01083

Lógica y Lenguaje en Louis Couturat

Tesis
Que para obtener el grado de
Doctor en Filosofía
Presenta

Víctor Manuel Hernández Márquez

MAESTRIA Y DOCTORADO
EN FILOSOFIA

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

2005

Resumen / / Abstract

This thesis traces the development of Louis Couturat's philosophy of logic and language from his Ph. D. Dissertation (about the mathematical concept of infinite) to his controversy with the great mathematician Henri Poincaré (about the nature and scope of the new mathematical logic). *I focus especially on the neokantian view of logic and language held by Couturat in his early thought in contrast with the logicist view embraced by him in his late philosophy.* I took both notions (logic and language) not as the main subject in them selves but as key words that constantly guide Couturat's opinions on well known problems and issues of the 19th and early 20th century mathematical philosophy. The first chapter is a sketch overview of Couturat's intelectual life. The second one deals with his attempt to show, by means of an analysis of the relation between number and quantity, that mathematical infinite is a concept free of paradoxes. The third chapter examines Russell's, Poincaré's, and Couturat's conceptions, and the discussions among them, on the foundations of geometry. In the fourth chapter I try to describe Poincaré's disagreement with the logicist's view of mathematical reasoning, and how Russell and Couturat reacted to it. The work concludes with a survey of the main conclusions made in the previous chapters. One of these thesis goes against the claim that Couturat's dissertation gave strong support to Cantor's philosophy of the infinite, and from it a general conclusion will be obvious: that a revision of the standard view of Couturat's contributions to philosophy has long been overdue.

Key words: mathematical infinite, number and quantity, continuum, euclidean and non euclidean geometry, logicism, conventionalism, mathematical induction, mathematical reasoning.

Contenido

Prólogo

Louis Couturat es un filósofo francés prácticamente desconocido para la gran mayoría de quienes se ocupan de la filosofía de las matemáticas y de la ciencia. Tampoco la historia de la lógica le cuenta entre sus protagonistas y sólo los que se ocupan de la filosofía de Leibniz le conocen al menos como el responsable de haber sacado a la luz y analizado un número considerable de documentos que a la postre revelarían un Leibniz completamente ajeno e incompatible con la imagen que los estudiosos de los siglos XVIII y XIX había forjado de él. Al margen de los motivos, justificados o no, que figuran como causas de la falta de atención hacia las contribuciones de Couturat, es evidente que semejante laguna requiere cubrirse si se quiere contar con un cuadro completo de los problemas y concepciones, de finales de siglo XIX y principios del XX, que definen la transición de la filosofía matemática en lo que ahora conocemos como filosofía de las matemáticas. El propósito de este trabajo es, en este sentido, contribuir a llenar ese hueco.

Para llevar a cabo esta labor he contado siempre con el apoyo generoso y el consejo oportuno del Dr. Carlos Pereda, quien de nueva cuenta figura como mi asesor y a quien quiero hacer patente mi profundo agradecimiento. Los doctores Alejandro Herrera Ibáñez y José Antonio Robles han fungido como miembros del comité tutorial y, desde luego, sus comentarios y sugerencias me han sido de mucha utilidad y han hecho que este trabajo superara diversas deficiencias. Al final del proceso de investigación me he beneficiado con la lectura cuidadosa que la Doctora Laura Benítez, en complicidad con el Dr. Robles, ha hecho de todo el texto. No sólo me ha formulado comentarios críticos pertinentes sobre diversos aspectos del trabajo, sino que también ha contribuido mucho a mejorar la redacción del mismo. No me ha sido posible responder, por ahora, a todos sus planteamientos pero no quiero perder la oportunidad de darle las gracias por sus comentarios y por toda la atención que me ha brindado. El doctor Mauricio Beuchot también ha leído con detenimiento el texto y ha comentado conmigo varios tópicos relacionados con los temas aquí tratados. Lo mismo cabe decir del Dr. Axel Barceló y del Dr. Guillermo Hurtado. A todos ellos doy las gracias.

En la primera etapa de la presente investigación tuve oportunidad de platicar con mi amigo el Dr. Achim Jecht sobre mi interés en Couturat y gracias a él pude conocer y comentar el excelente trabajo de su maestro, Volker Peckhaus, el cual se relaciona de diversas formas con los temas y personajes aquí tratados. A él doy las gracias por ello y por el material bibliográfico que oportunamente me hizo llegar. En igual sentido quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi amigo, Dr. Tomás Chacón, sobre todo por el tiempo que le dedicó en responder a cabalidad y con inusual rapidez, mis constantes y numerosas peticiones bibliográficas. Mi antiguo compañero de aula y amigo, Gabriel Garduño, leyó la primera versión del último capítulo y formuló comentarios estimulantes que tuve muy en cuenta y por lo cual le estoy muy agradecido. Dicha primera versión la use como texto base de una ponencia que presenté en Lima, Perú en la última mesa del área de Lógica del II Congreso Iberoamericano de Filosofía.

Itzel Aguilera y Valeria Hernández, esposa e hija, me han dado el aliento necesario para llevar a cabo este trabajo. Pero, desde luego, ninguna de las personas antes mencionada es responsable de los errores que este documento pueda todavía albergar. Pido disculpas y doy las gracias a todas las personas, personal del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM, colegas y compañeros de la Universidad Autónoma Chapigo, y amigos, que de una u otra manera contribuyeron en la elaboración de este trabajo, pero que no me es posible mencionar aquí de manera individual.

Por último, durante mi estancia como estudiante del programa de doctorado de la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM fui becario del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (con número de registro 159987); asimismo, la Dirección de Difusión Cultural y la Subdirección de Apoyo Académico de la Universidad Autónoma Chapingo me otorgaron un permiso de año y medio (de enero de 2003 a julio de 2004) para dedicarme de lleno a la redacción de este trabajo y concluirla en ese plazo. Estoy en deuda con ambas instituciones y muy agradecido por su apoyo.

Víctor M. Hernández Márquez

Enero del 2005

Introducción

El presente trabajo es en cierto sentido una prolongación de mi libro *Lógica, Lenguaje y Realidad* (Chihuahua, 2001), en el cual pretendí describir la concepción absolutista de la lógica que nace con Leibniz, se desarrolla en la obra de Frege y Russell, y encuentra su máxima expresión en el *Tractatus* de Wittgenstein. En la introducción del citado texto mencionaba un hecho curioso que se me fue revelando a medida que la investigación avanzaba: el nombre de Luis Couturat aparecía con cierta regularidad en las fuentes, mientras que en la literatura secundaria, con contadas excepciones, las menciones o referencias a su obra eran mínimas o nulas. Ésta era una situación peculiar tratándose de un personaje que había promovido la carrera intelectual del joven Russell y había ejercido cierta influencia sobre él. Entonces declaraba que mi intención era cubrir esa laguna, aunque al final no había logrado hacerlo a mi entera satisfacción.

Fue así como me propuse escribir más adelante un trabajo dedicado por completo a la obra de Couturat. Al principio pensé que se trataría de una investigación relativamente sencilla ya que había leído varias obras suyas, y, en particular, *La Logique de Leibniz* me había servido como punto de referencia apropiado para establecer y justificar la compleja conexión que existe entre Leibniz y los lógicos universalistas (o absolutistas), como Frege, Peano y Russell. Sin embargo, una cosa es leer el trabajo de un pensador a la luz de las opiniones que éste tiene con respecto a otros pensadores, y otra cosa muy distinta es intentarle conocer por derecho propio. Cuando asumí este último punto de vista las cosas se complicaron más allá de mis intenciones iniciales y, en consecuencia, la investigación tomó un curso distinto, aunque no del todo, al que había planeado.

Un aspecto notable del cambio de rumbo en el proyecto de investigación tuvo que ver con la imagen que se suele ofrecer de este pensador y que yo compartía en cierta medida, pero que dista mucho de ser justa o adecuada en los detalles como en la caracterización general, aunque al mismo tiempo explica en parte la falta de atención que se le ha prestado a su obra. La leyenda sobre Couturat reza más o menos así: se trata de un matemático *fin de siècle*, que se distinguió por hacer una defensa abierta y apasionada de las teorías de Cantor en su libro *De l'infini mathematique*. Otorgó una bienvenida entusiasta, inusual y exagerada, al *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría* de Russell. Su identificación intelectual con este último fue tal, que ambos llegaron a escribir, por separado pero al mismo tiempo, sobre Leibniz llegando a las mismas conclusiones (esto es, que la metafísica de Leibniz se deduce por completo de su lógica). Posteriormente adoptó y defendió la tesis logicista de Russell expuesta en los *Principles of mathematics*, y, dedicó el resto de su vida a la difusión y a la lucha por la adopción de la lengua auxiliar *ido*, como lenguaje de uso internacional.

Las fuentes que han dado forma a esta historia son en verdad muy diversas y de peso desigual. Por ejemplo, si se observa con detenimiento la carrera académica de Couturat, se puede comprobar que no es en realidad un matemático, sino un filósofo interesado en los problemas metafísicos a los que dan lugar las ciencias, y en particular, las matemáticas. Pero se podrá pensar que algo similar podría decirse de Russell, y sin embargo, *nadie* dudaría en clasificarlo también como un matemático. Cierto. Pero si bien existen notables similitudes entre Couturat y Russell, al menos en este punto las divergencias corren a favor del último; es decir, Russell se embarcó en la filosofía después de haber estudiado por tres años matemáticas, mientras que Couturat se licenció en esta última disciplina después de haber cursado tres años estudiando filosofía, pero sobre todo, lo que parece definir por completo la cuestión es el hecho de que Couturat no cuenta con un trabajo del nivel de *Principia matemática*. Por supuesto, no faltará quien ponga en duda el valor de *Principia* como una obra propiamente matemática, si recordamos que el mismo Russell se lamentó de que se le hubiese dado a esta obra una lectura casi exclusivamente filosófica, sin reparar en los aspectos matemáticos de la misma.[1] Sea como sea, la distinción no tendría la mayor importancia de no ser por el eventual desdén que pudo haber sufrido en tanto que pensador y, con ello, haber inhibido el estudio de su obra.

Por otra parte, Poincaré parece ser el responsable de haber propiciado la opinión de que Couturat se sumó de manera acrítica a la postura neohegeliana de Russell sobre los fundamentos

[1] Cf. Russell (1976), pp. 88 y 89. Dieudonné (1983), p. 107, dedica un duro comentario a Russell al momento de tratar la controversia entre Poincaré y Couturat: "Celui qui occupe le devant de la scène et représente la tendance «moderne», c'est hélas Russell, qui, fort de sa renommé de philosophe (que je n'entends pas discuter), prétend se faire passer pour mathématicien et y réussit aux yeux de contemporains (et même encore aujourd'hui aux yeux de nombreux philosophes). En fait, ce «mathématicien» qui n'a jamais demostré un théorème nouveau, emprunte ses idées sur la logique mathématique aux travaux de pionniers de Frege et Peano, qu'il combine maladroitement en l'incroyable fatras de sa «théorie des types», que n'a même pas le mérite d'etre un système complètement formalisé".

de la geometría. El hecho no deja de ser un tanto irónico, ya que las objeciones más penetrantes que lanza Couturat a Russell parten de una postura que debe mucho al convencionalismo geométrico de Poincaré, como podremos constatar en la última parte del capítulo tercero. No obstante, algo similar puede afirmarse con respecto a Russell en relación con su libro y el de Couturat sobre Leibniz. En efecto, en varias ocasiones llegó a decir que la *Logique de Leibniz* había confirmado su tesis de que la metafísica de Leibniz descansaba por completo en su lógica. Sin embargo, en ningún momento advirtió que ni él, ni Couturat entendían lo mismo por ésta disciplina en aquella época y que, por consiguiente, sus libros en realidad se parecían muy poco. Debo confesar que este tema no se encuentra tratado en el presente trabajo, debido en parte a que ya he dicho lo esencial en mi libro anterior (pp. 51-54).[2] Pero también porque he intentado centrarme en los dos tópicos mencionados en el título de este trabajo bajo una determinada perspectiva histórica y sistemática.

Para un racionalista francés de fin de siglo, como lo era Couturat, las relaciones entre lógica y lenguaje mantienen un estatus filosófico bastante peculiar. En primer término, la lógica es una facultad del entendimiento que se manifiesta por medio del lenguaje. Como instrumento analítico, la lógica y el lenguaje, poseen ciertas ventajas, pero también se encuentran sujetos a limitaciones que se vuelven evidentes una vez que nos ocupamos en esclarecer el fundamento epistemológico del conocimiento. Es pertinente notar que las limitaciones de la lógica y del lenguaje dentro de la concepción racionalista de Couturat encuentran más tarde su contraparte en la doctrina absolutista ya mencionada, y que queda perfectamente expresada en el aseveración de Wittgenstein en cuanto que los límites de lógica fijan los límites del lenguaje y del mundo. Sin embargo, entre ambos puntos de vista existe una oposición insuperable en tanto se advierte que para la primera filosofía de Couturat, las limitaciones quedan superadas por medio del recurso a la intuición, mientras que para los universalistas lógicos no hay un más allá de la lógica, y la intuición no es más que un recurso psicológico altamente falible.

La oposición entre ambas tendencias tiene que ver principalmente con el modo como intentan explicar el tipo de conocimiento propio de las matemáticas. Según el racionalismo francés, cada vez que se pretende ofrecer una definición lógica y nominal de los conceptos matemáticos

[2] Hay, desde luego, muchas cosas que añadir a ese comentario; por ejemplo, falta señalar que Russell tiene en (1900) una idea algo distinta del principio de razón suficiente (pero también de la contingencia) en Leibniz, la cual modifica más tarde, en su reseña (1903) sobre el libro de Couturat, etc. La referencia obligada sobre este asunto es O'Briant (1979), y la introducción de R. S. Woolhouse al Vol. I de *Leibniz. Critical assessments* ofrece un panorama del lugar que ocupan ahora ambas interpretaciones.

fundamentales, se cae inexorablemente en la circularidad o en la paradoja. Es por tal motivo que Pascal y muchos otros pensadores antes y después de él, han tenido que conformarse con aceptar términos sin definición previa y afirmaciones sin demostración. Pero lo que conviene al científico no parece satisfacer al filósofo, ya que entre sus deberes primordiales se encuentra el dar una justificación trascendental del conocimiento (esto es, una justificación metafísica del mismo).

Pero, ¿cómo puede el filósofo justificar racionalmente un conocimiento que se funda en ideas que no se pueden definir, y en afirmaciones que no se pueden comprobar o demostrar y que se tienen que aceptar sin más?, ¿reposa en última instancia el conocimiento matemático en un mero acto de fe? La respuesta que encuentra Couturat a semejantes cuestiones tiene que ver con la existencia de una facultad superior: *la razón*, que es a fin de cuentas la encargada de ofrecer el fundamento sobre el cual yacen los conceptos fundamentales de la ciencia y el mecanismo por el cual se vinculan con el mundo.

En cuanto a las matemáticas, ciencia del número y la magnitud según la concepción tradicional, sus conceptos básicos reposan y encuentran su verdadero fundamento en la intuición; de ahí el famoso eslogan según el cual *el número no es un concepto, sino una intuición*.[3] Pero a diferencia de Kant, para Couturat dicha intuición no es una intuición ligada a la sensibilidad, sino todo lo contrario, se trata de una intuición puramente intelectual que se aplica al mundo físico gracias a principios igualmente racionales. Esto último es patente a través de las ideas mismas del número y la magnitud, ya que ha sido por medio de la generalización de la idea de número como se ha intentado agotar la idea racional de magnitud. O dicho de otra manera, es a causa de la magnitud como el hombre se ha visto en la necesidad de crear el número infinito, pues sin magnitud infinita no habría necesidad del infinito numérico.

Ésta es, expuesta de manera breve, la posición racionalista del joven Couturat con la cual intenta hacer frente a los finitistas franceses, y en este trabajo me propongo hacer una exposición amplia de esta primera posición filosófica (capítulo 2), y describir su desmantelamiento a favor de una postura logicista (capítulo 4), pasando por el convencionalismo racionalista en geometría (capítulo 3).

---

[3] Desde luego, para absolutistas lógicos como Frege y Russell, los términos primitivos de la aritmética (y, por consiguiente, del análisis) deben reducirse al mínimo, y remitir a conceptos lógicos fundamentales, que al no poder ser definidos, sólo se pueden mostrar. Por otra parte, para Couturat [16], p. 36, la insuficiencia de la lógica para definir las nociones aritméticas sin recurrir a la intuición, refuerza la convicción de que "no es posible definir el número, sino tan solo mostrarlo". Este tema es tratado en el cap. IV, § 7.

La conclusión que parece conveniente deducir de esas investigaciones ingeniosas y sutiles es diametralmente opuesta a la que llega Schröder. Al igual que Dedekind, considera que la noción de número extremadamente complicada, porque, incluso con el poderoso instrumento del álgebra de relaciones, no es todavía posible conseguir una definición explícita del número 3. Pero la noción de número nos parece mucho más simple, y el hecho que el álgebra de relaciones no atine a ofrecer una fórmula explícita habla más bien en contra de dicha álgebra que en contra del número en sí mismo. Esto prueba que no se pueden definir los números, incluso los más pequeños, en términos puramente conceptuales. Como se ha visto, no hay otra forma de definir un número entero que por medio de una colección particular que posee ese número; y todos los esfuerzos realizados por obtener una definición analítica encalla o desemboca en un llamado tácito a la intuición. La tentativa de Schröder no deja de ser interesante, puesto que resulta instructiva debido a su resultado negativo: puesto que, contrariamente a las intenciones del autor, viene a confirmar aquella aseveración según la cual, *el número no es un concepto, sino una intuición*, en otras palabras, que no es posible definir el número, sino tan solo mostrarlo.

Dicha tesis, la cual podría justificarse por medio de otras razones, se encuentra en conformidad con la doctrina de Kant, según la cual las verdades matemáticas, y en particular las de la aritmética pura, son juicios sintéticos a priori. No deja de tener cierto interés el constatar que la tendencia, por otro lado legítima, de los matemáticos modernos por reducir los términos primitivos de su ciencia a nociones puramente lógicas, y a limitar tanto como sea posible el papel de la intuición, en someter a la teoría kantiana a un control severo y a una suerte de contraprueba, no hace más que verificarla y consolidarla.

Perfil biográfico de Louis Couturat

"Sólo se puede confeccionar una buena fisonomía reconciliando todas nuestras oposiciones. No basta con seguir una secuencia de propiedades iguales sin reconciliar los contrarios: para poder entender el sentido de un autor, se tiene que reconciliar todos los pasajes contradictorios".

Blaise Pascal

"Toute exposition, comme disait Cournot, est nécessairement linéaire; et c'est au contraire par la multiplicité même de ses réflexions simultanées que Couturat développait sa philosophie".[1]

André Lalande

Hacia finales del siglo XIX la filosofía francesa guardaba una situación particularmente inusual y hasta cierto punto paradójica. En buena medida dicho estado de cosas era producto de los bruscos cambios políticos sufridos a lo largo del siglo así como de las distintas reformas educativas que estos cambios habían traído consigo. Sus dos antecedentes mediatos y más influyentes, el eclecticismo de Víctor Cousin (1792-1867) y el positivismo de Augusto Comte (1798-1857), se encontraban en condiciones francamente desiguales en cuanto a influencia y apoyo. El primero ocupó por dos decenios el cargo de ministro de educación durante la monarquía de Luis Felipe I y, por consiguiente, su filosofía gozaba de cierto carácter "oficial" dentro del ámbito universitario, mientras que el segundo había logrado fama internacional, sobre todo en Inglaterra, al margen de la academia y sin que este reconocimiento se viera compensado por lo menos con un nombramiento de profesor titular.

[1] "Toda exposición, como decía Cournot, es necesariamente lineal; pero precisamente al contrario, fue por la multiplicidad de sus reflexiones simultáneas como Couturat desarrolló su filosofía".

Aunque en el plano filosófico Cousin era poco o nada original, como suele ocurrir con todo eclecticismo, en el plano educativo introdujo una serie de reformas en el sistema de enseñanza pública en las cuales la filosofía como disciplina liberal jugaba un papel relevante. En primer término, el curso de filosofía representaba el requisito principal en el último año del liceo o bachillerato. En segundo lugar, y como producto de sus propias inquietudes intelectuales, añadía dos ramas más, la psicología y la historia de la filosofía, a la división tradicional de la disciplina (lógica, metafísica y ética). En tercer lugar, despojaba a la filosofía del pesado acento religioso que aún tenía dentro del sistema educativo. Al iniciar el Segundo Imperio, justo en 1853, la filosofía es eliminada del plan de estudios del liceo y no fue sino hasta diez años después, en 1863, cuando se restablecen los cursos de filosofía, aunque es hasta la gran reforma educativa de 1874 cuando recobra por completo su importancia anterior y se sientan las bases para su profesionalización. Si la filosofía no sólo conservó sino que además aumentó su prestigio dentro de la educación pública de la Tercera República fue en buena medida debido a que sus grandes reformadores eran, como Cousin, filósofos:[2] Ferdinand Buisson, director de enseñanza primaria de 1879 a 1896; Élier Rabier, director de la enseñanza secundaria, de 1869 a 1907; Louis Liard, director de enseñanza superior de 1884 a 1902. Desde luego, uno de los objetivos principales, sino es que el más importante, de los estudios filosóficos universitarios era preparar los recursos humanos necesarios para satisfacer las demandas de profesorado en los liceos. Los egresados de la Normal Superior, por regla general, ocupaban por un tiempo considerable puestos en los liceos de provincia antes de poder aspirar a una cátedra universitaria, aunque a medida que la reforma rendía sus frutos, el tiempo promedio de estancia se fue reduciendo para las nuevas generaciones. Por ejemplo, de la generación nacida en la década de 1860, sólo cuatro egresados no pasaron por los liceos de provincia: Lucien Herr (nacido en 1864), Georges Dumas (nacido en 1866), André Lalande (nacido en 1867), y Louis Couturat (nacido en 1868).[3]

[2] Un antecedente importante en el examen de los problemas de la educación pública es el libro de Antoine Cournot, quien fue inspector general y rector de las academias de Grenoble y Gijón, *Des institutions d'instruction publique en France*, 1864.
[3] *Cf.* Fabiani (1988), p. 20.

El panorama era entonces, en palabras de Gutting, el siguiente: "Había una audiencia compuesta por el público en general pero educada en los rudimentos de la filosofía, así como un número considerable de maestros de educación media con conocimientos especializados en la materia, y una enorme elite de profesores universitarios enfrascados en la investigación".[4]

El desenvolvimiento académico de la filosofía durante la Tercer República era, por consiguiente, una preocupación constante que se veía reflejada en todos los niveles. Revistas como la *Revue de Métaphysique et de Morale*, dedicaban sendos espacios en sus suplementos a resumir los exámenes de doctorado más sobresalientes y presentar los programas universitarios que se ofrecían año con año, todo esto incluso después de fundada la *Société Française de Philosophie* (en 1901), cuyo boletín registraba, además de sus sesiones de discusión, toda actividad docente relacionada con la disciplina.[5] Una consecuencia importante y pocas veces advertida es la concepción de la filosofía que se derivaba, de manera natural y tácita, de la práctica académica de la misma durante este periodo. Desde luego, también suele reprocharse a dicha filosofía su falta de originalidad,[6] pero con igual frecuencia semejante observación olvida que para sus propios actores la filosofía había dejado ya de ser obra de una sola cabeza, de un solo sistema, y que como tal requería del consenso y de la participación activa de toda la comunidad filosófica. Este

---

[4] Gutting (2001), p. 5.

[5] Esta era en verdad una línea editorial de la revista ya que, como recuerda Merllié (1993, p. 80), "desde los primeros números se afirma sin reparos la voluntad de escrutar las instituciones de enseñanza de la filosofía"; en contraste, si bien "la *Revue Philosophique* no ignoraba las cuestiones importantes relativas a la enseñanza, de cualquier forma les concedía mucho menos espacio"(p. 81). Además, tanto el Primer Congreso de Filosofía como la *Société* se encontraban directamente relacionadas con el equipo de la *Revue de Métaphysique*.

[6] Por ejemplo, Gutting señala que "el privilegio alienta la complacencia intelectual y desanima la creatividad que puede surgir desde un cuestionamiento radical debido a pensadores socialmente menos seguros. Con la excepción notable de Bergson, los filósofos de la Tercera República de los primeros años trabajaban dentro de una línea relativamente estrecha definida por su formación en la historia del pensamiento, sus ideales morales burgueses, y la realidad política de su época" (p. 6). Pero esto no es más que un cliché ideológico, o, en el peor de los casos, una sociología de la filosofía muy pobre ¿acaso el pensamiento de Nietzsche o el de Frege, por mencionar dos ejemplos opuestos, se dejan explicar en estos términos? Por otra parte, la Tercera República no era en lo absoluto un oasis de estabilidad social; por el contrario, a menudo se vio amenazada tanto en lo interno como lo externo. Al respecto, véase Weber (1989), en particular el cap. 5. Rollet (2000, p. 1) afirma, por su parte, que "la filosofía francesa del cambio de siglo constituía a la vez una edad negra y dorada. Negra porque la filosofía de esta época no logra establecer verdaderamente una escuela y reside por lo regular encerrada en un espiritualismo y un neokantismo sin mayor originalidad. Edad dorada porque los trastornos administrativos, disciplinarios e ideológicos que afectan el campo de la filosofía dan testimonio de cierta vivacidad".

es, de hecho, el espíritu que anima la organización del Primer Congreso Internacional de Filosofía, como lo constata perfectamente la elocución de apertura de Émile Boutroux (1846-1921) en su calidad de presidente general del congreso:

> Solidaria de las ciencias, la filosofía participa en cierta medida de la misma ley de desarrollo, la cual no consiste en otra cosa que en la división del trabajo y en la convergencia de esfuerzos; es decir, en la organización de la investigación... La filosofía, obra de unificación, supone un único espíritu. Toda la ciencia bajo un sólo espíritu: tal es el postulado... La ciencia enciclopédica no será más una abstracción, una palabra vacía, si los hombres, entera y fuertemente unidos, aprenden a formar un tesoro común de todas las adquisiciones intelectuales... Y, no me engaño, no trabajamos aquí únicamente por el avance de la filosofía. Aristóteles nos enseñó que la verdadera fuente de la amistad entre los hombres es la colaboración en una tarea común, y, sobre todo, en una tarea noble y bella.[7]

Se trata sin duda de una idea muy actual de la actividad filosófica y, quizá, debido a su temprana incursión ha sido poco advertida y entendida, de tal forma que podría decirse, jugando un tanto con las palabras, que es precisamente en la falta de originalidad de la filosofía de la Tercera República en donde radica su novedad; es decir, es en la modestia con la que contempla sus resultados, en la renuncia a la especulación solitaria exenta de discusión, o al rechazo a la creación de sistemas egocéntricos inamovibles, y, por consiguiente, en su visión de la filosofía como una actividad pública en donde el ciudadano educado se encontrará, como en el caso de la ciencia, al tanto de sus problemas y propuestas. Pero no se trata únicamente de ofrecer, en la mayor proporción posible, un cúmulo de conocimientos ilustrados, sino que se piensa más bien en inculcar una actitud crítica y racional en cada uno de los ciudadanos, porque se asume como

---

[7] Boutroux (1900), pp. 507, 509, y 510. Desde luego, la claridad de la filosofía francesa es producto directo de la tradición iniciada por Descartes, pero llama la atención la forma como Bergson (1915) expone esta cualidad expresiva: "Si on laisse de côté, dans la seconde moitié du XIXe siècle, un période de vingt ou trente ans pendant laquelle un petit nombre de penseurs, subissant une influence étrangère, se départirent parfois de la clarté traditionnelle, on peut dire que la philosophie française s'est toujours réglée sur le principe suivant: il n'y a pas d'idée philosophique, si profunde ou si subtile soit-elle, qui ne puisse et ne doive s'exprimer dans la langue de tout le monde. Les philosophes français n'écrivent pas pour un cercle restreint d'initiés; ils s'adressent à l'humanité en général". [Si se deja de lado, durante la segunda mitad del siglo XIX, un periodo de 20 o 30 años en el cual un pequeño número de pensadores, bajo influencia extranjera, se apartaron de vez en cuando de la claridad tradicional, se podría decir que la filosofía francesa se ha regido siempre por el principio siguiente: no existe idea filosófica alguna, por profunda o sutil que esta sea, que no pueda y deba expresarse en el lenguaje ordinario. Los filósofos franceses no escriben para un círculo restringido de iniciados, lo hacen para la humanidad en general".

evidente que es ahí donde descansa el espíritu y la permanencia de la república como sistema social.[8] De ahí el énfasis que se le dedica en la enseñanza dentro de la nueva república. ¿Necesitamos añadir que la primera sesión del congreso, destinada a la cuestión de la enseñanza de la filosofía, era compartida junto con los asistentes al Congreso sobre la Educación Superior, que se había organizado de forma paralela? Igualmente dejará de sorprendernos que Couturat someta a discusión de la *Sociedad Francesa de Filosofía*, en una fecha tan temprana como 1913, la posibilidad de incluir lo que él denomina, bajo el ideal de la lengua auxiliar universal, *la teoría lógica del lenguaje* dentro del programa de filosofía de enseñanza media.[9]

Si matizamos o restringimos el alcance de esta nueva concepción de la actividad filosófica tendríamos que hacerlo mostrando cómo dicha concepción se había fraguado y compartido en gran medida en el seno del grupo de jóvenes fundadores de la *Revue de Métaphysique*, y que este grupo de intelectuales, sin pretender formar una nueva corriente o escuela, se dan a la doble tarea de rendir cuentas con su pasado filosófico y fijar su distancia con respecto a sus nuevos representantes, pero también, con respecto a sus antiguos maestros. No obstante, se trata de un enfrentamiento guiado por un espíritu diplomático y respetuoso, incluso a veces tímido, más que por un ánimo de revuelta radical con debates subidos de tono y descalificaciones contundentes.

En efecto, la primera entrega de la *Revue de Métaphysique*, fundada en 1893 por Xavier Léon (1865-1935),[10] contiene una presentación en la cual se establece, de manera especialmente respetuosa, sus diferencias y afinidades con los proyectos editoriales existentes. Dicha toma de posición ha dado pie a considerar el nacimiento de la revista, casi de manera exclusiva, como una

---

[8] Quizá no esté de más recordar algunas líneas de uno de los primeros escritos de Émile Chartier (1901), después conocido simplemente con el seudónimo de Alain, cuyo título, dicho sea de paso, resulta emblemático (Le culte de la raison comme fondament de la République): "Le citroyen de la République devra donc rejeter l'autorité en matière d'opinions, discuter toujours librement, et n'accepter comme vraies que les opinions qui lui paraîtront évidemment être telles" [El ciudadano de la República deberá por consiguiente rechazar cualquier autoridad en materia de opinión, deberá discutir siempre libremente y no aceptar como verdaderas más que aquellas opiniones que evidentemente se le presenten como tales". Un antecedente interesante de este espíritu es quizá el *Manuel Républicain* (1848) de Charles Renouvier.

[9] *Cf.* [103]. Llama particularmente la atención los tres primeros objetivos del programa: "De las relaciones entre el lenguaje y el pensamiento; elementos de filosofía del lenguaje. La proposición, unidad fundamental del discurso. Proposiciones sin sujeto. Distinción entre nombre y verbo, etcétera.".

[10] Con la colaboración cercana de Élie Halévy (1870-1937), León Brunschvicg (1869-1944) y Couturat.

forma de oposición *idealista* o *espiritualista* a las tendencias representadas por la *Revue Philosophique*.[11] Sin embargo, así como es fácil identificar o encasillar bajo esa categoría a algunos de los colaboradores de la revista sin que con ello nos veamos tentados a generalizar esa postura a la revista en sí misma, ni a todos sus colaboradores; es igualmente fácil constatar que su intención no era en modo alguno presentar una alternativa frente a la *Revue Philosophique*. En el caso de Couturat, podría pensarse con suficiente evidencia que su objetivo era el neocriticismo que se expresaba por medio de *L'Anné Philosophique*, dirigida por Françoise Pillon, que era la publicación heredera directa de la *Critique Philosophique* de Renouvier.

Pero entender las cosas de semejante manera, como un pleito filosófico entre distintas revistas, es suponer un proyecto y una cohesión intelectual entre escuelas y corrientes bien delimitadas que de hecho no encuentra mayor sustento en las contribuciones mismas, ni en la variedad de intereses intelectuales de los personajes involucrados.[12] Por el contrario, llama, por ejemplo, la atención que en la presentación se defina el proyecto de la revista, de manera muy general, como un punto de equilibrio entre dos extremos; es decir, "entre le positivisme courant qui s'arrête aux faits et le mysticisme qui counduit aux supertitions".[13] Pero llama asimismo la atención que semejante declaración la firme no uno de los jóvenes fundadores sino la maestra de la mayoría de ellos: Alphonse Darlu (1849-1921); de quien por cierto, Couturat no tendrá una opinión muy favorable.[14] Y de nuevo, en el caso de Couturat, su campo de acción se sitúa, por un lado, en el aspecto positivo, en el análisis de los principios y consecuencias metafísicas de las ciencias; y,

---

[11] Prochasson (1991, p. 180) y Carroy (en Thirard, 1976, p. 407) explican incluso este nacimiento como una especie de movimiento reaccionario; el primero al hablar de un *neo-espiritualismo*, mientras que la segunda al señalar que "La *Revue de métaphysique* marca el retorno heroico del espiritualismo universitario, eclipsado desde 1870 por el espíritu positivo encarnado por la *Revue Philosophique*". Merllié (1993, pp. 59 y 60) intenta ofrecer una visión más amplia.

[12] Desde luego, tampoco no es de gran ayuda caracterizar el espíritu de la *Revue de Métaphysique* como las esperanzas y proyectos de la burguesía judía (Simon-Nahum, 1993, p. 8); ya que no sabríamos qué hacer con aquellos que no son judíos, como Couturat, ni con los judíos, como Bergson y Durkheim, que poco o nada tuvieron que ver con la revista. Sobre la relación de ambos intelectuales con la *Revue de Métaphysique* véase Merllié art.cit., pp. 64-68.

[13] "Entre el positivismo actual que se detiene en los hechos y el misticismo que conduce a la superstición" (Darlu, 1893, p. 4).

[14] *Cf.* Carta de Couturat a Xavier Léon del 2 de junio de 1895. Cor. XL, Ms 359, f. 11. Citado en Prochasson art. cit., p. 114.

por el otro, en el aspecto negativo, en un examen detallado de las tesis, desde su punto de vista inaceptables, a las que ha llegado la interpretación y crítica filosófica de las ciencias, sin importar la diversidad de horizontes filosóficos que las producen; es decir, ya sean ideas de Renouvier y Pillon, de Arthur Hannequin,[15] de Édouard Le Roy, de Henri Bergson, pero siempre dentro de los límites del ambiente filosófico francés.

A esta actitud crítica le corresponde de manera complementaria la tarea de heraldo asumida con respecto a las tendencias extranjeras que considera importante dar a conocer e introducir en el ambiente intelectual francés. Tal es el ánimo que alimenta sus textos sobre el álgebra de la lógica de Schröder, MacColl, y Poretsky, pero también sobre la ideografía de Peano, la lógica y el logicismo de Russell, así como el álgebra universal de Whitehead. Ambas tareas encuentran su cause en la *Revue de Métaphysique* aunque no de forma exclusiva, lo cual es también entendible tratándose de una revista general de filosofía.

* * *

Alexandre-Louis Couturat nació en París el 17 de enero de 1868 en el seno de una familia acomodada. Estudió la enseñanza media (el lycée) en el célebre Instituto Condorcet[16] y luego entró en L'École Normale Supérieure (en la Facultad de Letras) en la promoción del año 1887, en donde obtuvo primero, y, con honores, el grado de catedrático en filosofía, en 1890; y, después de cursar un año más en la Facultad de Ciencias, obtuvo la licenciatura en matemáticas el 25 de julio de 1892. Entre sus maestros, en este último campo, destacan Jules Tannery (1848-1910),[17] Émile Picard (1856-1941),[18] Camille Jordan (1838-1922)[19] y Henri Poincaré (1854-

[15] (1856-1905). Profesor (desde 1885) de la Facultad de Letras y catedrático (desde 1891) de historia de las ciencias en la Facultad de Medicina de la Universidad de Lyon. Su libro *Introduction a L'Etude de la Psycologie* (1890) motivó el primer texto publicado de Couturat [1], y su *Essai Critique sur L'Hipotèse des Atomes dans la Science Contemporaine* fue también objeto de una amplia reseña (*cf.* [8] y [9]), que tendremos oportunidad de comentar más adelante. Asimismo, Couturat dedica su edición de los *Opuscules et Fragments inédits* [IV] a Hannequin, quien además era pariente suyo.

[16] Una parte importante de la intelectualidad francesa de finales de siglo pasó por esa institución educativa, como Marcel Proust, Daniel y Élie Halévy, así como Xavier Léon, fundador de la *Revue de Métaphysique et de Morale*.

[17] Hermano menor del filósofo e historiador Paul Tannery, era reconocido en particular por sus atributos pedagógicos (entre sus alumnos destacados se encuentran también Émile Borel y Jules Drach). Su mayor contribución fue en el

1912). De ellos recibe los conocimientos matemáticos pertinentes para embarcarse en la difícil tarea de enfrentarse al estatus quo filosófico de su país con su tesis sobre el infinito matemático. Sobre este libro hay la percepción de que se trata de una defensa abierta de la teoría del infinito de Cantor, interpretación sobre la cual me pronunciaré, entre otras cosas, en el siguiente capítulo; por lo pronto basta con indicar que el *Cours d'analyse* de Jordan y la *Intoduction a l'étude des fuctions d'une variable* de Tannery, cuentan con el mérito de encontrarse entre los primeros libros de texto del mundo en ocuparse de la teoría de conjuntos cantoriana.

El 12 de mayo de 1894 Couturat es nombrado maestro conferenciante,[20] sobre la obra de Platón y Lucrecio, en la Facultad de Letras de Toulouse en donde cumple sus funciones hasta el año de 1895. Se casa el 21 de abril de 1896 con Marie Joséphin Racine y poco después presenta en la Sorbona sus dos tesis doctorales *De L'infini mathematique* y *De mythis Platonicis*, el 12 de junio del mismo año, obteniendo la mención *très honorable*. Los examinadores de la primera tesis fueron Émile Boutroux (cuñado de Poincaré y aliado suyo en la disputa contra Couturat y Russell), Jules Tannery, François Évellin, y Victor Egger, mientras en la segunda tesis se encontraban el especialista en filosofía antigua Victor Brochard (1848-1907), y los filólogos Maurice Croiset y A. Bouché-Leclercq.[21]

Esta última tesis sería el punto de partida para el proyecto de un libro nunca escrito cuyo título sería *El sistema de Platón expuesto de acuerdo a su desarrollo histórico* (Le système de Platon exposé dans son développement historique). En una carta a Paul Natorp, filósofo neokantiano de

---

campo de la historia y la filosofía de las matemáticas, aunque también dio con el método de cortadura para introducir los números irracionales que se encuentra asociado a Dedekind.

[18] Las contribuciones más importantes de Picard pertenecen al dominio del análisis, la teoría de funciones, las ecuaciones diferenciales y la geometría analítica; en éste último campo demostró dos importantes teoremas que hoy llevan su nombre.

[19] Sus contribuciones fueron muy diversas dentro de las matemáticas de su época. Fue el primero en establecer un estudio sistemático de la teoría de grupos finitos. A pesar de contar con importantes resultados en esta área, es ahora más recordado en topología y análisis por su teorema según el cual una curva cerrada simple divide un plano exactamente en dos regiones.

[20] Lo equivalente al puesto de profesor asociado dentro de nuestro sistema universitario. Carolyn Eisele [(1981), p. 456] afirma que en esta misma fecha Couturat termina sus dos tesis de doctorado.

[21] Un resumen del examen de grado se encuentra en el suplemento del mes de julio del mismo año de la *Revue de Métaphysique et de Morale*, pp. 13-20.

la escuela de Marburgo, Couturat afirmaba que su tesis de latín no sería más que extracto y resumen de este proyecto,[22] del cual daría sólo un adelanto en su participación en la sección de historia de la filosofía del Primer Congreso Internacional de Filosofía (L'Évolution historique du système de Platon).[23]

Su relación y estrecha colaboración, tanto cultural como académica, con Louis Liard (1846-1917)[24] le hará entrar en contacto con la tradición algebraica de la lógica tal y como era desarrollada en Inglaterra y, a su vez, le abrirá el espacio adecuado para ocupar su segunda posición académica; es así como, después de dos años de vacaciones, el 27 de octubre obtiene un nuevo empleo en la Universidad de Caen, en donde enseña filosofía matemática y el álgebra de la lógica por dos años. Luego regresa a París para asumir una parte activa en la organización de la sección de lógica e historia de la ciencia del Primer Congreso Internacional de Filosofía llevado a cabo en 1900 y promovido por la directiva de la *Revue de Métaphysique et de Morale*. De hecho, es el responsable directo de reunir por vez primera a la vanguardia de los lógicos matemáticos de la época (McColl, Johnson, Poretskii, Schröder, Burali-Forti, Pieri, Padoa, Vailati y Peano). De hecho, dada su insistencia en conseguir la participación de Peano, es también el causante indirecto del viraje hacia la lógica de Russell.[25] Aunque su correspondencia con Peano inicia a finales de 1896[26] y ya había escrito sobre la nueva ideografía lógica y el *Formulario Matematico*

---

[22] Esta y otras cartas a Natorp, fechadas entre 1901 y 1902, aparecen debidamente editadas y anotadas por Massimo Ferrari en *Rivista di Storia della Filosofia*, 44 (1989): 115-139. La mención aparece en la página 137.

[23] "Ce mémoire,-señala Lalande [(1900), p. 496] en su informe del Congreso- qu'on ne pourra se dispenser de consulter pour se mettre au courant de l'etat actuel de cette question, résume tous les travaux les plus récents et en particulier ceux de Lutoslaviski, le grand vulgarisateur, sinon l'inventeur, de la méthode de statistique verbale et grammaticale. M. Couturat fait connaitre les résultats aux quels ont abouti ces travaux: la négation de la soi-disant période éléatico-mégarique de la pansée platonicienne, admise couramment sur l'autorité de Zeller et d'Ueberweg".

[24] Como Couturat, se había doctorado en filosofía y obtenido una licenciatura en matemáticas. Ocupó varios puestos administrativos y académicos entre los que destacan: profesor de la Universidad de Bordeaux de 1874 a 1880, rector de la Universidad de Caen, de 1880 a 1884, director general de enseñanza superior del Ministerio de Instrucción Pública, y rector de la universidad de París de 1912 hasta su muerte. Su libro sobre la corriente algebrista de la lógica inglesa, *Les logiciens anglais contemporains*, se publicó en 1878. Según Sanzo (*Op. cit.*, p. 20), fue por influencia de Jules Tannery y Liard que Couturat se da a la tarea de escribir *De l'infini mathématique*.

[25] Sobre este punto véase Verrienti (1984-85), pp. 317-320.

[26] De acuerdo con Verrienti art. cit., existen 58 cartas y 40 postales de Couturat dirigidas a Peano. La correspondencia completa se encuentra disponible en cd-rom, editado por la Universidad de Turín, y será publicada en breve en forma impresa bajo el cuidado de Clara Silvia Roero y Erika Luciano (*carteggio Peano-Couturat*).

de Peano, es en este congreso donde Couturat entra personalmente en contacto con él y con sus seguidores más destacados. Este encuentro, si bien no tan profundo como lo fue para Russell, rendirá sus frutos en al menos dos aspectos: a) Peano se une con entusiasmo a su propuesta sobre la necesidad de adoptar un lenguaje artificial de carácter internacional como medio auxiliar para la comunicación del conocimiento; y b) Giovanni Vacca le revela la existencia de los manuscritos lógicos que yacen inéditos en la biblioteca de Hannover y lo invita a estudiarlos y publicarlos.

Es así como entre 1900 y 1901 se da a la tarea de llevar a cabo este proyecto contando para ello con apoyo oficial por parte del Ministère de l'Instruction Publique. De dichos estudios saldrán a la luz dos textos fundamentales: *La Logique de Leibniz*[27] (su obra más importante, a juicio de Russell) y *Opuscles et fragments inédits de Leibniz*, su famosa edición de muchos de los manuscritos inéditos leibnicianos y fuente principal sobre la que se apoyarán las posteriores interpretaciones. Con ambos libros concursa, sin éxito, para obtener la cátedra de Historia General de Historia de la Ciencia del Collège de France. Motivado por Leibniz y conciente de las limitaciones impuestas por las barreras lingüísticas, asume un papel protagónico en la búsqueda de consenso para la adopción de un lenguaje auxiliar internacional. Con este fin asiste a los cursos de lingüística histórica y lingüística general que imparte el connotado lingüista Antoine Meillet. Después, asume cargos fuera del ámbito universitario y de la administración educativa del estado, entre los que destacan: tesorero de la *Delegación para la adopción de una lengua internacional auxiliar* (1900-1908); secretario de la misma Delegación (1908); y, por último, secretario de *l'Akademio di la linguo Ido* (1910), y editor general de la revista idista *Progreso* (1908-1914).

En 1904 asiste al Segundo Congreso Internacional de Filosofía llevado a cabo en Ginebra, donde lee un breve texto sobre la utilidad de la lógica, y, resume el estado de la cuestión con respecto a la adopción de una lengua internacional. Es en el contexto de este congreso en donde inicia la polémica contra la nueva lógica que tomará niveles más altos en la crítica de Poincaré. Después

[27] Sobre la influencia del proyecto de Hannover sobre Couturat (1901) hablaré más adelante.

de esto cesan definitivamente sus actividades docentes, con excepción de un curso impartido en el Collège de France, en 1905-6, ocupando la cátedra de Henri Bergson sobre historia de la lógica, a solicitud expresa de éste último. De aquí en adelante, la preocupación principal de Couturat tiene que ver, como en el caso de Peano, con la promoción de una lengua internacional y en el trabajo lexicográfico que da lugar a diversos diccionarios bilingües. Es así como en 1910 publica, con la ayuda destacada de Peano, el *Internaciona Mathematikal Lexico* con entradas en 5 lenguas: ido, alemán, francés, inglés e italiano.

Muere el 3 de agosto de 1914 en Ris-Orangis, el mismo día que Alemania declara oficialmente la guerra a Francia. Siendo un abierto pacifista, no deja de ser curiosas las circunstancias de su deceso: cuando volvía a su casa de campo, en Bois-le-Roi, por el camino de Fontainebleau, fue alcanzado por un pesado auto militar que viajaba a toda velocidad llevando las órdenes de movilización.

En octubre de ese mismo año Peano publicó una nota necrológica, no exenta de crítica, en la cual exaltaba el trabajo intelectual de Couturat y, en particular, su labor en el desarrollo del movimiento por la adopción de una lengua internacional. André Lalande, con quien Couturat había colaborado, entre 1902 y 1906, con las entradas para los términos lógicos para su *Vocabulaire Technique et Critique de la Philosophie*, escribió una nota más detallada que tenía como punto de partida la necrología que L. Benaerts, amigo cercano de Couturat, había escrito para el *Annuaire de l'École Normal*, en 1915.

El 18 de diciembre de 1916, La Academia de Ciencias de París, por recomendación de su antiguo maestro, Émile Picard, en su división de Historia y Filosofía de las Ciencias, le otorga de manera póstuma el premio *Binoux*, con un monto de mil francos, por el conjunto de su obra, pero notablemente por *Sur l'infini Mathematique* (sic.), *La logique de Leibnitz*, *L'algèbre de la logique*, y *Les principes des mathématiques*.

* *

Aunque la obra de Couturat se encuentra orientada principalmente hacia la reflexión filosófica sobre la ciencia, debe reconocerse que poseía además una inclinación especial por las artes y que sus habilidades como dibujante eran ampliamente reconocidas. Es interesante notar que la primera publicación de Couturat es precisamente de orden artístico. Según refiere L. Benaerts, M. Perrot, director de L'École en ese entonces, encargó al joven Couturat dibujos de varias piezas del Museo L'Ouvre los cuales aparecen en algunos números de la revista *L'Histoire de l'Art*. Asimismo, es en su tercera publicación propiamente filosófica en donde Couturat se enfrasca, por primera y única vez, en una discusión sobre la naturaleza del arte, en la cual propone una reforma del lenguaje básico de la estética por medio de una propuesta de clasificación de sus objetos, así como en un examen detenido sobre la pertinencia de las categorías propias de la disciplina (*belleza moral, expresión, sublime*, etc.,).

Por otra parte, en su descripción de la trayectoria profesional de Couturat, Carolyn Eisele afirma que entró en contacto con Russell cuando el primero se encontraba investigando la obra leibniciana. Sin embargo, sabemos que el mencionado contacto ocurrió con mayor anterioridad y, en concreto, inmediatamente después de la aparición de las reseñas que hicieron ambos a sus respectivas tesis de doctorado. Se trata sin duda de una relación intensa y amplia que se desvanece por completo justo con la prematura muerte de Couturat, pero que, debe decirse, ya venía languideciendo desde tiempo atrás debido principalmente a los intentos infructuosos de Russell por persuadir a su colega francés de volver al trabajo "serio" dentro de los campos de las matemáticas y de la filosofía. En su *Autobiografía*, Bertrand Russell[28] hace una breve pero sugerente relación de su encuentro y amistad con Couturat; la cual, desde luego merece la pena citarse y comentarse en toda su extensión, ya que representa uno de los pocos testimonios que tenemos de nuestro personaje:

Del año de 1897 recuerdo muy poco, salvo que mis *Foundations of Geometry*

[28] Russell (1967), pp. 197 y 198. Una descripción no muy diferente se encuentra en Russell (1954), pp. 29 y 30.

> fueron publicados en ese año. Recuerdo también haber experimentado un gran placer al recibir una elogiosa carta sobre el libro, escrita por Louis Couturat, a quien no había visto nunca, aunque había hecho la reseña de su libro *El Infinito Matemático*. Había soñado con recibir cartas de alabanza de extranjeros desconocidos, pero esta era la primera vez que me ocurría. Narraba en su carta cómo se había abierto paso a través de mi libro "armé d'un dictionnaire", pues no sabía inglés. En fecha ligeramente posterior fui a visitarle a Caen, en donde a la sazón era profesor. Se sorprendió de mi juventud, a despecho de lo cual se inició una amistad que duró hasta que lo mató un camión durante la movilización de 1914. En los últimos años perdí el contacto con él, debido a que se absorbió en la cuestión de un idioma internacional. Preconizaba el *ido* en lugar del *esperanto*. De acuerdo con su conversación, ningún grupo de seres humanos en toda la historia anterior de la especie humana había sido jamás tan depravado como los esperantistas. Lamentaba que el vocablo 'ido' no se prestase a la formación de un vocablo similar al esperantista. Yo sugerí 'idiota', pero no le satisfizo mucho. Recuerdo haber comido con él en París, en julio de 1900, cuando el calor era sumamente opresivo. La señora Whitehead, que tenía débil el corazón, se desmayó, y, mientras iba a buscar la sal volátil, alguien abrió la ventana. Al regresar, la volvió a cerrar firmemente, diciendo: "De l'air, oui, mais pas de courant d'air". También recuerdo una ocasión en que fue a verme a un hotel de París en 1905. Mister Davis y su hija Margaret (el padre y la hermana de Crompton y Theodore) escuchaban su conversación; Couturat estuvo hablando sin un instante de reposo durante media hora, y entonces observó que sabios son aquellos que retienen la lengua. En este punto, mister Davis, a despecho de sus ochenta años de edad, salió apresuradamente de la estancia, y yo pude oír el rumor de su risa mientras desaparecía. Durante algún tiempo, Couturat fue un ardiente paladín de mis ideas en lógica matemática, pero no siempre fue muy prudente, y, en mi largo duelo con Poincaré, supuso para mí a veces una pesada carga tener que defender a Couturat al mismo tiempo que me defendía yo. Su obra más valiosa se refería a la lógica de Leibniz. Leibniz deseaba que se pensase bien de él, razón por la cual solamente publicó su obra de segunda fila. Lo mejor de su obra permaneció manuscrita. Subsiguientes recopiladores, publicando solamente lo que juzgaban mejor, continuaron sin dar a la imprenta lo mejor de su obra. Couturat fue el primer hombre que la exhumó. A mí me complació mucho, naturalmente, ya que proporcionaba pruebas documentales para la interpretación de Leibniz que yo había adoptado en mi libro sobre él, pero sobre bases que, sin la obra de Couturat, habrían seguido siendo inadecuadas. La primera vez que vi a Couturat me explicó que no practicaba ninguna rama de 'le sport'. Cuando, poco después, le pregunté si montaba en bicicleta, contestó: "Claro que no, puesto que no soy deportista". Mantuve correspondencia con él durante muchos años, y en el curso de las primeras etapas de la guerra Boer, le escribí cartas imperialistas que ahora considero sumamente lamentables.

Desde luego, la imagen de Couturat presentada aquí es muy poco favorable e incluso pareciera suponer que se trata de una persona un tanto grotesca, por no decir francamente ridícula y de escasa monta intelectual. Pero debe tenerse siempre en cuenta que esta descripción se encuentra influenciada en buena medida por la percepción negativa que Russell abrigó al final de su relación con Couturat y, como puede apreciarse, su memoria esconde más de lo que muestra. Y si se tiene debidamente en cuenta algunos aspectos importantes de esta época, tampoco es sorprendente encontrar sumamente imprecisa y distorsionada la forma como Russell rememora los acontecimientos y las personas. Además, el lector ocasional de la *Autobiografía* puede hallar bastante críptico, por no decir sin importancia, el comentario sobre nuestro personaje. Y en efecto, el texto en algunas ocasiones da por descontado que el lector cuenta con suficientes referencias sobre los temas que se están relatando, lo cual es bastante comprensible si tomamos como modelo el europeo culto de la primera mitad del siglo XX. En otras ocasiones simplemente es necesario echar mano de datos que no están a la vista incluso para ese lector modelo. Por ejemplo, Couturat era cuatro años mayor que Russell y para 1898, fecha de su primer encuentro, el primero contaba con 30 años y el segundo 26. En este sentido la sorpresa de Couturat sobre la juventud de su colega puede tomarse más como un cumplido, o, si se prefiere, como una manifestación de admiración por su notable desempeño intelectual.

Una cuestión más complicada de entender es la opinión negativa de Couturat sobre los esperantistas, la cual tiene que ver con las circunstancias particulares que rodearon la elección de la lengua internacional dentro de la Delegación formada para tal propósito. En los trabajos de 1907, la Delegación aprobó, en principio, la adopción del Esperanto pero bajo la reserva de introducir mejoras en su gramática y léxico. Muchas de estas enmiendas fueron adelantadas en las reuniones de trabajo previas, en las cuales Couturat dio a conocer su estudio detallado sobre las deficiencias en la derivación del Esperanto [VIII y 'XIV]. Las reformas aprobadas fueron caracterizadas como *proyecto ido*, y si bien los esperantistas habían acordado ceñirse a los acuerdos de la Delegación, muy pronto estalló la descalificación hacia los nuevos cambios, provocando con ello división y deserción en las filas.

En esencia, el escándalo tenía como punto de partida la forma como el proyecto de reforma se había presentado, ya que en un principio la propuesta Ido se había hecho de manera anónima y, además, presuponía que los cambios introducidos conducían a una lengua distinta del Esperanto. Más tarde se supo que dicha propuesta se debía al marqués de Beaufront, a quien se había recomendado representar los intereses esperantistas dentro de la Delegación. Desde luego, para la mayoría de los adeptos del Esperanto, incluyendo a su creador, se trataba de un acto de alta traición.

La forma como Couturat se vio envuelto en este penoso incidente no fue percibida de igual manera por todos los involucrados y, ciertamente, su honorabilidad intelectual fue a menudo puesta en entre dicho, sobre todo dentro de las filas esperantistas. Este resultado negativo era bastante obvio no sólo debido al análisis detallado que Couturat había hecho del Esperanto, sino también por su cercanía con Beaufront, con quien emprendería la mayor parte de sus proyectos lexicográficos [IX, X, XI, XVII]. En su comentario acerca del obituario de Peano sobre Couturat mencionado atrás, Kennedy hace el siguiente recuento:

> Peano valoraba la labor científica de Couturat dentro del movimiento sobre la lengua internacional (quien, según él, "elevó el estudio de la interlingüística al de la ciencia"); pero criticaba su espíritu partidario a favor del Ido, señalando que su propaganda dogmática había provocado que un número considerable de amigos y adherentes dimitiera (Aunque Peano no estuvo probablemente al tanto del papel protagonista que Couturat jugó en la intriga por la cual el Ido fue escogido como el lenguaje de la *Delégation por l'adoption d'une langue auxiliaire*).[29]

Desde luego, Kennedy no solo da por sentado la "intriga" a favor del Ido, sino que también omite aquí el hecho, reconocido solo más adelante, de que Peano llevaba también a cabo una labor proselitista encubierta, aunque ciertamente de manera muy discreta, en favor de su lengua artificial. Además, tampoco parece reconocer la mala relación que ambos llegaron a tener al final y la opinión poco favorable que Couturat se había formado de Peano, como lo constata el siguiente comentario hecho a Russell en una carta fechada el 30 de diciembre de 1912: "No nos encontramos por ahora en los mejores términos con Peano, quien nos combate por detrás con el

[29] Kennedy (1980), p. 144.

apoyo de los esperantistas. Él, que ha formado parte de la Delegación, y ha abogado por su *Latino*, se niega a reconocer su labor (no pierde la ocasión de denigrarla), y propaga una jerga semiitaliana que nada tiene de internacional. ¿Sabe como dice *signatario*? ¡*Firmatario*! Su oposición estúpida, que favorece su amor propio italiano, no hace más que retardar los progresos del ido en Italia (...) En el fondo, sólo solicita plata para su latinucho. Espero que usted no caiga en esa trampa tan grosera, y que cuando usted encuentre tiempo de ocuparse de la L. I. Estudie ido y se adhiera a la causa".[30] Como de todo este asunto me ocuparé más adelante, en el último capítulo, volvamos de nuevo a la descripción de Russell.

Dejando de lado los comentarios anecdóticos sobre la personalidad de Couturat, lo que después llama inmediatamente la atención es la forma imprecisa como Russell refiere su relación con él en cuanto al proyecto logicista y su polémica con Poincaré. Couturat no compartiría únicamente las ideas russellianas sobre lógica matemática a partir de la aparición de los *Principios de la matemática* sino también el proyecto logicista que le da sentido a este libro. No obstante, podemos decir que Couturat nunca fue un defensor ortodoxo del enfoque de la lógica russelliana, ya que dos años después de la publicación del mencionado libro de Russell aparece su breve tratado sobre *El álgebra de la lógica* (VII), que como su título muestra y P. E. Jourdain señaló en su momento ('XVI, pp. v-x), se encuentra inmerso en la tradición algebrista común a Boole, De Morgan, Peirce y Schröder (de hecho, según Lalande, este librito es una versión abreviada de la obra del *Algebre der Logik* de Schröder, lo cual es sumamente inexacto como tendremos oportunidad de ver más adelante).[31] Como mencioné antes, Couturat había entrado en contacto con dicha tradición antes de conocer los sistemas de Peano y Russell, por medio de su amigo y de alguna manera mentor, Louis Liard, quien además mantenía relaciones amistosas con Stanley Jevons y había dado a conocer en Francia el álgebra de la lógica.[32] Además, en su segundo curso impartido en la Universidad de Caen, Couturat estudiaba ya los sistema de Boole, De Morgan,

[30] *Cf.* Schmid (ed.) (2001), pp. 643-4. Citado parcialmente en Schmid (1983), p. 107.
[31] Lalande (1915), p. 247.
[32] Un año antes del libro mencionado en la nota 9, Liard había escrito dos artículos en los cuales discutía el sistema de Boole (1877a) y las reformas introducidas por Jevons (1877b).

Jevons, Delboeuf, Peirce, MacColl, Schröder y Peano; y, como veremos más adelante, hacia 1900 no se hallaba del todo satisfecho con la definición lógica de número presentada por Dedekind.

Con respecto a Poincaré debe observarse, en primer término, que su actitud crítica hacia Russell se remonta a una etapa anterior a la posición logicista adoptada por este último, teniendo como punto de partida la reseña desfavorable que hizo del *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría* y, por consiguiente, centrando el debate en el estatus fundamental de la geometría proyectiva con respecto a los distintos sistemas geométricos, así como sobre la cuestión acerca de la naturaleza del conocimiento geométrico.[33] En segundo lugar, antes de la primera pugna con Russell, Couturat había asistido al curso impartido por Poincaré sobre *los problemas epistemológicos planteados por las geometrías no euclidianas*, y en un primer momento se encontraba bajo la influencia de éste, pero dada su marcada tendencia racionalista y antipsicologista, había entrado en desacuerdos públicos con su maestro sobre filosofía de la geometría. En tercer lugar, la posterior reacción de Poincaré contra el logicismo inicia con un malentendido, al momento de atribuir a Couturat las ideas de Russell que éste da a conocer al mundo intelectual francés a través de una serie de artículos en la *Revue de Metaphysique et de Morale* y que más tarde aparecerían en forma de libro y cuyo título traduce el de Russell (*Les principles des Mathématiques*, 1905). Además, en una elaboración posterior Poincaré critica el empleo de las "nuevas lógicas", lo cual incluye tanto al programa logicista como al programa formalista asociado a Hilbert y su escuela, aunque ciertamente mostrando mayor simpatía por este último programa. Más adelante tendremos oportunidad de ponderar y evaluar ambas discusiones a fin de sopesar el papel que Couturat juega en cada una de ellas, pero por lo pronto me basta con dejar en claro que "el largo duelo" de Russell con Poincaré no inicia con sus ideas en lógica matemática como tema de debate. Y si tomamos en cuenta que el primer artículo de Poincaré contra la posición Russell-Couturat aparece en 1905 y que el físico francés muere tan

[33] *Cf.* Poincaré (1899), y la respuesta de Russell (1899), así como la contrarréplica de Poincaré (1900). Como veremos más adelante, es de hecho Russell quien lanza la primera piedra, al criticar (si bien de pasada ya que lo asimila a la posición de Cayley y Klein) el llamado convencionalismo de Poincaré. *Cf.* Russell (1897), I. § 33.

solo siete años después, podemos considerar que se trata más bien de un debate más intenso y áspero que extenso, sobre todo comparado con otras batallas libradas por Russell en su larga y fructífera vida intelectual.

Por último, un aspecto un tanto revelador es sin duda el auto reproche de Russell debido a las cartas imperialistas en torno a la guerra Boer enviadas a Couturat, y no tanto por lo que en sí nos dice sino precisamente por todo aquello que deja entrever en cuanto a la naturaleza de ese intercambio epistolar, como por la luz que dicho acontecimiento puede echar sobre el giro que Russell hubo de experimentar hacia su conocida posición pacifista. Si tomamos en cuenta que al final de la mencionada guerra Russell es ya un declarado pacifista y un decidido antiimperialista, puede inferirse que entre ambos pensadores tuvo lugar un debate singular referente a este tópico. En efecto, según documenta Anne-Françoise Schmid, de entre las 231 cartas y postales hasta ahora disponibles que Russell y Couturat intercambiaron entre 1897 y 1913, se encuentra "una discusión larga y apasionada" sobre dicho punto.[34] De hecho, si bien la política es un tema sobresaliente en la correspondencia, nos dice la autora, es en particular el asunto de la guerra Boer el más importante, "ya que éste suscita una larga polémica entre Couturat y Russell en dónde sus opiniones políticas y filosóficas son desarrolladas de forma más completa y continua que en relación con otros temas políticos".[35]

¿Qué hay en la guerra Boer que suscita un debate tan candente entre los dos jóvenes pensadores? En realidad nada sobresaliente en comparación con otros conflictos entre colonizadores, y, por consiguiente, la disputa territorial no posee por sí misma mayor interés; es decir, si el debate entre ambos pensadores adquiere mayores dimensiones se debe no la naturaleza particular del conflicto sino a la pretensión, por parte de Russell, de justificar y apoyar la intervención británica con argumentos de pretendido orden filosófico. En este sentido, Couturat no se sitúa como un

[34] Mucho antes de la mencionada edición de la correspondencia Russell-Couturat, Schmid había reportado 198 documentos. En la publicación faltan inexplicablemente al menos dos documentos. *Cf.* Schmid (ed.) (2001), pp. 435-437.

[35] Schmid (1983), p. 102 [p. 93]. Dado que existen diferencias substanciales entre la versión publicada en Aa. Vv., (1983), y la versión que aparece en *Dialectica*, el número entre corchetes referirá siempre a la primera publicación, ya que se trata de una versión anterior y más breve que la publicada en la revista.

defensor de la causa Boer sino como un abierto pacifista y antiimperialista que no puede más que hacer patente su actitud crítica minando y poniendo en aprietos las afirmaciones oscilantes de su contraparte. En este sentido, se trata de un debate en el cual Russell se encuentra a todas luces en una posición incómoda y extremadamente difícil de resolver cabalmente, ya que busca dotar de una justificación moral una empresa en la cual se encuentran en juego muchos intereses pero muy pocos principios morales. Pero además sorprende la forma como Russell presenta desde un principio las cosas y, desde luego, sorprende mucho menos la reacción de Couturat:

> Me encuentro tan afligido a causa de la desgracia de mi país que no puedo pensar en otra cosa. La filosofía me resulta un juego de niños comparada con los recientes acontecimientos. No puedo hacer nada más que abrigar la esperanza en el triunfo de nuestras tropas, debido, en primer lugar, a mi estúpido e instintivo patriotismo, pero también por motivos más profundos. El imperialismo Inglés se inspira (entre la gente educada) en la idea de Roma, en la historia de Mommsen (cuyas máximas justificarían cualquier cosa), en Carlyle, en Nietzsche, y, finalmente, en Darwin y la evolución. He aquí un sentimiento erróneo, sin duda, pero perfectamente respetable.[36]

La carta tiene como fecha el 18 de diciembre de 1899; es decir, apenas unos días después de la llamada *semana negra*, en la cual las tropas británicas sufren severas bajas en manos de un ejército Boer irregular. Y si tomamos en cuenta que fueron estos últimos quienes inician las hostilidades, uno se pregunta por qué Russell no apeló simplemente al derecho de auto defensa en lugar de intentar justificar en lo general el dominio británico más allá de sus fronteras.[37] Por lo demás, la respuesta de Couturat es, como podemos constatar, una reacción contra los *profundos* motivos que su colega dice considerar equívocos pero respetables:

> Lo que es menos respetable, o de cualquier modo menos simpático, es el imperialismo, el cual usted hábilmente analiza en términos de sus orígenes

[36] *Cf.* Schmid (1983), pp. 102 y 103.

[37] Podía incluso argumentar que el colonialismo inglés era, al menos, mucho más benévolo con los nativos que el de los Boer, ya que la abolición de la esclavitud era una añeja tradición en el imperio. No obstante, Russell se empeña más adelante en justificar el colonialismo europeo: "Hay dos grandes objetivos que todo hombre de estado ha de perseguir en cuestiones internacionales: preservar y defender la paz, b) expandir el gobierno civilizado". A lo cual Couturat replica: "¿La civilización? Los Boer me parecen igualmente civilizados que los ingleses". *Cf.* Schmid *ibid.*, p. 104.

> históricos y filosóficos. La filosofía que lo inspira, o mejor dicho, que se emplea para enmascararlo es especialmente espantosa. En su médula todos los sofismas históricos, evolucionistas, y sociológicos han sido removidos, la ética del más fuerte, la máxima de Bismarck: la fuerza antecede a la ley y el derecho. Esta no es sino la consagración inmoral y cínica del triunfo, de la adoración del *fait accompli* y de la fuerza bruta.

La discusión gira entonces, como ya he mencionado, no en la cuestión particular del conflicto Boer, sino en el intento de Russell por ofrecer una base teórica aceptable al imperialismo de su país. La posición de Couturat, por el contrario, es meramente crítica y parte de principios cosmopolitas kantianos, que a la larga Russell se ve impedido a rebatir de manera satisfactoria.

En qué medida influyó entonces este debate en la posterior postura de Russell ante la guerra y ante el imperialismo es algo que no es del todo claro. En primer lugar, tenemos la opinión del propio Russell, y repetida por algunos otros, según la cual su cambio de óptica se debió a un acto de "conversión mística",[38] y no a un profundo proceso de reflexión producto de un singular intercambio epistolar. Sin embargo, en un ensayo reciente, David Blitz pone seriamente en duda la veracidad de dicha conversión en cuanto al cambio de opinión de Russell con respecto a la guerra y al imperialismo, y atribuye a Couturat el mérito de influir en la evolución del pensamiento político de Russell: "Russell no sólo fue incapaz de refutar los argumentos pacifistas de Couturat, sino que además con su silencio y falta de respuesta reconoció que Couturat había echado por tierra sus mejores intentos de defender el imperialismo y el gobierno del más fuerte".[39]

Por otra parte, Blizt enfatiza correctamente que después de la última carta de Couturat sobre el tema, en la cual termina por reducir al absurdo el argumento final de Russell, éste último no volvería a defender, ni en privado ni en público, el imperialismo. Sin embargo, Blizt deja de lado dos importantes cuestiones íntimamente relacionadas aunque sin duda difíciles de responder: Si efectivamente el debate hizo mella en la posición de Russell. ¿Por qué se negó a reconocerlo

---

[38] *Cf.* Russell *Op. cit.*, p. 146.
[39] *Cf.* Blitz (1999-2000). De hecho, como señala el mismo autor, la historia de la conversión ya había sido cuestionada por Richard Rempel (1979) y Alan Ryan (*Betrand Russell: a political life*, 1988, p. 34), y este último al parecer se basa en el primero, pero ninguno de los mencionados autores parece haber tenido un contacto directo con la correspondencia Russell-Couturat, y, por consiguiente, incurren en otro tipo de imprecisiones (pp. 119-121).

abiertamente y a dar testimonio público de ello? ¿fue la llamada "conversión mística" una forma deliberada de ocultar esa influencia o, acaso, corresponde a otro cambio interior?

Lo que vuelve todavía más inquietante la cuestión es que se trataría de una actitud difícil de atribuir a Russell, pues sabemos de sobra que en general no dudaba en reconocer las deudas intelectuales adquiridas con otros. Este es el caso con respecto a Moore, Peano, Whitehead, y Wittgenstein, ¿por qué no habría de hacerlo con Couturat? Una posible respuesta es el desencanto con el cual Russell contemplaba las actividades idistas de su colega.[40] Pero si este es el caso, algo similar se esperaría con respecto a Peano, con quien no dejó de tener diferencias importantes, sobre todo por la negativa del italiano en asumir la causa logicista. Sea como fuere, lo único cierto es que si bien la crónica de Russell sobre Couturat es tan imprecisa, incluso en detalles nimios,[41] no externa juicio negativo alguno sobre las actividades pro idistas.[42]

En todo caso, hay más bien cierto indicio de molestia por parte de Russell, en 1908, debido a la "actitud" dogmática de Couturat, la cual le habría acarreado por reflejo cierta antipatía entre los matemáticos franceses.[43] Y en efecto, su temperamento polémico no era bien visto incluso por algunos de sus compañeros de la *Revue de Métaphysique*, como lo muestra el duro juicio de su amigo Elie Halévy: "Couturat es insoportable: hay en él un fondo de engreimiento que únicamente su idealismo cándido le impide ser completamente execrable".[44] Pero se trata en todo caso de su forma severa y quizá algo rígida a la hora de envolverse en la discusión, como parece entenderlo mejor Lalande cuando escribe: "parecía en algunas ocasiones un poco duro o despectivo en la crítica, lo cual ciertamente no representaba su verdadero ánimo, debido a que no recurría involuntariamente a las palabras habituales de atenuación y tacto como es lo más frecuente; pero cuando se le conocía mejor se veía cuán exento se encontraba de toda mala

[40] Blitz atribuye también el desencanto, hacia 1905, a "his [Couturat] somewhat simplistic presentation of mathematical logic" (p. 122, n. 9); con lo cual da por buena la versión de Russell sobre su controversia con Poincaré.
[41] *Cf.* Schmid *art. cit.*, p. 108 [p. 96].
[42] Sin embargo, en privado desaprobaba tanto a Peano como a Couturat; al respecto véase la carta a Ottoline Morrell del 25 de marzo de 1912.
[43] *Cf.* Russell (2002), p. 308.
[44] Carta de Elie Halévy a Xavier Léon (s.f./1902?). Biblioteca Victor Cousin, Ms 387, f. 64. Citada por Prochasson (1993), p. 112.

voluntad".[45]

De cualquier forma, es igualmente cierto el papel alentador que jugó Couturat en el desenvolvimiento de las ideas de Russell al menos durante los años decisivos de su carrera intelectual, tal y como lo muestra su pesada correspondencia y, en particular, las siguientes líneas:

> Aquello que señala sobre la simpatía intelectual que existe entre nosotros me causa un gran placer. De igual forma he encontrado en esta simpatía el ánimo suficiente para seguir la vía que me parecía correcta, sobre todo cuando todo el mundo pareciera guardar otra opinión... si no hubiese contado con la apreciación suya y la de Whitehead, probablemente pensaría que mis ideas no gozan de importancia alguna.[46]

En efecto, al compartir una formación académica tanto en filosofia como en matemáticas, sus intereses intelectuales también confluyen en las mismas cuestiones de filosofia matemática, y, en particular, en su rechazo a las tesis kantianas; pero además coinciden en tiempo y tema en cuanto a sus respectivos libros sobre Leibniz y, al menos en la superficie, arriban a las mismas conclusiones sobre el fundamento de esa filosofia. Asimismo, Couturat juega un papel importante en la promoción profesional de Russell, al impulsar la traducción francesa del *Ensayo sobre los Fundamentos de la Geometría*, invitarlo al Primer Congreso Internacional de Filosofía, que sería tan decisivo en su carrera, y servir como entusiasta difusor de sus ideas dentro del duro ambiente filosófico francés. ¡Demasiadas cosas para dos personas que solo se vieron tres veces en la vida!

[45] Lalande (1914), p. 646.
[46] Schmid *loc. cit.*

El problema filosófico del infinito
a finales del siglo XIX en Francia

Quisiéramos saber si los filósofos que admiten las proporciones infinitas en el mundo material están dispuestos a seguir a los geómetras extraviados en esta *logicación ilógica* de lo infinito en acto.

Charles Renouvier

En 1896 un estudiante de filosofía de la división de letras de la École Normal, defendió una tesis sobre *el infinito matemático* ante la Facultad de Letras de París. Se trató en verdad de un suceso notable ya que Couturat se mostró atento por el retorno de la filosofía al estudio de las ciencias y, por consiguiente, al resurgimiento de una tradición largo tiempo abandonada.

Pierre Duhem

§ 1. Filosofía idealista

De l'infini Mathématique,[1] es antes que todo una obra inscrita en el idealismo francés de finales del siglo XIX. Estamos, por consiguiente, frente a un idealismo por partida doble, ya que además de retomar la tradición kantiana que domina todavía la filosofía de la época, añade una nueva visión de la filosofía que le permite reinventar el papel de la crítica. En la superficie de dicha concepción podemos encontrar puntos de contacto notables con aquello que más tarde, y sobre todo en Alemania, se denominara *filosofía científica.* Pero también en sus aspectos más generales corresponde con mucho a lo que suele entenderse ahora como filosofía de la ciencia, y, de hecho, la filosofía tal y como la entiende Couturat es principalmente teoría del conocimiento o filosofía de la ciencia, pero estas últimas no pueden ser otra cosa que metafísica pura. Dicho de otra manera, los nombres de estas disciplinas son sólo etiquetas que sirven para designar la única y la misma clase de reflexión

[1] De aquí en adelante usaré la abreviación *l'infini* para referirme a esta obra.

filosófica existente. Esta es una cualidad del idealismo epistemológico francés de fin de siglo, y en lo que sigue daremos un repaso general a esta versión que sirve de fondo a la solución tentativa del problema del infinito en su dimensión filosófica. En efecto, para el joven Couturat la filosofía no puede ni debe ocuparse de la realidad o del universo en sí, sino de las construcciones *ideales* que las distintas ciencias se forman de esa realidad o universo. Es en principio una reflexión de segundo *degré* relativa a las ideas; y, en particular, sobre aquellas que conforman el total de las ciencias. Dicho en sus propias palabras, "la filosofía no se ocupa de las cosas ni de los hechos, sino de las ideas; no investiga las leyes de la naturaleza, sino las leyes del intelecto (l'espirit). Para ello se ha de remontar a los principios mismos de la ciencia, para comprobar su valor y examinar sus fundamentos. Es, en definitiva, una Teoría del Conocimiento, y su verdadera denominación es la *Crítica*"(p. vi).

Sin embargo, dicha crítica, nos advierte el autor, no debe sugerir en ningún momento una actitud hostil hacia las ciencias, puesto que al discutir sus métodos y sus principios el objetivo final es ofrecer una justificación filosófica del conocimiento científico. Es decir, la filosofía tiene como propósito dar cuenta de los conceptos y de los principios fundamentales de la ciencia, pero también debe dar cuenta de la aplicación exitosa de dichos conceptos y principios. "En resumen, si el objeto de la ciencia es explicar el universo, el objeto de la filosofía es explicar la ciencia; y si la filosofía fracasa en dar una fundamentación de esta última, no será la bancarrota de la ciencia, sino de la filosofía" (p. vii).

De esta relación estrecha se sigue que ambas, ciencia y filosofía, son tareas intelectuales esencialmente distintas pero no independientes entre sí, ya que la primera es la materia indispensable y el alimento natural de la segunda. Y por este mismo motivo, ninguna de ambas debe intentar suplantar a la otra. Para Couturat, ciencia y filosofía han establecido una relación estrecha inmejorable desde los tiempos de Aristóteles, pero a finales del siglo XIX existe la necesidad de reafirmar la naturaleza y límite de la relación entre ambas disciplinas porque, al menos en Francia, se trata de una tradición mermada y en peligro de extinción.

La causa principal es la falta de interés filosófico en la ciencia y la creencia errónea de haber encontrado una nueva vía de investigación para tratar los asuntos metafísicos. Tal es así como una de las principales corrientes en boga del siglo XIX se ha centrado en el estudio de la *conciencia* creyendo haber encerrado en un dominio aparte el mundo mental, y se ufana de haber descubierto sus leyes por medio de un método especial: la introspección.

Pero hay en esta tendencia un error de objetivo que salta de inmediato a la vista, ya que si bien se habla de una "ciencia del alma", al mismo tiempo se reconoce que no se trata de una ciencia natural, sino de una ciencia moral, en la cual el espíritu se concibe en un sentido ajeno y distinto del fenómeno natural. Pero así como existe esta tendencia a fundar la metafísica sobre una psicología *espiritualista*, también existe la tendencia a pensar en la desaparición de la metafísica, porque se considera que la ciencia tiende a apoderarse de los fenómenos espirituales a través de su basamento fisiológico, el cual es el único aspecto medible de la conciencia y, por lo tanto, el único cognoscible científicamente. Pero así como hay algunos científicos que han llegado a pensar que la metafísica es hasta la fecha una disciplina imposible y que la ciencia basta para satisfacer nuestras necesidades intelectuales, en virtud de que la legítima curiosidad conceptual debería limitarse al conocimiento de las leyes naturales; también hay científicos para quienes una psicología más seria y verdaderamente científica podría reemplazar o desplazar a la metafísica.

En concreto, el eclecticismo y el positivismo francés de la segunda mitad del siglo XIX son, por igual, incapaces de representar la verdadera tarea de la filosofía; ya que ambos representan y ejemplifican los equívocos a los que llega el espiritualismo y el empirismo. Por un lado, porque el primero al *observar* la conciencia no hace más que analizar los conceptos vagos y confusos de la experiencia vulgar, y cree ingenuamente que pensando acerca de ellos puede deducir verdades metafisicas. Y, por el otro lado, porque el segundo busca por el método experimental dictar las leyes que rigen la conciencia; con lo cual, en lugar de analizar hechos síquicos no hace más que atender hechos fisiológicos, y, con ello lo único que hace es usurpar el papel de la ciencia.

Hay, además, un fondo kantiano sobre el cual se mueve el rechazo a ambas doctrinas, ya que se da por sentado que la metafisica debe consistir esencialmente en juicios sintéticos *a priori*. Y si la descripción que hace Couturat de las mismas es correcta, es manifiesto que tanto el eclecticismo como el positivismo violan este prerrequisito básico de la Crítica. Es decir, "en tanto las verdades, ya sean lógicas o científicas, son relativas al espíritu que las piensa, no serán propiamente verdades si no se encuentran en conformidad con los principios racionales. Será, por consiguiente, una empresa quimérica y vana buscar un conocimiento *científico* de las leyes del pensamiento, en el entendido de que todo conocimiento científico se haya fundado sobre esas mismas leyes, y la experiencia última no tendrá ningún valor en tanto no se encuentre subordinada a las formas *a priori* de la razón" (p. ix).

Para Couturat, entonces, el dominio principal de la filosofia recae en la metafisica y no en la psicología, sea esta experimental o espiritualista, y todo intento por traducir los problemas de orden metafisico al orden psicológico es simplemente una tarea inútil. En el dominio concreto de la filosofia matemática esto significa que en el análisis y la justificación de los conceptos matemáticos no tienen ningún valor las consideraciones de orden psicológico, sino aquellas que remiten exclusivamente al orden racional. De ahí que Couturat no haya dudado en poner al frente de su tesis sobre el infinito, la lacónica observación de Jules Lachelier (1832-1918): "La verdadera ciencia del espíritu no es la psicología, sino la metafísica".[2]

§ 2. Razón y Lógica

Pero la deuda más importante que se deja ver en *l'infini* no procede de la brillante crítica de Lachelier a la tradición psicologicista francesa, ya que se trata de una premisa general de la concepción filosófica sobre la cual se posa la problemática filosófica particular a que da pie el concepto matemático de infinito. Además, Couturat no podía sacar mayor provecho de un filósofo riguroso pero poco optimista, como Lachelier, que desconfía en la posibilidad de dar con valiosas novedades en la materia, y que, por lo tanto, recomienda repensar la tradición en lugar de darse a la tarea de crear nuevos sistemas filosóficos. De ahí que Couturat se vea obligado a recurrir a fuentes más polifacéticas, anteriores y ajenas en gran medida a la órbita intelectual parisina de fin de siglo. Es así como recurre a la filosofía matemática de Pascal y de Antoine A. Cournot (1801-1877), con el objeto de servirse de ellos como punto de apoyo y retomar un principio que encaja a la medida con la división kantiana entre razón y lógica, y que el joven Couturat enuncia de la siguiente manera:

La tarea de toda Crítica y de toda Filosofía consiste en escoger de entre una

[2] Esta observación pertenece al final del clásico ensayo "Psicología y Metafísica" (1887), en el cual examina en detalle la doctrina espiritualista de Cousin. La postura antipsicologicista de Couturat que aparece en el prefacio y en la introducción es, en buena medida, el resultado del examen de Lachelier.

> pluralidad de conceptos encadenados lógicamente, el concepto más *racional*; es decir, aquel que encuentra la mayor unidad, la mayor armonía y claridad en nuestras ideas, y las incorpora a aquellas ideas primordiales y simples; de modo que dado un sistema de proposiciones lógicamente unidas, en donde se puede partir indiferentemente de una u otra idea para deducir las otras, el orden más natural y el más filosófico será aquel que haga depender todas sus verdades de aquellos principios verdaderamente evidentes e irreductibles; o en una palabra, de los verdaderos principios (p. x).

Sin embargo, hay que aclarar de inmediato que Cournot no es un kantiano y que su distinción entre lógica y razón obedece ante todo a una visión del conocimiento ajena a la tradición idealista alemana; lo cual no obsta para que dicho principio se deje ajustar dentro de una estructura kantiana, en la cual el orden lógico (analítico) se subordina al orden de la razón (sintético *a priori*). Y si bien es bajo esta división importante sobre la cual reposa la solución positiva que Couturat ofrece para resolver las perplejidades asociadas al infinito matemático, es importante anotar que no se limita a la subordinación de las ideas de Cournot dentro de la doctrina kantiana en un afán de simple ejercicio sistemático, ya que, por ejemplo, en su análisis del número natural y la magnitud no dudará en apartarse del famoso esquematismo y de la intuición kantiana entendida como intuición de la sensibilidad.

Por otra parte, el principio de razón que Couturat usa como una nueva navaja de Occam (pero que también recuerda a la distancia el principio de realidad de Leibniz en tanto se ha de escoger la idea más simple y de mayor unidad y armonía)[3] resulta demasiado controvertida tanto en su modo de aplicación, pues es claro que no se trata de una regla con una aplicación definida, como en sus beneficios concretos en el plano matemático y en el

[3] Cournot [(1975), §§ 27 y 28] discute y compara el principio de razón suficiente de Leibniz en relación con su distinción y, entre otras cosas, señala que "debe observarse que el epíteto *suficiente*, aplicado a la razón de las cosas parece superfluo ya que no se dice qué habría de entenderse por la razón insuficiente de una cosa. Si la cosa C no existe más que en razón del concurso de las cosas A y B, se expresaría mal si se dijera que cada una

plano filosófico. Para el joven Russell, por ejemplo, se trata únicamente de un principio dudoso y poco feliz que parece emplearse para ocultar lo que en realidad es una capitulación intelectual.[4] No obstante, sin necesidad de cuestionar la utilidad del principio, es relativamente fácil observar que no se trata de una expresión que pueda ser objeto de valoración epistémica, ya que expresa ante todo un *desideratum*. Por consiguiente, no puede tratarse de un juicio sintético *a priori* y, siendo así, su valor y justificación al interior de la crítica resulta de entrada problemático o, si se prefiere, falto de una justificación adicional.

Por otra parte, es interesante notar que Couturat cita el principio de Cournot desde un contexto en el cual este último alega en favor del valor y la justificación *sui generis* de los juicios filosóficos, y en particular, de aquellos juicios que tienen lugar en el ámbito de la filosofia matemática.[5] De igual modo llama la atención que no estamos hablando de una obra propiamente filosófica sino de un libro de texto de matemáticas, aunque como podemos constatar, no exento de pretensiones filosóficas.[6]

Nada sorprendente resulta constatar que Couturat sigue muy de cerca a Cournot en relación con las ideas sobre el número y la magnitud, ya que ambas nociones se encuentran directamente involucradas en la problemática filosófica sobre el infinito matemático tal y

---

de las cosas A y B, tomadas por separado, son una razón insuficiente de C; mientras que se ha de decir que el concurso de las cosas A y B es la razón de existencia, la razón objetiva, o simplemente la razón de la cosa C".

[4] Russell (1897a), p. 114.

[5] Poco antes señala también que si bien las verdades matemáticas no se establecen por medio de la experiencia, pueden confirmarse y controlarse a través de ésta, a diferencia de las verdades lógicas, morales y del derecho natural que sólo dependen de las ideas y de las relaciones entre ellas: "les démostrations des vérités mathématiques peuvent toujours se contrôler par l'expérience: en quoi ces vérités diffèrent de celles que l'on se propose d'établir en logique, en morale, en droit naturel, dans toutes les sciences qui ont pour objet des idées et des rapports que la raison conçoit, mais qui ne tombent pas sous les sens". Cournot (1847), p. 356. Sin embargo, en una obra posterior reconoce que el silogismo aristotélico admite también el mismo tipo de comprobación experimental aunque de forma mucho más limitada. *Cf.* Cournot (1982), § 5.

[6] En efecto, los tres textos propiamente filosóficos de Cournot aparecen cuando su obra como científico ya había sido establecida. Si bien, como señala Jean-Claude Pariente, en la introducción del segundo tomo de las

como el primero hace frente a los cuestionamientos criticistas de Renouvier y su escuela; lo cual queda de manifiesto al intentar justificar no sólo la existencia y coherencia de números infinitos, sino también y prioritariamente, de magnitudes de igual rango, dentro del marco de la concepción tradicional de las matemáticas.

Pero antes de avanzar en esa dirección será conveniente volver a la forma como Cournot y Couturat enuncian el mencionado principio, que de ahora en adelante podemos llamar *principio de razón*, con el fin de extraer las diferencias que esconden ambos autores en relación con las nociones de *razón* y *lógica*. Cournot expresa su principio de la siguiente manera:

> La filosofía de las matemáticas consiste esencialmente en discernir el orden y la dependencia racional de aquellas verdades abstractas que el espíritu contempla en la pizarra; a preferir un encadenamiento de proposiciones en vez de otro igualmente irreprochable lógicamente... ya que éste satisface mejor la condición de hacer destacar ese orden y esas conexiones que se derivan de la naturaleza de las cosas, independientemente de los medios con que contemos para transmitir y demostrar su verdad.[7]

A primera vista, no parece existir aquí ninguna diferencia fundamental entre ambos pensadores, pero siempre y cuando se deje de lado el verdadero fondo sobre el que se establece la distinción entre lo lógico y lo racional. En el caso de Couturat, parece claro que se trata de una cuestión de prioridad epistémica, ya que lo racional supone el fundamento último de toda verdad (que deberá ser, irreductible y evidente). Existe, por supuesto, un alto grado de vaguedad en la enunciación del principio y, sobre todo, en la mecánica de su aplicación (algo que tendremos la oportunidad de ver más adelante), pero de entrada debe concederse que la distinción se establece dentro del marco teórico kantiano. Es decir, para

---

Obras Completas, "mais nous ne disposons d'aucun document qui éclaire la mutation du mathématicien en

Couturat, "la razón debe distinguirse seriamente del entendimiento, el cual abstrae y generaliza, juzga y razona sobre los conceptos, y, por lo tanto, es la facultad propiamente lógica y analítica; mientras que la razón es la facultad de las ideas puras y de los principios sintéticos *a priori* (p. xii)."

Mientras que en Cournot la distinción parece apuntar más a una brecha entre la dimensión epistémica (que denomina *razón subjetiva*) y la dimensión ontológica (que denomina *razón objetiva*), en tanto lo racional llega al fondo de las cosas consideradas en sí mismas:

> No hay que confundir el orden racional con el orden lógico, aunque una de estas palabras tenga la misma raíz en griego que la otra en latín. El orden racional se refiere a las cosas consideradas en sí mismas; el orden lógico, a la construcción de las proposiciones, a las formas y al orden del lenguaje, que es para nosotros el instrumento del pensamiento y el medio de manifestarlo.[8]

Hay entonces en apariencia una divergencia sutil pero fuerte en la forma como ambos autores conciben las diferencias que separan al orden racional del orden lógico. Es claro que en el caso de Couturat se trata, como ya se ha indicado, de una distinción epistémica de distinto orden, en tanto es el orden lógico el que se subordina o se rige por el orden racional, mientras que en el caso de Cournot se trata evidentemente de una distinción que se funda tanto en consideraciones epistémicas como ontológicas, ya que el orden racional subjetivo describe el orden objetivo de las cosas, mientras que el orden lógico, que también es subjetivo, se identifica con nuestra manera de organizar el orden objetivo aun y cuando no lo

philosophe". Cournot (1975), p. VIII.

[7] Cournot (1847), § 146, pp. 366-7.

[8] Cournot (1982), I. § 64. En otro lugar encontramos más o menos la misma explicación: "Pensamos que es no menos conveniente distinguir entre *lógica* y *razón*, entre lo *lógico* y lo *racional*, y que es más conforme al uso moderno preferir el término de origen griego cuando la atención se dirige más bien a la condición instrumental, a la expresión formal del pensamiento, y el término latino cuando lo que se considera es el fondo y las propiedades intrínsecas de la cosa pensada". Cournot (1987), p. 291.

refleje de manera adecuada.[9] En otras cosas, Cournot señala que el orden lógico, en tanto discurso, es eminentemente lineal mientras que el orden de los fenómenos no es necesariamente así, dado que no es difícil imaginar otros tipos de orden, como puede ser la misma discontinuidad, el orden circular y muchos otros.[10]

Cournot no es lo suficientemente claro sobre la forma como podemos escapar del orden lineal del discurso y de la lógica, para acceder directamente al orden en sí de las cosas, pero el hecho de que él pueda hacerlo o al menos ilustrarlo mediante el uso tácito del discurso muestra, a mí juicio, que algo anda mal en la concepción de ambas nociones. Si quisiéramos apuntalar más nuestras dudas podríamos poner de manifiesto que hay una identificación entre la gramática y la lógica que reposa sobre un fundamento muy débil, ya que si una ecuación algebraica o un árbol genealógico expresan cada uno un orden determinado y distinto del orden lineal, no hay a la vista una razón de peso para afirmar que ese orden lineal es en principio *el* orden lógico, pero tampoco la hay para negar un orden lógico semejante en las relaciones que expresa una ecuación o un determinado árbol genealógico.

En cuanto a Couturat es conveniente reconocer que su distinción entre lo lógico y lo racional cuenta con un correlato o justificación ontológica, y, por consiguiente, no difiere aquí de Cournot más que en el grado con que carga el acento en el lado epistémico; lo cual, dicho sea de paso, responde a motivaciones kantianas: "La oposición entre la naturaleza y el intelecto debe reducirse a la distinción entre nuestras facultades de conocer. Aquello que

[9] *Cf.* Cournot (1975), II. De hecho, en el capítulo II (*De la razón de las cosas*), Cournot lamenta como un defecto del lenguaje filosófico la existencia de diversos significados de la noción de *razón* y otros términos asociados con nuestra forma de adquirir conocimiento, y propone su propia acepción del término: "Nos contentaremos con señalar que emplearemos la palabra *razón* (en su sentido subjetivo), para referirnos principalmente a la facultad de captar la razón de las cosas, o el orden según el cual los hechos, las leyes, las relaciones, objetos de nuestro conocimiento, se encadenan y se siguen unos de otros". § 17, p. 21.
[10] *Ibid*, XVI.

llamamos *intelecto* no es más que la facultad para formar los conceptos generales y abstractos que denominamos *entendimiento*. Empero debemos poseer alguna otra facultad que nos permita alcanzar tanto la realidad como el pensamiento, aunque no sea más que a título ideal y de carácter problemático, y sin la cual no podríamos reconocer la insuficiencia de nuestros conceptos y los límites de nuestro entendimiento. Dicha facultad maestra, la cual juzga en última instancia la verdad; es decir, la conformidad entre nuestras ideas y la realidad, o mejor dicho, con la *idea* de realidad, la denominamos *la razón*" (p. 537).

En este sentido no debe perderse de vista que en la distinción que Couturat retoma de Cournot, la referencia a la lógica o a *lo* lógico remite a la facultad cognitiva o entendimiento y a sus productos; y no exclusivamente como un sistema o conjuntos de sistemas que conforman una ciencia especial. Es decir, en ningún momento ambos pensadores tienen en mente la silogística aristotélica y/o alguna otra presentación moderna. Desde luego, desde el marco kantiano adoptado por Couturat, la silogística aristotélica o la lógica tradicional se deben ubicar de cualquier forma en el entendimiento y sus juicios serán de naturaleza analítica (en sentido kantiano). Pero en el caso de Cournot, la lógica como teoría o sistema (y que denomina lógica científica) no difiere de la matemática más que en su grado de desarrollo y al igual que sus juicios "descansan sobre principios cuya verdad es intuitiva y necesaria; tienen, por lo tanto, el carácter de ciencias racionales en el mismo grado que las matemáticas".[11]

Por otra parte, no es difícil advertir aquí lo lejos que se encuentra todavía Couturat de la doctrina logicista adoptada más tarde por mediación de Russell, la cual lo llevaría a escribir, por decirlo de algún modo, la versión francesa de los *Principles of mathematics*. Sin embargo, existen muchas similitudes entre este trabajo de Couturat y el libro de Russell sobre los fundamentos de la geometría; ambos, de manera evidente, se encuentran influidos por la doctrina kantiana del conocimiento, teoría que ambos intentan superar o, si ustedes prefieren, poner al corriente en cuanto a los nuevos avances matemáticos: Russell en cuanto a las nuevas geometrías, Couturat en cuanto al análisis y la teoría positiva del infinito actual. Desde el punto de vista retrospectivo, ambos libros contienen carencias notables en el centro de sus concepciones. Ambos, por ejemplo, desconocen aún la lógica matemática de Frege y Peano, y presuponen, en menor o mayor medida, una concepción tradicional de la misma. En cuanto a sus resultados, ambos se encuentran rápidamente en posiciones insostenibles con respecto a los adelantos de su época: Russell al negar la posibilidad "lógica" del espacio que sería la base geométrica de la teoría de la relatividad y Couturat al intentar resolver las antinomias kantianas del infinito a través de una interpretación de la aritmetización del análisis, en la cual el concepto de número se subordina al de magnitud, algo que en sí se opone en sustancia a los fines mismos de la aritmetización y de la naciente teoría del infinito de Dedekind y Cantor.[12] Es en este sentido cuando Ubaldo Sanzo escribe que el primer libro de Couturat se encuentra en contraposición a la tendencia matemática de su tiempo.[13] Sin embargo es conveniente matizar el juicio de Sanzo ajustándolo a una adecuada perspectiva histórica, recordando que las teorías de Cantor y Dedekind no alcanzaron plena aceptación sino tiempo después de la aparición del libro de Couturat.

Pero, además, no debemos perder de vista que se trata, a fin de cuentas, de un trabajo filosófico dirigido a resolver cuestiones más generales. Y son precisamente este tipo de

---

[11] Cournot (1982), § 4.
[12] *Cf.* Dugac (1983), y Berreau (1985), p. 142.
[13] Sanzo (1991), p. 16.

cuestiones las que alejan a Couturat (y al joven Russell) de la corriente más innovadora de su época. Se trata, entonces, de una tarea de clarificación filosófica de los conceptos fundamentales involucrados en la base de la ciencia. Es así como el problema sobre las relaciones entre la matemática pura y la matemática aplicada se convierte aquí en el problema sobre las relaciones entre el número y la magnitud, en investigar su origen y determinar si se trata en cada caso de ideas *a priori* o *a posteriori* (pp. xix y xx).

§ 3. Número y Magnitud

Para Couturat la matemática en general, y el análisis matemático en particular, no son ciencias absolutamente *a priori* y, por lo tanto, el análisis matemático no puede, como lo intentaron durante este periodo los matemáticos, edificarse únicamente sobre el concepto de número. Es decir, la aritmética y el álgebra son analíticas, pero la geometría y el análisis matemático son sintéticos a priori, y, por consiguiente, la relación entre el concepto de número y el concepto de magnitud no consiste en una dependencia del segundo con respecto al primero, porque la magnitud "es, por el contrario, la razón de ser de la generalización del número, y, el fundamento intuitivo de los juicios sintéticos *a priori* que constituyen la matemática pura" (p. xxi).

En la mencionada reseña de *l'infini* y en un artículo sobre el tema, el joven Russell apunta correctamente que para Couturat ambos conceptos son totalmente independientes entre sí y funda su crítica en este supuesto.[14] Sin embargo, es necesario añadir que, según Couturat, no

[14] Russell (1897a), p. 112 y (1987b), p. 332. Hay que advertir que Russell usa inversamente los términos *quantity* y *magnitude* para expresar la *grandeur* y la *quantité*. En un comentario sobre la traducción francesa

es posible discutir ambos conceptos más que en relación con la teoría más fundamental en la cual se encuentran ambos conceptos inmersos; por este motivo, el concepto de magnitud es para Couturat una idea *universal* sobre la que se funda el análisis matemático, elevándolo así a la categoría de "ciencia de la magnitud en general". En este sentido, la teoría matemática de la magnitud juega un papel similar, pero no idéntico, al que juega la geometría proyectiva en el libro de Russell sobre los fundamentos de la geometría.

De hecho, el papel que Couturat otorga al análisis matemático es más fuerte en tanto lo relaciona con la matemática universal imaginada y fundada por Descartes y Leibniz. Es una suerte de *Mathesis* que liga el mundo de las ideas con la realidad física, de forma tal que la física no es otra cosa que el análisis matemático aplicado: "El análisis construye *a priori* todas las relaciones concebibles entre las magnitudes, estudiando deductivamente sus propiedades y transformaciones. Es un repertorio de formas abstractas, un catálogo de leyes matemáticas, relativas a tipos generales y simples, entre las cuales la física necesariamente debe encontrar la unión de los hechos de tales y tales magnitudes concretas. No es, entonces, una ciencia aparte, opuesta o yuxtapuesta a las ciencias físicas: es la lengua universal de las ciencias, es la lógica verdadera, la lógica de la cantidad".[15]

Esta concepción es particularmente importante porque, como veremos en el desarrollo de esta investigación, se encuentra presente en forma más elaborada a lo largo de su trabajo intelectual y es la que le permite asimilar el trabajo de otros pensadores (como el álgebra

---

de su ensayo sobre los fundamentos de la geometría, Couturat le recomienda hacer la conversión correspondiente a efecto de "traducir correctamente las distinciones y los razonamientos de orden lógico y crítico que abundan en la obra". Schmid (ed.) (2001), p. 50.

[15] *Loc.cit.* Rodríguez-Consuegra [(1991), p. 21] encuentra en este pasaje una especie de logicismo "en florecimiento", pero sólo a fuerza de sacarlo de su contexto. Por otra parte, el autor le atribuye también la mala influencia sobre Russell de "una indecisión entre una especie de inspiración formalista, una tendencia logicista y un cierto empirismo". Curiosamente, Rodríguez-Consuegra llama a esta indecisión una idea [*ibid.*, p. 20].

universal de Whitehead, la lógica matemática de Peano y el logicismo russelliano) con el suyo. Se trata en concreto de la idea de la *característica universal* leibniciana a la cual otorgará un papel fundamental en su interpretación de la lógica de Leibniz. Sin embargo, como veremos después, su versión de la *característica* se aparta de la interpretación que hizo Frege al momento de establecer las diferencias entre el programa de su *conceptografía* y el desarrollo algebraico de la lógica llevado a cabo por Boole y sus seguidores.

Por lo pronto, basta con señalar que el análisis matemático entendido como lengua universal de las ciencias se identifica también con la *logística* (*logistique*)[16] de Cournot; pero, de nuevo, es conveniente advertir aquí varios aspectos sobre la forma como este último entiende la *logística* y como esta se opone, según su punto de vista, a la *característica universal* pregonada por Leibniz. En efecto, para Cournot el error capital de la *característica* reposa sobre todo en la limitación a la cual se encuentra sujeta la concepción de las operaciones del razonamiento entendidas como una combinatoria. Es decir, como semejante combinatoria se ha de llevar a cabo por medio del uso del cálculo aritmético y el álgebra elemental, es claro que su empleo se encuentra restringida al cálculo de cantidades discretas y, por consiguiente, sus métodos resultan incapaces para vérselas con fenómenos de naturaleza continua. Dicho en otros términos, la *característica universal* sería ante todo un

---

Desde luego, no sólo es difícil imaginar cómo una indecisión puede convertirse en una idea, sino también en una influencia.

[16] Más propiamente, la logística se identifica con la teoría de las magnitudes continuas en oposición a la aritmética y el álgebra discreta; pero también conserva un tanto el sentido que tenía la idea griega de *logistiké*; esto es, como una especie de cálculo práctico en oposición a la aritmética teórica. Véase con respecto al sentido del término en la matemática griega, Klein (1992), en especial parte I, y sobre Cournot, Cournot (1877), §§ 11, 16 y 139. La identificación de la logística con la nueva lógica matemática es propia del siglo XX y se remonta a la propuesta que Itelson, Lalande y Couturat lanzaron cada cual por su lado durante el Segundo Congreso Internacional de Filosofía (Ginebra, septiembre de 1904); los tres "sin acuerdo o comunicación previa, se han encontrado para dar a la nueva lógica el nombre de logística. Esta triple coincidencia parece justificar la introducción de esta nueva palabra, que es más breve y más exacta que las locuciones usuales: lógica simbólica, matemática, algorítmica, álgebra de la lógica". [45], p. 1042. Desde luego, este último uso ha caído

recurso finitista, mientras que la *logística* como tal es infinitista:

> L'algèbre n'aurait été que'une branche de cette caractéristique; tout le travail de la pensée eût été manifesté par des combinaisons de signes; et l'art du raisonnement, qui aurait été au calcul arithmétique ou algébrique ce que le genre est à l'espèce, n'aurait dû à son tour être réputé qu'une application spéciale de la synthèse combinatoire, ou de l'art de former, de classer et d'énumérer des combinaisons. Cette comparaison même devait mettre sur la trace de l'erreur capitale dont est entachée l'idée d'une caractéristique universelle. Combien seraient bornées les applications du calcul arithmétique ou algébrique, si elle ne concernaient que des quantités susceptibles de s'exprimer exactement en nombres, et affranchies de la loi de continuité! La nature de idée de grandeur permet d'appliquer aux grandeurs continues, avec tel gegré voulu d'approximation , les procédés de calcul directement applicables aux quantités discrètes ou aux quotités; mais, ce cas singulier mis à part, comment des qualités et des rapports qui varient d'une manière continue pourraient-ils en général s'exprimer avec l'approximation convenable, au moyen de combinaisons de signes discontinus ou distincts, en nombre limité, à valeurs déterminées et fixes? En tout cas, comment définirait-on l'approximation obtenue?[17]

Esta oposición entre *logística* y *característica* no es, en el fondo, más que la oposición que Cournot establece también, y en primer lugar, entre la aritmética y el álgebra teórica o abstracta (y por *abstracto* debemos entender no su sentido actual técnico sino el sentido común en cuanto a máxima generalidad o indeterminación) y el cálculo práctico de diversas magnitudes continuas tal y como ocurre en la aplicación del cálculo diferencial e integral. Aunque, ciertamente, esa misma oposición es también caracterizada como la diferencia entre una logística trascendental y una logística elemental:

> Hace falta un término adecuado para designar aquella parte de las matemáticas, de origen aritmético, que tiene como objeto las definiciones y las funciones transcendentales. Parece conveniente de suyo imponerle la denominación *logística trascendental*, en oposición a la logística elemental, la cual procede del álgebra (la *logística especiosa* de Viète) y de la teoría de las funciones algebraicas. Pues la logística trascendental no puede elevarse hasta el grado de

---

en desuso a partir de la segunda mitad del siglo XX.

[17] Cournot (1975), § 213, p. 262. Llama particularmente la atención que Couturat no haya reparado en este pasaje en su estudio sobre la lógica de Leibniz, sobre todo si tomamos en cuenta el número y la clase de referencias sobre Cournot que se hacen a lo largo de esa obra.

> abstracción del álgebra pura, en donde no se llega más que a considerar los símbolos y la combinación abstracta de los signos; en tanto que a causa de la solución de continuidad (subordinadas a los valores numéricos de las variables) a la cual son sujetas las funciones trascendentales, y por lo cual los signos positivos y negativos no juegan más papeles simétricos; y, por último, porque las nociones de limite, de infinitamente pequeño, y de suma de un número infinito de términos no conservan un sentido abstracto, a la manera de las operaciones fundamentales de la aritmética, una vez que han sido despojados los símbolos literales de su significación numérica.[18]

Pero como veremos un poco más adelante, la distinción de Cournot es en el fondo la vieja distinción griega entre el número y la magnitud. Por otra parte, debe recordarse que Cournot representa un caso especial (por no decir a contracorriente) en la era del rigor iniciada por Cauchy dentro del análisis matemático, al sostener que las ideas existen en el entendimiento, independientemente del hecho de que pueda dárseles una definición lógica; y puesto que en muchos casos nos encontramos ante definiciones complejas de ideas simples o bien con ideas que no poseen ninguna definición, el progreso del conocimiento no deben subordinarse al uso de definiciones.[19]

Ciertamente, entre el *Traité élementaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* de Cournot y el trabajo de Couturat median todavía 55 años de ardua labor en la perfección del análisis matemático, y sus resultados no le eran del todo desconocidos a este último.[20] De

---

[18] Cournot (1877), § 139, p. 353.

[19] *Cf.* Boyer (1959), p. 283. Por lo demás, esta actitud compagina con la posición de Pascal, para quien el método correcto "consiste, no en definir todo o demostrar todo, ni en no definir nada o demostrar nada, sino en mantenerse en este medio en que no se definen las cosas claras que todos los hombres entienden, y en definir todas las demás; así como no probar lo que es conocido por todos los hombres, y demostrar todas las demás". Pascal (1962), I., p. 32. Couturat se sirve de ambos autores en su análisis de las nociones de número y magnitud, sin reparar lo suficiente en el hecho sorprendente, como señaló Frege, de que los sabios no se puedan poner de acuerdo sobre ideas tan simples, y, en apariencia, evidentes.

[20] Al final del libro, Couturat presenta un apéndice bibliográfico de aquellas obras que fueron de su conocimiento cuando la obra se preparaba para imprenta. Entre estas obras destacan *Las paradojas del infinito* (1851) de Bolzano, la primera entrega de las famosas "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (1895) de Cantor y el *Essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la science contemporaine* (1894) de Hannequin (el libro que Russell recomienda comparar con el de Couturat, ya que ambos tratan de la misma

hecho, la fundamentación llevada a cabo por los matemáticos en todo este periodo le permite una simplificación en la formulación y análisis del infinito como problema filosófico, dado que, como es de sobra sabido, la fundamentación del análisis remite a la fundamentación de la aritmética elemental.[21] Y es aquí, con respecto a los distintos métodos para definir los distintos sistemas numéricos cuando entra en consideración el principio de razón de Cournot.

En este punto llama la atención el hecho de que Couturat, al igual que Cantor, encuentra una gran similitud entre el número infinito y el irracional. Sin embargo las motivaciones de ambos no sólo son distintas sino abiertamente opuestas. Para Couturat ambos casos son una prueba de la insuficiencia del número para cubrir la magnitud:

> Por un lado, el número infinito ofrece profundas analogías con el número irracional: ambos representan las magnitudes inconmensurables, y revelan la insuficiencia del número para traducir la magnitud. Por el otro, existe una conexión directa entre las ideas de infinito y de continuidad: or, si celle-ci trouve son expression naturelle et adéquate dans les nombres irrationneles, celle-là s'exprime par le nombre infini. Por último, la misma continuidad, que es esencial a las magnitudes y envuelve una infinidad de partes, justifica de nuevo el número infinito por todas esas razones. El número infinito es una extensión de la idea de número, la más chocante que pueda ser, es la más polémica, sin duda porque manifiesta mejor el contraste entre el número y la magnitud: c'est celle où se révèle pour ainsi dire à l'état aigu le conflit de ces deux idées primitives, irréductibles l'une à l'autre, et où apparaissent d'une manière saisissante leur disproportion et leur radicale hétérogénéité (p. xxiv).

Pero para Cantor, ambos son simplemente manifestaciones del infinito actual:

---

cuestión pero desde distintos puntos de vista).

[21] "Nous voudrions faire profiter la Philosophie de ce grand travail de cristallisation logique de la science, qui prépare et facilite singulièrement la tâche de la Critique, et en mettre les principaux résultants à la portée et à la disposition des philosophes. C'est grâce a ce travail qu'il nous est possible de ramener la question tant controversée de la valeur de Calcul infinitésimal à celle de l'infini de grandeur et de nombre: car celle-ci implique celle-là, de sorte que la première se trouvera résolue dans le sens et dans la mesure où nous aurons réussi à résoudre la dernière. Il nous sera donc permis d'agiter le problème de l'infini mathématique sans parler d'intégrales ni de différencielles". Couturat *op. cit.*, p. xxiii.

> Los números transfinitos mismos son en cierto sentido nuevos irracionales, y de hecho creo que la mejor manera de definir a los números irracionales finitos es totalmente similar; hasta podría decir que en principio es lo mismo que mi método descrito antes para introducir los números transfinitos. Uno ciertamente puede decir que los números transfinitos permanecen o se destruyen junto con los números irracionales finitos; son iguales en su más intrínseca naturaleza (innerestern Wesen), ya que cualesquier número como estos son formas o modificaciones (αφωρισμεγα) definidas y delineadas (abgegrenzte) del infinito actual.[22]

Desde luego, el primero habla del número infinito como número de los naturales y de los irracionales como cantidades que expresan magnitudes inconmensurables, mientras el segundo habla en nombre de toda una aritmética transfinita que vuelve obsoleta toda referencia a la magnitud. Semejante aritmética no le era desconocida a Couturat pero llama la atención lo poco que se sirve de ella, y su ausencia en la explotación de la analogía entre irracionales e infinito sugiere la forma como tiende a interpretar los nuevos resultados cantorianos. Los motivos de todo esto no son suficientemente claros, aunque parece haber indicios de que el estudio y posterior incorporación de la obra de Cantor entró cuando el cuerpo principal de la obra había sido ya redactado.[23]

En este sentido, hablar de esta primera obra como un tributo a Cantor, o como una defensa abierta de su teoría merece los debidos matices. Incluso, puede asumirse una postura radical y negar a *l'infini* todo compromiso serio con el universo cantoriano al mostrar que las nociones de orden y conjunto, las cuales se encuentran en la base de la teoría de los números

---

[22] Cantor (1887): "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten", *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik* 91: 81-125. Citado por Dauben (1979), p. 128.

[23] Couturat deja como apostilla la exposición de los principales resultados de la aritmética cantoriana, los cuales no juegan ningún papel decisivo en el cuerpo de la obra, ni siquiera cuando resultan más pertinentes, como, por ejemplo, en la discusión del número desde el punto de vista cardinal y ordinal (véase más adelante § 6). Para verificar la hipótesis será conveniente cotejar la versión presentada por Couturat como tesis de doctorado en filosofía (el 12 de junio de 1896), la cual, según Eisele [(1981), p. 456], terminó de escribir en 1894.

transfinitos y de toda fundamentación de la aritmética de finales del siglo XIX, vuelve anticuadas las cuestiones relativas a la magnitud y la cantidad. O bien, señalar, como lo hace Dugac de manera sucinta pero pertinente, las afirmaciones de Couturat que deliberadamente se oponen a la teoría cantoriana: "El desacuerdo con Cantor se manifiesta todavía a propósito de su afirmación de que la propiedad, según la cual a cada número real le corresponde un punto en la recta, es indemostrable; ya que para Couturat (p. 166) el punto de la recta que corresponde a un número irracional «existe ya en la recta», y la necesidad de un axioma es una «ilusión compartida entre muchos matemáticos, más analistas que geómetras», y «es un ejemplo palpable del conflicto que puede existir entre el orden lógico y el orden racional» (pp. 169-170)".[24]

Obviamente, este último comentario vale, *mutatis mutandis*, para Dedekind ya que el mismo axioma aludido, coincide, "al margen de la forma externa en que viene expresado", con el que aparece como la esencia de la continuidad en el ahora clásico ensayo "Continuidad y números irracionales", y en donde se enfatiza de igual forma que la continuidad geométrica no puede más que postularse.[25] Pero como acabamos de señalar, esta no era una postura plenamente aceptada entre los matemáticos, quienes por lo general y por el contrario, preferían mantener la teoría de los irracionales ligada a la teoría de la magnitud, como lo indica con claridad Hankel en referencia al método de Weierstrass para introducir los irracionales: "Cualquier intento de tratar formalmente los números irracionales sin recurrir al concepto de magnitud habrá de conducir a las artificialidades más absurdas y problemáticas; dicho intento incluso si puede llevarse a cabo con absoluto rigor, sobre lo

[24] *Cf.* Dugac art. cit., p. 58. Desde luego, la paginación entre paréntesis corresponde a *l'infini*.
[25] *Cf.* Dedekind (1998), p. 85.

cual tenemos el derecho a dudar, no tendría empero un valor científico superior".[26]

De cualquier forma, más tarde, al asumir el compromiso logicista, Couturat se vería obligado a formular una rectificación al respecto.[27] ¿Pero de dónde proviene entonces la teoría del número y la magnitud y por qué tanto Couturat como Russell le habían otorgado tanta importancia? La concepción de la matemática como ciencia de la magnitud y la cantidad fue por mucho tiempo la idea predominante sobre la naturaleza y objeto de la matemática; su origen se remonta a la llamada teoría de las proporciones de Euclides-Eudoxo y fue debido a esta venerable tradición por lo cual Couturat y el joven Russell consideraban el problema de las relaciones entre el número y la magnitud como una de las cuestiones fundamentales de la *filosofía matemática*.[28] Y se trataba de una problemática de carácter filosófico porque los matemáticos hacían uso de ambas categorías sin ocuparse demasiado por poner en claro su significado ni el sentido de las relaciones que guardan entre sí.

Por ejemplo, en el libro V de los *Elementos*, Euclides se ofrecen 18 definiciones relativas a la teoría de las proporciones de Eudoxo, y si bien esas definiciones establecen las relaciones entre magnitudes, nada nos dicen sobre el concepto mismo de *magnitud*, el cual suele considerarse como determinado *operativamente* sumando a estas definiciones las que aparecen en el libro primero. Sin embargo, existe amplio consenso entre los estudiosos sobre

[26] Citado en la introducción general de la antología de Ehrligh (ed.) (1994), p. ix.
[27] En el prólogo de *Les principes des mathématiques*, señala: "debemos prevenir a aquellos lectores que conocen nuestra obra *l'infini mathématique*, que hemos renunciado, de aquí en adelante, a ciertas tesis que habíamos sostenido anteriormente. Para ser más precisos, conservamos toda la parte didáctica y crítica, pero la parte positiva, notablemente la teoría del número y la magnitud, será sustituida por los capítulos II y III" [Couturat (1906), p. vii]; esto es, los capítulos relativos al número y al orden desde el punto de vista logicista.
[28] Más tarde, en *Principles*, al ocuparse de la cuestión, Russell advierte que "toda esta parte –y es importante entenderlo– es una concesión a la tradición; pues veremos que la cantidad no es definible en términos de constantes lógicas, y, por lo tanto, no es propiamente hablando, una noción que pertenezca a la matemática pura". Russell (1903), § 150, p. 158.

la correspondencia entre la concepción aristotélica sobre el número y la magnitud, y las ideas de Euclides-Eudoxo. En un pasaje bien conocido Aristóteles señala:

> Se dice que posee «cantidad» lo que es divisible en partes internas, cada una de las cuales -sean dos o más de dos- son por naturaleza algo uno, y algo determinado. Una pluralidad es una cantidad si es numerable, y también lo es una magnitud si es mensurable. Se llama «pluralidad» lo potencialmente divisible en partes discontinuas, y «magnitud» lo divisible en partes continuas. A su vez, la magnitud que es continua en una dimensión es longitud, lo que lo es en dos, latitud, y la que lo es en tres es profundidad. De éstas, la pluralidad limitada es número, la longitud es línea, la latitud es superficie y la profundidad es cuerpo.[29]

Aquí se destaca, en primer lugar, que tanto el número como la magnitud son cantidades aunque de distinto orden. A la magnitud corresponde todo objeto geométrico en tanto es continua, mientras que el número cuenta objetos, físicos o mentales, como entidades discontinuas. De aquí parece desprenderse una falta de homogeneidad entre la magnitud y el número en tanto cantidades. Sin embargo, del mismo modo se presenta una cierta ambigüedad en cuanto que también cabe la posibilidad de considerar la medida de la magnitud como esencialmente numérica, y, por consiguiente, no parece haberse alcanzado mayor claridad al recurrir a Aristóteles. Cuestiones similares se presentan al examinar la teoría de Eudoxo-Euclides en cuanto a la definición de la noción de proporción.

La definición 6 del libro V afirma que magnitudes con igual razón[30] son proporcionales; o bien, llamamos proporción a la igualdad de razones entre magnitudes. De la naturaleza de la razón se dice previamente en la definición 3, que "es una especie de relación entre los tamaños de dos magnitudes del mismo tipo". Esto último quiere decir que sólo podemos comparar magnitudes del mismo orden geométrico; para decirlo con Aristóteles, sólo

---

[29] Aristóteles (*Met.*), V, 13.

podemos comparar magnitudes de una dimensión, o bien magnitudes de tres dimensiones, pero no podemos, por ejemplo, comparar una magnitud de una sola dimensión con una de dos; dicho de otro modo, no tiene sentido, por ejemplo, comparar una línea con un área. En términos más modernos, se dice que son comparables aquellas magnitudes que pertenecen a la misma especie o clase.[31]

De las definiciones 4 y 5 parece implicarse cantidades numéricas como razón de magnitudes: "dos magnitudes tienen razón entre sí cuando una puede ser multiplicada en modo de superar a la otra" (VD4). "La razón de una primera magnitud a una segunda es igual a la de una tercera a una cuarta, cuando la primera y la tercera igualmente multiplicadas o a la vez superan, o a la vez son iguales o a la vez son inferiores que la segunda y cuarta igualmente multiplicadas" (VD5).

La formulación algebraica que suele acompañar a la definición 5, no sin cierta distorsión, hace implícito este supuesto: $a : b = c : d$, si para todo par de números enteros m, n, $(ma > nc) \vee (ma < nc) \vee (ma = nc)$ ssi $(mb > nd) \vee (mb < nd) \vee (mb = nd)$.[32] Además, el hecho de considerar el libro V como "más general", o aritmético admite ya una interpretación de las magnitudes como números.[33]

Sin embargo, el hecho de no encontrar simultáneamente las nociones de número y magnitud, con la única excepción del problemático libro X, en la formulación euclídea parece indicar

[30] La razón es una cantidad entre números o entre magnitudes, pero de la razón numérica no encontramos definición alguna.
[31] La única excepción se encuentra en el llamado teorema alternativo (Vprop.16).
[32] En la trascripción de la edición mexicana hay un evidente error tipográfico, producto seguramente del intento de acomodarse a la formulación original escribiendo los signos =, >, < todos juntos en forma vertical (*cf.* p. 160 con p. 238). Hay suficiente evidencia para asegurar que la descripción algebraica altera en varios aspectos el sentido original de los *Elementos*, pero me valgo de ella simplemente por comodidad y porque el sentido original no entra en juego en lo que estoy tratando de documentar. Contra la interpretación algebraica de Euclides véase Klein *op. cit.*, I y Grattan-Guinness (1996).

una distinción tajante. En términos aristotélicos, diríamos que la teoría de las magnitudes se ocupa de los números geométricos o de las cantidades continuas, mientras que los otros libros se ocupan de números o cantidades discretas. Cabe, por consiguiente, la posibilidad de considerar la teoría de las proporciones como una teoría del número en general.[34]

Ahora bien, me he detenido un poco en este punto porque parece explicar de manera genealógica la idea subyacente de Couturat al considerar la magnitud infinita como filosóficamente prioritaria a la noción de número infinito. Pero también porque se ha sostenido una correspondencia fuerte entre la teoría de las proporciones y el método de Dedekind para generar los números irracionales. No es que pretenda participar en esta cuestión histórica[35] sino porque es Dedekind quien, por vez primera, no sólo formula una crítica abierta a la noción de magnitud sino que también elabora un método eficaz para desterrar esta noción del lenguaje matemático;[36] y porque, paradójicamente, Couturat se vale de este método para proclamar la supremacía del concepto de magnitud.

§ 4. Las antinomias del infinito

Pasemos ahora a lo que parece ser en verdad la problemática que Couturat pretende enfrentar y resolver en este libro. Como todo mundo sabe, la noción de infinito ha resultado

---

[33] Este es el punto de vista adoptado por José Álvarez Laso en la traducción mencionada (p. x), pero también la de sir. Thomas Heath en su versión inglesa.

[34] En una carta, del 10.06.1876, Dedekind comenta: "Quiero conceder de buen grado que la proporción puede valer como definición general de número, por más que Euclides nunca usa λόγοζ y αριθμόζ como sinónimos". Dedekind (1998), p. 163.

[35] Como es conocido, la discusión sobre la teoría de cortadura y la teoría de las proporciones aparece en la correspondencia Lipschitz-Dedekind, en donde este último afirma, por ejemplo: "los principios euclídios solos, sin apelación al principio de continuidad, el cual *no* se encuentra contenido en ellos, son *incapaces* de fundar una teoría completa de los números reales como proporciones de magnitudes". Dedekind *ob. cit.*, p. 164. Sobre el tema pueden consultarse Stein (1990) y Corry (1994).

problemática desde sus inicios ya que los antiguos griegos encontraron diversas dificultades para darle un sentido claro y exento de consecuencias negativas. Esto se debía en gran medida a que, siendo desde el principio una noción vaga e intuitiva, su ámbito de aplicación se extendía a todos los niveles. Anaximandro, el primer filósofo que hizo uso de esta noción fuera del discurso ordinario, habla por ejemplo del *arché* como *to ápeiron* (lo que no tiene límite[s]), lo cual era una substantivación de un adjetivo compuesto (*ápeiron*) que en su uso corriente significaba simplemente *aquello no susceptible de precisar*. Desde luego, el campo de la experiencia de los antiguos griegos era mucho más limitado de lo que lo es para el hombre ordinario de hoy en día, y, en consecuencia, el adjetivo encontraba su aplicación tan pronto como entraban en juego números nada sorprendentes para nosotros. En este sentido, para el griego común de los días de Tales y Anaximandro, el mar Egeo era ilimitado simplemente porque era incapaz para fijar su medida exacta o, mejor dicho, aproximada. No sabemos a ciencia cierta si Anaximandro retomó este significado o no, y, por tal motivo en algunas traducciones de los fragmentos del filósofo, *to ápeiron* se traduce no como 'lo infinito' sino como 'lo indefinido' o 'lo ilimitado'.[37] De cualquier manera, lo relevante para nuestro propósito es que Anaximandro le dio existencia como ente y abrió así el camino a la especulación metafísica. No obstante, debe señalarse que el infinito matemático hizo su aparición "oficial" cuando el supuesto discípulo de Anaximandro, Pitágoras, descubrió la

[36] Sobre este punto véase Ferreirós (1996-7), especialmente 4.1.3.

[37] Renouvier, el principal oponente de Couturat, comenta al respecto: "La palabra griega απειροζ, cuyo equivalente exacto en francés es "ilimitado", se prestaba a dar una idea del objeto inagotable sin que fuera preciso responder categóricamente a la cuestión del estado *actual* de este objeto en relación con la enumeración. Es así que Anaximandro ha podido imaginar, respecto a los mundos que se forman y se destruyen, la existencia constante de cualidades *sin límites*, con las cuales la sustancia única compone los mundos *innumerables*", Renouvier (1927), p. 101: (1944), p. 90. Según Renouvier "lo ilimitado" es el único sentido inteligible que cabe usar cuando se habla del infinito. Sobre los aspectos filológicos de la cuestión véase Dancy (1989).

relación no medible (con el sistema numérico disponible en ese entonces; esto es, con el dominio de los números enteros positivos) entre los lados y la hipotenusa de un triángulo isósceles, o bien, entre el triángulo rectángulo formado con el lado y la diagonal de un cuadrado.

Es, desde luego, un tanto extraño llamar oficial a un descubrimiento del cuál no tenemos suficiente certeza sobre su verdadero autor ni sobre la fecha exacta en que tuvo lugar, pero lo que he querido sugerir es que este descubrimiento, que da carta de naturalización a los números irracionales, no era en modo alguno un caso geométrico aislado. Los egipcios de ese entonces ya tenían noticia de la inconmensurabilidad de otras magnitudes geométricas, tan sorprendentes como π o $\sqrt{2}$, de tal suerte que muy pronto floreció la idea de que el espacio era el mejor refugio del infinito.

Existe, desde luego, una fascinación o perplejidad inherente a los números irracionales que no encontramos de hecho en los sistemas numéricos familiares ya que, como sugirieron Couturat y Cantor, parecen encerrar la esencia del infinito. Hay, a simple vista, una gran diferencia entre una serie de los números naturales (digamos, por ejemplo, los números primos), y un solo número irracional:

a) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23...

b) 3.1416...

Aunque los números primos cuentan con propiedades notables, y aún desconocidas, sobre el modo de formación de su secuencia, Euclides ya había encontrado una manera sencilla de demostrar que dado un número primo cualquiera, siempre es posible encontrar otro mayor; o, dicho en otras palabras, que la serie de los números primos es infinita. No obstante, la diferencia palpable entre los números primos y un número irracional cualquiera, como $\sqrt{2}$ o π, es que estos últimos encierran en sí mismos una serie infinita, y, como veremos más delante, no pueden reducirse por medio de números racionales (aún y cuando poseamos un método para aproximarnos a ellos por medio de estos[38]), ni son equiparables con el conjunto de los números naturales, o con alguno de sus subconjuntos; en otras palabras, los irracionales no son *denumerables*.[39] Pero para llegar a este último resultado tuvieron que pasar muchas cosas, no todas ellas felices o muy sensatas que digamos.

Sin embargo puede decirse un tanto en descargo que los problemas originados por el descubrimiento de los inconmensurables requería de un desarrollo matemático que no era posible tener a la mano en esa época, y, por tal motivo, se llegó a la distinción entre número y magnitud que se ha mencionado atrás, dejando de lado la combinación entre aritmética y geometría.[40] Desafortunadamente, la retirada en la aritmetización de la geometría no fue suficiente para ahuyentar los problemas de índole metafisica y epistémica. Pero tampoco, hay que decirlo, había muchos reparos para aceptar el infinito bajo una variedad de formas[41] y, en este sentido, el libro III de la llamada *Física* y otros pasajes que Aristóteles dedica al tema deben entenderse como un intento de acotar el campo de adicción al infinito. Y para ello apela a una tradición que otorga a la coherencia entre las ideas el canon de la

---

[38] Los valores aproximados para π y $\sqrt{2}$ son, según este antiguo método, 22/7 y 7/5 respectivamente.

[39] Es conveniente distinguir, para poder captar en buena medida el quid del atolladero en el que se cae en la discusión sobre el infinito, entre *contar* o *enumerar* y *denumerar*. En el primer caso, hablamos de colecciones o conjuntos finitos, en el segundo caso, de conjuntos infinitos; pero también hay que tener presente, para evitar juicios desbordados, que esta distinción es resultado del enfoque Dedekind-Cantor, y posterior a la polémica de Couturat contra los neocriticistas.

[40] El sistema numérico de los *Elementos* es bastante simple, se limita a los números enteros positivos (sin el cero y partiendo del 2, pues el 1 es la unidad sobre la que se construye la serie, VIIdefs.1-2, y porque, como apuntaba ya Pascal, posee propiedades que no son atribuibles a los demás números). Se usan también fracciones pero no se les define o construye de manera sistemática. Desde luego, los números irracionales no son considerados como números.

[41] Por ejemplo, Anaxímenes, discípulo de Anaximandro, habla de un aire infinito como *arché*; Anaxágoras de una infinita variedad de elementos, las semillas o cuerpos homogéneos, y Demócrito y Leucipo hacían otro tanto al hablar también de un número ilimitado de átomos.

racionalidad epistémica; y tal criterio, con sus debidas transformaciones, ha cruzado los siglos y se ha convertido en piedra angular de la racionalidad occidental. En cierta forma, la mayoría de los proyectos filosóficos pueden entenderse como los numerosos intentos de dar sustento a esta tradición y su eco puede reconocerse con toda su fuerza en sistemas filosóficos tan originales como la *Crítica de la Razón Pura* o el *Tractatus Lógico-Philosophicus*. Dicha concepción la encontramos formulada por primera vez en Parménides en los siguientes términos: "... no podrías conocer lo que no es -no es alcanzable- ni tomarlo en consideración, pues *lo que cabe concebir y lo que cabe que sea, son la misma cosa*".[42] En otras palabras, no es posible aquello que no es aprehensible racionalmente; o bien, no existe aquello que contraviene las leyes de la lógica. Bajo esta premisa fundamental Parménides examina una gran variedad de predicados o atributos que pueden aplicarse al Ser, desechando todos aquellos que resultan contradictorios; entre estos últimos se encuentra el movimiento, el vacío, y, desde luego, lo ilimitado.

El razonamiento de Parménides parte del truismo según el cual el Ser es (y nosotros podríamos decir, aquello que *es* real, existe), y crea por oposición *la nada*, *el no ser*, sólo para desecharla y usarla para repudiar todos aquellos predicados compuestos que implican falta o carencia, como el *ápeiron*, que significa también 'falta de límite', y, por consiguiente, no es (o no existe) pues el Ser no puede carecer de nada. Por tal motivo, Descartes se ve obligado a distinguir, más tarde, entre indefinido e infinito; esto es, entre un infinito negativo o defectuoso (y se podría casi añadir, para aumentar su desprestigio, *limitado*), y un infinito positivo y completo. Pero todo ello tenía que ver más con sus inclinaciones

[42] Fragmento 3, según la edición de Alberto Bernabé (1998), p. 161; las cursivas son mías. Otra traducción sería: "no puedes saber lo que no es esto -es imposible- ni descubrirlo; porque es la misma cosa poder ser pensado y poder ser".

teológicas (dado que si Dios es infinito, no lo puede ser en un sentido negativo), que con sus especulaciones matemáticas; lo cual, por cierto, no le impide a Couturat retomar las palabras de Descartes para abogar por el infinito actual en matemáticas. Pero no nos adelantemos.

Jesús Mosterín, fiel a la tradición fregeana, asume que Parménides se dejó arrastrar por trampas del lenguaje al no distinguir entre las distintas funciones del verbo *eînai*.[43] Pero sea correcta o no dicha interpretación, las ideas de Parménides recibieron un fuerte apoyo por parte de Zenón de Elea, y sus argumentos no pueden descartarse simplemente aduciendo una confusión entre el uso del verbo 'es' como identidad, como existencia y como predicado, sino mostrando su carácter falaz.

Ambos eleatas se oponían a la opinión predominante, de corte pitagórico, según la cual el movimiento es posible racionalmente (lógicamente), y, por lo tanto, ha de tenerse por real. La tesis favorable a la existencia del movimiento contaba, desde luego, con suficiente evidencia empírica, pero Parménides había ideado una doctrina ingeniosa para desacreditar el apoyo de la experiencia sensible, de tal suerte que no quedaba más alternativa que asegurar su coherencia lógica.

No me detendré aquí en examinar los argumentos de Zenón,[44] los cuales son bien conocidos y gozan de numerosos estudios competentes,[45] pero me limitaré a resaltar que, además de ir en contra de la pluralidad o multiplicidad de las cosas y de la existencia del movimiento, lo que entra en juego es la idea de que tiempo y espacio están formados por instantes y puntos, y, por tanto, resultan divisibles tanto como se quiera. La mención resulta pertinente porque abre el camino al tratamiento del infinito que Aristóteles hace en el libro III de la *Física*, en

[43] Mosterín (1984), pp. 63-65.
[44] No esta de más mencionar que una de las primeras publicaciones de Couturat [2] es una nota sobre la

donde nos dice que hay cinco motivos para creer en la realidad del infinito: 1) el tiempo, que es de hecho infinito; 2) la división de las magnitudes tal y como la entienden los matemáticos; 3) la generación y la destrucción incesante tal y como lo concibe Anaximandro; 4) los límites, pues en sí mismos presuponen la ausencia de ellos, y 5) porque si el pensamiento parece no encontrar término, debe existir muchas otras cosas infinitas, "porque en las cosas eternas no hay ninguna diferencia entre poder ser y ser" (203b, 15-30).[46]

No es este el lugar adecuado para ocuparse de los distintos tipos de infinito que Aristóteles discute y rechaza, de modo que intentaré limitarme al infinito matemático con el único objeto de hacer más patente aquello que todavía perdura en la problemática retomada por Couturat a finales del siglo XIX. Pero, antes de avanzar, es preciso recordar que Aristóteles, a diferencia de su maestro, considera todas las nociones matemáticas, sean geométricas o aritméticas, como abstracciones conceptuales extraídas de la experiencia, y, por consiguiente, el infinito matemático es para él ante todo un infinito físico (I, 184b, 25; este es el motivo por el cual rechaza además el infinito en sí mismo, *autò ápeiron*).

En efecto, aquí se dice que el problema principal es examinar si existe una magnitud sensible que sea infinita (204a), y luego pasa a describir los distintos sentidos en los cuales cabe entender lo que ha de ser *infinito*: 1) lo que es imposible de recorrer debido a su propia

---

interpretación positivista de Mouret sobre el problema de Aquiles.

[45] *Cf.* Mosterín *op. cit.*, pp. 67-73, Russell (1914), cap. VI y Jones (1987).

[46] En *Summa Physicorum* Grosseteste menciona 5 modos de referirse al infinito que no concuerdan del todo con el citado pasaje de Aristóteles: "De un modo, de lo que no tiene ninguna magnitud, y así se dice que el punto y cualquier indivisible es infinito. De otro modo, de aquello que tiene magnitud y solamente disminución indeterminada; y de este modo habla el filósofo sobre el infinito. De otro modo, de lo que tiene magnitud que puede atravesarse, pero no fácilmente, como se dice infinito un camino largo, porque es atravesable pero con dificultad. De otro modo, de lo que tiene magnitud de sí fácilmente atravesable, pero que está impedido por algo extrínseco, como ocurre con la profundidad del mar. Quinto, aquello en cuyo acto se conserva potencia, y

naturaleza y 2) lo que puede recorrerse pero sin poder recorrerse hasta el fin, o a) lo que difícilmente puede ser recorrido, o b) lo que naturalmente admite ser recorrido, pero no puede ser recorrido o no tiene límite.[47] Estos dos sentidos, un tanto ambiguos, apuntan a lo que llama más adelante *el infinito en potencia*, y *el infinito en acto*.

Aristóteles, como todo empirista estricto, sostenía que sólo el primer caso era humanamente aceptable, y relegaba el segundo sentido al baúl de las nociones sin sustento. Pero su argumentación no es muy clara y convincente, sobre todo a los ojos de un lector moderno. Por ejemplo, una razón de peso para rechazar el infinito actual consiste en la aparente paradoja de que cualquiera de sus partes sería también infinita, pero esto es hoy algo que se reconoce precisamente como una propiedad del infinito.[48] De hecho, es así como Dedekind y Cantor distinguen entre finito e infinito. En lenguaje conjuntista decimos que un conjunto infinito contiene subconjuntos que son igualmente infinitos, aunque ciertamente, no todos sus subconjuntos lo son, pero el conjunto potencia del conjunto en cuestión es mayor que dicho conjunto ¿Por qué entonces Aristóteles considera su argumento como definitivo? Primero, porque no posee aún la teoría Cantor-Dedekind de conjuntos que permite aceptar como una propiedad definitoria del infinito el hecho de que posea subconjuntos equivalentes a sí mismo.[49] Segundo, porque en lugar de tal teoría tiene a la mano un principio de mero sentido común, bajo el cual el hecho de encontrar partes igualmente infinitas resulta

---

nunca está en acto último sino siempre en potencia, como la agregación o suma del número y la división del continuo".

[47] *Física*, III, 204ª.

[48] "Es evidente que no es posible que lo infinito exista como un ser en acto o como una sustancia y un principio. Porque cualquier parte que se tome de él sería infinita, si es divisible en partes (ya que si lo infinito es una sustancia y no un atributo de un sujeto, la esencia del infinito sería lo mismo que lo infinito)". *Loc. cit.* Y su correspondiente en *Met.* XI, 1066b, 15.

[49] Más precisamente, "un sistema S se llama *infinito* cuando es similar a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se llama a S *finito*". Y "los sistemas S y R son *similares* cuando existe una representación ϕ de S tal

paradójico. Dicho principio aparece precisamente como la octava noción común de *Los Elementos*, y en ella se establece que "el todo es mayor que la parte".

Más adelante podremos constatar que este es todavía un argumento fuerte a finales del siglo XIX y como tal es presentado por los finitistas a los cuales hace frente Couturat. Pero por lo pronto nos contentaremos con tener a la vista que el infinito matemático como propiamente tal se limita al número y la magnitud, y que, según Aristóteles, si ha de existir como atributo en aritmética y en geometría sólo ha de ser como mera potencia y no como *enérgeia*. Ahora bien, hay otro argumento en contra del infinito en acto que es en cierta forma un corolario del argumento sobre la infinitud de las partes, puesto que si efectivamente las partes del infinito son igualmente infinitas; lo cual se considera imposible, entonces, el infinito en acto debe ser completo y sin partes, pero esto es también imposible ya que todo infinito lo es en cantidad (sea como número o como magnitud), y, por consiguiente, deberá constar de partes. De aquí Aristóteles deduce también otras consecuencias igualmente inadmisibles, como es el hecho de que la idea misma de un infinito como un todo sin partes, supone un infinito como sustancia o principio (*arché*), lo cual se opone a la idea de infinito como atributo, en tanto se predica como cualidad de las cosas (sean estas números, magnitudes o de otra naturaleza). No nos detendremos aquí a discutir si el rechazo de Aristóteles al infinito como una propiedad del universo se encuentra en contradicción con el infinito geométrico, ni si sus argumentos para rechazar otros tipos de infinito son fundados y sus críticas justas, ya que nos bastara con tener presente que el problema del infinito matemático se remite a la cuestión de si es posible concebir el infinito de manera coherente, sea en acto o en potencia;

que ϕ S = R, y por lo tanto, también ϕ R = S. En el nuevo lenguaje se dice que a y b son equivalentes o *equinumerosos* si hay una aplicación biyectiva de a sobre b. *Cf.* Dedekind (1998), § 5.

y cómo o de qué manera, si ha de recibir una respuesta positiva, ya sea en el dominio numérico o bien en el ámbito geométrico.

Nuestras limitaciones temáticas no deben sugerir en ningún momento que el infinito a secas, o, si se prefiere, la idea misma de infinito, no haya sido negada (basta con pensar en un empirista recalcitrante, como Locke, para constatarlo[50]); ni que las más largas controversias sobre el infinito se hayan dado en el campo de la cosmología y en la metafísica, así como en la teología; ni que tales controversias se hayan desenvuelto sin referencia alguna a consideraciones de índole propiamente matemática. Simplemente los omitimos aquí por su escasa relación con los problemas a los que se enfrenta después Couturat.

Por esta misma razón es conveniente resaltar que, por un lado, el infinito matemático como problema filosófico se limita a la consideración de un número o una magnitud infinita en acto, y esto únicamente debido a los problemas conceptuales a que da lugar el suponer un número ordinal como el número más grande, o algún otro supuesto similar que da lugar a la consideración de una magnitud infinita como una cantidad infinita fija, lo cual es ya una contradicción. En este sentido, los números irracionales no plantearon problemas de orden filosófico, ni antes ni después, relacionados con el infinito en acto y si llegaron a representar serios problemas, lo fue en el mismo tenor que acompañó la aparición de los números negativos y los números imaginarios en la resolución de ecuaciones algebraicas. De hecho, como ya se ha sugerido, en la matemática griega fueron dejados deliberadamente de lado como sistema numérico porque ni siquiera se les consideraba como tales (el mismo término *álogon* como antónimo de *rhetós* apunta ya sus connotaciones negativas: *no medible*, *no*

---

[50] Se puede añadir que Locke tenía más bien en mente la idea positiva de infinito de Descartes, lo cual es históricamente correcto; aunque no esta de más tener a la vista que el concepto negativo de infinito no era en lo

cifrable), y se limitaron sus cálculos al uso de los números positivos y de las fracciones, de tal suerte que, en tanto signos para la expresión de relaciones no medibles, quedaron relegados como propiedades peculiares de ciertos objetos geométricos. Pero la misma suerte corrieron otros sistemas numéricos y su tratamiento sistemático tuvo que esperar hasta la época del rigor y la fundamentación que caracteriza al siglo XIX.

Hay, por otro lado, dos problemas serios que tienen que ver con el infinito en potencia tanto en el aspecto geométrico como en el aspecto aritmético. El primero de ellos se encuentra ya implícito en el argumento de Zenón, sobre la carrera de Aquiles y la tortuga, en tanto que la validez del razonamiento descansa en parte en la supuesta divisibilidad al infinito del espacio. Por este motivo Aristóteles distingue también entre el infinito por división y el infinito por adición, e intenta desechar el primero y resolver el dilema. Sin embargo, el aspecto más polémico del problema aparece con el aparato matemático del cálculo tal y como se le maneja durante los siglos XVII y XVIII, y que postula entidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes como valores de determinadas funciones.[51]

El segundo problema, que esta vinculado con el anterior, es la llamada paradoja de Galileo[52] según la cual al poner en correspondencia uno a uno la serie de los números naturales con la serie de los cuadrados, salta de manera intuitivamente evidente la idea de que si bien ambas series se prolongan hacia el infinito, en la primera serie hay más elementos que en la segunda, ya que a medida que se incrementan los números de la primera serie disminuyen los de la segunda; y en consecuencia, parece desprenderse paradójicamente que existen

---

absoluto una idea (innata) del infinito. Sobre este tema véase Herrera Ibáñez (1997), y Rogers (1997), pp. 146-153.

[51] De entre la abultada bibliografía sobre el tema remito a dos escritos, para los aspectos matemáticos Mancosu (1996), caps. 4-6; y para las objeciones de Berkeley al cálculo véase Robles (1997).

infinitos más grandes que otros. Pero no es difícil advertir que todo cuadrado tiene su raíz, y, a la vez, todo número es raíz de un cuadrado, de lo cual se deduce que hay tantos números como cuadrados hay. Además, Galileo argumenta correctamente que la aparente paradoja de su ejemplo obedece a que se atribuyen a las dos series infinitas las propiedades de los números finitos cuando en el fondo son de naturaleza muy distinta, de tal suerte que "el infinito, por sí solo, excede nuestra capacidad de comprensión".[53]

Sin embargo, es conveniente añadir que Galileo emplea la correspondencia entre los enteros positivos y sus cuadrados como un argumento a favor de la divisibilidad infinita del espacio, o si se prefiere, para acallar la queja según la cual es absurdo que dos rectas de distinta longitud se encuentren ambas formadas por infinitos puntos indivisibles. Por consiguiente, parece ser que Galileo da por descontado que el infinito de los naturales es igual al continuo geométrico,[54] lo cual, como veremos más adelante, Dedekind y Cantor se encargaron más tarde en demostrar que no es así. Dicho en otras palabras, Galileo está en lo correcto al señalar que las propiedades de los números finitos no pueden emplearse adecuadamente para caracterizar los infinitos; y se encuentra igualmente cierto al considerar que el conjunto de los naturales es igual al subconjunto de los cuadrados (aunque esta última serie se haga menos densa conforme avanza la serie); pero se equivoca al dar por un hecho que todos los

---

[52] De hecho, Galileo presenta dos aparentes paradojas más, la del barril y la de los círculos concéntricos de Duns Scoto. *Cf.* Mancosu *ibid.*, cap. V, 5.1.

[53] *Discorsi*, p. 106 [p. 77]. "Este tipo de dificultades, señala Salviati más adelante, proviene de los razonamientos que nosotros hacemos con nuestro entendimiento finito al tratar con los infinitos, otorgándoles los mismos atributos que damos a las cosas finitas y limitadas, lo cual pienso que es improcedente puesto que creo que las propiedades de mayor, menor e igual no convienen a los infinitos, de los que no se puede decir que uno es mayor, menor o igual a otro". p. 108 [p. 78].

[54] "De modo que, cuando el señor Simplicio me presenta muchas líneas desiguales y me pregunta cómo puede ser que en la mayor no haya más puntos que en la pequeña, yo le respondo que no hay ni menos ni los mismos, sino infinitos en cada una. Si yo le respondiese, por el contrario, que los puntos de una son tantos como los números cuadrados, los de la otra mayor, tantos como números naturales, y de otra pequeñísima, tantos como

infinitos son esencialmente iguales (aunque no iguales en el sentido que lo son dos números finitos).

De manera un tanto irónica, será justo la base sobre la cual se levanta el ejemplo de Galileo (esto es, la correspondencia uno a uno entre dos sistemas o conjuntos infinitos), la herramienta que permite apuntar a la solución positiva que buscaba Bolzano pero que sólo más tarde desarrolla Cantor en su teoría de conjuntos transfinitos. Pero antes de comentar la forma cómo Couturat enfrenta los problemas filosóficos del infinito será conveniente hace un resumen de la primera parte de *l'infini*, y analizar, aunque sea brevemente, el aspecto positivo que tiene la misma y cómo pretende hacer frente a los problemas.

§ 5. La generalización del número

El objeto de la primera parte de *l'infini* es, por decirlo de algún modo, una justificación y explicación del infinito en matemáticas por sus propios medios. Es decir, en ella se ocupa de mostrar cómo se construyen y operan los números dentro de las tres ramas básicas de la matemática (aritmética, álgebra y geometría), y cómo se introduce y opera el infinito en cada una de ellas. En consecuencia, la primera parte se encuentra organizada en cuatro libros: el primero, que se ocupa de la generalización aritmética del número y en el cual se construyen los números racionales (fraccionarios y calificados), los imaginarios y los irracionales; el segundo libro se ocupa de los usos de los anteriores sistemas numéricos dentro del dominio del álgebra (uso de negativos y fraccionarios en ecuaciones de primer grado, uso de

números cubos, ¿le daría así satisfacción al poner más puntos en una que en otra y en cada una infinitud?". *Ibid.*, p. 110 [p. 79].

imaginarios e irracionales en ecuaciones de segundo grado y, uso de números algebraicos y trascendentes[55]). El tercer libro se ocupa de la generalización geométrica del número y, como se desprende de lo que se ha dicho hasta ahora, representa para Couturat la verdadera razón de ser del infinito y donde mejor se muestran las relaciones entre el número y la magnitud.

Como ya se ha mencionado, Couturat sostiene que los distintos sistemas de números se han introducido para satisfacer distintos tipos de magnitudes (algebraicas, geométricas, y analíticas), y, por consiguiente, funda la construcción de dichos sistemas sobre la base de las operaciones y propiedades básicas entre magnitudes. Como Dedekind, Cantor, Frege y otros matemáticos de la época, considera también que los números naturales son la base de los demás sistemas numéricos, pero a diferencia de todos ellos y a contracorriente, le parece innecesario dar una fundamentación o axiomatización de los mismos, de modo que simplemente los da por conocidos, junto con sus operaciones y propiedades básicas, al inicio de la construcción de los otros sistemas; aunque, como veremos más adelante, deja para la segunda parte su definición filosófica, mas no matemática.[56]

Desde luego, el iniciar con los números fraccionarios tiene una justificación histórica ya que recuerda el transito de contar a medir, pero además refuerza su tesis de que es la magnitud la que reclama la generalización del número, y, por consiguiente, muestra claramente el estatus sintético *a priori* de la matemática. Por otra parte, llama particularmente la atención que los

---

[55] Desde luego, la distinción entre números trascendentes y algebraicos consiste en que los primeros no figuran en la resolución de expresiones algebraicas, y se trata justamente de una distinción formulada en el siglo XIX, y, que Couturat discute en este apartado como un argumento en favor del carácter racional del método geométrico en oposición al método algebraico y meramente lógico.

[56] Sin embargo, más adelante adelanta que los números enteros son el producto del 1, o unidad, y la operación básica +. *Cf.* [I], pp. 69-71.

números fraccionarios, los números algebraicos (calificados) y los números imaginarios[57] se definen de manera formal, de tal suerte que (a, b) es un número fraccionario si a y b son números naturales; o es un número calificado si a y b son números aritméticos (enteros y/o fraccionarios); o bien, será un número imaginario si a y b son números reales; y establece las operaciones y propiedades en cada uno de los casos. Este método simbólico, debido a Weierstrass y Méray, puede resumirse asumiendo que dado un conjunto de números (g) bien definido, se crea un nuevo conjunto de números (G) de la siguiente forma:

1. Todo número del conjunto (G) es, por definición, el conjunto de dos o más números del conjunto (g).
2. Se define la igualdad, la adición y la multiplicación entre los números del conjunto (G). Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones se conservan tal y como ocurre con los números naturales.
3. El conjunto (G) admite un subconjunto (G') tal que a todo número de (G') corresponde un número, y sólo uno, de (g), y recíprocamente; es decir, se identifican (G') y (g), de modo que se hace patente que (G) es una generalización de (g), el cual queda comprendido como un subconjunto de (G).

Y añade, el credo formalista que ahora nos resulta más familiar: "El matemático jamás define las magnitudes en sí mismas, como el filósofo estaría tentado a hacer; define su igualdad, su suma, su producto, y estas definiciones determinan, o mejor dicho, constituyen todas las propiedades matemáticas de las magnitudes. De forma todavía más abstracta y formal postula los símbolos y al mismo tiempo postula las reglas según las cuales deberá dar

[57] Curiosamente, Couturat nos advierte que conserva este nombre a pesar de la carga histórica negativa que pesa sobre ellos y aunque es más apropiado llamarlos *complejos*, como lo han empezado a hacer los

las combinaciones del conjunto; esas reglas son suficientes para caracterizar a esos símbolos y para darles su valor matemático. En una palabra, crea entes matemáticos por medio de convenciones arbitrarias; del mismo modo que las distintas piezas del ajedrez son definidas por las convenciones que regulan sus movimientos y sus relaciones" (p. 49).

Por último, Couturat introduce los números irracionales reconociendo que no pueden definirse por medio del método empleado anteriormente, y al mismo tiempo esto mismo le permite explicar porqué no ha seguido un orden natural y genealógico en la exposición de los sistemas numéricos; lo cual, dicho sea de paso, parece una renuncia tácita al principio de Cournot. De cualquier forma, reconoce dos métodos para definir los números irracionales, los cuales asocia con Cantor y Weierstrass,[58] por un lado, y con Dedekind y Tannery por el otro. Luego reconoce, lo cual también parece ir en contra del espíritu de Cournot, que es justo el segundo método el que posee mayores ventajas, ya que de entrada es más general y es independiente de cualquier serie o sucesión, por medio de las cuales se puede definir los números irracionales siguiendo el primer método. La relación de Tannery con Dedekind se debe a que Couturat usa el método de cortadura a través de la versión que su maestro parece

matemáticos. ¡Pero añade que con el nuevo nombre no quedará más rastro de este infame nombre que la letra *i*, que substituirá al incomodo y absurdo símbolo $\sqrt{-1}$!

[58] Debe decirse que Weierstrass nunca publicó su teoría de los irracionales, la cual era conocida sólo a través de las versiones de sus alumnos, y dado que Cantor era uno de sus discípulos, su método guarda similitudes innegables con el de su maestro, como el hecho de referirse todavía a los irracionales como "magnitudes numéricas". Sin embargo, la diferencia entre las series compuestas de racionales de Weierstrass y las sucesiones fundamentales de Cantor suponen un cambio conceptual que acercan más a este último con Dedekind. *Cf.* Ferreirós (1998), 5.1. Hay en este punto otra incógnita por despejar, ya que Couturat cita los *Grundlagen* de Cantor (1883) al referirse a los dos métodos, pero la definición de los irracionales que allí aparece es una reelaboración de la que presenta en el ensayo "extensión de un teorema de la teoría de series trigonométricas"(1872). Por otra parte, Couturat fecha mal este último ensayo (como 1871), y cita su título en francés, lo que parece indicar que usó las traducciones que aparecen en *Acta Mathematica* II. Para una comparación de ambas versiones de la teoría de Cantor; *cf.* Belna (1996), cap. II. 3.

haber desarrollado independientemente del segundo.[59] Este dato explica en parte su aparente alejamiento con respecto a las doctrinas de Cournot, pero deja sin responder el hecho de que un pronunciamiento a favor del método de Dedekind implica una renuncia a una de las tesis principales que intenta sustentar; esto es, que el infinito numérico sólo se explica y justifica por medio de su aplicación al continuo geométrico o, en general, a la magnitud.

Ahora bien, es conveniente tener presente que Couturat no introduce los mencionados sistemas numéricos en el sentido que sería propio de una fundamentación matemática, ya que en principio la fundamentación a partir de la construcción genética de los sistemas numéricos no es una preocupación que tenga a la vista (lo cual de alguna manera explica las lecturas que hace de Dedekind y Cantor). Pero en esto Couturat es fiel a la tradición francesa, que si bien fue la que dio inicio a la era del rigor matemático, más tarde fue indiferente o ajena a la tarea de fundamentación. Y en este sentido, no hay que olvidar que el trabajo de Couturat es meramente filosófico y se propone hacer frente al finitismo neo criticista francés que niega el valor positivo del infinito matemático.

Ahora bien, ya he mencionado que la inclinación a favor de Dedekind en cuanto a los números irracionales parece suponer un alejamiento de las doctrinas de Cournot, ya que los métodos de Weierstrass y Cantor parecen ajustarse más a la idea de una *logística*, en tanto se encuentran más próximos al análisis y a su aplicación al mismo, mientras que el sistema de Dedekind resulta demasiado general y abstracto para admitir una incorporación inmediata en

---

[59] En el prólogo a la primera edición de "¿Qué son y para qué sirven los números?" Dedekind señala: "la misma teoría de los números irracionales basada en el fenómeno de la cortadura se encuentra expuesta en la *Introduction à la théorie des functions d'une variable* de J. Tannery (París, 1886). Si comprendo correctamente un pasaje del prólogo de esta obra, el autor ideó independientemente esta teoría, es decir, en un tiempo en que le eran desconocidos no sólo mi escrito, sino también los *Fondamenti* de Dini, mencionados en el mismo prólogo; esta coincidencia me parece una agradable prueba de que mi concepción corresponde a la naturaleza

el cálculo.[60] No obstante, para Couturat el método formalista de introducir los sistemas numéricos no es sino una reconstrucción analítica (lógica) que permite ver que en los mencionados sistema no se esconde ningún problema conceptual o alguna confusión, aunque con ello no se ha hecho más que despojarlos de su materia inteligible y, por lo tanto, de toda significación real. En este sentido, el formalismo en matemáticas es como la labor del taxidermista, que nos permite ver mejor el objeto pero a fuerza de disecarlo y, por lo tanto, quitarle vida.

Por tal motivo, la reconstrucción formalista no tiene más fin que la clarificación lógica de los conceptos, pero no tiene nada que ver con la práctica matemática como tal, ya que en concreto esos sistemas no son producto de una convención arbitraria para el uso de ciertos signos sino que han surgido como resultado de problemas concretos expresados en el lenguaje matemático del álgebra y la geometría, o de la combinación fructífera de ambos (de ahí el carácter sintético *a priori* de la matemática). "En resumen, la teoría formalista del número no consigue depurar los conceptos aritméticos más que despojándolos de toda significación intrínseca; su génesis natural es substituido por un origen ficticio y convencional, por una suerte de creación arbitraria *ex nihilo*; procediendo, por decirlo así, por un golpe de estado. Para calificar dicho método en dos palabras; es un método lógico mas no racional" (pp. 72-3).

Por consiguiente, para Couturat la verdadera generalización del número se va aclarando en el tránsito del campo del álgebra al de la geometría, así como en la conjunción de ambas a la

de la cosa". Dedekind (1998), p. 101. Según Tannery (1886, p. ix), sólo conocía indirectamente el método de Dedekind a través de Cantor.

[60] "Precisamente, escribe Pringsheim en 1898, porque el método que sigue Dedekind para la introducción de los irracionales no se funda en ningún algoritmo aritmético, consigue las ventajas de una gran claridad y

que ha dado lugar primero la geometría analítica, y, como un desarrollo mayor, el cálculo y la teoría de funciones. Como ya se ha mencionado, el álgebra ocupa el tema del segundo libro de la primera parte, y si bien reconoce que aquí se ha ganado mayor sustancia en la generalización del número reconoce que su tratamiento se encuentra de nueva cuenta alejado de la realidad histórica toda vez que los números fraccionarios y los irracionales tuvieron su origen en la *réalité intuitive*. Asimismo reconoce que la teoría algebraica hace un uso limitado de los irracionales, al mismo tiempo que establece una distinción artificial entre números algebraicos y números trascendentes. Pero de nueva cuenta, la generalización algebraica desde su aspecto meramente lógico resulta irreprochable, y es sólo, pero no por ello menos importante (¡todo lo contrario!) en el aspecto racional, y por lo tanto, filosófico, en donde la generalización del número por medio del álgebra resulta insuficiente. Y la razón principal de su limitación consiste en que el álgebra no es sino una generalización de la aritmética y de alguna forma se encuentra sujeta a las mismas limitaciones que encontramos en la aritmética elemental. Dicho en el espíritu de Cournot, el álgebra por sí mismo es incapaz de representar el verdadero infinito matemático: “En general, el principio de continuidad no tiene lugar en el álgebra y no puede ser invocado para justificar la generalización algebraica del número. Pero no sólo la continuidad es en absoluto necesaria en las especulaciones de la aritmética general, sino que es repugnante al espíritu de esa ciencia y a la naturaleza misma del número. En efecto, el número es esencialmente discontinuo, lo mismo que casi todas sus propiedades aritméticas” (p. 140).

---

concisión. Por las mismas razones resulta notablemente más abstracto que el de Cantor y se utiliza con menos comodidad en los cálculos”. Citado por Ferreirós art. cit., p. 40.

§ 6. Las concepciones empirista y racionalista del número natural

De acuerdo con el principio de racionalidad de Cournot, tanto la teoría de números, como el álgebra y la geometría gozan del mismo rigor lógico y, por consiguiente, representan cada cual una fuente y un dominio legítimo del infinito matemático. Sin embargo, desde el punto de vista racional, la geometría es en la que mejor se expresa el infinito ya que es el continuo el que impone la generalización del número y da pie al desarrollo del álgebra y el análisis. Es, en pocas palabras, la más natural y la que mejor se corresponde con el proceso genealógico de las matemáticas.

Ahora bien, si en la primera parte se había propuesto establecer esto último de manera sistemática y constructiva, en la segunda parte se propone debatir en el plano filosófico la idea de número natural (que en la primera parte se había dado por supuesta) y, de nueva cuenta, las relaciones entre el número y la magnitud, con el objeto de mostrar cómo a partir del análisis correcto de ambos conceptos se "disipan todas las contradicciones que se cree encontrar en esta noción [de infinito]". De esta manera, la segunda parte se divide también en cuatro libros. El primer libro remite al concepto de número entero e intenta hacer frente principalmente a la teoría empirista de la cardinalidad, pero también busca establecer lo que sería la concepción más perspicua, completa y racional del número entero. El segundo libro es un resumen de las propiedades fundamentales de la magnitud y muestra cómo el número no es, desde el punto de vista racional, más que la expresión de las relaciones entre magnitudes, mientras que estas últimas pueden concebirse sin referencia a la noción de número. El libro tercero es un análisis de las objeciones que la escuela finitista francesa, bajo el liderato de Renouvier, hace a la noción de infinito matemático; mientras que el último libro es un comentario más general de ambas nociones (número y magnitud), acompañado de un análisis de las antinomias kantiana a la luz de los resultados obtenido a lo largo de toda la obra.

Ya se ha mencionado que en la primera parte Couturat se ha valido del sistema de los números naturales para construir los demás sistemas numéricos, presumiendo su carácter fundamental en tanto es en dicho sistema donde se levanta todo los otros sistemas numéricos. Por este motivo, aquí se propone discutir su naturaleza y establecer su fundamento filosófico. Como en la primera parte, el método de construcción es el mismo aunque no exhaustivo ya que se contenta con presentar las definiciones más elementales (en concreto las de igualdad, de desigualdad, de adición y sus propiedades, así como el principio de inducción completa). Posteriormente discute la noción de cardinalidad, y critica, por considerarla que envuelve un círculo vicioso, la demostración del postulado de invariación[61] que presenta Kronecker. El procedimiento de este último consiste, en sus líneas generales, en construir un conjunto de objetos con un orden lineal fijo y bien determinado, de tal suerte que la serie de los números naturales es puesta en correspondencia uno a uno con los elementos del conjunto construido, de modo que se obtendrá un número n que será el número cardinal de dicho conjunto. Posteriormente, se cambia el orden del mismo conjunto y se establece de nuevo la correspondencia con la serie de los naturales, para que así, se pueda así verificar que el número cardinal sea el mismo. Desde luego, el procedimiento de verificación de la cardinalidad se puede ampliar tanto como se quiera. La esencia de la crítica de Couturat consiste en que Kronecker se vale de la serie de los números naturales

[61] Se dice que la cardinalidad de un conjunto debe cumplir con el principio de invariación: esto es, la cardinalidad del conjunto no depende de la forma como se encuentren ordenados sus elementos. Según Helmholtz (1977), p. 74, fue Schröder quien llamó primero la atención sobre este principio.

como instrumento para definir la cardinalidad de un conjunto cualquiera, dejando sin demostrar la cardinalidad misma de los números naturales, ya que no hay ninguna garantía de que sobren o falten algunos de los números naturales. Además, es claro que no importa cuál sea el orden de los objetos del conjunto ya que su enumeración según la serie de los naturales impone este último orden, lo cual constituye un caso particular del teorema que se busca probar.[62]

Posteriormente, Couturat sopesa la demostración de Helmholtz y si bien la considera más satisfactoria que la anterior, también encuentra insatisfactorio el resultado ya que si bien la forma como se introducen los números ordinales es formal, al definir la cardinalidad por medio de la ordinalidad deja entrar consideraciones de carácter empirista y de orden psicológico, ya que el proceso de contar es considerado como la relación de correspondencia entre la serie de los números ordinales con objetos del mundo real, y, por tal motivo, se estipula como una condición importante que los elementos del conjunto no pierdan su *unidad* (esto es, que no varíen con respecto al tiempo).[63] Y concluye: "Se puede resumir la crítica a la teoría empirista en dos palabras, que muestran al mismo tiempo su vicio e insuficiencia: es una teoría psicológica y positivista. Se limita, en efecto, a describir el acto psicológico de contar sin investigar su principio y razón de ser; simplemente constata el

[62] "En efecto, el autor considera dichos números [del conjunto construido] como objetos reales, como fichas que ocupan los objetos a contar, y que han de ser levantadas después; el conjunto de dichos signos forma por consiguiente una colección concreta y se precisa establecer que el número cardinal de dicha colección no varía cuando se invierte el orden de sus elementos porque, como también hemos observado, si bien es cierto afirmar que ese número es n, es solamente en tanto que dichos signos se suceden regularmente de 1 a n según la serie de los números naturales, en donde el encadenamiento es esencialmente invariable". *Op. cit.* p. 313. Sin embargo, en su reseña Bourlet (1897, p. 203) comenta: "Couturat formula objeciones sutiles a la demostración de Kronecker, pero todas esas sutilezas se desvanecen, me parece, si se quisiera admitir *a priori* (y, para pasar a lo concreto hace falta admitir cualquier cosa), que todos los objetos podrán considerarse como unidades indistintas de tal suerte que su conjunto no cambie cuando se les permute".

[63] En su reseña Russell afirma, sin embargo, que la demostración de Helmholtz envuelve también un círculo vicioso. *Cf.* art. cit., p. 115.

hecho material y positivo; a saber, que se cuenta los objetos diciendo (mentalmente), "uno, dos, tres, cuatro...," pero no puede explicarlo, ya que ignora su significación lógica y su valor racional. No ve en dicha operación más que el lado exterior y superficial, pero no se ocupa de las condiciones ideales que lo hacen inteligible y posible. Y, por consiguiente, reduce la idea de número a un simple signo oral o escrito, y desemboca en aquel formalismo verbal que es propio del nominalismo de los matemáticos".[64]

Como elementos de descargo no está de más observar que Helmholtz, en acuerdo con Schröder, considera la demostración del principio de invariación como un asunto psicológico, pero, además, asume que en el proceso de enumerar se ven involucradas propiedades de carácter empírico, porque concibe deliberadamente "la aritmética, o la teoría de los números puros, como un método construido sobre hechos puramente psicológicos".[65] Por consiguiente, llama la atención que Couturat no discuta si la demostración de dicho principio es o no una cuestión de orden psicológico, pero sorprende de igual forma que no haya señalado que aquello que considera una limitación o defecto no lo es en absoluto para los autores comentados y que, por lo tanto, no haya demostrado con suficiente claridad la superioridad del enfoque *racional*, sobre la posición empirista. Sin embargo, la ausencia de semejante discusión puede deducirse a partir de su rechazo, hecho al inicio del libro, a las explicaciones psicológicas de las escuelas espiritualista y positivista francesas. Trasladando dicha crítica a Helmholtz, se podría argumentar que no es asunto de la psicología justificar

[64] Pp. 330-1. La crítica concuerda, como el mismo Couturat reconoce, con aquella que el joven Husserl formula en el primero y único tomo de la *Philosophie der Arithmetik*.

[65] "... que muestra la aplicación lógica de un sistema simbólico (i.e., el de los números) de alcance y posibilidad de refinamiento ilimitado". Helmholtz *op. cit.*, pp. 74 y 75. Al respecto, Paul Hertz comenta: "Si la teoría de la aritmética de Helmholtz intenta ser empirista en el mismo sentido que su teoría de la geometría, entonces este pasaje sólo puede significar que en nuestra reflexión sobre la experiencia nos beneficiamos de

la noción de número, puesto que se caería en un círculo vicioso al pretender dar cuenta de la ciencia a partir de la ciencia misma; esto es, la psicología no puede dar cuenta de los conceptos matemáticos porque sus propios conceptos reposan sobre principios racionales que sirven de base metafísica a ambas ciencias.

Desde luego, la crítica de Couturat no tiene mayor objeto que servir de preámbulo a la introducción de su propia concepción; la cual, según él, si bien tiene en apariencia un aire empirista en el fondo es netamente *racional*. Es empirista a primera vista porque entiende el número entero como una *colección de unidades*, mas es en verdad racional en tanto se concibe el número entero y la unidad como ideas anteriores a cualquier intuición sensible, y, por consiguiente, como nociones *a priori*. De tal forma que se puede responder a las dudas planeadas un poco más arriba señalando que la supremacía de la concepción racionalista radica precisamente en que pone de manifiesto que en la definición de la cardinalidad empirista, o si se prefiere, en la enumeración concreta, se encuentran implícitas tanto la noción de *unidad* como la de *número entero*. Pero aquí falta mostrar, desde luego, que ambas ideas no son una abstracción de los datos de la experiencia.

Dejemos de lado este punto por un momento, ya que la forma como pretende arribar a su concepción racional del número es discutiendo también algunas de las definiciones tradicionales que coinciden de alguna manera o se identifican con su propia concepción, pero que, por una razón u otra, requieren de mayor elucidación o complemento. Y como podremos constatar, la idea de número como una abstracción de los objetos del mundo sensible se presenta también en algunas de las formulaciones pretendidamente racionalistas.

---

aquellos conceptos que poseen un significado que se proyecta más allá de lo psíquico y que, por consiguiente, pueden *inter alia* ser aplicados también a lo físico" (p. 104).

Por ejemplo, la definición de Lipschitz es, según Couturat, pasable desde el punto de vista racionalista aunque todavía incompleta: "en la consideración de objetos separados, se prescinde de los caracteres por los que los objetos se diferencian y queda el concepto de *número* (*Anzahl*) de los objetos considerados". Y lo que le falta puede verse a través de la definición de Cantor, con la cual en el fondo concuerda: "el tipo ideal que se obtiene cuando, dentro de un conjunto de objetos, se ignoran su naturaleza (sus diferencias cualitativas) y su orden". Es decir, en la primera definición la idea de *unidad* no se encuentra expresamente implicada y por partida doble, ya que se omite el hecho de que cada objeto debe ser concebido como *uno*, pero también el conjunto como unidad. Y concluye: "Por lo tanto, la idea de *unidad* se encuentra dos veces implicada en la noción de *número*, primero como elemento y después como la ligadura de elementos, proporcionando en cada caso la materia y la forma. Cualquier definición de número que omita alguno de estos dos papeles será incompleta" (p. 336).

En este sentido, Stolz se encuentra más cerca de la concepción correcta cuando define el número como una *pluralidad*, siendo esta última "un conjunto o multitud de objetos distintos, en el cual se ignoran sus diferencias y su orden". Sin embargo, se encuentra todavía a medias, ya que no hay mención alguna a la unidad y sin embargo se le supone silenciosamente; lo cual es patente cuando define la igualdad entre pluralidades: "dos pluralidades son iguales cuando pueden coordinarse entre sí de manera uniforme y completa, haciendo corresponder a cada elemento de una un elemento distinto de la otra". Luego compara todas las pluralidades posibles con las pluralidades obtenidas por la repetición del signo 1, al que llama *unidad*. En este sentido, el número ordinal se define como una pluralidad de unidades; esto es, una colección de signos 1 yuxtapuestos y reunidos, mientras que el número cardinal se entiende como una pluralidad concreta que será igual a la primera pluralidad en virtud del principio mencionado arriba. Es claro que en estas definiciones se esconde un círculo vicioso ya que la igualdad de pluralidades presupone la noción de unidad, porque al establecer la correspondencia se da por sentado que las pluralidades se encuentran compuestas de unidades; esto es, de números. Por consiguiente, no se puede definir el número cardinal en función del principio de igualdad de pluralidades. Pero falla también en intentar eludir la idea de unidad al construir el número entero a partir de signos 1 yuxtapuestos, ya que es imposible que el signo pueda ocupar el lugar de la idea significada; "puesto que esos signos, por simples que sean, serán siempre objetos y si sugieren la idea de unidad, no la pueden remplazar en el intelecto ni dispensarla de concebirla" (p. 337).

De la crítica de la noción de cardinalidad de Stolz puede verse claramente, según Couturat, que la definición de Cantor, según la cual "el número cardinal de un conjunto es el concepto general común a ese conjunto y a todos sus conjuntos equivalentes", se encuentra sujeta a críticas similares y, por consiguiente, adolece de lo mismo; sobre todo si se pretende que a partir de esta definición nace, por abstracción, la noción de número natural: "Es en vano creer poder deducir la idea de número a partir de la comparación de dos o más colecciones ya que la comparación misma no es posible sino gracias a dicha idea, y si la comparación coordinada de colecciones puede sugerir la idea de su número común es porque dicha idea se encuentra de antemano implicada en la operación. Por este motivo, la idea de número no es un concepto general y abstracto surgido de la consideración de pluralidades iguales obtenidas de la experiencia" (p. 339).

Es justo en este punto, en la idea de número como producto de un proceso de abstracción, en donde confluyen las teorías empiristas y las definiciones "tradicionales" más afines con la posición racionalista. Y ya he apuntado que la fuerza de la crítica de Couturat a la posición empirista parece depender precisamente de la demostración, o para usar una palabra menos fuerte, en la constatación de que el número no es ni puede ser el resultado de un acto de abstracción o generalización.

Para ello, nuestro autor no hace sino mostrar que en cada caso el llamado proceso de abstracción esconde una petición de principio o círculo vicioso, en tanto que la noción de *unidad*, y, por tanto la de *número*, se encuentra de alguna manera u otra presupuesta o implicada en el proceso. Dicho de otra forma, y en general, ya que el proceso de abstracción consiste en despojar a los objetos de sus cualidades y reducirlos meramente a la *unidad*, debe reconocerse que la idea misma de unidad no es ni puede ser el residuo de abstracción alguna, ya que la unidad no es una percepción ni un elemento de percepción como lo son, por ejemplo, el rojo o el azul.[66]

Hay aquí al parecer un acuerdo sustancial con Husserl y Frege, aunque en realidad el acuerdo es más bien con el primero que con el segundo, ya que hay una gran diferencia en perspectiva y de fondo en cuanto a la forma como estos pensadores, cada quien por su lado, llega a la misma posición con respecto al fruto del proceso de abstracción. En efecto, para Couturat y Husserl, la idea de unidad, y, por lo tanto, la idea de número, no es ni puede ser producto de una abstracción, mientras que para Frege la idea de unidad, así como la idea de una pluralidad de unidades, no deja de ser una muletilla conceptual que en nada contribuye en la aclaración del concepto de número.

---

[66] *Ibid.*, pp. 340-1. "En resumen, para que la idea de número sea realmente el resultado de una abstracción, habría que poder afirmar lo mismo con respecto a la idea de unidad, que es el fundamento de la idea de número. Además, el producto último de la abstracción, el *genus generalissimum*, es el concepto de "cualquier cosa", y no el de unidad; ya que este no es un residuo de la experiencia, ni la última característica común a

No obstante, si bien *Die Grundlagen der Arithmetik* es una obra publicada en 1884, pasó por completo desapercibida para el joven Couturat, y seguramente el nombre de su autor no significó nada para él hasta mucho más tarde, y no sin cierta morosidad, cuando Russell le comunicó que se había dado cuenta que muchos de sus hallazgos en lógica y de los desarrollos técnicos de su primer logicismo los había logrado y dado a conocer Frege, 10 años antes, en el primer volumen de los *Grundgesetze*.[67] Pero llama particularmente la atención este desconocimiento porque en 1895, Frege había tomado parte en la discusión sobre la naturaleza del número natural que tuvo lugar en las páginas de la *Revue de Métaphysique* (una revista a la cual Couturat se encontraba, como he mencionado en el cap. I, especialmente ligado); y porque, lo cual a fin de cuentas resulta más importante, en su breve escrito resume algunas de las objeciones, del famoso capítulo III de *Grundlagen*, a las ideas de unidad y pluralidad.

En efecto, Frege critica en primer lugar el aparente formalismo de Eugèn Ballue[68] (crítica con la cual Couturat estaría sin duda de acuerdo); luego examina la idea de unidad entendida como el producto de un proceso de abstracción en donde los objetos de un conjunto o agregado son despojados de sus características particulares.[69] Y como hemos visto, aquí también Couturat estaría de acuerdo, pero las diferencias entre ambos surgen precisamente

---

todos los objetos perceptibles, sino una forma racional pura que el intelecto impone a todos los objetos, por el simple hecho de pensarlos".

[67] *Cf.* Carta de Russell a Couturat 02.06.1902; Schmid (ed.) (2002), p. 279. Sin embargo, Couturat había escrito a Frege por primera vez en 1.7.1899, en su carácter de organizador del Primer Congreso Internacional de Filosofía, pero curiosamente todavía a principios de 1904, ¡le confiesa que ha escrito los dos primeros artículos sobre *Principles*, sin conocer todavía su obra! *Cf.* Frege (1980), p. 13.

[68] E. Ballue (1863-1938), fue profesor de matemáticas en varios liceos, Frege se refiere a "Le nombre entier considéré comme fondament de l'analyse mathématique" (1894) (que a su vez se refería a un texto de Riquier (1893) de igual título y al cual Couturat refiere en su obra), pero también menciona al final el artículo de Le Roy y Vincent (1895). El artículo de Frege motivó un breve intercambio epistolar que inicia con una carta de Ballue deslindándose del formalismo que el primero le imputa. *Cf.* Frege (1980), pp. 1-5.

[69] Frege (1895).

al momento de sacar las respectivas conclusiones a partir de dicha crítica. Pero además, la clase de críticas formulada por ambos es también a todas luces distinta. Como he comentado más arriba, Couturat sostiene que la circularidad de las definiciones anteriores demuestra claramente que la idea de unidad, y, por lo tanto, la de número, es *a priori*. Por el contrario, Frege señala que el proceso de abstracción no logra despojar a los objetos en sí mismos de sus cualidades, y por consiguiente, no representa más que un acto subjetivo de dudoso valor. Asimismo, muestra que entre los defensores de tal enfoque no hay un acuerdo básico sobre el uso que dan al término unidad, ya que, por ejemplo, Ballue emplea la palabra como un nombre común o clase, al momento de indicar que las pluralidades se forman a partir de la adición sucesiva de unidades; mientras que Le Roy y Vincent lo usan como un nombre propio, al construir las pluralidades como la adición recurrente de la unidad sobre sí misma y sobre lo cual añade que es difícil hacerse una idea de cómo una cosa podría sumarse a sí misma (Couturat diría que tal objeción confunde la *unidad* con la *unicidad*, p. 506). Por consiguiente, sólo queda pensar que al echar mano de las nociones de unidad y pluralidad no se consigue una definición más clara y satisfactoria del número entero.

Debe decirse, sin embargo, un tanto en descargo de Couturat, que el artículo de Frege por sí solo no permite formarse una idea adecuada de la posición del autor, ya que como él mismo reconoce, se limita a levantar protestas y cuestionamientos ante las posiciones antes mencionadas, y que para encontrar una respuesta positiva el lector deberá recurrir a sus obras (y en particular, a *Grundlagen* y al primer tomo de *Grundgesetze*). Por supuesto, llama la atención que Frege haya sido en su única incursión en el ambiente filosófico francés tan parco y a la vez tan diplomático ante una postura que combatió ampliamente en su lengua y en ocasiones no exento de fuertes dosis de ira y sarcasmo.[70]

Sea como sea, es importante dejar en claro que las objeciones de Frege a las ideas de unidad y pluralidad representan un obstáculo insuperable para las concepciones racionalistas del número. El argumento más duro es, desde luego, el hecho de que recurriendo a la unidad, y a la pluralidad de unidades es imposible dar una explicación adecuada del 0 y el 1. Es claro que si preguntamos ¿de qué forma la unidad se corresponde con el 0?, o ¿es 1 una pluralidad de una sola unidad? alcanzamos a palpar de inmediato la insuficiencia de semejante enfoque. La única alternativa "viable" es, como de hecho lo hicieron algunos de los defensores de este enfoque, considerar *propiamente* como números enteros los números a partir del 2. Pero con esta salida no se hace más que dar una vuelta completa y regresar de nuevo a Euclides; y con ello, al reconocimiento tácito de que no se ha hecho ningún progreso serio.[71]

La alternativa de Couturat, Husserl y algunos otros, de pretender deshacerse únicamente del 0 y conservar el 1, ya sea como idea primitiva o filosófica, como es el caso de Couturat, o bien, como definible o intercambiable en términos de la unidad, lo cual también deja entrever cierta circularidad, muestra de igual forma las limitaciones de dicha alternativa.

De cualquier forma es conveniente resaltar que Couturat no pretende ofrecer una definición matemática del número, sino más bien una definición puramente filosófica, y que todas

[70] Quizá una explicación probable sea la animadversión que sentía Frege por la cultura francesa, como puede apreciarse al leer su diario. Por otra parte, se ha dicho en repetidas ocasiones que fue la actitud particularmente mordaz la que aisló a Frege de la comunidad científica y filosófica. Por ejemplo, Pulkkinen (2000), p. 53, señala como dos motivos que frenaron el respaldo a Frege, "la desafortunada elección del simbolismo y su frecuente critica arrogante y despiadada". A principios de 1904, Couturat tenía una opinión muy similar: "Me parece que Frege no debió entablar muchas amistades entre los matemáticos por la forma cáustica como critica su nominalismo (su mal formalismo), por ejemplo en *Grundgesetze* II. Además, toma con demasiada frecuencia una actitud de crítica negativa, y en apariencia estéril. Le falta reconocer que sus exigencias lógicas, por otra parte legitimas, vuelve demasiado difícil la tarea del matemático". Couturat a Russell 1.3.1904, Schmid (ed.)(2001), p. 359.

[71] *Cfr.* n. 43. Couturat, en un momento de sinceridad, reconoce que su definición filosófica del número entero no es más un comentario a la definición de Euclides. *Cfr.*, p. 348, n.

aquellas definiciones que ha criticado gozan del mismo estatus, aun y cuando en algunos casos se presenten como definiciones lógicas (analíticas) o matemáticas. De hecho, recordemos, para Couturat los matemáticos no definen propiamente las entidad con las que trabajan, ya que se limitan a caracterizar los objetos matemáticos en función de las operaciones en las cuales aparecen.[72] En el caso del número, por ejemplo, se limitan a definir la igualdad numérica pero no propiamente qué son, o bien, qué significan tales entidades, y es justamente la respuesta a este tipo de cuestiones lo que pretende proporcionar una definición filosófica. Por tal motivo, estas últimas son lógicamente anteriores a las definiciones matemáticas, y su valor radica precisamente en su prioridad conceptual, puesto que muestran de forma bastante clara la subordinación del orden lógico sobre el orden racional: "Así, la idea científica es lógicamente posterior a dichas definiciones [filosóficas], que es de dónde extrae toda su existencia; y reposa, como todas esas definiciones en sí mismas, en su correspondiente idea filosófica previa. En efecto, todas las definiciones matemáticas son puramente nominales, y por consiguiente, presuponen siempre el concepto sobre el que habrán de construirse. Esta es la razón por la cual los conceptos lógicos elaborados por el científico implican necesariamente las ideas racionales, las cuales escapan, por su propia naturaleza, a toda definición científica. Además, se explica aquella oposición entre el orden lógico y el orden racional que se encuentra por todas partes en los principios de la matemática" (p. 342).

Esto es perfectamente congruente con su concepción general sobre la relación que debe guardar la filosofia con respecto a la ciencia (recuérdese en concreto el primer apartado de

[72] "En general, jamás definen alguno de los conceptos fundamentales de la ciencia: ni el número, ni la longitud, ni la duración, ni la masa, que son los objetos propios de la especulación matemática y los elementos constitutivos de todos las magnitudes". *Ibid.*, p. 341.

este capítulo), y, en este caso en particular, con la matemática. Dicho en breve, la filosofía no compite ni debe competir con la ciencia, sino que le proporciona su fundamento y justificación.

Por otra parte, hay aquí una coincidencia notable, en el plano general, con el punto de vista de Russell expresado un poco más tarde, en su primera respuesta a Poincaré, con respecto a la demanda de una definición no circular ni ambigua de la línea recta. Para el primero la cuestión posee dos respuestas distintas según el nivel matemático o filosófico que se asuma, y para él es claro que desde una perspectiva filosófica es imposible dar una definición de este concepto, ya que se trata de un objeto fundamental, cuyo significado en sí mismo no se puede analizar o descomponer en otros conceptos más fundamentales, y, si es posible ofrecer una definición matemática lo es únicamente porque se le define en función de su relación con otros términos; y cuando se hace esto, entonces se tiene como resultado un enunciado susceptible de ser verdadero o falso. Se trata, desde luego, de un rasgo importante de su primer desacuerdo con Poincaré, puesto que si la definición de un término geométrico disfraza un juicio epistémico (una afirmación que es sujeto de valoración veritativa), es claro que no hay lugar para el tipo de convencionalismo defendido por Poincaré.[73]

[73] "Una definición matemática consiste en cualquier relación de algún concepto específico con el objeto o los objetos definidos que lo poseen. En este sentido, la línea recta proyectiva se ha definido arriba por medio de sus relaciones con puntos y planos. Y en este sentido también, la línea recta métrica puede definirse como la serie de puntos que es totalmente especificada por medio de dos puntos que pertenecen a esa serie [...] Pero tales definiciones no son definiciones en el sentido propiamente filosófico del término. Filosóficamente hablando, un término es definido cuando ofrecemos su significado, y su significado no puede consistir en sus relaciones con otros términos. Y debe admitirse que un término no puede emplearse útilmente sin que signifique alguna cosa, y lo que significa o es complejo o es simple. Esto es, o el significado se compone de otros significados, o es en sí mismo uno de esos constituyentes últimos por medio de los cuales se construyen otros significados. En el primer caso, el término es filosóficamente definido por medio de la enumeración de sus constituyentes simples. Pero cuando en sí mismo es simple, ninguna definición filosófica es posible. El término puede todavía poseer una relación peculiar con otros términos, y, por tanto, puede contar con una definición matemática. Pero este no puede significar esa relación, y por consiguiente, la definición matemática

En cuanto a la pertinencia de este punto de vista con el de Couturat, será suficiente señalar que para ambos hay siempre una línea fundamental que separa a la definición matemática de la definición filosófica, aun y cuando para Couturat el concepto filosófico de número entero sea previo y se encuentre presupuesto en toda definición matemática del mismo, mientras que para Russell no exista un correlato filosófico del concepto geométrico de línea recta. Dicho en otras palabras, ambos tienen a la vista el papel que juega la reflexión filosófica en torno a las matemáticas.

¿Cuál es, entonces, el valor de la definición filosófica de número entero?, o mejor aún ¿cuál es el valor de la definición racional de número entero, y, cómo supera a otras definiciones filosóficas, como la criticada definición empirista? A primera vista parece no haber en *l'infini* una respuesta del todo clara a semejante cuestión, ya que, por un lado, se afirma que "todas las definiciones matemáticas del número implican la idea filosófica del número concebido como una colección de unidades; suponen, por lo tanto, las ideas racionales de *unidad* y de *pluralidad*, las cuales, por otra parte, son correlativas" (p. 342). No obstante, reconoce más adelante que, de igual forma, la teoría empirista reposa y se deduce de las mismas definiciones matemáticas, lo cual "es un ejemplo notable de la diversidad de interpretaciones filosóficas que se pueden ofrecer de una sola y la misma deducción matemática" (p. 344). Entonces si ambas teorías se corresponden legítimamente con la definición matemática de número, es claro que no se ha dado un criterio adecuado para preferir una definición filosófica en lugar de otra y la pregunta sigue en pie.

Sin embargo, para Couturat la respuesta, o mejor dicho, la razón para elegir entre dos

se convierte en un teorema, que será falso o verdadero, pero de ningún modo, arbitrario." Russell (1899), p. 410.

definiciones filosóficas rivales no depende de su acuerdo o desacuerdo con la definición matemática, sino más bien con las ventajas teóricas que cada una de que las definiciones ofrece por sí misma; y es este sentido como la definición racional se impone sobre su oponente ya que, entre otros motivos, con respecto al problema general que pretende resolver en este libro Couturat, es manifiesto que la posición racionalista del número entero admite la construcción de un infinito matemático, mientras que esto es imposible desde la posición empirista.

Pero antes de llegar a este último punto será conveniente dejar plena constancia, por un lado, de las diferencias entre la definición matemática y la definición filosófica; y, por el otro lado, de otras ventajas "técnicas" de la definición racional con respecto a la definición empirista. En primer lugar recordemos que la definición filosófica es anterior a la definición matemática ya que esta última supone de algún modo la primera, y, por lo tanto, existe algún tipo de prioridad epistémica, la cual se identifica con la prioridad del orden racional sobre el orden lógico, de acuerdo con el principio de Cournot que Couturat hace suyo. Aquí es conveniente resaltar un problema adicional en la concepción de Couturat, ya que si toda definición filosófica es previa a la definición matemática, y si tal prioridad corresponde al orden racional, entonces debería admitirse que incluso la definición empirista es en cierta forma *racional*.

Pero volviendo a las diferencias entre lo filosófico y lo propiamente matemático, es también importante resaltar una diferencia que se encuentra conectada con la anterior; es decir, si hay un orden entre ambos tipos de definiciones es en buena medida debido a que las definiciones matemáticas son en cuanto tales, definiciones nominales, mientras que las definiciones filosóficas son definiciones conceptuales; esto es, la primeras definen el uso de palabras (como *número, punto, línea*, etc.), mientras que las segundas definen las ideas propiamente dichas. Pero este carácter nominal de las definiciones matemáticas no debe entenderse como un defecto de los conceptos científicos, puesto que estos últimos conceptos "no hacen sino traducir las nociones metafísicas, a las cuales no pueden reemplazar ni eliminar, porque siendo las ideas que le sirven de fundamento, sin ellas la ciencia no existiría" (p. 342).

De este rasgo fundamental de las ideas metafísicas de la ciencia se desprende otra característica que, a juicio de Couturat, se encuentra en las definiciones matemáticas del número y de sus propiedades; esto es, el hecho de tratarse de definiciones que de alguna forma esconden una cierta circularidad; es decir, para definir la operación de adición entre números se requiere haber definido previamente a estos últimos, pero al mismo tiempo, para poder definirlos se requiere echar mano de la suma, en tanto que la sucesión numérica sólo puede alcanzarse por medio de la adición sucesiva de la unidad. Sin embargo, en la definición filosófica no se puede correr semejante peligro, según Couturat, porque las ideas metafísicas correspondientes a las "palabras" matemáticas si bien son presupuestas por estas últimas, son al mismo tiempo independientes de ellas: "no existe ningún círculo vicioso en concebir el número entero como una colección de unidades, precisamente porque la idea de colección o pluralidad no es una noción matemática. No solamente es independiente de la operación matemática de adición, sino que se encuentra implicada en la misma de igual modo como se encuentra en la definición de número" (p. 344). De ahí que pueda definirse adecuadamente la suma de dos números cardinales como el número formado por la reunión de todas las unidades que componen los números involucrados en la suma. En resumen, así como a la noción matemática de número corresponde la idea racional de colección o pluralidad, y a la noción matemática de unidad (el número 1) corresponde la idea metafísica de unidad, del mismo modo a la operación matemática de suma le corresponde la idea racional de colección o reunión.

Hay varios motivos para no sentirse cómodo con estas explicaciones de Couturat, en primer lugar porque da por sentado que el círculo vicioso se presenta sólo en el nivel matemático cuando es justo lo que se debe demostrar, ya que no basta con señalar que los conceptos racionales no son nociones matemáticas, lo cual, dicho sea de paso, parece sumamente arbitrario; es decir, Couturat debería demostrar, sin dejar lugar a dudas, que, en efecto, las ideas de *colección*, *pluralidad*, *reunión* y *unidad* no envuelven un círculo vicioso. Pero el uso ambiguo que hace de estos últimos términos sugiere que, contrario a lo afirmado, se presenta de igual forma un círculo vicioso en el orden racional. Dicho de manera ilustrativa, la ambigüedad se presenta al emplear los cuatro términos como nombres de tres y dos ideas distintas; tres porque, por un lado, se entiende la colección o pluralidad como una reunión de unidades (el producto de la operación o acto de reunir unidades); mientras que, por otro lado, se entienden como dos ideas fundamentales puesto que *colección*, *pluralidad* y *reunión* se conciben como distintas formas de apuntar a la misma idea de número en tanto conjunto o clase compuesta de unidades. Por consiguiente, el círculo vicioso que se encuentra a nivel matemático con la definición del número entero y la operación de adición, se reproduce a nivel metafísico, y la aparente ventaja de este orden racional desaparece.

Pero dejemos por ahora los aspectos problemáticos de la propuesta racionalista y vayamos ahora a las ventajas que presuntamente posee con respecto a la concepción empirista. Se ha dicho ya que ambos enfoques se suponen legítimamente en las mismas definiciones matemáticas, y que sólo difieren en su valor filosófico; pero también se ha señalado que ambas posturas discurren en dirección opuesta en tanto que desde la perspectiva empirista la cardinalidad se consigue por medio de la ordinalidad (y de ahí el papel tan importante que se le otorga al proceso de contar), mientras que en la postura racionalista se parte de la cardinalidad y es a través de ella como se consigue la ordinalidad. Y dado que en la definición del número cardinal racionalista no intervine para nada la idea de orden, como tampoco lo hace con respecto a la suma, se da por descontado el principio de no variación de la cardinalidad, así como la propiedad conmutativa de la suma; ambos aspectos que, por otra parte, resultan difíciles de asimilar desde la postura empirista. Y si no fuera por los diversos escollos que hemos encontrado en la formulación de la postura racionalista, podría decirse que estas ventajas serían de peso para inclinar la balanza a favor de dicha postura.

Sin embargo, queda por describir la forma como el número cardinal obtiene en la esfera de lo racional la suma de las unidades que lo componen, o, para decirlo en la jerga kantiana adoptada por Couturat, resta por mostrar el carácter sintético de la idea de número, el acto de síntesis por medio de la cual se obtiene una multiplicidad de unidades. Y para tal propósito es menester reconocer que la *unidad* y la *pluralidad* no son suficientes para conformar adecuadamente la idea de número, sino que se requiere superponer ambas ideas, lo cual es en esencia la síntesis, para arribar a la totalidad. Esto significa una lectura en doble dirección en tanto que si se ha establecido que el número entero es una pluralidad de unidades, de igual modo se habrá de demostrar que se trata de la unidad de una pluralidad. Es decir, para poder extraer la idea de número de una colección cualquiera se requiere entenderla también como una unidad, como un objeto, porque la idea de la unidad de una totalidad es como el hilo de un collar de perlas, porque sin el hilo tendremos las perlas pero no más el collar.

Desde luego, en la síntesis racionalista tal y como la entiende Couturat falta total acuerdo con las tres nociones de la cantidad kantiana, puesto que no parece depender en lo absoluto de la idea de tiempo, ni de la idea de espacio, o de la combinación de ambas. En el primer caso es claro que su negación se halla implícita de algún modo en la crítica a la teoría empirista, sobre todo en lo que respecta a su convicción de que la enumeración más que crear la idea de número, la presupone. Pero el argumento más contundente es sin duda el hecho que la enumeración no es más que un método *práctico*, entre otros, para fijar la cardinalidad de ciertas colecciones, aunque no para *toda* colección, puesto que la noción de cardinalidad no puede ni debe limitarse a la enumeración de sus elementos, en virtud de que la enumeración (que se ha de identificar ahora con una sucesión temporal) será por su propia naturaleza finita y, por consiguiente, será siempre insuficiente para fijar la cardinalidad de colecciones más amplias.[74]

Pero si la crítica es justa también con respecto a la cantidad temporal habrá de explicarse qué es entonces aquello que se retiene de dicha concepción. Es decir, si el número es, desde la óptica kantiana, el esquema puro de la cantidad y puesto que todos los esquemas no son sino determinaciones trascendentales del tiempo (como forma a priori del sentido interno), el número no puede ser sino una determinación, entre otras, del tiempo.[75] Pero si Couturat considera que esta parte de la doctrina kantiana sólo se encuentra justificada desde la posición empirista es porque, a su vez, parece hacer una lectura empirista del concepto kantiano de tiempo, en la cual se le presupone como una forma del sentido externo (si la sucesión temporal se asimila efectivamente con la enumeración) aun y cuando de manera discursiva se diga lo contrario. Pero me parece que en realidad las razones de Couturat

[74] Recuérdese que de acuerdo con la quinta tesis sobre el concepto de tiempo, "la infinitud del tiempo quiere decir simplemente que cada magnitud temporal determinada sólo es posible introduciendo limitaciones en un tiempo único que sirve de base. La originaria representación *tiempo* debe estar, pues, dada como ilimitada". B 48.

descansan sencillamente en el hecho de que Kant hace depender el esquema del número en la sucesión temporal, y, por consiguiente, en la ordinalidad, mientras que Couturat, como he tratado hasta ahora de explicar, parte en sentido inverso; esto es, desde la cardinalidad. Por consiguiente, Couturat sólo puede retener del concepto de número kantiano la idea de la unidad como resultado de una síntesis de una intuición homogénea: "si se nos permite valorar dicha formulación comparándola con nuestro análisis de la idea de número, el cual ha sido hecho de manera independiente y sin ninguna preocupación sistémica, podremos aceptar la primera parte, la cual ilumina perfectamente la unidad sintética de la idea de número, aunque es muy lamentable que el autor no haya señalado explícitamente que la idea de unidad constituye el elemento esencial de la idea de número. Pero además, no nos parece que la segunda parte de la definición kantiana sea necesaria, ni tampoco admisible; ya que pensamos que no es para nada indispensable aprehender la multiplicidad dada bajo la forma del tiempo".[76]

Ahora no queda más que determinar la forma como se lleva acabo la síntesis en el concepto de número cardinal. Y para tal efecto, Couturat contrapone a la sucesión temporal la simultaneidad como el acto final de la enumeración. Es decir, si el acto de contar debe concluir en algún momento para así fijar el número cardinal, en este último paso se requiere concebir la multiplicidad de unidades contadas como una unidad compuesta por una pluralidad, y esto sólo se puede alcanzar por medio de un acto simultáneo del intelecto. Pero según Couturat este último acto simultáneo de síntesis es por completo independiente de la

[75] O como suele acotarse, esto significa que la aritmética no se corresponda de manera especial con el tiempo, de la misma forma como la geometría se relaciona con el espacio. *Cfr.* Parsons (1992), p. 62.

[76] *Ob. cit.*, p. 352. La definición aludida es la formulación que aparece en A 143: "El número no es, pues, otra cosa que la unidad de síntesis de lo diverso de una intuición homogénea en general, unidad obtenida al

enumeración, y, por consiguiente, de la sucesión temporal, aun y cuando sea su producto o resultado. Esto se ve claramente cuando se tienen en mente números pequeños, pues cuando se consideran los 3 ángulos del triángulo o las 4 líneas del cuadrado, se las percibe de manera simultánea independientemente del orden, y, por consiguiente, de la sucesión temporal; pero lo mismo vale para números más grandes.

Esto parece indicar que la idea de número habrá de reposar en la intuición del espacio, y, por consiguiente, como determinación de la forma del sentido externo. A primera vista, ésta parece ser una convicción coherente con su manera de entender las relaciones entre el número y la magnitud. No obstante, para Couturat si hay algo arbitrario en la crítica kantiana es justamente la doctrina del esquematismo, pues no parece haber suficiente evidencia para sostener que el espacio sea la forma necesaria de toda simultaneidad. Pero "para afirmar que toda simultaneidad asume la forma espacial, habría que admitir como rigurosas formulaciones, como aquella expresión un tanto simplista de Leibniz según la cual «el espacio es el orden de los coexistentes, mientras que el tiempo es el orden de las sucesiones», y sostener que la conciencia es pura sucesión, lo cual es un absurdo manifiesto puesto que la sucesión no es concebible ni perceptible más que en relación con la simultaneidad" (pp. 357-8).

No nos detendremos en este punto más de lo que lo hace el mismo autor.[77] Bastará resaltar que el rechazo de Couturat al esquematismo kantiano le permite admitir que el concepto de

---

producir yo el tiempo mismo en la aprehensión de la intuición". Aunque en la versión francesa de Couturat se dice, en la segunda parte, simplemente: "en introduisant le temps lui même dans l'appréhension de l'intuition".

[77] "Ciertamente el esquematismo de los conceptos puros del entendimiento exige que el número, esquema de la cantidad, sea una determinación del tiempo. Pero no nos autorizamos discutir aquí dicha teoría, sobre todo porque no seríamos los primeros en reprochar al gran crítico el abuso en las clasificaciones sistemáticas, las cuales engendran falsas simetrías y forzadas analogías. No vemos, por ejemplo, porqué el espacio no podría proporcionar, al igual que el tiempo, esquemas adecuados a las categorías de la cantidad". *Ibid.*, p. 358.

número es independiente de las formas del tiempo y del espacio. Pero como sustituto del esquematismo de la cantidad, nos ofrece un punto de vista meramente *formal* y *a priori*, en el sentido de engendrar la idea de número sin necesidad de recurrir a ningún contenido material.[78] En resumen, el número es entendido como el producto de la doble aplicación de la idea de unidad a una multiplicidad dada: es el resultado de la síntesis en donde *la unidad de una pluralidad deviene en una pluralidad de unidades*.

Pero qué es exactamente lo que entiende aquí Couturat por *formal*, es algo que no es del todo claro, puesto que inmediatamente pasa a criticar la identificación de los números con las cifras o signos que los designan, y, como Frege, asocia dicha identificación con tendencias empiristas. Pero como no encuentro suficientes elementos para deslindar adecuadamente su formalismo del *mauvais formalisme* empirista,[79] volvamos de nuevo a lo que se supone es el gran defecto de la posición empirista.

Ya he mencionado que, de acuerdo con Couturat, al hacer depender la cardinalidad de la ordinalidad, la concepción empirista es incapaz de arribar al infinito. Expliquemos en breve por qué, aun y cuando sea bastante claro desde nuestra perspectiva actual. Si por construcción la serie de los naturales se forma por la suma sucesiva de unidades es obvio que por prologada que sea la sucesión nunca podrá construirse un número ordinal final que pueda identificarse con el infinito, y por consiguiente, con su correspondiente cardinal infinito, ya que siempre se podrá, por la regla $n + 1$, estipularse un número mayor a este; es decir, para que la posición empirista pueda alcanzar el infinito debe postular que existe un

[78] "Observemos bien que la multiplicidad indefinida que postulamos como única condición empírica de la idea racional de número, no implica en lo absoluto la noción de número, de cantidad o magnitud alguna.", p. 359.
[79] Este comentario no implica que el formalismo de Couturat consista, sin darse cuenta, en identificar los números con los signos, sino simplemente que no aclara en qué consiste propiamente su concepción formalista del número, más allá de señalar que es a priori por no depender de contenido material alguno.

ordinal mayor que todos los demás, pero este supuesto violaría el principio según el cual siempre se podrá construir un nuevo número ordinal añadiendo al anterior la unidad. Dicho en otras palabras, dado que el infinito lo es sólo de colecciones o conjuntos, y, por lo tanto, de la cardinalidad, el empirista se verá siempre impedido de arribar por medio de la ordinalidad al infinito.

De aquí se sigue que, de acuerdo al enfoque empirista, la serie de los números naturales será irremediablemente finita, debido a que le será imposible identificar un número ordinal con el total de la serie. En definitiva, "concluimos entonces que, si la teoría empirista vuelve imposible el número infinito, vuelve al mismo tiempo imposible la construcción lógica de la ciencia del número" (p. 362).

Para cerrar este apartado hacen falta dos comentarios en relación con la evolución posterior de su pensamiento y, en particular, con la adopción del logicismo. El primero es el hecho de que, a pesar de su desconocimiento de *Grundlagen*, Couturat se encuentra en al menos un acuerdo mínimo con Frege sobre la naturaleza ordinal-cardinal del número natural. En efecto, la independencia del concepto de número cardinal con respecto al concepto ordinal se establece también en el enfoque logicista de Frege (y Russell), aunque usando la noción de correspondencia completa, unívoca y recíproca, entre dos conjuntos o multiplicidades, en un sentido no muy distinto del empleado por los empiristas (que la usan en sentido inverso; esto es, para ir de la ordinalidad a la cardinalidad) criticados por Couturat (y, por tal motivo, como se ha señalado antes, tendrá que retractarse de que tal correspondencia implica la noción de número uno). La gran diferencia entre empiristas y logicistas consistirá entonces en que, para los primeros, la correspondencia se establece de manera progresiva, por medio de la enumeración de objetos del mundo externo, mientras que, para los segundos, la correspondencia completa no implica en lo absoluto la enumeración, ni mucho menos de objetos externos, sino que se trata de una relación abstracta y estrictamente lógica.

El segundo comentario tiene que ver con la concepción racionalista del número cardinal entendido como la unidad sintética de una multiplicidad; es decir, si en la presente obra Couturat es un kantiano a medias en cuanto a la concepción del número (ya que sólo acepta que es engendrado por medio de un acto de síntesis en la intuición, pero rechaza que se trate de un esquema puro del tiempo porque ello supone otorgar una prioridad injustificada a la ordinalidad), en su etapa logicista se apartará por completo de Kant, negando valor epistémico al acto sintético, el cual quedará reducido a un aspecto meramente psicológico.[80]

§ 7. El concepto de magnitud

Como se ha mencionado páginas atrás, la concepción tradicional de la matemática como ciencia del número y la magnitud figura como fondo sobre el cual se despliega la problemática sobre el infinito. Para Couturat la magnitud es, tanto desde el punto de vista racional como desde una perspectiva histórica, la que permite generalizar o, si se prefiere, ampliar el concepto de número. Sin embargo, no suscribe, tal y como se podría esperar, la definición común del número como el resultado o expresión de la medida de una magnitud.

La razón principal estriba en que al poner el acento en el concepto de medida, si bien tiene la ventaja de permitir justificar la ampliación del dominio numérico a los números racionales e irracionales, por otra parte se encontraba imposibilitada para dar cuenta de los números

[80] En este sentido, la posterior observación, aunque dirigida también contra los empiristas, vale a su vez para su antigua noción de número: "con mayor razón resultan vanas todas las teorías psicológicas que invocan vagas

negativos así como de los números imaginarios o complejos, ya que era problemático hablar de cosas que se miden por medio de cantidades negativas o imaginarias. Este argumento reflejar el problema conceptual que significaba, todavía a finales siglo XIX, otorgar una representación física, o, si se prefiere, material de dichos sistemas de números (lo cual no significa que no se dieran ya tales representaciones); sin embargo, llama la atención que Couturat hace eco de la crítica que Dedekind formula a la misma concepción, critica que, como ya se ha mencionado en otras ocasiones, es contraria a sus propias intenciones puesto que al último le interesa la configuración intrínseca de los sistemas numéricos, mientras que Couturat busca justificar la independencia de la magnitud con respecto al número.[81] Por este motivo, considera que el concepto de medida no puede ser dejado de lado sin más, puesto que permite la aplicación numérica a un tipo de magnitudes importante, como lo es la magnitud absoluta en física, por medio de la cual se mide la masa. Por lo tanto, sostiene, una filosofía matemática adecuada habrá de incorporar de alguna manera dicho concepto en su concepción general de magnitud.

Por esta razón es que Couturat prefiere considerar la relación entre el número y la magnitud simplemente como una relación de correspondencia convencional entre ambas entidades, sin que la aplicación del número a la magnitud suponga una dependencia de una sobre la otra. Esto es así porque de acuerdo con las reglas que rigen el comportamiento de las magnitudes no es necesario exigir un correlato numérico de las mismas, de modo que suponer lo

---

«síntesis» mentales, las cuales consisten en decir, por ejemplo, que el número *diez* es engendrado por medio de diez actos de atención sucesivos, ya que entonces, el círculo vicioso es más flagrante". [VI], p. 46.

[81] Dedekind, (1872): (1998), p. 84, afirma al respecto: "La introducción de los números irracionales habitual hasta el momento se refiere directamente a la noción de magnitud extensiva, que nunca es definida rigurosamente, y define el número como resultado de la medición de una tal magnitud mediante otra homogénea. En lugar de esto exijo lo siguiente: la aritmética debe desarrollarse a partir de sí misma". Couturat remite a la nota que da pie este comentario.

contrario (esto es, una dependencia mutua) implica adquirir restricciones innecesarias.

Pero ¿qué es entonces una magnitud? Tratándose de un concepto fundamental como el concepto de número, la magnitud presenta los mismos problemas a la hora de intentar establecer una definición matemática. Es decir, todo intento por definir la magnitud tropieza con un círculo vicioso. Por ejemplo, la definición tradicional y trivial según la cual una magnitud es *aquello susceptible de aumento y disminución*, implica ya la noción de magnitud, así como la noción de desigualdad entre magnitudes.[82] Además, la misma idea de variación supone la existencia de magnitudes invariables, o constantes, debido a que toda variación requiere de puntos de referencia fijos sobre los cuales se ha de establecer su oscilación, y con los cuales en ocasiones podrá coincidir, y con ello, también se supondrá la igualdad entre magnitudes. Pero la misma circularidad se puede notar en la definición moderna, y en apariencia más adecuada, de magnitud, pues al señalar que se trata de *toda cosa acerca de lo cual se puede decir que es igual o desigual a otra*, sólo se establece las relaciones fundamentales entre magnitudes, mientras que la noción misma de magnitud queda de nueva cuenta presupuesta o pospuesta.

Similares objeciones pueden formularse tanto a la definición general de magnitud, así como a la definición de magnitudes de la misma especie, que presenta Helmholtz en la obra citada anteriormente. En efecto, si la magnitud en general se entiende como *los objetos o los atributos de objetos que pueden compararse con otros semejantes desde el punto de vista la igualdad y la desigualdad*, mientras que por otro lado se dice que *dos magnitudes son de la misma especie si su igualdad o desigualdad se constata por medio del mismo método*, es

[82] La definición de Euler es típica: "Se dirá que es una magnitud todo lo que es susceptible de incremento o disminución, o a lo que es posible añadir o sustraer algo... la matemática no es nada más que *la ciencia de las*

claro que la definición general esconde ya la noción que se propone definir, y lo mismo ocurre con la definición de magnitudes de la misma especie, puesto que antes de usar el mismo método para comparar ambas magnitudes se tendrá que asumir que pertenecen a la misma especie. Es decir, si, por ejemplo, se pretende comparar el peso de dos objetos por medio de una balanza, se tendrá que hacer abstracción de la propiedad de los dos objetos que es pertinente para el caso, lo cual significa suponer que se trata en ambos casos de la misma especie; pero además, la balanza, un ente sin pensamiento o raciocinio alguno, nunca podrá indicar que se trata en ambos casos de magnitudes de la misma especie, puesto que de igual manera, los números que arroja deberán interpretarse como la medida de dos magnitudes de la misma especie, lo cual significa echar mano de un acto de abstracción que se encuentra por completo fuera del dominio del instrumento empleado. En consecuencia: "De la discusión precedente se desprende que la idea de magnitud es, propiamente hablando, indefinible; esto es, es una noción primitiva e irreducible. La definición citada en último lugar es aceptable sólo a condición de que no pretenda construir o crear la idea a definir, y que se contenta con describirla o, mejor dicho, en caracterizarla. En suma, presupone la idea racional de magnitud y se limita a indicar una propiedad esencial de la magnitud, aunque derivada de dicha idea".[83]

Existe además otra dificultad conceptual en la definición empirista alternativa que presenta Helmholtz al definir la igualdad de dos magnitudes en general (como los atributos abstractos de dos objetos concretos), por *una coincidencia o cooperación entre dos objetos que, bajo ciertas condiciones, dan lugar a un resultado observable*. Si se señala y acepta que bajo la

---

magnitudes, que encuentra métodos por medio de los cuáles pueden ser medidas". *Opera omnia*, vol. I, p. 9, citado por Ferreirós (ed.) (2000), p. lxxv.

noción de *igualdad* se supone la noción de *identidad*, entonces debe admitirse que para que dos resultados fuesen verdaderamente idénticos haría falta que coincidieran en el tiempo y en el espacio, de manera tal que se estaría ante uno y el mismo fenómeno, pero de ser así, la comparación resultaría imposible, puesto que no se observarían dos resultados sino uno solo. Si, por ejemplo, se pesan en una balanza dos cuerpos distintos y se obtienen resultados idénticos en cada caso, tendrá que aceptarse que no se trata en sentido estricto de una identidad, sino tan solo de una semejanza y, por consiguiente, se tendrá que aceptar que no hay una coincidencia absoluta sino parcial, pero al mismo tiempo se tendrá que admitir que para que dicha coincidencia incompleta resulte relevante es necesario contar de antemano con la noción de igualdad. Y esa idea de igualdad es algo totalmente a priori y añadido a los objetos del mundo sensible. "En resumen, la igualdad entre magnitudes de la misma especie no es nunca dada por medio de la experiencia, observable bajo la forma que un fenómeno que pueda ser registrado mecánicamente; puesto que siempre supone un acto original y espontáneo del intelecto en el cual compara dos estados físicos distintos, separados en el tiempo y el espacio, y, en consecuencia, implica una idea preconcebida de la igualdad, una idea con la cual se confrontan todas las «coincidencias» y todas las «cooperaciones» empíricas" (pp. 371-2).

Dicho de otra manera, el instrumento empleado para medir ciertas magnitudes, no hace otra cosa que constatar la igualdad o desigualdad entre ellas que de antemano se ha supuesto, del mismo modo como se ha determinado con antelación que tal instrumento puede ser útil para compararlas. Y de aquí se sigue que también las relaciones de igualdad y desigualdad entre magnitudes son indefinibles, y, por consiguiente lo es también la idea de magnitudes de la

---

[83] [1], p. 369.

misma especie. Ahora bien, esto es así porque, a juicio de Couturat, en la idea pura y abstracta de magnitud sólo es posible la identidad perfecta, de tal suerte que dos magnitudes de la misma especie no son otra cosa que dos manifestaciones concretas de una misma magnitud pura. Y de la misma manera como la línea trazada en una pizarra es una imagen imperfecta de la línea geométrica ideal, la igualdad entre dos magnitudes de la misma especie es solo una aproximación de la identidad de una misma magnitud ideal, y, por consiguiente, a priori.

En resumen, lo único que puede hacer el matemático es caracterizar la idea de magnitud de manera operativa por medio de axiomas que determinan las relaciones entre magnitudes, pero de ningún modo habrá de asumirse que los axiomas o postulados implican una definición, ya que, como ocurre en parte con la noción de número, la idea metafísica de magnitud es indefinible, universal y a priori; siendo en este caso la tarea del filósofo poner de manifiesto la naturaleza racional de estas propiedades.

De esta manera, los axiomas que determinan matemáticamente las relaciones fundamentales de la magnitud son aquellos que usualmente se reconocen como tales, aunque carecen de valor filosófico para servir como auténticas definiciones:

Axioma I: Dos magnitudes son de la misma especie si resultan siempre iguales o desiguales entre ambas.

Axioma II: Si A y B son magnitudes (de la misma especie) y A es igual a B, entonces B es igual a A; y si A es desigual a B, B es desigual a A.

Axioma III: Si A, B y C son magnitudes (de la misma especie), y A es igual a B y B igual a C, entonces A es igual a C (y C es igual a A).

Axioma IV: Si dos magnitudes son desiguales, una es más grande que la otra, y esta última más pequeña que la primera.

El axioma I no es más que un corolario del principio de no contradicción, puesto que no tendría sentido asumir que dos magnitudes pueden ser iguales y desiguales a la vez, ni que tampoco sea ni iguales ni desiguales entre sí. El aII expresa simplemente la propiedad conmutativa de las relaciones de igualdad y desigualdad entre magnitudes. Pero el aIII no es, a pesar de las apariencias, una instancia o corolario del silogismo hipotético, porque es más bien una extensión del axioma más general y metafísico de la identidad radical e ideal de las magnitudes, y que Couturat denomina axioma Δ (delta) y enuncia de la siguiente manera: *dos magnitudes iguales pueden remplazarse entre sí en cualquiera de sus relaciones*. Por consiguiente, el razonamiento matemático es más general en este caso que el razonamiento lógico, puesto que no es necesario atenerse al orden de las premisas para llegar al mismo resultado; es decir, se puede derivar A es igual a C, ya sea remplazando B por A en B es igual a C, o bien cambiando C por B, en A es igual a B, de modo que tanto A como C pueden ser términos mayores o menores según la ruta de derivación. Se puede alegar, por supuesto, que C es el término mayor ya que figura siempre como tal en la conclusión, pero por el axioma delta, o si se prefiere, por el aII, se puede deducir lo inverso, y, a fin de cuentas, en este caso el sentido de la deducción es más flexible que el orden establecido por el silogismo.

No está por demás insistir que el axioma Δ no es propiamente un axioma matemático, sino racional, y, por consiguiente, no puede usarse, como lo hace por ejemplo Grassmann, para definir la igualdad entre magnitudes de la misma especie, puesto que este axioma se corresponde con la concepción metafísica y abstracta de la identidad absoluta de la magnitud. Pero tampoco debe suponerse que el axioma delta define la identidad estricta de la magnitud, sino tan solo la caracteriza racionalmente, del mismo modo como los anteriores axiomas caracterizan matemáticamente las relaciones de igualdad y desigualdad entre magnitudes. Además, los axiomas matemáticos aI-aIII son corolarios del axioma Δ y, por consiguiente, ninguno de ellos puede identificarse o confundirse con este último.

Por otra parte, en vista de que la relación de desigualdad es más diversa que la igualdad, el aIV resulta ser independiente de los axiomas previos (de la igualdad). Desde el punto de vista racional, los axiomas aI-aIII en tanto dependen del principio de no contradicción y el principio de identidad, resultan ser analíticos, pero el aIV en virtud de que no posee la misma propiedad reversible o conmutativa que caracteriza a la igualdad, requiere añadir algo extra, que se vuelve asequible por medio de la intuición, para poder fijar el sentido de la desigualdad; y, justamente por este motivo debe tomarse como un axioma sintético. No obstante, el tipo de intuición que entra aquí en juego no es de nueva cuenta, como en el caso del número entero, una intuición kantiana propiamente dicha; esto es, no es una intuición *sensible* mas una intuición puramente *racional*. Y en consecuencia, "si esta presunción es verdadera, habrá que renunciar a una de las tesis fundamentales de la crítica kantiana; a saber, que no hay otra intuición que la intuición sensible, y que los juicios matemáticos no pueden fundarse más que sobre las formas a priori de la sensibilidad" (p. 386).

Hay, desde luego, un sentido trivial en el cual la desigualdad es reversible, puesto que si A es mayor que B, B es menor que A; o bien: $A > B$ y $B < A$; pero en este caso la conmutatividad es solo aparente porque no sólo se ha invertido la posición de los términos, sino también el sentido de la relación. Pero además, y esto es lo pertinente, en este caso ya se ha fijado el sentido de la desigualdad, lo cual es algo que el aIV no puede establecer por sí solo, pues se limita a señalar que dadas dos magnitudes cualquiera (de la misma especie), una de ellas será más grande o más pequeña que la otra, pero nunca podrá especificar en una instancia cuál habrá de ser la más grande y cuál la más pequeña. Y para tal efecto es necesario echar mano de los axiomas de adición entre magnitudes:

AdI: La suma de dos magnitudes de la misma especie debe ser una magnitud de la misma especie.

AdII: El resultado de la suma de dos magnitudes no debe cambiar cuando se permutan las magnitudes que aparecen como sumandos; esto es, $A + B = B + A$.

AdIII: Las magnitudes involucradas como sumandos en una suma pueden asociarse libremente; esto es $(A + B) + C = A + (B + C)$.

AdIV: La suma de dos magnitudes es siempre mayor que cualquiera de sus sumandos. Esto es: $A + B > A$ y $A + B > B$.

AdV: Si dos magnitudes de la misma especie son desiguales, existe una tercera magnitud tal que una de los anteriores magnitudes es igual a la suma de la otra con la tercera.

AdVI: Si se suma a una magnitud cualquiera la magnitud nula, el resultado es una magnitud igual a la primera. Es decir, $A + 0 = A$ (aquí el signo 0 no representa al número cero sino la magnitud nula cuyo valor numérico es cero).

El AdI es indemostrable o no derivable a partir de un principio racional anterior, como el axioma Δ, sino que se justifica y se hace posible solo por la asimilación de una combinación concreta entre magnitudes a la suma de números abstractos. Sin embargo, este axioma no siempre es siempre correcto, puesto que, por ejemplo, y como apunta bien Russell, la suma de dos temperaturas es un sinsentido. El AdII establece la propiedad conmutativa de la suma de magnitudes, mientras que el AdIII expresa la propiedad asociativa de la adición de magnitudes. Estos dos axiomas pueden generalizarse en un solo axioma que puede expresarse así: en una suma de varias magnitudes dadas en un orden determinado, se puede invertir a voluntad el orden de los términos y reemplazar en número cualquiera por el producto de su adición. El AdIV es propiamente el axioma que determina el sentido de la desigual entre magnitudes (de la misma especie), en tanto permite fijar con claridad cuál magnitud es mayor y cuál menor. El AdV es el axioma de diferencia y es el reciproco del axioma anterior, y permite introducir la sustracción entre magnitudes. El AdVI es el axioma de módulo y postula la existencia de una magnitud de grado cero que es neutra con respecto a la adición, y, en consecuencia, su introducción requiere introducir restricciones al axioma IV; es decir, será consistente siempre y cuando ninguna de las magnitudes involucradas sea una magnitud nula. Por otra parte, el axioma de módulo permite comprender más claramente la noción de diferencia y, viceversa, permite definir la magnitud nula por medio de la diferencia; es decir, la diferencia entre dos magnitudes iguales es la magnitud nula, mientras que la diferencia entre dos magnitudes desiguales es una magnitud no nula.

Por otra parte, si bien la existencia de una magnitud nula o modular se postula racionalmente, su determinación concreta solo puede establecerse a posteriori. Pero de cualquier forma, la presentación anterior tiene como propósito principal dejar en claro que la noción de magnitud es totalmente racional, como lo es la noción de número, y que no hay cabida, a menos de querer perder claridad conceptual, para una concepción empirista de la magnitud similar a la criticada con respecto al número.[84]

Resta por exponer los axiomas correspondientes a las operaciones de multiplicación y división entre magnitudes, y, con ellos, el axioma fundamental de continuidad. Es aquí

[84] He dejado de lado la discusión de la concepción empirista de la magnitud en parte porque es mucho más limitada que su contraparte numérica y porque su contenido se encuentra fuera de los límites de este trabajo.

donde tiene su razón de ser la generalización del número y donde se funda, al mismo tiempo, la independencia y convencionalidad entre el número y la magnitud. Para ello es conveniente tener presente que, hasta ahora, los axiomas de igualdad y de adición se han presentado de manera general y, lo que para Couturat es más importante, sin involucrar la medida de magnitudes, y, por consiguiente, la aplicación de sistema numérico alguno. En este sentido, el lector deberá interpretar los ejemplos recurrentes de Couturat sobre la medida de pesos como meros ejemplos que ilustran a posteriori las relaciones de igualdad y adición entre magnitudes. Pero más difícil resulta sostener lo mismo con respecto a los axiomas IV y VI, que, como él mismo admite, se encuentran relacionados directamente con la aplicación de números (por ejemplo, la magnitud nula no tiene sentido, por más que se diga que se le postula a priori, sino como resultado de una medición con valor constante y que coincide con el cero).

Sea como sea, la multiplicación de magnitudes se funda en la adición de las mismas, de tal suerte que se dice que la suma de n magnitudes iguales a A, nA, es el múltiplo de A. Dicho de manera poco feliz, nA es el resultado de multiplicar la magnitud A por el número n (porque no tiene propiamente sentido hablar de la multiplicación de un número por una magnitud). En suma, los nuevos axiomas son los siguientes:

Axioma de multiplicación, Am: dados un número n y una magnitud A, hay una magnitud B tal que $B = nA$.

Axioma de división, Adi: dado una magnitud A y un número n, existe una magnitud B tal que $nB = A$.

Axioma de Arquímedes, Aa: dadas dos magnitudes desiguales $A > B$, hay un número n tal que $nB > A$.

Axioma de continuidad, Ac: Si se dividen todas las magnitudes de una misma especie en dos clases, tales que todas las magnitudes de una clase sean más pequeños (o más grandes), que las magnitudes de la otra clase, existe una magnitud de dicha especie que representa tal división y que es a la vez más grande que las magnitudes pequeñas y más pequeña que las magnitudes grandes.

No nos detendremos en los corolarios a los que dan pie los axiomas de multiplicación y división, y nos limitaremos a señalar que el resultado de ambas operaciones no es necesariamente una magnitud de la misma especie (*i.e.*, la multiplicación de una longitud por otra longitud, en metros lineales, tiene como resultado un área, en metros cuadrados, etc.,). Además, siendo ambas operaciones recíprocas o inversas, el axioma de Arquímedes cuenta con su correspondiente versión con respecto a la división; esto es, que dadas dos magnitudes desiguales $A > B$, existe un número n, tal que $A/n < B$. Dicho de otra forma, por muy grande que sea la magnitud A con respecto a la magnitud B, se puede encontrar un número n que divida a A de tal suerte que el resultado es una magnitud menor que la magnitud B. Este nuevo principio se denomina *axioma de división indefinida*, y posee la ventaja de asegurar la medida de magnitudes por medio de una aproximación indefinida.

Se llama entonces *medida de una magnitud* al coeficiente numérico que es pertinente multiplicar por otra magnitud de la misma especie, denominada *unidad de medida*, para formar la magnitud considerada. La unidad de medida (o simplemente, unidad) es una magnitud cualquiera de la especie considerada elegida de manera arbitraria y de una vez por todas. Los coeficientes involucrados hasta ahora son de dos especies: números enteros[85] y

---

[85] Por ejemplo, cuando la magnitud A es múltiplo de la magnitud B, $A = mB$, el número entero m es la medida de A en relación con la unidad B; es decir, el número de veces que la magnitud A contiene la magnitud B.

fracciones,[86] pero, desde luego, no son los únicos casos posibles. No obstante, se dice que las magnitudes son conmensurables entre sí, cuando dos magnitudes dadas son múltiplos de una misma magnitud, o, en particular, cuando son múltiplos la una de la otra. De aquí resulta que toda magnitud conmensurable con respecto a la magnitud unidad tiene como medida un número entero o una fracción, y, viceversa, toda magnitud medible por medio de un entero o una fracción es conmensurable con la magnitud adoptada como unidad. Ahora bien, como hay magnitudes de la misma especie que no resultan medibles por la magnitud unidad adoptada, se denomina *racionales* a las magnitudes conmensurables con respecto a la unidad elegida, y, de igual forma, se denomina *irracionales* a las magnitudes inconmensurables en relación con la misma unidad. Pero para que las magnitudes inconmensurables puedan ser propiamente medibles es necesario introducir una clase nueva de números que sirva de unidad de medida para esas magnitudes; a dicha clase de números se denomina números irracionales.

Es importante tener presente que la existencia de magnitudes irracionales, o inconmensurables entre sí, es una consecuencia de la naturaleza continua de la magnitud. Y para mostrar su carácter continuo basta observar que una magnitud dada cualquiera permite separar a todas las demás magnitudes de la misma especie en dos clases, a una de las cuales se denomina clase inferior, y que contiene a todas las magnitudes más pequeñas con respecto a la magnitud dada; mientras que a la otra, se le denomina clase superior, y contiene todas las magnitudes mayores a la magnitud dada. De esta propiedad de la desigualdad de las magnitudes se sigue el axioma de continuidad formulado antes.

---

[86] Por ejemplo, cuando las magnitudes A y B son múltiplos de M, $A = aM$ y $B = bM$, en donde $M = B/b$ y $A = aB/b = a/bB$, la medida de A por medio de la unidad B es la fracción a/b, formada por los coeficientes de A y

Obviamente, el principio mencionado es una generalización de la noción de cortadura de Dedekind introducida a partir de la línea recta. Sin embargo, como ya se ha mencionado antes, a diferencia de este último, quien construye el continuo aritmético como *representación* de cualquier dominio continuo, Couturat entiende la construcción de los números irracionales como *medida* de toda magnitud continua. Dicho de otra forma, para Dedekind el continuo geométrico solo es inteligible de manera precisa si se concibe como un continuo aritmético que es creado libremente y en función de nociones lógicas fundamentales (conjuntos); mientras que para Couturat la magnitud continua se deriva racionalmente de los axiomas de la desigualdad entre magnitudes, y los números irracionales aparecen como coeficientes, o unidades de medida de relaciones entre tales magnitudes continuas. Sin embargo, Couturat no alcanza a esclarecer a la perfección el papel que juegan los irracionales como unidades de medida, puesto que solo se puede determinar que x magnitud es continua si existe otra magnitud y, que toma como valores numéricos irracionales α, de tal forma que $x = \alpha y$. Pero para que cualquier magnitud y pueda tomar valores numéricos α es necesario que sea de antemano una magnitud continua, y, con ello, se demuestra que la claridad conceptual que pretendidamente se ha logrado es pura apariencia.

Es conveniente, no obstante, recordar que la posición de Couturat se encuentra plenamente justificada desde la perspectiva tradicional de la matemática, y, que es justamente su apego a tal concepción lo que le impide comprender a cabalidad la propuesta de Dedekind y Cantor, y, haga todo lo posible por asimilarla como un desarrollo más, no siempre acertado, de la

---

B como múltiplos de M; esto es, a y b indican el número de veces que la magnitud correspondiente contiene la magnitud M.

tradición. Por igual motivo no es sorprendente que Couturat encuentre enteramente acertada la famosa definición de Newton del número: «Per numerum, abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus» (Entendemos por número no tanto una multitud de unidades cuanto la razón entre una cantidad abstracta cualquiera y otra del mismo género que se toma por unidad).

Desde luego, no se trata de la definición de número entero, sino de la noción general de número, la cual reposa, según Couturat, en la noción filosófica de razón, puesto que se trata de una noción previa a la de número y a la de medida. De nueva cuenta, el matemático puede definir la noción matemática de razón por medio de la noción de número y medida, pero desde el punto de vista racional el orden de construcción es el inverso, pero, de la misma forma como ocurre entre la noción racional y la noción lógica de unidad, "la idea matemática de razón no es más que la traducción aritmética de idea filosófica de la idea de razón" (p. 426). Asimismo, la noción racional de razón o relación, no es susceptible de definición ya que se trata de una idea fundamental y universal. Todo lo que puede hacerse es *mostrar* dicha idea, intentar hacer *ver* en qué consiste, puesto que se trata también de un objeto de la intuición pura. Esto es, se da en el intelecto desde el momento mismo en que este piensa dos magnitudes y las aglutina bajo el acto mismo que constituye la comparación. En este sentido, toda relación entre magnitudes (de igualdad, de adición o sustracción, etc.,) refleja y supone siempre la misma idea filosófica de razón entre dos magnitudes.

Que la idea de razón entre magnitudes es anterior a las nociones de número y medida puede ilustrarse considerando, por ejemplo, dos cuadrados cuyos lados tienen una longitud cualquiera. Al trazar la diagonal en cada cuadrado se encontrará que su longitud será inconmensurable con el lado. Pero si C y C' son sus lados y D y D' sus respectivas diagonales, la proporción C : D = C' : D', y que se enuncia: C es a D como C' a D', es totalmente legítima y muestra claramente que la relación entre ambas magnitudes es independiente y anterior a su traducción aritmética. Dicho de otra manera, si bien la diagonal del cuadrado es mayor que su lado es posible construir su diferencia sin suponer que ambas longitudes tienen una medida común (que de hecho no la tienen). Y, en general, para pensar la relación entre dos magnitudes no es en absoluto necesario que esas magnitudes sean expresables numéricamente, pues basta con que sean consideradas en conjunto y comparadas en tanto magnitudes. Pero además, según Couturat, los números irracionales no pueden ser concebidos como números más que por medio de la idea de razón entre magnitudes que ellos expresan.

§ 8. La crítica al infinito matemático

Toda la exposición anterior no tiene más propósito que preparar el terreno para la discusión que Couturat pretende entablar, por medio de un diálogo, contra las críticas que la escuela de Renouvier ha lanzado al infinito matemático. Dicha exposición que, a su juicio, es por completo innecesaria para el científico, es, sin embargo, pertinente para ilustrar a aquellos filósofos que, sin contar con los elementos suficientes, se atreven a cuestionar el uso del infinito en las matemáticas. Tal es así que semejantes críticas no son en el fondo más que producto de malentendidos y descuidos flagrantes sobre la manera de concebir el dominio matemático. De ahí que en gran medida "las pretendidas antinomias que se ha creído descubrir en los principios de las matemáticas no prueban más que una cosa: que no se debe, so pena de caer en contradicción, identificar las magnitudes con los números, así como imponer la ley del número a las magnitudes continuas, a las cuales dicha ley resulta repugnante" (p. 433). El carácter retrógrado de semejante crítica se muestra justamente en la mencionada ley del número, la cual no es otra cosa que la pretensión de restringir la aplicación de los números a las magnitudes por medio de racionales.

Pero dado que la crítica al infinito numérico se promueve tanto en ámbito intelectual como en el mundo real, es pertinente distinguir cuatro aspectos bajo los cuales se puede entender el infinito:

1) Como signo de una pluralidad ideal.
2) Como signo de una pluralidad real.
3) Como símbolo de una magnitud ideal, y
4) Como símbolo de una magnitud real.

En el primer caso, la crítica recurrente que se levanta sobre el infinito como número abstracto consiste en atribuirle las propiedades comunes a los números naturales y derivar a partir de ellas presuntas contradicciones. La perplejidad que surge de dicha atribución salta de inmediato a la vista ya que resulta absurdo intentar determinar si se trata de un número par o impar, o si es un número primo o no, y, desde luego, que si posee su correspondiente cuadrado, cubo, cuarto, etc., entonces siempre habrá números mayores que el postulado número infinito.

La manera más rápida de superar esas aparentes contradicciones es señalar que el infinito posee propiedades particulares, del mismo modo como el cero y el uno poseen las suyas y las caracterizan por medio de postulados (*i.e.*, los axiomas de identidad); de tal suerte que no hay ningún motivo de peso para suponer que el infinito abstracto deba poseer las propiedades comunes a los demás números naturales. Dicho de otra forma más general, lo que da pie a estas contradicciones es una petición de principio, puesto que se atribuye propiedades de los números finitos al infinito. En todo caso, afirma correctamente Couturat, lo absurdo debería atribuirse a esta clase de objeciones que se planean. Ya sea mencionado antes que Galileo vio con suficiente claridad el mismo error (el cual subyace en la argumentación en torno a la comparación entre la serie de los naturales y la serie de los cuadrados), pero también lo hizo en su momento Pascal, como bien recuerda Couturat, al señalar que "es falso que sea par, es falso que sea impar; porque añadiéndole la unidad no cambia de naturaleza. Sin embargo, es un número, y todo número es par o impar. Es verdad que esto se dice de todo número finito".[87]

Como también se ha comentado antes, Galileo establece correctamente que el infinito de la serie de los naturales es igual, aunque no en el mismo sentido en que son iguales dos números finitos, a la serie de los cuadrados de los naturales; pero concluye, equivocadamente, que *todos* los infinitos son iguales. Ahora bien, ¿no es contradictorio afirmar que hay infinitos más grandes que otros?, y ¿no ha sido justamente esto lo que se ha negado cuando se ha querido ver que la serie de los naturales es mayor que la serie de los cuadrados?

En primer lugar, se dice que la serie de los números naturales y la serie de sus cuadrados son iguales porque tienen el mismo número cardinal infinito (lo cual quiere decir que pueden ser puestos en correspondencia uno a uno, o, dicho en lenguaje más cercano, si hay una aplicación biyectiva de a sobre b). Este número cardinal es el número infinito más pequeño de los números transfinitos y se le denomina ω (y posteriormente *aleph* 0). Segundo, sólo

[87] *Pensées*, II, 418, según la edición de Lafuma. Conviene resaltar que Galileo y Pascal dicen no saber en qué consiste el infinito, pero saben muy bien lo que no es.

puede engendrar una contradicción en la afirmación de que existen infinitos más grandes que otros, si, de nueva cuenta, se supone que los números transfinitos se encuentran colocados en serie como los números finitos; es decir, ω no es el último o el mayor de los números finitos, pero en cambio, es el más pequeño de los números transfinitos. No es, pues, más pequeño que los otros transfinitos en el mismo sentido que, por ejemplo, 3 es menor que 4.

De cualquier forma, para el finitista el argumento sobre la igualdad de cardinalidad entre los números naturales y la serie de los pares o impares resulta inaceptable porque intuitivamente es evidente que en la serie de los naturales hay siempre más números, o mejor, el doble de números que las otras dos series. O dicho de forma más general, el todo es siempre mayor a cualquiera de sus partes.

Como señala correctamente Couturat, si bien Kant afirmó que se trata de un principio analítico, lo cierto es que hay muchas ramas de las matemáticas en las cuales no es verdadero, y, por lo tanto, no puede ser un juicio necesario a priori, sino que "es verdadero o falso según la especie de magnitudes o de números a los cuales se aplique. Es verdadero para los números infinitos entendidos tomados como números ordinales, puesto que sumando unidades a un tal número se obtiene un número distinto que será más grande que el primero, pues, por definición, este vendrá después de aquel en la serie regular de los números infinitos (y no porque contenga más unidades, lo cual no tiene sentido matemático alguno). Pero ya no será verdadero para las potencias, que son la cardinalidad de los números infinitos, ya que la suma de dos números de la misma potencia es un número de la misma potencia y la suma de dos números de potencia distinta es igual a la potencia del sumando de mayor potencia. De este modo y en todos los casos, la potencia de una suma es igual a la potencia de alguno de sus sumandos" (p. 453).

En este sentido, se puede decir que dos infinitos son iguales y al mismo tiempo desiguales; es decir, son iguales con respecto a su potencia o cardinalidad, pero desiguales en cuanto a su orden (o *número*, como dice Couturat de manera un tanto problemática). En este segundo caso, la suma de dos ω crea un nuevo ω, distinto a cualquiera de sus sumandos. En efecto, si sumamos dos series de los naturales, la serie de los pares y la serie de los impares, entonces obtenemos un nuevo número transfinito: $\omega + \omega = 2\omega$, de tal forma que "los dos números infinitos ω y 2ω son distintos, puesto que representan dos series diferentes, la primera expresa una serie simple y la otra una doble" (p. 451). Pero en cuanto al primer caso, si se hace abstracción del orden de las series, se puede demostrar que el nuevo conjunto es igual, con respecto a su potencia, a cualquiera de sus sumandos, estableciendo una aplicación biyectiva de ω sobre 2ω, y, por lo tanto, si $\omega + \omega = 2\omega$, entonces $2\omega = \omega$. Pero para evitar posibles malentendidos o contradicciones apresuradas es más conveniente decir que dos números infinitos son *iguales* si poseen el mismo orden, mientras que se dirá que dos números infinitos son *equivalentes* si poseen la misma cardinalidad o potencia.

Y aquí conviene anotar una concesión curiosa que hace Couturat al finitista, que a mi parecer no hace más feliz a ninguno de los bandos y en cambio deja entrar más confusión en la discusión; esto es, que se puede decir con respecto a los números infinitos que el todo contiene más elementos que sus partes a condición de que la palabra "más" designe una suerte de desigualdad ontológica, pero en lo absoluto una desigualdad matemática (p. 453).

De cualquier forma, para Couturat, todos los argumentos dirigidos a través de los siglos contra el infinito entendido como número abstracto reposan, explícita o implícitamente, sobre dos premisas o principios por completo erróneos que pueden formularse de la manera siguiente:

1) El número infinito es el más grande de todos los números.
2) Todos los números infinitos son iguales.

Ambos principios se resumen a un principio, a saber, que *no hay más que un solo infinito*, pues se razona que no puede haber un número más grande que el número infinito, y, de allí se deduce que todos los números infinitos se reducen a uno solo.[88] Sea como sea, ambas herejías, como las llama Couturat, ya habían sido en su momento repudiadas por Leibniz y Kant.[89] Y Couturat aprovecha la oportunidad para poner en evidencia a los neocriticistas cuando reclaman la autoridad de Kant para refutar el infinito como número abstracto, y a la vez se sirven de los citados principios que su maestro ha refutado. Sin embargo, las críticas de Leibniz y Kant son meramente negativas, y corresponde a Cantor el mérito completo de haberlas refutado por medio de una teoría positiva y matemática que goza de una lógica impecable y que más temprano que tarde acallará todas las críticas.

Ahora bien, las objeciones contra el infinito entendido como un número concreto no difieren en sustancia a las expuestas anteriormente, ya que se da por sentado que la posibilidad de existencia de una infinitud concreta depende de la posibilidad misma del infinito numérico abstracto; es decir, se refieren a la posibilidad de asignar una cantidad infinita a un conjunto concreto de objetos. En este sentido, las objeciones al infinito concreto se limitan a la

[88] Pillon sostiene, por ejemplo: "Ciertamente todos los infinitos matemáticos deben ser asimilables los unos a los otros en el razonamiento, en virtud de que son todos... de la misma naturaleza. Existe, pues, fundamento para concluir de uno lo del otro, lo del número infinito a aquello del espacio, o lo de la infinitud del espacio lo del número". Citado por Couturat pp. 472-3.
[89] Couturat cita un fragmento de la carta de Leibniz a P. de Bosses del 11 de marzo de 1706, en donde señala: "Argumenta contra infinitum actu supponunt... infinita omnia esse aequalia" (el argumento contra el infinito

aplicación de los números naturales (abstractos) a objetos pertenecientes al mundo externo. El argumento principal de los neocriticistas consiste entonces en la negación de un infinito en acto tanto en el orden abstracto como en el orden concreto. Para Pillon como para Renouvier, el infinito matemático sólo es coherentemente inteligible si se le entiende como pura potencia, como algo ilimitado que como seres humanos nunca podremos alcanzar jamás. Suponer lo contrario, se dice, es precipitarse en contradicciones y afirmaciones gratuitas puesto que no es posible contar con medios adecuados para verificar que la aplicación de una serie infinita abstracta a una multiplicidad de objetos se satisface a cabalidad. Pero este inconveniente no es más que la cara física y más visible del problema ideal que consiste en poder asignar, sin caer en contradicción, un número cardinal infinito a una serie indefinida.

Couturat, por su parte, acepta la premisa pero le resta su carga negativa, en virtud de que si se ha establecido de manera coherente la posibilidad lógica y racional del número infinito abstracto (lo cual supone que ya ha hecho de manera clara y definitiva), de allí se sigue que no puede existir reparo alguno a la *posibilidad* de un número infinito concreto. Sin embargo, para el finitista no ha quedado suficientemente demostrado que se pueda dar un número de cardinalidad infinita, sea concreta o abstracta, si antes no se ha recorrido hasta el último elemento, o bien a *todos* los miembros de la serie. Pero de nueva cuenta, el neocriticista pierde de vista que sigue pensando el infinito en términos de lo finito, y, no alcanza a entender que el número cardinal de la serie infinita no pertenece a la serie misma (lo cual, por otra parte, es posible deducir de los enfoques empiristas de la cardinalidad criticados

---

supone de inmediato que todo infinito es igual). Mientras de Kant cita la observación sobre la tesis relativa a la primera antinomia.

antes). Dicho de otra forma, supone que una serie infinita debe poseer un último miembro, y, que este número coincide con su cardinalidad, lo cual es bastante justo tratándose de colecciones finitas, pero absolutamente inadmisible en el dominio infinito. Por consiguiente, no hay ninguna limitación lógica en concebir una colección concreta de objetos paralela a la serie de los números abstractos, si es el caso que a cada objeto de la colección le corresponda un número distinto y sólo uno. Sin embargo, debe reconocerse que no hay todavía aquí suficiente materia de peso para no permitir al finitista insistir en que para que tal proceso se haya realizado por completo, es necesario admitir una contradicción, puesto que se ha de dar por finalizada una aplicación que por su propia naturaleza es interminable, o, para decirlo de otro modo, es dar por agotado lo inagotable.

Pero Couturat argumenta correctamente que aquí hay de nuevo una confusión conceptual y una ambigüedad terminológica, puesto que el finitista asume como una imposibilidad lógica lo que de hecho es una imposibilidad física, a la vez que se trasfiere el sentido común y corriente de *ilimitado* al uso técnico y, por tanto, preciso del término (lo cual es más patente y patético en la crítica de Renouvier al concepto matemático de límite). En ambos caso, se confunde lo finito con lo infinito, lo ordinal con la cardinalidad.

Desde otro ángulo, puede decirse que el finitista niega que el número infinito sea la unidad de una pluralidad, puesto que será pluralidad sin duda, pero una pluralidad abierta que no consigue más que postulando su unidad. A lo cual se podría replicar que lo que da unidad a una pluralidad semejante es la regla única que la genera, y que consiste simplemente en realizar de manera irrestricta la operación de adición a 1 (recuérdese, no obstante, la objeción de Frege a este respecto cuando se entiende la adición sobre *la* misma unidad). De cualquier forma, se puede todavía responder que, para que tal pluralidad sea lógicamente concebible, es necesario que el intelecto pueda integrar en una intuición toda la serie infinita, para lo cual haría falta echar mano de un intelecto igualmente infinito, cosa imposible de aceptar. Al respecto, Couturat alega que semejante forma de entender las cosas no tiene ningún sentido para el defensor del infinito, ya que no es necesario contar con una imagen de signos-unidad que componen la pluralidad, sino tan solo la ley de formación que los genera en tanto que es dicha ley la que da sentido y contenido a la pluralidad. Pero para el finitista esta respuesta no puede significar más que la aceptación tácita de un infinito en potencia y no en acto; a lo cual cabe replicar que no es así, puesto que la ley de formación genera idealmente ese conjunto infinito de números al instante y de una vez por todas; además, negar esto último llevaría de igual forma a aceptar que también la mayoría de los números finitos existen sólo en potencia, o, bien, que sólo existen aquellos números que previamente se han calculado; esto es, tendría que admitir, por ejemplo, que el número 354854321066540897654 no existe más que en potencia porque nadie lo ha calculado todavía.

En suma, la discusión en torno al número infinito concreto se plantea como una posibilidad o imposibilidad lógica, y, no sobre la constatación o negación de la existencia objetiva de conjuntos infinitos de cosas u objetos; todo ello en el entendido que esta última cuestión es o sería una cuestión experimental pertinente, quizás, para las ciencias mas no para la filosofía. Es por tal motivo que su desahogo satisfactorio dependa, a fin de cuentas, de si se acepta o no como adecuado el enfoque racionalista y cantoriano del número abstracto. Y como se pudiera suponer, algo análogo debería ocurrir, de acuerdo con el credo finitista, en cuanto a la magnitud infinita abstracta y la magnitud infinita concreta, y sin embargo, no es así, como veremos brevemente más adelante. Pero como se ha dicho antes, para Couturat el infinito numérico es independiente de la magnitud infinita y, en todo caso, la generalización del número se justifica solo como una forma de medir la magnitud continua. Y si bien los oponentes al infinito consideran indiscernible el número infinito de la magnitud continua (véase la nota 88), para refutarles bastará con mostrar cómo se genera la magnitud continua y cómo se le determina o mide. Para tal efecto, Couturat toma como ejemplo[90] el brazo SS' del cuadrante positivo OX, OY de una hipérbola generada por una ecuación cuadrática $xy = 1$, en donde el vértice C tiene por coordenadas $OA = x_0 = 1$ y $OB = y_0 = 1$, y donde OACB es un cuadrado. En virtud de la ecuación de la hipérbola, la ordenada de un punto M cualquiera de la curva es inversa a su abscisa, de tal modo que la ordenada MP decrece a medida que crece la abscisa OP, y por consiguiente, la primera deviene infinitamente pequeña cuando la otra deviene infinitamente grande: $\text{Lim } y = 0$ cuando $\text{Lim } x = \infty$.

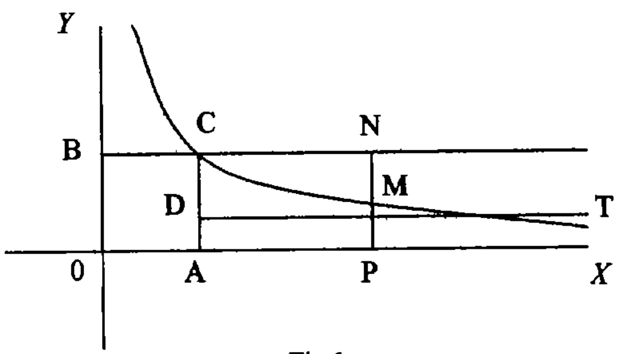

Fig.1

Ambas magnitudes infinitas son desiguales, como lo son también los dos sistemas de números que los miden. Para Couturat este ejemplo sencillo muestra muy bien la relación que guarda el número infinito con respecto a la magnitud continua, pero al mismo tiempo permite desechar, una vez más, la idea de los neocriticistas según la cual, todo infinito es

[90] Resumo el ejemplo de Couturat a sus puntos más esenciales.

igual, y, por consiguiente, no puede haber infinitos más grandes que otros. Ahora bien, el finitista puede muy bien aceptar el ejemplo de Couturat como una muestra de que es posible concebir el infinito ideal de la magnitud continua, pero aún así, falta por demostrar que tal infinito puede igualmente darse en la realidad. Como el ejemplo, de Couturat reposa sobre el supuesto de que una línea recta, en este caso la abscisa, puede prolongarse al infinito para que la ordenada tienda al límite 0, no hay forma de que tales magnitudes puedan verificarse en concreto, puesto que no existe ningún método conocido que permita físicamente prolongar una línea recta indefinidamente. Y, en todo caso, para que pueda darse el infinito concreto es necesario que se encuentre de una vez por todas fijo y determinado y no solo que pueda prolongarse indefinidamente. Se requiere pues, que el infinito concreto sea en acto y no sólo en potencia. Sin embargo, este planteamiento difiere del cuestionamiento propiamente filosófico que debería esperarse, y, por tal motivo Couturat no duda en responder: "Pero no tengo ninguna necesidad, para salir del apuro, de probar la existencia de hecho o real del infinito. En efecto, ¿cuál es su tesis?, no es, «la magnitud infinita no existe *en los hechos*», sino más bien, «la magnitud infinita *no puede* existir». Aquello que niegas no es solamente la realidad, sino la posibilidad misma de una magnitud infinita. Y para refutar su doctrina, no es por tanto necesario verificar la realidad de una tal magnitud, sino que basta haber establecido su posibilidad" (pp. 490 y 491).

En otras palabras, el finitista no cuenta con elementos para negar la existencia de una magnitud infinita, pues por medios meramente lógicos no hay modo alguno de conseguir lo que se propone, pues como decía Kant, no hay, "fuera de la contradicción, ningún modo de juzgar a priori la imposibilidad por medio de simples conceptos puros".[91] Además, si los seguidores de Renouvier han asumido como su deber desterrar de la naturaleza todo tipo de infinito, esto se debe no porque exista una contradicción entre el infinito y la realidad, sino debido a las contradicciones mismas que creen encontrar en la idea misma de infinito.[92]

Sea como sea, lo que queda claro es que Couturat pretende sortear la cuestión ontológica limitando el planeamiento al plano estrictamente ideal y renunciando a la pretensión de mostrar o demostrar la existencia de la magnitud infinita concreta. En suma, si bien el finitista no puede demostrar la inexistencia de la magnitud infinita, tampoco el defensor del infinito puede, ni debe intentar, dar una prueba de su existencia.

Ahora bien, enfoquemos la cuestión de la magnitud concreta desde otro punto de vista. Puesto que la magnitud infinita es una característica esencial de la idea de magnitud (en tanto consecuencia de sus axiomas), se puede preguntar más ampliamente ¿cuál es entonces el origen intelectual de la idea de magnitud? Y si, como se ha dicho, es la magnitud la que exige la creación del número infinito, ¿de dónde proviene la idea misma de infinito? Según Couturat si ha de reconocerse que no puede venir de la experiencia, en el entendido de que los objetos de la experiencia son por su propia naturaleza finitos, pero tampoco puede ser producto de la imaginación, ya que esta última sólo puede reproducir y multiplicar lo que es dado por medio de los sentidos. Entonces parece que no existe otra alternativa que aceptar que se trata necesariamente de una idea a priori. Desde luego, se podrá argumentar que el

---

[91] La traducción completa de Pedro Ribas dice así: "No puedo hacerme el menor concepto de una cosa que, una vez suprimida con todos sus predicados, dejara tras sí una contradicción, y sin ésta, con meros conceptos puros a priori, no poseo criterio ninguno que indique imposibilidad". A 596, B 624.

[92] Pillon, afirma, por ejemplo: "Es el principio de contradicción el que cierra el paso a la idea del ser infinito, que lo rechaza absolutamente y explica porqué es incompatible con nuestra constitución intelectual y porqué lo es necesariamente con toda constitución intelectual. Es el principio de contradicción quien no permite el acceso a nuestro espíritu más que a la idea de infinito en potencia". Citado por Couturat, p. 493, n.2.

infinito es producto de la imaginación si efectivamente puede repetir y multiplicar indefinidamente aquello que le es dado por medio de la experiencia. Pero justamente con ello se admite que la imaginación basta para engendrar la idea de indefinido o ilimitado, mas no propiamente la idea de infinito. Aunque de hecho, para muchos filósofos, entre los cuales se encuentran los neocriticistas, esa noción de lo indefinido que aporta la imaginación es el único fundamento verdadero o, si se prefiere, la única idea inteligible que puede asociarse a la presunta seudo idea de infinito.

Para hacer frente a esta posición Couturat apela a otros rasgos de la magnitud que se encuentran íntimamente ligados al infinito, como lo son la continuidad y la homogeneidad, señalando que en la práctica la división indefinida no permite asegurar la continuidad de la magnitud, porque por muy poderosos que sean los instrumentos de medida disponibles nunca una observación directa podrá constatar dicha propiedad. De hecho, cuando se emplean números (racionales) para medir una magnitud física, teóricamente se puede precisar su valor por medio de una aproximación indefinida, pero en la práctica la aproximación se encuentra limitada por la fineza de los sentidos y la precisión de instrumentos empleados. Por tal motivo se suele decir que la aproximación numérica de una magnitud no debe nunca sobrepasar los márgenes de error. En otras palabras, mientras que los números racionales se prestan para llevar a cabo una aproximación indefinida, la experiencia admite sólo una aproximación limitada.

Ahora bien, ¿no es este último alegato una aceptación tácita de la negación de la magnitud infinita concreta?, y con ello, ¿no les está otorgando la razón a los finitistas? No necesariamente si se toma en cuenta que aquello que intenta ilustrar es que la idea de magnitud no puede ser producto de la experiencia, y, al mismo tiempo, que por medios experimentales no es posible determinar si la magnitud es o no infinita.[93] Si por el contrario, añade Couturat, la idea de magnitud fuese empírica y sólo hubiese que representar magnitudes perceptibles, jamás se hubiera pensado en inventar los números irracionales, pero también se tendría que aceptar que la línea recta estaría compuesta únicamente de puntos racionales, que todas las magnitudes serían conmensurables y otras tantas consecuencias por completo inadmisibles.

En resumen, no es posible ni necesario buscar una comprobación experimental de la continuidad de la magnitud. Basta con que se le pueda concebir de forma coherente para considerarla legítima y si se acepta que la magnitud implica la inconmensurabilidad y la continuidad habrá que reconocerse igualmente que se le conoce a priori y que tiene su origen en la facultad racional.

Por otra parte, si, como se ha comentado anteriormente, el número tal como lo concibe Couturat se encuentra sólo parcialmente en acuerdo con la concepción kantiana (puesto que sólo se admite que es producto de una síntesis homogénea de la unidad), es hasta cierto punto previsible que algo similar habrá de ocurrir con respecto a la idea de magnitud. Y en efecto, para Couturat la idea de magnitud es algo dado a priori, pero como en la Estética Trascendental la continuidad es un atributo del espacio y del tiempo; esto es, de las formas a priori de la sensibilidad, debería ser, según Kant una propiedad de las dos formas puras de la intuición sensible (B 40 y B 48) y no propiamente una idea racional.

---

[93] A este respecto conviene citar un comentario de Couturat que, por otra parte, permite ilustrar de nueva cuenta su desacuerdo con Dedekind y Cantor: "Del hecho de que ninguna experiencia podrá establecer la continuidad del espacio, ciertos geómetras concluyen que la hipótesis sobre la discontinuidad del espacio real es altamente plausible, tanto más que no excluye necesariamente la continuidad del movimiento... Resta por saber qué es lo que dichos matemáticos entienden por espacio *real*" (p. 543, n. 2). Su respuesta es la siguiente: "No existe, por consiguiente, un espacio *real* al lado o fuera del espacio *ideal* de la geometría. Aquellos que

Sin embargo, para Couturat la continuidad no es un rasgo exclusivo del espacio y el tiempo, sino de todos los tipos o clases de magnitud; por ejemplo, la intensidad de una corriente o la de un campo magnético no puede variar más que de forma continua, pero esto se infiere a partir de los axiomas generales que rigen a todas las magnitudes, y, por consiguiente, puede afirmarse con anterioridad a toda experiencia y sin que pueda ser desmentida por esta última. Se puede afirmar, no obstante, que el tiempo basta para imponer la continuidad a todas las magnitudes, en el entendido de que no se puede imaginar ni concebir una magnitud fuera del tiempo, puesto que no puede variar más que dentro de un periodo o duración. En este sentido, como toda magnitud concebible evoluciona en el tiempo, se tendría que aceptar que sus variaciones deben ser tan continuas como en el tiempo en el cual se desenvuelven.

Pero Couturat reacciona adecuadamente observando que dicha objeción reposa en un simple malentendido, en una confusión entre la continuidad de una función y la continuidad de una de sus variables. Dado que el tiempo es la variable independiente por excelencia, no existe una razón lógica para garantizar que aquello que varía con respecto al tiempo deba de ser necesariamente continuo. De hecho, existen numerosos ejemplos en los cuales la variación es discontinua (manifiesta por el salto brusco de un valor a otro por completo distinto) a través de un lapso continuo. Sin embargo, debe tenerse presente que la discontinuidad de la magnitud es siempre relativa a la unidad elegida como medida.

En suma, el número es un esquema de la imaginación, que no es sino el resultado de la aplicación de las categorías de unidad e identidad a lo que es dado por la experiencia, pero la magnitud no es un concepto del entendimiento, sino una forma intelectual pura; esto es, una

hablan del espacio real confunden simplemente la materia heterogénea, que puede ser discontinua, con el medio homogéneo y continuo en el seno del cual se encuentra situada y dispersa" (p. 544).

idea de la razón. En este sentido, el número como esquema de la magnitud no es algo objetivo sino una construcción conceptual convencional y su aplicación concreta a la naturaleza no puede ser más que aproximada. Dicho de otra forma, "el concepto es fatal e irremediablemente inadecuado para el objeto real; por el contrario, la magnitud, sin duda no es todo el objeto, pero es todo aquello que hay de científicamente cognoscible en el objeto; y en tanto que el objeto es concebido como una magnitud, la idea de magnitud permite pensarlo de una manera concreta y adecuada. En pocas palabras, la idea de magnitud es el objeto propio de la ciencia matemática, y el número no es más que el instrumento de la ciencia, en tanto que símbolo de la magnitud"(p. 558).

Todas las anteriores consideraciones permiten, según Couturat, comprender mejor la gran diferencia que existe entre aquel indefinido que producto de la imaginación y la magnitud propiamente dicha. El primero encuentra sus desventajas en el alcance limitado y finito a la que se encuentra condenada la propia imaginación, de tal suerte que lo ilimitado se hallará siempre condicionado por lo finito, y si no se quiere caer en contradicción, se requerirá del infinito de la razón para explicarlo adecuadamente. Tal es así que, por ejemplo, cuando la imaginación crea poder ampliar desmesuradamente el espacio y prolongarlo indefinidamente, caerá presa de una ilusión, puesto que no dispone jamás mas que de una extensión limitada, y para hacerlo inteligible requerirá echar mano del espacio infinito concebido a priori por la razón.

En este sentido, "el infinito de la razón sobrepasa a la vez lo indefinido de la imaginación y lo finito del entendimiento; por ello es igualmente vano pretender encerrarlo bajo las categorías de número y de concepto, o que sea representable por medio de la imaginación. Lo indefinido no es la imagen de lo infinito, puesto que siempre será todavía finito, y, en todo caso no será más que su parodia. El infinito es una idea racional que no puede encontrar una imagen adecuada y tampoco se puede «construir» por medio de la intuición sensible. El hecho de que dicha idea exista, sin ser vacua ni contradictoria, refuta a la vez el axioma aristotélico «no hay idea sin imagen» y el axioma kantiano «no hay concepto sin intuición». La razón es por consiguiente una fuente de conocimientos originales y puros, que no le pide nada a la intuición, sea empírica o sea a priori, puesto que se puede pensar y conocer algo más allá de las formas de la sensibilidad y de las categorías del entendimiento. Y si tales conclusiones resultan verdaderas, el criticismo se encontrará arruinado" (p. 566).

Los Fundamentos Filosóficos de la Geometría

§ 1. Recepción de *L'Infini*

El primer libro de Couturat recibió una acogida relativamente favorable en su país, pero en el extranjero estuvo lejos de despertar el mismo interés, y de no ser por el joven Russell, quien aprovechó la ocasión para fraguar y exponer sus propias opiniones sobre las relaciones entre el número y la magnitud, se podría afirmar que el libro pasó prácticamente desapercibido. En concreto, se publicaron al menos diez notas, de las cuales solo cuatro eran reseñas críticas.[1] Todas ellas simpatizaban en mayor o menor medida con la defensa que el autor hacia del infinito matemático, pero se mostraban críticos con las distinciones teóricas que se establecía para demostrar su legitimidad. Por ejemplo, el filósofo e historiador de las matemáticas Gastón Milhaud (1858-1919), criticaba con vehemencia el sentido ambiguo y poco claro que Couturat daba a los tres términos básicos sobre los que se apoyaba su interpretación (i.e., *razón*, *racional* y *real*); ya que según la definición propuesta en el libro la *razón* debía considerarse, en primer término, como la facultad de conocer la realidad, pero, al mismo tiempo, se afirmaba que las ideas de unidad, de magnitud, de continuo y de infinito eran completamente a priori, y, por consiguiente, racionales. Y ya que ese a priori no se entiende como analítico, pero tampoco se deja asimilar al de Kant, pues se niega a la intuición sensible toda participación, se preguntaba Milhaud, ¿cómo es que la facultad de este a priori puro puede ser al mismo tiempo la facultad de lo real?[2]

[1] Las otras seis se limitaban a hacer un resumen del contenido del libro. Lalande (1914), p. 682, consigna ocho reseñas sin mencionar la de Russell y la de Lechalas.

[2] Milhaud (1897), p. 301. Un cuestionamiento muy parecido había sido formulado antes por Émile Boutroux en el examen de grado de Couturat. *Cf.* *RMM*. 4 (1896), supplément de juillet, p. 17.

Según Milhaud, Couturat no tendría a la mano más que una salida poco convincente al ensayar la replica a la cuestión, puesto que tomando al pie de la letra sus afirmaciones no cabría más que formular una respuesta negativa, en el entendido de que se proclama como *real* aquello que se relaciona con nociones que no encuentran su explicación en la intuición sensible. No obstante, si dichas nociones son reales y racionales porque no son producto de la intuición sensible, necesariamente se habrán de excluir de tales categorías todas aquellas nociones que sí lo son, lo cual resultaría sorprendente. Por lo demás, Milhaud dudaba de que una lectura literal se correspondiera con las verdaderas intenciones del autor, así que prefería suponer que tales aseveraciones se justificarían mejor a partir de la concepción objetivista de la ciencia que presuntamente subyace en el libro; esto es, se pueden asimilar las afirmaciones de Couturat en el sentido de que se considera que la ciencia no es un simple juego del intelecto, sino que se trata de una empresa racional que permite conocer la realidad.

Sin embargo, los problemas volverían a surgir al momento de entrar en los detalles. En primer lugar, cuando en la generalización del número se apela al principio de racionalidad para hacer sobresalir al método geométrico sobre el aritmético y el algebraico, Milhaud encuentra poco fundamento en la forma como intenta hacer valer la aplicación de dicho principio, y sospecha que hace falta una justificación ulterior, porque, entre otras cosas, "al leer con detenimiento esta primera parte del libro, parece como si el autor apelara en la comparación [de los distintos métodos], a una suerte de impresión instintiva del lector, en la cual *racional* corresponde a un sentimiento sobre una realidad necesaria" (*ibid.*, p. 303). En particular, añadia, Couturat intenta en vano declarar la supremacia racional de la representación geométrica de los números imaginarios en detrimento de los métodos algebraicos, y, en todo caso, el autor contará con muy pocos matemáticos dispuestos a aceptar sus conclusiones sobre este punto. Y no se equivocaba. El matemático C. Bourlet (1897), pp. 202 y 203, afirmaba que si no se acepta el principio de racionalidad que el autor trata de imponer en la comparación, "las razones que hace prevalecer para otorgar la palma al método geométrico resultan singularmente débiles". Y agregaba que este era justo el tipo de cuestiones sobre las cuales era difícil que existiera un acuerdo entre el matemático y el filósofo.

En el mismo tenor, Milhaud rechazaba el análisis de Couturat sobre concepto de número entero, sobre todo en lo que respecta a la negativa de tomar la unidad numérica, matemáticamente indefinible, como producto de un proceso de abstracción. Su argumentación consistía en mostrar, por un lado, el escaso valor teórico que tenía el declarar a la unidad primitiva como una idea racional y a priori; mientras que, por el otro lado, en su afán crítico, Couturat había perdido de vista la forma como en realidad opera la construcción de una entidad abstracta, ya que "es sobre todo la diferencia, la discriminación, como decía Bain, lo que constituye el principio eficaz de formación de cualquier idea abstracta" (Milhaud art. cit., p. 306).

Más puntual y detallada era la evaluación que Jules Tannery, maestro y sinodal de Couturat, hacía de la obra. Al igual que Russell, encontraba bastante aceptable el examen y la crítica que Couturat formulaba a las posiciones de Helmholtz y Kronecker sobre la naturaleza del número entero (lo cual no le impedía mostrar su desaprobación por la descalificación que hacía Couturat de las *congruencias* en la presentación de la teoría de los números algebraicos de Kronecker[3]). Por otra parte, consideraba que la exposición de los diversos sistemas numéricos y su empleo en los distintos métodos matemáticos tenía sobre todo, debido a su claridad y rigor, un gran valor pedagógico, y prestaba un servicio a aquellos filósofos que desearan adquirir ciertos conocimientos matemáticos. Pero al mismo tiempo cuestionaba que la extensión y

---

[3] Al respecto es conveniente traer a colación el siguiente comentario de Dugac (1983), p. 59: "El conjunto de trabajos de Cantor aparecen reseñados en una nota final, la nota IV, que lleva por título *Sobre la teoría de conjuntos y de los números infinitos*. Por una ironía del destino, a dicha nota le precede otra que consiste en la teoría de los números algebraicos de Kronecker. Es difícil imaginar que Cantor haya apreciado que su teoría fuese expuesta en una nota en un libro sobre el infinito y que dicha nota se encontrara precedida por una nota consagrada a una teoría de quien fuera el adversario más resuelto a su concepción infinitista". Es muy probable que Cantor se sintiera poco halagado por el hecho de encontrarse confinado a una nota en un libro sobre el infinito, incluso pudo sentirse muy desilusionado por la poca influencia que había ejercido en el autor; pero difícilmente pudo sentirse agraviado, si se tomó la molestia de leer el libro, debido a que su nota se encontrara acompañada de otra sobre la teoría de Kronecker, puesto que lo que intenta hacer ahí Couturat es mostrar, de nueva cuenta, que la generalización algebraica del número no es racional. El comentario de Dugac es revelador, además si se toma en cuenta que cita en varias ocasiones la reseña de Tannery, porque con ello muestra que, efectivamente, como dice Edwards, "myths are very hard to kill". *Cf.* Edwards (1988) y (1995), pp. 46-7.

generalización del número, con la excepción hecha de los números irracionales, aportara algún elemento esencialmente nuevo a la discusión sobre el infinito matemático. La observación no era una simple pedantería, ya que se trataba de una consecuencia "natural" de la aritmetización del análisis que Tannery había adoptado desde hace tiempo y que se oponía al enfoque tradicional de la matemática sobre el que se movía Couturat.[4]

En relación con este último punto Tannery alababa el resumen que Couturat había hecho de los principales resultados de Cantor, pero lamentaba que no ocuparan un lugar más amplio y mejor en el libro. Sobre todo, encontraba desafortunado el que Couturat hubiese subestimado la equivalencia numérica que Cantor había realizado de la magnitud continua, porque este resultado, superior en precisión y poder, con el cual se puede construir la magnitud a imagen y semejanza del número, permite poner de manifiesto que la noción de magnitud, en sí misma algo confusa, posee un carácter provisional y se encuentra lejos de justificar, como suponía Couturat, la construcción del concepto de número (Tannery (1897), p. 138).

Por otra parte, la reseña de Russell era significativamente distinta a las demás por diversas razones. La más evidente es que se trataba de la única reseña crítica escrita por un extranjero. Pero el motivo más importante obedece a que la crítica se hacía desde una posición extremadamente peculiar, y hasta cierto punto ajena al tipo de finitismo francés, en el cual los aspectos matemáticos se interpretaban en el plano filosófico bajo una suerte de neohegelianismo cuyas tesis se asumían como algo de suyo evidente. Por consiguiente, no profesaba un finitismo a la francesa, pero pensaba que si bien el infinito matemático era técnica y científicamente inobjetable, la justificación filosófica del mismo era otra cuestión, y, a su juicio, se trataba de una empresa impopular y extremadamente difícil de resolver de manera satisfactoria. En pocas palabras, era un finitista metafísico para quien el infinito como concepto matemático es un mal

[4] En el prefacio de (1886), p. viii, Tannery afirmaba: "Es posible construir por completo el análisis sobre la noción de número entero y las nociones relativas a la adición de los mismos; es inútil, por tanto, apelar a algún otro postulado o a algún otro dato de la experiencia: así la idea de infinito no tendrá más misterio en matemáticas y se reducirá a esto: después de cada número habrá siempre otro. Es este el punto de vista en el que he intentado situarme". Vale la pena recordar que, a pesar de su enfoque, Couturat se vale de manera recurrente de esta obra.

necesario y que sin conocer demasiado la nueva teoria cantoriana del infinito, se mostraba escéptico sobre su valor y no perdía la ocasión de criticar.

Sin embargo, debe decirse que Russell conocía principalmente la obra de Cantor por medio del libro de Arthur Hannequin, *Essai Critique sur L'Hypothèse des Atomes dans la Science Contemporaine* (1895),[5] que había reseñado un año antes. A través de la misma se puede apreciar mejor la posición desde la cual comenta el trabajo de Couturat, y permite formarse una idea más completa de lo poco fiable que era su conocimiento de la teoría cantoriana. Por ejemplo, para Russell, "los intentos de Cantor por ampliar la concepción del número puro al continuo, a los cuales Hannequin, siguiendo a Kerry, somete a una crítica vigorosa y concluyente hasta donde lo hace, me parecen ingeniosos pero abiertos aún a severas críticas. La segunda clase de números de Cantor, por medio de la cual espera agotar el continuo, inicia con el primer número que ha de ser mayor que cualquiera de los números de la primera clase; pero como la primera clase (la de los números naturales ordinarios) no tiene un límite superior, es dificil entender cómo la segunda clase habrá de comenzar. Los esfuerzos de Cantor, desde luego, parecen haber demostrado, de forma más concluyente que nunca, que ninguna extensión ilegítima del número puede ser suficiente para el tratamiento adecuado del continuo".[6]

La crítica, como podemos ver ahora con facilidad, descansa en un completo error y refleja una incomprensión profunda de la teoría cantoriana, puesto que asume una idea equivocada de la cardinalidad transfinita al afirmar que el primer miembro del conjunto de cardinalidad mayor

[5] Aunque de acuerdo con *What shall I read?* leyó en el mismo mes la traducción francesa de los artículos de Cantor publicados en el segundo volumen de *Acta Mathematica*. Esto es, Cantor (1893), (1893ª), (1893b) y (1893c). *Cf.* Russell (1983), p. 357. Se ha comentado, por ejemplo Anellis (1984), las omisiones e imprecisiones de algunos pasajes de dichas traducciones con el objeto de dispensar un tanto la lectura que se supone hizo Russell de esos textos, pero estos detalles editoriales son insuficientes para explicar la interpretación russeliana.

[6] Russell (1896ª), p. 412. Mientras que Couturat al reseñar el mismo libro, [9], pp. 102 y 103, sostenía: "¿Se puede representar el continuo de manera adecuada por medio del número?, ¿se pueden denumerar los puntos o elementos del continuo? El autor responde negativamente a esta cuestión. Admitiendo que tenga, en contra Cantor, razón en este punto, no será menos verdadero que se pueda "inventar un continuo aritmético adecuado al continuo geométrico", y, en sí mismo, como declara el autor, más rico que éste. Al menos en este sentido, el número puede agotar el continuo: esto es, se puede representar cada punto del continuo lineal por medio de un número distinto. Y Hannequin no lo puede negar ya que invoca precisamente el ejemplo de los números irracionales para demostrar que el continuo no se vuelve inteligible más que por obra del número".

debe seguir inmediatamente, en orden lineal, después del último número de la primera cardinalidad, como si los miembros de la segunda cardinalidad fueran necesariamente una prolongación de la serie del primer conjunto. El error es todavía más evidente si notamos que en el primero de los textos franceses de Cantor (1893) se establece que el conjunto de números reales R que satisface la función $f(x)$, en la cual x toma valores entre > 0 y < 1, no se puede poner en correspondencia estricta uno a uno con el conjunto de los números naturales N, y que por consiguiente, R > N. Pero no se puede decir que Russell comete aquí el pecado recurrente de intentar comprender el infinito en términos finitos, puesto que en realidad su argumento contra Cantor se basa en una idea errónea de la cardinalidad en general y, por consiguiente, no se sostiene ni siquiera cuando se consideran dos conjuntos finitos.[7] Esto es, si A tiene como elementos a 1, 2, y 3, y B a 1, 2, 3, 4, y 5, B tiene una cardinalidad mayor que A, pero no hay ningún motivo de peso para asumir que el primer miembro de B tenga que ser el número inmediatamente superior al último número de A.

Por otra parte, se ha dicho, Anellis (1987), que la primera teoria russelliana de la aritmética es como una teoria kroneckeriana inmadura, debido a su enorme parecido con el punto de vista de los antiguos griegos. Y en efecto, para Russell los únicos números genuinos son los números naturales, y, por lo tanto, los números en sentido propio, son discretos y por tanto discontinuos. El hecho de que ni el cero ni el infinito se ajusten a este patrón le lleva a rechazarlos en tanto números y a tomarlos como meras ficciones simbólicas, técnica, pero no filosóficamente, convenientes. Pero en realidad, la distinción clásica entre número y magnitud no es otra cosa que la distinción entre discontinuidad y continuidad, que fue predominante hasta la llegada de la llamada era del rigor matemático, y que encontramos, como hemos visto en el capítulo anterior (§ 3), en la distinción de Cournot entre *característica universal* y *logística*.[8] En este sentido, todo

---

[7] Anellis art. cit. § 2, sostiene que Russell entiende aquí la cardinalidad como "las propiedades metafísicas de secuencias (infinitas) de números", pero al citar el texto de arriba señala que mantiene la concepción intuitiva de una infinitud numérica incapaz de contar con una potencia (cardinalidad) definida.

[8] Anellis, art. cit., p. 307, observa que la distinción que hace Russell entre los conceptos de número puro (números geométricos) y número aplicado (números naturales) recuerda la distinción platónica entre aritmética teórica y aritmética aplicada o *logística*, y si esto es así, la distinción de Cournot ocurre en sentido inverso.

depende de la actitud, positiva o negativa, que se tenga hacia las relaciones que guardan entre sí ambas nociones. Se puede pensar, como hemos visto en el caso de Couturat, que la generalidad del número se encuentra justificada exclusivamente por la necesidad de cubrir la magnitud (que en sí misma es continua), y que es así como el número pierde en la extensión la propiedad de ser una cantidad discreta. O bien, se puede pensar, como el joven Russell, que el número es en esencia una cantidad discreta y que todo intento de emplearlo con el objeto de explicar fenómenos de naturaleza continua (como ocurre en el cálculo), no puede traer consigo más que perplejidades conceptuales, manifiestas por medio de paradojas inherentes al uso de esos términos.

Pero las diferencias entre Russell y Couturat eran también de orden más filosófico. Como los demás, Russell dudaba del poder explicativo del principio de razón que Couturat tomaba prestado de Cournot. Desde su punto de vista, suscribir dicho principio lo hacía asumir un tipo peculiar de idealismo, dado que de acuerdo con la mayoría de los exponentes de esta doctrina filosófica, la función de la razón no consistia en pronunciarse entre alternativas ante las cuales la lógica era incapaz de tomar partido, sino en encontrar una alternativa lógicamente posible donde el entendimiento no encuentra ninguna.[9] El comentario en sí era en realidad un tanto ocioso, pues desde la posición de Couturat si el entendimiento no encuentra la manera de tomar partido entre varias alternativas, esto quiere decir que no existe una posibilidad lógica entre ellas y será necesario apelar a otra facultad, en este caso la razón, para dirimir el conflicto de elección. Si tal actitud es o no consecuente con el idealismo en boga, será una cuestión de menor importancia.

Con respecto a la magnitud, Russell admitía que si ha de tomarse como una categoría independiente, no podrá definirse en función de otras categorías y deberá asumirse como indefinible. Sin embargo, echaba de menos que Couturat no hubiese hecho ningún intento por mostrar que se trataba en realidad de una categoría libre de contradicciones y que es posible

[9] Russell (1897a), p. 114; (1990), p. 62. Y añadía, en el tono irónico que después le sería habitual: "Sus principios racionales, entre los cuales destaca el principio de continuidad, son introducidos entonces de manera más o menos arbitraria, con lo cual aparecen más como dogmas que como genuinos axiomas necesarios. El bromista podría incluso verse tentado a identificar su "razón" con el sentido común" (p. 115; *loc. cit*).

saber más sobre la misma sin necesidad de recurrir a la categoría de número. Asimismo, contra la afirmación de que aunque la magnitud en general no pueda ser definida, tan pronto como se tiene la idea de magnitud de alguna clase, se posee de inmediato la idea de lo que es la igualdad entre magnitudes (de la misma especie); podría objetarse que no es posible tener la idea de magnitudes de una clase hasta que no se sepa qué es lo que se ha de entender por la igualdad entre magnitudes, dado que son la igualdad y la desigualdad entre magnitudes las que conforman propiamente las relaciones cuantitativas. Puede decirse, en descargo de Couturat, que tal objeción pierde de vista el punto medular de la cuestión, ya que de acuerdo con lo que se ha comentado en el parágrafo § 7 del capítulo anterior, según Couturat, decir que dos magnitudes son de la misma clase no es otra cosa que darse cuenta que son instancias de la misma magnitud abstracta, y que, por consiguiente, son comparables. Y dado que las relaciones de igualdad y desigualdad son también indefinibles y a priori, no hay lugar para plantear cuestiones de prioridad temporal con respecto a si se requiere reconocer la posibilidad de tales relaciones para determinar si en efecto se está ante magnitudes de la misma especie; esto es, una vez que el intelecto identifica dos magnitudes como casos concretos de una misma magnitud, en ese mismo momento se encuentran dadas, de manera simultanea, sus relaciones fundamentales. Desde luego, lo que sí cabría objetar o poner en duda en todo caso, es la existencia misma de esa magnitud platónica por medio de la cual Couturat intenta dar cuenta del reconocimiento de magnitudes de la misma especie. Pero eso es ya otra cuestión aparte.

En su larga reseña el ingeniero George Lechalas, (1897), p. 637, notaba que el principio del continuo tal y como se encontraba enunciado "parece un tanto contradictorio ya que afirma la existencia de una magnitud que se encuentra afuera de las dos clases que, por hipótesis, comprenden todas las magnitudes". Russell tenia una opinión muy parecida al respecto, pero un tanto más elaborada, ya que pensaba que habia en realidad dos tipos de dificultades en la enunciación del principio, según se tome la palabra *todos* en un sentido inclusivo o exclusivo; es decir, como el principio o axioma del continuo afirma que si se divide *todas* las cantidades de una misma especie en dos clases, de tal modo que *todas* las cantidades de una clase sean más grandes o más pequeñas que las de la otra clase, entonces existe una cantidad de la misma especie que representa este modo de división y que es a la vez inferior a *todas* las cantidades de la clase más grande, y superior a *todas* las cantidades de la clase más pequeña. Ahora bien, si se toma la palabra *todas* de tal modo que no incluya a la nueva cantidad, en este caso el principio se aplica de igual forma a las cantidades discretas; es decir, a los números naturales. Pero si se toma la palabra *todas* de manera irrestricta de modo que incluya a la nueva cantidad, entonces se presenta una contradicción evidente puesto que se da por sentado la existencia de otra cantidad de la misma especie que no pertenece a ninguna de las dos clases que conforman todas las cantidades de la magnitud de la misma especie.

En el primer caso, parece difícil comprender exactamente qué es lo que quiere decir Russell, dado que si, por un lado, se entiende que la cortadura se introduce entre dos conjuntos de números discretos, no hay lugar para ninguna perplejidad; pero si, por otro lado, se supone que la nueva cantidad pertenece también a los números naturales entonces no se estaría tomando la palabra *todas* en un sentido exclusivo. En el otro caso, aunque la contradicción parece evidente dado que la nueva cantidad pertenecería y a la vez no, a todas las cantidades de la misma magnitud, puede suponerse que ha confundido el todo de las dos clases con el todo de la magnitud en la cual se ha introducido la nueva cantidad, y que es justo aquí en donde radica el quid de la cuestión. De cualquier forma, debe admitirse que la formulación original del axioma permite la lectura de Russell y que sus reparos manifiestan una demanda de rigor lógico muy estricto.[10]

[10] En una carta, 04. 05.1898, Schmid (ed.) (2001), p. 52, Couturat comenta a Russell: "Una de sus críticas me ha impresionado mucho pero finalmente he encontrado la forma de contestarla; como no podré hacerlo públicamente, someto en privado la solución a dicha dificultad. Usted ha planteado con justa razón una contradicción formal en el axioma de continuidad, tal y como yo lo había enunciado siguiendo a Dedekind; y lo que me ha sorprendido, mas no consolado, es que Dedekind mismo ha dejado pasar semejante falta. Por fortuna, después he encontrado en Stolz (*Allgemeine Arithmetik*) el modo de erradicar dicha contradicción. Basta considerar no todas las cantidades de G, en donde se ha de definir el continuo, sino un conjunto H extraído de G, y que goza de las mismas propiedades (i.e. verificaría el axioma de Arquímedes, y, por consiguiente, tendría *conexidad*). Se puede entonces definir la continuidad de G afirmando que si se pueden dividir todas las cantidades de H en dos clases de tal forma que definan una cortadura en H, entonces existe *en* G una cantidad, y una sola, que corresponde a dicha cortadura". (Se

composición de sus elementos, y, desde luego, el espacio (físico o ideal) entendido como una magnitud entra en esta última categoría, pero no es la única alternativa, dado que también se pueden considerar otra clase de multiplicidades continuas; como, por ejemplo, el conjunto de los colores, ya que la transición de un color a otro ocurre por medio de una gradación muy fina que se supone continua. Pero como la determinación particular que corresponde a la magnitud espacial real no puede deducirse de la idea general de magnitud, y puesto que se le tendrá que distinguir de otras magnitudes continuas; pero también habrá que diferenciarla de aquellas que poseen la misma dimensionalidad, parece evidente que no hay más alternativa que asumir que sus propiedades habrán hacerse patentes sólo a través de la experiencia. Pero el trabajo de Riemann en realidad no se ocupaba de la determinación empírica de una magnitud extensiva tridimensional, y sería lamentable si lo hubiese hecho, puesto que prefirió dedicarse a desarrollar el concepto general y abstracto de multiplicidad n-uple, y los problemas teóricos relacionados con cada una de sus especificaciones, lo cual conduce en principio a una número infinito de geometrías, de entre las cuales hay que contar, por supuesto, a la geometría de Euclides, y a todas las llamadas geometria no euclidianas.[16]

Es pertinente notar que Riemann consideraba el tema de su disertación como un asunto filosófico de la matemática:

> Al intentar ahora resolver el primero de esos problemas [la determinación métrica del espacio], desarrollando el concepto de las magnitudes de múltiples dimensiones, creo que podré aspirar a que se me juzgue con indulgencia, tanto más cuanto que tengo

[16] El teorema de Lie (según el cual el número de geometrias compatibles con el movimiento de una figura invariable es limitado) más que entrar en contradicción con Riemann, impone un subconjunto dentro del conjunto infinito de geometrias posibles. Por otra parte, aunque en su obra publicada no hay ningún pronunciamiento explícito a favor del infinito actual, existe suficiente evidencia de que algunos de sus concepciones lo presuponen. Las reticencias de Riemann para pronunciarse sobre este tema se debían en gran medida a que pensaba que era imposible dar una definición adecuada del mismo (cosa que haría más tarde su amigo Dedekind), y que de alguna forma había una dificultad no resuelta, como lo parece indicar el cuadro de antinomias que elaboró, emulando un tanto a Kant, pero sin que esta tabla supusiera una tensión irresoluble, pues como se indica allí mismo "justamente por eso, porque es imposible una representación precisa y completa de esos sistemas conceptuales [infinitos], son inaccesibles a la investigación directa y a la elaboración mediante nuestra reflexión. Pero pueden ser considerados como situados en las fronteras de lo representable, es decir se puede construir un sistema conceptual situado dentro de lo representable que se transforma en el sistema dado por pura variación de las relaciones de magnitud". Ferreirós (ed.) (2000), p. 98.

hasta cierto punto un asunto de tamaño. El dilema era sin duda evidente, pues si la geometría de Euclides, considerada por siglos como el canon de la verdad matemática y como única representación posible del espacio físico, contaba con alternativas potenciales para disputarle su lugar privilegiado, ¿acaso no se degradaba el conocimiento geométrico al nivel de una ciencia experimental?

En su primera obra propiamente filosófica, el joven Russell, (1897), § 88, se plantea la misma cuestión con un lirismo tal y en términos un tanto autobiográficos que no resisto la tentación de citarle: "Para reforzar la fe euclídea hemos de llamar a la razón en ayuda de la intuición; pero desgraciadamente la razón nos abandona y quedamos a merced de observaciones imprecisas sobre triángulos astronómicos – débil sostén en verdad para la religión querida de nuestra infancia".

A decir verdad, las pretensiones empiristas de Gauss y Lobachevsky no fueron más allá de los oídos de un número reducido de iniciados, de modo que todavía hubo que esperar hasta la publicación de la célebre disertación de Riemann y, sobre todo, al brillante ensayo de divulgación de Helmholtz, para que el grueso del mundo intelectual se diera cuenta que la imagen de la geometría como la ciencia apodítica por antonomasia estaba siendo seriamente cuestionada. Riemann, quien no aludía para nada a las geometrías no euclidianas, hablaba de las "hipótesis" (y Helmholtz de los "hechos") sobre las que se funda la geometría debido a que pensaba que las propiedades del espacio físico sólo pueden establecerse por medio de la experiencia. Sin embargo, su razonamiento partía de una concepción innovadora asociada a la idea general de magnitud. Dado que la magnitud, en el sentido más amplio, requiere caracterizarse por medio de un concepto que pueda ser objeto de diversas determinaciones, para que a su vez pueda aplicarse sin problema a cada tipo o clase de magnitud, este concepto se puede entender como una multiplicidad o conjunto multidimensional (en donde la especificación de sus elementos y las relaciones que guardan entre sí será su forma de determinación). Las magnitudes o multiplicidades pueden dividirse en discretas o continuas, según el orden y la permite inventar una nueva geometría absolutamente coherente.

Pero junto a esta nueva geometría surgía un nuevo problema que desplazaba la cuestión sobre la demostración del famoso postulado de las paralelas, puesto que resultaba inevitable plantearse cuál de los dos postulados era en realidad el verdadero, y, sobre todo, con respecto a qué eran falsos o verdaderos.[14] Algunos geómetras, como Gauss y Lobachevsky, pensaban que el asunto debía decidirse por la vía experimental. Este último, por ejemplo, ofrecía una "prueba rigurosa" de su postulado midiendo los ángulos del paralaje de Sirio y de otras dos estrellas, constatando que la suma de los ángulos se aproximaba a los 180°. Pero en realidad Lobachevsky no ofrecía una demostración directa de su postulado, sino mejor dicho, de una de sus consecuencias, ya que un teorema importante establece que la suma de los ángulos de un triangulo es menor a dos rectos. Entre los rumores asociados a Gauss hay uno en el cual se le atribuye haber pensado de manera similar al proponer la medición de los ángulos de un triángulo imaginario formado por las montañas Brocken, Hohehagen, e Inselberg. No hay duda de que Gauss combinaba el empirismo geométrico con un repudio sin distingos a la filosofía kantiana, pero nada parece indicar que hubiera propuesto llevar a cabo un experimento semejante.[15] Pero en resumidas cuentas, para ambos, las diferencias entre la geometría euclídea y la geometría no euclidiana era

---

[14] Este era el problema epistemológico en que había derivado el problema de las paralelas, pero en el plano matemático habían ocurrido al menos dos cambios importantes. Como observa Gray (1989), p. 171, "Es posible separar dos cambios dramáticos con respecto al problema de las paralelas. Uno de ellos se distingue por la introducción del método propio del análisis, y, por lo tanto, el problema se trasforma en el estudio de varias fórmulas. El segundo tiene que ver con el reconocimiento de la naturaleza intrínseca de la geometría, y, en particular, en la importancia de la noción de curvatura, lo cual permite proporcionar una verdadera base geométrica al método trigonométrico, el cual de otra manera podría muy bien no describir nada. Sin una formulación intrínseca de la geometría diferencial esta clase de estudios sería distinto del estudio del espacio (que considerado aisladamente parecería como si contara con una geometría natural). La ausencia de un concepto tal en la obra de Monge, el distinguido geómetra diferencial francés en activo alrededor de 1800, pudo haber limitado significativamente la apreciación francesa sobre la posibilidad de la geometría no euclídea".

[15] Sin duda, Gauss tomó como punto de partida el teorema de Lobachevsky para construir su geometría anti-euclidiana. En 1824, le escribe a Taurinus: "La hipótesis de que la suma de los ángulos de un triángulo es menor a 180° conduce a una geometría por completo distinta a la nuestra, la cual es en sí misma consistente y la cual, con lo que respecta a mi parte, he desarrollado de manera por completo satisfactoria" (Gauss, *Werke*, vol. VIII, p. 187, citado por Bottazzini (1994), pp. 17 y 18). Pero Miller (1972) ha cuestionado con firmeza la historia de que Gauss se hubiese embarcado en la empresa experimental arriba indicada (que Bottazzini, como otros, da por verídica), lo cual, por otra parte, no le resta nada al empirismo de Gauss. Lo único cierto es que el conjunto montañoso se menciona en las *Disquisitiones circa superficies curvas* (1829) como los puntos de un triángulo terrestre que difiere muy poco de un triángulo sobre una superficie esférica. *Cf.* Torretti (1978), pp. 63 y 381, n. 40.

franceses, y que esto obra en favor de nuestros kantianos, a los cuales sirve de arma contra el racionalismo. El hecho de que Poincaré se declare en contra del infinito actual, refuerza de manera natural este prejuicio entre los filósofos y devuelve el ánimo a los finitistas".

§ 2. El surgimiento de las geometría no euclidianas y sus consecuencias filosóficas

A mediados de la segunda mitad del siglo XIX, la creación de nuevos sistemas geométricos dio lugar a numerosos debates sobre la naturaleza y los fundamentos de la geometría. Para ser exactos, dichos sistemas no eran ya tan nuevos, pero pasaron desapercibidos por décadas hasta que se empezó a correr el rumor de que algo importante estaba ocurriendo en la rama más prestigiosa de las matemáticas. Se ha dicho en repetidas ocasiones que Gauss le había confesado a Bessel, en una carta de 1829, la negativa a publicar sus descubrimientos geométricos por temor a despertar la ira de los Beocios; pero como Freudenthal ha comentado, su temor era en cualquier caso infundado puesto que los Beocios tardarían al menos cincuenta años en darse por enterados de los nuevos adelantos.[13]

Como todo mundo sabe ahora, el surgimiento de las geometrías no euclidianas se encuentra conectado con los intentos infructuosos de demostrar el famoso postulado de las paralelas de Euclides, empleando el método de prueba indirecta conocido como *reducción al absurdo* (el cual consiste, en términos generales, en asumir como verdadera la afirmación contradictoria de aquella que se pretende probar, para luego deducir, a partir de tal suposición y de los otros axiomas, un enunciado contradictorio). El resultado sorprendente al que se llega con la aplicación de este método en el caso del presunto postulado de las paralelas euclidianas, es que la proposición asumida como su contradictoria lejos de conducir a un resultado inadmisible,

[13] Freudenthal (1962), p. 613. Y continua: "Después de la muerte de Gauss, hubo algunos chismes de que había intentado construir una geometría no euclidiana. El rumor fue confirmado al publicarse, entre 1860 y 1863, su correspondencia con Schumacher. Pero aún así el nombre de Gauss no fue un incentivo suficientemente fuerte para despertar el interés en la geometría no euclidiana". La razón de esta falta de atención obedece, en gran medida, a que los nuevos sistemas se desarrollaron por medio de métodos analíticos, que hacían difícil formarse una *imagen* geométrica de los mismos; sobre esto último véase la nota siguiente.

supuestas contradicciones relacionadas con el número y la magnitud (que a Russell le resultaban evidentes debido a su apego a la noción de número entero como prototipo del concepto de número), no resolviendo las dificultades, sino más bien atrincherando los conceptos fundamentales en la razón, a la cual la lógica, por principio, no puede acceder.[12] En definitiva, todos estos defectos redundan en un fallido intento por defender el infinito matemático ante los embates finitistas.

Este era, sin duda, un juicio extremadamente severo y, como confiesa el mismo Russell, hacía poca justicia a los méritos que posee el trabajo de Couturat, pero también manifiesta de manera adecuada las dificultades que enfrenta el situarse en el polo menos concurrido del debate. Ciertamente, los bien conocidos neokantianos contra los cuales directamente había polemizado no se tomaron la molestia de enfrentar los argumentos y las críticas de Couturat (por ejemplo, el *Année Philosophique* de Pillon se limitó a publicar una breve nota dando cuenta de la aparición del libro) y sus seguidores, que eran los más, optaron también por ignorarle. En cierta forma, no había razón alguna para esperar otra cosa, ya que es más bien inusual que una personalidad con suficiente prestigio intelectual, como lo era Renouvier, se digne a discutir las opiniones desfavorables que un joven doctorado le ha lanzado. Si recordamos, bajo circunstancias un tanto distintas, Russell había corrido más o menos la misma suerte en su país con el *Ensayo sobre los Fundamentos de la Geometría*; y al respecto habrá de reconocerse que el relativo interés que suscitó en Francia se debió en gran medida a los buenos oficios de Couturat.

De cualquier forma, la actitud hostil al infinito actual dentro del ambiente filosófico francés sería también un elemento importante en la negativa por asimilar el logicismo, tal y como lo advertía Couturat en una carta a Russell: "No hace falta olvidar que gracias a Renouvier y su escuela, la imposibilidad del infinito actual es un lugar común, un dogma, entre la mayoría de los filósofos

[12] Russell art. cit., p. 118; p. 66: "la magnitud infinita, como sostiene Couturat, depende del continuo, y este, como la mayoría de las nociones fundamentales de esta obra, son considerados como dados por la razón y no por la lógica. Para quien se encuentra equipado únicamente con la lógica es imposible proseguir hasta la fortaleza de la razón, en donde los dardos de la lógica no pueden penetrar". Sin embargo, como se ha dicho antes, para Couturat no se presentan las dificultades entre número y la magnitud puesto que la extensión del número entraña la perdida de la propiedad discreta, a la cual según Russell es imposible renunciar.

Para compensar y complementar este último comentario, quizá sea pertinente añadir que por aquella época Russell consideraba la noción de continuidad como esencialmente contradictoria, y, no como un defecto particular de la formulación que Couturat retomaba de Dedekind. De hecho, su manía por encontrar antinomias en los conceptos fundamentales de las ciencias era fruto de su convicción neohegeliana de que tales embrollos conceptuales eran manifestaciones palpables del hecho de que cada ciencia ofrecía sólo una explicación parcial de la realidad, y que para superar los obstáculos sería necesario llevar a cabo una síntesis metafísica, la cual, dicho sea de paso, sería el objetivo final de su programa en favor de un sistema dialéctico de la ciencias.[11] No obstante, también es indudable que, al margen de su "intoxicación" neohegeliana, Russell encontraba inadecuada la enunciación del método de cortaduras de Dedekind para introducir los números irracionales, y así lo siguió considerando más tarde al asumir el programa logicista; en los *Principles* (34, § 266), por ejemplo, volvemos a encontrar las mismas objeciones, aunque planteadas con mayor detalle y más matizadas sobre sus alcances, pues, en el segundo caso, no habla más de una contradicción, sino simplemente de un defecto de exposición.

Pero en resumidas cuentas, si bien Russell no era del todo justo en sus críticas, la conclusión que lanzaba sobre las relaciones entre el número y la magnitud en relación con el infinito presagiaba en cierto sentido el destino que tendría el libro. En primer término, insistía en lo problemático que resulta hacerse de una idea de lo que Couturat entiende por una magnitud infinita si para ello no se puede contar con la ayuda del número. Y si no es posible contar con una idea clara de la magnitud infinita, tampoco puede entenderse cómo es que el número infinito es el resultado de la extensión que reclama la magnitud. En segundo lugar, a su juicio, Couturat habia evadido las

---

dice que un conjunto de puntos es conexo si se pueden unir dos puntos cualquiera de ese conjunto por medio de una cadena de puntos, y, cuyos intervalos sean siempre menores a un segmento dado. Couturat usa aquí el término *grandeur* para referirse a la cantidad, ajustándose con ello al uso de Russell).

[11] En Russell (1959), p. 41, confiesa: "En aquella época era un convencido hegeliano, y trataba de construir una completa dialéctica de las ciencias, que habría terminado dando la prueba de que toda realidad es mental. Acepté la opinión hegeliana de que ninguna de las ciencias es completamente cierta, ya que todas dependen de alguna abstracción, y toda abstracción conduce, más tarde o más temprano, a contradicciones". A este proyecto se le conoce también como el programa Tiergarden, debido a que fue en este jardín alemán donde se originó. *Cf.* Russell (1990), pp. xiv y xv.

> poca práctica en tales trabajos de naturaleza filosófica, donde las dificultades se encuentran más en los conceptos que en la construcción.[17]

Sin embargo, a la luz de lo que se ha dicho en el capítulo anterior es conveniente no identificar o asimilar este enfoque filosófico con el análisis de Couturat, ya que las coincidencias superficiales pueden dar lugar a varios malentendidos. En primer lugar, es importante tener presente que en el caso de Riemann se ofrece una concepción del concepto general de magnitud, que es muy distinta a la caracterización axiomática común a la que recurre Couturat (y que, como se ha señalado, no es propiamente una definición). En segundo lugar, Riemann distingue entre magnitudes continuas y discontinuas, mientras que la magnitud de Couturat es en sí misma continua (puesto que entre sus axiomas incluye el principio del continuo). En tercer lugar, y más importante, Riemann elabora toda una teoría innovadora matemática de la cual surge su geometría no euclidiana, así como la nueva topología, mientras que Couturat se limita a un análisis de clarificación del concepto tradicional de magnitud sin aportar una teoría propiamente matemática (aun y cuando el conjunto de axiomas caracteriza una cierta clase de grupo); de tal suerte que cuando ambos hablan del concepto de magnitud como una noción que ha de ser elaborada de manera independiente del concepto de medida, uno (Riemann) esta pensando en la topología o *analysis situs* (literalmente, análisis de la posición), como se le denomino en un principio, mientras que el otro piensa en justificar las distintas clases de números como el resultado de su aplicación a la magnitud. Por último, Couturat en ningún momento discute ni cita los textos de Riemann, lo cual hace suponer que no tenía a la mano un conocimiento directo de los mismos.

También en el capítulo anterior se ha insistido en que la noción de magnitud era ya una idea obsoleta a finales del siglo XIX, y que Couturat, como Russell, se aferra a ella de tal modo que le impide asimilar de manera adecuado el trabajo innovador de Cantor y Dedekind. Surge entonces la pregunta sobre si la obra de Riemann no estaba en realidad devolviendo al concepto de

[17] Riemann (1854-1868): Ferreirós (ed.) (2000), p. 3. Ferreirós apunta muy bien que este enfoque conceptual era un rasgo que compartía con sus maestros Gauss y Dirichlet, y que se había convertido en el estilo de hacer matemáticas en Gotinga.

magnitud su honor perdido, y que, en consecuencia, su presunta caducidad sobre la que se ha insistido es un alegato un tanto incoherente de mi parte. Para dispar este y otros posibles errores de perspectiva, es necesario resaltar que si bien Riemann introduce una serie innovadora de ideas a través del concepto general de magnitud, en realidad, se trata, como decía Gauss, de un concepto *abstracto* de magnitud, y que al caracterizarlo como una multiplicidad n-dimensional lo que en realidad estaba haciendo era introducir el enfoque conjuntista que sería un poco más tarde establecido definitivamente por Dedekind y Cantor. En este sentido, puede decirse que Riemann se vale del viejo lenguaje para introducir ideas nuevas que más tarde terminarían por suprimir ese lenguaje.

Existen también otros factores que en cierta forma contribuyeron a crear cierta confusión o, que al menos, impidieron apreciar el número considerable de avances matemáticos que se desenvolvía bajo aspectos muy similares, lo cuales terminarían dando forma a la concepción abstracta de la matemática que nos es ahora familiar. Entres estos factores el más evidente es la inestabilidad léxica que se manifiesta por medio de una gran diversidad de términos para apuntar, con mayor o menor precisión, al mismo concepto (ingenuo) de conjunto; es así como nos entramos con las multiplicidades o variedades riemaniannas, con las pluralidades o clases o colecciones lógicas, con los sistemas de Dedekind, o los conceptos fregeanos. En el caso de Riemann, su elección parece apoyarse en dos fuentes; una de carácter matemático que, desde luego, retoma de Gauss, quien empleaba los términos *multiplicidad bidimensional* (en relación con su uso de los números complejos) y *multiplicidad n-dimensional* en su teoría sobre superficies curvas; la otra, de carácter filosófico, remite a las reflexiones metafísicas de Herbart sobre el infinito y la permanencia del alma.

En el caso de Couturat existe una asimilación defectuosa y parcial del enfoque conjuntista, el cual se manifiesta a través de numerosas afirmaciones y comentarios inadecuados. Por ejemplo, a pesar de considerar el número cardinal como una pluralidad de unidades, al final, [I], p. 364, n., se toma la molestia de observar que si bien "Dedekind no acepta la existencia de números infinitos, reconoce y asimismo demuestra (?) la existencia de conjuntos infinitos" (el signo de admiración es de Couturat). Similares conflictos conceptuales pueden adivinarse si Couturat se hubiese enfrentado con el concepto riemanniano de magnitud, puesto que volvería ontológicamente indistinguible al número de la magnitud, y entonces el piso de su obra se vendría abajo.

Aunque la disertación de Riemann promueve un cierto empirismo geométrico, evita cualquier tipo de polémica filosófica e ignora deliberadamente el conflicto con respecto a la doctrina kantiana del espacio. Sin embargo, el encargado de hacer patente y ampliamente público el conflicto fue Helmholtz, quien a partir de sus investigación físico-fisiológicas había llegado a un planteamiento muy cercano al de Riemann. En primer término, como otros geómetras antes que él, pensaba que un examen detallado de la geometría de Euclides revelaba la existencia de numerosas presuposiciones cuyo fundamento de verdad debía ser investigado a profundidad. En especial, era necesario establecer la fuente de aquella propiedad que se emplea a lo largo de la mayoría de las demostraciones, y que como tal parece no tener más fundamento que la experiencia: "En el método euclidiano la base de toda prueba es la demostración de la congruencia de las líneas, ángulos, figuras planas, cuerpos, etc., pertinentes. Con el objeto de hacer intuitiva la noción de congruencia, se imagina que las estructuras geométricas pertinentes pueden moverse entre sí con naturalidad y sin cambiar su forma ni su dimensión. Que esto es así y puede llevarse a cabo, es cosa que hemos experimentado desde la temprana juventud hasta el presente. Pero si queremos erigir una clase de necesidad del pensamiento a partir de la presunción de las estructuras espaciales fijas pueden moverse libremente sin distorsión hacia cualquier lugar del espacio, entonces debemos preguntarnos si dicha presunción involucra alguna presuposición que no ha sido lógicamente probada. Veremos pronto más adelante que de hecho envuelve una y que incluso tiene implicaciones de gran alcance. Pero si esto es así, entonces en cada prueba en la que se ve involucrada la congruencia se encuentra fundada en un hecho que sólo puede ser sacado de la experiencia".[18]

Para Helmholtz los presupuestos o axiomas implícitos, como los denomino Poincaré un poco más tarde, eran una consecuencia inevitable del método intuitivo empleado por Euclides en la construcción de la geometría planimétrica. La mayoría de esos supuestos podían evitarse recurriendo al uso del método analítico propio de la moderna geometría, en donde las magnitudes espaciales se encuentran bajo control por medio de una ecuación que las incluye y permite realizar su cálculo. Desde luego, por geometría analítica no solo entendía el recurso algebraico introducido por Fermat y Descartes, sino también la extensión llevada a cabo por medio del cálculo y que tiene como resultado la geometría diferencial. Sin embargo, los resultados a los que se habían llegado con la aplicación de este método podían ser explicados de manera intuitiva por medio de una especie de ficciones que servirían como experimentos mentales.

Si imaginamos unos seres inteligentes de dos dimensiones que se mueven en una superficie plana, es seguro que serían capaces de construir una geometría bidimensional que no se distinguiría en esencia de nuestra geometría plana, de tal modo que para ellos la línea más corta entre dos puntos seria también la linea recta. Pero si vivieran sobre la superficie de una esfera entonces podrían constatar que la línea más corta sería un arco de círculo máximo entre los dos puntos en cuestión; y si los dos puntos fueran los extremos del diámetro de la esfera habría una infinidad de líneas entre esos puntos que serían cada una igualmente la línea más corta entre esos dos puntos. Esto último significa que el axioma según el cual solo hay una línea más corta que puede trazarse entre dos puntos tendría sus excepciones en la geometría de los moradores de la esfera. Pero este no sería el único resultado extraño en comparación con la geometria plana, puesto que, por ejemplo, las líneas paralelas serían totalmente desconocidas para los habitantes

[18] Helmholtz (1977), pp. 4 y 5. El comentario de Schlick que acompaña este pasaje dice así: "Ha de observarse que la conclusión a la que llega Helmholtz en la última oración es sólo admisible si es verdad que cada presuposición debe contar con un fundamento lógico o con algo que tiene su origen en la experiencia, y, que por lo tanto, no puede provenir de una tercera fuente". Desde luego, esto quiere decir que Helmholtz excluye de antemano la posibilidad de que se trate de un juicio sintético a priori.

de la esfera puesto que para ellos dos líneas convenientemente prologadas no sólo se intersecan en un punto, sino en dos. Además, la suma de los ángulos será siempre mayor que la suma de dos rectos, y aumentara conforme aumente el área del triángulo. Por esta razón, los moradores de la esfera tampoco podrán contar con el concepto de similitud geométrica dado que dos triángulos de distinto tamaño tendrán igualmente distintos ángulos. Si deformamos la esfera hasta convertirla en un cuerpo con forma de huevo, sus moradores no podrán dibujar dos triángulos congruentes en dos lugares distintos de la superficie, dado que los ángulos de un triángulo situado al fondo del cuerpo sumarían más que dos rectos, mientras que la suma de los ángulos del triángulo trazado sobre el lado opuesto seria distinta a la suma del otro triángulo.

Hay dos conclusiones particularmente importantes a las que llega Helmholtz a partir de estos ejemplos. La primera de ellas afirma que los mencionados seres, con poderes intelectuales similares a los humanos, desarrollarían distintos sistemas de axiomas geométricos de acuerdo con el tipo de espacio en el cual se desenvuelven. Sin embargo, el meollo de esta primera conclusión consiste en que se trata de la generalización de un supuesto, y que como tal no se somete a discusión; esto es, se da por sentado que la geometría es producto de la forma como el intelecto humano procesa la información, recibida por medio de los sentidos, del tipo de espacio que habita. Hay varias objeciones a la mano para rechazar dicho supuesto. La más evidente es que de ser así, la geometría por excelencia sería la geometría proyectiva, que es la que parece ajustarse mejor a la perspectiva del observador. Una respuesta rápida podría sostener que la geometría elaborada sería en todo caso intersubjetiva, tipo euclídea, ajena a cualquier perspectiva, y, por lo tanto, en donde la posición de un observador en particular no tiene la menor relevancia. Pero también se podría objetar que los geómetras no euclídeos vivieron en un espacio similar al de Euclides y bajo el supuesto antes mencionado, este tipo de geometrías sería empíricamente imposible. Pero no me detendré más en esta clase de objeciones y las alternativas a las que darían pie con el objeto de evadir su posible daño.

La secunda conclusión a la que llega Helmholtz a partir de sus ejemplos consiste en lo siguiente:

existe una propiedad geométrica especial según la cual en una superficie es posible mover libremente las figuras o los cuerpos sin alterar sus ángulos y sus líneas. Dicha propiedad se cumple sólo para ciertos espacios y en la obra de Gauss recibe el nombre de "medida de curvatura" de una superficie, porque para que se pueda cumplir tal propiedad es necesario que la superficie en cuestión conserve en todos sus puntos la misma magnitud. En el caso de la superficie esférica su medida de curvatura es positiva, en el del plano es nula, y, en una superficie seudoesférica su constante es negativa dado que sus dos curvas principales se encuentran en los lados opuestos.

Ahora bien, dado que la congruencia, según se ha visto, no es una propiedad exclusiva del espacio euclídeo, puede plantearse entonces el problema sobre el origen de aquellas especificaciones particulares que lo caracterizan. "Es decir la cuestión sobre si su origen es *empírico*, si se derivan o pueden ser hechas evidentes por medio de hechos experimentales, o ser correspondientemente testadas y quizás incluso refutadas por medio de ellos. Dentro de ésta última eventualidad habría que añadir también que seríamos capaces de imaginar una serie de hechos observables por medio de los cuales podría indicarse un valor de la medida de curvatura distinto al del espacio plano euclídeo. Desde luego, si otra clase de espacios es imaginable en el sentido antes establecido, esto también refutará la afirmación de que los axiomas de la geometría son, en el sentido de Kant, consecuencias necesarias de una forma trascendental, dada a priori, de nuestras intuiciones" (Helmholtz *ob. cit.*, p. 18).

Fue así como en el plano filosófico se llegó a admitir, no sin cierto desencanto, que las metageometrías, como las llamó Klein, echaban por tierra el edificio conceptual de la Estética Trascendental. Desde luego, el nuevo panorama resultaba devastador para un fin de siglo en cual el ambiente filosófico vivía principalmente al amparo de Kant. Como era de esperarse, se hicieron toda clase de esfuerzos por salvaguardar el corazón del idealismo trascendental ante el embate de los geómetras empiristas. Algunos, los menos, optaron por deshacerse de la parte de la Estética Trascendental relativa al espacio para ponerse al corriente con la nueva filosofía, pero la mayoría, entre los que se encontraban Lotze y Renouvier, prefirió desacreditar el valor de las nuevas geometrías, y, acabar de tajo con el problema. Pero también se encontraban los moderados que luchaban por sacar provecho de ambos bandos; y entre ellos se encontraba el joven Bertrand Russell.

En Francia o, mejor dicho, en el mundo francófono, el debate sobre las implicaciones filosófica de las geometrías no euclidianas ocuparon un lugar central en la filosofía matemática de la época a partir de la publicación de *Los Prolegómenos Filosóficos a la Geometría* del filósofo y matemático belga Joseph Delboeuf (1831-1896), en 1860. Los dos bandos principales en pugna estaban formados, por un lado, por aquellos como Calinon y de Tilly, que se planteaban el proyecto de dar forma a una "Géometrie Genérale", en la cual la geometría euclídea sería sólo un caso dentro de todos los espacios posibles; y, por el otro lado, los neokantianos, liderados por Renouvier, para quienes no podía existir más que una geometría posible y verdadera, que, obviamente, identificaban con la geometría de Euclides. Si bien los promotores de una geometría general simpatizaban abiertamente con el empirismo geométrico, introdujeron un elemento novedoso que derivaría en toda una filosofía de la geometría y de la ciencia en general. Lo interesante del asunto es que este refinamiento, que podemos caracterizar como la tesis de la indeterminación fisica del espacio, y que consiste en mostrar que el espacio fisico (o *real* en el caso de Delboeuf[19]) es neutral con respecto a los espacios ideales (geometría euclidiana y no euclidiana), abrió el camino a la conocida posición convencionalista de Poincaré. A. Calinon (1893), p. 598, por ejemplo, afirmaba, con cierto aire premonitorio, que la indeterminación del espacio pasaba por distintos grados, de los cuales es más notable era el nivel de conocimientos y el estado de los instrumentos de medida disponibles hasta ese momento. Y si se usa la geometría euclidiana para describir una gran variedad de fenómenos fisicos, no hay otra justificación que la

[19] En la obra antes mencionada Delboeuf se pronunciaba a favor de la geometría euclídea (contra la de Lobachevsky, que era la única que conocía en ese entonces) como la descripción verdadera del espacio *real*, pero después transitó hacia la tesis indeterminista. Panza (1995), pp. 52-54, observa correctamente que los proponentes de la geometría general se oponían discretamente a la primera postura de Delboeuf, pero deja sin mencionar la evolución de este último.

familiaridad y la simplicidad que proporciona el atenerse a ella. Freudenthal, art. cit., p. 621, ha señalado, con razón, que el sentido original de la palabra convencionalismo no es otra cosa más que la aceptación de que existen diversos tipos de geometría y que no hay ningún argumento de peso para pensar que una de ellas es más verdadera que la otra. Y añade que es justo esto lo que Poincaré aprendió de Helmholtz. Sin dudad hay mucho de cierto en estos comentarios esclarecedores, pero tampoco descartan el hecho de que los promotores de la geometría general tendían también hacia un cierto convencionalismo que encajaba a la medida con el de Poincaré. Tal es así que Milhaud (1903), p. 773, al momento de reseñar *La Science et l'Hypothèse* advierte que los ensayos que componen el libro "ofrecen una visión de conjunto, como si se tratara de una teoría completa, sobre el grado de convención y de realidad que existe en los principios de la ciencia racional".

Además, si bien Poincaré retoma varios aspectos de la filosofía de la geometría de Helmholtz (incluido el recurso constante a los seres inteligentes que habitan planolandia y esferolandia), en el aspecto matemático su trabajo se encuentra enmarcado en la teoría de grupos (de transformaciones) y, por consiguiente, la cercanía con Klein y Lie es más fuerte. Se puede argumentar, y con éxito, que aquello que se logra por medio de la teoría de grupos, sean geometrías no euclidianas, euclidiana o cualquier otro conjunto de magnitudes, puede obtenerse muy bien por medio de un multiplicidad n-dimensional. Pero tampoco pueden desdeñarse o esconderse las diferencias de estilo y de tradición que supone la elección de uno u otro enfoque. Desde el punto de vista histórico, la filiación de Poincaré a la teoría de grupos se encuentra atestiguada desde sus primeras notas en teoría de funciones automorficas (llamadas por él en un principio funciones fushianas y luego, funciones kleinianas). Pero en un texto paralelo (1882) a dichas notas, y cuyo título traduce literalmente el de la disertación de Riemann, compara ambos método y resultados, y, lo que para no nosotros es más importante, introduce por primera ocasión la tesis convencionalista, al señalar que la geometría no es otra cosa que el estudio de cierta clase de grupos, en donde, por ejemplo, el sistema euclídeo o el de Lobachevsky remiten cada uno a un tipo particular de grupo. Luego sostiene que preguntarse cuál de estos grupos es el verdadero no tiene ningún sentido, ya que en vista de la aplicación, el criterio de elección vendrá dado por la simplicidad del grupo y por una serie de consideraciones de carácter experimental, tales como si los objetos o cuerpos considerados guardan cierta similitud estructural con el grupo elegido.[20]

Quizá no esta de más observar que ni Calinon ni Poincaré apelaban a la simplicidad teórica de manera ingenua. Ambos eran concientes que se trataba siempre de un ideal metodológico por alcanzar y de un criterio de decisión entre explicaciones rivales. Por tal motivo, incluso "los que no creen que las leyes naturales deben ser simples, están todavía obligados a menudo a hacer como si lo creyeran. No podrían sustraerse enteramente a esta necesidad sin hacer imposible toda generalización y por consiguiente toda ciencia" (Poincaré 1902, p. 161).

Como se ha mencionado en el primer capítulo, Couturat asistió a los cursos de Poincaré sobre los problemas epistemológicos que planteaban las geometrías no euclidianas, y, por consiguiente, tenía a la mano un tratamiento técnico de primera línea y una interpretación filosófica autorizada sobre las mismas. Sin embargo, la posición convencionalista de su maestro no se llevaba muy bien con su novicio marco racionalista y la necesidad de una interpretación más acorde con sus ideales filosóficos le parecía evidente. Es bajo dichas circunstancias como Couturat entra en contacto con el *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría* del joven Russell. Al respecto se ha dicho en repetidas ocasiones, haciendo eco de una opinión de Poincaré, que la evaluación de Couturat sobre el libro de Russell es elogiosa en exceso y en momentos por completo injustificada. No quiero negar que haya algo de razón en ese juicio, pero no me parece del todo

[20] Por otra parte, Adolf Grünbaum (1963), p. 673, n. 142, ha sostenido que "todo el convencionalismo de Poincaré relativo a la geometría métrica es una elaboración epistemológica directa de la concepción de Riemann sobre la amorfosidad métrica de la multiplicidad espacial"; pero Giedymin (1982), pp. 1-41, discute y cuestiona esta interpretación y ha propuesto una explicación alternativa que se ajusta a la sugerida arriba (y por lo cual remito a dicho trabajo para mayor información). Al respecto vale destacar, dado que ni Grünbaum ni Giedymin parecen haberlo notado, que Russell (1887) § 33, ya había identificado el convencionalismo de Poincaré con Cayley y Klein ya que, de acuerdo con este último método, los distintos sistemas geométricos se pueden obtener a partir del mismo plano (euclídeo) cambiando en cada caso la definición de distancia, de tal forma que "el problema del espacio euclídeo queda sin conquistar y el único problema restante es uno convencional y de conveniencia matemática". Dado que una multiplicidad espacial se convierte en una geometría euclídea o en una no euclidiana, según se introduzcan ciertos parámetros de medición, la fuente del convencionalismo de Poincaré es un asunto de simple precisión histórica.

justo a la luz de un análisis detallado de la cuestión. Sobre todo, es necesario combatir la idea de que se trata de una reseña por completo elogiosa y de adhesión incondicional. De hecho, si se pone menos acento en los adjetivos y más cuidado en los argumentos emerge una imagen crítica que anula o reduce una cantidad considerable de esos elogios al nivel de ingredientes léxicos diplomáticos y de buena disposición, propios de un intercambio intelectual caballeroso que se tiene en alta estima. Comparemos ambos aspectos y veamos si es así.

El primer testimonio que tenemos de la correspondencia Russell-Couturat es justamente una carta en la cual el segundo le hace saber al primero que sus amigos de la *Revue de Métaphysique* le han solicitado una reseña crítica sobre el *Ensayo sobre los Fundamentos de la Geometría*, pero que él, debido a su desconocimiento del inglés, se había visto tentado a declinar la oferta de no ser por el interés que le despertaba el tema, y, sobre todo, porque la claridad y elegancia del estilo, así como el orden lógico y el encadenamiento riguroso de las ideas del autor le han permitido leerle sin dificultad y con placer. A lo cual agrega: "Pero sobre todo, he admirado su vasta erudición, la profunda inteligencia que usted posee sobre todos esos asuntos tan difíciles como oscuros, la luz que hace resplandecer en la exposición y en el resumen, la seguridad y el vigor de las críticas que usted plantea (en particular a Helmholtz, a Riemann, y a Erdmann); y en suma, el conjunto sistemático de puntos de vista que usted ha emitido sobre los principios de la ciencia y la naturaleza del espacio, los cuales constituyen una sólida y auténtica filosofía de la geometría, la más completa y la más satisfactoria que yo conozca".[21]

Se ha dicho con justa razón que aquellos libros que el lector encuentra más fascinantes son los que al lector le hubiese gustado escribir, o, mejor aún, son aquellos libros que el lector siente que pudo haber escrito pero que por alguna razón u otra no lo hizo (porque de otra manera, se tendría la sensación de ser víctima de un plagio). Son libros pues, con los cuales existe una complicidad

[21] Carta del 03.10.1897. *Cf.* Schmid (ed.) (2001), pp. 40-41. La carta inicia con las siguientes palabras: "Desde hace ya bastante tiempo he querido darle las gracias por la reseña que usted hecho en *Mind* de mi tesis sobre *El Infinito Matemático*. He notado con satisfacción el cuidado con el cual usted la ha leído y analizado, así como la rectitud y profundidad de las críticas que ha expuesto, y, por ello he querido hacerle saber cuánto he reconocido su concienzudo examen y su benévola severidad".

profunda, un acuerdo sobre los puntos esenciales que sólo el pudor puede silenciar. ¿Se encontraba Couturat presa de un sentimiento parecido o se trataba de un cumplido demasiado condescendiente?, y si es lo primero, ¿se puede establecer con claridad la magnitud de esos presuntos acuerdos?

En mi opinión la respuesta es afirmativa siempre y cuando se deje de lado la posibilidad de un afinidad completa y se valore el peso de sus acuerdos en relación con los puntos divergentes. De hecho, el desacuerdo se encuentra ya latente en la mencionada carta allí donde expresa su aprobación con respecto a las críticas hechas a la posiciones de Helmholtz, Erdmann y Riemann. En el libro de Russell dicha crítica corresponde al capítulo II, relativo al examen de las filosofías del espacio, en la cual incluye, además de los ya citados, al mencionado Delboeuf. La omisión de este último hombre por parte de Couturat puede parecer, por un lado, un simple lapsus si se repara en el hecho de que Russell apoya su argumentación remitiendo al lector a una nota crítica de Couturat sobre Delboeuf en su libro sobre el infinito. Sin embargo, si, por otro lado, se toma en cuenta la alta estima que tenía Couturat sobre el trabajo del pensador belga, tanto la omisión como el punto de discusión de Russell adquieren otro sentido. En concreto, Russell criticaba la versión de Delboeuf de la tesis sobre el indeterminismo del espacio, y según la cual el espacio *real* no podía ser ni homogéneo ni isógeno,[22] pero que, en cambio, el espacio teórico, producto de la abstracción del espacio *real*, podía poseer ambas propiedades. A Russell le chocaba esta clase de realismo extremo sobre todo porque dejaba sin explicar cómo es que el autor había

[22] De hecho, Couturat, [10], p. 373, asume la distinción de Delboeuf y cuestiona el uso que Russell hace de ambos términos: "Ahora bien, el rasgo esencial de una forma de exterioridad cualquiera es, según nuestro autor, la *homogeneidad*. Solamente hace falta entender el sentido que otorga a dicha palabra, para distinguirlo de otros significados. En el sentido que lo entiende Delboeuf, designa la independencia de la magnitud y de la forma: o dicho en otros términos, la posibilidad de figuras semejantes, lo cual equivale, como se ha dicho, al postulado de Euclides. Pero Russell entiende la palabra en un sentido más restringido, ya que la aplica para designar la independencia de la magnitud (y de la forma) en relación con la posición, que es lo que Delboeuf llama *isógeno*. Dicha propiedad equivale al axioma de libre movilidad; esto es, a la posibilidad de desplazamiento de las figuras sin deformación ni variación de magnitud. Russell distingue, sin duda, netamente ambos sentidos (§ 98, n. 2), pero haría bien en hacer lo propio, y, por añadidura, decir por qué razones prefiere el segundo sentido. No se trata de una simple cuestión de palabras, ya que lo que se pretende saber es si es posible afirmar a priori la homogeneidad del espacio en uno u otro sentido. Al adoptar la terminología de Delboeuf, que nos parece más cómoda y excluye cualquier equívoco, es posible formular la cuestión como sigue: ¿Por qué razón la propiedad necesaria de una forma de exterioridad consiste solamente en el rasgo isógeno, más que en la homogeneidad?"

llegado a conocer la constitución del espacio *real*, pero también debido a su convicción de que el espacio euclídeo se verifica por la vía empírica. Por su parte, como buen idealista, Couturat consideraba como carente de sentido hablar del espacio *real* al margen del espacio concebido.[23] Dicho en términos quineanos, y, por consiguiente anacrónicos y hasta cierto punto desproporcionados, para Couturat sólo tienen sentido las imputaciones geométricas sobre las propiedades del espacio; esto es, lo que esas teorías afirman sobre cómo se encuentra constituido el espacio.

De lo anterior se desprende que hay aquí solo un acuerdo parcial entre Russell y Couturat; es decir, ambos coinciden en su crítica al ultrarealismo de Delboeuf, pero esto no permite suponer que Couturat comparta la convicción russelliana sobre la naturaleza empírica del espacio euclidiano. Además, la omisión de Couturat parece indicar también que al centrar la discusión de la posición de Delboeuf en este punto, Russell pierde de vista los aspectos positivos de la misma. Pero este es sin duda un desacuerdo mínimo, como lo demuestra con claridad el comentario posterior de Couturat en la carta antes mencionada: "La parte crítica [de la reseña] será limitada, ya que me encuentro dichoso de ver que usted se sitúa en un punto de vista racionalista y criticista muy cercano al mío, de tal suerte que he visto con gran placer ciertas ideas mías aprobadas y confirmadas por usted. Solamente mostraré algunas reservas sobre los axiomas propiamente Euclidianos, sobre los cuales usted no ha suficientemente establecido, así me parece, su carácter empírico. Aparte de esto, no puedo más que aceptar sus conclusiones, las cuales me parecen definitivas"(Schmid (ed.) (2001), p. 41).

Si se toman como sinceras las palabras de Couturat, no cabría la menor duda de que habría encontrado en Russell a su alma gemela; con lo cual, al declararse resueltamente a favor de su filosofía de la geometría, se hacía de algún modo, de forma extravagante, una especie de autoelogio. No obstante, sus reservas sobre el estatus empírico de los axiomas de Euclides no permite tomar al pie de la letra sus palabras, en especial si se observa que este tema no era en

[23] *Cf.* [I], p. 544, y, Russell (1897), § 100.

realidad un asunto marginal para ambos. Además, hay otro tipo de desacuerdos no declarados en la carta, pero que se encuentran plasmados en la reseña y en el artículo de Couturat sobre las relaciones entre el número y la magnitud. Pero vayamos por partes.

§ 3. Los fundamentos de la geometría según Russell

Como ya se ha sugerido, el *Ensayo* de Russell buscaba ajustar la doctrina kantiana de acuerdo con los sistemas geométricos no euclídeos. Su propuesta consistía en una reelaboración del apriorismo a partir de los nuevos desarrollos de la lógica moderna. Pero por lógica moderna Russell no se refiere a los sistemas algebraicos de la lógica propios de Boole y De Morgan, ni mucho menos a los lenguajes de fórmulas de Frege y Peano (que dicho sea de paso, le eran por completo desconocidos), sino a la lógica neohegeliana de Bradley y Bosanquet que estaba de moda en Inglaterra por aquellos años (y que repudiaba el álgebra de la lógica por ser incapaz de dar cuenta de la "verdadera" naturaleza del razonamiento). El "logro" principal de esta nueva lógica consiste en la afirmación de que *todo juicio es simultáneamente sintético y analítico*, y, por tanto, la clasificación kantiana de los juicios se encuentra necesitada de una renovación sustancial. En términos altamente vagos, Russell sostiene que este resultado se encuentra justificado en "el hecho" de que todo juicio "combina partes de un todo y analiza un todo descomponiéndolo en partes".[24]

Al margen de lo que pudo significar esta presunta evaporación de la distinción analítico-sintético prequiniana, resta todavía averiguar la forma como dicha lógica opera en relación con la dicotomía a priori y a posteriori. En particular, tal "confrontación lógica" del apriorismo consistía, por un lado, en una delimitación tajante del a priori lógico de lo subjetivo, relegando

[24] Russell (1897), § 56. Para aumentar la confusión del lector, Russell agrega el sorprendente comentario: "Siendo esto así, la distinción entre análisis y síntesis, cualquiera que sea su importancia en la lógica pura, puede no tener valor en epistemología". ¿No podría ocurrir lo mismo para el nuevo resultado de la lógica neohegeliana? Desafortunadamente, Russell asume de forma dogmática la doctrina de Bradley y Bosanquet, y remite a las obras de estos para quienes se encuentren interesados en las demostraciones de dicha tesis.

este último al campo de la psicología. Siguiendo en particular a Bradley, sostiene que toda verdad necesaria es hipotética, en el entendido que el fundamento de su verdad descansa en la relación necesaria que se da entre las premisas y la conclusión. De paso conviene observar que la conexión entre esta noción de verdad necesaria y lo a priori no es nada clara e incluso resulta dañina para lo que se propone defender, puesto que impide tomar los axiomas geométricos como verdades necesarias, puesto que la necesidad recaerá siempre en la relación entre los axiomas y los teoremas.

Pero al margen de este tipo de atolladero, sobre el cual volveremos al final de este apartado, debe decirse también que en la propuesta russelliana se delimita el a priori lógico, como el elemento formal del conocimiento, de los aspectos materiales del mismo. Dicho de otra forma, para la teoría del conocimiento sólo es relevante lo a priori en tanto categoría lógica, el cual ha de distinguirse con absoluta claridad de todo rasgo que sea producto de la experiencia: "El elemento formal lo constituirán los postulados que son completamente necesarios para que el conocimiento sea posible y también, todo lo que puede deducirse de esos postulados; por otra parte, el elemento material lo constituirá todo lo que vaya a rellenar la forma aportada por los postulados formales: todo lo que es contingente o dependiente de la experiencia, todo lo que podría haber sido de otra manera, aunque sin hacer imposible el conocimiento".[25]

Como se ha indicado en el capítulo anterior (§ 1), Couturat era un detractor de los métodos psicológicos en filosofía, y, por consiguiente, veía con simpatía los argumentos de Russell para desechar lo subjetivo de lo a priori. Para ambos era un prolegómeno básico separar aquello que compete al filósofo y al científico, y si lo *subjetivo* es un tópico que por derecho pertenece a la psicología, la cual a su vez es o debe ser una ciencia empírica, entonces los resultados que pueda obtener sobre este tema serán irrelevantes a la teoría del conocimiento; esto es, la filosofía en

[25] Russell (1897), § 3. Y más adelante (§ 57) aclara: "Desde el punto de vista de la lógica general, solo serán aprioristicas las leyes del pensamiento y las categorías, con las condiciones indispensables de su aplicabilidad; pero desde el punto de vista de una ciencia particular debemos llamar a priori cualquier cosa que haga posible la experiencia de lo que constituye la materia de dicha ciencia. En particular para la geometría consideramos a priori cuanto haga posible la experiencia de la externalidad en cuanto tal."

tanto epistemología le antecede en el orden lógico debido a que, entre otras cosas, su objetivo consiste en el análisis del componente formal del conocimiento que se presenta como condición de todo posible conocimiento. Y ya que se da por sentado que es justo este componente formal el que garantiza la certeza apodítica del conocimiento, la cuestión fundamental que Russell se plantea es la siguiente: "¿podrá ser imposible la experiencia cuando se desniega algún axioma o postulado? O en un sentido más estricto, tratando de aprioridad dentro de una determinada ciencia, ¿será imposible la experiencia como objetivo material de esa ciencia, prescindiendo de algún axioma o postulado?". [26]

La forma como semejante cuestión se traduce en concreto a la problemática propia de la geometría general de finales del siglo XIX es tan patente que, por el contrario, más bien el lector de entonces se pudo sentir inclinado a preguntar cómo sería este planteamiento, digamos por ejemplo, en el campo de la biología. De cualquier forma, cuando Russell se cuestiona si la experiencia sería imposible si se prescinde del llamado postulado de las paralelas de la geometría euclidiana, puede entenderse que no sólo se le suprime sino que más bien se le sustituye por otro, y, que este no es el único caso posible; esto es, que también cabría preguntarse ¿sería imposible la experiencia cuando se sustituyen dos o más axiomas o postulados de la geometría de Euclides? Si se deja de lado la cuestión kantiana, es claro que en el primer caso se estaría ante la geometría de Lobachevsky, mientras que en el segundo, por ejemplo, ante la geometría de Riemann. Pero el hecho de que Russell haya planteado su problema como la ausencia de uno o más axiomas, obedece a que su intención era subrayar los axiomas o postulados que son comunes a *toda* geometría, y no, como podría pensarse en un principio, en si tal o cual geometría no euclidiana hace imposible la experiencia; es decir, lo que se intenta responder es si existen axiomas y postulados que sean comunes a todas las geometrías conocidas (hasta ese momento), y si esos axiomas y postulados compartidos son suficientes para determinar a priori las condiciones de

[26] Russell *ibid.*, § 5. Couturat, por su parte, afirma: "El problema capital de la Crítica consiste en determinar, en cuanto al conocimiento, la parte que corresponde a lo a priori y la parte que corresponde a lo a posteriori: dicho de otra forma, se propone determinar las relaciones entre la razón y la experiencia". [I], p. xvii.

sentido, sostiene que si los sistemas geométricos difieren en la forma como definen sus propiedades métricas (medidas numéricas de ciertas magnitudes espaciales), y que tales propiedades pueden, como han demostrado Cayley y Klein, derivarse de enunciados proyectivos; entonces, en general, puede afirmarse que las diversas geometrías difieren en sus propiedades cuantitativas, más no en sus propiedades cualitativas, y, por consiguiente, estas últimas deben considerarse a priori. Además, dichas propiedades cualitativas se encuentran formuladas por medio de tres axiomas de la geometría proyectiva, los cuales, expresados filosóficamente, habrán de determinar las condiciones de todo espacio posible:

I. Se pueden distinguir diferentes partes del espacio, pero todas las partes son cualitativamente similares y se distinguen solamente por el hecho inmediato de que cada una de ellas está fuera de la otra.

II. El espacio es continuo e infinitamente divisible; al resultado de esa división infinita o cero extensión se le llama punto.

III. Dos puntos cualquiera determinan una figura única llamada línea recta; tres puntos cualquiera definen un plano; cuatro puntos cualquiera determinan una figura de tres dimensiones, y lo mismo vale para cualquier número de puntos.

El axioma I se conoce como axioma de homogeneidad, el II como axioma de la dimensión, y el III, axioma de la línea recta. En la geometría métrica adquieren un aspecto un tanto distinto y Russell les denomina allí axioma de libre movilidad (o congruencia), axioma de dimensión, y axioma de distancia, respectivamente. Para demostrar su carácter a priori, es pertinente mostrar que o bien definen los rasgos esenciales de la forma de exterioridad, o bien, expresan las condiciones necesarias y suficientes de la posibilidad de toda medida; y para tal efecto ofrece en cada caso dos argumentos, uno trascendental o filosófico, y el otro, geométrico. Antes que nada es conveniente observar que las anteriores afirmaciones de Russell apuntan hacia una imagen del espacio entendido como un conjunto de relaciones (i.e., la línea es la relación entre dos puntos, el plano la relación entre tres puntos, etc.,), y que dicha doctrina relacional, despojada de su vestimenta neohegeliana, será más tarde un elemento central de su concepción logicista de las matemáticas. También conviene tener presente que los axiomas enlistados no son *todos* los axiomas de la geometría proyectiva, sino solo aquellos que son presuntamente comunes a todos los sistemas geométricos. Asimismo, no hay que olvidar que se encuentran formulados en términos filosóficos porque a partir de ellos se define el concepto filosófico de *forma de exterioridad*.

Pero qué hay con respecto a los presuntos acuerdos entre Russell y Couturat. Si tenemos presente lo que se ha dicho en el capítulo anterior saltan a la vista varias coincidencias. Por ejemplo, como se ha indicado antes, 1) ambos coinciden en que el problema principal de la crítica consiste en delimitar lo a priori de lo a posteriori; pero también, 2) para ambos las definiciones matemáticas (geométricas) son irremediablemente circulares; además, 3) la aritmética juega un papel meramente simbólico en la geometría, y, 4) en particular, los números imaginarios, cuyo uso en el álgebra es legítimo, tienen en geometría una representación ficticia y convencional. Pero hay además otras coincidencias más próximas a los parecidos de familia que solo salen a flote cuando se les examina en detalle. Por ejemplo, la discusión de Russell sobre la prioridad (lógica) de las propiedades cualitativas sobre las propiedades cuantitativas, en tanto que las segundas presuponen las primeras, recuerda el alegato de Couturat sobre la prioridad (racional) del aspecto cardinal sobre el ordinal en el concepto de número. Aunque las anteriores coincidencias son significativas no parecen justificar del todo el entusiasmo de Couturat por el *Ensayo* de Russell. En particular, queda por ver si los acuerdos se mantienen en cuanto al planteamiento kantiano y a la solución que le acompaña. Pero antes de llegar ahí retrocedamos un poco en el tiempo y veamos cuál era la posición que Couturat había tomado con respecto a las geometrías no euclidianas dentro del ambiente filosófico francés.

§ 4. La crítica de Couturat a Renouvier

exterioridad de todo espacio posible.

Con el objeto de ofrecer una respuesta positiva a esta interrogante, Russell se vale del auge y desarrollo de la geometría proyectiva que sirvió de base al llamado Programa de Erlanger representado principalmente por Félix Klein, y cuyos antecedentes inmediatos se encuentran en el trabajo del matemático escocés Arthur Cayley.[27] Dicho en breve, la tarea emprendida por estos geómetras consistió en ofrecer un modelo proyectivo de las geometrías no euclidianas, lo cual fue posible gracias a una "reducción" de las propiedades métricas de los diversos sistemas geométricos a propiedades proyectivas, de tal suerte que la geometría proyectiva se presenta como la base de todo sistema geométrico. Para evitar equívocos es conveniente señalar que Russell no se apoya propiamente hablando en el programa de Erlanger, sino en los trabajos previos que abrieron el camino a dicho programa, y este hecho no tendría mayor importancia si no fuera porque implica una superación del método proyectivo y con ello, muestra que Russell se había quedado rezagado con respecto a las últimas contribuciones de quien fuera en esta obra su influencia matemática más visible.

Pero el caso es que para Russell el modelo proyectivo representaba un desarrollo técnico de primera importancia, puramente matemático pero carente de valor filosófico. La causa de esto obedece a que el método proyectivo para generar los distintos sistemas geométricos depende de cómo se defina la distancia en cada caso, y para Cayley y Klein se trataba meramente de un asunto de conveniencia matemática donde el problema ontológico no tenía cabida. El convencionalismo en sí nunca ha sido muy rentable en filosofía, sobre todo porque vuelve extremadamente difícil la idea de conocimiento y con ello, da alas a los incrédulos. Para resolver este tipo de inconveniente se requería entonces interpretar el método proyectivo a la luz del problema filosófico que enfrentaba el idealismo kantiano. Es así como la respuesta neohegeliana al problema kantiano se convierte en la subordinación de lo cuantitativo a lo cualitativo. En este

[27] La famosa frase de Cayley, "la geometría métrica es una parte de la geometría proyectiva, y la geometría proyectiva es toda la geometría", sugiere ya la interpretación fundacional de Russell. Sobre el programa de Erlanger véase Birkhoff y Benett (1988), sobre el apogeo de la geometría proyectiva en Inglaterra véase Joan Richards (1986), y sobre su influencia en Russell véase Richards (1988).

Como ya se ha mencionado, las geometrías no euclidianas plantearon serios problemas epistemológicos a los sistemas filosóficos establecidos. Pero no se requería contar con un sistema filosófico muy elaborado, como el kantiano, para sentirse perplejo ante las nuevas circunstancias. Bastaba suponer, como lo había hecho casi todo el mundo, que la geometría de Euclides representaba fielmente el llamado espacio *real*, de tal modo que el hecho de que se pudiera concebir la existencia de otras geometrías, de otros espacios, levantaba sospechas sobre la veracidad de ese supuesto. Por ejemplo, en un borrador póstumo, Frege formula la cuestión del siguiente modo: "Nadie puede servir a dos amos a la vez. No es posible servir al mismo tiempo a la verdad y a la falsedad. Si la geometría euclídea es verdadera, entonces la geometría no euclídea es falsa, y, viceversa, si la geometría euclídea es verdadera, entonces la geometría euclídea es falsa".[28]

Como muchos otros, Frege pensaba que la geometría de Euclides era de facto la verdadera y que los otros sistemas no eran más que seudociencias. Desde nuestro punto de vista actual semejante juicio parece una aberración, como increíble resulta constatar que la gente de aquella época no pudiera "ver" que el papel arrugado en el cesto de basura, los pliegues de la ropa al sentarse o la planta del helecho que adorna el estudio, no admiten una representación euclídea. Pero lo anterior demuestra a lo sumo que el empirismo duro no tiene mayor fundamento y merece abandonarse. Sin embargo, este es un tema que no nos interesa por ahora.

Lo cierto es que entre la comunidad filosófica francesa las opiniones sobre las geometrías divergentes no diferían en sustancia de las de Frege. Renouvier, por ejemplo, había dedicado el

[28] Frege (1979), p. 169. Debido al profundo apego a su teoría de la verdad, Frege fue extremadamente conservador en geometría y esto, aunado a su aversión hacia la posición formalista, le impidió comprender qué había hecho Hilbert en *Grundlagen der Geometrie*, en donde además de los axiomas euclidianos y no euclidianos, aparecen axiomas para geometrías no arquimedianas. Este es el motivo por el cual Freudenthal, art. cit., p. 618, comenta: "Al regañar a Hilbert como a un estudiante, Frege se unía también a los Beocios (nunca he entendido por qué es tan altamente estimado hoy en día)". Coffa (1986), p. 8, por otra parte, pone las cosas de la siguiente manera: "El reto fue una prueba difícil para los filósofos; una prueba en que, es triste decirlo, todos fracasaron. Frege, por ejemplo, el más ilustre y penetrante de todos ellos, argumentó que todas las geometrías no euclidianas eran falsas y que por consiguiente debían colocarse, junto con la astrología y la alquimia, en la categoría de las seudociencias. Los geómetras devolvieron tal consejo dando las gracias y volviendo al objetivo de resolver sus propios problemas filosóficos sin ayuda externa". Dado que Frege nunca hizo público su rechazo a las nuevas geometrías, este último comentario no debe tomarse como históricamente exacto.

mismo esmero en atacar a las metageometrías y al infinito actual. En un artículo con el pintoresco título "La philosophie de la règle et du compas", ofrecía lo que bien puede tomarse como la posición oficial de la escuela neocriticista. Su análisis iniciaba con una clasificación de los postulados euclidianos según la teoría del juicio kantiana, distinguiendo los postulados analíticos (como el principio de conservación de la figura según el cual es posible desplazar a través del espacio cualquier figura sin que sufra alguna deformación), de los axiomas sintéticos a priori (como el famoso principio según el cual la distancia más corta entre dos puntos es la recta). Luego discutía lo que llamaba *los sofismas de la geometría general*, y, en primer lugar, negaba que el postulado alternativo de Lobachevsky (i.e., por un punto se pueden trazar varias paralelas a una recta dada) pudiera verificarse experimentalmente. Alegaba también que los geómetras no euclidianos faltaban a la lógica al confundir aquello que es contradictorio con aquello que es propiamente absurdo. El argumento curioso sobre el que fundaba su afirmación consistía en señalar que dado que el postulado de las paralelas de Euclides no era contradictorio en sí mismo, puesto que de ser así se trataría de un juicio analítico, crear una nueva geometría con la negación de este postulado, pero manteniendo los demás, puede perfectamente desarrollarse sin temor a contradicción intrínseca alguna. Pero la falta de contradicción no impediría que la negación del postulado fuese absurda; es decir, de "contradecir los principios reguladores del entendimiento". En consecuencia, para Renouvier, la coherencia del nuevo postulado no demostraba su legitimidad, sino simplemente que se trataba, como su contradictorio, de un juicio sintético indemostrable.

Por otra parte, para Renouvier era claro que la proliferación de diversos sistemas geométricos (que, aducía, aunque coherentes en sí mismos se contradicen y excluyen los unos a los otros), conduce al escepticismo, puesto que no hay criterios claros y definitivos para decidir sobre cuál de todos esos sistemas es el verdadero. A su juicio, esta clase de enredos epistemológicos eran en gran medida producto de un misticismo algebraico, mediante el cual se atribuye realidad objetiva y virtud creadora a un número desenfrenado de fórmulas analíticas, ya que es mediante trucos algebraicos como se cree poder crear espacios a voluntad.

Ahora bien, en la reseña del artículo de Renouvier, Couturat se proponía discutir la posición neocriticista a la luz de las conclusiones a las que Poincaré (1891) había llegado en sus propios trabajos geométricos, pero sobre todo en su célebre ensayo, más filosófico, sobre las geometrías no euclidianas. "Nos contentamos, declaraba, con el modesto pero útil papel de intérprete del sabio matemático; dado que, como él mismo confiesa, afirma muchas cosas que no demuestra, y sus afirmaciones se encuentran tan condensadas que requieren, creemos, de un comentario que las haga accesibles a los «profanos»".[29] En primer término, Couturat se vale del famoso símil del diccionario de Poincaré para explicar la noción de modelo (que Beltrami y Klein ya habían introducido) y según el cual se pueden *traducir*, por ejemplo, los teoremas de la geometría de Lobachevsky en proposiciones euclidianas. Luego, explica la teoría de superficies de Gauss-Riemann de acuerdo con el cual las diferencias entre los distintos sistemas de tres dimensiones pueden describirse adecuadamente en función de la noción de curvatura espacial como una extensión de la curvatura unidimensional; es decir, así como una línea curva con curvatura constante define un círculo, mientras que una línea curva con curvatura constante nula define una recta, de forma análoga el grado de curvatura de una superficie define los distintos espacios, de tal suerte que una superficie de curvatura positiva constante ($K > 0$) genera como modelo una esfera y las figuras que se puedan aplicar sobre ella, mientras que una superficie con curvatura constante nula ($K = 0$) define el plano euclidiano de tres dimensiones. Las superficies de curvatura constante negativa ($K < 0$) definen tanto las superficies paraboloides hiperbólicas, que semejan una silla de montar, como las seudoesferas de Beltrami. En seguida discute el método de Riemann que permite generar multiplicidades espaciales de n dimensiones; lo cual a su vez permite la inclusión entre espacios (esto es, si Δ y Γ tiene el mismo número de coordenadas n,

[29] [4], p. 71. Cuatro páginas antes vislumbra el tema de su tesis doctoral en francés: "El autor ha reafirmado de nueva cuenta los principios bien conocidos de la crítica del infinito... no nos permitiremos detenernos sobre dicha teoría debido a que no es esencial para el tema que nos ocupa. Además, haría falta un libro para examinar y discutir a profundidad el «enviciamiento de la idea de número» y «la lucha de las matemáticas contra lo inconmensurable»". Por otra parte, Sanzo (1976), p. 403, afirma, erróneamente, que Couturat pretende defender a Poincaré de las críticas de Renouvier.

entonces hay una *multiplicidad* -espacio- ∇, de $n + 1$ coordenadas, que los contiene). Y con respecto a los espacios de cuatro dimensiones, Couturat comenta, a propósito de Renouvier: "Sin duda, para poder construir y comparar entre sí diversos espacios de tres dimensiones, haría falta disponer de un espacio de cuatro dimensiones, pero para tal objeto basta con que se pueda concebir este último espacio. Y no hay nada que impida concebirlo, puesto que la idea de un espacio de cuatro dimensiones no es más contradictorio que uno de tres; pues a lo mucho lo que se puede decir es que no contamos con una intuición de tal espacio, pero esto no es suficiente para considerar que sea absurdo".

De esta manera, Couturat desecha la opinión equivocada de Renouvier según la cual las geometrías no euclidianas se excluyen entre sí y conducen al escepticismo. En seguida parece asumir la conocida postura convencionalista de Poincaré[30] reafirmando que no tiene sentido preguntarse si la geometría euclidiana es verdadera con respecto al mundo *real*: "No hace falta creer, como la mayoría de los geómetras, que la sola experiencia pueda decidir entre todas esas geometrías igualmente válidas desde el punto de vista lógico. En efecto, toda verificación experimental es y no puede ser más que aproximada, y en consecuencia, ninguna experiencia podrá probar que el espacio *real* (admitiendo que dicha locución tenga algún sentido) es absolutamente euclidiano".[31]

Este es, como vimos en el capítulo anterior, uno de los argumentos de Couturat para apuntalar la posición de que el continuo geométrico así como el infinito numérico no se pueden verificar, ni falsear, por medio de la experiencia. El argumento en sí no implica necesariamente una postura convencionalista, y, de hecho, para Couturat ayuda a confirmar la sospecha de que el espacio euclídeo "forma parte de nuestra constitución mental y es una condición de toda experiencia".

[30] Zahar (2002), cap. 3, intenta mostrar, sin éxito a mi juicio, que el llamado convencionalismo geométrico de Poincaré es un nombre inapropiado, ya que no se corresponde con su filosofía global de la ciencia, la cual es, supuestamente y como la del autor, en esencia popperiana. Uno de sus fallos principales consiste en que su *approach* no es, como él declara, histórico o cuasi histórico, sino en todo caso, seudohistórico, y puesto que descuida el contexto particular que motiva la posición de Poincaré no es sorprendente que encuentre paradójicas muchas de sus afirmaciones.

[31] [4], p. 73. Además, añade el conocido condicional de Poincaré, según el cual si la geometría fuese una ciencia experimental, entonces no sería una ciencia exacta.

No obstante, esta interpretación parece ir en contra de la negativa del maestro a conceder que los enunciados geométricos sean juicios sintéticos a priori, negativa que, por consiguiente, también se opone a la teoría criticista de los postulados geométricos de Renouvier. Pero para Couturat la diferencia de puntos de vista descansa en el fondo en una cuestión meramente terminológica que se puede superar fácilmente aclarando el sentido real de dicha negativa. Es decir, según Couturat, Poincaré sostiene que los juicios geométricos no son sintéticos a priori debido a que su negación no es ni inconcebible ni contradictoria, pero, aqui hay un error en la expresión que traiciona su pensamiento, puesto que lo que en verdad quiere decir es que tales juicios no son ni juicios sintéticos ni juicios a priori, o, si se prefiere, no son juicios analíticos (lógicos), ni son juicios experimentales; lo cual, por otra parte, no implica que no puedan ser juicios sintéticos a priori.

Esta última alternativa, sostiene Couturat, "no contradice en absoluto la teoría de Poincaré; a saber, que esas expresiones son convenciones arbitrarias; es decir, definiciones disfrazadas. En efecto, los postulados son arbitrarios en el sentido de que no poseen ninguna necesidad lógica y no admiten el principio de contradicción; pero aunque el autor reconoce que «nuestra elección, entre todas las convenciones posibles, se encuentra guiada por los hechos experimentales»; esto solo sería así a menos que no se impongan, para hablar la lengua de Kant, más que por medio de una necesidad de orden estético y definan el espacio euclídeo, que es la forma a priori de la *sensibilidad*".[32]

¿Se encuentra aquí Couturat distinguiendo, aunque sea vagamente, entre lo analítico y lo a priori? En mi opinión no, y, no me detendré en especulaciones anacrónicas de esa índole, puesto que su objetivo consiste, por un lado, en conciliar la postura de Poincaré con el idealismo criticista de Renouvier. Ambos, según Couturat, coinciden en rechazar el empirismo o el realismo de geómetras como Gauss y Lobachevsky, el cual considera que es en el fondo contrario a sus propias geometrías. Y la lección que debe sacarse de este asunto, aconseja con

[32] *Ibid.*, p. 76. De nueva cuenta. Sanzo (*ibid.*, p. 404), hace una lectura equivocada de este pasaje cuando afirma que Couturat "defiende el kantismo sin darse cuenta que su distinción tajante entre *analítico* y *sintético* es básicamente cartesiana. La distorsión de Couturat se debe, en este periodo, más a una confusión que a una intención deliberada".

osadía, es que los matemáticos requieren una cultura filosófica que les permita evitar caer en errores semejantes. El comentario era, sin duda, inútil si se recuerda que Gauss recomendaba a sus amigos no prestar oídos a "la hueca sabiduría verbal de los filósofos metafísicos". Pero en fin, por otro lado, Couturat también buscaba tomar distancia de ambos pensadores con respecto al criterio para decidir entre varias alternativas: "Es posible, por consiguiente, presumir que entre todos los espacios posibles nuestra elección se encuentra guiada no, como lo cree Poincaré, por los hechos experimentales, ni asimismo, como piensa Renouvier, por una intuición a priori; sino más bien por principios racionales. Si esta presunción se encuentra justificada, lo está entonces, y solamente en el caso de que se pueda calificar a la metageometría de absurda y de «contradecir los principios reguladores del entendimiento»" [4], p. 84.

Couturat no aclara cuáles serían los principios racionales que fungirían como criterio, pero a la luz de su obra posterior sobre el infinito, es evidente que el principio racional pertinente sería el principio de Cournot. Sin embargo, no me detendré aquí a especular de qué forma el uso de dicho principio le permitiría tomar partido entre los diversos sistemas geométricos; basta con mencionar que el principio se inclinaría por la geometría de Euclides.[33] Por lo pronto es conveniente señalar otra consecuencia que Couturat encuentra inevitable de la discusión precedente, debido a que coincide un tanto con la teoría que Russell retoma de los lógicos neohegelianos ingleses con respecto a la distinción kantiana entre lo analítico y lo sintético. En

[33] En [7], p. 649, a propósito de un libro de Lechalas, escribe: "No podemos, por consiguiente, suscribir la conclusión empirista de Lechalas, según la cual «entre la infinidad de geometrías igualmente racionales, la razón no sabría cómo elegir entre ellas; no obstante, la experiencia puede revelar cuál de ellas se realiza en nuestro universo». En todo caso, estamos dispuestos a aceptar la conclusión inversa, cambiando una palabra: Entre todas las geometrías igualmente *lógicas*, solo la razón puede y debe elegir entre ellas. Lechalas confunde, en efecto, lo absurdo y lo contradictorio, y parece creer que una geometría no contradictoria es lo mismo racional; esto es, que la razón se satisface con que no viole el principio de no contradicción... Para que un sistema de ideas sea racional, no es suficiente que se encuentre exento de contradicción, hace falta además que se someta a ciertos principios sintéticos, los cual no por ser en apariencia menos rigurosos e imperativos que el principio analítico, no dejan de ser menos necesarios y a priori". El lector atento habrá notado que Couturat retoma la distinción de Renouvier entre lo contradictorio y lo absurdo, a la cual recurre también en su tesis sobre el infinito. En la reseña sobre dicho libro, Lechalas, (1897), p. 638, n. 2, comenta: "En la distinción entre lo absurdo y lo contradictorio, Couturat se reencuentra con su adversario perpetuo, Renouvier. Nosotros no sabríamos como admitirlo, en rigor, más que en las ciencias factuales en donde el término se puede aplicar a aquello que contradice una verdad bien establecida. O cuando el motivo obedece solo a los principios, el absurdo no contradictorio es aquel que choca con nuestros prejuicios".

efecto, si los juicios geométricos no son en verdad propiamente juicios, sino que se trata de definiciones disfrazadas que resultan cómodas para la representación de los hechos experimentales, es claro que la teoría criticista de los postulados geométricos es falsa y debe abandonarse; además, como dicha teoría se basa en la distinción kantiana entre juicios analíticos y juicios sintéticos, también habrá que despedirse de dicha distinción, puesto que no tiene ningún sentido en cuanto a la matemática se refiere. Es decir, las expresiones matemáticas no son juicios sobre la experiencia, pero tampoco son juicios analíticos (lógicos), "porque las proposiciones de esta ciencia no comportan ni sujeto ni atributo; y, por consiguiente, no establecen ninguna relación de inclusión entre conceptos, y son completamente ajenas a las reglas del silogismo aristotélico. Por lo tanto, creemos con firmeza que la teoría lógica del juicio geométrico no podrá restablecerse" [4], p. 85.

¿En qué sentido se puede decir que las expresiones geométricas son entonces juicios sintéticos a priori? No hay forma de encontrar una respuesta clara en la reseña de Couturat, y todo lo que se puede decir al respecto es, como ya se ha mencionado, que son sintéticos a priori porque se aplican de antemano a la experiencia de acuerdo con principios racionales. Sin embargo, si efectivamente se trata de convenciones arbitrarias a las que no parece tener sentido predicarles valores de verdad, ¿por qué entonces Couturat continúa hablando de *juicios*, aun y cuando se trate de juicios sintéticos a priori en el vago sentido mencionado arriba? Una respuesta posible es que Couturat conserva la palabra *juicio* (y lo mismo vale para la palabra *proposition*) debido a una simple inercia verbal; aunque también cabe la posibilidad de que no se encuentra muy convencido de la teoría que intenta defender o que, al menos, es conciente de que se trata de una teoría incompleta que es necesario desarrollar más a fondo. Pero hay también otro aspecto que no parece encajar del todo en la tesis convencionalista de Poincaré que Couturat hace hasta cierto punto suya. Me refiero al criterio de existencia en matemáticas entendido como ausencia de contradicción o como requisito de coherencia lógica interna. Más adelante discutiré este punto con respecto a Poincaré, pero por lo pronto basta con observar que al apegarse a este criterio, Couturat niega en los hechos su afirmación de que los juicios matemáticos son ajenos a las reglas de la lógica. Es decir, Couturat no es del todo consistente al aceptar implícitamente que si bien el principio de no contradicción no vuelve racionales a todos los sistemas geométricos, al menos les concede la gracia de existir como entes matemáticos.

§ 5. Poincaré y el convencionalismo racionalista de Couturat

Por otra parte, resta por ver si Poincaré se encontraba conforme con la aclaración y, sobre todo, con la enmienda que su pupilo hacía con respecto a la naturaleza sintético a priori de la geometría euclidiana. Hasta donde he podido averiguar no hay ningún pronunciamiento explícito al respecto, pero es posible pensar en una respuesta negativa a partir del artículo "Sobre el espacio y la geometría", en el cual Poincaré se propone extenderse sobre algunas afirmaciones, que ya había hecho en el ensayo sobre las geometrías no euclidianas, con el objeto de cuestionar la opinión kantiana predominante del espacio como representación a priori: "Se dice a menudo que las imágenes de los objetos exteriores están localizadas en el espacio y, asimismo, que no pueden formarse sino con esa condición. Se dice también que ese espacio que sirve así de marco preparado expresamente para nuestras sensaciones, es idéntico al de los geómetras, ya que posee todas sus propiedades... Pero conviene ver si no sufren alguna ilusión que un análisis profundo podría disipar".[34]

Dicho análisis, que huele a Helmholtz por todos lados, inicia con una comparación entre las propiedades del espacio geométrico y las propiedades del espacio representativo; es decir, entre la geometría euclídea y el marco de las representaciones y sensaciones. Las unas y las otras no coinciden (i.e., uno es continuo, el otro no; uno es homogéneo, el otro no; etc.,) y si lo hacen es

[34] Poincaré (1895), p. 631. Zahar (2001), p. 68, se encuentra por lo tanto fuera de lugar cuando afirma: "Es bien sabido que uno de los grandes logros de la matemática del siglo XIX es haber demostrado la consistencia relativa de las geometrías no euclidianas, su cuasi consistencia con la geometría euclídea. La posición de Kant según la cual la mente nace equipada con un continuo euclidiano tridimensional, debía, por consiguiente, abandonarse o bien modificarse considerablemente. El proyecto de Poincaré puede verse como un intento de reinstaurar este aspecto importante de la filosofía kantiana".

de forma muy limitada y distorsionada, pues en todo caso, el espacio representativo no sería más que una imagen deformada, bajo cierta perspectiva, del espacio geométrico. Por ejemplo, la vista solo puede percibir dos rectas paralelas a corta distancia, pues si nos situamos en medio de una carretera observamos que las líneas de seguridad de los extremos de la carretera se juntan en un punto en el horizonte. En consecuencia, no puede hablarse con propiedad de una *representación* de los objetos externos en el espacio geométrico, sino a lo sumo, que se *razona* sobre ellos como si estuviesen situados en ese espacio. En este sentido, el espacio geométrico es el resultado de la forma como el entendimiento reelabora aquello que le es dado por los sentidos. Pero el espacio geométrico que nos es familiar, lo es debido a un proceso de instrucción experimental, y no hay nada, en principio, que impida cambiar el sistema de enseñanza (esto es, cambiar de geometría). Si la geometría euclidiana fuera, como piensan los kantianos, un marco impuesto o inherente a los seres humanos, entonces sería imposible imaginarse un espacio distinto al descrito por Euclides. Dado que no es así, no cabe más que asumir que el espacio geométrico es una creación libre del intelecto que se acomoda con singular flexibilidad a los datos de la experiencia. El hecho de que en la geometría ordinaria se pueda ignorar la deformación que sufren los cuerpos en el mundo físico es una muestra de ello. Todo lo anterior permite pensar que el espacio geométrico, "se nos impone, no como una forma de sensibilidad, sino como una forma de nuestro entendimiento".

Si lo que se ha dicho al final del capítulo anterior con respecto al número y la magnitud es correcto, en el entendido de que estas dos nociones no tienen nada que ver con las formas de la sensibilidad, Couturat estaría entonces muy próximo a la posición de Poincaré, y su desacuerdo se limitaría a la cuestión sobre si efectivamente el espacio geométrico se impone por medio de una forma del *entendimiento* o bien, por medio de la *razón*; lo cual, dicho sea de paso, podría superarse por medio de un ajuste de vocabulario, de manera análoga a como lo había hecho antes con respecto a la asimilación de las convenciones geométricas como juicios sintéticos a priori. El hecho de que el breve comentario de Couturat sobre este artículo de Poincaré centre su atención en otros puntos parece prestar cierto apoyo a esta interpretación. Sin embargo, la crítica misma parece llevar a otro lado, de tal suerte que resulta difícil sacar una conclusión definitiva sobre el particular. Es decir, Couturat critica el análisis de Poincaré en ambas direcciones (tanto como espacio geométrico como espacio representativo) sin discutir su propia propuesta ni las conclusiones principales a las que llega el contrincante. En primer lugar, señala que en la explicación que Poincaré ofrece del número de dimensiones y del origen de la noción de punto en el espacio geométrico envuelve en ambos casos una petición de principio. El conjunto de desplazamientos posibles de un cuerpo sólido forma lo que en análisis se denomina un *grupo de transformaciones*, y se dice que este grupo define el espacio. Para que el movimiento del cuerpo sea factible se requiere contar con puntos fijos, los cuales deberán formar un grupo parcial o subgrupo; se dice que el grupo es de orden 6, el subgrupo de orden 3, y que la diferencia entre ambos grupos 6 – 3 representa el número de dimensiones del espacio, pero con esta explicación no se ha conseguido en realidad nada ya que si el grupo total consta de 6 variables independientes se debe a fin de cuentas a que el espacio posee de antemano tres dimensiones. Y algo muy similar puede decirse de la definición analítica de punto.

Como respuesta, Poincaré (1897, pp. 64 y 65) señala que no es ésta la forma como él ha querido argumentar y si Couturat lo ha entendido así, se debe en parte a que en la exposición no ha podido evitar el lenguaje matemático, el cual más que aclarar su posición la ha oscurecido. Pero lo que ha querido describir es la forma como el intelecto interactúa con la experiencia para construir el espacio geométrico ideal. Es decir, el proceso mediante el cual se conjuga lo dado por los sentidos y el elemento ideal geométrico; es así como se empieza discriminando entre los cambios observados, aquellos que corresponden al desplazamiento de los cuerpos. A partir de allí se empieza a estudiar experimentalmente las leyes según las cuales se rige el movimiento de los cuerpos. Hasta aquí lo único que se reconoce es que el espacio tendría tres dimensiones y que la posición de un cuerpo se encuentra determinada por seis cantidades; o, dicho de otra forma, la experiencia muestra que los desplazamientos de un cuerpo se comportan *como* las sustituciones de un grupo de orden seis. Pero la experiencia sugeriría otra cosa si estuviésemos situados en un mundo no euclidiano. Por lo tanto, la pregunta que se hace Couturat, ¿cómo sé que el grupo es de orden 6?, no es, o no debe entenderse como una cuestión que amerite un razonamiento geométrico, sino una constatación experimental. Pero no es la experiencia la que da forma a la noción de grupo, pues la noción preexiste en el entendimiento, o si se prefiere, lo que preexiste es la capacidad de formar esa noción. La experiencia no es para los humanos más que la ocasión para ejercitar dicha potencia. Es decir, lo que muestra es que entre todos los grupos simples que el entendimiento pueda formar, hay un cierto grupo que se aleja lo menos posible de la observación. Pero es el intelecto el que juzga cuál es el más cómodo al momento de considerar el desplazamiento observado y es gracias a esta convención que los movimientos se comportan rigurosamente como las sustituciones de un grupo. En suma, concluye, si el entendimiento no contase con la noción de grupo, no se podría construir conceptualmente nada, pero esto no quiere decir que se trate de una forma impuesta a nuestra sensibilidad, pues siempre se tendrá el derecho de escoger, teniendo en cuenta las indicaciones de la experiencia, entre todos los grupos posibles.

Aunque la respuesta es bastante admisible dentro del análisis propuesto por Poincaré, debe también reconocerse que el autor afirma literalmente en su artículo que "es en las relaciones entre el grupo y su subgrupo en donde habrá de buscarse la explicación del hecho de que el espacio tenga tres dimensiones" (Poincaré (1895), p. 641); asimismo, el hecho de que haya eliminado justo todo este parágrafo en la reimpresión del artículo en *La Science et L'Hypothèse* permite suponer que la crítica de Couturat era al menos justa en este punto. Pero no se puede decir lo mismo de su crítica al análisis del espacio representativo, la cual se encuentra prejuiciada por su aversión al psicologicismo en filosofía. De hecho, Couturat, [7], p. 660, pierde de vista el propósito del análisis fenomenológico de Poincaré cuando declara: "La génesis psico-fisiológica del espacio bosquejada por Poincaré, no es menos falaz [que la explicación matemática]. Consiste, en resumen, en explicar las dimensiones del espacio por medio de las sensaciones musculares, las cuales considera como coordenadas". Con semejante afirmación, parece como si entendiera que el espacio geométrico es para el autor una prolongación natural, o bien, un mero refinamiento conceptual del espacio representativo. Con justa razón, Poincaré (art. cit., p. 67) no logra entender cuál es el sentido de las objeciones de su antiguo alumno, pues pareciera que le atribuye justo el objetivo opuesto al que intenta llegar; es decir, como si intentase mostrar que el espacio geométrico y el espacio representativo coinciden en sus propiedades fundamentales, pero solo para desdecirse más adelante y caer en una supuesta contradicción. Y no se equivocaba, como se puede apreciar en el siguiente pasaje: "Lo que demuestra perfectamente que la psicología no logra explicar el espacio, es que se ve forzosamente inducida a distinguir el espacio geométrico del espacio sensible, pero sin dar cuenta más que de este último. Este es ya un fracaso y un signo de impotencia, puesto que el espacio geométrico es el único que posee un valor objetivo, tanto desde el punto de vista práctico como científico; pues es allí donde localizamos nuestras percepciones, donde proyectamos las figuras y donde construimos el mundo físico... Además, falta recoger una preciosa confesión de Poincaré, ya que después de haber enumerado las propiedades del espacio geométrico (continuo, infinito, homogéneo, isógeno, y con tres dimensiones), observa que el espacio visual no es infinito, ni homogéneo, ni isógeno, y que cuenta con dos dimensiones... Eso quiere decir, de nueva cuenta, que el espacio visual no es en verdad un espacio, o al menos, que no ofrece ninguna de las características del espacio geométrico y que no tiene nada en común con él. No se sabría encontrar una mejor forma de probar que el espacio geométrico no es un objeto de la intuición sensible y que no toma prestado de la experiencia ninguna de sus propiedades esenciales"[35].

[35] [7], p. 662. Zahar, *loc. cit.*, hace, curiosamente, una lectura muy similar a la de Couturat: "Poincaré distingue entre dos tipos de espacio: la multiplicidad matemática y el espacio representativo. Este último se construye a partir de datos de los sentido a través de un proceso que no presupone ninguna noción de espacio. Lo único que se requiere es nuestra habilidad para recordar las sensaciones con el objeto de ordenarlas en el tiempo y decidir si dos sensaciones pasadas son o no discernibles (observemos aquí de manera ocasional la primacía del tiempo sobre el espacio). Poincaré pasa luego a mostrar que las propiedades matemáticas del espacio geométrico, tales como la dimensión y la estructura de grupo, poseen sus respectivas contrapartes en el espacio representativo".

No hay duda, por consiguiente, que el desacuerdo de Couturat es antes que nada, producto de un equivoco patente motivado a su vez por una mala lectura, quizá demasiado prejuiciada, del ensayo de su maestro. También parece indicar que para Couturat el espacio representativo nunca podría identificarse con el marco inamovible kantiano, pero de allí en adelante no tenemos elementos para formarnos una idea de cómo sería a su juicio tal marco, si es que existiese. Pero de igual forma no es posible entender bien a bien cómo es que Couturat concibe los juicios sintéticos a priori de la geometría, si, por un lado, reconoce que se trata de definiciones disfrazadas, y, por el otro, son ajenos a las formas de la sensibilidad y se imponen al mundo por medio de misteriosos principios racionales.

Ahora bien, los comentarios anteriores solo nos permiten formarnos una idea muy general sobre la posición de Couturat, y, esto obedece en gran medida a que no desarrolla sus puntos de vista más allá de las exigencias que comporta su crítica a Renouvier, Poincaré y a la posición empirista. Pero al mismo tiempo su crítica no es más que una manifestación de la insatisfacción que le provoca la forma como los neocriticistas y los geómetras franceses pretenden resolver los dilemas metafísicos que plantean las geometrías no euclidianas. A su juicio, la ausencia de una interpretación filosófica adecuada es en el fondo producto de un desequilibrio intelectual entre ambos bandos: es decir, a unos les hace falta los conocimientos que poseen los otros, y viceversa. A su juicio, se trata de un problema que en gran medida es producto del sistema de enseñanza de su pais. Es, por lo tanto, bajo el espectro de tan incómoda situación como deben leerse las declaraciones introductorias de su reseña sobre el *Ensayo sobre los Fundamentos de la Geometría*: "Es a un inglés a quien ha sido reservado el honor de haber resumido y sacado a la luz los descubrimientos y progresos de la geometría moderna para beneficio de la teoría del conocimiento. La obra de Russell contiene, dentro de un volumen reducido, toda una filosofía de la geometría; la cual ha sido elaborada por un filósofo versado en las más recientes teorías matemáticas y que es, al mismo tiempo, un iniciado dentro de la gran tradición criticista. Es posible definir el espíritu y el alcance de este trabajo erudito, señalando que se trata de la

Estética Trascendental de Kant, revisada, corregida y aumentada a la luz de la metageometría".[36] Seguramente tales afirmaciones debieron calar hondo en la autoestima y el orgullo nacional de los pensadores franceses, y, en este sentido, no puede descartarse que al calificar la reseña de Couturat como un "éloge peu banal", Poincaré dejara escapar un cierto resentimiento. Se puede cuestionar si la percepción negativa de Couturat era correcta o no, pero no puede negarse la percepción en sí; pero además, si se analiza la literatura francesa sobre el tema, tanto aquella de la que hablan Russell y Couturat como aquella que no mencionan, se encontrará que, en efecto, no hay ningún trabajo filosófico equiparable, ni en tamaño ni en profundidad, con el ensayo de Russell. Dicho de otra forma, la alternativa francesa: criticismo sin nuevas geometrías, o bien, geometrías sin criticismo, no era en lo absoluto atractiva para Couturat.

Por otra parte, de cuando en cuando se habla de la actitud hostil de Poincaré hacia Couturat, principalmente en el contexto de la polémica contra el logicismo, pero poco o nada se ha dicho sobre las causas que motivaron tal actitud. Por ejemplo, los cometarios de McLarty (1997), p. 110 y 111, son por completo irrelevantes en este sentido. Pero todo lo que he venido comentado hasta este momento parece sugerir que el gran pecado de Couturat consistió en confesar en público su insatisfacción ante las propuestas filosóficas de sus compatriotas y, al mismo tiempo, hacer patente su aprobación hacia el trabajo de un extranjero desconocido. Sin embargo, también ya he dicho que es necesario tener reservas con respecto a la calidad y cantidad de los acuerdos entre ambos pensadores, por lo cual es el momento de volver sobre este asunto.

[36] [10], p. 355. Líneas antes se lee: "Desde hace sobre todo treinta años, la geometría no euclidiana ha sido objeto de numerosas investigaciones y ha tomado un desarrollo prodigioso; y ha llegado el momento de sacar de ese gran movimiento de ideas las consecuencias filosóficas que conlleva. Sin embargo, para recoger el fruto de todos esos trabajos hace falta un espíritu a la vez científico y crítico, que pueda combinar la vasta erudición matemática con la inteligencia de los problemas filosóficos. Que un espíritu tal se encuentre ausente en Francia es para lamentarse, mas no para asombrarse, pues la falta no es de los hombres sino de las instituciones, y, en particular, de ese absurdo sistema de la bifurcación que continúa reinando en la organización de nuestros estudios, y a la deplorable escisión que ha tenido lugar entre la filosofía y los conocimientos científicos, que son su alimento necesario". Desde luego, Couturat ignoraba las quejas de Russell sobre el sistema de enseñanza de las matemáticas en Cambridge, los famosos Tripos, consagrados a la resolución mecánica de problemas. *Cf.* Grattan-Guinness (2002), § 6.1.3.

§ 6. La crítica de Couturat a Russell

Además de las coincidencias que ya se han indicado, desde el punto de vista meramente crítico, Couturat encontraba la argumentación de Russell contra Lotze muy similar a la que él mismo había formulado contra Renouvier. En ambos casos, en efecto, la crítica va dirigida contra los argumentos, sin conocimiento de causa, por medio de los cuales Lotze y Renouvier pretender descalificar a los sistemas divergentes. Ambos, por consiguiente, están de acuerdo en rechazar cualquier posición idealista negativa que en lugar de buscar una respuesta filosófica adecuada de las geometrías no euclidianas, se limita a deshacerse de ellas por medio de argumentos formados a partir de malas interpretaciones del objeto que pretenden destruir. Pero, resta entonces constatar si la respuesta dogmática de Russell es del todo adecuada a los ojos de Couturat.

Como ya he mencionado arriba, la propuesta de Russell consiste, a grandes rasgos, en una delimitación de las propiedades geométricas en cuanto a su carácter cualitativo y cuantitativo. Las propiedades cualitativas, empleando las operaciones básicas de proyección y sección, se consideran como comunes a todos los espacios geométricos, tanto euclidianos como no euclidianos, y con ello se establece que es justo en las propiedades métricas en donde difieren entre sí todos los sistemas. Las propiedades cualitativas esenciales se expresan por medio de tres axiomas proyectivos, que en su conjunto, caracterizan la *forma de exterioridad*, que constituye la condición de todo espacio posible. Dicha forma de exterioridad es inteligible a priori y ajena a cualquier intuición sensible. Dicho de otra forma, los axiomas a priori de la geometría métrica, sea euclídea o no euclídea, coinciden o se identifican con los axiomas fundamentales de la geometría proyectiva, y son dichos axiomas los que definen las condiciones de posibilidad de todo espacio.

A la luz de lo que se ha dicho en el capítulo anterior, sobre todo en § 7, con respecto a las relaciones entre el número y la magnitud, debe ser claro que, al menos, por lo que corresponde a los axiomas proyectivos, la propuesta de Russell se encuentra en la línea de pensamiento de Couturat, ya que la noción de magnitud se considera allí, de igual forma, como a priori.

independiente de cualquier consideración numérica, y, ajena a cualquier intuición sensible. Sin embargo, hay también aquí una diferencia en apariencia importante, aunque quizá superable sin mayores consecuencias una vez que se ponen de manifiesto los usos de los términos. Es decir, para Russell la noción de magnitud supone necesariamente cantidad y, por lo tanto, establece propiedades métricas ajenas a la geometría proyectiva, y, con lo cual admite una relación íntima entre el número y la magnitud que en cierta medida las vuelve indiscernibles. Pero además, Russell deja sin contestar al menos una interrogante obvia, pues es claro que si las propiedades métricas son o remiten a magnitudes, ¿qué son entonces propiamente las propiedades cualitativas? Puede decirse a su favor que no existe una relación simétrica magnitud-cuantitativo, *x*-cualitativo, y por lo tanto no tiene sentido plantearse una pregunta que la imponga, pero la respuesta seria en todo caso trivial, o en todo caso, hecha a modo, puesto que no se podría decir lo mismo cuando se trata de caracterizar el estatus epistémico de tales propiedades; es decir, si las propiedades cualitativas de la geometría se consideran a priori, ¿cuál es entonces el estatus de las propiedades métricas?

Pero antes de contemplar la respuesta a esta cuestión, debe mencionarse en todo caso, que la magnitud tal y como la entiende Couturat guarda una similitud con las propiedades cualitativas de Russell, en tanto que, como se ha mostrado en el capítulo anterior, es independiente del número y tiene un estatus a priori. Ahora bien, para Russell no hay duda que las propiedades métricas se encuentran inevitablemente relacionadas con cuestiones experimentales, y, por lo tanto, deberán considerarse como sintéticas; o, dicho de otra forma, deberán encontrarse sujetas a verificación empírica. Esto significa que los axiomas propiamente euclídeos (que según Rússell, son: 1) El espacio tiene tres dimensiones, 2) Entre dos puntos dados solo pasa una línea recta, y 3) por un punto dado no pasa más que una paralela a una recta dada) son verdades experimentales. Como ya se ha mencionado, Couturat sostiene, aunque de manera un tanto distinta, la tesis convencionalista de Poincaré sobre los juicios geométricos, y en consecuencia, no podía encontrarse de acuerdo con Russell sobre el carácter experimental de las propiedades métricas. La objeción que lanza en primera instancia se limita a señalar que la explicación de las razones que llevan a Russell a declara como empíricas las expresiones cuantitativas son insuficientes y ameritan mayor profundidad. No basta, pues, demostrar que los axiomas comunes a toda geometría sean a priori para afirmar que los axiomas particulares sean a su vez empíricos. En todo caso, haría falta intentar un diseño experimental por medio del cual los axiomas se puedan someter a contrastación. Puede, como se había propuesto antes, intentar medir los ángulos de un triángulo astronómico, pero su resultado no sería definitivo, ya que se trataría de una prueba experimental indirecta meramente aproximativa cuyo margen de error anularía todo intento de verificación.

Este era en verdad un argumento inofensivo, puesto que Russell admitía que cualquier verificación de los axiomas sería aproximativa e indirecta. Aproximativa, porque toda verdad empírica se encuentra sujeta a corrección debido a los errores posibles de observación inherentes en todo manejo experimental. Indirecta, porque su contrastación ocurre en conjunción con las teorías físicas en las cuales se encuentra involucrada la geometría (euclidiana). Sin embargo, Couturat desmantela el holismo russelliano por medio de un contrargumento potente en el cual muestra la inconsistencia en la que incurre Russell al negar, en el alegato contra Helmholtz, justo lo anterior al distinguir la geometría pura y a priori, de la geometría aplicada. Luego abre la posibilidad de contemplar otras leyes físicas, distintas a las actuales (en esa época), basadas en una geometría no euclidiana, y retoma el ejemplo de Poincaré, según el cual cuando el físico se enfrenta ante el resultado experimental adverso a una conjetura física siempre optará por modificar la ley natural antes de verse obligado a modificar o cambiar por completo la geometría que le servía de base: "Russell mismo ha mostrado a la perfección que la física reposa por completo en la geometría, y que por consiguiente la primera no puede servir para verificar los axiomas geométricos (§§ 71, 73). Nuestras leyes son entonces en esencia relativas a la geometría que hemos adoptado y son verdaderas bajo la hipótesis de un espacio euclidiano; pero esto no prueba nada a favor de dicha hipótesis, ya que si se admitiera otra forma de espacio, serían reemplazadas por otras leyes igualmente verdaderas; es decir, que estarían en conformidad con la experiencia. Según una observación muy ingeniosa de Poincaré, si fuéramos a constatar la inexactitud de una de nuestras leyes físicas, pensaríamos sobre todo en corregir dicha ley más que en reemplazar toda la geometría. No se puede afirmar, por lo tanto, que el acuerdo de las leyes físicas con la experiencia constituye una verificación empírica de los axiomas geométricos"([10], p. 371).

Asimismo, Couturat recuerda que el propio Klein ya había señalado que todos los espacios topológicamente distintos son igualmente compatibles con la experiencia. La observación era particularmente aguda puesto que este era un resultado del método Cayley-Klein del cual, como ya se ha señalado, Russell sacaba partido. No es difícil ver la conexión, puesto que si el universo solo lo conocemos a partir de la vista o de la perspectiva asumida -esto es, de sus propiedades proyectivas-, es posible construir indistintamente cualquiera de las geometrías métricas, dado que todas ellas serán, a fin de cuentas, proyectivamente equivalentes.

Luego, Couturat se pregunta si no sería lícito intentar demostrar los pretendidos axiomas empíricos de Euclides recurriendo al método empleado por Russell para demostrar la necesidad de los axiomas comunes. Como ya se ha dicho antes, la aprioridad de los axiomas proyectivos se demostraba por medio de una argumentación por medio de la cual se establecía que tal axioma representaba un rasgo esencial de la forma de exterioridad, o bien, que se trataba de una condición necesaria y suficiente de la posibilidad de medida. Sin embargo, entre ambas alternativas sólo la primera sería viable, ya que según la misma caracterización, estos axiomas serían (y de hecho son) propiamente métricos. Además, la primera alternativa tiene la "ventaja" de ofrecer un alto grado de generalidad y vaguedad sobre qué es lo que puede contar como una propiedad de la forma de exterioridad. Este comentario crítico de Couturat no puede tomarse al pie de la letra sino, en el mejor de los casos, como una forma de sugerir que la propuesta de Russell se encontraba condenada al fracaso desde sus propios cimientos.

Pero en verdad los reparos de Couturat no se limitaban a la pretensión russelliana de convertir los axiomas euclídeos en verdades empíricas, sino que se extendían a la forma de caracterizar las condiciones necesarias y suficiente de la posibilidad de medida. Dicho de otra forma, era claro que Couturat no compartía la posición de Russell sobre las relaciones entre el número y la magnitud, y en particular, la negativa de este último a tomar la constante de curvatura como una magnitud. Para poder comprender lo anterior es preciso apuntar que según Russell, "un juicio sobre magnitud es siempre un juicio de comparación y, lo que es más, la comparación nunca está referida a cualidad, sino solamente a cantidad... la constante de espacio en tales espacios [no euclidianos] es la unidad última, el término fijo en todas las comparaciones cuantitativas, y, por consiguiente, se encuentra por sí misma desprovista de cantidad, puesto que no existe ninguna magnitud independiente con la que pueda compararse" (§ 79). Pero además, de aquí, deduce que un ensanchamiento constante, en todas sus líneas y figuras, de un espacio no euclidiano permanecería inalterado y, por lo tanto, tal cambio estaría desprovisto de significado. Asimismo, la independencia de la constante espacial implica que dos geometrías distintas no pueden coexistir en el mismo mundo.

Si bien Couturat pensaba que la teoría de Russell sobre el número y la magnitud ameritaba discutirse a profundidad, lo cual dejaba para otra ocasión, por lo pronto bastaba con "constatar que contradecía otras afirmaciones del autor y que en sí misma implica una contradicción" (p. 375). En efecto, pues por un lado se decía que la magnitud no era más que comparación, pero también afirmaba que los términos por comparar debían de existir antes de la comparación, lo cual era una forma de aceptar que la magnitud debería existir antes de hacerse la comparación. Y no podría ser de otra manera, puesto que sin este supuesto la medida y la comparación no tendrían sentido ni fundamento. Pero justo esto último impide negar que la curvatura espacial sea una magnitud, puesto que para que una magnitud sea medible se requiere que pueda ser comparada con otra magnitud de la misma especie, y si es posible medir todas las magnitudes de la misma especie en relación con la constante espacial, debe ser evidente que ésta ha de ser también una magnitud.

Pero las críticas de Couturat no se detenían allí. También señalaba que en la geometría esférica de Riemann (de curvatura positiva) hay pares de puntos sobre los cuales pasan innumerables líneas, lo cual contradice el axioma de la línea recta (dos puntos en general determinan una línea recta única) que Russell asumía como a priori, y lo mismo podría decirse de un espacio, como el de Lobachevsky, con curvatura negativa (no nula). Pero también negaba que los sistemas no euclidianos cumplieran con el axioma de relatividad del espacio tal como lo entendía el autor. Objeciones similares lanzaba también al axioma general de las dimensiones, y al axioma euclidiano sobre las tres dimensiones del espacio. Y por último, dejaba entrever cuál era en concreto su propia posición: "Para resumir nuestras conclusiones de manera exacta y completa hace falta señalar que el espacio es a la vez una forma del entendimiento y una forma de la sensibilidad. Todos los axiomas geométricos son necesarios y a priori; unos debido a una necesidad racional porque expresan los rasgos esenciales de toda forma de exterioridad; los otros (al menos el referente al número de dimensiones del espacio) en virtud de nuestra constitución sensible. Dicho en otros términos, todas las propiedades del espacio pueden conocerse a priori con certeza, ya sea porque de ellas emanan las condiciones necesarias de toda experiencia posible, ya sea porque son el resultado de una condición de hecho impuesta a nuestra sensibilidad"(pp. 378 y 379).

Como puede apreciarse, la reseña de Couturat lejos de ser un elogio banal, como había sugerido Poincaré, cuestiona casi en su totalidad la propuesta de Russell, y no se limita, como le había prometido a este último, a discutir el carácter empírico de los axiomas euclidianos. Por lo demás, el adjetivo de Poincaré no deja de ser sorprendente ya que como se ha podido apreciar, Couturat mantiene a su modo el convencionalismo geométrico de su maestro. Sin embargo, también hemos constatado varios acuerdos relevantes o al menos no desdeñables y que en buena medida explican la estrecha relación intelectual que se daría entre Russell y Couturat a partir de este primer intercambio crítico. También ya se ha mencionado que la prolongación de esta discusión se encuentra en los ensayos de ambos sobre las relaciones entre el número y la magnitud, pero comentaré ambos escritos de manera rápida a través de la crítica de Poincaré a la fundamentación filosófica de Russell y la respuesta de este a las respectivas reseñas de Couturat y Poincaré.

§ 7. La respuesta de Russell a Couturat

La respuesta a Couturat se limita a la cuestión sobre si los axiomas de Euclides pueden ser verificados o refutados experimentalmente. Para que tal pregunta tenga sentido y pueda contestarse de manera adecuada, aclara, se requiere tener en cuenta antes dos cosas muy importantes: primero, que la posición convencionalista de Poincaré debe rechazarse por completo para que pueda darse por supuesto que los axiomas son o falsos o verdaderos; segundo, que se distinga claramente entre la pregunta filosófica y la pregunta científica, y se tenga en cuenta únicamente la primera al momento de ensayar una respuesta. En este sentido, la cuestión filosófica puede plantearse del siguiente modo ¿Puede hablarse de un experimento, posible o imaginario, por medio del cual pueda establecerse un límite a la magnitud de la constante espacial?, o dicho en términos más amplios, ¿es posible determinar empíricamente, aunque sea de manera grosera, la naturaleza de nuestro espacio? La respuesta afirmativa a semejante pregunta da pie entonces a la pregunta científica: ¿cuál es el mejor experimento, o el método más preciso, para determinar la magnitud de nuestra constante espacial?

Al admitir una prueba experimental que por su propia naturaleza nunca será del todo exacta, se estará al mismo tiempo aceptando que nunca podrá saberse con absoluta certeza si el espacio en el cual nos movemos es efectivamente euclídeo. Pero no hay nada reprochable en ello, a menos que se pretenda exigir algo que va más allá de la naturaleza misma de la prueba experimental. "Podríamos probar que el espacio no es euclídeo, pero jamás podremos tener la esperanza de demostrar que es rigurosamente euclídeo, de la misma forma como nos es imposible probar rigurosamente la ley de gravedad"(1898. p. 761). Dicho en términos popperianos, se podrá refutar la hipótesis sobre la naturaleza euclídea del espacio, pero nunca se podrá saber con certeza si la hipótesis es verdadera.

Una vez que se ha aceptado las limitaciones que supone toda prueba experimental se puede entonces sugerir un test sencillo, considerando un disco de tamaño normal, como una moneda, marcando un punto en el canto, de tal forma que al hacer girar el disco una revolución completa en línea recta se pueda medir la relación que guarda la circunferencia con el diámetro, de donde el valor de la constante espacial[37] puede deducirse. Russell se apresuraba a señalar que si bien en el experimento se daba por sentado la determinación de una línea recta, está era un precondición esencial de la medida. De cualquier forma, este era un ejemplo poco convincente a su favor, ya que, como Gauss y Lobachevsky podrían alegar, el asunto es precisamente una cuestión de tamaño, pero dejaré para más delante mayores comentarios, cuando venga a cuento mencionar las afirmaciones de Poincaré (y Lechalas) para desestimar la pertinencia de la propuesta experimental russelliana.

Por otro lado, Russell acepta que su argumentación a favor de la verificación experimental de la geometría de Euclides contradice, como observó Couturat en su momento, sus crítica a la pretensión de Helmholtz de fundar la geometría en consideraciones físicas. Sin embargo, apunta que lo que en realidad debió haber dicho en este último contexto es que la *posibilidad* misma de la geometría no puede descansar en la física. Todo lo contrario, para que esta última ciencia sea posible primero debe ser posible medir la magnitud espacial, puesto que las leyes físicas presuponen la viabilidad de la magnitud geométrica. Pero un poco más adelante la réplica pierde fuerza y se va al otro extremo cuando afirma que cuenta con un argumento extremadamente fuerte a favor del carácter a priori del espacio euclídeo, el cual se deriva de la imposibilidad de una magnitud absoluta (l'argument que se tire de l'impossibilité d'une grandeur absolue), pero que en verdad se funda en lo contrario, es decir, en el rasgo absoluto de la magnitud de los

[37] Russell, (1897), § 21, prefiere hablar de una constante espacial para referirse al grado de curvatura de un espacio tridimensional, debido a su negativa a aceptar espacios cuatridimensionales, y, por consiguiente, la coexistencia de dos o más geometrías (tridimensionales).

ángulos. El argumento tiene un aire paradójico debido a que exhibe muy bien la actitud ambivalente propia de una posición neohegeliana que de repente no sabe que hacer con los enredos que a pulso se ha forjado. La confusión aumenta al darnos cuenta que en verdad lo que Russell se pregunta es si es posible demostrar que la homogeneidad, en el sentido de Delboeuf, es una propiedad a priori del espacio. Esto quiere decir también que Russell se olvida que antes había caracterizado la homogeneidad como un rasgo común a todo espacio y no como una propiedad peculiar del espacio euclídeo. La observación bastaría para dejar de lado el argumento mismo, pero dado que aquí se ve involucrada la "contradicción de la relatividad de la magnitud", vale la pena detenerse un poco en ello.

Si se afirma como evidente a priori que los lados de un triángulo pueden ampliarse sin alterar la razón de los ángulos, deberían sostener igualmente que los ángulos se pueden incrementar sin alterar los lados. Pero esto último es imposible en cualquier geometría. En consecuencia, si se admite la naturaleza relativa de la magnitud no hay ningún motivo de peso para dejar fuera la relatividad de la magnitud angular. Como todo espacio posee una constante angular, no se puede entonces inferir de la relatividad de la magnitud la imposibilidad de una constante espacial.

Es difícil apreciar la fuerza y el sentido que Russell le atribuye a este argumento, sobre todo porque resulta un argumento extraño viniendo de alguien que sostiene la relatividad de la magnitud, pero como Russell admite que hay en esta noción una contradicción, algo que Couturat habia puesto de manifiesto en su comentario, tal parece que la conclusión reproduce simplemente la contradicción de la noción en las premisas, puesto que, si es que estoy interpretando correctamente, lo que se ha querido establecer es que la relatividad de la magnitud no incluye o afecta a la constante espacial, que es, o al menos, debe considerarse como una magnitud absoluta. Dicho de manera menos paradójica, la relatividad de la magnitud opera sobre la base de una magnitud absoluta. Hay elementos para plegarse a esta interpretación y sobre ellos volveré un poco más adelante, pero también hay suficiente materia para rechazarla ya que Russell descarta que la contradicción de la noción de relatividad de la magnitud sea producto de la exposición o de su concepción particular de la magnitud, sino que es una peculiaridad de la noción misma. Esto es, la contradicción es inherente porque la magnitud sólo existe o se crea a partir de la comparación (con otra magnitud), y aunque los términos de la comparación existen de antemano, en sí mismos no poseen propiedades cuantitativas antes de la comparación. En consecuencia, admitir una magnitud absoluta, aunque sea la constante espacial, es aceptar que la magnitud no nace de la comparación.

Si tenemos en cuenta la posición neohegeliana de Russell no debe sorprender esta idea de la magnitud, como tampoco debe sorprender que considere que "todo razonamiento geométrico es a fin de cuentas, de tipo circular" (Russell (1897), § 108). Pero ya que antes he insinuado un presunto acuerdo con Couturat en este punto, es importante notar que para este último la circularidad de las definiciones nominales de la matemática no son en absoluto contradicciones formales y, por consiguiente, estas terminan resolviéndose en el plano racional, dejando las nociones fundamentales sin una definición propiamente matemática, pero ofreciendo una justificación racional de las mismas. Por ejemplo, en su reseña Couturat comenta al respecto: "En cuanto al círculo inevitable que conforman las definiciones geométrica, no se trata en realidad de un vicio particular de la geometría, ni de un defecto inherente al espacio, sino que es una suerte que corren todas las definiciones y demostraciones lógicas desde el momento que se exige, como afirma Pascal, que todo se daba definir y demostrar".

Existe entonces una diferencia de fondo en este acuerdo superficial, puesto que a Couturat le hace falta el espiritu neohegeliano en la misma medida que a Russell le hace falta el espiritu geométrico de Pascal. En el caso particular de la noción de magnitud, la vena neohegeliana es más palpable ya que de acuerdo con Bradley y Bosanquet, todo conocimiento implica una comparación; esto es, el reconocimiento de una diversidad en una relación o la identidad dentro de una diferencia, lo cual en este contexto no puede significar más que la diferencia (menor o mayor que) y la igualdad entre magnitudes.

La polémica con Poincaré sobre el valor de la lógica y el logicismo

Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature. Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique. Elles doivent aider le philosophe a approfondir les notions de nombre, d'espace, de temps.
Las matemáticas tienen un triple fin. Deben suministrar un instrumento para el estudio de la naturaleza. Pero eso no es todo; tienen un fin filosófico y, me atrevo a decirlo, un fin estético. Deben ayudar al filósofo a profundizar las nociones de número, de espacio, de tiempo.

H. Poincaré

§ 1. Introducción

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX no existía una idea muy clara, entre filósofos y matemáticos, sobre la diferencia fundamental que hay entre la nueva lógica simbólica y la aplicación de la misma en el campo de los fundamentos de la matemática. Hay varias razones que alentaron dicha situación, y, quizá la motivación principal y más obvia se deba al hecho de que algunos de los principales creadores de la nueva lógica, como Frege, Peano y Russell, tenían desde el principio como objetivo mostrar las virtudes de su empleo en el dominio matemático. Otra razón del desconcierto era sin duda el trabajo fundacional de Richard Dedekind, quien sin hacer uso explícito de un sistema lógico, como el de Frege o Peano, afirmaba presentar la teoría elemental de números sobre una base estrictamente lógica, y nadie lo dudaba. Otra razón no menos importante es que la lógica de Frege y Russell contenía una buena dosis de teoría de conjuntos.

Y si tal situación prevaleció por más tiempo se debió al parecer a una cuestión meramente terminológica, ya que en 1904, Luis Couturat y otros, propusieron bautizar a la nueva lógica con el término *logística*, y luego, a finales de los 20, Fraenkel y Carnap, por separado, usaron el término *logicismo*, para referirse al proyecto de Russell y Whitehead en *Principia Mathematica*. Si bien la propagación de este último término coincidió, más o menos, con la entrada en desuso del primero, no faltó quien se dejara confundir por la aparente homofonía de los términos.[1]

[1] El *Vocabulario técnico y crítico de la filosofía* de Lalande consigna, en la segunda edición, 1928, los siguientes sentidos del término *logicismo* (*logizismus*, *logicism*, *logismo*): "Doctrina que otorga a la lógica un lugar preponderante en filosofía... se dice en particular 1. de la filosofía hegeliana... 2. de las doctrinas que otorgan una autonomía absoluta a la lógica y no admiten ninguna intervención de la psicología: "el logicismo de Husserl". Y en una nota aclara: "En la primera edición habíamos puesto este término entre comillas... como un neologismo todavía

A la luz de lo anterior no debe sorprender el desacuerdo que reina sobre la polémica iniciada por Poincaré contra Couturat y Russell sobre el valor de la lógica y la utilidad de la misma en el ámbito matemático. No se trata de la única pelea librada entre los detractores y los simpatizantes de la nueva lógica, pero sin duda es la batalla que más interés y pasión ha suscitado a lo largo del tiempo. La razón de esto último es sencilla si se logra ver el asunto bajo una perspectiva histórica más amplia. Dado su resurgimiento tardío, la lógica matemática actual tenía un cierto origen innoble y hasta cierto punto oscuro que la gran mayoría había ignorado hasta que Lukasiewicz mostró su conexión con la lógica estoica y ciertas investigaciones escolásticas poco atendidas. Pero como a principios del siglo XX el nexo era aún desconocido y sus nuevos padres eran matemáticos poco convencionales (como De Morgan y Boole), absolutamente marginales (como Frege, Peirce y Schröder), o un tanto excéntricos (i.e. Peano impartiendo cátedra con *Formulario* en mano o redactando su famoso panfleto sobre la aritmética elemental en latín y en símbolos lógicos que nadie conocía), se llegó a pensar que guardaba poca o ninguna relación con la lógica cultivada por los filósofos. La situación no dejaba de ser embarazosa tanto por el lado matemático como por el lado filosófico, ya que los matemáticos pensaban que se trataba, en el mejor de los casos, de una ocupación poco productiva de alguno de sus colegas, mientras que los filósofos se veían amenazados o, al menos, intimidados por una disciplina que les resultaba por completo irreconocible. La consecuencia natural de esta situación un tanto "esquizofrénica" es que ninguno de los mencionados autores se veía a sí mismo como un *lógico*. Peckhaus ha señalado, por ejemplo, que de la descripción que hacía Schröder de sus campos de interés teórico se desprende que no se consideraba como un lógico sino más bien como un algebrista. A finales de los 20's del siglo XX la situación no había mejorado sustancialmente ya que Fenstad, según refiere Wang (1996), p. 128, comenta que la poca atención que habían despertado sus escritos entre sus colegas escandinavos, orillaron a Skolem a trabajar en campos más tradicionales y "respetables" de las matemáticas. En este sentido, podemos clasificar muy bien a los detractores de la lógica matemática de acuerdo con estas dos disciplinas y no es difícil adivinar en cuál bando se encuentra Poincaré (aun y cuando hay afirmaciones y argumentos suyos que lo hacen también candidato al otro grupo).

---

sujeto a discusión". Por contraste, Alonzo Church anota en la entrada del término *logistic*, en *The Dictionary of Philosophy* (4ta. edición, 1947) editado por Dagobert D. Runes: "...la palabra *logística* ha sido empleada por algunos como una referencia particular a la doctrina Frege-Russell según la cual la matemática es reducible a la lógica, pero parece que el mejor uso del término sería simplemente como sinónimo de *lógica simbólica*". No hay, por lo demás, una entrada para el término *logicismo*.

Si bien el bando filosófico ha sido acallado casi por completo (porque hay que reconocer que de cuando en cuando se dejan escuchar todavía algún grito de protesta), debido a brillantes defensas, entre las cuales destaca sin duda la de Lukasiewicz;[2] por el lado matemático la suerte ha sido otra, sobre todo a causa de los numerosos tropiezos sufridos dentro del programa logicista, pero también debido a que las tartas *à la crème* intuicionistas, para usar la ingeniosa denominación de Dieudonné (1983), pp. 103-105, no han dejado de ser la golosina de ciertos matemáticos y filósofos. Es así como en torno a la discusión de Poincaré contra Couturat y Russell se suelen distinguir con nitidez dos tipos de interpretaciones antagónicas. Entre quienes simpatizan con los lógicos y los logicistas se menciona a Goldfarb (1988) y a Detlefsen (1992), (1993), sin mucha justicia por cierto, mientras que entre quienes se declaran a favor de Poincaré se puede citar a Chihara (1994) y a McLarty (1997).

Ambos bandos poseen varios puntos importantes a su favor, pero a mi juicio ninguno puede reclamar la victoria definitiva, por la sencilla razón de que ninguno la tiene. En la mayoría de los escritos citados se puede apreciar una falta de apego a las cuestiones históricas sobre las cuales trascurre el debate, de tal suerte que se lanzan juicios a partir de sucesos posteriores o en relación con personajes lejanos al debate. No digo esto con un ánimo meramente purista, sino porque al perder la dimensión histórica se pierde también de vista cambios importantes en los significados que al pasar inadvertidos no conducen más que a malos entendidos. Y en este contexto en particular tales incomprensiones son difíciles de erradicar porque se esconden bajo la ilusión de que se sigue hablando de lo mismo. Más adelante daré varios ejemplos de lo que acabo de decir, pero un adelanto bastará para poner en claro a lo que me refiero. Chihara, art. cit., p. 438, afirma lo siguiente:

> Para Poincaré el conocimiento matemático era a priori, y hasta aquí estaba en acuerdo con los logicistas. En donde difería de logicistas tales como Frege, Hempel y Carnap era en la cuestión sobre si las verdades matemáticas eran o no analíticas, ya que asumió la posición de que éstas eran sintéticas... A diferencia de Frege, Hempel y

---

[2] *Cf.* Lukasiewicz (1936) y (1937): (1975), pp. 109-139. Para evitar malos entendidos observemos que Lukasiewicz mostró "que la logística no sólo no es la filosofía ni una rama de ella, sino que no está asociada con ninguna tendencia filosófica" (p. 129). Por ende, la lógica como disciplina científica autónoma no admite *necesariamente* un compromiso con el logicismo. Sin embargo, esto no significa que para Lukasiewicz no existiera una conexión, si bien no tan fuerte como la que exige el logicismo, entre lógica y matemáticas, y, en general, con toda rama del saber en la cual se ven involucrados razonamientos: "los logísticos buscan el mayor rigor posible, y ello puede alcanzarse mediante la construcción de un lenguaje tan preciso como sea posible... Por medio de esos signos queremos captar algunas leyes del pensamiento que serían aplicables a la matemática y a la filosofía, y a todas las disciplinas que hacen uso del razonamiento" (pp. 130 y 132).

Carnap, Poincaré pensaba que era absurdo suponer que las verdades matemáticas fueran analíticas, pues asumía que tenemos un conocimiento a priori de verdades sintéticas.

Al margen de si efectivamente para Poincaré una verdad matemática es una verdad sintética que se conoce a priori (cosa que veremos más adelante), desde el punto de vista histórico estos comentarios son extremadamente inadecuados porque, hasta donde se sabe, Poincaré nunca se ocupó de Frege, mientras que los textos de Hempel y Carnap, que parecen tener que ver con la cuestión, aparecieron muchos años después de la muerte del primero.[3] La pregunta obvia es, ¿por qué mencionó a estos pensadores y no a Couturat y a Russell, quienes eran los directamente involucrados en el debate? Hay, desde luego, en esta historia más *dramatis personae*, entre los cuales podríamos nombrar a Cantor, Peano, Burali-Forti, Zermelo y Hilbert, pero ninguno de ellos se ajusta a la comparación que pretende establecer Chihara.

Pero puede argumentarse que independientemente de la precisión histórica, Chihara no falta a la verdad puesto que, en efecto, para Frege, Hempel y Carnap, la matemática es analítica. Sin duda. Pero tampoco con ello se avanza demasiado puesto que *analítico* no significa lo mismo para Frege y para el dúo Hempel-Carnap (y no faltará quien afirme que estos dos últimos ni siquiera entienden lo mismo por tal término). Para Frege, un juicio analítico es aquel que se puede demostrar a partir de puros principios (y definiciones) lógicos, mientras que para los segundos, se trata de un juicio que es verdadero en virtud del significado de sus términos o de su forma. Este es el motivo por el cual Benacerraf ha dicho con humor que si Frege fue el primer logicista, también fue el último.[4] Pero también es posible preguntar si Poincaré y Frege entienden lo

---

[3] La conexión, sin embargo, se encuentra sugerida ya en la antología de Bencerraf y Putnam (eds.) (1983), en donde al texto de Hempel le sigue inmediatamente el artículo de Poincaré que Chihara somete a comparación. La influencia ejercida por este libro amerita dos comentarios: el criterio de agrupación de los compiladores fue sistemático (según los problemas que en ese entonces consideraron relevantes) y no histórico; por consiguiente, en el estudio introductorio hay una falta total de ubicación histórica sobre los materiales seleccionados (de hecho, sobre el artículo de Poincaré no hay comentario alguno). Como libro de texto, la compilación era una manifestación de la recomposición posanalítica de la filosofía estadounidense (como de hecho lo es también el alegato de Chihara, aunque de manera un tanto extemporánea); pero, a pesar de sus buenas intenciones no logra desembarazarse de la tendencia analítica a considerar sus opiniones y preocupaciones intelectuales como atemporales. *Cf.* Sobre estos últimos temas véase Barradori (1996), pp. 24ss.

[4] O como dice poco más adelante: "Hasta donde sé, nadie después de Frege –y ciertamente no los "logicistas" del siglo veinte-, ha precisamente sostenido la posición que Frege defendió en *Grundlagen* ni se han visto movidos por aquello que lo motivó a escribir esta obra maestra", Benacerraf (1995), p. 48. Por otra parte, no deja de ser irónico que en la primera parte del artículo Chihara lo dedica a criticar, con relativo acierto, la versión que Steiner presenta del logicismo en *Mathematical knowledge* (1975). Por ejemplo, una líneas más adelante continúa: "Debe ser claro ahora, independientemente de lo que se pueda pensar a partir de la lectura de la explicación que da Steiner del logicismo en el primer capítulo de su libro, que la disputa entre Poincaré y los logicistas – ciertamente logicistas del tipo ejemplificado por las concepciones de Frege, Hampel y Carnap - no fue sobre si el conocimiento matemático es

mismo por analítico,[5] o si el primero entiende lo mismo que Hempel y Carnap. Como respuesta podrá encontrarse que existen afinidades sorprendentes entre el primero y los últimos, pero para hacer completamente "conmensurables" ambos discursos tendríamos que reinventar a Poincaré o envejecer aún más a los segundos. En consecuencia, Chihara pretende hablar de lo mismo cuando en el fondo existen divergencias importantes que no se pueden soslayar.

Al respecto vale la pena tener presente, como lo ha señalado Dieudonné, art. cit., p. 107, que "el periodo 1895-1906 en que se sitúan las polémicas en las que participan, entre otros autores, Poincaré, Russell y Couturat, nos parece presa de una confusión extrema... de tal modo que intentar presentar esos debates bajo una forma coherente no sería más que traicionar la verdad histórica". Por tal motivo mi intención será darle continuidad al tipo de comentarios que se ha hecho en los capítulos anteriores, poniendo mayor énfasis en el contexto histórico del debate, limitándome a los aspectos principales y tratando siempre de entender los motivaciones que guían a unos y otros en la argumentación de sus propias posiciones y en la manera de hacer frente a sus adversarios. Para tal efecto, quizá sea necesario insistir en que en dicha polémica no existe, por ambas partes, una demarcación clara y tajante entre la lógica y el logicismo. Asimismo, se puede decir, como una aproximación provisional, que el objetivo final de este último consiste en la realización incuestionable de aquel ideal epistémico que Lakatos llamó *Programa Euclídeo*;[6] esto es, la imagen materializada de las ciencias matemáticas como un conjunto de sistemas que se encuentran perfectamente encadenados entre sí y que se deducen lógicamente a partir de un puñado de axiomas y definiciones igualmente lógicos y autoevidentes.

---

a priori, sino en verdad, sobre la naturaleza de la verdad matemática; esto es, sobre la cuestión ¿son tales verdades analíticas o sintéticas?". El comentario es equívoco no solo por las razones que ya se han indicado, sino porque para Carnap y Hempel (art. cit., § 4), las matemáticas son a priori, justo porque sus expresiones son analíticas.

[5] Debido a la afirmación marginal de Frege según la cual (al señalar que la clasificación usual de los juicios no corresponde a su contenido sino a su justificación) no pretende apartarse del sentido de los términos kantianos, sino tan solo precisarlo, ha dado lugar a pensar que el significado fregeano de analítico no difiere sustancialmente del kantiano. Chihara, siguiendo a De Pierris (1988), se apega a la tesis a costa de sacrificar o minimizar al máximo la observación más importante de Frege en la cual mantiene que el concepto de analiticidad kantiano es demasiado estrecho como para poder dar cuenta del sistema conceptográfico. Que la observación se encuentra plenamente justificada puede constatarse, ¡más allá de Frege!, en los estudios de Hintikka (1973), caps. 6-10, que revelan que la teoría cuantificacional sería, según el punto de vista de Kant, matemática y no lógica. De cualquier forma, más adelante volveremos sobre este punto, pero por ahora consúltese Benacerraf art. cit, pp. 44-46, para un comentario sobre la ampliación fregeana de analiticidad y su relación con los logicistas del siglo XX.

[6] *Cf.* Lakatos (1981), cap. 1. La reconstrucción que pretendo defender aquí difiere de la de Lakatos sobre todo en el acento que se le da al papel de la lógica (y por ende, a la concepción sobre la misma) en los intentos para la realización del programa. Soy conciente que esta primera caracterización del logicismo no se corresponde del todo con los pensadores involucrados, y ha de tomarse con reserva, ya que como se ha mencionado antes, a propósito de Chihara y Benacerraf, el logicismo de Frege es bastante peculiar, y, por ejemplo, sólo pretendía cubrir el ámbito de la aritmética elemental. En el caso de Russell, cuyo logicismo pasa por varias etapas, haré los comentarios y ajustes pertinentes cada vez que juzgue necesario.

En este sentido, podemos decir que el logicismo era, a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, un proyecto nuevo, con una lógica nueva, para la realización de un viejo sueño.

§ 2. El fantasma de Descartes

El obstáculo mayor que enfrentaban los simpatizantes logicistas del modelo euclídeo era sin duda la carencia de una lógica adecuada para llevar a cabo su empresa. A mediados del siglo XIX las limitaciones de la lógica tradicional para dar cuenta del razonamiento matemático eran ampliamente reconocidas. Desde los albores de la modernidad, Descartes, y, luego, Locke, se habían burlado de quienes creían en el valor epistémico de la teoría del silogismo. En particular, Descartes advertía que "los filósofos, al intentar explicar mediante las reglas de su lógica lo que por sí mismo es manifiesto, solamente han logrado arrojar oscuridad sobre ello".[7] Y Locke, por su parte, afirmaba que "todo el mundo percibe en las demostraciones matemáticas que el conocimiento que ofrecen se alcanza con mayor brevedad y más claramente sin el empleo de silogismos".[8]

El peso de semejante crítica puede medirse en parte estudiando la distinción que hacen los modernos y sus herederos entre *razón* y *lógica*. Kant es seguramente quien estableció de manera más sistemática dicha distinción a través de una nueva clasificación de las oraciones epistémicas,[9] pero, como hemos visto antes, entre los franceses A. A. Cournot es su par más distinguido y la influencia de ambos se deja sentir todavía en el joven Couturat y en Poincaré. Desde luego, me permito mencionar a Descartes y Locke porque su crítica la volvemos a encontrar, bajo un contexto y un aspecto distinto, en la polémica de Poincaré contra los logicistas.

---

[7] *Principes de la Philosophie*, § 10. Por supuesto, es más conocido el siguiente pasaje del *Discurso*: "Me di cuenta que, por lo que respecta a la lógica, sus silogismos y la mayor parte de sus restantes instrucciones sirven más bien para explicar a otro lo que ya se sabe o, incluso, como el arte de Lulio, para hablar sin juicio de lo que se ignora." Para un comentario más amplio sobre la crítica de Descartes véase Clarke (1981).

[8] *Ensayo sobre el entendimiento humano*, IV, cap. XVII, § 4.

[9] Vale la pena recordar que de acuerdo con Kant, la distinción analítico-sintético se encuentra ya, aunque de manera vaga, en Locke: "En el *Ensayo sobre el entendimiento Humano* de Locke encuentro ya indicada esta división. Pues en el libro 4, parte 3ª, párrafo 2º y siguientes, después de haber hablado ya de los varios enlaces de las representaciones en los juicios y de las fuentes de éstos, poniendo la una en la identidad o contradicción (juicios analíticos), y la otra en la existencia de las representaciones en un sujeto (juicios sintéticos), confiesa, en el párrafo 10, que nuestro conocimiento (a priori) de la última es muy estrecho y casi nulo. Solamente que, lo que dijo de este modo de conocer, es tan poco preciso y está tan poco sujeto a reglas". *Prolegomena*, § 3.

Por otra parte, Leibniz es sin lugar a dudas el defensor más audaz y creativo de la lógica en la modernidad. Consciente de las limitaciones del silogismo tradicional se dio a la tarea, sin conseguirlo, de crear una nueva lógica. Su fracaso se debió en gran medida a la gran diversidad de objetivos que debía cumplir. Tal es así que dicha lógica sería al mismo tiempo una lengua universal y un cálculo del pensamiento. Pero esta *charactistica universalis*, sería también un *ars inveniendi*; esto es, un arte por medio del cual se podrán descubrir nuevas verdades. En el prólogo a la *Conceptografía*, Frege se refería al proyecto leibniciano en los siguientes términos:

> También Leibniz conoció la ventaja de un modo de simbolización adecuado. Su idea de una característica general, de un *calculus philosophicus* o *ratiocinator*, era tan gigantesca que el intento de desarrollarla hubo de quedarse en meros preparativos. El entusiasmo que prendió en su creador cuando ponderó el inmenso incremento de la capacidad mental humana que podría surgir de un método de simbolización apropiado a las cosas mismas, lo hizo estimar demasiado estrechamente las dificultades que se oponen a una empresa así. Pero si tampoco se puede alcanzar tan alta meta en un intento, no hay que desesperar en obtener una aproximación más lenta, paso a paso. Si una tarea parece irresoluble en su plena generalidad, provisionalmente se la ha de limitar; pues tal vez, se la logre vencer por medio de ampliaciones graduales.

Al situarse en la ruta de Leibniz, Frege sugería en buena medida en qué sentido había de entenderse el propósito de su conceptografía. Pero la influencia del primero no se limita al papel de precursor del logicismo fregeano, sino que va más allá al convertirse también en la fuente que inspira los proyectos de Peano, Schröder y Russell. Es debido a este vínculo por lo cual Couturat, lleno de entusiasmo, declara sin reparos que los trabajos de Russell y Peano venían a decidir definitivamente el debate, largamente postergado, entre Leibniz y Kant. Pero el comentario apresurado y desafiante de Couturat lo único que hizo fue echar más leña al fuego.[10]

[10] Aunque en realidad Couturat hacía eco a un comentario de Russell en *Principles* (§ 4): "Hasta hace poco había una dificultad especial en los principios de la matemática. Parecía evidente que la matemática consiste en deducciones, pero los cálculos ortodoxos de la deducción eran casi o totalmente inaplicables a la matemática existente... De este hecho toma su fuerza el punto de vista kantiano, el cual afirma que el razonamiento matemático no es estrictamente formal, sino que siempre usa intuiciones; es decir, el conocimiento a priori del espacio y del tiempo. Gracias al progreso de la lógica simbólica, especialmente tal como es tratada por el profesor Peano, esta parte de la filosofía kantiana es, actualmente, susceptible de una definitiva e irrevocable refutación". Para un tratamiento más amplio del logicismo russelliano como una refutación de la filosofía de las matemáticas kantiana, véase Hylton (1990).

§ 3. La filosofía de las matemáticas kantiana

Como todo mundo sabe, para Kant las expresiones de la matemática pura son juicios sintéticos a priori. Son a priori porque traen consigo necesidad y universalidad, lo cual no puede otorgarse por medio de la experiencia, pero son sintéticos porque el establecimiento de su verdad no depende del simple análisis de sus conceptos. El ejemplo clásico, para el caso de la aritmética, es que en 5 + 7 = 12 encontramos que el resultado no se desprende de la reunión de los dos números de la suma, sino que se requiere de la intuición para fijar su enlace. Gracias a la intuición se construye un nuevo concepto, y de esta forma se amplía nuestro conocimiento, ya que el nuevo concepto no estaba incluido en ninguno de los primeros. El otro ejemplo, para el caso de la geometría, es que la expresión "la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos", es igualmente un juicio sintético porque los conceptos 'línea recta' y 'punto' no incluyen referencia alguna a la magnitud, y, por consiguiente, el concepto 'distancia más corta' es un concepto añadido o construido a través de la intuición.

Los juicios analíticos, por otra parte, dependen del principio de no contradicción en tanto que no pueden ser negados sin caer en contradicción. Por ejemplo, según Kant "el oro es un metal amarillo" es, a pesar de su contenido empírico, un juicio analítico porque su negación lleva necesariamente a una contradicción debido a que en el concepto 'oro' se suponen los conceptos 'metal' y 'amarillo'. Desde luego, no faltarán los aguafiestas que afirmen que en el concepto '12' se encuentra ya incluida su descomposición en '5' y '7', y que, por consiguiente, la negación del juicio mencionado antes lleva igualmente a una contradicción. Pero qué más da, si como dice Kant en otro lugar, las fórmulas numéricas son "inmediatas" e "indemostrables" (A 164 = B 204).[11]

Lo cierto es que un juicio analítico puro, como los de la lógica, expresa ante todo algo que de antemano se encuentra de algún modo en las premisas. El juicio "Todo A es C" se deduce

[11] Esto último entra en pugna con la observación de que se recurre a la intuición correspondiente a cada uno de los conceptos en cuestión, ya sea pensando en los 5 dedos de la mano, etc., con lo cual se admite que el proceso de reconocimiento de su verdad no es tan inmediato. Pero también hay cierta incompatibilidad entre la afirmación de que el carácter sintético de la aritmética se aprecia mejor considerando "números algo mayores", ya que, independientemente de la vaguedad sobre el qué tan mayores deban ser esos números, es claro que la intuición tomará mayor tiempo conforme los números sean más grandes. Frege (1884), § 5, haciendo eco a una crítica de Hankel, formula una objeción similar: "¿es inmediatamente evidente que 135664 + 37863 = 173527 sea correcto? No. Y precisamente esto es aducido por Kant a favor de la naturaleza sintética de estas proposiciones. Sin embargo, más bien habla en contra de que no puedan ser probadas; pues ¿cómo podrían ser examinadas, si no es por medio de una prueba, ya que no son inmediatamente evidentes? Kant acudió, en demanda de ayuda, a la intuición de los dedos o de puntos, con lo cual corrió el riesgo de hacer aparecer a estas proposiciones, en contra de su propia opinión, como empíricas".

lógicamente de las premisas 'Todo A es B' y 'Todo B es C', al descomponer por medio del análisis cada uno de los conceptos involucrados en ellas. En resumen, el fundamento de un juicio analítico es la descomposición de conceptos mientras que el fundamento de un juicio sintético es la construcción de un nuevo concepto por medio de la intuición. Ambos tipos de juicios discurren por caminos opuestos. Así, de la naturaleza sintética de las matemáticas se desprende que la deducción lógica juega un papel menor, o si ustedes prefieren, nulo, en la inferencia matemática.

§ 4. La posición de Poincaré antes del debate sobre el valor de la lógica y el logicismo

Ahora bien, Poincaré era al parecer un kantiano en cuestiones de aritmética, aunque como hemos visto en el capítulo anterior no parecía serlo con respecto a la geometría, puesto que los juicios geométricos no eran para él más que definiciones métricas disfrazadas de proposiciones. Por consiguiente, se trata de un kantiano poco ortodoxo o, si se prefiere, de un kantiano a medias. Pero el caso es que en 1894 publicó un ingenioso ensayo, "Sobre la naturaleza del razonamiento matemático", en el cual rescribe a su modo la concepción kantiana de la aritmética y de la lógica. Su punto de partida es el dilema que se presenta cuando se da por sentado que la matemática es deductiva en sentido lógico, entendiendo por ésta última una ciencia encerrada en sus propios principios e imposibilitada para poder ir más allá de ellos; es decir, según este enfoque la lógica (tradicional) es esencialmente un conjunto de identidades que no pueden producir nuevos conocimientos, de tal forma que si el razonamiento matemático discurriera según el patrón de la lógica, estaría condenado a la misma esterilidad.[12] Pero como este no es el caso, ya que su fecundidad se encuentra fuera de toda duda. La pregunta obligada es ¿de qué manera procede entonces el matemático?

Poincaré observa que si abrimos un libro de matemáticas cualquiera, su imagen deductiva resulta más problemática, porque de un momento a otro se encontrará que el autor en cuestión intentará generalizar un resultado ya conocido. Notaremos entonces que el matemático de manera invariable buscará ir de lo particular a lo general, puesto que el objeto final de toda ciencia es

[12] "Si esta ciencia no es deductiva más que en apariencia, ¿de dónde proviene ese rigor perfecto que nadie piensa poner en duda? Si, por el contrario, todas las proposiciones que enuncia pueden deducirse unas de otras por las reglas de la lógica formal, ¿cómo no se reduce la matemática a una inmensa tautología?". Poincaré (1894), p. 371; (1902), p. 31; (1943), p. 17.

alcanzar conocimientos generales. Y si la lógica es deductiva porque procede según el orden inverso, esto es, de lo general a lo particular, ¿cómo puede ser la matemática deductiva?

Para Poincaré es claro que no hay forma de ofrecer una respuesta positiva a semejante pregunta, ya que lo único que queda hacer es asumir el reto de averiguar la forma como el matemático alcanza la generalidad, y, consigue esa "virtud creadora" que le distingue de la lógica. Y para ello, basta examinar aquel principio que represente de manera elemental y paradigmática la forma de operar del razonamiento matemático. El principio que mejor parece ajustarse a tales exigencias es la demostración por recurrencia o principio de inducción completa. Enunciado de manera un tanto grosera, puede decirse que este principio nos permite pasar de la comprobación directa de que la propiedad ***P*** se cumple para ***x*** y ***y***, a la afirmación de que la misma propiedad se aplica igualmente a todos los miembros de la serie a la que pertenecen ***x*** y ***y***.

Ahora bien, de acuerdo con Poincaré, lo que hace a este procedimiento particularmente interesante es que "contiene condensados, por decirlo de alguna forma, en una forma única, una infinidad de silogismos". Es decir, la forma como semejantes silogismos se encadenarían unos con otros sería tomando la conclusión del silogismo precedente como premisa del siguiente silogismo, lo cual podemos representar más o menos de la siguiente forma:

1) P vale para 1
2) Y si P vale para 1, también vale para 2
 Por lo tanto, P vale para 2
1) Luego si P vale para 2, vale igual para 3
 Por lo tanto P vale para 3,
 y así sucesivamente...

Pero hay que tener presente que no estamos realmente ante la forma como procede el razonamiento por recurrencia, sino que tan sólo se ha señalado la manera como se explicaría si efectivamente atrás de él se encontrara un mecanismo lógico. Dicho de otra forma, el razonamiento por recurrencia expresa en una sola fórmula lo que a la lógica le costaría una infinidad de silogismos. Desde luego, por este último medio se podrá *verificar* una amplia variedad de casos finitos, por grandes que puedan ser los números en cuestión, pero será siempre imposible *probar* el principio por medios puramente analíticos.[13] Pero eso no es todo, si el principio es imposible de demostración por la vía lógica, esto mismo es ya un indicio de que se trata de una expresión indemostrable, y, por consiguiente, debe tratarse de un axioma. Pero si la

[13] Zahar (2001), p. 144, parece no contemplar este argumento cuando escribe: "Note that by accepting -en bloc- mathematical induction as a synthetic a priori principle, Poincaré obviates the difficulty of regarding it as an *actual infinity* of syllogisms". Las cursivas son del autor.

lógica es incapaz de ofrecer una demostración de esta fórmula por medio del silogismo, también es claro que tampoco se podrá alcanzar recurriendo a la experiencia, ya que lo que se pueda verificar por medio de la evidencia empírica, lo cual siempre se encontrará con un límite, podrá formularse a través de la lógica y, de nuevo, su generalidad será inasible. En palabras de Poincaré, "no podemos, por consiguiente, sustraernos a la conclusión de que la regla del razonamiento por recurrencia es irreductible al principio de contradicción".[14]

La conclusión es especialmente pertinente porque la imposibilidad de la demostración lógica muestra a su entender que se está ante un genuino juicio sintético a priori. Sin embargo, en otro lugar, Poincaré (1902), pp. 74 y 75, admite que el hecho de no poder fundar una aritmética distinta a partir de la negación del principio, tal y como ocurre con el postulado de las paralelas y las geometrías no euclidianas, permite suponer que se trata en apariencia de un juicio analítico. Pero la observación es tan escueta que no se toma la molestia de mostrar que se trata solo de una apariencia y porqué es así, de tal manera que el lector tiene que contentarse con la ulterior explicación de que la evidencia irrefutable del principio por recurrencia no puede más que provenir de la "afirmación de la potencia del espíritu que se sabe capaz de concebir la repetición indefinida de un mismo acto, desde que ese acto es posible una vez".[15]

Todo lo anterior es, en lo esencial, el planteamiento de Poincaré previo a su debate con Couturat y Russell.[16] En particular, llama la atención la concepción extremadamente moderna de la lógica que exhibe su escrito. Incluso, como Descartes, Poincaré sostiene que la lógica si ha de servir para algo, lo será sólo para verificar lo que ya se sabe, pero nada más.[17] Para ilustrar este punto de vista, examina la demostración que da Leibniz en *Nouveaux Essais*, IV, VII, 10, de la suma 2 + 2 = 4, de acuerdo con la cual a partir de las definiciones a) 1 + 1 = 2, b) 2 + 1 = 3, y c) 3 + 1 = 4, más el axioma de sustitución de la identidad (*salva veritate*), se alcanza la demostración de la suma por medio de la sustitución repetida de las definiciones. Este razonamiento es sin duda analítico, pero opina que se trata de una verificación y no de una verdadera demostración; esto es, "la verificación difiere precisamente de la verdadera demostración en que es puramente analítica y porque es estéril. Estéril porque la conclusión no es más que la traducción de las

---

[14] Poincaré (1894), p. 381; (1902), p. 41; (1943), p. 26.
[15] (1894), p. 382; (1902), p. 41; (1943), p. 27.
[16] El profesor Torretti afirma, (1998), p. 308, que "Poincaré rechazó el intento de basar la matemática en la lógica porque la edificación rigurosa de la lógica requiere de la inducción completa", pero esta posición remite a la fase final de la discusión de Poincaré con los logicistas.
[17] Véase a este respecto la cita de la nota 6.

premisas a otro lenguaje. Por el contrario, la demostración verdadera es fecunda porque su conclusión tiene un sentido más general que las premisas" (1984), p. 373, (1902), pp. 33, 34.

Sin embargo, Poincaré no ofrece una demostración de la citada suma y en cambio se limita a ofrecer la definición de la operación de adición, que es ciertamente general; pero ¿cómo se puede pasar de la definición de adición, $x + a = [x + (a - 1)] + 1$, a la demostración de $2 + 2 = 4$, y de paso, alcanzar mayor generalidad en la conclusión?, o ¿acaso una suma particular admite únicamente una verificación puramente analítica, o, como decía Kant, son fórmulas que resultan inmediatamente evidentes a través de la intuición?[18]

Al margen de las cuestiones anteriores, un examen más detenido nos permite advertir que existe además un desplazamiento en la argumentación, muy sutil, sobre las causas que motivan la insuficiencia de la lógica para tratar con la inducción completa. En efecto, se inicia declarando la esterilidad de la lógica debido a su carácter tautológico, pero al final lo que resulta decisivo no es el rasgo analítico (esto es, el hecho de que la conclusión de sus juicios se limite a repetir algo que de alguna forma se encuentra ya en las premisas), sino ante todo, que la cadena de silogismos hipotéticos no se pueda prolongar *ad infinitum*. Pero es evidente que las razones de tal limitación no se encuentran en la lógica tradicional en sí misma, sino en la condición finita del ser humano. Dicho al revés, la lógica sería analítica porque su alcance es finito.

Pero hay además, entre sus escritos un número de afirmaciones y argumentos nada despreciable que parecen entrar en colisión con la imagen kantiana de la aritmética que trata de defender. Señalo por lo pronto uno muy evidente. En repetidas ocasiones, Poincaré hace notar que el único criterio legítimo de existencia matemática es la ausencia de contradicción o, dicho de otro modo, la coherencia interna de los objetos postulados; esto es, "un ente matemático existe con tal que su definición no implique contradicción, sea consigo mismo, sea con las proposiciones anteriormente admitidas". Este no deja de ser un criterio extraño para una ciencia cuyos principios no se sujetan al principio de no contradicción.

---

[18] Quizá no está de más recordar que la demostración de Leibniz se presenta contra la opinión de Locke de que tales sumas no requieren demostración. Para Frege (1884), § 5, la demostración de Leibniz es incompleta, mientras que la definición de adición de Poincaré sería inadecuada pues, como ocurre con la definición de Grassmann y Hankel, el signo por definir aparece en ambos lados de la definición.

§ 5. Vailati entra en escena

En el fondo, la situación es un tanto desconcertante, ya que la pretendida imposibilidad de una demostración lógica del principio no tiene la fuerza que aparentemente ostenta a primera vista, al menos como Poincaré la presenta aquí. Su debilidad reside en aceptar que se podría representar el principio por recurrencia por medio de una cadena de silogismos hipotéticos si no fuera por el hecho de que estos no se pueden prolongar al infinito. Pero, desde luego, se podrá rechazar justamente esto último argumentando que tal imposibilidad no ha sido demostrada de manera contundente, mientras que, por el contrario, puede afirmarse que es justo una cadena infinita de silogismos lo que esconde el principio de inducción completa, o bien, se puede afirmar que es posible demostrar el principio por medio de una serie finita de silogismos.

La primera de ambas opiniones fue defendida por Giovanni Vailati (1898); la segunda, por Pierre Duhem (1912). Me ocuparé aquí por lo pronto del primero y más adelante del segundo a pesar de que el comentario de Vailati se limita a una nota al pie, mientras que la crítica del último llena un artículo completo. La razón principal obedece a que estaremos hablando de un pensador asociado a la escuela de Peano, y, por consiguiente, es de esperarse que el desacuerdo con Poincaré sea de proporciones más amplias, mientras que a Duhem se le puede acusar de todo, menos de mostrar inclinaciones logicistas. Pero esto no es todo, desde el punto de vista histórico el escrito de Vailati es cronológicamente más cercano al citado alegato de Poincaré (además ambos textos aparecen en la misma revista), y, lo que resulta a fin de cuentas más importante, porque allí presenta una concepción de la lógica completamente novedosa y contraria a la imagen que Poincaré se ha formado acerca de la misma . Por otra parte, no sabemos si leyó o no este texto de Vailati, pero lo que si podemos inferir es que si lo hizo, no le causó la menor perturbación conceptual, ya que no reaccionó como sería imaginable y más tarde incluiría su artículo, tal cual, como primer capítulo de *La Science et L'Hypothèse*. Aunque en lo personal me inclino a pensar que simplemente no logró llamar su atención.[19]

El título del artículo de Vailati: "El método deductivo como instrumento de investigación", sugiere una revaloración de la lógica en la línea de Leibniz y, en particular, en el sentido de un

[19] Hay varios cambios menores entre la primera versión y la que aparece en el citado libro (elimina, por ejemplo, una cita Ballue, simplifica las "fastidiosas" demostraciones de las propiedades aritméticas, y enmienda un que otro desliz), pero la esencia del tema y la argumentación es la misma: "¿Cuál es la naturaleza del razonamiento matemático? ¿Es realmente deductivo como ordinariamente se cree? Un análisis profundo nos muestra que no es así; que participa en cierta medida de la naturaleza del razonamiento inductivo, y que por eso es fecundo. Pese a ello no pierde en absoluto su carácter de rigor absoluto; esto es lo primero que habremos de demostrar". Poincaré (1902), p. 25; (1943), p. 15.

ars inveniendi; esto es, como una herramienta que permite descubrir nuevas verdades en los campos más diversos del saber. Pero a diferencia de Leibniz, Vailati no concibe el método lógico como un conjunto de algoritmos destinado a engendrar verdades de forma automática y mecánica, y, es a causa de esta divergencia, que quizá sea más conveniente identificarlo, como lo hizo Aristóteles, como el *Organon* de las ciencias. Sin embargo, aunque el campo de aplicación del método deductivo es muy amplio, Vailati remite todos sus comentarios y ejemplos a la historia de la mecánica.[20] Su tesis principal, que hoy puede parecer modesta pero sólo a falta de perder dimensión histórica, se puede enunciar así: de los dos métodos disponibles para obtener conocimiento; esto es, el método inductivo y el método deductivo, el que goza de mayor poder y fecundidad es el segundo método, ya que es por medio de él como se llega a la verdadera ley científica, mientras que por el primero sólo se logra una serie de generalizaciones que no representan más que un estadio inferior y superable en el desarrollo conceptual de toda ciencia.

Obviamente, en la óptica de Vailati la lógica lejos de ser una ciencia estéril y encerrada en sus propios principios, es un instrumento cognoscitivo valioso cuya aplicación se puede y debe extender con beneficio a todas las ramas del saber. No se trata pues de una mera *propedéutica* condenada a figurar como *der Vorhof der Wissenschaften* (el vestíbulo de las ciencias), como le había sentenciado Kant. De hecho, Vailati es consciente de que de la imagen negativa de la lógica heredada por la modernidad sigue vigente en su época, y busca revertir los equívocos sobre los cuales se ha construido. En primer lugar, recuerda que ya el mismo Aristóteles había hecho suficiente énfasis en que la única necesidad que detenta la lógica depende de que se acepten como verdaderas las premisas, pues una vez concedido esto se tendrá que aceptar necesariamente la verdad de la conclusión, si ella se deduce de las premisas.[21]

Que las proposiciones que conforman las premisas sean *de hecho* verdaderas, depende de varios factores, entre los cuales se pueden contar la evidencia empírica o la evidencia lógica a su favor; y a juicio de Vailati es en el énfasis puesto en los extremos de la deducción lo que separa a la ciencia antigua de la moderna,[22] ya que los primeros se ocuparon demasiado en garantizar la

---

[20] De hecho, este texto es la lección inaugural del curso sobre historia de la mecánica que impartió entre 1896 y 1899 en la universidad de Turín. Contamos con una traducción de varios de los materiales que sirvieron para ese curso, pero el citado ensayo no se encuentra incluido en dicha colección. *Cfr.* Vailati (1947).

[21] Vailati (1898), p. 670. Y añade: "No menos numerosos y explícitos son los pasajes en las obras de Aristóteles en donde se insiste sobre la irracionalidad o lo inherentemente absurdo de la creencia de que la deducción sea la única fuente de certeza".

[22] "La opinión comúnmente admitida que hace consistir dicha diferencia en la simple sustitución de un pretendido método que procede por medio de afirmaciones a priori y por pura deducción, por un nuevo método, fundado en la experiencia y la observación, lejos de entender y agotar los rasgos verdaderamente esenciales por medio de los

verdad de las premisas, mientras que los segundos centraron su atención en la comprobación de la conclusión; esto es, si lo que se deduce (o predice) se puede corroborar experimentalmente, entonces las premisas deberán considerarse como verdaderas.

Como ya se ha dicho, para apoyar sus puntos de vista Vailati recurre a ejemplos tomados de la historia de la mecánica (i.e., Gassendi, Descartes y Galileo). Es a primera vista paradójico, o hasta cierto punto irónico, que sean precisamente algunos de los críticos de la lógica de quienes se vale Vailati para ilustrar sus opiniones; pero el dilema se resuelve tan pronto como explica los motivos que alentaron la imagen negativa de la lógica. Por un lado, reconoce el abuso que hicieron los escolásticos del método deductivo para hacer valer toda clase de prejuicios y dogmas; aunque también observa que los ataques a la lógica hubieran sido menos violentos si se hubiese distinguido correctamente entre el método deductivo y los errores y prejuicios que se intentaron hacer prevalecer por medio de éste método. Asimismo, reconoce que hay silogismos circulares y por completo improductivos, pero añade que falta fundamento para generalizar las características de dichos silogismos a todos los demás razonamientos lógicos. De cualquier forma, queda sin explicar si, por ejemplo, Descartes era consciente de que hacía uso del aparato lógico del cual renegaba, o si había una divergencia sustancial entre esa lógica "natural" empleada por los físicos del renacimiento y la silogística escolástica. Pero las posibles respuestas a estos cuestionamientos tampoco nos interesan por ahora.

Más importante para nuestros propósitos es notar que de acuerdo con Vailati, la ideología empirista, de la cual Bacon fue en gran medida el responsable, tiende a confundir los papeles que cumple la inducción y la experimentación en el avance del conocimiento, ya que, por ejemplo, en la mayoría de los casos relevantes, la experimentación no tiene otro papel que el de *verificar* aquellos resultados que se han obtenido por vía deductiva, Vailati (1898), p. 674. En cuanto a la inducción empírica, un examen detallado muestra que no goza de las virtudes que suelen atribuirle sus defensores, ya que su alcance productivo es tan limitado, que nadie osaría afirmar que las leyes más representativas de la física se hayan conseguido por este método. Por último, con respecto al papel de la inducción y la deducción en la matemática, la opinión de Vailati es igual de contundente:

> Que la deducción haya afirmado, en cierta medida desde hace siglos, su dominio exclusivo y absoluto en la geometría, y, en general, en las ciencias matemáticas; esto

---

cuales los nuevo procedimientos de investigación se distinguen de los antiguos, parece dejar fuera de consideración precisamente aquellos que se pueden tener como los más fundamentales y de los cuales aquellos no son nada más que puras consecuencias". *Ibid.*, p. 681.

> es, en el único dominio en donde se ha acertado suprimir completamente, y al parecer de forma definitiva, toda injerencia directa de la inducción, no debe sorprender si se observa cómo, por medio de los axiomas y las relaciones fundamentales empleadas continuamente en matemáticas, se verifican de manera absolutamente completa las condiciones que se habían reconocido ya como necesarias y suficientes para la aplicación de la deducción.[23]

Desde este punto de vista, la inducción matemática no guarda más relación con la inducción empírica que la coincidencia puramente nominal ya que, *de hecho*, la inducción completa consiste en una serie infinita de deducciones en la cual la conclusión de cada paso sirve de premisa para el siguiente. Pero nótese también que para Vailati es la inducción empírica la que funge como un método de verificación, mientras que la lógica matemática cumple un papel heurístico, y, por consiguiente, es productiva. En suma, Vailati defiende aquí justo todo aquello que Poincaré niega en su famoso escrito. Como resumen será conveniente enumerar las tesis de ambos como un cuadro de oposiciones:

P(1): La lógica es un conjunto de tautologías, y por consiguiente, estéril, incapaz de ofrecer nuevos conocimientos.
V(1'): La lógica nos permite ir de lo conocido a lo desconocido, y, por tanto, es productiva y puede emplearse con beneficio en todas las ciencias.
P (2): La demostración analítica (lógica) no es propiamente una demostración, sino un método de verificación.
V (2'): Es la inducción empírica la que cumple una función meramente verificacionista.
P(3): La matemática es sólo en apariencia (o parcialmente) deductiva.
V(3'): La matemática es el modelo de ciencia deductiva.
P(4): La inducción matemática es análoga a la inducción empírica, pero difieren en su grado de certeza.
V(4'): El principio de inducción completa es un esquema deductivo.

§ 6. Logística, analicidad y logicismo

Ahora bien, como señalé antes, Poincaré se mostró totalmente indiferente ante la visión opuesta sobre la lógica de Vailati, y haría lo mismo un año más tarde, cuando este último ofrece al ambiente filosófico francés, lo que bien podríamos llamar la "carta de presentación" del proyecto de Peano. En este nuevo escrito, "La lógica matemática y su nueva etapa de desarrollo en los

[23] "Y, ciertamente, las relaciones entre cantidades o entre figuras que designamos mediante las palabras "igual a, más grande o más pequeño que", "coincide con", "función de", etc., "tiende hacia el mismo límite", "equivale a", "proyecta a", etc., son todas ellas relaciones tales que, del hecho de que se den entre una cantidad o una figura y otra cantidad u otra figura, y a su vez entre estas segundas y otras terceras, se puede concluir, *independientemente de cualquier constatación directa*, que las mismas relaciones se dan entre las primeras y las terceras". *Ibid.*, pp. 691-2.

escritos de Peano", [24] Vailati resumía el estado actual de la disciplina, a la vez que situaba el trabajo de su maestro como la culminación de una serie gradual de desarrollos.

Entre las distintas novedades se informaba que el prefacio de un escrito de Peano sobre el cálculo de extensión de Grassmann, de 1888, era "un resumen de las reglas fundamentales del cálculo lógico, que tiene como objeto preparar al lector sobre el empleo que se hace de ellas en las demostraciones geométricas que aparecen en el resto de la obra". Y añadía: "Sería la primera vez que la lógica simbólica se presenta como un instrumento creado en vista de su aplicación inmediata a una rama particular de la investigación científica".[25] Ambas declaraciones no eran del todo exactas, ya que, por un lado, las reglas lógicas aludidas eran más que nada reglas de transformación (como las leyes de De Morgan) y su uso en las demostraciones geométricas era bastante limitado; y, por el otro lado, Frege se les había adelantado casi una década y es él quien en realidad carga con el mérito de ser el primero en crear un sistema lógico con el propósito expreso de aplicarlo en la fundamentación de la aritmética.

Pero al margen de estos últimos comentarios, lo relevante para nuestro propósito inmediato es resaltar que el texto de Vailati da fe de dos circunstancias inadvertidas hasta ese momento para el grueso de la comunidad filosófica. La primera es la constatación de un progreso notable en el perfeccionamiento y ampliación de la lógica, de tal forma que la lógica tradicional queda encerrada en la teoría de clases; mientras que la segunda señala la aplicación aparentemente exitosa del nuevo aparato lógico a ramas especificas del conocimiento matemático.[26] Ambos hechos, hoy bastante evidentes, adquieren su adecuada dimensión histórica a la luz de la imagen predominante en ese momento. En efecto, la concepción de la lógica como una ciencia fundada en principios analíticos, en sentido kantiano, y, por lo tanto, incapaz de producir nuevos conocimientos, lleva de manera natural a pensar que se trata de una ciencia acabada, sin posibilidad de progresos ulteriores, puesto que no hay más que preguntarse ¿cómo puede avanzar una ciencia que no puede más que producir equivalencias de los principios de identidad y de no contradicción? Como sabemos, ésta era la opinión de Kant, pero también es algo que se halla implícito en el alegato de Poincaré comentado hace un momento.

---

[24] *Cfr.* Vailati (1899). Poco después Couturat, [13] y [21], publicó dos ensayos críticos sobre la obra de Peano y su escuela.

[25] Vailati (1899), p. 94. *Cfr.* Peano (1958), pp. 3-19.

[26] "La lógica deductiva, dice Vailati (1899), p. 86, en las primeras líneas de su artículo, se relaciona con las ciencias matemáticas por medio de una doble conexión. En primer lugar, es justo en esas ciencias en donde el razonamiento deductivo se manifiesta bajo su forma más completa y exhibe la medida de su poderío, tanto como medio de prueba y demostración, así como instrumento de investigación y de construcción ideal".

En las lecciones precríticas sobre lógica, afirma Kant: "En los últimos tiempos no ha habido ningún lógico famoso, pero tampoco necesitamos nuevos descubrimientos en lógica puesto que sólo contiene la mera forma del pensar"; pero son sin duda las primeras líneas del prólogo a la segunda edición de la *Crítica de la Razón Pura* las más conocidas: "Lo curioso de la lógica es que tampoco haya sido capaz, hasta hoy, de avanzar un solo paso. Según todas las apariencias se halla, pues, definitivamente concluida... los límites de la lógica están señalados con plena exactitud por ser una ciencia que no hace más que exponer detalladamente y demostrar con rigor las reglas formales de todo pensamiento, sea este a priori o empírico, sea cual sea su comienzo o su objeto, sean los que sean los obstáculos, fortuitos o naturales, que encuentre en nuestro psiquismo" (B, VIII, IX).

No es necesario insistir en lo desacertado que resultaron ambas apreciaciones a la vuelta de un siglo. De cualquier forma, Kant estaba plenamente justificado en pensar de esa forma, puesto que el genio lógico de Leibniz sería un descubrimiento propio de los primeros años del siglo XX, cuya paternidad recaería principalmente en Couturat.[27] Porque si Kant se encuentra con el paso del tiempo en una situación inadmisible con respecto a la lógica y a la geometría, ciertamente no es a causa de una ignorancia negligente, sino todo lo contrario, debido a un apego riguroso, demasiado riguroso, al estado del conocimiento de su época. En todo caso, cabe preguntarse en qué medida la idea de la lógica como un sistema completo y limitado a las formas tradicionales del silogismo condiciona la concepción kantiana sobre la misma. Asimismo, cabe plantearse por qué Poincaré fue tan refractario en aceptar el cambio y la ampliación del dominio de la lógica que se venía dando desde de la obra de De Morgan hasta Peano y Schröder, si en cierta forma algo similar estaba ocurriendo en la geometría.

Pero dejemos en suspenso ambas cuestiones y volvamos mejor un momento a la confrontación apócrifa entre Poincaré y los logicistas que describe Chihara, con el objeto de atraer la atención sobre dos aspectos importantes involucrados en el debate, pero que se encuentran poco diferenciados y propensos a confusión o a pasar desapercibidos. El primero de ellos podría llamarse el reto de Poincaré a los logicistas (del tipo que sea) y consiste en la siguiente cuestión,

---

[27] Incluso no hay que perder de vista que el reconocimiento de Leibniz como un filósofo importante se fue alcanzando de manera paulatina a lo largo del siglo XVIII conforme se fueron editando y reeditando sus escritos. Por el lado de la lógica, las ideas sobre una característica y una *mathesis universalis* causaron cierta influencia en pensadores como Lambert y Ploucquet, pero ninguno de ellos tuvo acceso a los cálculos leibnicianos, y sus esfuerzos se limitaron a redescubrir algunas de sus innovaciones. Sobre la recepción de Leibniz como filósofo en el siglo XVIII véase Wilson (1995), y Barber (1955); y sobre la recepción e influencia del programa leibniciano sobre una característica universalis, véase Peckhaus (1997), cap. 3 y 4.

si la matemática fuese puramente lógica, ¿cómo se puede explicar su productividad? o, para decirlo con Poincaré ¿cómo es que no se reduce a una enorme tautología? El segundo podemos llamarlo el dilema del doble sentido, y consiste en el contraste que se presenta entre el propósito de los logicistas por fundamentar o explicar el fundamento del conocimiento matemático a partir de la lógica, y, el propósito de Poincaré por explicar el progreso y la creatividad del conocimiento matemático.

Con respecto a la primera cuestión cabe destacar que hay un cierto grado de vaguedad en el planteamiento en sí, en tanto no se especifica del todo en qué consiste la naturaleza productiva del razonamiento matemático. Sin duda, la ampliación continua del dominio matemático es un hecho y, por consiguiente, se puede aceptar sin reparos que cada vez se consiguen nuevos conocimientos a través de nuevos sistemas o teorías pertenecientes al dominio matemático; sin embargo, queda pendiente por averiguar en qué consisten dichos conocimientos, o, para decirlo de otro modo, sobre qué versan las verdades matemáticas. Ciertamente, no versan sobre el mundo en el mismo sentido como, digamos, la teoría de la relatividad se ocupa de los fenómenos físicos. De hecho, al poner las cosas en estos términos estamos admitiendo implícitamente una suerte de cuasiempirismo que no encontramos ni en Poincaré ni en el logicismo de empiristas lógicos como Carnap y Hempel, porque para todos ellos es claro que las verdades matemáticas no remiten a ningún aspecto de la realidad, o para decirlo en los términos de los últimos, no son portadoras de información factual. Pero si las expresiones matemáticas carecen de información factual, entonces ¿qué tipo de información trasmiten?

En el caso de Poincaré, las matemáticas son el lenguaje que usa el científico para la descripción de los fenómenos naturales. En este sentido, se trata de un instrumento, y, por consiguiente, cada nueva teoría matemática contribuye al enriquecimiento de ese lenguaje. Pero una vez que se admite que se trata de un lenguaje artificial, también habrá que aceptar que como tal implica un grado mayor de convencionalidad en la descripción. Así, por ejemplo, "diremos que la geometría es el estudio de un conjunto de leyes, poco diferentes de aquellas a las que realmente obedecen nuestros instrumentos, aunque mucho más simples; leyes que no rigen efectivamente a ningún objeto natural, pero que son concebibles por el intelecto. En este sentido, la geometría es una convención, una especie de arreglo entre nuestro amor por la simplicidad y nuestro deseo de no apartarnos demasiado de lo que nos enseñan los instrumentos. Esta convención define a la vez el espacio y el instrumento perfecto" (Poincaré, 1912, pp. 40-41).

Hasta donde he podido estudiar, la cuestión sobre la propiedad productiva de la matemática no fue nunca un preocupación importante entre los empiristas lógicos. Lo poco que puede leerse al respecto son los breves comentarios del capítulo cuarto del *Lenguaje, Verdad y Lógica* de A. J. Ayer, 1971, p. 106, en donde se dice en parte, de manera muy general, "que hay un sentido en el que las proposiciones analíticas nos dan un nuevo conocimiento. Llaman la atención sobre usos lingüísticos, de lo que, de otro modo, podríamos no ser concientes, y revelan insospechadas implicaciones en nuestras afirmaciones y creencias".

Ciertamente esto es muy vago para poder arrojar algo de luz sobre el asunto y plantea más dudas que respuestas: ¿de qué manera, digamos, la geometría fractal o el álgebra matricial informan sobre nuestros usos lingüísticos?, ¿qué tipo de implicaciones revelan y qué clase de afirmación y creencias afectan?, ¿no podría decirse lo mismo de cualquier teoría científica innovadora?, o ¿acaso es ésta una forma algo enredada de afirmar, como lo hace Poincaré, que cada nueva teoría contribuye al enriquecimiento del lenguaje métrico que hace posible la descripción adecuada de los fenómenos?

Al margen de las dudas que genera el intento de explicación de Ayer, es pertinente notar algunos comentarios que tienen que ver con Poincaré. Por un lado, asume que la concepción de éste último sobre la geometría (en tanto que sus principios no son sino definiciones disfrazadas) se encuentra en armonía con la concepción analítica de las matemáticas, mientras que, por el otro lado, rechaza la posibilidad de considerar al principio de inducción completa como sintético a priori, y, siguiendo a Russell, sostiene que se trata de una definición que permite distinguir entre los números finitos y los transfinitos.

Pero hay además dos comentarios reveladores que vale rescatar y tener presente a lo largo de este alegato. El primero de ellos es la observación penetrante de que aun cuando el logicismo no puede cumplirse a satisfacción (esto es, que no sea posible fundamentar la matemática en la pura lógica), esto no cancela o destruye la tesis sobre el carácter analítico de la matemática. El segundo tiene que ver con el hecho de que la invención en matemáticas no se restringe a la aritmética, sino a otros dominios, como la lógica formal y la geometría, "en donde no se hace uso alguno de la inducción matemática. De modo que, aun cuando Poincaré tuviese razón acerca de la inducción matemática, no habría facilitado una explicación satisfactoria de la paradoja de que un simple cuerpo de tautologías pueda ser tan interesante y tan sorprendente".[28]

---

[28] Ayer (1971), p. 114. Sobre el primer punto dice lo siguiente: "El hecho de que la validez de una proposición analítica no dependa, en modo alguno, de su condición de ser deducible de otras proposiciones analíticas es nuestra

Ahora bien, aunque pueden plantearse objeciones importantes a los comentarios de Ayer, creo que ninguno puede echar por tierra la separación que resalta entre la tesis logicista y la concepción analítica de las matemáticas. La aclaración no tendría mayor pertinencia sino fuera por el hecho de que algunos, adversarios, simpatizantes e historiadores por igual, han tendido a creer que sólo por la vía de la reducción lógica se puede probar la naturaleza analítica de la matemática. Esta era sin duda la posición de Frege, pero como ya he mencionado antes, su concepto de analítico difiere considerablemente del concepto que tenían los logicistas del siglo veinte.[29] Echemos entonces un rápido vistazo a algunas de las objeciones que pueden plantearse a Ayer.

La primera objeción tiene que ver con la forma como Poincaré y los empiristas lógicos entienden las definiciones geométricas; esto es, para el primero las definiciones geométricas son expresión válidas o, mejor, convenientes para determinados propósitos científicos, pero no tiene sentido planearse cuestiones acerca de su verdad, y por consiguiente, el problema sobre la naturaleza de la verdad matemática, tan importante para los empiristas, se desvanece. La segunda objeción, y la más importante, remite al comentario de Ayer sobre el hecho de que el principio de inducción completa se restringe al ámbito de la aritmética y que, por consiguiente, deja sin explicar el carácter creativo de la totalidad de la matemática. Al respecto se puede hacer notar que se ha perdido de vista el punto medular de cuestión; es decir, al citar el principio de inducción matemática, Poincaré ha querido ilustrar un modo de razonamiento prototípico que se encuentra presente en toda la matemática, y el cual consiste en "la possibilité de répéter indéfiniment une même opération". En este sentido, semejante tipo de razonamiento se halla presente también en la geometría, por ejemplo, en el principio de homogeneidad (i.e, en la posibilidad de movimiento de una figura sin alterar sus propiedades), y, por consiguiente, la concesión de Ayer es por completo gratuita, y su reclamo, injustificado.

Por otra parte, el lector atento no podrá dejar pasar aquí el hecho de que se presenta una tensión entre esta última objeción y mi exposición con respecto a la forma como se ha mezclado la aritmética y la geometría en relación con la fertilidad propia de la matemática, ya que también he

---

justificación para descuidar la cuestión de si las proposiciones de la matemática son reducibles a proposiciones de la lógica formal, del modo como Russell suponía. Porque, aun cuando la definición de un número cardinal como una clase de clases semejante a una clase dada es circular, y no es posible reducir nociones matemáticas a nociones puramente lógicas, sigue siendo cierto que las proposiciones de la matemática son proposiciones analíticas" (p. 109).

[29] Por ejemplo, Hylton (1990), p. 136, dice: "Russell, a diferencia de los positivistas lógicos, no busca emplear el logicismo con el propósito de mostrar que la matemática era analítica". Si esta fuese en verdad la posición de los empiristas lógicos, entonces Ayer no podría, a pesar de sus propias palabras, incluirse dentro de ese grupo de filósofos.

insistido en que para Poincaré la primera es una rama cuyas expresiones son juicios sintéticos a priori, mientras que la segunda contiene expresiones convencionales (definiciones) y, por ende, posee un carácter más lingüístico (convencional). Es decir, nos encontramos con la incómoda disyuntiva de atribuir a la aritmética y a la geometría un estatus epistémico distinto, con lo cual al parecer, se tendría que negar la capacidad productiva de la geometría; o bien, admitir la creatividad geométrica y reconocer, por tanto, su naturaleza sintético a priori. En el primer caso, el comentario de Ayer sería correcto, mientras que en el segundo la objeción que le he planteado ganaría la partida. Sin embargo, en ambas circunstancias se tendrá la impresión de haber traicionado o violentado el pensamiento de Poincaré. Pero como la tensión se encuentra presente en los mismos escritos de Poincaré, en tanto no existe un intento recurrente por alcanzar la sistematicidad total, sino que se busca responder en diversos momentos a preocupaciones específicas, sin preocuparse demasiado por las tensiones o inconsistencias que surjan después. En cuanto a nuestro papel de intérpretes no nos queda más que inclinarnos por aquella alternativa que suponga la menor pérdida de verosimilitud y coherencia interna, así como intentar explicar al máximo las divergencias que se presentan. Pero también se puede reconocer simplemente la tensión y renunciar a cualquier pretensión de consistencia, asumiendo que esto último sería atribuirle una cualidad de la que de hecho no goza. En lo que respecta al punto en discusión me parece que los problemas se presentan al momento de pasar de los principios al sistema en su conjunto y en encontrar el criterio por el cual Poincaré convierte un postulado x en un rasgo prominente de la geometría o de la aritmética.[30]

§ 7. La conversión logicista de Couturat

A lo largo de este capítulo he dado como un hecho la filiación de Couturat al proyecto logicista del Russell de los *Principles of mathematics*, mientras que en los capítulos anteriores nos

[30] Lo curioso del asunto es que, en lo que respecta a la tensión arriba citada, Poincaré remite al lector a los puntos en conflicto sin advertir su aparente incompatibilidad; por ejemplo, por un lado escribe: "En el primer capítulo en donde hemos estudiado la naturaleza del razonamiento matemático, hemos visto la importancia que debe atribuirse a la posibilidad de repetir indefinidamente una misma operación. A esta repetición debe su virtud el razonamiento matemático; y es gracias a la ley de homogeneidad que la hemos aplicado a los hechos geométricos". Pero en el capítulo aludido leemos: "Esta regla, inaccesible a la demostración analítica y a la experiencia, es el verdadero tipo de juicio sintético a priori. Por otra parte, no se podría soñar en verla como una convención, como es el caso con ciertos postulados de la geometría". Poincaré (1902), pp. 88 y 41. La cuestión principal que enfrenta el llamado convencionalismo de Poincaré consiste en cómo compaginar los postulados convencionales con los "hechos" geométricos.

habíamos ocupado de su etapa racionalista y cuasi convencionalista, en la cual la lógica juega si a acaso un papel secundario. La pregunta obligada consiste entonces en platearse cómo y cuándo operó el cambio de ideas que lo llevó a su segundo enfrentamiento con Poincaré. O dicho en otros términos, ¿cómo se convirtió la "nueva" lógica en el centro de interés de las reflexiones de Couturat?,

No hay a mi parecer una respuesta directa y sencilla a este tipo de planteamientos, debido a que en este cambio de ideas operaron varios factores. Es claro, por la naturaleza misma del contenido de ambas concepciones, que la adhesión a una supone la negación de la otra, y que, por consiguiente, un cambio de opinión semejante implica una ruptura intelectual interna no muy fácil de ocultar. Sin embargo, en el caso de Couturat ese cambio de postura no registra un movimiento drástico en su pensamiento, sino que se trata de algo que se va dando de manera paulatina, lo cual ciertamente debió iniciar entre 1898 y 1900, aunque ya con signos muy notables en 1901, durante y después de la publicación de *La Logique de Leibniz*. Esto significa que Couturat se fue acercando a la tesis logicista de forma un tanto independiente de Russell a través de otras fuentes. Entre ellas destacan, a parte de los manuscritos leibnicianos, sus lectura de los trabajos de Peano y su escuela, pero notablemente a partir del estudio de la monumental obra, pero inconclusa, sobre el álgebra de la lógica de Ernest Schröder.

Este último comentario puede sonar a primera vista fuera de lugar, por la sencilla razón de que el nombre de Schröder no suele citarse en relación con la tesis logicista, e, incluso, a menudo se le sitúa (cuando se menciona) como un oponente a dicho enfoque. Esta opinión se encuentra de alguna manera justificada por el hecho de que Frege solía distinguir entre su sistema lógico y el de los algebristas lógicos, como Boole y Schröder, apelando a la distinción leibniciana entre una *lingua characterica* y un *calculus raticinator*; esto es, entre un *lenguaje* lógico con una aplicación específica, y un mero *cálculo* lógico abstracto sin aplicación alguna a la vista. Pero también por el comentario de Russell según el cual el enfoque de la lógica cultivado por Boole, Peirce y Schröder no ofrecía ayuda alguna para enfrentar los problemas sobre la fundamentación de la aritmética.[31] La opinión de Frege sobre Schröder era justa en términos generales, sobre todo

[31] En un pasaje conocido de *My philosophical development* Russell recuerda porqué la técnica de Peano en lógica le parecía superior a todo lo que antes había conocido: "La lógica matemática no era, de ningún modo, un tema nuevo [para mi]. Leibniz había hecho algunos intentos, pero habían quedado desbaratados por respeto a Aristóteles. Boole había publicado sus *Leyes del pensamiento* en 1854, y había desarrollado un cálculo completo, que trataba principalmente de la inclusión de clases. Peirce había desarrollado una lógica de relaciones, y Schröder había publicado un trabajo en tres gruesos volúmenes en los que resumía todo lo que se había hecho con anterioridad. Whitehead dedicó la primera parte de su *Álgebra universal* al cálculo de Boole. La mayor parte de estos trabajos me

si observamos que sus comentarios se fundan en los primeros escritos del segundo, cuando el logicismo no se convertía en una tesis defendida abiertamente y desarrollada (lo cual ocurre solo con la asimilación del álgebra de relaciones en el tercer volumen de la *Exakte Logik*).[32] Pero la opinión de Russell simplemente muestra que no había prestado atención al tratamiento algebraico de la aritmética o bien lo había desechado sin llevar a cabo una argumentación al respecto.

De cualquier forma, lo cierto es que Schröder aprovechó la oportunidad que le brindaba el primer Congreso Internacional de Matemáticas (Zürich, 1897) para hacer público su nueva posición logicista y, de pasada, fijar su posición con respecto al proyecto afin de Peano y su escuela. Allí leemos la siguiente declaración: "Como opinión personal, quizá no compartida todavía por muchos, quiero permitirme asentar, a propósito, que considero que la matemática pura es solo una rama de la lógica general, la cual nace con la creación del número y debido a su virtud económica se ha visto favorecido con un enorme desarrollo en comparación con otras ramas de la lógica que hasta el presente han permanecido estacionarias. Esta concepción se encuentra confirmada por el hecho de que bajo el aspecto de la pasigrafía la aritmética puede llevarse acabo sin recurrir a ninguna categoría o nociones primitivas peculiares, sino que la lógica general es suficiente para construir todas sus nociones" (Schröder (1898), pp. 46 y 47).

Por "el aspecto de la pasigrafía de la aritmética", Schröder quería hacer evidente la concepción de la lógica como un lenguaje conceptual al estilo leibniciano, tal y como lo entendía Peano y su escuela, pero también Frege.[33] Pero su intención principal era poner de manifiesto la superioridad de su lenguaje lógico sobre el de Peano, resaltando que el suyo se limita a cinco categorías fundamentales (identidad, intersección, negación, conversión y subordinación o composición relativa) y siete signos (los signos para las cinco categorías más los signos para los

---

eran conocidos, pero no había encontrado que arrojaran ninguna luz en la gramática de la aritmética". El comentario parece indicar que Russell no leyó nunca los escritos logicistas de Schröder, pero por medio de la correspondencia con Couturat es claro que estaba al menos al tanto de ellos. Sin embargo, su animadversión por el tratamiento de Schröder también es patente a través de dicha correspondencia, a pesar de que ambos coinciden, hacia las mismas fechas del famoso congreso de 1900, sobre la idea de orden. Sobre la falta de interés de Russell por Schröder véase por ejemplo la carta del 20.06.03 de Russell a Couturat.

[32] No obstante, desde la aparición del primer tomo de su magna obra, Schröder (1890), p. 95, entendía también el cálculo lógico como un paso en la realización de la característica leibniciana, y, veía en la conceptografía de Frege más como un cálculo que como una verdadera lengua conceptual: "Dass Herrn Frege's Begriffsschrift diesen ihren Namen nicht verdient, sondern etwa als eine in der That logische (wenn auch nicht zweckmässigste). Urteilsschrift zu bezeichnen wäre, glaube ich in meiner Rezension dargethan zu haben". Cf. Schröder (1880), pp. 81-3 [218-9].

[33] Sin embargo, Schröder le dedica aquí una cuantas líneas y tan solo para repetir el comentario hecho de su reseña sobre la *Conceptografía*, lamentando que haya ignorado todo lo que se había hecho antes en la misma dirección, (y a su entender ¡mejor que Frege¡), de tal suerte que en manos de este último la lógica "fue por consiguiente suplantada desde el principio, y por lo tanto, dando a luz a un recién nacido" (pp. 60 y 61).

valores de verdad, que además designan a la clase vacía y al universo), mientras que el sistema de Peano se compone de nueve signos. Además, reprocha a Peano el no contar con el álgebra de relaciones de Peirce, la cual constituye "una disciplina, o rama de la ciencia, que corona el edificio del álgebra de la lógica" (pp. 52 y 53). Al respecto vale la pena mencionar el hecho, un tanto irónico, de que Russell haría más tarde un reproche similar a la lógica de Peano en el escrito que bien puede denominarse su primer trabajo logicista.[34]

Como ya he mencionado, el álgebra de la lógica fue objeto de atención en Francia gracias a los trabajos pioneros de Liard [(1977), (1877ª) y (1878)] y Delboeuf [(1876) y (1877)]. Pero Couturat sólo se ocupó de ella en forma y en la docencia hacia finales del siglo XIX. La muestra más palpable de que se había interesado en el logicismo de Schröder es la carta del 8 de julio de 1898, en donde le confia a Russell la intención de dedicar su próximo curso al estudio del álgebra de la lógica tal y como aparece en la obra de Schröder, pero también al tema sobre las relaciones entre matemáticas y lógica. El producto de semejante estudio se materializa en la larga reseña que hace de los tres volúmenes del *Algebra der Logik* [15], y en su ensayo crítico sobre la definición lógica de número [16]. Este último escrito surge a partir del tratamiento que Schröder hacía de las teorías de Dedekind en términos del álgebra de la lógica de relativos (relaciones). La pertinencia de dicho escrito en relación con el cambio intelectual de Couturat es evidente debido a que en este encontramos todavía la mima concepción neokantiana del número, pero al mismo tiempo, exhibe también una actitud favorable, o si se quiere, más tolerante hacia un logicismo poco conocido y un tanto ajeno a las propuestas más conocidos de Frege y Russell. Como ingrediente adicional vale la pena resaltar que Couturat defiende aquí un punto de vista muy cercano a las primeras objeciones de Poincaré al logicismo russelliano, objeciones que él mismo rebatirá en su conocido escrito en defensa de la logística [55]. En concreto, el escrito se ocupa en primer lugar de la definición general del número natural de Dedekind y, posteriormente, de las definiciones particulares de los primeros números enteros dada por Schröder en términos del álgebra de relaciones.

La actitud un tanto favorable hacia el logicismo se hace manifiesta debido a que Couturat ya aceptaba aquí la demostración analítica de Dedekind del principio de inducción completa, "sobre todo en la forma rigurosa y precisa que Schröder le ha dado al traducirla al álgebra de relaciones" ([16], p. 23, n). Sin embargo, se trataba más que nada de una cierta concesión ya que

[34] Russell (1901), p. 6 y 7. Desde luego, también señala como un defecto grave en Peirce y Schröder el no distinguir la inclusión entre clases, de la relación de pertenencia; una carencia que Frege ya había hecho notar.

también, y este era uno de los propósitos de su escrito, externaba sus dudas con respecto a la definición lógica de número, debido principalmente a que consideraba aún vigente el análisis que había hecho él mismo en el libro 1 de la segunda parte de su obra sobre el infinito matemático. Esto significaba que las dudas se dirigían a la pretensión de haber logrado una definición del número por medio de conceptos y relaciones puros y abstractos, sin apelar en ningún momento a la intuición.

La discrepancia central recaía entonces en el hecho de que Dedekind hacía depender la noción de número cardinal en la noción ordinal, y esta última sobre la base de la noción de *representación* o correspondencia uniforme y recíproca, mientras que Couturat, como hemos visto en § 6 del segundo capítulo, derivaba la ordinalidad matemática por medio de una cardinalidad metafísica o racional que se alcanzaba por medio de una intuición puramente intelectual (en oposición a la intuición sensible kantiana). Las diferencias de puntos de vista era por ende notable, pero veamos ahora la manera como Couturat resume la posición de Dedekind: "En suma, la noción de número cardinal reposa, como la de número ordinal, sobre la idea de correspondencia unívoca y recíproca, o, para emplear un único término, en la noción de *coordinación* (Zuordnung). Dedekind se ha visto inducido a creer que se trata de una idea del intelecto y de una idea fundamental en sí misma, no solo de las matemáticas sino de todo pensamiento: «Sin la facultad que posee el intelecto para hacer corresponder unos objetos con otros..., ningún pensamiento sería posible en general». Resulta entonces que Dedekind considera la idea de *coordinación* mucho más evidente y simple que la de número ordinal, y con mucha mayor razón, que la de número cardinal, y por consiguiente, como lógicamente anterior a ambas" (p. 26).

Desde luego, Couturat pensaba que la idea racional de cardinalidad del número (esto es, entendiendo el número cardinal como una multiplicidad de unidades) era la noción más básica de la aritmética elemental y que, por lo tanto, la noción de ordinalidad y la noción de correspondencia la suponían en algún sentido. Por este motivo, intentar seguir el orden inverso, como lo hace Dedekind, supone caer en un círculo vicioso, ya que para definir el número cardinal se echa mano de nociones (la ordinal y la correspondencia) que la suponen. Por ejemplo, para definir el número cardinal se requiere entender la enumeración como una correspondencia uno a uno entre los elementos de una colección concreta y los números de la serie de los naturales a partir de 1, de tal suerte que el último número de la serie se identificará con el número cardinal de la colección concreta. Pero si se pregunta qué significa *uno a uno*, se hace patente que a cada elemento se le considera como una *unidad*, y que todas las unidades son semejantes entre sí en tanto que unidades, pero también se les debe suponer distintas para que se les pueda distinguir y enumerar. Entonces es evidente que antes de que se le pueda fijar su cardinalidad específica, la colección concreta ya se le ha entendido como una pluralidad de unidades; esto es, como la idea misma de cardinalidad.

Y si la noción de correspondencia supone ya la idea de cardinalidad, esto significa, por un lado, que no es más simple que la segunda, y, por el otro lado, que la noción misma de ordinalidad es también dependiente de la cardinalidad: "En cuanto a la idea de número ordinal, mostraremos que también es posterior a la noción de número cardinal. Esto parece evidente si se piensa que esta posee como elemento adicional la idea de orden. En efecto, el número ordinal se compone, en realidad, de unidades ordenadas; es, entonces, de entrada una colección de unidades; esto es, un número cardinal con un agregado dado, que consiste en el arreglo de esas unidades. El número cardinal es por consiguiente más simple que el número ordinal, y el que representa un grado superior de abstracción" (p. 29).

Todas las objeciones anteriores valen para la definición general del número entero, pero veamos ahora lo que Couturat plantea con respecto a las definiciones particulares de los primeros números de la serie de los naturales tal y como lo había hecho Schröder. La objeción principal a todas estas definiciones se funda en la presunta petición de principio en la que incurren al intentar definir cada número por medio de un recurso que a fin de cuentas resulta equivalente a lo que se pretende definir; esto es, que se definen los números particulares por medio de los mismo números. Por ejemplo, se define el número 0 por medio de la equivalencia lógica siguiente:

$$(\text{Num. } a = 0) = (a = 0)$$

que se lee «el número cardinal del conjunto a es igual al cero aritmético, cuando el conjunto a en sí mismo es igual al cero lógico; esto es, cuando es nulo, y recíprocamente». Sin embargo, para Couturat existe la sospecha de que aquí no se ha hecho ningún avance serio, ya que si se pregunta "¿cuándo se afirma que un conjunto es nulo? Cuando es vacío, esto es, cuando no contiene elemento alguno. Muy bien, pero el lector podría decir que no valdría la pena recurrir al álgebra para formular la proposición trivial de que un conjunto tiene el número cero cuando no contiene elementos" (p. 30).

Lo irónico de este último comentario consiste, como ya he mencionado, en que se trata justamente del tipo de objeciones que Poincaré dejará caer más tarde sobre Couturat y que al responderle, en el fondo ¡se encontraba debatiendo tu posición anterior! Por lo demás, llama la atención la similitud de los argumentos: "¿Qué es el cero?, se pregunta Poincaré (1905), pp. 823 y 824, ¿es el número de elementos de la clase nula? Y, ¿qué es la clase nula?, es aquella que no contiene ningún elemento. Definir cero por nulo y nulo por ninguno es abusar verdaderamente de la riqueza de la lengua francesa. Pero también Couturat ha introducido un perfeccionamiento en su definición escribiendo:

$$0 = \iota \wedge : \phi x = \wedge . \rightarrow . \wedge = (x \varepsilon \phi x)$$

que quiere decir en francés: cero es el número de los objetos que satisface a una condición que jamás es cumplida. Pero como "jamás" significa *en ningún caso*, no veo que el progreso sea considerable".

Sin embargo, es importante tener presente, dejando al margen las diferencias notables entre la definición algebrista y la definición russelliana del número 0, que aun y cuando las definiciones lógicas de los primeros números de la serie de los naturales incurren en peticiones de principio, Couturat considera que, como ha se ha señalado en varias ocasiones, no constituyen un delito grave, puesto que este es un defecto que enfrentan todas las definiciones matemáticas nominales, y, por consiguiente, representan un recurso legítimo, aunque filosóficamente limitado. Esto es justo lo que afirma al discutir la definición de individuo, como un paso previo en la definición del número 1, y los posteriores números de la serie: "Es claro que dicha definición, como todas las definiciones matemáticas, supone necesariamente la idea a definir y la invoca implícitamente, puesto que se parte de la noción de individuo para extraer una propiedad esencial y característica, para luego traducirla analíticamente. Esto es perfectamente legítimo, con tal que no se crea que se la construido con todas sus piezas o por decirlo de alguna manera, que se ha creado la idea por definir; pues si se cediese a dicha ilusión natural y especiosa, nos veríamos obligados a recordar que para interpretar los símbolos del cálculo lógico se les debe hacer corresponder con clases, y que estas se encuentran formadas por la reunión de individuos pertenecientes a una multiplicidad pura, a la cual se subordinan las condiciones antes enunciadas" (pp. 32 y 33).

Es posible hacer dos lecturas del comentario anterior, ambas un tanto excluyentes entre sí. La primera y más obvia es que tratándose de un recurso legítimo, la tesis logicista tiene un valor en sí mismo y, por consiguiente, no carece del todo de interés. Sin embargo, como la definición lógica exhibe el mismo rasgo circular de las definiciones matemáticas, la reducción lógica no consigue ningún avance significativo y, lo más importante, no logra prescindir de la intuición intelectual pura, tal y como se pretende y justifica su introducción en el dominio aritmético.

§ 8. Una primera aproximación al debate

Hay varias preguntas pendientes sobre los motivos que llevaron a Poincaré a postergar la querella contra los logicistas hasta la publicación de los ensayos de Couturat sobre la versión russelliana del proyecto en *Principles of Mathematics.* Una posible respuesta es que en este caso se trataba ya de un asunto doméstico;[35] esto es, no había nada que decir mientras la epidemia logicista fuera un asunto extranjero, pero con un enfermo en casa la situación cambia, de tal forma que se requiere intervenir para evitar más bajas. Otra alternativa de respuesta es quizá, el creciente interés y discusión sobre la forma como Frege, Dedekind, Peano y Russell replanteaban las relaciones entre lógica y matemáticas. Y si el apogeo logicista había llamado la atención de alguien tan cercano y respetado como Hilbert, quien de alguna forma amenazaba con cambiar de bando[36] ¿no era ya necesario tomar de nuevo partido en este asunto?

A este respecto es notorio que en su alegato inicial con Couturat, Poincaré tiene en mente y en primer plano a Hilbert, pero los motivos no son en lo absoluto claros,[37] ya que el formalismo extremo del cual se lamenta desentonaba con el realismo de Frege y Russell; mientras que con respecto a las relaciones entre lógica y aritmética, Hilbert se encontraba en una posición que no necesariamente entraba en conflicto con la suya:

> La aritmética es considerada con frecuencia como una parte de la lógica, de tal suerte que sus nociones tradicionalmente fundamentales se presuponen usualmente cuando se presenta la cuestión de establecer un fundamento para la aritmética. Sin embargo, si observamos con detenimiento, nos damos cuenta que en las exposiciones tradicionales de las leyes lógicas se emplean ciertas nociones aritméticas fundamentales, como por ejemplo, la noción de *conjunto*, y, hasta cierto punto, la de *número*. De este modo, nos encontramos dando vueltas en círculo, y este es el motivo por el cual se requiere desarrollar, en parte, de manera simultanea las leyes lógicas y las de la aritmética si se quiere evitar las paradojas.[38]

---

[35] Podría incluso de decirse que se trataba ya de un asunto familiar, ya que Pierre Boutroux (1904), su sobrino, había iniciado el debate, contra Couturat y sin mucha habilidad, durante el Segundo Congreso Internacional de Filosofía, lo cual provocó la respuesta contundente de Russell (1905). *Cfr.* Sanzo (1991), cap. 3.

[36] En una carta a Frege, cuyo tema era la polémica Frege-Hilbert sobre la fundamentación de la geometría, Vailati se expresaba en los siguientes términos: "Me parece que si Hilbert tan sólo pudiera renunciar a su opinión de que los axiomas representan los "hechos fundamentales de la intuición" (una opinión cuya fuente deba quizá buscarse en la devoción irracional a la jerga kantiana, la cual es aún deplorablemente popular entre quienes se dedican a la filosofía de la ciencia"), el resto de su exposición podría ofrecerse de una forma irreprochable". Frege (1980), p. 174. Pero a Frege no le molestaba la jerga kantiana de Hilbert, sino el formalismo; esto es, la falta de significado de los términos geométricos, algo con lo que Poincaré estaría de acuerdo.

[37] Poincaré (1905), pp. 815-6. En el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en Heidelberg en 1904, Hilbert se ocupa por primera vez de la cuestión relativa a los fundamentos de la lógica y de la aritmética (*Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*), pero su posición dista mucho de ser logicista. Esto le permite a Couturat hacer las debidas precisiones al respecto. *Cfr.* Couturat (1906), pp. 210 y 211.

[38] Hilbert (1904): van Heijenoort (ed.) (1967), p.131.

De hecho, la crítica de Poincaré a las definiciones logicistas de los números naturales será, una y otra vez, asimilar cada una de ellas como instancias de ese círculo vicioso que menciona Hilbert (y que Couturat atribuía a toda definición matemática en su etapa racionalista). Y ya que de acuerdo con Russell, el principio de inducción completa no representa más que una definición de los números naturales finitos, o si se prefiere, la consecuencia de una definición;[39] la discusión se centrará en mostrar si de ser así, cumple con el requisito que exige toda definición matemática. Pero para ello es necesario responder primero a la cuestión sobre qué tipo de definición está en juego.

No obstante, debe advertirse que con respecto al estatus del principio de inducción completa no existía consenso entre los logicistas. Dedekind pretendió dar una demostración del mismo, pero por medio de un principio que en el fondo era equivalente al que se quería demostrar. Peano lo usaba simplemente como axioma, mientras que Russell lo convertía en una definición, la cual suponía una simplificación de los axiomas de Peano. Esta característica de la definición de Russell es, me parece, una razón posible del porqué Poincaré considera que se trata de una definición por postulación; esto es, el principio se define a partir de un conjunto de postulados o axiomas, que en este caso serían los cuatro primeros postulados de Peano. Sin embargo, la definición de Russell es estrictamente nominal, pero, además, contaba con motivos muy fuertes para no admitir como lícitas ese otro tipo de definiciones, ni aquellas que se denominan "por abstracción", y que eran admitidas como métodos lógicos adecuados por Peano y su escuela, aunque como recursos meramente provisionales.[40] Dichas razones son especialmente interesantes porque permiten ilustrar muy claramente las diferencias entre el logicismo de Russell y el proyecto defendido por Peano y su escuela; o, si ustedes prefieren, explica claramente por qué estos últimos no pueden considerarse como logicistas en sentido estricto. Como este no es el lugar adecuado para tratar estas cuestiones me limitaré a insinuar el camino señalando que un logicista en sentido estricto, como Russell y Frege, requieren sólo de un puñado de nociones lógicas primitivas para llevar a cabo su empresa, mientras que los no logicistas, por mucho que se valgan de la lógica para rescribir las expresiones de cada teoría matemática, como ocurre con Peano y su escuela, cuentan con tantos términos primitivos como tantas teorías matemáticas

---

[39] Sin embargo, no se trata de una definición lógica, aunque los términos involucrados en la definición son reducibles a nociones lógicas, sino de una definición que simplifica los axiomas de Peano, en cuyo sistema el principio figura como axioma.

[40] *Cfr.* Burali-Forti (1900), pp. 295-6, y Hernández (2001), § 4.6.

tienen a su disposición y, por consiguiente, requieren echar mano de mayores recursos en su teoría de la definición.

Pero volvamos de nuevo al alegato de Poincaré y señalemos que si bien se equivoca en considerar la definición de Russell como una definición por postulación, apunta en la dirección correcta al señalar que para que la definición sea admisible debe de ir acompañada de una prueba de existencia del o los objetos que introduce; es decir, es necesario demostrar que el o los objetos en cuestión se encuentran exentos de contradicción. Si se trata de una definición por postulación, lo que se ha de demostrar es que los postulados no implican contradicción. Esto equivale a pedir una prueba de consistencia para la aritmética elemental.

Pero para Russell el requisito de Poincaré es por completo injustificado e imposible de satisfacer, ya que supone, por decirlo de algún modo, usar el principio de contradicción para intentar justificar el mismo principio de contradicción; dicho de otra manera, la cuestión relativa a la pertinencia lógica del principio de inducción completa es meramente verbal, ya que si definimos "cuadrúpedo" como todos los seres de cuatro patas, se sigue que todo ser de cuatro patas será cuadrúpedo, y lo mismo ocurrirá tratándose de los números naturales y el principio de inducción que los define.[41] No hay necesidad, por consiguiente, de una prueba de no contradicción para los números finitos.

A este respecto recordemos que en el prólogo a la segunda edición de los *Principles*, Russell externa un comentario muy llamativo para desestimar el mencionado criterio de existencia. Es, en primer lugar, notable porque lo identifica con el formalismo de Hilbert, sin referencia alguna a Poincaré; y, en segundo lugar, por que allí se manifiesta el realismo russelliano a través de un argumento pragmático en verdad poco convincente:

> Para él [Hilbert], la 'existencia', tal y como se entiende generalmente, es un concepto metafísico innecesario, que debe remplazarse por el concepto más preciso de no contradicción. Y aquí ha olvidado de nuevo, que la aritmética tiene un uso en la práctica. No hay límite para la invención de posibles sistemas de axiomas no contradictorios. Las razones que tenemos para interesarnos de un modo especial por los axiomas que conducen a la aritmética usual son extrínsecos a la misma, y están relacionados con la aplicación del número al mundo empírico. Esta aplicación en sí misma no forma parte ni de la lógica ni de la aritmética; pero una teoría que la haga a priori imposible no puede ser verdadera. La definición lógica de los números está relacionada con el mundo real de los objetos contables e inteligibles; la teoría formalista no lo está.[42]

---

[41] *Cfr.* Russell (1919), p. 27.
[42] Russell (1903), p. vi [380].

Sin embargo, como ya he mencionado antes, llama la atención que Poincaré apele al principio de no contradicción como criterio de existencia matemática, sobre todo si se recuerda que para él la matemática no se deja sujetar a los dictados de la lógica; y, todavía más, si ustedes prefieren, si como había dicho antes, "la regla del razonamiento por recurrencia es irreducible al principio de no contradicción".

Pero este es precisamente el rasgo distintivo del *oportunismo científico*.

§ 9. La demostración de Duhem del principio de inducción completa

Como ya había anticipado antes, Pierre Duhem en un artículo poco conocido y comentado, se oponía al punto de vista de Poincaré sobre la imposibilidad de demostrar por medio de la lógica (y en particular, por medio del principio de no contradicción), el principio de inducción completa. La posición de Duhem sobre este asunto reviste especial interés no sólo porque se trata de alguien que era ajeno a las tentaciones intelectuales de los lógicos y matemáticos logicistas, sino porque su demostración difiere de la de estos últimos y porque se encuentra acompañada de observaciones de carácter histórico que vale la pena tener presente.

En primer lugar, Duhem hace notar que el principio de inducción se encuentra ausente en la obra de los matemáticos de la antigüedad y que al parecer, fue Francesco Maurolico quien lo introdujo por primera vez en su libro *Arithmeticorum libri duo*, escrito en 1557, pero publicado en Venecia en 1575. El dato es importante interpretado a la luz de la opinión de Poincaré, ya que "si el razonamiento por recurrencia fuera en verdad lo que caracteriza a la demostración matemática, resultaría sorprendente que los matemáticos hubiesen esperado tanto tiempo para recurrir a él. Pero la inducción completa no puede ser la única fuente de la fertilidad matemática, dado que Euclides, Arquímedes, Apolonio y Cardano no la han necesitado para llevar a cabo sus descubrimientos" (1912, p. 224).

Además, a su juicio, el principio por recurrencia no difiere en lo absoluto de otras formas de razonamiento deductivo, y si se ha pensado que se distingue de una serie de silogismos, y que no puede ser reducido en ningún sentido a dicha serie, se debe únicamente a que por lo general se le presenta en forma abreviada y se pasa por alto el correspondiente complemento que se ha dado por descontado. Además, acepta que la razón se persuade de la generalidad del principio con el simple hecho de haber realizado una serie limitada de silogismo, pero contrario a Poincaré, sostiene que su absoluta certeza descansa en la convicción de que se alcanza una contradicción una vez que se intenta negar su generalidad.

Y la forma como se demuestra su reducción al absurdo se puede mostrar a partir de los dos siguientes lemas:

Lema (1): La proposición **P** es verdadera para el número 1.

Lema (2): Si **P** es verdadera para el número n, será igualmente verdadera para el sucesor inmediato (n + 1).

Se asume que **P** es falsa para un cierto número $\boldsymbol{a}$, y es obvio que $\boldsymbol{a}$ es más grande que 1 (por el L (1)), y, por lo tanto, ($\boldsymbol{a}$ – 1) es también un número.

Entonces tenemos los siguientes 2 casos:

C (1): La proposición **P** es verdadera para todos los números de 1 a ($\boldsymbol{a}$ – 1).

C (2): La proposición **P** es falsa para uno o más números de los cuales 2 es el menor y ($\boldsymbol{a}$ – 2) es el mayor.

En C (1), la proposición **P** sería verdadera para el número ($\boldsymbol{a}$ – 1), y falsa para el número $\boldsymbol{a}$; pero de acuerdo con L (2), esto es imposible. En C (2), enumeramos, para disminuir la magnitud, la serie de ($\boldsymbol{a}$ – 2) de 2 a ($\boldsymbol{a}$ – 1). Encontramos, uno después de otro, todos los números de la serie para los cuales **P** es falsa. Sea $\boldsymbol{b}$ el primero que enumeramos. De acuerdo con L (1), $\boldsymbol{b}$ es necesariamente mayor que 1, tal que ($\boldsymbol{b}$ – 1) es un número entero. Entonces **P** será verdadera para ($\boldsymbol{b}$ – 1), pero falsa para $\boldsymbol{b}$. Pero según L (2) esto es imposible.

Por lo tanto, la generalidad de la proposición **P** (esto es, el principio de inducción completa) es entonces establecida por medio de un razonamiento que requiere solo un número finito de silogismos.

Una versión abreviada de la anterior sería la siguiente:

Si **P** no es verdadera para todo **N**, considérese el conjunto finito o infinito, de números para los cuales no es verdadero. En este conjunto, hay un número $\boldsymbol{q}$ que es más pequeño que todos los otros. En virtud del L (1), el número $\boldsymbol{q}$ es necesariamente mayor que 1, tal que ($\boldsymbol{q}$ – 1) es un número. Por lo tanto, **P** es verdadera para ($\boldsymbol{q}$ – 1), y sería falsa para $\boldsymbol{q}$, lo cual por L (2) sería imposible.

Lista cronológica de las publicaciones
de
Louis Couturat

La presente lista de publicaciones de Couturat reproduce, con algunas adiciones y correcciones, aquella que Lalande (1914) presentó al final de su obituario. Sin embargo, no reproduzco los datos sobre las reseñas de sus libros ni las características editoriales de estos últimos excepto en el caso de los folletos. Además, por comodidad al momento de citar las fuentes, empleo la forma de numerar que Ugo Cassina y Hubert C. Kenney han establecido en relación con los textos de Peano. Así, los números romanos refieren a libros y monografías, los números enteros a ensayos, reseñas, discusiones e informes, mientras que los números con ápice remiten a traducciones (al inglés y español en particular), o reimpresiones. De igual forma, cuando la nota no contaba con título he dado una breve descripción en español.

Abreviaciones de las publicaciones periódicas:
RMM // Revue de Méthaphysique et de Morale
EM // L'Enseignement Mathématique
RP // Revue Philosophique de la France et de l'Étranger
BScM // Bulletin des Sciences Mathématiques
BSF // Bulletin de la Société Française de Philosophie

(1891),
1 "A. Hannequin. *Introduction a l'étude de la phychologie*". *RP* 31: 319-323.
(1892),
2 El problema de Aquiles (nota sobre un artículo de M. Mouret). *RP* 33: 314-15.
(1893),
3 "La beauté plastique". *RP* 35: 53-72.
4 "«L'Année philosophique» de F. Pillon". *RMM* 1: 63-85.
5 "Note sur la géométrie non euclidienne et la relativité de l'espace". *Ibid.*, 302-9.
6 "De l'Évolutionnisme physique et du principe de la conservation de l'énergie". *Ibid.*, 564-572.
(1896),
I *De l'infini mathématique*. París: Blanchard, reimp. 1973.
II *De Platonicis mythis*. París: Alcan.
7 "«Études sur l'éspace et le temps» de MM. Lechalas, Poincaré, Delbœuf, Bergson, L. Weber et Evellin". *RMM* 4: 646-669.
8 "«Essai critique sur l'hypotèse des atomes dans la science contemporaine» par A. Hannequin". *Ibid.,* 778-797.
(1897),
9 "«Essai critique sur l'hypotèse des atomes dans la science contemporaine» par A. Hannequin". *RMM* 5: 87-113; 221-247. Segunda y tercera parte de [8].
(1898),
10 "«Essai sur les fondements de la géométrie» par Bertrand Russell". *RMM* 6: 354-80.
11 "Sur les rapports du nombre et de la grandeur". *Ibid.*, 422-447.
(1899),
12 Carta a Brunetière, sobre el pacifismo de Kant. *Le Temps,* 27 mars et 1er avril.

13 "La logique mathématique de M. Peano". *RMM* 7: 616-46.
14 "Bertrand A. W. Russell, *An Essay on the Foundations of geometry*". *BScM* 23: 54-62.

(1900),

15 "Ernest Schröder. *Algebra der Logik*". *BScM* 24: 49-68; 83-102.
16 "Sur une définition logique de nombre". *RMM* 8: 23-36.
17 "Contre le nominalisme de M. Le Roy". *Ibid.*, 87-93.
18 "Sur la définition du continu". *Ibid.*, 158-168.
19 "«L'algebre universelle» de M. Whitehead". *Ibid.*, 323-362.
20 "Les mathématiques au Congrès de Philosophie". *EM* 2: 397-410.

(1901),

III *La logique de Leibniz*. Hildesheim: Olms. Reip. 1985.
21 Reseña del *Formulaire de mathématiques* de G. Peano. *BScM*, 25: 141-159.
22 "Les bases naturelles de la géométrie d'Euclide". *RP* 52: 540-2.
23 "Pour la langue international", 30 p. in 12, Coulommiers, P. Brodard.
24 "Lexique philosophique", apéndice en la traducción francesa de *Los Fundamentos de la Geometría* de B. Russell. Paris: Gauthier-Villars, pp. 255-260.

(1902),

25 "Symbolic Logic or Algebra of Logic". En colaboración con Mrs. Ladd-Franklin, en *Dictionary of Philosophy and Psychology*, bajo la dirección de J. M. Baldwin. New York: Macmillan. Tomo II, pp. 640-645 y 650-651.
26 "Sur la metaphysique de Leibniz (avec un opuscule inédit)". *RMM* 10: 1-25.
27 "L'État presént des sciences, d'après M. Picard". *Ibid.*, 516-22.
28 "Sur les rapports de la logique et de la métaphysique de Leibniz". Discusión con M. Delbos. *BSF* 2: 65-89.
29 "Sur la langue internationale". *Revue des Questions Scientifiques* 52: 213-223.

(1903),

IV *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*. Paris: Alcan.
V *Historie de la langue universelle* (en colaboración con Léopold Leu). Paris: Hachette.
30 "Le système de Leibniz d'après M. Cassirer". *RMM* 11: 83-99.
31 "Dr. A. Kirschmann.- *Die Dimensionen des Raumes. Eine kritische Studie*". *RP* 55: 202-209.
32 "Correspondence de Leibniz et de Kochanski, copiée par M. Bodemann et publiée par M. Dickstein". *Ibid.*, 223-226.
33 "P. Duhem.- Une science nouvelle: la chimie physique". *Ibid.*, 318-320.
34 "P. Duhem.- L'œuvre de M.J.-H. Van't Hoff, à propos d'un livre récent". *Ibid.*, 320-3.
35 "P. Duhem.- Sur quelques extensions récentes de la statique et de la dynamique". *Ibid.*, 323-325.
36 "P. Duhem.- Le mixte et la combinaison chimique". *Ibid.*, 325-329.
37 "Dr. Kurt Geissler.- *Die Grundssetze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie*". *Ibid.*, 433-437.
38 "Maurice Boucher.- *Essai sur l'hyperespace, le temps, la matière et l'énergie*". *RP* 56: 528-9.
39 "L.-J. Delaporte.- *Essai philosophique sur les géométries non-euclidiennes*". *Ibid.*, 529-531.
'40 "A plea for an international language". Versión inglesa como folleto de [23], London:

G. Henderson.

(1904),

41 "La philosophie des mathématiques de Kant". *RMM* 12: 321-83. Reimpreso como apéndice en [VI], pp. 235-308; y como capítulo 1 en [XXII].

42 "Kant et la mathématique moderne". *BSF* 4: 125-134.

43 "Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale". *EM* 6: 140-2.

44 "Les principles des mathématiques I. Principles de la logique. II L'idée de nombre. III L'idée d'orde. IV Le continu. V L'idée de grandeur. VI Géométrie". Reseña crítica de *Los Principios de la matemática* de B. Russell. *RMM* 12: 19-50; 210-40; 664-98; 810-44.

45 Reseña de Russell (1903). *BScM*, 28: 129-147.

46 Reseña de la sección de lógica y filosofía de la ciencia en segundo Congreso Internacional de Filosofía. *RMM* 12: 1037-1077.

47 "Rapport sur les progrès de l'idée de langue internationale". En *2e Congrès International de Philosophie*. Genève: Kündig, pp. 355-366.

48 "Sur l'utilité de la logique algorithmique". *Ibid.*, pp. 706-713.

49 Reseña de Bastian, *Das Logische rechnen und seine Aufgaben*. *RP*, 57: 331.

(1905),

50 "Les principles des mathématiques VII". Continuación de [44]. *RMM* 13: 224-56.

VI *Les principes des mathématiques*. París: Alcan. Reimpresión: Hildesheim, New York: Georg Olms, 1979. Reunión de [41], [44] y [50].

VII *L'Algèbre de la logique*. París: Gauthier-Villars. Reimp. Hildesheim: Olms, 1965.

51 "An international auxiliary language". *The Monist*, 15: 143-146.

52 "Les definitions mathématiques". *EM* 7: 27-40.

53 "Définitions et démostrations mathématiques". *EM* 7: 106-21.

54 "Branislav Petronievics «Principien der Metaphysik»". *BSM* 29: 58-60.

(1906),

55 "Pour la logistique". *RMM* 14: 208-50.

56 "La logique et la philosophie contemporaine". *Ibid.*, 318-341.

57 "Logique et moralisme (Résponse à M. Lechalas)". *Ibid.*, 873-876.

(1907),

VIII *Étude sur la dérivation en Esperanto*. Edición no comercializable, ver [XVI].

IX *Les nouvelles langues internationales*.(en colaboración con L. Leau), Paris.

58 "Conclusions du rapport sur l'état présent de la question de la langue international", par L. Couturat et L. Leau, IV-32 p. in-8°, Coulommiers. Paris: Brodard.

59 "Compte rendu des travaux du Comité (de la Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale)", par L. Couturat et L. Leau, 32 p. in-8°, Coulommiers. Paris: Brodard.

60 "Eine Weltsprasche oder drei?". Respuesta al prof. Diels, 17 p. in-8, Stuttgart et Leipzig, Deutsche Verlagsanstalt, s. d.

(1908),

X *Dictionnaire international-française*. En colaboración con L. de Beaufront. Paris: Delagrave.

XI *International-inglish Dictionary*. En colaboración con L. de Beaufront y P. D. Hugon. Londres: Pitman.

XII *International-deutsches Wörterbush*. En colaboración con L. de Beaufront y Rob

Thomann. Stuttgart: Franck.
'XIII *Die philosophischen Prinzipien der Mathematik*. Traducción de C. Siegel. Leipzig: Klinkhardt.
61 "Une application de la logique au problème de la langue internationale". *RMM* 16: 761-769. Reimpreso en [XIV], pp. 34-41.
62 "Nia Programo". En colaboración con L. Leau. *Progreso*, 1: 1-8.
63 "Pri nia vortaro". En colaboración con L. de Beaufront. *Ibid.*, 193-200.
64 "La «natura evoluco»". *Ibid.*, 205-207.
65 "Esperanto ed esperantismo". *Ibid.*, 264-276.
66 "La spirito di esperanto". *Ibid.*, 366-368.
67 "Unopla o duopla linguo". *Ibid.*, 475-478.
68 "Literaturo e tradiciono". *Ibid.*, 557-558.
(1909),
XIV *La langue internationale et la science*. Par L. Couturat, O. Jespersen, R. Lorenz, W. Ostwald, L. Pfaundler. París: Delagrave.
'XV *Weltsprache und Wissenschaft*. Edición alemana de [XIV]. Iéna: Fischer.
69 "Uneso". *Progreso*, 1: 689-692.
70 "Pri nia revuo". *Ibid.*, 692-694.
71 "Entre idistes et espérantistes". *La Revue*, janv., 110-113.
72 "Expérience de double traduction en langue internationale". *RMM* 17: 274-275.
73 "Pour la langue auxiliaire neutre". *Rev. Int. de L'Enseignement* II: 255-259.
74 "«Enkhiridion», o manu-libro di Epikteto". Tradukita da C. S. Pearson e L. Couturat, 24 p. in-12; Paris: Delagrave; Londres: Pitman; Stuttgart: Franckh.
75 "Pri la selekto di la verbala radiki". *Progreso*, 2: 321-325.
76 "Pri el malsuceso di Esperanto en Genève". *Ibid.*, 385-387.
77 "Makiavelatra taktiko". *Ibid.*, 579-582.
78 "Pri nia metodo". *Ibid.*, 579-582.
79 "Le choix d'une langue internationale". *Revue de Mois*, 708-724.
(1910),
XVI *Étude sur la dérivation en Esperanto*. Segunda edición ligeramente aumentada de [VIII] con un prefacio. Paris: Delagrave.
XVII *Internaciona Matematikal Lexiko*. En Ido, germana, angla, franca ed italiana. Iéna: Fischer.
80 "Pri nia matematikal Vortaro". *Progreso*, 3: 791-3.
81 "Ido et esperanto". Discusión con M. Aymonier. *Revue de Mois*: 219-29. Reimpreso como folleto ['82].
'82 *Pour l'Ido*. Paris: Alcan.
83 "Pour la langue auxiliaire". *La Revue*, août: 381-5.
(1911),
84 "Des rapports de la logique et de la linguistique dans le problème de la langue internationale". En *Atti del IV Congresso Internazionale di Filosofia*. Vol. II. Bolonia. Liechtenstein: Kraus reprint 1968; pp. 482-90. También en *RMM* 19: 509-16.
85 "L'Uneso necesa". *Progreso*, 4: 6-8.
86 "Pri nia biologiala lexiko". *Ibid.*, 71-4.
87 "Diletantismo". *Ibid.*, 193-7.

88 "Pri nia Revuo". *Ibid.*, 323-4.
89 "Teknikala termini pri aer-vehado". *Ibid.*, 330-3.
(1912),
'90 "For Logistic". Versión inglesa de [55], *The Monist*, 22 (1912): 484-523.
91 "La pronto". Progreso, 4: 631-637.
92 "Entre l'Ido et l'Esperanto". *La Revue*, avril: 381-392. Como folleto ['93].
'93 *La Vérité sur l'Ido*. 15p. in-8°. Paris.
94 "Ido contre Esperanto". *La Coopération des Idées*: 445-449.
95 "Sur la structure logique du langage". *RMM* 20: 1-24.
96 "Sur la structure logique du langage". Discusión de [95]. *BSF* 12: 47-84.
'97 "Die Prinzipien der Logik". En *Encylopädie der philos. Wissenschaften*, vol. I (Logik). Tubinguen: Mohr, pp. 137-201.
98 "La lecioni di Titanic". *Progreso*, 5: 465-72.
(1913),
'99 "The principles of logic". En *Encyclopaedia of the Philosophical Sciences*, vol. I (Logic). Windelband, W. y Ruge, A. (eds.). Londres: Macmillan, pp. 136-198. Versión inglesa de ['97].
100 "La pronuncado di la latino". *Progreso*, 5: 724-28.
101 "Des propositions particulières et de leur portée existentielle. *RMM* 21: 256-59.
102 "Logistique et intuition". *Ibid.*, 260-8.
103 "La ciencal organizo di la laborado". *Progreso*, 6: 129-33.
104 "La «ciencoza» kavali di Elberfeld". *Ibid.*, 274-8.
105 "Pour la logique du langage". *BSF* 13: 135-65.
(1914),
106 "A propos des propositions particulières". *RMM* 22: 259-60.
107 "Hellen Keller, surda-muta-blinda". *Progreso*, 7: 21-4 y 82-8.
'XVIII *The algebra of logic*. Authorized english translation by Lydia Gillingham Robinson, with a preface by P. E. Jourdain. Chicago: Open.
(1915),
XIX *Dictionnaire française-international.* Con la colaboración de L. de Beaufront. Paris: Chaix.
(1916),
108 "De l'abus de l'intuition dans l'enseignement mathématique". *RMM* 23: 879-84.
(1917),
109 "sur les rapports logiques des concepts et des propositions". *RMM* 24: 15-58.
110 "La logique algorithmique et le calcul des probabilités". *Ibid.*, 291-313.
(1918),
'XX *Algebra logiki*. Traducción polaca de B. Knasster. Wasaw: Wydawnictwo Kasy.
(1960),
'111 "La filosofia de las Mathematicas de Kant". Versión española de Miguel Bueno. México: UNAM; reimp. de la traducción en *Mathesis*, 1 (1985): 79-131.
(1972)
'112 "On Leibniz's Metaphysics". Versión inglesa de [26], trad. de R. Allison Ryan en *Leibniz. A collection of critical essays*, Harry G. Frankfurt. New York, anchor, pp. 19-45.

(1976),
'XXI *El álgebra de la lógica*. Versión española e introducción de Esteban Requena de [VII]. Madrid: Tecnos.
'113 Leçon inaugurale au Collège de France. Publicado por primera vez como [56]. En *L'Œuvre de Louis Couturat (1868-1914). De Leibniz à Russell*. Paris: Presses de L'École Normale Supéieur, 1983; pp. 17-33.
(1988),
'114 "Über Leibniz' Metaphysik". En Heinekamp/Schupp (Hgg.), *Leibniz' Logik und Metaphysik*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, pp. 57-80.
(1989),
'115 "Hacia la logística". Traducción española de Santiago Ramírez en *Mathesis*, 5: 497-541, de [55].
116 Lettere di Louis Couturat a Paul Natorp (1901-1902). A cura di Massimo Ferrari. *Rivista di Storia della Filosofia*, 44: 115-139.
(1993),
'117 "Compendio de silogística". Versión española del apéndice I de [III], como anexo en *El arte de la lógica* de Carmen García Trevijano (la traducción es de la autora). Madrid: Tecnos, pp. 193-206.
(1994),
'118 "On Leibniz's Metaphysics". Reimpresión de ['112] en *Gottfried Wilhelm Leibniz. Critical assessments, Vol. 1. Metaphysics and its foundations 1: Sufficient reason, truth, and necessity*. R. S. Woolhause ed., London: Routledge, pp. 1-19.
(1995),
'119 "Sur la métaphysique de Leibniz (avec un opuscule inédit)". Reimpresión de [26], *RMM*, 10: 5-30.
(1998),
XXII *Des Fondements des mathématiques. Etudes Critiques*. Colección de los ensayos y reseñas [41], [12], [16], y [9]. Paris: Vigdor. E-Book.
(1999),
'XXIII *Les Principles des mathématiques*. Reimpresión de [VI] sin el apéndice [41]. Paris: Vigdor. E-Book.
(2003),
'XXIV *Sur la strucutre logique du langage*. Reimpresión electrónica de [95] y [96], e-book, Vigdor: www.vigdor.com.

REFERENCIAS:

Arch. hist. exact. sci. // *Archive for History of Exact Sciences*
BScM // *Bulletin des Sciences Mathematiques*
BSF // *Bulletin de la Société Française de Philosophie*
BSL // *The Bulletin of Symbolic Logic*
EM // *L'Enseignement Mathématique*
NDJFL // *Notre Dame Journal of Formal Logic*
RGSc // *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*
RMM // *Revue de Méthaphysique et de Morale*
RP // *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*

Aa. Vv., (1983), *L'Œuvre de Louis Couturat 1868-1914: De Leibniz a Russell*. París: P.E.N.S.

Anellis, I. H. (1984), "Russell's earliest reactions to cantorian set theory, 1886-1900". En *Axiomatic set theory*, J. E. Baumgartner, *et al.* (eds.). Rhode Island: Amer. Math. Soc., pp. 1-11.

–(1987), "Betrand Russell's theory of numbers, 1896-1898". *Epistemologia*, 10: 303-322.

Aspray, W. & Kitcher, Ph. (eds.)(1988), *History and philosophy of modern mathematics*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Ayer, A. J. (1971), *Language, truth and logic*. England: Penguin books. Primera edición 1936, 2da. Ed., 1946. Hay traducción de M. Suárez en ediciones M. Roca, 1971.

Ballue, Eugène (1894), "Le nombre entier considéré comme fondament de l'analyse mathématique". *RMM*, 2: 317-328.

Barber, W. H. (1955), *Leibniz in France. From Arnauld to Voltaire*. Oxford: Clarendon.

Barreau, H. (1985), Reseña de Aa. Vv., (1983). *RMM*, 90: 140-3. Versión española de Ivonne Pallares en *Mathesis*, 2 (1986): 635-9.

Belna, Jean-Pierre (1996), *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege. Théories, conceptions et philosophie*. Préface de C. Imbert. Paris: Vrin.

Benacerraf, Paul (1981), "Frege: the last logicist". En *Midwest Studies in Philosphy VI*, P. French *et al.* (eds.), Minneapolis, University of Minnesota Press, pp. 17-35.

Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds.) (1983), *Philosophy of mathematics. Selected readings*. Cambridge: Cambridge University Press. 1ra ed.: New Jersey: Prentice, 1964.

Benítez, L. & Robles, J. A. (1997) (Comps.), *El problema del infinito: filosofía y matemáticas*. México: UNAM.

Bennett, Jonathan (1981), *La "Crítica de la razón pura" de Kant. 2. La Dialéctica*. Versión de Julio César Armero [de *Kant's dialectic*, 1974]. Madrid: Alianza.

Bergson, H. (1915), "La philosophie française". *Revue de Paris*, 15 mai, 236-256.

Birkoff, G. & Bennett, M. K. (1988), "Felix Klein and his '*Erlanger Programm*'". En Aspray & Kitcher (eds.) (1988), pp. 145-173.

Blitz, David (1999-2000), "Russell and the Boer war: From imperialist to anti-imperialist". *Russell*, 19: 117-42.

Bolinger, D. (1975), *Aspects of language*. 2da. ed., New York: Harcourt.

Borradori, G. (1996), *Conversaciones filosóficas. El nuevo pensamiento norteamericano*. Versión española de J. A. Mejía Escobar. Colombia: Norma.

Bottazzini, U. (1994), "Geometry and "metaphysics of space" in Gauss and Riemann". En Poggy, S. And Bossi, M. (eds.) (1994), *Romanticism in science*. Netherlands: Kluwer, pp. 15-29.

Bourlet, C. (1897), Reseña de *l'infini mathématique*. *BScM*, I: 199-203.

Boutroux, É. (1900), Allocution d'ouverture (Congrès International de Philosophie). *RMM*, 8: 503-524.

Bowne, G. D. (1966), *The philosophy of logic 1880-1908*. The Hague: Mouton.

Boyer, Carl (1959), *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover.

Bréal, Michel (1901), "Le choix d'une lenguage internationale". *Revue de Paris*, 8: 229-246. Versión inglesa en Bréal (1991), pp. 264-276.

--(1991), *The Beginnings of semantics. Essays, lectures and reviews*. Edición y versión de George Wolf. California: Standford University Press.

Brouwer, L. E. J. (1975), *Collected works. Vol. I. Philosophy and foundations of mathematics*. Edited by A. Heyting. Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Burali-Forti, C. (1899), "Sur l'égalité, et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science". *EM*, 1: 146-61.

Bynum, T. W. (ed.) (1972), *Conceptual notation and related articles*. Oxford: Clarendon.

Cantor, George (1873), "Sur une propiété du système de tous les nombres algébraiques réels". *Acta Mathematica*, 2: 305-310.

---(1873ᵃ), "Une contribution a la théorie des ensambles". *Acta Mathematica*, 2: 311-328.

Calinon, A. (1893), "Étude sur l'indétrmination géométrique de l'univers". *RP*, 36: 595-607.

Chihara, Ch. (1994), "Poincaré and logicism". En Greffe, J-L., *et al.* (1996), pp. 435-446.

Clarke, D. M. (1981), "Descartes' critique of logic". En G.H.R. Parkinson, (ed.) (1981), *Truth, knowledge and reality. Inquiries into the foundations of seventeenth century rationalism*. Wiesbaden, Franz Steiner Verlag, pp. 27-35.

Coffa, Alberto (1986), "From geometry to tolerance: sources of conventionalism in nineteenth century geometry". En R. Colodny, A. Coffa *et al.* (eds.) (1986), *From quarks to quasars*, pp. 3-70.

Corry, Leo (1994), "La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind". *Mathesis*,10: 1-24.

Cournot, A.A. (1847), *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*. 2ed. 1877. Paris: Hachette.

--(1975), *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique. Œuvres Complètes, Vol. II*. Édité par Jean Claude Pariente. Paris: Vrin.

--(1982), *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire. Œuvres Complètes, Vol. III*. Édité par Nelly Bruyere. Paris: Vrin [*Tratado del encadenamiento de las ideas fundamentales en las ciencias y en la historia*. Versión española de Reggy Levi Villier. Argentina: Espasa Calpe, 1946].

--(1987), *Matérialisme, vitalisme, rationalisme. Étude sur l'emploi des données de la science en philosophie. Œuvres Complètes, Vol. V*. Édité par Claire Salomon-Bayet. Paris: Vrin.

Chartier, É. (1901), "Le culte de la raison comme fondement de la Reépublique". *RMM*, 9: 111-8.

Dancy, R. M. (1989), "Thales, Anaximander, and infinity". *Apeiron*, 22: 149-190.

Dedekind, Richard (1998), *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Edición, traducción e introducción de José Ferreirós. Madrid: Alianza.

Delbœuf, Joseph-Remi (1876), "Logique algorithmique. Exposé de la logique déductive au moyen d'un système conventionnel de signe". *RP*, 2: 225-252; 345-355 y 545-595.

--(1877), *Logique algorithmique. Essai sur un système de signes appliqué à la logique, avec une introduction où sont traités les questions générales relatives à l'emploi des notations dans les sciences*. Liége, Bruxelles.

De Lorenzo, J. (1974), *La filosofía de la matemática de Jules Henri Poincaré*. Madrid: Tecnos.

De Pierris, G. (1983), "Frege and Kant on a priori knowledge". *Synthese*, 77: 285-319.

Detlefsen, M. (1992), "Poincaré against the logicians". *Synthese*, 90: 349-378.

Dieudonné, Jean (1983), "Louis Couturat et les mathématiques de son époque". Aa. Vv., (1983), pp. 97-111.

Greffe, J-L., *et al.* (1996), *Henri Poincaré: Science et philosophie*. Nancy.

Dugac, Pierre (1983), "Louis Couturat et George Cantor". En Aa. Vv., (1983), pp. 55-61.

Duhem, P. (1906), *La théorie physique, son objet et sa structure*. Paris: Chevalier et Rivière. *The aim*

and structure of physical theory. Foreword by L. de Broglie. Trad. by Phillip P. Wiener, 1954. New York: Atheneum.
–(1912), "La nature du raisonnement mathématique", *Revue de Philosophie*, 12: 531-43; versión inglesa en Duhem (1996), pp. 222-31.
–(1996), *Essays in the history and philosophy of science*. Translated and edited, with introduction by R. Ariew and P. Barcker. Indianapolis: Hackett.
Dummett, Michael (1991), *Frege. Philosophy of mathematics*. Cambridge: Harvard University Press.
–(1996), *Origins of analytical philosophy*. 2da. edición. Cambridge: Harvard University Press.
Eco, Umberto (1994), *La búsqueda de la lengua perfecta en la cultura europea*. Traducción española de Maria Pons de *La ricerca della lingua perfetta nella cultura europea* [Roma, 1993]. Barcelona: Crítica.
Edwards, H. (1988), "Kronecker's place in history". En Aspray y Kitcher (eds.) (1988), pp. 139-144.
–(1995), "Kronecker on the foundations of mathematics". En Hintikka (ed.) (1992), pp. 45-52.
Ehrlich, Philip (ed.) (1994), *Real numbers, generalization of the reals, and theories of continua*. Dordrecht: Kluwer.
Fabiani, Jean-Louis, (1988), *Les philosophes de la république*. Paris: Minuit.
Fernández Cepedal, José Antonio (1998), "Lengua universal, lengua francesa, y «patois» durante la revolución francesa". *El Basilisco*, 2ª época, 1: 41-48.
Ferreirós, José (1996-7), "Traditional logic and the early history of sets, 1854-1908". *Arch. hist. exact. sci.*, 50: 5-71.
–(1998), Introducción a Dedekind (1998), pp. 5-75.
–(ed.) (2000), *Riemanianna selecta*. Versiones, selección, notas y estudio introductorio de José Ferreirós. Madrid, CSIC.
Frege, G. (1879), *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle. Traducción de Hugo Padilla en Frege (1972), pp. 5-104. Versión inglesa en van Heijenoort (ed.) (1967), pp. 8-82; y en T. W. Bynum (ed.) (1972), pp. 101-203.
–(1884), *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau. Reimp. Stuttgart: Reclam, 1987. Versión española de Hugo Padilla en Frege (1972), pp. 105- 206; versión de C. U. Moulines en Frege (1996), pp.29-144.
–(1895), "Le nombre entier". *RMM*, 3: 73-78; versión inglesa de Victor Dudman en Frege (1984), pp. 229-233.
–(1972), *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos*. Traducciónes de Hugo Padilla Chacón. México: UNAM.
–(1984), *Collected papers on mathematics, logic, and philosophy*. Ed. de B. McGuinnes y versiones de Max Black, Victor Dudman, Peter Geach, E. W. Kluge, B. MacGuinnes y R. H. Stoothff. Oxford: Basil Blackwell.
–(1996), *Escritos filosóficos*. Edición e introducción de Jesús Mosterín. Traducción de Carlos U. Moulines *et. al*. Barcelona: Crítica.
Freudenthal, Hans (1962), "The main trends in the foundations of geometry in the 19th century". En Nagel, E., Suppes, P. & Tarski, A. (eds.) (1962), *Logic, methodology and philosophy of science. Proceedings of the international Congress*. Standford: Stranford University Press, pp. 613-621.
Galilei, Galileo, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nueve scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali*. En *Opere di G. Galilei*. A. Favaro editor, pp. 49-313. Versión española de J. Sádaba, edición de Carlos Solís y J. Sádaba. Madrid: Planeta-De Agustini, 1996.
Giedymin, Jerzy (1982), *Science and convention. Essays on Henri Poincaré's philosophy of science and conventionalist tradition*. Oxford: Pergamon.
Goldfarb, W. (1988), "Poincaré against the logicists". En Aspray y Kitcher (eds.) (1988), pp. 61-81.
Grattan-Guinness, Ivor (1996), "Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's *Elements*: How did he handle them?". *Historia Mathematica*, 23: 355-375.
–(2000), *The Search for mathematical roots, 1870-1940. Logics, set theories and the foundations of*

mathematics from Cantor trough Russell to Gödel. Princeton-Oxford: Princeton University Press.

Gray, J. (1989), *Ideas of space. Euclidean, non euclidean and relativistic*. New York, Oxford University Press, 1ra. ed. 1979. Hay una traducción en Mondadori, 1992.

Grosseteste, R., *Summa Physicorum. Suma de los ocho libros de la Física de Aristóteles*. Texto latino acompañado con una traducción al español y notas de J. E. Bolzan y Celina L. Mendoza. Buenos Aires; Eudeba, 1972.

Grünbaum, A. (1963), "Carnap's views on the foundations of geometry". En *The philosophy of Rudolf Carnap*, edited by P. Schipp, Illinois: Open Court.

Gutting, G. (2001), *French philosophy in the twentieth century*. Cambridge: Cambridge University.

Heinzmann, Gerhard (1994), "On the controversy between Poincaré and Russell about the status of complete induction". *Epistemologia*, 17: 35-52.

Helmholtz, H. Von (1977), *Epistemological writings*. Versión inglesa de la edición comentada de P. Hertz y M. Schlick *Schriften zur Erkenntnistheorie* (Berlin, 1921). Traducción de M. F. Lowe. Edición, introducción y bibliografía de Robert S. Cohen y Yehuda Elkana. Dordrecht: D. Reidel.

Hempel, Carl (1983), "On the nature of mathematical truth". En Benacerraf & Putnam (eds.) (1983), pp. 377-393.

Herbrand, J. (1968), *Ecrits Logiques*. París: Presses Universitaires de France.

Hernández Márquez, V. (2001), *Lógica, lenguaje y realidad. Examen crítico del programa absolutista*. Chihuahua, México: Universidad Autónoma de Chihuahua.

Herrera Ibáñez, A. (1997), "El infinito en Leibniz: Nuevos Ensayos II, 17". En Benítez & Robles (comp.) (1997), pp. 155-167.

Hintikka, J.(1973), *Logic, language-games and information*. Oxford: Clarendon Press. Versión española de A. García Suárez. Madrid, Tecnos, 1976.

–(ed.) (1995), *From Dedekind to Gödel. Essays on the development of the foundations of mathematics*. Dortdrech: Kluwer Academic.

Hylton, P. (1990), "Logic in Russell's logicism". En *The analytic tradition*, D. Bell & N. Cooper (eds.). Oxford: Basil Blackwell, 1990, pp. 137-172.

Jones, Charles V. (1987), "Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas" *Mathesis*, 3: 3-14.

–(1987ª), "La influencia de Aristóteles en el fundamento de *Los Elementos* de Euclides". *Mathesis*, 3: 375-387.

Klein, Jacob (1992), *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. 1st edition, MIT, 1968. New York: Dover.

Kennedy, H. C. (1973), "What Russell learned from Peano". *NDJFL*, 14: 367-372.

–(1980), *Peano. Life and works of G. Peano*. Holland-Boston: Reidel.

Lachelier, Jules (1887), "Psicologie et Métaphysique". *RP*, 2: 12-26. Versión inglesa en Lachelier (1960), pp. 57-96.

–(1960), *The philosophy of Jules Lachelier*. Introducción, selección y traducción de Edward G. Ballard. The Hague: Nijhoff.

Lalande, André (1900), "Le Congrès International de Philosophie". *RP*, 50: 481-508.

–(1906), "Philosophy in France (1905)". *Philosophical Review*, 15: 241-266.

–(1907), "Le mouvement logique". *RP*, 63: 256-288.

–(1914), "L'Œuvre de Louis Couturat". *RMM*, 22: 644-88.

–(1915), "Philosophy in France, 1913-1914". *Philosophical Review*, 24: 245-269. Traducción al inglés de Alma R. Thorne.

Laurent, H. (1905), "A propos d'un livre de M. Couturat". *EM*, 7: 305-9.

Le Roy, E. et Vincent, G. (1894), "Sur la méthode mathématique". *RMM*, 2: 505-530; 676-708.

Lechalas, G. (1897), "De l'infini mathématique" (reseña de). *RMM*, 9: 462-488 y 620-643.

Liard, Louis (1877), "Un nouveau système de logique formalle. M. Stanley Jevons". *RP*, 3:277-293.

–(1877a), "La logique algébraique de Boole". *RP*, 4: 285-317.

--(1878), *Les logiciens anglais contemporains*. Paris: Germer Baillere. 5a. ed., 1907. E-book: Vigdor.
Loi, Maurice (1976), "Couturat méconnu". *Scientia*, 3: 683-8.
–(1983), "Actualité de Couturat". Versión ampliada de (1976). En Aa. V.v., (1983), pp. 11-16.
Lukasiewicz, Jan (1975), *Estudios de lógica y filosofía*. Selección, traducción y presentación de Alfredo Deaño. Madrid: Revista de Occidente.
Mancosu, Paolo (1996), *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventheenth century*. Oxford: Oxford University Press.
McLarty, C. (1997), "Poincaré: Mathematics & logic & intuition". *Philosophia Mathematica*, 5: 97-115.
Merllié, D. (1993), "Les rapports entre la *Revue de Métaphysique* et la *Revue Philosophique*". *RMM*, 98: 58-08.
Merrill, Daniel (1990), *Augustus De Morgan and the logic of relations*. Dordrecht: Kluwer.
Milhaud, Gaston (1897), "L'Infini mathématique (Revue critique)". *RP*, 43: 296-310.
–(1903), Reseña de Poincaré (1902). *RMM*, 11: 773-791.
Miller, A. I. (1972), "On the myth of Gauss's experiment on the physical nature of space". *Isis*, 63: 345-48.
O'Briant, Walter (1979), "Russell and Leibniz". *Studia Leibnitiana*, 11: 159-222.
Panza, M. (1995), "L'intuition et l'évidence. La philosophie kantienne et les géométries non euclidiennes: relecture d'une discussion". En Panza et Pont (eds.) (1995), pp. 39-87.
Panza, Marco et Pont, Jean-Claude (eds.) (1995), *Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIXe siècle*. Paris, Blanchard.
Parsons, Ch. (1992), "Kant's philosophy of arithmetic". En Posy (ed.) (1992), pp. 43-79. Publicado por primera vez en 1969.
Pascal, B. *Pensées. Pensamientos*. Traducción, introducción y notas de J. Llanos según la edición de L. Lamufa (Edition de Seuil, 1963). Madrid: Alianza, 1981.
Peano, G. (1958), *Opera scelte*. Vol. II. *Logica matematica, interlingua ed algebra della gramatica*. Roma: Cremonese.
Peckhaus, Volker (1997), *Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft. Leibniz und die Wiederentdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert*. Berlin: Akademie Verlag.
–(1999), "19th century logic between philosophy and mathematics". *BSL*, 5: 433-450.
--(2003), "The mathematical origins of 19th century algebra of logic". Por aparecer.
Poincaré, H. (1891), "Les géométries non euclidiennes". *RGSc.*, 23: 769-774. Reimpreso con adiciones como cap. 3 en Poincaré (1902), pp. 63-76.
–(1893), "Le continu mathématique", *RMM*, 1: 26-34. Incluido, con varios cambios, como cap. 2 en Poincaré (1902), pp. 47-60, con el título "La grandeur mathématique et l'expérience".
–(1894), "Sur la nature du raisonnement mathématique" *RMM*, 2: 371-384. Incluido como cap. 1, con algunos cambios y omisiones, en Poincaré (1902), pp. 31-45.
–(1895), "L'Espace et la géometrie". *RMM*, 3: 631-646. Reimpreso con cambios como cap. IV en Poincaré (1902), pp. 77-94.
–(1897), "Réponse a quelques critiques". *RMM*, 5: 59-70.
–(1899), "La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement". *EM*, 1: 157-62.
–(1902), *La Science et l'hypothèse*. Paris: Flammarion. Nueva edición con un prefacio de Jules Vullemin, 1968.
–(1904), "Les définitions générales en mathématiques". *EM*, 6: 257-283.
–(1905), *La valeur de la science*. Paris: Flammarion.
–(1905a), "Les mathématiques et la logique". *RMM*, 13: 815-835. Reimpreso con grandes cambios y omisiones, como cap. 7, de Poincaré (1908).
–(1906), "Les mathématiques et la logique". *RMM*, 14: 17-34; 294-317. Reimpreso, con cambios y omisiones, como cap. 8, de Poincaré (1908), y bajo el título "Les logiques nouvelles".
–(1908), *Science et méthode*. Paris: Flammarion.
–(1909), "La logique de l'infini", *RMM*, 17: 461-482. Reimpreso como cap. 4, en Poincaré (1913).

--(1913), *Dernières pensées*. Paris: Flammarion.
--(1943), La ciencia y la hipótesis. Traducción y prólogo de A. B. Besio y José Banfi. Buenos Aires: Espasa-Calpe.
--(1944), *Ciencia y método*. Traducción de M. García Miranda y L. Alonso. Buenos Aires: Espasa-Calpe.
--(1946a), *El valor de la ciencia*. Traducción, prólogo y notas de A. B. Besio y José Banfi. Buenos Aires: Espasa-Calpe.
--(1946b), *Últimos Pensamientos*. Traducción, prólogo y notas de A. B. Besio y José Banfi. Buenos Aires: Espasa-Calpe.
--(2002), *L'Opportunisme scientifique*. Compilación de Louis Rougier, y editado por Laurent Rollet. Basel, Birkhäuser.
Posy, Carl J. (ed.) (1992), *Kant's philosophy of mathematics. Modern essays*. Dordrecht, Kluwer.
Prochasson, Ch. (1993), "Philosopher au XX^e siècle: Xavier Léon et l'invention du «système R2M» (1891-1902)". *RMM*, 98: 109-40.
Pulkkinen, J. (2000), "Why did Gottlob Frege and Ernest Schröder fail in their attempts to persuade german philosophers of the virtues of mathematical logic?". En Kush, M. (ed.) (2000), *The sociology of philosophical knowledge*. Great Britain: Kluwer, pp. 39-59.
Renouvier, Ch. (1927), *Les dilemmes de la métaphysique pure*. París, Presses univesitaires de France. Versión española de J. Ferrater Mora. Buenos Aires, Losada, 1944.
Richards, Joan (1986), "Proyective geometry and mathematical progress in mid-victorian Britain". *Stud. Hist. Phil. Sci.*, 17: 297-325.
--(1988), "Bertrand Russell's *Essay on the foundations of geometry* and the Cambridge mathematical tradition". *Russell*, 8: 59-80.
Riemann, B. (1854-1868), "Über die Hypothesen, welche der Geometrie Zugrunde liegen". Edición bilingüe, traducción y notas de José Ferreirós, y con los comentarios de H. Weyl en Ferreirós (comp.) (2000), pp. 2-40.
Robles, José Antonio (1997), "George Berkeley: sobre la inmensidad de Dios y la divisibilidad al infinito". En Benítez & Robles (comps.)(1997), pp. 169-200.
Rodríguez-Consuegra, Francisco (1991), *The mathematical philosophy of Bertrand Russell: Origins and development*. Berlin: Birkhäuser.
Rogers, J. (1997), "Las ideas innatas y el infinito: los casos de Locke y Descartes". En Benítez & Robles (comp.)(1997), pp. 137-153.
Rollet, Laurent, (2000), "Etre savant et philosophe à la fin du XIXème siècle: Poincaré et la communauté philosophique française". En la red, http: leshumas.insa-lyon.fr/epistemologie/Boutique /Participants/Texte_Rollet.htm
Russell, B. (1896), *Essai critique sur l'hypothese des atomes dans la science contemporaine* [reseña de]. *Mind*, 7: Reimpreso en Russell (1990), pp. 35-43.
--(1897), *An essay on the foundations of geometry*. Cambridge: Cambridge University Press [*Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*. Versión de Julio Porcel en Russell (1973a), pp. 13-157]
--(1897a), Reseña de Couturat (1896). *Mind*, 6: 112-9. Reimpreso en Russell (1990), pp. 60-67.
--(1897b), "On the relations of number and quantity". *Mind*, 6: 326-41. Reimpreso en Russell (1990), pp. 68-82.
--(1898), "Les axiomes propes à Euclide. Sont-ils empiriques?". *RMM*, 6: 759-776. Reimpreso y versión inglesa en Russell (1990), pp. 322-338 y apéndice 1.
--(1899), "Sur les axiomes de la géométrie". *RMM*, 7: 684-707. Versión inglesa y reimpresión en Russell (1990), pp. 390-415 y apéndice 2.
--(1900), *A critical exposition of the philosophy of Leibniz, with an appendix of leading passages*. Cambridge: Cambridge University Press [*Exposición crítica de la filosofía de Leibniz*. Trad. de Benito Cardenal en Russell (1973a), pp. 161-375]
--(1901), "On the notion of order". *Mind*, 10: 30-51.
--(1902), "Carta a Frege". Versión inglesa en van Heijenoort (ed.) (1967), pp. 124-125 y Frege (1980),

pp. 130-131.
–(1903), *The principles of mathematics*. London: Allen and Unwin; 2da ed., 1937. Nueva ed. New York: Norton, 1996 [*Los principios de la matemática*. Traducción de José B. Gutierrez en Russell (1973a), pp. 377-820]
–(1903a), "Recent work on the philosophy of Leibniz". *Mind*, 12: 177-201.
–(1905), "On Denoting". *Mind*, 14: 479-93; reimp. en Russell (1956), pp. 39-56 [51-74].
–(1905ª), "Science and Hipothese [reseña de]". *Mind*, reimpreso en Russell (1910), pp. 70-8.
--(1910), *Philosophical Essays*. New York: Simon & Schuster.
--(1914), *Our knowledge of the external world as a field for a scientific method in philosophy*. Londres: Open Court [*Nuestro conocimiento del mundo exterior como campo para el método científico en filosofía*. Versión de Miguel Ortega en Russell (1973a), pp. 1145-1262]
–(1919), *An introduction to the mathematical philosophy*. Londres: G. Allen & Unwin [*Introducción a la filosofía matemática*. Traducción de J. Fuentes en Russell (1973a), pp.1264-1390.
–(1924), "Logical atomism". En *Contemporary British Philosophy*. J. Muirhead (comp.), Londres: Allen and Unwin. Traducción española en Ayer (comp.)(1965), pp. 37-56.
–(1956), *Logic and knowledge, 1901-1950*. Ed. de R. Ch. March. London: Allen & Unwin [*Lógica y conocimiento*. Versión de J. Muguerza. Madrid: Taurus, 1966].
–(1959), *My philosophical development*. Londres: Allen and Unwin [*La evolución de mi pensamiento filosófico*. Versión de Juan Novella Domingo. Madrid: Alianza, 1976].
–(1967), *The Autobiography of B. Russell, Vol. I: 1872-1914*. London: Allen & Unwin.
--(1973), *Essays in Analysis*. Londres: Allen & Unwin.
–(1973a), *Obras completas. Volumen II, ciencia y filosofía 1897-1919*. Madrid: Aguilar.
–(1983), *Cambridge essays 1888-1889. The collected papers of B. Russell, v. 1*. K. Blackwell, A. Brink, N. Griffin, R. Rempel, J. Slater eds., London: Allen & Unwin.
–(1990), *Philosophical Papers, 1896-99. The collected papers of Bertrand Russell, v. 2*. Edición de N. Griffin y A. C. Lewis. Londres: Unwin Hyman.
–(2002), *The selected letters of Bertrand Russell. The private years, 1884-1914*. Nicholas Griffin ed., London: Rudledge.
Sanzo, U. (1976), "Significato epistemológico della polemica Poincaré-Couturat". *Scientia*, 110: 369-418.
–(1991), *L'Artificio della lingua. Louis Couturat 1868-1914*. Milan: Franco Angeli.
Savatovsky, Dan (1998), "Leibniz, le retour. Les prémices d'une sémantique historique: Couturat, Peano, Russell". *Sémiotiques*, 14: 125-141.
–(2001), "Le Péanien: une langue sans métalangue". En *Métalangage et terminologie linguistique*, Colombat, B. & Sauelli (eds.), 2000, Lovain: Peeters, pp.485-498.
Schmid, Anne-Françoise (1983), "La correspondence inédite entre Bertrand Russell et Louis Couturat". *Dialectica*, 37: 75-109. En Aa. Vv., (1983), pp. 81-96, aparece una versión anterior.
–(ed.)(2001), *Bertrand Russell correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis Couturat (1897-1913)*. Paris: Kimé.
Schröder, Ernest (1880), Reseña de Frege (1879). *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 25: 81-94. Versión inglesa en Bynum (ed.) (1972), pp. 218-232.
–(1890), *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*exakte Logik*). Bd. I, B. G. Teubner: Leipzing. Repr., 1966.
–(1898), "On pasigraphy: its present state and the pasigraphic movement in Italy". *The Monist*, 9: 42-62. Correcciones *The Monist* 10: 320.
Segre, M. (1994), "Peano's axioms in their historical contexts". *Arch. hist. exact. sci.* 47: 201-342.
Simon-Nahum, P. (1993), "Xavier Léon/Élie Halévy. Correspondance (1891-1898)". *RMM*, 98: 3-58.
Simons, Peter (1992), *Philosophy and logic in Central Europe from Bolzano to Tarski. Selected essays*. Dordrecht: Kluwer.
Stein, Howard (1990), "Eudoxos and Dedekind: On the ancient greek theory of ratios and its relation to modern mathematics". *Synthese*, 84: 163-182.

Tannery, J. (1886), *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Paris, Hermann.
–(1897), Reseña de *L'Infini mathématique*. *RGSc.*, 8: 129-140.
Torretti, Roberto (1978), *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*. Dordrecht: D. Reidel.
–(1998), *El paraíso de Cantor*. Chile: Universidad Nacional Andrés Bello.
Vailati, G. (1898), "La méthode déductive comme instrument de recherche". *RMM*, 6: 667-703.
–(1899), "La logique mathematique et sa nouvelle phase de développemet dans les écrits de M. J. Peano". *RMM*, 7: 86-102.
--(1947), *Contribución a la historia de la mecánica*. Traducción de Hugo Incarnato. Buenos Aires: Espasa Calpe.
van Heijenoort, Jean (ed.) (1967), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic,1879-1931*. London: Harvard University Press. 3ra reimp., 1977.
–(1968), Prefacio a Herbrand (1968), pp. 1-12.
Verrienti, Rossella (1984-85), "Logistica e lingua internazionale in alcuni enediti di Couturat a Peano". *Bollettino di Storia della Filosofia*, 8: 307-338.
Wilson, Catherine (1995), "The reception of Leibniz in the eighteenth century". En N. Jolly (ed.), *The Cambridge companion to Leibniz*. Cambridge, Cambridge University Press, pp. 442-474.
Zahar, Elie (2001), *Poincaré's philosophy. From conventionalism to phenomenology*. Chicago: Open Court.