UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN Y EL GRAN TEOREMA DE PICARD.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICO

PRESENTA:

JUAN JOSE ALBA GONZALEZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"El teorema del mapeo de Riemann y el gran teorema de Picard"

realizado por Juan José Alba González

con número de cuenta 09757279-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. José Antonio Gómez Ortega
Propietario	Dr. Javier Páez Cárdenas
Propietario	M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza
Suplente	Dra. María de la Paz Álvarez Scherer
Suplente	Mat. Edgar Raúl Acosta Villaseñor

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica
Coordinador de la Carrera de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
MATEMATICAS

El teorema del mapeo de Riemann
y
el gran teorema de Picard

Juan José Alba González

A mis padres.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia, a mis amigos, a mis maestros, a la OMM y a la UNAM.

Introducción

El teorema del mapeo de Riemann es uno de los más importantes del análisis complejo. Éste nos permite reducir el estudio de funciones holomorfas definidas en regiones simplemente conexas al estudio de las funciones holomorfas definidas en un disco.

El gran teorema de Picard es una fuerte generalización del teorema de Liouville y una mejora impresionante sobre el teorema de Casorati-Weierstrass. El teorema de Liouville dice que una función entera acotada es constante mientras que una consecuencia del teorema de Picard es que basta que omita sólo dos valores para que sea constante. El teorema de Casorati-Weierstrass establece que, para una función con una singularidad esencial, la imagen de cualquier vecindad de la singularidad es densa, mientras que el teorema de Picard asegura que dicha imagen es, o bien todo el plano complejo, o bien el plano menos un punto.

En este trabajo se demuestran el teorema del mapeo de Riemann y el gran teorema de Picard. Para estos fines se ha dividido en tres capítulos.

En el capítulo 1 se demuestran los teoremas de Montel y Vitali. El teorema de Montel dice que cualquier sucesión localmente acotada de funciones holomorfas tiene una subsucesión compactamente convergente. El teorema de Vitali da dos condiciones equivalentes a que una sucesión localmente acotada de funciones holomorfas sea compactamente convergente.

En el capítulo 2 se demuestra el teorema del mapeo de Riemann, el cual dice que cualquier región "sin hoyos", es decir, simplemente conexa, distinta del plano, es equivalente (biholomorfamente) al disco unitario.

En el capítulo 3 se demuestra el gran teorema de Picard que muestra lo caótico del comportamiento de una función con una singularidad esencial, estableciendo que dicha función mapea cualquier vecindad de la singularidad a todo el plano (salvo, tal vez, un punto). Se dan algunos ejemplos de aplicaciones del teorema.

Estos dos teoremas se consideran avanzados y no es común tratarlos en los primeros cursos de variable compleja, aquí se presentan completos y con un mínimo de requisitos.

Índice general

Notación y Preliminares

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, denotan como es usual a los naturales, los enteros, los racionales, los reales y los complejos, respectivamente. $\mathbb{E}$ denota el disco unitario, $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Una región es un subconjunto de $\mathbb{C}$, abierto y conexo. Las letras D y G denotarán regiones. Dada una región D, $\overline{D}$ denota la cerradura de D, $\mathcal{C}(D)$ denota la familia de las funciones complejas continuas con dominio D y $\mathcal{O}(D)$ denota la de las funciones holomorfas con dominio D.

Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $|f|_A$ denota la norma del supremo, esto es, $|f|_A = \sup\{|f(z)| : z \in A\}$.

$B_r(z)$ denota la bola abierta de radio r con centro en z, es decir $B_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$. Si el radio no importa, o se sobrentiende, escribimos solamente $B(z)$. Si el centro es 0, escribimos solamente B_r.

Dada una sucesión de funciones $f_n : D \to \mathbb{C}$, se dice que converge compactamente si converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de D.

A continuación se enuncian sin demostración algunos de los teoremas importantes que se usarán a lo largo del trabajo. Para las demostraciones véase [3].

Teorema (Teorema de Cauchy) *Sean* D *una región simplemente conexa,* $f \in \mathcal{O}(D)$, γ *una curva cerrada contenida en* D *que es* C^1 *por tramos. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Teorema (Fórmulas integrales de Cauchy) *Sean* D *una región,* $f \in \mathcal{O}(D)$, γ *una curva cerrada contenida en* D *que es* C^1 *por tramos,* $z_0 \in D$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

donde $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ *es el índice de* γ *en* z_0*, es decir, el número de vueltas que* γ *da* *alrededor de* z_0 *en sentido positivo (levógiro), y está dado por*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

En particular, cuando $n = 0$ *y* γ *le da una sola vuelta a* z_0 *en sentido positivo*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

Teorema (Estimaciones de Cauchy) *Sean* $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D)$ *y* $r > 0$ *tal que* $B_r(z_0) \subseteq D$. *Si* $|f(z)| \leq M$ *para toda* $z \in B_r(z_0)$ *entonces para todo* $n \geq 0$ *se tiene que* $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$.

Teorema (Teorema del Módulo Máximo) *Sea* $f \in \mathcal{O}(D)$. *Entonces para todo compacto* $K \subseteq D$ *se tiene que* $|f|$ *alcanza su máximo en* ∂K.

Teorema (Teorema del Módulo Mínimo) *Sea* $f \in \mathcal{O}(D)$ *tal que* f *no se anula en* D. *Entonces para todo compacto* $K \subseteq D$ *se tiene que* $|f|$ *alcanza su mínimo en* ∂K.

Teorema (Teorema de Weierstrass) *Sea* $f_n \in \mathcal{O}(D)$ *una sucesión de funciones que converge compactamente en* D *a* $f : D \to \mathbb{C}$; *entonces* $f \in \mathcal{O}(D)$ *y además* $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ *compactamente.*

Teorema (Lema de Schwarz) *Sea* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ *tal que* $f(0) = 0$ *y* $|f(z)| \leq 1$ *para toda* $z \in \mathbb{E}$. *Entonces* $|f(z)| \leq |z|$ *para toda* $z \in \mathbb{E}$ *y* $|f'(0)| \leq 1$. *Además, si* $|f'(0)| = 1$ *ó* $|f(z)| = |z|$ *para alguna* $z \neq 0$, *entonces* f *es una rotación, es decir,* $f(z) = az$ *para alguna* a *con* $|a| = 1$.

Teorema (Teorema de Identidad) *Sean* $f, g \in \mathcal{O}(D)$ *tales que el conjunto* $\{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$ *tiene un punto de acumulación en* D. *Entonces* $f = g$.

Teorema (Teorema de la Función Inversa) *Sean* $z_0 \in D$ *y* $f \in \mathcal{O}(D)$ *tales que* $f'(z_0) \neq 0$. *Entonces, existe una vecindad* U *de* z_0 *y una vecindad* V *de* $f(z_0)$ *tales que* $f : U \to V$ *es biyectiva y* $f^{-1} : V \to U$ *es analítica.*

Teorema (Teorema del Mapeo Abierto) *Toda función holomorfa no constante es abierta.*

Capítulo 1

Los Teoremas de Montel y Vitali

Después de introducir algunos conceptos básicos para las sucesiones de funciones, y probar algunas de sus propiedades, se define el concepto de convergencia continua, que es más fuerte que el de convergencia compacta pero resulta equivalente cuando consideramos solamente funciones continuas. Con ayuda de dicha equivalencia se demuestra el teorema de Montel, y como consecuencia del de Montel, se prueban un criterio de convergencia y el teorema de Vitali. También se dan algunas aplicaciones de ambos teoremas.

1.1. El Teorema de Montel

Se dice que una familia de funciones $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\mathsf{D})$ está *acotada* en un subconjunto A de D si existe $\mathsf{M} > 0$ tal que $|\mathsf{f}|_{\mathsf{A}} \leq \mathsf{M}$ para toda $\mathsf{f} \in \mathcal{F}$; se dice que la familia $\mathcal{F}$ está *localmente acotada* en D si para todo $z \in \mathsf{D}$ existe una vecindad abierta de z, $\mathsf{U} \subset \mathsf{D}$ tal que $\mathcal{F}$ está acotada en U.

Se dice que una familia de funciones $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\mathsf{D})$ está *puntualmente acotada* en D si para cada $z \in \mathsf{D}$, el conjunto $\{\mathsf{f}(z) \mid \mathsf{f} \in \mathcal{F}\}$ está acotado.

Toda familia acotada está localmente acotada, pero el recíproco no es cierto, como lo muestra la familia de funciones $\{\mathsf{f}_n(z) = nz^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{O}(\mathbb{E})$. En efecto, no está acotada porque $\mathsf{f}_n(2^{-1/n}) = \frac{n}{2}$, pero está localmente acotada porque converge a 0 en cada disco $\overline{\mathsf{B}_r}$ con $r < 1$.

Proposición 1.1 *Una familia $\mathcal{F}$ está localmente acotada en D si y sólo si $\mathcal{F}$ está acotada en K, para todo $\mathsf{K} \subset \mathsf{D}$ compacto.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Sean $\mathcal{F}$ localmente acotada en D y $\mathsf{K} \subset \mathsf{D}$ compacto. Para cada $z \in \mathsf{K}$, como $\mathcal{F}$ está localmente acotada, existe $\mathsf{U}_z \subset \mathsf{D}$ una vecindad de z tal que

$\mathcal{F}$ está acotada en U_z. Los conjuntos U_z forman una cubierta abierta de K, y como K es compacto existe una subcubierta finita $U_{z_1}, U_{z_2}, \ldots, U_{z_n}$. Para cada j entre 1 y n, como $\mathcal{F}$ está acotada en U_{z_j}, existe $M_j > 0$ tal que $|f|_{U_{z_j}} \leq M_j$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Sea $M = \text{máx}\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$. Entonces, para toda $f \in \mathcal{F}$, dada $z \in K$, existe j entre 1 y n tal que $z \in U_{z_j}$ y por lo tanto $|f(z)| \leq |f|_{U_{z_j}} \leq M_j \leq M$, de donde $|f|_K \leq M$. Luego $\mathcal{F}$ está acotada en K.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ está acotada en K, para todo $K \subset D$ compacto. Sea $z \in D$, como D es abierto, podemos encontrar $r > 0$ tal que $\overline{B_r(z)}$ está contenido en D. $\overline{B_r(z)}$ es compacto por lo que $\mathcal{F}$ está acotada en $\overline{B_r(z)}$, de donde $\mathcal{F}$ está acotada en $B_r(z)$.

■

Una consecuencia de esta proposición es que si $B = B_r(z)$ con $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(B)$, entonces $\mathcal{F}$ está localmente acotada en B si y sólo si $\mathcal{F}$ está acotada en todos los discos $\overline{B_\rho(z)}$ para toda $\rho < r$.

Proposición 1.2 *Dada una familia* $\mathcal{F} \subset C(D)$ *puntualmente acotada, existe una subregión* $D' \subset D$ *no vacía tal que* $\mathcal{F}$ *está localmente acotada en* D'.

Demostración: Supongamos que no es cierto. Sea $f_0 \in \mathcal{F}$, $f_0 \neq 0$. Entonces existe un punto $z_0 \in D$ tal que $|f_0(z_0)| > 0$. Como f_0 es continua podemos encontrar una bola cerrada $K_0 \subset D$ alrededor de z_0 tal que $0 \notin f_0(K_0)$. El interior de K_0 es una subregión de D y como estamos suponiendo que no se cumple la conclusión del teorema, entonces $\mathcal{F}$ no está localmente acotada en en interior de K_0. Esto quiere decir que podemos encontrar un punto z_1 en el interior de K_0 y una función $f_1 \in \mathcal{F}$ tales que $|f_1(z_1)| > 1$. Como f_1 es continua existe una bola cerrada $K_1 \subset D$ alrededor de z_1 tal que $|f_1(z)| > 1$ para toda $z \in K_1$. Podemos además suponer que $K_0 \supset K_1$. Siguiendo con esta construcción obtenemos $f_0, f_1, f_2, \ldots$ una sucesión de funciones de $\mathcal{F}$ y $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \cdots$ una sucesión de compactos no vacíos tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(z)| > n$ para toda $z \in K_n$. Dado que $\bigcap K_n$ es no vacía podemos tomar w un punto de esta intersección para el cual se cumple que $|f_n(w)| > n \in \mathbb{N}$ para toda n. Luego el conjunto $\{f(w) \mid f \in \mathcal{F}\}$ no está acotado. Esta contradicción demuestra el teorema.

■

Una sucesión de funciones $f_n : D \to \mathbb{C}$ se dice que está acotada en D, localmente acotada en D o puntualmente acotada en D según lo esté la familia $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Lema 1.3 *Sea* $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$ *una familia localmente acotada en* D. *Entonces para cada* $c \in D$ *y para todo* $\epsilon > 0$ *existe un disco* $B \subset D$ *con centro en* c *tal que* $|f(w) - f(z)| \leq \epsilon$ *para toda* $f \in \mathcal{F}$ *y para cualesquiera* $w, z \in B$.

Demostración: Sean $\epsilon > 0$ y $c \in D$. Como $\mathcal{F}$ está localmente acotada en D, existe $r_0 > 0$ tal que $\overline{B_{r_0}(c)} \subset D$ y $\mathcal{F}$ está acotada en $\overline{B_{r_0}(c)}$. Hagamos $r = \frac{r_0}{2}$ y $B' = \overline{B_{r_0}(c)}$. Como $\mathcal{F}$ está acotada en B' existe $M > 0$ tal que $|f|_{B'} \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Sea $\delta = \min\{\frac{\epsilon r}{4M}, r\} > 0$. Veremos que el disco buscado es $B = B_\delta(c)$. Sean $w, z \in B$ y $f \in \mathcal{F}$; como $\delta \leq r$ tenemos que $|(\zeta - w)(\zeta - z)| \geq r^2$ para cualesquiera $w, z \in B, \zeta \in \partial B'$. Se tiene entonces por la fórmula integral de Cauchy que

$$
\begin{aligned}
|f(w) - f(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B'} f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - w} - \frac{1}{\zeta - z}\right) d\zeta\right| \\
&= \left|\frac{w-z}{2\pi i}\int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)(\zeta - z)} d\zeta\right| \\
&\leq \frac{|w-z|}{2\pi}\int_{\partial B'} \frac{|f(\zeta)|}{|(\zeta - w)(\zeta - z)|}|d\zeta| \\
&\leq \frac{|w-z|}{2\pi}\frac{|f|_{B'}}{r^2}(2\pi 2r) = \frac{2}{r}|w-z||f|_{B'} \\
&\leq \frac{2}{r}2\delta M \leq \epsilon.
\end{aligned}
$$

■

Lema 1.4 *Sea* $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *una sucesión de funciones tales que la sucesión* $f_n(z)$ *está acotada para cada* $z \in D$. *Entonces para cualquier subconjunto numerable* A *de* D *existe una subsucesión* g_n *de* f_n *que converge puntualmente en* A.

Demostración: Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Como la sucesión $f_n(a_1)$ está acotada, existe una subsucesión $f_{1,n}$ de f_n tal que $f_{1,n}(a_1)$ converge. Como la sucesión $f_{1,n}(a_2)$ está acotada, existe una subsucesión $f_{2,n}$ de $f_{1,n}$ tal que $f_{2,n}(a_2)$ converge. Siguiendo con este proceso podemos construir para cada $j > 1$ la sucesión $f_{j,n}$ como una subsucesión de $f_{j-1,n}$ y tal que $f_{j,n}(a_j)$ converge.

Sea $g_n = f_{n,n}$ con $n \in \mathbb{N}$ la sucesión "diagonal" de las sucesiones $f_{j,n}$. Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$, por la construcción de g_n, los términos g_m, g_{m+1}, g_{m+2}, ... son una subsucesión de $f_{m,n}$. Como $f_{m,n}(a_m)$ converge, entonces $g_n(a_m)$ también converge.

■

Se dice que una sucesión de funciones $f_n : D \to \mathbb{C}$ es *continuamente convergente* si para toda sucesión convergente $z_n \in D$ se tiene que $\lim_n f_n(z_n)$ existe. Dadas cualesquiera 2 sucesiones convergentes en D con el mismo límite, $x_n \to x$ y $y_n \to x$ podemos tomar la sucesión $(z_n) = (x_1, y_2, x_3, y_4, x_5, y_6, \ldots)$ que converge a x. Sabemos que $\lim_n f_n(x_n)$, $\lim_n f_n(y_n)$ y $\lim_n f_n(z_n)$ existen. Pero las sucesiones $f_n(x_n)$ y $f_n(z_n)$ tienen una subsucesión en común, y por lo tanto tienen el mismo límite; análogamente $f_n(y_n)$ y $f_n(z_n)$ tienen el mismo límite, de donde $\lim_n f_n(x_n) = \lim_n f_n(y_n)$. En particular si y_n es la sucesión constante x, tenemos que $\lim_n f_n(x)$ existe. Esto quiere decir que toda sucesión f_n continuamente convergente también converge puntualmente a una función $f : D \to \mathbb{C}$ y se satisface que $\lim_n f_n(x_n) = f(x)$.

Veremos a continuación que la función límite f es continua (aunque las funciones f_n no lo sean).

Para esto observemos primero que si f_{n_k} es una subsucesión de f_n, entonces f_{n_k} también converge continuamente a f, porque dada una sucesión en D, $x_k \to x$, la sucesión dada por $y_m = x_k$ si $m = n_k$ para alguna k y $y_m = x$ si no, converge a x. Entonces $f_{n_k}(x_k)$ es una subsucesión de $f_m(y_m)$ la cual converge a $f(x)$. Por lo tanto f_{n_k} converge continuamente a f.

Proposición 1.5 *Si $f_n : D \to \mathbb{C}$ converge continuamente a f, entonces f es continua.*

Demostración: Sean $x \in D$, x_n una sucesión convergente a x y $\epsilon > 0$. Como $\lim_n f_n(x_1) = f(x_1)$, existe n_1 tal que $|f_n(x_1) - f(x_1)| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \geq n_1$. Como $\lim_n f_n(x_2) = f(x_2)$, existe n_2 tal que $|f_n(x_2) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \geq n_2$, y podemos escoger $n_2 > n_1$. Siguiendo con esta construcción obtenemos una sucesión n_k tal que la subsucesión f_{n_k} de f_n cumple que $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda k. Como sabemos que $\lim_k f_{n_k}(x_k) = f(x)$, podemos encontrar K, tal que $|f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $k > K$. Tenemos entonces que $|f(x_k) - f(x)| \leq |f(x_k) - f_{n_k}(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \epsilon$ para toda $k > K$, de donde f es continua. ■

Lema 1.6 *Una sucesión $f_n : D \to \mathbb{C}$ converge continuamente si y sólo si converge compactamente a una función continua f.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $f_n : D \to \mathbb{C}$ una sucesión que converge continuamente a f. Como ya se vio, f es continua. Vamos a demostrar que f_n converge a f compactamente. Sea A compacto. Supongamos que $|f_n - f|_A$ no converge a 0. Entonces podemos encontrar $\epsilon > 0$ y una subsucesión g_n de f_n que cumple que $|g_n - f|_A > \epsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $|g_n(x_n) - f(x_n)| > \epsilon$. Como A es compacto existe una subsucesión convergente $x_{n_k} \to x$ de x_n. Para la subsucesión se sigue teniendo que $|g_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| > \epsilon$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Como g_{n_k} es una subsucesión de f_n, converge continuamente a f. Entonces $\lim_k g_{n_k}(x_{n_k}) = f(x)$, y por la continuidad de f, tenemos que $\lim_k f(x_{n_k}) = f(x)$, de donde $\lim_k (g_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})) = 0$, lo cual contradice el hecho de que $|g_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| > \epsilon$ para toda k.

($\Leftarrow$) Sea $f_n : D \to \mathbb{C}$ una sucesión que converge compactamente a f, una función continua. Sea $x_n \to x$ una sucesión convergente. El conjunto $A = \{x_1, x_2, \ldots, x\}$ es compacto, por lo que f_n converge uniformemente en A. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe N_1 tal que $|f_n - f|_A < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \geq N_1$ y existe N_2 tal que $|f(x_n) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \geq N_2$ porque f

es continua. Haciendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ tenemos que $|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq |f_n - f|_A + |f(x_n) - f(x)| < \epsilon$ para toda $n \geq N$.

■

Corolario 1.7 *Dada una sucesión $f_n \in \mathcal{C}(D)$, la convergencia compacta y la convergencia continua son equivalentes.*

Demostración: Si f_n converge continuamente entonces, por el lema, converge compactamente. Si, por otra parte, converge compactamente, entonces la función límite tiene que ser continua, porque las funciones f_n son continuas. Aplicando el lema obtenemos que f_n converge continuamente.

■

Teorema 1.8 (Teorema de Montel) *Toda sucesión de funciones $f_n \in \mathcal{O}(D)$ localmente acotada tiene una subsucesión que converge compactamente en D.*

Demostración: Sea f_n una sucesión de funciones en $\mathcal{O}(D)$ localmente acotada. Tomemos $A \subset D$ un denso en D numerable. Como f_n está localmente acotada, entonces $f_n(z)$ está acotada para cada $z \in D$, y por el lema 1.4, existe g_n una subsucesión de f_n que converge puntualmente en A. Veremos que g_n es la subsucesión buscada. Sean $z_n \to z$ una sucesión convergente en D y $\epsilon > 0$. Por el lema 1.3, existe un disco $B \subset D$ con centro en z tal que $|g_n(w_1) - g_n(w_2)| < \frac{\epsilon}{3}$, para cualesquiera $w_1, w_2 \in B$ y para toda $n \in \mathbb{N}$. Como A es denso, existe $a \in A \cap B$, y como $z_n \to z$ existe N_1 tal que $z_n \in B$ para toda $n \geq N_1$. Como $g_n(a)$ converge, existe N_2 tal que $|g_n(a) - g_m(a)| < \frac{\epsilon}{3}$ para cualesquiera $n, m \geq N_2$. Haciendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ tenemos que $|g_n(z_n) - g_m(z_m)| \leq |g_n(z_n) - g_n(a)| + |g_n(a) - g_m(a)| + |g_m(a) - g_m(z_m)| < \epsilon$ para cualesquiera $m, n \geq N$. Esto prueba que $g_n(z_n)$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto es convergente. Se sigue entonces que g_n converge continuamente en D. Aplicando el corolario 1.7 tenemos que la sucesión g_n es compactamente convergente.

■

Teorema 1.9 (Criterio de convergencia de Montel) *Sea $f_n \in \mathcal{O}(D)$ una sucesión localmente acotada en D. Si existe $f \in \mathcal{O}(D)$ tal que cualquier subsucesión compactamente convergente de f_n converge a f, entonces f_n converge compactamente a f en D.*

Demostración: Supongamos que existe un compacto $A \subset D$ tal que $|f_n - f|_A$ no tiende a 0. Entonces existe $\epsilon > 0$ para el cual podemos encontrar una subsucesión g_n de f_n que cumple que $|g_n - f|_A \geq \epsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$. La sucesión g_n está localmente acotada en D (porque f_n lo está). Por el teorema de Montel, existe una subsucesión h_n de g_n tal que h_n converge compactamente en D. Como h_n es una subsucesión de g_n tenemos que $|h_n - f|_A \geq \epsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Pero por la hipótesis h_n debe converger a f, lo cual nos lleva a que $|h_n - f|_A$

tiende a 0. Esto es una contradicción, luego, f_n converge compactamente a f en D.

■

1.2. El Teorema de Vitali

Lema 1.10 *Sean* $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ *y* $B = B_r(c)$. *Dada una sucesión* $f_n \in \mathcal{O}(B)$ *acotada son equivalentes:*

- f_n *converge compactamente en* B.
- *La sucesión* $f_n^{(k)}(c)$ *converge para toda* $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Demostración: Supongamos que f_n converge compactamente en B. Entonces, por el teorema de Weierstrass, para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $f_n^{(k)}$ converge compactamente en B, y por lo tanto la sucesión $f_n^{(k)}(c)$ es convergente.

Supongamos ahora que la sucesión $f_n^{(k)}(c)$ converge para toda k. Como la sucesión f_n está acotada, existe $M > 0$ tal que $|f_n|_B < M$. Construimos la sucesión $g_n : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$, dada por $g_n(z) = \frac{1}{M} f_n(rz + c)$. Entonces tenemos que $g_n \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ y $|g_n|_{\mathbb{E}} \leq 1$. Además, la hipótesis acerca de f_n se traduce en que la sucesión $g_n^{(k)}(0)$ converge para toda k.

Expresando a g_n como serie de potencias tenemos $g_n(z) = \sum a_{n,j} z^j$ donde $a_{n,j} = \frac{1}{j!} g_n^{(j)}(0)$. Entonces $a_j = \lim_n a_{n,j}$ existe para toda j. Por las estimaciones de Cauchy, como $|g_n|_{\mathbb{E}} \leq 1$, tenemos que $|a_{n,j}| \leq 1$ y por lo tanto $|a_j| \leq 1$ para toda j. Definimos $g(z) = \sum a_j z^j$. Como para cada j, $|a_j| \leq 1$, el radio de convergencia de la serie que define a g es mayor o igual que 1, por lo que $g \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$.

Vamos a demostrar que g_n converge compactamente a g en $\mathbb{E}$. Sean $\rho \in (0, 1)$ y $\epsilon > 0$. Escojamos $l \in \mathbb{N}$ de manera que $\frac{2\rho^l}{1-\rho} < \frac{\epsilon}{2}$. Como $\lim_n \sum_{j=0}^{l-1} |a_{n,j} - a_j|\rho^j = 0$, existe n_0 tal que para toda $n > n_0$ se tiene que $\sum_{j=0}^{l-1} |a_{n,j} - a_j|\rho^j < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces para toda $n > n_0$ y para toda $z \in \overline{B_\rho(0)}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|g_n(z) - g(z)| &= \Big|\sum_{j=0}^{\infty} (a_{n,j} - a_j) z^j\Big| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_{n,j} - a_j|\rho^j \\
&\leq \sum_{j=0}^{l-1} |a_{n,j} - a_j|\rho^j + \sum_{j=l}^{\infty} 2\rho^j = \sum_{j=0}^{l-1} |a_{n,j} - a_j|\rho^j + \frac{2\rho^l}{1-\rho} < \epsilon
\end{aligned}$$

Esto muestra que g_n es compactamente convergente en $\mathbb{E}$, de donde f_n es compactamente convergente en B.

■

Teorema 1.11 (Teorema de Vitali) *Sea* $f_n \in \mathcal{O}(D)$ *una sucesión localmente acotada en* D. *Entonces son equivalentes:*

1. f_n *converge compactamente en* D.

2. *Existe* $c \in D$ *tal que para cada* $k \in \mathbb{N}$ *la sucesión* $f_n^{(k)}(c)$ *converge.*

3. *El conjunto* $A = \{z \in D \mid f_n(z)$ *converge*$\}$ *tiene un punto de acumulación en* D.

Demostración:

(*1⇒2*) Como f_n converge compactamente en D, por el teorema de Weierstrass, $f_n^{(k)}$ converge compactamente en D para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces cualquier punto $c \in D$ cumple que $f_n^{(k)}(c)$ converge para toda k.

(*2⇒3*) Sea B un disco con centro en c tal que $\overline{B} \subset D$. Como f_n está localmente acotada, tomando el radio de B más chico si es necesario, podemos suponer que f_n está acotada en B y por el lema 1.10, f_n es compactamente convergente en D. Se sigue que $f_n(z)$ converge para cada $z \in B$, por lo que $B \subset A$ y por lo tanto A tiene puntos de acumulación en D.

(*3⇒1*) Sean g_n y h_n dos subsucesiones de f_n compactamente convergentes en D, con límites g y h, respectivamente. Para todo $a \in A$, como $g_n(a)$ y $h_n(a)$ son subsucesiones de $f_n(a)$, que es una sucesión convergente, $\lim_n g_n(a) = \lim_n h_n(a)$, es decir, $g(a) = h(a)$. Como g y h coinciden en todos los puntos de A y A tiene un punto de acumulación en D, por el teorema de identidad, $g = h$. Por el criterio de convergencia de Montel, f_n converge compactamente en D.

■

1.3. Aplicaciones y ejemplos de los teoremas de Montel y Vitali

Teorema 1.12 (Osgood) *Sea* $f_0, f_1, f_2, \ldots$ *una sucesión de funciones en* $\mathcal{O}(D)$ *que converge puntualmente a* f. *Entonces existe* D' *un abierto denso en* D *tal que* f_n *converge compactamente en* D' *y* f *es holomorfa en* D'.

Demostración: Consideremos la familia $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$. Para cada abierto $U \subset D$ podemos aplicar la proposición 1.2 a $\mathcal{F}$ y a U para obtener un abierto $D_U \subset U$ no vacío donde $\mathcal{F}$ está localmente acotada. Entonces $D' = \bigcup_{U \subset D} D_U$ es un abierto denso en D en el que f_n está localmente acotada. Entonces, en cada componente conexa de D', tenemos que f_n está localmente acotada y converge puntualmente a f. Por el teorema de Vitali, f_n converge compactamente a f y por el teorema de Weierstrass, f es holomorfa.

■

Veremos como se relacionan los teoremas que hemos visto con el concepto de familia normal. Se dice que una familia de funciones $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$ es *normal* en D, si toda sucesión de funciones de $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión compactamente convergente en D.

Proposición 1.13 *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas está localmente acotada en D si y sólo si es normal en D.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{F}$ está localmente acotada. Cualquier sucesión de funciones de $\mathcal{F}$ está también localmente acotada y por el teorema de Montel, tiene una subsucesión compactamente convergente.

Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ es normal en D y sea $K \subset D$ un compacto. Si $\mathcal{F}$ no está acotada en K, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $|f_n|_K > n$. Entonces $\lim_n |f_n|_K = \infty$. Si f_n tuviera una subsucesión g_n convergente a g, se tendría que $|g|_K \geq |g_n|_K - |g - g_n|_K$ lo cual es absurdo porque $\lim_n |g_n|_K = \infty$ y $\lim_n |g - g_n|_K = 0$. Esto demuestra que $\mathcal{F}$ está localmente acotada en D.

∎

Veremos algunos ejemplos de familias normales.

- Sean D y D' dos regiones de $\mathbb{C}$, D' acotada. Entonces $\mathcal{O}(D, D')$, el conjunto de todas las funciones holomorfas de D a D' es una familia normal porque está localmente acotada (de hecho está acotada).

- Para cada $M > 0$, la familia $\mathcal{F}_M = \{f(z) = \sum a_k z^k \mid \forall k \in \mathbb{N},\ |a_k| \leq M\}$ es normal en $\mathbb{E}$. Esto es porque para cada $r \in (0,1)$ y para cada $f \in \mathcal{F}_M$ tenemos que $|f(z)| \leq \frac{M}{1-r}$ para toda $z \in B_r(0)$, de donde $\mathcal{F}_M$ está localmente acotada en $\mathbb{E}$.

- Si $\mathcal{F}$ es una familia normal en D y $k \in \mathbb{N}$ entonces la familia $\mathcal{F}^{(k)} = \{f^{(k)} \mid f \in \mathcal{F}\}$ es normal en D por el teorema de Weierstrass. Esto prueba que cuando $\mathcal{F}$ es localmente acotada, también lo es $\mathcal{F}^{(k)}$.

- Dada $f \in \mathcal{O}(D)$ se define $\|f\|_D = (\iint_D |f(z)|^2 dA)^{\frac{1}{2}}$, y se dice que f es cuadrado-integrable en D si $\|f\|_D < \infty$. El conjunto $\mathcal{H}(D)$ de todas las funciones cuadrado-integrables en D es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y se tiene el siguiente resultado debido a Bergman [2]:

  Si K es un compacto contenido en $D \neq \mathbb{C}$ y d es la distancia de K a ∂D, entonces $|f|_K \leq \frac{\|f\|_D}{d\sqrt{\pi}}$ para toda $f \in \mathcal{H}(D)$.

  De esta desigualdad se sigue que, dada $r > 0$, la bola $\{f \in \mathcal{H}(D) \mid \|f\|_D < r\}$ está localmente acotada y es, por lo tanto, una familia normal.

Teorema 1.14 *Sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una trayectoria, $D \subset \mathbb{C}$ una región y $f : \gamma([a,b]) \times D \to \mathbb{C}$ una función localmente acotada tal que para cada $t \in [a,b]$, $f(\gamma(t), z)$ es holomorfa en D y para cada $z \in D$, la integral de Riemann $\int_\gamma f(\zeta, z)d\zeta$ existe. Entonces la función dada por $F(z) = \int_\gamma f(\zeta, z)d\zeta$ es holomorfa en D. Además, para cada $z \in D$, la integral $\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z)d\zeta$ existe y es igual a $F'(z)$.*

Demostración: Veremos que para cada $z \in D$ existe una vecindad $U \subset D$ de z tal que f está acotada en $\gamma([a,b]) \times U$.

Para cada $t \in [a,b]$, como f está localmente acotada, existen V_t y U_t vecindades de $\gamma(t)$ y z respectivamente, tales que f está acotada en $V_t \times U_t$. Como $\gamma([a,b])$ es compacto, un número finito de las V_t's cubren $\gamma([a,b])$; y podemos tomar U como la intersección de las correspondientes U_t's.

Consideremos una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$, $P_n = \{t_{n,0}, t_{n,1}, t_{n,2}, \ldots, t_{n,m_n}\}$ tal que la norma de P_n tiende a 0, y puntos $\zeta_{n,1}$, $\zeta_{n,2}$, $\ldots$, ζ_{n,m_n} en los intervalos de la partición P_n. Llamemos $S_n(z)$ a la suma de Riemann correspondiente a la función $f(\gamma(t),z)\gamma'(t)$ con la partición P_n, es decir,

$$S_n(z) = \sum_k f(\gamma(\zeta_{n,k}),z)\gamma'(\zeta_{n,k})(t_{n,k} - t_{n,k-1}).$$

Por hipótesis, para cada $z \in U$, $S_n(z)$ converge a $F(z)$. Observemos que cada S_n es holomorfa en U. Tenemos que

$$|S_n(z)| \leq \sum_k |f(\gamma(\zeta_{n,k},z)||\gamma'(\zeta_{n,k})||t_{n,k} - t_{n,k-1}| \leq M|\gamma'|_{[a,b]}(b-a),$$

donde M es una cota de f en $\gamma([a,b]) \times U$, por lo que la sucesión S_n está acotada. Por el teorema de Vitali, S_n converge compactamente a F en U. Por el teorema de Weierstrass, S_n' converge compactamente a F' en U, pero

$$S_n'(z) = \sum_k \frac{\partial}{\partial z} f(\gamma(\zeta_{n,k}),z)\gamma'(\zeta_{n,k})(t_{n,k} - t_{n,k-1})$$

es una suma de Riemman arbitraria para la función $\frac{\partial}{\partial z} f(\gamma(t),z)\gamma'(t)$, de donde la integral $\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta,z)d\zeta$ existe y es igual a $F'(z)$.

■

Capítulo 2

El Teorema del Mapeo de Riemann

En este capítulo probaremos el teorema del mapeo de Riemann que establece que toda región simplemente conexa $D \neq \mathbb{C}$ es biholomorfa a $\mathbb{E}$.

Para esto, veremos primero que con la ayuda de la raíz cuadrada podemos transformar de manera biholomorfa a cualquier región simplemente conexa distinta de $\mathbb{C}$ en una cuyo exterior sea no vacío. Una vez hecho esto haremos ver que podemos invertir en un círculo contenido en el exterior de dicha región, después trasladar y finalmente hacer una homotecia para obtener un subconjunto del disco unitario biholoformamente equivalente a la región original. Luego, con la ayuda de los automorfismos del disco y una vez más, de la raíz cuadrada, se construyen las expansiones. Usando el teorema de Montel se construye una función biholomorfa entre la región y el disco como un caso límite de expansiones.

2.1. Introducción

Una región $D \subset \mathbb{C}$ se llama *simplemente conexa* si toda trayectoria cerrada $\gamma : [a, b] \to D$ es homotópica en D a una trayectoria constante.

Se dice que una función $f : D \to \hat{D}$ es un *biholomorfismo* (o que f es *biholomorfa*) si f es biyectiva, holomorfa y su inversa es holomorfa. Se dice en ese caso que D y $\hat{D}$ son *regiones biholomorfas* (o *conformemente equivalentes*) y ésta es una relación de equivalencia entre regiones del plano.

Una región $D \subset \mathbb{C}$ se llama *homológicamente simplemente conexa* si para toda trayectoria $\gamma : [a, b] \to D$ cerrada que es continuamente diferenciable por tramos y para toda función $f \in \mathcal{O}(D)$ se tiene que $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$.

El teorema integral de Cauchy nos dice que toda región simplemente conexa es homológicamente simplemente conexa, permitiéndonos cambiar una condición geométrica por una puramente analítica. Entonces, para probar el teorema del mapeo de Riemann basta probar que cualquier región homológicamente simplemente conexa distinta de $\mathbb{C}$ es biholomorfa a $\mathbb{E}$.

2.2. Reducción a regiones contenidas en $\mathbb{E}$.

Se dice que una región $D \subset \mathbb{C}$ tiene la *propiedad de la raíz cuadrada* si toda unidad en $\mathcal{O}(D)$ tiene una raíz cuadrada en $\mathcal{O}(D)$, es decir, si para toda $f \in \mathcal{O}(D)$ tal que $f(z) \neq 0$ para toda $z \in D$, existe $g \in \mathcal{O}(D)$ tal que $g^2 = f$.

Obsérvese que si $\varphi : D \to \hat{D}$ es un biholomorfismo y f es una unidad en $\mathcal{O}(\hat{D})$, entonces $f \circ \varphi$ es una unidad en $\mathcal{O}(D)$. Si existe $g \in \mathcal{O}(D)$ una raíz cuadrada de $f \circ \varphi$, entonces $g \circ \varphi^{-1}$ es una raíz cuadrada de f en $\mathcal{O}(\hat{D})$. Esto nos dice que la propiedad de la raíz cuadrada es invariante bajo biholomorfismos.

Una de las consecuencias del teorema de Cauchy establece la existencia de logaritmos definidos en regiones simplemente conexas, esto es, dada una región homológicamente simplemente conexa D y una función $f \in \mathcal{O}(D)$ que no se anula, existe $F \in \mathcal{O}(D)$ tal que $e^F = f$.

Proposición 2.1 *Toda región homológicamente simplemente conexa D tiene la propiedad de la raíz cuadrada.*

Demostración: Sea $f \in \mathcal{O}(D)$ una función tal que $f(z) \neq 0$ para toda $z \in D$, como D es homológicamente simplemente conexa, f tiene un logaritmo en $\mathcal{O}(D)$, es decir, existe $g \in \mathcal{O}(D)$ tal que $e^g = f$. Sea $h = e^{\frac{g}{2}}$. Tenemos que $h \in \mathcal{O}(D)$ y $h^2 = e^g = f$, de donde h es una raíz cuadrada para f en D.

■

Lema 2.2 *Dada una región $D \neq \mathbb{C}$ con la propiedad de la raíz cuadrada, existe $\hat{D}$ una región biholomorfa a D tal que $\mathbb{C} \setminus \hat{D}$ contiene un abierto no vacío.*

Demostración: Sea $a \in \mathbb{C} \setminus D$. La función $f : D \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z - a$ es una unidad en $\mathcal{O}(D)$, y como D tiene la propiedad de la raíz cuadrada, existe $g \in \mathcal{O}(D)$ tal que $g^2 = f$. Observemos que $g(z) = g(w)$ implica que $z - a = g^2(z) = g^2(w) = w - a$, de donde $z = w$. Esto muestra que g es inyectiva y por lo tanto biyectiva en su imagen $\hat{D} = g(D)$.

Como g es biyectiva, su derivada no se anula, y por el teorema de la función inversa, $g : D \to \hat{D}$ es un biholomorfismo.

Veremos que $g(D) \cap (-g)(D) = \emptyset$. Supongamos que existen $c, d \in D$ tales que $g(c) = -g(d)$, entonces $c - a = g^2(c) = g^2(d) = d - a$, de donde $c = d$, por lo que $g(c) = -g(c)$. Pero esto quiere decir que $0 = g(c)$ y entonces $c = a$. Pero esto es una contradicción porque $a \in \mathbb{C} \setminus D$ y $c \in D$.

Entonces $(-g)(D)$ es abierto, no vacío y está contenido en $\mathbb{C} \setminus g(D) = \mathbb{C} \setminus \hat{D}$.

■

Teorema 2.3 *Dada una región homológicamente simplemente conexa $D \neq \mathbb{C}$, existe $\hat{D}$ biholomorfa a D tal que $\hat{D} \subset \mathbb{E}$.*

Demostración: Como D es homológicamente simplemente conexa, por la proposición 2.1, D tiene la propiedad de la raíz cuadrada. Por el lema 2.2, existe D^* biholomorfa a D tal que $\mathbb{C} \setminus D^*$ contiene un abierto no vacío. Sea c en dicho abierto, y $r > 0$ tal que $B_r(c) \subset \mathbb{C} \setminus D^*$. La función f dada por $f(z) = \frac{r}{2(z-c)}$ mapea biholomorfamente el complemento de $B_r(c)$ en $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)} \setminus \{0\}$. Como D^* está contenido en dicho complemento, si hacemos $\hat{D} = f(D^*)$, la función $f|_{D^*}: D^* \to \hat{D}$ es un biholomorfismo entre D^* y $\hat{D}$, un subconjunto de $\mathbb{E}$.

■

2.3. Expansiones

Sea D una región tal que $0 \in D \subset \mathbb{E}$. Se dice que una función $f : D \to \mathbb{E}$ es una *contracción* de D en $\mathbb{E}$ si $f(0) = 0$ y $|f(z)| < |z|$ para toda $z \in D \setminus \{0\}$ y se dice que es una *expansión* de D en $\mathbb{E}$ si $f(0) = 0$ y $|f(z)| > |z|$ para toda $z \in D \setminus \{0\}$.

Para probar la existencia de expansiones, las construiremos como inversas de contracciones.

Para cada $c \in \mathbb{E}$, consideremos la función $g_c : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ dada por $g_c(z) = \frac{z-c}{\bar{c}z-1}$. Como $c \in \mathbb{E}$, g_c es holomorfa. Además, g_c es una involución, es decir, $g_c \circ g_c = id_{\mathbb{E}}$. Eso quiere decir que g_c es su propia inversa y por lo tanto es un biholomorfismo de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{E}$.

Denotamos por $j : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ a la función $j(z) = z^2$.

Proposición 2.4 *Sea* $D \subsetneq \mathbb{E}$ *una región con la propiedad de la raíz cuadrada tal que* $0 \in D$. *Entonces existe una expansión de* D *en* $\mathbb{E}$ *holomorfa e inyectiva.*

Demostración: Consideremos primero, para cada $c \in \mathbb{E}$, la función $\varphi_c = g_{c^2} \circ j \circ g_c$. Veremos que φ_c es una contracción de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{E}$.

Tenemos que φ_c es holomorfa y $\varphi_c(0) = g_{c^2}(j(g_c(0))) = g_{c^2}(j(c)) = g_{c^2}(c^2) = 0$. Además, por el lema de Schwarz, como φ_c no es una rotación (no es inyectiva), tenemos que $|\varphi_c(z)| < |z|$ para toda $z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$. Por lo tanto φ_c es una contracción.

Ahora, sea $a \in \mathbb{E} \setminus D$. Entonces $g_a|_D$ es una unidad en $\mathcal{O}(D)$. Como D tiene la propiedad de la raíz cuadrada, existe $h \in \mathcal{O}(D)$ tal que $h^2 = g_a$. Sea $f : D \to \mathbb{E}$ dada por $f = g_{h(0)} \circ h$. Vamos a ver que f es la expansión que buscamos.

Primero, como $|h(z)|^2 = |h^2(z)| = |g_a(z)| < 1$, f está bien definida. Dado que h y $g_{h(0)}$ son holomorfas en D, también lo es f. Tenemos que $f(0) = g_{h(0)}(h(0)) = 0$. Observemos que $\varphi_{h(0)} \circ f = g_{h^2(0)} \circ j \circ g_{h(0)} \circ g_{h(0)} \circ h = g_{h^2(0)} \circ j \circ h = g_{h^2(0)} \circ h^2$. Pero $h^2(0) = g_a(0) = a$, de donde $\varphi_{h(0)} \circ f = g_a \circ h^2 = g_a \circ g_a = id_D$. Esto muestra que f es inyectiva. Por último, para toda $z \in D \setminus \{0\}$ tenemos que $f(z) \neq 0$ (porque $f(0) = 0$ y f es inyectiva) y como $\varphi_{h(0)}$ es una contracción, concluimos que $|z| = |\varphi_{h(0)}(f(z))| < |f(z)|$.

■

2.4. El Teorema de Hurwitz

El siguiente resultado debido a Hurwitz tiene consecuencias importantes.

Lema 2.5 *Si una sucesión $f_n \in \mathcal{O}(D)$ converge compactamente en D a una función no constante f, entonces para todo $c \in D$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y una sucesión $(d_n)_{n \geq n_0} \subset D$ tal que $\lim_n d_n = c$ y $f_n(d_n) = f(c)$ para todo $n \geq n_0$.*

Demostración: Sea $c \in D$. Como $f \not\equiv f(c)$, por el teorema de identidad, existe un disco abierto B con centro en c tal que $\overline{B} \subset D$ y la función $f - f(c)$ no se anula en $\overline{B} \setminus \{c\}$. Entonces $m = \min\{|f(z) - f(c)| : z \in \partial B\} > 0$. Como f_n converge a f uniformemente en ∂B y puntualmente en c podemos encontrar n_0 tal que $|f_n(c) - f(c)| < \frac{m}{2} < \min\{|f_n(z) - f(c)| : z \in \partial B\}$ para toda $n \geq n_0$.

Por las desigualdades anteriores y el principio del módulo mínimo, para cada $n \geq n_0$, $f_n - f(c)$ debe tener un cero d_n en ∂B. Dicha sucesión cumple que $f_n(d_n) = f(c)$. Además, para cualquier subsucesión convergente $d_{n_k} \to d$ se tiene que, por la convergencia continua de f_n, $0 = \lim_k (f_{n_k}(d_{n_k}) - f(c)) = f(d) - f(c)$, Pero como $f - f(c)$ no tiene otros ceros en $\overline{B}$ aparte de c, tenemos que $d = c$. El que la sucesión d_n sea acotada y todas sus subsucesiones convergentes tengan el mismo límite c, muestra que d_n converge a c.

■

Corolario 2.6 *Sea $f_n \in \mathcal{O}(D)$ una sucesión de funciones que convergen compactamente a una función no constante $f \in \mathcal{O}(D)$. Si ninguna de las funciones f_n se anula en D, entonces f tampoco se anula en D.*

Demostración: Si f tuviera un cero $c \in D$, entonces, por el lema, todas las funciones de la sucesión a partir de cierto índice tendrían un cero en D, contradiciendo la hipótesis.

■

Teorema 2.7 (Hurwitz) *Sean D y $\hat{D}$ dos regiones, y sea $f_n : D \to \hat{D}$ una sucesión de funciones holomorfas inyectivas que convergen compactamente en D a una función no constante $f \in \mathcal{O}(D)$. Entonces $f(D) \subset \hat{D}$ y f es inyectiva.*

Demostración: Sea $b \in \mathbb{C} \setminus \hat{D}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_n - b$ no tiene ceros en D y como $f - b \not\equiv 0$ porque f no es constante, tenemos, por el corolario, que $f - b$ no tiene ceros en D, de donde $b \notin f(D)$.

Sea $c \in D$. Para cada $n \in N$, como f_n es inyectiva, la función $f_n - f_n(c)$ no se anula en $D \setminus \{c\}$. Como $f - f(c) \not\equiv 0$ porque f no es constante, tenemos, por el corolario, que $f - f(c)$ no se anula en $D \setminus \{c\}$, esto es, $f(z) \neq f(c)$ para toda $z \in D \setminus \{c\}$. Como c era un punto cualquiera de D, f es inyectiva.

■

2.5. El Teorema del mapeo de Riemann

Teorema 2.8 (Teorema del mapeo de Riemann) *Sea $D \neq \mathbb{C}$ una región simplemente conexa, entonces D es biholomorfa a $\mathbb{E}$.*

Demostración: Por la observación de la introducción del capítulo, D es una región homológicamente simplemente conexa. Componiendo con una traslación, que es un biholomorfismo, podemos suponer que $0 \in D$.

Por el teorema 2.3 sabemos que existen $G \subset \mathbb{E}$ y un biholomorfismo $\varphi : D \longrightarrow G$. Sea $c = \varphi(0)$, g_c es un automorfismo de $\mathbb{E}$ que manda a c en 0. Entonces $h = g_c \circ \varphi$ es un biholomorfismo entre D y un subconjunto de $\mathbb{E}$, tal que $h(0) = 0$. Esto muestra que la familia $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{O}(D) \mid f(D) \subset \mathbb{E}, f(0) = 0, f \text{ es inyectiva}\}$ es no vacía. Por el teorema de la función inversa, cada $f \in \mathcal{F}$ es un biholomorfismo de D a $f(D)$.

Sea $p \in D \setminus \{0\}$. Como $\mathcal{F}$ es no vacía, entonces $\mu = \sup\{|f(p)| : f \in \mathcal{F}\} > 0$. Existe entonces una sucesión $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{F}$ tal que $\lim_n |f_n(p)| = \mu$. Como $\mathcal{F}$ está acotada, por el teorema de Montel existe una subsucesión h_n de f_n que converge compactamente en D a una función $h \in \mathcal{O}(D)$. Como $h_n(0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $h(0) = 0$. Además $|h(p)| = \lim_n |h_n(p)| = \mu$. Como $\mu > 0$, $h(0) \neq h(p)$, por lo que h no es constante. Por el teorema 2.7 h es inyectiva y $h(D) \subset \mathbb{E}$, de donde $h \in \mathcal{F}$.

Supongamos que $h(D) \subsetneq \mathbb{E}$. Como D tiene la propiedad de la raíz cuadrada (por el lema 2.1), entonces $h(D)$ también la tiene y ya que $h(0) = 0$, tenemos que $0 \in h(D)$. Por la proposición 2.4, existe una expansión $\kappa : h(D) \longrightarrow \mathbb{E}$. Hacemos $g = \kappa \circ h$. Como tanto h como κ son inyectivas, g también lo es. $g(0) = \kappa(h(0)) = \kappa(0) = 0$. Además, $g \in \mathcal{O}(D)$ y $g(D) \subset \mathbb{E}$, de donde $g \in \mathcal{F}$. Como h es inyectiva, $h(p) \neq 0$, por lo que $|g(p)| = |\kappa(h(p))| > |h(p)| = \mu$, contradiciendo que μ es el supremo del conjunto $\sup\{|f(p)| : f \in \mathcal{F}\}$.

Se tiene entonces que $h(D) = \mathbb{E}$ y por lo tanto h es un biholomorfismo de D a $\mathbb{E}$.

■

Lema 2.9 *Sean f_1 y f_2 dos biholomorfismos de D en $\mathbb{E}$. Si existe $a \in D$ tal que $f_1(a) = f_2(a)$ y $\frac{f_1'(a)}{f_2'(a)} > 0$ entonces $f_1 = f_2$.*

Demostración: Hacemos $b = f_1(a) = f_2(a)$, $h_1 = g_b \circ f_1$ y $h_2 = g_b \circ f_2$. Entonces h_1 y h_2 son dos biholomorfismos de D en $\mathbb{E}$ y cumplen que $h_1(a) = h_2(a) = 0$ y $\frac{h_1'(a)}{h_2'(a)} = \frac{g_b'(f_1(a))f_1'(a)}{g_b'(f_2(a))f_2'(a)} = \frac{f_1'(a)}{f_2'(a)} > 0$. Basta probar que $h_1 = h_2$. Sea $\varphi = h_1 \circ h_2^{-1}$. Notemos que φ es un automorfismo de $\mathbb{E}$. Como $\varphi(0) = h_1(h_2^{-1}(0)) = h_1(a) = 0$ entonces φ es una rotación, es decir, $\varphi(z) = sz$ para algún $s \in S_1$. Pero $s = \varphi'(0) = \frac{h_1'(h_2^{-1}(0))}{h_2'(h_2^{-1}(0))} = \frac{h_1'(a)}{h_2'(a)} > 0$, de donde $s = 1$. Entonces φ es la identidad y por lo tanto $h_1 = h_2$.

■

Podemos entonces enunciar el teorema del mapeo de Riemann de la siguiente forma:

Teorema 2.10 *Sean $D \neq \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y $a \in D$. Entonces existe un único biholomorfismo $f : D \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.*

Demostración: Por el teorema del mapeo de Riemann, existe un biholomorfismo entre D y $\mathbb{E}$. Componiendo con un automorfismo de $\mathbb{E}$ podemos conseguir uno que manda $\mathfrak{a}$ en 0 y cuya derivada en $\mathfrak{a}$ es mayor que 0. Por el lema este biholomorfismo es único.

$\blacksquare$

Capítulo 3

El Gran Teorema de Picard

Se prueba primero el teorema de Bloch, que establece condiciones bajo las cuales la imagen de una función contiene discos de un tamaño fijo. Usando esto se prueba que la imagen de una función entera no constante tiene discos de tamaño arbitrario. Después, con ayuda de la función de Schottky, se da una cota para la velocidad de crecimiento de una función holomorfa y con esto se prueba el gran teorema de Picard.

3.1. El Teorema de Bloch

Dada una región $D \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{O}(\overline{D})$ denota el conjunto de las funciones holomorfas en alguna vecindad abierta de $\overline{D}$.

Lema 3.1 *Sean* $G \subset \mathbb{C}$ *una región acotada y* $f \in \mathcal{O}(\overline{G})$. *Si* $a \in G$ *entonces* $B_s(f(a)) \subset f(G)$ *donde* $s = d(f(a), f(\partial G))$.

Demostración: Como $\overline{G}$ es compacto y f es continua entonces $f(\overline{G})$ es un cerrado que contiene a $f(G)$, de donde $\overline{f(G)} \subset f(\overline{G}) = f(G) \cup f(\partial G)$. Como f es holomorfa, $f(G)$ es abierto y $\partial f(G) = \overline{f(G)} \backslash f(G) \subset (f(G) \cup f(\partial G)) \backslash f(G) \subset f(\partial G)$.

Por la definición de s, $B_s(f(a))$ no intersecta a $f(\partial G)$ y por lo tanto tampoco a $\partial f(G)$. Se sigue entonces que $B_s(f(a)) \subset f(G)$.

∎

Lema 3.2 *Sea* $B = B_r(a)$ *y* $f \in \mathcal{O}(\overline{B})$ *no constante y tal que* $|f'|_B \leq 2|f'(a)|$. *Entonces* $B_R(f(a)) \subset f(B)$ *donde* $R = (3 - 2\sqrt{2})r|f'(a)|$.

Demostración: Trasladando podemos suponer que $a = f(a) = 0$. Definimos $g(z) = f(z) - zf'(0)$. Tenemos que $g(z) = \int_0^z (f'(\zeta) - f'(0))d\zeta$, de donde $|g(z)| \leq \int_0^1 |f'(zt) - f'(0)||z|dt$.

Por la fórmula integral de Cauchy, si $w \in B$ tenemos que

$$f'(w) - f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\left(\frac{f'(\zeta)}{\zeta - w} - \frac{f'(\zeta)}{\zeta}\right)d\zeta = \frac{w}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f'(\zeta)}{\zeta(\zeta - w)}d\zeta.$$

Entonces

$$|f'(w) - f'(0)| \leq \frac{|w|}{2\pi}\int_{\partial B}\frac{|f'(\zeta)|}{|\zeta||\zeta - w|}|d\zeta| \leq \frac{|w|}{r - |w|}|f'|_B,$$

de donde

$$|g(z)| \leq \int_0^1 \frac{|zt||f'|_B}{r - |zt|}|z|dt \leq \frac{|z|^2}{2(r - |z|)}|f'|_B \leq \frac{|z|^2}{r - |z|}|f'(0)|.$$

Por la desigualdad del triángulo $|f(z)| \geq |f'(0)||z| - |g(z)| \geq |f'(0)||z| - \frac{|z|^2}{r-|z|}|f'(0)| = |f'(0)|\left(|z| - \frac{|z|^2}{r-|z|}\right)$.

Para x entre 0 y r, $x - \frac{x^2}{r-x}$ alcanza su máximo $(3-2\sqrt{2})r$ en $x_0 = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})r$. Por lo tanto, $|f(z)| \geq (3 - 2\sqrt{2})r|f'(0)| = R$ para toda z con $|z| = x_0$. Entonces $s = d(0, f(\partial G)) \geq R$, donde $G = B_{x_0}(0)$. Por el lema 3.1, $B_s(0) \subset f(G)$ y entonces $B_R(0) \subset B_s(0) \subset f(G) \subset f(B)$.

■

Teorema 3.3 (Teorema de Bloch) *Si* $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ *y* $f'(0) = 1$ *entonces* $f(\mathbb{E})$ *contiene un disco de radio* $\frac{3}{2} - \sqrt{2} > \frac{1}{12}$.

Demostración: Sea $g : \overline{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}$ dada por $g(z) = |f'(z)|(1 - |z|)$. Como $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ tenemos que $g \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{E}})$. Además, $g(0) = |f'(0)| = 1$ y $g(z) = 0$ para toda $z \in \partial\mathbb{E}$, por lo que g alcanza su máximo $M \geq 1$ en un punto $a \in \mathbb{E}$.

Sea $r = \frac{1}{2}(1 - |a|)$; notemos que r es la distancia de $B_r(a)$ a $\partial\mathbb{E}$, por lo que los puntos z de esta bola satisfacen que $1 - |z| \geq r$. Para toda $z \in B_r(a)$ se tiene que $|f'(z)|(1 - |z|) \leq |f'(a)|(1 - |a|) = |f'(a)|2r \leq |f'(a)|2(1 - |z|)$, de donde $|f'(z)| \leq 2|f'(a)|$ para toda $z \in B_r(a)$. Aplicando el lema 3.2 (f no es constante porque $f'(0) \neq 0$) obtenemos que $B_R(f(a)) \subset f(B_r(a)) \subset f(\mathbb{E})$, donde $R = (3 - 2\sqrt{2})r|f'(a)| = (\frac{3}{2} - \sqrt{2})(1 - |a|)|f'(a)| = (\frac{3}{2} - \sqrt{2})M \geq \frac{3}{2} - \sqrt{2}$.

■

Corolario 3.4 *Sea* G *una región,* $f \in \mathcal{O}(G)$ *y* $c \in G$ *tal que* $f'(c) \neq 0$. *Entonces* $f(G)$ *contiene discos de radio* $\frac{1}{12}s|f'(c)|$ *para todo* $s < d(c, \partial G)$.

Demostración: Trasladando podemos suponer que $c = 0$. Dada $s < d(c, \partial G)$ tenemos que $\overline{B_s(0)} \subset G$, así que la funcion $g(z) = \frac{f(sz)}{sf'(0)} \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$. Como $g'(0) = 1$, por el teorema de Bloch, $g(\mathbb{E})$ tiene un disco de radio $\frac{1}{12}$. Además, $f(B_s(0)) = sf'(0)g(\mathbb{E})$, por lo que $f(G)$ contiene un disco de radio $\frac{1}{12}s|f'(0)|$.

■

Corolario 3.5 *La imagen de una función entera no constante contiene discos arbitrariamente grandes.*

Demostración: En la demostración del corolario anterior, podemos escoger s arbitrariamente grande.

■

Observemos que el teorema de Liouville es consecuencia de este corolario.

3.2. El Pequeño Teorema de Picard

Lema 3.6 *Sea* G *simplemente conexo y* $f \in \mathcal{O}(G)$ *tal que* $1, -1 \notin f(G)$. *Entonces existe* $F \in \mathcal{O}(G)$ *tal que* $f = \cos(F)$.

Demostración: Como $1 - f^2 \in \mathcal{O}(G)$ no toma el valor 0 y G es simplemente conexo, existe $g \in \mathcal{O}(G)$ tal que $g^2 = 1 - f^2$. Entonces $1 = f^2 + g^2 = (f + ig)(f - ig)$. Se sigue que $f + ig$ no tiene ceros en G y por lo tanto existe $F \in \mathcal{O}(G)$ tal que $f + ig = e^{iF}$. Entonces $f - ig = e^{-iF}$, luego $f = \frac{1}{2}(e^{iF} + e^{-iF}) = \cos(F)$.

■

Lema 3.7 *Sea* G *simplemente conexo y* $f \in \mathcal{O}(G)$ *una función tal que* $0, 1 \notin f(G)$. *Entonces existe* $g \in \mathcal{O}(G)$ *tal que* $f = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi\cos(\pi g)))$. *Además, si* g *es cualquier función que cumpla esto, entonces* $g(G)$ *no contiene discos de radio* 1.

Demostración: Como la función $2f - 1$ no toma los valores -1 y 1, por el lema 3.6 existe $F \in \mathcal{O}(G)$ tal que $2f - 1 = \cos(\pi F)$. Observemos que F debe omitir todos los valores enteros, en particular -1 y 1. Una vez más, por el lema 3.6, existe $g \in \mathcal{O}(G)$ tal que $F = \cos(\pi g)$. Se tiene entonces que $f = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi\cos(\pi g)))$. Ahora consideremos el conjunto $A = \{m \pm \frac{i}{\pi}\operatorname{arccosh}(n) : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+\}$. Tenemos que $\cos(\pi A) = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ porque $\cos(\pi(m \pm \frac{i}{\pi}\operatorname{arccosh}(n))) = \cos(\pi m)\cosh(\operatorname{arccosh}(n)) \mp i\,\sin(\pi m)\sinh(\operatorname{arccosh}(n)) = (-1)^m n$. Entonces, como F no toma valores enteros, g no puede tomar valores en A, es decir, $g(G) \cap A = \emptyset$. Los puntos de A son los vértices de una "retícula" rectangular en $\mathbb{C}$. Sus rectángulos tienen ancho 1 y alturas de la forma $\frac{1}{\pi}(\operatorname{arccosh}(n + 1) - \operatorname{arccosh}(n))$ con $n \in \mathbb{Z}^+$. Para $n = 1$ tenemos $\frac{\operatorname{arccosh}(2)}{\pi} < 1$, para $n \geq 2$, por el teorema del valor medio, para alguna x entre n y $n + 1$, $\operatorname{arccosh}(n + 1) - \operatorname{arccosh}(n) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} < \pi$ y en este caso la altura del rectángulo también es menor que 1. Así, para cualquier $w \in \mathbb{C}$, existe $a \in A$ tal que $|\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Re}(a)| \leq \frac{1}{2}$ y $|\operatorname{Im}(w) - \operatorname{Im}(a)| < \frac{1}{2}$ de modo que $|w - a| < 1$ y entonces cualquier disco de radio 1 intersecta a A. Por lo tanto, como $g(G)$ no intersecta a A, no puede contener discos de radio 1.

■

Teorema 3.8 (El pequeño teorema de Picard) *Toda función entera que omite dos valores complejos es constante.*

Demostración: Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tal que $a, b \notin f(\mathbb{C})$, con $a \neq b$. Definimos $h(z) = \frac{f(z) - a}{b - a} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Entonces h nunca toma los valores 0 y 1. Por el lema 3.7, existe $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tal que $f = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi\cos(\pi g)))$, y $g(\mathbb{C})$ no contiene discos de radio 1. Pero entonces, por el corolario 3.5, g tiene que ser constante y por lo tanto f también es constante.

■

La siguiente proposición es una inesperada pero bonita aplicación del teorema de Picard.

En general una función entera puede no tener puntos fijos, como lo muestra $f(z) = z + e^z$, pero se cumple lo siguiente:

Proposición 3.9 *Sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorfa, entonces* $f \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tiene un punto fijo, a menos que* f *sea una traslación* $f(z) = z + b, b \neq 0$.

Demostración: Supongamos que $f \circ f$ no tiene puntos fijos. Entonces f tampoco tiene puntos fijos y podemos definir en $\mathbb{C}$ la función $g(z) = \frac{f(f(z))-z}{f(z)-z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Observemos que si tuvieramos que $g(z) = 0$ entonces z sería un punto fijo de $f \circ f$ y si $g(z) = 1$ tendríamos que $f(z)$ es un punto fijo de f. Como estamos suponiendo que $f \circ f$ no tiene puntos fijos, entonces g no puede tomar los valores 0 y 1, de donde, por el teorema de Picard, g es constante. Esto significa que existe $c \neq 0, 1$ tal que $f(f(z)) - z = c(f(z) - z)$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Derivando obtenemos que $(f'(f(z)) - c)f'(z) = 1 - c$ para toda $z \in \mathbb{C}$, de donde, como $c \neq 1$, $f'(z) \neq 0$ y $f'(f(z)) \neq c$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Entonces $f' \circ f$ es una función entera que omite los valores 0 y $c \neq 0$, de donde, por el teorema de Picard, $f' \circ f$ es constante. Pero entonces f' es constante en la imagen de f, que es abierta, de donde f' es constante en $\mathbb{C}$. Se sigue que $f(z) = az + b$ y como f no tiene puntos fijos, para que la ecuación $az + b = z$ no tenga solución debe cumplirse que $a = 1$ y $b \neq 0$.

■

El pequeño teorema de Picard se puede traducir a funciones meromorfas de la siguiente manera:

Teorema 3.10 (El Teorema de Picard para funciones meromorfas) *Si una función meromorfa en* $\mathbb{C}$ *omite tres valores, entonces es constante.*

Demostración: Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ omite los valores distintos a,b y c, entonces $\frac{1}{f-a}$ es una función entera que omite los dos valores distintos $\frac{1}{b-a}$ y $\frac{1}{c-a}$, de donde, por Picard, es constante y entonces f también es constante.

■

3.3. El Teorema de Schottky

Lema 3.11 *Para todo* $w \in \mathbb{C}$ *existe* $v \in \mathbb{C}$ *tal que* $\cos(\pi v) = w$ *y* $|v| \leq 1 + |w|$.

Demostración: Sea $v = a + ib$ tal que $\cos(\pi v) = w$. Cambiando a por $a + 2n$ con n entero, podemos suponer que $|a| \leq 1$. Entonces $|w|^2 = |\cos(\pi a + i\pi b)|^2 = \cos^2(\pi a)\cosh^2(\pi b) + \sin^2(\pi a)\sinh^2(\pi b) = \cos^2(\pi a)(1+\sinh^2(\pi b)) + \sin^2(\pi a)\sinh^2(\pi b) = \cos^2(\pi a) + \sinh^2(\pi b) \geq (\pi b)^2$ porque $\sinh^2(x) \geq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde $|v| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{1 + \frac{|w|^2}{\pi^2}} \leq 1 + \frac{|w|}{\pi} \leq 1 + |w|$.

■

Lema 3.12 *Si* $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ *omite los valores* 0 *y* 1, *entonces existe* $g \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ *tal que* $f = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi\cos(\pi g)))$ *con* $|g(0)| \leq 3 + 2|f(0)|$ *y para todo* $t \in (0,1)$, *si* $|z| \leq t$ *entonces* $|g(z)| \leq |g(0)| + \frac{12t}{1-t}$.

Demostración: Por el lema 3.11, existe $b \in \mathbb{C}$ tal que $\cos(\pi b) = 2f(0) - 1$ y $|b| \leq 1 + |2f(0) - 1| \leq 2 + 2|f(0)|$. Por el lema 3.6, existe $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ tal que $2f - 1 = \cos(\pi h)$, y como $\cos(\pi h(0)) = 2f(0) - 1 = \cos(\pi b)$, podemos escoger h de manera que $h(0) = b$. Por el lema 3.11, existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $\cos(\pi a) = b$ y $|a| \leq 1 + |b| \leq 3 + 2|f(0)|$. Como h no toma valores enteros, por el lema 3.6, existe $g \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ tal que $h = \cos(\pi g)$, y como $\cos(\pi g(0)) = h(0) = b = \cos(\pi a)$, podemos escoger g de manera que $g(0) = a$. Entonces $f = \frac{1}{2}(1+\cos(\pi\cos(\pi g)))$ y $|g(0)| = |a| \leq 3 + 2|f(0)|$.

Ahora sea $t \in (0,1)$ y z tal que $|z| \leq t$. Por el lema 3.7, $g(\mathbb{E})$ no contiene discos de radio 1, y por otro lado, por el lema 3.4, como $d(z, \partial\mathbb{E}) \geq 1-t$, contiene un disco de radio $\frac{1}{12}(1-t)|g'(z)|$ tenemos que $\frac{1}{12}(1-t)|g'(z)| \leq 1$, de donde, $|g'(z)| \leq \frac{12}{1-t}$. Por lo tanto, $|g(z)| = |g(0) + \int_0^z g'(\zeta)d\zeta| \leq |g(0)| + |\int_0^z g'(\zeta)d\zeta| \leq |g(0)| + \int_0^1 |g'(zu)||z|du \leq |g(0)| + \frac{12t}{1-t}$.

∎

Para $t \in (0,1)$ y $r > 0$, definimos la función

$$L(t,r) = \exp(\pi\exp(\pi(3 + 2r + \frac{12t}{1-t}))).$$

Esta función nos da una cota para el crecimiento de las funciones holomorfas, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.13 (El teorema de Schottky) *Sean* $r > 0$, $t \in (0,1)$ *y* $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ *tal que* $|f(0)| \leq r$ *y omite los valores* 0 *y* 1. *Entonces para toda* z *tal que* $|z| \leq t$ *se tiene que* $|f(z)| \leq L(t,r)$.

Demostración: Observemos que para toda $z \in \mathbb{C}$, $|\cos(z)| = |\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})| \leq \frac{1}{2}(|e^{iz}|+|e^{-iz}|) \leq \frac{1}{2}(e^{|iz|}+e^{|-iz|}) = e^{|z|}$ y $\frac{1}{2}|1+\cos(z)| = |\cos^2(\frac{z}{2})| = |\cos(\frac{z}{2})|^2 \leq (e^{|\frac{z}{2}|})^2 = e^{|z|}$. Por el lema 3.12,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{1}{2}|1 + \cos(\pi\cos(\pi g(z)))| \leq \exp(\pi|\cos(\pi g(z))|) \\ &\leq \exp(\pi\exp(\pi|g(z)|)) \leq \exp(\pi\exp(\pi(3 + 2|f(0)| + \frac{12t}{1-t}))) \\ &\leq L(t,r) \end{aligned}$$

∎

3.4. El Gran Teorema de Picard

Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región y $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{O}(G) \mid f \text{ omite los valores } 0 \text{ y } 1\}$. Notemos que si $f \in \mathcal{F}$ entonces $\frac{1}{f}$ está en $\mathcal{F}$.

Lema 3.14 *Para cada $w \in G$ y para cada $r > 0$, existe B, una vecindad de w tal que la familia $\{f \in \mathcal{F} : |f(w)| \leq r\}$ está acotada en B.*

Demostración: Sean $w \in G$, $r > 0$ y $f \in \mathcal{F}$ tal que $|f(w)| \leq r$. Sea $t > 0$ tal que $\overline{B_{2t}(w)} \subset G$. Consideremos la función $g \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ dada por $g(z) = f(2tz + w)$. Tenemos que $|g(0)| \leq r$ y que g omite los valores 0 y 1. Por el teorema de Schottky, $|g(z)| \leq L(\frac{1}{2}, r)$ para toda $z \in B_{\frac{1}{2}}(0)$, de donde $|f(z)| \leq L(\frac{1}{2}, r)$ para toda $z \in B_t(w)$.

■

Definimos para $w \in G$, la familia $\mathcal{F}_w = \{f \in \mathcal{F} : |f(w)| \leq 1\}$. Observemos que para toda $f \in \mathcal{F}$, f ó $\frac{1}{f}$ están en $\mathcal{F}_w$.

Lema 3.15 *Para cada $w \in G$, $\mathcal{F}_w$ está localmente acotada.*

Demostración: Sean $w \in G$ y $U = \{z \in G \mid \mathcal{F}_w$ está acotada en una vecindad de $z\}$. Es claro que U es abierto. Además U es no vacío porque, por el lema anterior, $w \in U$. Si U no es todo G, podemos encontrar $z \in \partial U \cap G$, y entonces existe $f_n \in \mathcal{F}_w$ una sucesión tal que $\lim_n f_n(z) = \infty$. Definiendo $g_n = \frac{1}{f_n} \in \mathcal{F}$, tenemos que $\lim_n g_n(z) = 0$. Por el lema anterior, $\{g_n\}$ está acotada en una vecindad de z. Por el teorema de Montel, existe una subsucesión g_{n_k} que converge uniformemente en alguna vecindad B de z a una función $g \in \mathcal{O}(B)$. Como g_{n_k} no se anula y $g(z) = 0$, por el lema 2.6, g es constante igual a 0. Pero entonces, f_{n_k} converge uniformemente a infinito en todo B, pero esto es una contradicción porque B contiene puntos de U. Se tiene entonces que $U = G$ y por lo tanto F_w está localmente acotada.

■

Ampliaremos ahora la definición de familia normal, para incluir sucesiones f_n que convergen compactamente a ∞ (esto es, $\frac{1}{f_n}$ converge compactamente a 0).

Teorema 3.16 *$\mathcal{F}$ es normal en G.*

Demostración: Sea f_n una sucesión en $\mathcal{F}$. Fijamos un punto $w \in G$. Si f_n tiene alguna subsucesión en $\mathcal{F}_w$, entonces, por el lema anterior, dicha subsucesión esta localmente acotada en G y por Montel tiene una subsucesión compactamente convergente. Si no, casi todas las funciones $\frac{1}{f_n}$ están en $\mathcal{F}_w$. Por el lema anterior y Montel, existe una subsucesión g_n que converge compactamente a una función $g \in \mathcal{O}(G)$. Si g no se anula, entonces $\frac{1}{g_n}$ es una subsucesión de f_n que converge compactemente a $\frac{1}{g}$. Si g se anula, por el lema 2.6, $g = 0$ y entonces $\frac{1}{g_n}$ es una subsucesión de f_n que converge compactamente a ∞.

■

Teorema 3.17 (El gran teorema de Picard) *Sea c una singularidad esencial de f. Entonces, f toma todos los valores complejos salvo tal vez uno, en cualquier vecindad de c.*

Demostración: Sean $r > 0$ y $B^\times = B_r(c) \setminus \{c\}$ tales que $f \in \mathcal{O}(B^\times)$. Supongamos que $a, b \notin f(B^\times)$, con $a \neq b$. Sea $g \in \mathcal{O}(\mathbb{E}^\times)$ dada por $g(z) = \frac{f(rz+c)-b}{a-b}$. Entonces g no toma los valores 0 y 1. Además, es claro que f tiene una singularidad esencial en c si y sólo si g tiene una en 0. Consideremos la sucesión $g_n \in \mathcal{O}(\mathbb{E}^\times)$ dada por $g_n(z) = g(\frac{z}{n})$. Por el teorema anterior, g_n tiene una subsucesión g_{n_k} compactamente convergente en $\mathbb{E}^\times$. g_{n_k} puede converger compactamente a $h \in \mathcal{O}(\mathbb{E}^\times)$ o a ∞. En el primer caso, converge uniformemente en $\partial B_{\frac{1}{2}}(0)$, por lo que está acotada en $\partial B_{\frac{1}{2}}(0)$. Esto quiere decir que existe $M > 0$ tal que $|g(\frac{z}{n_k})| \leq M$ si $|z| = \frac{1}{2}$. De donde $|g(z)| \leq M$ para cualquier z en los círculos $|z| = \frac{1}{2n_k}$. Por el principio del módulo máximo, en cada anillo $\frac{1}{2n_{k+1}} \leq |z| \leq \frac{1}{2n_k}$, $|g(z)| \leq M$. Entonces g está acotada en una vecindad del 0, y por lo tanto es analítica en 0. En el segundo caso, $\frac{1}{g_{n_k}}$ converge compactamente a 0. Con un argumento análogo al del caso anterior, obtenemos que $\frac{1}{g}$ es analítica en 0, y por lo tanto g es meromorfa en 0. En cualquier caso, g no tiene una singularidad esencial en 0, de donde f tampoco tiene una en c.

∎

Corolario 3.18 *Sea* c *una singularidad esencial de* f. *Entonces,* f *toma todos los valores complejos salvo tal vez uno, una infinidad de veces, en cualquier vecindad de* c.

Demostración: Sea U_1 una vecindad perforada de c. Por el teorema de Picard, existe $a \in \mathbb{C}$ tal que f toma en U_1 todos los valores complejos salvo tal vez a. Sea $w \neq a$ arbitrario, entonces existe z_1 en U_1 tal que $f(z_1) = w$. Tomamos ahora $U_2 \subseteq U_1$ una vecindad perforada de c que no contenga a z_1. Por el teorema de Picard, f omite a lo más un valor en U_2. Pero como $U_2 \subseteq U_1$, dicho valor (si es que existe) tiene que ser a. Por lo tanto existe $z_2 \in U_2$ tal que $f(z_2) = w$. Además, $z_2 \neq z_1$ porque $z_1 \notin U_2$. Siguiendo de esta manera podemos construir una sucesión z_n de puntos distintos en U_1 tales que $f(z_n) = w$ para toda n.

∎

Corolario 3.19 *Sea* f *una función entera trascendente, es decir, una función entera que no es un polinomio, entonces* f *toma todos los valores complejos salvo tal vez uno, una infinidad de veces.*

Demostración: La función $f(\frac{1}{z})$ tiene una singularidad esencial en 0. Por 3.18 $f(\frac{1}{z})$, y por lo tanto f, toma todos los valores complejos salvo tal vez uno, una infinidad de veces.

∎

Lema 3.20 *Si* f *es una función inyectiva y analítica en una vecindad perforada de un punto, entonces* f *tiene un polo o una singularidad removible en ese punto.*

Demostración: Si en ese punto f no tuviera un polo o una singularidad removible, entonces f tendría una singularidad esencial. Pero por 3.18, f no podría ser inyectiva.

■

Un automorfismo del plano es una función biholomorfa de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Por el teorema de la función inversa, para que una biyección del plano sea un automorfismo de $\mathbb{C}$, basta que sea entera. El siguiente teorema clasifica completamente dichos automorfismos.

Teorema 3.21 *Los automorfismos del plano son las funciones de la forma* $f(z) = az + b$ *con* $a \neq 0$.

Demostración: Es claro que las funciones de esa forma son automorfismos de $\mathbb{C}$. Ahora, si f es un automorfismo de $\mathbb{C}$, entonces, por 3.19, f no es trascendente. Esto quiere decir que f es un polinomio, pero como f es biyectiva, por el teorema fundamental del álgebra, tiene que ser de la forma $az + b$ con $a \neq 0$.

■

Un automorfismo de la esfera de Riemann (el plano extendido) es una biyección de la esfera que es meromorfa.

Teorema 3.22 *Los automorfismos de la esfera de Riemann son las funciones de Möbius.*

Demostración: Sabemos que las funciones de Möbius son automorfismos de la esfera. Por otra parte, dado un automorfismo f, podemos encontrar una transformación de Möbius h tal que $g = f \circ h$ manda al infinito en el infinito. Por lo tanto, g restringida al plano es un automorfismo de $\mathbb{C}$, por lo que $g(z) = az+b$ con $a \neq 0$, que es una transformación de Möbius. Entonces $f = g \circ h^{-1}$ es también una transformación de Möbius.

■

Teorema 3.23 *Los automorfismos de* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *son las funciones del forma* $f(z) = az$ *con* $a \neq 0$ *junto con las de la forma* $f(z) = \frac{a}{z}$ *con* $a \neq 0$.

Demostración: Obviamente las funciones de dichas formas son automorfismos de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ahora, sea f un automorfismo cualquiera de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Por el lema 3.20, f tiene una singularidad removible o un polo en 0. En el primer caso, definimos $f(0) = z_0$ de manera que f sea entera. Como f era biyectiva en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, z_0 tiene que ser 0 y entonces f es un automorfismo de $\mathbb{C}$. Tenemos pues que $f(z) = az+b$ con $a \neq 0$ y además $f(0) = 0$ de donde $f(z) = az$. Si f tiene un polo en 0 entonces $\frac{1}{f}$ tiene una singularidad removible en 0. Con un argumento análogo al anterior podemos demostrar que $\frac{1}{f}(z) = \tilde{a}z$ para algún $\tilde{a} \neq 0$, de donde $f(z) = \frac{1}{\tilde{a}z} = \frac{a}{z}$ con $a = \frac{1}{\tilde{a}} \neq 0$.

■

Teorema 3.24 *El grupo de los automorfismos de $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ es isomorfo a S_3, el grupo de permutaciones de un conjunto con tres elementos.*

Demostración: Las funciones de z dadas por z, $\frac{1}{z}$, $1-z$, $\frac{1}{1-z}$, $\frac{z}{z-1}$ y $\frac{z-1}{z}$ son automorfismos de $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ y forman un subgrupo de éstos isomorfo a S_3. Por otra parte, veremos que cualquier isomorfismo de $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ es una de estas funciones. Por el lema 3.20, f tiene un polo o una singularidad removible en 0, 1 e ∞. Podemos entonces extender f a toda la esfera de Riemann de manera meromorfa definiéndola en 0, 1 e ∞. Tenemos entonces que f es meromorfa en toda la esfera y para que pueda ser biyectiva en $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ tiene que ser, cuando se restringe a los puntos 0, 1 e ∞, una permutación de éstos. Resulta entonces que f es una transformación de Möbius que permuta los puntos 0, 1 e ∞, por lo que es alguna de las 6 funciones mencionadas.

■

Bibliografía

[1] Remmert, Reinhold. *Classical Topics in Complex Function Theory.* Springer, New York, 1998.

[2] Remmert, Reinhold. *Theory of Complex Functions.* Springer, New York, 1991.

[3] Marsden, Jerrold E., Michael J. Hoffman. *Análisis Básico de Variable Compleja.* Trillas, México, 1996.

[4] Lang, Serge. *Complex Analysis.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1977.