



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES.

CAMPUS ARAGÓN

“APUNTES DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS”.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A :

OCHOA JIMÉNEZ JULIO CÉSAR

ASESOR :

ING. TRINIDAD ADOLFO ALMAZÁN JARAMILLO

m 340207



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autoderecho de Matrícula de la
UNA
CÓDIGO
NOMBRE OCHOA JIMENEZ
CÓDIGO JULIO CESAR
FECHA 06/12/2004
FIRMA 



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGÓN
DIRECCIÓN

JULIO CESAR OCHOA JIMENEZ
Presente

Con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobado su tema de tesis y asesor.

TÍTULO:

"APUNTES DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS"

ASESOR: Ing. TRINIDAD ADOLFO ALMAZÁN JARAMILLO

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
San Juan de Aragón, México, 27 de mayo de 2004.
LA DIRECTORA


ARQ. LILIA TURCOTT GONZÁLEZ





C p Secretaría Académica
C p Jefatura de Carrera de Ingeniería Civil
C p Asesor de Tesis

LTG/AIR/gh

DEDICATORIAS

A DIOS POR DARMÉ LAS COSAS QUE
GOZO EL DÍA DE HOY Y QUIEN
SIEMPRE ME HA PERMITIDO SALIR
ADELANTE.

CON UN ESPECIAL AGRADECIMIENTO
Y CON MUCHO AMOR DEDICO LA PRESENTE
A MIS PADRES.

SR. ARTURO OCHOA SANCHEZ
SRA. MARIA GUADALUPE JIMENEZ CORTEZ

A MIS HERMANOS: POR EL
CARIÑO Y APOYO QUE ME
HAN DADO

VICTOR
CRISTIAN

A MI ESCUELA:

CON PROFUNDO RESPETO Y ADMIRACION
A LA ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS
PROFESIONALES ARAGON DE LA UNIVERSIDAD
NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO. POR
PROPORCIONARME LOS CONOCIMIENTOS
PARA DESARROLLARME AMPLIAMENTE
EN EL CAMPO PROFESIONAL DE LA
INGENIERIA CIVIL.

AL ING. TRINIDAD ADOLFO ALMAZAN JARAMILLO
POR DARMME PARTE DE SU TIEMPO PARA DIRIGIR ESTE
TRABAJO

A MIS PROFESORES:

POR SUS ENSEÑANZAS.

A MIS AMIGOS Y COMPAÑEROS POR COMPARTIR BUENOS Y MALOS
MOMENTOS.

GUADALUPE

LORENA

MONICA

OLIVER

GUSTAVO

ALVARO

LA PRODUCTIVIDAD ES UN QUEBRADO CUYO NUMERADOR ES
LO QUE SE HACE Y CUYO DENOMINADOR ES LO QUE PODRIA
HACER

BEER

INDICE

PREFACIO	1
1. INTRODUCCION	
1.1. TIPOS DE ESTRUCTURAS	3
1.2. TIPOS DE CARGAS	9
1.2.1. CARGAS CONCENTRADAS	11
1.2.2. CARGAS REPARTIDAS	12
1.2.3. CARGAS VIVAS	16
1.2.4. CARGAS MUERTAS	17
1.2.5. CARGAS ACCIDENTALES	18
1.2.6. CARGAS ACTIVAS	20
1.2.7. CARGAS REACTIVAS	21
1.2.8. CARGAS INTERNAS	21
1.3. APOYOS	22
1.4. ESTATICIDAD	43
1.5. ISOSTATICIDAD	44
1.6. HIPERESTATICIDAD	46
1.7. HIPOSTATICIDAD	48
1.8. EJERCICIOS Y PROBLEMAS	51
2. EQUILIBRIO	
2.1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES	55
2.2. RESULTANTE DE SISTEMAS DE FUERZAS EN UN PLANO (coplanares).	59
2.3. RESULTANTE DE FUERZAS EN EL ESPACIO.	63
2.4. EQUILIBRIO DE SISTEMAS COPLANARES	68
2.5. EQUILIBRIO DE SISTEMAS EN EL ESPACIO (TRES DIMENSIONES)	82
2.6. SUPERPOSICIÓN DE CAUSAS Y EFECTOS.	87
2.7. PROBLEMAS PROPUESTOS	89

3. ANALISISDE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS SOMETIDAS A CARGA AXIAL	
3.1. CABLES	99
3.1.1. TIPOS DE CABLES	99
3.1.2. CLASIFICACION DE ACUERDO CON LAS SOLICITACIONES QUE SOPORTAN	100
3.1.3. CABLES DE ELEMENTEOS RECTILINEOS	106
3.1.4. CABLES PARABOLICOS	109
3.1.5. CABLES CATENARIOS	112
3.1.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS	116
3.2. ARMADURAS	
3.2.1. CONCEPTOS FUNTAMENTALES	120
3.2.2. METODO DE LOS NUDOS	124
3.2.3. METODO DE LAS SECCIONES.	130
3.2.4. PROBLEMAS PROPUESTOS:	139
4. ANALISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS SOMETIDAS A FLEXION Y CORTANTE	
4.1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES	140
4.2. VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS	145
4.3. VIGAS EN VOLADIZO.	159
4.4. VIGAS GERBER	163
4.5. MARCOS CON DOS APOYOS	170
4.6. MARCOS EN VOLADIZO	178
4.7. MARCOS TRIARTICULADOS	184
4.8. ARCOS SIMPLES	191
4.9. SUPERPOSICION DE CAUSAS Y EFECTOS	196
4.10. PROBLEMAS PROPUESTOS	201
CONCLUSIONES	209
BIBLIOGRAFIA	210

PREFACIO

Este libro esta dirigido a estudiantes de ingeniería civil y arquitectura, se trata de una guía de la materia de estructuras isostaticas actualmente incluida en el tercer semestre del plan de estudio de la carrera de ingeniería civil.

El objetivo principal es que el estudiante reconozca el análisis estructural como parte esencial del desarrollo de un proyecto e identifique los tipos de estructuras, los tipos de elementos, los tipos de acciones (cargas) para que así adquiera la habilidad para analizar cualquier problema de estructuras (isostaticas) en forma lógica y sencilla empleando para la solución los principios básicos perfectamente comprendidos para posteriormente lograr avanzar en el ámbito de las estructuras.

Se da por sentado que el lector posee los conocimientos correspondientes al estudio teórico de la estática, álgebra, trigonometría, calculo diferencial e integral. Examinando directamente los problemas, los conceptos se presentan en términos simples y cada paso se explica en forma detallada, así mismo se presentan series de ejercicio para que el estudiante logre aprender y mejorar la mecánica de los problemas.

Generalmente la gente no pone atención, ni piensa en la estructura sobre la cual desarrolla sus actividades, pero cuando una estructura se colapsa entonces es cuando se pone a reflexionar y se cuestiona para tratar de entender que paso. Es importante comentar que el ingeniero estructurista es quien participa en todas las construcciones en donde el ser humano desarrolla sus actividades (puentes, carreteras, casas, edificios, presas, teatro, cines, ...). Desde luego estas estructuras deben estar debidamente diseñadas para que las actividades se puedan realizar adecuadamente.

El ingeniero estructural. Se encarga del arreglo y dimensionamiento de las estructuras y sus partes, de tal manera que soporten satisfactoriamente las cargas colocadas sobre ellas. La Mecánica como ciencia que estudia las fuerzas y sus efectos se convierte en la ciencia básica de la ingeniería estructural.

En el análisis estructural conjugamos conocimientos de ciencias básicas aplicadas al arte de la ingeniería para encontrar fuerzas y deformaciones.

El ingeniero por medio de los conocimientos, físicos y matemáticos, crea modelos, a los que aplica ecuaciones y puede por lo tanto planear, conocer y rectificar una estructura antes de ser construida.

Este libro solo estudia los problemas de estructuras planas (sus elementos geométricos están contenidos en un plano, así como su sistema de carga y apoyos), y rebasa su ámbito la consideración

de estructuras espaciales (sus elementos geométricos no están contenidos dentro de un plano, o su sistema de carga o de apoyos no se ubique dentro de este).

En el primer capítulo se estudian los conceptos básicos: tipos de estructuras, cargas, apoyos, se verifican las condiciones de estabilidad y determinación de una estructura, la isostaticidad, estaticidad, hiperestaticidad e hipostaticidad de las estructuras. Así mismo se presenta una serie de ejercicios que reforzara lo aprendido durante el capítulo.

En el segundo capítulo se repasan los conceptos fundamentales: sistemas de fuerzas en el plano y en el espacio, equilibrio de sistemas, diagramas de cuerpo libre, superposición de causas y efectos; con ejercicios explicados en forma detallada para una fácil comprensión y aprendizaje. Así mismo se le presenta al estudiante una serie de ejercicios con los cuales podrá practicar lo visto en el capítulo.

En el tercer capítulo entramos a los problemas prácticos empezando con el análisis de cables, describiendo la clasificación de estos, y la manera en la que se calcula cada tipo de cable. De acuerdo a las solicitaciones que va a soportar, presentando la serie de ejercicios. En la segunda parte de este capítulo se analizan las armaduras, presentando los conceptos fundamentales de estas estructuras en celosía, analizamos la isostaticidad, se presentan los métodos para su análisis (método de los nudos y método de las secciones) mostrando ejemplos muy bien explicados y una serie de ejercicios para aplicar lo aprendido.

En el cuarto y último capítulo analizamos las estructuras sometidas a flexión y cortante que son las estructuras con las que el ingeniero se enfrentara día a día y que son las más sencillas en su análisis. Empezamos con los conceptos fundamentales para seguir con el análisis de los diferentes tipos de vigas con los diversos tipos de carga que se presentan, pasamos posteriormente al análisis de marcos con sus diversas variantes, seguimos con arcos y finalizamos con la superposición de causas y efectos. Se presenta una serie de ejercicios que abarcan los diversos temas tratados en este capítulo.

INTRODUCCION

1.1. TIPOS DE ESTRUCTURAS

El marco ABCD que se aprecia a continuación, por regla general lo identificamos como una estructura. El concepto de estructura que posee el común de la gente es el de un elemento físico-espacial que tiene forma de una viga, de un marco, de un arco, de una armadura, etc., pero no lo asocia a la carga que resiste, en nuestro caso W ni al sistema de apoyo del ente geométrico al sistema de piso (en nuestro ejemplo los dispositivos A y D).

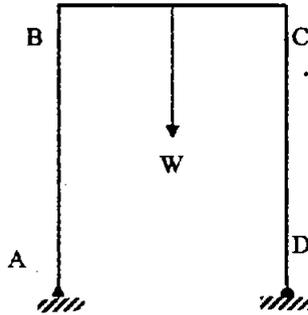


Fig. 1.1

Es evidente, desde el punto de vista cualitativo, que el elemento geométrico ABCD no "siente" lo mismo con la carga W que con otra que pudiera actuar horizontalmente y, por ende, no transmitirá las mismas reacciones al terreno a través de los apoyos A y D.

Por lo anterior, conceptuaremos una estructura como el sistema formado por las cargas, el elemento geométrico y los apoyos.

Pensemos en un caso simple: la estructura de una casa. Nos damos cuenta que es la unión de varios elementos estructurales (cimientos, muros, dalias, castillos, losas) que trabajan en conjunto para resistir unas cargas dadas y transmitir las al terreno por medio de apoyos.

Si fijamos nuestra atención en una losa, esta en sí es una estructura, una vez determinadas las cargas que soporta y definidos sus apoyos sobre muros o columnas. Sin embargo, toda la casa, a su vez, es una estructura que soporta el peso propio de los materiales con que está construida y las cargas del mobiliario y la gente que habita.

A través de muros y columnas estas cargas se transmiten a los cimientos que son el apoyo adecuado de la estructura para inducir las cargas al terreno o sistema tierra.

ESTRUCTURA: Estructura es un elemento o un conjunto de elementos que, unidos entre sí, resisten las cargas que soportan y las transmiten al terreno a través de sus apoyos.

Sabemos que unas estructuras son diferentes de otras y que por ello se comportan de manera distinta. Pensemos en los aspectos que diferencian a las estructuras:

- > La geometría que las define.
- > Las cargas que soportan.
- > La forma en que están apoyadas.

Tratemos de imaginar la geometría que comúnmente tienen las tres estructuras que se muestran en la figura 1.2.

- a) Un edificio de cinco niveles que es utilizado para oficinas.
- b) Un puente que es construido para cruzar un cauce pequeño.
- c) Un tanque que sirve para almacenar agua.

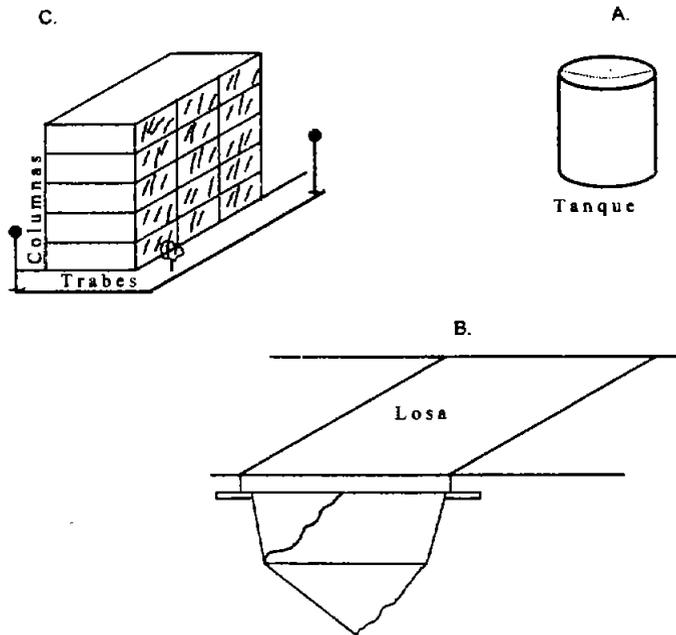


Fig. 1.2

Nos damos cuenta de que solo por estar destinadas a diferentes usos, estas construcciones deberán estar definidas *geoméricamente* de manera distinta.

Enumeraremos, entonces, con qué fin se construyen las estructuras más comunes:

- Cubrir un espacio, como en el caso de un edificio o de naves industriales.
- Salvar un claro, como en el caso de los puentes.
- Contener empujes, como en los tanques de almacenamiento o en las presas.
- Otros casos, como sucede con las estructuras que sostienen cableados o con las torres de alta tensión, etc.

Con fines de estudio, las estructuras podemos clasificarlas en *estructuras planas* y *estructuras espaciales*

Consideremos las tres estructuras de la figura 1.3.

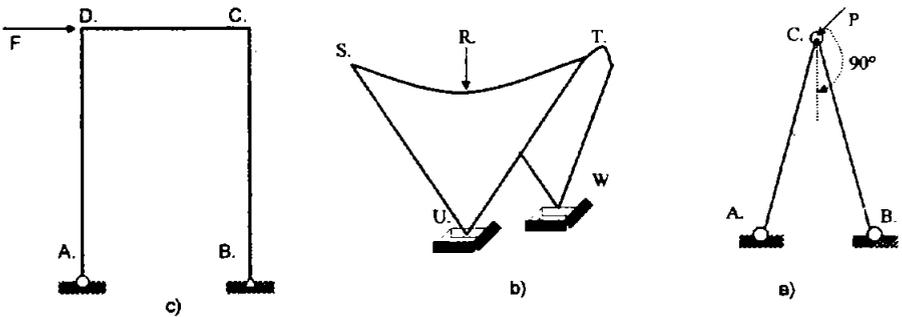


Fig. 1.3.

La primera de ellas (a) tiene sus elementos geoméricos ABCD determinando un plano y el sistema de carga F está contenido en el mismo plano. La estructura es una *estructura plana*. El paraboloides de la figura (b) posee sus elementos geoméricos USTW dentro del espacio, sin posibilidad de estar alojados en un solo plano. El sistema de carga R también está en el espacio y por ende la *estructura es espacial*. Analizando la estructura de la figura (c), advertimos que sus elementos geoméricos ABC definen un plano, pero el sistema de carga actúa sobre B *perpendicular* al plano. Como la carga está fuera del plano ABC, a la estructura la catalogamos como *espacial*.

ESTRUCTURAS PLANAS Y ESPACIALES:

Entendemos por *estructura plana* aquella cuyos elementos geoméricos están contenidos en un plano, así como su sistema de carga y sus apoyos.

Una *estructura es espacial* cuando sus elementos geoméricos no están contenidos dentro de un plano o cuando pudiendo estarlo, su sistema de carga o de apoyos no se ubique dentro de este plano.

El objetivo de este libro es estudiar las estructuras planas y rebasa su ámbito la consideración de estructuras espaciales.

Dentro del plano podemos distinguir varios tipos de estructuras por su categoría. Así, es fácil advertir la existencia de:

- a) Estructuras rectas.
- b) Estructuras curvas.
- c) Estructuras de superficie.

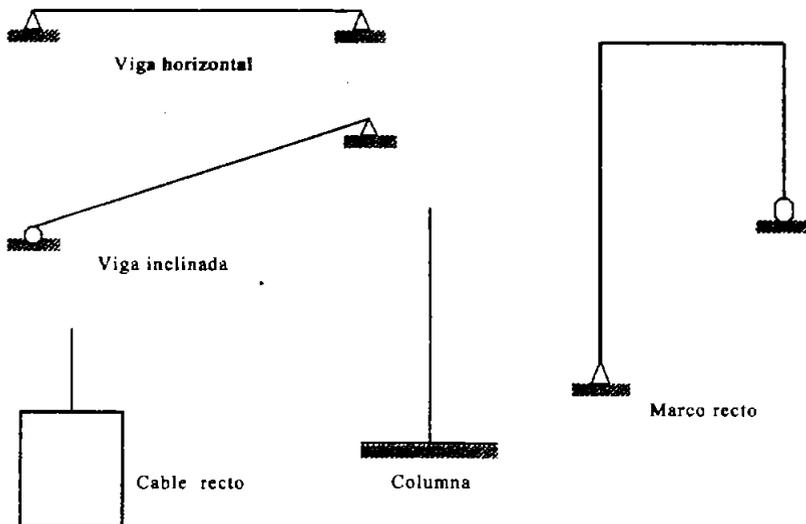
Las estructuras rectas pueden ser *vigas* horizontales o inclinadas y *columnas* que son elementos generalmente verticales. Es posible conformar una estructura compuesta por dos columnas y una viga a la que denominaremos *marco*. Los marcos pueden ser *rectos* o *inclinados*. A un conjunto de marcos se le llama *estructura reticular*.

Una estructura muy común es la unión de barras rectas articuladas de tal manera que forman una retícula: se conocen por el nombre de *armaduras*.

Las estructuras curvas pueden ser arcos circulares, elípticos y parabólicos.

Los cables también son estructuras curvas (aunque pueden ser rectas). Los cables siempre trabajan con esfuerzos de tensión y pueden ser parabólicos, elípticos y catenarios, según el sistema de carga que soporten.

Las estructuras de superficie son fundamentalmente *muros* y *losas*. Los primeros son estructuras que se alojan en planos verticales. Las segundas, por lo general, son elementos estructurales que se presentan horizontales.



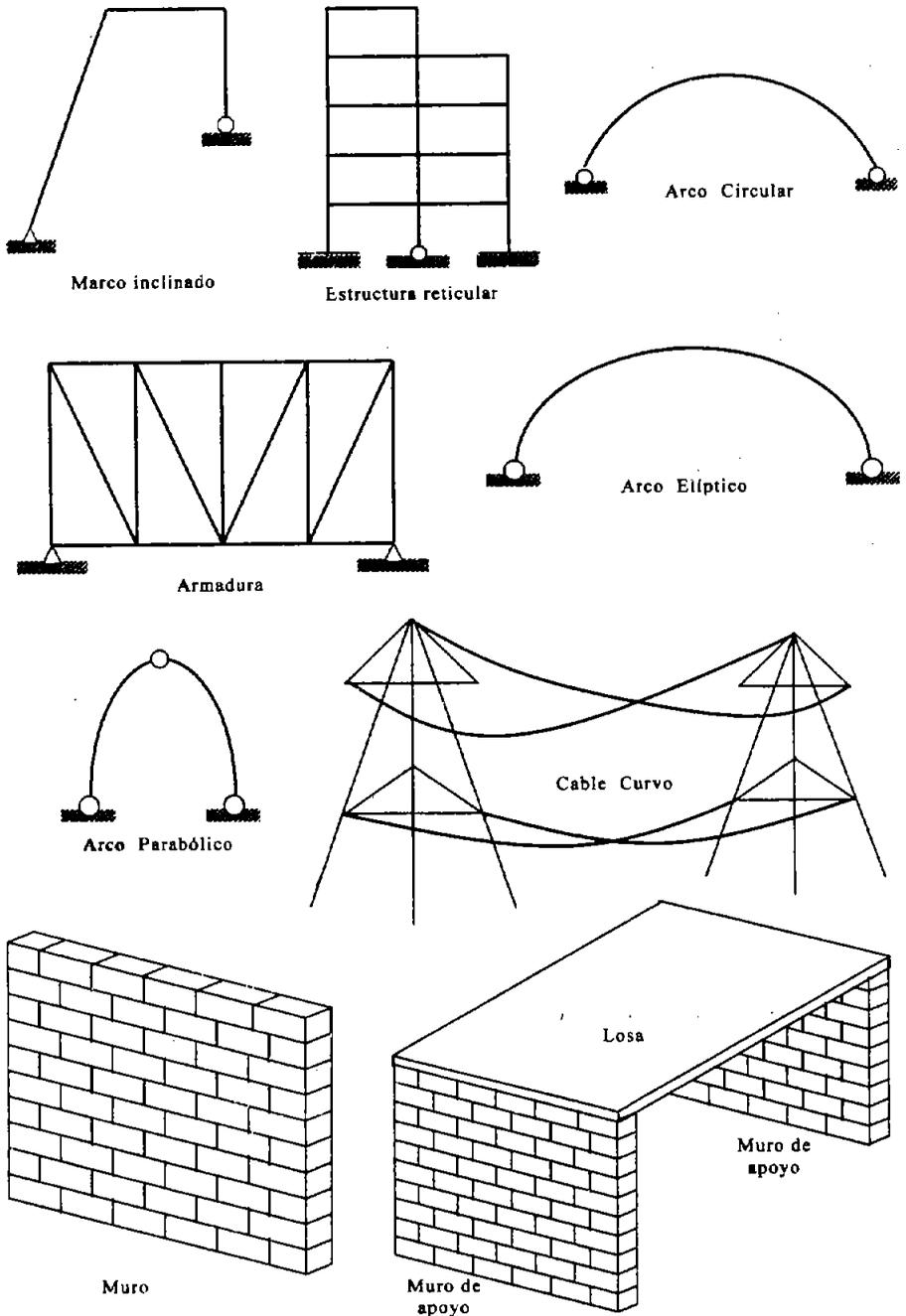
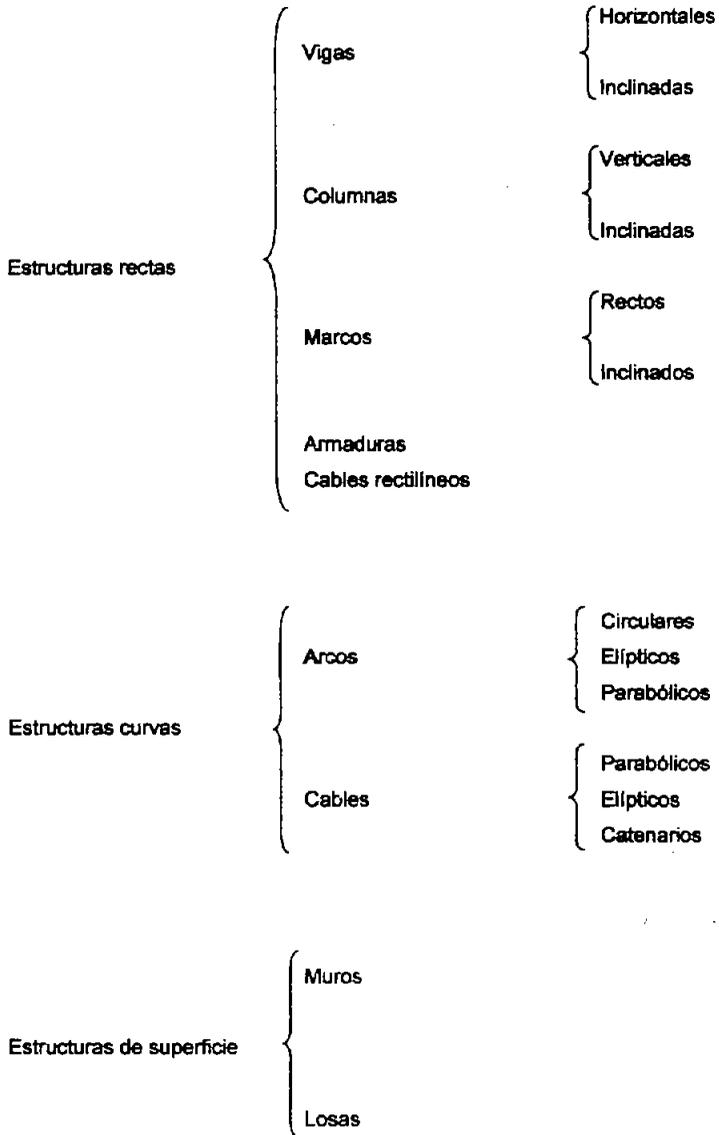


Fig. 1.4.

ESTRUCTURAS PLANAS



1.2. TIPOS DE CARGAS

Imaginemos las fuerzas a las cuales puede estar sometido un puente ferroviario: primeramente, la carga que ejerce la propia estructura del puente por la acción de la gravedad, dada por su peso propio, que es una carga uniformemente distribuida o repartida a lo largo de todo el puente, la denominamos carga muerta.

Otra carga que soportara el puente es la que ejerce el peso del ferrocarril, que es una carga viva, constituida por un conjunto de fuerzas concentradas móviles.

La fuerza ejercida por el empuje del viento es una carga accidental, para la cual debe estar diseñado el puente, esta carga cambia de magnitud y dirección.

La fuerza de *impacto* producida por el golpe de la locomotora en las juntas abiertas entre rieles y el cabeceo de la misma son otras cargas que deberá soportar el puente.

Existe la probabilidad de que en algún momento se produzcan cargas laterales originadas por un sismo.

Todo el sistema de cargas de una estructura está compuesto de *fuerzas y momentos*.

Desde el punto de vista de su *superficie de acción*, las cargas pueden ser *concentradas o distribuidas*.

Pensemos en una viga que se apoya sobre otra como aparece en la figura 1.5.

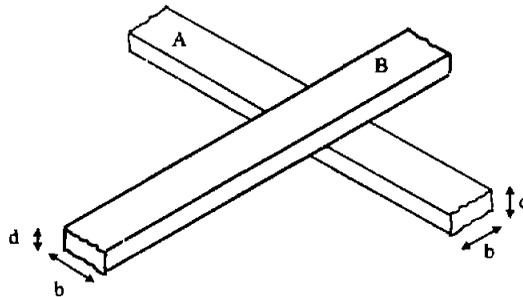
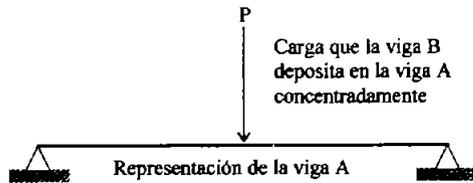


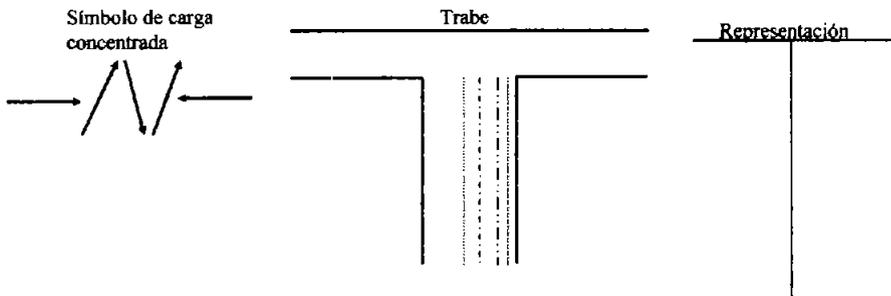
Fig. 1.5

Las vigas A y B tienen por dimensiones de ancho y espesor b y d respectivamente y, por lo tanto, tienen un peso determinado por la acción de la gravedad y el peso volumétrico del material de que están construidas.

La viga A, que sirve de apoyo a la viga B, puede ser representada (en el plano) como se observa en la figura 1.6.



Donde la fuerza P es una *carga concentrada* que ejerce la viga B. La línea horizontal representa el eje de la viga A. Para el proceso del diseño de estructuras, los elementos son representados gráficamente por sus ejes.



Para hacer el análisis de la viga A, consideramos que la carga P está aplicada en un punto, pero en realidad es una carga que actúa en determinada área: el área de contacto entre las dos vigas. El hecho anterior nos hace plantearnos una pregunta: ¿hasta qué área podemos considerar una carga concentrada?

Si ahora tenemos que sobre la viga A descansa una placa de 1 m de ancho, no podemos considerar concentradamente esa carga. Es imposible hacer resaltar que no existe una norma al respecto y que el criterio del ingeniero es la base para decidir cuando se trata de una carga concentrada (Fig. 1.8)

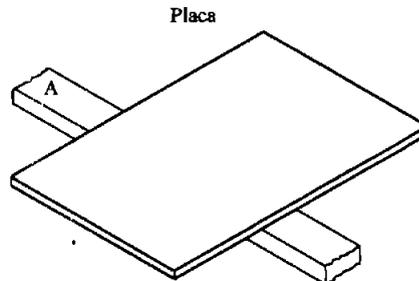


Fig. 1.8

1.2.1. CARGAS CONCENTRADAS

Cargas concentradas son aquellas que se consideran, para su análisis, aplicadas en un punto. Es una buena aproximación, pero nunca es real, dado que siempre existe una superficie sobre la cual actúa una carga. Se trata de un artificio válido para el proceso del análisis y diseño de estructuras.

Las unidades de estas cargas son unidades de fuerza (W).

En el ejemplo del puente ferroviario consideramos *cargas concentradas*:

- Las ruedas del ferrocarril. A estas cargas las llamamos *móviles* por su desplazamiento sobre las vías. Todas siguen una misma línea de acción.
- La fuerza de impacto producida por el golpe de las ruedas en las juntas abiertas entre rieles.
- La carga de sismo.
- La carga producida por el cabeceo de la locomotora.

En otros casos, a la fuerza que transmite un cable, una columna, etc., se le considera como cargas concentradas.

Volvamos al ejemplo de las vigas A y B (Fig. 1.5). Por la acción de la gravedad, la viga A tiene un peso propio que se distribuye a lo largo de su eje. Esta carga sigue una *ley de distribución constante* y la llamamos carga *uniformemente repartida*.

Si representamos ahora la viga A (en la figura 1.9) tenemos:

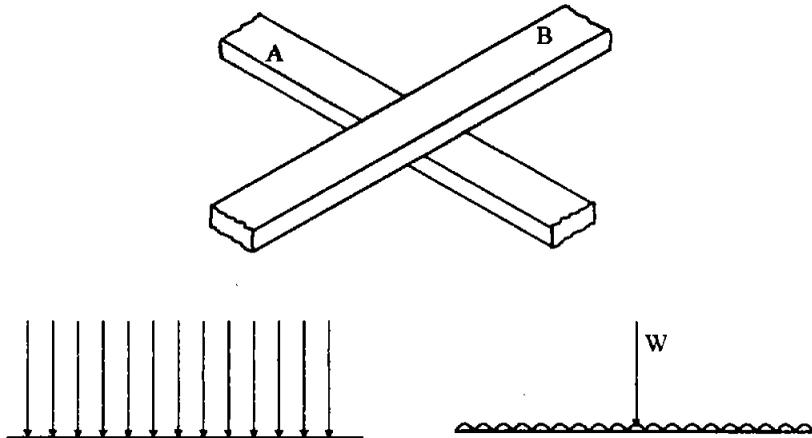


Fig. 1.9

Donde W es la carga (por unidad de longitud) del peso propio, uniformemente distribuida.

1.2.2. CARGAS REPARTIDAS

Cargas distribuidas o repartidas son aquellas que se consideran aplicadas a lo largo de una línea (en el plano).

Estas cargas están dadas en unidades de fuerza entre unidades de longitud (WL^{-1}).

En la realidad no solo se presentan cargas uniformemente distribuidas. Las cargas repartidas pueden seguir una ley de variación, lo que por lo general sucede. Así, las *cargas distribuidas* pueden ser *uniformemente repartidas*, como en el ejemplo anterior, y no *uniformemente repartidas*.

Tomemos el caso de un tanque de almacenamiento (Fig. 1.10) que contiene un líquido a una altura h y tiene un peso volumétrico γ . Por la acción de la gravedad, el líquido ejerce una carga sobre el tanque en la que la presión del líquido no tiene el mismo valor a diferentes alturas (Presión Hidrostática). La carga sigue una *ley de variación lineal pero no constante*. Este es el caso de una *carga repartida no uniformemente*. En el fondo del tanque la presión vale γh y en la superficie del líquido tiene un valor igual a cero. A este tipo de cargas lo llamamos *carga triangular*.

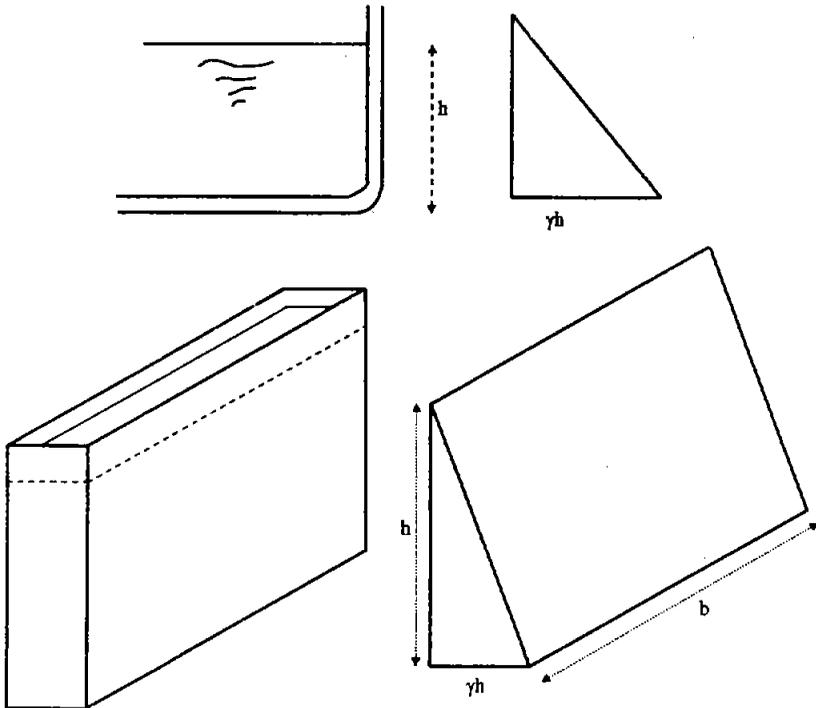


Fig. 1.10

Pensemos ahora en el empuje de tierra sobre un muro de retención (Fig. 1.11). Se trata de un ejemplo similar al del tanque que contiene un líquido. El valor de la carga sobre el muro estará en función del material que se trate y, con ello, de un peso volumétrico y de la altura a la cual se encuentra. Es una carga que se distribuye linealmente de manera triangular. Si sobre el relleno actúa la carga de una construcción, dada como una carga uniformemente distribuida (WL^{-1}), que podemos encontrar como el peso total del edificio entre su longitud en el sentido que analizamos, aparece una distribución lineal y constante de presiones en el terreno, esta carga se transmite al muro.

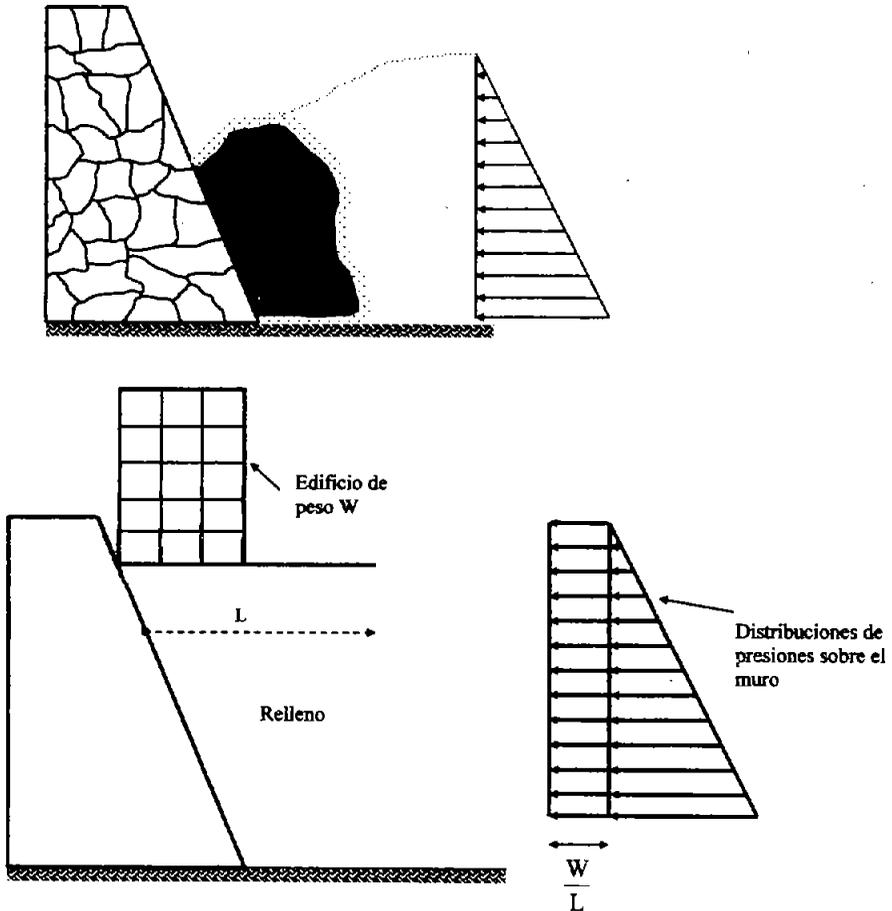


Fig. 1.11

Esta carga puede ser concebida como una carga *trapezoidal* o puede ser separada en dos cargas ya conocidas: una carga uniformemente distribuida y una carga triangular (Fig. 1.12).

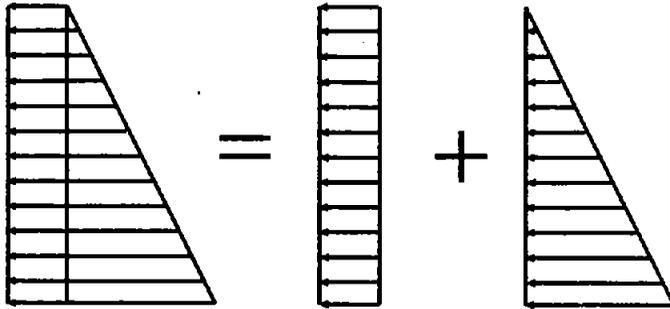


Fig. 1.12

Pongamos ahora el caso de un camión que deposita basura en una losa elevada, para que otro camión que la recoge por debajo de la losa, pueda llevarla a una nave de procesamiento como se muestra en la figura 1.13.

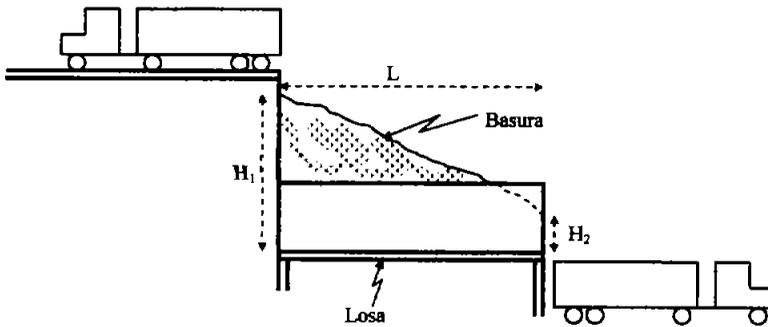


Fig. 1.13

Si representamos con γ_0 el peso volumétrico de la basura, la carga que se produce sobre la losa será la que se observa en la figura 1.14.

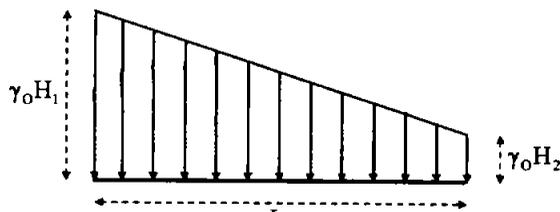


Fig. 1.14.

O podría ser representada como indica la figura 1.15.

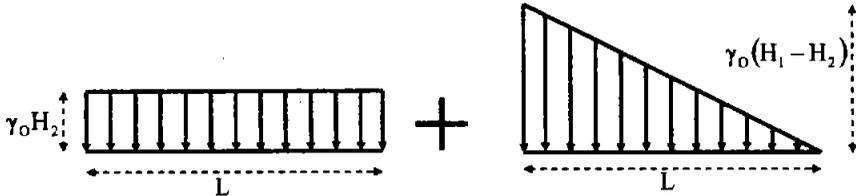


Fig. 1.15

Hemos hablado de cargas que siguen una ley de variación conocida, pero eso no siempre sucede. Una zapata aislada, unida a una columna, transmite una carga al suelo donde se apoya. En este caso no se conoce con exactitud la ley de variación que sigue la carga sobre el suelo. A la distribución que se muestra (Fig. 1.16) se le llama bulbo de presiones y tiene la forma siguiente:

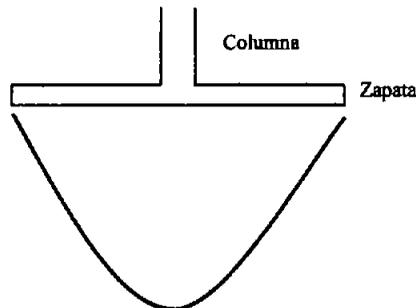


Fig. 1.16.

En general, se pretende adecuar las cargas, para su estudio y análisis, a cargas *concentradas*, *uniformemente distribuidas*, *triangulamente distribuidas* o alguna otra distribución cuyo estudio sea más fácil.

Imaginemos las cargas a que esta sometida una losa de un edificio de oficinas: además del peso propio, se tienen cargas provocadas por archivos, escritorios, personas. Si pretendemos encontrar las cargas reales a que puede estar sometida dicha losa, se nos presentaría el problema de que la combinación de cargas, cambiándolas de lugar, es muy grande y que, además, tendríamos distribuciones muy difíciles de manejar. Por simplicidad, en el caso de losas consideramos cargas uniformemente distribuidas en un área. Sus unidades son de fuerza entre área (WL^{-2}) (Fig. 1.17).

Las cargas pueden ser clasificadas, también, desde el punto de vista de su *permanencia* en cargas *vivas*, cargas *muertas* y cargas *accidentales*.

Volvamos a fijar nuestra atención en el último ejemplo planteado, las cargas a que puede estar sometida una losa de un edificio para oficinas. A la carga de archiveros, personas que pueden ocupar el lugar, sillas, escritorios, papelería, etc., se le llama *carga viva*.

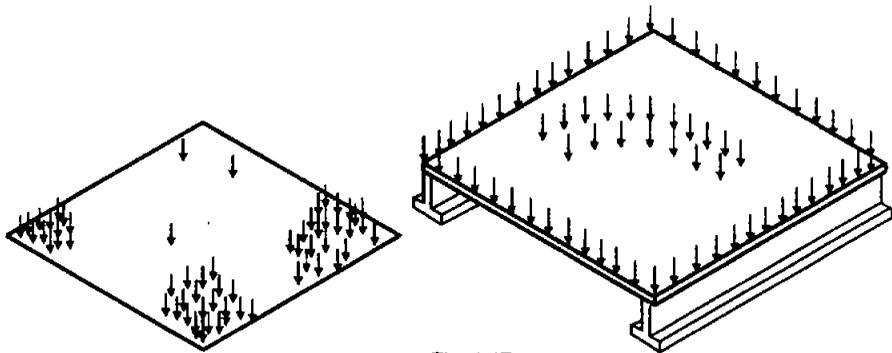


Fig. 1.17

Si pensamos en un puente para peatones, cargas vivas son las personas que lo cruzan. En el caso del puente ferroviario, el tren es la carga viva.

1.2.3. CARGAS VIVAS

El reglamento de construcciones del Distrito Federal considera cargas vivas a las fuerzas gravitacionales que obran en una construcción y que no tienen carácter de permanente.

Corresponden a cargas gravitacionales debidas a la ocupación normal de la estructura y que no son permanentes en ella. Debido a la característica de movilidad y no permanencia de esta carga el grado de incertidumbre en su determinación es mayor. La determinación de la posible carga de diseño de una edificación ha sido objeto de estudio durante muchos años y gracias a esto, por medio de estadísticas, se cuenta en la actualidad con una buena aproximación de las cargas vivas de diseño según el uso de la estructura.

Para efectos de diseño es el calculista quien debe responder por la seguridad de la estructura en su vida útil, para esto cuenta con las ayudas de las normas y códigos de diseño donde se especifican las cargas vivas mínimas a considerar.

Pensemos ahora en la magnitud de las cargas vivas. ¿De qué depende?

Imaginemos un estadio, ¿cuál puede ser la carga viva máxima? En condiciones normales de servicio, el estadio se hallará lleno de personas.

Los cuartos de un hotel, en condiciones normales, no estarán llenos de personas. Podría suponerse que se llena de personas, con lo cual se obtendrán cargas muy elevadas; pero, como es lógico, a mayor carga es necesaria mayor resistencia de la pieza y con esto se eleva el costo. Este costo adicional no se justifica, pues la seguridad que se da es muy pequeña dado que la probabilidad de que ocurra es también muy reducida.

De lo anterior puede deducirse que la magnitud de la carga viva está en función del uso o destino de la construcción de que se trate.

Los reglamentos de construcción contienen estimaciones de carga viva para construcciones de diferentes usos.

En ocasiones es necesario suponer cuál puede ser la magnitud de la carga viva, como sucede en el proceso de una construcción, en que se almacenan materiales, se mueve equipo, etc., y no existe una guía para ello. Un factor importante para decidir cuál debe ser la magnitud de la carga viva es la seguridad que se requiere en una construcción. En el caso del diseño de presas, la seguridad se elige con base en el costo menor entre los daños que causaría su falla, multiplicados por su probabilidad de ocurrencia más el costo de la obra y el costo de una obra que garantice no fallar con esa carga.

Debido a que es impreciso, en la mayoría de las ocasiones, el análisis de cargas vivas, es necesario aumentarlas razonablemente con objeto de tener construcciones seguras y pensando en efectos no previstos, como el salto de los espectadores en un estadio, que es un caso más crítico que el de personas que no se mueven.

Concentrémonos ahora en la carga que hemos mencionado en primer término en los ejemplos: la carga de peso propio de las construcciones. En un edificio hay cargas que se deben a la acción de la gravedad y que tiene carácter permanente, como losas, castillos, columnas, muros, instalaciones, acabados, etc. A estas cargas les llamamos *cargas muertas*.

1.2.4. CARGAS MUERTAS

Corresponde al peso propio y al peso de los materiales que soporta la estructura tales como acabados, divisiones, fachadas, techos, etc. Dentro de las cargas muertas también se pueden clasificar aquellos equipos permanentes en la estructura. En general las cargas muertas se pueden determinar con cierto grado de exactitud conociendo las densidades de los materiales.

La carga muerta en las construcciones esta dada por los elementos estructurales como losas y columnas y por los elementos no estructurales como plafones, ventanas, instalaciones, etc.

Al valorar las cargas muertas puede tenerse un grado de precisión mayor que con las cargas vivas, por lo que en estas cargas se incrementa menos su valor. Para hallar el valor de la carga muerta, conocemos tanto las dimensiones de las piezas como el peso volumétrico de los materiales a emplearse.

El reglamento de construcciones para el Distrito Federal contempla las cargas muertas y los pesos específicos de los materiales.

Por ejemplo, si queremos conocer la carga de peso propio de una trabe de 30 cm X 60 cm de concreto reforzado, tenemos (Fig. 1.18).

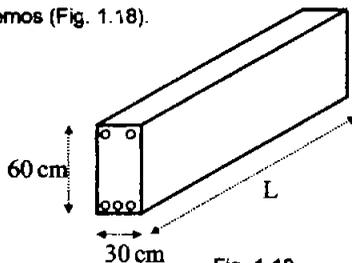


Fig. 1.18

Se recomienda usar peso volumétrico del concreto $\gamma_0 = 2.4 \text{ Ton/m}^3$.

La carga muerta será:

$$(2,400 \text{ kg/ m}^3)(0.3 \text{ m})(0.6 \text{ m}) = 432 \text{ kg/m}$$

Y la representamos como se indica en la figura 1.19.

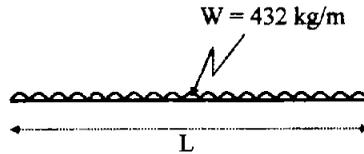


Fig. 1.19

Veamos ahora cómo actúan las cargas de viento y sismo. Desde el punto de vista de su permanencia, no pueden ser clasificadas como vivas o muertas debido a que *no son producidas por la acción de la gravedad*; las cargas de viento y sismo se distinguen por *no tener carácter permanente*. A estas cargas las llamamos *cargas accidentales*.

1.2.5. CARGAS ACCIDENTALES

Consideramos cargas accidentales a las fuerzas que actúan en una construcción, que no son gravitacionales y no tienen carácter permanente.

Las fuerzas producidas por la acción del viento y de los sismos no son las únicas cargas - accidentales, pero son las que comúnmente se utilizan en el análisis y diseño de estructuras. Otro ejemplo de carga accidental es la provocada por explosiones, pero estas fuerzas no se prevén salvo casos excepcionales.

El sismo es una liberación súbita de energía en las capas interiores de la corteza terrestre que produce un movimiento ondulatorio del terreno.

Este movimiento ondulatorio se traduce en una aceleración inducida a la estructura que contando esta con su propia masa y conociendo la 2da ley de Newton se convierte en una fuerza inercial sobre la estructura. Es inercial porque depende directamente de la masa de la estructura sometida al sismo.

Como es difícil suponer la magnitud máxima que puede alcanzar un sismo o la acción del viento, la evaluación de estas cargas es poco precisa, por lo que debe incrementarse el valor obtenido más de lo necesario para aumentar cargas vivas y cargas muertas.

Para evaluar las cargas producidas por sismo, se recurre a la segunda ley de Newton:

$$F = m.a$$

Podemos conocer la masa de un edificio (su peso), que se calcula evaluando las cargas muertas y cargas vivas necesarias. La aceleración a emplearse está en función de una división por

zonas, zonas que difieren de acuerdo con el tipo de suelo donde ha de construirse y el tipo de construcción de que se trata; el tipo de una construcción está determinado por su forma y por la manera en que resiste la acción de un sismo.

Las cargas producidas por SISMO las consideramos concentradas en cada nivel, como se muestra en la figura 1.20.

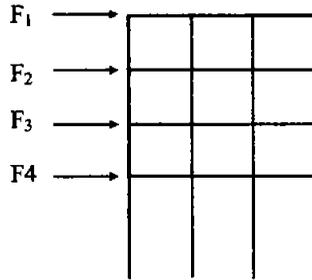


Fig. 1.20

La carga de sismo es una carga importante que se debe considerar, dado que en muchos casos es la que determina las dimensiones y resistencia de las piezas de una construcción (columnas, traves, etc.).

Imaginemos una barda como se muestra en la figura 1.21.

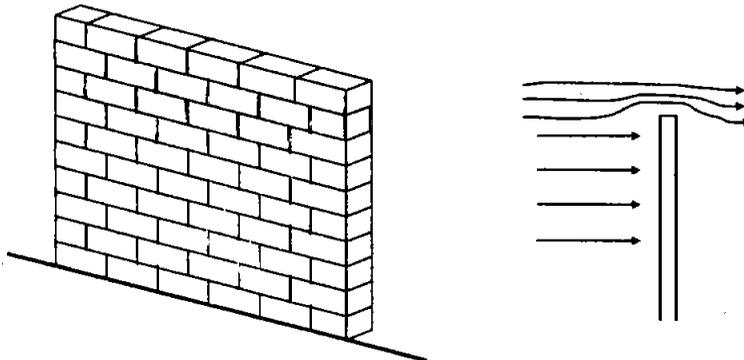


Fig. 1.21.

Supongamos que el viento actúa perpendicular a la barda. Esta estructura estará sujeta a un empuje por el lado que actúa el viento y a una succión por el lado contrario, pero las dos fuerzas tienen el mismo sentido, por lo que deben sumarse.

La evaluación de las cargas de viento está basada en la zona de la construcción.

Es importante hacer notar que las cargas de viento y sismo actúan de manera contraria en las estructuras. En general, el viento produce poco efecto en una construcción que el sismo afecta. Si

tenemos una construcción con una gran masa, la acción del sismo será muy fuerte, pero por su solidez, el viento la afectará poco. Por el contrario, tenemos una construcción de poco peso, el viento podrá ser una carga fuerte, pero el sismo no. En general, puede decirse que las estructuras de madera y acero son más afectadas por el viento que las estructuras de concreto y que el SISMO les provoca cargas de menor magnitud. La magnitud de las fuerzas depende de factores como altitud, forma de la estructura y topografía.

Por último, podemos clasificar las cargas de acuerdo con la forma en que actúan la estructura en sollicitaciones o cargas activas, cargas reactivas y cargas internas.

Examinemos detenidamente el ejemplo de la figura 1.22.

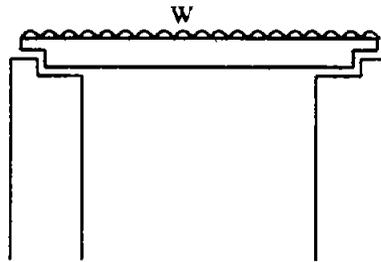


Fig. 1.22.

Sobre dos columnas se monta una viga que tiene una carga W actuando sobre ella.

Decimos que W es una *solicitación* para la viga, es una *carga activa*. Las cargas activas son cargas externas.

1.2.6. CARGAS ACTIVAS

Llamemos sollicitaciones o cargas activas a las fuerzas a las que está sometida una construcción que debe soportar, como son cargas vivas, cargas muertas, cargas accidentales.

Para que la viga esté en equilibrio estático, es necesario que tenga dos cargas verticales concentradas provocadas por las columnas, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, para que impidan el desplome verticalmente.

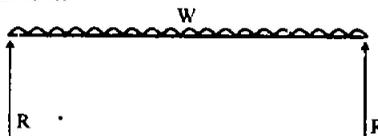


Fig. 1.23.

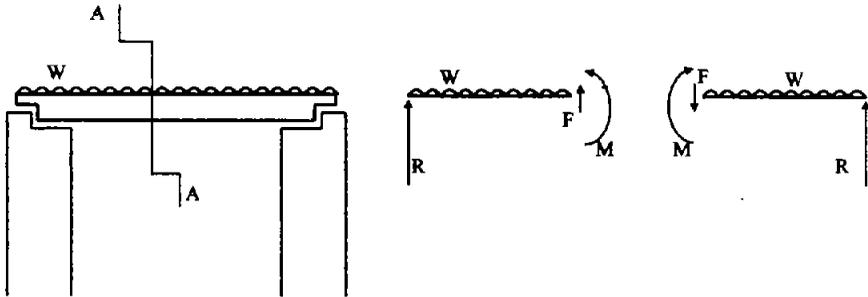
Llamamos a las reacciones R *cargas reactivas*, que son las cargas externas con las que se pone en equilibrio la viga y están provocadas por las piezas que la sostienen.

1.2.7. CARGAS REACTIVAS

Llamamos cargas reactivas a aquellas con las cuales responden los apoyos a las cargas activas para tener en equilibrio un elemento o una construcción.

Las cargas reactivas de un elemento pueden estar dadas por otro elemento, por una construcción o por el terreno en que se apoyan.

Por último, si hacemos una sección A-A en cualquier punto de la viga y consideramos la parte a la izquierda de la sección o la parte a la derecha de la sección, tendremos los diagramas de cuerpo libre de la figura 1.24.



En donde F y M son necesarios para tener en equilibrio cualquiera de las dos partes.

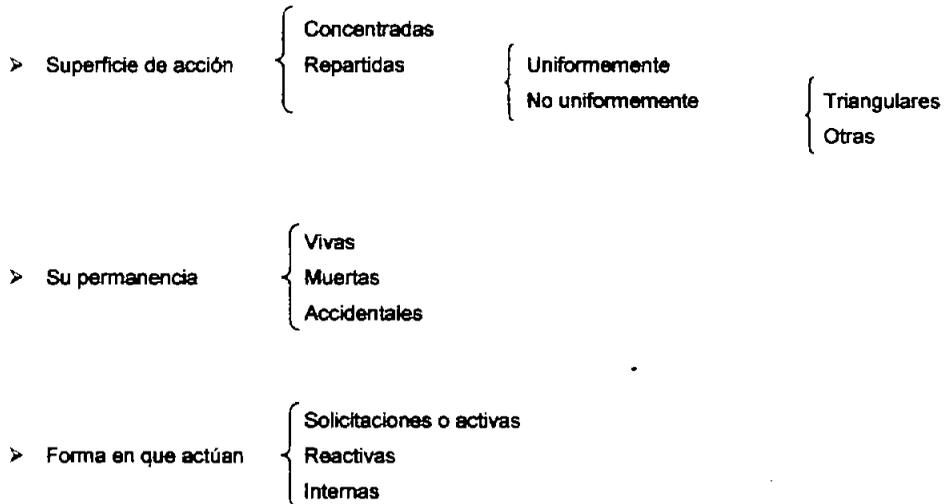
Llamemos al momento M y a la fuerza F *cargas internas*, puesto que se producen en el cuerpo mismo de la viga.

1.2.8. CARGAS INTERNAS

Llamamos cargas internas a aquellas con las que responde una sección de un elemento para estar en equilibrio, tanto con las cargas activas como reactivas, a la izquierda o derecha, de dicha sección.

Hemos clasificado las cargas de la siguiente manera:

De acuerdo con:



1.3. APOYOS

Como puede concluirse de la secuencia anterior, si imaginamos una estructura cualquiera, no sólo pensamos en la geometría que la define (vigas, marcos, arcos, retículas) o en las cargas que debe soportar. Atendiendo a su magnitud y dirección, tenemos la necesidad de pensar en la forma en que está *apoyada*. Como podrá observarse en las unidades siguientes y en el estudio de las estructuras, este es un hecho fundamental, puesto que el comportamiento de una estructura depende, entre otras características, de la manera en que está *apoyada*.

En el ejemplo planteado anteriormente, en el que una viga se deposita sobre otra, podemos observar que la viga B es una carga para la viga A y que la viga A, que se encuentra por debajo, sirve como sostén de la viga B al no permitirle desplazarse verticalmente. Decimos que la viga A constituye un apoyo para la viga B. Pero no siempre encontramos que una estructura o un elemento se apoye sobre otro. En el caso de una columna en planta baja de un edificio, en donde la columna está totalmente sujeta, decimos que se apoya en el sistema tierra. En este caso, el suelo es un apoyo y la columna resulta ser una carga para él.

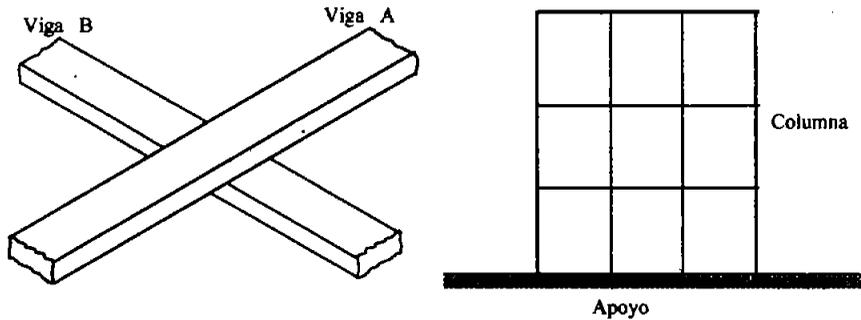


Fig. 1.25

Es necesario aclarar que sistema tierra no es sinónimo de suelo, sino que se concibe como un elemento firme con respecto a la estructura que recibe. Así, una estructura puede ser sistema tierra para otra, si el desplazamiento que le produce es nulo o muy pequeño y por esta razón es capaz de sujetar totalmente a la estructura que recibe. Un ejemplo son los anuncios colocados sobre edificios: la estructura del anuncio es una carga para el edificio y este es un apoyo para el anuncio. Como el edificio es capaz de sujetar totalmente la estructura del anuncio, esto es, resulta mucho más rígido, se concibe como sistema tierra.

APOYOS: Llamamos apoyo a la forma de unión entre una estructura y el sistema tierra o a la forma de unión entre una estructura y otra cuando la primera resulta ser una carga para la segunda. Un elemento, una estructura o el sistema tierra resultan ser un apoyo si y solo si están cargados por el elemento o la estructura que reciben.

Para entender los apoyos y sus características es necesario conocer tres condiciones que los definen: los *desplazamientos*, que pueden existir para un cuerpo en el plano y en el espacio, el concepto de *vínculo* y el concepto de *grado de libertad*.

Imaginemos una viga como la mostrada en la figura 1.26.

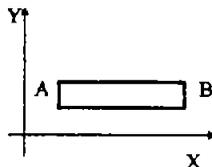


Fig. 1.26

Estamos tratando la viga en el plano, definidos por los ejes X y Y. Si ponemos atención al punto A, notamos que la viga puede desplazarse de tres maneras (Fig. 1.27)

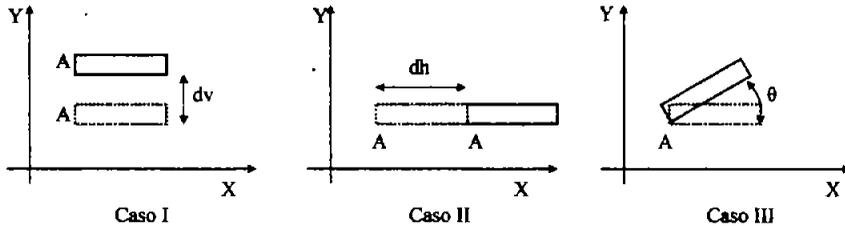


Fig. 1.27.

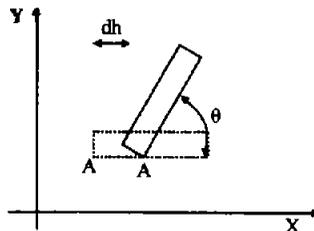
En el caso I, la viga se desplaza verticalmente en el punto A paralela al eje Y una distancia dv .

En el caso II, la viga sufre un desplazamiento horizontal en el punto A paralelo al eje X. La magnitud del desplazamiento es dh .

Los movimientos que puede tener una viga, contemplados en los casos I y II, se llaman *desplazamientos lineales* debido a que su magnitud está dada en unidades de longitud.

En el caso III se presenta un desplazamiento diferente. La pendiente de la viga en el punto A es diferente a la original, la viga ha girado en ese punto un ángulo θ . A los giros los llamamos *desplazamientos angulares*.

Cualquier otro desplazamiento que podamos imaginar estará definido como una combinación de los tres mencionados (Fig. 1.28)



Desplazamientos lineales:

Desplazamiento vertical = 0

Desplazamiento horizontal = d/h

Desplazamiento angular:

La barra gira un ángulo = θ

Fig. 1.28

Situémonos ahora en el espacio y pongamos un ejemplo similar al anterior: una losa, como se muestra en la figura 1.29.

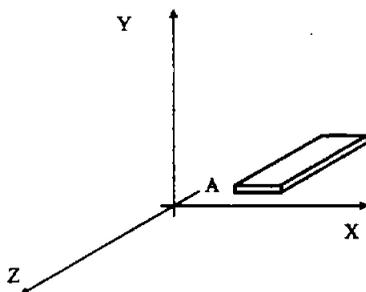


Fig. 1.29

Es pertinente aclarar que, en el caso de una viga, no puede existir uno de los tres desplazamientos angulares que hay en el espacio, debido a que es un elemento que tiene una dimensión mucho mayor que las otras dos, se representa como una línea y esta no tiene la capacidad de girar sobre si misma. Los movimientos posibles están definidos ahora por tres desplazamientos lineales y tres desplazamientos angulares.

Pensemos primero en los tres desplazamientos lineales que son posibles en el espacio (Fig. 1.30).

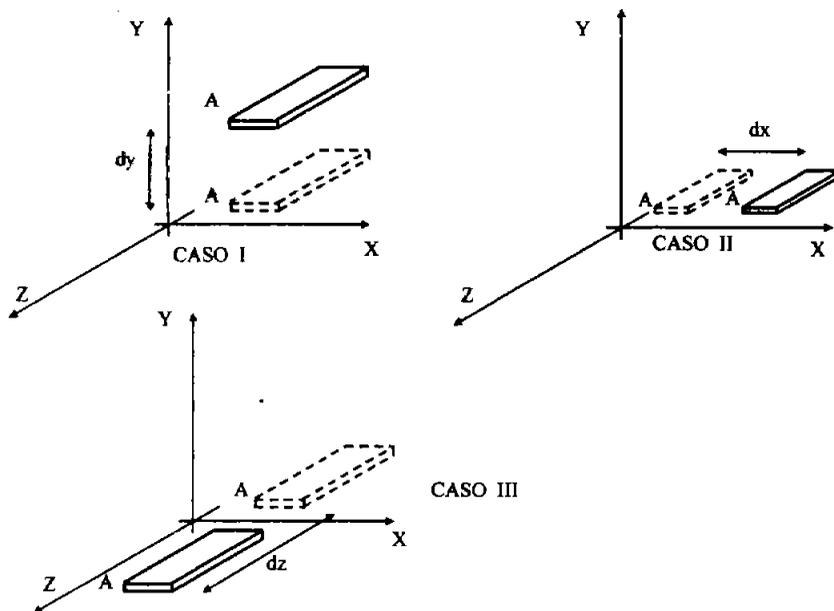


FIG. 1.30.

En el caso I el punto A se desplaza paralelamente al eje Y con una distancia dy .
 En el caso II el punto A se desplaza paralelamente al eje X con una distancia dx .
 En el caso III el punto A sufre un desplazamiento paralelo al eje Z con una Magnitud dz .
 Pasemos ahora a los desplazamientos angulares que existen en el espacio. (Fig. 1.31.)

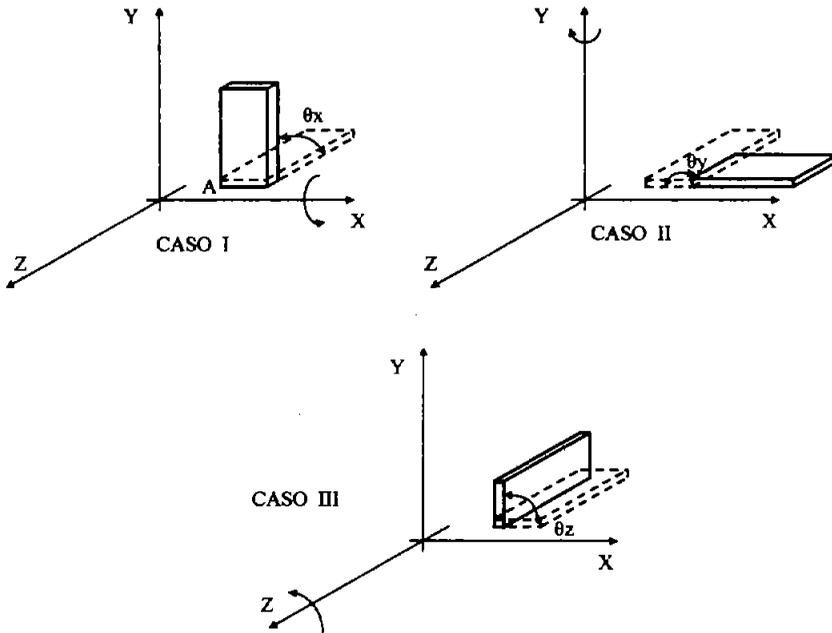


Fig. 1.31

En los tres casos anteriores el punto A permanece en el mismo sitio, está definido por las coordenadas originales (antes del desplazamiento), pero en cada uno de ellos la losa sufre un giro en cada uno de los planos.

Denotamos el desplazamiento angular θ con el subíndice correspondiente al eje sobre el cual se da el giro. Por ejemplo, si la losa gira como en el caso I, sobre el eje X, lo hace en el plano formado por los ejes Y y Z.

En cualquiera de los tres casos podemos situar la pieza definiendo las coordenadas del punto A y la magnitud y sentido del desplazamiento angular θ .

En el caso I la losa gira sobre el eje de las X un ángulo θ_x .

En el caso II la pieza sufre un desplazamiento angular sobre el eje Y de magnitud θ_y .

En el caso III, la losa gira alrededor del eje Z un ángulo θ_z .

Pasemos ahora al siguiente concepto necesario para entender los apoyos: el concepto de *vínculo*.

Para fijar un cuerpo en el plano o en el espacio necesitamos impedirles a ciertos puntos del mismo que se desplacen. Al elemento que impide un desplazamiento, sea angular o lineal, lo conocemos como *vínculo*. El vínculo es un amarre que sufre un cuerpo, con el objeto de impedirle uno de los desplazamientos conocidos.

VÍNCULO: Llamamos vínculo al elemento que no permite uno de los tres desplazamientos en el plano o uno de los seis desplazamientos en el espacio en un punto de un cuerpo.

Pensemos en un cuerpo, como puede ser un cilindro, que colocamos sobre una superficie (Fig. 1.32)

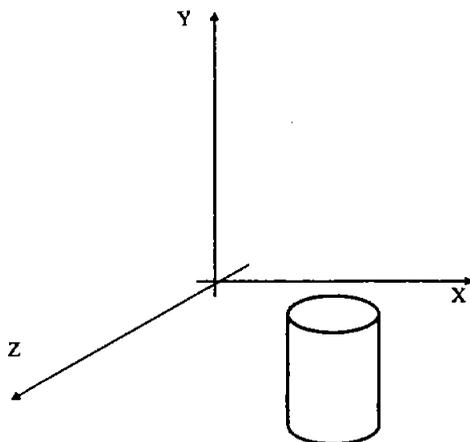


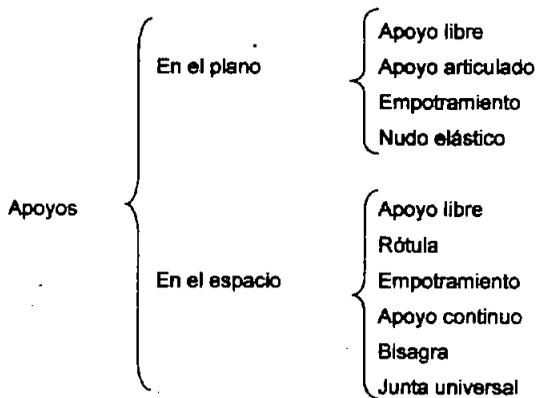
Fig. 1.32.

Supongamos que el plano formado por los ejes X y Z, donde se apoya el cilindro, es sistema tierra. El cilindro no puede desplazarse paralelo al eje Y, decimos entonces que existe un vínculo.

El cilindro puede tener los cinco desplazamientos restantes que existen en el espacio (tres angulares y dos lineales), decimos entonces que su grado de libertad es igual a cinco. Es necesario entender el concepto de *grado de libertad* antes de pasar a conocer los apoyos.

GRADO DE LIBERTAD: es el número mínimo de desplazamientos independientes, que no están restringidos. Estos parámetros corresponden a las rotaciones y traslaciones libres en cada uno de los nudos de la estructura. Puede hablarse de grado de libertad de un punto, de un elemento o de una estructura.

Teniendo claros los conceptos de apoyo, desplazamiento, vínculo y grado de libertad, podemos hablar de los apoyos existentes en el plano y en el espacio; comencemos por enunciarlos.



Hablemos en primer lugar de los apoyos empleados en el plano:

Si pensamos en una obra de montaje en la cual colocamos sobre las ménsulas de columnas una trabe y ponemos atención a la unión que existe entre columnas y trabe, podemos observar que la trabe tiene la capacidad de girar en el punto en que está unida a la columna y puede tener un desplazamiento angular en la ménsula que le sirve de apoyo (Fig. 1.33).

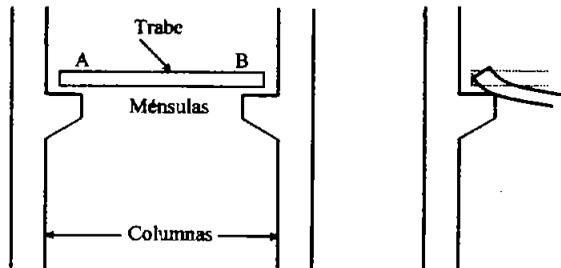


Fig. 1.33

Podemos concluir también que puede desplazarse horizontalmente a una distancia pequeña (Fig. 1.34).

Y por último, se concluye que el desplazamiento vertical está totalmente restringido. No es posible que pueda moverse verticalmente la trabe en la unión con la columna. A este tipo de apoyo lo llamamos *apoyo libre*. En el ejemplo planteado, la trabe es una carga para la columna y la columna un apoyo para la trabe que responde con una *reacción vertical*.

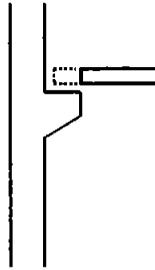


Fig. 1.34

La trabe sería representada como se ve en la figura 1.35

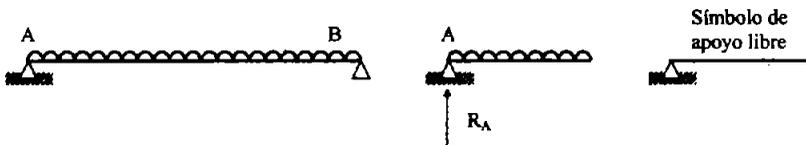


Fig. 1.35.

El apoyo libre responde con una reacción vertical a las cargas activas a que está sometida la trabe, con lo que restringe el desplazamiento vertical; por eso decimos que es un apoyo de un solo vínculo. En este caso se restringe un grado de libertad. Decimos que el punto A tiene grado de libertad igual a dos (Fig. 1.36).



Fig. 1.36

La reacción aparece para poner en equilibrio el sistema (cargas activas y cargas reactivas).

APOYO LIBRE: Llamamos apoyo libre aquel que tiene solo una reacción y con ella restringe un solo desplazamiento, permitiendo giros en la barra (desplazamientos angulares) y desplazamientos lineales perpendiculares a la carga reactiva. Es un apoyo de un solo vínculo.

El apoyo libre restringe un desplazamiento lineal en el sentido en que se presenta la reacción.

Imaginemos ahora una base que recibe dos columnas inclinadas como se muestra en la figura 1.37, donde dos piezas quedan unidas por medio de un pasador que las atraviesa por las perforaciones mostradas en la figura 1.38.

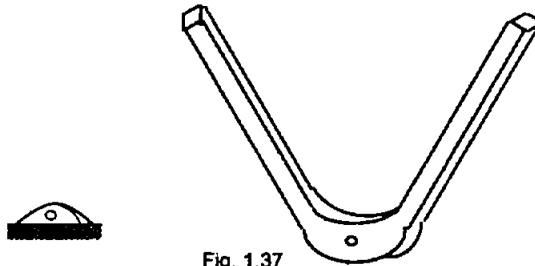


Fig. 1.37

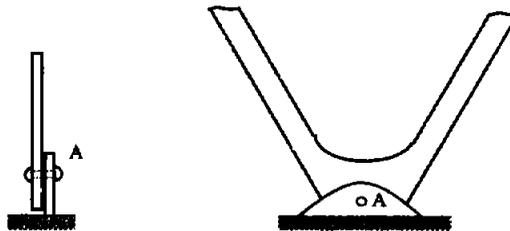


Fig. 1.38.

A este tipo de apoyo lo llamamos *apoyo articulado* y podemos representarlo como se muestra en la figura 1.39.



Fig. 1.39

Al analizar este apoyo nos damos cuenta de que no está impedido el giro (Fig. 1.40)

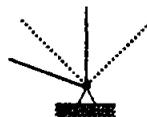


Fig. 1.40

Suponemos que la unión con el pasador está libre de fricción y, por lo tanto, la articulación permite desplazamientos angulares.

Como la base que recibe a las columnas está totalmente fija, no es posible que existan desplazamientos lineales en las columnas.

En este caso, las columnas transmiten una carga a la base que las soporta y esta constituye un apoyo que responde con dos reacciones (Fig. 1.41).

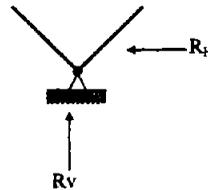


Fig. 1.41

El apoyo articulado responde con una reacción vertical y con una reacción horizontal a las cargas activas a que están sometidas las columnas, con lo que restringe los dos desplazamientos lineales posibles; por eso decimos que es un apoyo de dos vínculos. Quedan impedidos dos grados de libertad. Decimos que el punto A tiene grado de libertad igual a uno.

APOYO ARTICULADO: Llamamos apoyo articulado al que responde con dos reacciones a las cargas activas y con ellas restringe los dos desplazamientos lineales que existen en el plano, permitiendo desplazamientos angulares. Es un apoyo de dos vínculos.

Pensemos ahora en algún caso en el que un elemento esté totalmente sujeto al sistema tierra o a otro elemento, como sucede en postes de luz enterrados en el suelo o en vigas sujetas por columnas o muros que forman parte de un volado, como los balcones (Fig. 1.42).

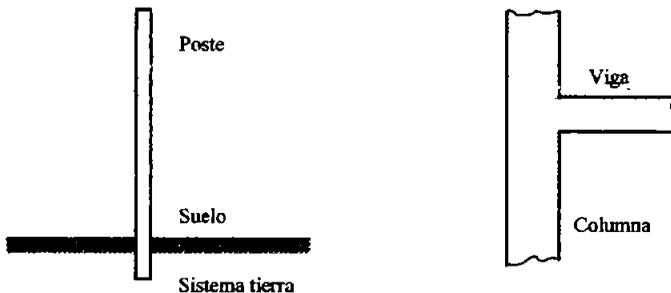


Fig. 1.42

Si representamos el sistema formado por la viga y la columna, tendremos el esquema de la figura 1.43.

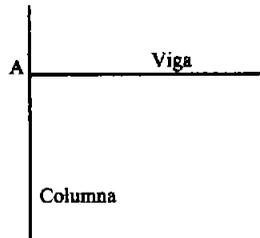


Fig. 1.43.

Observemos la unión de los dos elementos. En el punto de unión A la viga tiene impedidos los tres desplazamientos posibles en el plano, no puede girar en el punto A, tampoco puede desplazarse vertical ni horizontalmente (Fig. 1.44.)

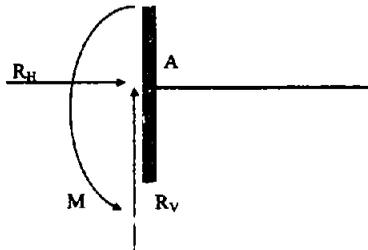


Fig. 1.44

A este tipo de apoyo lo llamamos *empotramiento*. En este ejemplo, la viga transmitirá cargas a la columna y la columna es un apoyo para la viga. El empotramiento responde con tres reacciones a las cargas activas a que está sometida la viga, dos fuerzas que impiden los movimientos lineales y un momento que impide el giro de la viga. Por tener la capacidad de impedir los tres desplazamientos mencionados, decimos que es un apoyo de tres vínculos. Restringe los tres grados de libertad en el plano; el punto A tiene grado de libertad igual con cero.

EMPOTRAMIENTO: Llamamos empotramiento al apoyo que responde con tres reacciones y con ellas restringe los desplazamientos posibles en el plano (dos lineal y uno angular). Es un apoyo de tres vínculos.

Es conveniente hacer la aclaración de que en muchos casos no se logra el empotramiento perfecto, como en el caso que se ha planteado; es necesario que la pieza que recibe a otra tenga una rigidez muy grande para que no permita giros de la pieza que es recibida.

Cuando una pieza tiene la capacidad de desplazarse angularmente un poco, decimos que el apoyo es un semiempotramiento.

Es necesario aclarar, también, que un apoyo puede ser concebido en dos formas en algunos casos, según el sentido en que se analice. Pensemos en un ejemplo ya planteado, el de la base que sostiene dos columnas y estudiemos el caso pensando que el plano de análisis es el formado por la hoja de papel (Fig. 1.45).

Considerando las columnas y la base en este sentido, dijimos que se trataba de una articulación.

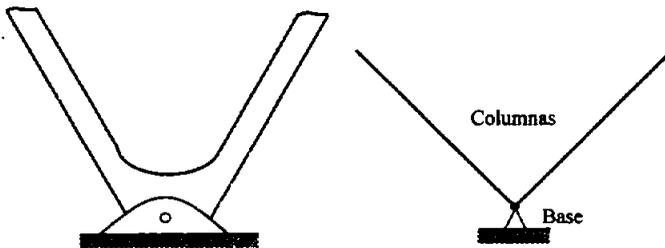


Fig. 1.45.

Si ahora pensamos en el plano perpendicular, al considerarlo tendremos la figura 1.46.



Fig. 1.46

En este sentido, tenemos que concluir que el apoyo es un semiempotramiento o un empotramiento según la capacidad o giro que de a las columnas la unión con el pasador.

Pasemos al último apoyo, considerado en el plano: *el nudo elástico*.

Pensemos en la sección A-A de una pieza continua, como se muestra en la figura 1.47, y hagamos el diagrama de cuerpo libre de dicha sección (Fig. 1.48).

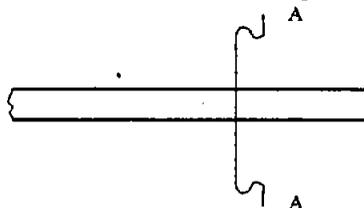


Fig. 1.47

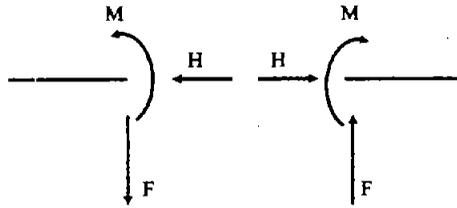


FIG. 1.48

El momento M y las fuerzas F y H son necesarios para tener en equilibrio la sección planteada. Este es el caso de apoyo llamado *nudo elástico*; es un apoyo de *tres vínculos*, en el que están impedidos los dos desplazamientos lineales y el desplazamiento angular, por lo que la sección A-A tiene un grado de libertad igual a cero.

En el nudo elástico los desplazamientos están impedidos por tres vínculos, vínculos que provocan tres cargas internas: un momento, una fuerza vertical y una fuerza horizontal.

NUDO ELÁSTICO: Llamamos nudo elástico al apoyo que restringe los tres desplazamientos en el plano (dos lineales y uno angular), provocando tres cargas internas; una parte se comporta como apoyo de la otra y a la vez, cada parte es carga de la otra. Es un apoyo de tres vínculos.

El nudo elástico no sólo se presenta en una pieza, la unión de dos o más elementos se comporta de la misma manera. Pensemos en el caso de la unión entre una columna y una trabe (Fig. 1.49.).

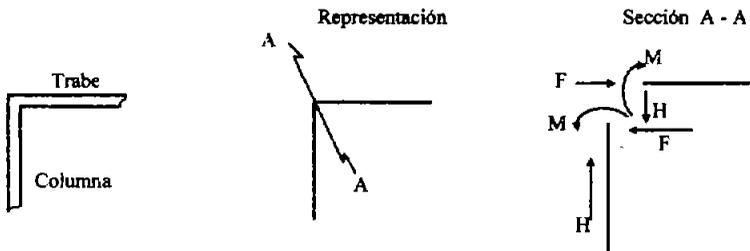


Fig. 1.49

Si la columna no es mucho más rígida que la trabe, no se presenta un empotramiento para la trabe; es más apropiado hablar de *semiempotramiento* y de *nudo elástico* en la sección A-A.

Los apoyos en el plano son los más importantes para poder entender las unidades siguientes, por lo que trataremos con mayor brevedad los apoyos en el espacio.

Consideremos los desplazamientos *lineales* como:

dx = desplazamiento paralelo al eje X

dy = desplazamiento paralelo al eje Y

dz = desplazamiento paralelo al eje Z

Los desplazamientos *angulares* serán denotados como:

θ_x = desplazamiento angular alrededor del eje X

θ_y = desplazamiento angular alrededor del eje Y

θ_z = desplazamiento angular alrededor del eje Z

Imaginemos una grúa que levanta una pieza por medio de un cableado en una obra de montaje; la viga y el cable están unidos por un gancho (Fig. 1.50).

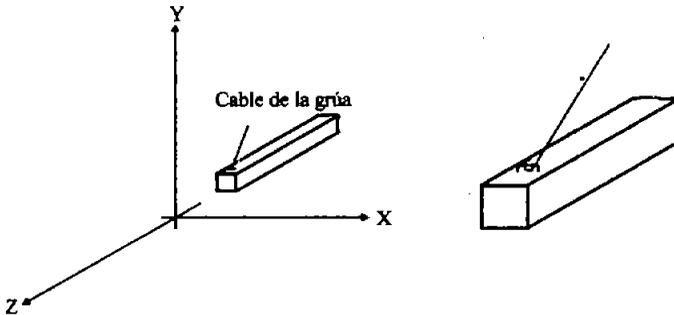


Fig. 1.50.

El cable constituye un apoyo para la pieza que está siendo izada; la viga mostrada no puede desplazarse verticalmente en el sentido del eje Y, pero sí puede hacerlo respecto a los otros dos ejes, por lo que tiene restringido un solo desplazamiento lineal:

$$dx \neq 0, dy = 0, dz \neq 0$$

Por la forma de unión, la pieza puede girar en el apoyo en los tres sentidos; no tiene impedidos los tres desplazamientos angulares:

$$\theta_x \neq 0, \theta_y \neq 0, \theta_z \neq 0$$

Como el apoyo libre tiene la capacidad de tener cinco de los seis desplazamientos posibles en el espacio, decimos que en el apoyo el grado de libertad es cinco. Al tener impedido un desplazamiento, el desplazamiento en el sentido del eje, el apoyo libre tiene la capacidad de tener cinco de los seis desplazamientos posibles en el espacio, decimos que en el apoyo el grado de

libertad es cinco. Al tener impedido un desplazamiento, el desplazamiento en el sentido del eje Y, decimos que es un apoyo de un vínculo.

APOYO LIBRE: Llamamos apoyo libre al que responde con una reacción a las cargas activas del sistema impidiendo un desplazamiento lineal. El apoyo libre permite los cinco desplazamientos restantes: dos lineales y tres angulares. Es un apoyo de un vínculo.

Pensemos en el caso de la antena de una radiodifusora (Fig. 1.51).

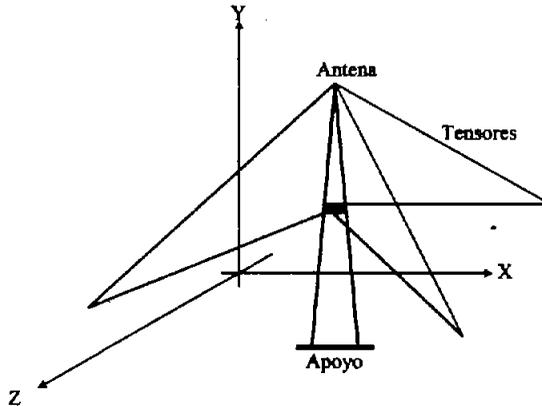


FIG. 1.51

La antena tiene impedidos en el apoyo los tres desplazamientos lineales:

$$dx = 0, dy = 0, dz = 0$$

A este apoyo lo conocemos con el nombre de *rotula* y lo simbolizamos como se muestra en la figura 1.52

Como la rotula tiene impedidos los desplazamientos lineales, decimos que es un apoyo de tres vínculos. El grado de libertad en el apoyo es tres, dado que puede girar en los tres planos.

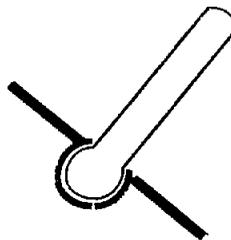


Fig. 1.52

ROTULA: Llamamos rotula al apoyo que responde con tres reacciones a las cargas activas en el sentido de los ejes X, Y y Z, restringe los tres desplazamientos lineales en el espacio, permitiendo los giros en los tres sentidos. Es un apoyo de tres vínculos.

Pensemos ahora en el caso de un poste de luz enterrado, como ya se había planteado, pero situémosnos en el espacio (Fig. 1.53).

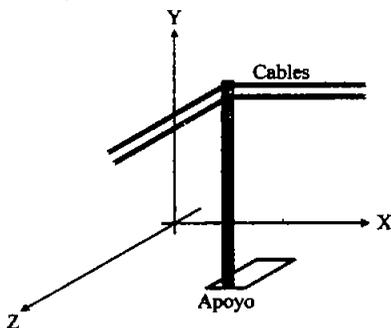


Fig. 1.53

El poste tiene impedidos los desplazamientos lineales:

$$dx = 0, dy = 0, dz = 0$$

también tiene impedidos los desplazamientos angulares y no puede girar en ningún sentido:

$$\theta_x = 0, \theta_y = 0, \theta_z = 0$$

A este apoyo lo conocemos con el nombre de *empotramiento* y lo representamos como se ve en la figura 1.54

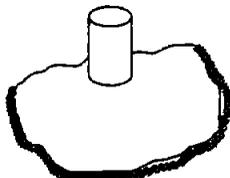


Fig. 1.54

Como están impedidos los seis desplazamientos, decimos que es un apoyo de seis vínculos y su grado de libertad es cero.

EMPOTRAMIENTO: Llamamos empotramiento al apoyo que responde con seis reacciones a las cargas activas del sistema, restringiendo los seis desplazamientos posibles en el espacio. Es un apoyo de seis vínculos.

Las seis reacciones del empotramiento son tres fuerzas en los sentidos de los ejes y tres momentos, uno alrededor de cada uno de los ejes.

Pasemos al ejemplo mostrado en el plano, la sección A-A de una viga, pero situémonos en tres dimensiones:

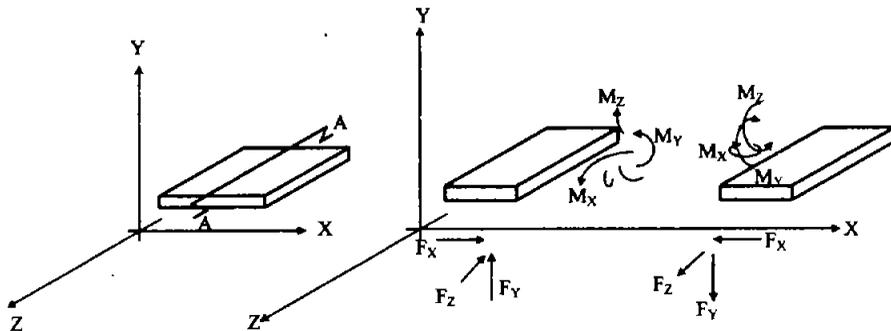


Fig. 1.55

Se trata de un apoyo de seis vínculos; en la sección A-A están impedidos todos los desplazamientos, apareciendo seis cargas internas:

$$F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z$$

El grado de libertad en la sección A-A es igual a cero.

A este apoyo lo conocemos con el nombre de *apoyo continuo*.

APOYO CONTINUO: Llamamos apoyo continuo al que restringe todos los desplazamientos en el espacio provocando seis cargas internas para tener en equilibrio una sección. Una parte de la sección es apoyo de la otra y viceversa. Es un apoyo de seis vínculos.

Pongamos por caso la compuerta del vertedor de una presa como se muestra en la figura 1.56.

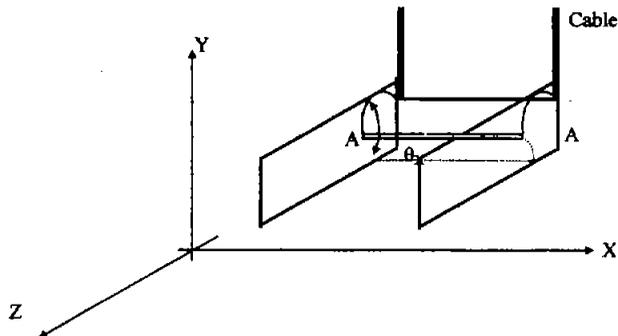


Fig. 1.56

La compuerta no tiene la capacidad de desplazarse linealmente en ningún sentido:

$$dx = 0, dy = 0, dz = 0$$

La compuerta tiene la capacidad de desplazarse angularmente en el apoyo alrededor del eje A-A para permitir el paso del agua, pero tiene impedidos los otros desplazamientos angulares.

$$\theta_x \neq 0, \theta_y = 0, \theta_z = 0$$

Debido a que se tienen impedidos cinco de los seis desplazamientos en el espacio, decimos que es un apoyo de cinco vínculos y el grado de libertad en el apoyo es uno.

Este apoyo lo conocemos con el nombre de *bisagra* y lo representamos según la figura 1.57.

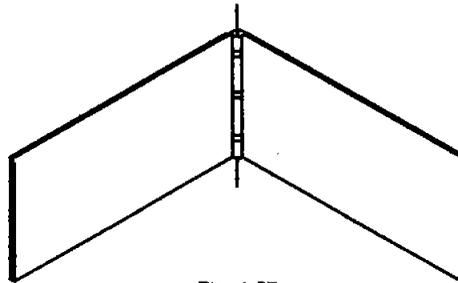


Fig. 1.57

BISAGRA: Llamamos bisagra al apoyo que responde con cinco reacciones a la cargas activas que conforman el sistema, restringiendo cinco desplazamientos de los posibles en el espacio: tres lineales y dos angulares, permitiendo giros con respecto a uno de los ejes. Es un apoyo de cinco vínculos.

Pensemos ahora en el caso de la unión entre la salida de una caja de automóvil y el cardan del mismo.

En el apoyo la flecha tiene restringidos los tres desplazamientos lineales:

$$dx = 0, dy = 0, dz = 0$$

Uno de los desplazamientos angulares no está impedido; la flecha del automóvil puede girar en un sentido, pero no en los otros.

Como tiene impedidos cinco desplazamientos, decimos que es un apoyo de cinco vínculos. El grado de libertad en la unión es uno.

A este apoyo lo conocemos con el nombre de *junta universal*. Es un apoyo poco empleado en ingeniería civil, pero muy útil para ingeniería mecánica (figura 1.58)

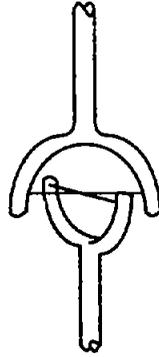
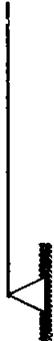


Fig. 1.58

JUNTA UNIVERSAL: Llamamos junta universal al apoyo que responde con cinco reacciones a las carga activas, restringiendo cinco desplazamientos, tres lineales y dos angulares, permitiendo el desplazamiento angular restante. Es un apoyo de cinco vinculos.

**REPRESENTACION DE APOYOS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO,
DESPLAZAMIENTOS RESTRINGIDOS, REACCIONES**

En el plano:

Tipo de apoyo	Representación grafica	Desplazamientos			Reacciones		
		Vertical	Horizontal	Angular	Vertical	Horizontal	Angular
Libre		Nulo	Existe	Existe	Si	No	No
Articulación		Nulo	Nulo	Existe	Si	Si	No
Empotramiento		Nulo	Nulo	Nulo	Si	Si	Si
Nudo elástico		Nulo	Nulo	Nulo	Si	Si	Si

En el espacio

Tipo de apoyo	Representación grafica	Desplazamientos						Reacciones					
		Lineales			Angulares			Fuerzas			Momentos		
		dx	dy	dz	θ_x	θ_y	θ_z	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
Libre		Existe	Nulo	Existe	Existe	Existe	No	Si	No	No	No	No	No
Rotula		Nulo	Nulo	Nulo	Nulo	Nulo	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Empotramiento		Nulo	Nulo	Nulo	Nulo	Nulo	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Apoyo continuo o elástico		Nulo	Nulo	Nulo	Nulo	Nulo	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Bisagra		Nulo	Nulo	Nulo	Nulo	Nulo	Si	Si	Si	Si	No	No	Si
Junta universal		Nulo	Nulo	Nulo	Existe	Nulo	Si	Si	Si	No	Si	No	No

1.4. ESTATICIDAD

Para calcular las fuerzas internas que actúan en una estructura, hay que conocer ciertos datos de las mismas como son su *geometría*, su *sistema de carga* y el tipo de *apoyos*, pero además, es importante saber si el cálculo podrá realizarse solamente con la teoría de la estática, en cuyo caso estaremos en presencia de una *estructura isostática*, o si es necesario conocer la *geometría* de las *deformaciones*, como es el caso de las *estructuras hiperestáticas*. Cuando se requieren conocimientos de *cinemática* y *dinámica*, estaremos en presencia de la *estructura hipostática*. En este libro, el objetivo es estudiar estructuras isostáticas, pero es necesario conocer cuándo cumplen con las características de estas.

Analizando detenidamente la estructura que se muestra en la figura, será fácil determinar los *diagramas de cuerpo libre* de cada uno de sus elementos: AB, BC y CD, así como de los apoyos de un elemento con otro: B y C.

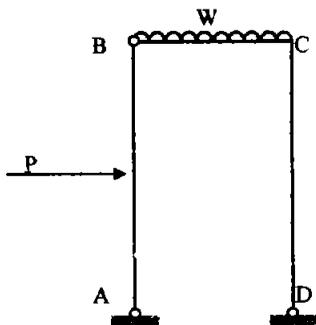


Fig. 1.59

El resultado de tal análisis lleva a los diagramas que muestra la figura 1.60. Evaluemos el número de incógnitas que se nos presentan:

Barra AB (A_x, A_y, B_{Ay}, B_{Ax})	4 incógnitas
Barra BC ($B_{Cx}, B_{Cy}, C_{Bx}, C_{By}, M_{CB}$)	5 incógnitas
Barra CD ($C_{Dx}, C_{Dy}, M_{CD}, D_x, D_y$)	5 incógnitas
	<hr/>
	14 incógnitas

Las *ecuaciones* que podemos plantear *estáticamente* son: por cada una de las *barras* es posible establecer *tres ecuaciones* (en total 9 ecuaciones).

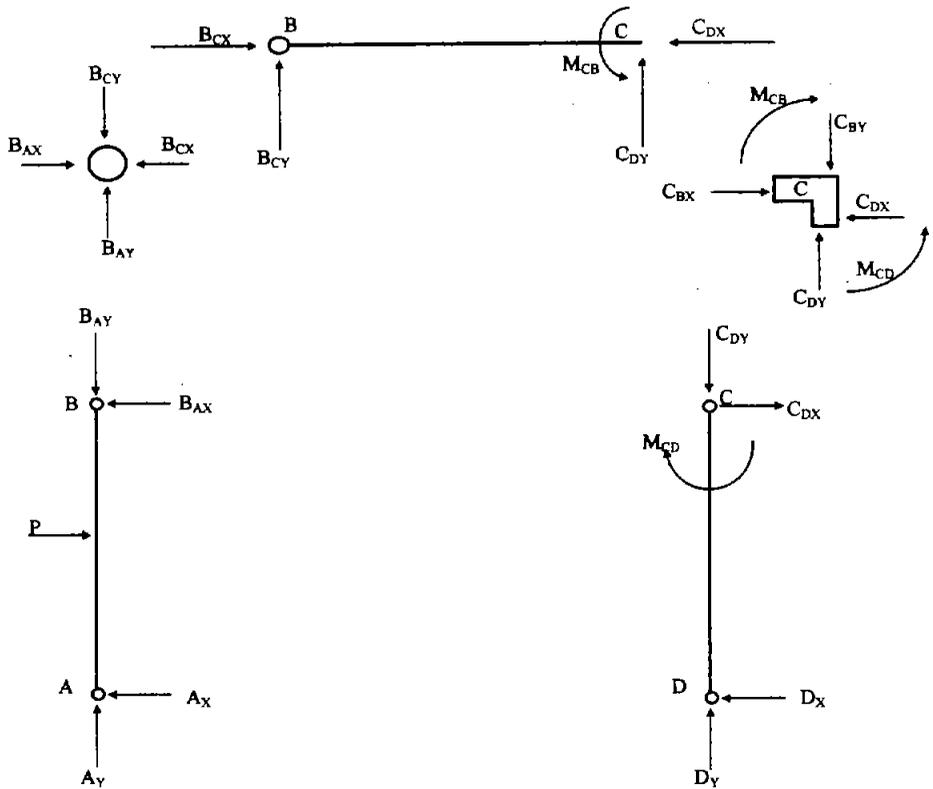


FIG. 1.60

Por el nudo elástico C se permiten plantear *tres* ecuaciones y *dos* por la articulación B (en total 5 ecuaciones).

Entre barras y apoyos contamos con 14 ecuaciones.

En este caso, el número de incógnitas / es igual al número de ecuaciones E.

1.5. ISOSTATICIDAD

Cuando en una estructura se cuenta con un *número igual de incógnitas* que las *ecuaciones estáticas* de que se dispone, decimos que la estructura es *isostática* y podrá resolverse de acuerdo con lo que se estudia en este libro.

$$I = E$$

Como en el ejemplo anterior, podemos realizar el análisis de estática de la estructura presentada en la figura 1.61.

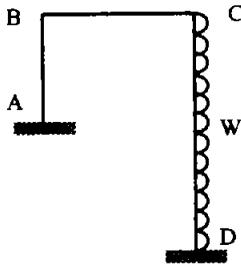


Fig. 1.61

Los diagramas de cuerpo libre son los que se muestran en la figura 1.62.

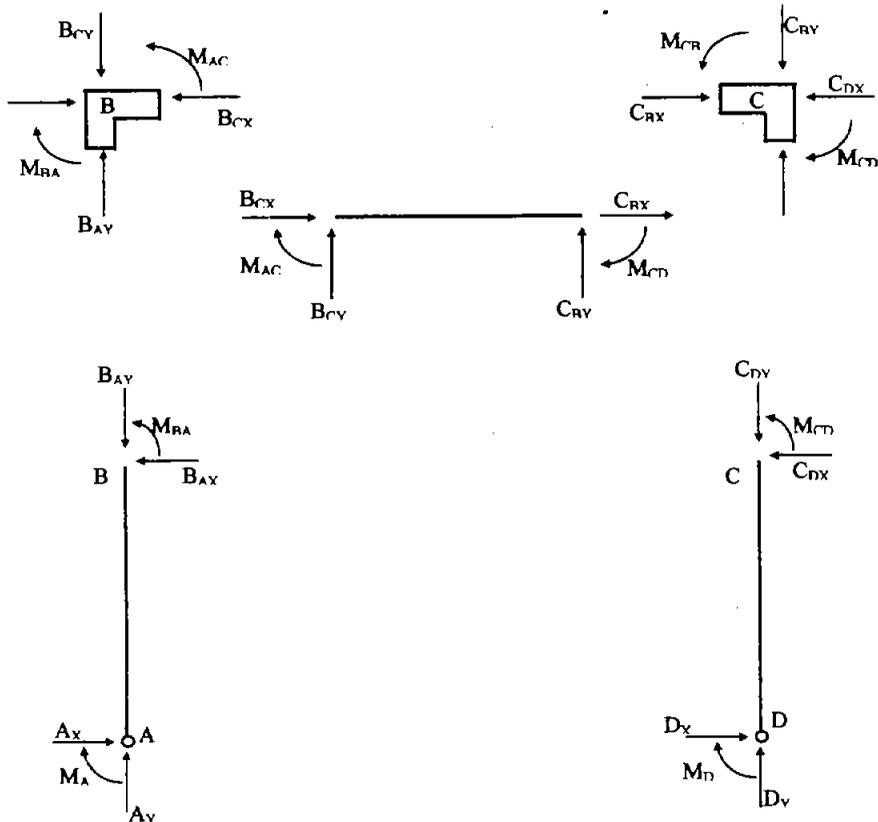


Fig. 1.62

El número de *incógnitas* es:

Barra AB	6 incógnitas
Barra BC	6 incógnitas
Barra CD	<u>6 incógnitas</u>
	18 incógnitas

El análisis de ecuaciones nos lleva al resultado siguiente:

Tres ecuaciones por cada barra	9 ecuaciones
Tres ecuaciones por cada nudo elástico	<u>6 ecuaciones</u>
	15 ecuaciones

Ahora resulta que la estructura presenta un mayor número de incógnitas que de ecuaciones.

1.6. HIPERESTATICIDAD

Cuando una estructura tiene un *número mayor* de incógnitas que de *ecuaciones estáticas*, decimos que la estructura es *hiperestática* y no podrá resolverse, si no se cuenta con conocimientos de resistencia de materiales que permitan fijar una geometría de la deformación. Es decir:

$$I > E$$

En este caso, a la diferencia $I - E$ se le conoce como grado de *hiperestaticidad*.

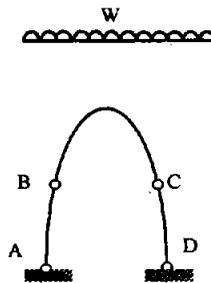


FIG. 1.63

Realicemos ahora el análisis de estática de la estructura de la figura 1.63.

Al trazar los diagramas de cuerpo libre para dicha estructura llegamos al esquema de la figura

1.64.

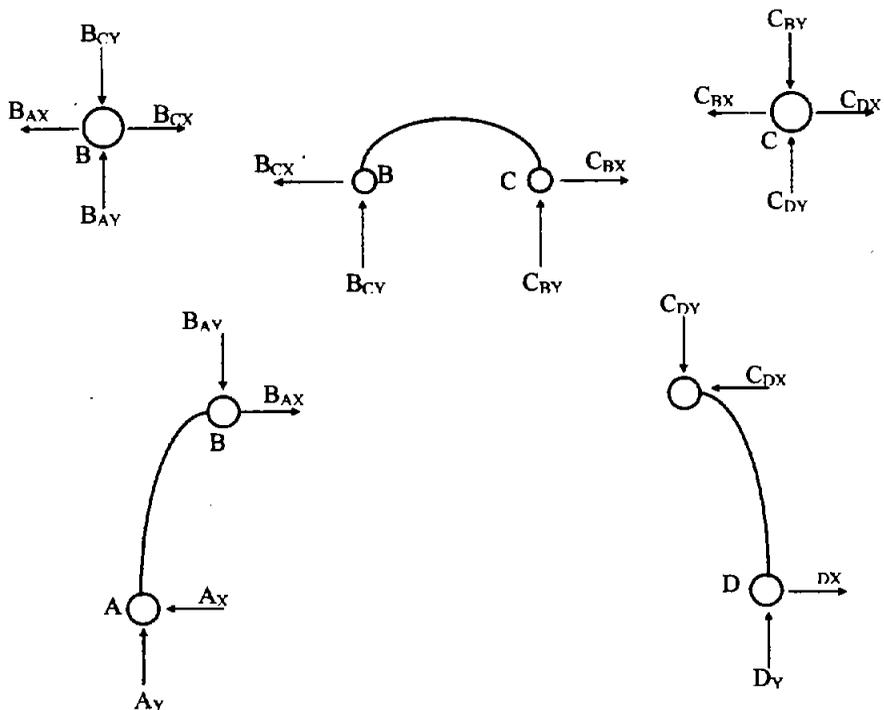


FIG. 1.64

Al evaluar el número de incógnitas, como en los casos anteriores, tenemos:

Barra AB	4 incógnitas
Barra BC	4 incógnitas
Barra CD	<u>4 incógnitas</u>
	12 incógnitas

Analizando las ecuaciones con que contamos, se nos presenta:

Tres ecuaciones por cada barra	9 ecuaciones
Dos ecuaciones por cada articulación	<u>4 ecuaciones</u>
	13 ecuaciones

Del resultado que arroja el análisis anterior resulta que la estructura presenta un número mayor de ecuaciones que de incógnitas.

1.7. HIPOSTATICIDAD

Cuando para una estructura se cuenta con un número menor de incógnitas que de ecuaciones de la estática, decimos que la estructura es *hipostática* y no tiene solución. Son mecanismos, es decir, presentan inestabilidad.

Tenemos que:

$$I < E$$

En este caso a la diferencia $E - I$ se le conoce como *grado de hipostaticidad*.

Cuando se presenta una estructura complicada, la forma mencionada del análisis estático resultaría laborioso, como en el caso que se presenta en la figura 1.65.

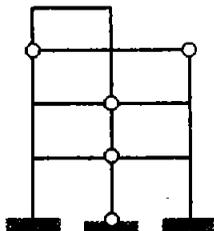


Fig. 1.65

El método se simplifica si consideramos que cada barra nos ofrece 3 ecuaciones, un nudo elástico 3 ecuaciones, una articulación 2 ecuaciones, un apoyo libre 1 ecuación; las llamaremos b_3 , n_3 , n_2 y n_1 , respectivamente

Por otro lado, sabemos que una barra con dos articulaciones tiene 4 incógnitas; una barra con nudo elástico y articulación, 5 incógnitas, etc.; las denotaremos con B_4 , B_5 , etc.

Según se puede deducir de los tres ejemplos anteriores, si estos conceptos los aplicamos a la estructura mostrada en la figura 1.66.

Incógnitas:	6 B_5	36 incógnitas
	10 B_4	50 incógnitas
	2 B_4	<u>8 incógnitas</u>
		94 incógnitas
Ecuaciones	7 n_3	21 ecuaciones
	4 n_2	8 ecuaciones
	18 b_3	<u>54 ecuaciones</u>
		83 ecuaciones

Siguiendo el procedimiento descrito realizamos el diagrama de la figura 1.68.

Numero de incógnitas:

6 B_6	36 incógnitas
7 B_5	35 incógnitas
4 B_4	<u>16 incógnitas</u>
	87 incógnitas

Numero de ecuaciones

6 n_3	18 ecuaciones
2 n_2	4 ecuaciones
2 n_1	2 ecuaciones
17 b_3	<u>51 ecuaciones</u>
	75 ecuaciones

Grado de hiperestaticidad

$$87 - 75 = 12$$

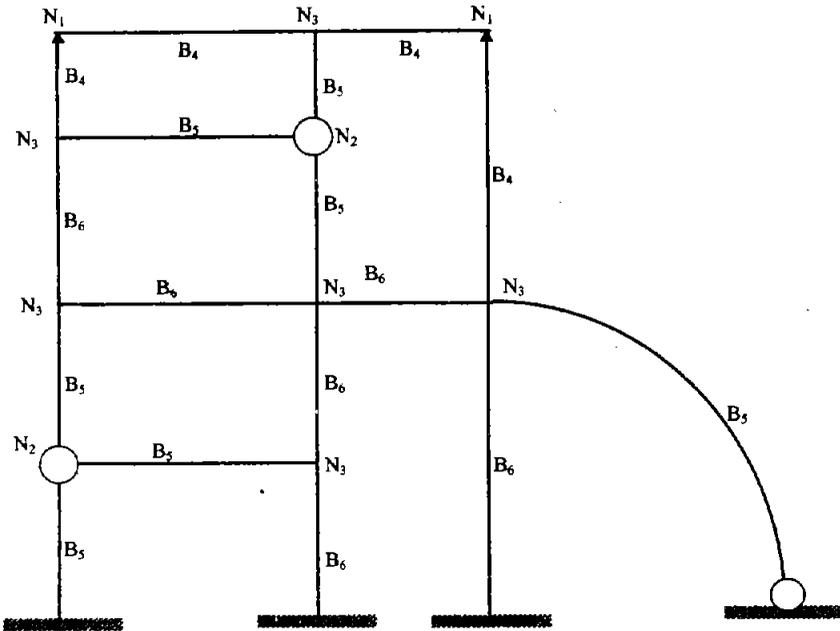


Fig. 1.68

1.8. EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Obtén fotografías de diferentes estructuras que existen en la ciudad.
2. Clasifica las fotografías anteriores de acuerdo con la clasificación de estructuras presentada en esta unidad.
3. Analiza en las fotografías mencionadas qué tipo de cargas soportan las estructuras y cómo se apoyan.
4. Evalúa en clase los ejercicios anteriores con asistencia del profesor.
5. Menciona y explica cinco ejemplos de cargas:
 - a. Concentradas
 - b. Uniformemente repartidas
 - c. Triangulares
6. Investiga en el Reglamento de Construcciones del DDF, así como los valores de los pesos de los materiales, para evaluar cargas muertas.
7. Analiza, de preferencia en clase, las diferentes cargas que actúan en una estructura para una nave industrial y la forma en que se acumulan hasta transmitir las al terreno.
8. Obtén fotografías de diferentes tipos de apoyos en estructuras reales.
9. Clasifica las fotografías de acuerdo con el tipo de apoyo.
10. Analiza cómo se logran realmente cada uno de los apoyos estudiados de acuerdo con el material con que se construye la estructura (metal, concreto, madera).

11. Analiza la estática de las estructuras que se presentan en la figura 1.69, indicando si son isostáticas, hiperestáticas o hipostáticas, así como su grado.

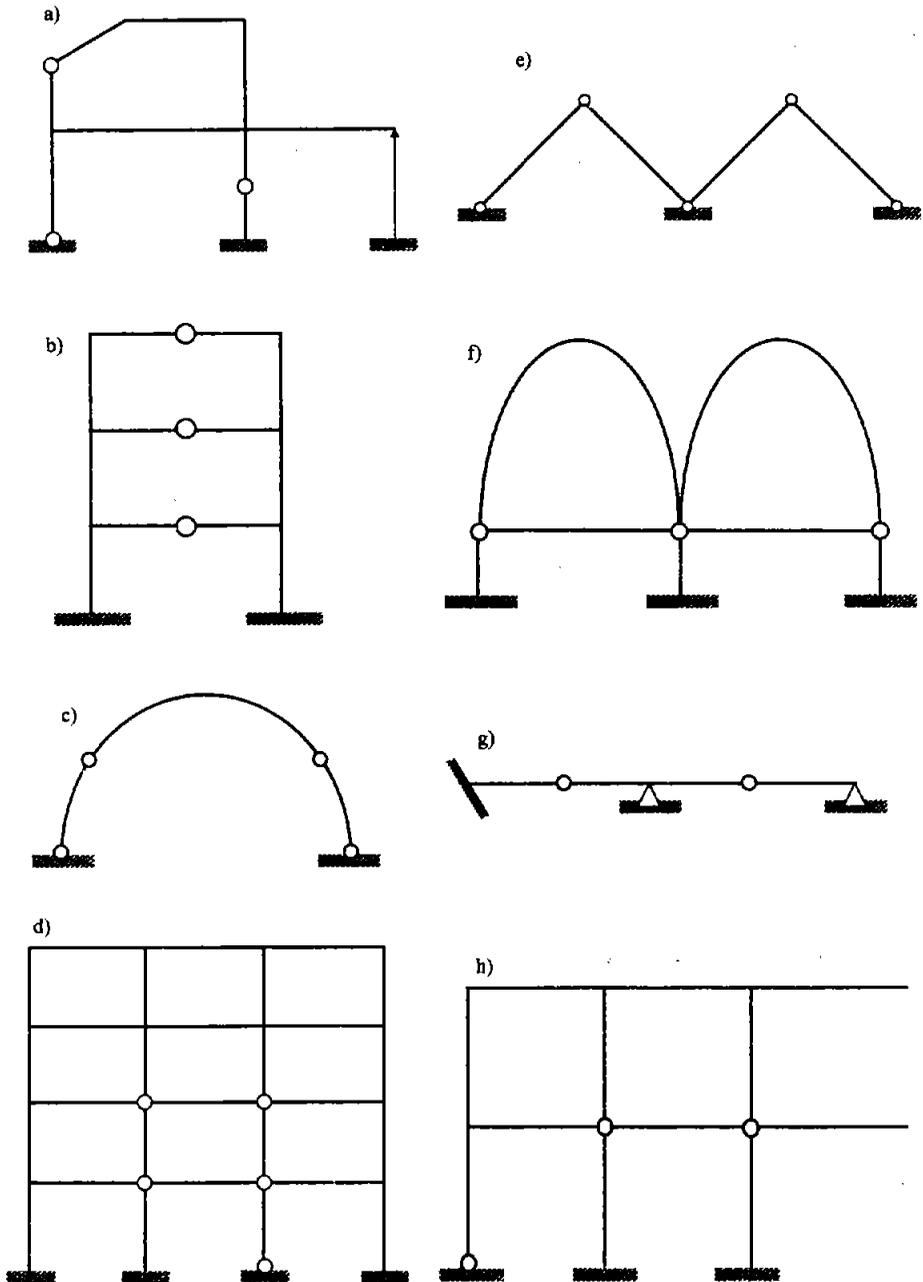
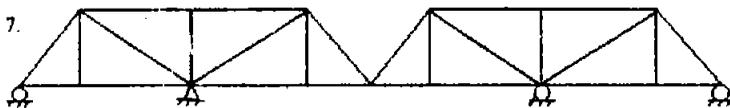
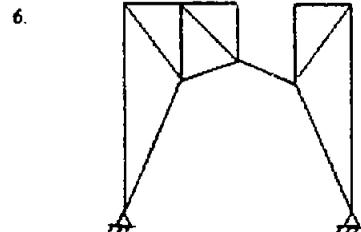
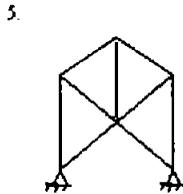
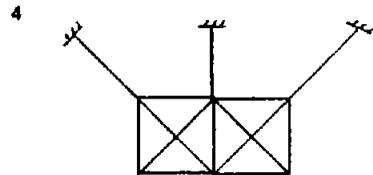
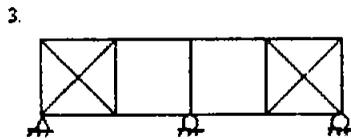
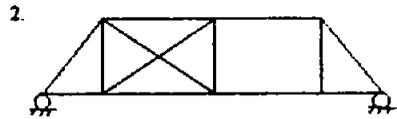
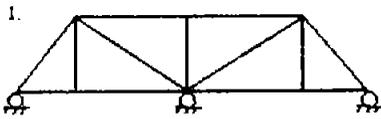


Fig. 1.69

12. clasifique las siguientes estructuras como: Inestables , estables; si es inestable explique el mecanismo de colapso y cambie apoyos o agregue elementos hasta volverlo estable. Hiperestática o isostática. (interna y externamente); si es hiperestática señale cuales apoyos quitaría manteniendo la estabilidad.



13. Di qué tipo de carga actúa en cada una de las estructuras que se muestran en la figura 1.70.

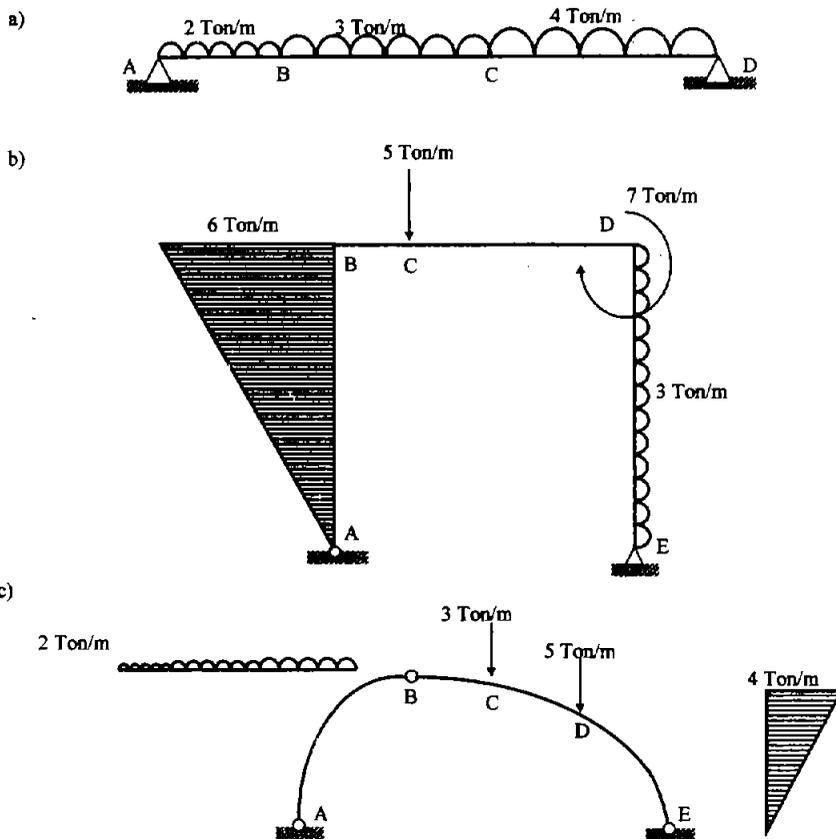


Fig. 1.70

14. Analiza la estática global y local de la estructura que muestra la figura 1.71.

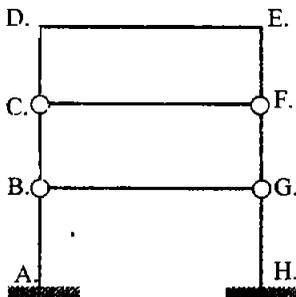


Fig. 1.71.

2

EQUILIBRIO

2.1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- Las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido se llevan a efecto cuando la suma algebraica de las fuerzas y la suma algebraica de los momentos que actúan sobre él es igual a cero.

$$\sum F = 0 \quad \begin{cases} F_X = 0 \\ F_Y = 0 \\ F_Z = 0 \end{cases} \quad \sum M = 0 \quad \begin{cases} M_X = 0 \\ M_Y = 0 \\ M_Z = 0 \end{cases}$$

- Diagrama de cuerpo libre es una representación esquemática de las acciones y reacciones que actúan sobre un cuerpo.
- Apoyos: apoyo es el elemento por medio del cual se logra limitar uno o más desplazamientos.

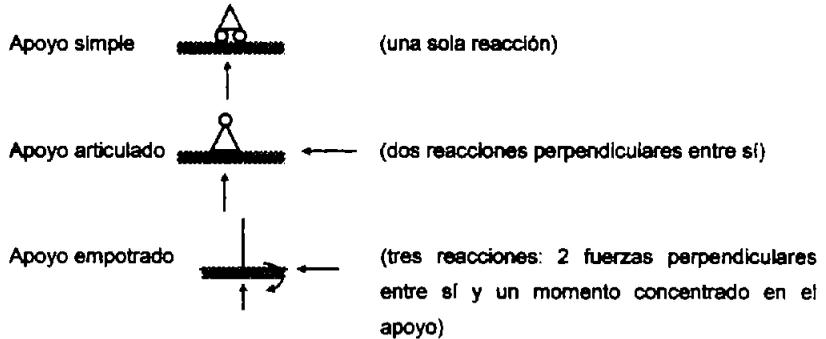


Fig. 2.1

- Sistemas de fuerzas pueden ubicarse:

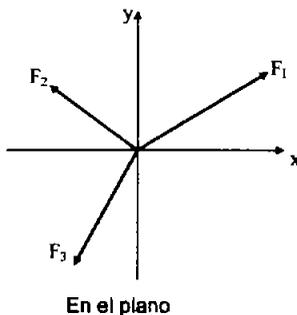
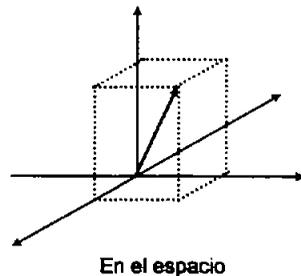


Fig. 2.2



En el plano podemos encontrar diferentes tipos de sistemas (Fig. 2.3)

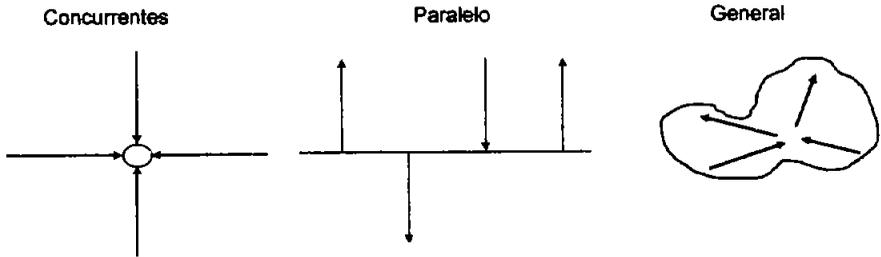


Fig. 2.3

> Resultante de un sistema de fuerzas; es una fuerza que por si sola es capaz de producir el mismo efecto que todo el sistema en conjunto.

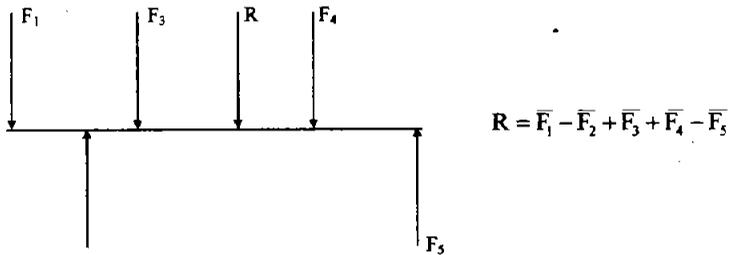


Fig. 2.4

> Se dice que un sistema de fuerzas está en equilibrio si las sumas tanto de fuerzas como de los momentos que estas producen es igual a cero.

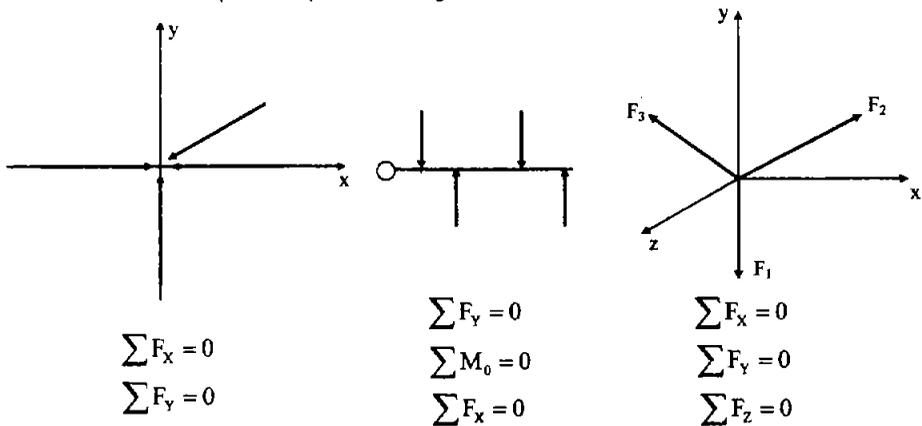


Fig. 2.5

- Momento de una fuerza (o par) con respecto a un eje es una medida de la efectividad de la fuerza para producir una rotación alrededor de dicho eje. Su valor numérico es el producto del módulo de la fuerza por la distancia del eje de rotación a la línea de acción de aquella.

$$M = F \cdot d$$

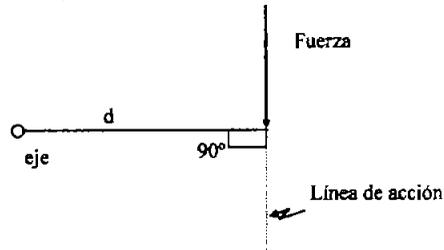


Fig. 2.6

- Un PAR está formado por dos fuerzas del mismo módulo con líneas de acción paralelas entre sí y de sentido contrario. Un par aplicado a un cuerpo, sólo le puede producir un movimiento de rotación.

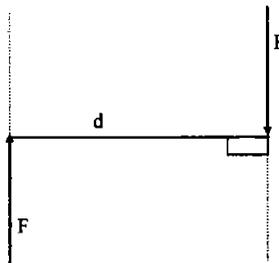


Fig. 2.7

Para fuerzas en el espacio.

$$R = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2 + \sum F_z^2}$$

$$R = F\lambda \quad ; \quad \lambda = \text{vector unitario}$$

$$\lambda = \cos \theta_x i + \cos \theta_y j + \cos \theta_z k$$

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{dx}{d}$$

$$\cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{dy}{d}$$

$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{dz}{d}$$

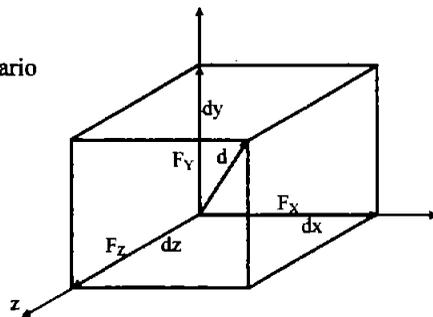


Fig. 2.8

➤ Convención de signos:

Las fuerzas que tengan dirección hacia arriba o hacia la derecha, serán positivas.

Si el momento de una fuerza produce un giro en el sentido de las manecillas del reloj (sentido horario) este será considerado como positivo; en caso contrario, el momento será negativo.

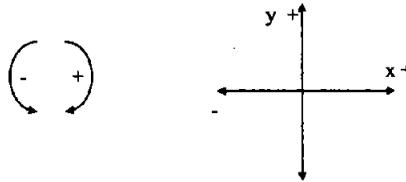


Fig. 2.9

➤ Tipos de Cargas (fuerzas)

Concentrada: es la que se aplica en un solo punto.

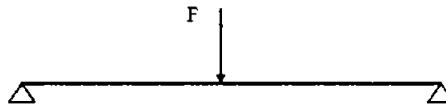


Fig. 2.10

Repartida uniforme: se aplica a lo largo de un elemento con la misma intensidad en todos sus puntos.

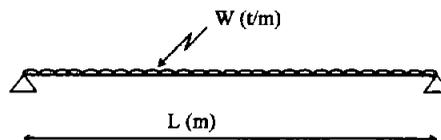


Fig. 2.11

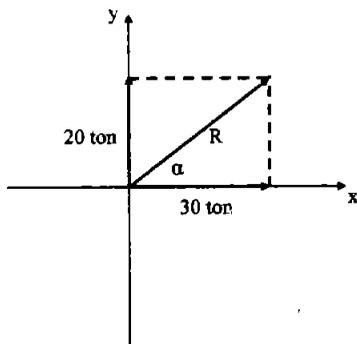
Para motivos de cálculo concentramos la carga "W" multiplicando esta por la longitud "L". La fuerza resultante de la operación ($W \times L$) se localizará a una distancia $L/2$ de los extremos. Esto es debido a que la carga es igual en todos los puntos de la longitud "L".

2.2. RESULTANTE DE SISTEMAS DE FUERZAS EN UN PLANO (coplanares).

- Encontrar la resultante del siguiente sistema de fuerzas.

Las fuerzas actúan sobre un mismo plano y son perpendiculares entre sí, por lo tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras, podemos encontrar la resultante; -

$$R = \sqrt{(30)^2 + (20)^2} = \sqrt{900 + 400} = \sqrt{1300}$$



$$R = 36.05 \text{ ton.}$$
$$\alpha = \angle \text{Tan} \frac{20}{30} = 33.70^\circ$$

Fig. 2.12

- Encontrar la resultante del sistema siguiente:

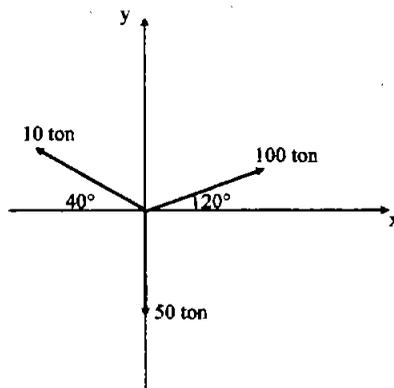


Fig. 2.13

Para este caso encontramos que las fuerzas no todas coinciden con los ejes.

Tomaremos como positivas las fuerzas dirigidas hacia arriba y a la derecha, en caso contrario serán negativas.

Si proyectamos todas las fuerzas sobre los ejes, encontraremos que las fuerzas estarán sólo en dos direcciones "x", "y"

Sumando algebraicamente estas componentes, encontraremos una fuerza representativa de la dirección "x" y otra de la dirección "y". Además, si obtenemos la resultante de estas dos fuerzas, estaremos obteniendo la resultante del sistema. Podemos concluir entonces que:

$$R = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2}$$

Fuerza (ton)	Componentes	
	Horizontal (x)	Vertical (y)
10	$10 \cos 40^\circ = 7.66$	$10 \sin 40^\circ = 6.43$
100	$100 \cos 20^\circ = 93.97$	$100 \sin 20^\circ = 34.2$
50	0	50
	$\sum F_x = 101.63$	$\sum F_y = 90.63$

$$R = \sqrt{(101.63)^2 + (90.63)^2}$$

$$R = 136.17 \text{ ton}$$

$$\alpha = \angle \text{Tan} \frac{90.63}{101.63} = 41.72^\circ$$

- Sabiendo que el vector fuerza resultante de otro dos que forman un Ángulo recto es de 10 kp, y que uno de ellos es de 6 kp, calcular el otro.

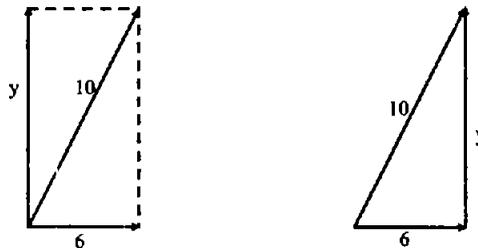


Fig. 2.14

Solución:

Sea y el vector fuerza buscado. Se construye un rectángulo de forma que uno de sus lados representa un vector fuerza de 6 kp y su diagonal de 10 kp. El otro lado representará y.

También se puede construir un triángulo rectángulo de manera que uno de sus catetos represente al vector fuerza de 6 kp y su hipotenusa al de 10 kp.

$$Y^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \qquad y = 8 \text{ kp}$$

- Sobre el rectángulo de la figura 15 actúan las fuerzas de 8, 6, 5, 3, 7, 9, y 4 ton representadas. Calcular:

a) La suma algebraica de momentos respecto a los puntos A, B, C, y el centro O de la figura.

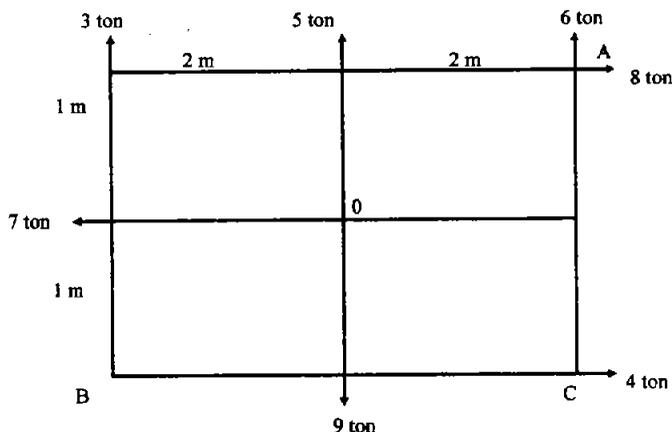


Fig. 2.15

Solución:

Momento = magnitud de la fuerza x distancia del eje a la directriz de la misma.

Sean negativos los momentos en el sentido de las agujas del reloj y positivos al contrario.

$$\begin{aligned}
 M_A &= 8(0) + 6(0) - 5(2) - 3(4) - 7(1) + 9(2) + 4(2) = & -3 \text{ t-m} \\
 M_B &= -8(2) + 6(4) + 5(2) + 3(0) + 7(1) - 9(2) + 4(0) = & +7 \text{ t-m} \\
 M_C &= -8(2) + 6(0) - 5(2) - 3(4) + 7(1) + 9(2) + 4(0) = & -13 \text{ t-m} \\
 M_D &= -8(1) + 6(2) + 5(0) - 3(2) + 7(0) + 9(0) + 4(1) = & +2 \text{ t-m}
 \end{aligned}$$

- Una barra AC de 1m de longitud está sometida a la acción de tres fuerzas verticales, como se indica en la figura. Suponiendo que el peso de la barra es despreciable, calcular;

- La suma algebraica de las fuerzas aplicadas a ella.
- La suma algebraica de los momentos con respecto a un eje que pase por cada uno de los puntos siguientes: A, B, C.
- La resultante y equilibrante del sistema de fuerzas dado.

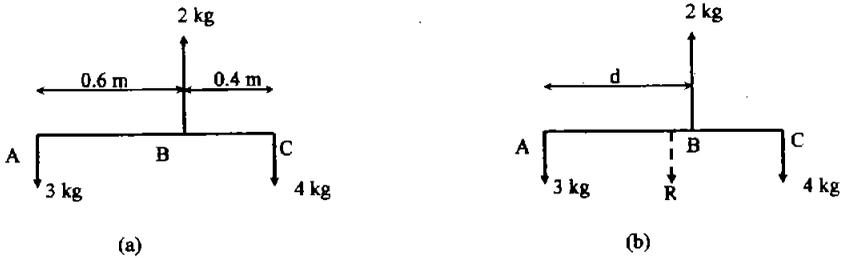


Fig. 2.16

Solución:

- a) Sean positivas las fuerzas de sentido hacia arriba,

$$\Sigma F = -3 + 2 - 4 = -5 \text{ kg (hacia abajo)}$$

- b)

$$\Sigma M_A = 3(0) + 2(0.6) - 4(1) = -2.8 \text{ kg-m}$$

$$\Sigma M_B = 3(0.6) + 2(0) - 4(0.4) = +0.2 \text{ kg-m}$$

$$\Sigma M_C = 3(1) + 2(4) - 4(0) = +2.2 \text{ kg-m}$$

- c) Del inciso a) tenemos que la resultante es $R = -5 \text{ Kg}$ la equilibrante es una fuerza de igual magnitud que la resultante colineal con esta, pero de sentido contrario, por lo tanto, la equilibrante es: $E = +5 \text{ kg}$.

La suma de los momentos que las fuerzas producen es necesariamente igual con el momento que produce la resultante con respecto a un mismo punto, por tanto:

$$-5 \text{ kg} \times d = -2.8 \text{ kg-m} \quad \therefore \quad d = 0.56 \text{ m (desde A)}$$

- Una barra uniforme de 1m de longitud y 8 kg de peso está apoyada en los puntos P y R situados a 20 y 80 cm, respectivamente, de uno de los extremos. Encuentre las fuerzas que actúan sobre dichos apoyos si la barra está sometida a las acciones que se muestran en la figura 2.17

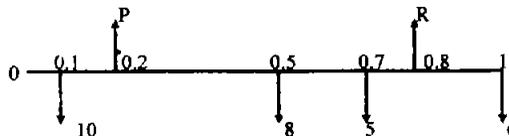


Fig. 2.17

Solución:

Sean P y R las reacciones en los apoyos. El peso de la barra uniforme, 8 kg, se considera concentrado en su punto medio.

Tomando momentos con respecto al eje perpendicular al plano de las fuerzas que pase por el punto de aplicación de P.

$$\sum M_p = 10(0.1) + P(0) - 8(0.3) - 5(0.5) + R(0.6) - 6(0.8) = 0$$

$$\sum M_p = -8.7 + R(0.6) = 0$$

$$R = 14.5 \text{ kg}$$

Conocida la magnitud de R y proponiendo $\sum F_y = 0$,

$$\sum F_y = P + 14.5 - 10 - 8 - 5 - 6 = 0$$

$$P = 14.5 \text{ kg.}$$

- Calcular la resultante R de las fuerzas indicadas en la figura 2.18

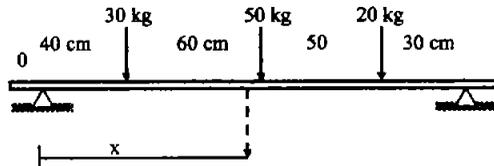


Fig. 2.18

Solución:

$$R = F = -30 - 50 - 20 = -100 \text{ kg}$$

Sea d la distancia de 0 a la directriz R. Entonces,

Momento de R con respecto a 0 = suma de momentos de las fuerzas dadas con respecto a 0.

$$-R(d) = -30(40) - 50(100) - 20(150)$$

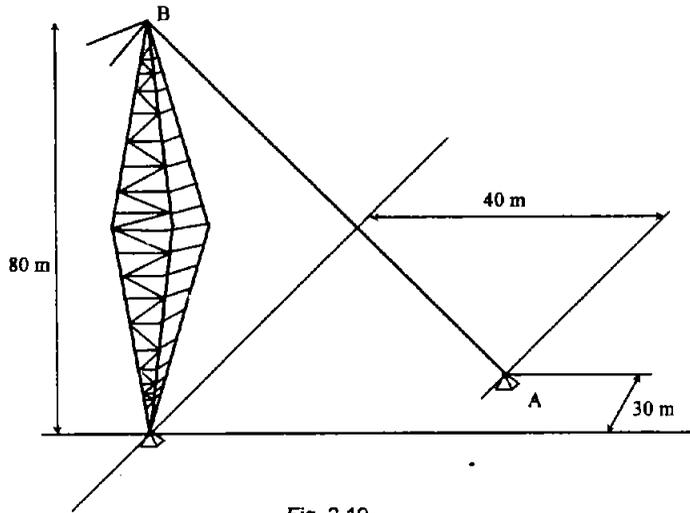
$$-100d = -9200 \text{ kg} \cdot \text{cm} \quad \therefore \quad d = 92 \text{ cm (desde el punto 0)}$$

2.3. RESULTANTE DE FUERZAS EN EL ESPACIO.

- El alambre de una torre está anclado en A por medio de un perno. La torsión en el alambre es de 2500 kg. Determinense:

- a) Las componentes F_x , F_y , F_z de la fuerza que actúa sobre el perno.

- b) Los ángulos θ_x , θ_y , θ_z que definen la dirección de la fuerza.



- a) Componentes de la fuerza.

El alambre está dirigido del punto A hacia el punto B.

Las componentes del vector \overline{AB} , que tiene la misma dirección que la fuerza, son:

$$\boxed{dx = -40\text{m}}$$

$$\boxed{dy = +80\text{m}}$$

$$\boxed{dz = +30\text{m}}$$

La distancia total de A a B es:

$$AB = d = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 94.3 \text{ m}$$

Representando por i, j, k los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, tenemos:

$$\overline{AB} = (-40\text{m})\mathbf{i} + (80\text{m})\mathbf{j} + (30\text{m})\mathbf{k}$$

Introduciendo el vector unitario $\lambda = \frac{\overline{AB}}{AB}$, escribimos:

$$F = F\lambda = F \frac{\overline{AB}}{AB} = \frac{2500 \text{ kg}}{94.3 \text{ m}} \overline{AB}$$

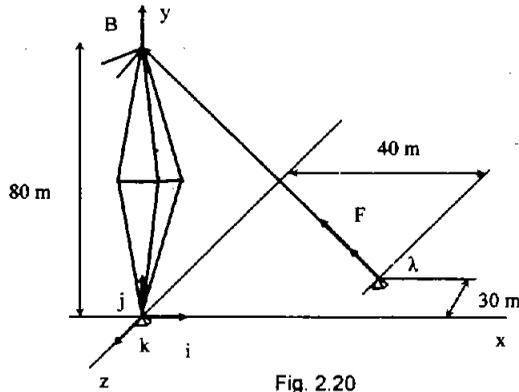


Fig. 2.20

Sustituyendo la expresión encontrada para AB, obtenemos:

$$F = \frac{2500 \text{ kg}}{94.3 \text{ m}} [-(40\text{m})i + (80\text{m})j + (30\text{m})k]$$

Por consiguiente, las componentes de F son:

$$\boxed{F_x = -1060 \text{ kg}} \quad \boxed{F_y = +2120 \text{ kg}} \quad \boxed{F_z = +795 \text{ kg}}$$

b) Cálculo de los ángulos.

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1060 \text{ kg}}{2500 \text{ kg}} = -0.424 \quad \boxed{\theta_x = 115.1^\circ}$$

$$\cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2120 \text{ kg}}{2500 \text{ kg}} = 0.848 \quad \boxed{\theta_y = 32.0^\circ}$$

$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ kg}}{2500 \text{ kg}} = 0.318 \quad \boxed{\theta_z = 71.5^\circ}$$

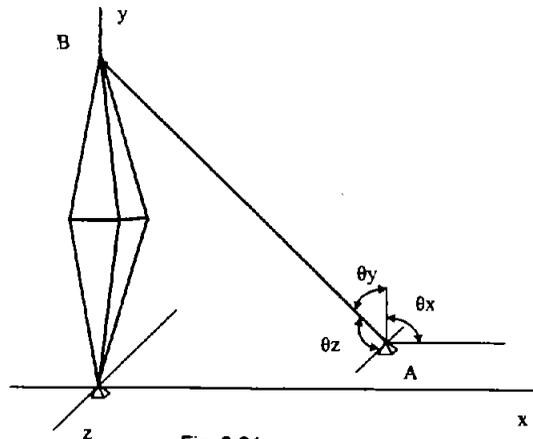


Fig. 2.21

- Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Sabiendo que la tensión es de 840 lb en el cable AB y 1200 en el cable AC, determínese la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables AB y AC sobre la estaca A.

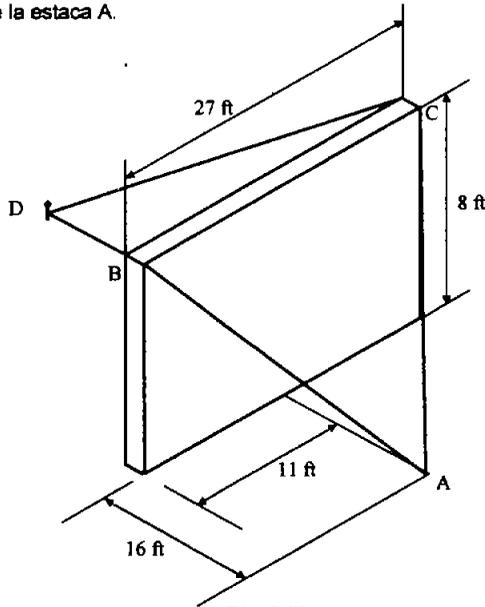


Fig. 2.22

Solución:

La fuerza ejercida por cada cable sobre la estaca A será proyectada sobre los ejes x, y y z, primero determinaremos el valor de las componentes y la magnitud de los vectores \overline{AB} y \overline{AC} Midiéndolos desde A hacia la sección de la pared. Representada por i, j y k a los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados escribimos entonces:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k} & \boxed{AB = 21 \text{ ft}} \\ \overline{AC} &= -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} - (16 \text{ ft})\mathbf{k} & \boxed{AC = 24 \text{ ft}}\end{aligned}$$

Representando por λ_{AB} al vector unitario a lo largo de la línea AB, tenemos:

$$T_{AB} = T_{AB} \lambda_{AB} = T_{AB} \frac{\overline{AB}}{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}} \overline{AB}$$

Sustituyendo la expresión encontrada para \overline{AB} obtenemos:

$$\begin{aligned}T_{AB} &= \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}} [-(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k}] \\ T_{AB} &= -(640 \text{ lb})\mathbf{i} + (320 \text{ lb})\mathbf{j} + (440 \text{ lb})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Análogamente para T_{AC} tenemos:

$$T_{AC} = -(800 \text{ lb})i + (400 \text{ lb})j - (800 \text{ lb})k$$

La resultante R de las fuerzas ejercidas es:

$$R = T_{AB} + T_{AC} = -(1440 \text{ lb})i + (720 \text{ lb})j - (360 \text{ lb})k$$

La magnitud y dirección de la resultante se determinan por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$

$$R = 1650 \text{ lb}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta_x &= \frac{-1440 \text{ lb}}{1650 \text{ lb}} = -0.8727 \\ \cos \theta_y &= \frac{+720 \text{ lb}}{1650 \text{ lb}} = 0.4364 \\ \cos \theta_z &= \frac{-360 \text{ lb}}{1650 \text{ lb}} = -0.2182 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_x &= 150.8^\circ \\ \theta_y &= 64.1^\circ \\ \theta_z &= 102.6^\circ \end{aligned}$$

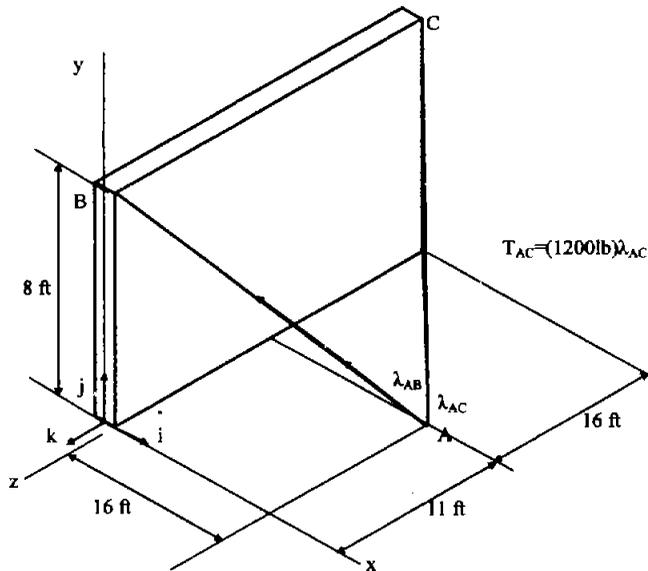


Fig. 2.23

2.4. EQUILIBRIO DE SISTEMAS COPLANARES

- Un peso de 100 kg se mantiene en equilibrio suspendido de dos cuerdas, como se presenta en la figura 2.24. Una de las cuerdas tira en dirección horizontal y la otra forma un ángulo de 30° con la vertical. Calcular la tensión en las cuerdas.

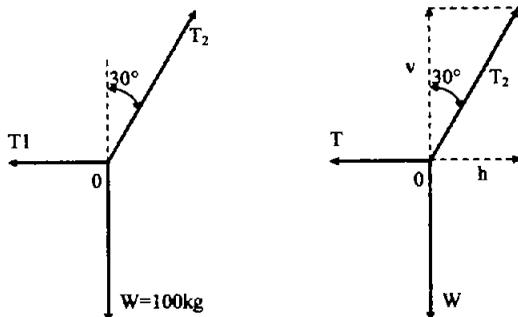


Fig. 2.24

Solución:

Sean T_1 y T_2 las tensiones buscadas y $w = 100 \text{ kg}$ el peso. Se descompone T_2 en sus proyecciones h y v , horizontal y vertical, respectivamente. T_1 carece de componente vertical y w de horizontal.

El punto 0 se encuentra en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas w , T_1 , T_2 por lo tanto,

$\sum F_x = 0$ Es decir, la suma algebraica de las componentes horizontales vale cero.

$$\sum F_x = h - T_1 = 0$$

$$h = T_1$$

$\sum F_y = 0$ Es decir, la suma algebraica de las componentes verticales vale cero.

$$\sum F_y = v - w = 0$$

$$v = w = 100 \text{ kg}$$

$$T_1 = h = v \tan 30^\circ = 100 \text{ kg} (0.577) = 57.5 \text{ kg}$$

$$T_2 = \frac{w}{\cos 30^\circ} = \frac{100 \text{ kg}}{0.866} = 115 \text{ kg}$$

- Un peso de 600 kg está suspendido de un poste por medio de la barra OA , de 4 m de longitud, articulada, en A , y de la cuerda OB , unida al poste en el punto B situado 3 metros por encima de A . Calcular la tensión T en la cuerda OB y el empuje P en la barra AO . Se supone que la barra es de peso despreciable.

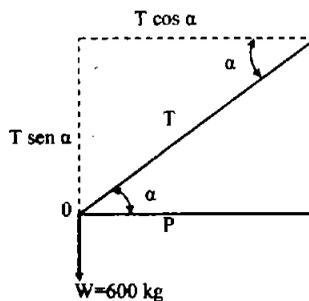
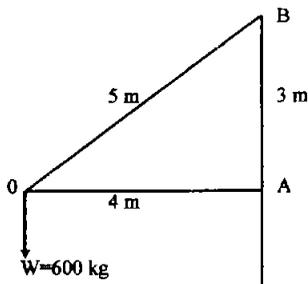


Fig. 2.25

Solución:

El punto O está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas T, P y $w = 600$ kg. Por tanto,

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad T \operatorname{sen} \alpha - w = 0$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \quad ; \quad T \left(\frac{3}{5}\right) - 600 = 0 \quad ; \quad T = 1000 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad T \operatorname{cos} \alpha - P = 0$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5} \quad ; \quad 1000 \text{ kg} \left(\frac{4}{5}\right) - P = 0 \quad ; \quad P = 800 \text{ kg}$$

- Los extremos de una cuerda de 11 m de longitud se unen a dos ganchos colocados en un techo horizontal y separados entre sí 9 m. A los 4 m de uno de los extremos de la cuerda se une un peso de 100 kg. Calcular la tensión en los dos segmentos de cuerda.

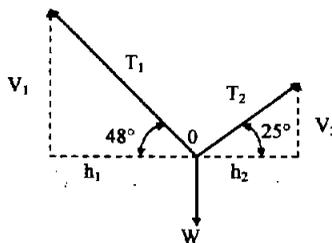
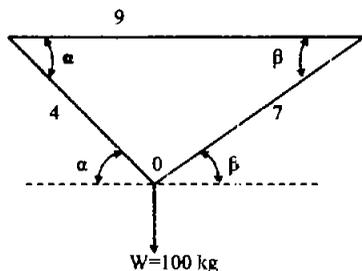


Fig. 2.26

Solución:

Entre los dos tramos de cuerda y el techo se forma un triángulo oblicuángulo, con los tres lados conocidos. Aplicando la ley de los cosenos para este tipo de figura tenemos que:

$$7^2 = 4^2 + 9^2 - 2(4)(9) \operatorname{cos} \alpha \quad ; \quad \alpha = 48^\circ$$

$$4^2 = 7^2 + 9^2 - 2(7)(9) \operatorname{cos} \beta \quad ; \quad \beta = 25^\circ$$

El punto O se encuentra en equilibrio bajo la acción de las cargas T_1 , T_2 y w .
Estableciendo las ecuaciones de equilibrio;

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad -T_1 \cos 48^\circ + T_2 \cos 25^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad T_1 \sin 48^\circ + T_2 \sin 25^\circ - 100 \text{ kg} = 0$$

El planteamiento de las ecuaciones produce un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que al resolverse;

$$T_1 = 95 \text{ kg}$$

$$T_2 = 70 \text{ kg}$$

- Dos cables sostienen una carga de 100 kg en la posición que muestra la figura 2.27. Calcular la tensión a la que están sometidos los cables AC y BC, suponiendo que estos son flexibles, inextensibles y sin peso.

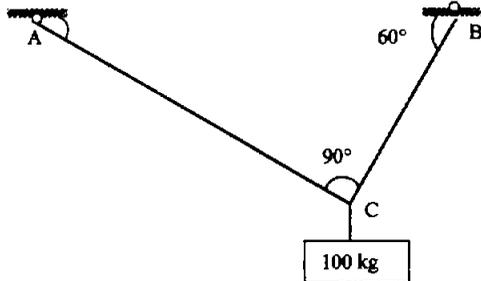
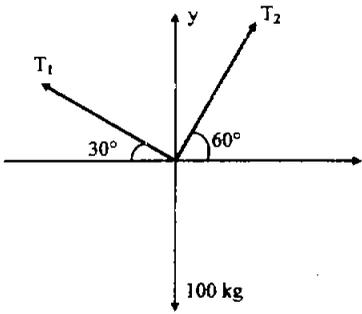


Fig. 2.27

El sistema está trabajando en un solo plano (es un sistema coplanar) y todas las fuerzas concurren en el punto C, por lo tanto, establecemos que con $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ podemos establecer el equilibrio.

El sistema puede quedar representado por el diagrama de cuerpo libre siguiente:



Sea, $\sum F_x = 0$

$$\sum F_x = T_1 \cos 60^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = T_1 \sin 60^\circ + T_2 \sin 30^\circ - 100 \text{ kg} = 0$$

Fig. 2.28

Observemos que el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio nos lleva a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (T_1 y T_2), en el cual los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos harán el papel de los coeficientes de las variables. Así, el sistema es:

$$0.500T_1 - 0.866T_2 = 0$$

$$0.866T_1 + 0.500T_2 = 100$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos conocidos (determinantes, igualación, etc.) los valores de las tensiones quedan:

$$T_1 = 86.6 \text{ kg}$$

$$T_2 = 50 \text{ kg}$$

- Una barra uniforme AB, de 4 m de longitud y 6 kg de peso, está soportada horizontalmente por dos cuerdas unidas a sus extremos como se muestra en la figura 2.29. Calcular la tensión T en la cuerda unida a A y el Ángulo que esta forma con la vertical

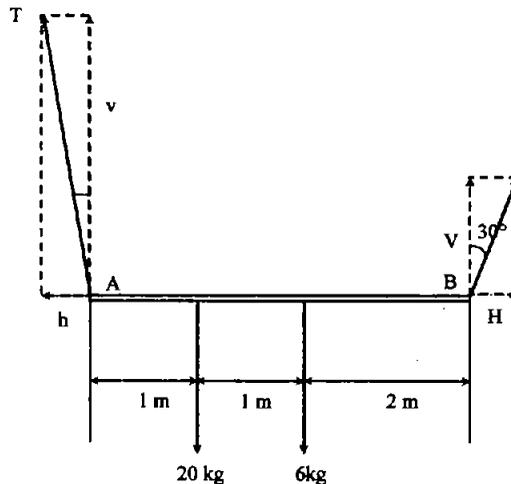


Fig. 2.29

Solución:

Sean h y v las componentes horizontal y vertical, respectivamente, de la tensión de la cuerda unida en A y H y V las correspondientes a la tensión de la cuerda unida en B. La barra está en equilibrio. Por tanto, si tomamos momentos con respecto a un eje que pase por A:

$$MA = V(4) - 6(2) - 20(1) = 0 \quad \therefore$$

$$V = 8 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = H - h = 0; \quad h = H = V \operatorname{tg} 30^\circ = 8(0.5774) \quad \therefore$$

$$h = 4.62 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = v + 8 - 20 - 6 = 0$$

∴

$$v = 18 \text{ kg}$$

$$T = \sqrt{(4.64)^2 + (18)^2} = 18.60 \text{ kg}$$

$$\alpha = \arctan(4.64/18) = 14.40^\circ$$

- Sobre una barra de peso despreciable y 100 cm de longitud actúan las fuerzas representadas en la figura 2.30. Encuentre la equilibrante del sistema y su punto de aplicación.

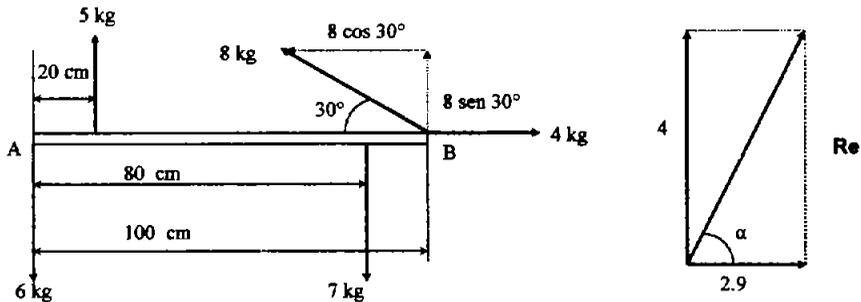


Fig. 2.30

En la figura se ha descompuesto la fuerza de 8 kg en sus proyecciones vertical y horizontal (v , h). Sean V y H las componentes vertical y horizontal de la equilibrante. Considerando que el cuerpo está en equilibrio entonces:

$$\sum F_x = 0 ; 4 - 8 \cos 30^\circ + H = 0 ; \quad H = +2.9 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0 ; 5 + 8 \sin 30^\circ - 6 - 7 + V = 0 ; \quad V = +4.0 \text{ kg}$$

$$\text{La equilibrante} = E = (2.9)^2 + (4.0)^2 \quad E = 4.9 \text{ kg}$$

Sea x la distancia desde el punto A hasta el sitio de aplicación de la equilibrante. Proponiendo la suma de momentos en A:

$$M_A = 5(20) - 7(80) + \sin 30^\circ(100) + V(x) = 0 \quad \therefore \quad X = 15 \text{ cm}$$

$$\alpha = \arctan(4.0/2.9) = 54^\circ$$

- Para sacar a un automóvil de una zanja, se ata el extremo A de una cuerda AOB a un árbol y el otro extremo B al coche. En el punto medio O de la cuerda AB se ejerce un empuje de 100 ton en dirección perpendicular a AB. Calcular la tensión T en la cuerda, sabiendo que el ángulo AOB es de 170° .

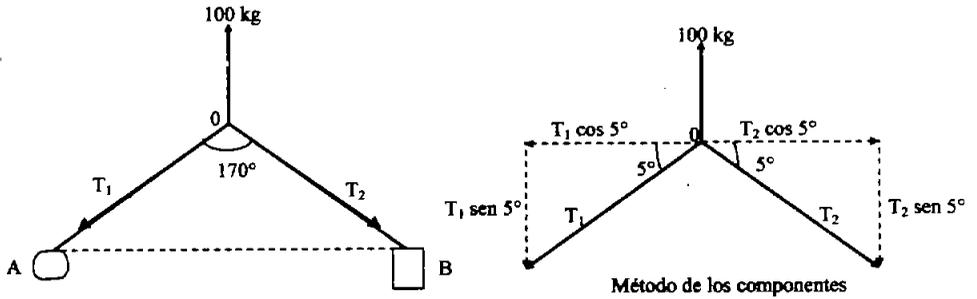


Fig. 2.31

El punto O está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas T_1 , T_2 , y 100 kg. Por consiguiente:

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad -T_1 \cos 5^\circ + T_2 \cos 5^\circ = 0$$

$$T_1 = T_2 \text{ (tension en la cuerda)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad 100 \text{ ton} - T_1 \sin 5^\circ - T_2 \sin 5^\circ = 0$$

$$2 T \sin 5^\circ = 100 \text{ ton}$$

$$T = \frac{100 \text{ ton}}{2 \sin 5^\circ}$$

$$T = 573 \text{ ton}$$

- En la barra mostrada en la figura 2.32, calcule las reacciones en los apoyos.

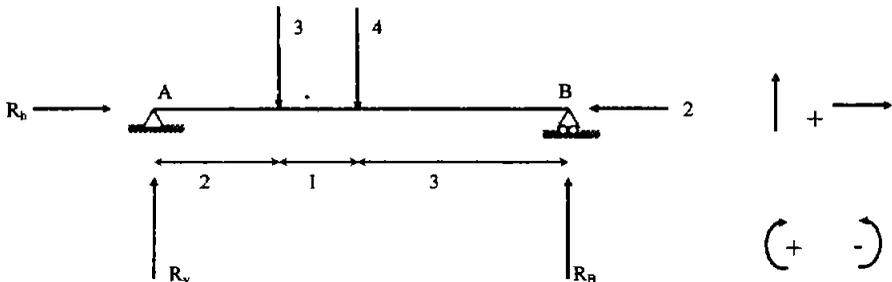


Fig. 2.32

En primer término, vemos que el apoyo del extremo A es de tipo articulado y, por tanto, produce dos reacciones, una vertical y una horizontal, mientras que el apoyo B es de tipo simple y sólo produce una reacción vertical, a esta combinación de apoyos nos referimos al decir que una viga está simplemente apoyada

Estableciendo las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 ;$$

$$R_b - 2 \text{ ton} = 0 \quad \text{Entonces: } \boxed{R_b = 2 \text{ ton}}$$

$$\sum F_y = 0 ;$$

$$R_v - 3 \text{ ton} - 4 \text{ ton} + R_B = 0$$

Esta es una ecuación de dos incógnitas, por lo tanto, no se puede resolver. En vista de lo anterior, si planteamos la ecuación de $\sum M_o = 0$:

$$\sum M_A = R_v(0) + 3(2) + 4(3) - R_B(6) + 2(0) + R_b(0) = 0$$

$$\boxed{R_B = 3 \text{ ton}}$$

Al sustituir el valor $R_B = 3$ en la ecuación $\sum F_y$ obtenemos la última incógnita (R_v),

$$R_v - 3 - 4 + 3 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{R_v = 4 \text{ ton}}$$

- Encontrar las reacciones en los apoyos de la barra mostrada en la figura 2.33, la barra está simplemente apoyada.

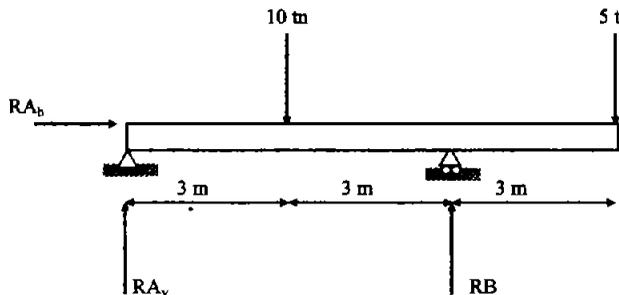


Fig. 2.33

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{Ah} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{Av} - 10 + R_B - 5 = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_{AV}(0) + R_{Ab}(0) + 10(3) - R_B(6) + 5(9) = 0$$

$$R_B = \frac{30 + 45}{6} = \boxed{12.5 \text{ ton}}$$

Sustituyendo $R_B = 12.5 \text{ ton}$ en F_y :

$$R_{AV} - 10 + 12.5 - 5 = 0$$

$$R_{AV} = 2.5 \text{ ton}$$

➤ Encontrar las reacciones en los apoyos A y B de la barra que se muestra en la figura 2.34.

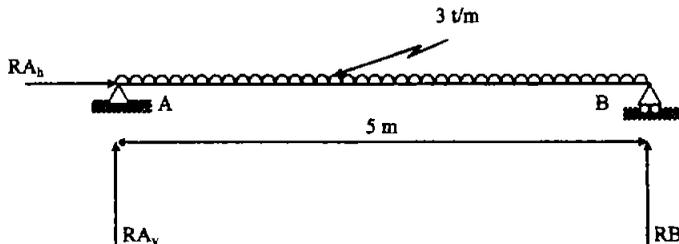
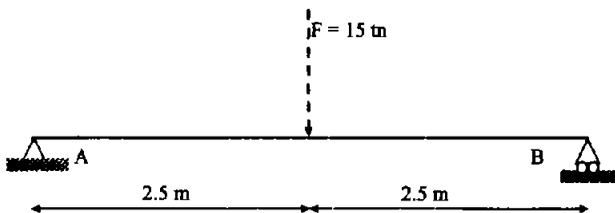


Fig. 2.34

Se observa que en este ejemplo, la carga es uniformemente distribuida a lo largo de la barra. Este tipo de carga puede transformarse de distribuida en concentrada; si calculamos la resultante de todas las fuerzas que actúan a lo largo de la barra, la fuerza resultante estará actuando en el centroide de la carga, Fig. 2.35. De modo que:



$$F = wL$$

$$F = 3 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (5\text{m}) = 15 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{Ab} = 0$$

$$\sum M_A = R_{AV}(0) + 15(2.5) - R_B(5) = 0$$

$$R_B = 7.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = R_{AV} - 15 + 7.5 = 0$$

$$R_{AV} = 7.5 \text{ ton}$$

- Calcular las reacciones en la barra siguiente, considerando que esta es simplemente apoyada y tiene una carga distribuida triangularmente como se muestra en la figura 2.36.

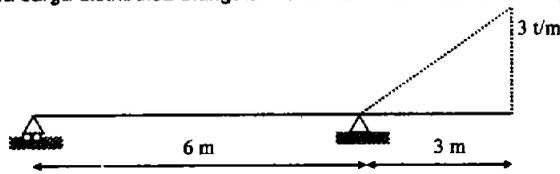


Fig. 2.36

El presente ejercicio muestra un tipo de carga un tanto especial, nos referimos a la carga triangular. De forma parecida a la transformación del ejemplo anterior, convertiremos esa carga en otra de tipo concentrada.

Las cargas triangulares se convierten a concentradas al obtener el área de la figura 2.37, formada por la base de 3 metros y la altura de 3 ton/m, correspondientes a las dimensiones del triángulo. Aplicando la fórmula del área:

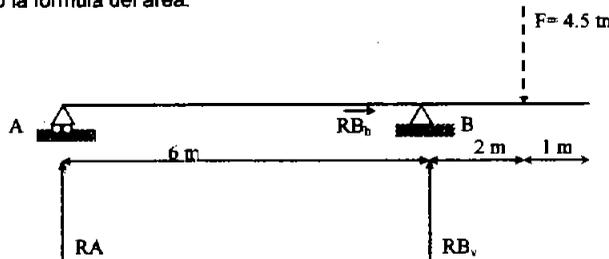


Fig. 2.37

$$F = \frac{bw}{2} \quad F = \frac{1}{2} (3 \text{ m}) \left(3 \frac{\text{t}}{\text{m}} \right) = 4.5 \text{ ton} \quad \bar{x} = (b/3) = 1 \text{ m}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{Bh} = 0$$

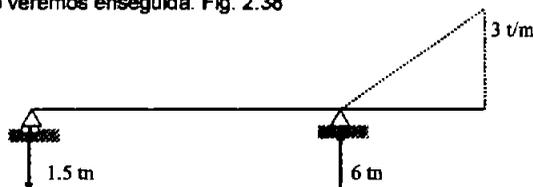
$$\sum M_A = R_A(0) + R_{Bv}(6) - 4.5(8) = 0$$

$$R_{Bv} = 6 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = R_A + 6 - 4.5 = 0$$

$$R_A = -1.5 \text{ ton}$$

Observemos que el valor de R_A es negativo. Cuando esto sucede, significa que el sentido de la reacción, sea momento o una fuerza, tiene mal supuesto su sentido. Originalmente R_A fue supuesta hacia arriba (con sentido positivo) pero, dado que el signo es negativo, su verdadero sentido es hacia abajo (negativo), como veremos enseguida. Fig. 2.38



- > Encontrar las reacciones en la barra de la figura siguiente:

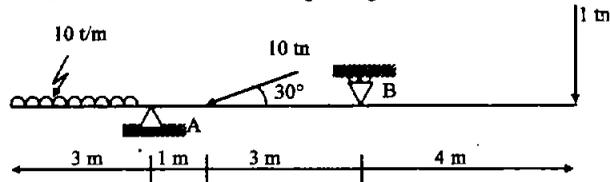


Fig. 2.39

A diferencia de ejemplos anteriores, en este caso uno de los apoyos está en la parte superior de la barra, esto no afecta en gran medida. El equilibrio de la estructura se propone de la misma forma en que se ha hecho con los ejemplos anteriores.

El apoyo A es articulado y el apoyo B es simple. Concentrando la carga repartida y proponiendo el sentido de las reacciones tenemos que:

$$F = 10 \frac{t}{m} (3 m) = 30 \text{ ton}$$

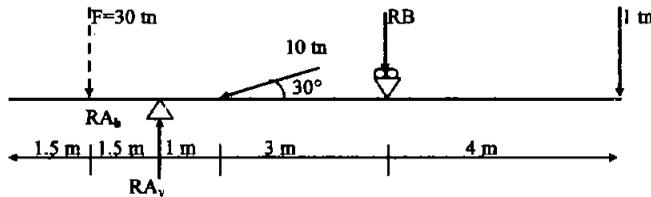


Fig. 2.40

$$\sum F_x = R_{Ah} - 10 \cos 30^\circ = 0$$

$$R_{Ah} = 8.66 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = -30(1.5) + R_{Av}(0) + R_{Ah}(0) + 10 \cos 30^\circ + 10 \sin 30^\circ (1) + R_B (4) + 1(8) = 0$$

$$R_B = 8.0 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = -30 + R_{Av} - 10 \sin 30^\circ - 8 - 1 = 0$$

$$R_{Av} = 44.0 \text{ ton}$$

- > Encontrar las reacciones de la barra que se muestra en la figura 2.41, considerando que esta tiene un extremo empotrado, mientras que el otro permanece libre.

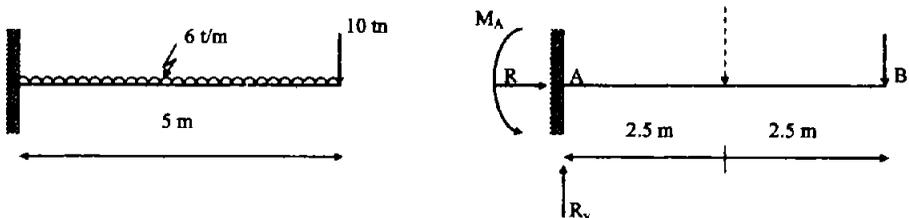


Fig. 2.41

Como sabemos, un empotramiento produce 3 reacciones: un momento concentrado y dos fuerzas perpendiculares entre sí (una vertical y una horizontal).

Concentrando la carga repartida y proponiendo el sentido de las reacciones, el sistema queda:

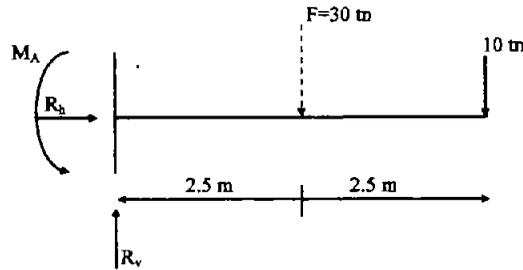


Fig. 2.42

$$F = wL \qquad F = 6 \text{ t/m (5 m)} \qquad F = 30 \text{ ton}$$

Estableciendo el equilibrio

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \qquad R_b + 0 = 0 & \qquad R_b = 0 \\ \sum F_y = 0 & \qquad R_v - 30 - 10 = 0 & \qquad R_v = 40 \\ \sum M_A = 0 & \qquad -M_A + R_v(0) + 30(2.5) + 10(5) = 0 & \qquad M_A = 125 \text{ t-m} \end{aligned}$$

Puesto que todos los resultados son positivos, las reacciones están bien supuestas.

> Encontrar las reacciones en la estructura que se muestra en la figura 2.43 (a)

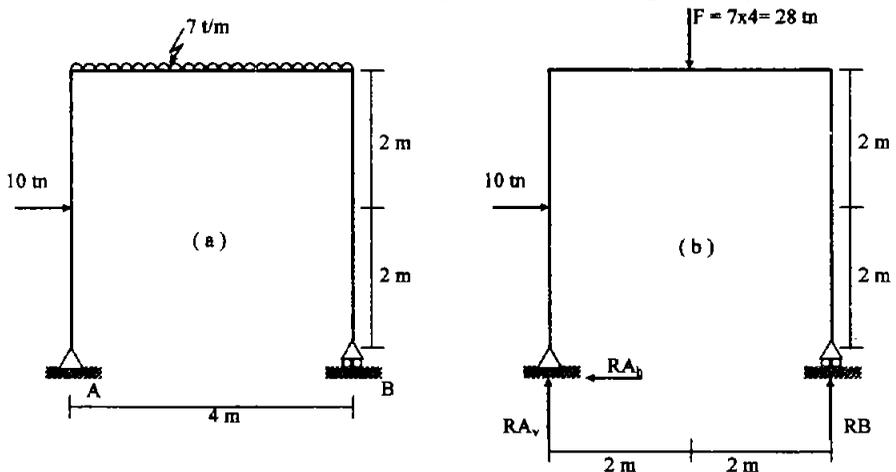


Fig. 2.43

En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre de la estructura con las fuerzas activas y reactivas que existen sobre ella. El apoyo A es de tipo articulado y el B es simple.

Proponiendo las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = -R_{Ah} + 10 = 0$$

$$R_{Ah} = 10 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = R_{Av}(0) + R_{Ah}(0) + 10(2) + 28(2) - R_B(4) = 0$$

$$R_B = 19 \text{ ton}$$

Sustituyendo el valor de R_B en $\sum F_y$:

$$\sum F_y = R_{Av} - 28 + R_B = 0$$

$$\sum F_y = R_{Av} - 28 + 19 = 0$$

$$R_{Av} = 9 \text{ ton}$$

➤ Encuentre las reacciones de la siguiente estructura.

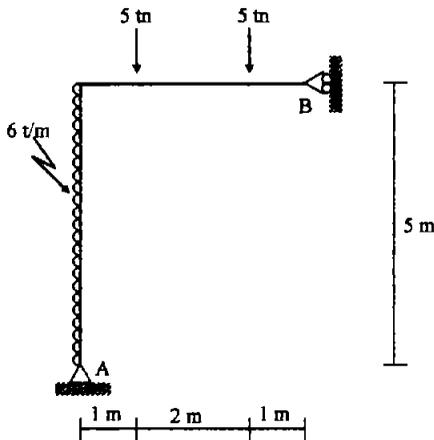


Fig. 2.44

Proponiendo el sentido de las reacciones y concentrando la carga repartida tenemos:

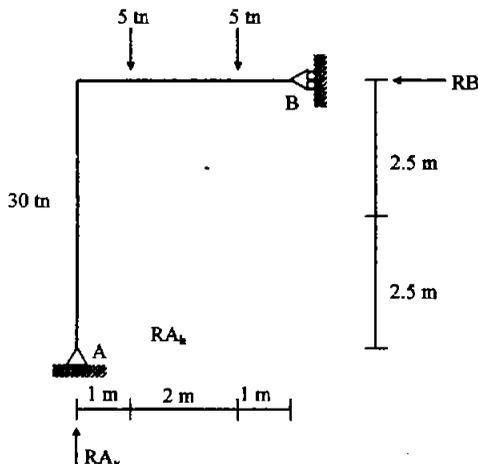


Fig. 2.45

Estableciendo el equilibrio:

$$\sum F_x = 30 - R_{Ah} - R_B = 0$$

$$R_{Av} = 10 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = R_{Av} - 5 - 5 = 0$$

$$\sum M_A = R_{Av}(0) + R_{Ah}(0) + 30(2.5) + 5(1) + 5(3) - R_B = 0$$

$$R_B = 13 \text{ ton}$$

Sustituyendo R_B en $\sum F_x$

$$\sum F_x = 30 - R_{Ah} - 13 = 0$$

$$R_{Ah} = 17 \text{ ton}$$

➤ Encontrar las reacciones de la estructura siguiente:

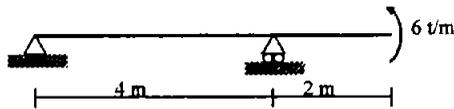


Fig. 2.46

La barra es simplemente apoyada y como se observa, en este caso no hay fuerzas actuantes. La única acción sobre la viga es un momento concentrado en el extremo volado.

La solución de este problema se hace igual que en los anteriores. Estableciendo el diagrama de cuerpo libre y el sentido de las reacciones tenemos:

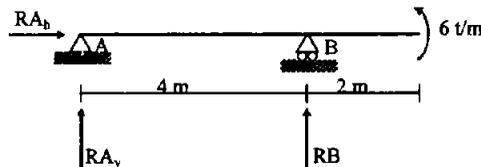


Fig. 2.47

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{Ah} = 0$$

$$\sum M_B = R_{Av}(4) - 6 = 0$$

$$R_{Av} = 1.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = R_{Av} + R_B = 0$$

$$\sum F_y = 1.5 + R_B = 0$$

$$R_B = -1.5 \text{ ton}$$

Cambiando el sentido

$$R_B = 1.5 \text{ ton}$$

Como vemos, al efectuar la suma de momentos, el valor de la acción no sufre alteraciones; es decir, su efecto no varía con respecto a la distancia hasta el punto respecto al cual se toman los momentos. Podemos generalizar que las acciones o reacciones que sean momentos concentrados entrarán en las ecuaciones como valores constantes, tomándose en cuenta sólo el sentido de la rotación que provocan las reacciones finalmente son;

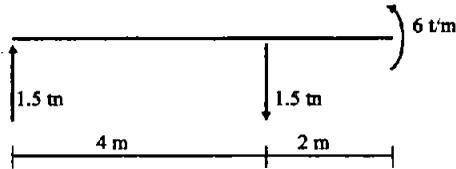


Fig. 2.48

➤ Encuentra las reacciones en los apoyos de la estructura siguiente:

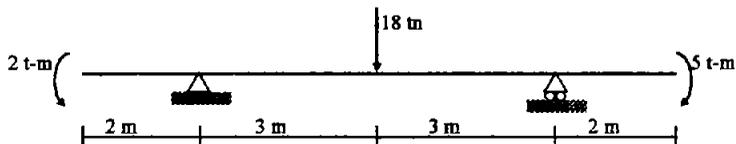


Fig. 2.49

La barra está sometida a la acción de dos momentos concentrados, uno en cada extremo, además de una fuerza concentrada en la parte media de la barra.

El diagrama de cuerpo libre de la estructura es:

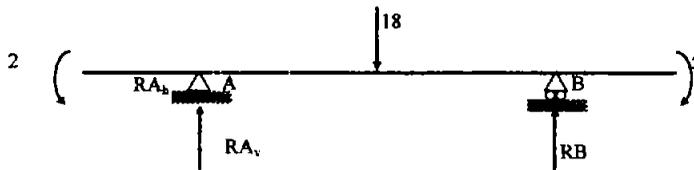


Fig. 2.50

Estableciendo el equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{Ah} = 0$$

$$\sum M_A = -2 + 18(3) - R_B(6) + 5 = 0$$

$$R_B = 9.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = R_{Av} - 18 + 9.5 = 0$$

$$R_{Av} = 8.5 \text{ ton}$$

2.5. EQUILIBRIO DE SISTEMAS EN EL ESPACIO (TRES DIMENSIONES)

- > Un letrero de 5 x 8 ft de densidad uniforme pesa 270 lb. y lo sostiene un apoyo articulado (Rotula) en A y dos cables. Determinense las tensiones en los cables y la reacción en el apoyo A.

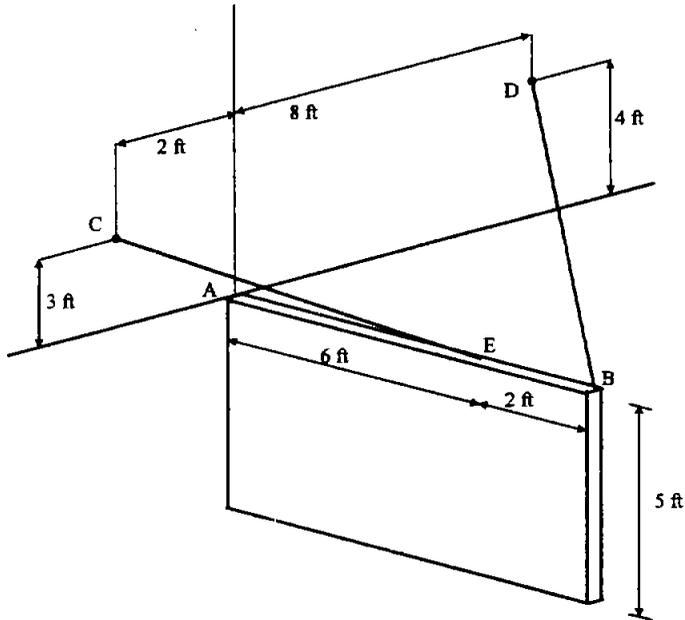


Fig. 2.51

Solución:

Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del anuncio. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso W y las reacciones en A, B y E. La reacción en A es una fuerza con dirección desconocida y se presenta por sus tres componentes. Como se conocen las direcciones de las fuerzas ejercidas por los cables, cada una de ellas involucran solo una incógnita, las magnitudes T_{BD} y T_{EC} . Puesto que solo hay 5 incógnitas, el letrero está parcialmente restringido. Puede girar con libertad con respecto al eje x ; pero está en equilibrio bajo la carga dada, ya que la ecuación $\Sigma m_o = 0$ se satisface.

Las componentes de las fuerzas T_{BD} y T_{EC} pueden expresarse en términos de las magnitudes desconocidas T_{BD} y T_{EC} , basados en lo anterior tenemos que:

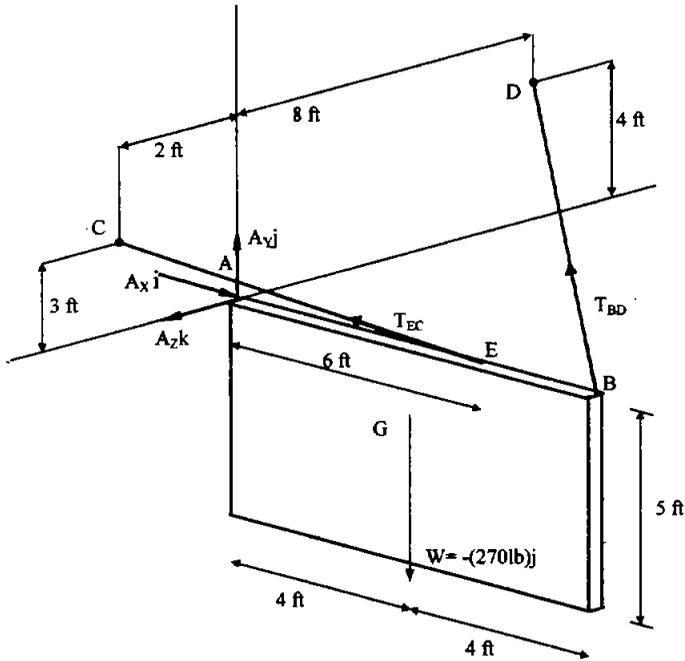


Fig. 2.52

$$\overline{BD} = -(8 \text{ ft})\mathbf{i} + (4 \text{ ft})\mathbf{j} - (8 \text{ ft})\mathbf{k}$$

$$BD = 12 \text{ ft}$$

$$\overline{EC} = -(6 \text{ ft})\mathbf{i} + (3 \text{ ft})\mathbf{j} + (2 \text{ ft})\mathbf{k}$$

$$EC = 7 \text{ ft}$$

$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD} \frac{\overline{BD}}{BD} = T_{BD} \left(-\frac{2}{3} \mathbf{i} + \frac{1}{3} \mathbf{j} - \frac{2}{3} \mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC} \frac{\overline{EC}}{EC} = T_{EC} \left(-\frac{6}{7} \mathbf{i} + \frac{3}{7} \mathbf{j} + \frac{2}{7} \mathbf{k} \right)$$

Establecemos ahora que las fuerzas que actúan sobre el anuncio forman un sistema equivalente a cero, escribimos entonces:

$$\sum \mathbf{F} = 0; \quad A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

$$\text{Ec. (1)...}(A_x - (2/3)T_{BD} - (6/7)T_{EC})\mathbf{i} + (A_y + (1/3)T_{BD} + (3/7)T_{EC} - 270)\mathbf{j} + (A_z - (2/3)T_{BD} + (2/7)T_{EC})\mathbf{k} = 0$$

$$\sum M_A = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

$$(8 \text{ ft})\mathbf{j} T_{BD} \left(-\frac{2}{3} \mathbf{i} + \frac{1}{3} \mathbf{j} - \frac{2}{3} \mathbf{k} \right) + (6 \text{ ft})\mathbf{j} T_{EC} \left(-\frac{6}{7} \mathbf{i} + \frac{3}{7} \mathbf{j} + \frac{2}{7} \mathbf{k} \right) + (4 \text{ ft})\mathbf{i} (-270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

$$\text{Ec. (2)...}(2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1080)\mathbf{k} + (5.333T_{BD} - 1714T_{EC})\mathbf{j} = 0$$

Igualando a cero los coeficientes j y k de la ecuación (2) resolvemos un sistema de ecuaciones escalares donde:

$$T_{BD} = 101.3 \text{ lb}$$

$$T_{EC} = 315 \text{ lb}$$

Estableciendo los coeficientes de i , j , k igual a cero de la ecuación (1), obtenemos otras tres ecuaciones que nos darán las componentes de A . Así obtenemos:

$$A = +(338 \text{ lb})i + (101.2 \text{ lb})j - (22.5 \text{ lb})k$$

➤ Una carga de 450 lb. pende de la esquina C de un pedazo de tubo rígido ABCD que se ha doblado en la forma indicada. El tubo está sostenido por apoyos de bola y cuenca (rotula) en A y D fijos al piso y a la pared vertical, respectivamente, y por un cable atado en el punto medio E de la porción BC del tubo y fijo en un punto G de la pared. Determinense:

- Dónde debe localizarse G, para que la tensión del cable sea mínima.
- El correspondiente valor mínimo de la tensión.

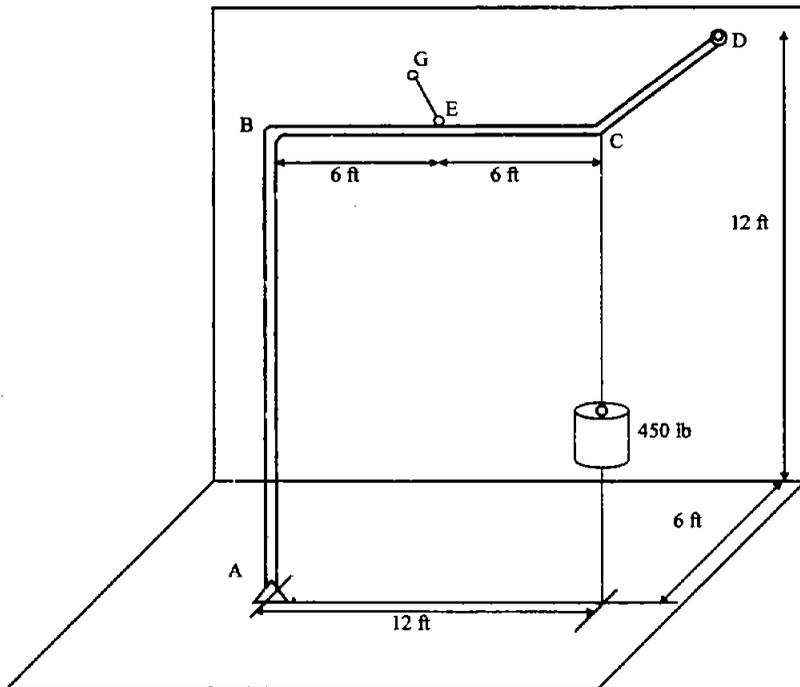


Fig. 2.53

Solución:

El diagrama de cuerpo libre del tubo incluye la carga $W = -450 j$, las reacciones en A y D, y la fuerza T ejercida en el cable. Para eliminar de los cálculos las reacciones en A y D expresamos que la suma de momentos de las fuerzas con respecto a AD es cero. Denotando por λ al vector unitario a lo largo de AD.

$$\Sigma M_{AD} = 0 \quad ; \quad \lambda \cdot (\overline{AE} \times T) + \lambda \cdot (\overline{AC} \times W) = 0 \quad \dots\dots (1)$$

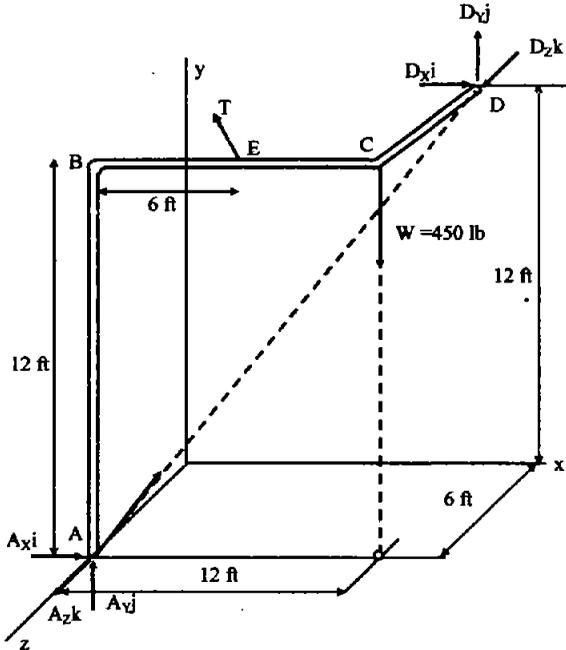


Fig. 2.54

El segundo término de la ecuación (1) puede calcularse de la siguiente forma:

$$\overline{AC} \times w = (12i + 12j) \times (-450j) = -5400k$$

$$\lambda = \frac{\overline{AD}}{AD} = \frac{12i + 12j - 6k}{18} = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k$$

$$\lambda \cdot (\overline{AC} \times W) = (2/3)i + (2/3)j - (1/3)k \cdot (-5400k) = 1800$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación (1)

$$\lambda \cdot (\overline{AE} \times T) = -1800 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad \dots\dots\dots (2)$$

Valor mínimo de la tensión. Por la propiedad conmutativa del triple producto escalar, la ec. (2)

queda: $T(\lambda \times \overline{AE}) = -1800 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad \dots\dots\dots (3)$

Que nos muestra que la proyección de T sobre el vector $\lambda \times \overline{AE}$ es una constante. Se infiere que T es mínima en la dirección paralela al vector,

$$\lambda \times \overline{AE} = (2/3)i + (2/3)j - (1/3)k \times (6i + 12j)$$

$$\lambda \times \overline{AE} = 4i - 2j + 4k$$

El vector unitario correspondiente es $(2/3)i - (1/3)j + (2/3)k$, de manera que:

$$T_{\text{MIN}} = T(2/3)i - (1/3)j + (2/3)k \quad \dots\dots\dots(4)$$

Sustituyendo los valores de T y $\lambda \times \overline{AE}$ en la ecuación (3) encontramos $T = -300$, utilizando este valor en (4), obtenemos:

$$T_{\text{MIN}} = -200i + 100j - 200k$$

$$T_{\text{MIN}} = 300 \text{ lb}$$

Localización de G. Como el vector EG y la Fuerza T_{min} tienen la misma dirección, sus componentes deben ser proporcionales. Denotando por x, y, 0 las coordenadas de G, escribimos:

$$\frac{x - 6}{-200} = \frac{y - 12}{+100} = \frac{0 - 6}{-200}$$

$x = 0$ $y = 15 \text{ ft}$

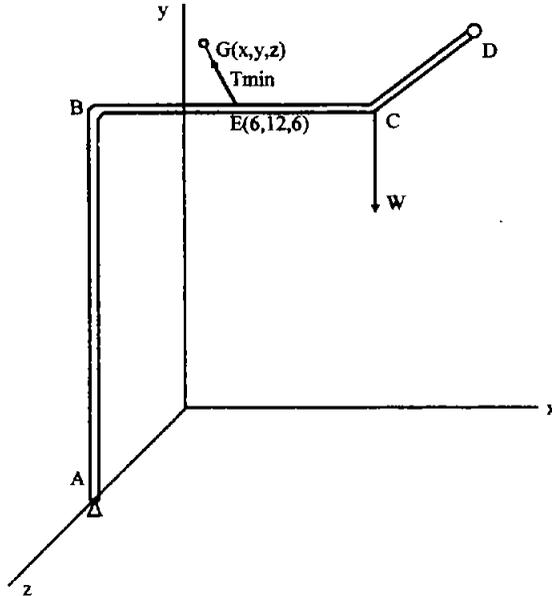


Fig. 2.55

2.6. SUPERPOSICIÓN DE CAUSAS Y EFECTOS.

➤ Consideremos el sistema de la figura siguiente:

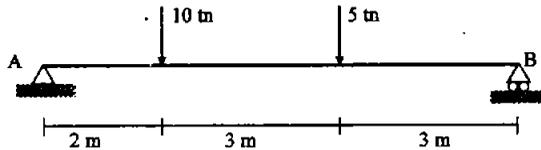


Fig. 2.56

Si calculamos las reacciones tenemos que,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; & R_{Ah} &= 0 \\ \sum M_A &= 10(2) + 5(5) - R_B(8) = 0 & R_B &= 5.625 \text{ ton} \\ \sum F_y &= R_{Av} - 10 - 5 + 5.625 = 0 & R_{Av} &= 9.375 \text{ ton} \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos son representativos de los efectos que las fuerzas de 10 y 5 ton provocan en los apoyos. Podemos inferir que una parte de la reacción es provocada por la fuerza de 10 ton y el resto por la de 5 ton. Basados en lo anterior, decimos que el sistema original de fuerzas puede resolverse considerando la acción simultánea de estas, o bien, si tomamos en cuenta solo una y encontramos sus reacciones y después consideramos la otra y también calculamos las reacciones para finalmente sumar en forma algebraica las correspondientes reacciones, encontramos que los resultados son iguales para ambos procedimientos.

Resolvamos el problema con otro criterio:

Sea,

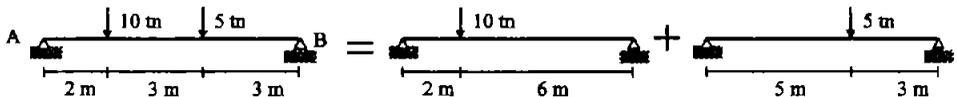


Fig. 2.57

Calculando las reacciones en los dos casos tenemos:

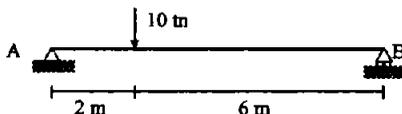


Fig. 2.58

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & ; & & R_{Ah} &= 0 \\ \sum M_A &= 10(2) - R_B(8) = 0 & & & R_B &= 2.5 \text{ ton} \\ \sum F_y &= R_{Av} - 10 + 2.5 = 0 & & & R_{Av} &= 7.5 \text{ ton} \end{aligned}$$

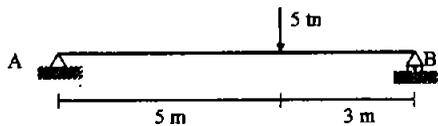


Fig. 2.59

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad R_{Ah} = 0$$

$$\sum M_A = 5(5) - R_B(8) = 0$$

$$R_B = 3.125 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = R_{AV} - 5 + 3.125 = 0$$

$$R_{AV} = 1.875 \text{ ton}$$

Sumando las reacciones tenemos lo siguiente:

$$R_{Ah} = 0 + 0$$

$$R_{AV} = 7.5 + 1.875$$

$$R_B = 2.5 + 3.125$$

;

;

;

$$R_{Ah} = 0$$

$$R_{AV} = 9.375 \text{ ton}$$

$$R_B = 5.625 \text{ ton}$$

2.7. PROBLEMAS PROPUESTOS

- a) El semáforo de la figura pesa 500 kg, y está sostenido por cables inextensibles y sin peso que se indican. Calcule las tensiones en cada uno de ellos.

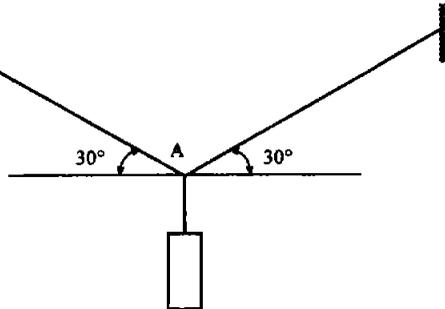


Fig. 2.60

- b) La polea de la figura puede deslizar libremente sobre el cable soporte que le sirve de guía. ¿Cuál es la tensión en este cable bajo las condiciones indicadas?

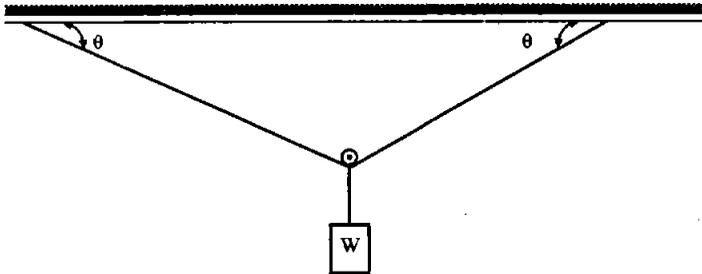


Fig. 2.61

- c) ¿Cuánto valen las tensiones en los cables de la figura?

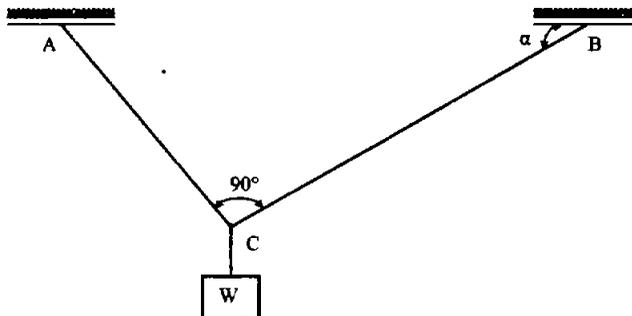


Fig. 2.62

- d) ¿Cuál es la fuerza P necesaria para mantener el cuerpo C en la posición mostrada en la figura, si este pesa 200 kg ?

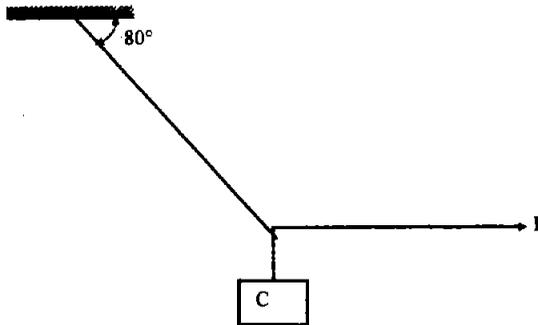


Fig. 2.63

- e) Un cable unido al sistema tierra en A , pasa por una polea C y sostiene, como se indica en la figura, los cuerpos B y D de pesos respectivos W_B y W_D . Calcule la flecha que se produce.

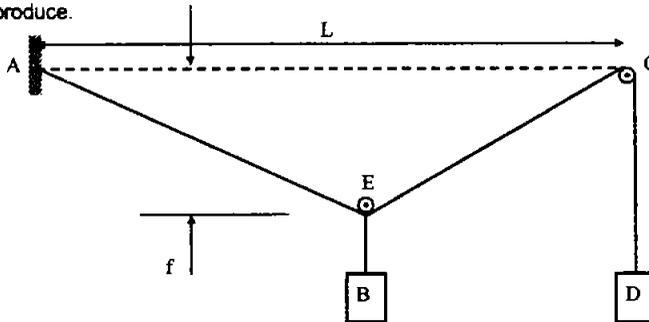


Fig. 2.64

- f) Halle la tensión en el cable BD dibujado en la figura, si la polea no tiene masa y las superficies en contacto son lisas.

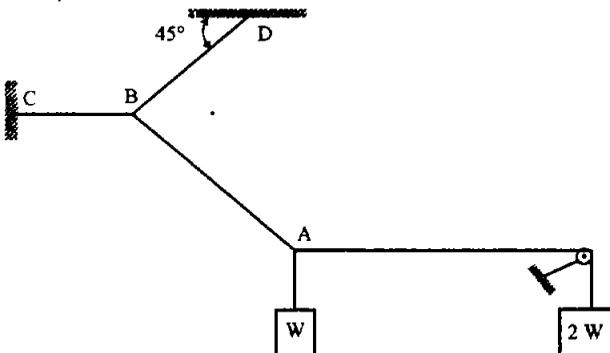


Fig. 2.65

- g) El cable de la figura es inextensible, sin peso y está unido al sistema tierra en los puntos A y C. Si sostiene por medio de una polea B un cuerpo que pesa 1000 kg. Y su longitud alcanza $10\sqrt{2}$ m, encuentre los ángulos α , β y la tensión en él.

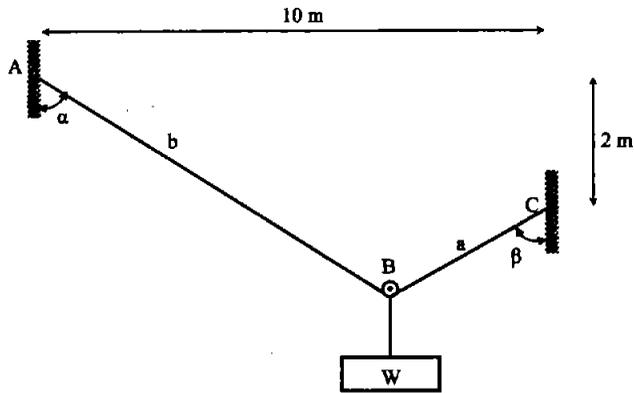


Fig. 2.66

- h) Calcular las magnitudes de las compresiones en las barras AD, BD, y CD del dispositivo mostrado en la figura.

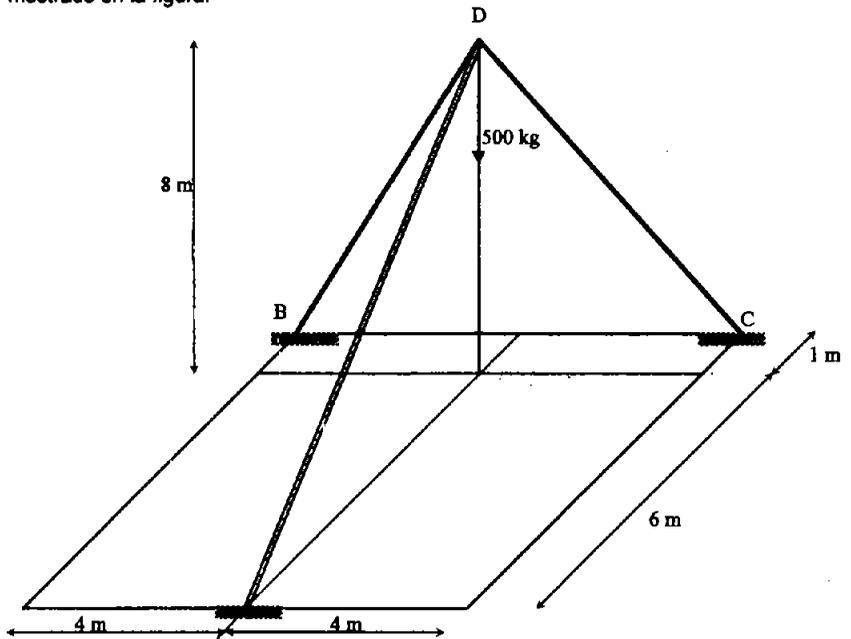


Fig. 2.67

- i) La esfera mostrada en la figura es de 3m de radio, pesa 4 ton, se encuentra recargada en dos paredes lisas y está sostenida por un cable de 6m de largo. Encuentre la tensión en el cable y las reacciones en las paredes.

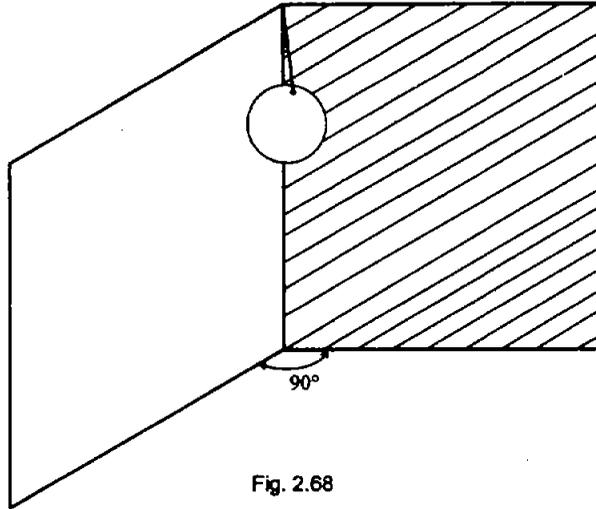


Fig. 2.68

- j) Determine las fuerzas axiales en los cables y en la tornapunta del dispositivo indicado en la figura, definiendo sus naturalezas.

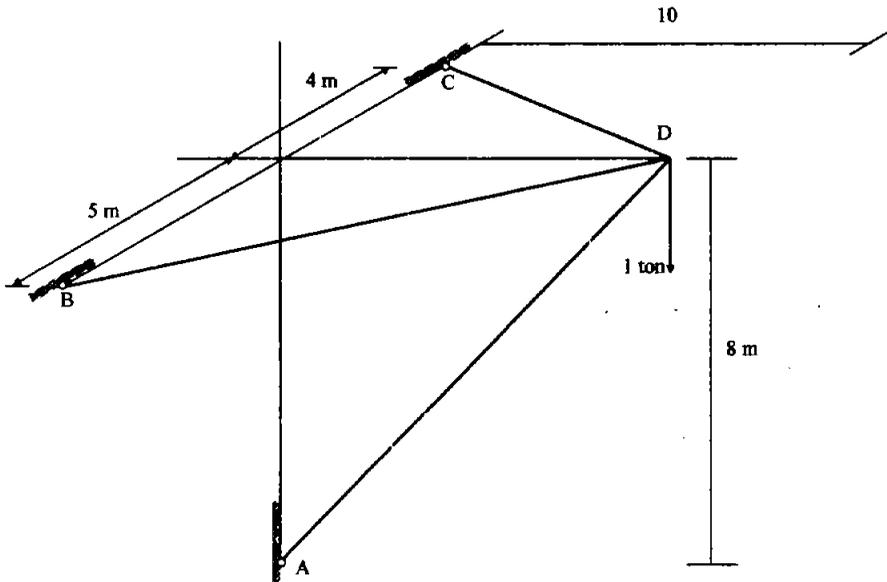


Fig. 2.69

- k) Calcule las compresiones en las barras AC y BC, así como la tensión en el cable CD.

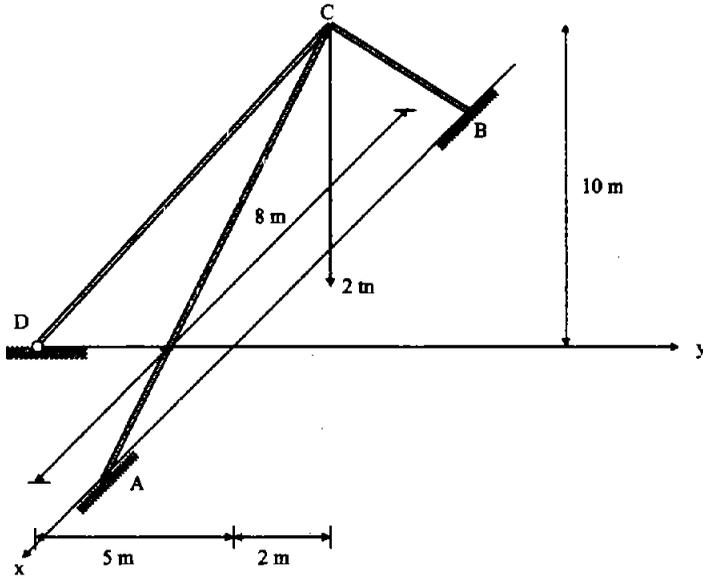


Fig. 2.70

- l) Los tres cables de la figura sostienen un cuerpo que pesa 20 ton, calcule las tensiones en aquellos.

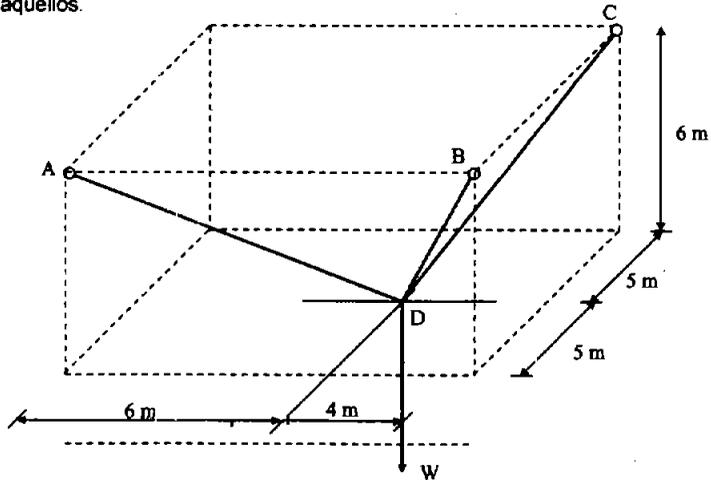


Fig. 2.71

- m) Determine las fuerzas que actúan en las barras A y B cuando están sujetas a la acción de la fuerza P de 3 ton.

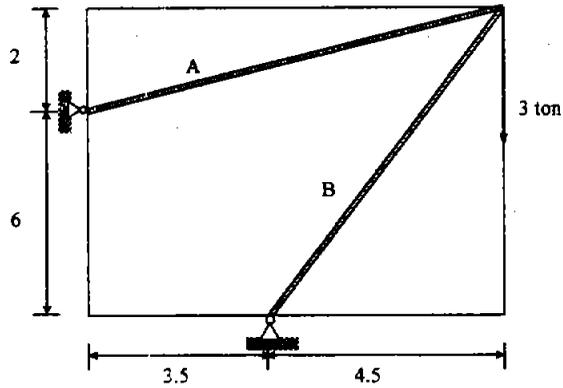


Fig. 2.72

- n) La lámpara fluorescente de la figura pesa 20 Kg, encuentre las tensiones en los cables que la soportan.

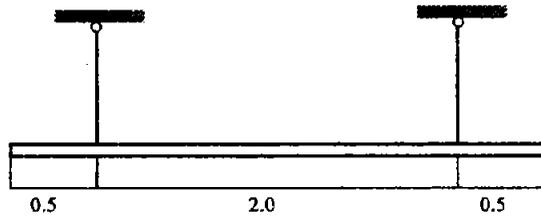


Fig. 2.73

- o) El dispositivo de la figura se encuentra en equilibrio. Calcule la reacción en la articulación de apoyo A y la tensión en el cable BC.

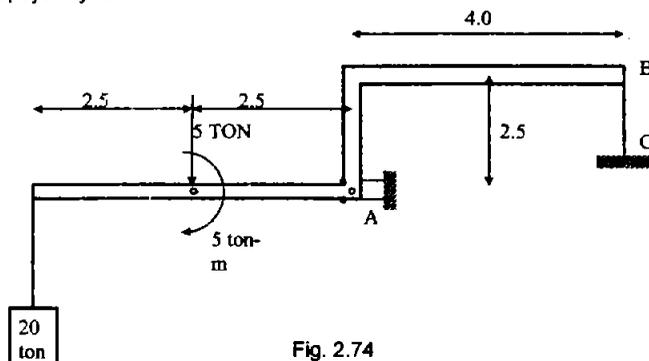


Fig. 2.74

- p) Obtenga como funciones de posición de la grúa viajera, a la reacción en A y a la tensión del cable BC que, conjuntamente, mantenga a la mensula en equilibrio. Estudie el comportamiento de aquellas.

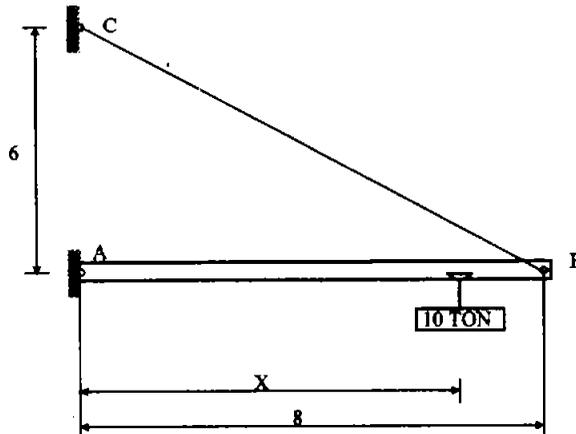


Fig. 2.75

- q) Determine las reacciones para la viga cantiliver esquematizada en la figura.

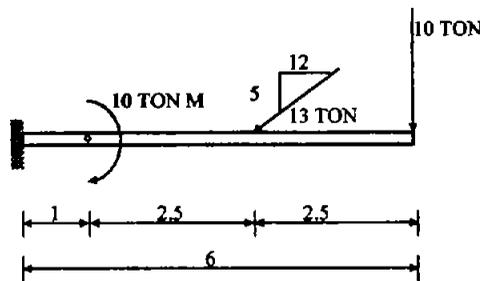


Fig. 2.76

- r) Deduzca una regla simple para calcular reacciones en vigas simplemente apoyadas. Considere disposiciones en términos de una carga concentrada y de acuerdo con la existencia o no de voladizos.

- s) A base de la regla deducida en el ejemplo anterior, valúe las magnitudes de las reacciones de las vigas siguientes, indicando el sentido de las fuerzas.

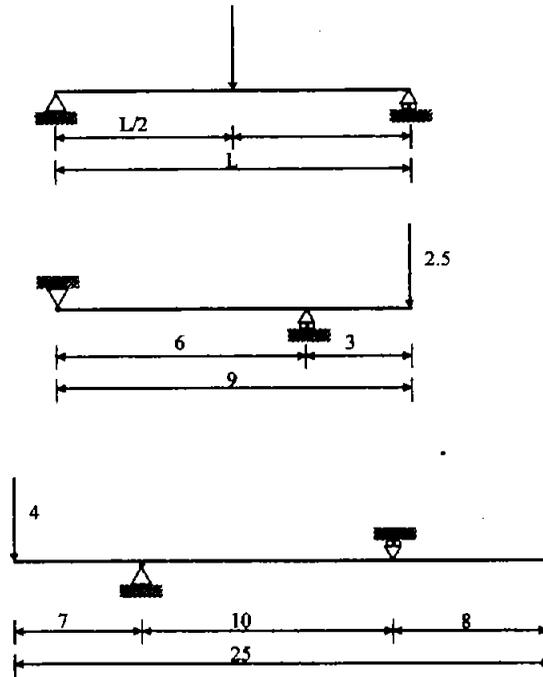


Fig. 2.77

- t) Descompone el sistema de cargas que actúan en la viga simplemente apoyada de la figura, buscando que puedan calcularse las reacciones con el empleo reiterado de la regla dada en el ejercicio r.

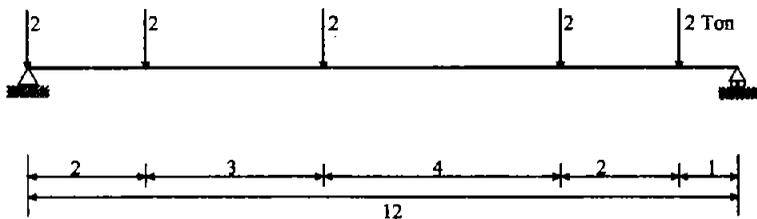


Fig. 2.78

u) Establezca las reacciones de las vigas mostradas en la figura.

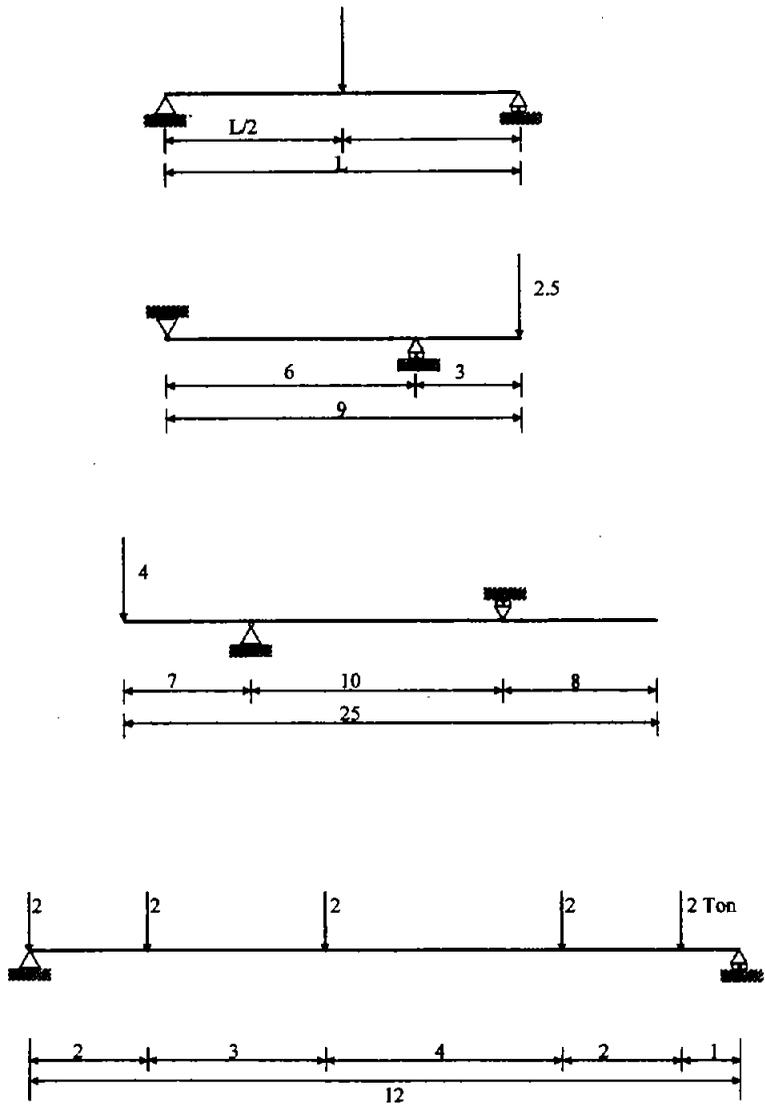


Fig. 2.79

- v) Determine las tensiones en los retenidos del mástil OA y la reacción en la rotula que lo recibe inferiormente.

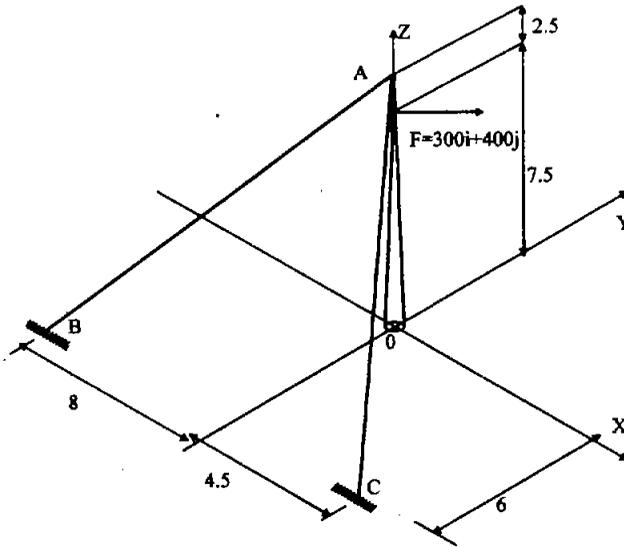


Fig. 2.80

- w) El cable BAC pasa a través de un aro sin fricción A y está unido a los soportes fijos B y C, mientras que los cables AD y AE están amarrados al aro y unidos, respectivamente, a los soportes D y E. Sabiendo que una carga vertical P de 6 ton se aplica al aro A, determine la tensión en cada uno de los tres cables.

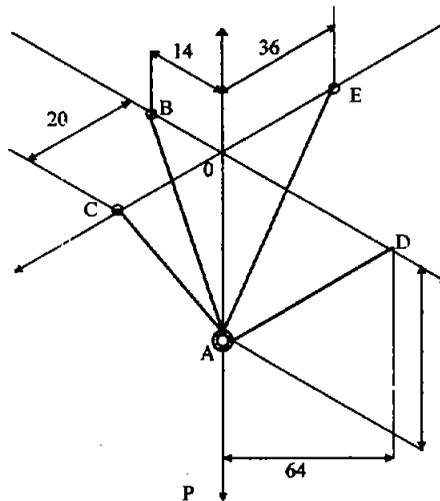


Fig. 2.81

ANALISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS SOMETIDAS A CARGA AXIAL

3.1. CABLES

3.1.1. TIPOS DE CABLES

Para salvar un claro sobre un río se utilizan los puentes; existen diferentes alternativas para diseñarlos, pero una de ellas es proyectar un puente colgante. Para ello se requiere el conocimiento de los cables. Los cables se usan también para sostener techumbres o en la construcción de líneas de conducción eléctrica.

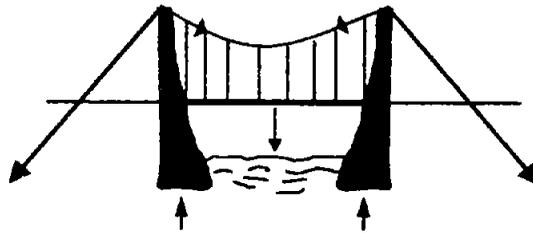


Fig. 3.1

Los elementos tipo Cable, No poseen rigidez para soportar esfuerzos de flexión, compresión o cortantes. Al someter a cargas a un cable este cambia su geometría de tal manera que las cargas son soportadas por esfuerzos de tensión a lo largo del elemento. Siempre encontraremos que cuando aplicamos una fuerza el cable tendrá otra geometría.

Los cables se fabrican de varios materiales, pero los metálicos son los de mayor uso. Los cables se encuentran como elementos aislados o como parte de sistemas mecánicos o estructurales.

En nuestro caso, consideraremos cables flexibles, que no se alargan como son flexibles no resisten la flexión, y por ello el momento flexionante en cualquier sección transversal es nulo. Lo mismo sucede con la fuerza cortante, de tal manera que el único elemento mecánico que se presenta es la fuerza normal positiva, o sea una fuerza de tensión (Fig. 3.1).

3.1.2. CLASIFICACION DE ACUERDO CON LAS SOLICITACIONES QUE SOPORTAN

- a. Cables de elementos rectilíneos: este tipo de cables mantiene cargas *verticales concentradas* en puntos llamados *nodos*, y por ello la conformación geométrica del mismo es de tipo *recto o poligonal* (Fig. 3.2)

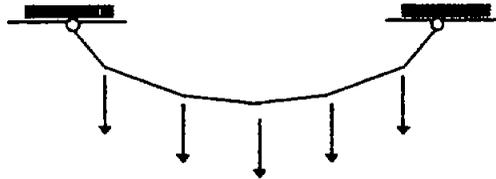


Fig. 3.2

- b. Cables parabólicos: en estas estructuras la carga se presenta *repartida uniformemente* según un eje horizontal y por ello la forma que adopta el cable es parabólica (Fig. 3.3)

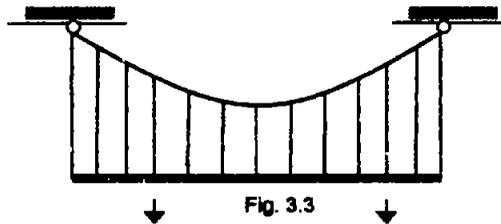


Fig. 3.3

- c. Cables catenarios: el cable que mantiene su *propio peso* de manera uniformemente distribuida según su eje va adquiriendo una forma tipo *cadena*, de donde toma su nombre (Fig. 3.4)



Fig. 3.4

- d. Cables elípticos: cuando un cable soporta *cargas repartidas en forma uniformemente creciente hacia los extremos*, alcanza una conformación *elíptica* estos cables son poco usuales (Fig. 3.5).

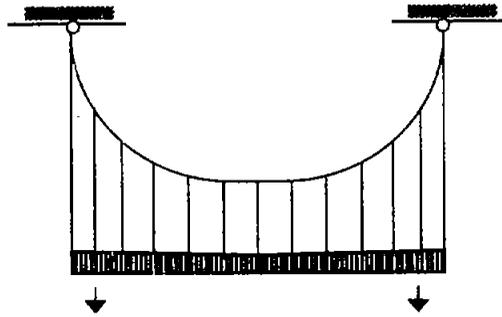


Fig. 3.5

Hagamos el análisis de un cable sujeto a cualquier tipo de carga. Para ello, consideremos los soportes A y B sobre los cuales está suspendido el cable que tiene una distribución de carga $Q(x)$ y que actúa verticalmente sobre el mismo plano del cable (Fig.3.6).

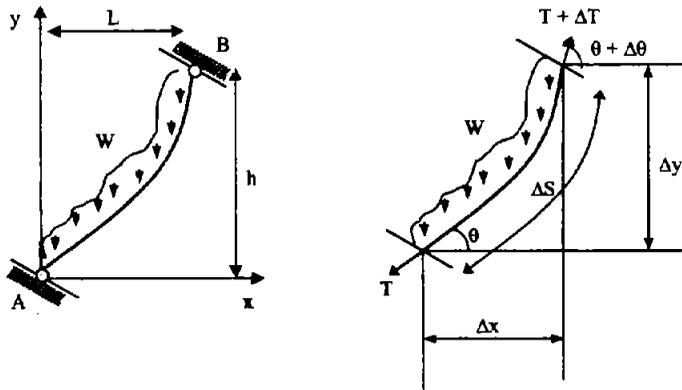


Fig. 3.6

Tomemos como diagrama de cuerpo libre un elemento de longitud ΔS . las fuerzas T y $T + \Delta T$ tienen componentes horizontales y verticales. Formulando las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ &- T \cos \theta + (T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta \theta) = 0 \end{aligned} \quad (A)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ &- T \operatorname{sen} \theta + (T + \Delta T) \operatorname{sen}(\theta + \Delta \theta) - Q \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (B)$$

Dividamos las dos expresiones por Δx y tomemos el límite cuando Δx tiende a cero:

$$\frac{d(T \cos \theta)}{dx} = 0 \quad (A')$$

$$\frac{d(T \sin \theta)}{dx} = Q(x) \quad (B')$$

Para que la ecuación (A') se cumpla, es necesario que:

$$T \cos \theta = \text{constante} = H$$

Donde H representa la *componente horizontal* a lo largo del cable. Esto es indicativo de que, en cualquier punto del cable, la componente horizontal de la tensión tendrá el *mismo valor*.

Integramos la ecuación (B')

$$T \sin \theta = Q(x) dx + C_1$$

La ecuación (C) $T = H/\cos \theta$, al sustituirla en la ecuación anterior, permite un mejor desarrollo:

$$\frac{H}{\cos \theta} \sin \theta = \int Q(x) dx + C_1$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{H} \int Q(x) dx + C_1$$

pero $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{dy}{dx}$

sustituyendo: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \int Q(x) dx + C_1$

Integramos nuevamente:

$$Y = \int \left[\frac{1}{H} \int Q(x) dx + C_1 \right] dx + C_2$$

$$Y = \frac{1}{H} \int \left[\int Q(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

La expresión anterior es la ecuación general de la curva de deflexión de un cable con sistema de carga $Q(x)$, donde las constantes C_1 y C_2 se determinan en cada caso de acuerdo a las condiciones de los soportes A y B.

Para calcular la longitud del cable tenemos:

$$L = \int ds \quad \text{siendo} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Despejando y sustituyendo:

$$ds = \sqrt{\frac{(dx^2 + dy^2)dx^2}{dx^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$L = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

La igualdad anterior nos permite calcular la *longitud de un cable* desde el punto mas bajo del mismo, hasta uno de sus apoyos.

Si ahora consideramos una porción del cable procurando que un extremo coincida con la parte mas baja del mismo y tomamos en cuenta la expresión (C), llegamos a las siguientes proposiciones, de acuerdo con la figura donde Q representa la carga total del cable en el tramo considerado (Fig. 3.7)

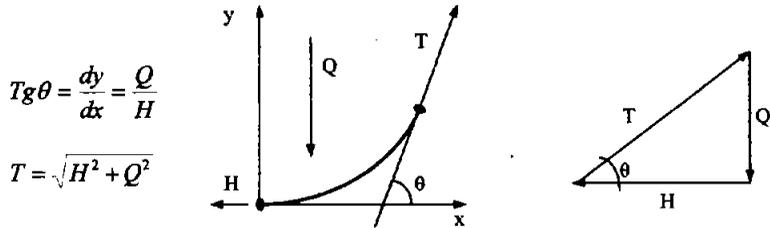


Fig. 3.7

Las igualdades anteriores sirven para calcular la tensión en un punto dado del cable y la relación de la carga total, respecto a la carga horizontal que ejerce el cable en su punto mas bajo.

Resumen

Un cable es una estructura flexible que solo soporta fuerzas de tensión. De acuerdo con su carga se clasifican así:

- a. rectilíneos (cargas concentradas)
- b. Parabólicos (Carga uniforme horizontal)
- c. Catenarios (carga uniforme según el cable).
- d. elípticos (carga creciente hacia los extremos).

La componente horizontal de la tensión en cualquier punto del cable siempre se mantiene constante

La ecuación del lugar geométrico de los puntos que pertenecen al cable es:

$$Y = \frac{1}{H} \int \int [Q(x) dx] dx + C_1 + C_2$$

La longitud del cable se calcula con la expresión:

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

En un cable, la tensión que soporta en un punto dado se calcula de acuerdo con la carga total que actúa desde este punto hasta la parte mas baja del cable, con las siguientes igualdades:

$$\text{Tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H} \quad T = \sqrt{H^2 + Q^2}$$

Resolvamos ahora el siguiente problema: el cable de un puente colgante esta apoyado en dos pilares separados entre si una distancia de 250 m. la carga que soporta esta repartida uniformemente en forma horizontal a razón de 4 Ton/m. calcular las reacciones en los apoyos, la longitud del cable y su ecuación de deflexión. (Fig. 3.8).

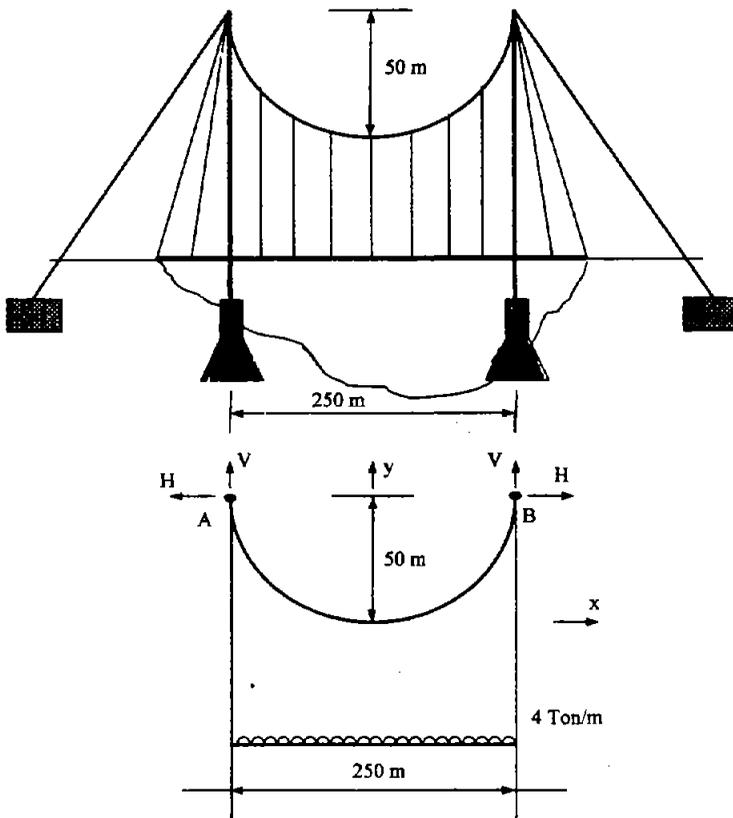


Fig. 3.8.

En primer lugar calculemos sus reacciones, considerando que la estructura es simétrica:

$$\sum M_A = 0 \quad ; \quad V(250) = 4(250)(125) \quad ; \quad V = 500 \text{ Ton}$$

$$\sum M_C = 0 \quad ; \quad H(50) + 4(125)(62.5) = V(125) \quad ; \quad H = 625 \text{ Ton}$$

La ecuación de deflexión es la siguiente:

$$Y = \frac{1}{625} \int \int [4 dx] dx + C_1 x + C_2$$

$$Y = \frac{1}{625} \int 4x dx + C_1 x + C_2$$

$$Y = \frac{1}{625} \cdot \frac{4x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$Y = \frac{2x^2}{625} + C_1 x + C_2$$

En la ecuación anterior se cumple que:

$$\text{Si } x = y = 0 \quad \text{entonces} \quad C_2 = 0$$

$$\text{Si } x = 125, \quad y = 50, \quad \text{entonces} \quad C_1 = 0$$

De esta manera la ecuación de deflexión es:

$$Y = \frac{2x^2}{625}$$

La longitud del cable la evaluamos con la expresión:

$$L = 2 \int_0^{125} \sqrt{1 + \left(\frac{4x}{625}\right)^2} dx$$

La solución de esta integral es de tipo logarítmico de difícil aplicación práctica, pero desarrollándola como una serie infinita resulta:

$$L = 250 \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{50}{625}\right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{50}{625}\right)^4 + \dots \right]$$

Tomando solo los tres primeros términos obtenemos:

$$L = 274.11 \text{ m}$$

* La expresión que se aplica para calcular la longitud, en función del claro a y de la flecha f , es

$$L = a \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{a} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{f}{a} \right)^4 + \dots \right]$$

Si deseáramos calcular la longitud del cable en función de las coordenadas de uno de sus apoyos $A(x,y)$ utilizaríamos la forma:

$$L = x \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y}{x} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{y}{x} \right)^4 + \dots \right]$$

3.1.3. CABLES DE ELEMENTOS RECTILÍNEOS

Es común que cuando se desea colocar una techumbre que abarque un claro más o menos grande sin tener columnas intermedias, se recorra a cables sustentadores de tal forma que soporten cargas concentradas como se aprecia en la ilustración (Fig. 3.9). Esta condición de cargas hace posible que el lugar geométrico del cable sea una *poligonal*, es decir, que existan elementos rectilíneos entre carga y carga.

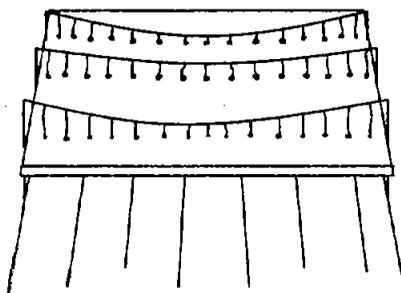


Fig. 3.9

Cuando el peso del cable es despreciable en comparación a las cargas concentradas que soporta, estamos en presencia de un cable de *elementos rectilíneos* o de *cargas concentradas*. Para resolver este tipo de cables basta calcular las reacciones en los apoyos y posteriormente conformar sistemas de fuerzas concurrentes en cada *nodo* o punto de acción de las cargas. (Fig. 3.10)

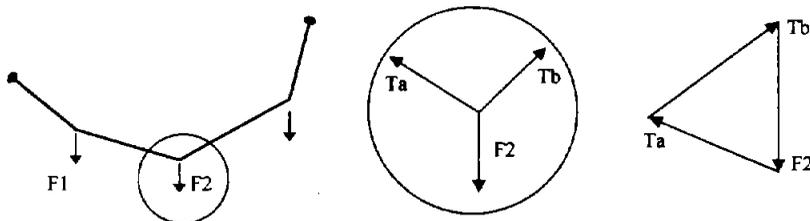


Fig. 3.10

Los nodos o puntos de concurrencia deben tener definida alguna de sus coordenadas (generalmente la horizontal) para que el problema sea determinado, y uno de ellos debe quedar definido en ambas coordenadas.

Cables de elementos rectilíneos: Es un cable que soporta cargas concentradas en puntos llamados nodos, por lo cual su geometría es una poligonal. Para su solución se requiere conocer la posición de tres de los nodos y al menos una coordenada de todos los demás.

Para hacer mas claros los conceptos y el procedimiento de calculo, resolvamos el siguiente problema: el cable A,B,C,D,E sostiene tres cargas concentradas en los nodos B,C y D, de 3,6 y 2 toneladas respectivamente, teniendo sus apoyos desnivelados 4 metros como se observa en el diagrama de la figura 3.11

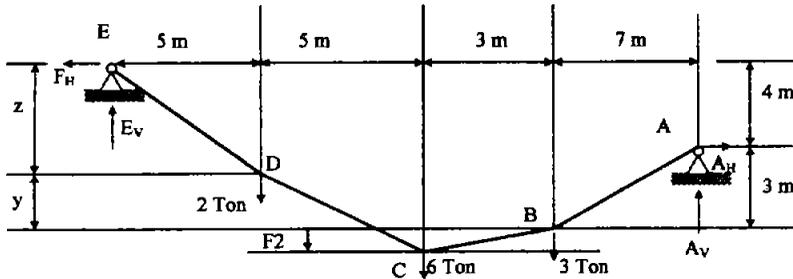


Fig. 3.11

Primero calculamos las reacciones:

$$\sum M_A = 0 \quad E_V(20) = E_H(4) + 2(15) + 6(10) + 3(7) \quad (a)$$

$$\sum M_B = 0 \text{ (tramo EB)} \quad E_V(13) = E_H(7) + 2(8) + 6(3) \quad (b)$$

$$\sum F_y = 0 \quad E_V + A_V = 2 + 6 + 3 \quad (c)$$

$$\sum F_x = 0 \quad E_H = A_H \quad (d)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (a) (b) obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} 20E_V = 4E_H + 11 \\ 13E_V = 7E_H + 34 \end{array} \right\} \quad E_V = 7.28 \text{ Ton} \quad E_H = 8.67 \text{ Ton}$$

Llevando estos valores a las expresiones (c) y (d) concluimos:

$$A_V = 3.72 \text{ Ton} \quad A_H = 8.67 \text{ Ton}$$

Una vez calculadas las reacciones, formamos un sistema de ecuaciones en cada nodo como se aprecia en los diagramas de cuerpo libre de la figura 3.12

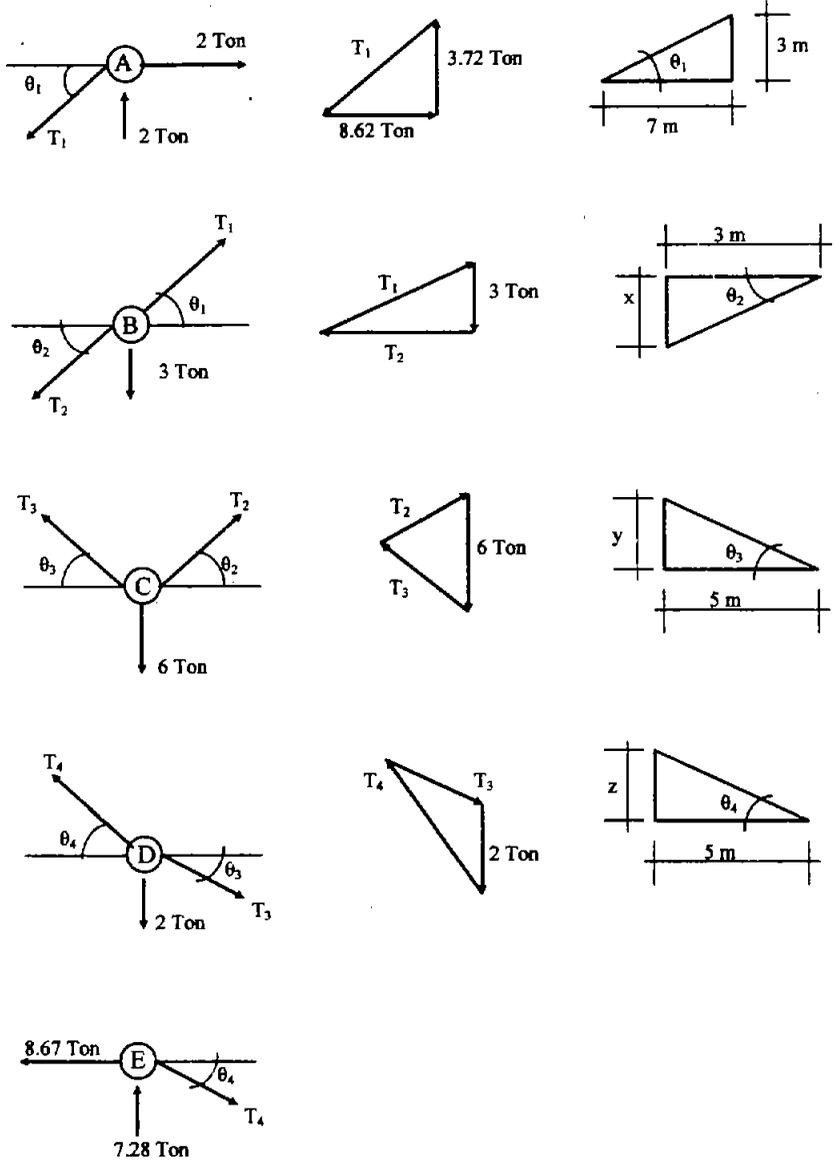


Fig. 3.12

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Nodo A } \sum F_x = 0 & 8.67 = T_1 \cos \theta_1 & \left. \begin{array}{l} T_1 = 9.43 \text{ Ton} \\ \theta_1 = 23.22^\circ \end{array} \right\} \\
 \sum F_y = 0 & 3.72 = T_1 \sin \theta_1 & \\
 \text{Nodo B } \sum F_x = 0 & 9.43 \cos 23.22^\circ = T_2 \cos \theta_2 & \left. \begin{array}{l} T_2 = 8.70 \text{ Ton} \\ \theta_2 = 4.74^\circ \end{array} \right\} \\
 \sum F_y = 0 & 9.43 \sin 23.22^\circ = T_2 \sin \theta_2 + 3 & \\
 \text{Nodo C } \sum F_x = 0 & 8.70 \cos 4.74^\circ = T_3 \cos \theta_3 & \left. \begin{array}{l} T_3 = 10.15 \text{ Ton} \\ \theta_3 = 31.34^\circ \end{array} \right\} \\
 \sum F_y = 0 & 8.70 \sin 4.74^\circ + T_3 \sin \theta_3 = 6 & \\
 \text{Nodo D } \sum F_x = 0 & 10.15 \cos 31.34^\circ = T_4 \cos \theta_4 & \left. \begin{array}{l} T_4 = 11.32 \text{ Ton} \\ \theta_4 = 40.02^\circ \end{array} \right\} \\
 \sum F_y = 0 & 2 + 10.15 \sin 31.34^\circ = T_4 \sin \theta_4 &
 \end{array}$$

El nodo E sirve de verificación:

$$\begin{array}{rcl}
 \sum F_x = 0 & 8.67 = 11.32 \cos 40.02^\circ & \\
 \sum F_y = 0 & 7.28 = 11.32 \sin 40.02^\circ &
 \end{array}$$

Los desniveles de los nodos son:

$$\begin{array}{l}
 X = 3 \tan 4.74^\circ = 0.25 \text{ m} \\
 Y = 5 \tan 31.34^\circ = 3.04 \text{ m} \\
 Z = 5 \tan 40.02^\circ = 4.20 \text{ m}
 \end{array}$$

Queda al lector comprobar que todas las proyecciones horizontales de las fuerzas son iguales.

3.1.4. CABLES PARABOLICOS

Cuando debe tenderse una tubería de uno a otro edificio de una industria, para soportarla se utiliza un cable. Este tipo de cable sostiene cada tramo de tubo a través de cables verticales que, al estar tan cerca uno del otro, se considera que la carga transmitida al cable curvo es una carga *uniformemente distribuida*. El cable tiene un peso despreciable en comparación a la tubería, y su configuración es *parabólica* tal como se observa en la Fig. 3.13.

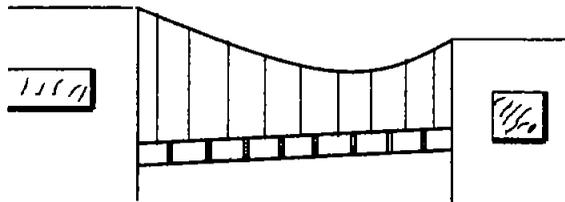


Fig. 3.13

si consideramos el cable parabólico de la figura 3.14, donde conocemos la carga *uniformemente repartida* W , el claro del mismo L y la ubicación de los *apoyos*, es posible calcular la *ecuación del cable* y la *fuerza máxima* que soporta.

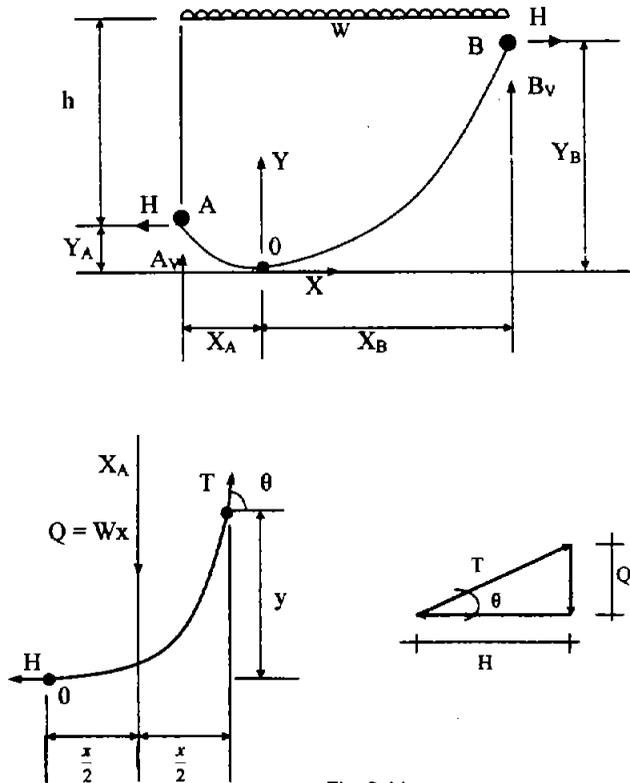


Fig. 3.14

Ubicamos el sistema de referencia en el punto mas bajo del cable para facilitar su análisis. La carga que soporta Q y la tensión máxima T son:

$$Q = Wx$$

$$T = \sqrt{H^2 + Q^2} = \sqrt{H^2 + W^2 X^2}$$

$$\tan \theta = \frac{Q}{H} = \frac{WX}{H}$$

Haciendo una suma de momentos en el punto P tenemos:

$$\sum M_p = 0 \quad Wx \frac{x}{2} - Hy = 0$$

Despejando

$$Y = \frac{Wx^2}{2H}$$

Esta es la ecuación de una parábola con eje vertical y vértice en el origen.

Cable parabólico: Es un cable que soporta carga uniformemente distribuida en forma horizontal, por lo que su geometría es la de una parábola. Para resolver un cable de este tipo se necesita conocer una de las coordenadas de un punto y la posición de los apoyos.

Ejemplo:

Se tiene un cable con apoyos desniveledos 1.5m librando un claro de 20m, como se aprecia en el diagrama (Fig. 3.15). Calcular las reacciones en los apoyos, la ecuación del cable y el valor máximo de la tensión al soportar una carga horizontalmente uniforme de 2 Ton/m.

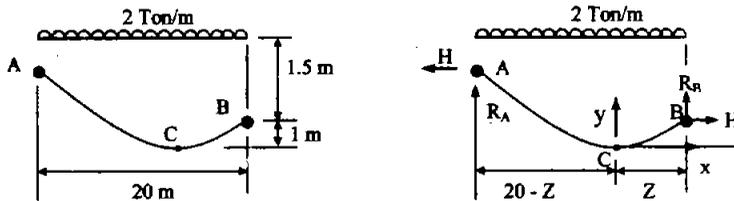


Fig. 3.15

En primer término calculemos las reacciones:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & & 20R_B + 1.5H &= \frac{2(20)^2}{2} \\ & & 20R_B + 1.5H &= 400 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 \text{ (tramo CB)} & & ZR_B &= H(1) + \frac{20Z^2}{2} \\ & & ZR_B - H &= 10Z^2 \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 & & 20R_A &= H(1.5) + \frac{2(20)^2}{2} \\ & & 20R_A - 1.5H &= 400 \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} Y = \frac{Wx^2}{2H} \text{ (punto B)} & & 1 &= \frac{2Z^2}{2H} \\ & & H &= Z^2 \end{aligned} \quad (d)$$

Resolviendo las ecuaciones (a), (b), (c), y (d) obtenemos la solución:

$$R_A = 20.24 \text{ Ton}$$

$$H = 3.20 \text{ Ton}$$

$$R_B = 19.76 \text{ Ton}$$

$$Z = 1.79 \text{ m}$$

La ecuación del cable es:

$$Y = \frac{20x^2}{2(3.2)} \quad ; \quad Y = 3.125 x^2$$

La tensión máxima que soporta el cable es:

$$T = \sqrt{3.2^2 + 2^2(18.21)^2} = 36.56 \text{ Ton (en A)}$$

3.1.5. CABLES CATENARIOS

Al sostener una cadena por sus dos extremos sin tensarla, su conformación se denomina catenaria. (Fig. 3.16)

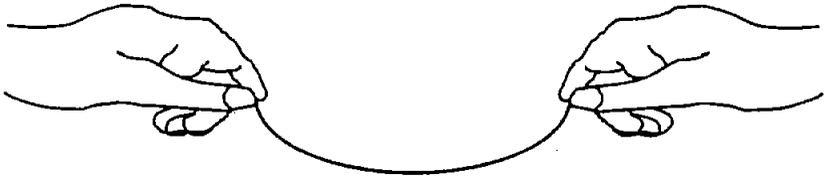


Fig. 3.16

Cuando un cable sostiene *únicamente su propio peso*, presenta una deflexión tipo cadena y por ello se denomina *cable catenarie*. Son cables catenarios todas las líneas de conducción del fluido eléctrico o los alambres telefónicos o telegráficos que soportan exclusivamente su peso. Este peso es *uniforme por unidad de longitud del cable*.

Consideremos un cable que soporta su propio peso y tomemos una porción del mismo como se muestra en la figura 3.17.

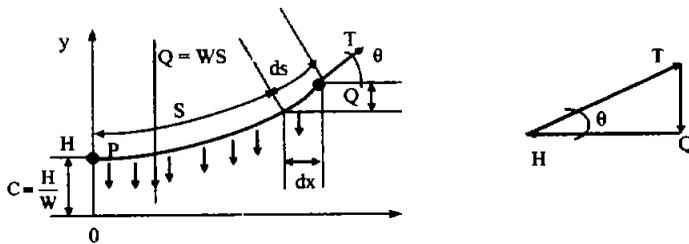


Fig. 3.17

De acuerdo con la formula general:

$$T = \sqrt{H^2 + W^2 S^2}$$

Consideremos la constante $C = H/W$ y tendremos que:

$$H = WC \quad Q = WS \quad T = W\sqrt{C^2 + S^2}$$

La proyección horizontal de una pequeña longitud del cable es:

$$dx = ds \cos \theta = \frac{H}{T} ds$$

Sustituyendo H y T por sus valores

$$dx = \frac{WC ds}{W\sqrt{C^2 + S^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + (S/C)^2}}$$

Integramos desde P hasta Q la expresión anterior:

$$X = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + (S/C)^2}} = C \operatorname{senh}^{-1} \frac{S}{C}$$

Lo anterior se puede escribir así:

$$S = C \operatorname{senh} \frac{X}{C}$$

Sustituyamos el valor de C

$$S = \frac{H}{W} \operatorname{senh} \frac{WX}{H}$$

La igualdad anterior permite conocer la longitud de una catenaria en función de su carga (W) y de la proyección horizontal de la fuerza de tensión (H).

Por otra parte, sabemos que:

$$\tan \theta = \frac{Q}{H} = \frac{dy}{dx}$$

De donde

$$dy = \frac{Q}{H} dx = \frac{WSdx}{WC} = \frac{s}{c} dx$$

Pero $(s/c) = \sinh(x/c)$, quedando:

$$dy = \sinh \frac{x}{c} dx$$

Integrando desde P hasta Q la expresión anterior:

$$y - C = \int_0^x \sinh \frac{x}{c} dx = c \left[\cosh \frac{x}{c} \right]_0^x = C \left[\cosh \frac{x}{c} - 1 \right]_0^x$$

$$y - C = C \cosh \frac{x}{c} - C$$

Sustituyendo el valor de C:

$$Y = \frac{H}{W} \cosh \frac{Wx}{H}$$

La ecuación anterior es la de una catenaria con eje vertical.

Elevando ambos miembros de las ecuaciones (a) y (b) al cuadrado y restando una de otra obtenemos:

$$Y^2 - S^2 = \frac{H^2}{W^2} \left(\cosh^2 \frac{Wx}{H} - \sinh^2 \frac{Wx}{H} \right)$$

Teniendo en cuenta la identidad $\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1$:

$$Y^2 - S^2 = \frac{H^2}{W^2} = C^2$$

Despejamos S^2 y sustituimos este valor en T.

$$S^2 = Y^2 - \left(\frac{H}{W} \right)^2$$

$$T = W \sqrt{C^2 + S^2} = W \sqrt{\left(\frac{H}{W} \right)^2 + \left[Y^2 - \left(\frac{H}{W} \right)^2 \right]}$$

$$T = WY$$

La relación anterior indica que la tensión máxima se tendrá en el punto del cable que posea mayor valor de su ordenada.

Cable catenaria: es un cable que sostiene su propio peso adoptando una geometría de cadena.

La proyección horizontal de la tensión siempre es constante en cualquier punto del cable ($H = WC$).

La proyección vertical de la tensión tendrá mayores valores hacia los apoyos ($Q = WS$).

La tensión total depende de la altura en que se encuentra el punto considerado, siendo los apoyos el lugar donde se presentan los valores máximos ($T = WY$).

En los cálculos hay que tomar en cuenta las siguientes expresiones:

$$S = C \sinh \frac{x}{c}$$

$$Y = C \cosh \frac{x}{c}$$

$$Y^2 + C^2 = S^2$$

Ejemplo:

Un cable catenaria tiene un peso de 10 kg/m por unidad de longitud, y está suspendido en dos puntos ubicados en el mismo plano horizontal. Calcúlese la flecha que debe tener para que la tensión en los apoyos sea de 2 ton. Calcúlese también el claro que libra el cable, si su longitud total es de 180 m y las reacciones en los apoyos. Fig. 3.18

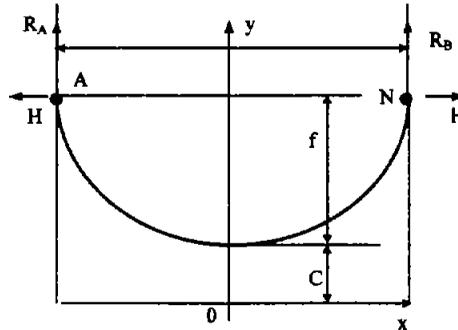


Fig. 3.18

De la expresión $T = WY$ despejemos $Y = \frac{T}{W} = \frac{2000}{10} = 200m$

Calculemos ahora el parámetro C:

$$C = \sqrt{Y^2 - S^2} = \sqrt{200^2 - 90^2} = 178.61m$$

La flecha será igual a:

$$f = Y - C = 200 - 178.61 = 21.39m$$

Analicemos el claro que libra a través de la ecuación.

$$dx = \int \frac{ds}{\sqrt{1+(S/C)^2}} = \ln \left[(S/C) + \sqrt{(S/C)^2 + 1} \right]$$

$$X + K = \ln \frac{S + \sqrt{S^2 + C^2}}{C}$$

Calculemos el valor de la constante K:

Para $X = 0$ y $S = 0$ entonces $K = C \ln C$

Quedando la expresión.

$$X = C \ln \frac{S + \sqrt{S^2 + C^2}}{C}$$

Sustituyendo los datos del problema:

$$\frac{L}{2} = 178.61 \ln \frac{90 + \sqrt{90^2 + 178.61^2}}{178.61}$$

$$L = 357.22 \ln 1.6237 = 173.14 \text{ m}$$

La solución a nuestro problema arroja los siguientes resultados: flecha de 21.39 m y claro de 173.14m. Ahora calculemos las reacciones en los apoyos:

$$H = WC = 10(178.61) = 1786.10 \text{ kg}$$

$$R_A = R_B = \frac{Q}{2} = \frac{WS}{2} = \frac{10(180)}{2} = 900 \text{ kg}$$

3.1.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcule las tensiones que soporta cada tramo del cable de elementos rectilíneos que se muestra en la figura 3.19, y cuales son las distancias d_B y d_D de los nodos B y D

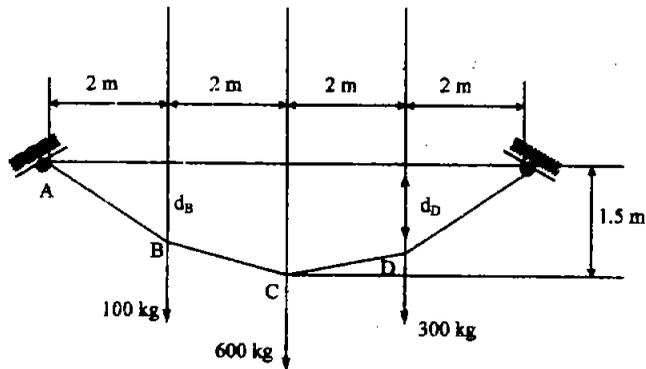


Fig. 3.19

2. en cada uno de los cables de la figura 3.20 calcula la máxima tensión y la localización de cada nodo, si:

a) $T = 400 \text{ kg}$

$a = 2 \text{ m}$

$b = 1 \text{ m}$

b) $T = 200 \text{ kg}$

$a = 1 \text{ m}$

$b = 2 \text{ m}$

c) $T = 100 \text{ kg}$

$a = 1.5 \text{ m}$

$b = 1.5 \text{ m}$

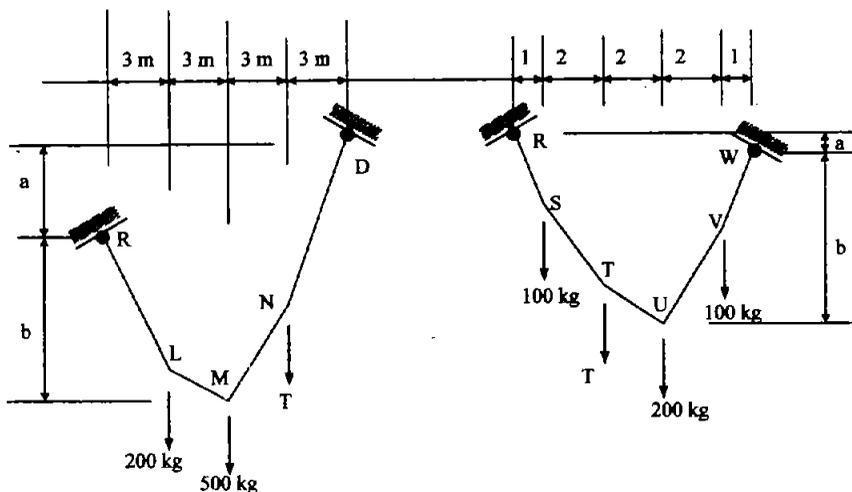


Fig. 3.20

3. Demuestra que el valor del momento flexionante en el punto Z de la viga PQ es igual al producto Hh , considerando que H es la componente horizontal de la tensión del cable en Z' del cable y la línea que une sus apoyos (Fig. 3.21)

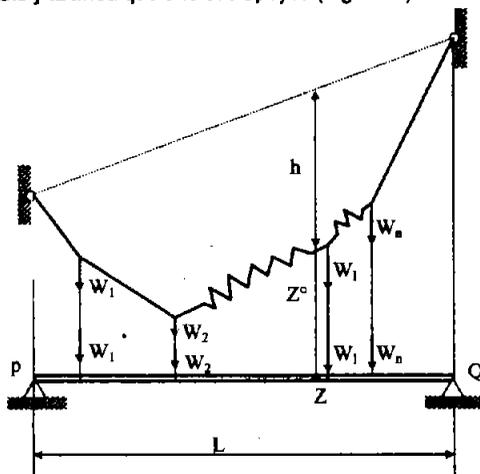


Fig. 3.21

4. una línea de transmisión de 5kg/m debe pasar por la ladera de una montaña por donde pasa una carretera como se observa en la figura 3.22. calcula la flecha f del cable para que las reacciones horizontales en la torre centras sean iguales, para no provocar ningún efecto en esa dirección. Calcula también las reacciones en cada torre.

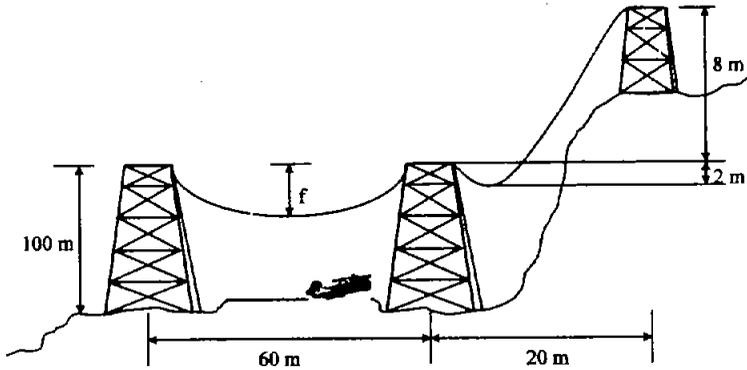


Fig. 3.22

5. el cable de un puente colgante soporta una carga de 2 Ton/m repartida uniformemente en forma horizontal. El claro es de 360 m, la flecha es de 12 m y los apoyos están al mismo nivel. Calcula la máxima tensión que soporta el cable y el Angulo que forma con la horizontal en dicho punto.
6. calcula la flecha de un cable suspendido entre dos apoyos que distan 19m y cuya longitud es igual a 20 m. asimismo calcula las reacciones si soporta una carga horizontal. Uniformemente repartida de 0.5 Ton/m.

Sugerencia: usa la formula:

$$L = a \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{a} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{f}{a} \right)^4 + \dots \right]$$

7. resuelve el problema 4 considerando que la carga de 5 kg/m esta uniformemente repartida de manera horizontal.
8. un cable telefónico cuelga entre dos postes de la misma altura, que distan entre si 30 m. si el cable tiene un peso propio de 2 kg/m, calcula su longitud y las reacciones en cada poste, si la flecha del mismo es de 90 cm.

9. ¿Cuál debe ser la separación entre los apoyos de un cable que soporta su propio peso de 3 kg/m , si la reacción horizontal no debe ser mayor a 40 kg y su flecha no debe pasar de 1 m .
10. determina la tensión del cable de la figura 3.23, en el punto más bajo y la tensión máxima.

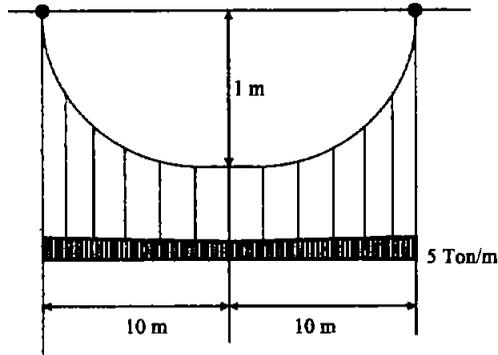


Fig. 3.23

11. aplica el método de conservación de proyecciones para resolver el ejercicio 2

3.2. ARMADURAS

3.2.1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Sistemas en celosía: Son sistemas mecánicos o estructurales formados por vigas o barras, interconectadas entre sí, mediante articulaciones que aceptan cualquier condición de carga.

Armaduras: Es una estructura en celosía que cumple con las siguientes características:

- a. el sistema de cargas que actúa sobre la estructura está contenido en el plano definido por todos los miembros que la constituyen.
- b. Los miembros de la estructura son elementos rígidos interconectados por medio de pasadores lisos perfectamente ajustados a los miembros que unen.
- c. Los sistemas de fuerzas activas y reactivas solo actúan sobre las uniones de los elementos.

Elementos de reacción: Es el número de fuerzas de reacción, proporcionadas por los apoyos de la armadura.

Barras: Llamaremos barras, a cada uno de los elementos componentes de las armaduras. Se considera que una barra es el miembro que se encuentra entre dos nudos.

Nudos: Llamaremos nudo al punto donde concurren dos o más miembros de la armadura. Los nudos son también, las articulaciones que unen a las barras, además de ser los puntos donde actúan las fuerzas.

Isostaticidad de una estructura: Decimos que una estructura es isostática cuando el número de elementos de reacción desconocidos es igual a la cantidad de ecuaciones de la estática disponibles para el cálculo de ellos.

Hiperestaticidad: La condición de Hiperestaticidad de una estructura tiene lugar cuando el número de elementos desconocidos de reacción es mayor que el de ecuaciones de la estática disponible para su cálculo.

Inestabilidad: Se dice que una estructura es inestable o hipostática si el número de elementos desconocidos de reacción es menor que el de ecuaciones disponibles para su cálculo.

Garantía de isostaticidad

Supóngase una armadura compuesta por "b" número de barras y por "n" número de nudos.

De acuerdo con los lineamientos de la estática, sabemos que sobre cada nudo encontraremos un sistema de fuerzas concurrentes, los cuales para garantizar su equilibrio solo necesitan que $F_x = 0$, $F_y = 0$. Es decir, cada nudo proporciona dos ecuaciones para resolver las incógnitas de la armadura. Así que el número de nudos multiplicado por dos proporcionara el total de ecuaciones disponibles. "2n"

La cantidad de fuerzas incógnitas esta determinado por el numero de barras, puesto que en cada barra esta actuando una fuerza, ya sea de compresión o de tensión, mas todas las reacciones que produzcan los apoyos.

Así, el total de incógnitas será:

$$"b + r" \quad \text{donde:} \quad \begin{aligned} b &= N^\circ \text{ de barras} \\ r &= N^\circ \text{ de reacciones} \end{aligned}$$

Basados en el planteamiento anterior, podemos clasificar las armaduras como:

INESTABLES;	SI	$b + r < 2n$
ISOSTATICAS;	SI	$b + r = 2n$
HIPERESTATICAS;	SI	$b + r > 2n$

Partes de la armadura

- Cuerda superior:** es el conjunto de barras que conforman *la parte mas elevada de la estructura*. Para solicitaciones de tipo gravitacional, normalmente son piezas que trabajan a *compresión*.
- Cuerda inferior:** es el conjunto de barras que forman *la parte más baja de la estructura*. Para solicitaciones gravitacionales generalmente trabajan a *tensión*.
- Montantes:** denominamos así a las *barras verticales* de una armadura
- Diagonales:** son piezas que, como su nombre lo indica, tienen posición inclinada.

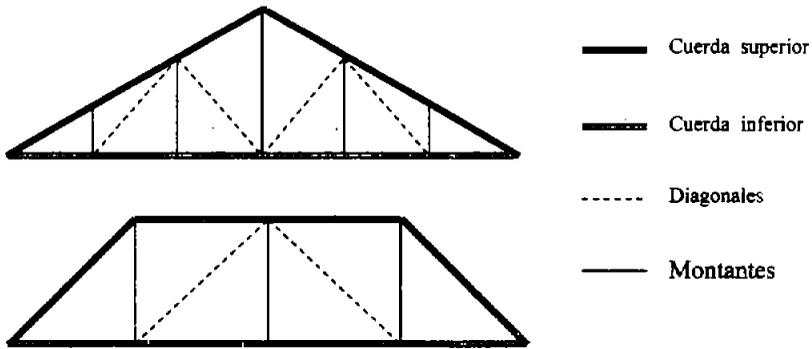
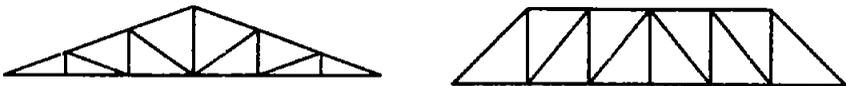


Fig. 3.24

Existen varios tipos de arreglos geométricos para las armaduras y ello permite hacer distinciones. Algunos de los tipos mas comunes los describimos a continuación, y por lo general se respeta que los ángulos de las diagonales tengan un valor comprendido entre 30° y 60° .

Armaduras tipo Howe son aquellas que se caracterizan por que sus diagonales trabajan a compresión y los montantes lo hacen a tensión. Las armaduras tipo Pratt tienen sus montantes con fuerzas de compresión, mientras que las diagonales trabajan a tensión. Cuando se necesita cubrir claros más o menos pequeños es ideal el tipo Fink, que contiene una serie de barras cortas que trabajan a compresión. Si el sistema de cargas es móvil y por ello las barras pueden trabajar tanto a tensión como a compresión, las armaduras tipo Warren son las mas adecuadas. En el caso que se haga necesario el paso de la luz a través de la estructura de techo, como es usual en las industrias, los mas común es el uso de las armaduras diente de sierra. Otros tipos pueden ser el de tijeras, tipo K, armaduras triarticulada o bases para torres de alta tensión o tanques de almacenamiento.

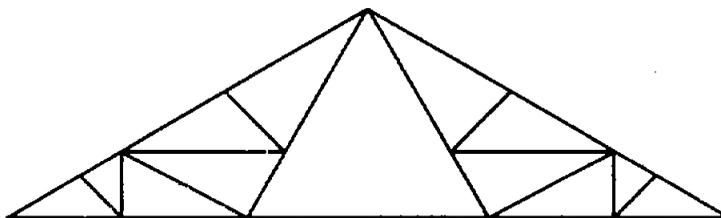
Howe: diagonales trabajando a compresión y montantes a tensión



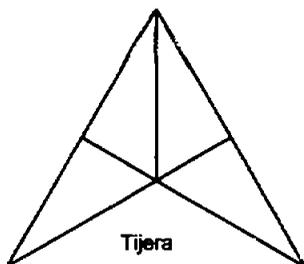
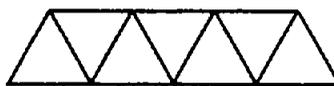
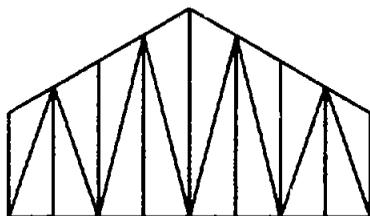
Pratt: diagonales trabajando a tensión y montantes a compresión.



Fink: las barras a compresión son las mas pequeñas.



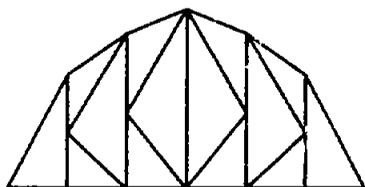
Warren: ideal para cargas móviles, como en los puentes



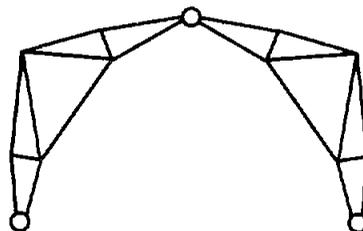
Tijera



Diente de Sierra



Tipo K



Triarticulada

Fig. 3.25

3.2.2. METODO DE LOS NUDOS

Calcular las fuerzas en cada barra de la siguiente armadura. Fig. 3.26

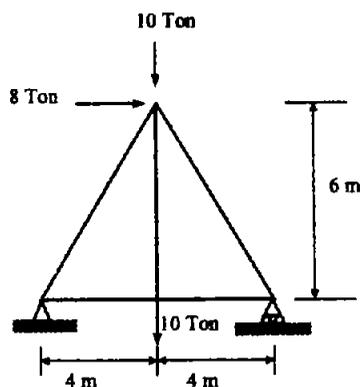


Fig. 3.26

El primer paso en la resolución de armaduras es comprobar su isostaticidad.

$$b = 5$$

$$b + r = 2n$$

$$n = 4$$

$$5 + 3 = 2(4)$$

$$r = 3$$

$$8 = 8$$

En seguida se procede a evaluar las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 8(6) + 10(4) + 10(4) - R_D(8) = 0$$

$$R_D = 16 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y = R_A - 10 - 10 + 16 = 0$$

$$R_A = 4 \text{ Ton}$$

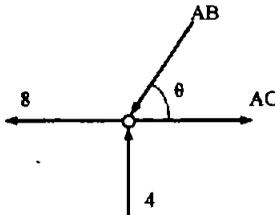
$$\sum F_x = -R_{Ax} + 8 = 0$$

$$R_{Ax} = 8 \text{ Ton}$$

Una vez hecho el equilibrio externo, calcularemos la fuerza actuante en cada barra aislando cada nudo en un diagrama de cuerpo libre.

Nudo A

El sistema de fuerzas que se forma en cada nudo, es concurrente a un solo punto, de tal suerte que las barras AB y AC podemos conocerlas planteando las ecuaciones de equilibrio:



$$\sum F_y = 4 - AB \sin 56.4^\circ = 0$$

$$AB = 4.8 \text{ Ton}$$

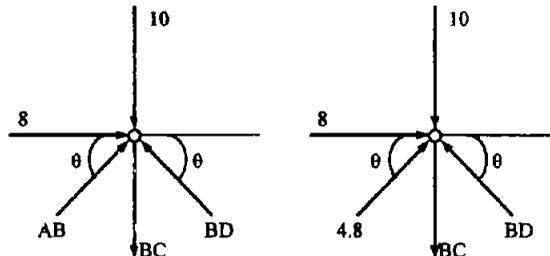
$$\sum F_x = -8 - 4.8 \cos 56.4^\circ + AC = 0$$

$$AC = 10.65 \text{ Ton}$$

Cabe mencionar que el sentido de las fuerzas es propuesto y se comprueba con el signo del resultado. Se considera que la barra trabaja a compresión si la flecha llega al nudo en el diagrama de cuerpo libre, y a tensión en caso contrario.

Nudo B

En el diagrama de cuerpo libre se observa la presencia de tres incógnitas, sin embargo, la fuerza correspondiente a la barra AB se calculo en el nudo A, por tanto el problema se reduce a dos incógnitas.



$$\sum F_x = 8 + 4.8 \cos 56.4^\circ - BD \cos 56.4^\circ = 0$$

$$BD = 19.23 \text{ Ton}$$

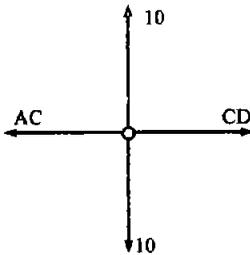
$$\sum F_y = -10 + 4.8 \sin 56.4^\circ - BC + 19.23 \sin 56.4^\circ = 0$$

$$BC = 10 \text{ Ton}$$

El cálculo de las barras es posible solamente cuando hay una o dos incógnitas en el mismo nudo. Es conveniente llevar una secuencia ordenada para que las barras que calculemos en un nudo sirvan en los siguientes.

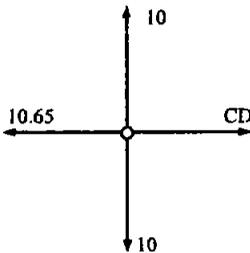
Nudo C

En este nudo solo hay una incógnita, la barra AC fue calculada en el nudo A.



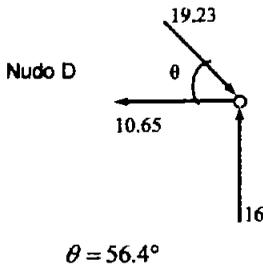
$$\begin{aligned}\sum F_x &= -10.65 + CD = 0 \\ CD &= 10 \text{ Ton}\end{aligned}$$

La suma de fuerzas en y, solo sirve en este nudo para comprobar el equilibrio dado que en este caso no existen incógnitas en esta dirección.



$$\sum F_y = 10 - 10 = 0$$

Hasta este momento ya hemos conocido el valor de la fuerza actuante en cada barra. El nudo D, ya no es necesario analizarlo, pero si se requiere comprobar el equilibrio, las sumas de fuerzas (F_x , F_y), es ese nudo así como en todos los demás tiene que ser igual con cero.



$$\begin{aligned}\sum F_y &= 16 - 19.23 \sin 56.4^\circ = 0 \\ F_y &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -10.65 + 19.23 \cos 56.4^\circ = 0 \\ F_x &= 0\end{aligned}$$

Los resultados obtenidos podemos presentarlos de una forma mas ordenada por medio de una tabla, o también en un diagrama de la armadura indicando su magnitud y su forma de trabajo.

BARRA	MAGNITUD (ton)	TENSION	COMPRESION
AB	4.80		X
AC	10.65	X	
BD	19.23		X
BC	10.00	X	
CD	10.65	X	

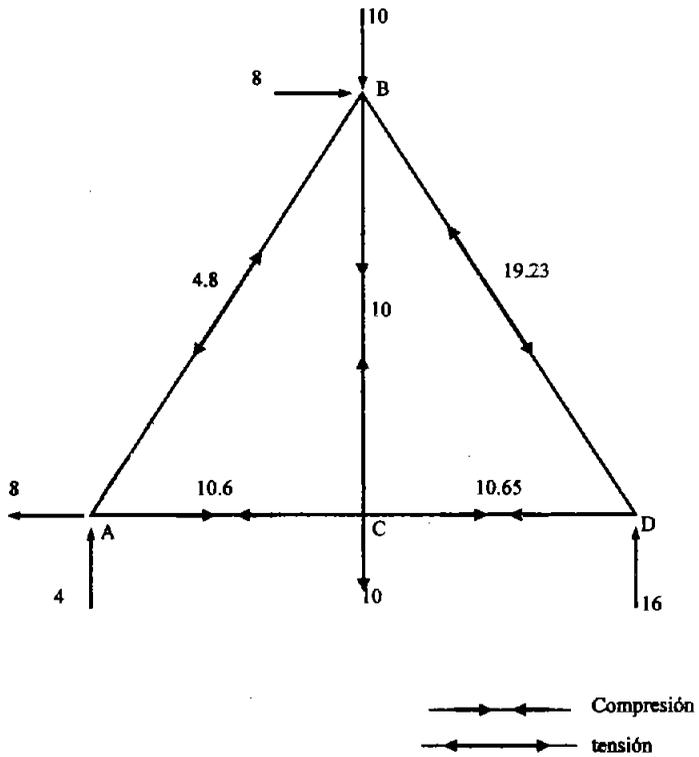


Fig. 3.27

Utilizando el método de los nudos, determine la fuerza en cada miembro de la armadura que se muestra en la figura siguiente. Fig. 3.28

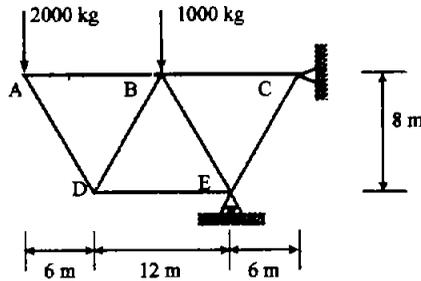


Fig. 3.28

Calculo de las reacciones:

$$\sum M_c = -2000(24) - 1000(12) + RE(6) = 0$$

$$RE = 10000 \text{ Kg}$$

$$\sum F_x = R_{cx} = 0$$

$$R_{cx} = 0$$

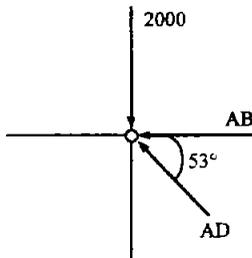
$$\sum F_y = -2000 - 1000 + 10000 - R_{cy} = 0$$

$$R_{cy} = 7000 \text{ Kg}$$

Condición isostática

$b = 7$	$b + r = 2N$
$n = 5$	$7 + 3 = 2(5)$
$r = 3$	$10 = 10$ (sí es isostática)

Nudo A



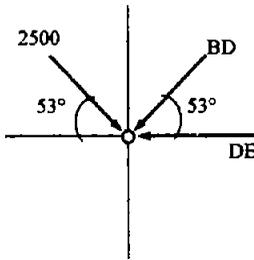
$$\sum F_y = -2000 + AD \text{sen}53^\circ = 0$$

$$AD = \frac{2000}{\text{sen}53^\circ} = 2500 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = AB - 2500 \text{cos}53^\circ = 0$$

$$AB = 2500 \text{cos}53^\circ = 1500 \text{ kg}$$

Nudo D



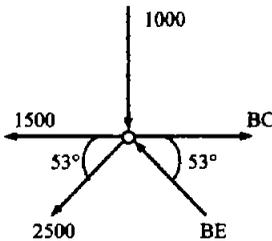
$$\sum F_y = -2500\cos 53^\circ + BD\cos 53^\circ = 0$$

$$BD = 2500 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = 2500\sin 37^\circ + 2500\sin 37^\circ - DE = 0$$

$$DE = 3000 \text{ kg}$$

Nudo B



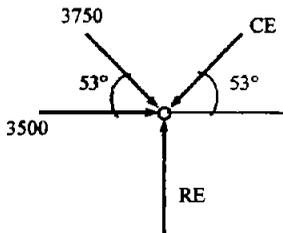
$$\sum F_y = -1000 - 2500\sin 53^\circ + BE\sin 53^\circ = 0$$

$$BE = 3750 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = -1500 - 2500\cos 53^\circ - 3750\cos 53^\circ + BC = 0$$

$$BC = 5250 \text{ kg}$$

Nudo E



$$\sum F_x = 3000 + 3750\cos 53^\circ - CE\cos 53^\circ = 0$$

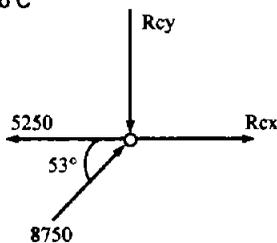
$$CE = 8750 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = -3750\sin 53^\circ - 8750\sin 53^\circ + RE = 0$$

$$RE = 10000 \text{ kg}$$

Valor idéntico al calculado en el equilibrio externo

Nudo C



$$\sum F_x = -5250 + 8750\cos 53^\circ - R_{cx} = 0$$

$$R_{cx} = 0$$

$$\sum F_y = 8750\sin 53^\circ - R_{cy} = 0$$

$$R_{cy} = 7000 \text{ kg}$$

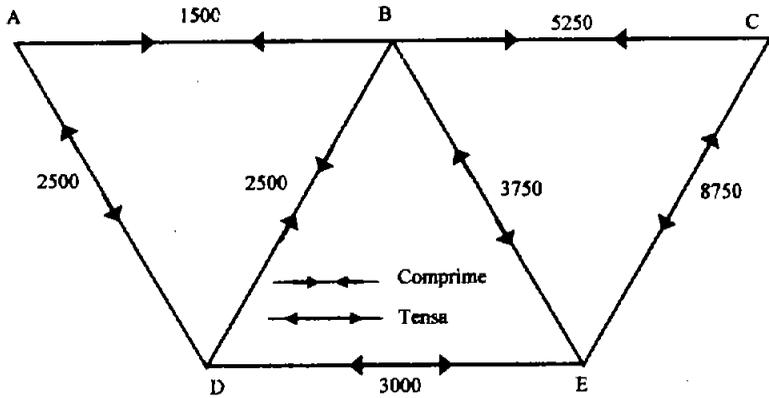


Fig. 3.29

3.2.3. METODO DE LAS SECCIONES.

La armadura siguiente fue resuelta anteriormente por el método de los nudos, en esta ocasión se resolverá por el método de las secciones. Fig. 3.30

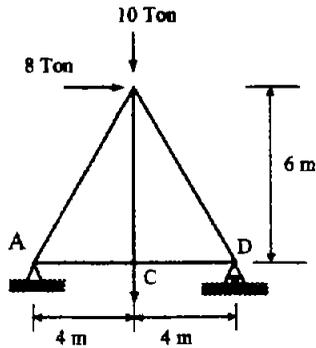


Fig. 3.30

Comprobando su isostaticidad, tenemos que:

$$b = 5$$

$$b + r = 2n$$

$$n = 4$$

$$5 + 3 = 2(4)$$

$$r = 3$$

$$8 + 8$$

(sí es isostática)

Ahora, realizando su equilibrio externo:

$$\sum M_A = 8(6) + 10(4) + 10(4) - R_D(8) = 0$$

$$R_D = \frac{48 + 40 + 40}{8} = \frac{128}{8}$$

$$R_D = 16 \text{ ton}$$

$$\sum M_B = 8(6) - 10(4) - 10(4) + R_A(8) = 0$$

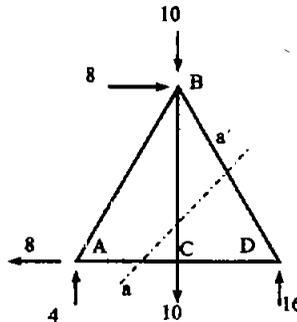
$$R_A = \frac{-48 + 40 + 40}{8} = \frac{32}{8}$$

$$R_A = 4 \text{ ton}$$

$$\sum F_X = -R_{AX} + 8 = 0$$

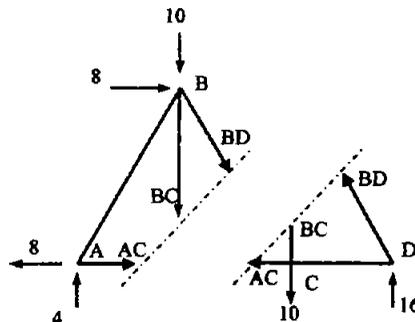
$$R_{AX} = 8 \text{ ton}$$

Una vez terminado el equilibrio, vemos que la armadura esta sometida a las siguientes fuerzas:



El método de las secciones propone en primer instancia, hacer un corte en la armadura, tal que este divida la armadura en dos partes, teniendo presente que el corte solo debe cruzar un máximo de tres barras incógnitas.

Una vez realizado el corte, las secciones de la armadura son:



Analicemos el corte a la derecha, este, es un diagrama de cuerpo libre sobre el cual actúan las fuerzas de 10 y 16 ton, además de las fuerzas que producen las barras AC, BC y BD.

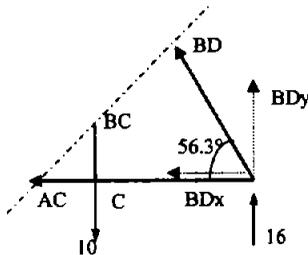
Suponemos el sentido de las fuerzas en las barras, recordando que si este es saliendo del nudo, significa que la barra trabaja a tensión y en caso contrario, a compresión.

El sistema de fuerzas formado al seccionar la armadura, es de tipo coplanar general, por lo tanto su equilibrio esta garantizado por $\sum M_o=0$, $\sum F_x=0$, $\sum F_y=0$. Apoyándonos en estas ecuaciones y planteando el equilibrio en cada sección, podremos conocer la fuerza actuante en cada una de las barras incógnitas afectadas por el corte.

$$\sum M_c = 0$$

$$\sum M_c = -64(4) - BD_y(4) + BD_x(0) = 0$$

$$\sum M_c = -64 - BD \text{ sen}56.3^\circ(4) = 0$$



$$BD = \frac{-64}{4 \text{ sen}56.3^\circ}$$

$$BD = -19.23 \quad (\text{MAL SUPUESTO})$$

Puesto que el signo resultado negativo, BD esta mal supuesta; el valor será el mismo, solo que no tensa, si no comprime.

$$BD = 19.23 \text{ Ton (A COMPRESION)}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$\sum M_D = -10(4) + BC(4) + AC(0) = 0$$

$$BC = \frac{40}{4}$$

$$BC = 10 \text{ Ton (A TENSION)}$$

$$\text{Sea } \sum F_x = 0$$

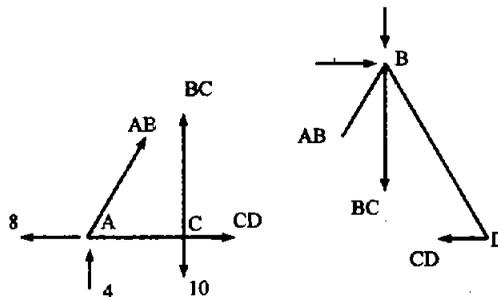
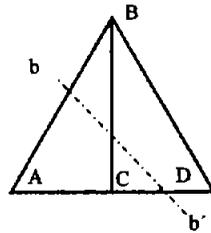
$$-AC + BD \cos 56.3^\circ = 0$$

$$AC = 19.23 \cos 56.3^\circ$$

$$AC = 10.65 \text{ Ton (A TENSION)}$$

Continuamos con el método se hacen cortes sucesivos de modo tal que cada corte permita seguir conociendo cada vez mas incógnitas.

Propongamos un segundo corte:



$$\text{Sea } \sum M_C = 0$$

$$\sum M_C = 4(4) + AB \text{ sen } 56.3^\circ (4) = 0$$

$$AB = \frac{16}{4 \text{ sen } 56.3^\circ}$$

$$AB = -4.80 \text{ Ton} \quad (\text{mal supuesta})$$

$$\sum M_A = 0$$

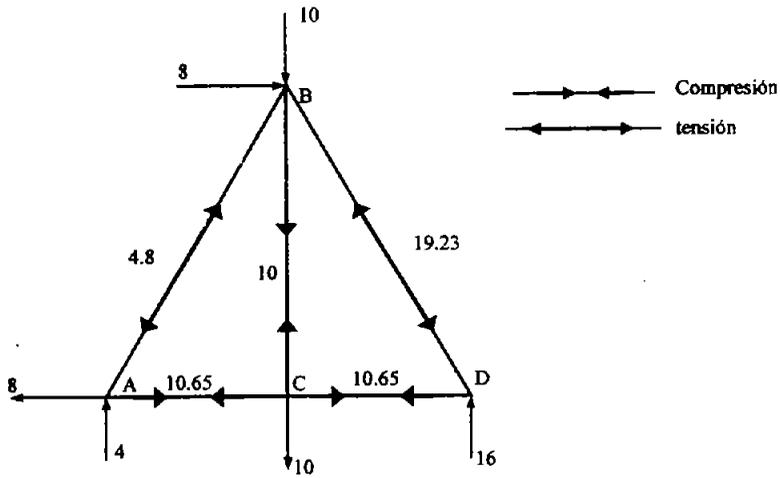
$$\sum M_A = 10(4) - BC(4) = 0$$

$$BC = 10 \text{ Ton} \quad (\text{mismo valor obtenido que en el corte anterior})$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_x = -8 - 4.8 \cos 56.3^\circ + CD = 0$$

$$CD = 10.65 \text{ Ton}$$



Por el método de las secciones, resuelva la armadura siguiente. Fig. 3.31

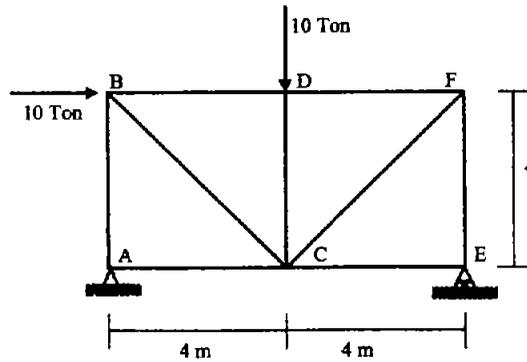


Fig. 3.31

$$b = 9$$

$$b + r = 2n$$

$$n = 6$$

$$9 + 3 = 2(6)$$

$$r = 3$$

$$12 = 12$$

Calculando las reacciones

$$\sum M_A = 10(4) + 10(4) - R_E(8) = 0$$

$$R_E = \frac{40 + 40}{8}$$

$$R_E = 10 \text{ Ton}$$

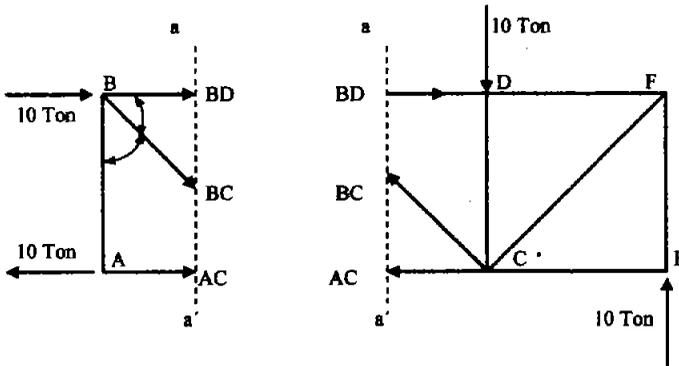
$$\sum M_E = 10(4) - 10(4) + R_{AY}(8) = 0$$

$$R_{AY} = 0$$

$$\sum F_x = 10 - R_{AX} = 0$$

$$R_{AX} = 10 \text{ Ton}$$

Trabajando con el corte A - A'



En la parte derecha del corte:

$$\sum M_B = 0$$

$$\sum M_B = 10(4) - AC(4) = 0$$

$$AC = 10 \text{ Ton}$$

A la izquierda del corte

$$\sum M_C = -10(4) + BD(4) = 0$$

$$BD = 10 \text{ Ton}$$

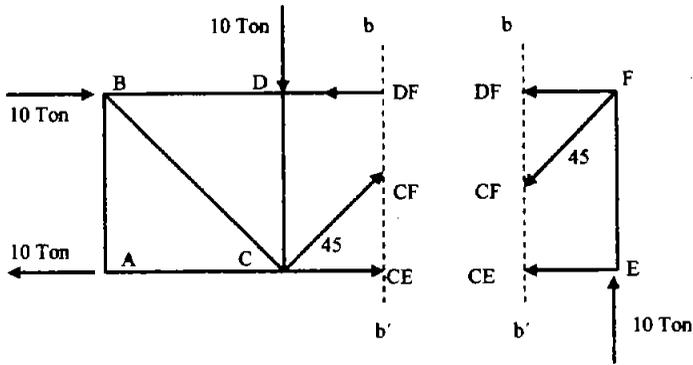
Nuevamente en el lado izquierdo

$$\sum M_A = 10(4) - 10(4) + BC \cos 45^\circ = 0$$

$$BC = 0$$

Como se observa, podemos tomar indistintamente ambos lados del corte, sin que esto afecte los resultados. El utilizar uno u otro lado del corte dependerá de la dificultad con que las ecuaciones se presenten; es recomendable que primero se utilice el lado con mayor número de fuerzas conocidas y en el proponer la suma de momentos o suma de fuerzas de tal forma que se presenten ecuaciones con una sola incógnita, que son muy fáciles de resolver.

Utilizando el corte B -- B'



A la derecha del corte:

$$\sum M_F = 10(0) + CE(4) = 0$$

$$CE = 0$$

A la izquierda del corte

$$\sum M_C = 10(4) - DF(4) = 0$$

$$DF = 10 \text{ Ton}$$

A la izquierda del corte

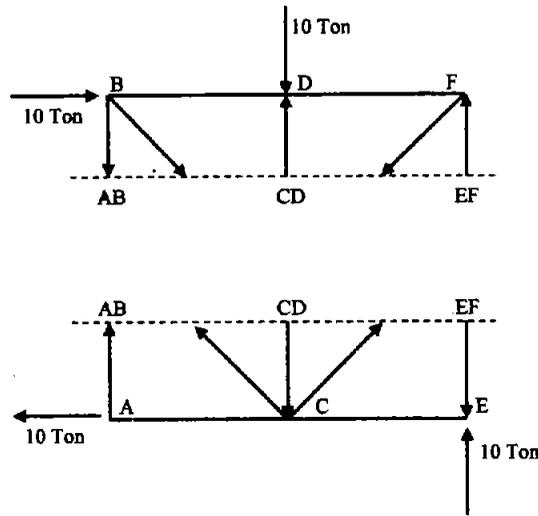
$$\sum M_E = 10(4) - CF \text{sen}45^\circ(4) = 0$$

$$CF = \frac{40}{4 \text{sen}45^\circ}$$

$$CF = 14.14 \text{ Ton}$$

Nótese que muchas de las barras no están trabajando, sin embargo no podemos suprimirlas de la armadura porque provocaríamos la inestabilidad de la misma.

Con el corte C - C' (horizontal) estamos afectando 5 barras, de las cuales BC y CF son valores calculados en cortes anteriores, así que solo quedan los tres montantes como incógnitas.



Veamos que sucede al plantear las ecuaciones.

Arriba del corte:

$$\sum M_B = 10(4) - CD(4) + 14.14 \cos 45^\circ(8) - EF(8) = 0$$

$$\sum M_D = -AB(4) - EF(4) + 14.14 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum M_E = -AB(8) - 10(4) + CD(4) = 0$$

Cada ecuación es de dos incógnitas, no se pueden resolver individualmente; planteando las ecuaciones en cada nudo del corte obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que al resolverse proporcionara los valores de las barras.

Así:

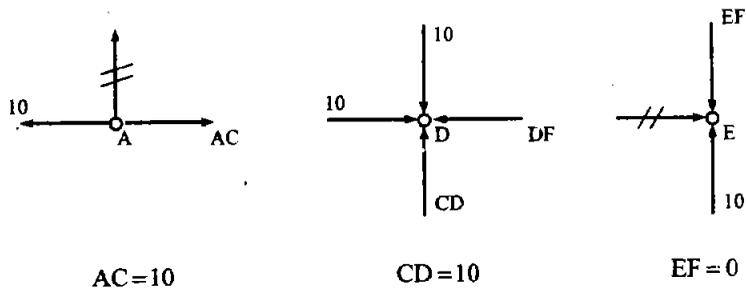
$$AB = 0$$

$$CD = 10$$

$$EF = 10$$

Pero el método de las secciones se utiliza para simplificar los cálculos, no para complicarlos. Podemos proponer otros cortes, la inclinación de estos no afecta el método.

Los valores de los tres montantes puede obtenerse con mayor facilidad analizando los nudos A, D, E.



Finalmente la armadura queda:

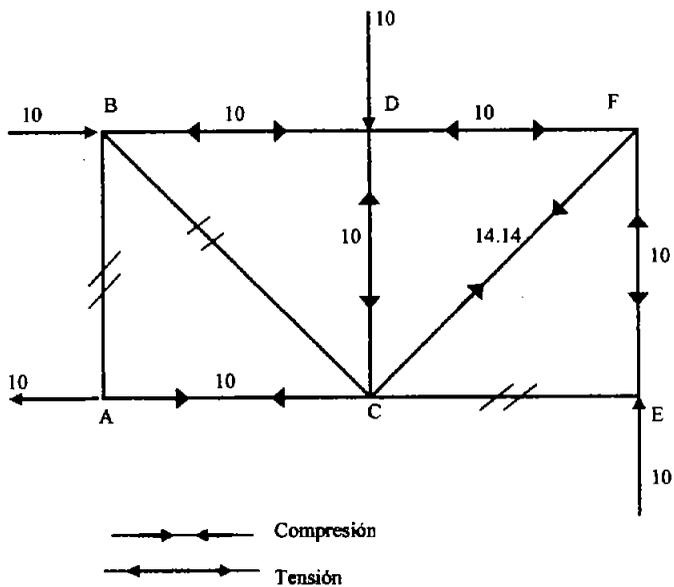
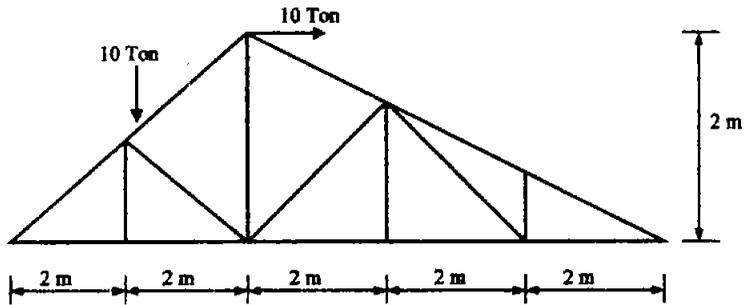


Fig. 3.32

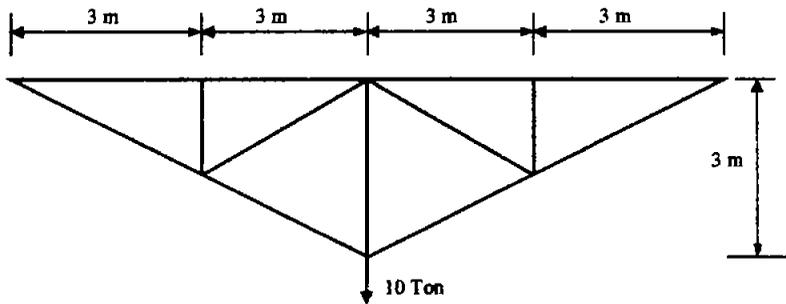
3.2.4. Problemas propuestos:

Resuelva las armaduras siguientes por el método de los nudos y de las secciones.

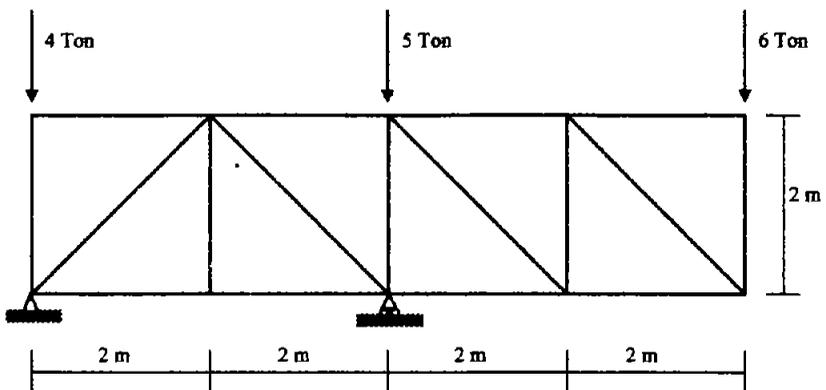
a)



b)



c)



ANALISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS SOMETIDAS A FLEXION Y CORTANTE

4.1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

> MOMENTO FLEXIONANTE (M)

En una sección de un elemento estructural cualquiera, el momento flexionante es igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas activas y reactivas, a la izquierda o a la derecha de la sección, con respecto al centroide de esta (Fig. 4.1)

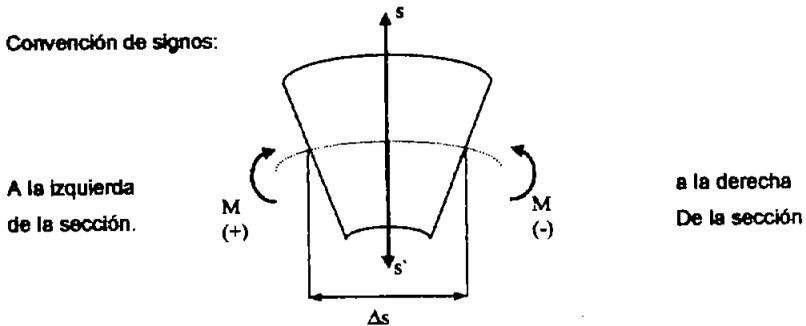


Fig. 4.1

> FUERZA CORTANTE.

La fuerza cortante, en una sección de un elemento estructural cualquiera, es igual a la proyección --según la sección-- de la suma de todas las fuerzas, activas y reactivas, a la izquierda o a la derecha de la misma. (Fig. 4.2)

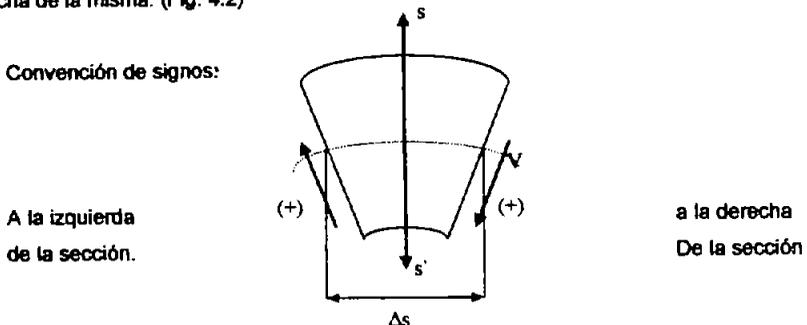


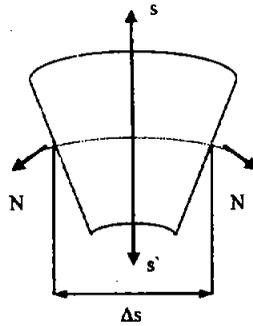
Fig. 4.2

> FUERZA NORMAL.

La fuerza normal, en una sección de un elemento estructural cualquiera, es igual a la proyección –según la perpendicular de la sección- de la suma de todas las fuerzas activas y reactivas a la izquierda o a la derecha de la sección. (Fig. 4.3)

Convención de signos:

A la izquierda
de la sección.



a la derecha
De la sección

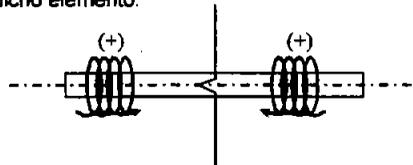
Fig. 4.3

> MOMENTO TORSIONANTE. (Mt)

En una sección de un elemento estructural cualquiera, el momento torsionante es igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas activas o reactivas, a la izquierda o a la derecha de la sección, con respecto al eje longitudinal de dicho elemento.

Convención de signos:

A la izquierda
de la sección.



a la derecha
De la sección

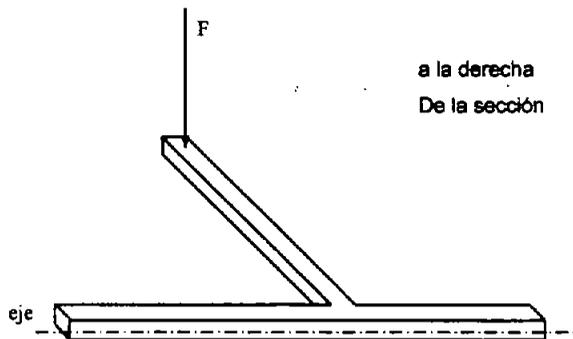


Fig. 4.5

> RELACIONES BASICAS

Consideremos una viga en equilibrio bajo la acción de una carga distribuida en cualquier forma.

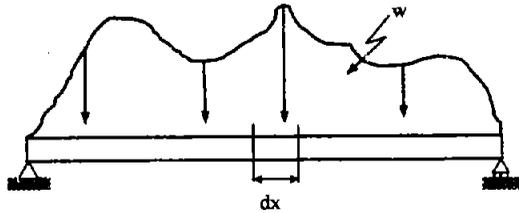


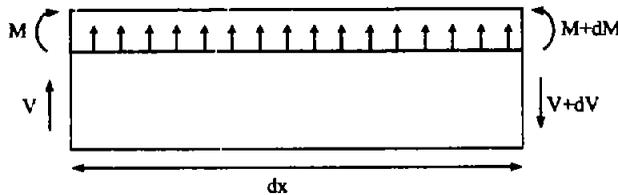
Fig. 4.6

El elemento dx se encuentra en equilibrio así como toda la barra.

Analizando el elemento dx en el sentido izquierda-derecha, vemos que al inicio de la sección actúan un momento (M) y un cortante (V), después de recorrer la sección, al final estos valores se incrementan en dx y dv respectivamente.

Como el sistema esta en equilibrio:

Análisis

$$\sum F_y = 0$$

$$y - (y + dv) + w dx = 0$$

(w positiva hacia arriba)

$$-dv + w dx = 0$$

$$w = \frac{dv}{dx}$$

relación de fuerza cortante y la carga distribuida

$$\sum M_o = 0$$

$$M - (M + dM) + V dx + w dx (dx / 2) = 0$$

$$-dM + V dx = 0$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$

relación entre el momento flexionante y la fuerza

$$M = \int V dx$$

➤ **DIAGRAMA:**

Diagrama de un elemento mecánico cualquiera, en un sistema de referencia es el lugar geométrico de los puntos cuya abscisa corresponde a la localización de la sección transversal considerada y cuya ordenada es el valor del elemento mecánico en cuestión, existente en dicha sección. (Fig. 4.7)

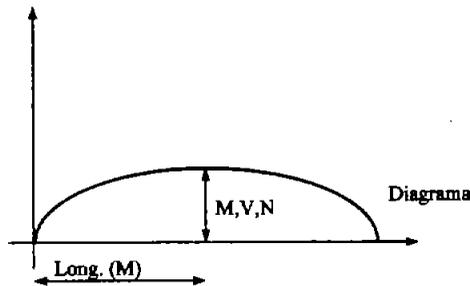


Fig. 4.7

➤ **VIGA**

Es una barra que tiene dos de sus dimensiones mucho menores que la otra y recibe cargas en el sentido perpendicular a la dimensión mayor. Estas características geométricas y de carga hacen que el elemento principalmente esté sometido a esfuerzos internos de flexión y de cortante, con la posible presencia de fuerzas normales y momentos torsionantes.

VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

Es la viga que se sostiene en dos apoyos, de los cuales uno es articulado y el otro es libre.

➤ **VIGA GERBER**

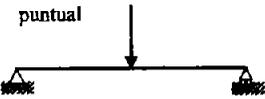
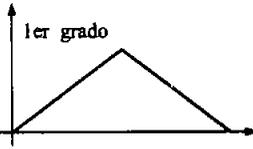
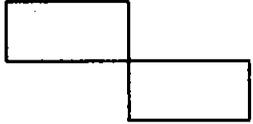
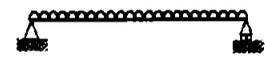
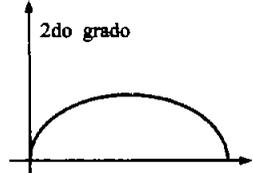
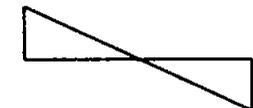
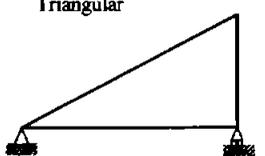
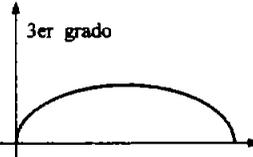
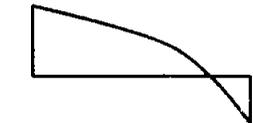
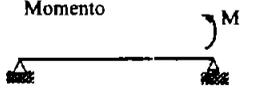
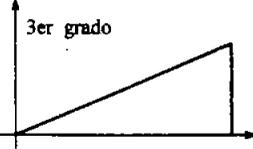
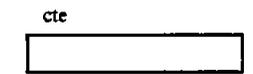
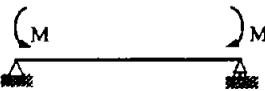
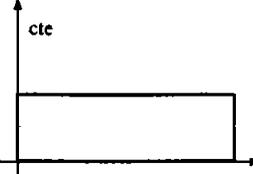
Este tipo de vigas cumplen con la definición, pero se distinguen de las simplemente apoyadas debido a que tienen más de dos apoyos, pero disminuyen su rigidez por medio de un cierto número de articulaciones convenientemente colocadas de tal manera que no resultan afectadas ni su estabilidad interna, ni su estabilidad externa

➤ **ARCOS Y MARCOS SIMPLES.**

Son elementos estructurales cuyo eje longitudinal es una línea continua. Se encuentran ligados al sistema tierra por 3 vínculos no concurrentes ni paralelos.

Generalmente se llaman marcos, cuando el eje está formado por tramos de líneas rectas y arcos, cuando el eje longitudinal presenta formas curvas.

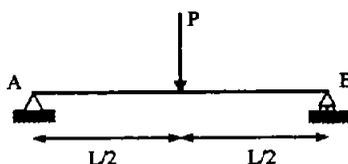
En forma general, podemos decir que cada tipo de carga produce un diagrama específico, esto es referente al grado con que se manifiesta la ecuación del momento y del cortante que producen.

CARGA	DIAGRAMA DE MOMENTO	DIAGRAMA DE CORTANTE
<p>puntual</p> 	<p>1er grado</p> 	<p>cte</p> 
<p>repartida</p> 	<p>2do grado</p> 	<p>1er grado</p> 
<p>Triangular</p> 	<p>3er grado</p> 	<p>2do grado</p> 
<p>Momento</p> 	<p>3er grado</p> 	<p>cte</p> 
<p>Momento</p> 	<p>cte</p> 	<p>0</p> 

4.2. VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS

Sabemos que en los elementos tipo viga las fuerzas internas involucran tres incógnitas: una fuerza axial, una fuerza cortante y un momento, por lo tanto conociendo las fuerzas de extremo y aplicando el método de las secciones en cualquier punto de la viga nos daría como resultado un tramo de viga estáticamente determinado con tres ecuaciones estáticas disponibles y tres incógnitas por determinar. Observemos que la clave es conocer las fuerzas de extremo de elemento, es decir, aquellas que se ejercen en las uniones con otros elementos pertenecientes al sistema estructural y de ahí proceder a determinar las fuerzas internas por la estática.

a) Calcular los elementos mecánicos de la viga siguiente.



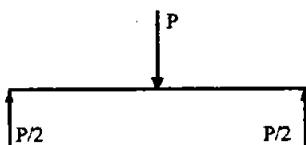
Calculo de las reacciones

$$\sum M_B = 0; \quad R_A(L) - P(L/2) = 0$$

$$R_A = P/2$$

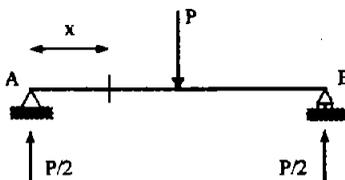
$$\sum F_y = 0; \quad R_B - P + P/2 = 0$$

$$R_B = P/2$$



Las ecuaciones para el cálculo de elementos mecánicos son representativas de un tramo de viga, para el cual las condiciones de carga son constantes. En la viga vemos claramente que la carga "P" la divide en dos secciones, por lo tanto tenemos que analizar los intervalos de 0 a L/2 hasta L.

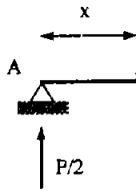
Hagamos un corte en el primer intervalo: a una distancia "X" del apoyo de A.



Ahora tomemos los momentos que producen las fuerzas que se encuentran a la izquierda del corte, con respecto a P.

El corte es representativo de todos los valores de "X" comprendidas entre 0 y L/2, esto es en el intervalo $0 \leq X \leq L/2$.

Tomando momentos tenemos una ecuación en función de la distancia "X", dicha ecuación nos indica la variación de la intensidad del momento en función del valor de "X".



$$\sum M_O = P/2(x)$$

$$M = \frac{Px}{2}$$

si, $x = 0$; $M = 0$
 $x = L/2$
 $M = \frac{P}{2} \left(\frac{L}{2} \right)$
 $M = \frac{PL}{4}$

Diag. De cuerpo libre (DCL)

Recordemos que $V = dM/dx$, es decir, si derivamos la ecuación del momento con respecto a x obtendremos la ecuación que nos represente el comportamiento de la fuerza cortante.

Analizando el intervalo: $0 \leq x \leq L/2$

$$M = \frac{Px}{2}$$

$$V = P/2$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} (Px/2)$$

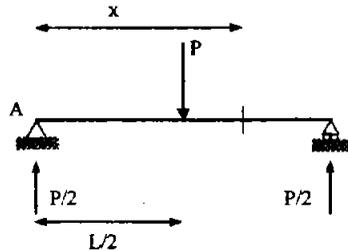
si $x = 0$; $V = P/2$

$$V = P/2$$

$x = L/2$; $V = p/2$

Para este caso al derivar la ecuación del momento flexionante resulto que el valor del cortante es una constante igual a $P/2$ para el primer medio de la longitud de la viga.

Ahora hagamos el corte en el segundo segmento considerando también como referencia una distancia x .



Este corte se localiza en cualquier punto del intervalo entre $L/2$ y L

Tomando nuevamente los momentos de las fuerzas con respecto al corte, encontraremos la ecuación representativa del intervalo.

$$L/2 \leq X \leq L$$

$$M_O = P/2(x) - P(x - L/2)$$

$$V = dM/dx = -P/2$$

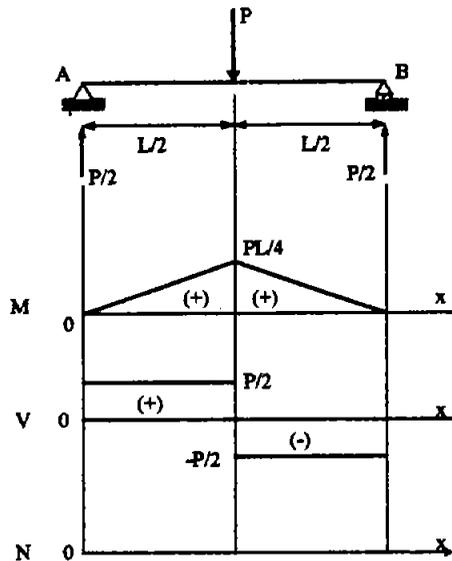
si $x = L/2$; $M = PL/4$

$$V = -P/2$$

si $x = L$; $M = 0$

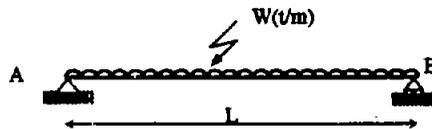
$$V = -P/2$$

Traslademos ahora los valores obtenidos a una grafica en la cual el eje horizontal será la longitud y el eje vertical será la intensidad del elemento mecánico en ese punto.



En este caso no existe fuerza alguna que ocasiona compresión o tensión en la barra, por lo tanto no hay fuerzas normales y en el diagrama no hay necesidad de ponerlo.

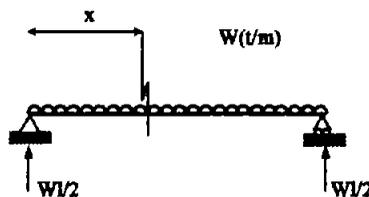
b) encontrar los diagramas de los elementos mecánicos de la viga siguiente...



Calculando las reacciones.

$$\begin{aligned} \sum M_A &= wL(L/2) - R_B(L) = 0 \\ R_B &= wL/2 \end{aligned}$$

En este caso la viga tiene las condiciones de carga uniformes a todo lo largo, así que solo analizaremos un intervalo.



$$0 \leq X \leq L$$

$$M = wL/2(x) - wxP(x/2) = wx/2 - wx^2/2$$

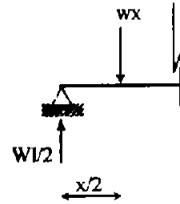
$$\text{si } x = 0 \quad ; \quad M = 0$$

$$\text{si } x = L \quad ; \quad M = 0$$

$$V = dM/dx = wL/2 - wx$$

$$\text{si } x = 0 \quad ; \quad V = wL/2$$

$$\text{si } x = L \quad ; \quad V = -wL/2$$



Nótese que los valores del momento valen cero en los extremos de la viga ($X=0$, $X=L$), sin embargo, esto no quiere decir que no existe momento flexionante a lo largo de esta. Para investigar los valores intermedios, basta simplemente con sustituir diferentes valores de "x" (comprendidas entre 0 y L) en la ecuación del momento, obteniendo así el valor de dicho elemento en cada caso.

Otra forma de conocer las graficas de los elementos mecánicos es analizando sus ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación del momento es de 2º grado por lo tanto es una parábola; además el signo del termino elevado al cuadrado es negativo, esto quiere decir que la parábola tiene cavidad hacia abajo.

En el caso del cortante, la ecuación es de 1er grado, por lo tanto es una recta; el término de la variable es negativo lo cual nos dice que su pendiente es negativa, es decir, que cuando el valor de X crece el valor del cortante disminuye.

Por otra parte, conociendo las ecuaciones de momento y cortante, además de su relación $V=dM/dx$, y recordando que el valor máximo de una función se localiza en el punto para el cual su derivada vale cero.

El valor máximo del momento se localiza en el punto donde $X=L/2$ y vale:

$$M = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

$$M = \frac{wL}{2} \left(\frac{L}{2} \right) - \frac{w}{2} (L)^2$$

$$\frac{dM}{dx} = V = \frac{wL}{2} - wx$$

$$M = \frac{wL^2}{2}$$

$$\text{Si, } \frac{dM}{dx} = 0$$

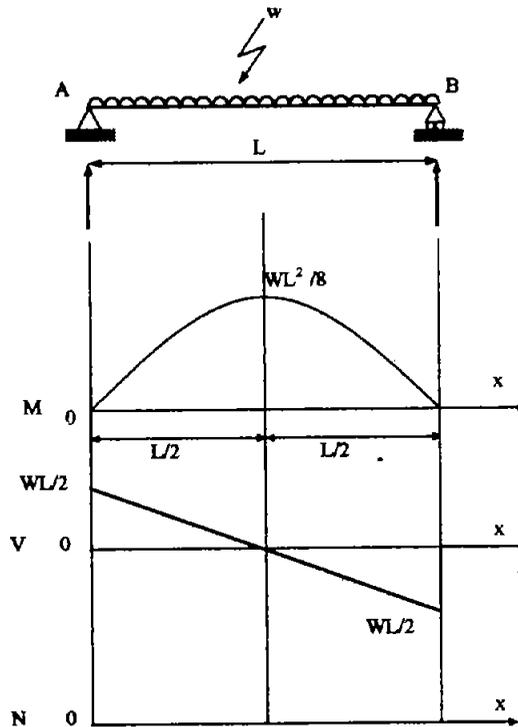
$$V = 0$$

$$V = \frac{wL}{2} - wx = 0$$

$$x = L/2$$

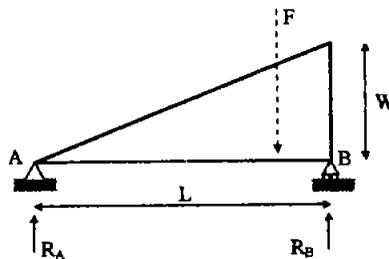
Atendiendo los razonamientos anteriores, podemos decir que siempre que el cortante valga cero existirá un valor máximo o mínimo del momento flexionante.

Elementos mecánicos finales.



Para este caso no hay fuerza normal, por tanto su diagrama solo será una línea representativa del valor igual a cero.

c) encontrar los elementos mecánicos de la viga siguiente.



$$F = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2} = \frac{wL}{2}$$

La fuerza F se aplica en el centroide de la figura

Calculo de las reacciones.

$$\sum MB = RA(L) - \frac{WL}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0$$

$$RA = \frac{WL}{6}$$

$$\sum Fy = \frac{WL}{6} - \frac{WL}{2} + RB = 0$$

$$RB = \frac{WL}{3}$$

Calculo de los momentos flexionantes.

Por triángulos semejantes.

$$\frac{w'}{w} = \frac{x}{L} ; \quad w' = \frac{wx}{L}$$

Sea el intervalo $0 \leq x \leq L$

$$M = \frac{WL}{6} X - \frac{1}{2} \left[\frac{WX}{L} \right] X \left[\frac{X}{3} \right] = \frac{WLX}{6} - \frac{WX^2}{6}$$

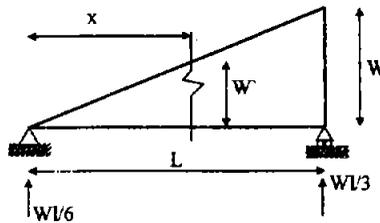
Si $X=0$; $M=0$

Si $X=L$; $M=0$

$$V = \frac{WL}{6} - \frac{1}{2} \left[\frac{WX}{L} \right] X = \frac{WL}{6} - \frac{WL^2}{2L}$$

Si $X=0$; $V = \frac{WL}{6}$

Si $X=L$; $M = -\frac{WL}{3}$



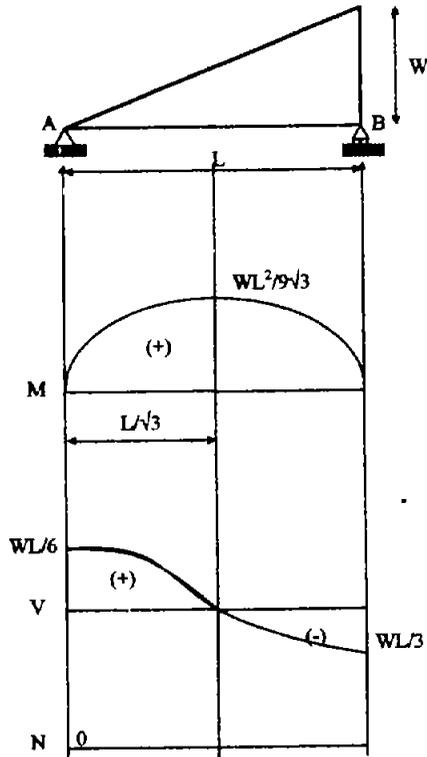
Para encontrar el momento máximo hacemos que: $dM/dx = 0$

$$\frac{dM}{dx} = V = \frac{WL}{6} - \frac{Wx^2}{2L} = 0 ; \quad x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

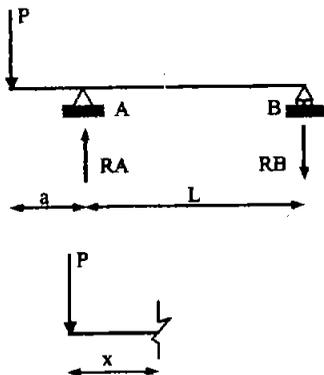
Sustituyendo en la ecuación de momentos el valor de x:

$$M_{\max} = \frac{WL}{6} \cdot \frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{W}{6} \frac{L^3}{3\sqrt{3}} = \frac{WL^2}{6\sqrt{3}} - \frac{WL^2}{18\sqrt{3}} = \frac{WL^2}{9\sqrt{3}}$$

Trazando los diagramas:



d) encontrar los elementos mecánicos de la viga siguiente.



Calculo de las reacciones,

$$\sum M_B = -P(L+a) + R_A(L) = 0$$

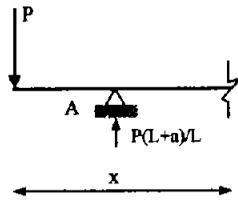
$$R_A = \frac{P(L+a)}{L}$$

$$\sum M_A = -P(a) + R_B(L) = 0$$

$$R_B = \frac{Pa}{L}$$

Sea el intervalo: $0 \leq x \leq a$

Sea el intervalo: $0 \leq X \leq a$



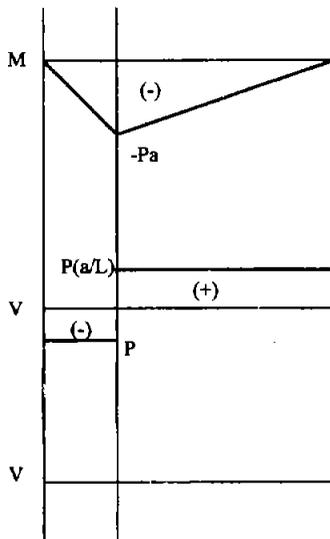
$$M = -Px$$

$$V = -P$$

Si $X = 0$; $M = 0$
 $V = -P$

Si $X = a$; $M = -Pa$
 $V = -P$

Para el intervalo $a \leq X \leq L+a$



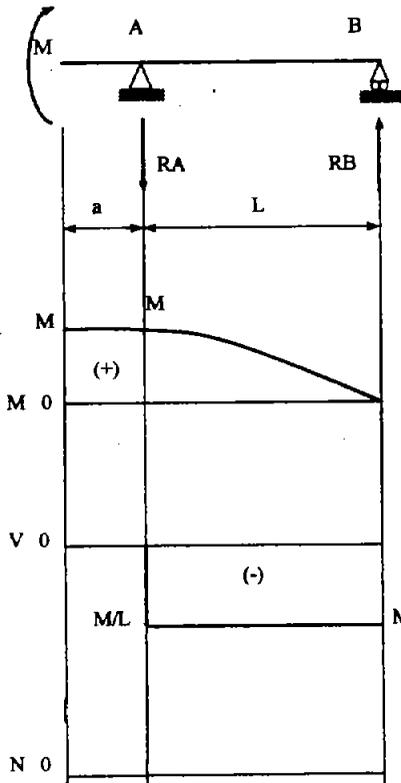
$$M = -Px + \frac{P(L+a)}{L}(x-a)$$

$$V = -P + \frac{P(L+a)}{L}$$

Si $X = a$; $M = -Pa$
 $V = Pa/L$

Si $X = L+a$; $M = 0$
 $V = Pa/L$

e) calcular los elementos mecánicos de la viga siguiente.



Calculo de las reacciones,

$$\sum M_B = M - R_A(L) = 0$$

$$R_A = \frac{M}{L}$$

$$\sum M_A = M - R_B(L) = 0$$

$$R_B = \frac{M}{L}$$

Sea el intervalo: $0 \leq x \leq a$

$$M = M$$

$$M = \text{cte}$$

$$V = 0$$

$$\text{Si, } x = 0 \quad ; \quad M = M$$

$$V = 0$$

$$\text{Si } x = a \quad ; \quad M = M$$

$$V = 0$$

Sea el intervalo: $a \leq x \leq L+a$

$$M = M - \frac{M}{L}(x-a)$$

$$V = -\frac{M}{L}$$

$$\text{Si, } x = a \quad ; \quad M = M$$

$$V = -M/L$$

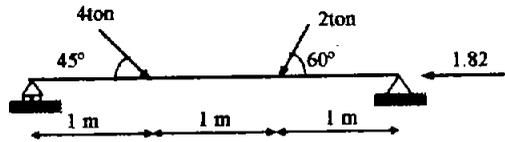
$$\text{Si } x = L+a \quad ; \quad M = 0$$

$$V = -M/L$$

f) Encontrar los elementos mecánicos de la viga siguiente.



Convención de signos



Calculo de las reacciones:

$$\sum M_B = R_A(3) - 4\text{sen}45^\circ(2) - 2\text{sen}60^\circ(1) = 0$$

$$R_A = 2.45 \text{ Ton}$$

$$\sum M_A = R_B(3) - 4\text{sen}45^\circ(1) - 2\text{sen}60^\circ(2) = 0$$

$$R_B = 2.08 \text{ Ton}$$

Calculo de los momentos y cortantes:

$$0 \leq X \leq 1$$

$$M = 2.45x \quad \text{Si } x = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} M = 0 \\ V = 2.45 \text{ ton} \end{matrix}$$

$$V = 2.45 \quad \text{Si } x = 1 \quad ; \quad \begin{matrix} M = 2.45 \text{ t-m} \\ V = 2.45 \text{ ton} \end{matrix}$$

$$1 \leq X \leq 2$$

$$M = 2.45x - 2.82(x-1) \quad \text{Si } x = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} M = 2.45 \text{ t-m} \\ V = -0.37 \text{ ton} \end{matrix}$$

$$M = 0.37x - 2.82$$

$$V = -0.37 \quad \text{Si } x = 2 \quad ; \quad \begin{matrix} M = 2.08 \text{ t-m} \\ V = -0.37 \text{ ton} \end{matrix}$$

$$2 \leq X \leq 3$$

$$M = 2.45x - 2.82(x-1) - 1.73(x-2)$$

$$M = -2.08x + 6.28$$

$$V = -2.08 \quad \text{Si } x = 2 \quad ; \quad \begin{matrix} M = 2.08 \text{ t-m} \\ V = -2.08 \text{ ton} \end{matrix}$$

$$\text{Si } x = 3 \quad ; \quad \begin{matrix} M = 0 \text{ t-m} \\ V = -2.08 \text{ ton} \end{matrix}$$

Calculo de las fuerzas normales.

$$0 \leq X \leq 1$$

$$F_N = 0$$

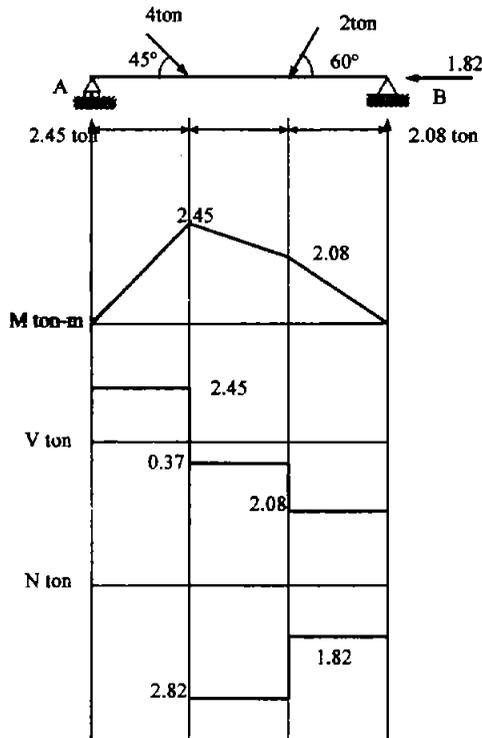
En esta sección de la viga no existe fuerza normal, puesto que la primera que se aparece esta aplicada en el punto en el cual empieza el segundo intervalo.

$$1 \leq X \leq 2$$

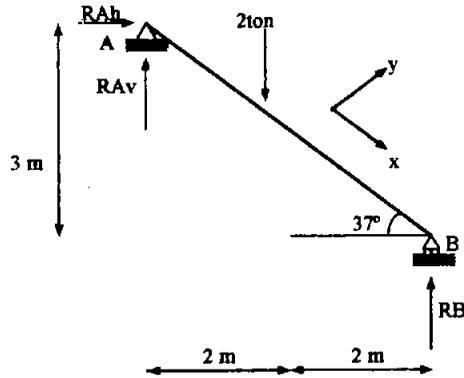
$F_N = 2.82$ ton y comprime la viga contra el apoyo B. la suma de fuerzas considera todas las acciones y reacciones a la izquierda o a la derecha de la sección, para este caso, se están considerando las fuerzas a la izquierda.

$$2 \leq X \leq 3$$

$$F_N = 2.82 - 1.0 = 1.82 \text{ ton}$$



g) En la siguiente viga inclinada calcule los elementos mecánicos.



Calculo de las reacciones.

$$\sum M_A = 2(2) - R_B(4) = 0$$

$$R_B = 1 \text{ ton}$$

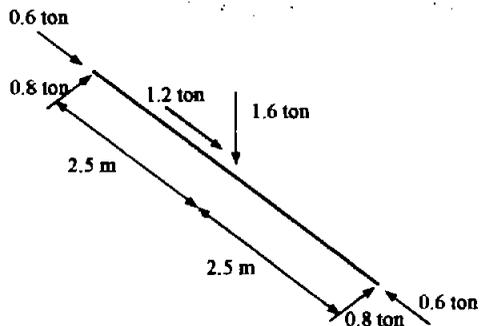
$$\sum F_y = R_A - 2 + 1 = 0$$

$$R_A = 1 \text{ ton}$$

Calculo de los momentos flexionantes.

El procedimiento es esencialmente el mismo, solo tenemos que recordar que el momento flexionante y la fuerza cortante, los producen las fuerzas que son transversales a la longitud de la viga, así como las reacciones en los apoyos tendrá que proyectarse sobre la barra.

El sistema con las fuerzas proyectadas sobre las barras nos queda:



Las fuerzas en toneladas
y las distancias en metros.

Calculo de los momentos flexionantes; y fuerzas cortantes.

$$0 \leq x \leq 2.5$$

$$M = 0.8x$$

$$V = 0.8$$

Si, $x = 0$

$$M = 0$$

$$V = 0.8 \text{ ton}$$

Si, $x = 2.5$

$$M = 2 \text{ t-m}$$

$$V = 0.8 \text{ ton}$$

$$2.5 \leq x \leq 5.0$$

$$M = 0.8x - 1.6(x - 2.5)$$

$$V = -0.8$$

Si, $x = 2.5$

$$M = 2$$

$$V = -0.8 \text{ ton}$$

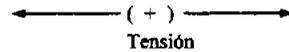
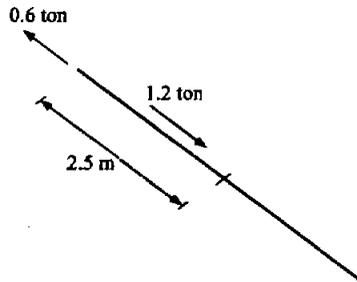
Si, $x = 5.0$

$$M = 0 \text{ t-m}$$

$$V = -0.8 \text{ ton}$$

Calculo de las fuerzas normales.

$$0 \leq x \leq 2.5$$



Observemos que en este intervalo existen dos fuerzas normales, la reacción del apoyo y la proyección de la fuerza actuante.

La suma de fuerzas normales queda: $F_N = -0.6 + 1.2 = 0.6 \text{ ton}$. Las fuerzas actúan sobre la barra tratando de alargarla, entonces decimos que la barra trabaja a tensión.

$$2.5 \leq x \leq 5.0$$

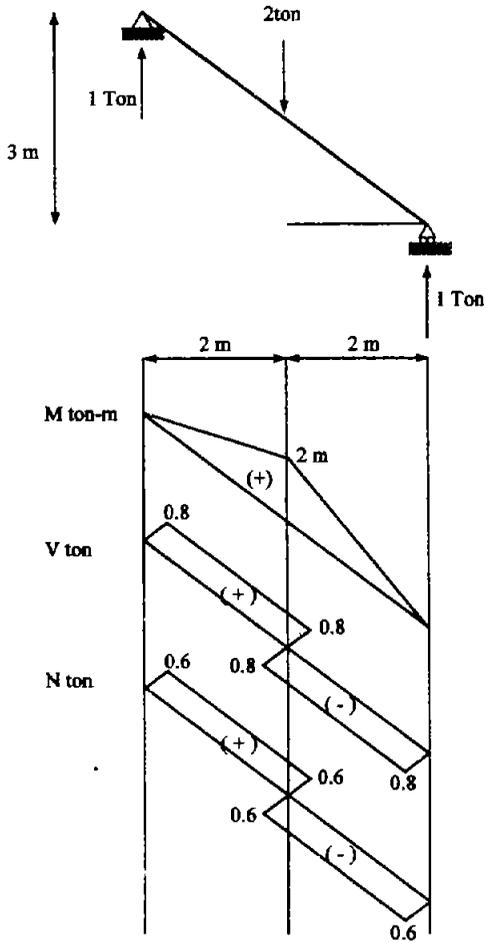
En este intervalo consideramos todas las fuerzas normales. Actuantes en el.

$$F_N = 1.2 - 0.6 = 0.6 \text{ ton}$$

En este caso las fuerzas tratan de acortar la barra, se dice que la barra trabaja a compresión.

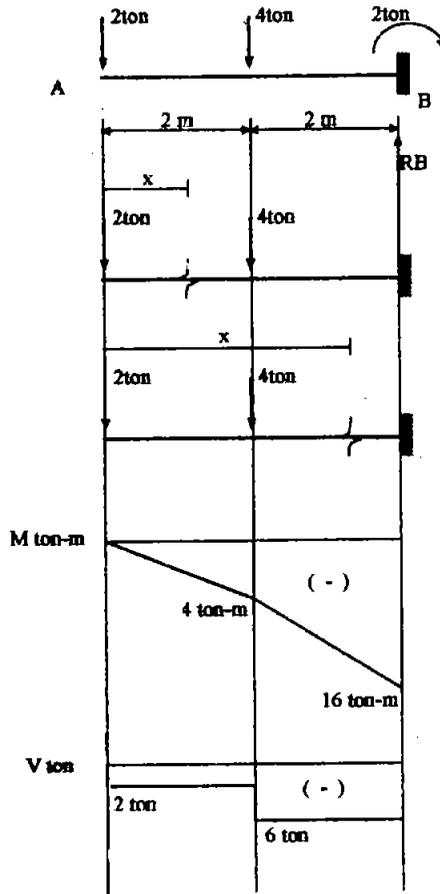


El diagrama finalmente queda:



4.3. VIGAS EN VOLADIZO.

a) En la viga de la figura siguiente, encuentre los valores de los elementos mecánicos.



Calculo de las reacciones.

$$\sum F_y = -2 - 4 + R_B = 0$$

$$R_B = 6 \text{ ton}$$

$$\sum M_B = -2(4) - 4(2) + M_B = 0$$

$$M_B = 16 \text{ t-m}$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$M = -2x$$

$$V = -2$$

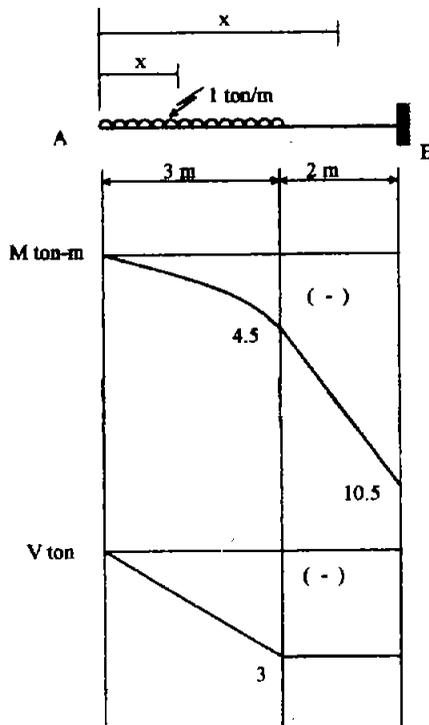
$$\text{Si, } x = 0$$

$$M = 0$$

$$V = -2 \text{ ton}$$

	Si, $x = 2$	$M = -4 \text{ t-m}$ $V = -2 \text{ ton}$
	$2 \leq x \leq 4$	
$M = -2x - 4(x-2)$	Si, $x = 2$	$M = -4 \text{ t-m}$ $V = -6 \text{ ton}$
$M = -6x + 8$		
$V = -6$	Si, $x = 4$	$M = -16 \text{ t-m}$ $V = -6 \text{ ton}$

b) En la siguiente viga, que tiene una carga distribuida en una parte de su longitud, calcule los valores de los elementos mecánicos.



En vigas como la de este caso, para obtener los diagramas de los elementos mecánicos, no es necesario calcular las reacciones.

Analizaremos directamente los intervalos:

$$0 \leq x \leq 3$$

$$M = -\frac{wx^2}{2}$$

$$V = -wx$$

$$\text{Si, } x = 0$$

$$M = 0$$

$$V = 0$$

$$\text{Si, } x = 3$$

$$M = -4.5$$

$$V = -3$$

$$3 \leq x \leq 5$$

$$M = -1(3)(x-3/2)$$

$$M = -3x + 4.5$$

$$V = -3$$

$$\text{Si, } x = 3$$

$$M = -4.5$$

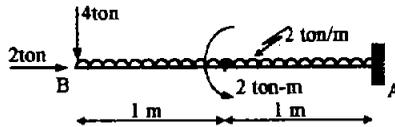
$$V = -3$$

$$\text{Si, } x = 5$$

$$M = -10.5$$

$$V = -3$$

c) Calcular los elementos mecánicos de la viga siguiente.



Calculo de las reacciones:

$$\sum F_x = 2 - R_b = 0$$

$$R_b = 2\text{ton}$$

$$\sum F_y = -4 - 2(2) + R_v = 0$$

$$R_v = 8\text{ton}$$

$$\sum M_A = 2(0) - 4(2) - 2(2)(1) + M_a + 2 = 0$$

$$M_a = 14\text{t-m}$$

Calculo de los momentos flexionantes:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$M = -4x - x^2$$

$$\text{si, } x = 0 ; M = 0$$

$$x = 1 ; M = -5\text{t-m}$$

$$1 \leq x \leq 2$$

$$M = -4x - x^2 - 2$$

$$\text{si, } x = 1 ; M = -5\text{t-m}$$

$$x = 2 ; M = -14\text{t-m}$$

Obsérvese la discontinuidad en el diagrama, producido por el momento concentrado en "c".

Calculo de las fuerzas cortantes y normales:

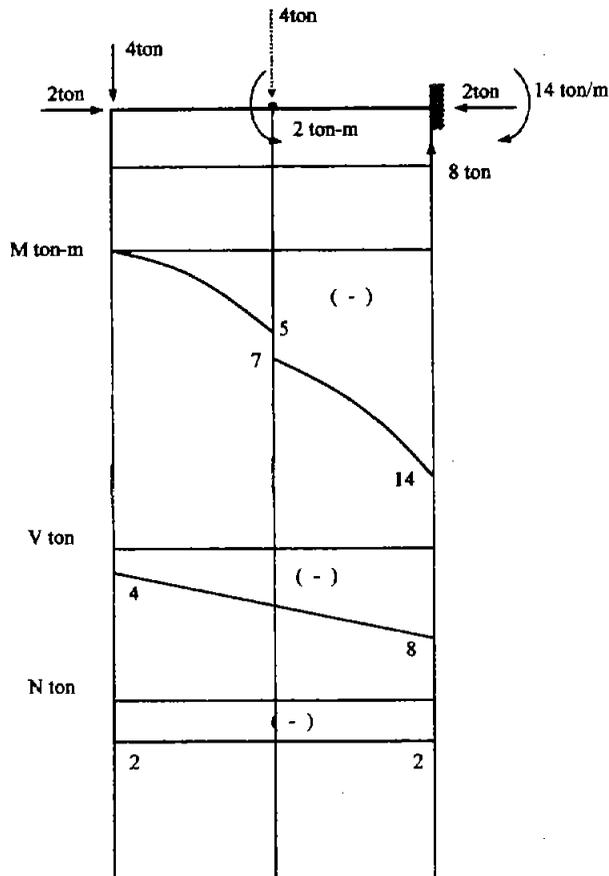
$$0 \leq x \leq 2 \quad V = -4 - 2x \quad \text{si, } x = 0 \quad ; \quad V = -4 \text{ ton}$$

$$x = 2 \quad ; \quad V = -8 \text{ ton}$$

$$N = 2 \text{ ton (a compresion)}$$

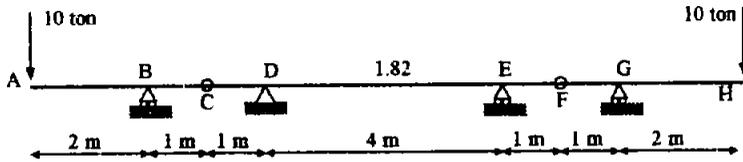
Nótese que para las fuerzas cortante y normal, el momento concentrado no tiene ninguna influencia.

Los diagramas finalmente son:



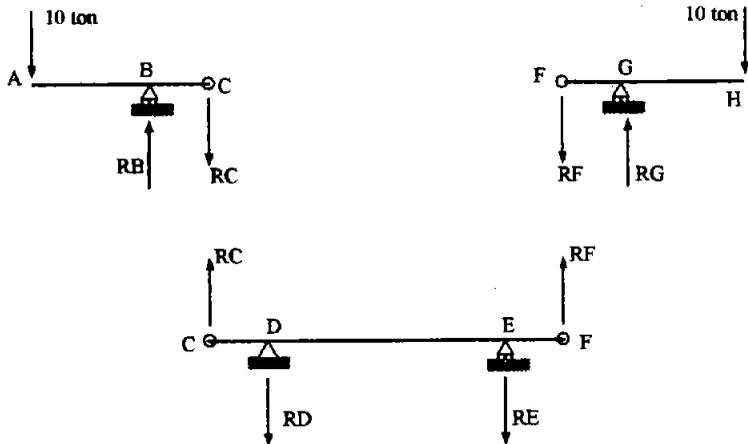
4.4. VIGAS GERBER

a) En la siguiente viga calcular sus elementos mecánicos.



Para la resolución de este tipo de vigas se hace el cálculo de las reacciones por tramos, considerando que se puede dividir la viga a la altura de cada articulación. Con esta división lo que obtenemos son vigas simplemente apoyadas de fácil solución, cuyas reacciones corresponderán, uno a uno de los apoyos reales de la viga y la otra corresponderá a la fuerza que actúa sobre la articulación.

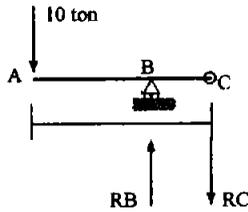
La fuerza que actúa sobre la articulación se transportara de un tramo al otro de la viga, con la misma magnitud pero con el sentido inverso, gráficamente se puede expresar lo anterior de la forma siguiente.



Como vemos, de la división de la viga quedan 3 vigas simplemente apoyadas de las cuales, las correspondientes a los tramos AC y FH son las más fáciles, por lo tanto se resolverán estas en primera instancia, para después transportar las reacciones sobre las articulaciones hacia la viga central.

Una vez realizado el equilibrio y haber encontrado las reacciones de la biga, el cálculo de los elementos mecánicos se hace en la forma normal, proponiendo cortes sobre la biga y tomando momentos de las fuerzas respecto a ese punto.

Calculo de las reacciones:



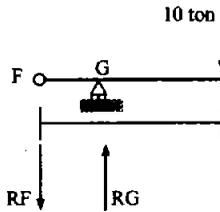
Tramo \bar{AC}

$$\sum M_C = -10(3) + R_B = 0$$

$$R_B = 30 \text{ ton}$$

$$\sum M_B = -10(2) + R_C(1) = 0$$

$$R_C = 20 \text{ ton}$$



Tramo \bar{FH}

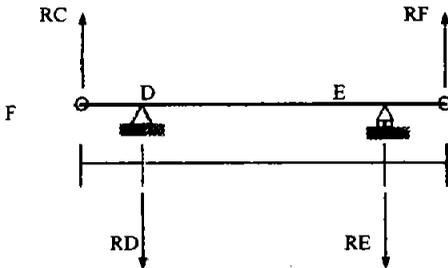
$$\sum M_F = 10(3) + R_G(1) = 0$$

$$R_G = 30 \text{ ton}$$

$$\sum M_G = 10(2) - R_F(1) = 0$$

$$R_F = 20 \text{ ton}$$

Transportando las reacciones de las articulaciones C y F obtenidas del cálculo anterior, al tramo intermedio de la viga:



$$\sum M_D = 20(1) + R_E(4) - 20(5) = 0$$

$$R_E = 20 \text{ ton}$$

$$\sum M_E = -20(5) - R_D(4) + 20(1) = 0$$

$$R_D = 20 \text{ ton}$$

Calculo de los elementos mecánicos

$$0 \leq x \leq 2$$

$$M = -10x$$

$$V = -10$$

Si, $x = 0$;

$$M = 0 \text{ t-m}$$

$$V = -10 \text{ ton}$$

Si, $x = 2$;

$$M = -20 \text{ t-m}$$

$$V = -10 \text{ ton}$$

$$2 \leq x \leq 4$$

$$\sum M = -10x + 30(x-2) = 20x - 60$$

Si, $x = 2$;

$$M = -20 \text{ t-m}$$

$$V = 20 \text{ ton}$$

$$V = 20$$

$$\text{Si, } x = 4 \quad ; \quad \begin{array}{l} M = 20 \text{ t-m} \\ V = 20 \text{ ton} \end{array}$$

$$4 \leq x \leq 8$$

$$\sum M = -10x + 30(x - 2) - 20(x - 4) = 20 \text{ t-m (constante en este tramo)}$$

$$V = 0$$

$$8 \leq x \leq 10$$

$$\sum M = -10x + 30(x - 2) - 20(x - 4) - 20(x - 8)$$

$$M = -20x + 180$$

$$V = -20 \text{ (constante para todo el tramo)}$$

$$\text{Si, } x = 8 \quad ; \quad \begin{array}{l} M = 20 \text{ t-m} \\ V = -20 \text{ ton} \end{array}$$

$$\text{Si, } x = 10 \quad ; \quad \begin{array}{l} M = -20 \text{ t-m} \\ V = -20 \text{ ton} \end{array}$$

$$10 \leq x \leq 12$$

$$\sum M = -10x + 30(x - 2) - 20(x - 4) - 20(x - 8) + 30(x - 10)$$

$$M = 10x - 120$$

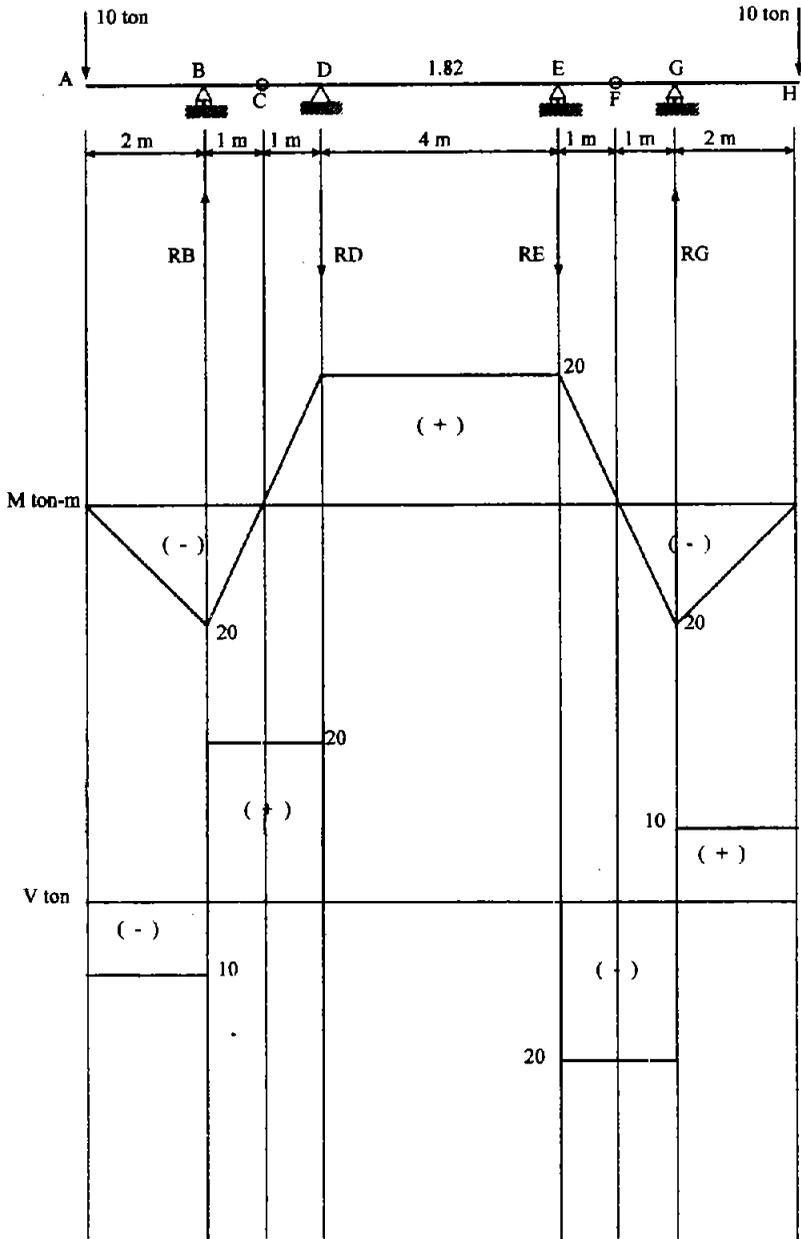
$$V = 10 \text{ (constante para todo el tramo)}$$

$$\text{Si, } x = 10 \quad ; \quad \begin{array}{l} M = -20 \text{ t-m} \\ V = 10 \text{ ton} \end{array}$$

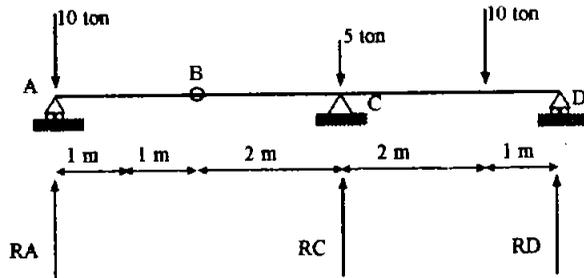
$$\text{Si, } x = 12 \quad ; \quad \begin{array}{l} M = 0 \text{ t-m} \\ V = 10 \text{ ton} \end{array}$$

Un punto importante que debemos destacar es que en las articulaciones el valor del momento flexionante debe valer cero en todos los casos, puesto que una articulación no está capacitada para resistir tales sollicitaciones.

Los diagramas finales de los elementos mecánicos se presentan a continuación.



b) Encontrar los elementos mecánicos de la viga siguiente.



Calculo de las reacciones:

$$\sum M_B = 0 \quad (\text{tramo AB})$$

$$2R_A - 10(1) = 0$$

$$R_A = 5 \text{ ton}$$

$$\sum M_D = 0 \quad (\text{del conjunto})$$

$$7(5) - 10(6) + R_C(3) - 5(3) - 10(1) = 0$$

$$R_C = 16.66 \text{ ton}$$

$$\sum M_B = 0 \quad (\text{tramo CD})$$

$$5(2) - 16.66(2) + 10(4) - R_D(5) = 0$$

$$R_D = 3.37 \text{ ton}$$

Calculo de los momentos flexionantes:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$M = 5x$$

$$\text{Si, } x = 0 \quad ; \quad M = 0$$

$$\text{Si, } x = 1 \quad ; \quad M = 5 \text{ t-m}$$

$$1 \leq x \leq 4$$

$$M = 5x - 10(x-1)$$

$$\text{Si, } x = 1 \quad ; \quad M = 5 \text{ t-m}$$

$$M = -5x + 10$$

$$\text{Si, } x = 4 \quad ; \quad M = -10 \text{ t-m}$$

$$4 \leq x \leq 6$$

$$M = 5x - 10(x-1) + 11.66(x-4) \quad \text{Si, } x = 4 \quad ; \quad M = -10 \text{ t-m}$$

$$M = 6.66x - 36.64 \quad \text{Si, } x = 6 \quad ; \quad M = 3.37 \text{ t-m}$$

$$6 \leq x \leq 7$$

$$M = 5x - 10(x-1) + 11.66(x-4) - 10(x-6) \quad \text{Si, } x = 6 \quad ; \quad M = 3.37 \text{ t-m}$$

$$M = -3.33x + 23.33 \quad \text{Si, } x = 7 \quad ; \quad M = 0$$

Calculo de las fuerzas cortantes:

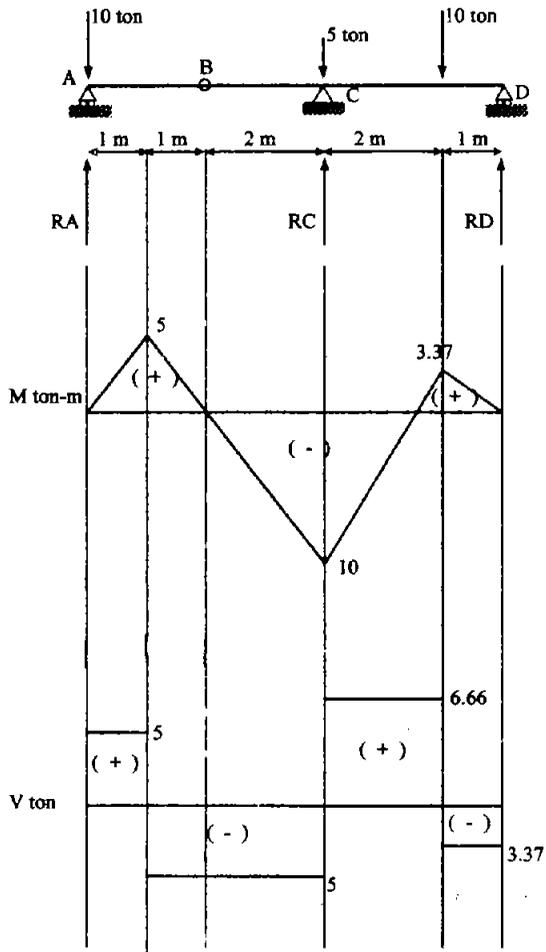
$$0 \leq x \leq 1 \quad V = 5 \quad V = 5 \text{ ton}$$

$$1 \leq x \leq 4 \quad V = 5 - 10 \\ V = -5 \quad V = 5 \text{ ton}$$

$$4 \leq x \leq 6 \quad V = 5 - 10 + 11.66 \\ V = 6.66 \quad V = 6.66 \text{ ton}$$

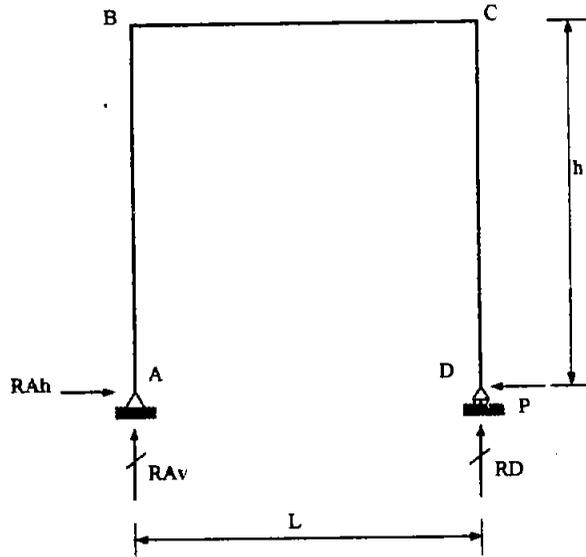
$$6 \leq x \leq 7 \quad V = 5 - 10 + 11.66 - 10 \\ V = -3.33 \quad V = -3.33 \text{ ton}$$

Diagramas finales



4.5. MARCOS CON DOS APOYOS

a) Calcular los elementos mecánicos del marco siguiente.



Calculo de las reacciones

$$\sum F_x = R_{hA} - P = 0$$

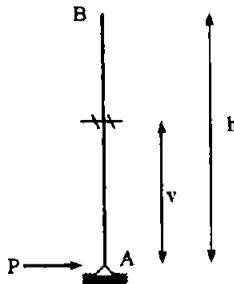
$$R_{hA} = +P$$

$$\sum M_B = R_{Av}(L) = 0$$

$$R_{Av} = 0$$

$$R_D = 0$$

Una vez realizado el equilibrio, elegimos un sentido de recorrido sobre la estructura, para este caso lo haremos en el sentido de las manecillas del reloj. Analizando el primer tramo (AB), hacemos un corte en la longitud Y y tomamos los momentos.

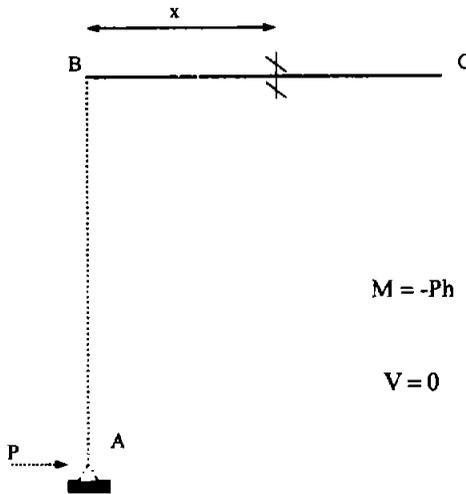


El intervalo será: $0 \leq Y \leq h$

$$M = -PY \quad \text{si } Y = 0 \quad M = 0 \quad V = -P$$

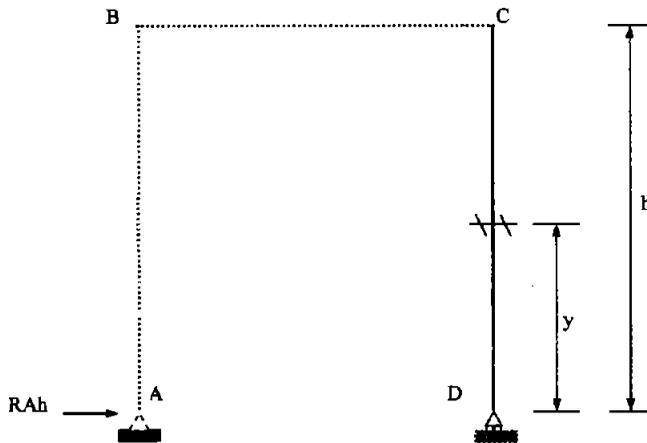
$$V = -P \quad \text{si } Y = h \quad M = -Ph \quad V = -P$$

$$0 \leq x \leq L$$



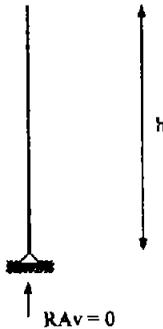
$M = -Ph$	si $x = 0$	$M = -Ph$
		$V = 0$
$V = 0$	si $x = L$	$M = -Ph$
		$V = 0$

$$h \geq y \geq 0$$



$M = -PY$	si $Y = h$	$M = -Ph$
		$V = -P$
$V = -P$	si $Y = 0$	$M = 0$
		$V = -P$

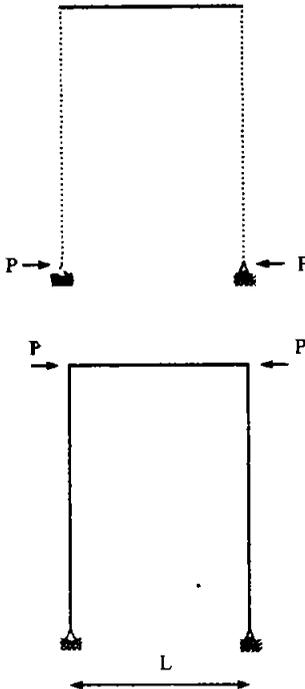
Calculo de las fuerzas normales



$$0 \leq X \leq h$$

Para esta sección del marco no hay fuerzas axiales, puesto que $R_{Av} = 0$ es claro que ninguna de las fuerzas actuantes produce compresión o tensión alguna sobre la barra.

$$0 \leq X \leq L$$



Para la barra horizontal se produce una compresión debida a la fuerza P , la cual no esta aplicada directamente sobre la barra, la fuerza es transmitida pro medio de las barras verticales en forma de fuerza cortante puesto que actúan en forma transversal al eje longitudinal de estas.

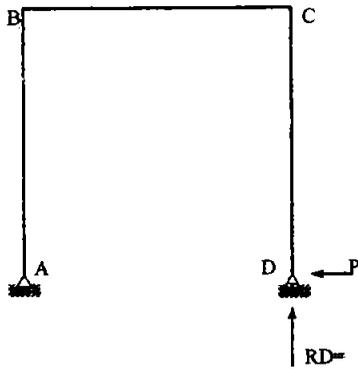
Sin embargo al llegar al extremo superior, como la estructura cambia de dirección, la fuerza " P " que en la barra vertical actúa como cortante se transforma en una fuerza normal.

Concluyendo, la barra horizontal tendrá una fuerza normal equivalente a la fuerza cortante que llega a los extremos que la limitan

$$N = -P \text{ (a compresion)}$$

$$\text{si } x = 0 \quad N = -P$$

$$\text{si } x = L \quad N = -P$$

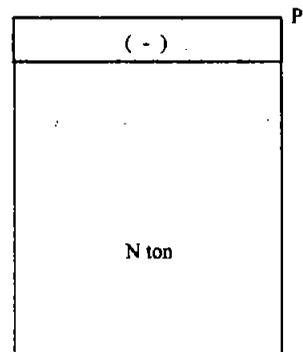
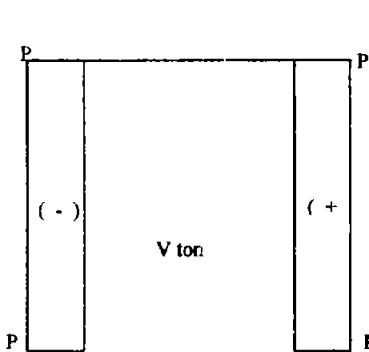
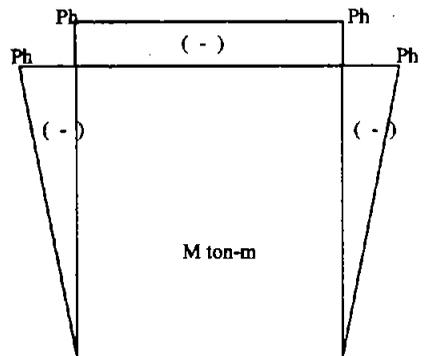
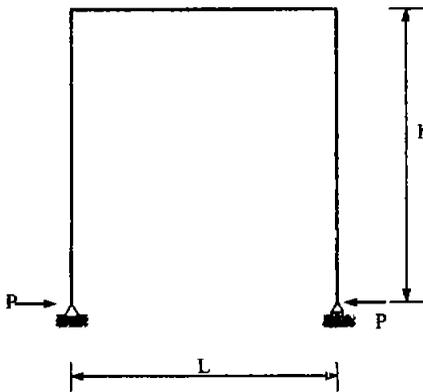


$$h \geq Y \geq 0$$

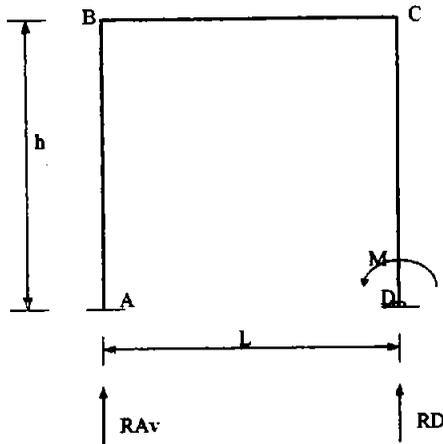
$$N = 0$$

Se presenta el mismo caso que para la barra \overline{AB}

Los diagramas de los elementos mecánicos finalmente son:



b) Encuentre los diagramas de los elementos mecánicos de la estructura siguiente.



Calculo de las reacciones:

$$\sum M_D = -M + A_y(L) = 0$$

$$A_y = M/L$$

$$\sum F_y = -D_y - M/L$$

$$D_y = M/L$$

Calculo de los elementos flexionantes:

Tramo; AB $0 \leq y \leq h$ $M = 0$ (no existen acciones ni reacciones en este tramo que provoquen momento.)

Tramo; BC $0 \leq x \leq L$ $M = \frac{M}{L} x$

$$\text{si, } x = 0 ; M = 0$$

$$x = L ; M = M \text{ t-m}$$

Tramo; CD $h \geq y \geq 0$ $M = \frac{M}{L} L = M$

$$\text{si, } y = h ; M = M \text{ t-m}$$

$$y = 0 ; M = M \text{ t-m}$$

Calculo de las fuerzas cortantes y normales:

$$0 \leq y \leq h$$

$$V = 0$$

$$N = M/L \text{ (a compression, constante sobre toda la barra)}$$

$$0 \leq x \leq L \quad V = \frac{M}{L} \text{ cte}$$

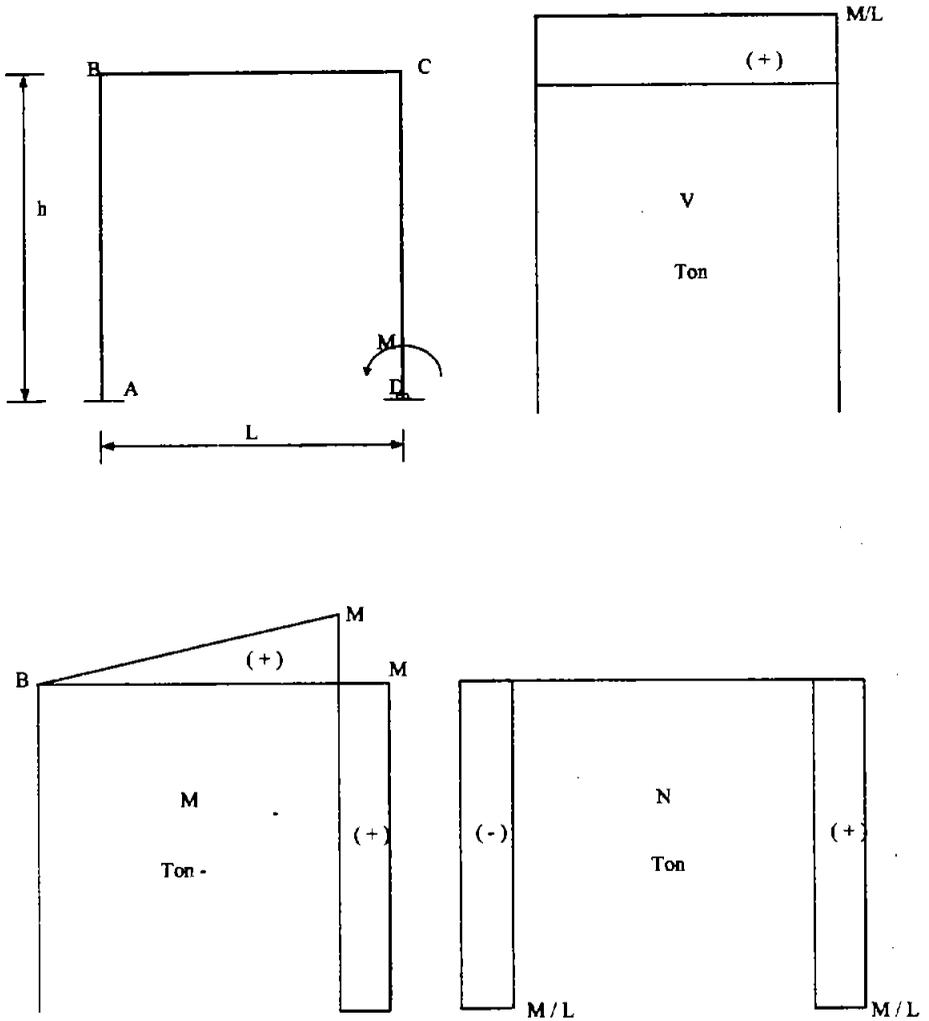
$$N = 0$$

$$H \geq y \geq 0 \quad V = 0$$

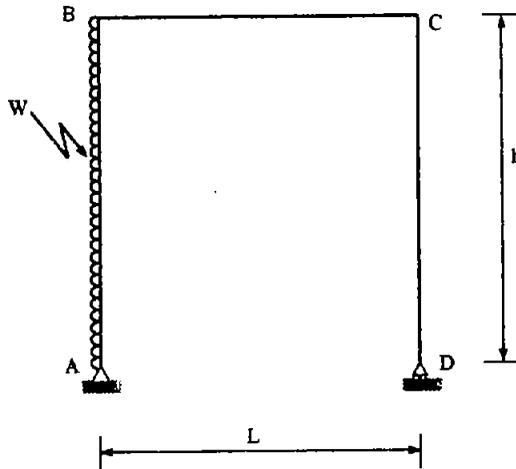
$$V = 0$$

$$N = M/L \quad (\text{a tension})$$

Los diagramas son:



c) Encontrar los elementos mecánicos del marco siguiente:



Calculo de las reacciones:

$$\sum F_x = wh - Ax = 0$$

$$Ax = wh$$

$$\sum M_A = -\frac{wh^2}{2} + D_y L = 0$$

$$D_y = \frac{wh^2}{2L}$$

$$\sum M_D = AyL - \frac{wh^2}{2} = 0$$

$$Ay = \frac{wh^2}{2L}$$

Calculo de los momentos flexionantes:

$$0 \leq y \leq h \quad M = why - \frac{wy^2}{2}$$

$$\text{Para: } y = 0 \quad M = 0$$

$$y = h \quad M = \frac{wh^2}{2}$$

$$0 \leq x \leq L \quad M = \frac{wh^2}{2} - \frac{wh^2 x}{2L}$$

$$\text{Para: } x = 0 \quad M = \frac{wh^2}{2}$$

$$x = L \quad M = 0$$

$$h \geq y \geq 0 \quad M = 0$$

Calculo de las fuerzas cortantes y normales:

$$0 \leq y \leq h$$

$$V = wh - wy$$

$$\text{Para: } y = 0 \quad M = wh \text{ ton}$$

$$y = h \quad V = 0$$

$$N = \frac{wh^2}{2L} \text{ (cte. a tension)}$$

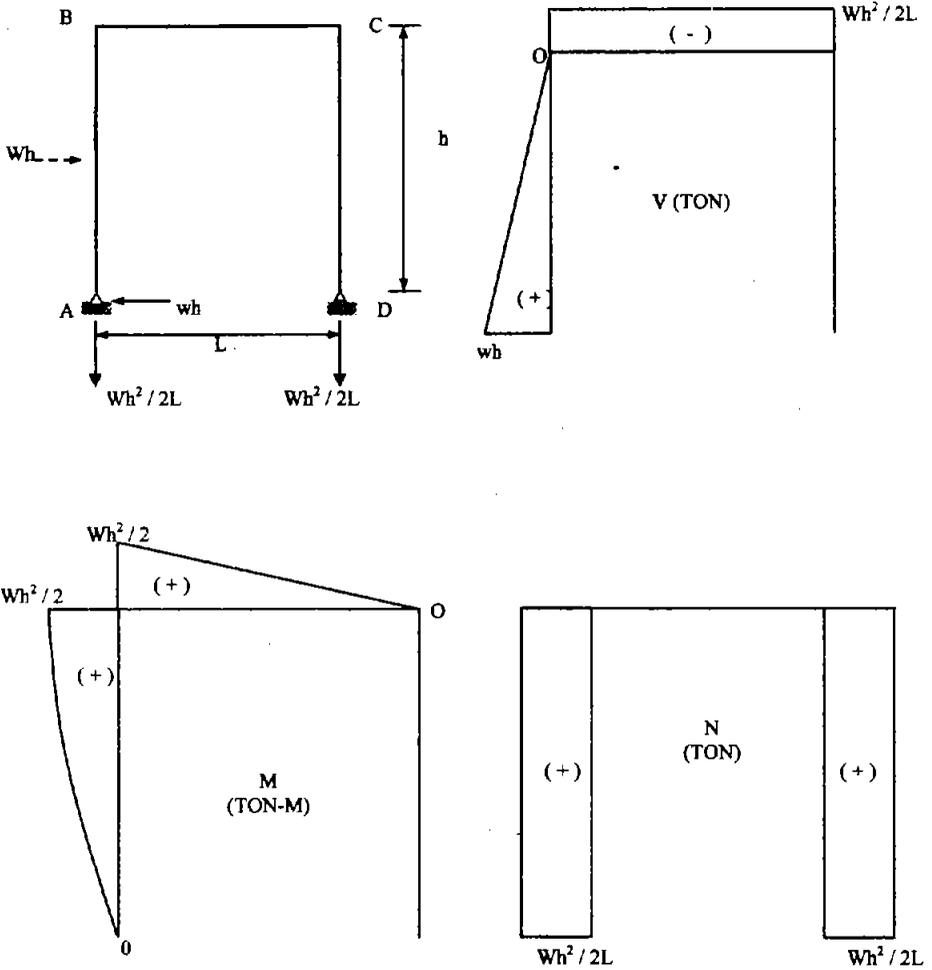
$$0 \leq x \leq L \quad V = -\frac{wh^2}{2L} \text{ ton (cte. en toda la seccion)}$$

$$N = 0$$

$$h \geq y \geq 0 \quad V = -wh + wh = 0$$

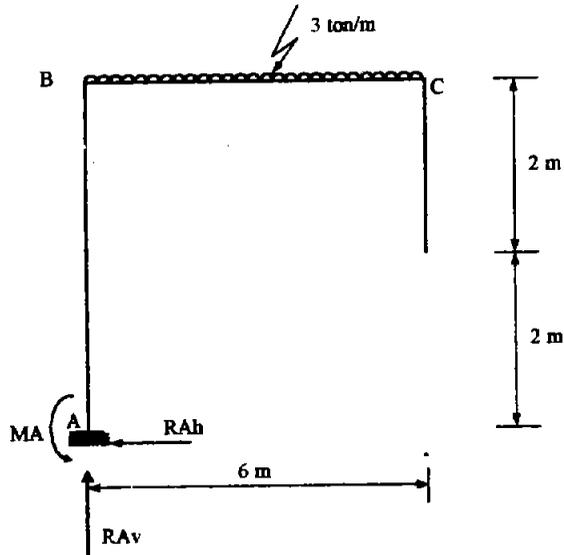
$$N = -\frac{wh^2}{2L} \text{ (cte. a compression)}$$

Los diagramas son:



4.6. MARCOS EN VOLADIZO

a) Calcular los elementos mecánicos del marco siguiente.



Calculo de las reacciones:

$$\sum M_A = -M_A + 36(6)(6/2) = 0$$

$$M_A = 54 \text{ t-m}$$

$$\sum F_y = R_v - 3(6) = 0$$

$$R_v = 18 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_h = 0$$

$$0 \leq y \leq 4$$

$$M = -54 \text{ (cte)}$$

$$V = 0$$

$$N = 18 \text{ ton (compresion)}$$

$$0 \leq x \leq 6$$

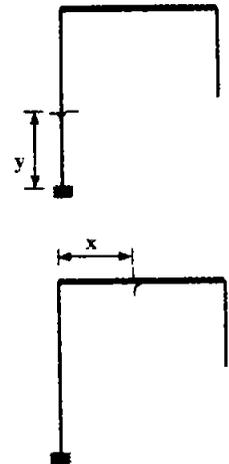
$$M = -54 + 18x - 3(x)(x/2) \quad x = 0 \quad ; \quad M = -54$$

$$V = 18$$

$$V = 18 - 3x \quad x = 6 \quad ; \quad M = 0$$

$$V = 0$$

$$N = 0$$

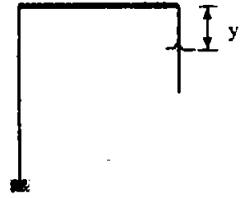


$$2 \geq y \geq 0$$

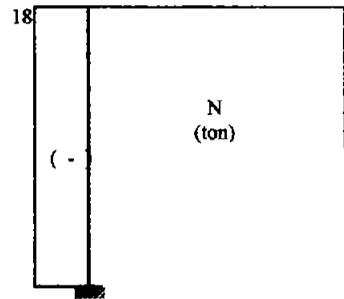
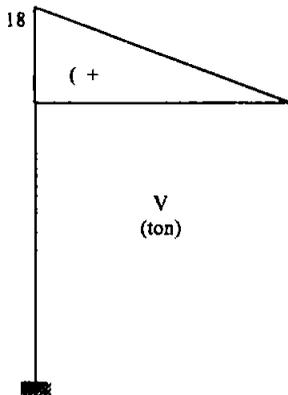
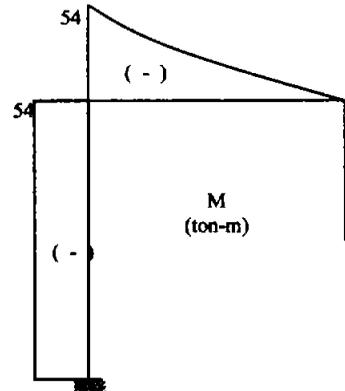
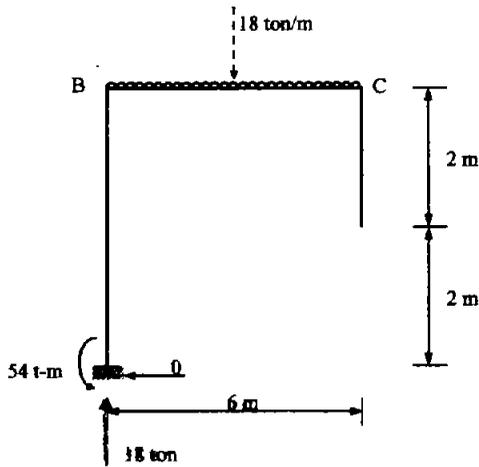
$$M = -54 + 18(6) - 18(3) = 0$$

$$V = 0$$

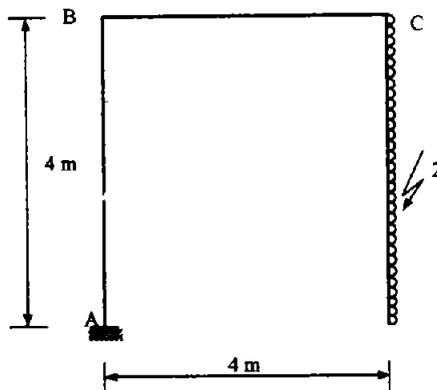
$$N = 0$$



Diagramas finales:



1.16.2. Resolver el marco siguiente y evaluar los elementos mecánicos.



Calculo de las reacciones:

$$\sum M_A = -M_A - 2(4)(2) = 0$$

$$M_A = 16 \text{ t-m}$$

$$\sum F_x = -2(4) + R_A = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A = 8 \text{ ton}$$

$$0 \leq y \leq 4$$

$$M = 16 - 8y \quad \text{si } y = 0 \quad ; \quad M = 16 \text{ t-m}$$

$$V = -8 \text{ ton}$$

$$V = -8 \quad \text{si } y = 4 \quad ; \quad M = -16 \text{ t-m}$$

$$V = -8 \text{ ton}$$

$$N = 0$$

$$0 \leq x \leq 4$$

$$M = 16 - 8(4) = -16 \text{ t-m (cte en el tramo)}$$

$$V = 0$$

$$N = 8 \text{ ton (cte, a compresion)}$$

$0 \leq y \leq 4$ (utilizando la convencion a la derecha de la seccion)

$$M = 16 - 8(4 - y) - 2(y)(y/2)$$

$$M = -16 + 8y - y^2$$

$$\text{si } y=0 \quad ; \quad M = -16 \text{ t-m}$$

$$V = 8 \text{ ton}$$

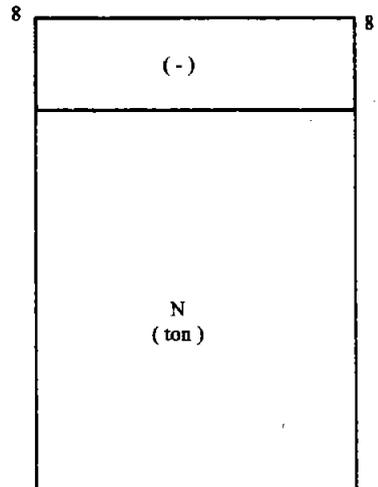
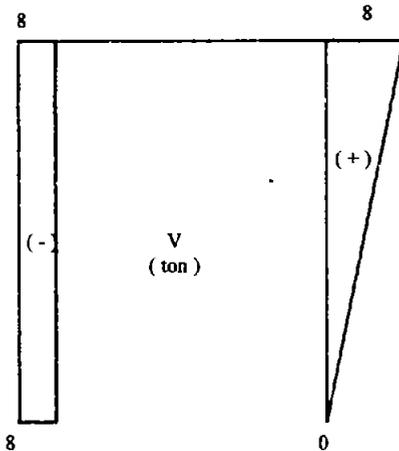
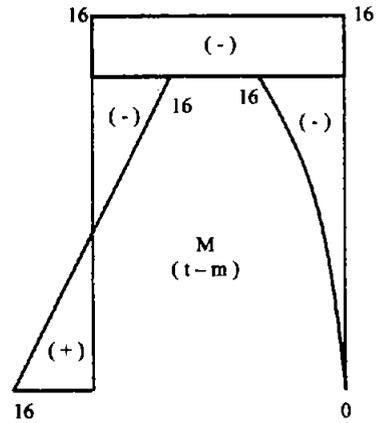
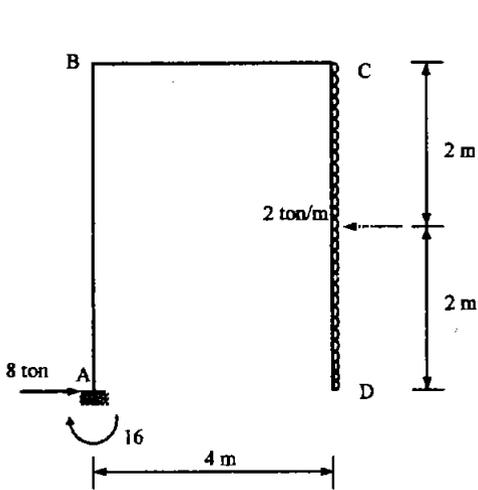
$$V = 8 - 2y$$

$$\text{si } y=4 \quad ; \quad M = 0$$

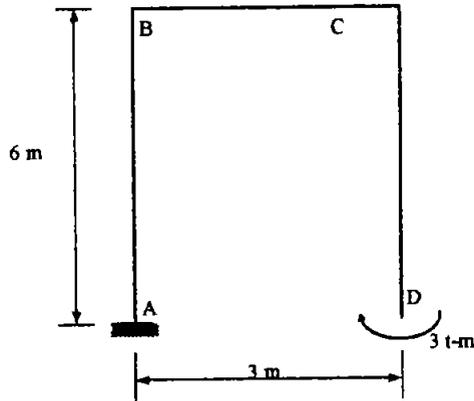
$$V = 0$$

$$N = 0$$

Diagramas finales:



c) determine los diagramas de los elementos mecánicos del marco siguiente.



Calculo de las reacciones.

$$\sum M_A = -M_A + 3 = 0$$

$$M_A = 3 \text{ t-m}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{Ah} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{Av} = 0$$

$$0 \leq y \leq 6$$

$$M = -3 \text{ t-m} \quad \text{si } y = 0 \quad ; \quad M = -3 \text{ t-m}$$

$$V = 0 \text{ ton}$$

$$V = 0 \quad \text{si } y = 6 \quad ; \quad M = -3 \text{ t-m}$$

$$V = 0$$

$$N = 0$$

$$0 \leq x \leq 3$$

$$M = -3 \text{ t-m} \quad \text{si } x = 0 \quad ; \quad M = -3 \text{ t-m}$$

$$V = 0 \text{ ton}$$

$$V = 0 \quad \text{si } x = 3 \quad ; \quad M = -3 \text{ t-m}$$

$$V = 0$$

$$N = 0$$

$$0 \leq y \leq 6$$

$$M = -3 \text{ t-m} \quad \text{si } y = 0 \quad ; \quad M = -3 \text{ t-m}$$

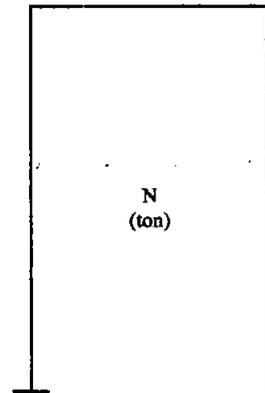
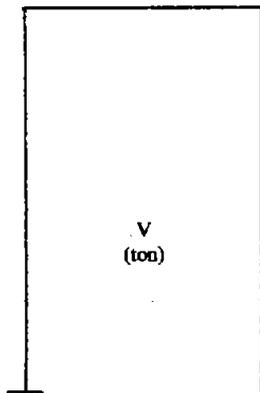
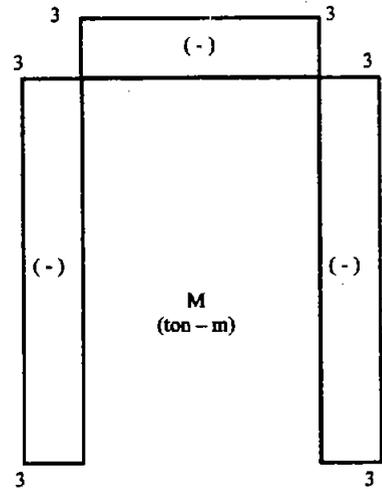
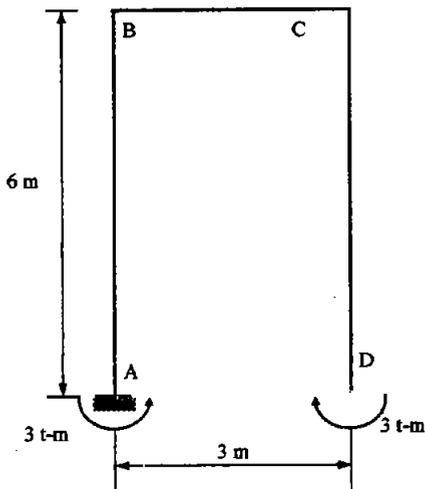
$$V = 0 \text{ ton}$$

$$V=0$$

$$N=0$$

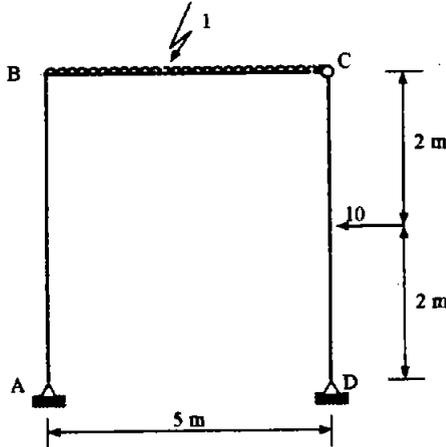
$$\text{si } y=6 \quad ; \quad M=-3 \text{ t-m}$$

$$V=0$$

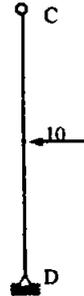


4.7. MARCOS TRIARTICULADOS

- a) Encontrar los diagramas de los elementos mecánicos para cada uno de los marcos de tres articulaciones que se presentan a continuación.



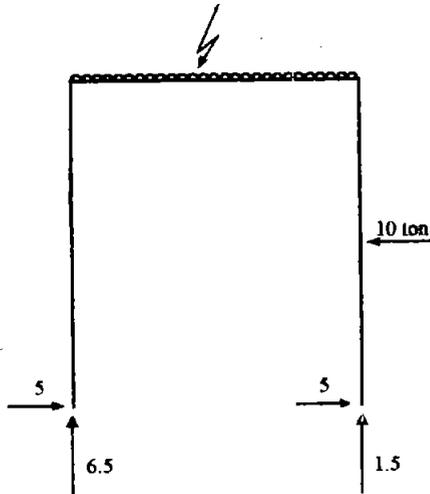
Calculo de las reacciones:
Aislado el tramo CD.



$$\sum M_C = 10(2) - R_{Dh}(4) = 0$$

$$R_{Dh} = 5 \text{ ton}$$

Considerando todo el marco



$$\sum F_x = R_{Ah} - 10 + 5 = 0$$

$$R_{Ah} = 5 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = 1(5)(5/2) - 10(2) + R_D(5) = 0$$

$$R_D = 1.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = R_A - 5 - 1.5 = 0$$

$$R_A = 6.5 \text{ ton}$$

Una vez determinado el equilibrio, procedemos a obtener los elementos mecánicos de la forma acostumbrada.

$$0 \leq y \leq 4$$

$$M = -5y$$

$$\text{si } y = 0$$

$$M = 0$$

$$V = -5 \text{ ton}$$

$$V = -5 \text{ (cte)} \qquad \text{si } y = 4 \qquad ; \qquad M = -20 \text{ t-m}$$

$$V = -5$$

$$N = -6.5 \text{ ton (compression)}$$

$$0 \leq x \leq 5$$

$$M = -5(4) + 6((5) - 1(x))(x/2)$$

$$M = -20 + 6.5x - x^2/2$$

$$V = 6.5 - x \qquad \text{si } x = 0 \qquad ; \qquad M = -20 \text{ t-m}$$

$$V = 6.5 \text{ ton}$$

$$N = 5 \text{ ton (a compression)} \qquad \text{si } x = 5 \qquad ; \qquad M = 0$$

$$V = 1.5$$

$$4 \geq y \geq 2$$

$$M = 6.5(5) - 5y - 5(2.5)$$

$$M = 20 - 5y \qquad \text{si } y = 4 \qquad ; \qquad M = 0$$

$$V = 5 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad V = 5 \text{ ton}$$

$$N = 1.5 \text{ ton (a tension)} \qquad \text{si } y = 2 \qquad ; \qquad M = 10 \text{ t-m}$$

$$V = 5 \text{ ton}$$

$$2 \geq y \geq 0$$

$$M = 6.5(5) + 5y - 3(2.5) - 10(2 - y)$$

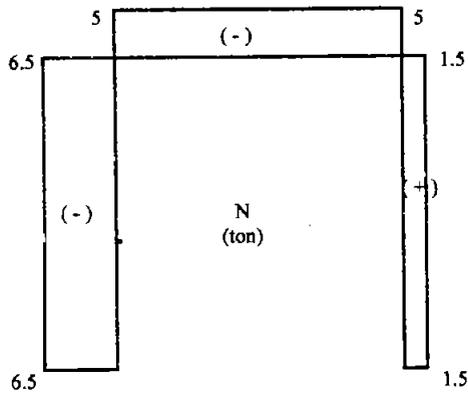
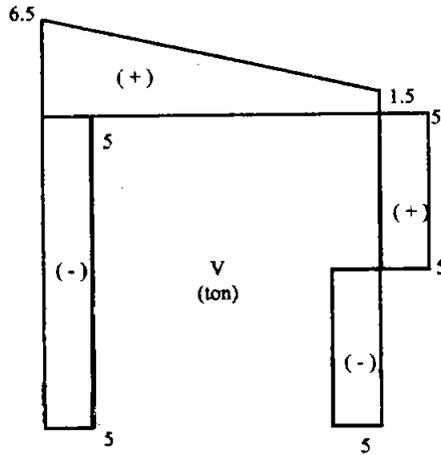
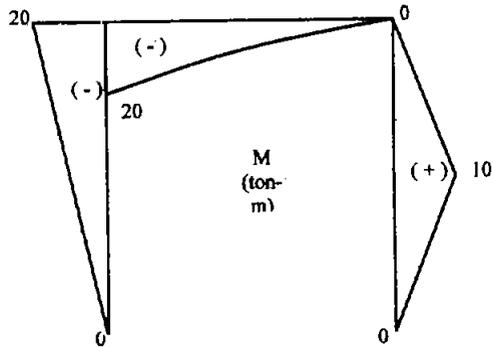
$$M = 5y \qquad \text{si } y = 2 \qquad ; \qquad M = 10 \text{ t-m}$$

$$V = -5 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad V = -5 \text{ ton}$$

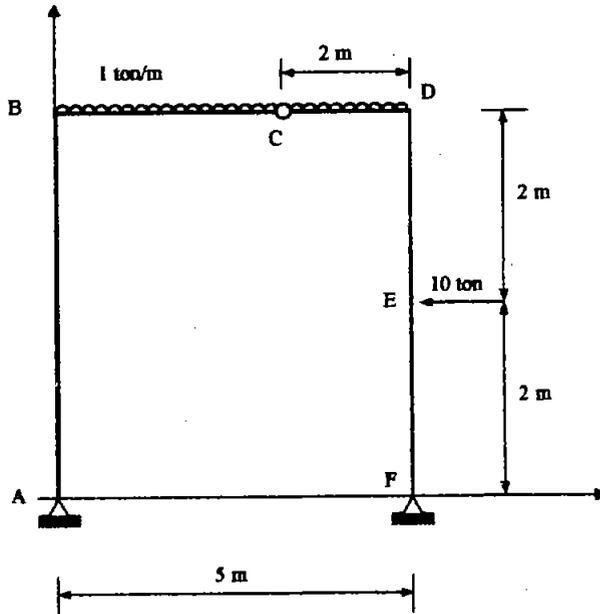
$$N = +1.5 \text{ ton (a tension)} \qquad \text{si } y = 0 \qquad ; \qquad M = 0$$

$$V = -5 \text{ ton}$$

Los diagramas son:



b) Resolver el siguiente marco triarticulado.



Calculo de las reacciones:

$$\sum M_A = 0 \quad ; \quad (\text{del conjunto})$$

$$\sum M_A = 5(2.5) - 10(2) + R_{Fy}(5) = 0$$

$$R_{Fy} = 1.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad (\text{del conjunto})$$

$$\sum F_y = R_{Ay} - 5 - 1.5 = 0$$

$$R_{Ay} = 6.5 \text{ ton}$$

$$\sum M_C = 0 \quad ; \quad (\text{del tramo CF})$$

$$\sum M_C = 2(1) + 10(2) + 1.5(2) - R_{Fx}(4) = 0$$

$$R_{Fx} = 6.25 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad (\text{del conjunto})$$

$$\sum F_x = R_{Ax} - 10 + 6.25 = 0$$

$$R_{Ax} = 3.75 \text{ ton}$$

Calculo de los momentos flexionantes

$$0 \leq y \leq 4$$

$$M = -3.75y \quad \begin{array}{l} \text{si } y = 0 \\ \text{si } y = 4 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} M = 0 \\ M = -15 \text{ t-m} \end{array}$$

$$0 \leq x \leq 3$$

$$M = -3.75(4) + 6.5x - x^2/2$$

$$M = -15 + 6.5x - x^2/2 \quad \begin{array}{l} \text{si } x = 0 \\ \text{si } x = 3 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} M = -15 \text{ t-m} \\ M = 0 \end{array}$$

$$\text{Para } M_{\max} \quad \text{si } x = 5 \quad ; \quad M = 5 \text{ t-m}$$

$$\frac{dM}{dx} = 6.5 - x = 0 \quad ; \quad x = 6.5 \text{ m}$$

Nótese que el valor de x queda fuera de la barra

$$4 \geq y \geq 2$$

$$M = 6.5(5) - 5(2.5) - 3.75y$$

$$M = 20 - 3.75y \quad \begin{array}{l} \text{si } y = 4 \\ \text{si } y = 2 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} M = 5 \text{ t-m} \\ M = 12.5 \text{ t-m} \end{array}$$

$$2 \geq y \geq 0$$

$$M = 6.5(5) - 5(2.5) - 3.75y - 10(2 - y)$$

$$M = 6.25y \quad \begin{array}{l} \text{si } y = 2 \\ \text{si } y = 0 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} M = 12.5 \text{ t-m} \\ M = 0 \end{array}$$

Calculo de las fuerzas cortantes y normales:

$$0 \leq y \leq 4$$

$$V = -3.75 \quad V = -3.75 \text{ ton}$$

$$N = -6.5 \text{ (comp.)} \quad N = -6.5 \text{ ton}$$

$$0 \leq x \leq 5$$

$$V = 6.5 - x$$

$$N = -3.75 \text{ (compression)}$$

$$\text{si } x = 0 \quad ; \quad \begin{array}{l} V = 6.5 \text{ ton} \\ N = -3.75 \text{ ton} \end{array}$$

$$\text{si } x = 5 \quad ; \quad \begin{array}{l} V = 1.5 \text{ ton} \\ N = -3.75 \text{ ton} \end{array}$$

$$4 \geq y \geq 2$$

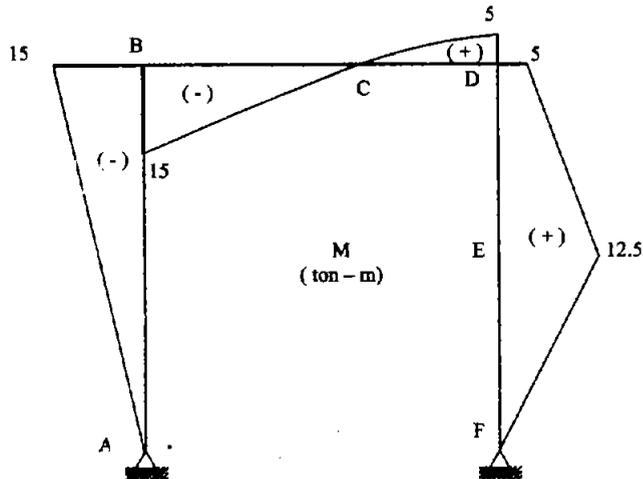
$$\begin{array}{l} V = 3.75 \\ N = 6.5 - 5 \end{array}$$

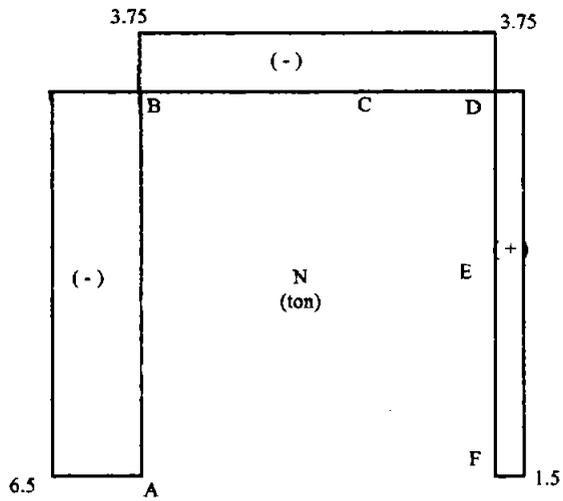
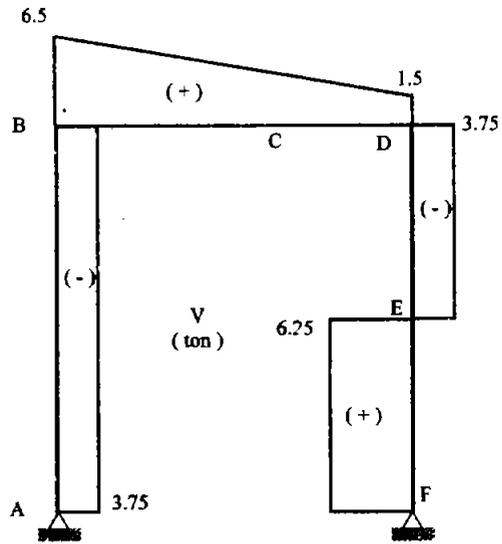
$$\begin{array}{l} V = 3.75 \text{ ton} \\ N = 1.5 \text{ ton} \end{array}$$

$$2 \geq y \geq 0$$

$$\begin{array}{l} V = 3.75 - 10 \\ N = 6.5 - 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} V = -6.25 \text{ ton} \\ N = 1.5 \text{ ton} \end{array}$$

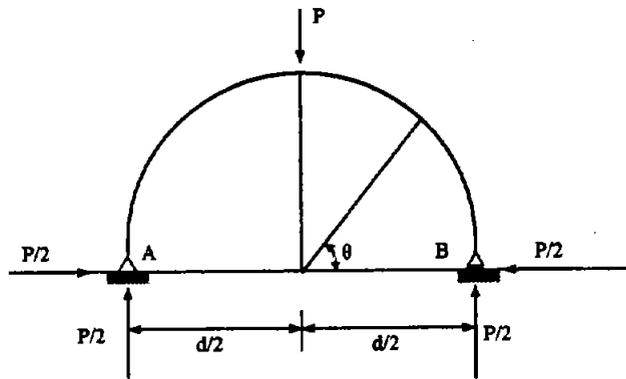




4.8. ARCOS SIMPLES

Se comporta o es similar a un cable invertido aunque posee rigidez y resistencia a flexión. Esta característica lo hace conservar su forma ante cargas distribuidas y puntuales. Debido a su forma los esfuerzos de compresión son mucho mas significativos que los de flexión y corte. Sus esfuerzos principales son de tracción o compresión y esto permite que su sección transversal sea pequeña relacionada con el claro entre sus apoyos. En el caso de cargas asimétricas el esfuerzo de flexión empieza a ser notable y el arco debe tomarse mas grueso en este caso.

- a) Encuentre los diagramas de los elementos mecánicos para el arco que se muestra en la figura.



Calculo de las reacciones:

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad P/2 - P + A_y = 0 \quad \quad A_y = P/2$$

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad -P/2 + A_x = 0 \quad \quad A_x = P/2$$

$$\sum M_A = P(d/2) - B_y(d) = 0 \quad \quad B_y = P/2$$

Calculo de los momentos flexionantes

$$180^\circ \geq \theta \geq 90^\circ$$

$$M_p = P/2(x-r) - P/2(y)$$

Pero: $x = r \cos \theta$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

$$M_p = P/2(r \cos \theta - r) + P/2(r) - P/2(r \operatorname{sen} \theta)$$

$$M_p = P/2(r(\cos \theta + 1 - \operatorname{sen} \theta))$$

$$90^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$$

$$M_F = P/2(x+r) - P/2(y) - Px$$

$$M_F = P/2(r \cos \theta) + P/2(r) - P/2(r \sin \theta) - P(r \cos \theta)$$

$$M_F = P/2(r(1 - \cos \theta - \sin \theta))$$

Calculo de las fuerzas cortantes:

$$180^\circ \geq \theta \geq 90^\circ$$

$$V = R \cdot e_v$$

Pero: $e_v = (\cos \theta, \sin \theta)$

$$R = P/2i + P/2j$$

$$V = (P/2i + P/2j) \cos \theta + \sin \theta$$

$$V = P/2 \cos \theta + \sin \theta$$

$$90^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$$

$$R = P/2i - P/2j$$

$$V = (P/2i - P/2j) \cos \theta + \sin \theta$$

$$V = P/2 \cos \theta - \sin \theta$$

calculo de las fuerzas normales:

$$N = R \cdot e_n \quad e_n = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

$$180^\circ \geq \theta \geq 90^\circ$$

$$R = P/2i + P/2j$$

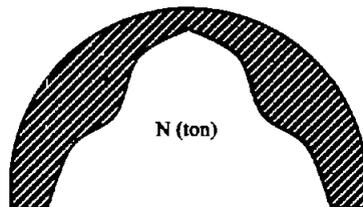
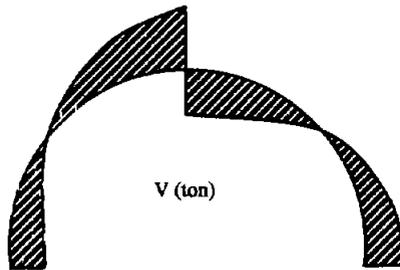
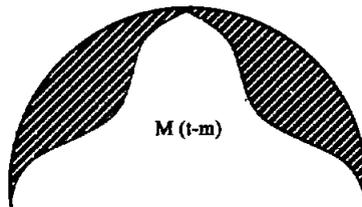
$$V = P/2(-\sin \theta + \cos \theta)$$

$$90^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$$

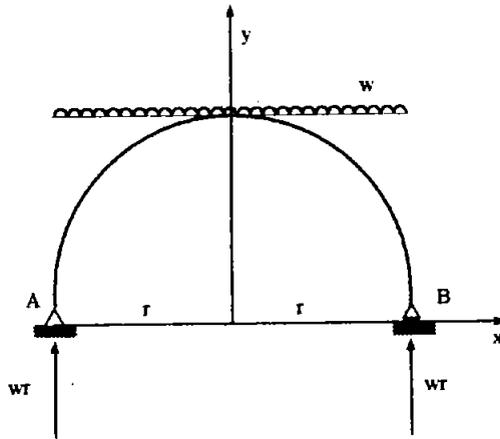
$$R = P/2i - P/2j$$

$$N = P/2(-\sin \theta - \cos \theta)$$

θ	M_F	V	N
grados	Ton-m	ton	ton
0	0	0.5 P	-0.5 P
0	-0.18 Pr	0.18	-0.69 P
45	-0.20 Pr	0	-0.70 P
60	-0.18 Pr	-0.18 P	-0.69 P
90	0	-0.5 P	-0.5 P
		0.5 P	-0.5 P
120	-0.18 Pr	0.18 P	-0.69 P
135	-0.20 Pr	0	-0.70 P
150	-0.18 Pr	-0.18 P	-0.69 P
180	0	-0.5 P	-0.5 P



b) En el arco siguiente, encuentre los diagramas de los elementos mecánicos.



$$\sum M_A = w(2r)r - B_y(2r) = 0$$

$$B_y = wr$$

$$\sum F_y = -2wr + wr + A_y$$

$$A_y = wr$$

$$\sum F_x = 0$$

Calculo de las ecuaciones para los elementos mecánicos:

$$MF = wr(x+r) - \frac{w(x+r)(x+r)}{2}$$

$$MF = \frac{w}{2} 2r - (r+x)(r+x)$$

$$MF = \frac{wr^2}{2} - \frac{wx^2}{2} = \frac{wr^2}{2} - \frac{w(r \cos \theta)^2}{2}$$

$$MF = \frac{wr^2}{2} - \frac{w(r \cos \theta)^2}{2}$$

$$180^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$$

$$MF = \frac{wr^2}{2} \text{ sen}^2 \theta$$

$$V = e_v R$$

$$e_v = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$$

$$R = wr - w(x+r)j = (-wx)j$$

$$V = -wx \operatorname{sen} \theta$$

$$x = r \cos \theta$$

$$V = -wr \cos \theta, \operatorname{sen} \theta$$

$$N = \bar{e}_n \cdot \bar{R}$$

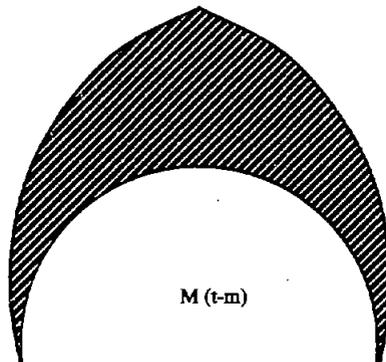
$$\bar{e}_n [-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta]$$

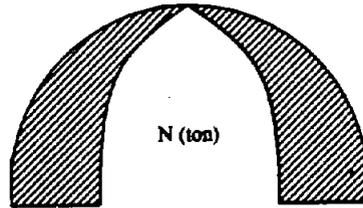
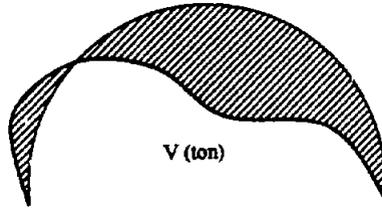
$$R = [wr - w(x+r)]j = (-wx)j$$

$$N = -wx \cos \theta$$

$$N = -wr \cos^2 \theta$$

θ	Mr	V	N
grados	Ton-m	ton	ton
0	0	0	- wr
30	0.125 wr ²	-0.433 wr	-0.75 wr
45	0.25 wr ²	-0.5 wr	-0.5 wr
60	0.375 wr ²	-0.433 wr	-0.25 wr
90	0.5 wr ²	0	0
120	0.375 wr ²	+0.433 wr	-0.25 wr
135	0.25 wr ²	+0.5 wr	-0.5 wr
150	0.125 wr ²	+0.433 wr	-0.75 wr
180	0	0	- wr

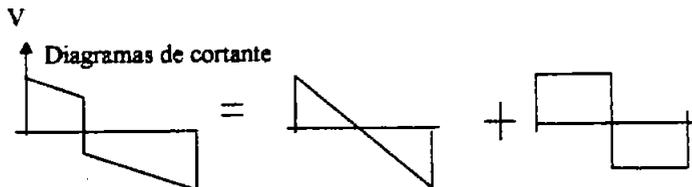
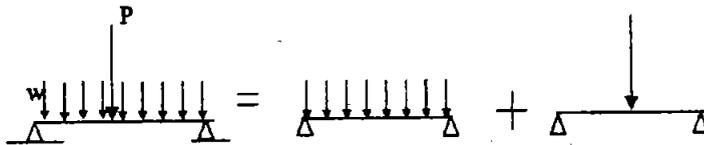




4.9. SUPERPOSICION DE CAUSAS Y EFECTOS

La respuesta de una estructura debida a un numero de cargas aplicadas simultáneamente es la suma de las respuestas de las cargas individuales, aplicando por separado cada una de ellas a la estructura; siempre y cuando para todas las cargas aplicadas y para la suma total de ellas los desplazamientos y esfuerzos sean proporcionales a ellas.

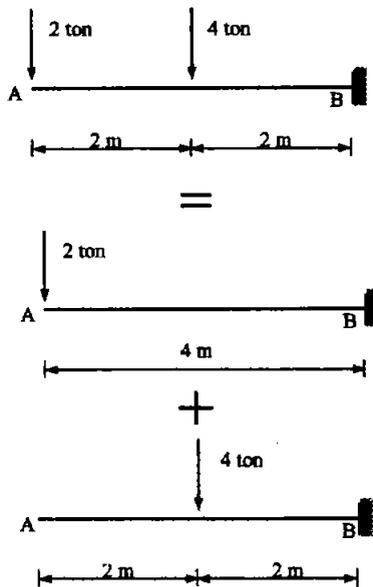
Por el principio de superposición podemos expresar los efectos totales como la suma de efectos de cargas parciales:



Diagramas de momentos



El ejercicio 4.3. a) es una viga en voladizo con dos cargas. Ya con anterioridad fue resuelta considerando la acción conjunta de las fuerzas; ahora procederemos a resolverla separando las acciones.



Resolviendo las vigas.

a) Calculando las reacciones:

Viga a)

$$\sum M_B = M_b - 2(4) = 0$$

$$M_b = 8 \text{ t-m}$$

$$\sum F_y = R_B - 2 = 0$$

$$R_B = 2 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = R_{Bx} = 0$$

Viga b)

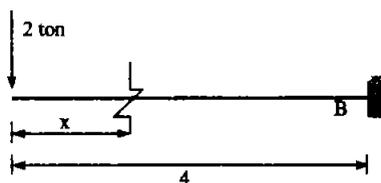
$$\sum M_B = M_b - 4(2) = 0$$

$$M_b = 8 \text{ t-m}$$

$$\sum F_y = R_B - 4 = 0$$

$$R_B = 4 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = R_{Bx} = 0$$



$$0 \leq x \leq 4$$

$$M = -2x$$

$$V = -2$$

$$\text{Si, } x = 0 ; M = 0$$

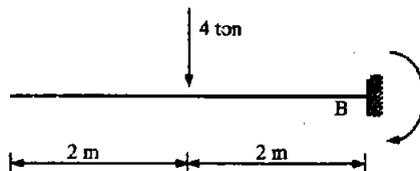
$$V = -2 \text{ ton}$$

$$N = 0$$

$$\text{Si, } x = 4 ; M = -8 \text{ t-m}$$

$$V = -2 \text{ ton}$$

$$N = 0$$



$$0 \leq x \leq 2$$

$$M = 0$$

$$V = 0$$

$$N = 0$$

$$M = 0$$

$$V = 0$$

$$N = 0$$

$$2 \leq x \leq 4$$

$$M = -4(x-2)$$

$$V = -4$$

$$N = 0$$

$$\text{Si, } x = 2 ; M = 0$$

$$V = -4 \text{ ton}$$

$$N = 0$$

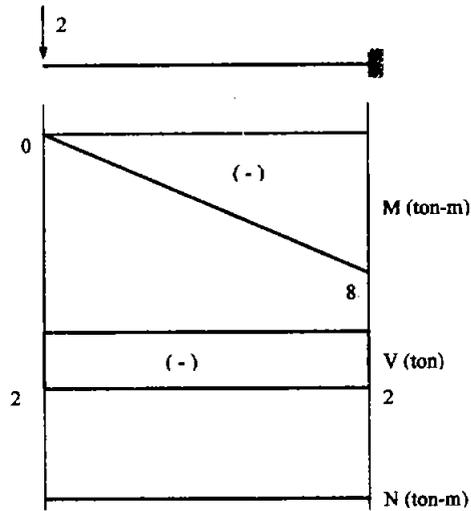
$$\text{Si, } x = 4 ; M = -8 \text{ t-m}$$

$$V = -4 \text{ ton}$$

$$N = 0$$

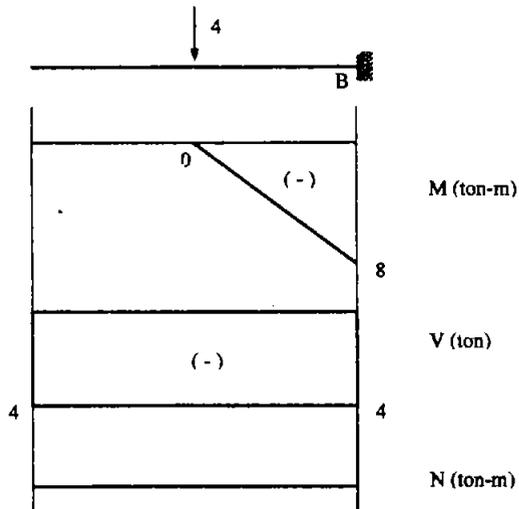
Los diagramas individuales son:

a)

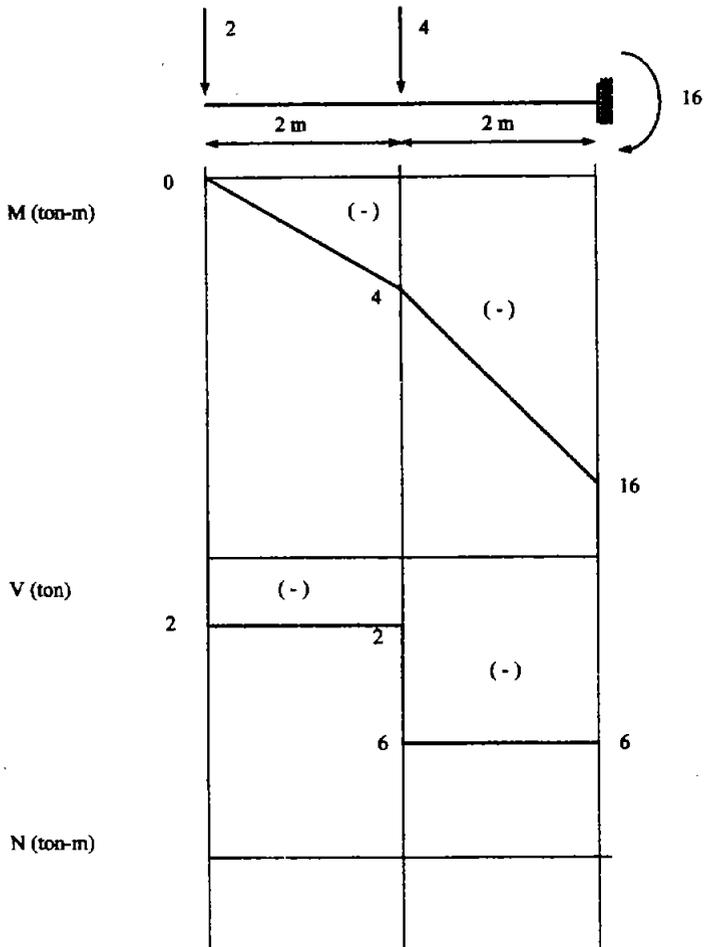


+

b)



Sumando directamente los diagramas obtenemos lo siguiente:

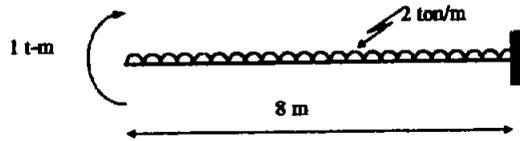


Que es idéntico al diagrama del problema 4.3. a)

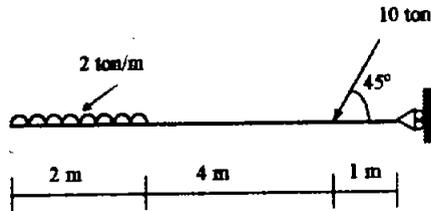
4.10. PROBLEMAS PROPUESTOS

a) Vigas simplemente apoyadas.

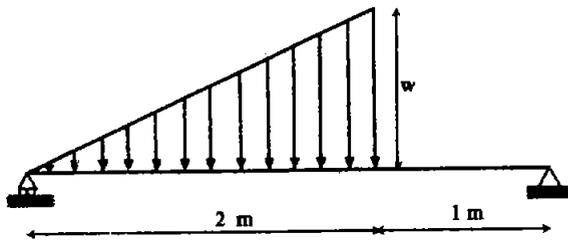
a)



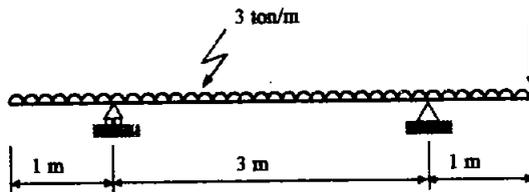
b)



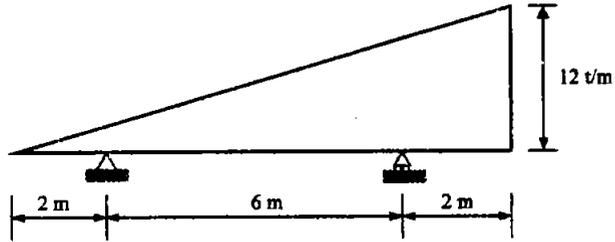
c)



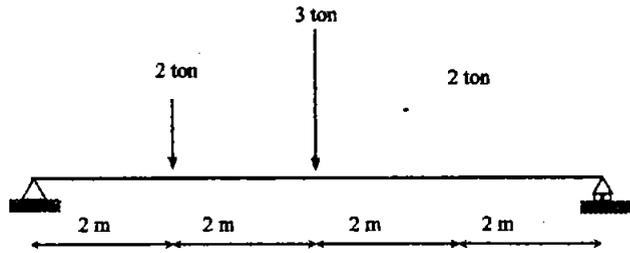
d)



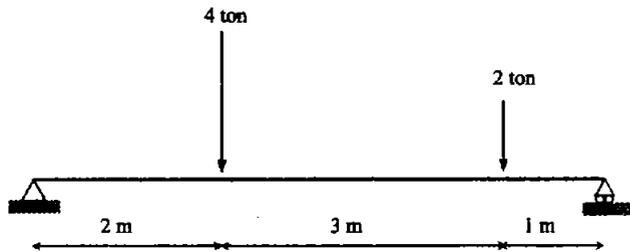
e)



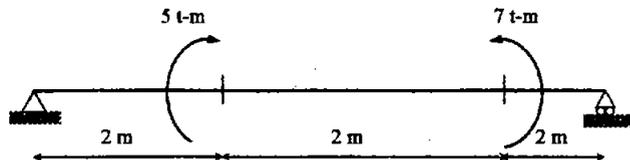
f)



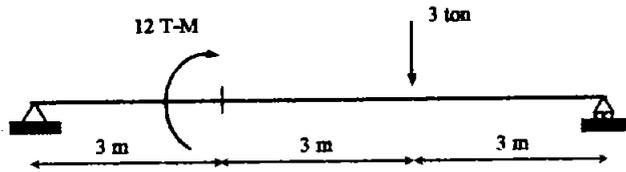
g)



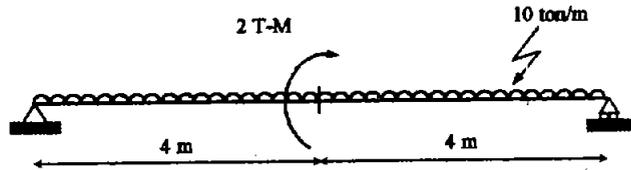
h)



D)

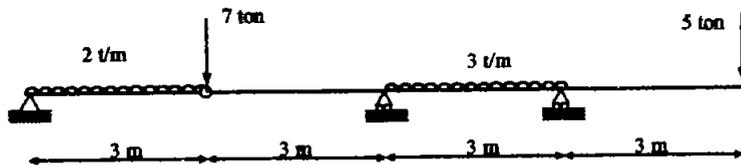


D)

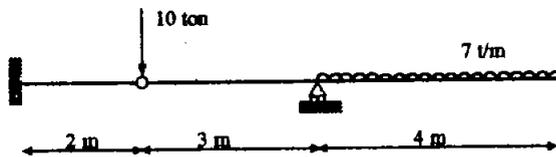


b) Vigas Gerber

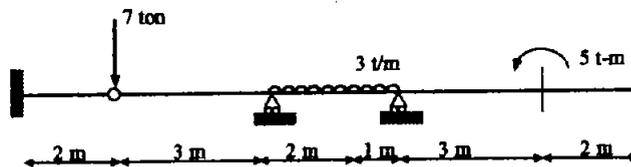
a)



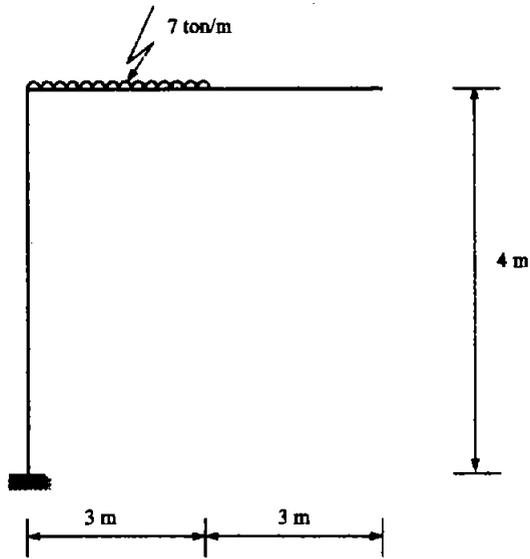
b)



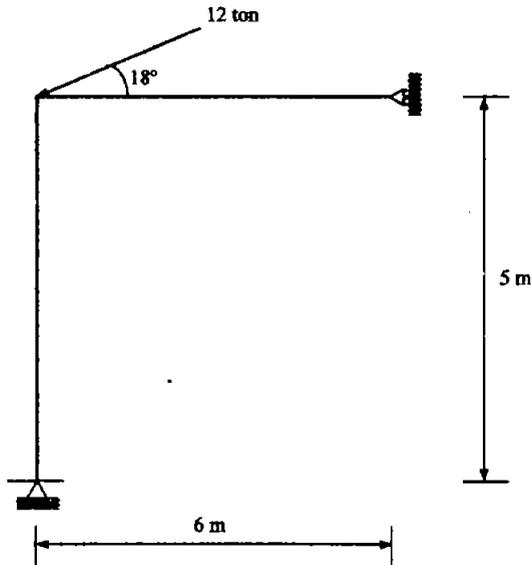
c)



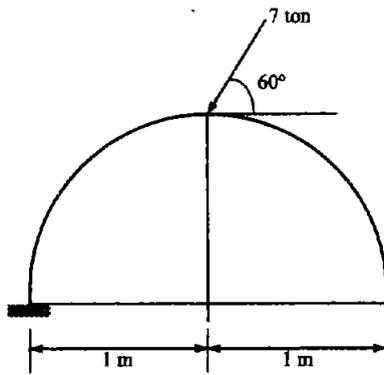
c)



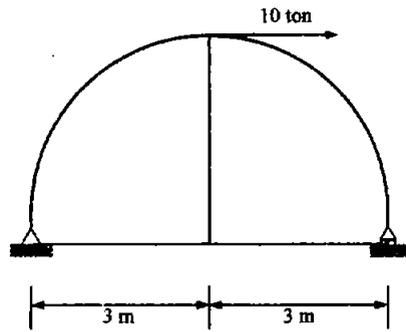
d)



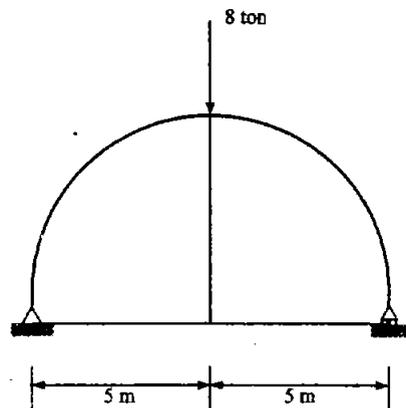
e)



f)

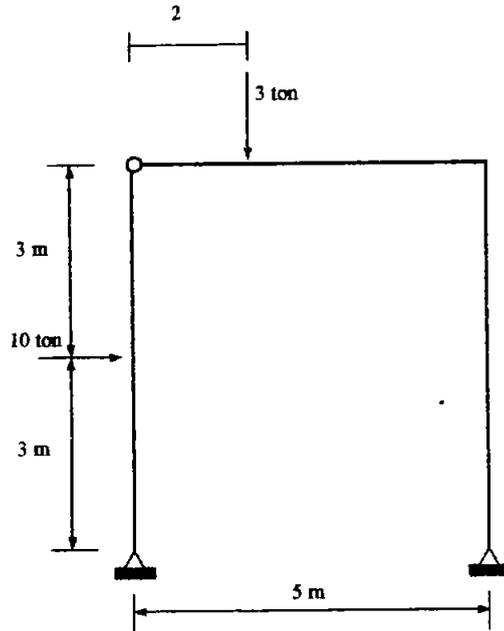


g)

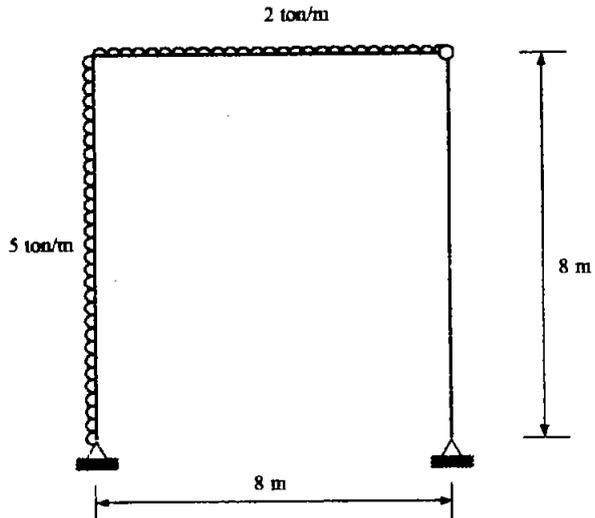


d) Marcos triarticulados

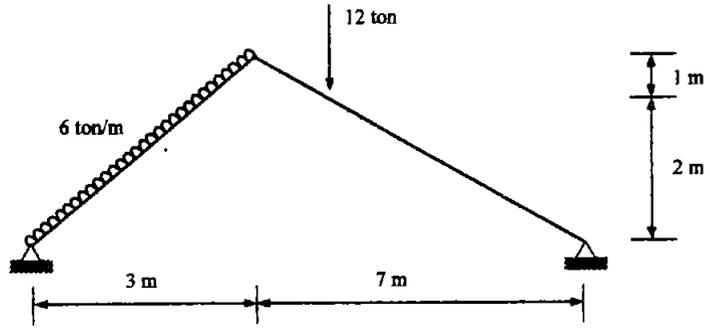
a)



b)



c)



CONCLUSIONES

Se cumple el objetivo de este libro ya que sirve de apoyo al alumno, y maestro durante el transcurso de la materia de estructuras isostáticas, ya que abarca el temario de la misma, además de que se explican de manera muy sencilla todos los ejercicios, de modo que no surjan dudas durante la solución de los mismos.

También se familiariza a los estudiantes con las estructuras, así mismo se trata de inducir a los alumnos a seguir estudiando estructuras más complejas, ya con una base sólida.

Aunque la ingeniería estructural no es una ciencia, ella posee un método. Este método nos permite analizar y diseñar estructuras de una manera estándar de tal manera que permita revisar el trabajo y que muchos pueden hacerlo mientras que unos pocos, más adelantados, crean nuevos métodos más simplificados.

La experiencia dentro de la escuela nos dice que la mayoría de los alumnos se alejan de la rama de las estructuras debido a que cuando están estudiando estructuras complejas no llevan una buena formación en las estructuras isostáticas, por lo cual se les hace muy complicado y no logran entender los problemas lo cual induce el alto índice de deserción de las materias de estructuras, provocando que en su mayoría los alumnos tengan que repetir materias. Esto debido a la falta de comprensión de los ejercicios y conceptos básicos, por lo cual este libro explica de manera muy amena los pasos de los ejercicios para su comprensión y fácil entendimiento.

Al término de este libro, y con la realización de todos los ejercicios que se presentan, se espera que el alumno logre manejar las estructuras isostáticas a un buen nivel, para continuar más fácilmente con las materias afines, ya que las estructuras isostáticas son las estructuras más sencillas y sólo son el primer paso dentro de la rama de las estructuras.

B I B L I O G R A F I A

- • BEER, Ferdinand y JOHNSTON Rusell. Mecánica vectorial para ingenieros, Estática. Sexta edición. México. McGraw-Hill. 1997.
- • MURRIETE Antonio, BACELIS Ramón, MORA Fidel. Aplicaciones de la estática, 2a ED., Limusa Noriega 1990
- • MONROY Fernando, RODRIGUEZ Miguel. Problemas propuestos de la materia estructuras isostaticas, Facultad de Ingeniería UNAM. 1998
- • TESIS PROFESIONAL. Estructuras isostaticas, ENEP Aragón UNAM. 1987.