UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CONDICIONES DE CONVERGENCIA DE MACKEY EN ESPACIOS PALMEADOS LOCALMENTE COMPLETOS".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

ALEJANDRA GARCIA GARCIA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ARMANDO GARCIA MARTINEZ

2004

UNIVERSIDAD NACIONAL AVENMA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

" Condiciones de Convergencia de Mackey en Espacios Palmeados Localmente Completos "

realizado por GARCÍA GARCÍA ALEJANDRA
con número de cuenta 09957407-3 , quien cubrió los créditos de la carrera de: MATEMÁTICAS
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis		
Propietario	**Dr. Armando García Martínez**	García Martínez
Propietario	**Dr. Carlos Bosch Giral**	Carlos Bosch Giral
Propietario	**M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo**	
Suplente	**Dr. Hugo Arizmendi Peimbert**	Hugo Arizmendi
Suplente	**Dra. Claudia Gómez Wulschner**	Claudia Gómez Wulschner

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica.

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

A mis padres, abuelos, hermanos y demás familiares,
por su apoyo, paciencia y cariño.
A mi pequeña Wendy, por su alegría e inmenso cariño.
A Gisela, primos y amigos,
con quienes he compartido momentos inolvidables.
A mis profesores, por su apoyo, dedicación, ejemplo y
sobre todo por sus enseñanzas.
A ti que siempre has estado conmigo y de quien siempre
aprendo algo nuevo.
¡GRACIAS!

Agradezco especialmente:
Al Dr. Armando García Martínez por su apoyo, paciencia y consejos.
A los profesores Angel M. Carrillo Hoyo, Carlos Bosch Giral, Adalberto García Maynez, Hugo Arizmendi Peimbert y Claudia Gómez Wulschner por los comentarios y observaciones al presente trabajo. Así mismo, al profesor Carlos Hernández G. por su apoyo en algunas cuestiones técnicas.
Sin olvidar mencionar a los profesores Ma. Del Carmen Arrillaga, Héctor Méndez Lango, Hugo Rincón y Francisco Raggi por sus consejos y todo el apoyo que me han brindado.

Índice general

Introducción

A pesar de la dificultad para determinar el inicio de una nueva rama de la ciencia, podemos enmarcar el nacimiento del Análisis Funcional entre finales del siglo XIX y principios del XX con los trabajos de Volterra sobre "funciones que dependen de otras funciones", y la resolución de ecuaciones integrales. Sus ideas fueron apreciadas rápidamente por otros matemáticos como Hadamard, quien introdujo en el tema a varios de sus alumnos, entre ellos: M. Frechét, R. Gateaux y P. Levy.

Bajo la premisa "nada puede ocurrir en los espacios de dimensión infinita que no suceda, en efecto, en aquellos de dimensión finita", la intuición primera de Volterra no podía estar más lejos de la realidad. Ciertamente, en dimensión infinita, muchos conceptos fundamentales en Análisis Funcional como son: compacidad, continuidad total, convergencia en sus diversas formas, están muy lejos de poderse caracterizar del mismo modo a como se hace en dimensión finita, donde bastan conceptos elementales tales como: cerradura y acotamiento, continuidad y convergencia ordinaria, respectivamente.

Justamente algunos aspectos del tema de convergencia son los que desarrollamos en el presente trabajo. En particular, nos interesa estudiar convergencia en un sentido local, como fue definido por G. W. Mackey. Para esto recordemos que fueron Banach, con sus trabajos en espacios vectoriales normados, y Frechét, en espacios métricos, quienes sentaron fuertes bases estructurales para el desarrollo de la teoría de Análisis Funcional, en particular sobre problemas de convergencia.

Más adelante, Schwartz con sus trabajos sobre teoría de distribuciones dio un gran salto y puso de manifiesto la necesidad de estudiar espacios vectoriales donde el concepto de la convergencia no está determinada por una métrica ni características muy específicas de las sucesiones, por ejemplo las de Cauchy. Surgió así el problema de estudiar la convergencia en espacios vectoriales con diferentes topologías no necesariamente metrizables; lo cual aumentó la diversidad y dificultad del tema.

Como hemos dicho anteriormente, nos interesa estudiar condiciones de convergencia en el sentido de Mackey, podríamos decir, groso modo, que se caracteriza a los espacios localmente convexos con una topología no necesariamente metrizable, en los que es posible encontrar para cada sucesión nula un subespacio normable que la contenga y su límite también es cero. Hechos similares se logran para conjuntos acotados. Para determinar cierta familia de espacios que satisfacen estas propiedades, en la última parte y principal de la tesis, desarrollamos algunos artículos [G2], [G3] y [G4] que T. Gilsdorf ha publicado sobre condiciones de convergencia de Mackey en espacios palmeados, obteniendo así un compendio de los principales resultados que sobre el tema han aparecido en los últimos años. Incluimos también algunos resultados de Burzyk-Gilsdorf [B2] y de A. García [G1]. Para desarrollar la teoría y satisfacer los requisitos para trabajar con estos artículos hemos utilizado principalmente los libros de Jarchow [J1] y Perez-Carreras y Bonet [P1].

El contenido de la tesis está dividido en cuatro capítulos. El primero contiene conceptos generales sobre espacios localmente convexos necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores. El segundo capítulo, dedicado a la teoría básica de dualidad es fundamental, pues esta importante herramienta nos permite trasladar un problema específico en un espacio localmente convexo, a otro más fácil de estudiar, en términos de formas lineales. La dualidad nos permite también el cambiar la topología original del espacio por otra más simple cuando tratamos problemas de acotamiento, convexidad, continuidad, y otros más. Incluimos varios resultados importantes en la teoría de espacios localmente convexos, como lo son los teoremas de Banach-Mackey, Alaoglu-Bourbaki y Mackey-Arens, entre otros.

En el capítulo tres estudiamos palmas y espacios palmeados, ambos conceptos establecidos en los años setenta por M. De Wilde, en su tesis doctoral. Con estas estructuras, basadas ciertamente en características de los espacios localmente convexos metrizables, De Wilde obtuvo los teoremas de la Gráfica Cerrada y del mapeo Abierto -los cuales incluimos en la tesis- con un muy amplio grado de generalidad, además de un Teorema de Localización que, junto con una condición de completitud local, será fundamental para la obtención de muchos de los resultados presentados en esta tesis, tanto para propiedades de regularidad de límites inductivos (también incluidos en este capítulo), como para la convergencia en el sentido de Mackey.

El capítulo final, que incluye los resultados más importantes de la tesis, está dedicado a las condiciones de convergencia de Mackey (convergencia rápida) y la estricta de Mackey. La primera propiedad se refiere a que cada sucesión convergente en el espacio localmente convexo E es convergente en un subespacio normado (de Banach) $E_{_B}$ del espacio E, el cual contiene a la sucesión, que conserva dicho límite en tal subespacio. Y la segunda se refiere a que la topología de cada subconjunto acotado de E coincide con la que hereda de un subespacio normado $E_{_B}$ de E. Ambas propiedades se estudian en el marco de espacios palmeados localmente completos y presentamos condiciones necesarias y suficientes para su cumplimiento.

Capítulo 1

Espacios Localmente Convexos

Durante mucho tiempo se observó que diferentes áreas de las matemáticas como el Algebra Lineal, la Teoría de Aproximación, Ecuaciones Diferenciales, etc., compartían problemas con características comunes y propiedades similares. La búsqueda de un modelo concreto para poder plantear tales problemas y darles solución general llevó a estudiar conjuntos abstractos con ciertas características comunes, que se deben cumplir con algunos axiomas de estructura, dando origen al concepto de espacio. Es así, teniendo ya un espacio con una estructura especial, se obtuvo en algunos casos, un método más general y simple para dar solución a algunas de las cuestiones que se habían planteado, desarrollando una teoría general aplicable en casos concretos; un caso especial es cuando ya se tenía desarrollada teoría para espacios normados y espacios métricos, dando origen al Análisis Funcional, una rama abstracta de las Matemáticas.

El Análisis Funional juega un papel importante en las ciencias aplicadas, así como en las matemáticas mismas, ya que esta rama estudia espacios con ciertas estructuras algebraico-topológicas y muchas veces la teoría desarrollada para estos espacios puede aplicarse a problemas analíticos.

Existen diversos espacios de gran interés en Análisis Funcional: los espacios de Hilbert o de Banach por ejemplo. Ahora bien, al querer aplicar resultados obtenidos para espacios de Banach, nos podemos encontrar con espacios que no cuentan con las mismas características que estos, entonces necesitamos pedir que se cumplan menos condiciones y encontrar resultados más generales. Es así como podemos establecer diferentes conjuntos de axiomas y diversificar los espacios sobre los que se está trabajando. Si por ejemplo, en el campo de los números reales $\mathbb{R}$, con su topología usual, se cumple que una sucesión es de Cauchy si y sólo si es convergente, pero en general en espacios arbitrarios esto no es cierto; incluso, en otros casos, se utilizan otras condiciones de convergencia que no necesariamente estan relacionadas con esto. Ya con los espacios métricos y observando las caraterísticas y propiedades que cumplen este tipo de espacios, se pudo construir otro tipo de espacios, determinados por la relación que existe entre su topología y la de los espacios Métricos, llamados espacios localmente convexos; en este Capítulo se incluye, además de los conceptos básicos, propiedades de tales espacios y algunas herramientas que se necesitarán más adelante.

1.1. Nociones básicas.

En muchos problemas de Análisis, no sólo se estudia una función o un operador, sino colecciones de estos. Muchas veces estas colecciones resultan ser espacios vectoriales sobre el campo de los números reales ($\mathbb{R}$) o complejos ($\mathbb{C}$), en nuestro caso nos interesarán principalmente los espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, a no ser que especifiquemos lo contrario. Por otro lado, en ocasiones necesitamos que tales espacios esten dotados de alguna topología para poder hablar continuidad, acotamiento,etc.; y en otras más, tenemos que conjuntar las dos ideas creando así un espacio vectorial topológico.

Al hablar de espacios vectoriales topológicos consideraremos dos estructuras; una algebraica de espacio vectorial (para hablar de transformaciones lineales) y otra topológica (para hablar de continuidad). Estas dos estructuras deben ser compatibles; es decir, se tiene un espacio vectorial con una topología asignada que hace que las operaciones de suma y producto por escalares sean continuas.

Definición 1 *Un espacio vectorial topológico (e.v.t.) es una pareja* (E,τ), *donde* E *es un espacio vectorial sobre los reales* ($\mathbb{R}$) *o los complejos* ($\mathbb{C}$); τ *es una topología en* E, *tal que la suma de vectores y la multiplicación por escalares son funciones continuas, es decir:*

(a) $+ : E \times E \to E$
$$(x,y) \longmapsto x+y \quad \textit{es continua.}$$

(b) $\cdot : \mathbb{C} \times E \to E$ *ó* $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$
$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda x \qquad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \quad \textit{es continua.}$$

Donde las topologías sobre $E \times E$ *y* $\mathbb{C} \times E$ ($\mathbb{R} \times E$) *son las topologías producto.*

En lo que sigue, siempre consideraremos a E como un espacio vectorial topológico de Hausdorff.

Notación : Dados $A, B \subset E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in E$. Denotaremos por:

i) $\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}$,

ii) $A + x := \{y + x : y \in A\}$,

iii) $A - B := \{x - y : x \in A,\ y \in B\}$, y

iv) $A + B := \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$.

Observemos que si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, entonces $\alpha(A+B) \subset \alpha A + \alpha B$; pues dado $w \in \alpha(A+B)$, $w = \alpha(x+y)$ para algunos $x \in A$, $y \in B$, entonces $w = \alpha x + \alpha y \in \alpha A + \alpha B$.

Nota : Debido a que más adelante hablaremos de distintas topologías asociadas a un mismo espacio E, y para especificar la topología que se está utilizando, si no es evidente, en lugar de decir que un subconjunto V de E es abierto (cerrado, compacto, etc.) con respecto a la topología τ dada en E diremos que es *τ-abierto* (*τ-cerrado*, *τ-compacto*, etc.) en E; o bien, que es abierto (cerrado, compacto, etc.) en (E,τ).

Veremos ahora algunas propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados, las cuales nos serán de gran utilidad posteriormente.

Lema 2 *Sea (E,τ) un espacio vectorial topológico. Para $x_o \in E$, $V \subset E$ abierto (cerrado), $\lambda_o \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $A \subset E$; tenemos las siguientes propiedades:*

1. *$x_o + V$ es abierto (cerrado).*
2. *$\lambda_o V$ es abierto (cerrado).*
3. *$A + V$ es abierto.*

Demostración.

(1) Esta afirmación se debe a que la función

$$f : E \times E \to E \;\; ; \;\; (x,y) \longmapsto -x+y$$

es continua, pero también lo es, para $x_o \in E$ fijo, la función

$$i : E \hookrightarrow E \times E$$

dada por $i(z) = (x_o, z)$, para todo $z \in E$; así la función

$$f \circ i : E \to E \; ; \; y \longmapsto -x_o + y$$

es continua y como V es abierto (cerrado), tenemos $x_o + V = (f \circ i)^{-1}(V)$ es abierto (cerrado).

(2) Efectivamente, pues la función

$$f : \mathbb{C} \times E \to E \;\; ; \;\; (\lambda, x) \longmapsto \lambda x$$

es continua y, por otro lado, la función

$$j : E \to \mathbb{C} \times E$$

definida como $j(x) = (\lambda_o^{-1}, x)$, también es continua, por lo que la función

$$f \circ j : E \to E$$

queda definida por $(f \circ j)(x) = \lambda_o^{-1} x$, es continua y así $\lambda_o V = (f \circ j)^{-1}(V)$, de donde $\lambda_o V$ es abierto (cerrado) si V lo es.

(3) Probaremos que $A+V$ es abierto si V es un subconjunto abierto de E. La razón de esto es que $A+V = \bigcup_{x\in A}(x+V)$ y, como se sabe, unión de conjuntos abiertos es abierto y por (1), $x+V$ es abierto en (E,τ), así que también lo es $A+V$.

■

Notemos que muchos de los espacios de funciones o sucesiones habitualmente manejados en Análisis son espacios vectoriales topológicos.

Ejemplo 3 *(a)* $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ *donde* $\|\cdot\|_2$ *es la norma usual* $\left[\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, *es un* e.v.t. *Para probarlo basta utilizar las propiedades de norma.*

Estos espacios con cualquier otra norma equivalente a la anterior, por ejemplo $\|x\| = \max_{1\le i\le n}|x_i|$ *, son espacios vectoriales topológicos.*

(b) Sea K *un subconjunto compacto y denotemos por*

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua}\},$$

$C(K)$ *es un espacio vectorial y le podemos dar la topología generada por* $\|f\| = \sup_{t\in K}|f(t)|$ *. Con la cual* $C(K)$ *resulta ser un espacio vectorial topológico normado. Observemos que la norma está bien definida pues* K *es compacto y* f *es continua, por lo que el supremo existe.*

(c) Denotemos por (X,Ω,μ) *un espacio de medida. Para* $1 \le p < \infty$ *consideremos al espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ es } \Omega\text{-medible y } \int_X |f|^p\, d\mu < \infty\}$$

con la seminorma definida por $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. *Definimos por* $L_p(\mu)$ *al espacio cociente obtenido de* $\mathcal{L}_p(\mu)$ *identificando a las funciones iguales casi dondequiera,* $f_1 = f_2$ *a.e.*$(f_1(x) \neq f_2(x) \iff x \in B$, *y* B *tiene medida cero). A este conjunto le podemos dar la topología generada por la norma:* $\left\|\hat{f}\right\|_p := \|f\|_p$ $(f \in [f] = \hat{f})$ *inducida por la seminorma anterior. Con esta topología normada,* $L_p(\mu)$ *es un espacio vectorial topológico.*

(d) L^∞ *es el espacio de funciones medibles escencialmente acotadas; es decir, de funciones tales que* $|f(x)| \le \lambda$ *para casi todo* x. *Consideremos*

$$f : X \to [0,+\infty]$$

donde f *es medible y denotemos por* S *al conjunto de números reales* $\{\alpha \in \mathbb{R} : \ \mu\left(f^{-1}((\alpha,+\infty])\right) = 0\}$.

Si $S \neq \emptyset$, sea $\beta = \inf S$, y si $S = \emptyset$, sea $\beta = +\infty$. Como

$$f^{-1}((\beta, +\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left((\beta + \frac{1}{n}, +\infty]\right)$$

y la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero, se tiene que $\beta \in S$. A β se le llama el supremo esencial (sup-es) *de f. En L^∞ daremos la norma definida por $\|f\|_\infty = \text{sup-es}\,|f(x)|$.*

Notemos que, por las observaciones anteriores, $|f(x)| < \lambda$ para casi todo $x \in X$ si y sólo si $\lambda \geq \|f\|_\infty$.

Definición 4 *Sea A un subconjunto de E.*

(a) Decimos que A es convexo si $tA + (1-t)A \subset A$ para todo $0 \leq t \leq 1$ (en otras palabras, pedimos que $tx + (1-t)y \in A$ para todo par $x, y \in A$ y todo $t \in [0,1]$).

(b) A es balanceado si $\alpha A \subset A$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \leq 1$ (es decir, para todo $x \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \leq 1$, tenemos que $\alpha x \in A$).

(c) A es absorbente si para cada $x \in E$ existe $\alpha > 0$ tal que $\lambda x \in A$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq \alpha$ (de otra manera, $\forall x \in E$, $\exists s > 0$ tal que $\forall$ $|t| > s$ se tiene que $x \in tA$).

(d) Denotaremos por $conv(A)$ ($bal(A)$) a la envolvente convexa (balanceada) de A, es decir al convexo (balanceado) más pequeño que contiene a A.

(e) Por $absconv(A)$ denotaremos al conjunto absolutamente convexo, es decir balanceado y convexo, más pequeño que contiene a A y la llamaremos la envolvente convexa y balanceada de A.

Obsérvese que si tenemos una función lineal, esta preserva la convexidad y manda conjuntos balanceados en conjuntos balanceados. Notemos además las siguientes propiedades de los conjutos convexos y/o balanceados.

1. E es convexo, balanceado y absorbente.

2. Si $A \subset E$ es convexo (balanceado) y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces λA es convexo (balanceado).

   Es fácil ver que estas dos afirmaciones se cumplen.

   a) Si A es convexo, dados x, $y \in \lambda A$ existen x_1,$y_1 \in A$ tales que $x = \lambda x_1$ y $y = \lambda y_1$; por lo que , por la convexidad de A, para cualquier $t \in [0,1]$,

   $$tx + (1-t)y = t(\lambda x_1) + (1-t)(\lambda y_1) = \lambda(tx_1 + (1-t)y_1) \in \lambda A.$$

   b) En caso de que A sea balanceado, para cualquier elemento x de λA existe $x_1 \in A$ tal que $x = \lambda x_1$; es así como para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \leq 1$, $\alpha x = \alpha(\lambda x_1) = \lambda(\alpha x_1) \in \lambda A$.

3. En general $A + A \neq 2A$, por ejemplo si consideramos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ y } -1 \leq x \leq 1, \text{ ó } x = 0 \text{ y } -1 \leq y \leq 1\},$$

obtenemos que $A + A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ y } -1 \leq y \leq 1\} \neq 2A$.

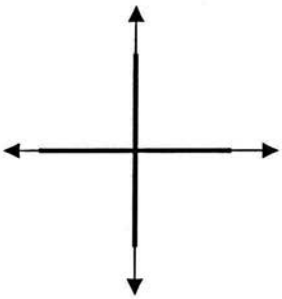

Fig. 1 2A

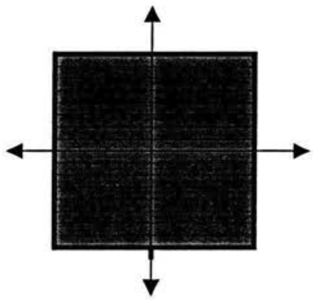

Fig. 2 A+A

Sin embargo, si A es convexo, se tiene que $A + A = 2A$. Mejor aún, $sV + tV = (s + t)V$ para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$, siempre que V sea convexo.

La contensión $(s + t)V \subset sV + tV$ siempre se da. Por otro lado, si $z \in sV + tV$, entonces existen $x, y \in V$ tales que $z = sx + ty$; se sigue que

$$(s + t)^{-1}z = (s + t)^{-1}(sx + ty) = (s + t)^{-1}sx + (s + t)^{-1}ty \in V$$

por ser V convexo y $(s+t)^{-1}s + (s+t)^{-1}t = 1$; por lo tanto $z \in (s+t)V$. Finalmente cuncluimos que $(s + t)V = sV + tV$.

4. Si A y B son convexos, también lo son $A - B$ y $A + B$. Como un caso particular, dado que $\{x\}$ es convexo, para todo $x \in E$, $x + B$ es convexo.

   Demostración. Sean $a_1 \pm b_1$, $a_2 \pm b_2 \in A \pm B$ y $t \in [0, 1]$. Entonces $t(a_1 \pm b_1) + (1 - t)(a_2 \pm b_2) = ta_1 \pm tb_1 + (1 - t)a_2 \pm (1 - t)b_2 =$

   $[ta_1 + (1 - t)a_2] \pm [tb_1 + (1 - t)b_2] \in A \pm B$.

   De donde $A \pm B$ es convexo. ■

5. La cerradura de un conjunto convexo (balanceado) es convexo (balanceado).

   Demostración. Sea $B \subset E$ convexo (balanceado). Si $y, z \in \overline{B}$, $t \in [0,1]$ ($\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq 1$) podemos elegir $\left(x_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha\in\Lambda}$ y $\left(x_\alpha^{(2)}\right)_{\alpha\in\Lambda}$ dos redes en B tales que $x_\alpha^{(1)}$ converge a y y $x_\alpha^{(2)}$ converge a z en E. Entonces $tx_\alpha^{(1)}+(1-t)x_\alpha^{(2)}$ ($\lambda x_\alpha^{(1)}$, respectivamente) converge a $ty+(1-t)z$ (converge a λy) por la continuidad de la multiplicación por escalares y la suma de vectores. Además, $\left(tx_\alpha^{(1)} + (1-t)x_\alpha^{(2)}\right)_{\alpha\in\Lambda}$, $\left(\left(\lambda x_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha\in\Lambda}\right)$, es una red en B, por tanto $ty + (1-t)z \in B$, $\left(\lambda y \in \overline{B}\right)$. ■

6. Intersección de conjuntos balanceados (convexos) también es balanceado (convexo).

7. Si $A \subset E$ es absorbente o balanceado, entonces $0 \in A$.

   Demostración. Esta afirmación es fácil de ver.

   Si A es absorbente, como $0 \in E$ existe $0 < \alpha = 2$, por ejemplo, tal que $\lambda \cdot 0 = 0 \in A$ siempre que $|\lambda| \leq \alpha$.

   Si A es balanceado, para todo escalar λ tal que $|\lambda| \leq 1$, $0 = \lambda \cdot 0 \in A$. ■

8. Si A es absorbente y $x \in E$, entonces $x + A$ no necesariamente es absorbente. Un claro ejemplo en $\mathbb{R}^n$ es $\overline{B_1(0)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq 1\}$ y $x = (2, 2, ..., 2)$, $x \in \mathbb{R}^n$, pero $0 \notin x + \overline{B_1(0)}$.

   Este ejemplo también nos sirve para ver que:

9. Si A es balanceado, para $x \in E$ arbitrario, $x + A$ no necesariamente es balanceado.

10. Intersección finita de conjuntos absorbentes es absorbente.

11. $conv(A) = \bigcap\{B \subset E : A \subset B\ ,\ B$ convexo$\}$.

12. $bal(A) = \bigcap\{C \subset E : A \subset C\ ,\ C$ balanceado$\}$.

Ejemplo 5 *Algunos ejemplos de conjuntos balanceados, convexos y/o absorbentes son:*

(a) Todas las bolas abiertas de radio $\varepsilon > 0$ con centro en 0, $B_\varepsilon(0)$, son convexas, absorbentes y balanceadas en $E = \mathbb{R}^n$, en general esto es válido si E es un espacio normado.

(b) Todas las rectas η en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que no pasan por el origen son convexas, no balanceadas y no absorbentes.

(c) Toda recta en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen es balanceada y convexa pero no absorbente.

Decimos que una topología τ sobre un espacio vectorial E es invariante bajo traslaciones (homotecias) si todas las traslaciones (homotecias) son homeomorfismos.

Recordemos que una vecindad de x en un e.v.t. (E,τ) es un subconjunto V de E tal que $x \in V$, y existe U abierto con $x \in U \subset V$. Definimos por $\mathcal{N}_o(E,\tau)$ o simplemente por $\mathcal{N}_o(E)$, si no se presenta confusión, a la familia de vecindades de 0 en E, con respecto a la topología τ. Si $\mathcal{N}_o(E,\tau)$ es la familia de vecindades de cero, ahora la familia de conjuntos $a+U$, donde $U \in \mathcal{N}_o(E,\tau)$, es la familia de vecindades de a, para cualquier $a \in E$; a esta familia la denotamos por $\mathcal{N}_a(E)$ o por $\mathcal{N}_a(E,\tau)$ para específicar, si es que es necesario, con respecto a que topología estamos trabajando. Con esto obtenemos que la estructura topológica de E está determinada por la base de vecindades del origen. Para el siguiente resultado, primero observemos que, por el lema (1.1-2), si U es una vecindad de 0, y $\lambda \in \mathbb{C}\diagdown\{0\}$, $0 \in \lambda U$ y es también una vecindad de cero.

Teorema 6 *Sean E un e.v.t., $a \in E$ y $\mathcal{N}_a(E)$ la familia de vecindades de a. Entonces:*

1. $\mathcal{N}_a(E) = a + \mathcal{N}_o(E)$.
2. $V \in \mathcal{N}_o(E)$ *y* $V \subset V_1$, *implican* $V_1 \in \mathcal{N}_o(E)$.
3. $V_1, V_2, ..., V_n \in \mathcal{N}_o(E) \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{N}_o(E)$.
4. $V \in \mathcal{N}_o \Longrightarrow \exists\, W \in \mathcal{N}_o(E)$ *tal que* $W + W \subset V$.
5. $V \in \mathcal{N}_o(E)$ *es invariante bajo homotecias.*
6. *Toda* $V \in \mathcal{N}_o(E)$ *es absorbente.*
7. *Existe un sistema fundamental de vecindades balanceadas del origen; es decir, para toda* $V \in \mathcal{N}_o(E)$ *existe* $W \in \mathcal{N}_o(E)$ *balanceada tal que* $W \subset V$.

Demostración. 1) Para cada $a \in E$, la traslación $f: E \to E$ dada por $f(x) = x+a$ es un homeomorfismo vista como función de E en sí mismo. Esto se debe a que es continua, y si $f(x) = x+a = y$, entonces $f^{-1}(y) = x = y-a$; por tanto f es una función uno a uno en E y además la función f^{-1} es su inversa, la cual es continua.

La contensión $\mathcal{N}_a(E) \supset a + \mathcal{N}_o(E)$ se tiene ya que, dada $U \in \mathcal{N}_o(E)$, existe $U' \in \mathcal{N}_o(E)$ abierto tal que $U' \subset U$ y por tanto, $a + U'$ es abierto, ver el lema (1.1-2), y $a \in a + U' \subset a + U$. A la inversa, sea $V \in \mathcal{N}_a(E)$, entonces existe $V' \in \mathcal{N}_a(E)$, abierto, con $V \supset V' = a + (-a + V')$. De donde $-a + V'$ es abierto y como $a \in V'$, $0 = -a + a \in (-a + V')$ tenemos que $-a + V' \in \mathcal{N}_o(E)$ y $-a + V' \subset -a + V = U$; así $U \in \mathcal{N}_o(E)$, por lo tanto $V = a + U$ para algún $U \in \mathcal{N}_o(E)$.

2) Sean V y V_1 como en las hipótesis. Entonces existe $U \in \mathcal{N}_o(E)$ abierto tal que $U \subset V$, por tanto $U \subset V_1$, es decir, $V_1 \in \mathcal{N}_o(E)$.

3) Como $V_1, V_2, ..., V_n \in \mathcal{N}_o(E)$, se tienen $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{N}_o(E)$ abiertos tales que $U_i \subset V_i$, para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subset \bigcap\limits_{j=1}^{n} V_j$ y 0 es un punto del abierto $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$. Por lo tanto $\bigcap\limits_{j=1}^{n} V_j \in \mathcal{N}_o(E)$.

4) Para todo $V \in \mathcal{N}_o(E)$ podemos encontrar $U \in \mathcal{N}_o(E)$, abierto, tal que $U \subset V$. Ahora, consideremos la función continua

$$+ : E \times E \to E$$

definida por $(x, y) \longmapsto x+y$. Entonces, $(+)^{-1}(U)$ es abierto en $E \times E$, por lo que existen $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_o(E)$ abiertos tales que $V_1 \times V_2 \subset (+)^{-1}(U)$, esto implica que $V_1 + V_2 \subset U$. Por otro lado, tomemos $W := V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$; $0 \in W$ y W es abierto, ya que cada uno de los conjuntos que se están intersectando lo es. Por lo tanto $W \in \mathcal{N}_o(E)$ y es abierto. Ahora, como $W \subset V_1, V_2$, $W + W \subset V_1 + V_2 \subset U$; además $W = -W$ por construcción.

5) Efectivamente, (por el lema 1.1-2-(b)) si U es abierto y $\lambda \in \mathbb{C}$, λU es abierto y si además $U \in \mathcal{N}_o(E)$, $\lambda U \in \mathcal{N}_o(E)$ pues $\lambda \cdot 0 = 0 \in U$.

Por tanto, si $V \in \mathcal{N}_o(E)$, elijamos $U \in \mathcal{N}_o(E)$ abierto tal que $U \subset V$, entonces $0 \in \lambda U \subset \lambda V$, donde $\lambda V \in \mathcal{N}_o(E)$.

6) Sea $V \in \mathcal{N}_o(E)$. La función

$$(\cdot) : \mathbb{C} \times E \to E \quad , \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x$$

es continua para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in E$.

Sea $x \in E$. Por la continuidad de la función $(\cdot)$, se puede considerar $\varepsilon > 0$ y $U \in \mathcal{N}_x(E)$ tales que $(\cdot)(B_\varepsilon(0) \times U) \subset V$; es decir, $\lambda x \in V$ siempre que $|\lambda| \leq \varepsilon$. De aquí que V es absorbente.

7) Sea $V \in \mathcal{N}_o(E)$. Por (4), podemos encontrar $W_1 \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que $W_1 + W_1 \subset V$. Como la multiplicación por escalares es continua, existen $\delta > 0$ y $W_2 \in \mathcal{N}_o(E)$ tales que $\alpha W_2 \subset W_1$ si $|\alpha| \leq \delta$. Tomando a

$$W := \cup\{\alpha W : |\alpha| \leq \delta\},$$

se obtiene un conjunto balanceado, además $W \in \mathcal{N}_o(E)$ y

$W \subset W_1 \subset W_1 + W_1 \subset V$. ■

Podemos ver que el recíproco de este Teorema también es válido. De esta manera se puede caracterizar a los *espacios vectoriales topológicos* por medio de la base de vecindades de 0, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 7 *Sea E un espacio vectorial, denotemos por $\wp(E)$ al conjunto de partes de E. Supongamos que existe una función*

$$f : E \to \wp(\wp(E))$$

donde $f(a) = \mathcal{N}_a(E)$. *Así,* $\mathcal{N}_a(E)$ *es una colección de subconjuntos de* E. *Supongamos además que* $\mathcal{N}_a(E)$ *satisface las propiedades 1-7 del Teorema anterior (1.1-6). Entonces existe una única topología tal que para toda* a *en* E, $\mathcal{N}_a(E)$ *es exactamente la familia de vecindades de* a, *y esta topología hace a* E *un e.v.t.*

Demostración. Mostremos que en efecto la topología τ, para la cual $\mathcal{N}_a(E)$ es la base de vecindades de a siempre que $a \in E$, hace a E un espacio vectorial topológico.

Tomemos $\mathcal{N}_o(E)$ la base de vecindades de cero. Como valen las propiedades 1-7 del Teorema (1.1-6), $\mathcal{N}_a(E) = a + \mathcal{N}_o(E)$ para todo $a \in E$.

1) $+ : E \times E \to E$

$(x, y) \longmapsto x + y$ es continua con la topología producto:

Sea $(x_o, y_o) \in E \times E$. Para ver que $(+)$ es continua en (x_o, y_o) recordemos que cumple (4) del Teorema (1.1-6).

Sea $V_o \in \mathcal{N}_{x_o+y_o}(E)$ abierto, esto implica que $V_o = x_o + y_o + V$ para algún $V \in \mathcal{N}_o(E)$ abierto. Sea $W \in \mathcal{N}_o(E)$ abierto tal que $W + W \subset V$. Observemos que si $x \in x_o + W$ y $y \in y_0 + W$, entonces

$$x + y \in x_o + y_o + W + W \subset x_o + y_o + V = V_o,$$

con esto $(+)\left((x_o + W) \times (y_o + W)\right) \subset V_o$; por tanto $(+)$ es continua en (x_o, y_o).

2) Para demostrar que la multiplicación por escalares es continua, sean $\lambda_o$un escalar en $\mathbb{C}$ y $x_o \in E$, es decir $(\lambda_o, x_o) \in \mathbb{C} \times E$.

Sea $V_o \in \mathcal{N}_{\lambda_o x_o}(E)$, entonces existen $V, U \in \mathcal{N}_o(E)$, U balanceada, tal que $V_o = \lambda_o x_o + V$, y $U + U \subset V$. Por ser U absorbente, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\lambda - \lambda_o)\, x_o \in U$ si $|\lambda - \lambda_o| < \epsilon$. Así, tenemos que

$$\lambda x_o \in \lambda_o x_o + U \subset \lambda_o x_o + V = V_o$$

siempre que $|\lambda - \lambda_o| < \epsilon$. Por otro lado, como $\mathcal{N}_o(E)$ es invariante bajo homotecias $\mu V \in \mathcal{N}_o(E)$, para cada $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |\mu| < 1$. De modo que, como $|\lambda_o| + \varepsilon > 0$, podemos elegir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\mu^{-n}\right| = |\mu|^{-n} = \left(\frac{1}{|\mu|}\right)^n \geq |\lambda_o| + \varepsilon.$$

Notemos que $|\mu|^n < 1$ y $|\lambda| - |\lambda_o| \leq |\lambda - \lambda_o| < \varepsilon$, de donde

$$|\lambda| < \varepsilon + |\lambda_o| \leq |\mu|^{-n};$$

por lo que $|\lambda|\,|\mu^n| = |\lambda\mu^n| \leq 1$. ...[1]

Sea $W = \mu^n U \in \mathcal{N}_o(E)$. Como U es balanceada, si $(x - x_o) \in W$ tenemos $\mu^{-n}(x - x_o) \in U$, de [1] tenemos como consecuencia que $\lambda\,(x - x_o) \in U$. Ahora, $\lambda x = \lambda_o x_o + (\lambda - \lambda_o)x_o + \lambda(x - x_o)$, por tanto

$$\lambda x \in \lambda_o x_o + U + U \subset \lambda_o x_o + V = V_o;$$

es decir $B_\varepsilon(\lambda) \times (x_o + W) \subset V_o$. Así la multiplicación por escalares es continua con la topología producto.

Por lo tanto (E, τ) es un espacio vectorial topológico con la topología τ generada por $\{\mathcal{N}_a(E)\}_{a \in E}$.

Ahora veamos la unicidad. Sea τ' una topología para la cual $\mathcal{N}_a(E)$ es la base de vecindades de a en E. Sea $U \in \tau$, entonces para $x \in U$ existe $V \in \mathcal{N}_a(E)$ tal que $V \subset U$ por lo que $U \in \tau'$ y de esta forma $\tau \leq \tau'$. De manera análoga obtenemos que $\tau' \leq \tau$. ■

1.2. Espacios Localmente Convexos

En esta sección hablaremos de la clase de espacios vectoriales topológicos que más nos interesarán, llamados espacios localmente convexos. Como sabemos, las propiedades que tienen los espacios métricos facilitan el trabajo en muchas cuestiones; además, si se generalizan algunos resultados a veces es necesario que los espacios en los que estamos trabajando conserven propiedades similares a las de los espacios métricos.

Los espacios localmente convexos están estrechamente ligados con las seminormas, que son funciones que conservan, excepto una, las propiedades que tiene una norma, por lo que mantienen cierta relación con los espacios métricos.

En esta sección daremos la definición de seminorma y después se verá la relación que existe entre estas y los espacios localmente convexos, junto con otras propiedades de dichos espacios.

Definición 8 *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una seminorma en E es una función*

$$\rho : E \to [0, \infty)$$

tal que:

(i) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, $x, y \in E$ *(subaditiva).*

(ii) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$, $x \in E$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$ *(lineal positiva).*

Veamos ahora una seminorma que será de gran utilidad en la teoría de espacios localmente convexos.

Proposición 9 *Sea (E, τ) un e.v.t. y $V \in \mathcal{N}_o(E)$, V abierto, balanceado y convexo. Entonces existe una única seminorma ρ en E tal que*

$$V = \{x \in E : \rho(x) < 1\}.$$

Demostración.

Sea $V \in \mathcal{N}_o(E)$, como en las hipótesis y $\rho = \rho_v$, donde

$$\begin{array}{rcl} \rho & = & \rho_v : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x & \longmapsto & \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in V\} \end{array}$$

esta función es la "*Funcional subaditiva de Minkowski de V*"; ρ está bien definida ya que, al ser V absorbente $\{t > 0 : t^{-1}x \in V\} \neq \emptyset$; por otro lado, $\rho(x) \geq 0$ para todo $x \in E$.

Para probar que ρ es una seminorma, veamos que cumple las condiciones (i) y (ii) de la definición (1.2-8):

(i) Recordemos que como V es convexo, se tiene que $(s+t)V = sV + tV$ para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$. Además,

$$\rho(x) = inf\{t > 0 : t^{-1}x \in V\} = inf\{t > 0 : x \in tV\} \quad \text{y}$$

$$\rho(y) = inf\{s > 0 : s^{-1}y \in V\} = inf\{s > 0 : x \in sV\};$$

entonces dado $\varepsilon > 0$ existen $\lambda_r, \lambda_s > 0$ tales que:

$$\begin{aligned} \lambda_r &\leq \rho(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{con} \quad \lambda_r^{-1}x \in V \quad (x \in \lambda_r V), \text{ y} \\ \lambda_s &\leq \rho(y) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{con} \quad \lambda_s^{-1}y \in V \quad (y \in \lambda_s V). \end{aligned}$$

Se sigue que $\lambda_r + \lambda_s \leq \rho(x) + \rho(y) + \varepsilon$ y $(x+y) \in \lambda_r V + \lambda_s V = (\lambda_r + \lambda s)V$, lo cual implica que $(\lambda_r + \lambda_s)^{-1}(x+y) \in V$.

Teniendo en cuenta que $\rho(x+y) = \{t > 0 : t^{-1}(x+y) \in V\}$, y que $\rho(x+y) \leq \lambda_r + \lambda_s$, obtenemos $\rho(x+y) \leq \lambda_r + \lambda_s \leq \rho(x) + \rho(y) + \varepsilon$; es decir, $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y) + \varepsilon$ para todo ε positivo.

De aquí que $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, $\forall x, y \in E$. Por lo tanto ρ es subaditiva.

(ii) Probemos ahora que ρ es lineal positiva.

Notese que si A es balanceado y $|\alpha| \leq 1$, entonces $\alpha A \subset A$.

Sean $x \in E$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

a) Si $\alpha = 0$, $\alpha x = 0$, con lo que $\rho(\alpha x) = \rho(0) = 0$.

$$\therefore \rho(\alpha x) = 0 = 0 \cdot \rho(x) = |\alpha|\, \rho(x).$$

b) Si $\alpha \neq 0$, entonces $|\alpha| > 0$ y $|\alpha|\, \rho(x) = |\alpha| \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in V\} = \inf\{|\alpha|\, t > 0 : t^{-1}x \in V\} = \inf\{|\alpha|\, t > 0 : \alpha\,|\alpha|^{-1}\, t^{-1}x \in \alpha\,|\alpha|^{-1}\, V\}$ $= \inf\{|\alpha|\, t > 0 : \alpha\,|\alpha|^{-1}\, t^{-1}x \in V\} = \inf\{s > 0 : \alpha s^{-1}x \in V\} = \rho(\alpha x)$.

En cualquier caso, $\rho(\alpha x) = |\alpha|\, \rho(x)$, $\forall x \in E$. Así, ρ es una seminorma. Sólo falta verificar que $V = \{x \in E : \rho(x) < 1\}$ y que ρ es única.

Primero demostremos que $V = \{x \in E : \rho(x) < 1\}$:

Para esto, sea $x \in E$ tal que $\rho(x) < 1$, entonces se puede elegir $0 < t < 1$ con $t^{-1}x \in V$, pero por la convexidad de V, como $x = t(t^{-1}x) + (1-t)0$, $x \in V$. De donde, $\{x \in E : \rho(x) < 1\} \subset V$.

A la inversa, sea $y \in V$ arbitraria. Para esta y fija consideremos

$$\varphi : (0, +\infty) \rightarrow E$$

definida por $\varphi(t) = t^{-1}y$ para cada t. La continuidad de φ la tenemos de que la función $t \rightarrow t^{-1}$ es continua en $(0, +\infty)$ y de las propiedades de espacio vectorial topológico. Por estas razones, al ser V abierto

$$\varphi^{-1}(V) = \{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$$

también es abierto. Por otro lado, dado que $y \in V$, tenemos $1 \in \varphi^{-1}(V)$; por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $1-\varepsilon \in \varphi^{-1}(V)$ (es decir, $1-\varepsilon \in \{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$) y como $\rho(y) = inf\{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$, obtenemos que $\rho(y) \leq 1 - \varepsilon < 1$. De aquí concluimos que $y \in \{x : \rho(x) < 1\}$. Así, $V \subset \{x \in E : \rho(x) < 1\}$; en consecuencia $V = \{x \in E : \rho(x) < 1\}$, como se quería.

Por último, veamos que efectivamente ρ es única con la característica anterior.

Supongamos que existe $q : E \rightarrow [0, +\infty)$ tal que

$$\{x \in E : \rho(x) < 1\} = \{y \in E : q(y) < 1\}.$$

Entonces,

$$\{x \in E : \rho(x) < r\} = \{y \in E : q(x) < r\}, \qquad ...[1]$$

para cualquier $r > 0$. Sea $x \in E$ y $\alpha = \rho(x)$. Por definición de $\rho(x)$, tenemos que para toda $\delta > 0$, $\rho(x) < \alpha + \delta$, y por [1] $q(x) < \alpha + \delta$, $\forall\ \delta > 0$. En consecuencia $q(x) \leq \alpha = \rho(x)$.

De la misma manera se puede concluir que $\rho(x) \leq q(x)$, para todo $x \in E$. Por lo tanto $\rho(x) = q(x)$, para todo $x \in E$. ∎

Observemos que en esta demostración, para garantizar que ρ es una seminorma, solamente se necesitó que V fuera un conjunto absorbente, balanceado y convexo. Así, para cualquier conjunto absorbente, absolutamente convexo se puede definir una seminorma en E.

La proposición anterior es de suma importancia, ya que en cualquier espacio vectorial se puede definir una topología usando una familia de seminormas, de la siguiente manera:

Sea E un espacio vectorial y $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de seminormas en E, donde I es un conjunto de índices. Definimos $B_{\alpha,r} = \left(r^{-1}\rho_\alpha\right)^{-1}(-1, 1) = (\rho_\alpha)^{-1}(-r, r) = \{x : \rho_\alpha(x) < r\}$ para todo $\alpha \in I$ y para todo $r > 0$ y tomamos $\mathcal{N}_o(E)$ de manera que $V \in \mathcal{N}_o(E)$ si y sólo si existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ y $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{\alpha_i, r_i} \subset V$. De esta forma, es fácil determinar a $\mathcal{N}_x(E)$ como $x + \mathcal{N}_o(E)$.

Notese que $B_{\alpha,r} \in \mathcal{N}_o(E)$ y por consiguiente $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{\alpha_i, r_i} \in \mathcal{N}_o(E)$.

Definición 10 *Sea E un espacio vectorial topológico, diremos que E es un espacio vectorial topológico localmente convexo (e.v.t.l.c. o simplemente e.l.c.) si el origen tiene un sistema fundamental de vecindades convexas (es decir, para toda $V \in \mathcal{N}_o(E)$, existe $U \in \mathcal{N}_o(E)$, U convexo tal que $U \subset V$).*

Los espacios localmente convexos se caracterizan por medio de las seminormas. Esto lo veremos en el siguiente Teorema, donde utilizamos las seminormas de Minkowski asociadas a los conjuntos abiertos, balanceados y convexos como se construyó en la proposición (1.2-9).

Teorema 11 *Sea (E, τ) un e.v.t. E es un e.l.c. si y sólo si existe $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de seminormas que determinan a τ.*

Demostración.
Veamos primero que dado un espacio localmente convexo podemos dar una familia de seminormas que determinan la topología.

Como E es un e.l.c. sea $\mathcal{B}_o$ una base de vecindades del origen en E formada por conjuntos abiertos, balanceados y convexos, por tanto absorbentes. Por la proposición anterior, (1.2-9), dada $B \in \mathfrak{B}_o$ existe una única seminorma ρ_B tal que

$$B = \{x : \rho_B(x) < 1\}.$$

Consideremos $\{\rho_B\}_{B\in\mathcal{B}_o}$; esta es una familia de seminormas que determinan la topología original en E.

Por otro lado, si $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una familia de seminormas en E que determinan su topología, tomemos a

$$B_{\rho_\alpha} = \{x : \rho_\alpha(x) < 1\} = (\rho_\alpha)^{-1}(-1, 1)$$

para cada $\alpha \in \Delta$. Estos conjuntos son abiertos, balanceados y convexos. Pero la familia de seminormas anterior define la topología en E; es decir,

$$\mathfrak{N} = \{\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i B_{\rho_{\alpha_i}} : \alpha_i \in \Delta, \varepsilon_i > 0, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$$

es una base para la topología τ en E. Notemos que cada uno de los elementos de $\mathfrak{N}$ son también abieros, balanceados y convexos. Por tanto E es un espacio localmente convexo. ∎

Ejemplo 12 *(a) Al espacio $C^\infty([a, b])$ de funciones reales o complejas infinitamente diferenciables en $[a, b]$ le asociamos la topología generada por las seminormas*

$$\rho_m(f) = \sup_{a\leq t\leq b} | f^{(m)}(t) |$$

para cada $m = 0, 1, 2, ...$; donde $f^{(m)}$ denota la $m-$ésima derivada, y para $m = 0$ a la función f. Por el Teorema anterior, y con esta topología, el espacio $C^\infty([a, b])$ resulta ser un e.l.c.

(b) *Si S es un conjunto cualquiera, consideremos el espacio vectorial de todas las funciones reales o complejas sobre S. A este espacio lo podemos dotar de una topología de e.l.c., la topología de la convergencia puntual, que está determinada por las seminormas:*

$$\rho_t(f) = |f(t)|$$

para cada $t \in S$. Con la cual resulta ser un e.l.c.

(c) *A cualquier espacio vectorial le podemos dar una topología de e.l.c. tomando la topología que tiene por base de vecindades del origen a todos los subconjuntos de E balanceados, convexos y absorbentes. Esta es la topología más fina de e.l.c. que se puede dar en un espacio. Con esa topología todas las seminormas resultan ser continuas y el espacio resulta ser de Hausdorff.*

Lema 13 *Sea E un e.l.c. Si ρ y q son seminormas en E, entonces son equivalentes:*

(a) $\rho(x) \leq q(x)$, $\forall\, x \in E$.

(b) $\{x \in E : q(x) < 1\} \subseteq \{x \in E : \rho(x) < 1\}$.

(b') $\rho(x) < 1$ *si* $q(x) < 1$.

(c) $\{x \in E : q(x) \leq 1\} \subseteq \{x \in E : \rho(x) \leq 1\}$.

(c') $\rho(x) \leq 1$ *si* $q(x) \leq 1$.

(d) $\{x \in E : q(x) < 1\} \subseteq \{x \in E : \rho(x) \leq 1\}$.

(d') $\rho(x) \leq 1$ *si* $q(x) < 1$.

Demostración.

Claramente tenemos $(b) \iff (b')$, $(c) \iff (c')$, $(d) \iff (d')$ y además, (a) implica cualquiera de las afirmaciones.

$(d) \Longrightarrow (a)$. Sea $x \in E$, y supongamos que $q(x) = \alpha$. Si $\varepsilon > 0$, entonces

$$q\left((\alpha+\varepsilon)^{-1} x\right) = (\alpha+\varepsilon)^{-1}\alpha < 1,$$

de esta manera

$$1 \geq \rho\left((\alpha+\varepsilon)^{-1} x\right) = (\alpha+\varepsilon)^{-1} \rho(x).$$

Así que $\rho(x) \leq \alpha + \varepsilon = q(x) + \varepsilon$, siempre que $\varepsilon > 0$. Por lo tanto $\rho(x) \leq q(x)$, para todo $x \in E$. De aquí que $(d) \Longrightarrow (b)$ y $(d) \Longrightarrow (c)$.

Resta probar $(b) \Longrightarrow (d)$ y $(c) \Longrightarrow (d)$.

$(b) \Longrightarrow (d)$. Si $q(x) < 1$, entonces $\rho(x) < 1$. De manera que $\rho(x) \leq 1$, como se quería.

$(c) \Longrightarrow (d)$. Si $q(x) < 1$, $q(x) \leq 1$; por tanto $\rho(x) \leq 1$.

Con esto concluimos la demostración. ■

Proposición 14 *Sea E un e.v.t. Si $f : E \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal, no constante cero, entonces son equivalentes:*

(*a*) *f es continua.*

(*b*) *$\exists\ U \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que $f(U)$ es acotado en $\mathbb{C}$.*

(*c*) *$N(f)$ es cerrado.*

(*d*) *$N(f)$ no es denso en E.*

(*e*) *f es continua en 0.*

(*f*) *$x \longmapsto |f(x)|$ es una seminorma continua.*

Si E es un e.l.c. y $\mathcal{F} = \{\rho_\alpha : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de seminormas que definen la topología en E, entonces las condiciones anteriores son equivalentes a:

(*g*) *Existen $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n \in \mathcal{F}$ y escalares positivos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tales que*

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \rho_k(x) \ \ , \ \ \forall\ x \in E.$$

Demostración.

(a)$\Longrightarrow$(b). Sea $\varepsilon > 0$; de la continuidad de f, existe $U \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que $U \subset f^{-1}(B_\varepsilon(0))$. De esto concluimos que $f(U) \subset B_\varepsilon(0)$; así que $f(U)$ es acotado en $\mathbb{C}$.

(b)$\Longrightarrow$(e). Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existen $M > 0$ y $U \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que $|f(y)| \leq M$ para todo $y \in U$. Entonces $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in \frac{1}{M}U$. Por tanto, $\left|f(\frac{\varepsilon}{2}x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $x \in \frac{1}{M}U$. Es así como $f(\frac{\varepsilon}{2M}U) \subset B_\varepsilon(0)$, donde $\frac{\varepsilon}{2M}U \in \mathcal{N}_o(E)$. Concluimos que f es continua en cero.

(e)$\Longrightarrow$(a). Sea $\varepsilon > 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veremos que $f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda))$ es abierto en E. Para el caso en que $f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda)) = \emptyset$, es trivial; por lo que se puede suponer que $f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda)) \neq \emptyset$. Sea $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda))$, consideremos $B_\delta(f(x)) \subset B\varepsilon(\lambda)$ con $\delta = \text{mín}\{|f(x) - \lambda|, \varepsilon - |f(x) - \lambda|\}$ si $f(x) \neq \lambda$ y $\delta = \varepsilon$ si $f(x) = \lambda$. Sabemos que $f^{-1}(B_\delta(0)) = f^{-1}(B_\delta(f(x)) - f(x))$ y por ser f continua en cero, existe $V \in \mathcal{N}_o(E)$ abierto tal que $f(y) \in B_\delta(0)$ siempre que $y \in V$. Definamos al $V' := x + V$. Sea $z \in V'$, entonces $z - x \in V$ y por tanto $f(z) - f(x) = f(z - x) \in B_\delta(0)$; es decir $V' \subset f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda))$, con $V' \in \mathcal{N}_x(E)$ abierto, como se necesitaba.

(a)$\Longrightarrow$(c). Es inmediato, ya que $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{C}$, y como f es continua $N(f) = f^{-1}(\{0\})$ es cerrado en E.

(c)$\Longrightarrow$(d). Como $N(f)$ es cerrado y f no es la constante cero, entonces $\overline{N(f)} = N(f) \subsetneqq E$. Por lo que $N(f)$ no puede ser denso en E.

(d)$\Longrightarrow$(b). Como $N(f)$ no es denso ($f \neq 0$), existe $x_o \in E \setminus \overline{N(f)}$, entonces $0 \in -x_o + E \setminus \overline{N(f)}$ el cual es abierto. Por este motivo, existe $U \in \mathcal{N}_o(E)$

balanceado tal que $U \subset -x_o + E \setminus \overline{N(f)}$. De modo que $x_o + U \subset E \setminus \overline{N(f)}$; entonces $f(x_o + y) \neq 0$ para todo $y \in U$. Además, como f es lineal

$$f(x_o) \neq -f(y) = f(-y).$$

Afirmamos que $|f(x_o)|$ es cota para $f(U)$: Supongamos que no, entonces existe $z \in U$ tal que $|f(z)| > |f(x_o)| > 0$; de donde $\frac{|f(x_o)|}{|f(z)|} < 1$. Como U es balanceada, si definimos $\alpha = \frac{f(x_o)}{f(z)}$ para $y = \alpha z$ se tiene que

$$f(y) = \alpha f(z) = f(x_o).$$

Por lo tanto $f(x_o) = f(z)$ para algún $z \in U$, lo que es una contradicción. Así concluimos que $f(U)$ es acotada.

$(a) \Longleftrightarrow (f)$. Claramente se da, como f es lineal y además continua, $|f|$ es una seminorma y también continua, donde la vecindad que nos sirve para $|f|$ es la misma que para f. De manera análoga, si $|f|$ es una seminorma continua, f también es continua.

$(f) \Longleftrightarrow (g)$. Es claro que (g) implica (f), por la continuidad de las seminormas. Sólo nos restaría probar $(f) \Longrightarrow (g)$. Por hipótesis, como $|f|$ es una seminorma continua en E, tenemos $|f|^{-1}(B_1(0)) \in \mathcal{N}_o(E)$; es decir, existen $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n \in \mathcal{F}$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} (\alpha_i \rho_i)^{-1}(B_1(0)) \subset |f|^{-1}(B_1(0)).$$

Pero

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i\right)^{-1}(B_1(0)) &\subset \bigcap_{i=1}^{n} (\alpha_i \rho_i)^{-1}(B_1(0)) \subset |f|^{-1}(B_1(0)) \quad \text{y} \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i &: E \to [0, \infty) \end{aligned}$$

es una seminorma continua en E, en consecuencia $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i)^{-1}(B_1(0))$ es abierto y $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i\right)^{-1}(B_1(0)) \subset |f|^{-1}(B_1(0))$. Por el lema anterior (1.2-13), $|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i(x) \quad \forall\, x \in E$. ∎

Corolario 15 *Toda funcional lineal $f : E \to \mathbb{C}$ continua manda acotados en acotados.*

Demostración.

Es inmediata de la proposición anterior incisos (a) y (b). ∎

Definición 16 *Sea (E, τ) un e.v.t. y $A \subset E$. A es acotado (τ-acotado) si para cualquier $V \in \mathcal{N}_o(E)$ existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset \alpha V$.*

Esta definición equivale a que pidamos que dado $V \in \mathcal{N}_o(E)$ existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset \lambda V$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \geq \alpha$.

Notemos que en $\mathbb{C}^n$ esta definición coincide con la definición de conjunto acotado que ya conocemos. Además, se tiene que cualquier vecindad de 0 en E absorbe a todo acotado, lo cual es natural.

Por ser un poco diferentes a lo que usualmente tenemos en $\mathbb{R}^n$ daremos algunas propiedades de los conjuntos acotados.

Proposición 17 *Sea E un e.l.c. Si $A, B \subset E$ son acotados, entonces:*

a) Todo subconjunto de A es acotado.

b) $\overline{A}$ es acotado.

c) $\mu \cdot A$ es acotado para todo $\mu \in \mathbb{C}$.

d) $A \cup B$ es acotado.

e) $A + B$ es acotado.

f) $conv(A)$ es acotado.

Demostración.

a) Sean $C \subset A$ y $V \in \mathcal{N}_o(E)$. De la definición de acotado, existe $\alpha > 0$ tal que $C \subset A \subset \alpha V$, que es lo que se pide.

b) Sea $V \in \mathcal{N}_o(E)$, como E es un espacio vectorial topológico existe una base fundamental de vecindades cerradas de 0, así que existe $W \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que W es cerrado y $W \subset V$. Por ser A acotado, para W existe $\alpha > 0$ tal que $A \subset \alpha W$. Y al ser W cerrado $\overline{A} \subset \alpha W$ y por lo tanto $\overline{A} \subset \alpha W \subset \alpha V$, de donde $\overline{A}$ es acotado.

c) Puesto que A es acotado, para toda $V \in \mathcal{N}_o(E)$ existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset \alpha V$. Entonces $\mu A \subset \mu\alpha V = \alpha |\mu| V$. Luego basta que tomemos, para la vecindad V y el conjunto μA, el real positivo $\alpha |\mu|$.

d) Sea $V \in \mathcal{N}_o(E)$. Como E es un e.v.t. existe $W \in \mathcal{N}_o(E)$, W balanceado, tal que $W \subset V$. Si α_1 y α_2 son dos números reales positivos tales que $A \subset \alpha_1 W$ y $B \subset \alpha_2 W$ entonces, si denotamos por α al máximo de α_1 y α_2, tenemos que $A \subset \alpha W$ y $B \subset \alpha W$, por consiguiente $A \cup B \subset \alpha W \subset \alpha V$. Finalmente, de aquí se deduce que $A \cup B$ es acotado.

e) Sea $V \in \mathcal{N}_o(E)$, por el mismo argumento que el inciso anterior, existe $W \in \mathcal{N}_o(E)$, W balanceada tal que $W + W \subset V$. Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que $A \subset \alpha_1 W$ y $B \subset \alpha_2 W$, definamos como α al máximo entre α_1 y α_2, $A \subset \alpha W$ y $B \subset \alpha W$. Así, $A + B \subset \alpha W + \alpha W = \alpha(W + W) \subset \alpha V$. Por lo que $A + B$ es acotado.

f) Demostremos ahora que $conv(A)$ es acotado. Por ser A acotado y E un e.l.c., para toda $V \in \mathcal{N}_o(E)$, existe $W \in \mathcal{N}_o(E)$, W convexo, $W \subset V$ tal que $A \subset \alpha W$ para alguna $\alpha > 0$. Pero

$$conv(A) = tA + (1 - t)A \subset t(\alpha W) + (1 - t)(\alpha W).$$

Además, como W es convexo, también lo es αW. Así pues, tenemos

$$\alpha W(t+(1-t)) = \alpha W \subset \alpha V \;\text{ y }\; conv(A) \subset (\alpha W)(t+(1-t)) = \alpha W \subset \alpha V,$$

de modo que $conv(A)$ es acotado.

Esto completa la demostración. ■

Proposición 18 *Sean E un e.v.t. y $A \subset E$. A es acotado si y sólo si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A y cualquier sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^+$ que tiende a cero, la sucesión $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E.*

Demostración.

Supongamos que A es acotado y que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en A. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos que tiende a cero y sea $V \in \mathcal{N}_o(E)$. Entonces existe $W \in \mathcal{N}_o(E)$, W balanceado, tal que $W \subset V$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset \alpha W$, dicho α existe por ser A acotado.

Para $\beta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\beta \geq \alpha$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < \frac{1}{\beta}$ para $n \geq n_0$ por ser $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a cero. Entonces, como $a_n\beta < 1$ y W es balanceado,

$$a_n\beta W \subset W \subset V$$

para todo $n_0 \leq n$ por lo tanto $a_n x_n \in V$, siempre que $n \geq n_0$; es decir, $(a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E.

Supongamos ahora que A no es acotado, entonces existe $U \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que $\beta A \subsetneq U$ para toda $\beta \in \mathbb{R}^+$. Sea n un entero positivo y $\beta = \frac{1}{n}$. Entonces existe $x_n \in A$ tal que $\frac{1}{n}x_n \notin U$. De esta manera, para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos x_n y podemos formar la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en A tales que $(\frac{1}{n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge al origen en E y sin embargo $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero. ■

Recordemos que uno de los principales resultados de Análisis Funcional, el Teorema de Hahn-Banach (ver W. Rudin [R3],3-3.3, pág. 57), nos garantiza que cualquier funcional lineal definida en un subespacio Y de un espacio localmente convexo E, se puede extender a todo el espacio de manera lineal y continua; además podemos separar por medio de una funcional a cualquier subespacio cerrado de E de cualquier punto en E que no esté en dicho subespacio; es decir, podemos encontrar un hiperplano donde dicho subespacio esta contenido, pero no al punto. Ahora veremos que también lo podemos hacer para algunos subconjuntos de un espacio localmente convexo, por lo que tenemos los siguientes resultados para tales espacios.

Antes de seguir con la demostración de nuestro próximo resultado, recordemos que en $\mathbb{C}$, para cualquier complejo z tenemos que $z = \operatorname{Re} z - i\operatorname{Re}(iz)$; así, dado un espacio localmente convexo E para cualquier funcional lineal $f : E \to \mathbb{C}$

$$f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) - i\operatorname{Re}(if(x)) = \operatorname{Re}(f(x)) - i\operatorname{Re}(f(ix)).$$

Además, $\operatorname{Re}(f) : E \to \mathbb{R}$ es una función $\mathbb{R}$-lineal y continua.

Teorema 19 *Sea E un e.l.c. real, F un subespacio de E, $f \in F'$ y ρ una seminorma en E tales que $f(x) \leq \rho(x)$, para todo $x \in F$. Entonces existe $\hat{f} \in E'$ tal que $\hat{f}\mid_F = f$ y $\left|\hat{f}(x)\right| \leq \rho(x)$, $\forall x \in E$.*

Demostración.

Tenemos que $f(y) \leq \rho(y)$, siempre que $y \in F$. supongamos que F es un subespacio propio de E. Sea $x_o \in E \backslash F$ y $F_o = F + \{\lambda x_o : \lambda \in \mathbb{R}\}$, el cual es un subespacio de E tal que contiene propiamente a F. Notemos que si $y + \lambda x_o = y' + \lambda' x_o$, donde $y, y' \in F$ y $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, obtenemos que $(\lambda - \lambda')x_o = y' - y \in F$, esto último implica que $\lambda = \lambda'$ y $y = y'$. Por tanto, cada $z \in F_o$ puede ser expresado de manera única en la forma $z = y + \lambda x_o$, con $y \in F$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sean $y_1, y_2 \in F$. Consideremos

$$f(y_1) + f(y_2) = f(y_1 + y_2) \leq \rho(y_1 - x_o + y_2 + x_o), \text{ y}$$

$$\rho(y_1 - x_o + y_2 + x_o) \leq \rho(y_1 - x_o) + \rho(y_2 + x_o),$$

así que $f(y_1) - \rho(y_1 - x_o) \leq \rho(y_2 + x_o) - f(y_2)$.

De esto se sigue que

$$\sup\{f(y) - \rho(y - x_o) : y \in F\} \leq \inf\{\rho(y + x_o) - f(y) : y \in F\}.$$

Entonces, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup\{f(y) - \rho(y - x_o) : y \in F\} \leq \alpha \leq \inf\{\rho(y + x_o) - f(y) : y \in F\}.$$

Sea $\widetilde{f_o}(y + \lambda x_o) = f(y) + \lambda\alpha$, para cada $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Claramente, $\widetilde{f_o}$ es una funcional lineal en F, y es tal que $\widetilde{f_o}\,|_F = f$. Además, de la definición de α, para cada $y \in F$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$, tenemos que

$$\widetilde{f_o}(y + \lambda x_o) = \lambda\left(f\left(\lambda^{-1}y\right) + x_o\right) \leq \lambda\rho\left(\lambda^{-1}y + x_o\right) = \rho(y + \lambda x_o), \text{ y}$$

$$\widetilde{f_o}(y - \lambda x_o) = \lambda\left(f\left(\lambda^{-1}y\right) - x_o\right) \leq \lambda\rho\left(\lambda^{-1}y - x_o\right) = \rho(y - \lambda x_o),$$

así que $\widetilde{f_o}(z) \leq \rho(x)$, siempre que $x \in F$. .....[1]

Ahora, mostremos que f se puede extender a todo E: Sea F la colección de todas las funcionales lineales g tales que el dominio de g es un subespacio de E que contiene propiamente a F, la restricción de g en F es f, y g esta dominada por ρ.

Definamos el orden $\preccurlyeq$ en F como sigue: Dadas $g_1, g_2 \in$F, $g_1 \preccurlyeq g_2$ si y sólo si el dominio de g_1 es un subespacio del dominio de g_2 y g_1 es la restricción de g_2 en el dominio de g_1. Así, cada cadena no vacía $\mathcal{C}$ en F tiene una cota superior, en efecto, si consideramos la funcional lineal cuyo dominio G es la unión de todos los dominios de los elementos de $\mathcal{C}$, y para el cual definimos $\hat{g} : G \to \mathbb{R}$ dada por $\hat{g}(x) = g(x)$, para cada $x \in G$, y donde $x \in F_g$ el cual es el dominio de g, para alguna $g \in \mathcal{C}$, y por construcción $\hat{g}$ también va a estar dominada por ρ. Así, por el lema de Zorn, F tiene maximal, digamos $\widetilde{f}$, y con esto sólo falta verificar que $\widetilde{f}$ tiene como dominio a E. Supongamos que $M \subset E$ es un subespacio propio y que además es el dominio de $\widetilde{f}$. Sea $x \in E \backslash M$, entonces siguiendo con el mismo procedimiento para la construcción de $\widetilde{f_o}$ (como en [1]), podemos encontrar

$$\widetilde{f_1} : M + \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$$

tal que $\widetilde{f}_1 \mid_M = \hat{f}$. De donde obtenemos que $\widetilde{f}_1 \mid_F = \hat{f} \mid_F = f$ y F está contenido propiamente en $M + \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $\widetilde{f}_1 (y) \leq \rho (y)$, siempre que $y \in M + \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$, lo que contradice que $\widetilde{f}_1$ sea maximal con estas características. Así, $\widetilde{f}$ tiene como dominio a E. ∎

Observemos que en el Teorema anterior podemos pedir que $|f(x)| \leq \rho(x)$, para cada $x \in F$, ya que $-x \in F$ y $-f(x) = f(-x) \leq \rho(-x) = \rho(x)$. Este último Teorema se conoce como el Teorema de Hanh-Banach en su versión real, el cual utilizamos para demostrar el Teorema de Hanh-Banach pero ahora para la versión compleja.

Teorema 20 (Hanh-Banach) *Sea E un e.l.c. complejo, F un subespacio de E, $f \in F'$ y ρ una seminorma en E tales que $|f(x)| \leq \rho(x)$, para todo $x \in F$. Entonces existe $\hat{f} \in E'$ tal que $\hat{f} \mid_F = f$ y $\left|\hat{f}(x)\right| \leq \rho(x)$, $\forall x \in E$.*

Demostración.

Consideremos $\mathrm{Re}(f) = f_o$, la cual es una funcional $\mathbb{R}$-lineal y es tal que $f_o(y) \leq \rho(y)$, para todo $y \in F$. Del Teorema anterior podemos encontrar $\widetilde{f}_o : E \to \mathbb{R}$, funcional lineal tal que $\widetilde{f}_o \mid_F = \mathrm{Re}(f)$ y $\widetilde{f}_o(x) \leq \rho(x)$, para todo $x \in E$. Definamos $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}_o(x) - i\widetilde{f}_o(ix)$. Sea $x \in E$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ tal que $\left|\widetilde{f}(x)\right| = \alpha\widetilde{f}(x)$. Así, $\left|\widetilde{f}(x)\right| = \widetilde{f}(\alpha x) = \widetilde{f}_o(\alpha x) \leq \rho(\alpha x) = \rho(x)$. Con esto concluimos la demostración del Teorema. ∎

Teorema 21 *Sean E un e.l.c. y $U \subset E$ abierto, no vacío y convexo, que no contiene al origen. Entonces existe $F : E \to \mathbb{C}$ tal que*

$$N(F) \cap U = \emptyset.$$

Demostración.

Supongamos que E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Entonces E también es un espacio $\mathbb{R}$-lineal, fijemos $x_0 \in U$ y sea $B = x_0 - U$. De donde $B \in \mathcal{N}_o(E)$ abierto y convexo. Por la proposición (1.2-9), existe una seminorma $\rho_{_U} : E \to \mathbb{R}$ tal que $B = \{x \in E : \rho_{_U}(x) < 1\}$. Como $0 \notin U$, $x_o \notin B$, así que $\rho_{_U}(x_o) \geq 1$.

Sea $\mathcal{Y} \equiv \{\alpha x_o : \alpha \in \mathbb{R}\}$ y definamos $f_o : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ por $f_o(\alpha x_o) = \alpha\rho_{_U}(x_o)$.

Si $\alpha \geq 0$, entonces $f_o(\alpha x_o) = \alpha\rho_{_U}(x_o) = \rho_{_U}(\alpha x_o)$; si $\alpha < 0$, se tiene que $f_o(\alpha x_o) = \alpha\rho_{_U}(x_o) \leq \alpha < 0 \leq \rho_{_U}(\alpha x_o)$. Por lo tanto, $f_o \leq \rho_{_U}$ en $\mathcal{Y}$. Entonces podemos aplicar el Teorema de Hahn-Banach, así existe una funcional lineal y $f : E \to \mathbb{R}$ tal que $f \mid_{\mathcal{Y}} = f_o$ y $f \leq \rho_{_U}$ en E.

Ahora, si $x \in U$, entonces $x_o - x \in B$ y $f(x_o) - f(x) \leq \rho_B(x_o - x) < 1$. Por lo que $f(x) > f(x_o) - 1 = \rho_{_U}(x_o) - 1 \geq 0$ para todo $x \in U$. Y de esta manera, $N(f) \cap U = \emptyset$.

Si $F(x) = f(x) - if(ix)$, entonces F es una funcional $\mathbb{C}$-lineal y $f = \mathrm{Re}F$. Con esto $F(x) = 0$ si y sólo si $f(x) = f(ix) = 0$; es decir, $N(F) = N(f) \cap (iN(f))$. De donde, $N(F) \cap U = \emptyset$. ∎

Si consideramos la misma construcción de f en la demostración del Teorema anterior, tenemos:

Corolario 22 *Sea E un e.l.c. y $U \subset E$ abierto, no vacío y convexo, que no contiene al origen. Entonces, existe $f : E \to \mathbb{R}$ linela y continua, tal que $N(f) \cap U = \emptyset$.*

Observemos que si $f : E \to \mathbb{R}$ es una función $\mathbb{R}$-lineal, y $A \subset E$ es un conjunto convexo, entonces $f(A)$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$, de hecho, toda función lineal mantiene la convexidad. Además, bajo las mismas condiciones y con otra hipótesis, se tiene que:

Lema 23 *Sea E un e.l.c. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es una función continua $\mathbb{R}$-lineal, no identicamente nula, entonces $f(A)$ es un intervalo abierto siempre que A sea un subconjunto de E abierto y convexo.*

Demostración.

Si $A \subset E$ es convexo, entonces también lo es $f(A)$. Para ver esto, consideramos $y,\ z \in f(A)$ donde $y = f(x_1)$ y $z = f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in A$, se sigue que si $t \in [0, 1]$, al ser f una función lineal y como $tx_1 + (1 - t)x_2 \in A$, $ty + (1 - t)z = tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) = f(tx_1 + (1 - t)x_2) \in f(A)$.

Sea $x \in A$. Como A es abierto, existe un intervalo (s, t) tal que el segmento de recta de sx a tx está contenido en A. Sea $\gamma = f(x)$;entonces por la linealidad de f tenemos que $(s\gamma, t\gamma) \subset f(A)$. Por lo tanto $f(A)$ es abierto. ■

Se puede ver que la linealidad de f es una condición necesaria; por ejemplo, la función constante 1 es continua pero la imagen bajo esta función de cualquier subconjunto abierto no-vacío en E no es abierta.

Teorema 24 *Sea E es un e.l.c. y $A, B \subset E$ convexos ajenos. Si A es abierto, entonces existe una funcional lineal continua $f : E \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < \alpha$ para todo $a \in A$ y $f(b) \geq \alpha$ para todo $b \in B$. Si B también es abierto, entonces se puede encontrar f como antes, con $f(b) > \alpha$ para toda $b \in B$.*

Demostración.

Ya que $\mathbb{R}$ es subconjunto de $\mathbb{C}$ y hereda las propiedades de la multiplicación por escalares sobre E, además es cerrado bajo la suma y la multiplicación usuales, podemos suponer que E es un espacio vectorial localmente convexo real. Sea $G = A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$; G es convexo y además es abierto, pues $G = \bigcup_{b \in B} (A - b)$. Más aún, como $A \cap B = \emptyset$, $0 \notin G$. Por el corolario anterior (1.2-22), existe una funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ tal que $N(f) \cap G = \emptyset$. Por lo cual $f(G)$ es convexo y $0 \notin f(G)$. La convexidad nos garantiza que, como f es continua, $f(x) > 0 \ \ \forall x \in G$ ó $f(x) < 0 \ \ \forall x \in G$; sin perdida de generalidad, supongamos que $f(x) > 0$ para todo x en G. Entonces, si $a \in A$ y $b \in B$, $0 < f(a - b) = f(a) - f(b)$; es decir, $f(a) > f(b)$. Elijamos $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup\{f(b) : b \in B\} \leq \alpha \leq \inf\{f(a) : a \in A\}.$$

Con esto obtenemos lo que se quería.

Si además B es abierto, se tiene que $f(A)$ y $f(B)$ son intervalos abiertos, así que:

$f(x) < \alpha$ si $x \in B$, y $f(x) > \alpha$ siempre que $x \in A$. ∎

Corolario 25 *Sean E un e.l.c. y $A \subset E$ convexo. Entonces, para todo elemento x de $E \setminus \overline{A}$, existe $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua, tal que $f(x) \notin \overline{f(A)}$.*

Demostración.

Sea $U \in \mathcal{N}_o(E)$ abierto y convexo tal que $(x+U) \cap A = \emptyset$. Por el Teorema anterior, existe $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua, tal que $f(x+U) \cap f(A) = \emptyset$. Pero $f(x+U)$ es abierto (ver lema 1.2-23), mejor aún $f(x+U) \in \mathcal{N}_{f(x)}(\mathbb{R})$. ∎

Teorema 26 *Sean E un e.l.c. y $A, B \subset E$ cerrados, convexos y ajenos. Si B es compacto, entonces existen $f : E \to \mathbb{R}$, lineal y continua, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < \alpha < f(y)$, $\forall x \in A$, $y \in B$.*

Demostración.

Como en la demostración del Teorema anterior (1.2-24), podemos suponer que E es un espacio localmente convexo real. Sea $\mathcal{U}$ una base de vecindades abiertas absolutamente convexas del origen en E. Como B es compacto, A es cerrado y $A \cap B = \emptyset$, podemos encontrar $y_1, y_2, ..., y_n \in B$ y $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{U}$ tales que $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (y_i + U_i) \subset E \setminus A$ y $(y_i + 3U_i) \cap A = \emptyset$ $\forall 1 \leq i \leq n$. Así, $(y_i + 2U_i) \cap (A + U_i) = \emptyset$, $\forall 1 \leq i \leq n$; en efecto, si $x \in (y_i + 2U_i) \cap (A + U_i)$, entonces $x = y_i + 2z_i = a + w_i$ p.a. $z_i, w_i \in U_i$ y $a \in A$, por lo que $a = y_i + 2z_i - w_i$, $z_i, w_i \in U_i$ y $a \in A$; así $a \in y_i + 3U_i$, llegamos a una contradicción.

Definimos $U := \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$, entonces $(A+U) \cap (B+U) = \emptyset$, ya que si

$x \in (A+U) \cap (B+U)$, implica que $x = a + y = b + z$ con $a \in A, b \in B$ y $y, z \in U$, entonces $a = b + z - y \in b + 2U \subset y_i + 3U_i$ p.a. $1 \leq i \leq n$; lo cual es una contradicción.

Por otro lado, $A + U$ y $B + U$ son abiertos, convexos, no vacíos y ajenos, entonces (por Teorema (1.2-24)) existen $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < \alpha < f(y)$ $\forall x \in A \subset A + U$, $y \in B \subset B + U$. ∎

Corolario 27 *Sean E un e.l.c. y $A,B \subset E$ cerrados, convexos y ajenos, con B compacto. Si A es balanceado entonces, existe una función $g : E \to \mathbb{C}$, lineal y continua, tal que*

$$\sup_{x \in A} |g(x)| < \inf_{y \in B} |g(y)|.$$

Demostración.

Como se cumplen las hipótesis del Teorema (1.2-26), sean $f : E \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ como en el Teorema anterior. Como A es balanceado, si $x \in A$, $-x \in A$, entonces $|f(x)| < \alpha$, $\forall x \in A$. En particular, $\alpha > 0$, y $\sup\limits_{x \in A} |f(x)| \leq \alpha$. Por otro lado, $\alpha < |f(y)|$, $\forall y \in B$, y B es compacto; entonces $\alpha < \inf_{y \in B} |f(y)|$. Si E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, hagamos $g = f$, y se tiene lo que se pide.

Si E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, sea $f : E \to \mathbb{R}$ como en (1.2.26). Defínamos $g(x) = f(x) - if(ix)$, y recordando que A es balanceado, ix también es un elemento de A, $\forall x \in A$, de donde $|f(ix)| < \alpha$, $\forall x \in A$. Así

$$2\alpha^2 > (f(x))^2 + (f(ix))^2 = |g(x)|^2, \ \forall x \in A.$$

Por lo tanto, $|g(x)| < \sqrt{2}\alpha$, $\forall x \in A$.

Además, para cualquier z en B se tiene que $|f(z)| \geq \alpha$, y $|f(iz)| \geq \alpha$. De donde $|g(y)|^2 = |f(y)|^2 + |f(iy)|^2 = 2|f(y)|^2 > 2\alpha^2$, para todo $y \in B$. De esta manera, $|g(y)| > \sqrt{2}\alpha$ para todo elemento y de B. Por lo que $\sqrt{2}\alpha < \inf_{y \in B} |g(y)|$, por ser B cerrado. Concluimos que

$$\inf_{x \in A} |g(x)| < \inf_{y \in B} |g(y)| \ .$$

■

Corolario 28 *Sea E e.l.c., A un subconjunto no vacío, absolutamente convexo de E. Entonces, para todo $y \in E \setminus A$, existe $f : E \to \mathbb{C}$, funcional lineal y continua, tal que $f(y) > 1$ y $|f(x)| \leq 1$, $\forall x \in A$.*

Demostración.

Sea $B := \{y\}$, claramente B es compacto, entonces se cumplen las hipótesis del corolario anterior, al aplicarlo obtenemos

$$g : E \to \mathbb{C},$$

lineal y continua tal que

$$\sup_{x \in A} |g(x)| < |g(y)| \ .$$

Para tal función g, sea $\sup_{x \in A} |g(x)| < \beta < |g(y)|$. Entonces, para $f = \beta^{-1} g$ tenemos lo que se pide. ■

Hasta ahora hemos construido los espacios localmente convexos, además de dar algunos resultados importantes para estos; pero si tenemos un espacio localmente convexo E, nos podemos preguntar si dado un espacio cociente de E, con respecto a alguno de sus subespacios, le podemos asignar una familia de seminormas y dar una topología localmente convexa que esté relacionada con la estructura de E.

Sean $E = (E, \tau)$ localmente convexo y $F \subset E$ un subespacio cerrado, esto es, un subespacio lineal y cerrado con respecto a la topología τ. Denotemos, como se hace usualmente, al espacio cociente de E sobre F como E/F y definamos

$$\pi : E \to E/F$$

vía la regla $x \longmapsto \pi(x) =: [x] = x + F$, la función cociente y denotemos por $\hat{\tau}$ la topología cociente en E/F, donde $U \in \hat{\tau}$ si y sólo si existe $V \in \tau$ tal que $\pi^{-1}(U) = V$ (ver Apéndice A-proposición (A.1-195)).

Proposición 29 *Sea E un e.l.c. y F un subespacio cerrado de E. Sea Γ una familia dirigida de seminormas en E que definen la topología τ. Entonces la familia $\widehat{\Gamma}$ de todas las seminormas*

$$\hat{\rho} : E/F \to \mathbb{R}$$

definidas por $\pi(x) \longmapsto \inf_{y\in F} \rho(x+y)$, $\rho \in \Gamma$, definen la topología cociente $\widehat{\tau}$.

Demostración.

Veamos que en efecto la función

$$\hat{\rho} : E/F \to \mathbb{R}$$

vía la regla $\pi(x) \longmapsto \inf\limits_{y\in F} \rho(x+y)$, donde $\rho \in \Gamma$, es una seminorma:

(i) Mostremos que $\hat{\rho}$ saca escalares positivos. Sean $[x] \in E/F$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Para el caso en que $\lambda = 0$, se da trivialmente pues $0 \in F$, y así

$$0 = \hat{\rho}([0]) = \hat{\rho}(\lambda[x]) = \inf_{y\in F} \rho(\lambda x + y) = \inf_{y\in F} \rho(y) = 0 = \lambda\hat{\rho}([x]).$$

En otro caso tenemos

$$\hat{\rho}(\lambda[x]) = \inf_{y\in F} \rho(\lambda x + y) = \inf_{y\in F} \rho(\lambda x + \lambda y) = \inf_{y\in F} \rho(\lambda(x+y)),$$

pero por ser ρ una seminorma en E, se sigue que

$$\inf_{y\in F} \rho(\lambda(x+y)) = \inf_{y\in F} |\lambda|\,\rho(x+y) = |\lambda| \inf_{y\in F} \rho(x+y) = |\lambda|\,\hat{\rho}([x]).$$

Por lo que $\hat{\rho}(\lambda[x]) = |\lambda|\,\hat{\rho}([x])$, para todo $[x] \in E/F$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) Nos falta ver que $\hat{\rho}$ es subaditiva, es decir, satisface la desigualdad del triángulo. Sean $[x]$, $[z] \in E/F$, y $\lambda \in \mathbb{C}$, así:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}([x]+[z]) &= \hat{\rho}([x+z]) = \inf_{y\in F} \rho((x+z)+y) = \inf_{y\in F} \rho(x+z+2y)\\ &= \inf_{y\in F} \rho((x+y)+(z+y)) = (*);\end{aligned}$$

pero, como ρ es una seminorma en E, siempre se da

$$\rho(x+y+z+y) \leq \rho(x+y) + \rho(z+y),\ \forall y \in F.$$

Entonces

$$(*) = \inf_{y\in F} \rho(x+y+z+y) \leq \inf_{y\in F} \rho(x+y) + \inf_{y\in F} \rho(z+y) = \hat{\rho}([x]) + \hat{\rho}([z]).$$

De esto obtenemos que

$$\hat{\rho}([x]+[z]) \leq \hat{\rho}([x]) + \hat{\rho}([z]).$$

Además, por definición, al ser ρ una seminorma, $\hat{\rho}$ es no negativa. Con esto concluimos que $\hat{\rho}$ definida así es una seminorma en E/F.

Llamemos $\tau_{\widehat{\Gamma}}$ a la topología generada por la familia de seminormas $\widehat{\Gamma}$ obtenida como arriba. Ahora, observemos que $\hat{\rho} \circ \pi : E \to \mathbb{R}$ y que tenemos $\hat{\rho} \circ \pi(x) \leq \rho(x)$, $\forall x \in E$, $\forall \rho \in \Gamma$. Entonces para $\varepsilon > 0$ arbitrario se cumple:

$$\rho^{-1}(B_\varepsilon(0)) \subset (\hat{\rho} \circ \pi)^{-1}(B_\varepsilon(0)).$$

De modo que

$$\pi(\rho^{-1}(B_\varepsilon(0))) \subset \pi((\hat{\rho} \circ \pi)^{-1}(B_\varepsilon(0))) = \hat{\rho}^{-1}(B_\varepsilon(0)).$$

Con esto $\tau_{\widehat{\Gamma}} \leq \hat{\tau}$ en E/F.

Para la otra contensión, sea $W \in \mathcal{N}_o(E/F, \widehat{\tau})$. Elegimos $\rho \in \Gamma$ y $\varepsilon > 0$ tales que $[x] \in W$ si $\rho(x) < \varepsilon$; usando que Γ es una familia de seminormas dirigida. Consideramos ahora, $V \in \mathcal{N}_o(E/F, \tau_{\widehat{\Gamma}})$,

$$V := \{[x] \in E/F : \hat{\rho}([x]) < \varepsilon\}.$$

Dado $[x] \in V$, $\rho(x + y) < \varepsilon$ para algún $y \in F$; es decir, $[x] = [x + y] \in W$, para algún $y \in F$. Esto es, $V \subset W$, y $W \in \mathcal{N}_o(E/F, \tau_{\widehat{\Gamma}})$. En consecuencia $\widehat{\tau} = \tau_{\widehat{\Gamma}}$ en E/F. ■

De aquí tenemos como consecuencia el siguiente resultado.

Proposición 30 *Sea E un e.l.c. y F es un subespacio cerrado de E, entonces E/F es un e.l.c. con respecto a la topología cociente.*

Capítulo 2

Dualidad

Iniciaremos ahora el estudio de la dualidad, una herramienta que sirve para tratar de transferir un problema del espacio, el cual puede ser muy difícil, a uno que usa sólo propiedades lineales, con lo cual puede ser más fácil.

Gracias a la dualidad podemos reemplazar a la topología original por una más simple cuando se trate de problemas de convexidad, continuidad o acotamiento, entre otros. Una de las topologías más importantes que cumple con esto es la topología débil, la cual es más fácil de manejar debido a que tiene propiedades lineales, heredadas de las formas lineales con las que se construye. Las construcciones básicas de esta topología recaen en los conceptos de polar y bipolar; los cuales introduciremos en la segunda sección de este capítulo. Después seguiremos con algunos conceptos y resultados importantes de la topología débil, con lo que podremos dar topologías más fuertes o más débiles con respecto a la topología original y así obtener resultados importantes en dichas topologías.

2.1. Dualidad y Topología Débil.

En lo que sigue consideraremos a E y F como espacios vectoriales topológicos sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$, a menos que se diga lo contrario; además definiremos por $[f_1, f_2, ..., f_n]$ al conjunto de combinaciones lineales de $f_1, f_2, ..., f_{n-1}$ y f_n.

Definición 31 *Una dualidad es una tripleta* (E, F, B), *donde* E *y* F *son espacios vectoriales y* $B : E \times F \to \mathbb{C}$ *es una forma bilineal no degenerada; es decir, satisface las siguientes dos condiciones:*

(i) *Si* $B(x, f) = 0$ *para todo* $f \in F$, *entonces* $x = 0$.

(ii) *Si* $B(x, f) = 0$ *para todo* $x \in E$, *entonces* $f = 0$.

En este caso diremos que E *y* F *están en dualidad, ó* $\langle E, F\rangle$ *es una pareja en dualidad.*

También, de la definición, podemos decir que para cualesquiera dos elementos distintos $x_1, x_2 \in E$ existe $f \in F$ tal que $B(x_1, f) \neq B(x_2, f)$; es decir, F separa los puntos de E. De manera análoga, E separa los puntos de F.

Notación : Escribiremos $\langle x, f\rangle$ en lugar de $B(x, f)$, y si E y F están en dualidad usaremos $\langle E, F\rangle$ para referirnos a tal dualidad.

Ejemplo 32 *Definamos por* $E^*= \{f : E \to \mathbb{C} : f$ *es lineal*$\}$ *al dual algebraico de* E. *Si* E *es un e.v.t., con la topología* τ*; su dual topológico es*

$$E' = \{f : (E, \tau) \to \mathbb{C} : f \textit{ es lineal y continua}\} = (E, \tau)'.$$

Cuando no haya posibilidad de confusión, escribiremos E' *en lugar de* $(E, \tau)'$.

Observemos que $E' \subset E^*$, así tenemos:

(a) Para todo espacio vectorial E, la forma bilineal canónica

$$\langle \cdot, \cdot\rangle : E^* \times E \to \mathbb{C}$$

bajo la regla $(f, x) \longmapsto \langle f, x\rangle =: f(x)$, es no degenerada. Por tanto tenemos la dualidad $\langle E^*, E\rangle$, y también $\langle E, E^*\rangle$ es una dualidad con la forma bilineal

$$\langle \cdot, \cdot\rangle : E \times E^* \to \mathbb{C} \ ; \ (x, f) \longmapsto \langle x, f\rangle = \langle f, x\rangle = f(x).$$

Demostración.

$i)$ Si $\langle f, x\rangle = 0$ para todo $f \in E^*$, entonces $f(x) = 0$ para todo $f \in E^*$, pero esto pasa si y sólo si $x = 0$.

Para ver esta afirmación, notemos que es inmediato que si $x = 0$ tenemos que $\langle f, x\rangle = f(x) = 0$, para toda función $f : E \to \mathbb{C}$ lineal. A la inversa, dado $x \in E$, $x \neq 0$, podemos definir la funcional lineal $f_x : E \to \mathbb{C}$ dada por $f_x(\lambda x) = \lambda$, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y extendemos la función a todo E de manera lineal, por lo que si $x \neq 0$ existe una función lineal $f : E \to \mathbb{C}$ tal que $\langle f, x\rangle \neq 0$.

$ii)$ $\langle f, x\rangle = 0$, $\forall x \in E \Longrightarrow f = 0$, de la definición de $\langle f, x\rangle$.

Así $\langle E, E^*\rangle$ y $\langle E^*, E\rangle$ en efecto son dualidades. ∎

(b) Dado $E = (E, \tau)$ un espacio localmente convexo, la siguiente forma bilineal es no degenerada:

$$\langle \cdot, \cdot\rangle : E' \times E \to \mathbb{C} \ ; \ (f, x) \longmapsto \langle f, x\rangle =: f(x)$$

Por lo que $\langle E', E\rangle$ es una dualidad, y de la misma manera que en (a), $\langle E, E'\rangle$ también es una dualidad.

Demostración.

Aquí la condición (ii) se cumple sin ningún problema, pero la parte (i) se da si y sólo si E es de Hausdorff:

Sea $x \in E$, $x \neq 0$. Si E es de Hausdorff, $\{0\}$ es convexo y cerrado en E, y por el corolario (1.2-25) existe $f_o : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $f_o(x) \notin \overline{f_o(\{0\})} = \{0\}$; si consideramos $f(x) = f_o(x) - i f_o(ix)$ obtenemos que $f(x) \neq 0$, lo cual implica que existe $f : E \to \mathbb{C}$ lineal y continua tal que $\langle f, x \rangle \neq 0$. Por tanto si $\langle f, x \rangle = 0$, $\forall f \in E'$, entonces $x = 0$.

Ahora, supongamos que $\langle f, x \rangle = 0$, $\forall f \in E'$ si y sólo si $x = 0$, y demostremos que es de Hausdorff. Sean x, $y \in E$, $x \neq y$, así $x - y \neq 0$ y existe $f_o \in E'$ tal que $f_o(x - y) \neq 0$, de donde $f_o(x) \neq f_o(y)$. Sea $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(f_o(x)) \cap B_\varepsilon(f_o(y)) = \emptyset$. Como $f_o : E \to \mathbb{C}$ es continua, tenemos que $f_o^{-1}(B_\varepsilon(f_o(x)))$ y $f_o^{-1}(B_\varepsilon(f_o(y)))$ son abiertos en E, $x \in f_o^{-1}(B_\varepsilon(f_o(x)))$ y $y \in f_o^{-1}(B_\varepsilon(f_o(y)))$, además por construcción $f_o^{-1}(B_\varepsilon(f_o(x))) \cap f_o^{-1}(B_\varepsilon(f_o(y))) = \emptyset$. De donde E es de Hausdorff.

Así, como en un principio se dijo que soló trabajaremos con espacios vectoriales topológicos de Hausdorff, tenemos que en efecto $\langle E, E' \rangle$ y $\langle E', E \rangle$ son dualidades. ∎

Usaremos a (b) como ejemplo particular, para mostrar que en una dualidad (E, F, B) arbitraria la elección especial de la forma bilineal B no es muy importante; esto explicará el uso de "dualidad"en la definición anterior.

En efecto, por (ii) de la definición (2.1-32), la función lineal

$$\psi : F \to E^*$$

definida como $f \longmapsto B(f, \cdot) =: \psi_f$ es inyectiva. Donde, dado $(x, f) \in E \times F$,

$$\langle f, x \rangle = B(f, x) = \left\langle \psi_f, x \right\rangle.$$

De esta manera, B es justo la restricción de

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E \to \mathbb{C}$$

en $F \times E$ si identificamos a F con $\psi(F)$. De la misma manera, la función lineal

$$\varphi : E \to F^*$$

vía la regla $x \longmapsto B(\cdot, x) =: \varphi_x$ es inyectiva, debido a que se cumple (i) de la definición (2.1-30), y donde $\varphi_x : F \to \mathbb{C}$ es tal que $\varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$.

Si ahora identificamos a E con $\varphi(E)$, entonces B es la restricción en $F \times E$ de la forma bilineal canónica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times F^* \to \mathbb{C}\ ;\ \ (f, \hat{y}) \longmapsto \hat{y}(f).$$

De manera que cuando hablemos de dualidad siempre consideraremos implícitamente a F como un subespacio de E^*, y a E como un subespacio de F^*.

Observación : Cabe señalar que si $\langle E, F \rangle$ es una dualidad, entonces induce las funciones: ψ_f y φ_x para cada $x \in E$, $f \in F$ definidas arriba.

Si $\langle E, F\rangle$ es una dualidad, probaremos que la dualidad puede ser descrita de manera que a E se le puede dar una topología τ l.c. tal que $F = (E, \tau)'$. Aunque esta topología no necesariamente es única. Para la construcción de tal topología, notemos que podemos considerar a E como un subespacio lineal de $\mathbb{C}^F$.

Definición 33 *La topología que E hereda de la topología producto de $\mathbb{C}^F$ la denotamos por $\sigma(E, F)$ y nos referimos a esta como la topología débil en E con respecto a la dualidad $\langle E, F\rangle$. Esta topología es localmente convexa y de Hausdorff. Además, claramente la podemos identificar como la topología más débil, o que tiene menos abiertos, en E que hace continuas a todas las funciones*

$$\psi_f : E \to \mathbb{C} \; ; \; \psi_f(x) = \langle x, f\rangle$$

Análogamente definimos la topología débil en F, $\sigma(F, E)$.

Observemos que si E es un espacio localmente convexo, la topología débil en E, denotada por $\sigma(E, E')$, es la topología definida por la familia de seminormas $\left\{\rho_f : f \in E'\right\}$, donde $\rho_f(x) = |\langle x, f\rangle|$. De la misma manera, para E' la topología débil, $\sigma(E', E)$, es la topología definida por las seminormas $\left\{\rho_x : x \in E\right\}$, definidas por $\rho_x(x) = |\langle x, f\rangle|$. Por lo que un subconjunto U de E es $\sigma(E, E')$-abierto si y sólo si para todo $x_o \in U$ existen $\varepsilon > 0$ y $f_1, f_2, ..., f_n \in E'$ tales que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{x \in E : |\langle x - x_o, f_k\rangle| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Una característica particular de la definición anterior es que F es un subespacio del dual topológico de $(E, \sigma(E, F))$. Para probar que en realidad F es su dual topológico necesitamos el siguiente lema, por lo que dadas $f_1, ..., f_n \in E^*$ definimos por $[f_1, f_2, ..., f_n]$ al espacio lineal generado por $\{f_1, ..., f_n\}$.

Lema 34 *Sean $f_1, f_2, ..., f_n \in E^*$ arbitrarias. Entonces $f \in [f_1, f_2, ..., f_n]$ si y sólo si $\bigcap\limits_{i=!}^{n} N(f_i) \subset N(f)$.*

Demostración.

Una de las implicaciones es clara, ya que si $f \in [f_1, f_2, ..., f_n]$, tenemos

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_n f_n$$

donde $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ arbitrarios. Por tanto, para cada $x \in \bigcap\limits_{i=!}^{n} N(f_i)$, $f(x) = 0$. Así obtenemos: $\bigcap\limits_{i=!}^{n} N(f_i) \subset N(f)$.

Para el recíproco supongamos, sin perdida de generalidad, que $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ es linealmente independiente, es decir que si $1 \leq k \leq n$,

$$\bigcap_{i=!}^{n} N(f_i) \neq \bigcap_{i \neq k} N(f_i).$$

Por lo que existe $y_k \in \bigcap_{i\neq k} N(f_i)$ tal que $y_k \notin \bigcap_{i=!}^{n} N(f_i)$, para cada $1 \leq k \leq n$. De modo que $f_j(y_k) = 0$ para $j \neq k$, pero $f_k(y_k) \neq 0$. Sea $x_k = [f_k(y_k)]^{-1} y_k$. Entonces $f_k(x_k) = 1$ y $f_j(x_k) = 0$ si $j \neq k$.

Ahora, sea f como en las hipótesis.

Sea $y = x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i$, siempre que $x \in E$, esto implica que

$$f_j(y) = f_j(x). - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)f_j(x_i) = 0.$$

De donde $f(y) = 0$. Por tanto

$$0 = f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)f(x_i) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x), \text{ con } \alpha_i = f(x_i);$$

que equivale a decir que $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$.

De esta manera concluimos la demostración del lema. ■

Teorema 35 *Sea* $\langle E, F\rangle$ *una dualidad, entonces* $F = (E, \sigma(E, E'))'$.

Demostración.

Dada $f \in F$, le podemos asociar la función

$$B(f, \cdot) : E \to \mathbb{C}$$

definida por $f(x) = B(f, x) = \langle f, x\rangle$, que es una función lineal $\sigma(E, F)$-continua. Por lo que basta que probemos la contensión $(E, \sigma(E, F))' \subset F$.

Observemos que $(E, \sigma(E, F))$ es un espacio localmente convexo, con la familia de seminormas

$$\mathcal{F}_\sigma = \{\psi_f : E \to \mathbb{C} \mid \psi_f(x) = |f(x)| \ , \ \forall x \in E \ ; \ f \in F\}$$

que generan la topología.

Supongamos que $f \in (E, \sigma(E, F))'$. Así, por la proposición (1.2-14), elijamos $f_1, f_2, ..., f_n \in F$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_{f_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |f_i(x)|$$

para todo $x \in E$. De donde $\bigcap_{i=1}^{n} N(f_i) \subset N(f)$, y por el lema anterior (2.1-34), $f \in [f_1, f_2, ..., f_n]$ y $[f_1, f_2, ..., f_n] \subset F$, por ser espacio vectorial. Finalmente, con esto concluimos que $f \in F$, como queríamos. ■

Corolario 36 *Sean* $\langle E, F_1\rangle$ *y* $\langle E, F_2\rangle$ *tales que* $F_1 \subset F_2$. *Entonces*

$$\sigma(E, F_1) \leq \sigma(E, F_2).$$

La igualdad se da si y sólo si $F_1 = F_2$.

Demostración.

Sea $U \in \mathcal{N}_o(E, \sigma(E, F_1))$; es decir, existen $f_1, f_2, ..., f_n \in F_1$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ reales positivos tales que $\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_{\varepsilon_i}(0)) \subset U$. Pero $f_1, f_2, ..., f_n \in F_2$, entonces $U \in \mathcal{N}_o(E, \sigma(E, F_2))$. Lo que demuestra que efectivamente

$$\sigma(E, F_1) \leq \sigma(E, F_2).$$

Por otro lado, si $F_1 = F_2$ claramente se da la igualdad.

Supongamos ahora que $\sigma(E, F_1) = \sigma(E, F_2)$. Entonces

$$F_1 = (E, \sigma(E, F_1))' = (E, \sigma(E, F_2))' = F_2.$$

Por tanto $F_1 = F_2$. ■

Corolario 37 *Sea E es un e.l.c., entonces*

$$E' = (E, \sigma(E, E'))' \quad y \quad E = (E', \sigma(E', E))'.$$

Notemos que para cualquier espacio $E = (E, \tau)$, dada $U \in \mathcal{N}_o(E, \sigma(E, E'))$ existe un número finito de funcionales $f_1, f_2, ..., f_n \in E'$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} \alpha_i f_i^{-1}(B_1(0)) \subset U$, pero $\alpha_i f_i^{-1}(B_1(0)) \in \mathcal{N}_o(E, \tau)$, por ser cada f_i τ-continua. Por lo que $U \in \mathcal{N}_o(E, \tau)$.

Así τ, la topología original de E, es más fina que la topología débil, $\sigma(E, E')$, a la cual nos referiremos simplemente por σ en caso de considerar a la dualidad $\langle E, E' \rangle$.

Dada una dualidad $\langle E, F \rangle$, podemos identificar a F con un subespacio de $\mathbb{C}^E$. De esta forma podemos definir la topología débil $\sigma(F, E)$ en F con respecto a $\langle E, F \rangle$. Por simetría, cada una de las afirmaciones anteriores tiene su análoga para $\sigma(F, E)$.

Es bastante peculiar que una topología débil sea completa. Esto es una consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 38 *Sea F un subespacio de E^*, el dual algebraico de E. Entonces, la forma bilineal canónica*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times E \to \mathbb{C}$$

es no-degenerada si y sólo si F es denso en $(E^*, \sigma(E^*, E))$.

Demostración.

Si F es denso en $(E^*, \sigma(E^*, E))$ y $x \in E$ es tal que $\langle f, x \rangle = 0$ para todo $f \in F$, entonces $x = 0$, por la $\sigma(E^*, E)$-continuidad de x, vista como una funcional lineal en E^*.

Para ver que se cumple (ii) de la definición de forma bilineal no degenerada, supongamos que $\langle f, x \rangle = 0$, para todo $x \in E$. Entonces $f(x) = 0$, para todo $x \in E$ y claramente $f = 0$.

Inversamente, supongamos que la forma bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times E \to \mathbb{C} \; ; \; (f,x) \longmapsto \langle f,x \rangle = f(x)$$

es no degenerada y demostremos que F es denso en $(E^*, \sigma(E^*, E))$. Por contradicción; es decir, supongamos que F no es denso en $(E^*, \sigma(E^*, E))$; en otras palabras $\bar{F} \subsetneq E^*$. Sea $g \in E^* \backslash F$. Por Hanh-Banach se puede elegir $x \in E$ tal que $\langle f, x \rangle = 0$, para toda $f \in F$, y $\langle g, x \rangle \neq 0$. De aquí que $x \neq 0$, lo cual es una contradicción a la parte (i) de la definición (2.1-30).

Por lo tanto F es denso en $(E^*, \sigma(E^*, E))$. ∎

Proposición 39 *Sea $\langle E, F \rangle$ una dualidad. Entonces, $(E, \sigma(E,F))$ es completo si y sólo si $E = F^*$.*

Demostración.

Consideremos a $(F^*, \sigma(F^*, F))$ como un subespacio de $\mathbb{C}^F$, que es un espacio localmente convexo completo con respecto a la topología producto. Sea $f \in \mathbb{C}^F$, un punto de acumulación para F^*. Demostremos que $f \in F^*$.

Sean $x, y \in F$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$. Como f es un punto de acumulación de F^*, existe $g \in F^*$ tal que

$$|(f-g)(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall \;\; z \in \{x, y, \lambda x + y\}.$$

Pues podemos tomar $g \in F^*$ tal que

$$|(f-g)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3|\lambda|+3} \leq \frac{\varepsilon}{3} \; y \;\; |(f-g)(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3|\lambda|+3} \leq \frac{\varepsilon}{3};$$

de donde

$$\begin{aligned} |f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y)| &\leq |f(\lambda x + y) - g(\lambda x + y)| + |\lambda f(x) - \lambda g(x)| \\ + |g(y) - f(y)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |\lambda| \frac{\varepsilon}{3|\lambda|+3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto implica que $|f(\lambda x + y) - \lambda f(x) + f(y)| \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Entonces tenemos que $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$; en otras palabras, $f \in F^*$. Con esto hemos probado que $(F^*, \sigma(F^*, F))$ es completo. Ahora, si $E = F^*$, es claro que $(E, \sigma(E,F))$ es completo.

Ahora, verifiquemos que si $(E, \sigma(E,F))$ es completo, se tiene que $E = F^*$. De la proposición anterior, (2.1-38), como la forma bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times E \to \mathbb{C} \;\; ;$$

definida por $(f,x) \longmapsto \langle f,x \rangle = f(x)$ es no degenerada, E es denso en $(F^*, \sigma(F^*, F))$, y además $(E, \sigma(E,F))$ es completo y es tal que $\sigma(E,F) \leq \sigma(F^*, F)$. Entonces $E = F^*$, en caso contrario podemos elegir $f \in F^* \backslash E$ y una red $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset E$ tal que $f_\alpha \to f$ en F^* con respecto a la topología $\sigma(F^*, F)$, por lo que $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a f con respecto a la topología $\sigma(E,F)$ en E, por ser completo, y esto es una contradicción. ∎

De esta proposición podemos decir que $(F^*, \sigma(F^*, F))$ es la *completación* de $(E, \sigma(E, F))$.

En cualquier espacio vectorial topológico (E, τ), dado que $\sigma(E, E') \leq \tau$, nos podemos preguntar si existen subconjuntos de E que comparten la misma estructura topológica tanto para $\sigma(E, E') = \sigma$ como para τ. Por ejemplo, que relación existe entre la τ-cerradura de $A \subset E$ con respecto a la σ-cerradura, obviamente siempre se tiene que la τ-cerradura contiene a la σ-cerradura ya que la topología original de E puede tener más cerrados que la topología débil.

El siguiente resultado muestra que bajo ciertas condiciones, estas dos cerraduras coinciden.

Teorema 40 *Sea E un e.l.c. y A un subconjunto convexo de E, entonces $\bar{A}^\tau$, la τ-cerradura de A, coincide con $\bar{A}^\sigma$, la $\sigma(E, E')$-cerradura de A.*

Demostración.

Sabemos que la topología original en E es más fina que la topología débil $(\sigma \leq \tau)$. Entonces, como $E \setminus \bar{A}^\sigma$ es σ-abierto, también es τ-abierto. Así que $\bar{A}^\sigma$ es τ-cerrado y $A \subset \bar{A}^\sigma$, en consecuencia $\bar{A}^\tau \subset \bar{A}^\sigma$.

Inversamente, sea $x \in E \setminus \bar{A}^\tau$, entonces $\{x\}$ es compacto y convexo. Por Teorema (1.2-26), existen $f_x : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$f_x(y) \leq \alpha < f_x(x) \ , \ \text{para todo } y \in A.$$

De donde, podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que $|\langle f_x, y - x\rangle| > \varepsilon$, $\forall\, y \in A$.

Sea $U := \varepsilon f_x^{-1}(B_1(0))$, entonces $U \in \mathcal{N}_o(E, \sigma)$ es tal que $(x + U) \cap A = \emptyset$, por tanto $x \notin \bar{A}^\sigma$. Lo que significa que $\bar{A}^\sigma \subset \bar{A}^\tau$. Con esto queda demostrada la igualdad. ■

Corolario 41 *Sea E un e.l.c. y A un subconjunto convexo de E. Entonces A es cerrado si y sólo si es débilmente cerrado.*

Demostración.

$A = \bar{A}^\tau = \bar{A}^\sigma$. ■

La próxima definición para dos espacios E y F localmente convexos es de suma importancia para lo que trataremos acontinuación.

Definición 42 *Sea $\langle E, F\rangle$ una pareja en dualidad. Decimos que una topología τ en E es compatible con la dualidad $\langle E, F\rangle$ si esta es localmente convexa y si además $F = (E, \tau)'$.*

Por (2.1-35), $\sigma(E, F)$ es justo la topología más débil en E que es compatible con la dualidad. Más adelante veremos que también existe una topología más fuerte en E que tiene esta propiedad. Por ahora, solamente notemos que para cualquier topología τ_1 en E compatible con $\langle E, F\rangle$ es más fina que $\sigma(E, F)$. Más aún, del Teorema anterior, si τ_1 y τ_2 son dos topologías compatibles con la dualidad $\langle E, F\rangle$, entonces, junto con la topología débil, comparten los mismos conjuntos convexos cerrados.

2.2. Polarización.

Una de las definiciones más importantes, que trae consigo una serie de resultados que utilizaremos constantemente en el resto del trabajo, es la siguiente.

Definición 43 *Sean $\langle E, F\rangle$ una pareja en dualidad, y A un subconjunto de E.*

1. *Definimos por la polar de A al conjunto*

$$A^o := \{f \in F : |\langle x, f\rangle| \leq 1, \forall x \in A\}.$$

De manera similar, a la polar de un subconjunto B de F la definimos como el subconjunto $B^o := \{x \in E : |\langle x, f\rangle| \leq 1 \ , \forall \ f \in B\}$ de E.

2. *Al conjunto $A^{oo} := (A^o)^o$ lo llamamos la bipolar de A.*

Notemos que $A^o = \bigcap_{x\in A} x^{-1}(\overline{B_1(0)})$, y $A^o = F$ siempre que $A = \{0\}$ o $A = \emptyset$. Además siempre tenemos que $A \subset A^{oo}$.

En la siguiente proposición se enuncian las propiedades más importantes de las polares que más adelante nos servirán como herramientas.

Proposición 44 *Sean I un conjunto de índices, $A, A_1, A_2, A_i \subset E$ no vacíos, $i \in I$, y G un subespacio lineal de E ($G \leq E$). Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:*

(*a*) A^o *es balanceado y convexo.*

(*b*) A^o *es $\sigma(F, E)$-cerrado (por tanto cerrado en F con su topología original y para cualquier topología compatible con la dualidad $\langle E, F\rangle$).*

(*c*) *Si* $A_1 \subset A_2$, *entonces* $A_2^o \subset A_1^o$.

(*d*) *Si* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *entonces* $(\alpha A)^o = \alpha^{-1} A^o$.

(*e*) $\{0\}^o = F$, *y* $E^o = \{0\}$.

(*f*) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^o = \bigcap_{i\in I} A_i^o$.

(*g*) $A \subset A^{oo} := (A^o)^o$.

(*h*) $A^o = (A^{oo})^o =: A^{ooo}$.

(*i*) $G^o = \{f \in F : \langle x, f\rangle = 0 \ , \forall \ x \in G\}$.

(*j*) *Si* $0 \in A_1 \cap A_2$, *entonces* $A_1^o \cap A_2^o \subset 2(A_1 + A_2)^o \subset 2(A_1^o \cap A_2^o)$.

Demostración.

(*a*) Primero veamos que A^o es balanceado. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$, con $|\alpha| \leq 1$, y $f \in A^o$. Entonces, $|\langle x, \alpha f\rangle| = |\alpha|\,|\langle x, f\rangle| \leq |\alpha| \leq 1$ si $x \in A$. Así $\alpha f \in A^o$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, con $|\alpha| \leq 1$. De esta manera, tenemos que A^o es balanceado.

Para ver que A^o es convexo, consideremos $t \in [0,1]$, f_1, $f_2 \in A^o$. Esto implica que

$$|\langle x, tf_1 + (1-t)f_2\rangle| = |\langle x, tf_1\rangle + \langle x, (1-t)f_2\rangle| \leq |\langle x, tf_1\rangle| + |\langle x, (1-t)f_2\rangle|,$$

y por otro lado tenemos

$$|\langle x, tf_1\rangle| + |\langle x, (1-t)f_2\rangle| = t\,|\langle x, f_1\rangle| + (1-t)\,|\langle x, f_2\rangle| \leq t + (1-t) = 1$$

por lo que

$$|\langle x, tf_1 + (1-t)f_2\rangle| \leq 1$$

para todo $x \in A$.

En consecuencia, $tf_1 + (1-t)f_2 \in A^o$. Luego entonces, A^o es convexo.

(*b*) Como $A^o = \bigcap_{x \in A} x^{-1}(\overline{B_1(0)}) = \bigcap_{x \in A} \varphi_x(\overline{B_1(0)})$, y cada función

$$x = \varphi_x : F \to \mathbb{C}$$

definida por $f \longmapsto \varphi_x(f) = \langle x, f\rangle = f(x)$, es $\sigma(E,F)$-continua, tenemos que $x^{-1}(\overline{B_1(0)})$ es $\sigma(E,F)$-cerrado. Por tanto A^o es $\sigma(E,F)$-cerrado, y por (*a*) A^o es convexo, por lo que A^o es cerrado en cualquier topología compatible con $\langle E, F\rangle$.

(*c*) Queremos probar que al tomar polares se invierten las contenciones. Para esto, observemos lo siguiente:

Sea $f \in A_2^o$. Sabemos que $f \in A_2^o$ si y sólo si, por definición, $|\langle x, f\rangle| \leq 1$, para todo $x \in A_2$. Entonces $|\langle x, f\rangle| \leq 1$ para todo $x \in A_1$, pues $A_1 \subset A_2$. De donde $f \in A_1^o$.

(*d*) Esta afirmación es clara si consideramos las igualdades:

$$\begin{aligned}
(\alpha A)^o &= \{f \in F : |\langle x, f\rangle| \leq 1, \forall x \in \alpha A\} \\
&= \{f \in F : |\langle \alpha y, f\rangle| \leq 1, \forall y \in A\} \\
&= \{f \in F : |\alpha|\,|\langle y, f\rangle| \leq 1, \forall y \in A\} = (*)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}A^o &= \{\alpha^{-1}g : g \in F, |\langle x, g\rangle| \leq 1\ \forall x \in A\} \\
&= \{h \in F : |\langle x, \alpha h\rangle| \leq 1, \forall x \in A\} \\
&= \{h \in F : |\alpha|\,|\langle x, h\rangle| \leq 1, \forall x \in A\} = (*)
\end{aligned}$$

Así obtenemos la igualdad $(\alpha A)^o = \alpha^{-1}A^o$.

(e) Sea $f \in F$, entonces por ser lineal $f(0) = 0$, y por tanto $f \in \{0\}^o$. Por otro lado, siempre tenemos $\{0\}^o \subset F$; así $\{0\}^o = F$.

Ahora, notemos primero que $\{0\} \subset E^o = \{f \in F : |\langle x, f\rangle| \leq 1 \, , \forall \, x \in E\}$. Sea $f \in F \setminus \{0\}$. Ya que $f \neq 0$, podemos hallar $y \in E$ tal que $f(y) \neq 0$. Tomemos $x = \frac{2y}{|f(y)|} \in E$, entonces $|\langle x, f\rangle| = |f(x)| = \frac{2}{|f(y)|}\,|f(y)| = 2 > 1$. De esta manera, para cada $f \in F \setminus \{0\}$ hemos encontrado $x \in E$, con $|\langle x, f\rangle| = 2 > 1$. Con esto probamos que $E^o = \{0\}$.

(f) Esta afirmación la obtenemos de las siguientes caracterizaciones:

$$f \epsilon \bigcap_{i \epsilon I} A_i^o \iff f \epsilon A_i^o, \forall i \epsilon I \iff |\langle x, f\rangle| \leq 1, \forall x \epsilon A_i, i \epsilon I$$

$$\iff |\langle x, f\rangle| \leq 1, \forall x \epsilon \bigcup_{i \epsilon I} A_i \iff f \epsilon \left(\bigcup_{i \epsilon I} A_i\right)^o.$$

Por lo tanto, $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^o = \bigcap_{i\in I} A_i^o$.

(g) Es inmediato, si observamos que dado $x \in A$, si $f \in A^o$, entonces $|\langle x, f\rangle| \leq 1$ para toda $f \in A^o$.

(h) De (g) se tiene que $A \subset A^{oo}$, por lo que aplicando (b),

$$A^{ooo} := (A^{oo})^o \subset A^o.$$

Otra vez, de (g), ahora aplicado a A^o, obtenemos que $A^o \subset ((A^o)^o)^o$, pero $((A^o)^o)^o = (A^{oo})^o =: A^{ooo}$. De donde tenemos lo que se pide.

(i) Llamemos B al conjunto $\{f \in F : \langle x, f\rangle = 0 \, , \, \forall \, x \in G\}$, entonces $B \subset G^o$.

Para ver la otra contención, supongamos que $B \subsetneq G^o$. Esto implica que existe $f \in G^o \setminus B$, tal que podemos elegir $x \in G$ para el cual $f(x) \neq 0$; es decir, $0 < |f(x)| \leq 1$. Sea $y = \frac{2y}{|f(y)|} \in G$ (G es un espacio vectorial), entonces

$$f(y) = \frac{2}{|f(x)|} f(x).$$

De aquí se tiene $0 < |\langle y, f\rangle| = |f(y)|$ y $|f(y)| = \frac{2}{|f(x)|}\,|f(x)| = 2 > 1$; por lo que $f \notin G^o$, lo cual contradice lo que habíamos supuesto.

Entoces concluimos que $G^o = B$.

(j) Primero demostremos que $A_1^o \cap A_2^o \subset 2(A_1 + A_2)^o$. Para esto es necesario recordar que $2(A_1 + A_2)^o = (2^{-1}(A_1 + A_2))^o$.

Sean $f \in A_1^o \cap A_2^o$ y $y \in (2^{-1}(A_1 + A_2))$, entonces $y = \frac{1}{2}(x + z)$, con $x \in A_1$ y $z \in A_2$. De aquí que

$$|\langle y, f\rangle| = \left|\left\langle \frac{1}{2}(x+z), f\right\rangle\right| = \left|\frac{1}{2}\langle x+z, f\rangle\right| = \frac{1}{2}\,|\langle x, f\rangle + \langle z, f\rangle| \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{2}\left|\langle x,f\rangle+\langle z,f\rangle\right|\leq\frac{1}{2}(|\langle x,f\rangle|+|\langle z,f\rangle|)\leq\frac{1}{2}(2)=1.$$

Concluimos que $f\in 2(A_1+A_2)^o$.

Para el resto de la afirmación, sea $g\in 2(A_1+A_2)^o=(2^{-1}(A_1+A_2))^o$ y veamos que en efecto $g\in 2(A_1^o\cap A_2^o)$. Pero $2(A_1^o\cap A_2^o)=(2^{-1}(A_1\cup A_2))^o$, por lo que basta que mostremos $\left|\left\langle\frac{1}{2}y,g\right\rangle\right|\leq 1$ siempre que $y\in A_1\cup A_2$. Sea $y\in A_1\cup A_2$, entonces $\frac{1}{2}y\in 2^{-1}(A_1\cup A_2)$ y $\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}(y+0)$ es un elemento de $2^{-1}(A_1+A_2)$. Finalmente, como $g\in 2(A_1+A_2)^o$, entonces $g=2h$, para algún $h\in(A_1+A_2)^o$, y por consiguiente tenemos

$$\left|\left\langle\frac{1}{2}y,g\right\rangle\right|=\left|\left\langle\frac{1}{2}(y+0),g\right\rangle\right|=\left|\frac{1}{2}\langle y+0,2h\rangle\right|=|\langle y,h\rangle|\leq 1,$$

como deseabamos.

Con esto podemos concluir la prueba de esta proposición. ■

Como una consecuencia del Teorema de Hanh-Banach, se tiene el siguiente Teorema, el más importante en lo que se refiere a las polares.

Teorema 45 (Bipolar) *Sea $\langle E,F\rangle$ una dualidad y $A\subset E$ no vacío. Entonces la bipolar A^{oo} coincide con la envolvente absolutamente convexa y $\sigma(E,F)$-cerrada de A ($\overline{absconv}^{\sigma(E,F)}(A)$).*

Demostración.

Gracias a las afirmaciones (a) y (b) de la proposición anterior (2.2-44), $A\subset A^{oo}$ implica $\overline{absconv}^{\sigma(E,F)}(A)\subset A^{oo}$. Además, al ser $absconv(A)$ convexo, tenemos $\overline{absconv}^{\sigma(E,F)}(A)=\overline{absconv}^{(E,\tau)}(A)$, por tal motivo sólo escribiremos $\overline{absconv}(A)$ para denotar a tal conjunto.

Inversamente, por corolario (1.2-28), si $x_o\in E\backslash\overline{absconv}(A)$, existe $f\in F$ tal que $\langle f,x_o\rangle=f(x_o)>1$ y $|\langle f,x\rangle|\leq 1$ para todo $x\in\overline{absconv}(A)$. Entonces, por la proposición (2.2-44-(c)), $f\in(\overline{absconv}(A))^o\subset A^o$ y $x_o\notin A^{oo}$. Por tanto si $x\in A^{oo}$, tenemos $x\in\overline{absconv}(A)$. De esta manera concluimos la demostración del Teorema. ■

Corolario 46 *Sea E un e.l.c. y $B\subset E'$. Entonces*

$$B^{oo}=\overline{absconv}^{\sigma(E,E')}(B)=\overline{absconv}^{\sigma}(B)=\overline{absconv}^{\tau}(B).$$

Corolario 47 *Sea E un e.l.c. Si $A\subset E$, entonces $A^{ooo}=(\overline{absconv}(A))^o=A^o$.*

Demostración.

Esto lo obtenemos directamente del Teorema anterior (2.2.45) y de (h) en la proposición (2.2.44), pues $A^o=A^{ooo}:=(A^{oo})^o=(\overline{absconv}(A))^o$. ■

Por otro lado, tenemos un resultado dual de (2.2.44-(f)), bajo ciertas restricciones.

Corolario 48 *Sea* $(A_i)_{i\in I}$ *una familia de subconjuntos absolutamente convexos y cerrados ($\sigma(E,F)$-cerrados) en* E. *Entonces*

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^o = \overline{absconv}\left(\bigcup_{i\in I} A_i^o\right).$$

Demostración.

Del Teorema de la Bipolar y la proposición (2.2.44-(f)) tenemos

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i^o\right)^o = \bigcap_{i\in I} A_i^{oo} = \bigcap_{i\in i} A_i.$$

De nuevo por el Teorema de la Bipolar, esto implica que

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^o = \left(\bigcup_{i\in I} A_i^o\right)^{oo} = \overline{absconv}\left(\bigcup_{i\in I} A_i^o\right).$$

■

2.3. Barriles y Discos.

Sea $\langle E,F\rangle$ una dualidad. En esta sección continuaremos considerando a E como un espacio localmente convexo, aunque cabe señalar que nuestro próximo resultado vale para espacios vectoriales topológicos en general, y además nos sera de gran utilidad más adelante.

Proposición 49 *Sea E un e.l.c. y τ, τ' dos topologías lineales en E tales que $\tau \leq \tau'$. Supongamos además que (E,τ') tiene una base de vecindades del origen formada por conjuntos τ-cerrados. Sea M un subconjunto no vacío de E.*

a) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ es una red τ'-Cauchy en M y además converge a x en E con respecto a τ, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ converge a x en E con respecto a la topología τ'.

b) Si M es completo (secuencialmente completo) para τ, entonces también es completo (secuencialmente completo) para τ'.

Demostración.

Primero observemos que toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ τ'-Cauchy es τ-Cauchy; de donde, si demostramos la afirmación (a) se cumple inmediatamente (b).

Para probar (a), sea $M \subset E$ no vacío y sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ una red τ'-Cauchy en M tal que es τ-convergente a x en E. Sea V una vecindad de cero en E, para la topología τ', y elijamos $U \in \mathcal{N}_o(E,\tau)$ balanceada, τ-cerrada y tal que $U+U \subset V$. Por la elección de U, existe $\alpha_o \in \Delta$ tal que $x_\alpha - x_\beta \in U$, siempre que $\alpha,\beta \geq \alpha_o$; es decir, $x_\alpha \in x_\beta + U$, si $\alpha \geq \alpha_o$ y $\beta \geq \alpha_o$ fija. Pero $x_\beta + U$ es τ-cerrado y $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ es τ-convergente a x en E, por lo que $x \in x_\beta + U$, de donde $x - x_\beta \in U$. Por tanto, $x_\beta - x \in U$, y así $x_\alpha = x + x_\beta - x + x_\alpha - x_\beta \in x + U + U \subset x + V$, siempre que $\alpha \geq \alpha_o$. Esto implica que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ es τ'-convergente a x en E. ■

Definición 50 *Decimos que un subconjunto U de E es un barril (relativo a $\langle E, F\rangle$) si es absorbente, absolutamente convexo y $\sigma(E,F)$-cerrado. Aunque, por la convexidad, basta que pidamos que sea cerrado con respecto a cualquier topología compatible con $\langle E, F\rangle$.*

De esta definición y como consecuencia de la sección previa, toda vecindad $U = U^{oo}$ de 0 en E es un barril. Además, de acuerdo a lo que vimos en el Capítulo I, la funcional de Minkowsky de un barril es una seminorma en E. Por el Apéndice A-(A.1-197), podemos formar al espacio normado $E_{(U)}$ y su compleción $\widetilde{E_{(U)}}$. Entonces podemos probar la siguiente propiedad importante de la función cociente canónica

$$\Phi_U : E \to \widetilde{E_{(U)}}$$

definida por $x \longmapsto \Phi_U(x)$, (ver Apéndice-observación (A.1-197)).

Lema 51 *Sea U un barril en E. Entonces $U = \Phi_U^{-1}(\Phi_U(U))$, y vista como una función de $(E, \sigma(E,F))$ en $\widetilde{E_{(U)}}$, Φ_U tiene gráfica cerrada.*

Demostración.

Sea $\tau_{(U)}$ la topología de la norma en $E_{(U)}$. Por el Apéndice A (A.1-197), y como U es cerrado, $N(U) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}U$ es un subespacio $\sigma(E,F)$-cerrado de E. Así la topología $\sigma(E,F)$ define una topología cociente de Hausdorff, localmente convexa τ en $E_{(U)}$.

Primero mostremos que $U = \Phi_U^{-1}(\Phi_U(U))$. Claramente $U \subset \Phi_U^{-1}(\Phi_U(U))$. A la inversa, sea $x \in \Phi_U^{-1}(\Phi_U(U))$, entonces $\Phi_U(x) \in \Phi_U(U)$.

De donde $\Phi_U(x) = \Phi_U(y)$ para algún $y \in U$; y esto pasa si y sólo si $x - y \in N(U)$, por lo que $\rho_U(x-y) = 0$. De manera que $\rho_U(x) \le \rho_U(x-y) + \rho_U(y) = \rho_U(y) < 1$, y con esto $x \in U$. Lo cual implica que efectivamente

$$U = \Phi_U^{-1}(\Phi_U(U)).$$

Sea $V = \Phi_U(U)$, V es cerrado en $(E_{(U)}, \tau)$ ya que $U = \Phi_U^{-1}(V)$, que es cerrado en E. Definida así, como U es convexo y balanceado, y Φ_U es lineal y continua tenemos $\Phi_U(U) = V$ también es absolutamente convexo. Lo que significa que $V \subset (1 + \frac{1}{n})V$, para todo $n \in \mathbb{N}$, esto implica

$$V \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) V. \qquad .....[1]$$

Además, V es una vecindad de cero en $(E_{(U)}, \tau_{(U)})$, inclusive

$$V = \{\Phi_U(z) \in E_{(U)} : \|\Phi_U(z)\|_U < 1\}.$$

Así $\{\frac{1}{n}V : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades de 0 en $(E_{(U)}, \tau_{(U)})$. Esto quiere decir que si $\Phi_U(y) \in \left(1 + \frac{1}{n}\right) V$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\Phi_U\left(\frac{n}{n+1} y\right) = \frac{n}{n+1}\Phi_U(y) \in V \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo que, como V cerrado y $\frac{n}{n+1}y \to y$ con respecto a $\tau_{(v)}$, obtenemos $y \in V$. De modo que, junto con [1], tenemos

$$V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{1}{n}\right) V.$$

Sea $\mathcal{W}$ una base de vecindades de 0 en $(E_{(v)}, \tau)$ formada por conjutos balanceados y convexos. Entonces

$$\{W + \frac{1}{n}V : n \in \mathbb{N},\, W \in \mathcal{W}\,\}$$

es una base de vecindades de 0 para una única topología localmente convexa τ_o en $E_{(v)}$.

Observemos que $\tau_o \leq \tau$ y $\tau_o \leq \tau_{(v)}$, pues $W + \frac{1}{n}V \in \mathcal{N}_o(E_{(v)}, \tau_{(v)})$ y $W + \frac{1}{n}V \in \mathcal{N}_o(E_{(v)}, \tau)$, para toda $W \in \mathcal{W}$, y todo $n \in \mathbb{N}$. Así la función identidad

$$Id : (E_{(v)}, \tau_{(v)}) \to (E_{(v)}, \tau_o) \qquad .....[2]$$

es lineal y $(\tau_{(v)}, \tau_o)$-continua. Definimos por $\left(\widehat{E_{(v)}}, \widehat{\tau_o}\right)$ a la compleción de $(E_{(v)}, \tau_o)$. De manera que la inclusión

$$(E_{(v)}, \tau_o) \overset{J_{\tau_o}}{\hookrightarrow} (\widehat{E_{(v)}}, \widehat{\tau_o})$$

es continua y por tanto

$$Id \circ J_{\tau_o} : (E_{(v)}, \tau_{(v)}) \to (\widehat{E_{(v)}}, \widehat{\tau_o}) \qquad .....[3]$$

es continua; es decir $(E_{(v)}, \tau_{(v)})$ se sumerge continuamente en $(\widehat{E_{(v)}}, \widehat{\tau_o})$.

Por otra parte tenemos que

$$(E_{(v)}, \tau_{(v)}) \overset{J_{(v)}}{\hookrightarrow} (\widetilde{E_{(v)}}, \widetilde{\tau_{(v)}}) \qquad .....[4]$$

también es continua.

Además:

1. $\{0\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}V$.

   Por un lado, es claro que $0 \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}V$. Inversamente, $\Phi_v(x) \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}V$ si y sólo si $\Phi_v(x) \in \frac{1}{n}V$ para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces

   $$\Phi_v(x) \in \frac{1}{n}\Phi_v(U) = \Phi_v(\frac{1}{n}U) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

   Por lo que $x \in \frac{1}{n}U$ para todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, $q_v(x) < \frac{1}{n}$, para todo n natural, así podemos concluir que $q_v(x) = 0$ y $\Phi_v(x) = 0$.

2. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\overline{V}^{\tau}$.

   Es inmediato, pues sabemos que para cualquier subconjunto M de (F, τ_F) (ver Apendice A-(A.1-194)) se tiene que

   $$\overline{M}^{\tau_F} = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}_o(\tau_F)} M + \mathcal{U}.$$

   Por otro lado, $V = \Phi_{U}(U)$ es τ-cerrado.

3. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\overline{V}^{\tau} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{W\in\mathcal{W}} (W + \frac{1}{n}V)$.

   Por el mismo argumento que en (2), $\overline{\frac{1}{n}V}^{\tau} = \frac{1}{n}\overline{V}^{\tau} = \bigcap_{W\in\mathcal{W}} (W + \frac{1}{n}V)$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\overline{V}^{\tau} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{W\in\mathcal{W}} (W + \frac{1}{n}V)$.

4. $\overline{\{0\}}^{\tau_o} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{W\in\mathcal{W}} (W + \frac{1}{n}V)$.

   De manera análoga y utilizando el mismo resultado que en (2) y (3) obtenemos:

   $$\overline{\{0\}}^{\tau_o} = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}_o(E_{(U)},\tau_o)} \mathcal{U} + \{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{W\in\mathcal{W}} \left(W + \frac{1}{n}V\right).$$

Considerando las afirmaciones (1)−(4), tenemos $\{0\} = \overline{\{0\}}^{\tau_o}$, o sea $(E_{(U)}, \tau_o)$ es de Hausdorff. Mejor aún, argumentando de la misma manera

$$\begin{aligned}
\overline{V}^{\tau_o} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{W\in\mathcal{W}} \left(V + W + \frac{1}{n}V\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\left(V + \frac{1}{n}V\right)}^{\tau} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\overline{V}^{\tau} \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)V = V,
\end{aligned}$$

esto significa que $\tau_{(U)}$ tiene una base de vecindades de 0 formada por conjuntos τ_o-cerrados.

De donde, por la proposición (2.3-49) la función

$$(\widetilde{E_{(U)}}, \widetilde{\tau_o}) \overset{i}{\hookrightarrow} (\widetilde{E_{(U)}}, \widetilde{\tau_{(U)}})$$

es continua. Con esto, y considerando [3] y [4], tenemos

$$(E, \sigma(E,F)) \overset{\Phi_U}{\to} (E_{(U)}, \tau_{(U)}) \overset{Ido J_{\tau_o}}{\hookrightarrow} (\widetilde{E_{(U)}}, \widetilde{\tau_o}) \overset{i}{\hookrightarrow} (\widetilde{E_{(U)}}, \widetilde{\tau_{(U)}})$$

continuamente, es decir

$$\Phi_U : (E, \sigma(E,F)) \to (\widetilde{E_{(U)}}, \widetilde{\tau_{(U)}})$$

es $\left(\sigma(E,F), \widetilde{\tau_{(U)}}\right)$- continua. Por proposición (Apéndice A-(A.1-193)), se concluye que Φ_U tiene gráfica cerrada vista como una función de $(E, \sigma(E,F))$ en $(\widetilde{E_{(U)}}, \widetilde{\tau_{(U)}})$. ■

Definición 52 *Sea B un subconjunto de F no vacío. B es un disco en F (con respecto a la dualidad $\langle E,F\rangle$) si éste es balanceado, convexo, $\sigma(F,E)$-acotado y $\sigma(F,E)$-cerrado.*

Similarmente, definimos un disco en E.

Nuestro siguiente resultado muestra que existe una correspondencia uno a uno entre los discos $\sigma(E,F)$-cerrados en F y los barriles en E.

Proposición 53 *Sea $B\subset F$, B es $\sigma(F,E)$-acotado si y sólo si B^o es un barril en E.*

Demostración. Sea $B\subset F$ $\sigma(F,E)$-acotado. Entonces, para todo $x\in E$ existe $\alpha>0$ tal que $|\langle \alpha x,f\rangle|\le 1$ para toda $f\in B$; es decir, $\alpha x\in B^o$. De donde, si $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|\le\alpha$ tenemos que $|\langle\lambda x,f\rangle|=|\lambda|\,|\langle x,f\rangle|\le\alpha\le 1$,entonces $\lambda x\in B^o$, lo que implica que B^o es absorbente en E. Además sabemos que B^o es absolutamente convexo y $\sigma(E,F)$-cerrado.

En consecuencia B^o es un barril en E.

A la inversa, sea $x\in E$, queremos encontrar $s>0$ tal que $|\langle sx,f\rangle|\le 1$ si $f\in B$. Como B^o es absorbente, existe $\alpha_x\in\mathbb{R}^+$ tal que $tx\in B^o$ para todo $t\in\mathbb{C}$ con $|t|\le\alpha_x$. Sea $s\in(0,\alpha_x)$ fijo, entonces para toda $f\in B$ tenemos $|\langle sx,f\rangle|\le 1$, como queríamos. Por lo tanto B es $\sigma(F,E)$-acotado. ∎

Sea A un disco en E. Definimos como E_A al subespacio lineal generado por A. Entonces

$$E_A:=\bigcup_{\delta>0}\delta A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}nA.$$

Demostremos esta afirmación: Para $\delta>0$, siempre podemos elegir $n\in\mathbb{N}$ tal que $n>\delta$, lo que implica que $\delta A\subset nA$, pues A es balanceado. Así $\bigcup\limits_{\delta>0}\delta A\subset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}nA.$

Por otra parte, si $n\in\mathbb{N}$, tomemos $\delta>n$, con esto tenemos que $0<\frac{n}{\delta}<1$. Por tanto $\frac{n}{\delta}x\in A$ para todo $x\in A$, ya que A es balanceado, es decir

$$nx\in\delta A \text{ para algún } \delta>0, \text{ si } x\in A.$$

De esto concluimos que en efecto $E_A:=\bigcup\limits_{\delta>0}\delta A=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}nA.$

Notemos que A es absorbente, balanceado y convexo en E_A. Además, del Capítulo I, tenemos que la función:

$$\|\cdot\|_A:E_A\to\mathbb{R}$$

definida por $x\longmapsto\|x\|_A=\inf\{\delta>0:x\in\delta A\}=q_A(x)$, donde q_A es la funcional de Minkowsky de A, es una seminorma en E_A. Llamemos τ_A a la topología localmente convexa generada por $\|\cdot\|_A$ en E_A.

Como $A^o\subset F$ es un barril, para todo $f\in F$ existe $\alpha_f>0$ tal que $f\in\alpha_f A^o=\left(\alpha_f^{-1}A\right)^o$. Sea $x\in E_A$, entonces $x\in\delta A$ para algún $\delta>0$, de aquí que $\delta^{-1}x\in A$. Ahora, como $f\in\alpha_f A^o$, tenemos $\alpha_f^{-1}f\in A^o$.

Esto implica que $\left|\left\langle \delta^{-1}x, \alpha_f^{-1} f\right\rangle\right| \leq 1$; por tanto $|\langle x, f\rangle| \leq \alpha_f \delta$ y esto es para todo $\delta > 0$ tal que $x \in \delta A$.

Obtenemos así

$$|\langle x, f\rangle| \leq \alpha_f \|x\|_A \quad \text{para todo } x \in A.$$

De donde es claro que la inyección canónica

$$J_A : E_A \to E$$

es $(\tau_A, \sigma(E,F))$continua. De modo que, como J_A es inyectiva τ_A es de Hausdorff, por lo que, si $\|x\|_a = 0$, tenemos $|\langle x, f\rangle| \leq a_f \|x\|_A = 0$ para toda $f \in F$. Así $\langle x, f\rangle = 0$ para todo $f \in F$ y esto pasa si y sólo si $x = 0$. Lo cual implica que $\|\cdot\|_A$ es una norma. Con esto podemos considerar siempre a $E_A = (E_A, \tau_A)$ como un espacio normado.

Por otro lado, $\|\cdot\|_A = q_A$; entonces

$$\{x \in E_A : \|x\|_A < 1\} \subset A \subset \{x \in E_A : \|x\|_A \leq 1\}.$$

De manera que como A es $\sigma(E,F)$-cerrado y acotado, entonces es τ_A-cerrado y coincide con la bola unitaria cerrada de E_A, con lo cual tenemos que la función inclusión $i : (E, \tau_A) \to (E, \tau)$ es continua, y así la topología inducida por τ en E_A es más débil que τ_A.

Definición 54 *Sea E un e.l.c. Decimos que un disco A en E es un disco de Banach si E_A es un espacio de Banach.*

Este es el caso si A es secuencialmente completo, ya que es cerrado, con respecto a cualquier topología en E compatible con $\langle E, F\rangle$.

Para ver una característica importante de los barriles, necesitaremos el Teorema de la Gráfica Cerrada para espacios de Banach.

Teorema 55 (de la Gráfica Cerrada) *Sean E y F e.v.t. métricos completos. Entonces, toda función lineal cerrada $T : E \to F$ es continua.*

Teorema 56 (de Banach-Mackey) *Sea E un e.l.c. Si U es un barril en E, entonces este absorbe todo disco de Banach.*

Demostración. Sea A un disco de Banach en E. Entonces la inyección canónica

$$J_A : E_A \to (E, \sigma(E,F))$$

es continua, por lo que para cualquier red (x_α) convergente, digamos a x en E_A se tiene que $x_\alpha \to x$ con repecto a la topología $\sigma(E,F)$.

Por el lema (2.3-51) la función

$$\Phi_U : (E, \sigma(E,F)) \to \widetilde{E_{(U)}}$$

tiene gráfica cerrada. Entonces $G(\Phi_{U}) = \{(x, \Phi_{U}(x)) : x \in E\}$ es cerrado en $(E, \sigma(E,F)) \times \widetilde{E_{(U)}}$ con la topología producto.

Sabemos que E_A y $\widetilde{E_{(U)}}$ son completos y

$$\Phi_{U} \circ J_A : E_A \to \widetilde{E_{(U)}} .$$

Así, en caso de que $\Phi_{U} \circ J_A$ tenga la gráfica cerrada, por el Teorema de la Gráfica Cerrada para espacios de Banach (2.3-54), tendríamos que $\Phi_{U} \circ J_A$ es $(\tau_A, \widetilde{\tau_{(U)}})$-continua. Así, $\Phi_{U}(A)$ es acotado en $\widetilde{E_{(U)}}$, de esto se sigue que A es absorbido por $U = \Phi_{U}^{-1}(\Phi_{U}(U))$. Con lo cual tendríamos la demostración del Teorema. Ahora, bata ver que $\Phi_{U} \circ J_A$ tiene gráfica cerrada:

Sea $\{(x_\alpha, \Phi_{U}(x_\alpha))\}_{\alpha\in\Delta}$ una red en $G(\Phi_{U} \circ J_A) = \{(x, \Phi_{U}(x)) : x \in E_A\}$, tal que

$$(x_\alpha, \Phi_{U}(x_\alpha)) \to (x, y)$$

con repecto a la topología producto en $E_A \times \widetilde{E_{(U)}}$. Queremos probar que $\Phi_{U}(x) = y$. Como $(x_\alpha, \Phi_{U}(x_\alpha)) \to (x, y)$ en $E_A \times \widetilde{E_{(U)}}$, $x_\alpha \to x$ en E_A y $\Phi_{U}(x_\alpha) \to y$ en $\widetilde{E_{(U)}}$, entonces tenemos que $x_\alpha \to x$ en $(E, \sigma(E,F))$ y $\Phi_{U}(x_\alpha) \to y$ en $\widetilde{E_{(U)}}$. De modo que

$$(x_\alpha, \Phi_{U}(x_\alpha)) \to (x, y)$$

en $(E, \sigma(E,F)) \times \widetilde{E_{(U)}}$. Como $G(\Phi_{U})$ es cerrado y por la completez de $\widetilde{E_{(U)}}$, obtenemos (x, y) es un elemento de $G(\Phi_{U})$; es decir, $\Phi_{U}(x) = y$. Por lo tanto

$$(x, y) = (x, \Phi_{U}(x)) = (x, \Phi_{U} \circ J_A(x)) \in G(\Phi_{U} \circ J_A).$$

Entonces, $\Phi_{U} \circ J_A$ tiene gráfica cerrada, como necesitabamos. ■

Una de las consecuencias mas importantes de este Teorema es:

Teorema 57 *Sea $\langle E, F\rangle$ una dualidad. Entonces todas las topologías en E que son compatibles con $\langle E, F\rangle$ definen los mismos conjuntos acotados.*

Demostración. Sea τ una topología compatible con $\langle E, F\rangle$ y sea $B \subset E$.

Si B es τ-acotado, como τ es más fina que la topología débil $\sigma(E,F)$, entonces B es $\sigma(E,F)$-acotado. Resta probar que todo conjunto $\sigma(E,F)$-acotado es τ-acotado.

Para esto, supongamos que B es $\sigma(E,F)$-acotado. Sea $U \in \mathcal{N}_o(E,\tau)$ tal que $U = U^{oo}$. Entonces U es un barril, y así la función cociente

$$\Phi_{U} : E \to E_{(U)}$$

es $(\tau, \tau_{(U)})$-continua. Definimos

$$\Psi : (E_{(U)})' \to F$$

vía la regla $g \longmapsto g \circ \Phi_{U}$, Ψ esta bien definida, es lineal e inyectiva:

1. La linealidad la obtenemos de

$$\Psi(g+\lambda h) = (g+\lambda h)\circ\Phi_{U} = g\circ\Phi_{U} + \lambda h\circ\Phi_{U} = \Psi(g) + \lambda\Psi(h).$$

2. La inyectividad se da gracias a que si tomamos $h, g \in (E_{(U)})'$ con $h \neq g$, entonces existen $\Phi_{U}(x)$, $\Phi_{U}(y) \in E_{(U)}$ (es decir, x, $y \in E$) distintos tales que $g\circ\Phi_{U}(x) = g(\Phi_{U}(x)) \neq h(\Phi_{U}(y)) = h\circ\Phi_{U}(y)$; y además $x \neq y$. Por lo tanto Ψ es inyectiva.

Por otro lado, U^o es un disco en F y podemos tomar al espacio F_{U^o}; entonces Ψ mapea isometricamente a $\left(E_{(U)}\right)'$, considerando su topología normada, en F_{U^o}. Esto lo tenemos gracias a que, dado $f \in F_{U^o}$

$$\begin{aligned} \|f\|_{U^o} &= \inf\{\delta > 0 : f \in \delta U^o\} = \inf\{\delta > 0 : \lambda^{-1} f \in U^o\} \\ &= \inf\{\delta > 0 : |\langle f, x\rangle| \leq \delta, \forall\, x \in U\} \end{aligned}$$

y si $y \in U$, entonces $|\langle f, y\rangle| \leq \sup\limits_{x\in U} |\langle f, x\rangle|$. De donde $\|f\|_{U^o} \leq \sup\limits_{x\in U} |\langle f, x\rangle|$. Ahora, para $x \in U$ arbitrario

$$|\langle f, x\rangle| \leq \lambda \text{ para todo } \lambda \in \{\delta > 0 : |\langle f, x\rangle| \leq \delta, \forall\, x \in U\};$$

entonces, $\sup\limits_{x\in U} |\langle f, x\rangle| \leq \lambda$, $\forall\, \lambda \in \{\delta > 0 : |\langle f, x\rangle| \leq \delta, \forall\, x \in U\}$; es decir, $\sup\limits_{x\in U} |\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{U^o}$. Por lo tanto $\|f\|_{U^o} = \sup\limits_{x\in U} |\langle f, x\rangle|$ y así $f\mid_{N(U)} = 0$. Como $(E_{(U)})'$ es un espacio de Banach con la norma usual, entonces U^o es un disco de Banach. Pero por proposición (2.3-53), B^o es un barril y $\lambda U^o \subset B^o$ para algún $\lambda > 0$. Esto implica que $\lambda^{-1} U^{oo} = (\lambda U^o)^o \supset B^{oo} \supset B$; es decir, $\lambda B \subset U^{oo} = U$ (B es absorbido por U). Por tanto B es τ-acotado. ■

2.4. Bornologías y $\mathfrak{B}$-Topologías.

2.4.1. $\mathfrak{B}$-Topologías.

Sea E un espacio localmente convexo, X un conjunto no vacío, y G un subespacio lineal del espacio vectorial E^X de todas las funciones de X en E. Para U y B subconjuntos no vacíos de E y X, respectivamente, definimos $W_{B,U} := \{f \in G : f(B) \subset U\}$.

Entonces tenemos

Lema 58 *Sean $U, V \subset E$ no vacíos, $B, C \subset X$, y $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ arbitrarios. Entonces*

(*i*) $W_{B\cup C, U\cap V} \subset W_{B,U} \cap W_{C,V}$;

(*ii*) $W_{B,U} + W_{B,V} \subset W_{B,U+V}$;

(*iii*) $\lambda W_{B,U} = W_{B,\lambda U}$.

Demostración.

(i) Sea $f \in W_{B\cup C, U\cap V}$, entonces $f(B \cup C) \subset U \cap V$; como $f(B), f(C) \subset f(B \cup C)$, esto implica que $f(B), f(C) \subset U \cap V \subset U, V$. Por tanto $f(B) \subset U$ y $f(C) \subset V$, entonces $f \in W_{B,U} \cap W_{C,V}$.

(ii) Si $f \in W_{B,U} + W_{B,V}$, tenemos que $f = g + h$ con $g \in W_{B,U}$ y $h \in W_{B,V}$, por lo que $f(B) = g(B) + h(B) \subset U + V$, y así $f \in W_{B,U+V}$

(iii) Tomemos $f \in \lambda W_{B,U}$, esto impica que $f = \lambda g$ para alguna $g \in W_{B,U}$. Entonces $f(B) = \lambda g(B) \subset \lambda U$. Concluimos que $f \in W_{B,\lambda U}$. ■

Sea ahora E un espacio localmente convexo, $\mathfrak{U}$ una base de vecindades de 0 en E, y $\mathfrak{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de X, que cubre a X, dirigida por inclusión. Entonces

$$\mathfrak{W} := \{W_{B,U} : B \in \mathfrak{B}, U \in \mathfrak{U}\}, \qquad .....[1]$$

cumple con las propiedades (i), (ii), y (iii) del lema anterior; así $\mathfrak{W}$ es una familia de subconjuntos de G que cumplen con las propiedades de una base de vecindades del origen en G. Esta familia que generamos no depende de la elección particular de $\mathfrak{U}$. De esta manera podemos considerar a la $\mathfrak{B}$-topología denotada por $\tau_{\mathfrak{B}}$, generada por $\mathfrak{W}$, en G; de manera que $\mathfrak{W}$ es la base de vecindades de 0 en G para la topología $\tau_{\mathfrak{B}}$. Además tenemos que

Proposición 59 *Sea E un e.l.c. Si $U \subset E$ es convexo ó balanceado, entonces también lo es $W_{B,U}$, para todo $B \subset X$.*

Demostración.

Sean $B \subset X$ y $U \subset E$.

1) Si U es convexo, para cada $t \in [0,1]$ y $f, g \in W_{B,U}$ tenemos

$$(tf + (1-t)g)(B) = tf(B) + (1-t)g(B) \subset tU + (1-t)U = U.$$

Por tanto, $tf + (1-t)g \in W_{B,U}$; o sea $W_{B,U}$ efectivamente es convexo.

2) Supongamos que U es balanceada. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que $|\alpha| \leq 1$. Sea, además, $f \in W_{B,U}$. Entonces

$$(\alpha f)(B) = \alpha f(B) \subset \alpha U \subset U.$$

Con esto concluimos que $W_{B,U}$ también es balanceada. ■

Proposición 60 *Sea E un e.l.c. Sean $V, U \subset E$ y $C, B \subset X$.*

1. *Si $V \subset U$, entonces $W_{B,V} \subset W_{B,U}$.*

2. *Si $C \subset B$, entonces $W_{B,U} \subset W_{C,U}$.*

Demostración. 1. Sea $f \in W_{B,V}$. Entonces $f(B) \subset V \subset U$, por consiguiente $f \in W_{B,U}$.

2. Sea $f \in W_{B,U}$. De donde, $f(C) \subset f(B) \subset U$. Por tanto $f \in W_{C,U}$. ■

Definición 61 *Sea E un e.l.c., G un subespacio lineal de E^X y X un conjunto. Decimos que $B \subset X$ es G-acotado si $f(B)$ es acotado en E, para todo $f \in G$.*

Proposición 62 *Sea E un e.l.c. y sea $\mathfrak{W}$ como en [1]. Entonces, $\mathfrak{W}$ es una base de vecindades de 0 para una topología $\tau_{\mathfrak{B}}$ lineal en G si y sólo si $\mathfrak{B}$ consiste solamente de conjuntos G-acotados. En este caso, como E es de Hausdorff y $\mathfrak{B}$ cubre a X, tenemos que $\tau_{\mathfrak{B}}$ es de Hausdorff.*

Demostración. Asumamos que $\mathfrak{U}$ es una base de vecindades de 0 en E formada por conjuntos balanceados.

Como $\mathfrak{W}$ satisface (i), (ii) y (iii) del lema (2.4.1-58) $\mathfrak{W}$ es una base de vecindades del origen para la topología lineal $\tau_{\mathfrak{B}}$ de G si y sólo si $W_{B,U}$ es absorbente en G para todo $B \in \mathfrak{B}$ y todo $U \in \mathfrak{U}$; ya que una vecindad del origen en un espacio vectorial topológico siempre es absorbente, lo cual no sucede si sólo tenemos un espacio topológico, pues en un espacio vectorial topológico, además de tener la estructura topológica también se considera la estructura algebraica. Por (iii), $W_{B,U}$ es absorbente si y sólo si para todo $f \in G$ existe $\lambda > 0$ talque $f \in \lambda W_{B,U} = W_{B,\lambda_U}$, y esto pasa si y sólo si para todo $f \in G$ existe $\lambda > 0$ talque $f(B) \subset \lambda U$. Lo último lo tenemos si y sólo si para toda $f \in G$, $f(B)$ es absorbido por U; lo cual es cierto si y sólo si B es G-acotado.

Si E es de Hausdorff y $\mathfrak{B}$ cubre a X, entonces $f \in \cap\{W_{B,U} : B \in \mathfrak{B}, U \in \mathfrak{U}\}$; lo cual implica $f(B) = \{0\}$, para todo $B \in \mathfrak{B}$, por lo que $f = 0$. Por tanto $\tau_{\mathfrak{B}}$ es de Hausdorff. ■

2.4.2. Bornologías.

En lo que sigue $E = (E, \tau_E)$ y $F = (F, \tau_F)$ siempre serán espacios localmente convexos. Asumiremos también que $F \neq \{0\}$.

Definición 63 *Se dice que una familia $\mathfrak{B}$ no vacía, de subconjuntos de E $\sigma(E,F)$-acotados es una bornología en E (relativa a $\langle E, F\rangle$) si es dirigida por inclusión y si, para todo $B \in \mathfrak{B}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ existe $C \in \mathfrak{B}$ tal que $\lambda B \subset C$.*

Notemos que por el Teorema (2.3-57), $\sigma(E, E')$-acotado es equivalente a τ_E-acotado. Dada una bornología $\mathfrak{B}$ en E, consideramos la topología $\tau_{\mathfrak{B}}$ de acuerdo a la sección anterior ($\mathfrak{B}$-Topologías) en el espacio $L(E, F)$ de todas las funciones lineales (τ_E, τ_F)-continuas de E en F. Si $\mathcal{V}$ es una base de vecindades de cero en F formada por conjuntos balanceados, convexos y cerrados, entonces los conjuntos

$$W_{B,V} := \{T \in L(E,F) : T(B) \subset V\}\ ,\ \ B \in \mathfrak{B}\ ,\ V \in \mathcal{V},$$

forman una base de vecindades del origen para $\tau_{\mathfrak{B}}$. Entonces algo es $\tau_{\mathfrak{B}}$-convergente si y sólo si es uniformemente convergente en cada $B \in \mathfrak{B}$. Además, cada $W_{B,V}$ es absolutamente convexo, en consecuencia $\tau_{\mathfrak{B}}$ es localmente convexa. Como cada $W_{B,V}$ es balanceado y convexo podemos considerar a la correspondiente seminorma de Minkowsky

$$q_{B,V} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{R}$$

Observemos que esta seminorma esta dada por

$$q_{B,V}(T) = \sup_{x\in B} q_V(Tx)\ ,\ \ \forall\, T \in \mathcal{L}(E,F);$$

donde q_V es la seminorma de Minkowsky de V. Pues

$$\begin{aligned} q_{B,V}(T) &= \inf\{\delta > 0 : T \in \delta W_{B,V}\} = \inf\{\delta > 0 : T \in W_{B,\delta V}\} \\ &= \inf\{\delta > 0 : T(x) \in \delta V, \forall\, x \in B\} \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\sup_{x\in B} q_V(Tx) = \sup_{x\in B}(\inf\{\lambda > 0 : Tx \in \lambda V\}).$$

Sea $\alpha > \sup_{x\in B} q_V(Tx)$. Entonces $\alpha > q_V(Tx)$ para toda $x \in B$, por tanto Tx es un elemento de αV para todo $x \in B$; es decir $q_{B,V}(T) \leq \sup_{x\in B} q_V(Tx)$. Además si $\gamma > q_{B,V}(T)$, entonces $Tx \in \gamma V$ para todo $x \in B$; por lo tanto $\gamma \geq q_V(Tx)$ para todo $x \in B$. Así, $\sup_{x\in B} q_V(Tx) \leq q_{B,V}(T)$. Concluimos que

$$\sup_{x\in B} q_V(Tx) = q_{B,V}(T)$$

Si $F = \mathbb{C}$, entonces las polares B^o, $B \in \mathfrak{B}$, forman una base de vecindades de 0 para la topología $\tau_{\mathfrak{B}}$ en $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$.

Definición 64 *Decimos que una bornología es saturada si contiene los subconjuntos de las bipolares de cada uno de sus elementos.*

Dada una bornología $\mathfrak{B}$ en E, sea $\mathfrak{B}^{sat}$ la colección de todos los subconjuntos de las bipolares de los elementos de $\mathfrak{B}$. Entonces, $\mathfrak{B}^{sat}$ es la bornología saturada más pequeña en E que contiene a $\mathfrak{B}$. Ya que, cualquier bornología saturada que contiene a $\mathfrak{B}$, por definición contiene a $\mathfrak{B}^{sat}$; y además $\mathfrak{B}^{sat}$ también es una bornología:

1. Sus elementos obviamente son $\sigma(E,F)$-acotados.

2. Como $\mathfrak{B}$ es dirigida por inclusión, también lo es $\mathfrak{B}^{sat}$.

3. Sean $B \in \mathfrak{B}^{sat}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $B \subset D$ para algún $D \in \mathfrak{B}$, así existe $C \in \mathfrak{B}$ tal que $\lambda B \subset \lambda D \subset C$.

Por como la definimos, es saturada.

Definición 65 *Un subconjunto $\mathfrak{B}_o$ de $\mathfrak{B}$ es una base para $\mathfrak{B}$ si todo $B \in \mathfrak{B}$ esta contenido en algún $C \in \mathfrak{B}_o$.*

Note que una base $\mathfrak{B}_o$ de $\mathfrak{B}$ también es una bornología; ya que es claramente dirigida por inclusión, y si $B \in \mathfrak{B}_o$, $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $B \in \mathfrak{B}$ y existe $D \in \mathfrak{B}$ tal que $\lambda B \subset D$. Como $\mathfrak{B}_o$ es base de $\mathfrak{B}$, existe $C \in \mathfrak{B}_o$ tal que $D \subset C$. Entonces $\lambda B \subset D$, con esto $\mathfrak{B}_o$ es en efecto una bornología. Además, claramente $\mathfrak{B}_o^{sat} = \mathfrak{B}^{sat}$. Por ejemplo, $\{B^{oo} : B \in \mathfrak{B}\}$ es una base de $\mathfrak{B}^{sat}$.

La siguiente proposición es una consecuencia de los resultados precedentes.

Proposición 66 *Sea $\mathfrak{B}$ una bornología en E. Entonces $\tau_{\mathfrak{B}} = \tau_{\mathfrak{B}^{sat}}$ en $\mathcal{L}(E,F)$. En particular, se tiene que $\tau_{\mathfrak{B}} = \tau_{\mathfrak{B}_o}$ para toda base $\mathfrak{B}_o$ de $\mathfrak{B}$. Si $\widetilde{\mathfrak{B}}$ es una bornología saturada en E tal que $\tau_{\mathfrak{B}} = \tau_{\widetilde{\mathfrak{B}}}$, entonces $\widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}^{sat}$.*

Demostración. Recordemos que si $\mathcal{N}_o(F)$ es la base de vecindades balanceadas, cerradas y convexas de cero en F, entonces

$$\mathfrak{W} := \{W_{B,V} : B \in \mathfrak{B} \ , \ V \in \mathcal{N}_o(F)\} \text{ es una base de } \tau_{\mathfrak{B}} \ ,$$

la cual es localmente convexa.

1. Para cada $U \in \mathcal{N}_o(\mathcal{L}(E,F), \tau_{\mathfrak{B}})$ existen $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathfrak{B}$ y $V_1, V_2, ..., V_n$ en $\mathcal{N}_o(F)$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} W_{B_i,V_i} \subset U$. Como $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}^{sat}$, se tiene $\tau_{\mathfrak{B}} \leq \tau_{\mathfrak{B}^{sat}}$.

   Sea $U \in \mathcal{N}_o(\mathcal{L}(E,F), \tau_{\mathfrak{B}^{sat}})$. Entonces existen $B_1', B_2', ..., B_n' \in \mathfrak{B}^{sat}$ y $V_1, V_2, ..., V_n \in \mathcal{N}_o(F)$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} W_{B_i',V_i} \subset U$. Para cada $B_i' \in \mathfrak{B}^{sat}$, $1 \leq i \leq n$, existe $A_i \in \mathfrak{B}$, $1 \leq i \leq n$, que satisface $B_i' \subset A_i^{oo}$, $1 \leq i \leq n$. Por tanto, podemos elegir $B_i \in \mathfrak{B}$, $1 \leq i \leq n$, tal que $W_{B_i,V_i} \subset W_{B_i',V_i}$. Así, $\bigcap_{i=1}^{n} W_{B_i,V_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} W_{B_i',V_i}$. Entonces $\tau_{\mathfrak{B}} = \tau_{\mathfrak{B}^{sat}}$.

2. Ahora, $\tau_{\mathfrak{B}} = \tau_{\mathfrak{B}_o}$, pues $\mathfrak{B}_o^{sat} = \mathfrak{B}^{sat}$ si $\mathfrak{B}_o$ es base de $\mathfrak{B}$. Entonces $\tau_{\mathfrak{B}} = \tau_{\mathfrak{B}^{sat}} = \tau_{\mathfrak{B}_o^{sat}} = \tau_{\mathfrak{B}_o}$.

3. Supongamos que no; es decir, existe $C \in \widetilde{\mathfrak{B}} \setminus \mathfrak{B}^{sat}$, esto implica que $\tau_{\mathfrak{B}^{sat}} \neq \tau_{\widetilde{\mathfrak{B}}}$, pues

   $$\{W_{B,V} : B \in \widetilde{\mathfrak{B}} \ y \ V \in \mathcal{N}_o(F)\} = \mathfrak{W}$$

   es una base de vecindades del origen para $\tau_{\widetilde{\mathfrak{B}}}$, de manera similar

   $$\{W_{B,V} : B \in \mathfrak{B}^{sat} \ y \ \ V \in \mathcal{N}_o(F)\} = \mathfrak{W}'$$

   es una base de vecindades de cero para $\tau_{\mathfrak{B}^{sat}}$. Además, $\mathfrak{W} \neq \mathfrak{W}'$. Por tanto $\tau_{\widetilde{\mathfrak{B}}} \neq \tau_{\mathfrak{B}^{sat}}$, lo cual es una contradicción.

■

Definición 67 *Sea (E, τ) e.l.c. y $M \subset E$. Decimos que M es total si su expansión lineal es densa en E.*

Por la continuidad de la multiplicación por escalares, la definición anterior es equivalente a pedir que el conjunto de las combinaciones lineales racionales de elementos de M es denso en E. De esto se sigue que E *es separable si y sólo si tiene un subconjunto total numerable.*

Un sistema de subconjuntos de E, cuya unión de sus elementos es total en E, también se dice que es total en E.

Proposición 68 *Sea $\mathfrak{B}$ una bornología en E.*

(*a*) *La topología $\tau_{\mathfrak{B}}$ en $L(E,F)$ es Hausdorff si y sólo si $\mathfrak{B}$ es total en E.*

(*b*) *$\tau_{\mathfrak{B}}$ es más fina que la topología simple τ_s si y sólo si $\mathfrak{B}^{sat}$ cubre a E.*

Demostración.

(*a*) Como $\mathfrak{B}$ es total en E, la proposición (2.4.1-62) implica que $\tau_{\mathfrak{B}}$ es de Hausdorff.

A la inversa, supongamos que $\mathfrak{B}$ no es total en E. Entonces M, la cerradura del subespacio lineal generado por $\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B$, es un subespacio cerrado propio de E. Entonces, por Hanh-Banach, existe $f \in E'$-$\{0\}$ tal que $f\mid_M=0$. Si fijamos $y \in F \setminus \{0\}$ e identificamos a $\mathbb{C}$ con el subespacio generado por $\{y\}$; a f le podemos asociar la función

$$\hat{f} : E \to F$$

dada por $\hat{f}(x) = \lambda_x y$, $x \in E$, donde $\lambda_x = f(x)$, y es tal que $\hat{f}\mid_M = 0$ y $\hat{f} \neq 0$; así, $\hat{f}$ es un elemento de $\cap\{W_{B,V} : B \in \mathfrak{B},\ V \in \mathcal{N}_o(F)\} = \overline{\{0\}}$. Como $\hat{f} \neq 0$, $\tau_{\mathfrak{B}}$ no puede ser Hausdorff, lo cual es una contradicción.

(*b*) Sea $\mathfrak{B}_s = \{A \subset E : A \text{ es finito}\}$ y τ_s la topología generada por la bornología $\mathfrak{B}_s$ (la topología simple). Si $\tau_s \leq \tau_{\mathfrak{B}}$, como τ_s es de Hausdorff, tenemos $\overline{\{0\}}^{\tau_{\mathfrak{B}}} \subset \overline{\{0\}}^{\tau_s} = \{0\}$,esto implica que $\tau_{\mathfrak{B}}$ es de Hausdorff. De manera que, por (*a*), $\mathfrak{B}$ es total en E; entonces por la definición de bornología saturada, obtenemos que $\mathfrak{B}^{sat}$ cubre a E.

Inversamente, para todo $A \subset E$ finito existe $B^{oo} = B \in \mathfrak{B}^{sat}$, tal que $A \subset B$; entonces $W_{B,U} \subset W_{A,U}$ para todo $U \in \mathcal{N}_o(F)$. De donde $\tau_s \leq \tau_{\mathfrak{B}}$.

∎

Ejemplo 69 *Consideremos $E = (E, \tau_E)$ un e.l.c.*

(*a*) *La topología τ_s de la convergencia simple, justamente la antes citada, es la topología $\tau_{\mathfrak{B}_s}$, donde $\mathfrak{B}_s$ es la bornología formada por todos los subconjuntos finitos de E. Nos referiremos a la respectiva envolvente saturada $\mathfrak{B}_s^{sat}$ como la bornología finita en E. Sea $B \subset E$, entonces $B \in \mathfrak{B}_s^{sat}$ si y sólo si el subespacio lineal generado por B es de dimensión finita: Ya que $B \in \mathfrak{B}_s^{sat}$, si y sólo si $B \subset C^{oo}$ para algún $C \in \mathfrak{B}_s$; y esto implica que la* *cerradura del subespacio lineal generado por C (que tiene dimensión finita) contenga al subespacio lineal generado por B, y por tanto este último es de dimensión finita. Por otro lado, si la expansión lineal de B es de dimensión finita, entonces tiene una base finita, la cual esta en $\mathfrak{B}_s^{sat}$.*

Si $F = \mathbb{C}$, entonces claramente $\tau_s = \sigma(E', E)$ en $E' = L(E, F)$.

(b) *El sistema $\mathfrak{B}_\mu$ de todos los subconjuntos de E que son $\sigma(E, E')$-acotados (es decir, τ_e-acotados) es una bornología saturada en E. Formemos la $\mathfrak{B}_\mu$-topología correspondiente y denotemos por τ_μ a dicha topología. Notemos que esta topología es la topología localmente convexa más fuerte en $L(E, F)$ obtenida con esta idea.*

Si $F = \mathbb{C}$, entonces denotemos a τ_μ por $\beta(E', E)$ y nos referiremos a esta como la topología más fuerte en $E' = L(E, \mathbb{C})$, determinada por $\langle E', E\rangle$. Entonces, por proposición (2.3-53), una base de vecindades de 0 en $(E', \beta(E', E))$ esta dada por todos los barriles en E'.

De manera análoga, la topología fuerte $\beta(E, E')$ en E (relativa a $\langle E, E'\rangle$) esta definida como la topología de convergencia uniforme de todos los subconjuntos de E' que son $\sigma(E', E)$-acotados. Esta es más fina que $\sigma(E, E')$ y tenemos una base de vecindades del origen formada por todos los barriles en E.

(c) *Todos los subconjuntos $\beta(E, E')$-acotados de E forman otra bornología $\mathfrak{B}_{\mu^*}$ en E. A la correspondiente $\mathfrak{B}_{\mu^*}$-topología en $L(E, F)$ la denotaremos por τ_{μ^*}.*

Si $F = \mathbb{C}$, entonces τ_{μ^*} en E' la denotamos por $\beta^*(E', E)$.

Similarmente, la topología en E de convergencia uniforme para todos los subconjuntos de E' $\beta(E', E)$-acotados la denotamos por $\beta^*(E, E')$.

(d) *Sean B y C discos de Banach en E. Entonces $E_B \times E_C$ es un espacio de Banach bajo la topología producto. Las proyecciones canónicas*

$$J_B : E_B \to E \;\; y \;\; J_C : E_C \to E$$

son continuas para $\sigma(E, E')$ en E. El subespacio $G := R(J_B) + R(J_C)$ de E puede ser escrito como $G = (E_B \times E_C)/N$, donde N es el núcleo de la función continua $E_B \times E_C \to E$ bajo la regla $(x, y) \longmapsto J_B x + J_C y$. Con respecto a la norma cociente (ver Apéndice), G es un espacio de Banach que se sumerge continuamente en E. Así, podemos considerar a la bola unitaria como disco de Banach en E. Entonces elijamos un multiplo adecuado de la bola unitaria que contenga a B y a C.

De estas consideraciones, podemos concluir que los discos de Banach en E forman una bornología $\mathfrak{B}_b$ en E. A la correspondiente $\mathfrak{B}_b$-topología en $L(E, F)$ la denotaremos por τ_b.

Si $F = \mathbb{C}$, entonces escribimos $\mathfrak{b}(E', E)$ a la topología τ_b en E'. De la misma forma, la topología en E de la convergencia uniforme sobre los discos de Banach de E' la denotamos por $\mathfrak{b}(E, E')$.

(*e*) *De acuerdo al Apéndice, la familia* $\mathfrak{B}_\mu$ *de todos los discos* $\sigma(E,E')$*-compactos en* E *es una bornología en* E. *Formemos la correspondiente* $\mathfrak{B}_\mu$*-topología en* $L(E,F)$ *y la denotaremos por* τ_μ.

Si $F=\mathbb{C}$, *entonces nos referiremos por* $\mu(E',E)$ *a la topología* τ_μ *en* E'; *llamada topología de Mackey en* E' *determinada por* $\langle E',E\rangle$. *De modo similar, la topología de Mackey,* $\mu(E,E')$, *determinada por* $\langle E,E'\rangle$ *esta definida como la topología de la convergancia uniforme sobre todos los discos* $\sigma(E',E)$*-compactos en* E'.

En los ejemplos dados anteriormente, la topología τ_E *dada inicialmente en* E *queda en segundo termino; esto sólo nos sirvió para fijar la dualidad* $\langle E,E'\rangle$, *y el espacio* $L(E,F)$. *Pero esta puede introducirse más implícitamente.*

(*f*) *El sistema* $\mathfrak{B}_{pc}$ *de todos los conjuntos precompactos de* (E,τ_E) *es una bornología saturada en* E. *Por* τ_{pc} *nos referiremos a la* $\mathfrak{B}_{pc}$*-topología en* $L(E,F)$.

Si $F=\mathbb{C}$, *entonces escribimos* $\tau_{pc}(E',E)$ *en lugar de* τ_{pc}.

Ocasionalmente escribiremos $L_v(E,F)$ *en lugar de* $(L(E,F),\tau_v)$ *donde* v *reemplaza a* $s,\beta,\beta^*,\mathfrak{b},\mu,pc,...$ *Similarmente, utilizaremos* E_v *y* E'_v *para referirnos a* $(E,v(E,E'))$ *y* $(E',v(E',E))$.

Observemos que, para el caso en que $F=\mathbb{C}$, la topología de Mackey, ver (2.4.2-69-(e)), es la topología más fuerte compatible con la dualidad $\langle E,E'\rangle$, esto se demostrará más adelante.

Teorema 70 *Sea* $\langle E,F\rangle$ *una pareja en dualidad.*

(*a*) *Todo disco de Banach en* E *es* $\beta(E,E')$*-acotado.*

(*b*) *En* $L(E,F)$, *tenemos* $\tau_s\le\tau_\mu\le\tau_b\le\tau_{\beta^*}\le\tau_\beta$.

(*c*) τ_s *y* τ_{β^*} *definen los mismos conjuntos acotados en* $L(E,F)$.

Demostración.

(*a*) Sabemos que los barriles en E forman una base de vecindades del origen en E para la $\beta(E,E')$-topología, y además, por Banach-Mackey (2.3-56), un barril absorbe a todo disco de Banach; por lo que todo disco de Banach en E es $\beta(E,E')$-acotado.

(*b*) La contensión $\tau_s\le\tau_\mu$ la tenemos ya que

$$\mathfrak{B}_s^{sat}=\{\{x_1,x_2,...,x_n\}^{oo}:n\in\mathbb{N},x_i\in E,1\le i\le n\}$$

esta contenida en $\mathfrak{B}_\mu$.

Por otro lado, todo disco $\sigma(E,E')$-compacto es un disco de Banach, de aquí que $\tau_\mu\le\tau_b$.

Para ver que $\tau_{\beta^*} \leq \tau_{\beta}$ sólo necesitamos hacer ver que en E', como

$$s(E', E) = \sigma(E', E) \leq \beta(E', E),$$

cualquier subconjunto $\beta(E', E)$-acotado es $\sigma(E', E)$-acotado, así tenemos $\mathfrak{B}_{\beta} \subset \mathfrak{B}_{\beta^*}$, donde $\mathfrak{B}_{\beta^*}$ es la bornología en E' formada por todos los conjuntos $\beta(E', E)$-acotados y $\mathfrak{B}_{\beta}$ es la bornología en E' que consiste de todos los subconjuntos de E' $\sigma(E', E)$-acotados; es decir, $\tau_{\beta^*} \leq \tau_{\beta}$.

Además, siempre tenemos que $\tau_b \leq \tau_{\beta^*}$, pues si $\mathfrak{B}_b$ es la bornología de todos los discos de Banach en E, entonces, por (a), $\mathfrak{B}_b \subset \mathfrak{B}_{\beta^*}$; con esto tenemos lo que necesitabamos.

(c) De (b) tenemos que un conjunto τ_{β^*}-acotado siempre es τ_s-acotado en $L(E, F)$.

Sea $M \subset L(E, F)$ un conjunto τ_{β^*}-acotado. Sea W una vecindad de 0 en $(L(E, F), \tau_{\beta^*})$; podemos asumir que $W = W_{B;V}$, donde $B \subset E$ es $\beta(E, E')$-acotado y $V = V^{oo}$ es una vecindad del origen en F.

Notemos que

$$\begin{aligned} \rho_V(f) &= \inf\{\lambda > 0 : f \in \lambda V\} = \inf\{\lambda > 0 : |\langle x, f\rangle| \leq \lambda, \forall x \in V^o\} \\ &= \sup_{x \in V^o} |\langle x, f\rangle| . \end{aligned}$$

Como M es τ_s-acotado, $\rho_V(Tx) < \infty$ para todo $T \in M$ y todo $x \in E$. De donde,

$$A := \{\hat{x} \circ T : T \in M, x \in V^o \text{ y } \hat{x} \text{ es la función evaluar en } x\}$$

es acotado en $(E', \sigma(E', E))$. Por la proposición (2.3-52), A^o es un barril en E; es decir, es una vecindad de 0 en $(E, \beta(E, E'))$. En particular, como B es $\beta(E, E')$-acotado, $B \subset \lambda A^o$ para algún $\lambda > 0$, así $A \subset \lambda B^o$. Por lo tanto, $\rho_{B,V}(T) = \sup_{x \in B} \rho_V(Tx) \leq \lambda$, para todo $T \in M$. Con esto obtenemos que efectivamente M es τ_{β^*}-acotado.

■

2.5. Conjuntos Equicontinuos y Compactologías.

Para esta sección consideremos $E = (E, \tau_E)$ y $F = (F, \tau_F)$ espacios localmente convexos.

Definición 71 *Decimos que un subconjunto H de $\mathcal{L}(E, F)$ es equicontinuo si para toda vecindad V de 0 en F existe una vecindad U de 0 en E tal que $T(U) \subset V$ para todo $T \in H$.*

Observemos que si $F = \mathbb{C}$, la definición anterior equivale a pedir que $H \subset U^o$ para alguna vecindad U de 0 en E.

En nuestro siguiente resultado probaremos dos propiedades básicas para conjuntos equicontinuos.

Teorema 72 (*a*) *Si $H \subset \mathcal{L}(E, F)$ es equicontinuo, entonces H es τ_β-acotado y su cerradura en (el espacio producto) F^E está contenida en $\mathcal{L}(E, F)$ y también es equicontinuo.*

(*b*) *Sea $H \subset \mathcal{L}(E, F)$ equicontinuo. Entonces, las topologías τ_s y τ_{pc} coinciden.*

Demostración.

(*a*) Sea $H \subset \mathcal{L}(E, F)$ equicontinuo. Sea $\overline{H}$ la cerradura de H en F^E; es decir, la cerradura con respecto a τ_s, la topología producto. Probaremos que $\overline{H} \subset \mathcal{L}(E, F)$ y que $\overline{H}$ es equicontinuo.

Sean $T \in \overline{H}$ y $(T_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset H$ una red tal que T_α converge a T con respecto a la topología τ_s. Entonces,

$$T(x + \lambda y) = \lim_\alpha T_\alpha(x + \lambda y) = \lim_\alpha T_\alpha(x) + \lambda T_\alpha(y) = T(x) + \lambda T(y) \ ,$$

para todo $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$. De donde T es lineal, y así $\overline{H} \subset L(E, F)$.

Demostremos ahora que T es continua. Sea $V \in \mathcal{N}_o(F)$ cerrada, elijamos $U \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que $T(U) \subset V$ para todo $T \in H$ (esto se puede pues H es equicontinuo). Como

$$\delta_x : F^E \to F; \ f \longmapsto f(x)$$

es continua, entonces $\delta_x(H) \subset V$ para todo $x \in U$, pues $\delta_x(H) \subset V$. Esto implica

$$\delta_x(\overline{H}) \subset \overline{V} = V.$$

Pero sabemos que si g es una función continua, entonces $g(\overline{B}) \subset \overline{g(B)}$ para todo subconjunto B del dominio de g; por lo tanto, $\delta_x(\overline{H}) \subset V$ para todo $x \in U$.

En consecuencia, $T(U) \subset V$, así T es continua y $\overline{H} \subset \mathcal{L}(E, F)$. De esto también obtenemos que $T(U) \subset V$ para toda $T \in \overline{H}$, por tanto $\overline{H}$ es equicontinuo.

Finalmente, demostremos que H es τ_β-acotado. Es decir, necesitamos probar que si $B \subset E$ acotado y $V \in \mathcal{N}_o(F)$, existe $\lambda > 0$ tal que

$$H \subset \lambda W_{B,V}.$$

Sea $B \subset E$ acotado y $V \in \mathcal{N}_o(F)$. Sea $U \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que $T(U) \subset V$, para todo $T \in H$, la existencia de esta vecindad U la garantizamos del hecho de que H es equicontinuo. Sea $\delta > 0$ tal que $B \subset \delta U$, que existe ya que B es acotado. Entonces

$$T(B) \subset T(\delta U) = \delta T(U) \subset \delta V, \text{ si } T \in H.$$

Por tanto

$$H \subset W_{B,\delta V} = \delta W_{B,V} \ ;$$

o sea, H es τ_β-acotado.

(b) Sean $T_o \in H$, $V \in \mathcal{N}_o(F)$, $V = V^{oo}$, y S un conjunto precompacto, $S \subset E$. Demostraremos que existe un conjunto finito $M \subset E$ tal que

$$(T_o + W_{M,V}) \cap H \subset T_o + W_{S,V}.$$

Procedamos de la siguiente manera: Sea $U \in \mathcal{N}_o(E)$ que satisface

$$T(U) \subset \frac{1}{2}V, \forall\, T \in H.$$

Dado que S es precompacto en E, $S \subset K + \frac{1}{2}U$ para algún $K \subset E$ finito. Tomemos $M := 2K$, que también es finito, así $W_{M,V} \in \tau_s$.

Sea $T \in (T_o + W_{M,V}) \cap H$ fijo. Entonces $T(y) \in \frac{1}{2}V$, siempre que $y \in U$, y $(T - T_o)(x) \in \frac{1}{2}V$ para todo $x \in K$. Lo último lo tenemos gracias a que $T = T_o + T'$, para algún $T' \in W_{M,V}$; es decir,

$$2T'(K) = T'(2K) = T'(M) \subset V.$$

Esto implica que $T'(K) \subset \frac{1}{2}V$, y así

$$(T - T_o)(x) = T(x) - T_o(x) = T_o(x) + T'(x) - T_o(x) = T'(x) \in \frac{1}{2}V.$$

Por otro lado, a cada $s \in S$ lo podemos escribir como $s = x + \frac{1}{2}y$ con $x \in K$ y $y \in U$. De esta manera

$$(T-T_o)(s) = (T-T_o)(x) + (T-T_o)(\frac{1}{2}y) = (T-T_o)(x) + \frac{1}{2}T(y) - \frac{1}{2}T_o(y),$$

pero

$$(T - T_o)(x) + \frac{1}{2}T(y) - \frac{1}{2}T_o(y) \in \frac{1}{2}V + \frac{1}{4}V + \frac{1}{4}V = V;$$

es decir, $(T - T_o) \in W_{S,V}$.

De modo que $T \in T_o + W_{S,V}$. Se sigue $\tau_{pc} \leq \tau_s$.

La otra contención siempre la tenemos, pues todo $B \subset E$ finito es precompacto, por lo que $W_{B,V} \in \tau_{pc}$.

■

Como un corolario tenemos el siguiente Teorema fundamental.

Teorema 73 (Alaŏglu-Bourbaki) *Sea $H \subset E'$ equicontinuo. Entonces H es relativamente τ_{pc}-compacto.*

Demostración.

Por el Teorema anterior, basta con probar que H es relativamente $\sigma(E, E')$-compacto, ya que en H las topologías τ_{pc} y τ_s coinciden. De este mismo Teorema, también sabemos que como $\sigma(E, E') = \tau_s$, H es $\sigma(E', E)$-acotado (acotado en $\mathbb{C}^E$). Además, $\overline{H}$ es compacto en $\mathbb{C}^E = \prod_{x \in E, f: E \to \mathbb{C}} f(x)$, pues del Apéndice A-(A.1-203) obtenemos: $A \subset \mathbb{C}^E$ es precompacto (compacto) si y sólo si $f(A)$ es precompacto (compacto), para toda f; y como H es acotado, $f(H)$ es acotado para toda f, por lo tanto $f(\overline{H}) \subset \overline{f(H)}$ son acotados y cerrados en $\mathbb{C}$.

De donde $\overline{H}$ es compacto; es decir, H es relativamente $\sigma(E', E)$-compacto.

Otra consecuencia del Teorema anterior es $\overline{H} \subset E'$, por lo que $\overline{H}$ es $\sigma(E', E)$-compacto. ■

Notemos que H es relativamente compacto para cualquier topología en E' más débil que $\tau_{pc}(E', E)$. Una consecuencia importante del Teorema de Alaŏglu-Bourbaki es el Teorema de Alaŏglu, una de las principales propiedades de la topología débil:

Teorema 74 (de Alaŏglu) *Sea E un e.l.c. Si V es una vecindad de 0 en E, entonces $V^o \subset E'$ es $\sigma(E', E)$-compacto.*

Demostración.

Sea $V \in \mathcal{N}_o(E)$. Entonces $f(V) \subset \overline{B_1(0)}$, para toda $f \in V^o$; es decir, V^o es un conjunto equicontinuo. Concluimos entonces que V^o es $\sigma(E', E)$-compacto. ■

Definición 75 *Sea E un e.l.c., llamamos compactología (con respecto a $\langle E, E' \rangle$) a toda bornología $\mathfrak{B}$ formada por discos $\sigma(E, E')$-compactos.*

De manera análoga definimos una compactología en E'.

Observemos que este concepto sólo depende de la dualidad $\langle E, E' \rangle$. La bornología $\mathfrak{B}_\mu$ de todos los discos $\sigma(E, E')$-compactos (ver (2.4.2-69)) es la compactología más grande en E dada por $\langle E, E' \rangle$.

Sea E un espacio localmente convexo. El sistema de todos los discos equicontinuos $\sigma(E', E)$-cerrados en E' es una compactología en E', y la llamaremos la *compactología equicontinua* en E' y aquí la denotaremos por $\mathcal{E}$. Esta depende explícitamente de la topología definida en E.

La envolvente saturada, $\mathcal{E}^{sat}$, de $\mathcal{E}$ consiste de todos los subconjuntos equicontinuos de E. Si $\mathcal{N}_o(E)$ es la base de vecindades de 0 en E, entonces

$$\{U^o : U \in \mathcal{N}_o(E)\}$$

es una base de $\mathcal{E}$.

Probaremos:

Proposición 76 *Sea* $E = (E, \tau_{_E})$ *un e.l.c. y sea* $\mathcal{E}$ *la correspondiente compactología equicontinua. Entonces*

(*a*) $\tau_{_E}$ *coincide con la* $\mathcal{E}$*-topología* $\tau_{_\mathcal{E}}$.

(*b*) *Si E es separable, entonces los conjuntos en* $\mathcal{E}$ *son separables y metrizables con respecto a la topología inducida por* $\sigma(E', E)$.

(*c*) *Si E es metrizable y separable, entonces* $(E', \sigma(E', E))$ *es separable.*

Demostración.

(*a*) Sea $\mathcal{N}_o(E)$ la base de vecindades de cero en E. Entonces, como

$$\{U^{oo} : U \in \mathcal{N}_o(E)\}$$

forman una base de vecindades de cero en E, obtenemos (a).

(*b*) Sea $D \subset E$ denso numerable, que existe por ser E separable. Si consideramos al espacio lineal generado por D y la llamamos G, entonces, por la proposición (2.1-38), la topología $\sigma(G, E')$ en G existe como una topología localmente convexa Hausdorff. Sea W una vecindad del origen en E', con respecto a $\sigma(E', G)$. Entonces existen $y_1, y_2, ..., y_k \in G$ tales que $\{y_1, y_2, ..., y_k\}^o \subset W$. Dado que $y_i \in G$, $1 \leq i \leq k$, podemos elegir $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \subset D$ y $\{\lambda_n^{(i)} : 1 \leq i \leq k, \text{ y } 1 \leq n \leq m\} \subset \mathbb{C}$ tales que, para cada $1 \leq i \leq k$, $y_i = \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n^{(i)} x_n$; es decir cada y_i lo podemos poner como combinación lineal de elementos de D. Si elegimos $\lambda > 0$ racional tal que $\lambda \geq \sum\limits_{i,n} \left|\lambda_n^{(i)}\right|$, entonces

$$\frac{1}{\lambda}\{x_1, x_2, ..., x_m\}^o \subset \{y_1, y_2, ..., y_k\}^o \subset W.$$

La razón de esto es que:

$$\begin{aligned} f \epsilon \frac{1}{\lambda}\{x_1, x_2, ..., x_m\}^o &\iff f \epsilon (\lambda\{x_1, x_2, ..., x_m\})^o \\ &\iff |\langle \lambda x_j, f\rangle| \leq 1, \forall 1 \leq j \leq m \\ &\iff \lambda\, |f(x_j)| = |\lambda f(x_j)| \leq 1, \forall 1 \leq j \leq m \\ &\iff |f(x_j)| \leq \frac{1}{\lambda}, \forall 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Ahora, $y_i = \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n^{(i)} x_n$, por lo que

$$|\langle f, y_i\rangle| = |f(y_i)| = \left| f\left(\sum_{n=1}^{m} \lambda_n^{(i)} x_n\right)\right| = \left|\sum_{n=1}^{m} \lambda_n^{(i)} f(x_n)\right| \quad \text{y}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\lambda_n^{(i)}f(x_n)\right|\leq\sum_{n=1}^{m}\left|\lambda_n^{(i)}\right||f(x_n)|\leq\left(\sum_{n=1}^{m}\left|\lambda_n^{(i)}\right|\right)\lambda^{-1}\leq 1$$

como queríamos.

Así, los multiplos racionales de las polares de los subconjuntos finitos de D forman una base de vecindades de 0 en $(E',\sigma(E',G))$ y esta base es numerable, lo cual implica que $\sigma(E',G)$ es metrizable.

Por otro lado, por el corolario (2.1-35), $\sigma(E',G)\subset\sigma(E',E)$.

Sea $H\in\mathcal{E}$ y consideremos la topología inducida por $\sigma(E',E)$ en H. Esta topología coincide con la inducida por $\sigma(E',G)$ en H, ya que al ser H un disco $\sigma(E',E)$-cerrado, equicontinuo, y al coincidir $\sigma(E',E)$ con $\tau_{pc}(E',E)$ en H tenemos

$$i:(H,\tau_{pc}(E',E))\rightarrow(H,\sigma(E',G))$$

la función inclusión es continua y biyectiva, puesto que todo conjunto finito es precompacto y $G\subset E$; además $\sigma(E',G)$ es la topología simple en H bajo G, con lo que tenemos lo que necesitamos. Como H es relativamente $\sigma(E',E)$-compacto y cerrado, es $\sigma(E',E)$-compacto; además, H es metrizable. Ahora, sea $n\in\mathbb{N}$ y consideremos $H\subset\bigcup_{h\in H}B_{\frac{1}{n}}(h)$; como H es $\sigma(E',E)$-compacto existen $h_1^{(n)},h_2^{(n)},...,h_m^{(n)}\in H$ tales que $H\subset\bigcup_{k=1}^{m}B_{\frac{1}{n}}(h_k^{(n)})$.

Sea $A:=\{h_i^{(n)}:n\in\mathbb{N},\,1\leq i\leq m_n\}$, el cual claramente es numerable, incluso es denso en H. Veamos que en efecto, tenemos que A es denso en H:

Sea $\varepsilon>0$ y $h\in H$. Entonces existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(h)\subset B_\varepsilon(h)$; además por la $\sigma(E',E)$-compacidad de H podemos encontrar $h_i^{(n)}\in A$, el cual satisface que $h\in B_{\frac{1}{n}}(h_i^{(n)})$, por lo que $h_i^{(n)}\in B_{\frac{1}{n}}(h)$. Concluimos que A es denso en H, y así H es separable.

(c) Como E es metrizable y separable podemos dar una base numerable de vecindades de cero en E, inclusive podemos considerar a $\mathcal{N}_o(E)$ como $\{B_q(0):q\in\mathbb{Q}^+\}$. Así, $E'=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^+}(B_q(0))^o$ y como cada $(B_q(0))^o$ es separable por (b), elegimos a $D'=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^+}D_q$, donde D_q es el denso numerable en $(B_q(0))^o$ con respecto a la topología $\sigma(E',E)$, para cada $q\in\mathbb{Q}^+$; así D' es un denso numerable en E'.

■

Otra consecuencia del Teorema de Alaoğlu-Bourbaki es la siguiente.

Teorema 77 (Mackey-Arens) *Sea $E=(E,\tau_E)$ un e.l.c. Entonces la topología de Mackey, $\mu(E,E')$, es la topología más fina en E compatible con la dualidad $\langle E,E'\rangle$.*

Demostración.

Sea $\mathfrak{B}_\mu = \{B \subset E' : B$ es un disco $\sigma(E', E)$-compacto$\}$ la bornología en E' que genera la topología de Mackey $\mu(E, E')$ en E. Así

$$\mathcal{B}_\mu = \left\{ \begin{array}{c} A^o \subset E : A \subset E' \ \sigma(E', E)\text{-acotado, balanceado,} \\ \text{convexo y } \sigma(E', E)\text{-compacto} \end{array} \right\}$$

es una base de vecindades del origen en E para $\mu(E, E')$.

Ahora tomemos a la compactología equicontinua correspondiente en E'

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{B \subset E' : B \text{ es un disco } \sigma(E', E)\text{-cerrado, equicontinuo}\} \\ &= \{B \subset E' : B \text{ es un disco } \sigma(E', E)\text{-compacto equicontinuo}\}. \end{aligned}$$

Esto trae como consecuencia que $\tau_{\mathcal{K}} = \tau_{\varepsilon}$ en E, por la proposición anterior (2.5-78), y, ya que $\mathcal{E} \subset \mathfrak{B}_\mu$, tenemos $\sigma(E, E') \leq \tau_{\mathcal{K}} = \tau_{\varepsilon} \leq \tau_\mu$. Ahora, por el Teorema (2.1-35), como $\langle E, E' \rangle$ es una dualidad $E' = (E, \sigma(E, E'))'$ y si $F := (E, \mu(E, E'))'$ obtenemos de manera inmediata que $E' \subset F$, además E' es un subespacio lineal de F.

Denotemos por " $\circ$ " y " $\bullet$ " a la polarización en $\langle E, E' \rangle$ y $\langle E, F \rangle$, respectivamente. Sea $K \subset E'$ un disco $\sigma(E', E)$-compacto ($K = K^{oo}$), entonces $K^o = \{x \in E : |\langle x, f \rangle| \leq 1, \forall f \in K\}$ y $K^\bullet = \{x \in E : |\langle x, f \rangle| \leq 1, \forall f \in K\}$; por lo que $K^o = K^\bullet$. Esto quiere decir que $K^{o\bullet} = K^{\bullet\bullet}$, cabe señalar que esto pasa para cualquier subconjunto K de E'. Ya que K es balanceado y convexo

$$K^{\bullet\bullet} = \overline{absconv}^{\tau_\mu}(K) = \overline{K}^{\sigma(F,E)}$$

en $(F, \sigma(F, E))$.

Observemos que $(E', \sigma(E', E))$ es un subespacio de $(F, \sigma(F, E))$; esto es, debido a que $E' \subset F$ y $\sigma(E', E) = \sigma(F, E)$ en E'. De aquí, como K es $\sigma(E', E)$-compacto, entonces K es $\sigma(E', E)$-cerrado; en consecuencia K es $\sigma(F, E)$-cerrado y así

$$K^{oo} = K = \overline{K}^{\sigma(F,E)} = K^{\bullet\bullet} = K^{o\bullet}. \qquad ...[1]$$

Sabemos que las polares, con respecto a la dualidad $\langle E, E' \rangle$, de los discos $\sigma(E', E)$-compactos forman una base de vecindades de cero $\mathcal{B}_o$ en $(E, \mu(E, E'))$ y así el conjunto de las polares, con respecto a $\langle E, F \rangle$, de cada $V \in \mathcal{B}_o$ forman una base de vecindades del origen en F. Ahora, por [1], para cualquier $f' \in F$, $f' \in K^{o\bullet} = K$, para algún disco K $\sigma(E', E)$-compacto, con $K \subset E'$; por lo tanto $F \subset E'$. Entonces tenemos que $F = E'$; es decir, $\mu(E, E')$ es compatible con $\langle E, E' \rangle$.

Para ver que es la más fina con esta propiedad, sea τ cualquier topología en E compatible con la dualidad $\langle E, E' \rangle$, entonces $(E, \tau)' = E'$. De esto, tenemos como consecuecia que la polar de toda vecindad de 0 en (E, τ) es $\sigma(E', E)$-compacto. Mostremos que esta afirmación es cierta:

Sea $V \in \mathcal{N}_o(E, \tau)$; tomemos V^o, que es balanceado, convexo y $\sigma(E', E)$-cerrado. De la definición de polar obtenemos que V^o es un conjunto equicontinuo; entonces, aplicando el Teorema de Alaoğlu-Bourbaki, V^o es relativamente

$\tau_{pc}(E', E)$-compacto, pero $\tau_{pc}(E', E) = \tau_s(E', E) = \sigma(E', E)$ en E'. Por lo tanto V^o es relativamente $\sigma(E', E)$-compacto y además tenemos que V^o es $\sigma(E', E)$-cerrado; así V^o es $\sigma(E', E)$-compacto. Entonces, $\tau \leq \mu(E, E')$. ∎

Proposición 78 *Sea $E = (E, \tau)$ un espacio localmente convexo.*

(*a*) *Si E es metrizable, entonces $\tau = \beta^*(E, E')$ (en particular $\tau = \mu(E, E')$). Si E es completo, entonces $\tau = \beta(E, E')$.*

(*b*) *Si (E, τ) es normado y τ' es la topología del espacio dual E', que es de Banach, entonces $\tau = \beta^*(E, E')$ y $\tau' = \beta(E', E)$. Si además E es completo, entonces $\tau = \beta(E, E')$.*

Demostración.

El inciso (*b*) se tiene de manera inmediata si demostramos (*a*). Esto ya que, como E es normado, tenemos que (E, τ) es métrico y localmente convexo, además (E', τ') es de Banach, por lo que $\tau = \beta^*(E, E')$ y $\tau' = \beta(E', E)$. Si E es completo $\tau = \beta(E, E')$.

Demostremos la afirmación (*a*). Supongamos que $\tau \neq \beta^*(E, E')$, entonces existe $B \subset E'$ $\beta(E', E)$-acotado pero no equicontinuo en (E, τ).

Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de vecindades decreciente de 0 en E, que existe por ser E metrizable. Como B no es equicontinuo en E, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $x_n \in U_n$ y $f_n \in B$ tales que $\frac{1}{n}|f_n(x_n)| > 1$; es decir, $B \not\subseteq nU_n^o$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, podemos elegir una suceción $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B tales que cumplen $|\langle f_n, x_n\rangle| > n$, $n \in \mathbb{N}$. Además, por nuestra elección de $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en (E, τ) y por lo tanto τ-acotada. Pero la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\beta(E', E)$-acotada, ya que B es $\beta(E', E)$-acotado, y sin embargo no es absorbido por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}^o$, que es una vecindad de cero en $(E', \beta(E', E))$; llegamos así a una contradicción. Por tal motivo, $\tau = \beta^*(E, E')$.

De donde, por el Teorema (2.4.2-70) tenemos que $\tau = \mu(E, E')$.

Supongamos ahora que E es completo. Sabemos que si B es un disco de Banach, B es acotado en E_u y por tanto es σ-acotado; de donde es claro que $\mathfrak{b}(E, E') \leq \beta(E, E')$.

De (2.4.2-70) tenemos que $\mathfrak{b}(E', E) \leq \beta(E', E)$ en E'. Como E es completo, si consideramos B^{oo}, donde B es acotado en E, tenemos que B^{oo} es un disco de Banach en E. Esto último trae como consecuencia que $B^{ooo} = B^o$ es una vecindad de cero en E' para la topología $\mathfrak{b}(E', E)$, incluso $\{B^o : B \text{ es acotado en } E\}$ son vecindades de cero para la topología $\mathfrak{b}(E', E)$, y además $\{B^o : B \text{ es acotado en } E\}$ es una base de vecindades del origen en E' con respecto a la topología $\beta(E', E)$, por tanto $\beta(E', E) = \mathfrak{b}(E', E)$ en E'. De nuevo por el Teorema (2.4.2-70), tenemos que $\beta^*(E', E) = \beta(E', E)$, y por el mismo Teorema (2.4-70) obtenemos que como $s(E', E) = \sigma(E', E)$ en E', y definen los mismos conjuntos acotados en E', lo cual implica $\beta(E, E') = \beta^*(E, E')$. ∎

Capítulo 3

Espacios Palmeados y Localmente Completos

Gran parte de la teoría de lo espacios métricos completos esta basada en importantes resultados estructurales, dos de los cuales son el Teorema de la Gráfica Cerrada y el Teorema del Mapeo Abierto; estos teoremas no sólo son importantes para la teoría desarrollada en dichos espacios, sino que también existen generalizaciones de estos Teoremas para espacios vectoriales topológicos, en particular para los espacios localmente convexos palmeados que trataremos en este capítulo.

Aquí daremos una demostración para las generalizaciones de los dos Teoremas arriba mencionados, para esto necesitaremos algunos resultados para espacios de Baire, lo que abarcará la primera sección de este capítulo; además de conceptos y herramientas sobre los espacios palmeados, que desarrollaremos en la segunda sección. En la tercera sección de este capítulo, daremos una demostración del Teorema de la Gráfica Cerrada, utilizando palmas, mientras que en la cuarta sección veremos el Teorema del Mapeo Abierto. En las siguientes tres secciones introduciremos algunos conceptos y resultados importantes que necesitaremos más adelante, entre ellos está el Teorema de Localización, algunos ejemplos de espacios Palmeados y propiedades de límites inductivos, por último tendremos una sección importante relacionada con los espacios localmente completos y algunos ejemplos de estos espacios.

3.1. Categoría de Baire.

A lo largo de esta sección y únicamente en esta, trabajaremos con espacios vectoriales topológicos con el fin de dar resultados generales, los cuales tendremos en forma particular para los espacios localmente convexos.

La siguiente definición, importante para la topología general, nos puede servir como una herramienta útil para ver la "medida" de un subconjunto A de un espacio E.

Notación : Denotaremos por $int(A)$ al interior de A, donde A es un subconjunto de un espacio topológico E.

Definición 79 *Sea E un e.v.t. y $A \subset E$.*

(1) *Decimos que A es raro, o denso en ninguna parte, si $int(\overline{A}) = \emptyset$.*

(2) *A es de la primera categoría, o , en E si $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ donde $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de E densos en ninguna parte.*

(3) *Decimos que A es de la segunda categoría si A no es de la primera categoría.*

(4) *Un espacio de Baire es un espacio topológico de Hausdorff que es de la segunda categoría, en sí mismo.*

Notemos que la definición (1) equivale a decir que $E \backslash A$ es denso en E.

Ejemplo 80 *En $\mathbb{R}$, con la topología euclidiana, todo conjunto numerable es de la primera categoría, en particular $\mathbb{Q}$ es de la primera categoría.*

Observación : La unión numerable de conjuntos de la primera categoría es de la primera categoría. Esto es fácil de ver, ya que la unión numerable de uniones numerables de conjuntos densos en ninguna parte es una familia numerable de conjuntos densos en ninguna parte.. Además, si A es un subconjunto denso en ninguna parte de un espacio vectorial topológico E, entonces $\overline{A}$ también es denso en ninguna parte pues

$$int\left(\overline{(\overline{A})}\right) = int(\overline{A}) = \emptyset.$$

Así, para fines prácticos, podemos considerar a los conjuntos densos en ninguna parte como cerrados. Por otro lado, si $A \subset E$ es de la segunda categoría en E, entonces E también es de la segunda categoría en sí mismo.

En lo que sigue, un espacio vectorial topológico de Baire, o simplemente un espacio de Baire, será un espacio vectorial topológico que también es un espacio de Baire.

El principal resultado de esta sección es el siguiente.

Teorema 81 *Sea (E, d) un espacio métrico completo y $A \subset E$ no vacío. Si A es abierto,entonces A es de la segunda categoría. En particular, todo espacio vectorial topológico metrizable completo es un espacio de Baire.*

Demostración.

Supongamos que existe $A \subset E$, no vacío y abierto tal que lo podemos cubrir por $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, una familia no vacía de subconjuntos de E, cerrados, no vacíos y densos en ninguna parte.

Sea $C_o := A$ y $C_n := E \diagdown A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como A_n es cerrado y denso en ninguna parte, C_n es un abierto en E, no vacío y denso, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dado $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, sean

$$\overline{B}(x,\varepsilon) := \{y \in E : d(x,y) \leq \varepsilon\} \text{ y } B(x,\varepsilon) := \{y \in E : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Sea $x_o \in C_o$ fijo. Como C_o es abierto, podemos elegir $\varepsilon_o > 0$ tal que $\overline{B}(x_o,\varepsilon_o)$ está incluido propiamente en C_o. Así, dado $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_{n-1} \in C_{n-1}$ y $\varepsilon_{n-1} > 0$ tales que $\overline{B}(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}) \subset C_{n-1}$. Ahora, la densidad de C_n nos garantiza que $C_n \cap B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}) \neq \emptyset$. Pero $C_n \cap B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1})$ es abierto, entonces podemos encontrar $x_n \in E$ y $0 < \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}$ tales que

$$\overline{B}(x_n,\varepsilon_n) \subset C_n \cap B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}).$$

Por construcción, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula. Más aún, para todo $m,n \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$d(x_{n+m},x_n) \leq \sum_{i=1}^{m} d(x_{n+i},x_{n+i-1}) \leq 2^{-n+1}\varepsilon_o,$$

por lo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una suceción de Cauchy en (E,d). Al ser (E,d) completo, existe $z \in E$ tal que $x_n \to z$ con respecto a la métrica d.

Observemos que, por la construcción de cada $\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$, tenemos que

$$\overline{B}(x_m,\varepsilon_m) \subset \overline{B}(x_n,\varepsilon_n), \text{ si } m \geq n,$$

y cada uno de estos conjuntos es cerrado. De esta manera tenemos que

$$z \in \overline{B}(x_n,\varepsilon_n) \subset C_n = E\setminus A_n,\ n \in \mathbb{N},$$

y por tanto $z \notin A$. Pero $z \in \overline{B}(x_o,\varepsilon_o) \subset C_o = A$, con lo que llegamos a una contradicción. Concluimos que todo subconjunto abierto no vacío de un espacio métrico completo es, en efecto, de la segunda categoría. En consecuencia, todo espacio vectorial topológico metrizable completo es un espacio de Baire. ∎

Lema 82 *Sea E un e.v.t. y L un subespacio propio de E. Entonces, $int(L) = \emptyset$.*

Demostración.

Si $int(L) \neq \emptyset$, existen $x \in L$ y $U \in \mathcal{N}_o(E)$ tales que $x + U \subset L$, se sigue que $-x - U \subset L$, por ser subespacio lineal, además $U \subset U - U \subset L + L = L$. Sabemos que toda vecindad del origen es absorbente, entonces L es absorbente en E, y L es un subespacio lineal; es decir, $L = E$. Por tanto, $int(L) = \emptyset$. ∎

Ahora, sea (E,τ) un espacio vectorial topológico de Baire con una base de Hamel numerable, $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$. Así, $E_k := \langle\{e_1, e_2, ..., e_k\}\rangle$, la expansión lineal de $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$, es un subespacio cerrado dimensionalmente finito de E, para todo $k \in \mathbb{N}$, pues sabemos que todo subespacio de dimensión finita de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Obtenemos que $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k$; por lo tanto, como E es un espacio de Baire, $int(E_k) \neq \emptyset$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Del lema anterior (3.1-81) deducimos que

$$E = E_k, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}.$$

De esta manera tenemos:

Proposición 83 *Sea E un espacio de Baire. Entonces E tiene dimensión finita ó dimensión no numerable.*

Para enunciar algunas aplicaciones, aquí incluimos dos resultados importantes para funciones bilineales. Demostremos el primero de estos resultados; para esto necesitamos algunas definiciones.

Definición 84 *Sean E,F, G e.v.t. y $B : E \times F \to G$ una función bilineal. La continuidad de B la tomaremos con respecto a la topología producto en $E \times F$. Si para tal función bilineal B su cumple que cada una de las funciones*

$$B(a,\cdot) : F \to G,\ a \in E,\ y\ B(\cdot,b) : E \to G,\ b \in F,$$

son continuas, decimos que B es continua en cada variable, o continua distinguible.

Proposición 85 *Sea E, F, y G e.v.t. Entonces, una función bilineal*

$$B : E \times F \to G$$

es continua si y sólo si esta es continua en $(0,0)$.

Demostración.

Que B sea continua en $E \times F$, claramente implica que B sea continua en $(0,0)$.

Inversamente, sean $a \in E$ y $b \in F$ fijos, y sea $W \in \mathcal{N}_o(G)$. Sea W_1 en $\mathcal{N}_o(G)$, balanceada, tal que $W_1 + W_1 + W_1 \subset W$. Si B es continua en $(0,0)$, entonces existen $U \in \mathcal{N}_o(E)$ y $V \in \mathcal{N}_o(F)$, tales que satisfacen $B(U \times V) \subset W_1$. Escojamos $0 < \delta \leq 1$ tal que $\delta a \in U$ y $\delta b \in V$. Para cada $x \in U$, tenemos $B(x,b) = B(\delta^{-1}x, \delta b) \in W_1$, y como W_1 es balanceada obtenemos $B(\delta x, b)$ es un elemento de W_1, para todo $x \in U$. Similarmente, $B(a,y) \in W_1$, $\forall y \in \delta V$. Entonces, dado $(z,w) \in ((a+\delta U) \times (b+\delta V))$, $z = a+\delta x$, $x \in U$, y $w = b+\delta y$, $y \in V$: llegamos a que $B(z,w) = B(a+\delta x, b+\delta y) = B(a,b)+B(a,\delta y)+B(\delta x,b)$, y por tanto $B(z,w) \in B(a,b) + W_1 + W_1 + W_1$. Esto implica que

$$B((a+\delta U) \times (b+\delta V)) \subset B(a,b) + W_1 + W_1 + W_1 \subset B(a,b) + W.$$

Con lo cual terminamos la demostración de esta proposición. ■

El que una función bilineal sea continua siempre implica que sea continua en cada variable, pero el inverso no necesariamente es cierto, entonces nos podemos preguntar bajo que condiciones se cumple que una función bilineal

$$B : E \times F \to G$$

continua en cada variable es continua.

Teorema 86 *Sean E, F y G e.v.t.; E y F metrizables, uno de los cuales es de Baire. Entonces, toda función bilineal continua en cada variable $B : E \times F \to G$ es continua.*

Demostración.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que E es un espacio de Baire y que $B : E \times F \to G$ es una función bilineal continua distinguible pero no continua. Como B no es continua, existen $W \in \mathcal{N}_o(G)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E, y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en F tales que $B(x_n, y_n) \notin W$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $W_o \in \mathcal{N}_o(G)$ cerrado y balanceado tal que $W_o + W_o \subset W$. Tomemos

$$U_o := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (B(\cdot, y_n))^{-1}(W_o),$$

este es balanceado y cerrado en E. Veamos que U_o es absorbente: sea $a \in E$ fijo y elijamos $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\{y_n : n \geq n_o\}$ esta contenido en la vecindad de cero $(B(a, \cdot))^{-1}(W_o)$ de F. Elijamos $\mu \geq 1$ tal que $B(a, y_n) \in \mu W_o$, $\forall n < n_o$. Entonces $B(a, y_n) \in \mu W_o$, $\forall n \in \mathbb{N}$, así que $a \in \mu U_o$. En consecuencia, U_o es absorbente.

Como U_o es balanceado y absorbente, tenemos $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} kU_o$. Pero además, U_o es cerrado y E es un espacio de Baire, entonces U_o tiene interior no vacío. Con esto $U = U_o + U_o$ es una vecindad del origen en E. Así, para cada $x \in U$ tenemos $B(x, y_n) \in W_o + W_o \subset W$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ahora, como $x_n \in U$, para n suficientemente grande, obtenemos $B(x_n, y_n) \in W$, lo cual es una contradicción. ■

3.2. Espacios Palmeados.

De ahora en adelante nuevamente trabajaremos con espacios localmente convexos, asumiendo que los resultados obtenidos en la sección previa también los tenemos para estos espacios, por ser una clase particular de espacios vectoriales topológicos.

Definición 87 *Sea E un e.l.c. y $\mathcal{W} : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \to 2^E$ y $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, definimos*

$$W_{\varphi,k} := \mathcal{W}(\varphi(1), ..., \varphi(k)), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Decimos que $\mathcal{W}$ es una palma en E si satisface:

(W 1) *El rango de $\mathcal{W}$ consiste solamente de subconjuntos absolutamente convexos de E.*

(W 2) $\cup\{W_{\varphi,1} : \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ *es absorbente en E.*

(W 3) *Dado $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, todo punto en $W_{\varphi,k}$ es absorbido por el conjunto* $\cup\{W_{\psi,k+1} : \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \psi(i) = \varphi(i), \forall 1 \leq i \leq k\}$.

(W 4) $W_{\varphi,k+1} + W_{\varphi,k+1} \subset W_{\varphi,k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

En lo que sigue, escribiremos W_k en lugar de $W_{\varphi,k}$, siempre y cuando estemos considerando una misma $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. De modo que podemos dar las siguientes definiciones.

Definición 88 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. y $\mathcal{W}$ una palma en E.*

1. *Una cadena de $\mathcal{W}$ es una colección de elementos $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$, tales que $W_{k+1} \subset W_k$, para toda $k \in \mathbb{N}$; de donde, $(W_{\varphi,k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una cadena, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

2. *Decimos que $\mathcal{W}$ es compatible (con la topología τ de E) si, para toda vecindad U de 0 en E y toda cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$, existe $n = n(\varphi, U) \in \mathbb{N}$ tal que $W_{\varphi,n} \subset U$.*

Cabe hacer notar que, podemos asumir que para cada cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$, y para cada $k \in \mathbb{N}$

$$W_{k+1} \subset \frac{1}{2}W_k \qquad ...[1]$$

Esto es gracias a que W_k es convexo y que $W_{k+1} + W_{k+1} \subset W_k$, así que $W_{k+1} + W_{k+1} = 2W_{k+1} \subset W_k$. Notemos además que la definición de palma compatible es equivalente a pedir que: para cada vecindad U de 0 en E y para cada cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$, existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $W_k \subset U$ siempre que $k \geq k_o$.

En el siguiente resultado daremos equivalencias de la definición de palma compatible.

Proposición 89 *Sea (E, τ) un e.l.c. y $\mathcal{W}$ una palma en E. Entonces, son equivalentes:*

(1) *$\mathcal{W}$ es compatible.*

(2) *Dada $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E tal que $y_n \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\left(\sum_{n=1}^{k} y_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E.*

(3) *Sean φ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en (2). Entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E.*

Demostración.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Sea $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ fijo y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dada U, una vecindad de 0 en E, podemos encontrar $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $W_{\varphi,k_o} \subset U$, por ser $\mathcal{W}$ una palma compatible en E. Entonces, $W_{\varphi,k} \subset U$, $\forall k \geq k_o$. Así, para todo $k \geq k_o$ y todo $p \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k+p} y_i - \sum_{j=1}^{k} y_j = \sum_{n=1}^{p} y_{n+k} \in W_{\varphi,k+1} + ... + W_{\varphi,k+p} \subset W_{\varphi,k} \text{ y } W_{\varphi,k} \subset U,$$

pues

$$W_{\varphi,k+i} + W_{\varphi,k+i+1} \subset W_{\varphi,k+i} + W_{\varphi,k+i+1} + W_{\varphi,k+i+1},$$

y de (3.2-85-($W4$)) se tiene que

$$W_{\varphi,k+i} + W_{\varphi,k+i+1} \subset W_{\varphi,k+i} + W_{\varphi,k+i} \subset W_{\varphi,k+i-1}, \forall 1 \leq i \leq p-1.$$

De donde $\left(\sum_{n=1}^{k} y_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Es fácil ver esta implicación, ya que $y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{j=1}^{n-1} y_j$ y $\left(\sum_{n=1}^{k} y_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es una suceción de Cauchy. Así, dada $U \in \mathcal{N}_o(E)$, $\exists k_o \in \mathbb{N}$ tal que $W_{\varphi,k} \subset U$, siempre que $k \geq k_o$. De donde, para todo $k \geq k_o$ y $p \in \mathbb{N}$ se cumple que $\sum_{n=1}^{p} y_{n+k} \in W_{\varphi,k} \subset U$; en particular para $p = 1$, $y_{k+1} \in W_{\varphi,k} \subset U$, $\forall k \geq k_o$. Por lo tanto, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Supongamos que existe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $U \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que

$$W_{\varphi,n} \not\subseteq U, \ \forall n \in \mathbb{N};$$

es decir, $\mathcal{W}$ no es compatible con la topología τ en E. Si elegimos $y_n \in W_{\varphi,n} \setminus U$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede ser una sucesión nula en E, pues $y_n \notin U$, $\forall n \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción a nuestras hipótesis. ■

De esta última proposición, obtenemos la siguiente definición.

Definición 90 *Sea E un e.l.c. y $\mathcal{W}$ una palma en E. Decimos que $\mathcal{W}$ es una palma completante si para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y toda elección de $y_n \in W_{\varphi,n}$, $n \in \mathbb{N}$, la serie $\left(\sum_{n=1}^{k} y_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en E.*

Una palma completante en un espacio localmente convexo E siempre es compatible, por la proposición (3.2-90). La inversa es cierta si E es secuencialmente completo, pues si $\mathcal{W}$ es una palma compatible tenemos que para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y toda sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in W_{\varphi,n}$, $n \in \mathbb{N}$, la suceción $\left(\sum_{n=1}^{k} y_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por lo tanto converge siempre que E sea secuencialmente completo, así:

Proposición 91 *Sea E un e.l.c. secuencialmente completo, y $\mathcal{W}$ una palma en E. Entonces, $\mathcal{W}$ es completante si y sólo si es compatible en E.*

Definición 92 *Sea E un e.l.c. Decimos que E es un espacio palmeado si tiene una palma completante.*

Un ejemplo fácil, de espacio palmeado, lo obtenemos considerando un espacio localmente convexo metrizable, como sigue:

Proposición 93 *Sea E un e.l.c. completo y metrizable. Entonces E es un e.l.c. palmeado.*

Demostración.

Como E es metrizable podemos elegir una base de vecindades del origen numerable. Sea $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades de cero en E, con U_k balanceada y cerrada, $\forall k \in \mathbb{N}$, tales que $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, la función

$$\mathcal{W} : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \to 2^E$$

dada por $(n_1, ..., n_k) \longmapsto U_k$, es trivialmente una palma compatible en E.

Por la proposición anterior (3.2-91) y de (3.2-89), $\mathcal{W}$ es completante si y sólo si E es secuencialmente completo; es decir, $\mathcal{W}$ es completante si y sólo si E es completo. ■

Ahora, nos podemos preguntar si el inverso es cierto; es decir, si todo palmeado es metrizable y/o completo, esta afirmación no necesariamente es cierta pues existen espacios que son palmeados pero que no necesariamente son metrizables o completos. En la última sección de este capítulo damos algunos ejemplos, en particular haremos notar que los espacios ℓ_p son palmeados pero no son completos ni metrizables.

3.2.1. Propiedades de estabilidad para Espacios Localmete Convexos Palmeados.

En relación a la propocisión (3.2-93), el siguiente Teorema muestra que muchos de los espacios localmente convexos relevantes están en la clase de los espacios palmeados. Para esto, decimos que un espacio localmente convexo G es un cociente del espacio localmente convexo E si existe $M \subset E$ un subespacio cerrado tal que G, con su topología localmente convexa, es homeomorfo a E/M, con respecto a su topología cociente.

Teorema 94 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. palmeado.*

(a) Todo subespacio secuencialmente ccompleto L de E es un e.l.c. palmeado.

(b) Si F es un e.l.c. tal que existe una función lineal, continua y suprayectiva $T : E \to F$, entonces F es un e.l.c. palmeado.

(c) Si G es un e.l.c. cociente de E, entonces G es un e.l.c. palmeado.

(d) E es un e.l.c. palmeado con respecto a toda topología lineal Hausdorff más débil que τ.

Demostración.

Sea $\mathcal{W}$ una palma completante en E.

(a) Sea L un subespacio secuencialmente completo de E. Entonces, obtenemos una palma completante en L de la siguiente forma:

$$\mathcal{W}' : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \to 2^L$$

definida por $(n_1, ..., n_k) \longmapsto L \cap W(n_1, ..., n_k)$. En efecto, esta palma, $\mathcal{W}'$, es completante en L:

(W 1) Como cada $\mathcal{W}(n_1, ..., n_k)$ es absolutamente convexa, para cada $k \in \mathbb{N}$, también lo es $\mathcal{W}'(n_1, ..., n_k)$, de las propiedades de espacio vectorial para L.

(W 2) $\cup\{W'_{\varphi,1} : \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es absorbente en L, ya que $\cup\{W_{\varphi,1} : \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es absorbente en E.

(W 3) Claramente, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y toda $k \in \mathbb{N}$, todo punto en $W'_{\varphi,k}$ es absorbido por el conjunto

$$\cup\{W'_{\psi,k+1} : \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \psi(i) = \varphi(i), \forall 1 \leq i \leq k\}$$

puesto que todo punto de $W_{\varphi,k}$ es absorbido por

$$\cup\{W_{\psi,k+1} : \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \psi(i) = \varphi(i), \forall 1 \leq i \leq k\}.$$

(W 4) También, $W'_{\psi,k+1}+W'_{\psi,k+1} \subset W'_{\psi,k}$, $\forall\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, se tiene trivialmente de que $W_{\psi,k+1}+W_{\psi,k+1} \subset W_{\psi,k}$, $\forall\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, en E.

En este caso, que $\mathcal{W}'$ es completante se tiene de la proposición (3.2-90).

(b) Sea $T : E \to F$, continua, lineal y suprayectiva, con F un espacio localmente convexo. De manera similar que en L, definimos en F una palma completante dada por:

$$\mathcal{W}'' : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \to 2^F$$

vía la regla $(n_1, ..., n_k) \longmapsto T(W(n_1, ..., n_k))$. Así, $\mathcal{W}''$ es completante en F:

(W 1) Como cada $\mathcal{W}(n_1, ..., n_k)$ es absolutamente convexa, para cada $k \in \mathbb{N}$, también lo es $\mathcal{W}''(n_1, ..., n_k)$, por ser T lineal.

(W 2) $\cup\{W''_{\varphi,1} : \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es absorbente en F, pues $\cup\{W_{\varphi,1} : \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es absorbente en E, y T es lineal y suprayectiva.

(W 3) Claramente, para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y toda $k \in \mathbb{N}$, todo punto en $W''_{\varphi,k}$ es absorbido por el conjunto

$$\cup\{W''_{\psi,k+1} : \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \psi(i) = \varphi(i), \forall 1 \leq i \leq k\}$$

del hecho que todo punto de $W_{\varphi,k}$ es absorbido por

$$\cup\{W_{\psi,k+1} : \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \psi(i) = \varphi(i), \forall 1 \leq i \leq k\}$$

y de la linealidad de T.

(W 4) Finalmente, $W''_{\psi,k+1}+W''_{\psi,k+1} \subset W''_{\psi,k}$, $\forall\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, se tiene trivialmente de que $W_{\psi,k+1}+W_{\psi,k+1} \subset W_{\psi,k}$, $\forall\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, en E y además que T es lineal.

Ahora, $\mathcal{W}''$ es completante en F, pues si $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en F tal que $y'_n \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E, tal que $y'_n = T(y_n)$ y $y_n \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ converge en E; es decir, existe $z \in E$ tal que $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, por tanto, ya que T es secuencialmente continua, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y'_n$ converge en F, inclusive $T(z) = T\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y'_n$.

Las afirmaciones (c) y (d) son inmediatas de (a) y (b). La razón de esto es que, por un lado, la función cociente $\pi : E \to G$ es continua (por lo que también es secuencialmente continua), lineal, y suprayectiva; y por otro, si τ' es una topología más débil que τ, la función identidad $Id : (E, \tau) \to (E, \tau')$ también es continua (y así, es secuencialmente continua), lineal y suprayectiva. ■

3.3. El Teorema de la Gráfica Cerrada.

Dados dos conjuntos E, F, y una función $f : E \to F$, la gráfica de f está definida como el subconjunto $G_f := \{(x, f(x)) : x \in E\}$ de $E \times F$. Si E y F son espacios topológicos, con F Hausdorff, entonces G_f es cerrado en $E \times F$, con la topología producto, siempre que f sea continua (ver Apéndice). El Teorema de la Gráfica Cerrada nos asegura que, bajo condiciones convenientes para E, F, y f, la inversa de esta afirmación también es cierta: Si G_f es cerrada, entonces f es continua.

Existen diferentes formas para demostrar el Teorema de la Gráfica Cerrada para espacios vectoriales topológicos y funciones lineales. Aquí, a una función lineal entre espacios vectoriales topológicos, que tiene gráfica (secuencialmente) cerrada, la llamaremos función (secuencialmente) cerrada.

Para demostrar el Teorema de la Gráfica Cerrada, veamos la siguiente definición.

Definición 95 *Sea E un e.v.t., $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios vectoriales topológicos, y $\mathcal{F} = \{S_n : E_n \to E : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de funciones lineales. Definimos a la topología lineal inductiva definida por esta familia y por las funciones lineales $S_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, como la topología más fina que hace continuas a todas las funciones $S_n : E_n \to E$, $n \in \mathbb{N}$.*

De la definición anterior, tenemos que $U \in \tau$ si y sólo si, por definición, $S_n^{-1}(U) \in \tau_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es decir, S_n es abierta, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 96 *Sea E un e.v.t. con la topología lineal inductiva τ, dada por $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios vectoriales topológicos y las funciones lineales $S_n : E_n \to E$, $n \in \mathbb{N}$. Sea F un e.l.c. y $T : E \to F$ una función lineal. Entonces, T es τ-continua si y sólo si $T \circ S_n : E_n \to F$ es continua, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

Primero, supongamos que T es continua. Así, como $S_n : E_n \to E$ son continuas, para todo $n \in \mathbb{N}$; claramente se tiene que $T \circ S_n : E_n \to F$ es continua, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A la inversa, si $T \circ S_n : E_n \to F$ es continua, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(T \circ S_n)^{-1}(V) = S_n^{-1}(T^{-1}(V))$$

es abierto, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde V es abierto en F. Observemos que $T^{-1}(V) \subset E$, y recordemos que un subconjunto de E es abierto si y sólo si su imagen inversa, con respecto a cada S_n, $n \in \mathbb{N}$, es abierta en E_n. Lo cual se cumple por hipótesis, así $T^{-1}(V)$ es abierto en E, y en efecto $T : E \to F$ es continuo. ■

Teorema 97 (Gráfica Cerrada) *Sea E un e.l.c. Supongamos que la topología en E es la topología lineal inductiva definida por una familia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de e.l.c. de Baire y funciones lineales $S_n : E_n \to E$, $n \in \mathbb{N}$. Si F es un espacio localmente convexo palmeado, entonces toda función lineal cerrada $T : E \to F$ es continua.*

En particular, de la proposición (3.3-96), T es continua si y sólo si $T \circ S_n : E_n \to F$ es continua, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto podemos considerar a E como un espacio de Baire, y el Teorema anterior es una clara consecuencia del próximo resultado. Cabe señalar que un espacio E con una topología lineal inductiva no necesariamente es de Baire, más adelante se da un ejemplo de un espacio que cumple con esto.

Teorema 98 *Sea E un e.l.c. Supongamos que G es un subespacio de la segunda categoría de E y que F es un espacio localmente convexo palmeado. Sea $T \in L(G, F)$ cerrado en $E \times F$, entonces T es continuo.*

Demostración.

Sea $\mathcal{W}$ una palma completante en F. Denotemos por W_n a $W_{\varphi,n}$, y por $W_{n,k}$ a $W(n_1, ..., n_k) = W_{\psi,k}$ y es tal que $\psi(i) = \varphi(i)$ si $1 \le i \le n$.

(a) Como $\bigcup_{\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} W_{\varphi,1}$ es absorbente en F, y E es un espacio de Baire, existe $\varphi \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-1}(W_{\varphi,1})$ es de la segunda categoría en E. Por tal motivo, podemos elegir $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$, una cadena en la palma $\mathcal{W}$, tal que $T^{-1}(W_k)$ es de la segunda categoría en E, $\forall k \in \mathbb{N}$. La construcción de tal cadena es de la siguiente manera, supongamos que W_{k-1} es tal que $T^{-1}(W_{k-1})$ es de la segunda categoría en E,como $W_{k-1} \subset \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} mW_{k-1,n}$, podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $W_{k-1,k} := W_k$ satisfaga que $T^{-1}(W_k)$ es de la segunda categoría en E. Así, obtenemos la cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ buscada.

(b) Tomemos $W_o = F$, y sea $A_k := T^{-1}(W_k)$; escojamos $x_k \in A_k$ y U_k en $\mathcal{N}_o(E)$, balanceada, tal que

$$x_k + U_k \subset \overline{A_k},\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad .....[1]$$

lo cual es posible por ser A_k de la segunda categoría en E. Afirmamos que $G \cap A_{k+2} \subset T^{-1}(\overline{W_k})$, $\forall k \in \mathbb{N}$:

Sea $x \in G \cap \overline{A_{k+2}}$, entonces existe $z_{k+2} \in (x + U_{k+3}) \cap A_{k+2}$; es decir, $z_{k+2} \in A_{k+2}$ y $x - z_{k+2} \in U_{k+3}$, ya que U_{k+3} es balanceada.

Como $x_{k+3}+U_{k+3} \subset \overline{A_{k+3}}$, de [1], tenemos que $x_{k+3}+x-z_{k+2} =: x' \in x_{k+3}+U_{k+3} \subset \overline{A_{k+3}}$. Ahora, $x' \in \overline{A_{k+3}}$, por tal motivo existe z_{k+3} en $(x' + U_{k+4}) \cap A_{k+3}$, y como $x_{k+4} + U_{k+4} \subset \overline{A_{k+4}}$ obtenemos que

$$x' - z_{k+3} + x_{k+4} = x - (z_{k+2} + z_{k+3}) + (x_{k+3} + x_{k+4}) \in \overline{A_{k+4}};$$

iterando, tenemos que

$$\begin{aligned} x - \sum_{i=2}^{N} z_{k+i} + \sum_{i=3}^{N} x_{k+i} &\in U_{k+N+1}, \text{ y} && .....[2] \\ x - \sum_{i=2}^{N}(z_{k+i} - x_{k+i+1}) &\in \overline{A_{k+N+1}}, \forall N \geq 3. && .....[3] \end{aligned}$$

Como $\mathcal{W}$ es una palma completante en F, los límites $\sum_{i=2}^{\infty} Tx_{k+i+1}$ y $\sum_{i=2}^{\infty} Tz_{k+i}$ existen en F, y son elementos de $\overline{W_{k+1}}$. Así, $y := \sum_{i=2}^{\infty} T(z_{k+i} - x_{k+i+1})$ y $\sum_{i=2}^{\infty} T(z_{k+i} - x_{k+i+1}) = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{i=2}^{N} T(z_{k+i}) - \sum_{i=2}^{N} T(x_{k+i+1})\right] \in \overline{W_{k+1}} + \overline{W_{k+1}}$, pero $\overline{W_{k+1}} + \overline{W_{k+1}} \subset \overline{W_k}$, por tanto $y \in \overline{W_k}$.

Consideremos ahora, $U \in \mathcal{N}_o(E)$ y $V \in \mathcal{N}_o(F)$. Por [3] existe a_{k+N+1} en A_{k+N+1} tal que

$$x - \sum_{i=2}^{N}(z_{k+i} - x_{k+i+1}) - a_{k+N+1} \in U, \forall N \geq 3. \qquad .....[4]$$

Como $\mathcal{W}$ es compatible, $(Ta_{k+N+1})_{N\geq 3}$ es convergente a cero en F, ya que $Ta_{k+N+1} \in W_{k+N+1}$, $\forall N \geq 3$. Esto implica que

$$y - T\left(\sum_{i=2}^{N}(z_{k+i} - x_{k+i+1}) + a_{k+N+1}\right) = y - \sum_{i=2}^{N} T(z_{k+i}-x_{k+i+1}) - Ta_{k+N+1} \in V,$$

si $N \geq P$ fija y suficientemente grande. .....[5]

De [4] y [5], si G_T es la gráfica de T, tenemos que $[(x,y) + (U \times V)] \neq \emptyset$. Dado que a U y a V las tomamos de manera arbitraria, y G_T es cerrada, tenemos que $(x,y) \in G_T$; es decir, $Tx = y \in \overline{W_k}$.

(c) Veamos ahora que T es continuo. Sea $V \in \mathcal{N}_o(F)$ cerrada, como $\mathcal{W}$ es compatible, existe $(W_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ cadena tal que $\overline{W_k} \subset V$, si $k \geq k_o$. Por la segunda parte de la prueba, tenemos que :

$$x_{k+3} + (G \cap U_{k+3}) \subset G \cap \overline{A_{k+3}} \subset T^{-1}(\overline{W_{k+1}}).$$

Pero $x_{k+3} \in A_{k+3}$, esto implica que $T(G\cap U_{k+3}) \subset W_{k+3}+\overline{W_{k+1}} \subset \overline{W_k} \subset V$. Por lo tanto T es continuo. ■

Si E es un espacio de Baire metrizable, entonces en la demostración anterior, podemos elegir $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ como una base de vecindades de cero en E, decreciente.

Entonces, de [2] tenemos que $x = \sum_{i\geq 2} z_{k+i} - x_{k+i+1}$. Si $y := \sum_{i\geq 2} T(z_{k+i} - x_{k+i+1})$, concluimos que $Tx = y$ siempre y cuando G_T sea secuencialmente cerrada. Así, procediendo de la misma forma que en (3.3-98), tenemos.

Teorema 99 *Sea E un espacio vectorial y supongamos que E tiene la topología lineal inductiva definida por una familia $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ de espacios de Baire metrizables, y las funciones lineales $S_n : E_n \to E$, $n \in \mathbb{N}$. Si F es una espacio palmeado, entonces toda fución lineal secuencialmete cerrada $T : E \to F$ es continua.*

Usando el Teorema anterior, el Teorema (3.1-81) y la proposición (3.2-93) obtenemos el Teorema de la Gráfica Cerrada Clásico (para espacios de Fréchet).

Corolario 100 (Teorema de la Gráfica Cerrada de Banach) *Sean E y F espacios de Fréchet. Entonces, toda función lineal cerrada $T : E \to F$ es continua.*

Teorema 101 *Sea E un espacio de Baire. Entonces, E es palmeado si y sólo si es metrizable y completo.*

Demostración.

Por el Teorema (3.1-81) y la Proposición (3.2-93) sólo tenemos que demostrar que un espacio de Baire, el cual admite una palma completante $\mathcal{W}$, es metrizable y completo.

Si hacemos algo análogo a la demostración del Teorema (3.3-98), tenemos:

Dada $I_E : E \to E$ la función identidad, como $\mathcal{W}$ es una palma completante en E, existe una cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{W}$ tal que $W_k = I_E^{-1}(W_k)$ es de la segunda categoría en E, $\forall k \in \mathbb{N}$; la razón de esto es: Como $\bigcup_{\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} W_{\varphi,1}$ es absorbente en E, y E es un espacio de Baire, existe $\varphi \in \mathbb{N}$ tal que $I_E^{-1}(W_{\varphi,1}) = W_{\varphi,1}$ es de la segunda categoría en E. Con esto podemos definir $W_1 := W_{\varphi,1}$ y cumple que $I_E^{-1}(W_1)$ es de la segunda categoría en E. Ahora tomemos $W_2 := W_{\Psi,2}$ donde $\Psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y es tal que $I_E^{-1}(W_2)$ es de la segunda categoría en E, pues W_1 es absorbido por $\{W_{\psi,2} : \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $\psi(1) = \varphi(1)\}$. Supongamos que tenemos construida la colección $(W_n)_{n=1}^{k}$ en la palma $\mathcal{W}$ de E, tal que $I_E^{-1}(W_{k-1}) = W_{k-1}$ es de la segunda categoría en E. Como $W_k \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N},\psi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} mW_{\psi,k+1}$, podemos encontrar $\Psi' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $W_{\Psi',k+1} := W_{k+1}$ satisfaga $I_E^{-1}(W_{k+1}) = W_{k+1}$, es de la segunda categoría en E. Notemos que por construcción tenemos que $W_{k+1} + W_{k1} \subset W_k$. Así, hemos construido una cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ tal que $I_E^{-1}(W_k)$ es de la segunda categoría en E, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Tomemos $W_o = E$, y escojamos $x_k \in W_k$ y U_k en $\mathcal{N}_o(E)$, balanceada, tal que

$$x_k + U_k \subset \overline{W_k}, \forall k \in \mathbb{N}, \qquad .....[1]$$

lo cual es posible por ser W_k de la segunda categoría en E. Por la Proposición (3.2-89), $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E. Si U es una vecindad del origen en E, y $V \in \mathcal{N}_o(E)$ es tal que $V - V \subset U$; entonces $x_k \in V$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{W}$ es compatible, además podemos suponer que $\overline{W_k} \subset V$. Así, $U_k \subset \overline{W_k} - x_k \subset V - V \subset U$. Con esto, mostramos que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forma una base de vecindades de 0 en E. Como $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de vecindades de cero en E, tenemos que en efecto E es metrizable.

Veamos que E es completo. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Sea $m_1 < m_2 < m_3 < ...$ en $\mathbb{N}$ tales que $z_m - z_n \in U_{k+1}$, $\forall m, n \geq m_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, lo cual pasa por ser $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y $U_{k+1} \in \mathcal{N}_o(E)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Entonces, por [1] y ya que $W_{k+1} + W_{k+1} \subset W_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$z_{m_{k+1}} - z_{m_k} \in \overline{W_{k+1}} - x_{k+1} \subset \overline{W_k}, \forall k \in \mathbb{N} \qquad ......[2]$$

Sea U una vecindad del origen en E. Elijamos $V_n \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que

$$V_1 + V_1 \subset U \text{ y } V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que $V_{n+1} \subset V_n$ y $V_{n+1} + V_{n+1}$, $V_{n+2} + V_{n+1} \subset V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De aquí que para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
V_{n+3} + V_{n+3} + V_{n+2} + V_{n+1} &\subset V_{n+2} + V_{n+2} + V_{n+1} \subset V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \\
V_{n+4} + V_{n+3} + V_{n+2} + V_{n+1} &\subset V_{n+3} + V_{n+3} + V_{n+2} + V_{n+1}, \\
&\vdots \\
\sum_{k=1}^{m} V_{n+k} &\subset V_n, \forall m \in \mathbb{N}. \qquad .....[3]
\end{aligned}$$

Por [2] y como $\mathcal{W}$ es compatible, para la cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada arriba, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $y_k \in W_k$ tal que

$$y_k - (z_{m_{k+1}} - z_{m_k}) \in V_k. \qquad .....[4]$$

Ahora, como $\mathcal{W}$ es una palma completante en E, $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$ existe en E. De donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $r_n \geq n$ en $\mathbb{N}$ tal que $y - \sum_{k=1}^{r} y_k \in V_n$, si $r \geq r_n$. Por lo que, para esta r,

$$y - \sum_{k=1}^{r} (z_{m_{k+1}} - z_{m_k}) = y - \sum_{k=1}^{r} y_k + \sum_{k=1}^{r} (y_k - (z_{m_{k+1}} - z_{m_k})) \in V_n + \sum_{k=1}^{r} V_k,$$

por [4]; además de [3] tenemos que

$$V_n + \sum_{k=1}^{r} V_k \subset V_1 + ... + V_{n-1} + V_n + V_n + V_n \subset V_1 + V_1 \subset U.$$

En consecuencia, $\sum_{k=1}^{\infty} z_{m_{k+1}} - z_{m_k}$ existe en E y es igual a y. Pero entonces, la sucesión $\left(\sum_{k=1}^{n} (z_{m_{k+1}} - z_{m_k}) = z_{m_{k+1}} - z_{m_1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en E a y; es decir, la sucesión $(z_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $y+z_{m_1}$; así, la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a $y+z_{m_1}$ en E:

Sea $V\in\mathcal{N}_o(E)$, balanceda, tal que $V+V\subset U$. Entonces, dado que $(z_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $y+z_{m_1}$, existe $N_o\in\mathbb{N}$ tal que $y+z_{m_1}-z_{m_k}\in V$, siempre que $k\geq N_o$; por otro lado, existe $N_1\in\mathbb{N}$, $N_1\geq m_{N_o}$, tal que $z_m-z_n\in V$, si $n,m\geq N_1$. Sea $N=\text{máx}\{N_o,N_1\}$, entonces $y+z_{m_1}-z_n=y+z_{m_1}-z_{m_k}+z_{m_k}-z_n\in V+V\subset U$, con $k\geq N$, siempre que $n\geq N$, de aquí concluimos que en efecto $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en E. Finalmente, E es completo como deseabamos. ■

Con respecto al teorema anterior, nos podemos preguntar si existen espacios que son palmeados pero que no son de Baire, en realidad si existen este tipo de espacios, para construir un espacio que cumpla con esto necesitaremos algunos conceptos y herramientas que veremos en la sección 3.6, por lo que tal ejemplo lo incluimos en la última sección de este capítulo.

3.4. Algunas Consecuencias.

Para demostrar el Teorema de la Mapeo Abierto, primero veamos el siguiente Teorema General:

Teorema 102 *Sean E y F e.l.c., E palmeado, y $T\in L(E,F)$ cerrado. Si $R(T)$ es de la segunda categoría en F, entonces T es abierta.*

Demostración.

Sea $G_T\subset E\times F$, la gráfica de T. Primero veamos que $N(T)$ es cerrado. Supongamos que $N(T)$ no es cerrado, así existe $x\in\overline{N(T)}\setminus N(T)$; de donde, existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en $N(T)$ tal que converge a x en E, pero $T(x)\neq 0$. Así, $(x_\alpha,T(x_\alpha))=(x_\alpha,0)\to(x,0)$ en G_T, y G_T es cerrada, entonces $T(x)=0$, con lo que llegamos a una contradicción. Por tanto, $N(T)$ es cerrado.

Si tomamos el cociente $E/N(T)$, este es un espacio de Hausdorff, con respecto a la topología cociente, y de (3.2.1-94)-(c) obtenemos que $E/N(T)$ es un espacio palmeado.

Además, la función

$$\widehat{T}:E/N(T)\to R(T)$$

vía la regla $\widehat{T}(x+N(T))=Tx$, esta bien definida, pues por la linealidad de T tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{T}(x+N(T)) &= \widehat{T}(z+N(T))\Longleftrightarrow Tx=Tz\Longleftrightarrow\\ T(x-z) &= 0\Longleftrightarrow x-z\in N(T)\Longleftrightarrow x+N(T)=z+N(T).\end{aligned}$$

$G_{\widehat{T}}$ es cerrada:

Si $G_{\widehat{T}}=\{(x+N(T),Tx):x\in E\}\subset E/N(T)\times R(T)$, donde $G_{\widehat{T}}$ es la gráfica de $\widehat{T}$, queremos ver que para cada red $(x_\alpha+N(T),Tx_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\subset G_{\widehat{T}}$ tal que $x_\alpha+N(T)\to x+N(T)$, en $E/N(T)$, y $\widehat{T}(x_\alpha+N(T))=Tx_\alpha\to y$; en $R(T)$, tenemos que $\widehat{T}(x+N(T))=Tx=y$.

Como $x_\alpha + N(T) \to x + N(T)$ en $E/N(T)$, asumamos que existe una red $(y_\beta)_{\beta\in\Gamma} \subset E$ formada por representantes de $x_\alpha + N(T)$, para cada $\alpha \in \Lambda$, tal que $y_\beta \to x$ en E(esto lo demostraremos más adelante), por otro lado, $Ty_\beta \to y$ en $R(T)$, de aquí que $(y_\beta, Ty_\beta) \to (x,y)$ en $E \times R(T)$; pero como G_T es cerrada y $((y_\beta, Ty_\beta))_{\beta\in\Gamma}$ es una red en G_T obtenemos que $(x,y) \in G_T$; es decir, $Tx = y$. Por tanto $\widehat{T}(x + N(T)) = y$, así $G_{\widehat{T}}$ es cerrada en $E/N(T) \times R(T)$.

Como $T : E \to R(T)$ es suprayectiva, también lo es $\widehat{T} : E/N(T) \to R(T)$. Para ver que $\widehat{T}$ es inyectiva, sea $x+N(T) \in E/N(T)$ tal que $\widehat{T}(x+N(T)) = 0$, pero esto último pasa si y sólo si $Tx = 0$, lo cual se da si y solamente si $x \in N(T)$, por tanto $x + N(T) = N(T)$ en $E/N(T)$. Por lo que efectivamente, $\widehat{T}$ es inyectiva. Esto quiere decir que existe $\widehat{T}^{-1} : R(T) \to E/N(T)$, la inversa de $\widehat{T}$. Como $\widehat{T}$ es cerrada, también $\widehat{T}^{-1}$ lo es, pues $G_{\widehat{T}^{-1}} = \{(Tx, x+N(T)) : x \in E\}$ es cerrado en $R(T) \times E/N(T)$. Observemos que $\widehat{T}^{-1}$ es continua, ya que $R(T)$ es un subespacio de F, $R(T)$ es de Baire y $E/N(T)$ es palmeado, y si aplicamos el Teorema de la Gráfica Cerrada, en efecto $\widehat{T}^{-1}$ es continua. Lo cual implica que si V es abierto en E, como $V + N(T)$ es abierto en $E/N(T)$, tenemos que $T(V) = \widehat{T}(V + N(T))$ es abierto en $R(T)$, y por ser $R(T)$ de la segunda categoría en F tenemos que T es suprayectiva, es decir $R(T) = F$.

$(*)$ Por último demostremos que en efecto existe una red $(y_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ en E, formada por representantes de la red $(x_\alpha + N(T))_{\alpha\in\Lambda}$, tales que $(y_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ converge a x en E. Esta afirmación la tenemos gracias a que V es abierto en $E/N(T)$ si y sólo si $\pi^{-1}(V)$ es abierto en E, donde π es la función cociente $\pi : E \to E/N(T)$. Además, como la topología cociente es la más fina en $E/N(T)$ que hace continua a la función $\pi : E \to E/N(T)$, $x \longmapsto x + N(T)$, tenemos que π es abierta.

Entonces, dada $U \in \mathcal{N}_x(E)$, obtenemos que $V := U + N(T)$ es un elemento de $\mathcal{N}_{x+N(T)}(E/N(T))$, y existe $\alpha_o \in \Lambda$ tal que $x_\alpha + N(T) \in V$, $\forall\alpha \geq \alpha_o$. Consideremos $x'_{\alpha_u} \in \pi^{-1}(V) \cap U$ tal que $x'_{\alpha_u} + N(T) = x_\alpha + N(T)$, $\alpha \geq \alpha_o$, lo cual podemos hacer pues $x_\alpha + N(T) \in V = U + N(T)$.

Ahora, tomemos la red $(y_\beta)_{\beta\in\Gamma}$, donde $\beta = \alpha_u$, para algunos $U \in \mathcal{N}_x(E)$, $\alpha \in \Lambda$, y $y_\beta = x'_{\alpha_u}$; además, dados $\beta, \gamma \in \Gamma$ tenemos $\alpha_u = \beta \leq \gamma = \delta_{u'}$ si y sólo si $\alpha \leq \delta$ y $U' \subset U$, con $\alpha, \delta \in \Lambda$.

Así, por construción $(y_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ converge a x en E.

Concluimos la demostración de este resultado. ■

Teorema 103 *Sean E y F e.l.c., E palmeado, y F de Baire. Entonces, toda función continua, lineal y suprayectiva $T : E \to F$ es abierta.*

Demostración.

Como T es suprayectiva $R(T) = F$, que es de Baire. Por ser T continua, T es cerrada, por tanto se cumplen las condiciones del Teorema anterior y así obtenemos que T es abierta. ■

El Teorema (3.4-102) generaliza un resultado clásico, conocido como el Teorema de Banach-Schauder:

Teorema 104 (Banach-Schauder) *Sean E y F e.l.c. metrizables, completos. Si $T \in L(E, F)$ es continua, entonces $R(T)$ es de la primera categoría ó cerrado en F.*

Demostración.

Como E es metrizable y completo, de la proposición (3.2-92) tenemos que E es palmeado; como T es continuo, T es cerrado. Así:

Si $R(T) = F$ ó $R(T) = \{0\}$, se cumple trivialmente lo que nos piden.

Supongamos que $\{0\} \subsetneq R(T) \subsetneq F$, y además que $R(T)$ no es de la primera categoría ni cerrado. Al no ser $R(T)$ de la primera categoría tenemos que $R(T)$ es de la segunda categoría. Así, se cumplen las hipótesis del Teorema (3.4-102), y por tanto T es abierta. De donde $R(T)$ es un abierto en F, inclusive $R(T) \in \mathcal{N}_o(F)$ y $\emptyset \neq R(T) \subset int\left(\overline{R(T)}\right)$. En consecuencia, $R(T)$ es absorbente en F. Por lo que dado $z \in F$, existe $\lambda > 0$ tal que $z \in \lambda R(T)$, por lo que existe $x \in R(T)$ que satisface $T(\lambda x) = z$. Por lo tanto, $z \in R(T)$ y $F = R(T)$. Llegamos así a una contradicción, con esto $R(T)$ sólo puede ser de la primera categoría o cerrado. ∎

3.5. Espacios Estrictamente Palmeados.

En espacios concretos usualmente podemos encontrar palmas teniendo un propiedad más fuerte que tener solamente una palma completante.

Definición 105 *Sea E un e.l.c. Decimos que una palma $\mathcal{W}$ en E es una palma estricta si es completante y si, dada $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E con $y_n \in W_{\varphi,n}$, $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} y_k \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Por la proposición (3.2-89) es claro que toda palma completante que tiene por elementos sólo a conjuntos secuencialmente cerrados es estricta. En particular, la palma construida en la demostración de la proposición (3.2-93) para un espacio metrizable completo tiene esta propiedad. De esta manera obtenemos:

Proposición 106 *Sea E un e.l.c. metrizable y completo. Entonces, E admite una palma estricta.*

Demostración.

Como E es metrizable podemos elegir una base de vecindades del origen numerable. Sea $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades de cero en E, con U_k balanceada, convexa y cerrada, $\forall k \in \mathbb{N}$, tales que $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, la función

$$\mathcal{W} : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \to 2^E$$

dada por $(n_1, ..., n_k) \longmapsto U_k$, claramente es una palma compatible en E.

Por la proposición (3.2-91) y (3.2-89), $\mathcal{W}$ es completante si y sólo si E es secuencialmente completo; es decir, $\mathcal{W}$ es completante si y sólo si E es completo.

Ahora, por la proposición (3.2-89) dada $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $y_n \in U_n$, $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E, pero por ser E completo la sucesión converge y así $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ existe en E; en consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} y_k$ converge en E.

Como $\sum\limits_{k=n+1}^{m} y_k \in U_{n+1} + U_{n+2} + ... + U_m$ y $U_{n+1} + U_{n+2} + ... + U_m \subset U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y cada U_n es cerrada en E, obtenemos que $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} y_k \in U_n$. Esto implica que $\mathcal{W}$ es una palma estricta en E. ■

Definición 107 *Sea E un e.l.c. Si E admite una palma estricta, decimos que E es un espacio estrictamente palmeado.*

Haciendo algunas modificaciones al Teorema (3.2.1-94) obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 108 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. estrictamente palmeado.*

(*a*) *Todo subespacio secuencialmente cerrado L de E es un e.l.c. estrictamente palmeado.*

(*b*) *Si F es un e.l.c. tal que existe una función lineal, secuencialmente continua y suprayectiva $T : E \to F$, entonces F es un e.l.c. estrictamente palmeado.*

(*c*) *Si G es un e.l.c. cociente de E, entonces G es un e.l.c. estrictamente palmeado.*

(*d*) *E es un e.l.c. estrictamente palmeado con respecto a toda topología lineal Hausdorff más débil que τ.*

Demostración.

Si demostramos el inciso (*b*), es fácil ver que (*c*) y (*d*) se cumplen, pues si G es un espacio localmente convexo cociente de E, existe $\pi : E \to G$ lineal, continua y suprayectiva, aplicando (*b*) tendríamos que G es estrictamente palmeado. Por otro lado, si τ' es una topología más débil que τ, entonces la función inclusión $i : (E, \tau) \to (E, \tau')$ es continua, con lo que es secuencialmente continua, lineal y suprayectiva; y de nuevo, aplicando (*b*) resulta que (E, τ') también es estrictamente palmeado.

Las demostraciones de (*a*) y (*b*), de que L y F, respectivamente, son palmeados lo tenemos del Teorema (3.2.1-94). Consideremos la misma contrucción de las palmas en la demostración de (3.2.1-94) y veamos que dichas palmas, $\mathcal{W}'$ en L y en $\mathcal{W}''$ F, son estrictas.

(*a*) Para ver que $\mathcal{W}'$ es estricta, sea $(W'_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}'$ una cadena, y $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en L, tales que $y'_n \in W_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, existe $\left(W_k^{(1)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$

una cadena, y $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción en E tales que $x'_n \in W_n^{(1)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con $L \cap W_n^{(1)} = W'_n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, la serie $\sum_{k=n+1}^{\infty} x'_k$ converge en $W_n^{(1)}$; de donde $\sum_{k=n+1}^{\infty} y'_k$ converge en W'_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, ya que L es secuencialmente cerrado. Así obtenemos que en efecto, L es estrictamente palmeado.

(*b*) Para ver que $\mathcal{W}''$ es estricta, sea $(W''_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}''$ una cadena, y $(y''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión F, tales que $y''_n \in W_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, existe $\left(W_k^{(2)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena en $\mathcal{W}$, y $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E tales que $x''_n \in W_n^{(2)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con $T(W_n^{(2)}) = W''_n$, $n \in \mathbb{N}$. Así, la serie $\sum_{k=n+1}^{\infty} x''_k$ converge en $W_n^{(2)}$; de donde $\sum_{k=n+1}^{\infty} y''_k$ converge en W''_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, T es secuencialmente continua. Por tanto, F es estrictamente palmeado. ■

Contamos con un importante teorema válido solamente para espacios estrictamente palmeados, el cual es una variación del Teorema de la Gráfica Cerrada, llamado Teorema de Localización.

Teorema 109 (Localización) *Sea E un espacio localmente convexo de Baire y F un espacio estrictamente palmeado. Sea $\mathcal{W}$ una palma estricta en F. Si $T : E \to F$ es una función lineal cerrada, entonces T es continua, y existe una cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ para la cual, los conjuntos $T^{-1}(W_n)$ son vecindades de 0 en E, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

Por el Teorema (3.3-98), es inmediato que T es continua. Para obtener el resto de la afirmación, hagamos la siguiente construcción:

Queremos encontrar una cadena $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$ tal que $A_n := T^{-1}(W_n)$, $n \in \mathbb{N}$, sea de la segunda categoría en E. Sea $W_o = F$. Como $\bigcup_{\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} W_{\varphi,1}$ es absorbente en F, y E es un espacio de Baire, existe $\varphi \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-1}(W_{\varphi,1})$ es de la segunda categoría en E. Por tal motivo, podemos elegir $W_1 := W_{\varphi,1}$, un elemento del primer nivel de la palma $\mathcal{W}$ que satisface que $T^{-1}(W_1)$ es de la primera categoría en E. Así, escojamos ahora a $W_2 := W_{\psi,2}$, donde $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $\psi(1) = \varphi(1)$, con W_2 de la segunda categoría en E, lo cual podemos hacer ya que W_1 es absorbido por $\{W_{\psi,2} : \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \psi(1) = \varphi(1)\}$; observemos que $W_2 + W_2 \subset W_1$ por construcción. Ahora supongamos que tenemos construida la colección $(W_n)_{n=1}^{k}$ tal que $T^{-1}(W_i)$ es de la segunda categoría en E, $1 \leq i \leq k$ y $W_{i+1} + W_{i+1} \subset W_i$ si $1 \leq i, i+1 \leq k$. Como $W_k \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N},\psi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} mW_{\psi,k+1}$, podemos encontrar $\psi' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $W_{\psi',k+1} := W_{k+1}$ satisfaga que $T^{-1}(W_{k+1})$ es de la segunda categoría en E, con $W_k \subset W_{k+1}$. Así, obtenemos una cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ tal que $T^{-1}(W_k)$ es de la segunda categoría en E, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sea $A_k := T^{-1}(W_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{W}$ es una palma estricta tenemos que $\overline{A_{k+2}} \subset A_k$:

La contensión $W_{k+2} \subset W_k$ en F implica que $A_{k+2} \subset A_k$. Además, podemos encontrar una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_k \in A_k$, y para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos elegir $U_k \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que $x_k + U_k \subset \overline{A_k}$, ya que A_k es de la segunda categoría: Sea $w_k \in int(\overline{A_k})$, así existen V_k, $U_k \in \mathcal{N}_o(E)$, balanceadas con $U_k + U_k \subset V_k$, tales que $w_k + V_k \subset \overline{A_k}$; por otro lado, podemos elegir $x_k \in A_k$ tal que $x_k - w_k \in U_k$, de donde $x_k + U_k \subset \overline{A_k}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \overline{A_{k+2}}$, así existe $z_{k+2} \in A_{k+2}$ y U_{k+3} tal que $x - z_{k+2} \in U_{k+3}$ y $x - z_{k+2} + x_{k+3} \in \overline{A_{k+3}}$; de manera inductiva, escojamos $z_{k+N} \in A_{k+N}$ tal que $x - \sum_{i=2}^{N}(z_{k+i} - x_{k+i+1}) \in \overline{A_{k+N+1}}$, para $N \geq 3$. Como $\mathcal{W}$ es una palma completante estricta en F, $\sum_{i=2}^{\infty} Tx_{k+i+1}$ está en W_{k+2} y $\sum_{i=2}^{\infty} Tz_{k+i}$ es un elemento de W_{k+1} y convergen en F. Entonces, si $y := \sum_{i=2}^{\infty} T(z_{k+i} - x_{k+i+1})$ converge en W_k y $\sum_{i=2}^{N}(z_{k+i} - x_{k+i+1})$ converge a x en E, cuando $N \to \infty$, tenemos que $x \in T^{-1}(y)$. Por tanto, $\overline{A_{k+2}} \subset A_k$.

Entonces, $T(U_{k+3}) \subset W_k$; de donde $U_{k+3} \subset A_k = T^{-1}(W_k)$, y U_{k+3} es una vecindad de cero en E. ■

Corolario 110 *Sean E un e.l.c. y F estrictamente palmeado con $\mathcal{W}$ una palma estricta en F. Sea $T : E \to F$ una función lineal con gráfica cerrada. Entonces, para cada disco de Banach B en E, existe $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena de $\mathcal{W}$ en F tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ que satisface $T(B) \subset \alpha_k W_k$.*

Demostración.

Como B es un disco de Banach, tenemos que $E_{_B}$ es un espacio de Banach y por tanto es de Baire. Además, $T : E \to F$, y la función inclusión $i : E_{_B} \to E$, son continuas, por lo que $T|_{E_{_B}} : E_{_B} \to F$ es continua y tiene gráfica cerrada. Aplicando el Teorema de Localización obtenemos que $T^{-1}(W_k) \in \mathcal{N}_o(E_{_B}, \tau_{_B})$, y como $\{\beta B : \beta \in \mathbb{Q}^+\}$ es una base de vecindades de cero en $E_{_B}$, obtenemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\beta_k \in \mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{R}$ tal que $\beta_k B \subset T^{-1}(W_k)$. Esto implica que $\beta_k T(B) = T(\beta_k B) \subset W_k$. Sea $\alpha_k = \beta_k^{-1}$, entonces $T(B) \subset \alpha_k W_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Corolario 111 *Sea E un e.l.c. de Baire y F estrictamente palmeado con $\mathcal{W}$ una palma estricta en F. Sea $T : E \to F$ una función lineal con gráfica cerrada. Entonces, para todo $B \subset E$ acotado, existe $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena de en F y $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tales que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $T(B) \subset \alpha_k W_k$.*

3.5.1. Espacios Secuencialmente Palmeados.

La definición (3.2-88) implica que los elementos de $\mathcal{W}$ (una palma compatible en E) son, en algún sentido, más pequeñas que las vecindades de 0 en E, esto es suficiente para obligar a que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión nula-Mackey, como se verá en el capítulo 4. Tenemos así motivada la siguiente definición.

Definición 112 *Un espacio E es secuencialmente palmeado si este tiene una palma compatible $\mathcal{W}$ tal que para cada sucesión nula $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E, existe una colección finita de cadenas,*

$$\left\{\left(W_k^{(1)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(W_k^{(2)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(W_k^{(l)}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right\}$$

de $\mathcal{W}$ tales que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N_k \in \mathbb{N}$ con $x_n \in \bigcup\limits_{i=1}^{l} W_k^{(i)}$ siempre que $n \geq N_k$.

Ahora, presentamos un ejemplo de tales espacios secuencialmente palmeados.

Proposición 113 *Sea E un e.l.c. metrizable. Entonces, E es secuencialmente palmeado.*

Demostración.
Si $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de vecindades de 0 absolutamente convexas en el espacio metrizable E, tal que,

$$U_{k+1} \subset \frac{1}{2}U_k, \text{ para toda } k \in \mathbb{N},$$

entonces $\{U_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathcal{W}$ es una palma compatible en E, como vimos anteriormente. Ciertamente, aquí toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tal que $x_n \to 0$ esta eventualmente contenida en la única cadena $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$. ■

3.6. Limites Inductivos.

Sea $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios localmente convexos, y tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función inyectiva, lineal y continua $i_{n,n+1} : (E_n, \tau_n) \to (E_{n+1}, \tau_{n+1})$.

Definición 114 *Al sistema que consiste de una sucesión de espacios localmente convexos (E_n, τ_n), $n \in \mathbb{N}$ y las inclusiones $i_{n,n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, como arriba, lo llamamos un sistema inductivo de espacios vectoriales topológicos localmente convexos.*

Así, podemos considerar que $E_n \subset E_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y las funciones inclusión $i_{n,n+1} : E_n \to E_{n+1}$, al referirnos al sistema inductivo $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, definamos:

Definición 115 *Sea $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema inductivo de espacios localmente convexos. Definimos $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y le damos la topología lineal inductiva τ definida por las funciones $i_n : E_n \to E$. Donde τ, la topología lineal inductiva definida por $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y las funciones $i_{n,n+1} : E_n \to E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, es la topología lineal más fina tal que cada función $i_n : (E_n, \tau_n) \to (E, \tau)$ es continua.*

Además, si $E_n := (E_n, \tau_n)$, $n \in \mathbb{N}$, denotamos a E, con su topología lineal inductiva implicita, por $ind \lim_{n\in\mathbb{N}} (E_n, \tau_n) =: ind \lim_{n\in\mathbb{N}} E_n$, *ó simplemente* $\underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$, *el límite inductivo de* $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 116 *Sea $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inductiva de e.l.c. Decimos que la sucesión es estricta si* $\tau_{n+1} |_{E_n} = \tau_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 117 *Sea $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $E_n := (E_n, \tau_n)$, una sucesión inductiva estricta y* $E := (E, \tau) = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$. *Entonces,* $\tau |_{E_m} = \tau_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Demostración.

De la definición de límite inductivo, es claro que $\tau |_{E_m} \leq \tau_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Veamos la otra contensión:

Sea $U \in \mathcal{N}_o(E_m, \tau_m)$, con $m \in \mathbb{N}$ fijo. Definamos $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena de vecindades de cero en E_m tales que $U_1 + U_1 \subset U$ y $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$, $n \in \mathbb{N}$. Para $1 \leq i \leq m$, sea $V_i := U_m \cap E_i$. Ahora, ya que tenemos definidas las vecindades V_i, para $1 \leq i \leq m$, para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos recursivamente vecindades $V_{m+k} \in \mathcal{N}_o(E_{m+k}, \tau_{m+k})$ tales que

$$(V_{m+k} + V_{m+k}) \cap E_{m+k-1} \subset V_{m+k-1}.$$

Esto implica que si consideramos al conjunto $Z := \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i$, tenemos que Z es un elemento de $\mathcal{N}_o(E, \tau)$, por la definición de topología lineal inductiva.

Así, para $k \in \mathbb{N}$, obtenemos:

$$E_m \cap \sum_{i=1}^{k} V_{m+i} = E_m \cap \left(\sum_{i=1}^{k-1} V_{m+i} + (V_{m+k} \cap E_{m+k-1}) \right),$$

ya que $E_m \cap V_{m+k} = E_m \cap (V_{m+k} \cap E_{m+k-1})$, y $E_m \subset E_{m+k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. .....[1]
Pero además,

$$E_m \cap \left(\sum_{i=1}^{k-1} V_{m+i} + (V_{m+k} \cap E_{m+k-1}) \right) \subset W,$$

ya que se cumple [1] y $(V_{m+k} + V_{m+k}) \cap E_{m+k-1} \subset V_{m+k-1}$, y donde

$$W = E_m \cap \left(\sum_{i=1}^{k-2} V_{m+i} + ((V_{m+k-1} + V_{m+k-1}) \cap E_{m+k-2}) \right),$$

lo cual implica que $(V_{m+k} \cap E_{m+k-1}) \cap E_m \subset V_{m+k-1} \cap E_{m+k-1} \cap E_m$. Además,

$$E_m \cap \left(\sum_{i=1}^{k-2} V_{m+i} + ((V_{m+k-1} + V_{m+k-1}) \cap E_{m+k-2}) \right) \subset E_m \cap \left(\sum_{i=1}^{k-2} V_{m+i} + V_{m+k-2} \right),$$

por construcción de V_{m+k}.

Procediendo de la misma manera obtenemos que

$$E_m \cap \left(\sum_{i=1}^{k-2} V_{m+i} + ((V_{m+k-1} + V_{m+k-1}) \cap E_{m+k-2}) \right) \subset ... \subset E_m \cap (V_{m+1} + V_{m+1}).$$

$$E_m \cap (V_{m+1} + V_{m+1}) \subset V_m,$$

y $V_m = U_m \cap E_m \subset U$. Por tanto, $E_m \cap \sum_{i=1}^{k} V_{m+i} \subset V_m$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Entonces, si $x \in Z \cap E_m$ y $k \in \mathbb{N}$, es tal que $x \in \left(\sum_{i=1}^{m+k} V_i\right) \cap E_m$, tenemos

$$x \in \left(\sum_{i=1}^{m} V_i\right) \cap E_m + \left(\left(\sum_{i=1}^{k} V_{m+i}\right) \cap E_m\right) \subset \sum_{i=1}^{k} (U_m \cap E_i) + U_m,.$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} (U_m \cap E_i) + U_m &\subset \sum_{i=1}^{k} U_m + U_m \subset \sum_{i=1}^{k-1} U_m + U_m + U_m \subset \sum_{i=1}^{k-1} U_m + U_{m-1} \\ &\subset \sum_{i=1}^{k-3} U_m + U_m + U_m + U_{m-1} \subset \sum_{i=1}^{k-3} U_m + U_{m-1} + U_{m-1} \\ &\subset \sum_{i=1}^{k-3} U_m + U_{m-2} \subset ... \subset U_1 + U_1 \subset U.\end{aligned}$$

Concluimos que $U \in \mathcal{N}_o(E_m, \tau\,|_{E_m})$. ■

Definición 118 *Sea $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inductiva de e.l.c. y $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$. Decimos que E es regular si cada subconjunto acotado de E está contenido y es acotado en algún E_n.*

Teorema 119 *Sea $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E$ el límite inductivo estricto de una sucesión inductiva $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que cada E_n es cerrado en E_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$. Entonces E es un límite inductivo regular.*

Demostración.

De la definición (3.6-118), necesitamos probar que si B es un subconjunto de E acotado, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset E_n$ y es acotado en E_n, pero utilizando el Teorema (3.6-117) basta que veamos que B está contenido en algún E_n, $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos lo contrario; es decir, $\exists\{n_1 < n_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ y $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en B tal que $x \in E_{n_k} \setminus E_{n_{k-1}}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{U}_{n_k}$ una base de $\mathcal{N}_o(E_{n_k})$, formada por conjuntos absolutamente convexos. Consideremos $n_o := 1$, y sea $y_k := \frac{1}{k} x_k$; así, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cero en (E, τ). Como $E_1 \subset E_{n_1}$, cerrado, existe $U_1 \in \mathcal{U}_{n_1}$ tal que $(y_1 + U_1) \cap E_1 = \emptyset$. Sea $V_1 \in \mathcal{U}_{n_1}$ tal que $\sum_{i=1}^{n_1+1} V_1 = V_1 + ... + V_1 \subset U_1$, $n_1 + 1$ sumandos.

Supongamos que hemos construido vecindades U_k, $V_k \in \mathcal{U}_{n_k}$, tales que $U_k \cap E_{n_k} \subset V_{k-1}$, $(y_k + U_k) \cap E_{n_k} = \emptyset$ y $\sum_{i=1}^{n_k+1} V_k \subset U_k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Construyamos ahora las vecindades correspondientes U_{k+1}, V_{k+1}:

Sea $U_{k+1} \in \mathcal{U}_{n_{k+1}}$ tal que satisface:

1) $U_{k+1} \cap E_{n_{k+1}} \subset V_k$.

2) $(y_{k+1} + U_{k+1}) \cap E_{n_{k+1}} = \emptyset$.

Sea $V_{k+1} \in \mathcal{U}_{n_{k+1}}$ tal que $\sum_{i=1}^{n_{k+1}+1} V_{k+1} = V_{k+1} + ... + V_{k+1} \subset U_{k+1}$, $n_{k+1}+1$ sumandos.

Sea, ahora,

$$W_i = \begin{cases} V_1 \cap E_i, & \text{para } 1 \leq i \leq n_1, \\ V_{k+1} \cap E_i, & \text{para } n_k < i \leq n_{k+1},\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Queremos ver que $\forall k, l \in \mathbb{N}$ tenemos: $y_k \notin \sum_{i=1}^{n_{k+l}} W_i$. Supongamos que esto no es válido para algunos $k, l \in \mathbb{N}$. Como $y_k \in E_{n_k}$ y $y_k \in \sum_{i=1}^{n_{k+l}} W_i$ obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n_{k+l}} W_i = \sum_{i=1}^{n_{k+l-1}} W_i + \sum_{i=n_{k+l-1}+1}^{n_{k+l}} W_i = \sum_{i=1}^{n_{k+l-1}} W_i + \sum_{i=n_{k+l-1}+1}^{n_{k+l}} V_{k+l} \cap E_i.$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{n_{k+l-1}} W_i + \sum_{i=n_{k+l-1}+1}^{n_{k+l}} V_{k+l-1} \cap E_i \subset \sum_{i=1}^{n_{k+l-1}} W_i + (U_{k+l-1} \cap E_{n_{k+l-1}}),$$

ya que $V_{k+l-1} \in \mathcal{N}_o\left(E_{n_{k+l-1}}\right)$, $\sum_{i=n_{k+l-1}+1}^{n_{k+l}} V_{k+l-1} = V_{k+l-1} + ... + V_{k+l-1} \subset U_{k+l}$, y $E_i \subset E_{n_{k+l-1}}$ si $n_{k+l-1} \leq i \leq n_{k+l}$.

Ahora,

$$\sum_{i=1}^{n_{k+l-1}} W_i + (U_{k+l-1} \cap E_{n_{k+l-1}}) \subset ... \subset \sum_{i=1}^{n_k} W_i + V_k \subset \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=n_{j-1}}^{n_j} V_j \cap E_i \right) + V_k,$$

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=n_{j-1}}^{n_j} V_j \cap E_i \right) + V_k \subset \sum_{i=1}^{k} U_i = \sum_{i=1}^{k-1} U_i + U_k, \text{ y}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=n_{j-1}}^{n_j} V_j \cap E_i \right) + V_k \subset \sum_{i=1}^{k-1} V_i + U_k.$$

Por lo cual

$$\sum_{i=1}^{n_{k+l}} W_i \subset \sum_{i=1}^{k-1} U_i + U_k \text{ y } \sum_{i=1}^{n_{k+l}} W_i \subset \sum_{i=1}^{k-1} V_i + U_k$$

Como $y_k \in \left(\sum_{i=1}^{n_{k+l}} W_i \right)$, tenemos que $0 \in \left(\sum_{i=1}^{n_{k+l}} W_i \right) - y_k$, y sabemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n_{k+l}} W_i \right) - y_k \subset \left(\sum_{i=1}^{k-1} V_i \right) + U_k - y_k = \left(\sum_{i=1}^{k-1} V_i \right) + U_k + y_k;$$

de donde, si $(U_k + y_k) \cap (\left(\sum_{i=1}^{k-1} V_i\right) = \emptyset$, $0 \notin \left(\sum_{i=1}^{k-1} V_i\right) + U_k + y_k$; pero 0 es un elemento de $\left(\sum_{i=1}^{k-1} V_i\right) + U_k + y_k$, pues $0 \in \left(\sum_{i=1}^{n_{k+l}} W_i\right) - y_k \subset \left(\sum_{i=1}^{k-1} V_i\right) + U_k + y_k$, así llegamos an una contradicción. Por tanto $(U_k + y_k) \cap (\left(\sum_{i=1}^{k-1} V_i\right) \neq \emptyset$.

Ahora, $(U_k + y_k) \cap (\left(\sum_{i=1}^{k-1} V_i\right) \subset (U_k + y_k) \cap E_{n_{k-1}}$, lo cual contradice la elección de U_k. Por tanto $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k}x_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} W_n\right) \in \mathcal{N}_o(E)$. Esto último es una contradicción, así concluimos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que B esta contenido y es acotado en E_n. ■

Proposición 120 *Sea $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inductiva de e.l.c. y sea $E = \operatorname{ind}_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Si (E_n, τ_n) es palmeado, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces E es palmeado y admite una palma completante $\mathcal{W}$ tal que $W(n) = E_n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

Como cada (E_n, τ_n) es palmeado, $n \in \mathbb{N}$, existe $\mathcal{W}^{(n)}$ una palma completante en E_n. En E definimos una palma completante $\mathcal{W}$ como sigue:

Consideremos el primer nivel como la colección de todos los espacios E_n,

$$\{W(n) = E_n : n \in \mathbb{N}\};$$

el segundo nivel como la colección

$$\{W^{(n)}(k) : n, k \in \mathbb{N}\},$$

es decir, de los primeros niveles de cada una de las palmas $\mathcal{W}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Definamos el tercer nivel como la colección

$$\{W^{(n)}(k, m) : n, m, k \in \mathbb{N}\}$$

formada por los segundos niveles de cada palma $\mathcal{W}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$; y así sucesivamnete.

Entonces, $\mathcal{W}$ cumple con las propiedades de palma:

(W 1) Por construcción, $\mathcal{W}$ es una colección numerable de conjuntos absolutamente convexos.

(W 2) Esto es fácil de ver, pues $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W(n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$, que claramente es absorbente en E.

(W 3, W 4) Las condiciones (W 3) y (W 4) se cumplen gracias a que $\mathcal{W}^{(n)}$ es una palma en E_n, $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto $\mathcal{W}$ es una palma en E.

Para ver la compatibilidad de $\mathcal{W}$, sea $U \in \mathcal{N}_o(E)$, y sea $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena de $\mathcal{W}$. Notemos que $W_1 = E_{n_o}$, para algún $n_o \in \mathbb{N}$. Como cada $W_{k+1} \subset W_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, tenemos que $W_k \subset E_{n_o}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ahora, dado que $E_1 \subset E_2 \subset ...$, se sigue que para cada $k \in \mathbb{N}$, W_k es un elemento de $\mathcal{W}^{(j)}$, con $1 \leq j \leq n_o$.

Como $W_{k+1} \subset W_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, si $W_n \in \mathcal{W}^{(j')}$, con $j' < n_o$, tenemos que $(W_k)_{k\geq n} \subset E_{j'}$; es decir, para m suficientemente grande $(W_k)_{k\geq m}$ debe estar contenido en $\mathcal{W}^{(j_o)}$, para algún $j_o \in \mathbb{N}$. .....[1]

Sin perdida de generalidad, asumamos que $j_o = 1$.

Ahora, como $U \cap E_1 \in \mathcal{N}_o(E_1)$ y $\mathcal{W}^{(1)}$ es compatible en E_1, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $W_k \subset U \cap E_1 \subset U$. Esto hace a $\mathcal{W}$ una palma compatible en E. Por otro lado, dado $n \in \mathbb{N}$, un elemento del k-ésimo nivel de $\mathcal{W}^{(n)}$ es también un elemento del $(k-1)$-ésimo nivel de $\mathcal{W}$, y esto se tiene para cada $k \in \mathbb{N}$. Así que cada cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la palma $\mathcal{W}^{(n)}$ también es una cadena de $\mathcal{W}$.

Finalmente, veamos que $\mathcal{W}$ es una palma completante en E. Sea $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E tal que $y_n \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Queremos probar que $\left(\sum_{n=1}^{k} y_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en E.

Por un argumente similar a [1], $(W_k)_{k\geq n_o}$ está contenida en $\mathcal{W}^{(n_o)}$, para algún $n_o \in \mathbb{N}$. Entonces, por ser $\mathcal{W}^{(n_o)}$ una palma completante en E_{n_o}, $\left(\sum_{n=1}^{k} y_n\right)_{k\geq n_o}$ es una sucesión convergente en E_{n_o} y por tanto convergente en E. Así la sucesión $\left(\sum_{n=1}^{n_o-1} y_n + \left(\sum_{n=n_o}^{k} y_n\right)\right)_{k\geq no}$ converge en E. Por lo tanto, $\left(\sum_{n=1}^{k} y_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en E y $\mathcal{W}$ una palma completante en E. ∎

Proposición 121 *Sea $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inductiva de espacios estrictamente palmeados. Entonces $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$ es estrictamente palmeado.*

Demostración.

Por la proposición anterior, E admite una palma $\mathcal{W}$ completante tal que $W(n) = E_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Veamos que esta palma $\mathcal{W}$ en E es estricta.

Sea $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E tal que $y_n \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $\sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

De las propiedades de palma tenemos $W_{\varphi,n} = W(\varphi(1), ..., \varphi(n))$ y además $W_{\varphi,n+1} \subset W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, $W_{\varphi,1} = W(\varphi(1)) = E_{\varphi(1)}$ por construcción de $\mathcal{W}$, lo cual implica que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E_{\varphi(1)}$.

Por tanto, como $(W_{\varphi,n})_{n\geq 2}$ es una cadena de $\mathcal{W}^{(\varphi(1))}$, la correspondiente palma estricta de $E_{\varphi(1)}$, y cada $y_n \in W_{\varphi,n}$, $n \geq 2$, tenemos que $\sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \in W_{\varphi,n}$, $n \geq 2$; además, como $y_2 \in E_{\varphi(1)}$ y $W_{\varphi,2} \subset E_{\varphi(1)}$ tenemos que

$$\sum_{k=2}^{\infty} y_k = y_2 + \sum_{k=3}^{\infty} y_k \in y_2 + W_{\varphi,2} \subset E_{\varphi(1)} = W_{\varphi,1}.$$

Entonces, $\sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Concluimos que $\mathcal{W}$ es una palma estricta en E. ∎

El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema de Localización (3.5-109).

Proposición 122 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. de Baire, y (F, τ') un límite inductivo de una sucesión inductiva $(F_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de espacios palmeados. Sea $T : E \to F$ una función lineal cerrada. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T(E) \subset F_n$ y la función $T' : E \to F_n$ inducida por T es continua.*

Demostración.

Por el resultado anterior (3.6-121), F es un espacio estrictamente palmeado y además admite una palma estricta $\mathcal{W}$ tal que $W(n) = F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Por el Teorema de Localización (3.5-109) existe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$U := T^{-1}(W_{\varphi,1}) = T^{-1}(F_{\varphi(1)})$$

es una vecindad de 0 en E. Como U es absorbente en E, T mapea a E en $F_{\varphi(1)}$. Por otro lado G_T, la gráfica de T, es cerrada en $E \times F$, y $(F_{\varphi(1)}, \tau' |_{F_{\varphi(1)}})$ es un subespacio de (F, τ'), ya que F tiene la topología lineal inductiva dada por la familia inductiva $(F_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por tanto $T' := T{:}E \to (F_{\varphi(1)}, \tau' |_{F_{\varphi(1)}})$ es continuo y así $G_{T'} = \{(x, T'x) : x \in E\}$ es cerrado en $E \times F_{\varphi(1)}$ con su topología proucto τ_1 dada por la topología τ en E y $\tau' |_{F_{\varphi(1)}}$ en $F_{\varphi(1)}$. Además, la función inclusión $i_n : (F_{\varphi(1)}, \tau_{\varphi(1)}) \to (F_{\varphi(1)}, \tau' |_{F_{\varphi(1)}})$ es continua; por tanto, si $(x_\alpha, Tx_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ es una red en $G_{T'}$ la cual es convergente a (x, y) en $E \times F_{\varphi(1)}$, con su topología producto τ_2 definida por las topologías τ en E y $\tau_{\varphi(1)}$, también es τ_1-convergente a (x, y), y como $G_{T'}$ es cerrada en $(E \times F_{\varphi(1)}, \tau_1)$, obtenemos que $(x, y) \in G_{T'}$, lo cual implica que $G_{T'}$ es cerrada en $(E \times F_{\varphi(1)}, \tau_2)$; así, como $F_{\varphi(1)}$ es palmeado, E de Baire y por el Teorema de la Gráfica Cerrada, podemos concluir que $T' : (E, \tau) \to (F_{\varphi(1)}, \tau_{\varphi(1)})$ es continua. ∎

Definición 123 *Sea $E = ind \lim_{n\in\mathbb{N}} E_n$ el límite inductivo de los espacios localmente convexos (E_n, τ_n). Decimos que E es un espacio secuencialmente retractivo si para toda sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ y τ-convergente a x_o, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E_{n_o}$, y es τ_{n_o}-convergente a x_o.*

Observemos que, de la definición, nos basta considerar solamente a las sucesiones convergentes a cero.

Teorema 124 *Sean $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inductiva de e.l.c. secuencialmente palmeados y $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$ su límite inductivo. Entonces, E es secuencialmente retractivo si y sólo si es secuencialmente palmeado.*

Demostración.

Denotemos por $\mathcal{W}^{(n)}$ a la palma en (E_n, τ_n) que hace a E_n un espacio secuencialmente palmeado, $n \in \mathbb{N}$, y por τ a la topología lineal inductiva en

E. Además, consideremos a $\mathcal{W}$ como la palma en E que se tiene construida como en la demostración proposición (3.6-120).

Supongamos que E es secuencialmente retractivo. Queremos mostrar que E es secuencialmente palmeado: De la definición de secuencialmente retractivo, dada $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en (E,τ), existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en (E_n,τ_n). Por otro lado, E_n es un espacio secuencialmente palmeado, por lo que existe un número finito de cadenas $(W_k^{(n,1)})_{k\in\mathbb{N}}$, $(W_k^{(n,2)})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (W_k^{(n,l)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}^{(n)}$ en E_n tales que para cada $k\in\mathbb{N}$, $\exists\, N_k\in\mathbb{N}$, tal que satisface: $x_m\in\bigcup_{i=1}^{l} W_k^{(n,i)}$, $\forall m\geq N_k$. Notemos que, por la forma en que construimos la palma de límite inductivo en E, cada cadena $\left(W_k^{(n,i)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $1\leq i\leq l$, es una cadena de $\mathcal{W}$ en E. De esta manera, se cumple que efectivamente E es secuencialmente palmeado.

Para el regreso, supongamos que E es secuencialmente palmeado y veamos que es secuencialmente retractivo.

Sea $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en (E,τ); como E es secuencialmente palmeado, para toda sucesión nula $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en E, existe una colección finita de cadenas $\left(W_k^{(1)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(W_k^{(2)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(W_k^{(l)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$ en E tales que satisfacen:

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \exists N_k\in\mathbb{N}\ \text{ tal que }\ x_m\in\bigcup_{i=1}^{l} W_k^{(i)}\ \text{ si }\ m\geq N_k. \qquad \ldots[1]$$

Por la forma de la palma en E, $\left(W_k^{(i)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es una cadena de $\mathcal{W}^{(n_i)}$ en E_{n_i}, para algún n_i, $1\leq i\leq l$, con $E_{n_i}=W_1^{(i)}$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $n_1<n_2<\ldots<n_l$. Sea $U\in\mathcal{N}_o(E_{n_l})$. Observemos que $U\cap E_{n_i}\in\mathcal{N}_o(E_{n_i})$. Por la compatibilidad de las palmas $\mathcal{W}^{(i)}$ en E_{n_i}, existe $k_i\in\mathbb{N}$, tal que $W_k^{(i)}\subset U\cap E_{n_i}$, si $k\geq k_i$, $1\leq i\leq l$. Tomemos como $K_o=\max\{k_1,k_2,\ldots,k_l\}$, entonces $W_k^{(i)}\subset U\cap E_{n_i}$, $\forall k\geq K_o$, $1\leq i\leq l$. De donde $\bigcup_{i=1}^{l} W_k^{(i)}\subset\bigcup_{i=1}^{l} U\cap E_{n_i}\subset U\cap E_{n_l}=U$, $\forall k\geq K_o$. Además, de [1], para K_o existe $N_{K_o}\in\mathbb{N}$ tal que $x_m\in\bigcup_{i=1}^{l} W_{K_o}^{(i)}$, siempre que $m\geq N_{K_o}$. En consecuencia, $x_m\in U$, si $m\geq N_{K_o}$. Es decir, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E_{n_l}. Por lo tanto E es secuencialmente retractivo. ■

Corolario 125 *Sea $E=\operatorname{ind}_{n\in\mathbb{N}} E_n$ un límite inductivo estricto regular de e.l.c. secuencialmente palmeados. Entonces, E es secuencialmente palmeado.*

Demostración.

Aplicando el Teorema anterior, demostremos que E es secuencialmente retractivo:

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a x en E. Esto implica que $(x_n-x)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula y acotada en E. Como E es un límite inductivo estricto regular tenemos $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}} \subset (E_{n'_o}, \tau\mid_{E_{n'_o}})$ y es acotada aquí, para algún $n'_o \in \mathbb{N}$. Observemos que $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x\} \subset E_{n'_o} + x$ al cual podemos incluir en algún $(E_{n_o}, \tau\mid_{E_{n_o}})$, $n_o \in \mathbb{N}$, en donde $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ sigue siendo nula por ser E un límite inductivo estricto regular.

Por el Teorema (3.6-117), $\tau\mid_{E_{n_o}} = \tau_{n_o}$, esto implica que $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en (E_{n_o}, τ_{n_o}). Esto implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en E_{n_o}. Concluimos que E es secuencialmente retractivo. ∎

Definición 126 *Sea $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$ un límite inductivo. Decimos que E es retractivo en acotados o simplemente (b.r.), por sus iniciales en francés, si para cada subconjunto acotado A de E, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset E_n$, y la topología de E coincide con la topología de E_n restringida a A.*

La siguiente definición la volveremos a dar en el siguiente capítulo, en este caso la incluimos aquí ya que tenemos un resultado importante para espacios que satisfacen las condiciones de la definición y que utilizaremos cuando tratemos la condición de convergencia estricta de Mackey.

Definición 127 *Sea E un e.l.c. Una palma compatible $\mathcal{W}$ en E es compatible con acotados (es decir, el espacio tiene una palma compatible con acotados), si para cada subconjunto acotado A de E, existe una cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$, para la cual se tiene que:*

i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tal que

$$A \subset \alpha_k W_k,$$

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe U_k una vecindad de cero, absolutamente convexa tal que

$$A \cap U_k \subset W_k.$$

Sea E el límite inductivo de $\{(E_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia inductiva de espacios localmente convexos y palmeados, como cada (E_n, τ_n) es palmeado, $n \in \mathbb{N}$, existe $\mathcal{W}^{(n)}$ una palma completante en E_n. En E definimos una palma completante $\mathcal{W}$ como sigue:

Consideremos el primer nivel como la colección de todos los espacios E_n,

$$\{W(n) = E_n : n \in \mathbb{N}\};$$

el segundo nivel como la colección

$$\{W^{(n)}(k) : n, k \in \mathbb{N}\},$$

es decir. de los primeros niveles de cada una de las palmas $\mathcal{W}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Definamos el tercer nivel como la colección

$$\{W^{(n)}(k, m) : n, m, k \in \mathbb{N}\}$$

formada por los segundos niveles de cada palma $\mathcal{W}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$; y así sucesivamnete. Como ya vimos, en la proposición (3.6-120), $\mathcal{W}$ construida así es una palma completante en E y es tal que $E_n = W_{\varphi,1}$, para alguna $\varphi \in \mathbb{N}$.

Proposición 128 *Supongamos que $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$ tal que cada E_n tiene una palma compatible con acotados. Formemos en E la palma $\mathcal{W}$ como arriba. Entonces, E es (b.r.) si y sólo si $\mathcal{W}$ es una palma compatible con acotados.*

Demostración.

Asumamos primero que $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$ es (b.r) y que $A \subset E$ es un acotado arbitrario. Denotamos por $\mathcal{W}$ la palma en E obtenida como en la proposición (3.6-120) y por $\mathcal{W}^{(n)}$ a la palma compatible con acotados de E_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesi tenemos que $\mathcal{W}$ es una palma compatible en E. Ahora bien, al ser E regular, existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual $A \subset E_n$ y A es acotado en E_n.

Sea $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la cadena de $\mathcal{W}^n \subset E_n$ que satisface la definición (3.6-127), es decir:

(i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha_k \in \mathbb{C}$ tal que $A \subset \alpha_k W_k$. ...[1]

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists U_k \in \mathcal{N}_o(E_n, \tau_n)$ balanceada y convexa tal que $A \cap U_k \subset W_k$.

De la construcción de $\mathcal{W}$, $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una cadena de $\mathcal{W}$, por lo que la parte (i) de la definición se cumple en E, debido a [1].

Para demostrar que $\mathcal{W}$ cumple (ii) en E, fijemos $k \in \mathbb{N}$. Aplicando (ii) en el espacio E_n y la palma $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E_n, como arriba, elegimos $U_k \in \mathcal{N}_o(E_n, \tau_n)$ balanceada y convexa que satisface $A \cap U_k \subset W_k$.

Como la topología de E coincide con la topología de E_n en A; existe una vecindad de cero en E, digamos V_k, balanceada y convexa con $A \cap V_k \subset A \cap U_k$; entonces, para esta V_k, $A \cap V_k \subset W_k$.

Así, $\mathcal{W}$ satisface la parte (ii) de la definición de palma compatible con acotados. Por lo tanto $\mathcal{W}$ es una palma compatible con acotados en E, y así se tiene la primera implicación.

Para el regreso, buscamos demostrar que si E tiene una palma $\mathcal{W}$ compatible con acotados, entonces E es (b.r.).

Sea A cualquier subconjunto acotado de E. Sabemos que existe una palma $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$ que satisface: (a) Dado $k \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha_k \in \mathbb{C}$ tal que $A \subset \alpha_k W_k$. Por ello, como $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es también una cadena en E_n, para algún $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A \subset E_n$. Mejor aún, para cualquier $V \in \mathcal{N}_o(E_n, \tau_n)$ balanceada y convexa, existe, por la compatibilidad de $\mathcal{W}^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $W_k \subset V$. Llamemos α_k el escalar que cumple (a) , en consecuecia

$$A \subset \alpha_k W_k \subset |\alpha_k|\, W_k \subset |\alpha_k|\, V.$$

De aquí se puede concluir que A es acotado en E_n. En otras palabras, E es un límite inductivo regular.

Finalmente, con W_k y V como antes, escogemos $U_k \in \mathcal{N}_o(E)$ balanceada y convexa tal que $A \cap U_k \subset W_k$ (de la definición de palma compatible con acotados). Entonces, como una consecuencia inmediata se tiene

$$A \cap U_k \subset W_k \subset V.$$

De aquí que $A \cap U_k \subset A \cap V$, y por tanto la topología de E, inducida en A, es más fina que la topología de E_n, inducida en A. Pero la topología de E es siempre más débil que la topología de E_n en A; es decir, las dos topologías coinciden en A. Por lo tanto E es (b.r.). ■

3.7. Espacios Localmente Completos.

Para estudiar los espacios localmente convexos en ocasiones es conveniente tomar subespacios que admiten una topología normada y que nos brindan información global sobre el espacio total con su topología original. La importancia de esto radica en que los espacios normados, más aún, los espacios de Banach, tienen muchas propiedades tangibles, y por ello nos interesa conocer los espacios localmente convexos que tienen estas propiedades a través de secciones de los mismos. Tales espacios son los espacios localmente completos.

Recordemos que si tenemos un espacio localmente convexo $E = (E, \tau)$ y B es un disco en E, entonces podemos considerar al subespacio lineal $E_{_B}$ generado por B. Además, tenemos que la función:

$$\|\cdot\|_B : E_{_B} \to \mathbb{R}$$

definida por $x \longmapsto \|x\|_B = \inf\{\delta > 0 : x \in \delta B\} = q_{_B}(x)$, donde $q_{_B}$ es la funcional de Minkowsky de B, es una norma en $E_{_B}$. Denotamos por $\tau_{_B}$ a la topología localmente convexa generada por $\|\cdot\|_{_B}$ en $E_{_B}$, con esto podemos considerar siempre a $E_{_B} = (E_{_B}, \tau_{_B})$ como un espacio normado. Por otro lado, $\|\cdot\|_B = q_{_B}$; y por las propiedades que probamos para $q_{_B}$:

$$\{x \in E_{_B} : \|x\|_B < 1\} \subset B \subset \{x \in E_{_B} : \|x\|_B \leq 1\}.$$

De manera que como B es $\sigma(E, F)$-cerrado y acotado, entonces también es $\tau_{_B}$-cerrado y coincide con la bola unitaria cerrada de $E_{_B}$, con lo cual tenemos que la función inclusión $i : (E, \tau_{_B}) \to (E, \tau)$ es continua, y así la topología inducida por τ en $E_{_B}$ es más débil que $\tau_{_B}$; ver capítulo 2, sección 2.3.

Definición 129 *Sea E un e.l.c. y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente convergente ó Mackey convergente a x en E si existe un disco B en E tal que $x_n \to x$ con la topología normada en $E_{_B}$. Si $x = 0$, decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión localmente nula ó Mackey nula. A una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la llamamos localmente Cauchy ó Mackey-Cauchy si esta es una sucesión de Cauchy en $E_{_B}$ para algún disco B de E.*

Como la topología normada $\tau_{_B}$ de $E_{_B}$ es más fina que la topología inducida en $E_{_B}$ por la topología τ de E, para cualquier disco $B \subset E$, toda sucesión Mackey nula es una sucesión nula para la topología original τ en E. Con esto tenemos que toda sucesión Mackey nula es una sucesión nula.

Lema 130 *Sea E un e.l.c. metrizable y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E. Entonces, existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente, no acotada, de reales positivos tal que la sucesión $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E.*

Demostración.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades de cero en E, decreciente y formada por conjuntos absolutamente convexos. Con esto, para U_1 podemos elegir $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_1$, si $n \geq N_1$. Así, para cada $k \geq 2$, existe $N_k \in \mathbb{N}$, con $N_{k-1} \leq N_k$, tal que $x_n \in \frac{1}{k}U_k$, siempre que $n \geq N_k$.

Sea $\alpha_n := 1$ si $1 \leq n < N_1$, y $\alpha_n := k$ si $N_k \leq k < N_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces, como $\alpha_n x_n \in \alpha_n \frac{1}{k+j}U_{k+j} = U_{k+j} \subset U_k$, si $N_{k+j} \leq n < N_{K+j+1}$, $j \geq 0$, tenemos que $x_n \in \frac{1}{k}U_k$, si $n \geq N_k$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, la sucesión $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E, además la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está formada por reales positivos y es tal que $\alpha_n \to \infty$, cuando $n \to \infty$. ∎

Proposición 131 *Sea E un e.l.c., $x \in E$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E.*

(*i*) *La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente convergente a x si y sólo si $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente nula.*

(*ii*) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente nula si y sólo si existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente, no acotada, en $\mathbb{R}^+$ tal que $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E.*

Demostración.

(*i*) Esta afirmación es fácil de ver. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión localmente convergente a x en E, entonces existe un disco B de E tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en E_B. Así, $x_n \xrightarrow{\tau_B} x$ si y sólo si $x_n - x \xrightarrow{\tau_B} 0$ en E_B, cuando $n \to \infty$; es decir, $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E_B, lo cual pasa si y solamente si $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión localmente nula en E.

(*ii*) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión localmente nula en E. Pero, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión localmente nula en E si y sólo si, por definición, existe B un disco en E tal que $x_n \xrightarrow{\tau_B} 0$ en E_B, y esta topología es metrizable; así, por el lema (3.8-130), existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente no acotada en $\mathbb{R}^+$, tal que $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E_B. Con esto último, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión localmente nula en E. Por tanto, $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E.

A la inversa, sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ no acotada, tal que $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E, por tanto es acotada. Así que el conjunto

$$B := \{\alpha_n x_x : n \in \mathbb{N}\}^{oo}$$

es un disco en E y además, como $\alpha_n^{-1} \to 0$, cuando $n \to \infty$, tenemos que $\left(\alpha_n^{-1}(\alpha_n x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E_B, lo cual implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión localmente nula en E.

∎

Lo que sigue nos servirán más adelante, al estudiar espacios que satisfacen la condición de convergencia de Mackey (c.c.M.), lo cual es lo que nos interesa estudiar y que tiene que ver con la siguiente.

Proposición 132 *Sea E un e.l.c. metrizable, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. Entonces, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y sólo si es localmente convergente en E.*

Demostración.
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E, tal que converge a $x \in E$. Por el lema (3.7-130), existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ una sucesión creciente no acotada tal que $(\alpha_n (x_n - x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E, y por la proposición (3.7-131)-(ii) esto sucede si y sólo si $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente nula en E. Esto último se da si y solamente si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente convergente a x en E, otra vez, por la proposición (3.7-131)-(i). ■

Definición 133 *Sea E un e.l.c. Decimos que E es localmente completo si toda sucesión localmente Cauchy es localmente convergente.*

En el siguiente capítulo veremos la condición de convergencia estricta de Mackey (c.e.M), para lo cual necesitaremos el próximo resultado para espacios metrizables, el cual además utilizaremos para demostrar un resultado importante para espacios metrizables, localmente completos.

Teorema 134 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. metrizable. Entonces:*

1. *Para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos acotados en E, existe $c_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} c_n A_n$ es un conjunto acotado en E.*

2. *Para toda sucesión de conjuntos acotados $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe B un disco tal que cada A_n es acotado en E_B.*

3. *Para todo subconjunto acotado A en E, existe un disco B tal que $A \subset B$ y las topologías inducidas en A por E y E_B coinciden.*

Demostración. Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base decreciente de vecindades del origen en E, absolutamente convexas y cerradas.

1) Para todo $n \in \mathbb{N}$, determinemos $c_n > 0$ tal que $c_n A_n$ esta incluida en U_n, $n \in \mathbb{N}$. Así, como $U_n \subset U_m$, siempre que $m \leq n$, y además que para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $\bigcup_{i=1}^{k-1} c_i A_i$ es acotado y $\bigcup_{i\geq m} c_i A_i \subset U_m$. Entonces, dada U_n, podemos tomar $\mu > 1$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n-1} c_i A_i \subset \mu U_n$, lo cual implica que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} c_i A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} c_i A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i\geq n}^{\infty} c_i A_i \right) \subset \mu U_n \cup U_n \subset \mu U_n.$$

Por tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} c_n A_n$ es acotado en E.

2) Consideramos la misma construcción que en (1), y definimos a

$$B := \overline{absconv} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} c_n A_n \right),$$

que es acotado, absolutamente convexo y cerrado, por tanto B es un disco y claramente A_n es acotado en $E_{_B}$.

3) Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que A es absolutamente convexo. Primero elijamos B un disco en E tal que contiene a A y para todo $\alpha > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $A \cap U_n \subset \alpha B$, de la siguiente forma: Dado A existe $c_i > 0$ tal que $A \subset c_i U_i$, $i \in \mathbb{N}$; escojamos $b_i \geq c_i$ tal que la sucesión $\left(c_i b_i^{-1}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ es nula en E. Sea $B := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} b_i U_i$, entonces B cumple con lo que deseamos, y por construcción B y E inducen la misma topología en A. ■

Ahora, veremos algunas caracterizaciones de los espacios localmente completos.

Proposición 135 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) *E es localmente completo.*
- (ii) *Todo disco en E es un disco de Banach.*
- (iii) *Si B es un disco en E, toda sucesión de Cauchy en $E_{_B}$ es σ-convergente.*
- (iv) *Si τ' es una topología en E, compatible con la dualidad $\langle E, E' \rangle$, y B es un disco en E, entonces toda sucesión de Cauchy en $E_{_B}$ es convergente en (E, τ').*
- (v) *Si B es un disco en E, toda sucesión de Cauchy en $E_{_B}$ es τ-convergente.*
- (vi) *Todo subconjunto acotado de E está contenido en un disco de Banach.*

Demostración.

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Sea B un disco en E y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $E_{_B}$, así $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $E_{_B}$. Por (i), existe $x \in E$ tal que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es localmente convergente a x en E. Ahora, como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $E_{_B}$ y B es la bola unitaria en $E_{_B}$ existe $\alpha > 0$ tal que $x_n \in \alpha B$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Al ser B cerrado en E, αB también es cerrado, entonces $x \in \alpha B \subset E_{_B}$. Más aún, para todo $\beta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in \beta B$, $\forall n, m \geq N$. Si fijamos n y hacemos tender m a infinito, tenemos que $x_n - x \in \beta B$, siempre que $n \geq N$. Por tanto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x en $E_{_B}$, con lo cual $E_{_B}$ es completo. Así, obtenemos que B es un disco de Banach.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Sea B un disco en E. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $E_{_B}$, el cual es un espacio de Banach por hipótesis; tenemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en $E_{_B}$. Por otro lado, sabemos que

$$i : (E_{_B}, \tau_{_B}) \to (E, \tau) \text{ y } j : (E, \tau) \to (E, \sigma(E, E'))$$

son continuas. Por tanto, $j \circ i : (E_{_B}, \tau_{_B}) \to (E, \sigma(E, E'))$ es continua y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión $\sigma(E, E')$-convergente en E.

De la proposición (2.3-49), como para cada disco B en E tenemos que $E_{_B}$ admite una base de vecindades τ'-cerradas, donde τ' es cualquier topología en E compatible con la dualidad $\langle E, E' \rangle$, es claro que $(iii) \Longleftrightarrow (iv) \Longleftrightarrow (v)$.

$(v) \Longrightarrow (ii)$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E_B, donde B es un disco en E. Por (v), existe $x \in E$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en (E,τ). Por otra parte, para todo $\alpha > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in \alpha B$, $\forall n, m \geq N$, donde B es cerrado en E, otra vez, por la Proposición (2.3-49) tenemos que B es un disco de Banach.

$(ii) \Longrightarrow (vi)$. Sea A un subconjunto acotado de E. Consideremos $B := A^{oo}$, B es un disco en E, y por (ii) tenemos que B es un disco de Banach y además $A \subset B$, como queríamos.

$(vi) \Longrightarrow (i)$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión localmente de Cauchy en E. Así, existe A un disco en E tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E_A, y por tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en E_A. Pero la función inclusión $i : (E_A, \tau_A) \to (E,\tau)$ es continua, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en E. Que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea acotada en E, por (iv), implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ donde B es un disco de Banach en E, además es $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en E_B, pues sin perdida de generalidad $A \subset B$. Con esto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, para algún $x \in E_B$, es decir, es una sucesión localmente convergente en E. Concluimos que E es localmente completo. ∎

Corolario 136 *Sea $E = (E,\tau)$ un e.l.c. Entonces, (E,τ) es localmente completo si y sólo si (E,τ') es localmente completo, para toda topología τ' en E compatible con la dualidad $\langle E, E'\rangle$.*

Demostración.

Sea τ' una topología en E compatible con la dualidad $\langle E, E'\rangle$. Sea B un disco en (E,τ'), entonces B es un disco en toda topología compatible con la dualidad $\langle E, E'\rangle$, pues B es convexo y cerrado, en particular para (E,τ). Por la proposición anterior (3.7-135), B es un disco de Banach, siempre que (E,τ') sea localmente completo; es decir, E_B es un espacio de Banach con su topología normada. Concluimos que (E,τ') es localmente completo si y sólo si (E,τ) es localmente completo. ∎

En caso de que (E,τ) sea secuencialmente completo tenemos que todo disco B en E, es secuencialmente completo y así E_B es de Banach. Entonces, por la misma proposición (3.7-135), obtenemos:

Corolario 137 *Sea $E = (E,\tau)$ un e.l.c. Si E es secuencialmente completo, entonces es localmente completo.*

Corolario 138 *Sea $E = (E,\tau)$ e.l.c. metrizable. Entonces, E es localmente completo si y sólo si es completo.*

Demostración.

Si E es completo, en particular es secuencialmente completo, y por el corolario anterior, esto implica que E es localmente completo.

Ahora supongamos que E es localmente completo, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E, tenemos que

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}^{oo} =: C$$

es τ-acotado en E. Por el Teorema (3.7-134), existe un disco B en E tal que C esta contenido en B y las topologías de E y $E_{_B}$ coinciden en C. Es decir, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en C y por tanto también es de Cauchy en $E_{_B}$; este último es completo, ya que E es localmente completo y por la proposición anterior (3.7-135) B es un disco de Banach, lo cual implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x\in E_{_B}$. Por otro lado, la topología $\tau_{_B}$ es más fina que la topología $\tau\mid_B$ inducida por τ en $E_{_B}$, con lo que obtenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en E. Por lo tanto E es completo. ∎

Lema 139 *Sea $E=(E,\tau)$ un e.l.c. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E. Supongamos que para todo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ converge en E. Entonces, la función $f:\ell_1\to(E,\tau)$, dada por $f((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}):=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ es lineal y su restricción a la bola unitaria cerrada de ℓ_1, dotada con la topología $s(\ell_1,c_o)$, es continua.*

Demostración.

La linealidad de la función f se tiene inmediatamente de la condición de convergencia que se da para $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$, para todo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_1$.

Sea U la bola unitaria cerrada de ℓ_1 y $a=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un elemento fijo de U. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E, dada V una vecindad convexa de cero en E, podemos elegir m_2, μ dos reales positivos tales que $x_n\in 2^{-2}V$, si $n>m_2$, y $x_n\in\mu V$, para todo $1\leq n\leq\mu$. Definamos al conjunto $W:=\{b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in U:|b_n-\alpha_n|<(2\mu m_2)^{-1}\}$, no es difícil ver que W es una vecindad de a en $(U,s(\ell_1,c_o))$. Así, si $b\in W$, tenemos

$$f(b)-f(a)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx_n-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nx_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_nx_n-\alpha_nx_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-\alpha_n)x_n=f(b-a).$$

Por otro lado,

$$f(b-a)=\sum_{n=1}^{m_2}(b_n-\alpha_n)x_n+\sum_{n=m_2+1}^{\infty}(b_n-\alpha_n)x_n\in\sum_{n=1}^{m_2}|b_n-\alpha_n|\,\mu V+2(2^{-2})V,\text{ y}$$

$$\sum_{n=1}^{m_2}|b_n-\alpha_n|\,\mu V+2(2^{-2})V\subset\sum_{n=1}^{m_2}(2\mu m_2)^{-1}\mu V+2^{-1}V=2^{-1}V+2^{-1}V=V.$$

Concluimos que f es continua en a. ∎

Para demostrar uno de los resultados de esta sección necesitamos recordar la siguiente propiedad importante para los espacios de Banach y la cual es bien conocida, por lo que su demostración se puede ver en cualquier libro de Análisis básico.

Lema 140 *Sea $E=(E,\tau_{_d})$ un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ es convergente en E.*

Lema 141 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. y B un disco en E. Si B es compacto ó secuencialmente completo, entonces B es un disco de Banach.*

Demostración.

Para el caso en que B sea secuencialmente completo, es inmediato que E_B es de Banach.

Si B es compacto, tenemos que toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E_B esta contenida en αB, para algún $\alpha > 0$. Esto implica que existe una subred $\left(x_{\varphi(i)}\right)_{i\in I}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x en αB, así, dado que I es un conjunto dirigido y $\varphi : I \to \mathbb{N}$ es una función que mantiene el orden y tal que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ existe $i_o \in I$ tal que cumple $m, n \leq \varphi(i_o)$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ y $i_1 \in I$ tales que $x_n - x_m \in \frac{\varepsilon}{2}B$ y $N \leq \varphi(i_1)$. De esto último tenemos que si $\varphi(i_1) \leq \varphi(k), \varphi(l)$, en particular $x_{\varphi(k)} - x_{\varphi(l)} \in \frac{\varepsilon}{2}B$, por lo que $\left(x_{\varphi(i)}\right)_{i\in I}$ es de Cauchy en E_B; por la proposición (2.3-50) $\left(x_{\varphi(i)}\right)_{i\in I}$ es convergente a x en E_B. Además tenemos que$x_n - x_{\varphi(k)} \in \frac{\varepsilon}{2}B$ siempre que $N \leq n$ y $\varphi(i_1) \leq \varphi(k)$, de aquí que

$$x_n - x = x_n - x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(k)} - x \in \frac{\varepsilon}{2}B + \frac{\varepsilon}{2}B = \varepsilon B,$$

siempre que $N \leq n$, por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge también a x en E_B y así este es de Banach como queríamos. ■

Proposición 142 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E. Entonces, la bipolar B de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es compacta si y sólo si E_B es un espacio de Banach. Más aún, en este caso E_B es metrizable.*

Demostración.

Si B es compacta, entonces, por el lema anterior, B es un disco de Banach y por tanto E_B es de Banach, con lo que tenemos la primera parte de la afirmación.

Supongamos ahora que E_B es de Banach. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en E_B, se sigue que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ es absolutamente convergente en E_B, para todo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$; así, por el lema (3.7-140) la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ converge en E_B y por tanto también converge en E, para todo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Aplicamos el lema (3.7-140) y obtenemos que la función $f : \ell_1 \to (E, \tau)$ definida por $f((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ es lineal y $f|_U$ continua, donde U es la bola unitaria, cerrada de ℓ_1. Dado que $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ es de Banach U es $s(\ell_1, c_o)$-compacto, por Banach-Alaoglu (2.5-75). Esto último y que $f|_U$es continua, implican que $f(U)$ es absolutamente convexo y compacto en E, y además $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(U)$, por tanto $B \subset f(U)$.

Por otro lado,

$$f(U) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leq 1\},$$

y si $y \in f(U)$,donde $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, tenemos que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\|_B \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \, \|x_n\|_B \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leq 1.$$

De donde $B = f(U)$; y así, ya que $f \mid_{(U,s(\ell_1,c_o))}$ es continua B es τ-compacto en E.

Mejor aún, sabemos que si $E_1 = c_o$, entonces $E_1' = \ell_1$. Con lo que $s(\ell_1, c_o) = \sigma(\ell_1, c_o)$. Así, como U es $\sigma(\ell^1, c_o)$-compacto, y dado que es separable y gracias a la proposición (2.5-77), todos los discos $\sigma(\ell_1, c_o)$-compactos son separables y metrizables con respecto a $\sigma(\ell_1, c_o)$. En particular $(U, s(\ell_1, c_o)) = (U, \sigma(\ell_1, c_o))$ es compacto y metrizable. Por lo tanto, E_B también es metrizable. ■

Teorema 143 *Sea $(E, \tau) = E$ un e.l.c. Entonces, son equivalentes:*

- (i) *E es localmente completo.*
- (ii) *La bipolar de toda sucesión localmente nula en E es compacta.*
- (iii) *La bipolar de una sucesión nula en $(E, s(E, E'))$ es compacta en $(E, s(E, E'))$.*
- (iv) *La bipolar de una sucesión nula en E es compacta.*

Demostración.

$(i) \implies (iii)$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E, por tanto también es una sucesión nula en E con respecto a su topología débil. Sea B la envolvente absolutamente convexa y cerrada de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como E es localmente completo, por (3.8-137), E_B es un espacio de Banach, si aplicamos la proposición (3.7-143) tenemos que B es τ-compacta, por tanto también es $s(E, E')$-compacta.

$(iii) \implies (iv)$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E. Denotemos por B a la envolvente absolutamente convexa y cerrada de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E. Entonces, por hipótesis tenemos que B es $s(E, E')$-compacto y por tanto B es un disco de Banach, entonces, por la proposición anterior, tenemos que B también es τ-compacto en E.

$(iv) \implies (ii)$. Esta implicación es fácil de ver, ya que toda sucesión localmente nula es nula en E.

$(ii) \implies (i)$. Sea B un disco en E y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cauchy en E_B. Dado que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, podemos elegir una sucesión creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos tales que $x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \in 2^{-2k} B$.

Definamos ahora a la sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donde $y_k = 2^k(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Ahora, si $k \geq k_o$ tenemos que $y_k \in 2^{-k}B \subset 2^{-k_o}B$, lo cual implica que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E_B. Por (ii), tenemos que si A es la bipolar de $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, entonces A es compacta en E.

Consideremos ahora a la sucesión $z_p = \sum_{k=1}^{p} 2^{-k} y_k$, la cual es una sucesión de Cauchy en E, contenida en A. Así, existe $x \in E$ tal que $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge a x(en E_A).

Como

$$z_p = \sum_{k=1}^{p} 2^{-k} y_k = \sum_{k=1}^{p} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = (x_{n_{p+1}} - x_{n_1}),$$

la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x + x_{n_1}$ en E. Entonces, por (3.7-136)-(iv) tenemos que E es localmente completo. ∎

3.8. Ejemplos.

A continuación enunciaremos algunos ejemplos interesantes sobre las definiciones que hemos dado en este capítulo.

Ejemplo 144 *Nuestro primer ejemplo es el de un espacio de Baire metrizable el cual no es completo.*

Sea $E = \ell_p$, $0 < p < \infty$, y extendamos al conjunto formado por los vectores unitarios en E a una base de Hamel $\mathcal{B}$ en E. Como E es de Baire, por la Proposición (3.1-82), tiene que tener una base no numerable; es decir, $\mathcal{B}$ es no numerable. Así, podemos elegir una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos distintos en $\mathcal{B}\diagdown\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Observemos que si E_k es el subespacio lineal propio generado por

$$\mathcal{B}\diagdown\{x_n : n > k\},$$

este es denso en E, $\forall k \in \mathbb{N}$, y además $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Como E es de Baire, algún E_k es de la segunda categoría en sí mismo, $k \in \mathbb{N}$. Por tanto obtenemos un espacio de Baire E_k que por construcción es metrizable, pero no puede ser completo.

Ejemplo 145 *Sea E el límite inductivo estricto de $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios vectoriales topológicos metrizables y completos.*

Si $E_n \subsetneq E_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces E no puede ser un espacio de Baire. Si este fuera el caso, podemos asumir que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, lo cual implica que algún E_k tiene interior no vacío en E, con lo que tendríamos que $\emptyset \neq int(E_k) \subset E$ y $int(E_k)$ es absorbente en E. Así, $\forall x \in E$, $\exists \mu > 0$ tal que $\mu x \in int(E_k) \subset E_k$ y como E_k es un espacio vectorial $\mu^{-1}(\mu x) = x \in E_k$; con esto tenemos que $E_k = E$. De otra manera, E_k es un subespacio propio de E y por el lema (3.1-82) $int(E_k) = \emptyset$. En ambos casos llegamos a una contradicción. Por tanto E_k no es de Baire.

Un caso particular es considerando a E como el espacio $\mathfrak{D}(\Omega)$ de todas las funciones C^∞ con valores en $\mathbb{C}$ y soporte compacto, definidas en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^r$. Es decir:

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ abierto, sea $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cubierta de Ω formada por subconjuntos compactos de Ω, tales que $K_n \subset int(K_{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathfrak{D}(K_n) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : sop(f) \subset K_n\},$$

con la norma supremo, por lo que podemos considerar a $\mathfrak{D}(K_n)$ *como un espacio metrizable completo. Para* $m \leq n$, $\mathfrak{D}(K_m)$ *es un subespacio lineal topológico propio de* $\mathfrak{D}(K_n)$, *así que*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{D}(K_n) = \mathfrak{D}(\Omega) := \{f \in C^{\infty}(\Omega) : sop(f) \text{ es compacto}\},$$

al cual le damos la topología lineal inductiva, con esto tenemos que $\mathfrak{D}(\Omega)$ *es completo visto como es el límite inductivo estricto de los* $\mathfrak{D}(K_n)$.

Ejemplo 146 *El siguiente ejemplo es el de un espacio completo que no es de Baire, además es localmente completo y no metrizable.*

Sea $(E_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de espacios de Banach, tales que para cada* $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subsetneq E_{n+1}$ *y la norma en* E_{n+1}, *restringida a* E_n *es equivalente a* $\|\cdot\|_n$; *es decir,* $(E_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión inductiva estricta de espacios de Banach.*

Gracias a los teoremas (3.6-117) y (3.6-119) tenemos que E *es completo con su topología lineal inductiva* τ *dada por la familia* $(E_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *De donde,* E *es secuencialmente completo, y por el corolario (3.7-137) tenemos que* E *es localmente completo.*

Ahora, (E, τ) *no es de Baire: Como cada* $(E_n, \|\cdot\|_n)$ *es completo y el límite inductivo es estricto, obtenemos que cada* E_n *es cerrado en* E, *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Por otro lado tenemos que* $E_n \subsetneq E_{n+1}$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *es decir, cada* $(E_n, \|\cdot\|_n)$ *es un subespacio propio de* E. *Así, por el lema (3.1-82),*

$$int(\overline{E_n}) = int(E_n) = \emptyset,$$

con respecto a la topología en E. *Con lo cual* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *es una unión numerable de conjuntos raros en* E, *así obtenemos que* (E, τ) *no es de Baire.*

Por el Teorema de Baire tenemos que un e.l.c. metrizable y completo es un espacio de Baire, por tanto , con este ejemplo tenemos que completo no implica de Baire en general; además, podemos concluir que $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$ *no puede ser metrizable. Así que hemos obtenido un espacio localmente completo que no es de Baire, ni metrizable pero que si es completo.*

Observemos que, un caso muy particular es considerar a E_n *como* $\mathbb{R}^n$ *con su topología euclidiana, y podemos ver que aunque tengamos una familia inductiva de espacios de Banach simples, el límite inductivo no necesariamente es de Baire ni metrizable.*

Ejemplo 147 *Consideremos dos topologías lineales metrizables,* τ_1 *y* τ_2 *en un espacio vectorial* E, *tales que* $\tau_1 \gneqq \tau_2$ *y* τ_2 *es completa. Entonces,*

$$I_E : (E, \tau_1) \to (E, \tau_2)$$

es continua. Así, I_E *extiende a una función lineal suprayectiva de* (E, τ_1) *en* (E, τ_2) *que no puede ser inyectiva, en cuyo caso tendríamos un homeomorfismo y* $\tau_1 = \tau_2$.

Ejemplo 148 *Consideremos al espacio de Banach* $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$. *Denotemos por* B *a la bola unitaria y cerrada en* $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$. *Entonces,* $\mathcal{W} := \{2^{-n}B : n \in \mathbb{N}\}$ *es una palma completante en* $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$, *por lo que* $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$ *es palmeado. Mejor aún,* c_o *dotado con su topología débil* $\sigma(c_o, \ell_1)$ *es palmeado con respecto a la palma* $\mathcal{W}$:

1. $\mathcal{W}$ *es una palma compatible en* c_o, *con respecto a* σ, *ya que para todo* $V \in \mathcal{N}_o(c_o, \sigma)$ *absolutamente convexo y cerrado, tenemos que* $V \in \mathcal{N}_o(c_o, \|\cdot\|_\infty)$, *y por tanto existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $2^{-n}B \subset V$.

2. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* c_o *tal que* $x_n \in 2^{-n}B$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Como* $\mathcal{W}$ *es una palma completante en* $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *es absolutamente convergente y por lo tanto es* $\|\cdot\|_\infty$*-convergente en* c_o, *por el lema (3.7-140). De donde, esta serie también es* σ*-convergente en* c_o. *Por lo que* $\mathcal{W}$ *es completante en* c_o *para* σ.

Ahora, como $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$ *es completo, en particular tenemos que todo disco en* c_o *es un disco de Banach (ver el corolario (3.7-136)). Así que* $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$ *es localmente completo. Pero por el corolario (3.7-136), como* σ *es compatible con la dualidad* $\langle c_o, \ell_1\rangle$, *tenemos que* (c_o, σ) *es localmente completo.*

Ejemplo 149 *Con este ejemplo mostraremos que un espacio palmeado (localmente completo) no necesariamente es completo ni metrizable. Sea* $1 \le p < \infty$, *y consideremos al espacio* $\left(\ell_p, \|\cdot\|_p\right)$ *donde* $\ell_p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ *y* $\|\cdot\|_p : \ell_p \to \mathbb{R}$ *esta definida por: para cada* $x \in \ell_p$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Este espacio, definido así, es un espacio de Banach. Además, se puede ver que su dual cumple:

Para $1 < p < \infty$, $\ell_p' = \left(\ell_p, \|\cdot\|_p\right)' = \ell_q$, *donde* $q > 0$ *y es tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Si $p = 1$, *tenemos que* $\ell_1' = \ell_\infty = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$.

Como $\left(\ell_p, \|\cdot\|_p\right)$ *es de Banach, tenemos que es palmeado y localmente completo, pero por la proposición (3.2.1-94) y el corolario (3.7-136) también tenemos que* $(\ell_p, \sigma(\ell_p, \ell_q))$, *si* $1 < p < \infty$, *y* $(\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty))$ *es palmeado y localmente completo, y por (Diestel[D2])* ℓ_p, *con su respectiva topología débil, no es completo, por tanto no es secuencialmente completo; además no son metrizables.*

Capítulo 4

Condiciones de convergencia de Mackey

En espacios localmente convexos sucede, como hemos visto, que algunas sucesiones convergentes son también convergentes en algún subespacio con respecto a una topología normada; el problema de caracterizar los espacios localmente convexos, para los que toda sucesión covergente a cero es una sucesión Mackey nula, es decir, que satisfacen la condición de convergencia de Mackey, sigue abierto.

En este capítulo consideraremos ciertos tipos de espacios palmeados localmente convexos para establecer sobre ellos condiciones necesarias y suficientes para satisfacer las condiciones de convergencia y convergencia estricta de Mackey, además de brindar otros importantes resultados con ellas.

4.1. Condición de convergencia de Mackey (c.c.M.)

Recordemos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E es localmente convergente ó Mackey convergente a $x \in E$ si existe un disco B en E tal que $x_n \to x$ con la topología normada en E_B; además, si $x = 0$ decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión localmente nula o Mackey nula en E.

El preguntarnos qué espacios satisfacen que toda sucesión nula es una sucesión Mackey nula nos lleva a la siguiente definición:

Definición 150 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Decimos que E satisface la condición de convergencia de Mackey (c.c.M. o c.c.Mackey) si toda sucesión convergente (equivalentemente, nula) es una sucesión Mackey convergente (equivalentemente, Mackey nula).*

En particular, si E es un espacio metrizable localmente convexo, este satisface la condición de convergencia de Mackey, ya que, gracias al lema (3.7-130), para toda sucesión nula $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente y no acotada de reales positivos tales que $(r_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E, de donde, por la proposición (3.7-132), esto es equivalente a que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es nula en E_B para algún disco B en E; es decir, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Mackey nula. Ahora, en la demostración del lema (3.7-130) utilizamos una base numerable y decreciente de vecindades absolutamente convexas de cero, la cual puede ser la palma $\mathcal{W}$ contruida en E como en la proposición (3.6-120); así, como esta base es decreciente podemos ir construyendo tal sucesión, de esta manera y siguiendo la misma idea podemos hacer algo similar para espacios secuencialmente palmeados, ya que en este tipo de espacios una sucesión nula está eventualmente contenida en una colección finita de cadenas.

4.1.1. Una condición suficiente.

A continuación daremos una caracterización para una colección de espacios localmente convexos los cuales satisfacen la condición de convergencia de Mackey.

Consideremos un espacio localmente convexo E, con una palma compatible $\mathcal{W}$, y supongamos que para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión nula en E, tenemos que eventualmente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en alguna colección finita de cadenas de $\mathcal{W}$. Esta definición de espacio secuencialmente palmeado (3.5.1-112) implica que los elementos de $\mathcal{W}$ son "más pequeños"que las vecindades de 0 en E, pero suficientemente grandes para contener a las sucesiones nulas, lo que obligará que cada sucesión nula $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión Mackey nula. Así, tenemos:

Teorema 151 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Si E es secuencialmente palmeado, entonces satisface la c.c.M.*

Demostración.

Asumamos que E es secuencialmente palmeado, y sea $x_n \to 0$ en E.

Por la proposición (3.7-131), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Mackey nula si y sólo si existe una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,\infty)$ tal que $r_n \to \infty$, cuando $n \to \infty$, y $r_n x_n \to 0$ en E. Busquemos una suceción $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cumpla con esto.

Sean $(W_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}, (W_k^{(2)})_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (W_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}$ las cadenas de $\mathcal{W}$ en E, tales que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N_k \in \mathbb{N}$ con $x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} W_k^{(i)}$, $\forall n \geq N_k$. Notemos que por la definición (3.2-85), para cada $i = 1, \dots, m$ y para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$W_{k+1}^{(i)} \subset \frac{1}{2} W_k^{(i)},\ W_{k+2}^{(i)} \subset \frac{1}{2} W_{k+1}^{(i)} \subset \frac{1}{2^2} W_k^{(i)}, \dots$$

De donde obtenemos

$$W_{k+l}^{(i)} \subset \frac{1}{2^l} W_k^{(i)},\ \ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Así, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $l_{k_1} \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{l_{k_1}}} < \frac{1}{k}$. Definamos $W_{l_{k_1}}^{(1)} \equiv W_{k+l_{k_1}}^{(1)}$, entonces tenemos que

$$W_{l_{k_1}}^{(1)} \subset \frac{1}{2^{l_{k_1}}} W_k^{(1)} \subset \frac{1}{k} W_k^{(1)}.$$

De la misma manera, existe $l_{k_i} \in \mathbb{N}$ tal que

$$W_{l_{k_i}}^{(i)} \subset \frac{1}{2^{l_{k_i}}} W_k^{(i)} \subset \frac{1}{k} W_k^{(i)} \ , \ 1 \leq i \leq m.$$

Sea $l_k \equiv \max\{l_{k_i} : i = 1, 2, ..., m\}$. Entonces, existe $N_{l_k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} W_{l_k}^{(i)} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{l_k}} W_k^{(i)} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \frac{1}{k} W_k^{(i)} \subset \frac{1}{k} \bigcup_{i=1}^{m} W_k^{(i)}; \forall n \geq N_{l_k}.$$

Por lo que

$$kx_n \in \bigcup_{i=1}^{m} W_k^{(i)}, \ \ \forall n \geq N_{l_k} \qquad ...[1]$$

Así, podemos elegir $N_{l_{k+1}} \in \mathbb{N}$ tal que satisface $N_{l_{k+1}} > N_{l_k}$, y

$$(k+1)x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} W_{k+1}^{(i)}, \ \ \forall n \geq N_{l_{k+1}} \ ; \qquad ...[2]$$

continuando inductivamente, obtenemos: para todo $M \in \mathbb{N}$ existe $N_{l_{k+M}} \in \mathbb{N}$ tal que $N_{l_{k+M}} > N_{l_{k+M-1}}$, y

$$(k+M)x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} W_{k+M}^{(i)}, \ \ \forall n \geq N_{l_{k+M}}.$$

Ahora definamos $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $r_n = k$, para $N_{l_k} \leq n < N_{l_{k+1}}$ y $r_n = 1$ si $n \leq N_k$. Por construcción, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{k\to\infty} k = \infty$. Resta demostrar que $r_n x_n \to 0$ en E, cuando $n \to \infty$. Para ver esto, sea $U \in \mathcal{N}_o(E)$. Por la compatibilidad de $\mathcal{W}$, existen enteros positivos $k_1, k_2, ..., k_m$ tales que $W_{k_1}^{(1)} \subset U$, $W_{k_2}^{(2)} \subset U$, ..., $W_{k_m}^{(m)} \subset U$. Elijamos $k = \max\{k_i : i = 1, 2, ..., m\}$, y así tenemos

$$\bigcup_{i=1}^{m} W_k^{(i)} \subset U.$$

Más aún, por [1], podemos encontrar $N_{l_k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$r_n x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} W_k^{(i)} \subset U, \text{ para } n \geq N_{l_k}, \text{ por [1]}.$$

Por lo que, $r_n x_n \to 0$ en E, y así $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Mackey nula.
■

Observación : Notemos que por el Teorema (3.6-124), todo límite inductivo secuencialmente retractivo de espacios secuencialmente palmeados satisface la condición de convergencia de Mackey. En particular:

Ejemplo 152 *Sea $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inductiva estricta de espacios de Fréchet. y (E, τ) su límite inductivo (es decir, E es un (LF)-espacio). Entonces, por el Teorema (3.6-124), (E, τ) es secuencialmente palmeado y por tanto satisface la condición de convergencia de Mackey. En particular, todo espacio de Fréchet también satisface la condición de convergencia de Mackey.*

4.1.2. Una condición necesaria.

Con algunas otras hipótesis sobre el espacio E, podemos obtener el recíproco del Teorema (4.1.1-151).

Teorema 153 *Sea $E = (E,\tau)$ un e.l.c. localmente completo y estrictamente palmeado. Si E satisface la c.c.M., entonces E es secuencialmente palmeado.*

Demostración.

Sea $\mathcal{W}$ una palma estricta en E y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E.

Por hipótesis, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Mackey nula; por la proposición (3.7-131) existe una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^+$ creciente no acotada y tal que $(r_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E.

Sea $A := \{r_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, A es acotado en E y, por la proposición (3.7-134), está contenido en algún disco de Banach B de E. Además, A es acotado en el espacio de Banach E_B.

Denotemos por C a la envolvente absolutamente convexa y τ_B-cerrada de A. Así, C es un disco secuencialmente cerrado en E_B y por tanto de Banach. Notemos que, como la inclusión $i : E_C \to E$ es continua tiene gráfica cerrada. Dado que C es acotado en E, de esto se sigue que, por el corolario (3.5-111) del Teorema de Localización, existe $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena $\mathcal{W}$ y una sucesión de esaclares $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $i(C) = C \subset \alpha_k W_k$; además, $r_n x_n \in \alpha_k W_k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como r_n diverge a infinito cuando $n \to \infty$, para $k \in \mathbb{N}$ fijo existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|\alpha_k|}{r_n} < 1$, siempre que $n \geq N_k$.

Así, $x_n \in \frac{|\alpha_k|}{r_n} W_k \subset W_k$, para todo $n \geq N_k$, ya que W_k es balanceada, $\forall k \in \mathbb{N}$. Entonces, $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una cadena en $\mathcal{W}$ tal que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está eventualmente contenida en ella. Por lo tanto, la palma en E es secuencial.

■

Corolario 154 *Sea $E = (E,\tau)$ un e.l.c. localmente completo y estrictamente palmeado. Entonces, E satisface la c.c.M. si y sólo si es secuencialmente palmeado.*

Ejemplo 155 *Consideremos al espacio $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$, este es de Banach, y por el Teorema de Shur (Apéndice-(A.2-(205))) tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\|\cdot\|_1$-convergente a cero si y sólo si es $\sigma(\ell_1,\ell_\infty)$-convergente a 0. Por otro lado, $\sigma(\ell_1,\ell_\infty) \neq \tau_{\|\cdot\|_1}$, de manera más general $\sigma(\ell_1,\ell_\infty)$ no puede ser metrizable, de ser así, tendríamos que ℓ_1 admite una base de vecindades de cero numerable, con respecto a su topología débil, así existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_\infty$ tal que para cada $U \in \mathcal{N}_o(\ell_1, \sigma(\ell_1,\ell_\infty))$ podemos elegir $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ y $N_u \in \mathbb{N}$ tal que*

$$f_1^{-1}(B_\varepsilon(0)) \cap ... \cap f_N^{-1}(B_\varepsilon(0)) \subset U.$$

Para cada $f \in \ell_\infty$, consideramos $f^{-1}(B_1(0)) \in \mathcal{N}_o(\ell_1, \sigma(\ell_1,\ell_\infty))$ y sean $f_1, ..., f_N \in \ell_\infty$ y $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tales que $f_1^{-1}(B_\varepsilon(0)) \cap ... \cap f_N^{-1}(B_\varepsilon(0)) \subset f^{-1}(B_1(0))$, esto implica que $\bigcap_{i=1}^{N} N(f_i) \subset N(f)$ y por el lema (2.1-34) tenemos que f es combinación *lineal de $f_1, ..., f_{N-1}$ y f_N. Ahora, sea $F_m = esp\{f_1, ..., f_m\}$, el cual es de dimensión finita y es un subespacio lineal cerrado de ℓ_∞, más aún, $\ell_\infty = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_m$, y por ser de Baire existe F_m con interior no vacío, así $F_m = \ell_\infty$, lo cual es una contradicción ya que ℓ_∞ no tiene dimensión finita. Por tanto, $(\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty))$ no puede ser metrizable.*

Como $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ es de Banach, es localmente completo y satisface la condición de convergencia de Mackey, pero también, por el corolario (3.7-136), $(\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty))$ es localmente completo, y además satisface la condición de convergencia de Mackey:

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-nula, por el Teorema de Shur, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\|\cdot\|_1$-nula, de donde existe un disco de Banach $B \subset \ell_1$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E_B, pero B es un disco de Banach con respecto a cualquier topología compatible con la dualidad $\langle \ell_1, \ell_\infty \rangle$, así tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Mackey nula en ℓ_1 con respecto a $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$. Además, $(\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty))$ es secuencialmente palmeado, ya que, por la proposición (3.5.1-113), $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ es secuencialmente palmeado con la palma $\mathcal{W}$ que tiene por única cadena a una base de vecindades de cero decreciente y numerable $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por conjuntos absolutamente convexos y tales que $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$; de donde, como $\sigma < \tau_{\|\cdot\|_1}$, $\mathcal{W} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es una palma en $(\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty))$ que hace a este espacio secuencialmente palmeado y por lo tanto satisface la condición de convergencia de Mackey. Entonces, $(\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty))$ es un espacio secuencialmente palmeado, localmente completo y satisface la condición de convergencia de Mackey pero no es metrizable.

4.2. Espacios casi-secuencialmente palmeados y c.c.M.

Como vimos en el Capítulo anterior, un espacio localmente convexo E es secuencialmente palmeado si para cada sucesión nula $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E existe una colección finita de cadenas $\left\{ \left(W_k^{(1)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(W_k^{(2)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, ..., \left(W_k^{(m)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \right\}$ de $\mathcal{W}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N_k \in \mathbb{N}$ para el cual se satisface que $x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} W_k^{(i)}$, siempre que $n \geq N_k$. Podemos utilizar una condición más débil para ver que también se satisface la condición de convergencia de Mackey:

Definición 156 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. palmeado, y sea $\mathcal{W}$ una palma compatible en E. Decimos que E es casi-secuencialmente palmeado si para toda sucesión nula $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E, existe*

$$\left\{ \left(W_k^{(1)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(W_k^{(2)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, ..., \left(W_k^{(m)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \right\}$$

una colección finita de cadenas en $\mathcal{W}$ tales que, dado $k \in \mathbb{N}$, podemos elegir $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} V_k^{(i)}$, siempre que $n \geq N_k$, donde $V_k^{(i)} = \overline{absconv}(W_k)$.

En espacios localmente convexos, ser casi-secuencialmente palmeado es una propiedad que se hereda sin problemas, como veremos en el siguiente Teorema.

Teorema 157 *(a) Si E es un e.l.c. metrizable, entonces es casi-secuencialmente palmeado.*

(b) Sea $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$ secuencialmente retractivo, con E_n cerrado en E, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si E_n es casi-secuencialmente palmeado, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces E también es casi-secuencialmente palmeado.

(c) Si E es un (LF)-espacio estricto, entonces es casi-secuencialmente palmeado.

(d) Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. casi-secuencialmente palmeado y L un subespacio de E. Entonces, L es casi-secuencialmente palmeado.

Demostración.

(a) Sea E un espacio localmente convexo metrizable y $\mathcal{W} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de vecindades del origen en E, formada por conjuntos absolutamente convexos y cerrados. Además, pidamos que $U_{n+1} \subset U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Claramente, $\mathcal{W}$ es una palma compatible en E y por la proposición (3.6-120) E es casi-secuencialmente palmeado.

(b) Sea $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$ un límite inductivo secuencialmente retractivo, con E_n cerrado en E y casi-secuencialmente palmeado.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $\mathcal{W}^{(n)}$ a la palma en E_n que hace a este espacio casi-secuencialmente palmeado. Contruyamos $\mathcal{W}$ la palma en E, como en la demostración de la proposición (3.6-120), la cual es compatible. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E. Así, dado que E es secuencialmente retractivo tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E_{n_o}, para algún $n_o \in \mathbb{N}$. Entonces, podemos elegir $\{\left(W_k^{(n_o,1)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(W_k^{(n_o,2)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, ..., \left(W_k^{(n_o,m)}\right)_{k\in\mathbb{N}}\}$ una colección finita de cadenas en E_{n_o} tales que existe $N_k \in \mathbb{N}$ para el cual $x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} V_k^{(n_o,i)}$, siempre que $n \geq N_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, donde $V_k^{(n_o,i)} = \overline{absconv W_k^{(n_o,i)}}^{\tau_{n_o}} = \overline{W_k^{(n_o,i)}}^{\tau_{n_o}}$, para todo $1 \leq i \leq m$ y $k \in \mathbb{N}$. Pero, como cada E_n es cerrado en E, tenemos que $V_k^{(n_o,i)} \subset \overline{V_k^{(n_o,i)}}^{\tau} \subset \overline{E}_{n_o}^{\tau} = E_{n_o}$. Por otro lado, por la construcción de $\mathcal{W}$ en E, cada cadena de $\mathcal{W}^{(n_o)}$ en E_{n_o} es una cadena de $\mathcal{W}$ en E, de aquí que E es casi-secuencialmente palmeado.

(c) Esta afirmación es inmediata de (b), ya que un (LF)-espacio estricto satisface todas las propiedades que se enuncian en (b).

(d) Sea E un espacio localmente convexo, casi-secuencialmente palmeado y L un subespacio de E. Sea $\mathcal{W}$ una palma compatible en E. Definamos la palma compatible $\mathcal{W}'$ en L donde $W \in \mathcal{W}'$ si y sólo si $W = L \cap W'$, para algún $W' \in \mathcal{W}$, como en la proposición (3.2.1-94). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en L, como $(L, \tau\mid_L)$ es subespacio de (E, τ), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E.

Así, existe

$$\left\{\left(W_k^{(1)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(W_k^{(2)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, ..., \left(W_k^{(m)}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right\}$$

una colección finita de cadenas en $\mathcal{W}$ tales que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} V_k^{(i)}$, siempre que $n \geq N_k$, donde $V_k^{(i)} = \overline{absconv}\,(W_k)$. Por tanto, la colección finita de cadenas en $\mathcal{W}'$,

$$\left\{\left(W_k^{(1,L)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(W_k^{(2,L)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, ..., \left(W_k^{(m,L)}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right\},$$

donde $W_k^{(i,L)} = W_k^{(i)} \cap L$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$, tal que $x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} V_k^{(i,L)}$, con $V_k^{(i,L)} = \overline{absconv W_k^{(i,L)}}^{\tau|_L}$, con la cual L cumple la definición de espacio casi-secuencialmente palmeado. ■

Si en la demostración del Teorema (4.1.1-151), tomamos $V_k^i = \overline{absconv W_k^i}$, y asumimos que el espacio que estamos considerando es casi-secuencialmente palmeado, facilmente obtenemos la demostración de el siguiente Teorema, por lo cual no se lo incluimos aquí.

Teorema 158 *Sea $E = (E, \tau)$ un espacio casi-secuencialmente palmeado. Entonces, E satisface la c.c.M.*

Observemos que del Teorema (4.1.2-153): Si E es localmente completo, estrictamente palmeado, y satisface la condición de convergencia de Mackey, entonces E es secuencialmente palmeado y por tanto es casi-secuencialmente palmeado. Para generalizar este resultado, primero necesitamos introducir la siguiente definición:

Definición 159 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Decimos que E es localmente de Baire si para cada subconjunto no vacío y acotado A de E existe un disco B tal que $A \subset B$, y (E_B, τ_B) es un espacio de Baire.*

Observemos que todo espacio localmente completo es localmente de Baire, ya que $\overline{absconv}(A) = B$ es un disco en E, y por la proposición (3.7-135) $\emptyset \neq E_B$ es un espacio de Banach y por tanto de Baire, además $A \subset B$.

Lema 160 *Sea $E = (E, \tau_E)$ un e.l.c. de Baire, $F = (F, \tau_F)$ un e.l.c. palmeado, con $\mathcal{W}$ su respectiva palma completante, y $T : E \to F$ una función lineal. Entonces, existe una cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$ tal que para cada k, $\overline{T^{-1}(W_k)}$ es una vecindad de cero en E.*

Demostración.

Definamos $W_o = F$; así, $T^{-1}(W_o) = \overline{T^{-1}(W_o)} = E$ es claramente una vecindad de cero y de la segunda categoría en E. Ahora, para cada $k \geq 0$, supongamos que tenemos definido W_k tal que $T^{-1}(W_k)$ es de la segunda categoría en E y $\overline{T^{-1}(W_k)}$ es una vecindad de cero en E. Como

$$W_k \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N},\psi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} mW_{\psi,k+1},$$

tenemos que

$$T^{-1}(W_k) \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N},\psi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} T^{-1}(mW_{\psi,k+1}) = \bigcup_{m\in\mathbb{N},\psi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} mT^{-1}(W_{\psi,k+1}),$$

de donde existe $\psi_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $T^{-1}\left(W_{\psi_k,k+1}\right)$ es de la segunda categoría en E, definamos $W_{k+1} = W_{\psi_k,k+1}$. De manera similar escojamos W_{k+2}, la elección de W_{k+2} implica que $\overline{T^{-1}(W_{k+1})}$ es una vecindad de cero en E, ya que al ser $T^{-1}(W_{k+2})$ de la segunda categoría en E, existen $x \in E$ y U una vecindad de cero tal que $x + U \subset \overline{T^{-1}(W_{k+2})}$, en particular $x \in \overline{T^{-1}(W_{k+2})}$, por lo que

$$U \subset \overline{T^{-1}(W_{k+2})} + \overline{T^{-1}(W_{k+2})} \subset \overline{T^{-1}(W_{k+2}) + T^{-1}(W_{k+2})} \subset \overline{T^{-1}(W_k)},$$

de las propiedades de palma y por ser T lineal. Con esto obtenemos $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena de $\mathcal{W}$ como se pide. ∎

Ahora, utilizando este lema, daremos un recíproco al Teorema previo, bajo esta nueva condición y utilizando espacios palmeados no estrictos.

Teorema 161 *Sea $E = (E,\tau)$ un e.l.c. palmeado y localmente de Baire. Si E satisface la c.c.M., entonces E es casi-secuencialmente palmeado.*

Demostración.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E. Como E satisface la condición de convergencia de Mackey, existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\alpha_n \to \infty$, y $\alpha_n x_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, en E. Sea $A = \{\alpha_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Así, A es acotado y, como E es localmente de Baire, existe $B \subset E$ un disco tal que $A \subset B$ y E_B es un espacio de Baire, además A es acotado en E_B.

Por otro lado, la inclusión $i : E_B \to E$ es lineal y continua, con E_B de Baire y E palmeado. Así, si $\mathcal{W}$ es una palma completante en E, por el lema anterior, existe una cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ tal que $\overline{i^{-1}(W_k)}$ es una vecindad de cero en E_B, por lo que existe una sucesión $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de escalares no cero tales que $B \subset \gamma_k \overline{i^{-1}(W_k)} \subset \gamma_k i^{-1}(\overline{W_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$, donde la última contensión se da por la continuidad de i. Así, $i(B) = B \subset \gamma_k \overline{W_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$; por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\alpha_n x_n \in \gamma_k \overline{W_k} \subset \gamma_k V_k$, donde $V_k = \overline{absconv}(W_k)$.

Esto implica que, para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo, podemos elegir $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|\gamma_k|}{\alpha_n} < 1$, para $n \geq N_k$. De donde tenemos que $x_n \in \frac{|\gamma_k|}{\alpha_n} V_k \subset V_k$, ya que V_k es balanceado. Por lo tanto E es casi-secuencialmente palmeado. ∎

Como consecuencia del Teorema (4.2-158) y el Teorema previo tenemos:

Corolario 162 *Sea $E = (E,\tau)$ un e.l.c. localmente de Baire y palmeado. Entonces, E satisface la c.c.M. si y sólo si E es casi-secuencialmente palmeado.*

4.3. Condición de convergencia rápida.

Ahora queremos considerar espacios localmente convexos que satisfacen la condición de convergencia de Mackey, y que además satisfacen que los discos considerados para la convergencia de cada sucesión convergente (nula) son de Banach. Por lo que estamos tomando espacios que satisfacen una condición más fuerte que la condición de convergencia de Mackey.

Definición 163 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. Decimos que una sucesión Mackey nula $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E es rápidamente convergente a cero en E si existe un disco de Banach B en E tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es nula en E_B.*

Definición 164 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Decimos que E satisface la condición de convergencia rápida (c.c.r.) si toda sucesión τ-convergente a cero en E es rápidamente convergente a cero en E.*

Así, dado que topologías compatibles comparten discos de Banach, es inmediato el siguiente resultado:

Proposición 165 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Si $(E, \sigma(E, E'))$ satisface la c.c.r., entonces (E, τ) satisface la c.c.r.*

Habitualmente, dentro de la bibliografía se suele definir esta propiedad de convergencia rápida como la convergencia de una sucesión Mackey nula en un disco compacto en lugar de sobre disco de Banach en general, ahora veremos que estas dos condiciones son en efecto equivalentes y daremos una más:

Teorema 166 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) E satisface la condición de convergencia rápida.

(b) Para cada sucesión nula $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E existe un disco compacto K en E tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E_K.

(c) E es localmente completo y satisface la condición de convergencia de Mackey (c.c.M.).

Demostración.

(a)$\Longrightarrow$(b). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E. Como E satisface la condición de convergencia rápida, existe B un disco de Banach en E tal que contiene a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es nula en E_B. Ahora, si $C := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}^{oo}$, tenemos que $C \subset B$, por lo que E_C también es de Banach. Por la proposición (3.7-142) tenemos que C es compacto en E_B, y por ende en E.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente nula, por la proposición (3.7-131), existe una sucesión creciente y no acotada $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales positivos tales que $(r_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es nula en E; ahora bien, por lo dicho anteriormente si D es su envolvente absolutamente convexa y cerrada en E, D es compacto en E y disco de Banach.

Veamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en E_D. Sea $\alpha > 0$, como $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y no acotada, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $r_n^{-1} \leq \alpha$, para todo $n \geq N$, y dado que $(r_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ tenemos que $x_n = r_n^{-1} r_n x_n \in \alpha D$, siempre que $n \geq N$, así $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E_D.

Ahora demostremos (b)$\Longrightarrow$(c). Para esto basta ver que E es localmente completo, pues toda sucesión nula, por hipótesis, es localmente nula o Mackey nula. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E. Entonces, $x_n \to 0$ en E_K, para algún disco compacto K en E. Sea

$$\begin{aligned} A &= \overline{absconv}^{\tau_K}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, \text{ y} \\ B &= \overline{absconv}^{\tau}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Así, por definición de A, $A \subset \alpha K$, para algún escalar positivo α, y por tanto A es compacto en E_K; pero además $i : E_K \to E$ es continua, de donde A también es compacto en E. Ahora, claramente $absconv\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$, así que $B \subset A$, por ser A τ-cerrado; de esto se sigue que B compacto en E. De modo que, por el Teorema (3.7-143), E es localmente completo.

Finalmente demostremos (c)$\Longrightarrow$(a). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ una sucesión nula. Como E satisface la condición de convergencia de Mackey, existe B un disco en E tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es nula en E_B, y por ser E localmente completo tenemos que B es de Banach. De donde E satisface la condición de onvergencia rápida. ∎

Corolario 167 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. que satisface la condición de convergencia rápida. Entonces, E es localmente completo.*

Corolario 168 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. metrizable no completo. Entonces, E satisface la condición de convergencia de Mackey pero no la condición de convergencia rápida.*

Demostración.

Por el Teorema (4.2-157) E es casi-secuencialmente palmeado, y por el Teorema (4.2-158) E satisface la condición de convergencia de Mackey. Ahora, si E satisface la condición de co vergencia rápida, entoces, por el corolario anterior E es localmente completo, y por el corolario (3.7-138), esto implica que E es completo, lo que es una contradicción. ∎

Ahora, como una consecuencia directa del Teorema anterior (4.3-167) tenemos:

Corolario 169 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. localmente completo. Entonces, E satisface la condición de convergencia rápida si y sólo si E satisface la c.c.M.*

Los siguientes dos Teoremas son combinaciones del Teorema anterior (4.3-167) y resultados anteriores. Estos nos da una equivalencia para espacios palmeados localmente convexos que satisfacen la condición de convergencia rápida.

Teorema 170 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. palmeado. Entonces, son equivalentes:*

(a) E satisface la condición de convergencia rápida.

(b) E es localmente completo y casi-secuencialmente palmeado.

Demostración.

(a)$\Longrightarrow$(b). En vista del Teorema (4.3-167), como E satisface la condición de convergencia rápida, E es localmente completo y satisface la condición de convergencia de Mackey. Por otro lado, tenemos que E es palmeado y al ser localmente completo también es localmente de Baire; así, por el Teorema (4.2-161), E es casi-secuencialmente palmeado.

(b)$\Longrightarrow$(a). Si E es un espacio casi-secuencialmente palmeado, por el Teorema (4.2-158), E satisface la condición de convergencia de Mackey y si además E es localmente completo, ahora por el Teorema (4.3-167), E satisface la condición de convergencia rápida. ∎

Para nuestro próximo resultado recordemos que un límite inductivo E de espacios localmente convexos es regular si cada conjunto acotado en E esta contenido y es acotado en uno de los espacios que forman el límite inductivo E.

Teorema 171 *Sea $E = (E, \tau)$ un límite inductivo regular de espacios localmente completos palmeados. Entonces, son equivalentes:*

(a) E satisface la condición de convergencia rápida.

(b) E satisface la condición de convergencia de Mackey.

(c) E es casi-secuencialmente palmeado.

Demostración.

Sea $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia inductiva de espacios localmente completos y palmeados, y sea $E = (E, \tau)$ su límite inductivo regular.

Por el corolario (4.3-170), del Teorema (4.3-167), para ver que (a)$\Longleftrightarrow$(b), es suficiente ver que E es localmente completo. Para esto, sea $A \subset E$ acotado. Como $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{ind} E_n$ es regular, tenemos que A esta contenido y es acotado en E_{n_o}, para algún $n_o \in \mathbb{N}$. Por lo que si $B = \overline{absconv}^{\tau_{n_o}} A$, entonces B es un disco de Banach en E_{n_o}, por ser E_{n_o} localmente completo. De modo que B también es un disco de Banach en E, gracias a la continuidad de las funciones $i : E_n \to E_{n_o}$, y $i_{n_o} : E_{n_o} \to E$. Además, $A \subset B$, así que obtenemos que todo conjunto acotado en E esta contenido en un disco de Banach. Por el Teorema (3.7-135), E es localmente completo.

Como E es localmente completo, y de la proposición (3.6-120), E es palmeado, así que, por el Teorema (4.3-171), tenemos (a)$\Longleftrightarrow$(c). ∎

Ejemplo 172 *Con este ejemplo veremos que existen espacios palmeados localmente completos que no satisfacen la condición de convergencia de Mackey, por lo que no satisfacen la condición de convergencia rápida. Consideremos el espacio de Banach $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$. Sabemos que $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$ es localmente completo, al igual que $(c_o, \sigma(c_o, \ell_1))$.*

Además, como $(c_o, \sigma(c_o, \ell_1))$ es palmeado y localmente completo también es localmente de Baire, y por el corolario (4.2-162) del Teorema (4.2-161) tenemos *que* $(c_o, \sigma(c_o, \ell_1))$ *satisface la condición de convergencia de Mackey si y sólo si* $(c_o, \sigma(c_o, \ell_1))$ *es casi-secuencialmente palmeado.*

Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* c_o, *donde* $e_n = (x_1^n, x_2^n, ..., x_m^n, ...)$ *tales que* $x_n^n = 1$ *y* $x_m^n = 0$ *si* $m \neq n$. *Entonces,* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión no nula en* $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$, *ya que* $\|e_n - 0\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^n| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Por lo que* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no converge al origen en* $(c_o, \|\cdot\|_\infty)$. *Pero* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión nula en* c_o *con respecto a* σ, *pues dada* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ *tenemos que* $\langle(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}, e_n\rangle = \alpha_n$ *y* $\alpha_n \to 0$ *en* $\mathbb{R}$*; de donde* $e_n \to o$ *en* (c_o, σ). *Es decir, este espacio tiene sucesiones que son debilmente convergentes, pero que no son* $\|\cdot\|_\infty$*-convergentes. De modo que, en este caso,* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no puede estar eventualmente contenida en la única cadena* $(2^{-n}B)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{W}$, *y así* $(c_o, \sigma(c_o, \ell_1))$ *no puede ser casi-secuencialmente palmeado, lo cual implica que* $(c_o, \sigma(c_o, \ell_1))$ *no satisface la condición de convergencia de Mackey ni la condición de convergencia rápida. Por lo tanto,* $(c_o, \sigma(c_0, \ell_1))$ *es un espacio palmeado localmente completo que no satisface la condición de convergencia de Mackey ni la condición de convergencia rápida.*

Ejemplo 173 *Del ejemplo (4.1.2-155) tenemos que* $(\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty))$ *es localmente completo y satisface la condición de convergencia de Mackey pero no es metrizable,de modo que, por el Teorema (4.3-167),* $(\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty))$ *satisface la condición de convergencia rápida.*

Incluimos ahora algunas aplicaciones de la condición de convergencia de Mackey, especialmente nos interesará considerar la siguiente propiedad:

Definición 174 *Sea* $E = (E, \tau)$ *un e.l.c. Decimos que* E *satisface la propiedad* K *(o es un* K*-espacio) si para toda sucesión nula* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* E *existe una subsucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ *converge en* E.

Proposición 175 *Sea* $E = (E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Entonces,* E *satisface la propiedad* K.

Demostración.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E. Consideremos la subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por: $x_{n_1} := x_1$; x_{n_2} con $n_2 := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq 1\}$; x_{n_3}, con $n_3 := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq 2^{-1}$; inductivamente definimos $x_{n_{k+1}}$, con $n_{k+1} := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq 2^{-k}\}$, lo cual podemos hacer por ser $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula en E. Entonces, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + |x_1|_d < \infty$, así que $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ es absolutamente sumable en E y por el lema (3.7-140) tenemos que es también sumable. Por tanto todo espacio de Banach satisface la propiedad K. ■

Definición 176 *Sea* $E = (E, \tau)$ *un e.l.c. y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* E. *Decimos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión débil Mackey convergente (o simplemente* σ*-Mackey convergente) en* E *si es Mackey convergente en* E *con la topología débil* $\sigma(E, E')$*; es decir, existe* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ *una sucesión creciente y no acotada tal que* $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es* $\sigma(E, E')$*-convergente a* 0 *en* E.

Teorema 177 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c.*

(1) Si E es localmente completo y satisface la c.c.M., entonces satisface la propiedad K.

(2) Toda sucesión en $(E, \sigma(E, E'))$ débil Mackey convergente es Mackey convergente con respecto a τ.

(3) Si E satisface la c.c.M. con respecto a su topología débil, entonces toda sucesión débilmente convergente es τ-convergente en E.

Demostración.

(1) Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en (E, τ). Como E es localmente completo y satisface la condición de convergencia de Mackey, tenemos que existe B un disco de Banach en E tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en E_B. Por la proposición anterior tenemos que E_B satisface la propiedad K, así que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ cuya serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ converge a x en E_B. Como τ_B es más fina que $\tau \mid_{E_B}$ por ser B acotado, la inclusión $i : E_B \to E$ es continua y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ es convergente al mismo x en E.

(2) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión σ-Mackey convergente en E. Así, existe una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^+$, creciente no acotada tal que $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débil convergente a cero en E.

Recordemos que σ y τ comparten conjuntos acotados pues son dos topologías en E compatibles con la dualidad $\langle E, E'\rangle$, por lo que el conjunto

$$\{\alpha_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es τ-acotado ya que es σ-acotado. Ahora, para ver que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Mackey τ-convergente en E, por la proposición (3.7-130), basta encontrar una sucesión de reales positivos $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente y no acotada tal que $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja al origen en E con respecto a la topología τ.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\delta_n := \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}$. Observemos que como la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$, la sucesión $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con verge a cero en $\mathbb{R}$, además si tomamos $\lambda_n := \alpha_n \delta_n = \sqrt{\alpha_n}$, tenemos que $\lambda_n \to \infty$, cuando $n \to \infty$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$.

Veamos que $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero en E con respecto a la topología τ. Sea $U \in \mathcal{N}_o(E, \tau)$ balanceada. Como $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es τ-acotada, existe $\mu > 0$ tal que $\alpha_n x_n \in \mu U$, para todo $n \in \mathbb{N}$; pero además, como $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge a cero también la sucesión $(\mu\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero, entonces existe N_o en $\mathbb{N}$ tal que $|\mu\delta_n| \leq 1$, siempre que $n \geq N_o$. Así que

$$\lambda_n x_n = \delta_n \alpha_n x_n \in \delta_n \mu U \subset U,$$

siempre que $n \geq N_o$. Es decir, $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula en (E,τ). Lo cual significa que en E toda sucesión Mackey σ-convergente es Mackey τ-convergente.

(3) Como (E,σ) satisface la condición de convergencia de Mackey, tenemos que toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ σ-convergente a $x \in E$ es σ-Mackey convergente a x; por el inciso (2) también es τ-Mackey convergente a x en E, y por lo tanto es τ-convergente a x en E.

■

Ejemplo 178 *En el ejemplo (4.1.1-155) vimos que $(\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty))$ es localmente completo y satisface la condición de convergencia de Mackey, por tanto, del Teorema anterior tenemos que este es un K-espacio.*

4.4. Convergencia estricta de Mackey.

Hasta ahora tenemos caracterizados a los espacios palmeados localmente convexos que satisfacen la condición de convergencia de Mackey, ahora queremos caracterizar a otra clase especial de espacios palmeados localmente convexos que satisfacen una condición de convergencia de Mackey más fuerte.

Definición 179 *Sea $E = (E,\tau)$ un e.l.c. Decimos que E satisface la condición de convergencia estricta de Mackey (c.c.e.Mackey o simplemente c.e.M.) si para todo subconjunto acotado A de E, existe un disco $B \subset E$ que contiene a A y tal que las topologías de E y E_B coinciden en A.*

Por la proposición (3.7-134) sabemos que todo espacio metrizable satisface la condición de convergencia estricta de Mackey. Si observamos la demostración de esta proposición tenemos que utilizamos dos condiciones básicas: Si $\{W_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base decreciente de vecindades del origen absolutamente convexas en un espacio metrizable, y A es un subconjunto acotado arbitrario, entonces estas dos condiciones son:

(i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un escalar α_k tal que $A \subset \alpha_k W_k$,

(ii) Para cada $a > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ con $A \cap W_k \subset aB$,

donde B es de la forma $B = \cap\{b_k W_k : k \in \mathbb{N}\}$ para ciertos escalares b_k.

Nuestra meta en este caso es reemplazar en (i) los W_k por elementos de una palma en E, entonces reescribimos (ii) de tal manera que tengamos vecindades de cero U_k absolutamente convexas tales que $A \cap U_k \subset aB$, y además, hacemos que B sea una intersección de multiplos escalares de los elementos de una palma. La ventaja de usar una palma en esta situación es que los elementos de una palma son una familia numerable y pueden ser o no, vecindades del origen, conjuntos acotados, u otro tipo de subconjuntos, con lo que obtenemos resultados más generales.

4.4.1. Suficiencia para la condición de convergencia estricta de Mackey.

La siguiente definición incluye las ideas ya expuestas arriba, tratando de generalizar la idea de base de vecindades de cero que se tiene para espacios metrizables; enseguida, damos un resultado para espacios localmente convexos palmeados en donde demostramos que es suficiente que estos espacios admitan una palma que cumple con la definición de palma compatible con acotados para que el espacio cumpla la condición estricta de Mackey.

Definición 180 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. palmeado y $\mathcal{W}$ una palma completante en E. Decimos que $\mathcal{W}$ es compatible con acotados en E; es decir, el espacio tiene una palma compatible con acotados, si para cada subconjunto acotado A en E, existe una cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$, para la cual tenemos que:*

i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tal que

$$A \subset \alpha_k W_k,$$

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe U_k una vecindad de cero, absolutamente convexa tal que

$$A \cap U_k \subset W_k.$$

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 181 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. palmeado. Si la palma $\mathcal{W}$ es compatible con acotados en E, entonces E satisface la condición de convergencia estricta de Mackey.*

Demostración.

Por $\mathcal{W}$ denotemos a la palma compatible con acotados en E. Supongamos que $A \subset E$ es un conjunto acotado. Elijamos la cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$, y los escalares $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que satisfacen la parte (i) de la definición (4.5.1-180). Construyamos ahora una sucesión $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

Inductivamente definimos: $b_1 \in \mathbb{N}$ fijo tal que $|\alpha_1| < b_1$; para α_2 sea $b_2 \in \mathbb{N}$ fijo tal que $2|\alpha_2| < b_2$;...; para α_n sea $b_n \in \mathbb{N}$ fijo tal que $n|\alpha_n| < b_n$;... Así que $b_k^{-1}|\alpha_k| < \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbb{C}$.

Entonces, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $b_k > 0$, $b_k^{-1}|\alpha_k| < \frac{1}{k}$, y $b_k^{-1}|\alpha_k| \to 0$ cuando $k \to \infty$. Sea $B = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} b_k\overline{W_k} = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \overline{b_k W_k}$.

Probemos que B es un disco; es decir, que B es acotado, absolutamente convexo y cerrado.

Es inmediato ver que B es balanceado, convexo y cerrado. Ahora, para mostrar que B es acotado notemos primero que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} b_k W_k \subset b_m W_m, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Por la compatibilidad de la palma $\mathcal{W}$ con la topología τ en E, tenemos que para toda $U \in \mathcal{N}_o(E,\tau)$ absolutamente convexa existe $k_u \in \mathbb{N}$ tal que $W_n \subset U$ para toda $n \geq k_u$. De esta manera, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} b_k W_k \subset b_n W_n \subset b_n U$ para $n \geq k_u$ y por lo tanto $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} b_k W_k \subset b_{k_u} U \subset bU$ si $b > b_{k_u} > 0$. Así, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} b_k W_k$ es acotado y por tanto también lo es B, como necesitabamos.

Recordemos que para cualquier disco B, la topología normada de E_B es más fina que la topología de E inducida en E_B. Entonces es suficiente demostrar que la topología de E induciada en A es más fina que la topología de E_B inducida en A. Para lo cual se necesita que dado $a > 0$, exista $U_a \in \mathcal{N}_o(E,\tau)$ tal que $A \cap U_a \subset aB$.

Sea $a > 0$. Elijamos $k_o \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_o$ se tiene que $b_k^{-1}|\alpha_k| < a$; es decir, $|\alpha_k| < ab_k$.

Así, $A \subset \alpha_k W_k \subset ab_k W_k$, $\forall k \geq k_o$. ...[1]

Sea $m_o \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-m_o} < ab$, donde $b = \text{mín}\{b_i : i = 1, 2, ..., k_o - 1\}$, y $l \in \mathbb{N}$ tal que $W_l \subset 2^{-m_o} W_{k_o}$, esto es posible gracias a que $W_{k+1} \subset \frac{1}{2} W_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora consideremos $U_l \in \mathcal{N}_o(E,\tau)$ que satisface la parte (ii) de la definición (4.5.1-180). De donde,

$$\begin{aligned} A \cap U_l &\subset W_l \subset 2^{-m_o} W_{k_o} \subset abW_{k_o} \quad \text{y} \\ W_{k_o} &\subset \frac{1}{2} W_{k_o-1} = 2^{-1} W_{k_o-1} \subset 2^{-2} W_{k_o-2} \subset ... \subset 2^{-k_o+1} W_1, \end{aligned}$$

por lo que, de la definición de b tenemos:

$$A \cap U_l \subset abW_{k_o} \subset 2^{-1} abW_{k_o-1} \subset abW_{k_o-1} \subset ab_{k_o-1} W_{k_o-1}.$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} A \cap U_l &\subset abW_{k_o} \subset 2^{-2} abW_{k_o-2} \subset abW_{k_o-2} \subset ab_{k_o-2} W_{k_o-2}, ..., \\ A \cap U_l &\subset abW_{k_o} \subset 2^{-k_o+1} abW_1 \subset abW_1 \subset ab_1 W_1. \end{aligned}$$

Sea $U_a = U_l$, entonces $A \cap U_l = A \cap U_a \subset A$ y de lo anterior $A \cap U_a \subset ab_k W_k$ para $1 \leq k \leq k_o$.

Finalmente, junto con [1], tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$A \cap U_a \subset ab_k W_k.$$

De aquí que $A \cap U_a \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} ab_k W_k = a \bigcap_{k\in\mathbb{N}} b_k W_k \subset a \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{b_k W_k} = aB$. ■

Observación : Evidentemente en la definición (4.5.1-181), podemos utilizar $\overline{W_k}$, la (E,τ)-cerradura de W_k, en lugar de W_k, y la demostración anterior para este caso sería igual, pues se tiene que B es cerrado, con esto y junto con el lema (4.2-160) tenemos un resultado similar para espacios palmeados de Baire.

Corolario 182 *Sea $E = (E,\tau)$ un e.l.c. de Baire y $\mathcal{W}$ una palma compatible en E. Entonces, E satisface la condición de convergencia estricta de Mackey.*

Demostración.

Como E es un espacio palmeado de Baire, y la función identidad $I : E \to E$ es lineal, por el lema (4.2-160), existe una cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\overline{I^{-1}(W_k)} = \overline{W_k}$ es una vecindad de cero, para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo que es fácil ver que estas vecindades satisfacen los requerimientos de la observación anterior. ∎

Para el siguiente resultado necesitamos recordar que un espacio es secuencialmente palmeado si tiene una palma compatible $\mathcal{W}$ de conjuntos balanceados y convexos tal que a cada sucesión nula $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio le corresponde una colección finita de cadenas, $\{(W_k^1)_{k\in\mathbb{N}}, (W_k^2)_{k\in\mathbb{N}}, ..., (W_k^m)_{k\in\mathbb{N}}\}$ de $\mathcal{W}$ para las cuales: dada $k \in \mathbb{N}$ existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} W_k^i\ ,\ \ \forall n \geq N_k.$$

Dada esta definición podemos notar que es natural que una palma compatible con acotados sea secuencial, y en realidad la demostración de esto es sencilla.

Proposición 183 *Sea $E := (E, \tau)$ un e.l.c. con $\mathcal{W}$ una palma compatible con acotados. Entonces, E es secuencialmente palmeado.*

Demostración.

Empecemos por considerar una sucesión nula $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio E. Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, y por $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ denotemos a la cadena en $\mathcal{W}$ que cumple con la definición (4.5.1-181) para el conjunto acotado A.

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$ escojamos $U_k \in \mathcal{N}_o(E)$ balanceada y convexa tal que satisface la parte (ii) de la definición de palma compatible con acotados. Al mismo tiempo, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_k$, $x_n \in U_k$, por ello

$$x_n \in A \cap U_k \subset W_k,\ \ \forall n \geq N_k,$$

de donde, E es secuencialmente palmeado. ∎

Para ver un ejemplo interesante de que una palma puede ser "secuencial"sin ser compatible con acotados, necesitamos algunas definiciones y lemas que pueden ser consultadas en el Apéndice A-(A.2):

Ejemplo 184 *Mostraremos un espacio (DF) que satisface la c.c.Mackey pero no satisface la c.e.Mackey.*

Para la costrucción de tal espacio:

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach no separable y reflexivo; y $U = \overline{B_1(0)}$.

Claramente tenemos que las topologías fuerte, τ_β, de Mackey, τ_μ, de la norma, $\tau_{\|\cdot\|}$, y τ_ι coinciden en E.

Consideremos ahora la topología τ_γ en E de la convergencia uniforme sobre conjuntos acotados y separables de E'. Por la observación (A.2-215) del Apéndice A tenemos que (E, τ_γ) es un espacio (DF) no-cuasi barrilado. Por lo tanto:

$$\sigma \subseteq \tau_\gamma \subsetneq \tau_\beta = \tau_\mu = \tau_\iota = \tau_{\|\cdot\|},$$

por lo que τ_γ es compatible con la dualidad.

Veamos que (E, τ_β) satisface la condición de convergencia de Mackey:
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión τ_γ-nula y $L = espan\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ya que E es un espacio de Banch-Mackey, por ser localmente completo, la proposición (A.2-213) nos garantiza que τ_γ y τ_β coinciden en L. Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es τ_β-nula y existe un disco de Banach en E, podemos tomar al mismo U, donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es τ_{U}-nula.
Veamos ahora que (E, τ_γ) no satisface la condición estricta de Mackey: Para esto, supongamos que si la satisface, entonces por ser $\{nU\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fundamental de acotados en E, existe $P \in \mathbb{N}$ tal que E_{PU} y τ_γ inducen la misma topología en U, y de acuerdo con el lema (A.2-214), concluimos que $\tau_\gamma = \tau_{\|\cdot\|}$, lo cual es absurdo.

Por último, notemos que en particular, en vista del Teorema (4.5.1-182) y de la proposición (3.6-128), todo límite inductivo E (b.r.) de una familia inductiva de espacios localmente convexos que admiten una palma compatible con acotados satisface la condición de convergencia estricta de Mackey.

4.4.2. Algunas condiciones necesarias.

En esta sección, demostraremos que si un espacio es localmente completo y estrictamente palmeado, entonces la condición de convergencia estricta de Mackey implica la existencia de una palma compatible con acotados. Siendo menos exigentes en las hipótesis, si consideramos un espacio localmente de Baire y palmeado podremos obtener un resultado similar utilizando las cerraduras de los elementos de una cadena.

Teorema 185 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. localmente completo, estrictamente palmeado y tal que satisface la condición de convergencia estricta de Mackey (c.e.M.). Entonces, E admite una palma compatible con acotados.*

Demostración.
Sea E un espacio estrictamente palmeado, localmente completo y A un subconjunto acotado de E. Denotemos por $\mathcal{W}$ a la palma estricta en E.
Supongamos que E satisface la condición de convergencia estricta de Mackey. Entonces, en E existe un disco B tal que $A \subset B$ y las topologías de E_B y E coinciden en A.
Como E es localmente completo, E_B es un espacio de Banach. Por otro lado, la función inclusión

$$id : E_B \to E$$

es continua, así que tiene la gráfica cerrada.
Como $\mathcal{W}$ es estricta, por el corolario (3.5-111) del Teorema de Localización, se puede considerar una cadena $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la palma en E, para la cual existe $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tal que

$$A \subset B = id(B) \subset \alpha_k W_k$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, por lo que se cumple la parte (i) de la definición de palma compatible con acotados.

Para ver la parte (*ii*), para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $b_k > 0$ tal que $b_k |\alpha_k| < 1$, donde α_k es como arriba. De la condición de convergencia estricta de Mackey, sabemos que se puede elegir una vecindad de 0, balanceada y convexa U_k en E tal que $A \cap U_k \subset b_k B$, así que

$$A \cap U_k \subset b_k B \subset b_k \alpha_k W_k \subset W_k,$$

pues asumimos por definición que cada W_k es balanceado y convexo. Por lo tanto $\mathcal{W}$ es compatible con acotados en E, con lo que termina la demostración del Teorema. ■

Así, del Teorema anterior y el Teorema (4.5.1-182), tenemos la siguiente equivalencia:

Teorema 186 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. estrictamente palmeado, localmente completo. Entonces, E satisface la condición estricta de Mackey si y sólo si tiene una palma compatible con acotados.*

Observemos que se puede obtener una "versión cerradura"de el Teorema anterior, aplicable a situaciones donde los espacios no son del todo localmente completos, como veremos en el siguiente resultado.

Recordemos que un espacio E es localmente de Baire si para cada subconjunto acotado A de E, existe un disco B con $A \subset B$, tal que E_B es un espacio de Baire. Además, observemos que la colección de todos los espacios localmente de Baire incluyen propiamente a todos los espacios localmente completos.

Teorema 187 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. localmente de Baire y palmeado, con $\mathcal{W}$ una palma completante en E. Si E satisface la c.e.M., entonces a cada subconjunto acotado A en E, le corresponde una cadena $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$, y escalares α_k $(k \in \mathbb{N})$ tales que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene lo siguiente:*

1) $A \subset \alpha_k \overline{W_k}$,

2) existe $U_k \in \mathcal{N}_o(E, \tau)$ absolutamente convexa tal que $A \cap U_k \subset \overline{W_k}$.

Demostración.

Sea $A \subset E$ acotado, existe $B \subset E$ un disco tal que E_B es un espacio de Baire, $A \subset B$, A es acotado en E_B, y además $\tau_{E_B} |_A = \tau |_A$.

Consideremos a la función inclusión

$$id : E_B \to E,$$

esta es lineal y continua, aplicando el lema (4.2-160), tenemos como consecuencia que existe $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una cadena en $\mathcal{W}$ tal que $A \subset B = id(B) \subset \alpha_k \overline{W_k}$, lo cual implica

$$A \subset \alpha_k \overline{W_k}.$$

Por lo que se cumple (1).

Ahora, demostraremos (2): Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $b_k > 0$ t.q. $b_k |\alpha_k| < 1$, con α_k como arriba. Como E satisface la c.e.M., podemos elegir $U_k \in \mathcal{N}_o(E, \tau)$ balanceada y convexa, para cada $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$A \cap U_k \subset b_k B \cap A \subset b_k |\alpha_k| \overline{W_k} \subset \overline{W_k}.$$

Concluyendo así la parte (2). ∎

Apéndice A

Preliminares

Para poder obtener todos los resultados de este trabajo, algunas veces se utilizaron teoremas u otros resultados en las demostraciones; es por este motivo que se enunciarán los más importantes, considerando siempre a E como un espacio vectorial topológico, en caso contrario lo especificaremos.

A.1. Algebra y Topología.

En esta sección daremos algunas definiciones que regularmente se dan en un curso básico de Algebra, Algebra lineal y Topología, y que aquí utilizamos, además de dar algunos resultados interesantes.

Sean E, F, G espacios vectoriales.

Un subconjunto S del espacio vectorial E es linealmente independiente si, para todo subconjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de S y $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ de $\mathbb{C}$, tenemos $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ siempre que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. En otro caso diremos que S es linealmente dependiente.

Sea $\Im(E)$ la familia de todos los subconjuntos linealmente independientes de E, ordenada por inclusión. Entonces:

Definición 188 *Decimos que todo elemento maximal en $\Im(E)$ es una base de Hamel para E.*

Sea $\{E_j\}_{j\in J}$ una familia de espacios vectoriales. Entonces, el correspondiente producto

$$\prod_{j\in J} E_j := \{(x_j)_{j\in J} : x_j \in E_j, \forall j \in J\}$$

es un espacio vectorial con respecto a las operaciones $(x_j)_{j\in J} + (y_j)_{j\in J} := (x_j + y_j)_{j\in J}$ y $\lambda \cdot (x_j)_{j\in J} := (\lambda x_j)_{j\in J}$, para todo $(x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} E_j$, y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definición 189 *Sea $E = (E, \tau)$ un espacio topológico. Decimos que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ es una red en E si Δ es un conjunto dirigido y $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \subset E$. Además, la red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ es τ-convergente a $x \in E$ si y sólo si, por definición, para toda vecindad U_x de x existe $\alpha_o \in \Delta$ tal que $x_\alpha \in U_x$, siempre que $\alpha \geq \alpha_o$.*

Proposición 190 *Sea $E = (E, \tau)$ un espacio topológico y K un subconjunto de E. Entonces, K es compacto si y sólo si toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \subset K$ tiene una subred convergente $\left(x_{\varphi(i)}\right)_{i\in I}$ digamos a $x \in K$ en E.*

Definición 191 *Una función $B : E \times F \to G$ es una función bilineal (forma bilineal) si las "funciones parciales"*

$$B(x_o, \cdot) : F \to G, \ y \longmapsto B(x_o, y) \quad \text{y} \quad B(\cdot, y_o) : E \to G, \ x \longmapsto B(x, y_o)$$

son lineales, para todo $x_o \in E$ y todo $y_o \in F$.

Las formas lineales $E \times F \to G$ forman un subespacio $\pounds(E, F; G)$ de $G^{E\times F}$. Si $G = \mathbb{C}$, escribiremos $\pounds(E, F)$ en lugar de $\pounds(E, F; \mathbb{C})$. Los elementos de este subespacio son llamados formas bilineales en $E \times F$.

Proposición 192 *Sea E un espacio vectorial topológico. Entonces, E es de Hausdorff si y sólo si $\{0\}$ es cerrado en E.*

Proposición 193 *Sean $E = (E, \tau_E)$, $F = (F, \tau_F)$ espacios topológicos, con F de Hausdorff. Si $f : E \to F$ es una función continua, entonces $G_f := \{(x, f(x)) : x \in E\}$ es cerrado en $E \times F$ con respecto a su topología producto.*

Demostración. Sea $(x, y) \in E \times F - G_f$. Así, $y \neq f(x)$. Como $y, f(x) \in F$ y F es de Hausdorff, podemos encontrar $V \in \mathcal{N}_y(F)$ y $U \in \mathcal{N}_{f(x)}(F)$ tales que $V \cap U = \emptyset$. Como f es continua, tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en E y es tal que $x \in f^{-1}(U)$, de donde $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}_x(E)$. Luego entonces, $f^{-1}(U) \times V \subset E \times F$ es abierto y $f^{-1}(U) \times V \subset E \times F - G_f$, pues si $(z, w) \in f^{-1}(U) \times V$ obtenemos que $f(z) \in U$ y $w \in V$, de donde $f(z) \neq w$. ∎

Proposición 194 *Sea E un e.v.t. con $\mathcal{N}_o(E)$ su base de vecindades de 0.*

1. *Si $M \subset E$, entonces $\bar{M} = \bigcap\limits_{U\in\mathcal{N}_o} M + U$.*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $M \subset E$, entonces $\overline{\lambda M} = \lambda\overline{M}$.*

Demostración. La desmostración de esta proposición es fácil de ver:

1. $x \in \bar{M} \iff (x - U) \cap M \neq \emptyset, \forall U \in \mathcal{N}_o$.

Pero esto pasa si y solamente si $x \in M + U$, $\forall U \in \mathcal{N}_o$; lo cual es equivalente a que $x \in \bigcap\limits_{U\in\mathcal{N}_o} M + U$.

2. Utilizando (1) tenemos que $\overline{\lambda M} = \bigcap\limits_{U\in\mathcal{N}_o} \lambda M + U = \bigcap\limits_{U\in\mathcal{N}_o} \lambda\left(M + \frac{1}{\lambda}U\right) =$

$\lambda\left(\bigcap\limits_{U\in\mathcal{N}_o} M + \frac{1}{\lambda}U\right) = \lambda\overline{M}$. ∎

Definición 195 *Sean E y F espacios topológicos. Decimos que una función $f : E \to F$ es abierta si mapea conjuntos abiertos de E en conjuntos abiertos de F.*

De esta manera, una función lineal entre espacios vectoriales topológicos es abierta si y sólo si mapea vecindades de 0 en vecindades de 0.

Sean E un e.v.t., $F \leq E$ un subespacio y

$$\begin{array}{ccc} \pi & : & E \to E/F \\ x & \longmapsto & [x] = x + F \end{array}$$

la función cociente. La topología cociente $\widehat{\tau}$ en E/F se define como: $U \subset E/F$ es $\widehat{\tau}$-abierto si y sólo si, por definición, $\pi^{-1}(U)$ es abierto en (E, τ).

Observese que si $M \subset E$, entonces $\pi(M) = M+F$, por lo que $\pi^{-1}(M+F) = \pi^{-1}(\pi(M)) = \cup_{y\in F} y + M$:

Por una parte, si $y \in F$, entonces $\pi(y + M) \subset \pi(M)$, de donde $y + M \subset \pi^{-1}(\pi(M))$. Por otro lado, $z \in \pi^{-1}(M + F) \Longrightarrow z + F \in M + F \Longrightarrow z + F = x + F$, para algún $x \in M$; luego entonces, $[z] = [x]$, y esto ocurre si y sólo si $z - x \in F$. Entonces $z \in x + F$, lo cual indica que $z \in M + y$, para algún $y \in F$. esto último es lo que se queríamos.

De las propiedades de espacio vectorial topológico de E, y de la estructura algebraica de E/F se tiene que la topología cociente $\widehat{\tau}$ en E/F también es vectorial topológica. Además, π manda conjuntos abiertos en conjuntos abiertos.

Proposición 196 *$(E/F, \widehat{\tau})$ es un e.v.t., y π es una función abierta. Además $\widehat{\tau}$ es de Hausdorff si y sólo si F es un subespacio cerrado en E.*

Demostración. Sabemos que $\widehat{M} \subset E/F$ es $\widehat{\tau}$-abierto si y sólo si $\pi^{-1}(\widehat{M}) \subset E$ es τ-abierto. Así, si $M \subset E$ es τ-abierto, tenemos que $\pi(M)$ es $\widehat{\tau}$-abierto en E/F, ya que $\pi^{-1}(\pi(M)) = \bigcup_{y\in F} y + M$. Por lo tanto π es abierta.

Sea $\mathcal{N}_0(E)$ la base de vecindades abiertas y balanceadas de 0 en (E, τ). Entonces, $[a] + \pi(\mathcal{N}_0(E))$ es una base de vecindades de $[a]$ en $(E/F, \widehat{\tau})$, para todo $[a] \in E/F$. Donde $\pi(\mathcal{N}_o(E))$ satisface:

1) Si $V \in \pi(\mathcal{N}_o(E))$, V es balanceado y absorbente, por ser π lineal y continua.

2) Para toda $V'+V' \subset \pi^{-1}(W)$, de donde $\pi(V' + V') \subset \pi(V')+\pi(V') \subset W$.

Entonces, $\widehat{\tau}$ es una topología lineal.

Si $\widehat{\tau}$ es Hausdorff, $\{0\} \subset E/F$ es $\widehat{\tau}$-cerrado, así que $N(\pi) = F$ es τ-cerrado. Si F es τ-cerrado y $x \in E/F - \{0\}$, podemos encontrar $U \in \mathcal{N}_o(E)$ tal que $(x+U) \cap F = \emptyset$, de donde $\pi(x) \notin \pi(U)$. Por lo que $\pi(x) + \pi(U) \in \mathcal{N}_{\pi(x)}(E/F)$ y es tal que $\pi(x) + \pi(U) \subset E/F - \{0\}$. En consecuencia, $\{0\}$ es $\widehat{\tau}$-cerrado en E/F, y así $\widehat{\tau}$ es de Hausdorff. ■

Observación 197 *Como vimos en el Capítulo I, si $E = (E, \tau)$ es un e.l.c. y $\mathcal{N}_o(E)$ es una base de vecindades de cero en E formada por conjuntos absolutamente convexos, tenemos que $\Gamma := \{\rho_U : U \in \mathcal{N}_o(E)$, donde ρ_U es la seminorma* *de Minkowski de $U\}$ es una familia dirigida de seminormas para la topología τ en E.*

Para $U \in \mathcal{N}_o(E)$, definamos $N(U) := N(\rho_U) = \rho_U^{-1}(0)$, el cual es un subespacio cerrado de E, ya que ρ_U es continua. Mostremos que $\rho_U^{-1}(0) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}U$:

Si $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}U$, entonces $x = \frac{1}{n}y_n$, donde $y_n \in \frac{1}{n}U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\rho_U(x) \leq \frac{1}{n}\rho_U(y_n) \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\rho_U(x) = 0$; es decir, $x \in \rho_U^{-1}(0)$. A la inversa, sea $x \in \rho_U^{-1}(0)$; esto significa que $\rho_U(x) = 0$, de donde $x \in \rho_U^{-1}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{z \in E : \rho_U(z) \leq \frac{1}{n}\} = \frac{1}{n}U$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}U$.

Consideremos al espacio cociente, que en este caso es de Hausdorff, $E_{(U)} := E/N(U)$, y definamos la norma:

$$\|\cdot\|_U : E_{(U)} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\};\ \|x + N(U)\|_U := \rho_U(x).$$

La cual esta bien definida, pues $x+N(U) = y+N(U)$si y sólo si $x-y \in N(U)$, es decir, $|\rho_U(x) - \rho_U(y)| \leq \rho_U(x-y) = 0$, por tanto $\rho_U(x) = \rho_U(y)$. Además, es una seminroma por como se definió, y se cumple que $\rho_U(x) = 0$ si y solamente si $x \in N(U)$, lo cual pasa si y sólo si $x = [0]$. Así, $(E_{(U)}, \|\cdot\|_U)$ es un espacio normado.

De esta manera, definimos a la función cociente canónica

$$\Phi_U : E \to E_{(U)};\ x \longmapsto x + N(U) = [x] = \Phi_U(x),$$

y dotamos a $E_{(U)}$ con la topología cociente $\tau_{(U)}$. Entonces, Φ_U es claramente una función lineal y afirmamos que es $(\tau, \tau_{(U)})$-continua:

$$B_{\|\cdot\|_U} = \{[x] : \rho_U(x) \leq 1\} = \{[x] : x \in U\},$$

por lo que $\Phi_U^{-1}(B_{\|\cdot\|_U}) = U \in \mathcal{N}_o(E)$. Ahora, llamemos $\widetilde{E_{(U)}}$ a la compleción de $E_{(U)}$. Entonces, la función inclusión $E_{(U)} \hookrightarrow \widetilde{E_{(U)}}$ es $(\tau_{(U)}, \tilde{\tau}_{(U)})$-continua. De donde $\Phi_U : E \to \widetilde{E_{(U)}}$ es una función continua.

Definición 198 *Sea E un e.l.c. Decimos que una función q de E en los reales no negativos es una q-norma si satisface lo siguiente*

1. *$q(\lambda x) \leq q(x)$, para todo $x \in E$.*
2. *$\lim\limits_{n\to\infty} q\left(\frac{1}{n}x\right) = 0$, para todo $x \in E$.*
3. *$q(x+y) \leq q(x) + q(y)$, $\forall x, y \in E$.*
4. *$q(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.*

Teorema 199 *Para todo espacio $E = (E, \tau)$, son equivalentes:*

1. *E es metrizable.*

2. *E es Hausdorff y tiene una base de vecindades de 0 numerable.*

3. *Existe una q-norma en E tal que $\tau = \tau_{\{q\}}$.*

Definición 200 *Sea E un e.v.t. y A un subconjunto de E. Decimos que A es precompacto si, para toda vecindad $U \in N_o(E)$, podemos encontrar un subconjunto finito M de E tal que $A \subset M + U$.*

En la definición anterior, podemos considerar solamente a U como una vecindad que está en una base de vecindades de cero en E fija.

Definición 201 *Dado $B \subset E$; decimos que B es relativamente compacto en E, si $\bar{B}$ es compacto en E.*

Teorema 202 *Sea E un e.v.t. y $\grave{E}$ su compleción. Para todo subconjunto A de E, son equivalentes:*

1. *A es precompacto en E.*
2. *A es relativamente compacto en $\grave{E}$.*

Proposición 203 *Sea $(E_j)_{j \in J}$ una familia de espacios vectoriales topológicos. Un subconjunto A de ΠE_j es precompacto si y sólo si $\pi_k(A) \subset E_k$ es precompacto, $\forall k \in J$.*

Definición 204 *Dada una pareja $(E, \leq)$, decimos que es un conjunto parcialmente ordenado si E es un conjunto y $\leq$ es una relación de oreden en E.*

Lema 205 (de Zorn) *Sea $(E, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado no vacío, si toda cadena C en E tiene una cota superior en E, entonces E tiene elementos maximales.*

A.2. Análisis Funcional.

Notación 206 *A lo largo de todo el trabajo se usa la siguiente notación.*

1. *Por $\mathfrak{L}(E, F)$ denotamos al conjunto de todas las funciones lineales de E en F.*
2. *Escribiremos $\mathcal{L}(E, F)$ para denotar al conjunto de todos las funciones lineales y continuas de E en F.*

Teorema 207 (Shur) *Consideremos el espacio $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_1$. Entonces, $x_n \to 0$ en $\|\cdot\|_1$ si y sólo si $x_n \to 0$ con respecto a σ.*

Definición 208 *Sea (E, τ) un e.l.c. Decimos que (E, τ) es de Fréchet si este es metrizable y completo.*

Definición 209 *Sea $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inductiva deespacios de Fréchet. Entonces, al límite inductivo de la familia $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lo llamamos un (LF)-espacio.*

Definición 210 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. y $U \subset E$.*

1. Decimos que U es bornívoro si para todo subconjunto acotado A de E existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset \lambda U$.

2. Decimos que una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos acotados en E es una sucesión fundamental de conjuntos acotados (o simplemente f.s.b.) en E si todo subconjunto acotado A de E esta contenido en B_m, para algún $m \in \mathbb{N}$, inclusive podemos asumir que $2B_{n+1} \subset B_n$.

3. Si U es un barril en E y es tal que existe una sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecindades absolutamente convexas y cerradas del origen en E tales que $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, decimos que U es un $\aleph_o$-barril.

Definición 211 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Decimos que E es $\aleph_o$-casi barrilado si todo $\aleph_o$-barril bornívoro es una vecindad de cero.*

Definición 212 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Decimos que E es un espacio (DF) si tiene una (f.s.b.) y es $\aleph_o$-casibarrilado.*

Definición 213 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Decimos que E es barrilado si todo barril en E es una vecindad del origen.*

Lema 214 *Sea $E = (E, \tau)$ un e.l.c. Entonces E es $\aleph_o$-barrilado si y sólo si todo subconjunto acotado de $(E', \mathfrak{b}(E', E))$, el cual es la unión numerable de conjuntos E-equicontinuos también es E-equicontinuo.*

Proposición 215 *Sea (E, τ) un (DF)-espacio. Si L es un subespacio separable de (E, τ), entonces $b^*(E, E')$ y τ inducen la misma topología en L.*

Lema 216 *Sea τ_1, τ_2 dos topologías Hausdorff en E. Sea $U \in \mathcal{N}_o(\tau_1)$ y denotemos por τ_1' y τ_2' a las topologías en U inducidas por τ_1 y τ_2, respectivamente. Entonces*

i) $\tau_2' \leq \tau_1' \Longrightarrow \tau_2 \leq \tau_1$

ii) $\tau_1' \leq \tau_2' \Longrightarrow \tau_1 \leq \tau_2$

Observación 217 *Sea E un espacio de Banach, reflexivo, no separable y τ la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos acotados separables de E'. Dado que la bola unitaria cerrada de E es débil compacta, (E, τ) es un (DF)-espacio, el cual es la unión de una sucesión de conjuntos débil-compactos pero no es cuasibarrilado. En este caso, (E, τ_μ) siempre es barrilado.*

Bibliografía

[B1] C. Bosch, T. Gilsdorf, Conjuntos Acotados en Espacios Localmente Convexos, ITAM (1993)

[B2] J. Burzyk, T. Gilsdorf, *Some remarks about Mackey Convergence*, Int. Jour. Math. & Math. Sci. 18 no. 4 (1995) 659-664

[C1] J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, 2^{da}ed., Springer-Verlag (1990)

[D1] M. Dewilde, Closed Graph Theorems and Webbed Spaces, Pitman (1978)

[D2] J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces, Springer-Verlag (1984)

[G1] A. Garcia, *On Sequentially Retractive Inductive Limits*, Int. Jour. Math. & math. Sci. no. 17 (2003) 1067-1072

[G2] T. Gilsdorf, *The Mackey convergence condition for spaces with webs*, Int. Jour. Math. & Math. Sci. 11 no. 3 (1988) 473-484

[G3] T. Gilsdorf, *Mackey convergence and quasi-sequentially webbed spaces*, Int. Jour. Math. & Math. Sci. 14 no. 1 (1991) 17-26

[G4] T. Gilsdorf, *Boundedly compatible webs and strict Mackey convergence*, Math. Nachr. 159 (1992) 139-147

[J1] H. Jarchow, Locally Convex Spaces, B. G. Teubner Stuttgar, (1981)

[K1] G. Köthe, Topological Vector Spaces I, Springer (1985)

[P1] P. Perez-Carreras, J. Bonet, Barrelled Locally Convex Spaces, North Holland Math. Studies 131 (1987)

[R1] A. P. Robertson, W. J. Robertson, Topological Vector Spaces, Cambridge Univ. Press (1973)

[R2] W. J. Robertson, *On the closed graph theorem and spaces with webs*, Porc. London Math. Soc. 24 (1972) 692-738

[R3] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill (1976)

[V1] M. VALDIVIA, *Quasi-LB Spaces*, J. London Math. Soc. (2) 35 (1987) 149-168