi$  con  $\phi = \frac{N(\xi) \cdot \xi}{3}$ . Si

$$\phi = \sum_{klm} \frac{1}{3} \xi_k \xi_l \xi_m C_{klm}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} &= \sum_{klm} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\xi_k \xi_l \xi_m) C_{klm} = \sum_{klm} \frac{1}{3} (\xi_k (\xi_l \delta_j^m + \xi_m \delta_j^l) + \xi_m \xi_l \delta_j^k) C_{klm} \\ &= \frac{1}{3} \left( \sum_{kl} \xi_k \xi_l C_{klj} + \sum_{km} \xi_k \xi_m C_{kjm} + \sum_{lm} \xi_l \xi_m C_{jlm} \right) = \sum_{kl} \xi_k \xi_l C_{klj} \end{aligned}$$

La última igualdad se siguió por la simetría de  $C_{klm}$  y por lo tanto  $N(\xi) = \nabla \phi$  lo que implica que en el caso que  $SQ(u) \neq 0$  se tiene bifurcación. En el caso  $SQ(u) \equiv 0$ , domina el término  $M(\xi)$ , que es homogénea de orden 3, y por el teorema (5.8) si  $m = \dim(\text{Ker } L_{\lambda_n})$  es impar y hay bifurcación.

■



En el apéndice A se muestra que el espectro del laplaciano para el cascarón esférico, los primeros 11 valores propios tienen multiplicidad uno (Teorema A.14), es decir  $m = 1$  donde  $m$  es la dimensión de  $N = \text{Ker} L_{\lambda_n}$ . Puede suceder que para un  $\lambda$  dado existan simultáneamente  $\mu^+$ ,  $\mu^-$  dados por las fórmulas

$$2\mu^+ = \lambda + (\lambda^2 - 4\alpha^2)^{1/2}$$

$$2\mu^- = \lambda - (\lambda^2 - 4\alpha^2)^{1/2}$$

tales que ambos sean valores propios del laplaciano, y puede ser que el laplaciano tenga un valor propio de multiplicidad mayor que uno. Además como se muestra en el artículo de Baginski [Baginski 2, pág 301], puede ser que para ciertos ángulos  $z_0 = \cos \theta_0$  existan valores propios tales  $\nu_i^m = \nu_j^n$ , como por ejemplo para  $z_0 = 1/\sqrt{5}$  se tiene  $\nu_3^5(z_0) = \nu_1^{10}(z_0) = 14$ . En tales casos la existencia de las soluciones es garantizada por los teoremas (5.6), (5.7), (5.8), (5.9).

A continuación se estudia el caso  $m = 1$  con detalle, puesto que es el caso genérico al problema de la esfera deformada.

## 5.6. Soluciones en el caso que $\text{Ker} L_{\lambda_k^m} = [u_k^m]$

En el caso que la dimensión del núcleo de  $L_{\lambda_k}$  sea uno, la solución está dada a primer orden por  $u = \xi u_k^m$  con  $SQ(u) = 0$  como se muestra más adelante, si  $m > 0$ .  $U_0 = -L_\lambda^{-1} \alpha(I - S)Q(u)$  depende de  $\eta$ . Ahora sean entonces

$$U_\lambda = -L_\lambda^{-1} \alpha(I - S)Q(u)$$

y

$$U_{\lambda_k} = -L_{\lambda_k^m}^{-1} \alpha(I - S)Q(u).$$

Tomando la diferencia

$$U_\lambda - U_{\lambda_k} = -(L_\lambda^{-1} - L_{\lambda_k^m}^{-1}) \alpha(I - S)Q(u).$$

Ahora de la expresión (5.13) sabemos que  $L_\lambda = L_{\lambda_k^m} - \eta A$ . Además, como  $L_\lambda, L_{\lambda_k^m}$  conmutan, se tiene que

$$L_\lambda^{-1} - L_{\lambda_k^m}^{-1} = L_{\lambda_k^m}^{-1} L_\lambda^{-1} (L_{\lambda_k^m} - L_\lambda) = -\eta L_{\lambda_k^m}^{-1} L_\lambda^{-1} A$$

y por lo tanto

$$U_\lambda - U_{\lambda_k} = -\alpha \eta L_\lambda^{-1} L_{\lambda_k^m}^{-1} A Q(u).$$

En este caso las ecuaciones de bifurcación quedan como

$$-\eta\xi Au_k^m + S[\alpha Q'(\xi u_k^m)U_0 + C(\xi u_k^m)] + O(\|u\|^4) = 0$$

Y como

$$U_0 = -L_\lambda^{-1}\alpha(I - S)Q(u) = -\alpha L_\lambda^{-1}Q(u),$$

con esto y omitiendo los término de  $O(\|u\|^4)$  se tiene que

$$-\eta\xi Au_k^m + \xi^3 S[-\alpha^2 Q'(u_k^m)L_\lambda^{-1}Q(u_k^m) + C(u_k^m)] = 0$$

Tomando el producto escalar con  $(\cdot, u_k^m)$  y recordando que  $(u_k^m, u_k^m) = 1$  se tiene

$$\frac{-\eta\xi}{\mu_k^m} + \xi^3 [-\alpha^2 (Q'(u_k^m)L_\lambda^{-1}Q(u_k^m), u_k^m) + (C(u_k^m), u_k^m)] = 0$$

$$-\eta\xi + a\xi^3 + o(|\xi|^4) = 0$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{a}{\mu_k^m} &= -\alpha^2 (Q'(u_k^m)L_{\lambda_k^m}^{-1}Q(u_k^m), u_k^m) + (C(u_k^m), u_k^m) \\ &\quad + \alpha^2 \eta (Q'(u_k^m)L_{\lambda_k^m}^{-1}L_\lambda^{-1}AQ(u_k^m), u_k^m). \end{aligned}$$

De la ecuación  $\eta = a\xi^2 + O(\xi^3)$  implica que  $\eta = O(\xi^2)$  y el término  $\alpha^2 \mu_k^m \eta(\cdot)$  en  $a$  es de orden  $\xi^2$  y en la ecuación puede juntarse con los términos  $O(\xi^4)$ . A continuación nos disponemos a calcular estos productos, para ello hacemos la siguiente observación

$$(Q'(w)h, w) = (AB(w, h) + B(w, Ah) + B(h, Aw), w)$$

utilizando el hecho que  $A$  es autoadjunto y que  $(B(u, v), w) = B(u, v, w)$  es simétrico implica

$$\begin{aligned} (Q'(w)h, w) &= (B(w, Aw), h) + (B(w, w), Ah) + (B(w, Aw), h) \\ &= 2(B(w, Aw), h) + (AB(w, w), h) = 2\left(\frac{1}{2}AB(w, w) + B(w, Aw), h\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(Q'(w)h, w) = 2(Q(w), h)$$

Y en nuestro caso usando el hecho que  $A$  es autoadjunto

$$(Q'(u_k^m)L_{\lambda_k^m}^{-1}Q(u_k^m), u_k^m) = 2(Q(u_k^m), L_{\lambda_k^m}^{-1}Q(u_k^m)) = 2(L_{\lambda_k^m}^{-1}Q(u_k^m), Q(u_k^m))$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left( L_{\lambda_k^m}^{-1} \left( \frac{1}{2} AB(u_k^m, u_k^m) + B(u_k^m, Au_k^m) \right), \frac{1}{2} AB(u_k^m, u_k^m) + B(u_k^m, Au_k^m) \right) \\
&= 2 \left( \frac{1}{4} AL_{\lambda_k^m}^{-1} AB(u_k^m, u_k^m), B(u_k^m, u_k^m) \right) + 2 \left( \frac{1}{2\mu_k^m} L_{\lambda_k^m}^{-1} AB(u_k^m, u_k^m), B(u_k^m, u_k^m) \right) + \\
&2 \left( \frac{1}{2\mu_k^m} AL_{\lambda_k^m}^{-1} B(u_k^m, u_k^m), B(u_k^m, u_k^m) \right) + 2 \left( \frac{1}{(\mu_k^m)^2} L_{\lambda_k^m}^{-1} B(u_k^m, u_k^m), B(u_k^m, u_k^m) \right) \\
&= \left( \left( \frac{1}{2} AL_{\lambda_k^m}^{-1} A + \frac{1}{\mu_k^m} L_{\lambda_k^m}^{-1} A + \frac{1}{\mu_k^m} AL_{\lambda_k^m}^{-1} + \frac{2}{(\mu_k^m)^2} L_{\lambda_k^m}^{-1} \right) B(u_k^m, u_k^m), B(u_k^m, u_k^m) \right)
\end{aligned}$$

se puede realizar la siguiente factorización

$$= \left( \frac{1}{2} \left( A + \frac{2}{\mu_k^m} \right) L_{\lambda_k^m}^{-1} \left( A + \frac{2}{\mu_k^m} \right) B(u_k^m, u_k^m), B(u_k^m, u_k^m) \right).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(C(u_k^m), u_k^m) &= \frac{1}{2} (B(u_k^m, B(u_k^m, u_k^m)), u_k^m) \\
&= \frac{1}{2} B(u_k^m, u_k^m, B(u_k^m, u_k^m)) = \frac{1}{2} (B(u_k^m, u_k^m), B(u_k^m, u_k^m))
\end{aligned}$$

y por tanto la constante  $a$  se expresa como:

$$a = \mu_k^m \left( \left( -\frac{\alpha^2}{2} \left( A + \frac{2}{\mu_k^m} \right) L_{\lambda_k^m}^{-1} \left( A + \frac{2}{\mu_k^m} \right) + \frac{1}{2} \right) B(u_k^m, u_k^m), B(u_k^m, u_k^m) \right).$$

Para evaluar esta expresión necesitamos saber un poco más del espectro y funciones propias del operador  $L_{\lambda_k^m}^{-1}$  lo que se hace a continuación. Sean  $\gamma$  un valor propio del problema  $L_{\lambda_k^m} v = \gamma v$ . Se tiene que

$$L_{\lambda_k^m} v = v - \lambda_k^m A v + \alpha^2 A^2 v$$

y por lo tanto

$$L_{\lambda_k^m} u_j^n = \left( 1 - \frac{\lambda_k^m}{\mu_j^n} + \frac{\alpha^2}{\mu_j^{n2}} \right) u_j^n$$

de donde se concluye que las  $u_j^n$  que no pertenecen al núcleo del operador son las funciones propias con valores propios dados por

$$L_{\lambda_k^m} u_j^n = \frac{1}{\mu_j^n} (\lambda_j^n - \lambda_k^m) u_j^n = \gamma_j^n u_j^n$$

y por lo tanto

$$L_{\lambda_k^m}^{-1} u_j^n = \frac{\mu_j^n}{\lambda_j^n - \lambda_k^m} u_j^n.$$

Regresando a nuestro operador y aplicandolo a las  $u_j^n$  que no estén en el núcleo de  $L_{\lambda_k^m}$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\alpha^2}{2} \left( A + \frac{2}{\mu_k^m} \right) L_{\lambda_k^m}^{-1} \left( A + \frac{2}{\mu_k^m} \right) + \frac{1}{2} \right) u_j^n \\ &= \frac{1}{2} \left( -\alpha^2 \left( \frac{1}{\mu_j^n} + \frac{2}{\mu_k^m} \right) \frac{1}{\gamma_j^n} \left( \frac{1}{\mu_j^n} + \frac{2}{\mu_k^m} \right) + 1 \right) u_j^n = \sigma_j^n u_j^n, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_j^n &= \frac{1}{2\gamma_j^n} \left\{ -\alpha^2 \frac{(\mu_k^m + 2\mu_j^n)(\mu_k^m + 2\mu_j^n)}{(\mu_j^n \mu_k^m)^2} + \gamma_j^n \right\} \\ &= \frac{1}{2\gamma_j^n} \left\{ -\alpha^2 \frac{(\mu_k^{m2} + 4\mu_j^n \mu_k^m + 4\mu_j^{n2})}{(\mu_j^n \mu_k^m)^2} + \frac{1}{\mu_j^n} \left( \mu_j^n + \frac{\alpha^2}{\mu_j^n} - \mu_k^m - \frac{\alpha^2}{\mu_k^m} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\gamma_j^n} \left\{ \frac{\mu_k^{m2} - 4\alpha^2}{\mu_k^{m2}} - \frac{\mu_k^m}{\mu_j^n} - \frac{5\alpha^2}{\mu_j^n \mu_k^m} \right\} = \sigma_j^n \end{aligned}$$

El problema de encontrar la presión crítica era equivalente a encontrar  $\lambda_c = \min\{\lambda_n | \lambda_n = \mu_n + \frac{\alpha^2}{\mu_n}, \mu_n \in \sigma(-\Delta)\}$ , y al aplicar el método de Liapunov-Schmidt en la vecindad de la presión crítica se tiene que  $\lambda_k^m$  es un mínimo. Como  $\dim(Ker L_{\lambda_k^m}) = 1$  el operador  $L_{\lambda_k^m}$  no es invertible y por lo tanto  $\lambda_k^m > 2\alpha$ . De hecho el mínimo para  $\mu_n + \frac{\alpha^2}{\mu_n}$  sucede en  $\mu = \alpha$ . Esto implica que  $\mu$  está en la vecindad de  $\alpha$  y se espera que  $\mu < 2\alpha$ . Esto implica que  $\gamma_j^n > 0$  si  $\lambda_k^m$  es un mínimo y por lo tanto  $a < 0$ . El signo de  $a$  determina el sentido de la bifurcación, si  $a > 0$  hay que subir la presión partiendo de la presión crítica. Si  $a < 0$  hay que disminuir la presión partiendo de la presión crítica.

**Lema 5.5 (Identidades integrales)** Sean  $u, v, w$  funciones propias del Laplaciano con valores propios dados por  $\mu_m, \mu_n, \mu_r$  entonces la forma bilineal  $B(u, v, w)$  se puede expresar como

$$B(u, v, w) = \tau(\mu_m, \mu_n, \mu_r) \int_{\Omega} uvw d\Omega + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_{,\theta} v_{,\theta} w_{,\theta} \sin\theta d\theta$$

donde

$$\tau(\mu_m, \mu_n, \mu_r) = 2 - \frac{1}{2}(\mu_m + \mu_n + \mu_r) + \frac{1}{2}(\mu_m \mu_n + \mu_m \mu_r + \mu_n \mu_r) - \frac{1}{4}(\mu_m^2 + \mu_n^2 + \mu_r^2).$$

**Prueba.** Usando el teorema(4.6) y el hecho que  $-\Delta u = \mu u$ , se obtiene el resultado. ■

Se puede hacer una simplificación más considerando que

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos n\phi \cos r\phi d\phi = \frac{\pi}{2} \{ \delta(m+n-r) + \delta(m+r-n) + \delta(n+r-m) + \delta(m+n+r) \}.$$

Tomando  $u = u_k^m, v = u_j^n, w = u_i^r$  con sus respectivos valores propios  $\mu_k^m, \mu_j^n, \mu_i^r$ , donde recordando que

$$u_k^m = c_k^m P_{\nu_k^m}^m(\cos \theta) \cos m\phi \quad z = \cos(\theta) \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad P_{\nu_k^m}^m(z_0) = 0$$

entonces

$$B(u_k^m, u_j^n, u_i^r) = \left\{ \tau(\mu_k^m, \mu_j^n, \mu_i^r) \int_{z_0}^1 P_{\nu_k^m}^m(z) P_{\nu_j^n}^n(z) P_{\nu_i^r}^r(z) dz - \frac{1}{2}(1 - z_0^2)^2 (P_{\nu_k^m}^m(z_0))' (P_{\nu_j^n}^n(z_0))' (P_{\nu_i^r}^r(z_0))' \right\} \times c_k^m c_j^n c_i^r \frac{\pi}{2} \{ \delta(m+n-r) + \delta(m+r-n) + \delta(n+r-m) + \delta(m+n+r) \}.$$

En el caso que  $n = m$  el factor

$$\{ \delta(2m-r) + 2\delta(r) + \delta(2m+r) \}$$

se puede analizar como sigue: nunca es cero si  $m > 0, r = 2m$  ó  $r = 0$  en todos los demás casos es cero, es decir

$$B(u_k^m, u_k^m, u_i^r) \neq 0 \Rightarrow \mu_i^r = \mu_j^{2m} \text{ ó } \mu_j^0, \quad j \in N.$$

y si  $m = 0$  es diferente de cero si  $r = 0$ , en particular  $B(u_j^0, u_j^0, u_j^0) \neq 0$ . En particular  $(B(u_k^m, u_k^m, u_k^m) = 0$  si  $m > 0$ . Ahora como

$$(Q(u), u) = \frac{1}{2}(AB(u, u), u) + (B(u, Au), u) = \frac{1}{2\mu}(B(u, u), u) + \frac{1}{\mu}(B(u, u), u)$$

si  $\mu Au = u$ . En ese caso  $(Q(u), u) = \frac{3}{2\mu}B(u, u, u)$ . Tomando  $\|u\| = 1$  y  $\dim(Ker L_{\lambda_k^m}) = 1$  se tiene que  $SQ(u) = (Q(u), u)u = \frac{3}{2\mu}B(u, u, u)u$  y por lo tanto si  $m > 0$ , se tiene que  $SQ(u) = 0$  y si  $m = 0$  entonces  $SQ(u) \neq 0$ .

Esto prueba el siguiente lema

**Lema 5.6** Si la dimensión del kernel de  $L_{\lambda_k^m}$  es uno, entonces

- $SQ(u_k^m) = 0$  si  $m > 0$
- $SQ(u_k^0) \neq 0$

Con el lema (5.5) se prueba lo siguiente:

**Lema 5.7** Si  $m > 0$  entonces

$$B(u_k^m, u_k^m) = \sum_j^{\infty} a_j^0 u_j^0 + a_j^{2m} u_j^{2m}$$

donde

$$a_j^{2m} = B(u_k^m, u_k^m, u_j^{2m})$$

$$a_j^0 = B(u_k^m, u_k^m, u_j^0).$$

Si  $m = 0$ , entonces  $B(u_k^0, u_k^0) = \sum_j^{\infty} a_j^0 u_j^0$  con el mismo  $a_j^0$ .

**Prueba.** Se tiene que  $B(u_k^m, u_k^m) \in W$  y por lo tanto tiene la siguiente representación

$$B(u_k^m, u_k^m) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^m u_k^m.$$

Ahora consideremos los productos escalares  $(B(u_k^m, u_k^m), u_i^r) = B(u_k^m, u_k^m, u_i^r)$ , entonces por la observación anterior y el hecho que  $(u_k^m, u_k^m) = 1$  se prueba el lema.

En el caso que  $m = 0$  entonces  $B(u_k^0, u_k^0, u_i^r) = 0$  si  $r > 0$ , por lo tanto  $B(u_k^0, u_k^0) = \sum_j a_j^0 u_j^0$  y se cumple el lema de igual manera. ■

Proseguimos con el cálculo de  $a$ , ahora que sabemos que  $B(u_k^m, u_k^m) = \sum_j^{\infty} a_j^0 u_j^0 + a_j^{2m} u_j^{2m}$ , podemos considerar el problema

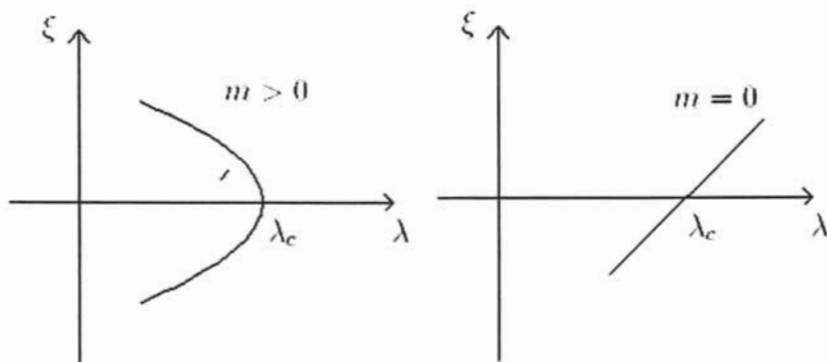
$$\left( \left( -\frac{\alpha^2}{2} \left( A + \frac{2}{\mu_k^m} \right) L_{\lambda_k^m}^{-1} \left( A + \frac{2}{\mu_k^m} \right) + \frac{1}{2} \right) B(u_k^m, u_k^m), B(u_k^m, u_k^m) \right)$$

como

$$(T_k^m(\alpha) B(u_k^m, u_k^m), B(u_k^m, u_k^m))$$

donde  $T_k^m(\alpha) = \left( -\frac{\alpha^2}{2} \left( A + \frac{2}{\mu_k^m} \right) L_{\lambda_k^m}^{-1} \left( A + \frac{2}{\mu_k^m} \right) + \frac{1}{2} \right)$  es tal que  $T_k^m(\alpha) u_j^n = \sigma_j^n u_j^n$ , y por lo tanto

$$\left( \sum_j^{\infty} T_k^m(\alpha) (a_j^0 u_j^0 + a_j^{2m} u_j^{2m}), a_j^0 u_j^0 + a_j^{2m} u_j^{2m} \right)$$

Figura 5.4: Bifurcación en  $\lambda_c$ 

utilizando la ortogonalidad de las funciones propias implica

$$\frac{a}{\mu_k^m} = \sum_j^{\infty} (a_j^0)^2 \sigma_j^0 + (a_j^{2m})^2 \sigma_j^{2m}$$

con  $a_j^0, a_j^{2m}$  definidas como en el lema (5.7). Por lo tanto para el caso  $\text{Ker} L_{\lambda_k^m} = [u_k^m]$ , suponiendo que  $\sigma_j^0, \sigma_j^{2m} < 0$ , se tiene que  $a < 0$  por lo que la ecuación de bifurcación se ve como

$$-\eta\xi + \xi^3 a = 0$$

$$-\xi(\eta + \xi^2 |a|) = 0$$

se puede aplicar el teorema de la función implícita para  $\eta < 0$ . Buscamos soluciones distintas de cero, por lo tanto  $\xi \neq 0$  y  $\xi = \pm \frac{|\eta|^{1/2}}{|a|^{1/2}}$  lo que quiere decir que hay dos soluciones para  $\lambda < \lambda_c$ , ver figura(5.4).

Estos resultados implican el siguiente teorema

**Teorema 5.11** *En el caso que  $\text{Ker} L_{\lambda_k^m} = [u_k^m]$  de dimensión uno,  $m > 0$ ,  $SQ(u_k^m) = 0$ , las ecuaciones (5.1) y (5.2) tienen solución y son tales que en la vecindad de la presión crítica se encuentran dadas a primer orden por*

$$w = \xi u_k^m$$

$$f = -\alpha Aw - \frac{1}{2}B(w, w)$$

donde  $\xi = \pm \frac{|\eta|^{1/2}}{|\alpha|^{1/2}}$  y  $\eta < 0$  si  $\lambda < \lambda_c$ , donde  $\lambda_c$  es el valor crítico más chico. En el caso  $\lambda \neq \lambda_c$  se tiene que  $\eta = O(\xi^2)$ .

En el caso que  $m = 0$  y  $SQ(u_k^0) \neq 0$  la ecuación de bifurcación es de la forma

$$-\frac{\eta}{\mu}u + \alpha SQ(u) + O(u^3) = 0$$

si  $u = \xi u_k^0$  y tomamos el producto escalar con  $(\cdot, u_k^0)$  se tiene

$$-\eta\xi + a\xi^2 + O(\xi^3) = 0$$

donde  $a = \mu_k^0 \alpha (Q(u_k^0), u_k^0)$  por lo que la ecuación reducida de bifurcación es

$$\xi(a\xi - \eta) = 0$$

Existe solución distinta de cero si  $\xi = \frac{\eta}{a}$  y la bifurcación es transcítica y por lo tanto tenemos el siguiente teorema

**Teorema 5.12** *En el caso que  $\text{Ker}L_{\lambda_k^0} = [u_k^0]$  de dimensión uno,  $m = 0$ ,  $SQ(u_k^0) \neq 0$ , las ecuaciones (5.1) y (5.2) tienen solución y son tales que en la vecindad de la presión crítica se encuentran dadas a primer orden por*

$$w = \xi u_k^m$$

$$f = -\alpha Aw - \frac{1}{2}B(w, w)$$

donde  $\xi = \frac{\eta}{a}$  y se tiene una bifurcación transcítica.



## 5.7. Regularidad de las soluciones

Probaremos que las soluciones débiles encontradas en el curso del capítulo son soluciones clásicas. Notamos lo siguiente

$$\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$\Delta : H^{2+k}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow H^k(\Omega)$$

son invertibles, donde  $\Omega$  es el cascarón. El operador  $\Delta + 2I$  tiene las mismas propiedades (ver el espectro de  $\Delta + 2I$ , y el hecho que  $\Delta$  es un operador de Fredholm de índice cero) ver [Ize 2, §6.3]. Por lo tanto si  $u|_{\partial\Omega} = 0$  se tiene que  $\Delta u + 2u = v$  si  $v|_{\partial\Omega} = 0$  entonces  $\Delta u|_{\partial\Omega} = 0$ , es decir

$$H^{4+k}(\Omega) \cap \{u|_{\partial\Omega} = 0, \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\} \xrightarrow{\Delta+2I} H^{2+k}(\Omega) \cap \{u|_{\partial\Omega} = 0\} \xrightarrow{\Delta} H^k(\Omega)$$

son operadores que se pueden invertir y también si se toma  $C^{k,\mu}(\Omega)$  con  $k \geq 0$ ,  $0 < \mu \leq 1$  en lugar de  $H^k(\Omega)$ .

Las ecuaciones (4.1) y (4.2) se pueden escribir como:

$$\Delta(\Delta + 2I)f - \alpha(\Delta + 2I)w + \frac{1}{2}\{w, w\} = 0$$

$$\Delta(\Delta + 2I)w + \alpha(\Delta + 2I)f + \lambda(\Delta + 2I)w - \{w, f\} = 0$$

ya que  $\{\lambda, w\} = \lambda(\Delta w + 2w)$ , con  $f = w = \Delta w = \Delta f = 0$  en la frontera. Como  $\Delta(\Delta + 2I)$  es invertible, estas ecuaciones son equivalentes a

$$f - \alpha\Delta^{-1}w + \frac{1}{2}\Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, w\} = 0$$

$$w + \alpha\Delta^{-1}f + \lambda\Delta^{-1}w - \Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, f\} = 0$$

y por lo tanto

$$w + \lambda\Delta^{-1}w + \alpha^2\Delta^{-2}w - \frac{1}{2}\alpha\Delta^{-2}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, w\} - \alpha\Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, \Delta^{-1}w\}$$

$$+ \frac{1}{2}\Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, \Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, w\}\} = 0 \quad (5.22)$$

Notas:

1.  $(\Delta(\Delta + 2I)u, v) = (u, v)_H$  es la norma de energía para el operador  $\Delta(\Delta + 2I)$ : esa es la norma usada para  $H = \{v \in H^2(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$  ( $u|_{\partial\Omega} = 0$  es la única condición de frontera estable para la norma  $\|\cdot\|_2$ )
2. El operador  $A$  es la formulación variacional de  $-\Delta^{-1}$  (con el espectro de la observación (4.3)).
3. Los términos cuadráticos y cúbicos de esta ecuación corresponden a los términos de la formulación variacional  $B$  y  $C$  (el problema aquí es que no se ve claramente la simetría).

En el capítulo (5) se prueba la existencia de  $w \in H$  solución débil de la ecuación anterior.

**Teorema 5.13** *La solución débil es  $C^\infty$  y es solución fuerte.*

**Prueba.** De los teoremas de encaje de Sobolev se tiene que  $H^k(\Omega) \subset C^{k-2,\mu}(\Omega)$  con  $\mu < 1$  (ver notas de parciales [Ize 2, nota 2.2]).

Del lema (4.5)  $\{u, v\} = \Delta u \Delta v + \dots$ . Por lo tanto si  $u, v \in H^2$  entonces  $\{u, v\} \in L^1(\Omega) \subset H^{-2}$  ver lema (4.6). Entonces si  $w \in H^2$  se concluye que  $\{w, w\} \in L^1$  y como consecuencia  $\Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, w\} \in H^{4,1}(\Omega)$ . El teorema de encaje de Sobolev dice que si  $\Omega$  es de dimensión 2 entonces  $H^{m,p}(\Omega) \subset C^{j,\mu}(\Omega)$  si  $j + \mu = m - \frac{2}{p}$  y si  $m - \frac{2}{p}$  es un entero entonces  $H^{m,p}(\Omega) \subset C^{j,0}$  esto quiere decir  $C^{j-1}$  con derivadas acotadas (en particular  $C^{0,0}$  son las funciones acotadas).

En particular  $H^{2,1} \subset \{\text{funciones acotadas}\} = C_B$  de donde podemos concluir que si  $w \in H^2(\Omega)$ ,  $v \in H^{4,1}(\Omega)$  entonces  $\Delta v \in H^{2,1}(\Omega) \subset C_B$  y como consecuencia  $\{w, v\} \in L^2$  y por lo tanto  $\Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, v\} \in H^4(\Omega)$ . Si  $w$  es una solución de (5.22) con  $w \in H^2$ , entonces  $\Delta^{-1}w, \Delta^{-2}w \in H^4(\Omega)$ ,  $\{w, w\} \in L^1$  por lo que  $\Delta^{-2}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, w\} \in H^{6,1}(\Omega) \subset H^4(\Omega)$ ,  $\Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, \Delta^{-1}w\} \in H^4(\Omega)$ ,  $\Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, \Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, w\}\} \in H^4(\Omega)$  donde  $(\Delta + 2I)^{-1}\{w, w\} \in H^{4,1}(\Omega)$ . Por lo tanto  $w \in H^4(\Omega) \subset C^{2,\mu}(\Omega)$  para todo  $\mu \leq 1$ . Esto implica que  $\{w, w\} \in C^{0,\mu}$  y como consecuencia  $\Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, w\} \in C^{4,\mu}(\Omega)$  por lo tanto la solución de (5.22) está en  $C^{4,\mu}(\Omega)$  por lo que  $\{w, w\} \in C^{2,\mu}$  implicando que  $\Delta^{-1}(\Delta + 2I)^{-1}\{w, w\} \in C^{6,\mu}(\Omega)$  de esto se sigue que la solución (5.22) está en  $C^{6,\mu}(\Omega)$  y repitiendo el argumento  $w \in C^\infty$  con lo que se prueba el teorema.

■



## Capítulo 6

### Gráfica de las soluciones

A continuación se describe como a partir de la solución  $w, f$  es posible recuperar la primera forma fundamental y la segunda forma fundamental de la superficie deformada. También se indica como resolver las ecuaciones de Gauss y Weingarten para encontrar la expresión paramétrica de la superficie deformada  $x^i(\theta, \phi)$  y con ello hacer las gráficas de las distintas soluciones. El sistema que se pretende resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\alpha\beta} &= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} \mathbf{x}_{\mu} + \bar{b}_{\alpha\beta} \mathbf{n} \\ \mathbf{n}_{\beta} &= -\bar{a}^{\sigma\kappa} \bar{b}_{\beta\sigma} \mathbf{x}_{\kappa} \end{aligned}$$

Tomaremos como variables independientes las componentes de los vectores tangentes  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  y el vector normal  $\mathbf{n}$ , dando un total de 9 variables. El número de ecuaciones es de 12 para la ecuación de Gauss y 6 para la ecuación de Weingarten, dando un total de 18, el doble de las ecuaciones necesarias. Por lo tanto no todas las ecuaciones son independientes, por el hecho que la primera y segunda formas fundamentales satisfacen las ecuaciones de compatibilidad.

A continuación reescribiremos este par de ecuaciones para encontrar la información necesaria acerca de la superficie deformada.

Usando la conexión para los símbolos de Christoffel dada por la observación (2.1)

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + C_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + \bar{a}^{\mu\kappa} (\gamma_{\kappa\alpha|\beta} + \gamma_{\beta\kappa|\alpha} - \gamma_{\alpha\beta|\kappa})$$

Puede escribirse de esa forma por el hecho (2.9) que  $C_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} \bar{a}^{\mu\kappa} (\bar{a}_{\kappa\alpha;\beta} + \bar{a}_{\beta\kappa;\alpha} - \bar{a}_{\alpha\beta;\kappa})$  y como la derivada covariante de la métrica sin deformar es

cero (B.18) y que  $\bar{a}_{\alpha\beta} = 2\gamma_{\alpha\beta} + \bar{a}_{\alpha\beta}$ . Además, de la definición del tensor de curvatura  $\rho_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - \bar{b}_{\alpha\beta}$ , haciendo estas sustituciones y escribiendo las ecuaciones en forma adimensional (si  $R$  es radio de la esfera sin deformar y hacemos  $x' = x/R$ , entonces una distancia de  $x' = 1$  corresponde a  $R$ ) se tiene que

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \mathbf{x}_{\mu} + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} + \bar{a}^{\mu\kappa} (\gamma_{\kappa\alpha|\beta} + \gamma_{\beta\kappa|\alpha} - \gamma_{\alpha\beta|\kappa}) \mathbf{x}_{\mu} + \frac{1}{R} \rho_{\alpha\beta} \mathbf{n}. \quad (6.1)$$

donde se llama  $b_{\alpha\beta}$  la segunda forma de la esfera unitaria. Los primeros dos términos corresponderían a las ecuaciones para una esfera de radio uno.

De manera análoga la ecuación de Weingarten

$$\mathbf{n}_{\beta} = -R\bar{a}^{\sigma\kappa} (\bar{b}_{\beta\sigma} + \rho_{\beta\sigma}) \mathbf{x}_{\kappa} \quad (6.2)$$

En este caso todavía es demasiado pronto como para decir cuanto vale el segundo término, antes requerimos calcular la primera y segunda formas fundamentales de la superficie deformada.

## 6.1. Ecuaciones de Gauss y Weingarten

Tenemos el siguiente conjunto de ecuaciones encontradas en el capítulo (3)

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh} [(1 + \nu)\eta_{\alpha\beta} - \nu\bar{a}_{\alpha\beta}\eta_{\gamma}^{\gamma}] \quad (6.3)$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \bar{\varepsilon}_{\alpha}^i \bar{\varepsilon}_{\beta}^j F_{|ij} + K\bar{a}_{\alpha\beta} F \quad (6.4)$$

$$\eta_{\alpha}^{\alpha} = \bar{a}^{ij} F_{|ij} + 2KF \quad (6.5)$$

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = 2\gamma_{\alpha\beta} + \bar{a}_{\alpha\beta} \quad (6.6)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = h\gamma(w_{|\alpha\beta} + Kw\bar{a}_{\alpha\beta}) \quad (6.7)$$

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} + \bar{b}_{\alpha\beta} \quad (6.8)$$

$$F = Eh^3\gamma^2(f - \lambda) \quad (6.9)$$

$$W = h\gamma w \quad (6.10)$$

$$\lambda = \frac{pR^3}{2Eh^3\gamma^2} \quad (6.11)$$

$$\alpha = \frac{R}{h\gamma} \quad (6.12)$$

$$K = \frac{1}{R^2} \quad (6.13)$$

con las siguientes correspondencias (6.3) es (3.5), (6.4) es (3.10), (6.5) es (3.13), (6.6) es (3.7), (6.7) es (3.9), (6.8) es (3.8), (6.9) y (6.10) son (3.18), (6.11) es (3.19), (6.12) es (3.20).

Se deduce de manera inmediata que

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{R^2}{\alpha^2} [(1 + \nu)\varepsilon_{\alpha}^i \varepsilon_{\beta}^j f_{|ij} + (-\nu a^{ii} f_{|ii} + (1 - \nu)f)a_{\alpha\beta}] - \frac{R^2}{\alpha^2} \lambda(1 - \nu)a_{\alpha\beta}$$

por el hecho que los términos mixto de  $\tilde{\varepsilon}_{\alpha}^j$  no dependen de radio se reemplazaron por los de la esfera unitaria  $\varepsilon_{\alpha}^j$ .

Una observación es que el tensor de deformación depende inversamente del parámetro  $\alpha^2$ . Este hecho es notable puesto que para cascarones  $\alpha$  es grande, lo que implica que tendremos deformaciones pequeñas como se demuestra más adelante. Además la derivada covariante de  $\gamma_{\alpha\beta}$  no depende de  $\lambda$  por el hecho que  $a_{\alpha\beta|\kappa} = 0$  (B.18). El término  $\varepsilon_{\alpha}^i \varepsilon_{\beta}^j f_{|ij}$  se calcula usando el hecho que  $\sqrt{g} = R^2 \text{sen}\theta$  lo que implica que

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = R^2 \text{sen}\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y usando el hecho (B.28)  $\varepsilon_i^j = \tilde{a}^{jk} \varepsilon_{ik}$  se encuentra que

$$\varepsilon_i^j = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\text{sen}\theta} \\ -\text{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}$$

y con ello

$$\hat{f}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha}^i \varepsilon_{\beta}^j f_{|ij} = \begin{pmatrix} \frac{f_{|22}}{\text{sen}^2\theta} & -f_{|21} \\ -f_{|12} & \text{sen}^2\theta f_{|11} \end{pmatrix}$$

donde hemos introducido como definición  $\hat{f}_{\alpha\beta}$ . Si además hacemos

$$\tilde{f} = (-\nu a^{ii} f_{|ii} + (1 - \nu)f) = (-\nu \Delta f + (1 - \nu)f) = (1 - \nu(1 + \mu))f$$

donde se usa el hecho que en primera aproximación  $f$  es función propia del Laplaciano. Entonces el tensor de deformación se ve como

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{R^2}{\alpha^2} [(1 + \nu)\hat{f}_{\alpha\beta} + \tilde{f}a_{\alpha\beta} - \lambda(1 - \nu)a_{\alpha\beta}]$$

donde  $a_{\alpha\beta}$  es la métrica de la esfera unitaria. Una consecuencia inmediata es que la derivada covariante no depende del parámetro  $\lambda$ , ya que la derivada

del tensor métrico es cero (B.18). El tensor métrico de la superficie deformada como consecuencia es

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \frac{2R^2}{\alpha^2} \left[ (1 + \nu)\hat{f}_{\alpha\beta} + \tilde{f}a_{\alpha\beta} \right] + R^2 \left( 1 - \frac{2}{\alpha^2}\lambda(1 - \nu) \right) a_{\alpha\beta}.$$

Si  $\tilde{R}^2 = R^2 \left( 1 - \frac{2}{\alpha^2}\lambda(1 - \nu) \right)$  ver (3.23) entonces

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \frac{2R^2}{\alpha^2} \left[ (1 + \nu)\hat{f}_{\alpha\beta} + \tilde{f}a_{\alpha\beta} \right] + \tilde{R}^2 a_{\alpha\beta}.$$

Es fácil calcular su determinante, usando el hecho que  $\det(A + B) = \det A + \det B + a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22}$  en el caso que  $B$  es diagonal, por lo que

$$\begin{aligned} \det \bar{a}_{\alpha\beta} &= \left( \frac{2R^2}{\alpha^2} (1 + \nu) \right)^2 (f_{|22}f_{|11} - f_{|21}f_{|12}) + \left( \frac{2R^2}{\alpha^2}\tilde{f} + \tilde{R}^2 \right)^2 \text{sen}^2\theta + \\ &\quad \left( \frac{2R^2}{\alpha^2} (1 + \nu) \right) \left( \frac{2R^2}{\alpha^2}\tilde{f} + \tilde{R}^2 \right) (\text{sen}^2\theta f_{|11} + f_{|22}) \end{aligned}$$

se ve claramente que

$$g = \det \bar{a}_{\alpha\beta} = \tilde{R}^4 \text{sen}^2\theta + \frac{R^4}{\alpha^2} O(f)$$

y el tensor recíproco

$$\bar{a}^{\alpha\beta} = \frac{1}{g} \frac{2R^2(1 + \nu)}{\alpha^2} \begin{pmatrix} f_{|11}\text{sen}^2\theta & f_{|21} \\ f_{|12} & \frac{f_{|22}}{\text{sen}^2\theta} \end{pmatrix} + \frac{\left( \frac{2R^2}{\alpha^2}\tilde{f} + \tilde{R}^2 \right)}{g} \begin{pmatrix} \text{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que a primera aproximación, para  $f$  pequeño,

$$\bar{a}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\tilde{R}^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \end{pmatrix} = \frac{R^2}{\tilde{R}^2} \bar{a}^{\alpha\beta} = \frac{a^{\alpha\beta}}{\tilde{R}^2}$$

Con estas aproximaciones la ecuación de Gauss se ve como

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \mathbf{x}_{\mu} + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} + \frac{R^2}{\tilde{R}^2 \alpha^2} a^{\mu\kappa} (\tilde{\gamma}_{\kappa\alpha|\beta} + \tilde{\gamma}_{\beta\kappa|\alpha} - \tilde{\gamma}_{\alpha\beta|\kappa}) \mathbf{x}_{\mu} + \frac{1}{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha\beta} \mathbf{n}.$$

donde

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = (1 + \nu)\hat{f}_{\alpha\beta} + \tilde{f}a_{\alpha\beta}, \quad \tilde{\rho}_{\alpha\beta} = w_{|\alpha\beta} + w a_{\alpha\beta}$$

**Nota:** En la ecuación de Gauss, los términos en  $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$  son de orden  $O(1/\alpha^2) = O(\varepsilon\theta^2)$ , por lo que podrían despreciarse, con ello la ecuación de Gauss toma la forma  $\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \mathbf{x}_{\mu} + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha\beta} \mathbf{n}$ . Los cálculos numéricos confirman que la solución a esta ecuación simplificada, no difiere cualitativamente al omitir los términos en  $O(\varepsilon\theta^2)$ .

Si usamos el hecho que  $\tilde{f}_{\alpha\beta|\gamma} = \varepsilon_{\alpha}^i \varepsilon_{\beta}^j f_{ij\gamma}$  y que la derivada del tensor métrico es cero lo que implica que  $(\tilde{f}_{\alpha\beta})_{|\gamma} = \tilde{f}_{,\gamma} a_{\alpha\beta}$ , se tiene el sistema

$$\mathbf{x}_{11} = -\mathbf{n} + \frac{\tilde{R}^2}{R^2\alpha^2} \left( \frac{(1+\nu)f_{|221}}{\text{sen}^2\theta} + \tilde{f}_{,\cdot 1} \right) \mathbf{x}_1 - \frac{\tilde{R}^2}{R^2\alpha^2} \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \left( \tilde{f}_{,\cdot 2} + (1+\nu)(2f_{|121} + \frac{f_{|112}}{\text{sen}^2\theta}) \right) \mathbf{x}_2 + \frac{1}{\alpha} (w_{|11} + w) \mathbf{n}$$

$$\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_{21} = \text{cot}\theta \mathbf{x}_2 + \frac{\tilde{R}^2}{R^2\alpha^2} \left( \frac{f_{|222}}{\text{sen}^2\theta} + \tilde{f}_{,\cdot 2} \right) \mathbf{x}_1 +$$

$$\frac{\tilde{R}^2}{R^2\alpha^2 \text{sen}^2\theta} \left( (1+\nu) \text{sen}^2\theta f_{|111} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} f_{,\cdot 1} \right) \mathbf{x}_2 + \frac{1}{\alpha} w_{|12} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{x}_{22} = -\text{sen}\theta \text{cos}\theta \mathbf{x}_1 - \text{sen}^2\theta \mathbf{n} - \frac{\tilde{R}^2}{R^2\alpha^2} (2f_{|212} + \text{sen}^2\theta f_{|111} + \tilde{f}_{,\cdot 1} \text{sen}^2\theta) \mathbf{x}_1 +$$

$$\frac{\tilde{R}^2}{R^2\alpha^2} (f_{|112} + \tilde{f}_{,\cdot 2}) \mathbf{x}_2 + \frac{1}{\alpha} (w_{|22} + \text{sen}^2\theta w) \mathbf{n}$$

donde

$$\begin{aligned} f_{|111} &= f_{,\cdot 111} \\ f_{|112} &= 2\text{cot}^2\theta f_{,\cdot 2} - 2\text{cot}\theta f_{,\cdot 12} + f_{,\cdot 112} \\ f_{|121} &= f_{|211} = (\text{cot}^2\theta + \text{csc}^2\theta) f_{,\cdot 2} - 2\text{cot}\theta f_{,\cdot 12} + f_{,\cdot 112} \\ f_{|122} &= f_{|212} = -2\text{cot}\theta f_{,\cdot 22} - \text{cos}^2\theta f_{,\cdot 1} + f_{,\cdot 122} + \text{cos}\theta \text{sen}\theta f_{,\cdot 11} \\ f_{|221} &= -2\text{cot}\theta f_{,\cdot 22} - f_{,\cdot 1} + f_{,\cdot 122} + \text{cos}\theta \text{sen}\theta f_{,\cdot 11} \\ f_{|222} &= -\text{cos}^2\theta f_{,\cdot 2} + f_{,\cdot 222} + 3\text{cos}\theta \text{sen}\theta f_{,\cdot 12} \\ w_{|11} &= w_{,\cdot 11} \\ w_{|12} &= w_{,\cdot 12} - \text{cot}\theta w_{,\cdot 2} \\ w_{|22} &= w_{,\cdot 22} + \text{cos}\theta \text{sen}\theta w_{,\cdot 1} \end{aligned}$$

Además la solución encontrada por el método de Liapunov-Schmidt, teoremas (5.11) (5.12) implica



$$w = \xi u_k^m, \quad f \approx -\frac{\alpha}{\mu_k^m} w, \quad u_k^m = c_k^m P_{\nu_k^m}^m(\cos\theta) \cos m\phi$$

donde se desprecian los término en  $\xi^2$  en el desarrollo de  $f$ . Por lo tanto

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \mathbf{x}_{\mu} + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} + \frac{\xi c_k^m}{\alpha} O(P_{\nu}^m).$$

De manera similar para la fórmula de Weingarten

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\beta} &= -\bar{a}^{\sigma\kappa} \bar{b}_{\beta\sigma} R \mathbf{x}_k - \bar{a}^{\sigma\kappa} \rho_{\beta\sigma} R \mathbf{x}_k \\ \mathbf{n}_{\beta} &= -\frac{R^2}{\bar{R}^2} a^{\sigma\kappa} b_{\beta\sigma} \mathbf{x}_k - \frac{R^2}{\bar{R}^2 \alpha} a^{\sigma\kappa} (w_{|\beta\sigma} + a_{\beta\sigma} w) \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde cada ecuación es de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \frac{\bar{R}^2}{R^2} \mathbf{x}_1 - \frac{\bar{R}^2}{R^2 \alpha} (w_{|11} + w) \mathbf{x}_1 + \frac{\bar{R}^2}{R^2 \alpha \sin^2 \theta} w_{|12} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{n}_2 &= \frac{\bar{R}^2}{R^2} \mathbf{x}_2 - \frac{\bar{R}^2}{R^2 \alpha} w_{|21} \mathbf{x}_1 + \frac{\bar{R}^2}{R^2 \alpha \sin^2 \theta} (w_{|22} + \sin^2 \theta w) \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{n}_{\beta} = -\frac{R^2}{\bar{R}^2} a^{\sigma\kappa} b_{\beta\sigma} \mathbf{x}_k + \frac{R^2}{\bar{R}^2} \frac{\xi c_k^m}{\alpha} O(P_{\nu}^k)$$

donde llamamos  $b_{\alpha\beta}$  la segunda forma de la esfera unitaria. Para  $\xi = 0$ , se observa que la esfera de radio  $(1 - \frac{2\lambda}{\alpha^2}(1 - \nu))$  satisface la ecuación de Weingarten, por desgracia no satisface la ecuación de Gauss para  $\xi = 0$  (6.1) cuya solución para  $\xi = 0$  corresponde a la esfera de radio 1.

Las ecuaciones totalmente desarrolladas toman la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{11} &= -\mathbf{n} + f_1 \mathbf{x}_1 + f_2 \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_{21} &= \cot\theta \mathbf{x}_2 + f_3 \mathbf{x}_1 + f_4 \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_{22} &= -\sin\theta \cos\theta \mathbf{x}_1 - \sin^2\theta \mathbf{n} + f_5 \mathbf{x}_1 + f_6 \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{n}_1 &= \frac{\bar{R}^2}{R^2} \mathbf{x}_1 + f_7 \mathbf{x}_1 + f_8 \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{n}_2 &= \frac{\bar{R}^2}{R^2} \mathbf{x}_2 + f_9 \mathbf{x}_1 + f_{10} \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

donde

$$f_1 = -\frac{R^2 \xi \cos(m\phi) c_k^m}{R t^2 \alpha \mu} (2m^2(1 + \nu) \cot\theta \csc\theta^2 P(z) +$$

donde

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{-R^2 \xi c_k^m \cos m \phi}{\tilde{R}^2 \alpha \mu} \left( 2m^2(1+\nu) \cot \theta \csc^2 \theta P(\theta) - (\nu(2+\mu) + (1+\nu) \cot^2 \theta + m^2(1+\nu) \csc^2 \theta) P'(\theta) + \right. \\
 &\quad \left. (1+\nu) \cot \theta P''(\theta) \right) \\
 f_2 &= \frac{mR^2 \xi \csc^2 \theta \operatorname{sen} m \phi c_k^m}{\tilde{R}^2 \alpha \mu} (P(\theta)(-1+\nu + (m^2-2)(1+\nu) \csc^2 \theta + \mu\nu) + (1+\nu)(\cot \theta P'(\theta) - 2P''(\theta))) \\
 f_3 &= \frac{-mR^2 \xi \operatorname{sen} m \phi c_k^m}{\tilde{R}^2 \alpha \mu} (P(\theta)(-1+\nu + 2(1+\nu) \cot^2 \theta + m^2(1+\nu) \csc^2 \theta + \mu\nu) - 3(1+\nu) \cot \theta P'(\theta)) \\
 f_4 &= \frac{R^2 \xi \cos m \phi c_k^m}{\tilde{R}^2 \alpha \mu} ((-1+\nu + \nu\mu) P'(\theta) - (1+\nu) P^{(3)}(\theta)) \\
 f_5 &= \frac{R^2 \xi \cos m \phi c_k^m}{\tilde{R}^2 \alpha \mu} \left( 4m^2(1+\nu) \cot \theta P(\theta) - \frac{1}{2} \left( 1 + 4m^2 + 3\nu + 4m^2\nu + (3+\nu) \cos 2\theta + 2\nu\mu \operatorname{sen}^2 \theta \right) P'(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + (1+\nu) \operatorname{sen} \theta (2 \cos \theta P''(\theta) + \operatorname{sen} \theta P^{(3)}(\theta)) \right) \\
 f_6 &= \frac{mR^2 \xi \operatorname{sen} m \phi c_k^m}{\tilde{R}^2 \alpha \mu} (P(\theta)(1-\nu + 2(1+\nu) \cot^2 \theta - \mu\nu) - (1+\nu)(2 \cot \theta P'(\theta) - P''(\theta))) \\
 f_7 &= \frac{-R^4 \xi \cos m \phi c_k^m}{\tilde{R}^4 \alpha \mu} \left( P(\theta)(-2 + 2\nu(\mu+1) + \frac{\tilde{R}^2}{R^2} \mu + 2m^2(1+\nu) \csc^2 \theta) - 2(1+\nu) \cot \theta P'(\theta) + \frac{\tilde{R}^2}{R^2} \mu P''(\theta) \right) \\
 f_8 &= \frac{-mR^4 \xi \csc^2 \theta \operatorname{sen} m \phi c_k^m}{\tilde{R}^4 \alpha \mu} \left( \frac{\tilde{R}^2}{R^2} \mu + 2(1+\nu) \right) (\cot \theta P(\theta) - P'(\theta)) \\
 f_9 &= \frac{-mR^4 \xi \operatorname{sen} m \phi c_k^m}{\tilde{R}^4 \alpha \mu} \left( \frac{\tilde{R}^2}{R^2} \mu + 2(1+\nu) \right) (\cot \theta P(\theta) - P'(\theta)) \\
 f_{10} &= \frac{-mR^4 \xi \csc^2 \theta \cos m \phi c_k^m}{\tilde{R}^4 \alpha \mu} \left( P(\theta) \left( \left( \frac{\tilde{R}^2}{R^2} \mu + 2(1-\nu + \nu\mu) \right) \operatorname{sen}^2 \theta - m^2 \frac{\tilde{R}^2}{R^2} \mu \right) + \right. \\
 &\quad \left. \operatorname{sen}^2 \theta \left( \frac{\tilde{R}^2}{R^2} \mu \cot \theta P'(\theta) - 2(1+\nu) P''(\theta) \right) \right)
 \end{aligned}$$

donde  $P(\theta) = P_{\nu_k}^m(\cos \theta)$  y las primas indican derivadas respecto al ángulo  $\theta$ . Las constantes de normalización  $c_k^m$  son en general bastante pequeñas como se muestra en los cálculos numéricos.  $\xi$  es la perturbación,  $\alpha = \frac{R}{h\gamma}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}$ ,  $\nu$  es el módulo de Poisson y  $\nu \in (0, \frac{1}{2})$ . Para cascarones  $\alpha$  es grande y por lo tanto los efectos de la deformación  $\frac{\xi c_k^m}{\alpha}$  apenas si deberían ser apreciables.

Por otro lado sabemos que  $\lambda = \frac{p}{2E} \alpha^3 \gamma$  y que  $\lambda = \mu + \frac{\alpha^2}{\mu}$  donde  $\mu$  valor propio del Laplaciano. Por el lema (5.2)  $\mu_{k-1} \mu_k < \alpha^2 < \mu_k \mu_{k+1} \Rightarrow \lambda_c = \lambda_k$ , por lo que  $\mu_k \approx \alpha$  se sigue que  $\lambda_c \approx 2\alpha$  y entonces  $p_c \approx \frac{4E}{\alpha^2 \gamma}$ , por lo que el efecto del parámetro  $\alpha$  es el de abatir la presión crítica para cáscaras cada vez más delgadas. Tenemos por lo tanto las siguientes observaciones

**Observación 6.1** *Efectos del parámetro  $\alpha$  en la geometría de la deformación*

- *A medida que construimos cascarones cada vez más delgados, las deformaciones que sufren estos cascarones respecto a la solución trivial son cada vez menos visibles y caen a lo menos como  $\frac{\xi c_k^m}{\alpha}$ , y de hecho,  $\frac{\xi c_k^m R}{\alpha}$  es el orden de los desplazamientos con respecto a la solución trivial. Como corolario una cáscara infinitamente delgada no presenta estados de deformación según el modelo de John.*
- *A medida que construimos placas cada vez más delgadas, la presión crítica donde se esperan las deformaciones cae como  $p_c \approx \frac{4E}{\alpha^2 \gamma}$  y de hecho  $p_c = \frac{2E}{\alpha^3} \left( \mu_k + \frac{\alpha^2}{\mu_k} \right)$  para  $\alpha^2 \in (\mu_{k-1} \mu_k, \mu_k \mu_{k+1})$*
- *La curvatura media de la superficie deformada es cada vez menor a medida que aumentamos la presión y va como  $\tilde{R}^2 = R^2 \left( 1 - \frac{2}{\alpha^2} \lambda (1 - \nu) \right)$  y cerca de un estado deformado  $\tilde{R}^2 \approx R^2 \left( 1 - \frac{4}{\alpha} (1 - \nu) \right)$*
- *Cualquier posible aproximación a la superficie deformada dada por las ecuaciones de Gauss y Weingarten es a lo más de orden  $O\left(\frac{1}{\alpha}\right) = O(\theta^2)$  donde  $\theta$  es el parámetro de John (2.1) inclusive las soluciones triviales.*

Esto es curioso, porque la presión crítica es menor para cascarones más delgados, los estados deformados son cada vez menos visibles. Tal y como lo demuestra [Ciarlet], la solución a las ecuaciones del modelo de Koiter, existe en el límite cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , y es independiente de  $\alpha$ . De hecho no hay estados deformados.

Calculos algebraicos hechos por computadora muestran que los símbolos de Christoffel dados por (B.10) de la superficie deformada están dados por

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{1}{R^2 \alpha^2} \cos m\phi f_1(\theta) \xi \\
 \bar{\Gamma}_{11}^2 &= \frac{-1}{R^2 \alpha^2} \sin m\phi f_2(\theta) \xi \\
 \bar{\Gamma}_{12}^1 &= \frac{1}{R^2 \alpha^2} \sin m\phi f_3(\theta) \xi \\
 \bar{\Gamma}_{12}^2 &= \cot \theta + \frac{1}{R^2 \alpha^2} \cos m\phi f_4(\theta) \xi \\
 \bar{\Gamma}_{21}^1 &= \frac{1}{R^2 \alpha^2} \sin m\phi f_5(\theta) \xi \\
 \bar{\Gamma}_{21}^2 &= \cot \theta - \frac{1}{R^2 \alpha^2} \cos m\phi f_6(\theta) \xi \\
 \bar{\Gamma}_{22}^1 &= -\cos \theta \sin \theta + \frac{1}{R^2 \alpha^2} \cos m\phi f_7(\theta) \xi \\
 \bar{\Gamma}_{22}^2 &= \frac{1}{R^2 \alpha^2} \sin m\phi f_8(\theta) \xi
 \end{aligned}$$

Para  $\xi = 0$  se recuperan los símbolos de Christoffel de una esfera cualquiera (tratándose de una esfera son independientes del radio). Por lo que toda la información correspondiente al radio de la esfera deformada deberá estar contenida en la segunda forma fundamental.  $f_1(\theta), \dots, f_8(\theta)$  son funciones de los polinomios de Legendre  $c_k^m P_\nu^m(\cos\theta)$  y sus derivadas hasta tercer orden.

Se sigue por (B.29) y (B.30) que las ecuaciones de Gauss para  $\xi = 0$  son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\theta\theta} &= -\mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{\phi\phi} &= -\text{sen}\theta\text{cos}\theta\mathbf{x}_\theta - \text{sen}^2\theta\mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{\theta\phi} &= \text{cot}\theta\mathbf{x}_\phi \end{aligned}$$

en particular la esfera radio uno será solución, y Weingarten

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\theta &= \frac{R^2}{R^2}\mathbf{x}_\theta \\ \mathbf{n}_\phi &= \frac{R^2}{R^2}\mathbf{x}_\phi \end{aligned}$$

que tiene por solución la esfera de radio  $(1 - \frac{2\lambda}{\alpha^2}(1 - \nu))$ . Si consideramos el caso en el que las integraciones numéricas sólo se tomen respecto a la variable  $\theta$ , en el caso de las soluciones triviales se tendría el sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{11} &= -\mathbf{n} \\ \mathbf{n}_1 &= \frac{R^2}{R^2}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_{21} &= \text{cot}\theta\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

Con las condiciones iniciales  $\mathbf{x}_{1|\theta=0} = (0, 0, 1), \mathbf{n}_{1|\theta=0} = (0, 0, 1), \mathbf{x}_{2|\theta=0} = (\text{cos}\phi, \text{sen}\phi, 0), \mathbf{x}_{2|\theta=0} = (0, 0, 0)$ . Dicho sistema se puede integrar como sigue: del primer par de ecuaciones se encuentra que  $(\mathbf{x}_1)_{,11} = -\frac{R^2}{R^2}\mathbf{x}_1$  la cual tiene por solución  $\mathbf{x}_1 = A\text{cos}\frac{R}{R}\theta + B\text{sen}\frac{R}{R}\theta$ , de la condición inicial se encuentra que  $A = (\text{cos}\phi, \text{sen}\phi, 0)$ . Integrando  $\mathbf{x}_1$  y usando la segunda ecuación para el vector normal se tienen  $\mathbf{n} = A\frac{R}{R}\text{sen}\frac{R}{R}\theta - B\frac{R}{R}\text{cos}\frac{R}{R}\theta$ , y por la condición inicial se encuentra que  $B = (0, 0, -\frac{R}{R})$  por lo que la solución será

$$\mathbf{x} = \frac{\tilde{R}}{R} \begin{pmatrix} \text{cos}\phi\text{sen}\frac{R}{R}\theta \\ \text{sen}\phi\text{sen}\frac{R}{R}\theta \\ \frac{\tilde{R}}{R}\text{cos}\frac{R}{R}\theta \end{pmatrix}$$

Que no es precisamente la ecuación de una esfera de radio

$$\frac{\tilde{R}}{R} = (1 - \frac{2\lambda(1 - \nu)}{\alpha^2})^{1/2},$$

si no más bien una esfera achatada en la coordenada  $z$  (elipsoide) por el hecho que  $\frac{\bar{R}}{R} < 1$ . La tercera ecuación no da información nueva, de hecho al integrarla se encuentra  $x_2 = C \operatorname{sen} \theta$ , donde  $C$  una función arbitraria en  $\phi$  que se encuentra una vez que se conoce  $\mathbf{x}$ .

Hemos encontrado tres soluciones distintas a las ecuaciones de Weingarten, lo que demuestra que en el momento en que la primera y segunda formas fundamentales no satisfacen las ecuaciones de compatibilidad, deja de existir unicidad en la solución del sistema formado por las ecuaciones de Gauss y Weingarten, donde podemos considerar que cada posible superficie, puede considerarse una aproximación a la superficie deformada a orden  $O(\theta^2)$ . Entre las distintas aproximaciones posibles, en esta tesis se pretende encontrar la superficie generada por la familia de curvas características correspondientes a los meridianos de la esfera deformada.

Pese a que sabemos que las formas fundamentales de la superficie deformada no satisfacen las ecuaciones de compatibilidad exactas y por ende no representan una superficie, intentaremos resolver el sistema de ecuaciones reduciendo el número de ecuaciones a 9, la cual consideraremos que aproxima a la esfera deformada.

Hay varias maneras de resolver el sistema

1. Se consideran sólo las ecuaciones que dependen de  $\theta$  es decir (B.4)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} x^i_{,\alpha} = \bar{\Gamma}_{\alpha\theta}^{\gamma} x^i_{,\gamma} + \bar{b}_{\alpha\theta} n^i$$

y la fórmula de Weingarten (B.3)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} n^i = -\bar{a}^{\sigma k} \bar{b}_{\theta\sigma} x^i_{,k}$$

donde  $\alpha = \theta, \phi$  e  $i = 1, 2, 3$ . Implica que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para cada valor de  $\phi \in (0, 2\pi)$ . Lo que permite recuperar el campo de vectores tangentes  $\mathbf{x}_\alpha$  para todo  $\phi \in (0, 2\pi)$ .

Se realiza una segunda integración para encontrar  $x^i(\theta, \phi)$  de igual forma sólo considerando la dependencia en  $\theta$ , es decir, integrando  $x^i_{,\theta}(\theta, \phi)$  respecto a  $\theta$ . Este procedimiento se repite para  $\phi \in (0, 2\pi)$ , encontrándose una familia de curvas las cuales generan la superficie deformada. Lo único que se requiere es conocer las condiciones iniciales. El hecho que para la esfera, todas las curvas características salen del punto  $\theta = 0$ ,

sugiere que la esfera deformada tiene un comportamiento similar. Supondremos que en una vecindad de radio  $\varepsilon$  alrededor de  $\theta = 0$  de la superficie deformada, esa región es la misma que para la de una esfera de radio 1 con centro en el origen en una vecindad de radio  $\varepsilon$  alrededor de  $\theta = 0$ , puesto que la superficie que se encuentra al resolver las ecuaciones da una superficie módulo rotaciones y traslaciones rígidas, tenemos que las condiciones iniciales se obtienen a partir de la esfera de radio uno en una vecindad del polo.

2. Otra alternativa para encontrar la condición inicial, consiste en encontrar una curva característica para un  $\theta$  dado, utilizando las ecuaciones en  $\phi$ , ésta a su vez requiere una condición inicial, que consiste en un punto, los vectores tangentes y la normal en dicho punto. Al resolver el sistema, se tienen condiciones iniciales sobre la curva característica para un  $\theta$  dado y se puede encontrar la familia de curvas características en  $\theta$  para  $\phi \in [0, 2\pi]$ .
3. La última alternativa es construir las curvas características en  $\phi$ , para ello se consideran las ecuaciones en  $\phi$ , que se resuelven para cada  $\theta \in (0, \theta_0)$ , al conocer las condiciones iniciales sobre la curva  $\phi = \phi_0$  encontrada al resolver las ecuaciones en  $\theta$  para  $\phi_0$  con condiciones iniciales en un punto.

## 6.2. Cálculos Numéricos

Para los cálculos numéricos se toman las siguientes constantes

Módulo de Poisson	$\nu = 0,25$
Apertura del cascarón	$\theta_0 = \pi/3$

Cuadro 6.1: Constantes utilizadas

Cabe hacer notar que el valor  $\alpha \in (8, 98)$  correspondiente al valor  $\theta = \pi/3$ , no es un valor adecuado para las aplicaciones, pero a fin de ilustrar el comportamiento de los estados deformados será de utilidad y permitirá apreciar claramente la geometría de la esfera.

$\mu$	$\alpha \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$	$\bar{\alpha}$ Promedio	$\frac{p_c \gamma}{2E} \times 10^{-4}  _{\bar{\alpha}}$	$c_k^m \times 10^{-4}$
$\mu_1^0$	4.93604			
$\mu_1^1$	13.40813	8.1353 18.3719	13	118.3997 417.7341
$\mu_1^2$	25.1733	18.371 26.285	22	41.6971 38.4366
$\mu_2^0$	27.4468	26.285 33.181	29	23.8172 847.2804
$\mu_1^3$	40.1132	33.181 42.440	37	14.6569 2.8572
$\mu_2^1$	44.9021	42.440 51.100	46	9.4545 86.3213
$\mu_1^4$	58.1551	51.100 61.820	56	6.3821 0.1768
$\mu_2^2$	65.7172	61.820 66.823	64	4.8845 6.7045
$\mu_3^0$	67.9488	66.823 73.381	70	4.0834 419.2978
$\mu_1^5$	79.2485	73.381 84.371	78	3.2877 0.00935
$\mu_2^3$	89.8252	84.371 92.084	88	2.5832 0.4228

Cuadro 6.2: Esta tabla contiene en la primera columna el valor propio  $\mu_k^m$  correspondiente al espectro del laplaciano para el cascarón  $\theta = \pi/3$ . La segunda columna indica en que intervalo de valores del parámetro  $\alpha$  se espera una bifurcación para el modo  $\mu_k^m$ . La tercera columna contiene el valor de  $\bar{\alpha}$  utilizado para hacer la gráficas, el cual se tomó como el punto medio del intervalo. La cuarta columna contiene el valor de la presión crítica para  $\bar{\alpha}$ . La quinta columna contiene la constante de normalización  $c_k^m$  para las distintas funciones propias.

Los valores para  $\mu_k^m$  dados en el cuadro (6.2) se calcularon al encontrar numéricamente la  $k$ -ésima raíz correspondiente al modo  $m$  de la ecuación  $P_\nu^m(z_0) = 0$  donde  $z_0 = \cos \pi/3$ . Las constantes de normalización se hallaron mediante la expresión (5.8)

### 6.3. Resultados

A continuación mostramos los resultados numéricos encontrados para los distintos modos de bifurcación, recuperadas a partir de las primera y segunda formas fundamentales de la esfera deformada, al resolver las ecuaciones de Gauss y Weingarten correspondientes a las curvas características de los meridianos. En realidad, la mayoría de los cálculos se hacen si ser muy conscientes de que es lo que está pasando, de una manera práctica se calculan las funciones  $f, w$  dadas en términos de las funciones de Legendre, las cuales son aproximadas mediante una interpolación en las variables  $\theta, \phi$ . Posteriormente se calcula la primera y segunda formas fundamentales como se indicó anteriormente. Posteriormente se construyen las ecuaciones de Gauss y Weingarten para los meridianos y se resuelve el sistema al introducirlo a la computadora (Todo este proceso algebraico numérico es realizado por la computadora) . La familia de meridianos representa la aproximación al cascarón de esfera deformada y apertura  $\theta_0 = \pi/3$ .

El tensor métrico tiene la siguiente forma a primer orden

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\theta\theta} &= \bar{R}^2 - \cos m\phi f_1(\theta)\xi \\ \bar{a}_{\theta\phi} &= \bar{a}_{\phi\theta} = -\text{sen } m\phi f_2(\theta)\xi \\ \bar{a}_{\phi\phi} &= \bar{R}^2 \text{sen}^2 \theta + \cos m\phi f_3(\theta)\xi\end{aligned}$$

donde  $f_1, f_2, f_3$  son funciones de  $P_{\nu_k^m}(\cos\theta)$  y sus derivadas. Esto pone en evidencia las distintas simetrías de la primera forma fundamental en su parte diagonal y la parte mixta.

En lo sucesivo sólo presentamos el término  $a_{\theta\theta}$  y  $a_{\theta\phi}$  de la superficie deformada porque son los que tienen más detalles interesantes. El término  $a_{\phi\phi}$  es para todo propósito práctico  $\text{sen}^2\theta$  en todos los casos.



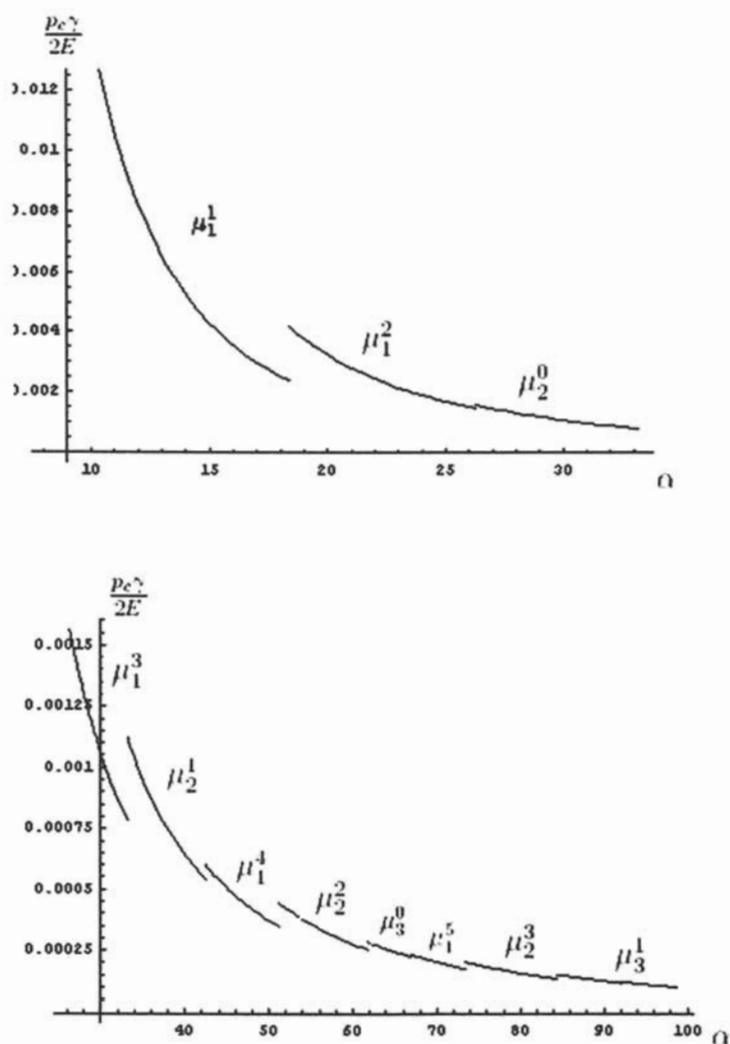
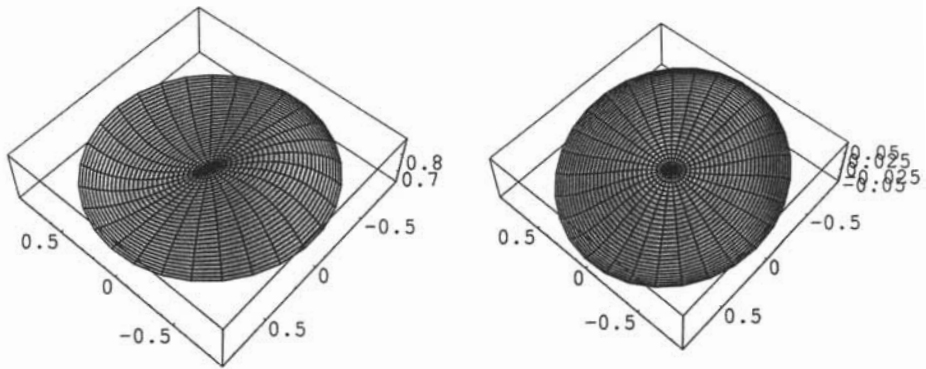
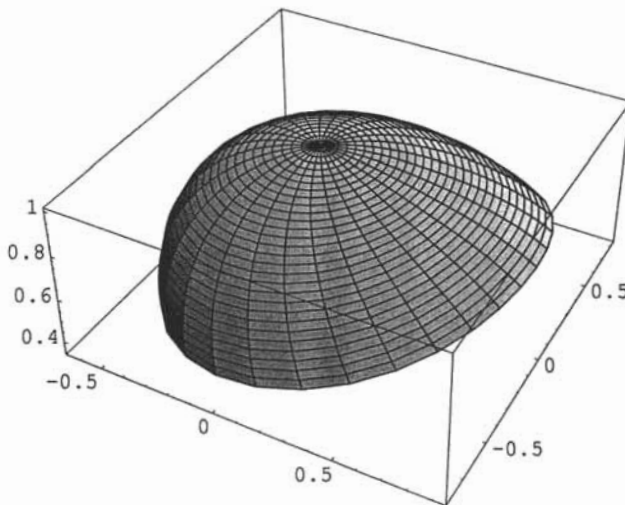


Figura 6.1: Es esta gráfica se muestra la dependencia de la presión crítica como función del parámetro  $\alpha$ , para los distintos modos de bifurcación, en la parte de arriba se muestran los 3 primeros modos de bifurcación, y en la parte de abajo los restantes 8. Esta gráfica ha sido pensada con el siguiente propósito práctico: dada alguna cáscara de espesor  $\alpha$ , a que presiones debo buscar los estados deformados y que modo se espera observar

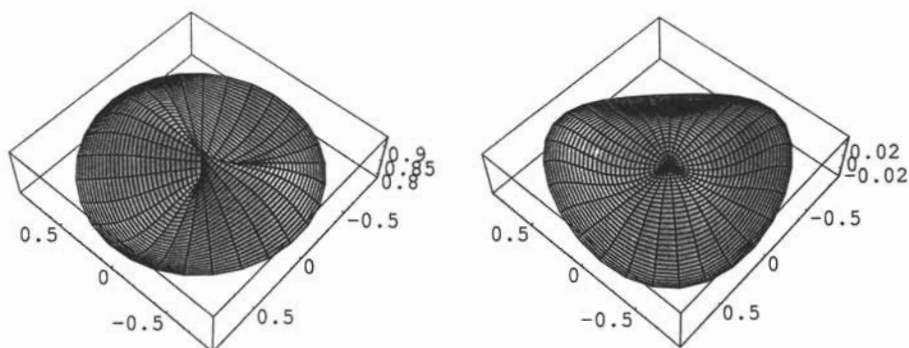
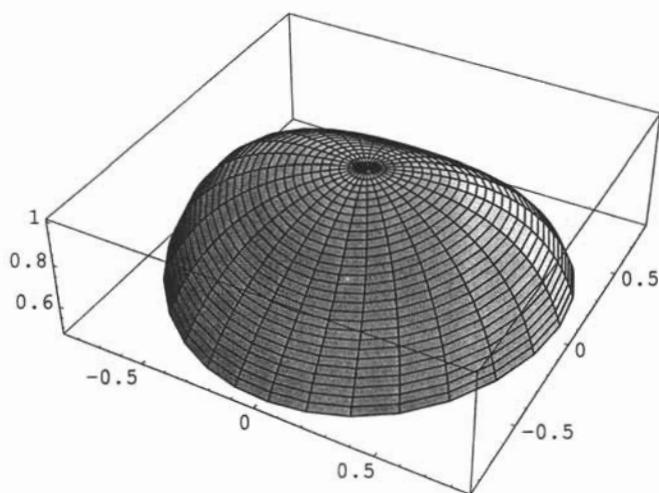


Primera forma fundamental  $\bar{a}_{\theta\theta}$ ,  $\bar{a}_{\theta\phi} = \bar{a}_{\phi\theta}$ .

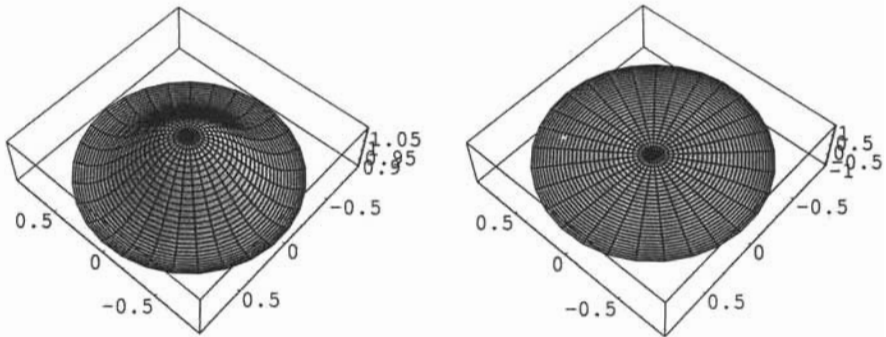


Superficie deformada modo  $\mu_1^1$ ,  $\alpha = 13$ ,  $\xi = 15$

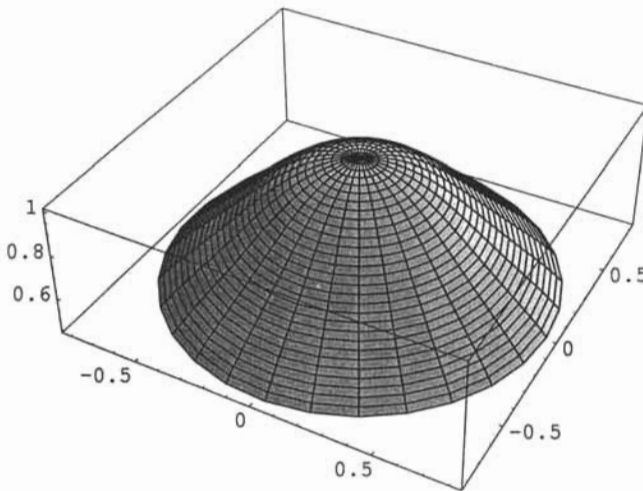
Se aprecia un plano de simetría. Puesto que la superficie encontrada se puede trasladar y rotar, vemos que en este caso el plano horizontal que soporta al cascarón queda inclinado.

Primera forma fundamental modo  $\mu_1^2$ .Superficie deformada modo  $\mu_1^2$ .modo  $\mu_1^2$ ,  $\alpha = 22$ ,  $\xi = 30$ 

En este caso se observa que la superficie deformada tiene un plano de simetría en  $\phi = \pi/2$ .



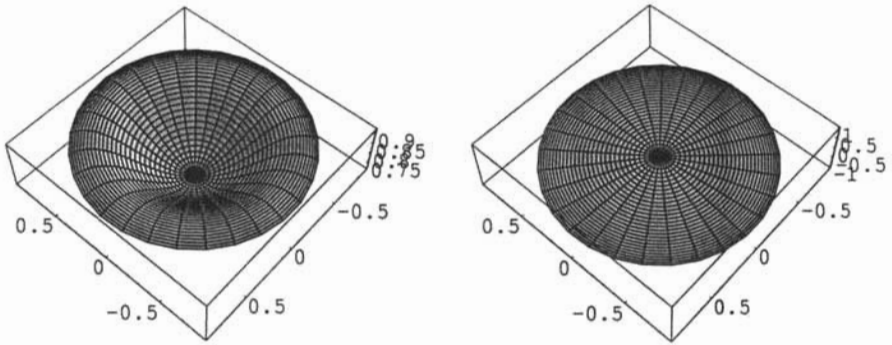
Primera forma fundamental modo  $\mu_2^0$ ,  $\xi > 0$ .



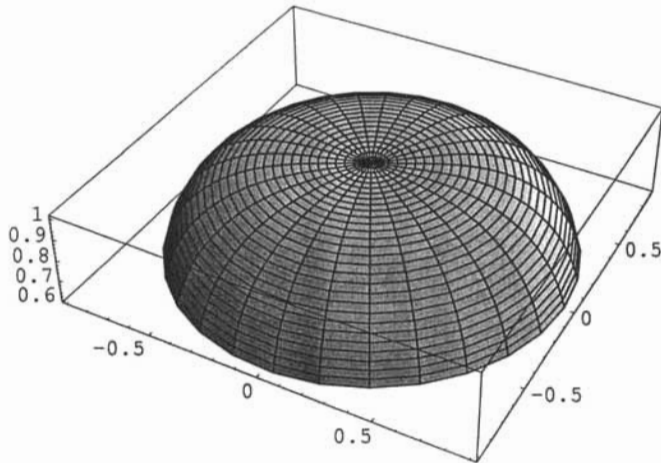
Superficie deformada modo  $\mu_2^0$ ,  $\xi > 0$ .

modo  $\mu_2^0$ ,  $\alpha = 29$ ,  $\xi = 35$

En este caso existe bifurcación transcítica y arriba se tienen los resultados para  $\xi > 0$ . En este caso el término mixto es idénticamente cero, por lo que la superficie tiene simetría azimutal, con una concavidad negativa.



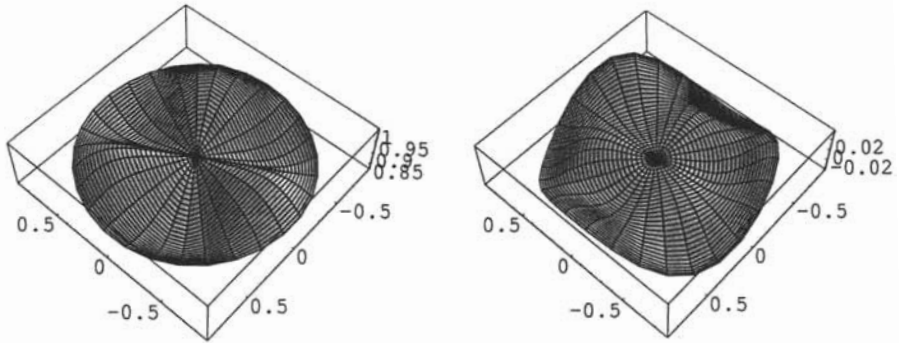
Primera forma fundamental modo  $\mu_2^0$ ,  $\xi < 0$ .



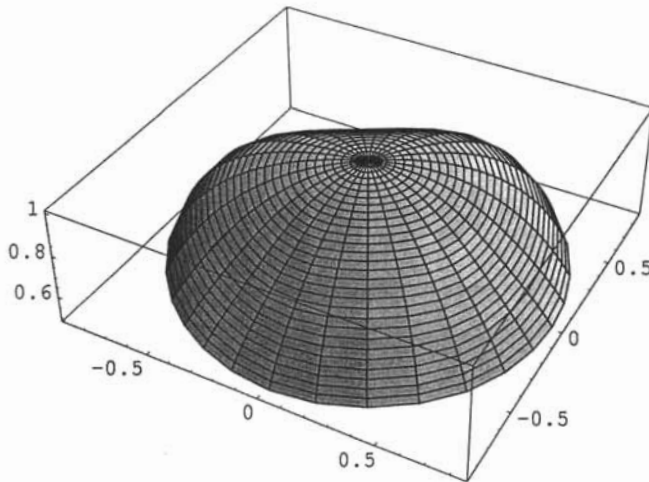
Superficie deformada modo  $\mu_2^0$ ,  $\xi < 0$ .

modo  $\mu_2^0$ ,  $\alpha = 29$ ,  $\xi = -35$

Aquí se hace el caso  $\xi < 0$  para la bifurcación transcítica del modo  $\mu_2^0$ , se observa una concavidad positiva en el polo.

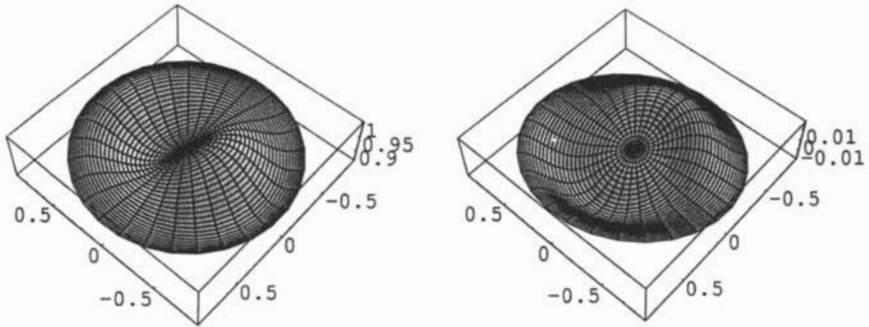
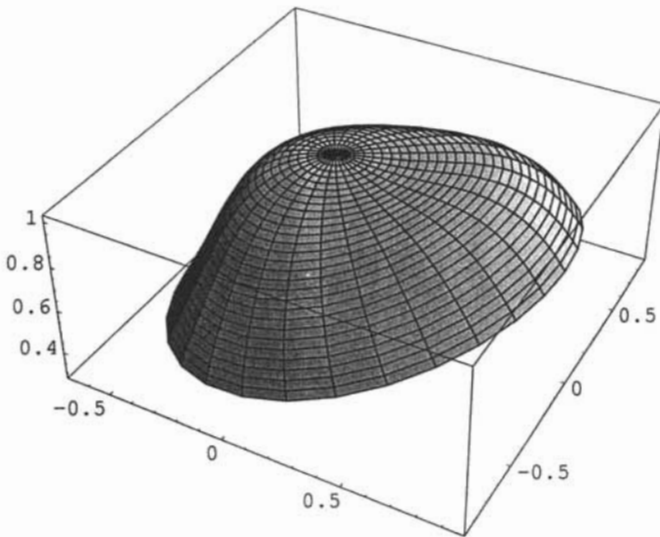


Primera forma fundamental modo  $\mu_1^3$ .

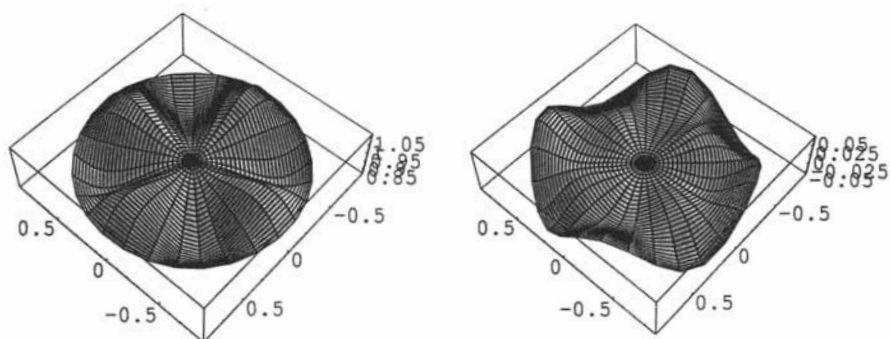
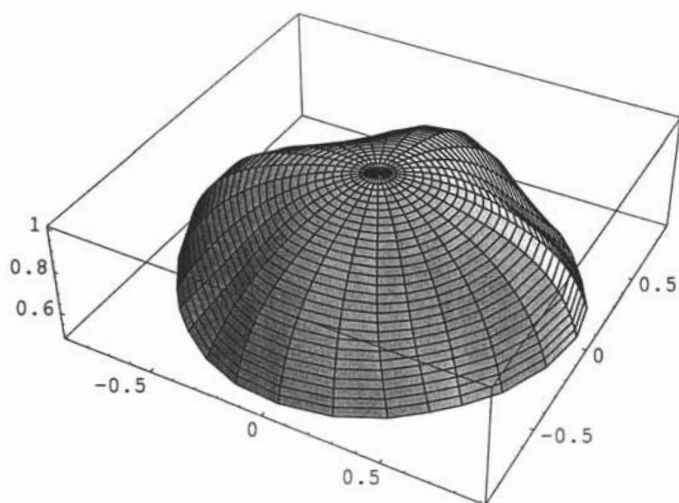


Superficie deformada. Modo  $\mu_1^3$ ,  $\alpha = 37$ ,  $\xi = 55$

En este caso la superficie deformada muestra una simetría triangular.

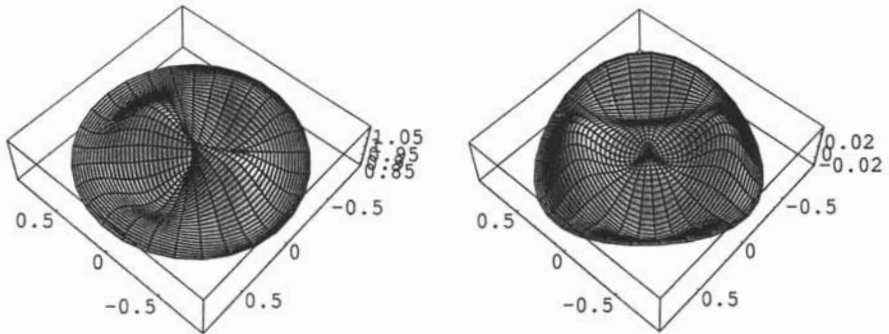
Primera forma fundamental modo  $\mu_2^1$ .Superficie deformada Modo  $\mu_2^1$ ,  $\alpha = 46$ ,  $\xi = 75$ .

La superficie muestra un plano de simetría para un ángulo  $\phi > \pi/2$ . Además la superficie aparece inclinada respecto al plano horizontal.

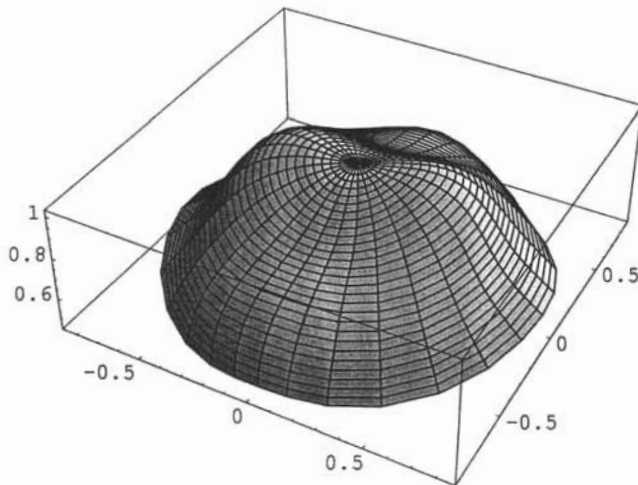
Primera forma fundamental modo  $\mu_1^4$ .Superficie deformada Modo  $\mu_1^4$ ,  $\alpha = 56$ ,  $\xi = 150$ .

Soluciones con simetría cuadrada.



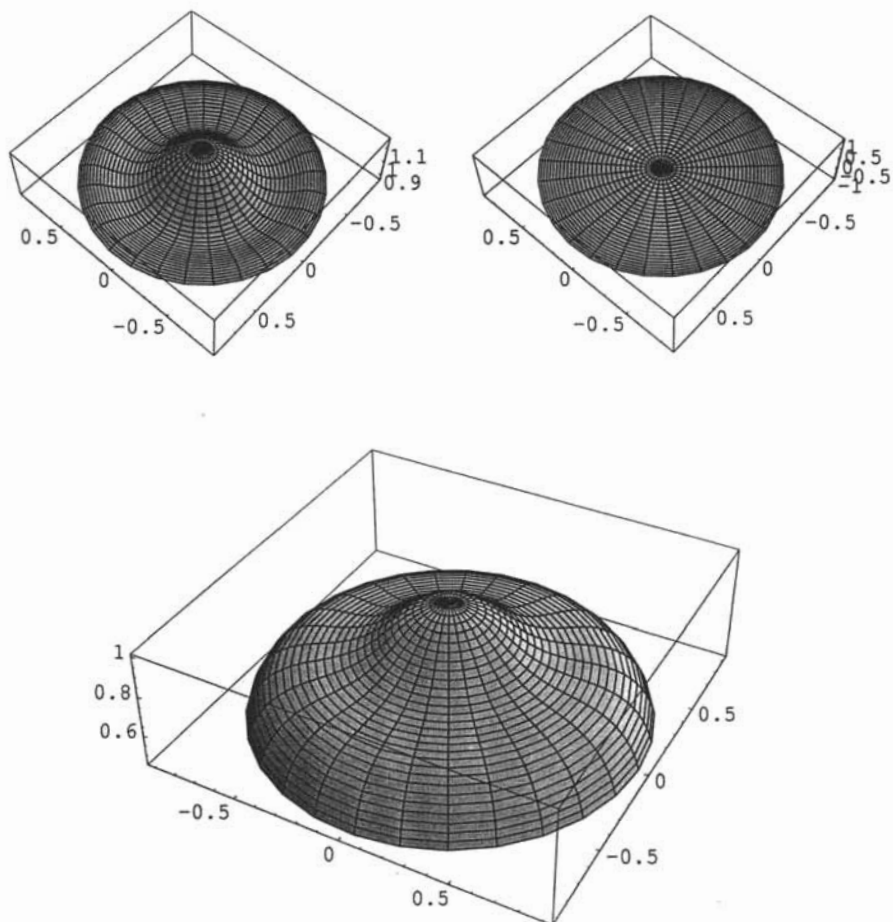


Primera forma fundamental modo  $\mu_2^2$ .



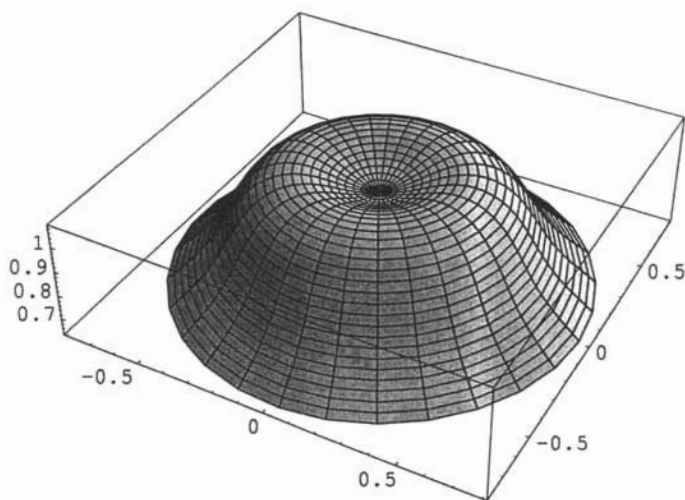
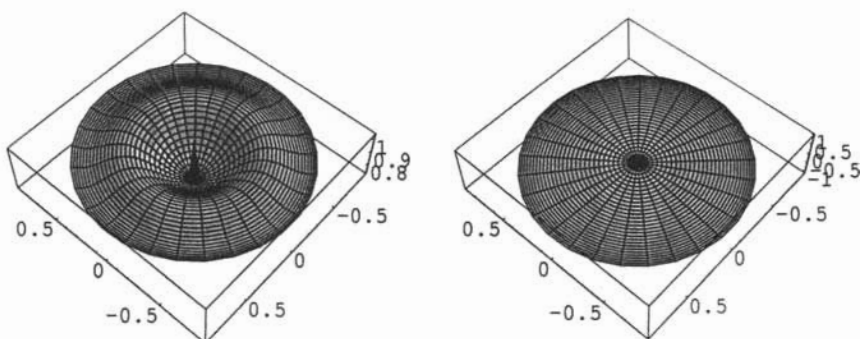
Superficie deformada Modo  $\mu_2^2$ ,  $\alpha = 64$ ,  $\xi = 200$ .

Caso análogo al modo  $\mu_1^1$ , dos planos de simetría.



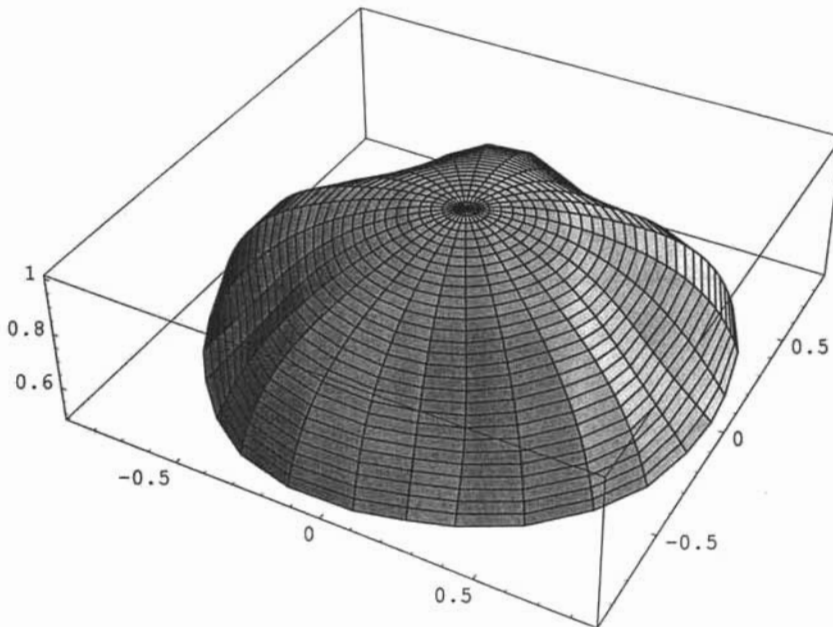
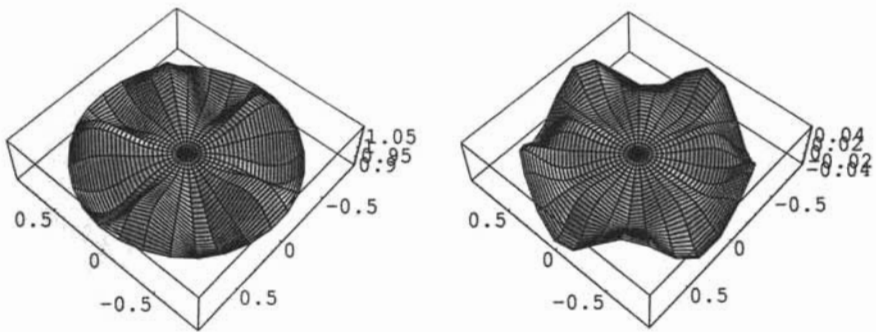
Modo  $\mu_3^0$ ,  $\alpha = 70$ ,  $\xi = 200$

Caso análogo al modo  $\mu_2^0$  en el caso de bifurcación transcítica para  $\xi > 0$ .



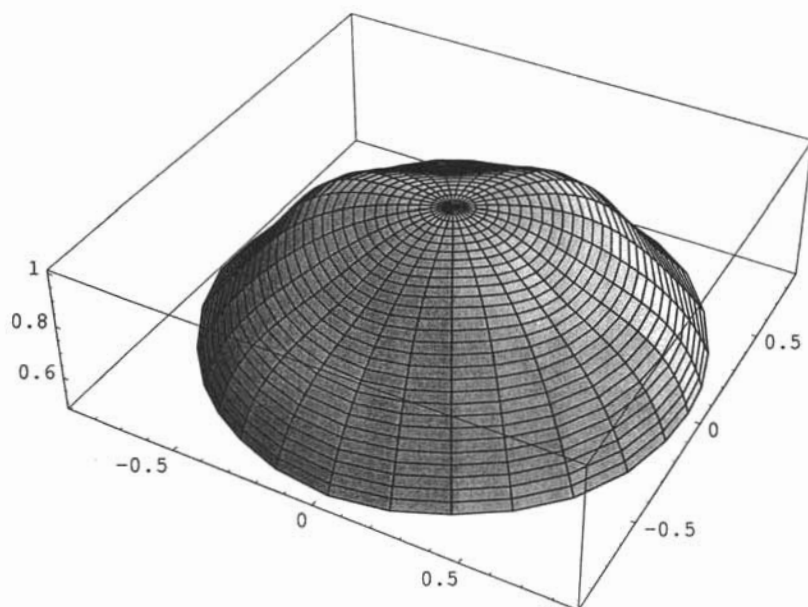
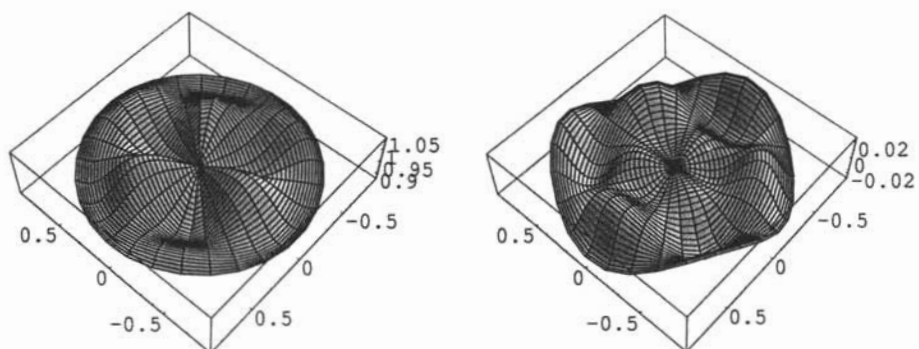
Modo  $\mu_3^0$ ,  $\alpha = 70$ ,  $\xi = -200$

Caso análogo al modo  $\mu_2^0$  en el caso de bifurcación transcítica para  $\xi < 0$ .



Superficie Deformada Modo  $\mu_1^5$ ,  $\alpha = 78$ ,  $\xi = 230$

Caso análogo a los modos  $\mu_1^4$  sólo que ahora tenemos una simetría pentagonal.



modo  $\mu_2^3$ ,  $\alpha = 88$ ,  $\xi = 200$

Caso análogo al modo  $\mu_1^3$  simetría triangular.

### 6.3.1. Comentarios Finales

Se han cometido graves faltas en lo que consiste en recuperar las superficies de los distintos modos. Esto ha sido de manera más o menos intencional. En primer lugar, el valor de la perturbación es demasiado grande, esto se hizo con el fin de resaltar la geometría de la superficie deformada, pero al hacer esto evidentemente violamos la hipótesis del modelo de John en el cual se pide que el tensor de deformaciones sea pequeño .

En segundo lugar, se sabe que los valores del espectro del laplaciano depende del tamaño de la la apertura, mismos que a su vez determinan el valor del parámetro  $\alpha$ . Si como se pretende en esta tesis, queremos que los modos deformados correspondan a los primeros once valores propios, entonces debe pedirse cascarones con una apertura mucho menor (Baginski propone cascarones con  $\theta_0 = \pi/30$  [Baginski 1]).

Una cáscara de estas dimensiones es bastante plana, por lo que opté por trabajar con cáscaras más grandes para apreciar la geometría de manera más clara. Las gráficas por ende, no son más que una caricatura del fenómeno, donde se espera lograr alguna comprensión cualitativa de las deformaciones. Sin embargo la inconsistencia de las ecuaciones de Gauss y Weingarten es un hecho inevitable, intrínseco a la formulación del problema, donde las superficies encontradas son aproximaciones  $O(\theta^2)$ .



# Capítulo 7

## Conclusiones

A lo largo de la tesis se pudo observar la manera en que se plantea y resuelve un problema no lineal en ecuaciones diferenciales parciales. Las principales herramientas matemáticas utilizadas son el uso del análisis funcional, teoría espectral, grado topológico y cálculos numéricos, teniendo una base firme en geometría diferencial y análisis tensorial. El principal resultado teórico fue demostrar la existencia de estados deformados.

Hay todavía varios temas en los que se puede profundizar: respecto a los estados deformados, queda por resolver la cuestión de su estabilidad. En [Baginski 1] se demuestra que los estados deformados correspondiente a los primeros once estados son inestables. En [Baginski 3], utilizando una aproximación de cáscaras poco profundas, encuentra que los modos con simetría azimutal son estables.

Es posible además, encontrar teoremas de bifurcación global, que respondan a la pregunta de que pasa con las soluciones no triviales para valores grandes del parámetro libre una vez que aparecen. En [Ize 1, teorema Rabinovitz, 1971] se encuentra que la ecuación  $F(\lambda, x) = x - \lambda Kx - g(\lambda, x) = 0$  de  $R \times H \rightarrow H$  con  $K$  compacto y  $g(\lambda, x) = O(\|x\|^2)$ . Si  $\lambda_0$  es un valor propio de  $K$ , de multiplicidad impar entonces se tiene un continuo de ceros no triviales  $\mathcal{C}$  empezando en  $(\lambda_0, 0)$ , los cuales o van a infinito en  $R \times H$  o bien, regresan a cero por un punto de bifurcación diferente.

Este teorema muestra lo que puede pasarle a las soluciones después que aparece la bifurcación, o bien son no acotadas o bien regresan a cero por otro valor propio. Como trabajo futuro, se podría encontrar un equivalente de ese teorema para la ecuación (5.4), lo que corresponde a demostrar los teoremas de bifurcación global.



Los resultados del capítulo (5) muestran que las soluciones poseen distintas simetrías, todas con un plano de simetría. Esto es evidente del hecho que las funciones propias de  $-\Delta$  en  $H$  están dadas por  $u_k^m = c_k^m P_{\nu_k^m}^m(\cos \theta) \cos m\phi$ , las cuales tienen distintas simetrías respecto al eje polar. Los resultados numéricos confirman en parte esta simetría, en especial para los modos con simetría azimutal.

La literatura reporta resultados experimentales para cascarones, donde se hace énfasis en las simetrías de los estados deformados [Berger]. Experimentalmente se observa que el combamiento de cascarones (completos en el caso de [Berger]) es de naturaleza violenta. Se cree sin embargo que el combamiento comienza con la formación de una pequeña concavidad rotacionalmente simétrica. Fotografías de alta velocidad muestran que el combamiento no ocurre hasta que la presión alcanza 80 – 90 % de la presión crítica de combamiento, la cual podría decirse es rotacionalmente simétrica, posteriormente muestra otras configuraciones de equilibrio (simetrías, elíptica, triangular y pentagonal). Experimentalmente se busca comparar la presión crítica y la forma del cascarón deformado.

El problema de la esfera completa, se encuentra resuelto para los primeros doce modos en el artículo [Knightly&Sather], donde se hace evidente la dificultad de tomar la esfera completa, donde la dimensión del espacio nulo  $Ker L_\lambda$  para las aplicaciones se halla en el rango  $20 \leq dim Ker L_\lambda \leq 400$ . En este caso los métodos locales de Liapunov-Schmidt requieren resolver un sistema de  $k$  ecuaciones cuadráticas (ó cúbicas) en  $R^k$  donde  $20 \leq k \leq 400$ . Al restringir el problema a cascarones no sólo garantizamos que  $dim Ker L_\lambda = 1$  para los primeros estados deformados, sino además predecimos las simetrías encontradas experimentalmente.

El parámetro  $\alpha = \frac{R}{h\gamma}$  es un factor importante en el fenómeno del combamiento del cascarón por el hecho que  $\lambda_c$  está dada por el lema (5.2), es decir  $\lambda_c = \min\{\lambda_n | \lambda_n = \mu_n + \frac{\alpha^2}{\mu_n}, \mu_n \in \sigma(-\Delta)\}$  entonces se tiene que

1. si  $\mu_{n-1}\mu_n < \alpha^2 < \mu_n\mu_{n+1} \Rightarrow \lambda_c = \lambda_n$
2. si  $\alpha^2 = \mu_{n+1}\mu_n \Rightarrow \lambda_c = \lambda_{n+1} = \lambda_n = \mu_n + \frac{\alpha^2}{\mu_n} = \mu_n + \mu_{n+1}$ .

Esto pone de manifiesto la importancia de entender y poder calcular el espectro de operadores del tipo de Laplace Beltrami. Como se demostró, las soluciones débiles encontradas por el método de Liapunov-Schmidt, son  $C^\infty$  y de hecho son soluciones al problema clásico.

En lo que corresponde a los resultados numéricos, nos topamos con dificultades de consistencia en el modelo de John, es decir, al recuperar la primera y segunda formas fundamentales de la superficie deformada, estas no satisfacen las ecuaciones de compatibilidad exactas. Sin embargo restringiendo el número de ecuaciones fué posible recuperar cierta información acerca de la superficie deformada, en particular se observa que la superficie así generada es una aproximación a  $O(\theta^2)$ , siendo  $\theta$  el parámetro de John (2.1). Estos resultados son la principal aportación de la tesis e independientes de [Baginski 4], donde resuelve las ecuaciones de deformación por un método numérico de Galerkin con la intención de continuar las ramas bifurcadas, y posteriormente recuperar la superficie deformada, en esencia se topa con las mismas dificultades que aparecen en esta tesis.

Resulta de interés hacer una comparación de los resultados encontrados con el modelo de John, con los resultados encontrados con modelos exactos, en particular se tienen resultados para la esfera completa con simetría azimutal. Estos modelos llamados cascarones de Cosserat no consideran un desarrollo en Taylor para la energía libre de Gibbs permitiendo modelar una gama más amplia de materiales. Tienen como base la elasticidad tridimensional, además no suponen que el tensor deformación sea pequeño. En [Iglesias] se hace un estudio detallado acerca de la existencia de bifurcaciones para la esfera completa deformada usando estos modelos, bajo la suposición de simetría azimutal. Incluye cálculos numéricos de los primeros modos de deformación que pueden dar pauta a comparaciones con otros modelos .

Es de interés además, probar el modelo en otras geometrías en particular a paneles cilíndricos, puesto que en la literatura abundan resultados acerca de estas estructuras.

Uno podría cuestionarse acerca de que es lo que queda por hacer no sólo en el problema de la esfera, sino en la teoría de cáscaras. Como todo modelo, existen limitaciones en sus aplicaciones. ¿ Hasta que punto es aplicable el modelo de John? . Se espera que el modelo de John funcione bien si se cumple que:

- Las deformaciones se den lejos de los bordes de la cáscara o bien se tenga una superficie cerrada.
- El espesor de la cáscara sea pequeño comparado con la curvatura media de la superficie.

- La métrica de la superficie deformada no difiere de manera significativa con la métrica de la superficie no deformada.

Una ventaja de este modelo es que se requieren pocos parámetros (constantes de elasticidad) para tener la energía libre de Gibbs en función del tensor de deformación. Dichos parámetros pueden encontrarse de manera experimental. La desventaja es su inconsistencia para recuperar la superficie deformada. Las condiciones de frontera fueron impuestas, a mi forma de ver, de manera un poco forzada, porque, ¿Como es que pido que mi modelo sea válido lejos de los bordes, y al final doy condiciones precisamente en los bordes?. El argumento que permitió obtener condiciones de frontera con credibilidad, se basó en lograr el equilibrio estático y tratar que las cosas se tornen matemáticamente manejables. Pese a esto, es posible que el modelo de John prediga con exactitud las presiones a las cuales se dan los combamientos, esto todavía queda por confirmarse experimentalmente.

# Apéndice A

## El Espectro del Laplaciano

El tema que trata éste apéndice es el estudio del espectro del operador Laplaciano  $-\Delta$  definido sobre un cascarón esférico con condiciones de Dirichlet en la frontera. El principal resultado es demostrar que si  $\mu$  es un valor propio entonces  $\mu > 2$ . Otro resultado de importancia es el ordenar los primeros 11 valores propios de este operador. Los valores propios están dados por  $\nu(\nu + 1)$  y ordenados según las siguientes desigualdades,  $\nu_1^0 < \nu_1^1 < \nu_1^2 < \nu_2^0 < \nu_1^3 < \nu_2^1 < \nu_1^4 < \nu_2^2 < \nu_3^0 < \nu_1^5 < \nu_2^3$ . Si  $\nu_j^m$  para  $j = 1, 2, \dots$ , son las soluciones a la ecuación  $P_\nu^m(z_0) = 0$  como función de  $\nu$  para  $z_0 \in [0, 1]$ , donde  $P_\nu^m$  son las funciones de Legendre, entonces las funciones  $e^{im\phi} P_\nu^m(\cos \theta)$  son funciones propias del operador, si  $P_\nu^m(\cos \theta_0) = 0$ , donde  $\theta_0$  es la apertura del cascarón.

### A.1. Espectro de $-\Delta$

Si  $\Omega$  es la porción de la esfera unitaria dada, en coordenadas esféricas por  $\{\phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}\}$ , entonces el espacio de trabajo que contiene las soluciones es  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Se tiene que el operador laplaciano  $-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  es un operador autoadjunto con respecto a  $L^2(\Omega)$  y positivo, por lo tanto  $\mu > 0$  [Weinberger, cap 7]. Aquí  $L^2(\Omega) = L^2([0, 2\pi] \times (0, \theta_0); \sin(\theta) d\theta d\phi)$ , con respecto a la esfera unitaria y por el teorema de encaje de Sobolev [Ize 2, nota 2.3],  $H^2 \subset C^0(\Omega)$ . Se toma  $U(\phi, \theta)$  periódica en  $\phi$ , es decir

$$U(\theta, \phi) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_m(\theta) e^{im\phi}$$

con  $U_{-m} = \bar{U}_m$  y por lo tanto el problema de valores propios  $-\Delta U = \mu U$  se escribe como

$$-\frac{1}{\text{sen}\theta}(\text{sen}\theta U_\theta)_\theta - \frac{1}{\text{sen}^2\theta} U_{\phi\phi} = -\sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\text{sen}\theta}(\text{sen}\theta U'_m)' - \frac{m^2}{\text{sen}^2\theta} U_m \right\} e^{im\phi} = \mu U$$

Lo que implica que para estudiar el espectro del laplaciano corresponde a estudiar las ecuaciones

$$\frac{1}{\text{sen}\theta}(\text{sen}\theta U'_m)' + \left(\mu - \frac{m^2}{\text{sen}^2\theta}\right) U_m = 0,$$

con  $U_m(\theta)$  continua en  $\theta = 0$ , por lo que,  $|U_m(\theta)| < \infty$  en  $\theta = 0$ ,  $\mu > 0$  y  $U_m(\theta_0) = 0$ . Si  $\mu = \nu(\nu + 1)$  con  $\nu > 0$ , y hacemos el cambio de variable  $z = \cos \theta \Rightarrow \text{sen}\theta = \sqrt{1 - z^2}$  y además  $\frac{dz}{d\theta} = -\text{sen}\theta$ , con esto la ecuación se escribe como

$$((1 - z^2)y')' + \left(\nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2}\right) y = 0$$

con la condición  $y(z_0) = 0$  donde  $z_0 = \cos \theta_0$ . Dicha ecuación tiene por soluciones a las funciones de Legendre  $P_\nu^m(z)$ , si se pide que  $|y(1)| < \infty$ . Sea por reducción de orden ( es decir una solución de la forma  $a(z)y(z)$ ) o directamente, se puede ver que  $y_1(z) = y(z) \int_0^z \frac{dt}{y^2(t)(1-t^2)}$  es otra solución de la ecuación. Si  $|y(1)| < \infty$ , entonces  $y_1(z)$  no es acotada cuando  $z \rightarrow 1$ , es decir  $P_\nu^m(z)$  es única.

A continuación se desarrollan algunas propiedades de dichas funciones, en particular que

$$P_\nu^m(0) = 0 \Leftrightarrow \nu = m + 2k - 1$$

y por lo tanto para  $\theta = \frac{\pi}{2}$  los valores propios son  $\mu = \nu(\nu + 1)$ , con  $\nu_k^m(0) = m + 2k - 1$ .

## A.2. Funciones Hipergeométricas

Las funciones Hipergeométricas son soluciones a la ecuación diferencial

$$z(1 - z)u'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)u' - \alpha\beta u = 0$$

Se propone una solución de la forma  $u = z^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$z(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s+k)(s+k-1) z^{k+s-2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z) \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s+k) z^{s+k-1} - \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+s} = 0.$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{s+k-1} c_k (s+k)(s+k+\gamma-1) - z^{s+k} c_k (s+k+\alpha)(s+k+\beta) = 0.$$

Para que esto suceda se debe cumplir

$$c_0 s(s+\gamma-1) = 0,$$

$$c_k (s+k)(s+k-1+\gamma) = c_{k-1} (s+k-1+\alpha)(s+k-1+\beta) = 0.$$

Una solución sucede con  $s = 0$  y pedimos  $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$  para poder dividir. Entonces se tiene la siguiente relación de recurrencia

$$c_k = \frac{(k-1+\alpha)(k-1+\beta)}{(k-1+\gamma)k} c_{k-1}.$$

Normalizando con  $c_0 = 1$ , implica que la relación de recurrencia se resuelve como

$$c_k = \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k}$$

donde se define  $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)$ ,  $(\alpha)_0 = 1$ , para  $k = 1, 2, \dots$ . Para ver la convergencia de la serie notamos que

$$\left| \frac{c_k}{c_{k-1}} \right| = \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{k-1}\right) \left(1 + \frac{\beta}{k-1}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{k-1}\right) \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)} \rightarrow 1$$

si  $k \rightarrow \infty$ , y por lo tanto  $\left| \frac{c_k}{c_{k-1}} \frac{z^k}{z^{k-1}} \right| \rightarrow |z|$  si  $k \rightarrow \infty$  y por lo tanto el radio de convergencia es  $|z| < 1$ .

De modo que una solución es  $u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k$  para  $|z| < 1$  y  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ . La otra solución, con  $s = 1 - \gamma$ , define una serie con  $c_k = \frac{(k+\alpha-1)(k+\beta-\gamma)}{k(k+1-\gamma)} c_{k-1}$ , si  $\gamma \neq 1, 2, \dots$ , con radio de convergencia  $|z| < 1$ . Si  $\gamma > 1$  esta serie dá una solución singular en  $z = 0$ . También por reducción de orden o directamente, la función  $u(z) \int_a^z \frac{t^{-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{u^2(t)} dt$  es solución .

**Definición A.1** se define la función hipergeométrica como

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}$$

**Propiedad A.1**

$$P_{\nu}^m(z) = \frac{(-1)^m \Gamma(\nu + m + 1) (1 - z^2)^{m/2}}{2^m \Gamma(m + 1) \Gamma(\nu - m + 1)} F(m - \nu, \nu + m + 1; m + 1; \frac{1 - z}{2})$$

**Prueba.** De la ecuación

$$\frac{d}{dz} \left( (1 - z^2) \frac{dy}{dz} \right) + \nu(\nu + 1)y = 0$$

hacemos el cambio de variable  $t = \frac{1}{2}(1 - z)$  y por lo tanto  $1 - z^2 = 4t(1 - t)$  la ecuación queda como

$$t(1 - t) \frac{d^2}{dt^2} y + (1 - 2t) \frac{dy}{dt} + \nu(\nu + 1)y = 0$$

es la ecuación de una función hipergeométrica con  $\alpha = -\nu$ ,  $\beta = \nu + 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $F(-\nu, \nu + 1, \frac{1-z}{2})$  es acotada en  $z = 1$  (por la serie) mientras que la otra solución  $u_1(z) = u(z) \int_a^z \frac{dt}{t(1-t)u^2(t)}$  diverge como  $\ln(z)$  cuando  $z$  tiende a 0. Por lo tanto  $P_{\nu}(z) = F(-\nu, \nu + 1; 1; \frac{1-z}{2})$  definiendo  $P_{\nu}(z)$  de esta manera, es decir tomando la constante de normalización igual a 1. Más adelante se demuestra la fórmula de Rodrigues dada en la ecuación (A.9) que afirma lo siguiente

$$P_{\nu}^m(z) = (-1)^m (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_{\nu}(z).$$

Además

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{k z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+1} (\beta)_{k+1}}{(\gamma)_{k+1}} \frac{z^k}{k!}$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1; \gamma + 1; z)$$

porque  $(\lambda)_{k+1} = \lambda(\lambda + 1)_k$  por definición. Aplicando estos resultados se tiene que:

$$\frac{d^m}{dz^m} F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_m} F(\alpha + m, \beta + m; \gamma + m; z)$$

para  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Por lo tanto

$$P_\nu^m(z) = \frac{(1 - z^2)^{m/2} (-\nu)_m (\nu + 1)_m}{2^m (1)_m} F\left(-\nu + m, \nu + 1 + m; m + 1; \frac{1 - z}{2}\right).$$

Como  $(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}$  se tiene que

$$P_\nu^m(z) = \frac{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \Gamma(m - \nu)}{2^m \Gamma(-\nu)} \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(m + 1)} F\left(-\nu + m, \nu + 1 + m; m + 1; \frac{1 - z}{2}\right).$$

Utilizando la identidad  $\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi z)\Gamma(z)}$ , véase [Landau, pág 3,1.2.2], implica que

$$\frac{\Gamma(1 - (\nu - m + 1))}{\Gamma(1 - (\nu + 1))} = \frac{\Gamma(\nu + 1)\text{sen}\pi(\nu + 1)}{\Gamma(\nu - m + 1)\text{sen}\pi(\nu - m + 1)} = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu - m + 1)} (-1)^m$$

y por lo tanto

$$P_\nu^m(z) = \frac{(-1)^m (1 - z^2)^{m/2} \Gamma(\nu + m + 1)}{2^m \Gamma(\nu - m + 1)\Gamma(m + 1)} F\left(-\nu + m, \nu + 1 + m; m + 1; \frac{1 - z}{2}\right)$$

$$P_\nu^m(z) = \frac{(-1)^m (1 - z^2)^{m/2} \Gamma(\nu + m + 1)}{2^m \Gamma(\nu - m + 1)\Gamma(m + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu + m)_k (\nu + 1 + m)_k}{(m + 1)_k k!} \left(\frac{1 - z}{2}\right)^k \tag{A.1}$$

■

**Propiedad A.2** Las funciones hipergeométricas tienen la siguiente representación integral,

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1 - t)^{\gamma-\beta-1} (1 - zt)^{-\alpha} dt$$

para  $|z| < 1$  y  $\gamma > \beta > 0$ .



**Prueba.** Utilizando el hecho que  $(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}$  se tiene

$$\frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k} = \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+k)} \frac{\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}$$

Ahora por las propiedades de la función beta, véase [Lebedev, pág 13, 1.5.2]

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

para  $Re(x) > 0$ ,  $Re(y) > 0$ . Por lo tanto se tiene que para  $\gamma > \beta > -k$ ,

$$\frac{\Gamma(\beta+k)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+k)} = \int_0^1 t^{\beta+k-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1} dt$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k} &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta+k-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1} dt \\ \Rightarrow F(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} z^k \int_0^1 t^{\beta+k-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 \left( t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} (tz)^k \right) dt, \end{aligned}$$

si  $\gamma > \beta > 0 > -k$ . Ahora, notamos lo siguiente a partir del teorema del binomio

$$(1+x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha\Gamma(-\alpha)}{(\alpha+k)\Gamma(-\alpha-k)} \frac{x^k}{k!}$$

y utilizando la identidad, véase [Lebedev, pág 3, 1.2.2]

$$\Gamma(-\alpha) = \frac{-\pi}{\alpha\Gamma(\alpha)\text{sen}(\pi\alpha)}$$

con eso el teorema del binomio se puede expresar como

$$(1+x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha+k)} \frac{-\pi}{\alpha\Gamma(\alpha)\text{sen}(\pi\alpha)} \frac{(\alpha+k)\Gamma(\alpha+k)\text{sen}\pi(\alpha+k)}{-\pi} \frac{x^k}{k!}$$

y como  $\operatorname{sen}\pi(\alpha + k) = (-1)^k \operatorname{sen}\alpha$ , la expresión se reduce a

$$(1+x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$$

y por lo tanto

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha)_k \frac{x^k}{k!}$$

para  $|x| < 1$ . Se concluye que

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt$$

para  $|z| < 1$ , y  $\gamma > \beta > 0$ . ■

**Propiedad A.3** Si  $\alpha + \beta \geq \frac{1}{2}$

$$F\left(\alpha, \beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; z\right) = F\left(2\alpha, 2\beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-z})\right)$$

**Prueba.** Tomemos la ecuación diferencial que define a las funciones hipergeométricas

$$z(1-z)u'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)u' - \alpha\beta u = 0$$

y hagamos el cambio de variable  $z' = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-z})$  lo que implica  $1-z = (1-2z')^2$ ,  $z = 4z'(1-z')$  y  $dz = 4(1-2z')dz'$ . Con esto la ecuación diferencial se escribe como

$$z'(1-z') \frac{(1-2z')}{4} \left( \frac{1}{(1-2z')} \frac{d^2u}{dz'^2} + \frac{du}{dz'} \frac{2}{(1-2z')^2} \right) +$$

$$(\gamma - (\alpha + \beta + 1)4z'(1-z')) \frac{1}{4(1-2z')} \frac{du}{dz'} - \alpha\beta u = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} z'(1-z') \frac{d^2u}{dz'^2} + \frac{1}{4(1-2z')} \frac{du}{dz'} \left( \gamma - (\alpha + \beta + \frac{1}{2})4z'(1-z') \right) - \alpha\beta u = 0.$$

Si hacemos  $\gamma = (\alpha + \beta + \frac{1}{2})$  esta relación se reduce a:

$$\frac{1}{4} z'(1-z') \frac{d^2u}{dz'^2} + \frac{1}{4} \left( (\alpha + \beta + \frac{1}{2}) - (2\alpha + 2\beta + 1)z' \right) \frac{du}{dz'} - \alpha\beta u = 0.$$

Esta es la ecuación diferencial de  $u = F(2\alpha, 2\beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-z}))$ . Por tratarse de una ecuación singular de orden dos, sabemos que existen dos soluciones linealmente independientes, pero sólo una solución es acotada para  $z \in [0, 1]$ , más precisamente, la otra solución  $u(z) \int_a^z \frac{t^{-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{u^{\frac{1}{2}}(z)} dt$  se comporta como  $z^{-\gamma+1} \ln(z)$  para  $z$  vecino a 0 y por lo tanto no es acotada si  $\gamma \geq 1$ , es decir aquí si  $\alpha + \beta \geq \frac{1}{2}$ . Como toda solución debe ser combinación lineal de esta función, implica que

$$F(\alpha, \beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; z) = CF \left( 2\alpha, 2\beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-z}) \right).$$

Para hallar la constante  $C$  evaluamos en  $z = 0$  y utilizamos la serie, con  $c_0 = 1$  y por lo tanto  $C = 1$ . ■

El propósito de utilizar las funciones hipergeométricas es para demostrar que para las funciones de Legendre,  $P_\nu^m(0) = 0$  si y sólo si  $\nu = m + 2k - 1$ .

**Propiedad A.4** Para  $m \geq 0$ , se tiene

$$F(m - \nu, \nu + m + 1; m + 1; \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-\nu+1}{2})\Gamma(\frac{\nu+m+2}{2})}.$$

*Prueba.* De la observación anterior, tomando el límite cuando  $z \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} F(2\alpha, 2\beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}) &= F(\alpha, \beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; z \rightarrow 1^-) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\alpha} dt = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})} \end{aligned}$$

Haciendo  $2\alpha = m - \nu$ ,  $2\beta = \nu + m + 1$  y por consiguiente  $\alpha + \beta + \frac{1}{2} = m + 1$  se tiene la propiedad. ■

Por la propiedad (A.1) se tiene que

$$P_\nu^m(0) = \frac{(-1)^m \Gamma(\nu + m + 1)}{2^m \Gamma(m + 1) \Gamma(\nu - m + 1)} \frac{\Gamma(m + 1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-\nu+1}{2}) \Gamma(\frac{\nu+m+2}{2})}$$

utilizando el hecho que

$$\Gamma \left( 1 - \frac{(\nu - m + 1)}{2} \right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} (\nu - m + 1) \Gamma \left( \frac{\nu - m + 1}{2} \right)}$$

considerando que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , sustituyendo y simplificando se tiene que

$$P_\nu^m(0) = \frac{\sqrt{\pi}(-1)^m \Gamma(\nu + m + 1) \Gamma(\frac{\nu - m + 1}{2})}{2^m \Gamma(\nu - m + 1) \Gamma(\frac{\nu + m + 2}{2})} \text{sen} \frac{\pi}{2} (\nu - m + 1).$$

Tenemos entonces la siguiente propiedad, un resultado importante para el estudio del espectro del laplaciano.

**Propiedad A.5**

$$P_\nu^m(0) = 0 \Leftrightarrow \nu = m + 2k - 1.$$

Las funciones de Legendre  $P_\nu^m(\cos \theta)e^{im\phi}$  son las funciones propias de  $-\Delta$  sobre un cascarón esférico. Los valores propios serán dados por los  $\nu_j^m$  tales que  $P_{\nu_j^m}^m(z_0) = 0$  y que dependen de  $z_0 = \cos \theta_0$ . Dichas funciones formarán una base del espacio de trabajo. Por lo que las representaciones de las funciones propias serán

$$u_k^m = c_k^m P_{\nu_j^m}^m(\cos \theta) \cos m\phi$$

$$v_k^m = d_k^m P_{\nu_j^m}^m(\cos \theta) \text{sen} m\phi$$

La teoría de Sturm-Liouville puede dar varias de las propiedades de los valores propios. Un resultado que se probará es que los valores propios vistos como función de  $z_0$ , es decir  $\nu_j^m(z_0)$  son funciones analíticas y crecientes. A continuación haremos una presentación breve de la teoría de Sturm-Liouville para probar el resultado

$$\nu_j^m < \nu_j^{m+1} < \nu_{j+1}^m.$$

Los resultados de esta sección y la anterior implicarán que las  $\nu_k^m(z_0)$  son funciones crecientes como función de  $z_0$ , y que la cota mínima para cualquier valor propio del laplaciano  $-\Delta u = \mu u$  es  $\mu > 2$  para cualquier  $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

### A.3. Teoría de Sturm-Liouville

Consideremos el problema

$$((1 - z^2)u')' + \left( \nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right) u = 0.$$

Buscamos  $u(z)$  tales que  $u(1)$  sea acotado, y  $u(z_0) = 0$ . El par de soluciones son las funciones de primera especie y segunda especie de Legendre,  $P_\nu^m(z)$  y  $Q_\nu^m(z)$ . Se sabe que  $Q_\nu^m(z)$  en  $z = 0$  no está definido véase [Lebedev, pág 199, 7.12.29]. Por lo tanto las soluciones son de la forma  $P_\nu^m(z)$  para  $\nu \in \{\nu_j^m\}$  tales que  $P_{\nu_j^m}^m(z_0) = 0$ . El problema se puede reescribir en términos de la teoría como

$$(pu')' - qu + \lambda u = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$p(z) = (1 - z^2), u(z_0) = 0, q(z) = \frac{m^2}{1 - z^2}$$

$u(z)$  acotada.

El espacio de trabajo es  $H^1[z_0, 1] \cap \{u(z_0) = 0\} \subset C[z_0, 1]$  (Sobolev) y la energía asociada es  $\int_{z_0}^1 (pu'^2 + qu^2) dz$ . Si  $Lu = -(pu')' + qu$  implica que

$$(Lu, v) = \int_{z_0}^1 (Lu)v dz = \int_{z_0}^1 pu'v' + quvdz - pu'v \Big|_{z_0}^1 = \int_{z_0}^1 pu'v' + quvdz$$

(ya que  $v(z_0) = 0$  y  $p(1) = 0$ ) y por lo tanto  $L$  es autoadjunto y el principio de minimax funciona. Además, dado que  $\lambda_k < \infty$  entonces es necesario que  $u_k(1) = 0$ , (para que  $\int_{z_0}^1 qu_k^2 < \infty$ ). Se utilizará el principio Rayleigh y minimax

$$\lambda_1 = \min_{E_1} \frac{\int_{z_0}^1 (p\phi'^2 + q\phi^2) dz}{\int_{z_0}^1 \phi^2 dz}$$

$$\lambda_k = \min_{E_k} \frac{\int_{z_0}^1 (p\phi'^2 + q\phi^2) dz}{\int_{z_0}^1 \phi^2 dz}$$

donde  $\lambda_1$  es el mínimo valor propio,  $\lambda_k$  el  $k$ -ésimo,

$$E_1 = \{\phi | \phi(z_0) = 0, \phi(1) < \infty\},$$

$$E_k = \{\phi | \phi(z_0) = 0, \phi(1) < \infty, (\phi, u_j) = 0, [j = 1, 2, \dots, k-1]\},$$

donde  $u_j$  es la  $j$ -ésima función propia. Vease [Weinberger, cap 7]. Se supone  $P(z) > 0$  en  $[z_0, 1)$ ,  $p, q$  continuas. En el caso no singular se utilizarían las condiciones de Dirichlet en los extremos del intervalo. Nótese que al ser la solución de (A.2) con  $u(z_0) = 0$ , hay a lo más una solución no trivial de (A.2). Por lo tanto  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ .

**Teorema A.1 (Comparación de valores propios)** *Si en la ecuación  $(pu')' - qu + \lambda u = 0$ , incrementamos  $p$  ó  $q$  ó disminuimos el tamaño del intervalo, entonces el mínimo valor propio  $\lambda_1$  aumenta.*

*Prueba.* Sea  $\bar{u}$  solución al problema

$$(\bar{p}\bar{u}')' - \bar{q}\bar{u} + \bar{\lambda}\bar{u} = 0$$

$$\bar{u}(\alpha) = 0, \bar{u}(\beta) = 0$$

donde  $(\alpha, \beta) \in [z_0, 1]$ ,  $\bar{p} \geq p$ ,  $\bar{q} \geq q$ . Queremos saber como es  $\bar{\lambda}_1$  comparado con  $\lambda_1$ . Si en el principio de minimax tomamos la función de prueba

$$\phi(x) = \begin{cases} \bar{u}_1(x) & x \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

donde  $\bar{u}_1$  es la función propia correspondiente a  $\bar{\lambda}_1$ , entonces por el principio de minimax se tiene que

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{z_0}^1 (p\phi'^2 + q\phi^2) dz}{\int_{z_0}^1 \phi^2 dz} \leq \frac{\int_{\alpha}^{\beta} (\bar{p}\bar{u}_1'^2 + \bar{q}\bar{u}_1^2) dz}{\int_{\alpha}^{\beta} \bar{u}_1^2 dz} = \bar{\lambda}_1$$

y esto demuestra el teorema ( la segunda desigualdad es estricta si  $\bar{p} \neq p$  o si  $\bar{q} \neq q$ ). Si  $(\alpha, \beta) \neq (z_0, 1)$  entonces la primera desigualdad es estricta. Si  $\bar{p} = p, \bar{q} = q$  para  $(\alpha, \beta) \neq (z_0, 1)$  y  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$  entonces  $\phi(z)$  es un mínimo de  $\frac{\int_{z_0}^1 (pu'^2 + qu^2) dz}{\int_{z_0}^1 u^2 dz}$  para  $u \in H^1[z_0, 1]$ ,  $u(z_0) = 0$ . Por cálculo de variaciones [Ize 3, cap 4, teo 1.1]  $\phi$  es  $C^2$  en  $(z_0, 1)$  y satisface la ecuación de Euler(A.2). Pero  $\phi(z)$  no es  $C^1$  en  $\alpha$  ó  $\beta$ . Ver figura(A.1). ■

**Teorema A.2 (Separación de ceros)** *Sean  $u, v$ , soluciones al siguiente par de problemas*

$$(pu')' - qu + \lambda u = 0 \tag{A.3}$$

$$(pv')' - qv + \bar{\lambda}v = 0 \tag{A.4}$$

con  $\lambda > \bar{\lambda}$  entonces entre dos ceros de  $v$  existe al menos un cero de  $u$  y se dice que los ceros de  $u$  separan a los ceros de  $v$ , o bien que  $u$  oscila más rápido que  $v$ . En el caso singular, con  $p(z) > 0, p(1) = 0, z = 1$  cuenta como

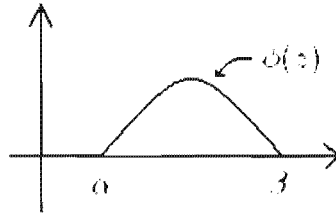


Figura A.1:  $\phi(z)$  función de prueba en el principio de minimax

cero de  $v$ , por lo tanto si en  $(z_0, 1)$ ,  $v$  tiene  $k$  ceros entonces  $u$  tiene en  $(z_0, 1)$  por lo menos  $k$  ceros.

**Prueba.** Si  $v(\alpha) = v(\beta) = 0$ , ceros consecutivos. Cambiando eventualmente  $v$  a  $-v$  se puede suponer que  $v(z) > 0$  en  $(\alpha, \beta)$ . Si  $u(z) \neq 0$  en  $[\alpha, \beta]$ , se puede suponer también  $u(z) > 0$  en  $[\alpha, \beta]$ . Como la ecuación es homogénea, se tiene  $v'(z) \neq 0$  en  $\alpha$  y  $\beta$  (si no se tendría  $v(z) = v'(z) = 0$  en  $\alpha$  ó  $\beta$  y por lo tanto  $v(z) \equiv 0$ ). Entonces  $v'(\alpha) > 0$ ,  $v'(\beta) < 0$ . Multiplicando (A.3) por  $v$  y (A.4) por  $u$  e integrando sobre  $(\alpha, \beta)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} ((pu')' - qu + \lambda u)v - ((pv')' - qv + \bar{\lambda}v)u \, dz \\ = p(u'v - uv') \Big|_{\alpha}^{\beta} + (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{\alpha}^{\beta} uv \, dz = 0, \end{aligned}$$

lo cual lleva a una contradicción. El argumento es válido si hay ceros en  $\alpha$  ó  $\beta$ .

■

**Teorema A.3** Sea  $u_1$  la función propia asociada al primer valor propio  $\lambda_1$  del problema (A.3) entonces dicha función no cambia de signo en el intervalo  $[z_0, 1]$ .

**Prueba.** Supongamos que existe un número  $\alpha \in [z_0, 1]$  tal que  $u_1(\alpha) = 0$ , entonces  $u_1$  es solución al problema (A.3) con  $u(z_0) = 0$ ,  $u(\alpha) = 0$  lo que implicaría que  $\lambda_1$  es un valor propio del problema en  $(z_0, \alpha)$ , es decir  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_k$ , para algún  $k \geq 1$ . Si  $k \geq 1$ , entonces  $\bar{\lambda}_1 \leq \lambda_1$  pero si regresamos el intervalo a su tamaño original implica que  $\bar{\lambda}_1$  debe disminuir, pero no lo puede hacer

porque  $\lambda_1$  ya era el valor propio mínimo, esto es una contradicción . Por lo tanto no existe  $\alpha$ , y por lo tanto  $u_1$  no cambia de signo. ■

**Teorema A.4** *La función  $u_k$  correspondiente al  $k$ -ésimo valor propio tiene exactamente  $k - 1$  ceros en el intervalo  $(z_0, 1)$ .*

**Prueba.** De los teoremas (A.1),(A.3) se sigue que como  $\lambda_2 > \lambda_1$  entonces  $u_2$  tiene al menos un cero en  $(z_0, 1)$ . Repitiendo el argumento y tomando en cuenta que  $\lambda_k > \lambda_{k-1}$ , entre dos ceros de  $u_{k-1}$  tenemos al menos un cero de  $u_k$  y por lo tanto  $u_k$  tiene al menos  $k - 1$  ceros en  $(z_0, 1)$ . Para ver que tiene exactamente  $k - 1$  ceros hacemos lo siguiente : Suponemos que  $u_k$  tiene como ceros a  $x_1, x_2, \dots, x_{l-1} \in (z_0, 1)$ , haciendo  $x_0 = z_0, x_l = 1$  y recordando la condición  $u(1)$  acotado y  $p(1) = 0$ . Definimos  $u^{(m)}(x)$  una función  $C^1$  por tramos

$$u^{(m)}(x) = \begin{cases} u_k(x) & x \in (x_{m-1}, x_m) \\ 0 & \text{otro} \end{cases} .$$

Sea  $\phi(x) = \sum_{m=1}^l C_m u^{(m)}(x)$  con las  $C_m$  tales que

$$\int_{z_0}^1 \phi(x) u_1(x) dx = 0, \dots, \int_{z_0}^1 \phi(x) u_{l-1}(x) dx = 0.$$

Las  $C_m$  existen porque hay  $l - 1$  ecuaciones lineales con  $l$  incógnitas y por lo tanto hay una solución no trivial. Además  $u^{(m)} \cdot u^{(n)} = 0$  para  $m \neq n$ . Con esto en mente se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^1 (p\phi'^2 + q\phi^2) dx &= \sum_{m=1}^l C_m^2 \int_{x_{m-1}}^{x_m} (pu_k'^2 + qu_k^2) dx \\ &= \sum_{m=1}^l C_m^2 \left\{ pu_k u_k' \Big|_{x_{m-1}}^{x_m} - \int_{x_{m-1}}^{x_m} u_k [(pu_k')' - qu_k] dx \right\} \\ &= \lambda_k \sum_{m=1}^l C_m^2 \int_{x_{m-1}}^{x_m} u_k^2 dx = \lambda_k \int_{z_0}^1 \phi^2(x) dx \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lambda_k = \frac{\int_{z_0}^1 (p\phi'^2 + q\phi^2) dx}{\int_{z_0}^1 \phi^2(x) dx} .$$



Además  $(\phi, u_j) = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, l-1$  y por lo tanto  $\lambda_k \geq \lambda_l \Rightarrow k \geq l$ . Con lo anterior tenemos que  $k-1 \leq l-1 \leq k-1$  y por lo tanto hay exactamente  $k-1$  ceros. ■

**Teorema A.5 (Monotonía de los valores propios)** *Si se incrementa  $p$  ó  $q$  entonces todos los valores propios  $\lambda_k$  aumentan, es decir, si*

$$(pu'_k)' - qu_k + \lambda_k u_k = 0$$

$$(\bar{p}\bar{u}'_k)' - \bar{q}\bar{u}_k + \bar{\lambda}_k \bar{u}_k = 0$$

con  $x \in (z_0, 1)$ ,  $\bar{p} > p$ ,  $\bar{q} > q$ , entonces  $\bar{\lambda}_k > \lambda_k$ .

**Prueba.** Utilizaremos un argumento por contradicción. Supongamos que  $\bar{\lambda}_k \leq \lambda_k$  y sean  $\alpha_1, \beta_1 \in (z_0, 1]$  dos ceros consecutivos de  $u_k$ ,  $p(1) = 0$ . El argumento de la prueba del teorema (A.2) implica que  $\bar{u}_k$  tiene por lo menos un cero en  $[\alpha_1, \beta_1]$ . Nótese que se puede tomar  $\beta_1 = 1$ . Entonces  $\lambda_k$  es el mínimo valor propio para el problema con  $u(\alpha_1) = u(\beta_1) = 0$ . Si  $\bar{u}_k$  tuviera dos ceros consecutivos en  $(\alpha_1, \beta_1)$  entonces  $\bar{\lambda}_k > \lambda_k$  lo que contradice la suposición inicial y por lo tanto  $u_k$  tiene un sólo cero en  $(\alpha_1, \beta_1)$ . Por lo tanto entre cada dos ceros de  $u_k$  hay uno y uno sólo de  $\bar{u}_k$ . Esto implica que  $\bar{u}_k$  tiene  $k$  ceros en  $[z_0, 1)$ . Pero por el teorema (A.4)  $\bar{u}_k$  tiene exactamente  $k-1$  ceros, esto es una contradicción y por lo tanto  $\bar{\lambda}_k > \lambda_k$ . ■

**Teorema A.6** *Sean  $\{\nu_k^m\}$  las raíces a la ecuación  $P_{\nu_k^m}^m(z_0) = 0$ ,  $\nu_k^m$  el  $k$ -ésimo cero para  $m$  fijo, entonces*

$$\nu_k^m < \nu_k^{m+1} < \nu_{k+1}^m$$

**Prueba.**

Para la primera desigualdad : Se tiene que  $P_\nu^m(z)$  es solución a la ecuación diferencial

$$((1-z^2)y')' + \left( \nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right) y = 0$$

con las condiciones  $P_\nu^m(z_0) = 0$  y es la única solución acotada en  $z = 1$ . Visto como un problema de Sturm-Liouville, con  $q = \frac{m^2}{1-z^2}$  que es creciente en  $m$ , y por lo tanto  $\bar{q} = \frac{(m+1)^2}{1-z^2} > q$ , del teorema de monotonía todos los  $\lambda_k^m = \nu_k^m(\nu_k^m + 1)$  aumentan si aumentamos  $m$ .

Para la segunda desigualdad usaremos el teorema de separación para valores propios. Sean  $u, v$  tales que

$$(pu')' - qu + \lambda u = 0$$

$$(pv')' - \bar{q}v + \bar{\lambda}v = 0$$

con  $u(z_0) = v(z_0) = 0$ ,  $p(1) = 0$ ,  $u, v$  acotadas,  $p(z) = (1 - z^2)$ ,  $q = \frac{m^2}{(1-z^2)}$ ,  $\bar{q} = \frac{(m+1)^2}{(1-z^2)}$ . En nuestro caso sabemos de la fórmula de Rodrigues que se demuestra más adelante (A.9) que

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{(1-z^2)^{m/2}} P_\nu^m(z) \right) = \frac{-1}{(1-z^2)^{\frac{m+1}{2}}} P_\nu^{m+1}(z) = (-1)^m \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} P_\nu(z).$$

Por el teorema de oscilación  $u_{k+1}$  tiene  $k$  ceros y  $v_k$  tiene  $k - 1$  ceros en el intervalo  $x \in (z_0, 1)$ . Por la fórmula de Rodrigues entre dos ceros de  $P_\nu^m$  hay uno de  $P_\nu^{m+1}$ , porque entre dos ceros de  $\frac{1}{(1-z^2)^{m/2}} P_\nu^m(z)$  existe un punto donde la derivada es cero, por lo tanto, dado que  $P_{\nu_{k+1}^m}^m(z_0) = 0$ , se tiene que  $P_{\nu_{k+1}^m}^m(z) = u_{k+1}(z)$  tiene  $k + 1$  ceros en  $[z_0, 1)$  y  $P_{\nu_{k+1}^{m+1}}^{m+1}(z_0)$  tendrá por lo menos  $k$  ceros en  $(z_0, 1)$  ( notamos que no puede ser 0 en  $z_0$  ya que sino se tendría que  $u_{k+1}(z_0) = u'_{k+1}(z_0) = 0$ , lo cual no es cierto). Si  $\nu_{k+1}^m \leq \nu_k^{m+1}$  entonces por el teorema (A.2), entre dos ceros de  $P_{\nu_{k+1}^{m+1}}^{m+1}$  hay un cero de  $P_{\nu_k^{m+1}}^{m+1}$  y uno más entre el último cero de  $P_{\nu_{k+1}^{m+1}}^{m+1}$ , dando un total de por lo menos  $k - 1 + 1$ , lo cual es una contradicción .

Con esto se prueba que

$$\nu_k^m < \nu_k^{m+1} < \nu_{k+1}^m.$$

■

**Teorema A.7** Sean  $\{\nu_k^m\}_{k=1}^\infty$  las raíces a la ecuación  $P_{\nu_k^m}^m(z_0) = 0$ ,  $\nu_k^m$  el  $k$ -ésimo cero para  $m$  fijo, entonces  $\nu_k^m(z_0)$  vistas como funciones de  $z_0$  son crecientes y además  $\nu_k^m$  es un cero simple de la ecuación  $P_{\nu_k^m}^m(z_0) = 0$  para toda  $z_0 \in (0, 1)$ .

**Prueba.** Consideremos el problema a partir de su ecuación diferencial

$$((1 - z^2)u')' + \left( \alpha(\alpha + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right) u = 0$$

$$((1 - z^2)v')' + \left( \beta(\beta + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right) v = 0$$

con  $u(z) = P_\alpha^m(z)$  acotada,  $u(z_0) = 0$ , es decir  $\alpha$  es solución a la ecuación  $P_\alpha^m(z_0) = 0$ .  $v(z)$  acotada y por lo tanto  $v(z) = P_\beta^m(z)$ , tal que  $v(z_0 + dz) = 0$ , es decir  $\beta$  es una raíz de la ecuación  $P_\beta^m(z_0 + dz) = 0$ . Multiplicando la primera ecuación por  $v$  y la segunda por  $u$  y restando implica que

$$v(pu')' - u(pv')' + (\alpha(\alpha + 1) - \beta(\beta + 1)) uv = 0$$

integrando de  $z_0$  a 1 y tomando en cuenta que  $p(1) = 0$

$$(1 - z^2)(u'v - uv') \Big|_{z_0}^1 + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 1) \int_{z_0}^1 uv dz = 0.$$

Por lo tanto

$$-(1 - z_0^2)u'(z_0)v(z_0) + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 1) \int_{z_0}^1 uv dz = 0,$$

es decir

$$-(1 - z_0^2) \frac{\partial}{\partial z} P_\alpha^m(z_0) (P_\beta^m(z_0) - P_\alpha^m(z_0)) + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 1) \int_{z_0}^1 P_\beta^m(z) P_\alpha^m(z) dz = 0$$

porque  $P_\alpha^m(z_0) = 0$ . Dividiendo por  $\beta - \alpha$  y tomando el límite cuando  $\beta \rightarrow \alpha^+$

$$-(1 - z_0^2) \frac{\partial}{\partial z} P_\alpha^m(z_0) \frac{(P_\beta^m(z_0) - P_\alpha^m(z_0))}{(\beta - \alpha)} = (\alpha + \beta + 1) \int_{z_0}^1 P_\beta^m(z) P_\alpha^m(z) dz,$$

por lo tanto

$$-(1 - z_0^2) \frac{\partial}{\partial z} P_\alpha^m(z_0) \frac{\partial}{\partial \alpha} P_\alpha^m(z_0) = (2\alpha + 1) \int_{z_0}^1 P_\alpha^m(z)^2 dz \quad (\text{A.5})$$

(por la propiedad A.1,  $P_\alpha^m$  es analítica en  $\alpha$ ). Como  $u(z) \neq 0$  con  $u$  solución de una ecuación diferencial de segundo orden,  $u(z_0) = 0$ , implica que  $u'(z_0) \neq 0$  porque de otra forma  $u \equiv 0$ . Por lo tanto  $\frac{\partial}{\partial z} P_\alpha^m(z_0) \neq 0$  y por (A.5)  $\frac{\partial}{\partial \alpha} P_\alpha^m(z_0) \neq 0$ , y si  $\alpha$  es tal que  $P_\alpha^m(z_0) = 0$  entonces  $\alpha$  es un cero simple de dicha ecuación. Por otro lado del teorema de la función implícita para

$F(\alpha, z) = P_\alpha^m(z)$  implica si  $F(\alpha, z_0) = 0$  y  $F_\alpha(\alpha, z_0) \neq 0$  entonces existe una  $\alpha = \alpha(z)$  tal que

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{\frac{\partial}{\partial z} P_\alpha^m(z)}{\frac{\partial}{\partial \alpha} P_\alpha^m(z)}$$

$z$  en una vecindad de  $z_0$ . Sustituyendo en (A.5)

$$\frac{d\alpha}{dz}(z_0) = \frac{(2\alpha + 1) \int_{z_0}^1 P_\alpha^m(z)^2 dz}{(1 - z_0^2) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} P_\alpha^m(z_0)\right)^2} > 0.$$

Por lo tanto si  $\alpha$  es solución de  $P_\alpha^m(z_0) = 0$  se tiene que  $\alpha(z_0)$  es creciente en una vecindad de  $z_0$  como función de  $z$  y por lo tanto  $\nu_j^m(z)$  crece para toda  $j \in N$  en una vecindad de  $z_0$ . ■

Ahora probaremos que para toda  $k$  existe una única función  $\nu(z) = \nu_k^m(z)$  analítica que satisface  $P_\nu^m(z) = 0$  para  $z \in (0, 1)$ . Sea  $\nu_j(z) = \nu_k^m(z)$  para  $z \in \{\text{vecindad de } z_j\}$  con  $z_j \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ . Ahora, para toda  $z_i$  existe una  $g_i(z)$  y una vecindad  $U_i = \{z : |z - z_i| < \delta_i\}$  tal que  $\{U_i\}$  es una cubierta de  $[\epsilon, 1 - \epsilon]$  y  $g_i(z_i) = \nu_k^m(z_i)$ ,  $g_i$  es única y analítica para  $z_i \in U_i$  y  $P_{g_i(z)}^m(z) = 0$  para toda  $z \in U_i$ . Como  $g_i$  es única en  $U_i$  entonces  $g_i(z) = g_j(z)$  si  $z \in U_i \cap U_j$ . Si definimos

$$\nu_j(z) = \{\nu_k^m(z) = g_i(z) \text{ si } z \in U_i\}_{i=1}^N$$

es solución de  $P_\nu^m(z) = 0$  para  $z \in (0, 1)$ . Además como  $\nu_k^m(z)$  crece junto con la propiedad (A.5)  $\nu_k^m(0) = m + 2k - 1$  tenemos que  $\nu_k^m(z) > m + 2k - 1$ . En particular para  $m = 0, j = 1, \nu_j^m(z_0) > 1$  y por lo tanto

$$\lambda = \nu(\nu + 1) > 2. \tag{A.6}$$

## A.4. Los primeros once valores propios

A continuación se enuncian otras propiedades de las funciones de Legendre con el fin de encontrar los primeros once valores propios  $\nu_1^0 < \nu_1^1 < \nu_1^2 < \nu_2^0 < \nu_1^3 < \nu_2^1 < \nu_1^4 < \nu_2^2 < \nu_3^0 < \nu_1^5 < \nu_2^3$ . Los resultados y propiedades que aquí se demuestran se encuentran en el artículo [Baginski 2].

### Propiedad A.6

$$P_\nu^{m+2}(z) + 2(m+1)z(1-z^2)^{-1/2}P_\nu^{m+1}(z) + (\nu-m)(\nu+m+1)P_\nu^m(z) = 0$$

**Prueba.** Sea  $u$  función de Legendre que satisface la ecuación

$$\left((1-z^2)u'\right)' + \left(\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right)u = 0.$$

Si hacemos el cambio de variable  $u = (1-z^2)^{m/2}v$  y llamando  $f = (1-z^2)^{m/2}$ , entonces  $f' = -mz(1-z^2)^{m/2-1}$ ,  $f'' = -m(1-z^2)^{m/2-2}(1-(m-1)z^2)$  y teniendo en cuenta que  $u = fv$ ,  $u' = f'v + fv'$ ,  $u'' = f''u + 2f'v' + fv''$  se tendría que

$$u'' = v''(1-z^2)^{m/2} - 2mzv'(1-z^2)^{m/2-1} - m(1-z^2)^{m/2-2}(1-(m-1)z^2)v.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial para  $u$  y cancelando los factores

$(1-z^2)^{m/2}$  se tiene que

$$(1-z^2)v'' - 2mzv' - m\frac{(1-(m-1)z^2)}{(1-z^2)}v - 2zv' + \frac{2mz^2}{(1-z^2)}v + \left(\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right)v = 0$$

$$(1-z^2)v'' - 2(m+1)zv' + \frac{m}{1-z^2}(-1+(m-1)z^2+2z^2-m)v + \nu(\nu+1)v = 0$$

simplificando un poco

$$(1-z^2)v'' - 2(m+1)zv' + (\nu(\nu+1) - m(m+1))v = 0$$

es decir

$$(1-z^2)v'' - 2(m+1)zv' + (\nu-m)(\nu+m+1)v = 0. \quad (\text{A.7})$$

Sea  $w = P_\nu^0(z)$ ,  $w$  satisface la ecuación

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + (\nu(\nu+1))w = 0. \quad (\text{A.8})$$

Si derivamos  $m$  veces la ecuación(A.8), notando el hecho que

$$\frac{d^m}{dz^m}(fg) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(m-k)}g^{(k)} = f^{(m)}g + mf^{(m-1)}g' + \frac{m(m-1)}{2}f^{(m-2)}g'' + \dots$$

En el caso que  $g = 1 - z^2$  se trunca en  $k = 2$  y  $g = z$  en  $k = 1$ . Por lo tanto

$$(1-z^2)w^{(m+2)} - 2mzw^{(m+1)} - m(m-1)w^m - 2zw^{(m+1)} - 2mw^{(m)} + (\nu(\nu+1))w^{(m)} = 0$$

o sea

$$(1 - z^2)w^{(m+2)} - 2(m+1)zw^{(m+1)} + (\nu(\nu+1) - m(m+1))w^{(m)} = 0$$

y por lo tanto  $w^{(m)}$  es solución de (A.7). A la solución de dicha ecuación se le pide que sea acotada. Por ser una ecuación singular sólo queda una función linealmente independiente como solución. Otra solución será una constante por la función. La constante se conoce al decir el valor que toma la función en algún punto o bien que esta esté normalizada, es decir  $(\nu, \nu) = 1$ , para un producto escalar definido sobre  $C^2[z_0, 1]$  por ejemplo. Las funciones Hipergeométricas no se necesitan normalizar porque al encontrar la solución por el método de Frobenius se toma  $c_0 = 1$  en su serie de potencias. Así que en esta tesis se dirá que toda solución a una ecuación tipo Legendre su solución será única (módulo una constante) si pedimos que sea acotada. Con esto en mente se tiene que

$$v = \frac{P_\nu^m(z)}{(1 - z^2)^{m/2}} = C \frac{d^m}{dz^m} P_\nu(z)$$

Por convención, se tomará la constante  $C = (-1)^m$ , definiendo completamente de esa forma a  $P_\nu^m(z)$ .

$$P_\nu^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} P_\nu^{(m)}(x) \quad (\text{A.9})$$

para  $x$  real. Si hacemos  $v = \frac{d^m}{dz^m} P_\nu$  y multiplicamos por  $(-1)^m (1 - x^2)^{m/2}$  la ecuación (A.7) se tendría que

$$\begin{aligned} (-1)^m (1 - x^2)^{m/2+1} P_\nu^{(m+2)} + 2(m+1)x(-1)^{m+1} (1 - x^2)^{m/2} P_\nu^{(m+1)} + \\ (\nu - m)(\nu + m + 1)(-1)^m (1 - x^2)^{m/2} P_\nu^{(m)} = 0. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Rodrigues

$$P_\nu^{m+2}(x) + 2(m+1) \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} P_\nu^{m+1}(x) + (\nu - m)(\nu + m + 1) P_\nu^m(x) = 0.$$

■

#### Propiedad A.7

$$P_{\nu-1}^m(z) - P_{\nu+1}^m(z) = (2\nu+1)(1-z^2)^{1/2} P_\nu^{m-1}(z)$$

con  $z = \cos \theta$ .

**Prueba.** Tomemos la representación integral véase [Lebedev]

$$P_\nu(\cos \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\beta \frac{\cos(\nu + \frac{1}{2})\theta}{(2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2}} d\theta$$

entonces

$$\begin{aligned} P_{\nu+1}(\cos \beta) - P_{\nu-1}(\cos \beta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\beta \frac{\cos(\nu + \frac{3}{2})\theta - \cos(\nu - \frac{1}{2})\theta}{(2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2}} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\beta \frac{-2\operatorname{sen}(\nu + \frac{1}{2})\theta \operatorname{sen}\theta}{(2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2}} d\theta. \end{aligned}$$

Integrando por partes, la diferencia es

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \operatorname{sen}(\nu + \frac{1}{2})\theta (2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2} \Big|_0^\beta - \frac{2}{\pi} (2\nu + 1) \int_0^\beta \cos(\nu + \frac{1}{2})\theta (2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2} d\theta \\ = -\frac{2}{\pi} (2\nu + 1) \int_0^\beta \cos(\nu + \frac{1}{2})\theta (2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2} d\theta \end{aligned}$$

Derivando respecto al parámetro  $\beta$  utilizando la regla de Leibniz que enunciamos a continuación

$$F(\beta) = \int_0^\beta f(\beta, \theta) d\theta \Rightarrow \frac{dF}{d\beta} = \int_0^\beta \frac{\partial}{\partial \beta} f(\beta, \theta) d\theta + f(\beta, \beta)$$

en nuestro caso  $f(\beta, \beta) = 0$  y como  $x = \cos \beta$ ,  $\frac{dx}{d\beta} = -\operatorname{sen}\beta$ , entonces

$$\frac{dx}{d\beta} (P'_{\nu+1}(\cos \beta) - P'_{\nu-1}(\cos \beta)) = -\frac{2}{\pi} (2\nu + 1) \int_0^\beta \frac{\cos(\nu + \frac{1}{2})\theta \operatorname{sen}\beta}{(2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2}} d\theta$$

y por lo tanto

$$P'_{\nu+1}(z) - P'_{\nu-1}(z) = (2\nu + 1)P_\nu(z). \quad (\text{A.10})$$

Derivando  $m$  veces, multiplicando por  $(-1)^{m+1}(1-x^2)^{(m+1)/2}$  y utilizando la fórmula de Rodrigues (ecuación (A.9)) implica que

$$P_{\nu+1}^{m+1}(z) - P_{\nu-1}^{m+1}(z) = -(2\nu + 1)(1-z^2)^{1/2} P_\nu^m(z)$$

■

A continuación enunciamos la última propiedad que se demostrará en esta sección

**Propiedad A.8**

$$(\nu - m)(\nu - m + 1)P_{\nu+1}^m(z) - (\nu + m)(\nu + m + 1)P_{\nu-1}^m(z) = (2\nu + 1)(1 - z^2)^{1/2}P_{\nu}^{m+1}(z)$$

con  $z = \cos \beta$ .

**Prueba.** Primero se requiere probar que

$$(\nu + 1)P_{\nu+1}(z) + \nu P_{\nu-1}(z) = (2\nu + 1)zP_{\nu}(z)$$

$$\begin{aligned} P_{\nu+1}(\cos \beta) + P_{\nu-1}(\cos \beta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{\cos(\nu + \frac{3}{2})\theta + \cos(\nu - \frac{1}{2})\theta}{(2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2}} d\theta \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{\cos(\nu + \frac{1}{2})\theta \cos \theta}{(2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2}} d\theta \end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{\cos(\nu + \frac{1}{2})\theta \cos \beta}{(2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2}} d\theta + \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta} \cos(\nu + \frac{1}{2})\theta (2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2} d\theta.$$

Integrando por partes el segundo término

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{\cos(\nu + \frac{1}{2})\theta \cos \beta}{(2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2}} d\theta + \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{(\nu + \frac{1}{2})} (2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2} \Big|_0^{\beta} + \\ \frac{2}{\pi(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\beta} \frac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{(2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2}} d\theta. \end{aligned}$$

El último término se expresa como

$$\frac{-1}{\pi(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\beta} \frac{\cos(\nu + \frac{3}{2})\theta - \cos(\nu - \frac{1}{2})\theta}{(2\cos\theta - 2\cos\beta)^{1/2}} d\theta$$

y por lo tanto

$$P_{\nu+1} + P_{\nu-1} = 2\cos\beta P_{\nu} - \frac{1}{2\nu + 1} (P_{\nu+1} - P_{\nu-1})$$

entonces

$$(\nu + 1)P_{\nu+1}(z) + \nu P_{\nu-1}(z) = (2\nu + 1)zP_{\nu}(z). \tag{A.11}$$



Derivando esta última ecuación con respecto a  $z$

$$(\nu + 1)P'_{\nu+1}(z) + \nu P'_{\nu-1}(z) = (2\nu + 1)zP'_\nu(z) + (2\nu + 1)P_\nu(z)$$

Utilizando (A.10) para eliminar  $P'_{\nu-1}$ :  $P'_{\nu-1} = -(2\nu + 1)P_\nu + P'_{\nu+1}$ , y sustituyendo en la ecuación anterior se llega a

$$(2\nu + 1)P'_{\nu+1} - z(2\nu + 1)P'_\nu = (2\nu + 1)(1 + \nu)P_\nu.$$

Con esto, tenemos el siguiente par de relaciones

$$P'_{\nu+1}(z) - P'_{\nu-1}(z) = (2\nu + 1)P_\nu(z) \quad (\text{A.12})$$

$$P'_{\nu+1} - zP'_\nu = (1 + \nu)P_\nu \quad (\text{A.13})$$

Derivando  $m$  veces (A.12) y usando la fórmula de Rodrigues (A.9) se tiene que

$$\frac{d}{dz} (kP_{\nu+1}^m) - \frac{d}{dz} (kP_{\nu-1}^m) = (2\nu + 1)kP_\nu^m(z)$$

donde  $k = \frac{(-1)^m}{(1-z^2)^{m/2}}$ ,  $k' = \frac{mz}{(1-z^2)}k$ . Desarrollando el producto de las derivadas y cancelando el factor común  $\frac{(-1)^m}{(1-z^2)^{m/2}}$

$$\frac{d}{dz} P_{\nu+1}^m - \frac{d}{dz} P_{\nu-1}^m + \frac{mz}{1-z^2} (P_{\nu+1}^m - P_{\nu-1}^m) = (2\nu + 1)P_\nu^m \quad (\text{A.14})$$

Ahora derivando  $m$  veces (A.13) y usando la fórmula de Rodrigues (A.9) se tiene que

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{(-1)^m}{(1-z^2)^{m/2}} P_{\nu+1}^m \right) - (zP_\nu^{(m+1)} + mP_\nu^{(m)}) = (\nu + 1)kP_\nu^m(z)$$

$$\frac{d}{dz} (kP_{\nu+1}^m) - z \frac{d}{dz} (kP_\nu^m) = (\nu + m + 1)kP_\nu^m(z)$$

$$k \left( \frac{d}{dz} P_{\nu+1}^m - z \frac{d}{dz} P_\nu^m \right) + k'(P_{\nu+1}^m - zP_\nu^m) = (\nu + m + 1)kP_\nu^m(z)$$

$$\frac{d}{dz} P_{\nu+1}^m - z \frac{d}{dz} P_\nu^m + \frac{mz}{1-z^2} (P_{\nu+1}^m - zP_\nu^m) = (\nu + m + 1)P_\nu^m(z) \quad (\text{A.15})$$

Restando a la ecuación (A.14) la ecuación (A.15)

$$z \frac{d}{dz} P_\nu^m - \frac{d}{dz} P_{\nu-1}^m + \frac{mz}{1-z^2} (zP_\nu^m - P_{\nu-1}^m) = (\nu - m)P_\nu^m \quad (\text{A.16})$$

Si hacemos  $\nu \rightarrow \nu - 1$  en la ecuación (A.15)

$$\frac{d}{dz} P_\nu^m - z \frac{d}{dz} P_{\nu-1}^m + \frac{mz}{1-z^2} (P_\nu^m - zP_{\nu-1}^m) = (\nu + m)P_{\nu-1}^m \quad (\text{A.17})$$

Multiplicando por  $z$  la ecuación (A.16) y restando la ecuación (A.17)

$$(z^2 - 1) \frac{d}{dz} P_\nu^m + \frac{mz}{1-z^2} (z^2 - 1) P_\nu^m = (\nu - m)zP_\nu^m - (\nu + m)P_{\nu-1}^m$$

y por lo tanto

$$(z^2 - 1) \frac{d}{dz} P_\nu^m = \nu z P_\nu^m - (\nu + m) P_{\nu-1}^m. \quad (\text{A.18})$$

Como  $P_\nu^m = (-1)^m (1 - z^2)^{m/2} P_\nu^{(m)}$  y si derivamos con respecto a  $z$  se tiene que

$$\frac{d}{dz} P_\nu^m = (-1)^m (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} P_\nu + (-1)^{m+1} m z (1 - z^2)^{\frac{m-2}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_\nu$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} P_\nu^m &= \frac{-1}{(1 - z^2)^{1/2}} P_\nu^{m+1} - \frac{mz}{(1 - z^2)} P_\nu^m \\ \frac{d}{dz} P_\nu^m &= \frac{-1}{(1 - z^2)} \left( (1 - z^2)^{1/2} P_\nu^{m+1} + mz P_\nu^m \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (A.18) se obtiene

$$(1 - z^2)^{1/2} P_\nu^{m+1} = (\nu - m)zP_\nu^m - (\nu + m)P_{\nu-1}^m. \quad (\text{A.19})$$

Ahora expresamos  $P_\nu^m$  en términos de  $P_{\nu+1}^m$  y  $P_{\nu-1}^m$  como se hace a continuación: si derivamos  $m$  veces la ecuación (A.11) se tiene que

$$(\nu + 1)P_{\nu+1}^{(m)} + \nu P_{\nu-1}^{(m)} = (2\nu + 1)zP_\nu^{(m)} + m(2\nu + 1)P_\nu^{(m-1)}$$

Usando la fórmula de Rodrigues, es decir  $P_\nu^{(m)} = \frac{(-1)^m}{(1-z^2)^{m/2}} P_\nu^m$ , se tendría que la expresión anterior se escribe como

$$(\nu + 1)P_{\nu+1}^m + \nu P_{\nu-1}^m = (2\nu + 1)zP_\nu^m - m(2\nu + 1)(1 - z^2)^{1/2}P_\nu^{m-1} \quad (\text{A.20})$$

usando la propiedad (A.7),  $P_{\nu-1}^m - P_{\nu+1}^m = (2\nu + 1)(1 - z^2)^{1/2}P_\nu^{m-1}$ , se tiene que la ecuación (A.20) se escribe como

$$(\nu + 1)P_{\nu+1}^m + \nu P_{\nu-1}^m = (2\nu + 1)zP_\nu^m - m(P_{\nu-1}^m - P_{\nu+1}^m)$$

$$(\nu - m + 1)P_{\nu+1}^m + (\nu + m)P_{\nu-1}^m = (2\nu + 1)zP_\nu^m$$

y sustituyendo en (A.19)

$$(1 - z^2)^{1/2}P_\nu^{m+1} = \frac{(\nu - m)}{(2\nu + 1)}((\nu - m + 1)P_{\nu+1}^m + (\nu + m)P_{\nu-1}^m) - (\nu + m)P_{\nu-1}^m$$

y por lo tanto

$$(2\nu + 1)(1 - z^2)^{1/2}P_\nu^{m+1} = (\nu - m)(\nu - m + 1)P_{\nu+1}^m - (\nu + m)(1 + \nu + m)P_{\nu-1}^m$$

como se quería demostrar. ■

En la siguiente sección se obtienen desigualdades en las que se encuentran los ceros de los polinomios de Legendre  $P_n^m(z)$  para  $n$  entero. Como se demuestra más adelante para  $n > m$ ,  $P_n^m(z)$  tiene  $n - m$  ceros los cuales denotaremos como  $z_{n,k}^m$  son tales que  $P_n^m(z_{n,k}^m) = 0$  para  $k = 1, 2, \dots, n - m$ . Por convención  $z_{n,k}^m < z_{n,k+1}^m$ . De esta manera podemos saber los valores propios cuando  $\cos(\theta_0) = z_0 = z_{n,k}^m$ . Recordando  $\nu_k^m(z_0)$  son los valores propios tales que  $P_{\nu_k^m}^m(z_0) = 0$  se tiene que  $\nu_k^m(z_{n,k}^m) = n$ .

**Observación A.1** Las funciones  $P_n^m(z)$  tienen  $n - m$  ceros en el intervalo  $z \in (-1, 1)$ , donde  $n, m$  son enteros positivos.

**Prueba.** Esto es una consecuencia de las propiedades de los polinomios ortogonales. Para los polinomios de Legendre se tiene que satisfacen la ecuación diferencial

$$((1 - z^2)P_n^m(z))' + \left( n(n + 1) + \frac{m^2}{1 - z^2} \right) P_n^m(z) = 0$$

$$((1 - z^2)P_{n'}^m(z))' + \left( n'(n' + 1) + \frac{m^2}{1 - z^2} \right) P_{n'}^m(z) = 0$$

siendo las soluciones acotadas en el intervalo  $(-1, 1)$ . Haciendo el procedimiento usual de la teoría de Sturm-Liouville se obtiene

$$((1-z^2)(P_n^{(m)}(z)P_{n'}^{(m)}(z) - P_n^{(m)}(z)P_{n'}^{(m)}(z))' + (n(n+1) - n'(n'+1))P_n^{(m)}(z)P_{n'}^{(m)}(z) = 0$$

integrando de  $[-1, 1]$  se tiene que

$$(n(n+1) - n'(n'+1)) \int_{-1}^1 P_n^{(m)}(z)P_{n'}^{(m)}(z)dz = 0.$$

Utilizando la fórmula de Rodrigues (A.9)

$$\int_{-1}^1 (1-z^2)^m P_n^{(m)}(z)P_{n'}^{(m)}(z)dz = 0$$

por lo tanto  $P_n^{(m)}$  para  $m$  fijo son ortogonales con la función de peso  $(1-z^2)^m$ . Como son polinomios de grado  $n-m$  (de la fórmula A.1 se tiene que  $P_n^0$  es un polinomio de grado  $n$  ya que  $(-n)_k = 0$  para  $k > n$ ) satisfacen

$$\int_{-1}^1 (1-z^2)^m z^k P_n^{(m)}(z)dz = 0$$

para  $k < n-m$ : esto debido al hecho que  $P_n^{(m)}$  son linealmente independientes y  $z^k$  se puede expresar como combinación lineal de los  $P_n^{(m)}$ . En particular  $\int_{-1}^1 (1-z^2)^m P_n^{(m)}(z)dz = 0$  en el intervalo  $(-1, 1)$  implica que  $P_n^{(m)}(z)$  cambia de signo al menos una vez en  $(-1, 1)$ . Sean  $z_1, z_2, \dots, z_p$  los puntos donde  $P_n^{(m)}$  cambia de signo, donde  $1 \leq p \leq n-m$ . Consideremos el polinomio

$$Q(x) = \prod_{i=1}^p (z - z_i).$$

El polinomio  $P_n^{(m)}(z)Q(z)$  no cambia de signo en  $(-1, 1)$ , y por lo tanto

$$\int_{-1}^1 (1-z^2)^m Q(z)P_n^{(m)}(z)dz \neq 0$$

pero esto es imposible si  $p < n-m$  y por lo tanto  $p = n-m$ . Esto implica que  $P_n^{(m)}(z)$  tiene  $n-m$  ceros en el intervalo  $(-1, 1)$  ■

Requerimos de la siguiente versión del teorema de oscilación propio de la teoría de Sturm-Liouville

**Lema A.1** sean  $f, g$  dos funciones tales que

$$(pf')' + \alpha(x)f = 0$$

$$(pg')' + \beta(x)g = 0$$

con  $p(x) \geq 0$  y  $\alpha(x) > \beta(x)$  para toda  $x \in [a, b]$  entonces  $f$  oscila más rápido, es decir entre dos ceros de  $g$  hay al menos un cero de  $f$ .

**Prueba.** Como en Sturm-Liouville  $(pf'g - pfg')' + fg(\alpha - \beta) = 0$  y  $g(a) = g(b) = 0$ . Supongamos que  $f(x)$  no tiene ceros en  $(a, b)$ , esto implica que el producto  $fg$  no cambia de signo y es positivo por ejemplo,  $f > 0, g > 0$ . Integrando de  $(a, b)$

$$(pf'g - pfg') \Big|_a^b + \int_a^b fg(\alpha - \beta)dx = 0$$

Se sabe que  $g'(a), g'(b) \neq 0$  para que  $g(x) \neq 0$  debido a la unicidad de la solución, esto implica  $g'(a) > 0, g'(b) < 0$ , por lo tanto

$$p(b)f(b)|g'(b)| + p(a)f(a)|g'(a)| = - \int_a^b fg(\alpha - \beta)dx$$

El lado izquierdo es una cantidad positiva mientras el lado derecho una negativa, esto es una contradicción y por lo tanto  $f$  tiene un cero en  $(a, b)$ .

■

**Lema A.2** La función  $g(\theta) = (\text{sen}\theta)^{1/2}P_l(\cos\theta)$  tiene los mismos ceros que  $P_l(\cos\theta)$  para  $\theta \in (-\pi, \pi)$  y  $g(\theta)$  satisface la ecuación

$$g''(\theta) + \left( (l + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4\text{sen}^2\theta} \right) g(\theta) = 0$$

**Prueba.** la ecuación diferencial para  $P_l(z)$  es  $((1 - z^2)P_l')' + l(l + 1)P_l = 0$ , si hacemos  $z = \cos\theta, dz = -\text{sen}\theta d\theta$ , con lo que la ecuación diferencial se escribirá como

$$\frac{1}{\text{sen}\theta} (\text{sen}\theta \frac{d}{d\theta} P_l)' + l(l + 1)P_l = 0$$

y por lo tanto

$$P_l'' + \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} P_l' + l(l + 1)P_l = 0 \tag{A.21}$$

las derivadas calculadas respecto a  $\theta$ . Si hacemos el cambio de variable  $P_l(\cos \theta) = \frac{g(\theta)}{(\operatorname{sen}\theta)^{1/2}}$  implica que

$$\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}\theta} P_l' = \frac{\cos \theta}{(\operatorname{sen}\theta)^{3/2}} \left( g' - \frac{\cos \theta}{2\operatorname{sen}\theta} g \right)$$

$$P_l'' = \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta)^{1/2}} \left( g'' - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}\theta} g' + \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\theta} (\cos^2 \theta + 2) g \right).$$

Sustituyendo en (A.21) y cancelando el término  $\frac{1}{(\operatorname{sen}\theta)^{1/2}}$

$$g'' + g \left( \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\theta} (2 - \cos^2 \theta) + l(l+1) \right) = 0$$

$$g'' + g \left( \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\theta} \right) = 0$$

■

**Teorema A.8** Una estimación de las raíces de la función de Legendre  $P_\nu(\cos \theta) = 0$  para  $\nu$  fijo está dada por la desigualdad de Bruns en el intervalo  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{(k - \frac{1}{2})\pi}{l + \frac{1}{2}} < \theta_{l,k} < \frac{k\pi}{l + \frac{1}{2}}$$

**Prueba.**

Usando el teorema de oscilación con las funciones

$$g''(\theta) + \left( \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\theta} \right) g(\theta) = 0$$

$$f''(\theta) + \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 f(\theta) = 0$$

donde la segunda ecuación tiene por solución  $f = \operatorname{sen}(l + \frac{1}{2})\theta$ , entonces entre dos ceros de  $f(\theta)$  hay uno de  $g(\theta)$ , donde  $g(\theta) = (\operatorname{sen}\theta)^{1/2} P_l(\cos \theta)$  y si  $\theta \in (0, \pi)$ . Por lo tanto el teorema de oscilación implica que

$$\frac{(k-1)\pi}{l + \frac{1}{2}} < \theta_{l,k} < \frac{k\pi}{l + \frac{1}{2}}$$

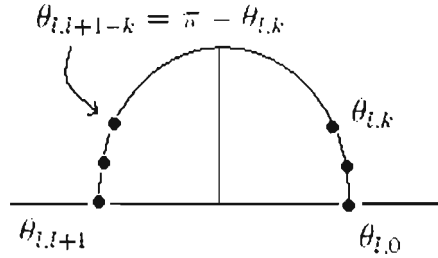


Figura A.2: Simetría de las raíces

donde  $\cos \theta_{l,k} = z_{l,k}$ . Tenemos la siguiente observación: como  $P_l(-x_0) = (-1)^l P_l(x_0) = 0$  si  $x_0$  es raíz entonces  $-x_0$  también lo es y por lo tanto tenemos simetría respecto a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Como se observa en la figura (A.2) se tiene que  $\theta_{l,k} = \pi - \theta_{l,l+1-k}$  y por lo tanto

$$\theta_{l,k} = \pi - \theta_{l,l+1-k} > \pi - \frac{(l+1-k)}{l+\frac{1}{2}}\pi > \frac{\pi}{l+\frac{1}{2}}\left(k - \frac{1}{2}\right)$$

de donde se tiene la desigualdad de Bruns. ■

Se puede obtener una estimación más precisa para las raíces de  $P_\nu(\cos \theta) = 0$  en el intervalo  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

**Teorema A.9** Las raíces  $\theta_{k,l}$  tales que  $P_l(\cos \theta_{k,l}) = 0$  en el intervalo  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  satisfacen las siguientes desigualdades

$$\frac{j_k}{\sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 + c}} < \theta_{l,k} < \frac{j_k}{l+\frac{1}{2}}$$

donde  $j_k$  raíces de  $J_0(x)$  función de Bessel de orden cero y  $c = \frac{1}{4}(1 - \frac{4}{\pi^2})$

**Prueba.** La ecuación diferencial  $u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$  tiene por solución la función de Bessel  $J_\nu(x)$ , véase [Lebedev, pág 98, 5.1.1]. Lo que implica que  $u = J_{l+\frac{1}{2}}(kx)$  es solución de la ecuación

$$u'' + \frac{1}{kx}u' + \left(1 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{k^2x^2}\right)u = 0$$

Si hacemos el cambio de variable  $v = x^{1/2}u(kx)$ ,  $u(kx) = x^{-1/2}v$ ,  $ku'(kx) = x^{1/2}(v' - \frac{1}{2}\frac{v}{x})$ ,  $k^2u''(kx) = x^{-1/2}(v'' - \frac{v'}{x} + \frac{3}{4}\frac{v}{x^2})$ . Sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{x^{-1/2}}{k^2} \left( v'' - \frac{v'}{x} + \frac{3}{4} \frac{v}{x^2} \right) + \frac{x^{-1/2}}{k^2 x} \left( v' - \frac{1}{2} \frac{v}{x} \right) + \left( 1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{k^2 x^2} \right) x^{-1/2} v k^2 = 0$$

$$v'' + \frac{1}{4} \frac{v}{x^2} + \left( k^2 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{x^2} \right) v = 0$$

$$v'' + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) v = 0$$

donde  $v = x^{1/2} J_{l+\frac{1}{2}}(kx)$ .

Si hacemos las sustituciones  $k \rightarrow l + \frac{1}{2}$ ,  $l \rightarrow -\frac{1}{2}$  se tiene la nueva ecuación diferencial para  $v$

$$v'' + v \left( \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4x^2} \right) = 0$$

con  $v = x^{1/2} J_0\left(\left(l + \frac{1}{2}\right)x\right)$ . Podemos aplicar el teorema de oscilación con las siguientes funciones

$$v'' + v \left( \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4\theta^2} \right) = 0$$

$$g'' + g \left( \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4\text{sen}^2\theta} \right) = 0$$

en el intervalo  $\theta \in (0, \pi)$ . Como  $\text{sen}^2\theta < \theta^2$  entonces  $\frac{1}{\text{sen}^2\theta} > \frac{1}{\theta^2}$ , por lo tanto  $g$  oscila más rápido: del teorema de oscilación, entre dos ceros de  $v = x^{1/2} J_0\left(\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta\right)$  hay un cero de  $g = \text{sen}^{1/2}\theta P_l(\cos\theta)$ . Si  $\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta = j_k$  ceros de  $v$ , se tiene que

$$\theta_{l,k} < \frac{j_k}{l + \frac{1}{2}}$$

ya que el  $k$ -ésimo cero de  $g$  está antes del  $k$ -ésimo cero de  $v$ . Para obtener una cota inferior consideramos la ecuación diferencial

$$v'' + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) v = 0$$



con  $v = x^{1/2} J_{l+\frac{1}{2}}(kx)$ . Si hacemos las siguientes sustituciones

$$k \rightarrow \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + c}, l \rightarrow -\frac{1}{2}$$

se tiene que  $v = x^{1/2} J_0\left(\left(\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + c\right)^{1/2} \theta\right)$  satisface la ecuación diferencial

$$v'' + \left(\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + c + \frac{1}{4\theta^2}\right) v = 0$$

$$g'' + g \left(\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4\text{sen}^2\theta}\right) = 0$$

donde  $g = \text{sen}^{1/2}\theta P_l(\cos\theta)$ , para  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . La función  $v$  oscilará más rápido que  $g$  si se encuentra una  $c$  tal que

$$c + \frac{1}{4\theta^2} > \frac{1}{4\text{sen}^2\theta}$$

en  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . La mínima cota superior para  $c$  ocurre en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  porque  $\frac{1}{4\text{sen}^2\theta} - \frac{1}{4\theta^2}$  es creciente y positiva para  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Para verlo más claramente sea

$$f(\theta) = \frac{1}{\text{sen}^2\theta} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2 \text{sen}^2\theta} (\theta - \text{sen}\theta)(\theta + \text{sen}\theta) \approx \frac{\theta^3 2\theta}{6 \theta^4} = \frac{1}{3}$$

en el límite cuando  $\theta \rightarrow 0$  y por lo tanto  $f(0) = \frac{1}{3}$ . Además  $f$  es creciente ya que su derivada es

$$f'(\theta) = \frac{2}{\theta^3} - \frac{2\cos\theta}{\text{sen}^3\theta} = \frac{2}{\text{sen}^3\theta} \left(\frac{\text{sen}^3\theta}{\theta^3} - \cos\theta\right).$$

Esta última expresión es positiva, ya que tanto  $\frac{\text{sen}^3\theta}{\theta^3}$  como  $\cos\theta$  tienen derivada cero y valor uno en  $\theta = 0$ , son funciones continuas y decrecientes

y no se intersectan en  $(0, \pi)$  y de su desarrollo de Taylor en la vecindad de cero se tiene  $\frac{\text{sen}^3x}{x^3} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{120} + O(x^6)$  y  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$  se ve claramente que  $\frac{\text{sen}^3\theta}{\theta^3} > \cos\theta$  para  $\theta \in (0, \pi/2)$  ver figura (A.3).

Por lo tanto  $f'$  es positiva y  $f$  creciente. De tal forma si

$$c > \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$$

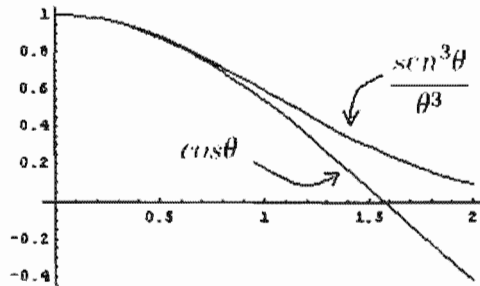


Figura A.3: Gráficas de  $\frac{\text{sen}^3 \theta}{\theta^3}$  y  $\cos \theta$

se tendría que entre dos ceros de  $g = \text{sen}^{1/2} \theta P_l(\cos \theta)$  hay uno de  $v = x^{1/2} J_{l+1/2}(kx)$ , para  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  y por lo tanto  $\theta = \frac{j_k}{\sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 + c}}$  raíz de  $v$  implica

$$\theta_{l,k} > \frac{j_k}{\sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 + c}}$$

y por lo tanto

$$\frac{j_k}{\sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 + c}} < \theta_{l,k} < \frac{j_k}{l + \frac{1}{2}}.$$

■

**Teorema A.10** si  $z_0 \in (0, 1]$  entonces se tienen las siguientes desigualdades

$$\nu_j^{m+1} < \nu_j^{m+2} < \nu_{j+1}^m < \nu_{j+1}^{m+1}$$

**Prueba.** La primera y la última desigualdad valen por la teoría de Sturm-Liouville teorema (A.6). Sólo queda por demostrar que  $\nu_j^{m+2} < \nu_{j+1}^m$ . De (A.1) se tiene que

$$P_\nu^m(z) = \frac{(-1)^m (1-z^2)^{m/2} \Gamma(\nu + m + 1)}{2^m \Gamma(\nu - m + 1) \Gamma(m + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m - \nu)_k (\nu + 1 + m)_k}{(m + 1)_k k! 2^k} (1 - z)^k$$

por lo tanto

$$P_{m+1}^m(z) = \frac{(-1)^m(1-z^2)^{m/2}\Gamma(2m+2)}{2^m\Gamma(2)\Gamma(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)_k(2m+2)_k}{(m+1)_k k! 2^k} (1-z)^k$$

Como  $(-1)_k = (-1)(1-1)\dots(k-2)$ , el único término que queda en la serie es para  $k = 0$ .

$$P_{m+1}^m(z) = \frac{(-1)^m(1-z^2)^{m/2}\Gamma(2m+2)}{2^m m!}$$

Como  $\nu_j(z_0) > m + 2j - 1$  se tiene que  $\nu_1^m > m + 1$  y por lo tanto  $sig(P_\nu^m) = (-1)^m$  para  $\nu \in [m + 1, \nu_1^m)$ . Tenemos el siguiente arreglo en orden creciente para  $\nu_j^m, \nu_j^{m+1}, \nu_j^{m+2}$ .

$$\begin{array}{cccccccc} m+3 & (-1)^{m+2} & & \nu_1^{m+2} & & \nu_2^{m+2} & \dots & \nu_j^{m+2} \\ m+2 & (-1)^{m+1} & & \nu_1^{m+1} & & \nu_2^{m+1} & \dots & \nu_j^{m+1} \\ m+1 & (-1)^m & & \nu_1^m & & \nu_2^m & \dots & \nu_j^m \end{array}$$

La segunda columna da el signo de  $P_\nu^{m+j}$  antes del primer valor propio. Queremos saber quien va primero si  $\nu_{j+1}^m$  ó  $\nu_j^{m+2}$ . De la teoría de Sturm-Liouville (teorema A.6) sabemos que  $\nu_j^m < \nu_j^{m+1} < \nu_{j+1}^m$  por lo tanto  $P_{\nu_j^{m+1}}^m(z_0) \neq 0$ . Como cada vez que se cruza un valor propio hay un cambio de signo se tiene lo siguiente:

$$sig(P_\nu^{m+2}) = (-1)^{(m+2)+j-1} \quad si \quad \nu \in (\nu_{j-1}^{m+2}, \nu_j^{m+2})$$

$$sig(P_\nu^{m+1}) = (-1)^{(m+1)+j} \quad si \quad \nu \in (\nu_j^{m+1}, \nu_{j+1}^{m+1})$$

$$sig(P_\nu^m) = (-1)^{m+j+1} \quad si \quad \nu \in (\nu_{j+1}^m, \nu_{j+2}^m)$$

Si  $\nu_{j+1}^m \leq \nu_j^{m+2}$  entonces la intersección de los intervalos es  $(\nu_{j+1}^m, \nu_j^{m+2})$  en donde  $sig(P_\nu^{m+2}) = sig(P_\nu^{m+1}) = sig(P_\nu^m)$ . Ahora veremos que esto es una contradicción. Por la propiedad (A.6)

$$P_\nu^{m+2}(z) + 2(m+1)z(1-z^2)^{-1/2} P_\nu^{m+1}(z) + (\nu - m)(\nu + m + 1)P_\nu^m(z) = 0$$

valuada en  $\nu_{j+1}^m$  se tiene que

$$P_{\nu_{j+1}^m}^{m+2} + 2(m+1)z(1-z^2)^{-1/2} P_{\nu_{j+1}^m}^{m+1} = 0$$

y por lo tanto  $P_{\nu_{j+1}^m}^{m+2}$  y  $P_{\nu_{j+1}^m}^{m+1}$  tienen signos contrarios lo que es una contradicción y por lo tanto  $\nu_{j+1}^m \leq \nu_j^{m+2}$ . ■

Además se tiene la siguiente observación

**Observación A.2** Si queremos que  $\nu_j^m = \nu_k^{m+n}$  entonces  $k < j$  y  $n > 2(j - k)$  y por lo tanto  $n \geq 3$  para enteros  $(j, k, m, n \geq 0)$

**Prueba.** Si  $k \geq j$  y  $n \geq 0$  tenemos que  $\nu_j^m < \nu_j^{m+n} < \nu_k^{m+n}$  en ese caso no pueden ser iguales y por lo tanto  $k < j$ . Esto implica  $\nu_k^{m+n} < \nu_j^{m+n+2} < \nu_{k+l}^{m+n+2l}$  si escogemos  $l = j - k$  entonces  $\nu_k^{m+n} < \nu_j^{m+n-2(j-k)} \leq \nu_j^m$ . La última desigualdad es posible sólo si  $n \leq 2(j - k)$ . Si estas hipótesis se cumplen entonces es posible que  $\nu_j^m = \nu_k^{m+n}$  para  $(j, k, m, n \geq 0)$  con  $k < j$  y  $n > 2(j - k)$ , en particular  $n \geq 3$ . ■

**Lema A.3** si  $z_0 \in (0, 1)$  entonces  $\nu_2^1(z_0) > \nu_2^0(z_0) + 1$

**Prueba.** Como  $\nu_j^m(0) = m + 2j - 1$  entonces  $\nu_2^1(0) = 4$ ,  $\nu_2^0(0) = 3$ . Primero veremos que  $\nu_2^1(z_0) \neq \nu_2^0 + 1$ . Supongamos que existe un  $z_0 \in (0, 1)$  tal que  $\nu_2^1(z_0) = \nu_2^0(z_0) + 1$ . Se tiene que

$$P_{\nu-1}^{m+1}(z) - P_{\nu+1}^{m+1} = (2\nu + 1)(1 - z^2)^{1/2} P_{\nu}^m(z).$$

Sea  $\nu = \nu_2^0(z_0)$ ,  $\nu + 1 = \nu_2^1(z_0)$ . Esto implica que  $P_{\nu}^0 = 0$ ,  $P_{\nu+1}^1 = 0$  por lo que al sustituir  $\nu$  en la ecuación anterior implica que  $P_{\nu-1}^1 = 0$  y por lo tanto  $\nu_j^1(z_0) = \nu - 1$  para algún  $j$ . Pero se tiene que  $\nu_2^1(z_0) = 1 + \nu$  y por lo tanto  $j = 1$ , es decir,  $\nu_1^1(z_0) = \nu - 1$  y  $P_{\nu-1}^1 = 0$ . Se tiene que

$$(\nu - m)(\nu - m + 1)P_{\nu+1}^m - (\nu + m)(1 + \nu + m)P_{\nu-1}^m = (2\nu + 1)(1 - z^2)^{1/2} P_{\nu}^{m+1}$$

si hacemos  $m = 1$  entonces

$$(\nu - 1)\nu P_{\nu+1}^1 - (\nu + 1)(2 + \nu)P_{\nu-1}^1 = (2\nu + 1)(1 - z^2)^{1/2} P_{\nu}^2$$

y por lo tanto  $P_{\nu}^2 = 0$  y  $\nu_j^2(z_0) = \nu = \nu_2^0$  lo que contradice la observación (A.2) y se concluye  $\nu_2^1(z_0) \neq \nu_2^0(z_0) + 1$ .

Sólo pueden pasar dos cosas ó  $\nu_2^1(z_0) > \nu_2^0(z_0) + 1$  ó  $\nu_2^1(z_0) < \nu_2^0(z_0) + 1$ . Para saberlo calcularemos las raíces de  $P_5^1(z)$  y  $P_4^0(z)$ . Utilizando la fórmula de Rodrigues para  $P_n^m(z)$  de la forma

$$P_n^m(z) = (-1)^m (1 - z^2)^{m/2} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)$$

se encuentra que

$$P_5^1(z) = \frac{15}{8} \left( \frac{1+z}{z-1} \right)^{1/2} (z-1)(1-14z^2+21z^4)$$

$$P_4^0(z) = \frac{1}{8}(3-30z^2+35z^4)$$

con raíces en el intervalo  $(0, 1)$  dadas por

$$\left( \frac{\sqrt{7}+2}{3\sqrt{7}} \right)^{1/2}, \quad \left( \frac{7-2\sqrt{7}}{21} \right)^{1/2}$$

$$\left( \frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{6}}{7\sqrt{5}} \right)^{1/2}, \quad \left( \frac{15-2\sqrt{30}}{35} \right)^{1/2}$$

para  $P_5^1(z)$  y  $P_4^0(z)$  respectivamente. Numéricamente se hallan los valores para sus segundas raíces en el intervalo  $(0, 1)$ ,  $z_{5,2}^1 = 0,2852$ ,  $z_{4,2}^0 = 0,3399$  respectivamente. Por lo tanto como  $\nu_j^k(z)$  es creciente se tiene que

$$\nu_2^0(z_{5,2}^1) < \nu_2^0(z_{4,2}^0) = 4$$

$$\nu_2^1(z_{5,1}^1) = 5.$$

Si restamos estas desigualdades implica que  $\nu_2^1(z_{5,2}^1) > \nu_2^0(z_{5,2}^1) + 1$  y por lo tanto

$$\nu_2^1 > \nu_2^0 + 1.$$

■

Para continuar con el estudio de los primeros valores propios se requieren de algunas desigualdades.

### Desigualdad A.1

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n(n+1)+6}} < \frac{9\sqrt{3}}{2(2n+3)} < \text{sen} \left( \frac{3\pi}{2n+3} \right)$$

para  $n \geq 3$ .

**Prueba.** Verificando la primera desigualdad  $2^2\sqrt{2}(2n+3) < 3^2\sqrt{3}(n+1)+6)^{1/2}$  y por lo tanto  $2^5(4n^2+12+9) < 3^5(n^2+n+6)$  por lo que se tiene  $n^2((\frac{3}{2})^5-4)+n((\frac{3}{2})^5-12)+6(\frac{3}{2})^5-9 > 0$  lo cual siempre tiene raíces imaginarias y en  $n=0$  es positivo por lo tanto la desigualdad es válida. Para probar la segunda desigualdad notamos que para  $x \in (0, \frac{\pi}{3})$  se tiene que  $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}x < \text{sen}x$ . Además  $\frac{3\pi}{2n+3} < \frac{\pi}{3}$  si  $n \geq 3$  implica que  $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{3\pi}{2n+3} < \text{sen}(\frac{3\pi}{2n+3})$  lo que prueba la segunda desigualdad. ■

Con este resultado se prueba lo siguiente

### Desigualdad A.2

$$z_{n+1,2} < \left( \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)+6} \right)^{1/2} \quad n \geq 3$$

**Prueba.** De la desigualdad de Bruns se sabe que  $z_{n,k} < \cos\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi\right)$ . Si hacemos  $n \rightarrow n+1$ ,  $k=2$  entonces  $z_{n+1,2} < \cos\left(\frac{3\pi}{2n+3}\right)$ , para  $n \geq 3$ . Por lo tanto

$$\left( \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n(n+1)+6}} \right)^2 < \text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2n+3}\right) \Rightarrow \frac{8}{n(n+1)+6} < 1 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2n+3}\right)$$

y por lo tanto

$$\cos^2\left(\frac{3\pi}{2n+3}\right) < \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)+6}$$

y

$$z_{n+1,2} < \left( \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)+6} \right)^{1/2} \quad n \geq 3.$$

■

### Desigualdad A.3

$$z_{n,2} < \left( \frac{n(n+1)-6}{n(n+1)+18} \right)^{1/2} \quad n \geq 5$$

**Prueba.** Primero se prueba que

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)+18}} < \text{sen}\left(\frac{j_2}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2+c}}\right) \quad n \geq 5$$

donde  $j_2 = 5,52008$  es la segunda raíz de la función de Bessel de orden cero.  $\text{sen}(\frac{j_2}{\sqrt{48}}) = 0,71509$ . Ahora

$$\text{sen}\left(\frac{j_2}{n + \frac{1}{2}}\right) > \text{sen}\left(\frac{j_2}{\sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 + c}}\right) > \text{sen}\left(\frac{j_2}{\sqrt{n(n+1) + 18}}\right)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\frac{j_2}{\sqrt{n(n+1) + 18}}\right) &> \text{sen}\left(\frac{j_2}{\sqrt{48}}\right) \frac{\sqrt{48}}{j_2} \frac{j_2}{\sqrt{n(n+1) + 18}} \\ &= \frac{4,9543}{\sqrt{n(n+1) + 18}} \geq \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1) + 18}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2\left(\frac{j_2}{\sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 + c}}\right) &> \frac{24}{n(n+1) + 18} \\ \cos\left(\frac{j_2}{\sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 + c}}\right) &< \left(\frac{n(n+1) - 6}{n(n+1) + 18}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

por el teorema (A.9) se tiene

$$z_{n,2} < \cos\left(\frac{j_2}{\sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 + c}}\right) < \left(\frac{n(n+1) - 6}{n(n+1) + 18}\right)^{1/2} \quad n \geq 5.$$

■

#### Desigualdad A.4

$$z_{n+1,3} < \left(\frac{n(n+1) - 12}{n(n+1) + 56}\right)^{1/2} \quad n \geq 6$$

**Prueba.** Primero demostraremos que

$$\frac{2\sqrt{17}}{(n(n+1) + 56)^{1/2}} < \text{sen}\left(\frac{j_3}{\sqrt{(n + \frac{3}{2})^2 + c}}\right)$$

donde  $j_3 = 8,65373$  es la tercera raíz de la función de Bessel de orden cero,  $c = \frac{1}{4}(1 - \frac{4}{\pi^2}) < 1$ . Sea  $u = \frac{j_3}{\sqrt{(n+\frac{3}{2})^2+1}}$  que invirtiendo para  $n$  se tiene  $n = -\frac{3}{2} + \frac{1}{u}(j_3^2 - u^2)^{1/2}$ . Sustituyendo en la desigualdad

$$\frac{2\sqrt{17}}{\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{u}(j_3^2 - u^2)^{1/2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{u}(j_3^2 - u^2)^{1/2}\right) + 56)^{1/2}} < \text{sen}(u) \\ < \text{sen} \left( \frac{j_3}{\sqrt{\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)^2 + c}} \right)$$

es decir

$$\frac{4\sqrt{17}u}{(223u^2 - 8u(j_3^2 - u^2)^{1/2} + 4j_3^2)^{1/2}} < \text{sen}(u)$$

para  $n = 6$ ,  $u_0 = \frac{j_3}{(7,5^2+1)^{1/2}} = 1,1437$  y además  $u \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$  y por lo tanto  $u \in (0, 1,1437]$ . Vemos que la desigualdad se cumple por lo siguiente

$$\frac{\text{sen}u}{u} > \frac{4\sqrt{17}}{(223u^2 - 8u(j_3^2 - u^2)^{1/2} + 4j_3^2)^{1/2}} \quad (\text{A.22})$$

tomando cuadrados

$$\left(\frac{\text{sen}u}{u}\right)^2 > \frac{272}{223u^2 - 8u(j_3^2 - u^2)^{1/2} + 4j_3^2}$$

Pero como se muestra a continuación  $1 - \frac{x^2}{3} > \frac{272}{223x^2 - 8x(j_3^2 - x^2)^{1/2} + 4j_3^2}$ . Después de un poco de álgebra esta desigualdad se escribe como

$$\left(1 - \frac{u^2}{3}\right)(223u^2 + 4j_3^2) - 272)^2 - 64u^2(j_3^2 - u^2)\left(1 - \frac{u^2}{3}\right)^2 > 0$$

Es un polinomio de grado 8  $P(u)$ , cuyas únicas raíces reales valen  $u = 1,23888$ ,  $u = 1,42937$  y como  $P(0) = 758,902$  es positivo, se tiene que la desigualdad se cumple para  $u \in (0, 1,23888)$  ver figura (A.4)

. Y como a su vez  $\left(\frac{\text{sen}u}{u}\right)^2 > 1 - \frac{u^2}{3}$  por su desarrollo de Taylor, se verifica la desigualdad (A.22).

Y por lo tanto

$$\frac{2\sqrt{17}}{(n(n+1) + 56)^{1/2}} < \text{sen} \left( \frac{j_3}{\sqrt{\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 + c}} \right)$$



$$\left(1 - \frac{u^2}{3}\right)(223u^2 + 4j_3^2) - 272)^2 - 64u^2(j_3^2 - u^2)\left(1 - \frac{u^2}{3}\right)^2 > 0$$

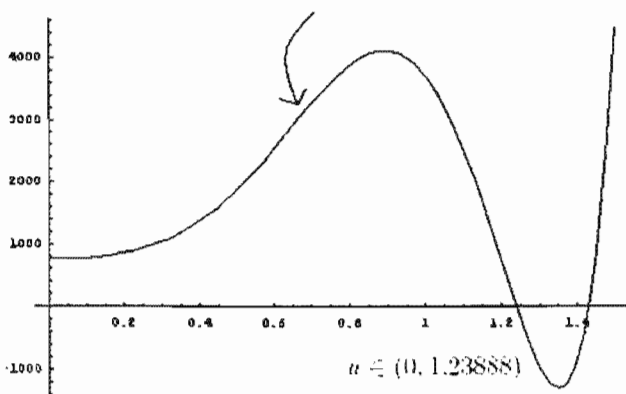


Figura A.4: Polinomio de grado 8

lo que implica

$$\frac{68}{n(n+1) + 56} < 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \cos \theta < \left( \frac{n(n+1) - 12}{n(n+1) + 56} \right)^{1/2}$$

y por lo tanto

$$z_{n+1,3} < \cos \left( \frac{j_3}{\sqrt{(n + \frac{3}{2})^2 + c}} \right) < \left( \frac{n(n+1) - 12}{n(n+1) + 56} \right)^{1/2} \quad n \geq 6$$

■

**Teorema A.11** Si  $z_0 \in (0, 1)$  entonces  $\nu_2^0(z_0) < \nu_1^3(z_0)$

**Prueba.** Supongamos que existe un  $z_0 \in (0, 1)$  tal que  $\nu_2^0(z_0) = \nu_1^3(z_0)$  y sea  $n$  un entero tal que  $n \leq \nu \leq n+1$ . Como  $\nu_j^m(0) = m + 2j - 1$  implica que  $\nu_2^0(0) = 3$ ,  $\nu_1^3(0) = 4$ . Como  $\nu_2^0(z_0), \nu_1^3(z_0)$  son crecientes en  $z_0$  se tiene que  $n \geq 4$ . De la igualdad

$$P_\nu^{m+2}(z_0) + 2(m+1)z_0(1-z_0^2)^{-1/2}P_\nu^{m+1}(z_0) + (\nu-m)(\nu+m+1)P_\nu^m(z_0) = 0$$

con  $m = 1, m = 0$

$$P_\nu^3(z_0) + 4z_0(1 - z_0^2)^{-1/2}P_\nu^2(z_0) + (\nu - 1)(\nu + 2)P_\nu^1(z_0) = 0$$

$$P_\nu^2(z_0) + 2z_0(1 - z_0^2)^{-1/2}P_\nu^1(z_0) + \nu(\nu + 1)P_\nu^0(z_0) = 0$$

Como  $P_\nu^0(z_0) = P_\nu^3(z_0) = 0$ , estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\begin{pmatrix} 4z_0(1 - z_0^2)^{-1/2} & (\nu - 1)(\nu + 2) \\ 1 & 2z_0(1 - z_0^2)^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_\nu^2(z_0) \\ P_\nu^1(z_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Si la matriz es invertible entonces  $P_\nu^2(z_0) = P_\nu^1(z_0) = 0$  y  $\nu = \nu_j^2(z_0) = \nu_k^1(z_0) = \nu_2^0(z_0) = \nu_1^3(z_0)$  pero esto es imposible porque se necesita que para que  $\nu_k^m = \nu_j^{m+n}$  entonces  $n \geq 3$ . Por lo tanto el determinante debe ser cero

$$\frac{8z_0^2}{1 - z_0^2} - (\nu - 1)(\nu + 2) = 0$$

$$z_2(8 + (\nu - 1)(\nu + 2)) = (\nu - 1)(\nu + 2)$$

$$z_0^2(\nu + \nu + 6) = \nu^2 + \nu - 2$$

y por lo tanto usando el hecho que  $n \leq \nu$ , para  $n \geq 3$

$$z_0 = \left( \frac{\nu(\nu + 1) - 2}{\nu(\nu + 1) + 6} \right)^{1/2} \geq \left( \frac{n(n + 1) - 2}{n(n + 1) + 6} \right)^{1/2} > z_{n+1,2}$$

y por lo tanto  $z_0 > z_{n+1,2}$ . Como  $\nu(z_0)$  crece, entonces  $\nu_2^0(z_0) > \nu_2^0(z_{n+1,2}) = n + 1$  lo que es una contradicción y se concluye que

$$\nu_1^3(z_0) > \nu_2^0(z_0).$$

■

**Teorema A.12** si  $z_0 \in (0, 1)$  entonces

$$\nu_2^1(z_0) < \nu_1^4(z_0).$$

**Prueba.** Supongamos que existe un  $\nu = \nu_2^1(z_0) = \nu_1^4(z_0)$  y sea  $n$  tal que  $n \leq \nu < n + 1$ . Como  $\nu_j^m(0) = m + 2j - 1$  se tiene que  $\nu_1^2 \geq 4$ ,  $\nu_1^4 \geq 5$  y por lo tanto  $n \geq 5$ . De la propiedad

$$P_\nu^{m+2}(z_0) + 2(m + 1)z_0(1 - z_0^2)^{-1/2}P_\nu^{m+1}(z_0) + (\nu - m)(\nu + m + 1)P_\nu^m(z_0) = 0$$

con  $m = 2, m = 1$

$$P_\nu^4(z_0) + 6z_0(1 - z_0^2)^{-1/2}P_\nu^3(z_0) + (\nu - 2)(\nu + 3)P_\nu^3(z_0) = 0$$

$$P_\nu^3(z_0) + 4z_0(1 - z_0^2)^{-1/2}P_\nu^2(z_0) + (\nu - 1)(\nu + 2)P_\nu^1(z_0) = 0$$

Utilizando el hecho que  $P_\nu^4(z_0) = P_\nu^1(z_0) = 0$

$$\begin{pmatrix} 6z_0(1 - z_0^2)^{-1/2} & (\nu - 2)(\nu + 3) \\ 1 & 4z_0(1 - z_0^2)^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_\nu^3(z_0) \\ P_\nu^2(z_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Si el determinante es diferente de cero entonces  $\nu_j^1 = \nu_k^2 = \nu_2^1 = \nu_1^4$ , lo cual no es cierto, por el mismo argumento usado en el teorema anterior. Entonces el determinante debe ser cero

$$\frac{24z_0^2}{1 - z_0^2} = (\nu - 2)(\nu + 3)$$

$$z_0^2 = \frac{\nu^2 + \nu - 6}{\nu^2 + \nu + 18}$$

y por lo tanto usando el hecho que  $n \leq \nu$ , para  $n \geq 5$

$$z_0 = \left( \frac{\nu(\nu + 1) - 6}{\nu(\nu + 1) + 18} \right)^{1/2} \geq \left( \frac{n(n + 1) - 6}{n(n + 1) + 18} \right)^{1/2} > z_{n,2}$$

lo que implica

$$\nu_2^0(z_0) > \nu_2^0(z_{n,2}) = n$$

del lema (A.3)  $\nu_2^1 > \nu_2^0 + 1$ , implica  $\nu_2^1 > n + 1$  lo que es una contradicción, por lo tanto

$$\nu_2^1(z_0) < \nu_1^4(z_0).$$

■

**Teorema A.13** Si  $z_0 \in (0, 1)$  entonces  $\nu_3^0(z_0) < \nu_1^5(z_0)$

**Prueba.** Supongamos que existe un  $z_0 \in (0, 1)$  tal que  $\nu = \nu_3^0(z_0) = \nu_1^5(z_0)$ , y sea  $n$  un entero tal que  $n \leq \nu < n + 1$ . Como  $\nu_j^m(0) = m + 2j - 1$ , entonces  $\nu_3^0 = 5$ ,  $\nu_1^5 = 6$  y por lo tanto  $n \geq 6$ . De la propiedad

$$P_\nu^{m+2}(z_0) + 2(m + 1)z_0(1 - z_0^2)^{-1/2}P_\nu^{m+1}(z_0) + (\nu - m)(\nu + m + 1)P_\nu^m(z_0) = 0$$

con  $m = 3, 2, 1, 0$

$$P_\nu^5(z_0) + 8z_0(1 - z_0^2)^{-1/2}P_\nu^4(z_0) + (\nu - 3)(\nu + 4)P_\nu^3(z_0) = 0$$

$$P_\nu^4(z_0) + 6z_0(1 - z_0^2)^{-1/2}P_\nu^3(z_0) + (\nu - 2)(\nu + 3)P_\nu^2(z_0) = 0$$

$$P_\nu^3(z_0) + 4z_0(1 - z_0^2)^{-1/2}P_\nu^2(z_0) + (\nu - 1)(\nu + 2)P_\nu^1(z_0) = 0$$

$$P_\nu^2(z_0) + 2z_0(1 - z_0^2)^{-1/2}P_\nu^1(z_0) + (\nu)(\nu + 1)P_\nu^0(z_0) = 0$$

Usando el hecho que  $P_\nu^5(z_0) = P_\nu^0(z_0) = 0$  y nombrando  $\sigma = z_0(1 - z_0^2)^{-1/2}$  e invirtiendo para  $z_0^2 = \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2}$ .

$$\begin{pmatrix} 8\sigma & (\nu - 3)(\nu + 4) & 0 & 0 \\ 1 & 6\sigma & (\nu - 2)(\nu + 3) & 0 \\ 0 & 1 & 4\sigma & (\nu - 1)(\nu + 2) \\ 0 & 0 & 1 & 2\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_\nu^4 \\ P_\nu^3 \\ P_\nu^2 \\ P_\nu^1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 8\sigma & \nu(\nu + 1) - 12 & 0 & 0 \\ 1 & 6\sigma & \nu(\nu + 1) - 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4\sigma & \nu(\nu + 1) - 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_\nu^4 \\ P_\nu^3 \\ P_\nu^2 \\ P_\nu^1 \end{pmatrix} = 0$$

Haciendo  $\lambda = \nu(\nu + 1)$

$$\begin{pmatrix} 8\sigma & \lambda - 12 & 0 & 0 \\ 1 & 6\sigma & \lambda - 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4\sigma & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_\nu^4 \\ P_\nu^3 \\ P_\nu^2 \\ P_\nu^1 \end{pmatrix} = 0$$

El mismo argumento usado anteriormente implica que el determinante es cero:

$$8\sigma(48\sigma^3 + \sigma(-6\lambda + 12 - 2\lambda + 12)) + 8(12 - \lambda)\sigma^2 + (\lambda - 12)(\lambda - 2) = 0$$

$$384\sigma^4 - 72(\lambda - 4)\sigma^2 + (\lambda - 12)(\lambda - 2) = 0.$$

Las soluciones para  $\sigma$  son

$$\sigma_\pm^2 = \frac{1}{96} \left( 9(\lambda - 4) \pm \sqrt{3}(19\lambda^2 - 104\lambda + 240)^{1/2} \right)$$

Hacemos  $s^\pm = \sigma_\pm^2$ . Si  $\nu \geq 6 \Rightarrow \lambda \geq 42$ . Como  $19\lambda^2 - 104\lambda + 240 > \frac{1856}{19}$  para  $\lambda > 42$  entonces  $s^+ > 0$ .  $s^- < 0$  si y sólo si  $24(\lambda^2 - 14\lambda + 24) < 0$  si y sólo si  $2 \leq \lambda < 12$  y por lo tanto  $s^+ > s^- > 0$ . Por lo tanto  $z_0 \in \left\{ \left( \frac{\sigma_+^2}{1+\sigma_+^2} \right)^{1/2}, \left( \frac{\sigma_-^2}{1+\sigma_-^2} \right)^{1/2} \right\}$ , se tiene que

$$z_0^2 \geq \min \left\{ \frac{s^+}{1+s^+}, \frac{s^-}{1+s^-} \right\} = \frac{s^-}{1+s^-} = 1 - \frac{1}{1+s^-}$$

$$z_0^2 \geq 1 - \frac{96}{9\lambda + 60 - \sqrt{3}(19\lambda^2 - 104\lambda + 240)^{1/2}}.$$

Antes de continuar la demostración requerimos probar la siguiente desigualdad

$$1 - \frac{96}{9\lambda + 60 - \sqrt{3}(19\lambda^2 - 104\lambda + 240)^{1/2}} > \frac{\lambda - 12}{\lambda + 56} = 1 - \frac{68}{\lambda + 56}$$

es decir

$$\frac{24}{9\lambda + 60 - \sqrt{3}(19\lambda^2 - 104\lambda + 240)^{1/2}} < \frac{17}{\lambda + 56}$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} 129\lambda - 324 - 17\sqrt{3}\sqrt{240 - 104\lambda + 19\lambda^2} &> 0 \\ 3(43\lambda - 108) &> 17\sqrt{3}\sqrt{240 - 104\lambda + 19\lambda^2} \end{aligned}$$

$$-4296 + 274\lambda + 7\lambda^2 > 0$$

es creciente y para  $\lambda = 42$  positiva, por lo que la desigualdad es válida. Por lo tanto

$$z_0 > \frac{\lambda - 12}{\lambda + 56} = \frac{\nu(\nu + 1) - 12}{\nu(\nu + 1) + 56}$$

como  $n \leq \nu$

$$z_0 > \left( \frac{n(n+1) - 12}{n(n+1) + 56} \right)^{1/2} > z_{n+1,3}$$

y por lo tanto  $\nu_3^0(z_0) > \nu_3^0(z_{n+1,3}) = n + 1$  lo cual contradice la suposición inicial. Se tiene entonces  $\nu_3^0(z_0) < \nu_1^5(z_0)$  para  $z_0 \in (0, 1)$ . ■

Con los teoremas (A.10), (A.11), (A.12), (A.13) se tiene el siguiente teorema

**Teorema A.14**

$$\nu_1^0 < \nu_1^1 < \nu_1^2 < \nu_2^0 < \nu_1^3 < \nu_2^1 < \nu_1^4 < \nu_2^2 < \nu_3^0 < \nu_1^5 < \min(\nu_2^3, \nu_1^6).$$

Para probar que son los primeros once, basta notar que  $\nu_1^m > \nu_1^5$  para  $m > 5$ ,  $\nu_2^j > \nu_2^3$  en  $j > 3$ ,  $\nu_3^l > \nu_2^3$  por el teorema (A.4),  $\nu_3^l > \nu_3^1$  para  $l > 1$ ,  $\nu_4^0 > \nu_3^2$  por el teorema (A.10),  $\nu_4^l > \nu_4^0$  para  $l \geq 1$ ,  $\nu_5^l > \nu_5^0 > \nu_4^2 > \nu_4^0 > \nu_3^2$  y  $\nu_k^l > \nu_5^1$  para  $k > 5$ . Numéricamente ( ver [Baginski 2] ) se prueba que  $\nu_2^3 < \nu_1^6$ .



# Apéndice B

## Geometría Diferencial

En este apéndice se hacen las pruebas de los distintos resultados de geometría diferencial utilizados en el curso de la tesis. Se utiliza la notación y terminología tal y como se hace en el libro [Kreyszig].

### B.1. Tensores, covariantes y contravariantes

Consideremos una superficie dada en forma paramétrica por las ecuaciones  $\mathbf{x}(u^\alpha)$ , donde  $\alpha = 1, 2$ ,  $\mathbf{x}$  es el vector de coordenadas cartesianas  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$  y  $u^\alpha$  son las coordenadas curvilíneas. En un punto de esta superficie definimos los vectores tangentes por la relación

$$\mathbf{x}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}.$$

Las segundas derivadas se denotarán como

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^\beta \partial u^\alpha}.$$

El elemento diferencial de longitud de arco está dado en términos de la primera forma fundamental

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{x}_\alpha du^\alpha) \cdot (\mathbf{x}_\beta du^\beta) = (\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta) du^\alpha du^\beta = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

con la definición

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta$$



donde se utiliza la convención de índices repetidos. Sobre una superficie, se pueden definir distintas cantidades, las cuales pueden tener distintos significados dependiendo del contexto en que se hable. Si se trata de una superficie material, podemos hablar de la densidad en cada punto de la superficie, de su temperatura, dichas cantidades corresponden a campos escalares. También podemos definir un campo vectorial, que podría ser un campo de fuerzas actuando sobre la superficie, o un campo de velocidades etc. Las cantidades más generales que se pueden asociar a una superficie son los tensores. Los escalares, tales como la densidad o la temperatura o la longitud de arco, deben tener el mismo valor independientemente de la parametrización utilizada, por ello se llaman invariantes. Los vectores y tensores en cambio, dependen de la base de vectores utilizada (en el caso de superficies de dimensión dos, en cada punto de la superficie se puede definir un plano tangente y por lo tanto una base que expanda dicho subespacio).

La forma en que se expresa esta idea matemáticamente, en el caso de vectores es la siguiente: Sean

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

$$\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^1, u^2)$$

un cambio de coordenadas, y definido sobre la superficie un campo vectorial  $\mathbf{v} = a^\alpha \mathbf{x}_\alpha$ , donde se utiliza como base, los vectores tangentes. Bajo el cambio de coordenadas este vector se reescribe como  $\mathbf{v} = \bar{a}^\beta \mathbf{x}_{\bar{\beta}}$ , donde  $\mathbf{x}_{\bar{\beta}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{u}^\beta}$ . Usando la regla de la cadena  $\mathbf{x}_\alpha = \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} \mathbf{x}_{\bar{\beta}}$  y por lo tanto  $\mathbf{v} = a^\alpha \mathbf{x}_\alpha = a^\alpha \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} \mathbf{x}_{\bar{\beta}}$  de donde se puede concluir que

$$\bar{a}^\beta = a^\alpha \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha}.$$

Toda cantidad que se transforme bajo un cambio de coordenadas de esta manera, se dice que  $a^\alpha$  son las componentes contravariantes de un vector. Existe otra forma de representar vectores sobre una superficie. La construcción de esta otra representación es como sigue: Podemos proyectar el vector sobre los vectores tangentes, entonces se define la cantidad  $a_\alpha = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{v}$  como la componente covariante del vector  $\mathbf{v}$ . Con el cambio de coordenadas podemos ver lo que pasa usando la regla de la cadena

$$\bar{a}_\beta = \mathbf{x}_{\bar{\beta}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x}_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \cdot \mathbf{v} = a_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}$$

y por lo tanto

$$\bar{a}_\beta = a_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}.$$

Es la regla de transformación para componentes covariantes de vectores. Estos resultados se pueden generalizar para tensores, los cuales pueden ser puramente covariantes, contravariantes o mixtos.

De los primeros resultados que notaremos es que el tensor métrico sirve para pasar de las representaciones covariantes a contravariantes y viceversa. Como antes sea  $a_\alpha = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x}_\alpha \cdot a^\beta \mathbf{x}_\beta$ , tomando la representación contravariante de  $v$ , y por lo tanto

$$a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta.$$

Sea  $g^{\alpha\beta}$  el inverso de  $g_{\alpha\beta}$  tal que  $g^{\alpha\lambda} g_{\lambda\beta} = \delta_\beta^\alpha$ . Esto implica que

$$a^\alpha = g^{\alpha\beta} a_\beta.$$

En particular  $g_\alpha^\beta = g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\beta$ . Si  $g = \det(g_{\alpha\beta})$ , al invertir el tensor, cada componente de  $g^{\alpha\beta}$  debe tener la forma

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}. \quad (\text{B.1})$$

Por la definición del tensor métrico, se ve que es simétrico. Resumiendo y generalizando para tensores de orden más alto

$$\begin{aligned} g^{\alpha\sigma} T_{\sigma\beta_1 \dots \beta_n} &= T^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_n} \\ g_{\alpha\sigma} T^{\sigma\beta_1 \dots \beta_n} &= T_\alpha^{\beta_1 \dots \beta_n} \\ g_\alpha^\beta &= \delta_\alpha^\beta \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

A continuación definimos la segunda forma fundamental. Para su construcción consideremos una curva definida sobre la superficie parametrizada en términos de la longitud de arco,  $\mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$ . Usando la regla de la cadena podemos hallar la derivada  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_\alpha \dot{u}^\alpha$  y tomar la segunda derivada  $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \mathbf{x}_\alpha \ddot{u}^\alpha$ . Sea  $\mathbf{n}$  el vector normal, con la propiedad  $\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$ , por lo que  $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$ , definimos el tensor de curvatura como

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}$$

por lo tanto

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

De la teoría de curvas se sabe que el vector principal vale  $\mathbf{p} = \frac{\ddot{\mathbf{x}}}{\kappa}$ , donde  $\kappa$  es la curvatura. La cantidad  $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = \kappa \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$  es una medida de la curvatura, ya que en el caso que  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0$  se trata de un plano. Derivando la relación de ortogonalidad  $\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$  se obtiene que

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta$$

Ahora, supongamos que queremos expresar las derivadas del vector normal, en términos de los vectores tangentes

$$\mathbf{n}_\alpha = c_\alpha^\gamma \mathbf{x}_\gamma.$$

Queda por calcular los coeficientes  $c_\alpha^\gamma$ . Si tomamos el producto escalar en ambos lados de la ecuación anterior por  $\mathbf{x}_\sigma$  se encuentra que

$$\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\sigma = c_\alpha^\gamma \mathbf{x}_\gamma \cdot \mathbf{x}_\sigma = c_\alpha^\gamma g_{\gamma\sigma}$$

usando el hecho que  $\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\sigma = -b_{\alpha\sigma}$  y  $g_{\gamma\sigma} g^{\sigma\tau} = \delta_\gamma^\tau$ , encontramos que

$$-b_{\alpha\sigma} g^{\sigma\gamma} = c_\alpha^\gamma$$

por lo que se obtiene la fórmula de Weingarten

$$\mathbf{n}_\alpha = -b_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta \tag{B.3}$$

### B.1.1. Símbolos de Christoffel

Estos surgen al plantear el problema de querer expresar las segundas derivadas del vector de coordenadas  $\mathbf{x}_{\alpha\beta}$ , como combinación lineal de los vectores tangentes y el vector normal. Consideremos

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{x}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} \tag{B.4}$$

conocida como fórmula de Gauss. Esta expresión permite recuperar la superficie si son conocidas la primera y segunda formas fundamentales. Si tomamos el producto interior  $\mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} = b_{\alpha\beta}$  en la ecuación (B.4), coincide con la definición del tensor de curvatura. Ahora, de la relación de ortogonalidad  $\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$ , se tiene el producto interior  $\mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{x}_\lambda = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{x}_\gamma \cdot \mathbf{x}_\lambda = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\lambda}$  en la ecuación (B.4). Multiplicando por  $g^{\lambda k}$  se tiene que  $\Gamma_{\alpha\beta}^k = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{x}_\lambda g^{\lambda k}$ , es decir, definiendo  $\mathbf{x}^k = g^{\lambda k} \mathbf{x}_\lambda$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^k = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{x}^k \quad (\text{B.5})$$

o de igual forma

$$\Gamma_{\alpha\beta k} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{x}_k,$$

que sirve como definición de los símbolos de Christoffel. Se observa que es simétrico en los dos primeros índices. Del hecho que  $g_{\alpha\lambda} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\lambda$ , si derivamos con respecto a  $u^\beta$  se tiene que

$$g_{\alpha\lambda,\beta} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{x}_\lambda + \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_{\lambda\beta}$$

$$g_{\alpha\lambda,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\lambda} + \Gamma_{\lambda\beta\alpha} \quad (\text{B.6})$$

$$g_{\lambda\beta,\alpha} = \Gamma_{\lambda\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\alpha\lambda} \quad (\text{B.7})$$

$$g_{\beta\alpha,\lambda} = \Gamma_{\beta\lambda\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda\beta} \quad (\text{B.8})$$

donde se permutaron los índices. Sumando las dos primeras y restando la última recordando la simetría en los dos primeros índices se tiene

$$g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\beta\alpha,\lambda} = 2\Gamma_{\alpha\beta\lambda}$$

y por lo tanto

$$\Gamma_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\beta\alpha,\lambda}) \quad (\text{B.9})$$

Multiplicando por  $g^{k\lambda}$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^k = \frac{1}{2}g^{k\lambda}(g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\beta\alpha,\lambda}). \quad (\text{B.10})$$

A continuación enunciamos la siguiente propiedad que conecta los símbolos de Christoffel con el determinante del tensor métrico. Si tomamos la derivada de dicho determinante

$$g_{,\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^\gamma}(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2) = \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\gamma}g_{22} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^\gamma}g_{11} - 2g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\gamma}$$

usando (B.1)

$$g_{,\gamma} = g \left[ \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\gamma}g^{11} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^\gamma}g^{22} + 2g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\gamma} \right] = gg^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\gamma}$$

usando (B.8)

$$g_{,\gamma} = gg^{\alpha\beta}(\Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta}) = g(\Gamma_{\beta\gamma}^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha) = 2g\Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha. \quad (\text{B.11})$$

Esta propiedad sigue válida en el caso de espacios con dimensión mayor que 2.

### B.1.2. Transformación de los Símbolos de Christoffel

Consideremos el cambio de coordenadas

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

$$\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^1, u^2).$$

A continuación denotaremos las derivadas respecto a la nuevas variables, del vector de posición como

$$\mathbf{x}_\alpha \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{u}^\alpha}$$

Entonces en cada sistema de coordenadas tenemos la fórmula de Gauss

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{x}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{x}_{\bar{\lambda}\bar{\epsilon}} = \bar{\Gamma}_{\bar{\lambda}\bar{\epsilon}}^\sigma \mathbf{x}_{\bar{\sigma}} + \bar{b}_{\bar{\lambda}\bar{\epsilon}} \mathbf{n}.$$

Utilizando la regla de la cadena

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_{\bar{\lambda}} \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha}$$

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{\bar{\lambda}\bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\epsilon}{\partial u^\beta} + \mathbf{x}_{\bar{\sigma}} \frac{\partial^2 \bar{u}^\sigma}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

Sustituyendo para  $\mathbf{x}_{\alpha\beta}$

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = [\bar{\Gamma}_{\bar{\lambda}\bar{\epsilon}}^\sigma \mathbf{x}_{\bar{\sigma}} + \bar{b}_{\bar{\lambda}\bar{\epsilon}} \mathbf{n}] \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\epsilon}{\partial u^\beta} + \mathbf{x}_{\bar{\sigma}} \frac{\partial^2 \bar{u}^\sigma}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

Por el hecho que los vectores  $\mathbf{x}_\sigma, \mathbf{n}$  son linealmente independientes, se pueden igualar las componentes y por lo tanto

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{x}_\gamma = \bar{\Gamma}_{\bar{\lambda}\bar{\epsilon}}^\sigma \mathbf{x}_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\epsilon}{\partial u^\beta} + \mathbf{x}_{\bar{\sigma}} \frac{\partial^2 \bar{u}^\sigma}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

Usando el hecho que

$$\mathbf{x}_\gamma = \mathbf{x}_{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{u}^\sigma}{\partial u^\gamma}$$

implica

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \bar{u}^\sigma}{\partial u^\gamma} = \bar{\Gamma}_{\bar{\lambda}\bar{\epsilon}}^\sigma \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\epsilon}{\partial u^\beta} + \frac{\partial^2 \bar{u}^\sigma}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

que es la regla de transformación para los símbolos de Christoffel. Despejando las segundas derivadas parciales se concluye que

$$\frac{\partial^2 \bar{u}^\sigma}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \bar{u}^\sigma}{\partial u^\gamma} - \bar{\Gamma}_{\bar{\lambda}\bar{\epsilon}}^\sigma \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\epsilon}{\partial u^\beta} \quad (\text{B.12})$$

## B.2. Derivada Covariante

El propósito de definir la derivada covariante, es porque notamos que el proceso de derivar por ejemplo el vector contravariante  $a_{,\beta}^{\alpha}$ , no es un tensor, es decir no cumple las reglas de transformación para tensores bajo cambios de coordenadas. Por ejemplo si tenemos el vector contravariante  $a^{\alpha}$  tal que

$$\bar{a}^{\alpha} = a^{\beta} \frac{\partial \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\beta}}$$

tomando la derivada parcial con respecto a  $\bar{u}^p$  se obtiene

$$\frac{\partial \bar{a}^{\alpha}}{\partial \bar{u}^p} = \frac{\partial a^{\beta}}{\partial u^{\sigma}} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^p} \frac{\partial \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\beta}} + a^{\kappa} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\kappa} \partial u^{\sigma}} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^p}.$$

Utilizando (B.12) para las segundas derivadas se tienen que

$$\frac{\partial \bar{a}^{\alpha}}{\partial \bar{u}^p} = \frac{\partial a^{\beta}}{\partial u^{\sigma}} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^p} \frac{\partial \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\beta}} + a^{\kappa} \left[ \Gamma_{\kappa\sigma}^{\beta} \frac{\partial \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\beta}} - \bar{\Gamma}_{\tau\epsilon}^{\alpha} \frac{\partial \bar{u}^{\tau}}{\partial u^{\kappa}} \frac{\partial \bar{u}^{\epsilon}}{\partial u^{\sigma}} \right] \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^p}$$

Usando el hecho que  $a^{\kappa} \frac{\partial \bar{u}^{\tau}}{\partial u^{\kappa}} = \bar{a}^{\tau}$  y  $\frac{\partial \bar{u}^{\epsilon}}{\partial u^{\sigma}} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^p} = \bar{\delta}_{\rho}^{\epsilon}$ , implica

$$\frac{\partial \bar{a}^{\alpha}}{\partial \bar{u}^p} = \left( \frac{\partial a^{\beta}}{\partial u^{\sigma}} + a^{\kappa} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\beta} \right) \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^p} \frac{\partial \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\beta}} - \bar{a}^{\tau} \bar{\Gamma}_{\tau\rho}^{\alpha}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial \bar{a}^{\alpha}}{\partial \bar{u}^p} + \bar{a}^{\tau} \bar{\Gamma}_{\tau\rho}^{\alpha} = \left( \frac{\partial a^{\beta}}{\partial u^{\sigma}} + a^{\kappa} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\beta} \right) \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^p} \frac{\partial \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\beta}}.$$

Si usamos la notación

$$\bar{a}_{,\rho}^{\alpha} = \frac{\partial \bar{a}^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\rho}} + \bar{a}^{\tau} \bar{\Gamma}_{\tau\rho}^{\alpha}$$

$$a_{,\sigma}^{\beta} = \frac{\partial a^{\beta}}{\partial u^{\sigma}} + a^{\kappa} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\beta}$$

observamos que la cantidad  $a_{,\sigma}^{\beta}$  se transforma como un vector mixto de orden dos

$$\bar{a}_{,\rho}^{\alpha} = a_{,\sigma}^{\beta} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^{\rho}} \frac{\partial \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\beta}}$$

De esta manera se ha encontrado una manera de obtener tensores de orden más alto mediante el proceso de derivación. La expresión

$$a_{,\sigma}^{\beta} = a_{,\sigma}^{\beta} + a^{\kappa} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\beta} \tag{B.13}$$

se llama derivada covariante del vector  $\bar{a}^\beta$ , en notación más compacta. De igual forma se puede demostrar que

$$a_{\beta;\sigma} = a_{\beta,\sigma} - a_\kappa \Gamma_{\beta\sigma}^\kappa \quad (\text{B.14})$$

Para tensores de orden 2 se tiene que

$$a_{\alpha\beta;\sigma} = a_{\alpha\beta,\sigma} - a_{\gamma\beta} \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma - a_{\alpha\gamma} \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma \quad (\text{B.15})$$

$$a^{\alpha\beta}_{;\sigma} = a^{\alpha\beta}_{,\sigma} + a^{\gamma\beta} \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha + a^{\alpha\gamma} \Gamma_{\sigma}^\beta \quad (\text{B.16})$$

$$a^\beta_{\alpha;\sigma} = a^\beta_{\alpha,\sigma} + a^\gamma_\alpha \Gamma_{\sigma}^\beta - a^\alpha_\gamma \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma. \quad (\text{B.17})$$

Estas expresiones se pueden generalizar para tensores de orden más alto, pero para propósitos de la tesis estas nos bastan. Entre las propiedades de la derivada covariante, se tienen que cumple con las reglas del producto y la suma de manera análoga a la derivada del cálculo diferencial.

Notamos que la derivada covariante del tensor métrico vale cero por lo siguiente:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta;\kappa} &= g_{\alpha\beta,\kappa} - g_{\gamma\beta} \Gamma_{\alpha\kappa}^\gamma - g_{\alpha\gamma} \Gamma_{\beta\kappa}^\gamma = g_{\alpha\beta,\kappa} - (\Gamma_{\alpha\kappa\beta} + \Gamma_{\beta\kappa\alpha}) = 0 \\ g_{\alpha\beta;\kappa} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Donde se usó la fórmula (B.8).

### B.3. Parámetros Diferenciales de Beltrami

Si definimos dos funciones escalares sobre la superficie,  $f(u^1, u^2)$ ,  $w(u^1, u^2)$ , entonces sus derivadas covariantes coinciden con las derivadas parciales,

$$f_{;\alpha} = f_{,\alpha} \quad w_{;\alpha} = w_{,\alpha}$$

son un par de vectores covariantes. Luego entonces la expresión

$$\nabla f \cdot \nabla w = g^{\alpha\beta} f_{;\alpha} w_{;\beta}$$

forma un invariante con respecto a cambios de coordenadas. Además

$$|\nabla f|^2 = g^{\alpha\beta} f_{;\alpha} f_{;\beta}$$

es el cuadrado del gradiente. Se puede generalizar el Laplaciano para sistemas de coordenadas arbitrarios.

$$\Delta f = (g^{\alpha\beta} f_{;\alpha})_{;\beta} = g^{\alpha\beta} f_{;\alpha\beta}$$

### B.4. Formulas de Mainardi-Codazzi

Surge la siguiente pregunta, si conocemos  $g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ ,  $b_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$  la primera y segunda formas fundamentales, ¿ Existirá siempre una solución al sistema de ecuaciones diferenciales parciales dadas por la fórmula de Weingarten (B.3) y la fórmula de Gauss (B.4)? La respuesta es no , a menos que se impongan ciertas condiciones de integrabilidad. La primera de ellas es la fórmula de Mainardi-Codazzi. La otra es la fórmula de Gauss para la curvatura. La teoría de las ecuaciones en derivadas parciales dice que si estas condiciones se cumplen , entonces la solución existe en una vecindad de un punto del dominio.

Si suponemos que las soluciones son al menos  $C^3$ , entonces se debe tener que

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{\alpha\beta}}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial \mathbf{x}_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta}$$

Estas relaciones se pueden escribir de la forma

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta\lambda} = \mathbf{x}_{\alpha\lambda\beta}.$$

Determinando  $\mathbf{x}_{\alpha\beta\lambda}$  al derivar (B.4) encontramos que

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa}{\partial u^\lambda} \mathbf{x}_\kappa + \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \mathbf{x}_{\kappa\lambda} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\lambda} \mathbf{n} + b_{\alpha\beta} \mathbf{n}_{\lambda}.$$

Usando el hecho que  $\mathbf{n}_\lambda = -b_\lambda^\tau \mathbf{x}_\tau$ , y  $\mathbf{x}_{\kappa\lambda} = \Gamma_{\kappa\lambda}^\sigma \mathbf{x}_\sigma + b_{\kappa\lambda} \mathbf{n}$ , la expresion anterior se escribe como

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa}{\partial u^\lambda} \mathbf{x}_\kappa + \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa [\Gamma_{\kappa\lambda}^\sigma \mathbf{x}_\sigma + b_{\kappa\lambda} \mathbf{n}] + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\lambda} \mathbf{n} - b_{\alpha\beta} b_\lambda^\tau \mathbf{x}_\tau.$$

Intercambiando términos y cambiando algunos índices se obtienen

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta\lambda} = \left[ \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma}{\partial u^\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \Gamma_{\kappa\lambda}^\sigma - b_{\alpha\beta} b_\lambda^\sigma \right] \mathbf{x}_\sigma + \left[ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho b_{\rho\lambda} \right] \mathbf{n}.$$

Si intercambiamos los índices  $\beta, \lambda$

$$\mathbf{x}_{\alpha\lambda\beta} = \left[ \frac{\partial \Gamma_{\alpha\lambda}^\sigma}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\kappa \Gamma_{\kappa\beta}^\sigma - b_{\alpha\lambda} b_\beta^\sigma \right] \mathbf{x}_\sigma + \left[ \frac{\partial b_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho b_{\rho\beta} \right] \mathbf{n}.$$

Si queremos que  $\mathbf{x}_{\alpha\beta\lambda} - \mathbf{x}_{\alpha\lambda\beta} = 0$ , y como  $\mathbf{x}_\sigma, \mathbf{n}$  son linealmente independientes, entonces la diferencia de cada coeficiente debe ser cero. En el caso de  $\mathbf{n}$

$$b_{\rho\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - b_{\rho\beta} \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial b_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta} = 0.$$



El hecho que las derivadas covariantes del tensor de curvatura están dadas por

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta;\lambda} &= b_{\alpha\beta,\lambda} - b_{\rho\beta}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\rho} - b_{\alpha\rho}\Gamma_{\lambda\beta}^{\rho} \\ b_{\alpha\lambda;\beta} &= b_{\alpha\lambda,\beta} - b_{\rho\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} - b_{\alpha\rho}\Gamma_{\beta\lambda}^{\rho} \end{aligned}$$

implica que la ecuación anterior es equivalente a

$$b_{\alpha\beta;\lambda} - b_{\alpha\lambda;\beta} = 0 \quad (\text{B.19})$$

que es la ecuación de Mainardi-Codazzi. Igualando a cero los coeficientes de  $x_{\sigma}$  se obtiene

$$R^{\sigma}{}_{\alpha\lambda\beta} = b_{\alpha\beta}b_{\lambda}^{\sigma} - b_{\alpha\lambda}b_{\beta}^{\sigma}$$

o bien si multiplicamos por el tensor métrico  $g_{\sigma\tau}$  se tiene

$$R_{\tau\alpha\lambda\beta} = b_{\alpha\beta}b_{\lambda\tau} - b_{\alpha\lambda}b_{\beta\tau} \quad (\text{B.20})$$

donde

$$R^{\sigma}{}_{\alpha\lambda\beta} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial u^{\lambda}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\kappa}\Gamma_{\kappa\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\kappa}\Gamma_{\kappa\beta}^{\sigma}$$

es el llamado tensor mixto de curvatura de Riemman, y la ecuación como fórmula de curvatura de Gauss.

De la ecuación (B.20) se nota que el primer par de índices y el segundo par de índices pueden ser intercambiados sin alterar el valor de las componentes, es decir

$$R_{\tau\alpha\lambda\beta} = R_{\lambda\beta\tau\alpha}$$

Además el tensor debe ser antisimétrico respecto a los primeros índices

$$R_{\tau\alpha\lambda\beta} = -R_{\alpha\tau\lambda\beta}$$

así como con respecto a los últimos dos

$$R_{\tau\alpha\lambda\beta} = -R_{\tau\alpha\beta\lambda}$$

Las ecuaciones (B.19) y (B.20) constituyen las ecuaciones de compatibilidad, y son las condiciones necesarias para que las fórmulas de Gauss (B.4) y Weingarten (B.3) sean integrables. La ecuación (B.20) se necesita reescribir, para ello definiremos el tensor de permutación

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & g^{1/2} \\ -g^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -g^{-1/2} \\ g^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por  $g_{\sigma\tau}$  la ecuación (B.20)

$$g_{\sigma\tau} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial u^{\lambda}} - g_{\sigma\tau} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\kappa} \Gamma_{\kappa\lambda\tau} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\kappa} \Gamma_{\kappa\beta\tau} = b_{\alpha\beta} b_{\lambda\tau} - b_{\alpha\lambda} b_{\beta\tau} \quad (\text{B.21})$$

y notando que

$$g_{\sigma\tau} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial u^{\lambda}} = \frac{\partial g_{\sigma\tau} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial u^{\lambda}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} g_{\sigma\tau,\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\tau}}{\partial u^{\lambda}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} (\Gamma_{\sigma\lambda\tau} + \Gamma_{\tau\lambda\sigma})$$

donde se usó (B.7), además

$$g_{\sigma\tau} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma}}{\partial u^{\beta}} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\lambda\tau}}{\partial u^{\beta}} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} (\Gamma_{\sigma\beta\tau} + \Gamma_{\tau\beta\sigma})$$

sustituyendo en (B.21)

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\tau}}{\partial u^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\lambda\tau}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\tau\beta\sigma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \Gamma_{\tau\lambda\sigma} = b_{\alpha\beta} b_{\lambda\tau} - b_{\alpha\lambda} b_{\beta\tau} \quad (\text{B.22})$$

Tenemos la siguiente observación

**Observación B.1** Sea la ecuación  $T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha} = 0$  para  $\alpha \neq \beta$ , entonces dicha ecuación es equivalente a  $\varepsilon^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0$ .

**Prueba.** Desarrollando se tiene

$$\varepsilon^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \varepsilon^{12} T_{12} + \varepsilon^{21} T_{21} = \varepsilon^{12} (T_{12} - T_{21}) = -\varepsilon^{12} (T_{21} - T_{12}) = 0$$

y por lo tanto

$$T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha} = 0$$

para  $\alpha \neq \beta$ . ■

Por las propiedades de antisimetría del tensor  $R_{\tau\alpha\lambda\beta}$ , implica que es cero si  $\tau = \alpha$  ó  $\beta = \lambda$ , por lo tanto la única ecuación no trivial es cuando  $\tau \neq \alpha$  y  $\beta \neq \lambda$ .

Multiplicando (B.22) por  $\varepsilon^{\alpha\tau} \varepsilon^{\beta\lambda}$  se escribe la única ecuación no trivial como

$$\varepsilon^{\alpha\tau} \varepsilon^{\beta\lambda} \left[ \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\tau}}{\partial u^{\lambda}} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\tau\beta\sigma} + b_{\alpha\lambda} b_{\beta\tau} \right] = 0$$

Expandiendo las sumas

$$\Gamma_{112,2} - \Gamma_{122,1} - \Gamma_{211,2} + \Gamma_{221,1} + \Gamma_{12}^{\sigma} \Gamma_{21\sigma} - \Gamma_{22}^{\sigma} \Gamma_{11\sigma} - \Gamma_{11}^{\sigma} \Gamma_{22\sigma} + \Gamma_{21}^{\sigma} \Gamma_{12\sigma}$$

$$+b_{12}b_{12} - b_{11}b_{22} - b_{22}b_{11} + b_{21}b_{21} = 0$$

Por (B.9) se pueden calcular los símbolos de Chirstoffel en cada caso

$$\Gamma_{\alpha\beta\tau,\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\beta\tau,\alpha\lambda} + g_{r\alpha,\beta\lambda} - g_{\alpha\beta,r\lambda})$$

$$\Gamma_{112,2} = \frac{1}{2}(g_{12,12} + g_{21,12} - g_{11,22})$$

$$\Gamma_{221,1} = \frac{1}{2}(g_{21,21} + g_{12,21} - g_{22,11})$$

$$-\Gamma_{122,1} = -\frac{1}{2}(g_{22,11} + g_{21,21} - g_{12,21})$$

$$-\Gamma_{211,2} = -\frac{1}{2}(g_{11,22} + g_{12,12} - g_{21,12})$$

y la suma vale

$$g_{12,21} + g_{21,12} - g_{11,22} - g_{22,11}.$$

Por lo que la ecuación de compatibilidad toma la forma

$$2(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{12}) = g_{12,21} + g_{21,12} - g_{11,22} - g_{22,11} + 2g_{\lambda\mu} (\Gamma_{12}^{\mu}\Gamma_{21}^{\lambda} - \Gamma_{11}^{\mu}\Gamma_{22}^{\lambda})$$

$$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{12} = \frac{1}{2}(g_{12,21} + g_{21,12} - g_{11,22} - g_{22,11}) + g_{\lambda\mu} (\Gamma_{12}^{\mu}\Gamma_{21}^{\lambda} - \Gamma_{11}^{\mu}\Gamma_{22}^{\lambda}) \quad (\text{B.23})$$

## B.5. Métrica de la Superficie Media

El sistema de coordenadas utilizado en la descripción de cáscaras consta de los parámetros que describen la superficie media ( $u^1, u^2$ ) y una componente que es perpendicular a la superficie media  $u$ . Llamaremos  $E_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}$ , la primera y segunda formas fundamentales de la superficie media. Se quiere demostrar que la métrica en este sistema de coordenadas está dada por

$$G_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} - 2uL_{\alpha\beta} + u^2M_{\alpha\beta}, \quad G_{3\alpha} = G_{\alpha 3} = 0, \quad G_{33} = 1 \quad (\text{B.24})$$

Sea  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + u\mathbf{n}$ , que es la descripción del sistema de coordenadas.

Encontrando los vectores tangentes

$$\mathbf{y}_{\alpha} = \mathbf{x}_{\alpha} + u\mathbf{n}_{\alpha} + \delta_{\alpha}^3\mathbf{n}$$

$$\mathbf{y}_\beta = \mathbf{x}_\beta + u\mathbf{n}_\beta + \delta_\beta^3 \mathbf{n}$$

porque  $u_{,\alpha} = \delta_\alpha^3$ . Tomando el producto

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_\alpha \cdot \mathbf{y}_\beta &= \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta + u(\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta + \mathbf{x}_\beta \cdot \mathbf{n}_\alpha) + u^2 \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta + \\ &\mathbf{n} \cdot (\delta_\beta^3 \mathbf{x}_\alpha + \delta_\alpha^3 \mathbf{x}_\beta) + u\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_\alpha \delta_\beta^3 + \delta_\alpha^3 \mathbf{n}_\beta) + \delta_\alpha^3 \delta_\beta^3 \end{aligned}$$

Por la ortogonalidad  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_\alpha = 0$ , la fórmula de Weingarten  $\mathbf{n}_\alpha = c_\alpha^\sigma \mathbf{x}_\sigma$  y el hecho que  $-L_{\alpha\beta} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta$ , la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_\alpha \cdot \mathbf{y}_\beta &= \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta + u(\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta + \mathbf{x}_\beta \cdot \mathbf{n}_\alpha) + u^2 \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta + \delta_\alpha^3 \delta_\beta^3 \\ G_{\alpha\beta} &= E_{\alpha\beta} - 2uL_{\alpha\beta} + u^2 M_{\alpha\beta} + \delta_\alpha^3 \delta_\beta^3 \end{aligned}$$

donde  $M_{\alpha\beta} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta$ . Del hecho que  $\mathbf{x}, \mathbf{n}$  no dependen de  $u$  se sigue el resultado.

Una consecuencia inmediata es para los símbolos de Christoffel con un índice igual a 3

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = \frac{1}{2} G^{3\lambda} (G_{\alpha\lambda,\beta} + G_{\lambda\beta,\alpha} - G_{\beta\alpha,\lambda}).$$

del hecho que  $G^{3\lambda} = \delta_3^\lambda$  se tiene

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = \frac{1}{2} (G_{\alpha 3,\beta} + G_{3\beta,\alpha} - G_{\beta\alpha,3}).$$

Los dos primeros términos son cero por ser constantes y la derivada  $(G_{\alpha\beta,3})_{u=0} = -2L_{\alpha\beta}$ , por lo que en  $u = 0$

$$(\Gamma_{\alpha\beta}^3)_{u=0} = L_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.25})$$

De igual forma

$$\Gamma_{\alpha 3}^\beta = \frac{1}{2} G^{\beta\lambda} (G_{\alpha\lambda,3} + G_{\lambda 3,\alpha} - G_{3\alpha,\lambda}) = \frac{1}{2} G^{\beta\lambda} G_{\alpha\lambda,3}$$

implica

$$(\Gamma_{\alpha 3}^\beta)_{u=0} = (\Gamma_{3\alpha}^\beta)_{u=0} = -L_\alpha^\beta \quad (\text{B.26})$$

Con esta métrica los símbolos de Christoffel con índice 3 doble son cero: la demostración se sigue de la fórmula para los símbolos de Christoffel (B.10) calculados con la métrica de la superficie media (B.24)

$$\Gamma_{jk}^k = \frac{1}{2} G^{k\lambda} (G_{j\lambda,k} + G_{\lambda k,j} - G_{kj,\lambda})$$

con  $k = 3$

$$\Gamma_{j3}^3 = \frac{1}{2} G^{3\lambda} (G_{j\lambda,3} + G_{\lambda 3,j} - G_{3j,\lambda})$$

Y del hecho que sólo  $G^{33} = 1$  es diferente de cero y constante, sus derivadas se anulan y por lo tanto

$$\Gamma_{j3}^3 = \frac{1}{2} (G_{j3,3} + G_{33,j} - G_{3j,3}) = 0$$

Por la simetría en los índices inferiores

$$\Gamma_{3j}^3 = 0.$$

De igual forma

$$\Gamma_{jj}^k = \frac{1}{2} G^{k\lambda} (G_{j\lambda,j} + G_{\lambda j,j} - G_{jj,\lambda})$$

con  $j = 3$

$$\Gamma_{33}^k = \frac{1}{2} G^{k\lambda} (G_{3\lambda,3} + G_{\lambda 3,3} - G_{33,\lambda}) = 0$$

porque  $G_{33} = 1$  una constante. Por lo tanto

$$\Gamma_{j3}^3 = \Gamma_{3j}^3 = \Gamma_{33}^j = 0 \quad (\text{B.27})$$

## B.6. Geometría de la Esfera

Tomemos la representación en coordenadas esféricas dada por

$$\mathbf{x} = R \begin{pmatrix} \text{sen}\theta \cos\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_\theta = R \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta \text{sen}\phi \\ -\text{sen}\theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_\phi = R \begin{pmatrix} -\text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ \text{sen}\theta \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el vector normal dado por  $\mathbf{n} = \frac{1}{R} \mathbf{x}$  y por lo tanto  $\mathbf{n}_\alpha = \frac{1}{R} \mathbf{x}_\alpha$ . La métrica es  $g_{\theta\theta} = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = R^2$ ,  $g_{\phi\phi} = \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = R^2 \text{sen}^2\theta$ , además  $g_{\theta\phi} = 0$ . En forma matricial

$$g_{\alpha\beta} = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

El determinante vale

$$g = R^4 \text{sen}^2\theta.$$

Se observa que la segunda forma fundamental

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta = \frac{-1}{R} \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta = \frac{-1}{R} g_{\alpha\beta} = -R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

Los símbolos de Christoffel los calculamos con la fórmula (B.10), en el caso que  $g_{\alpha\beta} = 0$  para  $\alpha \neq \beta$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa &= \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\beta\alpha,\lambda}) \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\beta &= \frac{1}{2} g^{\beta\beta} (g_{\alpha\beta,\alpha} + g_{\beta\alpha,\alpha} - g_{\alpha\alpha,\beta}) = -\frac{1}{2} g^{\beta\beta} g_{\alpha\alpha,\beta} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} (g_{\alpha\alpha,\beta} + g_{\alpha\beta,\alpha} - g_{\beta\alpha,\alpha}) = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha,\beta} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\beta &= \frac{1}{2} g^{\beta\beta} (g_{\alpha\beta,\beta} + g_{\beta\beta,\alpha} - g_{\beta\alpha,\beta}) = \frac{1}{2} g^{\beta\beta} g_{\beta\beta,\alpha} \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha,\alpha} \end{aligned}$$

En el caso de la esfera, la única dependencia es respecto a  $\theta$  en  $g_{\phi\phi}$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} g_{\theta\theta,\theta} = 0 \\ \Gamma_{\phi\phi}^\phi &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} g_{\phi\phi,\phi} = 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^\phi &= -\frac{1}{2} g^{\phi\phi} g_{\theta\theta,\phi} = 0 \\ \Gamma_{\theta\phi}^\theta &= \Gamma_{\phi\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} g_{\theta\theta,\phi} = 0 \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} g_{\phi\phi,\theta} = -\operatorname{sen}\theta \cos\theta \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} g_{\phi\phi,\theta} = \frac{1}{2R^2 \operatorname{sen}^2\theta} 2R^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \cot\theta \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Para una función definida sobre la esfera  $w \in C_0^2(\Omega)$  su derivada covariante sobre la superficie media se puede calcular por (B.14) como se hace a continuación

$$w_{|\alpha\beta} = (w_{|\alpha})_{|\beta} = (w_{|\alpha})_{,\beta} - w_{,\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$$

Como la derivada covariante de un campo escalar coincide con su derivada parcial, y desarrollando las sumas de índices repetidos para  $\gamma = \theta, \phi$  se tiene que

$$w_{|\alpha\beta} = w_{,\alpha\beta} - w_{,\theta} \Gamma_{\alpha\beta}^\theta - w_{,\phi} \Gamma_{\alpha\beta}^\phi$$

Por la simetría de los símbolos de Christoffel en sus índices inferiores, se sigue que  $w_{|\alpha\beta} = w_{|\beta\alpha}$ . En particular

$$\begin{aligned} w_{|\theta\theta} &= w_{,\theta\theta} - w_{,\theta} \Gamma_{\theta\theta}^\theta - w_{,\phi} \Gamma_{\theta\theta}^\phi = w_{,\theta\theta} \\ w_{|\theta\phi} &= w_{,\theta\phi} - w_{,\theta} \Gamma_{\theta\phi}^\theta - w_{,\phi} \Gamma_{\theta\phi}^\phi = w_{,\theta\phi} - w_{,\phi} \cot\theta \\ w_{|\phi\phi} &= w_{,\phi\phi} - w_{,\theta} \Gamma_{\phi\phi}^\theta - w_{,\phi} \Gamma_{\phi\phi}^\phi = w_{,\phi\phi} + w_{,\theta} \operatorname{sen}\theta \cos\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

El tensor de permutación será útil para escribir las ecuaciones de deformación de manera compacta y realizar varias manipulaciones algebraicas. Se define como

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & g^{1/2} \\ -g^{1/2} & 0 \end{pmatrix} = R^2 \operatorname{sen}\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la derivada covariante del tensor métrico vale

$$\varepsilon_{12|k} = \varepsilon_{12,k} - \varepsilon_{12}\Gamma_{1k}^1 - \varepsilon_{12}\Gamma_{2k}^2$$

con  $k = 1$

$$\varepsilon_{12|1} = \varepsilon_{12,1} - \varepsilon_{12}\Gamma_{21}^2$$

$$\varepsilon_{12|1} = R^2 \cos\theta - R^2 \operatorname{sen}\theta \cot\theta = 0$$

porque  $\Gamma_{11}^1 = 0$ ,  $\Gamma_{21}^2 = \cot\theta$  y  $\varepsilon_{12} = R^2 \operatorname{sen}\theta$ .

Con  $k = 2$

$$\varepsilon_{12|2} = \varepsilon_{12,2} - \varepsilon_{12}\Gamma_{12}^1 - \varepsilon_{12}\Gamma_{22}^2 = 0$$

porque  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \varepsilon_{12,2} = 0$ . Por lo tanto

$$\varepsilon_{\alpha\beta|\gamma} = 0 \tag{B.32}$$

Una identidad útil es la siguiente

$$\varepsilon^{\sigma\kappa}\varepsilon^{\beta\mu} = a^{\sigma\beta}a^{\kappa\mu} - a^{\sigma\mu}a^{\kappa\beta} \tag{B.33}$$

Lo cual se comprueba término por término. Primero el caso que  $\sigma = \kappa$ ,  $\beta = \mu$ , entonces  $\varepsilon^{\sigma\kappa}\varepsilon^{\beta\mu} = 0 = a^{\kappa\mu}a^{\kappa\mu} - a^{\kappa\mu}a^{\kappa\mu} = 0$ , por lo que los únicos términos distintos de cero son para  $\sigma \neq \kappa$ ,  $\beta \neq \mu$ , en ese caso  $\varepsilon^{12}\varepsilon^{12} = \frac{1}{R^4 \operatorname{sen}^2\theta} = a^{11}a^{22} - a^{12}a^{21} = a^{11}a^{22} = \frac{1}{R^4 \operatorname{sen}^2\theta}$ , dado que el tensor métrico es diagonal en el caso de la esfera. De manera similar para cada componente se llega a la identidad.

A continuación mostramos el lema de Ricci en el caso particular de la esfera. Si  $w \in C^3$  definida sobre la esfera, entonces

$$\begin{aligned} w_{|\phi\phi\theta} &= w_{|\phi\theta\phi} - \operatorname{sen}^2\theta w_{,\theta} = w_{|\theta\phi\phi} - \operatorname{sen}^2\theta w_{,\theta} \\ w_{|\theta\theta\phi} &= w_{|\theta\phi\theta} - w_{,\phi} = w_{|\phi\theta\theta} - w_{,\phi}. \end{aligned} \tag{B.34}$$

Los resultados se siguen al desarrollar las derivadas covariantes. Sea  $w_{ij}$  un tensor de segundo orden (que después será  $w_{|ij}$ ), entonces su derivada covariante es

$$(w_{ij})_{|k} = w_{ij,k} - w_{\alpha j} \Gamma_{ik}^{\alpha} - w_{i\alpha} \Gamma_{jk}^{\alpha}.$$

Para cuestiones de cálculo, tenemos la correspondencia entre los índices 1 para la variable  $\theta$  y el índice 2 para la variable  $\phi$ . Además de (B.31),

$$\begin{aligned} w_{11} &= w_{,11} \\ w_{12} &= w_{,12} - w_{,2} \cot \theta \\ w_{22} &= w_{,22} + w_{,1} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \end{aligned}$$

y de (B.30)

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \cot \theta. \end{aligned}$$

En particular

$$w_{22|1} = w_{22,1} - w_{\alpha 2} \Gamma_{21}^{\alpha} - w_{2\alpha} \Gamma_{21}^{\alpha}$$

$$w_{22|1} = (w_{,22} + \operatorname{sen} \theta \cos \theta w_{,1})_{,1} - w_{12} \Gamma_{21}^1 - w_{22} \Gamma_{21}^2 - w_{21} \Gamma_{21}^1 - w_{22} \Gamma_{21}^2$$

$$w_{22|1} = w_{,221} + \operatorname{sen} \theta \cos \theta w_{,11} + (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) w_{,1} - 2(w_{,22} + \operatorname{sen} \theta \cos \theta w_{,1}) \cot \theta$$

$$w_{22|1} = w_{,221} + \operatorname{sen} \theta \cos \theta w_{,11} - w_{,1} - 2w_{,22} \cot \theta$$

donde se usó el hecho  $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = 0$ . Por otro lado

$$w_{21|2} = w_{21,2} - w_{\alpha 1} \Gamma_{22}^{\alpha} - w_{2\alpha} \Gamma_{12}^{\alpha}$$

$$w_{21|2} = (w_{,21} - \cot \theta w_{,2})_{,2} - w_{11} \Gamma_{22}^1 - w_{21} \Gamma_{12}^1 - w_{21} \Gamma_{22}^2 - w_{22} \Gamma_{12}^2$$

$$w_{21|2} = w_{,212} - \cot \theta w_{,22} + w_{11} \operatorname{sen} \theta \cos \theta - (w_{,22} + \operatorname{sen} \theta \cos \theta w_{,1}) \cot \theta$$

$$w_{21|2} = w_{,212} - 2 \cot \theta w_{,22} + w_{11} \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \cos^2 \theta w_{,1}$$

donde se usó el hecho que  $\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = 0$ . Tomando la diferencia

$$w_{|221} - w_{|212} = -(1 - \cos^2 \theta) w_{,1} = -\operatorname{sen}^2 \theta w_{,1}.$$



De manera similar

$$\begin{aligned}w_{11|2} &= w_{11,2} - w_{\alpha 1} \Gamma_{12}^{\alpha} - w_{1\alpha} \Gamma_{12}^{\alpha} \\w_{11|2} &= w_{11,2} - 2(w_{11} \Gamma_{12}^1 + w_{21} \Gamma_{12}^2) \\w_{11|2} &= w_{11,2} - 2(w_{,12} - w_{,2} \cot \theta) \cot \theta \\w_{|112} &= w_{,112} - 2w_{,12} \cot \theta + 2\cot^2 \theta w_{,2}\end{aligned}$$

donde se usó el hecho que  $\Gamma_{12}^1 = 0$ . Por otro lado

$$\begin{aligned}w_{12|1} &= w_{12,1} - w_{\alpha 2} \Gamma_{11}^{\alpha} - w_{1\alpha} \Gamma_{21}^{\alpha} \\w_{|121} &= (w_{,12} - w_{,2} \cot \theta)_{,1} - w_{12} \Gamma_{11}^1 - w_{22} \Gamma_{11}^2 - w_{11} \Gamma_{21}^1 - w_{12} \Gamma_{21}^2 \\w_{|121} &= (w_{,121} + w_{,2} \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} - \cot \theta w_{,21}) - (w_{,12} - \cot \theta w_{,2}) \cot \theta \\w_{|121} &= w_{,121} + w_{,2} \left( \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} + \cot^2 \theta \right) - 2\cot \theta w_{,21}\end{aligned}$$

donde se usó el hecho que  $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$ . Si restamos se tienen

$$\begin{aligned}w_{|112} - w_{|121} &= 2\cot^2 \theta w_{,2} - w_{,2} \left( \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} + \cot^2 \theta \right) \\w_{|112} - w_{|121} &= w_{,2} \left( \cot^2 \theta - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \right) \\w_{|112} - w_{|121} &= w_{,2} \left( \frac{\cos^2 \theta - 1}{\text{sen}^2 \theta} \right) = -w_{,2}.\end{aligned}$$

Por la simetría de  $w_{|ij} = w_{|ji}$  se sigue que  $w_{|\phi\theta\phi} = w_{|\theta\phi\phi}$  y  $w_{|\theta\phi\theta} = w_{|\phi\theta\theta}$ . Con lo que se prueba el resultado.

# Apéndice C

## Programa

En este apéndice se muestra el funcionamiento y código empleado en la obtención de las gráficas. Decidí incluir el programa por el hecho de que no es demasiado extenso y es sencillo conceptualmente, el cual podría ser de interés para las personas que quieran verificar los cálculos. El programa está escrito en Mathematica v.5.

### C.1. Descripción de Funciones

- $c[k_, m_, z0_]$ , esta función calcula las constantes de normalización dados un ángulo  $z_0 = \cos\theta_0$  y enteros  $k, m$  donde  $\theta_0$  es la apertura del cascarón,  $k, m$  son los modos de las funciones de Legendre.
- $Generate[kf_, mf_, \theta_0_]$ , esta función calcula los valores propios  $\mu[k, m]$  para valores de  $k, m$  en el intervalo  $k \in [1, kf], m \in [0, mf]$ . La idea que se usa para construir los valores propios consiste en empezar para  $z_0 = \cos\theta_0 = 0$  es decir a un ángulo de  $\pi/2$  puesto que se sabe que a dicho ángulo los valores propios están dados por  $\nu[k, m] = m + 2k - 1$ . después se varía  $z_0$  y se calculan las raíces de la funciones de Legendre con la condición inicial de la raíz anterior hasta llegar al valor del ángulo de interés. Los valores propios son guardados en la matriz  $\mu[k, m]$  de dimensión  $kf, mf + 1$ , posteriormente se utilizará un algoritmo para ordenar este arreglo en orden creciente.

- $\alpha[n-, kf-, mf-]$ , esta función tiene como entrada  $n$  indicando que se pide información respecto al  $n$ -ésimo valor propio de la matriz de valores propios  $\mu[k, m]$ . Tiene como salida el valor de  $\alpha$  y el modo que corresponde al  $n$ -ésimo valor propio, es decir los enteros  $k, m$ . Para lograr su propósito se auxilia de la función  $Modos[z-, kf-]$ .
  
- $Definitions[\alpha l-, \epsilon\theta-, \xi-]$  tiene como propósito encontrar las ecuaciones de Gauss y Weingarten en la variable  $\theta$  para la esfera deformada. Toma como argumentos el parámetro  $\alpha$  correspondiente al espesor de la placa y  $\epsilon\theta$ , que representa la vecindad alrededor del polo de la esfera, donde se dan las condiciones iniciales del sistema,  $\xi$  que es el valor de la perturbación. En lo que respecta a las variables internas,  $r$  son las coordenadas de la esfera unitaria,  $w, f$  son las funciones de curvatura y esfuerzos respectivamente dadas por las funciones de Legendre,  $\lambda[k, m]$  es la presión crítica en el modo correspondiente,  $a[\alpha, \beta], ai[\alpha, \beta]$  son el tensor métrico y su recíproco de la esfera no deformada,  $g[\alpha, \beta], gi[\alpha, \beta]$  son el tensor métrico y su recíproco de la esfera deformada,  $\Gamma e[\alpha, \beta, \kappa]$  son los símbolos de Christoffel de la esfera unitaria,  $\Gamma[\alpha, \beta, \kappa]$  son los símbolos de Christoffel de la esfera deformada,  $F[\alpha, \beta] = \hat{f}_{\alpha\beta}$ .
  
- $SolveEquations[\theta 0-, \epsilon\theta-]$ , esta función resuelve las ecuaciones de Gauss en la variable  $\theta$ . Tiene como entrada la apertura del cascarón  $\theta_0$ , y el diámetro de la vecindad en el polo  $\epsilon\theta$  y como salida da la superficie paramétrica  $\mathbf{x}(\theta, \phi) = (x^1, x^2, x^3)$

A continuación se presenta el código.

## C.2. Código

```

c[k_, m_, z0_] := (1 / (π μ[k, m] (μ[k, m] - 2) N[ ∫z01 LegendreP[ν[k, m], m, z]2 dz ]))1/2
Generate[kf_, mf_, θ0_] := Block[{v0, dv, r, A = {}, z0, x, m, k},
  If[θ0 > π/11,
    dv = .5, dv = .25];
    z0 = Cos[θ0];
  Do[
    v0 = m + 2 k - 1;
    Do[
      v0 = v0 + dv;
      While[ LegendreP[v0, m, z0] LegendreP[v0 + dv, m, z0] > 0, v0 = v0 + dv];
      r = FindRoot[ LegendreP[x, m, z0], {x, v0}, AccuracyGoal -> 5, MaxIterations -> 1000];
      v0 = x /. r;
      ν[k, m] = v0;
      μ[k, m] = v0 (v0 + 1);
      , {k, 1, kf}], {m, 0, mf}];
  Do[c[k, m] = c[k, m, z0], {k, kf}, {m, 0, mf}];
  Print[Table[μ[k, m], {k, kf}, {m, 0, mf}]];
];
alfa[n_, kf_, mf_] := Block[{A, B, ord},
  A = Table[μ[k, m], {m, 0, mf}, {k, 1, kf}];
  B = Sort[Flatten[A]];
  ord = Ordering[Flatten[A]];
  If[n < Length[B] - 1,
    {Floor[ 1/2 (√(B[[n]] B[[n+1]] + √(B[[n+1]] B[[n+2]])) ]], Modos[ord[[n+1]], kf]}];
];
Modos[z_, kf_] := Block[{n, m},
  n = Mod[z, kf];
  m = Quotient[z, kf];
  {n + kf DiscreteDelta[n], m - DiscreteDelta[n]}
];

```

```

Definitions[ $\alpha$ _,  $\epsilon\theta$ _,  $\zeta$ _] :=
Block[{r, LegInt, w, f,  $\lambda$ , G, a, ai, Fe, F, DerCov2, F, g, b, Gi, eq, Rt, v0, a0},
r[0] = R[Sin[u[1]] Cos[u[2]], Sin[u[1]] Sin[u[2]], Cos[u[1]]];
r[1] = D[r[0], u[1]];
r[2] = D[r[0], u[2]];
LegInt = FunctionInterpolation[LegendreP[v[k, m], m, Cos[ $\theta$ ]], { $\theta$ ,  $\epsilon\theta$ ,  $\theta\theta$ };
w[ $\theta$ _,  $\phi$ _] :=  $\xi$  c[k, m] LegInt[ $\theta$ ] Cos[m  $\phi$ ];
f[ $\theta$ _,  $\phi$ _] :=  $\frac{-a\theta}{\mu[k, m]} w[\theta, \phi]$ ;
 $\lambda$ [_, n_] :=  $\mu$ [1, n] +  $\frac{\alpha\theta^2}{\mu$ [1, n];
G = {{1, 0}, {0, Sin[u[1]]^2}};
a[ $\alpha$ _,  $\beta$ _] := G[[ $\alpha$ ]][[ $\beta$ ]];
ai[ $\alpha$ _,  $\beta$ _] := Inverse[G][[ $\alpha$ ]][[ $\beta$ ]];
Fe[ $\alpha$ _,  $\beta$ _, j_] :=  $\sum_{\lambda=1}^2 ai[\lambda, j] \frac{1}{2} (D[Evaluate[a[\beta, \lambda]], u[\alpha]] + D[Evaluate[a[\lambda, \alpha]], u[\beta]] -$ 
D[Evaluate[a[ $\alpha$ ,  $\beta$ ]], u[ $\lambda$ ]]);
F[ $\alpha$ _,  $\beta$ _, k_] :=  $\sum_{\lambda=1}^2 gi[\lambda, k] \frac{1}{2} (D[Evaluate[g[\beta, \lambda]], u[\alpha]] + D[Evaluate[g[\lambda, \alpha]], u[\beta]] -$ 
D[Evaluate[g[ $\alpha$ ,  $\beta$ ]], u[ $\lambda$ ]]);
DerCov2[w_,  $\beta$ _,  $\sigma$ _] := D[w, u[ $\beta$ ], u[ $\sigma$ ]] -  $\sum_{j=1}^2 D[w, u[j]] Fe[\beta, \sigma, j]$ ;
F[1, 1] =  $\frac{DerCov2[f[u[1], u[2]], 2, 2]}{Sin[u[1]]^2}$ ;
F[2, 2] = Sin[u[1]]^2 DerCov2[f[u[1], u[2]], 1, 1];
F[1, 2] = -DerCov2[f[u[1], u[2]], 1, 2];
F[2, 1] = F[1, 2];

Fti = (1 - v0 (1 +  $\mu$ [k, m])) f[u[1], u[2]];
Do[g[ $\alpha$ ,  $\beta$ ] =  $\frac{2R^2}{\alpha\theta^2} ( (1 + v0) F[\alpha, \beta] + a[\alpha, \beta] Fti) + Rk^2 a[\alpha, \beta], \{\alpha, 1, 2\}, \{\beta, 1, 2\}$ ];
Do[b[ $\alpha$ ,  $\beta$ ] =  $\frac{R}{\alpha\theta} (a[\alpha, \beta] (-\alpha\theta + w[u[1], u[2]]) + DerCov2[w[u[1], u[2]], \alpha, \beta]), \{\alpha, 2\}, \{\beta, 2\}$ ];
Gi = Inverse[Table[g[1, j], {1, 2}, {j, 2}]];
Do[gi[ $\alpha$ ,  $\beta$ ] = Gi[[ $\alpha$ ]][[ $\beta$ ]], { $\alpha$ , 2}, { $\beta$ , 2}];
eq = Flatten[Join[
Table[D[x[1,  $\alpha$ ][u[1]], u[1]] ..
Sum[F[ $\alpha$ , 1,  $\gamma$ ] x[1,  $\gamma$ ][u[1]], { $\gamma$ , 2}] + b[ $\alpha$ , 1] u[1][u[1]], { $\alpha$ , 2}, {1, 3}],
Table[D[m[1][u[1]], u[1]] .. Sum[-gi[ $\alpha$ , k] b[1,  $\sigma$ ] x[i, k][u[1]], {k, 2}, { $\sigma$ , 2}], {1, 3}],
Table[x[1,  $\alpha$ ][ $\epsilon\theta$ ] .. x[ $\alpha$ ][[1]] /. {u[1] -  $\epsilon\theta$ , u[2] -  $\phi$ }, {1, 3}, { $\alpha$ , 2}],
Table[n[1][ $\epsilon\theta$ ] == r[0][[1]]/R /. {u[1] -  $\epsilon\theta$ , u[2] -  $\phi$ }, {1, 3}]
]];
eq //. {v0 -> .25, R -> 1, Rt -> (1 - 2  $\lambda$ [k, m]  $\frac{(1 - v0)}{\alpha\theta^2}$ )1/2,  $\xi$  ->  $\zeta$ , a0 ->  $\alpha$ 1}
];

```

```

SolveEquations[ $\theta_0$ ,  $\epsilon\theta$ ] := Block[{fsup, Superficie, eq, var, sol, eq2, var2, sol2, r}, :
  r[0] = {Sin[u[1]] Cos[u[2]], Sin[u[1]] Sin[u[2]], Cos[u[1]]};
  r[1] = D[r[0], u[1]];
  r[2] = D[r[0], u[2]];

  fsup = {0, 0, 0};
  Superficie = {{}, {}, {}};
  Do[
    eq = Equa /. {u[2] ->  $\phi$ };
    var = Flatten[Join[Table[x[i],  $\alpha$ ], {i, 1, 3}], { $\alpha$ , 1, 2}], Table[u[i], {i, 1, 3}]];
    sol = NDSolve[eq, var, {u[1],  $\epsilon\theta$ ,  $\theta_0$ ]];

    eq2 = Flatten[Join[Table[D[x[i][ $\theta$ ],  $\theta$ ] == (x[i, 1][ $\theta$ ] /. sol[[1]]), {i, 1, 3}],
      Table[x[i][ $\epsilon\theta$ ] == r[0][[i]] /. {u[1] ->  $\epsilon\theta$ , u[2] ->  $\phi$ }, {i, 1, 3}]];
    var2 = Table[x[i], {i, 1, 3}];
    sol2 = NDSolve[eq2, var2, { $\theta$ ,  $\epsilon\theta$ ,  $\theta_0$ ]];

    Table[fsup[[i]] = x[i] /. sol2[[1]], {i, 1, 3}];
  Do[
    AppendTo[Superficie[[i]], { $\theta$ ,  $\phi$ , fsup[[i]][ $\theta$ ] /. sol2[[1]]} ];
    , { $\theta$ ,  $\epsilon\theta$ ,  $\theta_0$ , N[ $\frac{\pi}{60}$ ]}, {i, 1, 3}];
    , { $\phi$ , 0,  $2\pi$ ,  $2\pi/30$ ]];

  Do[fsup[[i]] = Interpolation[Superficie[[i]]], {i, 1, 3}];
  fsup
];

```

### C.3. Ejemplo

Aquí se muestra un ejemplo de como se coordinan las funciones para encontrar la superficie deformada. Se define el valor de la apertura del cascarón  $\theta_0$ , se da el tamaño de la matriz de valores propios  $km, mf$ , se llama a  $Generate[kf, mf, \theta_0]$  para que genere la matriz de valores propios, se define la vecindad en el polo  $\epsilon\theta$ ,  $\alpha[7, kf, mf]$  encuentra un valor de  $\alpha$  apropiado que

presente bifurcación, y el modo que le corresponde, en este caso en particular se busca el séptimo modo bifurcado. *Definitions* $[\alpha, \epsilon\theta, 100]$  obtiene las ecuaciones de Gauss para una perturbación  $\xi = 100$ . Finalmente se resuelven las ecuaciones y se mandan graficar.

```

 $\theta\theta = \frac{\pi}{3};$ 
 $z\theta = \text{Cos}[\theta\theta];$ 
 $kf = 6;$ 
 $mf = 7;$ 
Generate[kf, mf,  $\theta\theta$ ];
Table[alfa[i, kf, mf], {i, 1, 10}]
 $\epsilon\theta = 10^{-4};$ 
 $(\alpha, \{k, m\}) = \text{alfa}[7, kf, mf]$ 
Equa = Definitions[ $\alpha, \epsilon\theta, 100$ ];
Sol[1] = SolveEquations[ $\theta\theta, \epsilon\theta$ ]
ParametricPlot3D[{Sol [1][[1]][ $\theta, \phi$ ], Sol [1][[2]][ $\theta, \phi$ ], Sol [1][[3]][ $\theta, \phi$ ]},
{ $\theta, \epsilon\theta, \theta\theta$ }, { $\phi, 0, 2\pi$ }]

```

# Bibliografía

- [Baginski 1] Frank E. Baginski, **The buckling of elastic spherical caps**, Journal of Elasticity 25,p. 159-192(1991).
- [Baginski 2] Frank E. Baginski, **Ordering the Zeroes of Legendre Functions  $P_{\nu}^m(z_0)$  When Considered as a Function of  $\nu$** . Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 147, 296-308(1990)
- [Baginski 3] Frank E. Baginski, **Axisymmetric and non Axisymmetric Buckled States of a Shallow Spherical Cap**.Quarterly of Applied Mathematics vol. XLVI. No. 2 1988. pp. 331-351
- [Baginski 4] Frank E. Baginski, **The Computation of One-Parameter Families of Bifurcating Elastic Surface**. SIAM J.APPL. MATH. Vol 54. No. 3 pp. 738-773, 1994.
- [Berger] L. Berke and R.L. Carlson, **Experimental studies of the postbuckling behavior of complete spherical shells**, Experimental Mechanics, vol 8(1968),548-553.
- [Canavati] José Ángel Canavati Ayub, **Introducción al Análisis Funcional**, 1998, Fondo de Cultura Económica, México.
- [Ciarlet] P.G. Ciarlet and P. Rabier, **Les equations de Von Kármán**. Springer Mathematics Lecture Notes, Vol 826 Berlin: Springer-Verlag (1980).
- [Ciarlet 2] P.G. Ciarlet & Veronique Lods, **Asymptotic Analysis of Linearly Elastic Shells (Part III, Justification of the Koiter's Shell Equations)**. Arch. Rational Mech. Anal. 136 pg. 191-200 (1996).



- [Dubrovin] Dubrovin/Fomenko/Novikov. **Modern Geometry- Methods and Applications**, Vol 2, Springer-Verlag New York (1992).
- [Iglesias] Iglesias Hernández Marco Antonio, **Deformación de un Cascarón de Cosserat Esférico**, tesis de licenciatura (Física), UNAM, F. Ciencias (2004)
- [Ize 1] Jorge Ize, **Topological Bifurcation**, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications (topological nonlinear analysis), vol 15,p 341-463 (1995).
- [Ize 2] Jorge Ize, **Teoría de Existencia para Ecuaciones en Derivadas Parciales**, [www.fenomec.unam.mx//index.html](http://www.fenomec.unam.mx//index.html), primera versión (2002).
- [Ize 3] Jorge Ize, **Calculo de variaciones**, Serie FENOMEK vol.3 (2002).
- [John] Fritz John, **Estimates for the Derivates of the Stresses in a Thin Shell and Interior Shell Equations**, Pure and Applied Mathematics, vol 18, 235-267(1965).
- [Knightly&Sather] George H. Knightly and D. Sather, **Buckled States of a Spherical Shell under Uniform External Pressure**. Arch. Rational Mech. Anal. vol 6, 315-380 (1980)
- [Koiter] W.T. Koiter, **On the non Linear Theory of Thin Elastic Shells**. Proceedings of the Koninklige Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series B:Physical Sciences (1966) Vol. B-69, p.1-54.
- [Kreyszig] Erwin Kreyszig, **Differential Geometry**, Dover Publications (1964) .
- [Landau] L.D Landau, E.M. Lifshitz, **Theory of Elasticity (Theoretical Physics**, vol 7), Elsevier Science, second edition, (1981).
- [Lebedev] N.N.Lebedev, **Special Functions and their Applications** , Dover Publications (1972).
- [Weinberger] H.F. Weinberger, **A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods**, Wiley, New York, 1965.