UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ENEP ARAGON

GEOMETRIA PLANA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A :

NOE JARAMILLO ARCE

GENERACION 1997 - 2001

ASESOR: ING. MARIDEL ZARATE MORALES

MEXICO, D. F. ENERO 2005

VNIVERSDAD NACIONAL AVPNºMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ARAGÓN

DIRECCIÓN

NOE JARAMILLO ARCE
Presente

Con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobado su tema de tesis y asesor.

TÍTULO:

"GEOMETRÍA PLANA"

ASESOR: Ing. MARIDEL ZARATE MORALES

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
San Juan de Aragón, México, 11 de octubre de 2004.
LA DIRECTORA

ARQ. LILIA TURCOTT GONZÁLEZ

C p Secretarla Académica
C p Jefatura de Carrera de Ingeniería Civil
C p Asesor de Tesis

LTG/AIR/agm

Agradecimientos

- A mis papás Efraín y María, por darme la oportunidad de vivir y estar siempre conmigo, así como por todo el amor, comprensión y tolerancia que me han brindado durante todos estos años.

- A mis hermanos Manuel, Irene, Lorena, Maricarmen, Delia y Noel les doy las gracias por la gran ayuda y por haber soportado todos mis malos momentos además de ser un estímulo para seguir adelante.

- Agradezco a los maestros qué tuvieron gran influencia durante mi estancia en la ENEP ARAGON y con gran gratitud a nuestra maestra y asesora Ing. Maridel Zarate Morales por su guía y paciencia durante el desarrollo de mi tesis.

- A la UNAM agradezco la oportunidad brindada por estudiar, recrearme hacer deporte y por muchas otras cosas que me ha dado.

- Al Ing. Mauricio Hernández García por su apoyo y por hacer que sintiera la unidad como mi casa.

- A mis compañeros de trabajo del SACM que han sido parte de mi desarrollo durante el corto tiempo de estancia.

- A mis amigos que han sido parte fundamental e importante en mi desempeño profesional y como ser humano al brindarme su apoyo y motivación.

- A todos ellos mi agradecimiento por ser parte de mi vida.

- ...

noejaar@hotmail.com

INDICE

CAPITULO 3. CIRCUNFERENCIA Y CUADRILÁTEROS CÍCLICOS

CAPITULO 4. PUNTOS Y LINEAS

CAPITULO 5. PRINCIPALES TEOREMAS

Introducción

La ingeniería civil tiene gran importancia en la vida de nuestra sociedad, ya que la utilidad que tiene esta profesión es incalculable, por un lado porque el campo de desenvolvimiento es extenso; construcción, estructuras, precios unitarios, topografía, hidráulica, ambiental, mecánica de suelos, entre muchas otras, y por otro lado la virtud de tener una actitud científica y social, para poder tener criterios de solución a muchos de los problemas que tenemos en nuestro entorno.

Un aspecto indispensable para la formación eficiente de futuros ingenieros es que tengan la capacidad para la aplicación de fundamentos físicos, mecánicos, matemáticos, económicos y sociológicos, para el análisis, disertación y solución de problemas. Uno de los elementos más importantes que se tienen en cualquier ámbito y en particular en la ingeniería es la rama de las matemáticas. Esta materia tiene un sin fin de aplicaciones en este ámbito y es base para la solución de variados problemas que se presentan en la actividad del ingeniero.

Ahora bien, la ingeniería civil tiene fundamentalmente cimentado todo su desarrollo sobre las matemáticas; el cálculo, el álgebra, la geometría, la aritmética, etc. Las cuales juegan un papel muy importante en la enseñanza de los primeros cursos de la carrera. El enfoque que se da de geometría analítica que se imparte en la carrera es muy completo; porque se proporcionan conocimientos básicos que permiten relacionar el álgebra y la geometría en temas como vectores, graficas y lugares geométricos, producto cruz, producto punto, cónicas, coordenadas polares, etc. Son algunos de los temas que se presentan y generalmente tienen que ver con el sistema de coordenadas cartesianas.

Por otro lado, la geometría da al futuro ingeniero al aprender diferentes conceptos los medios necesarios y la herramienta para la resolución de problemas. Es por eso que en este trabajo trato conceptos tan elementales de la geometría plana, también llamada geometría euclidiana, con el objetivo de complementar los conocimientos adquiridos del curso de geometría analítica que se imparte en la carrera, para dar una visión mas abierta y amplia de geometría plana, con el fin de ponerlos a disposición de toda aquella persona que tenga la curiosidad en adentrarse y aprender este tema donde se puede obtener cierta habilidad para deducir, intuir, explorar, analizar y resolver problemas que se presentan.

Con el propósito de examinar los primeros pasos de la geometría en el capitulo 1, presento una reseña de la historia de la geometría, desde los posibles conceptos geométricos del hombre primitivo, pasando por los egipcios, babilonios, mesopotámicos, griegos y por sus conocimientos geométricos veremos a personajes como Tales de Mileto, Pitágoras hasta llegar a Euclides. Para el capitulo 2 se presentarán los fundamentos de geometría plana, el triángulo, congruencia, semejanza, algunos teoremas básicos y propiedades de los triángulos, para su resolución y problemas básicos de topografía donde utilizaremos dichas propiedades, además se desarrollara la ley de cosenos, el teorema de Stewart y el teorema de Pitágoras. En el capitulo 3 de este trabajo, retomamos conceptos sobre circunferencias y sus cuerdas, cuadriláteros inscriptibles, ley de senos, teorema de Ptolomeo, la formula de Brahmagupta y la de Heron, potencia de un punto en el plano sobre una circunferencia y propiedades que refieren al incirculo y el excirculo en un triángulo cualquiera.

En el capitulo 4 sobre puntos y líneas, estudiaremos segmentos y ángulos dirigidos, puntos y líneas armónicas, cuadriláteros y cuadrángulos completos, antiparalelas, homotecia y propiedades referentes de estos temas, además del teorema de la bisectriz y del teorema de Euler, por ultimo en el capitulo 5, se presentan los teoremas de mayor relevancia que por su importancia han sido base para la geometría moderna, entre ellos esta el teorema de Ceva, teorema de Menelao, teorema de Pappus, teorema de Desargues, el teorema de Pascal, el teorema de la Mariposa, teorema de Morley, teorema de Miquel, entre otros más.

En todos los capítulos se presentan diagramas que son de mucha utilidad para la buena comprensión de cada uno de los temas, además esto no termina aquí, hay un sin fin de problemas y aplicaciones que se tienen en esta materia, los cuales se encuentran en las referencias dadas al final de este trabajo, por otro lado no se pretende que este trabajo sea una limitante y no es la intención de que se pierda profundidad en los conceptos aquí escritos, se incluye un apéndice de funciones e identidades trigonométricas que utilice para la demostración de algunos resultados, los cuales serán útiles para una lectura clara.

n j a

1.0 Antecedentes

1.01 Reseña histórica "la geometría y el hombre primitivo"

Las principales consideraciones geométricas son muy antiguas y al parecer se originaron por observaciones realizadas por el hombre, gracias a su habilidad para reconocer y comparar formas y tamaños. Muchas circunstancias en la vida del hombre, aun desde la época primitiva, llevaron a numerosos descubrimientos geométricos; la noción de distancia fue sin duda alguna, uno de los primeros conceptos geométricos descubiertos, la estimación del tiempo necesario para hacer un viaje condujo a observar que la recta constituye el camino más corto entre dos puntos.

La necesidad de limitar sus tierras llevó al hombre a la intuición de figuras geométricas simples, tales como; rectángulos, cuadrados, triángulos. Otros conceptos geométricos útiles y elementales para la vida del hombre, como la noción de vertical, de rectas paralelas, pueden haber sido sugeridos por la construcción de paredes en viviendas y templos primitivos.

Muchas observaciones realizadas en la vida diaria pudieron conducir a los primeros hombres a los conceptos de curvas, superficies y sólidos. Por ejemplo, los casos de circunferencia fueron numerosos: la periferia del sol, de la luna, las ondas en el agua al lanzar un objeto etc. Las parábolas, elipses, hipérbolas pudieron haber sido indicadas por la sombras producidas por el sol o una antorcha, los alfareros primitivos trabajaron con sólidos de revolución. Además el cuerpo humano, el de los animales, las flores, las hojas, las conchas marinas y algunos frutos dieron paso al concepto de simetría. La idea de volumen viene al considerar recipientes para contener agua, aceite, vinos, granos y otros alimentos de consumo diario.

De esta manera se fue creando, inconcientemente, una geometría utilizada en un principio para solucionar problemas concretos, que bien pudieron presentarse de manera aislada, sin tener nada que ver unos y otros, además se pudo utilizar para fabricación de objetos ornamentales y artísticos.

Evidentemente, esas manifestaciones artísticas y otros problemas concretos contribuyeron al surgimiento y posteriormente desarrollo de la geometría. La geometría empezaba a convertirse en una ciencia realmente poderosa, no hay evidencias claras que permitan estimar el número de siglos que pasaron, antes de que el hombre pudiera elevar a la geometría como ciencia, pero todos los historiadores y escritores de la antigüedad que trataron este tema concuerdan, con que en el valle del río Nilo, en Egipto, fue donde la geometría empírica subconscientemente se convirtió, por primera vez en geometría científica.

La opinión del celebre historiador griego Proclo (410-485 d.C.), sobre los orígenes de la geometría es el que se menciona a continuación:

"De acuerdo con la mayoría de las versiones, la geometría fue primeramente descubierta en Egipto, teniendo su origen en la medición de las áreas, ya que esta era una necesidad para los egipcios, debido a que el Nilo, al desbordarse, barría con las señales que indicaban los límites de los terrenos de cada cual".

"Y por tanto, no es sorprendente que el descubrimiento de la geometría y otras ciencias tuvieran su origen en las necesidades prácticas, viéndose que todas las cosas se encuentran en el camino que progresa de lo imperfecto a lo perfecto. Por tanto, la transición de la mera sensación al razonamiento y de éste al entendimiento no es mas que una cosa natural......."

Menciona Proclo que como la aritmética tuvo su origen en la cultura fenicia, a razón de su uso en comercio e intercambio de productos, así la geometría fue descubierta en Egipto por lo antes mencionado.

Así pues, la tradición atribuye los principios de la geometría como ciencia a las prácticas primitivas de agrimensura en Egipto, La palabra geometría significa "medición de la tierra". Aunque no se puede afirmar con seguridad, parece bastante acertado suponer que la geometría surgió de necesidades practicas.

Pero no solo los egipcios contribuyeron al desarrollo de la geometría, los babilonios también trabajaron en la geometría empírica y resolvieron problemas prácticos.

1.02 Geometría babilónica

La civilización babilónica engloba un conjunto de pueblos que vivieron en Mesopotamia, situado entre los ríos Tigris y Éufrates en un período que comienza hacia el año 5000 a.C. y termina en los primeros tiempos del cristianismo. Uno después de otro, estos pueblos: sumerios, acadios, caldeos, asirios, babilonios y otros, contribuyeron a establecer las características de la civilización babilónica. Más exactamente, la ciudad de Babilonia fue el centro cultural entre los años 2000 y 550 a.C., incluso después de la toma de Babilonia por el conquistador persa Ciro, en el año 538 a.C., la evolución de las matemáticas babilónicas continuó durante la llamada época "seléucida", cuyo fin coincide aproximadamente con el nacimiento de Cristo.

El estudio de los documentos que proceden de las excavaciones arqueológicas, revela que la geometría babilónica estaba íntimamente ligada a las mediciones prácticas. No había una diferencia esencial entre la partición de una cierta cantidad de dinero de acuerdo a ciertas reglas, y la división de un terreno en partes de áreas iguales. Las condiciones exteriores tenían que ser observadas, en un caso eran las condiciones acerca de una herencia, en otras las reglas determinan un área, o las relaciones entre medidas, o los problemas acerca de salarios. La importancia matemática de un problema recaía sobre su solución aritmética, la geometría no era sino una cosa más entre las muchas de la vida diaria, a las cuales era posible aplicarles los métodos aritméticos.

La geometría no era una disciplina especial, sino que era tratada igualmente que a cualquier otra forma de relación numérica entre objetos de uso práctico. Entre los resultados geométricos conocidos en Mesopotamia, se encuentran métodos para calcular el área de un círculo, con muy buenas aproximaciones del número π aproximadamente $3 + \frac{1}{8} = 3.125$. Los babilonios podían además calcular el área de un triángulo y de un trapecio, los volúmenes de prismas rectos y cilindros, los calculaba multiplicando el área de la base por la altura. Tenían fórmulas para determinar el volumen de un tronco de cono y pirámides cuadrangulares truncadas.

Los geómetras babilónicos estaban familiarizados con el teorema de Pitágoras, y comprendían su principio general. Conocían también el teorema atribuido a Tales de Mileto; según el cual el ángulo inscrito en un semicírculo es recto. Además, sabían que:

1. los lados correspondientes de dos triángulos rectángulos semejantes son proporcionales, y
2. Que la perpendicular trazada desde el vértice de un triángulo isósceles divide la base de este triángulo en dos partes iguales.

Algunos de estos teoremas son presentados por Euclides en su libro I de los Elementos.

1.03 La técnica empírica de Egipto

La tradición griega es unánime en remontar los inicios de la geometría a Egipto. La renta pública era fijada ahí por la imposición de impuestos sobre la tierra cultivable y cuando los desbordamientos del río Nilo arrasaban los límites entre dominios, era necesario restaurarlos y determinar el área en la cual imponer los impuestos, por cálculo basado en mediciones. O bien como dice el historiador griego Heródoto (c. 484-425 a.C.), el río barrería una porción de la parcela y cuando el propietario solicitaba la correspondiente deducción de impuestos, los supervisores tenían que ser enviados a certificar cual había sido la reducción del área; "este" en su opinión "fue el origen de la geometría, la cual paso entonces a Grecia". Herón de Alejandría (c. 20-62d.C.), Diodoro Sículo (c.90-20 d.C.) y Estrabón (c. 63-c.24 d.C.), todos tienen la misma historia, al igual que Proclo mencionado anteriormente.

Tales de Mileto (624-547 a.C.) fue a Egipto y llevo la geometría entonces a Grecia, pero lo que aprendió en Egipto fue un conjunto de recetas geométricas más bien que geometría. Pues mientras los egipcios tenían reglas prácticas para medir, más o menos con exactitud ciertas áreas, tales como cuadrados, triángulos, trapecios y aun círculos; el contenido de sólidos de medidas de maíz, de diferentes formas, no hay vestigio de algún intento de ellos por dar una prueba de alguna regla, no tenían idea de la geometría como una ciencia demostrativa.

La geometría en este sentido fue creación de los griegos, nadie antes de ellos había pensado en probar cosas tales como que los dos ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales. La idea fue una inspiración única en la historia del mundo y el fruto de ellas fue la creación de las matemáticas como ciencia.

Podemos formarnos una opinión de lo que Tales estaba en posición de aprender en Egipto: la fuente de información disponible más importante acerca de las matemáticas egipcias es el papiro Rhind, escrito alrededor de 1650 a. C.

Los casos más importantes y concernientes a la geometría en Egipto son los siguientes:

1. El área de un rectángulo es desde luego dado como el producto de los lados.
2. El área del triángulo es dado como un medio de "tp - r", lo cual significa el lado del triángulo tomado como base, multiplicando por lo que es llamado "m ryt". Nada dice de las formas de los triángulos dibujados en el papiro, los triángulos son dibujados como se muestra en la figura 1.01 con la base vertical y altura perpendicular no dibujada.

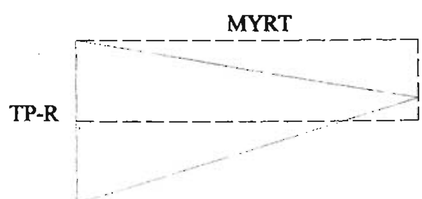


FIGURA 1.01

El hecho es que "m ryt" actualmente significa lo que hoy llamamos altura.

3. La fórmula para el área de un trapecio paralelo (descrito como un triángulo truncado) a saber $\frac{1}{2}(a + c) \cdot b$, donde a, c son la base y el lado opuesto respectivamente, mientras b es el "mryt", según algunos historiadores significa "muelle".

4. Ciertas inscripciones en el templo de Horus en Efdu, las cuales pertenecen al reinado del Ptolomeo X Alejandro I (107-88 a. C.), se refiere a la asignación de parcelas de tierra a los sacerdotes. De porciones de estas inscripciones publicadas por Lepsio se dedujo que $\frac{1}{2}(a + c) \cdot \frac{1}{2}(b + d)$ fue una forma en uso para el área de un cuadrilátero de cualquier forma en la cual a, c y b, d son pares de lados opuestos.

5. La medición de círculos en el papiro Rhind. Si d es el diámetro, el área esta dada como $[(1 - \frac{1}{9})d]^2$ ó sea $\frac{64}{81} d^2$. De hecho el área real de un circulo es $\frac{1}{4} \pi d^2$, estos significa que el valor de π esta dado como $\frac{256}{81}$ ó sea $(\frac{16}{9})^2$, lo cual es muy aproximado a 3.16. El uso de este valor esta ilustrado en las mediciones de recipientes con bases circulares que son de hecho cilindros rectos. El contenido es tomado como el producto del área y la base.

6. Más importante geométricamente son ciertos cálculos con referencia a las proporciones de pirámides. Una cierta relación llamada "Sequet" del papiro Rhind literalmente "lo que hace la naturaleza", es decir, lo que determina la forma o las proporciones de las pirámides tiene que ser encontrado a partir de las líneas distinguidas de la siguiente figura 1.02.

a) "Ukha - Thebt", la cual es una línea dibujada en la base y,

b) "Pir - em - us" o "Per - em - us", altura (una palabra de la cual puede haber sido derivado el nombre)

Ahora "Ukha - Thebt" el lado del cuadrado de la base y "Pir - em - us" la altura vertical de la pirámide, si las diagonales de la base se encuentran en E, y EF se dibuja paralela a un lado en este caso AB, si FH es trazada entonces EF es un medio de la base y EH la altura de la pirámide. Luego "Sequet" es la razón;

$$\text{Sequet} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{Ukha - Thebt}}{\text{Pir - em - us}} = \frac{FE}{EH}$$

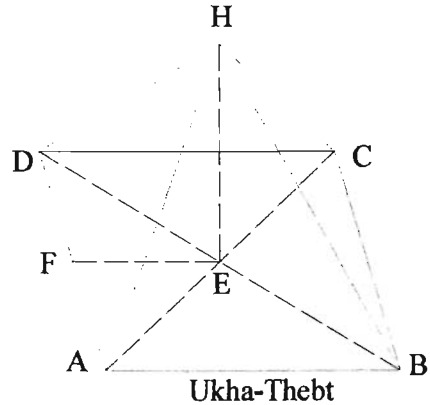


FIGURA 1.02

Lo que ahora se le llama cotangente del ángulo de inclinación de las caras de las pirámides, las mediciones de "Sequet" de las pirámides en el papiro Rhind, se asocian a si mismas de una manera natural con la historia del descubrimiento de un método de tales para encontrar la altura de las pirámides.

1.04 Tales de Mileto

Tales de Mileto, vivió alrededor de 624-547 AC. Fue declarado en el año 582 uno de los siete sabios y no es mucho. Los otros no fueron filósofos, sino principalmente astutos hombres de negocios; Su genio fue polifacético: estadista, ingeniero, hombre de negocios, filósofo, matemático y astrónomo, cubrió casi todo el campo de actividad y pensamiento humano. Como ingeniero se le atribuye haber hecho posible al ejército de Craso, cruzara el río Halys (hoy Turquía, desemboca en el mar negro) haciendo un canal artificial y desviando la corriente por él y después regresándola a su antiguo curso.

Las matemáticas realizadas por Tales son aquellas que se refieren a la definición de número y en lo que se refiere a ala geometría son las siguientes:

a) Medición de la altura de una pirámide

Tales provoco gran admiración al mostrar cómo calcular la altura de una pirámide por medio de sombras. Hay dos versiones de la anécdota. La más antigua es la de Jerónimo, un discípulo de Aristóteles, que afirma que Tales observo la longitud de la sombra de la pirámide en el momento particular en que nuestras sombras son de la misma longitud que nosotros mismos, en ese momento midió la sombra de la pirámide.

La versión de Plutarco (50-125 d.C.) dice que clavo una estaca al final de la sombra de la pirámide y habiendo formado así dos triángulos argumento que la altura de la pirámide es a la altura de la estaca, como la sombra de una es a la sombra de la otra.

Tales observaría que cuando los objetos proyectan una sombra de longitud igual a su propia altura, otros objetos lo hacen también; probablemente se convenciera de esto por inducción, después de mediciones reales de un cierto número de casos.

b) Teoremas geométricos.

Los siguientes son los teoremas generales de geometría elemental atribuidos a Tales de Mileto.

1) Que un círculo es bisecado por su diámetro. (equivalente a Euclides I def. 17).

2) Que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales. (equivalente a proposición 5 de Euclides).

3) Que si dos líneas rectas se cortan entres sí, los ángulos opuestos por el vértice son iguales. (equivalente a proposición 15 de Euclides).

4) Que sí dos triángulos tienen dos ángulos iguales a dos ángulos iguales respectivamente y un lado igual a un lado (a saber aquel adyacente a los ángulos iguales o aquel que subtiende a uno de los ángulos iguales), entonces los triángulos son iguales. (equivalente a proposición 26 de Euclides).

5) Además Pánfilo afirma que Tales fue el primero en describir en un círculo un triángulo, sacrifico un buey (por la importancia del descubrimiento). Esto debe significar aparentemente que Tales descubrió que el ángulo en el semicírculo es un ángulo recto, o sea un triángulo rectángulo.

Se atribuye a Tales hacer demostrado (1), pero solo haber afirmado (2), mientras Eudermo es citado al decir que descubrió (3) pero no lo probó científicamente y que debió haber conocido (4) porque era necesario para su método de encontrar la distancia de barcos a la costa.

1.05 Geometría pitagórica

En la historia de la geometría entre los tiempos de Tales y Pitágoras es separada aproximadamente de 50 años. Con Pitágoras (582-497 a.C.), la geometría llega a ser por primera vez un tema científico para su buen estudio. Se dice que Pitágoras primero propuso ciertos principios, incluyendo definiciones y después construyo una sucesión ordenada de proposiciones.

Anteriormente se menciono que Tales circunscribió un círculo en un triángulo rectángulo, es mencionado que los Pitagóricos debieron generalizar el problema y mostrar como circunscribir un círculo en un triángulo escaleno cualquiera.

Las proposiciones geométricas que son atribuidas a los pitagóricos, incluyendo aquellas que son asociadas con el nombre de Pitágoras mismo, son:

1) La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos.

   Esta prueba es muy elegante, ya que depende de las propiedades de las paralelas, las cuales deben por lo tan haber sido bien conocidas.

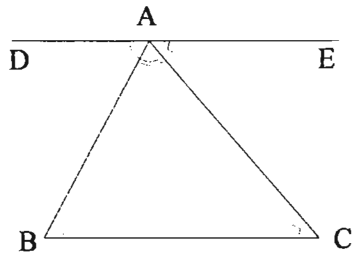


FIGURA 1.03

   Si tenemos el triángulo ABC y trazamos una paralela por A como en la figura 1.03, la nombramos DE y por las propiedades conocidas de ángulos alternos tenemos que la suma son dos rectos.

2) El teorema de Pitágoras (equivalente a la proposición 47 de Euclides)

   La tradición es unánime al referir a Pitágoras el descubrimiento del teorema del cuadrado de la hipotenusa; pero la evidencia histórica esta lejos de ser concluyente. Los pitagóricos a base del teorema mencionado descubrieron un método para obtener muy cercanas aproximaciones al valor de $\sqrt{2}$.

   Algún conocimiento, sin embargo, de la propiedad de triángulos rectángulos puede ser encontrado mucho antes de la época Pitágoras.

   Los egipcios conocían que $3^2 + 4^2 = 5^2$ pero no hay nada que sugiera que sabían que el triángulo 3, 4, 5 era rectángulo.

   Los babilónicos también tenían ciertos conocimientos de dicho teorema al calcular una cuerda en una circunferencia, encontrados tablillas de la época.

1.06 Geometría euclidiana

Se sabe poco de la vida de Euclides (325-265 a.C.), genial matemático griego. Probablemente estudió en Atenas con discípulos de Platón, posteriormente enseño geometría en Alejandría (fue punto de encuentro de griegos, judío, árabes). A Euclides se le atribuyen una serie de libros: los "cálculos" (una colección de teoremas geométricos), los "Fenómenos" (una descripción del firmamento), la "Óptica", la "División del canon" (un estudio matemático de la música), "La sección cónica",... y el más importante "Los Elementos", que es un tratado extenso que cuenta con trece volúmenes, los elementos de Euclides pueden ser contemplados como un intento de continuar el trabajo de Platón.

Los Elementos de Euclides se dividen en 13 libros, los seis primeros son de geometría plana, los libros 7, 8, 9 tratan sobre la teoría elemental de números, el libro 10 trata de la teoría de Eudoxio (408-355 a.C.) de los números irracionales y por ultimo los libros 11, 12, 13 los dedica al estudio de la geometría en el espacio.

El libro uno principia con una serie de 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes (o axiomas). De esto Euclides dedujo 48 proposiciones o teoremas. Las proposiciones 47 y 48 tratan del teorema de Pitágoras.

El libro los elementos es el primero que presenta la geometría de una manera organizada y lógica, comenzando con algunas suposiciones simples y desarrollando los teoremas mediante un razonamiento deductivo.

A continuación se cita el libro I de los elementos de Euclides.

Definiciones

1. Un punto es lo que no tiene partes.
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Los extremos de una línea son puntos.
4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.
6. Los extremos de una superficie son líneas.
7. Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.
8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.
9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.
10. Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.
11. Angulo obtuso es el (ángulo) mayor que un recto.
12. Angulo agudo es el (ángulo) menor que un recto.

13. Un límite es aquello que es extremo de algo.
14. Una figura es aquello contenido por uno o varios límites.
15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea (que se llama circunferencia) tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.
16. Y el punto se llama centro del círculo.
17. Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide al círculo en dos partes iguales.
18. Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él acotada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.
19. Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas.
20. De entre las figuras triláteras, triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, isósceles la que tiene sólo dos lados iguales y escaleno la que tiene los tres lados desiguales.
21. Además, de entre las figuras triláteras, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, acutángulo la que tiene los tres ángulos agudos.
22. De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero que no es equilátera ni rectangular; y llámese trapecios las demás figuras cuadriláteras.
23. Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

Postulados

1. Postúlese trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y
3. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
4. Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.
5. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
6. Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Nociones comunes

1. Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
2. Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.
3. Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.

4. Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
5. Y el todo es mayor que la parte.

Proposiciones

1. Construir un triángulo equilátero sobre una recta dada.
2. Poner en un punto dado (como extremo) una recta igual a una recta dada.
3. Dadas dos rectas desiguales, quitar de la mayor una recta igual a la menor.
4. Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales, tendrán también las respectivas bases iguales, y un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber: los subtendidos por lados iguales, serán también iguales respectivamente.
5. En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongadas las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.
6. Si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí.
7. No se podrán levantar sobre la misma recta otras dos rectas iguales respectivamente a dos rectas dadas, de modo que se encuentren en dos puntos distintos por el mismo lado y con los mismos extremos que las rectas dadas.
8. Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro y tienen también iguales sus bases respectivas, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales.
9. Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado.
10. Dividir en dos partes iguales una recta finita dada.
11. Trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una recta dada, desde un punto dado en ella.
12. Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella.
13. Si una recta levantada sobre otra recta forma ángulos, o bien formará dos rectos o bien (ángulos) iguales a dos rectos.
14. Si dos rectas forman con una recta cualquiera y en un punto de ella ángulos adyacentes iguales a dos rectos y no están en el mismo lado (de ella), ambas rectas estarán en línea recta.
15. Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí.
16. En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.
17. En todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos.
18. En todo triángulo el lado mayor subtiende al ángulo mayor.
19. En todo triángulo al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor.
20. En todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.
21. Si a partir de los extremos de uno de los lados de un triángulo se construyen dos rectas que se encuentren en el interior (de él), las (rectas) construidas serán

menores que los lados restantes del triángulo, pero comprenderán un ángulo mayor.

22. Construir un triángulo con tres rectas que son iguales a tres rectas dadas. Pero es necesario que dos (de las) rectas tomadas juntas de cualquier manera sean mayores que la restante.
23. Construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado, sobre una recta dada y en uno de sus puntos.
24. Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero uno tiene el ángulo comprendido por las rectas iguales mayor que el otro, también tendrá la base mayor que la otra.
25. Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero tienen la base (del uno) mayor que la base (del otro), también tendrán el ángulo comprendido por las rectas iguales (del uno) mayor que el del otro.
26. Si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales respectivamente a dos ángulos del otro y un lado del uno igual a un lado del otro: ya sea el correspondiente a los ángulos iguales o el que subtiende uno de los ángulos iguales, tendrá también los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante (igual) al ángulo restante.
27. Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí.
28. Si una recta al incidir sobre dos rectas hace al ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado, o los dos internos del mismo lado iguales a dos rectos, las rectas serán paralelas entre sí.
29. La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el (ángulo) externo igual al interno y opuesto, y los (ángulos) internos del mismo lado iguales a dos rectos.
30. Las paralelas a una misma recta son paralelas entre sí.
31. Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada.
32. En todo triángulo si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.
33. Las rectas que unen por (los extremos que están en) el mismo lado a (rectas) iguales y paralelas son también ellas mismas iguales y paralelas.
34. En las áreas de paralelogramos los lados y los ángulos opuestos son iguales entre sí, y la diagonal las divide en dos partes iguales.
35. Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.
36. Los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.
37. Los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.
38. Los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.
39. Los triángulos iguales que están sobre la misma base y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas.

40. Los triángulos iguales que están sobre bases iguales y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas.
41. Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.
42. Construir un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado.
43. En todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí.
44. Aplicar a una recta dada en un triángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.
45. Construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una (figura) rectilínea dada.
46. Trazar un cuadrado a partir de una recta dada.
47. En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.
48. Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto.

El libro I de los elementos de Euclides fue de los primeros textos utilizados para la enseñanza de la geometría plana durante 2000 años. En el Euclides recoge elementos de los descubrimientos geométricos de Tales y Pitágoras al igual que recogió parte del trabajo de Eudoxo. La primera edición impresa de las obras de Euclides apareció en Venecia en 1482 fue una traducción del árabe al latín.

Según Proclo, Euclides se propuso con el fin de toda la obra, la construcción de lo que se conoce como las figuras platónicas. El merito fundamental de la obra de Euclides reside en ser un buen y ordenado resumen de las matemáticas griegas desde Tales de Mileto.

2.0 Geometría del triángulo

2.01 Congruencia

La congruencia de dos polígonos se da si sus lados respectivos y sus ángulos correspondientes son iguales no importando su orientación. Un triángulo en particular es un polígono de tres lados, llamaremos congruentes a dos triángulos si tienen respectivamente iguales sus lados y sus ángulos. La relación de congruencia la denotamos con el símbolo $\cong$.

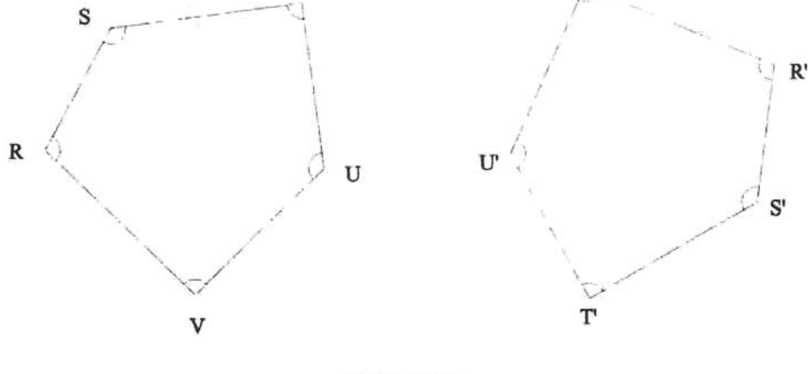


FIGURA 2.01

Para describir la congruencia del primer polígono y el segundo debemos ver que al sobreponerlos observamos que los vértices $S \leftrightarrow S'$, $T \leftrightarrow T'$, $U \leftrightarrow U'$, $V \leftrightarrow V'$, $R \leftrightarrow R'$

coinciden, un apareamiento como el descrito anteriormente se le llama una correspondencia biunívoca, si los polígonos coinciden al sobreponer los vértices de la manera descrita, entonces la correspondencia biunívoca se llama congruencia entre los dos polígonos. (Figura 2.01)

Por otro lado decimos que dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida, dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.

Teniendo muy clara la definición de congruencia para triángulos, podemos darnos cuenta que hay por lo menos tres casos en los cuales concluimos que hay una correspondencia entre dos triángulos, estos casos son:

I. Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo entre ellos, entonces los triángulos son congruentes (L A L).

II. Si dos triángulos tienen un lado y los dos ángulos adyacentes a este lado respectivamente iguales, entonces los otros dos lados son iguales y los triángulos son congruentes (A L A).

III. Si dos triángulos tienen respectivamente iguales los tres lados, entonces son congruentes (L L L).

Para apreciar la utilización de la congruencia de triángulos veremos el siguiente resultado que no servirá para la demostración del tercer criterio.

En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales, son iguales (recordemos que en un triángulo isósceles tiene dos lados iguales). Demostración (Figura 2.02)

Sea ABC un triángulo isósceles tal que $AB = AC$, tracemos la bisectriz del $\angle A$. Sea M donde esta corta al lado BC considerando los triángulos ΔABM , ΔACM tenemos:

$AB = AC$ por hipótesis, $\angle BAM = \angle MAC$ porque AM es bisectriz de $\angle A$

$AM = AM$ lado común y por el criterio (LAL) tenemos $\Delta ABM \cong \Delta ACM$.

Y en consecuencia el $\angle B$ y el $\angle C$ son iguales que es lo que se quería demostrar.

Además podemos notar que $BM = MC$ y AM es perpendicular a BC, porque

$\angle BMA = \angle AMC$ y $\angle BMA + \angle AMC = 2 \perp$.

$\therefore \ \angle BMA = 1 \perp = \angle AMC$

Entonces concluimos que, en un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo determinado por los lados iguales es perpendicular al lado desigual y lo corta en su punto medio.

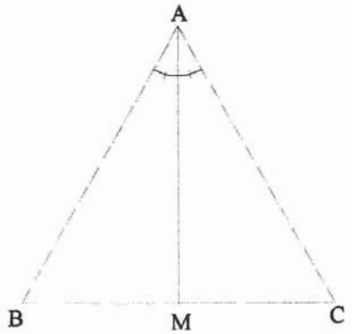


FIGURA 2.02

Ahora si los tres lados de un par de triángulos son iguales entonces los triángulos son congruentes que es la propiedad III (L L L) de los criterios de congruencia.

Sea ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tales que $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$ y coloquemos al $\Delta A'B'C'$ de tal manera que BC coincida con $B'C'$, pero A y A' queden en lados opuestos de la recta BC. (Figura 2.03)

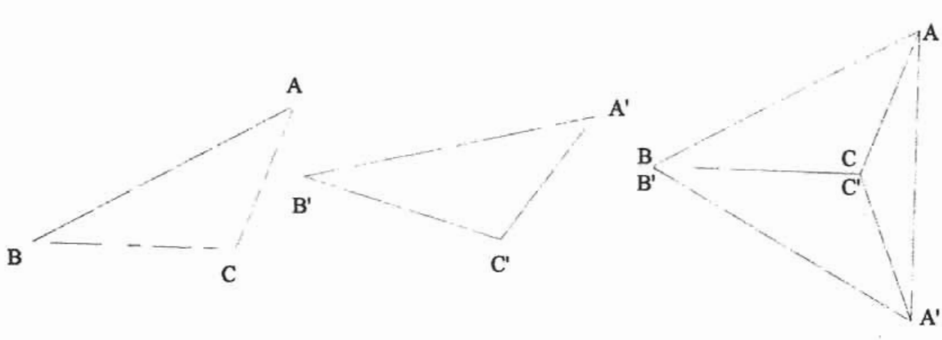


FIGURA 2.03

Tracemos una recta AA' además $AB = A'B'$, por lo tanto $\Delta ABA'$ es isósceles y el $\angle BAA' = \angle BA'A$, y como $AC = A'C'$ también son iguales tenemos que el $\Delta ACA'$ es isósceles y por el resultado anterior $\angle CAA' = \angle CA'A$.

Además $\angle A = \angle BAA' - \angle CAA'$ y $\angle A' = \angle BA'A - \angle CA'A$, por lo tanto los ángulos $\angle A = \angle A'$ y por el criterio (L A L) $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$.

Por lo tanto si tres lados de un par de triángulos son iguales entonces ABC y A'B'C' son congruentes.

Para la mayor parte de las veces utilizaremos estos tres criterios de congruencia de triángulos (L A L), (A L A) y (L L L), pero hay que tener cuidado ya que hay algunos casos en los cuales no se puede mantener una relación biunívoca entre las figuras como (L L A) y (A A A). En el primer caso evidentemente no es una congruencia ya que son dos lados y un ángulo no comprendido de cualquier triángulo los cuales no tienen la misma forma, en el segundo caso pueden tener la misma forma pero no el tamaño entonces no se cumple la igualdad de sus lados correspondientes.

La prueba de los otros dos casos de congruencia de triángulos se da en el tema siguiente, para el caso donde la razón de semejanza es igual a la unidad.

2.02 Semejanza

Dos Polígonos con el mismo número de lados son semejantes, si sus lados correspondientes son proporcionales, y sus ángulos correspondientes son iguales. Aunque de distinto tamaño entre los elementos (puntos, rectas,...) de los polígonos se establece una relación por la que a cada elemento de F le corresponde otro de F', es decir en términos prácticos como si se tuvieran dos figuras a escala. (Figura 2.04)

La correspondencia mencionada es biunívoca, es de tal forma que a cada par de lados consecutivos en un polígono, y el ángulo entre ellos, corresponde un par de lados consecutivos y el ángulo incluido entre ellos en el otro.

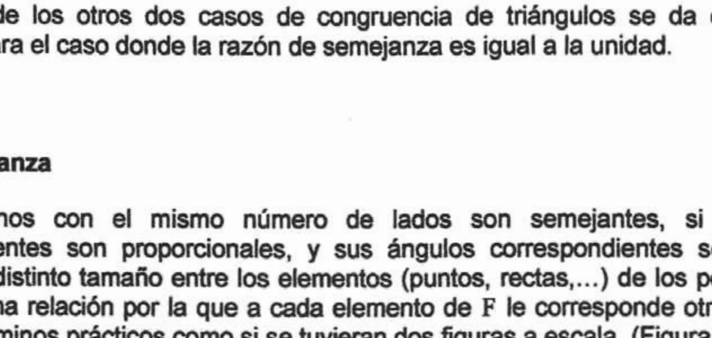


FIGURA 2.04

Si tenemos en cuenta que los triángulos son un subconjunto del conjunto de los polígonos la proporcionalidad de segmentos de un triángulo A, B, C son puntos de F y A', B', C', los correspondientes puntos de F', entonces se cumple que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k.$$

Es decir, entre dos figuras semejantes, los pares de segmentos correspondientes son proporcionales. La razón de proporcionalidad es constante, la cual se llama razón de semejanza, a esta razón se le denota con el símbolo $\approx$. También se da la igualdad de ángulos si A, B, C son ángulos de F y A', B', C', los correspondientes ángulos de F', tenemos:

$$\angle ABC = \angle A'B'C' \;,\; \angle BCA = \angle B'C'A' \,,\, \angle CAB = \angle C'A'B'$$

Para saber si dos triángulos son semejantes basta comprobar que se cumple alguna de las condiciones siguientes, llamadas criterios de semejanza para triángulos:

Criterio 1. Dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales, tienen sus lados proporcionales y los triángulos son semejantes. (A A A)

Criterio 2. Si dos triángulos que tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre estos es igual entonces son semejantes. (L A L)

Criterio 3. Si dos triángulos que tienen sus tres lados correspondientes proporcionales entonces los triángulos son semejantes. (L L L)

A continuación demostraremos los tres criterios de semejanza:

Recordemos que cuando la razón de semejanza es $k = 1$, tenemos el caso de congruencia o igualdad de dos triángulos, es decir los lados correspondientes son iguales y luego además de ser semejantes, también son congruentes.

Criterio 1

Dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales, tienen sus lados proporcionales y los triángulos son semejantes.

Sea ABC y $A'B'C'$ dos triángulos que tienen respectivamente sus tres ángulos iguales de tal manera que el ángulo $\angle C$ coincida con el $\angle C'$, la recta $A'C'$ coincida con la recta con la recta AC y la recta $C'B'$ con la recta CB. Esto se puede hacer porque la hipótesis es $\angle C = \angle C'$. (Figura 2.05)

Además los ángulos $\angle A = \angle A'$ y $\angle B = \angle B'$, por lo tanto $A'B'$ es paralela a AB y

$\frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB}$ Por el inciso a) del teorema de fundamental de proporcionalidad

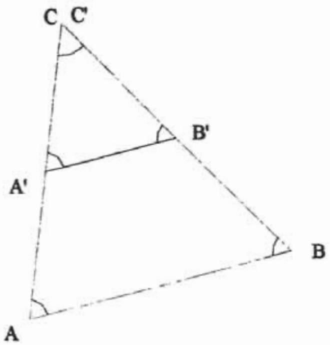


FIGURA 2.05

Análogamente coloquemos el $\Delta A'B'C'$ sobre el ΔABC de manera que $\angle A$ coincida con $\angle A'$, entonces $C'B'$ es paralela a CB y

$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$ y de estas dos ecuaciones tenemos que $\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{C'B'}{CB}$.

Los cuales están a la misma razón, por lo tanto los triángulos son semejantes.

Un corolario inmediato de este resultado es que si tenemos solamente dos ángulos iguales en un par de triángulos (A A) entonces estos son semejantes, es muy fácil ver que son semejantes porque conociendo dos ángulos de un triángulo conocemos el tercer ángulo.

Criterio 2

Dos triángulos que tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre estos es igual entonces son semejantes.

Sea ΔABC y $\Delta A'B'C'$ tales que los ángulos $\angle C = \angle C'$ y $\frac{CA}{C'A'} = \frac{CB}{C'B'}$, como se muestra en la figura 2.06. Ya que $\angle C = \angle C'$ podemos colocar el $\Delta A'B'C'$ sobre el ΔABC de tal manera que $C'A'$ coincida con CA y $C'B'$ con CB.

Como $\frac{CA}{C'A'} = \frac{CB}{C'B'}$ entonces $A'B'$ es paralela a AB por el b) del teorema fundamental de la proporcionalidad (ver tema 2.04).

Y por lo tanto $\angle A = \angle A'$ y $\angle B = \angle B'$, es decir los dos triángulos tienen los ángulos iguales y por el criterio 1 tenemos que $\dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{C'B'}{CB}$

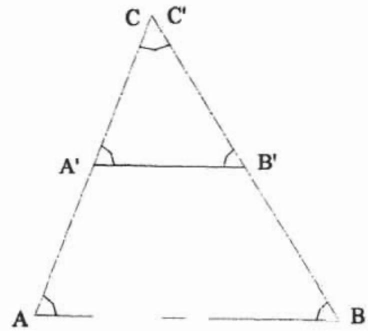


FIGURA 2.06

Criterio 3

Dos triángulos que tienen sus tres lados correspondientes proporcionales son semejantes. Es decir, tiene sus ángulos respectivamente iguales.

Sean dos triángulos ΔABC y ΔDEF cuya correspondencia es $ABC \leftrightarrow DEF$ si

$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ son semejantes (Figura 2.07), ahora sean E' y F' los puntos de AB y AC tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$ entonces si sustituimos tenemos :

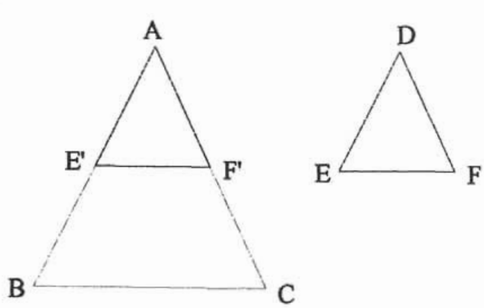


FIGURA 2.07

$\dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AC}{AF'}$ los cuales son dos lados proporcionales y tenemos un ángulo comprendido $\angle A = \angle D$

y por el criterio (LAL) de semejanza tenemos que los triángulos $\Delta ABC \cong \Delta AE'F'$ de que resulta

$$\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB} \Rightarrow E'F' = BC\frac{AE'}{AB} = BC\frac{DE}{AB} = EF$$

$\therefore\ E'F' = EF$ y como tomamos

$AE' = DE$ y $AF' = DF$ él cual es el criterio (LLL).

2.03 Problemas de topografía elemental

La herramienta que nos da la semejanza y congruencia de triángulos ha tenido mucho que ver para la resolución de problemas que se le han presentado al hombre durante gran parte de su historia, empleando instrumentos de medición de ángulos y longitudes obsoletos hoy en día, pero de gran utilidad durante mucho tiempo para la medición y transportación de ángulos Tales de Mileto tomaba dos tiras de madera y con un perno sujetaba uno de los extremos de cada una de ellas, colocaba el perno en algún vértice del ángulo que fuera a medir y colocaba cada una de las líneas en la dirección de los lados del ángulo, fijaba entonces las tiras de tal manera que dicha abertura no cambiara y transportaba el ángulo.

Para la solución de problemas prácticos de topografía solo utilizaremos los elementos que nos dan la semejanza y la congruencia de triángulos, en este apartado presento cuatro problemas clásicos para calculo de segmentos no visibles o con algún obstáculo.

1. Encontrar la distancia AB entre dos puntos A y B que están separados por un obstáculo no acotado (un río), que impide su medición directa. (Figura 2.08)

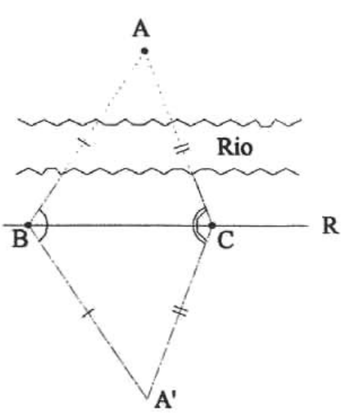


FIGURA 2.08

Construcción:

-Trazamos una recta R por B.

-Tomamos el punto C en R.

-Fijamos la recta AB y AC.

-Reflejamos los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$ respecto a R.

-Al punto de intersección de la prolongación de las líneas respecto a R de acuerdo a los ángulos reflejados lo llamamos A'.

La demostración es simple ya que tenemos a BC como lado común los ángulos $\angle ABC = \angle CBA'$ y $\angle ACB = \angle BCA'$ por construcción y por el criterio (ALA) tenemos que los triángulos son congruentes.

$\Delta ABC \cong \Delta A'BC \therefore AB = A'B$ donde $A'B$ es la distancia que es accesible.

2. Calcular la distancia mínima de un punto A inaccesible pero visible a una recta R accesible. (Figura 2.09)

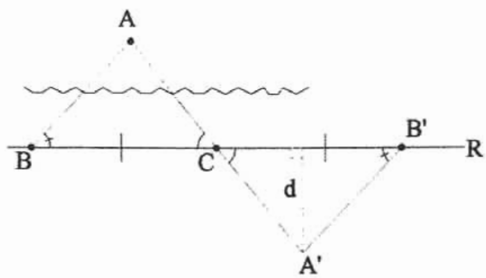


FIGURA 2.09

Construcción:

-Trazamos BC en la recta R.

-Fijamos las rectas BA y BC en el ángulo $\angle ABC$.

-Prolongamos AC, duplicamos BC y formamos B' de tal forma que $BC = B'C$.

-Transportamos el ángulo $\angle ABC$ en B'.

-Encontramos A' con la intersección de AC.

La prueba es como sigue $BC = B'C$ lados iguales por construcción, $\angle ABC = \angle A'B'C$ por construcción y $\angle BCA = \angle A'CB'$ por ser opuestos por el vértice entonces por el criterio (ALA) los dos triángulos son congruentes, es decir:

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C$, ahora para encontrar la mínima distancia d en un lugar accesible trazamos una perpendicular a $B'C$ que pase por el vértice A'.

3. Encontrar la distancia de dos puntos visibles pero inaccesibles (pueden ser dos barcos). (Figura 2.10)

Construcción:

-Fijamos las rectas f, g, h, i de tal manera que $g \cap h = C$.

-Trazamos R que pase por C.

-Encontramos los puntos D y E como $f \cap R = D$ y $i \cap R = E$.

-Reflejamos los ángulos $\angle ADC$, $\angle ACD$, $\angle BCE$, $\angle BEC$ respectivamente con la recta R.

-Encontramos los puntos A' y B' como se muestra en la figura.

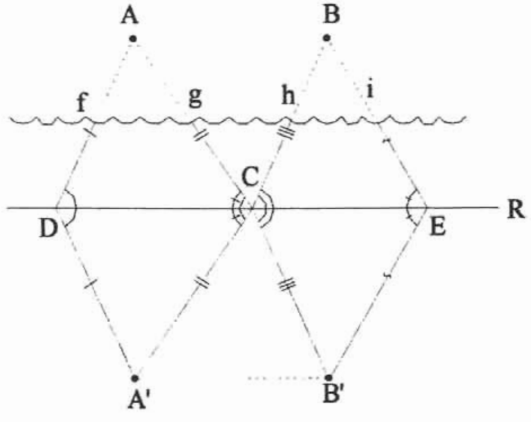


FIGURA 2.10

Observando el problema numero uno tenemos que $\Delta ADC \cong \Delta A'DC$ al igual que los triángulos $\Delta BCE \cong \Delta B'CE$ por (ALA) entonces tenemos que $DA = DA'$, $CA = CA'$ y $CB = CB'$, $EB = EB'$ respectivamente, ahora nos fijamos en los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C$.

El ángulo $\angle ACB = \angle A'CB'$ porque son los suplementos de $\angle DCA$ y $\angle BCE$ por lo que los triángulos $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C$ por (LAL)

$\therefore$ $AB = A'B'$ y $A'B'$ es accesible para poder medirlo.

4. Sean s, t dos segmentos de recta cuyas prolongaciones se intersecan en A un punto inaccesible e invisible. Si O es un punto accesible, encontrar la distancia de OA. (Figura 2.11)

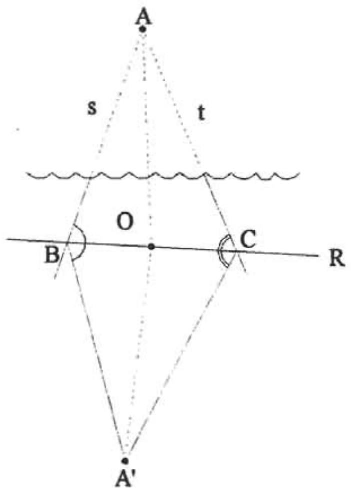


FIGURA 2.11

Construcción:

-Trazamos la recta R que pase por O y que corte a los segmentos de recta s y t en B y C respectivamente.

-Reflejamos el ángulo $\angle ABC$ y el $\angle ACB$ con respecto a la recta R.

-La intersección la llamaremos A'.

-Unimos A' con O que es la distancia buscada.

La prueba consiste en ver que los triángulos $\Delta ABC \cong \Delta A'BC$, BC lado común para los dos triángulos, $\angle ABC = \angle A'BC$ y $\angle ACB = \angle A'CB$ por construcción, luego por el criterio de congruencia (ALA) entonces vemos que $BA = BA'$ y $CA = CA'$.

Ahora los triángulos $\Delta ABO \cong \Delta A'BO$ puesto que $BA = BA'$ y OB lado común, el ángulo $\angle ABO = \angle A'BO$ por construcción y (LAL) por lo tanto concluimos en particular que $AO = A'O$ y $A'O$ es visible y la podemos medir.

2.04 Teorema de tales y teorema fundamental de proporcionalidad

Estos son dos resultados que se siguen del teorema de Tales, (Tales de Mileto, 624-547 a.C. filósofo griego considerado uno de los siete sabios de Grecia) él cual dice que si una familia de rectas paralelas, que cortan a dos rectas concurrentes determinan entre ellas segmentos proporcionales. Del teorema de Tales se desprende el teorema fundamental de la proporcionalidad y su reciproco que a continuación se mencionan y demuestran.

a) Si una recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros dos lados, entonces divide estos lados proporcionalmente.

Esto es si $B'C'$ es paralela a BC , entonces $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$ (Figura 2.12)

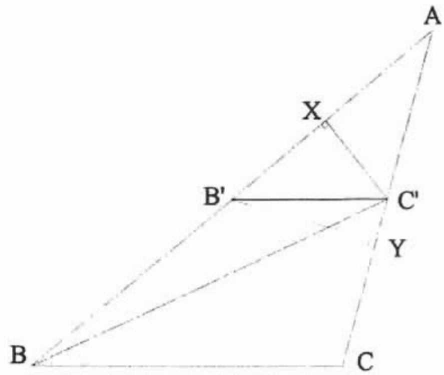


FIGURA 2.12

Tracemos $B'C'$ que sea paralela a BC, la altura X sobre el vértice C' y la altura Y por el vértice B', además tracemos $B'C$ y BC'. Para demostrar esta propiedad utilizaremos la formula del área de un triángulo, $a(\Delta) = \frac{1}{2}\, a\, b$

Consideramos las razones de las áreas de los triángulos:

$$\frac{a(\Delta AB'C')}{a(\Delta B'C'B)} = \frac{\frac{1}{2}\, AB' \cdot C'X}{\frac{1}{2}\, B'B \cdot C'X} = \frac{AB'}{B'B}$$

$$\frac{a(\Delta AC'B')}{a(\Delta C'B'C)} = \frac{\frac{1}{2}\, AC' \cdot B'Y}{\frac{1}{2}\, CC' \cdot B'Y} = \frac{AC'}{CC'}$$

Pero $a(\Delta B'C'B) = a(\Delta C'B'C)$ ya que tienen la misma base $B'C'$ y la misma altura porque $B'C'$ es paralela a BC. Entonces dividiendo las ecuaciones anteriores tenemos

$$\frac{AB'}{B'B} \Big/ \frac{AC'}{C'C} = 1 \qquad \text{y por tanto} \qquad \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}.$$

Ahora veremos que las siguientes igualdades son equivalentes $\frac{B'B}{AB'} = \frac{C'C}{AC'}$ y

$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ de la primera le sumamos la unidad y obtenemos

$$\frac{B'B}{AB'} + 1 = \frac{C'C}{AC'} + 1$$

$$\frac{B'B + AB'}{AB'} = \frac{C'C + AC'}{AC'} \quad \text{pero} \quad B'B + AB' = AB \;\; y \;\; C'C + AC' = AC$$

sustituyendo tenemos que:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

Por lo tanto si una recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros dos lados, entonces divide estos lados proporcionalmente.

b) Si una recta divide dos lados de un triángulo proporcionalmente entonces es paralela al tercer lado.

Para la demostración de este inciso hacemos referencia a la figura 2.13.

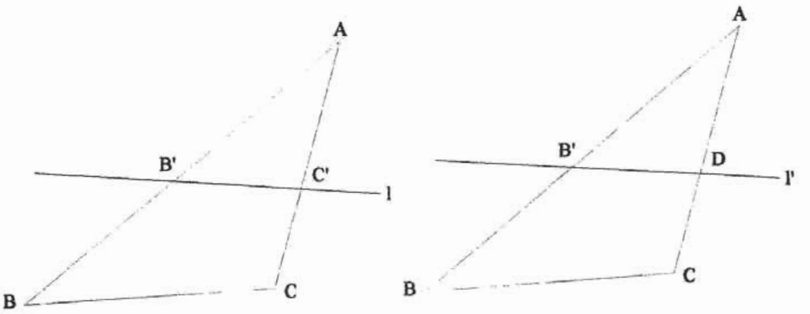


FIGURA 2.13

Sea ABC un triángulo y l una recta tal que corta a los lados AB y AC en los puntos B′ y C′ respectivamente en la misma proporción $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$.

Consideremos la recta l' paralela a BC por B′ y suponemos que intersecta a AC en el punto D. Como l' es paralela a BC tenemos que

$\frac{AB'}{AB} = \frac{AD}{AC}$ Por el inciso a) pero la hipótesis dice que $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ entonces $D = C'$

Así, la recta l' y B′C′ tienen dos puntos en común y en consecuencia las rectas coinciden, ya que la recta l' por hipótesis es paralela a BC entonces B′C′ es paralela a BC.

2.05 Teorema de Pitágoras

Este es uno de los principales descubrimientos realizados en la rama de las matemáticas, este teorema fue conocido por los babilonios y los egipcios pero no lo demostraron, el enunciado general y la demostración se deben los griegos.

Esta demostración basada en la comparación de áreas es atribuida a Euclides y aparece como proposición 47 del libro I de Euclides, era conocida de la siguiente forma:

El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. (Figura 2.14a)

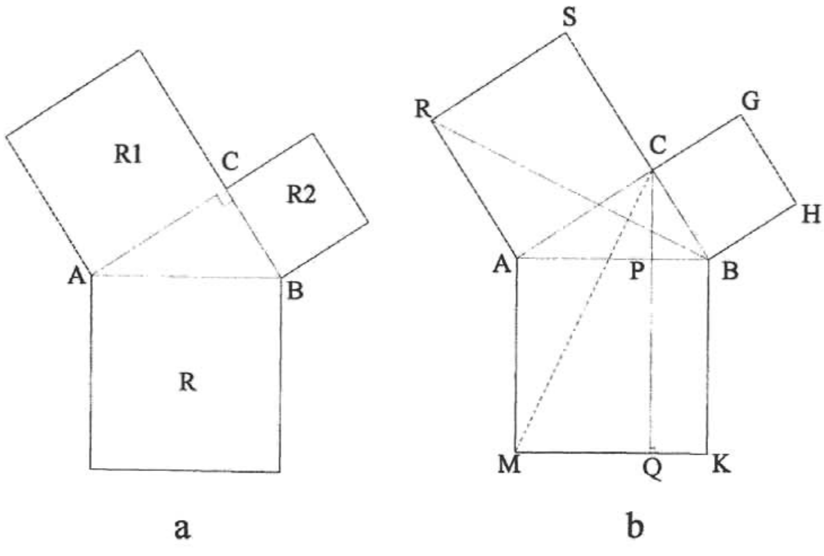


FIGURA 2.14

Para la demostración tomamos como referencia a la figura 2.14b, trazamos los segmentos RB, CM y CQ donde $CQ \perp MK$. Los triángulos RAB , CAM son iguales por el criterio de congruencia (LAL), $AM = AB$, $\angle CAM = \angle RAB$, $AR = AC$.

La altura del triángulo RAB es AC por que es ortogonal a la base RA, luego tenemos que el área del triángulo RAB es $(\Delta RAB) = \frac{1}{2} RA \cdot AC$ que es la mitad del área del rectángulo $(\square RACS) = RA \cdot AC$ por lo tanto $(\square RACS) = 2(\Delta RAB)$, pero como $\Delta RAB = \Delta CAM$ donde la base es AM y la altura $AP = AC$ tenemos que $(\square RACS) = (\square AMPQ)$.

Trazando líneas sobre el rectángulo del otro cateto y siguiendo pasos análogos demostramos que $(\square BHGC) = (\square PQKB)$.

Pero sabemos que $(\square AMKB) = (\square AMQP) + (\square PQKB)$ por que es la suma de las áreas del cuadrado sobre la hipotenusa, sustituyendo los valores anteriores:

$(\square AMKB) = (\square RACS) + (\square BHGC)$.

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los dos catetos $CA^2 + BC^2 = BA^2$.

Existen muchas demostraciones de este teorema, la siguiente demostración es atribuida a Lagrange, consiste en trazar una perpendicular por C sobre el lado AB, con lo cual se tienen tres triángulos semejantes. (Figura 2.15)

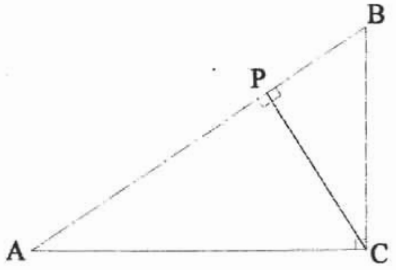


FIGURA 2.15

Sabemos que el $\Delta ABC \approx \Delta ACP$ por (AAA) y tenemos:

$\frac{AC}{PA} = \frac{AB}{AC}$ de la cual obtenemos $AC^2 = PA \cdot AB$ .... (1)

Del $\Delta ABC \approx \Delta CPB$ por (AAA) por tanto tenemos

$\frac{BC}{PB} = \frac{AB}{BC}$ de esto se sigue que $BC^2 = AB \cdot PB$ .... (2)

Sumando (1) y (2) resulta

$AC^2 + BC^2 = AB \cdot PB + PA \cdot AB = AB(PB + PA)$ pero $PB + PA = AB$ por lo tanto tenemos que $AC^2 + BC^2 = AB^2$ .... (3)

Una propiedad importante para los triángulos rectángulos isósceles, es que la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces el largo del cateto.

Acabamos de probar que para cualquier triángulo rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras. Si la ecuación numero (3) la dividimos entre AB^2 obtenemos una propiedad trigonométrica fundamental que utilizaremos más adelante.

Si $\frac{AC}{AB} = \cos\angle BAC$ y $\frac{BC}{AB} = \operatorname{sen}\angle BAC$ definiciones conocidas de trigonometría

$$\frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\angle BAC + \cos^2\angle BAC = 1$$

El teorema de Pitágoras tiene un sin fin de aplicaciones en problemas que se relacionan con la rama de las matemáticas entre ellas la ingeniería civil, algunos en cálculos de alturas y sus variantes además de los avances que se dieron al rededor de este para el desarrollo de otras ciencias de las cuales esta el cálculo y la geometría analítica.

2.06 Ley de cosenos

La ley de cosenos es un resultado que se sigue del teorema de Pitágoras y es de gran importancia para la resolución de triángulos, para la demostración utilizaremos la trigonometría básica definida en los triángulos rectángulos.

En un triángulo ΔABC donde $\angle ABC, \angle BCA, \angle CAB$ son opuestos a los lados AC, AB y BC respectivamente se cumple las siguientes relaciones (Figura 2.16)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle ABC$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\angle CAB$$
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos\angle BCA$$

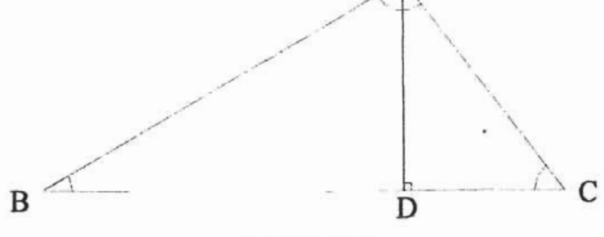


FIGURA 2.16

Tracemos la altura por A, sea D el pie de esta sobre BC. Considerando el triángulo rectángulo ACD; por el teorema de Pitágoras $AC^2 = AD^2 + DC^2$, luego

$\operatorname{sen} \angle ABC = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AD = AB \operatorname{sen} \angle ABC$ y

$\cos \angle ABC = \dfrac{BD}{AB} \Rightarrow BD = AB \cos \angle ABC$ pero, $DC = BC - BD = BC - AB \cos \angle ABC$

Entonces sustituimos en el teorema de Pitágoras:

$AC^2 = (AB \operatorname{sen} \angle ABC)^2 + (BC - AB \cos \angle ABC)^2$ desarrollando tenemos que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$$

análogamente se demuestra que:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle CAB$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle BCA$$

por lo tanto queda demostrada la ley de cosenos, que nos útil para la resolución de cualquier triángulo conocidos tres de sus elementos.

2.06 Teorema de Stewart

Este resultado es llamado teorema de Stewart, después de que lo declaro M. Stewart, en 1746. Este fue probablemente descubierto por Arquímedes cerca de 300 a.C., pero la primera prueba conocida fue realizada por R. Simson, en 1751.

Este teorema se utiliza en cualquier triángulo ABC, puede usarse para encontrar la longitud de la línea AD cuando D es un punto cualquiera en la línea BC de un triángulo y se conoce la razón en la cual D divide a BC, porque en este caso las longitudes y signos de BD y DC pueden conocerse. En particular, las longitudes de las medianas y las bisectrices de los ángulos de un triángulo, las alturas, pueden encontrarse por medio del presente teorema.

Si a, b, c son las longitudes de los lados BC, CA, AB del triángulo ABC; y si D es un punto cualquiera en BC para el cual $BD = p$, y $DC = q$, entonces representado por x la longitud de AD, tenemos: $ax^2 = pb^2 + qc^2 - apq$. (Figura 2.17).

Aplicando la ley de cosenos a los triángulos ABD y ADC de lo cual obtenemos

$c^2 = x^2 + p^2 - 2xp \cos \angle ADB$ .... (1)

$b^2 = x^2 + q^2 - 2xq \cos \angle ADC$ .... (2)

Pero notemos que $\cos \angle ADB = -\cos \angle ADC$ por lo que tenemos

$b^2 = x^2 + q^2 + 2xq\cos\angle ADB$ .... (3)

Multiplicando (1) por q y (3) por p, y teniendo en cuenta que $p + q = a$, reduciendo algebraicamente tenemos el resultado deseado;

$ax^2 = pb^2 + qc^2 - apq$ despejando x tenemos

$$x = \sqrt{\frac{pb^2 + qc^2 - apq}{a}}$$

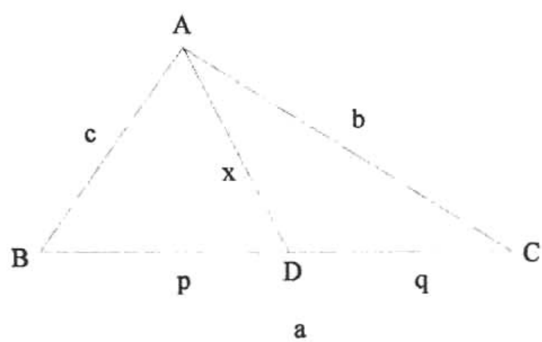


FIGURA 2.17

Este teorema es muy útil para resolver problemas prácticos en geometría analítica, en dibujo técnico, en la topografía, en la resolución de triángulos y para encontrar la longitud de la línea que une a un vértice del triángulo con un punto en el lado opuesto.

2.08 Rectas y puntos notables de un triángulo

En este tema se van a definir tanto puntos como líneas que tienen gran importancia en la descripción de cualquier triángulo, además se darán las demostraciones relacionadas a cada una de estas proposiciones.

Llamamos ALTURA DE UN TRIÁNGULO a una recta que pasa por el vértice y es perpendicular al lado opuesto. Este mismo nombre recibe el segmento de dicha perpendicular entre el vértice y el lado opuesto, y la longitud de dicho segmento. (Figura 2.20)

Llamamos MEDIANA DE UN TRIÁNGULO a una recta que pasa por el vértice y por el punto medio del lado opuesto. (Figura 2.22)

Llamamos MEDIATRIZ DE UN TRIÁNGULO a una recta perpendicular trazada por el punto medio de uno de los lados. (Figura 2.19)

Llamamos BISECTRIZ (interior) DE UN TRIÁNGULO a la bisectriz interior de uno de los ángulos (interiores) del triángulo. (El adjetivo "interior" suele omitirse, pero lo señalamos por el contraste con el siguiente). (Figura 2.24)

Llamamos BISECTRIZ EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO a la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, donde por ángulo exterior entendemos uno de los formados por un lado de un triángulo y la prolongación de uno de los lados adyacentes. (Figura 2.25)

En la siguiente proposición introducimos la definición de los puntos notables del triángulo.

Para cualquier triángulo tenemos la concurrencia de las rectas siguientes:

1. Las tres mediatrices; el punto en que concurren se llama circuncentro porque es el centro de la circunferencia circunscrita, es decir que pasa por los tres vértices;

2. Las tres alturas; el punto en que concurren se llama ortocentro;

3. Las tres medianas; el punto en que concurren se llama baricentro porque es el centro de gravedad de el triángulo;

4. Las tres bisectrices interiores; el punto en que concurren se llama incentro porque es el centro de la circunferencia inscrita, es decir interior y tangente a los tres lados de el triángulo;

5. Una bisectriz interior y dos bisectrices exteriores; cada uno de los puntos así formados se llama excentro porque es el centro de la circunferencia exterior y tangente a los tres lados del triángulo.

Para la demostración de cada una de las siguientes proposiciones haremos uso de varios resultados que se presentaran dentro de la argumentación.

Demostraciones

1. Las tres mediatrices de un triángulo concurren en un punto que se llama circuncentro porque es el centro de la circunferencia circunscrita, es decir que pasa por los tres vértices.

Para probar esta proposición debemos conocer exactamente las propiedades de la mediatriz. (Figura 2.18)

La mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos

Sea M el punto medio de BC, sea O la perpendicular a BC por M.

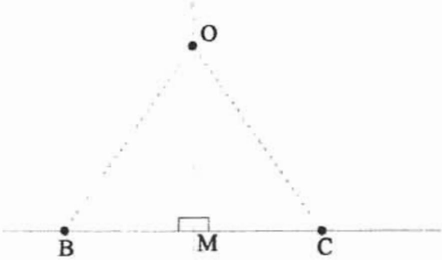


FIGURA 2.18

Tenemos $BM = MC$ y $OM = MO$ que es lado adyacente, además $\angle BMO = \angle CMO$ por ser ángulos rectos entonces por el criterio de congruencia (LAL) sabemos que los $\Delta BMO \cong \Delta CMO$, entonces $BO = CO$, de lo anterior decimos que el lugar geométrico es una línea perpendicular a BC que pasa por el punto medio de dicho segmento.

Para demostrar que todo punto de la mediatriz esta en la perpendicular del segmento BC trazada por el punto medio M, empleamos el criterio (LLL) y por congruencia de triángulos llegamos a decir que O esta en la perpendicular trazada por el punto medio.

Ahora probaremos que las mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto llamado circuncentro. (Figura 2.19)

Sea un triángulo ABC y O el punto de intersección de las mediatrices de AB y BC, el punto O tienen la propiedad:

$OA = OB$ (Por estar en las mediatrices de AB)

$OB = OC$ (Por estar en las mediatrices de BC)

Por lo tanto

$OA = OB = OC$

Entonces, O esta también en la mediatriz de AC y por lo tanto los vértices del triángulo ABC están en la circunferencia circunscrita a este.

En el capitulo cinco de este trabajo demostraremos que las mediatrices concurren utilizando un famoso teorema debido al matemático italiano Ceva "teorema de Ceva".

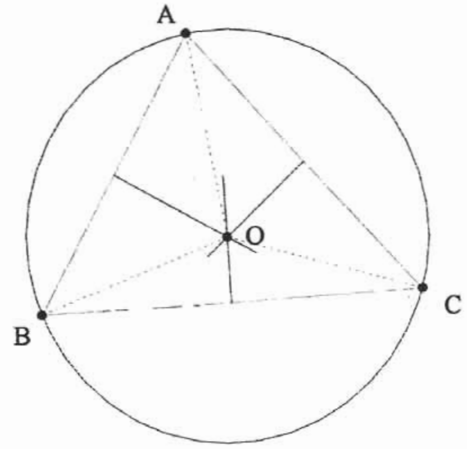


FIGURA 2.19

2. Las tres alturas de un triángulo concurren en un punto llamado ortocentro.

Sea AL, BM y CN las alturas de un triángulo ABC trazamos por A la paralela a BC, por B la paralela a AC, y por C la paralela a BA y sea $A'B'C'$ el triángulo formado por estas rectas. (Figura 2.20)

Ahora vamos a demostrar que las alturas del ΔABC son las mediatrices del $\Delta A'B'C'$.

Por construcción:

$B'C'$ paralela a CB , $C'A'$ paralela a AC y $A'B'$ paralela a BA

Entonces las siguientes rectas son perpendiculares

$AL \perp C'B'$, $BM \perp C'A'$ y $CN \perp A'B'$

Solo falta demostrar que

$C'A = AB'$, $C'B = BA'$, $A'C = CB'$

Consideremos los triángulos BCA' y ABC:

$BC = BC$ lado común.

$\angle ABC = \angle BCA'$ porque BA es paralela a $A'C$ y son opuestos por el vértice

$\angle ACB = \angle CBA'$ porque AC es paralela a BA'

por lo tanto $\Delta ABC \cong \Delta BCA'$ y $AC = BA'$, $BA = A'C$

Ahora consideremos los triángulos ABC y $C'AB$, por razones análogas

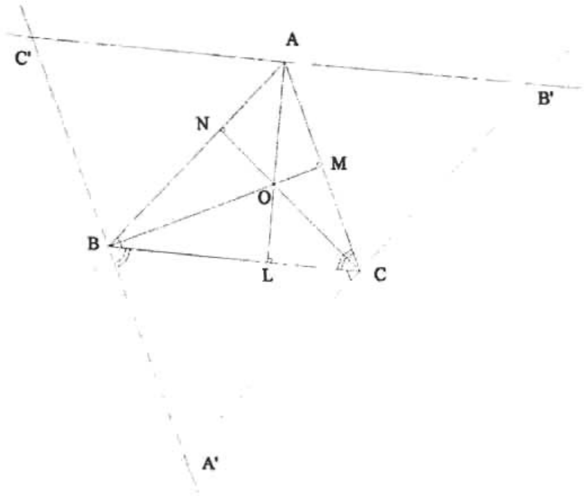


FIGURA 2.20

$\Delta ABC \cong \Delta C'AB$ y $BC = C'A$, $AC = C'B$.

También $\Delta ABC \cong \Delta AB'C$ y $BC = AB'$, $BA = CB'$.

De estas igualdades tenemos que:

$CA' = AB'$, $C'B = BA'$, $A'C = CB'$.

Entonces AL, BM, CN pasan por los puntos medios de los lados CB', CA', $A'B'$ del $\Delta A'B'C'$; o sea las mediatices del mismo. Pero sabemos que las mediatrices de un triangulo son concurrentes, por el punto anterior por lo tanto AL, BM y CN, alturas del ΔABC son concurrentes.

3. Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto llamado baricentro o centroide.

Para demostrar que las medianas concurren utilizaremos el siguiente resultado. Dos medianas de un triangulo se intersecan en un punto tal que divide a ambas medianas en dos segmentos que miden $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana respectivamente.

Sea ABC un triángulo y BM, CN dos medianas del mismo y O su punto de intersección (Figura 2.21)

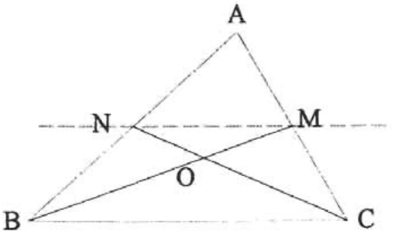


FIGURA 2.21

Considerando los triángulos ABC y ANM :

$\angle A = \angle A'$ ángulo común

$\frac{AN}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{AM}{AC}$ por hipótesis, por lo tanto los triángulos son semejantes y además,

NM es paralela a BC

$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{NM}{BC} = \frac{1}{2}$ ya que NM paralela a BC, los triángulos $\Delta BCO \approx \Delta MON$ y:

$\frac{OM}{BO} = \frac{ON}{CO} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ entonces, $2OM = BO$, $2ON = CO$ pero

$BO + OM = BM$ sustituyendo $2OM = BO$ tenemos;

$2OM + OM = BM \Rightarrow OM = \frac{1}{3} BM$ ahora sustituimos $2OM = BO$ en

$BO + \frac{1}{2} BO = BM \Rightarrow \frac{2}{3} BM = BO$, lo mismo sucede con la otra mediana $ON = \frac{1}{3} CN$, $\frac{2}{3} CN = CO$ con lo que queda probado que el punto O cumple la propiedad antes mencionada.

Ahora demostraremos que las medianas concurren en un punto utilizando el resultado anterior. (Figura 2.22)

Sea AL y BM dos medianas del ΔABC, sea O el punto de intersección, sabemos por el resultado anterior que $BO = 2OM$ y $AO = 2OL$, la otra mediana es CN , y supongamos que CN y BM se intersecan en un punto que le llamaremos O' de lo cual se cumple que $BO' = 2O'M$ y $CO' = 2O'N$, entonces de $BO' = 2O'M$ y $BO = 2OM$ tenemos que $O = O'$. Entonces demuestra que las tres medianas del triángulo se intersecan en el mismo punto O.

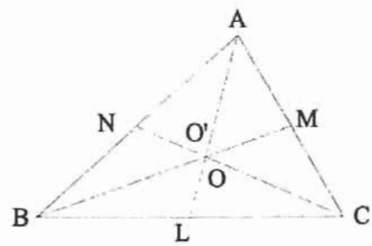


FIGURA 2.22

4. Las tres bisectrices interiores concurren en un punto llamado incentro.

Antes de probar que las bisectrices concurren, demostraremos que la bisectriz de un ángulo es equidistante a sus lados. (Figura 2.23)

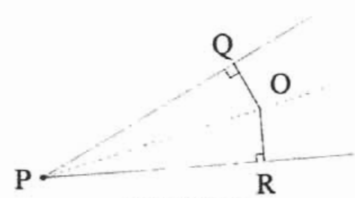


FIGURA 2.23

Sea α ángulo formado por dos rectas l y h, cuyo vértice es P. Sea O un punto de la bisectriz de ángulo α.

Trazamos desde O perpendiculares a l y h, nombramos Q y R las intersecciones por las rectas l y h respectivamente.

Consideremos los triángulos ORP y OQP

$\measuredangle OPR = \measuredangle OPQ$ por ser bisectriz.

$\measuredangle ORP = \measuredangle OQP = 1 \perp$ por hipótesis.

$OP = OP$ lado común.

Por congruencia de triángulos $\Delta ORP \cong \Delta OQP$ y $OR = OQ$

Por lo tanto O es equidistante a l y h.

Ahora demostraremos que las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un punto llamado incentro.

Sea ABC un triángulo sea O el punto de intersección de las bisectrices $\angle A$ y el $\angle B$. Trazamos las perpendiculares por O a los lados AB, BC, CA llamemos L, M, N los pies de la perpendiculares respectivamente. (Figura 2.24)

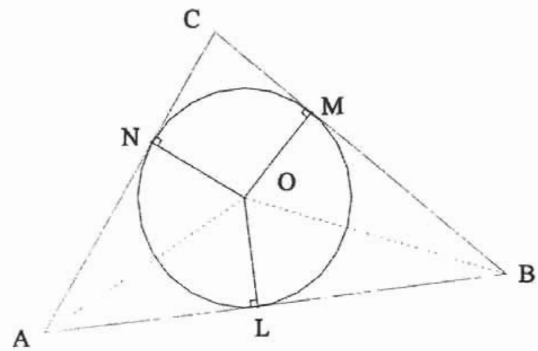


FIGURA 2.24

$OL = ON$ por estar O en la bisectriz $\angle A$

$OL = OM$ por estar O en la bisectriz $\angle B$ por lo tanto $ON = OM$

Entonces O esta también en la bisectriz de $\angle C$. Por lo que queda demostrado que las bisectrices concurren y además la circunferencia es tangente a los tres lados del triángulo en los puntos L, M, N.

5.0 En un triángulo cualquiera una bisectriz interior y dos bisectrices exteriores son concurrentes.

Sea un a, b, c los lados de un triángulo cuyos vértices opuestos son A, B, C respectivamente. Trazamos las bisectrices exteriores del $\angle A$ y $\angle C$ llamando O al punto de intersección. Por otro lado trazamos los pies de las perpendiculares C', A', B' por O a las rectas c, a, b. (Figura 2.25)

El punto O tiene las siguientes propiedades:

$OC' = OB'$ porque O esta en la bisectriz exterior de $\angle A$
$OA' = OB'$ porque O esta en la bisectriz exterior de $\angle C$, por lo tanto $OA' = OC'$.

Así que O es equidistante al ángulo $\angle B$. Ya que las bisectrices exteriores no son concurrentes, la bisectriz del ángulo $\angle B$ pasa por O debe ser la bisectriz del ángulo interior.

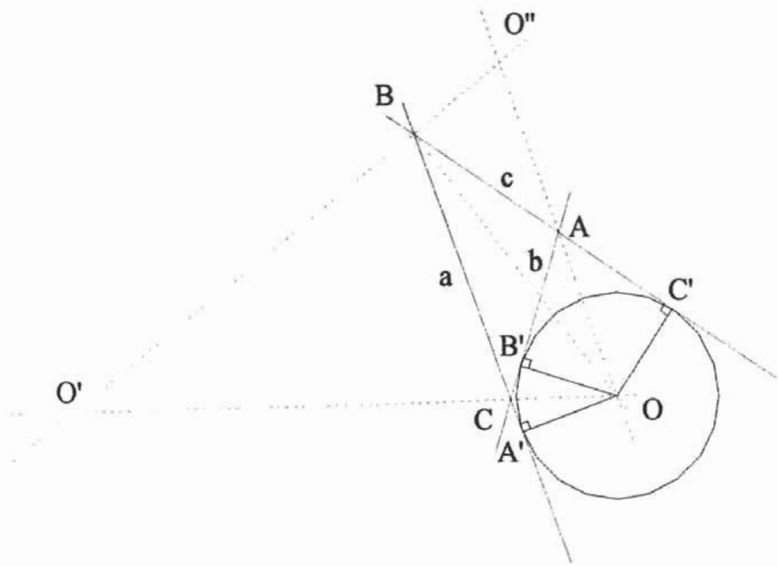


FIGURA 2.25

Por ultimo diremos que O, O', O'' son los centros de las circunferencias excritas y son tangentes a los tres lados del triángulo.

2.09 Recta de Euler

La Recta de Euler (Leonhard Euler, 1707-1783), un suizo que paso gran parte de su vida en Rusia e hizo contribuciones importantes a la rama de las matemáticas. La recta que lleva su nombre tiene en común que en un triángulo cualquiera, el baricentro, el circuncentro, el y ortocentro están en la misma recta.

Cuando en un triángulo coinciden el circuncentro O y el centroide G, cada mediana es perpendicular al lado que biseca y el triángulo es isósceles de tres maneras es decir es equilátero.

Por consiguiente, si un ΔABC no es equilátero, su circuncentro y su centroide se encuentran en una recta única OG que es la llamada recta de Euler. Un resultado importante que se tiene en esta recta es que el punto de concurrencia de las alturas "ortocentro" también esta en dicha línea. (Figura 2.26)

Sea M la mediatriz por el lado BC, O es el ortocentro del triángulo, G es el centroide del triángulo con una de las medianas AM, tomemos un punto H sobre la recta OG tal que $OH = 3OG$ es decir $GH = 2OG$.

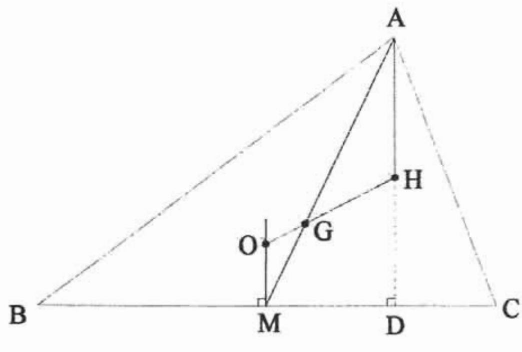


FIGURA 2.26

Como también $AG = 2GM$ (ver resultado en puntos y rectas notables de el triángulo), entonces el $\Delta MOG \approx \Delta AHG$ porque los dos triángulos están ala misma proporción y por (AAA) esto quiere decir que MO es paralela a AH, prolongando AH con BC tenemos que $BC \perp AH$ en el punto D.

Del mismo modo $BH \perp AC$ y $CH \perp AB$, pero sabemos que las alturas de un triángulo concurren en un punto H, el cual esta alineado con la recta de Euler.
Mas adelante veremos que el centro de la circunferencia de los nueve puntos esta también alineada con la recta de Euler.

2.10 Triángulos pedales

El triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas es llamado el triángulo pedal del triángulo dado. El triángulo DEF es el triángulo pedal del triángulo ABC. De esta definición deriva un resultado muy importante que dice:

El ortocentro H del ΔABC es el incentro del triángulo pedal DEF, además los vértices A, B, C son los centros de los excírculos del triángulo pedal DEF. (Figura 2.27)

Para probar esta proposición trazamos tres circunferencias cada una con diámetro igual a cada lado del triángulo ABC

Por la circunferencia S pasan los puntos F y D ya que forman ángulos rectos respecto a su diámetro AC.
Por la circunferencia S' pasan los puntos F y E ya que forman ángulos rectos respecto a su diámetro BC y
Por la circunferencia S'' pasan los puntos D y E ya que forman ángulos rectos respecto a su diámetro AB, ahora veamos los ángulos que se forman.

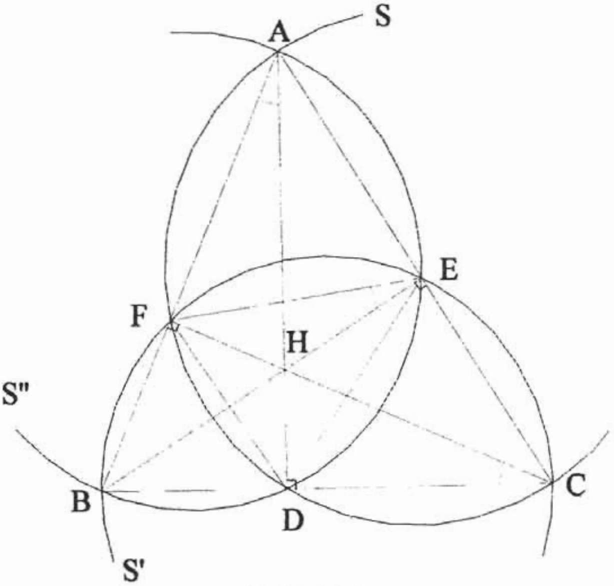


FIGURA 2.27

De S y la cuerda FD tenemos que $\angle FAD = \angle FCD$ porque subtienden la misma cuerda, de S′ y la cuerda BF tenemos que $\angle BCF = \angle BEF$ porque subtienden la cuerda de S″ y la cuerda BD tenemos que $\angle BAD = \angle BED$ porque subtienden la cuerda.

Por la igualdad de los ángulos anteriores tenemos que $\angle BEF = \angle BED$ entonces son la bisectriz del ángulo $\angle FED$ del triángulo pedal DEF, análogamente para los ángulos $\angle FDE$ y $\angle DFE$, por lo tanto el ortocentro del triángulo ABC es el incentro de el triangulo pedal.

Por otra parte como las bisectrices son ortogonales a cada uno de los lados del triángulo, estas son las bisectrices externas del triángulo pedal y su intersección dos a dos es el excentro de los excírculos del triángulo pedal.

2.11 Grupo ortocéntrico

Otra propiedad muy importante del triangulo pedal es el cuadrángulo ortocéntrico el cual dice que las seis líneas que bisecan los ángulos interiores y exteriores de un triángulo son concurrentes en cuatro puntos por tercias los cuatro puntos de concurrencia son: I_0, I_1, I_2, I_3, son el incentro y los excentros del triángulo dado. (Figura 2.28)

El cuadrángulo completo determinado por ellas tiene la propiedad de que cada uno de sus vértices es el ortocentro del triángulo determinado por los otros tres.

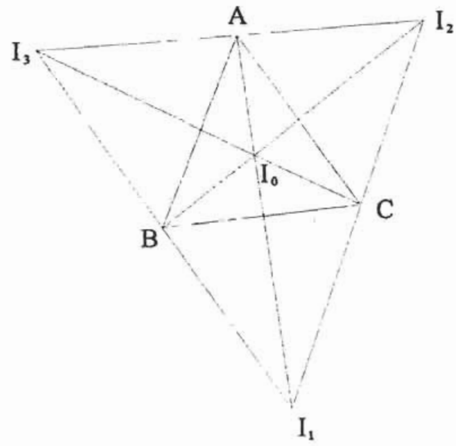


FIGURA 2.28

I_0 es el ortocentro del triángulo formado por I_1, I_2, I_3

I_1 es el ortocentro del triángulo formado por I_0, I_2, I_3

I_2 es el ortocentro del triángulo formado por I_0, I_1, I_3

I_3 es el ortocentro del triángulo formado por I_0, I_1, I_2

Debido a esta propiedad es llamado cuadrángulo ortocéntrico del triángulo, además cualquier conjunto de cuatro puntos que determinen un cuadrángulo tal es llamado grupo ortocéntrico de puntos y los cuatro triángulos que determinan tomados tres puntos a la vez , es llamado grupo ortocéntrico de triángulos.

Otra propiedad importantísima es que el ΔABC es el triángulo pedal de cada uno de los cuatro triángulos que están determinados de los vértices de su cuadrángulo ortocéntrico, estos es, los cuatro triángulos de un grupo ortocéntrico tienen el mismo triángulo pedal.

ΔABC es el triángulo pedal del triángulo formado por I_1, I_2, I_3

ΔABC es el triángulo pedal del triángulo formado por I_0, I_1, I_2

ΔABC es el triángulo pedal del triángulo formado por I_0, I_2, I_3

ΔABC es el triángulo pedal del triángulo formado por I_0, I_1, I_3.

3.0 Circunferencias y cuadriláteros cíclicos

3.01 Ángulos y cuerdas en la circunferencia

Para empezar con los ángulos en la circunferencia tenemos que tomar en cuenta la definición de la circunferencia, se define la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo C, llamado centro de la circunferencia; la distancia constante r es el radio. Si $r = 0$, la circunferencia consta solamente del punto C.

La cuerda es un segmento determinado por dos puntos en la circunferencia, el diámetro es cualquier cuerda que pasa por el centro, por otro lado si una recta tiene un punto de contacto con la circunferencia se le llama tangente, si tiene dos puntos en común se le llama secante.

Ahora veamos algunas propiedades referentes a las longitudes de las cuerdas de un círculo y ángulos inscritos en relación con los arcos y cuerdas que abarcan. Sea C un círculo, O su centro y AB una cuerda.

1. Una recta que pasa por el centro del círculo (diámetro), perpendicular a una cuerda, la biseca:

Sea PQ un diámetro perpendicular a la cuerda AB y sea M el pie de la perpendicular en AB. (Figura 3.01)

Considerando los triángulos AMO y BMO tenemos que $AO = BO$ por ser los radios, $OM = OM$ por ser lado común y los ángulos $\angle AMO = \angle BMO = 1 \perp$, por lo tanto el triángulo AOB es isósceles y los $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ entonces concluimos que $AM = MB$.

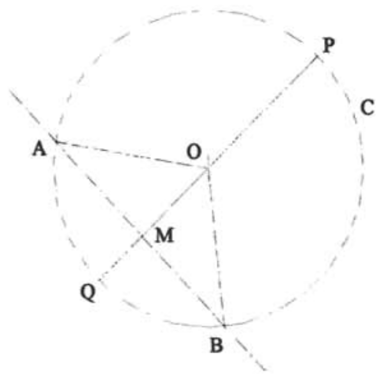


FIGURA 3.01

2. En el mismo círculo o en círculos iguales, cuerdas iguales son equidistantes del centro del círculo (Figura 3.02)

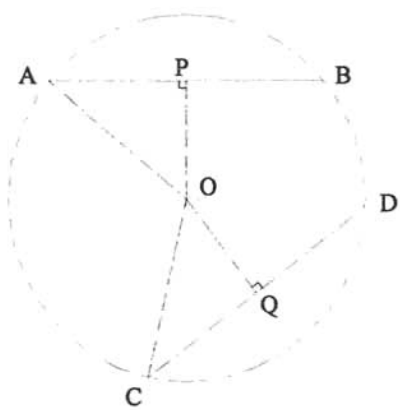


FIGURA 3.02

Sean AB y CD dos cuerdas iguales en la circunferencia $AB = CD$; tracemos por O perpendiculares a estas cuerdas, llamamos a los puntos P y Q donde cortan a las cuerdas AB y CD respectivamente.

Sabemos que OP biseca a AB y OQ biseca a CD por el resultado anterior, entonces:

$AB = 2AP$ y $CD = 2CQ$ por lo tanto $AP = CQ$. Ahora consideremos los triángulos OAP y OCQ. Los lados OA y OC son iguales por ser radios, además tenemos que $AP = CQ$ y $\angle APO = \angle ACQ = 1 \perp$, entonces tenemos que los $\Delta OAP \cong \Delta OCQ$ y $OP = OQ$, es decir que cuerdas iguales equidistan del centro de la circunferencia.

3. En el mismo círculo o en círculos iguales si dos cuerdas son distintas, están a diferente distancia del centro de la circunferencia y la mayor cuerda esta a menor distancia.

Sean AB y CD dos cuerdas tales que $AB > CD$, trazamos perpendiculares OP y OQ a ellas desde el centro O y luego trazamos OA y OC. (Figura 3.03)

Consideremos los triángulos APO y CQO entonces tenemos que

$AB = 2AP$ y $CD = 2CQ$ por hipótesis $AB > CD$ y entonces $AP > CQ$, también $OA = OC$ por ser radios de la circunferencia.

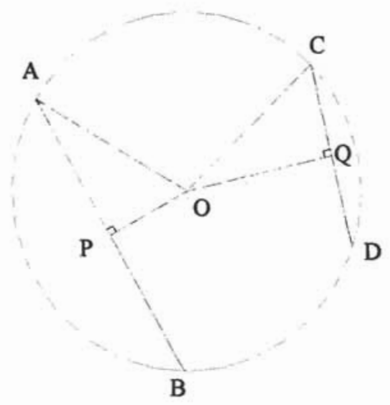


FIGURA 3.03

Ya que los triángulos APO y CQO son rectángulos, aplicamos el teorema de Pitágoras

En el triángulo APO tenemos que $OA^2 = PO^2 + AP^2$, luego del triángulo CQO queda $OC^2 = OQ^2 + CQ^2$ de lo anterior $OQ^2 + CQ^2 = PO^2 + AP^2$ pero tenemos que $AP > CQ$, entonces $AP^2 > CQ^2$ por lo tanto para que se preserve la igualdad tiene que pasar $OP^2 < OQ^2$ de lo cual concluimos que $OP < OQ$, esto es, la cuerda mayor esta a menor distancia del centro que la cuerda menor.

Análogamente se puede demostrar que la mayor cuerda de una circunferencia es el diámetro de la misma.

Algunas propiedades de los ángulos referentes a las cuerdas y arcos se presentan a continuación.

4. En el mismo círculo o círculos iguales, ángulos centrales abarcan arcos iguales:

Sean $\angle AOB$, $\angle COD$ dos ángulos centrales iguales y sean $\frown AB$ y $\frown CD$ los arcos que abarcan. (Figura 3.04)

Hagamos coincidir el ángulo AOB y el ángulo COD esto se puede realizar dado que los ángulos son iguales por otro lado tenemos que los siguientes lados son iguales $OA = OC$, $OB = OD$ por ser radios de la circunferencia, por lo tanto OA coincide con OC y OB coincide con OD entonces el arco $\frown AB$ coincide con el arco $\frown CD$ y $\frown AB = \frown CD$.

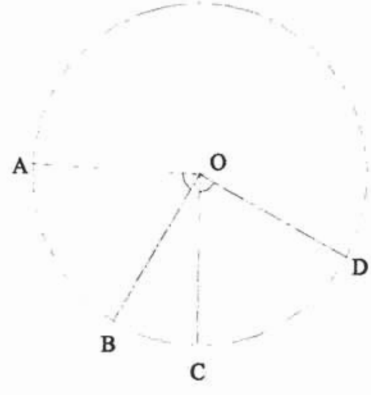


FIGURA 3.04

5. En el mismo circulo o en círculos iguales, un arco mayor abarca un ángulo central mayor. (Figura 3.05)

Sean los arcos $\frown AB$ y $\frown CD$ tales que el arco $\frown AB > \frown CD$, por ser el arco $\frown AB > \frown CD$, se puede encontrar un punto P en el interior del arco $\frown AB$ talque los arcos $\frown AP$, $\frown CD$ sean iguales

Ahora, ya que los arcos $\frown AP = \frown CD$ entonces $\angle AOP = \angle COD$ por el resultado anterior, pero $\angle AOB = \angle AOP + \angle POB$ porque OP es interior a $\angle AOB$, por lo tanto $\angle AOB > \angle COD$.

6. En un mismo circulo o en círculos iguales, dos arcos iguales subtienden cuerdas iguales. (Figura 3.04)

Sea $\frown AB$ y $\frown CD$ dos arcos tales que $\frown AB = \frown CD$, sabemos que $\angle AOB = \angle COD$.

Consideremos los triángulos AOB, COD; luego los $OA = OC$, $OB = OD$ por ser radios entonces estos triángulos son congruentes $\Delta AOB \cong \Delta COD$ y $AB = CD$ de aquí se sigue que los arcos son iguales.

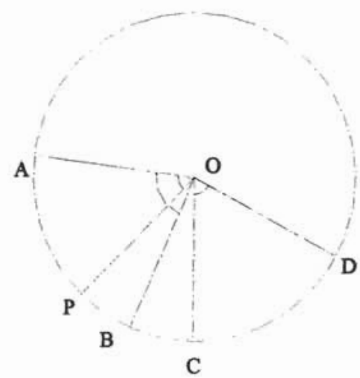


FIGURA 3.05

7. En un semicírculo todo ángulo inscrito es recto. (Figura 3.06)

Trazamos un segmento de línea desde el centro de la circunferencia por C llamándolo OC, luego los triángulos ΔAOC y ΔCOB son isósceles porque $OA = OC$ y $OB = OC$ son radios, entonces los ángulos $\angle OAC = \angle OCA$ y $\angle OBC = \angle OCB$, además tenemos que los ángulos $\angle AOC + \angle COB = 2 \perp$ porque son complementarios.

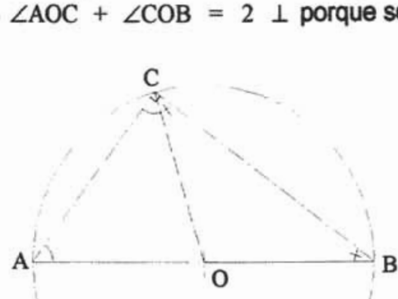


FIGURA 3.06

Del ΔAOC tenemos que $2\angle OAC + \angle AOC = 2 \perp$ y del triángulo BOC tenemos que $2\angle OBC + \angle COB = 2 \perp$ sumando estas dos ecuaciones anteriores tenemos que $2(\angle OBC + \angle OAC) + \angle AOC + \angle COB = 4 \perp$, pero

$\angle AOC + \angle COB = 2 \perp$ de lo cual tenemos $2(\angle OBC + \angle OAC) = 2 \perp$,

$\angle OBC + \angle OAC = \perp$ pero $\angle OBC = \angle OCB$ y $\angle OAC = \angle OCA$ entonces

$\angle OCB + \angle OCA = \perp$ por lo tanto $\angle ACB = \perp$, entonces queda demostrado que el ángulo inscrito en un semicírculo es recto.

8. Dos veces el ángulo inscrito (tiene su vértice en la circunferencia) es igual al ángulo central (su vértice está en el centro de la circunferencia) en el mismo circulo con la misma cuerda para ambos ángulos. (Figura 3.07)

Hay que demostrar que $2\angle PQR = \angle POR$, trazamos un segmento auxiliar OQ el cual es un radio, entonces tenemos que los ΔPOQ, ΔROQ son isósceles porque $PO = OQ$ y $OR = OQ$ por ser radios de la circunferencias.

$\angle PQR = \angle PQO + \angle OQR$, ya que los triángulos son isósceles

$\angle POQ = 2 \perp -2\angle PQO$ y $\angle ROQ = 2 \perp -2\angle OQR$

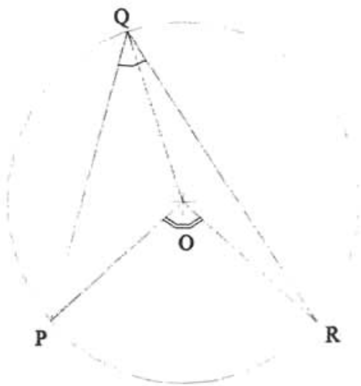


FIGURA 3.07

Sumando las ecuaciones anteriores tenemos que

$\angle ROQ + \angle POQ = 4 \perp -2(\angle OQR + \angle PQO)$ pero $\angle OQR + \angle PQO = \angle PQR$ y

$\angle ROQ + \angle POQ - 4 \perp = -2\angle PQR$ pero $\angle ROQ + \angle POQ - 4 \perp = -\angle POR$

sustituyendo tenemos que

$\angle POR = 2\angle PQR$

Por lo tanto concluimos que dos veces el ángulo inscrito es igual al ángulo central en una circunferencia.

3.02 Ley de los senos

La ley de senos es un teorema trigonométrico que es usado frecuentemente en la resolución de triángulos. Desafortunadamente este teorema aparece en los textos en una forma que no contiene una extensión tan usual que continuación se presenta. Para la siguiente demostración nos estaremos refiriendo a la figura 3.08.

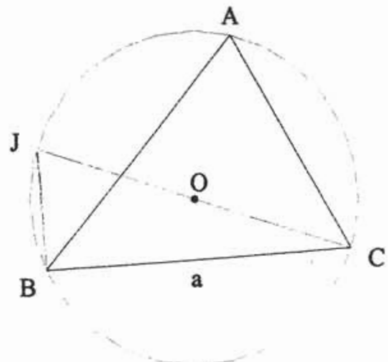


FIGURA 3.08

Para empezar con la demostración sea ABC un triángulo cualquiera circunscrito en la circunferencia con centro O y con radio igual a r unidades, luego dibujamos un diámetro CJ y la cuerda BJ, además sabemos que el $\angle CBJ$ es un ángulo recto porque esta inscrito en un semicírculo.

$\text{sen}\,\angle J = \dfrac{a}{CJ} = \dfrac{a}{2r}$ pero $\angle J = \angle A$ porque subtienden el mismo arco de circunferencia

$\text{sen}\,\angle A = \dfrac{a}{2r}$ entonces $2r = \dfrac{a}{\text{sen}\angle A}$ el mismo procedimiento aplicamos para los otros lados y ángulos del triángulo ABC por lo que resulta

$2r = \dfrac{a}{\text{sen}\,\angle B}$ y $2r = \dfrac{c}{\text{sen}\,\angle C}$ igualando las tres ecuaciones anteriores tenemos que

$$\frac{a}{\text{sen}\,\angle A} = \frac{b}{\text{sen}\,\angle B} = \frac{c}{\text{sen}\,\angle C} = 2r = d$$

En este resultado nos damos cuenta que cada una de las ecuaciones anteriores esta igualada a una constante, esta constante es dos veces el radio es decir el diámetro de la circunferencia circunscrita esto es lo interesante de esta demostración.

Si tenemos un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, el área del triángulo dado el radio y las longitudes de los lados es:

$(\Delta ABC) = \dfrac{a\,b\,c}{4\,r}$. (Figura 3.09)

Sabemos por la ley de senos aplicada al triángulo ABC

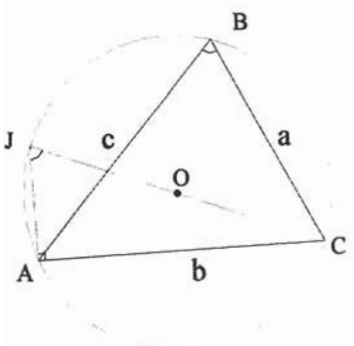


FIGURA 3.09

Entonces $\operatorname{sen}\angle B = \operatorname{sen}\angle J = \dfrac{b}{2r}$, luego como el área del triángulo es un medio de la base por la altura.

$(\Delta ABC) = \dfrac{a \cdot h}{2}$, $\operatorname{sen}\angle B = \dfrac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen}\angle B$,

sustituyendo queda $(\Delta ABC) = \dfrac{a \cdot c \cdot b}{2 \cdot 2r} = \dfrac{acb}{4r}$

por lo tanto el área en función de lo lados del triángulo y el radio es $(\Delta ABC) = \dfrac{a\,b\,c}{4\,r}$

3.03 Cuadriláteros cíclicos

Definimos que si un conjunto de puntos están en la misma circunferencia, se dice que estos puntos son concíclicos. Para un cuadrilátero cuyos vértices son concíclicos es decir que están en la circunferencia, es llamado un cuadrilátero cíclico.

Ahora hay que mencionar cuales son las condiciones que se tienen que cumplir para que un cuadrilátero se pueda inscribir en una circunferencia. En este caso tenemos las condiciones de acuerdo a los ángulos del cuadrilátero.

a) Si un cuadrilátero es inscriptible, sus ángulos opuestos son suplementarios (suman dos ángulos rectos). (Figura 3.10)

Sea ABCD un cuadrilátero inscriptible en un círculo S,

$\angle A = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{BD}$, $\angle C = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{DB}$ porque subtienden la misma cuerda

$\angle A + \angle B = \frac{1}{2}(\ \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DB}) = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{S}$ entonces $\angle A + \angle B = \dfrac{1}{2}\ 4\ \perp = 2\perp$

y análogamente tenemos $\angle C + \angle D = 2\perp$

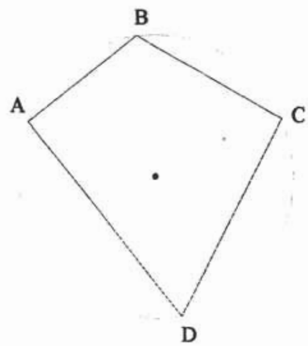


Figura 3.10

b) Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, el cuadrilátero es inscriptible. (Figura 3.11)

Sean $ABCD$ un cuadrilátero tal que $\angle A + \angle B = 2 \perp$ y $\angle C + \angle D = 2 \perp$ entonces hay que demostrar que existe una circunferencia que pasa por los vértices A, B, C, D. Sabemos que por tres puntos si pasa una circunferencia por ejemplo A, B, C, verifiquemos que en este círculo también se encuentra D.

Supongamos que el circulo S pasa por A, B, C y no pasa por D, sea D' la intersección de la recta CD con el circulo S.

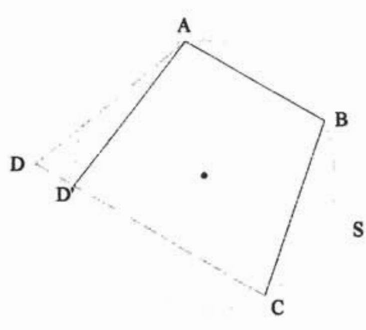


Figura 3.11

El cuadrilátero $ABCD'$ es inscriptible por a) $\angle D' + \angle B = 2 \perp$ pero por hipótesis sabemos que $\angle D + \angle B = 2 \perp$ por lo tanto tenemos que $\angle D = \angle D'$ Pero esto nos dice que AD es paralela a AD' y como tienen el punto A en común son la misma recta y $D = D'$, por lo tanto S pasa también por D.

En seguida vamos a caracterizar los cuadriláteros inscriptibles por medio de alguna relación entre los lados y las diagonales para esto vamos hacer mención del teorema de Ptolomeo.

3.04 Teorema de Ptolomeo

Vamos a encontrar la razón entre los lados del cuadrilátero y sus diagonales para que dicho cuadrilátero sea cíclico: Sea ABCD un cuadrilátero, sean AC y BD las diagonales (Figura 3.12), trazamos por A una recta S, tal que formen con DA un ángulo igual a $\angle CAB$.

Trazamos por D una recta m tal que el ángulo que formen con DA sea igual a $\angle BCA$ y sea O la intersección de las rectas S y m.

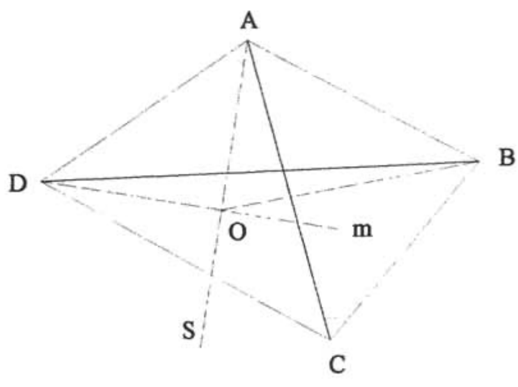


Figura 3.12

El triángulo $\Delta AOD \approx \Delta ABC$ por que tienen sus tres ángulos iguales, entonces tenemos;

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DO}{CB} = \frac{OA}{BA} \quad \text{esto es que} \quad AD \cdot CB = AC \cdot DO \ldots\ldots (1)$$

$$\text{luego } \frac{AD}{AC} = \frac{OA}{BA} \Rightarrow \frac{AD}{OA} = \frac{AC}{BA} \ldots\ldots (2)$$

Ahora consideremos los triángulos ΔADC y ΔAOB los cuales son semejantes

Por (2) tenemos que $\frac{AD}{AO} = \frac{AC}{AB}$ y

$\angle DAC = \angle CAB + \angle OAC = \angle OAB$ y entonces $\dfrac{AD}{AO} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DC}{OB}$................(3)

De (3) obtenemos $AB \cdot DC = AC \cdot OB$..(4)

Sumando (1) y (4) tenemos que $AB \cdot DC + AD \cdot CB = AC \cdot DO + AC \cdot OB$

Simplificando la ecuación anterior queda $AB \cdot DC + AD \cdot CB = AC(DO + OB)$

Pero sabemos que $DO + OB \geq DB$, por transitividad tenemos

$AB \cdot DC + AD \cdot CB = AC(DO + OB) \geq AC \cdot DB$.......................................(5)

Este resultado se da en un cuadrilátero cualquiera, la suma de los productos de los lados opuestos es mayor o igual que el producto de las diagonales.

Para un cuadrilátero cíclico tenemos por (5) que, siendo ABCD un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y

$AB \cdot DC + AD \cdot CB = AC(DO + OB) \geq AC \cdot DB$

Pero los cuadriláteros cíclicos la suma de sus lados opuestos es de $2 \perp$:

$\angle ADB = \angle ACB \therefore O$ esta sobre la recta OB y en consecuencia,

$AB \cdot DC + AD \cdot CB = AC \cdot DB$ esto es lo que dice el teorema de Ptolomeo (150 d.C.)

El producto de las diagonales de un cuadrilátero cíclico, es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.

Una demostración más del teorema de Pitágoras utilizando el teorema de Ptolomeo es muy sencilla ya que tomemos en cuenta cualquier rectángulo, sabemos que los ángulos en cada vértice son rectos y que la suma de lados opuestos es igual a $2 \perp$, por lo tanto es cíclico. (Figura 3.13)

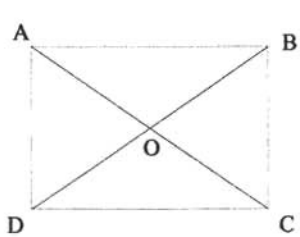


Figura 3.13

$AB \cdot DC + AD \cdot CB = AC \cdot DB$ pero $AB = DC$, $AD = BC$, $AC = BD$ sustituyendo en la primera ecuación tenemos que
$AB \cdot AB + CB \cdot CB = AC \cdot AC \Rightarrow AB^2 + CB^2 = AC^2$ esto es el teorema de Pitágoras.

Un resultado inmediato, que nos servirá para ver las condiciones que debe cumplir una circunferencia para que está sea inscriptible en un cuadrilátero es:

Sabemos que si tenemos una circunferencia y un punto fuera de ella, las tangentes a la circunferencia son perpendiculares al radio y son iguales (Figura 3.14)

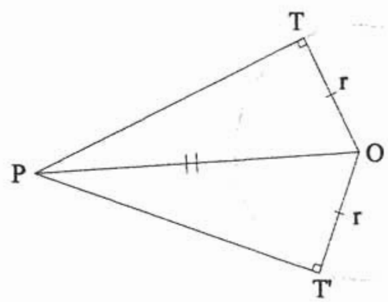


Figura 3.14

Con el teorema de Pitágoras es fácil demostrar lo anterior ya que tenemos a la hipotenusa como lado común y los catetos (radios) son iguales por lo tanto $PT = PT'$.

Ahora la condición necesaria para que en una circunferencia sea inscriptible en un cuadrilátero es que la suma de los lados opuestos sea igual a la suma de los otros dos lados, es decir $a + c = b + d$, siendo a, c, b, d los lados del cuadrilátero. (Figura 3.15)

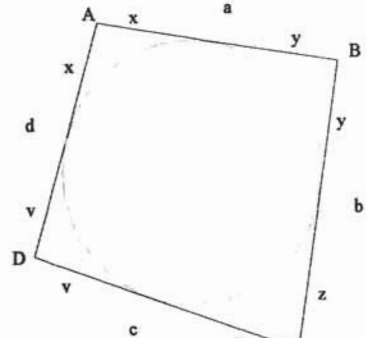


Figura 3.15

Tenemos que $a = x + y$, $b = y + z$, $c = v + z$, $d = v + x$, si sumamos $a + c$ y $b + d$ por que debemos garantizar que $x = x$, $v = v$ $y = y$, $z = z$ sean iguales.

Obtenemos que $a + c = x + y + v + z$, $d + b = v + x + y + z$ por lo que $a + c = b + d$.

3.05 La fórmula de Brahmagupta y la fórmula de Herón

Brahmagupta matemático hindú encontró la siguiente formula para calcular el área K de un cuadrilátero cíclico con lados a, b, c, d y semiperimetro S, aproximadamente en el siglo siete después de cristo fue descubierta.

$$K = \sqrt{(S - a)(S - b)(S - c)(S - d)}$$

Esta fórmula es un caso particular de la siguiente la cual no tiene que ver con que el cuadrilátero sea cíclico.

$$K = \sqrt{(S - a)(S - b)(S - c)(S - d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{A + C}{2}\right)}$$

Uno de los métodos mas simples para obtener la fórmula de Brahmagupta es usando un poco de trigonometría, considerando el cuadrilátero cualquiera $ABCD$, donde A es el vértice que pertenece a los lados a, b, C el vértice que pertenece a los lados c, d y m la diagonal por los vértices B, D. (Figura 3.16)

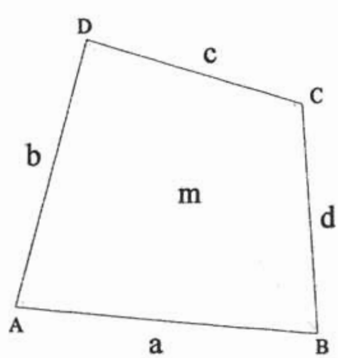


Figura 3.16

El área K del cuadrilátero $ABCD$ es la suma de las áreas de los triángulos ABD y BCD, por lo tanto tenemos que (por facilidad al ángulo $\angle A$ y $\angle C$ lo nombramos α y β respectivamente).

$$K^2 = [(ABD) + (CBD)]^2$$

pero el área de cada triángulo es: $(ABD) = \frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen}\alpha$, $(CBD) = \frac{1}{2}\, cd \operatorname{sen}\beta$

$$K^2 = [(ABD) + (CBD)]^2 = \left(\tfrac{1}{2}\, ab \operatorname{sen}\alpha + \tfrac{1}{2}\, cd \operatorname{sen}\beta\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(ab \operatorname{sen}\alpha + cd \operatorname{sen}\beta\right)^2$$
$$K^2 = \tfrac{1}{4}\left(a^2b^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2abcd \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta + c^2d^2 \operatorname{sen}^2\beta\right) \quad \text{..............................(1)}$$

por otro lado aplicando la ley de cosenos vista anteriormente para calcular la longitud m en función de los triángulos ABD y BCD tenemos

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = m^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$$
$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta \quad \text{..(2)}$$

si elevamos la ecuación (2) al cuadrado y la multiplicamos por $\frac{1}{16}$ queda

$$\tfrac{1}{16}\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(a^2b^2\cos^2\alpha - 2abcd\cos\alpha\cos\beta + c^2d^2\cos^2\beta\right) \text{....(3)}$$

Sumando las ecuaciones (1) y (3) queda

$$K^2 + \tfrac{1}{16}\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(a^2b^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2abcd \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + c^2d^2 \operatorname{sen}^2\beta\right) + \tfrac{1}{4}\left(a^2b^2\cos^2\alpha - 2abcd\cos\alpha\cos\beta + c^2d^2\cos^2\beta\right)$$

teniendo presente la siguiente identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$$K^2 = \tfrac{1}{4}\left(a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\left(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta\right)\right) - \tfrac{1}{16}\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2$$

pero $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$ por lo tanto

$$K^2 = \tfrac{1}{4}\left(a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha + \beta)\right) - \tfrac{1}{16}\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2$$
$$K^2 = \frac{4a^2b^2 + 4c^2d^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2}{16} - \frac{abcd\cos(\alpha + \beta)}{2}$$

si sumamos y restamos $8abcd$ y teniendo presente que $P^2 - Q^2 = (P - Q)(P + Q)$

$$K^2 = \frac{\left[4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd\right] - 8abcd - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2}{16} - \frac{abcd\cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$K^2 = \frac{(2ab + 2cd)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2}{16} - abcd\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(\alpha + \beta)}{2}\right)$$

$$= \frac{\left[(2ab + 2cd) - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)\right]\left[(2ab + 2cd) + \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)\right]}{16} - \ldots$$

$$\ldots - abcd\cos^2\left(\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)$$

$$= \frac{\left[c^2 + 2cd + d^2 - a^2 + 2ab - b^2\right]\left[a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2\right]}{16} - \ldots$$

$$\ldots - abcd\cos^2\left(\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)$$

$$= \frac{\left[(c + d)^2 - (a - b)^2\right]\left[(a + b)^2 - (c - d)^2\right]}{16} - abcd\cos^2\left(\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)$$

$$= \frac{(c + d - a + b)(c + d + a - b)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}{16} - \ldots$$

$$\ldots - abcd\cos^2\left(\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)$$

luego $2S = a + b + c + d$ tenemos que

$$K^2 = \frac{(2S - 2a)(2S - 2b)(2S - 2c)(2S - 2d)}{16} - abcd\cos^2\left(\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)$$

$$K^2 = (S - a)(S - b)(S - c)(S - d) - abcd\cos^2\left(\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)$$

Ahora si sacamos la raíz cuadrada tenemos la ecuación del área de Brahmagupta

$$K = \sqrt{(S - a)(S - b)(S - c)(S - d) - abcd \cdot \cos^2\left(\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)}$$

para el cuadrilátero cíclico la suma de los ángulos opuestos es igual a dos rectos por lo que la ecuación anterior se reduce a

$$K = \sqrt{(S - a)(S - b)(S - c)(S - d)}$$

Si para el lado $d = 0$ de la formula de Brahmagupta, obtenemos una fórmula para el área de un triángulo en términos de los lados a, b, c y semiperimetro S:

$$K_{\Delta} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

Esta ecuación es llamada la fórmula de Herón. Aunque se dice por varios autores que esta fórmula se le atribuye a Arquímedes en el tercer siglo a.C.

A continuación daremos otra demostración de la formula de Herón, trazamos la altura h sobre cualquier lado del triángulo, en este caso que pase por C y que corte al lado AB en D como se verifica a continuación. (Figura 3.17)

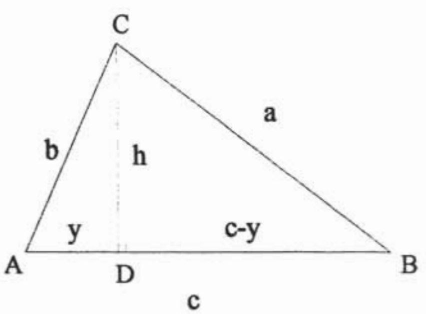


Figura 3.17

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo.

$$c = y + (c - y) = \sqrt{b^2 - h^2} + \sqrt{a^2 - h^2}$$

elevando al cuadrado dos veces para despejar la altura h del triángulo

$$c^2 = (b^2 - h^2) + 2\sqrt{b^2 - h^2}\sqrt{a^2 - h^2} + (a^2 - h^2)$$
$$\left(c^2 - (b^2 - h^2) - (a^2 - h^2)\right)^2 = 4(b^2 - h^2)(a^2 - h^2)$$
$$\left((c^2 - b^2 - a^2) + 2h^2\right)^2 = 4b^2a^2 - 4h^2(b^2 + a^2) + 4h^4$$

$4b^2a^2 - (c^2 - b^2 - a^2)^2 = 4h^2c^2$ entonces tenemos que h^2

$h^2 = \dfrac{(2ba)^2 - (c^2 - b^2 - a^2)^2}{4c^2}$ pero el numerador lo podemos desarrollar como

$$P^2 - Q^2 = (P - Q)(P + Q)$$

$$h^2 = \frac{(a^2 + 2ab + b^2 - c^2)(c^2 - (a^2 - 2ab + b^2))}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{((a + b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2)}{4c^2}$$, nuevamente con la propiedad anterior

$$h^2 = \frac{(a + b + c)(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)}{4c^2}$$

pero el área del triángulo es $K = \frac{1}{2} c h \Rightarrow K^2 = \frac{1}{4} c^2 h^2$, si sustituimos queda

$$K^2 = \frac{(a + b + c)(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)}{16}$$

si dos veces el semiperimetro es $2S = a + b + c$ entonces

$$K^2 = \frac{(2S)(2S - 2a)(2S - 2b)(2S - 2c)}{16} = S(S - a)(S - b)(S - c)$$

por lo tanto tenemos la fórmula de Herón

$$K_\Delta = \sqrt{S(S - a)(S - b)(S - c)}$$

3.06 Líneas antiparalelas

Si dos pares de líneas están en tal forma que la bisectriz del ángulo formado por el primer par, es transversal al segundo par y los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son iguales, las líneas del segundo par son antiparalelas del primer par, es decir el antiparalelismo es reflexivo.(Figura 3.18)

La línea L bisectriz del ángulo $\angle DOC$ y las líneas A y B forman ángulos iguales con respecto a la bisectriz entonces las líneas C y D son antiparalelas con respecto a A y B.

Una propiedad importante de las antiparalelas es que si tomamos una de ellas y la giramos $2 \perp$ alrededor de la bisectriz L, queda paralela a la otra. Esta propiedad sugiere el término antiparalelo.

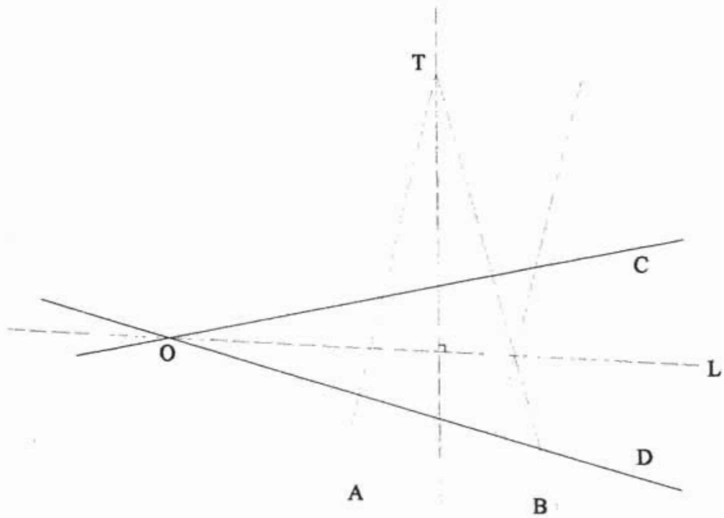


Figura 3.18

Puesto que la líneas A, B y L forman un triángulo isósceles, se tiene que la bisectriz del ángulo $\angle ATB$ es perpendicular a L y que la bisectriz y las líneas A y B también determinan un triangulo isósceles.

Un resultado de mucha importancia que tiene que ver con las circunferencias y el concepto de las antiparalelas nos dice que, si dos líneas que son antiparalelas con respecto a otras dos, cortan a estas en cuatro puntos distintos, estos cuatro puntos son los vértices de un cuadrilátero cíclico e inversamente cada par de lados opuestos en un cuadrilátero cíclico, es antiparalelo con respecto al otro par. (Figura 3.19)

Sabemos que la suma de ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico es igual a $2\perp$, ahora bien las líneas A,B son antiparalelas de las líneas C,D e inversamente, entonces las líneas bisectrices son perpendiculares y los ángulos.

$\angle PXZ = \angle QZX$ y $\angle PYW = \angle SWY$ nos fijamos en los triángulos OXS y OZQ

$\angle SOX = \angle ZOQ$ por que L es la bisectriz de las líneas C, D

$\angle OXS = \angle OZQ$ porque $\angle OXS = \angle PXZ$ es opuesto por el vértice y $\angle PXZ = \angle QZX$ por el criterio de semejanza (AAA) los triángulos son semejantes , análogamente con los triángulos TYQ y TWS , son semejantes y por lo tanto el ángulo

$\angle Q + \angle S = 2 \perp$ porque uno a otro son complementarios del los triángulos mencionados anteriormente.

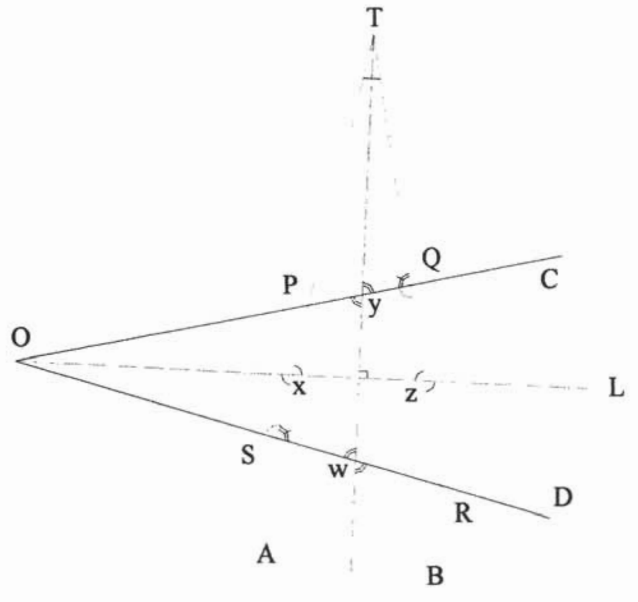


Figura 3.19

Hemos demostrado que los cuatro puntos que forman las líneas antiparalelas están en un cuadrilátero cíclico para demostrar que los lados opuestos de un cuadrilátero cíclico son líneas antiparalelas se sigue un criterio similar.

Esta es una propiedad muy interesante en los cuadriláteros cíclicos, mas adelante la utilizaremos en puntos homólogos y antihomológos y por supuesto en el teorema de Miquel.

3.07 Potencia de una circunferencia

La potencia de un punto cualquiera en el plano con respecto a una circunferencia, es el producto de sus distancias a cualquier par de puntos en la circunferencia que sean colineales con él.

Dicho de otra manera, si P es un punto cualquiera en el plano y sea una circunferencia en el mismo y una línea por P interseca la circunferencia en A y B, el producto de los segmentos PA y PB es constante. (Figura 3.20)

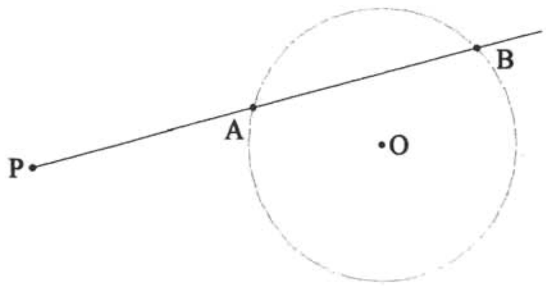


Figura 3.20

Es decir $PA \cdot PB = k$, se sigue que la potencia es positiva si el punto esta fuera de la circunferencia, es cero si el punto esta en la circunferencia y es negativa si el punto esta dentro de la circunferencia.

Es también fácil ver que para cualquier posición de P, su potencia respecto a una circunferencia cuyo centro es O y cuyo radio es r, es $PO^2 - r^2$ y que si P esta fuera de la circunferencia su potencia es igual al cuadrado de la longitud de una tangente de él a la circunferencia esto es PT^2.

Ahora demostraremos que $PO^2 - r^2 = PT^2 = PA \cdot PB$,

Notemos que $\angle PTO = \angle ATB = 1 \perp$ por ser T tangente a la circunferencia y estar subtendido por un diámetro AB. (Figura 3.21)

$\angle PTA = 1 \perp - \angle ATO$ y $\angle OTB = \angle OBT = 1 \perp - \angle ATO$ entonces los triángulos $\Delta PTA \approx \Delta PBT$ son semejantes por el criterio (AAA).

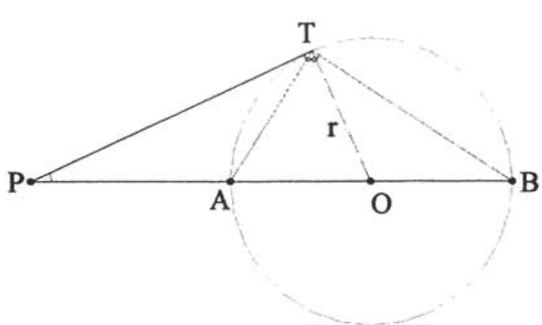


Figura 3.21

Entonces tenemos que $\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PT \cdot PT = PT^2$ ahora por el teorema de Pitágoras tenemos que $PO^2 - r^2 = PT^2$ siendo PO la hipotenusa del triángulo rectángulo ΔPTO.

Además, si dos secantes diferentes cortan a una circunferencia en dos puntos cada secante tenemos que la potencia $PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = k$, para demostrar esto verifiquemos que A B A' B' forman un cuadrilátero cíclico. (Figura 3.22)

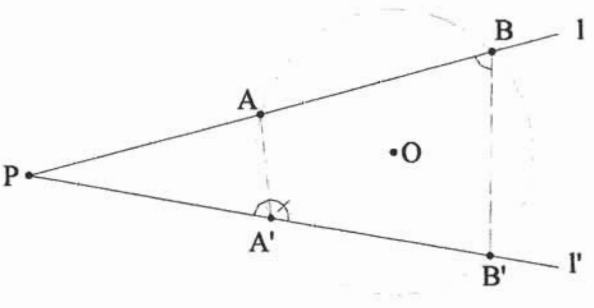


Figura 3.22

Sea l , l' dos rectas que se cortan en un punto P y ala circunferencia O, en los puntos A B A' B' y como son cíclicos entonces los ángulos $\angle AA'B' + \angle ABB' = 2 \perp$ son suplementarios por lo tanto el ángulo $\angle PA'A = \angle ABB'$, luego el ángulo $\angle A'PA = \angle BPB'$ por lo que los triángulos $\Delta A'PA \approx \Delta BPB'$ son semejantes.

Entonces tenemos que $\frac{PA'}{PB} = \frac{PA}{PB'} = \frac{AA'}{BB'} \Rightarrow PA' \cdot PB' = PB \cdot PA$

$\therefore PA' \cdot PB' = PA \cdot PB$

Una definición fundamental que veremos sobre la potencia de circunferencias es la de eje radical que se menciona a continuación.

El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de un punto cuyas potencias con respecto a las dos circunferencias es igual

Para demostrar que el lugar geométrico definido anteriormente es una línea recta, vamos a considerar primero dos circunferencias no concéntricas cuyos centros son O y O' y cuyos radios son r y r', por P un punto que tiene la misma potencia respecto a las dos circunferencias, dibujamos PM perpendicular a la línea de los centros OO'. (Figura 3.23)

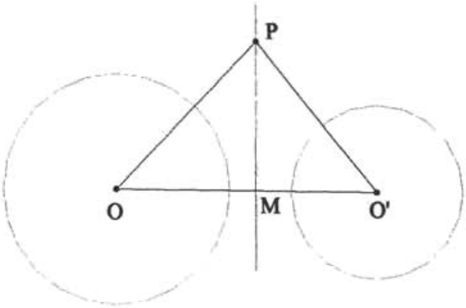


Figura 3.23

Entonces como la potencia es la misma respecto a las dos circunferencias tenemos

$PO^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2$ por Pitágoras sabemos que $MP^2 + OM^2 = OP^2$ análogamente tenemos $MP^2 + O'M^2 = O'P^2$ por lo cual sustituyendo.

$OM^2 - r^2 = MO'^2 - r'^2 \Rightarrow OM^2 - MO'^2 = r^2 - r'^2$

entonces $(OM + MO')(OM - MO') = r^2 - r'^2$ ....(1)

De la figura tenemos $OM + MO' = OO'$ ....(2)

Dividiendo (1) y (2) tenemos $OM - MO' = \frac{r^2 - r'^2}{OO'}$, puesto que hay un punto M que esta en la línea de los centros que satisface la ecuación anterior, tomemos un punto semejante N en OO' entonces cumple que $OM - MO' = ON - NO'$ luego $ON - NM - MO' = ON + MN - MO'$ de lo cual $2MN = 0$ por lo tanto M y N coinciden.

Por lo tanto, si un punto tiene potencias iguales con respecto a dos circunferencias O y O', esta es una perpendicular a la línea de los centros. Inversamente se puede demostrar, invirtiendo los primeros pasos de la exposición anterior, que, si P esta en la perpendicular OO' en M sus potencias con respecto a estas circunferencias son iguales.

El eje radical de dos circunferencias concéntricas iguales se dejara indefinido y si dos circunferencias se intersecan, su eje radical pasa por los puntos comunes y si son tangentes una a la otra, es su tangente común su eje radical.

Otra propiedad que refiere a los ejes radicales nos dice que los ejes radicales de tres circunferencias tomadas por pares son concurrentes

Consideremos primero tres circunferencias cuyos centros no son colineales, y sea P la intersección del eje radical de la primera y la segunda con el de la segunda y la tercera. Entonces P tendrá potencias iguales con respecto a las tres circunferencias, y entonces el eje radical de la primera y tercera también pasara por P.

Si los centros de las tres circunferencias son colineales, los ejes paralelos tomando dos a dos son paralelos y distintos, o dos de ellos coinciden y la línea común es paralela al tercero, o los tres ejes radicales coinciden.

En conclusión a lo anterior se dice que el punto de concurrencia de tres ejes radicales de tres circunferencias tomadas por pares, es llamado el centro radical.

La construcción del eje radical de dos circunferencias no concéntricas puede ser realizada de la manera siguiente;

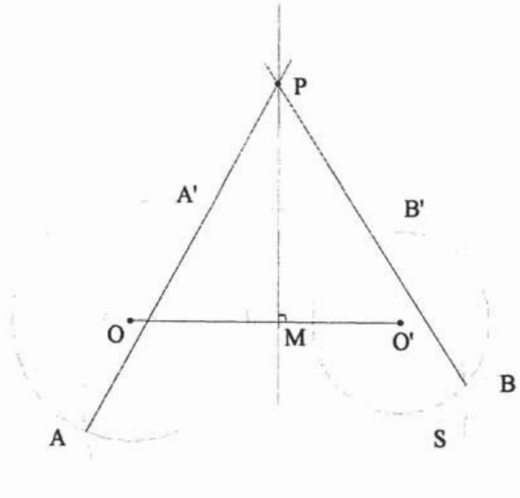


Figura 3.24

Dibujemos una circunferencia S cualquiera que corte a las circunferencias dadas en A, A' y B, B' respectivamente, luego trazamos segmentos por A, A' y B, B' los cuales se intersecan en P, en este punto trazamos la perpendicular a la línea de los centros dadas OO' cortándola en M, esta perpendicular es el eje radical.(Figura 3.24)

Lo anterior se tiene porque la potencia de la circunferencia S es $PB \cdot PB' = PA \cdot PA'$ y la potencia de las circunferencias O y O' es $PA \cdot PA'$ y $PB \cdot PB'$ respectivamente por lo cual son iguales.

3.08 Propiedades del incirculo y excirculo

Como ya se vio en el capitulo II, el incirculo del triángulo es el que tiene como centro la intersección de las bisectrices internas y es tangente a cada uno de los lados, por otra parte el excirculo de un triángulo es aquel cuyo centro es la intersección de una bisectriz interna y dos bisectrices externas dicha circunferencia también es tangente a los tres lados del triángulo.

Un teorema interesante dice que:

El punto medio de un lado de un triángulo es también el punto medio del segmento determinado por los puntos de contacto de dicho lado con la circunferencia inscrita y la correspondiente circunferencia excrita.

Sea I el incentro del triángulo ABC, luego I_1 , I_2, I_3 los excentros del triángulo ABC, L, M, N los puntos medios de BC, CA, AB respectivamente; X_i , Y_i, Z_i puntos de tangencia de los excírculos con centros I_i con los lados BC , CA, AB del triángulo, donde $i = 1, 2, 3$. (Figura 3.25)

Hay que demostrar que L es punto medio de X y X_1 análogamente que M es punto medio de Y y Y_2 y N es punto medio de Z y Z_3 .

Señalemos los lados BC , CA y AB del triángulo ABC con a, b y c respectivamente y el semiperimetro S como $S = \dfrac{a+b+c}{2}$.

$AZ_1 = AY_1$ por ser puntos de tangencia

luego sabemos que $BZ_1 = BX_1$ y $CY_1 = CX$ por ser puntos de tangencia con la excirculo. De lo anterior tenemos

$AB + BX_1 = AC + CX_1 = S$ por que $AB + BC + AC = 2S$.

$BX_1 = S - AB$ ....(1)

$S = AZ + ZB + XC$

porque Z es punto medio del lado BA de lo cual

$S = AB + XC$ y

$XC = S - AB$..(2)

De (1) y (2) tenemos que $BX_1 = XC \therefore X_1L = LX$, entonces L también es punto medio de X, X_1, de manera similar M es punto medio de Y, Y_2 y N es punto medio de Z, Z_3.

Otro resultado importante respecto a esta dos circunferencias es que el área del triángulo es igual al producto del semiperimetro y el radio del círculo inscrito; es también igual al producto del semiperimetro disminuido en un lado y el radio del excirculo correspondiente.

Para demostrar esto hacemos referencia a la figura anterior tomamos en cuentas las siguientes áreas del triángulo ABC, siendo r el radio del incirculo y r_1 el radio del excirculo.

$(IBC) = \frac{BC \times r}{2}$, $(ICA) = \frac{CA \times r}{2}$, $(IAB) = \frac{AB \times r}{2}$ porque r es la altura de cada triángulo la suma de esta tres áreas anteriores es el área del triángulo ABC, por lo que tenemos

$(ABC) = (IBC)+(ICA) + (IAB) = \frac{r}{2}BC + \frac{r}{2}CA + \frac{r}{2}AB = \frac{r}{2}(AB+ CA + BC)$ por lo tanto tenemos que $(ABC) = Sr$.

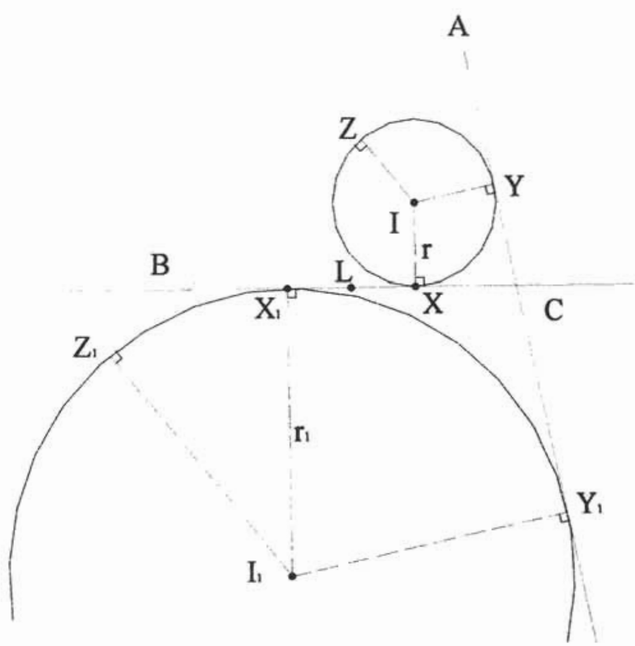


Figura 3.25

Para la segunda parte del enunciado tomemos el área de los triángulos;

$(I_1 AC) = \dfrac{AC \times r_1}{2}$, $(I_1 AB) = \dfrac{BA \times r_1}{2}$ y el área $(I_1 BC) = \dfrac{BC \times r_1}{2}$ entonces el área del ΔABC es

$$(ABC) = (I_1 BA) + (I_1 CA) - (I_1 AB) = \frac{r_1}{2} BA + \frac{r_1}{2} CA - \frac{r_1}{2} CB$$

$(ABC) = \dfrac{r_1}{2}(BA + CA - CB) = \dfrac{r_1}{2}(c + b - a)$ sumando y restando a tenemos que

$(ABC) = \dfrac{r_1}{2}(a + b + c - a - a) = r_1(S - a)$, análogamente para los otros excírculos.

Resumiendo lo anterior y despejando

$$(ABC) = S\,r \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{S}{(ABC)} \quad \text{......(3)}$$

$$(ABC) = r_1(S - a) \Rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{(S - a)}{(ABC)} \quad \text{......(4)}$$

$$(ABC) = r_2(S - b) \Rightarrow \frac{1}{r_2} = \frac{(S - b)}{(ABC)} \quad \text{......(5)}$$

$$(ABC) = r_3(S - c) \Rightarrow \frac{1}{r_3} = \frac{(S - c)}{(ABC)} \quad \text{......(6)}$$

sumando (4), (5), (6) tenemos $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{(S - a)}{(ABC)} + \dfrac{(S - b)}{(ABC)} + \dfrac{(S - c)}{(ABC)} = \dfrac{S - (a + b + c)}{(ABC)}$

$\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{S - (a + b + c)}{(ABC)} = \dfrac{3S - 2S}{(ABC)} = \dfrac{S}{(ABC)} = \dfrac{1}{r}$ esto es la ecuación (3).

$\therefore\ \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3}$ esto es la relación que existe entre los radios del incirculo y los radios de los excírculos del triángulo ABC.

Ahora bien el incirculo y el excirculo de un triángulo tomados por pares cumplen una propiedad relativa al tema de la potencia de una circunferencia, la cual se enuncia a continuación.

El excirculo y la circunferencia inscrita de un triángulo tomados por pares tienen un eje radical tal que es paralelo a la bisectriz de los ángulos del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado. (Figura 3.26).

Sabemos que los puntos L, M, N son los puntos medios de los lados, observemos que el eje radical de las circunferencias I, I_1 pasa por L porque $LX = LX_1$ y la potencia es $LX^2 = LX_1^2$ ya que LX, LX_1 son puntos de tangencia. También sabemos que la bisectriz por A es perpendicular con el eje radical y que pasa por I, I_1 y esta es la línea de los centros de las circunferencias.

Ahora la bisectriz del ángulo interior A, es paralela a la bisectriz del ángulo $\angle MLN$ y por tanto, el eje radical es la bisectriz del ángulo exterior en L del triángulo MLN.

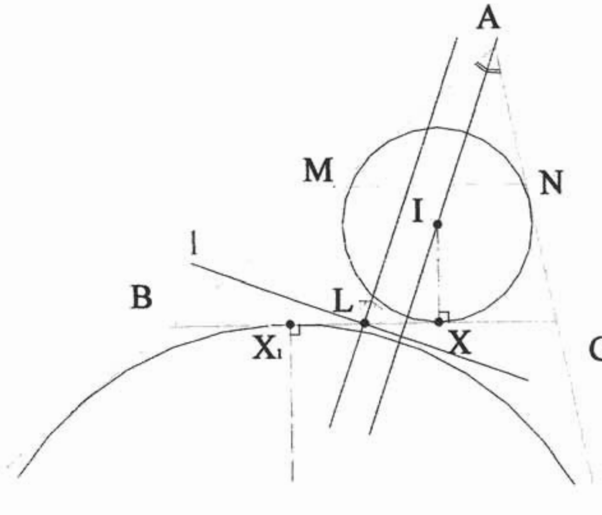


Figura 3.26

3.09 Circunferencia de los nueve puntos

Los puntos medios de los tres lados de un triángulo, los puntos medios de las rectas que van del ortocentro a los vértices y los pies de las alturas están en la misma circunferencia. Esta importante circunferencia es llamada la circunferencia de los nueve puntos del triangulo. (Figura 3.27)

En la figura L, M, N, P, Q, R son los puntos medios de los lados; BC, CA, AB, HA, HB, HC respectivamente y sean D, E, F los pies de las alturas del triángulo que concurren en el ortocentro H del triángulo ABC.

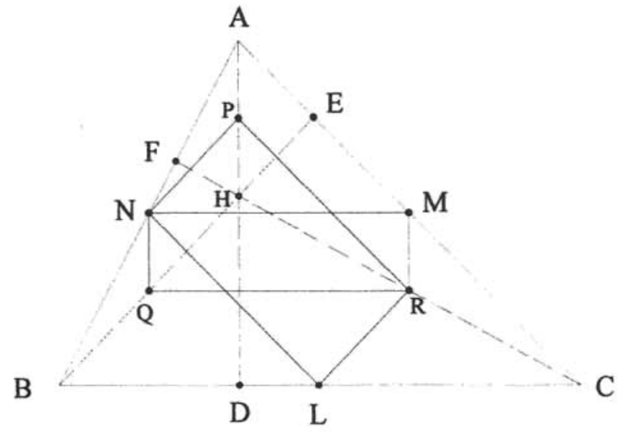


Figura 3.27

Para demostrar que los nueve puntos antes señalados son concíclicos es decir están en la misma circunferencia vamos a utilizar que si los lados de un triángulo se cortan proporcionalmente entonces la recta que une los puntos de intersección será paralela al otro lado, como se demuestra en el capitulo II de este trabajo.

Por lo dicho anteriormente del triángulo ABC tenemos que $MN \parallel BC$, ahora del triángulo BHC podemos decir que QR es paralela a BC porque Q, R son puntos medios de dicho triángulo, por lo tanto QR es paralela a MN mientras que del triángulo AHC; MR es paralela a AH y del triángulo BHA ; NQ es paralela a AH por lo que MR es paralela a NQ. Como $AH \perp BC$ tenemos que $MR \perp QR$ y $MN \perp NQ$. Concluimos que $MNQR$ es un cuadrilátero en especial es un rectángulo entonces es inscriptible en una circunferencia.

Siguiendo pasos similares tenemos que $NLRP$ es un rectángulo. Así PL, QM, NR son tres diámetros de la circunferencia debido a que los diámetros subtienden ángulos rectos en D, E, F, es decir la misma circunferencia también pasa por esos tres puntos. (Figura 3.28).

Algunas propiedades de la circunferencia de los nueve puntos son muy importantes:

1. Por ejemplo esta bonita circunferencia es el circuncírculo el ΔNLM y circuncírculo de un famoso triángulo; el triángulo pedal.
2. La longitud del radio de la circunferencia de los nueve puntos del ΔABC es la mitad de la del radio del circuncírculo del ΔABC, para ver esto tenemos que damos cuenta que el ΔNLM es semejante al ΔABC, siendo la razón de semejanza $1 : 2$.

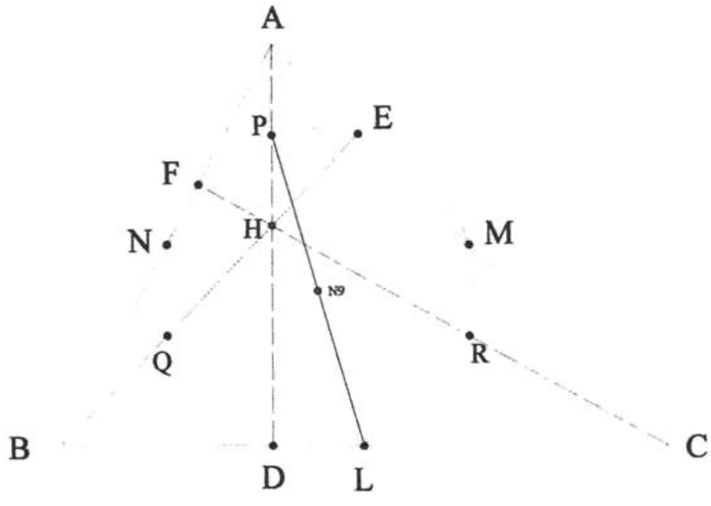


Figura 3.28

3. Otra propiedad es que los puntos O, N9, H, G son colineales siendo O el circuncentro, N9 el centro de la circunferencia de los nueve puntos, H el ortocentro del triángulo y G es el gravicentro. (Figura 3.30)

Para demostrar que los tres puntos son colineales tomamos en cuenta que H es el centro de homotecia (se vera en un capitulo posterior) de las dos circunferencias (circunferencia de los nueve puntos y la circunferencia circunscrita) por que:

$\frac{HP}{HA} = \frac{HQ}{HB} = \frac{HR}{HC} = \frac{1}{2}$ porque sabemos que las dos circunferencias están $2 : 1$,

luego $\frac{HN9}{HO} = \frac{1}{2}$ por ser H el centro homotético de lo que tenemos que el centro de la circunferencia de los nueve puntos esta en el punto medio del segmento que une a los puntos HO.(Figura 3.29)

4. La circunferencia de los nueve puntos es tangente a la circunferencia inscrita y a cada una de las circunferencias excritas de un triángulo, a esta propiedad se le conoce como el teorema de Feuberbach.

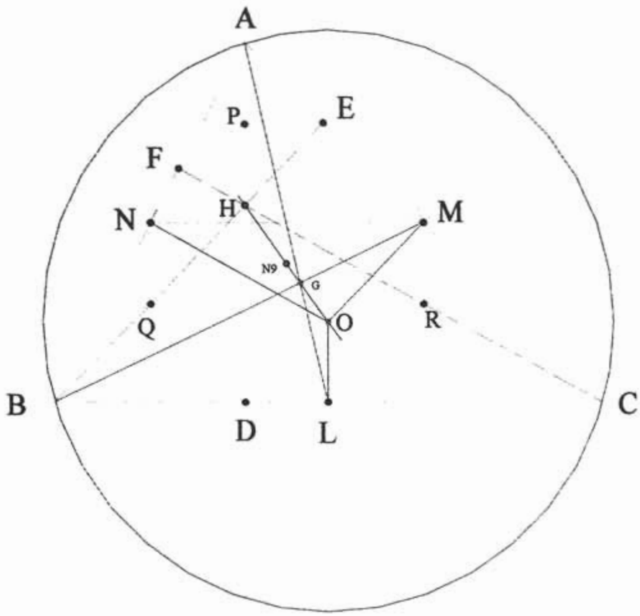


Figura 3.29

Se vio en el capitulo II que la línea que pasa por el circuncentro, gravicentro y ortocentro es la línea de Euler. Por lo tanto decimos que el centro de la circunferencia de los nueve puntos también esta en esta línea. La famosa línea de Euler (1707-1783).

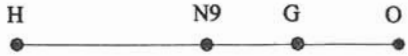


Figura 3.30

3.10 Línea de Simson

La línea de Simson es aquella por la cual un punto de la circunferencia circunscrita y se trazan líneas perpendiculares a cada lado del triángulo, los puntos de intersección de las alturas por el punto y los lados del triángulo forman la línea de Simson.

Sean PX, PY, PZ las perpendiculares bajadas a los lados del triángulo ABC, desde cualquier punto P de su circunferencia circunscrita. Entonces los puntos X, Y, Z son colineales. La línea en que están estos se llama la línea de Simson de P con respecto al triángulo ABC. (Figura 3.31).

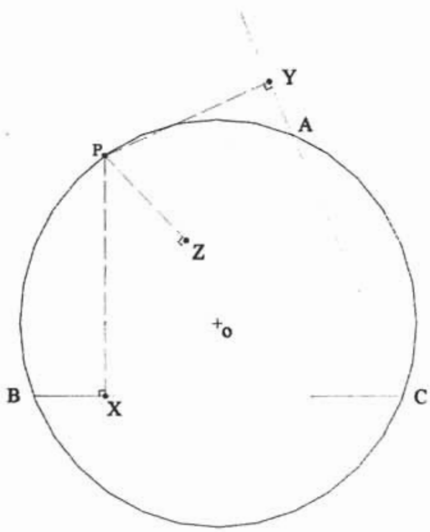


Figura 3.31

Para demostrar que los puntos X, Y, Z son colineales veremos que el $\angle PYZ = \angle PYX$, primero observamos que los siguientes puntos forman cuadriláteros cíclicos:

P, Z, A, Y porque los ángulos $\angle PYA = \angle PZA = 1 \perp$ y son opuestos,

P, X, C, Y porque los ángulos $\angle PXC = \angle PYC = 1 \perp$ y son opuestos y

P, B, C, A por construcción ya que el punto P lo tomamos de la circunferencia circunscrita.

Ahora bien los ángulos $\angle PYZ = \angle PAZ$ por subtender la cuerda PZ del cuadrilátero cíclico P, Z, A, Y. (Figura 3.32)

El ángulo $\angle PAB = \angle PCB$ porque subtienden la cuerda PB del cuadrilátero cíclico P, B, C, A .

Y por ultimo los ángulos $\angle PYX = \angle PCX$ porque subtienden la cuerda PX del cuadrilátero cíclico P, X, C, Y.

Pero $\angle PCX = \angle PCB$ porque $X \in CB$ y $\angle PAZ = \angle PAB$ porque $Z \in AB$ entonces

$\Rightarrow$ $\underline{\angle PYZ}$ = $\angle PAZ$ = $\angle PAB$ = $\angle PCB$ = $\angle PCX$ = $\underline{\angle PYX}$

$\therefore$ $\angle PYZ$ = $\angle PYX$ y por lo tanto los puntos X, Y, Z son colineales.

Recíprocamente si los puntos X, Y, Z están alineados P esta en el circuncírculo del triángulo ABC.

Una propiedad importante de la línea de Simson es que, XY es paralela a AQ donde XY es la línea se Simson y AQ es la línea que une el vértice en A con la intersección de la perpendicular por P del lado BC con la circunferencia circunscrita en Q. (Figura 3.33)

Para demostrar que son paralelas basta fijarnos en el cuadrilátero formado por los puntos P, Y, X, C y el cuadrilátero cuyos puntos A, Q, C, P están en la circunferencia circunscrita esto es por construcción.

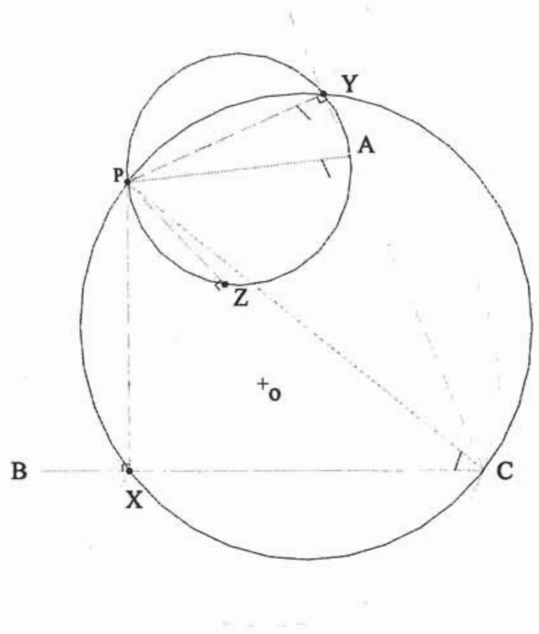


Figura 3.32

Entonces los ángulos $\angle PCY = \angle PXY$ porque subtienden la cuerda YP del cuadrilátero P, Y, X, C y tenemos en el cuadrilátero A, Q, C, P que los ángulos $\angle AQP = \angle ACP$ porque subtienden la cuerda AP, pero los ángulos $\angle PYC = \angle ACP$

$\therefore \angle PXY = \angle AQP$.

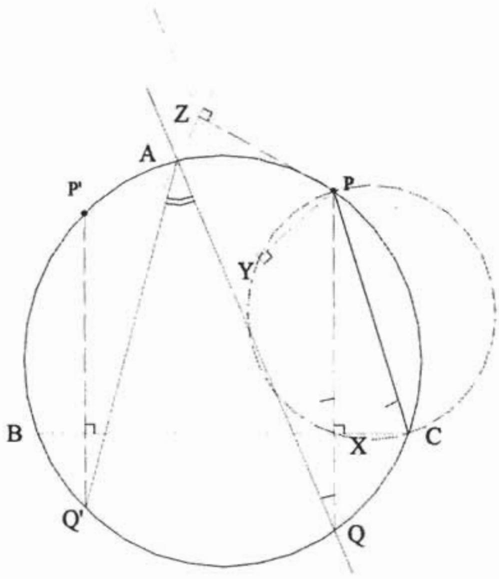


Figura 3.33

Análogamente la línea de Simson de un segundo punto P' en la circunferencia es paralela a AQ' donde P'Q' es la cuerda por P' perpendicular a BC de lo cual tenemos que PQ es paralela a P'Q'. Y ya que los arcos $\frown PP'$ y $\frown QQ'$ son iguales por que son paralelas se sigue que el ángulo entre las líneas de Simson de P y P' vale la mitad del arco $\frown PP'$ de la circunferencia circunscrita.

$\Rightarrow \dfrac{\frown PP'}{2} = \dfrac{\frown QQ'}{2}$ es le valor del ángulo entre las líneas de Simson.

4.0 Puntos y líneas

4.01 Segmentos y ángulos dirigidos

La inclusión de los números negativos significo un notable adelanto en el sistema de los números del álgebra, trajo consigo avances mayores de los que pudieron prever aquellos que tomaron parte en realizarlo.

Si en una línea recta tomamos dos puntos distintos A y B, ellos nos determinan un segmento de línea. En geometría elemental nos referimos a este segmento como AB y usualmente estamos interesados nada mas en su longitud. Podemos, sin embargo, asociar a la idea de segmento, la idea de dirección. (Figura 4.1)

FIGURA 4.1

Así si la porción de línea entre estos dos puntos la imaginamos extendida de A a B, tenemos el segmento dirigido de AB, mientras que si lo viéramos de B a A tenemos el segmento dirigido BA, las magnitudes de los segmentos AB y BA son iguales, pero sus direcciones son contrarias.

Esta diferencia en direcciones es análoga a la diferencia en signos de números algebraicos y es convenientemente indicada por medio de tales signos. Generalmente cuando se habla de segmentos de línea se esta hablando de segmentos dirigidos, a menos que se indique que es un segmento no dirigido.

Como se menciono anteriormente los segmentos dirigidos AB y BA son iguales en magnitud pero opuestos en dirección. Este hecho esta indicado por la ecuación siguiente:

$AB = -BA$, o por la ecuación $AB + BA = 0$.

Si A, B y C son tres puntos diferentes en una línea recta tenemos que:

$AB + BC + CA = 0$

En el caso de que los puntos A y B coincidan, podemos considerar como si ellos formaran un segmento AB de longitud cero. Todas las relaciones anteriores son validas si alguno o todos los segmentos incluidos tienen longitud cero.

Extensiones obvias de las relaciones anteriores son posibles cuando se consideran más de tres puntos en la línea recta.

Para ejemplificar el uso de los segmentos dirigidos consideremos el siguiente resultado

Si A, B y C son tres puntos colineales y P, Q, R son los puntos medios de BC, AC y AB respectivamente, entonces se cumple que el punto medio de CR coincide con el punto medio de PQ. (Figura 4.2)

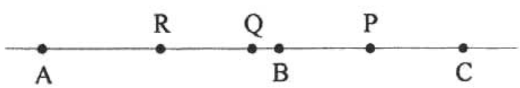


FIGURA 4.2

Basta demostrar que $RQ = PC$ para lo cual tenemos que $AB + BC + CA = 0$ pero

$AB = AR + RB$, $BC = BP + PC$ y $CA = CQ + QA$ sustituyendo en la ecuación anterior tenemos

$(AR + RB) + (BP + PC) + (CQ + QA) = 0$ pero sabemos P, Q, R son puntos medios

entonces $AR = RB$, $BP = PC$, $CQ = QA$ sustituyendo en la ecuación anterior

$(2AR) + (BP + PC) + (2QA) = 0$ factorizando

$2(AR + QA) + 2(PC) = 0$, pero $AR + QA = QR$ de lo cual

$2(QR) + 2(PC) = 0 \quad \Rightarrow 2PC = 2RQ \Rightarrow PC = RQ$

Por lo tanto tenemos que el punto medio de CR coincide con el punto medio de PQ.

Por otro lado es importante asociar la idea de dirección no solo de segmentos de línea sino también de los ángulos. El ángulo formado por las líneas OA y OB (Figura 4.3) puede ser generado por una línea que este en movimiento, que gira sobre el punto O de la posición OA a la posición OB en el sentido opuesto al avance de las manecillas del reloj.

Si en cada una de estas rotaciones la misma porción del plano es barrida por la línea en movimiento, los ángulos así generados son iguales en magnitud, pero pueden ser opuestos en signo.

Cuando la rotación es en sentido contrario al sentido de las manecillas, el signo del ángulo resultante por convención es considerado positivo $(+)$; y cuando la rotación es a favor de las manecillas del reloj, el signo del ángulo es negativo $(-)$.

De los dos ángulos descritos anteriormente el positivo es el considerado AOB y el negativo como el ángulo BOA.

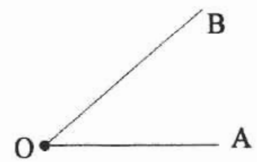


FIGURA 4.3

Podemos notar que hay un triángulo positivo BOA, así como un ángulo negativo BOA, a saber, la rotación de OB alrededor de O, en el sentido opuesto a las manecillas del reloj que lleva a OB a coincidir con OA.

Con relación a su utilidad es frecuentemente ventajoso considerar el ángulo positivo AOB como la rotación de la línea completa OA alrededor de O, en el sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Para las pruebas de algunos teoremas, se encuentran varios casos en los cuales hay que darles un tratamiento por separado si los ángulos incluidos son considerados como no dirigidos. Considerando ángulos como dirigidos estos casos por separado, que aparentemente pueden permanecer como fundamentalmente diferentes, se encuentra que son aspectos similares de uno y pueden todos ser tratados juntos.

4.02 Teorema generalizado de la bisectriz

Una propiedad muy importante que se tiene de geometría plana es el llamado teorema generalizado de la bisectriz, el cual dice:

Si el vértice A del triángulo ABC es unido a cualquier punto L en el interior de la línea BC, entonces (Figura 4.4a),

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB \operatorname{sen} \angle BAL}{CA \operatorname{sen} \angle LAC}$$

Para probarlo se utilizara la ley de senos y tomaremos los ángulos a favor de las agujas del reloj.

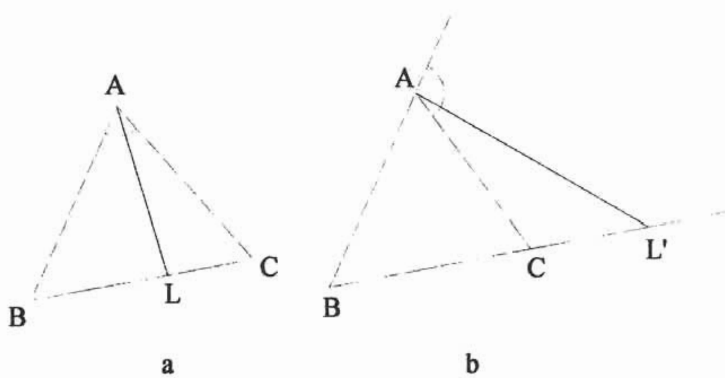


FIGURA 4.4

$$\frac{BL}{\operatorname{sen} \angle BAL} = \frac{LA}{\operatorname{sen} \angle LBA} = \frac{AB}{\operatorname{sen} \angle ALB} \Rightarrow BL = \frac{AB \operatorname{sen} \angle BAL}{\operatorname{sen} \angle ALB} \quad \text{..........................} (1)$$

$$\frac{LC}{\operatorname{sen} \angle LAC} = \frac{CA}{\operatorname{sen} \angle CLA} = \frac{AL}{\operatorname{sen} \angle ACL} \Rightarrow LC = \frac{CA \operatorname{sen} \angle LAC}{\operatorname{sen} \angle CLA} \quad \text{..........................} (2)$$

Dividiendo (1) y (2) tenemos

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB \operatorname{sen} \angle BAL \operatorname{sen} \angle CLA}{CA \operatorname{sen} \angle LAC \operatorname{sen} \angle ALB}$$

Pero sabemos que $\operatorname{sen} \angle ALB = \operatorname{sen} \angle CLA$ por una identidad trigonométrica del complemento de ángulos para el seno, entonces

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB \operatorname{sen} \angle BAL}{CA \operatorname{sen} \angle LAC}$$

Que es el resultado que queríamos demostrar.

Un corolario inmediato del teorema generalizado de la bisectriz es cuando tenemos que $\text{sen}\,\angle LAC = \text{sen}\,\angle BAL$ es decir cuando tenemos la bisectriz del triángulo.

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$$

Para el caso que el segmento corte al lado opuesto del triángulo ABC externamente en el punto L' consideremos la figura 4.4b

Aplicamos la ley de senos en los triángulos ABL' y ALC respectivamente entonces

$$\frac{AB}{\text{sen}\,\angle AL'B} = \frac{BL'}{\text{sen}\,\angle BAL'} = \frac{L'A}{\text{sen}\,\angle L'BA} \Rightarrow BL' = \frac{AB\,\text{sen}\,\angle BAL'}{\text{sen}\,\angle AL'B} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{AC}{\text{sen}\,\angle AL'C} = \frac{CL'}{\text{sen}\,\angle CAL'} = \frac{L'A}{\text{sen}\,\angle L'CA} \Rightarrow CL' = \frac{AC\,\text{sen}\,\angle CAL'}{\text{sen}\,\angle AL'C} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

dividiendo las ecuaciones (3) y (4) resulta

$$\frac{BL'}{CL'} = \frac{AB\,\text{sen}\,\angle BAL'\,\text{sen}\,\angle AL'C}{AC\,\text{sen}\,\angle AL'B\,\text{sen}\,\angle CAL'}$$ pero $\text{sen}\,\angle AL'B = \text{sen}\,\angle AL'C$ entonces

$$\frac{BL'}{CL'} = \frac{AB\,\text{sen}\,\angle BAL'}{AC\,\text{sen}\,\angle CAL'}$$ si tomamos la bisectriz externa del ángulo que une al vértice A con BC en L' y tomando en cuenta el signo de $\text{sen}\,\angle CAL'$ tenemos

$$\frac{BL'}{CL'} = \frac{AB}{CA}$$

Estas últimas expresiones se les conoce simplemente como el teorema de la bisectriz.

4.03 Teorema de Euler

Si A, B, C y D son cuatro puntos cualesquiera en una línea y consideramos los segmentos que lo determinan, tenemos la útil identidad siguiente, conocida como la identidad de Euler.

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$$

Para la demostración haremos referencia a la figura 4.5 en la cual observamos que

$AD = AC + CD$ multiplicando por $BC \rightarrow BC \cdot AD = BC(AC + CD)$ y

$DB = DC + CB$ multiplicando por $AC \rightarrow AC \cdot DB = AC(DC + CB)$

FIGURA 4.5

Sumando las ecuaciones anteriores

$$BC \cdot AD + AC \cdot DB = BC(AC + CD) + AC(DC + CB)$$

$$BC \cdot AD + AC \cdot DB = BC \cdot AC + BC \cdot CD + AC \cdot DC + AC \cdot CB$$

$$BC \cdot AD + AC \cdot DB = BC \cdot AC - BC \cdot DC + AC \cdot DC + AC \cdot CB$$

$BC \cdot AD + AC \cdot DB = BC \cdot AC + DC(AC - BC) + AC \cdot CB$ pero $AC - BC = AB$

$$BC \cdot AD + AC \cdot DB = BC \cdot AC + DC \cdot AB + AC \cdot CB$$

$-DC \cdot AB + AD \cdot BC + AC \cdot DB = BC \cdot AC + AC \cdot CB$ factorizando y $BC + CB = 0$

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$$

4.04 División de un segmento en una razón dada

Si P es un punto cualquiera de AB (A distinto de B) ya sea entre A y B ó externo al segmento AB, se dice que divide al segmento AB en razón $\frac{AP}{PB}$. Si P está entre A y B divide al segmento internamente y la razón de partición es positiva; si esta fuera el punto del segmento AB divide el segmento externamente, y la razón de partición es negativa es decir $-\frac{AQ}{QB}$. (Figura 4.6)

FIGURA 4.6

El punto P dividen a AB internamente en razón $\frac{AP}{PB}$ y Q externamente en razón $-\frac{AQ}{QB}$.

Si P coincide con los puntos A ó B, el segmento no esta propiamente dividido por P, puede decirse entonces que lo divide impropiamente, la razón de partición es cero o infinito según P sea A ó B. Análogamente con el punto Q si coincide con los puntos A ó B entonces regresamos al caso anterior.

Cuando cuatro puntos A, B, P y Q están situados de tal manera que P y Q dividen internamente en razones numéricamente iguales, es decir:

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$$

Entonces se dice que P y Q divide al segmento AB interna y externamente al segmento en la misma razón.

Es fácil demostrar que si dos puntos dividen un segmento de línea en razones iguales los puntos coinciden. (Figura 4.7)

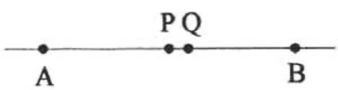


FIGURA 4.7

Hay que demostrar que si dos puntos dividen a un segmento en la misma razón entonces los puntos son iguales, es decir

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} \Rightarrow P = Q,$$

Si $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{AP}{PB} + 1 = \frac{AQ}{QB} + 1$ entonces,

$$\frac{AP}{PB} + \frac{PB}{PB} = \frac{AQ}{QB} + \frac{QB}{QB} \Rightarrow \frac{AP + PB}{PB} = \frac{AQ + QB}{QB}$$

pero $AP + PB = AB$ y $AQ + QB = AB$

por lo cual $\frac{AB}{PB} = \frac{AB}{QB} \Rightarrow PB = QB$

$\therefore\ Q = P$ son el mismo punto.

4.05 Puntos al infinito

Con frecuencia ocurre que en un teorema hay una relación con un punto determinado con la intersección de dos líneas en una figura. Un caso especial es cuando las dos líneas en cuestión son paralelas y este punto no tiene mucho sentido. Nosotros artificialmente adoptamos una ficción que las líneas paralelas tienen un punto en común, que lo llamaremos un punto al infinito.

Consideremos una línea AB y un punto O fuera de ella, cualquier línea no paralela a AB y que pasa por O interseca a AB en un punto P y si esta línea gira con centro en O, el punto P se mueve a lo largo de AB. Más aun, cada punto de AB está determinado como la intersección de AB con la línea que pasa por O. (Figura 4.8)

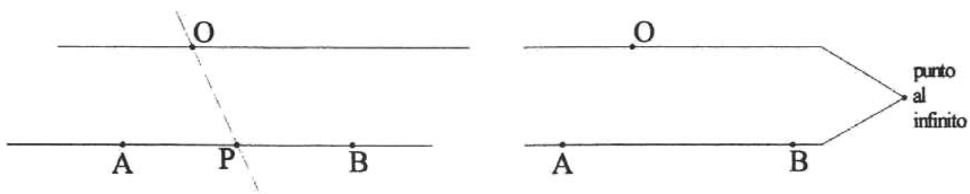


FIGURA 4.8

Si el punto P de la línea AB es apareado con la línea OP se establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de AB y las líneas que pasan por O, con la sola excepción de la línea que pasa por O y es paralela a AB.

Estamos acostumbrados a considerar a dos líneas paralelas como aquellas que no tienen ningún punto en común esto por la definición euclidiana la cual dice que dos líneas son paralelas, si están en el mismo plano y no se cruzan, no importando cuanto se prolonguen. Aunque este punto de vista puede ser más satisfactorio a nuestra intuición es lógicamente deseable asociar la línea AB con un punto ideal que se le llama punto al infinito en AB.

- Este punto tiene la propiedad de que la línea que pasa por O es paralela a AB.
- Interseca con ABen este punto ideal (punto al infinito)

Si esto se realiza, la excepción antes mencionada desaparece, y podemos decir que cualquier línea del plano que pasa por O interseca a AB, y uno de los puntos de intersección es el punto al infinito en AB, todos los puntos que restan son los puntos reales de la recta AB.

Mas adelante utilizaremos esta propiedad para demostrar algunos teoremas y veremos que este punto es un caso degenerado de otros, por ejemplo para la construcción de una línea paralela a otra utilizando solamente regla.

4.06 Puntos y líneas armónicos

Para tener una idea clara definimos que puntos que están en la misma línea recta se dice que son colineales. Si ciertos puntos son colineales constituyen una hilera de puntos y la línea en la cual están situados se llama la base de la hilera. De la figura 4.6 decimos que los puntos A, P, B, Q son una hilera de puntos.

Una hilera de puntos puede consistir en un número de puntos al infinito, en cuyo caso la base es la línea al infinito.

Se dice que el segmento de línea AB esta dividido armónicamente por C y D si

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

Cuando AB esta dividido así, los puntos C y D son conjugados armónicos con respecto a A y B. Esta definición armónica es equivalente a lo siguiente: Se dice que dos puntos dividen un segmento de línea armónicamente si lo dividen interna y externamente en la misma razón.

La naturaleza reciproca de la división armónica de la proporción $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ se sigue que $\frac{CA}{AD} = -\frac{CB}{BD}$ es decir, que si, C y D dividen armónicamente al segmento AB entonces también A y B dividen armónicamente al segmento CD. Esto es equivalente a decir que:

Si C y D son conjugados armónicos con respecto a AB, entonces A y B son conjugados armónicos con respecto a CD.

Cuando cuatro puntos A, B, C, D en una línea, están de tal forma que cada uno de los pares $A, B; C, D$ son conjugados armónicos con respecto al otro par, se dice que constituyen una hilera armónica; también se dice que son cuatro puntos armónicos.

Hay varias maneras de construir D, el conjugado armónico de C con respecto a A y B. Aquí se enunciara una manera muy sencilla para construir el punto D, más adelante con uso del teorema de Ceva y Menelao se dará otra forma para construir dichos puntos.

Por A y B dibujemos dos líneas paralelas cualesquiera, y por C dibujemos una línea que interseque a estas paralelas en P y Q respectivamente. En QB, tomemos R tal que $QB = BR$. (Figura 4.9)

Entonces, para los triángulos APC y BQC, la línea AP es paralela a QR por lo que

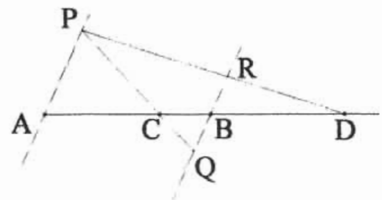


FIGURA 4.9

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AP}{QB}$$

También por semejanza los triángulo APD y BRD de lo cual

$\frac{AD}{DB} = -\frac{AP}{BR}$ luego sabemos que $QB = BR$, entonces se sigue que

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

Y concluimos que D es conjugado armónico de C con respecto al segmento AB. La construcción anterior muestra que, cuando tres puntos están en una línea recta, el conjugado armónico de uno de ellos con respecto a los otros dos, siempre existe y es obvio que único. En el caso en que C es el punto medio del segmento AB, D es el punto al infinito en la línea AB. (Figura 4.10).

Debe notarse, cuidadosamente, que la notación cuando no se utiliza A, B, C, D, son cuatro puntos armónicos, los pares conjugados son A, B y C, D. Más aún, uno y sólo uno de cada par está en el segmento determinado por los otros dos.

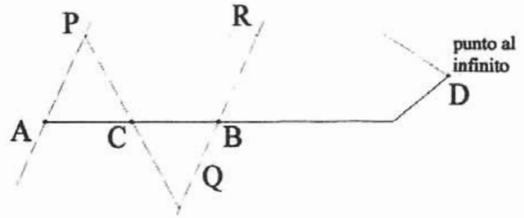


FIGURA 4.10

Las propiedades más importantes de los puntos armónicos A, B, C, D son las siguientes:

a) Cada una de las otras siete permutaciones de estos puntos en las cuales los pares conjugados se conservan, es armónica;

b) Los segmentos AC, AB y AD están en progresión armónica, esto es

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \quad \text{e inversamente ;}$$

c) $\overline{OB}^2 = OC \cdot OD$, donde O es el punto medio de AB, e inversamente.

La prueba de a) se sigue porque A, B, C, D son puntos armónicos y de la definición

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

Utilizando las operaciones de segmentos dirigidos, las siete permutaciones son

A, B, D, C; B, A, C, D; B, A, D, C; C, D, A, B; C, D, B, A; D, C, A, B; D, C, B, A.

Para la prueba del inciso b) y usando la proporción anterior tenemos que

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{CB}{AC} = \frac{BD}{AD} \quad \text{multiplicando por } \frac{1}{AB} \text{ la ecuación anterior}$$

$$\frac{CB}{AB \cdot AC} = \frac{BD}{AB \cdot AD} \quad \text{pero } CB = AB - AC \text{ y } BD = AD - AB\text{, sustituyendo}$$

$$\frac{AB - AC}{AB \cdot AC} = \frac{AD - AB}{AB \cdot AD} \Rightarrow \frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD} \quad \text{desarrollando la expresión queda}$$

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AB} = \frac{2}{AB}$$

por lo tanto $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$

Siguiendo los pasos del argumento en sentido contrario, tenemos la prueba del inverso, la relación de los segmentos AB, AC y AD, pueden ser también expresada diciendo que AB es la media armónica de AC y AD.

Para la prueba de c); escribiendo las relaciones de los segmentos de línea que están involucrados, y sustituyendo AO por OB. (Figura 4.11)

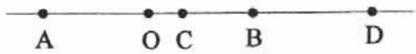


FIGURA 4.11

Hay que demostrar que $\overline{OB}^2 = OC \cdot OD$ y sabemos que $AO = OB$;

Teniendo en cuenta que $AC = AO + OC$, $CB = OB - OC$, $AD = AO + OD$ y $DB = DO - BO$ utilizando la propiedad armónica y sustituyendo tenemos

$\dfrac{AC}{CB} = -\dfrac{AD}{DB} \Rightarrow \dfrac{AO + OC}{OB - OC} = -\dfrac{AO + OD}{OB - OD}$ luego tenemos que $AO = OB$ entonces

$\dfrac{OB + OC}{OB - OC} = -\dfrac{OB + OD}{OB - OD} \Rightarrow \dfrac{OB + OC}{OB - OC} = \dfrac{OD + OB}{OD - OB}$ reduciendo la expresión queda

$$(OD - OB)(OB + OC) = (OB - OC)(OD + OB)$$

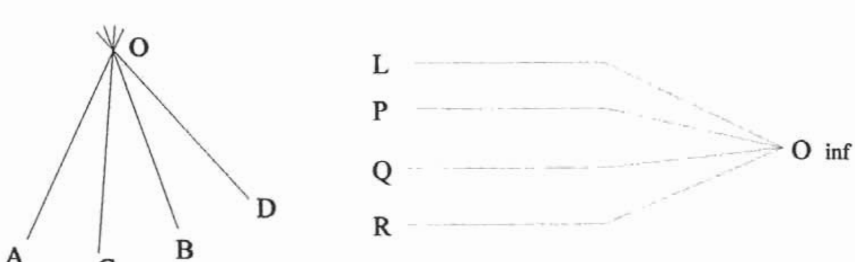
$$OB \cdot OD - OB^2 + OC \cdot OD - OC \cdot OB = OB^2 + OB \cdot OD - OB \cdot OC - OC \cdot OD$$

$$2OB^2 = 2OC \cdot OD \Rightarrow OB^2 = OC \cdot OD$$

por lo tanto quedan demostrados los tres incisos.

Por oto lado las líneas que pasan por el mismo punto se dice que son concurrentes. Si un cierto número de líneas son concurrentes, constituyen un haz de líneas, las líneas individuales son comúnmente llamados rayos, y el punto a través del cual pasan estas líneas es el centro o vértice del haz. (Figura 4.12a)

Un haz de líneas puede constituirse con un conjunto de líneas paralelas, donde el vértice del haz es el llamado punto al infinito. (Figura 4.12b)



a b

FIGURA 4.12

Se dice que las líneas OA y OB están separadas armónicamente por las líneas OC y OD, siendo O un punto finito en el plano, si

$$\frac{\operatorname{sen}\angle AOC}{\operatorname{sen}\angle COB} = -\frac{\operatorname{sen}\angle AOD}{\operatorname{sen}\angle DOB}$$

Cuando cuatro líneas están de un haz están en tal forma que un par es conjugado armónico con respecto al segundo par, entonces el segundo par es conjugado armónico con respecto al primer par. (Figura 4.12)

Por la definición de la cual OA y OB están separadas armónicamente por las líneas OC y OD tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}\angle AOC}{\operatorname{sen}\angle COB} = -\frac{\operatorname{sen}\angle AOD}{\operatorname{sen}\angle DOB} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\angle COA}{\operatorname{sen}\angle AOD} = -\frac{\operatorname{sen}\angle COB}{\operatorname{sen}\angle BOD}$$

Por lo tanto OC y OD están separados armónicamente por las líneas OA y OB.

Tal haz de cuatro líneas es llamado armónico y sus líneas son llamadas cuatro líneas armónicas si dos líneas de un haz armónico coinciden, una tercera coincide con ellas.

La transversal de un haz armónico nos lleva al siguiente resultado:

La hilera de puntos en que las líneas de un haz armónico cortan cualquier línea, que no pase por el vértice del haz, es también una hilera armónica; e inversamente el haz de líneas uniendo cuatro puntos armónicos con cualquier punto que no este en la línea base es un haz armónico. (Figura 4.13)

Sabemos que $\frac{\operatorname{sen}\angle AOC}{\operatorname{sen}\angle COB} = -\frac{\operatorname{sen}\angle AOD}{\operatorname{sen}\angle DOB}$

si multiplicamos por $\frac{OA}{BO}$ la ecuación anterior tenemos

$$\frac{OA}{BO}\frac{\operatorname{sen}\angle AOC}{\operatorname{sen}\angle COB} = -\frac{OA}{BO}\frac{\operatorname{sen}\angle AOD}{\operatorname{sen}\angle DOB}$$

luego utilizamos el teorema de la bisectriz para reducirlo y queda

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

Inversamente podemos hacer los pasos anteriores con la última ecuación obtener la primera.

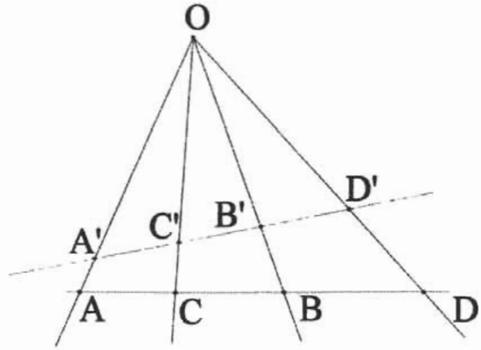


FIGURA 4.13

Si un haz de cuatro líneas es cortado por una transversal en una hilera armónica de puntos siendo estos A, B, C, D. Entonces cualquier otra línea transversal que corte en los puntos A′, B′, C′, D′ del haz también corta sus líneas en una hilera armónica, este resultado se sigue de la parte de arriba. (Figura 4.13)

Ya que

$$\frac{\operatorname{sen}\angle AOC}{\operatorname{sen}\angle COB} = -\frac{\operatorname{sen}\angle AOD}{\operatorname{sen}\angle DOB} \Rightarrow A, C, B, D$$

es una hilera armónica, pero

$$\operatorname{sen}\angle AOC = \operatorname{sen}\angle A'OC', \ \operatorname{sen}\angle COB = \operatorname{sen}\angle C'OB'$$

$$\operatorname{sen}\angle AOD = \operatorname{sen}\angle A'OD', \ \operatorname{sen}\angle DOB = \operatorname{sen}\angle D'OB'$$

entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\angle A'OC'}{\operatorname{sen}\angle C'OB'} = -\frac{\operatorname{sen}\angle A'OD'}{\operatorname{sen}\angle D'OB'} \Rightarrow A', C', B', D', \text{ es una hilera armónica.}$$

Otra parte importante en la teoría de haces son las líneas conjugadas perpendiculares es decir si en un haz armónico de líneas diferentes, un par de líneas conjugadas es ortogonal una de otra, entonces estas líneas bisecan los ángulos formados por las otra dos líneas conjugadas, e inversamente si en un haz de cuatro líneas distintas uno de los pares biseca los ángulos formados por el otro par, el haz es armónico. (Figura 4.14)

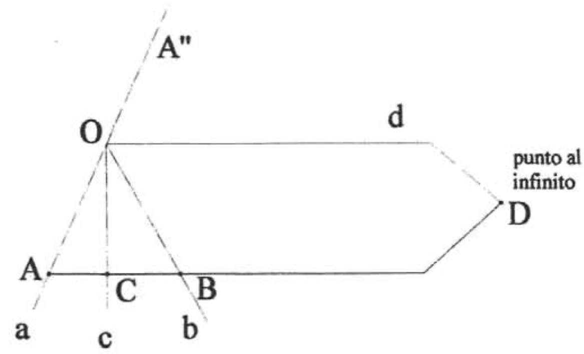


FIGURA 4.14

Para demostrar lo dicho anteriormente, sea $O(abcd)$ un haz armónico (el símbolo $O(abcd)$ se entenderá que significa el haz cuyas líneas son Oa , Ob , Oc y Od), Oc es perpendicular a Od, luego hagamos que la paralela transversal a Od corte a Oa , Ob , Oc en A, B, C respectivamente, entonces el conjugado armónico de C con respecto de A y B es el punto al infinito en esta transversal y consecuentemente C es el punto medio de AB, como se vio al anteriormente en la construcción de conjugados armónicos.

De aquí que los triángulos rectángulos ACO y BCO, son congruentes porque $AC = CB$ por construcción, CO lado común y $\angle ACO = \angle BCO = \perp$ por que $Oc \perp Od$ y AB es paralela a Od entonces los ángulos $\angle AOC$ y $\angle COB$ son iguales, Por lo tanto concluimos que, las líneas conjugadas y ortogonales Od y Oc bisecan al ángulo $\angle AOB$ formado por las líneas Oa , Ob conjugadas.

Es fácil ver que también Od biseca al ángulo $\angle BOA''$ porque la bisectriz interna es ortogonal a la bisectriz externa.

Para la parte inversa del resultado sean Oc y Od las bisectrices de los ángulos formados por las líneas Oa y Ob entonces $\operatorname{sen} \angle aoc = \operatorname{sen} \angle cob$; así también $\operatorname{sen} \angle aod = -\operatorname{sen} \angle dob$, ya que el ángulo $\angle aod$ es el suplemento del ángulo $\angle doA''$ que es igual al negativo del ángulo $\angle dob$.

De estas igualdades tenemos que $\dfrac{\operatorname{sen} \angle aoc}{\operatorname{sen} \angle cob} = -\dfrac{\operatorname{sen} \angle aod}{\operatorname{sen} \angle dob}$.

Y esta es la definición para que un haz sea armónico, por lo tanto si en un haz de cuatro líneas distintas uno de los pares conjugados biseca a las otras líneas conjugadas entonces el haz es armónico ortogonal.

Para ver las propiedades armónicas con relación a circunferencias ortogonales tenemos que definir algunas propiedades de estas curvas.

El ángulo de intersección de dos curvas en un punto que ellas tengan en común es el ángulo entre las tangentes a las curvas en el punto común. Decimos que dos curvas son ortogonales si su ángulo de intersección es un ángulo recto.

A continuación se presentan tres hechos concernientes a estas circunferencias de los cuales nos referimos a la figura 4.15

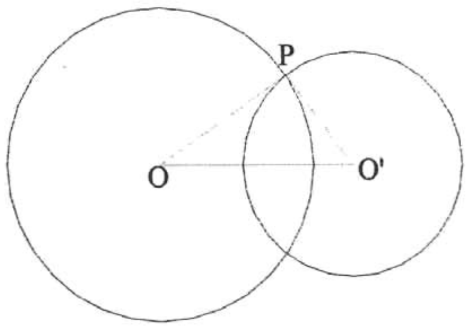


FIGURA 4.15

1. Si dos circunferencias se intersecan, los ángulos de intersección entre sus puntos comunes son iguales.

2. Si dos circunferencias son ortogonales, una tangente a ellas en el punto de intersección pasa por el centro de la otra; y si el radio de una de las circunferencias trazado a un punto común es tangente a la otra las circunferencias son ortogonales.

3. El cuadrado de la distancia entre los centros de dos circunferencias ortogonales es igual a la suma de los cuadrados de los radios (esto es fácil de ver por el teorema de Pitágoras).

Si consideramos una circunferencia con diámetro AB, y hagamos que una segunda circunferencia corte la línea de este diámetro en C y D, dos puntos armónicos con respecto a A, B. Entonces las dos circunferencias son ortogonales. (Figura 4.16)

Sea P el punto de intersección de las dos circunferencias y OP el radio de la primera circunferencia trazado a P, sabemos que $OB^2 = OC \cdot OD$ propiedad c) demostrada en puntos armónicos. Ya que $OB = OP$ tenemos que:

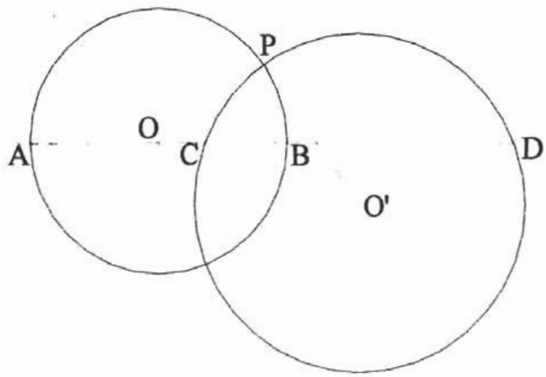


FIGURA 4.16

$OP^2 = OC \cdot OD$ de esta ecuación es fácil ver que es la potencia de O con respecto a la segunda circunferencia y que una de las propiedades de la potencia es que $OP^2 = OC \cdot OD = OO'^2 - r^2$ de lo cual $OP^2 = OO'^2 - O'P^2$, así que las dos circunferencias son ortogonales por el punto numero tres de las propiedades mencionadas.

La propiedad inversa es decir si suponemos que las dos circunferencias son ortogonales y que el diámetro de la primera intersecta ambas en ambas en A, B y C, D respectivamente entonces tenemos que $OB^2 = OP^2 = OC \cdot OD$, de lo cual se sigue que los puntos A, B y C, D son armónicos.

Los resultados anteriores se pueden resumir de manera siguiente:

Si se construye una circunferencia con diámetro AB, es ortogonal a cualquier circulo que pase por C y D, un par de conjugados armónicos de A y B, e inversamente, si dos circunferencia ortogonales son cortadas por una línea que pase por el centro de una de ellas, los cuatro puntos de intersección constituyen una hilera armónica.

4.07 Cuadrilátero y cuadrángulo completos

Para poder ver las propiedades armónicas que tienen los cuadrángulos o cuadriláteros completos empezaremos definiéndolos. Decimos que en un triángulo consiste de tres puntos no colineales y de tres segmentos de líneas que unen a estos puntos por pares. Ahora bien si también un cuadrángulo consiste en cuatro puntos, que tomados por tercias no sean colineales, y de cuatro segmentos que los unen por pares.

Estas figuras pueden generalizarse formando en cada caso la figura que consiste de los puntos y todas las líneas completas que ellos determinan. La figura que consiste de cuatro puntos cualesquiera tres no alineados, y de seis líneas determinados por esos puntos, es un cuadrángulo completo. (Figura 4.17)

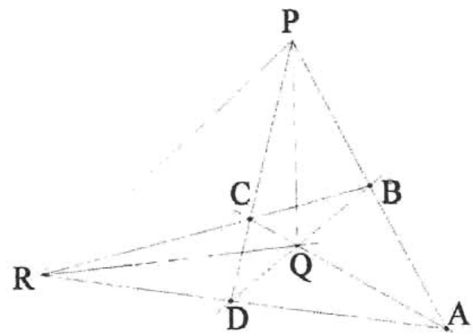


FIGURA 4.17

Los cuatro puntos A, B, C y D son los vértices, y las seis líneas son sus lados, luego se dice que dos lados son lados opuestos, si tienen un vértice en común, entonces tenemos que en un cuadrángulo completo hay tres pares de lados opuestos, que son:

RB; DA , PD ; PA y BD ; CA.

Los puntos determinados por los pares de lados opuestos del cuadrángulo completo son los puntos diagonales, y el triángulo determinado por estos tres puntos es el triangulo diagonal. En la figura anterior PQR es el triángulo diagonal.

Ahora la figura que consiste de cuatro líneas, tres de las cuales no pasan por el mismo punto y los seis determinados por la intersección de estas líneas, es un cuadrilátero completo. Las cuatro líneas son sus lados y los seis puntos donde cortan estas líneas les llamamos vértices

Se dice de dos vértices que son vértices opuestos si ellos no están en el mismo lado. En un cuadrilátero completo hay tres pares de vértices opuestos, además las tres líneas determinadas por los pares de vértices opuestos de un cuadrilátero completo, son sus diagonales y el triángulo determinado por estas tres líneas, es un triangulo diagonal. (Figura 4.18)

En esta figura p, q, r es el triángulo diagonal del cuadrilátero completo cuyos lados son las líneas a, b, c, d.

Una importante propiedad que infiere cada una de las definiciones anteriores está contenida en los siguientes párrafos.

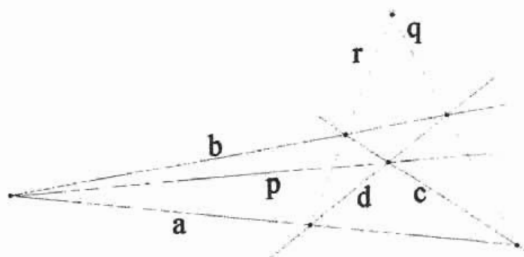


FIGURA 4.18

En cada diagonal de un cuadrilátero completo, hay una hilera armónica que consiste en los vértices en la diagonal y los puntos en los cuales es intersecada por las otras dos. (Figura 4.19 a)

Y por cada punto diagonal, de un cuadrángulo completo, pasan cuatro líneas armónicas, que son los lados que pasan por el punto y las líneas que lo unen con los otros dos puntos diagonales. (Figura 4.19 b)

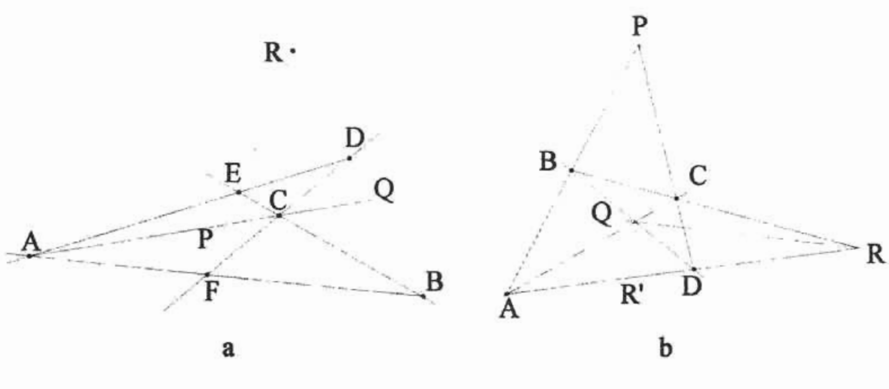


FIGURA 4.19

En el cuadrilátero completo de la figura 4.19a, los lados AB, BC, CD y DA cuyo triángulo diagonal es PQR hay que probar que BDQR es una hilera armónica.

Consideremos el triángulo ABD con líneas AQ, BE y DF concurrentes en el punto C y la transversal EF corta a BD en R y por el teorema de la división interna y externa* de un segmento tenemos que tenemos que:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DE}{EA}=1 \quad \text{y} \quad \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DE}{EA}=-1 \qquad \therefore\ \frac{BQ}{QD}=-\frac{BR}{RD}$$

Que es la definición de armónicos y por lo tanto Q y R dividen interna y externamente a BD en la misma razón. De manera análoga se prueba también que $FEPR$ y $ACPQ$ son conjugados armónicos.

Tomando el triángulo AFE y las líneas que cortan a los lados EC, FD y AC concurrentes en C, la transversal RB que corta a FE en R entonces;

$$\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FP}{PE}\cdot\frac{ED}{DA}=1 \quad \text{y} \quad \frac{AB}{BF}\cdot\frac{FR}{RE}\cdot\frac{ED}{DA}=-1 \qquad \therefore\ \frac{FP}{BF}=-\frac{FR}{RE}$$

Por ultimo el triángulo APQ y las líneas que cortan a los lados EC, CD y RC concurrentes en C, la transversal ED que corta a PQ en A entonces;

$$\frac{RE}{EP}\cdot\frac{PC}{CQ}\cdot\frac{QD}{DR}=1 \quad \text{y} \quad \frac{RE}{EP}\cdot\frac{PA}{AQ}\cdot\frac{QD}{DR}=-1 \qquad \therefore\ \frac{PC}{CQ}=-\frac{PA}{AQ}$$

Para la prueba del segundo resultado consideremos el cuadrángulo completo $ABCD$ de la figura 4.18b, si PQ intersecta a AD en R' entonces por el teorema de la división interna y externa* de un segmento tenemos que

$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DR'}{R'A}=1 \quad \text{y} \quad \frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DR}{RA}=-1 \qquad \therefore\ \frac{DR'}{R'A}=-\frac{DR}{RA}$$

Por lo que $ADR'R$ es una hilera armónica, así pues $P\{ADR'R\}$ es un haz armónico.

Análogamente para los puntos R y Q como vértices de haces armónicos.

Una propiedad importante para el cuadrángulo completo es que los puntos medios de las diagonales de dicho cuadrángulo son colineales. Para la demostración de este resultado se hace referencia al teorema de Menelao* (Figura 4.20).

En la figura P, R, Q son los puntos medios de las diagonales AB, CD, EF. Sean N, L, M, los puntos medios del triángulo CEB.

Entonces M, N, P son colineales, así como M, L, Q y N, L, R, porque la razón de división es un medio, para que los puntos P, R, Q sean colineales utilizamos el teorema de Menelao que dice:

$$\frac{NP}{PM}\cdot\frac{MQ}{QL}\cdot\frac{LR}{RN}=-1 \Rightarrow \quad P, R, Q \text{ son colineales.}$$

*Ver capitulo V teorema de la división interna y externa de un segmento y teorema de Menelao

Aplicamos el teorema al triángulo CEB y la línea AFD

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CA}{AE} \cdot \frac{ED}{DB} = -1$$

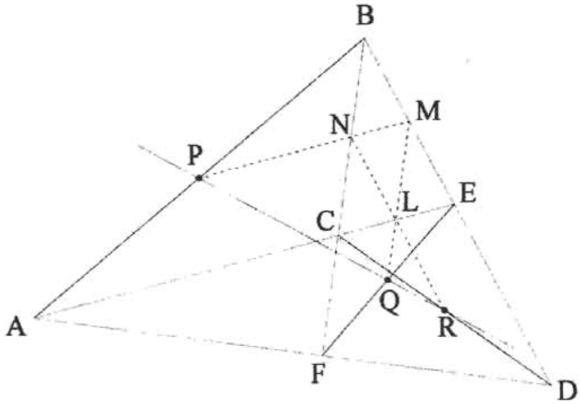


FIGURA 4.20

Ahora fijémonos en las siguientes relaciones que se dan de triángulos semejantes

De los $\Delta AEB \approx \Delta PMB$ tenemos que $\frac{PM}{AE} = \frac{BP}{BA}$ y como $\Delta ACB \approx \Delta PNB$; $\frac{PN}{AC} = \frac{BP}{BA}$

De las dos relaciones anteriores tenemos que $\frac{PM}{AE} = \frac{PN}{AC} \Rightarrow \frac{CA}{AE} = \frac{NP}{PM}$

Luego como los $\Delta BEF \approx \Delta MEQ, \Delta CEF \approx \Delta LEQ$; tenemos $\frac{MQ}{BF} = \frac{EL}{EC}$ y $\frac{LQ}{CF} = \frac{EL}{EC}$ respectivamente por lo tanto $\frac{MQ}{BF} = \frac{LQ}{CF} \Rightarrow \frac{MQ}{QL} = \frac{BF}{FC}$ y por ultimo los triángulos siguientes también son semejantes $\Delta DCB \approx \Delta RCN$ y $\Delta DCE \approx \Delta RCL$ por lo que $\frac{NR}{BD} = \frac{LR}{ED}, \frac{LR}{ED} = \frac{LC}{EC}$ respectivamente, igualando tenemos que

$$\frac{NR}{BD} = \frac{LR}{ED} \Rightarrow \frac{LR}{RN} = \frac{ED}{DB}$$

Si sustituimos estas relaciones en la ecuación que obtuvimos al aplicar el teorema de Menelao queda:

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CA}{AE}\cdot\frac{ED}{DB} = \frac{NP}{PM}\cdot\frac{MQ}{QL}\cdot\frac{LR}{RN} = -1 \Rightarrow \frac{NP}{PM}\cdot\frac{MQ}{QL}\cdot\frac{LR}{RN} = -1$$

$\therefore$ P, R, Q son colineales.

4.08 Polígonos homotéticos

Las figuras homotéticas se tienen cuando unimos los vértices de dos polígonos con un punto O del plano, y cada una de estas líneas de unión están divididas en la misma razón, los puntos de división son los puntos de un polígono semejante como se vio en el capitulo II de este trabajo. Más generalmente, consideremos cualquier figura plana que consiste en un sistema de puntos X, Y, Z, ... y sean las líneas OX, OY, OZ, ... las que unen estos puntos con cualquier punto O del plano. Sí X′, Y′, Z′, ... son puntos de estas líneas respectivamente existe un numero k diferente de cero tal que

$$k = \frac{OX'}{OX} = \frac{OY'}{OY} = \frac{OZ'}{OZ} = \cdots,$$

Entonces la figura formada por los puntos X′, Y′, Z′, ... es semejante a la figura que consiste en los puntos X, Y, Z, ... y están semejantemente colocadas (Figura 4.21)

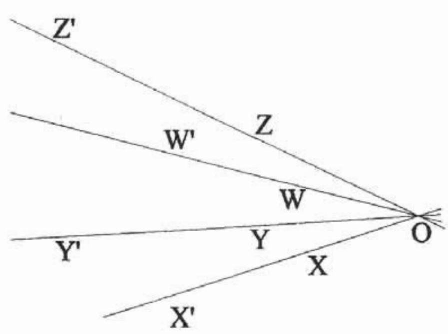
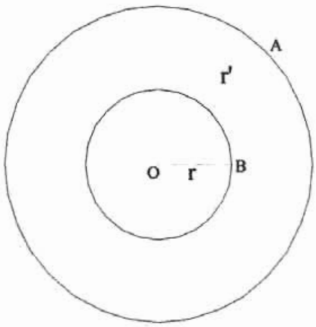


FIGURA 4.21

Podemos observar que si tres o más puntos de una figura dada están en una línea recta, los puntos correspondientes de la segunda figura están también en una línea recta y estas dos líneas son paralelas. Dos figuras semejantes colocadas semejantemente se llaman figuras homotéticas, al punto O en el plano se le llama centro de homotecia y la constante k es su razón de homotecia. A la razón de homotecia de dos figuras homotéticas es llamada también razón de similitud, y su centro de homotecia es llamado centro de similitud.

En las circunferencias también se dan propiedades homotéticas algunas de las propiedades importantes con relación a las circunferencias colocadas homoteticamente son la división de segmentos armónicamente. Las circunferencias concéntricas son homotéticas al igual que las no concéntricas con la razón de sus radios.

Si dos circunferencias son concéntricas, son homotéticas, siendo el centro de las circunferencias el centro de homotecia y la razón de sus radios es la razón de homotecia. (Figura 4.22)



$$k = \frac{OA}{OB} = \frac{r'}{r}$$

FIGURA 4.22

Si consideramos ahora circunferencias no concéntricas C y C', unamos el centro O de la circunferencia C a cualquier punto A de la circunferencia, no colineal con los centros. (Figura 4.23)

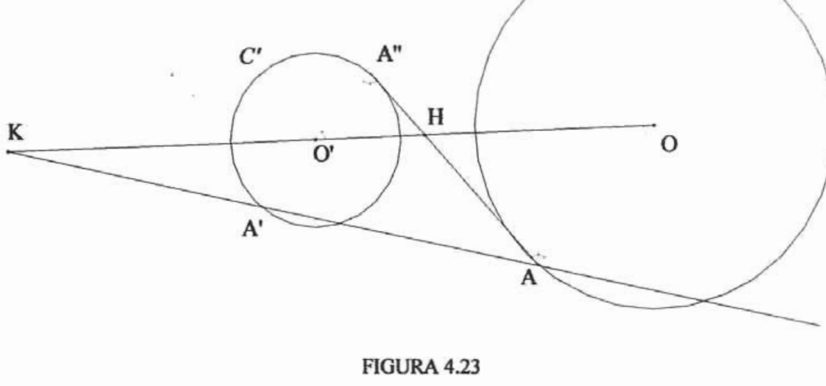


FIGURA 4.23

Ahora dibujamos una línea paralela a OA que pase por O', la cual corta a la circunferencia C' en los puntos A' y A'', luego trazamos los segmentos AA' y AA'' que cortan a la línea de los centros en K y H respectivamente, entonces el triángulo $O'A''H$ es semejante al triángulo OAH, al igual que los triángulos $KA'O'$ y KAO son semejantes por tener los tres ángulos iguales.

Por las semejanzas anteriores y de que $A''O' = A'O'$ tenemos que K y H son los centros de homotecia de las dos circunferencias ya que:

$$k = \frac{O'A'}{OA} = \frac{A''H}{AH} = \frac{O'H}{OH} = \frac{KA'}{KA} = \frac{KO'}{KO}$$

Tomando la dirección de los segmentos tenemos que los centros de la circunferencia están armónicamente separados de los centros de homotecia.

$$\frac{KO'}{O'H} = -\frac{KO}{OH}$$

4.09 Puntos homólogos y antihomológos, y propiedades

Para definir cuales son los puntos homólogos y antihomológos hacemos referencia a puntos homotéticos de un par de circunferencias, si una línea que pasa por el centro de similitud de dos circunferencias no concéntricas, interseca a una de ellas en dos puntos distintos, intersectará también la otra en dos puntos distintos. (Figura 4.24)

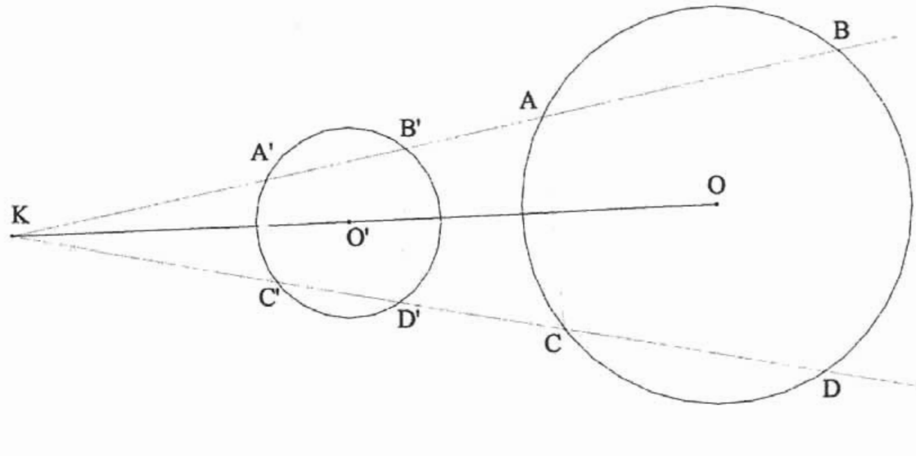


FIGURA 4.24

Estos cuatro puntos de intersección son homotéticos en pares y los puntos de cada par homotético son llamados puntos homólogos, dichos puntos pueden se apareados de tal forma que cada par contenga un punto en cada circunferencia, y dichos puntos no sean homotéticos. Los puntos de esta manera formados con respecto al centro de similitud que esta en la línea que pasa por estos puntos se le llaman puntos antihomológos. Así como se muestra en la figura 4.24 los puntos A, A' y B, B' son pares de puntos homólogos y los puntos A, B' y A', B son pares antihomológos con respecto al centro de homotecia K.

Las propiedades más importantes se enlistan a continuación

En la figura anterior podemos observar que A', B; C', D; B', A y D', C son pares de puntos antihomológos con respecto al mismo centro de similitud, además los pares puntos A, A'; B, B'; C, C' y D, D'son homólogos con respecto al centro de homotecia o centro de similitud K.

1. $B'D'$ es paralela a BD y los triángulos $KB'D'$ y KBD son directamente semejantes, porque

$$\frac{KB'}{KB} = \frac{KD'}{KD} = \frac{r'}{r} \quad \Rightarrow \frac{KB'}{KD'} = \frac{KB}{KD} \quad \text{por lo que se concluye que} \quad B'D' \parallel BD$$

2. $A'C'$ es antiparalela a BD con respecto a $A'B$ y $C'D$, y los triángulos $KA'C'$ y KBD son inversamente semejantes.

   Esto es porque el $A'B'C'D'$ es un cuadrilátero cíclico entonces

   $\angle C'B'D' + \angle C'D'B' = 2 \perp$ y como $B'D'$es paralela a BD, $\angle C'B'D' + \angle CDB = 2 \perp$ por lo tanto

   $A'C'BD$ forman un cuadrilátero cíclico y entonces las líneas $A'C'$y BD son antiparalelas con respecto a $A'B$ y $C'D$ por un teorema visto anteriormente.

   Siguiendo la propiedad que los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico suman dos rectos se puede ver fácilmente que los triángulos $KA'C'$ y KDB son semejantes.

3. El producto de los segmentos KA' y KB es constante

$$\frac{KA'}{KD} = \frac{A'C'}{DB} = \frac{KC'}{KB} \quad \Rightarrow KA' \cdot KB = \frac{A'C'}{DB} = \text{cte}$$

4. Cada uno de los siguientes conjuntos de puntos forman un cuadrilátero cíclico $A'C'BD$, $ACB'D'$ es fácil demostrar con las propiedades mencionadas anteriormente.

5.0 Principales teoremas

5.01 Teorema de Ceva

Muchas de las propiedades de figuras geométricas, dependen de la concurrencia de líneas y de la colinealidad de puntos. A continuación presentamos un teorema que es muy importante para establecer útiles resultados. El teorema de Ceva fue publicado por el matemático e ingeniero hidráulico italiano Giovanni Ceva en 1678.

Este teorema junto con el de Menelao (sección 5.02) se refieren a puntos en los lados de un triángulo, vistos los lados como líneas completas determinadas por pares de vértices del triangulo.

Si tres líneas AO, BO y CO, dibujadas por los vértices del triángulo ABC y un punto O de su plano, cortan a los lados opuestos en L, M y N respectivamente, entonces tenemos que: (Figura 5.1)

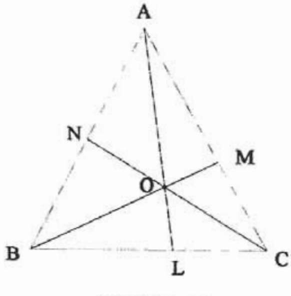


FIGURA 5.1

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Inversamente, si L, M y N son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC para los cuales se cumple la relación anterior, entonces AL, BM y CN son concurrentes.

Para dar una demostración de este teorema nos referiremos a la figura 5.2.

Trazamos una línea paralela a BC por A, y hacemos que se intersequen las líneas BM y CN en R y S respectivamente entonces tenemos una serie de triángulos semejantes los cuales cumplen el criterio de semejanza (A A A). Tomemos en cuenta la dirección de los segmentos la cual se vio en el capitulo anterior.

$$\Delta NAS \approx \Delta NBC \Rightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{AS}{BC} = \frac{NS}{NC} \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{SA}{BC} \quad \text{.......(1)}$$

$$\Delta MBC \approx \Delta MRA \Rightarrow \frac{MB}{MR} = \frac{BC}{RA} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow \frac{BC}{AR} = \frac{CM}{MA} \quad \text{.......(2)}$$

De los triángulos semejantes $\Delta BLO \approx \Delta RAO \Rightarrow \frac{BL}{RA} = \frac{LO}{AO}$ y por ultimo

$\Delta LCO \approx \Delta ASO \Rightarrow \frac{LC}{AS} = \frac{LO}{AO}$ de lo que tenemos $\frac{BL}{RA} = \frac{LC}{AS} = \frac{LO}{AO}$ por lo cual la ecuación $\frac{BL}{LC} = \frac{RA}{AS} \Rightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{AR}{SA}$ ....(3)

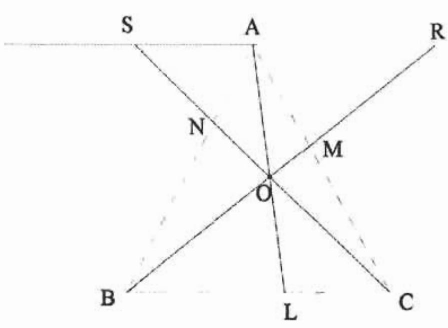


FIGURA 5.2

Multiplicando las ecuaciones (1), (2) y (3) obtenemos la relación;

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{SA}{BC} \cdot \frac{AR}{SA} \cdot \frac{BC}{AR} = 1$$

Para probar el inverso hacemos que BM y CN se intersequen en el punto O y hagamos que AO corte a BC en L', entonces

$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM}{MA}=1$ pero también, $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$ de lo cual se sigue que $\frac{BL}{LC}=\frac{BL'}{L'C}$; entonces L y L' coinciden es decir AL pasa por O, la intersección de BM y CN.

La forma trigonométrica del teorema de Ceva, se obtiene cuando se aplica el teorema generalizado de la bisectriz.

Si tres líneas que parten de los vértices de un triángulo concurren si y solo si (Figura 5.1)

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1 \quad ; \quad \frac{\operatorname{sen}\angle ACN}{\operatorname{sen}\angle NCB}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle BAL}{\operatorname{sen}\angle LAC}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle CBM}{\operatorname{sen}\angle MBA}=1$$

$$\frac{AN}{NB}=\frac{CA\operatorname{sen}\angle ACN}{BC\operatorname{sen}\angle NCB} \quad \text{.......} (4)$$

$$\frac{BL}{LC}=\frac{AB\operatorname{sen}\angle BAL}{CA\operatorname{sen}\angle LAC} \quad \text{.......} (5)$$

$$\frac{CM}{MA}=\frac{BC\operatorname{sen}\angle CBM}{AB\operatorname{sen}\angle MBA} \quad \text{.......} (6)$$

Multiplicando (4) , (5) y (6) tenemos

$$\frac{AN}{NB}\frac{BL}{LC}\frac{CM}{MA}=\frac{CA\operatorname{sen}\angle ACN}{BC\operatorname{sen}\angle NCB}\frac{AB\operatorname{sen}\angle BAL}{CA\operatorname{sen}\angle LAC}\frac{BC\operatorname{sen}\angle CBM}{AB\operatorname{sen}\angle MBA}=1$$

$$\frac{\operatorname{sen}\angle ACN}{\operatorname{sen}\angle NCB}\frac{\operatorname{sen}\angle BAL}{\operatorname{sen}\angle LAC}\frac{\operatorname{sen}\angle CBM}{\operatorname{sen}\angle MBA}=1$$

Para ver que L, M y N puntos de los lados BC, CA y AB respectivamente pueden ser hechos los pasos anteriores en orden inverso y llegamos a que

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

por lo cual los puntos AL, BM y CN concurren.

Siguiendo con el teorema de Ceva, si en uno de los lados de un triángulo es cortado por la línea desde un vértice opuesto en el punto medio, nos lleva a un resultado interesante y nos da un método para trazar una paralela con solo regla en cualquier punto dado de un segmento y su punto medio.(Figura 5.3)

Si $BL = LC$ es decir L punto medio de BC

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1 \Rightarrow \frac{AN}{NB}\cdot\frac{CM}{MA}=1 \Rightarrow \frac{AN}{NB}=\frac{MA}{CM} \quad \text{o} \quad \frac{AN}{NB}=\frac{AM}{MC}$$

sustituyendo $NB = AB - AN$ y $MC = AC - AM$ en la expresión anterior

$$\frac{AN}{AB-AN}=\frac{AM}{AC-AM} \quad \Rightarrow \frac{AB-AN}{AN}=\frac{AC-AM}{AM}$$ de lo cual

$\frac{AB}{AN}-1=\frac{AC}{AM}-1 \Rightarrow \frac{AB}{AN}=\frac{AC}{AM}$ por lo tanto como los lados son proporcionales la recta que pasa por NM es paralela a BC y $\Delta ANM \approx \Delta ABC$.

A continuación se darán los pasos para la construcción de la paralela.

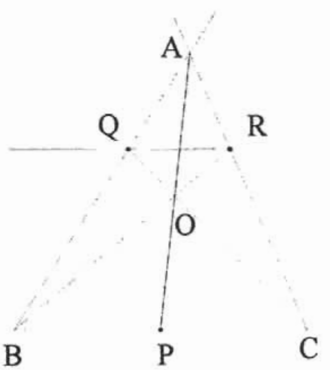


FIGURA 5.3

1. Sea BC un segmento de línea dado y P su punto medio, trazar una paralela a BC por Q un punto cualquiera en el plano.
2. Trazamos una línea de B que pase por Q, la llamaremos BQ.
3. Trazamos la línea por C que corte a BQ en A.
4. Luego unimos A con el punto medio P sobre el lado BC.
5. Trazamos la línea de C a Q la cual corta a AP en un punto que llamaremos O.
6. Trazamos la línea BO que corte a CA en R.
7. Por ultimo unimos los puntos Q y R en QR es la paralela que estamos buscando.

Usando el teorema de Ceva también podemos encontrar el punto medio con solo utilizar regla dadas un segmento de línea y una paralela a ella.

Como mencionamos en el capitulo II las alturas, las bisectrices, las medianas de cualquier triángulo concurren en el ortocentro, incentro y centro de gravedad respectivamente entonces con la ayuda del teorema de Ceva es sencillo probar que estos puntos concurren, como veremos a continuación.

a) Las medianas de un triángulo cualquiera concurren en un punto llamado baricentro.

Sabemos por el teorema de Ceva que

$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ basta demostrar que se cumple esta relación.(Figura 5.4)

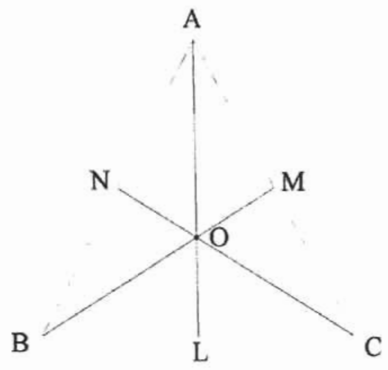


FIGURA 5.4

Por la definición de mediana tenemos que $AN = NB$, $BL = LC$ y $CM = MA$ de lo cual al sustituir resulta que

$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{NB}{NB} \cdot \frac{LC}{LC} \cdot \frac{MA}{MA} = 1$ por lo que las medianas concurren en O.

b) Las bisectrices de un triángulo cualquiera concurren en un punto llamado incentro.

Como vimos anteriormente fue mucho más sencillo aplicar el teorema de Ceva para ver que las mediatrices concurren similarmente esto se hará para ver que las bisectrices concurren. (Figura 5.5)

Por el teorema de la bisectriz tenemos que

$\frac{AB}{CA} = \frac{BL}{LC}$ para la bisectriz en el ángulo $\angle A$

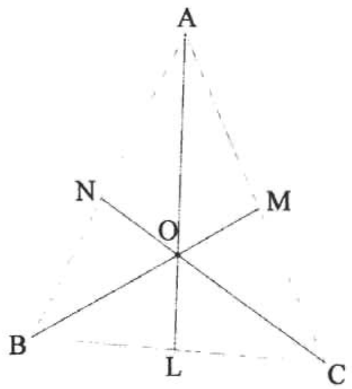


FIGURA 5.5

$\frac{BC}{AB} = \frac{CM}{MA}$ para la bisectriz en el ángulo $\angle B$

$\frac{CA}{BC} = \frac{AN}{NB}$ para la bisectriz en el ángulo $\angle C$, sustituyendo en el teorema de Ceva

$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{AB}{CA} \cdot \frac{BC}{AB} = 1$ por lo tanto las bisectrices concurren en O.

c) Las alturas de un triángulo cualquiera concurren en un punto llamado ortocentro.

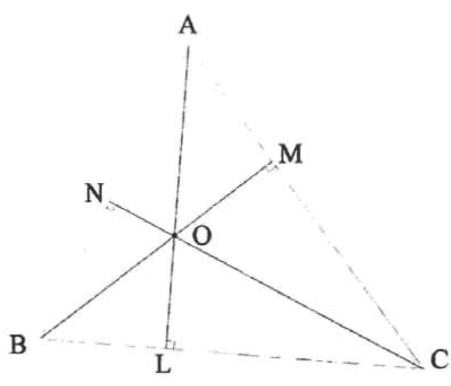


FIGURA 5.6

Aplicando la definición del coseno de un ángulo tenemos que

$$\cos \angle A = \frac{AM}{BA} = \frac{AN}{CA} \quad \text{..........} (1)$$

$$\cos \angle B = \frac{BL}{AB} = \frac{BN}{CB} \quad \text{..........} (2)$$

$$\cos \angle C = \frac{CM}{BC} = \frac{CL}{AC} \quad \text{..........} (3)$$

de las ecuaciones anteriores tenemos que

$$\frac{AM}{BA} = \frac{AN}{CA} \Rightarrow \frac{AN}{MA} = \frac{AC}{BA} \quad \text{..........} (4)$$

$$\frac{BL}{AB} = \frac{BN}{CB} \Rightarrow \frac{BL}{NB} = \frac{BA}{CB} \quad \text{..........} (5)$$

$$\frac{CM}{BC} = \frac{CL}{AC} \Rightarrow \frac{CM}{LC} = \frac{CB}{AC} \quad \text{..........} (6)$$

multiplicando (4), (5) y (6) tenemos

$\frac{AN}{MA} \cdot \frac{BL}{NB} \cdot \frac{CM}{LC} = \frac{AC}{BA} \cdot \frac{BA}{CB} \cdot \frac{CB}{AC} = 1$ por lo tanto concurren en el ortocentro.

Dos puntos muy importantes en los triángulos son el punto de Nagel y el punto de Gergonne los cuales fueron descubiertos por Christian Heinrich von Nagel y Joseph Diaz Gergonne respectivamente.

Si la circunferencia inscrita de cualquier triángulo ABC es tangente a los lados BC CA y AB en P, Q, R respectivamente, las líneas AP, BQ y CR son concurrentes. El punto de concurrencia se llama punto de Gergonne (G) (Joseph Diaz Gergonne, 1771-1859) del triángulo ABC. (Figura 5.7)

Como los lados del triángulo son tangentes al incirculo tenemos que

$AR = QA$, $RB = BP$ y $PC = CQ$ aplicando el teorema de Ceva resulta

$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$ pero $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{QA}{RB} \cdot \frac{RB}{PC} \cdot \frac{PC}{QA} = 1$

por lo tanto las líneas concurre en el punto de Gergonne.

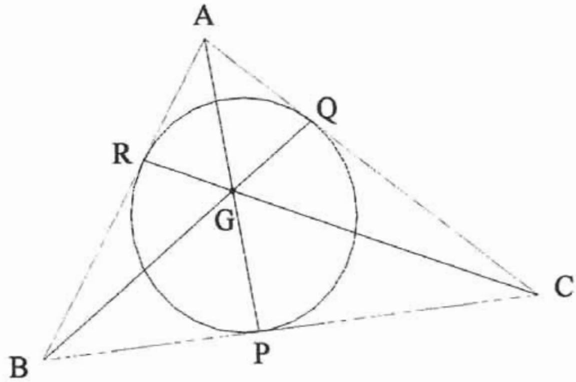


FIGURA 5.7

Las líneas que van de los vértices de un triángulo cualquiera ABC a los puntos de contacto de las circunferencias excritas con los lados opuestos son concurrentes. El punto de concurrencia se llama punto de Nagel (N) (Christian Heinrich von Nagel, 1803-1882) del triángulo ABC. (Figura 5.8)

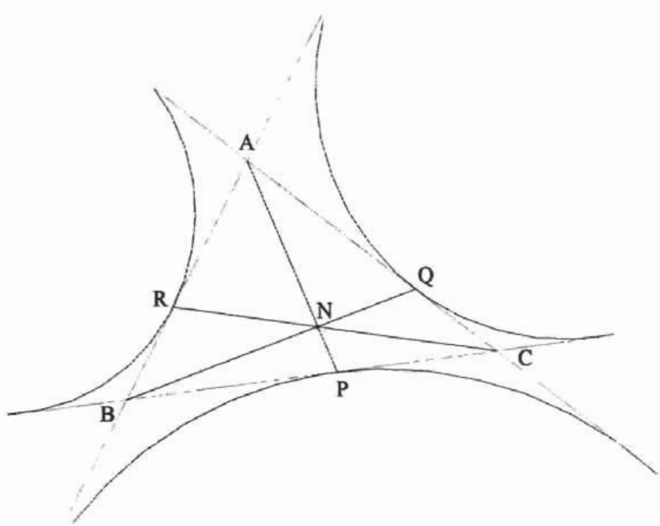


FIGURA 5.8

Por el teorema de Ceva tenemos que demostrar que $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$

Sabemos que en un triángulo $AB + BC + CA = 2S$, donde S es el semiperimetro.

$(AR + RB) + BC + CA = 2S$ entonces $(CA + AR) + (RB + BC) = 2S$ de lo cual tenemos $CA + AR = S$, $RB + BC = S$ por ser tangentes a la respectiva circunferencia excrita, despejamos a AR, RB y tenemos

$AR = S - CA$, $RB = S - BC$ de manera análoga con los otros dos lados BC, CA y queda

$BP = S - AB$, $PC = S - CA$ y

$CQ = S - BC$, $QA = S - AB$ sustituyendo en el teorema de Ceva

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{S - CA}{S - BC} \cdot \frac{S - AB}{S - CA} \cdot \frac{S - BC}{S - AB} = 1$$

Por lo tanto las líneas que parten del vértice al lado opuesto del triángulo en el punto de tangencia de la circunferencia excrita son concurrentes en el punto de Nagel.

5.02 Teorema de Menelao

El teorema que lleva su nombre esta en un trabajo escrito por Menelao de Alejandría (no confundir con Menelao rey de Esparta) cerca del final del primer siglo d.C. el teorema de Menelao nos da un criterio de colinelidad de puntos, mientras el teorema de Ceva refiere un criterio de concurrencia de líneas.

Si una línea recta intersecta los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC en L, M y N respectivamente, entonces $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$, e inversamente, si L, M y N son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC para la cual vale la relación anterior, entonces L, M y N son colineales.(Figura 5.9)

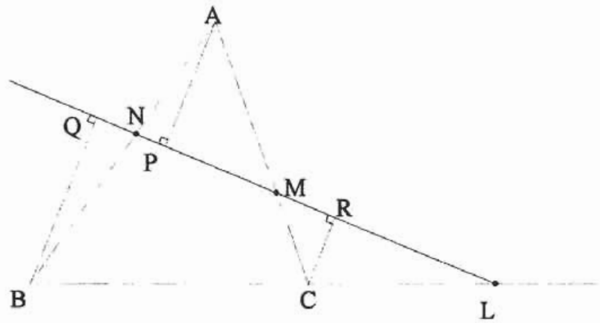


FIGURA 5.9

Para la demostración de este teorema, trazamos perpendiculares por cada vértice A, B y C a la línea LMN, llamándolas AP, BQ y CR respectivamente, entonces tenemos los siguientes triángulos semejantes por el criterio (AAA). Siempre se esta tomando en cuenta los segmentos dirigidos.

$$\Delta NAP \approx \Delta NBQ \Rightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{AP}{BQ} = \frac{NP}{NQ} \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{AP}{QB} \qquad \text{.......(1)}$$

$$\Delta CMR \approx \Delta AMP \Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{MR}{MP} = \frac{CR}{AP} \Rightarrow \frac{CM}{MA} = \frac{RC}{AP} \qquad \text{.......(2)}$$

$$\Delta BLQ \approx \Delta CLR \Rightarrow \frac{BL}{CL} = \frac{LQ}{LR} = \frac{BQ}{CR} \Rightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{QB}{CR} \qquad \text{.......(3)}$$

multiplicando (1), (2) y (3) tenemos que

$$\frac{AN}{NB}\frac{BL}{LC}\frac{CM}{MA} = \frac{AP}{QB}\frac{RC}{AP}\frac{QB}{CR} = \frac{RC}{CR} = -\frac{CR}{CR} = -1$$, por lo tanto

$$\frac{AN}{NB}\frac{BL}{LC}\frac{CM}{MA} = -1$$

Para la demostración del inverso supondremos que existe MN tal que corte a la línea BC en L′ entonces $\frac{AN}{NB}\frac{BL'}{L'C}\frac{CM}{MA} = -1$, pero sabemos que $\frac{AN}{NB}\frac{BL}{LC}\frac{CM}{MA} = -1$ entonces $\frac{BL'}{L'C} = \frac{BL}{LC}$ por lo tanto L′ coincide con L.

También para el teorema de Menelao existe la forma trigonométrica utilizando el teorema generalizado de la bisectriz.

Para demostrarlo construimos unas líneas auxiliares BM, CN y AL ver (Figura 5.10)

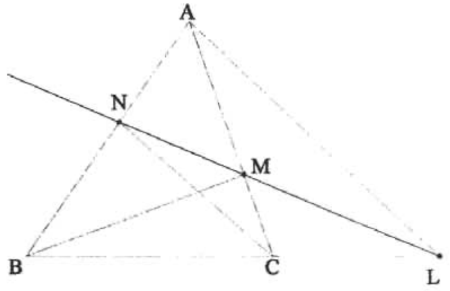


FIGURA 5.10

$$\frac{AN}{NB} = \frac{CA\,\text{sen}\,\angle ACN}{BC\,\text{sen}\,\angle NCB} \quad \text{......................} (4)$$

$$\frac{BL}{CL} = -\frac{BL}{LC} = \frac{AB\,\text{sen}\,\angle BAL}{CA\,\text{sen}\,\angle LAC} \quad \text{......................} (5)$$

$$\frac{CM}{MA} = \frac{BC\,\text{sen}\,\angle CBM}{AB\,\text{sen}\,\angle MBA} \quad \text{......................} (6)$$

multiplicando (4), (5) y (6) tenemos que

$$\frac{AN}{NB}\left(-\frac{BL}{LC}\right)\frac{CM}{MA} = \frac{CA\,\text{sen}\,\angle ACN}{BC\,\text{sen}\,\angle NCB}\,\frac{AB\,\text{sen}\,\angle BAL}{CA\,\text{sen}\,\angle LAC}\,\frac{BC\,\text{sen}\,\angle CBM}{AB\,\text{sen}\,\angle MBA} = -1 \quad \text{entonces}$$

$$\frac{\text{sen}\,\angle ACN}{\text{sen}\,\angle NCB}\,\frac{\text{sen}\,\angle BAL}{\text{sen}\,\angle LAC}\,\frac{\text{sen}\,\angle CBM}{\text{sen}\,\angle MBA} = -1$$

La prueba del inverso del inverso de este teorema se puede hacer los pasos anteriores en orden inverso.

5.03 Teorema de división interna y externa

El teorema de división interna y externa dice que si L, M y N son puntos cuales quiera en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC tales que AL, BM y CN son concurrentes y si la línea NM interseca a BC en L', entonces L y L' dividen al segmento BC interna y externamente en la misma razón. (Figura 5.11)

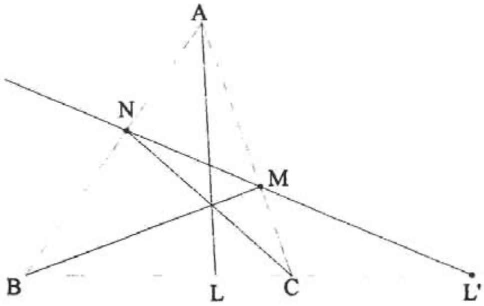


FIGURA 5.11

Para la demostración de este teorema utilizaremos el Teorema de Ceva y Menelao, una de las hipótesis nos dice que AL, BM y CN son concurrentes, tenemos por el teorema de Ceva que

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA} = 1 \quad\dots\dots(1)$$

Y como N, M, L' son colineales, por el teorema de Menelao

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM}{MA} = -1 \quad\dots\dots(2)$$

De (1) y (2) $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA} = -\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM}{MA} \Rightarrow \frac{BL}{LC} = -\frac{BL'}{L'C}$

$\therefore \frac{BL}{LC} = -\frac{BL'}{L'C}$ de esta ecuación se ve que L y L' dividen al segmento BC interna y externamente en la misma razón.

En la figura anterior los tres puntos B, L y C están dados; el punto L' esta determinado de manera única, ya que hay un solo punto que divide externamente en la misma razón numérica en la que un punto dado divide al segmento internamente.

Para concluir diremos que B, L y C tres puntos fijos en una línea, si A es un punto fuera de esta línea, y M y N son puntos cualesquiera en los lados CA y AB del triangulo ABC de tal forma que AL, BM y CN son concurrentes, entonces la línea MN intersecará la línea BC en un punto fijo.

Entonces encontramos otra forma para construir una hilera armónica dado un segmento de línea y un punto conjugado. Como ya vimos el punto conjugado del punto medio es el punto al infinito y esto tiene que ver con la construcción de la paralela en el teorema de Ceva.

5.04 Teorema de Desargues

Antes de mencionar el teorema de Desargues mencionaremos la definición de figuras en perspectiva. Se dice que dos figuras están en perspectiva, si todas las líneas que unen puntos correspondientes de las dos figuras, son concurrentes. El punto por el cual pasan estas líneas es llamado el centro de perspectiva.

Las figuras homotéticas están en perspectiva, pero las figuras en perspectiva, no necesariamente son homotéticas, puesto que líneas correspondientes de figuras en perspectiva, no son paralelas en general.

El teorema de Desargues (Gérard Desargues 1593-1622) dice que si dos triángulos están en perspectiva, los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales; e inversamente, si los puntos de intersección de lados correspondientes de dos triángulos son colineales, los triángulos están en perspectiva.

Para la demostración de este teorema sean los triángulos ABC y $A'B'C'$ en perspectiva, con centro de perspectiva llamado O, y hagamos que AB y $A'B'$ se corten en P, BC y $B'C'$ en Q y CA y $C'A'$ en R.(Figura 5.12)

Para ver que los puntos P, Q, R sean colineales se debe cumplir el teorema de Menelao

$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$ con esto garantizamos que son colineales .

Ahora del triángulo ABO y los puntos $A'B'P$ como transversal obtenemos

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1 \quad \text{.......} (1)$$

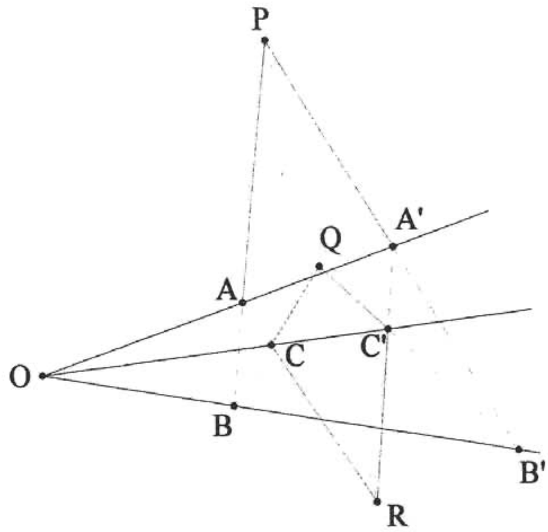


FIGURA 5.12

Análogamente del triángulo BCO y los puntos $B'C'Q$ como transversal obtenemos

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1 \quad \text{.......} (2)$$

Y por ultimo el triángulo CAO y los puntos A'C'R como transversal obtenemos

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1 \quad \text{(3)}$$

Luego si realizamos el producto de las tres ecuaciones tenemos:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1$$

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{B'O}{BB'} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1$$

$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$ por lo que los puntos P, Q, R son colineales.

Para el regreso, sean dados P, Q, R colineales y considere a los triángulos AA'R y BB'Q.

Estos triángulos están en perspectiva con P como centro de perspectiva, ya que las que pasan por los vértices de los triángulos mencionados concurren en P.

Más aun $AA' \cap BB'$ concurren en O, $A'R \cap B'Q$ concurren en C' y $RA \cap QB$ concurren en C.

$\therefore$ AA', BB', CC' concurren en O.

Para concluir diremos que la línea donde están los puntos P, Q y R es el eje de perspectiva de los triángulos ABC y A'B'C'.

Lo establecido en este teorema, tiene que ver con propiedades proyectivas de figuras a las que se aplica. Y como esto está tan relacionado con las ideas de concurrencia y colinealidad, y tales ideas son básicas e importantes en el campo de la geometría proyectiva, algunas veces se le toma como el teorema fundamental de la geometría proyectiva.

5.05 Teorema de la mariposa

Sea M punto medio de la cuerda PQ de un círculo y AB , CD son dos cuerdas que pasan por M . Por demostrar que M es el punto medio del segmento XY , donde X y Y son puntos donde AD y BC cortan a la cuerda PQ. (Figura 5.13)

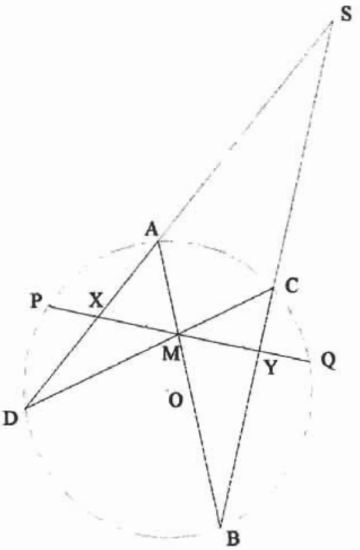


FIGURA 5.13

Para la demostración de este teorema utilizaremos el teorema de Menelao y el teorema de la potencia en un punto, en el triángulo XSY aplicamos Menelao, ya que es cortado por dos líneas transversales AMB y CMD entonces tenemos que:

Para la línea AMB

$$\frac{XA}{AS} \cdot \frac{SB}{BY} \cdot \frac{YM}{MX} = -1 \qquad (1)$$

Para la línea CMD

$$\frac{YC}{CS} \cdot \frac{SD}{DX} \cdot \frac{XM}{MY} = -1 \qquad (2)$$

Dividiendo y reagrupando (1) y (2) resulta

$$\frac{\frac{XA}{AS} \cdot \frac{SB}{BY} \cdot \frac{YM}{MX}}{\frac{YC}{CS} \cdot \frac{SD}{DX} \cdot \frac{XM}{MY}} = 1 \Rightarrow \frac{XA}{AS} \cdot \frac{SB}{BY} \cdot \frac{YM}{MX} \cdot \frac{CS}{YC} \cdot \frac{DX}{SD} \cdot \frac{MY}{XM} = 1 \text{ ;}$$

$$\frac{XA}{SA} \cdot \frac{SB}{YB} \cdot \frac{MY}{MX} \cdot \frac{SC}{YC} \cdot \frac{XD}{SD} \cdot \frac{MY}{MX} = 1 \qquad (3)$$

Además por el teorema de la potencia en un punto sabemos que

$SA \cdot SD = SC \cdot SB$ en el punto exterior a la circunferencia S y $XA \cdot XD = XP \cdot XQ$, $YC \cdot YB = YP \cdot YQ$ ya que Y, X son puntos interiores de la circunferencia. Sustituyendo en la ecuación numero (3).

$$\frac{XP}{YP} \cdot \frac{XQ}{YQ} \cdot \frac{MY^2}{MX^2} = 1 \quad \text{.......} (4)$$

De la figura observamos que

$XP = MP - MX$, $XQ = XM + MQ$, $YP = YM + MP$ y $YQ = MQ - MY$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (4) tenemos

$\dfrac{(MP - MX)}{(YM + MP)} \cdot \dfrac{(XM + MQ)}{(MQ - MY)} \cdot \dfrac{MY^2}{MX^2} = 1$, por hipótesis tenemos que $PM = MQ$;

Llamemos a $PM = MQ = a$, $XM = x$ y $YM = y$ para facilidad en las operaciones, ahora sustituyamos

$$\frac{(a - x)}{(y + a)} \cdot \frac{(x + a)}{(a - y)} \cdot \frac{y^2}{x^2} = 1 \qquad \Rightarrow \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} = 1$$

$$a^2 y^2 - x^2 y^2 = a^2 x^2 - y^2 x^2 \qquad \Rightarrow a^2 y^2 = a^2 x^2$$

$$y^2 = x^2 \Rightarrow y = x$$

Por lo tanto decimos $XM = MY$, que es lo que queríamos demostrar.

5.06 Teorema de Carnot

Si una circunferencia intersecta los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC en los puntos $D, D'; E, E'$ y F, F' respectivamente entonces

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} = 1$$

Hagamos referencia a la figura 5.14

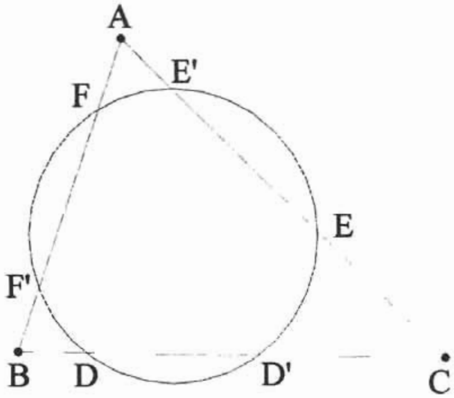


FIGURA 5.14

Por las propiedades de potencia de una circunferencia vistas en el capitulo III tenemos

$$AF\,AF' = AE\,AE' \Rightarrow \frac{AF\,AF'}{AE\,AE'} = 1 \quad \text{.......(1)}$$

$$BD\,BD' = BF'\,BF \Rightarrow \frac{BD\,BD'}{BF'\,BF} = 1 \quad \text{.......(2)}$$

$$CE\,CE' = CD'\,CD \Rightarrow \frac{CE\,CE'}{CD'\,CD} = 1 \quad \text{.......(3)}$$

multiplicando (1) , (2) y (3) resulta

$\frac{AF}{AE} \cdot \frac{AF'}{AE'} \cdot \frac{BD}{BF'} \cdot \frac{BD'}{BF} \cdot \frac{CE}{CD'} \cdot \frac{CE'}{CD} = 1$ reordenando y respetando las direcciones

$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} = 1$ que es el resultado buscado.

Mas aun si AD, BE, CF son concurrentes es decir $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ entonces

$\frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} = 1$ y las líneas AD', BE', CF' también son concurrentes.

5.07 Teorema de Morley

Uno de los teoremas más sorprendentes de la geometría elemental fue descubierto por Frank Morley entre los años 1899 a 1904. Se lo contó a sus amigos, que lo extendieron a manera de chisme matemático, finalmente luego de diez años, se publicaron dos demostraciones, una trigonométrica de M. Satyanarayana y otra elemental de M. T. Naraniengar.

El teorema dice que los tres puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo cualquiera forman un triángulo equilátero.

Es decir en cualquier triángulo ABC se tiene un triángulo equilátero PQR, al trisecar lo ángulos $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ por medio de AQ y AR, BR y BP, CP y CQ, como se muestra en la figura 5.15. Para la demostración que seguirá a continuación utilizaremos la ley de senos, la ley de cosenos y algunas propiedades trigonométricas.

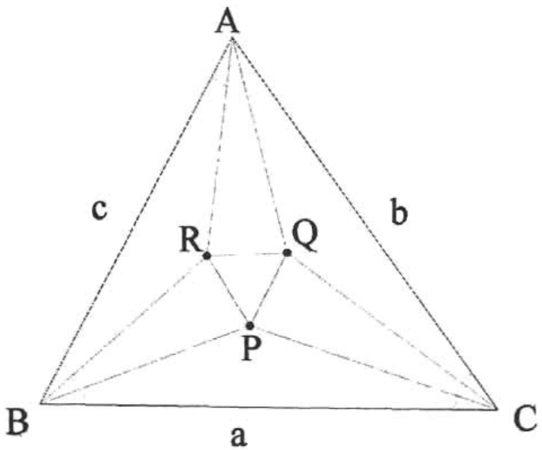


FIGURA 5.15

Hay que demostrar que los lados PR, RQ, PQ son iguales. Para mayor facilidad en la notación nombremos los siguientes ángulos como

$\angle BAR = \angle RAQ = \angle QAC = \alpha$,

$\angle ABR = \angle RBP = \angle PBC = \beta$ y

$\angle BCP = \angle PCQ = \angle QCA = \gamma$

Aplicando la ley de senos en el triángulo BAR y que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\angle BRA)$ porque es el complemento del tercer ángulo de dicho triángulo.

$$\frac{AR}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Considerando la interpretación geométrica de la ley de senos y el circuncentro del triángulo ABC.

$$\frac{c}{\operatorname{sen} 3\gamma} = 2r \quad \Rightarrow c = 2r \cdot \operatorname{sen} 3\gamma \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por otro lado sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triangulo es $2 \perp$ para el triángulo ABC tenemos

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 2 \perp \qquad \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \tfrac{2}{3} \perp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) y despejando AR

$$AR = \frac{2r \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen} 3\gamma}{\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3} \perp - \gamma)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

pero

$$\operatorname{sen} 3\gamma = \operatorname{sen}(2\gamma + \gamma) = \operatorname{sen} 2\gamma \cdot \cos\gamma + \cos 2\gamma \cdot \operatorname{sen}\gamma$$
$$= 2\operatorname{sen}\gamma \cdot \cos\gamma \cdot \cos\gamma + \left(1 - 2\operatorname{sen}^2\gamma\right)\operatorname{sen}\gamma = 2\operatorname{sen}\gamma \cdot \cos^2\gamma + \operatorname{sen}\gamma - 2\operatorname{sen}^3\gamma$$
$$= 2\operatorname{sen}\gamma\left(1 - \operatorname{sen}^2\gamma\right) + \operatorname{sen}\gamma - 2\operatorname{sen}^3\gamma = 3\operatorname{sen}\gamma - 4\operatorname{sen}^3\gamma$$
$$\therefore\ \operatorname{sen} 3\gamma = 3\operatorname{sen}\gamma - 4\operatorname{sen}^3\gamma \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Sustituyendo (5) en (4)

$$AR = \frac{2r \cdot \operatorname{sen}\beta\left(3\operatorname{sen}\gamma - 4\operatorname{sen}^3\gamma\right)}{\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3} \perp - \gamma)} = \frac{2r \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma\left(3 - 4\operatorname{sen}^2\gamma\right)}{\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3} \perp - \gamma)}$$

dividiendo entre 4 tenemos

$$= \frac{2r \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma\left(\frac{3}{4} - \operatorname{sen}^2\gamma\right)}{\frac{1}{4}\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3} \perp - \gamma)} = \frac{8r \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \operatorname{sen}^2\gamma\right)}{\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3} \perp - \gamma)}$$

pero $\quad \operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2(\tfrac{2}{3}\perp) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ por lo que

$$AR = \frac{8r \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma\left(\operatorname{sen}^2 \tfrac{2}{3}\perp - \operatorname{sen}^2\gamma\right)}{\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp - \gamma)} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

pero

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{2}{3}\perp - \operatorname{sen}^2\gamma = \operatorname{sen}^2 \tfrac{2}{3}\perp (1) - \operatorname{sen}^2\gamma = \operatorname{sen}^2 \tfrac{2}{3}\perp \left(\operatorname{sen}^2\gamma + \cos^2\gamma\right) - \operatorname{sen}^2\gamma$$
$$= \operatorname{sen}^2(\tfrac{2}{3}\perp)\cdot\operatorname{sen}^2\gamma + \operatorname{sen}^2(\tfrac{2}{3}\perp)\cdot\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma$$
$$= \operatorname{sen}^2(\tfrac{2}{3}\perp)\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma\left[1 - \operatorname{sen}^2(\tfrac{2}{3}\perp)\right] = \operatorname{sen}^2(\tfrac{2}{3}\perp)\cos^2\gamma - \ldots$$
$$\ldots - \operatorname{sen}^2\gamma \cdot \cos^2(\tfrac{2}{3}\perp)$$

luego sumamos un cero de esta forma

$$= \operatorname{sen}^2(\tfrac{2}{3}\perp)\cos^2\gamma - \operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp)\cos(\tfrac{2}{3}\perp)\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma + \operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp)\cos(\tfrac{2}{3}\perp)\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma\cdot\cos^2(\tfrac{2}{3}\perp)$$

factorizando y aplicando una propiedad trigonométrica

$$= \left(\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp)\cos\gamma - \cos(\tfrac{2}{3}\perp)\operatorname{sen}\gamma\right)\left(\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp)\cos\gamma + \cos(\tfrac{2}{3}\perp)\operatorname{sen}\gamma\right)$$
$$= \left(\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp - \gamma)\right)\left(\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp + \gamma)\right)$$

$$\therefore\ \operatorname{sen}^2 \tfrac{2}{3}\perp - \operatorname{sen}^2\gamma = \left(\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp - \gamma)\right)\left(\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp + \gamma)\right) \ldots\ldots\ldots (7)$$

Sustituyendo (7) en (6)

$$AR = \frac{8r \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma\left(\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp - \gamma)\right)\left(\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp + \gamma)\right)}{\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp - \gamma)} = 8r\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\left(\operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp + \gamma)\right)$$

$$\therefore\ AR = 8r \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma \cdot \operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp + \gamma) \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

A partir de los resultados anteriores podemos darnos cuenta que

$$AQ = 8r \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma \cdot \operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\perp + \beta) \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Consideremos ahora el triángulo ARQ aplicando la ley de cosenos queda

$$RQ^2 = AR^2 + AQ^2 - 2ARAQ\cos\alpha$$

$$RQ^2 = (8r\,\text{sen}\beta\text{sen}\,\gamma\text{sen}\,(\tfrac{2}{3}\perp +\gamma))^2 + (8r\,\text{sen}\beta\text{sen}\,\gamma\text{sen}\,(\tfrac{2}{3}\perp +\beta))^2 - \ldots$$
$$\ldots - 2\,(8r\,\text{sen}\beta\text{sen}\,\gamma\text{sen}\,(\tfrac{2}{3}\perp +\gamma))\,(8r\,\text{sen}\beta\text{sen}\,\gamma\text{sen}\,(\tfrac{2}{3}\perp +\beta))\cos\alpha$$

factirozando $64r^2\text{sen}^2\beta\text{sen}^2\gamma$ tenemos que

$$RQ^2 = 64r^2\,\text{sen}^2\beta\text{sen}^2\gamma\,(\text{sen}^2\,(\tfrac{2}{3}\perp +\gamma) + \text{sen}^2\,(\tfrac{2}{3}\perp +\beta) - \ldots$$
$$\ldots - 2\text{sen}\,(\tfrac{2}{3}\perp +\gamma)\,\text{sen}\,(\tfrac{2}{3}\perp +\beta)\cos\alpha)$$

Para calcular la parte que esta entre paréntesis haremos un cambio de variables como se menciona a continuación.

$x = \tfrac{2}{3}\perp +\beta\,,\quad y = \tfrac{2}{3}\perp +\gamma\,,\quad z = \alpha$ pero como $\alpha + \beta + \gamma = \tfrac{2}{3}\perp$

$$x + y + z = \tfrac{2}{3}\perp +\beta + \tfrac{2}{3}\perp +\gamma + \alpha = \tfrac{2}{3}\perp +\beta + \tfrac{2}{3}\perp +\gamma + \tfrac{2}{3}\perp - (\beta + \gamma)$$
$$\Rightarrow x + y + z = 2\perp$$

luego $\cos\alpha = \cos z = \cos(2\perp - (x + y)) = \cos(x + y)$, sustituyendo

$$\begin{aligned}
&\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y - 2\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y\cos(x + y) = \\
&= \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y - 2\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y(\cos x\cos y - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y) = \\
&= \text{sen}^2 x\,(1 - \text{sen}^2 y) + \text{sen}^2 y\,(1 - \text{sen}^2 x) + 2\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y\cos x\cos y = \\
&= \text{sen}^2 x\cos^2 y + \text{sen}^2 y\cos^2 x + 2\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y\cos x\cos y = \\
&= (\text{sen}\,x\cos y + \text{sen}\,y\cos x)^2 = \text{sen}^2(x + y) = \text{sen}^2(z) = \text{sen}^2\alpha
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \text{sen}^2\alpha = \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y - 2\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y\cos(x + y) \ldots\ldots (10)$$

por lo tanto si sustituimos (10) en RQ^2 tenemos que

$RQ^2 = 64r^2\,\text{sen}^2\beta\text{sen}^2\gamma\text{sen}^2\alpha$ si tomamos la raíz cuadrada

$$RQ = 8r\,\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta \cdot \text{sen}\,\gamma \ldots\ldots (11)$$

por simetría que tiene la figura tenemos de manera análoga que

$$QP = 8r\,\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta \cdot \text{sen}\,\gamma \ldots\ldots (12)$$

$$RP = 8r\,\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta \cdot \text{sen}\,\gamma \ldots\ldots (13)$$

De las ecuaciones (11),(12) y (13) tenemos que $RP = RQ = QP$ por lo tanto el triángulo RPQ es un triángulo equilátero.

5.08 Teorema de Miquel

En el presente teorema, el punto central O es uno de los puntos más notables del triángulo, como ya se vio anteriormente puntos tales como el centro de la circunferencia de los nueve puntos, el ortocentro, circuncentro, etc. simplemente el significado parece no haber sido apreciado anteriormente. Este resultado es clave para encontrar diversos teoremas de gran presencia.

Si D, E, F son tres puntos cualesquiera en los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, entonces las circunferencias que pasan por tercias de puntos B, D, F ; C, E, D y A, F, E tienen un punto en común. (Figura 5.16)

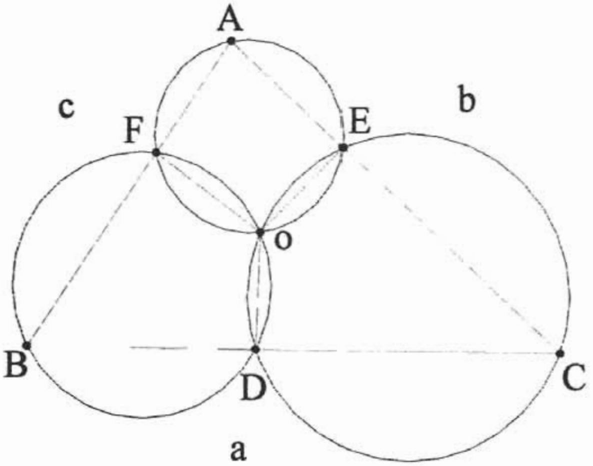


FIGURA 5.16

Antes de realizar la prueba de que el punto O es el punto en común de las tres circunferencias veremos el siguiente resultado que tiene que ver con las antiparalelas vistas en el capitulo III de este trabajo.

Si por un punto cualquiera en el plano de un triángulo cuyos lados son las líneas a, b, c, se trazan tres líneas p, q, r, de tal forma que p y b sean antiparalelas con respecto a a y q y p y c sean antiparalelas con respecto a a y r, entonces q y c son antiparalelas con respecto a b y r.

Ya que la propiedad de antiparalelismo depende solamente de las direcciones relativas de las líneas involucradas, podemos sin perder generalidad, tomar el punto de intersección O de las líneas p, q, r en un triángulo.

Las siguientes ecuaciones se tienen ya que en un cuadrilátero cíclico los lados opuestos son antiparalelos a los otros dos y la suma de los ángulos opuestos es igual a dos rectos.

$\angle DOE + \angle DCE = 2 \perp \quad \Rightarrow \angle DOE = 2 \perp - \angle DCE$ ....(1)

$\angle FOD + \angle FDB = 2 \perp \quad \Rightarrow \angle FOD = 2 \perp - \angle FDB$ ....(2)

Sumando las ecuaciones (1) y (2) tenemos

$\angle DOE + \angle FOD = 4 \perp - (\angle DCE + \angle FDB)$

pero $\angle DCE + \angle FDB = 2 \perp - \angle FAE$ porque es el complemento del ángulo restante del triangulo y $\angle DOE + \angle FOD = 4 \perp - \angle EOF$ ya que la suma de los ángulos alrededor de O es igual a $4 \perp$.

$4 \perp - \angle EOF = 4 \perp - (2 \perp - \angle FAE) \quad \Rightarrow \angle EOF = 2 \perp - \angle FAE$

por lo tanto q y c son antiparalelas con respecto a b y r

Concluimos ahora que para cualquier posición del punto O, que es común a las circunferencias por B, D, F y por C, E, D. La condición de antiparalelismo garantiza que OF y EA son antiparalelos con respecto a OE y FA, por lo tanto los puntos A, F, E, O son concíclicos.

El punto O es llamado punto de Miquel de la tercia D, E, F, con respecto al triángulo ABC, el triángulo DEF es llamado el triángulo de Miquel de O y por ultimo las tres circunferencias referidas en el teorema son llamadas las circunferencias de Miquel de los puntos D, E, F.

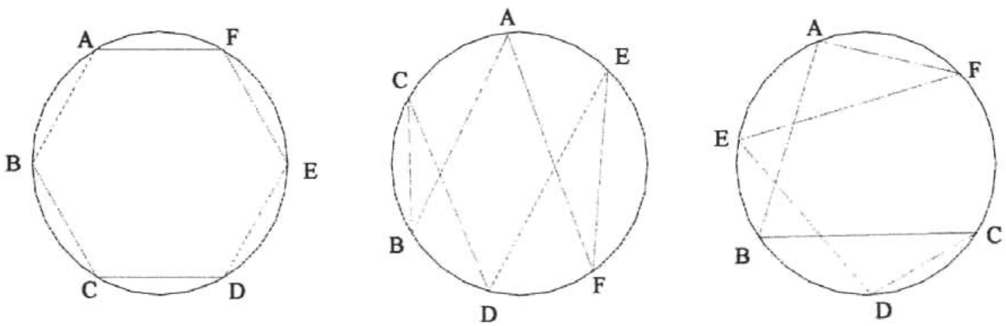
5.09 Teorema de Pascal

El teorema de Pascal es muy importante en geometría, fue descubierto por el filósofo y matemático Blas Pascal (1623-1662) cuando tenía tan solo dieciséis años de edad en 1639.

Los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una circunferencia son colineales.

Antes de probar el teorema tomemos en cuenta las siguientes consideraciones sobre hexágonos inscritos en circunferencias

1) Dos vértices de un hexágono decimos que son adyacentes, alternados u opuestos, teniendo en cuenta como están separados por un lado, dos lados o tres lados.



a b c

FIGURA 5.17

2) En un hexágono ABCDEF, F y B son vértices adyacentes de A; E y C son vértices alternativos de A, y por ultimo D es vértice opuesto A. (Figura 5.17)

3) La unión de dos vértices opuestos la llamamos línea diagonal, de esta manera un hexágono tiene siempre tres líneas diagonales que son AD, BE y CF. Análogamente un Hexágono tiene tres pares de lados opuestos los cuales son AB y DE, BC y EF y CD y AF.

Nosotros llamaremos a los hexágonos como ABCDEF pero hay doce formas de llamar al mismo hexágono; solo uno de estos seis vertieres puede llamarse A, el otro vértice adyacente puede llamarse B y el resto son determinados por el orden alfabético.

Seis puntos, tres a tres no colineales, pueden llamarse con las letras A, B, C, D, E y F en 6! Formas es decir 720 veces, pero el número de hexágonos distintos determinados por seis puntos es $720/12 = 60$.

En la figura 5.17 vemos tres tipos de los 60 hexágonos determinados por seis puntos, el hexágono convexo es el más conocido, pero los otros dos tipos también son hexágonos.

Para la prueba del teorema utilizaremos la figura 5.18 que a continuación se presenta. Sea ABCDEF un hexágono inscrito en una circunferencia, N, L y M los puntos de intersección de los lados opuestos del hexágono, nombremos U la intersección de CD y EF, V la intersección de EF y AB por ultimo W la intersección de CD con AB.

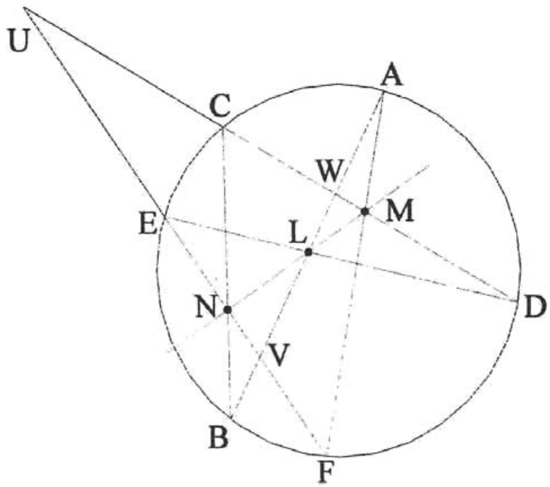


FIGURA 5.18

Fijémonos en el triángulo UVW y las líneas LDE, AMF y BCN para aplicar el teorema de Menelao entonces tenemos

$$\frac{UE}{EV} \cdot \frac{VL}{LW} \cdot \frac{WD}{DU} = -1 \qquad (1)$$

$$\frac{UF}{FV} \cdot \frac{VA}{AW} \cdot \frac{WM}{MU} = -1 \qquad (2)$$

$$\frac{UN}{NV} \cdot \frac{VB}{BW} \cdot \frac{WC}{CU} = -1 \qquad (3)$$

multiplicando (1), (2) y (3) resulta

$$\frac{UE}{EV} \cdot \frac{VL}{LW} \cdot \frac{WD}{DU} \cdot \frac{UF}{FV} \cdot \frac{VA}{AW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UN}{NV} \cdot \frac{VB}{BW} \cdot \frac{WC}{CU} = -1$$

pero por el teorema de potencia de un punto respecto a una circunferencia

$$UE \cdot UF = UC \cdot UD \Rightarrow \frac{UE \cdot UF}{UC \cdot UD} = 1 \qquad (4)$$

$$VA \cdot VB = VE \cdot VF \quad \Rightarrow \quad \frac{VA \cdot VB}{VE \cdot VF} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$WC \cdot WD = WA \cdot WB \Rightarrow \frac{WC \cdot WD}{WA \cdot WB} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$\frac{UE}{CU} \cdot \frac{UF}{DU} \cdot \frac{VA}{EV} \cdot \frac{VB}{FV} \cdot \frac{WC}{AW} \cdot \frac{WD}{BW} \cdot \frac{VL}{LW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UN}{NV} = -1$ entonces queda

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{VL}{LW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UN}{NV} = \frac{VL}{LW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UN}{NV} = -1$$

por lo tanto los puntos N, L y M son colineales.

5.10 Teorema de Pappus

Este teorema conocido como uno de los más grandes de la geometría plana, probado por primera vez por Pappus de Alejandría alrededor de 300 A.D., pero dicho teorema juega un papel importante en los fundamentos de la geometría proyectiva, junto con el teorema de Desargues, fue reconocido por su importancia hasta dieciséis siglos después. Pappus fue apropiadamente llamado el último de los geómetras más grandes de la antigüedad. El teorema particular que lleva su nombre pero dicho tiene varios caminos, uno de los cuales es el siguiente.

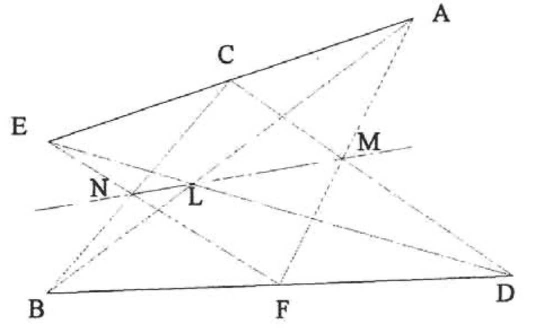


FIGURA 5.19

Si A, C, E son tres puntos en una línea, B, D, F en otra línea, y si las tres líneas AB, CD, EF cruzan con DE, FA, BC, respectivamente, entonces los tres puntos L, M, N son colineales

La proyectividad natural de este teorema se ve en el hecho que es un teorema de incidencia de puras de líneas, el cual no esta afectado por medidas de longitudes y ángulos y ni siquiera una referencia de orden: en cada selección de tres puntos colineales no importando que posición tenga uno entre los otro dos. En la figura 5.19 se muestra un camino, pero en el siguiente diagrama mostramos otro camino (figura 5.20) que es pertinente mencionar.

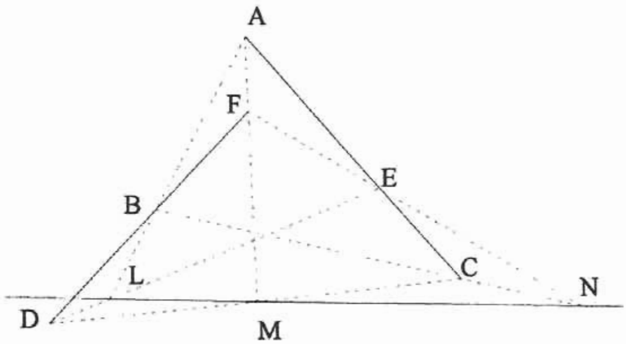


FIGURA 5.20

Podemos llamar permutaciones cíclicamente de las letras A, B, C, D, E, F, con la precaución de renombrar las letras L, M, N.

Para la demostración aplicamos el teorema de Menelao en las siguientes líneas (Figura 5.21. Siempre utilizaremos el triángulo UVW

Para la línea LDE

$$\frac{VL}{LW} \cdot \frac{WD}{DU} \cdot \frac{UE}{EV} = -1 \quad \text{(1)}$$

Para la línea AMF

$$\frac{VA}{AW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UF}{FV} = -1 \quad \text{(2)}$$

Para la línea BCN

$$\frac{VB}{BW} \cdot \frac{WC}{CU} \cdot \frac{UN}{NV} = -1 \quad \text{(3)}$$

multiplicando las ecuaciones (1), (2), (3)

$$\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UE}{EV}\cdot\frac{VA}{AW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UF}{FV}\cdot\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UN}{NV} = -1 \quad \ldots\ldots (4)$$

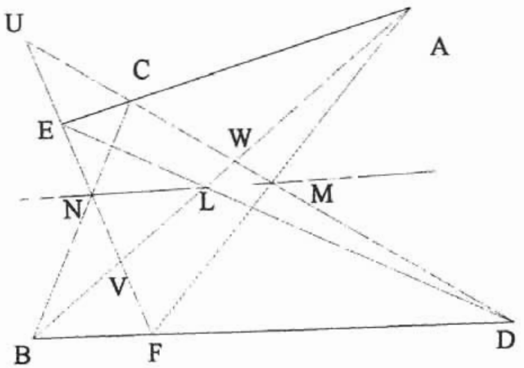


FIGURA 5.21

Ahora con Menelao a las rectas

Para la línea ACE

$$\frac{VA}{AW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UE}{EV} = -1 \quad \ldots\ldots (5)$$

Para la línea BDF

$$\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UF}{FV} = -1 \quad \ldots\ldots (6)$$

Multiplicando (5) y (6) tenemos

$$\frac{VA}{AW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UE}{EV}\cdot\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UF}{FV} = 1 \quad \ldots\ldots (7)$$

Dividiendo (4) y (7) y reduciendo

$$\frac{\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UE}{EV}\cdot\frac{VA}{AW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UF}{FV}\cdot\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UN}{NV}}{\frac{VA}{AW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UE}{EV}\cdot\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UF}{FV}} = -1 \quad \text{entonces}$$

$\therefore \frac{VL}{LW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UN}{NV} = -1$ y los puntos L, M, N son colineales.

Conclusiones

La geometría desde sus inicios dio al hombre una herramienta poderosa para resolución de muchos problemas que en su vida cotidiana se presentaron, una gran parte de los resultados conocidos hoy en día fueron descubiertos por medio de una experimentación rudimentaria que permaneció durante largo tiempo, hasta que llegaron los griegos con las primeras ideas del método científico y el método axiomático enarbolado por Euclides en el Libro I de sus Elementos, con estas bases se produjo un giro radical de la manera de hacer geometría.

Hoy en día la geometría ha tenido avances importantes en un sin fin de materias, una de estas es la computación, existen software para la representación geometría de figuras planas y en tres dimensiones por su utilidad para la enseñanza a nivel superior y la modelación geométrica tenemos "the Geometer´s Sketchpad" y "Cinderella". Los cuales son de gran utilidad para poner en práctica los conocimientos teóricos adquiridos.

La importancia que tiene la geometría plana en la ingeniería civil es muy relevante, por citar algunos ejemplos prácticos tenemos, las formas de elementos estructurales que se presentan en edificaciones, puentes, carreteras, etc.; en la topografía es útil la geometría para la determinación de lados, ángulos y áreas de poligonales cerradas, calculo de áreas planas y resolución de triángulos conocidos algunos de sus elementos, la determinación de áreas de secciones de tuberías de drenaje y canales, los puntos y líneas para la representación de planos arquitectónicos y muchas otras aplicaciones practicas que se pueden obtener mediante un razonamiento matemático.

Alfabeto griego

Alfa $A \rightarrow \alpha$

Beta $B \rightarrow \beta$

Gamma $\Gamma \rightarrow \gamma$

Delta $\Delta \rightarrow \delta$

Epsilon $E \rightarrow \varepsilon$

Zeta $Z \rightarrow \zeta$

Eta $H \rightarrow \eta$

Theta $\Theta \rightarrow \theta$

Iota $I \rightarrow \iota$

Kappa $K \rightarrow \kappa$

Lambda $\Lambda \rightarrow \lambda$

Mu $M \rightarrow \mu$

Nu $N \rightarrow \nu$

Xi $\Xi \rightarrow \xi$

Omicron $O \rightarrow o$

Pi $\Pi \rightarrow \pi$

Rho $P \rightarrow \rho$

Sigma $\Sigma \rightarrow \sigma$

Tau $T \rightarrow \tau$

Ipsilon $\Upsilon \rightarrow \upsilon$

Fi $\Phi \rightarrow \varphi$

Ji $X \rightarrow \chi$

Psi $\Psi \rightarrow \psi$

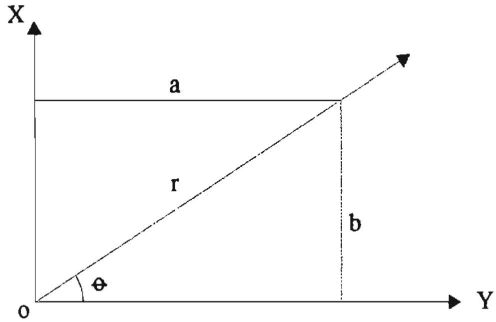
Omega $\Omega \rightarrow \omega$

Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{a} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b}$$



Identidades trigonométricas

1. $\tan\varphi = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}$

2. $\cot\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$

3. $\sec\varphi = \dfrac{1}{\cos\varphi}$

4. $\csc\varphi = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$

5. $\cot\varphi = \dfrac{1}{\tan\varphi}$

6. $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

7. $1 + \cot^2\varphi = \csc^2\varphi$

8. $1 + \tan^2\varphi = \sec^2\varphi$

9. $\cos(\varphi \pm \psi) = \cos\varphi\cos\psi \mp \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi$

10. $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

11. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{sen}\varphi$

12. $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\varphi$

13. $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos\varphi)}$

14. $\operatorname{sen}(\varphi \pm \psi) = \operatorname{sen}\varphi\cos\psi \pm \cos\varphi\operatorname{sen}\psi$

15. $\operatorname{sen}(-\varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$

16. $\operatorname{sen} 2\varphi = 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$

17. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$

18. $\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos\varphi)}$

19. $\tan(\varphi \pm \psi) = \dfrac{\tan\varphi \pm \tan\psi}{1 \mp \tan\varphi\tan\psi}$

20. $\tan(-\varphi) = -\tan\varphi$

21. $\tan 2\varphi = \dfrac{2\tan\varphi}{1 - \tan^2\varphi}$

22. $\tan\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{1 + \cos\varphi}$

23. $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{(1 - \cos\varphi)}{(1 + \cos\varphi)}} = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{1 + \cos\varphi} = \dfrac{1 - \cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$

24. $\cos(\pi \pm \varphi) = -\cos\varphi$

25. $\operatorname{sen}(\pi \pm \varphi) = \mp\operatorname{sen}\varphi$

26. $\tan(\pi \pm \varphi) = \pm\tan\varphi$

Signos de funciones trigonométricas

	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV
Sen	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tan	+	-	+	-
Cot	+	-	+	-
Sec	+	-	-	+
Csc	+	+	-	-

Algunas cifras útiles

$\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = 0.5000$

$\cos 30^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = 0.8660$

$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = 0.5774$

$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = 1.7321$

$\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = 0.7071$

$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1.0000$

$\sqrt{2} = 1.414$ $\quad \sqrt{3} = 1.732$ $\quad \sqrt{10} = 3.162$ $\quad \pi = 3.142$

$\pi^2 = 9.870$ $\quad \sqrt{\pi} = 1.773$ $\quad \log \pi = 0.4971$ $\quad 4\pi = 12.57$

$e = 2.718$ $\quad 1/e = 0.3679$ $\quad \log e = 0.4343$ $\quad \ln 2 = 0.6932$

BIBLIOGRAFÍA

- Greek Mathematics
  Tomas L. Healt
  Dover Publications inc.,1963

- Fundamentos de Geometría
  Coxeter and Greitzer
  Limusa, 1971.

- Una introducción a la Geometría
  Ramírez Galarza Ana Irene
  Facultad de Ciencias, UNAM. 2002

- Arquímedes Alrededor del círculo
  Torrija Herrera, R.,
  Nivela ediciones, 2003.

- Geometría
  Radmila Bulajich M., J. A. Gómez Ortega
  Instituto de Matemáticas, UNAM. 2002

- Introducción a la Geometría Moderna
  Shively, L.
  CECSA,1980.

- Advanced Euclidian Geometry
  Roger A. Johnson
  Dover Publications, Inc.

- Geometría Moderna
  Moise-Downs
  Addison-Wesley iberoamericana, 1966.

- Los Elementos de Euclides
  Euclides
  Dover 1979.

- Geometría Analítica
  Murdoch D.C.
  Limusa 1977

- Geometría Analítica Moderna
  Wooton, William
  Publicaciones Cultural 1985

Declaración de la Selva Lacandona

HOY DECIMOS ¡BASTA!

Al pueblo de México:
Hermanos mexicanos:

Somos producto de 500 años de luchas: primero contra la esclavitud, en la guerra de Independencia contra España encabezada por los insurgentes, después por evitar ser absorbidos por el expansionismo norteamericano, luego por promulgar nuestra Constitución y expulsar al Imperio Francés de nuestro suelo, después la dictadura porfirista nos negó la aplicación justa de leyes de Reforma y el pueblo se rebeló formando sus propios líderes, surgieron Villa y Zapata, hombres pobres como nosotros a los que se nos ha negado la preparación más elemental para así poder utilizarnos como carne de cañón y saquear las riquezas de nuestra patria sin importarles que estemos muriendo de hambre y enfermedades curables, sin importarles que no tengamos nada, absolutamente nada, ni un techo digno, ni tierra, ni trabajo, ni salud, ni alimentación, ni educación, sin tener derecho a elegir libre y democráticamente a nuestras autoridades, sin independencia de los extranjeros, sin paz ni justicia para nosotros y nuestros hijos.

Pero nosotros HOY DECIMOS ¡BASTA!, somos los herederos de los verdaderos forjadores de nuestra nacionalidad, los desposeídos somos millones y llamamos a todos nuestros hermanos a que se sumen a este llamado como el único camino para no morir de hambre ante la ambición insaciable de una dictadura de más de 70 años encabezada por una camarilla de traidores que representan a los grupos más conservadores y vendepatrias. Son los mismos que se opusieron a Hidalgo y a Morelos, los que traicionaron a Vicente Guerrero, son los mismos que vendieron más de la mitad de nuestro suelo al extranjero invasor, son los mismos que trajeron un príncipe europeo a gobernarnos, son los mismos que formaron la dictadura de los científicos porfiristas, son los mismos que se opusieron a la Expropiación Petrolera, son los mismos que masacraron a los trabajadores ferrocarrileros en 1958 y a los estudiantes en 1968, son los mismos que hoy nos quitan todo, absolutamente todo.

Para evitarlo y como nuestra última esperanza, después de haber intentado todo por poner en práctica la legalidad basada en nuestra Carta Magna, recurrimos a ella, nuestra Constitución, para aplicar el Artículo 39 Constitucional que a la letra dice:

«La soberanía nacional reside esencial y originariamente en el pueblo. Todo el poder público dimana del pueblo y se instituye para beneficio de éste. El pueblo tiene, en todo tiempo, el inalienable derecho de alterar o modificar la forma de su gobierno.»

Por tanto, en apego a nuestra Constitución, emitimos la presente al ejército federal mexicano, pilar básico de la dictadura que padecemos, monopolizada por el partido en el poder y encabezada por el ejecutivo federal que hoy detenta su jefe máximo e ilegítimo, Carlos Salinas de Gortari.

Conforme a esta Declaración de guerra pedimos a los otros Poderes de la Nación se aboquen a restaurar la legalidad y la estabilidad de la Nación deponiendo al dictador.

También pedimos a los organismos Internacionales y a la Cruz Roja Internacional que vigilen y regulen los combates que nuestras fuerzas libran protegiendo a la población civil, pues nosotros declaramos ahora y siempre que estamos sujetos a lo estipulado por la Leyes sobre la Guerra de la Convención de Ginebra, formando el EZLN como fuerza beligerante de nuestra lucha de liberación. Tenemos al pueblo mexicano de nuestra parte, tenemos Patria y la Bandera tricolor es amada y respetada por los combatientes INSURGENTES, utilizamos los colores rojo y negro en nuestro uniforme, símbolos del pueblo trabajador en sus luchas de huelga, nuestra bandera lleva las letras «EZLN», EJÉRCITO ZAPATISTA DE LIBERACIÓN NACIONAL, y con ella iremos a los combates siempre.

Rechazamos de antemano cualquier intento de desvirtuar la justa causa de nuestra lucha acusándola de narcotráfico, narcoguerrilla, bandidaje u otro calificativo que puedan usar nuestros enemigos. Nuestra lucha se apega al derecho constitucional y es abanderada por la justicia y la igualdad.

Por lo tanto, y conforme a esta Declaración de guerra, damos a nuestras fuerzas militares del Ejército Zapatista de Liberación Nacional las siguientes órdenes:

Primero. Avanzar hacia la capital del país venciendo al ejército federal mexicano, protegiendo en su avance liberador a la población civil y permitiendo a los pueblos liberados elegir, libre y democráticamente, a sus propias autoridades administrativas.

Segundo. Respetar la vida de los prisioneros y entregar a los heridos a la Cruz Roja Internacional para su atención médica.

Tercero. Iniciar juicios sumarios contra los soldados del ejército federal mexicano y la policía política que hayan recibido cursos y que hayan sido asesorados, entrenados, o pagados por extranjeros, sea dentro de nuestra nación o fuera de ella, acusados de traición a la Patria, y contra todos aquellos que repriman y maltraten a la población civil y roben o atenten contra los bienes del pueblo.

Cuarto. Formar nuevas filas con todos aquellos mexicanos que manifiesten sumarse a nuestra justa lucha, incluidos aquellos que, siendo soldados enemigos, se entreguen sin combatir a nuestras fuerzas y juren responder a las órdenes de esta Comandancia General del EJÉRCITO ZAPATISTA DE LIBERACIÓN NACIONAL.

Quinto. Pedir la rendición incondicional de los cuarteles enemigos antes de entablar los combates.

Sexto. Suspender el saqueo de nuestras riquezas naturales en los lugares controlados por el EZLN.

PUEBLO DE MÉXICO: Nosotros, hombres y mujeres íntegros y libres, estamos conscientes de que la guerra que declaramos es una medida última pero justa. Los dictadores están aplicando una guerra genocida no declarada contra nuestros pueblos desde hace muchos años, por lo que pedimos tu participación decidida apoyando este plan del pueblo mexicano que lucha por trabajo, tierra, techo, alimentación, salud, educación, independencia, libertad, democracia, justicia y paz. Declaramos que no dejaremos de pelear hasta lograr el cumplimiento de estas demandas básicas de nuestro pueblo formando un gobierno de nuestro país libre y democrático.

INTÉGRATE A LA FUERZAS INSURGENTES DEL EJERCITO ZAPATISTA DE LIBERACIÓN NACIONAL

Comandancia General del EZLN
Año de 1993