Eduardo Noble de la Torre

Ordenando el infinito: Cantor, Dedekind, Zermelo.

Tesis para la obtención del grado de Maestro en Filosofía de la Ciencia

Jurado
Dra. Atocha Aliseda Llera
Dr. Carlos Álvarez Jiménez
Dr. José Alfredo Amor Montaño
Dr. Axel Barceló Aspeitia
Dra. Yolanda Torres Falcón

Director de tesis
Dr. Carlos Álvarez Jiménez

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

2005

Este trabajo ha sido posible gracias a una beca-crédito otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, dentro del marco de Posgrados de excelencia, generación 2002-2004. Asimismo, la Universidad Nacional Autónoma de México, a través de la Dirección General de Estudios de Posgrado, ha contribuido con la asignación de una beca complementaria.

A mis padres y a mis hermanos

Es handelt sich also nur noch darum, ob wir durch eine blosse Erklärung dessen, was eine unendliche Vielheit heisse, im Stande sein werden, zu bestimmen, was ein Unendliches überhaupt sei.

[La cuestión no es otra que saber si con la sola definición de lo que es una multiplicidad infinita estamos en condiciones de determinar lo que en realidad es el infinito.]

Bernard Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen.*

Índice

Introducción

Como todas las historias de que somos capaces, la que aquí ofrecemos es irremediablemente parcial. En un avance vertiginoso, que abarca poco más de medio siglo, la teoría de los conjuntos se convirtió en una prominente rama de las matemáticas. Desde las primeras brillantes intuiciones de Georg Cantor hasta la teoría abstracta de Abraham Fraenkel, los pensadores y autores de esta historia se esforzaron en sistematizar sus conocimientos acerca de las propiedades de los conjuntos para dar forma a un cuerpo teórico suficientemente sólido y atractivamente fructífero, aunque no libre de problemas. No obstante esta labor compartida, el espíritu que motivó la sistematización de la teoría de conjuntos responde a muy distintos intereses, cuyas relaciones, por sí mismas, plantean ya dificultades arduas de exégesis. Cada uno de esos intereses abre una posible línea de interpretación. Hemos creído que apegándonos a una de ellas sería factible incrementar nuestra comprensión del surgimiento de esta teoría matemática desde un punto de vista filosófico, aun cuando el costo de hacerlo fuera renunciar a determinados aspectos que han sido centrales desde otras perspectivas, como pueden ser, por ejemplo, interpretaciones en las que predominan las cuestiones referentes a la fundamentación de las matemáticas ligado al surgimiento de la teoría de conjuntos, o aquellas otras en que la problemática en torno a la hipótesis del continuo figura como hilo conductor. Sin pretender menoscabar su valor, nos hemos atrevido a ignorarlas en nuestra narración por cuestiones de método y de economía.

El objetivo que hemos asumido es arrojar un poco de luz sobre el origen de la teoría de conjuntos. Sin duda serán especialmente sensibles dos ausencias, dada la meta que perseguimos. La intrincada discusión con respecto a la existencia de paradojas en la formulación "*naïve*" ("ingenua") de la teoría cantoriana no tiene lugar en nuestro discurso. Tampoco halla cabida la aparición de los números cardinales transfinitos. Exclusiones tan considerables exigen una mínima explicación. Examinando las fuentes en que aparecen por vez primera algunos conceptos teórico-conjuntistas en la segunda mitad del siglo XIX, y cotejándolas con otras de desarrollos subsecuentes, nos percatamos de que los intentos por dar mayor precisión a las nociones de infinito y de orden podían servir para guiar una reconstrucción sobre el modo en que se gestó la teoría de conjuntos. Esto nos colocaba de manera natural en una posición que privilegia el desarrollo de las características ordinales de los conjuntos, sobre otra en la que se destacan las cardinales. Mientras que nuestro acercamiento a la axiomatización de Ernst Zermelo nos sugería que su preocupación principal era muy distinta a la superación de las contradicciones conjuntistas. Esto nos permitía concebir un comienzo de la teoría de conjuntos en el que no figuraban como personajes centrales ni las paradojas ni los cardinales transfinitos. La obligación por parte nuestra consiste en mostrar lo razonable de aquello que sustentamos, a saber: entre los años de 1872 y 1908, el hecho de que el infinito se constituye como un nuevo objeto matemático radica en que su configuración se establece desde nociones de orden, lo que da origen a una nueva disciplina matemática encargada del estudio de las propiedades y relaciones de ese objeto, disciplina que recibe el nombre de teoría de conjuntos.

El tiempo se encargó de ir incrementando el número de estudiosos que miraban con aprecio esta nueva presencia en las matemáticas. Pero en el periodo que circunscribe nuestra investigación son medulares los pensamientos de Cantor, Dedekind y Zermelo. El análisis de los tres involucra, como esperamos mostrar, el entendimiento de cómo el infinito adquiere carta de ciudadanía en las ciencias formales a finales del siglo XIX, sin que por ello faltaran opositores. Diversos han sido los tipos de fuentes que historiadores y filósofos han consultado en su intento por comprender la profunda transformación que las matemáticas experimentaron en los inicios del siglo XX, de la cual es una parte nuestro tema. Nos hemos mantenido conservadores en el uso de fuentes, pues nos acercamos a los documentos que todo interesado en esta problemática está obligado a interrogar: aquellas publicaciones en que Cantor, Dedekind y Zermelo expusieron sus ideas. Sólo hemos introducido una modesta variante en su tratamiento. En tanto comunicaciones matemáticas, los escritos que interpelamos son, en su mayoría, una relación de "axiomas", teoremas y definiciones protegidos tras las demostraciones pertinentes; son, en suma, un conjunto de resultados que encuentra su base justificativa en las demostraciones ofrecidas. La decisión que hemos tomado consiste en concebir esas demostraciones no como el fundamento racional gracias al cual una proposición se transforma en un teorema, esto es, en un resultado exitoso de la investigación científica, sino como procesos de búsqueda dentro de un marco conceptual inicial más amplio que la sucinta afirmación del teorema objeto de prueba. No significa que estemos rechazando el hecho innegable de que la demostración justifica al teorema, papel que indispensablemente debe cumplir; pero creemos que otro papel también le es inherente, uno que apunta hacia la posibilidad de delinear un nuevo marco conceptual en el que se inserte el teorema.

En conformidad con lo anterior, la estructuración de las demostraciones en las que nos hemos detenido a lo largo de este trabajo obedece a los intereses y objetivos de investigación de sus autores. Aunque es preciso reconocer sin más demora que la generalidad de lo que ahora decimos es en extremo restringida, nuestra ambición no es tan grande como para albergar el deseo de defender una teoría acerca de lo que es o debe ser una demostración matemática, aun cuando sabemos que hay demostraciones que cumplen cabalmente el papel antes descrito, papel que sólo en una investigación histórica puede aparecer con claridad. Trabajando bajo este supuesto en el periodo y tema que estudiamos, parecen hallar un lugar coherente dentro de esta historia algunos hechos, como la reformulación en 1879 que Cantor hace de su prueba sobre la no numerabilidad del conjunto de números reales, que de otra manera se presentan como marginales.

El capítulo primero contiene lo que a nuestro entender constituye el marco conceptual inicial del que hablamos antes. Los límites más amplios que posee se establecen por el desarrollo de la aritmética en la segunda mitad del siglo XIX, y que encuentra sus raíces a principios del mismo. El momento culminante de ese desarrollo, de cara a nuestros intereses, está representado por el trabajo de Dedekind publicado el año de 1872. La oposición al empleo de métodos geométricos en la aritmética va a motivar el tratado de Dedekind. Esta oposición se concentra especialmente en la posibilidad de describir satisfactoriamente la propiedad de continuidad por medio de herramientas puramente aritméticas. El estudio de la continuidad desde un punto de vista aritmético especifica los límites del marco conceptual al que hemos aludido. El pensamiento de Cantor también ha marchado hacia este rumbo en el mismo año, aunque defenderemos que su posición es ambivalente, pues aun cuando se esfuerza por aritmetizar la continuidad no logra echar por tierra todo el lastre geométrico. El problema de precisar lo que es la continuidad se aborda, no obstante, desde un enfoque similar por ambos matemáticos, pues el planteamiento consiste en analizar la estructura de un intervalo $[\alpha, \beta]$ con el fin de descubrir las características que lo hacen un dominio continuo. Es importante enfatizar que en el pensamiento de Cantor anterior a 1882 la noción de conjunto continuo se identifica con este tipo de intervalos, con lo cual en el examen de la propiedad de continuidad va a dedicarse especial atención al comportamiento del "conjunto continuo" [0, 1]. Esto nos dará los elementos suficientes para presentar e interpretar los tres primeros teoremas conjuntistas que Cantor demuestra, no sin ayuda de Dedekind, y cuya meta es establecer la numerabilidad del conjunto de los números algebraicos, la no numerabilidad del conjunto de los números reales y la equipotencia de cualesquiera conjuntos continuos, sin importar su dimensión.

La reconstrucción de este marco conceptual debe permitirnos observar que en las demostraciones de esos teoremas, Cantor se está cuestionando acerca de las características de la continuidad, pero que la adscripción de propiedades métricas a su construcción de los números reales lo conduce a la creencia de que las propiedades de orden no contribuyen a comprenderla. El lugar que aspiraban ocupar estos teoremas, y que era imposible concederles, estaba dentro de la teoría aritmética de los números reales.

En el capítulo segundo exploramos algunos de los trabajos cantorianos sobre los conjuntos de puntos y sus conjuntos derivados. Estamos convencidos de que esta labor se guiaba por las interrogantes que se abrían en las demostraciones de los tres teoremas mencionados, las cuales se agrupan en dos frentes. El primero encuentra como trasfondo la demostración de que el conjunto de los números algebraicos es numerable, la cual es de inspiración dedekindiana. Esta demostración le hereda a Cantor, pese a su propia concepción, el tratamiento bajo conceptos de orden de problemas íntimamente relacionados con la continuidad representada por los números reales, problemas tales como la obtención de este dominio a partir de un subconjunto denso, como el de los números racionales o el de los números algebraicos. El segundo frente se origina en las dos demostraciones restantes, donde la pregunta general que se plantea consiste en averiguar cómo se podría obtener un conjunto continuo mediante el proceso de derivación de conjuntos. Es aquí donde convergen los dos frentes, dado que Cantor se pegunta de manera más concreta si sería suficiente y necesaria la condición de densidad en un intervalo para obtener un dominio continuo.

Las ganancias, quizá no buscadas, que Cantor pudo capitalizar de estas pesquisas se reflejaron en su pensamiento como la adquisición de una novedosa, aunque aún oscura, concepción del infinito. Cantor estuvo en posición de percatarse de tres cuestiones referentes al infinito: 1) era necesario reconocer la existencia de totalidades infinitas, pues era sugerida por al menos dos cosas: por un lado, la infinitud como totalidad aparecía como condición suficiente para la noción de orden denso en un intervalo y, por otro lado, era necesario presuponer una totalidad de esta clase para iniciar una operación de derivación de conjuntos; 2) se veía obligado a preguntarse por el sentido de efectuar operaciones aritméticas, específicamente la sustracción, con totalidades infinitas, aun cuando no disponía de una respuesta para ello; y 3) el trabajo en conjuntos derivados le permitía apreciar como un hecho relevante el que todo conjunto continuo contiene un conjunto infinito numerable.

En el tercer capítulo asistimos a una maduración sin igual en el pensamiento cantoriano. En 1882 Cantor se coloca finalmente en una perspectiva dedekindiana al considerar que la continuidad es asequible estableciendo condiciones de orden. En este capítulo repasamos cómo Cantor consigue formular de manera abstracta una definición de buen orden y alimentar con ello las más grandes esperanzas de aplicarla en la tan anhelada comprensión de la continuidad. La clarificación de su oscura concepción del infinito mediante la noción de buen orden sienta las bases para su creación de los números ordinales transfinitos, con los cuales pensaba haber asido los misterios que por tanto tiempo la continuidad aritmética se había negado a revelar. Más aún, Cantor estaba consciente de que sus esfuerzos superaban con creces el objetivo inicial, que ahora parecía nimio. Con la aparición de los ordinales transfinitos, Cantor removía la cartografía introduciendo un nuevo continente, un paraíso, en el mundo de las matemáticas: la teoría de conjuntos.

Esto es de capital importancia porque significa que Cantor modificó en dos niveles el marco conceptual dentro del que había trabajado. Por un lado, rompe los cotos en que había estado desarrollándose su investigación, es decir, la pretensión de una explicación satisfactoria de la continuidad desde un punto de vista aritmético. Por otro, ensancha los límites del marco conceptual general mediante la introducción de su aritmética ordinal transfinita. Aquellos tres teoremas iniciales encuentran su lugar ahora en la teoría de conjuntos enfocada desde una teoría ordinal transfinita. El haber sido capaz de ordenar el infinito, le permitió a Cantor dar nacimiento a la teoría de conjuntos.

El último capítulo cierra esta historia. En su origen, Cantor presenta la teoría de conjuntos como una teoría del infinito, que ha ganado su lugar en las matemáticas gracias a los ordinales transfinitos. En este capítulo analizamos básicamente dos aspectos, concernientes respectivamente a las obras de Dedekind y de Zermelo. Dedekind muestra que la introducción del infinito ordenado no sólo ha dilatado los límites del marco conceptual, sino que lo ha modificado por completo, ya que incluso la aritmética finita debe construirse sobre la base de un conjunto simplemente infinito. La obra de Zermelo apuntala, con la demostración del Teorema del Buen Orden, la teoría que Cantor y Dedekind habían forjado. La axiomatización de Zermelo es un parteaguas en la historia de la teoría de conjuntos, pues da fin a una etapa al mismo tiempo que inaugura otra. Nosotros retomamos aquellos elementos del pensamiento de Zermelo en los que se percibe su esfuerzo por dar un fundamento a la teoría de conjuntos como la disciplina matemática encargada del estudio de entidades abstractas (conjuntos), para lo cual es indispensable el ordenamiento del infinito.

Finalmente, deseamos indicar que es nuestra la traducción de todos los pasajes citados a lo largo del trabajo, salvo la de aquellos que en el último capítulo corresponde a *Las paradojas del infinito* de Bolzano, cuyas referencias se hacen conforme a la versión castellana publicada por la UNAM.

Capítulo

1

La esencia de la continuidad

En las postrimerías del siglo XVIII la filosofía de Kant había logrado modificar el pensamiento europeo en no pocos aspectos. La teoría del conocimiento puede reclamar para sí uno de los cambios más profundos, aunque muy polémico, que Kant introdujo en la filosofía occidental: la existencia de juicios sintéticos *a priori*. En juicios de este tipo, pensaba Kant, descansa toda posibilidad legítima de ampliar el conocimiento humano en sus diferentes ámbitos. En particular, esto causó revuelo entre aquellos interesados en preguntarse por la naturaleza del conocimiento matemático. Pese a la oposición que encontró, Kant estaba convencido de que las matemáticas involucran juicios sintéticos *a priori*, y creía hallar en la geometría euclidiana el ejemplo más firme de ello. La validez universal de la geometría euclidiana depende, para Kant, de que posee un fundamento trascendental en la intuición pura.

Pronto, con la aparición de las geometrías no euclidianas en la primera mitad del siglo XIX, el pensamiento kantiano tuvo que hacer frente a las objeciones más serias a su concepción sobre la naturaleza del conocimiento geométrico. Las nuevas geometrías sentaban la base para un cambio conceptual en el que la euclidiana dejaría de ser *la* geometría, para ocupar el papel más modesto de ser un modelo. En el campo de la epistemología, una reacción inmediata fue cuestionar la tesis kantiana concerniente a la intuición pura como fundamento del saber geométrico. El pensamiento de Helmholtz es probablemente el mejor ejemplo al respecto. En su trabajo sobre la significación y el origen de los axiomas geométricos, Helmholtz concluye, argumentando con apoyo en las geometrías de Lobatchewsky y principalmente de Riemann, que la pretensión kantiana de dar un fundamento trascendental al conocimiento geométrico es insostenible, y propone como alternativa su conocido empirismo geométrico:

> En verdad, no sabemos de otro nombre en nuestra lengua sino 'intuición' para referirnos a esto, pero es un conocimiento empírico, obtenido mediante la acumulación y reiteración de impresiones en nuestra memoria, las cuales se presentan de la misma manera una y otra vez. No es una forma trascendental de la intuición dada antes de toda experiencia.[1]

---

[1] Helmholtz, "On the Origin and Significance of the Axioms of Geometry", en *Epistemological Writings*, Dordrecht, Reidel, 1977, p. 268.

La discrepancia entre Helmholtz y Kant apunta al tipo de naturaleza que debe poseer el fundamento en el que se sostienen los axiomas de la geometría, es decir, disputan acerca de si la naturaleza de aquél es trascendental o empírica, pero están de acuerdo en que consiste en algo que, a falta de nombres, debemos llamar intuición. Como Helmholtz había otros[2] que no abrazaban las ideas kantianas, y no obstante parece haber un amplio acuerdo, aun después de mediados del siglo XIX, en que desde un punto de vista epistemológico la intuición ocupa un lugar privilegiado dentro de una concepción geométrica.

Por otro lado, ya desde finales del siglo XVIII en algunos campos de las matemáticas, como el cálculo, se había estado trabajando con procedimientos que ofrecían resultados no susceptibles de interpretarse desde las intuiciones del tiempo y el espacio.[3] El desarrollo del análisis se alejaba de los "métodos intuitivos" de la geometría, al mismo tiempo que iba ganando terreno en las escuelas y en la investigación, no sólo en Alemania

---

[2] Sería inútil intentar aquí una lista de nombres, aunque es imposible olvidar en las matemáticas alemanas de la época a personalidades como Bernard Bolzano y Jakob Friedrich Fries. Puede verse en Niels, Hans, "Algebraic Analysis in Germany, 1780-1840: Some Mathematical and Philosophical Issues", *Historia Mathematica*, 20, 1993, un estudio interesante sobre la distancia que tomaron algunos matemáticos alemanes con respecto a una postura kantiana ligado al desarrollo del análisis en la Alemania de la primera mitad del siglo XIX.

[3] Ver Niels, *op. cit.*, p. 268.

sino también en centros ingleses y franceses.[4] Hacia mediados del siglo XIX, el estudio de métodos analíticos había atraído la atención de gran cantidad de investigadores.[5] En Alemania, durante el verano de 1861 Karl Weierstrass impartía un curso de cálculo diferencial, del que más tarde derivaría su teoría de números irracionales. En el invierno de 1858-59, Richard Dedekind empieza a preguntarse por la naturaleza del dominio de números reales desde la perspectiva de las teorías existentes de números irracionales y de la propiedad de continuidad, lo cual culminará con la publicación en 1872 de su célebre tratado *Continuidad y números irracionales*.[6] Georg Cantor publica ese

---

[4] Alex Craik hace un estudio de la recepción del análisis en las esferas matemáticas escocesas. Por razones culturales, como la escasa formación matemática que tenían los alumnos al ingresar en las escuelas, en el caso del profesor William Wallace, o por propia convicción, como era el caso de John Leslie, los matemáticos escoceses privilegiaron la enseñanza de la geometría sobre los métodos del análisis, lo cual, sostiene Craik, fue contraproducente para las matemáticas escocesas, puesto que la investigación se estaba orientando, tanto en la Europa continental como en las matemáticas inglesas, hacia el desarrollo del análisis. Véase Craik, "Geometry versus Analysis in Early 19th-century Scotland: John Leslie, William Wallace, and Thomas Carlyle", *Historia Mathematica*, 27, 2000.

[5] Un estudio cuantitativo sobre el predominio y aumento de interés que los métodos del análisis fueron ganando sobre los de la geometría en el siglo XIX, basado en un examen estadístico de las publicaciones matemáticas de la época, puede verse en Wagner-Döbler y Berg, "Nineteenth-Century Mathematics in the Mirror of its Literature: A Quantitative Approach", *Historia Mathematica*, 23, 1996.

[6] Sobre estos aspectos de Weierstrass y Dedekind ver Dugac, "Problèmes de l'histoire de l'analyse mathématique au XIXème siècle.

mismo año su teoría de números reales. Las teorías de Weierstrass, Dedekind y Cantor son matemáticamente equivalentes y obedecen, además, al espíritu que se propagaba en su época, esto es, acercarse a las matemáticas desde las herramientas que ofrece el análisis. Lamentablemente no podemos ocuparnos de la teoría de Weierstrass, pero será suficiente con la de Dedekind y la de Cantor, cuyas diferencias conceptuales contribuirán a nuestra comprensión de los primeros trabajos de Cantor en lo que hoy llamaríamos teoría de conjuntos.[7]

Cas de Karl Weierstrass et de Richard Dedekind", *Historia Mathematica*, 3, 1977, pp. 6-8, 12-14.

[7] La diferencia a la que nos referimos consiste básicamente en que aun cuando la construcción del sistema de números reales en el pensamiento de ambos parte del conjunto de números racionales, la de Dedekind obedece a nociones de orden, mientras que en la de Cantor este tipo de nociones no juega papel alguno.

1.1. Una interpretación de la idea de continuidad en Dedekind.

1.1.1. El sistema de los números racionales.

En 1872 se publica el opúsculo de Dedekind intitulado *Continuidad y números irracionales*. Éste persigue, como objetivo central, el desarrollo de un fundamento aritméticamente satisfactorio para el concepto matemático de continuidad. En el prólogo, Dedekind se lamenta de la ausencia que, en el análisis infinitesimal, se ha sufrido con respecto a un desarrollo tal, con la consecuente dependencia de una concepción geométrica del continuo. No es difícil notar que con una declaración como la anterior está polemizando contra el papel que debe jugar la *intuición* en áreas como la aritmética. Más importante para nosotros, sin embargo, es que la posición de Dedekind busca darle sentido a pensar el continuo lineal como un hecho aritmético, y en esa medida también quedaría supeditado a lo siguiente:

> Considero que la aritmética en su conjunto puede verse como una consecuencia necesaria, o al menos natural, del acto más elemental de la aritmética, el de contar; y éste puede entenderse como la creación sucesiva de la serie infinita de los enteros

positivos, en la que cada término está definido por el inmediato anterior. El acto más simple consiste en el hecho de pasar de un término ya fijado a la formación de otro nuevo y consecutivo.[8]

El acto más simple sobre el cual, a juicio de Dedekind, se edifica la aritmética toda es contar. Pero tal como lo ha descrito, este acto representa, en principio, la imagen misma de lo discreto: contar es definir nuevos elementos en una secuencia mediante la adjunción de unidades homogéneas. Así, paradójicamente, lo continuo deviene, bajo esta perspectiva, una consecuencia natural de lo discreto. La posibilidad de conceptuar así el continuo lineal descansa, por un lado, en la concepción general de Dedekind sobre el sistema de números y, por otro, en su idea de corte. Nos ocuparemos de esta última más tarde, y dedicaremos el resto de esta sección a la primera.

Una lectura compartida por varios comentaristas considera la teoría de números reales de Dedekind como parte de una construcción conjuntista del sistema completo de números.[9] Siguiendo este camino, Dedekind pensaba que el sistema completo de números se forma a partir de una expansión sucesiva

---

[8] Dedekind, *Continuity and Irrational Numbers*, en *Essays on the Theory of Numbers*, New York, Dover Publications, 1963, p. 4.

[9] Ver, por ejemplo, Belna, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*, Paris, Librairie Philosophique J.Vrin, 1996, p. 66; o Ferreirós, "On the Relations between Georg Cantor and Richard Dedekind", *Historia Mathematica*, vol. 20, 1993, p. 346.

de sistemas numéricos. Aunque en esta época (1872) Dedekind no ha publicado aún sus ideas acerca de la construcción de **N**, el sistema de los números naturales, es claro que está pensando en la aplicación de una operación sucesor sobre elementos ya definidos en una sucesión de enteros positivos. **N** es el primer sistema numérico, cuya creación responde al acto elemental de contar. Una vez que tenemos el dominio **N** es posible introducir las cuatro operaciones básicas de la aritmética. Dedekind sugiere que la más primitiva es la suma, pues constituye el correlato inmediato del acto de contar.[10] Las operaciones restantes pueden definirse tomando a ésta como base. Sin embargo, la resta y la división no pueden establecerse para cualesquiera dos números elementos de **N**. Tanto la formación del sistema **Z** de los enteros como la del sistema **Q** de los números racionales están en función de la propiedad de cerradura, para la resta y para la división respectivamente. El sistema **Q** constituye un *campo de números* gracias a su propiedad de cerradura ante las cuatro operaciones elementales.

El proceso de construcción del campo **Q** involucra dos aspectos. Por un lado, en el fondo yace el acto de contar, sobre el cual se sostienen las operaciones aritméticas básicas. Por otro, la exigencia de que tales operaciones sean realizables para

---

[10] Ver Dedekind, *op. cit.*

cualesquiera dos números, lo que motiva el paso de **N** a **Z**, y de éste a **Q**. Pero la condición de cerradura queda plenamente satisfecha (con la sola excepción de la división por cero) únicamente cuando ha sido establecido el dominio de los números racionales.

Además de la propiedad de cerradura, el conjunto **Q** posee la característica de *comparabilidad*, es decir, siempre que tenemos dos números racionales podemos decidir si uno es mayor o menor que otro, o si ambos son iguales. La comparabilidad se define aritméticamente para dos números racionales a y b:[11]

1. Si $a-b$ es cero, $a=b$;
2. Si $a-b$ es un valor positivo, $a>b$; y
3. Si $a-b$ es un valor negativo $a<b$.

En función de (2) y (3), Dedekind establece tres propiedades de orden para el campo de números **Q**:

I. Transitividad: si $a>b$ y $b>c$, entonces $a>c$.

II. Densidad: si $a>b$, entonces hay una infinidad de números entre ellos.

III. Cortadura: Si a es un número racional definido, el conjunto **Q** puede partirse en dos clases $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ de tal manera que:

$$a_l \in \mathbf{A}_1 \text{ si } a>a_l.$$

[11] Ver *ibid.*, p. 5.

$a_2 \in \mathbf{A}_2$ si $a_2 > a$, y

$a \in \mathbf{A}_1$ o $a \in \mathbf{A}_2$, pero no de ambas. En cualquier caso, todos los números en $\mathbf{A}_1$ son menores que los números en $\mathbf{A}_2$.

La *comparabilidad*, así como las propiedades (I) y (II), nos colocan en posibilidad de afirmar que **Q** es un campo denso linealmente ordenado de números.[12] Pese a todo lo que se ha ganado, el sistema total de números aún no ha sido completado en al menos dos sentidos. Por una parte, aun cuando el orden de **Q** es denso, hay magnitudes, como ciertos segmentos de recta, que no pueden ser expresados numéricamente por ningún elemento de **Q**. Por otra parte, la existencia de este tipo de magnitudes abre la posibilidad de dividir el dominio de números racionales a partir de algún elemento que no le pertenece, pero que, sin embargo, yace entre dos números racionales en su distribución natural. Estas dos ideas sugieren que el sistema de los números racionales, en su orden natural, tiene "huecos". Enseguida explicaremos con mayor detenimiento el significado de cada una de estas ideas.

[12] Decimos que un conjunto está total o linealmente ordenado si y sólo si la relación R definida en él es antirreflexiva (esto es, para todo elemento x del conjunto, el par ordenado $\langle x, x\rangle \notin R$) y transitiva (dados cualesquiera tres elementos x, y, z del conjunto, si $\langle x, y\rangle \in R$ y $\langle y, z\rangle \in R$, entonces $\langle x, z\rangle \in R$), y para cualesquiera dos elementos x, y del conjunto $x=y$ o $\langle x, y\rangle \in R$ o $\langle y, x\rangle \in R$, pero sólo una de las tres.

1.1.2. Huecos en el dominio Q e inconmensurabilidad en la línea.

En una de sus acepciones, Aristóteles entiende por "continuo" aquello cuyas partes siempre son susceptibles de ser divididas. Esta concepción no es privativa del filósofo de Estagira, sino que se hereda a, o se asimila por, diferentes tradiciones del pensamiento en Occidente. La propiedad de densidad bien podría ser una paráfrasis de la misma. Lo infinitamente divisible no puede caracterizar al continuo, diría Dedekind no obstante, porque es una condición insuficiente para alcanzarlo. A pesar de su densidad, **Q** no es continuo, y Dedekind ofrece dos caminos para corroborarlo.

El primero consiste en comparar el dominio **Q** con los puntos de una línea recta L, lo cual se logra al establecer para los elementos de la línea una relación de orden equivalente a la que existe entre los números racionales. Si la relación $>$ se interpreta en términos de posición como "estar a la derecha de", entonces se obtiene la relación deseada para L. Esto permite definir las propiedades (I), (II) y (III) anteriores en el dominio de puntos de L. El siguiente paso consiste en hacer corresponder a un número racional un punto. Dos condiciones son suficientes para ello: a) elegir en la línea un punto o como origen, y b) elegir una unidad de medida. [13] Entonces, para cada número racional es posible construir una longitud adecuada en función de la unidad de medida elegida y partiendo del origen. Así, a todos los números racionales les corresponde un punto de la recta.

Ahora bien, Dedekind nos recuerda que lo contrario es falso, pues siempre hay segmentos inconmensurables con la unidad de medida elegida, cualquiera que ésta sea. Es decir, hay una infinidad de puntos que no corresponden a ningún número racional. El significado de esto debe buscarse en la relación de orden que se definió para los elementos de L. Cuando Dedekind afirma que hay puntos a los que no les corresponde un número racional, está sosteniendo que hay puntos cuya incidencia en la recta es tal (de acuerdo con la relación $>$ en L) que todo punto que representa a un número racional yace a su derecha o a su izquierda. El conjunto **Q** no es continuo porque, pese a estar densamente ordenado, sus elementos no alcanzan a cubrir todos los puntos en L.

Precisamente de la comparación anterior entre **Q** y L, Dedekind extrae lo que llama la esencia de la continuidad:

> Si todos los puntos de la línea recta pertenecen a dos clases, de manera tal que cada punto de la primera yace a la izquierda de cada punto de la segunda, entonces existe uno y sólo un punto

[13] Ver *ibid.*, p. 8.

> que produce esta división de todos los puntos en dos clases, cortando a la línea recta en dos porciones.[14]

La esencia de la continuidad consiste, pues, en el recíproco de la propiedad de cortadura establecida en *L*. ¿Es entonces la continuidad, para Dedekind, una propiedad primitivamente geométrica? Intentaremos responder a esto en la siguiente sección. Por ahora presentaremos el segundo camino, independiente de la comparación entre **Q** y *L*, mediante el cual Dedekind corrobora que el dominio de los números racionales no es continuo.

Para caminar esta segunda vía es necesario introducir un concepto clave, el de corte. Dedekind lo hace de esta manera:

> Si [...] una división del sistema [**Q**] en dos clases $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, posee sólo *esta* propiedad característica, que cada número a_1 en $\mathbf{A}_1$ es menor que cada número a_2 en $\mathbf{A}_2$, entonces, por brevedad, llamaremos a esta división un *corte* y lo designaremos con $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$.[15]

Dedekind observa, además, que un corte posee la importante propiedad de que o bien la clase $\mathbf{A}_1$ posee un número máximo, o bien la clase $\mathbf{A}_2$ un número mínimo. Esto también se cumple para las clases $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ enunciadas en la propiedad de cortadura del

[14] *Ibid.*, p. 11.
[15] *Ibid.*, p. 13.

dominio **Q**, según sea el caso que el número *a* que produce la partición se agregue a una o a otra. Sin embargo, no debemos perder de vista que la partición de **Q**, en la definición de corte, no se restringe a ser producida por un elemento de **Q**.

Gracias a la noción de corte, Dedekind consigue mostrar que hay huecos en el sistema **Q** sin necesidad de recurrir a la comparación con la línea recta *L*. La estrategia consiste en mostrar que hay cortes que no son producidos por números racionales, y la prueba se lleva a cabo por método indirecto. Este es su esquema:

1) Se define un corte ($\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$) a partir de un entero positivo D que no es cuadrado de ningún entero, es decir, el número D satisface la desigualdad: $\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$, donde λ es un entero cualquiera. A la clase $\mathbf{A}_2$ se asignan todos los números racionales cuyo cuadrado sea mayor que D, el resto de los números racionales está en $\mathbf{A}_1$.

2) Se presupone que existe un número racional cuyo cuadrado es igual a D para concluir, por reducción al absurdo, lo contrario.

3) Del paso anterior se sigue que el cuadrado de todo número racional es mayor o menor que D, o bien que es elemento de $\mathbf{A}_1$ o de $\mathbf{A}_2$.

4) Gracias a (3) es posible deducir que en $\mathbf{A}_1$ no hay un número máximo y en $\mathbf{A}_2$ no hay un número mínimo.

5) De ahí se concluye finalmente que el corte (A_1, A_2) no es producido por un número racional.

Los huecos existentes en **Q** se identifican ahora con los cortes que no se producen mediante números racionales. Para lograrlo, Dedekind no ha precisado de la representación geométrica del continuo propia de la línea recta. Parte más bien de la propiedad de cortadura definida para el sistema numérico **Q**. Para esta propiedad se estipula una operación correspondiente. Al definirse la relación de cortadura como una operación, no se restringe a un dominio determinado, como era el caso cuando se definía como una propiedad de **Q**. En tanto que operación, es necesario reformular la relación de la que depende la asignación de elementos a cada una de las dos clases A_1 y A_2, lo cual se obtiene al "generalizar" la relación: todo número en A_1 debe ser menor que todo número en A_2, sin que esto esté mediado por un número racional definido *a*. Esto daría como resultado el concepto de corte.

A través de cierto tipo de cortes Dedekind ha exhibido aritméticamente la discontinuidad del sistema de números racionales. Pero es también mediante ellos como extiende una vez más el sistema de números.

1.1.3. El sistema de números reales o la continuidad aritmética.

La formación de los números irracionales determina la consecución del sistema total de números. Una cortadura que no es producida por un número racional se identifica con un número irracional. El conjunto de estos números junto con el de los números racionales constituye el dominio **R** de números reales. Esto no significa que Dedekind esté pensando en la unión de ambos conjuntos para formar **R**, sino que todo número real puede representarse por los cortes producidos en el dominio **Q**. Como hay cortes que no corresponden a un número racional, la relación de orden válida en **Q** no puede trasladarse sin más al dominio **R**. Es menester investigar si los números reales son comparables entre sí, partiendo para ello de la relación entre dos cortes arbitrarios $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$ y $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ producidos por dos números α y β. Dedekind señala tres casos posibles:

1. $\mathbf{A}_1=\mathbf{B}_1$. Entonces también $\mathbf{A}_2=\mathbf{B}_2$ y, por ende, $\alpha=\beta$.
2. $\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{B}_1$ a causa de que un solo $a_l \in \mathbf{A}_1$ no es elemento de $\mathbf{B}_1$. En tal caso a_l es un número racional y como $a_l \notin \mathbf{B}_1$, necesariamente $a_l \in \mathbf{B}_2$. Así, $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$ sólo difiere de $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ en que posee a a_l como número racional máximo, mientras que ese número es el mínimo con respecto a $\mathbf{B}_2$. Por tanto $\alpha=\beta$.

3. $\mathbf{A_1} \neq \mathbf{B_1}$ a causa de que al menos dos elementos de $\mathbf{A_1}$ no pertenecen a $\mathbf{B_1}$. Entonces hay una infinidad de elementos en $\mathbf{A_1}$ que no están en $\mathbf{B_1}$ y decimos que $\alpha>\beta$.

Esto garantiza la comparabilidad entre dos números reales cualesquiera, permitiendo establecer para el dominio **R** propiedades de orden similares a las del dominio **Q**:

I. Transitividad: si $\alpha>\beta$ y $\beta>\gamma$, $\alpha>\gamma$.

II. Densidad: si $\alpha>\beta$, entonces hay una infinidad de números reales entre ellos.

III. Cortadura: si α es un número, el sistema **R** puede partirse en dos clases $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ tales que:

$\alpha_1 \in \mathbf{A_1}$ si $\alpha>\alpha_1$,

$\alpha_2 \in \mathbf{A_2}$ si $\alpha_2>\alpha$, y

α pertenece a $\mathbf{A_1}$ o $\mathbf{A_2}$, pero sólo a una. Si $\alpha \in \mathbf{A_1}$, α es el número máximo de $\mathbf{A_1}$; en caso contrario es el número mínimo de $\mathbf{A_2}$.

Pero el sistema de números reales posee otra propiedad de la que carece el de racionales:

IV. Continuidad: si el sistema **R** se parte en dos clases $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ tales que todo elemento en $\mathbf{A_1}$ es menor que todo elemento en $\mathbf{A}_2$, entonces hay un solo número α que produce el corte $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$.

Esta propiedad no puede desprenderse directamente de la relación de orden anterior, así que Dedekind ofrece una prueba para ella.[16] No la reproducimos aquí ya que no involucra dificultades ulteriores. Nos interesa destacar tan sólo que de las dos únicas nociones de que depende son de la relación > definida en **R** y de la de corte. Por su parte, esta relación no se apoya en la correspondiente establecida para los puntos de la recta *L*. Y ya hemos tenido oportunidad de ver que la operación de cortadura es igualmente independiente de la representación geométrica del continuo. Dedekind tiene éxito, entonces, al haber establecido aritméticamente el continuo lineal: éste se halla representado por el campo linealmente ordenado de números **R**. Así pues, la continuidad no es una propiedad primitivamente geométrica. El enunciado de la propiedad (IV) es el equivalente aritmético del que, en la sección anterior, describe en términos geométricos la esencia de la continuidad. Dedekind está concluyendo finalmente que la esencia de la continuidad es expresable también, y esto de manera independiente, a través de la aritmética.

Por una parte, el *continuo aritmético* se obtiene al completar el sistema total de números mediante la construcción

---

[16] Ver *ibid.*, p. 20.

del sistema **R**. Por otra, el éxito de lo anterior tiene como piedra clave la operación de cortadura. Jean Cavaillès entiende lo último en este sentido:

> Para obtenerlo [a **R**] es suficiente exigir que la operación implicada en la tercera propiedad cumpla la misma condición de cerradura que las cuatro operaciones aritméticas [...][17]

En otras palabras, al igual que la expansión de **N** a **Q** se llevó a cabo con el fin de que las operaciones elementales estuvieran definidas para cualquier par de números, así la expansión del sistema **Q** está motivada por la operación de cortadura, con el objetivo de que ésta sea cerrada en el dominio máximo de números. Ahora bien, en la sección 1.1.1 vimos que el paso que iba de **N** a **Z** y de **Z** a **Q** involucraba el aspecto de cerradura, pero también aquel otro del acto elemental de contar. La observación de Cavaillès es acertada: llama la atención sobre el hecho de que la operación de cortadura cumple uno de estos dos aspectos, el de cerradura. El segundo aspecto se rescata al definir en **R** las cuatro operaciones aritméticas a partir de la noción de corte.[18]

En conformidad con lo que hemos visto, podemos sostener que Dedekind concebía la continuidad, más que como

---

[17] Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann, 1962, p. 37.
[18] Ver la definición de suma en Dedekind, *op. cit.*, pp. 21-22.

una propiedad de **R** o de *L*, como una propiedad característica de un conjunto linealmente ordenado X que satisface tres condiciones:

1. Posee un orden denso.
2. Cada elemento *x* del conjunto X define un único corte $(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2})$.
3. Todo corte $(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2})$ en X es producido por un único elemento del conjunto.

Podemos decir que las dos primeras son condiciones de posibilidad para la propiedad de continuidad de un conjunto; es decir, condiciones sin las cuales sería imposible que un conjunto determinado satisficiera la tercera condición, que es propiamente la que confiere el carácter de continuo al conjunto.

Algunos años más tarde, Dedekind le comunica a Cantor que la condición de cortadura, la cual figura en el punto dos de la lista anterior, es una consecuencia de la propiedad de transitividad.[19] Así que la propiedad de continuidad es característica de un conjunto X que satisface las condiciones:

1. X está linealmente ordenado.
2. X posee un orden denso.[20]

---

[19] Ver "Correspondance Cantor-Dedekind", en Cavaillès, *op. cit.*, p. 199.

[20] Por orden denso se entiende que entre cada par de elementos distintos de X hay un tercer elemento, que es como actualmente se expresa lo que Dedekind establece como la propiedad de densidad anotada más arriba. Para la noción de orden lineal véase la nota 12 a pie de página.

3. Todo corte (A_1, A_2) en X es producido por un único elemento del conjunto.

La posibilidad de que un conjunto sea continuo depende de que un conjunto esté ordenado en conformidad con las condiciones 1 y 2. Sin un orden denso y lineal es imposible que un conjunto determinado presente la propiedad de continuidad.

1.2. La numerabilidad del conjunto de números algebraicos y la no numerabilidad del continuo lineal.

1.2.1. Primera definición cantoriana de continuidad.

En el mismo año en el que aparece el ensayo de Dedekind sobre la continuidad y los números irracionales, se publica una memoria de Cantor dedicada al estudio de series trigonométricas. El primer parágrafo del artículo está consagrado a la construcción de los números reales. Ligada a esta construcción Cantor formula lo que llamaremos su primera definición del continuo. Cantor inicia el parágrafo en cuestión con las siguientes palabras:

> Los números racionales representan el fundamento para la determinación del concepto más extenso de magnitud numérica [...][21]

De manera semejante a como lo hace Dedekind, Cantor comienza su análisis de los números reales tomando como base el sistema de números racionales. No obstante, no hay indicios que sugieran

[21] Cantor, "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Mathematische Annalen*, vol. 5, p. 123.

algún tipo de construcción similar a la de Dedekind en el sentido de una expansión progresiva de los sistemas numéricos a partir de **N**.[22] Por otra parte, una diferencia interesante entre ambos matemáticos es que mientras Dedekind busca generalizar el concepto de número, o quizá sea más justo decir que intenta completarlo al crear el sistema de números reales, Cantor persigue el objetivo de clarificar el concepto de magnitud numérica. La generalización del concepto de número racional en Cantor conduce entonces a la adscripción de una propiedad de medida a la noción de número.[23]

Partiendo del conjunto **Q**, Cantor establece que para cada sucesión de números racionales

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

para la cual se cumple la condición de que si la diferencia $a_{n+m}-a_n$ deviene tan pequeña como se quiera mientras n crece, donde m es

[22] Belna, por ejemplo, interpreta en este sentido el pensamiento de Cantor. Para él, aun cuando Cantor no hace referencias explícitas a la expansión del sistema de números en su artículo de 1872, le parece que otras fuentes podrían justificar tal lectura. Sin embargo, las fuentes en que se apoya, que datan de 1883, son demasiado tardías, no sólo en su sentido temporal, sino que para la fecha, y tratándose de los *Grundlagen,* las ideas de Cantor han tomado un rumbo, como veremos en los capítulos siguientes, que le permiten concebir los conjuntos de números de una manera diferente. Ver Belna, *op. cit.*, pp. 126ss.

[23] Ver sobre esta característica Álvarez, Carlos, "Sobre dos proposiciones relativas al continuo lineal: epistemología e historia", en Álvarez y Barahona (eds.), *La continuidad en la ciencia,* México, UNAM-FCE, 2002, p. 166.

un número entero positivo cualquiera, entonces la sucesión tiene un límite determinado b. Ahora bien, podemos tomar otra sucesión que cumple una condición similar a la anterior

$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$$

y para la cual existe, por ende, un límite b', y cuestionarnos por la relación que guardan entre sí ambas sucesiones. Al llevar a cabo la comparación entre estas sucesiones, Cantor logra establecer las siguientes relaciones entre los límites b y b', habiendo tres posibilidades:

a) Si $a_n - a'_n$ deviene tan pequeño como se quiera cuando n crece, entonces $b=b'$.

b) Si $a_n - a'_n > \varepsilon$ a partir de cierta n y ε es un número racional positivo, entonces $b>b'$.

c) Si $a_n - a'_n < -\varepsilon$ a partir de cierta n y $-\varepsilon$ es un número racional negativo, entonces $b<b'$.

Así, a partir de sus sucesiones racionales, cualesquiera dos magnitudes b pueden compararse entre ellas. También es posible comparar, bajo las mismas condiciones respectivas, un número racional a con una magnitud b, partiendo de la sucesión que define a ésta:

a') Si $a_n - a$ deviene tan pequeño como se quiera a medida que n crece, entonces $b=a$.

b') Si a_n-a > ε a partir de cierta n y ε es un número racional positivo, entonces $b>a$.

c') Si a_n-a < -ε a partir de cierta n y -ε es un número racional negativo, entonces $b<a$.[24]

Sabemos que dos números racionales son comparables porque a la par del conjunto **Q** se presuponen sus propiedades aritméticas.

En virtud de que es posible comparar dos magnitudes arbitrarias, y dado que los números racionales son susceptibles de expresarse como sucesiones convergentes de números racionales en el mismo sentido que las dos sucesiones anteriores, a partir de **Q** se ha generado un sistema **R** de todos los límites de este tipo de sucesiones. Pero no debe perderse de vista que la existencia de los números reales, en tanto límites, depende en última instancia de la condición que debe cumplir una sucesión de números racionales para poseer un límite. Los números reales son, para Cantor, magnitudes numéricas entendidas como límites.

Ahora bien, el procedimiento mediante el cual se generó el conjunto **R** puede repetirse indefinidamente partiendo de sucesiones infinitas tomadas del último conjunto generado, las cuales se sujetan a una condición similar de convergencia. Es decir, Cantor pensaba que podía construirse un conjunto de

---

[24] Ver Cantor, *op. cit.*, p. 124.

límites **C** a partir de **R** de la siguiente manera. Dada una sucesión de números reales

$$b_1, b_2, ..., b_n, ...$$

si la diferencia $b_{n+m}-b_m$, donde m es un entero positivo cualquiera, decrece indefinidamente a medida que n crece, entonces existe un límite c para la sucesión. El conjunto **C** tiene como elementos a todos los límites c así definidos. De manera similar, a partir de las sucesiones

$$c_1, c_2, ..., c_n, ...$$

que definan un límite d al satisfacer una condición semejante a la anterior, Cantor forma el conjunto **D** cuyos elementos son todos los límites d. Procediendo de esta manera es posible generar una sucesión infinita **R**, **C**, **D**, ..., **L**, ..., donde cada término es un conjunto de límites. Dedekind consideraba que esta multiplicación de sistemas posteriores a **R** era superflua, dado que con **R** se completa el sistema total de números. Como hemos visto, cuando Dedekind crea el sistema de números reales cuenta ya con los elementos para mostrar que éste posee la propiedad de continuidad. Entre otras cosas, esto significa que en **R** ya no hay huecos, como era el caso para **Q**. En cambio, Cantor aún no ha establecido la propiedad de continuidad y su construcción de **R** no puede garantizar que no tenga huecos. Esto puede presumirse al corroborar que sin importar cuántas veces repitamos la operación para construir un nuevo conjunto **L**, posterior a **R**, es posible relacionar biunívocamente los elementos de uno y otro. Pero esto, debemos insistir, es tan sólo un indicio de la continuidad del sistema **R**. Con una construcción de sistemas de magnitudes numéricas como ésta, Cantor puede asegurar que el sistema de números racionales es un subconjunto propio del de números reales y que los sistemas **C**, **D**, ..., **L**, ... son todos equivalentes a **R**:

> Mientras que los dominios [**R**] y [**Q**] se corresponden uno a otro de tal manera que cada [*q*] puede equipararse a un [*r*], pero no en sentido opuesto cada [*r*] a un [*q*], es sostenible, en cambio, que no sólo cada *c* puede equipararse a un [*r*], sino también en sentido opuesto cada [*r*] a un *c*.[25]

Pero ninguna de estas dos cosas avala la continuidad del conjunto **R**, para lo cual es necesario compararlo con los puntos de la línea recta.

Cantor efectúa esta comparación por medio de condiciones similares a las de Dedekind, a saber: 1) elegimos en la recta un punto como origen, y 2) elegimos una unidad de medida. Ahora bien, dado cualquier punto de la recta siempre es posible determinar un segmento por medio del punto que figura como origen y el punto dado. Para este segmento existen dos posibilidades con respecto a la unidad de medida: que sea

---

[25] *Ibid.*, p. 126.

conmensurable con ella o que no lo sea. En el primer caso, al punto dado que determina al segmento le corresponde una magnitud del sistema **Q**. En caso de que el segmento sea inconmensurable con la unidad de medida elegida, es posible definir una sucesión de números racionales tal que al punto le corresponda el límite de dicha sucesión. Este punto aparece, entonces, como el límite de una sucesión de puntos de la recta, a los cuales corresponde un número de la sucesión de racionales. Por medio de esta comparación corresponde a cada punto de la línea una magnitud numérica de **R**.

El recíproco de la proposición anterior requiere, sin embargo, de un

> *Axioma (de continuidad): a cada magnitud numérica corresponde un punto dado de la recta, cuya coordenada es igual a esta magnitud numérica, en el sentido de que hay una sucesión infinita de puntos que tiende hacia la coordenada en la misma medida en que la serie racional de la magnitud numérica en cuestión tiende hacia ésta a medida que el índice de la serie crece.*[26]

Por brevedad llamaremos a éste el Axioma de continuidad de Cantor. En el párrafo anterior vimos cómo Cantor logra justificar que no hay un solo punto de la recta al que no le corresponda un

[26] Ver *ibid.*, p. 128.

elemento de **R**; en cambio, la justificación del recíproco debe hacerse axiomáticamente. Cantor pensaba que la existencia de puntos diferentes que pudieran relacionarse con cada número real, confería a éstos cierta objetividad. En caso de que hubiera números reales a los que fuera imposible hacer corresponder un único punto de la recta, no podríamos afirmar de ellos que poseen existencia objetiva. El Axioma de continuidad garantiza que todo número real goce de este tipo de existencia. La continuidad aritmética representada por el dominio de los números reales debe su existencia objetiva a la continuidad geométrica. En este sentido, ésta adquiere prioridad sobre aquélla en el pensamiento temprano de Cantor. La propiedad de continuidad del dominio de números reales gravita sobre la de la línea recta. En esta primera concepción de la continuidad de Cantor no se ha efectuado completamente una reducción aritmética.

En el caso de Dedekind, concluimos que la continuidad es una propiedad general que no depende de un conjunto en particular, aun cuando puede predicarse de algunos de ellos. Pero una vez que se ha hecho esto, por ejemplo, una vez que se ha tomado el campo de números reales con la propiedad de continuidad, ésta puede exhibirse a partir de los elementos del campo mismo. Justo esto es lo que no sucede en la posición de Cantor. Aunque la prioridad geométrica de que hablamos en el párrafo anterior se mantiene, la continuidad apuntala su esencia en el hecho de comparar dos conjuntos. Las relaciones >, < podrían servir a Cantor para definir un orden en el dominio **R**. No lo hace explícitamente porque el orden es irrelevante de cara a la continuidad: no importa la distribución de las magnitudes en **R** mientras un axioma nos garantice que hay un punto para cada una de ellas. La continuidad, para Cantor, es una propiedad que se caracteriza por la relación biunívoca entre el conjunto **L** de los puntos de la línea recta y el conjunto **R** de magnitudes numéricas o límites.

1.2.2. El conjunto de números algebraicos es numerable.

En 1874 Cantor publica un artículo bajo el título "Sobre una propiedad del sistema de todos los números algebraicos". La propiedad anunciada es la numerabilidad del sistema. Sin embargo, el artículo contiene la demostración de dos teoremas. El primero afirma que el conjunto de los números algebraicos es numerable, mientras que el segundo sostiene que el conjunto de los números reales no es numerable. Es normalmente aceptado pensar que el teorema que realmente le interesaba a Cantor era el segundo, mientras que el primero sólo constituía una etapa en la prueba de aquél. El título, que exclusivamente apunta al primer resultado, suele justificarse como un intento de Cantor por evitar la censura de la "escuela berlinesa" y, particularmente, de Kronecker. Consideramos que esto último es razonable como una explicación de la parcialidad del título, pero no concordamos totalmente con la idea de que el segundo teorema fuera de mayor relevancia a los ojos de Cantor, al menos no en el sentido en que esto se entiende: este teorema tiene importancia fundamental para Cantor porque a través de él está mostrando que el conjunto de números reales es mucho más rico en elementos que el conjunto de números algebraicos, en la medida en que sus cardinalidades o sus potencias son distintas.[27] El inconveniente de entender así este artículo no es otro que, de hacerlo, es menester presuponer que en 1874 Cantor sabía más teoría de conjuntos de lo que era posible; por ejemplo, la noción misma de potencia no empezará a tomar forma sino hasta cuatro años más tarde. Con el afán de sortear este tipo de anacronismos hemos dedicado una sección a cada uno de los teoremas, esperando que con lo dicho en ambas secciones sea plausible defender que los dos teoremas revisten un valor relativamente similar.

Comencemos, pues, analizando la prueba siguiente:

Teorema 1. Es posible hacer corresponder uno a uno los elementos del sistema **A** *de números algebraicos con los números* ν *de una sucesión de enteros positivos* $\{\nu\}$, *de forma tal que a*

[27] Puede verse en Dauben, J.W., *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite* un ejemplo clásico de esta interpretación.

cada número algebraico corresponda un entero positivo y recíprocamente.[28]

Un número algebraico x es aquel que satisface una ecuación con coeficientes enteros

$$\text{I)} \qquad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

donde n y a_0 son positivos. Se supone además que la expresión de la ecuación es irreducible. Y sabemos que tiene como máximo de soluciones un número igual al grado de la ecuación; es decir, para una ecuación determinada no hay más números algebraicos raíces de la misma que lo que indica su grado. El teorema 1 se demuestra fácilmente en tres pasos:

1. Determinación de la *altura* de un número algebraico a partir de su ecuación. La altura de un número algebraico se define como

   $$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|$$

   Como la altura N es la suma de los valores absolutos de los coeficientes de (I) y n es positivo, el número N es un entero positivo. Por otro lado, como el número de soluciones de (I) es finito, hay igualmente un número finito de números algebraicos con una altura determinada, el conjunto de estos números algebraicos se designa como $\varphi(N)$.

[28] Ver Cantor, "Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels", *Acta Matemática,* vol. 2, 1883, p. 306.

2. Ordenación del sistema **A** en función de N y φ(N):

   a) A partir de cada altura N se forman los conjuntos de números algebraicos φ(N) correspondientes.

   b) Estos conjuntos φ(N) se ordenan sucesivamente en función del orden creciente de N, es decir, cuando N=1, el conjunto de números algebraicos con esta altura es el primero; cuando N=2, el conjunto de números algebraicos con esta altura es el segundo, etcétera.

   c) Una vez hecho esto, los elementos de cada conjunto se ordenan en una sucesión de la siguiente manera:

      i) Para determinar el orden de los elementos de cada φ(N) en una sucesión se respeta el ordenamiento de los conjuntos φ(N) establecido en (b); esto es, en primer lugar se ordenan en la sucesión los elementos del primer conjunto, en segundo lugar los del segundo conjunto, y así sucesivamente.

ii) Los elementos de cada conjunto $\varphi(N)$ formado según (a) se ordenan en la sucesión por magnitud creciente.

3. Representación del sistema **A** por una sucesión $\{\nu\}$ de enteros positivos. El ordenamiento en (2) hace posible representar al sistema **A** como una sucesión $\{x_\nu\}$ al asociar un entero de $\{\nu\}$ como índice a cada número algebraico ordenado según (2).

Esta demostración fue origen de fricciones tempranas en las relaciones personales e intelectuales de Dedekind y Cantor.[29] En una anotación a la carta de Cantor del 29 de noviembre de 1873, Dedekind deja constancia de que la demostración anterior, publicada sin mención de reconocimiento alguno hacia él en "Sobre una propiedad del sistema de todos los números algebraicos", reproduce casi literalmente una demostración que él envió por correo a Cantor.[30] Desafortunadamente esta última carta no se conserva, pero es muy probable que Cantor haya actuado de esa manera, pues hay al menos una ocasión más en que lo hace y la cual sí podemos constatar.[31] Lo más probable es que la

---

[29] Para un estudio pormenorizado de los conflictos entre Dedekind y Cantor, ver Ferreirós, *op. cit.*

[30] Ver "Correspondance Cantor-Dedekind", en Cavaillès, *op. cit.*, p. 194.

[31] Nos referimos a la objeción sobre el uso de fracciones decimales en la demostración de $\mathbf{R}\sim\mathbf{R}^n$. La objeción se la propone Dedekind a Cantor, y éste la incluye en su memoria de 1878 sin hacer referencia a Dedekind.

paternidad de la prueba sea de Dedekind. Sin perder esto de vista intentaremos explicar el sentido del teorema 1, a través de su demostración, bajo la perspectiva del trabajo cantoriano expuesto en la sección precedente.

No es ocioso si reproducimos una parte considerable de la carta del 29 de noviembre de 1873 de Cantor a Dedekind:

> Tomemos el conjunto de todos los enteros positivos *n*, representado por (*n*); en seguida, consideremos el conjunto de todas las magnitudes reales positivas *x*, representado por (*x*); el problema es simplemente saber si (*n*) puede ponerse en correspondencia con (*x*) de tal manera que a cada elemento de uno de los conjuntos le corresponda un solo elemento del otro. La primera impresión es que esto no es posible, pues (*n*) se compone de partes discretas, mientras que (*x*) constituye un continuo. Pero nada se gana con esta objeción, y *por fuerte que sea mi inclinación a pensar que no hay correspondencia unívoca entre* (*n*) *y* (*x*)*, no puedo, sin embargo, encontrar la razón y es ella la que me interesa* –quizá es muy simple.
> ¿No cabría también la tentación de concluir a primera vista que (*n*) no puede ponerse en correspondencia unívoca con el conjunto ($\frac{p}{q}$) de todos los números racionales $\frac{p}{q}$? [...][32]

Si bien es posible que la demostración del teorema 1 sea obra de Dedekind, el planteamiento del problema y su sentido son preocupaciones exclusivas de Cantor. El pasaje anterior permite comprender dos cosas claramente. Primero, tanto el teorema 1

[32] "Correspondance Cantor-Dedekind", en *op.cit.*, p. 187-188. Las cursivas son nuestras.

como el que examinaremos en la sección siguiente se plantean en el marco más general del problema de caracterizar la continuidad, esto es, del problema de concebir la continuidad como el dominio **R** generado a partir del dominio de números racionales. Segundo, en el pensamiento de Cantor se introduce un nuevo elemento con respecto al problema de la continuidad: el conjunto **N** de números naturales (o bien el conjunto de los enteros positivos). Afirmamos que Dedekind está lejos de estas preocupaciones porque su teorema de continuidad, el cual expresa aritméticamente la esencia de ésta, puede entenderse, según hemos visto, como resultado de la expansión del sistema total de números a partir de **N**. En cambio, en la construcción del sistema de números reales de Cantor no se ha establecido explícitamente el papel que juega **N** y, por otro lado, la continuidad de **R**, depende de su relación con la línea recta *L*.

¿Por qué se pregunta Cantor ahora por la relación entre **N** y el dominio continuo **R**? En abril de 1872 Cantor recibe por envío del mismo Dedekind su ensayo sobre continuidad y números irracionales. La primera concepción cantoriana de la continuidad choca fuertemente con la afirmación de Dedekind sobre que toda la aritmética depende del acto de contar (el cual da como resultado la serie de los números naturales), incluyendo la caracterización aritmética del continuo lineal. En efecto, si la continuidad es una relación existente entre dos conjuntos bien determinados (**R** y los puntos de la recta), ¿en qué sentido puede sostener Dedekind que un tercer conjunto **N** es insoslayable para entender la continuidad? Esta pregunta equivale a cuestionarse por la razón de que no sea posible poner en "correspondencia unívoca" los conjuntos **R** y **N**. Para encontrar esta razón, Cantor comienza desde el principio: dado que **R** se construyó con base en **Q**, primero debe resolverse el asunto acerca de la relación que hay entre éste y **N**. El teorema 1 es la solución buscada.

Este teorema es válido para un conjunto más "amplio" que el de los números racionales, siendo válido, por tanto, para este último.[33] La demostración de Dedekind puede resumirse en dos aspectos: el ordenamiento del sistema **A** de números algebraicos y el hecho de "contar" esos números con los enteros positivos utilizados como índices. Esta demostración responde

---

[33] Como todo número de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros, es solución de una ecuación $bx-a=0$, todos los números racionales son algebraicos. Por otra parte, $2^{\frac{1}{2}}$ es un número algebraico, dado que satisface a la ecuación $x^2-2=0$, pero no es racional, por lo que hay elementos en el conjunto de números algebraicos que no están en el de números racionales. Es en este sentido que afirmamos que el de los números algebraicos es un conjunto más amplio que el de los racionales.

ampliamente a las dos inquietudes centrales de Cantor: 1) el teorema 1, o su demostración, enseña claramente que los conjuntos **Q** y **A** son susceptibles de cumplir con el acto elemental de contar en el sentido de que pueden reordenarse conforme a la sucesión de enteros positivos, y 2) esto concuerda con el "método" utilizado por Cantor para acceder a la comprensión de la continuidad, a saber, la comparación de conjuntos, pero con la diferencia importante de que en este caso la comparación pone en evidencia que los números algebraicos pueden asumir el orden característico de los enteros positivos.

Cantor asimila de Dedekind, a través de su demostración, la noción de orden unida a la idea de contar. En consonancia con ello, el teorema 1 le dice a Cantor que es posible comparar ordenadamente el conjunto de los números naturales y un conjunto que por su densidad podría inducirnos a pensar que no es biyectable con aquél. Y es en esto, como veremos enseguida, donde Cantor encuentra por fin la razón de que los números reales no pueden corresponder unívocamente a los naturales.

1.2.3. La no numerabilidad del continuo lineal.

La demostración del teorema sobre la no numerabilidad del continuo lineal también es objeto de conflicto entre Cantor y

Dedekind. Aunque en este caso todo parece indicar que el núcleo básico de la prueba es producto del pensamiento de Cantor. El teorema es el siguiente:

Teorema 2. Si tenemos una sucesión infinita de números reales diferentes determinada según una ley cualquiera

$$\text{I)} \qquad u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$$

entonces en cada intervalo dado $[\alpha, \beta]$ *hay un número* η *que no pertenece a la sucesión* (I). *Existe, por ende, una infinidad de números* η.[34]

En la demostración del teorema son identificables dos partes:

1. Construcción de intervalos anidados. Para demostrar este teorema Cantor elabora un procedimiento para determinar intervalos reales a partir de la sucesión (I). El procedimiento es este:
   - i) Tomamos un intervalo real $[\alpha, \beta]$ en el que $\alpha<\beta$.
   - ii) Elegimos los dos primeros números α' y β' de la sucesión (I) que posean las propiedades siguientes: a) $\alpha' \neq \beta'$, b) $\alpha' < \beta'$, c) $\alpha' \in [\alpha, \beta]$ y $\beta' \in [\alpha, \beta]$, d) $\alpha' \neq \alpha$, $\alpha' \neq \beta$.

[34] Cantor, "Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels", p. 308.

$\beta' \neq \alpha$ y $\beta' \neq \beta$. Con estos números formamos el intervalo $[\alpha', \beta']$.

iii) Para cada nuevo intervalo $[\alpha^{\nu}, \beta^{\nu}]$ se eligen números $\alpha^{\nu+1}$, $\beta^{\nu+1}$ de (I) que posean las propiedades listadas en (ii) con respecto a $[\alpha^{\nu}, \beta^{\nu}]$. De esta manera se forman intervalos $[\alpha'', \beta'']$, $[\alpha''', \beta''']$, etcétera, a partir de los números de la sucesión (I).

Este procedimiento garantiza dos cosas. Por un lado, los números α', α'', ... se suceden según su magnitud creciente, y los números β', β'', ... según decrece su magnitud. Por otro lado, los valores de cada nuevo intervalo están comprendidos en el intervalo precedente. En términos conjuntistas, cada nuevo intervalo que construimos es un subconjunto propio del anterior.

2. Demostración de que existe un número real η que no está en la sucesión (I). Como el procedimiento anterior conduce a dos sucesiones, una creciente y otra decreciente, sería posible pensar dos casos: uno en el que las sucesiones se aproximan de tal manera que para cierta ν ya no es posible formar un intervalo

ulterior $[\alpha^{v+1}, \beta^{v+1}]$; o bien un segundo caso en el que lo anterior no sucede.

i) El procedimiento (1) lleva a la construcción de un número finito de intervalos. Sea $[\alpha^{v}, \beta^{v}]$ el último de estos intervalos. Entonces no hay dos números de la sucesión (I) que satisfagan las propiedades (a) y (c) de (1ii), pues si las hubiera podría formarse otro intervalo en conformidad con (1) y $[\alpha^{v}, \beta^{v}]$ no sería el último. Así que hay a lo más un número de (I) en $[\alpha^{v}, \beta^{v}]$. Por la propiedad de densidad del intervalo se concluye que hay una infinidad de números η que no están en (I).

ii) El procedimiento (1) conduce a la construcción de una infinidad de intervalos. En este caso las sucesiones $\{\alpha^{v}\}$ y $\{\beta^{v}\}$ tienden a un límite α^{∞} y β^{∞} respectivamente.

   a) $\alpha^{\infty}=\beta^{\infty}$. Entonces $\eta=\alpha^{\infty}=\beta^{\infty}$. Si η estuviera en (I), habría un número $u_{n}=\eta$. Pero como hay una infinidad de intervalos, podemos construir uno en el que no esté u_n. Sin embargo, η está en todo intervalo.

b) $\alpha^{\infty} < \beta^{\infty}$. Entonces todos los valores η que corren en el intervalo $[\alpha^{\infty}, \beta^{\infty}]$ no pertenecen a la sucesión (I).

Con esto termina la demostración del teorema 2. Veamos su significación dentro de la problemática planteada en la sección anterior.

El problema de la relación entre los conjuntos **N** y **R** se apunta ya en el antecedente del teorema 2. Al igual que con los conjuntos **A** y **Q**, la cuestión consiste en saber si es posible comparar ordenadamente a **N** con **R**. La respuesta es negativa. Entre otras cosas, esto significa que no podemos "contar" los números de **R** al suscribirles un índice como en el caso de **Q**. Pero Cantor inquiere además la razón de que ello no sea posible, y descarta de inmediato una explicación circular apelando a lo discreto del dominio **N** y lo continuo de **R**.

La prueba del teorema 2 muestra que para una sucesión $\{\alpha^{v}\}$ siempre hay una infinidad de números reales que no están en ella. Esta sucesión obedece a un orden de magnitud creciente. Los números α^{v} no son necesariamente los enteros positivos, pero el orden creciente de aquéllos indica que pueden adquirir un orden semejante al de los enteros positivos en su distribución natural.

En otras palabras, el que un conjunto sea comparable ordenadamente con **N** significa para Cantor, en este momento, que aquel conjunto puede adquirir un orden semejante al de **N**. El que un conjunto se pueda "contar" por medio de **N** quiere decir que es susceptible de adquirir un orden similar al de éste. Así pues, cuando se prueba que para una sucesión $\{\alpha^{\nu}\}$ como la del teorema 2 siempre habrá números reales que no estén en ella, Cantor está viendo que el conjunto **R** no es capaz de adquirir un orden semejante al de $\{\alpha^{\nu}\}$ y, en consecuencia, no es "contable", en el sentido anterior, por medio de los enteros positivos. Valiéndonos de una terminología ajena a esta etapa del trabajo de Cantor, la primera lección que él obtiene de este teorema es que el conjunto de los números reales *no* puede adquirir un buen orden.

Hay dos lecciones más. Una de ellas también proviene de este teorema, relacionada ahora con la sucesión $\{\beta^{\nu}\}$. Esta tiene un orden del tipo $\{..., 3, 2, 1\}$. La lección consiste en que el conjunto de los números reales tampoco responde a este orden. Finalmente, la tercera lección ya la conocía Cantor desde su trabajo sobre números reales y continuidad: el orden denso de un conjunto como **Q** es irrelevante para comprender la noción de continuidad. Pero esto adquiere un nuevo sentido a la luz de los teoremas 1 y 2: ese orden denso es irrelevante porque es susceptible de tomar el orden característico de **N**, mientras que **R** no puede hacerlo.

En suma, la primera definición de continuidad de Cantor no involucra una noción de orden, pero cuando conoce el ensayo de Dedekind se pregunta por la relevancia que podría tener una relación tal, ya que la concepción de continuidad en Dedekind depende de ella. Mediante el teorema 1 Cantor asimila la noción de orden de Dedekind para el conjunto de los números racionales. Pero el teorema 2 implica el rechazo de Cantor a una concepción de la continuidad que se apoye en la idea de orden. Este último teorema reafirma drásticamente la primera definición cantoriana de continuidad. La esencia de la continuidad, diría Cantor, es completamente independiente de cualquier orden de los números reales; su esencia está en la relación o comparación entre un conjunto de magnitudes numéricas **R** y los puntos de la línea recta *L*.

1.3. Un conjunto continuo lineal es equipotente a uno *n* dimensional.

1.3.1. Primera parte de la demostración: una interpretación.

En 1878 aparece un de las obras más brillantes y tortuosas de Cantor: "Una contribución a la teoría de conjuntos". El tema de que trata es la equipotencia entre un conjunto continuo lineal y un conjunto continuo de *n* dimensiones. Para darle forma matemática a su tema, Cantor debe echar mano de nueve teoremas a lo largo de los cuales, a decir de Cavaillès, "avanza con timidez, haciendo referencia constante a la intuición, como para tranquilizarse ante el resultado [...]".[35] Más aún, no basta la extensa demostración que recorre nueve teoremas, sino que Cantor tiene otra, mucho más breve, que también incluye en su artículo, como si deseara que esto diera mayor firmeza a su resultado. Nosotros sólo nos ocuparemos de la primera.

Además del importante teorema que se demuestra, esta memoria es valiosa porque en ella se introducen algunos conceptos conjuntistas, a veces con ciertas ambigüedades. Uno de ellos es el de subconjunto, que Cantor llama *parte integrante*. La

---

[35] Cavaillès, *op.cit.*, p. 76.

definición que nos da indica que se trata del concepto anterior[36], aunque la forma en que Cantor lo utiliza pone en claro que es una idea más restringida, la de subconjunto propio. El segundo concepto que dejamos anotado es el de equipotencia, definido como la correspondencia elemento por elemento entre dos conjuntos, y se identifica con la de equivalencia. El tercer concepto es el de unión, el cual no se define para conjuntos en general sino para *dominios de variables*.[37] El dominio de una variable está formado por los valores de un conjunto lineal (es decir, de un conjunto de números reales diferentes) para una variable dada. La unión se define entonces para dominios disjuntos de variables a', a'', ..., donde el dominio de la variable a se compone de los valores de los dominios de aquellas variables: $a \equiv \{a', a'', ..., a^{\nu}, ...\}$.[38] En lo sucesivo, por brevedad, hablaremos de variables o de dominio de variables indiferentemente, salvo en los casos en que el hacerlo pudiera ocasionar confusión. Cantor establece dos leyes de equivalencia para cualesquiera tres variables:

i) $a \sim a$.

---

[36] Ver Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1878, p. 242.

[37] Ver *ibid.*, p. 248.

[38] En otros términos, Cantor está definiendo la operación de unión de conjuntos, pero no de manera general, sino específicamente para conjuntos disjuntos de números reales en un intervalo dado.

ii) si $a \sim b$ y $b \sim c$, $a \sim c$.

Estas nociones sirven para articular la demostración del

Teorema 1. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *n magnitudes reales, variables, e independientes una de otra, donde cada una puede tomar los valores* ≥ 0 *y* ≤ 1 (i.e., los valores comprendidos en el intervalo [0, 1]); *y sea t otra variable igualmente acotada* $0 \leq t \leq 1$. *Entonces es posible establecer una correspondencia entre la magnitud t y el sistema de n magnitudes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *de manera que a cada valor determinado de t pertenece un sistema de valores determinado* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *y a cada sistema de valores determinado* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *cierto valor de t.*[39]

Este es el teorema que expresa la equivalencia entre un conjunto continuo lineal y un conjunto continuo de *n* dimensiones. El primer paso para probarlo es mostrar la equivalencia entre el conjunto de números irracionales del intervalo [0, 1] y el conjunto de elementos de *n* coordenadas, en el que cada una de ellas recorre al conjunto de números irracionales del mismo intervalo [0, 1]:

Teorema 2. Sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *n magnitudes variables e independientes una de otra, cuyos valores recorren el conjunto de números irracionales del intervalo* [0, 1]. *Sea d otra variable que recorre el mismo conjunto de valores. Entonces es posible hacer*

[39] *Ibid.*,, p. 245.

corresponder de manera completa y en sentido único la magnitud d y el sistema de n magnitudes $e_1, e_2, \ldots, e_n$.[40]

La justificación de éste consta de dos partes:

1. Representación de los números irracionales por medio de sucesiones infinitas de enteros. Cantor consigue representar unívocamente los números irracionales del intervalo (0, 1) por medio de una fracción continua[41]

$$e=\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\ddots+\cfrac{1}{\alpha_\nu+\ddots}}}}$$

   en la que e es un número irracional y cada α_ν un entero positivo. Tomando los enteros α_ν se puede definir una sucesión infinita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$, la cual es única para cada número irracional diferente. Así, cada variable del

---

[40] *Ibid.*, p. 247. Este teorema 2 no corresponde al segundo teorema que Cantor presenta en su trabajo, el cual omitimos.

[41] En un principio Cantor intentó valerse de fracciones decimales, pero Dedekind le mostró que no cumplían con el objetivo. Cantor reprodujo en el parágrafo 7 de su artículo la objeción de Dedekind, pero no mencionó su nombre. La objeción original de Dedekind puede verse en "Correspondance Cantor-Dedekind", en *op. cit.*, pp. 203-204.

teorema 2 es un conjunto de sucesiones infinitas de enteros

$$e_1=(\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,\nu}, \ldots)$$
$$\vdots$$
$$e_n=(\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,\nu}, \ldots), \text{ y}$$
$$d=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots).$$

El problema radica en hacer corresponder elemento por elemento los valores que recorre la variable d con un sistema determinado de n coordenadas.

2. Equivalencia entre la variable d y un conjunto de n coordenadas. Los elementos de este último conjunto son n-tuplos de números irracionales, es decir, de sucesiones infinitas $\{\alpha_{\mu,\nu}\}$. La estrategia de Cantor para establecer la equivalencia deseada es determinar las sucesiones de enteros positivos para cada uno de los n miembros de un n-tuplo por medio de un único valor de d (i.e., su sucesión de enteros positivos), y recíprocamente determinar este valor de d por medio de las sucesiones de enteros positivos de los n miembros de aquel n-tuplo. Esto se logra por medio de la igualdad

$$\beta_{(\nu-1)n+\mu} = \alpha_{\mu,\nu}, \qquad \text{donde } \mu=1, 2, \ldots, n \ \text{ y } \ \nu=1, 2, \ldots, \infty.$$

Los enteros β_ν son los elementos de la sucesión para un valor de la variable d. El orden que ocupa cada β_ν en una sucesión queda determinado por los índices de los miembros de la igualdad. Tomemos como ejemplo un sistema de dos dimensiones. Entonces el conjunto de coordenadas está formado por pares ordenados. Si tenemos un número irracional $d=(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_v, ...)$, éste determina los elementos de un par ordenado $\langle e_1, e_2 \rangle$ asignando a e_1 todos los números β con índice impar y a e_2 todos aquellos con índice par; es decir,

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle (\beta_1, \beta_3, ..., \beta_{2v-1}, ...), (\beta_2, \beta_4, ..., \beta_{2v}, ...) \rangle$$

A su vez, este par determina la sucesión del número *d*. De esta manera a cada valor de *d* corresponde un par y a cada par un valor de *d*. La biyección queda garantizada por la unicidad de la representación de un número irracional a través de una sucesión infinita de enteros positivos.

Enunciamos ahora el

Teorema 3. Una magnitud variable e que recorre los valores irracionales del intervalo [0, 1], *puede unirse en sentido único a una variable x que recorre los valores reales del mismo intervalo* [0, 1], *de tal modo que a cada valor irracional* $e>0$ *y* $e<1$ *corresponde un valor real x, y sólo uno,* ≥ 0 *y* ≤ 1, *y recíprocamente a cada valor real de x corresponde cierto valor irracional de e.*[42]

[42] Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", p. 247.

En la medida en que Cantor justifique la equivalencia entre la variable e y la variable x, podrá sostener para esta última lo que enuncia el teorema 2 para uno de sus subconjuntos propios, y con ello demostraría el teorema 1. ¿Qué nos dice esta táctica demostrativa sobre la concepción cantoriana de la continuidad?

En la demostración de Dedekind acerca de que hay ciertos cortes que no son producidos por números racionales (en la sección 1.1.2), el inciso (4), del que se concluye que este tipo de cortes existe, se puede estipular en virtud del orden denso del conjunto **Q**. De igual manera, la definición cantoriana de los números reales en tanto límites de sucesiones convergentes de números racionales es posible gracias al orden denso de **Q**. Pero hemos visto que Cantor únicamente acepta, después del teorema 2 de 1.2.3, la noción de orden para conjuntos no continuos cuando de lo que se trata es de indagar la estructura o la esencia de la continuidad. Cantor busca una representación de los números irracionales que sea independiente del orden denso en **Q**, y la encuentra en las fracciones continuas. Con este tipo de fracciones, Cantor recupera la propiedad métrica de su primera definición de continuidad, pero excluyendo conscientemente al conjunto **Q**. El teorema 3 de esta sección establece ya el resultado que se desea alcanzar, con la salvedad de que se refiere a un subconjunto propio de **R**, el conjunto de los números irracionales. Éste es disjunto con respecto a **Q**, por lo cual, al mostrar su equivalencia con **R**, Cantor no puede estar de acuerdo con concepciones de la continuidad basadas, como la de Dedekind, en los sistemas numéricos no continuos desde **N** hasta **Q**.

Nos parece que en esta misma dirección apunta la muy tardía crítica de Cantor al principio de continuidad de Dedekind. En mayo de 1877, apenas un mes antes de la redacción de esta primera demostración, Cantor le escribe a Dedekind:

> [...] dice usted en el prólogo que el axioma que señalo es completamente equivalente al que presenta en el §3 como la *esencia* de la continuidad. Pero por ella entiende usted la misma propiedad que, en la página 25, aparece bajo el número IV; ahora bien, esta propiedad también pertenece al sistema de todos los números enteros, que puede considerarse, no obstante, como un prototipo de la discontinuidad.[43]

Un día después, el 18 de mayo, Dedekind intenta explicar a Cantor que su objeción no es más que un malentendido de su parte. Al parecer, a Cantor no le interesó demasiado la aclaración de Dedekind, pues no le responde sino hasta el 20 de junio, con un carta en la que este asunto no figura más que al inicio, como una fórmula de cortesía , dando la razón a Dedekind. Según la aclaración de Dedekind, entre su postura y la de Cantor no hay más que una diferencia terminológica. Es muy extraño que Cantor

[43] "Correspondance Cantor-Dedekind", en *op. cit.*, p. 198.

necesitara de la aclaración de Dedekind para notar algo tan elemental, si de eso se tratara, sobre todo al haber sido tan enfático en 1872:

> Tal como me he convencido ya [...] no hay diferencia más que en la *introducción conceptual* de las magnitudes numéricas. Que usted ha puesto en claro lo que constituye la esencia de la continuidad, de ello estoy absolutamente convencido.[44]

Cantor sabía desde 1872 que había una diferencia terminológica en sus presentaciones. Así que no es razonable pensar que su objeción de 1877 apuntaba a algo tan trivial. Parece más viable entender que a la propiedad que Cantor se está refiriendo es a la propiedad de orden, la cual , según vimos, sería el núcleo de la esencia de la continuidad en el pensamiento de Dedekind.

La estrategia demostrativa que va del teorema 2 al 3, y de éste al 1, sigue por el camino al que Cantor ha desembocado cuando asienta con éxito la no numerabilidad del dominio de números reales: la comprensión de la constitución de la continuidad está ligada a la comparación de conjuntos, para lo cual es inadecuado recurrir a una relación de orden. Para llevar a cabo esta comparación, Cantor le está dando forma a un nuevo concepto, el de potencia.

---

[44] *Ibid.*, p. 187.

1.3.2. Segunda parte de la demostración: nuevamente el axioma de continuidad.

La materialización de la estrategia antes descrita exige todavía superar algunas dificultades. Para ello, Cantor introduce nuevas variables y deja indicado un teorema. Éste afirma que si $a \equiv \{a', a'', ..., a^{\nu}, ...\}$ y $b \equiv \{b', b'', ..., b^{\nu}, ...\}$, entonces a y b son equivalentes en caso de que para toda a^{ν} haya una b^{ν} que le sea equivalente, y viceversa. Cantor define dos nuevas variables f y g. Los valores de f corren en el intervalo de números reales [0, 1] restando la sucesión $\{\varepsilon_{\nu}\}$, la cual se define para números irracionales ε_{ν} bajo las siguientes condiciones:

i) $\varepsilon_{\nu} \in [0, 1]$,

ii) $\varepsilon_{\nu} < \varepsilon_{\nu+1}$, y

iii) $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_{\nu} = 1$

La sucesión $\{\varepsilon_{\nu}\}$ es, pues, equivalente al conjunto de números racionales del intervalo [0, 1]. Por otra parte, la variable g puede asumir los valores del intervalo real [0, 1] bajo las dos restricciones siguientes:

a) g no puede tomar ningún valor de la sucesión $\{\varepsilon_{\nu}\}$.

b) Sea $\{\varphi_v\}$ la sucesión numerable de números racionales contenidos en el intervalo [0, 1]. La variable g no puede asumir ningún valor de la sucesión $\{\varphi_v\}$.

Ahora bien, de acuerdo con la noción de unión, la variable e del teorema 3 (1.3.1), que recorre todos los valores irracionales del intervalo [0, 1], puede describirse por el conjunto $\{g, \varepsilon_v\}$, así que $e \equiv \{g, \varepsilon_v\}$. Además, dada la manera en que se ha definido a f, los valores que ésta recorre pueden representarse por el conjunto $\{g, \varphi_v\}$, esto es, $f \equiv \{g, \varphi_v\}$. De lo anterior se concluye que e y f son equivalentes, pues $\varepsilon_v \sim \varphi_v$ y $g \sim g$. Esto permite reformular el teorema 3 (1.3.1) en términos de f:

Teorema 4. Una variable f que recorre los valores del intervalo [0, 1], *con excepción de los valores de una sucesión* $\{\varepsilon_v\}$ *sujeta a las condiciones i-iii anteriores, puede unirse de forma completa y en sentido único con una variable x que recorre los valores del intervalo* [0, 1].[45]

La demostración de este teorema procede mediante la partición de los dominios de f y x. La variable f se descompone en el conjunto $\{f', f'', \ldots, f^{v}, \ldots\}$ de la siguiente manera: a) si $v=1$, la variable f^{v} puede tomar los valores comprendidos en $[0, \varepsilon_1)$; b) si $v>1$, la variable f^{v} toma los valores pertenecientes al intervalo $(\varepsilon_{v-1}, \varepsilon_v)$; y c) el valor constante 1 pertenece al dominio

[45] Ver Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", p. 251.

de f; lo cual puede escribirse como $f \equiv \{[0, \varepsilon_1), (\varepsilon_1, \varepsilon_2), ..., (\varepsilon_{\nu-1}, \varepsilon_\nu), ..., 1\}$. Por otra parte, para la variable x primero se define una variable $x^{2\nu}$ que puede asumir los valores del intervalo $[\varepsilon_{2\nu-1}, \varepsilon_{2\nu}]$. Una vez hecho esto, la variable x se descompone en el conjunto $\{f', x'', f''', x^{iv}, ..., f^{2\nu-1}, x^{2\nu}, ..., 1\}$, o bien $x \equiv \{[0, \varepsilon_1), [\varepsilon_1, \varepsilon_2], (\varepsilon_2, \varepsilon_3), [\varepsilon_3, \varepsilon_4], ..., 1\}$. Para mostrar la equivalencia de los conjuntos $f \equiv \{[0, \varepsilon_1), (\varepsilon_1, \varepsilon_2), ..., (\varepsilon_{\nu-1}, \varepsilon_\nu), 1\}$ y $x \equiv \{[0, \varepsilon_1), [\varepsilon_1, \varepsilon_2], (\varepsilon_2, \varepsilon_3), [\varepsilon_3, \varepsilon_4], ..., 1\}$ únicamente hace falta garantizar que un intervalo abierto (α, β) es equivalente a un intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$.

La equivalencia entre dos intervalos de este tipo está sujeta a tres teoremas que formulamos de este modo[46]:

Teorema 5. $(0, 1] \sim [0, 1]$.

Teorema 6. $(\alpha, \beta] \sim [\alpha, \beta]$ y $[\beta, \alpha) \sim [\beta, \alpha]$.

Teorema 7. $(\alpha, \beta) \sim [\alpha, \beta]$.

El teorema 7 es el que necesitamos para garantizar la equivalencia entre los conjuntos del párrafo anterior. Pero el quinto es el teorema clave. En él se sustentarán los dos siguientes. En este sentido, la demostración del teorema 1 (1.3.1) pende de la resolución satisfactoria del quinto. Llama fuertemente la atención el hecho de que un teorema tan importante sea demostrado por Cantor a través de una figura, es decir, mediante la gráfica de una

---

[46] Ver *ibid.*, pp. 251-252.

curva.[47] Esta gráfica permite observar que a cada punto del segmento de la ordenada que no incluye el origen como punto y va hasta la coordenada 1, corresponde un único punto de un segmento unitario de la abscisa, el cual sí incluye el origen, y a cada uno de éste un único punto de aquél.

Esta demostración es aún más inquietante si recordamos que los intervalos del teorema 5 están constituidos por números reales, mas no por puntos; mientras que lo mostrado por la gráfica es la correspondencia entre puntos de segmentos. Esta gráfica es una prueba sólo en virtud del Axioma de continuidad de Cantor. Este axioma justifica el paso de las magnitudes de un intervalo a los puntos de un segmento de recta. Es por este axioma que la comparación entre dos conjuntos de puntos, realizada por medio del concepto de potencia, se justifica también para las magnitudes reales de aquellos intervalos.

Las dos partes de la demostración del teorema 1 están articuladas en función de la primera definición cantoriana de la continuidad. Pero de cada una de estas partes se desprende una posibilidad distinta para acercarse al entendimiento del continuo, ya no sólo lineal sino del continuo en general. Una se perfila con la noción de potencia, la otra con la de conjunto de puntos.

---

[47] Se puede ver la gráfica en *ibid.*, p. 251.

Capítulo
2
La introducción de la idea de infinito en el pensamiento de Cantor

2.1. Conjuntos derivados y magnitudes reales.

La demostración de la no numerabilidad del continuo lineal ha conducido, de acuerdo con nuestra lectura, a reafirmar la concepción de la continuidad que Cantor tenía cuando definió los números reales. Una concepción que consiste en que la continuidad está expresada por la relación de equipotencia entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los puntos de la línea recta. Esta concepción es posible gracias al Axioma de continuidad, formulado por Cantor en 1872. Este axioma es una piedra clave en la que Cantor se apoya para profundizar en su estudio de las propiedades del continuo. La segunda parte de la prueba de 1878 nos permite apreciar que la relación de equivalencia $\mathbf{R}\sim\mathbf{R}^n$ puede establecerse, en última instancia, en virtud del teorema 7, en vez de ser el resultado de analizar la relación de equipotencia entre el conjunto de puntos L y el conjunto **R** de números reales, como sería de esperar según la concepción cantoriana de continuidad. En cambio, Cantor dirige su atención a los puntos de un par de segmentos unitarios, que sólo difieren en que uno de ellos no incluye el punto de origen, y establece su correspondencia biunívoca, para concluir, por medio del Axioma de continuidad, que esto es válido para un conjunto continuo en general. Los esfuerzos posteriores de Cantor, a partir de 1879 y hasta 1882, estarán enfocados a los conjuntos de puntos, pues aquel axioma le ofrece el apoyo necesario para que los resultados conseguidos con base en este tipo de conjuntos, como los expresados en los teoremas 5, 6 y 7 de 1.3.2, valgan para conjuntos continuos cuyos elementos sean magnitudes numéricas. Cantor extrema esta posición cuando, por un lado, define un conjunto como un sistema (lineal) de puntos distribuidos en un segmento de recta[1] y, por otro, asume el propósito de estudiar la propiedad matemática de continuidad a partir de esta noción de conjunto. Pero antes de aventurarnos en el pensamiento de Cantor en este periodo, es conveniente recuperar un antecedente de 1872: la primera formulación del concepto de conjunto derivado.

---

[1] Ver Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 1", *Mathematische Annalen,* vol. 15, 1879, p. 1.

Con el fin de avanzar en su investigación sobre series trigonométricas, Cantor elabora los siguientes conceptos en torno a un conjunto de puntos:[2]

a) Punto límite: un punto límite de un conjunto P es un punto de la recta tal que en toda vecindad hay una infinidad de puntos de P.

b) Vecindad de un punto p: es todo intervalo en el que el punto p está contenido.

c) Punto aislado de un conjunto P: es un punto que pertenece a P y no es un punto límite de P.

d) Conjunto derivado P' de un conjunto P: es el conjunto de todos los puntos límite de P.

e) El n-ésimo conjunto derivado P^n de P: es el conjunto de todos los puntos límite de P^{n-1}, es decir, $P^n=(P^{n-1})'$.

Cantor ofrece dos ejemplos de conjuntos derivados para un conjunto de puntos comprendido en el intervalo [0, 1]. En el primero, el conjunto P tiene como elementos los puntos representados por los valores $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, en el que cada elemento de P es un punto aislado, por lo cual el derivado P' es el

[2] Ver Cantor, "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Mathematische Annalen*, vol. 5, 1872, p. 129. Cantor no presenta aquí el concepto de punto aislado, sin embargo lo introducimos ahora porque nos parece que contribuye a la claridad de la exposición.

singulete {0}. En este caso no existen derivados de orden mayor, pues {0} no tiene puntos límite. En el segundo ejemplo, P es un conjunto de puntos cuyos elementos están representados por los valores racionales del intervalo [0, 1], por lo que el derivado P' está formado por todos los puntos de ese intervalo. A diferencia del caso anterior, en éste es posible generar una sucesión de derivados P'', P''', ..., en la que cada término es igual a P'. En este ejemplo ningún elemento de P es un punto aislado.

Los ejemplos anteriores sugieren que es posible clasificar un conjunto de puntos en función de su sucesión de derivados. Los conjuntos de estos ejemplos difieren en que el primero da lugar a una sucesión finita, mientras que el segundo a una infinita. En el primer caso el conjunto P es del primer género, y en el otro es del segundo género. Por otra parte, un conjunto del primer género se dice que es de n-ésima especie según el número de derivados que produzca. En el primer ejemplo que hemos recuperado, P es un conjunto de la primera especie.

En 1872, época en que Cantor elabora las ideas anteriores, los conjuntos derivados sólo son utilizados por él como una herramienta matemática, adecuada para articular un procedimiento de prueba de un teorema sobre series trigonométricas. [3] Sin embargo, Cantor sólo requiere de los

[3] El teorema puede verse en *ibid.*, p. 130.

conjuntos del primer género, pues con ellos será suficiente para que lleve a buen término la demostración del teorema que le ocupa en aquel momento. Aun cuando sólo se constituyen como herramientas de demostración, Cantor deja anotada una importante propiedad que caracteriza a los conjuntos derivados: "[...] es fácil demostrar que un conjunto compuesto de un número infinito de puntos siempre tiene al menos un punto límite."[4] O bien, lo que es lo mismo, todo conjunto infinito y acotado de puntos tiene al menos un primer conjunto derivado no vacío. De acuerdo con la reconstrucción presentada hasta ahora, Cantor está pensando en conjuntos de puntos contenidos en un intervalo [α, β]. Así que la observación de Cantor establece, con mayor precisión, que un conjunto infinito de puntos que yace por completo en un intervalo posee por lo menos un punto límite. Supuesta la contención en un intervalo, la infinitud de un conjunto es una condición suficiente para la existencia de un conjunto derivado suyo.

Esta condición de infinitud está supuesta, obviamente, por la noción de punto límite. Un objeto de este tipo es el correlato geométrico de una magnitud real tal como se definió en la sección 1.2.1, es decir, de un número real definido como un límite. Entonces decíamos que la condición que permite

[4] *Ibid.*, p. 129.

establecer la existencia de un límite para una sucesión determinada de números racionales consiste en que, dados dos términos suyos a_{n+m} y a_n, su diferencia absoluta deviene tan pequeña como se quiera a medida que n crece. Ahora supongamos que los términos de esta sucesión representan puntos de la recta: si la diferencia entre dos puntos suyos p_{n+m} y p_n expresa la distancia $\overline{p_{n+m}p_n}$ y ésta deviene tan pequeña como se quiera a medida que n crece, entonces la sucesión define un punto α como límite. Por ejemplo, si P es el conjunto de puntos formado por la sucesión $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, donde $p_i \rightarrow \alpha$ y la sucesión cumple con la condición estipulada, entonces α es un punto límite de P. Cada vecindad del punto α puede recorrerse a través de los intervalos $(p_1, \alpha]$, $(p_2, \alpha]$, $(p_3, \alpha]$, ..., y queda garantizado que en cualquiera de ellas, por pequeña que sea, hay al menos un punto distinto de α. Esto se justifica por la condición que satisface la sucesión, pues cancela la posibilidad de que la distancia $\overline{p_i\alpha}$ pudiera ser igual a cero. Todo lo anterior permite apreciar dos cosas. Por un lado, Cantor está construyendo su noción de punto límite de manera paralela al concepto de límite. Por otro, la condición de infinitud requerida para la obtención de un conjunto derivado debe entenderse en el mismo sentido en el que la existencia de un límite es dependiente, de alguna manera, de una sucesión infinita.

Esta descripción de la noción de punto límite hace muy ilustrativo el ejemplo de conjuntos derivados del segundo género cuando la ponemos en conexión con la formación cantoriana del conjunto de números reales. El conjunto de números racionales sirve de base para la obtención de aquel otro conjunto al caracterizar un límite mediante sucesiones convergentes de números racionales. A partir del conjunto **R** de números reales, Cantor forma, de manera análoga a como lo hizo con **R**, otro conjunto de límites **C**, y "en cierto modo pueden identificarse (*decken*) mutuamente [...]"[5], aunque Cantor asegura que es conveniente mantener la distinción abstracta entre ellos. Como vimos en el capítulo anterior, es posible formar no sólo el conjunto **C**, sino una sucesión infinita en la que cada conjunto es idéntico a **R**. En el ejemplo mencionado, el primer derivado P' de P (éste igual al conjunto de valores racionales del intervalo [0, 1]) es el resultado de concebir ciertos puntos como límite, según dijimos en el párrafo precedente. "Los conjuntos siguientes P'', P''', ... coinciden exactamente con P' "[6], es decir, son iguales a P' del mismo modo que los conjuntos **C**, **D**, ...son idénticos a **R**. Si los elementos del conjunto P no se restringen al intervalo [0, 1], sino que le pertenecen todos los puntos representados por

---

[5] *Ibid.*, p. 126.
[6] *Ibid.*, p. 129.

valores racionales, el paralelismo entre las sucesiones P', P'', P''', ... y **R**, **C**, **D**, ... es completo.

Ahora vamos a dirigir nuestra atención a los estudios incipientes que Cantor dedicó a los conjuntos de puntos.

2.2. Conjuntos densos en la extensión de un intervalo.

Después de "Una contribución a la teoría de conjuntos", Cantor publica, a partir de 1879, una serie de seis memorias bajo el título "Sobre los conjuntos infinitos y lineales de puntos". En lo que resta de este capítulo nos apoyaremos tan sólo en las cuatro primeras, pues es en ellas donde se localizan las investigaciones tempranas de Cantor sobre conjuntos de puntos. Comenzaremos con la noción de conjunto denso en la extensión de un intervalo.

En la primera de esas memorias, Cantor retoma su antigua clasificación de conjuntos, pero en esta ocasión son los conjuntos del segundo género los que ocupan el centro de su atención. El problema planteado por Cantor consiste en descubrir cómo se comporta un conjunto de puntos con relación a un intervalo (continuo) $[\alpha, \beta]$, y específicamente le interesa saber cómo se comporta para que pueda ser catalogado como un conjunto del segundo género. Si la intersección de un conjunto P con un intervalo $[\alpha, \beta]$ no es vacía, y si la intersección de P con cada intervalo $[\gamma, \delta]$ contenido en $[\alpha, \beta]$ tampoco es vacía, entonces decimos que P es denso en todo el intervalo $[\alpha, \beta]$. Junto a esta definición Cantor ofrece otra que toma como base la operación de derivación de conjuntos: si todos los puntos del intervalo $[\alpha, \beta]$ son elementos del primer derivado P', entonces el conjunto P es denso en toda la extensión del intervalo $[\alpha, \beta]$. Cantor extrae tres interesantes consecuencias de su concepto de densidad ligado a la operación de derivación de conjuntos:

a) Si P es un conjunto de puntos denso en toda la extensión de un intervalo, entonces es denso en todo intervalo contenido en aquél.

b) Un conjunto de puntos P que es denso en un intervalo, es del segundo género.

c) Un conjunto de puntos P del primer género no es denso en la extensión de ningún intervalo.

Con este nuevo concepto a su disposición, Cantor reelabora, en la primera de las seis memorias indicadas, su demostración de que los números reales no son numerables, dejando anotada su intención de proporcionar una versión simplificada de la misma.[7] Joseph W. Dauben, un estudioso del pensamiento de Cantor, opinaba de esta nueva versión de la prueba que "su desarrollo era exactamente el mismo que el presentado en 1874 [...]", y añadía: "Con excepción de la nueva terminología, el artículo de Cantor de 1879 no ofrece nada en el sentido de nuevos resultados."[8] Compartimos la opinión de

---

[7] Ver Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 1", p. 5.

[8] Dauben, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, 1990, p. 80.

Dauben sólo parcialmente. Estamos de acuerdo en que aun cuando Cantor indica que la reformulación de la demostración tiene por finalidad dar una versión más simple que la de 1874, Dauben tiene razón cuando afirma que la demostración de 1879 tiene tantos pasos como la anterior, los cuales están estructurados de manera aproximadamente paralela a los de 1874, resultando desde este punto de vista exactamente igual. Pero tomamos distancia de la opinión de Dauben con respecto a los resultados obtenidos por Cantor en su artículo. Pensamos que no debemos restringir tanto la acepción de resultado, haciéndola exclusivamente aplicable a los teoremas descubiertos o a las herramientas matemáticas desarrolladas. Si concebimos un resultado como las consecuencias obtenidas en un proceso de investigación, y un resultado valioso como aquellas consecuencias útiles para el desarrollo de una teoría, entonces atender a los pequeños cambios en la demostración nos ayudará a comprender mejor el interés de Cantor por introducir en ella su nueva terminología, y esto, a su vez, nos dará algunas bases para entender el surgimiento de la teoría de conjuntos.

El teorema objeto de prueba afirma, como recordamos, que ninguna sucesión simplemente infinita $\{u_\nu\}$ puede contener a todos los números reales de un intervalo $[\alpha, \beta]$. En esta ocasión, Cantor divide la prueba en dos partes, según sea el caso de que la sucesión $\{u_v\}$ sea densa en el intervalo $[\alpha, \beta]$ o no lo sea:[9]

I) Si la sucesión $\{u_v\}$ no es densa en el intervalo $[\alpha, \beta]$, entonces hay un intervalo $[\gamma, \delta]$ tal que ninguno de sus elementos pertenece a la sucesión $\{u_v\}$.

II) Pero si la sucesión $\{u_v\}$ es densa en el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde $\alpha<\beta$:

1. Como la sucesión $\{u_v\}$ es densa en todo el intervalo $[\alpha, \beta]$, hay términos de ella que están en él. De estos últimos se eligen los dos primeros términos u_{j_1} y u_{j_2} que tengan los índices sucesivos más pequeños. Alguno de éstos debe ser menor que el otro (no pueden ser iguales pues suponemos que en la sucesión $\{u_v\}$ no hay términos repetidos) y designamos con u_{j_1} al menor, es decir, $u_{j_1} < u_{j_2}$. Nos referimos a estos términos con $\alpha^1_{x_1} = u_{j_1}$ y $\beta^1_{x_2} = u_{j_2}$ para formar el intervalo $[\alpha^1, \beta^1]$. Como se está construyendo un

[9] La demostración puede verse en: Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 1", p. 5 ss.

intervalo diferente de $[\alpha, \beta]$ y dado que $\alpha^1 \in [\alpha, \beta]$ y $\beta^1 \in [\alpha, \beta]$, entonces $\alpha < \alpha^1 < \beta^1 < \beta$; es decir, $[\alpha^1, \beta^1]$ es un intervalo contenido propiamente en $[\alpha, \beta]$. Además los índices x_1 y x_2 también guardan entre sí una relación de orden de tal manera que $x_1 < x_2$. En virtud de esta construcción, cualquier término u_μ de $\{u_\nu\}$, para el que $\mu \leq x_2$, no esta dentro del intervalo $[\alpha, \beta]$.

En general, un intervalo $[\alpha^\nu, \beta^\nu]$ se forma mediante la elección de los dos primeros términos $u_{j_k} = \alpha^{\nu}_{x_{2\nu-1}}$, $u_{j_{k+1}} = \beta^{\nu}_{x_{2\nu}}$ que pertenezcan a la sucesión $\{u_\nu\}$ y que tengan los índices sucesivos más pequeños entre todos los términos de la sucesión en el intervalo $[\alpha^{\nu-1}, \beta^{\nu-1}]$. Esta construcción garantiza dos cosas:

a) El intervalo $[\alpha^\nu, \beta^\nu]$ está contenido en todos los precedentes en la construcción, pues $\alpha^1 < \alpha^2 < \ldots < \beta^2 < \beta^1$.

b) Los subíndices de $\alpha^{\nu}_{x_{2\nu-1}}$ y $\beta^{\nu}_{x_{2\nu}}$ guardan la relación de orden $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2\nu-1} < x_{2\nu} < \ldots$

Por (a) y (b), para todo término u_μ perteneciente a la sucesión $\{u_\nu\}$, tal que $\mu \leq x_{2\nu}$, sucede que $u_\mu \notin [\alpha^\nu, \beta^\nu]$.

2. Los subíndices $x_1, x_2, \ldots, x_{2\nu-1}, x_{2\nu}, \ldots$ son números enteros positivos, por lo cual, para cualquier $x_{2\nu}$ es cierto que $x_{2\nu} \geq 2\nu$, donde 2ν es el subíndice de x. De esta relación entre el índice y su subíndice se sigue que $\nu < x_{2\nu}$. Por tanto, para cualquier entero ν, el término $u_\nu \notin [\alpha^\nu, \beta^\nu]$.
3. Como la sucesión $\{\alpha^\nu\}$ es infinita y está contenida en $[\alpha, \beta]$, tiene un límite A; por razones similares la sucesión $\{\beta^\nu\}$ también tiene un límite B. La manera en que se construyen los intervalos justifica que $\alpha^\nu < A \leq B < \beta^\nu$. Considérese entonces lo siguiente:

i) Supóngase que A<B. Entonces ningún término de la sucesión pertenece al intervalo [A, B], lo cual significaría que la sucesión $\{u_\nu\}$ no es densa en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

ii) Por tanto, A=B. El número n=A=B no es un elemento de $\{u_\nu\}$. Si lo fuera, sería el ν-ésimo, es decir, $n= u_\nu$. Pero esto es imposible, ya que, por construcción, $n\in[\alpha^\nu, \beta^\nu]$, mientras que $u_\nu\notin[\alpha^\nu, \beta^\nu]$ según el paso 2.

Al cotejar ambas demostraciones es posible percatarse de que tienen aproximadamente la misma complejidad, lo cual nos lleva a pensar que es un uso retórico el que Cantor acreditara la nueva demostración bajo la idea de sencillez, y cuando observamos la manera en que la presenta, sin desaprobar la anterior, es claro que consideraba justificado el teorema desde 1874. Es conveniente intentar, dadas las dificultades que lo anterior involucra, una explicación al hecho de que Cantor elabora en 1879 una nueva prueba para un teorema demostrado cinco años atrás. Un aspecto que puede ayudarnos en esta tarea consiste en notar que en la prueba de 1874 siempre se trabaja con valores numéricos; en cambio, en la de 1879 sólo la enunciación del teorema hace referencia a números, mientras que la demostración, si exceptuamos los índices, se construye a partir de conjuntos de puntos, pues la noción de densidad en un intervalo está definida, en esta época, para conjuntos de esta clase. Debemos considerar ahora que Cantor inicia su estudio en conjuntos de puntos después de 1878 con el fin de clarificar la noción de continuidad, teniendo a los conceptos de derivación de conjuntos y de densidad en un intervalo como todo el apoyo disponible, además de saber que un conjunto continuo lineal se comporta como afirman los teoremas 2 de 1.2.3 y 1 de 1.3.1. Pues bien, un conjunto continuo como el intervalo $[\alpha, \beta]$ de la demostración que acabamos de exponer puede alcanzarse por la operación de derivación de conjuntos si tenemos como base un conjunto de puntos P adecuado. En conformidad con la segunda definición cantoriana de densidad en un intervalo, el que el primer derivado de este conjunto P tuviera como elementos todos los puntos del intervalo $[\alpha, \beta]$, implicaría que P es denso en toda la extensión de $[\alpha, \beta]$; además hemos visto que una condición suficiente para que P tenga un primer conjunto derivado es que sea infinito, y es fácil corroborar que si un conjunto de puntos P contenido en un intervalo es finito, no tiene puntos límite, lo cual significa que la infinitud de un conjunto P contenido en un intervalo es una condición necesaria para la existencia de un conjunto derivado suyo. Sin importar de qué género sea, el conjunto que sirve de base para derivar otro conjunto debe ser infinito. La reestructuración de la demostración, dividiéndola en las dos partes (I) y (II), equivale a preguntarse cómo se comporta un conjunto infinito con relación a un intervalo continuo, y la nueva terminología que Cantor tiene a la mano le da la oportunidad de indagar en esta dirección al considerar las opciones de que ese conjunto infinito sea denso en toda la extensión de un intervalo o no lo sea.

En suma, nos parece que esta demostración no tiene por meta principal la justificación del teorema, sino que ha sido un medio del que Cantor se ha valido para avanzar en sus investigaciones, dadas las condiciones peculiares en que se desarrolla, a saber:

a) La ausencia de una teoría matemática a la que pudiera pertenecer propiamente el teorema de 1874, es decir, la carencia de un cuerpo de conocimientos en el que el teorema adquiriese plena significación.[10]

---

[10] Aunque en 1874 Cantor presenta este teorema como una demostración de existencia para números trascendentes, el teorema no tiene una buena acogida en esa teoría, pues, en tanto prueba de existencia, el procedimiento resultaba extraño en vista de que no se exhibía algún número trascendente.

b) A falta de una teoría que sirva de respaldo, el teorema, concebido ya como un resultado válido, representa el apoyo teórico necesario en una investigación.

c) Los conceptos de densidad en un intervalo y de conjunto derivado constituyen las herramientas para avanzar en el proceso de descubrimiento o profundización de conocimientos.

d) Estas herramientas se aplican con base en el escaso apoyo teórico que se posee, dadas las características del cual, la aplicación debe implementarse en una demostración, en la que se busca entender el comportamiento de un conjunto infinito con respecto a un conjunto continuo.

Daremos paso ahora a los resultados que Cantor cosechó en su artículo de todo esto.

Al comparar la demostración anterior con la expuesta en 1.2.3 no es difícil hallar sus semejanzas. Nuestro objetivo es, por el contrario, destacar sus diferencias. Comencemos con el paso (I), correspondiente al (2i) de la prueba original. En ésta, previamente a (2i), Cantor ya había diseñado el procedimiento de construcción de intervalos, y (2i) se consideraba como una posibilidad de la construcción, en la cual nos veríamos conducidos a la obtención de un número finito de intervalos. En cambio, (I) no se presenta como consecuencia posible y, más aún, se trata como un caso totalmente independiente del resto de la prueba. Podríamos aducir varias razones a favor del cambio de perspectiva de Cantor. Por ejemplo, sería viable proponer que si obtenemos un número finito de intervalos, entonces la sucesión $\{u_\nu\}$ es finita, en cuyo caso es trivial la afirmación de que ella no contiene a todos los números reales del intervalo $[\alpha, \beta]$. Pero creemos que las razones de Cantor para eliminar este caso, sustituyéndolo con (I), son más profundas que esto.

La significación de (I) seguramente es susceptible de diversas interpretaciones[11], nosotros deseamos poner el acento en una de ellas. Pensando (I) en términos de derivación de conjuntos, $\{u_\nu\}$ es el conjunto base, y en (I) se afirma entonces que un conjunto infinito $\{u_\nu\}$ que no es denso en el intervalo $[\alpha, \beta]$, no tiene como derivado un conjunto cuyos elementos sean todos los puntos de $[\alpha, \beta]$, es decir, no tiene como derivado un conjunto continuo. Esto abriría una problemática doble en el pensamiento cantoriano: en primer lugar, está pendiente de solución la cuestión de si al cancelar el paso (I) como una opción con respecto a la

[11] Por ejemplo, sería válido pensar que Cantor estructura la demostración en dos casos para cubrir todas las posibles caracterizaciones de un conjunto numerable en función de la clasificación de conjuntos por medio de géneros. Los pasos (I) y (II) estarían respondiendo respectivamente a que hay conjuntos numerables del primer género y del segundo.

constitución de un conjunto base para derivar a partir de él un conjunto continuo, entonces la propiedad de densidad en un intervalo podría establecerse como característica de todos los conjuntos del segundo género; y en segundo lugar, en caso de que la cuestión anterior se respondiese negativamente, cabría la posibilidad de que hubiera conjuntos que no fueran densos en ningún intervalo, pero que pudieran biyectarse con el intervalo de puntos $[\alpha, \beta]$.[12] La dificultad de esto último estriba en que un conjunto de este tipo, al ser *equivalente* al segmento de recta expresado por el intervalo $[\alpha, \beta]$, responde a la primera concepción cantoriana de la continuidad, pero ello entra en conflicto con la segunda definición de densidad en un intervalo, en la que aparece la densidad como una condición necesaria para que de un conjunto se derive otro continuo. El énfasis de esta prueba recae, en suma, sobre la cuestión de cómo debe estar constituido un conjunto para que dé lugar a la formación de un conjunto continuo. La respuesta parece insinuarse a partir de las consecuencias (b) y (c) mencionadas más arriba: dado un conjunto del segundo género, podemos obtener un conjunto

[12] Mucho más tarde, en 1883, Cantor tendrá éxito finalmente en definir un conjunto de este tipo, el llamado conjunto de Cantor. Sin embargo, este conjunto y el uso que le da su autor no nos ayudan en este momento, pues para esa fecha Cantor ha modificado significativamente su concepción de la continuidad, como esperamos mostrar en el siguiente capítulo.

continuo. Si esta respuesta pudiera sostenerse con éxito, traería consigo la aceptación inmediata de modificar la concepción de la continuidad por medio de la adjunción de la propiedad de densidad en un intervalo. Pero Cantor es muy cauteloso en insinuar siquiera esta respuesta, pues es consciente de que en su artículo de 1879 sólo ha adelantado la mitad del camino y de que requeriría de una consecuencia (d), la cual sostuviera que para todo conjunto del segundo género hay un intervalo en el que es denso. Por el momento no sabe si esto es cierto o falso, dejándolo como un problema abierto[13], sobre el que regresaremos en el apartado siguiente, cuando Cantor ya tiene una solución.

Un segundo aspecto de la prueba de 1879 que conviene tener en consideración es el referente a (II2). En la prueba de 1874 no hay un paso que pueda separarse tan claramente como (II2), sino que su correspondiente es parte de la argumentación en (2ii) de la sección 1.2.3. El objetivo en (II2) es garantizar la existencia de un intervalo $[\alpha^{\nu}, \beta^{\nu}]$ en el que no haya ningún término u_{ν} de la sucesión $\{u_{\nu}\}$. Como puede constatarse en la exposición de la demostración, esto se consigue gracias a la manera en que se han definido los índices. Más aún, Cantor trata aquí a los índices como objetos matemáticos, esto es, como entidades con cualidades propias (por ejemplo aritméticas, en

[13] Ver *ibid.*, p. 3.

tanto que son números) o, más importante todavía, capaces de que sus relaciones determinen el comportamiento y las propiedades de otros objetos. Esto último es lo que de hecho sucede: la relación entre los términos de las sucesiones de índices impide la existencia de un número cualquiera u_ν en el intervalo $[\alpha^\nu, \beta^\nu]$. En cambio, en lo referente a la prueba de 1874 no es sostenible algo similar, en ella los índices sólo funcionan como símbolos para distinguir unos de otros los términos de una sucesión. En este sentido, el interés de Cantor por el comportamiento y la constitución de los índices de una sucesión aumenta.

Hay todavía una tercera diferencia que deseamos glosar. En 1874, (2ii) se compone por un par de casos según sea que los límites α^∞ y β^∞ sean iguales o uno menor que otro. Aunque Cantor hace una rápida aclaración de que el caso $\alpha^\infty<\beta^\infty$ nunca sucede cuando se trata de números algebraicos, lo mantiene, junto con $\alpha^\infty=\beta^\infty$, como una entre dos posibilidades. En 1879, el que el límite A sea mayor que el límite B no es posible, pues implicaría que la sucesión $\{u_\nu\}$ no es densa en el intervalo $[\alpha, \beta]$. Si tuviéramos un intervalo [A, B] en el que A<B y en el que no hubiera ningún elemento de $\{u_\nu\}$, todos los valores comprendidos entre A y B serían indefinibles como sucesiones convergentes de números racionales. El concepto de densidad en un intervalo, al hacer posible la reestructuración de la prueba en los pasos I y II,

cancela esta vía. De esta manera, la continuidad no está estructurada con base en lo infinitamente divisible. El infinito así entendido no reporta utilidad alguna para el esclarecimiento de las propiedades del continuo.

Los anteriores son los resultados, algunos de ellos parciales y problemáticos, que Cantor obtuvo a partir de su demostración de 1879. Las repercusiones que tuvieron en el desarrollo de su pensamiento con respecto al surgimiento de la teoría de conjuntos serán objeto de estudio en el capítulo siguiente. Antes es menester analizar otros aspectos de su investigación en conjuntos de puntos con el fin de reunir más elementos de juicio para comprender el papel que juega la noción de infinito en esta historia.

2.3. Partiendo los conjuntos derivados.

En la segunda memoria sobre los conjuntos lineales e infinitos de puntos, después de la introducción de algunos términos conjuntistas, Cantor inicia su exposición con estas palabras:

> Los conjuntos de puntos del primer género pueden caracterizarse completamente, como hemos visto, mediante el concepto de conjunto derivado, según ha sido desarrollado hasta ahora; para los del segundo género ese concepto es insuficiente, debiendo emprenderse aquí una extensión del mismo, la cual habrá de presentarse como por sí misma al profundizar en el concepto.[14]

Esto contrasta con el inicio de la memoria anterior:

> En él [el concepto de conjunto derivado], como esperamos mostrar más tarde, se fundamenta la explicación más sencilla a la vez que más completa de lo que es un [conjunto] *continuo*.[15]

De acuerdo con esto último, la noción de conjunto derivado posee la apreciable capacidad de dar claridad a la de conjunto continuo. Pero apenas un año más tarde no sólo los conjuntos continuos,

---

[14] Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2", *Mathematische Annalen*, vol. 17, 1880, p.356.
[15] Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 1", p. 1.

sino en general los conjuntos del segundo género, no pueden explicarse plenamente con el concepto de conjunto derivado, pues es precisamente éste el que requiere de una clarificación ulterior.

En 1880, Cantor es capaz de responder al problema que había quedado pendiente un año atrás, el cual consiste, como recordamos, en decidir si todo conjunto del segundo género es necesariamente denso en algún intervalo. Cantor tiene éxito al exhibir un conjunto del segundo género el cual, sin embargo, no es denso en ningún intervalo.[16] Este resultado echa por tierra una propiedad que prometía caracterizar por completo a los conjuntos del segundo género, esto es, la de densidad en un intervalo. Frente a esto, Cantor debe detenerse y examinar nuevamente los conjuntos derivados en busca de una base firme para entender los conjuntos del segundo género.

Cantor ensaya otro rumbo en esta búsqueda. En vez de preguntarse acerca de la constitución del conjunto que sirve como base para la derivación, toma el primer derivado de un conjunto del segundo género y establece que el primer derivado de este tipo puede partirse en dos conjuntos A y B. Como se trata de un conjunto del segundo género, sabemos que hay una sucesión ilimitada de derivados P', P'', P''', ... El conjunto A tiene como elementos los puntos que desaparecen en la sucesión de conjuntos

---

[16] Ver Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2", p. 358.

derivados. El conjunto B se compone por los puntos que se conservan en todos los términos de la sucesión, así que $B=\bigcap \{ P', P'', P''', ...\}$. Cantor designa con P^{∞} al conjunto B y es el conjunto derivado de P de orden ∞.

Ahora bien, si P^{∞} es vacío, significa que hubo un momento en el proceso de derivación en el que se alcanzó un conjunto P^{n} que no tenía ya puntos límite. Así que en el caso en que $P^{\infty}=\varnothing$, el conjunto P y sus derivados son del primer género. Y de la definición de este tipo de conjuntos resulta claro que para todo conjunto del primer género se cumple que $P^{\infty}=\varnothing$. A partir de esto se concluye inmediatamente que si $P^{\infty}\neq\varnothing$, entonces P es del segundo género. El ejemplo que Cantor muestra de un conjunto del segundo género que no es denso en un intervalo consiste en un conjunto cuyo derivado P^{∞} tiene exactamente un elemento.

Es difícil precisar el sentido en el que esto contribuye a clarificar la noción de conjunto derivado, teniendo en cuenta que el objetivo es explicar la naturaleza de los conjuntos del segundo género y, específicamente, la de los conjuntos continuos. Es claro que Cantor se concentra especialmente en el conjunto B, ¿esto quiere decir que la naturaleza de un conjunto del segundo género depende en absoluto de B? Quizá encontremos alguna pista al considerar cómo es A. Cantor enfatiza lo siguiente:

> Observemos que en la sucesión de derivados P', P'', P''', ... de un conjunto P, cada término es divisor [i.e., subconjunto] del precedente, por lo cual, cada nuevo derivado P^{ν} se obtiene del anterior $P^{\nu-1}$ por medio de la *eliminación* de ciertos puntos, *sin* que se agreguen otros nuevos.[17]

Inmediatamente después de este señalamiento Cantor propone la partición de un primer derivado en los conjuntos A y B. Cantor sugiere así que la relación existente entre un derivado y su precedente es un supuesto en el que se apoya la partición de P' en A y B. Como la relación es estrictamente la de subconjunto propio, A nunca es vacío. El lado problemático de esto se muestra cuando recordamos que incluso Cantor ha dado ejemplos en los que A es vacío. Uno de ellos está constantemente en la mente de Cantor: cuando P es el conjunto de valores racionales del intervalo [0, 1], su sucesión de derivados nunca pierde un solo punto, de tal manera que $[0, 1]=P'=P^{\infty}$ y consecuentemente A es vacío. Podemos simplemente corregir la "confusión" de Cantor intercambiando la relación $\subset$ por $\subseteq$, abriendo así la posibilidad para que A sea vacío. Preferimos tomar otra postura: Cantor está específicamente interesado en suponer que A no es vacío.

Bajo este enfoque debemos tener presente:

1) La introducción de los conjuntos derivados del segundo género estuvo motivada por la construcción de sistemas

[17] *Ibid.*, p. 356.

numéricos **R**, **C**, **D**, ..., en donde cada uno es un conjunto continuo y todos son idénticos entre sí. Pero una consecuencia de un proceso de derivación en el que **R**=P', y sin embargo el subconjunto A de P' tuviera al menos un elemento, consistiría en que los siguientes derivados **C**, **D**, ... no serían idénticos a **R**.

2) El teorema 3 de la sección 1.3.1 junto con el 4 de 1.3.2 le han mostrado a Cantor que es posible eliminar algunos puntos de un intervalo real sin menoscabar su *equivalencia* con los puntos de un segmento de recta, le han mostrado que aun retirando todos los puntos representados por valores racionales, el intervalo se mantiene siendo biyectable con un conjunto continuo de puntos.

3) El hecho de que no todo conjunto del segundo género sea denso en algún intervalo debilita la intuición de Cantor concerniente a introducir la noción de densidad en un intervalo como una nota distintiva de su concepción de la continuidad.

Mirando los incisos (1) y (2) desde el tercero podemos notar que el pensamiento de Cantor en esta época es atravesado por un conflicto teórico, pues (3) parece instarlo a conservar su definición de continuidad, basada en el concepto de potencia, donde el Axioma de continuidad es fundamental. Vimos que este axioma le confiere realidad objetiva a la continuidad de números reales gracias a que garantiza la biyección con los puntos de la recta. Si la propiedad de densidad está puesta en duda en el sentido de (3), y si la relación de equivalencia entre los conjuntos que han perdido puntos en los dos primeros incisos y el conjunto **R** de números reales es transitiva con respecto al conjunto de puntos de la recta, ¿por qué el Axioma de continuidad sólo transfiere la realidad objetiva de la propiedad de continuidad a **R** sin transitar junto con la relación de equivalencia a los otros conjuntos? En otras palabras, el conflicto teórico que Cantor enfrentaba consistía en que (3) lo remitía a su antigua concepción de la continuidad, lo cual sugería que a pesar de perder puntos un conjunto podría ser concebido como continuo mientras fuera biyectable con la recta; sin embargo, esto contraviene una idea "natural" de continuidad en la que se pensaría que al quitarle algunos elementos se le formarían huecos. La insistencia en suponer que en un proceso de derivación $A\neq\varnothing$ se orienta, nos parece, a la cuestión de saber si es posible que se pierdan puntos en la sucesión P', P'', P''', ..., de tal manera que el derivado de orden ∞ fuera continuo.

Algún tiempo más tarde, en 1882, Cantor enuncia lo que ahora es un conocido teorema en teoría de conjuntos:

> Considérese un conjunto finito o infinito numerable de conjuntos *(E)*, *(E')*, *(E'')*, ..., cada uno de los cuales es numerable, entonces el conjunto formado por la unión de todos los elementos de *(E)*, *(E')*, *(E'')*, ... es también numerable.[18]

Si en una sucesión de derivados *P'*, *P''*, *P'''*, ... el paso de *P'* a *P''* supone la pérdida de un conjunto no vacío de puntos *E*, y en el paso de *P''* a P''' se pierde un conjunto de puntos no vacío *E'*, y así sucesivamente, donde *E*, *E'*, ... son como en el teorema anterior, entonces, como {*E*, *E'*, ...} es numerable, el problema señalado en el párrafo anterior se agudiza, planteándose ahora no sólo la posibilidad de seguir concibiendo como continuo a un conjunto que ha perdido puntos, sino preguntándose cuántos de ellos podría perder, y teniendo como máximo una infinidad numerable de conjuntos infinitos numerables.[19]

Vinculado a lo anterior hay una dificultad más, que parece colocarse en el centro del problema, y consiste en esclarecer tanto el sentido que tiene hablar de sustracción con respecto al infinito como determinar el significado de ello. Sin afrontar esta dificultad resulta extremadamente oscuro y vago cuando se habla de sustraer a un conjunto infinito una *cantidad*

---

[18] Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3", *Mathematische Annalen*, vol. 20, 1882, p. 117.

[19] Este sería el máximo si tenemos en consideración que Cantor pensaba en esta época que los conjuntos infinitos únicamente podían tener dos potencias, la de los conjuntos simplemente infinitos o la del continuo.

infinita de puntos. Esta interpretación de los conjuntos A y B con relación a la naturaleza de un conjunto continuo insinúa que la profundización de Cantor en el estudio de conjuntos derivados le plantea el concepto de infinito como un problema, uno que no se refiere más a la comparación de totalidades infinitas, sino a la posibilidad de realizar operaciones entre totalidades infinitas.

Regresemos ahora a la sucesión de derivados de conjuntos del segundo género. Para estos conjuntos, P^{∞} es distinto del vacío. A partir de P^{∞} podría iniciarse, en principio, otra sucesión de derivados en la que P^{∞} serviría de conjunto base. La sucesión obtenida, $P^{\infty+1}$, $P^{\infty+2}$, ..., en caso de que P^{∞} sea del segundo género, dará lugar a que P^{∞} esté formado por dos conjuntos A y B, donde $B=\bigcap\{P^{\infty+1}, P^{\infty+2}, ...\}$ y que se designa por $P^{2\infty}$. Tomando como base a $P^{2\infty}$, y si es del segundo género, posee un conjunto $B=\bigcap\{ P^{2\infty+1}, P^{2\infty+2}, ...\}= P^{3\infty}$. Este proceso conduce a la obtención de conjuntos derivados de orden $n\infty$. La intersección de estos conjuntos, es decir, $\bigcap\{P^{\infty}, P^{2\infty}, P^{3\infty}, ...\}$ se simboliza con P^{∞^2}. En general, si el proceso continúa lo suficiente alcanzaríamos una sucesión de derivados cuyo orden* estaría representado por símbolos del infinito:[20]

$$P^{n\infty^{\infty}}, P^{\infty^{\infty+1}}, P^{\infty^{\infty+n}}, P^{\infty^{n\infty}}, P^{\infty^{\infty^{n}}}, P^{\infty^{\infty^{\infty}}}, \ldots$$

Estos índices superiores han atraído la atención de un sinnúmero de comentaristas, llegando algunos a declarar, retóricamente por supuesto, que a Cantor únicamente le faltó decir que eran números transfinitos. Este entusiasmo no es infundado, pues es indudable la semejanza entre esos índices y los ordinales transfinitos.[21] Nosotros dejaremos pendiente para el siguiente capítulo la discusión de la relación de estos índices y los ordinales transfinitos. Vamos a procurar determinar tan sólo la relación que guardan con los problemas que nos han ocupado en este apartado.

---

* Orden significa aquí lo mismo que P^{∞} es el derivado de orden ∞ de un conjunto P, es decir, significa que es la intersección de una determinada sucesión infinita de derivados.

[20] Ver Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2", p. 357.

[21] Sería interminable si pretendiéramos ofrecer una lista de los intérpretes que han comentado algo sobre este tema. No obstante, queremos dejar constancia de que Ferreirós, en su artículo "'What Fermented in Me for Years': Cantor's Discovery of Transfinite Numbers", hace una propuesta interesante, según la cual estos índices no llevan directamente a los números transfinitos, sino que su proceso de formación, junto a otros resultados, está relacionado con el descubrimiento de los principios sobre los que Cantor construye los números transfinitos.

La demostración de 1879 de que el continuo no es numerable incrementó, dijimos antes, la importancia que Cantor concedía a los índices. Sin embargo, hay una enorme diferencia entre el tratamiento de los índices de 1879 y el de estos índices superiores. Cuando nos preguntamos cómo se porta ∞, por ejemplo, con respecto al conjunto del que es índice, es inevitable responder en términos de la intersección de los conjuntos derivados. Aunque ∞ es un símbolo del infinito, no denota, en tanto índice, a un conjunto infinito; vimos que P^{∞} puede ser, tratándose de conjuntos del segundo género, desde un singulete hasta un conjunto continuo. Así que un símbolo como $\infty+1$ no significa infinito más uno, sino que hemos iniciado un nuevo proceso de derivación, el cual puede dar lugar o no a un conjunto derivado. En este sentido, ni la constitución de un conjunto P ni su existencia están determinadas por su índice, es decir, éste no se comporta como un objeto matemático, sino que es un símbolo utilizado simplemente para diferenciar entre un proceso de derivación y otro.

Ahora bien, de acuerdo con la cita que abre este apartado, la finalidad de toda esta construcción de derivados con símbolos del infinito consistía en mejorar nuestra comprensión de la constitución de los conjuntos del segundo género. Cantor dice que la ecuación $P^{\infty}=\varnothing$ caracteriza completamente a los conjuntos del primer género, y en efecto es así porque $P^{\infty}=\varnothing$ se constituye en una invariante para la intersección de cualquier sucesión de conjuntos del primer género. Por el contrario, P^{∞} (y lo mismo vale para $P^{2\infty}$, P^{∞^2}, etcétera) no caracteriza por completo a un conjunto del segundo género porque P^{∞} puede estar constituido de una infinidad de maneras. La noción de conjunto del segundo género sigue escabulléndose y ocultando sus notas distintivas.

Los índices que hemos venido comentando no pueden sugerir una salida para el problema concerniente a la posibilidad de efectuar operaciones con totalidades infinitas, pues más que un aliciente, representan un fracaso a los ojos de Cantor, en el sentido de lo expuesto en el párrafo anterior.

2.4. Conjuntos aislados.

En la cuarta memoria sobre conjuntos lineales e infinitos de puntos se define la diferencia de dos conjuntos A y B como un conjunto C formado por los elementos que pertenecen a A, pero no a B. La diferencia de A y B se denota por $C=A-B$. Cantor define además la noción de conjunto aislado como un conjunto D tal que la intersección con su primer derivado es vacía.

Cantor demuestra que todo conjunto aislado es numerable.[22] Por otro lado, cualquier conjunto P está compuesto por un conjunto aislado y otro subconjunto de P, esto es $P=(P-(P\cap P')) \cup (P\cap P')$, donde el miembro izquierdo de la unión es el conjunto aislado. Así pues, cualquier conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.

En particular, lo anterior es cierto para los conjuntos continuos de puntos. Veamos ahora. Al plantearse la cuestión de si sería posible eliminar puntos y cuántos de ellos de un conjunto sin afectar su continuidad, el máximo estaría representado por una infinidad numerable. Pero la peculiaridad de la respuesta consistía en suponer que fuera posible que un derivado continuo P' perdiera un conjunto de puntos E al formar el derivado P'', conservando la continuidad de éste, y que el proceso continuara

---

[22] Ver Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 4", *Mathematische Annalen*, vol. 21, p. 52.

así hasta el conjunto continuo P^{∞}. Hasta este momento la derivación de conjuntos representaba la herramienta principal para afrontar el problema de determinar las propiedades de la continuidad. Pero el resultado de que todo conjunto continuo, en tanto que es infinito, contiene un conjunto numerable desplaza la atención de la operación de derivación de conjuntos hacia la idea de que una sucesión P', P'', P''', ... podría obtenerse mediante una sustracción aritmética entre dos objetos infinitos: entre un conjunto continuo y un conjunto numerable. La idea fundamental es ahora que esta sucesión se produce por la sustracción reiterada de conjuntos numerables a un mismo conjunto continuo, en tanto que cada término de ella contiene un conjunto numerable. Con esto, Cantor se encuentra obligado, por un lado, a investigar nuevamente cuál es la relación entre un conjunto infinito numerable y un conjunto continuo y, por otro, debe preguntarse si es posible adscribir propiedades aritméticas a objetos infinitos.

Capítulo
3
Conjuntos infinitos y ordenados

3.1. Segunda definición cantoriana de continuidad: primera formulación.

3.1.1. El concepto cantoriano de potencia anterior a 1882.

Es menester que encaminemos nuestro discurso hacia una digresión, que beneficiará, sin embargo, el buen entendimiento de los temas a tratar en este capítulo. En consecuencia, deberemos remontarnos una vez más al año 1872 en busca de las primeras ideas con las que Cantor concibió el concepto de potencia. Pero es necesario tener presente que nuestro propósito en esta sección no es determinar todos los aspectos que lo caracterizaron, nuestra intención es señalar sólo aquellos que pueden ayudarnos a explicar la importancia que las nociones de orden, y sobre todo la de buen orden, adquirieron en el pensamiento cantoriano hacia finales de 1882.

Antes de este año es posible identificar dos etapas en la evolución del concepto de potencia. La aparición de éste en el pensamiento de Cantor representa la primera, aunque es cierto que en ella el término propiamente aún no está presente. Siempre resulta desafortunada la señalización por medio de fechas cuando lo que deseamos es identificar un momento determinado en la formación de un concepto, sin embargo, ante la necesidad de dar una coordenada temporal a esta etapa, pensamos que ella está ligada a la teoría cantoriana de números reales aparecida en 1872. En el primer capítulo tuvimos oportunidad de estudiar las particularidades que caracterizan a esa construcción del sistema de números reales, de las que ahora destacamos las dos siguientes: 1) el punto de partida de la construcción es el sistema de números racionales; y 2) en la construcción de Cantor no hay un punto último de llegada, es decir, gracias a la identificación de una magnitud numérica con un límite, teniendo como base a las magnitudes del sistema de números racionales, es posible obtener una sucesión infinita de dominios de magnitudes numéricas, en la cual el de números reales es el siguiente inmediato con relación al de números racionales.

En lo referente al inciso (1), el dominio de números racionales puede figurar como punto de partida en virtud de que cada uno de sus elementos es representado como una sucesión convergente de números racionales, lo cual permite definir a los elementos del dominio como límites. A partir de un dominio constituido por este tipo de elementos es posible alcanzar el de los números reales porque no todos los límites que se pueden definir por ese tipo de sucesiones son magnitudes racionales, de donde el conjunto de números reales se obtiene con base en el de racionales cuando se aceptan como elementos del primer conjunto no sólo las sucesiones convergentes que definen "límites racionales", sino a la totalidad de aquellas sucesiones.

Por otra parte, la sucesión de dominios mencionada en el inciso (2) puede explicarse igualmente apelando a la manera en que se representan los elementos de cada conjunto. Si **R** es el conjunto de los números reales y **C**, **D**, ... los sistemas que le siguen en la sucesión de (2), la diferencia entre los elementos de un conjunto y otro consiste en el modo en que están expresados, a saber, los elementos de **R** son sucesiones simples de números racionales, los de **C** son sucesiones dobles de números racionales, los de **D** son sucesiones triples, etcétera.[1] Las sucesiones simples son aquellas de las que partimos para representar a los elementos del conjunto de números racionales y, en un sentido más general, son de las que Cantor se ha valido para definir un límite. Si

[1] Ver Cantor, "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", pp. 125-127.

tomamos ahora una sucesión $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ de **R** que cumple la condición de convergencia consistente en que $r_{n+m}-r_n$ deviene tan pequeño como se quiera a medida que n crece, entonces esa sucesión define un límite c. La totalidad de estos límites forma el dominio **C**, que consiste, entonces, en que cada uno de sus elementos es una sucesión $r_1, r_2, ..., r_n, ...$, pero cada termino suyo, en tanto elemento de **R**, se representa por una sucesión simple de números racionales, por lo cual Cantor le llama sucesión doble. Por razones análogas se llaman triples, cuádruples, etc., a las sucesiones convergentes que son elementos de los dominios respectivos **D**, **E**, ... Ahora bien, para cualquier límite definido por una sucesión n-tupla es posible hallar una sucesión simple que lo defina y, por ende, cada término de la sucesión **D**, **E**, ... posee como elementos al mismo conjuntos de límites que **R**, aun cuando su representación por medio de determinadas sucesiones convergentes difiera de un dominio a otro. En otras palabras, los valores numéricos que pertenecen a **R**, **C**, **D**, ... son exactamente los mismos en todos ellos, pero el modo en que se representa a esos valores en cada conjunto es diferente.

Los incisos (1) y (2) anteriores, tal como los hemos venido comentando, subrayan respectivamente la relación entre **R** y el conjunto de números racionales **Q**, y por otra parte entre **R** y los conjuntos **C**, **D**, ... En el primer caso, los elementos de **Q** y de **R** están representados de la misma manera, pero hay valores en el último que no están en el primero, **Q** es un subconjunto propio de **R**. En el segundo caso, la representación de las magnitudes numéricas varía en los distintos conjuntos, pero siempre sucede que un conjunto cualquiera de la sucesión **C**, **D**, ... es subconjunto de **R** y éste de aquél, si hacemos caso omiso al modo de representación de sus elementos respectivos. Nos parece que son estas dos cosas lo que debemos entender, dado lo expuesto en los dos párrafos anteriores, cuando en 1872 Cantor afirmaba que a cada $q \in \mathbf{Q}$ corresponde un elemento $r \in \mathbf{R}$ pero no a la inversa, y que a cada $r \in \mathbf{R}$ corresponde un $c \in \mathbf{C}$ y recíprocamente.[2] Sin embargo hay dos aspectos que nos llevan a pensar que aquí está germinando el concepto de potencia:

a) Para decir que hay al menos un número real que no es racional sin que ello sea mediado por la línea recta[3], Cantor procede relacionando directamente las magnitudes numéricas pertenecientes a cada conjunto. La relación que es útil para alcanzar su objetivo (i.e., establecer que hay elementos en **R** que no están en **Q**) es una que se determina como

---

[2] Ver *ibid.*, p. 126.

[3] Recordemos que para mostrar la existencia de valores irracionales se acostumbraba echar mano de figuras geométricas: el ejemplo clásico es el de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son igual a 1.

correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos.

b) Cuando decimos que si no atendemos al modo de representación de los elementos pertenecientes a los conjuntos **R**, **C**, **D**, ..., entonces son mutuamente subconjuntos unos de otros, estamos afirmando que desde un punto de vista extensional todos aquellos conjuntos son iguales. El sesgo intensional involucrado en el modo de representación de los elementos de cada conjunto motivó en el pensamiento de Cantor el que mantuviera la diferencia "abstracta" entre ellos, con lo cual la noción de correspondencia biunívoca permaneció separada de la de igualdad.

Estos dos aspectos sientan las bases para comparar dos conjuntos sin que ello implique necesariamente su identidad. Este hecho deviene central en la obra de Cantor, pues es donde va a sostenerse su razonamiento para establecer propiedades comunes a dos conjuntos que se distinguen por la naturaleza de sus elementos; el ejemplo más elocuente es el de la propiedad de continuidad con respecto al conjunto de números reales y al de puntos de la recta, propiedad que queda establecida en virtud de su correspondencia biunívoca.

Como fecha de la segunda etapa en el desarrollo del concepto de potencia ofrecemos el año 1878, en el que se publica la memoria "Una contribución a la teoría de conjuntos", aunque debe quedar claro que la constitución del concepto es un proceso que se va gestando paulatinamente. En esa memoria Cantor presenta bajo el término "potencia" lo que seis años antes estaba en trance de ser un concepto, pero que no alcanzaba a delinearse como tal a falta de un término que lo señalara. Cantor recoge en su definición de potencia lo que hemos visto que estaba implícito en su pensamiento hacia 1872:

> Si dos conjuntos bien definidos M y N pueden coordinarse elemento por elemento de manera unívoca y completa (y cuando es posible hacerlo de una manera, siempre puede hacerse de muchas otras), entonces establecemos en lo sucesivo el modo de expresión de que esos conjuntos tienen *la misma potencia*, o bien que son *equivalentes*.[4]

De acuerdo con esto, la existencia de una función biyectiva entre dos conjuntos se coloca como la característica central de la noción de potencia y permanecerá constante en la concepción de Cantor pese al tiempo que transcurra y a los cambios teóricos que experimente su pensamiento. Sin embargo, hay una serie de ideas que rodea a este núcleo constante y que nos permite hablar de una

[4] Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", p. 242.

segunda etapa de desarrollo. Por ahora sólo es de nuestro interés exponer las ideas periféricas al núcleo que atañen a los conjuntos infinitos, las cuales vamos a sistematizar agrupándolas según puedan corresponder a conjuntos simplemente infinitos o a conjuntos continuos.

El hecho que determinó la evolución de la noción de potencia fue el descubrimiento de que, en lo tocante a conjuntos infinitos, éstos podían tener potencias diferentes. Estamos haciendo referencia, claro está, a los dos teoremas sobre números algebraicos y trascendentes demostrados en 1874. Una consecuencia del segundo consiste en que no todos los conjuntos infinitos son biyectables entre sí y, en particular, indica que existen conjuntos infinitos para los que es imposible establecer una función sobreyectiva con respecto al conjunto de números algebraicos, mientras que para éste sí es posible garantizar una inyección en alguno de aquellos conjuntos. Esta imposibilidad determina, por un lado, que los conjuntos infinitos son susceptibles de poseer potencias diferentes y, por otro, que la potencia de los números algebraicos, al fallar la sobreyección, es menor que la de aquellos conjuntos. A su vez, el primer teorema muestra, entre otras cosas, que el conjunto de números algebraicos tiene la potencia de un conjunto numerable, lo cual significa que puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los enteros positivos. Para 1878 Cantor está convencido tanto de que la potencia de este último conjunto es la más pequeña entre las que poseen los conjuntos infinitos, como de que todos los conjuntos que tienen esta potencia forman una "clase"[5], que Cantor designa como la primera.

El rasgo distintivo de los conjuntos que pueden clasificarse como de la primera clase consiste en que:

> [...] es posible ponerlos bajo la forma de una sucesión simplemente infinita y regular:
>
> $$E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$$
>
> tal que a cada elemento del conjunto le corresponde un sitio determinado en la sucesión y, además, ésta no incluye ningún otro término más que los elementos del conjunto dado.[6]

Debemos detenernos a reflexionar sobre cuál es la relación entre esta característica y la noción de potencia con respecto a conjuntos de la primera clase. Podemos plantear dos posibilidades mutuamente excluyentes para ella: la primera consiste en que la relación puede ser de carácter meramente externo, es decir, que se trata de dos conceptos totalmente distintos y si se yuxtaponen, se debe sólo a que la propiedad que cada uno de ellos expresa es susceptible de predicarse de un mismo tipo de conjuntos; la segunda posibilidad consiste en pensar la relación como interna.

---

[5] Ver *ibid.*, p. 243.

[6] Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3", pp. 116-117.

esto es, que el concepto de potencia, con respecto a los conjuntos de la primera clase, incluye dentro de su ámbito de significado el ordenamiento de un conjunto como una sucesión similar a la de los enteros positivos en su distribución natural. Cuando en el primer capítulo analizamos la demostración de la numerabilidad del conjunto de números algebraicos, observamos que sus dos partes fundamentales son el reordenamiento de los números algebraicos en una sucesión y, en seguida, mostrar que esta sucesión se corresponde unívoca y completamente con la de los enteros positivos. Hemos insistido en que es esta correspondencia "unívoca y completa" lo que permite afirmar la equipotencia entre dos conjuntos, pero en esa demostración, la correspondencia entre los números algebraicos y los enteros positivos posee la siguiente particularidad, que no debemos perder de vista: dada una determinada relación de orden entre dos términos cualesquiera de la sucesión de enteros positivos siempre se verifica que los números algebraicos correspondientes a cada uno de aquellos términos guardan entre sí la misma relación de orden en la sucesión de números algebraicos que la que los enteros correspondientes poseen en su sucesión. Así pues, la comparación en esta demostración además de ser unívoca y completa es ordenada. A partir de esta demostración y hasta antes de noviembre de 1882, es invariable en el pensamiento de Cantor considerar que la relación que define a la idea de potencia para los conjuntos de esta clase es efectivamente una correspondencia biunívoca, pero de tal índole que debe responder a una comparación ordenada con la sucesión de enteros positivos.[7] Concluimos entonces que en esta segunda etapa el concepto de potencia para conjuntos de la primera clase tiene una relación interna con el concepto de una sucesión simplemente infinita.

Daremos paso ahora a las ideas que están en torno al núcleo básico del concepto de potencia respecto a conjuntos continuos. Con base en el teorema de 1874 sobre la no numerabilidad del conjunto de números reales, Cantor sabe que los conjuntos continuos no son del tipo de los de la primera clase. Pero en 1878, asume una postura más radical, enmarcada en la problemática general de averiguar el comportamiento, desde el punto de vista de su potencia, de los distintos conjuntos de puntos de una línea recta:

> [...] la pregunta es en *cuántas* y en cuáles clases se descomponen los conjuntos lineales cuando en una misma clase se coloca a los conjuntos de idéntica potencia y en diferentes clases a los conjuntos de diferentes potencias. Mediante un método de inducción, en cuya exposición no entraremos, se establece el teorema que afirma, en dirección de este principio de clasificación, que el número de clases obtenidas de conjuntos lineales es finito y es, ciertamente, igual a dos [...] la

[7] Ver Cantor: "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", pp. 242-243; "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2", p. 4; "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3", pp. 116-117.

> primera clase contiene a todos los conjuntos que pueden ponerse bajo la forma: *functio ipsius* ν (donde ν recorre todos los números enteros positivos); mientras que la segunda clase contiene a todos los conjuntos que se reducen a la forma: *functio ipsius x* (donde *x* puede tomar todos los valores reales ≥ 0 y ≤ 1).[8]

En 1878 Cantor tiene la hipótesis de que cualquier conjunto infinito se agrupa en alguna de estas dos clases. La hipótesis se formula inmediatamente después de haberse demostrado la equipotencia entre los conjuntos continuos con un número cualquiera de dimensiones. Probablemente la razonabilidad de la hipótesis descansaba, en aquel momento, en la creencia de que los conjuntos infinitos de más de una dimensión eran los mejores candidatos para imaginar un conjunto infinito con una potencia superior a la de los conjuntos lineales, pero demostrada la falsedad de esto, como una consecuencia del teorema de 1878, Cantor piensa que tiene el suficiente respaldo teórico para lanzar públicamente su hipótesis.

Lo que hemos expuesto sobre la potencia de conjuntos numerables explica lo que a nuestro parecer es posible entender bajo la cláusula de que un conjunto de la primera clase responde a una "función de ν". Es más complejo interpretar la cláusula "función de *x*" para conjuntos de la segunda clase. Sin embargo, podemos estar seguros de lo siguiente. En el primer capítulo

---

[8] Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", pp. 257-258.

(sección 1.2.3) aceptamos que una de las lecciones extraídas por Cantor del segundo teorema de 1874 consistió en pensar que un conjunto continuo no puede cumplir con un buen orden. Decíamos entonces que aun cuando Cantor no tiene a su disposición el término de "buen orden" es factible sostener que la distribución de los términos en la sucesión simplemente infinita de los enteros positivos es, para él, el paradigma de este tipo de orden. Ahora bien, a la luz de la noción de potencia en esta segunda etapa, un conjunto de la primera clase es capaz de adquirir el orden de los enteros positivos, mientras que un conjunto con la potencia del continuo, dado que no es biyectable con un conjunto de la primera clase, no puede adquirir ese orden. En suma, si es adecuada la reconstrucción del concepto de potencia dentro de lo que llamamos la segunda etapa de su desarrollo, entonces antes de 1882 Cantor se orientaba a pensar que no sólo los conjuntos continuos, sino que, en general, los conjuntos con la potencia del continuo no pueden tener una buena ordenación.

3.1.2. Orden y continuidad.

En su trabajo sobre continuidad y números irracionales, Dedekind establece la propiedad de continuidad para un conjunto bajo la condición de que cada corte en él sea producido por un único elemento. Pero el cumplimiento de esta condición exige la satisfacción de otras dos: que el conjunto esté linealmente ordenado y que posea un orden denso. Cantor, tras haber excluido toda condición de orden de su primera definición de continuidad, reconsidera la pertinencia que la propiedad de densidad podría tener para la caracterización del continuo, aunque la restringe a la noción de densidad de un conjunto de puntos en la extensión de un intervalo. En el capítulo anterior hemos intentado mostrar los resultados de que se pudo haber beneficiado su pensamiento con el uso de ese concepto. Junto a estos resultados, parece probable que la reevaluación del concepto de densidad propició que Cantor mirara una vez más hacia el trabajo de Dedekind. En 1882 le escribe diciendo que ha intentado definir la noción general del continuo a partir del concepto de corte, aunque no ha tenido éxito y se ha visto obligado a utilizar el suyo de sucesiones fundamentales.[9] Pese a este fracaso en la utilización de la terminología de Dedekind, veremos a continuación que Cantor extrajo de su esfuerzo algo aun más valioso.

En la carta a la que nos hemos referido hace un momento se encuentra una definición del continuo que nos ofrece algunos elementos explicativos valiosos con respecto a la noción de

---

[9] Ver "Correspondance Cantor-Dedekind". en Cavaillès, *Philosophie mathématique.*, p. 230.

orden. En ella la propiedad de continuidad se establece para un conjunto M cualquiera, siempre y cuando sea infinito. Los elementos de M deben satisfacer una función $f(m, n)=m \circ n$, donde $m \circ n$ es un número real positivo diferente de cero y $m, n \in M$. Es posible que haya diferentes maneras de determinar el número $m \circ n$, así que es posible definir diferentes funciones. Pero una vez elegida una de ellas, decimos que la función $f(m, n)=m \circ n$ induce un orden f en el conjunto M. La continuidad de M es relativa al orden inducido f, dependiendo de que este orden satisfaga estas condiciones:

a) Si m y n son dos elementos cualesquiera de M y ε es una magnitud dada cualquiera, entonces es posible hallar un número finito de elementos $m_1, m_2, ..., m_k$ de M tales que

$$m \circ m_1,\ m_1 \circ m_2,\ ...,\ m_{k-1} \circ m_k,\ m_k \circ n$$

sean menores que ε.

b) Si $m_1, m_2, ..., m_\nu, ...$ es un conjunto infinito numerable de elementos de M, los cuales tienen la propiedad

$$\lim(m_{\nu+\mu} \circ m_\nu) = 0 \qquad \text{para } \nu=\infty,$$

entonces hay un solo elemento m de M tal que

$$\lim(m \circ m_\nu) = 0 \qquad \text{para } \nu=\infty.$$

Algunos días después, Cantor añade una tercera condición:[10]

c) Si m es un elemento de M y $m_1, m_2, ..., m_\nu, ...$ es un conjunto infinito numerable de elementos de M tales que

$$\lim(m \circ m_\nu) = 0 \qquad \text{para } \nu{=}\infty,$$

entonces para cualquier valor de μ

$$\lim(m_{\nu+\mu} \circ m_\nu) = 0 \qquad \text{para } \nu{=}\infty.$$

Si se define una función f para un conjunto M que satisfaga lo estipulado en (a)-(c), entonces el conjunto M es continuo. Pero, de acuerdo con Cantor, hay una sola condición que M debe cumplir para que sea posible definir esa función f: la infinitud del conjunto. Sin embargo, si Cantor desea partir de las ideas de Dedekind para definir la propiedad de continuidad, es necesario exigir no sólo la infinitud de M, sino que éste sea un conjunto ordenado. Recordemos que hacia el final de la sección 1.1.3 señalamos que la propiedad de cortadura, según le explica Dedekind a Cantor en una de sus correspondencias, es una consecuencia de la propiedad de transitividad. En otros términos, el concepto de corte sólo se aplica a conjuntos que están linealmente ordenados. Si M es un conjunto linealmente ordenado, entonces las condiciones (b) y (c) de Cantor corresponden a las condiciones de cortadura y de continuidad de

---

[10] Ver *ibid.*, p. 232.

Dedekind. Pero Cantor introduce la función *f*, de la que insiste en que es una función de "orden", para todo conjunto infinito *M*, sin exigir de éste su ordenamiento lineal.

Para Dedekind los ordenes lineal y denso representaban condiciones de posibilidad para la continuidad de un conjunto. Seguramente Cantor estaba consciente de ello, y a continuación trataremos de dar razón de por qué no establece la exigencia de que *M* sea ordenado para que las condiciones (a)-(c) se verifiquen. Nos parece que la clave se encuentra en la insistencia de Cantor en que *f* es una función de orden, y el sentido de ello quizá pueda alcanzarse a partir de esto:

> Sin duda, un conjunto numerable no puede considerarse como un continuo relativo a ningún orden. Por el contrario, todo conjunto no numerable debe poder considerarse, verosímilmente, como un continuo relativo a ciertos órdenes.[11]

Por un conjunto no numerable debemos entender aquí un conjunto con la potencia del continuo, pues Cantor aún rige su pensamiento por la creencia de que sólo existen dos clases de conjuntos desde el punto de vista de la potencia. En la segunda etapa de desarrollo de este concepto, en conformidad con lo que expusimos, una diferencia fundamental entre los conjuntos de la

---

[11] *Ibid.*, p. 230.

primera clase y los de la segunda consiste en que en los primeros el concepto de potencia está íntimamente ligado a una noción de orden, mientras que éste no era el caso para el mismo concepto aplicado a los conjuntos de la segunda clase. En esta definición de continuidad, el que f sea una determinada función de orden significa que Cantor asocia a los conjuntos de la segunda clase con diferentes distribuciones para sus elementos, y una de esas distribuciones corresponde a la de f bajo las condiciones (a)-(c). Pero, por otra parte, Cantor no exige de M el orden lineal porque desde el punto de vista de su potencia los conjuntos de la segunda clase no están ligados a ningún orden específico, o bien a ninguna posibilidad de ordenamiento específico. Esto es mucho más claro cuando lo contrastamos con los conjuntos de la primera clase: para éstos, según hemos dicho, su potencia está íntimamente ligada a la posibilidad de ordenarlos conforme a los enteros positivos; en cambio, la potencia de los conjuntos de la segunda clase no está relacionada con ningún orden específico.

La concepción que Cantor tiene del concepto de potencia representa una parte en la explicación de esta definición de continuidad, la reevaluación que hace del ensayo de Dedekind es otra no menos importante. Hemos sostenido que todo el trabajo temprano de Cantor sobre conjuntos de puntos estaba motivado por el estudio del continuo, y afirmamos que el enfoque parcial en este tipo de conjuntos, dejando de lado las magnitudes numéricas, descansaba en el Axioma de continuidad. Éste nos dice que un conjunto no numerable como el de los números reales es continuo en el mismo sentido en que lo es el conjunto de puntos de la línea recta. Por otro lado, la concepción de Dedekind efectúa una reducción aritmética de esto mismo, es decir, Dedekind construye una concepción de la continuidad que es completamente independiente del comportamiento de los puntos de la recta. Cantor ha reconsiderado la investigación de Dedekind, pero no puede simplemente deshacerse de su Axioma de continuidad en el que se apoya su estudio de conjuntos derivados. En vez de ello, Cantor lleva a cabo una síntesis muy peculiar. Un conjunto no numerable en el que una función induce un orden que responde a la distribución de los puntos de la línea recta es continuo.[12] Pero si una función induce un orden en un conjunto no numerable de tal manera que no responde a la distribución de los puntos de la recta, entonces ese conjunto es discontinuo.

Cantor se está esforzando en conservar su propia concepción de la continuidad, al mismo tiempo que aprende de Dedekind, lo que le permite alcanzar dos ideas de gran trascendencia: la primera consiste en que el concepto de potencia aumenta su distancia en relación con el concepto de orden, pues

[12] Parece que es por esta idea que Cantor descarta su supuesto ejemplo de distintos órdenes para un cuadrado, según los cuales ese cuadrado podría considerarse continuo en un caso y discontinuo en otro. Ver *ibid.*, pp. 231, 232.

aparece claramente que éste no depende de una correspondencia biunívoca sino de una "función de orden"; y la segunda estriba en que Cantor se pregunta por la estructura de la continuidad desde nociones de orden. El resultado específico es que un mismo conjunto puede ser continuo o discontinuo bajo distintos órdenes, sin que discontinuo signifique numerable. El resultado es que Cantor comienza a pensar que un conjunto con la potencia del continuo es susceptible de ordenarse de manera "discreta".

3.1.3. Conjuntos perfectos.

Al partir el primer derivado de un conjunto dado del segundo género en un conjunto aislado A y un conjunto B cuyos elementos son los puntos que se conservan en la sucesión de derivados P', P'', P''', ..., vimos que este planteamiento de Cantor desembocó finalmente en que un conjunto continuo está formado por un conjunto numerable y por otro conjunto, digamos, S. Este último es lo que Cantor llama un conjunto perfecto:

> [L]lamo *conjunto perfecto de puntos* a un conjunto S tal que su primer derivado S' coincide con S mismo, de tal manera que todo punto s que pertenece a S es un punto límite de S y

también todo punto límite *s'* de *S* es un punto que pertenece a *S*.[13]

Hacia finales de 1883, Cantor generaliza su resultado afirmando que todo conjunto cerrado[14] *P*, cuya potencia es mayor a la de los conjuntos numerables, se descompone de una única manera en un conjunto numerable *A* y en un conjunto perfecto *S*.[15] Vamos a examinar ahora cómo se comporta un conjunto perfecto, apoyándonos en dos teoremas de Cantor.

Teorema 1. Un conjunto de puntos P, *contenido en un espacio continuo de* n *dimensiones, cuya potencia es la de los conjuntos numerables, no puede ser perfecto.*

La demostración es similar a la de que un conjunto numerable no es equipotente a un conjunto continuo. Cantor elabora un proceso de construcción de esferas encajadas, al igual que hizo con los intervalos anidados. Este procedimiento le permite determinar un punto *t* al que tienden los centros de las distintas esferas. En consecuencia, *t* es un punto límite, pero por

---

[13] Cantor, "Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situes dans un espace continu à *n* dimensions", *Acta Mathematica*, vol. 2, p. 410.

[14] Un conjunto *P* es cerrado si $P' \subseteq P$.

[15] Cantor, "De la puissance des ensembles parfaits de points", *Acta Mathematica*, vol. 4, 1884, p. 388.

construcción no es un elemento de P. Así que P no es un conjunto perfecto.[16]

El segundo teorema es el siguiente:

Teorema 2. Todos los conjuntos perfectos de puntos tienen la misma potencia, la del continuo.[17]

Cantor ofrece la siguiente demostración:

I) Presupuestos:

   i) S es un conjunto perfecto que no es denso en la extensión de ningún intervalo.

   ii) S está contenido en el intervalo $[0, 1]$, y $0,1 \in S$.

II) Descomposición de S.

   i) Existe una sucesión infinita de intervalos ordenada en magnitud decreciente

   $$1) \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_\nu, b_\nu), \ldots$$

   tal que en el interior de cada uno de ellos no hay ningún punto de S, y entre cualesquiera dos intervalos (a_ν, b_ν) y (a_μ, b_μ) hay una infinidad de otros intervalos (a_ρ, b_ρ).

---

16 Véase Cantor, "Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situes dans un espace continu à *n* dimensions", p. 410-412.

17 Ver Cantor, "De la puissance des ensembles parfaits de points", p. 381.

ii) El conjunto $\{a_\nu, b_\nu\}$ de los puntos extremos de los intervalos de la sucesión (1) es un subconjunto de S.

iii) Son elementos de S los puntos límite de $\{a_\nu, b_\nu\}$ distintos de los puntos extremos a_ν y b_ν. Este conjunto de puntos límite se designa por el conjunto $\{g\}$.

iv) Así pues,

$$2) \ S=\{a_\nu\}+\{b_\nu\}+\{g\}$$

III) Comparación ordenada entre una sucesión bien ordenada y (2).

i) Se toma un conjunto

$$3) \ p_1, p_2, \ldots, p_\nu \ldots$$

que es denso en [0, 1], pero en el que los puntos extremos de este intervalo no son elementos suyos.

ii) Se establece una comparación ordenada entre (1) y (3) de tal manera que cada elemento que se asocien de (1) con (3) conserve la relación de mayor o menor que un intervalo tiene con respecto a (1).

iii) Por (ii), la sucesión (3) adquiere un orden nuevo representado, digamos, por la sucesión

4) $q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \ldots,$

donde cada q_i corresponde a un p_{k_j}.

iv) El conjunto $\{q_\nu\}$ es denso en el intervalo $[0, 1]$, y $0,1 \notin \{q_\nu\}$.

IV) Determinación de un punto h al que converge (4). Considerando la asociación de (1) con (4) hay dos casos posibles:

i) Si $\{(a_{i_j}, b_{i_j})\}$ es una sucesión cualquiera de (1) que converge hacia a_ρ o b_ρ, entonces la sucesión $\{q_{i_j}\}$ de (4) converge hacia un punto q_ρ, y recíprocamente.

ii) Si $\{(a_{i_j}, b_{i_j})\}$ es una sucesión cualquiera de (1) que converge hacia un punto g de $\{g\}$, entonces la sucesión $\{q_{i_j}\}$ de (4) converge hacia un punto del intervalo $[0, 1]$, el cual no es un término de las sucesiones (3) o (4), y que está determinado por g. Este punto lo designamos por h y el conjunto al que pertenece, $\{h\}$, tiene la misma potencia que $\{g\}$.

V) Equipotencia entre S y $[0, 1]$.

i) $[0, 1]=\{p_{2\nu}\}+\{p_{2\nu-1}\}+\{h\}$.

ii) Pero $\{a_\nu\}\sim\{p_{2\nu}\}$, $\{b_\nu\}\sim\{p_{2\nu-1}\}$, $\{g\}\sim\{h\}$.

iii) Así que $S\sim[0, 1]$.

Cantor había mostrado, en 1880, una manera de construir un conjunto que no fuera denso en de un intervalo y que, no obstante, perteneciera a los conjuntos del segundo género. Pero este conjunto no era perfecto. En el teorema 2, Cantor considera un conjunto perfecto que no es denso en un intervalo. Es de este tipo de conjuntos de los que prueba que son equipotentes a un conjunto continuo. No se ocupa, por el contrario, de probarlo para los conjuntos perfectos y densos en un intervalo, pues esto sería trivial. Recordamos seguramente que la segunda caracterización de la noción de densidad en un intervalo consiste en que si el primer derivado tiene por elementos todos los puntos de un intervalo $[\alpha, \beta]$, entonces el conjunto P del que se deriva es denso en todo ese intervalo. La densidad en un intervalo es una condición necesaria para que su conjunto derivado sea continuo e idéntico al intervalo en el que aquél es denso. Pero, de acuerdo con el presupuesto (ii) del teorema 2, no es una condición necesaria para que un conjunto sea perfecto y, en consecuencia, tampoco es una condición para que un conjunto tenga la potencia del continuo. Mientras que con el teorema 1 se excluye la posibilidad de que un conjunto perfecto pudiera ser numerable.

El teorema 2 no dice que los conjuntos perfectos y que no son densos en un intervalo sean continuos, sólo afirma que tienen esta misma potencia. En conformidad con lo que hemos sostenido, Cantor no los considera conjuntos continuos porque no tiene todos los elementos del conjunto de puntos [0, 1], esto es, porque no responden a la distribución de todos los elementos del segmento de recta expresado por el intervalo.

Cantor mantuvo la idea de continuidad que analizamos en 3.1.1 como un resultado heurísticamente valioso, el cual le ayudó a entender la estructura de los conjuntos perfectos de puntos.

3.2. Los números ordinales transfinitos.

3.2.1. Infinito y orden.

El 5 de noviembre de 1882, Cantor le escribe a Dedekind una carta llena de entusiasmo en la que, entre muchas otras cosas, le comunica:

> [...] plugo a Dios omnipotente [...] que encontrara lo que durante años se ha fermentado en mí, lo que he buscado largo tiempo. – No se trata de la definición general de un continuo de puntos, de la que hemos hablado y en la que creo haber progresado, sino de algo mucho más general y, en consecuencia, más importante.—[18]

Después de diez años de investigación dedicados al estudio de la naturaleza de la continuidad, Cantor se dirige a Dedekind para dar por terminada esa investigación, al menos por el rumbo en el que había ido marchando. El año siguiente se publica en extenso, como la quinta memoria "Sobre conjuntos infinitos y lineales de puntos", el contenido matemático de esta carta.[19] El tema de la

---

[18] "Correspondance Cantor-Dedekind", en *op. cit.,* p. 233.

[19] Aunque se publica en 1883, las ideas fundamentales de esta memoria eran claras para Cantor hacia finales del año anterior. No vamos a entrar en el problema de datar la redacción de la memoria con respecto a la

memoria es tan novedoso y profundo que se publica también como un fascículo independiente bajo un título más adecuado: "Fundamentos de una teoría general de conjuntos". Vamos a detenernos en todo este apartado en el examen de esta memoria, comenzando con algunas consideraciones sobre el infinito y el orden.

Cantor inicia con una reflexión sobre cómo ha sido entendido y utilizado el infinito en las matemáticas, y propone una división conceptual entre infinito propio e impropio. El uso dominante en las matemáticas, y casi exclusivo, del infinito ha sido el impropio:

> [...] me parece que se presenta [el infinito en las matemáticas] principalmente en el sentido de una variable, ya sea una que crece más allá de todo límite o que disminuye a una cantidad infinitamente pequeña, pero que siempre continúa siendo una magnitud finita.[20]

Fue en el análisis matemático donde tuvo mayor auge la utilización del infinito impropio en sus dos variantes de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño. Cantor es uno

---

carta, pues no parece probable que, incluso siendo la redacción anterior a la carta, el contenido de la memoria pudiera ser más antiguo que el último cuarto del año 1882, y esto último es suficiente para nuestros propósitos.

[20] Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 5", *Mathematische Annalen*, vol. 21, 1883, pp. 545-546.

de los herederos de este uso en el análisis. El ejemplo más claro de ello es su noción de límite, que se define al imponer una condición de convergencia a una sucesión de números racionales. La condición de convergencia es la que ya conocemos: la diferencia entre dos de los términos de la sucesión a_{n+m}-a_n debe poder ser tan pequeña como se quiera a medida que n crece. Pero esto no significa que Cantor piense que exista algo infinitamente pequeño. Para él, esta condición de convergencia equivale a decir que si elegimos arbitrariamente un número racional ε, por pequeño que sea, siempre existe un entero n_1 ($n \geq n_1$) tal que la diferencia a_{n+m}-a_n es menor que el número ε.[21] Así pues, esta condición nos indica que siempre es posible encontrar un número racional finito, resultado de la diferencia a_{n+m}-a_n, que sea menor al número racional ε dado.[22] En esto no aparece el infinito como

---

[21] Ver Cantor, "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", p. 124.

[22] Aunque la forma en que Cantor define la noción de límite (y por tanto de número real) es original, decimos que su pensamiento es heredero de lo que se venía haciendo en el análisis en el sentido de que aun cuando en esta disciplina se habla de lo infinitamente pequeño se hace con referencia a magnitudes finitas, como en el caso de Cantor. Puede verse, por ejemplo, que Cauchy emplea la noción de infinito de manera similar cuando habla del "límite" o "suma" de una serie convergente, pues en ella no se trata de que se realice efectivamente una suma infinita, sino que el límite o suma representa el valor al que se va aproximando la suma de una cantidad finita de términos de la serie (se aproxima más en la medida en que se consideren más términos como sumandos). Sobre este aspecto del pensamiento de Cauchy véase Álvarez, Carlos, "De la

una entidad real, o bien, como acertadamente señala Jané[23], cuando se alude al infinito de esta manera, más que ante un infinito impropio, estamos frente a un uso impropio del término 'infinito'. En efecto, cuando se hace referencia al infinito impropio no se pretende indicar un objeto que sea infinito y que posea determinadas características, sino a un objeto que permanece en el ámbito de lo finito, pero cuya magnitud puede variar, normalmente por la aplicación de una operación, un número indefinido de veces. Pero por más que esta variación continúe, jamás se consigue determinar un objeto infinito. El infinito impropio es indeterminado en tanto que nunca se constituye como un objeto.

El infinito propio consiste en que se presenta como un objeto bien determinado. Cantor ofrece como un ejemplo de este concepto al uso que en geometría se hace de un punto al infinito.[24] Este es un objeto bien localizado del que es posible estudiar su comportamiento en función de su alejamiento efectivamente infinito respecto de otros puntos. Pero no podemos buscar en este ejemplo la razón de que el infinito se constituya como un objeto

---

determinación del infinito a la inaccesibilidad en los cardinales transfinitos", *Critica*, vol. XXVI, no. 78, 1994, pp. 29-30.

[23] Ver Jané, Ignacio, "The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set", *Erkenntnis*, vol. 42, no. 3, 1995, p. 378.

[24] Ver Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 5", p. 546.

en el pensamiento de Cantor. Aunque cree con firmeza en su distinción entre infinito impropio y propio, ésta no proviene de lo que observa en la geometría o en la teoría de funciones, proviene de su propio trabajo sobre el concepto de continuidad, que lo obligó a operar con totalidades infinitas.

El análisis que llevamos hecho del trabajo de Cantor sobre conjuntos de puntos nos permite identificar tres momentos específicos en el proceso que lo condujo a la noción de infinito propio. El primer momento está ligado al surgimiento y al desarrollo incipiente de la operación de derivación de conjuntos. El punto medular consiste en que para garantizar la existencia de un primer conjunto derivado es necesario que el conjunto del que se parte sea infinito. Pero es ambiguo el sentido en el que se afirma que debe ser infinito. Observemos los dos casos siguientes. Si tenemos la sucesión 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n}$, ... y entendemos indiferentemente sucesión por conjunto, como es frecuente en los primeros trabajos de Cantor en teoría de conjuntos, entonces esa sucesión (o conjunto) da lugar a un primer conjunto derivado, ya que, entre otras condiciones, es infinita, pero lo es en el sentido impropio expuesto dos párrafos más arriba. Considérese el segundo caso donde el conjunto base está formado por los valores racionales del intervalo [0, 1], su primer derivado, con palabras de Cantor, es la *totalidad* de los valores del intervalo; en este caso, el conjunto base para la derivación se concibe como una totalidad infinita. En su investigación temprana sobre derivación de conjuntos, Cantor debe trabajar bajo la idea del infinito como una totalidad, pero en muchas ocasiones continúa presente la idea del infinito impropio.

El segundo momento está vinculado a la interpretación que propusimos en el apartado 2.3, según la cual, cuando Cantor parte un conjunto derivado en dos conjuntos A y B, tales que A contiene a todos los puntos que desaparecen en la sucesión de conjuntos derivados y B contiene a los puntos que se conservan en ella, está enfrentándose al problema de efectuar operaciones con totalidades infinitas, aun cuando carece de una solución para el mismo. Lo que destaca de este momento es que al tratarse del problema de sustraer un infinito de otro se desplaza completamente la posibilidad de que pudiera entenderse al infinito como impropio, pues es una sustracción de objetos bien determinados (por ejemplo, sustraer la totalidad de valores racionales a la totalidad de valores reales del intervalo [0, 1]).

El tercer momento corresponde a la carta del 15 de septiembre de 1882, en la que Cantor formula la definición de continuidad que hemos tenido ocasión de estudiar en 3.1.2. Para esta época, Cantor percibe con absoluta claridad que es posible concebir al infinito como una totalidad efectivamente existente, lo que, por lo demás, ya se insinuaba desde el segundo momento, pero el paso adicional que da aquí es ligar la idea de totalidad infinita con la de continuidad. Esto último sugiere que, para Cantor, el de totalidad infinita se convierte en un concepto que es aplicable en las matemáticas, más aún, en un concepto que es útil para afrontar el problema matemático que más esfuerzo le había exigido hasta septiembre de aquel año: la caracterización de la continuidad.

Aunque esquemáticamente, estos tres momentos nos permiten trazar un desarrollo para la noción de infinito, que va de un concepto ambiguo, por poseer las notas tanto del sentido impropio como del propio, a una concepción del infinito como un objeto completamente determinado (en tanto totalidad), y que desemboca finalmente en la certeza de que esta concepción del infinito, valga decir como propio, es de utilidad en las matemáticas.[25]

Al lado de esta evolución del concepto de infinito se ha ido gestando el desarrollo de la noción de orden en el pensamiento de Cantor. Vamos a presentar aquí una descripción igualmente esquemática de este desarrollo con el objetivo de sentar los antecedentes del concepto cantoriano de buen orden, y terminaremos esta sección anotando la definición de este

[25] Sin duda alguna, los teoremas de 1874 y de 1878 sientan las bases para que Cantor empiece a pensar en totalidades infinitas. Sin menospreciar este hecho, creemos que es el trabajo con conjuntos de puntos aquí descrito el que lo conduce a su noción de infinito propio.

concepto, dejando para la siguiente una discusión más detallada del papel que juega respecto de los ordinales transfinitos.

Sin pretender que exista un paralelismo absoluto con los tres momentos representativos anteriores, también podemos localizar tres puntos de inflexión que marcaron el desarrollo del concepto de orden. El primer periodo se caracteriza por los resultados obtenidos a partir de las demostraciones de los dos teoremas de 1874. Los resultados determinantes para la noción de orden son los siguientes:

1. Se considera que hay conjuntos representativos para órdenes determinados.
2. Para conjuntos de la primera clase, el concepto de potencia involucra nociones de orden, en el sentido de que la correspondencia biunívoca debe guardar la relación de orden con respecto al conjunto representativo de una ordenación determinada.
3. Este conjunto representativo es el de los enteros positivos y, bajo el riesgo de anacronismo, decimos que caracteriza un buen orden.
4. En lo concerniente a conjuntos con la potencia de un conjunto continuo, no hay un conjunto representativo de su ordenamiento, o bien, para este tipo de conjuntos, el concepto de potencia está desvinculado de cualquier noción de orden.

5. Esto último debe entenderse en sentido fuerte en lo tocante a conjuntos continuos, es decir, para el estudio de estos conjuntos Cantor considera inadecuada toda apelación a una noción de orden.
6. Para conjuntos de la segunda clase desde el punto de vista de su potencia (y no necesariamente continuos) es imposible darles un orden similar al de los enteros positivos.[26]

En el segundo periodo se reevalúan algunos de estos resultados, particularmente los concernientes a los conjuntos de la segunda clase. En esta dirección es central el estudio sobre conjuntos de puntos a partir de la noción de densidad en un intervalo, que permite precisar dos cosas. Por un lado, la noción anterior deja en claro que la densidad es una propiedad necesaria para que un conjunto sea continuo. Por otro lado, Cantor logra hallar conjuntos que pueden clasificarse dentro de la segunda clase y que, no obstante, no son necesariamente densos en un intervalo, a saber, los conjuntos perfectos. Aunque Cantor no logra precisar el significado que pueda tener el hecho de que un conjunto de la segunda clase puede poseer una distribución que

[26] Lo que se afirma en este último punto requiere de la demostración del teorema de 1878, según hemos visto en 3.1.1, pero responde al mismo contexto de ideas que delimita a este primer periodo.

no sea densa, pero que al mismo tiempo esa distribución no puede ser una del tipo de la de los enteros positivos.

En el tercer periodo se pone en cuestión, básicamente, el resultado indicado en (3). Cantor sabe que un conjunto continuo no puede tener el orden de los enteros positivos, y también cree saber, en el primer periodo, que todo conjunto de la segunda clase no puede ponerse bajo ese orden. Pero la definición de continuidad de 3.1.2 pone en tela de juicio esto último. Con esta definición, Cantor acaricia la idea de que sería posible ordenar discretamente a un conjunto con la potencia del continuo, lo que representa un paso hacia adelante en el proceso de abstraer un tipo de orden del conjunto representativo al que se asocia.

Este paso hacia la abstracción en el concepto de orden cierra y corona el ciclo de tres periodos, dejando listo el pensamiento de Cantor para que formule su noción abstracta de buen orden:

> Un conjunto *bien ordenado* es un conjunto bien definido, cuyos elementos están unidos entre sí mediante una sucesión determinada, tal que hay un *primer* elemento del conjunto y, además, a cada elemento diferente (mientras no sea el último en la sucesión) le sigue otro determinado, así como también para un conjunto cualquiera de elementos, finito o infinito, existe un elemento determinado que, entre todos ellos, es el siguiente

inmediato en la sucesión (a menos que en ésta no haya nada que les suceda a todos ellos).[27]

Esta definición es fruto de este largo y complejo ciclo, en el que fue necesario volver sobre los resultados iniciales para desechar algunos y precisar otros. Dejamos tan sólo anotada esta definición para discutirla a continuación junto con los números ordinales transfinitos.

3.2.2. La construcción de los ordinales transfinitos.

Cuando Cantor "abandona" la empresa de determinar las propiedades del continuo de puntos, según le comunica a Dedekind el 5 de noviembre de 1882, tiene ya otro objetivo: extender el concepto de número entero al terreno del infinito.[28] Para llevar a buen término su objetivo, Cantor elabora tres principios que servirán de base para lograr la expansión del concepto de número, dos de los cuales llama principios de creación, mientras que el tercero es un principio de limitación. Mediante la articulación de estos principios, Cantor genera una

---

[27] Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 5", p. 548.
[28] Ver *ibid.*, p. 545.

sucesión de enteros, la cual puede dividirse y agruparse en distintas clases de números.

El primer principio de creación consta de dos aspectos. En primer lugar, es necesario que exista un elemento sobre el cual pueda dar inicio la aplicación del principio. El elemento base es el número 1. En segundo lugar, este principio establece la obtención de una sucesión por medio de la adición iterada de una unidad a un entero ya formado, comenzando con 1. Así pues, con este principio se crea la sucesión de los enteros positivos

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots,$$

la cual representa la primera clase de números (I). Los elementos de esta clase constituyen los números ordinales finitos.

La sucesión de los ordinales finitos tiene como una de sus características el que no posee un elemento máximo. Sobre cualquier número ν es posible aplicar el primer principio, añadiendo una unidad, para crear otro número. Esta propiedad sirve para formular el segundo principio de creación, el cual establece que dada una sucesión sin elemento máximo, se crea un número como límite hacia el que converge la misma. Tomando la sucesión de enteros positivos, el segundo principio justifica la creación de un número ω. Éste es el primer ordinal transfinito. Partiendo de ω y utilizando el primer principio obtenemos la sucesión

$$a)\ \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\nu, \ldots$$

Como (a) no tiene un número máximo, el segundo principio define un número como límite de la sucesión, designado por 2ω, y con base en el cual tendríamos otra sucesión

$$b)\ 2\omega, 2\omega+1, 2\omega+2, \ldots, 2\omega+\nu, \ldots$$

Este procedimiento conduce a la creación de números 3ω, 4ω, etc., los cuales podríamos tomar como una sucesión

$$c)\ \omega, 2\omega, 3\omega, \ldots, \nu\omega, \ldots,$$

cuyo número límite es ω^2. De manera similar obtenemos

$$c)\ \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^\nu, \ldots,$$

con ω^ω como límite de la sucesión. En general, la combinación de los dos principios de creación permite obtener la sucesión

$$d)\ \omega, \omega+1, \ldots, \omega+\nu, \ldots, 2\omega, \ldots, \nu\omega, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\nu, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega},$$

$$\ldots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$$

Esta sucesión constituye la segunda clase de números (II).

Con tan sólo los principios de creación es imposible salir de la segunda clase de números (II). Se requiere para ello del principio de limitación:

> [...] que consiste en la exigencia de que es posible formar un nuevo número entero solamente con la ayuda de alguno de los dos principios de creación si la totalidad de los números

precedentes tiene la potencia de una clase definida de números, cuya extensión completa ya esté dada.[29]

Cada término de la sucesión (d) tiene la potencia de la primera clase de números (I), lo cual posibilita la utilización del segundo principio para definir un límite a la totalidad de los números de la segunda clase. Este límite lo designa Cantor como ω_1, y representa el primer ordinal transfinito de la tercera clase de números (III). Por medio de los tres principios es posible definir clases de números (IV), (V), ..., donde cada clase tiene una potencia mayor que la de la clase anterior.

Cada uno de los números transfinitos que es elemento de alguna de las clases de números (II), (III), ..., representa cierta distribución de los elementos de algún conjunto infinito, pero todas las distribuciones que representan los números transfinitos tienen en común que satisfacen una buena ordenación. Tomemos, por ejemplo, los dos conjuntos $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ y $\{a_2, a_3, a_4, ..., a_1\}$; por su distribución podemos asociarles respectivamente los números transfinitos ω y $\omega+1$, ya que el primer conjunto consiste en una sucesión creciente similar a la de los enteros positivos, mientras que el segundo consiste en una sucesión semejante pero cuyo primer elemento se ha desplazado al final de ella. Aunque este desplazamiento modifica y diferencia la distribución de los

[29] *Ibid.*, p. 581.

elementos de cada conjunto, ambos satisfacen un orden lineal, poseen un primer elemento y cada uno de sus subconjuntos posee un primer elemento[30], así que ambos están bien ordenados. Los números transfinitos representan las distribuciones de todos los conjuntos infinitos que están bien ordenados. Ahora bien, la creación de los ordinales transfinitos estuvo acompañada de la convicción de que todo conjunto puede adquirir una buena ordenación, convicción nueva en el pensamiento de Cantor (aunque es producto de un proceso, según hemos intentado mostrar en la sección anterior), con la cual todo el ámbito del infinito matemático podía sistematizarse mediante las distintas clases de números, y ello era posible gracias a la noción de buen orden.

Con esta sistematización se benefició particularmente el concepto de potencia. Dijimos que los números transfinitos pueden representar a conjuntos infinitos bien ordenados, la expresión precisa de esto mismo es la siguiente: sean E y F dos conjuntos bien ordenados, $\prec$ designa la relación de orden entre los elementos de E y $\prec_1$ designa la relación de orden entre los

[30] Estas tres son condiciones equiparables a las que Cantor establece en su definición de buen orden: a la condición de que "a cada elemento diferente le sigue otro determinado" podemos parafrasearla como la exigencia de un orden lineal, mientras que la condición de que "para cada conjunto de elementos existe un elemento siguiente inmediato en la sucesión" equivale a decir que cada uno de sus subconjuntos debe poseer un primer elemento.

elementos de F, supóngase además que existe una correspondencia biunívoca entre E y F, donde e_1, $e_2 \in E$ son los elementos correspondientes a f_1, $f_2 \in F$; entonces los conjuntos E y F tienen el mismo número ordinal si $e_1 \prec e_2$ implica $f_1 \prec_1 f_2$.[31] En suma, dos conjuntos tienen el mismo número ordinal si es posible establecer una correspondencia ordenada entre ellos. Con esto, Cantor relaciona las comparaciones ordenadas con números ordinales y finalmente separa de ella por completo a la noción de potencia. En virtud de que distingue ahora entre una correspondencia ordenada de otra que no lo es, Cantor insiste en esta quinta memoria en que "[l]a *potencia* de un conjunto es [...] un atributo independiente del orden."[32] Es independiente en tanto que la noción de potencia en su núcleo básico (la relación de correspondencia unívoca y completa entre dos conjuntos) ya no está mezclada en ningún caso con nociones de orden, pero guarda una estrecha relación con las diferentes clases de números. Cada una de éstas tiene una potencia mayor a la de la clase que le precede, lo que descubre a los ojos de Cantor la existencia de una infinidad de potencias infinitas, y le muestra la falsedad de su primera hipótesis, que consistía en la creencia de que sólo existen

[31] Ver Cantor, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 5", p. 549.
[32] *Ibid.* Decimos que Cantor insiste en ello porque ya lo había mencionado antes, ver §1, p. 548.

dos potencias respecto de conjuntos infinitos. La clasificación de conjuntos en dos clases desde el punto de vista de su potencia se vuelve así obsoleta. Ahora la potencia de un conjunto infinito se define en función de las clases de números: un conjunto infinito es de la primera potencia si es biyectable con la clase de números (I), es de la segunda potencia si es biyectable con la clase de números (II), y así sucesivamente. Aunque en ella misma la noción de potencia abstrae toda noción de orden, la estructuración de las distintas potencias infinitas depende de los números ordinales transfinitos, con lo cual, al menos en su origen, uno de los conceptos centrales de la teoría de conjuntos se vuelve deudor de la noción de buen orden.

Resta explicar aún el origen de los números transfinitos en el pensamiento de Cantor, lo que no es una labor sencilla. Nosotros creemos que varios aspectos confluyeron en ello e incluso es probable que haya algunos incomprensibles, pero nos parece que la formación de las ideas de infinito y de orden, tal como las hemos estado rastreando, son elementos insoslayables. Hay cuatro elementos que consideramos fundamentales en este proceso.

El primero consiste en la reevaluación que Cantor hace del pensamiento de Dedekind. Antes de la quinta memoria sobre conjuntos infinitos y lineales de puntos, Cantor nunca había considerado que el conjunto de los enteros positivos pudiera contribuir al entendimiento de las propiedades del continuo. Señalamos incluso, en 1.3.1, algunos intentos de Cantor por escudriñar la continuidad sin apoyarse siquiera en un conjunto denso numerable. Creemos que esta resistencia a hacer uso del conjunto de los enteros positivos en el estudio del concepto de continuidad tiene como fundamento los resultados (2), (3) y (5) anotados hacia el final de la sección 3.2.1. Pero ya vimos cómo se fueron alterando estos resultados cuando Cantor profundiza en su estudio sobre conjuntos de puntos. En particular, una consecuencia de que el resultado (5) se modifique es que va aumentando más y más, conceptualmente hablando, la distancia entre un conjunto continuo y un conjunto que tiene la potencia del continuo. La revaloración del pensamiento de Dedekind en 1882 pudo sugerirle a Cantor considerar al conjunto de los enteros positivos, de manera semejante a como Dedekind había construido un campo continuo comenzando desde el conjunto de los números naturales, para construir a partir de él, si bien no un campo continuo, un conjunto con esta potencia.

El segundo elemento consiste en relacionar el anterior con el estudio de la propiedad de continuidad. Para esto, la demostración del teorema 2 de 3.1.3 ofrece los puntos de apoyo necesarios. Si nos fijamos en el procedimiento de prueba que Cantor utiliza para justificar que todo conjunto perfecto tiene la potencia del continuo, notamos que el paso (IIiv) no sólo es indispensable, sino que constituye un procedimiento habitual del que Cantor se vale cuando se trata de establecer propiedades referentes al continuo. Por ejemplo, lo utiliza también en la demostración de que el continuo lineal y un conjunto continuo de más de una dimensión tienen la misma potencia. El paso (IIiv) descompone un conjunto perfecto en un par de conjuntos numerables y en otro conjunto, para después establecer la equivalencia de cada uno de ellos con los subconjuntos, que resultan de una descomposición similar, de un conjunto continuo (paso V de la demostración). En este procedimiento es fundamental la parte de la descomposición en dos conjuntos numerables tanto del conjunto perfecto como del conjunto continuo. Lo que nos interesa subrayar de ello es que Cantor ya estaba habituado a descomponer un conjunto continuo o uno con su potencia en ciertos subconjuntos, entre los que jugaban un papel central aquellos que eran numerables, para analizar la propiedad de continuidad. Si Cantor vislumbra, según el párrafo anterior, el proyecto de construir un conjunto con la potencia del continuo a partir de conjuntos numerables, ello apunta a su interés en descubrir cómo está constituido el continuo lineal de puntos.

El tercer elemento es la resolución del conflicto teórico del que hablamos en el apartado 2.3. y que consistía en la dificultad de responder a la pregunta de por qué la propiedad de continuidad no transitaba a todos los conjuntos con la potencia del continuo con base en que todos son equivalentes entre sí, mientras que esa equivalencia, de acuerdo con el Axioma de continuidad, parecía suficiente para que esta propiedad transitara de un conjunto de puntos a un conjunto de números reales. Con la definición de continuidad de 3.1.2, Cantor da solución a esta pregunta: de un mismo conjunto con la potencia del continuo pueden distribuirse sus elementos de manera que sea continuo o que no lo sea. Si es continuo significa que la distribución de sus elementos es semejante a la de los puntos de un segmento de recta, pero esta distribución no está implicada en la noción de potencia. En otras palabras, Cantor supera este conflicto: a) al reconocer que la densidad es una propiedad necesaria para la continuidad, b) por el desarrollo del concepto de potencia, y c) al concebir que un conjunto con la potencia del continuo puede adquirir múltiples distribuciones.

El cuarto elemento se refiere a los índices superiores presentados en 2.3. Una vez evolucionado el concepto de orden como explicamos en la sección anterior, y una vez asimilado el proyecto de construir un conjunto con la potencia del continuo a partir de conjuntos numerables, es posible asociar aquellos índices superiores a ciertos conjuntos infinitos, dependiendo de su ordenamiento. Estos índices dejan de ser meros símbolos del infinito, para convertirse en números, gracias a dos cosas: a) denotan totalidades infinitas, y b) gracias a la noción de orden con la que se articulan esas totalidades es posible mostrar que su comportamiento puede regirse por leyes aritméticas.

Los cuatro elementos presentados pretenden reflejar las vicisitudes que cruzó el pensamiento de Cantor para crear los ordinales transfinitos de la segunda clase de números (II), los cuales son la base de construcción para los números transfinitos de las clases restantes. Estos elementos muestran que su proyecto de construir lo que llamó la segunda clase de números (II) obedece al marco de estudio de la propiedad de continuidad y mantiene lazos que lo unen a él, pues con la expansión de los enteros al terreno de lo transfinito en la segunda clase de números, Cantor cree encontrar una distribución discontinua, según pensaba en su segunda definición de continuidad, de un conjunto con la potencia del continuo. Pero al construir una sucesión de clases de números transfinitos que, en tanto números, obedecen a determinadas leyes aritméticas, Cantor superó aquel marco que le constreñía, estableciendo uno nuevo con la aritmética (ordinal) transfinita.

3.2.3. Segunda definición cantoriana de continuidad: última formulación.

La introducción de los ordinales transfinitos representaba, y Cantor estaba consciente de ello, la consolidación de la teoría de conjuntos como una nueva disciplina en las matemáticas. Ahora serán las propiedades de estos nuevos objetos las que guiarán la investigación y el interés de un número cada vez mayor de matemáticos. Pero deseamos terminar este capítulo recogiendo la última definición de un continuo de puntos que Cantor elabora.

En esta ocasión, Cantor reduce a dos las condiciones suficientes y necesarias para que un conjunto de puntos P sea continuo:

1. P es un conjunto conexo. Cantor define este tipo de conjuntos como aquel en el que se cumple que para dos puntos cualesquiera p y p' y dado un número ε cualquiera, siempre existe un número finito de puntos $p_1, p_2, ..., p_n$ de P tales que sus distancias $\overline{pp_1}, \overline{p_1 p_2}$, ..., $\overline{p_n p'}$ sean todas menores que ε.
2. P es un conjunto perfecto.

La condición 1 recupera en términos conjuntistas la del inciso (a) en 3.1.2. Bajo la condición de ser perfecto se recuperan a su vez las condiciones (b) y (c) de la definición de 3.1.2.[33] Esta escueta definición de la propiedad de continuidad, que si bien recupera las condiciones para la continuidad de la definición de 3.1.2, está despojada de toda la problemática respecto al orden en que aquélla se debatía, marca el final de un ciclo en el pensamiento de Cantor, en la que tras su sobriedad se esconde un proceso altamente complejo que culminó con el resultado de que el estudio exitoso del continuo equivale al estudio de los conjuntos infinitos y ordenados.

---

[33] La condición (b) indica que todos los puntos límite de un conjunto P son elementos suyos; ahora bien, si P es perfecto, entonces $P' \subseteq P$, de donde P contiene a todos sus puntos límite. Por otro lado, la condición (c) señala que todos los puntos de un conjunto P son puntos límite; si consideramos que P es perfecto, entonces $P \subseteq P'$, de donde todos los puntos de P son puntos límite.

Capítulo
4
Consolidando la teoría de conjuntos: el problema del buen orden

4.1. El sistema de los números naturales en la concepción de Dedekind.

4.1.1. Cadenas y transformaciones.

Aun cuando Cantor establece el procedimiento para la obtención de los números de la primera clase (I), mediante la operación iterada "+1", esto no es suficiente para esclarecer la naturaleza de los números enteros positivos. Pero esta no era la meta de Cantor, sino la extensión de este concepto al terreno de lo transfinito. Cantor no se pregunta acerca de la noción de entero finito; por el contrario, se puede afirmar incluso que la presupone. Qué son los números finitos y cuáles son sus propiedades, son cuestiones pendientes en cierto sentido. El debate se encamina hacia el problema de averiguar si hay algo más elemental que los números naturales, algo que pudiera ser su base explicativa. Es precisamente éste el problema central del que se ocupa Dedekind en su obra "¿Qué son y para qué sirven los números?".

Dedekind utiliza de manera sistemática técnicas y conceptos propios de una teoría de conjuntos para presentar la aritmética elemental, aunque el universo de objetos matemáticos no se reduce a uno en el que sólo hay conjuntos. En la ontología de Dedekind el objeto más básico es una "cosa", esto es, algo que puede ser objeto de una representación del pensamiento humano. Un conjunto se obtiene cuando diferentes cosas son consideradas desde un mismo punto de vista. Una colección arbitraria de cosas constituye un conjunto cuando cada una de ellas cumple con una propiedad que nos interesa destacar. Junto a la de conjunto, la noción de función o "transformación", de acuerdo con la terminología de Dedekind, es primitiva:

> Por una *transformación* ϕ de un sistema S entendemos una ley según la cual a cada elemento determinado s de S *corresponde* una cosa determinada, que llamamos la *imagen* de s y que denotamos con $\phi(s)$ [...][1]

---

[1] Dedekind, *The Nature and Meaning of Numbers*, en *Essays on the Theory of Numbers*, p. 50.

En particular, son especialmente relevantes dos tipos de transformaciones para la obtención de los enteros finitos. En primer término las que son similares, aquellas para las cuales dado un conjunto S y dados dos elementos arbitrarios suyos a, b, siempre sucede que a éstos les corresponden diferentes imágenes $a'=\phi(a)$ y $b'=\phi(b)$. Enseguida aquellas transformaciones de un conjunto S en sí mismo, en las que la imagen $\phi(S)=S'$ es un subconjunto de S. Esto último permite definir la noción de cadena: si $\phi(K)=K'\subset K$, entonces K es una cadena. Dedekind tiene cuidado en señalar que K es una cadena con relación a determinada transformación ϕ; K podría no ser una cadena bajo otra transformación.

Dedekind establece enseguida que la propiedad de ser una cadena permanece invariante bajo las operaciones de unión e intersección de conjuntos, así como bajo una aplicación determinada.[2] Esto le permite definir la cadena de un conjunto A, denotada por A_0, y donde A es un subconjunto cualquiera de S, como la intersección de todas las cadenas que contienen a A como subconjunto. La cadena A_0 existe puesto que A es subconjunto de S y, dada la segunda condición enunciada para las transformaciones, S mismo es una cadena respecto de la transformación.

[2] Ver *ibid.*, pp. 56-57, teoremas 41, 43 y 39 respectivamente.

Estos conceptos contribuirán para que Dedekind lleve a buen término la creación de los números naturales, pero son insuficientes. Dedekind requiere, además, de una totalidad infinita. En la sección siguiente veremos que Dedekind intentó demostrar la existencia de un conjunto infinito, y en la sección 4.1.3 podremos entender que el objetivo de esta demostración era garantizar la existencia de un dominio infinito en el que fuera posible aplicar la noción de cadena para construir el sistema simplemente infinito de los números naturales, y justificar, en consecuencia, la existencia de todos los números enteros finitos.

4.1.2. Existe un conjunto infinito.

Cantor y Dedekind demostraron en 1874 que el conjunto de los números algebraicos es numerable. La estrategia consistió en mostrar que es posible establecer una correspondencia biunívoca entre este conjunto y uno de sus subconjuntos propios, el de los enteros positivos. Haciendo abstracción de la propiedad de numerabilidad, la correspondencia biunívoca entre un conjunto y uno de sus subconjuntos propios es, de acuerdo con Bolzano:

> [...] una de las características más notables de los conjuntos *infinitos*, presente con frecuencia –en realidad siempre— que se

> los hace objeto de estudio, pero que en general pasa desapercibida [...] De hecho, ocurre aún hoy que su sola mención resulta en extremo paradójica [...][3]

A pesar de que el estudio de Bolzano sobre el infinito coloca a este concepto en el camino por el que va a desarrollarse con el surgimiento de la teoría de conjuntos, aquella característica, incluso para Bolzano[4], continúa siendo una de las paradojas más desconcertantes sobre el infinito hacia mediados del siglo XIX.[5] Corresponde a Dedekind el mérito de transformar una afirmación paradójica en una definición:

> **64. Definición.** Un sistema *S* es *infinito* si es similar a una de sus partes propias; en caso contrario, *S* es un sistema *finito*.[6]

---

[3] Bolzano, Bernard, *Las paradojas del infinito*, México, UNAM, 1991, p. 64.

[4] Aunque Bolzano considera que el análisis de esta propiedad resultaría en provecho de la metafísica, la física y las matemáticas, piensa que, dada la contención propia de un conjunto respecto de otro, no es posible establecer a partir de su biyección que los dos conjuntos son iguales desde el punto de vista de la "multiplicidad de sus elementos". Bolzano no logra dar este paso ulterior debido a lo paradójico de pensar que con respecto a su multiplicidad un conjunto que sea tan sólo una parte de otro, posea no obstante la misma magnitud que la totalidad a la que pertenece. Véase el §21 de *Las paradojas del infinito*.

[5] La obra de Bolzano *Las paradojas del infinito* se publica póstumamente en el año 1851. De acuerdo con el editor Fr. Prihonsky, su redacción no es más antigua que 1847.

[6] *Ibid.*, p. 63.

El éxito de Dedekind en hacer de esta propiedad una definición matemática útil descansa en que, por un lado, evita la referencia a un conjunto infinito en función de su número de elementos, al mismo tiempo que permite compararlos entre sí respecto de su "multiplicidad", y, por otro lado, Dedekind muestra, con su teoría de los enteros, que esta definición tiene un alto grado de operatividad, pues mediante la subordinación de la noción de conjunto finito a la de conjunto infinito, y gracias a que éstos son comparables entre sí, es posible reducir el concepto de número finito al de "sistema" finito.

Apoyándose en esta definición, Dedekind intenta demostrar la existencia de un conjunto infinito en el teorema 66 de su ensayo sobre la naturaleza de los números. La prueba de ese teorema ha sido objeto de una gran variedad de críticas, cayendo finalmente en el descrédito. Una de las razones fundamentales para mantener tantas reservas en su aceptación fue la connotación metafísica de la prueba. En 1904 Hilbert reconoce el gran valor de la teoría de los enteros de Dedekind, con la sola excepción del teorema 66, en cuya prueba, a decir de Hilbert, ha sido utilizado un "método trascendental" propio de los "filósofos", pero que resulta impracticable en las matemáticas.[7] Sin embargo, Dedekind

[7] Ver Hilbert, "On the Foundations of Logic and Arithmetic", en van Heijenoort, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Harvard University Press, 1999, p. 131.

continuó pensando por mucho tiempo que la demostración del teorema era indispensable para su teoría, pues la posibilidad de definir a todos los números enteros positivos depende necesariamente de la existencia de un conjunto infinito. Antes de indicar el lugar que en ella ocupa, es conveniente tener presente lo que es objeto de discusión, pero sin olvidar que nuestro examen del teorema 66 tiene por objetivo comprender la concepción del infinito propia de Dedekind, bajo el reconocimiento de que su empresa era algo imposible de concretarse: la existencia de un conjunto infinito, como Zermelo comprendió, sólo puede garantizarse axiomáticamente.

Dedekind pretende que el conjunto S de todas las cosas que pueden ser objeto de su pensamiento es infinito. Su labor consiste entonces en mostrar que S es similar a uno de sus subconjuntos propios. Con este fin, toma un subconjunto S' de S que está constituido únicamente por representaciones o conceptos. En efecto, dado un elemento s de S, designamos como s' a la representación conceptual de s, y sólo cosas como s' pertenecen a S'. Pero una representación como s' puede ser a su vez objeto de pensamiento, así que s' es también elemento de S. De esta manera Dedekind determina una transformación ϕ de S, en la cual el subconjunto S' es el dominio de imágenes. El siguiente paso consiste en mostrar que S posee algún elemento que no pertenece a S'. Dedekind ofrece como un ejemplo de esto a su propio yo, el cual no es una mera representación conceptual y, por ende, no es elemento de *S'*. La transformación similar queda garantizada si a dos elementos arbitrarios *a*, *b* de *S* les corresponden sus respectivas transformaciones *a'*, *b'*, concluyendo así la demostración.

Es comúnmente aceptado pensar que en esta prueba se está reproduciendo la estructura de los números naturales, y una razón importante en la que se apoya esta creencia consiste en que la de Dedekind es una modificación a la demostración elaborada por Bolzano y publicada en 1851.[8] Para Bolzano, el conjunto de las proposiciones verdaderas es infinito, cuya "demostración" se reduce a dos elementos: a) sea A_1 una proposición verdadera, b) si A_n es una proposición verdadera, se construye mediante la función sucesor $f(x)$="*x* es verdadera" una sucesión de proposiciones verdaderas A_1, A_2, A_3, ... El conjunto de las proposiciones verdaderas es infinito, según la demostración de Bolzano, porque a partir de (a) y (b) es posible construir una sucesión que "excede a cualquier conjunto finito". Es a causa de que la función de sucesión permite la producción ilimitada de proposiciones verdaderas que Bolzano consideraba haber demostrado la existencia de un conjunto infinito, el cual, como él mismo hace notar, posee la estructura de los números naturales.

---

[8] Ver Bolzano, *op. cit.*, pp. 50-51.

En vista de la demostración de Bolzano, suele pensarse que en la de Dedekind se parte del yo (=s) como elemento distinguido, para aplicar sobre él un remedo de la función sucesor de Bolzano. Desde esta perspectiva, S es un conjunto inductivo, de manera semejante a como lo es el conjunto de las proposiciones verdaderas en la prueba de Bolzano. Pero en el caso de Dedekind es importante prestar atención a que en la sección posterior a la que contiene el teorema 66 se encuentra la definición de este tipo de conjuntos, pero no parece haber razón para postergarla si el conjunto S, dada la prueba de Dedekind, exhibe ya una estructura como aquélla. Nos parece que es apresurado afirmar que S tiene la estructura de los naturales, aunque con la pesada carga metafísica que deviene con la utilización del yo. Los motivos que Dedekind tuvo para mencionar el yo pueden ser muy diversos: desde el lugar preponderante que esta noción ocupó en la tradición filosófica que le era cercana –el llamado idealismo alemán— hasta su propia concepción en la que el mundo de las matemáticas es creado por la potencialidad y libertad de la mente humana. Pero sin importar cuál fuera el motivo, no debe perderse de vista que Dedekind no era Descartes, y no pretende como el gran filósofo francés que su único punto de partida sea el yo. La aparición del *ego* en la prueba de Dedekind es de hecho marginal. Representa una cosa que puede ser objeto del pensamiento y, sin embargo, no es un mero concepto. Pero Dedekind no duda de que haya más cosas como ésa y que no sean un yo; es decir, no duda de que haya otros elementos distintos del yo que estén en *S* y no en *S'*. En otras palabras, no tenemos una "ecuación" semejante a "el $yo_0=s_0=S$ "; el yo no es el elemento distinguido sobre el que se construye la cadena *S*. En la demostración no ocurre que el yo se identifique con *s* y que *s* sea el elemento distinguido de *S*. Por el contrario, *s* es un elemento elegido arbitrariamente de *S*. En una de estas elecciones podría suceder que *s* fuera el yo. Dedekind pone énfasis en esta elección no para constituir a *s* como elemento distinguido, sino para ostentar que hay en *S* algunos elementos que no están en *S'*. Pero la elección podría habernos llevado a que *s* represente a un objeto físico, por ejemplo, el cual tendría las mismas características que el yo con respecto a los conjuntos *S* y *S'*. Desde este punto de vista, la manera de definir a la función ϕ no tiene como objetivo la generación de sucesores, sino garantizar la biyección entre *S* y *S'*. En caso de ser correcto lo que decimos, es falso que *S* tiene la estructura de un conjunto inductivo, esto es algo que no sabemos. Podríamos estar seguros a lo más de que es infinito en el sentido de la definición de Dedekind.

Pese a que lo anterior es una defensa de la prueba de Dedekind, es una defensa parcial, en el sentido de que solamente pretendemos rescatar de ella el hecho de que Dedekind no cometió la ingenuidad, considerando que conocía la prueba de

Bolzano, de pretender demostrar la existencia de un conjunto infinito presuponiendo la existencia del conjunto de números naturales, y procediendo mediante la reproducción de su estructura a partir de una función de sucesión. Por otra parte, aceptar su validez implicaría asumir compromisos metafísicos muy fuertes sobre la constitución del mundo y de la conciencia, e incluso de la relación entre el mundo y el conocimiento matemático. Pero más allá de si deseamos tomar el riesgo junto con Dedekind comprometiéndonos, habría problemas pendientes aún. Uno que atrajo la atención de sus contemporáneos fue el que *S* estaba definido como el conjunto de *todas* las cosas, lo cual abriría la puerta a una paradoja.[9] Quizá este problema no sea tan acuciante si definimos adecuadamente a *S*. Parece más grave el que el yo no se define matemáticamente.[10] Bajo nuestra interpretación esto podría extenderse probablemente a todos los objetos pertenecientes a *S* que no son elementos de *S'*. Dijimos antes que en la ontología de Dedekind las entidades más elementales son cosas, entendidas como objetos susceptibles de ser pensados. Así que, en primera instancia, Dedekind está justificado en introducir el yo, u otro objeto, como un elemento de un conjunto mientras cumpla con la propiedad de ser susceptible

[9] Uno de los que así pensaba es el mismo Hilbert, ver *ibid.*
[10] Ver, por ejemplo, Belna, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*, p. 92.

de pensarse. Dedekind no está obligado a adherirse al formalismo naciente en su época, y podría defender que entidades como el yo caben dentro de su teoría porque están bien definidas según el concepto básico de cosa. Sin embargo, esto último es altamente cuestionable. Si hojeamos el tratado de Dedekind, nos percatamos de que el teorema 66 es el único que se apoya en el concepto de cosa, lo cual nos lleva a creer que no es un concepto indispensable en su teoría de los enteros, sino una definición *ad hoc*, cuyo propósito parece apuntar a un único teorema.

La demostración del teorema 66 es insostenible en vista de los aspectos *ad hoc* que involucra. Pero, por otra parte, el conjunto del que Dedekind intentaba probar su existencia no es uno que posea necesariamente una estructura inductiva, sino un conjunto infinito en general, es decir, un conjunto que es biyectable con uno de sus subconjuntos propios. Daremos paso ahora a los conjuntos simplemente infinitos y, una vez expuestos, trataremos de señalar el lugar que este teorema ocupa en el tinglado de los enteros positivos.

4.1.3. Conjuntos simplemente infinitos.

Dedekind formula esta definición para caracterizar un conjunto simplemente infinito:

71. Definición. Un sistema N es *simplemente infinito* si existe una transformación similar ϕ de N en sí mismo, tal que N aparezca como la cadena de un elemento que no pertenezca a $\phi(N)$. A este elemento, que denotaremos en lo sucesivo con el símbolo 1, lo llamamos el *elemento base* de N, y decimos que la transformación ϕ ordena al sistema simplemente infinito N.[11]

Enseguida sintetiza la "esencia" de un conjunto simplemente infinito en cuatro condiciones que deben satisfacer una transformación ϕ de N y el elemento base de N:

α. $N' \subset N$.
β. $N = 1_0$.
γ. El elemento 1 no pertenece a N'.
δ. La transformación ϕ es similar.[12]

De acuerdo con la noción de cadena y con la condición β, el conjunto simplemente infinito N está constituido como $\{1, \phi(1), \phi(\phi(1)), \ldots\}$. Esta construcción de N permite observar que todos los elementos, con excepción de 1, son sucesores. N' es el subconjunto de N que contiene todos los elementos sucesores de N. Así pues, en N sólo existe un primer elemento 1. Con α y δ se justifica que N es infinito.

El teorema 72 enuncia que todo conjunto infinito S contiene un conjunto simplemente infinito N. La prueba parte del

---

[11] Dedekind, *op. cit.*, p. 67.
[12] *Ibid.*

hecho de que S es infinito, de donde hay un elemento a en S que no está en algún subconjunto suyo S' con el que es biyectable. A partir de a se construye la cadena a_0, la cual cumple con las condiciones α-δ. Habíamos visto que cuando se "demuestra" que existe un conjunto infinito, no tenemos un elemento base a, sino un elemento arbitrario s de S. En la prueba del teorema 72 se da un paso adicional al convenir que uno de los elementos arbitrariamente elegidos, pero tal que no pertenece a S', se establece como el elemento base. Esto permite que la cadena a_0 posea un único primer elemento, lo cual no sucede necesariamente en la demostración del teorema 66. La diferencia más importante entre un conjunto S y un conjunto N, como los de los teoremas 66 y 72 respectivamente, es que la transformación ϕ de N, bajo las condiciones α-δ, induce un buen orden en N, mientras que esto no es el caso tratándose de S.

La transformación ϕ de N induce un buen orden, pero no puede justificar que la cadena 1_0 sea infinita. Dedekind necesita asegurar previamente la existencia de un conjunto infinito, y de ahí su insistencia en salvar su teorema 66. Contando con un dominio infinito, la aplicación de la transformación ϕ conduce a un conjunto simplemente infinito.

Con todos estos conceptos a su disposición Dedekind está listo para introducir los números:

> 73. Definición. Si al considerar a un sistema simplemente infinito N, ordenado por una transformación ϕ, abstraemos completamente la naturaleza particular de sus elementos, conservando simplemente la diferenciación entre cada uno de ellos, y teniendo presente tan sólo la relación que hay entre uno y otro en función de la transformación de orden ϕ, entonces estos elementos se llaman *números naturales* o *números ordinales* o simplemente *números*, y el elemento base 1 se llama el *número base* de la *serie de números* N.[13]

Los números naturales se caracterizan específicamente por dos aspectos: 1) pertenecen a un conjunto simplemente infinito, pero deben considerarse como elementos absolutamente abstractos; 2) la relación que los caracteriza es la de orden inducida por la transformación ϕ. Con el primer aspecto se pretende que el de los números naturales sea el conjunto representativo de los conjuntos simplemente infinitos. El segundo aspecto nos indica que lo que nos permite entender como números a los elementos de este conjunto representativo es la relación de orden habida entre ellos.

Los números naturales están definidos en función de un sistema simplemente infinito N. La existencia de éste, a su vez, depende de la existencia de un conjunto infinito. Ordenando una parte (infinita) de este último mediante una función de sucesión obtenemos la serie de los números naturales. Para que no le falte ninguno de sus términos es necesario comenzar con un conjunto S

---

[13] *Ibid.*, p. 68.

tal como el del teorema 66. Así, la existencia de los números enteros finitos depende de la existencia de un conjunto infinito y de la posibilidad de ordenar alguna de sus partes.

4.2. Ernst Zermelo y el problema del orden.

4.2.1. El Teorema del Buen Orden, 1904.

Hacia 1904 la teoría de los conjuntos ha conseguido atraer la atención de los matemáticos más destacados de la época. Diversas cuestiones concernientes a esta naciente rama de las matemáticas van ganando lugares privilegiados de discusión en los congresos de matemáticas. Con su trabajo en la quinta memoria sobre conjuntos lineales e infinitos de puntos, Cantor logra generar un contexto en el que los problemas inmiscuidos en los teoremas de 1874 y 1878 dejan de ser casos aislados y totalmente periféricos al mundo matemático, y forman parte ahora de una disciplina que muestra su vigor en la aritmética transfinita. Por otra parte, la teoría de los enteros de Dedekind, con su profundidad y rigor, deja constancia de que los problemas teórico-conjuntistas están en la base de la aritmética finita. Dedekind teoriza acerca de los números finitos apoyándose en el inestable terreno del infinito, que parece no decidirse si es un infinito matemático o metafísico, pero que Dedekind finalmente lo acerca a lo primero al introducir en una parte del infinito el orden impuesto por una función. Para el pensamiento de Cantor hacia finales de 1882 también es decisiva la cuestión del orden.

Pero Cantor nunca pudo demostrar su convicción más apremiante de 1882, a saber, que todo conjunto puede tener un buen orden. Vamos a ocuparnos ahora del examen de la primera prueba exitosa de lo que conocemos ahora como el Principio del Buen Orden.

Ernst Zermelo comunica a Hilbert en 1904 su demostración de que es posible establecer un buen orden para todo conjunto. La demostración es inusitada y engañosamente sencilla, debido a la utilización de una novedosa herramienta matemática, el Axioma de elección. La prueba se desarrolla de la siguiente manera.

I. Zermelo parte de un conjunto arbitrario *M*, para el cual ha de establecerse un buen orden. Considera a continuación el conjunto *P* de todos los subconjuntos no vacíos de *M*, para estipular enseguida la posibilidad de una elección simultanea de un elemento de cada conjunto en *P*: "*Supóngase que a cada subconjunto M' se asocia un elemento cualquiera m'_1 que está en M'; el cual se llama el elemento "distinguido" de M'.*"[14] Esta elección permite establecer una *cobertura* de *P* al designar una función γ: $P \to M$, asignando a cada conjunto

[14] Zermelo, "Beweis, daβ jede Menge wohlgeordnet werden kann", *Mathematische Annalen*, vol. 59, 1904, p. 514.

elemento de P un elemento no necesariamente distinto de M. Zermelo afirma que siempre existe al menos una cobertura.

Teniendo asegurada la existencia de una cobertura, un segundo paso consiste en definir un tipo particular de conjuntos, que Zermelo llama γ-conjuntos. Un γ-conjunto M_γ es un conjunto bien ordenado que satisface las siguientes condiciones:

1. $M_\gamma \subset M$.
2. M_γ tiene un "segmento asociado" $S(x, a)$ conformado por todos los elementos x pertenecientes a M que preceden a a, para cualquier a de M_γ.
3. Consideramos que a es el elemento distinguido de M-$S(x, a)$.

Zermelo muestra que hay γ-conjuntos en M al considerar el subconjunto $\{m_1\}=M'=M$, el cual cumple con las tres condiciones anteriores, siendo m_1 el elemento distinguido de M'. Enseguida demuestra que para dos γ-conjuntos distintos siempre ocurre que uno de los dos es igual a un segmento del otro, de donde concluye que si dos γ-conjuntos tienen algún elemento en común, entonces los elementos que lo preceden tienen el mismo orden en ambos conjuntos, es decir, poseen el mismo segmento asociado con relación al elemento en común.

II. Nosotros identificamos como segunda parte de la demostración la que consiste en probar la afirmación: "*Es posible ordenar a la totalidad de los γ-elementos L_γ de tal manera que constituya un γ-conjunto y contenga a todos los elementos del conjunto original M.* Por lo cual, éste último está bien ordenado."[15] Un elemento cualquiera de *M* que pertenece a un M_γ es un γ-elemento. La estrategia de Zermelo consiste en mostrar que L_γ es también un γ-conjunto. Primero establece la tricotomía de L_γ apoyándose en el resultado previo de que para dos γ-conjuntos distintos siempre ocurre que uno de ellos es igual a un segmento del otro, pues esto le permite afirmar que para dos γ-elementos distintos pertenecientes a aquellos dos γ-conjuntos, ambos pertenecen al γ-conjunto que incluye al otro como segmento, y este γ-conjunto determina la relación de precedencia para los γ-elementos. Probando la transitividad para cualesquiera tres γ-elementos, Zermelo puede

[15] *Ibid.*, p. 515.

concluir que L_γ está linealmente ordenado. Ahora bien, Zermelo demuestra que todo subconjunto no vacío de L_γ tiene un primer elemento, por lo cual L_γ está bien ordenado: sea A un subconjunto no vacío de L_γ, entonces $a \in A$ pertenece a un M_γ; considerando además que todo subconjunto $A' = \{x | x \prec a \vee x = a\}$ de A es un subconjunto de M_γ, concluimos que A' posee un primer elemento, el cual de hecho también es el primer elemento de A.

Las condiciones 2 y 3 de (I) son fácilmente verificables para L_γ una vez establecido que es un conjunto bien ordenado, por lo cual L_γ es un γ-conjunto. Sólo resta corroborar que todos los elementos de M pertenecen a L_γ, lo cual se lleva a cabo por reducción al absurdo: supongamos que M-L_γ no es vacío; entonces existe un elemento distinguido m'_1 de M-L_γ, con el cual formamos el conjunto bien ordenado $\{L_\gamma, m'_1\}$; éste es un γ-conjunto y, por lo tanto, m'_1 es un γ-elemento, lo que contradice el que M-L_γ no sea vacío. Así, todo elemento de M es un elemento de L_γ, resultando que $M = L_\gamma$. M es un conjunto bien ordenado.

La carta que contiene esta prueba está fechada el 24 de septiembre de 1904. Apenas un mes y medio antes, el 10 de agosto del mismo año, Julius König presentó en el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas en Heidelberg una demostración de que el continuo no puede tener un buen orden. Poco tiempo más tarde, König se vio obligado a retirar su prueba a causa de que se apoyaba en un resultado de Bernstein que no era universalmente válido. Pero ni lo fallido de su prueba ni la aparición de la de Zermelo sería suficiente para que König desistiera de su intento. El año siguiente König arremete nuevamente[16], argumentando que el supuesto de que el continuo puede obtener un buen orden conduce a contradicciones. Pero König no es el único que se opone a esta idea. Gregory Moore[17] ha planteado convincentemente que el artículo de Cesare Burali-Forti (1897) que normalmente se asocia con el descubrimiento de su paradoja[18] tiene como problema central el del buen orden. Así pues, en conformidad con Moore, Burali-Forti no estaría ocupado en descubrir una paradoja, sino en investigar sobre la posibilidad de establecer un buen orden para cualquier conjunto. Esto último,

---

[16] Ver König, "On the Foundations of Set Theory and the Continuum Problem", en van Heijenoort, *op. cit.*, pp. 146-148.
[17] Ver Moore, Gregory, "The Origins of Zermelo's Axiomatization of Set Theory", *Journal of Philosophical Logic*, 7, 1978, pp. 308-309.
[18] Este artículo está intitulado "A Question on Transfinite Numbers" y puede consultarse en van Heijenoort, *op. cit.*, pp. 105-111.

que llamamos el problema del buen orden, tiene una respuesta negativa por parte de König y de Burali-Forti. Antes de comentar el significado que esta negativa tiene a nuestro parecer, presentaremos algunas de las críticas de que fue objeto la prueba de Zermelo.

En diciembre de 1904, Emile Borel publica un pequeño artículo con sus objeciones a la demostración de Zermelo.[19] Borel considera que el trabajo de Zermelo tiene el mérito de poner en claro que el problema de dar un buen orden a un conjunto *M* cualquiera equivale al de elegir de cierta manera un elemento *m*' de todo subconjunto no vacío *M*' de *M*. Sin embargo, Borel expone dos razones por las que no le parece satisfactoria la respuesta de Zermelo. La primera es que la función de elección no está definida ni hay indicaciones de cómo podría definirse. La segunda es que no considera válido un razonamiento que tenga como base la posibilidad de hacer una elección arbitraria una infinidad no numerable de veces.

Este artículo de Borel dio lugar a un carteo entre él y otros tres matemáticos franceses: Hadamard, Baire y Lebesgue, de los que sólo el primero apoyaba la postura de Zermelo.[20] La

[19] Borel, "Some Remarks on the Principles of the Theory of Sets", en Ewald, W. B. (ed.), *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. 2, New York, Oxford Calderon Press, 1996, p. 1076.
[20] Ver "Five Letters on Set Theory", en Ewald, *op. cit.*, p. 1077 *ss.*

discusión entre los cuatro tiene como eje central la manera en que debe caracterizarse la elección arbitraria propuesta por Zermelo, debatiéndose a) la aceptación de que la función no esté definida y b) el tipo de elección de que se trata, es decir, si es una elección simultánea, independiente, etcétera. Pero al lado de esto, Baire y Legesgue indican otra razón que les impide aceptar la prueba. De acuerdo con Baire:

> La expresión *un conjunto dado* se usa continuamente. ¿Tiene sentido? No siempre, en mi opinión. Apenas se habla del infinito (incluso del numerable [...]) la comparación, consciente o inconsciente, con una bolsa de canicas que ha pasado de mano en mano debe desaparecer por completo. Estamos entonces, según creo, en el reino de *lo potencial*.[21]

Lebesgue, por su parte, arguye sobre el uso del término existencia de la siguiente manera:

> [C]uando el conocido argumento de Cantor se interpreta diciendo que *existe un infinito no numerable de números*, no se presenta medio alguno que permitiera llamar a eso una infinidad. Sólo muestra, como usted [Borel] ha dicho anteriormente, que siempre que se tiene una infinidad numerable de números, puede definirse un número que no le pertenece.[22]

---

[21] Baire, "Letter from Baire to Hadamard", en Ewald, *op. cit.*, pp. 1079-1080.

[22] Lebesgue, "Letter from Lebesgue to Borel", en Ewald, *op. cit.*, p. 1081. El conocido argumento de Cantor al que hace referencia

Entre las posturas de Borel, Baire y Lebesgue, la del segundo es la más radical, pues no reconoce siquiera la existencia de un conjunto infinito numerable. Pero los tres coinciden en que la prueba de Zermelo es cuestionable porque presupone la existencia efectiva de un conjunto infinito no numerable.

Así pues, en el momento en el que Zermelo escribe su demostración está latente en el ambiente matemático una resistencia doble. Por un lado, no existe entre los matemáticos un convencimiento pleno de que el ámbito del infinito puede sistematizarse con la noción de buen orden. Por otro, la dificultad de dar una solución al problema del buen orden ocasiona desconfianza en el concepto mismo de infinito, en tanto actual.

Miremos ahora directamente la prueba de Zermelo. Si el conjunto *M* es finito, no nos enfrentamos a un verdadero problema cuando procuramos hallarle un buen orden. Las dificultades comienzan cuando *M* es infinito. Supongamos que tenemos un conjunto infinito *M* cuyos elementos deseamos distribuir de tal manera que adquieran un buen orden. Comencemos como lo hace Zermelo. Tomamos el conjunto $\{m_1\}$, donde m_1 es el elemento distinguido de *M*; después el conjunto $\{m_1, m_2\}$, donde m_2 es el elemento distinguido de $M\text{-}S(m_1, m_2)$. Supongamos que continuamos de manera similar a la anterior y

---

Lebesgue es, claramente, la demostración de su teorema sobre la no numerabilidad del conjunto de números reales.

que tomamos los distintos elementos distinguidos de los conjuntos correspondientes M-$S(x, a)$ para dar lugar al conjunto M pero ya bien ordenado, es decir, $M=\{m_1, m_2, ...\}$. Este procedimiento corresponde a la primera parte de la prueba de Zermelo. Pero no nos permite asegurar que no hemos ordenado más que un subconjunto propio infinito de M. Si M es simplemente infinito, lo anterior es suficiente para dar un buen orden a M en su totalidad. Zermelo, en (I), sólo nos dice que existe una función de elección, pero no está definida. Sin embargo, la manera en que se va ordenando el conjunto en (I) conduce a un conjunto simplemente infinito en el sentido de Dedekind.

El procedimiento en (I), en cambio, no puede garantizar un buen orden para un conjunto cuya potencia sea mayor a la de los conjuntos simplemente infinitos. Para conjuntos de ese tipo es necesario dar el paso de la segunda parte de la prueba. Al demostrar que el conjunto L_γ de todos los γ-elementos es un γ-conjunto y que todos los elementos de M son γ-elementos, Zermelo supera las limitaciones del procedimiento en (I), haciéndolo valer para cualquier conjunto, sin importar su potencia. Nos parece que, en el fondo, Zermelo está haciendo algo similar a lo que Cantor hizo para construir las clases de números (II), (III), etc., bajo la aplicación de su tercer principio. Recordemos que la sucesión de enteros transfinitos (d) en 3.2.2

puede establecerse como la clase de números (II) gracias a que cada término de la sucesión tiene la misma potencia. El primer entero transfinito de la tercera clase de números, ω_1, puede constituirse como una totalidad en virtud de que todos sus elementos comparten una propiedad relevante. Pensemos ahora en el conjunto M de la prueba de Zermelo. Sabemos, por (I), que en M hay γ-conjuntos. Tomando todos los γ-conjuntos de M formamos L_γ, mostrando después que este último es un γ-conjunto. Es decir, seleccionamos de M los subconjuntos que comparten las propiedades de poseer un buen orden y de definir un elemento distinguido, con cada uno de estos elementos formamos una sucesión bien ordenada, la cual es posible constituir como una totalidad $L_\gamma=M$ gracias a las propiedades de los γ-conjuntos. En vista de las propiedades antedichas la sucesión de elementos distinguidos m_1, m_2, ... puede considerarse como una totalidad $\{m_1, m_2, ...\}$ que responde a un buen orden sin importar cuál sea su potencia, de manera similar a como la sucesión de enteros transfinitos numerables puede considerarse una totalidad por la aplicación del tercer principio de Cantor.

En su prueba, Zermelo se ocupa, en primer lugar, de dar un buen orden en (I) a conjuntos a lo más numerables, procediendo como Cantor al establecer la sucesión de números finitos o como Dedekind cuando define un conjunto simplemente infinito.[23] En segundo lugar, Zermelo garantiza la posibilidad de un buen orden para cualquier conjunto tomando en consideración la construcción de la segunda clase de números (II). Zermelo está fortaleciendo así la teoría del buen orden involucrada en la teoría de los enteros, finitos y transfinitos, de Cantor. Esto significa que la demostración de Zermelo permite fincar como una ontología la concepción que Cantor forjó sobre el infinito, pues es gracias a Zermelo que puede justificarse la introducción del concepto de buen orden dentro del ámbito completo de lo transfinito, concepto sin el cual es imposible definir las relaciones y operaciones aritméticas que Cantor estableció para los conjuntos transfinitos.

Ahora bien, la manera en que hemos interpretado la demostración de Zermelo indica que él estaba trabajando dentro del marco conceptual al que Cantor y Dedekind dieron origen. Por el contrario, Borel, Baire y Lebesgue, así como König y Burali-Forti, están trabajando fuera de este marco, por lo cual no pueden compartir los presupuestos de Zermelo. Nos resta entonces mostrar cómo hizo Zermelo para que el Teorema del Buen Orden pudiera ser un resultado compartido incluso por aquellos que no se ubicaban en aquel marco conceptual.

---

[23] En realidad, el de Zermelo es más parecido al procedimiento de Dedekind, pues para este último la totalidad de los enteros finitos es posible si presuponemos un conjunto infinito tal como hicimos más arriba con M, mientras que en el caso de Cantor, ω se define como el límite de la sucesión.

4.2.2. El Axioma de elección y el Axioma de infinito.

Tanto lo trabajos de Cantor como los de Dedekind desarrollaron los conceptos teórico-conjuntistas hasta el grado de formar una teoría, pero es a Zermelo a quien corresponde el hacer de ella una teoría axiomática. Sobre aquello que impulsó a Zermelo a enfrentar semejante empresa hay distintas interpretaciones. El propio Zermelo nos da un par de pistas. Deja anotado su interés en liberar a la teoría de conjuntos de las paradojas que le eran inherentes, y que comenzaron a descubrirse desde la última década del siglo XIX.[24] Muchos interesados en el estudio del fundamento de las matemáticas privilegian esta interpretación. Otros, no necesariamente despreocupados de tal tema, ensayan nuevas lecturas. Este es el caso de Gregory Moore, a cuya posición nos sumamos. De acuerdo con Moore, Zermelo lleva a cabo su axiomatización con el propósito principal de proteger su prueba del Teorema del Buen Orden, dada la gran cantidad de críticas de que fue objeto entre 1904 y 1908, fecha esta última en que Zermelo presenta su conjunto de axiomas.[25] El principal blanco de las críticas fue lo que en 1908 Zermelo

[24] Ver Zermelo, "Investigations in the Foundations of Set Theory I", en van Heijenoort, *op. cit.*, p. 200.

[25] Ver Moore, Gregory, "The Origins of Zermelo's Axiomatization of Set Theory", *Journal of Philosophical Logic*, 7, 1978.

establece como el Axioma de elección, así que la axiomatización, defiende Moore, perseguía en específico la conservación de aquel axioma. Creemos, no obstante, que la postura de Moore, de la que somos partidarios, debe matizarse por el segundo objetivo declarado por Zermelo:

> [...] Pretendo mostrar cómo la teoría completa creada por Cantor y por Dedekind puede reducirse a unas cuantas definiciones y a siete principios, o axiomas, mutuamente independientes.[26]

Pensamos, pues, que ésta es una declaración muy seria de Zermelo, y al colocarnos desde la perspectiva de Moore apostamos por que Zermelo consideraba que en el Teorema del Buen Orden está involucrada una parte muy significativa de la teoría de Cantor y Dedekind.

Los siete axiomas con los que Zermelo considera que se recupera la teoría de Cantor y de Dedekind son los siguientes:

> AXIOMA I. (Axioma de extensionalidad). Si cada elemento de un conjunto M es también un elemento de N y viceversa, si, por tanto, $M \subset N$ y $N \subset M$, entonces siempre $M=N$; o brevemente: Todo conjunto está determinado por sus elementos.
>
> AXIOMA II. (Axioma de conjuntos elementales). Existe un conjunto (ficticio), el conjunto vacío 0, que no contiene ningún

[26] Zermelo, *op. cit.*, p. 200.

elemento. Si a es un objeto del dominio, existe un conjunto $\{a\}$ que contiene a a y sólo a a como elemento. Si a y b son dos objetos del dominio, siempre existe un conjunto $\{a, b\}$ que contiene a a y b como elementos, pero a ningún objeto x distinto de ellos.

AXIOMA III. (Axioma de separación). Cuando la función proposicional $F(x)$ está definida para todos los elementos de un conjunto M, M posee un subconjunto M_F que contiene como elementos precisamente a los x para los que $F(x)$ es verdadera.

AXIOMA IV. (Axioma del conjunto potencia). Para cualquier conjunto T hay otro conjunto $P(T)$, el *conjunto potencia* de T, que contiene como elementos precisamente a todos los subconjuntos de T.

AXIOMA V. (Axioma de unión). Para cualquier conjunto T hay un conjunto $\cup T$, la unión de T, que tiene como elementos precisamente a todos los elementos de los elementos de T.

AXIOMA VI. (Axioma de elección). Si T es un conjunto cuyos elementos son todos conjuntos diferentes de 0 y son mutuamente disjuntos, su unión $\bigcup T$ contiene al menos un subconjunto S_1 que posee uno y sólo un elemento en común con cada elemento de T.[27]

AXIOMA VII. (Axioma de infinito). En el dominio existe al menos un conjunto Z que contiene al conjunto vacío como elemento, y está constituido de tal manera que a cada uno de sus elementos a le corresponde un elemento de la forma $\{a\}$; en otras palabras, para cada uno de sus elementos a, el conjunto correspondiente $\{a\}$ también está contenido como uno de sus elementos.[28]

---

[27] *Ibid.*, p. 204.

[28] *Ibid.*, pp. 2001-204.

Es bien sabido que a finales del siglo XIX y principios del XX se registra un interés creciente por parte de la comunidad matemática en aumentar el nivel de rigor en su área de conocimiento. Una manera de lograrlo consistió en la axiomatización de las teorías. Al proponer su conjunto de axiomas, Zermelo hace que la teoría cantoriana, cuyo marco conceptual no era compartido por muchos, cumpla no obstante con los estándares de rigor exigidos por la comunidad matemática.

En la sección anterior vimos que en la segunda parte de su prueba, Zermelo rescata lo que, según hemos dicho en el capítulo tercero, Cantor teorizaba en 1882: dar un buen orden a los conjuntos infinitos no numerables. Esto significa que Zermelo estaba preocupado principalmente por ofrecer un fundamento axiomático a la teoría ordinal de los transfinitos, aunque con la suficiente cautela para no tomar postura todavía frente al problema entonces abierto de la hipótesis del continuo.

Para que el Axioma de elección justifique el buen orden de conjuntos infinitos es necesario que existan conjuntos de este tipo. Zermelo postula su existencia en el séptimo axioma. Antes de introducirlo, Zermelo señala que la deducción de los teoremas esenciales de la teoría general de conjuntos no requiere de él, pero reconoce la necesidad de garantizar la existencia de estos conjuntos, haciendo alusión al teorema 66 de Dedekind y desacreditando por completo su prueba en función de que no es definible 'el conjunto de todas las cosas pensables'. Atendiendo a nuestra lectura sobre Dedekind, Zermelo está de acuerdo en que debe justificarse la existencia de un conjunto infinito, pero esto sólo se puede hacer axiomáticamente, y no es necesario garantizar la existencia de un conjunto infinito en general, sino que es suficiente asegurar la de uno simplemente infinito. El Axioma de infinito retoma la definición 71 de Dedekind para conjuntos simplemente infinitos. El trabajo de Cantor de 1882 ha dejado claro, por otro lado, que es posible construir conjuntos más que numerables a partir de conjuntos numerables, por lo que es suficiente tener como base un conjunto simplemente infinito para el estudio del infinito en general.

Si bien es cierto que Zermelo tiene una posición más débil que Cantor y que Dedekind sobre la relevancia del infinito para la teoría de conjuntos, su inclusión en un axioma nos indica que lo consideraba una parte fundamental en el estudio de los conjuntos, sobre todo a la luz de la teoría de Cantor y de Dedekind, que pretendía rescatar en unos cuantos principios.

Pero el que Zermelo axiomatizar la teoría de conjuntos no implicó la instauración inmediata de su marco conceptual. En 1911, ante la Sociedad Matemática de Francia, Bertrand Russell impartía una conferencia sobre "los axiomas del infinito y del transfinito", en la que concluía:

> [N]o hay razón para creer que el axioma multiplicativo [axioma de elección] sea verdadero, mientras que, por razones empíricas, parece probable que el axioma del infinito se realiza en el mundo actual. Por mi parte, encuentro saludable que en el presente no se emplee ninguno de los dos, salvo como hipótesis explícitas."[29]

Esta declaración de Russell es representativa del modo de proceder que imperó por mucho tiempo en las matemáticas. Cuando alguien hacía uso del Axioma de elección, tenía la cautela de hacer ver explícitamente las partes que dependían del axioma. Pero también es cierto que la declaración de Russell involucra el reconocimiento, aun cuando sea a nivel hipotético, de que los axiomas pueden ser utilizados. Esta postura ambigua de Russell se explica probablemente porque acepta, por un lado, que la axiomatización de Zermelo cumple con los criterios de rigor, pero, por otro, el marco conceptual de la teoría cantoriana no ha terminado de asentarse en la mentalidad de la época. En general, esto significaría que si bien el método axiomático de Zermelo no impone el marco conceptual de la teoría, al menos asegura su posibilidad de desarrollo.

El trabajo de Zermelo está alejado en sentido temporal de lo que identificamos como el nacimiento de la teoría de conjuntos, pero conceptualmente responde a un mismo espíritu,

---

[29] Russell, "Sur les axiomes de l'infini et du transfini", *Bulletin de la société mathématique de France*, vol. 39, 1911, p. 501.

compartiendo con sus fundadores la idea de que esta disciplina se consolida con el estudio del infinito y del orden.

Epílogo

La teoría de conjuntos encuentra su origen en la intensa discusión matemática acerca del dominio de números reales, registrada en el último cuarto del siglo XIX. Este debate adquiere distintos matices en función de la disciplina matemática desde la cual se plantee. La perspectiva relevante para reconstruir una historia coherente del surgimiento de la teoría de conjuntos consiste en enfocarla desde la aritmética clásica, habiendo dos elementos de importancia central en ella. Por un lado, es imposible soslayar el objetivo general que perseguían los matemáticos respecto de la aritmética, a saber: liberar a este campo de la utilización de herramientas no aritméticas, particularmente de aquellas con naturaleza geométrica o intuitiva. Por otro lado, la dificultad que amenazaba el buen logro de este objetivo consistía en hallar una formulación aritmética de un dominio continuo. La teoría de números reales de Dedekind consigue satisfacer los dos aspectos anteriores gracias a su concepto de corte, que presupone la noción de orden lineal sin la cual es imposible que se verifique la propiedad de continuidad en el conjunto de números reales. Cantor, por su parte, evita igualmente el uso de herramientas geométricas en su definición de los números reales, pero en ella localizamos dos diferencias significativas respecto de la de Dedekind:

1. La definición de Cantor no requiere de la estipulación del orden lineal como una condición para la construcción del dominio **R**.
2. Cantor establece la propiedad de continuidad para este dominio mediante la biyección con los puntos de un segmento de recta, por lo cual no se efectúa una total reducción aritmética en su concepción.

El objetivo general de la aritmética antes señalado permite contextualizarla históricamente en la segunda mitad del siglo XIX. Gracias a este contexto es posible entender a la aritmética como un marco conceptual específico, a la luz del cual Cantor comienza a trabajar en la resolución del problema que deviene central dado el marco conceptual, es decir, en una formulación aritméticamente satisfactoria de la propiedad de continuidad para un dominio de números reales. Motivado por el estudio de la obra de Dedekind sobre números irracionales, Cantor inicia sus investigaciones sobre la propiedad de continuidad planteando tres problemas:

i) ¿Es posible poner en correspondencia biunívoca un dominio denso con otro que no lo sea?

ii) ¿Es posible establecer que el dominio de números reales es numerable?

iii) ¿La caracterización de la propiedad de continuidad depende del número de dimensiones que posea el dominio en el que aquélla se presente?

Las respuestas a estos problemas están representadas por tres teoremas:

a) El teorema 1 de 1.2.2 muestra que existen dominios densos, como el de los números algebraicos, que pueden numerarse con los enteros positivos.

b) El teorema 2 de 1.2.3 muestra que un conjunto de números reales contenido en un intervalo cualquiera no es numerable.

c) El teorema 1 de 1.3.1 establece la equipotencia entre un conjunto continuo de una dimensión y otro conjunto continuo con *n* dimensiones.

A partir de (a) y (b) Cantor se pregunta por el papel que juega la noción de densidad respecto de la continuidad, en vista de que hay tanto conjuntos densos numerables como conjuntos densos no numerables. Asimismo, en la época en la que se demuestran los teoremas de los incisos (a) y (b), Cantor identifica la propiedad de numerabilidad con lo que llamamos un buen orden, por lo cual considera que existen conjuntos que no pueden ordenarse de esta manera. Por otra parte, el teorema del inciso (c) abre la posibilidad de analizar la continuidad en general a través del estudio del continuo lineal, entendiendo a éste como un continuo de puntos que yacen en una línea (i.e., como un segmento de recta).

En virtud de que Cantor mantiene su creencia en (2) y de que ello ha beneficiado el procedimiento de prueba del teorema del inciso (c), el estudio cantoriano de la propiedad de continuidad se lleva a cabo mediante el análisis de los conjuntos de puntos y de sus conjuntos derivados. Esta manera de afrontar el problema coloca el trabajo de Cantor al margen del marco conceptual, puesto que éste queda determinado por el objetivo de dar una formulación aritmética de la continuidad, mientras que el camino elegido por Cantor para alcanzar esta meta consiste en investigar el comportamiento de objetos geométricos, esto es, de las relaciones que guardan entre sí los puntos de una recta. Pero lo novedoso del enfoque de Cantor consiste en que concibe a estos objetos como pertenecientes a totalidades y pretende determinar las relaciones de aquéllos a partir del comportamiento de éstas. Las totalidades a las que nos referimos son lo que Cantor llama conjuntos de puntos, cuyos elementos son efectivamente objetos geométricos mientras que ellas no lo son. Ahora bien, el trabajo con estas totalidades introduce la idea de infinito en el pensamiento de Cantor en dos sentidos principales:

I) Dado que la investigación se orienta al estudio de los conjuntos derivados es necesario reconocer la existencia de totalidades infinitas.

II) El concepto de conjunto de puntos ofrece la oportunidad de reevaluar la noción de densidad –entendiéndola ahora como densidad en toda la extensión de un intervalo— con lo que se establece un vínculo entre la idea de infinito y la de continuidad.

Así pues, Cantor aporta al marco conceptual la noción de infinito como una totalidad existente. Sin embargo, este marco muestra sus limitaciones en el momento en que no es capaz de darle sentido a un requerimiento práctico: la necesidad que tiene Cantor en su investigación de realizar operaciones aritméticas (específicamente sustracciones) con totalidades infinitas. Junto a esta dificultad, la manera en que Cantor concibe el continuo, basada en su Axioma de continuidad, entra en crisis a causa de los resultados obtenidos al analizar la estructura que poseen los conjuntos perfectos. Estos resultados indican que existen conjuntos perfectos que no son continuos, lo cual manifiesta la insuficiencia de definir la continuidad como la biyección de un conjunto con los puntos de una recta.

Cantor se ve obligado entonces a revisar su definición de continuidad. Para hacerlo, recurre nuevamente a la obra de Dedekind, mostrando especial interés en esta ocasión en el hecho de que la concepción dedekindiana de continuidad exige de un conjunto la satisfacción de dos condiciones de orden. Aunando a esto último el que existen conjuntos perfectos no continuos, Cantor consigue pensar que un conjunto con la potencia del continuo puede adquirir diferentes distribuciones, con lo cual el concepto de orden se vuelve independiente de cualquier conjunto representativo. En particular, el concepto de buen orden alcanza un nivel de abstracción suficiente para romper el lazo que, en el pensamiento de Cantor, lo unía necesariamente al conjunto de los enteros positivos.

Gracias al concepto abstracto de buen orden, Cantor logra representarse ciertas totalidades infinitas como números. Además, Cantor acompaña este avance conceptual con la convicción de que cualquier conjunto puede obtener un buen orden. Por lo cual, todo el ámbito del infinito, de acuerdo con Cantor, puede sistematizarse a partir de entidades matemáticas: los números ordinales transfinitos. La introducción de estos números representa una modificación en la ontología del marco conceptual inicial, que posibilita el establecimiento de reglas aritméticas para objetos infinitos. La teoría de conjuntos surge como una teoría aritmética (ordinal) transfinita.

El trabajo de Dedekind sobre la naturaleza de los números nos hace comprender que la modificación en la ontología ha sido tan profunda que da origen a un nuevo marco conceptual, en conformidad con el cual la existencia de todos los números naturales y su esencia dependen tanto del infinito matemático como de las nociones propias de una teoría de conjuntos (por ejemplo: conjunto, pertenencia, elemento, etcétera). Con el Teorema del Buen Orden, Zermelo apuntala la sistematización cantoriana del ámbito del infinito a través de los ordinales transfinitos, con lo cual la teoría de conjuntos se convierte en un sólido marco conceptual.

La aparición de este nuevo marco conceptual, con su consolidación tardía por parte de Zermelo, es lo que podemos identificar como la etapa de surgimiento de la teoría de conjuntos.

Cuando interpretamos el nacimiento de esta teoría como lo hemos sugerido, resulta fácil señalar la etapa siguiente de desarrollo, que en líneas generales se caracterizaría por:

α) La profundización en el concepto abstracto de orden mediante el establecimiento de una clasificación con la teoría de tipos de orden.

β) El desarrollo de la teoría de números transfinitos con la definición de los números cardinales transfinitos, lo cual es posible en virtud de la clarificación y precisión del concepto de potencia mediante la noción de cardinalidad, que resulta del estudio sobre tipos de orden.

γ) La aparición de una nueva problemática que domina este periodo: la resolución de la hipótesis del continuo.

Esta etapa comparte con la anterior la preocupación por el concepto de orden, pero no responde a la constitución de un marco conceptual, sino al desarrollo de sus conceptos y herramientas con el fin de resolver un problema que sólo adquiere plena significación dentro de él. Así pues, aun cuando en esta segunda etapa vemos aparecer conceptos como el de cardinalidad, no es algo que corresponda propiamente al nacimiento de la teoría. Esto último está demarcado por la aparición de la aritmética ordinal transfinita hacia finales del año 1882.

Bibliografía.

Álvarez, Carlos, "Sobre dos proposiciones relativas al continuo lineal: epistemología e historia", en Álvarez, Carlos y Barahona, Ana (eds.), *La continuidad en la ciencia*, México, UNAM-FCE, 2002.

———, "De la determinación del infinito a la inaccesibilidad en los cardinales transfinitos", *Crítica. Revista hispanoamericana de filosofía*, vol. XXVI, no. 78, 1994, pp. 27-71.

Aristóteles, *Física*, trad. Ute Schmidt Osmanczik, México, UNAM, 2001.

Aspray, William and Kitcher, Philip (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minnesota Studies in the Philosophy of science, vol. XI, Minneapolis, University of Minnesota, 1988.

Baire, René, "Letter from Baire to Hadamard", en Ewald, W. B. (ed.), *From Kant to Hilbert. A Source Book in the*

Foundations of Mathematics, vol. 2, New York, Oxford Calderon Press, 1996, pp. 1079-1080.

Belna, Jean-Pierre, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege: Théories, conceptions et philosophie,* Paris, Librairie Philosophique J.Vrin, 1996.

Bendixson, Ivar, "Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points", *Acta Mathematica*, vol. 2, 1883, pp. 415-429.

Bolzano, Bernard, *Las paradojas del infinito*, trad. Luis Felipe Segura, México, UNAM, 1991.

Borel, Emile, "Some Remarks on the Principles of the Theory of Sets", en Ewald, W. B. (ed.), *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. 2, New York, Oxford Calderon Press, 1996, p. 1076.

Burali-Forti, Cesare, "A Question on Transinite Numbers *and* On Well-ordered Classes", en van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931,* Cambridge, Harvard University Press, 1999, pp. 104-112.

Cantor, Georg, "Correspondance Cantor-Dedekind", Cavaillès, Jean, *Philosophie mathématique,* Paris, Hermann, 1962, pp. 179-251.

———, "De la puissance des ensembles parfaits de points", *Acta Mathematica,* vol. 4, 1884, pp. 381-392.

———, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* vol. 84, 1878, pp. 242-258.

———, "Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situes dans un espace continu à *n* dimensions", *Acta Mathematica,* vol. 2, pp. 409-414.

———, "Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels", *Acta Matemática,* vol.2, 1883, pp. 305-310.

———, "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Mathematische Annalen*, vol. 5, 1872, pp. 123-134.

———, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, 1", *Mathematische Annalen,* vol. 15, 1879, pp. 1-7.

———, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, 2", *Mathematische Annalen,* vol. 17, 1880, pp. 355-358.

———, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, 3", *Mathematische Annalen,* vol. 20, 1882, pp. 113-121.

———, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, 4", *Mathematische Annalen,* vol. 21, 1883, 51-58.

---------, "Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, 5", *Mathematische Annalen*, vol. 21, 1883, pp. 545-588.

Cavaillès, Jean, *Philosophie mathématique,* Paris, Hermann, 1962.

Church, Alonzo, "Alternatives to Zermelo's Assumption", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 29, 1927, pp. 178-208.

Coffa, J. Alberto, *The Semantic Tradition from Kant to Carnap*, Cambridge, Cambridge University Press, 1991.

Courant, R. and Robbins, *What is Mathematics?*, New York, Oxford University Press, 1941.

Craik, Alex, "Geometry versus Analysis in Early 19th-century Scotland: John Leslie, William Wallace, and Thomas Carlyle", *Historia Mathematica*, vol. 27, 2000, pp.133-163.

Dauben, Joseph Warren, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite,* Princeton, Princeton University Press, 1979. (Las referencias se hacen a la edición de 1990).

Dedekind, Richard, *Continuity and Irrational Numbers*, en *Essays on the Theory of Numbers*, trad. Wooster Woodruff Beman, New York, Dover Publications, 1963.

———, Carta a Keferstein (1890), en van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Harvard University Press, 1999, pp. 98-103.

———, *The Nature and Meaning of Numbers*, en *Essays on the Theory of Numbers*, trad. Wooster Woodruff Beman, New York, Dover Publications, 1963.

Dugac, Pierre, "Problèmes de l'histoire de l'analyse mathématique au XIXème siècle. Cas de Karl Weierstrass et de Richard Dedekind", *Historia Mathematica*, vol. 3, 1977, pp. 5-19.

Edwards, Harold, "Kronecker's Place in History", en Aspray, William and Kitcher, Philip (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics,* Minnesota Studies in the Philosophy of science, vol. XI, Minneapolis, University of Minnesota, 1988, pp. 139-144.

Ewald, W. B. (ed.), *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 2 vols., New York, Oxford Calderon Press, 1996.

Ferreirós, José, *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Basel, Birkhäuser Verlag, 1999.

———, "On the Relations between Georg Cantor and Richard Dedekind", *Historia Mathematica*, vol. 20, 1993, pp. 343-363.

———, "'What Fermented in Me for Years': Cantor's Discovery of Transfinite Numbers", *Historia Mathematica*, vol. 22, 1995, pp. 32-42.

Fisher, Gordon, "The Infinite and Infinitesimal Quantities of du Bois-Reymond and their Reception", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 24, 1981, pp.101-163.

George, Alexander (ed.), *Mathematics and Mind*, New York, Oxford University Press, 1994.

Grattan-Guinness, Ivor (comp.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910: Una introducción histórica*, Madrid, Alianza Editorial, 1984.

---------, "Preliminary Notes on the Historical Significance of Quantification and of the Axioms of Choice in the Development of Mathematical Analysis", *Historia Mathematica*, vol. 2, 1975, pp. 475-488.

---------, "The Rediscovery of the Cantor-Dedekind Correspondence", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, vol. 76, 1974, pp. 104-139.

---------, *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940: Logics, Set Theories and the Foundations of*

Mathematics from Cantor through Russell to Gödel, Princeton, Princeton University Press, 2000.

Heijenoort, Jean van (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Harvard University Press, 1967. (Las referencias se hacen a la edición de 1999).

Helmholtz, Hermann von, "On the Origin and Significance of the Axioms of Geometry", en Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky (eds.), *Hermann von Helmholtz. Epistemological Writings*, Dordrecht/Boston, D. Reidel Publishing Company, 1977.

Hilbert, David, "On the Foundations of Logic and Arithmetic", en van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Harvard University Press, 1999, pp. 129-138.

Jané, Ignacio, "The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set", *Erkenntnis*, vol. 42, no. 3, 1995, pp. 375-402.

Kanamori, Akihiro, "The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen", *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 2, no. 1, 1996, pp. 1-71.

Kant, Immanuel, *Crítica de la razón pura*, trad. Pedro Ribas, 5ª edición, Madrid, Alfaguara, 1998.

Keyser, C. J., "Concerning the Axiom of Infinity and the Mathematical Induction", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. IX, 1903, pp. 425-434.

König, Julius, "On the Foundations of Set Theory and the Continuum Problem", en van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931,* Cambridge, Harvard University Press, 1999, pp. 145-149.

Lebesgue, Henri, "Letter form Lebesgue to Borel", en Ewald, W. B. (ed.), *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. 2, New York, Oxford Calderon Press, 1996, pp. 1080-1083.

Lindelöf, Ernst, "Remarques sur un théorème fondamental de la théorie des ensembles", *Acta Mathematica*, vol. 29, 1905, pp. 183-190.

Moore, Gregory, "The Origins of Zermelo's Axiomatization of Set Theory", *Journal of Philosophical Logic*, vol. 7, 1978, pp. 307-329.

---------, *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development and Influence*, New York, Springer-Verlag, 1982.

Niels Jahnke, Hans, "Algebraic Analysis in Germany, 1780-1840: Some Mathematical and Philosophical Issues", *Historia Mathematica*, vol. 20, 1993, pp. 265-284.

Parsons, Charles, "Intuition and Number", en George, Alexander (ed.), *Mathematics and Mind*, New York, Oxford University Press, 1994, pp. 141-157.

Reck, Erich H., "Dedekind's Structuralism: An Interpretation and Partial Defense", *Synthese*, vol. 137, 2003, pp. 369-419.

Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky (eds.), *Hermann von Helmholtz. Epistemological Writings*, Dordrecht/Boston, D. Reidel Publishing Company, 1977.

Russell, Bertrand, "Sur les axiomes de l'infini et du transfini", *Bulletin de la société mathématique de France*, vol. 39, 1911, pp. 488-501.

Sierpinski, Walcaw, *Hypothèse du continu*, Warszawa-Lwow, Monografje Matematyczne, 1934.

Stein, Howard, "*Logos*, Logic, and *Logistiké*: Some Philosophical Remarks on Nineteenth-Century Transformation of Mathematics", en Aspray, William and Kitcher, Philip (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minnesota Studies in the Philosophy of science, vol. XI, Minneapolis, University of Minnesota, 1988, pp.238-259.

Tait, W. W., "The Law of Excluded Middle and the Axiom of Choice", en George, Alexander (ed.), *Mathematics and Mind*, New York, Oxford University Press, 1994, pp. 48-70.

Tiles, M., *The Philosophy of Set Theory: An Historical Introduction to Cantor's Paradise*, Oxford, 1989.

Wagner-Döbler, Roland and Berg, Jan, "Nineteenth-Century Mathematics in the Mirror of its Literature: A Quantitative Approach", *Historia Mathematica*, vol. 23, 1996, pp. 288-318.

Zermelo, "Beweis, daβ jede Menge wohlgeordnet werden kann", *Mathematische Annalen*, vol. 59, 1904, pp. 514-516.

———, "Investigations in the Foundations of Set Theory I", en van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Harvard University Press, 1999, pp. 199-215.

———, "Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète", *Acta Mathematica*, vol. 32, 1909, pp. 185-193.