

01173



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ANÁLISIS DINÁMICO DE UN ROBOT MANIPULADOR  
HELICOIDAL PPSP

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ingeniería Mecánica  
(Diseño Mecánico)  
presenta

Ricardo Javier Peón Escalante

Director de Tesis:

Dr. Ignacio Juárez Campos

2004

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**

o a la Dirección General de Bibliot  
a difundir en formato electrónico e  
nido de mi trabajo recepcional.  
NOMBRE: Ricardo Javier Peón  
Escalante  
FECHA: 23-Nov-04  
FIRMA: [Firma]

## Agradecimientos

Agradezco a Dios que me permite aspirar a crecer como persona y aprender a vivir dentro de mis límites sin resentimientos ni envidias.

A mis padres, gracias por darme lo más valioso que tengo; la vida, los amo ya que ustedes son mi inspiración para seguir adelante.

A mis hermanos por caminar junto conmigo y comprender que nosotros hacemos nuestra vida pero Dios tiene la última palabra.

A mis abuelos por hacerme comprender que la vida es una sucesión de enseñanzas que deben ser vividas para ser entendidas.

A la UNAM, agradezco a ésta gran institución que ha dejado huella y llevo con mucho cariño y orgullo en mi corazón.

A mi director de tesis Dr. Ignacio Juárez Campos le doy las gracias por su apoyo, guía, asesoría y paciencia para llevar a buen término este trabajo.

Al M. en I. Francisco Cuenca Jiménez gracias por su ayuda continua, consejos, sugerencias y revisión de este trabajo.

Al Dr. Marcelo López Parra, al M. en I. Leopoldo A. González González y al M. en I. Ociel Flores Díaz gracias por sus comentarios y sugerencias expresadas ya que éstas mejoraron la calidad de este trabajo.

Agradezco el apoyo económico recibido por el CONACYT con el cual pude realizar mis estudios de maestría.

*"SE QUE SE APRENDE MÁS DE LAS PERSONAS QUE COMPARTEN"*

## Resumen

En esta tesis se muestra un novedoso robot manipulador tipo serial, el cual consta de seis grados de libertad, presentando una configuración Prismática-Prismática-Esférica-Prismática (PPSP).

La disposición de los eslabones y pares cinemáticos de dicho manipulador, le provee a éste un movimiento en forma de hélice. Este manipulador nos hace recordar al mecanismo, basado en un tornillo, el cual consiste en una cadena conectada serialmente y que se basa en la fórmula de Rodrigues para obtener un desplazamiento general de tornillo.

Este último mecanismo mencionado, proporciona un movimiento no flexible, es decir, una pieza de trabajo es transportada por el mecanismo a partir de una posición inicial a una final, a través de una trayectoria fija en forma de hélice. Los correspondientes parámetros del tornillo de este mecanismo, son calculados en función de las posiciones de tres puntos no colineales pertenecientes a la pieza de trabajo para los dos extremos de la trayectoria fija.

Pero en el caso de cambiar las condiciones de la tarea, es necesario sustituir por completo todo el mecanismo, de manera que cumplan con los nuevos parámetros del tornillo. Debido a este problema, se propone en esta tesis un manipulador flexible, es decir, capaz de cambiar su posición y orientación de acuerdo a las situaciones actuales. Para poder encontrar la adecuada configuración de tornillo, fué necesario desarrollar la cinemática inversa correspondiente al manipulador PPSP, en términos de las coordenadas operacionales.

Los resultados obtenidos a partir de la aplicación de la cinemática inversa, son mostrados para la evolución de cada una de las articulaciones de las que consta el robot manipulador, cuando ejecuta dicha tarea, al hacer variar un simple parámetro que evoluciona

desde cero hasta uno. Como perfil de trayectoria, se escogió al polinomio de octavo grado.

También se resuelve el problema dinámico inverso del manipulador helicoidal "PP-SP", determinando las ecuaciones de movimiento a partir de la formulación recursiva de Newton-Euler. Por último, a partir de las ecuaciones obtenidas se realiza una simulación del manipulador cuando transporta una pieza de trabajo en su órgano terminal, desde una posición inicial  $P_1$  hasta una posición final  $P_2$ , a través de una trayectoria helicoidal. Se presentan las gráficas de la posición, velocidad, aceleración y de la evolución dinámica para cada una de las variables articulares.

# Índice general

Agradecimientos	
Resumen	
Objetivos . . . . .	III
Definición del problema . . . . .	IV
Establecimiento de Hipótesis . . . . .	VII
Nomenclatura . . . . .	VIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Organización de la tesis . . . . .	6
1.3. Revisión Bibliográfica . . . . .	7
1.4. Estado del arte . . . . .	8
<b>2. Modelado Matemático</b>	<b>12</b>
2.1. Descripción de la arquitectura PPSP . . . . .	13
2.2. Cinemática Directa . . . . .	18
2.2.1. Descripción Espacial . . . . .	19
2.3. Cinemática Inversa . . . . .	22
2.3.1. Obtención de las variables articulares que sirven para posicionar al eslabonamiento de tornillo del robot manipulador . . . . .	23
2.3.2. Obtención de las variables articulares que sirven para orientar al eslabonamiento de tornillo del robot manipulador . . . . .	40

2.3.3. Obtención de las variables articulares del eslabonamiento de tornillo	45
<b>3. Dinámica del Manipulador</b>	<b>51</b>
3.1. Introducción . . . . .	51
3.2. Formulación recursiva de Newton-Euler . . . . .	53
3.2.1. Propagación hacia adelante . . . . .	53
3.2.2. Propagación hacia atrás . . . . .	71
3.3. Obtención de la fuerza o par aplicado para cada articulación . . . . .	80
<b>4. Generación de Trayectoria</b>	<b>82</b>
4.1. Perfil de Trayectoria . . . . .	82
4.1.1. Perfil de Trayectoria de grado 5 . . . . .	84
4.1.2. Perfil de Trayectoria Octal . . . . .	87
4.2. Lugar geométrico de la trayectoria . . . . .	93
4.2.1. Desplazamiento general de Tornillo . . . . .	94
4.2.2. Transformación de Tornillo . . . . .	105
<b>5. Simulación</b>	<b>113</b>
5.1. Introducción . . . . .	113
5.2. Descripción de la tarea . . . . .	113
<b>6. Conclusiones</b>	<b>128</b>
6.1. Trabajo Futuro . . . . .	130
<b>Bibliografía</b>	<b>131</b>

## Objetivos

### Objetivo Principal

Proponer y analizar un novedoso robot manipulador helicoidal de seis grados de libertad para sustituir al mecanismo de tornillo rígido. Este manipulador se propone para:

- a) operaciones de transporte de piezas en donde sólo importan las posiciones iniciales y finales de éstas.
- b) adaptar su estructura mecánica (postura), cuando las condiciones (puntos inicial y final) de la trayectoria cambien.

### Objetivos Secundarios

1. Desarrollar el modelo de la cinemática inversa correspondiente en términos de las coordenadas operacionales. Necesaria para poder encontrar la configuración adecuada del eslabonamiento de tornillo del manipulador helicoidal, para diferentes puntos extremos de la trayectoria cuando las condiciones de la tarea cambien.
2. Encontrar la evolución de las variables de articulación necesarias para tomar y dejar un objeto a través de una trayectoria en forma de hélice cuando un parámetro simple evoluciona desde cero hasta uno.
3. Desarrollar una transformación del movimiento general de tornillo. Este operador contendrá la información necesaria para ser capaz de transformar cualquier vector de posición conforme a un movimiento de tornillo.

## Definición del problema

Las actividades comerciales e industriales han evolucionado hasta llegar a la globalización, esto genera que muchas de las empresas de todo el mundo tengan que ir adaptando sus sistemas tecnológicos y administrativos para poder ofrecer productos y servicios de calidad mundial; aunado a esto los avances tecnológicos de los últimos años impone nuevos retos en el área de la automatización industrial.

Los sistemas de manufactura modernos cuentan con robots manipuladores que dotan, junto con la integración de otros dispositivos a una línea de producción, de flexibilidad. Estos robots están dedicados a la manipulación de piezas, objetos y herramientas.

Supóngase que dentro de un proceso de manufactura se está utilizando actualmente un mecanismo rígido de tornillo que transporta una pieza de trabajo a partir de una posición inicial  $P_1Q_1R_1$  hasta una final  $P_2Q_2R_2$ , donde  $P_iQ_iR_i$  pertenece a la pieza de trabajo, la cual describe un movimiento a través de una trayectoria en forma de hélice, cuyo diseño ha sido inspirado en la formulación del Tornillo de Rodrigues. En la figura. (a) se muestra la situación de la pieza de trabajo en las posiciones inicial y final y también se muestran los cuatro parámetros del tornillo de Rodrigues. Estos parámetros son:

- 1) El ángulo de rotación del desplazamiento alrededor del eje del tornillo ( $\varphi$ ).
- 2) El eje del tornillo ( $\hat{e}$ ).
- 3) La traslación a lo largo del eje del tornillo ( $d$ ).
- 4) El vector de posición que define el punto geométrico por donde pasa el eje del tornillo ( $\bar{S}_{\perp\hat{e}}$ ).

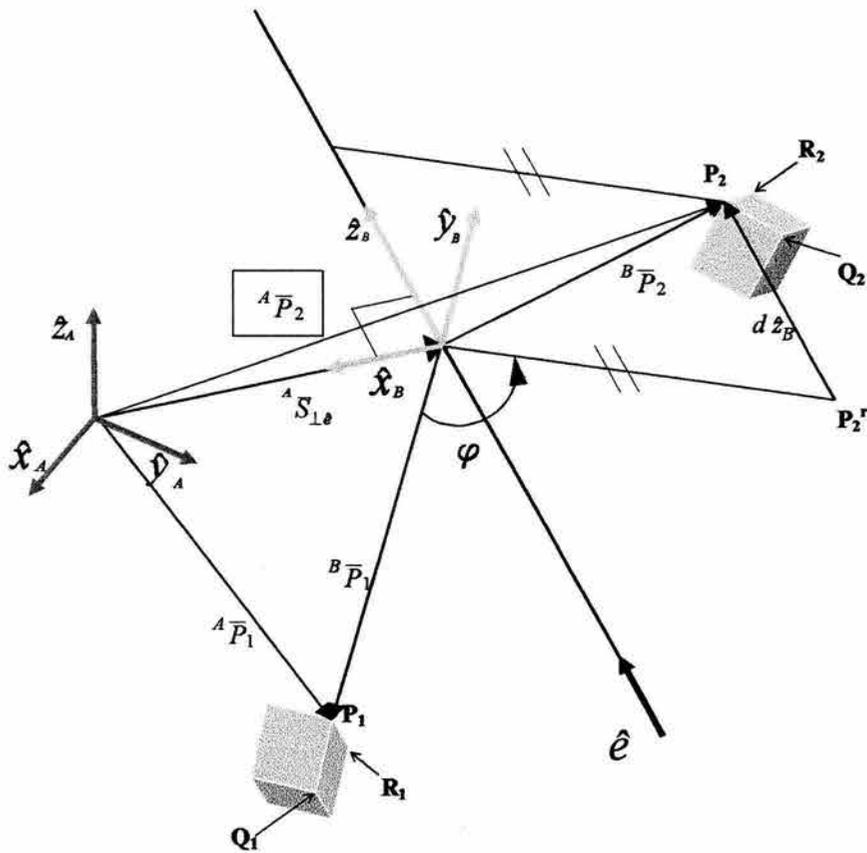


Fig. (a). Desplazamiento general de tornillo de una pieza de trabajo.

El mecanismo rígido de tornillo, únicamente funciona para transportar la pieza de trabajo para un solo tipo de operación, es decir, es capaz de ejecutar la misma tarea tantas veces como le sea requerido. De manera que al cambiar la posición inicial y final de la tarea, se vuelve obligatorio el tener que cambiar por completo todo el mecanismo y por consecuente tener que volver a calcular los parámetros necesarios para diseñar un nuevo mecanismo de tornillo rígido, para la nueva tarea planteada.

Ahora bien, teniendo en cuenta que el ciclo de vida de muchos de los productos son relativamente cortos y que los sistemas de manufactura actuales exigen flexibilidad, surge la necesidad de sustituir el mecanismo de tornillo rígido por un robot manipulador que cumpla con el mismo movimiento que aquél, pero que pueda adecuarse a las condiciones

inicial y final de la tarea que se requiera.

Un robot manipulador tiene la ventaja de requerir solamente cambios en su programación para poder realizar diferentes tipos de actividades, a diferencia de los cambios en estructura mecánica que deben efectuarse en otros mecanismos antes de poder realizar una nueva tarea.

De esta manera, surge la necesidad de resolver el siguiente problema.

## **PROBLEMA:**

*Se pretende sustituir al mecanismo de tornillo rígido por un robot manipulador que esté formado por tres eslabonamientos. Los cuales tendrán como finalidad que el manipulador resultante de este arreglo pueda posicionar y orientar al eslabonamiento de tornillo.*

*El principal propósito del manipulador helicoidal obtenido deberá tener la capacidad de cambiar su postura conforme las condiciones (puntos inicial y final) de la tarea cambien.*

*El arreglo del manipulador que se obtenga podrá generar movimientos iguales que el mecanismo de tornillo rígido, es decir, tendrá la capacidad de generar un movimiento cuya trayectoria que se genere en el efector final (pinza) sea en forma de hélice.*

Es necesario indicar que el movimiento helicoidal generado no es lo importante. Lo que importa es tomar la pieza en una posición y orientación iniciales y dejarla en una posición y orientación finales. El movimiento helicoidal, es el resultado de tratar de resolver el problema del transporte de una pieza de trabajo mediante el principio del Tornillo de Rodrigues.

## Establecimiento de Hipótesis

1. El robot manipulador helicoidal PPSP, basado en el principio del Tornillo de Rodrigues, deberá ser capaz de transportar piezas de trabajo adaptando su postura conforme a las posiciones iniciales y finales de la tarea.
2. Debe existir un operador lineal parametrizado en función del tiempo, capaz de transformar cualquier vector de posición conforme a un movimiento de tornillo, en el que se basa el diseño del manipulador PPSP.
3. El arreglo PPSP deberá proporcionar los cuatro parámetros de tornillo de acuerdo a la formulación del desplazamiento general de Tornillo de Rodrigues.

Estas hipótesis pueden ser probadas contestando las preguntas siguientes:

1. ¿Cuáles son las ecuaciones de las variables de articulación que le proporcionan al robot manipulador helicoidal PPSP un movimiento general de tornillo?
2. ¿Cuál es el operador lineal parametrizado en función del tiempo que contiene la información del movimiento general de tornillo y es capaz de proporcionarle al manipulador helicoidal PPSP una trayectoria en forma de hélice?

## Nomenclatura

### Definiciones

<b>PPSP</b>	Arquitectura del manipulador helicoidal: Prismático-Prismático-Esférico-Prismático.
<b>PPRRRP</b>	Arquitectura del manipulador helicoidal equivalente a PPSP: Prismático-Prismático-Rotacional-Rotacional-Rotacional-Prismático.
<b>RPSP</b>	Arquitectura del manipulador helicoidal: Rotacional-Prismático-Esférico-Prismático.
<b>SPRP</b>	Arquitectura del manipulador helicoidal: Esférico-Prismático-Rotacional-Prismático.
<b>RRSP</b>	Arquitectura del manipulador helicoidal: Rotacional-Rotacional-Esférico-Prismático.

### Escalares

$NE$	Número de eslabones
$NA$	Número de articulaciones.
$L_B$	Longitud del brazo del robot manipulador
<b>OBJ</b>	Punto perteneciente a la pieza de trabajo donde el manipulador la toma.
$P_i$	Punto perteneciente a la pieza de trabajo, donde $i = 1, 2$ para la posición inicial y final respectivamente.
$Q_i$	Punto perteneciente a la pieza de trabajo, donde $i = 1, 2$ para la posición inicial y final respectivamente.
$R_i$	Punto perteneciente a la pieza de trabajo, donde $i = 1, 2$ para la posición inicial y final respectivamente.

E	Punto central de la articulación esférica cuando el sexto eje del manipulador <b>PPSP</b> llega a ser coincidente con el eje del tornillo.
E'	Punto central de la articulación esférica cuando el manipulador toma la pieza de trabajo.
C	Punto de intersección entre la última articulación prismática y el sexto eje, antes de tomar la pieza.
C'	Punto de intersección entre la última articulación prismática y el sexto eje, después de tomar la pieza.
M	Punto operacional del efector final cuando el sexto eje coincide con el eje del tornillo.
M'	Punto operacional del efector final cuando el manipulador toma la pieza de trabajo.
EE'	Línea definida por los puntos E y E'.
S <sub>p</sub>	Punto donde el eje $\hat{e}$ corta el plano formado por los vectores
S <sub>0</sub>	Punto ubicado sobre el eje $\hat{e}$ diferente a S <sub>p</sub> .
$u_{\text{tornillo}}(t)$	Parámetro en función del tiempo y varía desde cero correspondiente a $t = 0$ ,hasta uno, correspondiente a $t = t_f$
* $p(t)$	Polinomio de quinto grado que define el perfil geométrico de la trayectoria
* $v(t)$	Perfil de velocidad para un polinomio de quinto grado.
* $a(t)$	Perfil de aceleración para un polinomio de quinto grado.
* $a_0$	Coefficientes del polinomio de quinto grado.
$p(t)$	Polinomio de octavo grado que define el perfil geométrico de la trayectoria
$v(t)$	Perfil de velocidad para un polinomio de octavo grado.
$a(t)$	Perfil de aceleración para un polinomio de octavo grado.
$a_0$	Coefficientes del polinomio de octavo grado.
$t_f$	Tiempo al fin de recorrido en el perfil de trayectoria.

$dt$	Distancia total de recorrido.
$índice\_m$	Escalar que controla la curva del perfil de trayectoria gobernada por un polinomio de grado 8.
$d_i$	VARIABLES articulares prismáticas, correspondientes a la primera, segunda y sexta articulaciones.
$\theta_i$	VARIABLES articulares rotacionales, correspondientes a la tercera, cuarta y quinta articulaciones.
$d$	Traslación a lo largo del eje del tornillo
$\varphi$	Ángulo de rotación del desplazamiento alrededor del eje del tornillo
$\beta$	Ángulo existente entre los vectores ${}^0\hat{\mathbf{P}}_{IN}$ y ${}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}$ .
$\gamma$	Ángulo existente entre los vectores $\hat{\mathbf{e}}$ y ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}$ .
$\delta$	Ángulo existente entre los vectores ${}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}$ y ${}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E}$ .

## Matrices

$\mathbf{I}_{3 \times 3}$	Matriz Identidad $3 \times 3$
${}^u_w\mathbf{R}$	Describe la orientación del sistema de referencia $\{w\}$ respecto de $\{u\}$ .
${}^u_w\mathbf{T}$	Matriz de transformación homogénea de dimensión $4 \times 4$ que define la relación de $\{w\}$ respecto de $\{u\}$ .
${}^{cj}\mathbf{I}_j$	Matriz de inercia de los eslabones $j = 1, 2, 3, 4, 5$ y $6$ .
$\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{x}}_0}$	Matriz antisimétrica del vector $\hat{\mathbf{x}}_0$ .
$\mathbf{M}_{0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}}$	Matriz antisimétrica del vector ${}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}$ .
$\text{Rot}(*, \bullet)$	Descripción de la orientación representada por la formulación de Gibbs en función de un eje de giro,*, y un ángulo de giro,•.

## Vectores

${}^0\bar{\mathbf{P}}_E$	Vector de posición del centro de la articulación esférica respecto de $\{0\}$ .
$\hat{\mathbf{V}}_{\perp ({}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} - \hat{\mathbf{e}})}$	Vector unitario normal al plano $({}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} - \hat{\mathbf{e}})$ .

$\hat{e}$	Eje del tornillo
$\overline{S}_{\perp \hat{e}}$	Vector de posición que define el punto geométrico donde pasa el eje del tornillo
${}^0\hat{P}_{IN}$	Vector unitario coincidente en la intersección de los planos $({}^0\hat{S}_{\perp \hat{e}} - \hat{e})$ y $(\hat{y}_0 - \hat{z}_0)$ .
${}^0\overline{P}_{OBJ}$	Vector que describe la posición del efector final referido a $\{0\}$ .
${}^0\overline{P}_{OBJ/E}$	Vector diferencia entre los vectores ${}^0\overline{P}_{OBJ}$ y ${}^0\overline{P}_E$ .
${}^0\overline{P}_{OBJ/C}$	Vector diferencia entre los vectores ${}^0\overline{P}_{OBJ}$ y $h_1$
${}^0\overline{P}_C$	Vector que describe la posición del punto $C$ referido al sistema de referencia $\{0\}$ .
${}^0\overline{P}_{C'}$	Vector que describe la posición del punto $C'$ referido al sistema de referencia $\{0\}$ .
${}^0\overline{P}_{C'/C}$	Vector diferencia entre los vectores ${}^0\overline{P}_{C'}$ y ${}^0\overline{P}_C$ .
${}^0\hat{P}_{E'/E}$	Vector unitario coincidente en la intersección de los planos $(\hat{e} - {}^0\overline{P}_{OBJ/C})$ y $(\hat{y}_0 - \hat{z}_0)$ .
$\hat{V}_{\perp(\hat{e} - {}^0\hat{P}_{OBJ/C})}$	Vector unitario normal al plano $(\hat{e} - {}^0\overline{P}_{OBJ/C})$ .
${}^0\overline{P}_{E'}$	Vector que describe la posición del punto $E'$ referido a $\{0\}$ .
$\overline{Proy_{\hat{x}_0} \hat{e}}$	Vector resultante de la proyección del vector $\hat{e}$ en la dirección $\hat{x}_0$ .
$\overline{Proy_{\hat{x}_0} \hat{y}_4}$	Vector resultante de la proyección del vector $\hat{y}_4$ en la dirección $\hat{x}_0$ .
$\overline{m}_1$	Vector de posición del punto $P_1$ relativos a $S_p$ .
$\overline{m}_2$	Vector de posición del punto $P_2^r$ relativos a $S_p$ .
$\overline{M}_1$	Vector de posición del punto $P_1$ relativos a $S_0$ .
$\overline{M}_2$	Vector de posición del punto $P_2^r$ relativos a $S_0$ .
$\overline{S_0 S_p}$	Vector de posición del punto $S_p$ relativos a $S_0$ .
$\overline{p}_1$	Vector de posición del punto $P_1$ relativos a $\{0\}$ .
$\overline{p}_2^r$	Vector de posición del punto $P_2^r$ relativos a $\{0\}$ .
$\overline{S}_{\hat{e}}$	Vector de posición del punto $S_0$ relativo a $\{0\}$ .
$\overline{d}_{\hat{e}}$	Vector de traslación que lleva el punto $P_2^r$ a la posición $P_2$ .

$\bar{\mathbf{p}}_i$	Vector de posición del punto $\mathbf{P}_i$ referido a $\{0\}$ , donde $i = 1, 2$ para la posición inicial y final respectivamente.
$\bar{\mathbf{q}}_i$	Vector de posición del punto $\mathbf{Q}_i$ referido a $\{0\}$ , donde $i = 1, 2$ para la posición inicial y final respectivamente.
$\bar{\mathbf{r}}_i$	Vector de posición del punto $\mathbf{R}_i$ referido a $\{0\}$ , donde $i = 1, 2$ para la posición inicial y final respectivamente.
${}^A\bar{\mathbf{P}}_B$	Vector de posición del sistema de referencia $\{\mathbf{B}\}$ referido a $\{\mathbf{A}\}$ .
${}^B\bar{\mathbf{P}}_1$	Vector de posición del punto $\mathbf{P}_1$ referido al sistema de referencia $\{\mathbf{B}\}$ .
${}^B\bar{\mathbf{P}}_2$	Vector de posición del punto $\mathbf{P}_2$ referido al sistema de referencia $\{\mathbf{B}\}$ .
${}^A\bar{\mathbf{P}}_2$	Vector de posición del punto $\mathbf{P}_2$ referido al sistema de referencia $\{\mathbf{B}\}$ .
${}^u\boldsymbol{\omega}_w$	Vector de velocidad angular del eslabón $w$ medido en el sistema de referencia $\{u\}$ .
${}^u\dot{\boldsymbol{\omega}}_w$	Vector de aceleración angular del eslabón $w$ medido en el sistema de referencia $\{u\}$ .
${}^u\dot{\mathbf{v}}_w$	Vector de aceleración lineal del eslabón $w$ medido en el sistema de referencia $\{u\}$ .
${}^u\dot{\mathbf{v}}_{cw}$	Vector de aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón $w$ medido en el sistema de referencia $\{u\}$ .
${}^u\mathbf{F}_w$	Vector de fuerza debido al movimiento dinámico del eslabón $w$ medido en el sistema de referencia $\{u\}$ .
${}^u\mathbf{N}_w$	Vector de momento angular debido al movimiento dinámico del eslabón $w$ medido en el sistema de referencia $\{u\}$ .
${}^u\mathbf{f}_w$	Vector de fuerzas resultantes que actúan en el eslabón $w$ medido en el sistema de referencia $\{u\}$ .
${}^u\mathbf{n}_w$	Vector de momento angular resultante en el eslabón $w$ medido en el sistema de referencia $\{u\}$ .
$\tau_i$	Par aplicado en una articulación rotacional $i$ .
$f_i$	Fuerza aplicada en una articulación prismática $i$ .

$\mathbf{T}_{\text{tornillo}}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}) : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$  Transformación de tornillo. Operador lineal capaz de transformar a cualquier vector de posición conforme a el movimiento tornillo.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

El hombre desde su aparición sobre la faz de la tierra ha dedicado mucho trabajo para el desarrollo de dispositivos y estructuras que le ayuden en el aprovechamiento de los recursos naturales. Es así como crea la Tecnología, la cual tiene como objetivo potenciar la fuerza de trabajo humano, para controlar los fenómenos de la naturaleza.

Aquellos hombres, "nuestros ancestros", fueron los predecesores del ingeniero de la era moderna, marcando una diferencia significativa entre ellos y nosotros, el conocimiento acumulado desde principios de la humanidad hasta nuestros días. Los ingenieros de la antigüedad tenían como impedimento para la realización de sus diseños, el no tener el conocimiento acerca de las ciencias. Pero esta situación ha cambiado, debido a que el conocimiento científico ha evolucionado con una inmensa acumulación de información. El conocimiento humano de la estructura de la materia, los fenómenos electromagnéticos, los elementos químicos y sus relaciones, las leyes del movimiento, los procesos de transmisión de energía y muchos otros aspectos del mundo físico, ha aumentado. En el siglo XIX los ingenieros aprovecharon este cúmulo de conocimientos, para la resolución de los problemas prácticos de la humanidad. Debido al empleo de los principios científicos para abordar los problemas, la ingeniería antigua evolucionó hasta su forma moderna.

Actualmente es casi inconcebible considerar nuestras vidas, sin la influencia de la ingeniería.

La manufactura y la ingeniería forman juntas una gran actividad económica y proporcionan las bases para nuestra prosperidad. La competencia industrial ha crecido en todo el mundo, debido a la desaparición gradual de barreras internacionales. Es necesario hacer notar que los fabricantes que manufacturan un producto con alta calidad y a un bajo costo se ven beneficiados por la preferencia de los clientes y a la larga tendrán una gran influencia dentro del mercado al que pertenece dicho producto. Pero para poder reducir los costos es necesario ser eficientes y productivos.

En la manufactura, para aumentar la productividad y producir con calidad uniforme que nos permitan competir con empresas a nivel mundial, es necesario pensar en la automatización. Muchos de los productos actuales son de gran complejidad y sofisticación y el operar con tecnología obsoleta, difícilmente nos puede llevar a competir a nivel internacional.

Esto nos obliga al perfeccionamiento de los sistemas de manufactura, teniendo como objetivo obtener productos de alta funcionalidad y fiabilidad a un bajo costo y en muy corto tiempo.

Estos sistemas de manufactura modernos cuentan con robots manipuladores, que dotan junto con la integración de otros dispositivos a una línea de producción de flexibilidad.

Existe una gran variedad de tareas en donde son utilizados los robots, tales como manejo de material, soldadura por arco y de punto, montajes de piezas, pintura al spray, carga y descarga de máquinas controladas numéricamente, exploraciones espaciales y submarinas, investigación de brazos protésicos y en el manejo de materiales peligrosos [1].

Esta tesis se enfoca, en el estudio de un robot aplicado a la transferencia de materiales, el cual tiene como objetivo mover un objeto de un sitio (posición y orientación) a otro diferente a través de una trayectoria en forma de hélice, en donde para el caso más simple,

la posición y orientación entre estos dos lugares no son importantes. Cuando los robots son utilizados para este tipo de aplicaciones se les suelen llamar robots para tareas “pick-and-place”, debido a que el robot manipulador únicamente toma un objeto a partir de un lugar y lo coloca en otro.

Para poder determinar el movimiento al que ha sido sometida una pieza de trabajo es necesario, considerar cierto número de puntos en ella. El número de puntos a considerar depende del tipo de movimiento que se desea estudiar.

La fórmula de Rodrigues para un desplazamiento general de tornillo, nos proporciona cuatro parámetros necesarios para efectuar un movimiento de tornillo a través de una trayectoria en forma de hélice en términos de las condiciones (posición y orientación) inicial y final de una pieza de trabajo [2]. Estos parámetros se pueden determinar a partir de seis coordenadas independientes, o la posición de tres puntos no colineales pertenecientes al objeto.

Existen algunos mecanismos fijos basados en un tornillo, capaces de efectuar la operación mencionada pero, con respecto a su naturaleza inflexible, ellos ejecutan siempre la misma tarea tantas veces como sea requerido. Debido a esto, cuando las condiciones de operación cambian, se vuelve necesario sustituir por completo todo el mecanismo. Un mecanismo es una combinación de materiales resistentes cuyas partes tienen movimiento relativo rígido [3].

Una de las principales características de un sistema robótico reside en su capacidad de adaptación, es decir, tienen la capacidad de cambiar su postura conforme a las condiciones actuales en curso. A partir de esta idea en mente, la búsqueda se enfoca en encontrar un manipulador flexible, capaz de cumplir con dicho movimiento basándose en un tornillo.

Un robot, de acuerdo a The Robot Institute of America (RIA) es [1],[4]:

*“Un manipulador multifuncional y reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas, o dispositivos especiales, a través de movimientos variables programados para la ejecución de una variedad de tareas”.*

La mayoría de los movimientos que se dan en los mecanismos son: el movimiento

coplanario, movimiento rectilíneo, movimiento helicoidal y movimiento esférico [3].

El movimiento helicoidal es ejecutado cuando un cuerpo gira alrededor de su eje y al mismo tiempo se mueve paralelamente a este. Cualquier punto en un cuerpo con este tipo de movimiento describe una curva llamada hélice [3].

Aunque, existen algunos manipuladores bien conocidos, cuyos arreglos cinemáticos son capaces de desempeñar la trayectoria en forma de hélice; esta tesis se enfoca en la investigación de un manipulador cuyo arreglo de eslabones y pares cinemáticos sea lo más parecido para poder desempeñar el movimiento deseado. El concepto de “parecido” significa que el manipulador fácilmente deberá adquirir la capacidad de un auténtico tornillo suministrando un movimiento de transmisión.

El número de grados de libertad que posee un robot, depende del tipo de tarea a realizar y seis grados es el número mínimo de grados que se requieren para poder dotar al manipulador propuesto de una flexibilidad adecuada, es decir, que sea capaz de orientar y posicionar el eslabonamiento de tornillo conforme cambien las posiciones (inicial y final) en las que se toma la pieza de trabajo y se deja.

El diseño del sistema robótico propuesto para cumplir con la trayectoria helicoidal, presenta una configuración del tipo PPSP y es mostrado en la figura (1.1).

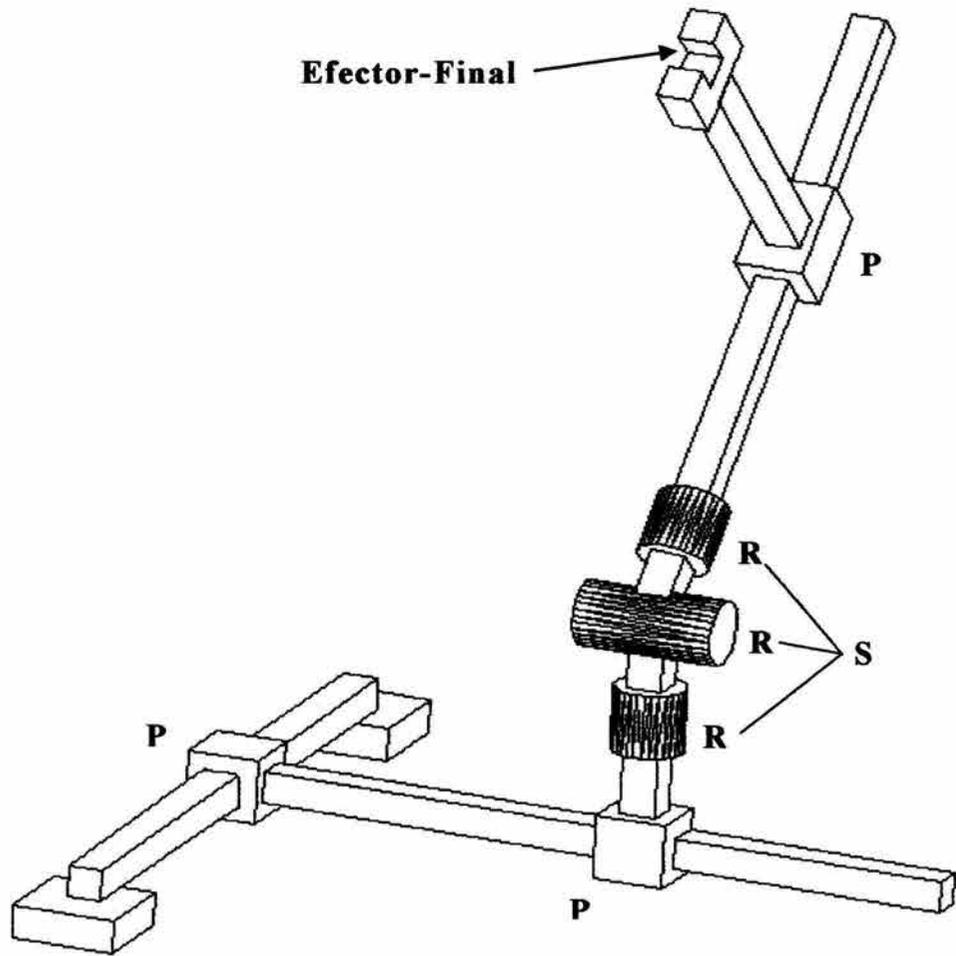


Fig. (1.1) . Robot manipulador helicoidal PPSP

El robot manipulador helicoidal PPSP presentado, satisface los requerimientos mencionados debido a su capacidad de proporcionar los cuatro parámetros necesarios para cumplir con dicho movimiento [2],[5],[6], estos parámetros son:

- 1) El ángulo de rotación del desplazamiento alrededor del eje del tornillo ( $\varphi$ ).
- 2) El eje del tornillo ( $\hat{e}$ ).
- 3) La traslación a lo largo del eje del tornillo ( $d$ ).

- 4) El vector de posición que define el punto geométrico por donde pasa el eje del tornillo ( $\bar{\mathbf{S}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}}$ ).

El manipulador helicoidal PPSP posee tres articulaciones prismáticas y otra más que provee un movimiento esférico. Por lo general es común diseñar manipuladores que tienen articulaciones esféricas, mediante tres articulaciones de rotación, donde los ejes de éstas se intersectan en el punto central de la esfera [4], de esta manera, el arreglo PPSP se convierte en el arreglo PPRRRP, como se muestra en la figura (1.1).

## 1.2. Organización de la tesis

En el Capítulo 2 se muestra como está constituido el sistema mecánico del robot manipulador helicoidal PPSP y las características de cada uno de sus eslabones. Las ecuaciones de la cinemática directa, obtenidas a partir del método de Denavit y Hartenberg son mostradas. En este capítulo también se resuelve el problema de la cinemática inversa, exhibiendo las ecuaciones de cada una de las variables de las articulaciones en términos de las coordenadas operacionales.

En el Capítulo 3 se efectúa el análisis dinámico del manipulador, determinando las ecuaciones de movimiento a partir de la formulación recursiva de Newton-Euler.

En el Capítulo 4 se muestra la formulación del Tornillo de Rodrigues para el desplazamiento general de tornillo. También se obtiene una transformación que contiene la información del movimiento de tornillo, con la cual el robot puede generar con su órgano terminal, el lugar geométrico helicoidal. Además, se muestran el perfil de trayectoria de octavo grado empleado para suavizar el movimiento del robot manipulador, cuando ejecuta la trayectoria en forma de hélice.

En el Capítulo 5 son empleadas las ecuaciones obtenidas en los capítulos 2, 3 y 4 para realizar una simulación del manipulador cuando transporta una pieza de trabajo con su órgano terminal, desde una posición inicial  $P_1$  hasta una posición final  $P_2$  a través de

una trayectoria en forma de hélice. Se presentan las gráficas de la posición, velocidad y aceleración para cada una de las variables articulares. Por último, se presentan las gráficas de la evolución dinámica correspondientes para cada articulación.

En el Capítulo 6 finalmente se presentan las conclusiones obtenidas en este trabajo.

### 1.3. Revisión Bibliográfica

A partir de la definición del problema presentada anteriormente, se encontraron algunos trabajos referentes al tema tratado [6],[7],[8]. A continuación se presenta una breve descripción de estos:

1. Kim, Byungmoon and Rossignac, Jarek. **Collision Prediction for Polyhedra under Screw Motions**. GVU Center and College of Computing. Georgia Institute of Technology. June 16-20,2003. Seattle, Washington,USA.

Este trabajo, trata acerca de la predicción de choques de cuerpos rígidos, que se someten a un movimiento de tornillo. Se obtienen expresiones en forma cerrada para la trayectoria de un punto sometido a movimientos de tornillo, las cuales sirven para predecir el instante del choque y el punto de contacto entre dos poliedros, cuyo movimiento relativo se aproxima por uno o varios segmentos de movimiento de tornillo.

2. Lee, Eric and Mavroidis, C. **Rigid Body Displacement Analysis Using The Method of Loci and Its Application in the Direct Kinematics of Hybrid Serial-Parallel Mechanisms**. Tenth World Congress on the Theory of Machine and Mechanisms. June 20-24, 1999. Oulu, Finland.

En este trabajo, se resuelve el problema del desplazamiento de un cuerpo rígido para dos posiciones, cuando son impuestas seis restricciones entre las posiciones inicial y final del cuerpo. Busca obtener los parámetros del Tornillo de Rodrigues para el desplazamiento de cuerpo rígido estudiando dos conjuntos de restricciones:

- a) Se especifican, la distancia de traslación de un punto y la posición final de otros dos puntos.
- b) La distancia de traslación de tres puntos y la posición final de otro punto perteneciente al cuerpo rígido, son dadas.

El primer conjunto de restricciones, corresponde a resolver el problema de la cinemática directa de un mecanismo con tres piernas, una de las cuales está compuesta de un actuador prismático y las otras dos son cadenas seriales con tres grados de libertad. Para el segundo conjunto de restricciones, se busca resolver la cinemática directa de un mecanismo con cuatro piernas, tres de ellas compuestas por actuadores prismáticos y la última de una cadena serial de tres grados de libertad. Un nuevo método llamado “method of loci” se emplea para encontrar las ecuaciones de la cinemática directa, para mecanismos espaciales híbridos (paralelo-serial), cuando se conocen algunas posiciones pertenecientes al cuerpo rígido.

- 3. **Mavroidis, C. Completely Specified Displacements of a Rigid Body and Their Application in the Direct Kinematics of In-Parallel Mechanisms.** ASME Design Technical Conferences. 1998. Atlanta, GA.

En este trabajo, se resuelve el problema de determinar los parámetros del Tornillo de Rodrigues, cuando las distancias de traslación de seis puntos pertenecientes a un cuerpo rígido son dadas.

## 1.4. Estado del arte

El robot manipulador PPSP no es el único robot que proporciona un arreglo de tornillo flexible, capaz de cumplir con un movimiento helicoidal. La búsqueda nos ha llevado a encontrar adicionalmente otros tres tipos particulares de cadenas cinemáticas espaciales,

que son capaces de efectuar movimientos en forma de hélice. Estos arreglos son el RPSP, SPRP y el RRSP. Los robots RPSP y el SPRP se muestran en la figura (1.2) y (1.3) respectivamente.

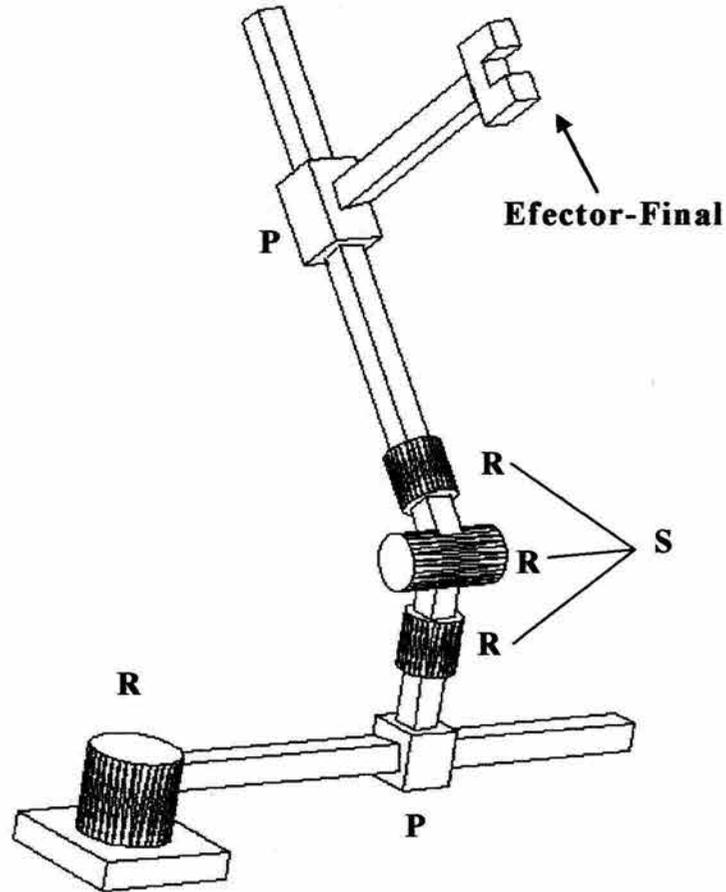


Fig. (1.2). Robot manipulador helicoidal RPSP

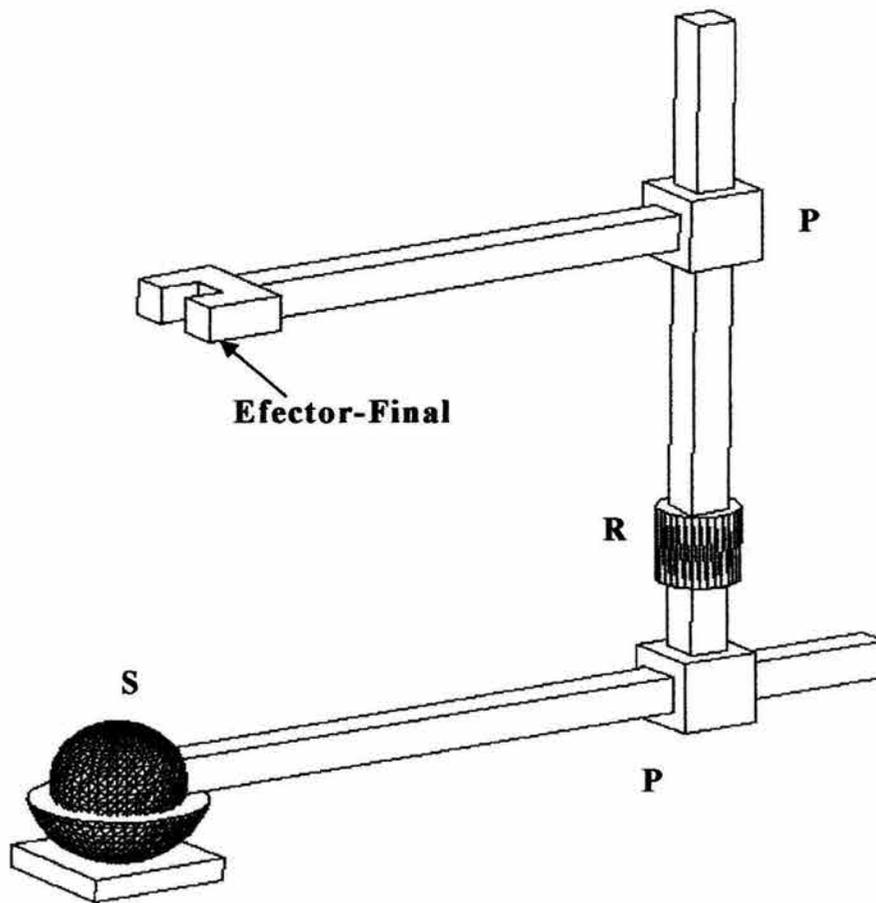


Fig. (1.3). Robot manipulador helicoidal SPRP

Estas arquitecturas mecánicas espaciales, también fueron diseñadas inspirándose en la formulación de Rodrigues para un desplazamiento general de tornillo, por lo que, cada uno de ellos, proporcionan también los cuatro parámetros necesarios para poder realizar una trayectoria en forma de hélice, en términos de las condiciones inicial y final de una pieza de trabajo [2].

Cada uno de estos manipuladores posee una cinemática inversa particular, pero para cubrir los objetivos de esta tesis, únicamente se reporta el análisis cinemático del manipulador PPSP.

Parte de las investigaciones realizadas con respecto a este tema se han publicado en congresos internacionales [9],[10],[11],[12]. A continuación se presentan las referencias acerca de estos:

1. Juárez Campos, Ignacio; Oracio García, Lara y Juárez Campos, Beatriz. **The Inverse Kinematics of The RPSP Screw-Based Robot Manipulator**. The 4<sup>th</sup> International Conference on the Advanced Mechatronics (ICAM' 04). October 3-5, 2004. Asahikawa, Japan. pp 143-148.
2. Juárez Campos, Ignacio, Oracio García, Lara y Juárez Campos, Beatriz. **Trajectory Planning for the PPSP Helicoidal Robot Manipulator**. Internacional Symposium on Robotics and Automation 2004. August 25-27, 2004. Querétaro, México. pp 287-294.
3. Juárez Campos, Ignacio; Juárez Campos, Beatriz; García Lara, Oracio y Ramírez Méndez, Margarita. **The Inverse Kinematics of The PPSP Helicoidal Robot Manipulator**. Proceedings of the Tenth IASTED Internacional Conference on Robotics and Applications. August 23-25,2004. Honolulu, Hawaii, USA. pp 22-27.
4. Juárez Campos, Ignacio; Oracio García, Lara y Juárez Campos, Beatriz. **The Inverse Kinematics of The SPRP Screw-Based Manipulator**. Proceedings of the Tenth IASTED Internacional Conference on Robotics and Applications. August 23-25, 2004. Honolulu, Hawaii, USA. pp 34-40.

# Capítulo 2

## Modelado Matemático

En este capítulo se presenta el estudio cinemático del manipulador helicoidal PPSP. La cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo y por la descripción espacial (posición y orientación) del extremo final del robot con los valores que toman las coordenadas articulares [1].

El objetivo principal de nuestro manipulador, consiste en transportar a su órgano terminal (Pinza) a un estado específico para cumplir con su tarea, de tal forma que, bajo ciertos estados de la cadena cinemática, el órgano terminal ejecute una trayectoria helicoidal.

En esta búsqueda de cumplir con la tarea especificada, nos planteamos las siguientes preguntas:

- A1) ¿Cuál es la situación del órgano terminal bajo algún estado conocido del manipulador?, y por otra parte,
- A2) ¿Cuáles son los posibles estados del manipulador cuando se conoce el estado del órgano terminal?

## 2.1. Descripción de la arquitectura PPSP

El diseño mecánico de un manipulador está constituido por un conjunto de cuerpos rígidos, los cuales están conectados por medio de juntas [4].

En esta tesis se enfoca la atención hacia un manipulador cuyo arreglo de eslabones y pares cinemáticos sea lo más parecido para poder desempeñar un movimiento general de tornillo. El concepto de “parecido” significa que el manipulador fácilmente deberá adquirir la capacidad de un auténtico tornillo.

El número de grados de libertad que posee un robot, depende del tipo de tarea a realizar [1],[4] y seis grados es el número mínimo de grados que se requieren para poder dotar al manipulador propuesto de una flexibilidad adecuada, es decir, que sea capaz de orientar y posicionar el eslabonamiento de tornillo conforme cambien las posiciones (inicial y final) en las que se tome la pieza de trabajo y se deje.

El diseño del sistema robótico propuesto para cumplir con la trayectoria helicoidal, presenta una configuración del tipo PPSP y es mostrado en la figura (1.1).

El sistema mecánico del manipulador helicoidal PPSP de este trabajo, posee tres articulaciones prismáticas y otra más que provee un movimiento esférico. Es común diseñar manipuladores que tienen articulaciones esféricas, por medio de tres articulaciones de rotación, cuyos ejes se intersectan en el punto central de la esfera [4], de esta manera, el arreglo PPSP puede cambiarse por el arreglo PPRRRP, como se muestra en la figura (1.1).

El robot manipulador helicoidal PPSP presentado, satisface los requerimientos para un movimiento general de tornillo de acuerdo con la formulación de Rodrigues, debido a su capacidad de proporcionar los cuatro parámetros necesarios para cumplir con dicho movimiento [2], [5], [6], estos parámetros son:

- 1) El ángulo de rotación del desplazamiento alrededor del eje del tornillo ( $\varphi$ ).
- 2) El eje del tornillo ( $\hat{e}$ ).

- 3) La traslación a lo largo del eje del tornillo (**d**).
- 4) El vector de posición que define el punto geométrico por donde pasa el eje del tornillo ( $\bar{\mathbf{S}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}}$ ).

El manipulador PPSP está constituido por tres eslabonamientos:

- a) El primero sirve para posicionar al tornillo y está formado por las dos primeras articulaciones, las cuales son del tipo prismático (**P1 – P2**).
- b) El segundo orienta al tornillo y esta formado por dos articulaciones rotacionales (**R3 – R4**).
- c) Un tornillo típico, rota alrededor de su eje de rotación mientras experimenta un desplazamiento lineal; de esta manera, el último eslabonamiento correspondiente al tornillo, se forma a partir de una articulación rotacional y una prismática (**R5 – P6**).

En la figura (2.1) se puede apreciar los eslabonamientos que constituyen al robot manipulador PPSP.

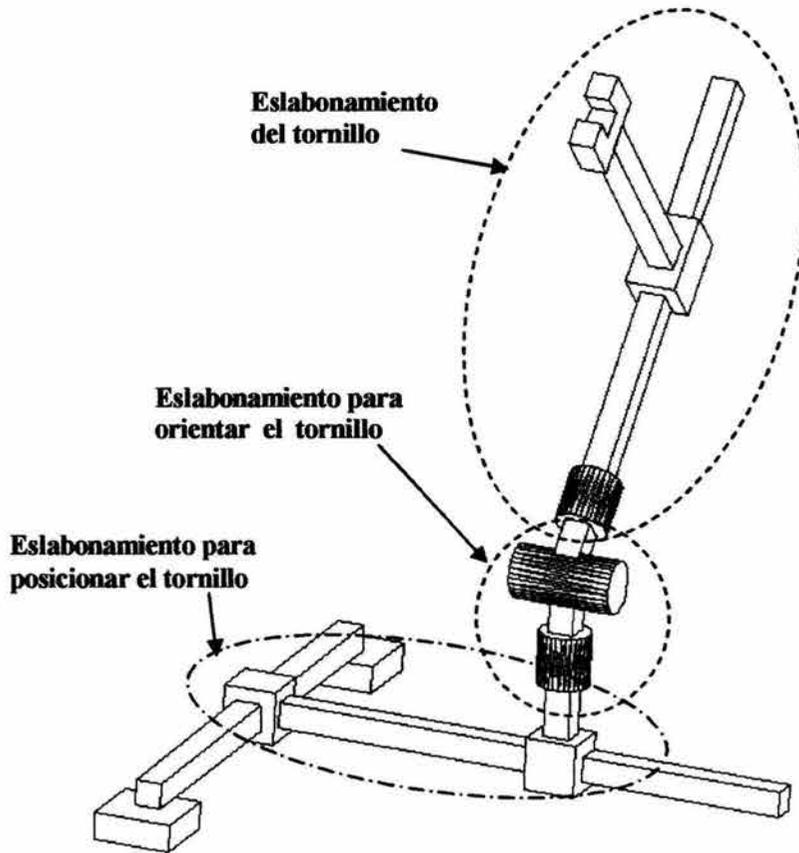


Fig. (2.1). Eslabonamientos que constituyen al Robot manipulador helicoidal PPSP

En la figura (1.1) se presenta el manipulador PPRRRP para un proceso de movimiento helicoidal. Este manipulador tiene 7 eslabones según la regla de la Ec.(2.1) que establece el número de eslabones (NE) que debe tener una cadena cinemática abierta respecto del número de sus articulaciones (NA). El manipulador tiene 6 articulaciones de diferente tipo según se aprecia en la tabla (2.1).

$$NE = NA + 1 \quad (2.1)$$

Articulación	Tipo	Descripción
P1	Prismática	Estas dos articulaciones, sirven para posicionar el manipulador
P2	Prismática	
R3	Rotacional	Estas dos articulaciones, sirven para orientar el manipulador, y no cambian durante el movimiento
R4	Rotacional	
R5	Rotacional	Proporciona el ángulo de giro al eslabonamiento de tornillo del manipulador
P6	Prismática	Proporciona el desplazamiento al eslabonamiento de tornillo del manipulador

Tabla 2.1. Características de las articulaciones del manipulador PPSP.

Las dimensiones de los eslabones se eligieron de manera arbitraria y tan solo para ser utilizarlas en la metodología que caracteriza al movimiento de tornillo.

En la tabla (2.2) se presenta la masa y el material elegido para cada uno de los eslabones móviles.

Eslabón	Material	Masa
1	Aluminio	0.67 kg
2	Aluminio	0.13 kg
3	Aluminio	0.1 kg
4	Aluminio	0.02 kg
5	Aluminio	0.48 kg
6	Aluminio	0.36 kg

Tabla 2.2. Material y masa de los eslabones.

Los tensores de inercia de cada uno de los eslabones, respecto del sistema de referencia coincidente con el centro de gravedad, se muestra a continuación:

$${}^{c1}\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 5650.57 & 0 & 0 \\ 0 & 109.22 & 0 \\ 0 & 0 & 5623.35 \end{pmatrix} kg\ mm^2 \quad (2.2)$$

$${}^{c2}\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 58.93 & 0 & 0 \\ 0 & 33.46 & 0 \\ 0 & 0 & 59.12 \end{pmatrix} kg\ mm^2 \quad (2.3)$$

$${}^{c3}\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 34.53 & 0 & 0 \\ 0 & 33.74 & 0 \\ 0 & 0 & 14.02 \end{pmatrix} kg\ mm^2 \quad (2.4)$$

$${}^{c4}\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 2.05 & 0 & 0 \\ 0 & 1.18 & 0 \\ 0 & 0 & 2.87 \end{pmatrix} kg\ mm^2 \quad (2.5)$$

$${}^{c5}\mathbf{I}_5 = \begin{pmatrix} 2998.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2998.3 & 0 \\ 0 & 0 & 54.57 \end{pmatrix} kg\ mm^2 \quad (2.6)$$

$${}^{c6}\mathbf{I}_6 = \begin{pmatrix} 67.59 & 0 & 0 \\ 0 & 713.77 & 0 \\ 0 & 0 & 698.27 \end{pmatrix} kg\ mm^2 \quad (2.7)$$

Los centros de gravedad de cada eslabón se muestran a continuación:

$${}^1\mathbf{P}_{c1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 155 \\ 0 \end{pmatrix} mm \quad (2.8)$$

$${}^2\mathbf{P}_{c2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18.36 \\ 0 \end{pmatrix} mm \quad (2.9)$$

$${}^3\mathbf{P}_{c3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15.37 \end{pmatrix} mm \quad (2.10)$$

$${}^4\mathbf{P}_{c4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5.63 \\ 0 \end{pmatrix} mm \quad (2.11)$$

$${}^5\mathbf{P}_{c5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 121.3 \end{pmatrix} mm \quad (2.12)$$

$${}^6\mathbf{P}_{c6} = \begin{pmatrix} -73.66 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} mm \quad (2.13)$$

## 2.2. Cinemática Directa

Para poder dar respuesta a la primera pregunta planteada (A1) en la introducción de este capítulo, se emplea la cinemática directa. La cual consiste en calcular la posición y orientación del órgano terminal, con respecto a un sistema de referencia fijo, conocidos los valores de las articulaciones y los parametros geométricos de los elementos del robot [1], [4], [13].

Es decir, consiste en encontrar una función de la siguiente forma:

$$X = \mathbf{F}(\Theta) \in \mathbb{R}^n$$

Donde  $X$  representa el espacio operacional del manipulador, es decir, condiciones de posicionamiento y orientación del organo terminal, por lo tanto,  $n$  serían los elementos independientes de  $X$ .

Por otro lado,  $\Theta$  representa el vector de variables articulares del manipulador o espacio articular.

### 2.2.1. Descripción Espacial

Debido a que los eslabones del manipulador pueden rotar y trasladarse, es necesario poder calcular el desplazamiento espacial total del órgano terminal con respecto a un sistema de referencia fijo.

Éste se obtiene a través del método de representación de Denavit y Hartenberg, de asignación de sistemas de referencia, el cual toma en cuenta el estado particular de cada eslabón y la relación entre ellos, que son los datos [1], [4], [13].

Este método utiliza matrices de transformación homogénea de dimensión  $(4 \times 4)$  para obtener la descripción espacial entre sistemas de referencia. Estas matrices contienen información acerca de la posición y orientación [13].

La cadena cinemática completa está constituida por un eslabón fijo y seis cuerpos móviles, así, los sistemas de referencia  $\{0\}$  a  $\{6\}$  corresponden a estos eslabones, para el órgano terminal corresponde el sistema de referencia  $\{7\}$ , esto se muestra en la figura (2.2).

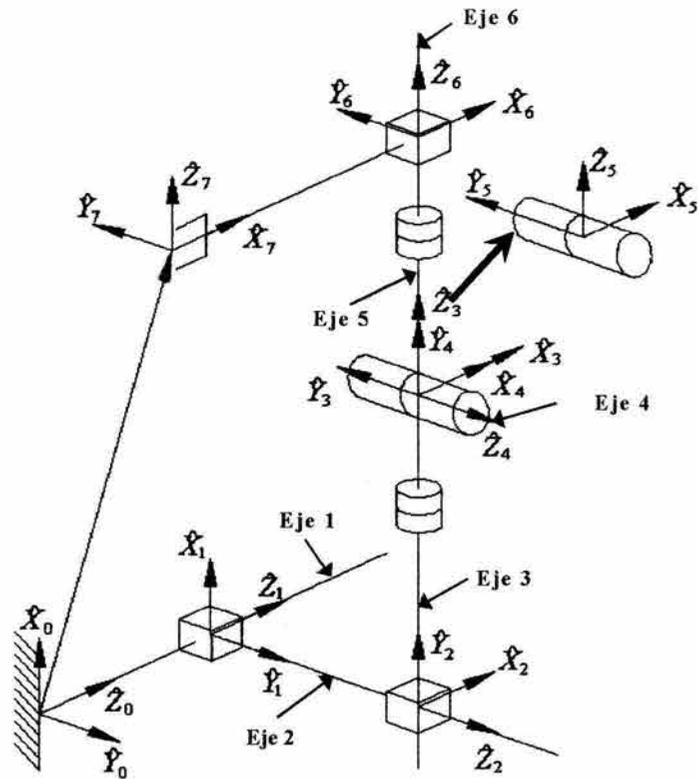


Fig. (2.2). Descripción espacial de cada uno de los eslabones del manipulador.

Los parámetros del manipulador helicoidal PPSP, obtenidos mediante el método de Denavit-Hartenberg se muestran en la tabla (2.3).

$i$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$0^\circ$	$d_1$	$0^\circ$
2	0	$-90^\circ$	$d_2$	$-90^\circ$
3	0	$-90^\circ$	$d_3$	$\theta_3$
4	0	$90^\circ$	0	$\theta_4$
5	0	$-90^\circ$	0	$\theta_5$
6	0	$0^\circ$	$d_6$	$0^\circ$
7	$-L_B$	$0^\circ$	0	$0^\circ$

Tabla 2.3. Parámetros del manipulador helicoidal PPSP

Donde  $d_1, d_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  y  $d_6$  representan a cada una de las variables de articulación. Las matrices de transformación que definen la descripción espacial de un sistema de referencia con su anterior se muestran en las Ecs.(2.14)-(2.20), las cuales fueron determinadas usando los parámetros de la tabla anterior.

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -S\theta_3 & -C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$${}^3\mathbf{T}_4 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$${}^4\mathbf{T}_5 = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S\theta_5 & -C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$${}^5_6\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$${}^6_7\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -L_B \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

donde,  $S\theta_i = \text{Sin}(\theta_i)$ ,  $C\theta_5 = \text{Cos}(\theta_5)$  y  $L_B$  representa la longitud del brazo del manipulador.

Por lo tanto, el modelo directo viene dado por:

$${}^0_7\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} {}^2_3\mathbf{T} {}^3_4\mathbf{T} {}^4_5\mathbf{T} {}^5_6\mathbf{T} {}^6_7\mathbf{T}$$

Tomando la parte que define la posición del órgano terminal se tiene:

$${}^0_7\mathbf{P} = \begin{pmatrix} d_3 + d_6 C\theta_4 - L_B C\theta_5 S\theta_4 \\ d_2 + d_6 S\theta_4 S\theta_3 + L_B (C\theta_3 S\theta_5 + C\theta_4 C\theta_5 S\theta_3) \\ d_1 - d_6 C\theta_3 S\theta_4 - L_B (C\theta_3 C\theta_4 C\theta_5 - S\theta_5 S\theta_3) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

### 2.3. Cinemática Inversa

Para poder dar respuesta a la segunda pregunta planteada (A2) en la introducción de este capítulo, se resuelve el problema cinemático inverso. El principal propósito de la cinemática inversa consiste en que las variables de las articulaciones necesitan ser expresadas en términos de las coordenadas operacionales [13], [14]. En este caso, los

parámetros del tornillo son las coordenadas mencionadas en términos de la condición de la pieza de trabajo.

En esta sección se trata de obtener los valores de las variables articulares para que la posición y orientación del órgano terminal ejecute una trayectoria en forma de hélice. El modelo cinemático inverso se muestra a continuación.

### **2.3.1. Obtención de las variables articulares que sirven para posicionar al eslabonamiento de tornillo del robot manipulador**

#### **Obtención de la primera y segunda variables articulares**

Para determinar las dos primeras variables articulares, es necesario determinar al vector que sitúa el centro de la articulación esférica. Para ello, se supone que el centro de la articulación esférica esta situada en el plano  $(\hat{y}_0 - \hat{z}_0)$ .

En la figura (2.3) se puede observar que el vector que determina el centro de la articulación esférica esta representado por  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_E$ , también se muestran dos planos formados por  $({}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} - \hat{\mathbf{e}})$  y  $(\hat{y}_0 - \hat{z}_0)$ .

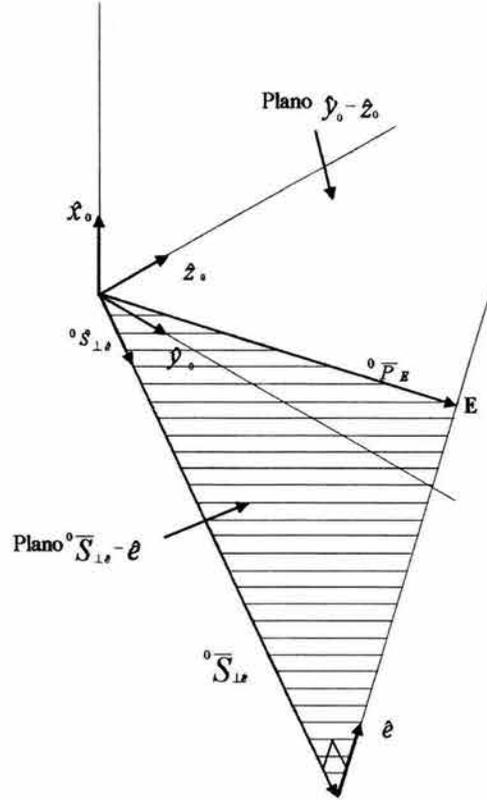


Fig. (2.3). Intersección de los planos  $({}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} - \hat{\mathbf{e}})$  y  $(\hat{\mathbf{y}}_0 - \hat{\mathbf{z}}_0)$ .

Se puede apreciar de la figura (2.3) que  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_E$  es un vector que cae exactamente en la intersección de los planos  $({}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} - \hat{\mathbf{e}})$  y  $(\hat{\mathbf{y}}_0 - \hat{\mathbf{z}}_0)$ . Por lo tanto, conociendo el vector unitario coincidente con dicha intersección se puede encontrar  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_E$ . A continuación se presenta el procedimiento para obtener el vector  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_E$ .

**Paso 1.** Normalizar el vector  ${}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}$ .

$${}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} = \frac{{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}}{\|{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|} \quad (2.22)$$

**Paso 2.** Determinación del vector perpendicular o normal al plano  ${}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} - \hat{\mathbf{e}}$ .

$$\hat{\mathbf{V}}_{\perp({}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} - \hat{\mathbf{e}})} = {}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} \otimes \hat{\mathbf{e}} \quad (2.23)$$

**Paso 3.** Determinación del vector perpendicular o normal al plano  $\hat{y}_0 - \hat{z}_0$ .

Como se esta trabajando con una terna ortonormal derecha el vector perpendicular al plano  $\hat{y}_0 - \hat{z}_0$  es,

$$\hat{x}_0 = \hat{y}_0 \otimes \hat{z}_0 \quad (2.24)$$

**Paso 4.** En la figura (2.4) se pueden observar la situación de los vectores  $\hat{V}_{\perp}({}^0\hat{s}_{\perp e} - \hat{e})$  y  $\hat{x}_0$  normales a los planos  $({}^0\hat{s}_{\perp e} - \hat{e})$  y  $(\hat{y}_0 - \hat{z}_0)$  respectivamente. De acuerdo con ésta el vector que coincide en la intersección de los planos  $({}^0\hat{s}_{\perp e} - \hat{e})$  y  $(\hat{y}_0 - \hat{z}_0)$ , es el vector  ${}^0\hat{P}_{IN}$ . Así el vector coincidente en la intersección se describe por medio de la Ec.(2.25).

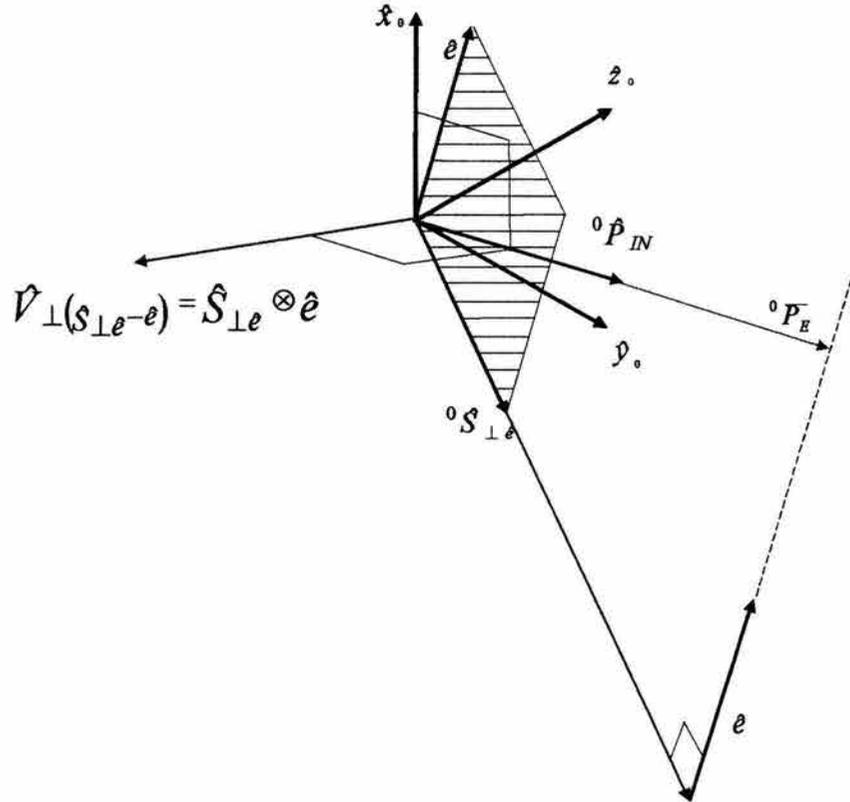


Fig. (2.4). Situación de los vectores  $\hat{V}_{\perp}({}^0\hat{s}_{\perp e} - \hat{e})$  y  $\hat{x}_0$  normales a los planos  $({}^0\hat{s}_{\perp e} - \hat{e})$  y  $(\hat{y}_0 - \hat{z}_0)$  respectivamente.

$${}^0\overline{\mathbf{P}}_{IN} = \widehat{\mathbf{x}}_0 \otimes \widehat{\mathbf{V}}_{\perp}({}^0\widehat{\mathbf{s}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}} - \hat{\mathbf{e}}) \quad (2.25)$$

**Paso 5.** Al realizar el producto vectorial de dos vectores unitarios, no necesariamente se obtiene como resultado un vector unitario. A partir de este hecho, se vuelve necesario normalizar el vector coincidente con la intersección de los planos.

$${}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN} = \frac{{}^0\overline{\mathbf{P}}_{IN}}{\|{}^0\overline{\mathbf{P}}_{IN}\|} \quad (2.26)$$

**Paso 6.** Hasta este momento solo se cuenta con la dirección del vector  ${}^0\overline{\mathbf{P}}_E$ , para poder determinarlo por completo es necesario encontrar su magnitud. Para ello determinaremos el ángulo existente entre los vectores  ${}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN}$  y  ${}^0\widehat{\mathbf{s}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}}$ .

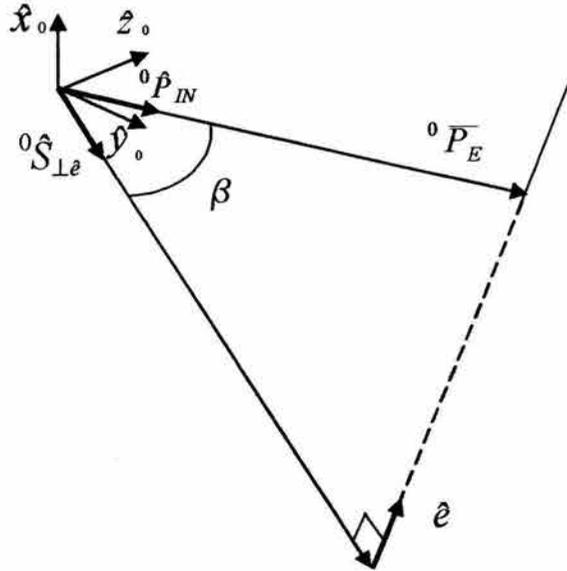


Fig. (2.5). Ángulo existente entre  ${}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN}$  y  ${}^0\widehat{\mathbf{s}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}}$

De la figura (2.5) se observa el ángulo  $\beta$  formado entre los vectores  ${}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN}$  y  ${}^0\widehat{\mathbf{s}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}}$ . El ángulo  $\beta$  se puede determinar a partir de la definición del producto interno entre los vectores  ${}^0\widehat{\mathbf{s}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}}$  y  ${}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN}$  es decir:

$${}^0\widehat{\mathbf{s}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}}^T {}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN} = \|{}^0\widehat{\mathbf{s}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}}\| \|{}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN}\| \text{Cos}(\beta)$$

$$\text{Cos}(\beta) = {}^0\widehat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}^T {}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN} \quad (2.27)$$

**Paso 6.** Determinación de  ${}^0\widehat{\mathbf{P}}_E$ .

En la figura (2.5), se observa que la función trigonométrica que relaciona a los vectores  ${}^0\overline{\mathbf{P}}_E$  y  ${}^0\widehat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}$  es el coseno debido a esto:

$$\text{Cos}(\beta) = \frac{\|{}^0\overline{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|}{\|{}^0\overline{\mathbf{P}}_E\|}$$

por lo tanto

$$\|{}^0\overline{\mathbf{P}}_E\| = \frac{\|{}^0\overline{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|}{\text{Cos}\beta} \quad (2.28)$$

pero de la Ec.(2.27), tenemos

$$\text{Cos}(\beta) = {}^0\widehat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}^T {}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN}$$

Así:

$$\|{}^0\overline{\mathbf{P}}_E\| = \frac{\|{}^0\overline{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|}{{}^0\widehat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}^T {}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN}} \quad (2.29)$$

Un vector se forma con una magnitud y una dirección, por lo que, para determinar al vector  ${}^0\overline{\mathbf{P}}_E$  es necesario multiplicar a la magnitud  $\|{}^0\overline{\mathbf{P}}_E\|$  con el vector unitario  ${}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN}$ :

$$\|{}^0\overline{\mathbf{P}}_E\| {}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN} = \left( \frac{\|{}^0\overline{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|}{({}^0\widehat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T {}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN}} \right) {}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN}$$

por lo tanto

$${}^0\overline{\mathbf{P}}_E = \left( \frac{\|{}^0\overline{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|}{({}^0\widehat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T {}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN}} \right) {}^0\widehat{\mathbf{P}}_{IN} \quad (2.30)$$

La Ec.(2.30) se necesita dejarla en función de los parámetros del Tornillo de Rodrigues, para ello realizamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
{}^0\bar{\mathbf{P}}_E &= \left[ \frac{\|{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|}{\left( \frac{{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}}{\|{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|} \right)^T \left( \frac{{}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}\|} \right)} \right] \left( \frac{{}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}\|} \right) \\
{}^0\bar{\mathbf{P}}_E &= \left[ \frac{\|{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|}{\left( \frac{1}{\|{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|} {}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}^T \right) \left( \frac{1}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}\|} {}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN} \right)} \right] \left( \frac{{}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}\|} \right) \\
{}^0\bar{\mathbf{P}}_E &= \left( \frac{\|{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|^2}{{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}} \right) \left( \frac{{}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}\|} \right) \\
{}^0\bar{\mathbf{P}}_E &= \left( \frac{\|{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|^2}{{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}} \right) {}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}
\end{aligned}$$

La norma al cuadrado de un vector es igual al producto punto del vector consigo mismo, de aquí que  $\|{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|^2 = {}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}^T {}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}$ :

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_E = \begin{pmatrix} {}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}^T & {}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} \\ {}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}^T & {}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN} \end{pmatrix} {}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN} \quad (2.31)$$

Sustituyendo el vector  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{IN}$ , establecido por la Ec.(2.25) en la Ec.(2.31):

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_E = \left[ \frac{({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T ({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})}{({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T (\hat{\mathbf{x}}_0 \otimes \hat{\mathbf{V}}_{\perp({}^0\hat{\mathbf{s}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} - \hat{\mathbf{e}})})} \right] (\hat{\mathbf{x}}_0 \otimes \hat{\mathbf{V}}_{\perp({}^0\hat{\mathbf{s}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} - \hat{\mathbf{e}})}) \quad (2.32)$$

Sustituyendo el vector  $\hat{\mathbf{V}}_{\perp({}^0\hat{\mathbf{s}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} - \hat{\mathbf{e}})}$ , definido por la Ec.(2.23) en la Ec.(2.32):

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_E = \left[ \frac{({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T ({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})}{({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T (\hat{\mathbf{x}}_0 \otimes ({}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} \otimes \hat{\mathbf{e}}))} \right] (\hat{\mathbf{x}}_0 \otimes ({}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} \otimes \hat{\mathbf{e}})) \quad (2.33)$$

De acuerdo con la Ec.(2.22) el vector  ${}^0\hat{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} = \frac{{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}}{\|{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|}$ , a partir de esto se obtiene:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_E = \left[ \frac{({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T ({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})}{({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T \left( \hat{\mathbf{x}}_0 \otimes \left( \frac{{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}}{\|{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|} \otimes \hat{\mathbf{e}} \right) \right)} \right] \left( \hat{\mathbf{x}}_0 \otimes \left( \frac{{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}}{\|{}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}\|} \otimes \hat{\mathbf{e}} \right) \right)$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_E = \left[ \frac{({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T ({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})}{({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T (\hat{\mathbf{x}}_0 \otimes ({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} \otimes \hat{\mathbf{e}}))} \right] (\hat{\mathbf{x}}_0 \otimes ({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} \otimes \hat{\mathbf{e}})) \quad (2.34)$$

Si hacemos  $\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{x}}_0} = \hat{\mathbf{x}}_0 \otimes$ ;  $\mathbf{M}_{0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}} = {}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} \otimes [4]$ ; donde  $\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{x}}_0}$  y  $\mathbf{M}_{0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}}$  representan matrices antisimétricas, en la Ec.(2.34) se tiene:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_E = \left[ \frac{({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T ({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})}{({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T (\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{x}}_0} \mathbf{M}_{0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}} \hat{\mathbf{e}})} \right] (\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{x}}_0} \mathbf{M}_{0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}} \hat{\mathbf{e}}) \quad (2.35)$$

Como se puede observar la Ec.(2.35), está en función del eje de giro ( $\hat{\mathbf{e}}$ ) y del vector de posición perpendicular al eje de giro ( ${}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}$ ), los cuales son dos de los cuatro parámetros del Tornillo de Rodrigues.

A manera de ilustración se generó el siguiente ejemplo, para utilizar la ecuación obtenida para el vector  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_E$ .

Como se puede observar en la figura (2.6), el eje del Tornillo de Rodrigues ( $\hat{\mathbf{e}}$ ) coincide con el centro de la articulación esférica (E), por lo que, el vector  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_E$  debe ser igual al vector  ${}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}$ , lo cual se comprueba empleando la Ec.(2.35).

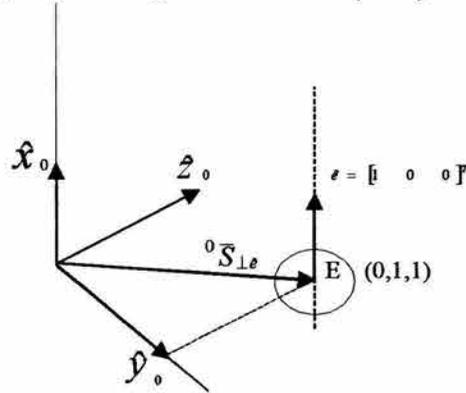


Fig. (2.6). Posición del eje  $\hat{\mathbf{e}}$  a partir de la base  $\{0\}$ .

de la figura (2.6) observamos:

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$${}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sustituyendo los valores de  $\hat{\mathbf{e}}$  y  ${}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}$  en la Ec.(2.35) tenemos:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_E = \frac{\begin{bmatrix} & & & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & [0 & 1 & 1] & \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} [0 & 1 & 1] & \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto se comprueba que  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_E = {}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}$ .

Así, las dos primeras variables articulares se determinan de la siguiente manera:

$$d_1' = {}^0\bar{\mathbf{P}}_E^T \hat{\mathbf{z}}_0 \quad (2.36)$$

$$d_2' = {}^0\bar{\mathbf{P}}_E^T \hat{\mathbf{y}}_0 \quad (2.37)$$

**Nota:** Estas ecuaciones son válidas únicamente para el caso donde el centro de la junta esférica cae en el centro del eje del Tornillo de Rodrigues ( $\hat{\mathbf{e}}$ ). Estas variables articulares determinan el centro de la articulación esférica.

Para obtener las variables articulares para el caso en donde el eje de Tornillo de Rodrigues no es coincidente con el centro de la articulación esférica, nos apoyamos de la descripción geométrica mostrada en la figura (2.7), de la cual, se observa que el manipulador toma la pieza de trabajo en un punto llamado **OBJ**. Es importante observar que los puntos **P**, **Q**, **R** y **OBJ** pertenecen a la pieza de trabajo. La Figura (2.7) muestra los vectores involucrados y puntos pertenecientes al manipulador para el caso general, donde:

**E** es el punto central de la articulación esférica cuando el sexto eje del manipulador **PPSP** llega a ser coincidente con el eje del tornillo.

**E'** es el centro esférico cuando el manipulador toma la pieza de trabajo (en este instante, los puntos **M'** y **OBJ** llegan a ser el mismo punto).

**C** y **C'** coinciden con la intersección entre la última articulación prismática y el sexto eje, antes de y después del momento de tomar el objeto.

**M** y **M'** son los puntos operacionales del efector final, el primero es el punto cuando el sexto eje coincide con el eje del tornillo y el segundo es el punto cuando el manipulador toma la pieza de trabajo en el punto **OBJ**.

La Figura (2.7), muestra la trayectoria seguida por el punto esférico **E'** durante la sujeción de la pieza. El manipulador entero (**E'**, **C'**, **M'**) necesita rotar  $\varphi$  alrededor del eje del tornillo; al mismo tiempo, el punto **C'** se desplaza a lo largo del eje de la sexta articulación.

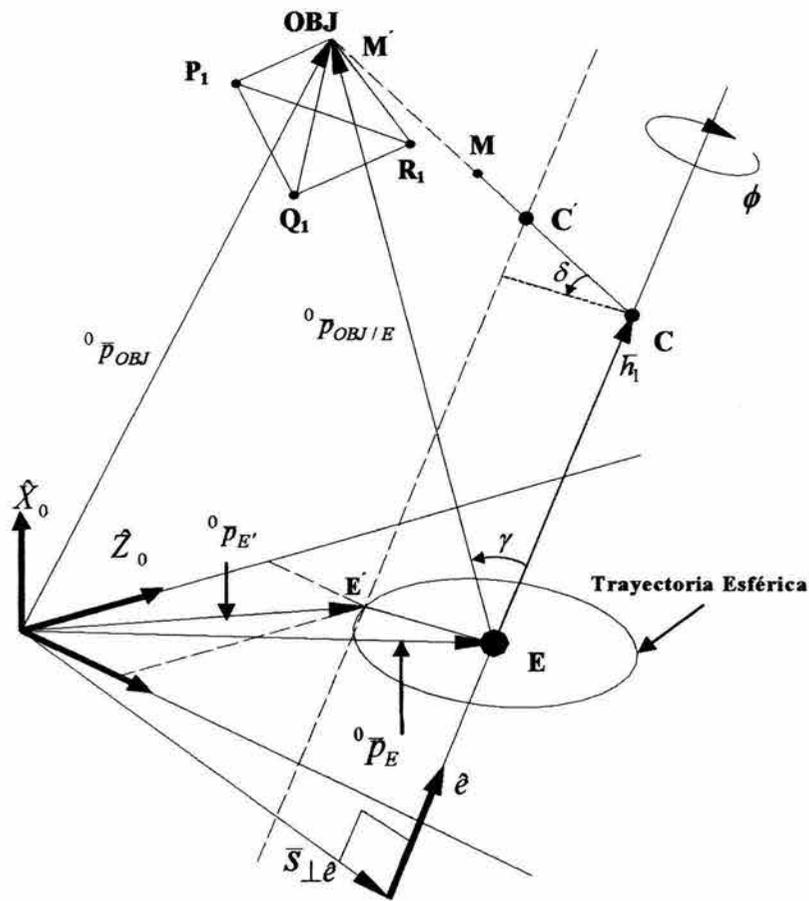


Fig.(2.7). Puntos pertenecientes al robot y a la pieza de trabajo.

A partir de la figura (2.7), se obtiene el vector que define la posición del efector final (órgano terminal) con respecto al sistema de referencia {0}:

$${}^0\bar{P}_{OBJ} = {}^0\bar{P}_E + {}^0\bar{P}_{OBJ/E} \quad (2.38)$$

$${}^0\bar{P}_{OBJ/E} = {}^0\bar{P}_{OBJ} - {}^0\bar{P}_E \quad (2.39)$$

Como se puede observar en la figura (2.7), se forma el triángulo "C-E-OBJ". De

dicho triángulo se concluye:

$$\text{Cos}(\gamma) = \frac{h_1}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}\|} \quad (2.40)$$

$$h_1 = \text{Cos}(\gamma) \|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}\| \quad (2.41)$$

El ángulo  $\gamma$  se puede determinar a partir de la definición del producto interno entre los vectores  $\hat{\mathbf{e}}$  y  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}$ , es decir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E} &= \|\hat{\mathbf{e}}\| \|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}\| \text{Cos}(\gamma) \\ \text{Cos}(\gamma) &= \frac{\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}}{\|\hat{\mathbf{e}}\| \|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}\|} = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}\|} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Combinando la Ec.(2.42) con la Ec.(2.41) se obtiene la magnitud del vector  ${}^0\bar{\mathbf{h}}_1$ ,

$$h_1 = \hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}$$

debido a que  $h_1$  está situado sobre el eje de giro del Tornillo de Rodrigues, para obtener el vector  ${}^0\bar{\mathbf{h}}_1$  solamente multiplicamos la magnitud de este por la dirección  $\hat{\mathbf{e}}$ :

$${}^0\bar{\mathbf{h}}_1 = (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}) \hat{\mathbf{e}} \quad (2.43)$$

De nuevo a partir del triángulo "C-E-OBJ" de la figura (2.7):

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E} = {}^0\bar{\mathbf{h}}_1 + {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E} - {}^0\bar{\mathbf{h}}_1 \quad (2.44)$$

Sutituyendo la Ec.(2.39) en la ecuación anterior, se tiene:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E - {}^0\bar{\mathbf{h}}_1$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - ({}^0\bar{\mathbf{P}}_E + {}^0\bar{\mathbf{h}}_1) \quad (2.45)$$

Pero,  ${}^0\bar{\mathbf{h}}_1 = (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}) \hat{\mathbf{e}}$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - ({}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}) \hat{\mathbf{e}})$$

Además,  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - ({}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}}^T ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E)) \hat{\mathbf{e}})$$

Desarrollando las operaciones indicadas de la ecuación anterior:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - ({}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - \hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) \hat{\mathbf{e}})$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - ({}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ}) \hat{\mathbf{e}} - (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) \hat{\mathbf{e}})$$

Del hecho, de que la magnitud se puede cambiar de posición sin alterar el resultado, tenemos:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - ({}^0\bar{\mathbf{P}}_E + \hat{\mathbf{e}} (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ}) - \hat{\mathbf{e}} (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_E))$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - ({}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_E)$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E - (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} + (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_E$$

Agrupando términos semejantes:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T)) {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} + (-\mathbf{I}_{3 \times 3} + (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T)) {}^0\bar{\mathbf{P}}_E$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_E$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) \quad (2.46)$$

Normalizando el vector  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}$ , se tiene:

$${}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = \frac{{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}\|} \quad (2.47)$$

De la figura (2.7) se puede observar que:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_C = {}^0\bar{\mathbf{P}}_E + {}^0\bar{\mathbf{h}}_1$$

Sustituyendo la Ec.(2.43) en la ecuación anterior:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_C = {}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E}) \hat{\mathbf{e}}$$

Pero, de la Ec.(2.39)  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/E} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_C = {}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}}^T ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E)) \hat{\mathbf{e}}$$

Desarrollando las operaciones indicadas de la ecuación anterior:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_C = {}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - \hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) \hat{\mathbf{e}}$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_C = {}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ}) \hat{\mathbf{e}} - (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) \hat{\mathbf{e}}$$

Del hecho, de que la magnitud se puede cambiar de posición sin alterar el resultado, tenemos:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_C = {}^0\bar{\mathbf{P}}_E + \hat{\mathbf{e}} (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ}) - \hat{\mathbf{e}} (\hat{\mathbf{e}}^T {}^0\bar{\mathbf{P}}_E)$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_C = {}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_E$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_C = ({}^0\bar{\mathbf{P}}_E - (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) + (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ}$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_C = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} \quad (2.48)$$

Con los vectores  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}$  y  ${}^0\bar{\mathbf{h}}_1$  se forma un plano que corta al plano  $(\hat{\mathbf{y}}_0 - \hat{\mathbf{z}}_0)$ .

Sucede que la intersección de los planos coincide con el vector  $({}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E)$ , por lo tanto, necesitamos encontrar dicha intersección. Para esto primero necesitamos encontrar al vector  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'}$ .

A partir de la figura (2.7):

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} + {}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/OBJ}$$

pero

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/OBJ} = L_B \left( - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} \right)$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/OBJ} = -L_B {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} \quad (2.49)$$

donde,  $L_B$  representa a la longitud del brazo del manipulador

Así:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - L_B {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} \quad (2.50)$$

Observando la figura (2.7) el vector  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'}$  también puede ser descrito como:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_C + {}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C}$$

despejando de la ecuación anterior a  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C}$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_C \quad (2.51)$$

Sustituyendo las Ecs.(2.48) y (2.50) en la Ec.(2.51) resulta:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} = \left( {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - L_B {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} \right) - \left[ (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_E + (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} \right]$$

desarrollando las operaciones indicadas:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - L_B {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} - (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_E - (\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ}$$

Factorizando:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) {}^0\bar{\mathbf{P}}_E - L_B {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) - L_B {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} \quad (2.52)$$

Combinando las ecuaciones Ec.(2.47) y Ec.(2.52) obtenemos:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) - L_B \left( \frac{{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}\|} \right)$$

Pero de la Ec.(2.46)  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E)$

$$\begin{aligned} {}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} &= (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) - \\ &\quad \left( \frac{L_B}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}\|} \right) [(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E)] \end{aligned}$$

Factorizando:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} = \left[ \mathbf{I}_{3 \times 3} - \left( \frac{L_B}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}\|} \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} \right] (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E)$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} = \left( 1 - \frac{L_B}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}\|} \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E)$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} = \left( 1 - \frac{L_B}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}\|} \right) (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) \quad (2.53)$$

Por último se necesita buscar al vector  ${}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E}$ , el cual determina la intersección de los planos  $(\hat{\mathbf{e}} - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C})$  y  $(\hat{\mathbf{y}}_0 - \hat{\mathbf{z}}_0)$ .

El vector normal al plano  $(\hat{\mathbf{e}} - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C})$  es:

$$\hat{\mathbf{V}}_{\perp(\hat{\mathbf{e}} - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C})} = \hat{\mathbf{e}} \otimes {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}$$

El producto cruz entre  $\hat{\mathbf{x}}_0$  y  $\hat{\mathbf{V}}_{\perp(\hat{\mathbf{e}} - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C})}$  define al vector coincidente con la intersección de los planos  $(\hat{\mathbf{e}} - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C})$  y  $(\hat{\mathbf{y}}_0 - \hat{\mathbf{z}}_0)$ .

$${}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E} = \hat{\mathbf{x}}_0 \otimes \hat{\mathbf{V}}_{\perp(\hat{\mathbf{e}} - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C})} \quad (2.54)$$

Así, obtenemos la dirección del vector,  ${}^0\overline{\mathbf{P}}_{E'/E}$ , pero nos hace falta su magnitud.

Para ello nos referimos a la figura (2.7), donde a la línea  $EE'$  la trasladamos hasta hacerla coincidente en  $C$  con  $E$ , de esta manera obtenemos un triángulo formado por " $C-E'-C''$ "; y el interés de esto se centra en el ángulo entre los vectores  ${}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}$  y  ${}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E}$ . Este ángulo se denota por  $\delta$  y se determina de la siguiente manera:

Aplicando la definición del producto punto entre  ${}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}$  y  ${}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E}$ :

$${}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}^T {}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E} = \left\| {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} \right\| \left\| {}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E} \right\| \text{Cos}(\delta)$$

$${}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}^T {}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E} = \text{Cos}(\delta) \quad (2.55)$$

A partir de la definición del coseno, tenemos:

$$\text{Cos}(\delta) = \frac{\left\| {}^0\overline{\mathbf{P}}_{C'/C} \right\|}{\left\| {}^0\overline{\mathbf{P}}_{E'/E} \right\|} \quad (2.56)$$

Si se igualan la Ec.(2.55) con la Ec.(2.56), se puede obtener la magnitud del vector  ${}^0\overline{\mathbf{P}}_{E'/E}$ :

$${}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}^T {}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E} = \frac{\left\| {}^0\overline{\mathbf{P}}_{C'/C} \right\|}{\left\| {}^0\overline{\mathbf{P}}_{E'/E} \right\|}$$

despejando  $\left\| {}^0\overline{\mathbf{P}}_{E'/E} \right\|$  tenemos:

$$\left\| {}^0\overline{\mathbf{P}}_{E'/E} \right\| = \frac{\left\| {}^0\overline{\mathbf{P}}_{C'/C} \right\|}{{}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}^T {}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E}}$$

Ahora, podemos construir el vector  ${}^0\overline{\mathbf{P}}_{E'/E}$ , debido a que ya contamos con su mag-

nitud y dirección :

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'/E} = \left\| {}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'/E} \right\| {}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E}$$

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'/E} = \frac{\left\| {}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} \right\|}{{}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}^T {}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E}} {}^0\hat{\mathbf{P}}_{E'/E}$$

Sustituyendo la Ec.(2.54) en la ecuación anterior:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'/E} = \frac{\left\| {}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} \right\|}{{}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}^T \left( \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{V}}_{\perp(\hat{\mathbf{e}} - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C})} \right)} \left( \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{V}}_{\perp(\hat{\mathbf{e}} - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C})} \right) \quad (2.57)$$

De la figura (2.7) observamos que:

$${}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'} = {}^0\bar{\mathbf{P}}_E + {}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'/E} \quad (2.58)$$

La primer variable articular, tipo prismática, es encontrada mediante:

$$d_1 = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'}^T \hat{\mathbf{z}}_0 \quad (2.59)$$

La segunda variable articular, tipo prismática, es encontrada mediante:

$$d_2 = {}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'}^T \hat{\mathbf{y}}_0 \quad (2.60)$$

A partir de la Ec.(2.59) y la Ec.(2.60) se determinan las dos primeras variables articulares, para el caso general (cuando el centro de la articulación esférica no coincide con el eje del Tornillo de Rodrigues), las cuales como se mencionó con anterioridad sirven para posicionar al eslabonamiento de tornillo del robot manipulador. Estas ecuaciones están en función de los parámetros del Tornillo de Rodrigues

### 2.3.2. Obtención de las variables articulares que sirven para orientar al eslabonamiento de tornillo del robot manipulador

#### Obtención de la cuarta variable articular

La tercera ( $\theta_3$ ) y cuarta ( $\theta_4$ ) variable sirven para orientar al eslabonamiento de tornillo del robot manipulador. En la figura (2.8) se muestran cuatro sistemas de referencia para el instante donde  $\theta_4$  y  $\theta_3$  son iguales a cero, a saber, los sistemas de referencia  $\{4\}$  y  $\{3\}$  pertenecen a la articulación esférica, el  $\{2\}$  a la segunda articulación prismática y el sistema inercial se representa con  $\{0\}$ . Se supone que el centro de la articulación esférica esta situada en el plano  $(\hat{y}_0 - \hat{z}_0)$ , por ello coinciden en el mismo punto el centro de la articulación esférica y el origen del sistema de referencia  $\{2\}$ . Se indica el sistema de referencia inercial  $\{0\}$ , para saber la orientación que guardan con éste los sistemas de referencia móviles.

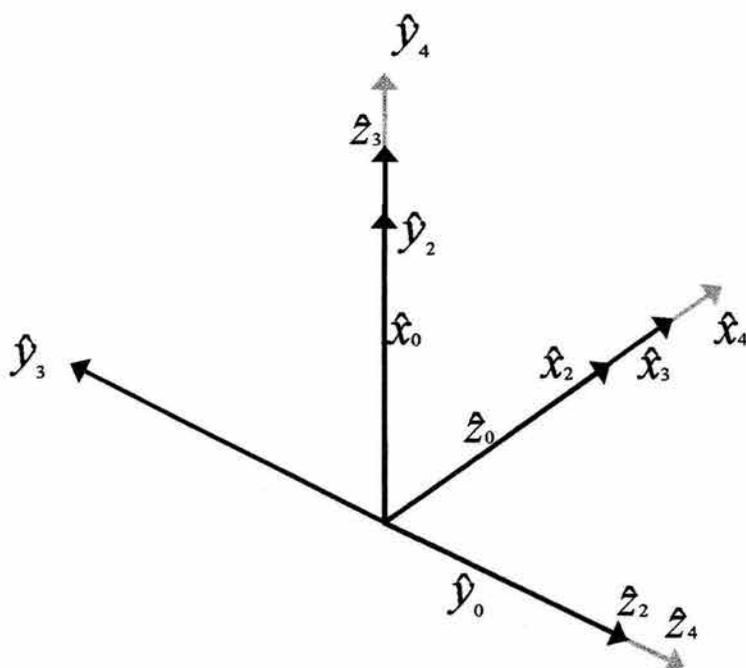


Fig. (2.8). Situación existente entre los sistemas referenciales  $\{0\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$  cuando  $\theta_3$  y  $\theta_4$  son iguales a cero.

Para determinar la cuarta variable articular, es necesario tomar en cuenta que el eje de giro ( $\hat{e}$ ) del Tornillo de Rodrigues, está definido de la siguiente manera:

$$\hat{e} = \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \end{pmatrix}^T \quad (2.61)$$

y que el vector  $\hat{e}$ , es un vector libre, el cual es colineal con  $\hat{y}_4$ .

Así:

$$\hat{y}_4 = \hat{e} \quad (2.62)$$

A partir de este hecho podemos encontrar la cuarta variable articular ( $\theta_4$ ) tipo rotacional, la cual rota alrededor del eje  $\hat{y}_0$ . El instante cuando  $\theta_4$  es variable y  $\theta_3$  igual a cero se muestra en la figura (2.9).

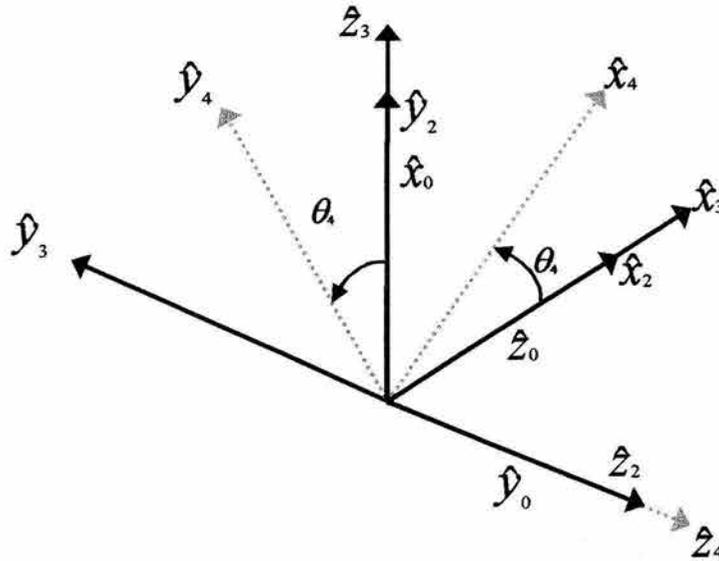


Fig. (2.9). Situación existente entre los sistemas referenciales {3} y {4} cuando  $\theta_4$  varía.

De acuerdo con la figura (2.9)  $\theta_4$  es el ángulo existente entre los vectores  $\hat{z}_3$  y  $\hat{y}_4$ , pero  $\hat{z}_3$  tiene la misma dirección que  $\hat{x}_0$ , por lo que es posible determinar a  $\theta_4$ , de la siguiente manera:

$$\overline{Proy_{\hat{x}_0} \hat{e}} = \left[ \frac{\hat{e}^T \hat{x}_0}{(\hat{x}_0^T \hat{x}_0)} \right] \hat{x}_0 = (\hat{e}^T \hat{x}_0) \hat{x}_0 \quad (2.63)$$

$$\text{pero } \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \hat{e} = (e_x \ e_y \ e_z)^T$$

$$\overline{Proy_{\hat{x}_0} \hat{e}} = \left[ (e_x \ e_y \ e_z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \hat{x}_0$$

$$\overline{Proy_{\hat{x}_0} \hat{e}} = e_x \hat{x}_0 \quad (2.64)$$

Calculando el producto punto entre los vectores  $\hat{e}$  y  $\hat{x}_0$ :

$$\hat{e}^T \hat{x}_0 = \|\hat{e}\| \|\hat{x}_0\| \text{Cos}(\theta_4) = \text{Cos}(\theta_4) \quad (2.65)$$

Combinando las ecuaciones (2.63) y (2.65) resulta:

$$\overline{\text{Proy}_{\hat{x}_0} \hat{e}} = \text{Cos}(\theta_4) \hat{x}_0 \quad (2.66)$$

Igualando la Ec.(2.66) con la Ec.(2.64):

$$\text{Cos}(\theta_4) \hat{x}_0 = e_x \hat{x}_0$$

De donde  $\theta_4$ :

$$\theta_4 = \text{Cos}^{-1}(e_x) \quad (2.67)$$

Por lo que es posible determinar a la variable articular  $\theta_4$  utilizando a la Ec.(2.67), la cual esta en función del eje del Tornillo de Rodrigues.

Nota: De la Ec.(2.67) se puede deducir que la variable articular  $\theta_4$  permanece constante durante todo el movimiento del robot manipulador helicoidal PPSP.

### Obtención de la tercera variable articular

En la figura (2.10) se presenta la situación existente entre el sistema de referencia  $\{3\}$  y  $\{0\}$  una vez que  $\theta_4$  y  $\theta_3$  han variado. La tercera variable articular  $\theta_3$ , tipo rotacional, rota alrededor del eje  $\hat{x}_0$ .

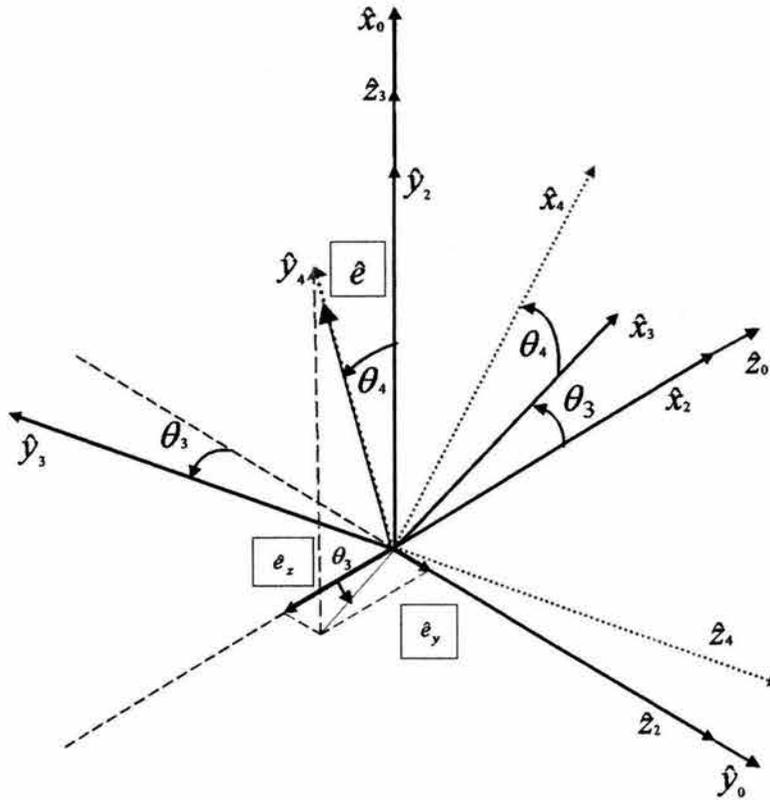


Fig. (2.10). Situación existente entre los sistemas de referencia {3} y {0} una vez que  $\theta_4$  y  $\theta_3$  han variado.

El ángulo existente entre los vectores unitarios  $\hat{x}_2$  y  $\hat{x}_3$  queda determinado por  $\theta_3$ , como se puede verificar de la figura anterior este mismo ángulo se forma entre los vectores unitarios  $\hat{e}_z$  y la proyección del vector  $\hat{e}$  en el plano  $(\hat{y}_0 - \hat{z}_0)$ , así, es posible determinar a  $\theta_3$  de la siguiente manera:

$$\text{Tan}(\theta_3) = \left( \frac{e_y}{e_z} \right) \quad (2.68)$$

despejando a  $\theta_3$ :

$$\theta_3 = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{e_y}{e_z} \right) \quad (2.69)$$

De este modo la variable articular  $\theta_3$  se determina con la Ec.(2.69). Es importante observar que  $\theta_3$  permanece constante durante todo el movimiento, la cual está en función

del eje del Tornillo de Rodrigues.

Al igual que para determinar a la variable articular  $\theta_4$ ,  $\theta_3$  está en función de los términos del eje del Tornillo de Rodrigues  $\hat{e}$ .

### 2.3.3. Obtención de las variables articulares del eslabonamiento de tornillo

#### Obtención de la quinta variable articular

En la figura (2.11) se muestra la situación existente entre los sistemas de referencia {4} y {5} para el instante donde  $\theta_5$  no ha cambiado y es igual a cero, los cuales tienen como punto común, el centro de la articulación esférica.

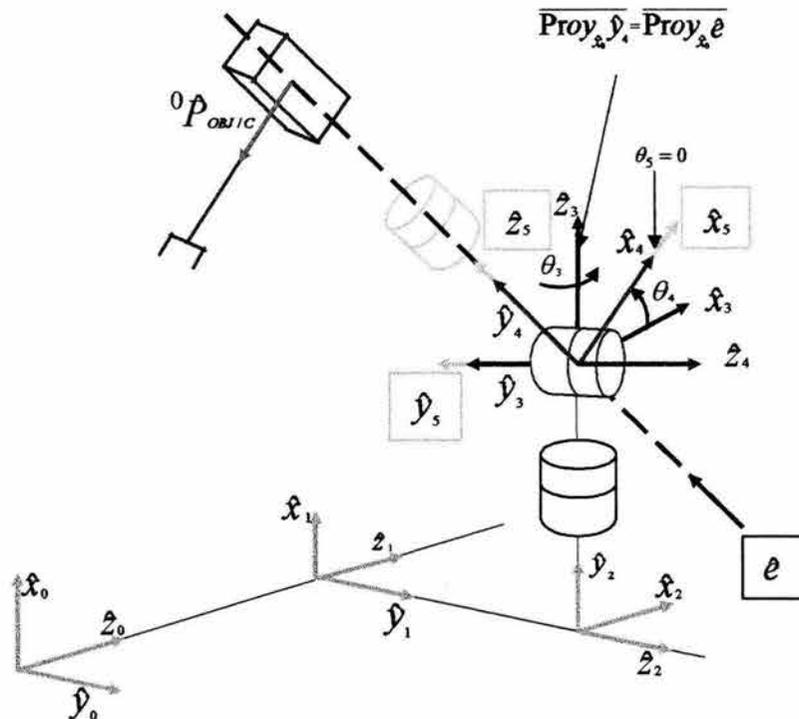


Fig. (2.11). Relación existente entre los sistemas de referencia {4} y {5}.

La quinta variable articular, es del tipo rotacional y se representa por  $\theta_5$ . Por definición, la variable articular  $\theta_5$ , es el ángulo comprendido entre los vectores unitarios  $\hat{\mathbf{x}}_4$  y  $\hat{\mathbf{x}}_5$ , alrededor del eje 5, por lo que, se puede obtener  $\theta_5$ , calculando el producto punto entre dichos vectores:

$${}^0\hat{\mathbf{x}}_4^T {}^0\hat{\mathbf{x}}_5 = \|{}^0\hat{\mathbf{x}}_4\| \|{}^0\hat{\mathbf{x}}_5\| \text{Cos}(\theta_5) \quad (2.70)$$

las normas de ambos vectores son igual a uno, por lo que:

$${}^0\hat{\mathbf{x}}_4^T {}^0\hat{\mathbf{x}}_5 = \text{Cos}(\theta_5) \quad (2.71)$$

La variable articular  $\theta_5$ , forma parte del eslabonamiento de tornillo, y le suministra a éste, el movimiento de giro alrededor del eje del Tornillo de Rodrigues, el cual es fundamental para cumplir con el movimiento deseado.

El vector  ${}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}$  que se muestra en la figura (2.11), describe la dirección del último eslabón correspondiente al brazo del robot manipulador. Si a este vector se le traslada con respecto al eje del tornillo del manipulador hasta hacerlo coincidir con el centro de la articulación esférica, se puede observar que, el vector  ${}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}$  es paralelo al vector  $\hat{\mathbf{x}}_5$  y de sentido contrario, manteniéndose de este modo, en todo momento durante la ejecución del movimiento helicoidal.

Lo anterior quiere decir que:

$${}^0\hat{\mathbf{x}}_5 = - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} \quad (2.72)$$

Sustituyendo la Ec.(2.72) en la Ec.(2.71) y despejando  $\theta_5$  se tiene:

$$({}^0\hat{\mathbf{x}}_4^T) (- {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}) = \text{Cos}(\theta_5)$$

$$\theta_5 = \text{Cos}^{-1} \left[ ({}^0\hat{\mathbf{x}}_4^T) (- {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}) \right]$$

$$\theta_5 = \text{Cos}^{-1} \left( - {}^0\hat{\mathbf{x}}_4^T {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} \right) \quad (2.75)$$

Para poder encontrar  $\theta_5$ , es necesario encontrar al vector  $\hat{\mathbf{x}}_4$  medido en sistema de referencia fijo  $\{0\}$  es decir:

$${}^0\hat{\mathbf{x}}_4 = {}^0\mathbf{R} \quad {}^1\mathbf{R} \quad {}^2\mathbf{R} \quad {}^3\mathbf{R} \quad {}^4\hat{\mathbf{x}}_4$$

$${}^0\hat{\mathbf{x}}_4 = {}^0\mathbf{R} \quad {}^4\hat{\mathbf{x}}_4 \quad (2.76)$$

A partir de la cinemática directa se determina  ${}^0\mathbf{R}$ , la cuál establece que:

$${}^0\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_3 & -C\theta_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^3\mathbf{R} = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Así,

$${}^0\mathbf{R} = \begin{pmatrix} S\theta_4 & C\theta_4 & 0 \\ -S\theta_3 * C\theta_4 & S\theta_3 * S\theta_4 & C\theta_3 \\ C\theta_3 * C\theta_4 & -C\theta_3 * S\theta_4 & S\theta_3 \end{pmatrix}$$

De lo anterior resulta

$${}^0\hat{\mathbf{x}}_4 = \begin{pmatrix} S\theta_4 & C\theta_4 & 0 \\ -S\theta_3 * C\theta_4 & S\theta_3 * S\theta_4 & C\theta_3 \\ C\theta_3 * C\theta_4 & -C\theta_3 * S\theta_4 & S\theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^0\hat{\mathbf{x}}_4 = \begin{pmatrix} S\theta_4 \\ -S\theta_3 * C\theta_4 \\ C\theta_3 * C\theta_4 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Sustituyendo la Ec.(2.77) en la Ec.(2.75) se obtiene:

$$\theta_5 = \text{Cos}^{-1} \left[ - \begin{pmatrix} S\theta_4 \\ -S\theta_3 * C\theta_4 \\ C\theta_3 * C\theta_4 \end{pmatrix}^T {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} \right]$$

$$\theta_5 = \text{Cos}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} -S\theta_4 \\ S\theta_3 * C\theta_4 \\ -C\theta_3 * C\theta_4 \end{pmatrix}^T {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} \right] \quad (2.78)$$

Es importante hacer notar, que la ecuación obtenida para la variable articular  $\theta_5$ , únicamente orienta al eslabonamiento de tornillo del manipulador.

Por lo tanto, para poder imprimirle al eslabonamiento de tornillo del manipulador un movimiento helicoidal, es necesario sumarle el valor del ángulo de giro  $\phi$  en función del tiempo, es decir,  $\phi(t)$ . Este ángulo se obtiene a partir de la formulación del Tornillo de Rodrigues. Así la Ec.(2.78) se convierte en:

$$\theta_5 = \text{Cos}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} -S\theta_4 \\ S\theta_3 * C\theta_4 \\ -C\theta_3 * C\theta_4 \end{pmatrix}^T {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} \right] + \phi(t) \quad (2.79)$$

De esta manera la Ec.(2.79) sirve para determinar a la quinta variable articular.

### Obtención de la sexta variable articular

La sexta variable articular, es del tipo prismático y se representa por  $d_6$ .

A partir de la figura (2.12) se obtiene la última variable articular, como:

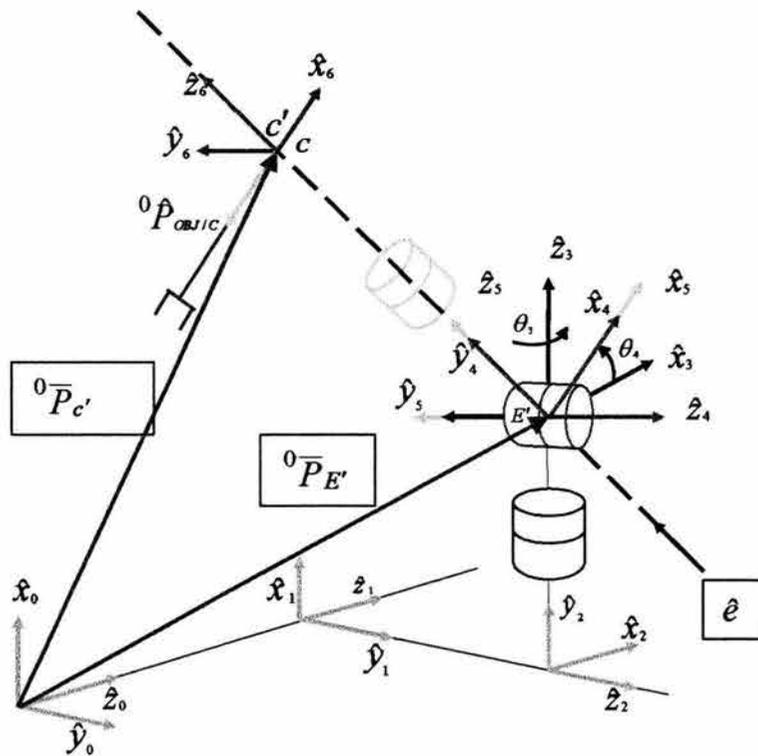


Fig. (2.12). Relación existente entre los sistemas de referencia {4} y {5}.

$$d_6 = \| {}^0\bar{P}_{C'} - {}^0\bar{P}_{E'} \| \quad (2.80)$$

donde, de las ecuaciones obtenidas con anterioridad se tiene,  ${}^0\bar{P}_{C'}$

$${}^0\bar{P}_{C'} = {}^0\bar{P}_{OBJ} - L_B {}^0\hat{P}_{OBJ/C}$$

$$\begin{aligned} {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C} &= \frac{{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}\|} \\ {}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C} &= (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) \end{aligned}$$

donde  ${}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'}$  de la figura (2.7)

$$\begin{aligned} {}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'} &= {}^0\bar{\mathbf{P}}_E + {}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'/E} \\ {}^0\bar{\mathbf{P}}_E &= \begin{bmatrix} ({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T ({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}) \\ ({}^0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})^T (\mathbf{M}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{M}_{0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}} \hat{\mathbf{e}}) \end{bmatrix} (\mathbf{M}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{M}_{0\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}} \hat{\mathbf{e}}) \\ {}^0\bar{\mathbf{P}}_{E'/E} &= \frac{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C}\|}{{}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C}^T (\hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{V}}_{\perp(\hat{\mathbf{e}} - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C})})} (\hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{V}}_{\perp(\hat{\mathbf{e}} - {}^0\hat{\mathbf{P}}_{OBJ/C})}) \\ {}^0\bar{\mathbf{P}}_{C'/C} &= \left( 1 - \frac{L_B}{\|{}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ/C}\|} \right) (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T) ({}^0\bar{\mathbf{P}}_{OBJ} - {}^0\bar{\mathbf{P}}_E) \end{aligned}$$

De este modo a partir de la Ec.(2.80) se determina la sexta variable articular, la cual queda en función de los parámetros del Tornillo de Rodrigues.

# Capítulo 3

## Dinámica del Manipulador

### 3.1. Introducción

La dinámica se ocupa de la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina. El modelo dinámico de un robot tiene como objetivo generar la formulación matemática de las ecuaciones de movimiento. Las ecuaciones de movimiento describen la conducta dinámica del manipulador. A partir de estas ecuaciones es posible realizar una simulación por computadora del movimiento del robot, diseño y evaluación del control dinámico del robot y la evaluación del diseño y estructura cinemática del robot. El problema de control consiste en obtener modelos dinámicos del brazo del robot físico y a continuación especificar leyes o estrategias de control para conseguir la respuesta y rendimiento deseado [1].

En este trabajo, se obtiene el modelo dinámico del robot manipulador, considerando a cada uno de los eslabones del manipulador como cuerpos rígidos.

En este capítulo se resuelve el problema dinámico inverso del robot manipulador helicoidal PPSP, el cual parte de que conocidos los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones para cada una de las articulaciones se calculan los pares o fuerzas actuantes en estas. Para resolver este problema existen dos métodos convencionales, a saber, las

formulaciones de Euler-Lagrange y Newton-Euler. A partir de estas formulaciones es posible obtener las ecuaciones dinámicas que describen el movimiento del robot y aunque el camino que toman es totalmente diferente conducen exactamente al mismo resultado [4].

De estas dos formulaciones se obtienen diferentes formas de describir la dinámica de un manipulador, con el objeto de obtener modelos manejables por los sistemas de cálculo de una manera más eficiente, tales como las ecuaciones de Euler-Lagrange de Uicker (1965), las ecuaciones recursivas de Lagrange de Hollerbach (1980), las ecuaciones de Newton-Euler de Luh (1980) y las ecuaciones generalizadas d'Alembert y Lee (1983). Aunque estas ecuaciones de movimiento son equivalentes en el sentido que describen la conducta dinámica del mismo robot físico, sus estructuras pueden diferir porque cada una de ellas se obtienen por diversas razones y objetivos. En algunos casos para conseguir cálculos rápidos en la evaluación de los pares de las articulaciones, otras para facilitar el análisis y la síntesis de control y otros para mejorar la simulación en una computadora del movimiento del robot [1].

La obtención del modelo dinámico de un manipulador basado en la formulación de Euler-Lagrange, es un planteamiento simple y más sistemático que la formulación de Newton-Euler [1], [15]. Además proporcionan ecuaciones de estado explícitas para la dinámica del robot y se pueden analizar y diseñar estrategias de control avanzadas en el espacio de las variables de articulación [1]. La formulación de Euler-Lagrange conduce a ecuaciones finales bien estructuradas donde aparecen de manera clara los diversos pares y fuerzas que intervienen en el movimiento [15].

Sin embargo la formulación de Euler-Lagrange es difícil de utilizar con fines de control en tiempo real a menos que se simplifiquen, ya que el cálculo de las fuerzas y pares aplicados son del orden de  $n^4$ , donde  $n$  es el número de grados de libertad del brazo .

En la formulación de Newton-Euler la característica más importante para utilizarla reside en el tiempo de cálculo de las fuerzas y pares, ya que este es proporcional al número de articulaciones del brazo e independiente de la configuración del mismo.

La ineficacia de la formulación de Euler-Lagrange se debe en parte al uso de las matrices homogéneas  $4 \times 4$  que describen la cadena cinemática, mientras que la eficacia de la formulación de Newton-Euler se basa en su formulación vectorial y en su naturaleza recursiva [1].

En este trabajo se obtienen las ecuaciones de movimiento del manipulador empleando la formulación recursiva de Newton-Euler.

## 3.2. Formulación recursiva de Newton-Euler

Las ecuaciones del movimiento dinámico para cada una de las articulaciones del robot se obtienen en términos de parámetros geométricos e inerciales de los elementos. Las ecuaciones de movimiento, se obtienen a partir de la formulación recursiva de Newton-Euler. Este conjunto de ecuaciones recursivas hacia adelante y hacia atrás, se aplica secuencialmente a cada uno de los elementos del robot manipulador. La recursión hacia adelante propaga la información cinemática (velocidades lineales y angulares, aceleraciones angulares y lineales del centro de masa de cada elemento) desde el sistema coordenado de la base, hasta el sistema de coordenadas del efector final. La recursión hacia atrás propaga las fuerzas y momentos ejercidos sobre cada elemento desde el efector final del robot manipulador hasta el sistema de referencia de la base [1].

### 3.2.1. Propagación hacia adelante

Las ecuaciones recursivas de Newton-Euler, para el proceso de recursión hacia adelante se presenta a continuación [13]:

La velocidad angular del eslabón  $i+1$  está dado por la Ec.(3.1):

$${}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^i{}_{i+1}\mathbf{R} \ {}^i\boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \ {}^{i+1}\hat{\mathbf{z}}_{i+1} \quad (3.1)$$

La aceleración angular del eslabón  $i+1$ , si la articulación es rotacional, viene dada por la Ec.(3.2):

$${}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = {}^i{}^{i+1}\mathbf{R} \ {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i{}^{i+1}\mathbf{R} \ {}^i\boldsymbol{\omega}_i \otimes \dot{\theta}_{i+1} \ {}^{i+1}\hat{\mathbf{z}}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} \ {}^{i+1}\hat{\mathbf{z}}_{i+1} \quad (3.2)$$

Cuando la junta  $i+1$  es prismática, la Ec.(3.2) se simplifica a:

$${}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = {}^i{}^{i+1}\mathbf{R} \ {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \quad (3.3)$$

La aceleración lineal del eslabón  $i+1$ , si su articulación es rotacional, está dada por la Ec.(3.4):

$${}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{i+1} = {}^i{}^{i+1}\mathbf{R} \ ( {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \otimes {}^i\mathbf{P}_{i+1} + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \otimes ( {}^i\boldsymbol{\omega}_i \otimes {}^i\mathbf{P}_{i+1} ) + {}^i\dot{\mathbf{v}}_i ) \quad (3.4)$$

Cuando la junta  $i+1$  es prismática, la Ec.(3.4) se convierte a:

$${}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{i+1} = {}^i{}^{i+1}\mathbf{R} \ ( {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \otimes {}^i\mathbf{P}_{i+1} + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \otimes ( {}^i\boldsymbol{\omega}_i \otimes {}^i\mathbf{P}_{i+1} ) + {}^i\dot{\mathbf{v}}_i ) + 2 \ {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \otimes \dot{d}_{i+1} \ {}^{i+1}\hat{\mathbf{z}}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1} \ {}^{i+1}\hat{\mathbf{z}}_{i+1} \quad (3.5)$$

La aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón  $i+1$ , viene dado por la Ec.(3.6):

$${}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{ci+1} = {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} \otimes {}^{i+1}\mathbf{P}_{ci+1} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \otimes ( {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \otimes {}^{i+1}\mathbf{P}_{ci+1} ) + {}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{i+1} \quad (3.6)$$

La fuerza debida a la aceleración del eslabón  $i+1$  (segunda ley de Newton), está dada por la Ec.(3.7):

$${}^{i+1}\mathbf{F}_{i+1} = m_{i+1} \ {}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{ci+1} \quad (3.7)$$

El momento angular debido al movimiento rotacional del eslabón  $i+1$ , está representado por la Ec.(3.8) siguiente:

$${}^{i+1}\mathbf{N}_{i+1} = {}^{ci+1}\mathbf{I}_{i+1} \ {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \otimes {}^{ci+1}\mathbf{I}_{i+1} \ {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \quad (3.8)$$

Empleando las Ecs. (3.1 a 3.8) mostradas anteriormente para el proceso de recursión hacia adelante, y variando  $i$  desde 0 hasta 5, tenemos:

Proceso para la velocidad angular  ${}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1}$  :

Para  $i = 0$ : (Articulación tipo prismática )

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = {}^1_0\mathbf{R} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\theta}_1 {}^1\hat{\mathbf{z}}_1$$

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Para  $i = 1$ : (Articulación tipo prismática )

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = {}^2_1\mathbf{R} {}^1\boldsymbol{\omega}_1 + \dot{\theta}_2 {}^2\hat{\mathbf{z}}_2$$

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Para  $i = 2$ : (Articulación tipo rotacional )

$${}^3\boldsymbol{\omega}_3 = {}^3_2\mathbf{R} {}^2\boldsymbol{\omega}_2 + \dot{\theta}_3 {}^3\hat{\mathbf{z}}_3$$

$${}^3\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Para  $i = 3$ : (Articulación tipo rotacional )

$${}^4\boldsymbol{\omega}_4 = {}^4_3\mathbf{R} {}^3\boldsymbol{\omega}_3 + \dot{\theta}_4 {}^4\hat{\mathbf{z}}_4$$

$$\begin{aligned}
{}^4\omega_4 &= \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} \\
{}^4\omega_4 &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}_3 S\theta_4 \\ \dot{\theta}_3 C\theta_4 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Para  $i = 4$ : (Articulación tipo rotacional )

$$\begin{aligned}
{}^5\omega_5 &= {}^5\mathbf{R} {}^4\omega_4 + \dot{\theta}_5 {}^5\hat{z}_5 \\
{}^5\omega_5 &= \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_5 & -C\theta_5 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\theta}_3 S\theta_4 \\ \dot{\theta}_3 C\theta_4 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_5 \end{pmatrix} \\
{}^5\omega_5 &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}_3 S\theta_4 C\theta_5 - \dot{\theta}_4 S\theta_5 \\ -\dot{\theta}_3 S\theta_4 S\theta_5 - \dot{\theta}_4 C\theta_5 \\ \dot{\theta}_3 C\theta_4 + \dot{\theta}_5 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Para  $i = 5$ : (Articulación tipo prismática )

$$\begin{aligned}
{}^6\omega_6 &= {}^6\mathbf{R} {}^5\omega_5 + \dot{\theta}_6 {}^6\hat{z}_6 \\
{}^6\omega_6 &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}_3 S\theta_4 C\theta_5 - \dot{\theta}_4 S\theta_5 \\ -\dot{\theta}_3 S\theta_4 S\theta_5 - \dot{\theta}_4 C\theta_5 \\ \dot{\theta}_3 C\theta_4 + \dot{\theta}_5 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Proceso para la aceleración angular  ${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1}$  :

Para  $i = 0$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^1\dot{\omega}_1 = {}^1\mathbf{R} {}^0\dot{\omega}_0$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Para  $i = 1$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^2\dot{\omega}_2 = {}^2_1\mathbf{R} {}^1\dot{\omega}_1$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Para  $i = 2$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^3\dot{\omega}_3 = {}^3_2\mathbf{R} {}^2\dot{\omega}_2 + {}^3_2\mathbf{R} {}^2\omega_2 \otimes \dot{\theta}_3 {}^3\hat{\mathbf{z}}_3 + \ddot{\theta}_3 {}^3\hat{\mathbf{z}}_3$$

$${}^3\dot{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Para  $i = 3$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^4\dot{\omega}_4 = {}^4_3\mathbf{R} {}^3\dot{\omega}_3 + {}^4_3\mathbf{R} {}^3\omega_3 \otimes \dot{\theta}_4 {}^4\hat{\mathbf{z}}_4 + \ddot{\theta}_4 {}^4\hat{\mathbf{z}}_4$$

$${}^4\dot{\omega}_4 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & 0 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_4 \end{pmatrix}$$

$${}^4\dot{\omega}_4 = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_3 S\theta_4 \\ \ddot{\theta}_3 C\theta_4 \\ \ddot{\theta}_4 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Para  $i = 4$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^5\dot{\omega}_5 = {}^5\mathbf{R} {}^4\dot{\omega}_4 + {}^5\mathbf{R} {}^4\omega_4 \otimes \dot{\theta}_5 {}^5\hat{z}_5 + \ddot{\theta}_5 {}^5\hat{z}_5$$

$${}^5\dot{\omega}_5 = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_5 & -C\theta_5 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_3 S\theta_4 \\ \ddot{\theta}_3 C\theta_4 \\ \ddot{\theta}_4 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_5 & -C\theta_5 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_4 & \dot{\theta}_3 C\theta_4 \\ \dot{\theta}_4 & 0 & -\dot{\theta}_3 S\theta_4 \\ -\dot{\theta}_3 C\theta_4 & \dot{\theta}_3 S\theta_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_5 \end{pmatrix}$$

$${}^5\dot{\omega}_5 = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_3 S\theta_4 C\theta_5 - \ddot{\theta}_4 S\theta_5 + \dot{\theta}_3 C\theta_4 \dot{\theta}_5 C\theta_5 \\ -\ddot{\theta}_3 S\theta_4 S\theta_5 - \ddot{\theta}_4 C\theta_5 - \dot{\theta}_3 C\theta_4 \dot{\theta}_5 S\theta_5 \\ \ddot{\theta}_3 C\theta_4 - \dot{\theta}_3 S\theta_4 \dot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_5 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Para  $i = 5$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^6\dot{\omega}_6 = {}^6\mathbf{R} {}^5\dot{\omega}_5 = \mathbf{I}_{3 \times 3} {}^5\dot{\omega}_5$$

$${}^6\dot{\omega}_6 = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_3 S\theta_4 C\theta_5 - \ddot{\theta}_4 S\theta_5 + \dot{\theta}_3 C\theta_4 \dot{\theta}_5 C\theta_5 \\ -\ddot{\theta}_3 S\theta_4 S\theta_5 - \ddot{\theta}_4 C\theta_5 - \dot{\theta}_3 C\theta_4 \dot{\theta}_5 S\theta_5 \\ \ddot{\theta}_3 C\theta_4 - \dot{\theta}_3 S\theta_4 \dot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_5 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Proceso para la aceleración lineal  ${}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{i+1}$  :

Para  $i = 0$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^1\dot{\mathbf{v}}_1 = {}^1_0\mathbf{R} ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \otimes {}^0\mathbf{P}_1 + {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \otimes ({}^0\boldsymbol{\omega}_0 \otimes {}^0\mathbf{P}_1) + {}^0\dot{\mathbf{v}}_0) + {}^2_1\boldsymbol{\omega}_1 \otimes \dot{d}_1 {}^{i+1}\hat{\mathbf{z}}_{i+1} + \ddot{d}_1 {}^1\hat{\mathbf{z}}_1$$

$${}^1\dot{\mathbf{v}}_1 = {}^1_0\mathbf{R} ({}^0\dot{\mathbf{v}}_0) + \ddot{d}_1 {}^1\hat{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{I}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{pmatrix}$$

$${}^1\dot{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Para  $i = 1$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^2\dot{\mathbf{v}}_2 = {}^2_1\mathbf{R} ({}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \otimes {}^1\mathbf{P}_2 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \otimes ({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \otimes {}^1\mathbf{P}_2) + {}^1\dot{\mathbf{v}}_1) + {}^2_2\boldsymbol{\omega}_2 \otimes \dot{d}_2 {}^2\hat{\mathbf{z}}_2 + \ddot{d}_2 {}^2\hat{\mathbf{z}}_2$$

$${}^2\dot{\mathbf{v}}_2 = {}^2_1\mathbf{R} ({}^1\dot{\mathbf{v}}_1) + \ddot{d}_2 {}^2\hat{\mathbf{z}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix}$$

$${}^2\dot{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} \ddot{d}_1 \\ g \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Para  $i = 2$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^3\dot{\mathbf{v}}_3 = {}^3_2\mathbf{R} ({}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \otimes {}^2\mathbf{P}_3 + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \otimes ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \otimes {}^2\mathbf{P}_3) + {}^2\dot{\mathbf{v}}_2)$$

$$\begin{aligned}
{}^3\dot{\mathbf{v}}_3 &= {}^3\mathbf{R} ({}^2\dot{\mathbf{v}}_2) = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_3 & -C\theta_3 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \ddot{d}_1 \\ g \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix} \\
{}^3\dot{\mathbf{v}}_3 &= \begin{pmatrix} \ddot{d}_1 C\theta_3 - \ddot{d}_2 S\theta_3 \\ -\ddot{d}_1 S\theta_3 - \ddot{d}_2 C\theta_3 \\ g \end{pmatrix} \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Para  $i = 3$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^4\dot{\mathbf{v}}_4 = {}^4\mathbf{R} ({}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 \otimes {}^3\mathbf{P}_4 + {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \otimes ({}^3\boldsymbol{\omega}_3 \otimes {}^3\mathbf{P}_4) + {}^3\dot{\mathbf{v}}_3)$$

donde  ${}^3\mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
{}^4\dot{\mathbf{v}}_4 &= {}^4\mathbf{R} ({}^3\dot{\mathbf{v}}_3) = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \ddot{d}_1 C\theta_3 - \ddot{d}_2 S\theta_3 \\ -\ddot{d}_1 S\theta_3 - \ddot{d}_2 C\theta_3 \\ g \end{pmatrix} \\
{}^4\dot{\mathbf{v}}_4 &= \begin{pmatrix} C\theta_4 (\ddot{d}_1 C\theta_3 - \ddot{d}_2 S\theta_3) + S\theta_4 g \\ -S\theta_4 (\ddot{d}_1 C\theta_3 - \ddot{d}_2 S\theta_3) + C\theta_4 g \\ \ddot{d}_1 S\theta_3 + \ddot{d}_2 C\theta_3 \end{pmatrix} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Para  $i = 4$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^5\dot{\mathbf{v}}_5 = {}^5\mathbf{R} ({}^4\dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \otimes {}^4\mathbf{P}_5 + {}^4\boldsymbol{\omega}_4 \otimes ({}^4\boldsymbol{\omega}_4 \otimes {}^4\mathbf{P}_5) + {}^4\dot{\mathbf{v}}_4)$$

donde  ${}^4\mathbf{P}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$${}^5\dot{\mathbf{v}}_5 = {}^5\mathbf{R} ({}^4\dot{\mathbf{v}}_4) = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_5 & -C\theta_5 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C\theta_4 (\ddot{d}_1 C\theta_3 - \ddot{d}_2 S\theta_3) + S\theta_{4g} \\ -S\theta_4 (\ddot{d}_1 C\theta_3 - \ddot{d}_2 S\theta_3) + C\theta_{4g} \\ \ddot{d}_1 S\theta_3 + \ddot{d}_2 C\theta_3 \end{pmatrix}$$

$${}^5\dot{\mathbf{v}}_5 = \begin{pmatrix} C\theta_5 (C\theta_4 (\ddot{d}_1 C\theta_3 - \ddot{d}_2 S\theta_3) + S\theta_{4g}) - S\theta_5 (\ddot{d}_1 S\theta_3 + \ddot{d}_2 C\theta_3) \\ -S\theta_5 (C\theta_4 (\ddot{d}_1 C\theta_3 - \ddot{d}_2 S\theta_3) + S\theta_{4g}) - C\theta_5 (\ddot{d}_1 S\theta_3 + \ddot{d}_2 C\theta_3) \\ -S\theta_4 (\ddot{d}_1 C\theta_3 - \ddot{d}_2 S\theta_3) + C\theta_{4g} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Para  $i = 5$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^6\dot{\mathbf{v}}_6 = {}^6\mathbf{R} ({}^5\dot{\boldsymbol{\omega}}_5 \otimes {}^5\mathbf{P}_6 + {}^5\boldsymbol{\omega}_5 \otimes ({}^5\boldsymbol{\omega}_5 \otimes {}^5\mathbf{P}_6) + {}^5\dot{\mathbf{v}}_5) + 2 {}^6\boldsymbol{\omega}_6 \otimes \dot{d}_6 {}^6\hat{\mathbf{z}}_6 + \ddot{d}_6 {}^6\hat{\mathbf{z}}_6$$

$${}^6\dot{\mathbf{v}}_6 = \begin{pmatrix} -{}^5P_{6y} {}^5\dot{\omega}_{5z} + {}^5P_{6z} {}^5\dot{\omega}_{5y} - {}^5P_{6x} (({}^5\omega_{5z})^2 + ({}^5\omega_{5y})^2) + \\ {}^5P_{6y} ({}^5\omega_{5y}) ({}^5\omega_{5x}) + {}^5P_{6z} ({}^5\omega_{5z}) ({}^5\omega_{5x}) + {}^5\dot{v}_{5x} + 2 {}^6\omega_{6y} \dot{d}_6 \\ \\ {}^5P_{6x} {}^5\dot{\omega}_{5z} - {}^5P_{6z} {}^5\dot{\omega}_{5x} + {}^5P_{6x} ({}^5\omega_{5x}) ({}^5\omega_{5y}) - \\ {}^5P_{6y} (({}^5\omega_{5z})^2 + ({}^5\omega_{5x})^2) + {}^5P_{6z} ({}^5\omega_{5z}) ({}^5\omega_{5y}) + {}^5\dot{v}_{5y} - 2 {}^6\omega_{6x} \dot{d}_6 \\ \\ -{}^5P_{6x} {}^5\dot{\omega}_{5y} + {}^5P_{6y} {}^5\dot{\omega}_{5x} + {}^5P_{6x} ({}^5\omega_{5x}) ({}^5\omega_{5z}) + {}^5P_{6y} ({}^5\omega_{5z}) ({}^5\omega_{5y}) - \\ {}^5P_{6z} (({}^5\omega_{5y})^2 + ({}^5\omega_{5x})^2) + {}^5\dot{v}_{5z} + \ddot{d}_6 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Proceso para la aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón  $i+1$ ,  ${}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{ci+1}$ :

Para  $i = 0$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^1\dot{\mathbf{v}}_{c1} = {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \otimes {}^1\mathbf{P}_{c1} + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \otimes ({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \otimes {}^1\mathbf{P}_{c1}) + {}^1\dot{\mathbf{v}}_1$$

$${}^1\dot{\mathbf{v}}_{c1} = {}^1\dot{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Para  $i = 1$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^2\dot{\mathbf{v}}_{c2} = {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \otimes {}^2\mathbf{P}_{c2} + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \otimes ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \otimes {}^2\mathbf{P}_{c2}) + {}^2\dot{\mathbf{v}}_2$$

$${}^2\dot{\mathbf{v}}_{c2} = {}^2\dot{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} \ddot{d}_1 \\ g \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Para  $i = 2$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^3\dot{\mathbf{v}}_{c3} = {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 \otimes {}^3\mathbf{P}_{c3} + {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \otimes ({}^3\boldsymbol{\omega}_3 \otimes {}^3\mathbf{P}_{c3}) + {}^3\dot{\mathbf{v}}_3$$

$${}^3\dot{\mathbf{v}}_{c3} = \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_3 & 0 \\ \ddot{\theta}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^3P_{c3x} \\ {}^3P_{c3y} \\ {}^3P_{c3z} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & 0 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & 0 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^3P_{c3x} \\ {}^3P_{c3y} \\ {}^3P_{c3z} \end{pmatrix} + {}^3\dot{\mathbf{v}}_3$$

$${}^3\dot{\mathbf{v}}_{c3} = \begin{pmatrix} -\ddot{\theta}_3 {}^3P_{c3y} - \dot{\theta}_3^2 {}^3P_{c3x} + {}^3\dot{v}_{3x} \\ \ddot{\theta}_3 {}^3P_{c3x} - \dot{\theta}_3^2 {}^3P_{c3y} + {}^3\dot{v}_{3y} \\ {}^3\dot{v}_{3z} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Para  $i = 3$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^4\dot{\mathbf{v}}_{c4} = {}^4\dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \otimes {}^4\mathbf{P}_{c4} + {}^4\boldsymbol{\omega}_4 \otimes ({}^4\boldsymbol{\omega}_4 \otimes {}^4\mathbf{P}_{c4}) + {}^4\dot{\mathbf{v}}_4$$

$${}^4\dot{\mathbf{v}}_{c4} = \begin{pmatrix} 0 & -{}^4\dot{\omega}_{4z} & {}^4\dot{\omega}_{4y} \\ {}^4\dot{\omega}_{4z} & 0 & -{}^4\dot{\omega}_{4x} \\ -{}^4\dot{\omega}_{4y} & {}^4\dot{\omega}_{4x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^4P_{c4x} \\ {}^4P_{c4y} \\ {}^4P_{c4z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -{}^4\omega_{4z} & {}^4\omega_{4y} \\ {}^4\omega_{4z} & 0 & -{}^4\omega_{4x} \\ -{}^4\omega_{4y} & {}^4\omega_{4x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -{}^4\omega_{4z} & {}^4\omega_{4y} \\ {}^4\omega_{4z} & 0 & -{}^4\omega_{4x} \\ -{}^4\omega_{4y} & {}^4\omega_{4x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^4P_{c4x} \\ {}^4P_{c4y} \\ {}^4P_{c4z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^4\dot{v}_{4x} \\ {}^4\dot{v}_{4y} \\ {}^4\dot{v}_{4z} \end{pmatrix}$$

$${}^4\dot{\mathbf{v}}_{c4} = \begin{pmatrix} -{}^4\dot{\omega}_{4z} {}^4P_{c4y} + {}^4\dot{\omega}_{4y} {}^4P_{c4z} + {}^4\omega_{4y} {}^4\omega_{4x} {}^4P_{c4y} - {}^4\omega_{4y}^2 {}^4P_{c4x} + \\ {}^4\omega_{4z} {}^4\omega_{4x} {}^4P_{c4z} - {}^4\omega_{4z}^2 {}^4P_{c4x} + {}^4\dot{v}_{4x} \\ {}^4\dot{\omega}_{4z} {}^4P_{c4x} - {}^4\dot{\omega}_{4x} {}^4P_{c4z} - {}^4\omega_{4x}^2 {}^4P_{c4y} + {}^4\omega_{4x} {}^4\omega_{4y} {}^4P_{c4x} + \\ {}^4\omega_{4z} {}^4\omega_{4y} {}^4P_{c4z} - {}^4\omega_{4z}^2 {}^4P_{c4y} + {}^4\dot{v}_{4y} \\ -{}^4\dot{\omega}_{4y} {}^4P_{c4x} + {}^4\dot{\omega}_{4x} {}^4P_{c4y} - {}^4\omega_{4x}^2 {}^4P_{c4z} + {}^4\omega_{4x} {}^4\omega_{4z} {}^4P_{c4x} - \\ {}^4\omega_{4y}^2 {}^4P_{c4z} + {}^4\omega_{4y} {}^4\omega_{4z} {}^4P_{c4y} + {}^4\dot{v}_{4z} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Para  $i = 4$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^5\dot{\mathbf{v}}_{c5} = {}^5\dot{\boldsymbol{\omega}}_5 \otimes {}^5\mathbf{P}_{c5} + {}^5\boldsymbol{\omega}_5 \otimes ({}^5\boldsymbol{\omega}_5 \otimes {}^5\mathbf{P}_{c5}) + {}^5\dot{\mathbf{v}}_5$$

$${}^5\dot{\mathbf{v}}_{c5} = \begin{pmatrix} 0 & -{}^5\dot{\omega}_{5z} & {}^5\dot{\omega}_{5y} \\ {}^5\dot{\omega}_{5z} & 0 & -{}^5\dot{\omega}_{5x} \\ -{}^5\dot{\omega}_{5y} & {}^5\dot{\omega}_{5x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^5P_{c5x} \\ {}^5P_{c5y} \\ {}^5P_{c5z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -{}^5\omega_{5z} & {}^5\omega_{5y} \\ {}^5\omega_{5z} & 0 & -{}^5\omega_{5x} \\ -{}^5\omega_{5y} & {}^5\omega_{5x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -{}^5\omega_{5z} & {}^5\omega_{5y} \\ {}^5\omega_{5z} & 0 & -{}^5\omega_{5x} \\ -{}^5\omega_{5y} & {}^5\omega_{5x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^5P_{c5x} \\ {}^5P_{c5y} \\ {}^5P_{c5z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^5\dot{v}_{5x} \\ {}^5\dot{v}_{5y} \\ {}^5\dot{v}_{5z} \end{pmatrix}$$

$${}^5\dot{\mathbf{v}}_{c5} = \begin{pmatrix} -{}^5\dot{\omega}_{5z} {}^5P_{c5y} + {}^5\dot{\omega}_{5y} {}^5P_{c5z} + {}^5\omega_{5y} {}^5\omega_{5x} {}^5P_{c5y} - \\ {}^5\omega_{5y} {}^2 {}^5P_{c5x} + {}^5\omega_{5z} {}^5\omega_{5x} {}^5P_{c5z} - {}^5\omega_{5z} {}^2 {}^5P_{c5x} + {}^5\dot{v}_{5x} \\ \\ {}^5\dot{\omega}_{5z} {}^5P_{c5x} - {}^5\dot{\omega}_{5x} {}^5P_{c5z} - {}^5\omega_{5x} {}^2 {}^5P_{c5y} + \\ {}^5\omega_{5x} {}^5\omega_{5y} {}^5P_{c5x} + {}^5\omega_{5z} {}^5\omega_{5y} {}^5P_{c5z} - {}^5\omega_{5z} {}^2 {}^5P_{c5y} + {}^5\dot{v}_{5y} \\ \\ -{}^5\dot{\omega}_{5y} {}^5P_{c5x} + {}^5\dot{\omega}_{5x} {}^5P_{c5y} - {}^5\omega_{5x} {}^2 {}^5P_{c5z} + \\ {}^5\omega_{5x} {}^5\omega_{5z} {}^5P_{c5x} - {}^5\omega_{5y} {}^2 {}^5P_{c5z} + {}^5\omega_{5y} {}^5\omega_{5z} {}^5P_{c5y} + {}^5\dot{v}_{5z} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Para  $i = 5$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^6\dot{\mathbf{v}}_{c6} = {}^6\dot{\boldsymbol{\omega}}_6 \otimes {}^6\mathbf{P}_{c6} + {}^6\boldsymbol{\omega}_6 \otimes ({}^6\boldsymbol{\omega}_6 \otimes {}^6\mathbf{P}_{c6}) + {}^6\dot{\mathbf{v}}_6$$

$$\begin{aligned}
{}^6\dot{\mathbf{v}}_{c6} &= \begin{pmatrix} 0 & -{}^6\dot{\omega}_{6z} & {}^6\dot{\omega}_{6y} \\ {}^6\dot{\omega}_{6z} & 0 & -{}^6\dot{\omega}_{6x} \\ -{}^6\dot{\omega}_{6y} & {}^6\dot{\omega}_{6x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^6P_{c6x} \\ {}^6P_{c6y} \\ {}^6P_{c6z} \end{pmatrix} + \\
&\begin{pmatrix} 0 & -{}^6\omega_{6z} & {}^6\omega_{6y} \\ {}^6\omega_{6z} & 0 & -{}^6\omega_{6x} \\ -{}^6\omega_{6y} & {}^6\omega_{6x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -{}^6\omega_{6z} & {}^6\omega_{6y} \\ {}^6\omega_{6z} & 0 & -{}^6\omega_{6x} \\ -{}^6\omega_{6y} & {}^6\omega_{6x} & 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} {}^6P_{c6x} \\ {}^6P_{c6y} \\ {}^6P_{c6z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^6\dot{v}_{6x} \\ {}^6\dot{v}_{6y} \\ {}^6\dot{v}_{6z} \end{pmatrix} \\
{}^6\dot{\mathbf{v}}_{c6} &= \begin{pmatrix} -{}^6\dot{\omega}_{6z} {}^6P_{c6y} + {}^6\dot{\omega}_{6y} {}^6P_{c6z} + {}^6\omega_{6y} {}^6\omega_{6x} {}^6P_{c6y} - \\ {}^6\omega_{6y}^2 {}^6P_{c6x} + {}^6\omega_{6z} {}^6\omega_{6x} {}^6P_{c6z} - {}^6\omega_{6z}^2 {}^6P_{c6x} + {}^6\dot{v}_{6x} \\ \\ {}^6\dot{\omega}_{6z} {}^6P_{c6x} - {}^6\dot{\omega}_{6x} {}^6P_{c6z} - {}^6\omega_{6x}^2 {}^6P_{c6y} + \\ {}^6\omega_{6x} {}^6\omega_{6y} {}^6P_{c6x} + {}^6\omega_{6z} {}^6\omega_{6y} {}^6P_{c6z} - {}^6\omega_{6z}^2 {}^6P_{c6y} + {}^6\dot{v}_{6y} \\ \\ -{}^6\dot{\omega}_{6y} {}^6P_{c6x} + {}^6\dot{\omega}_{6x} {}^6P_{c6y} - {}^6\omega_{6x}^2 {}^6P_{c6z} + \\ {}^6\omega_{6x} {}^6\omega_{6z} {}^6P_{c6x} - {}^6\omega_{6y}^2 {}^6P_{c6z} + {}^6\omega_{6y} {}^6\omega_{6z} {}^6P_{c6y} + {}^6\dot{v}_{6z} \end{pmatrix} \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Proceso para las fuerzas debidas al movimiento,  ${}^{i+1}\mathbf{F}_{i+1}$  :

Para  $i = 0$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^1\mathbf{F}_1 = m_1 {}^1\dot{\mathbf{v}}_{c1} = m_1 \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 g \\ 0 \\ m_1 \ddot{d}_1 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Para  $i = 1$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^2\mathbf{F}_2 = m_2 {}^2\dot{\mathbf{v}}_{c2} = m_2 \begin{pmatrix} \ddot{d}_1 \\ g \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 \ddot{d}_1 \\ m_2 g \\ m_2 \ddot{d}_2 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Para  $i = 2$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^3\mathbf{F}_3 = m_3 {}^3\dot{\mathbf{v}}_{c3} = m_3 \begin{pmatrix} -\ddot{\theta}_3 {}^3P_{c3y} - \dot{\theta}_3 {}^2 {}^3P_{c3x} + {}^3\dot{v}_{3x} \\ \ddot{\theta}_3 {}^3P_{c3x} - \dot{\theta}_3 {}^2 {}^3P_{c3y} + {}^3\dot{v}_{3y} \\ {}^3\dot{v}_{3z} \end{pmatrix}$$

$${}^3\mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} m_3 \left( -\ddot{\theta}_3 {}^3P_{c3y} - \dot{\theta}_3 {}^2 {}^3P_{c3x} + {}^3\dot{v}_{3x} \right) \\ m_3 \left( \ddot{\theta}_3 {}^3P_{c3x} - \dot{\theta}_3 {}^2 {}^3P_{c3y} + {}^3\dot{v}_{3y} \right) \\ m_3 ({}^3\dot{v}_{3z}) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Para  $i = 3$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^4\mathbf{F}_4 = m_4 {}^4\dot{\mathbf{v}}_{c4} = m_4 \begin{pmatrix} {}^4\dot{v}_{c4x} \\ {}^4\dot{v}_{c4y} \\ {}^4\dot{v}_{c4z} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Para  $i = 4$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^5\mathbf{F}_5 = m_5 {}^5\dot{\mathbf{v}}_{c5} = m_5 \begin{pmatrix} {}^5\dot{v}_{c5x} \\ {}^5\dot{v}_{c5y} \\ {}^5\dot{v}_{c5z} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Para  $i = 5$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^6\mathbf{F}_6 = m_6 {}^6\dot{\mathbf{v}}_{c6} = m_6 \begin{pmatrix} {}^6\dot{v}_{c6x} \\ {}^6\dot{v}_{c6y} \\ {}^6\dot{v}_{c6z} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Proceso para los momentos angulares debidos al movimiento rotacional,  ${}^{i+1}\mathbf{N}_{i+1}$ :

Para  $i = 0$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^1\mathbf{N}_1 = {}^{c1}\mathbf{I}_1 {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \otimes {}^{c1}\mathbf{I}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1$$

$${}^1\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Para  $i = 1$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^2\mathbf{N}_2 = {}^{c2}\mathbf{I}_2 {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \otimes {}^{c2}\mathbf{I}_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2$$

$${}^2\mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Para  $i = 2$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^3\mathbf{N}_3 = {}^{c3}\mathbf{I}_3 {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 + {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \otimes {}^{c3}\mathbf{I}_3 {}^3\boldsymbol{\omega}_3$$

$$\begin{aligned}
{}^3\mathbf{N}_3 &= \begin{pmatrix} c^3 I_{xx3} & -c^3 I_{xy3} & -c^3 I_{xz3} \\ -c^3 I_{xy3} & c^3 I_{yy3} & -c^3 I_{yz3} \\ -c^3 I_{xz3} & -c^3 I_{yz3} & c^3 I_{zz3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \\
&\begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & 0 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^3 I_{xx3} & -c^3 I_{xy3} & -c^3 I_{xz3} \\ -c^3 I_{xy3} & c^3 I_{yy3} & -c^3 I_{yz3} \\ -c^3 I_{xz3} & -c^3 I_{yz3} & c^3 I_{zz3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \\
{}^3\mathbf{N}_3 &= \begin{pmatrix} c^3 I_{yz3} \dot{\theta}_3^2 - c^3 I_{xz3} \ddot{\theta}_3 \\ -c^3 I_{xz3} \dot{\theta}_3^2 - c^3 I_{yz3} \ddot{\theta}_3 \\ c^3 I_{zz3} \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Para  $i = 3$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^4\mathbf{N}_4 = c^4 \mathbf{I}_4 {}^4\dot{\boldsymbol{\omega}}_4 + {}^4\boldsymbol{\omega}_4 \otimes c^4 \mathbf{I}_4 {}^4\boldsymbol{\omega}_4$$

$$\begin{aligned}
{}^4\mathbf{N}_4 &= \begin{pmatrix} c^4 I_{xx4} & -c^4 I_{xy4} & -c^4 I_{xz4} \\ -c^4 I_{xy4} & c^4 I_{yy4} & -c^4 I_{yz4} \\ -c^4 I_{xz4} & -c^4 I_{yz4} & c^4 I_{zz4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^4\dot{\omega}_{4x} \\ {}^4\dot{\omega}_{4y} \\ {}^4\dot{\omega}_{4z} \end{pmatrix} + \\
&\begin{pmatrix} 0 & -{}^4\omega_{4z} & {}^4\omega_{4y} \\ {}^4\omega_{4z} & 0 & -{}^4\omega_{4x} \\ -{}^4\omega_{4y} & {}^4\omega_{4x} & 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} c^4 I_{xx4} & -c^4 I_{xy4} & -c^4 I_{xz4} \\ -c^4 I_{xy4} & c^4 I_{yy4} & -c^4 I_{yz4} \\ -c^4 I_{xz4} & -c^4 I_{yz4} & c^4 I_{zz4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^4\omega_{4x} \\ {}^4\omega_{4y} \\ {}^4\omega_{4z} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^4\mathbf{N}_4 = & \left( \begin{array}{l}
c^4 I_{xx4} {}^4\dot{\omega}_{4x} - c^4 I_{xy4} {}^4\dot{\omega}_{4y} - c^4 I_{xz4} {}^4\dot{\omega}_{4z} + \\
{}^4\omega_{4y} (-c^4 I_{xz4} {}^4\omega_{4x} - c^4 I_{yz4} {}^4\omega_{4y} + c^4 I_{zz4} {}^4\omega_{4z}) - \\
{}^4\omega_{4z} (-c^4 I_{xy4} {}^4\omega_{4x} + c^4 I_{yy4} {}^4\omega_{4y} - c^4 I_{yz4} {}^4\omega_{4z}) \\
\\
-c^4 I_{xy4} {}^4\dot{\omega}_{4x} + c^4 I_{yy4} {}^4\dot{\omega}_{4y} - c^4 I_{yz4} {}^4\dot{\omega}_{4z} + \\
{}^4\omega_{4z} (c^4 I_{xx4} {}^4\omega_{4x} - c^4 I_{xy4} {}^4\omega_{4y} - c^4 I_{xz4} {}^4\omega_{4z}) - \\
{}^4\omega_{4x} (-c^4 I_{xz4} {}^4\omega_{4x} - c^4 I_{yz4} {}^4\omega_{4y} + c^4 I_{zz4} {}^4\omega_{4z}) \\
\\
-c^4 I_{xz4} {}^4\dot{\omega}_{4x} - c^4 I_{yz4} {}^4\dot{\omega}_{4y} + c^4 I_{zz4} {}^4\dot{\omega}_{4z} + \\
{}^4\omega_{4x} (-c^4 I_{xy4} {}^4\omega_{4x} + c^4 I_{yy4} {}^4\omega_{4y} - c^4 I_{yz4} {}^4\omega_{4z}) - \\
{}^4\omega_{4y} (c^4 I_{xx4} {}^4\omega_{4x} - c^4 I_{xy4} {}^4\omega_{4y} - c^4 I_{xz4} {}^4\omega_{4z})
\end{array} \right) \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Para  $i = 4$ : (Articulación tipo rotacional)

$${}^5\mathbf{N}_5 = {}^{c5}\mathbf{I}_5 {}^5\dot{\omega}_5 + {}^5\omega_5 \otimes {}^{c5}\mathbf{I}_5 {}^5\omega_5$$

$$\begin{aligned}
{}^5\mathbf{N}_5 = & \begin{pmatrix} c^5 I_{xx5} & -c^5 I_{xy5} & -c^5 I_{xz5} \\ -c^5 I_{xy5} & c^5 I_{yy5} & -c^5 I_{yz5} \\ -c^5 I_{xz5} & -c^5 I_{yz5} & c^5 I_{zz5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^5\dot{\omega}_{5x} \\ {}^5\dot{\omega}_{5y} \\ {}^5\dot{\omega}_{5z} \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} 0 & -{}^5\omega_{5z} & {}^5\omega_{5y} \\ {}^5\omega_{5z} & 0 & -{}^5\omega_{5x} \\ -{}^5\omega_{5y} & {}^5\omega_{5x} & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} c^5 I_{xx5} & -c^5 I_{xy5} & -c^5 I_{xz5} \\ -c^5 I_{xy5} & c^5 I_{yy5} & -c^5 I_{yz5} \\ -c^5 I_{xz5} & -c^5 I_{yz5} & c^5 I_{zz5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^5\omega_{5x} \\ {}^5\omega_{5y} \\ {}^5\omega_{5z} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$${}^5\mathbf{N}_5 = \left( \begin{array}{l}
c^5 I_{xx5} {}^5\dot{\omega}_{5x} - c^5 I_{xy5} {}^5\dot{\omega}_{5y} - c^5 I_{xz5} {}^5\dot{\omega}_{5z} + \\
{}^5\omega_{5y} (-c^5 I_{xz5} {}^5\omega_{5x} - c^5 I_{yz5} {}^5\omega_{5y} + c^5 I_{zz5} {}^5\omega_{5z}) - \\
{}^5\omega_{5z} (-c^5 I_{xy5} {}^5\omega_{5x} + c^5 I_{yy5} {}^5\omega_{5y} - c^5 I_{yz5} {}^5\omega_{5z}) \\
\\
-c^5 I_{xy5} {}^5\dot{\omega}_{5x} + c^5 I_{yy5} {}^5\dot{\omega}_{5y} - c^5 I_{yz5} {}^5\dot{\omega}_{5z} + \\
{}^5\omega_{5z} (c^5 I_{xx5} {}^5\omega_{5x} - c^5 I_{xy5} {}^5\omega_{5y} - c^5 I_{xz5} {}^5\omega_{5z}) - \\
{}^5\omega_{5x} (-c^5 I_{xz5} {}^5\omega_{5x} - c^5 I_{yz5} {}^5\omega_{5y} + c^5 I_{zz5} {}^5\omega_{5z}) \\
\\
-c^5 I_{xz5} {}^5\dot{\omega}_{5x} - c^5 I_{yz5} {}^5\dot{\omega}_{5y} + c^5 I_{zz5} {}^5\dot{\omega}_{5z} + \\
{}^5\omega_{5x} (-c^5 I_{xy5} {}^5\omega_{5x} + c^5 I_{yy5} {}^5\omega_{5y} - c^5 I_{yz5} {}^5\omega_{5z}) - \\
{}^5\omega_{5y} (c^5 I_{xx5} {}^5\omega_{5x} - c^5 I_{xy5} {}^5\omega_{5y} - c^5 I_{xz5} {}^5\omega_{5z})
\end{array} \right) \quad (3.43)$$

Para  $i = 5$ : (Articulación tipo prismática)

$${}^6\mathbf{N}_6 = c^6 \mathbf{I}_6 {}^6\dot{\omega}_6 + {}^6\omega_6 \otimes c^6 \mathbf{I}_6 {}^6\omega_6$$

$${}^6\mathbf{N}_6 = \begin{pmatrix} c^6 I_{xx6} & -c^6 I_{xy6} & -c^6 I_{xz6} \\ -c^6 I_{xy6} & c^6 I_{yy6} & -c^6 I_{yz6} \\ -c^6 I_{xz6} & -c^6 I_{yz6} & c^6 I_{zz6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^6\dot{\omega}_{6x} \\ {}^6\dot{\omega}_{6y} \\ {}^6\dot{\omega}_{6z} \end{pmatrix} + \\
\begin{pmatrix} 0 & -{}^6\omega_{6z} & {}^6\omega_{6y} \\ {}^6\omega_{6z} & 0 & -{}^6\omega_{6x} \\ -{}^6\omega_{6y} & {}^6\omega_{6x} & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} c^6 I_{xx6} & -c^6 I_{xy6} & -c^6 I_{xz6} \\ -c^6 I_{xy6} & c^6 I_{yy6} & -c^6 I_{yz6} \\ -c^6 I_{xz6} & -c^6 I_{yz6} & c^6 I_{zz6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^6\omega_{6x} \\ {}^6\omega_{6y} \\ {}^6\omega_{6z} \end{pmatrix}$$

$${}^6\mathbf{N}_6 = \begin{pmatrix}
c^6 I_{xx6} {}^6\dot{\omega}_{6x} - c^6 I_{xy6} {}^6\dot{\omega}_{6y} - c^6 I_{xz6} {}^6\dot{\omega}_{6z} + \\
{}^6\omega_{6y} (-c^6 I_{xx6} {}^6\omega_{6x} - c^6 I_{yz6} {}^6\omega_{6y} + c^6 I_{zz6} {}^6\omega_{6z}) - \\
{}^6\omega_{6z} (-c^6 I_{xy6} {}^6\omega_{6x} + c^6 I_{yy6} {}^6\omega_{6y} - c^6 I_{yz6} {}^6\omega_{6z}) \\
- c^6 I_{xy6} {}^6\dot{\omega}_{6x} + c^6 I_{yy6} {}^6\dot{\omega}_{6y} - c^6 I_{yz6} {}^6\dot{\omega}_{6z} + \\
{}^6\omega_{6z} (c^6 I_{xx6} {}^6\omega_{6x} - c^6 I_{xy6} {}^6\omega_{6y} - c^6 I_{xz6} {}^6\omega_{6z}) - \\
{}^6\omega_{6x} (-c^6 I_{xx6} {}^6\omega_{6x} - c^6 I_{yz6} {}^6\omega_{6y} + c^6 I_{zz6} {}^6\omega_{6z}) \\
- c^6 I_{xz6} {}^6\dot{\omega}_{6x} - c^6 I_{yz6} {}^6\dot{\omega}_{6y} + c^6 I_{zz6} {}^6\dot{\omega}_{6z} + \\
{}^6\omega_{6x} (-c^6 I_{xy6} {}^6\omega_{6x} + c^6 I_{yy6} {}^6\omega_{6y} - c^6 I_{yz6} {}^6\omega_{6z}) - \\
{}^6\omega_{6y} (c^6 I_{xx6} {}^6\omega_{6x} - c^6 I_{xy6} {}^6\omega_{6y} - c^6 I_{xz6} {}^6\omega_{6z})
\end{pmatrix} \quad (3.44)$$

### 3.2.2. Propagación hacia atrás

El siguiente proceso representa la propagación hacia atrás, y consiste en realizar un balance de fuerzas y momentos angulares sobre cada eslabón [13].

El equilibrio de fuerzas en el eslabón  $i$ , queda representado por la Ec(3.45):

$${}^i\mathbf{f}_i = {}^i_{i+1}\mathbf{R} {}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} + {}^i\mathbf{F}_i \quad (3.45)$$

El equilibrio de pares, queda representado por la Ec(3.46)

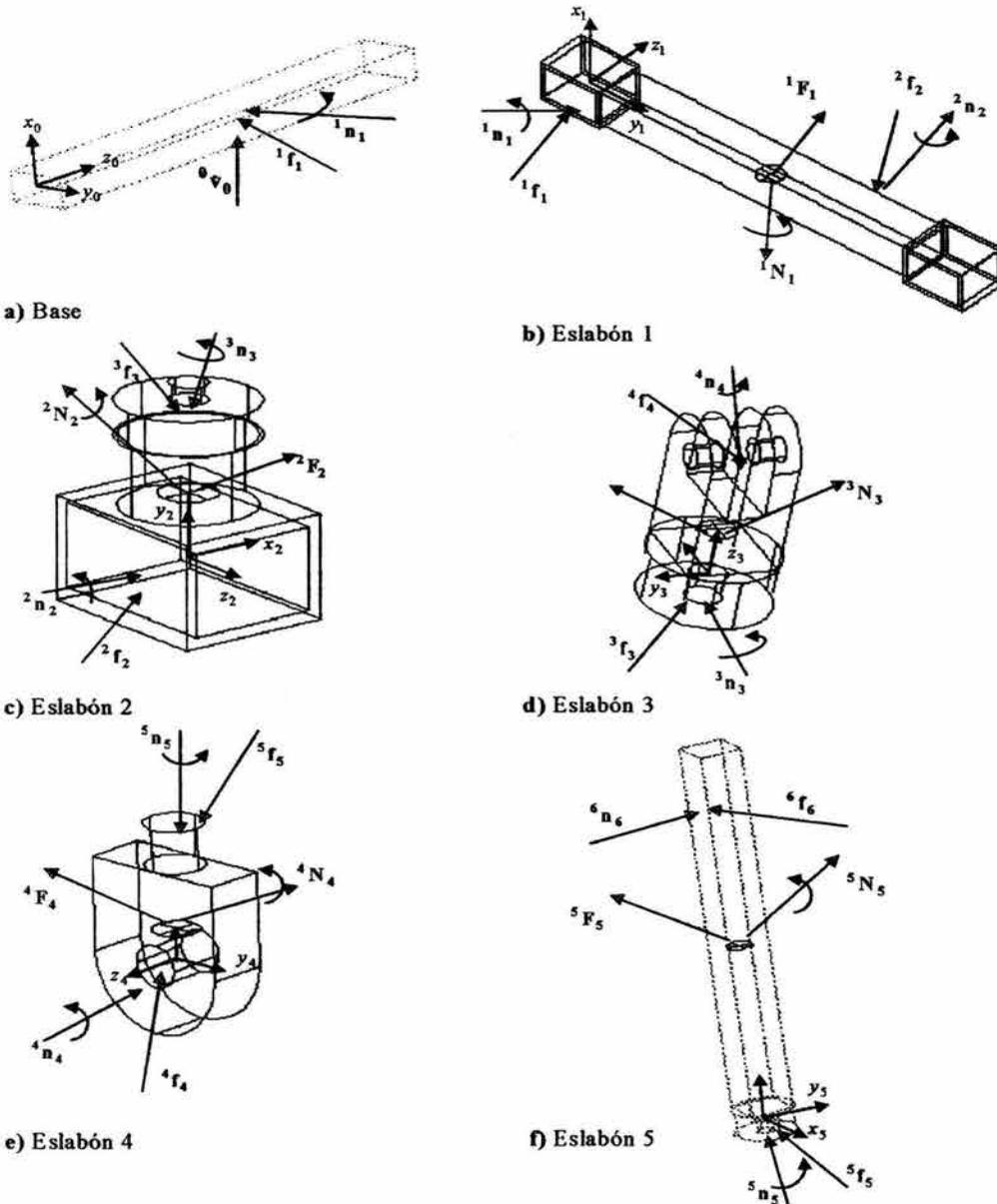
$${}^i\mathbf{n}_i = {}^i\mathbf{N}_i + {}^i_{i+1}\mathbf{R} {}^{i+1}\mathbf{n}_{i+1} + {}^i\mathbf{P}_{ci} \otimes {}^i\mathbf{F}_i + {}^i\mathbf{P}_{i+1} \otimes {}^i_{i+1}\mathbf{R} {}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} \quad (3.46)$$

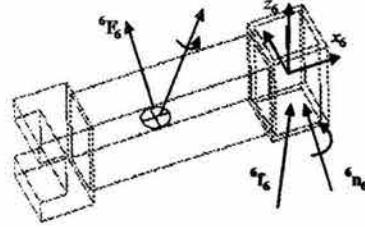
Para poder determinar el par en una articulación rotacional se utiliza la Ec. (3.47) y para la fuerza en una articulación prismática la Ec.(3.48):

$$\tau_i = {}^i\mathbf{n}_i^T \widehat{\mathbf{z}}_i \quad (3.47)$$

$$f_i = {}^i \mathbf{f}_i^T \quad {}^i \hat{\mathbf{z}}_i \quad (3.48)$$

A continuación se presentan los diagramas de cuerpo libre en donde se representan las fuerzas y momentos en cada uno de los eslabones correspondientes.





g) Eslabón 6

Empleando las Ecs.(3.45 y 3.46) mostradas anteriormente para el proceso de propagación hacia atrás, y variando  $i$  desde 6 hasta 1, tenemos:

Proceso para la suma de fuerzas,  ${}^i\mathbf{f}_i$  :

Para  $i = 6$  :

$${}^6\mathbf{f}_6 = {}^6\mathbf{R} {}^7\mathbf{f}_7 + {}^6\mathbf{F}_6$$

$${}^6\mathbf{f}_6 = {}^6\mathbf{F}_6 = m_6 \begin{pmatrix} {}^6\dot{v}_{c6x} \\ {}^6\dot{v}_{c6y} \\ {}^6\dot{v}_{c6z} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Para  $i = 5$  :

$${}^5\mathbf{f}_5 = {}^5\mathbf{R} {}^6\mathbf{f}_6 + {}^5\mathbf{F}_5$$

$${}^5\mathbf{f}_5 = \mathbf{I}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} {}^6f_{6x} \\ {}^6f_{6y} \\ {}^6f_{6z} \end{pmatrix} + m_5 \begin{pmatrix} {}^5\dot{v}_{c5x} \\ {}^5\dot{v}_{c5y} \\ {}^5\dot{v}_{c5z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^6f_{6x} + m_5 {}^5\dot{v}_{c5x} \\ {}^6f_{6y} + m_5 {}^5\dot{v}_{c5y} \\ {}^6f_{6z} + m_5 {}^5\dot{v}_{c5z} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Para  $i = 4$  :

$${}^4\mathbf{f}_4 = {}^4\mathbf{R} {}^5\mathbf{f}_5 + {}^4\mathbf{F}_4$$

$${}^4\mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_5 & -C\theta_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^5f_{5x} \\ {}^5f_{5y} \\ {}^5f_{5z} \end{pmatrix} + m_4 \begin{pmatrix} {}^4\dot{v}_{c4x} \\ {}^4\dot{v}_{c4y} \\ {}^4\dot{v}_{c4z} \end{pmatrix}$$

$${}^4\mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} C\theta_5 {}^5f_{5x} - S\theta_5 {}^5f_{5y} + m_4 {}^4\dot{v}_{c4x} \\ {}^5f_{5z} + m_4 {}^4\dot{v}_{c4y} \\ -S\theta_5 {}^5f_{5x} - C\theta_5 {}^5f_{5y} + m_4 {}^4\dot{v}_{c4z} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Para  $i = 3$ :

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{f}_3 &= {}^3\mathbf{R} {}^4\mathbf{f}_4 + {}^3\mathbf{F}_3 \\ {}^3\mathbf{f}_3 &= \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^4f_{4x} \\ {}^4f_{4y} \\ {}^4f_{4z} \end{pmatrix} + m_3 \begin{pmatrix} {}^3\dot{v}_{c3x} \\ {}^3\dot{v}_{c3y} \\ {}^3\dot{v}_{c3z} \end{pmatrix} \\ {}^3\mathbf{f}_3 &= \begin{pmatrix} C\theta_4 {}^4f_{4x} - S\theta_4 {}^4f_{4y} + m_3 {}^3\dot{v}_{c3x} \\ -{}^4f_{4z} + m_3 {}^3\dot{v}_{c3y} \\ S\theta_4 {}^4f_{4x} + C\theta_4 {}^4f_{4y} + m_3 {}^3\dot{v}_{c3z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Para  $i = 2$ :

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{f}_2 &= {}^2\mathbf{R} {}^3\mathbf{f}_3 + {}^2\mathbf{F}_2 \\ {}^2\mathbf{f}_2 &= \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_3 & -C\theta_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^3f_{3x} \\ {}^3f_{3y} \\ {}^3f_{3z} \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} {}^2\dot{v}_{c2x} \\ {}^2\dot{v}_{c2y} \\ {}^2\dot{v}_{c2z} \end{pmatrix} \\ {}^2\mathbf{f}_2 &= \begin{pmatrix} C\theta_3 {}^3f_{3x} - S\theta_3 {}^3f_{3y} + m_2 {}^2\dot{v}_{c2x} \\ {}^3f_{3z} + m_2 {}^2\dot{v}_{c2y} \\ -S\theta_3 {}^3f_{3x} - C\theta_3 {}^3f_{3y} + m_2 {}^2\dot{v}_{c2z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Para  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{f}_1 &= {}^1\mathbf{R} {}^2\mathbf{f}_2 + {}^1\mathbf{F}_1 \\ {}^1\mathbf{f}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^2f_{2x} \\ {}^2f_{2y} \\ {}^2f_{2z} \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} {}^1\dot{v}_{c1x} \\ {}^1\dot{v}_{c1y} \\ {}^1\dot{v}_{c1z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$${}^1\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} {}^2f_{2y} + m_1 {}^1\dot{v}_{c1x} \\ {}^2f_{2z} + m_1 {}^1\dot{v}_{c1y} \\ {}^2f_{2x} + m_1 {}^1\dot{v}_{c1z} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Proceso para la suma de momentos angulares,  ${}^i\mathbf{n}_i$  :

Para  $i = 6$  :

$$\begin{aligned} {}^6\mathbf{n}_6 &= {}^6\mathbf{N}_6 + {}^6\mathbf{R} {}^7\mathbf{n}_7 + {}^6\mathbf{P}_{c6} \otimes {}^6\mathbf{F}_6 + {}^6\mathbf{P}_7 \otimes {}^6\mathbf{R} {}^7\mathbf{f}_7 \\ {}^6\mathbf{n}_6 &= {}^6\mathbf{N}_6 + {}^6\mathbf{P}_{c6} \otimes {}^6\mathbf{F}_6 \\ {}^6\mathbf{n}_6 &= \begin{pmatrix} {}^6N_{6x} \\ {}^6N_{6y} \\ {}^6N_{6z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -{}^6P_{c6z} & {}^6P_{c6y} \\ {}^6P_{c6z} & 0 & -{}^6P_{c6x} \\ -{}^6P_{c6y} & {}^6P_{c6x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^6F_{6x} \\ {}^6F_{6y} \\ {}^6F_{6z} \end{pmatrix} \\ {}^6\mathbf{n}_6 &= \begin{pmatrix} {}^6N_{6x} - {}^6P_{c6z} {}^6F_{6y} + {}^6P_{c6y} {}^6F_{6z} \\ {}^6N_{6y} + {}^6P_{c6z} {}^6F_{6x} - {}^6P_{c6x} {}^6F_{6z} \\ {}^6N_{6z} - {}^6P_{c6y} {}^6F_{6x} + {}^6P_{c6x} {}^6F_{6y} \end{pmatrix} \quad (3.55) \end{aligned}$$

Para  $i = 5$  :

$$\begin{aligned} {}^5\mathbf{n}_5 &= {}^5\mathbf{N}_5 + {}^5\mathbf{R} {}^6\mathbf{n}_6 + {}^5\mathbf{P}_{c5} \otimes {}^5\mathbf{F}_5 + {}^5\mathbf{P}_6 \otimes {}^5\mathbf{R} {}^6\mathbf{f}_6 \\ {}^5\mathbf{n}_5 &= \begin{pmatrix} {}^5N_{5x} \\ {}^5N_{5y} \\ {}^5N_{5z} \end{pmatrix} + \mathbf{I}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} {}^6n_{6x} \\ {}^6n_{6y} \\ {}^6n_{6z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -{}^5P_{c5z} & {}^5P_{c5y} \\ {}^5P_{c5z} & 0 & -{}^5P_{c5x} \\ -{}^5P_{c5y} & {}^5P_{c5x} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} {}^5F_{5x} \\ {}^5F_{5y} \\ {}^5F_{5z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -{}^5P_{6z} & {}^5P_{6y} \\ {}^5P_{6z} & 0 & -{}^5P_{6x} \\ -{}^5P_{6y} & {}^5P_{6x} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} {}^6f_{6x} \\ {}^6f_{6y} \\ {}^6f_{6z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$${}^5\mathbf{n}_5 = \begin{pmatrix} {}^5N_{5x} + {}^6n_{6x} - {}^5P_{c5z} {}^5F_{5y} + {}^5P_{c5y} {}^5F_{5z} - \\ {}^5P_{6z} {}^6f_{6y} + {}^5P_{6y} {}^6f_{6z} \\ \\ {}^5N_{5y} + {}^6n_{6y} + {}^5P_{c5z} {}^5F_{5x} - {}^5P_{c5x} {}^5F_{5z} + \\ {}^5P_{6z} {}^6f_{6x} - {}^5P_{6x} {}^6f_{6z} \\ \\ {}^5N_{5z} + {}^6n_{6z} - {}^5P_{c5y} {}^5F_{5x} + {}^5P_{c5x} {}^5F_{5y} - \\ {}^5P_{6y} {}^6f_{6x} + {}^5P_{6x} {}^6f_{6y} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Para  $i = 4$ :

$${}^4\mathbf{n}_4 = {}^4\mathbf{N}_4 + {}^4\mathbf{R} {}^5\mathbf{n}_5 + {}^4\mathbf{P}_{c4} \otimes {}^4\mathbf{F}_4 + {}^4\mathbf{P}_5 \otimes {}^4\mathbf{R} {}^5\mathbf{f}_5$$

$${}^4\mathbf{n}_4 = \begin{pmatrix} {}^4N_{4x} \\ {}^4N_{4y} \\ {}^4N_{4z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_5 & -C\theta_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^5n_{5x} \\ {}^5n_{5y} \\ {}^5n_{5z} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -{}^4P_{c4z} & {}^4P_{c4y} \\ {}^4P_{c4z} & 0 & -{}^4P_{c4x} \\ -{}^4P_{c4y} & {}^4P_{c4x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^4F_{4x} \\ {}^4F_{4y} \\ {}^4F_{4z} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -{}^4P_{5z} & {}^4P_{5y} \\ {}^4P_{5z} & 0 & -{}^4P_{5x} \\ -{}^4P_{5y} & {}^4P_{5x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_5 & -C\theta_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^5f_{5x} \\ {}^5f_{5y} \\ {}^5f_{5z} \end{pmatrix}$$

$${}^4\mathbf{n}_4 = \begin{pmatrix} {}^4N_{4x} + C\theta_5 {}^5n_{5x} - S\theta_5 {}^5n_{5y} - {}^4P_{c4z} {}^4F_{4y} + {}^4P_{c4y} {}^4F_{4z} - \\ {}^4P_{5z} {}^5f_{5z} + {}^4P_{5y} (-S\theta_5 {}^5f_{5x} - C\theta_5 {}^5f_{5y}) \\ \\ {}^4N_{4y} + {}^5n_{5z} + {}^4P_{c4z} {}^4F_{4x} - {}^4P_{c4x} {}^4F_{4z} + \\ {}^4P_{5z} (C\theta_5 {}^5f_{5x} - S\theta_5 {}^5f_{5y}) - {}^4P_{5x} (-S\theta_5 {}^5f_{5x} - C\theta_5 {}^5f_{5y}) \\ \\ {}^4N_{4z} - S\theta_5 {}^5n_{5x} - C\theta_5 {}^5n_{5y} - {}^4P_{c4y} {}^4F_{4x} + {}^4P_{c4x} {}^4F_{4y} - \\ {}^4P_{5y} (C\theta_5 {}^5f_{5x} - S\theta_5 {}^5f_{5y}) + {}^4P_{5x} {}^5f_{5z} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Para  $i = 3$ :

$${}^3\mathbf{n}_3 = {}^3\mathbf{N}_3 + {}^4\mathbf{R} {}^4\mathbf{n}_4 + {}^3\mathbf{P}_{c3} \otimes {}^3\mathbf{F}_3 + {}^3\mathbf{P}_4 \otimes {}^4\mathbf{R} {}^4\mathbf{f}_4$$

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{n}_3 = & \begin{pmatrix} {}^3N_{3x} \\ {}^3N_{3y} \\ {}^3N_{3z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^4n_{4x} \\ {}^4n_{4y} \\ {}^4n_{4z} \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} 0 & -{}^3P_{c3z} & {}^3P_{c3y} \\ {}^3P_{c3z} & 0 & -{}^3P_{c3x} \\ -{}^3P_{c3y} & {}^3P_{c3x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^3F_{3x} \\ {}^3F_{3y} \\ {}^3F_{3z} \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} 0 & -{}^3P_{4z} & {}^3P_{4y} \\ {}^3P_{4z} & 0 & -{}^3P_{4x} \\ -{}^3P_{4y} & {}^3P_{4x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^4f_{4x} \\ {}^4f_{4y} \\ {}^4f_{4z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$${}^3\mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} {}^3N_{3x} + C\theta_4 {}^4n_{4x} - S\theta_4 {}^4n_{4y} - {}^3P_{c3z} {}^3F_{3y} + {}^3P_{c3y} {}^3F_{3z} + \\ {}^3P_{4z} {}^4f_{4z} + {}^3P_{4y} (S\theta_4 {}^4f_{4x} + C\theta_4 {}^4f_{4y}) \\ \\ {}^3N_{3y} - {}^4n_{4z} + {}^3P_{c3z} {}^3F_{3x} - {}^3P_{c3x} {}^3F_{3z} + \\ {}^3P_{4z} (C\theta_4 {}^4f_{4x} - S\theta_4 {}^4f_{4y}) - {}^3P_{4x} (S\theta_4 {}^4f_{4x} + C\theta_4 {}^4f_{4y}) \\ \\ {}^3N_{3z} + S\theta_4 {}^4n_{4x} + C\theta_4 {}^4n_{4y} - {}^3P_{c3y} {}^3F_{3x} + {}^3P_{c3x} {}^3F_{3y} - \\ {}^3P_{4y} (C\theta_4 {}^4f_{4x} - S\theta_4 {}^4f_{4y}) - {}^3P_{4x} {}^4f_{4z} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Para  $i = 2$ :

$${}^2\mathbf{n}_2 = {}^2\mathbf{N}_2 + {}^2\mathbf{R} {}^3\mathbf{n}_3 + {}^2\mathbf{P}_{c2} \otimes {}^2\mathbf{F}_2 + {}^2\mathbf{P}_3 \otimes {}^2\mathbf{R} {}^3\mathbf{f}_3$$

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{n}_2 = & \begin{pmatrix} {}^2N_{2x} \\ {}^2N_{2y} \\ {}^2N_{2z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_3 & -C\theta_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^3n_{3x} \\ {}^3n_{3y} \\ {}^3n_{3z} \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} 0 & -{}^2P_{c2z} & {}^2P_{c2y} \\ {}^2P_{c2z} & 0 & -{}^2P_{c2x} \\ -{}^2P_{c2y} & {}^2P_{c2x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^2F_{2x} \\ {}^2F_{2y} \\ {}^2F_{2z} \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} 0 & -{}^2P_{3z} & {}^2P_{3y} \\ {}^2P_{3z} & 0 & -{}^2P_{3x} \\ -{}^2P_{3y} & {}^2P_{3x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S\theta_3 & -C\theta_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^3f_{3x} \\ {}^3f_{3y} \\ {}^3f_{3z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$${}^2\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} {}^2N_{2x} + C\theta_3 {}^3n_{3x} - S\theta_3 {}^3n_{3y} - {}^2P_{c2z} {}^2F_{2y} + {}^2P_{c2y} {}^2F_{2z} - \\ {}^2P_{3z} {}^3f_{3z} + {}^2P_{3y} (-S\theta_3 {}^3f_{3x} - C\theta_3 {}^3f_{3y}) \\ \\ {}^2N_{2y} + {}^3n_{3z} + {}^2P_{c2z} {}^2F_{2x} - {}^2P_{c2x} {}^2F_{2z} + \\ {}^2P_{3z} (C\theta_3 {}^3f_{3x} - S\theta_3 {}^3f_{3y}) - {}^2P_{3x} (-S\theta_3 {}^3f_{3x} - C\theta_3 {}^3f_{3y}) \\ \\ {}^2N_{2z} - S\theta_3 {}^3n_{3x} - C\theta_3 {}^3n_{3y} - {}^2P_{c2y} {}^2F_{2x} + {}^2P_{c2x} {}^2F_{2y} - \\ {}^2P_{3y} (C\theta_3 {}^3f_{3x} - S\theta_3 {}^3f_{3y}) + {}^2P_{3x} {}^3f_{3z} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Para  $i = 1$ :

$${}^1\mathbf{n}_1 = {}^1\mathbf{N}_1 + {}^1_2\mathbf{R} {}^2\mathbf{n}_2 + {}^1\mathbf{P}_{c1} \otimes {}^1\mathbf{F}_1 + {}^1\mathbf{P}_2 \otimes {}^1_2\mathbf{R} {}^2\mathbf{f}_2$$

$${}^1\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} {}^1N_{1x} \\ {}^1N_{1y} \\ {}^1N_{1z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^2n_{2x} \\ {}^2n_{2y} \\ {}^2n_{2z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -{}^1P_{c1z} & {}^1P_{c1y} \\ {}^1P_{c1z} & 0 & -{}^1P_{c1x} \\ -{}^1P_{c1y} & {}^1P_{c1x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1F_{1x} \\ {}^1F_{1y} \\ {}^1F_{1z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -{}^1P_{2z} & {}^1P_{2y} \\ {}^1P_{2z} & 0 & -{}^1P_{2x} \\ -{}^1P_{2y} & {}^1P_{2x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^2f_{2x} \\ {}^2f_{2y} \\ {}^2f_{2z} \end{pmatrix}$$

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

$${}^1\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} {}^1N_{1x} + {}^2n_{2y} - {}^1P_{c1z} {}^1F_{1y} + {}^1P_{c1y} {}^1F_{1z} - \\ {}^1P_{2z} {}^2f_{2z} + {}^1P_{2y} {}^2f_{2x} \\ \\ {}^1N_{1y} + {}^2n_{2z} + {}^1P_{c1z} {}^1F_{1x} - {}^1P_{c1x} {}^1F_{1z} + \\ {}^1P_{2z} {}^2f_{2y} - {}^1P_{2x} {}^2f_{2z} \\ \\ {}^1N_{1z} + {}^2n_{2x} - {}^1P_{c1y} {}^1F_{1x} + {}^1P_{c1x} {}^1F_{1y} - \\ {}^1P_{2y} {}^2f_{2y} + {}^1P_{2x} {}^2f_{2z} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

### 3.3. Obtención de la fuerza o par aplicado para cada articulación

Es importante hacer notar que debido al planteamiento hecho en la cinemática directa, el balance sobre el eje  $z$  de cada sistema de referencia realizado con anterioridad para cada uno de los eslabones, es el efecto cinético que debe ser reaccionado por los actuadores de cada articulación; mientras que las componentes restantes en  $x$  y  $y$  de los momentos para las juntas rotacionales y fuerzas en el caso de las juntas prismáticas son soportados por la estructura del robot manipulador.

Como se mencionó en la sección 3.2.2, para poder determinar el par en una articulación rotacional se utilizará la Ec.(3.47) y para la fuerza en una articulación prismática la Ec.(3.48).

La primera articulación es del tipo prismático y la fuerza aplicada queda determinada por la Ec.(3.61):

$${}^1f_1 = {}^2f_{2x} + m_1 {}^1\dot{v}_{c1z} \quad (3.61)$$

La segunda articulación es del tipo prismático y la fuerza aplicada en ésta se determinada por la Ec.(3.62):

$${}^2f_2 = -S\theta_3 {}^3f_{3x} - C\theta_3 {}^3f_{3y} + m_2 {}^2\dot{v}_{c2z} \quad (3.62)$$

La tercera articulación es rotacional y el par aplicado en ésta se determina por la Ec.(3.63):

$$\begin{aligned} \tau_3 = & {}^3N_{3z} + S\theta_4 {}^4n_{4x} + C\theta_4 {}^4n_{4y} - {}^3P_{c3y} {}^3F_{3x} + {}^3P_{c3x} {}^3F_{3y} - \\ & {}^3P_{4y} (C\theta_4 {}^4f_{4x} - S\theta_4 {}^4f_{4y}) - {}^3P_{4x} {}^4f_{4z} \end{aligned} \quad (3.63)$$

La cuarta articulación es del tipo rotacional y el par aplicado en ésta se determina por la Ec.(3.64):

$$\begin{aligned} \tau_4 = & {}^4N_{4z} - S\theta_5 {}^5n_{5x} - C\theta_5 {}^5n_{5y} - {}^4P_{c4y} {}^4F_{4x} + {}^4P_{c4x} {}^4F_{4y} - \\ & {}^4P_{5y} (C\theta_5 {}^5f_{5x} - S\theta_5 {}^5f_{5y}) + {}^4P_{5x} {}^5f_{5z} \end{aligned} \quad (3.64)$$

La quinta articulación es del tipo rotacional y el par aplicado en ésta se determina por la Ec.(3.65):

$$\tau_5 = {}^5N_{5z} + {}^6n_{6z} - {}^5P_{c5y} {}^5F_{5x} + {}^5P_{c5x} {}^5F_{5y} - {}^5P_{6y} {}^6f_{6x} + {}^5P_{6x} {}^6f_{6y} \quad (3.65)$$

La sexta articulación es del tipo prismático y la fuerza aplicada en ésta se determinada por la Ec.(3.66):

$${}^6f_6 = m_6 ({}^6\dot{v}_{c6z}) \quad (3.66)$$

Las Ecs.(3.61)-(3.66) componen el modelo dinámico, ya que a partir de éstas es posible monitorear la carga sobre los actuadores cuando el robot manipulador ejecuta una tarea.

# Capítulo 4

## Generación de Trayectoria

El presente capítulo se enfoca al estudio de la generación de trayectoria del robot manipulador, considerando un movimiento libre de obstáculos. El robot manipulador helicoidal PPSP, debe transportar en su efector final una pieza de trabajo, desde una posición inicial (posición y orientación) hasta una posición final generando una trayectoria en forma de hélice. La trayectoria se define como la evolución en el tiempo de la posición, velocidad y aceleración para cada grado de libertad [13]. Así pues, el estudio de la generación de trayectoria considera dos aspectos, a saber, el perfil de trayectoria y el lugar geométrico de la trayectoria, los cuales se presentan en las siguientes secciones.

### 4.1. Perfil de Trayectoria

La pieza de trabajo que será transportada por el manipulador, deberá de partir de un posición inicial (posición y orientación) y llegar hasta una posición final. Donde para ambas posiciones el estado del objeto es estático, es decir, no presenta velocidad ni aceleración. El tiempo que le lleva al manipulador para cumplir con la trayectoria, se indica por medio de  $t_f$  y la distancia total de recorrido por  $dt$ .

Para cumplir adecuadamente con la trayectoria deseada (Trayectoria en forma de hélice), es conveniente añadir restricciones en la velocidad y aceleración durante el paso

de los puntos que forman la trayectoria, de manera que se asegure una suavidad [15]. Para ello en esta sección se muestran dos perfiles de trayectoria: a) Quintico y b) Octal. Estos deben su nombre debido al grado del polinomio que los generan.

La **justificación** del empleo de un polinomio de octavo grado como perfil de trayectoria se comprende a partir de los siguientes párrafos, extraídos de la bibliografía consultada:

- *The motions undergone by robotic mechanical systems should be, as rule, as smooth as possible; i.e., abrupt changes in position, velocity and acceleration should be avoided. Indeed, abrupt motions require unlimited amounts of power to be implemented, which the motors cannot supply because of their physical limitations [16].*

Este comentario manifiesta la importancia del empleo de funciones suaves. Debido a esto nos interesamos en seleccionar un polinomio de octavo grado ya que garantiza la continuidad de la posición, velocidad y aceleración de las articulaciones del robot.

Comparando a los polinomios de grado alto, como el octal con uno de los perfiles ampliamente utilizados, los splines cúbicos:

- *Los splines cúbicos ofrecen algunas ventajas. En primer lugar, es la función polinomial de menor grado que permite continuidad en velocidad y aceleración. En segundo lugar, los polinomios de bajo grado reducen la cantidad de cálculos necesarios y la posibilidad de inestabilidades numéricas [1].*

Se concluye que los splines cúbicos tienen la ventaja de producir menos inestabilidades numéricas. Aunque en este tipo de polinomios se asegura la continuidad en la aceleración, las curvas de aceleración que se generan para un polinomio de octavo grado son más suaves, que las correspondientes a un spline cúbico [17].

- *Sin embargo, la utilización de un polinomio de grado elevado para interpolar los puntos nudos dados puede no ser satisfactoria. Es difícil encontrar sus extremos y tienden a tener movimientos extraños [1].*

Este comentario nos muestra los inconvenientes de trabajar con un polinomio de grado alto.

No obstante de los inconvenientes que presenta el trabajar con un polinomio de octavo grado, las siguientes razones justifican el uso de un perfil de octavo grado, las cuales han sido demostradas en [17]:

- ▷ La existencia de una familia universal de polinomios de octavo grado que incluyen al de quinto grado. Es decir, incluye otro de menor grado que tampoco tiene discontinuidades en toda la trayectoria.
- ▷ A partir de la elección correcta de un índice de control dentro de un cierto rango, se puede controlar la velocidad máxima que alcance el robot y conseguir operar de manera adecuada con este polinomio, sin que se presenten inestabilidades.
- ▷ Debido al grado de éstos, se garantiza la continuidad en la posición, velocidad y aceleración para cada articulación.

#### 4.1.1. Perfil de Trayectoria de grado 5

El perfil de trayectoria quíntico es una función polinomial de grado 5 con 6 coeficientes, mostrado en la Ec.(4.1). Las Ecs.(4.2) y (4.3) corresponden a la derivadas temporales del polinomio de grado 5.

$$*p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (4.1)$$

$$*v(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \quad (4.2)$$

$$*a(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \quad (4.3)$$

Los seis coeficientes, son incógnitas que se determinan a partir de las siguientes restricciones temporales:

Para  $t = 0$ ,

$${}^*p(0) = 0 \quad (4.4)$$

$${}^*v(0) = 0 \quad (4.5)$$

$${}^*a(0) = 0 \quad (4.6)$$

Para  $t = t_f$ ,

$${}^*p(t_f) = dt \quad (4.7)$$

$${}^*v(t_f) = 0 \quad (4.8)$$

$${}^*a(t_f) = 0 \quad (4.9)$$

A partir de las restricciones en el tiempo inicial y final, mostradas en las ecuaciones Ec.(4.4)-Ec.(4.9), obtenemos 6 ecuaciones a partir de las cuales encontramos los coeficientes  $a_i$ :

$${}^*p(0) = 0 = a_0 \quad (4.10)$$

$${}^*v(0) = 0 = a_1 \quad (4.11)$$

$${}^*a(0) = 0 = a_2 \quad (4.12)$$

$${}^*p(t_f) = dt = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \quad (4.13)$$

$${}^*v(t_f) = 0 = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \quad (4.14)$$

$${}^*a(t_f) = 0 = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \quad (4.15)$$

Resolviendo el sistema  $(6 \times 6)$  de ecuaciones, se obtienen los coeficientes  $a_i$ :

$${}^*a_0 = 0 \quad (4.16)$$

$${}^*a_1 = 0 \quad (4.17)$$

$${}^*a_2 = 0 \quad (4.18)$$

$${}^*a_3 = 10dt \left( \frac{1}{t_f} \right)^3 \quad (4.19)$$

$${}^*a_4 = -15dt \left( \frac{1}{t_f} \right)^4 \quad (4.20)$$

$${}^*a_5 = 6dt \left( \frac{1}{t_f} \right)^5 \quad (4.21)$$

Sustituyendo las ecuaciones Ec.(4.16)–Ec.(4.21) en la ecuación Ec.(4.1), tenemos:

$${}^*p(t) = 10dt \left( \frac{1}{t_f} \right)^3 t^3 - 15dt \left( \frac{1}{t_f} \right)^4 t^4 + 6dt \left( \frac{1}{t_f} \right)^5 t^5 \quad (4.22)$$

arreglando la Ec.(4.22), obtenemos el perfil de la posición para un polinomio de quinto grado:

$${}^*p(t) = dt \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] \quad (4.23)$$

El perfil de la velocidad para un polinomio de quinto grado, queda definido por la Ec.(4.24):

$${}^*v(t) = dt \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] \quad (4.24)$$

El perfil de la aceleración para un polinomio de quinto grado, queda definido por la Ec.(4.25):

$${}^*a(t) = dt \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] \quad (4.25)$$

### 4.1.2. Perfil de Trayectoria Octal

El perfil de trayectoria octal es una función polinomial de grado 8 con 9 coeficientes, mostrado en la Ec.(4.26). Las ecuaciones Ecs.(4.27) y (4.28) corresponden a la derivadas temporales del polinomio de grado 8.

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 + a_6t^6 + a_7t^7 + a_8t^8 \quad (4.26)$$

$$v(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 + 6a_6t^5 + 7a_7t^6 + 8a_8t^7 \quad (4.27)$$

$$a(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 + 30a_6t^4 + 42a_7t^5 + 56a_8t^6 \quad (4.28)$$

Los nueve coeficientes, son incógnitas que se determinan a partir de la siguientes restricciones temporales:

Para  $t = 0$ ,

$$p(0) = 0 \quad (4.29)$$

$$v(0) = 0 \quad (4.30)$$

$$a(0) = 0 \quad (4.31)$$

Para  $t = t_f/2$ ,

$$p(t_f/2) = dt/2 \quad (4.32)$$

$$v(t_f/2) = v_{max} \quad (4.33)$$

$$a(t_f/2) = 0 \quad (4.34)$$

Para  $t = t_f$ ,

$$p(t_f) = dt \quad (4.35)$$

$$v(t_f) = 0 \quad (4.36)$$

$$a(t_f) = 0 \quad (4.37)$$

Con las restricciones anteriores mostradas en la ecuaciones Ec.(4.29)-Ec.(4.37), podemos determinar 9 ecuaciones correspondientes a cada restricción temporal, a partir de las cuales encontramos los coeficientes  $a_i$ ,

$$p(0) = 0 = a_0 \quad (4.38)$$

$$v(0) = 0 = a_1 \quad (4.39)$$

$$a(0) = 0 = a_2 \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} p\left(\frac{t_f}{2}\right) &= dt/2 = a_0 + a_1\left(\frac{t_f}{2}\right) + a_2\left(\frac{t_f}{2}\right)^2 + a_3\left(\frac{t_f}{2}\right)^3 + \\ & a_4\left(\frac{t_f}{2}\right)^4 + a_5\left(\frac{t_f}{2}\right)^5 + a_6\left(\frac{t_f}{2}\right)^6 + \\ & a_7\left(\frac{t_f}{2}\right)^7 + a_8\left(\frac{t_f}{2}\right)^8 \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} v\left(\frac{t_f}{2}\right) &= v_{max} = a_1 + 2a_2\left(\frac{t_f}{2}\right) + 3a_3\left(\frac{t_f}{2}\right)^2 + 4a_4\left(\frac{t_f}{2}\right)^3 + \\ & 5a_5\left(\frac{t_f}{2}\right)^4 + 6a_6\left(\frac{t_f}{2}\right)^5 + 7a_7\left(\frac{t_f}{2}\right)^6 + 8a_8\left(\frac{t_f}{2}\right)^7 \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} a\left(\frac{t_f}{2}\right) &= 0 = 2a_2 + 6a_3\left(\frac{t_f}{2}\right) + 12a_4\left(\frac{t_f}{2}\right)^2 + \\ & 20a_5\left(\frac{t_f}{2}\right)^3 + 30a_6\left(\frac{t_f}{2}\right)^4 + 42a_7\left(\frac{t_f}{2}\right)^5 + 56a_8\left(\frac{t_f}{2}\right)^6 \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} p(t_f) &= dt = a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 + \\ & a_4t_f^4 + a_5t_f^5 + a_6t_f^6 + a_7t_f^7 + a_8t_f^8 \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$v(t_f) = 0 = a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 + 4a_4t_f^3 + 5a_5t_f^4 + 6a_6t_f^5 + 7a_7t_f^6 + 8a_8t_f^7 \quad (4.45)$$

$$a(t_f) = 0 = 2a_2 + 6a_3t_f + 12a_4t_f^2 + 20a_5t_f^3 + 30a_6t_f^4 + 42a_7t_f^5 + 56a_8t_f^6 \quad (4.46)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por Ec.(4.38)-Ec.(4.46), se obtienen los coeficientes  $a_i$ :

$$a_0 = 0 \quad (4.47)$$

$$a_1 = 0 \quad (4.48)$$

$$a_2 = 0 \quad (4.49)$$

$$a_3 = \frac{70dt}{t_f^3} - \frac{32v_{max}}{t_f^2} \quad (4.50)$$

$$a_4 = -\frac{315dt}{t_f^4} + \frac{160v_{max}}{t_f^3} \quad (4.51)$$

$$a_5 = \frac{546dt}{t_f^5} - \frac{288v_{max}}{t_f^4} \quad (4.52)$$

$$a_6 = -\frac{420dt}{t_f^6} + \frac{224v_{max}}{t_f^5} \quad (4.53)$$

$$a_7 = \frac{120dt}{t_f^7} - \frac{64v_{max}}{t_f^6} \quad (4.54)$$

$$a_8 = 0 \quad (4.55)$$

Sustituyendo las ecuaciones Ec.(4.47)-Ec.(4.55) en la ecuación Ec.(4.26):

$$\begin{aligned}
 p(t) = & \left( \frac{70dt}{t_f^3} - \frac{32v_{max}}{t_f^2} \right) t^3 + \left( -\frac{315dt}{t_f^4} + \frac{160v_{max}}{t_f^3} \right) t^4 + \\
 & \left( \frac{546dt}{t_f^5} - \frac{288v_{max}}{t_f^4} \right) t^5 + \left( -\frac{420dt}{t_f^6} + \frac{224v_{max}}{t_f^5} \right) t^6 + \\
 & \left( \frac{120dt}{t_f^7} - \frac{64v_{max}}{t_f^6} \right) t^7
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Arreglando la Ec.(4.56), obtenemos el perfil de la posición para un polinomio de octavo grado, formado por dos partes, una constante y otra variable para el valor de la velocidad máxima deseada:

$$\begin{aligned}
 p(t) = & dt \left( \frac{70}{t_f^3} t^3 - \frac{315}{t_f^4} t^4 + \frac{546}{t_f^5} t^5 - \frac{420}{t_f^6} t^6 + \frac{120}{t_f^7} t^7 \right) + \\
 & v_{max} \left( -\frac{32}{t_f^2} t^3 + \frac{160}{t_f^3} t^4 - \frac{288}{t_f^4} t^5 + \frac{224}{t_f^5} t^6 - \frac{64}{t_f^6} t^7 \right)
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Derivando la Ec.(4.57), obtenemos el perfil de la velocidad para un polinomio de octavo grado:

$$\begin{aligned}
 v(t) = & dt \left( \frac{210}{t_f^3} t^2 - \frac{1260}{t_f^4} t^3 + \frac{2730}{t_f^5} t^4 - \frac{2520}{t_f^6} t^5 + \frac{840}{t_f^7} t^6 \right) + \\
 & v_{max} \left( -\frac{96}{t_f^2} t^2 + \frac{640}{t_f^3} t^3 - \frac{1440}{t_f^4} t^4 + \frac{1344}{t_f^5} t^5 - \frac{448}{t_f^6} t^6 \right)
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Para un polinomio de quinto grado, al igual que en el de octavo grado, el valor máximo de la velocidad se presenta en el instante  $\frac{t_f}{2}$ , afirmación válida únicamente para ciertas condiciones, [17]. Imponiendo esta restricción para el perfil de velocidad de quinto grado tenemos:

para  $t = t_f/2$ ,

$$\begin{aligned}
 v(t_f/2) &= v_{max} \\
 v(t_f/2) = v_{max} &= dt \left[ 30 \frac{(t_f/2)^2}{t_f^3} - 60 \frac{(t_f/2)^3}{t_f^4} + 30 \frac{(t_f/2)^4}{t_f^5} \right] \\
 v(t_f/2) = v_{max} &= dt \left[ 30 \frac{t_f^2}{4t_f^3} - 60 \frac{t_f^3}{8t_f^4} + 30 \frac{t_f^4}{16t_f^5} \right] \\
 v_{max} &= \frac{dt}{t_f} \left( \frac{120 - 120 + 30}{16} \right) = \left( \frac{30}{16} \right) \frac{dt}{t_f} \\
 v_{max} &= 1.875 \frac{dt}{t_f} \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

Ahora, si en la Ec.(4.57), la cual rige el perfil de la posición para un polinomio de octavo grado sustituimos la Ec.(4.59), tenemos:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= dt \left( \frac{70}{t_f^3} t^3 - \frac{315}{t_f^4} t^4 + \frac{546}{t_f^5} t^5 - \frac{420}{t_f^6} t^6 + \frac{120}{t_f^7} t^7 \right) + \\
 &\quad \left( \frac{30}{16} \right) \frac{dt}{t_f} \left( -\frac{32}{t_f^2} t^3 + \frac{160}{t_f^3} t^4 - \frac{288}{t_f^4} t^5 + \frac{224}{t_f^5} t^6 - \frac{64}{t_f^6} t^7 \right) \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

simplificando la Ec.(4.60), se obtiene como resultado el perfil de trayectoria cuántico,

$$p(t) = dt \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] \tag{4.61}$$

De lo anterior se concluye que el perfil de trayectoria para un polinomio de quinto grado pertenece a la familia universal de polinomios de octavo grado.

El valor de la velocidad máxima ( $v_{max}$ ), para un polinomio de grado 8 queda definido por un parámetro de control adimensional, llamado *índice\_m*, como se muestra en la Ec.(4.62), por lo que, la Ec.(4.57) toma la forma Ec.(4.63).

$$v_{max} = \text{índice}_m \frac{dt}{t_f} \tag{4.62}$$

donde,  $dt$  y  $t_f$ , indican el valor de la distancia total de recorrido y el tiempo final del proceso, respectivamente.

$$p(t) = dt \left( \frac{70}{t_f^3} t^3 - \frac{315}{t_f^4} t^4 + \frac{546}{t_f^5} t^5 - \frac{420}{t_f^6} t^6 + \frac{120}{t_f^7} t^7 \right) + \quad (4.63)$$

$$\text{índice}_m \frac{dt}{t_f} \left( -\frac{32}{t_f^2} t^3 + \frac{160}{t_f^3} t^4 - \frac{288}{t_f^4} t^5 + \frac{224}{t_f^5} t^6 - \frac{64}{t_f^6} t^7 \right)$$

De esta manera si el valor del  $\text{índice}_m$  en la ecuación anterior es 1.875 entonces el polinomio de grado 8 llega a representar a el polinomio de grado 5.

El parámetro  $\text{índice}_m$ , para condiciones adecuadas de perfil de trayectoria, deberá de quedar dentro del rango [1.458334, 2.1875].

Si el parámetro de control es  $\text{índice}_m = 1.458334$  la pendiente de la curva de velocidad generada es muy brusca al inicio y fin del recorrido, y se alcanza la menor velocidad máxima, como se muestra en la figura (4.1).

Por otro lado, si el parámetro de control  $\text{índice}_m = 2.1875$  la curva es muy suave al inicio y fin del recorrido, y la máxima velocidad es alcanzada, como se muestra en la figura (4.1), [17].

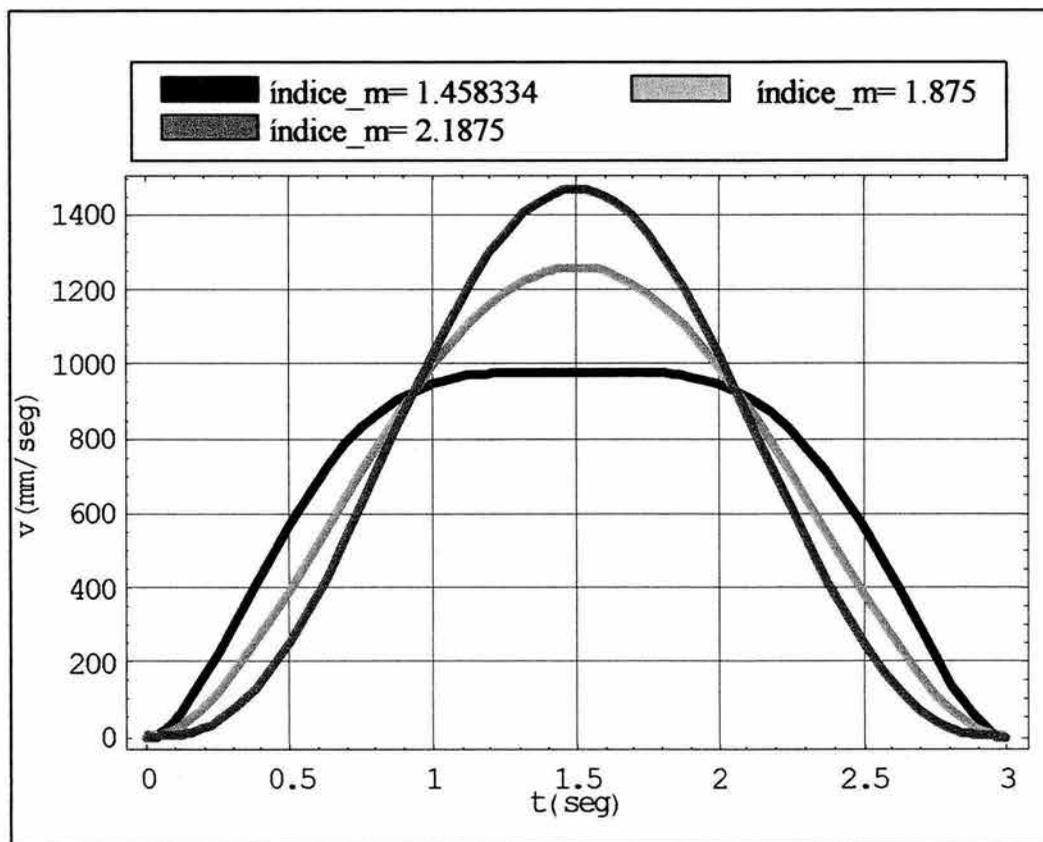


Fig. (4.1). Perfiles de velocidad para los  $\text{índice}_m = 1.458334$ ,  $\text{índice}_m = 1.875$  e  $\text{índice}_m = 2.1875$ .

## 4.2. Lugar geométrico de la trayectoria

El lugar geométrico de la trayectoria, representa los puntos cartesianos por donde pasará el órgano terminal. Esta tesis se enfoca, en el estudio de un robot aplicado para la transferencia de materiales, el cual tiene como objetivo mover un objeto de un sitio (posición y orientación) a otro diferente a través de una trayectoria en forma de hélice. Para poder dotar al manipulador de una trayectoria en forma de hélice se emplea la formulación del Tornillo de Rodrigues para el desplazamiento general de tornillo y se obtiene una *transformación de tornillo* que es capaz de transformar cualquier vector de

posición de acuerdo a un movimiento de tornillo.

El movimiento helicoidal es ejecutado cuando un cuerpo gira alrededor de su eje y al mismo tiempo se mueve paralelamente a este. Cualquier punto en un cuerpo con este tipo de movimiento describe una curva llamada hélice [3].

#### 4.2.1. Desplazamiento general de Tornillo

En esta sección se deduce la ecuación del "Tornillo de Rodrigues" para el desplazamiento general de tornillo (general screw displacement). Para poder determinar el movimiento al que ha sido sometida una pieza de trabajo es necesario, considerar cierto número de puntos en ella. El número de puntos a considerar depende del tipo de movimiento que se desea estudiar.

La fórmula de Rodrigues establece que para tres puntos no colineales  $P_1, Q_1$  y  $R_1$ , pertenecientes a una pieza de trabajo, que son llevados a las posiciones  $P_2, Q_2$  y  $R_2$  por un desplazamiento de tornillo  $(\varphi, \mathbf{d})$  alrededor de un eje con dirección  $\hat{\mathbf{e}}$  definido en un punto por el vector  $\bar{\mathbf{S}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}}$ , es posible encontrar los parámetros del desplazamiento  $(\varphi, \mathbf{d}, \hat{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{S}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}})$  dadas las posiciones inicial y final del cuerpo rígido [2], [5], [6], [7], [8].

De esta manera el problema consiste en encontrar los parámetros del desplazamiento de tornillo  $\varphi, \mathbf{d}, \hat{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{S}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}}$ , donde:

- 1) El ángulo de rotación del desplazamiento alrededor del eje del tornillo  $(\varphi)$ .
- 2) El eje del tornillo  $(\hat{\mathbf{e}})$ .
- 3) La traslación a lo largo del eje del tornillo  $(\mathbf{d})$ .
- 4) El vector de posición que define el punto geométrico por donde pasa el eje del tornillo  $(\bar{\mathbf{S}}_{\perp\hat{\mathbf{e}}})$ .

De Geometría plana se sabe, que la perpendicular es la más corta de las rectas que pueden trazarse a una recta de un punto situado fuera de ella [18]. Puesto que se requiere

encontrar el vector más corto que existe desde el origen de un sistema de coordenadas hasta el eje del Tornillo de Rodrigues se vuelve necesario encontrar el vector perpendicular  $(\bar{S}_{\perp \hat{e}})$ .

### **Método para obtener la ecuación del desplazamiento general de tornillo**

Un objeto puede quedar totalmente definido por tres puntos, siempre y cuando estos no sean colineales. Supóngase que se conocen la posición de un cubo en dos posiciones, el cuál ha sufrido un desplazamiento de tornillo.

La fórmula se basa en tomar un punto  $P_1$  y considerar su desplazamiento a la posición  $P_2^r$ . Se considera su desplazamiento como uno en el cual  $P_1$  primero rota alrededor del eje del tornillo a la posición  $P_2^r$  y se traslada paralelo a  $\hat{e}$  de  $P_2^r$  a la posición  $P_2$ . A continuación se presenta dicho procedimiento:

**Paso 1.** Considere que el punto  $P_1$ , rota  $\varphi$  grados alrededor del eje del tornillo hasta la posición  $P_2^r$ . Donde  $P_1$  y  $P_2^r$  quedan situados en un mismo plano normal al eje del tornillo, como se ilustra en la figura (4.2). El punto  $S_p$  indica el punto donde  $\hat{e}$  corta a dicho plano,  $P_m$  es el punto donde la perpendicular bisectora de la cuerda  $P_1P_2^r$  corta dicha cuerda, y los vectores  $\bar{m}_1$  y  $\bar{m}_2$  son los respectivos vectores de posición de los puntos  $P_1$  y  $P_2^r$  relativos a  $S_p$ .

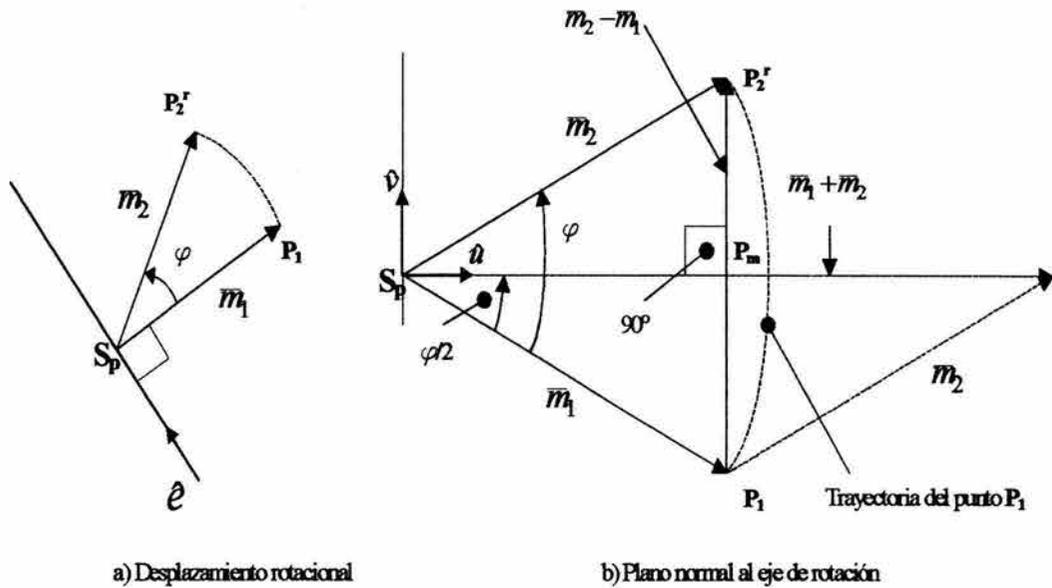


Fig. (4.2). Diagrama vectorial del Desplazamiento Rotacional

De la figura(4.2) se tiene que:

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\|\bar{\mathbf{m}}_2 - \bar{\mathbf{m}}_1\| / 2}{\|\bar{\mathbf{m}}_1 + \bar{\mathbf{m}}_2\| / 2} = \frac{\|\bar{\mathbf{m}}_2 - \bar{\mathbf{m}}_1\|}{\|\bar{\mathbf{m}}_1 + \bar{\mathbf{m}}_2\|}$$

$$\|\bar{\mathbf{m}}_2 - \bar{\mathbf{m}}_1\| = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \|\bar{\mathbf{m}}_1 + \bar{\mathbf{m}}_2\| \quad (4.64)$$

Donde  $\varphi$  es el ángulo de rotación del desplazamiento alrededor del eje del tornillo. Si se introduce el vector unitario  $\hat{\mathbf{e}}$  a lo largo del eje del tornillo (con su sentido definido positivo de acuerdo con la regla de la mano derecha relativo al ángulo de rotación  $\varphi$ ), la expresión vectorial 4.64 se puede escribir de la siguiente manera.

De la figura (4.2) tenemos:

$$\hat{u} = \hat{e} \otimes \hat{v}$$

multiplicando la Ec.(4.64) por el vector  $\hat{u}$  para poder obtener los vectores correspondientes,

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{m}}_2 - \bar{\mathbf{m}}_1\| \hat{u} &= \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \|\bar{\mathbf{m}}_1 + \bar{\mathbf{m}}_2\| \hat{u} \\ \|\bar{\mathbf{m}}_2 - \bar{\mathbf{m}}_1\| \hat{u} &= \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \|\bar{\mathbf{m}}_1 + \bar{\mathbf{m}}_2\| \hat{e} \otimes \hat{v} \\ \bar{\mathbf{m}}_2 - \bar{\mathbf{m}}_1 &= \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \hat{e} \otimes \|\bar{\mathbf{m}}_1 + \bar{\mathbf{m}}_2\| \hat{v} \\ \bar{\mathbf{m}}_2 - \bar{\mathbf{m}}_1 &= \left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \hat{e} \otimes (\bar{\mathbf{m}}_1 + \bar{\mathbf{m}}_2) \end{aligned} \quad (4.65)$$

La Ec.(4.65) representa la fórmula de Rodrigues para un desplazamiento plano con centro en el origen del desplazamiento [2].

**Paso 2.** Si se considera que el origen de coordenadas se encuentra ahora localizado en otra parte sobre el eje de giro, llamándole a dicho punto  $S_0$ , entonces los vectores de posición de los puntos  $P_1$  y  $\bar{p}_2^r$  de interés ahora son,  $\bar{M}_1$  y  $\bar{M}_2$ , como se muestra en la figura (4.3).

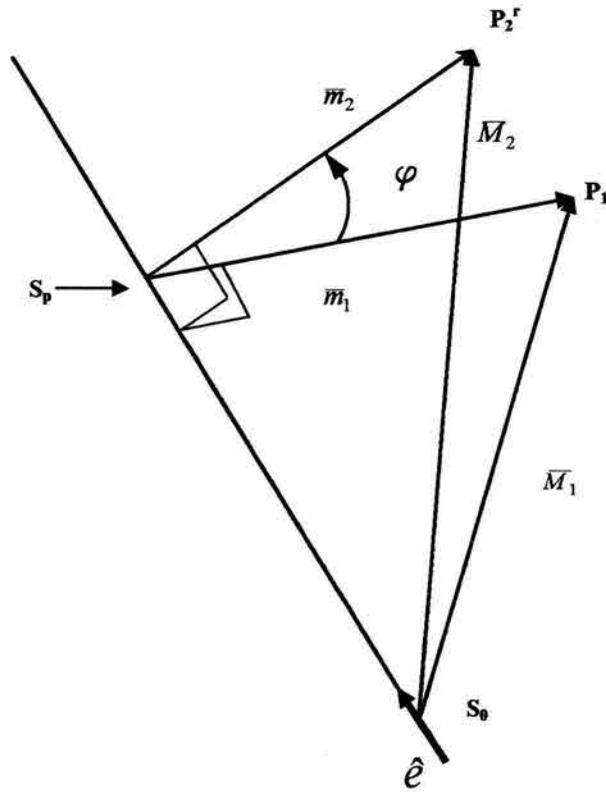


Fig. (4.3). Rotación de  $P_1$  a  $P_2^r$ .

De acuerdo a la figura(4.3) se tiene:

$$\overline{M}_1 = \overline{S_0 S_p} + \overline{m_1} \quad (4.66)$$

$$\overline{M}_2 = \overline{S_0 S_p} + \overline{m_2} \quad (4.67)$$

Despejando  $\overline{m_1}$  y  $\overline{m_2}$  de las Ec.(4.66) y Ec.(4.67) respectivamente:

$$\overline{m_1} = \overline{M}_1 - \overline{S_0 S_p} \quad (4.68)$$

$$\overline{m_2} = \overline{M}_2 - \overline{S_0 S_p} \quad (4.69)$$

sustituyendo las Ec.(4.68) y Ec.(4.69) en la Ec (4.65) se obtiene:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{M}}_2 - \overline{\mathbf{S}_0\mathbf{S}_p} - \overline{\mathbf{M}}_1 + \overline{\mathbf{S}_0\mathbf{S}_p} &= \left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \hat{\mathbf{e}} \otimes (\overline{\mathbf{M}}_1 - \overline{\mathbf{S}_0\mathbf{S}_p} + \overline{\mathbf{M}}_2 - \overline{\mathbf{S}_0\mathbf{S}_p}) \\ \overline{\mathbf{M}}_2 - \overline{\mathbf{M}}_1 &= \left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \hat{\mathbf{e}} \otimes (\overline{\mathbf{M}}_1 + \overline{\mathbf{M}}_2 - 2\overline{\mathbf{S}_0\mathbf{S}_p})\end{aligned}\quad (4.70)$$

El vector  $\overline{\mathbf{S}_0\mathbf{S}_p}$  y  $\hat{\mathbf{e}}$  son colineales por lo que el producto cruz es igual a cero, de aquí la Ec.(4.70) se convierte en:

$$\overline{\mathbf{M}}_2 - \overline{\mathbf{M}}_1 = \left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \hat{\mathbf{e}} \otimes (\overline{\mathbf{M}}_1 + \overline{\mathbf{M}}_2) \quad (4.71)$$

La Ec.(4.71) representa la fórmula de Rodrigues para un desplazamiento esférico alrededor de un eje que pasa a través del origen de coordenadas [2].

**Paso 3.** Ahora, el sistema de referencia ya no coincide con el eje del tornillo. El vector  $\overline{\mathbf{S}}_{\hat{\mathbf{e}}}$  mide la posición del punto  $\mathbf{S}_0$  relativo al nuevo sistema de referencia  $\{0\}$ , quedando los vectores de posición para los puntos  $\mathbf{P}_1$  y  $\overline{\mathbf{p}}_2^r$  representados con  $\overline{\mathbf{p}}_1$  y  $\overline{\mathbf{p}}_2^r$ , como se muestra en la figura (4.4).

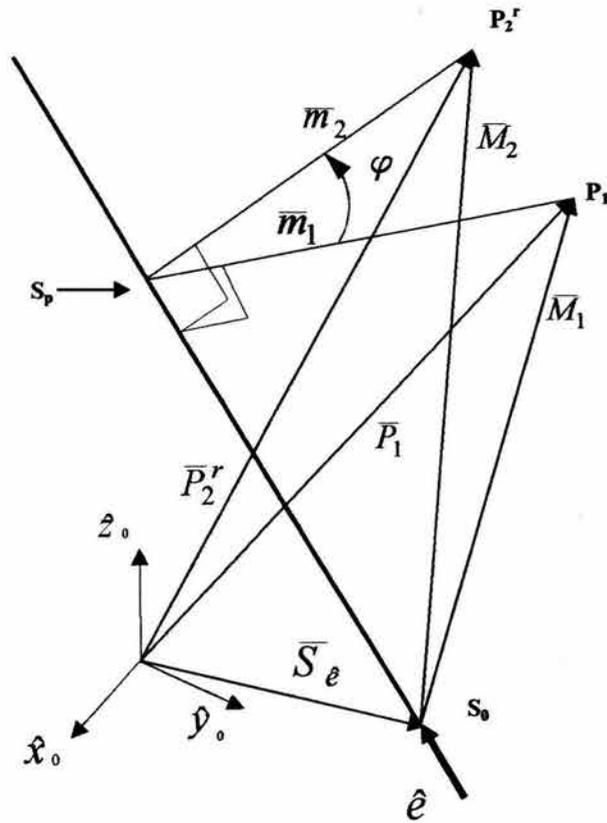


Fig. (4.4). Desplazamiento esférico medido en un sistema de referencia  $\{0\}$  arbitrario.

De la figura (4.4) se observa que:

$$\bar{p}_1 = \bar{S}_e + \bar{M}_1 \quad (4.72)$$

$$\bar{p}_2^r = \bar{S}_e + \bar{M}_2 \quad (4.73)$$

Despejando  $\bar{M}_1$  y  $\bar{M}_2$  de las Ec.(4.72) y Ec.(4.73) respectivamente:

$$\bar{M}_1 = \bar{p}_1 - \bar{S}_e \quad (4.74)$$

$$\bar{M}_2 = \bar{p}_2^r - \bar{S}_e \quad (4.75)$$

Sustituyendo las Ec.(4.72) y Ec.(4.73) en la Ec (4.71) se obtiene:

$$\bar{\mathbf{p}}_2^r - \bar{\mathbf{S}}_e - \bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{S}}_e = \left( \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) \hat{\mathbf{e}} \otimes (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{S}}_e + \bar{\mathbf{p}}_2^r - \bar{\mathbf{S}}_e)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_2^r - \bar{\mathbf{p}}_1 = \left( \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) \hat{\mathbf{e}} \otimes (\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2^r - 2\bar{\mathbf{S}}_e) \quad (4.76)$$

La Ec.(4.76) representa la fórmula de Rodrigues para un desplazamiento esférico medido relativo a cualquier origen  $\{0\}$  arbitrario, [2].

**Paso 4.** Finalmente para el desplazamiento espacial general se debe adicionar la traslación del tornillo,  $\mathbf{d}$ , la cual lleva  $\mathbf{p}_2^r$  a la posición  $\mathbf{p}_2$ . Esto se muestra en la figura (4.5):

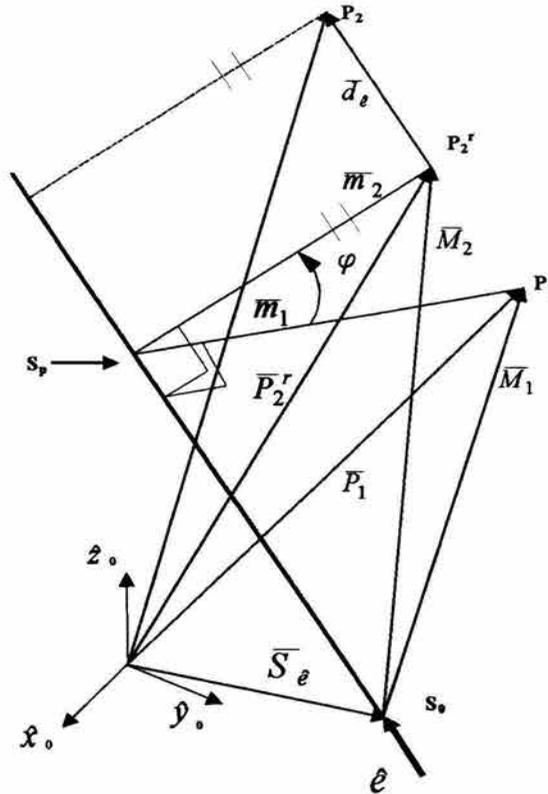


Fig. (4.5). Desplazamiento general de Tornillo

La magnitud  $\bar{d}$ , se multiplica por  $\hat{e}$ , para obtener el vector de traslación  $\bar{d}_e$ . A partir de la figura (4.5) se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{p}_2 &= \bar{p}_2^r + \bar{d}_e \\ \bar{p}_2^r &= \bar{p}_2 - \bar{d}_e\end{aligned}\quad (4.77)$$

sustituyendo  $\bar{p}_2^r$  en la ecuación (4.76):

$$\bar{p}_2 - \bar{d}_e - \bar{p}_1 = \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{e} \otimes (\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - \bar{d}_e - 2\bar{S}_e)$$

Los vectores  $\bar{d}_e$  y  $\hat{e}$  son colineales por lo que el producto cruz es igual a cero.

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{e} \otimes (\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - 2\bar{S}_e) + \bar{d}_e \quad (4.78)$$

La ecuación (4.78) representa la fórmula de Rodrigues para el desplazamiento general de tornillo, [2].

Para poder obtener los parametros del tornillo, escribimos la Ec.(4.78) en términos de las posiciones de tres puntos no colineales,  $P_i$ ,  $Q_i$  y  $R_i$ , así:

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{e} \otimes (\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - 2\bar{S}_e) + \bar{d}_e \quad (A)$$

$$\bar{q}_2 - \bar{q}_1 = \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{e} \otimes (\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - 2\bar{S}_e) + \bar{d}_e \quad (B)$$

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{e} \otimes (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 - 2\bar{S}_e) + \bar{d}_e \quad (C)$$

donde:  $\bar{p}_i$ ,  $\bar{q}_i$  y  $\bar{r}_i$ , son los vectores de posición que describen a  $P_i$ ,  $Q_i$  y  $R_i$ , cuando  $i = 1, 2$ .

A partir de las ecuaciones (A),(B) y (C) se pueden obtener los cuatro parámetros del Tornillo de Rodrigues. Como se puede observar tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

Así, restando la ecuación A con B

$$\begin{aligned}
 (\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_1) - (\bar{\mathbf{q}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_1) &= \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{\mathbf{e}} \otimes (\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 - 2\bar{\mathbf{S}}_{\hat{\mathbf{e}}}) + \bar{\mathbf{d}}_{\hat{\mathbf{e}}} - \\
 &\quad \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{\mathbf{e}} \otimes (\bar{\mathbf{q}}_1 + \bar{\mathbf{q}}_2 - 2\bar{\mathbf{S}}_{\hat{\mathbf{e}}}) - \bar{\mathbf{d}}_{\hat{\mathbf{e}}} \\
 [(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] &= \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{\mathbf{e}} \otimes [(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) + (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] \quad (D)
 \end{aligned}$$

De la misma manera restamos C con B

$$[(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] = \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{\mathbf{e}} \otimes [(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) + (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] \quad (E)$$

Premultiplicar D vectorialmente, por la parte izquierda de la ecuación E.

$$\begin{aligned}
 [(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] \otimes [(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] &= \quad (F) \\
 [(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] \otimes \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{\mathbf{e}} \otimes [(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) + (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] &
 \end{aligned}$$

Aplicando la siguiente identidad  $\bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{c}} = (\bar{\mathbf{a}}^T \bar{\mathbf{c}}) \bar{\mathbf{b}} - (\bar{\mathbf{a}}^T \bar{\mathbf{b}}) \bar{\mathbf{c}}$ , en la Ec.(F), se tiene:

$$\begin{aligned}
 [(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] \otimes [(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] &= \quad (G) \\
 [(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)]^T [(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) + (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{\mathbf{e}} - \\
 [(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)]^T \left[ \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \hat{\mathbf{e}} \right] [(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) + (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] &
 \end{aligned}$$

Nota: De la Ec.(E), sabemos que el vector  $[(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)]$  es  $\perp$  a  $\left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{\mathbf{e}}$  y a  $[(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) + (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)]$ .

Por lo que, el segundo término del lado derecho de la Ec(G) es igual a cero.

$$\begin{aligned}
 [(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] \otimes [(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] &= \\
 [(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)]^T [(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) + (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{\mathbf{e}} &
 \end{aligned}$$

Despejando,  $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}$ :

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\hat{\mathbf{e}} = \frac{[(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)] \otimes [(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)]}{[(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) - (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)]^T [(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{q}}_2) + (\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{q}}_1)]} \quad (\text{H})$$

Haciendo  $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}$  igual  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}$$

$$\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right][\hat{\mathbf{e}}] = \frac{\|\bar{\boldsymbol{\omega}}\|}{\|\hat{\mathbf{e}}\|} \bar{\boldsymbol{\omega}} = \left[\|\bar{\boldsymbol{\omega}}\|\right] \left[\frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}}{\|\bar{\boldsymbol{\omega}}\|}\right]$$

Así el ángulo de rotación puede ser calculado a partir de:

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \|\bar{\boldsymbol{\omega}}\|$$

$$\varphi = 2\tan^{-1}(\|\bar{\boldsymbol{\omega}}\|) \quad (\text{I})$$

mientras que el eje de giro, se determina mediante:

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}}{\|\bar{\boldsymbol{\omega}}\|} \quad (\text{J})$$

Ahora premultiplicamos la Ec.(A) escalarmente por  $\hat{\mathbf{e}}$  para encontrar  $\mathbf{d}$ :

$$\hat{\mathbf{e}}^T (\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_1) = \hat{\mathbf{e}}^T \left[ \left( \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \hat{\mathbf{e}} \otimes (\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 - 2\bar{\mathbf{S}}_{\hat{\mathbf{e}}}) + \bar{\mathbf{d}}_{\hat{\mathbf{e}}} \right]$$

$$\hat{\mathbf{e}}^T (\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_1) = \hat{\mathbf{e}}^T (\bar{\mathbf{d}}_{\hat{\mathbf{e}}})$$

$$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{e}}^T (\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_1) \quad (\text{K})$$

Por último queremos buscar el vector  $\bar{\mathbf{S}}_{\hat{\mathbf{e}}}$  perpendicular al eje del tornillo  $\hat{\mathbf{e}}$ , es decir se deberá de cumplir que  $(\hat{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{S}}_{\hat{\mathbf{e}}}) = 0$ .

Para ello se premultiplica la Ec.(A) vectorialmente por  $\hat{e}$ :

$$\hat{e} \otimes (\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_1) = \hat{e} \otimes \left( \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) \hat{e} \otimes (\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 - 2\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{e}}) + \hat{e} \otimes \bar{\mathbf{d}}_{\hat{e}}$$

$$\hat{e} \otimes (\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_1) = \hat{e} \otimes \left( \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) \hat{e} \otimes (\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 - 2\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{e}})$$

Utilizando la siguiente identidad,  $\bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{c}} = (\bar{\mathbf{a}}^T \bar{\mathbf{c}}) \bar{\mathbf{b}} - (\bar{\mathbf{a}}^T \bar{\mathbf{b}}) \bar{\mathbf{c}}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{e} \otimes (\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_1) &= \\ [\hat{\mathbf{e}}^T (\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 - 2\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{e}})] \left( \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) \hat{e} - \hat{\mathbf{e}}^T \left[ \left( \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) \hat{e} \right] (\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 - 2\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{e}}) \end{aligned}$$

$$\hat{e} \otimes (\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_1) = \hat{\mathbf{e}}^T (\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2) \left( \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) \hat{e} - \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) (\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 - 2\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{e}})$$

Despejando a  $\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{e}}$ :

$$\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{e}} = \frac{1}{2} \left[ (\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2) + \frac{\hat{e} \otimes (\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_1)}{\tan \left( \frac{\varphi}{2} \right)} - (\hat{\mathbf{e}}^T (\bar{\mathbf{p}}_2 + \bar{\mathbf{p}}_1)) \hat{e} \right] \quad (\text{L})$$

En resumen es posible encontrar los cuatro parámetros del tornillo en términos de tres puntos no colineales pertenecientes a un cuerpo rígido que ha sufrido un movimiento de tornillo, usando las ecuaciones Ec.(H)-Ec.(L).

#### 4.2.2. Transformación de Tornillo

A continuación se obtiene una transformación lineal que contiene la información del movimiento de tornillo, con la cual el robot puede generar en su efector final, el lugar geométrico de una hélice; la cual servirá para llevar a cabo la simulación de una tarea realizada por el robot manipulador helicodal PPSP.

La transformación de tornillo que se busca contiene cinco parámetros, a saber, cuatro de ellos corresponden a los cuatro parámetros obtenidos de la "Formulación del Tornillo

de Rodrigues" y el último a un vector de posición que ubica el punto (perteneciente al cuerpo transportado) donde el órgano terminal de nuestro manipulador toma la pieza de trabajo.

Para encontrar la "Transformación de tornillo" se realiza el siguiente procedimiento:

**Paso 1.** Establecimiento de un sistema de referencia  $\{B\}$  sobre el eje de giro del tornillo de Rodrigues ( $\hat{e}$ ), como se muestra en la figura(4.6). La descripción espacial del sistema de referencia relativo  $\{B\}$ , con respecto al sistema de referencia absoluto  $\{A\}$ , se representa como:

$${}^A_B\mathbf{T} = \begin{pmatrix} {}^A_B\mathbf{R} & {}^A\bar{\mathbf{P}}_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde,  ${}^A_B\mathbf{R}$ : Indica la orientación del sistema de referencia  $\{B\}$  con respecto del sistema de referencia  $\{A\}$

$${}^A_B\mathbf{R} = \{ {}^A\hat{\mathbf{x}}_B \quad {}^A\hat{\mathbf{y}}_B \quad {}^A\hat{\mathbf{z}}_B \} \quad (4.79)$$

donde,  ${}^A\bar{\mathbf{P}}_B$ : Vector de posición del origen del sistema de referencia  $\{B\}$  con respecto del sistema de referencia  $\{A\}$

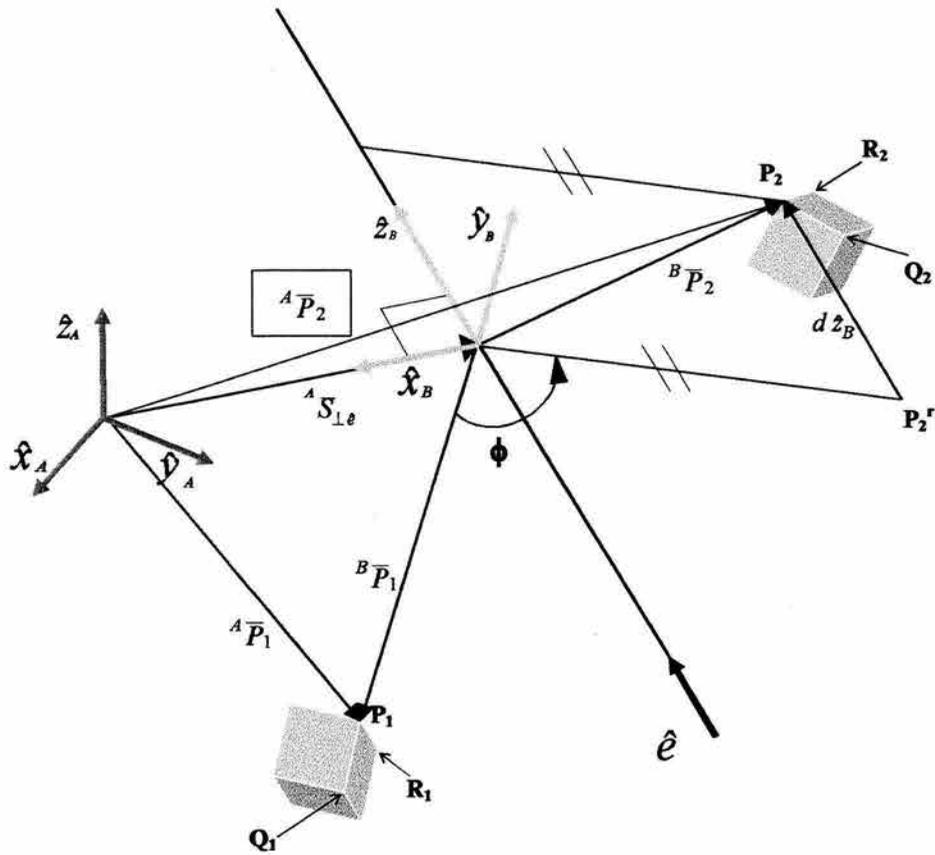


Fig. (4.6). Desplazamiento general de tornillo de una pieza de trabajo.

De acuerdo a la figura(4.6) se tiene:

$${}^A\hat{z}_B = \hat{e} \quad (4.80)$$

$${}^A\hat{x}_B = -\frac{\bar{S}_\perp \hat{e}}{\|\bar{S}_\perp \hat{e}\|} \quad (4.81)$$

como se esta trabajando con una terna ortonormal derecha,

$${}^A\hat{y}_B = \hat{z}_B \otimes \hat{x}_B$$

$${}^A\hat{y}_B = \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_\perp \hat{e}}{\|\bar{S}_\perp \hat{e}\|} \right) \quad (4.82)$$

Sustituyendo las ecuaciones Ec.(4.80)-Ec.(4.83) en la Ec.(4.79) se tiene:

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}}{\|\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}\|} & \hat{\mathbf{e}} \otimes -\frac{\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}}{\|\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}\|} & \hat{\mathbf{e}} \end{pmatrix}$$

$${}^A\bar{\mathbf{P}}_B = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}} \quad (4.83)$$

**Paso 2.** Encontrar el vector  ${}^B\bar{\mathbf{P}}_1$ , el cual define la posición inicial del punto "P<sub>1</sub>" perteneciente a el cuerpo transportado por el efector final del robot manipulador. De la figura (4.6) se puede observar:

$${}^B({}^A\bar{\mathbf{P}}_1) = {}^B({}^A\bar{\mathbf{P}}_B) + {}^B\bar{\mathbf{P}}_1$$

$${}^B\bar{\mathbf{P}}_1 = {}^B({}^A\bar{\mathbf{P}}_1) - {}^B({}^A\bar{\mathbf{P}}_B)$$

pero,  ${}^A\bar{\mathbf{P}}_B = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}$ , así:

$${}^B\bar{\mathbf{P}}_1 = {}^B({}^A\bar{\mathbf{P}}_1) - {}^B({}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}})$$

$${}^B\bar{\mathbf{P}}_1 = {}^B_A\mathbf{R} {}^A\bar{\mathbf{P}}_1 - {}^B_A\mathbf{R} {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}$$

si  ${}^B_A\mathbf{R} = {}^A_B\mathbf{R}^T = {}^A_B\mathbf{R}^{-1}$  entonces:

$${}^B\bar{\mathbf{P}}_1 = {}^A_B\mathbf{R}^T {}^A\bar{\mathbf{P}}_1 - {}^A_B\mathbf{R}^T {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}} \quad (4.84)$$

**Paso 3.** Se le aplica al vector  ${}^B\bar{\mathbf{P}}_1$ , un desplazamiento  $\mathbf{d}$  en la dirección del eje de giro  $\hat{\mathbf{e}}$  del Tornillo de Rodrigues y una rotación  $\varphi$  alrededor de este mismo eje, como se muestra en la figura (4.6). El resultado de ejecutar dicha operación queda definido por el vector  ${}^B\bar{\mathbf{P}}_2$ , el punto en esta posición queda definido por P<sub>2</sub>:

$${}^B\bar{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{d} {}^B\hat{\mathbf{z}}_B + \text{Rot}({}^B\hat{\mathbf{z}}_B, \varphi) {}^B\bar{\mathbf{P}}_1 \quad (4.85)$$

De la formulación de Gibbs [19], tenemos:

$$\mathbf{Rot}({}^B\hat{\mathbf{z}}_B, \varphi) = {}^B\hat{\mathbf{z}}_B {}^B\hat{\mathbf{z}}_B^T + \cos(\varphi) \left( I_{3 \times 3} - {}^B\hat{\mathbf{z}}_B {}^B\hat{\mathbf{z}}_B^T \right) + \sin(\varphi) {}^B\hat{\mathbf{z}}_B \otimes \quad (4.86)$$

**Paso 4.** Se mide la posición del punto "P<sub>2</sub>", con respecto al sistema de referencia absoluto {A}:

$${}^A\bar{\mathbf{P}}_2 = {}^A\bar{\mathbf{P}}_B + {}^A({}^B\bar{\mathbf{P}}_2)$$

$${}^A\bar{\mathbf{P}}_2 = {}^A\bar{\mathbf{P}}_B + {}^A_B\mathbf{R} {}^B\bar{\mathbf{P}}_2$$

donde,  ${}^A\bar{\mathbf{P}}_B = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}$

$${}^A\bar{\mathbf{P}}_2 = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}} + {}^A_B\mathbf{R} {}^B\bar{\mathbf{P}}_2 \quad (4.87)$$

sustituyendo la Ec.(4.85) en la Ec.(4.87), se obtiene:

$${}^A\bar{\mathbf{P}}_2 = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}} + {}^A_B\mathbf{R} \left( \mathbf{d} {}^B\hat{\mathbf{z}}_B + \mathbf{Rot}({}^B\hat{\mathbf{z}}_B, \varphi) {}^B\bar{\mathbf{P}}_1 \right)$$

además sustituyendo la Ec.(4.84) en la Ec.(4.87), se tiene:

$${}^A\bar{\mathbf{P}}_2 = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}} + {}^A_B\mathbf{R} \left( \mathbf{d} {}^B\hat{\mathbf{z}}_B \right) + {}^A_B\mathbf{R} \mathbf{Rot}({}^B\hat{\mathbf{z}}_B, \varphi) \left[ {}^A_B\mathbf{R}^T {}^A\bar{\mathbf{P}}_1 - {}^A_B\mathbf{R}^T {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}} \right]$$

$${}^A\bar{\mathbf{P}}_2 = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}} + {}^A_B\mathbf{R} \left( \mathbf{d} {}^B\hat{\mathbf{z}}_B \right) + {}^A_B\mathbf{R} \mathbf{Rot}({}^B\hat{\mathbf{z}}_B, \varphi) \left[ {}^A_B\mathbf{R}^T \left( {}^A\bar{\mathbf{P}}_1 - {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}} \right) \right] \quad (4.88)$$

**Paso 5.** Para que el robot manipulador desempeñe el movimiento de tornillo, el ángulo de giro ( $\varphi$ ), y el desplazamiento ( $\mathbf{d}$ ) deben estar relacionados. Esta relación está determinada por el parámetro [ $u_{\text{tornillo}}(t)$ ], el cual está en función del tiempo y varía desde cero correspondiente al  $t = 0$ , hasta uno, correspondiente a  $t = t_f$  [9], [12]. El parámetro  $u_{\text{tornillo}}(t)$  corresponde al perfil de trayectoria octal, mostrado en la Ec.(4.63)

(ecuación repetida).

$$u_{\text{tornillo}}(t) = p(t) = dt \left( \frac{70}{t_f^3} t^3 - \frac{315}{t_f^4} t^4 + \frac{546}{t_f^5} t^5 - \frac{420}{t_f^6} t^6 + \frac{120}{t_f^7} t^7 \right) + \quad (4.63)$$

$$\text{índice } -m \frac{dt}{t_f} \left( -\frac{32}{t_f^2} t^3 + \frac{160}{t_f^3} t^4 - \frac{288}{t_f^4} t^5 + \frac{224}{t_f^5} t^6 - \frac{64}{t_f^6} t^7 \right)$$

La traslación  $\mathbf{d}$  y la rotación  $\varphi$  son afectadas por este parámetro como se muestra en la Ec.(4.89) y Ec.(4.90).

$$\varphi(t) = u_{\text{tornillo}}(t) * \varphi \quad (4.89)$$

$$\mathbf{d}(t) = u_{\text{tornillo}}(t) * \mathbf{d} \quad (4.90)$$

De esta manera, si ponemos a  ${}^A\bar{\mathbf{P}}_2$  en función del parámetro  $[u_{\text{tornillo}}(t)]$ , obtenemos la transformación de tornillo que se busca.

$$\mathbf{T}_{\text{tornillo}}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}) = {}^A\bar{\mathbf{P}}_2(t)$$

$$\mathbf{T}_{\text{tornillo}}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}) = {}^A\bar{\mathbf{P}}_2(t) = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} + {}^A\mathbf{R} \left[ (u_{\text{tornillo}}(t) * \mathbf{d})^B \hat{\mathbf{z}}_B \right] +$$

$${}^A\mathbf{R} \text{Rot}({}^B\hat{\mathbf{z}}_B, u_{\text{tornillo}}(t) * \varphi) \left[ {}^A\mathbf{R}^T ({}^A\bar{\mathbf{P}}_1 - {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}) \right]$$

de la Ec.(4.89) y Ec(4.90), se obtiene:

$$\mathbf{T}_{\text{tornillo}}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}) = {}^A\bar{\mathbf{P}}_2(t) = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} + {}^A\mathbf{R} [\mathbf{d}(t) {}^B\hat{\mathbf{z}}_B] + \quad (4.91)$$

$${}^A\mathbf{R} \text{Rot}({}^B\hat{\mathbf{z}}_B, \varphi(t)) \left[ {}^A\mathbf{R}^T ({}^A\bar{\mathbf{P}}_1 - {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}) \right]$$

De la formulación de Gibbs [19], tenemos:

$$\text{Rot}({}^B\hat{\mathbf{z}}_B, \varphi(t)) = {}^B\hat{\mathbf{z}}_B {}^B\hat{\mathbf{z}}_B^T + \cos(\varphi(t)) (I_{3 \times 3} - {}^B\hat{\mathbf{z}}_B {}^B\hat{\mathbf{z}}_B^T) + \text{sen}(\varphi(t)) {}^B\hat{\mathbf{z}}_B \otimes$$

Finalmente se hace una prueba de la transformación de tornillo obtenida ( $\mathbf{T}_{tornillo}$ ).

Probar que para  $t = 0$ ,  $\mathbf{T}_{tornillo}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}) = {}^A\bar{\mathbf{P}}_2(0) = {}^A\bar{\mathbf{P}}_1$ :

Para  $t = 0$ ,

$$u_{tornillo}(0) = 0$$

$$\varphi(t) = u_{tornillo}(t) * \varphi = 0$$

y

$$\mathbf{d}(t) = u_{tornillo}(t) * \mathbf{d} = 0$$

Que sustituyéndose en la Ec.(4.91) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{tornillo}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}) &= {}^A\bar{\mathbf{P}}_2(0) = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} + {}^A\mathbf{R} [0 \ ({}^B\hat{\mathbf{z}}_B)] + \\ &{}^A\mathbf{R} \left[ {}^B\hat{\mathbf{z}}_B {}^B\hat{\mathbf{z}}_B^T + \cos(0) \left( I_{3 \times 3} - {}^B\hat{\mathbf{z}}_B {}^B\hat{\mathbf{z}}_B^T \right) + \text{sen}(0) \ {}^B\hat{\mathbf{z}}_B \otimes \right] \\ &\left[ {}^A\mathbf{R}^T \left( {}^A\bar{\mathbf{P}}_1 - {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} \right) \right] \end{aligned}$$

donde,

$${}^B\hat{\mathbf{z}}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{tornillo}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}) &= {}^A\bar{\mathbf{P}}_2(0) = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} + \mathbf{R}_B^A \\ &\left\{ \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) \right] + \left[ I_{3 \times 3} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) \right] \right\} \\ &\left[ {}^A\mathbf{R}^T \left( {}^A\bar{\mathbf{P}}_1 - {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_{\text{tornillo}}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}) = {}^A\bar{\mathbf{P}}_2(0) = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} + {}^A_B\mathbf{R} \left[ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right] \left[ {}^A_B\mathbf{R}^T ({}^A\bar{\mathbf{P}}_1 - {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}) \right]$$

$$\mathbf{T}_{\text{tornillo}}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}) = {}^A\bar{\mathbf{P}}_2(0) = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} + {}^A_B\mathbf{R} I_{3 \times 3} {}^A_B\mathbf{R}^T ({}^A\bar{\mathbf{P}}_1 - {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})$$

$$\mathbf{T}_{\text{tornillo}}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}) = {}^A\bar{\mathbf{P}}_2(0) = {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}} + ({}^A\bar{\mathbf{P}}_1 - {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}})$$

$$\mathbf{T}_{\text{tornillo}}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}) = {}^A\bar{\mathbf{P}}_2(0) = {}^A\bar{\mathbf{P}}_1$$

Así, comprobamos que variando el parámetro  $u_{\text{tornillo}}(t)$ , para  $t = 0$  hasta  $t = t_f$  obtenemos la simulación del robot manipulador helicoidal para un movimiento de tornillo helicoidal.

La transformación de tornillo  $\mathbf{T}_{\text{tornillo}}(\bullet, \hat{\mathbf{e}}, \varphi, {}^A\bar{\mathbf{S}}_{\perp \hat{\mathbf{e}}}, \mathbf{d}): \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$  obtenida, es un operador lineal capaz de transformar a cualquier vector de posición conforme a el movimiento tornillo. Los puntos, descritos por los mencionados vectores de posición, experimentan desplazamientos en forma de hélice. Este operador es una función parametrizada, la cual contiene la información del "Tornillo de Rodrigues" [9], [10], [11], [12]. El mencionado parámetro  $[u_{\text{tornillo}}(t)]$  es un escalar en función del tiempo que varía desde "0", correspondiente a  $t = 0$ , hasta 1, correspondiente a  $t = t_f$  (Instante final del movimiento).

# Capítulo 5

## Simulación

### 5.1. Introducción

En este capítulo se realiza una simulación del robot manipulador helicoidal PPSP, transportando en su órgano terminal una pieza de trabajo, desde la posición inicial  $P_1$  hasta la posición final  $P_2$ , a través de una hélice como lugar geométrico y con un polinomio de 8 grado como perfil de trayectoria

Para cada una de las variables articulares con las que cuenta el manipulador PPSP, se presenta la historia con respecto al tiempo de la posición, velocidad y aceleración. Una vez realizado esto se obtienen los pares motrices necesarios para que se pueda cumplir con la tarea asignada al manipulador.

### 5.2. Descripción de la tarea

Para propósitos de demostración el manipulador ha sido idealizado. Para cada una de las tareas dentro del proceso de la simulación, se ha considerado que el centro de la articulación esférica coincide con el plano formado por  $\hat{y}_0 - \hat{z}_0$ . Es necesario hacer notar que el manipulador posee una longitud de brazo "LB=10".

Importante: Las unidades no han sido significativas para el proceso de la simulación.

## Tarea

El manipulador desarrolla una trayectoria en forma de hélice, tomando una pieza de trabajo en el punto **OBJ** y la lleva a la posición final ( respecto del sistema inercial  $\{0\}$ ) en un tiempo de proceso de 3 seg. El perfil de trayectoria seleccionado, es un polinomio de 8 grado con índice  $_m=1.875$ , con lo cual se llega a un polinomio de 5 grado.

En la tabla (5.1), se muestran los puntos pertenecientes a la pieza de trabajo en las posiciones inicial y final , así como, el punto donde el manipulador toma a la pieza de trabajo llamado "**OBJ**". Estos puntos representan las coordenadas operacionales.

Pieza de Trabajo	Coordenadas
$P_1$	(6, 5, 5)
$Q_1$	(6, 5, 6)
$R_1$	(5, 6, 5)
$P_2$	(8, 10, 0)
$Q_2$	(8, 9,6238, 0,9265)
$R_2$	(7, 10,9265, 0,3762)
Punto de Sujeción , <b>OBJ</b>	(6, 5, 6)

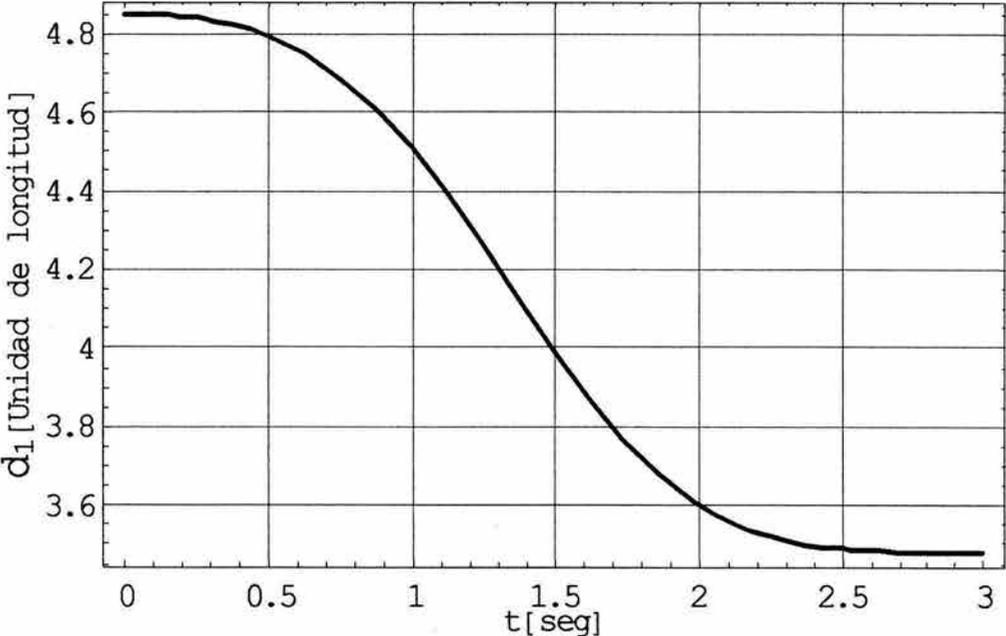
Tabla 5.1. Espacio Operacional

Los cuatro parámetros del Tornillo de Rodrigues, son obtenidos utilizando las ecuaciones Ec.(H)-Ec.(L) presentadas en el capítulo anterior. La tabla 5.2 muestra los parámetros obtenidos.

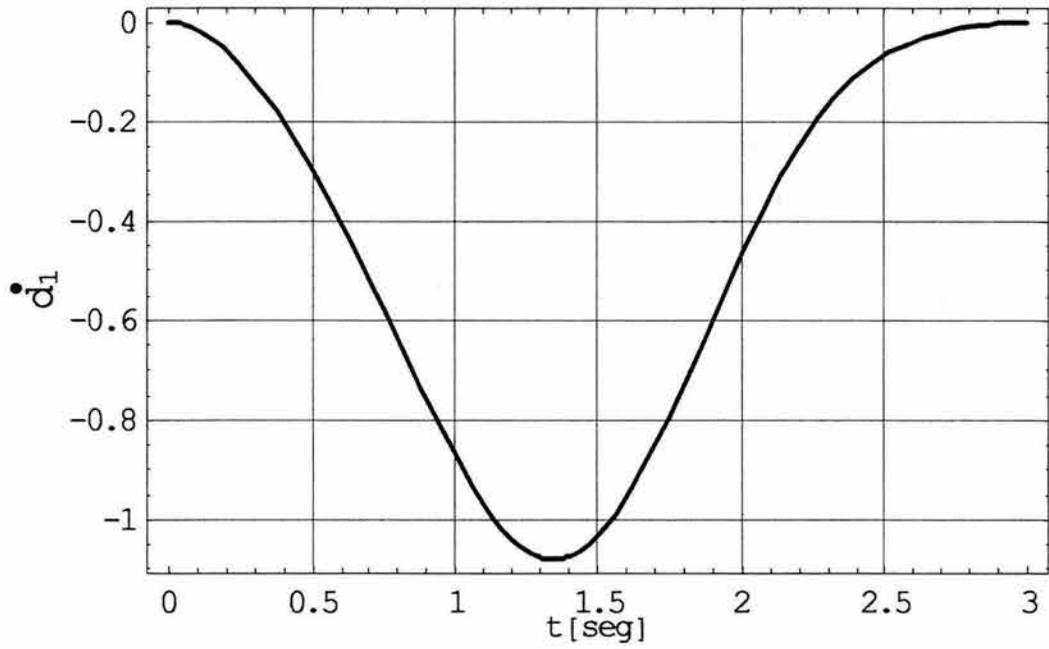
Parámetros del Tornillo	
$\varphi$	22,1°
$\hat{e}$	$(1 \ 0 \ 0)^T$
$\bar{S}_1 \hat{a}$	$(0 \ 20,3017 \ 15,3017)^T$
$d$	2

Tabla 5.2. Parámetros del Tornillo de Rodrigues

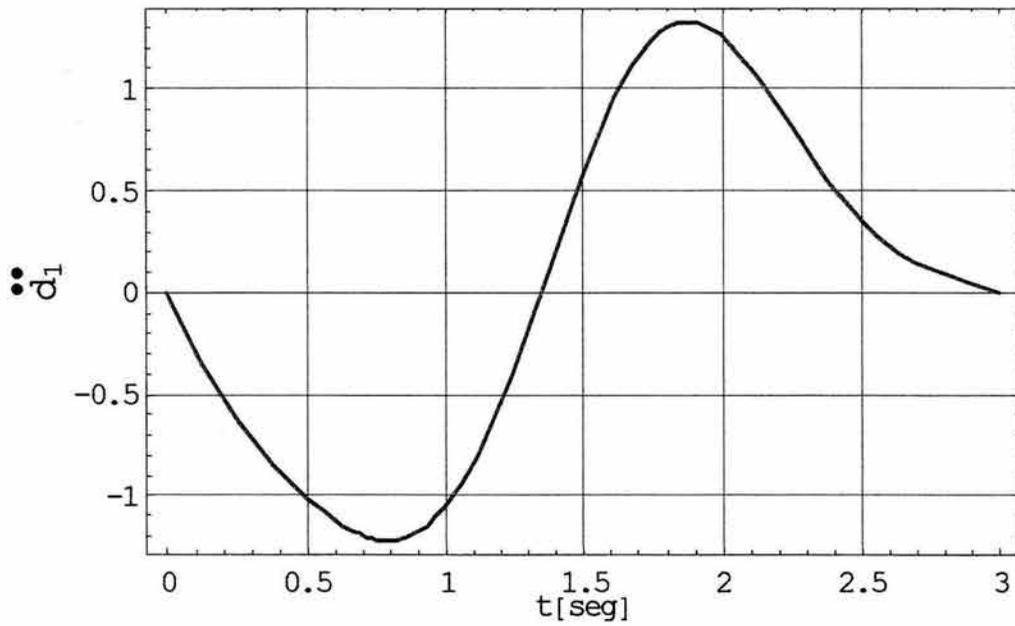
A partir de los datos mostrados en las Tablas 5.1 y 5.2 y las ecuaciones obtenidas en la cinemática inversa se obtuvieron las siguientes gráficas que muestran el comportamiento de cada una de las seis variables con las que cuenta el robot manipulador PPSP en su evolución con respecto al tiempo. También se obtuvieron las gráficas necesarias para monitorear la carga sobre los actuadores al efectuarse la tarea. Para obtener estas gráficas se utilizó el software Mathematica 4.



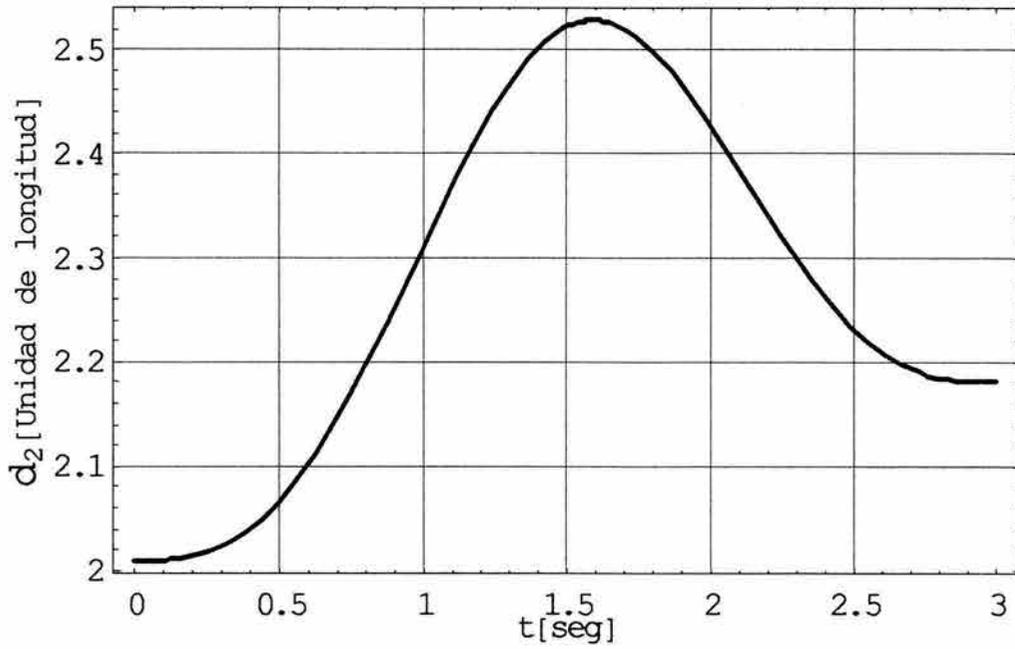
Gráfica 5.1. Desplazamiento lineal de la primera articulación.



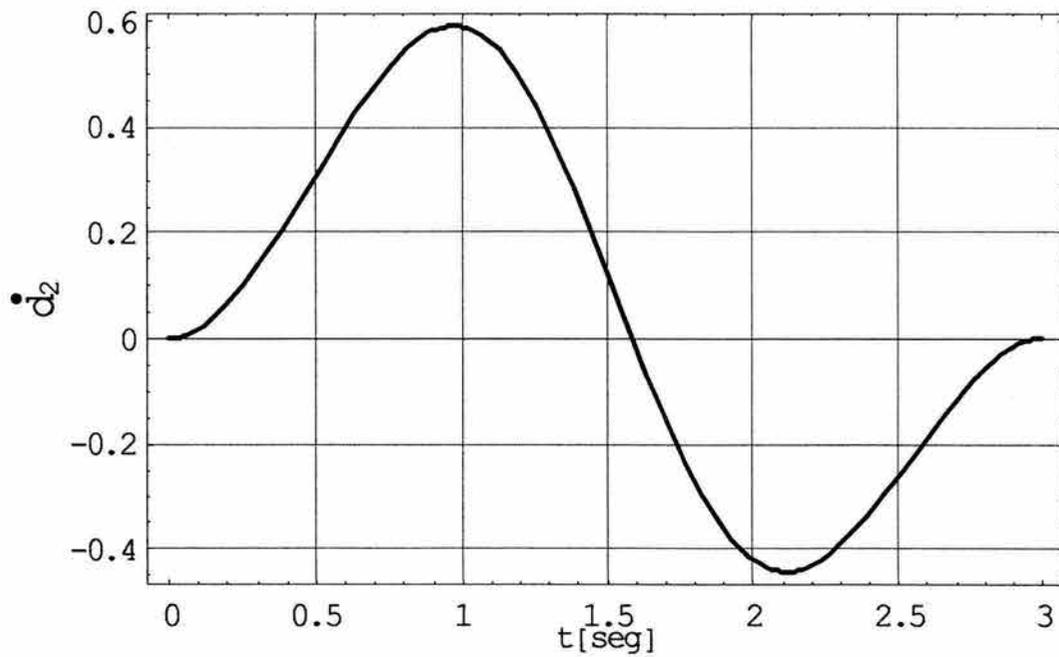
Gráfica 5.2. Velocidad de la primera articulación.



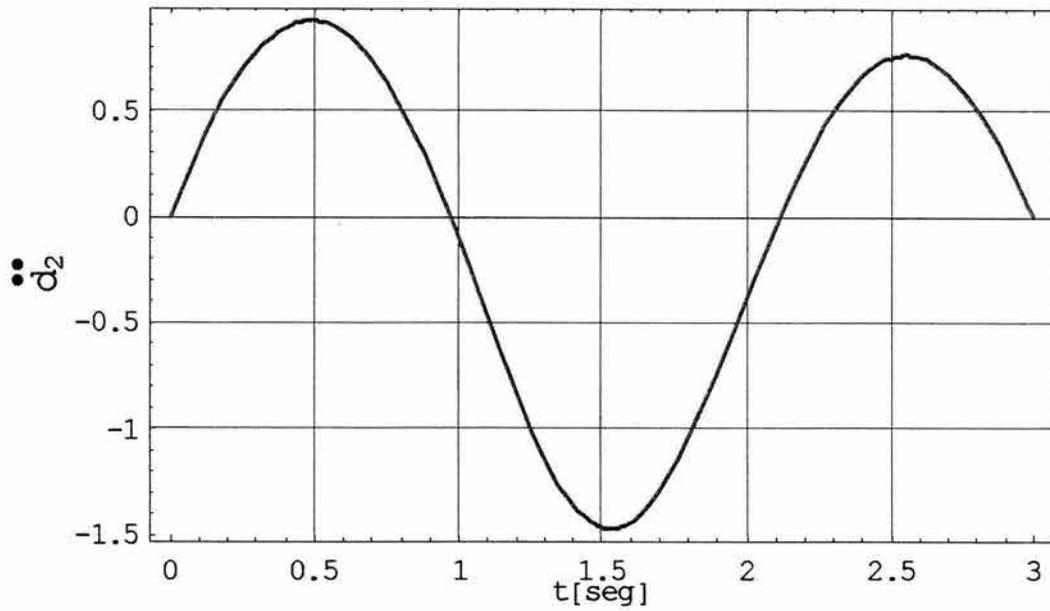
Gráfica 5.3. Aceleración de la primera articulación



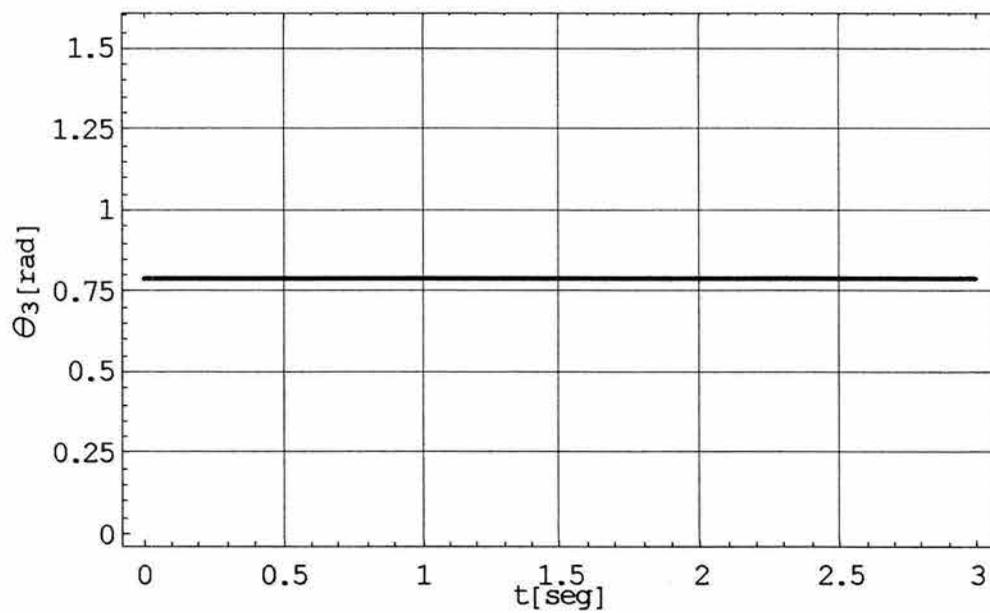
Gráfica 5.4. Desplazamiento lineal de la segunda articulación.



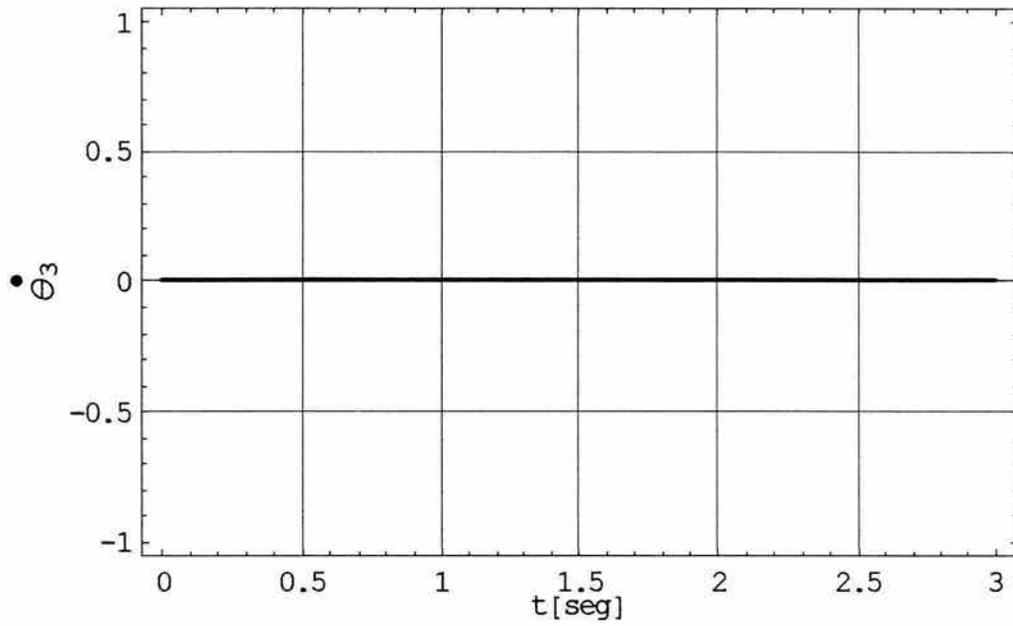
Gráfica 5.5. Velocidad de la segunda articulación.



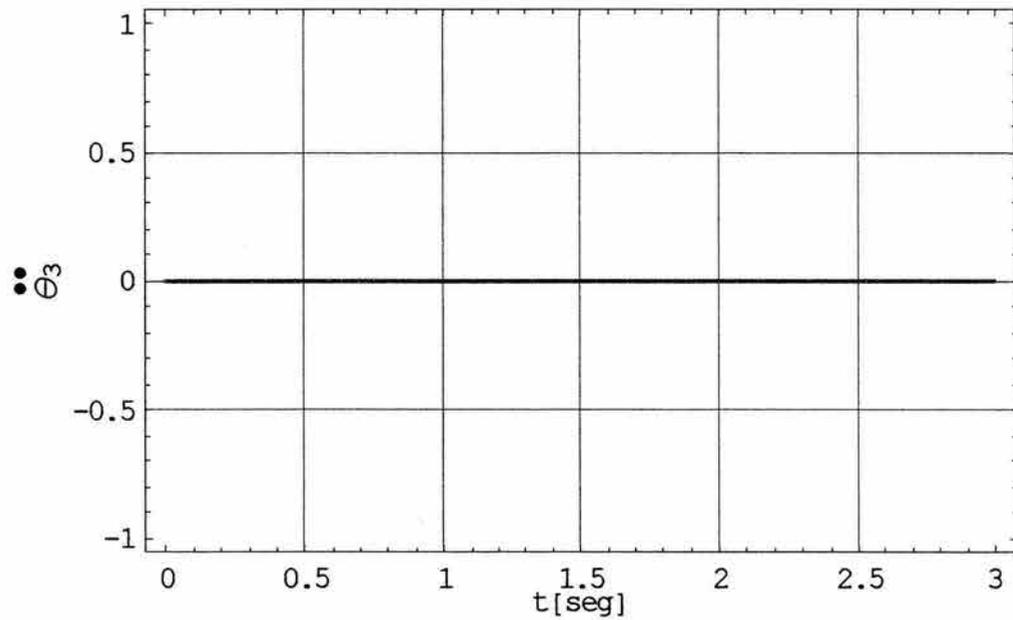
Gráfica 5.6 Aceleración de la segunda articulación.



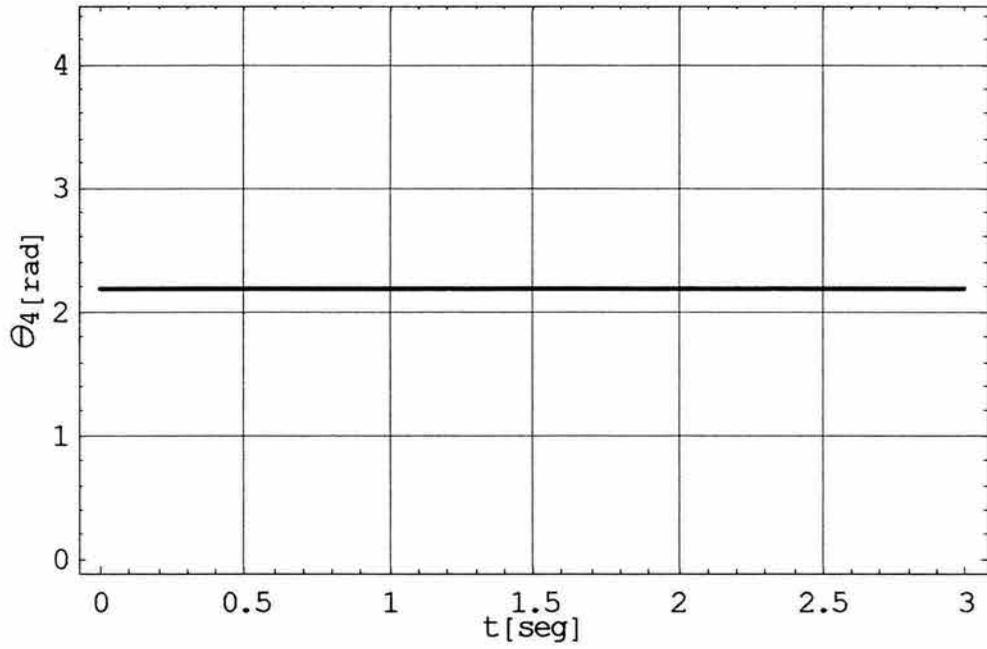
Gráfica 5.7. Variación de la tercera articulación rotacional.



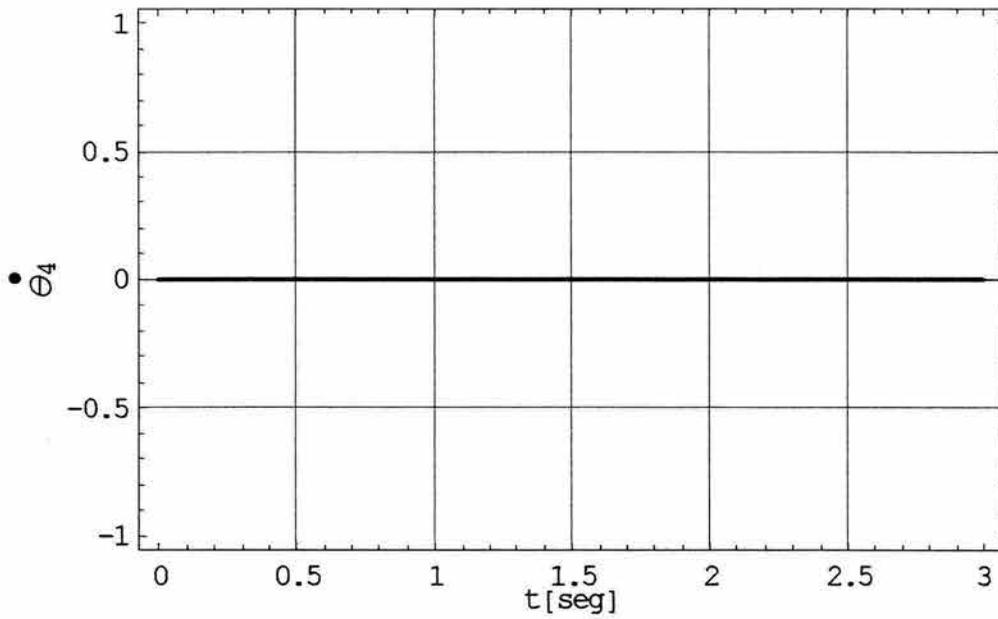
Gráfica 5.8. Velocidad de la tercer articulación.



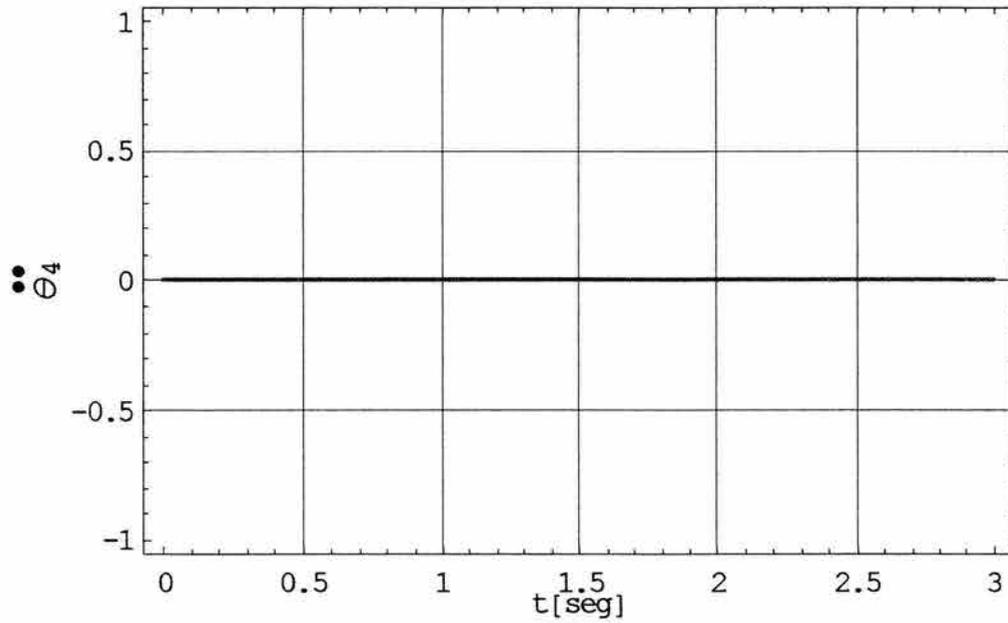
Gráfica 5.9. Aceleración de la tercer articulación.



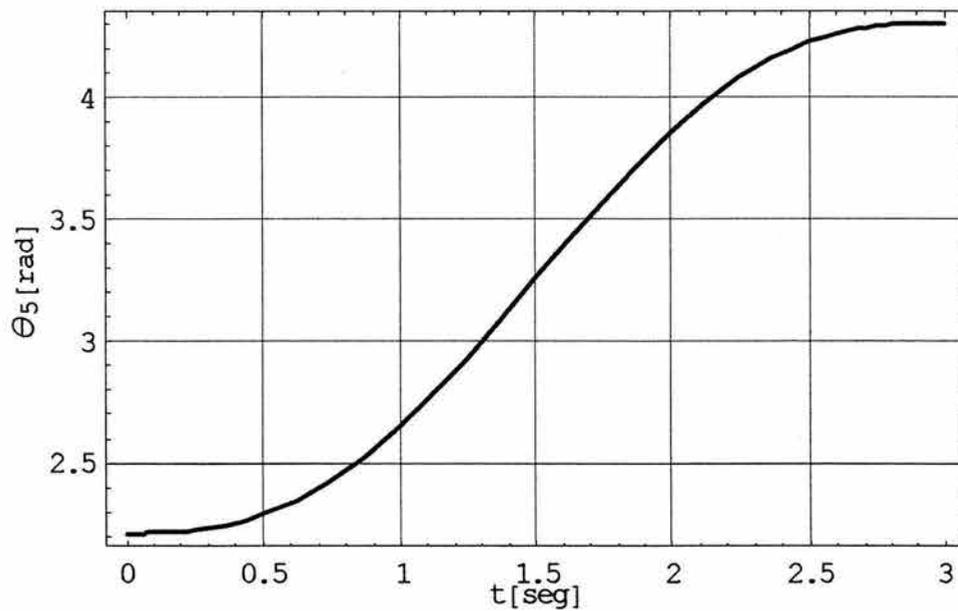
Gráfica 5.10. Variación de la cuarta articulación rotacional.



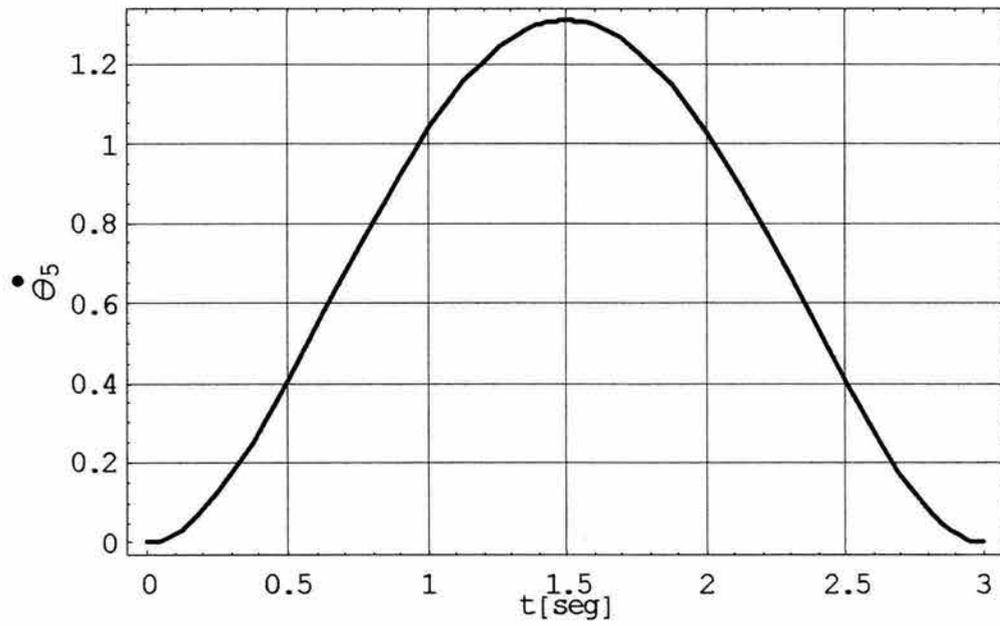
Gráfica 5.11. Velocidad de la cuarta articulación.



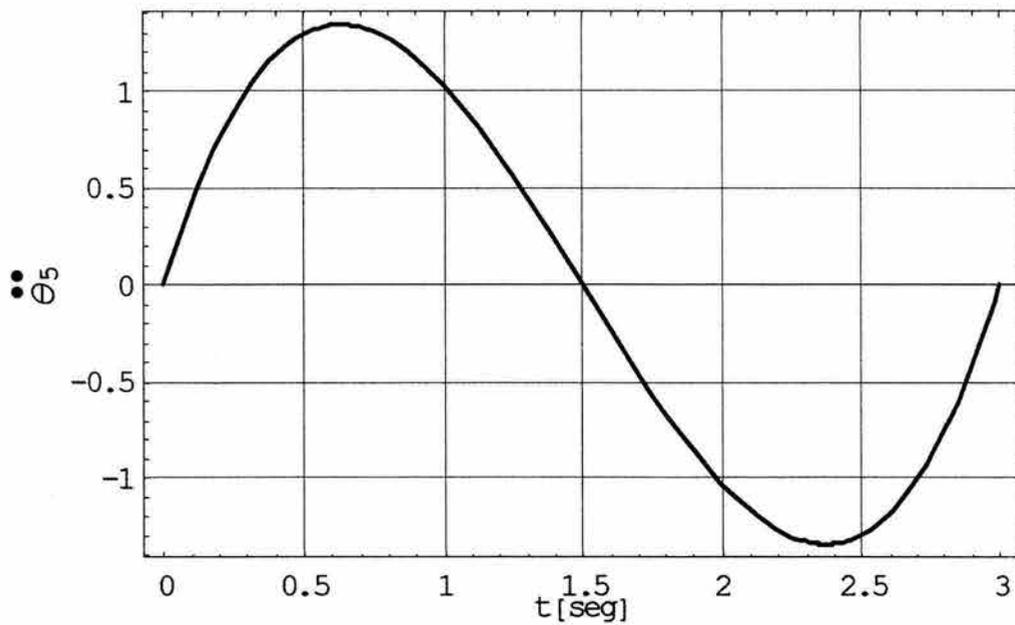
Gráfica 5.12. Aceleración de la cuarta articulación.



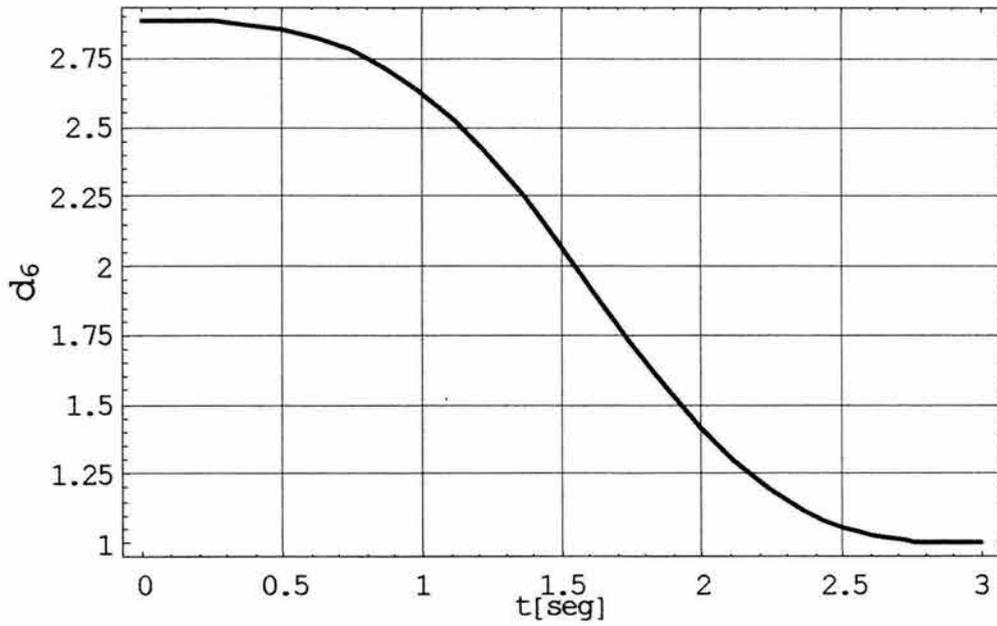
Gráfica 5.13. Variación de la quinta articulación rotacional.



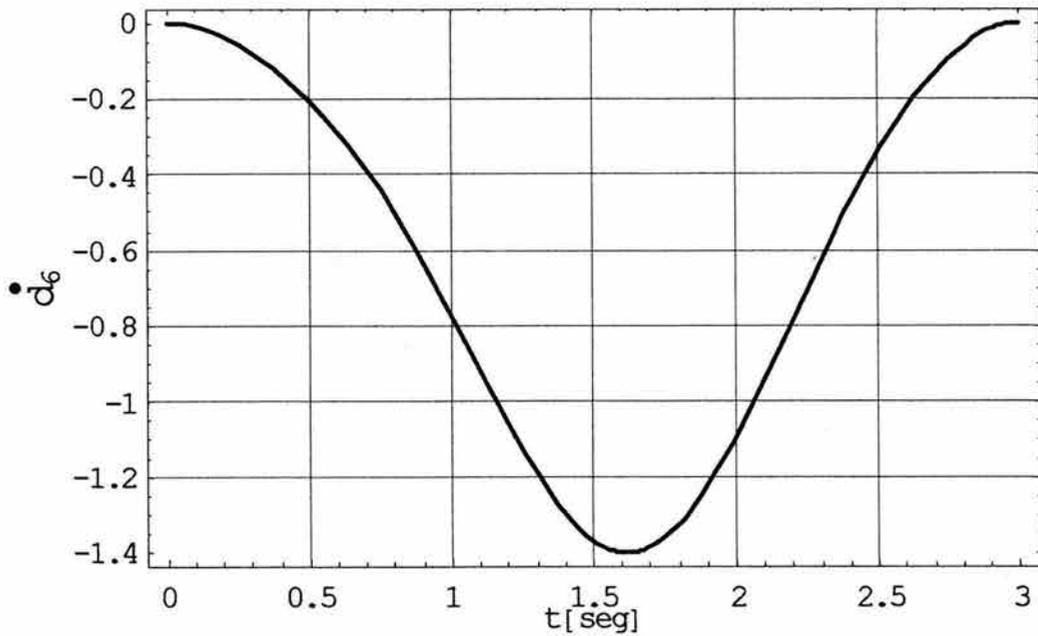
Gráfica 5.14. Velocidad de la quinta articulación.



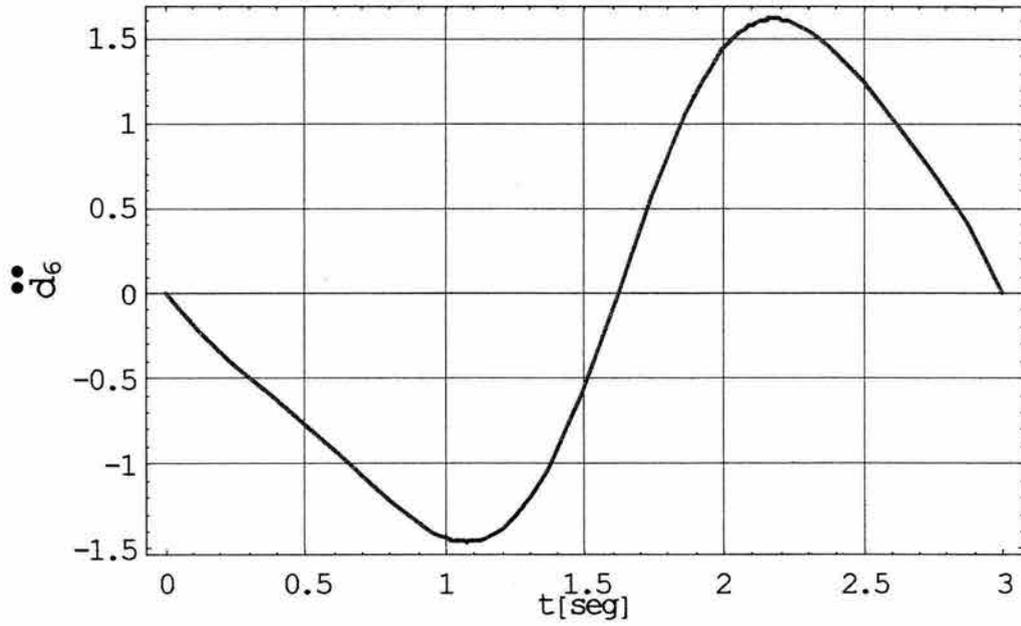
Gráfica 5.15. Aceleración de la quinta articulación.



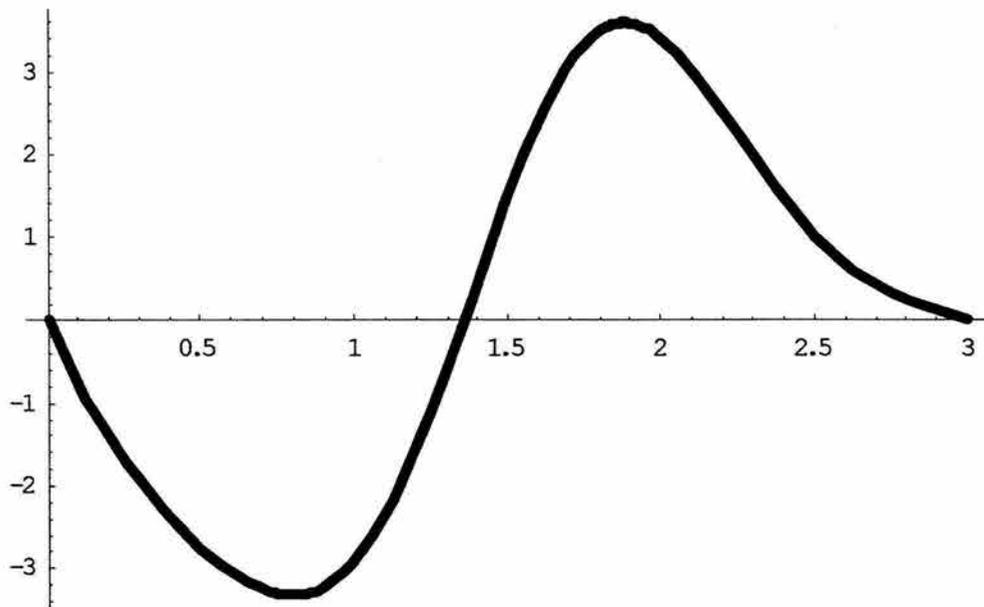
Gráfica 5.16. Desplazamiento lineal de la sexta articulación.



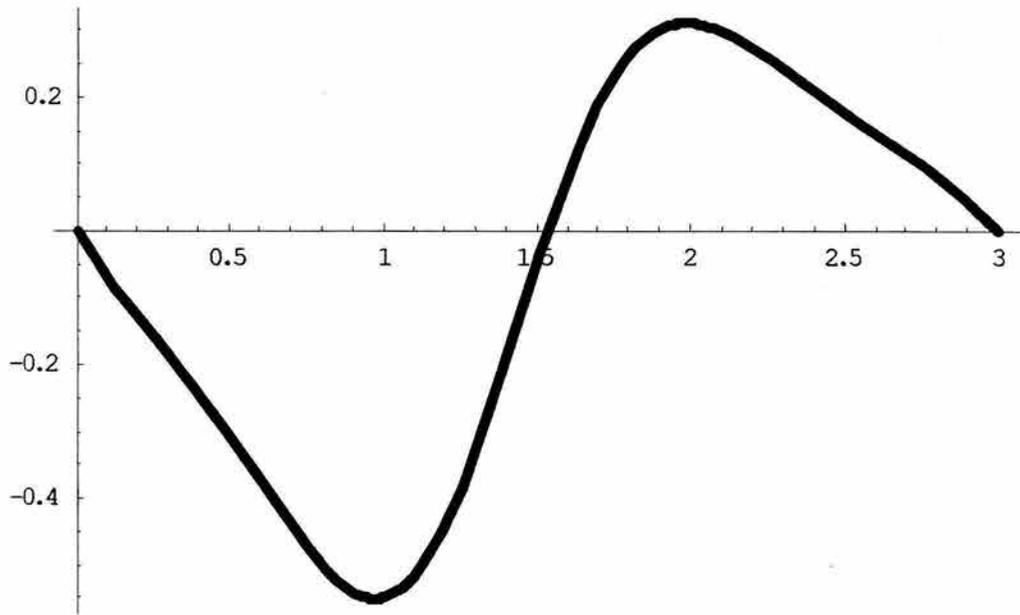
Gráfica 5.17. Velocidad de la sexta articulación.



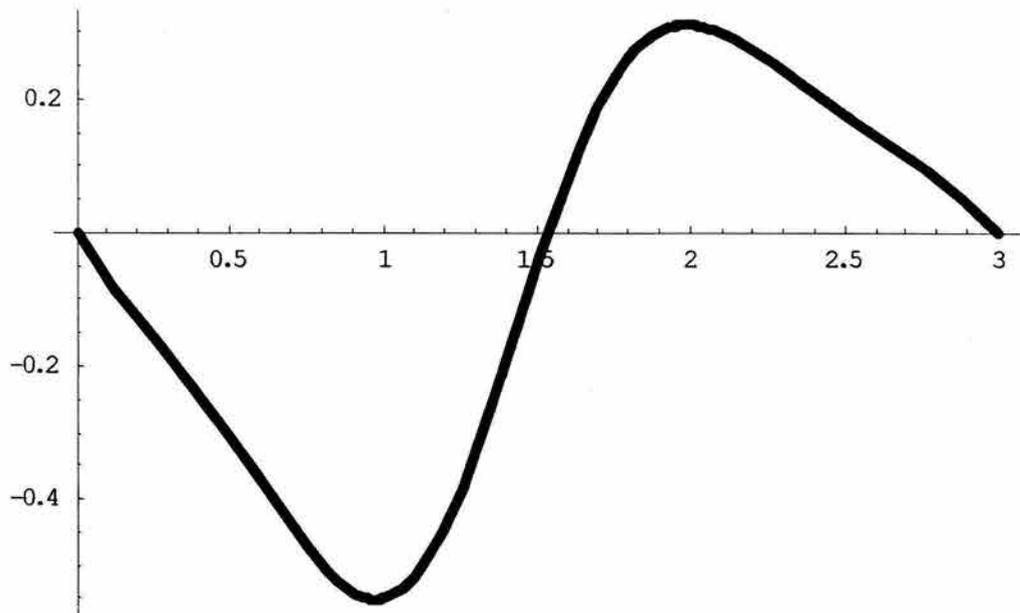
Gráfica 5.18. Aceleración de la sexta articulación.



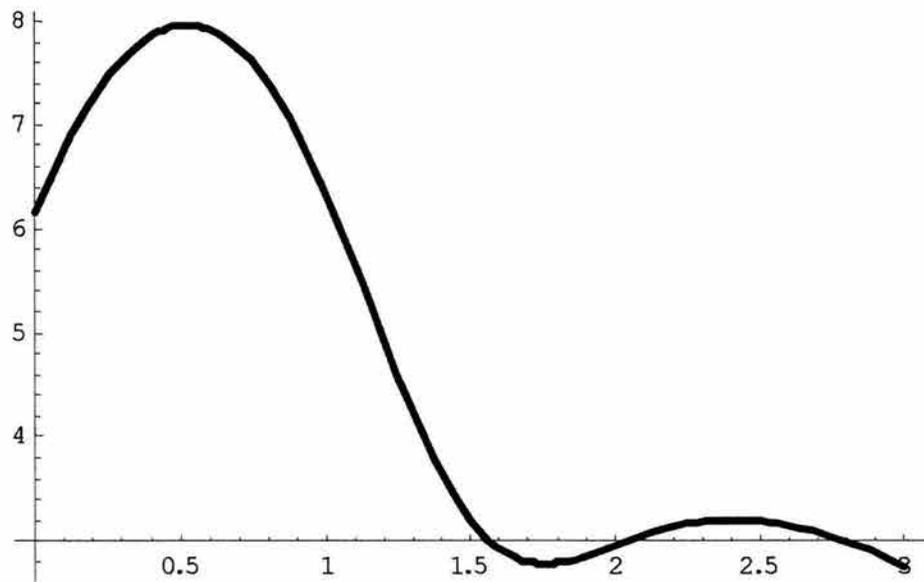
Gráfica 5.19 Fuerza requerida en la primera articulación (N)



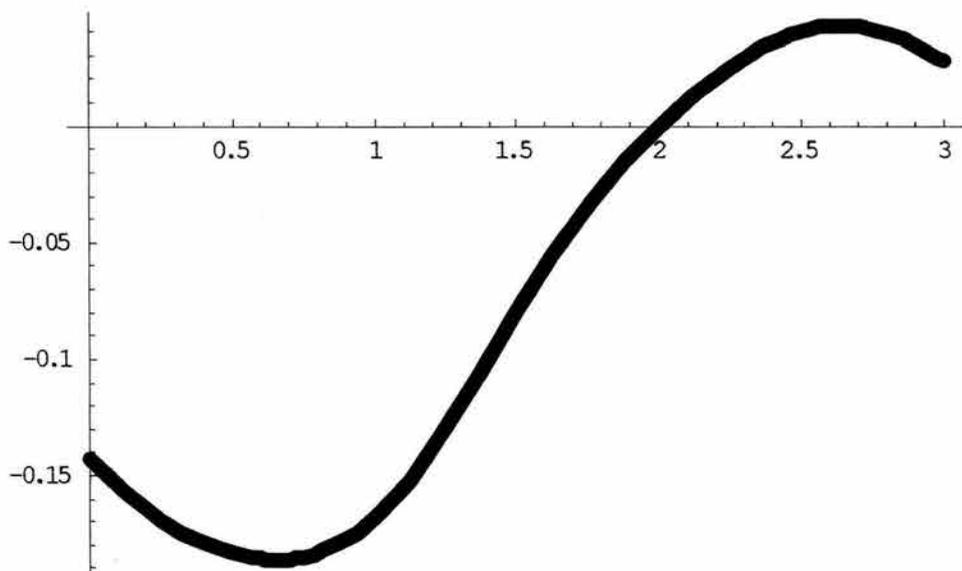
Gráfica 5.20 Fuerza requerida en la segunda articulación (N).



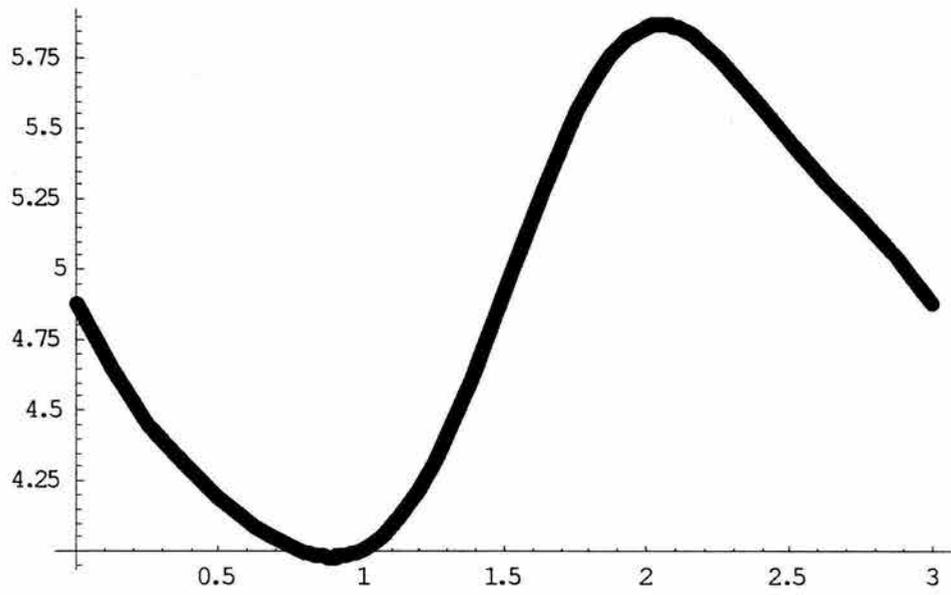
Gráfica 5.21. Par motriz requerido en la tercera articulación (N-m).



Gráfica 5.22. Par motriz requerido en la cuarta articulación (N-m).



Gráfica 5.23 Par motriz requerido en la quinta articulación (N-m).



Gráfica 5.24. Fuerza requerida en la sexta articulación (N).

# Capítulo 6

## Conclusiones

A través del desarrollo realizado en este trabajo se cumplen los objetivos planteados en un inicio.

Con respecto al objetivo principal, se concluye que el **Robot Manipulador Helicoidal PPSP** cuyo diseño se basa en la formulación del Tornillo de Rodrigues es capaz de desarrollar operaciones de transporte de piezas y adaptar su estructura mecánica conforme las condiciones iniciales y finales de la trayectoria cambian.

Con respecto a los objetivos secundarios se tiene para el número:

1. A fin de encontrar la configuración adecuada para el eslabonamiento de tornillo del manipulador helicoidal PPSP se obtuvo el modelo cinemático inverso correspondiente en términos de las coordenadas operacionales, hecho que es mostrado en el capítulo 2.
2. Para validar cada una de las ecuaciones obtenidas para las variables articulares del manipulador helicoidal PPSP se realizó una simulación en donde se muestra la evolución para cada articulación, al variar el parámetro  $[u_{\text{tornillo}}(t)]$ . Mostrando que dicho parámetro es un escalar en función del tiempo que varía desde "0", correspondiente al  $t = 0$ , hasta 1, correspondiente a  $t = t_f$ .

3. La transformación de tornillo  $T_{\text{tornillo}}(\bullet, \hat{e}, \varphi, {}^A\bar{S}_{\perp \hat{e}}, \mathbf{d}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  obtenida, es un operador lineal capaz de transformar a cualquier vector de posición conforme al movimiento de tornillo.

La transformación de tornillo encontrada contiene, cinco parámetros, a saber, cuatro de ellos corresponden a los cuatro parámetros obtenidos de la Formulación del Tornillo de Rodrigues y el último a un vector de posición que ubica el punto (perteneciente al cuerpo transportado) donde el órgano terminal del manipulador helicoidal PPSP toma la pieza de trabajo. Los puntos, descritos por los mencionados vectores de posición, experimentan desplazamientos en forma de hélice.

Las ecuaciones cinemáticas presentan algunas singularidades. Hay algunas posiciones iniciales y finales de tarea en las cuales el denominador de la Ec.(H) mostrada en el capítulo 4 se hace cero, así pues, no es posible encontrar los correspondientes parámetros del Tornillo de Rodrigues. Además, hay otra singularidad cuando la línea definida por los puntos  $E'-C'$  (mostrada en la figura (2.7)) llega a ser paralela al plano  $\hat{y}_0 - \hat{z}_0$ .

**Respecto de las hipótesis planteadas:**

**HIPÓTESIS 1:** El robot manipulador helicoidal PPSP, basado en el principio del Tornillo de Rodrigues, deberá ser capaz de transportar piezas de trabajo adaptando su postura conforme a las posiciones iniciales y finales de la tarea.

**CONCLUSIÓN HIPÓTESIS 1: Es verdadera.**

**HIPÓTESIS 2:** Debe existir un operador lineal parametrizado en función del tiempo, capaz de transformar cualquier vector de posición conforme a un movimiento de tornillo, en el que se basa el diseño del manipulador PPSP.

**CONCLUSIÓN HIPÓTESIS 2: Es verdadera.**

**HIPÓTESIS 3:** El arreglo PPSP deberá proporcionar los cuatro parámetros de tornillo de acuerdo a la formulación del desplazamiento general de Tornillo de Rodrigues.

**CONCLUSIÓN HIPÓTESIS 3:** Es verdadera.

## 6.1. Trabajo Futuro

En este trabajo se muestra la habilidad que tiene el Robot Manipulador Helicoidal PPSP en la ejecución de tareas de transferencia de materiales, es decir, donde el manipulador tiene como objetivo mover un objeto de un sitio (posición y orientación) a otro diferente (tareas "pick-and-place"), a través de una trayectoria en forma de hélice. Pero debido a la demanda de flexibilidad dentro de los procesos de manufactura es necesario conocer cual sería su desempeño en tareas y trayectorias diferentes.

Queda claro que es importante conocer si el manipulador PPSP es capaz de ejecutar trayectorias geométricas diferentes al movimiento de tornillo. Por lo tanto, un trabajo futuro tendrá que realizarse acerca de la planeación de trayectorias. Sin embargo las ecuaciones obtenidas de la cinemática inversa pueden ser empleadas para obtener una trayectoria distinta a la del tornillo. Si al órgano terminal del manipulador PPSP se le asigna una trayectoria diferente a la del tornillo, basta con encontrar el conjunto de parámetros de tornillo correspondientes a la trayectoria asignada.

**Falta página**

**N° 131**

- [8] Mavroidis, C. **Completely Specified Displacements of a Rigid Body and Their Application in the Direct Kinematics of In-Parallel Mechanisms.** ASME Design Technical Conferences. 1998. Atlanta, GA.
- [9] Juárez Campos, Ignacio; Oracio García, Lara y Juárez Campos, Beatriz. **The Inverse Kinematics of the RPSP Screw-Based Robot Manipulator.** The 4<sup>th</sup> International Conference on the Advanced Mechatronics (ICAM' 04). October 3-5, 2004. Asahikawa, Japan. pp 143-148.
- [10] Juárez Campos, Ignacio; Oracio García, Lara y Juárez Campos, Beatriz. **Trajectory Planning for the PPSP Helicoidal Robot Manipulator.** Internacional Symposium on Robotics and Automation 2004. August 25-27, 2004. Querétaro, México. pp 287-294.
- [11] Juárez Campos, Ignacio; Juárez Campos, Beatriz; García Lara, Oracio y Ramírez Méndez, Margarita. **The Inverse Kinematics of The PPSP Helicoidal Robot Manipulator.** Proceedings of the Tenth IASTED Internacional Conference on Robotics and Applications. August 23-25, 2004. Honolulu, Hawaii, USA. pp 22-27.
- [12] Juárez Campos, Ignacio; Oracio García, Lara y Juárez Campos, Beatriz. **The Inverse Kinematics of The SPRP Screw-Based Manipulator.** Proceedings of the Tenth IASTED Internacional Conference on Robotics and Applications. August 23-25, 2004. Honolulu, Hawaii, USA. pp 34-40.
- [13] Craig, John J. **Introduction to Robotics Mechanics and Control.** 1986. Addison-Wesley.
- [14] Ollero Baturone, Aníbal. **Robótica. Manipuladores y robots móviles.** 2001. Alfaomega Marcombo.
- [15] Barrientos, Antonio; Peñín, Luís F; Balaguer, Carlos y Aracil, Rafael. **Fundamentos de Robótica.** 1996. McGraw-Hill.

- [16] Angeles, Jorge. **Fundamentals of Robotic Mechanical Systems**. 1997. Springer.
- [17] Juárez Campos, Ignacio. “**Sobre las Regiones Geométricas Articulares y su Aplicación en el Mejoramiento del Desempeño de un Manipulador Mediante Estrategias Evolutivas**”. Tesis de Doctorado, División de Estudios de Posgrado, UNAM, Agosto 2002. 360 p.
- [18] Wentworth, Jorge y Smith, David Eugenio. **Geometría Plana y del Espacio**. 1995. Editorial Porrúa.
- [19] Piña Garza, E. **Dinámica de Rotaciones**. 1996. Colección CBI , UAM México.