

00365



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

INVARIANTES CUÁNTICOS DE NUDOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

GABRIEL OLVERA ALCÁNTARA

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO *

MÉXICO, D.F.

DICIEMBRE, 2005

m-340291



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a efectuar el trámite correspondiente e impreso el
contenido de mi trabajo recuperacional.

FECHA:
FIRMA:

21 enero 2005

[Handwritten signature]

* Con el apoyo del Proyecto PAPIIT IN110902

Invariantes Cuánticos de Nudos

Gabriel Olvera A

Facultad de Ciencias

UNAM



Contenido

Introducción	III
1. Categorías Cuánticas	1
1.1. Categorías	3
1.2. Categorías Monoidales	13
1.3. Presentación de una Categoría	21
1.4. Categorías Cuánticas	29
1.5. Grupos Cuánticos	35
2. Categorías de Marañas	39
2.1 Marañas	41
2.2 Categoría Ω	51
2.3 Presentación de Ω	61
2.4 Categoría Π	71
2.5 Presentación de Π	77

3. Representaciones de Ω y Π	81
3.1. Ecuación YB -clásica	83
3.2. Ecuación YB -cuántica	91
3.3. Operadores Completos	97
3.4. Representación de Ω	109
3.5. Representación de Π	115
4. Invariantes Cuánticos	123
4.1. Categorías Hecke	125
4.2. Módulos $H_{\Lambda}\Omega(a, b)$	131
4.3. Categorías Kauffman	137
4.4. Módulos $K_{\Lambda}\Pi(a, b)$	143
4.5. Invariantes Cuánticos	149
A. Categoría \mathbb{L}	155
B. R-matrices Funcionales	165
Referencias	169
Índice	171

Introducción

El presente artículo constituye una exposición de los elementos básicos de la teoría de invariantes cuánticos de nudos, orientada a la construcción de los invariantes Jones-Conway y Kauffman.

En esta teoría los nudos se definen como morfismos de las categorías de marañas orientadas y normadas, de manera que cada representación de alguna de las dos implica la existencia de un invariante isotópico de nudos.

Las representaciones a través de las cuales se obtienen los invariantes Jones-Conway y Kauffman, se definen mediante las soluciones R_ω y R_ν de la ecuación Yang-Baxter cuántica, correspondiente a las álgebras A_n^1 y B_n^1 .

El artículo consta de cuatro capítulos y dos apéndices. En el primer capítulo se presentan los conceptos categóricos necesarios.

En el segundo capítulo se definen las categorías de marañas orientadas y normadas, y una presentación por generadores y relaciones para cada una.

En el tercer capítulo se define una representación de las categorías de marañas, empleando las presentaciones del capítulo anterior y los operadores R_ω y R_ν . Además se incluye una breve relación de resultados sobre las ecuaciones Yang-Baxter clásica y cuántica.

En el cuarto capítulo se definen las categorías Hecke y Kauffman, y se establecen las propiedades mediante las que se definen los invariantes Jones-Conway y Kauffman.

En el apéndice sobre las álgebras Lie se establecen los antecedentes de la ecuación Yang-Baxter.

En el apéndice sobre las R -matrices funcionales se incluye una demostración directa de que la solución R_ω , es un operador cuántico.

Capítulo 1

Categorías Cuánticas

Este capítulo contiene los elementos categóricos de la teoría. Las categorías y los grupos cuánticos constituyen los conceptos centrales del capítulo y de todos los resultados principales de la teoría.

Como conclusión se establece un método para definir una clase de categorías cuánticas, empleando la clase de las álgebras Hopf llamadas grupos cuánticos.

1.1. Categorías

El concepto de categoría y los diversos ejemplos incluidos en esta sección conforman los elementos básicos de toda la exposición.

DEFINICIÓN 1.1.1 *Sea Λ una clase. Una Λ -categoría es una terna de clases $K=(M_\Lambda, I_\Lambda, P_\Lambda)$ con las siguientes propiedades.*

Para cada pareja $A, B \in \Lambda$, existe un conjunto $\Lambda(A, B) \subset M_\Lambda$. Para cada terna A, B, C existe una aplicación $\circ_{ABC} \in P_\Lambda$, de $\Lambda(B, C) \times \Lambda(A, B)$ en $\Lambda(A, C)$, con las siguientes propiedades.

Para cada $\varphi \in \Lambda(A, B)$, existen $id_A, id_B \in I_\Lambda$ e

$$id_B \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ id_A \tag{1.1}$$

Para cada terna φ, ϱ, ψ , si $\varphi \circ (\varrho \circ \psi)$ y $(\varphi \circ \varrho) \circ \psi$ existen, entonces

$$\varphi \circ (\varrho \circ \psi) = (\varphi \circ \varrho) \circ \psi \quad (1.2)$$

Por simplicidad la clase Λ y la categoría K se consideran idénticas.

Los elementos de las clases Λ y M_Λ se llaman objetos y morfismos respectivamente. El morfismo $\varphi \in \Lambda(AB)$ suele representarse por $A \xrightarrow{\varphi} B$, y los objetos A, B se llaman dominio y codominio de φ .

Las aplicaciones \circ_{ABC} se llaman composiciones y por simplicidad se omite su subíndice. Si es necesario indicar su relación con Λ se emplea la notación \circ_Λ . La composición $\varphi \circ \psi$ usualmente se denota por $\varphi\psi$.

El conjunto $\Lambda(A, A)$ también se denota por $\text{End}(A)$ y sus elementos se llaman endomorfismos, en particular id_A se llama identidad de A , y ocasionalmente se denota por I_A ó I .

DEFINICIÓN 1.1.2 *El morfismo $\varphi \in \Lambda(A, B)$ es un isomorfismo si, existe $\psi \in \Lambda(B, A)$ con las propiedades*

$$\psi \circ \varphi = id_A, \quad \varphi \circ \psi = id_B.$$

El morfismo ψ se llama inverso de φ y se denota por φ^{-1} .

DEFINICIÓN 1.1.3 *Los objetos A, B son isomorfos si existe un isomorfismo $\varphi \in \Lambda(A, B)$.*

La relación de isomorfismo entre los objetos de Λ es de equivalencia y se denota por \sim .

El subconjunto de isomorfismos de $\text{End}(A)$ se denota por $\text{Aut}(A)$, y sus elementos también se llaman automorfismos de A .

DEFINICIÓN 1.1.4 Una subcategoría de la categoría M , es una categoría $\Lambda \subset M$ con las siguientes propiedades.

Para cada pareja $A, B \in \Lambda$

$$\Lambda(A, B) \subset M(A, B)$$

Para cada $A \in \Lambda$, las identidades de A respecto Λ y M son iguales.

Para cada terna de objetos de Λ , su composición \circ_{Λ} es una restricción de la correspondiente composición \circ_M .

NOTACIÓN 1.1.5 Si los conjuntos A, B son objetos de alguna categoría, la notación $A \prec B$ indica que $A \subseteq B$, y si existe una estructura definida en cada uno, entonces la de B es una extensión de la definida en A .

Si Λ y M son categorías, la notación $\Lambda \prec M$ indica que Λ es una subcategoría de M .

Por otra parte, si para el objeto A está definido su rango ó dimensión, $A^{(n)}$ denota que su rango es igual a n . La clase de los objetos de rango finito de una categoría Λ , se denota por $\overset{\circ}{\Lambda}$.

La categoría de los conjuntos se denota por \mathcal{C} . Para cada Λ -categoría K , si $\Lambda \subset \mathcal{C}$ se supone que $K \prec \mathcal{C}$.

EJEMPLOS 1.1.6 Sean R un anillo conmutativo con uno, F un campo y K el campo real ó complejo.

1. Categoría C°

Los objetos de C° son espacios topológicos y sus morfismos son aplicaciones continuas.

Para cada pareja $A, B \in C^\circ$ la clase de los homeomorfismos de A en B , se denota por $\text{Hm}(A, B)$.

2. Categoría C^∞

Los objetos de C^∞ son variedades lisas, respecto alguna K -estructura, y sus morfismos son aplicaciones lisas.

Para cada variedad A , y cada punto $a \in A$, el haz tangente y el espacio tangente en a se denotan por TA y T_aA . Si $A \prec B$ el haz normal y el espacio normal en a se denotan por $N(A, B)$ y N_aA .

En el caso de que variedad A sea de dimensión uno, el vector tangente unitario en a se denota por v_a .

Para cada pareja $A, B \in C^\infty$ las clases de los difeomorfismos, isotopías, encajes e inmersiones de A en B , se denotan por

$$D(A, B), \quad \text{Is}(A, B), \quad \text{Em}(A, B), \quad \text{In}(A, B).$$

3. Categoría \mathbb{G}

Los objetos de \mathbb{G} son grupos de Lie y sus morfismos son homomorfismos lisos.

Por definición, un grupo de Lie es un grupo (A, \cdot) con las siguientes propiedades. $A \in C^\infty$, la operación \cdot pertenece a la clase $C^\infty(A \times A, A)$ y la aplicación $\varphi a = a^{-1}$ pertenece a la clase $C^\infty(A, A)$.

Para cada $a \in A$, se define el automorfismo llamado traslación izquierda

$$L_a b = a \cdot b$$

La componente conexa del elemento neutro del grupo A se denota por A^0 .

Grupos Lineales

Sea $M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}$ el conjunto de K -matrices cuadradas de orden n . El grupo general lineal $GL_n(K)$ se define como el subgrupo de $(M_n(K), \cdot)$ que contiene las matrices invertibles. Los subgrupos de $GL_n(K)$ se llaman grupos lineales.

Grupos Clásicos

Así se llama a los grupos lineales $SL(n)$, $O(n)$ y $Sp(n)$, donde $Sp(n)$ se define para cada forma antisimétrica $\langle | \rangle$ no degenerada de K^{2n} .

El grupo especial lineal $SL(n)$ contiene las matrices $A \in GL_n(K)$, con $\det A = 1$.

El grupo ortogonal $O(n)$ contiene las matrices $A \in GL_n(K)$, con $A^t A = I_n$. El subgrupo $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$ se llama ortogonal especial.

El grupo simpléctico $Sp(n)$ contiene las matrices $A \in GL(2n)$,

$$\langle Aa | Ab \rangle = \langle a | b \rangle \quad \forall a, b$$

4. Categoría $\mathbf{M}(R)$

Los objetos de $\mathbf{M}(R)$ son R -módulos y sus morfismos son homomorfismos de módulos.

Para cada $A \in \mathbf{M}(R)$, se definen las trasposiciones y las evaluaciones.

$$p_A \in \text{Aut} A^{2\otimes}, \quad p_A a \otimes b = b \otimes a$$

$$d_A \in \mathbf{M}(A^* \otimes_R A, R), \quad d_A a \otimes b = a(b)$$

Para cada R , se definen las clases

$$\tau_R = \{p_A \mid A \in \mathbb{M}(R)\}$$

$$\delta_R = \{d_A, b_A = d_A^* \mid A \in \mathbb{M}(R)\}$$

Subcategorías $\mathbb{F}(R)$, $\mathbb{P}(R)$

Los objetos de estas categorías son R -módulos libres y proyectivos.

Por definición, un módulo es libre si contiene una base, y si es finita el módulo se llama de rango finito. Por otra parte, un módulo es proyectivo si es sumando directo de un módulo libre, si además el módulo libre es de rango finito, entonces el módulo proyectivo se llama de rango finito.

Categoría Σ_V

Sea $V = V_{i \in J}$ una colección de módulos. Para cada sucesión finita $S \subseteq J$, sea

$$V_S = \otimes_{s \in S} V_s, \quad V_\emptyset = R$$

Los objetos de Σ_V son los módulos V_S y

$$\Sigma_V(V_S, V_T) = \mathbb{M}(V_S, V_T)$$

Categoría \mathbb{E}

La categoría de los espacios lineales $\mathbb{E}(F)$ se define por $\mathbb{M}(F)$.

Un endomorfismo u operador se llama semisimple si es diagonalizable.

El operador φ se llama nilpotente si

$$\exists n, \quad \varphi^n = 0$$

y en tal caso, se define la exponencial

$$e^\varphi = \sum (i!)^{-1} \varphi^i$$

5. Categoría $R[\Lambda]$

Para cada categoría Λ , se define la Λ -categoría libre $R[\Lambda]$. Para cada pareja $A, B \in \Lambda$, $R[\Lambda](A, B)$ es el R -módulo libre generado por $\Lambda(A, B)$, y sus composiciones son las respectivas extensiones lineales de \circ_Λ .

6. Categoría \mathbf{L}

Los objetos de \mathbf{L} son álgebras Lie y sus morfismos son homomorfismos Lie.

Por definición, un álgebra Lie es una pareja $(A, [\])$, donde $A \in \mathbb{E}(K)$ y $[\]_A$ es una aplicación bilineal con las propiedades

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$$

$$[a, b] + [b, a] = 0, \quad \forall a, b, c$$

Un homomorfismo Lie entre las álgebras A y B , es una aplicación $\varphi \in \mathbb{E}(A, B)$ con la propiedad

$$\varphi[a, b]_A = [\varphi a, \varphi b]_B, \quad \forall a, b.$$

La aplicación $[\]_A$ se llama paréntesis ó corchete Lie, y si es igual a cero el álgebra se llama abeliana.

En el apéndice sobre \mathbf{L} se incluyen los conceptos y resultados necesarios para la exposición.

7. Categoría $\mathbf{A}(R)$

Los objetos de $\mathbf{A}(R)$ son R -álgebras y sus morfismos son homomorfismos de álgebras.

Por definición una R -álgebra es un anillo $(A, +, \cdot)$ con uno, donde $A \in \mathbb{M}(R)$ y la acción de R sobre A tiene la propiedad

$$r(a \cdot b) = ra \cdot b = a \cdot rb$$

Un homomorfismo de álgebras es un homomorfismo de anillos y módulos.

Álgebras Lineales

El álgebra general lineal $\mathfrak{gl}_n(R)$, $n \in \mathbb{N}$ se define como el anillo $(M_n(R), +, \cdot)$, donde la acción de R sobre $M_n(R)$ es el producto escalar usual. Las subálgebras $\mathfrak{gl}_n(R)$ se llaman álgebras lineales.

Álgebras Clásicas

Así se llama a las álgebras lineales $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{o}(n)$ y $\mathfrak{sp}(n)$.

El álgebra especial lineal $\mathfrak{sl}(n)$ contiene las matrices $A \in \mathfrak{gl}_n(R)$, $\text{tr}A = 0$.

El álgebra ortogonal $\mathfrak{o}(n)$ contiene las matrices $A \in \mathfrak{gl}_n(R)$, $A^t = -SAS^{-1}$ donde S es la matriz con coeficientes iguales a uno, en la diagonal auxiliar y cero en el complemento.

El álgebra simpléctica $\mathfrak{sp}(n)$ contiene las matrices $A \in \mathfrak{gl}_{2n}(R)$, $A^t = -BAB^{-1}$ donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}$$

El álgebra ortogonal especial $\mathfrak{so}(n)$ se define como el álgebra lineal que contiene las matrices $A \in \mathfrak{gl}_n(R)$, $A^t = -A$.

8. Categoría $\mathbb{H}(R)$

Los objetos de $\mathbb{H}(R)$ son álgebras Hopf y sus morfismos son homomorfismos Hopf.

Un álgebra Hopf es una pareja $(A, e(A))$, donde $A \in \mathbb{A}(R)$, y la estructura Hopf $e(A) = (\Delta, \varepsilon, s)$ tiene las siguientes propiedades.

$$\Delta \in \mathbb{M}(A, A^{2\otimes}), \quad \varepsilon \in \mathbb{M}(A, R)$$

$$s \in \text{End}(A)$$

$$(id_A \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes id_A)\Delta \quad (1.3)$$

$$m(s \otimes id_A)\Delta = m(id_A \otimes s)\Delta = \varepsilon \cdot 1_A \quad (1.4)$$

$$(\varepsilon \otimes id_A)\Delta = (id_A \otimes \varepsilon)\Delta = id_A \quad (1.5)$$

En (1.3), $(A \otimes A) \otimes A$ y $A \otimes (A \otimes A)$ se consideran idénticos, así como $A \otimes R$, $R \otimes A$ y A , en (1.5). La aplicación $m \in \mathbb{M}(A \otimes A, A)$ es una extensión del producto del anillo A .

Un morfismo $\varphi \in \mathbb{A}(A, B)$ es un homomorfismo Hopf si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & A \otimes A \\ \downarrow \varphi & \circlearrowleft & \downarrow \varphi \otimes \varphi \\ B & \xrightarrow{\Delta} & B \otimes B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & A \\ \downarrow \varphi & \circlearrowleft & \downarrow \varphi \\ B & \xrightarrow{s} & B \end{array}$$

9. Categoría $\text{Rep}(A)$

Para cada álgebra Hopf A , la categoría de representaciones $\text{Rep}(A)$ es la clase de A -módulos de rango finito y sus morfismos son A -homomorfismos lineales.

Por definición, B es un A -módulo de rango finito si

$$B \in \mathbb{M}(A) \cap \overset{\circ}{\mathbb{P}}(R).$$

1.2. Categorías Monoidales

Ahora se introducen los conceptos de categoría monoidal y categoría monoidal estricta, y mediante el teorema de coherencia de MacLane se establece la relación entre ambos.

La existencia de las álgebras cubrientes universales, así como la relación entre los grupos y las álgebras clásicas se incluyen solo por completez.

DEFINICIÓN 1.2.1 *Un funtor F entre las categorías Λ , M es una aplicación de Λ en M , con una extensión*

$$F \in \mathcal{C}(\Lambda(A, B), M(FA, FB)) \quad (1.6)$$

para cada pareja $A, B \in \Lambda$, con las siguientes propiedades

$$Fid_A = id_{FA} \quad (1.7)$$

$$F\varphi \circ \psi = F\varphi \circ F\psi, \quad \forall \varphi \circ \psi$$

La clase de funtores de \mathbb{A} en M , se denota por $\Phi(\mathbb{A}, M)$.

EJEMPLOS 1.2.2 *Funtor ζ*

Este funtor pertenece a la clase $\Phi(\mathbb{A}, \mathbb{L})$ y, para cada álgebra $(A, +, \cdot)$ su imagen es el álgebra Lie $(A, [\]_A)$, donde

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a, \quad \forall a, b$$

Usualmente A y ζA se consideran idénticos.

Funtor U

Este funtor, llamado cubriente universal, pertenece a la clase $\Phi(\mathbb{L}, \mathbb{A})$, y para cada álgebra Lie L su imagen es el álgebra cubriente universal de L .

Por definición un álgebra cubriente universal de L es una pareja $(U(L), \alpha_L)$, donde $U(L)$ es un álgebra y el homomorfismo

$$\alpha_L \in \mathbb{L}(L, \zeta U(L))$$

tiene la siguiente propiedad.

Para cada $B \in \mathbb{A}$ y $\alpha \in \mathbb{L}(L, \zeta B)$, existe un homomorfismo $\beta \in \mathbb{L}(\zeta U(L), \zeta B)$ con las propiedades

$$\beta 1 = 1, \quad \alpha = \beta \alpha_L$$

Del siguiente teorema, debido a Serre, se concluye que U está bien definido.

Teorema 1.2.3 *Para cada $L \in \mathbb{L}$, existe un álgebra cubriente universal $U(L)$, y es única salvo isomorfismo.*

Demostración. [JS].

Además $U(L)$ es un álgebra Hopf respecto a la estructura definida por

$$\Delta a = a \otimes 1 + 1 \otimes a, sa = -a \quad \forall a$$

$$\varepsilon = 0$$

Funtor Lie λ

Este funtor pertenece a la clase $\Phi(\mathbb{G}, \mathbb{L})$ y, para cada grupo Lie G , su imagen λG es el álgebra tangente $(T_e G, [\]_G)$, donde el paréntesis se define como sigue.

Para cada $u \in T_e G$ se define el campo vectorial $x = x(u)$ por

$$x_p = dL_p u, \quad \forall p$$

Entonces, para cada pareja $u, v \in T_e G$, se define

$$[u, v]_G = [x, y]$$

$$x = x(u), \quad y = y(v).$$

Como una propiedad inmediata del funtor Lie, y sólo por completez, se establece la relación entre los grupos y las álgebras clásicas.

Teorema 1.2.4

$$\lambda GL_n \sim \mathfrak{gl}_n, \quad \forall n$$

y en particular

$$\lambda SL_n \sim \mathfrak{sl}_n$$

$$\lambda SO_n \sim \mathfrak{so}_n$$

$$\lambda Sp_n \sim \mathfrak{sp}_n$$

La importancia de los funtores de la clase $\Phi(\Lambda, \mathbb{M})$, llamados representaciones lineales de Λ , se debe a su aplicación para interpretar en la categoría de módulos, las propiedades de la categoría Λ .

DEFINICIÓN 1.2.5 *Una representación lineal de la categoría Λ , es un functor de la clase $\Phi(\Lambda, \mathbb{M}(R))$, para algún R .*

El concepto de categoría monoidal, que se define en seguida, junto con algunos conceptos previos, no sólo tiene su origen en la categoría de módulos, de hecho representa una axiomatización de las propiedades básicas de la composición y el producto tensorial de módulos.

Para cada pareja de categorías Λ, M , se define la $\Lambda \times M$ -categoría producto $\Lambda \cdot M$ por

$$\begin{aligned}\Lambda \cdot M((A, B), (C, D)) &= \Lambda(A, C) \times M(B, D) \\ (\varphi, \varrho) \circ (\psi, \gamma) &= (\varphi \circ \psi, \varrho \circ \gamma) \\ id_{(\Lambda, B)} &= (id_A, id_B)\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.2.6 *Un producto tensorial en la categoría Λ es un functor \cdot de la clase $\Phi(\Lambda \cdot \Lambda, \Lambda)$, con las siguientes propiedades*

$$(\varphi \circ \psi) \cdot (\varphi' \circ \psi') = (\varphi \cdot \varphi') \circ (\psi \cdot \psi') \quad (1.8)$$

$$id_A \cdot id_B = id_{A \cdot B} \quad (1.9)$$

Si X, Y representan morfismos u objetos de alguna categoría su producto $X \cdot Y$ se denota por XY .

Un isomorfismo natural entre los funtores $F, G \in \Phi(\Lambda, M)$, por definición es una clase de isomorfismos

$$t_A \in M(FA, GA), \quad \forall A \in \Lambda$$

con la propiedad

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{t_A} & GA \\
 F\varphi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G\varphi \\
 FB & \xrightarrow{t_B} & GB
 \end{array}$$

para cada $\varphi \in \Lambda(A, B)$.

La existencia de un isomorfismo natural entre los funtores $F, G \in \Phi(\Lambda, M)$ se denota por $F \sim G$.

DEFINICIÓN 1.2.7 Una categoría monoidal es una pareja $(\Lambda, (\cdot, \mathbb{I}_\Lambda))$, formada por una categoría y una estructura tensorial.

La estructura tensorial $(\cdot, \mathbb{I}_\Lambda)$ consta de un producto tensorial y un objeto \mathbb{I}_Λ con las siguientes propiedades.

Para cada terna $A, B, C \in \Lambda$, existen tres isomorfismos naturales

$$\alpha \in \Lambda(A \cdot B \cdot C, A \cdot (B \cdot C))$$

$$\mu \in \Lambda(A \cdot \mathbb{I}_\Lambda, A), \quad \nu \in \Lambda(\mathbb{I}_\Lambda \cdot A, A)$$

con las propiedades

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (A \cdot B) \cdot (C \cdot D) & & \\
 & \nearrow \alpha & & \searrow \alpha & \\
 ((A \cdot B) \cdot C) \cdot D & & \circlearrowleft & & A \cdot (B \cdot (C \cdot D)) \\
 \alpha \downarrow & & & & \uparrow \alpha \\
 (A \cdot (B \cdot C)) \cdot D & \xrightarrow{\alpha} & & & A \cdot ((B \cdot C) \cdot D)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (A \cdot \mathbb{I}_\Lambda) \cdot B & \xrightarrow{\alpha} & A \cdot (\mathbb{I}_\Lambda \cdot B) \\
 \mu \cdot id_B \searrow & \circlearrowleft & \searrow id_A \cdot \nu \\
 & & A \cdot B
 \end{array}$$

Por simplicidad la categoría monoidal $(\Lambda, (\cdot, \mathbb{I}_\Lambda))$ se denota por Λ .

Es inmediato que la pareja $(\mathbb{M}(R), (\otimes, R))$ es una categoría monoidal, donde los isomorfismos α , μ y ν están definidos por

$$\alpha((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c)$$

$$\mu a \otimes r = r \cdot a = \nu r \otimes a$$

Dado que en la categoría de módulos tanto $(A \otimes B) \otimes C$ y $A \otimes (B \otimes C)$, como $A \otimes R$, $R \otimes A$ y A , usualmente se consideran idénticos, como una generalización de esta consideración se define el concepto de categoría monoidal estricta.

DEFINICIÓN 1.2.8 Una categoría monoidal $(\Lambda, (\cdot, \mathbb{I}_\Lambda))$ es estricta, si la estructura tensorial tiene las siguientes propiedades

$$A \cdot \mathbb{I}_\Lambda = A = \mathbb{I}_\Lambda \cdot A \quad (1.10)$$

$$\varphi \cdot id_{\mathbf{1}} = \varphi = id_{\mathbf{1}} \cdot \varphi, \quad (1.11)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad (1.12)$$

$$(\varphi \cdot \psi) \cdot \varrho = \varphi \cdot (\psi \cdot \varrho) \quad (1.13)$$

para cada A, B, C y, cada φ, ψ, ϱ .

A continuación se demuestra que, salvo equivalencia, toda categoría monoidal es estricta, y por tanto la consideración que se hace con la categoría de módulos es válida.

DEFINICIÓN 1.2.9 Sean Λ, M categorías monoidales. El funtor $F \in \Phi(\Lambda, M)$ es homogéneo, si tiene las siguientes propiedades.

$$FX \cdot Y = FX \cdot FY \quad (1.14)$$

$$F\mathbb{I}_\Lambda = \mathbb{I}_M \quad (1.15)$$

donde X, Y son objetos ó morfismos.

DEFINICIÓN 1.2.10 Las categorías monoidales Λ, M son equivalentes si, existen dos funtores homogéneos $F, G \in \Phi(\Lambda, M), (M, \Lambda)$, con la propiedad

$$FG \sim id_M, \quad GF \sim id_\Lambda \quad (1.16)$$

Para denotar que las categorías monoidales Λ, M son equivalentes, se emplea la notación $\Lambda \sim M$.

Teorema de Coherencia 1.2.11 Cada categoría monoidal $(\Lambda, (\cdot, \mathbb{I}_\Lambda))$, es equivalente a una categoría monoidal estricta.

Demostración. Sea Σ_Λ la clase de las sucesiones finitas de objetos de Λ , incluyendo la sucesión vacía \emptyset .

Para cada pareja $A_i, B_j \in \Sigma_\Lambda$, se define

$$\Sigma_\Lambda(A_i, B_j) = \Lambda(\cdot A_i, \cdot B_j)$$

donde

$$\cdot \emptyset = \mathbb{I}_\Lambda.$$

Para cada pareja $\varphi, \psi \in \Sigma_\Lambda(A_i, B_j), (B_j, C_k)$ su composición se define por

$$\psi \circ_\Sigma \varphi = \psi \circ_\Lambda \varphi$$

Sea P_Σ la clase de las composiciones \circ_Σ .

Para cada sucesión A_i , sean

$$id_{A_i} = id_{\cdot A_i}$$

e, I_Σ la clase que contiene los morfismos id_{A_i} .

Es inmediato que $(M_\Sigma, I_\Sigma, P_\Sigma)$ es una Σ_Λ -categoría.

Para cada pareja $A_{i \leq m}, B_{j \leq n}$ se define la sucesión $A_i \vee B_j$ por

$$A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$$

y por otra parte, para cada pareja $\varphi \in \Sigma_\Lambda(A_i, B_j), \psi \in \Sigma_\Lambda(C_k, D_l)$ se define el morfismo $\varphi \vee \psi$, como el único que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \cdot(A_i \vee C_k) & \xrightarrow{\varphi \vee \psi} & \cdot(B_j \vee D_l) \\ \uparrow \alpha & \circlearrowleft & \uparrow \alpha \\ \cdot A_i \cdot C_k & \xrightarrow{\varphi \cdot \psi} & \cdot B_j \cdot D_l \end{array}$$

donde α es el isomorfismo natural.

Entonces, $(\Sigma_\Lambda, (\vee, \emptyset))$ es una categoría monoidal estricta.

Sea F la inclusión de Λ en Σ_Λ , y G la aplicación de Σ_Λ en Λ , definida por

$$GA_i = \cdot A_i.$$

Entonces, F y G son funtores homogéneos con

$$GF \sim id_\Lambda, \quad FG \sim id_{\Sigma_\Lambda}.$$

y por tanto, Λ y Σ_Λ son equivalentes.

En virtud de este teorema en lo sucesivo se supone que toda categoría monoidal es estricta.

1.3. Presentación de una Categoría

Continuando con las categorías monoidales estrictas, aquí se define su presentación por generadores y relaciones, y se demuestra la existencia de un representante llamado forma normal, para cada morfismo.

Los métodos de definición y demostración son similares a los que se emplean en la teoría de grupos.

Sean $(\Lambda, (\cdot, \mathbb{I}_\Lambda))$ una categoría monoidal estricta y L una subclase de M_Λ . Por inducción se definen las L -palabras, y para cada una se definen su morfismo asociado, rango y subpalabras. Por simplicidad en vez de L -palabra se emplea el término palabra. El morfismo asociado a la palabra a , se denota por \bar{a} , y su rango por $r(a)$.

Las palabras de rango uno, son los elementos de la clase $L \cup I_A$, y tanto el morfismo asociado como su única subpalabra son la misma palabra.

Las palabras de rango menor ó igual que $n + 1$ son las sucesiones

$$a, \cdot, b \text{ y } a, o, b$$

donde a es de rango menor ó igual que n , y b es de rango uno, ó viceversa; pero en el segundo caso se supone que la composición $\bar{a} \circ \bar{b}$ esta definida. Sus morfismos asociados son $\bar{a} \cdot \bar{b}$ y $\bar{a} \circ \bar{b}$ respectivamente, y sus subpalabras son las mismas palabras y las subpalabras de a y b .

En lo sucesivo una palabra y su morfismo asociado se consideran idénticos.

La clase de las L -palabras se denota por $W(L)$, y en esta se define la relación

$$a \sim b \text{ sii } \bar{a} = \bar{b}, \quad \forall a, b$$

y se denota por R_L .

Proposición 1.3.1 1. Para cada sucesión de morfismos $\varphi, \varphi', \psi, \psi', \varrho \in L \cup I_A$,

$$(\varphi \circ \psi) \circ \varrho \sim \varphi \circ (\psi \circ \varrho)$$

$$id_B \circ \varphi \sim \varphi$$

$$\varphi \sim \varphi \circ id_A \text{ si } \varphi \in \Lambda(A, B).$$

$$id_A \circ id_A \sim id_A$$

$$(\varphi \circ \varphi') \cdot (\psi \circ \psi') \sim (\varphi \cdot \psi) \circ (\varphi' \cdot \psi')$$

$$id_A \cdot id_B \sim id_{A \cdot B}$$

$$id_{\mathbf{1}} \cdot \varphi \sim \varphi$$

$$\varphi \sim \varphi \cdot id_{\mathbf{1}}$$

Demostración. Inmediata.

Estas relaciones se llaman triviales y la clase que las contiene se denota por $T(L)$.

2. Para cada $\varphi \in \Lambda(A, B) \cap L$, $\psi \in \Lambda(C, D) \cap L$

$$\varphi \cdot id_D \circ id_A \cdot \psi \sim id_B \cdot \psi \circ \varphi \cdot id_C$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \varphi \cdot id_D \circ id_A \cdot \psi &\sim (\varphi \circ id_A) \cdot (id_D \circ \psi) \\ &\sim \varphi \cdot \psi \\ &\sim (id_B \circ \varphi) \cdot (\psi \circ id_C) \\ &\sim id_B \cdot \psi \circ \varphi \cdot id_C. \end{aligned}$$

La clase que contiene estas relaciones se denota por Ω_0 .

3. Para cada sucesión $\varphi_{i \leq n} \in L$, con $\circ_i \varphi_i \in L$, y cada pareja $A, B \in \Lambda$

$$\circ_i (id_A \cdot \varphi_i \cdot id_B) \sim id_A (\circ_i \varphi_i) id_B$$

Demostración. Por inducción, para $n = 2$

$$\begin{aligned} id_A \varphi_1 id_B \circ id_A \varphi_2 id_B &\sim (id_A \varphi_1 \circ id_A \varphi_2) \cdot id_B \\ &\sim (id_A \circ id_A) \cdot \varphi_1 \circ \varphi_2 \cdot id_B \\ &\sim id_A \cdot \varphi_1 \circ \varphi_2 \cdot id_B \end{aligned}$$

Suponiendo su validez para $n - 1$,

$$\begin{aligned} \circ id_A \cdot \varphi_{i \leq n} \cdot id_B &\sim id_A \varphi_n id_B \circ \left(\circ_{i \leq n-1} id_A \varphi_i id_B \right) \\ &\sim id_A \varphi_n id_B \circ (id_A \circ_{i \leq n-1} \varphi_i \cdot id_B) \\ &\sim id_A \circ_{i \leq n} \varphi_i id_B \end{aligned}$$

La clase que contiene estas relaciones se denota por Ω_ρ .

El concepto de presentación de una categoría, al igual que en el caso de la teoría de grupos, se define mediante los conceptos de base y sistema de relaciones. Para la categoría Λ , un sistema de relaciones puede considerarse como una base de la clase R_L .

DEFINICIÓN 1.3.2 Una base de Λ es una clase $L \subset M_\Lambda$ con la siguiente propiedad. Para cada morfismo φ , existe una L -palabra a , con

$$\varphi = \bar{a}$$

Los morfismos de una base se llaman generadores y, si $\varphi = \bar{a}$ la palabra a se llama representante de φ .

Sea S una clase con la propiedad

$$T(L) \subseteq S \subseteq R_L$$

En $W(L)$ se define la relación \sim por

$$a \sim b \text{ mod } S$$

si existe $(p, q) \in S$, p es una subpalabra de a , y al sustituirla por q , se obtiene la palabra b .

DEFINICIÓN 1.3.3 Un sistema de L -relaciones, es una clase S con las siguientes propiedades. Para cada pareja $(a, b) \in R_L$, existe una sucesión $a_{i \leq n} \in W(L)$ con

$$a_1 = a, \quad a_n = b$$

y

$$a_i \sim a_{i+1} \text{ mod } S, \quad \forall i$$

DEFINICIÓN 1.3.4 Una presentación de Λ es una pareja $\langle L, R_L \rangle$, formada por una base de Λ , y un sistema de L -relaciones.

El siguiente teorema de extensión muestra una aplicación del concepto de base. Sean Λ, M categorías monoidales estrictas, y $\langle L, R_L \rangle$ una presentación de Λ . Sea F una aplicación de Λ en M , con las propiedades

$$FA \cdot B = FA \cdot FB, \quad \forall A, B$$

$$F\mathbb{I}_\Lambda = \mathbb{I}_M$$

Para cada morfismo $\varphi \in L \cap \Lambda(A, B)$, sea $F\varphi = \psi$ algún morfismo del conjunto $M(FA, FB)$.

Teorema 1.3.5 *Existe una extensión homogénea $G \in \Phi(\Lambda, M)$ de F , si y solo si*

$$FR_L \subset R_{FL}$$

Demostración. Supóngase que existe la extensión G . Si $a \in FR_L$ entonces, existe $b \in R_L$, y

$$a = Gb$$

Por la homogeneidad y la covarianza de G , la imagen Gb es una relación de la clase FL , y así

$$Gb \in R_{FL}$$

Por tanto

$$FR_L \subset R_{FL}$$

Ahora supóngase que la inclusión es válida. Sea G la extensión de F , definida como sigue. Para cada L -palabra a , la imagen $G\bar{a}$ se define por inducción. Si $ra = 1$,

$$Ga = Fa$$

Supóngase que $G\bar{a}$ está definida para $r(a) \leq n$. Si $r(a) \leq n+1$, por definición, existen b, c con

$$a = b \circ c \quad \text{ó} \quad b \cdot c$$

donde ambas palabras son de rango menor ó igual que n . Entonces, se define

$$Ga = Gb \circ Gc \quad \text{ó} \quad Gb \cdot Gc$$

En virtud de la inclusión $FR_L \subset R_{FL}$, el funtor G esta bien definido y, por definición, es covariante y homogéneo.

Otra propiedad básica de las categorías con una presentación definida, es la existencia de una forma canónica para sus morfismos, llamada forma normal.

Sea L una base de la categoría Λ . Una forma normal de $\varphi \in M_\Lambda$ es un representante

$$\underset{i}{\circ} id_{A_i} \varphi_i id_{B_i}$$

donde $\varphi_i \in L$, para cada i .

Teorema 1.3.6 *Para cada morfismo $\varphi \in M_\Lambda - I_\Lambda$, existe una forma normal.*

Demostración. Sea $a \in W(L)$ un representante de φ . La demostración es por inducción sobre el rango de la palabra a .

Si $r(a) = 1$, entonces $\varphi \in L$. Por tanto

$$id_1 \varphi id_1$$

es una forma normal de φ .

Supóngase que la propiedad es válida si, el rango de a es menor ó igual que n .

Si $r(a) \leq n + 1$ entonces, existen b y c , con

$$\varphi = \bar{b} \circ \bar{c} \quad \text{ó} \quad \bar{b} \cdot \bar{c}$$

pero en ambos casos, una de las dos palabras es de rango menor ó igual que n , y la otra es de rango igual a uno.

Supóngase que $\varphi = \bar{b} \cdot \bar{c}$

1. $r(b) \leq n$, $r(c) = 1$

Entonces $c \in L \cup I_\Lambda$ y, por hipótesis

$$b = \bigcirc_{i \leq m} id_{A_i} \psi_i id_{B_i}$$

donde $\psi_i \in L$, para cada i . Sean C el codominio de c , y B el dominio de $id_{A_i} \psi_i id_{B_i}$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi &= \left(\bigcirc_{i \leq m} id_{A_i} \psi_i id_{B_i} \right) \circ id_B \cdot \left(\bigcirc_{i \leq m} id_C \circ c \right) \\ &= \left(\bigcirc_i id_{A_i} \psi_i id_{B_i} \right) \cdot id_C \circ (id_B \cdot c) \\ &= \left(\bigcirc_i id_{A_i} \psi_i id_{B_i, C} \right) \circ (id_B \cdot c \cdot id_1) \end{aligned}$$

2. $r(b) = 1$, $r(c) \leq n$

Entonces $b \in L \cup I_A$ y, por hipótesis

$$c = \circ_{i \leq m} id_{A_i} \psi_i id_{B_i}$$

donde $\psi_i \in L$, para cada i . Sean B el dominio de b , y C el codominio de $id_{A_m} \psi_m id_{B_m}$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi &= (b \circ_{i \leq m} id_B) \cdot (id_C \circ_{i \leq m} id_{A_i} \psi_i id_{B_i}) \\ &= (b \cdot id_C) \circ (\circ id_B \cdot id_{A_i} \psi_i id_{B_i}) \\ &= (id_{\mathbf{1}} \cdot b \cdot id_C) \circ (\circ id_{B \cdot A_i} \psi_i id_{B_i}) \end{aligned}$$

Ahora supóngase que $\varphi = \bar{b} \circ c$

$$1. r(b) \leq n, r(c) = 1$$

Entonces $c \in L \cup I_A$ y, por hipótesis

$$b = \circ_i id_{A_i} \psi_i id_{B_i}$$

donde $\psi_i \in L$, para cada i . Luego

$$\varphi = \circ_i id_{A_i} \psi_i id_{B_i} \circ (id_{\mathbf{1}} c id_{\mathbf{1}})$$

$$2. r(b) = 1, r(c) \leq n$$

La demostración de este caso es similar a la del caso anterior.

Teniendo en cuenta este resultado, en lo sucesivo se supone que, todo representante de un morfismo es una forma normal.

De la demostración del teorema 1.3.6 además se obtiene el siguiente procedimiento para definir una forma normal del producto de dos morfismos. Sean

$$\begin{aligned} \varphi &= \circ_i id_{A_i} \varphi_i id_{B_i} \\ \psi &= \circ_j id_{C_j} \psi_j id_{D_j} \end{aligned}$$

Si A es el codominio de φ , y B es el dominio de ψ , entonces

$$\begin{aligned}
\rho &= \varphi \cdot \psi \\
&= (\circlearrowleft_j id_A \circlearrowright_i id_{A_i} \varphi_i id_{B_i}) (\circlearrowleft_j id_{C_j} \psi_j id_{D_j} \circlearrowright_i id_B) \\
&= (\circlearrowleft_j id_A id_{C_j} \psi_j id_{D_j}) \circlearrowright_i (\circlearrowleft_i id_{A_i} \varphi_i id_{B_i} id_B) \\
&= \circlearrowleft_j id_{AC_j} \psi_j id_{D_j} \circlearrowright_i id_{A_i} \varphi_i id_{B_i B}.
\end{aligned}$$

Si $\circlearrowleft_i id_{A_i} \psi_i id_{B_i}$ es una forma normal de φ , el morfismo $id_{A_i} \psi_i id_{B_i}$ se llama renglón i -ésimo y se denota por φ_i , y el morfismo ψ_i se llama núcleo del renglón y se denota por $\hat{\varphi}_i$.

1.4. Categorías Cuánticas

Para concluir la recopilación de los elementos categóricos se introduce el concepto de categoría cuántica.

Mediante el teorema de Drinfel'd, llamado construcción doble, y otro teorema debido a Reshetikhin y Turaev se establece un método para definir una clase de estas categorías.

DEFINICIÓN 1.4.1 *Una categoría cuántica es una pareja $(\Lambda, \mathbb{Q}(\Lambda))$, que contiene una categoría monoidal estricta y una estructura cuántica de la categoría. La estructura*

$$\mathbb{Q}(\Lambda) = (*, \tau, \iota, \delta)$$

esta formada por una aplicación $$ de la clase $C(\Lambda, \Lambda)$, dos clases τ, ι de isomorfismos naturales, y una clase δ de isomorfismos, con las siguientes*

propiedades.

Para cada pareja $A, B \in \Lambda$, existen

$$x_{AB} \in \tau, \quad \iota_A \in \iota \text{ y } b_A, d_A \in \delta$$

donde

$$x_{AB} \in \Lambda(A \cdot B, B \cdot A), \quad \iota_A \in \text{Aut}(A)$$

$$b_A \in \Lambda(\mathbb{I}_\Lambda, A \cdot A^*), \quad d_A \in \Lambda(A^* \cdot A, \mathbb{I}_\Lambda)$$

y satisfacen las propiedades

$$x_{A,B,C} = id_B \cdot x_{AC} \circ x_{AB} \cdot id_C \quad (1.17)$$

$$x_{A,B,C} = x_{AC} \cdot id_B \circ id_A \cdot x_{BC}$$

$$\iota_{AB} = \iota_A \cdot \iota_B \circ x_{BA} \circ x_{AB} \quad (1.18)$$

$$id_A = id_A \cdot d_A \circ b_A \cdot id_A \quad (1.19)$$

$$id_{A^*} = d_A \cdot id_{A^*} \circ id_{A^*} \cdot b_A$$

$$\iota_A id_{A^*} \circ b_A = id_A \cdot \iota_{A^*} \circ b_A$$

Debido a la última igualdad se dice que ι y δ son compatibles. La aplicación $*$ se llama dualidad, y las clases τ , ι , δ se llaman torsión, involución y evaluación.

Los antecedentes del concepto de estructura cuántica son algunas propiedades básicas del functor dualidad, las trasposiciones τ_R y las evaluaciones δ_R .

En particular, salvo equivalencia

$$(\mathbb{M}(R), (*, \tau_R, I_{\mathbb{M}}, \delta_R))$$

es una categoría cuántica.

El propósito de asociar una estructura cuántica a una categoría monoidal estricta es generalizar los conceptos conocidos en \mathbb{M} como la dualidad, dimensión y traza.

DEFINICIÓN 1.4.2 Sean $(\Lambda, \mathbb{Q}(\Lambda))$ una categoría cuántica y $\varphi \in \Lambda(A, B)$. El morfismo dual $\varphi^* \in \Lambda(B^*, A^*)$ es la composición

$$d_B \cdot id_{A^*} \circ id_{B^*} \cdot \varphi id_{A^*} \circ id_{B^*} \cdot b_A$$

Lema 1.4.3 Para cada $A \in \Lambda$ y $\varphi \circ \psi \in M_\Lambda$

$$id_A^* = id_{A^*}$$

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$$

DEFINICIÓN 1.4.4 Sean $(\Lambda, \mathbb{Q}(\Lambda))$ una categoría cuántica y $\varphi \in \text{End}(A)$. La traza $\text{tr} \varphi$ es la composición

$$d_A \circ x_{AA^*} \circ ((\iota_A \circ \varphi) id_{A^*}) \circ b_A$$

La dimensión de A es la traza de id_A .

Proposición 1.4.5 1. Para cada pareja $\varphi \circ \psi, \psi \circ \varphi$

$$\text{tr} \varphi \circ \psi = \text{tr} \psi \circ \varphi$$

2. Para cada pareja de endomorfismos φ, ψ

$$\text{tr} \varphi \cdot \psi = \text{tr} \varphi \cdot \text{tr} \psi.$$

3. Para cada $\varphi \in \text{End}(\mathbb{I}_\Lambda)$

$$\text{tr} \varphi = \varphi$$

Con respecto a la existencia de las categorías cuánticas, a través de la siguiente sucesión de resultados se establece un método para definir una, por cada objeto de la clase $\overset{\circ}{\mathbb{H}}(K)$.

Cada álgebra Hopf de dimensión finita, implica la existencia de un álgebra semitriangular que se extiende en un álgebra Turaev, y precisamente su categoría de representaciones se extiende en una categoría cuántica.

En los capítulos II y IV se definen otros ejemplos de categorías cuánticas pero empleando métodos topológicos.

Sea $(A, e(A)) \in \mathbb{H}$, donde $e(A) = (\Delta, \varepsilon, s)$. Para cada $a \in A$, se define

$$\Delta' a = p_A \Delta a$$

y, para cada $R \in A \otimes A$, se definen

$$R_{1,2} = R \otimes 1_A, \quad R_{2,3} = 1_A \otimes R$$

$$id_A \otimes p_A(R_{1,2}) = R_{1,3} = p_A \otimes id_A(R_{2,3})$$

donde 1_A es el uno de A , y p_A es la trasposición de A .

DEFINICIÓN 1.4.6 *Un álgebra semitriangular es una pareja $((A, e(A)), R)$, donde $R \in A \otimes A$ es un elemento invertible con las siguientes propiedades*

$$id_A \otimes \Delta(R) = R_{1,3} \cdot R_{1,2}, \quad \Delta \otimes id_A(R) = R_{1,3} \cdot R_{2,3}$$

$$\Delta' a = R \cdot \Delta(a) \cdot R^{-1}, \quad \forall a.$$

Los productos en $A \otimes A$ y $(A \otimes A) \otimes A$ son inducidos por el producto de A .

Sea K un campo y $(A, e(A)) \in \mathring{\mathbb{H}}(K)$. Entonces A^* es un álgebra respecto a la suma de K , el producto Δ^* , y su uno es ε . Además es un álgebra Hopf respecto a la estructura

$$e(A^*) = (m^*, \varepsilon', s^*)$$

$$\varepsilon'(a)1_A = a(1_A).$$

Sean

$$A^\circ = (A^*((m^*)^{\text{op}}, \varepsilon', (s^*)^{-1})) \in \mathring{\mathbb{H}}(K)$$

$$d_A \in \mathbf{E}(A^* \otimes A, K), \quad d_A a^* \otimes b = a^*(b)$$

$$b_A = d_A^* \quad \text{y} \quad \delta_A = b_A(1_A).$$

Teorema 1.4.7 (*Construcción Doble*). Para cada álgebra Hopf $(A, e(A)) \in \overset{\circ}{\mathbb{H}}(K)$, existe una única álgebra semitriangular $((D(A), e(DA)), R)$, igual a $A \otimes_K A^\circ$ como coálgebra, con la siguiente propiedad.

Las inclusiones

$$A \otimes 1_{A^\circ} \subset D(A), \quad 1_A \otimes A^\circ \subset D(A)$$

son homomorfismos Hopf y R es la imagen de δ_A , bajo la inclusión de su producto tensorial

$$A \otimes A^\circ \subset D(A) \otimes_K D(A).$$

Demostración. [D1], [D2].

DEFINICIÓN 1.4.8 Un álgebra Turaev es una pareja $((A, e(A)), R, v)$, que contiene un álgebra semitriangular y un elemento v del centro de A , con las propiedades

$$\Delta v = p_A(R) \cdot R \cdot (v \cdot v), \quad sv = v.$$

Teorema 1.4.9 (*Reshetikhin-Turaev*) Cada álgebra semitriangular se extiende en un álgebra Turaev.

Demostración. [RT].

Teorema 1.4.10 Para cada álgebra Turaev $((A, e(A)), R, v)$, existe una extensión de la categoría $\text{Rep}(A)$ en una categoría cuántica.

Demostración. El producto tensorial \otimes de la categoría $\text{Rep}(A)$, se define por

$$u \otimes v = u \otimes_K v$$

y, la acción de A sobre $u \otimes v$, se define por

$$a(u \otimes v) = \sum b_j u \otimes c_j v$$

donde

$$\Delta a = \sum b_j \otimes c_j.$$

Con el producto tensorial de morfismos usual, $(\text{Rep}(A), \otimes, K)$ es una categoría monoidal y con la estructura que se define enseguida, por el teorema de coherencia, se extiende en una categoría cuántica.

Para cada pareja u, v se define

$$x_{uv}a \otimes b = \sum_i q_i b \otimes p_i a$$

donde

$$R = \sum_i p_i \otimes q_i$$

Para cada módulo V ,

$$\iota_V a = va$$

La dualidad es la usual, y la acción de A sobre V^* se define por

$$a \cdot \varphi(b) = \varphi(s(a)b)$$

El morfismo d_V es la evaluación, y $b_V = d_V^*$.

Corolario 1.4.11 *Para cada álgebra $A \in \mathring{\mathbb{H}}(K)$, existe una categoría cuántica.*

1.5. Grupos Cuánticos

La teoría de grupos cuánticos originalmente fué creada como método para hallar soluciones de la ecuación Yang-Baxter, y esta ecuación tuvo su origen en la mecánica estadística.

Para concluir la unidad se define la clase de las álgebras Hopf llamadas grupos cuánticos, de donde por el corolario 1.4.11, se concluye la existencia de una clase de categorías cuánticas.

En el apéndice sobre la categoría \mathbb{L} se presenta una relación completa de los conceptos previos a la definición de los grupos cuánticos, que además en varios casos se encuentran vinculados a la ecuación Yang-Baxter.

Sean $L \in \mathring{\mathbb{S}}$ un álgebra del tipo A , D ó E , y $a_{i,j \leq n}$ su matriz Cartan. Para

cada número complejo $q \in \mathbb{C} - \{\pm 1\}$, sea $U_q(L)$ el álgebra Hopf definida por los generadores

$$E_i, F_i, K_i^{\pm 1} \quad i \leq n$$

y las relaciones

$$K_i K_j = K_j K_i, \quad K_i K_i^{-1} = 1 = K_i^{-1} K_i$$

$$K_i E_j = q^{a_{ij}} E_j K_i, \quad K_i F_j = q^{-a_{ij}} F_j K_i$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} (K_i - K_i^{-1}) (q - q^{-1})^{-1}$$

$$E_i E_j = E_j E_i, \quad F_i F_j = F_j F_i \quad \text{si } a_{ij} = 0$$

$$E_i^2 E_j - (q + q^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0 \quad \text{si } a_{ij} = -1$$

$$F_i^2 F_j - (q + q^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 = 0 \quad \text{si } a_{ij} = -1$$

La comultiplicación Δ , la counidad ε , y su antípoda s , se definen por

$$\Delta E_i = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i$$

$$\Delta F_i = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i$$

$$\Delta K_i = K_i \otimes K_i$$

$$\varepsilon E_i = 0 = \varepsilon F_i$$

$$\varepsilon K_i = 1$$

$$s E_i = K_i^{-1} E_i, \quad s F_i = -F_i K_i$$

$$s K_i = K_i^{-1}$$

Teorema 1.5.1 *Para cada L y q , $U_q(L)$ es un álgebra Hopf.*

Demostración. La demostración de la propiedades 1.3, 1.4 y 1.5, para los generadores es inmediata, y la demostración general se concluye de la homogeneidad de las aplicaciones. Como ejemplo se demuestra 1.5.

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id)\Delta E_i &= (\varepsilon \otimes id)(E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i) \\
&= \varepsilon E_i \otimes 1 + \varepsilon K_i \otimes E_i \\
&= E_i \\
&= E_i \otimes 1 + K_i \otimes \varepsilon E_i \\
&= (id \otimes \varepsilon)(E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i) \\
&= (id \otimes \varepsilon)\Delta E_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id)\Delta F_i &= (\varepsilon \otimes id)(F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i) \\
&= \varepsilon F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i \\
&= F_i \\
&= F_i \otimes \varepsilon K_i^{-1} + 1 \otimes \varepsilon F_i \\
&= (id \otimes \varepsilon)(F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i) \\
&= (id \otimes \varepsilon)\Delta F_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id)\Delta K_i &= (\varepsilon \otimes id)(K_i \otimes K_i) \\
&= \varepsilon K_i \otimes K_i \\
&= K_i \\
&= K_i \otimes \varepsilon K_i \\
&= (id \otimes \varepsilon)(K_i \otimes K_i) \\
&= (id \otimes \varepsilon)\Delta K_i
\end{aligned}$$

Las álgebras $U_q(L)$ se llaman grupos cuánticos y su notación se debe a la siguiente propiedad. Eligiendo

$$K_i = \exp(-2^{-1}hH_i), \quad q = \exp(-2^{-1}h)$$

las relaciones y la estructura Hopf de $U_q(L)$, en el límite $h \rightarrow 0$, son iguales a las relaciones del álgebra cubriente universal $U(L)$, y su estructura Hopf.

En [T2], teorema I.2.5, se establece un método para definir una categoría cuántica para cada álgebra $U_q(L)$.

Capítulo 2

Categorías de Marañas

En ésta unidad se definen las categorías de marañas orientadas y normadas, y para cada una se define una presentación.

Las demostraciones de diversos resultados dependen del teorema de extensión de isotopía de R. Palais. Este teorema junto con los conceptos básicos de la teoría de Morse y el teorema de Reidemeister constituyen el soporte de la unidad.

2.1. Marañas

Las marañas se definen como las clases de isotopía ambiental de ciertas 1-variedades compactas, anidadas en la variedad

$$\Xi = \mathbb{R}^2 \times I$$

Las trenzas, los enlaces y los nudos, en particular, son algunos ejemplos de marañas.

DEFINICIÓN 2.1.1 Sean $M \in C^\infty$ y $L \prec M$. La variedad L está anidada en M , si

$$\partial L \subset \partial M, L \pitchfork \partial M$$

DEFINICIÓN 2.1.2 Sean $M \in C^\infty$ y $L, N \prec M$. Una isotopía ambiental de L en N , es una isotopía $h \in \text{Is}(M, M)$, invariante en la frontera y

$$h_0 = \text{id}_M, h_{1L} \in D(L, N)$$

Además, si L y N son orientadas entonces h_{1L} preserva la orientación.

DEFINICIÓN 2.1.3 Una subvariedad normada de $M \in C^\infty$ es una pareja (L, ν) , donde $L \prec M$, $\nu \in C^0(L, N(L, M))$ y

$$\nu p \in N_p(L) - 0, \quad \forall p$$

La aplicación ν se llama norma de L , y la pareja (L, ν) se denota por L_ν .

Dos normas de L son equivalentes si, existe una homotopía h entre ambas y, cada aplicación h_t es una norma de L .

DEFINICIÓN 2.1.4 Sean $L_\mu, N_\nu \prec M$ y $\varphi \in \text{Hm}(L, N)$. La aplicación φ conserva la norma si, la aplicación $\mu\varphi^{-1}$ es una norma de N , y además es equivalente a ν .

DEFINICIÓN 2.1.5 Sean $M \in C^\infty$, $L_\mu, N_\nu \prec M$ y h una isotopía ambiental de L en N . La aplicación h es una isotopía ambiental de L_μ en N_ν , si h_{1L} conserva la norma.

Para cada $M \in C^\infty$, la relación de isotopía ambiental entre sus subvariedades orientadas y normadas es de equivalencia. En ambos casos la clase de L se denota por $[L]$, y la notación

$$L \sim N \text{ mod } \varphi$$

indica que φ es una isotopía ambiental entre L y N . Por simplicidad L y la clase $[L]$ se consideran idénticos.

Sea $S(\mathbb{R})$ la clase de las sucesiones reales, crecientes y finitas, incluyendo la sucesión vacía \emptyset .

DEFINICIÓN 2.1.6 Una orientación, norma de la sucesión $a_i \in S(\mathbb{R})$ es una sucesión $\omega_i = \pm 1$, $\nu_i \in S^2$ respectivamente.

Para indicar que la sucesión a consta de n términos se emplea la notación $a^{(n)}$, y en particular la sucesión $i \leq n$ se denota por $[n]$, ó simplemente n .

DEFINICIÓN 2.1.7 Una sucesión orientada, normada es una pareja (a, σ) , donde $a \in S(\mathbb{R})$ y, σ es una orientación, norma de a .

La sucesión (a, σ) también se denota por a_σ , y las clases que contienen las sucesiones orientadas y normadas se denotan por Ω y Π .

Para cada pareja $a^{(m)}, b^{(n)} \in S(\mathbb{R})$, sea $\Xi(a, b)$ la clase que contiene las 1-variedades compactas M anidadas en Ξ con la propiedad

$$\partial M = \{(a_i, 0, 0)(b_j, 0, 1) \mid i \leq m, j \leq n\}$$

Para cada $a_\mu, b_\nu \in \Pi$, sea $\Pi(a, b)$ la clase que contiene los objetos $[L_\varrho]$, donde $L \in \Xi(a, b)$ y

$$\varrho(a_i, 0, 0) = \mu_i, \quad \varrho(b_j, 0, 1) = \nu_j$$

Análogamente para cada $a_\sigma, b_\omega \in \Omega$, sea $\Omega(a, b)$ la clase que contiene los objetos $[L]$, donde $L \in \Xi(a, b)$ es una variedad orientada con

$$v_{(a_i, 0, 0)} = (0, 0, \sigma_i), \quad v_{(b_j, 0, 1)} = (0, 0, \omega_j)$$

para cada i, j .

DEFINICIÓN 2.1.8 Una (a, b) -maraña orientada, normada es un objeto de la clase $\Omega(a, b)$, $\Pi(a, b)$ respectivamente.

Por simplicidad en vez de (a, b) -maraña se emplea el término maraña. Las clases de las marañas orientadas, normadas se denotan por M_Ω, M_Π .

A continuación se definen algunos ejemplos, pero primero se define la sucesión de componentes de una maraña.

Para cada representante L de una (a, b) -maraña se define la sucesión L^n de sus componentes. Sus primeros términos son las componentes que contienen los puntos $(a_i, 0, 0)$, luego figuran las que contienen los puntos $(b_j, 0, 1)$, y por último las componentes cerradas.

Marañas identidad

Para cada pareja $a_\sigma^{(n)}, b_\sigma^{(n)} \in \Omega$ se define la maraña identidad $id_a^b \in \Omega(a, b)$. Si $a = b$ la maraña id_a^b se denota por id_a .

La componente iésima es una curva contenida en el plano xz , que une los puntos $(a_i, 0, 0)$, $(b_i, 0, 1)$ y está compuesta por segmentos lineales y arcos rectos de radio $(n+1)^{-1}$.

La primera componente está definida por una de las variedades de la figura 2.1, dependiendo del orden entre a_1 y b_1 .



Figura 2.1: Primera componente

Suponiendo que se ha definido la componente $(id_a^b)^k$ la componente $(id_a^b)^{k+1}$ se define como se indica en la figura 2.2, dependiendo del orden entre a_k, a_{k+1}, b_k y b_{k+1} .

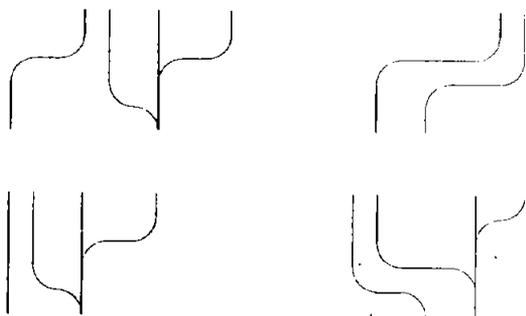


Figura 2.2: Componentes consecutivas

La clase que contiene las marañas identidad se denota por I_Ω .

Marañas Orientadas Básicas

Para cada sucesión $a^{(2)}$, se definen

$$X_a^{\pm 1} \in \Omega(a_\sigma, a_\sigma)$$

$$\cap_a^+ \in \Omega(a_\omega, \emptyset), \quad \cap_a^- \in \Omega(a_{-\omega}, \emptyset)$$

$$\cup_a^+ \in \Omega(\emptyset, a_{-\omega}), \quad \cup_a^- \in \Omega(\emptyset, a_\omega)$$

donde σ, ω son las sucesiones 1,1 y 1,-1.

Si $a = [2]$ los representantes de las marañas $X_a^{\pm 1}$ se definen como las subvariedades del cilindro $(2x - 3)^2 + 4y^2 = 1$, como se muestra en la figura 2.3, donde además se incluyen sus proyecciones sobre los planos xz, yz . En este caso los representantes de $\cap_a^+, \cap_a^-, \cup_a^+$ y \cup_a^- se definen en la figura 2.4.

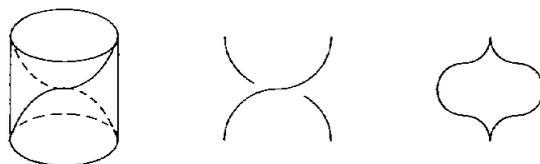


Figura 2.3: Vistas de la maraña X



Figura 2.4: Marañas \cap, \cup

Para completar la definición se emplea la siguiente notación. Si $A \subset \mathbb{R}^3$ y $r \in \mathbb{R}$

$$A + r = \{(a_1, a_2, a_3 + r) \mid a \in A\}$$

$$rA = \{(a_1, a_2, ra_3) \mid a \in A\}$$

Entonces, por definición

$$X_a = 3^{-1}(id_a^{[2]} \cup X_{[2]} + 1 \cup id_{[2]}^a + 2)$$

$$\cap_a^+ = 2^{-1}(id_a^{[2]} \cup \cap_{[2]}^+ + 1)$$

y, análogamente se definen las otras marañas.

La clase de las marañas orientadas básicas se denota por Γ_Ω .

Marañas Normadas Básicas

Con las variedades de los ejemplos anteriores, para cada norma constante se definen las marañas normadas identidad id_a^b , y las marañas normadas básicas $X_a^{\pm 1}$, \cap_a y \cup_a . Las clases que las contienen se denotan por Γ_Π y Γ_Π .

Para cada $\tau \in \mathbb{R}$, sea $\varphi_\tau^{\pm 1}$ la maraña llamada bucle, definida por la variedad y norma, de la figura 2.5.

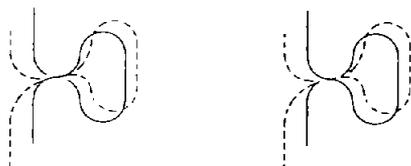


Figura 2.5: Bucle

Respecto a las demostraciones de las relaciones de marañas solo se emplean el método directo y el corolario del siguiente teorema de extensión de isotopía, debido a R. Palais.

Teorema 2.1.9 Sean $h \in \text{Is}(M, N)$, y $K \subset M$ un conjunto compacto, con la propiedad

$$h_{0,K \cap \partial M} = h_{t,K \cap \partial M}, \quad \forall t$$

Entonces, existe $H \in \text{Is}(N, N)$ que es invariante en la frontera y

$$H_0 = id, \quad H_t h_{0,K} = h_{t,K} \quad \forall t.$$

Demostración. [RP].

Corolario 2.1.10 Sean M, N marañas, $K \subset M$ un conjunto compacto y $h \in \text{Is}(M, \Xi)$ con las propiedades

$$h_0 = \text{id}, h_1 \in D(M, N)$$

$$h_{t, \partial M \cup (M-K)} = \text{id}, \forall t$$

Entonces, existe $H \in \text{Is}(\Xi, \Xi)$ que es una extensión de h con

$$M \sim N \text{ mod } H.$$

Demostración. [RP].

Las condiciones de este corolario se representan en la figura 2.6.

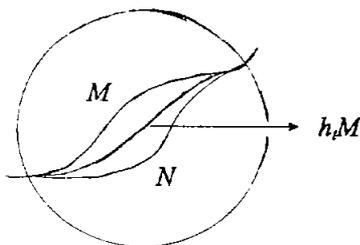


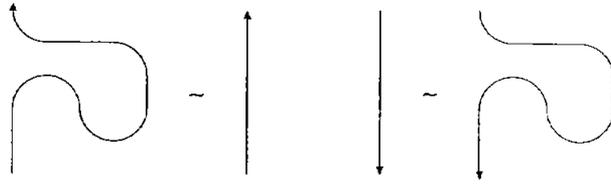
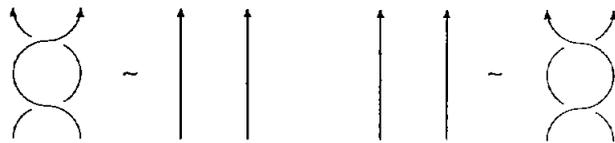
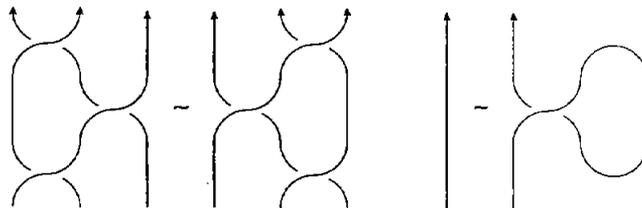
Figura 2.6: Imagen local de M y N

Relaciones R_Ω

Aplicando 2.1.10, a las parejas de variedades de las figuras 2.7- 2.13 se definen las relaciones $\Omega_{i \leq 9}$. La clase que contiene las relaciones Ω_i , se denota por R_Ω .

En el artículo [EA], con los argumentos de la demostración del Teorema 6, se obtiene un método equivalente para demostrar estas relaciones. La diferencia es que en este artículo algunos cálculos son explícitos.

Por otra parte, empleando las relaciones de la figura 2.14, y las relaciones $\Omega_{i \leq 7}$ se define la clase R'_Ω .

Figura 2.7: Ω_1 Figura 2.8: Ω_2 Figura 2.9: Ω_3 Figura 2.10: $\Omega_{4,5}$

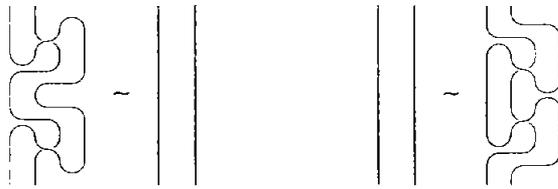


Figura 2.11: $\Omega_{6,7}$

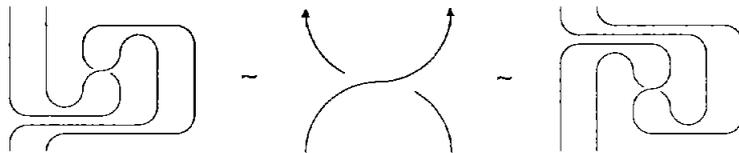


Figura 2.12: Ω_8

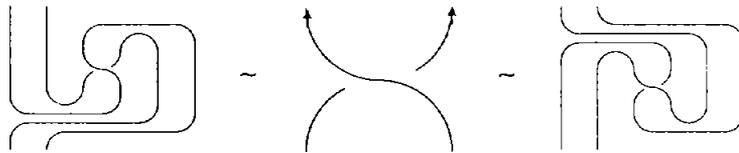


Figura 2.13: Ω_9



Figura 2.14: Ω'_8

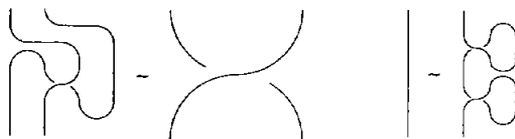


Figura 2.15: Relaciones $\Pi_{5,6}$

Relaciones R_{Π}

Con las variedades de las relaciones Ω_{1-4} , y las normas constantes se definen las relaciones $\Pi_{i \leq 4}$. Adicionalmente en la figura 2.15 se definen las relaciones $\Pi_{5,6}$. Estas relaciones también se demuestran mediante el corolario 2.1.10, y la clase que las contiene se denota por R_{Π} .

La utilidad de las clases R_{Ω} , R'_{Ω} y R_{Π} se demuestra en las secciones tres y cinco, de este capítulo.

2.2. Categoría Ω

La categoría de las marañas orientadas Ω se define mediante las clases M_Ω , P_Ω e I_Ω , donde la clase de las composiciones P_Ω se define en seguida. Además se definen una estructura monoidal estricta y una estructura cuántica de Ω .

Para cada $r \in \mathbb{R}$, sean S_r, P_r las aplicaciones definidas por

$$S_r x = (x_1, x_2, x_3 + r), \quad P_r x = (x_1, x_2, r \cdot x_3)$$

para cada terna $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

DEFINICIÓN 2.2.1 Sean $L \in \Omega(a, b)$ y $M \in \Omega(b, c)$. La composición $M \circ_{abc} L$ es la clase de la variedad orientada

$$2^{-1}(L \cup M + 1)$$

con la orientación inducida por las aplicaciones S_1 y $P_{2^{-1}}$.

Lema 2.2.2 *La composición \circ_{abc} está bien definida.*

Demostración. Sean $L, L' \in \Omega(a, b)$ y $M, M' \in \Omega(b, c)$, donde

$$L \sim L' \text{ mod } \psi, \quad M \sim M' \text{ mod } \varrho$$

Sea $\varphi \in \text{Is}(M \circ L, \Xi)$, definida por

$$\varphi_t x = \begin{cases} P_{2^{-1}} \psi P_2 x & x_3 \leq 2^{-1} \\ P_{2^{-1}} S_1 \varrho S_{-1} P_2 x & x_3 \geq 2^{-1} \end{cases}$$

Entonces, por 2.1.10, φ se extiende en una isotopía ambiental con la propiedad

$$M \circ L \sim M' \circ L' \text{ mod } \varphi$$

Sea P_Ω la clase que contiene las composiciones \circ_{abc} , para cada terna de sucesiones $a, b, c \in \Omega$.

Teorema 2.2.3 $(M_\Omega, I_\Omega, P_\Omega)$ es una Ω -categoría.

Demostración. (1.1) En esta parte se demuestran las igualdades

$$M \circ id_a = M = id_b \circ M$$

donde $M \in \Omega(a, b)$. Para cada componente M^i y $J \subset I$, se define

$$M_J^i = \{x \in M^i \mid x_3 \in J\}$$

Por principio se demuestra que, existen $N \sim M$ y $\epsilon > 0$, con las propiedades

$$N_{[0, \epsilon]} = \cup_{i \leq m} (a_i, 0) \times [0, \epsilon]$$

$$N_{[1-\epsilon, 1]} = \cup_{j \leq n} (b_j, 0) \times [1-\epsilon, 1]$$

y la distancia entre las componentes de N es mayor que 2ϵ .

Sean M^k y M^l las subsucesiones de M^i , con

$$v_{(a_k, 0, 0)} = (0, 0, 1)$$

$$v_{(a_l, 0, 0)} = -(0, 0, 1)$$

Sean ψ^k, ψ^l sus parametrizaciones. Entonces, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, la distancia entre las componentes de M es mayor que $2\epsilon_0$, para cada $t \in [0, \epsilon_0]$, los conjuntos

$$M_t^k, M_t^l$$

son unitarios y

$$M_t = \cup M_t^i$$

Sean $\epsilon_1 < 2^{-1}\epsilon_0$, y $\rho \in C^\infty(I, I)$ una aplicación decreciente con la propiedad

$$\rho x = \begin{cases} 1 & x \in [0, 2^{-1}\epsilon_1] \\ 0 & x \in [\epsilon_1, 1] \end{cases}$$

Para cada i , sea L^i la imagen del encaje

$$(a_i \rho(\psi_3^i) + (1 - \rho(\psi_3^i))\psi_1^i, (1 - \rho(\psi_3^i))\psi_2^i, \psi_3^i), \quad i = k, l$$

y

$$N_0 = (M - \cup M^i) \cup L^i$$

En la figura 2.16, se representa la relación entre M y N_0 . Aplicando un procedimiento similar a las componentes N_0^j se obtienen N y ϵ . La relación entre las componentes de N_0 y N también se muestra en esta figura.

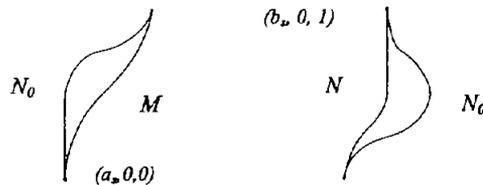


Figura 2.16:

Para concluir se definen las isotopías

$$M \sim N \text{ mod } (\xi)$$

$$id_b \circ N \sim N \text{ mod } (\zeta)$$

Sea $\xi \in \text{Is}(M, N)$ definida por

$$\xi_t x = \begin{cases} x & x_3 \in [\epsilon, 1 - \epsilon] \\ (1-t)M_{x_3}^{i,j} - tN_{x_3}^{i,j} & x_3 < \epsilon \text{ ó } x_3 \geq 1 - \epsilon \end{cases}$$

Entonces, por 2.1.10, esta isotopía se extiende en una isotopía ambiental.

Para definir ζ , sea σ la aplicación definida por su gráfica contenida en la figura 2.17.

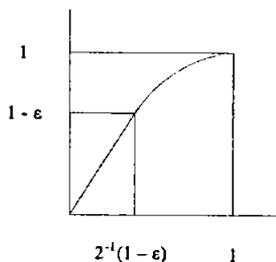


Figura 2.17:

Entonces

$$\zeta_t x = (x_1, x_2, (1-t)x_3 + t\sigma(x_3))$$

es una isotopía de la clase $\text{Is}(id_b \circ N, N)$ y, por 2.1.10 se extiende en una isotopía ambiental.

La demostración de la igualdad

$$M \circ id_a = M$$

es similar.

(1.2) En esta parte se demuestra la igualdad

$$L \circ (M \circ N) = (L \circ M) \circ N$$

Sea $L \circ M \circ N$ la maraña definida por la variedad

$$3^{-1}(L \cup (M + 1) \cup (N + 2))$$

y $\varphi \in \text{Is}(L \circ (M \circ N), L \circ M \circ N)$, $\psi \in \text{Is}((L \circ M) \circ N, L \circ M \circ N)$ definidas por

$$\varphi_t x = \begin{cases} P_{1-3^{-1}t} x & x_3 \leq 2^{-1} \\ S_{-3^{-1}t} P_{1+3^{-1}t} x & x_3 \geq 2^{-1} \end{cases}$$

$$\psi_t x = \begin{cases} P_{1+3^{-1}t} x & x_3 \leq 2^{-1} \\ S_{3^{-1}t} P_{1-3^{-1}t} x & x_3 \geq 2^{-1} \end{cases}$$

Entonces φ , ψ se extienden en isotopías ambientales, también por 2.1.10.

Por inducción y asociatividad en lo sucesivo la composición $\circ M_{i \leq n}$ se considera definida como la clase de la variedad

$$n^{-1} \cup_i (M_i + i - 1)$$

Para definir una estructura monoidal a continuación se define un producto entre los objetos de la clase Ω .

DEFINICIÓN 2.2.4 Sean $a_\sigma^m, b_\sigma^n \in \Omega$. El producto $a \cdot b_{\sigma\sigma}^{m+n}$ es la sucesión

$$a_1, \dots, a_m, b_1 + p, \dots, b_n + p$$

con

$$p = a_m + 1 - b_1$$

y

$$\varrho \cdot \sigma(a_i) = \varrho(a_i)$$

$$\varrho \cdot \sigma(b_j + p) = \sigma(b_j).$$

Para definir el producto de marañas primero se define el caso en que alguno de los factores es una identidad. Para cada $A \subset \mathbb{R}^3$ y $r \in \mathbb{R}$ se define

$$r + A = \{(r + x_1, x_2, x_3) \mid x \in A\}$$

DEFINICIÓN 2.2.5 Sean $M \in \Omega(ab)$ y $c^{(n)} \in \Omega$. Los productos

$$id_c \cdot M \quad \text{y} \quad M \cdot id_c$$

son las clases de las variedades

$$id_c \cup (id_{b(c)+r}^{b(c)} \circ p + r + M \circ id_{a(c)}^{a(c)+r})$$

$$3^{-1}[(id_b \cup id_{c(a)+r}^{c(b)} + 2) \cup (M \cup id_{c(a)+r} + 1) \cup (id_a \cup id_{c(a)}^{c(a)+r})]$$

donde $r > 0$ se elige de modo que las uniones son ajenas.

Las variedades de esta definición se representan en la figura 2.18.

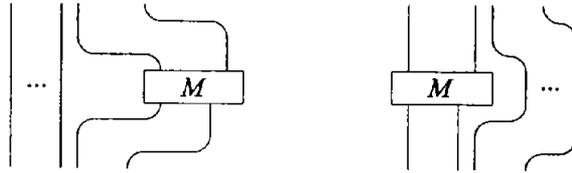


Figura 2.18:

Lema 2.2.6 *Los productos $id_c \cdot M$, $M \cdot id_c$ estan bien definidos.*

Demostración. Es inmediato empleando el mismo método de demostración de 2.2.2.

DEFINICIÓN 2.2.7 *Sean $M \in \Omega(a, b)$ y $N \in \Omega(c, d)$. El producto $M \cdot_{\Omega} N \in \Omega(a \cdot c, b \cdot d)$ es alguna de las composiciones*

$$(M \cdot id_d) \circ (id_a \cdot N) \quad \text{ó} \quad (id_b \cdot N) \circ (M \cdot id_c) \tag{2.1}$$

Las marañas de esta definición se representan en la figura 2.19.

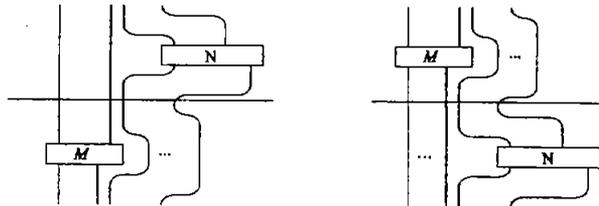


Figura 2.19: Producto $M \cdot_{\Omega} N$

Lema 2.2.8 *El producto \cdot_{Ω} esta bien definido y tiene las siguientes propiedades*

$$id \cdot (M \circ N) = (id \cdot M) \circ (id \cdot N) \quad (2.2)$$

$$(M \circ N) \cdot id = (M \cdot id) \circ (N \cdot id) \quad (2.3)$$

Demostración. De 2.2.6 se deduce que esta bien definido. La igualdad (2.1), y las propiedades (2.2), (2.3) son inmediatas empleando el método de demostración de 2.2.2.

Lema 2.2.9 *\cdot_{Ω} es un producto tensorial.*

Demostración. (1.8) Sean $M \in \Omega(ab)$, $N \in \Omega(bc)$ y $M' \in \Omega(a'b')$, $N' \in \Omega(b'c')$. Entonces

$$\begin{aligned} (N \circ M) \cdot (N' \circ M') &= (N \circ M) \cdot I_{c'} \circ I_a \cdot (N' \circ M') \\ &= (N \cdot I \circ M \cdot I) \circ (I \cdot N' \circ I \cdot M') \\ &= N \cdot I \circ (M \cdot I_{c'} \circ I_a \cdot N') \circ I \cdot M' \\ &= N \cdot I \circ (I_b \cdot N' \circ M \cdot I_{b'}) \circ I \cdot M' \\ &= (N \cdot I \circ I \cdot N') \circ (M \cdot I \circ I \cdot M') \\ &= N \cdot N' \circ M \cdot M' \end{aligned}$$

(1.9) Por definición

$$id_a \cdot id_b = id_{a \cdot b}$$

Teorema 2.2.10 $(\Omega, (\cdot, \emptyset))$ *es una categoría monoidal estricta.*

Demostración. (1.12) Por definición

$$a \cdot \emptyset = a = \emptyset \cdot a$$

$$M \cdot \emptyset = M = \emptyset \cdot M$$

para cada $a \in \Omega$, y $M \in M_{\Omega}$.

(1.13) Sean $M \in \Omega(a, b)$, $N \in \Omega(c, d)$ y $L \in \Omega(e, f)$. Por definición

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

y por 2.2.8, 2.2.9

$$\begin{aligned}
 (M \cdot N) \cdot L &= (MN) \cdot I_f \circ I_{a \cdot c} \cdot L \\
 &= (M \cdot I_d \circ I_a \cdot N) \cdot I_f \circ I_{a \cdot c} \cdot L \\
 &= M \cdot I_{d \cdot f} \circ (I_a N I_f) \circ I_{a \cdot c} \cdot L \\
 &= M \cdot I_{d \cdot f} \circ I_a (N \cdot I_f \circ I_c \cdot L) \\
 &= M \cdot I_{d \cdot f} \circ I_a (N \cdot L) \\
 &= M \cdot (N \cdot L)
 \end{aligned}$$

Finalmente se define una estructura cuántica sobre Ω .

DEFINICIÓN 2.2.11 *La sucesión dual de a_σ es*

$$a^* = a_{-\sigma}$$

Para cada pareja $a^m, b^n \in \Omega$, se definen las marañas

$$X_{ab} \in \Omega(a \cdot b, b \cdot a)$$

$$\cap_a \in \Omega(a \cdot a^*, \emptyset), \quad \cup_a \in \Omega(\emptyset, a \cdot a^*)$$

Si a, b son las sucesiones $[m], [n]$ sus representantes se definen en la figura 2.20.

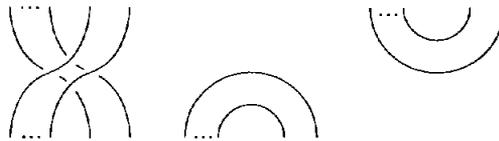


Figura 2.20: Marañas X_{ab} , \cap_a y \cup_a

En general

$$\begin{aligned}
 X_{ab} &= id_{[m+n]}^{b \cdot a} \circ X_{[m] \cdot [n]} \circ id_{a \cdot b}^{[m+n]} \\
 \cap_a &= \cap_{[m]} \circ id_{a \cdot a^*}^{[2m]} \\
 \cup_a &= id_{[2m]}^{a \cdot a^*} \circ \cup_{[m]}
 \end{aligned}$$

Sean

$$\tau_\Omega = \{X_{ab} \mid a, b \in \Omega\}$$

$$\delta_\Omega = \{\cup_a, \cap_b \mid a, b \in \Omega\}$$

Teorema 2.2.12 $(*, \tau_\Omega, I_\Omega, \delta_\Omega)$ es una estructura cuántica de Ω .

Demostración. (1.17) Por inducción y 2.1.10

$$X_{a,b,c} = id_b \cdot X_{ac} \circ X_{ab} \cdot id_c$$

$$X_{a,b,c} = X_{ac} \cdot id_b \circ id_a \cdot X_{bc}$$

(1.18) Por inducción y 2.1.10

$$id_{a \cdot b} = id_a id_b \circ X_{ba} \circ X_{ab}$$

(1.19) Así mismo

$$id_a = id_a \cap_a \circ \cup_a \cdot id_a$$

$$id_{a^*} = \cap_a id_{a^*} \circ id_{a^*} \cup_a$$

2.3. Presentación de Ω

Empleando las clases Γ_Ω y R_Ω como una base y un sistema de relaciones se define una presentación de la categoría Ω .

Las demostraciones de sus respectivas propiedades se basan en el teorema de Reidemeister y en algunos resultados básicos de la teoría de Morse.

Sean M una maraña orientada y φ^i una parametrización de M^i , donde

$$\varphi^i \in D(J, M^i), \quad J = S^1 \text{ ó } I$$

dependiendo de si la componente M^i es cerrada ó no.

DEFINICIÓN 2.3.1 *Un punto $a \in M$ es un máximo ó un mínimo si, existe una única pareja (i, j) , y la coordenada a_j es un máximo ó un mínimo de la*

respectiva aplicación coordenada φ_j^i .

Sea $p \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la aplicación definida por

$$px = (x_1, x_3), \quad \forall x$$

DEFINICIÓN 2.3.2 Un punto $a \in M$ es doble si, existe un único punto $b \in M$, con la propiedad

$$pa = pb$$

DEFINICIÓN 2.3.3 Un punto crítico de M es un punto máximo, mínimo ó doble.

Si a es un punto crítico de M , su coordenada a_3 se llama valor crítico de M . Como los puntos críticos de una aplicación de Morse son aislados, de los siguientes lemas se concluye que, para cada maraña M , existe una maraña $N \sim M$ que contiene un conjunto finito de puntos críticos con valores críticos diferentes.

La aplicación $\psi \in C^\infty(L^{(m)}, \mathbb{R})$ se llama Morse si, sus puntos críticos son no degenerados; esto es, si $\psi'a = 0$ implica que el Hessiano $\psi''a$ es de rango m . La aplicación $\psi \in C^\infty(L, \mathbb{R}^n)$ se llama Morse si sus coordenadas ψ_i son Morse.

Lema 2.3.4 Si $\psi \in C^\infty(L, \mathbb{R})$ es una aplicación Morse entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe una aplicación Morse $\zeta \in C^\infty(L, \mathbb{R})$ con los mismos puntos críticos que ψ pero con valores críticos diferentes y

$$|\psi - \zeta| < \epsilon$$

Demostración. Sean x_i los puntos críticos de ψ . Entonces, para cada x_i , existen dos vecindades $U_i \subset V_j$ tal que, el único punto crítico de ψ_{V_i} es x_i , V_i es compacto y

$$V_i \cap V_j = \emptyset, \quad \forall i, j$$

Sea $\varrho \in C^\infty(L, I)$ definida por

$$\varrho x = \begin{cases} 1 & x \in \cup U_i \\ 0 & x \in M - \cup V_i \end{cases}$$

Entonces, existen $c, d > 0$ con

$$c < |\psi'_{\cup V_i - U_i}|, \quad |\varrho_{V_i}| < d$$

Sea c_i una sucesión real con las propiedades

$$0 < c_i < \epsilon, \quad c - c_i d > 0$$

y

$$\varphi x_i + c_i \neq \varphi x_j + c_j \quad \forall i, j$$

Entonces

$$\zeta = \psi + \sum c_i \varrho$$

tiene los mismos puntos críticos que ψ , pero sus valores críticos son diferentes entre sí.

Sea $\xi \in C^\infty(L, \mathbb{R}^n)$, con $L \subseteq \mathbb{R}^m$. Para cada punto $a \in \mathbb{R}^m$, se define la aplicación

$$\xi_a \in C^\infty(L, \mathbb{R}^n)$$

$$\xi_a x = (\xi_1 x + a \cdot x, \dots, \xi_n x + a \cdot x)$$

Lema 2.3.5 *Para casi toda $a \in \mathbb{R}^m$, ξ_a es una aplicación Morse.*

Teorema 2.3.6 *Para cada maraña M , existe una maraña $M' \sim M$ que contiene un conjunto finito de puntos críticos, los puntos dobles no son máximos ó mínimos, y sus valores críticos son diferentes entre sí.*

Demostración. Sean N , ϵ y σ como en la demostración de 2.2.3; y sea $\varphi = \varphi^i$ una parametrización de N .

Suponiendo que $\varphi^i \in D(I, N^i)$, se define

$$\xi^i \in C^\infty(I, \Xi)$$

$$\xi^i(t) = \varphi^i(t) + \sigma(t)t(a, a, a)$$

donde φ_a^i es Morse y $|a| < 2^{-1}\epsilon$.

En caso de que $\varphi^i \in D(S^1, N^i)$, la aplicación ξ^i se define como φ_a^i .

Entonces, por 2.3.5, cada ξ^i es un encaje sobre Ξ , y dependiendo del caso

$$\xi_{[e,1-\epsilon]}^i \quad \text{ó} \quad \xi^i$$

son aplicaciones Morse.

Sea L la maraña definida por la unión de las imágenes de los encajes ξ^i . Entonces $L \sim N$, y contiene un conjunto finito de máximos y mínimos.

La equivalencia se deduce de 2.1.10, y las homotopías

$$\varphi^i + \sigma \cdot id \cdot t \cdot (a, a, a), \quad \varphi_{ta}^i$$

donde $\varphi^i \in D(I, N^i)$ ó $D(I, N^i)$, respectivamente.

Luego aplicando 2.3.4, a las coordenadas de cada ξ^i se concluye la existencia de la maraña $M' \sim L$.

Teorema 2.3.7 Γ_Ω es una base de Ω .

Demostración. Sean M una maraña, y M' la que se obtiene aplicando el teorema 2.3.6. Sean c_i los valores críticos de M' , y sin pérdida de generalidad supóngase que existe $n \in \mathbb{N}$ con la propiedad

$$(i+1)n^{-1} < c_i < in^{-1}, \quad \forall i$$

Entonces la intersección de M' y los planos $z = in^{-1}$ es transversal, y aplicando 2.1.10, se concluye que es ortogonal.

Para cada $i \leq n$, sea p_{ij} el punto de intersección de la componente M'^j y el plano $z = in^{-1}$, y sean x_{ij} las abscisas de estos puntos.

Sean $\gamma_{i>1}$ y $\lambda_{i<n}$ las curvas definidas en la figura 2.21, y sean L_i las marañas definidas por las variedades

$$\gamma_i \cup M'_{[(i-1)n^{-1}, in^{-1}]} \cup \lambda_i$$

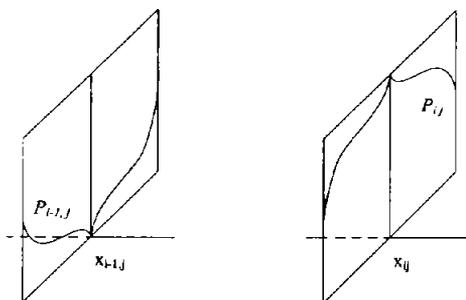


Figura 2.21:

Entonces $L_i \in \Omega(x_{i-1,j}, x_{ij})$, la composición $\circ L_i$ es una forma normal de la maraña $L = \circ L_i$, y

$$M' \sim L$$

Además, si c_i es un valor máximo entonces \widehat{L}_i es una maraña del tipo \cap^+ ó \cap^- ; si es un valor mínimo entonces \widehat{L}_i es del tipo \cup^+ ó \cup^- ; y si es un valor doble entonces \widehat{L}_i es del tipo X ó X^{-1} .

Categoría de Diagramas

A continuación se demuestra que R_Ω es un sistema de relaciones respecto Γ_Ω , como parte de la demostración se define la categoría de diagramas Δ , y se establecen algunas de sus propiedades.

Sean $p \in \text{In}(L, M)$ y $a \in L$. El punto a se llama doble si, existe un único punto $b \in L$, con la propiedad

$$pa = pb.$$

La notación $L \pitchfork L$ indica que, cada punto de L es simple o doble, y si a es un punto doble entonces, existen dos vecindades $V(a), V(b) \subset \text{int}L$ con las propiedades.

$$V(a) \cap V(b) = \emptyset, \quad p_{V(a)} \pitchfork p_{V(b)}$$

Por simplicidad L y $p(L)$ se consideran idénticos.

DEFINICIÓN 2.3.8 Considerando la notación anterior, $L^{(n)}$ es un n -diagrama contenido en M si

$$\partial L \subset \partial M, \quad L \cap \partial M, L$$

DEFINICIÓN 2.3.9 Sean L, M dos diagramas en N . Una isotopía ambiental de L en M , es una isotopía $h \in \text{Is}(N, N)$ invariante en la frontera, con

$$h_0 = id_N$$

y h_1 aplica L en M .

Además, si L y M son orientadas entonces h_{1L} preserva la orientación.

Para cada $M \in C^\infty$, la relación de isotopía ambiental entre sus diagramas es de equivalencia, y la clase de L se denota por $[L]$.

Para cada pareja $a^m, b^n \in \Omega$, sea $\Xi_0(a, b)$ la clase que contiene los 1-diagramas compactos M contenidos en $\mathbb{R} \times I$ con

$$\partial M = \{(a_i, 0)(b_j, 1) \mid i \leq m, j \leq n\}$$

Para cada $a_\sigma, b_\omega \in \Omega$, sea $\Delta(a, b)$ la clase que contiene los objetos $[M]$, donde $M \in \Xi_0(a, b)$ y

$$v_{(a_i, 0)} = (0, \sigma(a_i)), \quad v_{(b_j, 1)} = (0, \omega(b_j))$$

Los objetos de $\Delta(a, b)$ se llaman (a, b) -diagramas. Sea M_Δ la clase que contiene los (a, b) -diagramas, para toda pareja $a, b \in \Omega$.

Diagramas Identidad

Para cada pareja $a, b \in \Omega$ se define el diagrama id_a^b . Su representante es la proyección de la maraña orientada id_a^b sobre el plano xz . La clase que contiene los diagramas identidad se denota por I_Δ .

Diagramas Básicos

Para cada sucesión $a^{(2)}$ se definen los diagramas

$$X_a^{\pm 1} \in \Delta(a_\sigma, a_\sigma)$$

$$\cap_a^+ \in \Delta(a_\omega, \emptyset), \quad \cap_a^- \in \Delta(a_{-\omega}, \emptyset)$$

$$\cup_a^+ \in \Delta(\emptyset, a_{-\omega}), \quad \cup_a^- \in \Delta(\emptyset, a_\omega)$$

donde σ y ω son las sucesiones 1,1 y 1,-1.

Sus representantes son las proyecciones de las respectivas marañas orientadas. La clase que contiene los diagramas básicos se denota por Γ_Δ .

Relaciones R_Δ

Empleando las proyecciones de $\Omega_{1,2,8,9}$ se definen las relaciones Δ_{1-4} .

La definición de la composición de diagramas \circ_Δ , así como la demostración de que está bien definida son similares a las de \circ_Ω . Sea P_Δ la clase que contiene las composiciones de diagramas.

Teorema 2.3.10 $(M_\Delta, I_\Delta, P_\Delta)$ es una Ω -categoría.

Demostración. Inmediata.

El producto tensorial de diagramas \cdot_Δ se define con métodos similares a los empleados con el producto de marañas.

Teorema 2.3.11 $(\Delta, (\cdot_\Delta, \emptyset))$ es una categoría monoidal estricta.

Demostración. Inmediata.

Teorema 2.3.12 $\langle \Gamma_\Delta, R_\Delta \rangle$ es una presentación de la categoría Δ .

Demostración. La demostración de que Γ_Δ es una base es similar a la demostración de 2.3.7.

Para demostrar que R_Δ es un sistema de relaciones, sean M, M' dos diagramas equivalentes. Por 1.3.6 se puede suponer que ambos están en posición

normal, respecto la base Γ_Δ .

Entonces M' se obtiene de M , mediante una sucesión finita de isotopías de los siguientes tipos.

1. una isotopía en la clase de los diagramas en posición normal.
2. una isotopía que intercambia el orden entre dos puntos críticos (Ω_0).
3. una isotopía que crea ó elimina dos puntos críticos, como en las relaciones $p\Omega_{1,2,8,9}$, (Ω_ρ).
4. una isotopía en la que una componente cruza un punto crítico, como en las relaciones $p\Omega'_8$, (Ω_ρ).

Es inmediato que mediante isotopías del tipo 1, se obtienen diagramas equivalentes. Por (1.3.1, 2), mediante las isotopías del tipo 2, se obtiene diagramas equivalentes; y por (1.3.1, 2), (1.3.1, 3) empleando las relaciones R_Δ , de las isotopías de los tipos 3 y 4, tambien se obtienen diagramas equivalentes. Por tanto, R_Δ es un sistema de relaciones respecto a la base Γ_Δ .

La relación entre las categorías Δ y Ω se establece en el siguiente resultado, debido a Reidemeister, y con él también se concluye que R_Ω es un sistema de relaciones respecto Γ_Ω .

Teorema 2.3.13 *Las marañas M , N son equivalentes si, y sólo si, existe una suseción de marañas $M_{i \leq n}$, con las propiedades*

$$M = M_1, N = M_n$$

y

$$pM_i \sim pN_{i+1} \text{ mod } R_\Delta \cup p\Omega_{3-7}, \quad \forall i$$

Demostración. [KR].

Corolario 2.3.14 *R_Ω es un sistema de relaciones respecto Γ_Ω .*

Corolario 2.3.15 $\langle \Gamma_\Omega, R_\Omega \rangle$ es una presentación de la categoría Ω .

Además de esta presentación mediante la clase R'_Ω se define otra, que emplea la misma base.

Teorema 2.3.16 $\langle \Gamma_\Omega, R'_\Omega \rangle$ es una presentación de la categoría Ω .

Demostración. Inmediata.

2.4. Categoría Π

La categoría de las marañas normadas Π , se define mediante las clases M_Π , P_Π e I_Π , donde la clase de las composiciones P_Π se define en forma similar a la clase P_Ω .

En general los métodos de definición y demostración de esta categoría, así como los de sus estructuras monoidal estricta y cuántica, son similares a los que se han empleado en la categoría Ω .

DEFINICIÓN 2.4.1 Sean $M_\mu \in \Pi(a, b)$ y $N_\nu \in \Pi(b, c)$. La composición $N \circ_{abc} M_\sigma$ es la clase de la variedad

$$2^{-1}(M \cup N + 1)$$

donde

$$\sigma x = \begin{cases} \mu P_2 x & x_3 \leq 2^{-1} \\ \nu S_{-1} P_2 x & x_3 \geq 2^{-1} \end{cases}$$

Empleando los mismos argumentos que en la demostración de 2.2.2, se concluye que la composición \circ_{abc} está bien definida.

Lema 2.4.2 \circ_{abc} está bien definida.

Demostración. Idem 2.2.2.

Sea P_Π la clase que contiene las composiciones \circ_{abc} , para todo $a, b, c \in \Pi$.

Teorema 2.4.3 (M_Π, I_Π, P_Π) es una Π -categoría.

Demostración. (1.1) En esta parte se demuestran las igualdades

$$M_\mu \circ id_a = M_\mu = id_b \circ M_\mu$$

para cada $M_\mu \in \Pi(ab)$.

Aplicando el mismo método que en la demostración de 2.2.3, se obtienen $\epsilon > 0$ y $N_\nu \sim M$, con las siguientes propiedades

$$N_{[0,\epsilon]} = \cup_{i \leq m} (a_i, 0) \times [0, \epsilon]$$

$$N_{[1-\epsilon,1]} = \cup_{j \leq n} (b_j, 0) \times [1 - \epsilon, 1]$$

la distancia entre las componentes de N es mayor que 2ϵ , y para cada i , las normas

$$\nu_{N_{[0,\epsilon]}^i}, \quad \nu_{N_{[1-\epsilon,1]}^i}$$

son constantes.

En virtud de esta última condición, el resto de esta parte de la demostración es idéntico a la de 2.2.3.

(1.2) La demostración de la igualdad

$$L_\lambda \circ (M_\mu \circ N_\nu) = (L_\lambda \circ M_\mu) \circ N_\nu$$

es idéntica a la de 2.2.3, (1.2). Primero se define la maraña normada

$$L_\lambda \circ M_\mu \circ N_\nu$$

Entonces empleando las isotopías definidas en la demostración de 2.2.3, por 2.1.10, se concluyen las igualdades.

$$\begin{aligned} L_\lambda \circ (M_\mu \circ N_\nu) &= L_\lambda \circ M_\mu \circ N_\nu \\ &= (L_\lambda \circ M_\mu) \circ N_\nu \end{aligned}$$

Por inducción y asociatividad la composición $\circ M_{i \leq n}$ de marañas normadas también se considera definida por la clase de la variedad

$$n^{-1}(\cup M_i + i - 1)$$

Siguiendo la secuencia empleada en la definición de la categoría cuántica Ω , ahora se define una estructura monoidal para Π . El producto de dos sucesiones normadas se define como el producto de las sucesiones con la norma producto, y el producto de morfismos es idéntico al producto de los morfismos de Ω . De hecho, los resultados 2.4.6 y 2.4.8-2.4.12 se demuestran con los mismos argumentos que los respectivos resultados de Ω .

DEFINICIÓN 2.4.4 Sean $a_\mu^m, b_\nu^n \in \Pi$. El producto $a \cdot b_{\mu\nu}^{m+n}$ es la sucesión

$$a_1, \dots, a_m, b_1 + p, \dots, b_n + p$$

donde

$$p = a_m + 1 - b_1$$

y

$$\mu \cdot \nu a_i = \mu a_i$$

$$\mu \cdot \nu(b_j + p) = \nu b_j$$

La subsucesión $b_j + p$ se denota por $b(a)$, y en general, se define la sucesión $(a + r)_\mu$ por

$$(a + r)_i = a_i + r, \quad \mu(a + r)_i = \mu a_i$$

para cada $r \in \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 2.4.5 Sean $M_\mu \in \Pi(a, b)$ y $c_\nu^a \in \Pi$. Los productos $id_c \cdot M$ y $M \cdot id_c$ son las clases de las variedades

$$id_c \cup (id_{b(c)+r}^{b(c)} \circ p + r + M \circ id_{a(c)}^{a(c)+r})$$

$$3^{-1}\{(id_b \cup id_{c(a)+r}^{c(a)} + 2) \cup (M \cup id_{c(a)+r} + 1) \cup (id_a \cup id_{c(a)}^{c(a)+r})\}$$

donde las uniones son ajenas, eligiendo $r > 0$ convenientemente.

La representación gráfica de esta definición, salvo por las normas, se muestra en la figura 2.18.

Lema 2.4.6 Los productos $id_c \cdot M$ y $M \cdot id_c$ están bien definidos.

Demostración. Idem 2.2.6.

DEFINICIÓN 2.4.7 Sean $M_\mu \in \Pi(a, b)$ y $N_\nu \in \Pi(c, d)$. El producto $M \cdot_\Pi N_{\mu, \nu} \in \Pi(a \cdot c, b \cdot d)$ es cualquiera de las composiciones

$$(M \cdot id_d) \circ (id_a \cdot N)$$

$$(id_b \cdot N) \circ (M \cdot id_c)$$

La figura 2.19 es una representación gráfica de las variedades de esta definición.

Lema 2.4.8 El producto de marañas normadas \cdot_Π está bien definido.

Demostración. Idem 2.2.8.

Lema 2.4.9 Para cada $M, N \in M_\Pi$

$$\begin{aligned}(M \circ N) \cdot id &= (M \cdot id) \circ (N \cdot id) \\ id(M \circ N) &= (id \cdot M) \circ (id \cdot N)\end{aligned}$$

Demostración. Idem 2.2.9.

La demostración gráfica de 2.4.8 y 2.4.9, está representada en la figura 2.20.

Lema 2.4.10 \cdot_Π es un producto tensorial.

Demostración. (1.8) Por analogía, la demostración de la propiedad

$$(N \circ M) \cdot (N' \circ M') = (N \cdot N') \circ (M \cdot M')$$

es inmediata de 2.4.9 y la definición de producto de marañas normadas.

(1.9) Por definición

$$id_a \cdot id_b = id_{a \cdot b}$$

para cada pareja a, b .

Teorema 2.4.11 $(\Pi, (\cdot_\Pi, \emptyset))$ es una categoría monoidal estricta.

Demostración. Idem 2.2.10.

Por último se define una estructura cuántica de la categoría Π , considerando como antecedente la estructura cuántica de Ω definida en la sección anterior.

Para cada pareja de sucesiones $a, b \in \Pi$ se definen las marañas

$$X_{ab}^{\pm 1} \in \Pi(a \cdot b, b \cdot a)$$

$$\cap_a \in \Pi(a \cdot a, \emptyset), \quad \cup_a \in \Pi(\emptyset, a \cdot a)$$

Sus representantes son las mismas variedades que definen las respectivas marañas orientadas con las normas constantes.

Sean

$$\tau_{\Pi} = \{X_{ab}^{\pm 1} \mid a, b \in \Pi\}$$

$$\delta_{\Pi} = \{\cap_a, \cup_a \mid a \in \Pi\}$$

Teorema 2.4.12 $(id_{\Pi}, \tau_{\Pi}, I_{\Pi}, \delta_{\Pi})$ es una estructura cuántica de Π .

Demostración. Idem 2.2.12.

2.5. Presentación de Π

Con un procedimiento similar al que se ha empleado en la definición de la presentación de la categoría Ω , mediante las clases Γ_{Π} y R_{Π} se define una presentación de la categoría Π .

Esta sección propiamente es una relación de los resultados que se han empleado en la presentación de Ω , que también son válidos para Π .

Sea M_{μ} una maraña normada. Para cada parametrización de M se definen los conceptos de puntos máximos, mínimos y dobles de M , como en las definiciones 2.3.1 y 2.3.2. Claramente ninguno de estos conceptos depende de la norma de M .

DEFINICIÓN 2.5.1 *Un punto crítico de la maraña M es un punto máximo, mínimo o doble.*

Si a es un punto crítico de la maraña M , su tercera coordenada a_3 se llama valor crítico de M .

Empleando los lemas 2.3.4 y 2.3.5, se obtiene el siguiente resultado equivalente al teorema 2.3.6.

Teorema 2.5.2 *Para cada maraña M_μ , existe una maraña*

$$N_\nu \sim M_\mu$$

que contiene un conjunto finito de puntos críticos con valores críticos diferentes entre sí, y sus puntos dobles no son máximos ni mínimos.

Demostración. Idem 2.3.6.

Análogamente al caso de Ω , a través de este resultado se concluye que la clase Γ_Π es una base de la categoría Π .

Teorema 2.5.3 Γ_Π *es una base de Π .*

Demostración. Esta consta de dos partes, y la primera consiste precisamente de la demostración de 2.3.7.

Segunda parte. Para cada i , se agregan los renglones L_{ij} entre L_{i-1} y L_i , de manera que las normas de \widehat{L}_i sean constante e igual a $(1, 0, 0)$, pero por otra parte

$$\widehat{L}_{ij} = \varphi^{\pm 1}, \quad \forall j$$

Luego, el resto de la demostración es idéntica a la de 2.3.7.

En cuanto a la relación entre las categorías Δ y Π , esta se establece en el siguiente resultado que se obtiene del teorema Reidemeister, de donde se concluye que R_Π es un sistema de relaciones respecto Γ_Π .

Teorema 2.5.4 *Las marañas M, N son equivalentes si, y sólo si, existe una subsección de marañas $M_{i \leq n}$, con las propiedades*

$$M = M_1, N = M_n$$

y

$$pM_i \sim pN_{i+1} \pmod{p\Pi_{j \leq 6}}, \quad \forall i$$

Demostración. [KR].

A diferencia del teorema 2.3.13, aquí las proyecciones se consideran como morfismos de la categoría de diagramas no orientados.

Corolario 2.5.5 R_Π es un sistema de relaciones respecto Γ_Π .

Corolario 2.5.6 $\langle \Gamma_\Pi, R_\Pi \rangle$ es una presentación de Π .

Capítulo 3

Representaciones de Ω y Π

En esta unidad se define una sucesión de representaciones, para cada una de las categorías de marañas.

Dado que en ambos casos los representantes de las marañas X , son soluciones de la ecuación YB -cuántica, en las primeras dos secciones se incluye una breve introducción a las ecuaciones YB -clásica y cuántica.

3.1. Ecuación YB-clásica

Esta ecuación se originó en la mecánica estadística, precisamente en la teoría de sistemas integrables.

Aquí sólo se establece el método de solución de Drinfel'd, y se concluye con la definición explícita de las soluciones trigonométricas correspondientes a las álgebras clásicas.

Sean $L \in \mathring{\mathbb{L}}$ un álgebra Lie simple e ι_ν una base ortogonal definida mediante su producto Cartan. Por simplicidad el producto tensorial $\iota_\mu \otimes \iota_\nu$ se denota por $\iota_{\mu\nu}$.

Para cada vecindad $V \subset \mathbb{C}$ del origen, sean $M(V)$, $E(V)$ y $R(V)$ las clases de las aplicaciones $r \in C(V, L^{2\otimes})$, cuyas coordenadas $r_{\mu\nu}$ respecto a la base

$\iota_{\mu\nu}$, son aplicaciones meromorfas, elípticas y racionales. Las composiciones $\exp(\varphi)$, $\varphi \in R(V)$ se llaman aplicaciones trigonométricas y la clase que las contiene se denota por $T(V)$. En particular, si $r \in M(V)$ el conjunto de sus polos se denota por $\Gamma(r)$.

Para cada álgebra A con uno, con la propiedad $L \prec A$, por ejemplo para $A = U(L)$, se definen las aplicaciones $p^{ij} \in \mathbb{L}(L^{2\otimes}, A^{3\otimes})$ por

$$\begin{aligned} p^{12}a \otimes b &= a \otimes b \otimes 1_A \\ p^{13}a \otimes b &= a \otimes 1_A \otimes b \\ p^{23}a \otimes b &= 1_A \otimes a \otimes b \end{aligned}$$

Aquí el paréntesis de $A^{3\otimes}$ es una extensión de $[\]_A$, y se define por

$$[x, y] = \otimes [x_i, y_i]_A$$

En general, para cada $r \in M(V)$ se definen las aplicaciones

$$r^{ij} = p^{ij}r$$

DEFINICIÓN 3.1.1 *Sea $V \subset \mathbb{C}$ una vecindad del origen. Una solución de la ecuación YB -clásica es una aplicación $r \in M(V)$, con la propiedad*

$$[r^{12}(u), r^{13}(u+v)] + [r^{12}(u), r^{23}(v)] + [r^{13}(u+v), r^{23}(v)] = 0$$

para cada $u, v, u+v \in V$.

La igualdad en esta definición se llama ecuación YB -clásica, asociada a (V, L, A) , y sus soluciones usualmente se llaman soluciones clásicas.

En la búsqueda de soluciones clásicas explícitas las soluciones no degeneradas constituyen una clase sumamente accesible.

DEFINICIÓN 3.1.2 *Las soluciones clásicas r, s son equivalentes si, existe una aplicación $\varphi \in C(V, (\text{Aut}L)^{2\otimes})$ con la propiedad*

$$r = \varphi s$$

DEFINICIÓN 3.1.3 Una solución clásica r es, no degenerada si

$$\det r_{\mu\nu} \neq 0$$

Aunque la ecuación clásica se define en una vecindad, una conveniencia de las soluciones no degeneradas es que se extienden a \mathbb{C} , y dependiendo de su grupo de polos pertenecen a una de las clases $E(\mathbb{C})$, $R(\mathbb{C})$ ó $T(\mathbb{C})$.

Teorema 3.1.4 Si r es una solución no degenerada entonces, existe una extensión a \mathbb{C} , con polos simples y, $\Gamma(r)$ es un subgrupo discreto de $(\mathbb{C}, +)$, de rango 0, 1 ó 2. Además

$$\begin{aligned} \text{ran}\Gamma(r) = 0 &\Rightarrow r \in R(\mathbb{C}) \\ \text{ran}\Gamma(r) = 1 &\Rightarrow r \in T(\mathbb{C}) \\ \text{ran}\Gamma(r) = 2 &\Rightarrow r \in E(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

En lo sucesivo toda solución clásica se considera no degenerada.

Teorema 3.1.5 Para cada L , existe una solución elíptica sii, existe $n \in \mathbb{N}$ con

$$L \sim \mathfrak{sl}(n).$$

El artículo [AB] muestra todas las soluciones elípticas.

A diferencia del caso elíptico, la existencia de soluciones trigonométricas depende del grupo Dynkin de L . Específicamente, para cada automorfismo Dynkin, existe una solución que depende de su automorfismo Coxeter asociado.

En seguida se establecen los puntos básicos de este método y como conclusión se muestran las soluciones correspondientes a las álgebras clásicas.

Sean $\sigma \in \text{Dyn}(L)$ y c_σ su clase respecto el lema A.23, del apéndice sobre la categoría \mathbf{L} .

DEFINICIÓN 3.1.6 Un automorfismo $c \in c_\sigma$ es Coxeter si

$$L^c = \{a \in L \mid ca = 0\}$$

es un álgebra y, c es el automorfismo de menor orden con ésta propiedad.

Lema 3.1.7 Para cada $\sigma \in \text{Dyn}(L)$, existe un automorfismo Coxeter c , y es único salvo conjugación respecto $\text{Int}(L)$.

El orden de c se llama índice Coxeter de (L, σ) , y se denota por h_c .

A través del sistema de generadores Weyl de L se define un automorfismo Coxeter como sigue. Sean e_i, f_i, h_i el sistema de generadores Weyl de L , y $\omega = \exp(2\pi i h_c^{-1})$. Entonces, el morfismo c definido por

$$ce_i = \omega e_{\sigma i}, \quad cf_i = \omega^{-1} f_{\sigma i}$$

$$ch_i = h_{\sigma i}$$

es un automorfismo Coxeter. En este caso σ se considera como una permutación de los subíndices de los generadores.

Para las álgebras clásicas, por el lema A.23, existen siete casos y los resultados correspondientes se muestran en la siguiente tabla.

L	h_c	cx	T
A_n^1	$n + 1$	TxT^{-1}	$\omega^{2^{-1}(n+1)} dg(1, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \dots, \omega^{1-n})$
A_{2n}^2	$4n + 2$	$-Tx^tT^{-1}$	$Sdg(1, \xi, \dots, \xi^{2n}), \quad \xi = -\omega$
A_{2n+1}^2	$4n + 2$	$-Tx^tT^{-1}$	$Sdg(1, \xi, \dots, \xi^{n-2}, \xi^{n-1}, \xi^{n-1}, \xi^n, \dots, \xi^{2n-2}), \quad \xi = -\omega$
B_n^1	$2n$	TxT^{-1}	$\omega^{2^{-1}(n+1)} dg(1, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \dots, \omega^{1-2n})$
C_n^1	$2n$	TxT^{-1}	$dg(1, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \dots, \omega^{1-2n}, 1)$
D_n^1	$2n - 2$	TxT^{-1}	$dg(1, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \dots, \omega^{2-n}, \omega^{1-n}, \omega^{1-n}, \omega^{-n}, \dots, \omega^{3-2n}, 1)$
D_n^2	$2n$	TxT^{-1}	$dg(\omega^{-1}, \omega^{-2}, \dots, \omega^{1-n}, \tau, \omega^{-1-n}, \dots, \omega^{1-2n})$

La matriz τ está definida por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para definir una solución trigonométrica asociada a la pareja $((L, \sigma), c)$, se emplea la siguiente descomposición de L , muy similar a la que se emplea para definir sus raíces.

Sean

$$L_i = \{a \in L \mid ca = \omega^i a\}$$

$$L_i^\alpha = \{a \in L \mid ad_a x = \alpha(x)a, \forall x \in L_0, \alpha \in L_0^*\}$$

Entonces

$$L = \bigoplus L_i, \quad i \in h_c \mathbb{Z}$$

$$L_i = \bigoplus_{\alpha \neq 0} L_i^\alpha, \quad \dim L_i^\alpha \leq 1$$

Lema 3.1.8 Sea $t = \sum i_{\nu\nu}$. Entonces

$$c \otimes c(t) = t$$

Por tanto

$$t \in \bigoplus (L_i \otimes L_{i-1}), \quad i \in h_c \mathbb{Z}.$$

Sea t_i la proyección de t sobre el sumando i ésimo. Sean Π_0 el conjunto de raíces simples de L_0 , y $x_{i\alpha} \in L_i^\alpha$ con la propiedad

$$x_{i\alpha} \cdot x_{-i, -\alpha} = 1$$

Sean

$$r_0 = \sum_{\alpha \in \Pi_0} \varepsilon(\alpha) x_{0,\alpha} \otimes x_{0,-\alpha}$$

y

$$\xi \in A(\mathbb{C}, L^{2\otimes})$$

definida por

$$\xi x = r_0 - t + 2(1 - x^h)^{-1} \sum_{i=1}^{h-1} t_i x^i$$

donde $\varepsilon(\alpha)$ es el signo de la raíz α .

donde

$$N \doteq n + 1, 2n + 1, 2n, 2n, 2n + 1, 2n, 2n + 2$$

respectivamente.

Sean e_i la base canónica de \mathbb{C}^N , y E_{ij}^{kl} el operador definido por

$$E_{ij}^{kl} e_{pq} = e_{kl} \quad (i, j) = (p, q)$$

$$E_{ij}^{kl} e_{pq} = 0 \quad (i, j) \neq (p, q)$$

Con estas consideraciones se obtienen las siguientes soluciones.

Para A_n^1 :

$$(1-x)r(x) = (1-x) \sum (E_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} - N^{-1}I) + 2 \left(\sum_{\alpha < \beta} + x \sum_{\alpha > \beta} \right) E_{\alpha\beta}^{\beta\alpha}$$

Para B_n^1, C_n^1 y D_n^1 :

$$(1-x)r(x) = (1-x) \sum (E_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} - E_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha'}) + 2 \left(\sum_{\alpha < \beta} + x \sum_{\alpha > \beta} \right) (E_{\alpha\beta}^{\beta\alpha} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta E_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'})$$

donde

$$\varepsilon_\alpha = 1 \quad 1 \leq \alpha \leq n$$

$$\varepsilon_\alpha = -1 \quad n+1 \leq \alpha \leq 2n$$

para C_n^1 , y $\varepsilon_\alpha = 1$ en los otros casos.

Para A_{2n}^2, A_{2n-1}^2 :

$$\begin{aligned} (1-x^2)r(x) &= (1+x)^2 \sum E_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} - (1-x)^2 \sum E_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha'} - 4xN^{-1}I \\ &\quad + 2(1+x) \left(\sum_{\alpha < \beta} + x \sum_{\alpha > \beta} \right) E_{\alpha\beta}^{\beta\alpha} \\ &\quad + 2(1-x) \left(- \sum_{\alpha < \beta} + x \sum_{\alpha > \beta} \right) E_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'} \end{aligned}$$

Para D_{n+1}^2 :

$$(1-x^2)r(x) = (1+x^2) \sum_{\alpha \neq n+1, n+2} E_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} - E_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha'}$$

$$\begin{aligned}
& +2x(E_{n+1,n+1} - E_{n+2,n+2})^{2\otimes} \\
& 2\left(\sum_{\substack{\alpha < \beta \\ \alpha, \beta \neq n+1, n+2}} + x^2 \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \alpha, \beta \neq n+1, n+2}} \right) (E_{\alpha\beta}^{\beta\alpha} - E_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'}) \\
& +(1+x)\left(\sum_{\substack{\alpha < n+1 \\ \beta = n+1, n+2}} + x \sum_{\substack{\alpha > n+2 \\ \beta = n+1, n+2}} \right) (E_{\alpha\beta}^{\beta\alpha} - E_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'} + E_{\beta'\alpha'}^{\alpha'\beta'} - E_{\beta'\beta}^{\alpha'\alpha}) \\
& +(1-x)\left(\sum_{\substack{\alpha < n+1 \\ \beta = n+1, n+2}} - x \sum_{\substack{\alpha > n+2 \\ \beta = n+1, n+2}} \right) (E_{\alpha\beta'}^{\beta\alpha} - E_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta} - E_{\beta'\alpha'}^{\alpha'\alpha} + E_{\beta'\alpha'}^{\alpha'\beta})
\end{aligned}$$

La referencia general de los conceptos y resultados de esta sección es [BD], y otra referencia con resultados similares es [VB].

3.2. Ecuación YB-cuántica

El único objetivo en esta sección es establecer la existencia de las cuantizaciones de las soluciones clásicas definidas en la sección anterior.

Sean $V \in \mathring{\mathbb{E}}(\mathbb{C})$ y $B \subset \mathbb{C}$ una vecindad del origen. Para cada aplicación $r \in M(B, \text{End}V^{2\otimes})$, se definen

$$r_{12} = r \otimes id_V$$

$$r_{13} = id_V \otimes p_V r_{12}$$

$$r_{23} = id_V \otimes r$$

DEFINICIÓN 3.2.1 *Una solución de la ecuación YB-cuántica es una aplicación $r \in M(B, \text{End}V^{2\otimes})$, con la propiedad*

$$r_{12}(u)r_{13}(u+v)r_{23}(v) = r_{23}(v)r_{13}(u+v)r_{12}(u) \quad (3.1)$$

para cada $u, v, u+v \in B$.

La igualdad en esta definición se llama ecuación YB -cuántica, asociada a (V, B) , y sus soluciones usualmente se llaman soluciones cuánticas.

Por su semejanza con las relaciones Ω_4 y Π_4 , puede considerarse como su representación algebraica pero propiamente constituye un método para hallar representantes de las marañas X .

EJEMPLOS 3.2.2 Sean $V = \mathbb{C}^2$ y $\eta, \rho \in \mathbb{C}$. Las siguientes aplicaciones son soluciones cuánticas, asociadas a (V, \mathbb{C}) .

1.

$$ru = \begin{pmatrix} \text{sen}(\eta+u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}(u) & \text{sen}(\eta) & 0 \\ 0 & \text{sen}(\eta) & \text{sen}(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\eta+u) \end{pmatrix}$$

2.

$$ru = \begin{pmatrix} (1+u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+u) \end{pmatrix}$$

3.

$$ru = \begin{pmatrix} au & 0 & 0 & 0 \\ 0 & bu & cu & 0 \\ 0 & cu & bu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & au \end{pmatrix}$$

donde

$$au = \theta_0(\eta)\theta_0(u)\theta_1(\eta+u)$$

$$bu = \theta_0(\eta)\theta_1(u)\theta_0(\eta+u)$$

$$cu = \theta_1(\eta)\theta_0(u)\theta_0(\eta+u)$$

$$du = \theta_1(\eta)\theta_1(u)\theta_1(\eta+u)$$

y

$$\begin{aligned}\theta_0 u &= \Pi^\infty(1 - 2\rho^{2^{-1}(n+1)}\cos 2\pi u + \rho^{2n-1})(1 - \rho^n) \\ \theta_1 u &= 2\rho^{8^{-1}}\operatorname{sen}\pi u\Pi^\infty(1 - 2\rho^n\cos 2\pi u + \rho^{2n})(1 - \rho^n)\end{aligned}$$

Como una generalización de las soluciones clásicas se define el concepto de solución semiclásica.

DEFINICIÓN 3.2.3 *Una solución semiclásica de la ecuación YB-cuántica, es una solución cuántica $R \in M(B, \operatorname{End}V^{2\otimes})$ con la siguiente propiedad.*

Existe una extensión $R \in M(B \times \mathbb{C}, \operatorname{End}V^{2\otimes})$ y una vecindad del origen D , donde

$$R(u, h) = k(\operatorname{id}_{V^{2\otimes}} + hr(u) + \sum_2^\infty A_i(u)h^i) \quad (3.2)$$

con

$$A_i(u) \in \operatorname{End}_V^{2\otimes}, \quad \forall i$$

y, para cada $h \in D$

$$R_h(u) = R(u, h)$$

es una solución cuántica.

La aplicación r se llama límite clásico de la solución R , y el complejo k se llama constante Planck.

Proposición 3.2.4 *Las soluciones de 3.2.2 son semiclásicas.*

Demostración. [J2].

El término semiclásica de la definición 3.2.3 se debe a la siguiente propiedad de la aplicación r .

Proposición 3.2.5 *El límite de una solución semiclásica, es una solución clásica.*

Demostración. Sustituyendo 3.2 en 3.1, y derivando dos veces respecto a h , al evaluar en cero, se obtiene la ecuación clásica.

La relación entre las soluciones clásicas y semiclásicas se explica mediante el concepto de cuantización, y se ejemplifica con las soluciones de la sección anterior.

DEFINICIÓN 3.2.6 Una representación de $L \in \mathbf{L}$, es una pareja (V, ρ) con

$$V \in \mathbb{E}(\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad \rho \in \mathbb{E}(L, \text{Aut}V)$$

DEFINICIÓN 3.2.7 Sean R una solución semiclásica sobre la pareja (V, B) , y r su límite clásico. R es una cuantización de r si, existe una solución clásica $s \in M(B)$, para alguna vecindad B , y una representación $\rho \in \mathbb{E}(L, \text{Aut}V)$ con la propiedad

$$\rho \otimes \rho(s) = r$$

Teorema 3.2.8 Para cada solución de 3.1.9, existe una cuantización R .

Para A_n^1 :

$$R(x) = (x - k^2) \sum E_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} + k(x - 1) \sum E_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - (k^2 - 1) \left(\sum_{\alpha < \beta} + x \sum_{\alpha > \beta} \right) E_{\alpha\beta}^{\beta\alpha}$$

Para $B_n^1, C_n^1, D_n^1, A_{2n}^2, A_{2n-1}^2$:

$$R(x) = (x - k^2)(x - \xi) \sum_{\alpha \neq \alpha'} E_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} + k(x - 1)(x - \xi)$$

$$\sum_{\alpha \neq \beta, \beta'} E_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - (k^2 - 1)(x - \xi) \left(\sum_{\substack{\alpha < \beta \\ \alpha \neq \beta}} + x \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \alpha \neq \beta'}} \right) E_{\alpha\beta}^{\beta\alpha}$$

$$+ \sum a_{\alpha\beta}(x) E_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'}$$

donde

$$a_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} (k^2 x - \xi)(x - 1) & \alpha = \beta, \alpha \neq \alpha' \\ k(x - \xi)(x - 1) + (\xi - 1)(k^2 - 1)x & \alpha = \alpha' = \beta \\ (k^2 - 1)(\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \xi k^{\alpha - \beta} (x - 1) - \delta_{\alpha\beta'} (x - \xi)) & \alpha < \beta \\ (k^2 - 1)x(\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \xi k^{\alpha - \beta} (x - 1) - \delta_{\alpha\beta'} (x - \xi)) & \alpha > \beta \end{cases}$$

Para $B_n^1, C_n^1, D_n^1, A_{2n}^2, A_{2n-1}^2$:

$$\xi = k^{2n-1}, k^{2n+2}, k^{2n-2}, -k^{2n+1}, -k^{2n}$$

para C_n^1

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha - 2^{-1} & 1 \leq \alpha \leq n \\ \alpha + 2^{-1} & n + 1 \leq \alpha \leq 2n \end{cases}$$

y en los otros casos

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha + 2^{-1} & 1 \leq \alpha \leq 2^{-1}(N + 1) \\ \alpha & \alpha = 2^{-1}(N + 1) \\ \alpha - 2^{-1} & 2^{-1}(N + 1) < \alpha \leq N \end{cases}$$

Para D_{n+1}^2

$$\begin{aligned} R(x) &= (x^2 - k^2)(x^2 - \xi^2) \sum_{\alpha \neq n+1, n+2} E_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} \\ &+ k(x^2 - 1)(x^2 - \xi^2) \sum_{\substack{\alpha \neq \beta, \beta' \\ \alpha \text{ ó } \beta \neq n+1, n+2}} E_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - (k^2 - 1)(x^2 - \xi^2) \\ &\quad \left(\sum_{\substack{\alpha < \beta, \alpha \neq \beta' \\ \alpha, \beta \neq n+1, n+2}} + x^2 \sum_{\substack{\alpha > \beta, \alpha \neq \beta' \\ \alpha, \beta \neq n+1, n+2}} \right) E_{\alpha\beta}^{\beta\alpha} \\ &- 2^{-1}(k^2 - 1)(x^2 - \xi^2) \left((x + 1) \left(\sum_{\substack{\alpha < n+1 \\ \beta = n+1, n+2}} + x \sum_{\substack{\alpha > n+2 \\ \beta = n+1, n+2}} \right) (E_{\alpha\beta}^{\beta\alpha} + E_{\beta'\alpha'}^{\alpha'\beta'}) \right. \\ &\quad \left. + (x - 1) \left(\sum_{\substack{\alpha < n+1 \\ \beta = n+1, n+2}} + x \sum_{\substack{\alpha > n+2 \\ \beta = n+1, n+2}} \right) (E_{\alpha\beta'}^{\beta\alpha} + E_{\beta'\alpha'}^{\alpha'\beta}) \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha, \beta \neq n+1, n+2} a_{\alpha\beta}(x) E_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'} \\ &+ 2^{-1} \sum_{\substack{\alpha > n+1 \\ \beta = n+1, n+2}} (b_{\alpha}^{+}(x)(E_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'} + E_{\beta'\beta}^{\alpha'\alpha}) + b_{\alpha}^{-}(x)(E_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta} + E_{\beta\beta'}^{\alpha'\alpha})) \\ &+ \sum (c^{+}(x)E_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha'} + c^{-}(x)E_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} + d^{+}(x)E_{\alpha\alpha'}^{\alpha'\alpha} + d^{-}(x)E_{\alpha\alpha}^{\alpha'\alpha'}) \end{aligned}$$

donde, para $\alpha, \beta \neq n + 1, n + 2$

$$a_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} (k^2 x^2 - \xi^2)(x^2 - 1) & \alpha = \beta \\ (k^2 - 1)(\xi^2 k^{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}(x^2 - 1) - \delta_{\alpha\beta'}(x^2 - \xi^2)) & \alpha < \beta \\ (k^2 - 1)x^2(\xi^2 k^{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}(x^2 - 1) - \delta_{\alpha\beta'}(x^2 - \xi^2)) & \alpha > \beta \end{cases}$$

$$b_{\alpha}^{\pm}(x) = \begin{cases} \pm k^{\alpha-2^{-1}}(k^2 - 1)(x^2 - 1)(x \pm \xi) & \alpha < n + 1 \\ k^{\alpha-n-\frac{2}{3}}(k^2 - 1)(x^2 - 1)x(x \pm \xi) & \alpha > n + 1 \end{cases}$$

$$c^{\pm}(x) = \pm 2^{-1}(k^2 - 1)(\xi + 1)x(x \mp 1)(x \pm \xi) + k(x^2 - 1)(x^2 - \xi^2)$$

$$d^{\pm}(x) = \pm 2^{-1}(k^2 - 1)(\xi + 1)x(x \pm 1)(x \pm \xi)$$

$$\xi = k^n, \text{ y}$$

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha + 1 & \alpha < n + 1 \\ n + \frac{2}{3} & \alpha = n + 1, n + 2 \\ \alpha - 1 & \alpha > n + 2 \end{cases}$$

Demostración. [J1].

3.3. Operadores Completos

A través de este concepto se precisan las propiedades de los representantes de las marañas X , necesarias en las representaciones de las categorías Ω y Π que se definen en las siguientes secciones.

Los dos ejemplos de operadores completos que se tratan en la sección se definen mediante las soluciones cuánticas correspondientes a las álgebras clásicas A_n^1 y B_n^1 .

Sean A un anillo conmutativo con uno, $V \in \overset{\circ}{\mathbb{M}}(A)$, y v_i una base de V . Los productos $v_i \otimes v_j$ se denotan por v_{ij} , y los productos $v_i \otimes v_j^*$, $v_i^* \otimes v_j$ se denotan por v_{ij*} , v_{i*j} respectivamente.

Sea $h \in \text{End}V^{2\otimes}$, con

$$hv_{ij} = \sum h_{ij}^{kl} v_{kl}$$

La traza parcial $\text{tr}_2 h$ se define por

$$\text{tr}_2 hv_i = \sum_k \left(\sum_j h_{ij}^{kl} \right) v_k$$

Sus morfismos semiduales

$$h^{*1} \in \mathbb{M}(V^*V, V^*V), \quad h^{*2} \in \mathbb{M}(VV^*, VV^*)$$

se definen por

$$h^{*1} v_{k^*j} = \sum h_{ij}^{kl} v_{i^*l}$$

$$h^{*2} v_{il^*} = \sum h_{ij}^{kl} v_{kj^*}$$

Entonces

$$(h^{*1})^{*2} = h^* = (h^{*2})^{*1}$$

DEFINICIÓN 3.3.1 *Un operador cuántico es un morfismo $R \in \text{Aut}V^{2\otimes}$, con la propiedad*

$$RI_V \circ I_V R \circ RI_V = I_V R \circ RI_V \circ I_V R \quad (3.3)$$

Proposición 3.3.2 *Sean $A_0 = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ y $V^{(m)} \in \mathbb{F}(A)$, $m \geq 1$. Entonces*

$$R_\omega = -q \sum_i E_{ii}^{ii} + \sum_{i \neq j} E_{ij}^{ji} + (q^{-1} - q) \sum_{i < j} E_{ii}^{jj}$$

es un operador cuántico.

Demostración. En 29, si $k = q$ entonces

$$R_\omega = q^{-1} R(0)$$

Es inmediato que $R_\omega^2 = I_{V^2} - (q - q^{-1})R_\omega$, y por tanto

$$R_\omega - R_\omega^{-1} = (q^{-1} - q)I_{V^2} \quad (3.4)$$

$$R_\omega^{-1} = -q^{-1} \sum_i E_{ii}^{ii} + \sum_{i \neq j} E_{ij}^{ji} + (q - q^{-1}) \sum_{i > j} E_{ij}^{ij}$$

Sea $V^{(m)} \in \mathbb{F}(A_1)$, $m \geq 1$ donde

$$A_1 = \begin{cases} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] & m \in 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}[q^{2^{-1}}, q^{-2^{-1}}] & m \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$$

Para cada $i \leq m$, sean

$$i' = m + 1 - i$$

$$\bar{i} = \begin{cases} i - 2^{-1}\nu & 1 \leq i \leq 2^{-1}(m+1) \\ i & i = 2^{-1}(m+1) \\ i + 2^{-1}\nu & 2^{-1}(m+1) \leq i \leq m \end{cases}$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq 2^{-1}(m+1) \\ -\nu & 2^{-1}(m+1) \leq i \leq m \end{cases}$$

$$\nu = \begin{cases} 1 & m \in \mathbb{Z} \\ -1 & m \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$$

Proposición 3.3.3

$$R_\nu = q \sum_{i \neq i'} E_{ii}^{ii} + \sum_{i=i'} E_{ii}^{ii} + \sum_{i \neq j, j'} E_{ij}^{ji} + q^{-1} \sum_{i \neq i'} E_{ii'}^{i'i}$$

$$+ (q - q^{-1}) \sum_{i < j} (E_{ij}^{ij} - \varepsilon_i \varepsilon_j q^{\bar{i}-\bar{j}} E_{ii'}^{j'j})$$

es un operador cuántico.

Demostración. En 29, si $k = q$ entonces

$$R_\nu = q^{-1} R(0)$$

El inverso de R_ν esta dado por

$$R_\nu^{-1} = q^{-1} \sum_{i \neq i'} E_{ii}^{ii} + \sum_{i=i'} E_{ii}^{ii} + \sum_{i \neq j, j'} E_{ij}^{ji} + q \sum_{i \neq i'} E_{ii'}^{i'i}$$

$$+(q^{-1} - q) \sum_{i>j} (E_{ij}^{jj} - \varepsilon_i \varepsilon_j q^{\bar{i}-\bar{j}} E_{ii'}^{j'j})$$

Entonces

$$R_\nu - R_\nu^{-1} = (q - q^{-1}) \sum_{ij} (E_{ij}^{jj} - \varepsilon_i \varepsilon_j q^{\bar{i}-\bar{j}} E_{ii'}^{j'j})$$

El apéndice sobre R -matrices funcionales contiene una demostración directa de que R_ω es un operador cuántico.

DEFINICIÓN 3.3.4 *Un operador cuántico completo es una terna $((R, \mu, (\alpha, \beta))$ formada por un operador cuántico R , un morfismo $\mu \in \text{Aut}(V)$, y dos unidades $\alpha, \beta \in A^*$, con las siguientes propiedades*

$$R \circ \mu^{2\otimes} = \mu^{2\otimes} \circ R$$

$$\text{tr}_2(R^{\pm 1} \circ I \cdot \mu) = \alpha^{\pm 1} \cdot \beta \cdot I$$

Por simplicidad, en vez de operador cuántico completo se dice operador completo, y la terna se identifica con R . Si μ es semisimple se obtiene la siguiente caracterización de R .

Lema 3.3.5 *Sean R un operador cuántico, α y β dos unidades de A , y $\mu \in \text{Aut}V$ con*

$$\mu v_i = \mu_i v_i, \quad \mu_i \in A^*$$

Entonces $(R, \mu, (\alpha, \beta))$ es un operador completo si, y sólo si

$$(\mu_i \mu_j - \mu_k \mu_l) R_{ij}^{kl} = 0 \tag{3.5}$$

$$\sum_j (R^{\pm 1})_{ij}^{kl} \mu_j = \alpha^{\pm 1} \beta \delta_{ik} \tag{3.6}$$

Demostración. Inmediata.

Proposición 3.3.6

$$(R_\omega, \mu, (-q^m, 1)), \quad \mu_i = q^{2i-m-1}$$

es un operador completo.

Demostración. De la definición

$$(R_\omega)_{ij}^{kl} = \begin{cases} -q & i = j = k = l \\ 1 & i = l \neq k = j \\ q^{-1} - q & i = k < j = l \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

3.5 es inmediato pues, si $(R_\omega)_{ij}^{kl} \neq 0$ entonces

$$\mu_i \mu_j - \mu_k \mu_l = 0$$

3.6 es equivalente a

$$\sum (R_\omega^{\pm 1})_{ij}^{kl} q^{2j-m-1} = -q^{\pm m} \delta_{ik}$$

Si $i \neq k$ ambos términos son iguales a cero y, si $i = k$ entonces

$$\sum (R_\omega)_{ij}^{ij} q^{2j-m-1} = (-q)q^{2i-m-1} + (q^{-1} - q) \sum q^{2j-m-1} = -q^m$$

La demostración para R_ω^{-1} es similar, y se basa en la igualdad 3.4.

Proposición 3.3.7

$$(R_\nu, \mu, (-\nu q^{m+\nu}, 1)), \quad \mu_i = -\nu q^{2i-m-1}$$

es un operador completo.

Demostración. De las igualdades

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i'} = -\nu, \quad \bar{i} + \bar{i}' = m + 1$$

se obtiene

$$(R_\nu)_{ij}^{i'j'} = \begin{cases} 0 & i > j \\ q & i = j \neq i' \\ 1 & i = j = i' \\ q - q^{-1} & i = < j \neq i' \\ (q - q^{-1})(1 + \nu q^{2\bar{i}-m-1}) & i < j = i' \end{cases}$$

Luego, $(R_\nu)_{ij}^{kl} \neq 0$ implica que

$$\{i, j\} = \{k, l\} \quad \text{ó,} \quad j = i' \quad \text{y} \quad l = k'$$

ó ambas.

3.5 es inmediata pues, si $(R_\nu)_{ij}^{kl} \neq 0$ entonces

$$\mu_i \mu_j - \mu_k \mu_l = 0$$

3.6 es equivalente a

$$\sum_j (R_\nu)_{ii}^{jj} q^{2\bar{j}-m-1} = q^{m+\nu}$$

y su demostración es por casos

Si $i > i'$, entonces $i > 2^{-1}(m+1)$

$$\sum_j (R_\nu)_{ii}^{jj} q^{2\bar{j}-m-1} = q^{2i-m+\nu} + (q - q^{-1}) \sum_{j>i} q^{2j-m-1+\nu} = q^{m+\nu}$$

Si $i = i'$, entonces $i = 2^{-1}(m+1)$, m es impar y $\nu = -1$. Luego

$$\begin{aligned} \sum (R_\nu)_{ii}^{jj} q^{2\bar{j}-m-1} &= 1 + (q - q^{-1}) \sum_{j>i} q^{2\bar{j}-m-1} \\ &= 1 + (q - q^{-1}) \sum_{j>i} q^{2j-m-2} \\ &= 1 + (q - q^{-1}) \sum_{s<m-i} q^{2s-1} = q^{m+1} \end{aligned}$$

Si $i < i'$, entonces $i < 2^{-1}(m+1)$

$$\begin{aligned} \sum (R_\nu)_{ii}^{jj} q^{2\bar{j}-m-1} &= q \cdot q^{2i-m-1} + (q - q^{-1})(i + \nu q^{2\bar{i}-m-1}) \\ &\quad q^{2\bar{i}-m-1} + \sum_{j>i, j \neq i'} (q - q^{-1}) q^{2\bar{j}-m-1} \\ &= q^{2i-\nu-m} + (q - q^{-1}) \sum_{j>i} q^{2j-m-1} + \nu(q - q^{-1}) \end{aligned}$$

y de esta expresión existen dos casos.

Si m es impar, $\nu = -1$

$$\begin{aligned} \sum a_{ij} q^{2\bar{j}-m-1} &= q^{2i+1-m} + (q - q^{-1})(q^{2(i+1)-m} + \\ &+ q^{2(i+2)-m} + \dots + q^{-1} + q + q^3 + \dots + q^{m-2}) = q^{m+1} \end{aligned}$$

Si m es par, $\nu = 1$

$$\begin{aligned} \sum (R_\nu)_{ii}^{jj} q^{2\bar{j}-m-1} &= q^{2i-1-m} + (q - q^{-1})(q^{2i-m} + \\ &+ q^{2i+2-m} + \dots + q^{-2} + q^0 + q^2 + \dots + q^m) = q^{m+1} \end{aligned}$$

Para demostrar que R_ν^{-1} también tiene esta propiedad, sea $\varphi \in \text{Aut} A$,

$$\varphi q^{2^{-1}} = q^{-2^{-1}}$$

Entonces

$$\varphi(R_\nu)_{i'j'}^{k'l'} = (R_\nu^{-1})_{ij}^{kl}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \sum (R_\nu^{-1})_{ii}^{jj} q^{2\bar{j}-m-1} &= \sum \varphi(R_\nu)_{i'i'}^{j'j'} q^{2\bar{j}-m-1} \\ &= \sum \varphi((R_\nu)_{i'i'}^{j'j'} q^{m+1-2}) \\ &= \varphi \sum (R_\nu)_{i'i'}^{j'j'} q^{2\bar{j}-m-1} \\ &= \varphi q^{m+\nu} = \nu q^{-m-\nu} \end{aligned}$$

El siguiente par de propiedades de los operadores R_ω y R_ν son de especial interés debido a que representan las relaciones $\Omega_{6,7}$ y $\Pi_{4,5}$.

Lema 3.3.8

$$(pR_\omega^{-1})^* \circ I_{V^*} \cdot \mu \circ (R_\omega p)^{*1} = I_{V^*} \nu \mu.$$

Demostración. Por simplicidad R_ω se denota por R . Por definición

$$(Rp)^{*1} v_{i*j} = \sum R_{jk}^{il} v_{k*l}$$

y considerando 3.4

$$(pR^{-1})^* v_{i*j} = \sum R_{kj}^{li} v_{k*l} + (q - q^{-1}) \sum p_{kj}^{il} v_{k*l}$$

Ahora se procede por casos.

Si $i \neq j$, entonces $p_{kj}^{il} = 0$ y

$$R_{jk}^{il} = \begin{cases} 1 & (i, j) = (k, l) \\ 0 & (i, j) \neq (k, l) \end{cases}$$

$$R_{rj}^{si} = \begin{cases} 1 & (i, j) = (r, s) \\ 0 & (i, j) \neq (r, s) \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} (pR^{-1})^{*1} \circ I \cdot \mu \circ (Rp)^{*1} v_{i*j} &= \sum_{kl} R_{jk}^{il} \mu_l \sum_{rs} R_{rl}^{sk} v_{r*s} \\ &= \sum_{rs} \sum_{kl} R_{jk}^{il} R_{rl}^{sk} \mu_l v_{r*s} \\ &= \mu_j v_{i*j} \\ &= (I \cdot \mu) v_{i*j} \end{aligned}$$

Si $i = j$, entonces $p_{ki}^{jk} = 1$ y

$$R_{ik}^{il} \neq 0, \quad i \leq l = k; \quad R_{ki}^{li} \neq 0, \quad k = l \leq i$$

Por tanto

$$\begin{aligned} (pR^{-1})^{*1} \circ I \cdot \mu \circ (Rp)^{*1} v_{i*i} &= \sum_{j \geq i} R_{ij}^{ij} \mu_j \\ &= \left(\sum_{k \leq j} R_{kj}^{kj} v_{k**k} + (q - q^{-1}) \sum_k v_{k**k} \right) \\ &= \sum_{j \geq i} R_{ij}^{ij} \mu_j (-q^{-1} v_{i*ij} + (q - q^{-1}) \sum_{k > j} v_{k**k}) \\ &= \mu_i v_{i*i} + (q - q^{-1}) \left[\sum_{k > i} (q^{2k-m-2} - q^{2i-m}) v_{k**k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k > i} (q^{2k-m-2} - q^{2k-m}) \sum_{j > k} v_{j**j} \right] \\ &= \mu_i v_{i*i} = (I_{V*V} \cdot \mu) v_{i*i}, \end{aligned}$$

pues como se demuestra a continuación, la suma entre los paréntesis cuadrados es igual a cero.

$$\begin{aligned}
& [(q^{2i-m} - q^{2i-m})v_{i+1+i+1} \\
& (q^{2i-m+2} - q^{2i-m})v_{i+2+i+2} + (q^{2i-m} - q^{2i-m+2})v_{i+2+i+2} \\
& (q^{2i-m+4} - q^{2i-m})v_{i+3+i+3} + (q^{2i-m} - q^{2i-m+2})v_{i+3+i+3} + (q^{2i-m+2} - q^{2i-m+4})v_{i+3+i+3} \\
& \vdots \\
& (q^{m-2} - q^{2i-m})v_{m+m} + (q^{2i-m} - q^{2i-m+2})v_{m+m} + (q^{2i-m-2} - q^{2i-m+4})v_{m+m} + \dots + \\
& \qquad \qquad \qquad + (q^{m-4} - q^{m-2})v_{m+m}] = 0
\end{aligned}$$

Es obvio que los términos de la primera columna corresponden al primer sumando.

Lema 3.3.9 Sea $\alpha \in \mathbb{M}(V^*, V)$, con

$$\alpha v_{i*} = \varepsilon_i q^{2^{-1}-i} v_i$$

Entonces

1. $\text{tr}_2(R_\nu \circ I_V \cdot (\alpha^* \alpha^{-1})) = (\text{tr}_2(R_\nu^{-1} \circ I_V \cdot (\alpha^* \alpha^{-1})))^{-1}$
2. $I_V \cdot \alpha \circ (pR_\nu^{\mp 1})^{*2} \circ \alpha^{-1} \cdot I_V \circ p = R_\nu^{\pm 1}$.

Demostración. Por simplicidad el operador R_ν se denota por R .

1. Es inmediato que

$$\begin{aligned}
\alpha^* v_{i*} &= \varepsilon_i q^{2^{-1}-i} v_i \\
\alpha^{-1} v_i &= \varepsilon_i q^{i-2^{-1}} v_{i*} \\
\alpha^* \alpha^{-1} v_i &= -\nu q^{2i-m-1} v_i
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
R \circ I_V \cdot (\alpha^* \alpha^{-1}) v_{ij} &= R v_i (-\nu q^{2j-m-1} v_j) \\
&= \sum_{kl} -\nu q^{2j-m-1} R_{ij}^{kl} v_{kl}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\text{tr}_2(R \circ I_V (\alpha^* \alpha^{-1})) v_i = \sum_k \left(\sum_j -\nu q^{2j-m-1} R_{ij}^{kl} \right) v_k$$

Entonces, de la demostración de 3.3.7,

$$\text{tr}_2(R \circ I_V \cdot (\alpha^* \alpha^{-1}))v_i = -\nu q^{m+\nu} v_i$$

y análogamente

$$\text{tr}_2(R^{-1} \circ I_V \cdot (\alpha^* \alpha^{-1}))v_i = -\nu q^{-m-\nu} v_i$$

2. Sea

$$\begin{aligned} Q &= I_V \cdot \alpha \circ (pR)^{*2} \circ I_V \alpha^{-1} \circ pv_{ij} \\ &= \sum R_{j'l}^{i'k} \varepsilon_{i'} \varepsilon_l q^{i-i'} v_{kl'} \end{aligned}$$

A continuación se demuestra por casos la igualdad $Q = R^{-1}v_{ij}$.

Si $i = j = i'$, entonces

$$R_{ii}^{i'k} = \begin{cases} 1 & k = i = i' \\ q - q^{-1} & k = l > i \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

$$(R^{-1})_{ii}^{kl} = \begin{cases} 1 & k = l = i \\ (q - q^{-1}) \varepsilon_i \varepsilon_{k'} q^{i-k'} & k' = l < i \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon_{i'} \varepsilon_i q^{i-i'} v_{ii} + (q - q^{-1}) \sum_{k>i} \varepsilon_{i'} \varepsilon_k q^{i-k'} v_{kk'} \\ &= v_{ii} + (q - q^{-1}) \sum_{k>i} \varepsilon_{i'} \varepsilon_k q^{i-k'} v_{kk'} \\ &= R^{-1}v_{ij} \end{aligned}$$

Si $i = j \neq i'$, entonces

$$R_{ii}^{i'k} = \begin{cases} q^{-1} & (k, l) = (i, i') \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

$$(R^{-1})_{ii}^{kl} = \begin{cases} q^{-1} & (k, l) = (i, i) \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} Q &= q^{-1} \varepsilon_{i'} \varepsilon_{i'} q^{\bar{i}-\bar{i}} v_{ii} \\ &= q^{-1} v_{ii} \\ &= R^{-1} v_{ij} \end{aligned}$$

Si $i < j = i'$, entonces

$$R_{i'l}^{i'k} = \begin{cases} q & k = l = i' \\ q - q^{-1} & k = l > i' \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

$$(R^{-1})_{ii'}^{kl} = \begin{cases} q & (k, l) = (i', i) \\ q - q^{-1} & i' < k = l' \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} Q &= q \varepsilon_{i'} \varepsilon_{i'} q^{\bar{i}-\bar{i}} v_{i'i} + (q - q^{-1}) \sum_{k > i'} \varepsilon_{i'} \varepsilon_k q^{\bar{i}-\bar{k}'} v_{kk'} \\ &= q v_{i'i} + (q - q^{-1}) \sum_{k > i'} \varepsilon_i \varepsilon_{k'} q^{\bar{i}-\bar{k}'} v_{kk'} \\ &= R^{-1} v_{ij} \end{aligned}$$

Si $i < j \neq i'$, entonces

$$R_{jl}^{ik} = \begin{cases} 1 & (k, l) = (j, i') \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

$$(R^{-1})_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & (k, l) = (j, i) \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon_{i'} \varepsilon_{i'} q^{\bar{i}-\bar{i}} v_{ij} \\ &= v_{ij} \\ &= R^{-1} v_{ij} \end{aligned}$$

Si $i' = j < i$, entonces

$$R_{i'l}^{i'k} = \begin{cases} q & k = l = i' \\ (q - q^{-1})(1 + \nu q^{2\bar{i}-m-1}) & k = l = i \\ q - q^{-1} & k = l > i' \\ 0 & k = l \neq i' \end{cases}$$

$$(R^{-1})_{ii'}^{kl} = \begin{cases} q & (k, l) = (i', i) \\ (q^{-1} - q) + (q - q^{-1})\varepsilon_i \varepsilon_{i'} q^{\bar{i} - \bar{i}'} & (k, l) = (i, i') \\ (q - q^{-1})\varepsilon_i \varepsilon_{k'} q^{\bar{i} - \bar{k}'} & k > i', l = k' \\ 0 & k \neq i, l = k' \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} Q &= q\varepsilon_{i'}\varepsilon_{i'}q^{\bar{i} - \bar{i}}v_{ii'} + (q - q^{-1})(1 + \nu q^{2\bar{i}' - m - 1})\varepsilon_{i'}\varepsilon_i q^{\bar{i} - \bar{i}'}v_{ii'} + \\ &\quad (q - q^{-1})\sum_{\substack{k > i' \\ k \neq i}} \varepsilon_{i'}\varepsilon_k q^{\bar{i} - \bar{k}'}v_{kk'} \\ &= qv_{ii} + (q - q^{-1})(1 - \nu q^{2\bar{i}' - m - 1})v_{ii'} \\ &\quad + (q - q^{-1})\sum_{\substack{k > i' \\ k \neq i}} \varepsilon_{i'}\varepsilon_k q^{\bar{i} - \bar{k}'}v_{kk'} \\ &= R^{-1}v_{ij} \end{aligned}$$

Si $i \neq j < 1$, entonces

$$R_{ji}^{i'k} = \begin{cases} 1 & (k, l) = (j, i') \\ (q^{-1} - q)\varepsilon_j \varepsilon_i q^{\bar{j} - \bar{i}} & (k, l) = (i, j') \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

$$(R^{-1})_{ij}^{kl} = \begin{cases} q^{-1} - q & (k, l) = (i, j) \\ 1 & (k, l) = (j, i) \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon_{i'}\varepsilon_{i'}q^{\bar{i} - \bar{i}}v_{ji} + (q^{-1} - q)\varepsilon_{i'}\varepsilon_{j'}q^{\bar{i} - \bar{j}'}v_{ij} \\ &= v_{ji} + (q^{-1} - q)v_{ij} \\ &= R^{-1}v_{ij} \end{aligned}$$

La demostración de

$$I_V \cdot \alpha \circ (pR^{-1})^{*2} \circ I_V \cdot \alpha^{-1} \circ p = R$$

es similar.

3.4. Representación de Ω

Empleando el operador cuántico R_ω como representante de la maraña X , para cada módulo $V \in \mathring{\mathbb{F}}(A_0)$ se define una representación de Ω sobre la categoría $\Sigma_{(V V^*)}$. Como puede advertirse, la elección de los representantes de los otros generadores es meramente intuitiva.

Sin pérdida de generalidad, en lo que resta del artículo, se supone que los generadores de Ω y Π están definidos mediante la sucesión 1, 2. Además se supone que cada sucesión orientada ó narmada con n términos es igual a la sucesión natural $1, 2, \dots, n$.

Sean A un anillo conmutativo con uno, y v_i, ω_j algunas bases de los módulos $V, W \in \mathring{\mathbb{F}}(A)$. Para cada $\alpha \in \mathbb{M}(W, V)$ se definen los homomorfismos

$$\check{\alpha} \in \mathbb{M}(WV^*, A), \quad \check{\alpha}\omega \cdot v = v(\alpha\omega)$$

$$\hat{\alpha} \in \mathbb{M}(A, W^*V), \quad \hat{\alpha}1 = \sum \omega_{i*} \cdot \alpha\omega_i$$

Sean $R \in \text{Aut}V^{2\otimes}$, y

$$b \in \mathbb{M}(A, W \cdot V), \quad b1 = \sum b_{ij}\omega_i v_j$$

$$\bar{b} \in \mathbb{M}(A, V \cdot W), \quad \bar{b}1 = \sum \bar{b}_{ij}v_j \omega_i$$

$$d \in \mathbb{M}(V \cdot W, A), \quad dv_i \omega_j = d_{ij}$$

$$\bar{d} \in \mathbb{M}(W \cdot V, A), \quad \bar{d}\omega_i v_j = \bar{d}_{ij}$$

Sea $F \in \mathcal{C}(\Omega \cup \Gamma_\Omega, \Sigma_{(V,W)})$ la aplicación definida por

$$Fa_\sigma^{(n)} = \otimes Fa_i$$

$$Fa_i = V \quad \sigma a_i = 1$$

$$Fa_i = W \quad \sigma a_i = -1$$

$$F\cup^+, \cup^-, \cap^+, \cap^-, X^{\pm 1} = b, \bar{b}, d, \bar{d}, R^{\pm 1}$$

Lema 3.4.1 *Existe una extensión $F \in \Phi(\Omega, \Sigma_{(V,W)})$ si, y sólo si*

1. *Existen dos isomorfismos $\alpha \in \mathbb{M}(W^*, V)$, $\beta \in \mathbb{M}(V^*, W)$ con las propiedades*

$$b = \hat{\alpha}, \bar{b} = \hat{\beta}, d = \check{\alpha}^{-1}, \bar{d} = \check{\beta}^{-1}$$

2. *$(R, \mu = \beta^* \alpha^{-1}, (1, 1))$ es un operador completo.*

3. *$(pR^{-1})^{*1} \circ I_V \cdot \mu \circ (Rp)^{*1} = I_{V^*} \cdot \mu$*

Demostración. Por 1.3.5, es suficiente demostrar que las relaciones FR_Ω son equivalentes a las condiciones 1, 2 y 3.

$$F\Omega_1 : dI_V \circ I_V b = I_V$$

es equivalente a $d_{ij}b_{jk} = 1$, y así

$$\alpha\omega_{i*} = \sum b_{ij}v_j$$

es un isomorfismo. Por definición

$$b = \hat{\alpha} \quad d = \check{\alpha}^{-1}$$

$$F\Omega_1 : \bar{d}I_W \circ I_W\bar{b} = I_W$$

es equivalente a $\bar{d}_{ij}\bar{b}_{jk} = 1$, y así

$$\beta v_{i*} = \sum \bar{b}_{ij}\omega_j$$

es un isomorfismo. Por definición

$$\bar{b} = \hat{\beta}, \quad \bar{d} = \check{\beta}^{-1}$$

Con $F\Omega_2$ se obtienen los mismos resultados.

$$F\Omega_3 : R^{-1}R = I_{V^2}, \quad RR^{-1} = I_{V^2}$$

$$F\Omega_4 : RI_V \circ I_V R \circ RI_V = I_V R \circ RI_V \circ I_V R$$

$$F\Omega_5 : I_V d \circ R^{\pm 1} I_V \circ I_V \bar{b} = I_V$$

es equivalente a

$$\text{tr}_2(R^{\pm 1} \circ I_V \cdot \mu) = I_V$$

y su demostración para R se basa en las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} I_V d \circ RI_V \circ I_V \bar{b} v_i &= I_V d \circ RI_V v_i \sum_{jk} \bar{b}_{jk} v_j \omega_k \\ &= I_V d \sum_{jk} \bar{b}_{jk} \left(\sum R_{ij}^{rs} v_{rs} \right) \omega_k \\ &= \sum_{jk} \bar{b}_{jk} \left(\sum_{rs} R_{ij}^{rs} d_{sk} v_r \right) \\ &= \sum_{rs} \left(\sum_{jk} \bar{b}_{jk} d_{sk} R_{ij}^{rs} \right) v_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R \circ I_V \cdot \mu v_{ij} &= R v_i \sum_k \mu_{kj} v_k \\ &= \sum_k \mu_{kj} \sum_{rs} R_{ik}^{rs} v_{rs} \\ &= \sum_{rs} \left(\sum_k \mu_{kj} R_{ik}^{rs} \right) v_{rs} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}_2(R \circ I_V \cdot \mu)v_i &= \sum_r \left(\sum_j \sum_k \mu_{kj} R_{ik}^{rj} \right) v_r \\
&= \sum_r \left(\sum_j \sum_k \sum_s \bar{b}_{ks} d_{js} R_{ik}^{rj} \right) v_r \\
&= \sum_{rj} \left(\sum_{ks} \bar{b}_{ks} d_{js} R_{ik}^{rj} \right) v_r
\end{aligned}$$

$$F\Omega_6 : I_{WV}d \circ I_W R I_W \circ b I_{VW} \circ \bar{d} I_{VW} \circ I_W R^{-1} I_W \circ I_{WV}p = I_{WV}$$

es equivalente a β .

$$\begin{aligned}
&I_{WV}d \circ I_W R I_W \circ b I_{VW} v_i \omega_j \\
&= I_{WV}d \circ I_W R I_W \sum_{kl} b_{kl} \omega_k v_l v_i \omega_j \\
&= I_{WV}d \sum_{kl} b_{kl} \omega_k \left(\sum_{rs} R_{li}^{rs} v_{rs} \right) \omega_j \\
&= \sum_{kl} b_{kl} \sum_{rs} R_{li}^{rs} \omega_k v_r d_{sj} \\
&= \sum_{rs} \sum_{kl} R_{li}^{rs} b_{kl} d_{sj} \omega_k v_r \\
&\alpha^* I_V \circ p \circ (Rp)^{*2} \circ (I_V \cdot \alpha^{-1}) v_i \omega_j \\
&= \alpha^* I_V \circ p \circ (Rp)^{*2} v_i \sum_s d_{sj} v_{s*} \\
&= \alpha^* I_V \circ p \sum_s d_{sj} \sum_{rl} R_{li}^{rs} v_{rl*} \\
&= \alpha^* I_V \sum_{rl} \sum_s d_{sj} R_{li}^{rs} v_{l+r} \\
&= \sum_{rl} \sum_s d_{sj} R_{li}^{rs} \sum_k b_{kl} \omega_k v_r \\
&= \sum_{rl} \sum_{sk} R_{li}^{rs} b_{kl} d_{sj} \omega_k v_r
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
&\bar{d} I_{VW} \circ I_W R^{-1} 1_W \circ I_{WV}p \\
&= \alpha^* I_V \circ p \circ (Rp)^{*2} \circ p \circ \beta^{-1} I_V
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} & \alpha^* I_V \circ p \circ (Rp)^{*2} \circ (I_W \alpha^{-1})^* \circ I_V \beta \\ & \circ (pR^{-1})^{*2} \circ \beta^{-1} I_V = I_{WV} \end{aligned}$$

Pero

$$(I_W \alpha^{-1})^* \circ I_V \beta = I_V \cdot \mu^*$$

y

$$p \circ (\alpha^*)^{-1} \cdot I_V \circ \beta \cdot I_V \circ p = I_V \cdot \mu^*$$

Luego

$$(Rp)^{*2} (I_V \cdot \mu)^* (pR^{-1})^{*2} = (I_V \cdot \mu)^*$$

y

$$(pR^{-1})^{*1} \circ I_V \mu \circ (Rp)^{*1} = I_V \cdot \mu$$

$F\Omega_7$ también es equivalente a \mathcal{B} .

$$\begin{aligned} F\Omega_8 : I_{W^2} d \circ I_{W^2 V} d I_W \circ I_{W^2} R I_{W^2} \circ I_W b I_{V W^2} \circ b I_{W^2} = \bar{d} I_{W^2} \circ I_W \bar{d} I_{V W^2} \\ \circ I_{W^2} R I_{W^2} \circ I_{W^2 V} \bar{b} \circ I_{W^2} \bar{b} \end{aligned}$$

es equivalente a

$$R \circ \mu^2 = \mu^2 \circ R$$

Aplicando el término de la izquierda, de $F\Omega_8$, a ω_{ij} resulta

$$\sum_{rs} \sum_{pq} \sum_{kl} b_{pq} b_{kl} R_{ql}^{rs} d_{si} d_{rj} \omega_{kp}$$

y, por otra parte

$$\begin{aligned} & p \circ \alpha^{*2} \circ R^* \circ (\alpha^{-1})^{*2} \circ p \omega_{ij} \\ & = p \circ \alpha^{*2} \circ R^* \sum_r d_{rj} v_{r*} \sum_s d_{si} v_{s*} \\ & = p \circ \alpha^{*2} \sum_{rs} d_{rj} d_{si} \sum_{ql} R_{ql}^{rs} v_{ql}^* \\ & = p \sum_{rs} \sum_{ql} d_{rj} d_{si} R_{ql}^{rs} \sum_p b_{pq} \omega_p \sum_k b_{kl} \omega_k \\ & = \sum_{rs} \sum_{ql} \sum_{pk} b_{pq} b_{kl} R_{ql}^{rs} d_{si} d_{rj} \omega_{kp} \end{aligned}$$

Por tanto, el morfismo de la izquierda es igual a

$$p \circ \alpha^{*2} \circ R^* \circ (\alpha^{-1})^{*2} \circ p$$

y, análogamente, el de la derecha es igual a

$$p \circ \beta^2 \circ R^* \circ (\beta^{-1})^{*2} \circ p$$

Así

$$p \circ \alpha^{*2} \circ R^* \circ (\alpha^{-1})^{*2} \circ p = p \circ \beta^2 \circ R^* \circ (\beta^{-1})^{*2} \circ p$$

$$R^* \circ (\alpha^{-1})^{*2} \circ ((\beta^{-1})^{*2})^{-1} = (\alpha^{*2})^{-1} \circ \beta^2 \circ R^*$$

$$\mu^2 \circ R = R \circ \mu^2$$

$F\Omega_9$ también es equivalente a esta última igualdad.

Por tanto $F\Omega_{4,5,8,9}$ son equivalentes a 2, $F\Omega_{1,2}$ son equivalentes a 1, y $F\Omega_{6,7}$ son equivalentes a 3.

Sean $V^{(m)} \in \overset{\circ}{\mathbb{F}}(A_0)$ y $b, \bar{b}, d, \bar{d}, F_m$ definidas como sigue.

$$b1 = \sum v_{i^*i}, \quad \bar{b}1 = \sum q^{2i-m-1} v_{ii^*}$$

$$dv_{ij^*} = \delta_{ij}, \quad \bar{d}_{ij^*} = q^{m+1-2i} \delta_{ij}$$

$$Fa_\sigma = \otimes Fa_i$$

$$Fa_i = V \quad \sigma a_i = 1$$

$$Fa_i = V^* \quad \sigma a_i = -1$$

$$F\cup^+, \cup^-, \cap^+, \cap^-, X^{\pm 1} = b, \bar{b}, d, \bar{d}, R_\omega^{\pm 1}$$

Teorema 3.4.2 Existe una extensión $F_m \in \Phi(\Omega, \Sigma(V, V^*))$, de F .

Demostración. Sean $\alpha = I_V, \beta = \mu^*$ con

$$\mu v_i = q^{2i-m-1}$$

Entonces R_ω y (α, β) satisfacen 1-3 del lema 3.4.1, por 3.3.6 y 3.3.8.

3.5. Representación de Π

Con un procedimiento similar al que se emplea en la sección anterior se define una sucesión de representaciones $G_{\nu, n}$ de la categoría Π .

A diferencia de las representaciones de Ω , estas se definen sobre diferentes categorías dependiendo de la paridad del subíndice n .

Sean A un anillo conmutativo con uno, $V \in \overset{\circ}{\mathbf{F}}(A)$ y v_i una base de V . Sean $R \in \text{Aut}(V^{2\otimes})$ y

$$b \in \mathbf{M}(A, V^{2\otimes}), \quad b1 = \sum b_{ij}v_{ij}$$

$$d \in \mathbf{M}(V^{2\otimes}, A), \quad dv_{ij} = d_{ij}$$

Sea $G \in \mathcal{C}(\Pi \cup \Gamma_{\Pi}, \Sigma_V)$ la aplicación definida por

$$Ga^{(n)} = V^{n\otimes}$$

$$GU, \cap, X^{\pm 1} = b, d, R^{\pm 1}$$

Lema 3.5.1 *Existe una extensión $G \in \Phi(\Pi, \Sigma_V)$ si, y sólo si*

1. *Existe un isomorfismo $\alpha \in \mathbb{M}(V^*, V)$ con*

$$b = \hat{\alpha}, \quad d = \check{\alpha}^{-1}$$

2. $R^{\pm 1} = I_V \cdot \alpha \circ (pR^{\mp 1})^{*2} \circ I_V \cdot \alpha^{-1} \circ p$

3. R es un operador cuántico.

4. $\text{tr}_2(R \circ (I_V \cdot (\alpha^* \alpha^{-1}))) = (\text{tr}_2(R^{-1} \circ (I_V \cdot \alpha^* \alpha^{-1})))^{-1}$

Demostración. Por el lema 1.3.5, es suficiente demostrar que las relaciones GR_{Π} son equivalentes a las condiciones 1-4.

$G\Pi_1, \Pi_2$:

$$d \cdot I_V \circ I_V \cdot b = I_V$$

$$I_V \cdot d \circ b \cdot I_V = I_V$$

son equivalentes a la existencia del isomorfismo α , definido por

$$\alpha v_{i*} = \sum b_{ij} v_j$$

con

$$\alpha^{-1} v_i = \sum d_{ij} v_{j*}$$

y

$$b = \hat{\alpha}, \quad d = \check{\alpha}^{-1}$$

$$G\Pi_3: \quad R^{-1}R = I_{V^2}, \quad RR^{-1} = I_{V^2}$$

$$G\Pi_4: \quad RI_V \circ I_V R \circ RI_V = I_V R \circ RI_V \circ I_V R$$

$$G\Pi_5: \quad d \cdot I_{V^2} \circ I_V R^{\pm 1} I_V \circ I_{V^2} b = R^{\mp 1}$$

es equivalente a 2, pues

$$d \cdot I_{V^2} \circ I_V RI_V \circ I_{V^2} b v_{ij}$$

$$\begin{aligned}
&= d \cdot I_{V^2} \circ I_V R I_V v_{ij} \sum_{kl} b_{kl} v_{kl} \\
&= d \cdot I_{V^2} \sum_{kl} v_i b_{kl} \sum_{pq} R_{jk}^{pq} v_{pq} \\
&= \sum_{pq} \sum_{kl} b_{kl} R_{jk}^{pq} d_{ip} v_{pl}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&I_V \cdot \alpha \circ (pR)^{*2} \circ I_V \alpha^{-1} \circ p v_{ij} \\
&= I_V \cdot \alpha \circ (pR)^{*2} v_j \sum_p d_{ip} v_{p*} \\
&= I_V \cdot \alpha \sum_p d_{ip} \sum_{qk} R_{jk}^{pq} v_q v_{k*} \\
&= \sum_{qk} \sum_p R_{jk}^{pq} d_{ip} v_q \sum_l b_{kl} v_l \\
&= \sum_{pq} \sum_{kl} b_{kl} R_{jk}^{pq} d_{ip} v_{ql}
\end{aligned}$$

La demostración del caso R^{-1} es similar.

$$G\Pi_6 : I_V d \circ R^{-1} I_V \circ I_V b \circ I_V d \circ R I_V \circ I_V b = I_V$$

es equivalente a 4. De hecho

$$I_V d \circ R^{-1} I_V \circ I_V b = \text{tr}_2 R^{-1} \circ (I_V \cdot \alpha^* \alpha^{-1})$$

e

$$I_V d \circ R I_V \circ I_V b = \text{tr}_2 R \circ (I_V \cdot \alpha^* \alpha^{-1})$$

En seguida se demuestra la primera igualdad.

$$I_V d \circ R^{-1} I_V \circ I_V b v_i$$

$$\begin{aligned}
&= I_V d \circ R^{-1} 1_V v_i \sum_{jk} b_{jk} v_{jk} \\
&= I_V d \sum_{jk} b_{jk} \left(\sum_{pq} (R^{-1})_{ij}^{pq} v_{pq} \right) v_k \\
&= I_V d \sum_{pq} \sum_{jk} b_{jk} (R^{-1})_{ij}^{pq} v_{pq} \\
&= \sum_{pq} \sum_{jk} b_{jk} d_{qk} (R^{-1})_{ij}^{pq} v_p
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
R^{-1} \circ I_V \cdot \alpha^* \alpha^{-1} v_{ij} &= R^{-1} v_i \left(\alpha^* \sum_k d_{jk} v_{k*} \right) \\
&= R^{-1} v_i \left(\sum_k d_{jk} \sum_l b_{lk} v_l \right) \\
&= \sum_{lk} d_{jk} b_{lk} \sum_{pq} (R^{-1})_{il}^{pq} v_{pq} \\
&= \sum_{pq} \sum_{lk} d_{jk} b_{lk} (R^{-1})_{il}^{pq} v_{pq}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
&\text{tr}_2(R^{-1} \circ I_V \cdot (\alpha^* \alpha^{-1})) v_{ij} \\
&= \sum_p \left(\sum_j \left(\sum_{lk} d_{jk} b_{lk} (R^{-1})_{il}^{pj} \right) \right) v_p \\
&= \sum_{pj} \sum_{lk} d_{jk} b_{lk} (R^{-1})_{il}^{pj} v_p
\end{aligned}$$

La prueba de la segunda igualdad es similar.

Por tanto $G\Pi_{1,2}$ son equivalentes a 1., $G\Pi_5$ es equivalente a 2., $G\Pi_4$ es equivalente a 3., y $G\Pi_6$ es equivalente a 4.

Sean $V^{(m)} \in \mathring{\mathbb{F}}(A_1)$ y

$$b \in \mathbb{M}(A, V^{2\otimes}), \quad b1 = \sum \varepsilon_i q^{2^{-1} - \bar{i}} v_{ii'}$$

$$d \in \mathbb{M}(V^{2\otimes}, A), \quad dv_{ij} = q^{\bar{i} - 2^{-1}} \varepsilon_j$$

Sea $G = G_{\nu m}$ definida por

$$Ga^{(n)} = V^{n\otimes}, \forall a^{(n)} \in \Pi$$

$$G\cup, \cap, X^{\pm 1} = b, d, R_{\nu}^{\pm 1}$$

Teorema 3.5.2 *Existe una extensión $G \in \Phi(\Pi, \Sigma_V)$ de la aplicación G .*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{M}(V^*, V)$ definida por

$$\alpha v_{i*} = \varepsilon_i q^{2^{-1} - \bar{i}} v_i$$

Entonces, por 3.3.7 y 3.3.9, la pareja R_{ν}, α satisface 1-4 del lema 3.5.1.

Propiedades de G

Las siguientes propiedades constituyen algunos métodos para calcular los representantes de ciertas marañas.

Proposición 3.5.3 $G\phi = -\nu q^{m+\nu}$

Demostración. Por 3.5.1,

$$G\phi = I_V d \circ R I_V \circ I_V b = \text{tr}_2 R \circ (I_V \cdot \alpha^* \alpha^{-1})$$

y, por 3.3.9,1

$$\text{tr}_2 R \circ (I_V \cdot \alpha^* \alpha^{-1}) = -\nu q^{m+\nu}$$

De este resultado se concluye que, si $M \in \Pi(m, n)$ y

$$M' = M \circ I_{m-1} \phi$$

entonces

$$GM' = -\nu q^{m+\nu} GM$$

DEFINICIÓN 3.5.4 Una maraña Kauffman es un cuarteto (L, M, N, P) de marañas normadas con la siguiente propiedad.

$$\begin{aligned} L &= A \circ I_a X I_b \circ B \\ M &= A \circ I_a X^{-1} I_b \circ B \\ N &= A \circ I_a I^2 I_b \circ B \\ P &= A \circ I_a (\cup \cdot \cap) I_b \circ B \end{aligned}$$

para algunas sucesiones $a^n, b^m \in \Pi$, y $A, B \in M_\Pi$.

Proposición 3.5.5 Si (L, M, N, P) es una maraña Kauffman, entonces

$$GL - GM = (q - q^{-1})(GN - GP)$$

Demostración. Por (2) de la tercera sección

$$\begin{aligned} GX - GX^{-1} &= R_v - R_v^{-1} \\ &= (q - q^{-1})(I_{V^2} - bd) \\ &= (q - q^{-1})(GI^2 - G \cup \cap) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} GL - GM &= GA \circ I_{V^n} (GX - GX^{-1}) I_{V^m} \circ GB \\ &= (q - q^{-1}) GA \circ I_{V^n} (GI^2 - G(\cup \cap)) I_{V^m} \circ GB \\ &= (q - q^{-1})(GN - GP) \end{aligned}$$

Para cada maraña normada M se define la maraña \tilde{M} como la reflexión de M sobre el plano $z = 2^{-1}$ con la norma inducida por la reflexión.

Sean n_0, n_1 los números de componentes M^i con la propiedad

$$\partial M^i \neq \emptyset, \quad \partial M^i \subset Z = 0, 1$$

Proposición 3.5.6

$$|G\tilde{M}| = (-\nu q^m)^{n_1 - n_0} |GM^*|$$

Demostración. A continuación se demuestra la propiedad para X y \cup , y su validez general se concluye por inducción.

Si $M = X$, entonces $\tilde{X} = X^{-1}$, $n_1 - n_0 = 0$ y

$$|G\tilde{X}| = |R_\nu^{-1}| = |R_\nu^*| = |GM^*|$$

Si $M = \cup$, entonces $\tilde{\cup} = \cap$, $n_1 - n_0 = 1$ y

$$G\tilde{\cup}v_{ij} = \begin{cases} q^{\bar{i}-2^{-1}}\varepsilon_j & j = i' \\ 0 & j \neq i' \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} (-\nu q^m)^{n_1-n_0} G\cup(1) &= -\nu q^m \sum \varepsilon_i q^{2^{-1}-\bar{i}'} v_{i i'} \\ &= \sum \varepsilon_i q^{\bar{i}-2^{-1}} v_{i i'} \end{aligned}$$

Capítulo 4

Invariantes Cuánticos

Para definir los invariantes cuánticos Jones-Conway J_C , y Kauffman K se definen las categorías Hecke $H_\Lambda\Omega$, y Kauffman $K_\Lambda\Pi$ y se demuestra que el nudo trivial θ es un generador libre de torsión de los módulos $H_\Lambda\Omega(\phi)$, $K_\Lambda\Pi(\phi)$.

Entonces, para cada nudo N los invariantes Jones-Conway y Kauffman se definen como los polinomios Laurent de dos variables con la propiedad $N = J_C(N)\theta$, $K(N)\theta$ respectivamente. Ambos son invariantes isotópicos y empleando alguna forma normal de N , sus cálculos son inmediatos.

4.1. Categorías Hecke

Estas categorías se definen mediante las marañas Conway, y sus morfismos son clases de combinaciones lineales de marañas orientadas.

Sea M una maraña orientada. Para cada forma normal de M se define su forma normal extendida, agregando el morfismo identidad respectivo entre cada pareja consecutiva de renglones. En lo sucesivo se supone que toda maraña está definida por una forma normal extendida.

Para cada componente M^i se define una cubierta ordenada M^{ij} como sigue. Cada elemento de la cubierta, llamado segmento, es una componente de la intersección de M con las variedades

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid kn^{-1} \leq x_3 \leq (k+1)n^{-1}, k \leq n\}$$

donde n es el número de renglones de M .

Si $\varphi_i \in C(I, \Xi)$ es una parametrización de M^i , M^{i1} es el segmento que contiene el punto $\varphi_i(0)$, y M^{ij} , M^{ij+1} son segmentos con un único punto común.

Dos segmentos forman una cruz si, su unión constituye alguna de las marañas $X^{\pm 1}$. Además se dice que el segmento contenido en la variedad $x_2 \geq 0$ cruza o pasa sobre el otro.

Los segmentos de las componentes cerradas están numerados a partir de cualquiera de ellos siguiendo la orientación de la componente.

DEFINICIÓN 4.1.1 *La componente M^i pasa sobre M^j si, para cada cruz que forman, el segmento de M^i cruza sobre el de M^j .*

DEFINICIÓN 4.1.2 *La componente M^i es anidada si, para cada cruz $M^{ij} \cup M^{ik}$, con $j < k$, el segmento M^{ik} cruza sobre M^{ij} .*

DEFINICIÓN 4.1.3 *La maraña M es anidada si, cada componente M^i es anidada y pasa sobre M^{i-1} .*

Lema 4.1.4 *Si $M \in \Omega(\phi)$ es anidada, entonces*

$$\exists n, \quad M = \theta^n$$

Demostración. Por inducción en el número de cruces de M , y el corolario 2.1.10.

En el caso del grupo de trenzas de n fibras, se obtiene un resultado similar, pero ahora los generadores son las marañas X_π .

Para cada permutación $\pi \in S_n$, por inducción se define la maraña X_π con las siguientes propiedades: es anidada sin componentes cerradas y su componente iésima une los puntos $(i, 0, 0)$ y $(\pi i, 0, 0)$.

Lema 4.1.5 *Si $M \in \Omega(a^n)$ es anidada y sin componentes cerradas, entonces*

$$\exists \pi \in S_n, \quad M = X_\pi$$

Demostración. La demostración es inmediata por inducción en el rango de a , y el corolario 2.1.10.

DEFINICIÓN 4.1.6 *Una maraña Conway es una terna de marañas orientadas (L, M, N) con la siguiente propiedad*

$$L = A \circ I_a X I_b \circ B$$

$$M = A \circ I_a X^{-1} I_b \circ B$$

$$N = A \circ I_a \uparrow^2 I_b \circ B$$

para algunos $a, b \in \Omega$ y $A, B \in M_\Omega$.

En la figura 4.1, se muestra una representación local de la maraña Conway (L, M, N) .

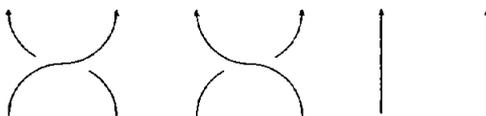
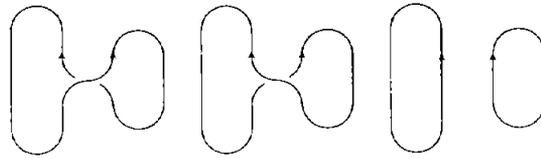
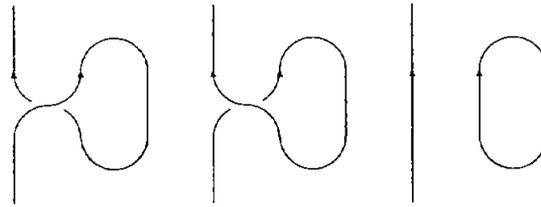


Figura 4.1: Maraña Conway

EJEMPLOS 4.1.7 *Las ternas $(\theta, \theta, \theta^2)$, $(\uparrow, \uparrow, \uparrow \theta)$ son marañas Conway.*

En las figuras 4.2, 4.3 se muestran las formas normales que lo demuestran.

Figura 4.2: Maraña $(\theta, \theta, \theta^2)$ Figura 4.3: Maraña $(\uparrow, \uparrow, \uparrow \theta)$

En lo sucesivo A denota un anillo conmutativo con uno, y que contiene al menos dos unidades. Para cada pareja x, y de unidades de A se define la Ω -categoría $H_A\Omega$ por

$$H_A\Omega(a, b) = A[\Omega(a, b)]/T$$

donde T es el submódulo libre generado por los morfismos

$$xL - x^{-1}M - yN$$

para cada maraña Conway (L, M, N) , con $L, M, N \in \Omega(a, b)$.

Las composiciones de $H_A\Omega$ se definen como las extensiones lineales de las composiciones de Ω , y los morfismos identidad son las imágenes de I_Ω bajo las proyecciones

$$p \in \mathcal{C}(\Omega(a, b), H_A\Omega_A(a, b)).$$

La Ω -categoría $H_A\Omega$ que se define con estos elementos se llama categoría Hecke.

El producto tensorial de Ω también se extiende linealmente en un producto tensorial \otimes_H de $H_A\Omega$, y como resultado se obtiene el siguiente teorema análogo al teorema 2.2.10.

Teorema 4.1.8 $(H_A\Omega, \otimes_H, \emptyset)$ es una categoría monoidal estricta.

Demostración.(1.12) Por definición

$$a \otimes_H \emptyset = a = \emptyset \otimes_H a$$

$$M \otimes_H \emptyset = M = \emptyset \otimes_H M$$

para cada objeto de $a \in H_A\Omega$, y cada morfismo $M \in M_{H_A\Omega}$.

(1.13) También por definición

$$a \otimes_H (b \otimes_H c) = (a \otimes_H b) \otimes_H c$$

y, por 2.2.10 y linealidad

$$(M \otimes_H N) \otimes_H L = M \otimes_H (N \otimes_H L)$$

para cada terna de morfismos L, M, N .

La categoría Hecke también es una categoría cuántica, por ejemplo, respecto la estructura definida por la imagen, bajo la proyección p , de la estructura cuántica definida en Ω .

La propiedad principal de esta categoría es que sus morfismos son combinaciones lineales de marañas anidadas y sin componentes cerradas.

En efecto, si $M \in H_A\Omega(a, b)$ entonces sustituyendo en su forma normal algún morfismo X por X^{-1} y $\uparrow\uparrow$, se obtienen M_1, M_2 con

$$M = x^{-2}M_1 - x^{-1}yM_2$$

Esto implica que, si en M un segmento cruza sobre otro, al intercambiarlos para que el segundo cruce al primero, se obtiene una combinación de marañas en la que el primer término presenta la cruz conveniente y en el segundo término, incluso se ha eliminado la cruz.

Luego aplicando el mismo procedimiento a M_1 y M_2 , hasta obtener solamente marañas anidadas, por inducción, resulta que M es una combinación

de marañas anidadas.

De la siguiente propiedad se concluye que ninguna maraña de la combinación obtenida contiene componentes cerradas.

Proposición 4.1.9 *Para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}\theta^n &= y^{1-n}(x - x^{-1})^{n-1}\theta \\ \uparrow \theta &= y^{-1}(x - x^{-1}) \uparrow\end{aligned}$$

Demostración. Inmediata.

En algunos casos esta propiedad implica la posibilidad de calcular el rango del módulo $H_\Lambda\Omega(a, b)$, ó de definir su estructura. Por ejemplo, si a y b son la sucesión vacía, por 4.1.4, se concluye que el nudo trivial es un generador del módulo $H_\Lambda\Omega(\emptyset)$. Empleando esta propiedad, para cada enlace N , se define su polinomio Jones-Conway $J_C(N)$ por

$$N = J_C(N)\theta.$$

En la última sección de este capítulo se define un invariante de nudos mediante este polinomio.

4.2. Módulos $H_\Lambda\Omega(a, b)$

Como se ha indicado al final de la sección anterior, en esta se demuestran varias propiedades de los módulos Hecke $H_\Lambda\Omega(a, b)$, y en algunos casos se calcula su rango y se definen sus generadores.

Sea Λ el anillo de polinomios Laurent en dos variables $\mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$. Considerando el isomorfismo natural

$$H_A\Omega(a, b) \sim A \otimes_\Lambda H_\Lambda\Omega(a, b)$$

para demostrar una propiedad de $H_A\Omega$ es suficiente hacerlo para $H_\Lambda\Omega$.

Sea $\Omega_D(a, b) \subset \Omega(a, b)$ la clase de las marañas desanidadas y sin componentes cerradas.

Lema 4.2.1 Para cada $a, b \in \Omega$, $\Omega_D(a, b)$ es un conjunto de generadores del módulo $H_\Lambda \Omega(a, b)$.

Demostración. Sección anterior.

Así como en el caso del grupo de trenzas $B_n \subset \Omega(a_\sigma^n)$, donde $\sigma = id$, es posible definir su rango y su estructura [JB], como subgrupo de $H_\Lambda \Omega(a^n)$ se obtiene un resultado similar.

Teorema 4.2.2 Sea $a_\sigma^n \in \Omega$, con $\sigma = id$. Entonces $H_\Lambda \Omega(a)$ es de rango $n!$.

Demostración. Sea $M \in H_\Lambda \Omega(a)$. Por 4.2.1, M es una combinación lineal de marañas anidadas y sin componentes cerradas. Sea N una maraña de esta combinación y supóngase que

$$\partial N^i = \{(i, 0, 0), (j_i, 0, 1)\}$$

para cada i .

Sea π la permutación de la sucesión $1, \dots, n$ con la propiedad $\pi j_i = i$. Por inducción se define la maraña $X_\pi \in \Omega(a)$ con las siguientes propiedades: es anidada, sin componentes cerradas y su componente iésima une los puntos $(j_i, 0, 0)$ e $(i, 0, 1)$. Además, si N^k cruza sobre N^l , entonces X_π^k cruza sobre X_π^l .

Entonces

$$X_\pi \circ N = id_a$$

Por tanto X_π , $\pi \in S_n$ es un conjunto de generadores de $H_\Lambda \Omega(a)$.

Para demostrar que las marañas X_π son linealmente independientes, sea

$$\bar{F}_m \in \mathcal{C}(H_\Lambda \Omega(a), \mathbb{M}(\bar{V}^{n \otimes}))$$

$$\bar{F}_m \lambda(x, y) M = \lambda(q^m, q - q^{-1}) F_m M$$

donde \bar{V} es un Q -módulo de rango $m \geq 2$, y Q es el campo de cocientes del anillo de polinomios $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$.

Por definición \bar{F}_m está bien definida y es un \mathbb{Z} -homomorfismo.

Luego, si

$$\sum \lambda_{\pi} X_{\pi} = 0, \quad \lambda_{\pi} \in \Lambda$$

entonces

$$\sum \lambda_{\pi}(q^m, q - q^{-1}) F_m X_{\pi} = 0$$

Pero como $F_m X_{\pi}$ son linealmente independientes en $\mathbb{M}(\overline{V}^{n\otimes})$, para $m \geq 2$

$$\lambda_{\pi}(q^m, q - q^{-1}) = 0, \quad \forall m \geq 2$$

Por tanto $\lambda_{\pi} = 0$, y $H_{\Lambda}\Omega(a)$ es de rango $n!$.

Corolario 4.2.3 X_{π} , $\pi \in S_n$ es una base del módulo $H_{\Lambda}\Omega(a)$.

Teorema 4.2.4 Sean $a_{\sigma}^p, b_{\tau}^q \in \Omega$ y $n = 2^{-1}(p + q)$.

1. Si $\sum \sigma_i \neq \sum \tau_j$ entonces $H_{\Lambda}\Omega(a, b) = 0$
2. Si $\sum \sigma_i = \sum \tau_j$ entonces $H_{\Lambda}\Omega(a, b) \sim H_{\Lambda}\Omega(c^n)$

Demostración. Supóngase que a es la sucesión $i \leq p$, y b es $j \leq q$.

1. La demostración de la implicación, si $H_{\Lambda}\Omega(a, b) \neq 0$ entonces $\sum \sigma_i = \sum \tau_j$, es inmediata.

Si $\sigma_i = 1$ entonces, la componente N^i , para algún $N \in H_{\Lambda}\Omega(a, b)$, une el punto $(i, 0, 0)$ con algún punto $(j(i), 0, 0)$ ó $(j(i), 0, 1)$. Por tanto

$$\sigma_{j(i)} = -1 \quad \text{ó} \quad \tau_{j(i)} = 1$$

Sean J el conjunto que contiene los subíndices del primer tipo y, K los del segundo tipo.

Análogamente se definen los conjuntos J' y K' para la orientación τ .

Entonces

$$\begin{aligned}
 \sum \sigma_i &= \sum_J \sigma_i + \sum_K \sigma_i \\
 &= \sum_K \sigma_i \\
 &= \sum_{K'} \tau_j \\
 &= \sum_{J'} \tau_j + \sum_{K'} \tau_j = \sum \tau_j
 \end{aligned}$$

2. Si $\sigma p = -1$, se define el isomorfismo

$$\varphi : H_\Lambda \Omega(a, b) \sim H_\Lambda \Omega(p-1, q+1)$$

$$\varphi M = M \cdot \uparrow \text{oid}_{p-1} \cup^+$$

donde las orientaciones de $i \leq p-1$, $j \leq q+1$ son σ_i , τ_j y $\tau_{p+1} = 1$.

Si en la sucesión $i \leq p-1$, existe i_0 con orientación negativa, se define el isomorfismo

$$\psi : H_\Lambda \Omega(p-1, q+1) \sim H_\Lambda \Omega(p-2, q+2)$$

$$\psi M = \varphi(X_\pi \circ M)$$

donde π es una permutación de $1, \dots, p-1$ que aplica $p-1$ en i_0 .

Así, por inducción, existen $s_\sigma, t_\tau \in \Omega$, con $\sigma = 1$ y

$$H_\Lambda \Omega(a, b) \sim H_\Lambda \Omega(s, t)$$

Análogamente, si $\tau t = -1$ se define el isomorfismo

$$\varphi' : H_\Lambda \Omega(s, t) \sim H_\Lambda \Omega(s+1, t-1)$$

$$\varphi' M = \text{id}_e \cdot \cap^- \circ M \cdot \uparrow$$

donde las orientaciones de $i \leq s+1$, $j \leq t-1$ son σ_i , τ_j y $\sigma_{s+1} = 1$.

También en este caso, si $j_0 < t + 1$ tiene orientación negativa, se define el isomorfismo

$$\begin{aligned}\psi' : H_\Lambda\Omega(s + 1, t - 1) &\sim H_\Lambda\Omega(s + 2, t - 2) \\ \psi' M &= \varphi(M \circ X_\pi^{-1})\end{aligned}$$

donde π es una permutación que aplica el número j_0 en $t - 1$.

Entonces, por inducción

$$H_\Lambda\Omega(s, t) \sim H_\Lambda\Omega(c_\rho^n)$$

donde $\rho = 1$. Por tanto

$$H_\Lambda\Omega(a, b) \sim H_\Lambda\Omega(c^n).$$

Corolario 4.2.5 $H_\Lambda\Omega(a, b)$ es Λ -módulo libre de rango $n!$

Demostración. 4.2.3 y 4.2.4,2.

Corolario 4.2.6 Sean $a_\sigma^p, b_\tau^q \in \Omega$, con la orientación σ constante y $\sum \tau_j = p\sigma_1$. Entonces $H_\Lambda\Omega(a, b)$ y $H_\Lambda\Omega(b, a)$ son $H_\Lambda\Omega(a)$ -módulos libres de rango $n!(p!)^{-1}$, donde $n = 2^{-1}(p + q)$.

Demostración. La demostración que se presenta en seguida es para el módulo $H_\Lambda\Omega(b, a)$, con $\sigma = 1$, y las de los otros casos son similares.

Para cada subsucesión c de b , con la propiedad $\tau_c = 1$, se define

$$\begin{aligned}\varphi_c \in \mathbb{M}(H_\Lambda\Omega(a) \otimes H_\Lambda\Omega(d_{\tau'}^{q-p}, \emptyset), H_\Lambda\Omega(b, a)) \\ \varphi_c M \otimes N = (M \otimes N) \circ X_\pi\end{aligned}$$

donde π es la permutación de b_j , con las siguientes propiedades

$$\pi b_j < \pi b_k \text{ sii } b_j < b_k$$

$$\pi b_j < p \text{ sii } b_j \in c.$$

La sucesión $d_{\tau'} = b - c$ tiene la mitad de sus términos orientados positivamente y la otra mitad negativamente.

Sea C el conjunto que contiene las subsucesiones c . Entonces, cada morfismo φ_c es inyectivo y los módulos $\text{im}\varphi_c$, $c \in C$ generan el $H_\Lambda\Omega(a)$ -módulo $H_\Lambda\Omega(b, a)$.

Por otra parte

$$\text{card}C = n!(p!(n-p))^{-1}$$

y

$$\begin{aligned} & \sum \text{ran}(\text{im}\varphi_c) \text{ran}H_\Lambda\Omega(a) \\ & \leq \sum_C \text{ran}H_\Lambda\Omega(b-c, \emptyset)p! \\ & = \text{card}C \cdot (n-p)!p! \\ & = \text{ran}H_\Lambda\Omega(b, a) \end{aligned}$$

Por tanto

$$H_\Lambda\Omega(b, a) \sim H_\Lambda\Omega(a) \otimes_\Lambda \sum H_\Lambda\Omega(b-c, \emptyset).$$

Luego $H_\Lambda\Omega(b, a)$ es un $H_\Lambda\Omega(a)$ -módulo de rango $n!(p!)^{-1}$.

4.3. Categorías Kauffman

El método de definición de estas categorías es semejante al que se emplea en las categorías Hecke, pero en vez de las marañas Conway se emplean las marañas Kauffman.

Del mismo modo que para las marañas orientadas, por principio se definen los conceptos de marañas normadas que contienen una componente que pasa sobre otra, y en general el de marañas normadas anidadas.

También en este caso se obtienen dos resultados inmediatos, uno sobre el nudo trivial y el otro sobre las trenzas.

Lema 4.3.1 *Si $M \in \Pi(\emptyset)$ es anidada, entonces*

$$\exists n, M = \theta^n$$

Demostración. Idem 4.1.4.

Lema 4.3.2 Si $M \in \Pi(n)$ es anidada y sin componentes cerradas, entonces

$$\exists \pi \in S_n, M = X_\pi$$

Demostración. Idem 4.1.5.

DEFINICIÓN 4.3.3 Una maraña Kauffman es un cuarteto (L, M, N, P) de marañas normadas con la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} L &= A \circ I_a X I_b \circ B \\ M &= A \circ I_a X^{-1} I_b \circ B \\ N &= A \circ I_a I^2 I_b \circ B \\ P &= A \circ I_a (\cup \cdot \cap) I_b \circ B \end{aligned}$$

para algunos $a, b \in \Pi$ y $A, B \in M_\Pi$.

En la figura 4.4, se muestra una representación local de la maraña Kauffman (L, M, N, P) .



Figura 4.4: Maraña Kauffman

EJEMPLOS 4.3.4 Las cuartetos $(\theta, \theta, \theta^2, \theta)$ y $(I\theta, I, I, I)$ son marañas Kauffman.

En las figuras 4.5 y 4.6, se muestran las formas normales que lo demuestran.

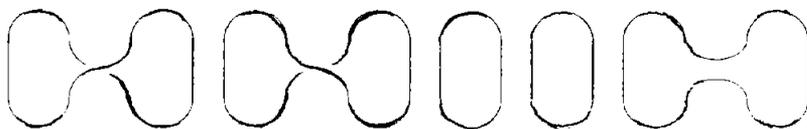


Figura 4.5: Maraña $(\theta, \theta, \theta^2, \theta)$

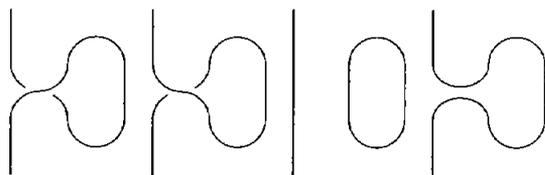


Figura 4.6: Maraña $(I\theta, I, I, I)$

Para cada maraña M se define su derivada M' , agregando un bucle a M , esto es

$$M = M \circ I_a \varphi^{\pm 1} I_b$$

para algunos $a, b \in \Pi$.

En los sucesivos A denota un anillo conmutativo con uno, y que contiene al menos dos unidades. Para cada número $\nu = \pm 1$, y cada pareja x, y de unidades de A se define la Π -categoría $K_A \Pi$ por

$$K_A \Pi(a, b) = A[\Pi(a, b)]/T$$

donde T es el submódulo libre generado por las combinaciones

$$L + \nu M - yN - \nu yP \tag{4.1}$$

y

$$Q' - xQ \tag{4.2}$$

para cada maraña Kauffman (L, M, N, P) , y cada maraña Q .

Sus composiciones son las inducidas por las de la categoría Π , y los morfismos identidad son las imagenes de I_Π bajo las proyecciones

$$p \in \mathcal{C}(\Pi(a, b), K_A \Pi(a, b)), \quad \forall a, b \in \Pi$$

La Π -categoría $K_A\Pi$ definida por estas clases se llama categoría Kauffman.

En este caso el producto tensorial de Π se extiende en un producto tensorial \otimes_K de $K_A\Pi$, y como resultado se obtiene el siguiente teorema análogo a 4.1.8.

Teorema 4.3.5 $(K_A\Pi, \otimes_K, \emptyset)$ es una categoría monooidal estricta.

Demostración. Idem 4.1.8

De hecho $K_A\Pi$ es una categoría cuántica respecto a la estructura definida por la imagen, de la proyección p , de la estructura de Π .

La propiedad básica de los morfismos de la categoría Kauffman es que son combinaciones lineales de marañas anidadas sin componentes cerradas ni bucles.

Esta propiedad es consecuencia de las igualdades 4.1 y 4.2, y su método de demostración es similar al de la respectiva propiedad de la categoría Hecke. Para anidar alguna componente de la maraña $M \in K_A\Pi(a, b)$, si en su primera cruz pasa por abajo de alguna componente, se sustituye esa cruz por la otra, y se obtiene la igualdad

$$M = -\nu M_2 + y M_3 + \nu y M_4$$

donde M_2 , M_3 y M_4 se obtienen de M sustituyendo su primera cruz X , por

$$X^{-1}, I^2 \text{ y } \cup \cdot \cap.$$

Aplicando este mismo procedimiento a M_2 , y luego a M_3 y M_4 , se obtiene una combinación de marañas anidadas.

Además empleando las igualdades de la siguiente proposición se concluye que ninguna maraña de la combinación tiene componentes cerradas ni bucles.

Proposición 4.3.6 Para cada $M \in M_{\Pi}$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\theta^n = y^{1-n}(1 + \nu - \nu y)^{n-1}\theta \quad (4.3)$$

$$I\theta = (-\nu + y + \nu y)I \quad (4.4)$$

$$M' = xM \quad (4.5)$$

Demostración. (4.3) Por inducción, para $n = 2$, considerando el primer ejemplo de

$$\theta + \nu\theta - y\theta^2 - \nu y\theta = 0$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \theta^2 &= y^{-1}\theta + \nu y^{-1}\theta - \nu\theta \\ &= y^{-1}(1 + \nu - \nu y)\theta \\ &= y^{1-2}(1 + \nu - \nu y)^{2-1}\theta \end{aligned}$$

Suponiendo que el resultado es válido para $n-1$, y empleando el resultado para $n = 2$

$$\begin{aligned} \theta^n &= \theta \cdot \theta^{n-1} \\ &= y^{1-(n-1)}(1 + \nu - \nu y)^{(n-1)-1}\theta^2 \\ &= y^{-(n-1)}(1 + \nu - \nu y)^{n-1}\theta \\ &= y^{1-n}(1 + \nu - \nu y)^{n-1}\theta \end{aligned}$$

(4.4) Por 4.3.4

$$I\theta + \nu I - yI - \nu yI = 0.$$

Por tanto

$$I\theta = (-\nu + y + \nu y)I$$

(4.5) Por definición

$$M' - xM = 0$$

Esta propiedad implica, en algunos casos, que es posible describir explícitamente la estructura de los módulos $K_A\Pi(a, b)$ ó de calcular su rango.

Por ejemplo, si a y b son la sucesión vacía, por 41, se concluye que el nudo trivial es un generador del módulo $K_\lambda \Pi(\emptyset)$. Entonces, para cada enlace N , se define su polinomio Kauffman $K(N)$ por

$$N = K(N)\theta$$

En la última sección de este capítulo se define un invariante de nudos mediante este polinomio.

4.4. Módulos $K_{\Lambda}\Pi(ab)$

Los resultados de esta sección conforman una descripción completa de la estructura de los módulos Kauffman $K_{\Lambda}\Pi(a, b)$.

Lema 4.4.1 Sean $a^m, b^n \in \Pi$. Si $m + n$ es impar, entonces

$$K_{\Lambda}\Pi(a, b) = 0$$

Si $m + n$ es par, entonces

$$K_{\Lambda}\Pi(a, b) \sim K_{\Lambda}\Pi(c^p, \emptyset)$$

donde $p = 2^{-1}(m + n)$

Demostración. La primera parte es inmediata y, la segunda se demuestra con el mismo método que 4.2.4,2.

Para cada n , sean J_n el conjunto que contiene la sucesión $i \leq 2n$, y \overline{S}_{2n} el conjunto de las involuciones libres de J_n , esto es las permutaciones idempotentes sin puntos libres.

Para cada $\sigma \in \overline{S}_{2n}$, sea $\cap_\sigma \in \Pi(d^{2n}, \emptyset)$ la maraña anidada con norma constante cuyas componentes i y j , con $i < j$, se definen mediante la gráfica de la figura 4.7. Sea Σ_n el conjunto de marañas \cap_σ , $\sigma \in \overline{S}_{2n}$.

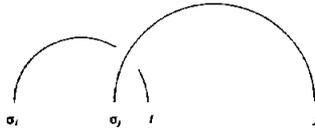


Figura 4.7: Componentes i, j

Teorema 4.4.2 Σ_n es un conjunto de generadores del módulo $\Sigma_\Lambda \Pi(d, \emptyset)$

Demostración. Es inmediata, con un método similar al que se emplea en 4.2.2.

Para cada $\sigma \in \Sigma_n$, con $\sigma(2n) = r$, sean $\sigma' \in \overline{S}_{2n-2}$ y $L_\sigma \in \Pi(2n, 2n - 2)$ con la propiedad

$$\cap_\sigma = \cap_{\sigma'} \circ L_\sigma$$

donde L_σ se define mediante la gráfica de la figura 4.8.

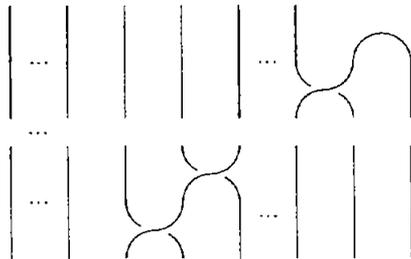


Figura 4.8: Maraña L_σ

Por otra parte, para cada $\sigma \in \overline{S}_{2n}$, y cada $m \geq 2n + 2$, se definen el conjunto S_{σ} , y la sucesión $a_i = a(\sigma)$ por

$$S_{\sigma} = \{i \in J_n \mid i > \sigma(i)\}$$

$$a_i = \begin{cases} e + \text{card}\{j \in S_{\sigma} \mid j < i\} & i \in S_{\sigma} \\ m + 1 - a_{\sigma(i)} & i \in J_n - S_{\sigma} \end{cases}$$

donde $e = [2^{-1}m] + 1$.

Lema 4.4.3 Para cada $a(\sigma)$, $\sigma \in \overline{S}_{2n}$

$$1. \{a_i\} = \{e + i \mid i \leq n\} \cup \{m + i - e - n \mid i \leq n\}$$

$$a_i = a_j \quad \text{si } i = j$$

$$2. \text{ Si } e < a_i < a_j \text{ entonces } i < j$$

$$3. \text{ Si } a_i \leq m - e \text{ y } a_j + a_i = m + 1 \text{ entonces } i < j.$$

Demostración. Inmediata.

Sean A_n el conjunto de las sucesiones $a(\sigma)$, y $\psi \in C(\overline{S}_{2n}, A_n)$ definida por

$$\psi\sigma = a(\sigma)$$

Proposición 4.4.4 La aplicación ψ es biyectiva.

Demostración. Es inmediata de 4.4.3.

Para demostrar que Σ_n es una base de $K_{\Lambda}\Pi(d, \emptyset)$, además de los conceptos que se han definido se emplea el vector v_a definido como sigue. Para cada sucesión $a \in A_n$ y V definido como en 3.5.2, se define

$$v_a = \otimes v_{a_i} \in V^{\otimes 2n}$$

y teniendo en cuenta 4.4.4, v_a se denota por v_{σ} , si $a_i = a(\sigma)$. Si $\sigma(2n) = r$, los vectores $v_{a_{2n}}$, v_{a_r} no dependen de σ pues

$$a_{2n} = e + n, \quad a_r = m + 1 - (e + n).$$

Sea $v_{\sigma'}$ definido por

$$v_{\sigma'} = v_{a_1} \otimes \dots \otimes \widehat{v}_{a_r} \otimes \dots \oplus \widehat{v}_{a_{2n}}$$

donde la cuña sobre las componentes indica que estas se han omitido del producto.

Teorema 4.4.5 Σ_n es una base del módulo $\Sigma_{\Lambda}\Pi(d, \emptyset)$.

Demostración. Por 4.4.2, es suficiente demostrar que los morfismos

$$G_{m,-1} \cap_{\sigma} \in \mathbb{M}(V^{\otimes 2n}, \mathbb{Z}[q^{2^{-1}}, q^{-2^{-1}}])$$

son linealmente independientes, Entonces, por 4.4.4, es suficiente demostrar que

$$G \cap_{\sigma} v_{\pi} = 0 \text{ sii, } \sigma \neq \pi.$$

La demostración es por inducción sobre $n = 1, \dots, [2^{-1}m] - 1$. Para $n = 1$ y $m = 4$, la única involución de J_1 es $\sigma = (1, 2)$. Luego

$$S_{\sigma} = \{2\}, \quad v_{\sigma} = v_2 \otimes v_3$$

y

$$G \cap_{\sigma} (v_{\sigma}) = q$$

Supóngase que el resultado es válido para $n = h - 1$, y sea $\sigma \in \Sigma_h$, con $\sigma(2h) = \tau$. Entonces, existe $\sigma' \in \overline{S}_{2n-2}$ con

$$\cap_{\sigma} = \cap_{\sigma'} \circ L_{\sigma}$$

Considerando que

$$G \cap (v_s \otimes v_{e+h}) \neq 0 \text{ sii, } s = m + 1 - e - h$$

se concluye que

$$GL_{\sigma} = 0 \text{ si } a_{\tau} \neq m + 1 - e - h$$

y

$$GL_{\sigma} = \alpha v_{\sigma'} \text{ si } a_{\tau} = m + 1 - e - h$$

Pero por hipótesis

$$G \cap_{\sigma'} (v_{\tau}) = 0 \text{ sii, } \sigma' \neq \tau$$

por tanto

$$G \cap_{\sigma} (v_{\pi}) = 0 \text{ sii, } \sigma \neq \pi.$$

Corolario 4.4.6 $\text{ran}K_{\Lambda}\Pi(d, \emptyset) = 2n!!$

Demostración. $\text{card}\Sigma_n = 2n!!$

4.5. Invariantes Cuánticos

En esta última sección se completa la construcción de los invariantes cuánticos Jones-Conway y Kauffman, y para concluir se establece un método de cálculo para cada uno.

Considerando que el nudo trivial θ es un generador del módulo $H_\Lambda\Omega(\theta)$, para demostrar que el polinomio Jones-Conway es un invariante isotópico es suficiente demostrar que θ es un generador libre de torsión.

Teorema 4.5.1 θ es un generador libre de torsión del módulo $H_\Lambda\Omega(\theta)$.

Demostración. Sea Q el campo de cocientes del anillo de polinomios $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Para cada $n \geq 2$, se define el morfismo

$$\varphi \in \mathbb{M}(H_\Lambda\Omega(\theta), Q)$$

$$\varphi(\lambda(x, y), M) = \lambda(q^n, q - q^{-1})F_n(M).$$

Este morfismo esta bien definido porque, para cada maraña Conway (L, M, N)

$$\begin{aligned}\varphi(xL - x^{-1}M - yL) &= q^n F_n L - q^{-n} F_n M - (q - q^{-1}) F_n N \\ &= F_n (q^n L - q^{-n} M - (q - q^{-1}) N)\end{aligned}$$

Luego, si $\lambda\theta = 0$ entonces

$$\lambda(q^n, q - q^{-1})F_n\theta = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

Pero

$$F_n\theta = \sum q^{2i-n-1},$$

y por tanto

$$\lambda(q^n, q - q^{-1}) = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

Entonces por el teorema fundamental del álgebra $\lambda = 0$.

Corolario 4.5.2 *El polinomio Jones-Conway J_C es in invariante isotópico de nudos.*

Análogamente, como el nudo trivial θ con alguna norma constante es un generador del módulo $K_\Lambda\Pi(\emptyset)$, para demostrar que el polinomio Kauffman es un invariante isotópico es suficiente demostrar que θ es un generador libre de torsión.

Teorema 4.5.3 *θ es un generador libre de torsión del módulo $K_\Lambda\Pi(\emptyset)$.*

Demostración. Para cada $n \in 2\mathbb{N}$ y $\nu = \pm 1$, se define el morfismo

$$\varphi \in \mathbf{M}(K_\Lambda\Pi(\emptyset), \mathbb{Q})$$

$$\varphi(\lambda(x, y), M) = \lambda(-\nu q^{n+\nu}, q - q^{-1})G_{\nu n}M.$$

Este morfismo esta bien definido porque, para cada maraña Kauffman (L, M, N, P) y $R \in M_\Pi$

$$GL + \nu GM = (q - q^{-1})(GN - \nu GP)$$

y

$$GR' = -\nu q^{n+\nu} R,$$

de donde

$$\varphi(L + \nu M - yN - \nu yP) = 0$$

y

$$\varphi(R' - xR) = 0.$$

Puesto que $G\theta$ es el polinomio $\sum \varepsilon_i q^{2^{-1}-i}$, la igualdad $\lambda(x, y)\theta = 0$ implica

$$\lambda(q^n, q - q^{-1})G\theta = 0$$

y así, por el teorema fundamental del álgebra, $\lambda = 0$.

Corolario 4.5.4 *El polinomio Kauffman K es invariante isotópico de nudos.*

Proposición 4.5.5 $J_C\theta = 1$ y $K\theta = 1$

Demostración. Inmediata.

Las siguientes relaciones son necesarias y suficientes, para calcular el invariante Jones-Conway de un nudo.

$$\begin{aligned}\theta^n &= y^{-1}(x - x^{-1})\theta^{n-1} \\ L &= x^{-2}M + x^{-1}yN \\ J_C\theta &= 1\end{aligned}$$

donde (L, M, N) es una maraña Conway.

Por otra parte, para calcular los invariantes Kauffman se emplean

$$\begin{aligned}\theta^n &= y^{1-n}(1 + \nu - \nu y)^{n+1}\theta \\ L &= -\nu M + y(N + \nu P) \\ K\theta &= 1 \text{ y } KR' = xKR\end{aligned}$$

donde (L, M, N, P) es una maraña Kauffman y $R \in M_{\Pi}$.

En ambos casos, para efectuar los calculos, primero es necesario hallar una forma normal del nudo.

EJEMPLOS 4.5.6 En la figura 4.9 y 4.10, se muestran los nudos θ , τ y $\tilde{\tau}$, δ y a continuación sus polinomios Jones-Conway y Kauffman.

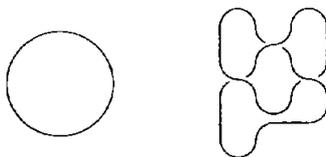


Figura 4.9: Nudos θ y τ

Los polinomios de θ son 1, 1 y los de τ son

$$2x^2 + x^2y^2 - x^4,$$

$$x^2y - xy^2 + x^{-1}(1 + y^2) - y^3$$

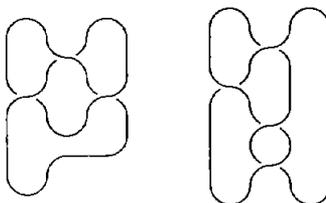


Figura 4.10: Nudos $\tilde{\tau}$ y δ

Los polinomios de $\tilde{\tau}$

$$2x^{-2} + x^{-2}y^2 - x^{-4},$$

$$x(1 + y^2) - x^{-1}y^2 - x^{-2}y + y^3$$

y los de δ son

$$x^{-2} - 1 + x^2 - y^2,$$

$$-x^2y^2 - xy + x^{-1}y^3 + x^{-2}(1 + y^2) - y^4$$

El método para calcular estos invariantes se ejemplifica con el nudo τ . Por principio, en la figura 4.11 se definen las marañas τ^+ , τ^0 .

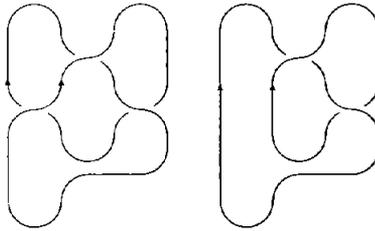


Figura 4.11: Marañas τ^+ y τ^0

Entonces

$$\tau = x^2\tau^+ - xy\tau^0$$

Ahora, en la figura 4.12 se definen las marañas $(\tau^0)^+$ y $(\tau^0)^0$

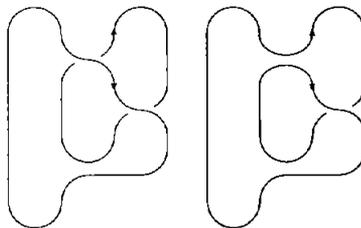
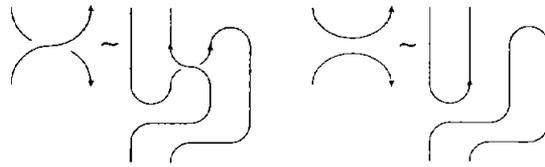


Figura 4.12: Marañas $(\tau^0)^+$ y $(\tau^0)^0$

Luego empleando las relaciones α y β , de la figura 4.13, se concluye que

$$\tau^0 = x^2(\tau^0)^+ - xy(\tau^0)^0$$

Figura 4.13: Relaciones α y β

Por tanto

$$\begin{aligned}\tau &= x^2\theta - x^3y\theta^2 + x^2y^2\theta \\ &= x^2\theta - x^3y(y^{-1}(x - x^{-1})\theta) + x^2y^2\theta\end{aligned}$$

y así

$$J_C\tau = 2x^2 + x^2y^2 - x^4.$$

Apéndice A

Categoría \mathbb{L}

La siguiente relación de resultados sobre la categoría de las álgebras de Lie constituye un antecedente esencial en la teoría de grupos cuánticos, la ecuación de Yang-Baxter y la representación de las categorías de marañas.

1. Algebras Simples

En este apéndice A denota un álgebra Lie de dimensión finita. Para cada pareja de conjuntos $B, C \subseteq A$ se define su conmutador $[B, C]$, como el subespacio generado por los elementos $[b, c]$, donde $b \in B$ y $c \in C$.

Por definición B es un ideal de A , si B es una subálgebra de A , y el conmutador $[B, A]$ está contenido en B .

DEFINICIÓN A.1 *El álgebra A es simple si, no es abeliana ni contiene ideales propios.*

DEFINICIÓN A.2 *El álgebra A es semisimple si, no es trivial ni contiene ideales abelianos propios.*

Las clases de las álgebras simples y semisimples se denotan por \mathbb{S} y $\bar{\mathbb{S}}$.

Entre los conceptos propios de la categoría \mathbf{L} , las derivaciones son definitivas en la clasificación de las álgebras simples.

DEFINICIÓN A.3 *Una derivación de A es una aplicación $\delta \in \mathbb{E}(A, A)$, con la propiedad*

$$\delta[a, b] = [\delta a, b] + [a, \delta b], \quad \forall a, b$$

En particular, las derivaciones

$$\text{ad}_a(b) = [a, b], \quad \forall b$$

se llaman derivaciones internas.

Las álgebras definidas por las derivaciones y las derivaciones internas se denotan por $\text{Der}(A)$ y $\text{Ad}(A)$. Entonces

$$\text{Ad}(A) \prec \text{Der}(A) \prec \text{Aut}(A)$$

DEFINICIÓN A.4 *El punto $a \in A$ es nilpotente ó semisimple si, ad_a es nilpotente ó semisimple.*

DEFINICIÓN A.5 *El automorfismo $\varphi \in \text{Aut}(A)$ es interno si, existe una sucesión finita a_i de puntos nilpotentes y*

$$\varphi = \prod e^{\text{ad}_{a_i}}$$

El conjunto de automorfismos internos de A se denota por $\text{Int}(A)$; este conjunto es no vacío porque, si $a \in A$ es nilpotente entonces

$$e^{\text{ad}_a} \in \text{Int}(A)$$

Lema A.6 Si $A \in \bar{\mathcal{S}}$ entonces

$$\text{Int}(A) = \text{Aut}^0(A), \quad \text{Der}(A) = \text{Ad}(A).$$

2. Subálgebras Cartan

Mediante los conceptos de subálgebra Cartan y forma Cartan, la clasificación de los objetos de la clase $\bar{\mathcal{S}}$ se deduce de la clasificación de los objetos de la clase \mathcal{S} .

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se definen los ideales

$$A_0 = A, \quad A_n = [A, A_{n-1}]$$

Si $A_n = 0$, para algún n , el álgebra A se llama nilpotente.

Teorema A.7 (Engel). *El álgebra A es nilpotente si, y sólo si cada punto $a \in A$ es nilpotente.*

Para cada subálgebra $B \prec A$, se define su normalizador $N_A(B)$ por

$$N_A(B) = \{a \in A \mid [a, B] \subseteq B\}$$

La subálgebra B se llama autonormal si

$$N_A(B) = B$$

DEFINICIÓN A.8 *La subálgebra $B \prec A$ es Cartan si, es nilpotente y autonormal.*

Teorema A.9 *Para cada álgebra A , existe una subálgebra Cartan.*

Además, si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ entonces, cada pareja de subálgebras Cartan son conjugadas respecto el subgrupo de $\text{Int}(A)$, generado por los automorfismos e^{ad_a} , donde a es un punto nilpotente.

DEFINICIÓN A.10 *El rango de A es la dimensión de alguna de sus álgebras Cartan.*

Para cada álgebra A , se define la forma K_A por

$$K_A(a, b) = \text{tr}(\text{ad}_a \circ \text{ad}_b), \quad \forall a, b.$$

Esta forma se llama forma Cartan de A .

Teorema A.11 *$A \in \bar{\mathbb{S}}$ si, y sólo si la forma K_A es no degenerada.*

Corolario A.12 *$A \in \mathbb{S}$ si, y sólo si, existe una sucesión finita A_i de ideales simples y no abelianos con la propiedad*

$$A = \oplus A_i$$

Además, cada ideal de A es la suma de algunos términos de esta sucesión.

Teorema A.13 *Si $A \in \mathbb{S}$ y $B \prec A$ es un álgebra Cartan, entonces B es abeliana, cada punto $b \in B$ es semisimple y $K_{A|B}$ es una forma no degenerada.*

3. Diagramas Dynkin

Para cada $A \in \bar{\mathbb{S}}$, y $H \prec A$ una subálgebra Cartan, se define

$$\text{Ad}_A(H) = \{\text{ad}_a \mid a \in H\}$$

Entonces $\text{Ad}_A(H)$ es un álgebra abeliana y sus elementos son semisimples.

Lema A.14 *Si $L \prec \text{Aut}(A)$ es abeliana entonces, existe una base a_i de A , donde cada a_i es un eigenvector de los elementos de L .*

Sea a_i la base de A que se obtiene del lema A.14, y $\text{Ad}_A(H)$. Para cada i , se define $\alpha_i \in H^*$ por

$$\text{ad}_h a_i = \alpha_i(h)a_i$$

Para cada $\alpha \in H^*$, sea

$$A_\alpha = \{a \in A \mid \text{ad}_h(a) = \alpha(h)a, \forall h \in H\}$$

DEFINICIÓN A.15 *El elemento $\alpha \in H^*$ es una raíz de A , si*

$$\dim A_\alpha \geq 1$$

El conjunto de raíces de A se denota por $\Delta_H(A)$ y se llama sistema de raíces, además es no vacío porque cada α_i es una raíz.

Lema A.16 $\Delta_H(A)$ es un conjunto de generadores de H^* .

Sean $\Gamma_H(A) \subset \Delta_H(A)$ una base de H^* , y E su espacio lineal real generado. Supóngase definido en E el orden lexicográfico, respecto la base $\Gamma_H(A)$.

Lema A.17 $\Delta_H(A) \subset E$.

DEFINICIÓN A.18 *Una raíz es simple si, es positiva pero no es la suma de dos raíces positivas.*

En lo sucesivo $\Pi_H(A) = \{\alpha_{i \leq r}\}$ denota el conjunto de raíces simples de A .

Lema A.19 *La aplicación $\nu \in \mathbb{L}(HH^*)$, definida por*

$$\nu(a)b = K(ab)$$

es un isomorfismo.

Para cada $\alpha \in H^*$, su preimagen $\nu^{-1}\alpha$ se denota por t_α . Sea $\|\cdot\|_\nu$ la norma definida por el producto

$$\langle \alpha\beta \rangle = K(t_\alpha, t_\beta)$$

y sea a_{ij} la matriz definida por

$$a_{ij} = 2\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \|\alpha_i\|^{-2}$$

Esta matriz se llama matriz Cartan de A .

Teorema A.20

$$\begin{aligned} |\det a_{ij}| &> 0 \\ a_{ij} &= 0, -1, -2 \text{ ó } -3 \text{ y } a_{ii} = 2 \\ a_{ij} &= 0 \text{ si } a_{ji} = 0 \\ a_{ji} &= -1 \text{ si } a_{ij} = -2 \text{ ó } -3. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN A.21 *El diagrama Dynkin de A es el polígono orientado $\text{Dy}(A) \subset E$, cuyos vértices son las raíces simples de A .*

Si $|a_{ij}| > 1$ y $|\alpha_i \alpha_j| > 0$, el lado α_{ij} que une los vértices α_i, α_j está orientado de α_j hacia α_i .

El producto $m_{ij} = a_{ij}a_{ji}$ se llama multiplicidad del lado α_{ij} , y el lado y su multiplicidad se representan mediante $m_{ij} - 1$ segmentos, como en figura A.1, donde $m_{ij} = 3$.

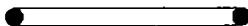


Figura A.1: α_{ij}

DEFINICIÓN A.22 *Un automorfismo Dynkin de A es una aplicación $\varphi \in \text{Aut}(E)$, donde $\varphi_{\Pi_H(A)}$ es una permutación de $\Pi_H(A)$ y*

$$\langle a, b \rangle = \langle \varphi a, \varphi b \rangle, \quad \forall a, b$$

El grupo de automorfismos Dynkin de A se denota por $\text{Dyn}(A)$.

Lema A.23

$$\text{Dyn}(A) \sim \text{Aut}(A)/\text{Aut}^0(A)$$

El orden de $\text{Dyn}(A)$ es 1, 2 ó 6, y si es 6 entonces

$$\text{Dyn}(A) \sim S_3.$$

Entonces, por A.6

$$\text{Dyn}(A) \sim \text{Aut}(A)/\text{Int}(A).$$

Luego, para cada $\varphi \in \text{Aut}(A)$, existen $\psi \in \text{Aut}(A)$ y $\varrho \in \text{Int}(A)$, con

$$\varphi = \varrho \circ \psi, \quad \psi^* \in \text{Dyn}(A).$$

Lema A.24 El automorfismo ψ es único salvo conjugación $\text{Int}(A)$.

4. Esquemas

Sean $E^{(n)} \in \mathbb{E}$ y $S = \{\alpha_i \mid i \leq n\} \subset E$. Para cada pareja α_i, α_j se define

$$a_{ij} = 2\alpha_j \cdot \alpha_i \|\alpha_i\|^{-2}$$

DEFINICIÓN A.25 Un esquema es un conjunto S con las propiedades

$$|\det a_{ij}| > 0, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}^-$$

El número n se llama rango de S .

Un esquema S se llama compuesto si, existen dos subconjuntos $S_1, S_2 \subset S$ con las propiedades

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \perp S_2$$

Si un esquema no es compuesto se llama simple.

DEFINICIÓN A.26 *El diagrama Coxeter del esquema S , es el polígono $C(S) \subset E$, cuyos vértices son los puntos α_i , y que tiene las mismas propiedades que un polígono Dynkin.*

Proposición A.27 *Si $A \in \mathbb{S}$ entonces $\Pi_H(A)$ es un esquema simple y $Dy(A)$ es su diagrama Coxeter.*

Teorema A.28 *El diagrama Coxeter de un esquema simple pertenece a alguna de las tres clases de la figura A.2.*

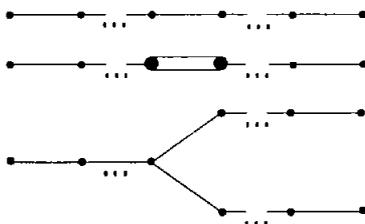


Figura A.2: Clases I,II,III

Los diagramas de la segunda clase pueden ser de alguno de los tres tipos de la figura A.3.

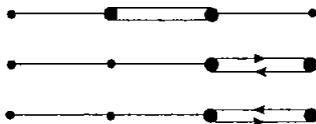


Figura A.3: Clase II, tipos I,II,III

Los diagramas de la tercera clase pueden ser de alguno de los dos tipos de la figura A.4.

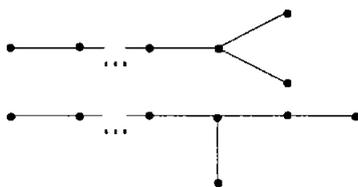


Figura A.4: Clase III, tipos I,II

Para cada esquema S se define un álgebra $g(S)$, mediante la construcción de Serre [S], con las siguientes propiedades.

Si $C(S)$ tiene n vértices y pertenece a la clase I, su álgebra se denota por A_n .

Si $C(S)$ pertenece a la clase II, y es del tipo I, II ó III, $g(S)$ se denota por F_n , B_n y C_n , y $n = 4$, $n \geq 2$, $n \geq 3$ resp.

Si $C(S)$ pertenece a la clase III, y es del tipo I ó II, $g(S)$ se denota por D_n y E_n , y $n \geq 4$, $n = 6, 7, 8$ resp.

Teorema A.29

$$\begin{aligned} A_n &\sim \mathfrak{sl}(n+1) \\ B_n &\sim \mathfrak{so}(2n+1), \quad C_n \sim \mathfrak{sp}(2n) \\ D_n &\sim \mathfrak{so}(2n) \end{aligned}$$

5. Clasificación de las álgebras simples

La clasificación de estas álgebras es inmediata de A.27-A.29.

Las álgebras de las clases A_n , B_n , C_n y D_n se llaman álgebras clásicas, y las de las clases E_6 , E_7 , E_8 y G_2 se llaman excepcionales.

Para cada pareja (L, σ) , formada por un álgebra Lie y un automorfismo Dynkin del álgebra, la notación L^n indica que el orden del automorfismo σ es

n. En la primera sección del tercer capítulo se incluye una tabla con algunas propiedades de varias parejas (L, σ) , donde L es un álgebra clásica.

Las referencias de las demostraciones de todos los resultados de este apéndice son [JH] y [JS].

Apéndice B

R-matrices Funcionales

En este apéndice nuevamente se demuestra que R_ω es un operador cuántico, pero ahora el método de demostración se basa en el concepto de *R*-matriz funcional.

Sean A un anillo conmutativo con uno, K un conjunto, y $A(K)$ el conjunto de aplicaciones de K en A .

Para cada pareja $\varphi, \psi \in A(K^2)$, se define

$$R(\varphi, \psi) = R \in \mathcal{C}(A(K^2), A(K^2))$$

$$Rf(a, b) = \varphi(b, a)f(b, a) + \psi(b, a)f(a, b) \quad (\text{B.1})$$

En general, para cada $1 \leq i \leq n$, se definen

$$R_i \in \mathcal{C}(A(K^n), A(K^n))$$

$$R_i f(a) = \varphi(a_{i+1}, a_i) f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \dots, a_n) + \psi(a_{i+1}, a_i) f(a)$$

DEFINICIÓN B.1 Una R -matriz funcional, sobre el conjunto K , es una aplicación $R \in \mathcal{C}(A(K^2), A(K^2))$ con la propiedad

$$R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2 \quad (\text{B.2})$$

para $n = 3$.

Si R es una R -matriz funcional, de B.2 se concluye que

$$R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1}$$

para cada $i < n$.

Proposición B.2 Si el conjunto K es finito, entonces los módulos $A(K^2)$ y $A(K) \otimes_A A(K)$ pueden considerarse idénticos y, B.2 es equivalente a 3.3.

Demostración. Inmediata.

Proposición B.3 Si $\psi(a, b) = 0$ para $a \neq b$, entonces $R(\varphi, \psi)$ es una R -matriz funcional, para cada aplicación φ .

Demostración. Inmediata.

Debido a la importancia que tienen las R -matrices, por su relación con los operadores cuánticos, en el siguiente teorema se establece un método de construcción.

Sea K un conjunto ordenado linealmente, $q \in A^*$ y $r \in A$. Sean $\varphi, \psi \in A(K^2)$ con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \varphi(a, b)\psi(b, a) &= r & a \neq b \\ \psi(a, b) &= \begin{cases} 0 & a < b \\ -q - \varphi(a, b) & a = b \\ rq^{-1} - q & a > b \end{cases} \end{aligned}$$

Teorema B.4 $R(\varphi\psi) = R$ es una R -matriz funcional, invertible y

$$R^{-r} = r^{-1}R + (r^{-1}q - q^{-1})id \quad (\text{B.3})$$

Demostración. Sea Δ la resta de los operadores de B.2. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta f(a, b, c) = & f(a, b, c)[\psi(c, a)(\varphi(b, a)\varphi(a, b) - \varphi(b, c)\varphi(c, b)) + \psi(b, a)\psi(c, b)(\psi(b, a) - \psi(c, b)) \\ & + f(b, a, c)[\varphi(b, a)(\psi(c, a)\psi(a, b) + \psi(b, a)\psi(c, b) - \psi(c, b)\psi(c, a))] \\ & + f(a, c, b)[\varphi(c, b)(\psi(b, a)\psi(c, a) - \psi(c, a)\psi(c, b) - \psi(c, b)\psi(b, a))] \end{aligned}$$

Sean f_1 , f_2 y f_3 los coeficientes de $f(a, b, c)$, $f(b, a, c)$ y $f(a, c, b)$, y

$$\alpha = rq^{-1} - q$$

$$\beta b = \alpha(r + \alpha\psi(b, b) - \varphi(b, b)^2 - \psi(b, b)^2)$$

$$\gamma b = \varphi(b, b)(2\alpha\psi(b, b) - \alpha^2)$$

Entonces

$$f_1 = \begin{cases} \beta b & c = b > a \\ -\beta b & c > b = a \\ 0 & c > b = a \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} \gamma b & c > b = a \\ \varphi(b, b)\psi(b, b)^2 & c = b = a \\ 0 & c = b = a \end{cases}$$

$$f_3 = \begin{cases} -\gamma b & c = b > a \\ -\varphi(b, b)\psi(b, b)^2 & c = b = a \\ 0 & c = b = a \end{cases}$$

Por tanto

$$\Delta f = 0 \text{ sii } \beta b = \gamma b$$

Pero empleando la igualdad

$$\psi(b, b) - \varphi(b, b) = -q$$

la demostración de $\beta b = \gamma b$ es inmediata.

Por otra parte la demostración de B.3 es inmediata de B.1.

Para concluir se define una *R*-matriz funcional R_φ que bajo ciertas condiciones sobre φ , coincide con el operador R_ω .

Sean V un A -módulo libre, $v_{i \leq m}$ una base de V , y φ_{ij} , ψ_{ij} las matrices con las propiedades

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}\varphi_{ji} &= 1 & i \neq j \\ \varphi_{ii} &= 0 & \forall i \end{aligned}$$

$$\psi_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ -q & i = j \\ q^{-1} - q & i > j \end{cases}$$

Sea $R_\varphi \in \mathbf{M}(V^{2\otimes}, V^{2\otimes})$ definido por

$$R_\varphi = \sum_{ij} \varphi_{ji} E_{ij}^{ji} + \psi_{ji} E_{ij}^{ij}$$

Corolario B.5 R_φ es un operador cuántico con

$$R_\varphi - R_\varphi^{-1} = q^{-1} - q.$$

Además, si $\varphi_{ij} = 1$ para $i \neq j$, entonces

$$R_\varphi = R_\omega.$$

Demostración. Es inmediata de B.2 y B.4.

Referencias

- [AB] A. A. BELAVIN, "*Discrete groups and integrability of quantum systems*", *Funkts. Anal.*, **14**, No 4, (1980), 18-26.
- [BD] A. A. BELAVIN AND V. G. DRINFEL'D, "*Solutions of the Classical Yang-Baxter Equation for simple Lie Algebras*", *Funct. Anal. Appl.* **16** (1983), 159-180.
- [D1] V. G. DRINFEL'D, "*Hopf Algebras and the quantum Yang-Baxter equation*", *Dokl. Akad. Nauk, SSSR*, **283** (1985), 1060-1064. English transl.: *Soviet Math. Dokl.* **32** (1985), 254-258.
- [D2] V. G. DRINFEL'D, "*Quantum groups*", *Proc. of ICM Berkeley* (1986). Providence, R. I. Vol. 1, (1987) 798-820.
- [EA] E. ARTIN, "*Theory of braids*", *Ann. Math.* **48** (1947), 101-126.
- [J1] M. JIMBO, "*Quantum R-matrix for the Generalized Toda System*", *Comm. Math. Phys.*, **102** (1986) 537-547.
- [J2] M. JIMBO, "*Introduction to the Yang-Baxter Equation*", *Advanced Series in Math. Phys.*, Vol. 9 111-134.
- [JB] J. S. BIRMAN, "*Braids, links, and mapping class groups*", Princeton Univ. Press. Princeton. N. J., and Univ. of Tokyo Press. Tokyo. 1974 (1975).
- [JC] J. CERF, "*Topologie des certains espaces de plongements*", *Bull. Soc. Math. France* **89**, (1961) 227-380.
- [JH] J. E. HUMPHREYS, "*Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*", Springer (1972).

- [JS] J. P. SERRE, *“Lie Algebras and Lie Groups”*, W. A. Benjamin (1965).
- [KR] K. REIDEMEISTER, *“Knot Theory”*, BSC Associates (1983).
- [RP] R. PALAIS, *“Local triviality of the restriction map for embeddings”*, Comment. Math. Helv. **34**, (1960) 305-312.
- [RT] N. RESHETIKHIN AND V. TURAEV, *“Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups”*, Comm. Math. Phys. **127**, (1990) 1-26.
- [T1] V. G. TURAEV, *“Operator Invariants of Tangles and R-matrices”*, Math. USSR Izvestiya Vol.35, (1990) No 2.
- [T2] V. G. TURAEV, *“Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds”*, de Gruyter Studies in Mathematics **18**.
- [T3] V. G. TURAEV, *“The Yang-Baxter Equation and Invariants of Links”*, Invent Math. **92** (1988), 527-553.
- [VB] V. V. BAZHANOV, *“Integrable quantum Systems and Classical Lie Algebras”*, Comm. Math. Phys., **113** (1987) 471-503.

Índice alfabético

- Algebra, 10
 - Clásica, 163
 - cubriente universal, 14
 - especial lineal, 10
 - excepcional, 163
 - general lineal, 10
 - Hopf, 11
 - Lie, 9
 - lineal, 10
 - nilpotente, 157
 - ortogonal, 10
 - ortogonal especial, 10
 - semisimple, 156
 - semitriangular, 32
 - simpléctica, 10
 - simple, 155
 - Turaev, 33
- Aplicación Morse, 62
- Automorfismo, 4
 - Coxeter, 86
 - Dynkin, 160
 - interno, 156
- Base, 24
- Bucle, 46
- Categoría, 3
 - cuántica, 29
 - de diagramas, 67
 - de marañas
 - normadas, 72
 - orientadas, 52
- de representaciones, 11
- Hecke, 128
- Kauffman, 140
- libre, 9
- monoidal, 17
- monoidal estricta, 18
- producto, 16
- Composición
 - de diagramas, 67
 - de marañas
 - normadas, 71
 - orientadas, 51
 - de morfismos, 4
- Conmutador, 155
- Cuantización, 94
- Cubierta, 125
- Derivación, 156
 - interna, 156
- Diagrama
 - básico, 66
 - Coxeter, 162
 - Dynkin, 160
 - identidad, 66
- Ecuación Yang-Baxter
 - clásica, 84
 - cuántica, 91

- Endomorfismo, 4
- Esquema, 161
 - compuesto, 161
 - simple, 161
- Estructura
 - cuántica, 29
 - Hopf, 11
 - tensorial, 17
- Evaluación, 7, 30
- Exponencial, 9
- Forma
 - Cartan, 158
 - normal, 25
 - extendida, 125
- Funtor
 - ubriente universal, 14
 - homogéneo, 19
 - Lie, 15
- Grupo
 - clásico, 7
 - cuántico, 37
 - especial lineal, 7
 - general lineal, 7
 - Lie, 6
 - lineal, 7
 - ortogonal, 7
 - especial, 7
 - simpléctico, 7
- Ideal, 155
- Índice Coxeter, 86
- Invariante
 - Jones-Conway, 130
 - Kuauuffman, 142
- Involución, 30
- Isomorfismo, 4
 - natural, 16
- Isotopía ambiental, 41-42
- Límite clásico, 93
 - L -palabra, 21
- Maraña
 - anidada, 126
 - básica
 - normada, 46
 - orientada, 45
 - Conway, 127
 - derivada, 139
 - identidad
 - normada, 46
 - orientada, 44
 - Kauffman, 138
 - normada, 43
 - orientada, 43
- Matriz Cartan, 160
- Módulo
 - libre, 8
 - proyectivo, 8
- Norma
 - de una variedad, 42
 - de una sucesión, 42
- Núcleo, 28
- Operador
 - completo, 100
 - cuántico, 98
 - nilpotente, 8
 - semisimple, 8
- Orientación
 - de una sucesión, 42

- Presentación
 - de una categoría, 24
- Producto
 - de diagramas, 67
 - de marañas
 - normadas, 74
 - orientadas, 55-56
 - de sucesiones
 - normadaas, 73
 - orientadas, 55
- Punto
 - crítico, 62, 78
 - doble, 62, 78
 - máximo, 61, 78
 - mínimo, 61, 78
 - nilpotente, 156
- Raíz, 159
 - simple, 159
- Rango
 - de un álgebra, 158
 - de una palabra, 21
- Relaciones básicas
 - de diagramas, 67
 - de marañas
 - normadas, 47
 - orientadas, 50
- Renglón, 28
- R -matriz funcional, 166
- Representación
 - de una categoría, 16
- Segmento, 125
- Sistema
 - de raíces, 159
 - de relaciones, 24
- Solución
 - clásica, 84
 - cuántica, 91
 - no degenerada, 85
 - semiclásica, 93
- Subálgebra
 - autonormal, 157
 - Cartan, 157
- Subcategoría, 5
- Subpalabra, 21
- Subvariedad normada, 42
- Sucesión
 - dual, 58
 - normada, 43
 - orientada, 43
- Torsión, 30
- Traslación, 6
- Trasposición, 7
- Variedad anidada, 41