



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

01159

PROGRAMA DE POSGRADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL (ESTRUCTURAS)

FRONTERAS ABSORBENTES ESPECTRALES
EN ESQUEMAS DE DIFERENCIAS FINITAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA CIVIL

P R E S E N T A :

CARLOS IGNACIO VILLA VELÁZQUEZ MENDOZA

DIRECTOR DE TESIS: DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA

MARZO DE 2005

m341990



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor de tesis al Dr. Francisco José Sánchez Sesma por mostrarme el mundo de la investigación desde su perspectiva, así como a la Dra. Sonia Ruiz Gómez por todo el apoyo brindado al inicio de mis estudios. A la Dra. Ursula Iturrarán Viveros y al Dr. Rafael Avila Carrera por sus valiosas recomendaciones y comentarios.

Gracias a mis sinodales, Dr. Juan José Pérez Gavilán, Dr. Gustavo Ayala Milián y al Dr. Luis Esteva Maraboto por sus comentarios y sugerencias.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM, al CONACyT y al Sistema Nacional de Investigadores por el apoyo económico.

Y principalmente a mis padres que estuvieron conmigo a lo largo de toda esta experiencia.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Carlos Ignacio
Villa Velázquez Mendoza

FECHA: 10-Marzo-2005

FIRMA: _____



Indice

Introducción	ii
1 Ondas planas y cilíndricas	1
1.1 Reflexión de ondas planas SH , P y SV en superficie libre . . .	5
1.2 Reflexión y transmisión de ondas planas SH , P y SV	12
1.3 Ejemplo de aplicación de las ondas planas	13
1.4 Ondas cilíndricas SH	22
1.5 Ejemplo de aplicación de las ondas cilíndricas	23
2 Diferencias finitas	26
2.1 Diferencias finitas de órdenes superiores	28
2.2 Diferencias finitas centradas 2D (Mallas rectangulares)	33
2.2.1 Dominio del tiempo	33
2.2.2 Ejemplo de aplicación	35
2.3 Diferencias finitas alternadas 2D (Mallas rectangulares)	37
2.3.1 Dominio del tiempo	37
2.4 Comparación entre el esquema “centrado” y el “alternado” (Mallas rectangulares)	40
2.5 Diferencias finitas alternadas 2D (Mallas triangulares)	45
2.6 Esquemas “centrado” y “alternado” en medios heterogéneos	47
3 Fronteras absorbentes espectrales	50
3.1 Formulación del problema	52
3.2 Aplicaciones	59
4 Aplicaciones prácticas	63
Conclusiones	66

Introducción

La propagación de ondas y su difracción son centrales en el mundo que nos rodea y su medición aporta elementos para desentrañar los secretos de la naturaleza. Estos fenómenos implican muchas interacciones y por ello las observaciones suelen complicarse. Una manera de entender una amplia variedad de fenómenos en distintas escalas es por medio del estudio de la propagación de ondas elásticas.

El presente trabajo inicia con la teoría de la propagación de ondas planas y cilíndricas. En el capítulo 1 se aplica el método del número de onda horizontal discreto para generar fuentes cilíndricas **SH** (problema anti-plano). También se estudia la Ley de Snell y el fenómeno de la reflexión y la refracción de ondas elásticas planas incidentes en una interfaz plana, y en la superficie libre en donde las tracciones son nulas. Por medio de la matriz global, que es un método basado en la separación de variables, se obtienen las funciones de transferencia en cualquier punto del dominio espacial. Se muestran comparaciones entre los métodos de Haskell -Thompson ver (Aki, K., y P.G. Richards, 2002) y el de la matriz global para ondas **SH** y **P-SV** con diversos ángulos de incidencia, de polarización (entre las ondas **SH** y **SV**) y de azimuth. Los resultados en el dominio del tiempo se presentan haciendo uso de la ondícula o pulso de Ricker que es frecuentemente aplicada en problemas de sismología.

Las soluciones analíticas están restringidas a problemas con configuraciones de geometría simple. Por esta razón, para estudiar dominios de geometrías realistas se hace uso de métodos numéricos, que aunque son aproximados dan resultados que representan la física del problema. Entre los métodos numéricos se cuenta con: “elementos finitos”, “elementos de contorno” (BEM, IBEM), “diferencias finitas”, entre otros. Se decidió trabajar con el método de las diferencias finitas ya que es relativamente sencillo simular geometrías complejas. Existe una gran variedad de esquemas

de diferencias finitas, por ejemplo aquellas que se formulan en coordenadas cilíndricas o esféricas, pero las más socorridas son las que se construyen en coordenadas rectangulares. Debido a que existen distintas configuraciones de mallado, como las rectangulares y las triangulares, la obtención de los distintos operadores diferenciales como el Laplaciano se realizan de distintas maneras. Por ejemplo, este está formado por derivadas parciales que son aproximadas con el uso de diferencias finitas de órdenes superiores. Para ilustrar esto consideramos la primera o segunda derivada de una función; esta puede obtenerse de manera aproximada considerando puntos adyacentes al lugar geométrico de la derivada, por lo que si se considera un punto atrás y otro adelante del lugar de la derivada, se dice que se trata de diferencias finitas de segundo orden; ya que usa dos puntos, y así sucesivamente para órdenes superiores. En este trabajo se utilizan configuraciones simétricas, es decir el mismo número de puntos hacia atrás que hacia adelante. Existen configuraciones sólo hacia adelante o sólo hacia atrás en inglés (forward y backward), y otras combinadas. Se exploran y desarrollan programas de cómputo para mallas rectangulares (para esquemas centrados y alternados) y para mallas triangulares con un esquema alternado en problemas homogéneos y heterogéneos. En estos casos se suponen fuentes puntuales **SH** y **P -SV** y se muestran resultados numéricos. Las diferencias finitas son una manera eficiente de simular la propagación de ondas elásticas. No obstante, para mantener la duración de los cálculos dentro de límites razonables la dimensión del modelo debe acotarse y las condiciones de frontera apropiadas deberían simular la irradiación al exterior.

Las fronteras absorbentes son un recurso matemático que busca dar solución a un problema físico (la irradiación al infinito). Las fronteras absorbentes son aplicadas en campos muy diversos como en la sismología, óptica, electromagnetismo, etc., pero a la vez afines ya que todos estudian el fenómeno de la propagación de ondas de distintas características. Existen también las capas absorbentes, que comparadas con las condiciones de fronteras absorbentes son mucho más fáciles de aplicar ya que toman una banda de N puntos en la vecindad del límite del dominio interno en la que se modifican las propiedades del medio para amortiguar parte de la energía. En las fronteras absorbentes sólo se utilizan los puntos del límite del dominio interno y en ellos se aplican las propiedades del dominio exterior. En las fronteras absorbentes espectrales se aplica el último concepto y se busca obtener la rigidez (propiedades del medio) que simule las características del dominio exterior y así, cuando la onda llegue a la frontera se simulará la irradiación de la energía al exte-

rior. En el capítulo 3 se formula la teoría de un tipo de frontera absorbente, llamadas “fronteras absorbentes espectrales” ya que utilizan el par de transformadas de Fourier para pasar de un dominio a otro, del dominio $f - \kappa$, al de $f - x$, o al $t - \kappa$ y luego al $t - x$. Se obtienen resultados fundamentales para una frontera de forma plana y una circular. Debido a que el desarrollo de la teoría de las fronteras absorbentes espectrales está en sus inicios sólo se presentan resultados teóricos en el dominio de la frecuencia.

Finalmente se explora un esquema de diferencias finitas alternado de malla triangular en el problema de una inclusión circular 2D. Se busca estudiar el comportamiento de una onda compresional generada en el fluido, que pasa a través del mismo alcanzando la interface fluido-sólido y la del sólido exterior.

Objetivos

El presente trabajo tiene los siguientes objetivos:

1. Estudiar las bases del fenómeno de la propagación de ondas elásticas a través de estratos planos.
2. Estudiar diversos esquemas de diferencias finitas de órdenes superiores, específicamente los esquemas centrado y alternado con malla rectangular y el alternado con malla triangular.
3. Desarrollar programas de cómputo en Fortran 90/95 (Chapman, S.J., 2004) (Ellis, T.M.R., I.R. Philips, y T.M. Lahey, 1994) para los tres esquemas indicados.
4. Desarrollar la teoría de una frontera absorbente espectral que utilice el par de transformadas de Fourier como fundamento, y se pueda aplicar de manera sencilla en diversos métodos numéricos en el dominio de la frecuencia.

Los programas de cómputo fueron desarrollados en el programa Salford Fortran 90/95, las gráficas en MATLAB 7, y el texto fue escrito con \LaTeX (Lamport, L., 1994).

Capítulo 1

Ondas planas y cilíndricas

La teoría de la elasticidad ver (Fung, Y.C., 1965), nos muestra que la solución de la ecuación de movimiento describe dos tipos de ondas elásticas, las *compresionales* y las de *cortante*. En este capítulo se verá que estas ondas se propagan de manera diferente, con velocidades que dependen de las propiedades elásticas del material. Se consideran medios homogéneos, isótropos y elásticos. Durante la propagación de las ondas a través del medio, la relación entre los esfuerzos y los desplazamientos está dada por la ecuación de movimiento homogénea, que no incluye el término de fuerzas de cuerpo, así que la segunda Ley de Newton $\mathbf{F} = ma$ puede ser expresada como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

La ecuación de movimiento también puede ser expresada y/o resuelta en términos de los desplazamientos, ya que los esfuerzos están relacionados con las deformaciones, y los esfuerzos se pueden obtener derivando los desplazamientos. La ecuación de movimiento relaciona las derivadas espaciales del tensor de esfuerzos con la derivada temporal del vector de desplazamientos, expresando la ecuación (1.1) en coordenadas cartesianas (x, y, z) , comenzando con la componente x se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

para expresar la ecuación (1.2) (y las correspondientes a las direcciones y e z) en términos de los desplazamientos se utiliza la ley constitutiva de Hooke

para un medio homogéneo, isotrópico y elástico que está en función de las constantes de Lamé (λ y μ):

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.3)$$

donde θ es la dilatación y se representa como $\theta = e_{ii} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ que es la divergencia del campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. La dilatación muestra el cambio de volumen por unidad de volumen asociado con la deformación. e_{ij} es el tensor de deformación que describe las deformaciones internas del medio y puede expresarse usando los componentes de los vectores de desplazamiento (u_x, u_y, u_z):

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Así los esfuerzos en términos de los desplazamientos están dados por

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \theta + 2\mu e_{xx} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \sigma_{xy} &= 2\mu e_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \sigma_{xz} &= 2\mu e_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Las derivadas espaciales de las componentes de los esfuerzos son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

pues para un material homogéneo las constantes elásticas no varían con la posición. Finalmente, sustituyendo las derivadas en la ecuación de movimiento y utilizando las definiciones de la dilatación θ y del Laplaciano $\nabla^2(u_x) = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$ se obtiene:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2(u_x) = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

para la componente x de la ecuación de movimiento (1.1). De igual forma se pueden encontrar ecuaciones similares para las componentes del desplazamiento y y z . Las tres ecuaciones pueden combinarse, utilizando el operador Laplaciano del campo de desplazamientos que en coordenadas cartesianas adquiere la siguiente forma:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = (\nabla^2 u_x, \nabla^2 u_y, \nabla^2 u_z) \quad (1.8)$$

de manera que se tiene la ecuación vectorial:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mu\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

que es la ecuación de movimiento para un medio isótropo elástico, escrita en términos de los desplazamientos. La ecuación anterior puede escribirse en función de la identidad

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (1.10)$$

para obtener:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

Para dar solución a la ecuación anterior se puede expresar el campo de desplazamientos en términos de otras dos funciones, ϕ y Ψ , que son conocidas como potenciales:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla\phi(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.12)$$

En esta representación, el desplazamiento es la suma del gradiente del potencial escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ y del rotacional del potencial vectorial $\Psi(\mathbf{x}, t)$. La parte asociada con el potencial escalar no tiene rotacional $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ por lo que representa las ondas compresionales \mathbf{P} . Y la parte asociada con el potencial vectorial tiene divergencia igual a cero $\nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0$, esto significa que no hay cambio de volumen, y representa a las ondas de corte \mathbf{S} , ver (Aki, K., y P.G. Richards, 2002). Sustituyendo los potenciales en la ecuación de movimiento (1.11) y ordenando los términos, da:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla^2 \phi) - \mu\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \Psi) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla\phi + \nabla \times \Psi) \quad (1.13)$$

Capítulo 1

Ondas planas y cilíndricas

La teoría de la elasticidad ver (Fung, Y.C., 1965), nos muestra que la solución de la ecuación de movimiento describe dos tipos de ondas elásticas, las *compresionales* y las de *cortante*. En este capítulo se verá que estas ondas se propagan de manera diferente, con velocidades que dependen de las propiedades elásticas del material. Se consideran medios homogéneos, isótropos y elásticos. Durante la propagación de las ondas a través del medio, la relación entre los esfuerzos y los desplazamientos está dada por la ecuación de movimiento homogénea, que no incluye el término de fuerzas de cuerpo, así que la segunda Ley de Newton $\mathbf{F} = ma$ puede ser expresada como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

La ecuación de movimiento también puede ser expresada y/o resuelta en términos de los desplazamientos, ya que los esfuerzos están relacionados con las deformaciones, y los esfuerzos se pueden obtener derivando los desplazamientos. La ecuación de movimiento relaciona las derivadas espaciales del tensor de esfuerzos con la derivada temporal del vector de desplazamientos, expresando la ecuación (1.1) en coordenadas cartesianas (x, y, z) , comenzando con la componente x se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

para expresar la ecuación (1.2) (y las correspondientes a las direcciones y e z) en términos de los desplazamientos se utiliza la ley constitutiva de Hooke

para un medio homogéneo, isótropo y elástico que está en función de las constantes de Lamé (λ y μ):

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.3)$$

donde θ es la dilatación y se representa como $\theta = e_{ii} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ que es la divergencia del campo de desplazamientos $\mathbf{u}(x)$. La dilatación muestra el cambio de volumen por unidad de volumen asociado con la deformación. e_{ij} es el tensor de deformación que describe las deformaciones internas del medio y puede expresarse usando los componentes de los vectores de desplazamiento (u_x, u_y, u_z):

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Así los esfuerzos en términos de los desplazamientos están dados por

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \theta + 2\mu e_{xx} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \sigma_{xy} &= 2\mu e_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \sigma_{xz} &= 2\mu e_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Las derivadas espaciales de las componentes de los esfuerzos son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

pues para un material homogéneo las constantes elásticas no varían con la posición. Finalmente, sustituyendo las derivadas en la ecuación de movimiento y utilizando las definiciones de la dilatación θ y del Laplaciano $\nabla^2(u_x) = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$ se obtiene:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2(u_x) = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

para la componente x de la ecuación de movimiento (1.1). De igual forma se pueden encontrar ecuaciones similares para las componentes del desplazamiento y y z . Las tres ecuaciones pueden combinarse, utilizando el operador Laplaciano del campo de desplazamientos que en coordenadas cartesianas adquiere la siguiente forma:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = (\nabla^2 u_x, \nabla^2 u_y, \nabla^2 u_z) \quad (1.8)$$

de manera que se tiene la ecuación vectorial:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mu\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

que es la ecuación de movimiento para un medio isótropo elástico, escrita en términos de los desplazamientos. La ecuación anterior puede escribirse en función de la identidad

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (1.10)$$

para obtener:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

Para dar solución a la ecuación anterior se puede expresar el campo de desplazamientos en términos de otras dos funciones, ϕ y Ψ , que son conocidas como potenciales:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla\phi(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.12)$$

En esta representación, el desplazamiento es la suma del gradiente del potencial escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ y del rotacional del potencial vectorial $\Psi(\mathbf{x}, t)$. La parte asociada con el potencial escalar no tiene rotacional $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ por lo que representa las ondas compresionales **P**. Y la parte asociada con el potencial vectorial tiene divergencia igual a cero $\nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0$, esto significa que no hay cambio de volumen, y representa a las ondas de corte **S**, ver (Aki, K., y P.G. Richards, 2002). Sustituyendo los potenciales en la ecuación de movimiento (1.11) y ordenando los términos, da:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla^2 \phi) - \mu\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \Psi) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla\phi + \nabla \times \Psi) \quad (1.13)$$

Utilizando la ecuación (1.10), el segundo término de la ecuación (1.13) queda como:

$$\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \Psi) = -\nabla^2(\nabla \times \Psi) + \nabla(\nabla \cdot (\nabla \times \Psi)) = -\nabla^2(\nabla \times \Psi) \quad (1.14)$$

debido a que la divergencia del rotacional es cero. Por lo que la ecuación (1.14) queda como:

$$\nabla \left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi(\mathbf{x}, t) - \rho \frac{\partial^2\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \right] = -\nabla \times \left[\mu\nabla^2\Psi(\mathbf{x}, t) - \rho \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \right] \quad (1.15)$$

Se obtiene una solución de la ecuación cuando ya sea el gradiente de la parte izquierda de la ecuación (1.15) o el rotacional de la parte derecha de la misma ecuación vale cero. El potencial escalar satisface:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

donde α es la velocidad de propagación de las ondas compresionales **P**,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1.17)$$

De igual forma, el potencial vectorial satisface:

$$\nabla^2\Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

donde β es la velocidad de propagación de las ondas de corte **S**,

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.19)$$

y estas son las ecuaciones de onda.

Las direcciones de polarización de la onda de corte son definidas como **SV** para ondas de corte con desplazamiento en el plano vertical ($x-z$), y las **SH**, para las ondas de corte polarizadas horizontalmente con desplazamiento en la dirección y que es paralela a la superficie terrestre.

1.1 Reflexión de ondas planas SH, P y SV en superficie libre

Utilizando la teoría mostrada anteriormente, se pueden determinar los valores de desplazamiento y de tracción para ondas incidentes **P** y **S** en un medio con estratos horizontales.

Para las ondas **SH** no es necesario recurrir a los potenciales y el desplazamiento antiplano v satisface la ecuación (1.18) de manera que una onda incidente plana está dada por $v = f\left(t - \frac{x}{\beta} \sin \gamma + \frac{z}{\beta} \cos \gamma\right)$. Es posible demostrar que para satisfacer tracciones nulas en $z = 0$ se requiere una onda reflejada dada por $v = f\left(t - \frac{x}{\beta} \sin \gamma - \frac{z}{\beta} \cos \gamma\right)$. Es decir $\mu \frac{\partial v}{\partial z} = 0$. En este caso $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = 0$ y $v = 2f\left(t - \frac{x}{\beta} \sin \gamma\right)$ en $z = 0$. Siendo β la velocidad de propagación de las ondas de corte y γ el ángulo de incidencia de la onda plana. Usualmente se utiliza el término de lentitud horizontal $\frac{\sin \gamma}{\beta}$ que es el recíproco de la velocidad horizontal aparente. Una vez con los desplazamientos se obtiene la tracción ya que ambos conceptos están relacionados entre sí, de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = (\tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zz}) = \left(0, \mu \frac{\partial v}{\partial z}, 0\right) \quad (1.20)$$

donde $(\tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zz})$ representan las componentes de la tracción o los esfuerzos de las direcciones ortogonales, y μ el módulo de cortante.

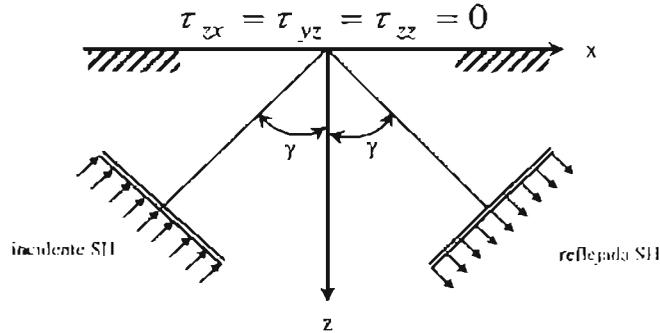


Figura 1.1: Incidencia y reflexión de una onda plana SH en la superficie libre de un semiespacio con los ángulos de incidencia y de reflexión γ .

Para el caso de la incidencia de ondas planas **P** se tienen dos componentes de desplazamiento u_x o u y u_z o w que dependen del potencial escalar φ , u

y w son los desplazamientos en las direcciones x y z respectivamente:

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, 0, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (1.21)$$

y las tracciones en una superficie horizontal están dadas por:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = (\tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zz}) = \left(2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, 0, \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (1.22)$$

λ y μ son las constantes de Lamé.

Al igual que las ondas **P**, las ondas **SV** tienen dos componentes de desplazamiento u y w , pero dependen del potencial vectorial Ψ y no del escalar ϕ , por lo que el campo de desplazamiento está dado por:

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (1.23)$$

y las tracciones son:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = (\tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zz}) = \left(\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), 0, 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \quad (1.24)$$

Para las ondas **P** el potencial escalar ϕ está formado por la suma de los potenciales escalares, el incidente ϕ^{inc} y el reflejado ϕ^{refl} , ambos son ondas planas armónicas que satisfacen la ecuación de la onda (1.16). $\phi = \phi^{inc} + \phi^{refl}$.

$$\phi^{inc} = A \exp \left[i\omega \left(\frac{\sin \theta}{\alpha} x - \frac{\cos \theta}{\alpha} z - t \right) \right] \quad (1.25)$$

$$\phi^{refl} = B \exp \left[i\omega \left(\frac{\sin \theta}{\alpha} x + \frac{\cos \theta}{\alpha} z - t \right) \right] \quad (1.26)$$

y para las ondas **S** sucede lo mismo sólo que se utiliza el potencial vectorial Ψ que satisface la ecuación (1.18), $\psi = \psi^{inc} + \psi^{refl}$.

$$\psi^{inc} = C \exp \left[i\omega \left(\frac{\sin \gamma}{\beta} x - \frac{\cos \gamma}{\beta} z - t \right) \right] \quad (1.27)$$

$$\psi^{refl} = D \exp \left[i\omega \left(\frac{\sin \gamma}{\beta} x + \frac{\cos \gamma}{\beta} z - t \right) \right] \quad (1.28)$$

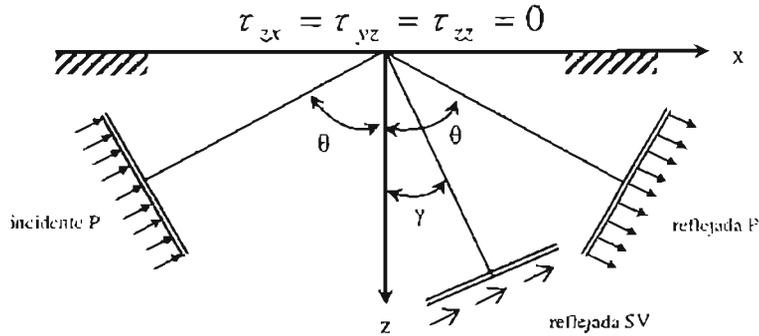


Figura 1.2: Incidencia de una onda plana P en la superficie libre (por lo que $\tau_{zi} = 0$, $i = x, y, z$) de un sólido elástico. Los ángulos θ y γ están definidos en función de las trayectorias de las ondas planas reflejadas, ya sean P o SV respectivamente.

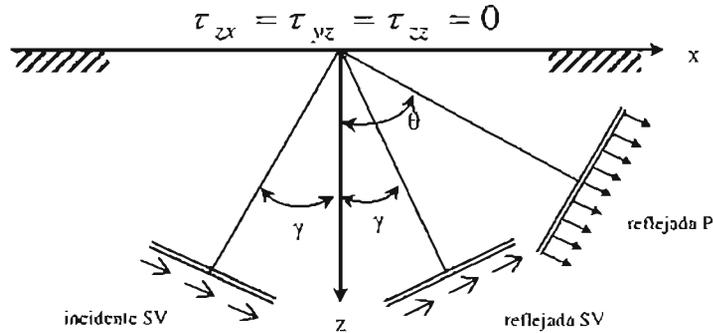


Figura 1.3: Ondas planas P y SV reflejadas como consecuencia de una onda plana SV incidente en la superficie libre (por eso $\tau_{zi} = 0$, $i = x, y, z$) de un semiespacio, con sus respectivos ángulos de incidencia y de reflexión.

donde γ y θ son los ángulos de incidencia para ondas S y P respectivamente, β y α corresponden a las velocidades de propagación, t es el tiempo, ω es la frecuencia y A, B, C, D son las amplitudes de las ondas incidentes y reflejadas en las interfaces de los estratos.

En estas ecuaciones, como en el caso SH se han empleado argumentos espacio-temporales que describen ondas planas pero además se ha particularizado el tratamiento con exponenciales complejos de la forma $e^{[i\omega(\frac{z-n}{c}-t)]}$. Así de esta manera la variable tiempo puede manejarse de manera algebraica considerando a la frecuencia ω como un parámetro. La solución en tiempo será materia de la síntesis de Fourier.

Las ecuaciones anteriores pueden simplificarse utilizando los términos de número de onda horizontal y vertical. Debido a que los medios con los que

se trabaja presentan estratos horizontales y, utilizando la Ley de Snell,

$$\frac{\sin \gamma}{\beta} = \frac{\sin \theta}{\alpha} \quad (1.29)$$

el número de onda horizontal κ_x permanece uniforme en todo el sistema de estratos

$$\kappa_x = \frac{\omega}{\beta} \sin \gamma = \frac{\omega}{\alpha} \sin \theta \quad (1.30)$$

contrariamente a lo que pasa con el número de onda vertical κ_z o η para ondas **P** y ν para ondas **S**, que cambia en cada estrato dependiendo de su velocidad de propagación y del ángulo de incidencia de las ondas:

$$\kappa_z = \eta = \frac{\omega}{\beta} \cos \gamma = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - \kappa_x^2}, \quad (1.31)$$

$$\kappa_z = \nu = \frac{\omega}{\alpha} \cos \theta = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - \kappa_x^2}. \quad (1.32)$$

Estas ecuaciones para los números de onda verticales tienen una forma que garantiza que la ecuación $e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ sea una solución genérica de las ecuaciones (1.16) o (1.18), dependiendo del tipo de onda considerada. Cuando el número de onda horizontal es cero $\kappa_x = 0$, el número de onda vertical es $\eta = \frac{\omega}{\beta}$ lo que significa que la propagación de las ondas planas se da sólo en el eje z . Cuando $\kappa_x = \frac{\omega}{\beta}$ el número de onda vertical es $\eta = 0$ y no hay propagación en la dirección z , sólo en la x . En el caso de que el número de onda horizontal varíe de $0 < \kappa_x < \frac{\omega}{\beta}$, el número de onda vertical tendrá valores entre $0 < \eta < \frac{\omega}{\beta}$ y los frentes de onda tendrán ángulos de $0^\circ < \gamma < 360^\circ$ simulando una fuente cilíndrica formada por ondas planas. Y cuando $\frac{\omega}{\beta} < \kappa_x < \infty$ el número η será complejo lo que significa que las ondas se propagarán a lo largo de la interface disminuyendo su amplitud con respecto a la profundidad del estrato.

Para comprender mejor el fenómeno de la reflexión de ondas se obtienen los coeficientes de reflexión ante ondas incidentes **P** y **SV** en la superficie libre ($z = 0$), ver figura 1.2 y 1.3, de un semiespacio. Estos coeficientes son el cociente entre la amplitud de la onda reflejada y la amplitud de la onda incidente.

En el caso de una onda incidente **P**, los valores de las tracciones en planos horizontales dentro del semiespacio son:

$$\tau_{zx} = 2\rho\beta^2 i\omega p \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho(1 - 2\beta^2 p^2)\omega^2 \psi^{refl} \quad (1.33)$$

$$\tau_{zz} = -\rho(1 - 2\beta^2 p^2)\omega^2 \phi + 2\rho\beta^2 i\omega p \frac{\partial \psi^{refl}}{\partial z} \quad (1.34)$$

si se sustituyen los valores de los potenciales evaluados en $z = 0$ y se impone que ahí $\tau_{zx} = \tau_{zz} = 0$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$2\beta^2 p \frac{\cos \theta}{\alpha} (A_1 - A_2) + (1 - 2\beta^2 p^2) B_2 = 0$$

$$(1 - 2\beta^2 p^2)(A_1 + A_2) + 2\beta^2 p \frac{\cos \gamma}{\beta} B_2 = 0$$

donde A_1 corresponde la onda incidente **P**, A_2 es la amplitud de la onda reflejada **P** y B_2 lo es de la onda reflejada **S**, ρ es la densidad de masa, i es la unidad imaginaria y $p = \sin \theta / \alpha = \sin \gamma / \beta$. Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones anteriores, se obtienen los coeficientes de reflexión para una onda plana **P** incidente, ver figura 1.4. Estos son:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4\beta^4 p^2 \frac{\cos \theta}{\alpha} \frac{\cos \gamma}{\beta} - (1 - 2\beta^2 p^2)^2}{4\beta^4 p^2 \frac{\cos \theta}{\alpha} \frac{\cos \gamma}{\beta} + (1 - 2\beta^2 p^2)^2} = \frac{\sin 2\theta \sin 2\gamma - K^2 \cos^2 2\gamma}{\sin 2\theta \sin 2\gamma + K^2 \cos^2 2\gamma} \quad (1.35)$$

$$\frac{B_2}{A_1} = \frac{-4\beta^2 p \frac{\cos \theta}{\alpha} (1 - 2\beta^2 p^2)}{4\beta^4 p^2 \frac{\cos \theta}{\alpha} \frac{\cos \gamma}{\beta} + (1 - 2\beta^2 p^2)^2} = \frac{-2 \sin 2\theta \cos 2\gamma}{\sin 2\theta \sin 2\gamma + K^2 \cos^2 2\gamma} \quad (1.36)$$

donde $K^2 = \alpha^2 / \beta^2$, $(1 - 2\beta^2 p^2)$ y $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$.

En la figura 1.4 c) se aprecia que para una onda plana incidente **P**, se reflejan dos ondas planas, una **P** y una **SV**. A este fenómeno se le conoce como *conversión de modos*. Un caso especial que se puede observar en las figuras 1.4 a) y b), es cuando se presenta un ángulo de incidencia $\theta = 0^\circ$. Esta situación corresponde a una onda incidente compresional y una onda reflejada de tensional, ya que no se presenta una onda **SV** reflejada. Un segundo caso especial ocurre cuando no se presenta una onda **P** reflejada, esto sucede para algunos valores de la razón de Poisson, como por ejemplo $\nu = 0.25$ los ángulos de incidencia en los que no se presenta reflexión de onda **P** son $\theta = 60^\circ, 77.5^\circ$ y estos ángulos son llamados *ángulos de reflexión total*.

En el caso de una onda incidente plana **SV** reflejada en la superficie libre ($z = 0$), ver figura 1.3, se tiene que:

$$\tau_{zx} = 2\rho\beta^2 i\omega p \frac{\partial \phi^{refl}}{\partial z} + \rho(1 - 2\beta^2 p^2)\omega^2 \psi = 0 \quad (1.37)$$

$$\tau_{zz} = -\rho(1 - 2\beta^2 p^2)\omega^2 \phi^{refl} + 2\rho\beta^2 i\omega p \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (1.38)$$

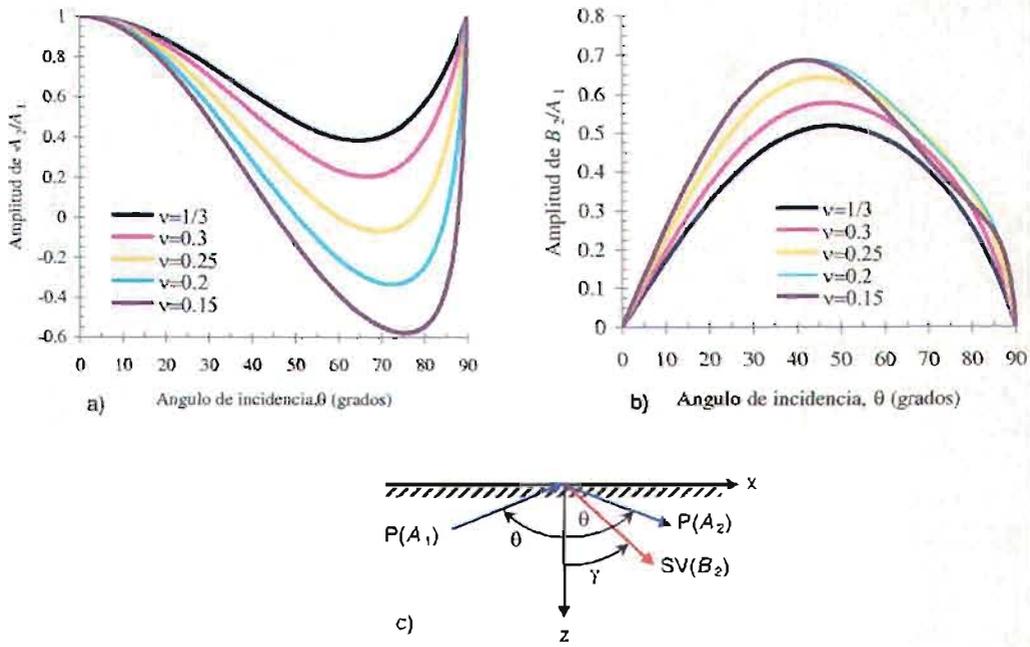


Figura 1.4: Relaciones de amplitud para una onda incidente P , considerando distintos cocientes de Poisson ν . La figura a) muestra la relación entre los coeficientes de la onda P reflejada y la onda P incidente, b) y los coeficientes de la onda SV reflejada y la onda P incidente y c) esquema de las ondas incidente y reflejadas.

y sustituyendo los valores de los potenciales escalar y vectorial evaluados en $z = 0$, se obtiene:

$$-2\beta^2 p \frac{\cos \theta}{\alpha} A_2 + (1 - 2\beta^2 p^2)(B_1 + B_2) = 0$$

$$-(1 - 2\beta^2 p^2)A_2 + 2\beta^2 p \frac{\cos \gamma}{\beta}(B_1 - B_2) = 0$$

los coeficientes de reflexión ante una onda plana SV incidente, ver figura 1.5, son:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{4\beta^4 p^2 \frac{\cos \theta}{\alpha} \frac{\cos \gamma}{\beta} - (1 - 2\beta^2 p^2)^2}{4\beta^4 p^2 \frac{\cos \theta}{\alpha} \frac{\cos \gamma}{\beta} + (1 - 2\beta^2 p^2)^2} = \frac{\sin 2\theta \sin 2\gamma - K^2 \cos^2 2\gamma}{\sin 2\theta \sin 2\gamma + K^2 \cos^2 2\gamma} \quad (1.39)$$

$$\frac{A_2}{B_1} = \frac{4\beta^2 p \frac{\cos \theta}{\alpha} (1 - 2\beta^2 p^2)}{4\beta^4 p^2 \frac{\cos \theta}{\alpha} \frac{\cos \gamma}{\beta} + (1 - 2\beta^2 p^2)^2} = \frac{2K^2 \sin 2\gamma \cos 2\theta}{\sin 2\theta \sin 2\gamma + K^2 \cos^2 2\gamma} \quad (1.40)$$

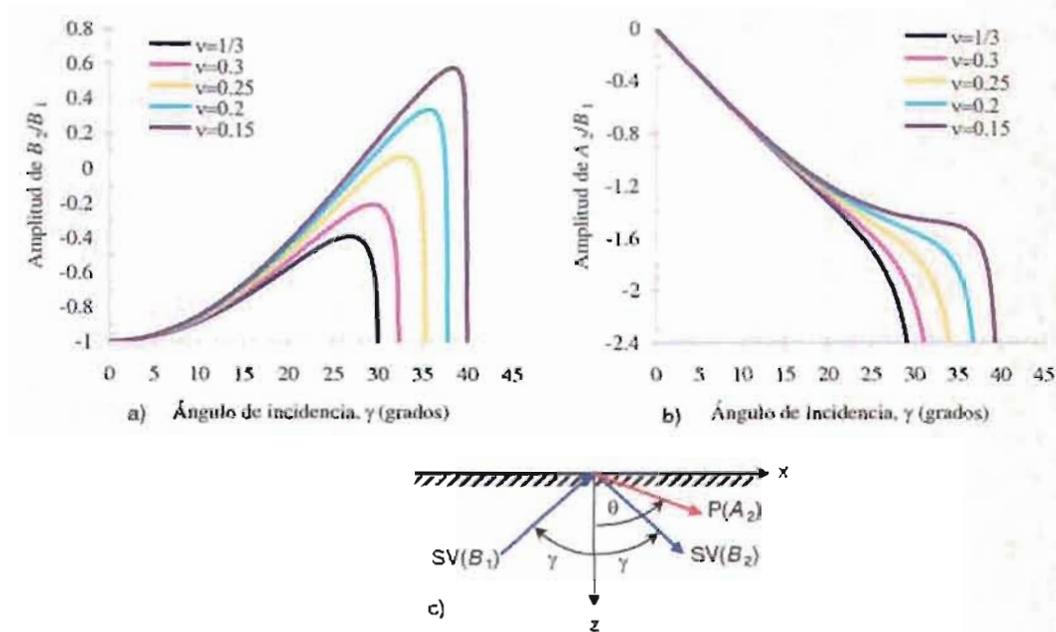


Figura 1.5: Relaciones de amplitud para una onda incidente **SV**, considerando distintos cocientes de Poisson ν . La figura a) muestra la relación de los coeficientes de la onda **SV** reflejada y la onda **SV** incidente, b) y los coeficientes de la onda **P** reflejada y la onda **SV** incidente y c) esquema de las ondas incidente y reflejadas.

De igual forma que en la incidencia de ondas **P**, existe conversión de modos cuando se tiene una onda incidente **SV**. En la figura 1.5 se aprecian varios casos, 1) cuando el ángulo de incidencia $\gamma = 0^\circ$ existe una onda **SV** que se refleja con el mismo ángulo y la misma magnitud, no se presenta reflexión de onda **P**, 2) es posible tener incidencia **SV** y reflexión **P** y esto ocurre cuando $\sin 2\theta \sin 2\gamma = K^2 \cos^2 \gamma$, 3) existe un ángulo crítico γ en el que la onda **P** reflejada será paralela a la superficie, y esto es cuando $\sin \theta = K \sin \gamma = 1$ y $K > 1$. Información detallada sobre el tema se puede encontrar en (Aki, K., y P.G. Richards, 2002) y (Graff, K.F., 1975).

El cociente de Poisson puede obtenerse por medio de la siguiente ecuación:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

1.2 Reflexión y transmisión de ondas planas SH, P y SV

En la figura 1.6 se presenta un esquema de dos estratos unidos entre sí y se aprecian las ondas reflejadas y transmitidas (refractadas) por la presencia de la interface entre dos medios. El ángulo de reflexión de una onda **SH** es igual al de la incidencia, sin embargo el ángulo de la onda transmitida dependerá de las velocidades de propagación de ambos medios y del ángulo con que incide la onda. La lentitud horizontal de la onda incidente se preserva en las ondas convertidas. A esta condición se le llama “Ley de Snell” y se expresa mediante $\sin \frac{\theta}{\alpha} = \sin \frac{\gamma}{\beta}$. Esta expresión es aplicable de igual forma en las ondas **P** y **SV** con sus respectivas velocidades de propagación. La figura 1.7 muestra la reflexión y la transmisión generadas por la incidencia de ondas planas **P** y **SV**.

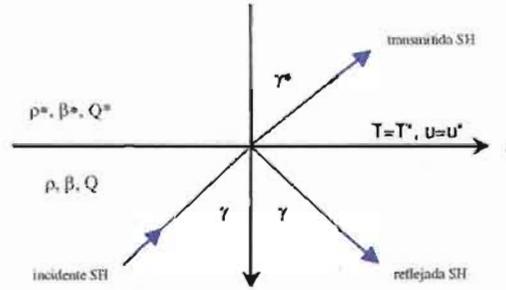


Figura 1.6: Reflexión y transmisión de una onda plana incidente **SH** en la interface de dos estratos con propiedades diferentes.

Como resumen se muestran a continuación los valores de desplazamiento y de la tracción en términos de los potenciales ϕ y Ψ en las tres direcciones ortogonales:

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \text{desplazamiento} & (i\kappa_x \phi, 0, -i\nu \{ \phi^{inc} - \phi^{refl} \}) \\ \text{tracción} & (2\rho\beta^2 \kappa_x \nu \{ \phi^{inc} - \phi^{refl} \}, 0, -\rho(\omega^2 - 2\beta^2 \kappa_x^2) \phi) \end{cases} \quad (1.41)$$

$$\mathbf{SV} = \begin{cases} \text{desplazamiento} & (i\eta \{ \psi^{inc} - \psi^{refl} \}, 0, i\kappa_x \psi) \\ \text{tracción} & (\rho(\omega^2 - 2\beta^2 \kappa_x^2) \psi, 0, 2\rho\beta^2 \kappa_x \eta \{ \psi^{inc} - \psi^{refl} \}) \end{cases} \quad (1.42)$$

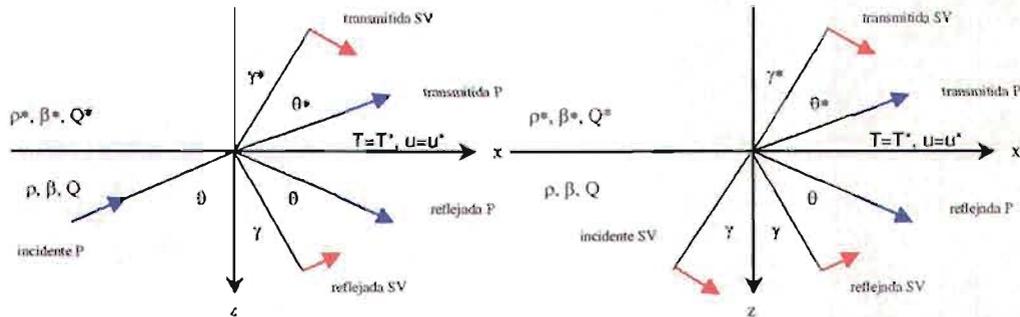


Figura 1.7: Reflexión y transmisión de una onda plana incidente **P** y de una **SV** en la interfaz de dos estratos con propiedades diferentes, se aprecian los ángulos de incidencia, de reflexión y de transmisión.

Cuando una onda se propaga a través de materiales reales, las amplitudes se atenúan como resultado de diversos procesos internos. En los cálculos se incluye un factor Q de amortiguamiento o factor de calidad, ver (Knopoff, L., 1964) y (Aki, K. y P.G. Richards, 1980), que modifica las velocidades de propagación de la siguiente manera: $\beta^2 = \beta^2\{1 - i/Q\}$, $\alpha^2 = \alpha^2\{1 - i/Q\}$ dando así valores de velocidad complejos.

1.3 Ejemplo de aplicación de las ondas planas

En las secciones anteriores se mostraron algunos conceptos de la reflexión y la refracción de la propagación de ondas planas armónicas que pasan de un medio a otro y a su vez se examinaron estas ondas en presencia de una superficie libre. Con estos conceptos es posible obtener la respuesta en cualquier punto de un sistema de N estratos planos con distintas propiedades. Además, la incidencia de las ondas planas puede variar de 0 a 90 grados y la respuesta puede proyectarse en una dirección específica con un ángulo ϕ (azimuth).

Se realizó un programa de cómputo que obtiene la respuesta de un sistema de N estratos ante una onda plana originada en el semiespacio con un ángulo de incidencia γ . Cada estrato tiene propiedades diferentes de factor de calidad Q , de densidad del medio ρ y de velocidad de propagación de ondas **P** (α) o **S** (β). Es necesario considerar la polarización de las ondas **S** para saber que peso tienen las ondas **SH** y las ondas **SV**. Finalmente a este

programa se le incluye un ángulo de azimuth ϕ para obtener la respuesta en distintas direcciones. La figura 1.8 muestra un diagrama representativo del sistema de N estratos con sus respectivas propiedades.

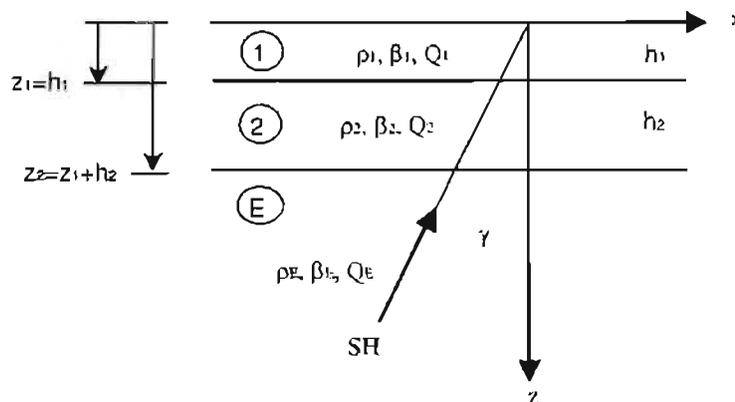


Figura 1.8: Sistema de 2 estratos y el semiespacio con sus respectivas propiedades.

Se establecen las condiciones de frontera de desplazamientos y de tracciones en las interfaces de los estratos así como en la superficie libre en donde las tracciones son cero, posteriormente se resuelve un sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz global y se obtienen los coeficientes de amplificación de cada onda reflejada o refractada en el sistema. Con los coeficientes se puede obtener la función de transferencia de desplazamiento en cualquier punto del sistema. A este método se le ha denominado en esta tesis como *el método de la matriz global*.

La respuesta además de estar en función con la geometría y las propiedades del sistema, depende también del tipo de onda incidente que puede ser una de las tres siguientes opciones:

1. Onda plana **SH** incidente

Para obtener la respuesta en la superficie libre $z = 0$ ante una onda **SH** incidente, se utiliza la siguiente ecuación:

$$v = A_1 e^{-im(z-z_1)} + B_1 e^{im(z-z_0)} = A_1 e^{imh_1} + B_1$$

en donde A_1 y B_1 corresponden respectivamente a la amplitud de la onda ascendente y a la onda reflejada en el estrato 1. Debido a que se

trata de ondas **SH** la respuesta mostrará amplitudes en la dirección v o y .

2. Onda plana **SV** y/o **P** incidente

Cuando inciden ondas **SV** u ondas **P** la respuesta está dada en dos direcciones, una en la dirección u o x y otra en la w o z . La solución está en función de las amplitudes de las ondas **SV** y **P** reflejadas y refractadas del estrato en el que se encuentra la ubicación de la respuesta. La respuesta se obtienen con:

$$\begin{aligned} u_1 &= i\kappa_x \left\{ B_1 e^{-i\nu_1(z-z_1)} + D_1 e^{-i\nu_1(z-z_0)} \right\} + i\nu_x \left\{ A_1 e^{-im(z-z_1)} + C_1 e^{-im(z-z_0)} \right\} \\ w_1 &= -i\nu_x \left\{ B_1 e^{-i\nu_1(z-z_1)} + D_1 e^{-i\nu_1(z-z_0)} \right\} + i\kappa_x \left\{ A_1 e^{-im(z-z_1)} + C_1 e^{-im(z-z_0)} \right\} \end{aligned}$$

Una vez con la respuesta en las direcciones u y w , esta se divide entre un factor que depende del tipo de onda incidente, si se trata de una onda **SV** incidente el factor es $\sqrt{\kappa_x^2 + \eta_E^2}$, y en el caso de una onda **P** $\sqrt{-\kappa_x^2 - \nu_E^2}$.

3. Onda plana **S** incidente

Cuando se trata de una onda **S** incidente con polarización arbitraria, se determinan sus proyecciones obteniendo las ondas **SH** y las **SV** y se trabaja como en los puntos anteriores.

La respuesta que en este caso denota la función de transferencia se encuentra en el dominio de la frecuencia (ω). Si se interpreta al conjunto de estratos como el *sistema*, entonces las funciones de transferencia representan las propiedades del sistema en su conjunto, debido a una entrada (pulso, historia de desplazamiento, velocidad o aceleración, etc.) en un lugar del medio, con una salida también en un lugar específico del medio.

A continuación se muestran resultados (funciones de transferencia) del programa de cómputo para distintas ondas incidentes con respuestas en distintos puntos.

1. Se trabaja con un estrato cuyas características son las del primer estrato y del semiespacio de la tabla (1.1), para incidencia normal (cero grados) de ondas **SH**, **P-SV**, y se obtienen los resultados de la figura 1.10.

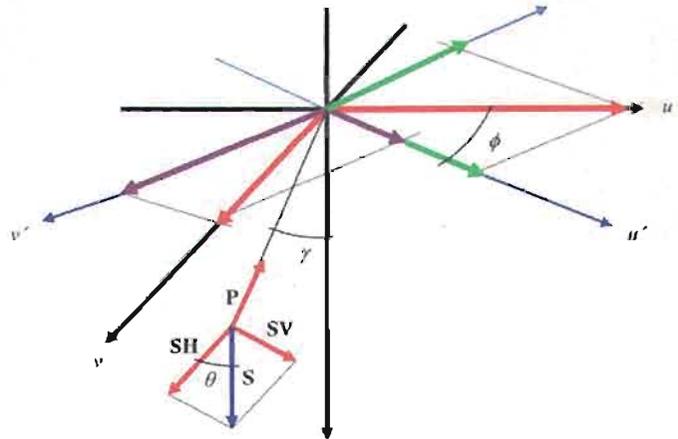


Figura 1.9: Se aprecia el ángulo de polarización θ de las ondas S, la rotación de los ejes u y v con un ángulo ϕ (azimuth) y un ángulo de incidencia γ de las ondas S y P.

Estrato	H	ρ	α	β	Q_p	Q_s
1	25	1	86.6	50	100	100
2	30	1.5	130	75	100	100
3	25	1	86.6	50	100	100
S.E.		2	173	100	1000	1000

Tabla 1.1: Propiedades de un sistema de 3 estratos planos y el semiespacio. Donde H es el peralte de los estratos, β, α son las velocidades de las ondas S y P respectivamente, y los factores de calidad Q_s, Q_p .

2. Considerando una onda SH incidente en un sistema de 3 estratos con propiedades como las presentadas en la tabla 1.1, e involucrando distintos ángulos de incidencia y de azimuth, se obtienen los resultados de la figura 1.11.
3. Si se tiene una onda SV con las propiedades de la tabla 1.1, se tienen los resultados de la figura 1.12.
4. Las gráficas correspondientes a una onda P incidente son las de la figura 1.13.

Las gráficas de las figuras 1.10 a 1.13 muestran los resultados obtenidos con el método de la matriz global y están comparadas con el método de Haskell-Thompson en líneas negras, ver (Aki, K., y P.G. Richards, 2002).

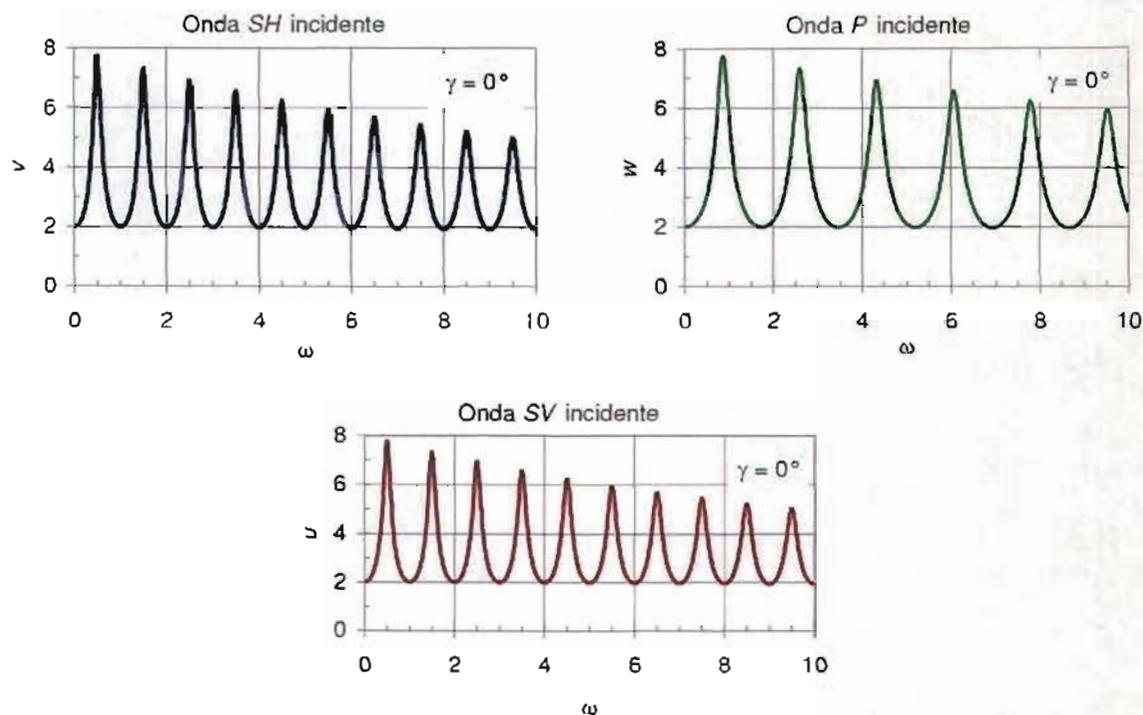


Figura 1.10: Funciones de transferencia para ondas **SH**, **SV** y **P** con incidencia $\gamma = 0^\circ$ en la superficie libre en un estrato con semiespacio con el método de la matriz global. Cuando se trata de un estrato y semiespacio la frecuencia f_0 donde se encuentran los valores máximos de amplitud se puede obtener con $f_0 = c/AH$, donde c indica la velocidad de la onda, β o α dependiendo del tipo de onda y H es el espesor del estrato. Las amplitudes máximas disminuyen conforme aumenta la frecuencia, debido a que se incluyó el factor de calidad Q para amortiguar las amplitudes. Si no se utiliza el factor de calidad, las amplitudes máximas son iguales y su valor se encuentra con $A = \frac{\beta R R R}{\beta E E E}$, donde R es el estrato y E el semiespacio. Las líneas negras muestran los resultados usando el método de Haskell.

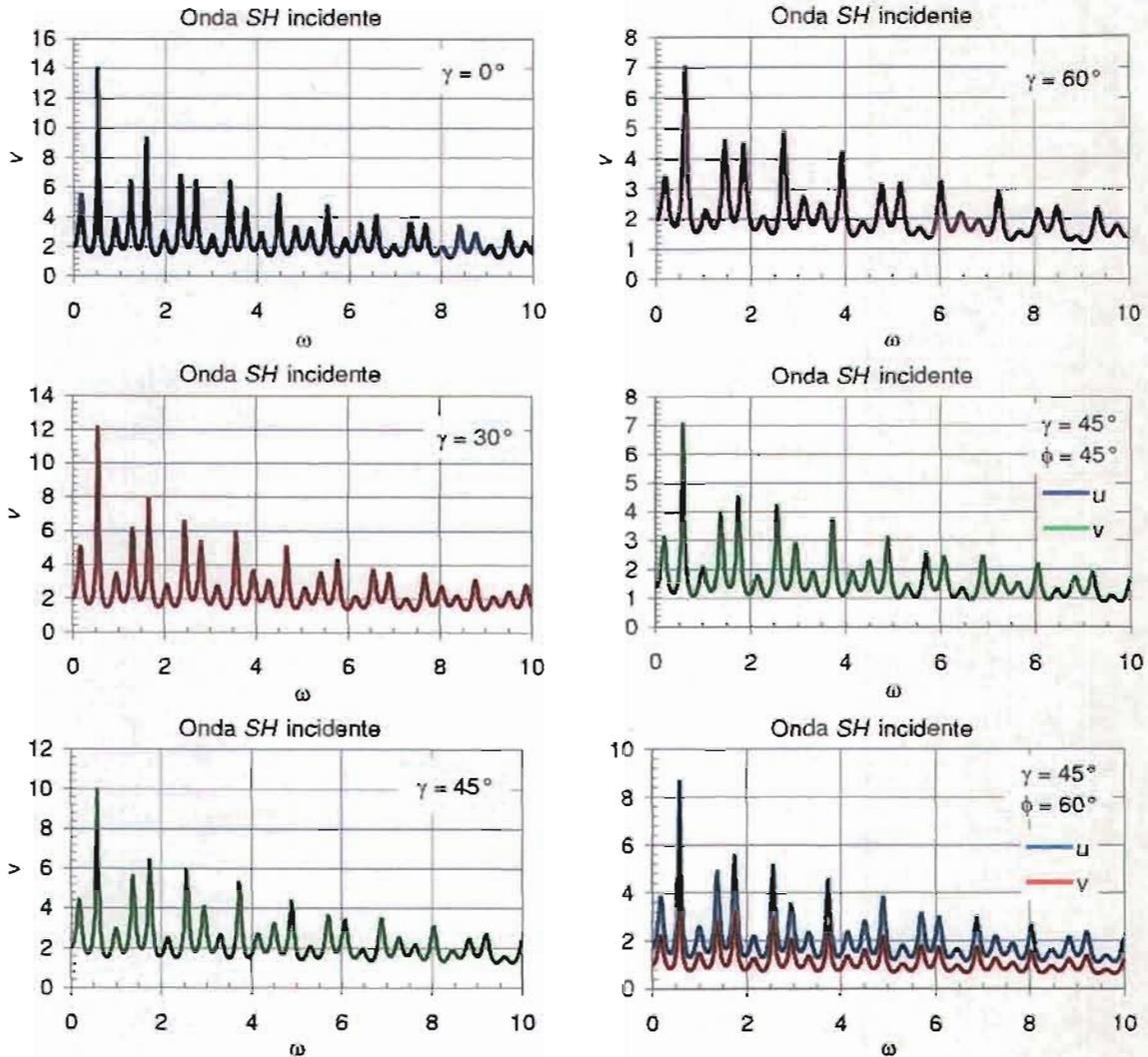


Figura 1.11: Funciones de transferencia en la superficie libre para ondas **SH** con incidencias $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ y azimuth $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ en un medio con 3 estratos y el semiespacio. Por tratarse de una onda **SH** incidente, la respuesta se encuentra en la dirección u independientemente del ángulo de incidencia, sin embargo cuando se rota la respuesta con un ángulo ϕ (azimuth) se obtienen las proyecciones en los ejes u y v .

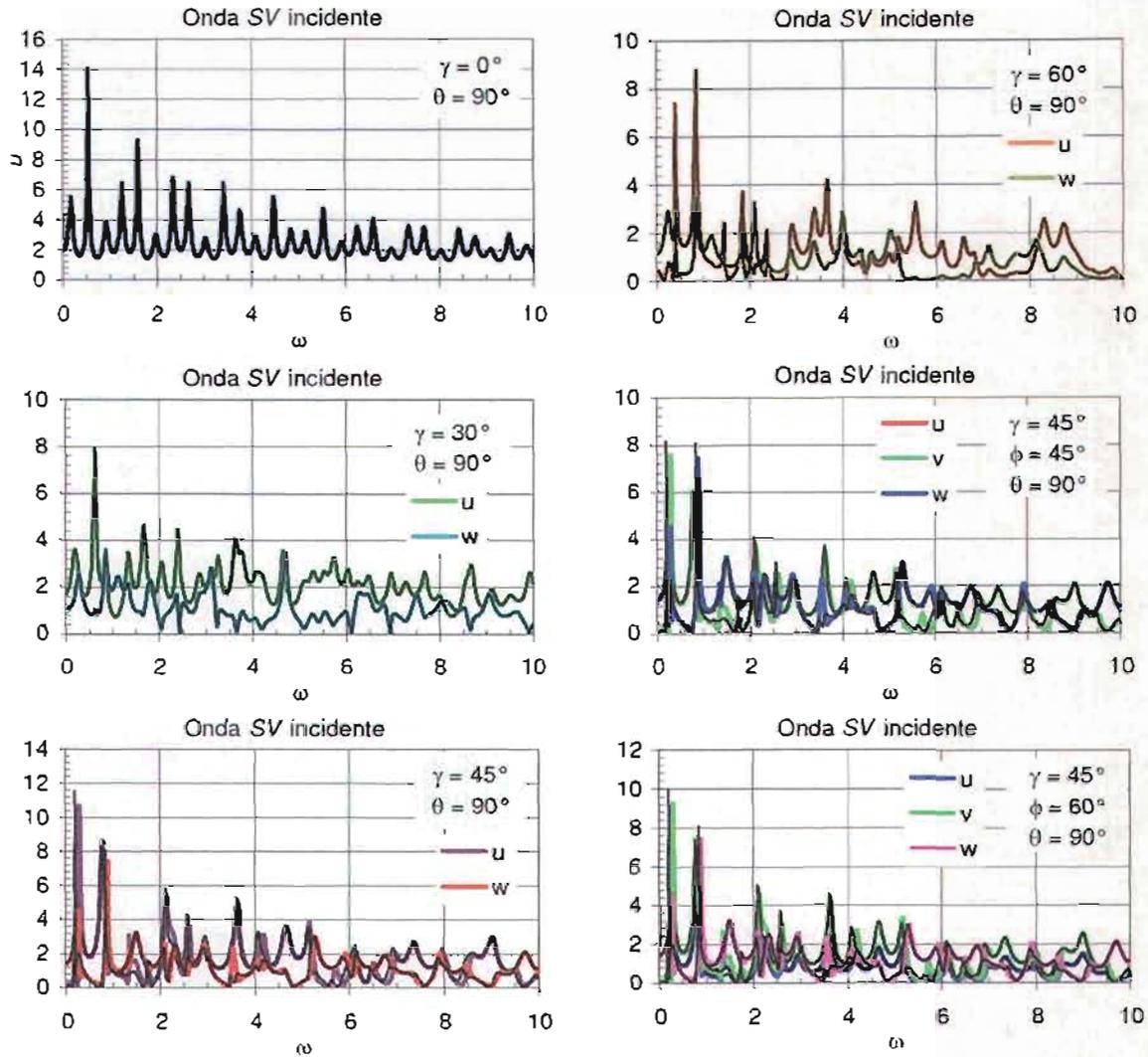


Figura 1.12: Funciones de transferencia en la superficie libre para ondas SV con distintos ángulos de incidencia γ en un sistema de 3 estratos con el semiespacio, aquí la respuesta está en las direcciones u y w , excepto en el caso de incidencia normal que se presenta la respuesta únicamente en u . Cuando se usa un ángulo ϕ (azimuth) la respuesta se encuentra en las 3 direcciones ortogonales. Por tratarse de una onda SV, el ángulo de polarización es $\theta = 90^\circ$.

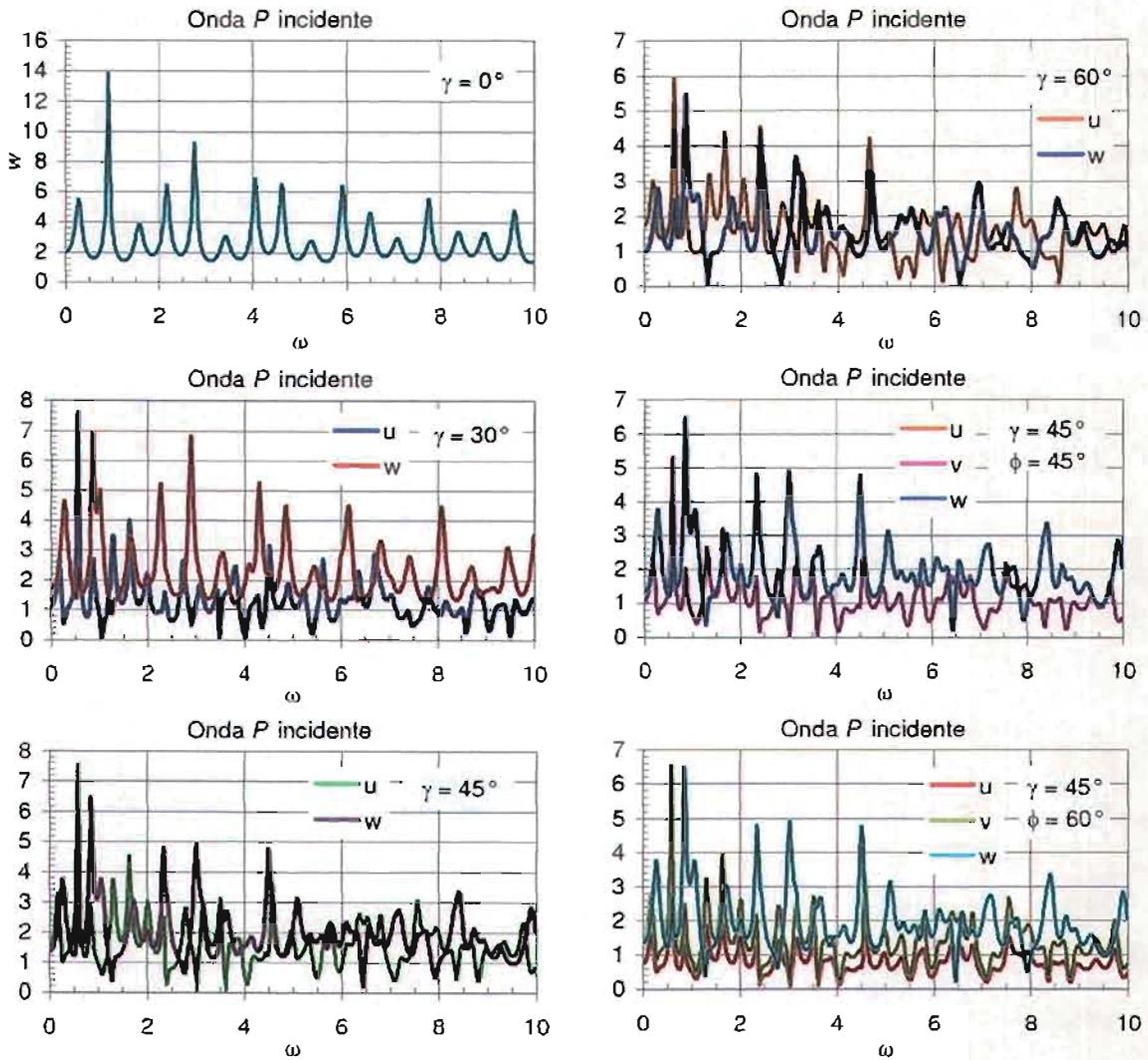


Figura 1.13: Funciones de transferencia en la superficie libre para ondas P con incidencias γ y azimuth ϕ diversos en un sistema de 3 estratos con el semiespacio.

Una vez con las funciones de transferencia $H(\omega)$ en el dominio de la frecuencia ω que representan las propiedades del sistema en su conjunto, se puede obtener la respuesta $r(t)$ en un punto en el dominio del tiempo (llamados aquí *sismogramas sintéticos*) para una excitación $f(t)$ en el dominio del tiempo dada en otro punto del sistema. Para ello es necesario transformar al dominio de la frecuencia $F(\omega)$ la señal de entrada $f(t)$, multiplicarla por la función de transferencia $H(\omega)$ y al resultado $R(\omega)$ antitransformarlo al dominio del tiempo $r(t)$. Para realizar lo anterior se utiliza el par de transformadas de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.43)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (1.44)$$

las ecuaciones anteriores serían prácticas para señales continuas, pero como se trabaja con señales discretas se utiliza la transformada rápida de Fourier, ver (Newland, D.E., 1993).

1.4 Ondas cilíndricas SH

Una fuente SH cilíndrica puede ser representada numéricamente con la función de Green como la superposición de ondas planas con distintos ángulos de incidencia, ver (Bowman, F., 1958) y (Harris, J.G., 2001):

$$G_{22}(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega r}{\beta} \right) \quad (1.45)$$

en donde $H_0^{(1)}$ denota la función de Hankel de primera especie y orden cero, esta función se define como $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z)$ donde J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente. También en representación integral, se tiene:

$$H_0^{(1)} \left(\frac{\omega r}{\beta} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} e^{i\kappa_m(x-x_0) + i\eta_m|z-z_0|} d\kappa \quad (1.46)$$

y en forma discreta:

$$H_0^{(1)} \left(\frac{\omega r}{\beta} \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\kappa}{\eta_m} e^{i\kappa_m(x-x_0) + i\eta_m|z-z_0| - i\omega t} + \mathbf{R} \quad (1.47)$$

$\Delta\kappa$ es el número de onda horizontal discreto, η_m el número de onda vertical, x_0 y z_0 son las coordenadas de la fuente y L es la periodicidad de las fuentes, y están representadas por las siguientes ecuaciones: $\Delta\kappa = \frac{2\pi}{L}$, $\eta_m = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - \kappa_m^2}$ con $\text{Im}(\eta_m) \geq 0$ y $\kappa_m = \frac{2\pi}{L}m$ donde la η_m es consecuencia del uso de ondas armónicas y del método de separación de variables, r es la distancia entre la ubicación de la fuente \bar{x} y la del receptor $\bar{\xi}$.

Una vez con la representación matemática de la fuente cilíndrica SH se puede obtener la función de transferencia sumando la función de Green y las ondas planas reflejadas y refractadas del estrato en el que se encuentre la fuente, en aquellos estratos sin fuentes sólo se trabaja con las ondas planas reflejadas y refractadas. El componente m de la función de transferencia queda como:

$$v_m = \left[A e^{-i\eta_m(z-z_j)} + B e^{i\eta_m(z-z_{j-1})} \right] + G_m(\bar{x}, \bar{\xi}) \quad (1.48)$$

El siguiente paso es obtener las condiciones de frontera de un sistema de N estratos y realizar el mismo procedimiento de solución que se utilizó en el método de la matriz global.

1.5 Ejemplo de aplicación de las ondas cilíndricas

Con la teoría presentada anteriormente se pueden realizar varios ejemplos de aplicación.

1. Se obtiene la respuesta en la superficie libre para un sistema de un estrato con base rígida, dada una fuente lineal **SH** en el mismo estrato. Donde x, z son las coordenadas de la fuente, H es el espesor del estrato T_p y T_s propiedades del pulso de Ricker, ver sección 2.2.1, $Dt = \Delta t$, N es el número de puntos en el tiempo, ver tabla 1.2 y los resultados se muestran en la figura 1.15.

x	z	H	L
0	5	10	1000

ρ	β	Q
1	100	100

xmin	xmax	# esta.
-100	100	41

T_p	T_s	Dt	N
0.3	0.5	0.01	1024

Tabla 1.2: Propiedades de un estrato con las propiedades que definen al pulso de Ricker. Donde (x, z) es la ubicación de la respuesta, H es el espesor del estrato, L es la periodicidad de las fuentes, ρ es la densidad. β es la velocidad de ondas S, Q es el factor de calidad. x_{min}, x_{max} es la ubicación sobre la superficie libre de los receptores extremos, $N_{est.}$ es el número de estaciones, T_p, T_s son las propiedades del pulso de Ricker, Dt es el intervalo de tiempo y N es el número de puntos en tiempo. Ver figura 1.14.

2. Para un sistema de 3 estratos con una fuente lineal **SH**, determinar la respuesta en la superficie, ver tabla 1.3 y figura 1.14 y 1.16.

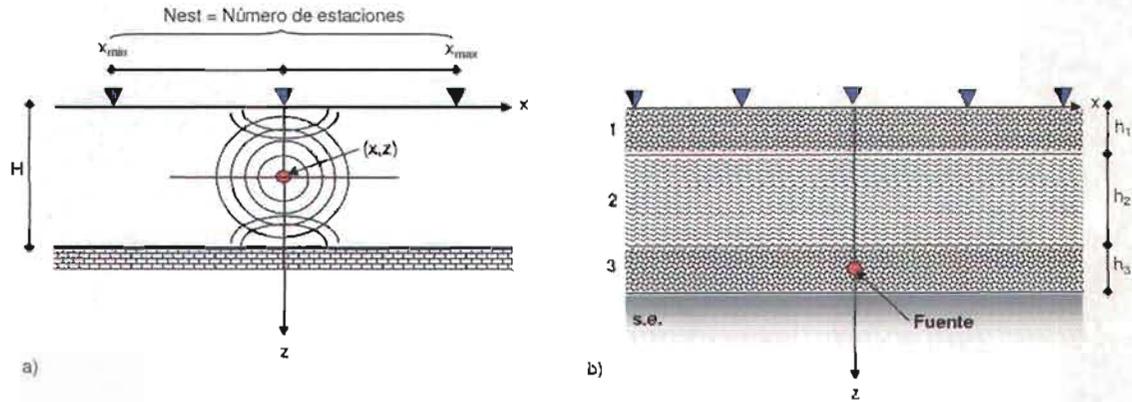


Figura 1.14: a) Muestra un estrato con base rígida, la representación gráfica de una fuente cilíndrica y la ubicación de los receptores en la superficie libre, b) sistema de 3 estratos y el semiespacio con propiedades diferentes.

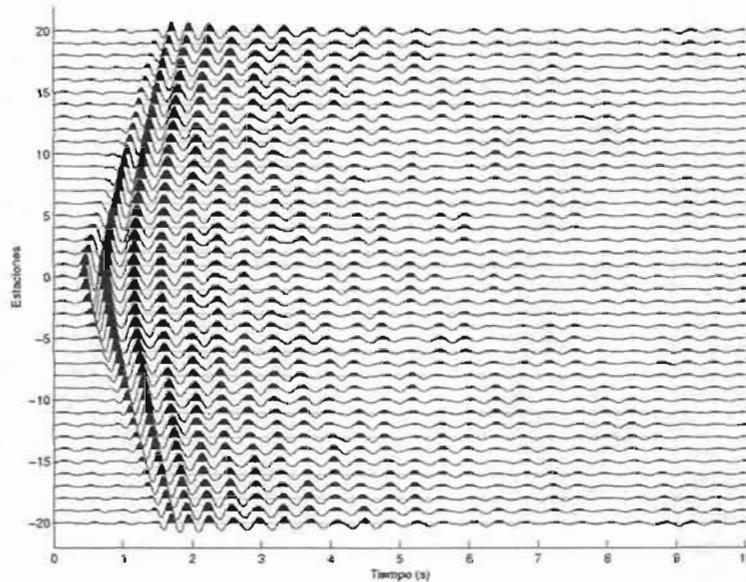


Figura 1.15: Sismogramas sintéticos en la superficie libre de un estrato con base rígida, se aplicó una fuente lineal SH en el interior del medio. Debido a que la fuente se encuentra debajo del receptor cero, se aprecia en la figura que el pulso se propaga simétricamente conforme el tiempo pasa. Para remover el ruido que está presente en los sismogramas, se pueden usar diversos filtros.

Estratos	H	ρ	β	Qs
1	5	1	50	100
2	10	2	100	100
3	5	1	50	100
S.E.		2	200	1000

Xf	Zf	L	Xmin	Xmax
0	17.5	1000	-100	100

Tp	Ts	Dt	N	# esta.
0.3	0.5	0.01	512	21

Tabla 1.3: Propiedades de un sistema de 3 estratos y el semiespacio con una fuente lineal \mathbf{SH} . Donde H es el espesor de los estratos, β es la velocidad de propagación, ρ es la densidad, Q_s es el factor de calidad, (x_f, z_f) es la ubicación de la fuente, L es la periodicidad de las fuentes, x_{min}, x_{max} es la ubicación de los receptores extremos en la superficie libre, N_{est} es el número de estaciones, T_p, T_s son las propiedades del pulso de Ricker, Dt es el intervalo de tiempo y N es el número de puntos en tiempo.

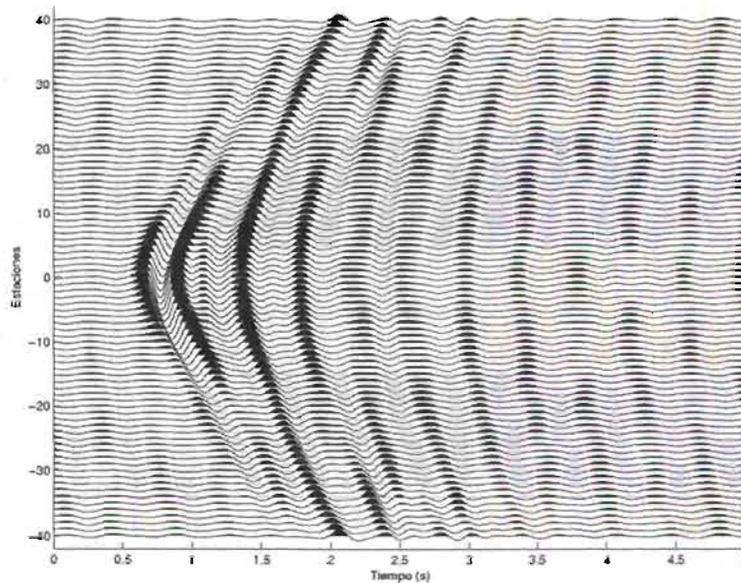


Figura 1.16: Sismogramas sintéticos en la superficie libre de un sistema de 3 estratos y el semiespacio con una fuente \mathbf{SH} en el tercer estrato. Al igual que el ejemplo de un estrato con fuente \mathbf{SH} , la repuesta es simétrica en ambos lados del receptor cero, sin embargo la forma de la onda que se propaga es diferente, debido a las reflexiones y refracciones en las interfaces de los estratos.

Capítulo 2

Diferencias finitas

El método de las diferencias finitas es un método numérico aproximado que da solución a ecuaciones diferenciales parciales, ya sean de tipo parabólicas (e.g. la ecuación de calor $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$), las elípticas (e.g. la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$) y las hiperbólicas (e.g. la ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$). Por lo que las derivadas parciales de funciones continuas son remplazadas por aproximaciones, donde el incremento diferencial de la derivada (∂x) se sustituye por un incremento finito (Δx) que corresponde al intervalo de muestreo de la función discretizada. La función continua debe ser discretizada ya que no es posible trabajar con ella en un sistema de cómputo. En este caso, la solución de una ecuación diferencial parcial se determina remplazando todas sus derivadas parciales por diferencias finitas. La mayor ventaja de las diferencias finitas es su fácil implantación en problemas de propagación de ondas, por esa razón es que desde los años 60s ha tenido una gran aceptación. Su característica principal es su uso en la solución de problemas con geometrías complejas ya que es difícil dar solución analítica a estos problemas.

Las diferencias finitas son aplicadas en áreas tan diversas como la sismología, el electromagnetismo, la acústica, entre otras. En sus comienzos en los años 60s fueron bien recibidas en la comunidad científica sin embargo la capacidad de cómputo era limitada por lo que tomó algunos años para que fueran aplicadas.

A principios de los años 70s se realizaron comparaciones de métodos analíticos con soluciones dadas por el método de las diferencias finitas ante una onda impulsiva **SH** utilizando un esquema centrado de desplazamiento (Alford, R.M., K.R. Kelly, *et al*, 1974), los resultados fueron alentadores para esquemas sin dispersión y para llegar a ello fue necesario utilizar intervalos

espaciales de mallado lo suficientemente pequeños para evitar obtener interpretaciones erróneas de los sismogramas. El esquema centrado fue práctico ya que se pudo modelar adecuadamente la propagación de distintas ondas como las ondas superficiales y además fue sencilla su implantación en modelos anisótropos y complejos (Kelly, K.R., R.W. Ward, *et al.*, 1976). También se representó al vacío incorporando en las ecuaciones la velocidad del medio igualada a cero. Durante la década de los 70s se continuó usando el esquema de diferencias finitas centrado principalmente de órdenes inferiores (2o y 4o orden), además se propuso el método pseudoespectral (Kreiss, H.O. y J. Olinger, 1972) que a diferencia del método de las diferencias finitas que utiliza aproximaciones de derivadas de diversos órdenes, éste utiliza la transformada de Fourier para obtener derivadas de funciones. En esta década (Madariaga, R., 1976) desarrolló el esquema alternado de diferencias finitas (por sus siglas en inglés "Staggered method") esquema basado en las ecuaciones elásticas acopladas de movimiento de primer orden y las leyes constitutivas expresadas en velocidades y esfuerzos de la partícula, las cuales utilizó para modelar la propagación de una fractura circular en un medio elástico.

En los años 80s se realizaron comparaciones entre los esquemas de diferencias finitas de diversos órdenes (Dablain, 1986) con algunos métodos pseudoespectrales (Fornberg, B., 1987) se llegó a la conclusión de que es práctico trabajar con esquemas que requieran un mayor muestreo en el tiempo en comparación con el muestreo espacial debido a los recursos de cómputo con los que se contaba. Además se encontró que el muestreo en los métodos pseudoespectrales es menor al requerido por los esquemas de diferencias finitas. El método alternado de diferencias finitas disminuyó el trabajo de cómputo ya que en vez de trabajar con ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas de segundo orden se redujeron un orden, transformando el esquema de desplazamiento de segundo orden a uno de esfuerzo-velocidad de primer orden (Virieux, J., 1984) (Virieux, J., 1986).

La década de los años 90s se caracterizó por la implantación de los esquemas anteriormente mencionados en grandes problemas de modelación numérica, como la modelación sísmica de una región dada (Furumura T. y H. Takenaka, 1996), donde se desarrollaron modelos tridimensionales que involucraban las propiedades físicas del subsuelo del Japón y así modelar la propagación de ondas sísmicas.

Actualmente se desarrollan métodos de diferencias finitas híbridos (Moczo, P, E. Bystrický, *et al.*, 1997) (Kang, T.-S. y C.-E. Baag, 2004) que si bien utilizan los mismos esquemas antes desarrollados, ahora los usan de manera

combinada, por ejemplo diferencias finitas alternadas con un muestreo no uniforme (Pitarka, A., 1999), (Hayashi, K., D.R. Burns y N. Toksöz. 2001). No solamente se trabaja con esquemas cuadrados o rectangulares, se han desarrollado esquemas con geometrías diversas como las triangulares que fue introducida por (Magnier, S.A., P. Mora, y A. Tarantola, 1994). Debido al uso de sistemas de cómputo avanzados se ha dado gran importancia a los estudios relacionados a la visualización tridimensional de la propagación de ondas (Furumura, T., B.L.N. Kennett y K. Koketsu, 2003) y se buscan nuevos métodos matemáticos para optimizar los recursos de la memoria de cómputo en grandes simulaciones (Moczo, P., M. Lucká, *et al*, 1999).

Este capítulo tiene por objetivo principal desarrollar programas de cómputo de esquemas tanto centrados como alternados de diferencias finitas bidimensionales de mallas rectangulares para diversos órdenes, estos esquemas serán desarrollados en el dominio del tiempo (t) y el de la frecuencia (ω) ante fuentes de ondas **SH** y **P-SV**. Se muestran las formulaciones matemáticas para desarrollar ambos esquemas en tiempo de 2 dimensiones.

2.1 Diferencias finitas de órdenes superiores

El procedimiento fundamental de los cálculos numéricos de las diferencias finitas está basado en aproximaciones polinomiales de una función $f(x)$. Una primera aproximación a la función $f(x)$ puede estar dada por su tangente siendo una aproximación lineal (polinomio de primer orden),

$$f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} \frac{df(x_0)}{dx}$$

también puede considerarse una aproximación cuadrática,

$$f(x) \approx f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 \frac{f''(x_0)}{2!}$$

Entre mayor sea el orden de las aproximaciones a la función $f(x)$, mayor será la exactitud de dicha aproximación. Estas aproximaciones polinomiales son las conocidas como las series de Taylor (Haberman, R., 2004).

Con el uso de la serie de Taylor es posible aproximar las derivadas de una función f de varias maneras, las más utilizadas se indican a continuación:

1. Aproximación hacia adelante:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Aproximación hacia atrás:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

3. Aproximación centrada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

La aproximación hacia adelante es llamada así debido a que se necesita uno o varios puntos adelante de la posición de $f(x)$, en el caso hacia atrás los puntos están atrás de $f(x)$ y la aproximación centrada es aquella que tiene igual número de puntos hacia adelante que hacia atrás de $f(x)$.

Es posible obtener las derivadas de primer orden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en un punto, considerando los puntos posteriores y anteriores a dicho punto, para ello se puede utilizar una expansión de series de Taylor o una expansión de polinomios (un sistema de ecuaciones lineales) como el que se muestra a continuación y que da como resultado los coeficientes de la aproximación en diferencias finitas de cuarto orden.

$$\begin{aligned} f &= f_0 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \\ f_{-2} &= f_0 - 2A + 4B - 8C + 16D \\ f_{-1} &= f_0 - A + B - C + D \\ f_1 &= f_0 + A + B + C + D \\ f_2 &= f_0 + 2A + 4B + 8C + 16D \end{aligned} \tag{2.1}$$

se resuelve el sistema de ecuaciones donde el primer coeficiente indica la primera derivada que se muestra a continuación.

$$f'(x) = \frac{f(x - 2h) - 8f(x - h) + 8f(x + h) - f(x + 2h)}{12h}$$

La exactitud de la diferenciación espacial por el método de las diferencias finitas usualmente es evaluada por el análisis de Fourier de funciones periódicas de un número de onda κ , como sigue:

$$f(n\Delta x) = e^{i\kappa n\Delta x}$$

La derivada de la función se obtiene analíticamente como

$$\frac{d}{dx}f(n\Delta x) = i\kappa_e e^{i\kappa n\Delta x}$$

donde κ_e es el número de onda efectivo, con $\kappa_e = \kappa$ en la diferenciación analítica. La aproximación de la primera derivada parcial de una función por medio del esquema de diferencias finitas alternadas de segundo orden puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}f(n\Delta x) = \frac{1}{\Delta x} \left[e^{i\kappa(n\Delta x + 1/2\Delta x)} - e^{i\kappa(n\Delta x - 1/2\Delta x)} \right] = i \frac{\sin(\kappa\Delta x/2)}{\Delta x/2} f(n\Delta x)$$

La diferenciación numérica muestra que $\kappa_e = \sin(\kappa\Delta x/2)/(\Delta x/2)$. En la figura 2.1 se muestra el número de onda efectivo para un esquema centrado de órdenes 2,4,6 y 8. Por lo que se aprecia que el número de onda efectivo de las diferencias finitas de orden 8 o superiores es muy cercano a la diferenciación exacta. También se muestran los valores para el esquema alternado, ver figura 2.1.

Cuando se habla de diferencias finitas de orden superior significa el número de nodos o puntos que se están considerando para obtener la derivada de un punto. Por lo que cuando se habla de diferencias finitas de orden 2 se trabaja con 2 nodos para obtener la derivada en el punto medio de esos dos nodos, de la misma forma para diferencias finitas de orden 16 se trabaja con 8 nodos hacia adelante y 8 nodos hacia atrás de la posición del nodo donde se quiera obtener la derivada. A continuación se muestran las ecuaciones para obtener diferencias finitas de ordenes 2, 4, 8 y 16, dicho de otra manera se muestran las derivadas de primer orden expandidas en 2, 4, 8 y 16 puntos, cada punto se encuentra a Δx veces del punto donde se busca la derivada.

- Orden 2:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.2)$$

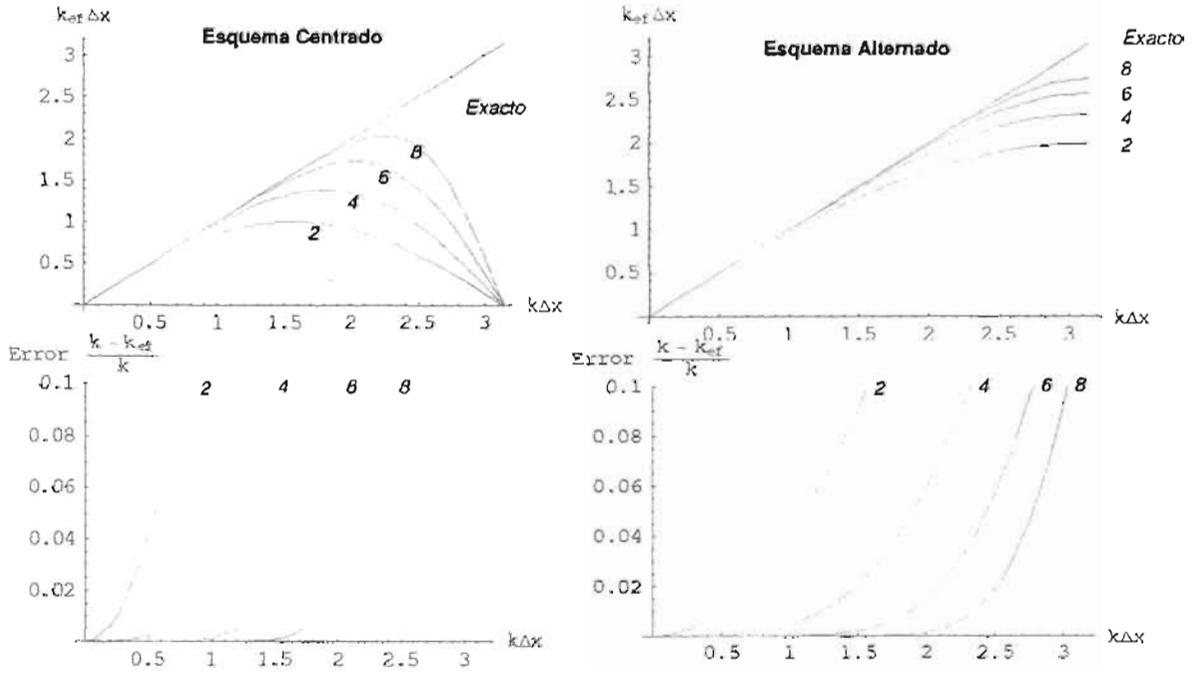


Figura 2.1: Números de onda efectivo para las aproximaciones de órdenes 2,4,6 y 8 de primeras derivadas, y la diferenciación exacta, con su correspondiente error

- Orden 4: $A = 12, B = 8$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x - 2\Delta x) - Bf(x - \Delta x) + Bf(x + \Delta x) - f(x + 2\Delta x)}{A\Delta x} \quad (2.3)$$

- Orden 8: $A = 840, B = 3, C = 32, D = 168, E = 672$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{A\Delta x} & \{ Bf(x - 4\Delta x) - Cf(x - 3\Delta x) \\ & + Df(x - 2\Delta x) - Ef(x - \Delta x) + Ef(x + \Delta x) \\ & - Df(x + 2\Delta x) + Cf(x + 3\Delta x) - Bf(x + 4\Delta x) \} \end{aligned} \quad (2.4)$$

- Orden 16: $A = 720720, B = 7, C = 128, D = 1120, E = 6272, G = 25480, H = 81536, I = 224224, J = 640640$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{A\Delta x} [Bf(x - 8\Delta x) - Cf(x - 7\Delta x) \dots] \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 &+Df(x - 6\Delta x) - Ef(x - 5\Delta x) + Gf(x - 4\Delta x) \\
 &-Gf(x - 3\Delta x) + If(x - 2\Delta x) - Jf(x - \Delta x) \\
 &+Jf(x + \Delta x) - If(x + 2\Delta x) + Gf(x + 3\Delta x) \\
 &-Gf(x + 4\Delta x) + Ef(x + 5\Delta x) - Df(x + 6\Delta x) \\
 &+Cf(x + 6\Delta x) - Bf(x + 8\Delta x)]
 \end{aligned}$$

Las siguientes ecuaciones muestran las derivadas de primer orden expandidas en 2, 4, 8, y 16 puntos evaluados en $\frac{\Delta x}{2}$.

- Orden 2:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} \quad (2.6)$$

- Orden 4: $A = 24, B = 8$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x - \frac{3}{2}\Delta x) - Bf(x - \frac{1}{2}\Delta x) + Bf(x + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x + \frac{3}{2}\Delta x)}{A\Delta x} \quad (2.7)$$

- Orden 8: $A = 107520, B = 75, C = 1029, D = 8575, E = 128625$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} = & \frac{1}{A\Delta x} \left[Bf(x - \frac{7}{2}\Delta x) - Cf(x - \frac{5}{2}\Delta x) \right. \\
 & +Df(x - \frac{3}{2}\Delta x) - Ef(x - \frac{1}{2}\Delta x) + Ef(x + \frac{1}{2}\Delta x) \\
 & \left. -Df(x + \frac{3}{2}\Delta x) + Cf(x + \frac{5}{2}\Delta x) - Bf(x + \frac{7}{2}\Delta x) \right] \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

- Orden 16: $A = 1511459389440, B = 1288287, C = 25727625, D = 251535375, E = 1628251625, G = 8074798875, H = 34818532749, I = 161196910875, J = 1865278540125$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} = & \frac{1}{A\Delta x} \left[Bf(x - \frac{15}{2}\Delta x) - Cf(x - \frac{13}{2}\Delta x) \right. \\
 & +Df(x - \frac{11}{2}\Delta x) - Ef(x - \frac{9}{2}\Delta x) + Gf(x - \frac{7}{2}\Delta x) \\
 & -Hf(x - \frac{5}{2}\Delta x) + If(x - \frac{3}{2}\Delta x) - Jf(x - \frac{1}{2}\Delta x) \\
 & \left. +Jf(x + \frac{1}{2}\Delta x) - If(x + \frac{3}{2}\Delta x) + Hf(x + \frac{5}{2}\Delta x) \right] \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -Gf\left(x + \frac{7}{2}\Delta x\right) + Ef\left(x + \frac{9}{2}\Delta x\right) - Df\left(x + \frac{11}{2}\Delta x\right) \\
 & + Cf\left(x + \frac{13}{2}\Delta x\right) - Bf\left(x + \frac{15}{2}\Delta x\right) \Big]
 \end{aligned}$$

2.2 Diferencias finitas centradas 2D (Mallas rectangulares)

2.2.1 Dominio del tiempo

- La ecuación de movimiento para ondas **SH** está dada por:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \nabla^2 v + f_y \\
 &= \mu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} + f_y
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

en donde:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{f(x + \Delta t) - 2f(x) + f(x - \Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{f_{i,j}^{k-1} - 2f_{i,j}^k + f_{i,j}^{k+1}}{\Delta t^2}$$

$i, j = x, y$ respectivamente y $k = t$ sustituyendo las aproximaciones se obtiene que el desplazamiento en un Δt futuro es:

$$f_{i,j}^{k+1} = \Delta t^2 \beta^2 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} + \Delta t^2 \frac{f}{\rho} + 2f_{i,j}^k - f_{i,j}^{k-1}$$

- Las ecuaciones de movimiento para ondas **P-SV** están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + f_x \right\} \\
 &= \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{f_x}{\rho} \\
 &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{f_x}{\rho}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + f_z \right\}$$

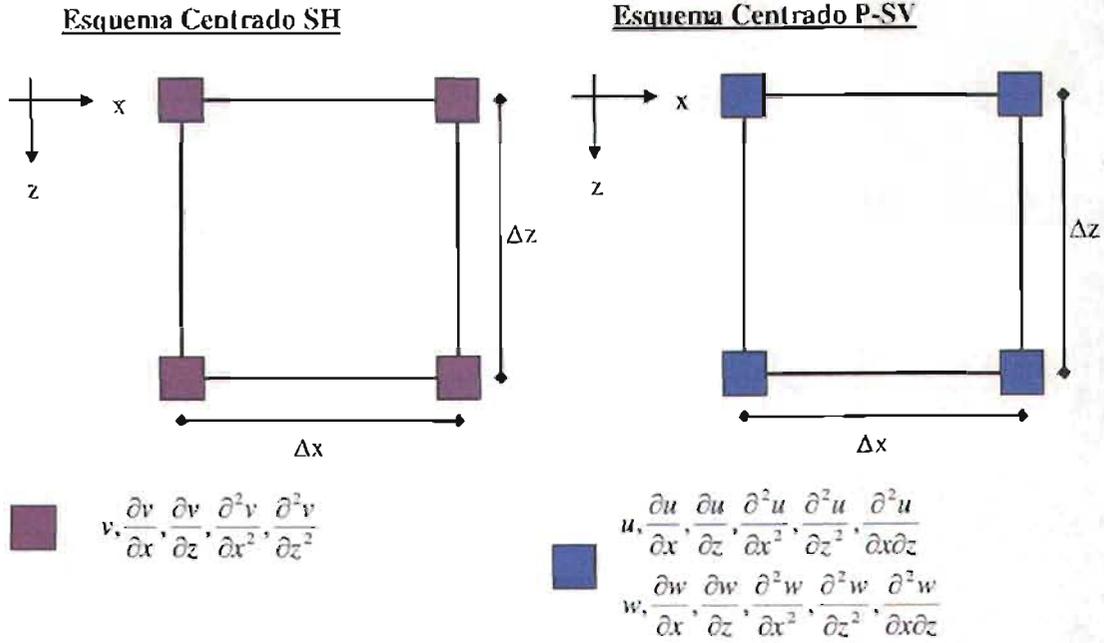


Figura 2.2: Discretización del medio con una malla centrada. Los valores de desplazamiento v y las derivadas en el problema SH se ubican en los mismos nodos. Lo mismo pasa en el problema P-SV, los desplazamientos u y w como las derivadas se encuentran en los mismos puntos. Por esta razón es que el esquema se llama “centrado” y hace muy fácil la visualización y ubicación de los operadores.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{f_z}{\rho} \\
 &= \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{f_z}{\rho}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

- La configuración espacial de este esquema se muestra en la figura 2.2.
- El pulso de Ricker está definido por las siguientes ecuaciones, ver figura 2.3.

$$r(t) = \left(a^2 - \frac{1}{2} \right) e^{-a^2} \tag{2.13}$$

$$R(\omega) = -\frac{t_p}{\sqrt{\pi}} b^2 e^{-b^2} e^{-i\omega t_p} \tag{2.14}$$

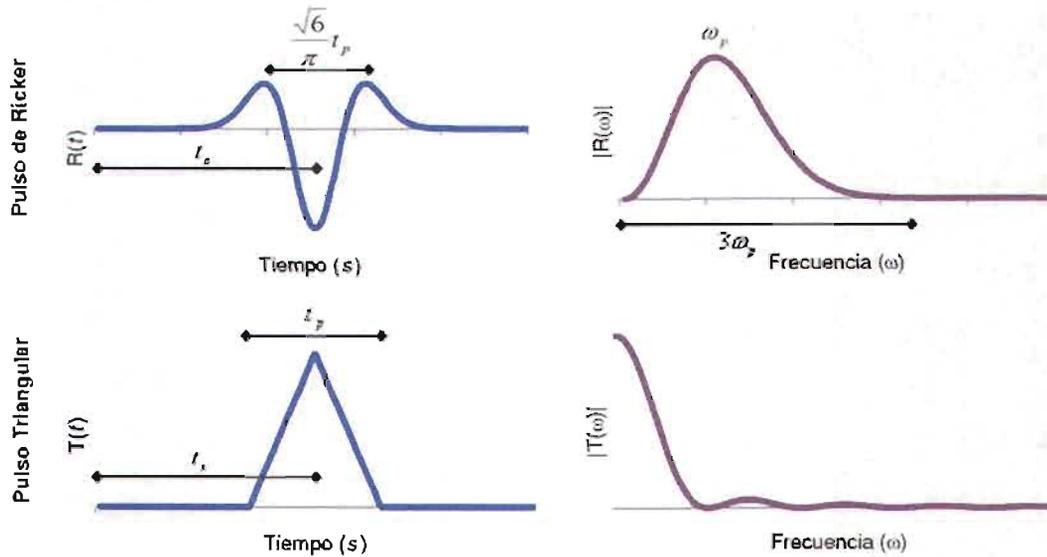


Figura 2.3: Representación de un pulso de Ricker y uno triangular en los dominios del tiempo t y de la frecuencia ω .

donde $a = \pi(t - t_s)$, $b = \frac{\omega}{\omega_p}$, $\omega_p = 2\pi f_p = \frac{2\pi}{t_p}$ y t_p es el periodo característico del pulso, el intervalo entre los dos máximos es $\sqrt{6}\frac{t_p}{\pi}$, t_s es el tiempo en el que se ubica el pulso.

- Si se considera $\Delta x = \Delta z$, la condición de estabilidad de la malla está dada por:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \quad (2.15)$$

2.2.2 Ejemplo de aplicación

- Para un ejemplo con una fuerza en un punto en la dirección v (simulando una fuente **SH**) con las propiedades de la tabla 2.1, se obtienen los resultados de las figuras 2.4 y 2.5.
- Para un ejemplo con fuerzas en las direcciones u y w (simulando una fuente **P** en un punto) con las propiedades de la tabla 2.2 se obtiene la figura 2.6.

μ	ρ	nsx	nsz
0.443556	1	126	126

nt	nx	nz
1200	251	251

dt	dx	dz
0.001	0.006	0.006

ts	tp	fac
0.15	0.4	10000

Tabla 2.1: *Propiedades del medio con una fuente lineal SH.*

α	β	ρ	nsx	nsz
1	0.666	1	126	126

nt	nx	nz
420	251	251

dt	dx	dz
0.001	0.006	0.006

ts	tp	fac
0.1	0.12	10000

Tabla 2.2: *Propiedades del medio con una fuente P y/o SV.*

- Para un ejemplo con una fuerza en un punto en la dirección w (simulando una fuente SV) con las propiedades de la tabla 2.2 se obtiene la figura 2.7.

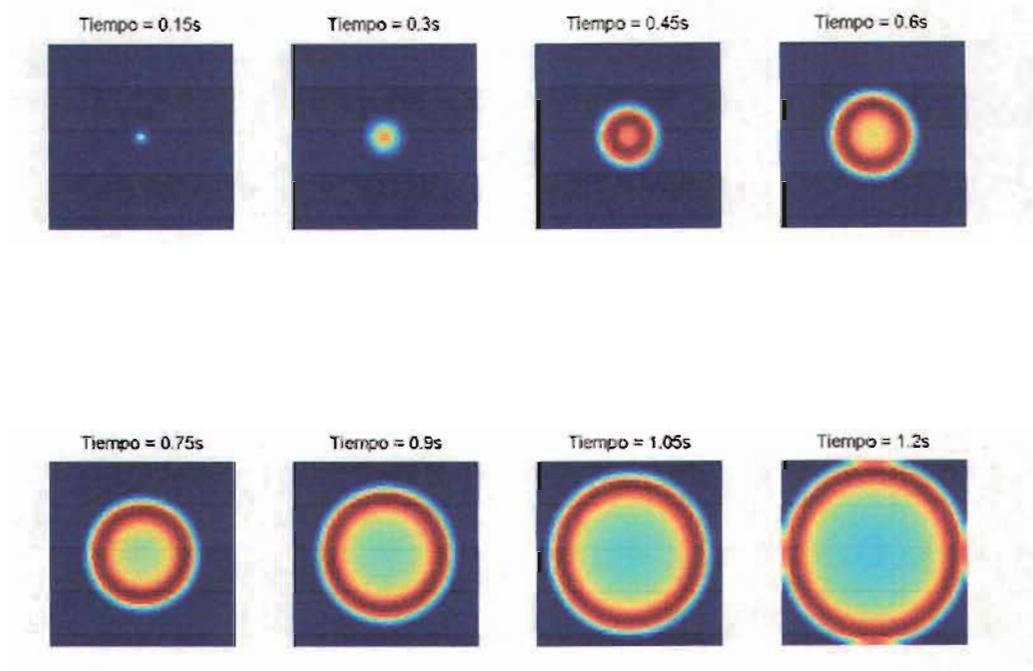


Figura 2.4: Desplazamiento v en un esquema de diferencias finitas de orden 16 dada una fuente triangular SH .

2.3 Diferencias finitas alternadas 2D (Mallas rectangulares)

2.3.1 Dominio del tiempo

- La ecuación de movimiento para una onda SH está dada por:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \nabla^2 v + f_y \\
 \rho \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right\} + f_y \\
 &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \\
 \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial \dot{v}}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

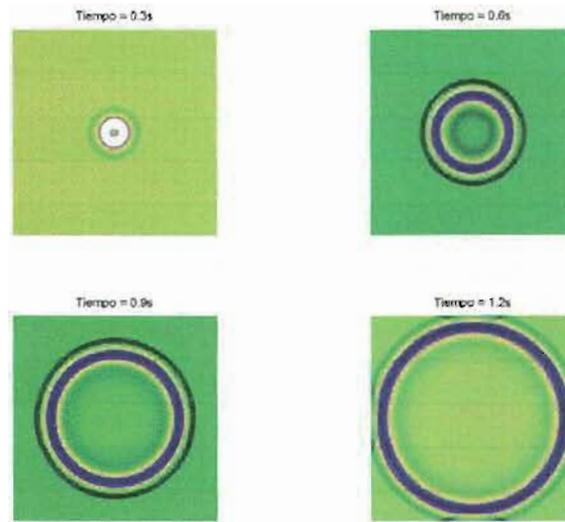


Figura 2.5: Desplazamiento v en un esquema de diferencias finitas de orden 16 dada una fuente de Ricker SH .

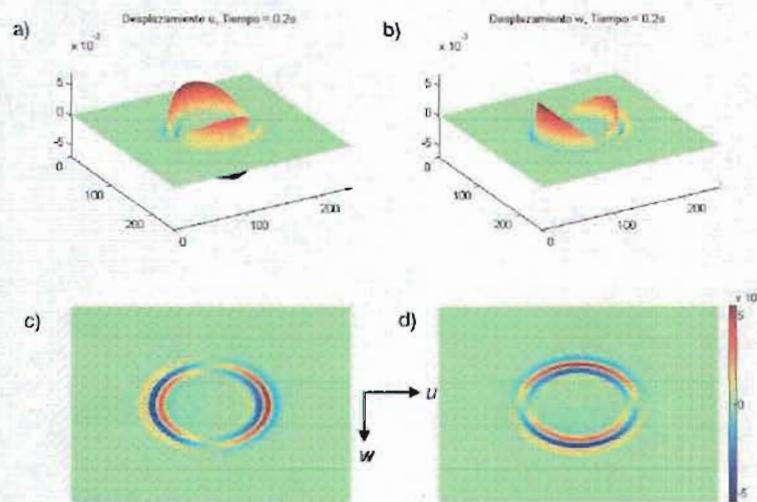


Figura 2.6: Desplazamiento u y w en un esquema de diferencias finitas de orden 16 dada una fuente de Ricker P . Las gráficas a) y c) corresponden a la respuesta en la dirección y y las figuras b) y d) en la dirección w .

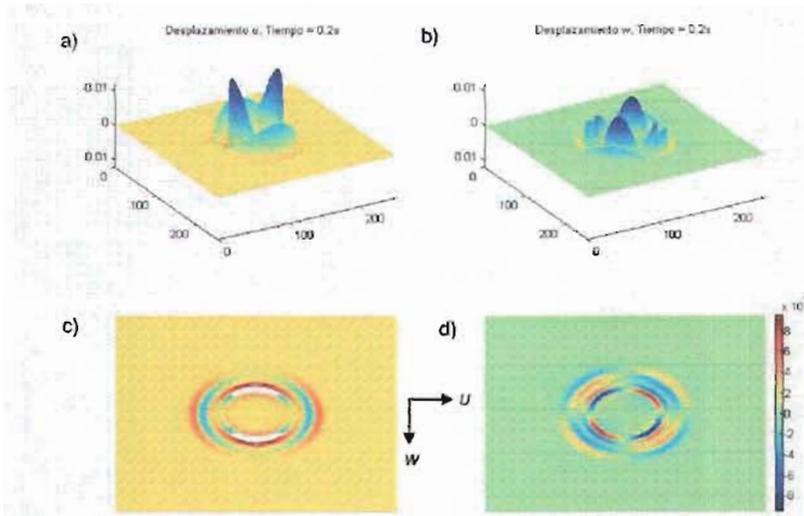


Figura 2.7: Desplazamiento u y w en un esquema de diferencias finitas de orden 16 dada una fuente de Ricker SV .

Las velocidades futuras son:

$$\dot{v}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{\rho} \left\{ \frac{\partial(\sigma_{xy})_{i,j}^k}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{zy})_{i,j}^k}{\partial z} + f_{i,j}^k \right\} + \dot{v}_{i,j}^{k-\frac{1}{2}}$$

Los esfuerzos futuros son:

$$\frac{(\sigma_{xy})_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - (\sigma_{xy})_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \mu \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j}^k$$

$$\frac{(\sigma_{zy})_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - (\sigma_{zy})_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \mu \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^k$$

Los desplazamientos se obtienen con:

$$v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \Delta t \dot{v}_{i,j}^k + v_{i,j}^{k-\frac{1}{2}}$$

- Las ecuaciones de movimiento para ondas **P-SV** están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \right\} \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \\
\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= \mu \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right\}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Tomando como ejemplo el problema de las ondas **SH** se pueden obtener las velocidades, los esfuerzos y los desplazamiento futuros.

- Las figuras 2.8 y 2.9 muestran la configuración espacial para las ondas **SH** y **P-SV** del esquema alternado.

2.4 Comparación entre el esquema “centrado” y el “alternado” (Mallas rectangulares)

Para poder distinguir las diferencias entre el esquema de diferencias finitas “centrado” y el “alternado” se muestran resultados a nivel de sismogramas, esto quiere decir que de presentarse las fotografías o snapshots de las animaciones ambos esquemas se verían idénticos es por ello que se muestran sismogramas de distintos puntos del medio con ambos esquemas para identificar las pequeñas diferencias entre ambos métodos.

En las figuras 2.10, 2.11 y 2.12 se muestran sismogramas de diversos puntos del medio para ondas **SH**, **P** y **SV**, la línea azul en los sismogramas muestra los resultados del esquema centrado y los negros los del esquema alternado. Se utilizan los datos mostrados en las tablas 2.1 y 2.2.

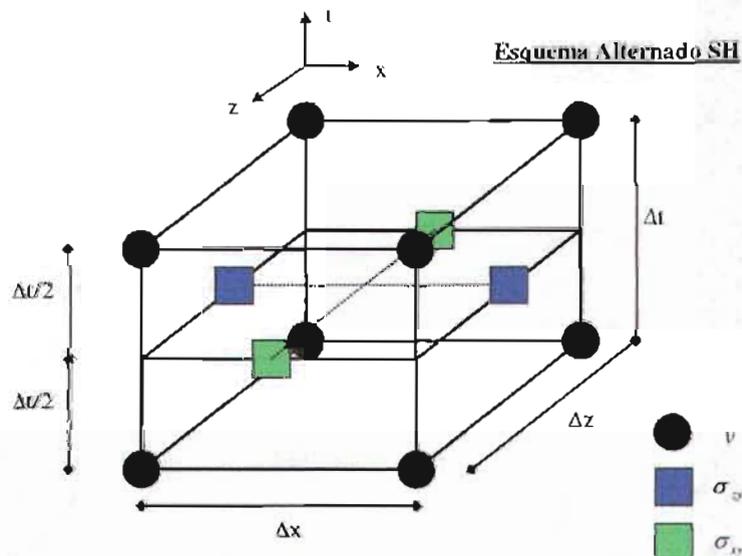


Figura 2.8: Discretización del medio con una malla alternada para el problema antiplano SH. En el problema SH, como se aprecia en la figura, los valores de desplazamiento v se encuentran en valores enteros en espacio y tiempo, sin embargo los esfuerzos σ_{xz} están ubicados a $\frac{1}{2}\Delta z$ en la dirección z , y los esfuerzos σ_{xy} están recorridos $\frac{1}{2}\Delta x$ en la dirección x y además ambos esfuerzos están ubicados a un $\frac{1}{2}\Delta t$ de los desplazamientos.

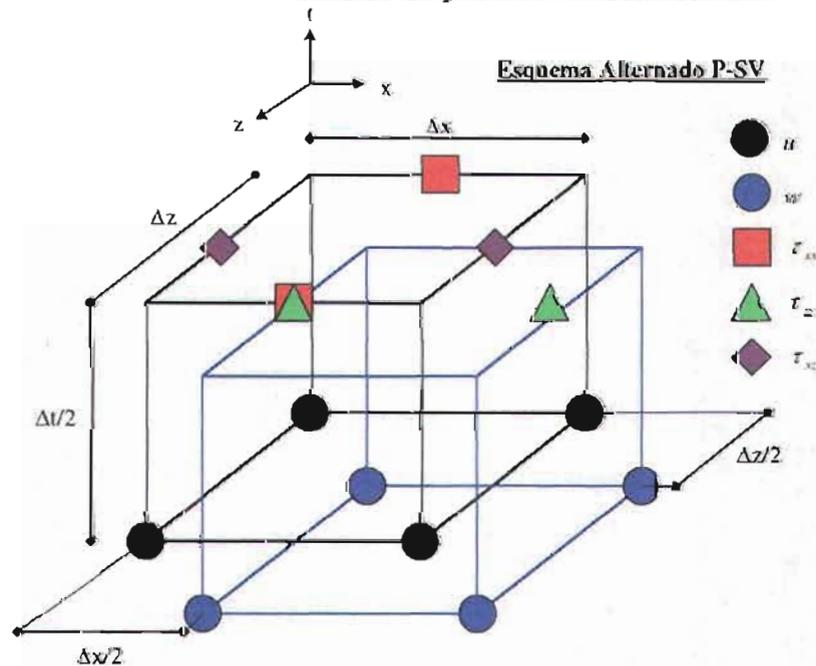


Figura 2.9: Discretización del medio con una malla alternada para el problema P-SV. Este esquema es más complejo ya que la ubicación de los desplazamientos u y w están desfasados $\frac{1}{2}\Delta x$ en la dirección x y $\frac{1}{2}\Delta z$ en la dirección z pero ambos desplazamientos se encuentran en el mismo tiempo. Con respecto a los esfuerzos, τ_{xx} se recorre $\frac{1}{2}\Delta x$ con respecto a los desplazamientos u , τ_{zz} se recorre $\frac{1}{2}\Delta z$ con relación a los desplazamientos w y τ_{xz} a $\frac{1}{2}\Delta z$ de los desplazamientos u , todos los esfuerzos están desfasados $\frac{1}{2}\Delta t$ de los desplazamientos.

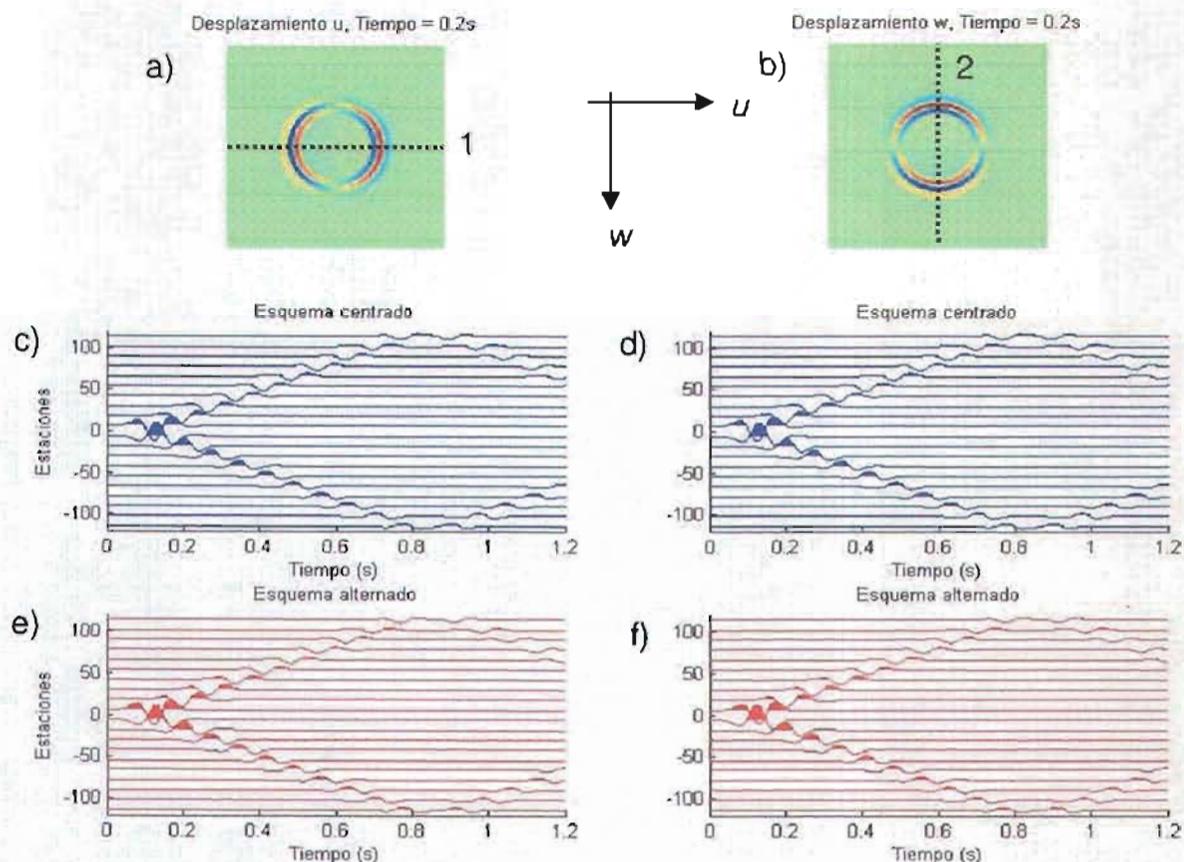


Figura 2.10: Comparación entre los esquemas “centrado” y “alternado” de orden 16 con una fuente P . La figura a) muestra el desplazamiento en la dirección u , la b) el desplazamiento en la dirección w , las figuras c) y d) muestran los sismogramas para receptores ubicados en las líneas punteadas de las figuras a) y b) respectivamente usando el esquema centrado. Análogamente las figuras e) y f) muestran los sismogramas para el esquema alternado. Se decidió separar los sismogramas de ambos esquemas ya que son prácticamente iguales, y de estar unidos no se apreciaría ninguna diferencia. Las diferencias entre un esquema y el otro, según los sismogramas mostrados, radican en la señal después de ser reflejada en la frontera, y esto se debe al esquema usado.

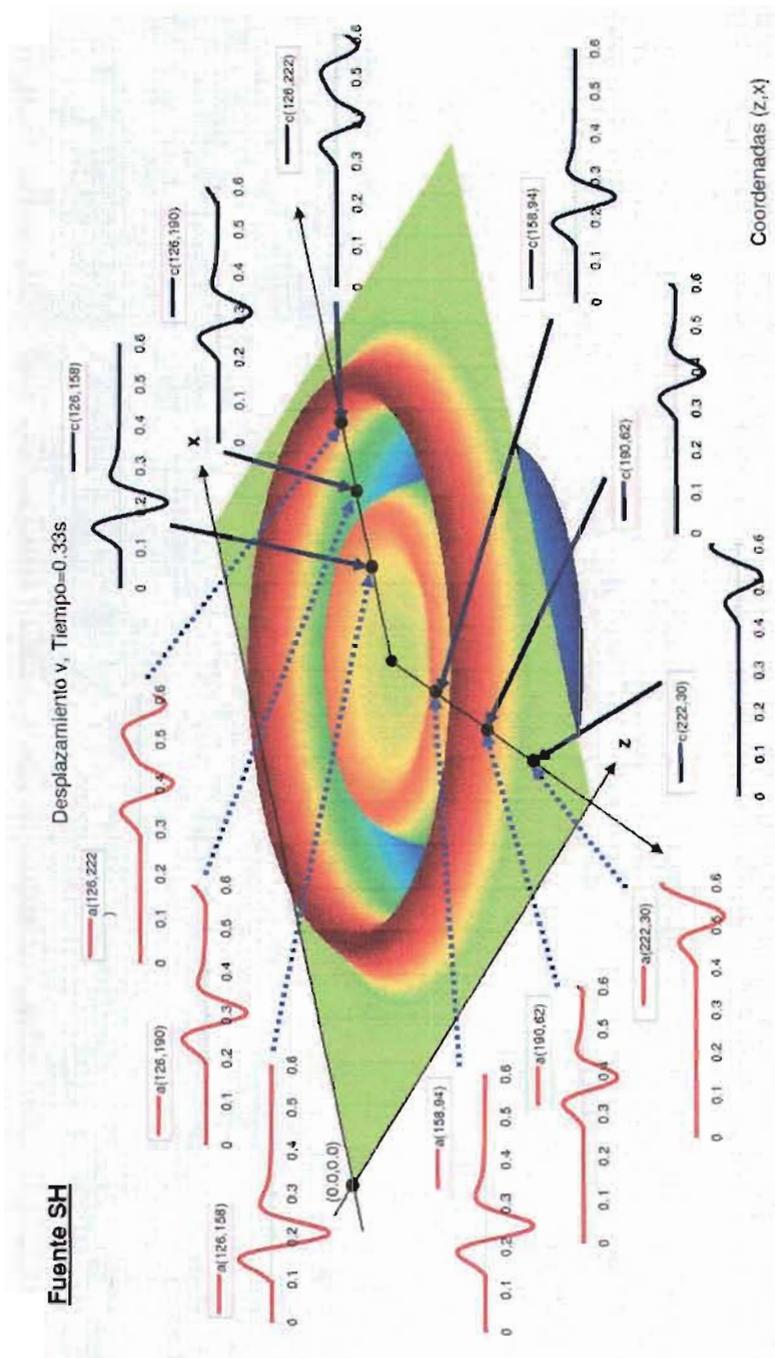


Figura 2.11: Comparación entre los esquemas “centrado” y “alternado” de orden 15 con una fuente **SH**. Los sismogramas con líneas rojas indican el esquema “alternado” y las azules el “centrado”. Los resultados muestran ser casi iguales entre ambos esquemas.

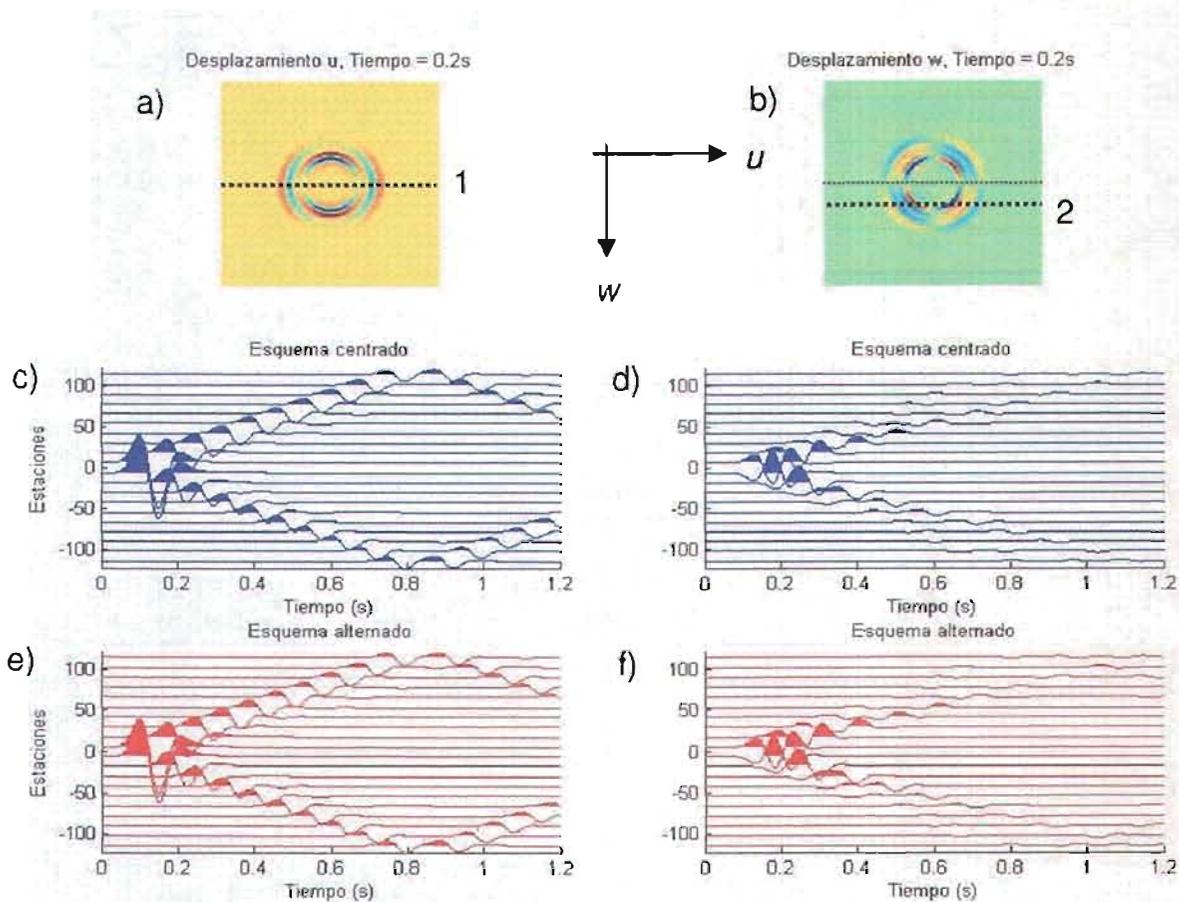


Figura 2.12: Comparación entre los esquemas “centrado” y “alternado” de orden 16 con una fuente SV . Se muestran resultado similares a los presentados en la figura 2.10 que compara los esquemas centrado y alternado con una fuente P .

2.5 Diferencias finitas alternadas 2D (Mallas triangulares)

Las mallas triangulares ofrecen flexibilidad para modelar configuraciones cilíndricas que no sucede lo mismo con los esquemas de mallas cuadradas o rectangulares. La malla triangular está compuesta de triángulos equiláteros y también es conocida como malla hexagonal ver (Käser, M., y H. Igel, 2001).

A continuación se muestra un diagrama del esquema de diferencias finitas triangular alternado, ver figura 2.13.

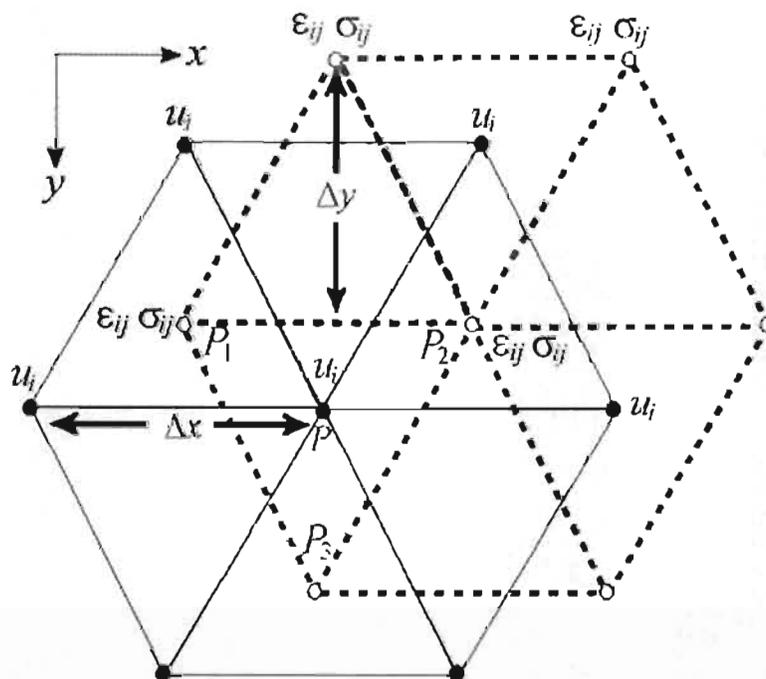


Figura 2.13: Esquema de diferencias finitas triangulares alternadas 2D.

La ecuación de movimiento sigue siendo la misma que la utilizada en el esquema rectangular, sin embargo las derivadas parciales son calculadas usando la aproximación de diferencias finitas para mallas triangulares. Tomando en cuenta la malla triangular 2D mostrada, donde P_1 , P_2 y P_3 son los puntos en el plano xy que define un triángulo equilátero de lado Δx . Sus coordenadas respectivas son $P_1 = (-\Delta x/2, \Delta y/3)$, $P_2 = (\Delta x/2, \Delta y/3)$, $P_3 = (0, \frac{2\Delta y}{3})$ en donde $\Delta y = \sqrt{3}\frac{\Delta x}{2}$. Sólo P_1 y P_2 están alineados con el eje x . Sea $P = (0, 0)$

el centro del triángulo donde se desea calcular el gradiente. Con la serie de Taylor (truncada) para cada uno de estos puntos se obtiene un sistema de ecuaciones lineales de 5×3 que se resuelve con el método de mínimos cuadrados, obteniendo los pesos apropiados para cada uno de los operadores, de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{P_2 - P_1}{\Delta x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{2P_3 - P_2 - P_1}{\sqrt{3}\Delta x} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pero si se busca calcular la derivada en los puntos blancos (derivadas de esfuerzos o deformaciones en lugar de derivadas de desplazamientos) las derivadas son las mismas que en las ecuaciones anteriores pero con signos opuestos, ver (Magnier, S.A., P. Mora, y A. Tarantola, 1994). Para encontrar las aproximaciones de cuarto orden para mallas triangulares con seis puntos, se calculan seis constantes a, b, c, d, e y f :

$$\frac{\partial P}{\partial p} = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 + eP_5 + fP_6$$

donde $p = x, y$ y se asume que $\Delta x = 1$.

Nótese que para la derivada en x sólo se necesitan tres puntos mientras que para la derivada en y se usan seis. Por lo tanto no se está usando la misma definición de orden que los esquemas estándar de diferencias finitas con mallas cuadradas. Sin embargo, en términos de número de puntos usados para calcular las derivadas parciales, estos operadores corresponden al segundo y cuarto orden de los operadores para las mallas rectangulares. Se tiene el mismo problema cuando se consideran los criterios de estabilidad. La condición clásica de Courant ya no es válida para mallas triangulares. La condición se modifica y queda como:

$$v_{max} \frac{\Delta t_{hex}}{\Delta x_{hex}} < \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866 \quad (2.21)$$

donde v_{max} representa la velocidad máxima, Δt_{hex} y Δx_{hex} son los incrementos temporales y espaciales en la malla triangular.

2.6 Esquemas “centrado” y “alternado” en medios heterogéneos

Las ecuaciones para los esquemas de diferencias finitas “centrado” y el “alternado” pueden ser aplicadas en esquemas heterogéneos. Para ello se modifican las propiedades del medio: las velocidades de propagación α y β , los parámetros de Lamé μ y λ o la densidad ρ . A continuación se muestran diversos ejemplos de medios heterogéneos.

- Un sistema de dos estratos con velocidades de propagación β diferentes con un pulso triangular **SH**.

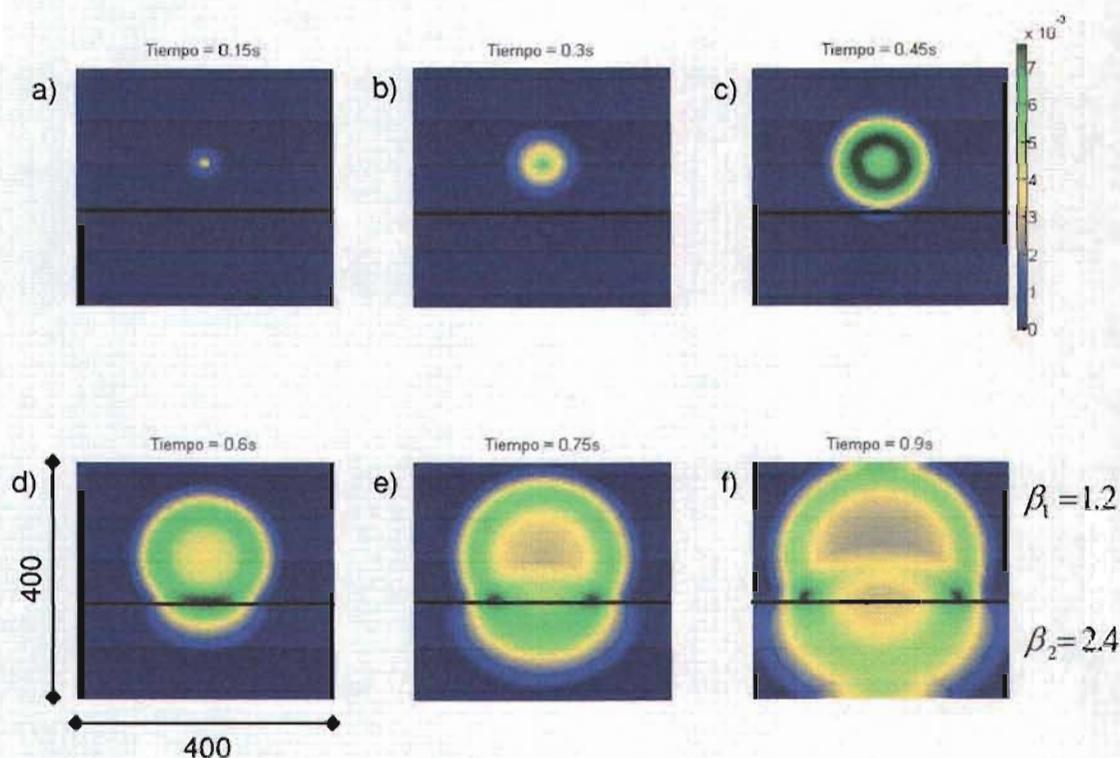


Figura 2.14: Esquema de diferencias finitas centradas de orden 16 en un medio heterogéneo con una fuente triangular **SH**. Cuando la onda encuentra la interface de los dos estratos, parte de la onda se refleja y la otra se transmite con la velocidad del estrato respectivo.

- Se incluye un estrato en forma de cuadro dentro de otro estrato con velocidad menor.

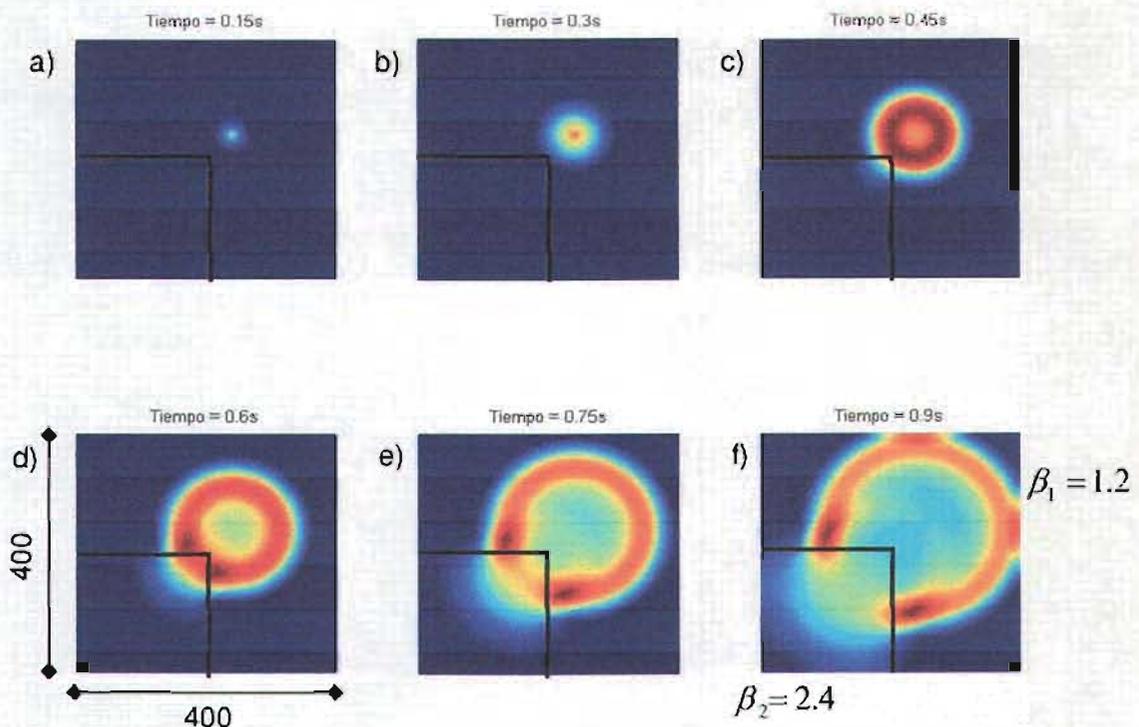


Figura 2.15: Esquema de diferencias finitas centradas de orden 16 en un medio heterogéneo con una fuente triangular SH . Se aprecia cómo el frente de onda cambia de forma cuando entra en un estrato con otras propiedades, en este caso la velocidad aumenta.

- Se simula una grieta en la mitad del medio y se aprecia la propagación de la onda cuando se encuentra con ella.

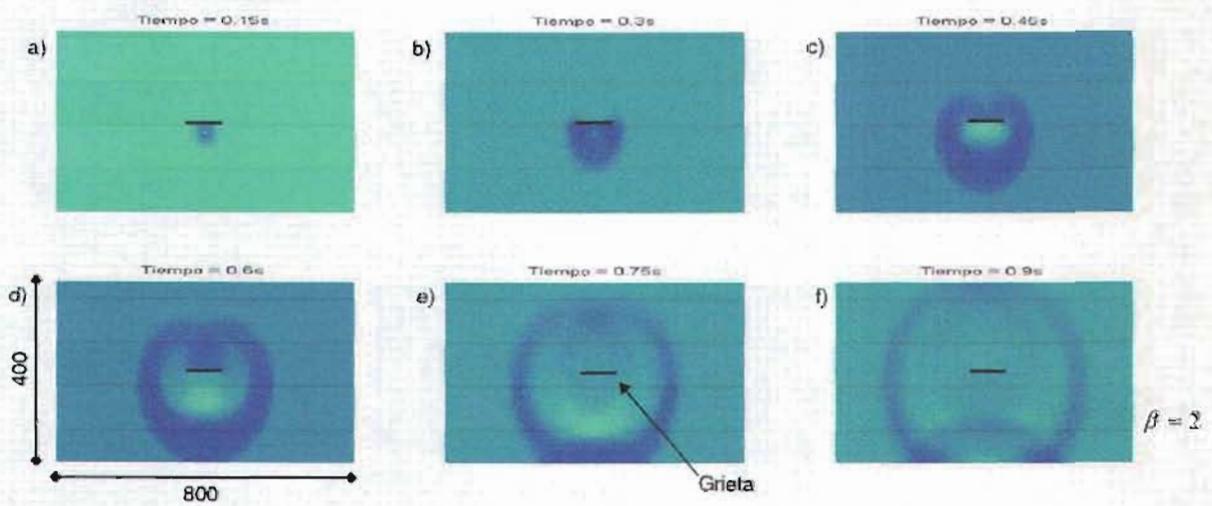


Figura 2.16: Esquema de diferencias finitas centradas de orden 16 en un medio homogéneo con una fuente triangular SH y una grieta. Cuando la onda alcanza la grieta, parte de la onda se refleja y la otra sigue su trayectoria original y después de haber pasado la grieta la onda comienza a reconstruirse.

Capítulo 3

Fronteras absorbentes espectrales

Las fronteras absorbentes son usadas en ingeniería sísmica, sismología y en otras disciplinas cuando se busca simular la irradiación de energía hacia el exterior de un dominio que se trata numéricamente. Esta región se denomina aquí dominio interior del problema. Por ejemplo, el estudio de la difracción de ondas elásticas, acústicas o electromagnéticas por objetos de forma diversas (Ihlenburg, F., 1998) debe hacerse numéricamente y para ello deben tenerse condiciones de frontera adecuadas.

También, ondas en medios sin fronteras aparecen en diversos campos de aplicación, como en la acústica, aerodinámica, geofísica, oceanografía, meteorología y en el electromagnetismo. Diversos métodos numéricos se han desarrollado desde los años 70s, los cuatro métodos principales son: métodos integrales de contorno, métodos de elementos finitos, métodos de capas absorbentes y métodos de condiciones de frontera.

El último método puede ser descrito de la siguiente manera. El semi-espacio o el dominio infinito es truncado utilizando una frontera artificial, por lo que se divide el dominio original en uno finito y en uno infinito. Una condición de frontera absorbente especial se impone en la frontera, para delimitar el problema y así asegurar que no habrá reflexiones espurias. Esta condición de frontera es llamada de distintas formas “condición de frontera absorbente” o “condición de frontera no reflejante”. Este problema es resuelto numéricamente ya sea por algún método como el de los elementos finitos o el de las diferencias finitas.

El problema de construir una frontera absorbente efectiva pareciera ser

muy simple, ya que todo lo que se necesita es una condición de borde que permita que todas las ondas que incidan en la frontera pasen libremente dicha frontera sin ocasionar reflexiones. Sin embargo, no es tan sencillo encontrar una frontera absorbente que sea lo suficientemente general como para que después de discretizar el dominio de un esquema sea estable, exacto, eficiente y fácil de implementar. Por eso, es que en los últimos 25 años se ha puesto un gran esfuerzo para mejorar las fronteras absorbentes. Actualmente no hay un consenso en cuál es una frontera absorbente óptima. La literatura en el tema es abundante. En los siguientes puntos se dan elementos de una reseña histórica de las condiciones de fronteras absorbentes:

1. Hasta finales de los años 70s el uso de fronteras absorbentes del tipo Sommerfeld dominó el campo de las aplicaciones pues la condición de irradiación al infinito se aplicaba en los bordes del dominio estudiado. Los resultados mostraron la necesidad de más investigación. Este método produce una cruda aproximación, por lo que es conocida como frontera absorbente de orden cero.
2. A finales de los años 70s se pueden señalar algunas fronteras absorbentes de bajo orden. Por ejemplo (Lysmer, J. y R. Kuhlemeyer, 1992), (Clayton, R. y B. Engquist, 1977), (Reynolds, A., 1978), (Engquist, B. y A. Majda, 1979) y (Bayliss, A. y E. Turkel, 1980).
3. El fin de los años 80s y el principio de los 90s se caracterizaron por el surgimiento de las fronteras absorbentes exactas no locales basadas en el mapeo Dirichlet-a-Neumann (DtN). Para una discusión completa, ver (Grote, M. y J. Keller, 1995) y (Givoli, D., I. Patlashenko y J.B. Keller, 1998).
4. A mediados de los años 90s se desarrolló el método del estrato perfectamente acoplado (PML por sus siglas en inglés: Perfectly Matched Layer; (Bérenger, J.P., 1994).
5. Finalmente, desde mediados de los años 90s se ha venido desarrollando el método de fronteras absorbentes locales de orden superior. Ver (Givoli, D. y I. Patlashenko, 1998) y (Givoli, D. y B. Neta, 2003a) (Givoli, D. y B. Neta, 2003b).

Se han desarrollado otros métodos para tratar problemas ondulatorios en dominios infinitos en los que la formulación es tal que el problema de bordes

absorbentes no se presenta. Por mencionar algunos, se tiene el método de elementos de contorno y el método de elementos infinitos.

En este trabajo se presentan condiciones de borde absorbente para la propagación de ondas elásticas en dos dimensiones (2D). Se parte de expresiones sencillas formuladas en el dominio frecuencia-número de ondas (f-k) y mediante la transformación de Fourier, se obtienen condiciones tanto en el dominio frecuencia-espacio (f-x) como en el dominio número de onda-tiempo (k-t). La condición es un operador de interfaz que da, en el caso escalar, la derivada normal en términos de los valores de frontera y por ello se le denomina “operador Dirichlet-a-Neumann (DtN). En esta condición de absorción, la tracción (vector esfuerzo en el borde) se expresa en términos de los desplazamientos y se interpreta simplemente como la rigidez de la región exterior, término que es usado comúnmente en la ingeniería estructural.

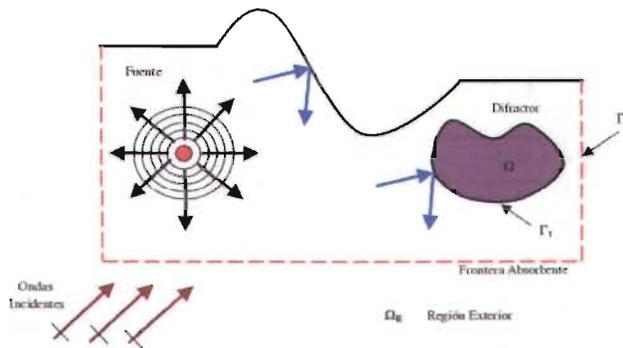


Figura 3.1: Ondas incidentes, fuente **SH**, difractor y frontera absorbente

3.1 Formulación del problema

Considerando la incidencia o propagación de ondas armónicas **SH** en un medio homogéneo, el desplazamiento anti-plano $v(\omega; x, z)$ en la dirección del eje v , satisface la ecuación de onda reducida o la ecuación de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} v = 0 \quad (3.1)$$

donde x, z las coordenadas cartesianas, ω es la frecuencia angular (rad/s), y β es la velocidad de propagación de la onda cortante **SH** $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$, μ es el módulo de cortante, y ρ es la densidad de masa. La onda plana **SH** incidente armónica es:

$$v(\omega, \kappa_x; x, z) = v_0 e^{-i\kappa_x x - i\kappa_z z} e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

donde $v_0(\omega, \kappa_x)$ es la amplitud y fase de la onda, κ_x es el número de onda horizontal, $\kappa_z = \sqrt{\omega^2/\beta^2 - \kappa_x^2}$ es el número de onda vertical, $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, y t es el tiempo.

Si se acepta que κ_x es real la onda plana dada en la ecuación 3.2 se propagará o atenuará en la dirección del eje z si $\text{Re}(\kappa_z) > 0$ o $\text{Im}(\kappa_z) < 0$, respectivamente, pues κ_z es real o imaginario. A partir de la ecuación 3.2 se puede calcular la condición de esfuerzo en la frontera mediante la derivada de v con respecto a z (en $z = 0$):

$$\frac{\partial v(\omega, \kappa_x; x, 0)}{\partial z} = -i\kappa_z v_0(\omega, \kappa_x) e^{-i\kappa_x x} e^{i\omega t} = -i\kappa_z v(\omega, \kappa_x; x, 0) \quad (3.3)$$

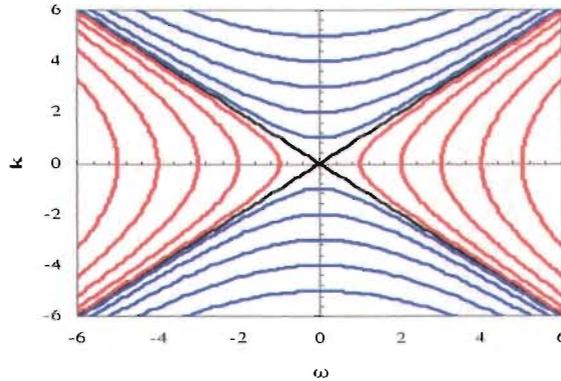
La ecuación 3.3 representa la condición de absorción en $z = 0$. En el dominio espectral frecuencia-número de onda (ω, κ_x) , la condición de absorción está dada por el factor $(-i\kappa_z)$. Considérese el semi-espacio con normal \mathbf{n} tal que $\mathbf{n}^T = (n_x, n_z) = (0, -1)$. En este caso la tracción en $z = 0$ está dada por:

$$t_y(\omega, \kappa_x; x) = -\mu \frac{\partial v(\omega, \kappa_x; x, 0)}{\partial z} = i\mu\kappa_z v(\omega, \kappa_x; x, 0) \quad (3.4)$$

la cual hace explícita la relación entre la tracción de la superficie y el desplazamiento para un número de onda horizontal dada. En diversas aplicaciones de ingeniería este operador es conocido como rigidez. De hecho (Kausel, E., 1992) interpreta la rigidez como “mecánicamente equivalente” a la condición de “absorción perfecta”. En este contexto la rigidez se define como:

$$K(\omega, \kappa_x) = i\mu\kappa_z = K_R(\omega, \kappa_x) + iK_I(\omega, \kappa_x) \quad (3.5)$$

En la figura 3.2 se muestran contornos de $K(\omega, \kappa_x)$ en el dominio (ω, κ_x) . Debido a su definición, la rigidez es real (K_R) o imaginaria (K_I). Las líneas de los contornos son hipérbolas. La parte real es positiva, se muestra en líneas azules y ocupa las regiones en las que está el eje κ_z y la parte imaginaria ocupa la misma región que el eje ω y es positiva (para $\omega > 0$) o negativa (para $\omega < 0$) y se presenta con líneas rojas. Esta selección de signos no es casual


 Figura 3.2: *Curvas de contorno de $K(\omega, \kappa_x)$*

y está gobernada por consideraciones físicas. Por ejemplo, para incidencia normal ($\kappa_x = 0$) se sabe que la tracción es proporcional a la velocidad de la partícula y eso en la frecuencia implica multiplicación por $i\omega$.

Usando la transformación de Fourier, para pasar de κ_x a x es posible escribir la rigidez en el dominio frecuencia-espacio (ω, x) :

$$K(\omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \kappa_x) e^{i\kappa_x x} d\kappa_x \quad (3.6)$$

En este dominio la tracción t_y y el desplazamiento v están relacionadas por una convolución. Como consecuencia, la tracción t_y puede expresarse como:

$$t_y(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, x - \zeta) v(\omega, \zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \zeta) v(\omega, x - \zeta) d\zeta \quad (3.7)$$

que es la contraparte de la ecuación 3.4. Esta convolución espacial exhibe a la tracción como producto de una operación sobre los desplazamientos en la frontera. Excepto por la constante elástica, la ecuación 3.7 también define al operador DtN. La rigidez en este dominio puede ser expresada en forma matricial $K(\cdot, \cdot)$, ecuación 3.8.

$$t_y = [K]v \quad (3.8)$$

Excepto por la constante elástica, la ecuación 3.7 define al operador DtN. El cual expresa las derivadas *normales* a la frontera (problema de Neumann)

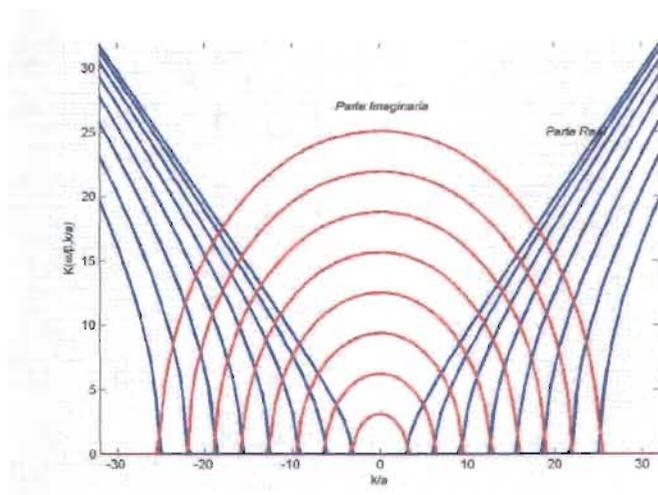


Figura 3.3: Separación de la parte real e imaginaria de $K(\omega, \kappa_x)$ para frecuencias positivas

en términos de valores del desplazamiento *a lo largo* de la frontera (problema de Dirichlet).

Por simplicidad, se considera primero la parte imaginaria K_I ver (Abramowitz, M. y I.A. Stegun, 1972):

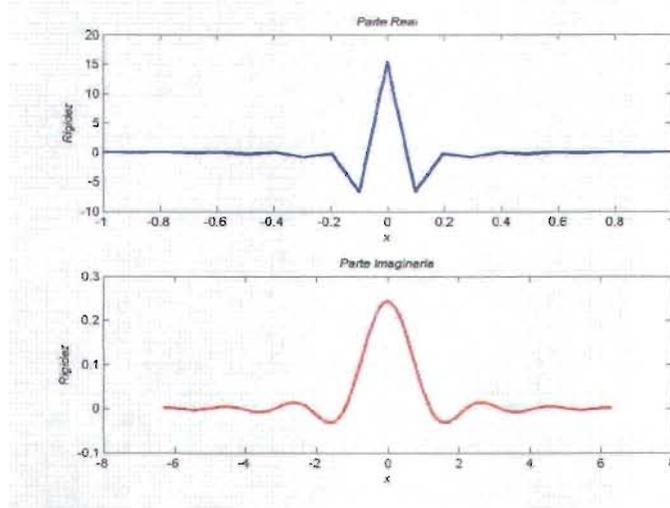
$$K_I(\omega, x) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\omega/\beta}^{\omega/\beta} \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - \kappa_x^2} = \frac{1}{2} \omega \rho \beta \frac{J_1(\omega x/\beta)}{x} \quad (3.9)$$

donde $J_1(\cdot)$ =Función de Bessel de primera especie y orden 1. La parte imaginaria del operador de rigidez se muestra con línea roja en la figura 3.3.

Para la parte real K_R se tiene:

$$K_R(\omega, x) = \frac{\mu}{\pi} \int_{\omega/\beta}^{\infty} \sqrt{\kappa_x^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2}} \cos(\kappa_x x) d\kappa_x \quad (3.10)$$

que es una integral divergente. Considerando el significado físico de la rigidez y asociándolo con el concepto de discretización, es posible obtener resultados cambiando el límite superior de la integral que es el infinito al valor de Nyquist (el máximo valor del número de onda espacial $\pi/\Delta x$, donde Δx es el intervalo de discretización espacial), ver figura 3.4.


 Figura 3.4: Parte real e imaginaria de $K(\omega, x)$

Para $\omega = 0$ se puede escribir:

$$K_R(0, x) = \frac{\mu}{\pi} \int_0^{\pi/\Delta x} |\kappa_x| \cos(\kappa_x x) d\kappa_x = \frac{\mu\pi}{2\Delta x^2} \left[2 \operatorname{sinc} c \frac{\pi x}{\Delta x} - \operatorname{sinc}^2 c^2 \frac{\pi x}{2\Delta x} \right] \quad (3.11)$$

donde $\operatorname{sinc} = \sin x/x$. Para valores discretos $x = j\Delta x$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ la parte real de la rigidez $K_R(0, j\Delta x)$, tiene una forma semejante a la parte real mostrada en la figura 3.4. Sustituyendo la ecuación 3.11 en la ecuación 3.7 da como resultado:

$$t_y = (0, x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(0, \zeta) v(0, x - \zeta) d\zeta = \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \zeta} \frac{\partial v(0, \zeta)}{\partial \zeta} d\zeta \quad (3.12)$$

el cual muestra la tracción como proporcional a la transformada de Hilbert de la derivada tangencial del desplazamiento.

Considérese el caso $\omega \neq 0$ y supóngase una onda armónica plana dada por:

$$v(\omega; x, z) = e^{-i\kappa_0 x - iq_0 z} \quad (3.13)$$

donde $\kappa_0 =$ número de onda horizontal y $q_0 = \sqrt{\omega^2/\beta^2 - \kappa_0^2} =$ número de onda vertical con $\operatorname{Im}(q_0) < 0$.

Introduciendo la ecuación 3.13, con $z = 0$, en la ecuación 3.7, se obtiene:

$$t_y(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega, x - \zeta, 0) d\zeta = e^{-i\kappa_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \zeta) e^{i\kappa_0 \zeta} d\zeta \quad (3.14)$$

Considerando la simetría de $K(\omega, \zeta)$ con respecto a ζ , la última integral en la ecuación 3.14 puede escribirse como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \zeta) \cos(\kappa_0 \zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} (K_R + iK_I) \cos(\kappa_0 \zeta) d\zeta = \mu i q_0 \quad (3.15)$$

que muestra un comportamiento discontinuo, tanto de la parte real como de la imaginaria en la integral de rigidez. Considerando la parte imaginaria de la ecuación 3.15 se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_I(\omega, \zeta) \cos(\kappa_0 \zeta) d\zeta = \begin{cases} \mu \sqrt{\omega^2/\beta^2 - \kappa_0^2} & \text{si } |\kappa_0| \leq |\frac{\omega}{\beta}| \\ 0 & \text{si } |\kappa_0| > |\frac{\omega}{\beta}| \end{cases} \quad (3.16)$$

Este resultado proviene de un caso especial de las integrales de Weber-Schafheitlin (Abramowitz, M. y I.A. Stegun, 1972), una aplicación del tema ver (Iturraran, U., F.J. Sánchez-Sesma, y F. Janod, 2004). Por otra parte se puede demostrar que la parte real nos lleva a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_R(\omega, \zeta) \cos(\kappa_0 \zeta) d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{si } |\kappa_0| \leq |\frac{\omega}{\beta}| \\ \mu \sqrt{\kappa_0^2 - \omega^2/\beta^2} & \text{si } |\kappa_0| > |\frac{\omega}{\beta}| \end{cases} \quad (3.17)$$

Las integrales de las ecuaciones 3.16 y 3.17 pueden parecer obvias ya que reproducen las tracciones para una onda plana armónica. Sin embargo, revelan algunas propiedades importantes: las tracciones de las ondas planas homogéneas se relacionan con la parte imaginaria de la rigidez, mientras que la parte real se relaciona con las ondas inhomogéneas en el dominio frecuencia-espacio. Matemáticamente estas ondas son un artificio relacionado con un sistema de referencia Cartesiano. Sin embargo, en algunos casos la existencia de interfaces produce ondas superficiales físicas que tienen una participación significativa de ondas inhomogéneas.

La estructura del operador de rigidez que estudiamos explica porqué los amortiguadores viscosos han sido usados con éxito en distintos problemas, por el cual es razonable aceptar que una buena parte de las ondas difractadas son ondas planas homogéneas. Por otro lado, se sabe que en una región limitada todas las soluciones de la ecuación de onda admiten representaciones en términos de expansiones de ondas planas, (Sánchez-Sesma, F.J., I. Herrera y J. Avilés, 1982).

Para pasar al dominio del tiempo-espacio (t, x) se considera de nuevo la transformación de Fourier:

$$K(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, x) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.18)$$

Para una función causal, $f(t) = 0$ en $t < 0$, la parte real e imaginaria de la transformada de Fourier forman un par de Hilbert, i.e., cada una de ellas es la transformada de Hilbert de la otra (Aki, K., y P.G. Richards, 2002, Aki y Richards, 1980). Considerando la transformada inversa del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, puede mostrarse que para una función causal las contribuciones de la parte real e imaginaria de la transformada de Fourier dan $0.5f(t)$ para $t > 0$ mientras que para $t < 0$ dan $0.5f(-t)$ y $-0.5f(-t)$, respectivamente. Para tiempo negativo se eliminan y la función $f(t)$ para $t > 0$ se reconstruye en dos mitades. Cada mitad surge de la parte real e imaginaria de la transformada de Fourier, respectivamente.

Suponiendo, por razones estéticas, que nuestro operador de rigidez sea causal las contribuciones del dominio frecuencia-espacio al dominio del tiempo-espacio son iguales. Por lo tanto, para tiempos positivos, sólo se requiere la contribución de K_R o de iK_I y duplicar el resultado para $t > 0$. Como K_R es más difícil de tratar explícitamente (debido a su carácter de distribución, tiene sentido sólo con una convolución espacial), preferimos trabajar sólo con la parte imaginaria. Por lo tanto, se tiene:

$$K(\omega, x) = 2iK_I(\omega, x) = 2i\omega \frac{\rho\beta}{2} \frac{J_1(\omega x/\beta)}{x} \quad (3.19)$$

donde la derivada temporal es explícita en el factor $i\omega$. Por lo tanto se puede escribir:

$$K(t, x) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho\beta \frac{J_1(\omega x/\beta)}{x} \cos(\omega t) d\omega \right\} \quad (3.20)$$

para $t > 0$. Se verifica que este resultado puede escribirse como (Abramowitz, M. y I.A. Stegun, 1972):

$$K(t, x) = -\frac{\rho}{\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{H(t - x/\beta)}{(t + \sqrt{t^2 - x^2/\beta^2})\sqrt{t^2 - x^2/\beta^2}} \right) = \frac{\rho}{\pi} \frac{H(t - x/\beta)}{(t^2 - x^2/\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.21)$$

donde $H(t)$ es la función escalón de Heaviside. $H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$

La relación en tiempo-espacio equivalente a las ecuaciones 3.4 o 3.7 puede expresarse como:

$$t_y(t, x) = \frac{\rho}{\pi} \iint \frac{H(\tau - \zeta/\beta)}{(\tau^2 - \zeta^2/\beta^2)^{\frac{3}{2}}} v(t - \tau, x - \zeta) d\tau d\zeta \quad (3.22)$$

que exhibe a la condición absorbente como una convolución doble en el dominio del tiempo-espacio. Lo compacto de este resultado es llamativo. Se trata de un núcleo o kernel simétrico fuertemente singular. Esta es una integral hipersingular. Tal vez este resultado permita explicar las dificultades para encontrar la solución general de absorción en el dominio del tiempo, cosa que continua siendo un desafío.

3.2 Aplicaciones

A continuación se tratan dos casos extremos con los que se estudian las características de la condición de borde absorbente que se propone en el dominio de la frecuencia. En estos problemas la solución de las tracciones se conoce de antemano y le llamaremos “exacta”; se busca calcular la tracción a partir de datos en la frontera y para ello se consideran dos configuraciones: un dominio semi-infinito con una fuente cilíndrica a una distancia b de la frontera y una región circular con una fuente semejante de ondas **SH** excéntrica. Las tracciones en la frontera se calculan mediante el operador de rigidez correspondiente y se comparan con los valores exactos:

1. *Frontera plana.* Se aplica una fuente cilíndrica **SH** a una distancia b del centro de la zona discretizada. La longitud de la frontera plana esta dada por $2\pi a$, r es la distancia entre la fuente y un punto en la frontera plana, x es la distancia entre el centro del borde plano y el punto de interés. Para los cálculos se utilizan los valores $a = 2$, $b = 2$ y la frecuencia varía desde 0.5 hasta 4Hz.
2. *Frontera con forma circular.* Se aplica una fuente cilíndrica **SH** a una distancia b del centro de la circunferencia sobre el eje x . El perímetro de la circunferencia es $2\pi a$, donde $a =$ distancia del centro a un punto sobre el borde $r =$ es la distancia entre un punto de interés en el borde a la fuente como se muestra en la Figura 3.5. Para los cálculos $a = 10$, $b = 2.5$ y la frecuencia f varía desde 0.5 hasta 0.9Hz.

En las figuras 3.6 y 3.7 se presentan los resultados obtenidos de rigidez y de tracción en el dominio de la frecuencia para la frontera plana (figura 3.6) y la de forma circular (figura 3.7).

Para el caso plano (figura 3.6), la gráfica superior izquierda muestra las curvas de la rigidez en el dominio frecuencia-número de onda $K(\omega, \kappa)$ para

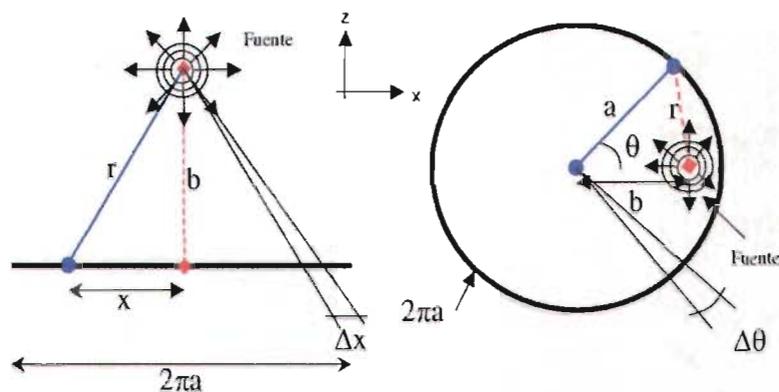


Figura 3.5: Geometría de las fronteras en forma, a) plana y b) circular, dada una fuente cilíndrica SH

8 frecuencias con $\Delta f = 0.5Hz$. Estas curvas son las mostradas en la figura 3.3 sólo que se muestra la parte positiva de la frecuencias y de la rigidez. En la gráfica superior derecha se muestran las curvas de la rigidez en el dominio frecuencia-espacio y se llega a ellas por medio de la ecuación 3.6 que es la transformada de Fourier del operador en el dominio frecuencia-número de onda $K(\omega, \kappa)$. Las curvas azules muestran la parte real del operador de rigidez y las verdes la imaginaria. Estas curvas se pueden apreciar con detalle en la figura 3.4. En las dos gráficas inferiores se muestran los resultados de la tracción en el dominio (f, x) comparados con los exactos en la parte real e imaginaria, se aprecia que el acuerdo entre ambos resultados es muy bueno y solamente en frecuencias bajas tiende a deteriorarse un poco, si bien la distribución espacial conserva la forma.

Para el caso circular (figura 3.7), la gráfica superior izquierda muestra el operador de rigidez $K(\omega, n/a)$ para varias frecuencias en función del número de onda normalizado n/a para 8 frecuencias con $\Delta f = 0.05Hz$. Estas curvas se obtienen a partir del tratamiento propuesto por (Givoli, D. y J.B. Keller, 1990) mediante funciones especiales (de Bessel de tercera especie o de Hankel). En la gráfica superior derecha se muestran las curvas de la rigidez en el dominio frecuencia-espacio (ángulo) (f, θ) y se llega a ellas de la misma forma que en el problema plano por medio de la ecuación 3.6. En las dos gráficas inferiores se muestran los resultados de la tracción en el dominio

(f, θ) comparados con los exactos en la parte real e imaginaria, y se ve que de igual forma que en el problema plano los resultados son semejantes a los exactos.

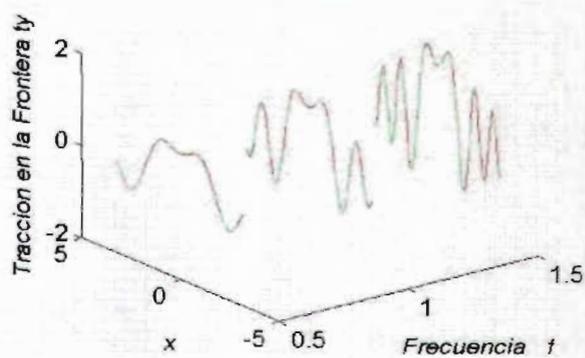
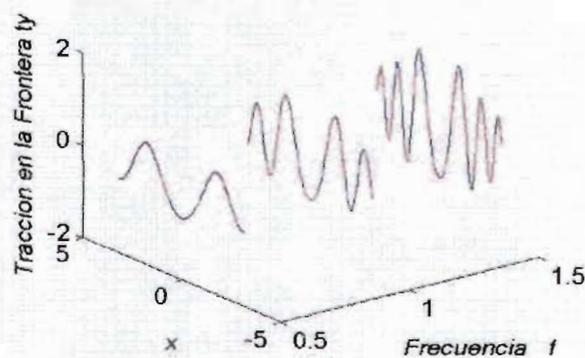
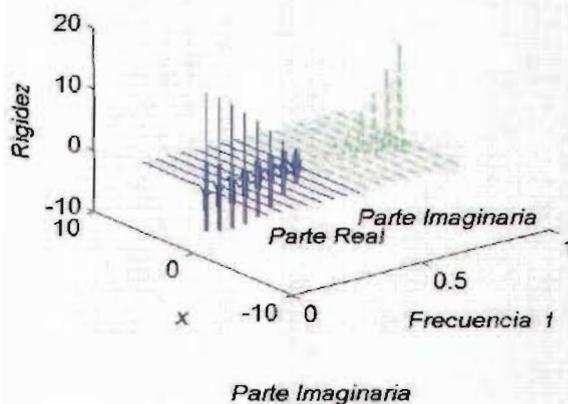
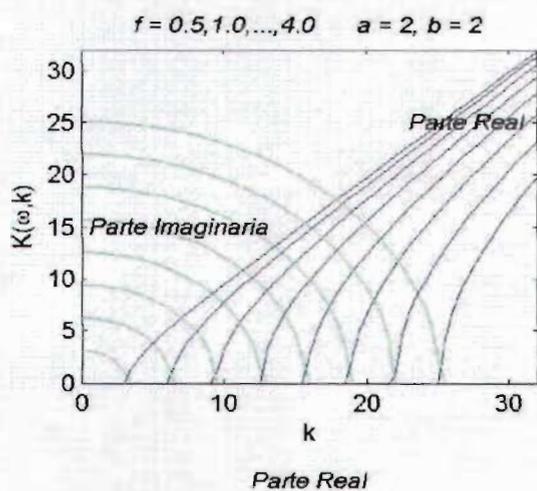


Figura 3.6: Resultados en la frontera plana

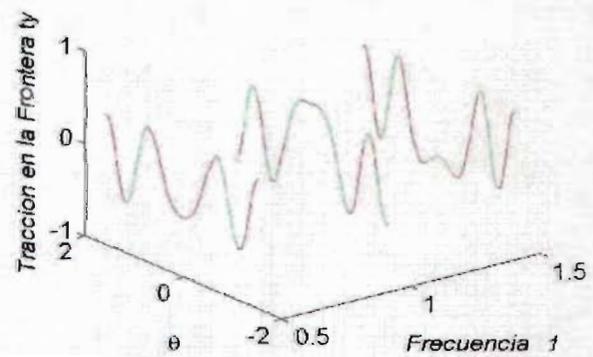
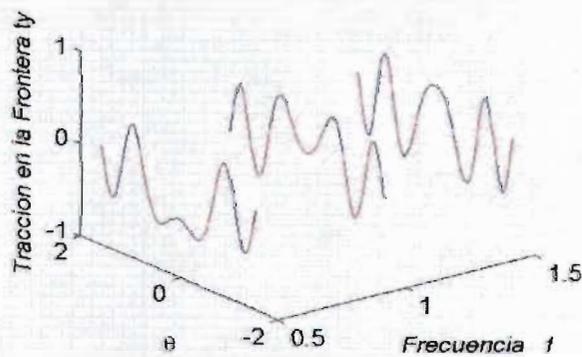
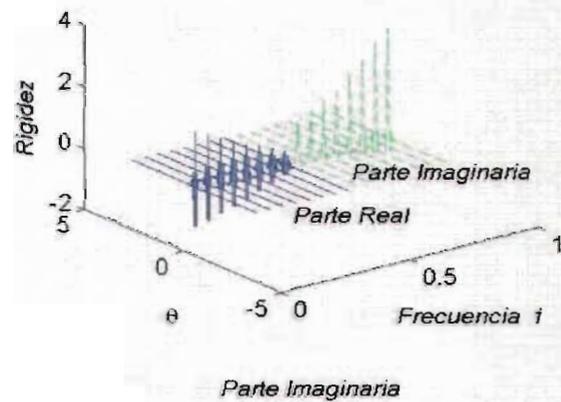
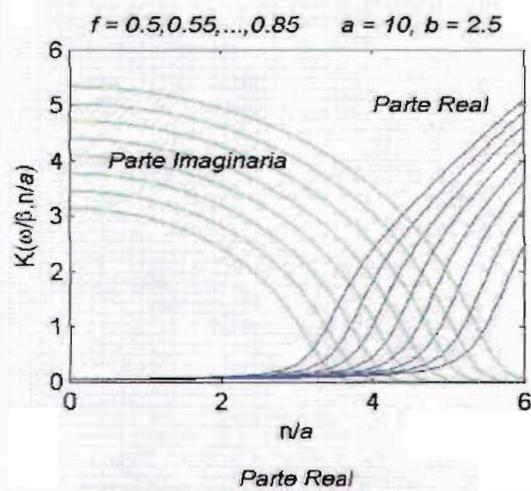


Figura 3.7: Resultados en la frontera circular

Capítulo 4

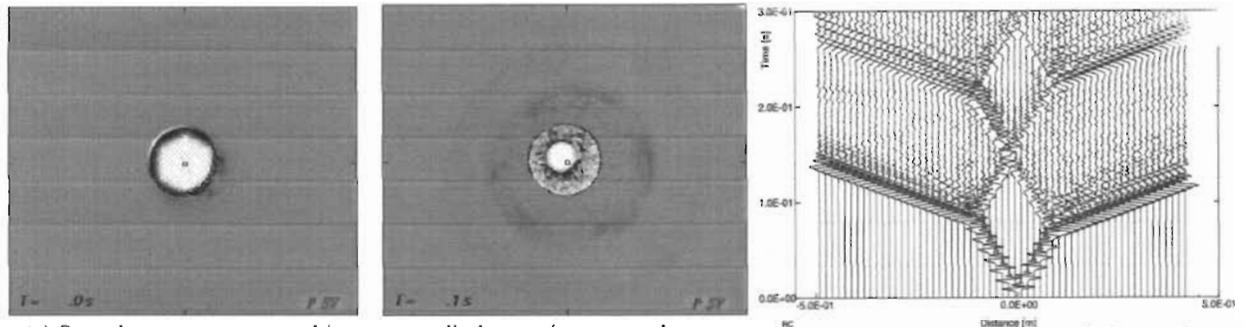
Aplicaciones prácticas

Las diferencias finitas pueden ser aplicadas en diversos problemas de la ingeniería, y uno de ellos es el estudiar los efectos de la difracción causados por una fuente monopolar dentro de un pozo fluido que está rodeado de un medio elástico con un porcentaje de fluctuación aleatoria en las propiedades elásticas (velocidad de las ondas compresionales α , velocidad de las ondas de corte β y densidad ρ) de hasta 20% y con inclusiones fluidas de distintos tamaños y distribuidas aleatoriamente. Para dar solución a este problema se tomó el esquema de diferencias finitas alternadas con mallas triangulares que fue introducido por (Magnier, S.A., P. Mora, y A. Tarantola, 1994). Se analiza cómo varía la señal que llega a los receptores cuando cambian las propiedades del medio exterior, el número y tamaño de las inclusiones fluidas. Se estudia el caso de pozos abiertos y con cemento para ver cómo se modifica la forma de la onda por la presencia de la pared recubierta con cemento.

El tipo de roca que rodea un pozo afecta la propagación de las ondas acústicas en el pozo que está lleno de un fluido. Por lo que tanto la amplitud como la velocidad de fase de las ondas está en relación con las propiedades de la formación que rodea al pozo. Dicha información es necesaria para estimar permeabilidad, isotropía transversal, velocidad de la onda de corte (Ellefsen, K.J., C.H. Cheng, y N. Toksöz, 1991) y discontinuidades como capas o fracturas (Paillet, F. y C.H. Cheng, 1991). (Plona, T.J., B.K. Sinha, *et al*, 1999), (Gelinsky, S., D. Patterson, *et al*, 1998), (Parra, 1999), entre otros han usado las características de las relaciones de dispersión como una herramienta básica en sus modelos y predicciones. Aquí se estudia el caso de dos dimensiones obteniendo la respuesta en una serie de receptores debido a una onda compresional emitida por una fuente que se encuentra en el interior

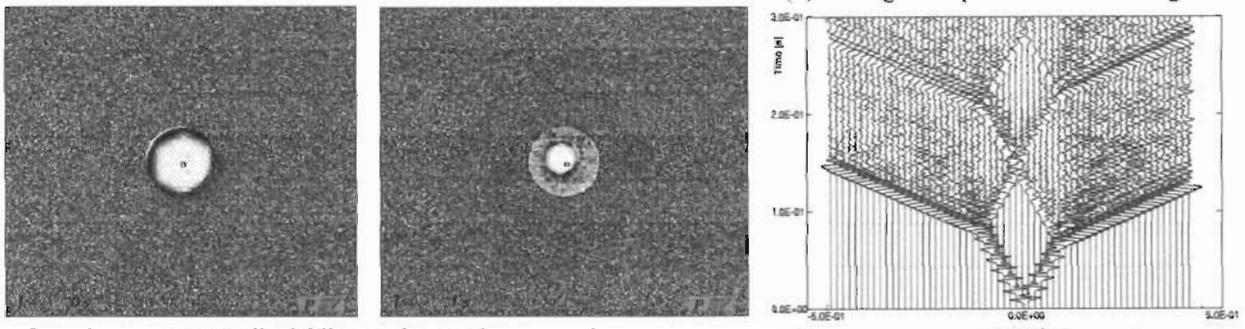
del pozo con fluido.

A continuación se presentan resultados para medios homogéneos, débilmente heterogéneos donde se añade un 20% de fluctuación en las velocidades, densidades y atenuación. También se muestran medios donde se incluyen 800 difractores fluidos (aceite) de distinto tamaño que varía entre 5 y 9 veces Δx aleatoriamente. Se consideran propiedades de roca de carbonatos ($\alpha = 6.0\text{km/s}$, $\beta = 3.0\text{km/s}$, $\rho = 2.5\text{km/m}^3$, $Q_P = 300$ y $Q_S = 150$). Con respecto al amortiguamiento se ha tomado el enfoque de (Hestholm, S.O. y R. Bent, 2000) y (Robertson, J.O., J. Blanch, y W.W. Symes, 1994). Se usa una fuente temporal de excitación con un ancho de pulso de $T = 4\mu\text{s}$ por lo que la frecuencia máxima es de 245kHz, ver (Herman, R.B., 1979). El número de puntos en la malla por longitud de onda mínima es de 6. La fuente está ligeramente fuera del centro. Para reducir las reflexiones se usa una capa absorbente del tipo Cerjan (Cerjan, C., D. Kosloff, *et al*, 1995), con una zona de absorción de 20 puntos de la malla en las cuatro fronteras del dominio interno. Se considera un pozo de 10cm de radio, el casquete del cemento anular es de 2cm de grueso. Las propiedades de la capa de cemento son ($\alpha = 6.0\text{km/s}$, $\beta = 3.0\text{km/s}$, $\rho = 6\text{km/m}^3$, $Q_P = 800$ y $Q_S = 400$). Los resultados se muestran en la figura 4.1, y se aprecia la propagación de la onda através de los distintos medios, fluido, cemento y sólido.



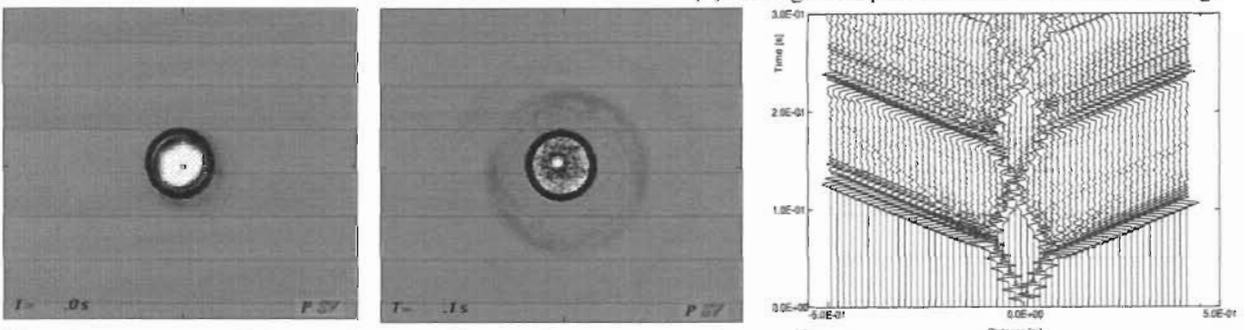
(a) Snapshots para un pozo abierto un medio homogéneo en carbonatos

(b) Sismogramas para un medio homogéneo



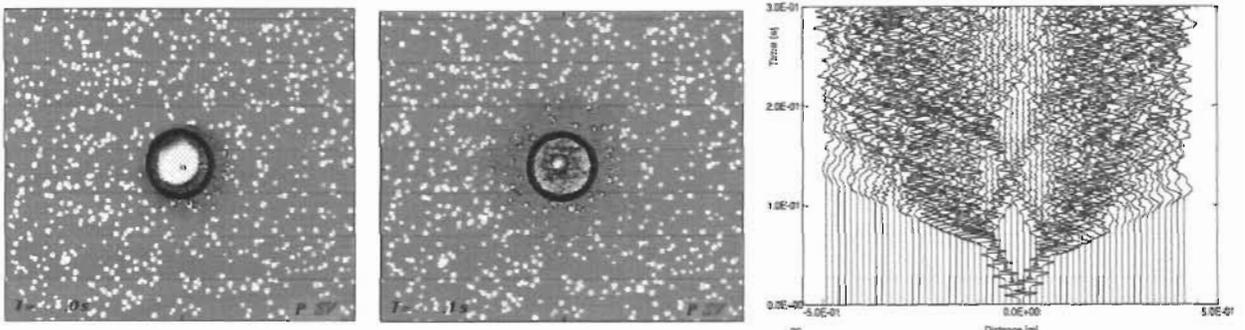
(c) Snapshots para un medio debilmente heterogéneo en carbonatos

(d) Sismogramas para un medio debilmente heterogéneo



(e) Snapshots para un medio homogéneo en carbonatos (pozo con casquete)

(f) Sismogramas para un pozo con casquete



(g) Snapshots para carbonatos, pozo con casquete y 800 inclusiones con aceite

(h) Sismogramas para un medio fuertemente heterogéneo

Figura 4.1: Snapshots y sismogramas sintéticos para carbonatos con distintas configuraciones

Conclusiones

Método de la matriz global

Se implantó esta técnica que tiene la ventaja de la sencillez y no sufre de las inestabilidades del método de Haskell en los casos de incidencia supercríticas de ondas **SV**. Esta manera de proceder puede ser útil para inferir el campo de ondas aparente en vecindad de una estación de registro y para extrapolar el movimiento a puntos cercanos.

Diferencias finitas

Se mostró que los esquemas de diferencias finitas centradas y alternadas para mallas rectangulares trabajan eficientemente en el dominio del tiempo. En el dominio de la frecuencia se encontraron muchos problemas, ya que se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales muy grande que acumula errores, por ésta razón los resultados no fueron mostrados. Estos errores se hacen evidentes al antitransformar los resultados al dominio del tiempo. Por lo que es necesario implementar otros modelos que den solución a este problema. La estructura porosa de la matriz de coeficientes que se genera debe explotarse mediante esquemas iterativos eficientes.

Las mallas triangulares resultaron buena elección en el problema de aplicación, además de que con su configuración es fácil simular pequeñas inclusiones.

La mayor ventaja de las diferencias finitas es que se pueden resolver fácil y rápidamente dominios espaciales homogéneos y heterogéneos muy grandes.

Fronteras absorbentes espectrales

Existe una gran variedad de condiciones de absorción que generalmente son eficientes en el dominio de la frecuencia, sin embargo cuando se trata de resolver el problema en el dominio del tiempo surgen dificultades y el asunto es de interés en la literatura especializada. Por esa razón, en este trabajo se busca aplicar un nuevo método que utiliza el análisis de Fourier para resolver el problema de absorción en distintos dominios: frecuencia-número de onda (ω, κ) , frecuencia-espacio (ω, x) , tiempo-número de onda (t, κ) y tiempo-espacio (t, x) .

El problema de absorción en el dominio de la frecuencia con el método de las fronteras absorbentes espectrales está resuelto en lo fundamental. Sin embargo, en el dominio del tiempo queda mucho por hacer ya que las ecuaciones involucradas tienen integrales hipersingulares. Actualmente, se trabaja en el dominio del tiempo y los resultados obtenidos son efectivos únicamente para incidencias pequeñas $-30 \leq \theta \leq 30$.

Se ha presentado una nueva condición para simular fronteras absorbentes, para ondas planas homogéneas en el dominio de la frecuencia en dos formas diferentes (plana y circular) mostrando que los resultados son muy buenos ya que prácticamente coinciden con los analíticos. Esto sugiere aplicaciones en diversos problemas en el dominio de la frecuencia. Los resultados en el dominio del tiempo requerirán esfuerzos adicionales.

Aplicaciones

Se han explorado diferentes aspectos de la difracción de ondas en inclusiones cilíndricas que se encuentran en medios heterogéneos usando diferencias finitas con mallas triangulares. Cuando se comparan los sismogramas sintéticos para inclusiones cilíndricas con y sin casquete en medio débil y fuertemente heterogéneos se observa que contienen rasgos especiales que pueden revelar la naturaleza del medio que rodea a la inclusión. Además se afirma que las mallas triangulares ofrecen la flexibilidad de modelar configuraciones cilíndricas con coordenadas cartesianas evitando los problemas de las coordenadas cilíndricas.

Bibliografía

- Abramowitz, M. y I.A. Stegun (1972). *Handbook of mathematical functions*. Dover.
- Aki, K. y P.G. Richards (1980). *Quantitative Seismology, theory and methods* (1st ed.). W. H. Freeman and Company.
- Aki, K., y P.G. Richards (2002). *Quantitative Seismology* (2th ed.). University Science Books.
- Alford, R.M., K.R. Kelly, *et al* (1974). Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics* **39**, 834–842.
- Bayliss, A. y E. Turkel (1980). Radiation boundary conditions for acoustic and elastic calculations. *Commun. Pure Appl. Math.* **33**, 707–725.
- Bérenger, J.P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.* **114**, 185–200.
- Bowman, F. (1958). *Introduction to Bessel functions* (1st ed.). Dover Publications.
- Cerjan, C., D. Kosloff, *et al* (1995). A non-reflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equation. *Geophysics* **50**, 705–708.
- Chapman, S.J. (2004). *Fortran 90/95 for Scientist and Engineers* (2nd ed.). McGraw Hill.
- Clayton, R. y B. Engquist (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bulletin of the Seismological Society of America* **67**, 1529–1540.
- Dablain, M. (1986). The application of high-order differencing to the scalar wave equation. *Geophysics* **51**, 54–66.

- Ellefsen, K.J., C.H. Cheng, y N. Toksöz (1991). Applications of perturbation theory to acoustic logging. *Journal of Geophysical Research* **96**, 537–549.
- Ellis, T.M.R., I.R. Philips, y T.M. Lahey (1994). *Fortran 90 Programming*. Addison-Wesley.
- Engquist, B. y A. Majda (1979). Radiation boundary conditions for acoustic and elastic calculations. *Commun. Pure Appl. Math.* **32**, 313–357.
- Fornberg, B. (1987). The pseudospectral method: Comparisons with finite differences for the elastic wave equation. *Geophysics* **52**, 483–501.
- Fung, Y.C. (1965). *Foundations of solid mechanics* (1st ed.). Prentice Hall.
- Furumura, T., B.L.N. Kennett y K. Koketsu (2003). Visualization of 3D wave propagation from the 2000 Tottori-ken Seibu, Japan, earthquake: Observation and numerical simulation. *Bulletin of the Seismological Society of America* **93**, 870–881.
- Furumura T. y H. Takenaka (1996). 2.5-D modelling of elastic waves using the pseudospectral method. *Geophysic Journal International* **124**, 820–832.
- Gelinsky, S., D. Patterson, *et al* (1998). Anisotropy permeability in fractured reservoirs from integrated acoustic measurements. *68th Annual International Meeting Society Exploration Geophysicists*, 956–959.
- Givoli, D., I. Patlashenko y J.B. Keller (1998). Discrete Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **164**, 173–185.
- Givoli, D. y B. Neta (2003a). High-order non-reflecting boundary conditions for dispersive waves. *Wave Motion* **37**, 257–271.
- Givoli, D. y B. Neta (2003b). High-order non-reflecting boundary scheme for time-dependent waves. *Journal of Computational Physics* **186**, 24–46.
- Givoli, D. y I. Patlashenko (1998). Optimal local non-reflecting boundary conditions. *Applied Numerical Mathematics* **27**, 327–384.
- Givoli, D. y J.B. Keller (1990). Non-reflecting boundary conditions for elastic waves. *Wave Motion* **12**, 261–279.

- Graff, K.F. (1975). *Wave motion in elastic solids* (1st ed.). Dover.
- Grote, M. y J. Keller (1995). On nonreflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics* **122**, 231–243.
- Haberman, R. (2004). *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems* (4th ed.). Pearson Education.
- Harris, J.G. (2001). *Linear Elastic Waves* (1st ed.). Cambridge Texts.
- Hayashi, K., D.R. Burns y N. Toksöz (2001). Discontinuous-grid finite-difference seismic modeling including surface topography. *Bulletin of the Seismological Society of America* **91**, 1750–1764.
- Herman, R.B. (1979). SH-wave generation by wave dislocation source – a numerical study–. *Bulletin of the Seismological Society of America* **69**, 1–15.
- Hestholm, S.O. y R. Bent (2000). 2D finite-difference viscoelastic wave modeling including surface topography. *Geophys. Prosp.* **48**, 341–373.
- Ihlenburg, F. (1998). *Finite element analysis of acoustic scattering* (1st ed.). Springer.
- Iturraran, U., F.J. Sánchez-Sesma, y F. Janod (2004). Scattering of elastic waves in heterogeneous media using the direct solution method. *Geophys. J. Int.* **156**, 222–236.
- Kang, T.-S. y C.-E. Baag (2004). Finite-difference seismic simulation combining discontinuous grids with locally variable timesteps. *Bulletin of the Seismological Society of America* **94**, 207–219.
- Käser, M., y H. Igel (2001). Numerical simulation of 3D wave propagation on unstructured grids using explicit differential operators. *Geophys. Prosp.* **49**, 607–619.
- Kausel, E. (1992). Physical interpretation and stability of paraxial boundary conditions. *Bulletin of the Seismological Society of America* **82**, 898–913.
- Kelly, K.R., R.W. Ward, *et al* (1976). Synthetic seismograms: A finite-difference approach. *Geophysics* **41**, 2–27.
- Knopoff, L. (1964). *Q. Reviews of Geophysics* **2**, 625–660.
- Kreiss, H.O. y J. Olinger (1972). Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations. *Tellus* **24**, 199–215.

- Lamport, L. (1994). *A Document Preparation System L^AT_EX users guide and reference manual*. Addison Wesley.
- Lysmer, J. y R. Kuhlemeyer (1992). Finite dynamic model for infinite media. *Jour. Eng. Mech. Division ASCE* **95**, 859–877.
- Madariaga, R. (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America* **66**, 639–666.
- Magnier, S.A., P. Mora, y A. Tarantola (1994). Finite differences on minimal grids. *Geophysics* **59**, 1435–1443.
- Moczo, P., E. Bystrický, *et al* (1997). Hybrid modeling of *P-SV* seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures. *Bulletin of the Seismological Society of America* **87**, 1305–1323.
- Moczo, P., M. Lucká, *et al* (1999). 3D displacement finite differences and a combined memory optimization. *Bulletin of the Seismological Society of America* **89**, 69–79.
- Newland, D.E. (1993). *Introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis* (3rd ed.). Prentice Hall.
- Paillet, F. y C.H. Cheng (1991). *Acoustic waves in boreholes*. CRC Press.
- Parra, J. O. (1999). Poroelastic model to relate seismic wave attenuation and dispersion to permeability anisotropy. Technical Report 78228-0510, Southwest Research Institute, San Antonio, Texas, U.S.A.
- Pitarka, A. (1999). 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing. *Bulletin of the Seismological Society of America* **89**, 54–68.
- Plona, T.J., B.K. Sinha, *et al* (1999). Stress-induced dipole anisotropy: Theory, experiment and field data. *SPWLA 40th Annual Symposium*.
- Reynolds, A. (1978). Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems. *Geophysics* **63**, 1099–1100.
- Robertson, J.O., J. Blanch, y W.W. Symes (1994). Viscoelastic finite-difference modeling. *Geophysics* **59**, 1444–1456.
- Sánchez-Sesma, F.J., I. Herrera y J. Avilés (1982). A boundary method for elastic wave diffraction. Application to scattering of SH waves by surface irregularities. *Bulletin of the Seismological Society of America* **72**, 473–490.

- Virieux, J. (1984). *SH*-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics* **49**, 1933–1942.
- Virieux, J. (1986). *P-SV* wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics* **51**, 889–901.