

01170



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

Control de un Robot Industrial para
Escritura y Dibujo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro En Ingeniería

AREA: ELÉCTRICA CAMPO: CONTROL

P R E S E N T A:

Eduardo Pérez Camacho

ASESOR: DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ



m 340278

México, D.F. 2005



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Agustina Camacho,
Consuelo Camacho
y Daniel Camacho.

A todas las personas que lean este trabajo.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Pérez Camacho Eduardo
FECHA: 20/ Enero 2025
FIRMA: 

Agradecimientos

Quiero agradecer:

- A Jha por permitirme terminar este trabajo.
- A mi familia.
- A la UNAM por toda la educación y formación que me ha dado desde el bachillerato.
- Al CONACYT por proporcionarme una beca para cursar mis estudios de maestría.
- A todos mis amigos, compañeros y profesores de la maestría, por apoyarme y confiar en mi.

Un agradecimiento especial para el Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez por su confianza y apoyo.

Desde donde se posan las águilas,
desde donde se yerguen los tigres,
el Sol es invocado.

Como un escudo que baja,
así se va poniendo el Sol,
En México está cayendo la noche,
la guerra moderada por todas partes,
¡oh Dador de la vida!
Se acerca la guerra.

Orgullosa de sí misma
se levanta la ciudad de México-Tenochtitlan.
Aquí nadie teme la muerte en la guerra.

Ésta es nuestra gloria.
Éste es tu mandato.
¡oh Dador de la vida!
Tenedlo presente, oh príncipes;
no lo olvidéis.

¿Quién podrá sitiar a Tenochtitlan?
¿Quién podrá conmover los cimientos del cielo...?

Con nuestras flechas,
con nuestros escudos,
está existiendo la ciudad,
¡México-Tenochtitlan subsiste!

Manuscrito de *Cantares Mexicanos*,
Biblioteca Nacional de México

Índice general

1. Introducción	1
2. Efectos dinámicos en tareas de contacto y modelo dinámico de un manipulador	7
2.1. Problemas dinámicos en tareas de contacto	8
2.2. Modelo Dinámico de un manipulador	12
2.3. Modelo dinámico de un robot en espacio restringido y fricción seca . .	14
2.3.1. Propiedades del modelo dinámico del manipulador	16
2.4. Dinámica de los actuadores	17
3. Conceptos de control de contacto en robots manipuladores	21
3.1. Clasificación de conceptos de robótica para control de movimiento restringido	23
3.2. Métodos de compliance activos	26
3.2.1. Control híbrido posición/fuerza	26
3.2.2. Control de fuerza explícito	27
4. Algoritmo de control	29
4.1. Introducción	29
4.2. Controlador con compensación de fricción y estimación de velocidad . .	30
4.2.1. Ley de control	31
4.2.2. Estimador de velocidad	35
4.2.3. Prueba de convergencia	37

5. Experimentos y resultados	41
5.1. Condiciones del experimento	42
5.2. Descripción de los experimentos	43
5.3. Resultados experimentales	45
5.3.1. Rectángulo	45
5.3.2. Ovoide	55
5.3.3. Manuscrito	64
5.4. Discusión	73
6. Conclusiones	75
A. Demostración del Lema 4.2.1	77
B. Demostración del Teorema 4.2.1	85
C. Equipo Experimental	93
C.1. Partes que componen del equipo	93
C.2. Interfaz	96

Índice de cuadros

5.1. Índices de desempeño	74
-------------------------------------	----

Índice de figuras

1.1. Relación antropomórfica	2
1.2. Movimiento libre	3
1.3. Interacción con el entorno o movimiento restringido	4
2.1. Cadena cinemática abierta rígida	8
2.2. Entorno restringido	9
2.3. Efectos de fricción	10
2.4. Eslabones flexibles	10
2.5. Efectos de deformación en el entorno y el robot	11
2.6. Efectos de impacto entre el entorno y el robot	12
2.7. Control híbrido bajo una restricción geométrica	15
2.8. Motor de corriente directa	18
3.1. Clasificación básica de los métodos para control de movimiento restringido	25
3.2. Clasificación de métodos pasivos	25
3.3. Clasificación de métodos activos	26
3.4. Control híbrido posición/fuerza explícito	27
5.1. Robot A255 equipado.	42
5.2. Ejemplo de un trazo con el ratón	44
5.3. Rectángulo. Dibujos resultantes a) Valor real calculado por cinemática directa (-) y trazo deseado (- - -). b) Dibujo hecho por el robot.	46
5.4. Rectángulo. Trayectorias cartesianas, - - deseada vs - real.	47
5.5. Rectángulo. Errores cartesianos.	48

5.6. Rectángulo. Trayectorias articulares, - - deseada vs - real.	49
5.7. Rectángulo. Errores articulares.	50
5.8. Rectángulo. Fuerza , - - deseada vs - real.	51
5.9. Rectángulo. Errores de fuerza.	52
5.10. Rectángulo. Errores de observación.	53
5.11. Rectángulo. Voltaje de control en las articulaciones.	54
5.12. Ovoide. Dibujos resultantes a) Valor real calculado por cinemática directa (-) y trazo deseado (- - -). b) Dibujo hecho por el robot.	55
5.13. Ovoide. Trayectorias cartesianas, - - deseada vs - real.	56
5.14. Ovoide. Errores cartesianos.	57
5.15. Ovoide. Trayectorias articulares, - - deseada vs - real.	58
5.16. Ovoide. Errores articulares.	59
5.17. Ovoide. Fuerza , - - deseada vs - real.	60
5.18. Ovoide. Errores de fuerza.	61
5.19. Ovoide. Errores de observación.	62
5.20. Ovoide. Voltaje de control en las articulaciones.	63
5.21. Manuscrito. Dibujos resultantes a) Valor real calculado por cinemática directa (-) y trazo deseado (- - -). b) Dibujo hecho por el robot.	64
5.22. Manuscrito. Trayectorias cartesianas, - - deseada vs - real.	65
5.23. Manuscrito. Errores cartesianos.	66
5.24. Manuscrito. Trayectorias articulares, - - deseada vs - real.	67
5.25. Manuscrito. Errores articulares.	68
5.26. Manuscrito. Fuerza , - - deseada vs - real.	69
5.27. Manuscrito. Errores de fuerza.	70
5.28. Manuscrito. Errores de observación.	71
5.29. Manuscrito. Voltaje de control en las articulaciones.	72
C.1. Diseño de interfaz para control del Robot A255.	98

Capítulo 1

Introducción

La robótica es un campo interdisciplinario en el que se involucran disciplinas tales como física, diseño mecánico, electrónica, teoría de control, sensores, visión, procesamiento de señales, programación computacional, inteligencia artificial y manufactura. Además se puede dividir en cinco grandes áreas (Lewis *et al.* 1993): control de movimiento, sensores y visión, planeación y coordinación, inteligencia artificial y toma de decisiones, e interfaces hombre-maquina. Las dos vertientes que figuran como piezas claves de este campo son los brazos manipuladores y los robots móviles. En el presente trabajo sólo se hablará de los primeros, y se emplearán como sinónimos las palabras manipulador y robot.

El control automático ha aportado también valiosas contribuciones al avance de la robótica. El más simple y común controlador es del tipo Proporcional Integral Derivativo (PID). En general se diseña suponiendo que los robots se modelan matemáticamente por medio de ecuaciones dinámicas independientes para cada articulación; esto puede repercutir en un limitado desempeño del algoritmo de control, debido a que son caracterizados por ecuaciones dinámicas acopladas. Para mejorar el rendimiento en aplicaciones generales ha sido necesario introducir nuevos controladores basados en el conocimiento preciso del modelo dinámico, así como de sus parámetros.

Desde la aparición del primer robot industrial en 1958, construido por la compañía *Unimation*, se ha planteado una relación antropomórfica, como se muestra en la Figura 1.1. Su mayor uso se ubica en la industria automotriz, que es la máxima consumidora de

este equipo. Las aplicaciones son comúnmente tareas repetitivas y de precisión, así como actividades peligrosas para operadores humanos. Las principales ventajas planteadas para el uso de estas máquinas son la reducción de costos de producción, el incremento de la precisión, calidad y productividad y mayor flexibilidad.

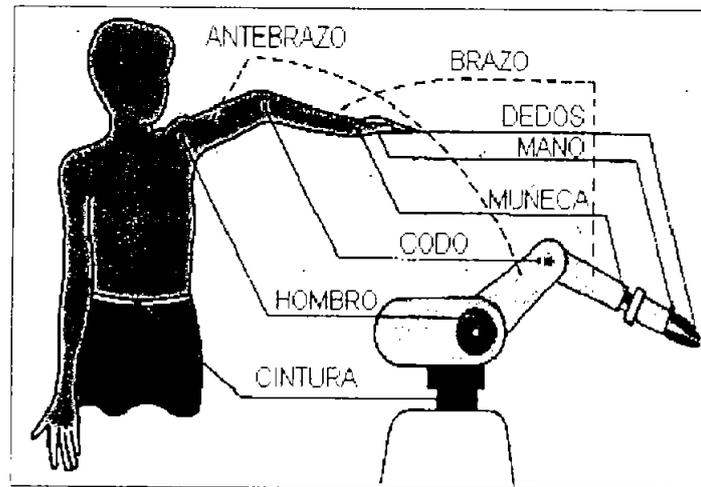


Figura 1.1: Relación antropomórfica

La mayoría de los manipuladores son diseñados para realizar tareas en las cuales se mueven libremente dentro de su espacio de trabajo, sin interactuar con el entorno (Figura 1.2). Algunos ejemplos son el pintado, traslado de un objeto de un punto a otro, corte con rayo láser, etcétera. Al problema de controlar al robot para este tipo de tareas se le denomina control de movimiento.

Existe otro tipo de aplicaciones para los robots que involucran la interacción con el entorno (tareas de contacto). Aplicaciones como esta pueden ser el pulido de superficies, desbastado de materiales, ensambles de alta precisión, etcétera, véase la Figura 1.3. El problema de control para estos trabajos puede ser colocado en alguna de las siguientes clasificaciones: control de fuerza, de impedancia, híbrido posición/fuerza.

Desde hace dos décadas, el campo de aplicación de los brazos manipuladores ha empezado a salir de la industria e iniciado su participación en algunas actividades cotidianas para una persona. Un caso específico es la escritura y dibujo, que es el tema de este trabajo. Este es un tópico que no está muy desarrollado, ya que para tener un buen

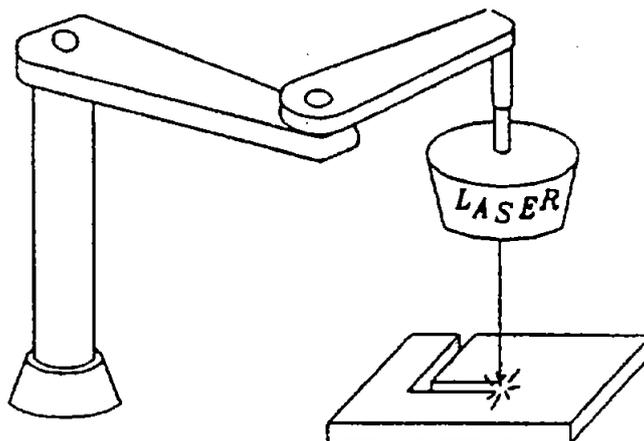


Figura 1.2: Movimiento libre

desempeño se necesita considerar tanto en el modelo del sistema como en el controlador los efectos dinámicos que se presentan al interactuar el manipulador con el entorno. King *et al.* (1984) desarrollaron un robot interactivo, emplearon el Rhino XR-2, para ayudar a personas cuyas habilidades artísticas y expresivas son limitadas, porque no tienen la capacidad motora para sostener un lápiz o plumón; la tarea se llevó a cabo con una palanca de mando (joystick). En este caso se utilizaron dos interfaces gráficas hombre-máquina, una para el control, que era del tipo encendido-apagado, manejado por interruptores de presión ("push-buttons"), y otra, en la cual se podía seleccionar entre 4 diferentes colores. En Masui y Terano (1994) se sugiere un manipulador para escribir kanjis (letras chinas); el sistema es maestro esclavo, es decir, el robot sigue el movimiento de un calígrafo. Para esto se utilizó un pincel como herramienta. El tipo de control utilizado fue de lógica difusa. Por otro lado, la tarea de escritura también se ha utilizado para probar otras teorías sobre controladores. Waarsing *et al.* (2003) muestran que el control basado en el comportamiento del humano (apoyado en resultados de neurociencia), combinado con un control de impedancia y un PID, resuelve el problema de definir comportamientos de una forma más directa, además de poder realizar otras tareas cotidianas para una persona. Esto se implementó en un manipulador de la marca *CRS Robotics*. En ninguno de los casos arriba mencionados se presentan resultados

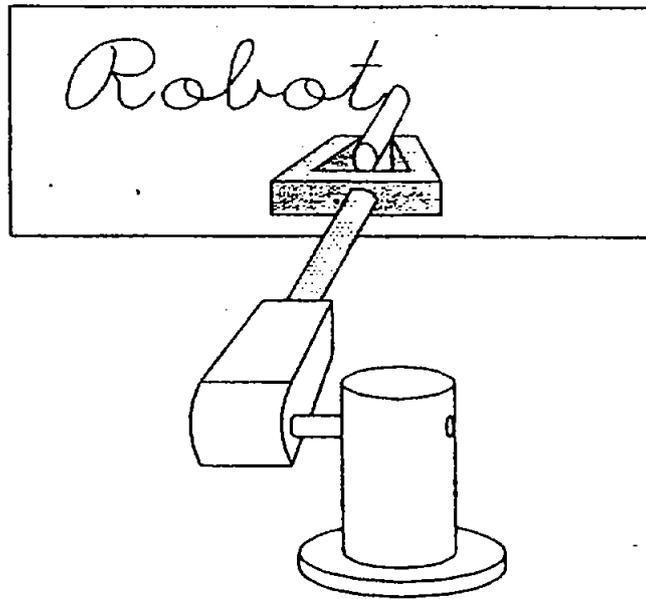


Figura 1.3: Interacción con el entorno o movimiento restringido

cuantitativos, sólo en el último se muestran resultados gráficos de lo escrito. En los dos últimos se sienten satisfechos con la legibilidad de la escritura. También se han presentado resultados de simulación en Potkonjak *et al.* (1999), donde muestran las fuerzas que se presentan los ejes cartesianos y la de fricción. Todos estos resultados en forma gráfica. Cabe mencionar que para los casos citados se consideraron robots no redundantes, sin embargo, esta tarea también se ha utilizado en robots redundantes. Potkonjak *et al.* (1998) presentan el análisis de movimiento utilizando el principio de posición distribuida (DP), el cual separa la tarea en movimientos suaves-globales y rápidos-locales, con lo que se obtiene una sola solución para la cinemática inversa. Mientras que en Potkonjak *et al.* (2001a) y Potkonjak *et al.* (2001b) se presenta la descripción matemática del DP y la fatiga virtual, esta última sucede cuando se escribe por mucho tiempo en los músculos del brazo de una persona, pero que ellos hacen una analogía con los motores de corriente directa (saturación), en estas últimas citas los resultados analizados son la legibilidad y la inclinación que se debe tener en la pluma al escribir.

Todo lo anterior genera la motivación de este trabajo, principalmente mostrar que

los brazos manipuladores pueden ser utilizados en tareas que una persona desarrolla cotidianamente, en específico escritura y dibujo. Como se puede observar es un campo que está en desarrollo, en el que se han utilizado pocos algoritmos de control (en algunas citas son del tipo PID y de lógica difusa, mientras que en otros no se menciona); por otro lado, la forma de designar las trayectorias deseadas, las cuales son casi siempre preprogramadas. Motivo por el cual en este trabajo de tesis se propone la utilización de una ley de control híbrido posición/fuerza explícito con compensación de la fricción que se tiene al interactuar el efector final con su entorno, además de un observador de velocidad, ya que no se dispone del equipo de medición. También se genera una interfaz gráfica que permita al usuario desarrollar o generar las trayectorias que se deseen, por medio del ratón de la computadora.

La ley de control propuesta se implementó en un robot industrial de cinco grados de libertad, de los cuales sólo se usaron los tres primeros, desarrollando algunos trazos sobre una hoja de papel. Los resultados que se obtuvieron son buenos para la cuestión de seguimiento de posición y observación, obteniendo errores pequeños. Mientras, que por otro lado, los resultados en el seguimiento de fuerza no fueron los deseados, obteniéndose errores grandes (50%). Pero en cuanto a la tarea de contacto se puede considerar un éxito al implementar un control de fuerza, ya que los trazos resultantes son legibles. Se pudieron realizar los trazos de una forma no preprogramada, además se utilizaron polinomios de quinto grado para generar las trayectorias deseadas, gracias a la interfaz que se diseñó.

Este trabajo se encuentra ordenado de la siguiente forma. En el Capítulo 2 se presentan los efectos dinámicos que aparecen en tareas de contacto en robótica, el modelo matemático del robot y algunas de las propiedades que cumple. En el Capítulo 3 se mencionan los conceptos de control de contacto, es decir, técnicas de control para este tipo de situaciones. En el Capítulo 4 se tiene el algoritmo de control propuesto. La implementación y sus resultados se muestran en el Capítulo 5. Finalmente, en el Capítulo 6 se indican las conclusiones que se obtuvieron y el trabajo futuro.

Capítulo 2

Efectos dinámicos en tareas de contacto y modelo dinámico de un manipulador

Introducción

Los problemas de contacto en dinámica de robots representan un campo muy complejo de investigación. Este tema relaciona diferentes áreas de teoría y aplicación de mecánica, electromagnetismo, teoría de control, etcétera. Desde el punto de vista de la mecánica se tiene que considerar el problema de multicuerpos dinámicos, elasticidad, fricción e impacto. Por el otro lado, la teoría obtenida para soportar los problemas de contacto en los robots puede ser generalizada, pudiéndose así aplicar a problemas no robóticos (Vukobratović y Potkonjak 1999).

Es bien conocido que algunas tareas de robots incluyen alguna clase de contacto con el entorno. Algunas de éstas son simples (soldadura de punto o spot-welding), pero muchas son más complejas (ensamblaje). El control de robots en este tipo de tareas no puede ser realizado con sólo posicionamiento. La precisión de la fuerza de contacto es de gran importancia para tener una operación satisfactoria. Esto lleva a problemas de control de fuerza y todavía no se tienen respuestas definitivas.

Los modelos matemáticos describen la dinámica del sistema para examinar dife-

rentes efectos relevantes para el control. Esto lleva a algoritmos de control más precisos. Los modelos matemáticos son también creados para elaborar rutinas de simulación. El siguiente punto importante del análisis dinámico está en la posibilidad de diseñar robots o algunas herramientas de robot para ayudar en requerimientos específicos de tareas de contacto *e.g.* diseño de redundancias, *compliance* (este concepto se define en el capítulo siguiente), etcétera.

En este capítulo se presentan los aspectos dinámicos que se tienen en tareas de contacto de robots industriales (Vukobratović y Potkonjak 1999). También se presentan los modelos dinámicos de un robot de articulaciones de revolución, así como el modelo considerando interacción con el entorno y la dinámica de los actuadores.

2.1. Problemas dinámicos en tareas de contacto

El propósito de esta sección es presentar un resumen de los problemas en los cuales son significativas la dinámicas de contacto del robot e indicar las fuentes de estos efectos dinámicos particulares.

La primera investigación en dinámica de robots trata con la representación de manipuladores por medio de cadenas cinemáticas abiertas. Las articulaciones y los elementos de transmisión (ejes, engranes, cinturones, etc.), fueron considerados infinitamente rígidos (Figura 2.1).

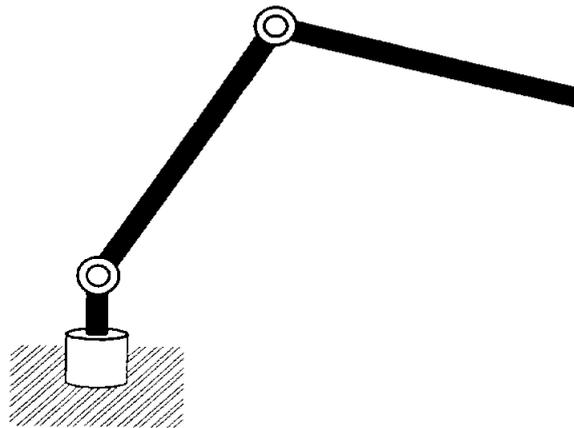


Figura 2.1: Cadena cinemática abierta rígida

Cuando la idea de las tareas de contacto fue introducida por primera vez (Potkonjak y Vukobratović 1986, Vukobratović y Potkonjak 1986); el entorno del robot fue considerado en la forma de restricciones geométricas, como se muestra en la Figura 2.2. Los casos estacionarios y no estacionarios fueron discutidos mediante restricciones holónomicas (estáticas, es decir, son invariantes respecto al tiempo) y reholónomicas (dinámicas, varían con respecto al tiempo). Las restricciones impuestas en el movimiento del efector final del robot dan como resultado fuerzas de reacción. Los modelos dinámicos fueron deducidos para restricciones arbitrarias, disminuyendo desde uno hasta seis grados de libertad al robot. Todos los elementos del manipulador fueron considerados rígidos. Los modelos obtenidos permiten la solución de movimientos junto con el cálculo de las fuerza de contacto.

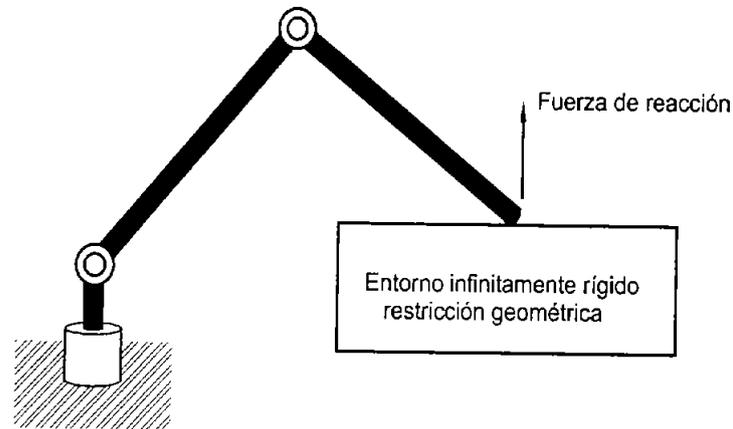


Figura 2.2: Entorno restringido

El problema de fricción entre el robot y su entorno fue introducido por Vukobratović y Potkonjak (1986). Esto se puede observar en la Figura 2.3. El caso de una colisión también fue discutido, así como la solución a impactos no elásticos. Algunos problemas prácticos fueron considerados, como las tareas de escritura y de ensamblaje.

Después de resolver la dinámica de robots rígidos, la atención de la investigación se centró en los efectos elásticos. El problema de eslabones flexibles fue considerado primero (ver la Figura 2.4). La siguiente fuente de efectos elásticos que se consideró fue la transmisión del torque. Sin embargo, estos pueden ser incluidos en modelos

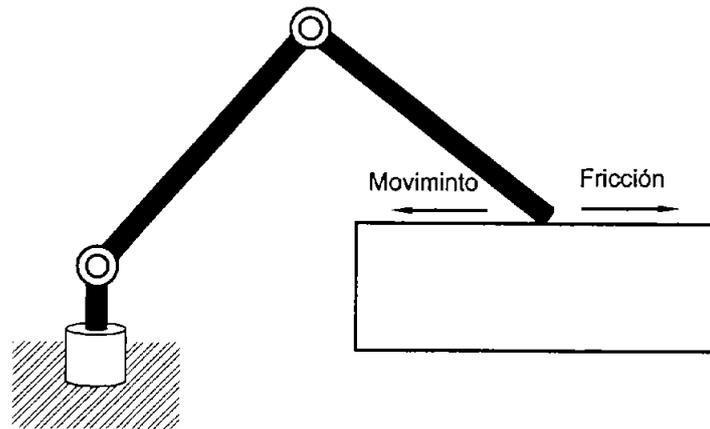


Figura 2.3: Efectos de fricción

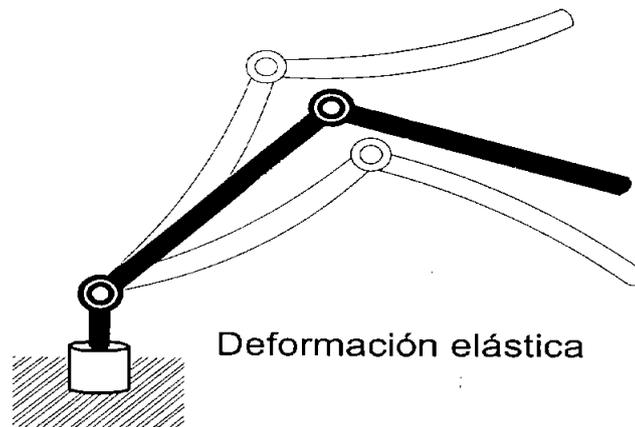


Figura 2.4: Eslabones flexibles

existentes de un sistema rígido en forma de grados de libertad pasivos con rigidez y amortiguamiento. Un problema similar puede aparecer en el lado del entorno, por lo que un modelo dinámico del mismo es necesario.

Los efectos de deformación presentados en la vecindad del punto de contacto son los más interesantes. Dos cuerpos en contacto producen una fuerza, el uno en el otro; esta depende estrechamente de las propiedades de elasticidad. Para modelos de contacto exactos, la elastodinámica tiene que ser tomada en cuenta. El problema del contacto entre un robot y su entorno es de especial interés. En algunos trabajos presentados anteriormente, la deformación fue solamente considerada en el lado del entorno. El eslabón terminal o efector final de un robot fue asumido no deformable. Esta consi-

deración puede ser justificada para algunas aplicaciones industriales, debido a que las herramientas generalmente son más duras que los objetos sobre los que está actuando. El análisis de deformaciones fue necesario para poder desarrollar un control satisfactorio de la fuerza de contacto. Una aproximación más general puede requerir el análisis de deformación de ambos lados, es decir, el manipulador y su entorno. En la Figura 2.5 se muestran estos efectos.

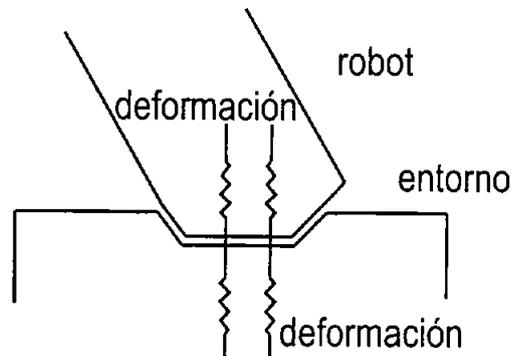


Figura 2.5: Efectos de deformación en el entorno y el robot

En aplicaciones, tales como el colocar piezas que tienen un agujero, en un tubo o aguja (*peg-in-hole*). Regularmente el material del tubo y el de la pieza con el agujero es el mismo, y es probable que ambos se deformen al contacto entre ellas. Algunos esfuerzos en el campo de la deformación han sido hechos con el objetivo de crear estrategias de control para este tipo de tareas. El problema principal en este tipo de controladores está en la necesidad de regular simultáneamente el movimiento y la fuerza que se ejerce sobre el entorno. En los primeros trabajos sobre este tema, la dinámica del robot fue considerada como un cuerpo rígido y la deformación en la zona de contacto fue tratada por medio de rigidez y amortiguamiento, donde un resorte y amortiguador sin masa fueron considerados. No se consideró ninguna dinámica del entorno. Para solucionar este problema se propuso una ley de control de impedancia, la cual se basa en el concepto de que el controlador puede ser usado para regular el comportamiento dinámico entre el movimiento del manipulador y la fuerza ejercida en el entorno (Lewis *et al.* 1993), en lugar de considerar el problema de control de posición y fuerza por separado, además, solamente emplea el control de posición, y diferentes

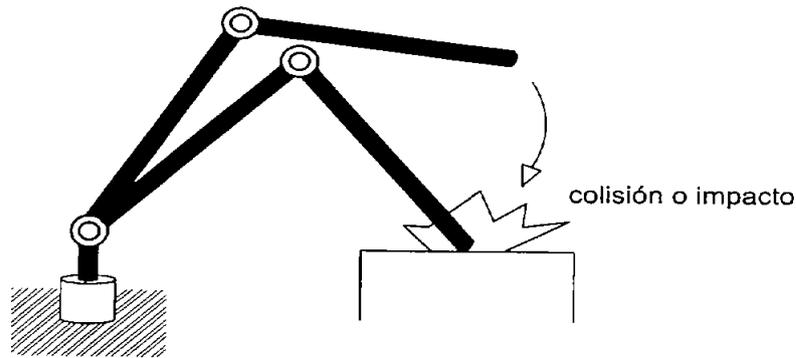


Figura 2.6: Efectos de impacto entre el entorno y el robot

relaciones entre las fuerzas actuantes y la posición del manipulador.

El impacto es un efecto presente en la vida cotidiana, ver la Figura 2.6. A fin de lograr una mejor visión, la colisión puede ser modelada a través de elastodinámica.

Se ha visto que existe una gran variedad de efectos dinámicos que hay que considerar en las tareas de contacto. Por otro lado, cuando se requiere simular el comportamiento del sistema en una tarea, al agregar estos aumenta su complejidad y a su vez en la experimentación, pero esto permite que se obtengan modelos dinámicos más exactos y por consiguiente leyes de control para elevar el desempeño en la tarea de contacto. En el presente trabajo sólo se considera el efecto de fricción.

2.2. Modelo Dinámico de un manipulador

El modelo dinámico de un robot manipulador consiste en una relación entre las fuerzas ejercidas en la estructura y la posición de las articulaciones. Puede ser derivado usando la formulación de Lagrange (Fu *et al.* 1989). El modelo dinámico para un robot manipulador de n grados de libertad y articulaciones de revolución está dado por (Spong y Vidyasagar 1989):

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \varepsilon, \quad (2.2.1)$$

donde q, \dot{q}, \ddot{q} representan la posición, velocidad y aceleración respectivamente de las coordenadas articulares, $H(q)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ denominada la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es un vector de $n \times 1$ de fuerzas centrífugas y

de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es un vector de $n \times 1$ de la fuerza gravitacional y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es un vector de $n \times 1$ de par generalizado, llamado también vector de fuerzas externas, generalmente los pares y fuerzas aplicados por los actuadores en las articulaciones. Este modelo es para movimientos no restringidos.

Con respecto al torque en las articulaciones, cada una es manejada por un actuador (un motor de corriente directa). Las siguientes contribuciones de torque aparecen en cada una de ellas (Siciliano y Villani 1999)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_f + \boldsymbol{\tau}_e \quad (2.2.2)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el torque que mueve a la articulación, $\boldsymbol{\tau}_f$ es el torque debido a la fricción y $\boldsymbol{\tau}_e$ es el torque causado por la fuerza y el momento ejercidos por el efector final cuando entra en contacto con el entorno.

Los efectos de fricción en sistemas mecánicos son fenómenos complicados. Tradicionalmente, los pares y fuerzas de fricción son sólo modelados en forma aproximada. Estas aproximaciones son caracterizadas por un vector $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ que depende sólo de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$. Los efectos de fricción son locales. Una característica importante de las fuerzas de fricción es que éstas son disipativas, esto es

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f} > 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}} \neq 0. \quad (2.2.3)$$

Una forma comúnmente dada para $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$ es (Kelly 2003)

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}_{m1} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{m2} \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.2.4)$$

donde \mathbf{F}_{m1} es una matriz de $n \times n$ diagonal definida positiva y \mathbf{F}_{m2} es una matriz de $n \times n$ diagonal semidefinida positiva. Para propósitos de este trabajo, sólo se considera el primer término de (2.2.4) el cual se denota como sigue

$$\boldsymbol{\tau}_f = \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.2.5)$$

donde $\mathbf{D} = \mathbf{F}_{m1}$.

Sea $\mathbf{F} = (f_x, f_y, f_z)^T$ el vector de fuerzas expresado en el sistema de coordenadas cartesianas de la herramienta. Donde f_x, f_y, f_z son las componentes de fuerzas para cada

uno de los ejes. Sea $\delta \mathbf{X}$ el desplazamiento virtual del efector final debido a la fuerza \mathbf{F} . Además, sea $\delta \mathbf{q}$ el desplazamiento virtual de las articulaciones, recordando que $\boldsymbol{\tau}_e$ es el vector de torques en las articulaciones (debido a las fuerzas ejercidas por el efector final). Los desplazamientos son relacionados por medio del Jacobiano, $\mathbf{J}(\mathbf{q})$, del manipulador de acuerdo con (Spong y Vidyasagar 1989):

$$\delta \mathbf{X} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\delta \mathbf{q}, \quad (2.2.6)$$

el trabajo virtual del sistema es

$$\delta \mathbf{W} = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{X} - \boldsymbol{\tau}_e^T \delta \mathbf{q}. \quad (2.2.7)$$

Sustituyendo (2.2.6) en (2.2.7) se tiene

$$\delta \mathbf{W} = (\mathbf{F}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau}_e^T) \delta \mathbf{q}. \quad (2.2.8)$$

Nótese que si (2.2.8) es igual a cero el manipulador está en equilibrio. Ya que las coordenadas generalizadas, \mathbf{q} , son independientes se tiene la igualdad

$$\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{F}. \quad (2.2.9)$$

En otras palabras las fuerzas del efector final se relacionan con los torques en las articulaciones por la transpuesta del Jacobiano del manipulador.

De (2.2.1), (2.2.2), (2.2.5), y (2.2.9) el modelo puede ser escrito en la forma

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}. \quad (2.2.10)$$

Esta última ecuación se define como el modelo dinámico de un robot con fricción viscosa en las articulaciones y en movimiento restringido.

2.3. Modelo dinámico de un robot en espacio restringido y fricción seca

En esta sección se desarrolla el modelo dinámico de un robot considerando que se encuentra en movimiento restringido y el efecto de fricción que se genera entre el efector final y la restricción o superficie de contacto.

Considérese un manipulador con n grados de libertad y m restricciones derivadas del contacto con el entorno, donde $n > m$. Supóngase que el efector final del manipulador está en contacto con una superficie, como se muestra en la Figura 2.7.

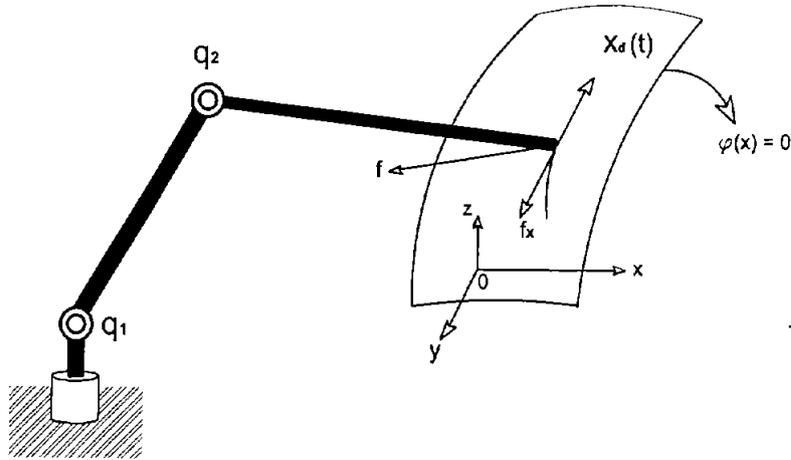


Figura 2.7: Control híbrido bajo una restricción geométrica

La superficie es descrita por una función $\varphi(\mathbf{x}) = 0$, donde $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ denotan las coordenadas cartesianas (coordenadas de la tarea), fijas en el sistema coordenado inercial, es decir, en el sistema coordenado de la base del robot. La fuerza de contacto surge en la dirección del vector normal a la superficie en el punto de contacto, mientras que una fuerza de fricción surge en la dirección de $\dot{\mathbf{x}}$ entre el plumón y la superficie de contacto. Entonces, la dinámica del robot es descrita en términos de las coordenadas articulares de la siguiente forma (Arimoto *et al.* 1993):

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}, \quad (2.3.1)$$

donde el significado o representación de varios de los términos de esta ecuación ya se comentaron en la Sección 2.2, restando sólo por mencionar el significado de los dos últimos términos del lado derecho de la igualdad. $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de multiplicadores de Lagrange (físicamente representa la fuerza aplicada en el punto de contacto). $\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) = \nabla\varphi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se asume que es de rango completo, ya que se considera que todas las restricciones son independientes. $\nabla\varphi(\mathbf{q})$ representa el vector gradiente (o la matriz Jacobiana) de la superficie del entorno (objeto) $\varphi \in \mathbb{R}^m$ que mapea un vector

sobre el plano normal al plano tangente que surge en el punto de contacto descrito por

$$\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (2.3.2)$$

donde $\varphi(\mathbf{q}) = \varphi(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^m$. Esto significa que el robot está en contacto con la superficie y el ambiente es modelado por la restricción (2.3.2). Cabe hacer notar que la ecuación (2.3.2) significa que están siendo consideradas restricciones homogéneas (Parra-Vega *et al.* 2001). $\mathbf{J}_x(\mathbf{q}) = \nabla \mathbf{x}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ denota la matriz Jacobiana de \mathbf{x} en \mathbf{q} . $f_x(\cdot) \in \mathbb{R}$ y es una función positiva. Nótese que de (2.2.10) y (2.3.1) se tiene que $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F} = \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\lambda$.

2.3.1. Propiedades del modelo dinámico del manipulador

En esta sección varias propiedades relacionadas con el modelo (2.3.1) se enuncian.

Se denota el valor característico más grande (pequeño) de una matriz por $\lambda_{\max}(\cdot)$ ($\lambda_{\min}(\cdot)$). La norma de un vector \mathbf{a} de $n \times 1$ está dada por $\|\mathbf{a}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$, mientras que la norma de una matriz \mathbf{A} de $m \times n$ es la correspondiente norma inducida $\|\mathbf{A}\| \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$. Puesto que se están considerando articulaciones de revolución, las siguientes propiedades pueden ser establecidas (Liu *et al.* 1997, Artega Pérez 1998, Parra-Vega *et al.* 2001):

Propiedad 2.3.1 $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ satisface $\lambda_h \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{x} \leq \lambda_H \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, donde $\lambda_h \triangleq \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{H})$, $\lambda_H \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{H})$, y $0 < \lambda_h \leq \lambda_H < \infty$. \triangle

Propiedad 2.3.2 La matriz $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})$ satisface:

$$0 < \sigma_h \leq \|\mathbf{H}(\mathbf{q})\| \leq \sigma_H < \infty$$

$$\sigma_h = \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}^{-1}(\mathbf{H}(\mathbf{q})) \quad \sigma_H = \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}^{-1}(\mathbf{H}(\mathbf{q})). \quad \triangle$$

Propiedad 2.3.3 Con una definición apropiada de $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica. \triangle

Propiedad 2.3.4 *El vector $C(q, x)y$ satisface $C(q, x)y = C(q, y)x \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. \triangle*

Propiedad 2.3.5 *Se satisface $\|C(q, x)\| \leq k_{ci}\|x\|$ with $0 < k_{ci} < \infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$. \triangle*

Propiedad 2.3.6 *El vector \dot{q} puede ser escrito como*

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \dot{q} + (J_\varphi^+ J_\varphi \dot{q} - J_\varphi^+ J_\varphi \dot{q}) \\ &= (I_{n \times n} - J_\varphi^+ J_\varphi) \dot{q} + J_\varphi^+ J_\varphi \dot{q} \\ &\triangleq Q(q) \dot{q} + J_\varphi^+(q) \dot{p},\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

donde $J_\varphi^+ = J_\varphi^T (J_\varphi J_\varphi^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la pseudoinversa de Penrose y $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisface $\text{rank}(Q) = n - m$. Estas dos matrices son ortogonales, i.e. $QJ_\varphi^+ = O$ (y $QJ_\varphi^T = O$). $\dot{p} \triangleq J_\varphi \dot{q} \in \mathbb{R}^m$ es la restricción de velocidad. Además, en vista de la restricción (2.3.2) se cumple

$$\dot{p} = 0 \quad \text{y} \quad p = \int_0^t J_\varphi \dot{q} d\vartheta = 0.\tag{2.3.4}$$

Ya que están siendo consideradas restricciones homogéneas, también se satisface, en vista de (2.3.2), que

$$\dot{p} = 0 \quad \text{y} \quad p = 0,\tag{2.3.5}$$

p es la restricción de posición. \triangle

2.4. Dinámica de los actuadores

En un robot, el vector de pares τ en la ecuación (2.2.10) es suministrado por actuadores, que tradicionalmente son de tipo electromecánico, hidráulico o neumático. De esta forma, el par de entrada τ está íntimamente relacionado con la dinámica de los actuadores. La entrada puede ser un voltaje o corriente para el caso de los actuadores electromecánicos, y flujo o presión de aceite para los hidráulicos. En este trabajo se

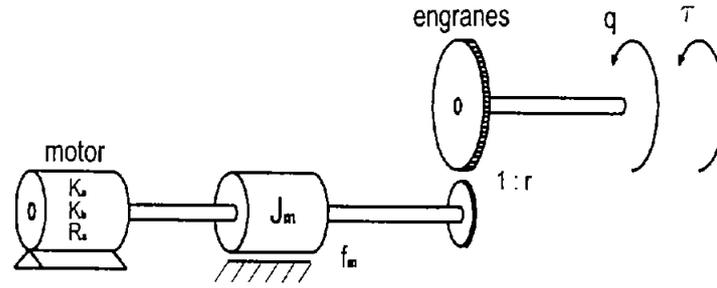


Figura 2.8: Motor de corriente directa

consideran los motores de corriente directa CD, como el que se muestra en la Figura 2.8

donde

- J_m inercia del rotor [$\text{Kg}\cdot\text{m}^2$]
- K_a constante motor-par [$\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}$]
- R_a resistencia de armadura [Ω]
- K_b constante de contra reacción electromotriz [$\text{V}\cdot\text{s}/\text{rad}$]
- f_m coeficiente del rotor con sus soportes [$\text{N}\cdot\text{m}$]
- τ par neto aplicado después de los engranes sobre el eje de la carga [$\text{N}\cdot\text{m}$]
- q posición angular del eje de carga [rad]
- r relación de reducción de los engranes (en general $r \gg 1$)
- v voltaje de armadura [V].

Un modelo dinámico lineal simplificado de un motor de CD con inductancia de armadura despreciable (Figura 2.8), tiene por ecuación (Kelly 2003),

$$J_m \ddot{q} + \left(f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right) \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v. \quad (2.4.1)$$

La ecuación 2.4.1 se puede representar en forma matricial como:

$$D_j \ddot{q} + D_f \dot{q} + D_n \tau = D_k v, \quad (2.4.2)$$

donde las matrices D_j , D_f , D_n y D_k son diagonales con elementos J_m , $f_m + \frac{K_a K_b}{R_a}$, $\frac{1}{r^2}$ y $\frac{K_a}{r R_a}$ respectivamente. El modelo dinámico completo de un manipulador, considerando fricción en las articulaciones y cuyos actuadores se localizan en las articulaciones, se

obtiene sustituyendo τ de (2.4.2) por ε en (2.2.1)

$$(H(q) + D_j)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + (D + D_f)\dot{q} + g(q) = D_n^{-1}D_k v. \quad (2.4.3)$$

Para la ecuación (2.4.3), las propiedades mencionadas en la sección anterior se siguen satisfaciendo.

Capítulo 3

Conceptos de control de contacto en robots manipuladores

Introducción

La interacción entre un robot manipulador y su entorno se puede dividir en dos clases: la primera, concierne al movimiento libre en el espacio de trabajo; es decir, no restringido, sin ninguna influencia relevante ejercida en el manipulador por su entorno. En este caso la dinámica del robot tiene un papel muy importante en su desempeño. Un número relativamente limitado de tareas para robots más frecuentemente utilizadas en la práctica, como pueden ser: tomar y colocar, pintar por aspersion, pegar o soldar pertenecen a este grupo. La segunda se refiere a tareas de contacto, es decir, movimiento restringido, que surge debido a la necesidad de tareas más complejas para los robots, entre las que se pueden encontrar ensamblado y maquinado. Para llevarlas a cabo, se requiere que el manipulador sea acoplado mecánicamente a otros objetos. Estas tareas son consideradas como de contacto esencial, ya que incluyen fases donde el efector final del robot debe estar en contacto continuo con los objetos en su entorno, produciendo ciertas fuerzas sobre ellos, y moverse a lo largo de su superficie. Inherentemente, cada tarea de manipulación requiere del contacto con el objeto que está siendo manipulado.

Los manipuladores son mecánicamente muy rígidos por diseño, pero la rigidez es necesaria para lograr un posicionamiento lo más exacto posible, y estabilidad en su

desempeño. Algunas aplicaciones son extremadamente difíciles de llevar a cabo con este tipo de estructuras. Una forma para solucionar este problema, es con el uso de un dispositivo que ayuda a reducir la rigidez en el punto de contacto, conocido con el nombre de *compliance* (Spong y Vidyasagar 1989), que además puede ser considerado como la medida de la habilidad de un manipulador para reaccionar a fuerzas de interacción. El término es usado para una variedad de diferentes métodos de control en donde el movimiento del efector final es modificado por fuerzas de contacto.

El término movimiento restringido o *compliant motion* se refiere esencialmente a tareas de contacto. Ocurre cuando la posición de un manipulador está restringida por una labor específica. Por ejemplo, cuando se desliza el efector final a lo largo de una tabla horizontal, *e.g.* de izquierda a derecha, el movimiento hacia abajo del manipulador es impedido. Otro ejemplo es la apertura de un cajón, donde la rotación no es posible y la traslación solamente ocurre a lo largo del eje del cajón. El movimiento restringido es un prerrequisito para el uso de manipuladores en un número importante de nuevas aplicaciones, sobresaliendo el ensamble automático. Hay dos maneras de llevar a cabo este movimiento: por medio de un sistema *compliance* pasivo o activo. El primero es un dispositivo mecánico que se compone de resortes y amortiguadores, y el segundo es implementado desde software en el lazo de control, conocido como control de fuerza (Mason 1981). El tipo pasivo ofrece algunas ventajas de desempeño, mientras que el activo ofrece la ventaja de programabilidad. Esto permite al manipulador usar una forma particular para cada aplicación.

Las tareas de contacto son caracterizadas por una interacción dinámica entre el robot y su entorno, la cual algunas veces no puede ser conocida exactamente. En algunos casos, la interacción puede variar drásticamente y causar alteraciones significativas en el desempeño del control del sistema robótico. Por consiguiente, para un cumplimiento exitoso de este objetivo, las fuerzas de contacto tienen que ser monitoreadas y controladas.

El tipo de tareas puede variar sustancialmente para requerimientos específicos, pero en todos los casos el robot tiene que desarrollar tres clases de movimientos: uno, el llamado movimiento total (*gross motion*), relacionado con los movimientos del robot

en el espacio libre; dos, compliant o movimiento fino, relacionado con los movimientos restringidos del robot para un entorno; y tres, movimiento de conexión, unión o aproximación, que representa todas las transiciones entre el movimiento total y movimiento restringido.

En el presente capítulo se presenta una descripción breve de los conceptos de control de contacto en robots manipuladores, entre los que se incluye la clasificación de los tipos de controladores que se utilizan en situaciones donde el efector final del robot entra en contacto con su entorno. Se ahondará un poco más en el concepto de control híbrido explícito posición/fuerza, que es tema de este trabajo.

3.1. Clasificación de conceptos de robótica para control de movimiento restringido

A continuación se considerara el estado del arte en control de movimientos restringidos (Whitney 1985, Vukobratović y Tuneski 1994, Yoshikawa 2000, Khalil y Dombre 2002). Los métodos para robot manipuladores en las tareas de movimiento restringido pueden ser clasificados de acuerdo a diferentes criterios: considerando la clase del compliance, se distinguen dos grupos básicos.

- 1) Los métodos pasivos, donde la posición real del robot es aproximada a la posición deseada solamente por la influencia de la fuerza de contacto.
- 2) Los métodos activos, son provisto por la retroalimentación de fuerza para lograr el control de la fuerza de interacción, o una tarea específica del efector final del robot.

De acuerdo con las fuentes dominantes los métodos pasivos pueden ser clasificados en los siguientes grupos.

- 1) Métodos no adaptables:
 - Basados en el compliance inherente en la estructura mecánica del robot.
-

- Empleo de dispositivos contruidos, pasivos deformables (adaptadores), agregados cerca del efector final del robot.

2) Métodos adaptables:

- Basados en dispositivos con compliance sintonizable.
- Basados en el ajuste de las ganancias del servo o actuador de la articulación.

Los métodos de control de fuerza activos pueden ser clasificados en los siguientes dos grupos:

- 1) Control híbrido posición/fuerza, donde ambos, posición y fuerza, son controlados en un sentido no conflictivo en dos subespacios ortogonales definidos en un sistema de referencia de la tarea específica.
- 2) Control de impedancia, se basa en esencia en el control de posición, y usa diferentes relaciones entre la posición y las fuerzas actuantes en el manipulador. La idea básica y primaria es especificar el comportamiento dinámico para el robot, impedancia objetivo; la impedancia debe de ser una relación entre posición y fuerza (Hogan 1987), para el caso de tareas de contacto.

Tomando en cuenta el modo en el cual la información de la fuerza es incluida en el lazo de control, los métodos de control híbrido pueden ser clasificados en los siguientes dos grupos:

- 1) Explícitos o basados en fuerza, donde las señales de fuerza son usadas para generar las entradas de torque a los actuadores en las articulaciones del robot.
- 2) Algoritmos implícitos o basados en posición, de acuerdo con el cual el error del control de fuerza primero se usa para reajustar el movimiento del robot en la dirección de las fuerzas controladas y entonces emplear esta posición como entrada en el controlador de posición.

Los métodos del control de impedancias pueden clasificarse en los siguientes dos grupos:

- 1) Modo de posición o lazo de control externo, donde un bloque de control de impedancia objetivo o comportamiento dinámico deseado (que relaciona la fuerza ejercida en el efector final y su posición relativa) se suma con un lazo de control externo para controlar la posición del manipulador.
- 2) Modo de fuerza o lazo de control interno, donde la posición es medida y se calculan comandos de fuerza para satisfacer objetivos asignados de impedancia deseada.

Las clasificaciones anteriores son brevemente resumidas en las Figuras 3.1-3.3.

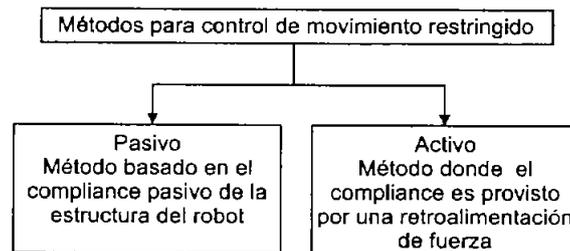


Figura 3.1: Clasificación básica de los métodos para control de movimiento restringido

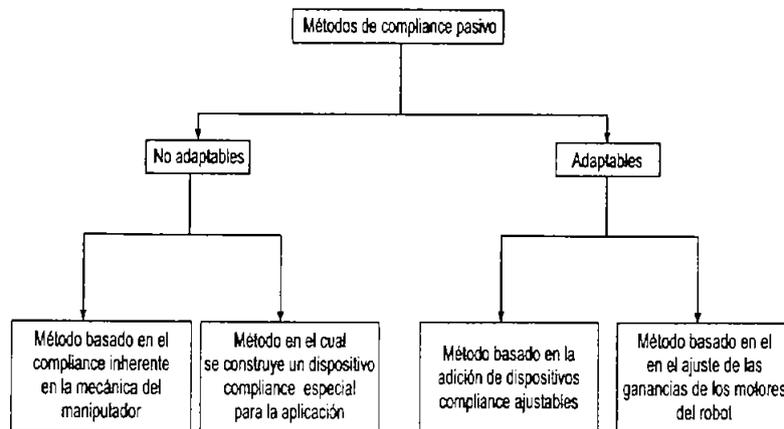


Figura 3.2: Clasificación de métodos pasivos

Estas figuras no incluyen todos los conceptos conocidos. En particular, algunos de las aproximaciones elaboradas combinan dos o más métodos diferentes clasificados en distintos grupos: por ejemplo, control explícito/implícito, control de impedancia híbrido, etcétera.

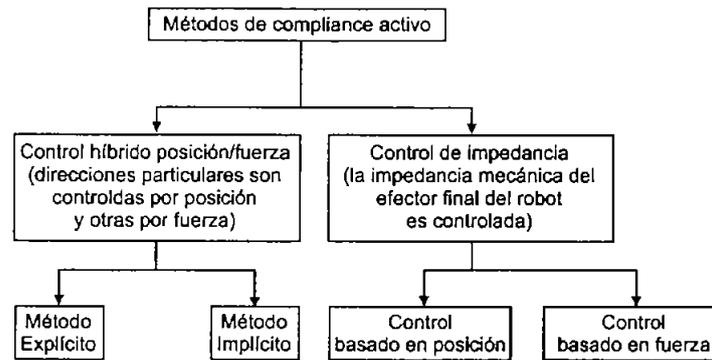


Figura 3.3: Clasificación de métodos activos

3.2. Métodos de compliance activos

3.2.1. Control híbrido posición/fuerza

El control híbrido de posición/fuerza es un concepto que fue formalizado en Mason (1981). El objetivo es controlar simultáneamente tanto posición como fuerza, y su realización es independiente de trayectorias nominales de posición (en coordenadas del efector final) previamente determinadas y de las componentes de fuerza.

Cada tarea particular de contacto puede ser definida para introducir un marco apropiado de coordenadas de la tarea (restricción), y las llamadas restricciones naturales y artificiales. Las restricciones naturales son consecuencia natural de la configuración de la tarea. Las artificiales son definidas por los movimientos y/o fuerzas deseadas para el robot, que tiene que llevar a cabo el efector final. Por motivos de simplicidad, una matriz diagonal S , llamada de selección de compliance, ha sido introducido con el propósito de seleccionar los grados de libertad de posición y fuerza que serán controlados (el i -ésimo elemento de la diagonal es uno si la i -ésima componente de posición es controlada y es cero si la componente es de fuerza). Para especificar el movimiento restringido, la siguiente información tiene que ser definida:

- Posición y orientación del marco de referencia de la tarea.
- Matriz de selectividad S .
- Expresar la posición y fuerza deseadas en el marco de referencia de la tarea.

3.2.2. Control de fuerza explícito

Método de Raibert y Craig (1981): Este es el método de control explícito básico. De acuerdo con este, el control consiste de dos lazos de retroalimentación complementarios paralelos, como se muestra en la Figura 3.4; el lazo superior de retroalimentación es de posición, y el inferior es de fuerza. Cada uno de estos lazos tiene sistemas de sensores separados e independientes y cada grado de libertad del efector final del robot es controlado en posición o fuerza. La principal idea de este método es asegurar una realización cooperativa de la posición deseada Sx^o y fuerza deseada $(I - S)F^o(t)$ (I es una matriz unitaria).

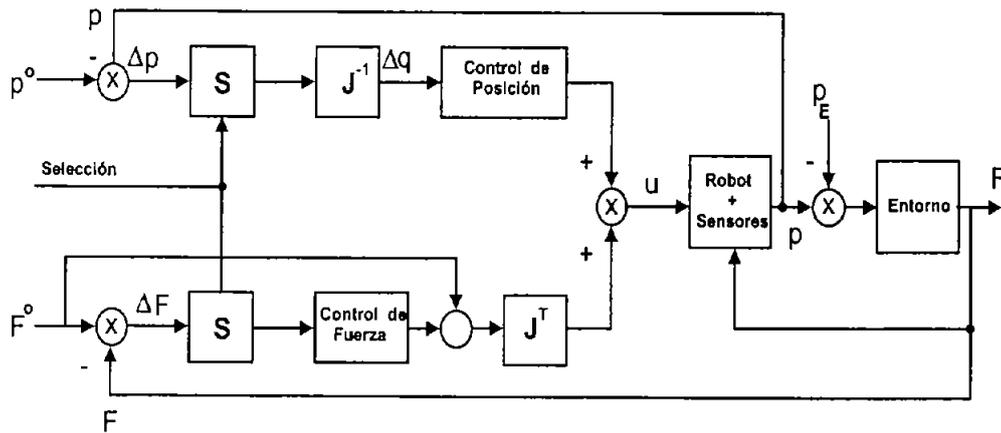


Figura 3.4: Control híbrido posición/fuerza explícito

Siguiendo la figura 3.4, la ley de control propuesta por Raibert y Craig (1981) puede ser escrita en el espacio cartesiano como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} = & -\mathbf{K}_p \mathbf{S}(\mathbf{p} - \mathbf{p}^o) - \mathbf{K}_v \mathbf{S}(\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}^o) - \mathbf{K}_{FP} \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{F} - \mathbf{F}^o) \\
 & + \mathbf{K}_{FI} \bar{\mathbf{S}} \int (\mathbf{F} - \mathbf{F}^o) \mathbf{D}t + \mathbf{F}^o
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

donde \mathbf{u} es el vector de entradas de control de $n \times 1$ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$; \mathbf{K}_p y \mathbf{K}_v son matrices de $n \times n$ de las ganancias de retroalimentación de posición y velocidad en el espacio cartesiano; \mathbf{K}_{FP} y \mathbf{K}_{FI} son matrices de $n \times n$ de las ganancias de retroalimentación de fuerza en el espacio cartesiano; y \mathbf{S} es la matriz de selección de $n \times n$, $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{I} - \mathbf{S}$, donde \mathbf{I} es una matriz unitaria y n denota el número de grados de libertad del robot.

Carencias del control de fuerza explícito: El esquema clásico de control híbrido de posición/fuerza con el control de fuerza explícito tiene varias deficiencias. La primera de todas, es la definición de “complemento ortogonal”, el cual es la base del esquema de control explícito híbrido de posición/fuerza, que es incorrecta, ya que cuando se usa el principio de ortogonalidad para determinar si dos movimientos instantáneos dados son ortogonales, se encontró: inconsistencia en la dimensión, dependencia en la selección de unidades usadas y dependencia en la selección de los sistemas coordinados (Duffy 1990). La definición de restricciones naturales como “complementos ortogonales” de las restricciones artificiales es prácticamente carente de significado. Usando esta formulación, los subespacios que definen las restricciones naturales son no invariantes con una selección de origen o un cambio de dimensiones.

El principal problema con el concepto de control híbrido clásico está relacionado con los requerimientos opuestos concernientes a las subtareas de control de posición y fuerza; es decir, el control de posición requiere una rigidez relativamente grande de los servosistemas en las articulaciones del robot a fin de garantizar un posicionamiento preciso del efector final. Por otro lado, el control de fuerza requiere de una rigidez relativamente baja del robot para asegurar que el efector final se comporte de una manera que se ajuste al entorno.

En un análisis en la formulación del control híbrido dado por Raibert y Craig (1981) y Mason (1981), West y Asada (1985) apuntaron que el esquema de control híbrido propuesto no es muy conveniente desde el punto de vista de realización práctica. Para facilitar estas tareas, han propuesto una reformulación del control híbrido vía el espacio articular y la introducción de las matrices de proyección ortogonal (llamándolos filtros), las cuales son equivalentes a la matriz de selección, S , en coordenadas externas.

Otro inconveniente es que el control explícito híbrido de posición/fuerza no es robusto a los cambios en las tareas y a variación de parámetros. Además, el desempeño del sistema depende de la configuración del robot y del valor y de la dirección de la fuerza deseada (momento). Finalmente, el principal problema con este esquema está en el hecho que requiere un controlador completamente nuevo. No es posible preservar el control clásico de posición para robots, que puede ser más robusto y fiable.

Capítulo 4

Algoritmo de control

4.1. Introducción

En el presente capítulo se plantea el algoritmo de control que se propone en esta tesis. El controlador es del tipo híbrido explícito, es decir; se considera control de posición y de fuerza. En el algoritmo se toma en consideración el aspecto de la fricción seca que surge al interactuar el efector final o la herramienta del robot con el entorno (en este caso, con una superficie rígida), por lo cual se introduce un término de compensación de fricción. Regularmente, éste término se considera como una perturbación (Potkonjak *et al.* 1999). Debido a que no se tiene el equipo para medir la velocidad de las articulaciones y para suplir esta carencia se introduce un observador de velocidad (Arteaga y Muñoz 2002), que por otra parte, ayuda a reducir el costo del equipo y el peso total del robot. El algoritmo propuesto tiene el propósito de escribir y dibujar en un plano (pizarrón u hoja de papel) con un plumón colocado en el efector final del brazo manipulador.

Primero se presenta el controlador propuesto y continuación el observador de velocidad.

4.2. Controlador con compensación de fricción y estimación de velocidad

Para poder diseñar el esquema control-observador, se hacen las siguientes suposiciones.

Suposición 4.2.1 *El robot satisface las restricciones*

$$\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (4.2.1)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (4.2.2)$$

para todo tiempo. Además, el robot no es redundante ni está en una singularidad. \triangle

Suposición 4.2.2 *La matriz \mathbf{J}_φ es continuamente Lipschitz, i. e.*

$$\|\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}_d)\| \leq L\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|, \quad (4.2.3)$$

para una constante positiva L y para todo $\mathbf{q}, \mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$, donde \mathbf{q}_d es la trayectoria deseada, es suave y acotada. Además, existen constantes positivas finitas c_0 y c_1 , las cuales satisfacen

$$c_0 \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})\| \quad (4.2.4)$$

$$c_1 \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\|. \quad (4.2.5)$$

\triangle

Suposición 4.2.3 *La función $f_x(\cdot)$ es Lipschitz*

$$|f_x(a) - f_x(b)| \leq \varsigma_0|a - b| \quad (4.2.6)$$

donde $a, b \geq 0$ y ς_0 una constante positiva, y $f_x(0) = 0$. Por ejemplo

$$f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) = \alpha_0 = cte$$

\triangle

De la Suposición 4.2.1, se tiene que el robot no puede ser redundante, y que su cinemática directa puede ser satisfecha solamente por un vector \mathbf{q} acotado. La Suposición 4.2.2 es bastante razonable para robots de revolución, ya que los elementos de \mathbf{q} aparecen como argumentos de funciones senos y cosenos. Esto es porque (4.2.4)–(4.2.5) son válidas.

Suponer que una trayectoria de posición deseada \mathbf{q}_d y una trayectoria de fuerza deseada $\boldsymbol{\lambda}_d$ en la superficie de contacto (espacio articular) son dadas. El problema es encontrar un control de seguimiento que haga que el manipulador siga asintóticamente las trayectorias especificadas cuando $t \rightarrow \infty$. En esta sección se asume que es disponible el modelo dinámico del robot junto con las características de fricción debida al contacto con la restricción por el efector final. Se asume que la posición $\mathbf{q}(t)$ y la señal de fuerza $\boldsymbol{\lambda}(t)$ pueden ser leídas en tiempo real, mientras que la velocidad $\dot{\mathbf{q}}(t)$ no es disponible, por lo cual se utiliza un observador de velocidad.

4.2.1. Ley de control

Considérese el modelo dinámico que se obtuvo en (2.3.1), el cual se escribe aquí de nuevo

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}. \quad (4.2.7)$$

y sean los errores de seguimiento y observación

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \quad (4.2.8)$$

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}, \quad (4.2.9)$$

respectivamente; donde \mathbf{q}_d es una trayectoria deseada, acotada y suave como ya se menciono, que satisface la restricción (2.3.2), y $(\hat{\cdot})$ representa el valor estimado de (\cdot) .

Otras definiciones de errores son:

$$\Delta \mathbf{p} \triangleq \mathbf{p} - \mathbf{p}_d \quad (4.2.10)$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda} \triangleq \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d, \quad (4.2.11)$$

donde p_d es la restricción de posición deseada la cual satisface (2.3.5). Otras definiciones útiles son:

$$\dot{q}_r \triangleq Q(q) (\dot{q}_d - \Lambda (\hat{q} - q_d)) + J_\varphi^+(q) (\dot{p}_d - \beta \Delta p + \xi \Delta F) \quad (4.2.12)$$

$$s \triangleq \dot{q} - \dot{q}_r \quad (4.2.13)$$

$$= Q(q) (\dot{\hat{q}} + \Lambda (\hat{q} - q_d)) + J_\varphi^+(q) (\Delta \dot{p} + \beta \Delta p - \xi \Delta F).$$

$$\triangleq s_p + s_f$$

$$\Delta F \triangleq \int_0^t \Delta \lambda(\vartheta) d\vartheta, \quad (4.2.14)$$

donde $\Lambda = kI \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $k > 0$, y $\xi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices diagonales definidas positivas, y β es una constante positiva. Nótese que s_p y s_f son vectores ortogonales.

De (4.2.9) s se puede escribir de la siguiente manera,

$$s = Q(q) (\dot{\hat{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z) + J_\varphi^+(q) (\Delta \dot{p} + \beta \Delta p - \xi \Delta F). \quad (4.2.15)$$

Derivando (4.2.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r \triangleq & Q(q) (\ddot{q}_d - \Lambda (\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d)) + J_\varphi^+(q) (\ddot{p}_d - \beta (\dot{p} - \dot{p}_d) + \xi \Delta \lambda) \\ & + \dot{Q}(q) (\dot{q}_d - \Lambda (\hat{q} - q_d)) + \dot{J}_\varphi^+(q) (\dot{p}_d - \beta \Delta p + \xi \Delta F). \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Como se mostrará más adelante, \ddot{q}_r es necesaria para implementar el controlador y el observador. Sin embargo, esta cantidad no está disponible, debido a que \dot{q} no es medible. Con el fin de cubrir esta carencia, se considera $Q(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y se obtiene su derivada aplicando la regla de la cadena, quedando ésta como sigue:

$$\dot{Q}(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(q)}{\partial q} \dot{q} & \dots & \frac{\partial a_{1n}(q)}{\partial q} \dot{q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}(q)}{\partial q} \dot{q} & \dots & \frac{\partial a_{nn}(q)}{\partial q} \dot{q} \end{bmatrix}, \quad (4.2.17)$$

donde $a_{\alpha\beta}$ es el $\alpha\beta$ elemento de $Q(q)$. Por simplicidad, no se incluye explícitamente la dependencia de q en $\dot{Q}(\dot{q})$. Con base en (4.2.17), considérese la siguiente definición

$$\dot{Q}(\dot{q}_o) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(q)}{\partial q} \dot{q}_o & \dots & \frac{\partial a_{1n}(q)}{\partial q} \dot{q}_o \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}(q)}{\partial q} \dot{q}_o & \dots & \frac{\partial a_{nn}(q)}{\partial q} \dot{q}_o \end{bmatrix}, \quad (4.2.18)$$

con

$$\dot{q}_o \triangleq \dot{\hat{q}} - \Lambda z. \quad (4.2.19)$$

Entonces, se puede calcular

$$\dot{\bar{Q}}(\mathbf{r}) \triangleq \dot{\bar{Q}}(\dot{q}) - \dot{\bar{Q}}(\dot{q}_o) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} & \dots & \frac{\partial a_{1n}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} & \dots & \frac{\partial a_{nn}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad (4.2.20)$$

con

$$\mathbf{r} \triangleq \dot{q} - \dot{q}_o = \dot{z} + \Lambda z. \quad (4.2.21)$$

De manera similar se define

$$\dot{\bar{J}}_{\varphi}^{+}(\mathbf{r}) \triangleq \dot{\bar{J}}_{\varphi}^{+}(\dot{q}) - \dot{\bar{J}}_{\varphi}^{+}(\dot{q}_o) = \begin{bmatrix} \frac{\partial b_{11}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} & \dots & \frac{\partial b_{1m}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial b_{n1}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} & \dots & \frac{\partial b_{nm}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (4.2.22)$$

donde $b_{\alpha\beta}$ es el $\alpha\beta$ elemento de $\mathbf{J}_{\varphi}^{+}(\mathbf{q})$. Como en (4.2.17), $\dot{\bar{J}}_{\varphi}^{+}$ depende de \mathbf{q} .

Considerando (4.2.18) y (4.2.22), se propone la siguiente sustitución para $\ddot{\mathbf{q}}_r$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_r \triangleq & \mathbf{Q}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d)) + \mathbf{J}_{\varphi}^{+}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{p}}_d - \beta(\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d) + \xi\Delta\lambda) \\ & + \dot{\bar{Q}}(\dot{q}_o)(\dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)) + \dot{\bar{J}}_{\varphi}^{+}(\dot{q}_o)(\dot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\mathbf{p} + \xi\Delta\mathbf{F}). \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

$\dot{\mathbf{p}}$ se usa todavía ya que su valor es conocido de (2.3.5). Despejando $\dot{\bar{Q}}(\dot{q}_o)$ y $\dot{\bar{J}}_{\varphi}^{+}(\dot{q}_o)$ de (4.2.20) y (4.2.22) respectivamente y sustituyendo en (4.2.23) se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_r \triangleq & \mathbf{Q}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d)) + \mathbf{J}_{\varphi}^{+}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{p}}_d - \beta(\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d) + \xi\Delta\lambda) \\ & + (\dot{\bar{Q}}(\dot{q}) - \dot{\bar{Q}}(\mathbf{r}))(\dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)) \\ & + (\dot{\bar{J}}_{\varphi}^{+}(\dot{q}) - \dot{\bar{J}}_{\varphi}^{+}(\mathbf{r}))(\dot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\mathbf{p} + \xi\Delta\mathbf{F}), \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

desarrollando y agrupando términos se tiene

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \ddot{\mathbf{q}}_r - \dot{\bar{Q}}(\mathbf{r})(\dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda\bar{\mathbf{q}} + \Lambda z) - \dot{\bar{J}}_{\varphi}^{+}(\mathbf{r})(\dot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\mathbf{p} + \xi\Delta\mathbf{F}), \quad (4.2.25)$$

que se puede escribir de una forma compacta como

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{e}(\mathbf{r}), \quad (4.2.26)$$

donde la definición de $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ es obvia.

El controlador propuesto está dado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} \triangleq & \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|)\mathbf{J}_x^T\dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ & - \mathbf{K}_R(\dot{\mathbf{q}}_o - \dot{\mathbf{q}}_r) - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\lambda_d - \mathbf{K}_F\Delta\mathbf{F}), \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

donde $\mathbf{K}_R, \mathbf{K}_F \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas y $\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{J}_x(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_r$. De (4.2.13) y (4.2.21) se tiene

$$\dot{\mathbf{q}}_o - \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{s} - \mathbf{r} \quad (4.2.28)$$

sustituyendo (4.2.28) junto con (4.2.26) en (4.2.27) se obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{H}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{e}(\mathbf{r})) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|)\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r \\ & + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_R(\mathbf{s} - \mathbf{r}) - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\lambda_d - \mathbf{K}_F\Delta\mathbf{F}). \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Dinámica de lazo cerrado

Si se substituye (4.2.29) en (4.2.7), la dinámica de lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = & \mathbf{H}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{e}(\mathbf{r})) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r \\ & + f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|)\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ & - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\lambda_d - \mathbf{K}_F\Delta\mathbf{F}) + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \\ & - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_R(\mathbf{s} - \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

utilizando la igualdad $\mathbf{s} \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r$ se analizan algunos términos de (4.2.30) con el propósito de simplificar. Se comienza con los términos de fuerzas de Coriolis y centrífugas

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r) \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}} \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

donde se ha utilizado la Propiedad 2.3.4. A continuación se analizan los términos de fricción seca

$$\begin{aligned}
f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|)\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} &= f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|)\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}} \\
&\quad + (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|))\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r \\
&= f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}} \\
&\quad - (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|))\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r \\
&= -f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\mathbf{s} \\
&\quad - (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|))\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r \quad (4.2.32)
\end{aligned}$$

Ahora, se consideran los siguientes términos

$$\begin{aligned}
D\dot{\mathbf{q}}_r - D\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_R(\mathbf{s} - \mathbf{r}) &= -D\mathbf{s} - \mathbf{K}_R(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \\
&= -(\mathbf{K}_R + D)\mathbf{s} + \mathbf{K}_R\mathbf{r} \\
&= -\mathbf{K}_{DR}\mathbf{s} + \mathbf{K}_R\mathbf{r}, \quad (4.2.33)
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{K}_{DR} \triangleq \mathbf{K}_R + D$. Finalmente, tomando los términos

$$\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\boldsymbol{\lambda}_d - \mathbf{K}_F\Delta\mathbf{F})$$

y considerando (4.2.11) se tiene

$$\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\boldsymbol{\lambda}_d - \mathbf{K}_F\Delta\mathbf{F}) = \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\Delta\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{K}_F\Delta\mathbf{F}). \quad (4.2.34)$$

Por último, se sustituyen (4.2.31)–(4.2.34) en (4.2.30)

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{K}_{DR}\mathbf{s} - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\mathbf{s} + \mathbf{K}_R\mathbf{r} \\
&\quad + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\Delta\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{K}_F\Delta\mathbf{F}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} \\
&\quad + \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}) - (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|))\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r. \quad (4.2.35)
\end{aligned}$$

4.2.2. Estimador de velocidad

En esta sección se presenta el observador de velocidad con el propósito de estimar la velocidad en las articulaciones del robot.

La dinámica del observador propuesto está dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_o + \mathbf{\Lambda}z + k_d z \quad (4.2.36)$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_o = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_r + k_d \mathbf{\Lambda}z, \quad (4.2.37)$$

donde k_d es una constante positiva. Derivando (4.2.36) se tiene

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_o + \mathbf{\Lambda}\dot{z} + k_d \dot{z}.$$

Despejando $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_o$ de la ecuación anterior y sustituyendo junto con (4.2.26) en (4.2.37)

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{\Lambda}\dot{z} - k_d \dot{z} = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_r + \mathbf{e}(\mathbf{r}) + k_d \mathbf{\Lambda}z. \quad (4.2.38)$$

Derivando dos veces (4.2.9) y sustituyendo en el lado izquierdo de (4.2.38)

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{\Lambda}\dot{z} - k_d \dot{z} = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_r + \mathbf{e}(\mathbf{r}) + k_d \mathbf{\Lambda}z. \quad (4.2.39)$$

Agrupando términos se tiene

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} - \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_r = \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{\Lambda}\dot{z} + k_d(\dot{z} + \mathbf{\Lambda}z) + \mathbf{e}(\mathbf{r}), \quad (4.2.40)$$

y de (4.2.13) y (4.2.21)

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{r}} + k_d \mathbf{r} + \mathbf{e}(\mathbf{r}). \quad (4.2.41)$$

Multiplicando por la izquierda por $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ ambos lados de (4.2.41) y tomando en cuenta (4.2.35) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{r}} + k_d \mathbf{r} + \mathbf{e}(\mathbf{r})) &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{K}_{DR}\mathbf{s} - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T \mathbf{J}_x \mathbf{s} + \mathbf{K}_R \mathbf{r} \\ &+ \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\Delta\lambda + \mathbf{K}_F \Delta\mathbf{F}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} \\ &- (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|))\mathbf{J}_x^T \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

Despejando $\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}}$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}} &= -\mathbf{H}_{rd}\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} - \mathbf{K}_{DR}\mathbf{s} - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T \mathbf{J}_x \mathbf{s} \\ &+ \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\Delta\lambda + \mathbf{K}_F \Delta\mathbf{F}) - (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|))\mathbf{J}_x^T \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}}_r, \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

donde $\mathbf{H}_{rd} \triangleq k_d \mathbf{H}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_R$. Se utiliza una vez más la Propiedad 2.3.4 y (4.2.13) con el fin de simplificar

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} \\
 &\quad + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{r} \\
 &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} \\
 &\quad + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{r}. \tag{4.2.44}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (4.2.44) en (4.2.43) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}} &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} - \mathbf{H}_{rd}\mathbf{r} - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T \mathbf{J}_x \mathbf{s} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{r} - \mathbf{K}_{DR}\mathbf{s} \\
 &\quad - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\Delta\lambda + \mathbf{K}_F \Delta\mathbf{F}) \\
 &\quad - (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_x\|))\mathbf{J}_x^T \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}}_r. \tag{4.2.45}
 \end{aligned}$$

4.2.3. Prueba de convergencia

Con base en (4.2.14), (4.2.35) y (4.2.45) se define el siguiente vector de estados

$$\mathbf{w} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}^T & \mathbf{r}^T & \Delta\mathbf{F}^T \end{bmatrix}^T. \tag{4.2.46}$$

La idea principal del diseño del controlador-observador es mostrar que siempre que $\|\mathbf{w}\|$ tienda a cero, los errores de seguimiento $\tilde{\mathbf{q}}$, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$, $\Delta\mathbf{p}$, $\Delta\dot{\mathbf{p}}$ y $\Delta\lambda$ y los errores de observación \mathbf{z} y $\dot{\mathbf{z}}$ tenderán a cero también. De (4.2.21), es claro que si \mathbf{r} está acotada y tiende a cero, \mathbf{z} y $\dot{\mathbf{z}}$ lo harán así mismo. Pero esto no es tan claro para las variables restantes. El siguiente lema muestra que esto es posible bajo algunas condiciones.

Lema 4.2.1 *Si \mathbf{w} está acotada por w_{\max} y tiende a cero, entonces los siguientes hechos se cumplen:*

- a) $\Delta\mathbf{p}$ y $\Delta\dot{\mathbf{p}}$ permanecen acotadas y tienden a cero.
- b) $\tilde{\mathbf{q}}$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ permanecen acotadas. Además, si la cota w_{\max} para $\|\mathbf{w}\|$ se escoge lo suficientemente pequeña tal que garantice que $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \eta$ para todo t , con η una constante positiva suficientemente pequeña, entonces ambas $\tilde{\mathbf{q}}$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ tenderán a cero también.

c) Si, además, el vector de velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ está acotado, entonces $\Delta\lambda$ permanecerá acotada y tenderá a cero. \triangle

La demostración del Lema 4.2.1 se encuentra en el Apéndice A. La conclusión principal es que si \mathbf{w} está acotada y tiende a cero, \mathbf{s} , \mathbf{r} y $\Delta\mathbf{F}$ estarán acotadas y tenderán a cero. Además todas las demás señales de error estarán acotadas y tenderán a cero.

Es interesante notar que si $\|\mathbf{w}\|$ está acotada por w_{\max} , entonces siempre es posible encontrar una cota para $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ en (4.2.26) que satisface

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{r})\| \leq M_e(w_{\max})\|\mathbf{r}\| < \infty. \quad (4.2.47)$$

Con el fin de probar estabilidad, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov para el sistema formado por (4.2.14), (4.2.35) y (4.2.42)

$$V(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \mathbf{M} \mathbf{w}, \quad (4.2.48)$$

donde $\mathbf{M} \triangleq \text{block diag}\{\mathbf{H}(\mathbf{q}), \mathbf{H}(\mathbf{q}), \boldsymbol{\xi}\}$, y $V(\mathbf{w})$ satisface

$$\lambda_1\|\mathbf{w}\|^2 \leq V(\mathbf{w}) \leq \lambda_2\|\mathbf{w}\|^2, \quad (4.2.49)$$

con

$$\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{M}) \quad (4.2.50)$$

$$\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{M}). \quad (4.2.51)$$

Supóngase que se puede encontrar una región

$$\mathbb{D} = \{\mathbf{w} : \|\mathbf{w}\| \leq w_{\max}\}, \quad (4.2.52)$$

de manera que la derivada de (4.2.48) satisfaga, $\dot{V}(\mathbf{w}) \leq 0$ para todo tiempo, con $\dot{V}(\mathbf{w}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Si w_{\max} es lo suficientemente pequeña en el sentido del Lema 4.2.1, entonces, de la discusión planteada, se puede concluir la convergencia a cero de todas las señales de error. El siguiente teorema establece las condiciones de los parámetros del controlador-observador para garantizar esto.

Teorema 4.2.1 *Considérese el sistema dinámico dado por (4.2.7) en lazo cerrado con la ley de control (4.2.27) y el observador (4.2.36)–(4.2.37), donde \mathbf{q}_d es la trayectoria deseada para las articulaciones y \mathbf{p}_d es la restricción de posición deseada, cuyas derivadas $\dot{\mathbf{q}}_d$, $\ddot{\mathbf{q}}_d$, $\dot{\mathbf{p}}_d$, y $\ddot{\mathbf{p}}_d$ están también acotadas, y todas ellas satisfacen la restricción (2.3.5). Considérese también la región definida por (4.2.52), donde la cota w_{\max} se elige de acuerdo con*

$$w_{\max} \leq \frac{\eta\alpha}{(1 + c_0\lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}) + \sqrt{n})} \quad (4.2.53)$$

con α definida en el Apéndice A. Entonces, todas las señales de error de seguimiento, observación y errores de fuerza permanecen acotadas y son asintóticamente estables, i. e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (4.2.54)$$

si las siguientes condiciones son satisfechas

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_R) \geq \mu_1 + 1 + \delta + c_0 c_{x1}^3 \quad (4.2.55)$$

$$k_d \geq \frac{\delta + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_R) + \mu_2 + c_1 c_2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\lambda_h} \quad (4.2.56)$$

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{K}_F) \geq \delta + 1, \quad (4.2.57)$$

donde δ , α_1 y α_2 son constantes positivas, y μ_1 , μ_2 , μ_3 , μ_4 , λ_D y c_{x1} se definen en el Apéndice B. △

La demostración del Teorema 4.2.1 se encuentra en el Apéndice B.

Comentario 4.2.1 *El resultado del Teorema 4.2.1 es solamente local. Además, es difícil encontrar analíticamente una región de atracción, pero debe notarse que esta no puede hacerse arbitrariamente grande. Lo anterior es para garantizar la convergencia a cero de los errores de seguimiento $\bar{\mathbf{q}}$ y $\dot{\bar{\mathbf{q}}}$. Por otra parte, es necesario aclarar que el esquema controlador-observador es implementado con sólo el conocimiento de la restricción de la forma (2.3.2).* △

Capítulo 5

Experimentos y resultados

Introducción

En este capítulo se presentan las consideraciones hechas para la implementación del algoritmo de control propuesto en el Capítulo 4, para una tarea de escritura y dibujo, tanto en las trayectorias como en la restricción. Los experimentos se realizaron en el sistema robótico que se encuentra en el Laboratorio de Robótica del Edificio de Posgrado e Investigación de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, el cual cuenta con dos robots de la compañía *CRS-Robotics* modelos A255 y A465, de cinco y seis grados de libertad respectivamente, que son controlados desde una PC. Para el presente trabajo se utilizó el primero. En el Apéndice C se proporciona una descripción breve del equipo experimental; para mayores detalles consultar Castillo-Sánchez (2002). Además se presentan los resultados experimentales, entre los que se encuentran errores de coordenadas cartesianas y articulares, observación y fuerza, y por último una discusión sobre los resultados.

5.1. Condiciones del experimento

El algoritmo de control que se utiliza es presentado en la ecuación (4.2.27) junto con el observador en (4.2.36)–(4.2.37). Sólo se consideraron las tres primeras articulaciones del robot A255, que son de revolución y tienen transmisión por cadena, mientras que las dos restantes se inhabilitaron mecánicamente. Además, se consideró la dinámica de los actuadores, para poder tener un mejor desempeño del sistema.

Además del equipo descrito en el apéndice C, el sistema tiene un sensor de fuerza-torque de la marca *JR3* modelo 67M25A 63N4 de seis ejes y un dispositivo de protección con un interruptor de presión neumático de la marca *ATI Industrial Automation* modelo SR-45, para apagar el sistema cuando se exceda la fuerza que se desea; en la Figura 5.1 se pueden ver estas piezas.

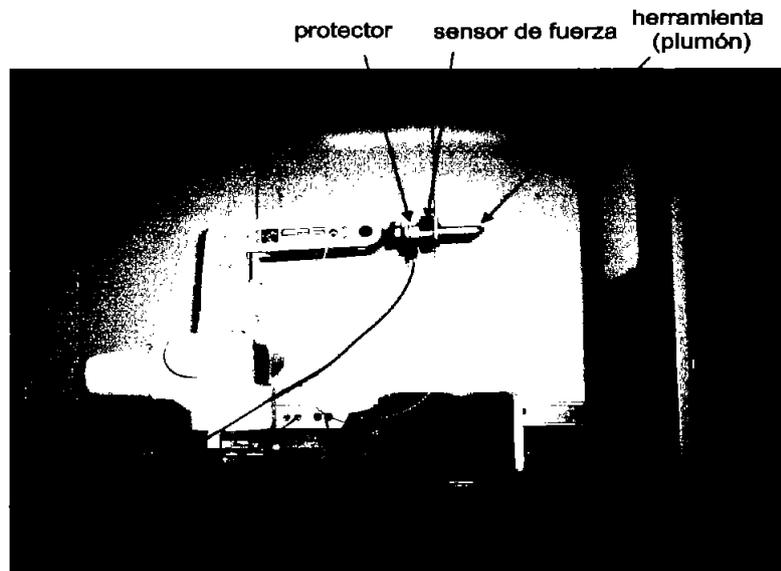


Figura 5.1: Robot A255 equipado.

El protector está conectado directamente a la computadora desde donde se controla el robot, por medio de una tarjeta PCI, mientras que el protector está conectado al módulo del robot, el cual se ve al fondo de la imagen en la Figura 5.1. Por último, se tiene la herramienta o base donde se coloca el plumón para realizar la tarea.

La implementación del algoritmo de control se llevó a cabo mediante el empleo del software *LabWindows* versión 6.0 de la compañía *National Instruments*, desarrollado

sobre una plataforma de lenguaje C; además cuenta con la opción de diseñar interfaces gráficas que permiten un mejor trabajo durante la experimentación.

Para desarrollar la tarea de escritura o dibujo se colocó una restricción frente al manipulador, como se observa en la Figura 5.1, donde se fijaron las hojas de papel sobre las que se hicieron los trazos. La restricción se considero en el eje x de acuerdo con el sistema coordenado de la base del robot, que en coordenadas cartesianas está dada por

$$\varphi = x - b = 0, \quad (5.1.1)$$

donde b es una constante positiva.

5.2. Descripción de los experimentos

La tarea se puede describir en los siguientes pasos:

1. El usuario escribe o dibuja en la interfaz gráfica, lo que desea que el robot haga, utilizando el mouse como un lápiz como se muestra en la Figura 5.2, (cabe mencionar que se debe realizar en un solo movimiento). Al mismo tiempo se guarda la información del trazo en memoria RAM, con el propósito de utilizarla más adelante para generar las trayectorias que el manipulador debe de seguir para repetir lo hecho con el mouse. Los datos obtenidos son mapeados al espacio de trabajo del robot, convirtiendo pixeles a centímetros.

En la interfaz gráfica se muestran los indicadores de ganancias del controlador-observador, lecturas de fuerza, posición articular, los botones de cada una de las etapas que componen el experimento y la sección en blanco que funciona como pizarrón.

2. El manipulador reproduce el trazo sobre la hoja de papel puesta en la restricción; es decir, se ejecuta el algoritmo de control. Este paso se puede dividir en las siguientes etapas:

- 2.1 A partir de los datos obtenidos en el paso anterior, se generan las trayectorias deseadas, que son llevadas de un espacio cartesiano a uno articular, por medio

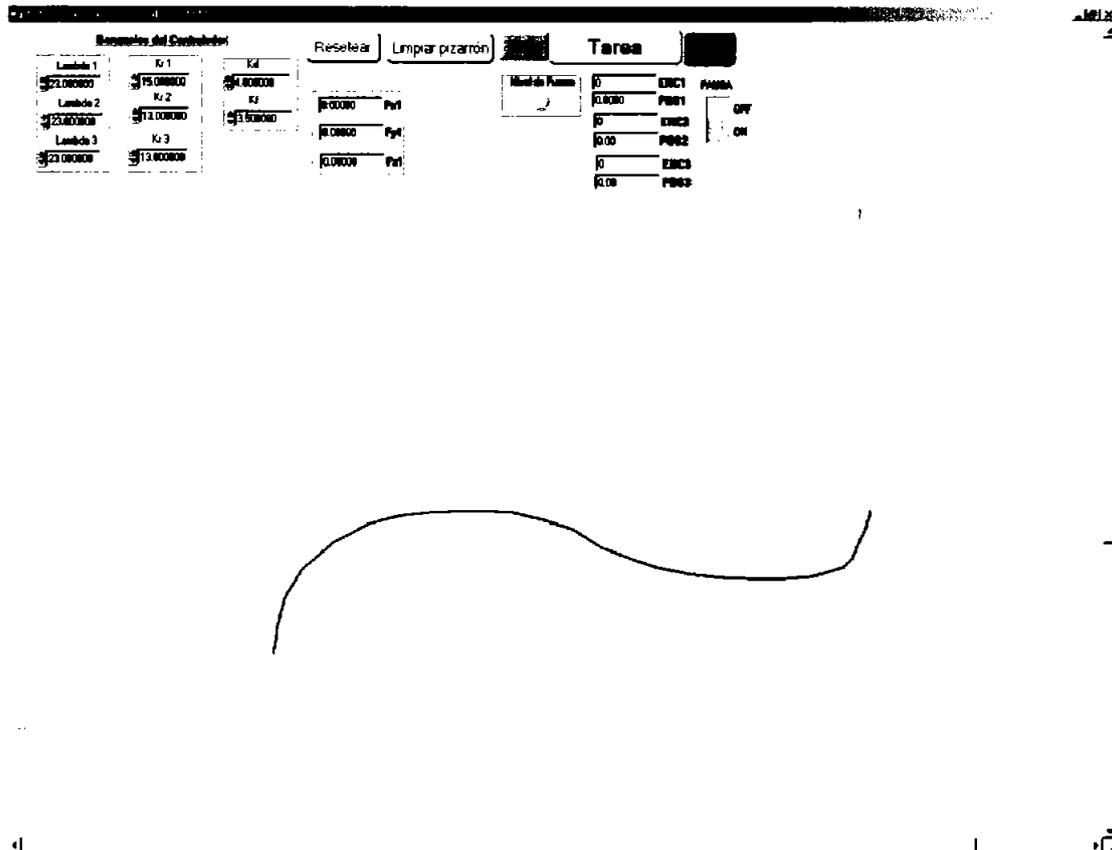


Figura 5.2: Ejemplo de un trazo con el ratón

de la cinemática inversa. Para generar las trayectorias q_d se utilizaron polinomios de quinto orden (Fu *et al.* 1989), cuya ecuación se muestra a continuación

$$q_{di} = a + bt + c_i t^2 + d_i t^3 + e_i t^4 + f_i t^5, \quad (5.2.1)$$

lo que permite obtener trayectorias suaves. El controlador lleva al efector final del robot (plumón) en movimiento libre de su posición de inicio a la hoja de papel en diez segundos. Cabe aclarar que durante este acercamiento los términos de fuerza y compensación de fricción son cero (*e.g.* $Q(q) = I$ y $J_\varphi(q) = 0$). Es fácil probar que este esquema de control generado es estable para movimiento no restringido

2.2 El controlador entra a la parte de reproducción del trazo, donde el robot aplica una fuerza deseada sobre la restricción y simultáneamente se mueve en el plano yz , la duración de esta etapa está en función de la cantidad de puntos que

se tengan de la letra o dibujo, y el tiempo de recorrido entre cada uno de ellos, el cual se puede variar desde software.

2.3 Al terminar el trazo, el robot regresa a su posición de inicio en diez segundos, con lo que se da por termina la tarea.

5.3. Resultados experimentales

Para poder tener resultados en diferentes condiciones se realizaron tres pruebas distintas; primero se hizo un rectángulo, segundo un ovoide y por último algunas letras. Se trabajó con una fuerza deseada de 5 Newtons en el eje x , aplicada por el plumón sobre la restricción, tratando con esto de evitar que la punta sufiera algún daño.

Los resultados que se muestran en forma de gráficos son: fuerza, posición cartesiana y articular, tanto la deseada como la real; así como los errores de las mismas. También se presentan errores de observación y voltajes de salida, además de los dibujos obtenidos por la computadora y el realizado por el robot.

Se consideró el índice \mathcal{I} (Pérez-Camacho 2003), que mide el promedio de la raíz cuadrada media del error, y está expresado por la siguiente ecuación:

$$\mathcal{I} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\Delta\lambda(t)\|^2 dt}, \quad (5.3.1)$$

para medir el desempeño de la fuerza, es decir, para tener una medida cuantitativa. Los parámetros de la ley de control y el observador son $K_R = \text{diag}\{15 \ 13 \ 13\}$, $\Lambda = 23I$, $k_F = 4.0$ y $k_d = 3.5$.

5.3.1. Rectángulo

Una comparación de los dibujos que se obtuvieron se presenta en la Figura 5.3. En las Figuras 5.4 y 5.6 se muestran las coordenadas cartesianas y articulares respectivamente. De las gráficas de la Figura 5.5 se observa que los errores cartesianos se encuentran entre los $\pm 3[mm]$, por lo que se pueden considerar buenos. Por otro lado en el caso de las coordenadas articulares, la Figura 5.7 muestra que el resultado es

bueno, ya que están entre los ± 0.4 de grado, y se puede considerar un error promedio de 0.2. En lo que respecta a la fuerza aplicada por el manipulador en la hoja de papel, en la Figura 5.8 se muestra el comportamiento de esta y su repercusión en los ejes coordenados restantes, real contra la deseada, mientras que en la Figura 5.9 se tienen los errores de las mismas, que se deben considerar malos ya que se tiene un error global porcentual del 40% y el índice de desempeño tuvo un valor de 0.9923 [N]. En la Figura 5.10 se presentan los errores de observación, que son muy buenos, sobretodo considerando la poca información dinámica del robot que necesita el observador. Finalmente, en la Figura 5.11 se encuentran los voltajes de control, que como se aprecia no hay problemas de saturación.

Los resultados obtenidos pueden presentar una mejoría si se tiene un modelo dinámico más exacto del robot, de la restricción y de los efectos dinámicos que se surgen en el momento de contacto.

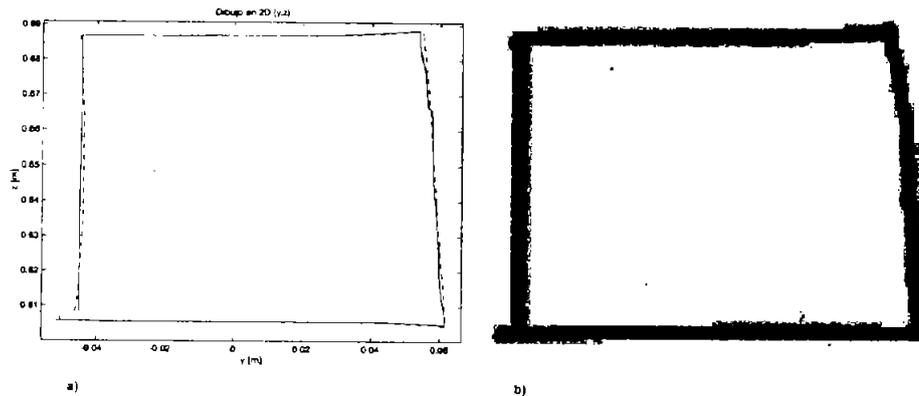


Figura 5.3: Rectángulo. Dibujos resultantes a) Valor real calculado por cinemática directa (-) y trazo deseado (- -). b) Dibujo hecho por el robot.

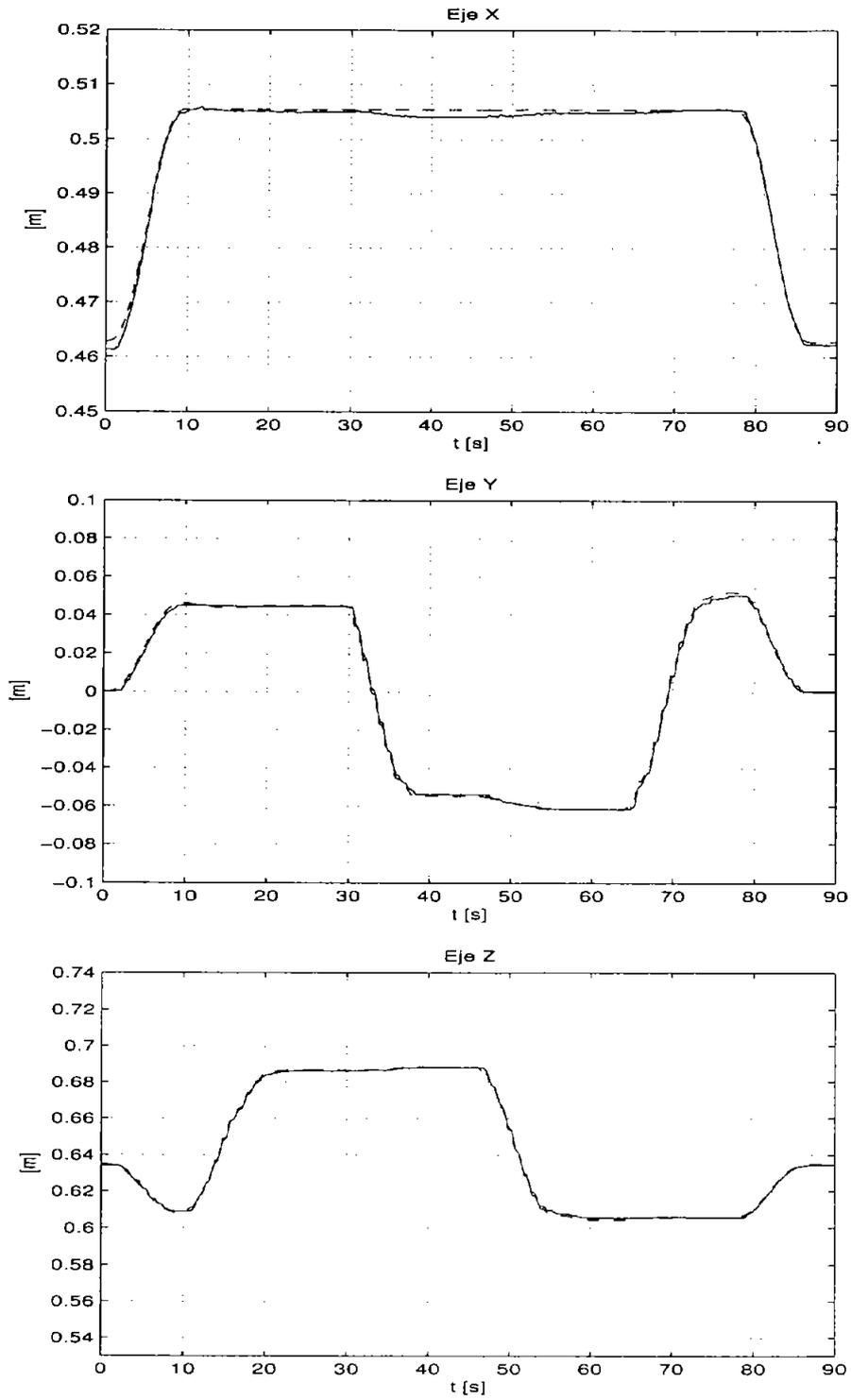


Figura 5.4: Rectángulo. Trayectorias cartesianas, - - deseada vs - real.

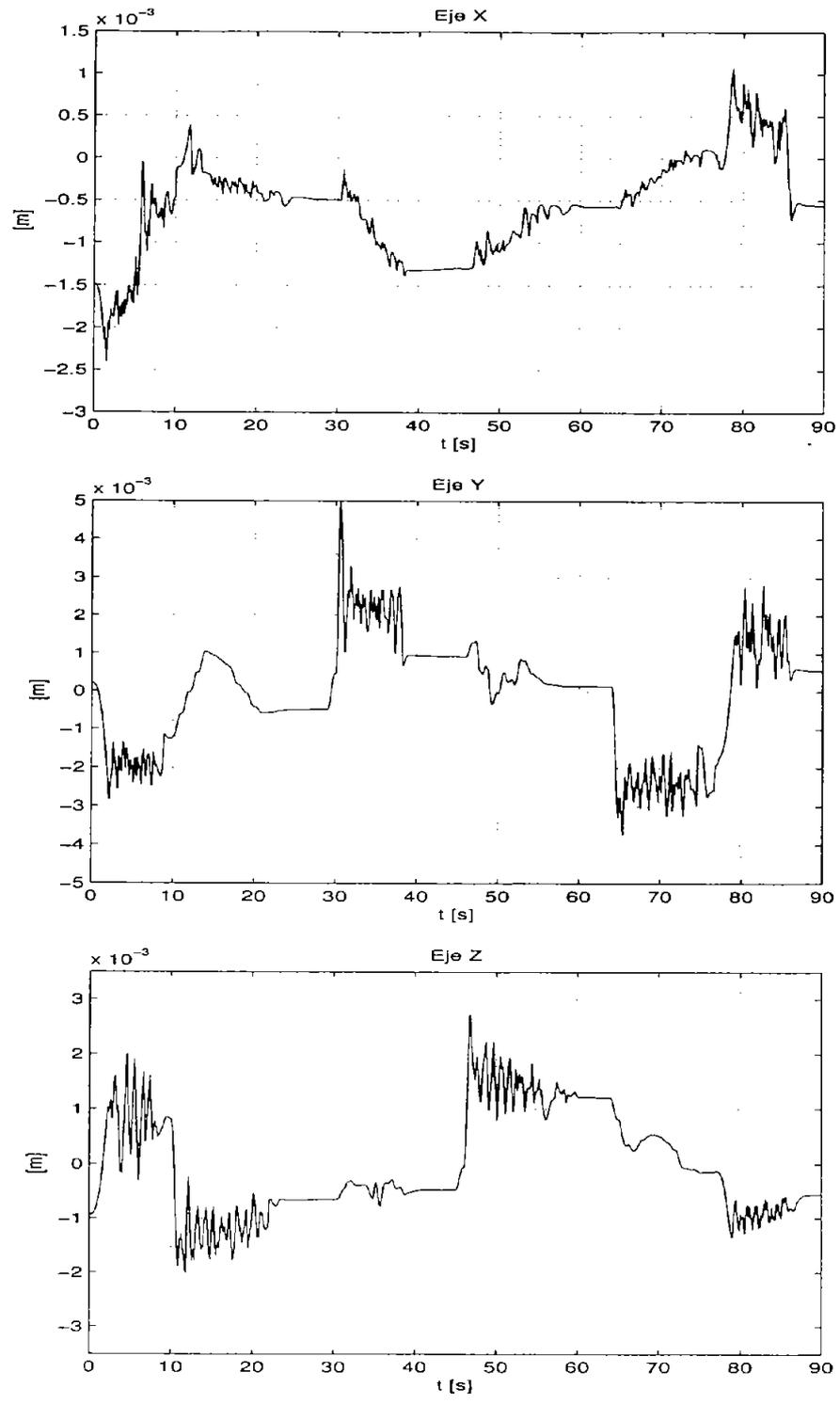


Figura 5.5: Rectángulo. Errores cartesianos.

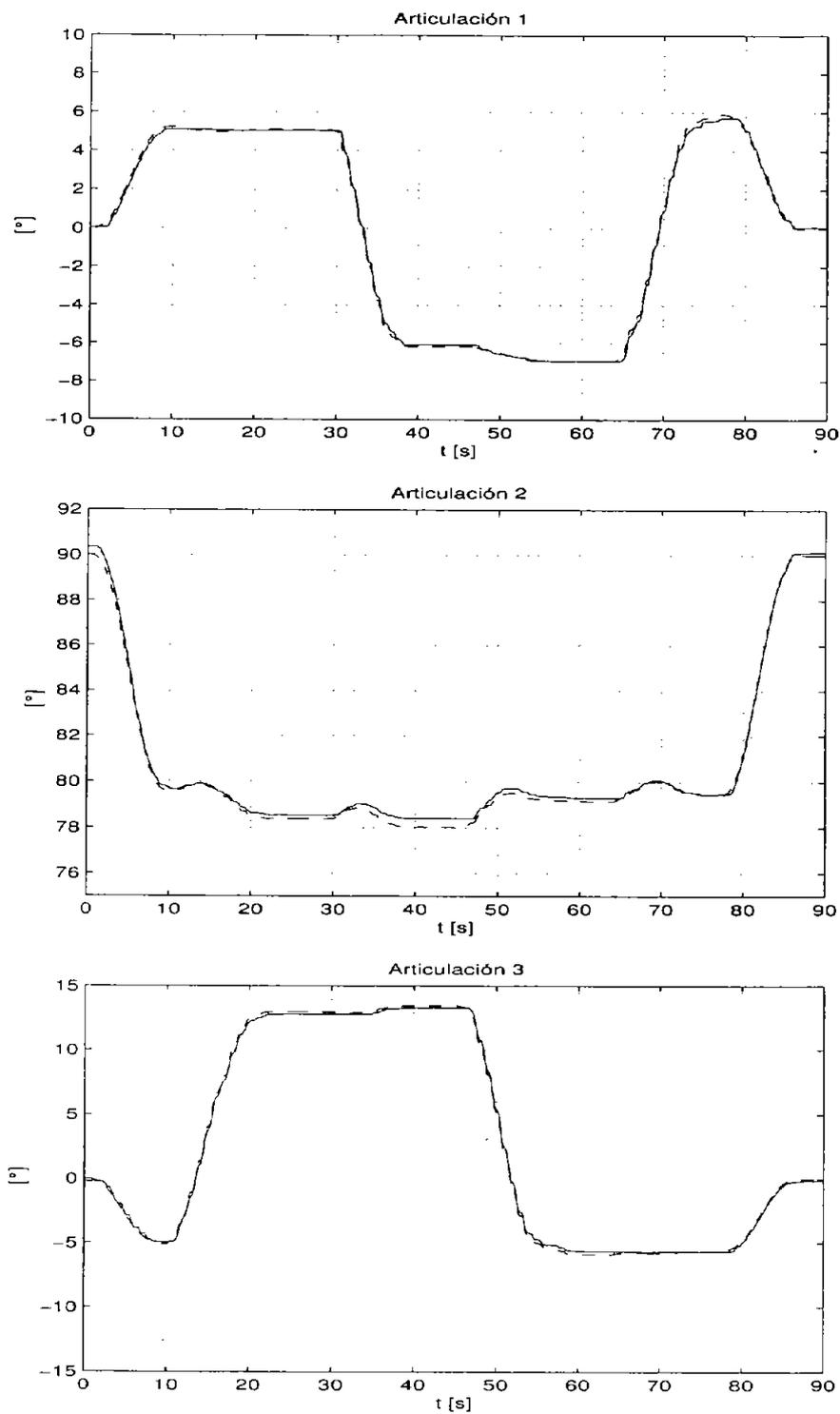


Figura 5.6: Rectángulo. Trayectorias articulares, - - deseada vs - real.

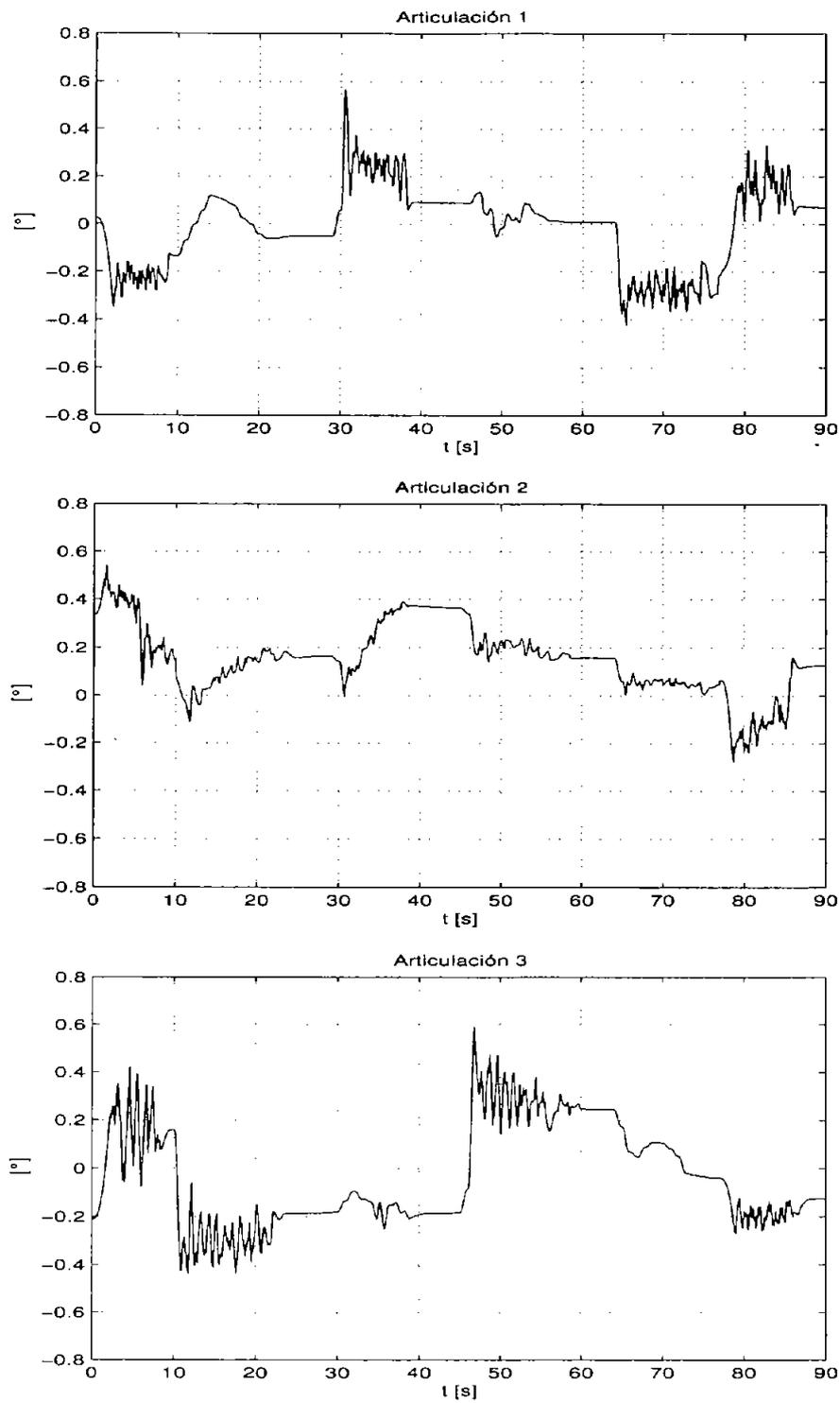


Figura 5.7: Rectángulo. Errores articulares.

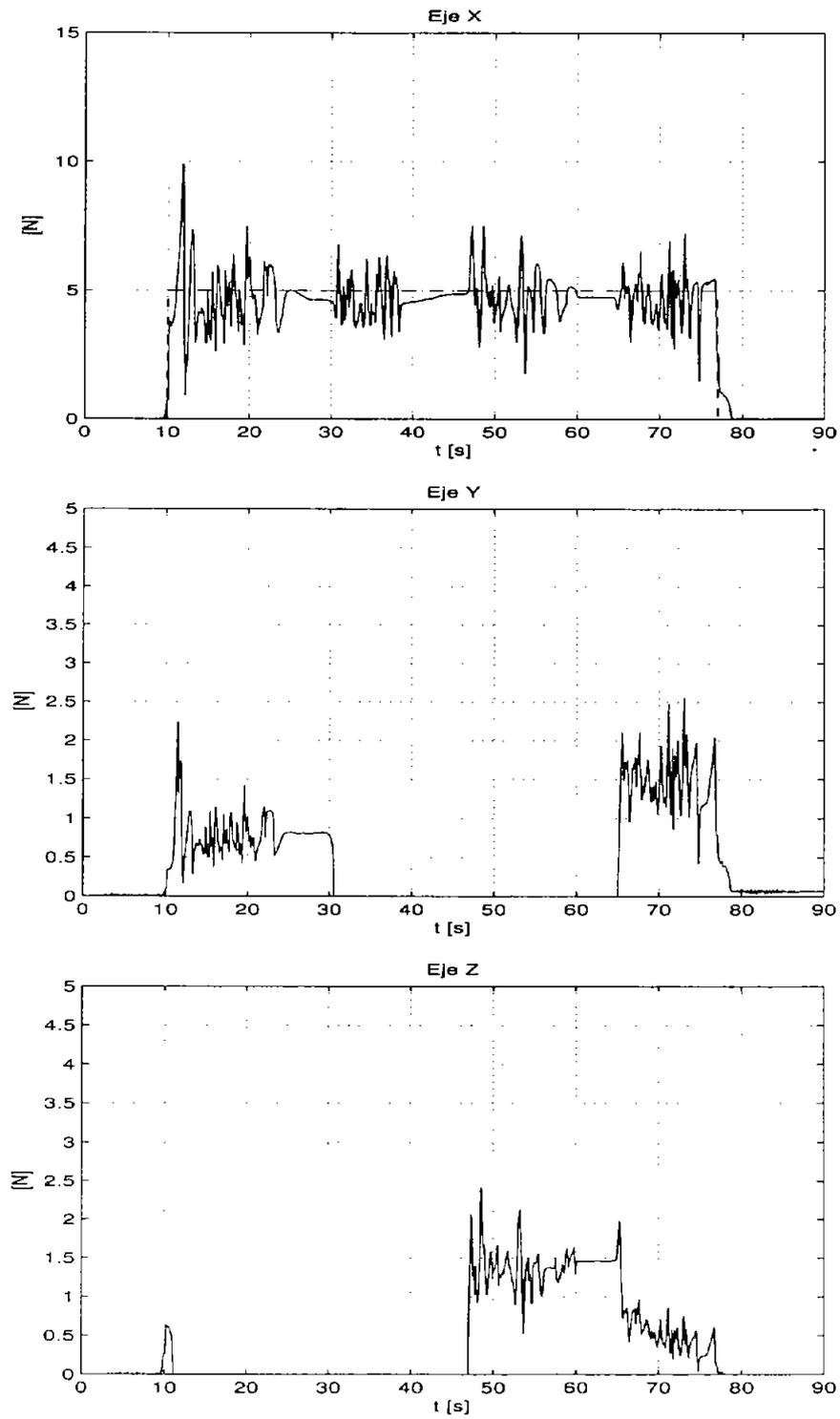


Figura 5.8: Rectángulo. Fuerza , - - deseada vs - real.

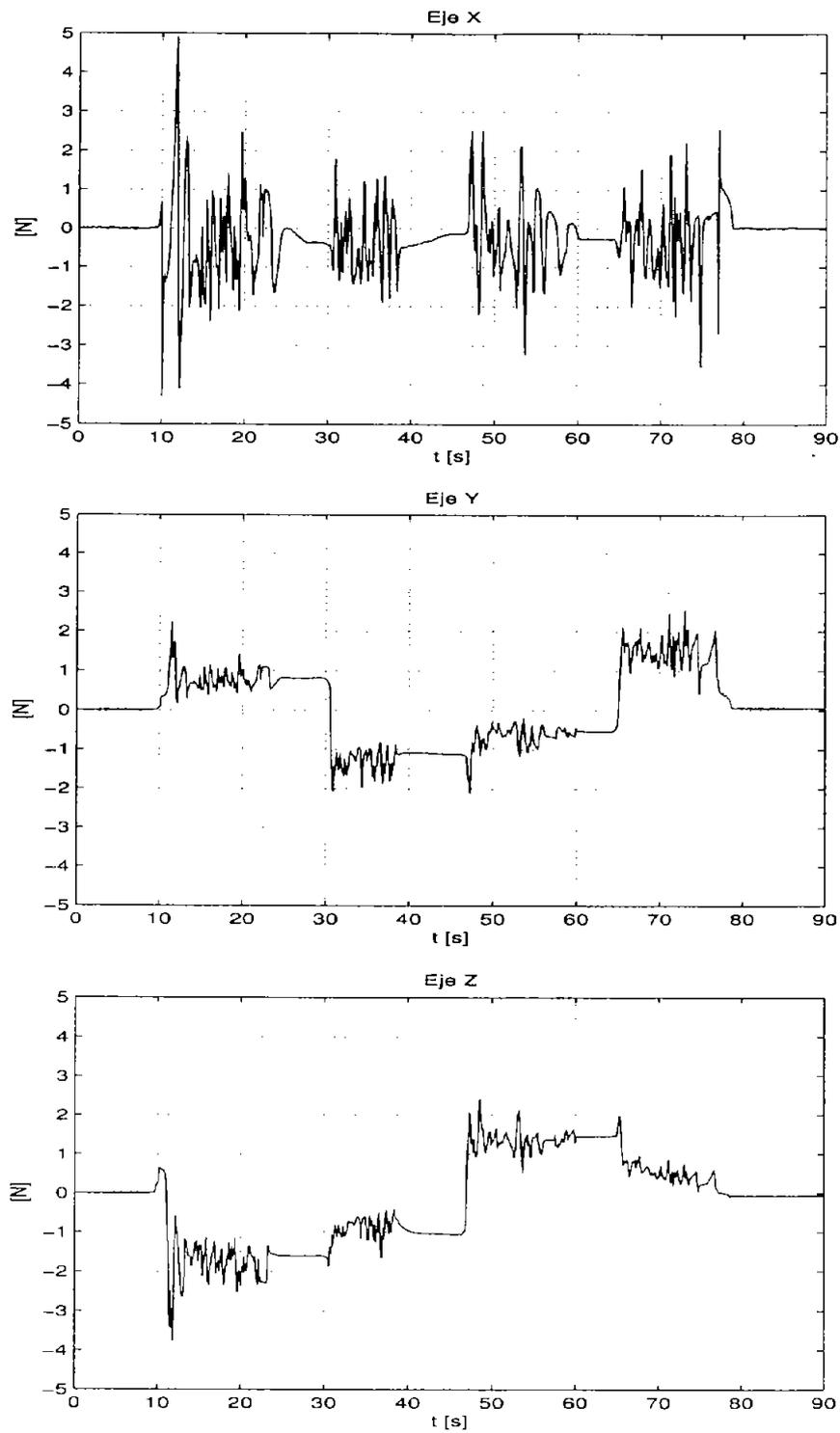


Figura 5.9: Rectángulo. Errores de fuerza.

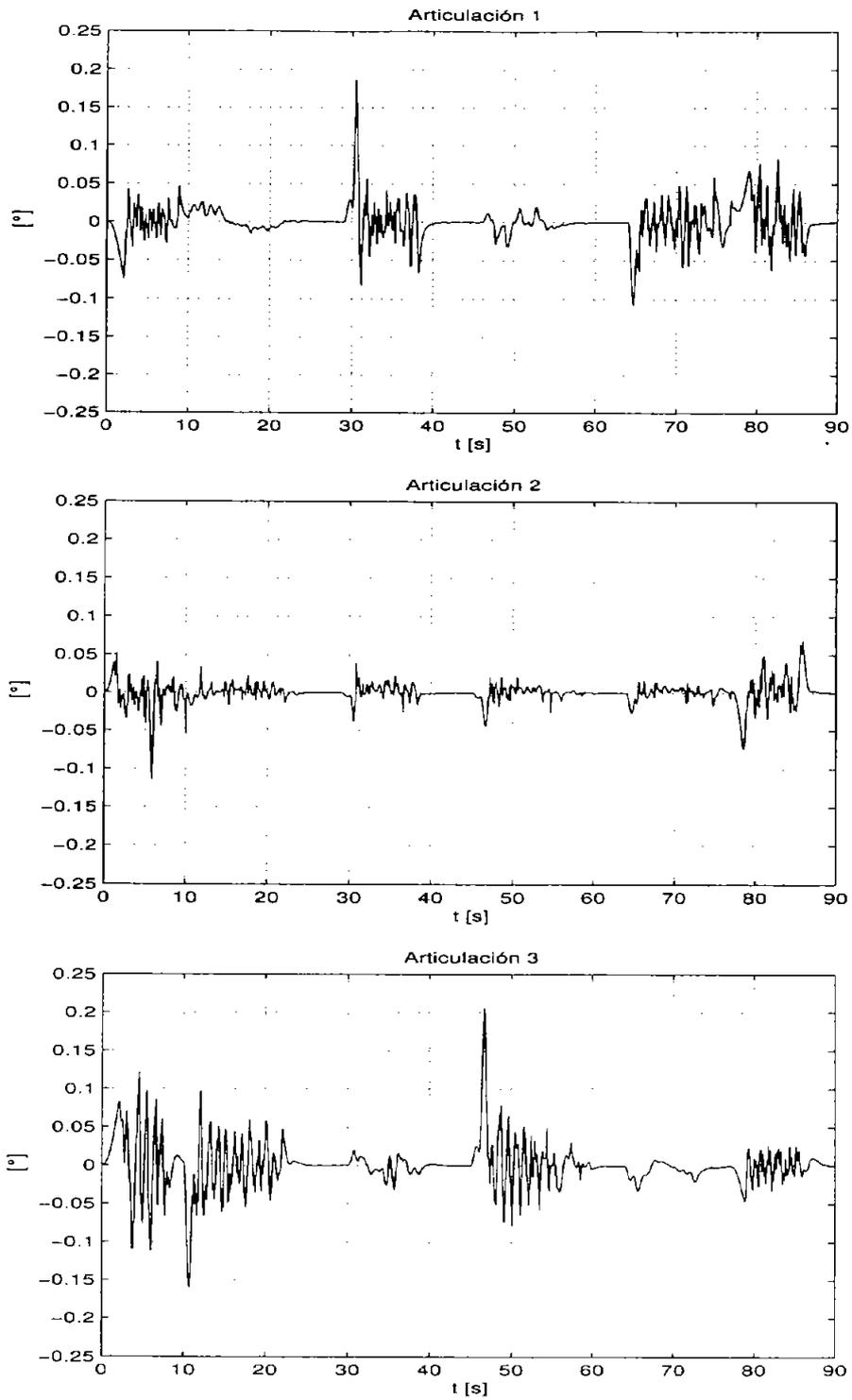


Figura 5.10: Rectángulo. Errores de observación.

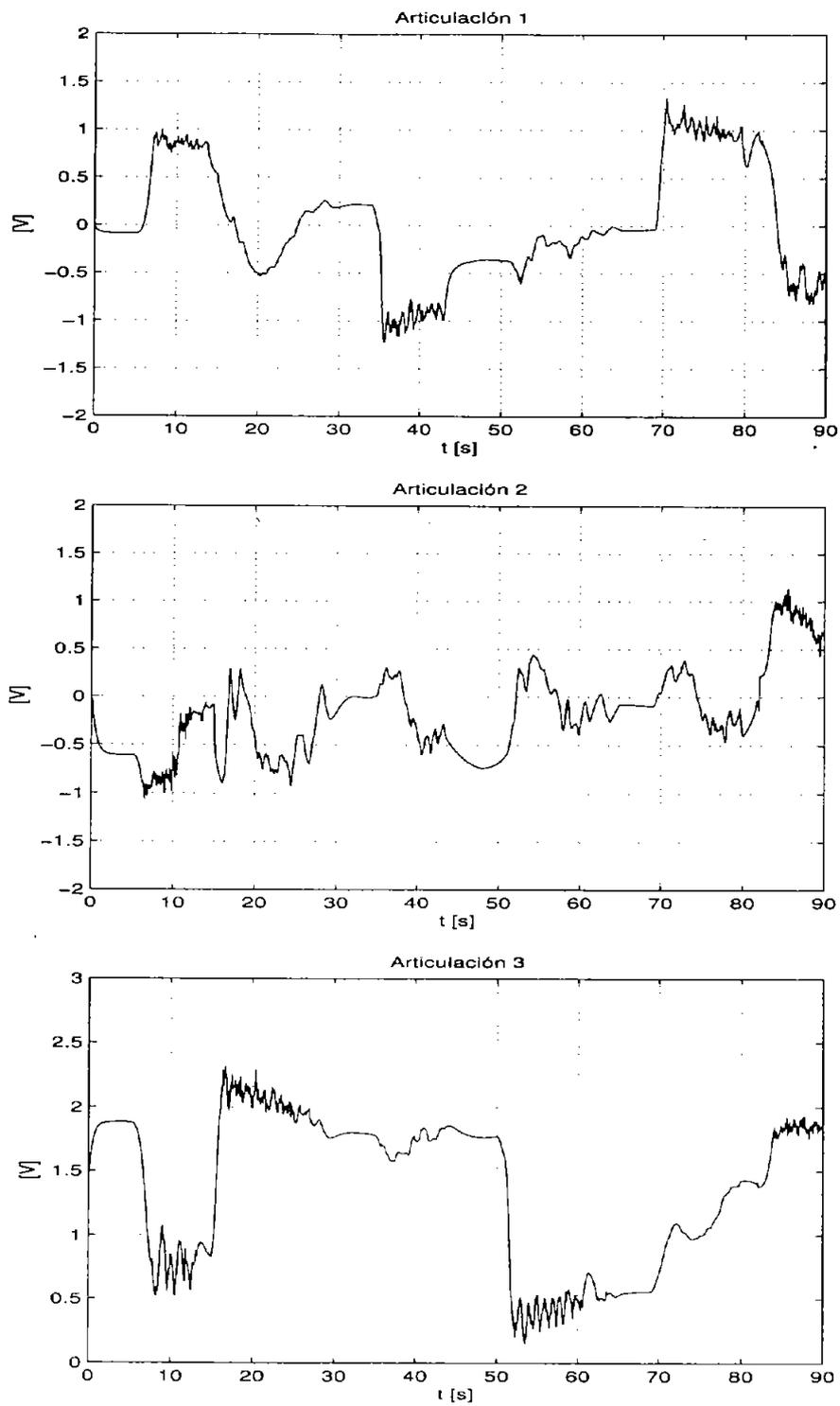


Figura 5.11: Rectángulo. Voltaje de control en las articulaciones.

5.3.2. Ovoide

Los dibujos obtenidos en este experimento se muestran en la Figura 5.12. En las Figuras 5.13 y 5.15 se tienen las coordenadas cartesianas y articulares respectivamente. En las gráficas de la Figura 5.14 se observa que los errores cartesianos se encuentran como en la sección anterior entre los $\pm 3[mm]$, que son aceptablemente buenos. En la Figura 5.16 se presentan los de las coordenadas articulares, cuyo resultado es bueno, ya que están nuevamente entre los ± 0.4 de grado, y un error promedio de 0.2 grados. En cuanto a la fuerza aplicada por el robot sobre la restricción, en la Figura 5.17 se muestra otra vez una repercusión en los ejes coordenados restantes, y en la Figura 5.18 se tienen los errores, que se deben considerar malos ya que se tiene un error global porcentual entre el 35 y 40%; por otro lado el índice \mathcal{I} arrojó un valor de 0.8711 [N]. En la Figura 5.19 se presentan los errores de observación que son otra vez muy buenos. Finalmente, en la Figura 5.20 se encuentran los voltajes de control, que no tuvieron problemas de saturación.

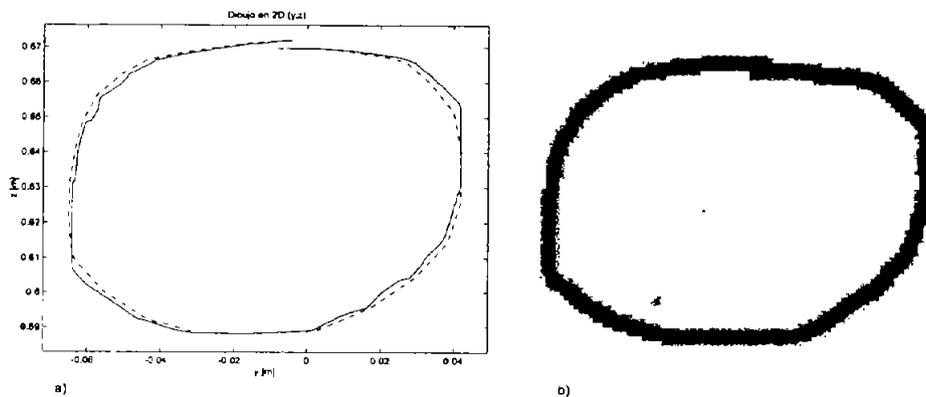


Figura 5.12: Ovoide. Dibujos resultantes a) Valor real calculado por cinemática directa (-) y trazo deseado (- -). b) Dibujo hecho por el robot.

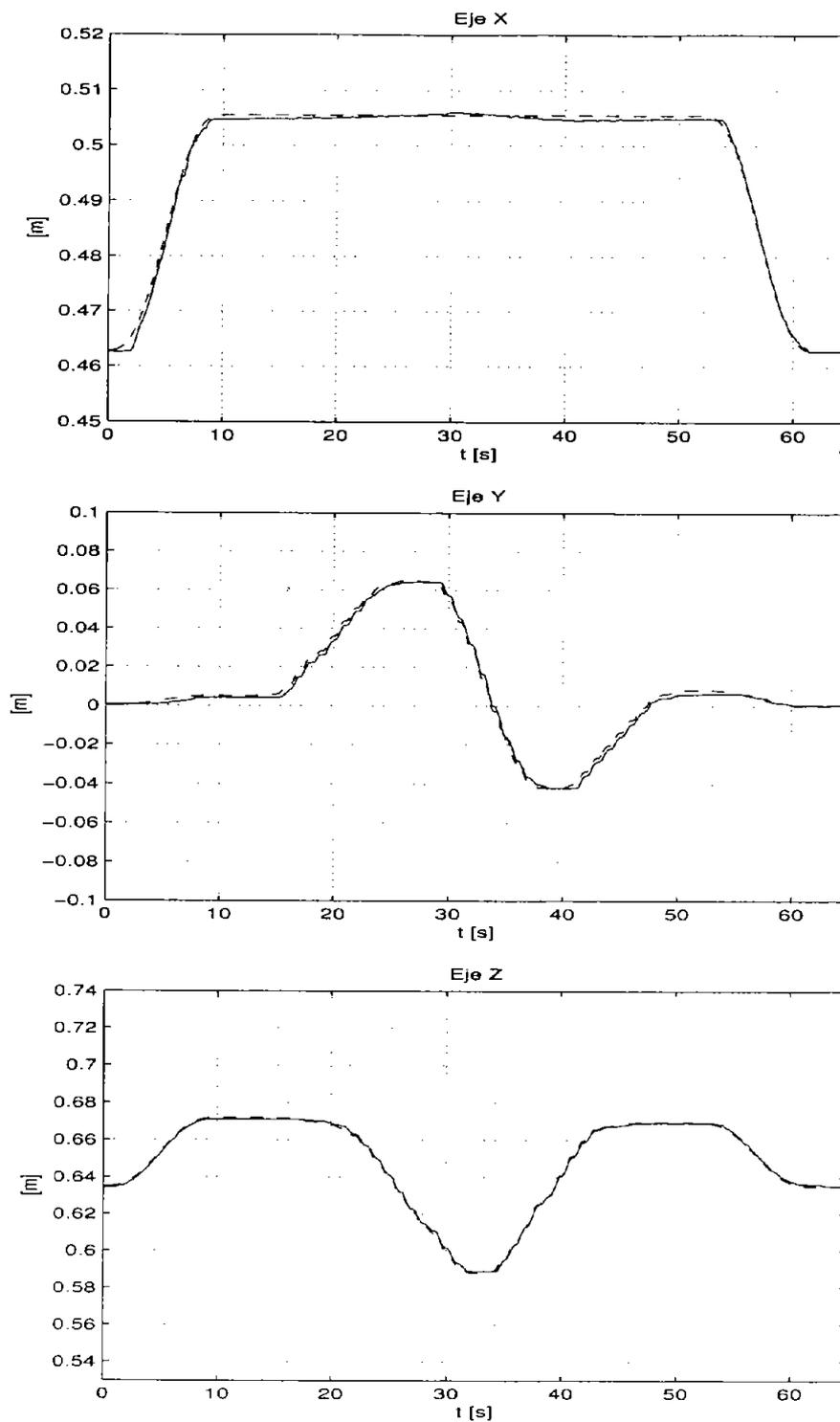


Figura 5.13: Ovoide. Trayectorias cartesianas, - - deseada vs - real.

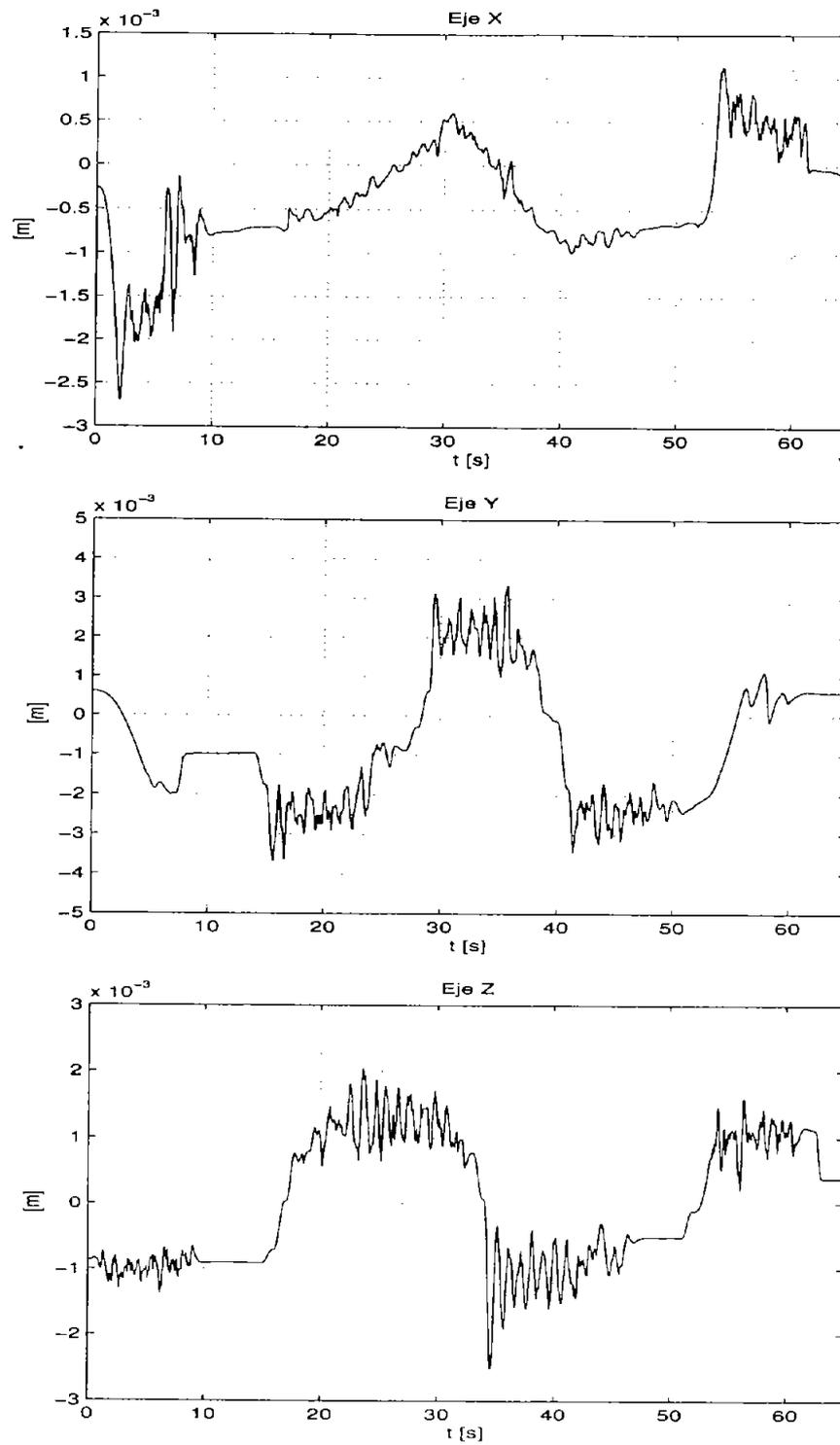


Figura 5.14: Ovoide. Errores cartesianos.

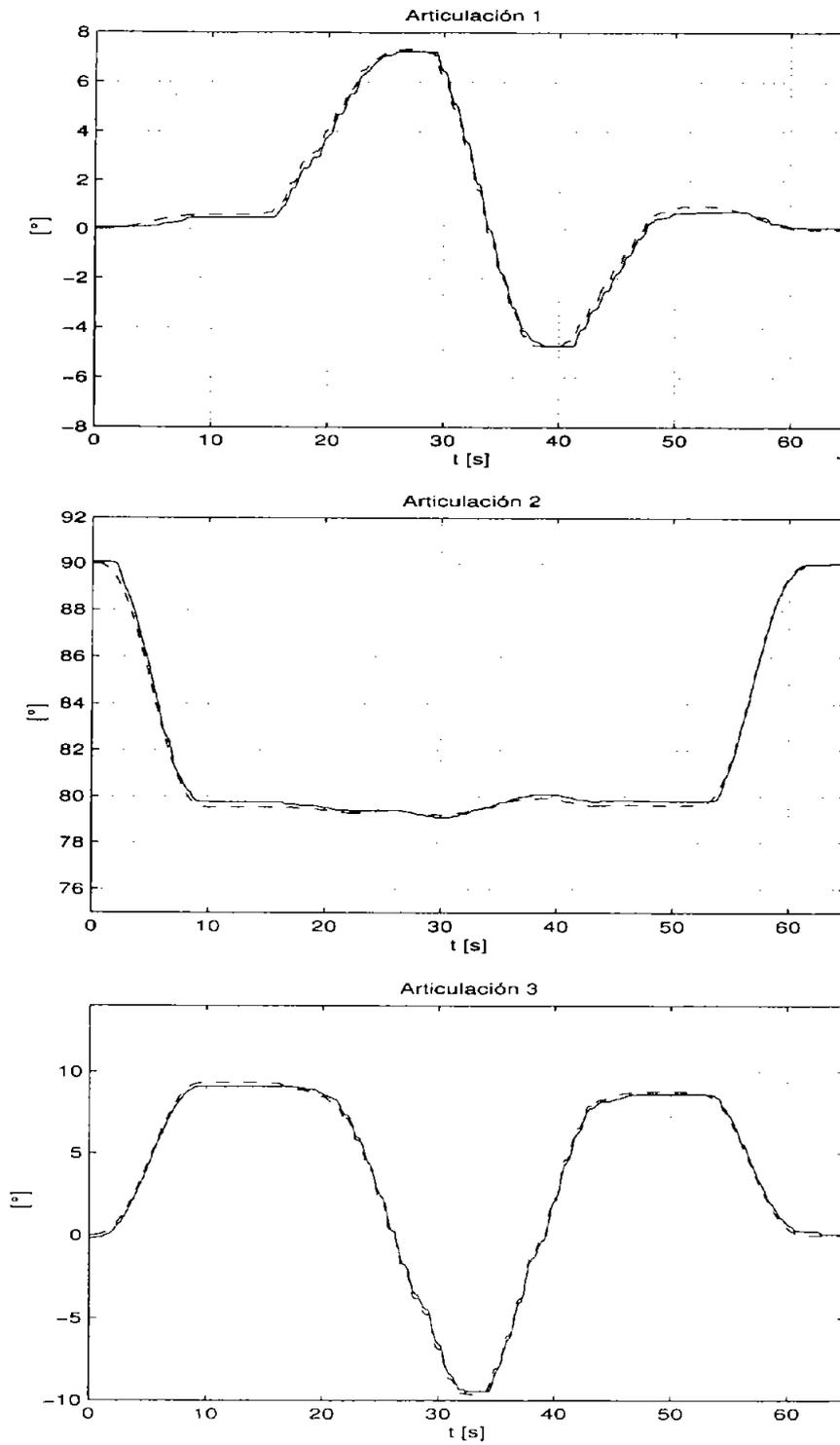


Figura 5.15: Ovoide. Trayectorias articulares, - - deseada vs - real.

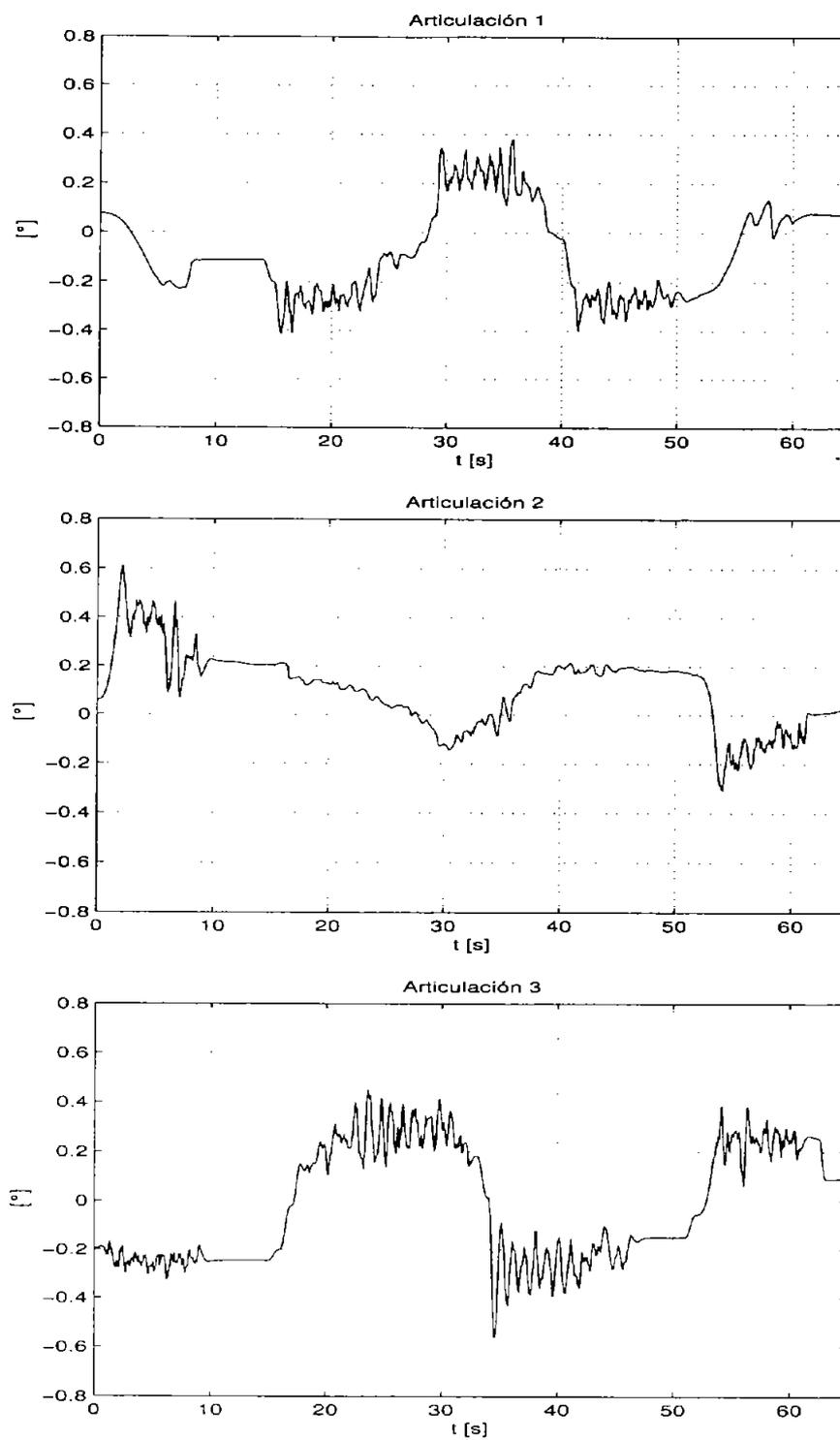


Figura 5.16: Ovoide. Errores articulares.

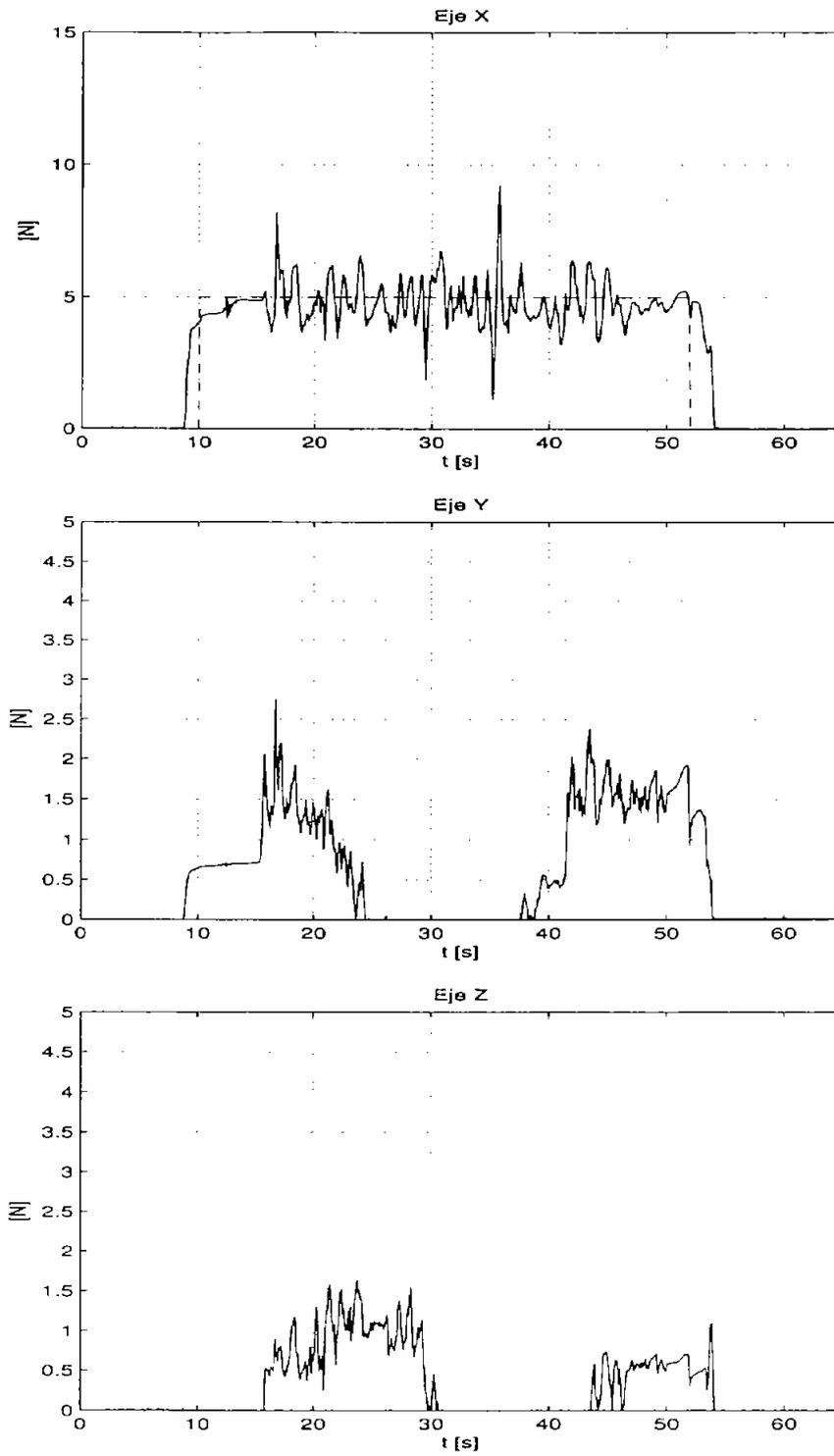


Figura 5.17: Ovoide. Fuerza , - - deseada vs - real.

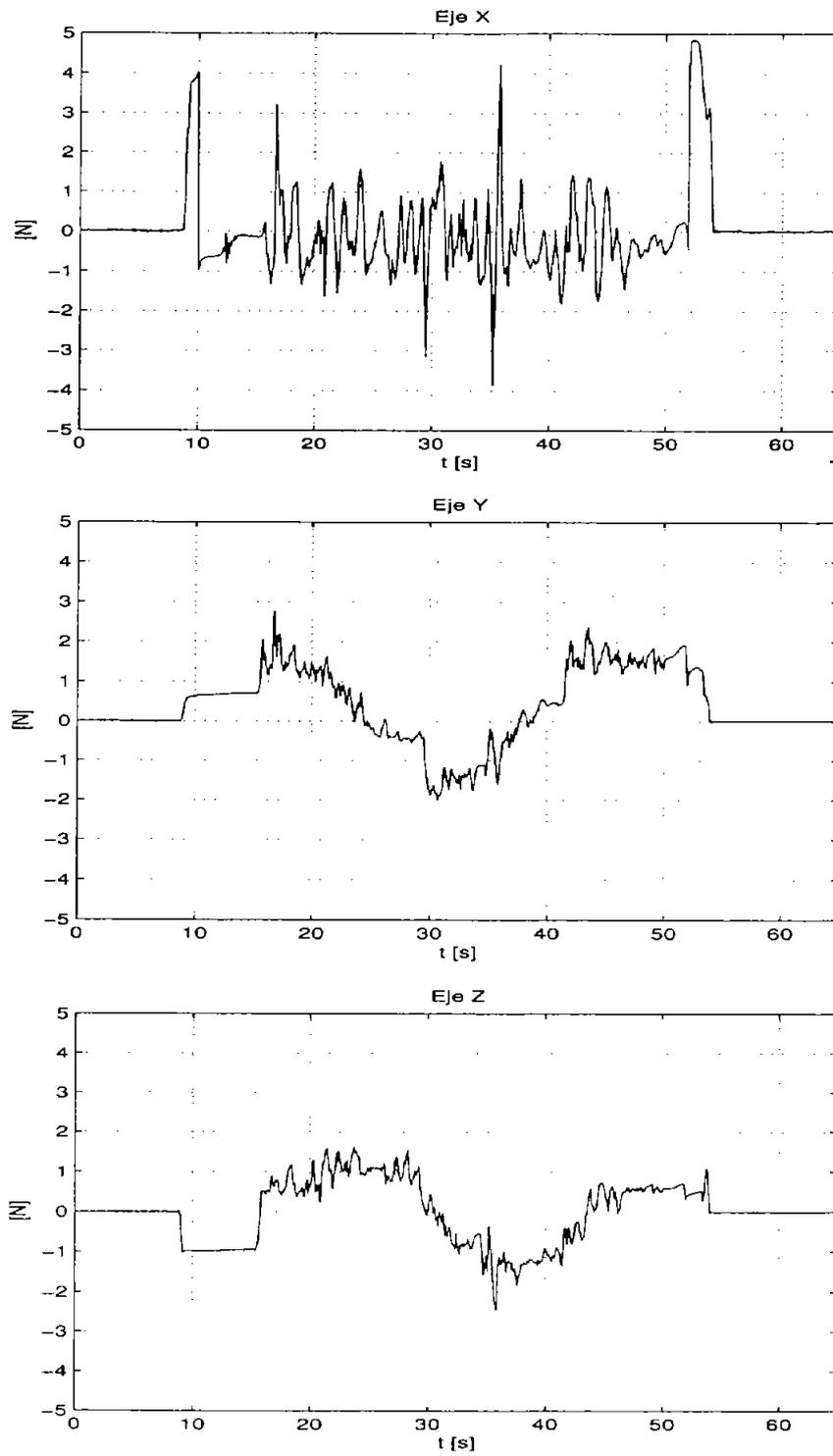


Figura 5.18: Ovoide. Errores de fuerza.

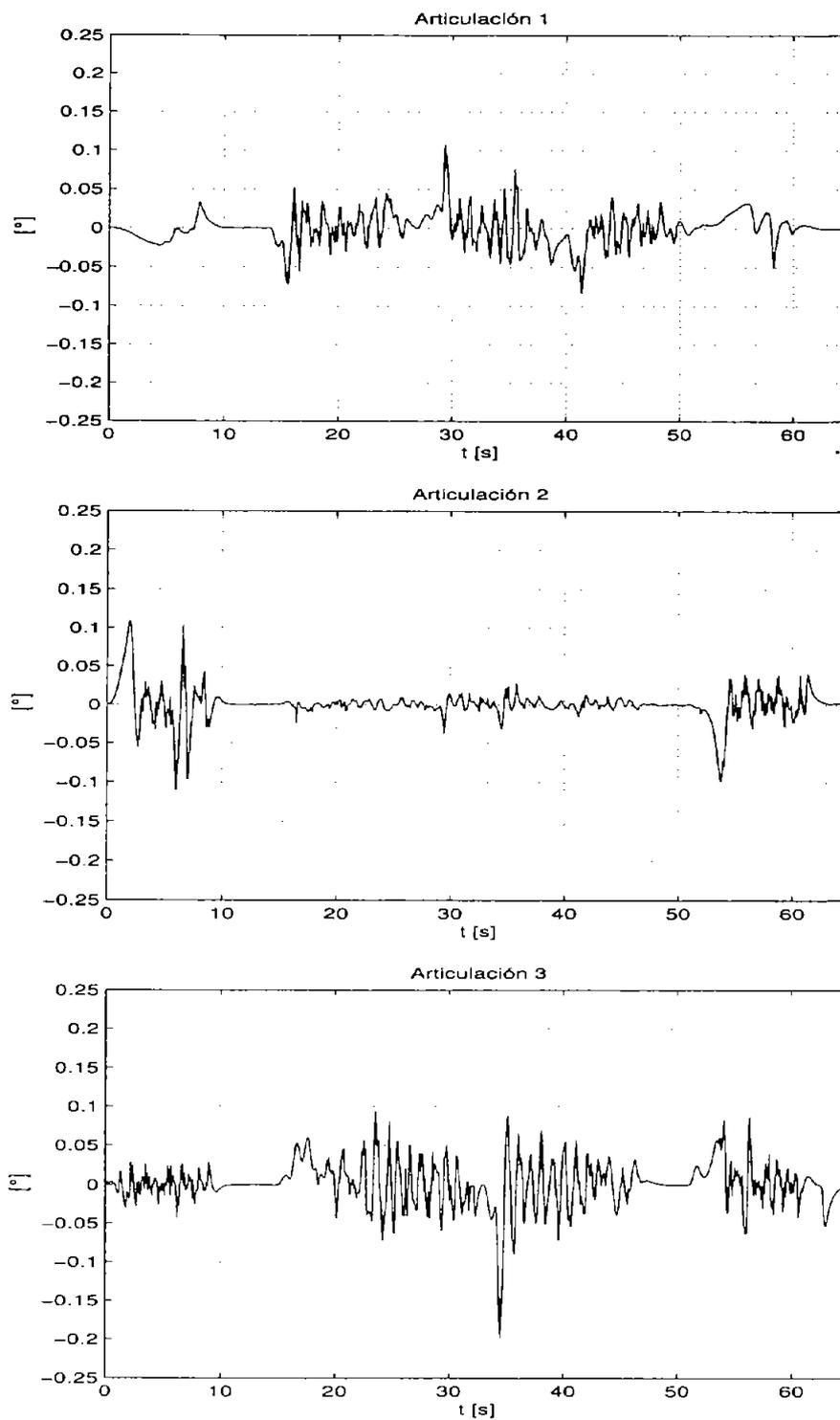


Figura 5.19: Ovoide. Errores de observación.

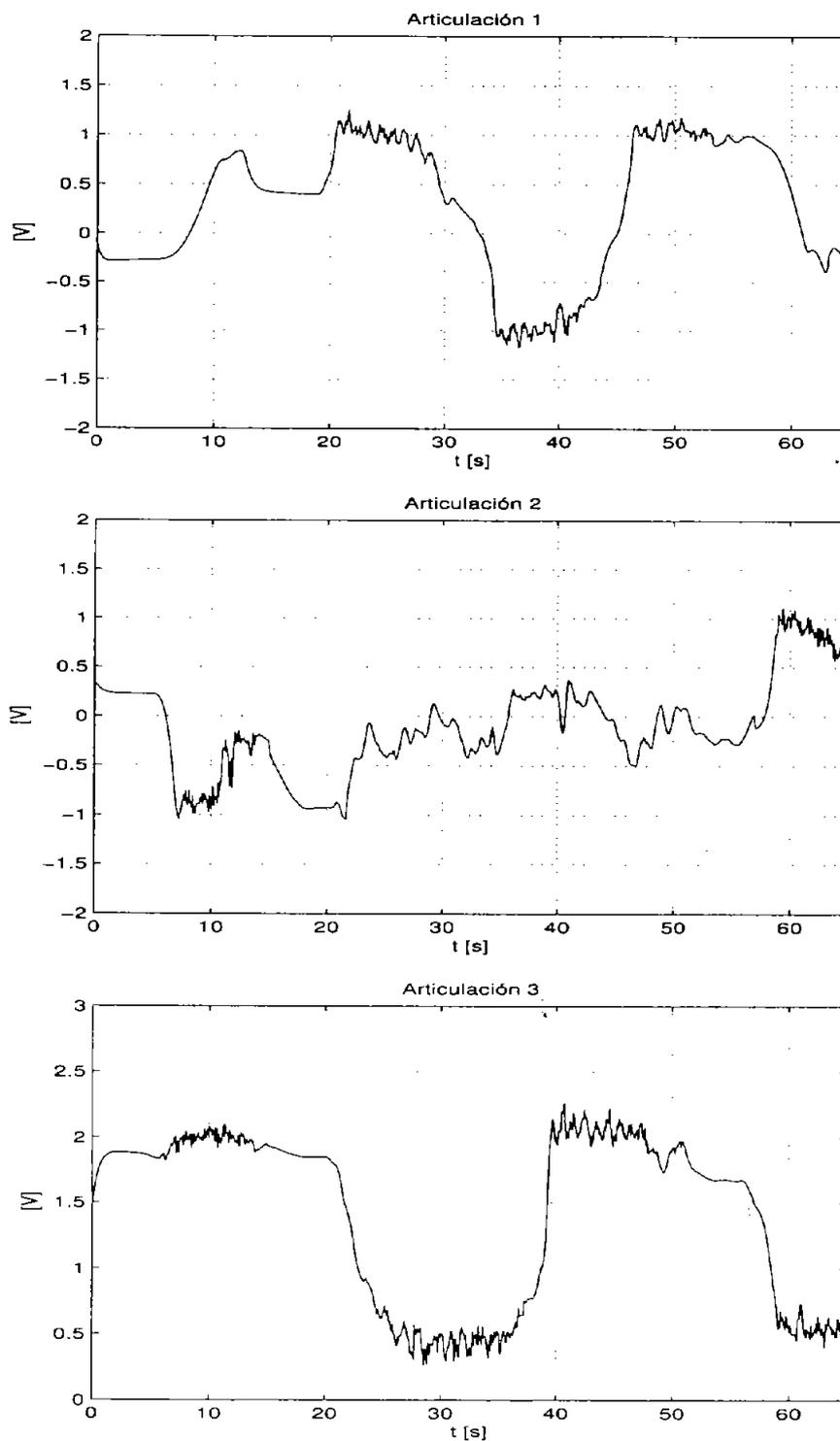


Figura 5.20: Ovoide. Voltaje de control en las articulaciones.

5.3.3. Manuscrito

Los dibujos resultantes se encuentran en la Figura 5.21. En las Figuras 5.22 y 5.24 se muestran las coordenadas cartesianas y articulares respectivamente. En la Figura 5.23 se presentan los errores cartesianos, que son similares a los de las secciones anteriores (quizás con más oscilaciones), mientras en la Figura 5.25 se presentan los de las coordenadas articulares, cuyo resultado es bueno, considerando un pequeño aumento que los mueve de la región que se tenía anteriormente, pero con un promedio aproximado de 0.3 de grado. En la fuerza aplicada por el manipulador, en la Figura 5.26 se muestra una repercusión mayor que en los experimentos anteriores en los ejes coordenados restantes, y en la Figura 5.27 se tienen los errores, que se pueden considerar nuevamente malos ya que se tiene en este caso un error global porcentual de un poco más del 40 %, mientras que el índice de desempeño para la fuerza fue de 1.1333 [N]. En la Figura 5.28 se presentan los errores de observación que como se aprecia aumentaron, aunque siguen siendo muy buenos. Finalmente, en la Figura 5.29 se encuentran los voltajes de control.

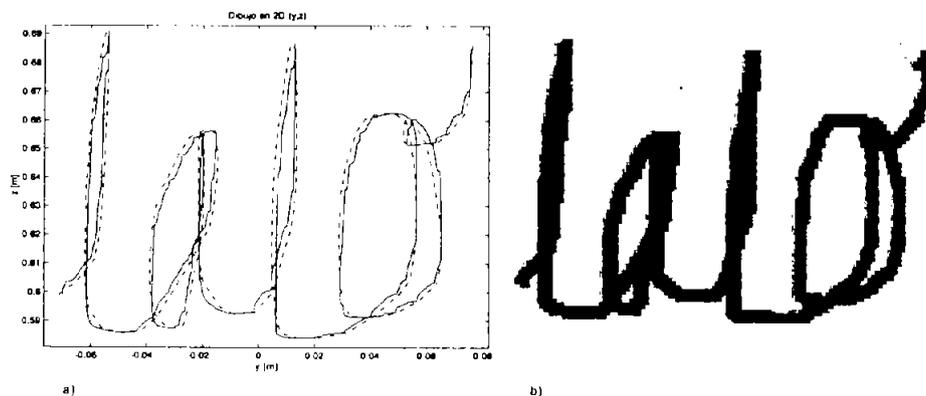


Figura 5.21: Manuscrito. Dibujos resultantes a) Valor real calculado por cinemática directa (-) y trazo deseado (- -). b) Dibujo hecho por el robot.

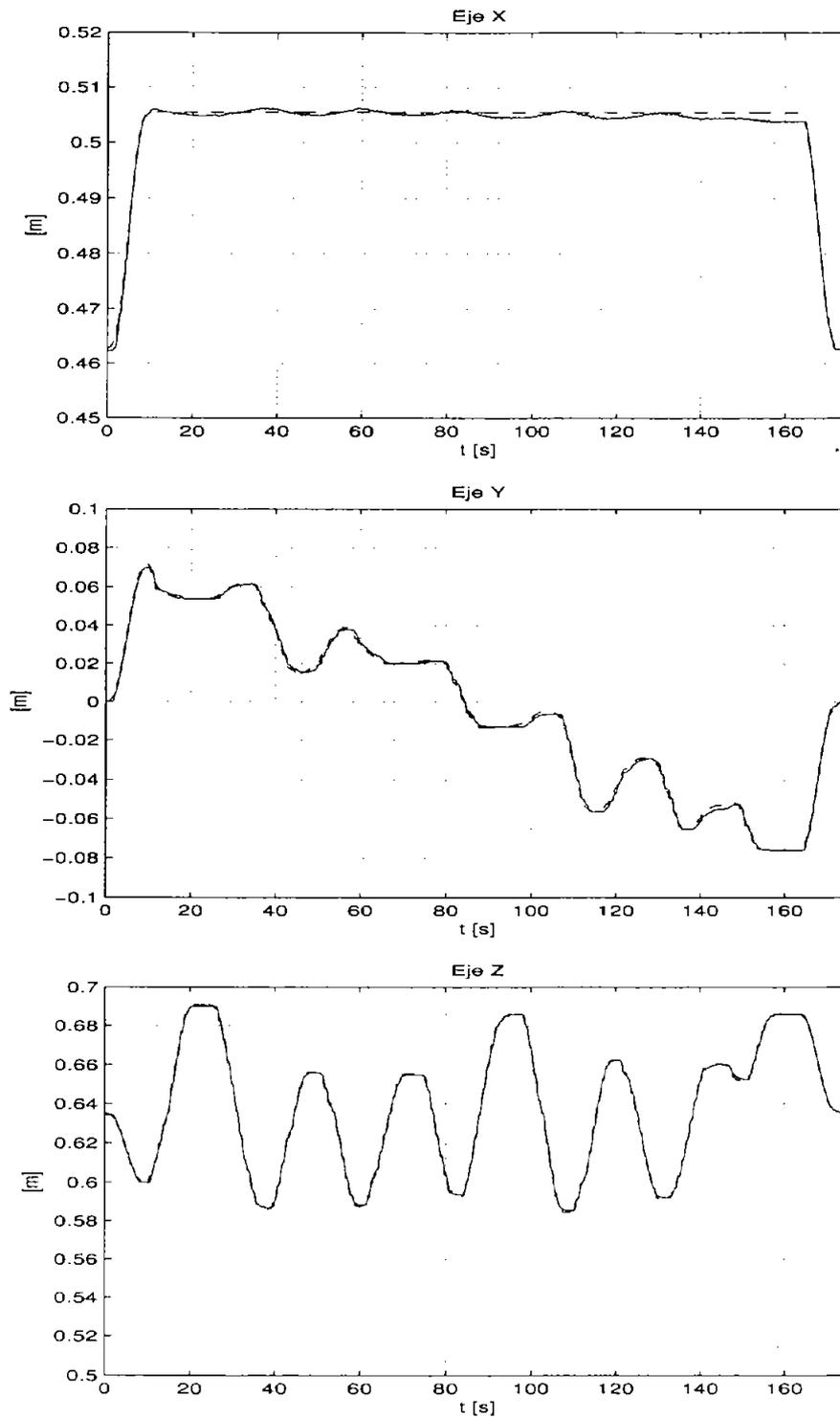


Figura 5.22: Manuscrito. Trayectorias cartesianas, - - deseada vs - real.

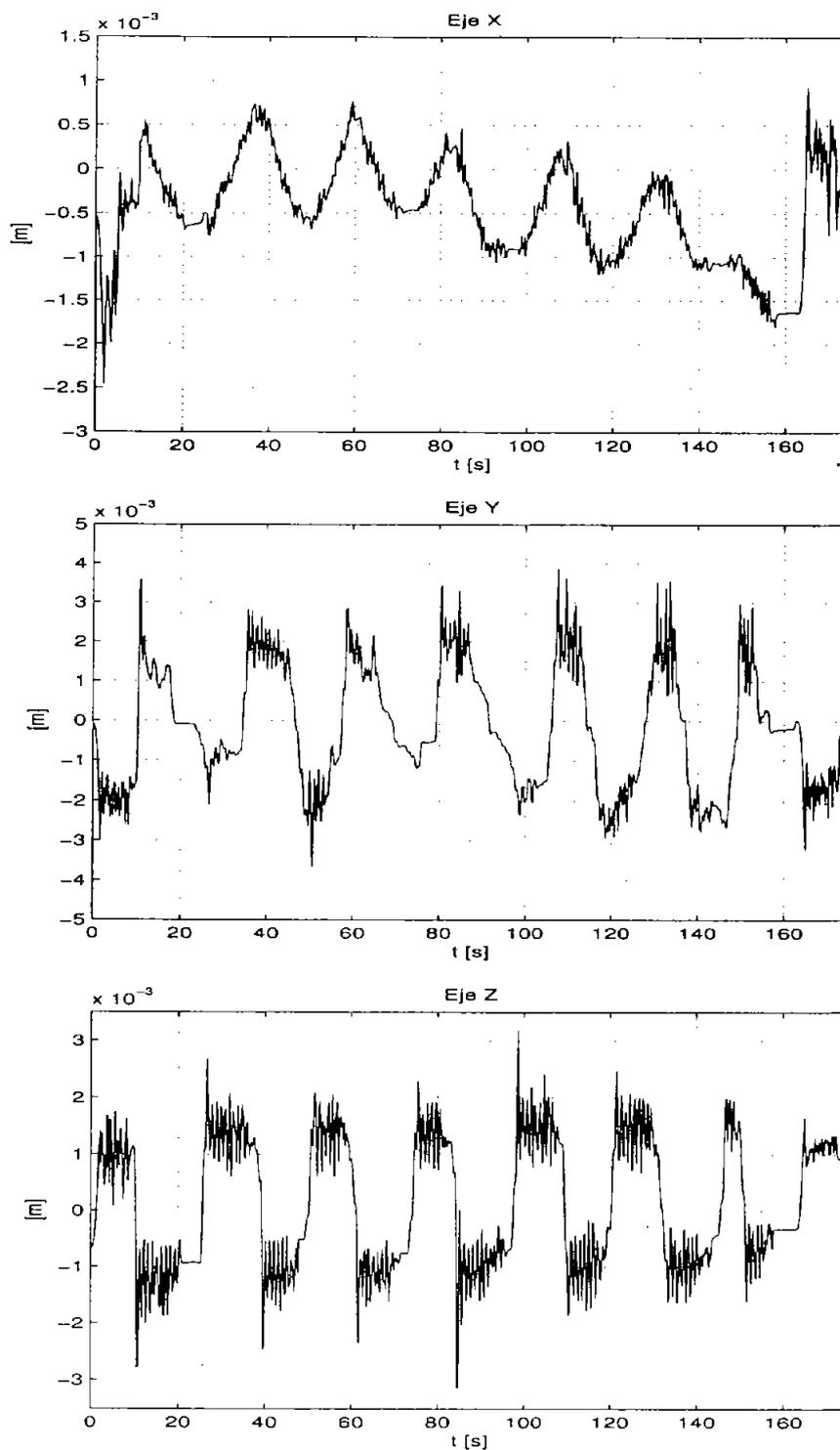


Figura 5.23: Manuscrito. Errores cartesianos.

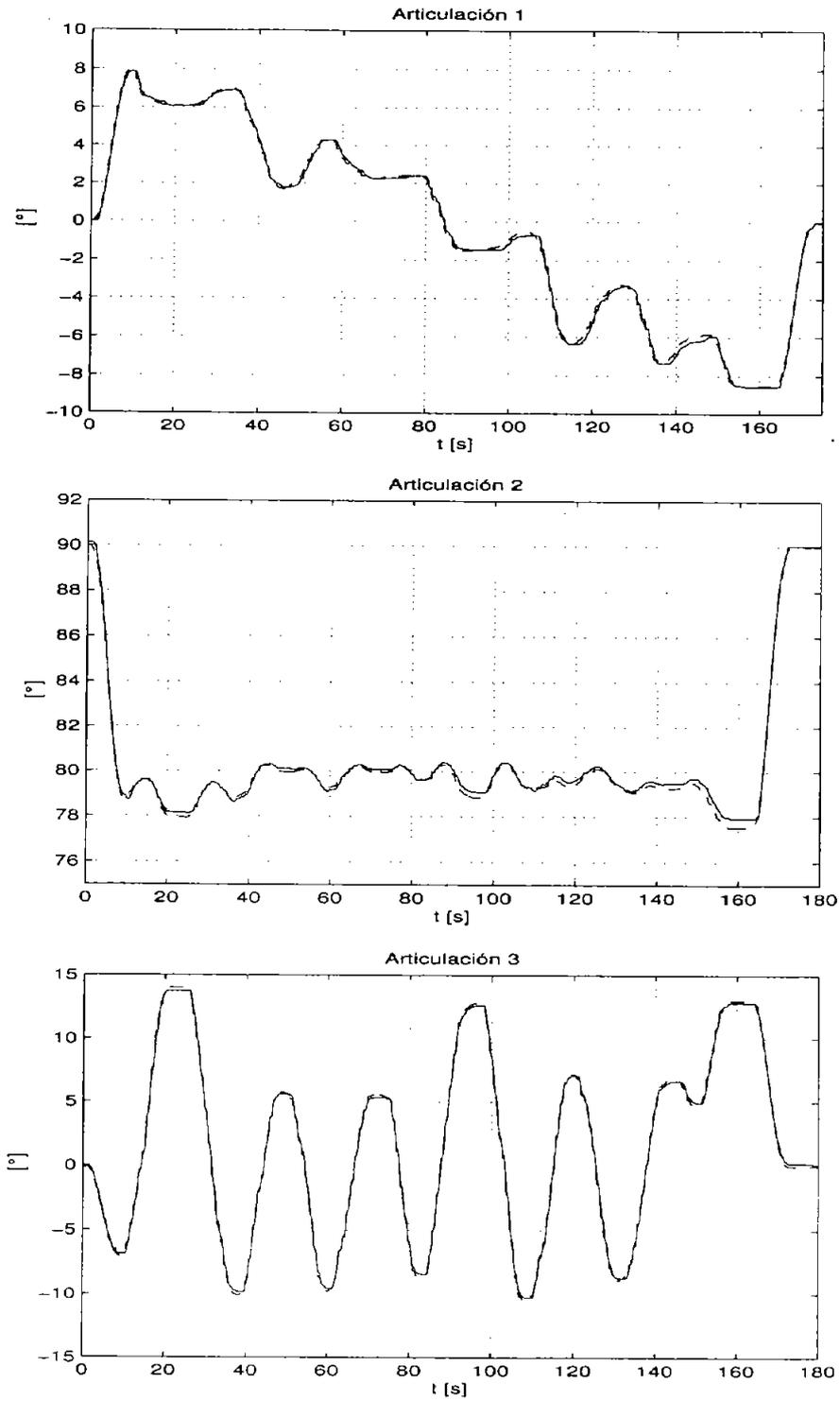


Figura 5.24: Manuscrito. Trayectorias articulares, - - deseada vs - real.

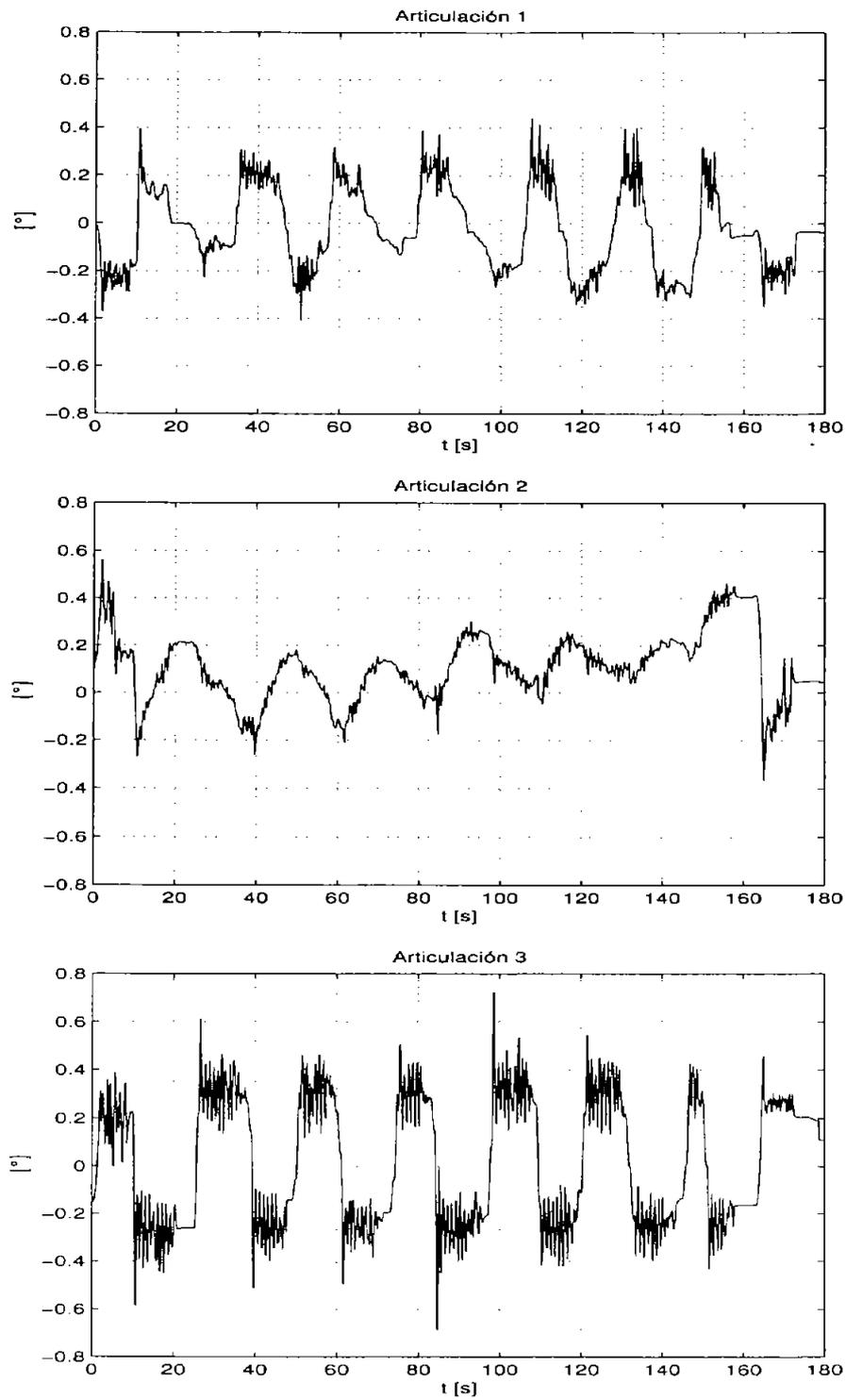


Figura 5.25: Manuscrito. Errores articulares.

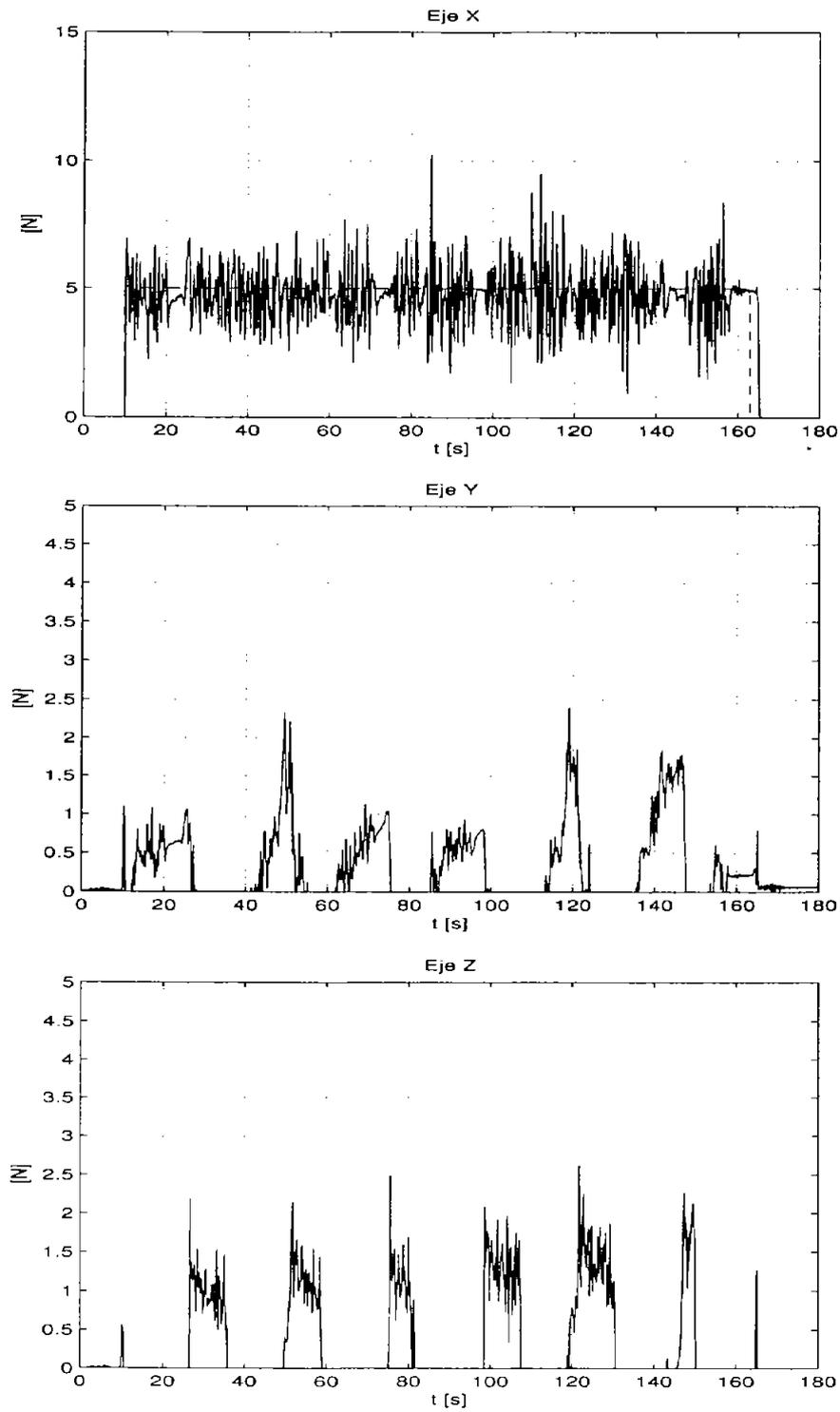


Figura 5.26: Manuscrito. Fuerza , - - deseada vs - real.

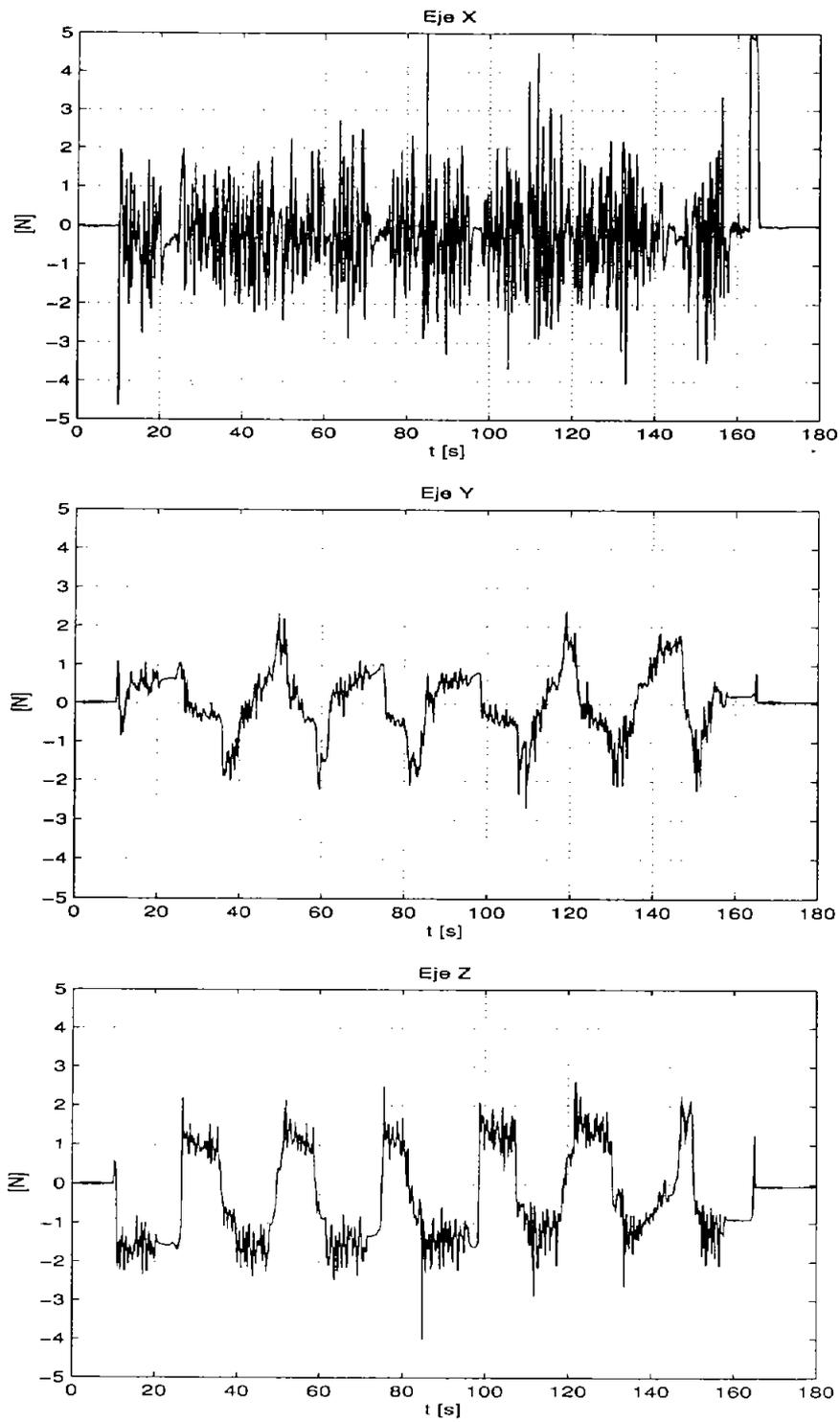


Figura 5.27: Manuscrito. Errores de fuerza.

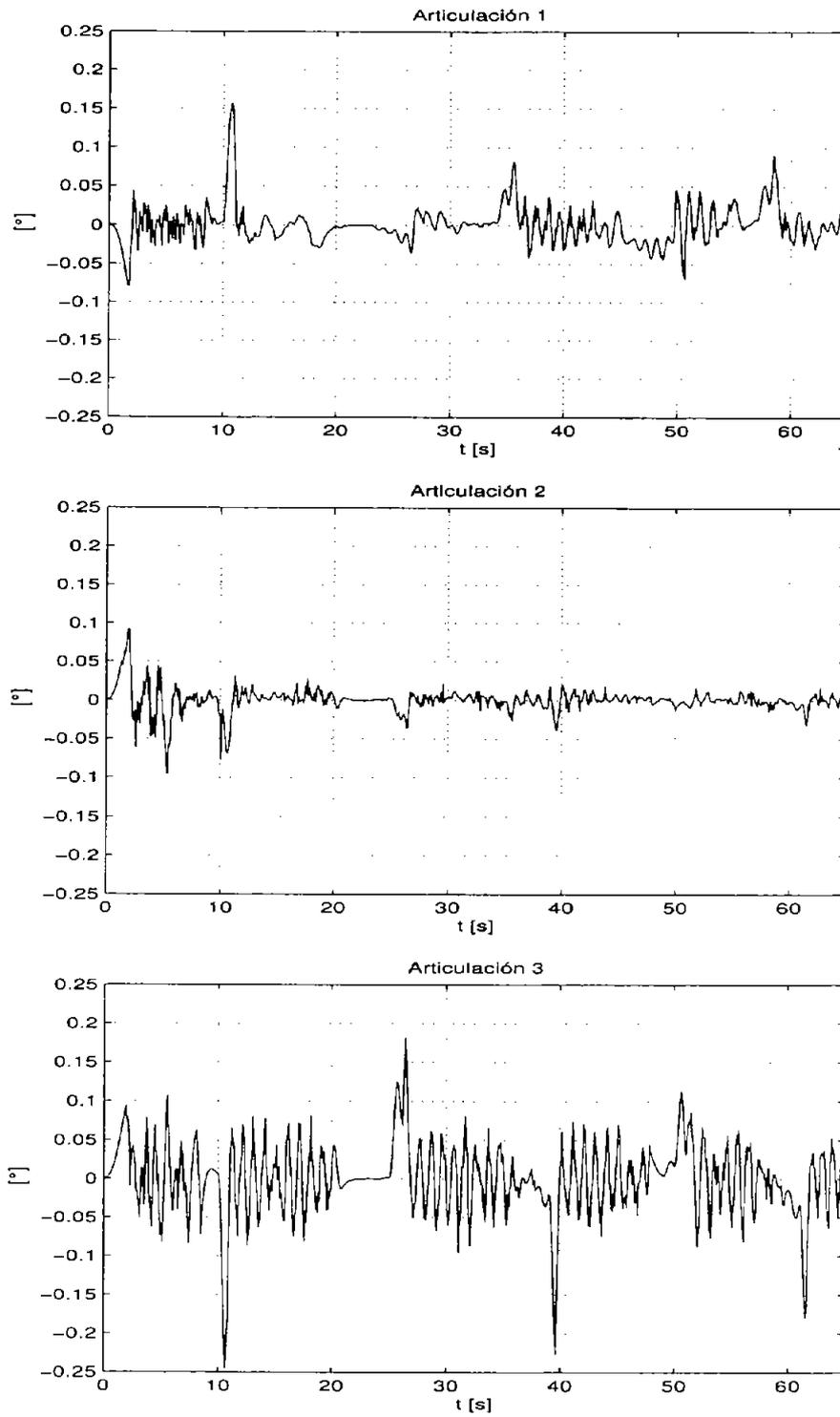


Figura 5.28: Manuscrito. Errores de observación.

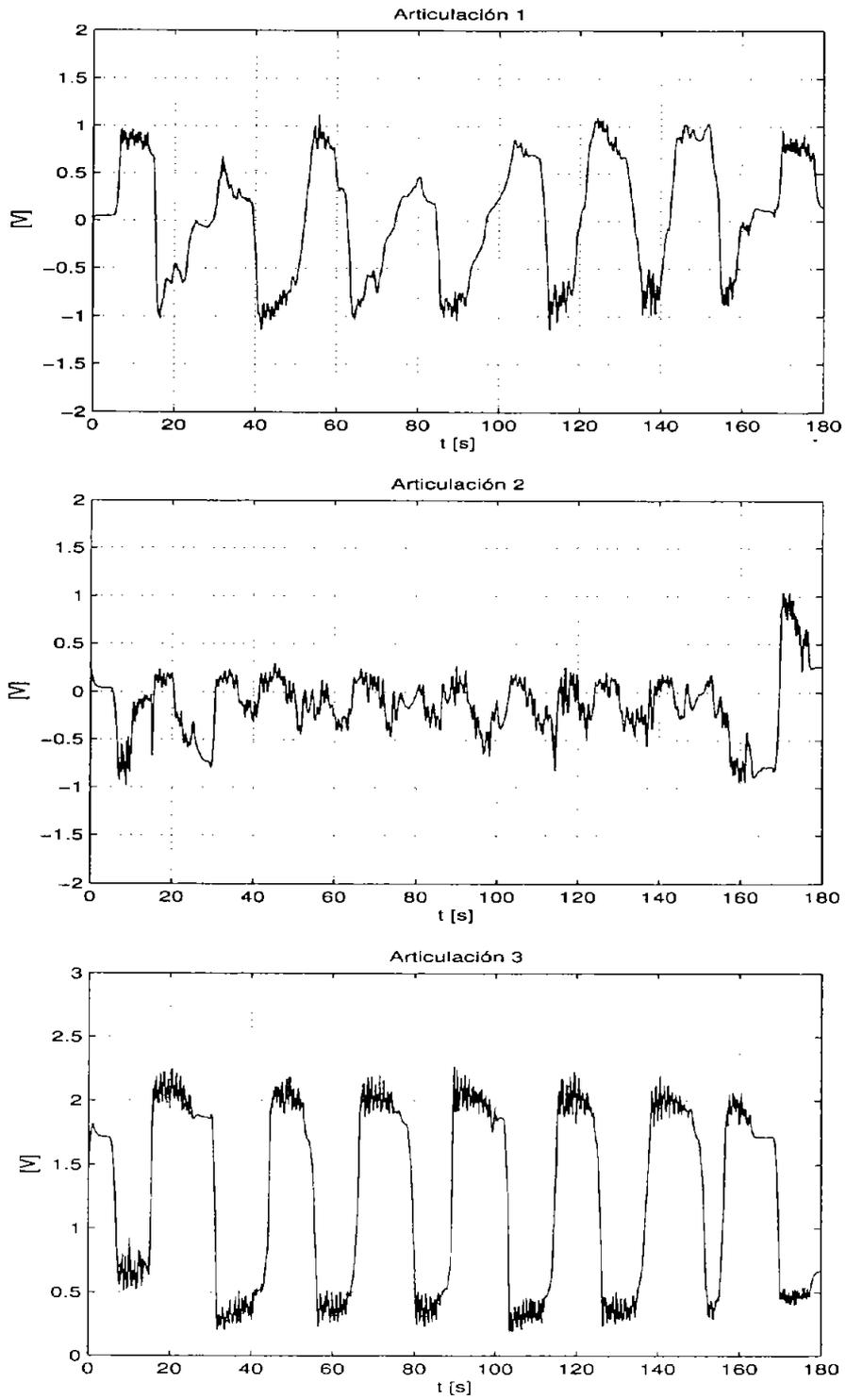


Figura 5.29: Manuscrito. Voltaje de control en las articulaciones.

5.4. Discusión

En lo que respecta a los trazos, no tienen una forma muy bien definida, considerando que se hicieron con el ratón de la computadora, que no es la mejor manera de hacerlos.

En las gráficas de coordenadas cartesianas (Figuras 5.4, 5.13, 5.22) y articulares (Figuras 5.6, 5.15, 5.24) para los tres experimentos se puede observar un seguimiento asintótico considerablemente bueno de las trayectorias deseadas, lo que en cierta forma se puede corroborar con los errores respectivos (ver, Figuras 5.5, 5.7, 5.14, 5.16, 5.23 y 5.25), que son pequeños; esto también indica un buen desempeño dinámico del sistema. Las gráficas de error cartesiano para las coordenadas y y z , considerando los casos del rectángulo y el ovoide, muestran que para el manipulador es más complicado hacer la segunda figura, por el movimiento curvo que implica, como se puede observar en las oscilaciones que se tienen durante el tiempo que el plumón está en contacto con la hoja de papel. Por otro lado, en el espacio articular, estos problemas se observan principalmente en las articulaciones 1 y 3. En lo que respecta al manuscrito, se tiene una concatenación de movimientos rectilíneos y curvilíneos, lo que genera que los errores de posición, tanto cartesianos como articulares aumenten, esto lo muestra la cantidad de oscilaciones que se pueden observar en las gráficas de las Figuras 5.23 y 5.25 respectivamente.

Las resultados que se observan en las Figuras de los errores cartesianos y articulares, son en parte generados por el efecto de fricción que se presenta al moverse el efector final sobre la restricción. Al inicio y final de la trayectoria (polinomio de quinto orden) que va de un punto a otro del trazo realizado; se tiene una fricción estática alta, que es cuando se tiene el mayor error, pero al aumentar la velocidad del trazo (dado por la trayectoria deseada) la fricción disminuye y el error se reduce, presentando oscilaciones.

En lo que respecta a las gráficas de fuerza, lo primero que se puede observar es un impulso de fuerza, que se genera al momento de hacer contacto la punta del plumón con la restricción. Este se debe al efecto de impacto que se presenta al conmutar de un control en movimiento libre a uno en espacio restringido, y que no se encuentra compensado. La afectación que se tiene de la fuerza aplicada en la dirección del eje

x (deseada) en los ejes y y z , se presenta en los tres experimentos, la repercusión es mayor para un movimiento circular (Figura 5.17), que con uno recto (Figura 5.8,) pero esta es más grande para el manuscrito (Figura 5.26). Al observar las gráficas de los errores de fuerza en las Figuras 5.9, 5.18 y 5.27 se tienen errores porcentuales altos como se menciona, además se observa mayor oscilación. Esto se debe al efecto de fricción presente. En la Tabla 5.1 se muestran los índices de desempeño obtenidos para los experimentos, que es una forma cuantitativa de ver que experimento tuvo un mejor desempeño en el contexto de la fuerza aplicada. Con base en esta tabla se puede

Trazo	Índice I [N]
Rectángulo	0.9923
Ovoide	0.8711
Manuscrito	1.1333

Cuadro 5.1: Índices de desempeño

concluir que el ovoide presentó un mejor resultado, quedando por abajo el cuadrado y el manuscrito. El desempeño del observador se puede considerar bueno, con base en los resultados mostrados en las Figuras 5.10, 5.19 y 5.28, donde los errores de observación son pequeños. Otro punto a favor del observador es que la información que necesita del sistema es mínima. Y finalmente remarcar que los voltajes de salida de control no están saturados, es decir no se necesitan voltajes infinitos para llevar al robot de un punto a otro.

Durante la experimentación, una fuente de problemas fue la longitud que se alcanzó desde el extremo final del robot a la punta del plumón, pasando por el protector y el sensor; siendo esta de cerca de los 22 cm, produciendo problemas de flexión. Esto producía errores porcentuales de fuerza del 80% y en algunos casos del 100%, pero al recortar la longitud del plumón y acercar la restricción al manipulador se redujeron en un 50%, por lo que se puede plantear que si se reduce más esta distancia los errores tenderán a ser menores. El tiempo de muestreo de 5 milisegundos que se tenía en los experimentos es un factor que también repercutió en el desempeño del controlador, ya que esto da un muestreo del sistema alto.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de tesis se presenta el problema de implementar una tarea de escritura y dibujo en un robot industrial. Para lo cual se propone un algoritmo de control híbrido posición/fuerza explícito que compensa la fuerza de fricción seca que se genera al interactuar el efector final con su entorno, y no requiere lecturas de velocidad en las articulaciones. Además, se generaron las trayectorias deseadas (trazos) por medio de una interfaz gráfica y el ratón de la computadora, y no por medio de trayectorias previamente programadas, como es el caso de las referencias dadas en la introducción.

Se realizaron pruebas experimentales para la tarea de contacto que permiten tener un mejor conocimiento de los alcances que puede tener el algoritmo de control propuesto. Se obtuvieron errores pequeños para el seguimiento de trayectorias de posición y observación de velocidad, mientras, en lo que respecta a fuerza, sus resultados son altos, teniendo errores porcentuales del 50 %, esto se debe en parte al efecto de fricción seca. El índice de desempeño \mathcal{I} , permitió tener de una forma cuantitativa como fue el desempeño del algoritmo para cada uno de los experimentos, siendo el mejor el ovoide.

En un contexto global los resultados obtenidos se pueden considerar buenos, considerando que no se tiene un conocimiento exacto del modelo dinámico del robot y su entorno, y el uso de un observador para substituir la lectura de velocidades en las articulaciones. Por otro lado, los trazos hechos por el robot tienen muy buena legibilidad, considerando que se usó un plumón de punta ancha o gruesa, lo cual permite seguir considerando los resultados de la tarea como buenos. En lo que respecta a la generación

de las trayectorias deseadas, quizá no fue la más idónea, esto se concluye por la alta repercusión de la fricción, debido a los paros y arranques al ir de un punto a otro del trazo deseado. Además se pudo diseñar una interfaz gráfica que permitió poder realizar la tarea de contacto de una manera más libre, es decir, no trabajar con trayectorias preprogramadas.

Al considerar más efectos dinámicos en el modelo dinámico o el algoritmo de control de un manipulador (como los mencionados en el Capítulo 2) se puede obtener un mejor desempeño de ambos, ya que se tiene un conocimiento más exacto del sistema; pero esto repercute en un aumento en los tiempos de procesamiento durante la simulación o la experimentación (aunque esto se soluciona en cierta medida al aumentar la velocidad de computo), y también en el análisis de estabilidad.

En el modelo dinámico del manipulador (Robot A255) se tienen que considerar incertidumbres estructurales y paramétricas. Pero a pesar de esto y con base en los resultados obtenidos en cuanto a seguimiento, se puede inferir robustez en el controlador.

En un trabajo futuro se pueden hacer las modificaciones al equipo experimental en la parte del efector final para reducir la distancia que existe entre el extremo final del robot y la punta del plumón. Cambiar el mouse por una pluma que hace las mismas funciones, pero que tendría un mejor funcionamiento al momento de hacer los trazos, ya que una persona está más familiarizada con este tipo de herramientas para escribir. Además tratar de conseguir que los dibujos realizados por el usuario puedan ser discontinuos. Y reducir el tiempo de muestreo para mejorar el desempeño del controlador, en este último caso las opciones que se tiene son el reducir el número de líneas del programa, y un cambio en las tarjetas de adquisición de datos con las que cuenta el equipo experimental. Además de plantear un mejor modelo para la fricción seca.

Apéndice A

Demostración del Lema 4.2.1

En este apéndice se realiza la demostración del Lema 4.2.1, donde la suposición principal es que $\mathbf{w} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}^T & \mathbf{r}^T & \Delta \mathbf{F}^T \end{bmatrix}^T$ está acotada por w_{\max} y tiende a cero.

- a) Primero se muestra que $\Delta \mathbf{p}$ y $\Delta \dot{\mathbf{p}}$ están acotadas para todo tiempo. Para hacer esto se procede como sigue: de (4.2.15) se tiene

$$\mathbf{s} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda \mathbf{z}) + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p} - \xi \Delta \mathbf{F}); \quad (\text{A.0.1})$$

multiplicando por la izquierda ambos lados de (A.0.1) por $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$ se tiene

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{s} = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{Q}(\mathbf{q}) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda \mathbf{z}) \quad (\text{A.0.2})$$

$$+ \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p} - \xi \Delta \mathbf{F}). \quad (\text{A.0.3})$$

Dado que $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$ y $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ son ortogonales, y que $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) = \mathbf{I}$, de (A.0.2) se obtiene

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{s} = \Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p} - \xi \Delta \mathbf{F}, \quad (\text{A.0.4})$$

o bien

$$\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p} = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \xi \Delta \mathbf{F}. \quad (\text{A.0.5})$$

El lado derecho de (A.0.5) está acotado y tiende a cero, debido a la suposición de que \mathbf{w} está acotada y tiende a cero. Puesto que el lado izquierdo representa un filtro lineal estable, $\Delta \dot{\mathbf{p}}$ y $\Delta \mathbf{p}$ deben estar acotadas y tender a cero.

b) El siguiente paso es analizar el comportamiento de los errores de posición y velocidad angular, \tilde{q} y $\dot{\tilde{q}}$. Ya que w está acotada, s también lo está. Además, s_p y s_f están acotados de (4.2.15), porque ambos son vectores ortogonales. s_p puede ser escrita como

$$s_p = Q(q) (\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z) = (I - J_\varphi^+ J_\varphi) (\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z), \quad (\text{A.0.6})$$

en vista de la definición de $Q(q)$ en (2.3.3). Desarrollando y agrupando términos, la ecuación (A.0.6) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} = & \underbrace{\Lambda z + Q(q) (\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z) - J_\varphi^+ J_\varphi \Lambda z}_{\text{acotado}} \\ & + \underbrace{J_\varphi^+ J_\varphi (\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q})}_{\text{¿acotado?}}. \end{aligned} \quad (\text{A.0.7})$$

Se puede asegurar que los primeros tres términos en (A.0.7) están acotados, ya que w está acotada. La conclusión viene de las ecuaciones (4.2.4)-(4.2.5) (cotas de J_φ^+ y J_φ), las ecuaciones (4.2.21) y (4.2.46) (cota de z), y de la ecuación (A.0.6) (cota de $Q(q) (\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z)$). Es claro que si el último término del lado derecho de (A.0.7) está acotado, entonces \tilde{q} y $\dot{\tilde{q}}$ deben estar acotadas ya que el lado izquierdo de (A.0.7) representa un filtro lineal estable.

Ahora bien, del último término del lado derecho de (A.0.7), se tiene

$$J_\varphi \dot{\tilde{q}} = J_\varphi (\dot{q} - \dot{q}_d),$$

sumando y restando el término $J_{\varphi d} \dot{q}_d$ en el lado derecho de la ecuación anterior, donde $J_{\varphi d} = J_\varphi(q_d)$, se tiene

$$J_\varphi \dot{\tilde{q}} = J_\varphi \dot{q} - J_\varphi \dot{q}_d - J_{\varphi d} \dot{q}_d + J_{\varphi d} \dot{q}_d, \quad (\text{A.0.8})$$

recordando que $\dot{p} \triangleq J_\varphi \dot{q}$, y agrupando términos en (A.0.8) se tiene

$$J_\varphi \dot{\tilde{q}} = \dot{p} - \dot{p}_d - (J_\varphi - J_{\varphi d}) \dot{q}_d \quad (\text{A.0.9})$$

la cual está acotada. Esto se debe a que están siendo consideradas articulaciones de revolución. De este modo, el lado izquierdo de (A.0.7) no estará acotado sólo

si

$$J_{\varphi}^{+} J_{\varphi} \Lambda \tilde{q} = J_{\varphi}^{+} J_{\varphi} \Lambda (q - q_d)$$

no lo está. Pero de hecho este término estará acotado si q lo está. En este punto recordaremos que de la Suposición 4.2.1, q debe de satisfacer la restricción $\varphi(q) = 0$. Además, se asume que el robot no es redundante. Por ello, la restricción sólo puede ser satisfecha por un vector q acotado. Por lo tanto, se puede concluir de (A.0.7) que \tilde{q} y $\dot{\tilde{q}}$ permanecerán acotadas mientras w lo esté.

Para demostrar que los errores de seguimiento tienden a cero cuando w lo hace, se utiliza el siguiente argumento, si $w \equiv 0$ entonces $s = 0$. De (4.2.15) se tiene

$$Q(q) (\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}) + J_{\varphi}^{+}(q) (\Delta \dot{p} + \beta \Delta p) = 0, \quad (\text{A.0.10})$$

donde el error de observación y ΔF son también cero. Supóngase ahora que $q \equiv q_d$; de esta suposición (A.0.10) se puede escribir como sigue

$$Q(q) \dot{\tilde{q}} + J_{\varphi}^{+}(q) J_{\varphi}(q) \dot{\tilde{q}} = 0; \quad (\text{A.0.11})$$

agrupando términos y recordando que $Q(q) + J_{\varphi}^{+}(q) J_{\varphi}(q) = I$ se obtiene

$$\dot{\tilde{q}} = 0. \quad (\text{A.0.12})$$

Esto muestra que si $\|\tilde{q}\| \rightarrow 0$, entonces $\|\dot{\tilde{q}}\| \rightarrow 0$. En otras palabras, al probar que \tilde{q} tiende a cero se puede asegurar que $\dot{\tilde{q}}$ también lo hará.

Puesto que están siendo utilizadas restricciones homogéneas, la siguiente relación se satisface

$$\Delta p = \varphi(q) - \varphi(q_d).$$

Desarrollando una serie de Taylor alrededor de la trayectoria deseada, q_d , se tiene para

$$\varphi(q) = \varphi(q_d) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right|_{q=q_d} (q - q_d) + \text{t. o. s.} \quad (\text{A.0.13})$$

Entonces, existe un valor positivo η lo suficientemente pequeño tal que si

$$\|\tilde{q}\| \leq \eta, \quad (\text{A.0.14})$$

los términos de orden superior en (A.0.13) pueden ser despreciados y la aproximación

$$\Delta p = J_\varphi(q_d)\tilde{q}, \quad (\text{A.0.15})$$

es válida. La siguiente discusión se llevará a cabo asumiendo que (A.0.15) se cumple. Para probar que $\|\tilde{q}\|$ tiende a cero, se requiere encontrar una ecuación dinámica que describa el comportamiento de esta variable. Esto puede hacerse de la siguiente manera. De (4.2.15) se toma s_p

$$s_p = Q(q) (\dot{\tilde{q}} + \Lambda\tilde{q} - \Lambda z). \quad (\text{A.0.16})$$

Sustituyendo $Q(q) = I - J_\varphi^+(q)J_\varphi(q)$ en (A.0.16), se tiene

$$s_p = (I - J_\varphi^+(q)J_\varphi(q)) (\dot{\tilde{q}} + \Lambda\tilde{q} - \Lambda z). \quad (\text{A.0.17})$$

Desarrollando y agrupando términos:

$$s_p = \dot{\tilde{q}} + \Lambda\tilde{q} - \Lambda z - J_\varphi^+(q)J_\varphi(q)\dot{\tilde{q}} - J_\varphi^+(q)J_\varphi(q)\Lambda\tilde{q} + J_\varphi^+(q)J_\varphi(q)\Lambda z. \quad (\text{A.0.18})$$

Multiplicando por \tilde{q}^T por la derecha ambos lados de (A.0.18), se tiene

$$\tilde{q}^T s_p = \tilde{q}^T \dot{\tilde{q}} + \tilde{q}^T \Lambda\tilde{q} - \tilde{q}^T \Lambda z - \tilde{q}^T \bar{P}\dot{\tilde{q}} - \tilde{q}^T \bar{P}\Lambda\tilde{q} + \tilde{q}^T \bar{P}\Lambda z,$$

donde $\bar{P} \triangleq J_\varphi^+(q)J_\varphi(q)$. En vista de que

$$\tilde{q}^T \dot{\tilde{q}} = \|\tilde{q}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{q}\|,$$

(A.0.18) se puede reescribir como

$$\|\tilde{q}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{q}\| = -\tilde{q}^T \Lambda\tilde{q} + \tilde{q}^T \bar{P}\dot{\tilde{q}} + \tilde{q}^T \bar{P}\Lambda\tilde{q} + \tilde{q}^T \Lambda z - \tilde{q}^T \bar{P}\Lambda z + \tilde{q}^T s_p. \quad (\text{A.0.19})$$

Para poder desarrollar el lado derecho de esta ecuación se analiza primero el término $\tilde{q}^T \bar{P}\dot{\tilde{q}}$. De (A.0.9) se tiene

$$\Delta \dot{p} = J_\varphi \dot{\tilde{q}} + (J_\varphi - J_{\varphi_d}) \dot{q}_d, \quad (\text{A.0.20})$$

multiplicando (A.0.15) por β y sumándola a (A.0.20) se obtiene

$$\Delta\dot{\mathbf{p}} + \beta\Delta\mathbf{p} = \mathbf{J}_\varphi\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + (\mathbf{J}_\varphi - \mathbf{J}_{\varphi_d})\dot{\mathbf{q}}_d + \beta\mathbf{J}_{\varphi_d}\tilde{\mathbf{q}}. \quad (\text{A.0.21})$$

Sumando y restando el término $\beta\mathbf{J}_\varphi\tilde{\mathbf{q}}$ en el lado derecho, y posteriormente multiplicando por $\mathbf{q}^T\mathbf{J}_\varphi^+$ por la derecha ambos lados de la ecuación (A.0.21), se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T\mathbf{J}_\varphi^+(\Delta\dot{\mathbf{p}} + \beta\Delta\mathbf{p}) &= \mathbf{q}^T\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{J}_\varphi\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + (\mathbf{J}_\varphi - \mathbf{J}_{\varphi_d})\dot{\mathbf{q}}_d + \beta\mathbf{J}_{\varphi_d}\tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad + \beta\mathbf{J}_\varphi\tilde{\mathbf{q}} - \beta\mathbf{J}_\varphi\tilde{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (\text{A.0.22})$$

Utilizando de nueva cuenta $\bar{\mathbf{P}} \triangleq \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$ y agrupando términos se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{P}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= -\beta\tilde{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{q}} + \beta\tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+\Delta\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+\Delta\dot{\mathbf{p}} \\ &\quad + \beta\tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{J}_\varphi - \mathbf{J}_{\varphi_d})\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{J}_\varphi - \mathbf{J}_{\varphi_d})\dot{\mathbf{q}}_d \\ &= -\beta\tilde{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{q}} + \beta\tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+\Delta\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+\Delta\dot{\mathbf{p}} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{J}_\varphi - \mathbf{J}_{\varphi_d})(\dot{\mathbf{q}}_d - \beta\tilde{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (\text{A.0.23})$$

A continuación se sustituye (A.0.23) en (A.0.19)

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| &= -\tilde{\mathbf{q}}^T\Lambda\tilde{\mathbf{q}} - \beta\tilde{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{q}} + \beta\tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+\Delta\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+\Delta\dot{\mathbf{p}} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{J}_\varphi - \mathbf{J}_{\varphi_d})(\dot{\mathbf{q}}_d - \beta\tilde{\mathbf{q}}) + \tilde{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{P}}\Lambda\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T\Lambda\mathbf{z} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{P}}\Lambda\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{s}_p. \end{aligned} \quad (\text{A.0.24})$$

Recordando que $\Lambda \triangleq k\mathbf{I}$ se tiene

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| &= -k\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + (k - \beta)\tilde{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+(\Delta\dot{\mathbf{p}} + \beta\Delta\mathbf{p}) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{J}_\varphi - \mathbf{J}_{\varphi_d})(\dot{\mathbf{q}}_d - \beta\tilde{\mathbf{q}}) + k\tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{Q}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{s}_p. \end{aligned} \quad (\text{A.0.25})$$

Tomando la norma del cuarto término del lado derecho de (A.0.25) se tiene

$$\|\tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{J}_\varphi - \mathbf{J}_{\varphi_d})(\dot{\mathbf{q}}_d - \beta\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \|\tilde{\mathbf{q}}\|\|\mathbf{J}_\varphi^+\|\|\mathbf{J}_\varphi - \mathbf{J}_{\varphi_d}\|(\|\dot{\mathbf{q}}_d\| + \beta\|\tilde{\mathbf{q}}\|), \quad (\text{A.0.26})$$

en vista de la Suposición 4.2.2, (A.0.14) y definiendo $\|\dot{\mathbf{q}}_d\| \leq v_m$ como cota para \mathbf{q}_d , la siguiente cota puede ser establecida

$$\|\tilde{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{J}_\varphi - \mathbf{J}_{\varphi_d})(\dot{\mathbf{q}}_d - \beta\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \gamma\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2, \quad (\text{A.0.27})$$

con

$$\gamma \triangleq c_0 L (v_m + \beta \eta). \quad (\text{A.0.28})$$

Por otra parte de (4.2.13) se tiene

$$\mathbf{s}_p = \mathbf{s} - \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p} - \boldsymbol{\xi} \Delta \mathbf{F}). \quad (\text{A.0.29})$$

Sustituyendo (A.0.27)-(A.0.29) en (A.0.25) se tiene

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| &\leq -k \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + (k - \beta) \tilde{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_\varphi^+(\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p}) \\ &\quad + \gamma \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + k \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} \\ &\quad + \tilde{\mathbf{q}}^T (\mathbf{s} - \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p} - \boldsymbol{\xi} \Delta \mathbf{F})). \end{aligned} \quad (\text{A.0.30})$$

Aplicando normas, se obtiene

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| &\leq -k \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + |k - \beta| \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \gamma \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \\ &\quad + k \|\mathbf{z}\| + \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{s}\| + \|\tilde{\mathbf{q}}\| \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}) c_0 \|\Delta \mathbf{F}\|. \end{aligned} \quad (\text{A.0.31})$$

Dividiendo (A.0.31) entre $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq -\alpha \|\tilde{\mathbf{q}}\| + \|\mathbf{s}\| + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}) c_0 \|\Delta \mathbf{F}\| + k \|\mathbf{z}\|, \quad (\text{A.0.32})$$

con

$$\alpha \triangleq k - |k - \beta| - \gamma. \quad (\text{A.0.33})$$

Nótese que k, β, v_m y η pueden escogerse siempre de tal forma que se consiga que $\alpha > 0$ y que los tres últimos elementos del lado derecho de (A.0.32) están acotados. Sin embargo, (A.0.32) es válida sólo si (A.0.14) se cumple. Por ello, no es suficiente que \mathbf{w} esté acotada, sino que se debe encontrar una cota w_{\max} tal que (A.0.14) sea válida. Con el propósito de garantizar esto, w_{\max} tiene que aparecer en (A.0.32) explícitamente. Por supuesto, si $\|\mathbf{w}\| \leq w_{\max}$, entonces se tiene de (4.2.46)

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{r}\|^2 + \|\Delta \mathbf{F}\|^2 \leq w_{\max}^2, \quad (\text{A.0.34})$$

con $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}$. Ya que en (A.0.32) se tiene \mathbf{z} y no \mathbf{r} , se puede utilizar el hecho de que cada elemento de \mathbf{r} está dado por $r_{ij} = \dot{z}_{ij} + k_i z_{ij}$, para $j = 1, \dots, n$. Este es un filtro lineal estable con ganancia $\frac{1}{k}$, i. e. se tiene $|z_{ij}| \leq \frac{1}{k} \max |r_{ij}| \forall t$. De este modo, es fácil mostrar que

$$\|\mathbf{z}\| \leq \frac{\sqrt{n}}{k} w_{\max}, \quad (\text{A.0.35})$$

lo que permite reescribir (A.0.32) como

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq -\alpha \|\tilde{\mathbf{q}}\| + \sigma, \quad (\text{A.0.36})$$

dónde

$$\sigma \triangleq (1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi})c_0 + \sqrt{n}) w_{\max}. \quad (\text{A.0.37})$$

Del Lema de Comparación (Khalil 2002) y la solución para un sistema lineal invariante en el tiempo (Chen 1984), se tiene

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \frac{\sigma}{\alpha} + e^{-\alpha t} \left(\|\tilde{\mathbf{q}}(0)\| - \frac{\sigma}{\alpha} \right) \quad (\text{A.0.38})$$

para todo tiempo. Además, la ecuación(A.0.14) será satisfecha si

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(0)\| \leq \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{(1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi})c_0 + \sqrt{n}) w_{\max}}{\alpha} \leq \eta. \quad (\text{A.0.39})$$

Esto requiere que

$$w_{\max} \leq \frac{\eta\alpha}{1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi})C_0 + \sqrt{n}}. \quad (\text{A.0.40})$$

Finalmente, si $\|\mathbf{w}\|$ tiende a cero, es claro de (A.0.32) que $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$ tenderá a cero también. Esto implica la convergencia a cero de $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$.

- c) Cuando \mathbf{w} tiende a cero, implica que $\Delta\mathbf{F}$ lo hace también, pero $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ no necesariamente. Para probar esto , se recurre a (A.0.4)

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{s} = \Delta\dot{\mathbf{p}} + \beta\Delta\mathbf{p} - \boldsymbol{\xi}\Delta\mathbf{F} = -\boldsymbol{\xi}\Delta\mathbf{F}. \quad (\text{A.0.41})$$

La última igualdad es válida ya que la restricción (2.3.5) debe ser satisfecha.

Derivando y usando (4.2.14) se tiene

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{s} = -\boldsymbol{\xi}\Delta\boldsymbol{\lambda}. \quad (\text{A.0.42})$$

Sustituyendo (4.2.35) en (A.0.42) se obtiene

$$\begin{aligned}
-\xi\Delta\lambda &= \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})(-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{K}_{\text{DR}}\mathbf{s} - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\mathbf{s}) \\
&\quad + \mathbf{K}_{\text{R}}\mathbf{r} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\Delta\lambda + \mathbf{K}_{\text{F}}\Delta\mathbf{F}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} \\
&\quad + \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}) - (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|))\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{s}. \quad (\text{A.0.43})
\end{aligned}$$

Agrupando los $\Delta\lambda$ del lado izquierdo y despejando se tiene

$$\Delta\lambda = -(\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) + \xi)^{-1}(\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}\mathbf{h}(t) + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{s}), \quad (\text{A.0.44})$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(t) &\triangleq -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{K}_{\text{DR}}\mathbf{s} - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\mathbf{s} + \mathbf{K}_{\text{R}}\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} \\
&\quad + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_{\text{F}}\Delta\mathbf{F} - (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|))\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r \\
&\quad + \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.0.45})
\end{aligned}$$

$\mathbf{h}(t)$ está acotada, ya que se asume que $\dot{\mathbf{q}}$ está acotada. De (A.0.44), la inversa siempre existe puesto que $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$ es de rango completo. Se puede concluir que $\Delta\lambda$ debe estar acotada, ya que el lado derecho de (A.0.44) es acotado. Nótese que de (4.2.35), $\dot{\mathbf{s}}$ permanece acotada también. Finalmente, si \mathbf{w} tiende a cero, \mathbf{s} y \mathbf{h} lo harán también; de este modo se concluye que $\Delta\lambda$ tiende a cero.

Apéndice B

Demostración del Teorema 4.2.1

En este apéndice se presenta la demostración del Teorema 4.2.1. Primero, considérese el siguiente teorema de estabilidad de Lyapunov (Khalil 2002: pp. 114).

Teorema B.0.1 *Sea $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ un punto de equilibrio de $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{f}(\mathbf{w})$ y $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Sea $V : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable, tal que $V(\mathbf{0}) = 0$ y $V(\mathbf{w}) > 0$ en $\mathbb{D} - \{\mathbf{0}\}$, y $\dot{V}(\mathbf{w}) \leq 0$ en \mathbb{D} . Entonces, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ es estable. Además, si $\dot{V}(\mathbf{w}) < 0$ en $\mathbb{D} - \{\mathbf{0}\}$ entonces $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable.*

△

Para apoyarse en el Teorema B.0.1, se debe encontrar un dominio \mathbb{D} para el cual $V(\mathbf{w})$ en 4.2.48 satisfaga $\dot{V}(\mathbf{w}) < 0$ en $\mathbb{D} - \{\mathbf{0}\}$ (porque $V(\mathbf{w})$ es positiva definida en \mathbb{R}^n). Haciendo esto, se puede probar que $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{0}$. Entonces, el Lema 4.2.1 puede ser empleado para analizar el comportamiento de las diferentes señales de error. Basándose en la discusión presentada en el Apéndice A, se puede definir el dominio \mathbb{D} como

$$\mathbb{D} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{w}\| \leq w_{\max}\}, \quad (\text{B.0.1})$$

donde w_{\max} se elige para satisfacer (A.0.40) y no puede hacerse arbitrariamente grande, porque debe de tenerse también (A.0.14). En \mathbb{D} se puede definir

$$\mu_{1i} \triangleq \max_{\|w\| \leq w_{\max}} \|C(q, \dot{q}_{ri})\| \quad (\text{B.0.2})$$

$$\mu_{2i} \triangleq \max_{\|w\| \leq w_{\max}} \|C(q, s + \dot{q}_{ri})\| \quad (\text{B.0.3})$$

$$\mu_{3i} \triangleq \max_{\|w\| \leq w_{\max}} \|C(q, s + 2\dot{q}_{ri})\| \quad (\text{B.0.4})$$

$$\mu_{4i} \triangleq M_{ei}(w_{\max})\lambda_{Hi} \quad (\text{B.0.5})$$

$$\lambda_{Di} \triangleq \lambda_{\max}(D) \quad (\text{B.0.6})$$

$$\|(J_{\varphi}(q)H^{-1}J_{\varphi}^T(q) + \xi)^{-1}\| \leq \gamma_3 \quad \forall q. \quad (\text{B.0.7})$$

Nótese que es directo calcular (B.0.2)–(B.0.6) como funciones de las diferentes constantes definidas en el presente trabajo, donde se usaron las Propiedades 2.3.1 y 2.3.5, y (4.2.47).

El siguiente paso es calcular la derivada de la función candidata de Lyapunov, (4.2.48), que puede ser reescrita como

$$V(w) = \frac{1}{2}s^T H(q)s + \frac{1}{2}r^T H(q)r + \frac{1}{2}\Delta F^T \xi \Delta F \quad (\text{B.0.8})$$

Derivando de tiene

$$\dot{V}(w) = \frac{1}{2}s^T \dot{H}(q)s + \frac{1}{2}r^T \dot{H}(q)r + s^T H(q)\dot{s} + r^T H(q)\dot{r} + \Delta F^T \xi \Delta \lambda, \quad (\text{B.0.9})$$

A continuación se substituyen (4.2.35) y (4.2.43) en (B.0.9), de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(w) = & \frac{1}{2}s^T \dot{H}(q)s + \frac{1}{2}r^T \dot{H}(q)r + s^T \{-C(q, \dot{q})s - K_{DR}s \\ & - f_x(\|\dot{x}\|)J_x^T J_x s + K_R r + J_{\varphi}^T(q)(\Delta \lambda + K_F \Delta F) - C(q, \dot{q}_r)s \\ & + H(q)e(r) - (f_x(\|\dot{x}\|) - f_x(\|\dot{x}_r\|))J_x^T J_x \dot{q}_r\} + r^T \{-C(q, \dot{q})r \\ & - H_{rd}r - f_x(\|\dot{x}\|)J_x^T J_x s + C(q, s + \dot{q}_r)r - K_{DR}s \\ & - C(q, s + 2\dot{q}_r)s + J_{\varphi}^T(q)(\Delta \lambda + K_F \Delta F) \\ & - (f_x(\|\dot{x}\|) - f_x(\|\dot{x}_r\|))J_x^T J_x \dot{q}_r\} + \Delta F^T \xi \Delta \lambda. \end{aligned} \quad (\text{B.0.10})$$

Para simplificar (B.0.10) se emplea la siguiente relación

$$-s^T D r = -r^T K_{DR} s + s^T K_{RR} r, \quad (\text{B.0.11})$$

que es válida porque $\mathbf{K}_{DR} = \mathbf{K}_R + \mathbf{D}$. A continuación se considera la ecuación (A.0.41)

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{s} = -\xi\Delta\mathbf{F}. \quad (\text{B.0.12})$$

Transponiendo y multiplicando por $\Delta\lambda + \mathbf{K}_F\Delta\mathbf{F}$, se obtiene

$$\mathbf{s}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\Delta\lambda + \mathbf{K}_F\Delta\mathbf{F}) = -\Delta\mathbf{F}^T \xi(\Delta\lambda + \mathbf{K}_F\Delta\mathbf{F}). \quad (\text{B.0.13})$$

Finalmente, se sustituyen (B.0.11) y (B.0.13), y se aplica la Propiedad 2.3.3 para obtener

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{w}) = & -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{DR}\mathbf{s} - \mathbf{s}^T f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) \mathbf{J}_x^T \mathbf{J}_x \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{e}(\mathbf{r}) \\ & - \mathbf{s}^T (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|)) \mathbf{J}_x^T \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}}_r - \Delta\mathbf{F}^T \xi \mathbf{K}_F \Delta\mathbf{F} - \mathbf{s}^T \mathbf{D} \mathbf{r} \\ & - \mathbf{r}^T \mathbf{H}_{rd} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) \mathbf{J}_x^T \mathbf{J}_x \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{r} \\ & - \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) (\Delta\lambda + \mathbf{K}_F \Delta\mathbf{F}) \\ & - \mathbf{r}^T (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|)) \mathbf{J}_x^T \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}}_r. \end{aligned} \quad (\text{B.0.14})$$

Con el propósito de continuar simplificando (B.0.14) se hace el siguiente procedimiento.

Retomando (4.2.12)

$$\dot{\mathbf{q}}_r \triangleq \mathbf{Q}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{z})) + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\mathbf{p} + \xi\Delta\mathbf{F}), \quad (\text{B.0.15})$$

donde se utilizó (4.2.9), obteniendo normas se tiene

$$\|\dot{\mathbf{q}}_r\| \leq \|\mathbf{Q}(\mathbf{q})\| \|(\dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{z}))\| + \|\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})\| \|(\dot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\mathbf{p} + \xi\Delta\mathbf{F})\|, \quad (\text{B.0.16})$$

considerando que la restricción (2.3.5) tiene que ser satisfecha, el que $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ sea una matriz de proyección y usando (4.2.4), (A.0.14), (A.0.35), $\|\dot{\mathbf{q}}_d\| \leq v_m$ y que $\Lambda = k\mathbf{I}$ se obtiene

$$\|\dot{\mathbf{q}}_r\| \leq v_m + k\eta + \sqrt{n}w_{\max} + c_0\lambda_{\max}(\xi\Delta\mathbf{F}) \triangleq \gamma_1. \quad (\text{B.0.17})$$

Naturalmente si $\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r$, y considerando un procedimiento igual al aplicado a la ecuación anterior, se tiene

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \|\mathbf{s}\| + \|\dot{\mathbf{q}}_r\| \leq (v_m + k\eta) + (1 + \sqrt{n} + c_0\lambda_{\max}(\xi\Delta\mathbf{F}))w_{\max} \triangleq \gamma_2. \quad (\text{B.0.18})$$

De la Suposición 4.2.3 es necesario remarcar que

$$|f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|)| \leq \varsigma_0 \|\|\dot{\mathbf{x}}\| - \|\dot{\mathbf{x}}_r\|\|; \quad (\text{B.0.19})$$

pero, como

$$\mathbf{J}_x \mathbf{s} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_r \equiv \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}}_r, \quad (\text{B.0.20})$$

se tiene

$$\|\mathbf{J}_x \mathbf{s}\| \geq \|\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}}\| - \|\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}}_r\| = \|\dot{\mathbf{x}}\| - \|\dot{\mathbf{x}}_r\|, \quad (\text{B.0.21})$$

y también

$$\|\mathbf{J}_x \mathbf{s}\| \geq \|\dot{\mathbf{x}}_r\| - \|\dot{\mathbf{x}}\|. \quad (\text{B.0.22})$$

Por consiguiente

$$|f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|)| \leq \varsigma_0 \|\mathbf{J}_x \mathbf{s}\| \leq \varsigma_0 c_{x1} \|\mathbf{s}\| \quad (\text{B.0.23})$$

donde

$$c_{x1} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{J}_x\|. \quad (\text{B.0.24})$$

Retomando (A.0.44) y (A.0.45)

$$\begin{aligned} \Delta \lambda = & -(\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\xi})^{-1}(-\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}\{\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{K}_{DR}\mathbf{s} \\ & + f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|)\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\mathbf{s} - \mathbf{K}_R\mathbf{r} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_F\Delta F \\ & + (f_x(\|\dot{\mathbf{x}}\|) - f_x(\|\dot{\mathbf{x}}_r\|))\mathbf{J}_x^T\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r})\} - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (\text{B.0.25})$$

Tomando normas, utilizando las Propiedades 2.3.2 y 2.3.5, y sustituyendo las ecuaciones (4.2.5), (4.2.47), (B.0.7), (B.0.15), (B.0.18), (B.0.23)–(B.0.24) en (B.0.25) se tiene

$$\begin{aligned} \|\Delta \lambda\| \leq & \gamma_3 c_1 \sigma_H \{k_c \gamma_2 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{DR}) + \varsigma_0 c_{x1}^3 \gamma_2 + k_c \gamma_1 + \varsigma_0 c_{x1}^3 \gamma_1\} \|\mathbf{s}\| \\ & + \gamma_3 \{c_1 (M_e(w_{\max}) + \sigma_H \lambda_{\max}(\mathbf{K}_R)) \|\mathbf{r}\| + \sigma_H c_1^2 \lambda_{\max}(\mathbf{K}_F) \|\Delta F\|\} + \gamma_3 c_2 \|\mathbf{s}\| \\ \triangleq & \varsigma_1 \|\mathbf{s}\| + \varsigma_2 \|\mathbf{r}\| + \varsigma_3 \|\Delta F\|, \end{aligned} \quad (\text{B.0.26})$$

donde

$$\|\dot{J}_\varphi(q)\| \leq c_2 \quad \forall q. \quad (\text{B.0.27})$$

Si se obtienen la normas de $\Delta\lambda$ y los términos de fricción en (B.0.14), y se utiliza (B.0.26) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(w) \leq & -s^T K_{DR} s + \varsigma_0 c_{x1}^3 \gamma_1 \|s\|^2 - s^T C(q, \dot{q}_r) s + s^T H(q) e(r) \\ & + \varsigma_0 c_{x1}^3 \gamma_1 \|s\|^2 - \Delta F^T \xi K_F \Delta F - s^T D r - r^T H_{rd} r \\ & + \varsigma_0 c_{x1}^3 \gamma_2 \|r\| \|s\| + r^T C(q, s + \dot{q}_r) r - r^T C(q, s + 2\dot{q}_r) s \\ & + r^T J_\varphi^T(q) (\varsigma_1 \|s\| + \varsigma_2 \|r\| + \varsigma_3 \|\Delta F\|) + r^T J_\varphi^T(q) K_F \Delta F \\ & + \varsigma_0 c_{x1}^3 \gamma_1 \|r\| \|s\|. \end{aligned} \quad (\text{B.0.28})$$

Calculando normas para los términos restantes y usando las definiciones (B.0.2)-(B.0.6) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(w) \leq & -\lambda_{\min}(\xi K_F) \|\Delta F\|^2 - \lambda_{\min}(K_R) \|s\|^2 + (\mu_1 + \varsigma_0 c_{x1}^3 \gamma_1) \|s\|^2 \\ & - (k_d \lambda_{\min}(H) - \lambda_{\max}(K_R)) \|r\|^2 + (\mu_2 + c_1 \varsigma_2) \|r\|^2 \\ & + (\mu_3 + \mu_4 + c_1 \varsigma_1 + \varsigma_0 c_{x1}^3 \varsigma_1 + \lambda_{\max}(D) + \varsigma_0 c_{x1}^3 \varsigma_2) \|r\| \|s\| \\ & + (c_1 \lambda_{\max}(K_F) + c_1 \varsigma_3) \|r\| \|\Delta F\|. \end{aligned} \quad (\text{B.0.29})$$

A continuación se escogen las diferentes ganancias que garanticen que $\dot{V}(w) < 0$ en $\mathbb{D} - 0$, para lo cual se sustituyen (4.2.55)-(4.2.57) en (B.0.29), quedando de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{V}(w) \leq & -\delta \|\Delta F\|^2 - \delta \|s\|^2 - \delta \|r\|^2 - \alpha_1^2 \|r\|^2 - \alpha_2^2 \|r\|^2 \\ & - \|\Delta F\|^2 - \|s\|^2 + 2\alpha_1 \|r\| \|s\| + 2\alpha_2 \|r\| \|\Delta F\|, \end{aligned} \quad (\text{B.0.30})$$

donde se considera

$$2\alpha_1 \triangleq \mu_3 + \mu_4 + c_1 \varsigma_1 + \varsigma_0 c_{x1}^3 \varsigma_1 + \lambda_{\max}(D) + \varsigma_0 c_{x1}^3 \varsigma_2 \quad (\text{B.0.31})$$

$$2\alpha_2 \triangleq c_1 \lambda_{\max}(K_F) + c_1 \varsigma_3. \quad (\text{B.0.32})$$

Finalmente, agrupando términos en (B.0.30) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{w}) &\leq -\delta\|\Delta F\|^2 - \delta\|\mathbf{s}\|^2 - \delta\|\mathbf{r}\|^2 - (\|\mathbf{s}\| - \alpha_1\|\mathbf{r}\|)^2 \\ &\quad - (\|\Delta F\| - \alpha_2\|\mathbf{r}\|)^2 \\ &\leq -\delta\|\mathbf{w}\|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.0.33})$$

Aplicando el Teorema B.0.1 se puede concluir que $\mathbf{w} \rightarrow 0$. Ahora bien, de la definición hecha en (4.2.21) se tiene directamente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad .$$

Además, en vista de (B.0.1) se tiene $\|\mathbf{w}\| \leq w_{\max}$ (y por ende $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \eta$) de la discusión en el Apéndice A. En consecuencia, del Lema 4.2.1 a) y b) se concluye

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \quad .$$

Para aplicar c), solamente se utiliza (B.0.18). De esta manera se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \lambda = 0.$$

Finalmente, es fácil calcular una región de atracción. Esta es un subconjunto de \mathbb{D} y no puede ser hecho arbitrariamente grande a causa de que $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \eta$ debe mantenerse para todo tiempo (y por tanto $\|\mathbf{w}\| \leq w_{\max}$ debe ser válida también) con η lo suficientemente pequeña. De (4.2.49) se tiene

$$\lambda_1\|\mathbf{w}\|^2 \leq V(\mathbf{w}) \leq V(\mathbf{0}) \leq \lambda_2\|\mathbf{w}\|^2 \quad (\text{B.0.34})$$

$$\|\mathbf{w}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \|\mathbf{w}(0)\| \leq w_{\max} \quad (\text{B.0.35})$$

o bien

$$\|\mathbf{w}(0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} w_{\max} \quad (\text{B.0.36})$$

Por tanto, una región de atracción es

$$s_a = \left\{ \mathbf{w} \mid \|\mathbf{w}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} w_{\max} \right\} \quad (\text{B.0.37})$$

con w_{\max} dada por (4.2.53). Además también, se satisface

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\delta}{\lambda_2} V(t). \quad (\text{B.0.38})$$

Entonces

$$V(t) \leq V(0)e^{\frac{\delta}{\lambda_2}t}, \quad (\text{B.0.39})$$

de donde se obtiene

$$\lambda_1 \|\mathbf{w}\|^2 \leq \lambda_2 \|\mathbf{w}(0)\|^2 e^{\frac{\delta}{\lambda_2}t} \quad (\text{B.0.40})$$

Finalmente, se tiene

$$\|\mathbf{w}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \|\mathbf{w}(0)\| e^{\frac{\delta}{2\lambda_2}t}. \quad (\text{B.0.41})$$

Esto implica que el sistema es exponencialmente estable.

Apéndice C

Equipo Experimental

La simulación de algoritmos de control para robots por medio de una computadora ha tenido mucho impulso y ha desplazado la comprobación experimental física. Una de las desventajas de la simulación por medio de la computadora radica en no asegurar la confiabilidad de los resultados que la teoría pueda validar. Es decir, fenómenos tales como perturbaciones, incertidumbres paramétricas o dinámicas no modeladas son difíciles de incluir de manera apropiada en la simulación.

Crear laboratorios experimentales de robótica permite implementar algoritmos de control propios y probar el desempeño en condiciones reales de operación. Sin embargo esta opción tiene la desventaja de elevar costos considerablemente.

Por otro lado, la mayoría de las compañías que venden robots suelen entregar manipuladores en los que no es posible separar la etapa de potencia, protección y control. Esta sección se describe brevemente la conversión de un robot industrial a un robot experimental mediante la implementación de una interfaz entre las etapas de potencia, protección, motores y encoders, con la finalidad de que se permita la interacción PC-robot mediante programación estructurada.

C.1. Partes que componen del equipo

A fin de conseguir el diseño de una interfaz PC-Robot, fue necesario conocer las características y componentes de cada uno de los sistemas involucrados. Sin profundi-

dad de conocimiento se hace el desglose de cada sistema como sigue, el lector interesado puede consultar en Castillo-Sánchez (2002):

Robot manipulador CRS Robotics A465. Fue diseñado con el mismo campo de acción de movimiento y levantamiento de carga promedio de un brazo humano. El Robot CRS A465 es una combinación de potencia y alta velocidad; los motores de c.d. que utiliza este robot poseen una constante mecánica y eléctrica que los hace tener buen desempeño y alto torque de respuesta. Sus características son:

- Robot Articulado de seis grados de libertad.
- Servomotores de c.d.
- Encoders ópticos.
- Transmisión de engranes armónica.
- 31 Kg de peso.
- Salidas de señales de encoder.

Modulo de procesamiento, Protección y Amplificación C500 CRS. Permite la salida de señales de encoder y la entrada de señales de control a la etapa amplificadora para su posterior salida al robot A465.

- Módulo multitarea C500C diseñado bajo el concepto de arquitectura descentralizada ó abierta.
 - Tarjeta de procesamiento PC-104/i486.
 - Lenguaje de Programación y aplicaciones RAPL-3.
 - Plataforma de control con esquema PID.
 - Circuitos de paro y emergencia.
 - Detector continuo de fallas.
-

- 16 entradas digitales aisladas ópticamente.
- 12 salidas digitales aisladas ópticamente.
- Dos puertos seriales.
- Seis unidades de amplificación.

Accesorio de interfaz de movimiento universal (UMI-Flex6). Este accesorio de National Instruments permite la conexión de señales de encoders del robot a una tarjeta de adquisición de datos Flex Motion. También permite la conexión de otra tarjeta Flex Motion con señales de control de motores al módulo C500 para su amplificación correspondiente. Con su etapa de protección el módulo C500 evita daños en motores y en tarjetas de adquisición de datos.

- 6 unidades de conexión de encoders, con seis terminales de conexión cada unidad ($A, \bar{A}, B, \bar{B}, I, \bar{I}$).
- 6 unidades de conexión de amplificador/motores.
- Conexión de switch limite (límite hacia delante, límite de reversa, entrada de home).
- Conexiones de energía.
- Unidad con ocho entradas ó canales analógicos.
- Cable especial de entrada(100 pines) a tarjeta de adquisición de datos.

Tarjeta de adquisición de datos PCI Flex motion 6C. Tarjeta de National Instruments encargada de procesar señales digitales de encoders de robot hacia la PC y permite la salida de comandos de voltaje de motores en forma analógica (DAC's).

- Procesador DSP de tiempo real MC68331 a 32 bits.
 - Control de servomotores.
-

- Seis Entradas de encoders de alta resolución ($A, \bar{A}, B, \bar{B}, I, \bar{I}$).
- Ocho canales analógicos de entrada.
- Seis salidas analógicas de ± 10 volts.
- Conexión de switch limite (límite hacia delante, límite de reversa, entrada de home).

Computadora Personal. Con programación estructurada procesa algoritmos de control, teniendo como entrada señales de posición de articulación y como salida señales de control de actuadores de c.d.

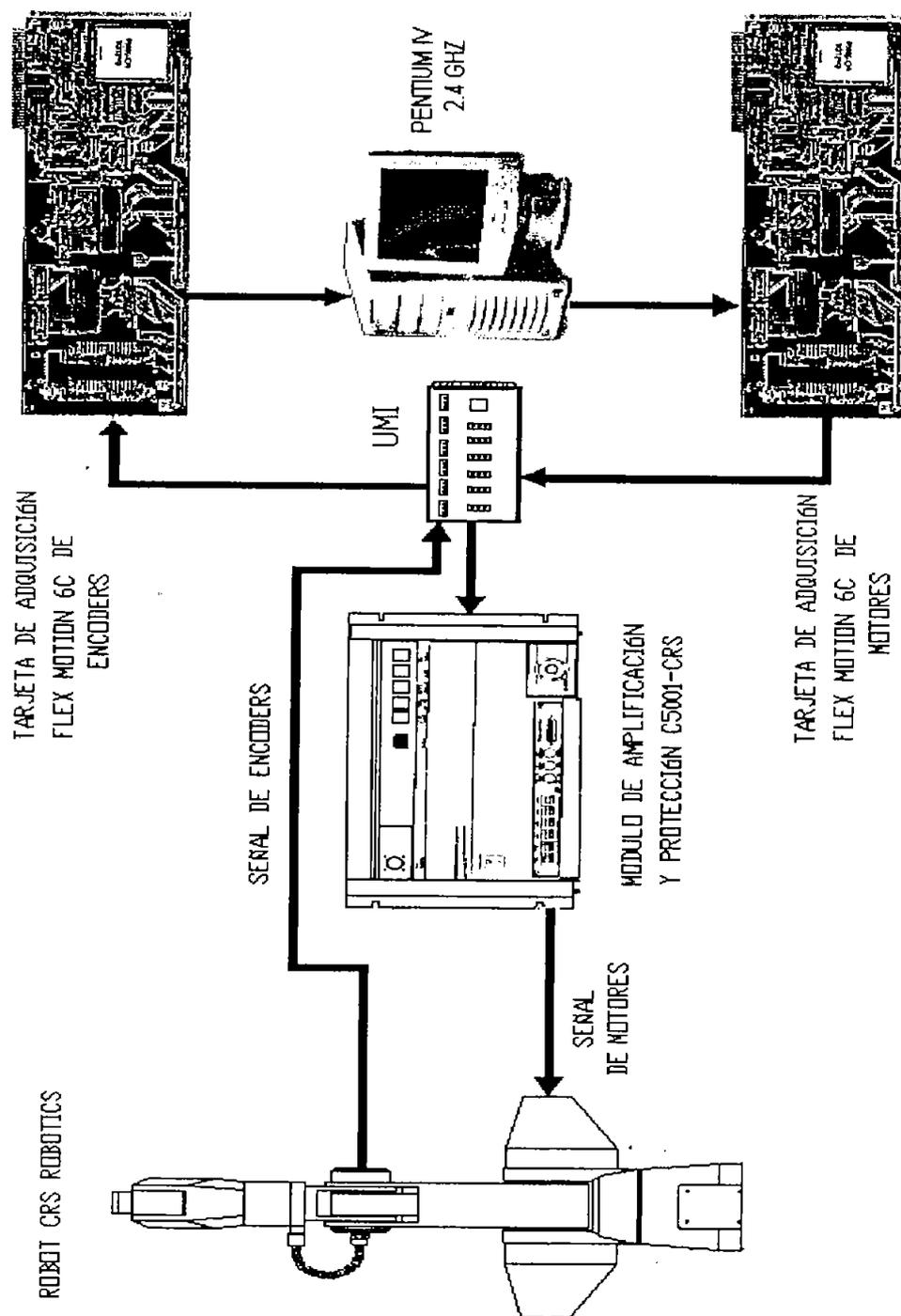
- Procesador Pentium IV a 2.4 Ghz.
- Lenguaje de programación LabWindows/CVI basado en ANSI C[™] de NI con características gráficas interactivas.

C.2. Interfaz

El diseño de esta interfaz tiene tres objetivos.

- Eliminar la etapa de procesamiento de control en el módulo original de fábrica mediante la interrupción en las señales de los sensores de posición. Utilizar la etapa de amplificación para las señales de comandos de voltaje de motores.
 - Permitir que las señales de los sensores de posición del Robot CRS A465 se conecten desde una tarjeta UMI (Interfaz de movimiento universal), a una computadora que tiene incorporada una tarjeta de adquisición de datos de 32 bits a través de un cable especial. Hay 36 canales (conexiones) de lectura de encoders con información digital del desplazamiento angular.
 - Por medio de una unidad UMI conectar las seis señales analógicas de control de cada motor al módulo amplificador de potencia. Estas señales de control son previamente procesadas en la PC y posteriormente enviadas a la unidad DAC de la tarjeta de adquisición de datos a través de un cable especial.
-

El siguiente diagrama simplifica el diseño de la interfaz PC-Robot.



Bibliografía

- Arimoto, S., L. Yun-Hiu y T. Naniwa. 1993. Principle of orthogonalization for hybrid control of robot arms. *Proceedings of 12th IFAC World Congress*. 507 – 512.
- Arteaga, M. y L. Muñoz. 2002. Control of cooperative robots without velocity measurements. *International Conference on Intelligent Robots and System IEEE/RSJ*. 2837 – 2842.
- Arteaga Pérez, M. A. 1998. On the properties of a dynamic model of flexible robot manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 120. 8–14.
- Castillo-Sánchez, A. M. 2002. *Adaptación de dos robots industriales para su utilización en el desarrollo de nuevas técnicas y algoritmos de control*. Tesis de licenciatura. Escuela Nacional de Estudios de Profesionales Aragón. Universidad Nacional Autónoma de México. D.F., México.
- Chen, C.-T. 1984. *Linear System Theory and Design*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Duffy, J. 1990. The fallacy of modern hybrid control theory that is based on “orthogonal complements” of twist and wrench spaces. *Journal of Robotics Systems* 7. 139–144.
- Fu, K. S., R. C. Gonzalez y C. S. G. Lee. 1989. *Robotic: Control, Sensing, Vision and Intelligence*. México, D. F.: McGraw-Hill.

- Hogan, N. 1987. Stable execution of contact tasks using impedance control. *Proceedings of the 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1047-1054.
- Kelly, R. 2003. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. México, D. F.: Prentice-Hall.
- Khalil, H. K. 2002. *Nonlinear Systems, 3th ed.* : Prentice-Hall.
- Khalil, W. y E. Dombre. 2002. *Modeling, Identification and Control of Robots*. London: Hermes Penton Science.
- King, S. J., E. Locke y D. Cerundolo. 1984. Robotic writing and drawing system for the disabled. *Proceedings of the 2nd International Conference on Rehabilitation Engineering*. Ottawa, Canada. 164-165.
- Lewis, F. L., C. T. Abdallah y D. M. Dawson. 1993. *Control of Robots Manipulators*. New York, NY USA: mpc.
- Liu, Y.-H., S. Arimoto, V. Parra-Vega y K. Kitagaki. 1997. Decentralized adaptive control of multiple manipulators in cooperations. *International Journal of Control* 67(5). 649-673.
- Mason, M. T. 1981. Compliance and force control for computer controlled manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* SMC-11. 418-432.
- Masui, S. y T. Terano. 1994. Calligraphic robot by fuzzy logic. *IEEE World Congress on Computational Intelligence., Proceedings of the Third IEEE Conference on Fuzzy Systems*. Orlando, FL USA. 1598-1603.
- Parra-Vega, V., A. Rodríguez-Ángeles, S. Arimoto y G. Hirzinger. 2001. High precision constrained grasping with cooperative adaptive hand control. *Journal of Intelligent and Robotics Systems* 32. 235-254.
- Potkonjak, V., D. Kostić, S. Tzafestas, M. Popović, M. Lazarević y G. Djordjević. 2001b. Human-like behavior of robot arms: general considerations and the
-

- handwriting task—Part II: the robot arm handwriting. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing* 17. 317–327.
- Potkonjak, V., M. Popović, M. Lazarević y J. Sinanović. 1998. Redundancy problem in writing: from human to anthropomorphic robot arm. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 28. 790–805.
- Potkonjak, V., S. Tzafestas, D. Kostić y G. Djordjević. 2001a. Human-like behavior of robot arms: general considerations and the handwriting task—Part I: mathematical description of human-like motion: distributed positioning and virtual fatigue. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing* 17. 305–315.
- Potkonjak, V. y M. K. Vukobratović. 1986. Dynamics of manipulation mechanisms with constrained gripper motion. part I. *Journal of Robotics Systems* 3. 321–334.
- Potkonjak, V., M. K. Vukobratović y V. Matijević. 1999. Dynamics of contact task in robotics part II—case study in dynamics of contact motion. *Mechanism and Machine Theory* 34. 943–972.
- Pérez-Camacho, E. 2003. *Implementación de diversos algoritmos de control en un robot industrial*. Tesis de licenciatura. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México. D.F., México.
- Siciliano, B. y L. Villani. 1999. *Robot Force Control*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Spong, M. W. y M. Vidyasagar. 1989. *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley & Sons.
- Vukobratović, M. y A. Tuneski. 1994. Contact control concepts in manipulation robotics – an overview. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 41, No. 1. 12–24.
- Vukobratović, M. K. y V. Potkonjak. 1986. Constrained gripper motion in assembly manipulation. part II. *Journal of Robotics Systems* 3. 335–347.
-

- Vukobratović, M. K. y V. Potkonjak. 1999. Dynamics of contact task in robotics part I—general model of robot interacting with environment. *Mechanism and Machine Theory* 34. 923–942.
- Waarsing, B. J. W., M. Nuttin y H. V. Brussel. 2003. Behavior-based mobile manipulation inspired by the human example. *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- West, H. y H. Asada. 1985. A method for the design of hybrid position/force controllers for manipulators constrained by the contact with the environment. *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. St. Louis, MO., USA. 251–259.
- Whitney, D. E. 1985. Historical perspective and state of the art in robot force control. *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 262–268.
- Yoshikawa, T. 2000. Force control of robot manipulators. *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. San Francisco, CA., USA. 220–226.
-