

11281



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
BIOMÉDICAS

EVALUACION TEORICA DE LA MICRONATACION
COMO MECANISMO DE MOVIMIENTO
SUBCELULAR

TESIS DOCTORAL
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS
P R E S E N T A:

Biol. Mat. José Santiago González García

Asesor: Dr. Joaquín Delgado

México, D.F. Noviembre 2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres:

José Santiago y María Graciela.

A mis hermanos ...

Che, Mau, Li, Bibi, Tin.

A mi familia.

AGRADECIMIENTOS.

Quiero agradecer el apoyo económico que me concedió CONACYT (#143887) y la DGEP de la UNAM, para el desarrollo de mis estudios de doctorado.

A las instituciones en las que desarrollé distintas partes de mi trabajo:

Centro de Investigación sobre Fijación del Nitrógeno, UNAM.

Centro de Ciencias Físicas, UNAM.

Instituto de Física, UNAM.

Departamento de Matemáticas, UAM-I.

A mi asesor el Dr. Joaquín Delgado, por haber aceptado aventurarse en este proyecto y por toda su generosa y cordial ayuda.

A mis tutores y sinodales:

Dr. Gustavo Martínez Mekler, *Centro de Ciencias Físicas, UNAM.*

Dr. Germinal Cocho Gil, *Instituto de Física, UNAM.*

Dr. Enrique Merino Pérez, *Instituto de Biotecnología, UNAM.*

Dr. Hernán Larralde Ridaura, *Centro de Ciencias Físicas, UNAM.*

Dr. Marco A. José Valenzuela, *Instituto de Investigaciones Biomédicas, UNAM.*

Dr. Octavio Miramontes Vidal, *Instituto de Física, UNAM.*

por todo el apoyo que, de distintas formas, recibí de ellos para la culminación de este trabajo.

R E S U M E N

El trabajo desarrollado en esta tesis se inscribe dentro de la investigación teórica de los mecanismos de movimiento subcelular.

Mediante la aplicación de la Teoría de la Micronatación se construye un modelo de la traslación de las partículas subcelulares, en donde la hipótesis central es que el organelo se desplaza mediante deformaciones periódicas de baja amplitud de su frontera envolvente. Esta suposición se adecua bien a algunas de las distintas hipótesis deterministas que en la actualidad se proponen, en el ámbito de la Biología, como posibles explicaciones de la traslación de organelos membranosos.

En el presente trabajo se consideran dos casos, el de una esfera desplazándose en un medio fluido infinito y el de un círculo nadando dentro de un recipiente finito. La solución de cada uno de estos problemas produce resultados que, en sus aspectos cuantitativos y cualitativos, indican la viabilidad de la hipótesis de la micronatación como mecanismo de movimiento subcelular, tanto desde un punto de vista físico como biológico.

S U M M A R Y

The theoretical research of subcellular transport mechanisms is the general subject which this thesis belongs to.

A model for the translation of subcellular particles is made using Microswimming theory. The central assumption is that the organelle moves by deforming its shape through low amplitude periodic waves. This supposition fits well with most of the current biological deterministic hypothesis about organelle's motion.

In this work, two different cases are considered, a sphere moving in an infinite fluid domain and circle swimming inside a finite recipient. The solution of each of these problems seem to indicate, from a quantitative and qualitative point of view, the feasibility of microswimming as a mechanism of subcellular transport from both, physical and biological perspectives.

I N D I C E

<i>Resumen</i>	<i>i</i>
<i>Summary</i>	<i>ii</i>
Capítulo I. Introducción	9
I.1 Planteamiento del problema.....	9
I.2 Hipótesis actuales.....	9
1) Movimiento Browniano	9
2) Cambios de forma	10
3) Actividades metabólicas	10
4) Proteínas motoras	10
5) Cauda de cometa	11
I.3. Relación entre hipótesis.....	12
I.4. Número de Reynolds y Fluidos de Stokes.....	12
I.5. Teoría de la Micronatación.....	13
I.6. Plan, Hipótesis, Objetivo.....	15
Capítulo II. Micronatación	17
II.1. Fluidos de Stokes.....	17
II.1.1. Planteamiento General.....	18
II.1.2. Supuestos del Modelo de Stokes.....	19
II.1.3. Hidrodinámica clásica y Micronatación.....	20
II.2. Haz Fibrado.....	21
II.2.1. Descripción General.....	21
II.2.2. Algunas Precisiones.....	22
II.3 Espacio tangente.....	25
II.3.1. Descripción general.....	25
II.3.2. Precisiones.....	27
II.4 Métrica Potencia.....	27
II.4.1. Descripción General.....	27
II.4.2. Algunas Precisiones.....	28
II.5 Conexión de Stokes.....	28
II.5.1. Descripción General.....	28
II.5.2. Precisiones.....	29
II.6. Holonomía.....	30
II.6.1. Descripción General.....	30
II.6.2. Algunas Precisiones	31
II.7. Mecanismo del desplazamiento.....	31
II.8. Curvatura y Holonomía.....	32
II.8.1. Desplazamiento.....	35
II.9. Eficiencia.....	36
II.10. Procedimiento General.....	38
II.10.1. Algoritmo para el Desplazamiento.....	38
II.10.2. Algoritmo para la Eficiencia.....	38

Capítulo III. Caso tridimensional no acotado	39
III.1. Antecedentes	39
III.2. Marco General	40
III.2.1. Forma y Estrategia	40
III.2.2. Desplazamiento y Estrategia	41
III.2.3. Potencia y Estrategia	42
III.2.3.1. Base de Lorentz	43
III.2.4. Eficiencia	44
III.2.5. Coeficientes de Curvatura	44
III.3. Cambio de Base	46
III.4. Resultados	47
III.4.1. Curvatura caso tangencial	47
III.4.2. Curvatura caso radial	50
III.4.3. Potencia	51
III.4.3.1. Caso tangencial	52
III.4.3.2. Caso radial	53
III.4.4. Gráficas	54
III.5. Discusión	57
III.5.1. Física	57
III.5.1.1. Semejanzas	57
<i>i) Forma de las curvas D, \mathcal{E}</i>	57
<i>ii) Relación entre n y D</i>	57
<i>iii) Relación entre n y \mathcal{E}</i>	58
<i>iv) Relación entre n y η</i>	58
III.5.1.2. Diferencias	59
<i>i) Desplazamiento</i>	59
<i>ii) Potencia</i>	59
<i>iii) Eficiencia</i>	59
III.5.1.3. Flujo tangencial	59
III.5.1.4. Estrategias Mixtas	60
III.5.2. Biología	60
III.5.2.1. Modelo de la Envoltura	60
III.5.2.2. Deformaciones tangenciales v.s radiales . 61	
III.6. Conclusión	63
Capítulo IV. Caso bidimensional acotado	65
IV.1. Antecedentes	65
IV.2. Problema de Stokes	65
IV.3. Solución biarmónica	67
IV.4. Método general	69
IV.5. Traslación a lo largo del eje y	70
IV.6. Fórmula general del coeficiente de traslación	71
IV.6.1. Coeficientes de B'_1	73
IV.6.2. Coeficientes de Ψ	74
IV.7. Extensiones de Stokes	75
IV.7.1. Deformaciones Tangenciales	76

IV.7.1.1. Solución	78
IV.7.1.2. Caso $f(\beta) = \text{Cos}(m\beta)$	78
IV.7.1.3. Caso $f(\beta) = \text{Sen}(m\beta)$	81
IV.7.2. Deformaciones Transversales	82
IV.7.2.1. Caso $f(\beta) = \text{Cos}(m\beta)$	84
IV.7.2.2. Caso $f(\beta) = \text{Sen}(m\beta)$	85
IV.8. Tensor de esfuerzo	86
IV.8.1. Teorema de la divergencia	88
IV.9. Componentes horizontales	90
IV.10. Corchete de Lie	92
IV.10.1. Componentes	92
IV.10.2. Series de Fourier	94
IV.10.2.1. Caso $[v_m(\text{Cos}), v_n(\text{Cos})]$	95
IV.10.2.2. Caso $[v_m(\text{Cos}), v_n(\text{Sen})]$	96
IV.10.3. Dirección de traslación	97
IV.11. Escalamiento	98
IV.11.1 Similitud	98
IV.11.2. Normalización	99
IV.12. Algoritmo para el cálculo de la curvatura	101
IV.13. Potencia	102
IV.13.1. Cálculo de Φ	103
IV.14. Resultados	104
IV.14.1. Curvatura y desplazamiento	104
IV.14.2. Potencia básica y de brazada	105
IV.14.3. Eficiencia	113
IV.15. Discusión	113
IV.15.1. Física	114
IV.15.1.1 Curvatura	114
IV.15.1.2 Potencia	119
IV.15.1.3 Eficiencia	122
IV.15.2. Biología	126
IV.15.2.1 Estimaciones cuantitativas	126
i) Potencia.....	126
ii) Amplitud de deformación	127
IV.15.2.2 Características cualitativas	128
i) Direccionalidad	128
ii) Estabilidad	128
iii) Mecanismos biológicos	129
a) La membrana del organelo	129
b) Proteínas de membrana	129
c) Coatómeros	130
d) Mecanismos de transporte	
de membrana	131
e) Motores moleculares	131
iv) Estrategia hipotética	132
IV.16. Conclusión	132
IV.17. Perspectivas	133

Apéndice III.1	
Programa para el cálculo de curvatura y potencia	137
Apéndice IV.1	
Determinación de los coeficientes en la condición de Dirichlet....	139
Apéndice IV.2	
Determinación de los coeficientes de Ψ	141
Apéndice IV.3	
Verificaciones caso tangencial	149
Apéndice IV.4	
Verificaciones caso transversal	153
Apéndice IV.5	
Esfuerzo, Divergencia y Torca	155
Apéndice IV.6	
Programa de componentes del corchete de Lie	159
Apéndice IV.7	
Series de Fourier del corchete de Lie	161
Apéndice IV.8	
Término de desplazamiento en la dirección i	167
Apéndice IV.9	
Programa de curvatura (Caso Tangencial)	169
Apéndice IV.10	
Eficiencias caso bidimensional no acotado	173
Apéndice IV.11	
Extensión de la teoría de Stone a un dominio acotado	197
BIBLIOGRAFIA	201

C A P I T U L O I

INTRODUCCIÓN

I.1 Planteamiento del problema.

El tema general en el que se inscribe el presente trabajo es en el de los mecanismos de movimiento subcelular; ¿cómo se mueven las partículas subcelulares tales como mitocondrias, vesículas, etc.?

Actualmente se reconocen dos tipos básicos de movimiento subcelular en la célula eucarionte: azaroso y vectorial (o dirigido). El primero de ellos sería causado por el múltiple impacto de los elementos infinitesimales del fluido intracelular sobre el cuerpo en cuestión y podría resultar en un proceso de difusión. Dadas las dimensiones de las partículas subcelulares se espera que las fuerzas Brownianas sean siempre un componente influyente, en mayor o menor grado, sobre la dinámica total de un organelo cualquiera.

En el segundo caso se trata de un movimiento en el que la partícula subcelular trata de mantener una dirección y sentido preferentes y en donde, partiendo de un sitio origen determinado, tiene que alcanzar un destino específico dentro de la célula. Ejemplos de este tipo de movimiento serían las vesículas secretoras que, formándose por gemación en el aparato de Golgi, se mueven hacia la membrana celular para verter su contenido al medio extracelular después de fusionarse con dicha membrana en regiones específicas. Otro ejemplo es el movimiento de mitocondrias hacia las regiones de alta demanda de energía en células especializadas. En general se puede hablar del movimiento vectorial de muchos organelos membranosos dentro de la célula tales como endosomas, lisosomas, vacuolas etc.[1].

En la categoría de movimiento vectorial puede también incluirse el que realiza el ribosoma citoplásmico, un organelo no membranoso, durante el proceso de síntesis de proteínas.

I.2 Hipótesis actuales.

Son cinco las hipótesis principales que se han generado en los últimos años para explicar el mecanismo del movimiento de traslación vectorial de los organelos dentro de la célula. La hipótesis más reciente es la del cometa, mientras que las primeras tres que se dan a continuación, fueron sugeridas con anterioridad [2].

1) Movimiento Browniano. Aun cuando existen pruebas experimentales que descartan la posibilidad de que un proceso de difusión sea el responsable del movimiento vectorial de algunos organelos [2], y de que en general sólo se le concede alguna importancia en el caso de las pequeñas células procariontes [1, 3], el movimiento browniano es aun frecuentemente invocado como causa del desplazamiento de partículas subcelulares, por ejemplo en [4]. También como posible explicación de los numerosos reportes acerca de la persistencia de los procesos de exocitosis después de la destrucción

del citoesqueleto, problema que se discute más ampliamente en el punto 4 referente a las proteínas motoras.

2) Cambios de forma. En esta hipótesis el organelo se desplazaría ejecutando cíclicamente una secuencia de cambios de forma. Es decir que propiamente estaría nadando a través del medio intracelular. De hecho se llegó a describir la secuencia cíclica de deformaciones por las cuales atravesaba la mitocondria para conseguir trasladarse de un punto a otro dentro de la célula [5]. Cambios de forma concomitantes con desplazamiento también ocurren en el caso de vesículas de transportación en el axón, según se ha observado más recientemente [6]. Desde luego permanece el problema de averiguar si dichos cambios de forma son una causa o un efecto del movimiento del organelo.

3) Actividades metabólicas. La actividad metabólica de un organelo, ya sea mediante la acción de los distintos tipos de bombas y canales iónicos localizados en su membrana o por medio de cambios configuracionales de, por ejemplo, las proteínas de superficie, podría generar un campo de velocidades en el fluido que provocara el traslado del organelo en una dirección preferente. Lo anterior probablemente requeriría de la acción concertada de los elementos de membrana mencionados. Esta hipótesis fue originalmente concebida para la mitocondria [2].

4) Proteínas motoras. En esta hipótesis, también denominada como hipótesis del citoesqueleto, se propone que el transporte de carga intracelular sería efectuado por la actuación de proteínas motoras que, unidas por un lado al organelo por transportar y por otro a una fibra del citoesqueleto, se deslizarían a lo largo de ella mediante cambios conformacionales adecuados de la proteína motora, los cuales serían dependientes de energía química.

Los elementos estructurales del citoesqueleto de transportación, es decir los microtúbulos y las fibras de actina (actina-F), también tendrían una función específica de acuerdo a sus características físico-químicas. Los largos, gruesos y estables microtúbulos servirían básicamente para el transporte de larga distancia dentro de la célula mientras que las comparativamente delgadas, cortas y dinámicas fibras de actina se involucrarían más con el posicionamiento final del organelo [7].

El citoesqueleto y las proteínas motoras también se han involucrado como agentes causales de las corrientes citoplásmicas, que son un medio de transporte vectorial más típico de las células vegetales [1].

En cuanto a la física de estos fenómenos de movimiento hay que señalar que la dinámica de las proteínas motoras ha sido modelada frecuentemente utilizando ecuaciones del tipo Langevin [8-10]:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = k \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} U(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F} \right] + \xi(t) \dots (I.1)$$

en donde k es una constante de proporcionalidad, \mathbf{x} es el vector de posición del centro de masas de la proteína motora, $U(\mathbf{x}, t)$ es un potencial determinístico, \mathbf{F} es un campo de fuerzas externo y $\xi(t)$ es una función aleatoria que caracteriza ruido de algún tipo.

Se pueden resaltar dos aspectos generales de la situación actual de la hipótesis del citoesqueleto. A pesar del considerable cuerpo de evidencia tanto experimental como

teórica que lo sustenta, este modelo está aun en proceso de verificación y son muchas las preguntas que aun tienen que resolverse, especialmente con experimentos *in vivo*. Por ejemplo: ¿cuantas proteínas motoras mueven en realidad a un organelo?. A parte de las que participan en el movimiento ¿hay otras unidas a la membrana y si las hay son del mismo tipo, es decir son todas anterógradas o hay retrógradas también presentes?. Y en cualquier caso ¿cómo se coordinan para que resulte sólo el movimiento en el sentido deseado?. ¿Esta la proteína motora unida a la fibra del citoesqueleto mientras se desplaza con su carga, o por el contrario hay una distancia significativa entre ellas?. La respuesta a éstas y otras preguntas podría contribuir a cambiar la imagen de la dinámica subcelular expresada en la hipótesis del citoesqueleto y por lo tanto a modificarla o adecuarla.

Por otra parte existen contradicciones experimentales que aun no han sido resueltas, especialmente en lo concerniente a los experimentos de destrucción de parte del citoesqueleto de transportación. Existen reportes [11-20], algunos de ellos recientemente revisados [21-22], en los cuales ha quedado claro que, en ciertos sistemas celulares experimentales, la célula puede mantener su actividad secretora en prácticamente el mismo nivel, aún en ausencia de la red de microtúbulos, tanto por la vía basal de secreción como por la estimulada. Estos resultados se han obtenido tanto en células polarizadas (glándula lagrimal, epitelio) como no polarizadas (como por ejemplo, cultivos de líneas celulares GH3 de la glándula pituitaria) y básicamente utilizando nocodazol, una sustancia despolimerizante de los microtúbulos. En células tratadas con nocodazol, el aparato de Golgi se fragmenta en cuerpos vesiculares, que luego se dispersan en el citoplasma celular y a pesar de eso continua la exocitosis [15-20].

Parece poco probable que en células en las que la red de microtúbulos ha sido dañada y no funciona, las vesículas pueden aún ser llevadas por miosinas a través de la red de actina-F y continuar así con la secreción. Se ha reportado que la destrucción de solamente la red de actina en cierto tipo de células (GH3 y Theca) con citocalasina (B o D) tiene un efecto despreciable o aun aumenta la secreción de vesículas [14,23-24]. Esto se ha interpretado como que: 1) el transporte de estas vesículas no ocurre vía redes de actina-F y 2) la actina F, que es principalmente cortical en estas células, de hecho actúa como barrera o centro regulatorio de la exocitosis.

En mitocondrias también se tiene una situación similar, en donde la destrucción de los microtúbulos por colchicina no impide su movimiento direccional [2].

¿Cómo es que puede proseguir el movimiento vectorial subcelular cuando ha sido destruida la red de microtúbulos, siendo que éstos son las vías por sobre las cuales se mueven las proteínas motoras (kinesinas o dineínas) que se supone transportan a las vesículas a lo largo de toda la ruta de secreción y también a las mitocondrias, de acuerdo con la hipótesis del citoesqueleto?. Se pueden elaborar diversas explicaciones de estos resultados de manera que se mantenga la hipótesis del citoesqueleto [22], pero hasta el momento ninguna de ellas ha sido verificada en la práctica por lo que la contradicción permanece aun sin resolverse.

5) **Cauda de cometa.** Actualmente ha aparecido además la hipótesis del cometa, en donde el movimiento de vesículas de transportación se quiere explicar por la polimerización de fibras de actina que, organizadas por determinadas proteínas en la membrana de la vesícula, proporcionarían la fuerza necesaria para impulsar la carga a lo largo del trayecto [25]. Esta es una propuesta análoga a la hecha previamente para explicar el traslado de cierto tipo de parásitos intracelulares [26].

I.3. Relación entre hipótesis.

En general, el status actual de estas hipótesis puede resumirse diciendo que si bien las tres primeras nunca fueron totalmente rechazadas o aprobadas, permanecen hoy día relegadas en vista de la gran actividad presente, tanto experimental como teórica, alrededor de la hipótesis de las proteínas motoras. La hipótesis del cometa aunque genera investigación actual, aparentemente no recibe todavía mucha atención.

Por supuesto, desde un punto de vista lógico, una demostración positiva definitiva de cualquiera de las hipótesis no necesariamente descartaría la existencia de las demás, ya que no existe en Biología nada parecido a un "principio de exclusión", por lo que en último término, siempre sería necesario demostrar la inexistencia del resto de los mecanismos propuestos.

Desde un punto de vista experimental, es claro que las contradicciones en la hipótesis del citoesqueleto, señaladas en el punto 4 del apartado anterior, apuntan en la dirección de la posible actuación de otras formas de desplazamiento, cuyas modalidades de interacción podrían en principio ser muy variadas. Algunas de estas posibilidades se señalan a continuación.

Los mecanismos propuestos podrían ser "organelo-específicos", de modo que algunas partículas subcelulares utilizaran alguno de ellos preferentemente mientras que otras se moverían mediante algún otro. En relación con esto, piénsese en el caso previamente mencionado del movimiento del ribosoma citoplásmico, el cual ocurre, como se ha demostrado experimentalmente, en ausencia de cualquier elemento del citoesqueleto, ya sean estas fibras o motores moleculares asociados. En realidad, se ha propuesto que el propio ribosoma sería en sí mismo un motor molecular [27-28] cuya dinámica está aún lejos de comprenderse en términos de un modelo biofísico verificado.

Otra posibilidad es que dos o más de los mecanismos propuestos podrían co-existir, de modo que cada uno fuera sólo un componente de la resultante final. De hecho este debe de ser el caso al menos del movimiento browniano, como se citó anteriormente.

Se puede concebir también que algún tipo de organelo echara mano de varios de los mecanismos citados, de acuerdo a las circunstancias particulares del medio celular.

Finalmente, es posible que existiera un mecanismo central principal que, solamente cuando registra alguna falla, es relevado por algún otro medio de generación de movimiento. Esta es precisamente la supuesta situación del movimiento browniano en relación con los experimentos de destrucción del citoesqueleto, como ya se mencionó.

I.4. Número de Reynolds y Fluidos de Stokes.

Una cosa cierta que comparten las cinco hipótesis anteriormente mencionadas es el régimen dinámico en el que se encuentra el fenómeno de movimiento que pretenden explicar. Dada la relación entre el tamaño y la velocidad típica de un organelo subcelular con la viscosidad del medio en el que se mueve, la traslación de las partículas subcelulares ocurre a bajos números de Reynolds. En este régimen dinámico en el que se carece de fuerzas inerciales, el cambio de forma es la única posibilidad física real que tiene un objeto para poder autopulsarse.

El número de Reynolds, Re , es un parámetro adimensional que mide la relación entre las fuerzas inerciales y las viscosas que actúan sobre un cuerpo que se mueve en un fluido. Se define como:

$$Re = rV\rho/\eta = rV/\nu$$

en donde r es un "radio generalizado" o longitud típica del cuerpo que se mueve con velocidad típica V en un fluido de densidad ρ y viscosidad η o equivalentemente, en un fluido de viscosidad dinámica ν (que para el agua es de $10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$). Por ejemplo, un ser humano nadando en agua tiene un $Re \approx 10^4$ mientras que los peces de acuario se encuentran a $Re \approx 10^2$ y las bacterias tienen un Re característico de alrededor de 10^{-5} . En el caso de partículas subcelulares se tiene $Re \approx 10^{-8}$.

Como se establece en la ley de similitud de la Mecánica de Fluidos [29], dos situaciones con el mismo número de Reynolds son dinámicamente similares, es decir que en ese caso, el cuerpo encara los mismos problemas de movimiento. Por ejemplo, un

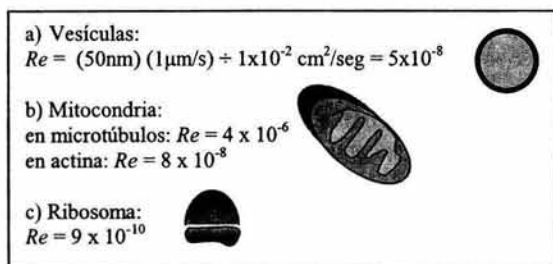


Figura 1.1. Valores típicos del número de Reynolds para algunos organelos.

cuerpo del tamaño de ser humano estaría a $Re \approx 10^{-8}$ nadando en melaza fría.

A bajos Re las fuerzas viscosas prevalecen sobre las inerciales. Como consecuencia un objeto se moverá únicamente si en ese momento hay una fuerza actuando sobre él. Por lo tanto un organismo o partícula subcelular sólo tiene a la geometría, a través del cambio de forma, como agente motor para desplazarse continuamente a

través de un medio fluido. Una secuencia cíclica de cambios de forma constituye una estrategia de natación particular en la cual el objeto avanzará empujándose y girando contra el fluido para conseguir, como reacción y si la estrategia es exitosa, traslación y rotación netas.

A bajos Re el movimiento del fluido es altamente ordenado y el mezclado es difícil. Entonces, los flujos son básicamente reversibles, un hecho dramatizado en los videos de Taylor [30] que muestran cómo una mancha de tinta vertida en melaza recupera su forma inicial revirtiendo la secuencia de movimientos de mezclado. Lo anterior implica que el parámetro temporal es irrelevante en realidad, el patrón de movimiento generado por una estrategia de natación luce igual independientemente de la velocidad con la que ésta se ejecute, un hecho reflejado en el carácter autónomo de las ecuaciones de Stokes, que son las que se utilizan generalmente para modelar este tipo de fluidos.

1.5. Teoría de la Micronatación.

Otra consecuencia de la reversibilidad de los fluidos de Stokes es que las estrategias de natación recíprocas no producen traslación neta, algo que se conoce a veces como "teorema de la ostra" [31]. Una estrategia de natación es recíproca cuando el cuerpo vuelve

a su forma inicial simplemente revirtiendo la secuencia de deformaciones ejecutada en un principio.

El teorema de la ostra es parte de lo que se conoce como Teoría de la Micronatación, la cual pertenece al campo de la Hidrodinámica Teórica y se deriva de la aplicación de las Teorías de Norma a la Cinemática de cuerpos deformables que se desplazan en fluidos a bajo Re [32]. Esta teoría, de creación relativamente reciente [33], ha sido aplicada a fenómenos de movimiento biológico únicamente a nivel de organismos, por ejemplo para explicar, con cierto éxito, el movimiento de algunas bacterias y gusanos microscópicos [34-35]. Lo que hace interesante a esta teoría en relación con el problema del movimiento de partículas subcelulares, es precisamente su énfasis en los cambios de forma como agentes causales del movimiento autopropulsado de un cuerpo a bajos Re .

La forma y sus cambios son un hecho importante en Biología, ya no se diga a nivel de los organismos sino también a nivel subcelular, en donde forma y función tienen una estrecha relación en los distintos organelos y de hecho cada uno presenta una morfología particular que sirve para definirlos.

Intuitivamente es claro que incorporar a la forma y sus cambios puede ser esencial en la modelación matemática de los fenómenos de movimiento subcelular, algo que sin embargo no ha sido hecho hasta ahora.

Por un lado se tiene que los modelos de Langevin tratan a las muy peculiares proteínas motoras solo como puntos geométricos, aun y cuando, con bastante ingenio, algo de la particular morfología de los motores moleculares puede plasmarse en la parte determinista de la ecuación de Langevin (I.1), pero esto nunca de manera que quedase explícita una única morfología en el modelo. Por otro lado, las aplicaciones de la Micronatación han quedado restringidas hasta ahora al nivel de los organismos, cuya variedad de formas y condiciones de frontera son diferentes de las del nivel subcelular.

Es importante señalar aquí que la Teoría de la Micronatación no es una teoría acerca de un mecanismo de movimiento en particular. En su aplicación al fenómeno de movimiento subcelular no se supone la verdad de, por ejemplo, ninguna de las cinco posibilidades dadas anteriormente en la sección I.2. La Micronatación es una teoría acerca de las características hidrodinámicas (cinéticas y energéticas) del patrón de fluido que se genere como consecuencia del movimiento de un cuerpo deformable.

La relación entre la Micronatación y los mecanismos de generación de movimiento se establece a través del modelo de la envoltura [36], en donde se supone que el agente que de hecho está físicamente ejecutando las deformaciones periódicas, no es necesariamente la membrana del cuerpo, sino algunas extensiones de ella, que pueden, al rodearlo, envolverlo y que son de hecho las que se encargarían de ejecutar los movimientos de deformación necesarios para generar un determinado campo de velocidades en el fluido circundante.

Piénsese por ejemplo en la mecánica de movimiento de los microorganismos ciliados. Las deformaciones periódicas necesarias para generar traslación no las ejecuta su rígida membrana celular, cosa que haría al proceso energéticamente incoachable debido a la magnitud de los esfuerzos requeridos. En cambio, esos esfuerzos son trasladados a estructuras mucho más flexibles como los cilios, que batiendo rítmicamente el fluido circundante, generan en él un campo de velocidades de ciertas características que logra el impulso del microorganismo.

Así, en el caso subcelular, la envoltura podría estar formada por proteínas que ejecuten cíclicamente cambios conformacionales o por bombas y canales iónicos, al modo señalado por la hipótesis 3 de actividades metabólicas. O podría también estar formada por

motores moleculares como en la hipótesis 4, en donde una o más proteínas motoras unidas a la superficie del organelo agitarían el fluido por medio de cambios conformacionales cíclicos dependientes de energía. Finalmente, cabe la posibilidad de que en el caso de los organelos, la membrana completa al ser más flexible que la celular, esté de hecho ejecutando las deformaciones, como lo señala la hipótesis 2 de cambios de forma.

Pero de los resultados de la Teoría de la Micronatación no se desprende necesaria y unívocamente un mecanismo particular de movimiento, sólo se pueden sugerir posibilidades compatibles con las predicciones de la teoría, tanto en su aspecto cinético como energético. Es entonces sólo una herramienta para modelar el desplazamiento de objetos deformables, es decir que presupone que existe ya dada una cierta manera de producir los cambios de forma, mecanismo que no le concierne mas que por sus características cinéticas, tales como los parámetros típicos de la onda de deformación, amplitud, período etc.

1.6. *Plan, Hipótesis, Objetivo.*

En esta tesis se aplica la idea de la micronatación al fenómeno del movimiento de traslación de partículas subcelulares, porque:

a) La mayoría de las hipótesis deterministas actuales proponen mecanismos de desplazamiento que pueden ser representados por cambios de forma de una envoltente flexible del cuerpo en movimiento.

b) Experimentalmente, se observan cambios de forma conspicuos que ocurren simultáneamente con el movimiento vectorial de traslación de algunos organelos [6].

El presente trabajo es un primer intento de aplicación de la Teoría de la Micronatación al nivel subcelular, motivo por el cual conviene comenzar por limitarse a considerar inicialmente sólo a formas y tipos de deformación relativamente simples de modelar matemáticamente.

Por esta razón es que la forma del nadador se supondrá esférica, mientras que con respecto al medio circundante, la premisa inicial más simple es que se trata de un medio ilimitado. Posteriormente se hace la suposición de que el nadador subcelular se mueve en un medio acotado, lo que es mas realista pero requiere de reducir el problema a dimensiones, para no comprometer demasiado la sencillez del modelo.

En ambos casos se asumirá que el cuerpo se desplaza a través del fluido autopropulsándose mediante pequeñas deformaciones cíclicas de su frontera lo cual, dentro de la teoría de Micronatación, brinda la posibilidad de obtener resultados analíticos.

Estos principios teóricos son los que esencialmente configuran al modelo de Micronatación que en concreto se aplica en el presente trabajo.

Se puede ahora enunciar, en términos generales, la hipótesis central de esta tesis:

Si el modelo de Micronatación aquí empleado puede explicar el movimiento vectorial de determinadas partículas subcelulares, entonces se esperaría:

1) La existencia en los organelos de una envoltente deformable propulsora, es decir de un mecanismo de accionar periódico responsable de la generación de un flujo hidrodinámico impulsor, cuyas características en este caso debieran de poder explicarse por ondas de baja amplitud de dicha envoltente.

2) Un acuerdo razonable, tanto en términos cuantitativos como cualitativos, entre los resultados teóricos y datos experimentales relevantes.

El objetivo que se persigue es dar una evaluación de la factibilidad del modelo de Micronatación empleado. Dicha evaluación consiste en analizar las consecuencias teóricas de dicho modelo, mediante la comparación de sus predicciones contra hechos y datos experimentales de la Biología Celular y la Biofísica, tanto en el orden cualitativo como cuantitativo.

Entonces, resumiendo, se utiliza a la teoría de la Micronatación, que se expone en el capítulo II, para calcular algunos parámetros cinéticos y energéticos en dos casos: el de un nadador esférico en un medio no acotado (capítulo III) y el de uno circular moviéndose en un fluido acotado (capítulo IV), el cual propiamente sería el modelo bidimensional de una vesícula de transportación moviéndose dentro de una célula. Conjuntando los resultados de los dos casos será posible dar algunas estimaciones cuantitativas del modelo tridimensional acotado. Además, los resultados teóricos que se obtengan serán comparados con datos y hechos experimentales y así se podrá discutir y concluir, en cada caso, acerca de algunas de las posibilidades que teóricamente tiene la micronatación como modelo de los mecanismos de movimiento subcelular.

CAPITULO II

MICRONATACION

En esta sección se tratan de explicar los fundamentos de la teoría de Micronatación utilizando el enfoque mas reciente, en el cual se reformulan algunos de los conceptos y métodos clásicos de las Teorías de Norma en términos de los de la Geometría Diferencial [36-38].

En aras de la claridad, en algunos de los temas se da primeramente una exposición heurística informal de los principales conceptos de la teoría y enseguida se ocupa un apartado extra para dar algunas precisiones matemáticas.

II.1. Fluidos de Stokes.

Considérese un elemento o partícula de un fluido con densidad constante ρ que se desplaza a través del medio con una velocidad \vec{v} . De acuerdo con la Ley de Euler, la fuerza total que actúa sobre la partícula es igual a la tasa de cambio de su momento total. En general sobre el elemento actúan dos tipos de fuerzas, las de superficie y las volumen (o de masa). Las fuerzas de superficie son debidas a la interacción de corto alcance que se da entre la frontera de la partícula y el medio fluido a su alrededor, mientras que las fuerzas de volumen son de largo alcance y pueden afectar cualquier parte del fluido. Un ejemplo de este tipo de fuerzas es la gravedad. En términos de la derivada material y en un fluido de densidad constante (es decir incompresible), la ecuación que establece el balance del momento lineal de la partícula es [39]:

$$\underbrace{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}}_{\text{Tasa de cambio del momento total por unidad de volumen}} = \underbrace{\nabla \cdot \Pi}_{\text{Esfuerzos sobre el elemento por unidad de volumen}} + \underbrace{\rho f}_{\text{Fuerzas de masa sobre el elemento por unidad de volumen}}$$

en donde Π es un tensor de segundo orden (diádica) conocido como tensor de esfuerzos y que para fluidos Newtonianos incompresibles se expresa por:

$$\Pi = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

en donde p es la presión, μ la viscosidad dinámica, $\mathbf{I} = \delta_{ij}$ es el tensor unitario y \mathbf{D} es el tensor de deformaciones:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [(\nabla\vec{v}) + (\nabla\vec{v})^t]$$

en donde el superíndice t denota a la transpuesta.

Substituyendo la expresión de Π en la ecuación de balance se obtiene:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho f$$

que es la ecuación de Navier-Stokes para un fluido newtoniano, incompresible, de densidad y viscosidad constantes. Ésta ecuación no-lineal, es una de las distintas ecuaciones de campo que definen las leyes mas generales que debe de satisfacer el movimiento de un medio continuo.

Los fluidos de Stokes se definen a partir de las siguientes reglas constitutivas. A bajos números de Reynolds las fuerzas viscosas (esfuerzos) predominan sobre las inerciales, por lo que estas últimas pueden despreciarse. Si además se quiere estudiar únicamente el caso estacionario, es decir aquel en el cual el campo de velocidades solo depende de la posición y no del tiempo, resulta que:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\vec{v} = 0$$

Además, en una situación en donde también se puedan despreciar las fuerzas de masa, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a:

$$\mu\nabla^2\vec{v} = \nabla p \dots (2.1)$$

que se conoce como la ecuación de Stokes y define la conducta de los fluidos a bajos números de Reynolds. De acuerdo con la ley de similitud de Reynolds [29], esta ecuación describe la dinámica de un nadador ya sea cuando este es comparativamente grande y/o rápido pero se mueve en un fluido muy viscoso o cuando es pequeño y/o lento, aun nadando en un fluido de relativamente baja viscosidad como el agua.

Es interesante hacer notar que la ecuación de Stokes es lineal, en el sentido de que si (v_1, p_1) y (v_2, p_2) son dos de sus soluciones, entonces (v_1+v_2, p_1+p_2) es también una solución. Es entonces factible lograr soluciones exactas en muchos casos, aún en los relativamente más complejos, a través de técnicas de superposición aplicables a ecuaciones diferenciales parciales lineales [39]. Por supuesto si las condiciones de frontera son no-lineales, aún se tendrá, en otro sentido, un problema no-lineal [58].

II.1.1. Planteamiento General. En general el problema que se tiene es el de un objeto de determinado tamaño y forma que se desplaza en un fluido el cual ocupa un dominio \mathcal{D} , que puede estar acotado o no, dentro de un espacio con cierta dimensión (bidimensional o tridimensional). Este dominio \mathcal{D} es siempre exterior al nadador, es decir que no se considera al fluido que el cuerpo pudiera contener dentro de sí.

Debido a lo realmente pequeños que son los números de Reynolds, Re involucrados en la dinámica subcelular ($\sim 10^{-8}$), el movimiento de un objeto desplazándose en un fluido en estas condiciones queda razonablemente bien descrito por la ecuación de Stokes (2.1) a la que se le agrega la condición:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \dots (2.2)$$

en el caso de un fluido incompresible. El campo vectorial incógnito \vec{v} define la velocidad del fluido en cada punto del dominio en el que éste se encuentre, p es la presión y μ es la constante de viscosidad dinámica del fluido en cuestión.

Una de las condiciones de frontera que es necesario especificar corresponde a la de la frontera de un nadador con forma q . En todo el presente trabajo se asumirá siempre que el campo de velocidades del fluido iguala al campo vectorial \vec{U} de velocidades instantáneas de deformación sobre q :

$$\vec{v}|_q = \vec{U} \dots (2.3)$$

Esta condición se conoce como de no-resbalamiento, el fluido se supone perfectamente adherido a la frontera del objeto en movimiento, de manera que ambos tienen la misma velocidad en dicha frontera.

La última condición que es necesario especificar corresponde a la velocidad del fluido $\vec{v}|_{\partial\mathcal{D}}$ sobre la frontera $\partial\mathcal{D}$ del dominio \mathcal{D} . Estas condiciones son particulares de los casos no acotado y acotado y se dan en los capítulos correspondientes (III y IV resp.).

Al problema de encontrar a los campos \vec{v} y p solución de la ecuación (2.1), dadas las condiciones (2.2), (2.3) y $\vec{v}|_{\partial\mathcal{D}}$, se le conoce como Problema Exterior de Stokes o simplemente Problema de Stokes. Nótese que aplicando el operador rotacional a ambos lados de (2.1) se obtiene:

$$\mu\nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

puesto que el rotacional de un gradiente es cero. De esta manera se tiene una sola ecuación en la incógnita \vec{v} , lo que indica que es posible resolver (2.1) encontrando primero el campo de velocidades que satisfaga las condiciones de frontera impuestas, y después integrar dicho campo, de acuerdo con (2.1), para obtener finalmente la presión.

Al campo solución \vec{v} , frecuentemente denotado también como \hat{v} , se le denomina extensión de Stokes, en el sentido de que, como define el flujo correspondiente a la condición de frontera \vec{U} en todo punto del dominio exterior \mathcal{D} , se puede pensar como que \hat{v} extiende a dicha condición de frontera a todo \mathcal{D} .

Un elemento central de la resolución de un problema de hidrodinámica es el tensor de esfuerzos $\Pi(\hat{v})$ que se obtiene una vez que se calculan con la extensión de Stokes \hat{v} y la presión p . El tensor de esfuerzos contiene toda la información necesaria para obtener los parámetros dinámicos y aun energéticos del fluido en movimiento.

II.1.2. Supuestos del Modelo de Stokes. La aplicabilidad de la ecuación de Stokes (2.1) al caso que aquí se trata, queda restringida en mucho al cumplimiento de las condiciones: *a)* Hipótesis del Continuo, *b)* Magnitud de Re , *c)* No-resbalamiento, *d)* Propiedades físicas del fluido.

a) El tamaño microscópico de las partículas subcelulares (50-100 nm) puede ser de cierta preocupación el aplicar el modelo de Stokes, especialmente en lo concerniente a la hipótesis del continuo. Sin embargo, la aplicabilidad de la ecuación Stokes llega incluso a tamaños de partículas correspondientes a la escala de pequeñas moléculas orgánicas [39].

b) Cuando Re no es muy bajo, se ha reportado que la ecuación (2.1) no describe adecuadamente la dinámica del fluido. Se han tratado distintas aproximaciones para resolver este problema pero en general puede decirse que estas desviaciones se presentan cuando $Re \sim 1$ [38-39], por lo que en el caso de las partículas subcelulares se estaría razonablemente confiado en asegurar que (2.1) es una buena aproximación.

El hecho de que Re es realmente pequeño en el caso del movimiento subcelular, permite también evitar el problema de la validez de la ecuación de Stokes a gran distancia del objeto en movimiento. Dado que el término inercial: $(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}$, que se elimina de la ecuación de Navier-Stokes, es del orden de U^2/r , en donde U es una velocidad típica y r es la distancia desde el centro del objeto, mientras que el término que es retenido: $\nu \nabla^2 \bar{v}$ es del orden de $\nu U/r^2$, entonces la relación del primero contra el segundo es del orden de: $Ur/\nu = Re(r/l)$ en donde l es una longitud característica del problema y ν la viscosidad cinemática [66]. La aproximación de Stokes permanece válida en tanto esta razón sea pequeña. A bajos Re esto sucede si r/l permanece pequeño. En el caso de las partículas subcelulares dentro de una célula, se tiene que, a lo más, $r/l \approx 10^2$ mientras que con $Re \approx 10^{-8}$ se garantiza que la razón de fuerzas inerciales a viscosas permanece aun bastante baja en el rango de distancias involucrado.

c) La complejidad propia de las distintas partículas subcelulares puede muy bien poner en duda la condición (2.3) de no-resbalamiento. Los grupos hidrofílicos de las biomoléculas presentes en la membrana de un organelo, ya sean los de las cabezas de los lípidos de membrana, de aminoácidos en las proteínas o aún carbohidratos de glicoproteínas, interactúan de distinta manera con las moléculas de agua vecinas. Por un lado pueden inmovilizarlas en cierto grado a su alrededor y crear así una especie de capa intermitente y amorfa de moléculas de agua, alrededor del organelo, que estarían moviéndose a distintas velocidades dentro de dicha capa. Nada más alejado de una condición de no-resbalamiento ideal. De hecho aún en sistemas físicos, la condición (2.3) desaparece cuando se consideran por ejemplo fluidos no Newtonianos y otros casos con paredes no humectables [39]. Por supuesto la determinación experimental de la condición (2.3) en el caso particular de las partículas subcelulares aun no ha sido hecha y en este trabajo se asume como una primera aproximación ideal.

d) La fase fluida del citoplasma de una célula tiene una viscosidad prácticamente igual a la del agua pura, de acuerdo a experimentos de medición *in vivo* [40], lo que permite pensarla como un fluido newtoniano al menos en las escalas de temperatura y presión en las que existen la mayoría de los seres vivos. Sin embargo es conocido que la dinámica celular normal involucra muchas veces transiciones sol-gel del citoplasma que harían muy difícil concebir una viscosidad constante en todo lugar y momento dentro de la célula. De nuevo, aquí se adopta la hipótesis de $\mu = \text{constante}$ como una petición de principio.

II.1.3. Hidrodinámica clásica y Micronatación. Es básicamente a través de la condición de no-resbalamiento que la Teoría de la Micronatación se conecta con la Mecánica de Fluidos clásica. Los campos \bar{U} especifican las distintas deformaciones que la forma básica q del nadador va adoptando para desplazarse a través del fluido, por lo que una secuencia natatoria de cambios de forma vendrá descrita por una curva $\bar{q}(t, \sigma)$ definida en el espacio de todas las deformaciones posibles de q , siendo σ una parametrización conveniente de la forma básica. En general se tiene que resolver un problema de Stokes por cada forma $\bar{q}(t, \sigma)$ que constituya al ciclo de natación. En cada uno de dichos problemas se tendrá como condición (2.3) a:

$$\bar{v}|_q = \frac{\partial}{\partial t} \bar{q}(t, \sigma)$$

en donde la derivada de la forma $\bar{q}(t, \sigma)$ da el cambio de forma instantáneo \bar{U} (ec. 2.3).

El hecho de que en principio $\bar{q}(t, \sigma)$ es parte de las incógnitas en el problema de encontrar la trayectoria que sigue el nadador al ejecutar su brazada hace a este problema altamente implícito y no lineal, a pesar de que la ecuación de Stokes (2.1) sea lineal.

Llevar el problema al nivel infinitesimal, aproximadamente en el espíritu del método de Euler en las ecuaciones diferenciales ordinarias, resulta en cantidades calculables que pueden ser integradas para dar el desplazamiento neto final del nadador.

II.2. Haz Fibrado. La estructura matemática fundamental en la que se basa la teoría de micronatación es la de haz fibrado. En los siguientes apartados se definen sus distintos componentes.

II.2.1. Descripción General. Al tratar de describir la cinemática de un nadador cuya forma inicial es S_0 y que se encuentra a bajos Re , se anotarían tanto la secuencia de deformaciones corporales que constituyen su brazada natatoria como la trayectoria que sigue el objeto al ejecutar repetidamente dicha brazada. Para representar la totalidad posible de esas observaciones es conveniente utilizar al espacio fase Q de "formas localizadas" o configuraciones, en el que se añade a la descripción de cada forma su localización espacial particular. Como se supone que el organismo no se rompe o rasga durante su movimiento, entonces en Q sólo hay deformaciones obtenidas por continuidad a partir de la forma inicial S_0 . Además, por conveniencia matemática, se supondrá que ninguna de las formas posibles contiene "picos" o líneas quebradas en general en su superficie, es decir que son formas "suaves".

Para la especificación de todas las posibles brazadas natatorias, que son secuencias de formas "puras" independientes de la posición del nadador, el espacio Q es demasiado redundante en el sentido de que hay elementos de Q que difieren entre sí no por su forma sino sólo por estar orientados y localizados en distintas direcciones y en distintos puntos del espacio. Al espacio fase de todas las formas obtenidas a partir de la forma inicial básica S_0 (con las mismas restricciones arriba mencionadas) sin referencia a la posición que ocupen en el espacio, se le denota como S (shape).

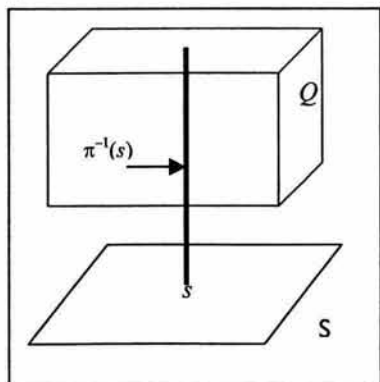


Figura II.1

Cualquier posible secuencia de natación del objeto queda entonces descrita por una curva cerrada en S (cerrada por que se trata de un ciclo de movimientos). La curva vendría dada por una función que a cada instante de tiempo t le asigna la forma particular $s \in S$ que en ese momento aparece en la secuencia.

Se puede establecer una relación entre los espacios de formas previamente definidos mediante de la función de proyección π , cuyo dominio es Q y contradominio S :

$$\pi: Q \rightarrow S$$

La regla que define a π es que aplica a una forma localizada particular en su forma deslocalizada correspondiente. Esto hace que se piensa en la función proyección π como

una función de "olvido" puesto que su regla se puede interpretar como "olvida la posición y quédate con la forma". De esta manera π no es una función uno a uno porque manda a todas las configuraciones que sólo difieran por su posición, pero que tengan la misma forma básica, a precisamente dicha forma en S . En consecuencia la pre-imagen de cualquier elemento s del espacio S es un subconjunto de Q con más de un elemento y que se le conoce como fibra $\pi^{-1}(s)$ (Fig. II.1). Si se dibujara la fibra sobre cada $s \in S$ es intuitivamente creíble que se cubriría de esta manera a todo Q , es decir que la unión de todas las fibras es igual a Q . Esta característica es parte de lo que define al espacio Q como un espacio fibrado o haz fibrado.

Los elementos de una fibra difieren entre ellos sólo por estar orientados y localizados en distintas direcciones y en distintos puntos del espacio, pero trasladándolos a un origen común y rotándolos se puede hacer que todas las configuraciones coincidan y reconocer así que tienen la misma forma. Esto indica que las formas localizadas de una misma fibra, sólo difieren entre sí por la acción de una transformación rígida, ya sea esta una rotación, una translación o la composición de ambas.

Matemáticamente las transformaciones rígidas se representan por matrices, en particular, en el caso del espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , el orden de las matrices de rotación es de 3×3 y el de las de translación es de 1×3 (vectores). En virtud de las propiedades de la composición de transformaciones rígidas, este conjunto adquiere la estructura algebraica de Grupo y de hecho de un Grupo continuo o de Lie, puesto que la operación de composición y su inversa resultan ser continuas. Al grupo de transformaciones rígidas del espacio euclidiano d -dimensional ($d = 2$ o 3) se le denota por $SE(d)$ y sus elementos quedan bien especificados por parejas ordenadas (r, tr) cuya primer componente es una rotación r y el segundo es una translación tr . Un hecho algebraico relevante es que, las fibras $\pi^{-1}(s)$ son isomorfas al Grupo de Lie $SE(d)$, lo cual es muy importante por que, junto con otros isomorfismos que ya se mencionarán, permite "aterrizar" el cuadro geométrico en fórmulas de cálculo.

Intuitivamente puede resultar claro que el espacio de configuraciones Q módulo el grupo euclidiano $SE(d)$ es el espacio de formas no localizadas (puras) S :

$$S = Q / SE(d)$$

porque agrupando los elementos de Q que son iguales bajo transformaciones rígidas daría como resultado el espacio de formas abstractas S .

Ahora se tienen ya todos los elementos que constituyen la definición de un haz fibrado Q con espacio base S , fibra típica $\pi^{-1}(s)$ y grupo de invarianza (o isometrías) $SE(d)$.

II.2.2. Algunas Precisiones. La mayor parte de la teoría de haces fibrados está dedicada al caso en donde el espacio fase Q es de dimensión finita (p.ej. ver [41]). Sin embargo la mayoría de los conceptos y algunos de los resultados principales se pueden extender a los espacios de dimensión infinita.

Matemáticamente el espacio Q de dimensión infinita es el conjunto $Emb(S_0)$ de todos los encajes posibles j en \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) de la forma básica inicial S_0 , la cual se supondrá compacta y suave:

$$Q = Emb(S_0) = \{j(S_0) \mid j : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^d\}$$

en donde j es k -diferenciable y su derivada es de rango máximo, con lo que se garantiza que la deformación $j(S_0)$ hereda la topología relativa del espacio ambiente \mathbb{R}^d , no tiene "picos" y en cada punto $x \in S_0$ se puede definir un único vector normal.

Como S_0 es compacto, se puede utilizar la estructura Euclidiana de \mathbb{R}^d para hacer de Q un espacio de Banach, al ser posible determinarlo como un conjunto abierto en el espacio de Banach \mathcal{X} de todos los mapas C^k de S_0 en \mathbb{R}^d [42]. Es esencial dotar a Q con una estructura de espacio de Banach (y no con una más general Ej.: Fréchet) para así poder tener las suficientes herramientas formales como para contar por ejemplo con propiedades de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales [42-45]. En lo particular esto es importante considerando que aquí se trata en primer lugar de resolver la ecuación de Stokes para fluidos viscosos.

Comenzando con subconjuntos abiertos de Q , éstos pueden pegarse mediante isomorfismos p -diferenciables para construir en Q una estructura de variedad diferencial [43]. De hecho Q puede constituirse como una variedad infinito dimensional C^∞ diferenciable [42].

El conjunto $SE(d)$, $d = 2$ o 3 , de parejas ordenadas (r, tr) de transformaciones rígidas del espacio euclidiano con dimensión d , en donde el primer componente es una rotación r (operador ortogonal de orden $d \times d$) y el segundo es una translación tr (vector $1 \times d$), junto con la operación:

$$(r_1, t_1) \circ (r_2, t_2) = (r_1 \cdot r_2, r_1 \cdot t_1 + t_2)$$

constituyen un grupo continuo o de Lie, puesto que dicha operación y su inversa son continuas. $SE(d)$ tiene una dimensión finita igual a $2d$ y puede descomponerse como el producto semidirecto del subgrupo ortogonal de rotaciones $SO(d)$ con el subgrupo vectorial de traslaciones, el cual es isomorfo a \mathbb{R}^d :

$$SE(d) = SO(d) \otimes \mathbb{R}^d$$

Cada grupo de Lie tiene siempre asociado un espacio vectorial particular conocido como álgebra de Lie. En el caso de $SE(d)$ su álgebra asociada, denotada aquí por $se(d)$, es el conjunto de las matrices antisimétricas, $so(d)$ y vectores de \mathbb{R}^d , en donde las primeras representan a rotaciones y los segundos a traslaciones infinitesimales (ver II.3). Así, de nuevo, los elementos de $se(d)$ quedan también especificados por parejas ordenadas (r, tr) . Formalmente $se(d)$ se expresa como:

$$se(d) = so(d) \oplus \mathbb{R}^d$$

la suma directa de las subálgebras indicadas, en donde $so(d)$ puede identificarse con $\mathbb{R}^{n(d)}$ si $n(3) = 3$ y $n(2) = 1$. En consecuencia, el álgebra de Lie $se(d)$ y su dual $se^*(d)$ son isomorfos a:

$$se(d) \cong \mathbb{R}^{n(d)} \oplus \mathbb{R}^d \quad ; \quad se^*(d) \cong \left(\mathbb{R}^{n(d)} \right)^* \oplus \left(\mathbb{R}^d \right)^*$$

Un grupo de Lie y su álgebra están relacionados entre sí porque pueden obtenerse uno del otro mediante operaciones generalizadas semejantes a la exponenciación y su inversa, el logaritmo (ver II.2.2).

La típica acción (libre) del grupo euclidiano sobre \mathbb{R}^d se puede extender naturalmente al espacio de configuraciones Q de la siguiente manera:

$$SE(d) \times Q \rightarrow Q \quad \text{tal que} \quad (r, tr) \cdot f = r \cdot f + tr$$

lo que permite definir sin ambigüedad al espacio cociente $Q/SE(d)$ (espacio de órbitas) como el conjunto de clases de equivalencia:

$$S \equiv Q/SE(d) = \{[q] \mid q \in Q\}$$

en donde $q \sim q'$ sii $\exists G \in SE(d): G \cdot q = q'$.

El espacio de formas S de hecho tiene la topología cociente y hereda la estructura de variedad diferencial que tiene Q . El resultado finito dimensional de que S es una variedad diferencial cuando Q lo es y es actuado por un grupo de transformaciones G , que satisface condiciones muy generales [41], se puede llevar hasta el caso en donde Q es una variedad de Fréchet actuada por el grupo de difeomorfismos Diff [44-45] y en consecuencia es válida cuando Q es un espacio de Banach actuado por $SE(d)$, dado que $SE(d) \subset \text{Diff}$.

Dadas las anteriores definiciones de los espacios fase Q y S se garantiza la existencia de una función de proyección canónica diferenciable $\pi: Q \rightarrow S$ que manda a cada elemento $q \in Q$ a la clase de equivalencia a la que pertenece, es decir que π aplica a una forma localizada particular en su forma abstracta correspondiente. De esta manera π , no es en general una función uno a uno pero si es sobreyectiva y en consecuencia es una sumersión y la fibra $\pi^{-1}(s)$ es también una variedad diferenciable para cada $s \in S$ [45].

Sea $U \subset S$ un abierto del espacio de formas y $s \in U$. Si U es suficientemente pequeño se puede confiar en que el proceso de asignar a cada $s \in U \subset S$ su correspondiente fibra $\pi^{-1}(s)$ puede repetirse para todos los elementos del abierto U . Entonces por construcción es claro que se cubriría de esta manera a todo el conjunto $V = \pi^{-1}(U) \subset Q$, es decir que:

$$V = \pi^{-1}(U) \times U$$

Esta característica, llamada de trivialidad local, es la que finalmente permite definir al espacio Q como un espacio fibrado o haz fibrado principal con espacio base S , fibra típica $\pi^{-1}(s)$ y grupo estructural de invarianza (o isometrías) $SE(d)$. La demostración de la trivialidad local del espacio de configuraciones Q para el caso más general de espacios de Fréchet actuados por Diff puede verse en [44]. Pero Q no es únicamente localmente trivial, sino también globalmente trivial [45] y en consecuencia puede expresarse como:

$$Q = F \times S$$

en donde F es la fibra típica.

II.3 Espacio tangente.

El conjunto de todas las deformaciones instantáneas a partir de una cierta forma localizada $q \in Q$ constituyen el espacio vectorial tangente sobre el punto q y son representadas por campos de velocidades (no necesariamente tangentes) a lo largo de la frontera de q . Es mediante dichas deformaciones que se conecta a la cinemática del cuerpo deformable con la hidrodinámica, al considerarse como condiciones de frontera en el problema de Stokes.

II.3.1. Descripción general. En el espacio Q de formas localizadas, cada forma particular q se obtiene a partir de una forma inicial básica q_0 especificando la deformación particular que debe de sufrir q_0 para convertirse en q . La especificación de tales deformaciones puede darse convenientemente mediante un campo vectorial \vec{U} sobre la forma q_0 , $\vec{U} : q_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ que a cada punto x perteneciente a q_0 le asigna un vector de \mathbb{R}^d cuya magnitud, dirección y sentido caracterizan completamente la acción de deformación emprendida en x . De esta manera, la nueva localización de cada punto x de q_0 se obtiene mediante la transformación: $x \rightarrow x + \varepsilon \vec{U}$ con $x \in q_0$ y ε un número lo suficientemente pequeño como para que la acción de \vec{U} quede restringida al ámbito infinitesimal.

Considérense todas las curvas $\vec{q}(t)$ que en un instante t_1 pasan por un punto $q \in Q$. La derivada de cada una de las infinitas curvas en q especifica localmente un cambio de forma particular necesario para transformar a una forma vecina q' en el propio q , es decir:

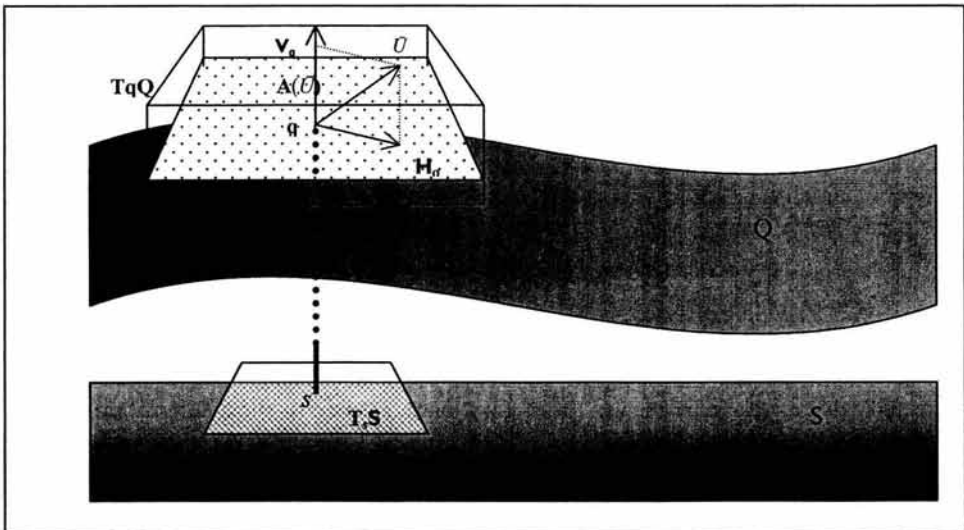


Figura II.2

Se muestra el espacio tangente en el punto $q \in Q$, $T_q Q$, que tiene la misma dimensión de Q , así como su descomposición en un espacio vertical, V_q representado por un solo eje y el espacio horizontal, H_q que forma un plano y que a su vez es isomorfo al espacio tangente $T_s S$ sobre $s \in S$. El vector \vec{U} tiene proyecciones en H_q y V_q siendo esta última la imagen $A(\vec{U})$ del campo \vec{U} por la forma de conexión A .

$$\left. \frac{d\bar{q}(t)}{dt} \right|_{t_i} = \bar{U}$$

El conjunto de todas estas deformaciones constituye entonces al espacio vectorial tangente definido sobre $q \in Q$ y denotado $T_q Q$ (Fig.II.2). Nótese que tanto las rotaciones como las traslaciones infinitesimales de la forma q son también elementos de $T_q Q$, siendo ellas las transformaciones que causan deformaciones nulas y que vendrían dadas por campos vectoriales de movimientos rígidos infinitesimales restringidos a q . Los elementos \bar{U} de $T_q Q$ son también las condiciones de frontera posibles que sobre el nadador se imponen para poder plantear y eventualmente resolver la ecuación de Stokes para fluidos viscosos, como se verá mas adelante.

Se puede demostrar que el espacio tangente $T_q Q$ se descompone en una suma de dos subespacios. Uno de ellos es precisamente el conjunto los campos vectoriales rígidos sobre q y se le conoce como espacio vertical V_q . El otro subespacio, H_q complementa lo que resta de V_q para generar a $T_q Q$, es decir:

$$T_q Q = V_q \oplus H_q$$

Después de la introducción de una métrica conveniente en $T_q Q$ que defina una geometría en el espacio tangente, resultará que H_q es el complemento ortogonal de V_q por lo que se le conoce por espacio horizontal (Fig.II.2). El espacio horizontal H_q esta constituido por todas las deformaciones físicamente permitidas a q . Dichas deformaciones son aquellas en las que la fuerza \mathbf{F} y torca \mathbf{T} totales que el nadador ejerce sobre el fluido son iguales a cero. Lo que significa que le esta prohibido al nadador contorsionarse de manera que haya deformaciones en su cuerpo que se toquen o sobrepongan entre sí jalándose o empujándose mutuamente. En otras palabras, se supondrá que el nadador puede controlar su forma pero que no puede ejercer fuerzas netas o torcas sobre sí mismo [33]. En notación conjuntista se diría que:

$$H_q = \{ \bar{U} \in T_q Q : \mathbf{F} = \mathbf{T} = \mathbf{0} \}$$

De esta manera se tiene que cualquier campo vectorial \bar{U} sobre la forma q puede representarse de manera única por una transformación rígida de q mas una deformación cuya fuerza y torca totales sean cero.

En consecuencia los movimientos físicamente permitidos del nadador forman una curva "horizontal" en Q , es decir una curva de deformaciones $q(t)$ tal que, en cada instante t :

$$\bar{U}(t) = \frac{d\bar{q}(t)}{dt} \in H_q$$

Es importante mencionar aquí que el espacio vertical V_q es isomorfo al álgebra de Lie $se(d)$ mientras que el espacio horizontal H_q es isomorfo al espacio tangente en $s \in S$, en donde $q \in \pi^{-1}(s)$. Además, en cada punto $q \in Q$, se tiene que el espacio vertical V_q es tangente a la fibra que contiene a q , que es la razón por la cual los elementos de V_q reciben el calificativo de infinitesimal mencionado antes.

II.3.2. Precisiones. El álgebra de Lie $se(d)$ es el espacio vectorial tangente de la variedad diferencial $SE(d)$ en \hat{e} , el elemento neutro de $SE(d)$. Existe una vecindad $V_{\hat{e}}$ de \hat{e} tal que se puede mapear difeomórficamente a un abierto $B(0, \delta)$ del cero de $se(d)$, en $V_{\hat{e}}$. Dicho mapeo se define como la exponencial $exp: B(0, \delta) \rightarrow V_{\hat{e}}$. Como consecuencia, siempre que $\xi \in se(d)$ el conjunto $H = exp(t\xi)$ es un subgrupo de $SE(d)$ con parámetro $t \in \mathbb{R}$. Sean $q \in Q$ y $\xi \in se(d)$ puntos particulares fijos de sus respectivos espacios. Existe una acción del subgrupo H correspondiente a ξ sobre el punto q que genera una órbita $H \cdot q$, la cual pasa por el punto q cuando $t = 0$. El vector tangente a dicha órbita por el punto q es entonces:

$$\left. \frac{d}{dt} exp(t\xi) \cdot q \right|_{t=0}$$

y es un elemento de $T_q Q$. Repitiendo lo anterior para cada $q \in Q$ se genera un campo vectorial ξ_q que representa la acción infinitesimal del subgrupo H en Q . Haciendo lo anterior para todo $\xi \in se(d)$ se genera un espacio isomorfo a $se(d)$ que es precisamente el espacio vertical V_q y representa la acción del álgebra de Lie $se(d)$ sobre el espacio de configuraciones Q . Dicha acción es tangente a la acción del grupo euclidiano $SE(d)$ sobre Q .

II.4 Métrica Potencia. Aquí se plantea el hecho de que es posible establecer una métrica en los espacios tangentes con un significado físico relevante. En lo particular la métrica del espacio tangente proporciona la potencia E gastada por el cuerpo al ejecutar una deformación durante su ciclo de natación.

En este apartado sólo se proporciona la expresión más general que define a E , la cual toma formas específicas dependiendo del problema de Stokes particular que se esté resolviendo y que se dan en los capítulos siguientes.

II.4.1. Descripción General. Al ir atravesando por cada uno de los cambios de forma que constituyen su brazada, el cuerpo en movimiento sufre la acción de una fuerza que el fluido en el que se encuentra ejerce sobre cada punto de la frontera del nadador. Existe de hecho una relación entre la deformación \vec{U} efectuada por el nadador de forma q y la fuerza \mathbf{F} que se ejerce sobre su frontera. Esta relación la da el operador de propulsión o de Lorentz $\mathcal{P}: \vec{U} \rightarrow \mathbf{F}$, en donde físicamente $\mathcal{P}(\vec{U})(x)$, $x \in q$, es la fuerza por unidad de área que el fluido ejerce sobre q en el punto x , dado que q sufre la deformación especificada por \vec{U} .

Entonces, por definición de potencia (energía disipada) E , que en general es el producto de la fuerza por la velocidad, se tiene que la energía hidrodinámica disipada en un elemento infinitesimal de área de la frontera del nadador es:

$$dE = \vec{U} \cdot \mathcal{P}(\vec{U}) dS$$

en donde dS es un elemento infinitesimal de área de q . Integrando a dE sobre la frontera del nadador se obtiene la potencia total correspondiente:

$$E(\bar{U}) = \int_q \bar{U} \cdot \mathcal{P}(\bar{U}) dS \dots (2.4)$$

es decir, el gasto energético que genera el cuerpo en movimiento en el instante t al estarse deformando de acuerdo con \bar{U} , el cual es producto de los esfuerzos generados entre las capas del fluido como resultado del movimiento de deformación de la frontera del nadador.

Se puede demostrar que la función de potencia E así definida, establece una métrica en el espacio tangente $T_q Q$ para toda $q \in Q$ [37]. Bajo esta métrica, llamada de potencia, el espacio horizontal H_q y el vertical V_q son ortogonales:

$$H_q \perp V_q$$

II.4.2. Algunas Precisiones. El operador de Lorentz \mathcal{P} se define como:

$$\mathcal{P}(\bar{U}) = \Pi|_q \cdot \bar{n} \dots (2.5)$$

y es una función vectorial lineal que a cada campo de deformación \bar{U} de la forma q le asocia la contracción del tensor de esfuerzo $\Pi(\bar{u})$ con el vector normal unitario \bar{n} , evaluado sobre la frontera de la forma q . El tensor de esfuerzo Π corresponde aquí al campo de velocidades \bar{u} del fluido, obtenido como solución de la ecuación de Stokes cuando la condición de frontera sobre q es \bar{U} [36-37].

La función de potencia E dada por (2.4) es una forma cuadrática cuya forma bilineal correspondiente:

$$\mathbf{E}(\bar{v}, \bar{w}) = \int_q \bar{v} \cdot \mathcal{P}(\bar{w}) dS \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in T_q Q \dots (2.6)$$

es la que propiamente establece una métrica Riemanniana como producto interior en $T_q Q$. La métrica potencia es invariante bajo la acción del grupo euclidiano $SE(d)$ y H. Lorentz demostró que era positiva definida [ver 38]. La propiedad de simetría de dicha métrica la establece el teorema de reciprocidad de Lorentz:

$$\mathbf{E}(\bar{v}, \bar{w}) = \int_q \bar{v} \cdot \mathcal{P}(\bar{w}) dS = \int_q \bar{w} \cdot \mathcal{P}(\bar{v}) dS = \mathbf{E}(\bar{w}, \bar{v})$$

que es una consecuencia directa de la igualdad:

$$\text{div}(\bar{v} \cdot \Pi(\bar{u}) - \bar{u} \cdot \Pi(\bar{v})) = 0$$

II.5 Conexión de Stokes.

La teoría de conexiones desarrollada para variedades de dimensión finita [41] puede extenderse al caso de variedades de dimensión infinita al menos en lo que concierne a los conceptos básicos y los resultados más elementales [ver p.ej. 44-45].

II.5.1. Descripción General. En cada punto q de Q existe un espacio tangente $T_q Q$ descomponible en la suma de un subespacio vertical V_q y un subespacio horizontal, H_q (Fig.II.3). Es así posible definir ahora al conjunto de todos los espacios horizontales de Q .

Este conjunto recibe el nombre de conexión de Stokes, potencial de norma o simplemente conexión, denotado por C y contiene a todas las formas físicamente accesibles al nadador:

$$C = \{ H_q \mid H_q \perp V_q \forall q \in Q \}$$

En general una conexión es una regla que permite decidir si una propiedad de un objeto o una cantidad se han conservado, o cómo han cambiado, al ser transportadas de un punto al otro del espacio en el que se encuentran. Existen distintos tipos de conexiones pero todas tienen en común que están construidas para preservar algo, por ejemplo la conexión afín preserva el concepto de paralelismo entre vectores mientras que las conexiones de las distintas teorías de Norma en la Física preservan las leyes -o algún aspecto esencial de ellas- que rigen el movimiento de las partículas involucradas [46]. En el caso de la conexión de Stokes, lo que se preserva al moverse por el espacio Q , es precisamente las formas físicamente permitidas de nadar a bajos Re , las cuales están contenidas en cada espacio horizontal.

Se puede demostrar que para cada $q \in Q$ existe una transformación lineal A que va de $T_q Q$ al álgebra de Lie $se(d)$:

$$A: T_q Q \rightarrow se(d)$$

y tal que el núcleo de esta transformación A es igual al espacio horizontal H_q . El mapa A es central en la teoría, recibiendo el nombre de 1-forma de la conexión de Stokes y a cada campo vectorial \tilde{U} sobre q (es decir a cada deformación de q) le asocia la transformación rígida infinitesimal que determina el desplazamiento obtenido como resultado de esa deformación. La función A actúa también como una proyección de los campos vectoriales $\tilde{U} \in T_q Q$ sobre el espacio vertical V_q , ya que, como ya se mencionó, el álgebra de Lie $se(d)$ es isomorfa a V_q (Fig.II.3).

Una manera de obtener al operador A es partiendo del operador de Lorentz utilizado en el apartado anterior para definir la métrica en $T_q Q$ [36]. Defínase al operador total de propulsión \mathcal{L} como el operador lineal que a cada deformación instantánea $\tilde{U} \in T_q Q$ le asocia la fuerza \mathbf{F} y torca \mathbf{T} totales que el fluido ejerce sobre el nadador, $\mathcal{L}: \tilde{U} \rightarrow (\mathbf{F}, \mathbf{T})$. Restringiendo el dominio de \mathcal{L} al conjunto de las transformaciones rígidas (infinitesimales) se obtiene el operador de resistencia \mathcal{G} , que en el caso tridimensional es una matriz simétrica y positiva definida de orden 6×6 . Entonces:

$$A = \mathcal{G}^{-1} \mathcal{L} \dots (2.7)$$

II.5.2. Precisiones. Cuando una conexión se relaciona con una métrica de manera que los espacios horizontales sean ortogonales a los verticales en esa métrica, se dice que se tiene una conexión mecánica natural o que la conexión surge de la métrica. Ahora bien, dada una conexión siempre se puede encontrar una métrica bajo la cual tal conexión es natural. Lo que no siempre ocurre es que la métrica dada sea físicamente significativa. En el presente caso la métrica potencia que da la conexión de Stokes tiene como energía cinética asociada a la potencia gastada por el cuerpo deformable cuando éste ejecuta una deformación infinitesimal [36].

Un aspecto determinante de la forma de conexión A es su relación con la función momento $\mu: T_q Q \rightarrow se^*(d)$ (en donde $se^*(d)$ es el dual de $se(d)$). La función momento es el

invariante o cantidad conservada prometido por el teorema de Noether, el cual dice, figurativamente, que "donde hay una simetría existe una cantidad conservada", estando las simetrías del problema de micronatación a cargo del grupo de Lie correspondiente, $SE(d)$. En el caso $d=3$, se puede demostrar [38] que:

$$\mu = (\mathbf{F}, \mathbf{T})$$

en donde \mathbf{F} y \mathbf{T} son la fuerza y torca totales que el fluido ejerce sobre una forma determinada q .

Cuando $H_q \perp V_q$ la relación entre la forma de conexión A y la función momento μ es realmente directa:

$$A = I \cdot \mu$$

en donde I es el isomorfismo canónico entre el álgebra de Lie $se(3)$ y su dual [38].

II.6. Holonomía.

Como fenómeno matemático, la holonomía se entiende como la situación en donde un cierto objeto cambia sus propiedades al volver a su punto inicial de partida después de recorrer una curva cerrada o lazo [47]. En el contexto de la Teoría de Micronatación la holonomía se entiende también como una transformación rígida que permite calcular cuanto se ha trasladado y rotado un nadador después de ejecutar su brazada. A continuación se discute con más detalle su significado.

II.6.1. Descripción General. Al dar una brazada, el organismo irá cambiando de forma pero también de posición y orientación en el espacio real, de manera que al final de un ciclo de natación regresa a su misma forma inicial aunque, si la estrategia de natación es exitosa, ya se habrá desplazado y rotado una cierta cantidad. En los espacios fase de formas

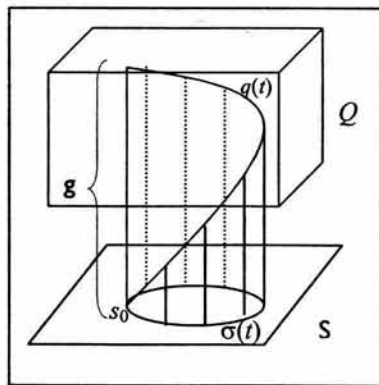


Figura II.3

localizadas Q y no localizadas S , puede visualizarse este proceso como se muestra en la Fig.II.3, en donde se ve como la curva $\sigma(t)$ del ciclo de natación en el espacio S "levanta" en una espiral $q(t)$ en Q a través de las fibras $\pi^{-1}(s)$, convirtiendo a la curva cerrada $\sigma(t)$ en S en una curva abierta $q(t)$ en Q . Como al terminar la brazada el objeto vuelve a su forma inicial, el proceso inicia y termina en la misma fibra, $\pi^{-1}(s_0)$ (cuya base es una cierta forma inicial s_0). Pero como ha avanzado y rotado, el punto de la fibra al que regresa en Q es distinto del que partió. La distancia en Q de estos dos puntos sobre $\pi^{-1}(s_0)$, que representa el desplazamiento y rotación netos que sufre un organismo al pasar por un ciclo de natación, es exactamente la cantidad que finalmente se tiene el

propósito de calcular. Dicha cantidad viene determinada por un operador específico que se conoce dentro de la teoría como holonomía o potencial de norma y es un elemento g del grupo $SE(d)$, puesto que, como el organismo regresa a su forma inicial al terminar una

brazada, no ha sufrido finalmente deformación alguna y entonces su desplazamiento total queda descrito por una transformación rígida.

II.6.2. Algunas Precisiones. Puesto que $g \in SE(d)$ entonces $g = (R_0, tr_0)$ y si q_0 y q_T son las formas localizadas inicial y final sobre la fibra $\pi^{-1}(s_0)$ entonces:

$$q_T = g \cdot q_0 = R_0 q_0 + tr_0$$

En general un ciclo natatorio o brazada que comienza y termina en la forma s_0 viene dado por una curva $S_0(t)$ en S . Entonces el "levantamiento" de $S_0(t)$ en la espiral $q(t)$ en Q se determina por:

$$q(t) = g(t) \cdot S_0(t)$$

en donde $g(t)$ es una secuencia de transformaciones rígidas, cada una de las cuales localiza correctamente en Q a la forma pura $S_0(t)$ en cada tiempo t , es decir que le asigna la posición que debe tener a lo largo de su fibra $\pi^{-1}(S_0(t))$ correspondiente. El levantamiento $q(t)$ será entonces horizontal, es decir que satisface que:

$$\pi(q(t)) = s_0(t) \quad \text{y} \quad \dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt} \in H_q \quad \forall t$$

Si el operador de resistencia G es inyectivo entonces el levantamiento horizontal existe y es único [38].

El problema dinámico completo de la autopropulsión a bajos Re consiste entonces en encontrar a $g(t)$. La curva $g(t)$ se determina en principio como la solución a la ecuación diferencial lineal no autónoma de primer orden [48]:

$$\frac{dg(t)}{dt} = g(t) \cdot A_{q(t)}(\dot{q}(t)) \dots (2.8)$$

en donde A es la 1-forma de la conexión de Stokes correspondiente a la forma $q(t)$ y evaluada en la deformación instantánea $\dot{q}(t)$ y proporciona el desplazamiento infinitesimal total de la forma básica s_0 que resulta de una deformación infinitesimal \dot{s}_0 . Integrando (2.4) se obtiene $g(t)$ y entonces la holonomía g es: $g(T) = g$ en donde T es el período del ciclo de brazada. Debido al carácter no abeliano del grupo $SE(d)$ la solución de (2.8) no es tan directa como podría parecer y resulta en lo que a veces se llama una "exponencial de trayectoria ordenada" [33, 36]. En el apartado II.8 se presenta un método para aproximar la holonomía g .

II.7. Mecanismo del desplazamiento.

Sea $S_0(t)$ una curva cerrada en el espacio de formas S , es decir la representación abstracta de la brazada de un cuerpo deformable con forma inicial $s_0 = S_0(0)$. En general la secuencia de formas $S_0(t)$ no constituye un movimiento permitido puesto que puede generar fuerzas y torcas netas sobre el nadador. El movimiento correcto, que involucra la misma

secuencia de formas, incluirá desplazamientos rígidos adicionales que cancelen en cada instante t a cualesquier fuerzas y torcas totales distintas de cero. Tales desplazamientos rígidos de corrección los da la aplicación del operador A sobre la forma instantánea definida por $S_0(t)$ para cada t , como se explica a continuación.

Considérese a un nadador q con forma inicial $q_0 \in Q$, correspondiente a la forma pura inicial s_0 , que en un primer instante se deforma de acuerdo con la deformación instantánea \vec{v}_0 :

$$\vec{v}_0 = \left. \frac{dq_0}{dt} \right|_{t=0}$$

El campo $\vec{v}_0 \in T_q Q$ especifica la condición de frontera sobre la frontera del nadador, que junto con el resto de las condiciones, permite resolver la ecuación de Stokes. Esta ecuación determina el movimiento del fluido únicamente hasta la adición de flujos que rígidamente trasladan o rotan a la forma q y que en consecuencia no afectan a la condición de no-resbalamiento. Por lo tanto se está en libertad de añadir dichos flujos para cancelar cualesquier fuerzas y torcas totales netas producidas por \vec{v}_0 .

Sea \hat{v} el campo solución. Este determina a través del tensor de esfuerzos una fuerza y torca totales sobre la frontera del nadador que en general serán distintas de cero. Como un nadador a bajos Re no ejerce ni fuerza ni torca totales al moverse en el fluido, se tiene que corregir a la deformación \vec{v}_0 de modo que se "horizontalice", obteniéndose su parte horizontal mediante la igualdad:

$$\vec{v}_0^h = \vec{v}_0 - A(\vec{v}_0)$$

La deformación \vec{v}_0^h no ejerce fuerza ni torca totales sobre el nadador. La forma inicial $q_0 \in Q$ se transforma en la nueva forma q_t deslizándola a lo largo de los vectores infinitesimales que en cada punto de la frontera de q_0 define de manera físicamente correcta \vec{v}_0^h , de modo que después de un tiempo dt la nueva posición de un punto $x \in q_0$ es $x + \vec{v}_0^h(x) dt \in q_t$ [38].

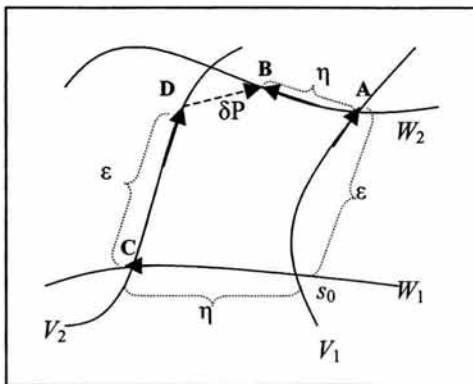


Figura II.4 Holonomía δP y Corchete de Lie.

II.8. Curvatura y Holonomía.

La distribución de espacios horizontales en Q , o sea la conexión, tiene una curvatura, que intuitivamente se puede ver como la osculación de los hiperplanos horizontales al ir cambiando de punto en punto de Q . Utilizando la curvatura de la conexión de Stokes se puede aproximar a la búsqueda holonomía.

Existe un fenómeno curioso en el movimiento a bajos números de Reynolds el cual queda definido en el llamado "Teorema de la Ostra" que, como se mencionó ya en la introducción, establece que un objeto que

trate de moverse ejecutando una brazada recíproca no tiene traslación neta a bajos Re . Una brazada recíproca es una en la que al llegar a una cierta forma final se regresa a la inicial revirtiendo la misma secuencia de deformaciones, y quedaría descrita por una curva abierta $s(t)$ (o sea que no delimita ninguna región) en el espacio de formas abstractas S . Dicha curva podría verse a su vez como un segmento de una curva integral (recorrida en uno y otro sentido) de un solo campo vectorial \vec{V} definido en S , tal que en cada punto de la curva $s(t)$, \vec{V} le asigna el elemento del espacio tangente correspondiente a $\dot{s}(t)$. En consecuencia se concluye que una brazada "exitosa" a bajos Re debe de venir dada al menos por dos campos vectoriales no colineales.

Entonces el lazo o curva cerrada $S(t)$ en S que describa a una brazada infinitesimal elemental de un nadador con forma inicial s_0 , se puede pensar como dado por las curvas integrales de dos campos vectoriales \vec{V}, \vec{W} que tienen en uno de sus vértices a s_0 (figura II.4). Para comenzar, partiendo de s_0 viájese durante un tiempo ε a lo largo de una de las

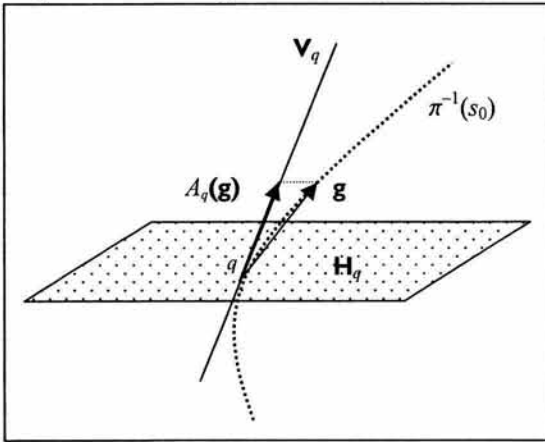


Figura II.5. Aproximación del elemento g de la fibra $\pi^{-1}(s_0)$ a la que pertenece el punto q , mediante el vector $A_q(\mathbf{g})$ del espacio V_q , en donde la 1-forma de conexión A proyecta a g sobre V_q .

orden mayor a 2 [46]:

$$\delta P = \varepsilon \eta [\vec{V}, \vec{W}] + O(\varepsilon^3)$$

El corchete de Lie de dos campos horizontales se define como el campo vectorial dado por:

$$[\vec{V}^h, \vec{W}^h] = (\vec{V}^h \cdot \nabla) \hat{W} \Big|_q - (\vec{W}^h \cdot \nabla) \hat{V} \Big|_q$$

en donde el gorro $\hat{}$ significa que se trata de la extensión de Stokes correspondiente, la cual se restringe a la forma q .

curvas integrales de alguno de los dos campos, por ejemplo V_1 . Así se llegará al punto **A**. Ahora partiendo de **A** viájese durante el tiempo η pero ahora siguiendo la curva W_2 , llegándose al punto **B**. En otro recorrido, iniciando en s_0 se viaja durante el mismo tiempo pero ahora primeramente a lo largo de W_1 , arribando al punto **C** y a partir de ahí trasládese por un tiempo ε a lo largo de V_2 con lo que se llegará al punto **D**. En general se tendrá la holonomía $\mathbf{B} \neq \mathbf{D}$. La diferencia entre ambos puntos $\delta P = \mathbf{B} - \mathbf{D}$ viene dada por un vector el cual es igual al área del polígono **ABCD** por el corchete de Lie $[\vec{V}, \vec{W}]$ de los campos vectoriales dados, mas términos de

Haciendo el levantamiento horizontal del lazo $S(t)$, de la manera señalada en el apartado II.5, y proyectando, mediante la 1-forma A , al corchete de Lie hacia la mejor aproximación en q a la fibra sobre s_0 , o sea proyectando hacia el espacio vertical correspondiente (Fig. II.5), se obtiene una aproximación a segundo orden de la holonomía g [38]:

$$g \approx \varepsilon \eta A([\bar{V}^h, \bar{W}^h]) \dots (2.9)$$

Se aprecia mejor aquí la necesidad de que se trate únicamente con ciclos de deformaciones infinitesimales (basados en la forma s_0), puesto que así su levantamiento definirá una pequeña holonomía g , que es un elemento de $SE(d) \cong \pi^{-1}(s_0)$, que se puede aproximar localmente de manera lineal por un elemento $G \in se(d)$ del espacio vertical tangente a la fibra que contiene al punto q , de una manera análoga a como se aproxima el valor de una función en una pequeña vecindad de un punto basándose en su derivada en tal punto. Lo anterior sirve para aclarar porque se proyecta sobre $V_q \cong se(d)$ y no propiamente sobre la fibra $\pi^{-1}(s_0)$.

La curvatura \mathcal{F} de la forma de conexión A , se define mediante la expresión general:

$$\mathcal{F} = \mathbf{d}A$$

en donde \mathbf{d} es la derivada exterior. Entonces, siendo A una 1-forma, \mathcal{F} es una 2-forma o tensor. Utilizando la fórmula de derivación exterior en el caso de dos campos horizontales \bar{V}^h, \bar{W}^h se tiene que:

$$\mathcal{F}(\bar{V}^h, \bar{W}^h) = \bar{V}(A(\bar{W}^h)) - \bar{W}(A(\bar{V}^h)) - A([\bar{V}^h, \bar{W}^h])$$

que puesto que \bar{V}^h, \bar{W}^h son horizontales se tiene que $A(\bar{V}^h) = A(\bar{W}^h) = 0$ y entonces:

$$\mathcal{F}(\bar{V}, \bar{W}) = -A([\bar{V}^h, \bar{W}^h]) \dots (2.10)$$

Combinando las fórmulas (2.9) y (2.10) se obtiene la aproximación de la holonomía por la curvatura de la conexión de Stokes. Nótese como, en esta aproximación, solo es necesario conocer la extensión de Stokes en una pequeña vecindad de la frontera del nadador, lo suficiente como para permitir el cálculo de las derivadas que definen al corchete de Lie.

Algebraicamente \mathcal{F} es un operador bilineal antisimétrico que va de $T_q Q \times T_q Q$ a $se(d)$ lo que lo califica como un tensor $(0,2)$ generalizado, puesto que su dominio no son vectores sino campos vectoriales sobre la forma básica q_0 y su contradominio no es numérico sino matricial, en último término. A un par de campos vectoriales sobre la forma q , el tensor de curvatura \mathcal{F} les asigna un vector cuya dirección marca la dirección del movimiento del nadador y su magnitud da el tamaño del desplazamiento.

Como se menciona en II.2.2 $se(d)$ es isomorfo a:

$$se(d) \cong \mathbb{R}^{n(d)} \oplus \mathbb{R}^d$$

Esta descomposición en suma directa de rotaciones y traslaciones del álgebra de Lie permite a su vez descomponer al tensor de curvatura \mathcal{F} en una parte traslacional \mathcal{F}^{tr} y otra rotacional \mathcal{F}^{rot} :

$$\mathcal{F}^{tr} = p_{tr} \circ \mathcal{F} \quad ; \quad \mathcal{F}^{rot} = p_{rot} \circ \mathcal{F}$$

en donde p_{tr} y p_{rot} son las proyecciones:

$$p_{tr} : se(d) \rightarrow \mathbb{R}^d \quad ; \quad p_{rot} : se(d) \rightarrow \mathbb{R}^{n(d)}$$

Por supuesto esta misma descomposición puede hacerse también para la forma de conexión A .

II.8.1. Desplazamiento. En el presente trabajo se está interesado únicamente en el cálculo del componente de traslación del movimiento del nadador cuando este realiza una brazada "pequeña". Al final resultará que tal información está contenida esencialmente en el tensor de curvatura, necesitándose solamente un cambio de escala para obtener el desplazamiento D , es decir que: $D \propto |\mathcal{F}^{tr}|$.

Dados dos campos vectorial v_1, v_2 sobre la forma q el término $A\left(\left[v_1^h, v_2^h \right]\right)$ representa a un elemento del espacio vertical V_q , es decir un campo vectorial rígido sobre q . En el caso infinito dimensional, es la integración sobre q del campo infinitesimal $A\left(\left[v_1^h, v_2^h \right]\right)$ lo que propiamente define a la forma de conexión correspondiente en q :

$$A = \int_q A\left(\left[v_1^h, v_2^h \right]\right) d\vec{S} = -\mathcal{F}(v_1, v_2) \quad \dots (2.10b)$$

que puede verse como la divergencia del campo rígido infinitesimal $A\left(\left[v_1^h, v_2^h \right]\right)$. En virtud de la igualdad (2.10) esto equivale a obtener también la curvatura \mathcal{F} . Comenzando con la parte traslacional de la forma de conexión se obtienen las correspondientes partes traslacionales totales:

$$A_{tr} = \int_q A_{tr}\left(\left[v_1^h, v_2^h \right]\right) d\vec{S} = -\mathcal{F}^{tr}(v_1, v_2)$$

Los componentes F_{mn} del tensor de curvatura con respecto a dos vectores v_n, v_m del espacio vectorial T_qQ son en general:

$$F_{mn} = \mathcal{F}(v_m, v_n)$$

y en consecuencia:

$$F_{mn}^{tr} = \mathcal{F}^{tr}(v_m, v_n)$$

que representa el movimiento euclidiano infinitesimal dado por el acoplamiento de los campos v_m, v_n [36].

Básicamente el desplazamiento total del nadador se puede obtener integrando los desplazamientos infinitesimales F_{mn}^{rr} durante el período T de duración de la brazada, como se precisa un poco más en los siguientes párrafos.

Sea el lazo $S_0(t)$ en S parametrizado como:

$$S_0(t) = S_0 + s(t) \dots (2.11)$$

en donde S_0 es la forma inicial del objeto y $s(t)$ define una secuencia temporal de deformaciones infinitesimales de S_0 . Las deformaciones $s(t)$ se pueden expandir en términos de una determinada base $\{v_i\}$ de campos vectoriales en S_0 , fija en el tiempo:

$$s(t) = \sum_i a_i(t)v_i \dots (2.12)$$

en donde las funciones $a_i(t)$ definen las coordenadas de $s(t)$ en cada instante t . La base $\{v_i\}$ define a la estrategia de natación seguida por el cuerpo deformable.

El cambio de forma instantáneo o campo de velocidades sobre $S_0(t)$ es entonces:

$$v(t) = \frac{\delta S_0(t)}{\delta t} = \sum_i \dot{a}_i v_i \dots (2.13)$$

El desplazamiento total después de ejecutar el ciclo de deformaciones $S_0(t)$ con período T es [33]:

$$D = \sum_{m < n} \int_0^T a_n \dot{a}_m F_{mn}^{rr} dt = \frac{1}{2} \sum_{m,n} \int_0^T (a_m \dot{a}_n - a_n \dot{a}_m) F_{mn}^{rr} dt \dots (2.14)$$

La forma particular que esta expresión toma en el caso de los problemas considerados, se da en los capítulos siguientes.

II.9. Eficiencia.

En general, dado un desplazamiento neto prescrito por la holonomía g conviene saber cual es la estrategia de natación que logra producirlo con el menor gasto de energía. Esto crea un problema de optimización en el espacio Q , en donde se buscaría minimizar la funcional del gasto de energía \mathcal{E} para curvas $q(t)$ en Q que tengan el mismo desplazamiento fijado por g .

La funcional \mathcal{E} o potencia de brazada, es el gasto de energía total generado al ejecutarse un ciclo de cambios de forma con período T . El operador $E(V)$ representa la energía disipada por unidad de tiempo debido a la deformación instantánea especificada por el campo V , como se menciona en II.3. Para el ciclo de deformaciones $S_0(t)$ (ec. 11), horizontalmente levantado al espacio Q , \mathcal{E} se obtiene sumando las contribuciones instantáneas E a lo largo de la trayectoria cerrada:

$$\mathcal{E} = \int_0^T E(v^h(t)) dt \dots (2.15)$$

en donde $v^h(t)$ corresponde aquí a las partes horizontales de los campos de deformación instantáneos dados por (2.13).

Con respecto a una determinada base de deformaciones $\{v_i\}$ la matriz de componentes $K_{mn} = \mathbf{E}(V_m, V_n)$ es positiva definida. Para una deformación infinitesimal como la dada por la ecuación (2.12), la potencia de brazada es entonces:

$$\mathcal{E} = \sum_{m,n} \int_0^T a_m a_n K_{mn} dt \dots (2.16)$$

que resulta de aplicar las propiedades de bilinealidad del operador de potencia E .

Se llega así a un cierto concepto de eficiencia [49], llamado a veces "naive", definido como el minimizador η del problema de optimización citado y que se expresa como:

$$\eta = \frac{|D|}{T\mathcal{E}} \dots (2.17)$$

en donde D es el desplazamiento del objeto generado por una brazada, T es el tiempo que se toma en ejecutar dicha brazada.

Dividiendo entre el período T se consigue una definición de eficiencia independiente de reparametrizaciones del tiempo, es decir independiente de la duración del ciclo de natación. De esta manera un ciclo de natación no será mas o menos eficiente por el hecho de ser ejecutado mas lento o más rápido. Igualmente, debido a la propiedad de bilinealidad de los operadores de curvatura y potencia, la definición anterior tampoco depende de ninguna magnitud lineal que caracterice al tamaño del nadador, como por ejemplo el radio r , por la misma razón, de la deformación relativa ϵ .

De acuerdo con [52] estas son características deseables en toda buena definición de eficiencia. Sin embargo, desde un punto de vista práctico puede resultar también interesante cuando un concepto de eficiencia depende al menos en parte de alguna de aquellas cantidades, tales como el tiempo, el tamaño del nadador o de la amplitud de la onda de deformación. Por ejemplo, si un organismo requiere de lograr cierta meta dentro de un tiempo limitado, el permitir o no reparametrizaciones temporales se vuelve un tema importante.

Estas consideraciones llevarían a concluir que cada problema específico de movimiento requeriría de una definición de eficiencia particular, dependiendo de la forma de la funcional de energía, el propósito del proceso de locomoción y del resto de la información físico-biológica disponible [49].

Sin embargo, y debido a la linealidad del espacio de soluciones extremales, en [52] se conjetura que cualquier noción "razonable" de eficiencia debería resultar en el cálculo de las mismas estrategias óptimas de movimiento, el cual es uno de los problemas centrales en el ámbito de la Micronatación. Es decir que, al final, habría unidad dentro de la diversidad de definiciones de eficiencia, al menos en lo que respecta a las estrategias de natación óptimas.

Las razones principales que llevaron a escoger la noción de eficiencia "naive" son que se ha trabajado sobre de ella en otras investigaciones y que, debido a su independencia de reparametrizaciones de tiempo y tamaño, permite la comparación entre situaciones muy diversas. Además, es de hacer notar que esta definición de eficiencia está profundamente enraizada en la estructura geométrica impuesta en el haz fibrado, puesto que, por un lado, el desplazamiento depende de la curvatura de la conexión y por otro, la potencia de brazada se relaciona directamente con la métrica del espacio tangente.

II.10. Procedimiento General.

Para calcular el desplazamiento y la eficiencia de natación se puede plantear el siguiente método general. Por supuesto, dependiendo de las condiciones particulares de cada problema, algunas veces será posible tomar atajos o será necesario seguir otros derroteros a los aquí señalados.

II.10.1. Algoritmo para el Desplazamiento.

1. Resolver la ecuación de Stokes para cada uno de los campos vectoriales de deformación \tilde{U} que constituyan el ciclo de natación, los cuales determinan a la condición de no-resbalamiento (2.3). Usualmente se puede escoger una determinada familia de campos $\tilde{U}(t, \sigma)$ sobre la forma básica q_0 , dependientes del tiempo t y con cierta parametrización σ .
2. Con la extensión de Stokes \hat{v} de cada caso, calcular el correspondiente tensor de esfuerzos $\Pi(\hat{v})$, de donde se obtienen la fuerza \mathbf{F} y torca \mathbf{T} totales.
3. Queda así definido el operador de propulsión \mathcal{L} (ver sec. II.6): $\mathcal{L}(\tilde{U}) = (\mathbf{F}, \mathbf{T})$.
4. Restringir el dominio de \mathcal{L} al conjunto de las transformaciones rígidas para obtener al operador de resistencia \mathcal{G} .
5. Calcular \mathcal{G}^{-1} .
6. Obtener la forma de conexión A mediante (2.7): $A = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{L}$.
7. Dados dos extensiones de Stokes, \hat{v}, \hat{w} , obtener sus partes horizontales:

$$\hat{v}_h = A(\hat{v}) \ ; \ \hat{w}_h = A(\hat{w}).$$
8. Calcular su corchete de Lie: $[\hat{v}_h, \hat{w}_h]$.
9. Obtener los desplazamientos infinitesimales F_{mn} mediante (2.10).
10. Calcular D con (2.14).

II.10.2. Algoritmo para la Eficiencia.

1. Habiendo calculado el tensor de esfuerzos $\Pi(\hat{v})$ se obtiene el operador de Lorentz \mathcal{P} utilizando la ecuación (2.5).
2. Para cada extensión de Stokes obtener la potencia E asociada a \hat{v} mediante (2.4).
3. Calcular la potencia de brazada \mathcal{E} usando (2.15).
4. Con el desplazamiento D y la potencia \mathcal{E} obtener la eficiencia η con (2.17).

CAPITULO III

CASO TRIDIMENSIONAL NO ACOTADO

III.1. Antecedentes.

En este capítulo se estudia la dinámica y energética de un nadador esférico que, mediante pequeñas oscilaciones periódicas y axisimétricas de su membrana, se desplaza a través de un fluido que ocupa un dominio tridimensional ilimitado, en una situación de bajos Re . Sólo se estudian dos tipos de deformaciones, tangenciales y radiales, lo que da la posibilidad de poder expresar, en principio, cualquier otro tipo de deformación.

El interés de estudiar este caso en el presente trabajo es diverso y no se basa en la posibilidad de aproximar la situación acotada, en donde en un espacio tridimensional el cuerpo deformable se mueve dentro de un recipiente finito. A bajos Re los modelos no acotados en general no dan buenas aproximaciones cuantitativas de los casos acotados, aun si el recipiente del fluido es mucho más grande que el nadador. Los gradientes de velocidad cuando Re es pequeño son muy suaves, por lo que los efectos de pared tienen que ser tomados en cuenta en un problema acotado aun cuando el cuerpo no se encuentre cerca de la pared del recipiente. Como una regla general, los efectos de pared son despreciables en tanto $dw/le > 20/Re$ en donde dw es la distancia entre el nadador y la pared y le es una longitud típica del cuerpo en movimiento [50]. Para una partícula del tamaño de una vesícula de secreción situada en el centro de una célula, dw/le es del orden de 10^2 mientras que $20/Re \sim 10^9$. De paso, cabría mencionar aquí que este solo hecho advierte sobre la necesidad de ser precavido al evaluar los muchos resultados que existen de mediciones cuantitativas de algunos de los parámetros físicos de los motores moleculares, los cuales hasta ahora han sido obtenidos *in vitro* únicamente.

A pesar de que cuantitativamente no se trate necesariamente de una buena aproximación al caso tridimensional acotado, estudiar el caso no acotado proporciona aun así, tanto resultados cuantitativos relevantes para la estimación de parámetros del primer caso como también resultados cualitativos útiles, en especial en lo que concierne a comenzar a configurar una posible respuesta a la pregunta: ¿qué estrategia de natación tiene una mejor posibilidad teórica de ser adoptada por un nadador subcelular esférico?. Se trata entonces de una primera aproximación que además permite tomar ventaja de los resultados previos de [33] en donde ya se encuentran calculados, de cierta manera, los coeficientes de curvatura F_{mn} y de [37,49] en donde se elaboró acerca de la potencia y eficiencia de natación del nadador esférico.

La pregunta planteada en el párrafo anterior no ha sido respondida ni aun en el caso de los microorganismos, en donde las aplicaciones de la Micronatación se han concentrado hasta el momento en estudiar básicamente un tipo concreto de estrategia de movimiento, dejando de lado su comparación con otras estrategias posibles [34-35]. Por ejemplo en [34] se calcula sólo el desplazamiento producido por deformaciones tangenciales de la membrana de la cianobacteria *Synechococcus sp.* modelada como una esfera y, sobre la base de que se obtienen cálculos razonables de algunos parámetros cinéticos, se concluye que es posible que el microorganismo esté utilizando tal estrategia de natación, especulándose solamente sobre la posibilidad de que las deformaciones mixtas, combinaciones de deformaciones tangenciales y radiales, proporcionen velocidades mayores. La cuestión energética y de eficiencia no es tratada en ese trabajo.

Aquí se extienden los resultados de [34] en dos direcciones, considerando la situación energética y además incluyendo el caso de deformaciones radiales. Los resultados que se presentan en este capítulo están reportados en [51].

III.2. Marco General.

En esta sección se particularizan los conceptos y fórmulas generales, dados en el capítulo anterior, a las condiciones específicas del problema aquí planteado así como también se dan los coeficientes de curvatura ya determinados por Shapere y Wilczek [33].

III.2.1. Forma y Estrategia.

La forma básica S_0 que aquí se considera es la superficie esférica S^2 , $S_0 = S^2$, parametrizada mediante σ por coordenadas esféricas (r, θ, φ) (Fig. III.1) en la esfera unitaria, es decir:

$$\sigma = (\text{sen}\theta\cos\varphi, \text{sen}\theta\text{sen}\varphi, \cos\theta)$$

de modo que la esfera de radio R será $R\sigma$.

De acuerdo con II.8. se requiere un mínimo de dos campos vectoriales linealmente independientes sobre S^2 para poder generar desplazamiento. Dichos campos definen en sí a la estrategia de natación. En el presente trabajo se consideran solamente este tipo de estrategias mínimas.

Sean $V(\sigma)$, $W(\sigma)$ dos campos estacionarios en S^2 linealmente independientes. Entonces un ciclo elemental de deformaciones infinitesimales $S_0(t)$ de S_0 que constituya su brazada natatoria viene dado por (2.11) y (2.12):

$$\left. \begin{aligned} S_0(t) &= S_0 + s(t) \\ \text{con: } s(t) &= \varepsilon(a(t)V + b(t)W) \end{aligned} \right\} \dots (3.1)$$

en donde ε es un número pequeño.

Aquí los coeficientes $a(t)$, $b(t)$ representan las contribuciones periódicas de cada modo de oscilación V , W en cada instante de tiempo t . Es decir, que las deformaciones infinitesimales que sufre la esfera $S_0 = R\sigma$ durante el ciclo de brazada son:

$$R\sigma \rightarrow R\sigma + R\sigma\varepsilon(a(t)V + b(t)W)$$

De acuerdo con (2.13) el campo de velocidad \vec{U} que especifica el cambio de forma durante el ciclo de brazada $S_0(t)$ y que es la condición de no-resbalamiento en el

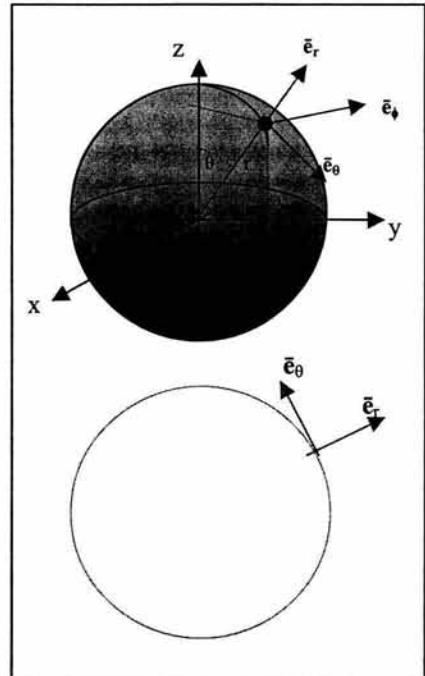


Figura III.1

Coordenadas esféricas y sus correspondientes vectores unitarios en un punto. Debido a la simetría respecto del eje z , se puede prescindir del ángulo φ , reduciéndose la situación a un círculo con sólo los vectores unitarios \vec{e}_r y \vec{e}_θ como elementos base para definir la acción de las deformaciones axisimétricas sobre S^2 .

problema de Stokes (ec. (2.3)), se obtiene derivando $S_0(t)$ con respecto a t , es decir:

$$\vec{U} = R\sigma\varepsilon(\dot{a}(t)V + \dot{b}(t)W) \dots (3.2)$$

Por simplicidad se supondrá que $a(t)$, $b(t)$ vienen dados por:

$$a(t) = \cos(2\pi\nu t) ; b(t) = \text{sen}(2\pi\nu t) \dots (3.3)$$

en donde $\nu = 1/T$ es la frecuencia de la oscilación en Hz.

El tipo de deformaciones de S^2 que se estudian en este trabajo es solamente el de las deformaciones axisimétricas, es decir aquellas que no dependen del ángulo φ (Fig. III.1). La razón de esta restricción es debido a que se ha propuesto que las deformaciones axisimétricas son las que maximizan la eficiencia del movimiento de una esfera [52]. Una deformación axisimétrica sobre la superficie esférica puede obtenerse definiendo un campo vectorial de deformación en un círculo $\varphi = \text{Cte.}$ y luego girando dicho círculo alrededor del eje z . Es decir que básicamente sólo se requiere de trabajar en S^1 .

Como consecuencia de lo anterior, en este caso bastan los campos vectoriales básicos radial \vec{e}_r y tangencial \vec{e}_θ para especificar una deformación axisimétrica cualquiera (Fig. III.1). En el presente trabajo sólo se consideran estrategias de natación ($V(\sigma)$, $W(\sigma)$) puramente radiales o tangenciales, ya que, al formar una base para las deformaciones axisimétricas, brindan la posibilidad de expresarlas como una simple combinación lineal.

Una manera de especificar a las deformaciones tangenciales y radiales consiste en dar las funciones que definen el cambio en la magnitud del radio r y en el ángulo azimutal θ después de una deformación. En general para describir la posición de un punto material m sobre la superficie deformada, se tienen las relaciones:

$$r_m = r_m(\theta, t) = R(1+f(\theta, t)) ; \quad \theta_m = \theta_m(\theta, t) = \theta + g(\theta, t) ; \quad \phi_m = \text{Cte.} \dots (3.4)$$

en donde la última igualdad expresa la condición de simetría del ángulo ϕ con respecto al eje z . Las funciones f y g , se supondrán periódicas en el tiempo t con un período fijo T . Así para deformaciones puramente tangenciales se hará $f \equiv 0$, $g \neq 0$ y lo contrario para puramente radiales.

III.2.2. Desplazamiento y Estrategia. La simetría alrededor del eje z causa que el movimiento de traslación de la forma S_0 quede restringido exclusivamente a dicho eje.

Dado que se tiene una estrategia de natación bimodal, la ecuación (2.14) se reduce a:

$$D = \frac{1}{2} \int_0^T F^r \left[R\varepsilon(a(t)V^h + b(t)W^h), R\varepsilon(\dot{a}(t)V^h + \dot{b}(t)W^h) \right] dt$$

Aplicando bilinealidad y antisimetría del operador F^r y que:

$$\int_0^T a(t)\dot{a}(t)dt = \int_0^T b(t)\dot{b}(t)dt = 0$$

se llega a:

$$D = \frac{1}{2} R^2 \varepsilon^2 \int_0^T (a(t)\dot{b}(t) - b(t)\dot{a}(t)) F^{rr} [V^h, W^h] dt$$

$$= \frac{1}{2} R^2 \varepsilon^2 \int_0^T (adb - bda) F^{rr} [V^h, W^h] = \frac{1}{2} R^2 \varepsilon^2 F^{rr} [V^h, W^h] \int_0^T (adb - bda)$$

Puesto que la curva paramétrica $(a(t), b(t)) = S^1$, la integral por calcular es una integral de línea que, aplicando el teorema de Green, es igual al área encerrada por S^1 , es decir 2π . En consecuencia:

$$D = R^2 \varepsilon^2 \pi F^{rr} [V^h, W^h] \dots (3.5)$$

Por lo tanto, las unidades de medición en que se expresa la curvatura F^{rr} son de inverso de longitud, L^{-1} .

La velocidad promedio del nadador durante una brazada es en general:

$$\bar{V} = \frac{D}{T} = \frac{1}{2} \omega R^2 \varepsilon^2 F^{rr} [V^h, W^h] = \frac{1}{2} \omega d^2 F^{rr} [V^h, W^h] \dots (3.6)$$

en donde $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia angular y $d = R\varepsilon$ es la deformación absoluta.

III.2.3. Potencia y Estrategia. Sea $S_0(t)$ una secuencia elemental de campos de deformación dada por (3.1). Entonces $S_0^h(t)$, representa la brazada físicamente correcta, en donde el superíndice h se refiere a las partes horizontales de las formas $S_0(t)$. Por lo tanto los cambios de forma \bar{U} hidrodinámicamente permitidos vienen dados por la "horizontalización" de $s(t)$ en (3.1):

$$\bar{U}^h(t) = R\varepsilon (\dot{a}(t)V^h + \dot{b}(t)W^h)$$

La potencia asociada a la brazada $S_0^h(t)$ es, de acuerdo con (2.15):

$$\mathcal{E} = \int_0^T E(\bar{U}^h(t)) dt$$

en donde E la forma cuadrática de potencia (ec. 2.4). Entonces:

$$\mathcal{E} = \int_0^T E(\bar{U}^h(t), \bar{U}^h(t)) dt = \int_0^T E(R\varepsilon(\dot{a}(t)V^h + \dot{b}(t)W^h), R\varepsilon(\dot{a}(t)V^h + \dot{b}(t)W^h)) dt$$

Aplicando la bilinealidad del operador E se tiene que:

$$\int_0^T E(R\varepsilon(\dot{a}(t)V^h + \dot{b}(t)W^h), R\varepsilon(\dot{a}(t)V^h + \dot{b}(t)W^h)) dt$$

$$= R^2 \varepsilon^2 \int_0^T E((\dot{a}(t)V^h + \dot{b}(t)W^h), (\dot{a}(t)V^h + \dot{b}(t)W^h)) dt$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 \varepsilon^2 \int_0^T \left\{ \dot{a}(t) E(V^h, \dot{a}(t)V^h + \dot{b}(t)W^h) + \dot{b}(t) E(W^h, \dot{a}(t)V^h + \dot{b}(t)W^h) \right\} dt \\
&= R^2 \varepsilon^2 \int_0^T \left\{ \dot{a}(t) \left[\dot{a}(t) E(V^h, V^h) + \dot{b}(t) E(V^h, W^h) \right] + \dot{b}(t) \left[\dot{a}(t) E(W^h, V^h) + \dot{b}(t) E(W^h, W^h) \right] \right\} dt \\
&= R^2 \varepsilon^2 \int_0^T \left\{ \dot{a}^2(t) E(V^h, V^h) + \dot{a}(t)\dot{b}(t) E(V^h, W^h) + \dot{b}(t)\dot{a}(t) E(W^h, V^h) + \dot{b}^2(t) E(W^h, W^h) \right\} dt
\end{aligned}$$

Puesto que el operador E es simétrico, entonces lo anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}
&R^2 \varepsilon^2 \int_0^T \left\{ \dot{a}^2(t) E(V^h, V^h) + 2\dot{a}(t)\dot{b}(t) E(V^h, W^h) + \dot{b}^2(t) E(W^h, W^h) \right\} dt \\
&= R^2 \varepsilon^2 \left[\int_0^T \dot{a}^2(t) E(V^h, V^h) dt + 2 \int_0^T \dot{a}(t)\dot{b}(t) E(V^h, W^h) dt + \int_0^T \dot{b}^2(t) E(W^h, W^h) dt \right]
\end{aligned}$$

Como la estrategia de natación (V, W) es autónoma entonces:

$$= R^2 \varepsilon^2 \left[E(V^h, V^h) \int_0^T \dot{a}^2(t) dt + 2E(V^h, W^h) \int_0^T \dot{a}(t)\dot{b}(t) dt + E(W^h, W^h) \int_0^T \dot{b}^2(t) dt \right]$$

Dada la forma (ec. 3.3) en que se escogieron los coeficientes periódicos $a(t)$, $b(t)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \dot{a}^2(t) dt &= \int_0^T \dot{b}^2(t) dt = 2\pi^2 \nu \\
\int_0^T \dot{a}(t)\dot{b}(t) dt &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{E} = 2\pi^2 \nu R^2 \varepsilon^2 \left[E(V^h, V^h) + E(W^h, W^h) \right] \dots (3.7)$$

Ya que la potencia básica E tiene por unidad de medida: $[E] = L^2 M T^{-3}$, entonces la potencia de brazada \mathcal{E} tiene unidades de: $[\mathcal{E}] = (L^2 T^{-1})(L^2 M T^{-3}) = M^{-1}(L^2 M T^{-2})^2$, es decir unidades de $(\text{masa})^{-1} (\text{energía})^2$.

III.2.3.1. Base de Lorentz. El cálculo de las normas al cuadrado $E(V^h, V^h)$, $E(W^h, W^h)$ se puede hacer expandiendo los vectores V^h , W^h en la base de vectores propios de Lorentz, como se explica enseguida.

Si el cuerpo deformable q se encuentra nadando en un dominio infinito \mathcal{D} y su frontera ∂q es una superficie C^2 , el operador de Lorentz \mathcal{P} (ver sec. II.3) es autoadjunto y positivo definido, tiene un conjunto discreto de valores propios $\{\lambda_n\}$ de multiplicidad finita y también un conjunto completo $\{v_n\}$ de vectores propios, en el sentido L^2 [37]. En consecuencia en este caso se puede desarrollar cualquier elemento del espacio tangente $T_q \mathcal{Q}$ en términos de la base de Lorentz $\{v_n\}$. Así si:

$$V^h = \sum_{n=1}^p c_n v_n \quad ; \quad W^h = \sum_{n=1}^p d_n v_n$$

Entonces:

$$E[V^h, V^h] = E \left[\sum_{n=1}^p c_n v_n, \sum_{n=1}^p c_n v_n \right] = \sum_{n=1}^p c_n^2 E[v_n, v_n]$$

Aplicando la definición (6) del operador de potencia se tiene que:

$$\sum_{n=1}^p c_n^2 E[v_n, v_n] = \sum_{n=1}^p c_n^2 \iint_{S^2} v_n \cdot \mathcal{P}(v_n) dS$$

Como $\{v_n\}$ son eigenfunciones del operador de Lorentz se llega a :

$$= \sum_{n=1}^p c_n^2 \iint_{S^2} v_n \cdot \lambda_n v_n dS = \sum_{n=1}^p c_n^2 \lambda_n \iint_{S^2} v_n \cdot v_n dS = \sum_{n=1}^p c_n^2 \lambda_n$$

en donde la última igualdad se obtiene aplicando la condición de normalización establecida sobre los vectores $\{v_n\}$. Por lo tanto:

$$E[V^h, V^h] = \sum_{n=1}^p c_n^2 \lambda_n \dots (3.8)$$

Análogamente:

$$E[W^h, W^h] = \sum_{n=1}^p d_n^2 \lambda_n \dots (3.9)$$

III.2.4. Eficiencia. Substituyendo las expresiones (3.5) y (3.7) en (2.17) se obtiene:

$$\eta = \frac{R^2 \varepsilon^2 \pi F^{rr} [V^h, W^h]}{T 2\pi^2 \nu R^2 \varepsilon^2 (E(V^h, V^h) + E(W^h, W^h))} = \frac{F^{rr} [V^h, W^h]}{2\pi (E(V^h, V^h) + E(W^h, W^h))} \dots (3.10)$$

que es la expresión de la eficiencia naive para este caso en particular.

Dadas las unidades de la curvatura y de la potencia, resulta que las unidades de la eficiencia naive son:

$$[\eta] = \frac{L^{-1}}{L^2 M T^{-3}} = L^{-3} M^{-1} T^3 = L^{-1} T (L^{-2} M^{-1} T^2)$$

que son unidades de (velocidad)⁻¹(energía)⁻¹.

III.2.5. Coeficientes de Curvatura. El problema de Stokes a resolver en el caso de un nadador esférico desplazándose en un dominio no acotado, consiste de las ecuaciones (1), (2) y (3) más la condición de frontera en el infinito:

$$\mu \nabla^2 \vec{v} = \nabla p$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{v}|_{\partial \Omega} = \vec{U}$$

$$\vec{v}(\infty) = 0$$

La solución a este problema es bien conocida [53] y la correspondiente extensión de Stokes es función de armónicos esféricos, los cuales constituyen una base para las deformaciones de S^2 . Los armónicos esféricos de dicha solución están definidos a su vez en términos de los polinomios de Legendre de grado uno y orden n , \mathcal{P}_n y sus asociados normalizados \mathcal{V}_n :

$$\mathcal{V}_n = \frac{2}{n(n+1)} \mathcal{P}'_n$$

siendo \mathcal{P}'_n la derivada de \mathcal{P}_n con respecto a su argumento. En coordenadas esféricas los polinomios \mathcal{P}_n y \mathcal{V}_n son funciones de $\cos(\theta)$.

Cuando las deformaciones \bar{U} de S^2 son axisimétricas sólo es necesario conocer los cambios en las coordenadas radial r y azimutal θ para determinarlas, $\bar{U}(r, \theta)$. Supóngase que las coordenadas r y θ cambian de acuerdo con (3.4) mediante las expresiones:

$$r = r_0 + \varepsilon \sum_{n=2}^N \alpha(t) \mathcal{P}_n(\cos \theta_0) \quad ; \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \sum_{n=1}^N \beta(t) \mathcal{V}_n(\cos \theta_0)$$

en donde r_0 y θ_0 especifican las correspondientes coordenadas en la condición sin deformar y $\alpha(t)$, $\beta(t)$ son coeficientes periódicos. Entonces de acuerdo con (3.2) y a menor orden en ε los componentes de \bar{U} en la dirección radial y azimutal son [33]:

$$U_r = \dot{r} = \varepsilon \sum \dot{\alpha}_n \mathcal{P}_n \quad ; \quad U_\theta = \dot{\theta} = \varepsilon \sum \dot{\beta}_n \mathcal{V}_n$$

y por lo tanto:

$$\bar{U} = \varepsilon \left[\left(\sum \dot{\alpha}_n \mathcal{P}_n \right) \bar{e}_r + \left(\sum \dot{\beta}_n \mathcal{V}_n \right) \bar{e}_\theta \right]$$

en donde $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta$ son los campos vectoriales básicos unitarios de las coordenadas esféricas, (Fig.1).

Debido a la simetría respecto del eje z , el movimiento causado por las deformaciones de S^2 será siempre en la dirección de dicho eje. Los valores de los componentes F_{mn} del tensor de curvatura \mathcal{F} en esa dirección, fueron ya calculados por Shapere y Wilczek [33] en todas los casos posibles de combinaciones diferentes entre modos de oscilación (deformaciones) radiales y tangenciales.

En el presente trabajo sólo se exploran los casos "puros", en donde se acoplan campos del mismo tipo, radiales con radiales y tangenciales con tangenciales. En estas condiciones se tienen los siguientes coeficientes de curvatura [33]:

$$F_{n,n+1} = \mathcal{F}(\mathcal{V}_n \bar{e}_\theta, \mathcal{V}_{n+1} \bar{e}_\theta) = \frac{8}{(2n+1)(2n+3)} R \quad \dots (3.11)$$

$$F_{n,n+1} = \mathcal{F}(\mathcal{P}'_n \bar{e}_r, \mathcal{P}'_{n+1} \bar{e}_r) = \frac{-2n^2 + 2n + 1}{(2n+1)(2n+3)} R \quad \dots (3.12)$$

en donde R es el radio de la esfera.

Hay que aclarar que para estas deformaciones estos son los únicos componentes de \mathcal{F} distintos de cero. Es decir que, solamente el acoplamiento de modos de oscilación consecutivos, $n, n+1$, produce una curvatura distinta de cero y por lo tanto generan desplazamiento, el resto de las posibilidades siendo nulas no producen traslación del nadador esférico.

III.3. Cambio de Base.

Existe un problema con los polinomios de Legendre y sus asociados y es que cuando el orden n es muy alto, sus ceros se acumulan en la vecindad de los puntos $\theta = 0, \pi$, o sea en los polos de S^2 . Como consecuencia la esfera presenta ahí deformaciones muy conspicuas, semejantes a peinetas.

Por supuesto no hay razón *a priori* para decidir que tales deformaciones no se presentarán físicamente en un nadador subcelular real, pero precisamente debido a esta carencia de información parece más conveniente adoptar bases de deformación cuya distribución de ceros sea uniforme, como por ejemplo las de las funciones seno y coseno. Así para describir las oscilaciones de la membrana, se decidió utilizar a las funciones trigonométricas mencionadas.

Así, para el caso de las deformaciones tangenciales la base es:

$$V = \cos(n\theta)\bar{e}_\theta \quad ; \quad W = \sin(n\theta)\bar{e}_\theta \quad \dots \quad (3.13a)$$

y en el caso de las deformaciones radiales:

$$V = \cos(n\theta)\bar{e}_r \quad ; \quad W = \sin(n\theta)\bar{e}_r \quad \dots \quad (3.13b)$$

que a su vez constituyen las estrategias de natación tangencial y radial respectivamente.

Esta selección es consistente con la especificación de deformaciones dada por las ecuaciones (3.4), cuando se ha adoptado una onda viajera cosenoidal, como fue hecho en [34].

Por ejemplo, en el caso de deformaciones puramente tangenciales se tendría en (3.4) que $f \equiv 0$. Definase a g como una cantidad cosenoidal general u oscilación armónica, de amplitud infinitesimal ε , longitud de onda $\lambda = 2\pi/\omega$ y fase inicial $n\theta$:

$$g = \varepsilon \cos(n\theta - \omega t)$$

con $\omega = 2\pi\nu$ la velocidad angular. Así se tiene que:

$$g = \varepsilon \cos(n\theta - \omega t) = \varepsilon [\sin(\omega t)\sin(n\theta) + \cos(\omega t)\cos(n\theta)]$$

y al multiplicar por el campo azimutal \bar{e}_θ :

$$g \bar{e}_\theta = \varepsilon [\sin(\omega t)\sin(n\theta) + \cos(\omega t)\cos(n\theta)] \bar{e}_\theta = \varepsilon [\sin(\omega t)\sin(n\theta) \bar{e}_\theta + \cos(\omega t)\cos(n\theta) \bar{e}_\theta]$$

La estrategia de natación tangencial es entonces dada por $V = \cos(n\theta)\bar{e}_\theta$ y $W = \sin(n\theta)\bar{e}_\theta$ de acuerdo con (3.13a).

De hecho, expandiendo en serie de Fourier cualquier onda viajera $h(n\theta - \omega t) \bar{e}_\theta$ se puede obtener su representación en la base definida por (3.13).

Dados los coeficientes periódicos $a(t)$, $b(t)$ de acuerdo con (3.3) y la estrategia de natación tangencial V , W , dada por (3.13a), cada punto de la superficie esférica se moverá, bajo la influencia de estos campos, oscilando alrededor de su posición de equilibrio siguiendo la dirección de la tangente en dicho punto. Como resultado de la diferencia de fase entre puntos consecutivos se generan alrededor de la esfera bandas meridianas alternantes de compresión y extensión cuyo número es más grande conforme crece n . En consecuencia las deformaciones tangenciales son inconspicuas, no alterando propiamente la forma esférica.

En el caso radial, con los vectores básicos dados por (3.13b), cada punto de S^2 oscilará alrededor de su posición inicial siguiendo el radio que pasa por dicho punto. Como consecuencia las deformaciones radiales se ven como una superficie esférica ondulante, con olas igualmente espaciadas y de la misma altura, aumentando en número conforme n sea más grande.

El cálculo de los coeficientes de curvatura en términos de una base de senos y cosenos se puede hacer partiendo de los resultados (3.11), (3.12) y desarrollando a las funciones trigonométricas como combinaciones lineales de polinomios de Legendre [54]:

$$\cos(n\theta) = \sum_n A_n \mathcal{P}_n$$

$$\sin(n\theta) = \sum_n B_n \mathcal{P}_n$$

Derivando término a término estos desarrollos, se obtienen las sumas correspondientes en función de los polinomios asociados normalizados \mathcal{V}_n , las cuales son necesarias para el caso tangencial.

En consecuencia y debido a sus propiedades de bilinealidad y antisimetría, el valor de la curvatura \mathcal{F} en la dirección del eje de simetría z y en función del seno y coseno será dado por la expresión general:

$$\mathcal{F}(\sin(n\theta), \cos(n\theta)) = \sum_n \alpha_n \beta_n \mathcal{F}(\Phi_j, \Phi_k)$$

en donde los coeficientes α_n , β_n son específicos de los casos tangencial o radial según se trate, lo mismo que Φ_n que es igual a \mathcal{P}_n o \mathcal{V}_n según sea el caso, como se ve enseguida.

III.4. Resultados.

Los resultados del presente trabajo corresponden al cálculo de la curvatura en el caso radial, y al cálculo de las potencias y eficiencias tanto para el caso radial como para el tangencial. También se presenta el cálculo de la curvatura en el caso tangencial, puesto que si bien ya había sido reportado en [34], aquí se da con más detalle.

III.4.1. Curvatura caso tangencial.

El objetivo de esta siguiente sección es calcular $\mathcal{F}(\sin(n\theta)\bar{e}_\theta, \cos(n\theta)\bar{e}_\theta)$, dado que se conoce a $\mathcal{F}(\mathcal{V}_m \bar{e}_\theta, \mathcal{V}_n \bar{e}_\theta)$. Por la antisimetría del tensor \mathcal{F} , la curvatura de esta estrategia de natación también específica, salvo un cambio de signo, la dada por la ec (3.11).

De acuerdo con [33], $\mathcal{F}(\mathcal{V}_m \bar{e}_\theta, \mathcal{V}_n \bar{e}_\theta) = 0$ a menos que m y n difieran en 1 en cuyo caso:

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}_n \bar{e}_\theta, \mathcal{V}_{n+1} \bar{e}_\theta) = \frac{8}{(2n+1)(2n+3)R}$$

Según las fórmulas 8.924.3 y 8.924.4 de [55] se tiene la suma finita:

$$\cos(n\theta) = A_0^{(n)}\mathcal{P}_n + A_1^{(n)}\mathcal{P}_{n-2} + \dots + A_k^{(n)}\mathcal{P}_{n-2k} + \dots + \begin{cases} A_{(n/2)-1}^{(n)}\mathcal{P}_2 & \text{si } n \text{ es par} \\ A_{[n/2]}^{(n)}\mathcal{P}_1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \dots \quad (3.14)$$

en donde cada polinomio de Legendre es función del $\cos(\theta)$, $\mathcal{P}_j(\cos \theta)$, $A_j^{(n)}$ son ciertos coeficientes conocidos y $[\dots]$ es la función "mayor entero menor o igual que..". Para el seno se tiene la serie:

$$\text{sen}(n\theta) = (\pi/4) [B_{-1}^{(n)}\mathcal{P}_{n-1} + B_0^{(n)}\mathcal{P}_{n+1} + \dots + B_k^{(n)}\mathcal{P}_{n+2k+1} + \dots] \dots \quad (3.15)$$

Primeramente se va a derivar cada una de estas sumas con respecto a θ , para ponerlas en términos de los polinomios asociados de Legendre $\mathcal{P}'_n = -\text{sen}\theta \mathcal{P}'_n$ en donde \mathcal{P}'_n es la derivada con respecto de θ del polinomio \mathcal{P}_n [54]. Después se hará la substitución: $\mathcal{V}_n = [2/(n(n+1))] \mathcal{P}'_n$ para así poner finalmente la serie en términos de los polinomios de Legendre asociados normalizados, \mathcal{V}_n .

Derivando (4.4):

$$-n\text{sen}(n\theta) = -\text{sen}\theta A_0^{(n)}\mathcal{P}'_n - \text{sen}\theta A_1^{(n)}\mathcal{P}'_{n-2} - \dots - \text{sen}\theta A_k^{(n)}\mathcal{P}'_{n-2k} - \dots - \begin{cases} -\text{sen}\theta A_{(n/2)-1}^{(n)}\mathcal{P}'_2 & \text{si } n \text{ es par} \\ -\text{sen}\theta A_{[n/2]}^{(n)}\mathcal{P}'_1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Puesto que $\mathcal{P}'_n = -\text{sen}\theta \mathcal{P}'_n$ entonces, substituyendo:

$$-n\text{sen}(n\theta) = A_0^{(n)}\mathcal{P}_n^1 + A_1^{(n)}\mathcal{P}_{n-2}^1 + \dots + A_k^{(n)}\mathcal{P}_{n-2k}^1 + \dots + \begin{cases} A_{(n/2)-1}^{(n)}\mathcal{P}_2^1 & \text{si } n \text{ es par} \\ A_{[n/2]}^{(n)}\mathcal{P}_1^1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

de donde se obtiene la suma finita:

$$\text{sen}(n\theta) = (-1/n) \left[A_0^{(n)}\mathcal{P}_n^1 + A_1^{(n)}\mathcal{P}_{n-2}^1 + \dots + A_k^{(n)}\mathcal{P}_{n-2k}^1 + \dots + \begin{cases} A_{(n/2)-1}^{(n)}\mathcal{P}_2^1 & \text{si } n \text{ es par} \\ A_{[n/2]}^{(n)}\mathcal{P}_1^1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \right]$$

Análogamente para el coseno resulta la serie:

$$\cos(n\theta) = (\pi/(4n)) [B_{-1}^{(n)}\mathcal{P}_{n-1}^1 + B_0^{(n)}\mathcal{P}_{n+1}^1 + \dots + B_k^{(n)}\mathcal{P}_{n+2k+1}^1 + \dots]$$

Entonces, el coeficiente de curvatura $\mathcal{F}(\text{sen}(n\theta), \cos(n\theta))$ es:

$$\mathcal{F}\left((-1/n)\left[A_0^{(n)}\mathcal{P}_n^1 + A_1^{(n)}\mathcal{P}_{n-2}^1 + \dots + A_k^{(n)}\mathcal{P}_{n-2k}^1 + \dots\right], (\pi/(4n))\left[B_{-1}^{(n)}\mathcal{P}_{n-1}^1 + B_0^{(n)}\mathcal{P}_{n+1}^1 + \dots + B_k^{(n)}\mathcal{P}_{n+2k+1}^1 + \dots\right]\right)$$

en donde el término final de la suma finita correspondiente a la función seno se ha omitido por claridad.

Aplicando bilinealidad a cada argumento resulta:

$$\begin{aligned} &= -(1/n)(\pi/(4n))A_0^{(n)}B_{-1}^{(n)}\mathcal{F}(\mathcal{P}_n^1, \mathcal{P}_{n-1}^1) - (1/n)(\pi/(4n))A_0^{(n)}B_0^{(n)}\mathcal{F}(\mathcal{P}_n^1, \mathcal{P}_{n+1}^1) + \dots \\ &\quad - (1/n)(\pi/(4n))A_1^{(n)}B_{-1}^{(n)}\mathcal{F}(\mathcal{P}_{n-2}^1, \mathcal{P}_{n-1}^1) - (1/n)(\pi/(4n))A_1^{(n)}B_0^{(n)}\mathcal{F}(\mathcal{P}_{n-2}^1, \mathcal{P}_{n+1}^1) + \dots \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

es decir una suma finita de las series correspondientes a cada coeficiente $A_j^{(n)}$.

Puesto que los coeficientes de curvatura distintos de cero son aquellos para los que sus subíndices difieren en 1, entonces la suma anterior se reduce a:

$$= -(1/n)(\pi/(4n))\left[A_0^{(n)}B_{-1}^{(n)}\mathcal{F}(\mathcal{P}_n^1, \mathcal{P}_{n-1}^1) + A_0^{(n)}B_0^{(n)}\mathcal{F}(\mathcal{P}_n^1, \mathcal{P}_{n+1}^1) + A_1^{(n)}B_{-1}^{(n)}\mathcal{F}(\mathcal{P}_{n-2}^1, \mathcal{P}_{n-1}^1)\right] \dots (3.16)$$

Como $\mathcal{V}_n = (2/(n(n+1)))\mathcal{P}_n^1$ entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_{n+1}) &= \mathcal{F}\left(\frac{2}{n(n+1)}\mathcal{P}_n^1, \frac{2}{(n+1)(n+2)}\mathcal{P}_{n+1}^1\right) = \frac{2}{n(n+1)}\frac{2}{(n+1)(n+2)}\mathcal{F}(\mathcal{P}_n^1, \mathcal{P}_{n+1}^1) = \\ &= \frac{4}{n(n+1)^2(n+2)}\mathcal{F}(\mathcal{P}_n^1, \mathcal{P}_{n+1}^1) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}_n^1, \mathcal{P}_{n+1}^1) = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}\mathcal{F}(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_{n+1})$$

Como además $\mathcal{F}(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_{n+1}) = 8/((2n+1)(2n+3)R)$ entonces, substituyendo y simplificando se llega a:

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}_n^1, \mathcal{P}_{n+1}^1) = \frac{2n(n+1)^2(n+2)}{(2n+1)(2n+3)R}$$

en consecuencia:

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}_n^1, \mathcal{P}_{n-1}^1) = \frac{2(n-1)n^2(n+1)}{(2n-1)(2n+1)R} \quad ; \quad \mathcal{F}(\mathcal{P}_{n-2}^1, \mathcal{P}_{n-1}^1) = \frac{2(n-2)(n-1)^2n}{(2n-1)(2n-3)R}$$

Substituyendo en (3.16) estas expresiones y las correspondientes a cada coeficiente $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, que de acuerdo con [55] son:

$$A_0^{(n)} = \frac{2^{n-1} n!}{(2n-1)!!} \quad ; \quad A_1^{(n)} = \frac{-n(2n-3)2^{n-3}(n-2)!}{(2n-1)!!} \quad \dots (3.17)$$

$$B_{-1}^{(n)} = (2n-1)!! 2^{n-1} (n-1)! \quad ; \quad B_0^{(n)} = -\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right) \frac{(2n-1)!!(2n-3)}{(n+1)!}$$

realizando la suma y simplificando (con el auxilio de *Mathematica* 3.0), finalmente se llega a:

$$\mathcal{F}(\text{sen}(n\theta), \text{cos}(n\theta)) = \frac{\pi n}{4R} \dots (3.18)$$

de acuerdo también con [34].

En consecuencia, substituyendo en (3.5) el desplazamiento del nadador tangencial es:

$$D = \frac{n}{4} R \varepsilon^2 \pi^2 \dots (3.19)$$

Substituyendo este resultado en (3.6) se tiene que:

$$\bar{V} = \frac{1}{2} d^2 \omega \frac{\pi n}{4R}$$

que, en términos de la velocidad de onda $c = \lambda v$ en donde $\lambda = 2\pi R/n$ es la longitud de onda, queda así:

$$\bar{V} = \frac{\pi^3}{2} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 c = \frac{\pi^3}{2} \frac{d^2 v}{\lambda} \dots (3.20)$$

III.4.2. Curvatura caso radial.

El objetivo de esta siguiente sección es calcular $\mathcal{F}(\text{sen}(n\theta)\bar{e}_r, \text{cos}(n\theta)\bar{e}_r)$, dado que se conoce a $\mathcal{F}(\mathcal{P}_m \bar{e}_r, \mathcal{P}_n \bar{e}_r)$.

De acuerdo con [33], $\mathcal{F}(\mathcal{P}_m \bar{e}_r, \mathcal{P}_n \bar{e}_r) = 0$ a menos que m y n difieran en 1 en cuyo caso (ec. 3.11):

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}_n \bar{e}_r, \mathcal{P}_{n+1} \bar{e}_r) = \frac{-2n^2 + 2n + 1}{(2n+1)(2n+3)R}$$

Como en el caso radial puro los coeficientes de los vectores de la base de deformaciones son polinomios de Legendre \mathcal{P}_n , se puede partir de las ecuaciones (3.14) y (3.15) para substituir las directamente dentro del argumento de $\mathcal{F}(\text{sen}(n\theta), \text{cos}(n\theta))$. Luego de aplicar bilinealidad y la regla de nulidad: $\mathcal{F}(\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n) = 0$ a menos que $|m-n|=1$; se llega de nuevo a una suma con sólo tres términos distintos de cero:

$$\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[A_0^{(n)} B_{-1}^{(n)} \mathcal{F}(\mathcal{P}_{n-1}^1, \mathcal{P}_n^1) + A_0^{(n)} B_0^{(n)} \mathcal{F}(\mathcal{P}_{n+1}^1, \mathcal{P}_n^1) + A_1^{(n)} B_{-1}^{(n)} \mathcal{F}(\mathcal{P}_{n-1}^1, \mathcal{P}_{n-2}^1) \right] \dots (3.21)$$

Partiendo de (3.12) se obtienen las siguientes expresiones para \mathcal{F} en función de los asociados de Legendre:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{P}_{n-1}^1, \mathcal{P}_n^1) &= \frac{-2(n-1)^2 + 2n - 1}{(2n-1)(2n+1)R} \\ \Rightarrow \\ \mathcal{F}(\mathcal{P}_{n-2}^1, \mathcal{P}_{n-1}^1) &= \frac{-2(n-2)^2 + 2n - 3}{(2n-3)(2n-1)R} \\ \mathcal{F}(\mathcal{P}_{n-1}^1, \mathcal{P}_{n-2}^1) &= -\mathcal{F}(\mathcal{P}_{n-2}^1, \mathcal{P}_{n-1}^1) = -\left(\frac{-2(n-2)^2 + 2n - 3}{(2n-3)(2n-1)R}\right)\end{aligned}$$

Después de incluir en (3.21) estas expresiones y las correspondientes a los coeficientes $B^{(n)}$ y $A^{(n)}$ que aparecen en (3.17), realizar la suma indicada y simplificar se llega a que:

$$\mathcal{F}(\text{sen}(n\theta), \text{cos}(n\theta)) = -\frac{\pi}{8R} \left[\frac{4n^5 - 14n^4 - 4n^3 + 23n^2}{4n^4 - 5n^2 + 1} \right] \dots (3.22)$$

expresión más complicada en apariencia que la correspondiente al caso tangencial, pero que es en realidad una función de orden n , por lo que el resultado de graficar a \mathcal{F} vs. n es también una línea recta. Esta fórmula, cuya obtención se verificó ampliamente con *Mathematica* 3.0, no ha aparecido antes en la literatura de investigación.

En consecuencia, substituyendo en (3.5) el desplazamiento del nadador tangencial es:

$$D = -\frac{1}{8} R e^2 \pi^2 \left[\frac{4n^5 - 14n^4 - 4n^3 + 23n^2}{4n^4 - 5n^2 + 1} \right] \dots (3.23)$$

Substituyendo en (3.6) se obtiene la velocidad:

$$\bar{V} = -\frac{\pi d^2 \omega}{16R} \left[\frac{4n^5 - 14n^4 - 4n^3 + 23n^2}{4n^4 - 5n^2 + 1} \right] = -\frac{\pi^2 d^2 c}{8R\lambda} \left[\frac{4n^5 - 14n^4 - 4n^3 + 23n^2}{4n^4 - 5n^2 + 1} \right] \dots (3.24)$$

III.4.3. Potencia.

Aquí se expone el cálculo de la potencia de brazada dada por la ecuación (3.7) para los casos tangencial y radial. En ambos casos se quiere calcular $\mathcal{E}(\text{sen}(n\theta), \text{cos}(n\theta))$ para lo cual se requiere de conocer $E(\text{sen}(n\theta), \text{sen}(n\theta))$, y $E(\text{cos}(n\theta), \text{cos}(n\theta))$. El cálculo se puede hacer siguiendo el procedimiento general dado en la sección III.2.3.1, es decir expresando a la estrategia de natación V, W , dada en la ecuación (3.13) en términos de los vectores de la base de Lorentz. Esto se consigue expresando los polinomios de Legendre como combinación lineal de los vectores propios y luego substituir estas expresiones en los desarrollos (3.14) y (3.15).

Para deformaciones axisimétricas, en la base de vectores propios de Lorentz (λ_n, ν_n) por cada n existen únicamente dos vectores propios $\nu_n^{(1)}, \nu_n^{(3)}$, faltando el correspondiente al superíndice 2 debido a la simetría asumida. Estos vectores y sus correspondientes valores propios son [37,49]:

$$\nu_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \left(-(n+1) \mathcal{P}_n \bar{e}_r + \mathcal{V}_n \bar{e}_\theta \right), \quad \lambda_n^{(1)} = \frac{\mu}{R} 2(n+2) \dots (3.25)$$

$$\nu_n^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(n \mathcal{P}_n \bar{e}_r + \mathcal{V}_n \bar{e}_\theta \right), \quad \lambda_n^{(3)} = \frac{\mu}{R} \frac{2n^2 + 1}{n+1} \dots (3.26)$$

III.4.3.1. Caso tangencial. De (3.25) se tiene que:

$$\frac{\sqrt{2} \nu_n^{(1)}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{(n+1)} \left(-(n+1) \mathcal{P}_n \bar{e}_r + \mathcal{V}_n \bar{e}_\theta \right) = -\mathcal{P}_n \bar{e}_r + \frac{1}{(n+1)} \mathcal{V}_n \bar{e}_\theta \dots (3.27)$$

y de (3.26):

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \nu_n^{(3)} = \frac{1}{n} \left(n \mathcal{P}_n \bar{e}_r + \mathcal{V}_n \bar{e}_\theta \right) = \mathcal{P}_n \bar{e}_r + \frac{1}{n} \mathcal{V}_n \bar{e}_\theta \dots (3.28)$$

sumando (3.27) y (3.28) se llega a:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} \nu_n^{(1)} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \nu_n^{(3)} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} \right) \mathcal{V}_n \bar{e}_\theta = \frac{2n+1}{n(n+1)} \mathcal{V}_n \bar{e}_\theta$$

por lo que:

$$\mathcal{V}_n \bar{e}_\theta = \frac{n(n+1)}{2n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} \nu_n^{(1)} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \nu_n^{(3)} \right) = \frac{n\sqrt{2(n+1)}}{2n+1} \nu_n^{(1)} + \frac{(n+1)\sqrt{2n}}{2n+1} \nu_n^{(3)} \dots (3.29)$$

La estrategia tangencial $V = \text{sen}(n\theta) \bar{e}_\theta$, $W = \text{cos}(n\theta) \bar{e}_\theta$ se puede desarrollar en términos de los polinomios asociados normalizados de Legendre de acuerdo a (3.14) y (3.15), resultando en:

$$V = \begin{cases} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_k^{(n)} \mathcal{V}_{n-2k} \right) \bar{e}_\theta & \text{si } n \text{ es impar} \\ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{(n/2)-1} \alpha_k^{(n)} \mathcal{V}_{n-2k} \right) \bar{e}_\theta & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad \text{con: } \alpha_k^{(n)} = \frac{2}{n(n+1)} A_k^{(n)} \dots (3.30)$$

$$W = \left(\frac{\pi}{4n} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(n)} \mathcal{V}_{n+2k+1} \right) \bar{e}_\theta \quad \text{con: } \beta_k^{(n)} = \frac{2}{n(n+1)} B_k^{(n)} \dots (3.31)$$

Substituyendo ahora (3.29) en los desarrollos (3.30) y (3.31) se ponen los campos V, W en función de la base de Lorentz:

$$V = \sum_{n=1}^p c_n v_n ; W = \sum_{n=1}^p d_n v_n \dots (3.32)$$

de acuerdo con lo dicho en la sección III.2.3.1.

A partir de ahí se aplica el operador potencia E y por sus propiedades de bilinealidad y simetría se llegará a expresiones como (3.8) y (3.9). Este procedimiento fue automatizado en un programa de computadora, instruyendo a *Mathematica* 3.0 con las propiedades del operador de potencia E y aplicándolo sobre las sumas (3.32). El listado de dicho programa se encuentra en el anexo III.1. La gráfica de los resultados obtenidos es la figura III.3.

III.4.3.2. Caso radial. De (3.25) y (3.26) se tiene que:

$$\begin{aligned}\sqrt{2(n+1)}v_n^{(1)} &= -(n+1)\mathcal{P}_n\bar{e}_r + \mathcal{V}_n\bar{e}_\theta \\ \sqrt{2n}v_n^{(3)} &= n\mathcal{P}_n\bar{e}_r + \mathcal{V}_n\bar{e}_\theta\end{aligned}$$

restando estas expresiones se llega a:

$$\begin{aligned}\sqrt{2(n+1)}v_n^{(1)} - \sqrt{2n}v_n^{(3)} &= -(n+1)\mathcal{P}_n\bar{e}_r + \mathcal{V}_n\bar{e}_\theta - n\mathcal{P}_n\bar{e}_r - \mathcal{V}_n\bar{e}_\theta \\ &= -2n\mathcal{P}_n\bar{e}_r - \mathcal{P}_n\bar{e}_r = \mathcal{P}_n\bar{e}_r(-2n-1)\end{aligned}$$

por lo que:

$$\mathcal{P}_n\bar{e}_r = \frac{\sqrt{2n}v_n^{(3)}}{2n+1} - \frac{\sqrt{2(n+1)}v_n^{(1)}}{2n+1} \dots (3.33)$$

La estrategia radial $V = \text{sen}(n\theta) \bar{e}_r$, $W = \text{cos}(n\theta) \bar{e}_r$ se puede desarrollar en términos de los polinomios de Legendre de acuerdo a (3.14) y (3.15) resultando en:

$$V = \left(\frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)} \mathcal{P}_{n+2k+1} \right) \bar{e}_r \dots (3.34)$$

$$W = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_k^{(n)} \mathcal{P}_{n-2k} \right) \bar{e}_r & \text{si } n \text{ es impar} \\ \left(\sum_{k=0}^{(n/2)-1} A_k^{(n)} \mathcal{P}_{n-2k} \right) \bar{e}_r & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \dots (3.35)$$

Substituyendo ahora (3.33) en los desarrollos (3.34) y (3.35) quedan los campos V , W en función de la base de Lorentz, de acuerdo con (3.32). El procedimiento automático del cálculo de la energía de brazada para este caso es idéntico al del acaso anterior y la gráfica de resultados correspondiente es la figura III.6.

III.4.4. Gráficas.

Los datos correspondientes a las siguientes gráficas fueron obtenidos con los parámetros: $R = 1 \times 10^{-5}$ cm, $\varepsilon = 0.01$; $\nu = 500$ Hz ; $\mu = 0.01$ Poises.

Además, en la evaluación de las series infinitas dadas por la ecuación (3.15) se consideraron 15 términos, lo que da una aproximación razonablemente buena de las funciones trigonométricas consideradas, en un tiempo de procesamiento moderado.

Caso Tangencial:

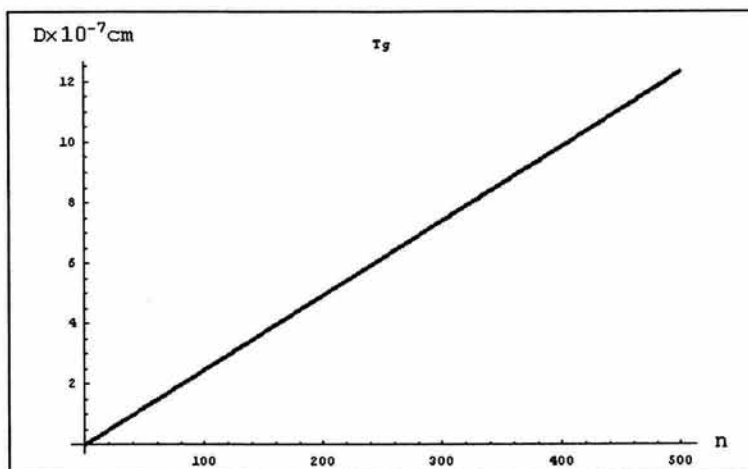


Figura III.2. Gráfica de la ecuación (3.19) del desplazamiento por brazada D en función del modo de oscilación n .

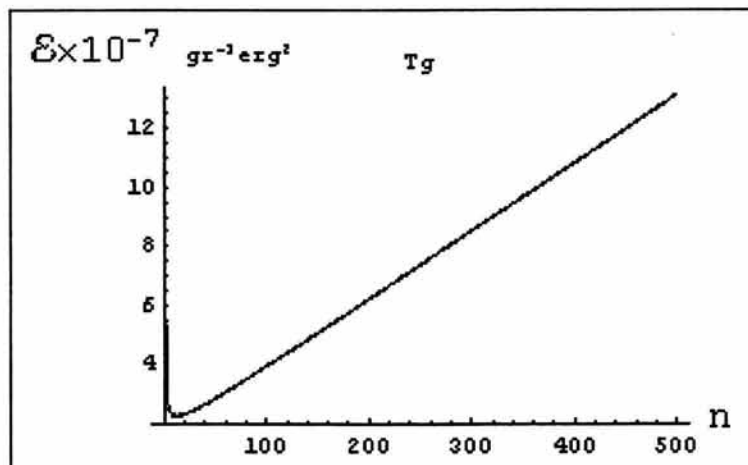


Figura III.3. Gráfica de la potencia de brazada \mathcal{E} dada por la ecuación (3.7) en el caso de deformaciones tangenciales, de acuerdo con la sección III.4.3.1.

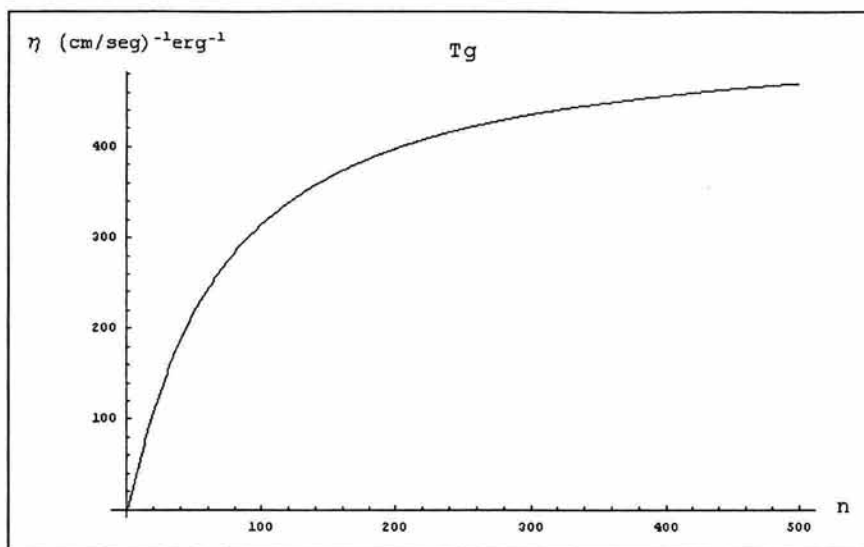


Figura III.4. Gráfica de la eficiencia naiva η , dada por la ecuación (3.10), con los datos de curvatura dados a la ecuación (3.18) y los de potencia correspondientes a las ecuaciones (3.8) y (3.9) para el caso tangencial de acuerdo con la sección III.4.3.1.

Caso Radial.

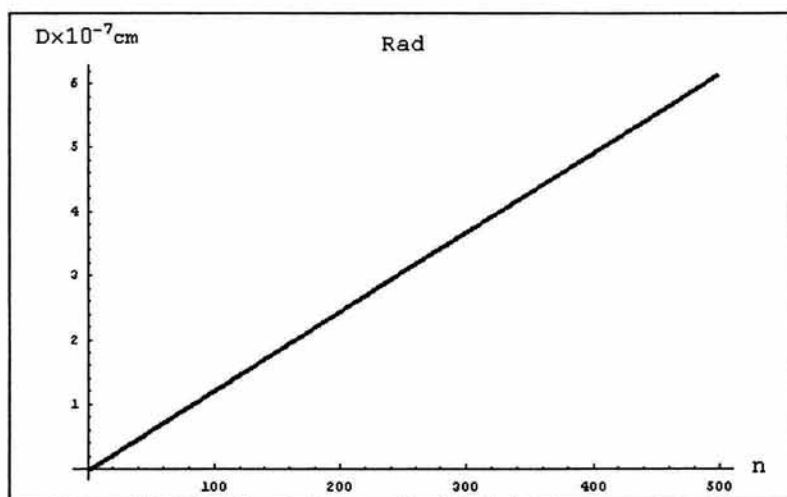


Figura III.5. Gráfica de la ecuación (3.23) del desplazamiento D por brazada en función del modo de oscilación n .

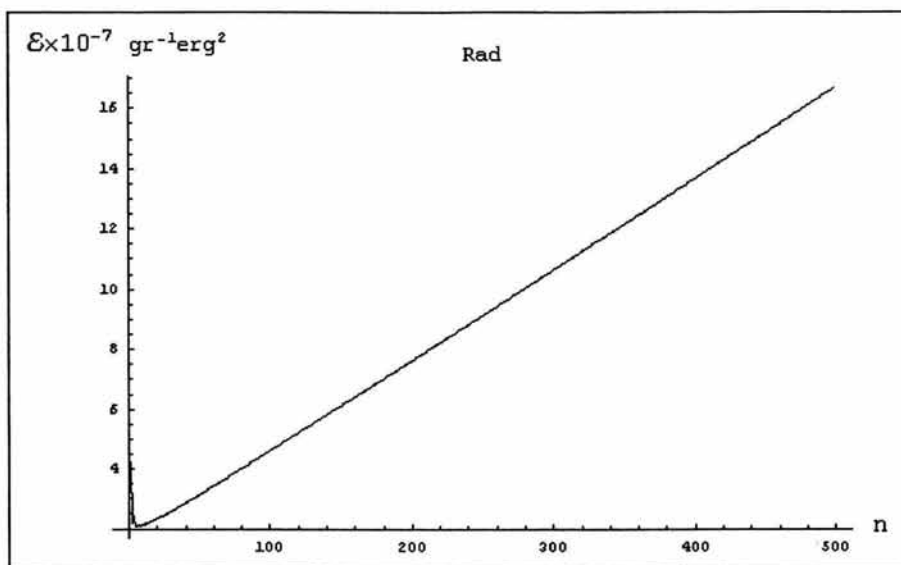


Figura III.6. Gráfica de la potencia de brazada \mathcal{E} dada por la ecuación (3.7) en el caso de deformaciones radiales, de acuerdo con la sección III.4.3.2.

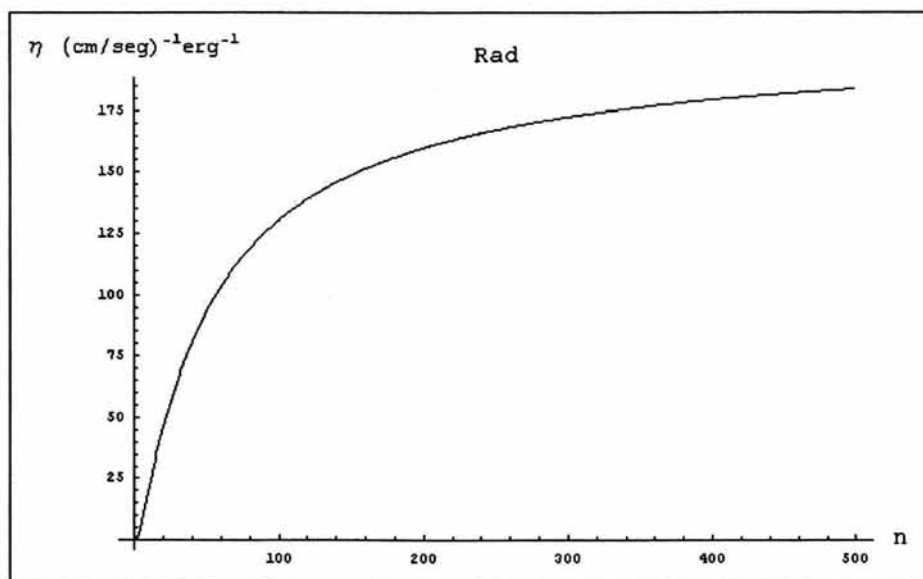


Figura III.7. Gráfica de la eficiencia naive η , dada por la ecuación (3.10), con los datos de curvatura dados a la ecuación (3.22) y los de potencia correspondientes a las ecuaciones (3.8) y (3.9) para el caso radial de acuerdo con la sección III.4.3.2.

III.5. Discusión.

Este apartado se divide en una parte de discusión relativa a la Física y otra a la Biología de la micronatación.

III.5.1. Física. En este apartado sólo se dan algunas interpretaciones de carácter elemental acerca de los resultados de la sección anterior y de sus posibles causas. La sección se divide en un análisis de las semejanzas y diferencias entre los resultados concernientes a las estrategias de natación tangenciales y radiales.

III.5.1.1. Semejanzas. Son de orden cualitativo.

i) *Forma de las curvas D, E.* Comparando entre el caso tangencial y el radial se ve que las curvas correspondientes al desplazamiento y potencia son similares y como consecuencia directa las de eficiencia también.

No se tiene por el momento una explicación física de este hecho, en parte debido a que la variedad de casos estudiados hasta ahora no es muy amplia, ni en relación con la forma del nadador, en donde comúnmente se trata con formas geoméricamente simples, ni con respecto al tipo de deformaciones supuestas, para las cuales siempre se asume alguna hipótesis de simetría simplificadora.

Un posible punto de partida para comenzar a explicar esta semejanza sería el considerar deformaciones libres sobre la esfera, por ejemplo sin el supuesto de axisimetría.

En relación con el desplazamiento y desde el punto de vista formal se tiene que en ambos casos: $D \propto F^{tr} \propto n$, de acuerdo con las ecuaciones (3.19) y (3.23).

ii) *Relación entre n y D.* A bajos números de Reynolds las fuerzas viscosas prevalecen sobre las fuerzas inerciales y por lo tanto son las primeramente citadas las que un cuerpo en movimiento tiene que usar para autopropulsarse a través de un fluido. En este régimen dinámico, resistencia y cambios en resistencia en una dirección particular pueden

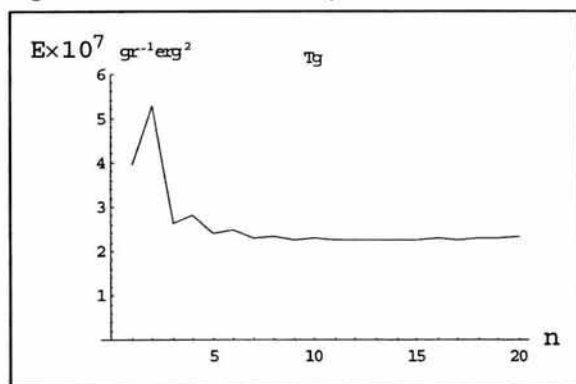


Figura III.8. Ampliación de la región de bajos números de onda n de la gráfica de la figura III.3 correspondiente a deformaciones tangenciales.

resultar en propulsión. Por ejemplo una membrana oscilatoria a bajos Re básicamente utiliza la viscosidad del fluido para conseguir apoyo y así poder impulsarse [50,56-57].

En consecuencia, para una membrana de longitud dada, mientras más grande sea el número de onda n de su oscilación, más grande será también el número de regiones de la membrana que interactuarían fuertemente con el fluido por medio de la generación de esfuerzo. Se esperaría entonces que esta suerte de "agarre" entre la membrana y el fluido produjese, en una estrategia de natación exitosa,

un mayor desplazamiento en proporción con el número de onda de la deformación oscilatoria, que es lo que se aprecia en las figuras III.2 y III.5. Esto ocurre también en el

caso de planos finitos, filamentos elipses y círculos cuyas fronteras oscilan periódicamente en medios no acotados [33,36,57-58].

iii) *Relación entre n y \mathcal{E}* . De acuerdo a la explicación anterior, se esperaría que la potencia de brazada también aumentara conforme crece el número de onda n . Esto es así para la mayor parte del rango explorado, como se ve en las figuras III.3 y III.6.

Sin embargo, $\mathcal{E}(n)$ tiene una conducta muy peculiar cuando n es pequeño, como se muestra en la figura III.8. Comienza por aumentar un poco, para luego decaer de manera oscilatoria amortiguada hacia un límite, antes de volver a tomar su tendencia alcista. El estudio de esta particularidad requeriría de un trabajo posterior. Por el momento se puede descartar razonablemente la posibilidad de que algún componente de este fenómeno sea debido a un problema numérico en el que pudiera estar involucrada la aproximación finita que se hace al seno y al coseno por medio de las series de polinomios de Legendre. Aumentando el tamaño de las sumas parciales en la ecuación (3.15) no produce cambios numéricos significativos en el cálculo de la potencia de brazada, esto hasta el punto en el que todavía se tienen tiempos de procesamiento no muy largos.

iv) *Relación entre n y η* . La conducta de la potencia \mathcal{E} es similar en ambos casos, decreciendo para bajos números de onda y comenzando a crecer a partir de cierto n , convirtiéndose después en, básicamente, una línea recta. Con dependencias funcionales similares de D y \mathcal{E} con respecto a n , lo que resulta es que η cambia de la misma manera con respecto al número de onda, tanto en el caso tangencial como en el radial.

La forma de la curva de la eficiencia puede explicarse debido a que al principio, en modos de oscilación bajos, la energía disipada disminuye mientras que el desplazamiento aumenta constantemente, lo que causa que el cociente D/\mathcal{E} aumente fuertemente con n . Después de cierto número de onda, la \mathcal{E} "tuerce" hacia arriba, y rápidamente se convierte en una recta con lo que el cociente D/\mathcal{E} permanece básicamente constante, generándose finalmente la "meseta" de la curva de eficiencia. Estos resultados concuerdan parcialmente con los dados en [49], en donde se cita que tanto D como \mathcal{E} crecen al aumentar n . La diferencia estriba en que mientras en dicho artículo se afirma que lo hacen a la misma tasa, por lo que η permanece constante, aquí eso es válido sólo en determinado rango del número de onda cuando n es relativamente grande.

Una característica cualitativa relevante de las curvas de eficiencia de las figuras III.4 y III.7 es que $\eta(n)$ parece tender a un límite en ambos casos, al menos dentro del rango explorado numéricamente. Se puede entonces conjeturar si la eficiencia "naive" está acotada superiormente o no, en el caso presente de la esfera sujeta a deformaciones axisimétricas periódicas de baja amplitud.

La respuesta es afirmativa de acuerdo con la proposición 7 de [49], en donde se reporta que la eficiencia naive alcanza un máximo y que este máximo es alcanzado asintóticamente por las deformaciones de orden n elevado.

Los cálculos en [49] fueron hechos considerando una base de deformaciones un poco distinta a la aquí utilizada y además se refieren solamente a modos normales de oscilación por lo que en principio no son directamente aplicables aquí. Sin embargo puede afirmarse que los resultados de las figuras III.4 y III.7 son consistentes con la propuesta de [49].

III.5.1.2. Diferencias. Son de orden cuantitativo.

i) *Desplazamiento.* Una estimación de la pendiente m de la recta de ajuste de los datos de las figuras III.2 y III.5, proporciona los valores $m^{tg} \approx 2.5 \times 10^{-9}$ y $m^{rad} \approx 1 \times 10^{-9}$.

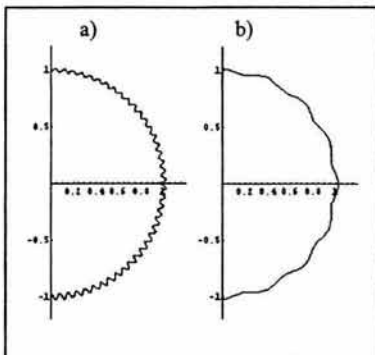


Figura III.9

Hemisferio longitudinal de S^1 mostrando a) modo de oscilación alto, $n=80$ y b) bajo con $n=15$. Las gráficas corresponden a trenes de onda radiales generados por la ec 3.1 para la estrategia de natación $[\sin(n\theta), \cos(n\theta)]$.

Es decir que en cada brazada la deformación tangencial (tg) avanza más que la radial (rad) y esta diferencia se amplía al aumentar el número de onda.

ii) *Potencia.* Aproximadamente a partir de $n = 25$ se cumple siempre que $\mathcal{E}^{rad} > \mathcal{E}^{tg}$. Si se comparan las pendientes de las rectas aproximadas que se dan en el rango ($25 \leq n \leq 500$) resulta que la pendiente en el caso radial $\approx 3 \times 10^{-9}$ es más grande que la del tangencial $\approx 2 \times 10^{-9}$. En consecuencia la disipación de energía es mayor para cada n en el caso radial y crece también más rápido al aumentar $n > 25$.

Este resultado podría explicarse porque las deformaciones radiales al producirse, exponen más de la superficie de la esfera al fluido (Figura III.9), por lo que se esperaría una mayor disipación de energía a partir de los esfuerzos generados. Estos esfuerzos en el caso radial actúan de manera más complicada, siguiendo direcciones más variadas que en el caso tangencial más simple, por lo que algunos de ellos se cancelarían mutuamente o tendrán componentes muy

pequeños en la dirección del movimiento. Se tiene así la resultante de que este mayor nivel general de esfuerzo no redundaría necesariamente en un mayor desplazamiento, como de hecho sucede de acuerdo a lo dicho en el primer punto de esta sección.

iii) *Eficiencia.* Como consecuencia de lo anterior la estrategia de natación tangencial resulta ser más eficiente que la radial y esto se cumple para todo valor de n en el rango explorado. En general se tiene que $\eta^{tg} \approx (5/2) \eta^{rad}$.

III.5.1.3. Flujo tangencial.

A continuación se describirá la trayectoria que sigue un elemento infinitesimal del fluido conforme pasa la onda tangencial en la superficie del nadador, de acuerdo a la figura III.10.

En tanto la región de contracción C se acerca, la gota es empujada hacia arriba y a la derecha. Cuando C va pasando es empujada arriba y hacia la izquierda, (arriba rápido, a la

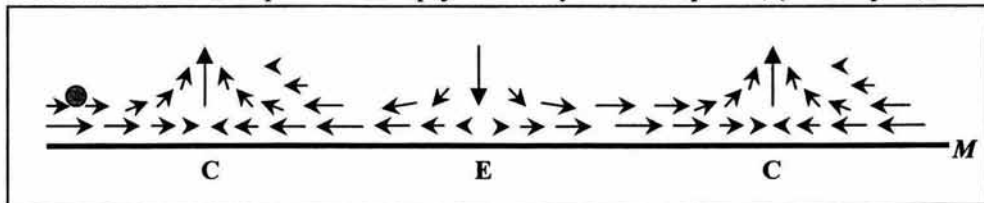


Figura III.10. Esquema de como una onda viajera tangencial sobre la membrana M afecta al fluido adyacente en el exterior. Las flechas representan el perfil de velocidad del fluido en un tiempo fijo t . Nótese como decae rápidamente conforme uno se aleja de M . La onda se está moviendo hacia la izquierda. Imagine una gota de agua comenzando cerca de M en donde se indica (*).

izquierda lento). En la región entre la zona de contracción C y la de expansión E es empujada a la izquierda (como esta arriba, a la izquierda es lento). Acercándose E es empujada hacia abajo y a la izquierda. Pasando E , es empujada abajo y a la derecha y entre E y la siguiente C es empujada a la derecha (como esta abajo, a la derecha es rápido).

Nótese que los movimientos hacia la izquierda ocurren preponderantemente "arriba", es decir lejos de M , en donde el campo de velocidades es menos intenso, mientras que los movimientos hacia la derecha son precedidos por movimientos hacia abajo, llevando a la gota a la zona cerca de la membrana en donde la velocidad es mayor. El resultado neto es que la gota es empujada más lejos hacia la derecha que a la izquierda. En consecuencia, una vesícula que pudiera deformar tangencialmente su membrana nadaría hacia la izquierda, en la misma dirección que la onda de deformación.

Asumiendo que el segmento del círculo mostrado en la figura es muy pequeño, entonces tendría una ligera curvatura, la cual provoca que el desplazamiento neto de la gota tenga un componente en la dirección del eje z y otro en el del eje x . Este último se cancelaría con el correspondiente al punto opuesto por la cuerda en la otra mitad, mientras que los correspondientes al eje z se sumarían, provocándose el movimiento en esa dirección.

III.5.1.4. Estrategias Mixtas. Para redondear el estudio de las estrategias de natación axisimétricas de una esfera faltaría incluir el caso de las estrategias que combinan modos de oscilación radiales y tangenciales. Esto es de importancia también en vista de las aplicaciones biológicas. El problema con los cálculos de curvatura, potencia y eficiencia en este caso es doble. Por un lado no se cuenta con fórmulas cerradas para la curvatura, como las dadas por las ecuaciones (3.18) y (3.22) correspondientes a los casos tangenciales y radiales puros, respectivamente. Esto obligaría a realizar cálculos numéricos que involucrarían la truncación de las series involucradas con la consiguiente generación de errores. Por otra parte, desde un punto de vista teórico la cuestión de si para cualquier par de campos vectoriales la eficiencia "naive", como está definida por (3.10), es una función acotada necesita ser redefinida en un espacio funcional adecuado.

III.5.2. *Biología.*

Puesto que el modelo acotado que se presenta en el siguiente capítulo es el que se ajusta mejor a la situación real del movimiento de organelos dentro de una célula, en este apartado sólo se discuten algunas aplicaciones biológicas al caso de organismos celulares, principalmente en relación con las conclusiones expresadas en [34].

III.5.2.1. Modelo de la Envoltura. Existen dos principios básicos que permiten proponer mecanismos biológicos como posibles responsables de la producción de ondas de deformación de superficie, en seres vivos. Uno de ellos es que en la descripción puramente cinemática del movimiento del nadador lo esencial es el patrón de flujo generado, es él el que explica la hidrodinámica del movimiento del objeto.

Otro principio, relacionado con el anterior, es que un mismo patrón de flujo puede ser obtenido por medios distintos.

Una inmediata aplicación de estos dos principios es que, no es necesario suponer que siempre que se está pensando en deformaciones de superficie en un organismo unicelular, se está implicando que es su membrana celular la que las sufre. De hecho en el

modelo de la envoltura que se explica a continuación, lo que se supone es que son extensiones flexibles de la frontera del cuerpo deformable, las propiamente encargadas de agitarse de cierta manera para producir un determinado patrón de flujo o campo de velocidades alrededor del organismo.

Se propone así la existencia de una envoltura alrededor de la frontera del nadador cuya dinámica sería la responsable de la generación de los movimientos de deformación necesarios para crear un cierto patrón en el fluido [36]. Físicamente, esta envoltura la constituyen los agentes dinámicos que de hecho se encargan de agitar el fluido alrededor del organismo para causar su propulsión. Estos agentes pueden ser por ejemplo cilios o flagelos en el caso de un organismo unicelular o también podría considerarse en principio a la propia membrana celular, pero esto no será siempre necesario. De hecho, en un organismo unicelular, la solución a los enormes esfuerzos que generaría la deformación actual de una membrana celular son precisamente los cilios y flagelos, que al ser estructuras más flexibles, producen el movimiento de agitación deseado de forma energéticamente costeable.

La figura III.10 sugiere que puede establecerse una relación entre n , el número de onda de una deformación y el número de agentes propulsores constituyentes de la envoltura. En el caso concreto del movimiento tangencial, el número de zonas de extensión y compresión coincide con n , de modo que es plausible pensar en un número igual de agentes propulsores que operando periódicamente de cierta manera, generen el movimiento necesario para crear en el fluido el campo de velocidades tangencial. Aunque esta hipótesis podría ser lógicamente suficiente, claramente es no necesaria, es decir constituiría en todo caso sólo una posible envoltura dinámica. Sin embargo, como se ve más adelante, la utilización de este supuesto produce algunas ideas de interés biológico.

III.5.2.2. Deformaciones tangenciales v.s. radiales. La cianobacteria del género *Synechococcus* es un organismo de forma aproximadamente cilíndrica que se desplaza sin la ayuda visible de ningún tipo de apéndices natatorios. Al microscopio tampoco se aprecian deformaciones de su cuerpo, lo que dio pie a la idea de que posiblemente trenes de las inconspicuas ondas tangenciales estuvieran recorriendo su superficie y generando así el movimiento observado.

Asumiendo esta hipótesis, en [34] se concluyó que quizás la cianobacteria esté utilizando ondas tangenciales debido a que: 1. No hay deformaciones visibles en su cuerpo al ir nadando y 2. la velocidad experimentalmente medida de $25 \mu\text{m/s}$ puede explicarse utilizando la fórmula (3.20) con valores razonables para los parámetros de onda involucrados. En [34] se aplica la fórmula correspondiente a una esfera porque se afirma que sólo diferirá de la correspondiente a un cilindro en una constante que causaría errores cuantitativos dentro de un orden de magnitud.

De hecho utilizando los mismos valores que en [34]: $d = 0.02 \mu\text{m}$; $c = 160 \mu\text{m/s}$ y $\lambda = 0.2 \mu\text{m}$ con una velocidad promedio de $25 \mu\text{m/s}$ y un radio $R = 1 \mu\text{m}$, pero ahora resolviendo para n en la ecuación (3.24) de deformaciones radiales, resulta que $n = 35$, mientras que en el caso tangencial se tiene $n = 31$. Nótese que aquí la deformación absoluta d es de sólo 20 nm y ciertamente que aun en el caso de una deformación radial, ésta resultaría también invisible al microscopio. En cualquier caso se podría proponer una d aun más pequeña y se obtendrían deformaciones radiales con valores de n más grandes que proporcionan la velocidad promedio requerida.

Es decir que el argumento de invisibilidad no es suficiente para distinguir entre ondas de deformación tangenciales y radiales como agentes propulsores de *Synechococcus*. El cálculo anterior muestra que hay deformaciones radiales inconspicuas que también explican la velocidad promedio de la bacteria, con los mismos parámetros de onda que las tangenciales, excepto por que tienen números de onda n mayores.

Sin embargo, considerando la eficiencia de las deformaciones sí es posible distinguirlas entre sí. La eficiencia es un concepto importante en Biología puesto que cualquier ser vivo dispone de una cantidad limitada de tiempo, materia y energía para conseguir sus objetivos de crecimiento, mantenimiento y reproducción. [60-61]. Es por ello que un uso eficiente de sus recursos tiene que tener un valor adaptativo significativo en el organismo vivo.

Para valores de n de alrededor de 30 la eficiencia de natación tangencial es más del doble que la radial. Por lo tanto, considerando que una mayor eficiencia de movimiento probablemente constituiría una ventaja adaptativa de largo plazo para esta bacteria, es razonable proponer a la estrategia de natación tangencial, como la que teóricamente tendría mejores posibilidades de ser el agente propulsor de *Synechococcus*.

Sin embargo, esta conclusión tropieza al menos con dos dificultades. La primera de ellas estriba en que no se puede suponer que la evolución esté tratando de resolver precisamente el mismo problema de optimización que resultó en el concepto de eficiencia naive (ver sección II). En todo caso es más probable que en la realidad estén participando otras variables que proporcionarían restricciones adicionales al problema, de manera que la solución óptima pudiera ser bastante más complicada, quizás presentando óptimos múltiples separados por regiones "metaestables" como sucede por ejemplo en algunos sistemas formales de evolución genética [59].

Por lo tanto, en este trabajo se adopta el punto de vista expresado por Childress en [58], de que la eficiencia naive puede ser uno de quizás muchos parámetros útiles en la evaluación de resultados experimentales.

Así por ejemplo, si resultara que *Synechococcus* está generando un campo de velocidades tangencial en el fluido en el que se mueve, idea que ha recibido ya cierto apoyo experimental [62], uno podría concluir que, al elegir una solución hidrodinámicamente eficiente, la bacteria está tratando de optimizar sus recursos posiblemente por vivir de un presupuesto energético relativamente "apretado". Las causas de ello podrían empezar a buscarse en restricciones ambientales ecológicamente significativas.

La otra dificultad concierne al hecho de que la potencia de brazada se refiere exclusivamente a energías hidrodinámicas generadas como resultado del movimiento relativo de las distintas capas infinitesimales del fluido que responden a la deformación de la superficie del nadador (sección II.4.1). No están consideradas las contribuciones energéticas debidas a las propiedades elásticas de los biomateriales que de hecho estuvieran realizando la deformación, tales como bicapas lipídicas glicoproteínas etc. Al agregar estas contribuciones la relación de eficiencia entre estrategias tangenciales y radiales podría muy bien cambiar e incluso invertirse.

Puede darse un argumento más en favor de las ondas tangenciales. Como para cada n el desplazamiento tangencial es mayor que el radial, entonces la estrategia radial requiere siempre de ejecutarse con números de onda n mayores si se quiere que iguale a un desplazamiento tangencial dado. Asumiendo la hipótesis de que n es del orden del número de agentes propulsores en la membrana de un organismo, resultaría que la producción de un campo de velocidades radial en el fluido posiblemente requeriría de más materia y energía

que la estrategia tangencial dada. De nuevo pensando en que un ser vivo busca una solución que maximice el uso de los recursos disponibles, se diría que un proceso de selección natural favorecería a la larga a una estrategia de natación tangencial sobre una radial.

III.6. *Conclusión.*

La consideración del aspecto energético y de las estrategias de natación radiales permite fundamentar mejor la preponderancia de las deformaciones tangenciales, de modo que éstas se mantienen como los más probables candidatos teóricos actuales para explicar la natación de *Synechococcus*, como fue propuesto por primera vez en [34], quedando aún pendiente la evaluación de las estrategias de natación mixtas, de nuevo, tanto en sus aspectos cinéticos como energéticos.

Así mismo, la consideración de dichos aspectos permitió ampliar la discusión en torno a las posibilidades de la micronatación en general como agente propulsor en organismos vivos que se mueven a bajos Re y esto debido básicamente a la aplicación del concepto de eficiencia, el cual es relevante tanto física como biológicamente.

C A P I T U L O I V

CASO BIDIMENSIONAL ACOTADO

IV.1. Antecedentes.

La situación real de una partícula subcelular moviéndose dentro de una célula, considerándolos a ambos de forma aproximadamente esférica, se modela en este capítulo mediante una geometría bidimensional. Al perder la dimensión real del problema se gana en simplicidad formal, además de que los resultados del capítulo anterior pueden ser utilizados junto con los de éste, para estimar algunos parámetros de importancia biológica correspondientes al caso tridimensional acotado.

De manera que lo que aquí se intenta resolver es el problema, a bajos números de Reynolds, de la traslación y disipación de energía de un círculo nadador que avanza deformando su frontera mediante oscilaciones periódicas de baja amplitud, en un fluido que está contenido en un recipiente también circular. Sólo se consideran estrategias de natación puramente tangenciales o transversales, lo que también da la posibilidad de poder representar a cualquier otro tipo de deformaciones del círculo.

En geometrías bidimensionales el problema de la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Navier-Stokes está resuelto afirmativamente [63], en parte debido al desarrollo de poderosas técnicas basadas en el cálculo de variables complejas que, por ejemplo, han sido aplicadas desde tiempo ha en numerosos problemas finitos de elasticidad [64].

A pesar de esto, hasta donde se sabe, ninguna parte de la solución al problema de Hidrodinámica Teórica que aquí se quiere resolver, ha aparecido aún en la literatura científica, ni dentro del marco de la teoría de Micronatación, en donde sólo se han resuelto modelos no acotados, ni utilizando algún otro método o teoría. El único antecedente relacionado que se tiene se refiere al caso de las traslaciones rígidas de un círculo, problema que surge como modelo de una batidora de pastelería y que fue resuelto encontrando las soluciones a la ecuación de Stokes utilizando el método de las imágenes y aplicando resultados para fluidos planos de la Hidrodinámica Teórica clásica [65].

IV.2. Problema de Stokes.

El dominio plano \mathcal{D} en donde se supone se encuentra el fluido es un anillo excéntrico formado por la remoción de un disco D_1 , con radio R_1 , del interior de un disco D_2 con radio R_2 , siendo $R_2 > R_1$. Así se tiene que $\mathcal{D} = D_2/D_1$. En la situación biológica real la relación entre R_2 y R_1 es de ≈ 100 .

Las fronteras circulares $C_2 = \partial D_2$ y $C_1 = \partial D_1$ de los discos correspondientes, representarán a las membranas de la célula y del organelo en movimiento, respectivamente. Se supondrá que el nadador parte de una posición central dentro de C_2 y se desplaza hacia la periferia ocupando cualquier posición excéntrica, parametrizada por ϵ , a lo largo de la dirección de un eje conveniente que se especifica más adelante (Fig. IV.1).

Debido a lo realmente pequeño que son los números de Reynolds involucrados en los movimientos de traslación de las partículas subcelulares ($\approx 10^{-8}$), la ecuación de Stokes constituye una buena aproximación a la descripción de la dinámica del fluido.

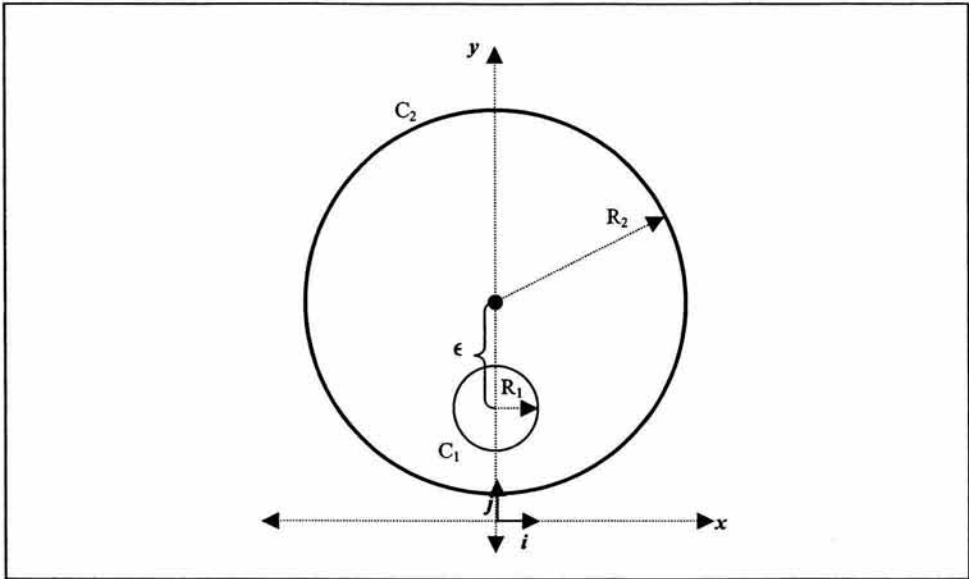


Figura IV.1. Coordenadas cartesianas definidas en el anillo excéntrico \mathcal{D} . Los círculos C_1 y C_2 pueden ser elegidos de manera que representen a círculos del sistema de coordenadas bipolares.

Entonces, el problema de Stokes que se quiere resolver aquí está definido en el dominio \mathcal{D} y es:

$$(4.1) \dots \begin{cases} \mu \nabla^2 \vec{v} = \nabla p \\ \text{Incompresibilidad: } \nabla \cdot \vec{v} = 0 ; \\ \text{No resbalamiento: } \vec{v}|_{C_1} = \vec{U} \\ \text{Homogeneidad: } \vec{v}|_{C_2} = 0 \end{cases}$$

La geometría del dominio \mathcal{D} sugiere la utilización del sistema de coordenadas bipolares como natural para resolver este problema. De hecho, un problema equivalente al (4.1) pero correspondiente a la Teoría de Elasticidad, ha sido ya resuelto en dicho sistema de coordenadas. Como se amplía en la sección IV.3, esa solución puede usarse aquí. Así, resulta conveniente escoger un sistema cartesiano de referencia de modo que los círculos C_1 y C_2 sean coaxiales y con el origen fuera del dominio \mathcal{D} , como en la figura IV.1. El eje que marca la dirección de traslación del nadador es entonces el eje y .

En la condición de no-resbalamiento del problema (4.1), \vec{U} es un campo vectorial definido sobre la frontera C_1 del nadador y representa la deformación instantánea que el cuerpo circular tiene en el instante t .

Una condición necesaria para que el modo de deformación \bar{U} genere traslación neta es que venga descrito por al menos un par de campos vectoriales V, W definidos en C_1 y linealmente independientes. De otra manera se produciría un movimiento recíproco que como ya se explicó antes (apartado II.8) no genera traslaciones netas. Las deformaciones básicas V, W definen así a la estrategia de natación y deben de ser infinitesimales para garantizar la aproximación de la holonomía por la curvatura de la conexión de Stokes, como se señaló en la sección II.8.

Asumiendo separabilidad en la dependencia temporal, una brazada mínima $s(t)$ es determinada por una combinación lineal de dos modos base:

$$s(t) = a(t)V + b(t)W$$

en donde los coeficientes $a(t), b(t)$ representan las contribuciones periódicas de cada modo en todo instante t . Es decir que se asume que los campos V, W se suponen estacionarios, quedan fijos para todo instante t .

De igual manera a lo hecho en el caso no acotado aquí también se supondrá, por simplicidad, que:

$$a(t) = \text{Cos}(2\pi\nu t) \quad ; \quad b(t) = \text{Sen}(2\pi\nu t)$$

En el presente caso la forma básica es la dada por el círculo σ de radio R_1 . Más adelante se establece la parametrización de σ , después de haber elegido a un sistema de coordenadas conveniente para resolver el problema (4.1). Las distintas formas que constituyen el ciclo de natación, definido por la brazada $s(t)$, vienen dadas entonces por:

$$\sigma \rightarrow \sigma + R_1 \varepsilon (a(t)V(\sigma) + b(t)W(\sigma))$$

en donde ε es un número arbitrariamente pequeño que garantiza que se trata de deformaciones infinitesimales de σ .

De esta manera, los cambios de forma \bar{U} que ocurren durante la brazada $s(t)$ se obtienen derivando la transformación anterior con respecto al tiempo:

$$\bar{U} = R_1 \varepsilon (\dot{a}(t)V(\sigma) + \dot{b}(t)W(\sigma))$$

IV.3 Solución biarmónica.

El problema bidimensional de Stokes (4.1) puede reformularse en términos de la ecuación biarmónica [66]:

$$\nabla^4 \Psi = 0 \quad \dots (4.2)$$

en donde Ψ es la función de corriente, un campo escalar definido en el dominio \mathcal{D} cuyas superficies de nivel definen las líneas de corriente del fluido. En un caso autónomo como el presente, estas líneas de corriente coinciden con las trayectorias de las partículas del fluido.

La existencia de Ψ en un problema bidimensional está garantizada por las hipótesis de continuidad e incompresibilidad del fluido [66].

Encontrando Ψ se determinan los componentes de velocidad v_1, v_2 de la extensión de Stokes \hat{v} mediante las ecuaciones:

$$v_1 = h_2 \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} ; v_2 = -h_1 \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \dots (4.3)$$

en donde h_1, h_2 son los coeficientes métricos correspondientes a las coordenadas curvilíneas q_1, q_2 .

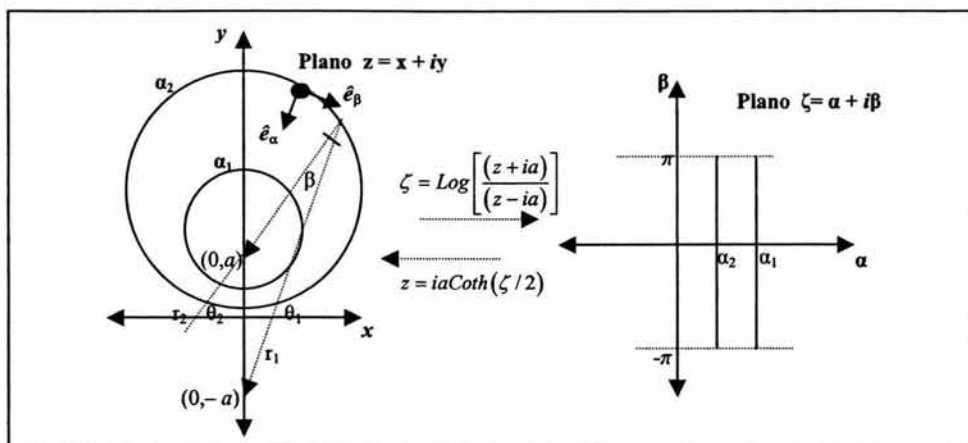


Figura IV.2. Círculos bipolares α_1, α_2 en el plano Cartesiano y su representación en el plano bipolar complejo ζ , siendo a una longitud real positiva. Se muestran también la definición del ángulo β , los vectores unitarios bipolares $\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta$ y las transformaciones conformes entre ambos planos, además de los ángulos θ_1 y θ_2 que definen a β y las longitudes r_1, r_2 que definen a α .

La ecuación biarmónica (4.2) fue resuelta por Jeffery [67] en coordenadas bipolares α, β , lo que permite solucionar directamente el caso de un anillo excéntrico. En la figura IV.2 se esquematiza a dos círculos α_1 y α_2 , coaxiales con el eje y y del plano cartesiano y su representación en el plano bipolar.

El sistema de coordenadas bipolares utilizado por Jeffery corresponde a uno en donde la familia de círculos no intersecantes $\alpha = \text{Cte.}$ tiene como eje co-axial al eje y , como se muestra en la Fig. IV.2, razón por la cual se le denomina aquí, como coordenadas bipolares "verticales". La familia complementaria de círculos intersecantes, $\beta = \text{Cte.}$ (que, por claridad, no se muestra en la figura) tienen así sus centros alineados a lo largo del eje x . En este sistema se tiene que:

$$x = x(\alpha, \beta) = \frac{a \text{Sen}(\beta)}{\text{Cosh}(\alpha) - \text{Cos}(\beta)} ; y = y(\alpha, \beta) = \frac{a \text{Senh}(\alpha)}{\text{Cosh}(\alpha) - \text{Cos}(\beta)} \dots (4.3a)$$

y la ecuación de los círculos co-axiales con $\alpha = \text{Cte.}$, con centro en $a \text{Coth}(\alpha)$ y radio $a \text{Csch}(\alpha)$.es:

$$x^2 + (y - a \text{Coth}(\alpha))^2 = a^2 \text{Csch}^2(\alpha) \dots (4.3b)$$

La solución completa en coordenadas bipolares al problema bidimensional biarmónico es [67]:

$$\begin{aligned}
 h\Psi = & (E\cos(\beta) + F\sin(\beta) + G\cosh(\alpha) + H\sinh(\alpha))\beta \\
 & + (B_0\cosh(\alpha) + D_0\sinh(\alpha))\alpha + A_0\cosh(\alpha) + C_0\sinh(\alpha) \\
 & + [A_1\cosh(2\alpha) + B_1 + C_1\sinh(2\alpha) + D_1\alpha]\cos(\beta) \\
 & + [A'_1\cosh(2\alpha) + B'_1 + C'_1\sinh(2\alpha) + D'_1\alpha]\sin(\beta) \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \{F_n(\alpha)\cos(n\beta) + G_n(\alpha)\sin(n\beta)\} \quad \dots (4.4)
 \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}
 F_n(\alpha) &= A_n\cosh[(n+1)\alpha] + B_n\cosh[(n-1)\alpha] + C_n\sinh[(n+1)\alpha] + D_n\sinh[(n-1)\alpha] \\
 G_n(\alpha) &= A'_n\cosh[(n+1)\alpha] + B'_n\cosh[(n-1)\alpha] + C'_n\sinh[(n+1)\alpha] + D'_n\sinh[(n-1)\alpha] \\
 & \dots (4.5)
 \end{aligned}$$

en donde α, β son las coordenadas bipolares (Fig.IV.2) y $h = [\cosh(\alpha) - \cos(\beta)]/a$ es el coeficiente métrico bipolar. El producto $h\Psi$ se le denominará función de Jeffery. En lo sucesivo la dependencia explícita de Ψ y h de las coordenadas α, β se omitirá en la notación por simplicidad.

IV.4. Método general.

El procedimiento que se siguió aquí para encontrar el desplazamiento y la eficiencia correspondientes al problema de Stokes (4.1), es básicamente el señalado en el apartado II.10. , pero con los siguientes cambios.

En el caso del desplazamiento, se calculó la curvatura F_{mn} encontrando en la extensión de Stokes del corchete de Lie de los modos de oscilación V_m, V_n , la parte correspondiente a movimientos rígidos de traslación, de acuerdo con la ecuación (2.10) pero sin necesidad de calcular explícitamente a la 1-forma A de la conexión de Stokes.

El algoritmo para conseguir esto consiste de tres partes principales. En la primera parte se determina a que término de la solución general (4.4) del problema de Stokes, corresponden las traslaciones rígidas en la dirección del eje y (sección IV.5).

En la segunda parte se establecen condiciones generales de Neumann y Dirichlet, en forma de series de Fourier, para el corchete de Lie restringido a la membrana del nadador C_1 . Estas condiciones junto a condiciones homogéneas definidas en la membrana de la célula C_2 permitirán resolver el correspondiente problema de Stokes y determinar así su extensión \hat{u} . Después de esto, es posible localizar la parte en \hat{u} responsable de la traslación rígida en la dirección del vector unitario \hat{j} y dar así una expresión general para poder calcularla (sección IV.6, ec.(4.18)).

En la tercera parte del procedimiento general, se calculan las extensiones de Stokes particulares correspondientes a las deformaciones tangenciales (IV.7.1) y transversales (IV.7.2) del círculo, luego se ponen sus corchetes de Lie en forma de series de Fourier

(IV.10) y finalmente se obtiene el componente traslacional de interés aplicando la fórmula general encontrada en la primera parte.

En lo concerniente al cálculo de la potencia y eficiencia el procedimiento seguido es igual al señalado en el apartado II.10.2.

IV.5. Traslación a lo largo del eje y . Es sencillo verificar el hecho, implícitamente citado por Jeffery, de que los múltiplos de $Sen(\beta)$ en la expresión (4.4) corresponden a traslaciones rígidas en la dirección del vector unitario \hat{j} .

Sea la solución $h\Psi = Sen(\beta)$. Entonces la función de corriente Ψ es:

$$\Psi = \frac{Sen(\beta)}{h} = \frac{aSen(\beta)}{Cosh(\alpha) - Cos(\beta)}$$

Aplicando (4.3) al caso particular de coordenadas bipolares se tiene que:

$$v_1 = h \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} ; v_2 = -h \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \dots (4.6)$$

Substituyendo la expresión para Ψ en (4.6) se obtienen los componentes v_1, v_2 del campo de velocidades solución \hat{v} :

$$v_1 = \frac{1 - Cos(\beta)Cosh(\alpha)}{Cosh(\alpha) - Cos(\beta)} ; v_2 = \frac{Sen(\beta)Senh(\alpha)}{Cosh(\alpha) - Cos(\beta)}$$

Entonces:

$$\hat{v}(\alpha, \beta) = v_1 \hat{e}_\alpha + v_2 \hat{e}_\beta = \left(\frac{1 - Cos(\beta)Cosh(\alpha)}{Cosh(\alpha) - Cos(\beta)} \right) \hat{e}_\alpha + \left(\frac{Sen(\beta)Senh(\alpha)}{Cosh(\alpha) - Cos(\beta)} \right) \hat{e}_\beta \dots (4.7)$$

siendo $\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta$ los vectores unitarios bipolares en la dirección de la coordenada α y β respectivamente (ver figura IV.2).

La expresión en el plano cartesiano de los vectores unitarios bipolares es:

$$\begin{aligned} \hat{e}_\alpha &= h \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = \frac{Sen(\beta)Senh(\alpha)}{Cos(\beta) - Cosh(\alpha)} \hat{i} + \frac{Cos(\beta)Cosh(\alpha) - 1}{Cos(\beta) - Cosh(\alpha)} \hat{j} \\ \hat{e}_\beta &= h \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} = \frac{1 - Cos(\beta)Cosh(\alpha)}{Cos(\beta) - Cosh(\alpha)} \hat{i} + \frac{Sen(\beta)Senh(\alpha)}{Cos(\beta) - Cosh(\alpha)} \hat{j} \end{aligned} \dots (4.8)$$

en donde \vec{r} es el vector de posición de un punto en el plano.

Substituyendo a (4.8) en (4.7) y simplificando, se obtiene la expresión del campo de velocidades en coordenadas cartesianas:

$$\hat{v} = (0, -1) = -\hat{j}$$

es decir un campo de velocidades que globalmente define una traslación del plano.

Dada la unicidad de las soluciones de la ecuación (4.4) se tiene entonces la proposición:

$$h\Psi = \pm \text{Sen}(\beta) \Leftrightarrow \hat{v} = \mp \hat{j}$$

y en consecuencia se puede concluir que los múltiplos del $\text{Sen}(\beta)$ y sólo ellos, se corresponden con traslaciones rígidas en la dirección del vector unitario \hat{j} .

En la notación de la ecuación (4.4) estos múltiplos están representados por el término $B_1' \text{Sen}(\beta)$. Por lo tanto en un problema específico, determinar al coeficiente B_1' permite encontrar cuanto se ha trasladado el objeto en la dirección del eje y .

Concretamente, en un problema de valores a la frontera establecido en el dominio \mathcal{D} en donde el campo de deformación \hat{U} , definido en la membrana del nadador, sea el corchete de Lie de las partes horizontales de dos extensiones de Stokes V_n, V_m (modos de oscilación), determinar al coeficiente B_1' equivale a encontrar F_{mn} , de acuerdo con la ecuación (2.10) y en consecuencia al desplazamiento infinitesimal del cuerpo deformable (ec.(2.14)). De esta manera es que se puede calcular el coeficiente de curvatura F_{mn} particular sin determinar explícitamente a toda la 1-forma A .

Hay que hacer notar que en la solución general (4.4) originalmente dada por Jeffery, no aparecen los múltiplos de $\text{Sen}(\beta)$ ni de ninguno de los correspondientes al resto de los movimientos rígidos, debido a la invarianza que ante estas transformaciones tiene el problema de elasticidad que dicho autor consideró.

IV.6. Fórmula general del coeficiente de traslación.

Sea v un campo vectorial con componentes v_1, v_2 definido en el círculo bipolar parametrizado por α_1 , el cual representa al nadador. Tal condición de frontera puede, genéricamente, expandirse como serie de Fourier para cada componente:

$$\begin{aligned} v_1 &= (a_0/2) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] + b_n \text{Sen}[n\beta] \\ v_2 &= (c_0/2) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{Cos}[n\beta] + d_n \text{Sen}[n\beta] \end{aligned} \quad \dots (4.9)$$

Restringiendo a la frontera α_1 las igualdades (4.6) se tiene que:

$$v_1 = h \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right|_{\alpha_1} ; v_2 = -h \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_1} \quad \dots (4.10)$$

Entonces, de la primera ecuación resulta:

$$\Psi|_{\alpha_1} = \int \left. \frac{v_1}{h} \right|_{\alpha_1} d\beta$$

que también puede desarrollarse en serie de Fourier:

$$\Psi = (a_0^0 / 2) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta] \dots (4.11)$$

en donde se presupone la restricción de la función de corriente Ψ a la frontera α_1 . Entonces la condición de Dirichlet para $h\Psi$ en dicha frontera es:

$$\begin{aligned} h\Psi &= \left(\frac{\text{Cosh}(\alpha_1) - \text{Cos}(\beta)}{a} \right) \left((a_0^0 / 2) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta] \right) \\ &\equiv (a_0^1 / 2) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 \text{Cos}[n\beta] + b_n^1 \text{Sen}[n\beta] \dots (4.12) \end{aligned}$$

Por otra parte, de la segunda ecuación de (4.10) se tiene:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_1} = - \left. \frac{v_2}{h} \right|_{\alpha_1}$$

entonces:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial \alpha} = \left(h \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + \Psi \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) = \left(h \left(-\frac{v_2}{h} \right) + \Psi \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) = -v_2 + \Psi \frac{\partial h}{\partial \alpha} \dots (4.13)$$

y por lo tanto, con:

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = \frac{\text{Sinh}(\alpha)}{a}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(h\Psi)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_1} &= - \left(\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{Cos}[n\beta] + d_n \text{Sen}[n\beta] \right) + \left(\frac{a_0^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta] \right) \frac{\text{Sinh}(\alpha_1)}{a} \\ &\equiv (e_0 / 2) + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \text{Cos}[n\beta] + f_n \text{Sen}[n\beta] \dots (4.14) \end{aligned}$$

que establece la condición general de Neumann en α_1 .

En la frontera celular α_2 se pide la nulidad del campo de velocidades, lo que permite tomar a dicha frontera como una línea de corriente, la cual queda convenientemente definida por:

$$\Psi = 0 \dots (4.15)$$

que es la condición de Dirichlet.

Substituyendo (4.15) en (4.13) se tiene entonces que:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial \alpha} = 0 \dots (4.16)$$

lo que establece la condición de Neumann en α_2 .

La derivada con respecto de α de (4.4) es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\Psi)}{\partial\alpha} = & (G\text{Senh}\alpha + H\text{Cosh}\alpha)\beta + B_0\text{Cosh}\alpha + D_0\text{Senh}\alpha + (D_0\text{Cosh}\alpha + B_0\text{Senh}\alpha)\alpha + A_0\text{Senh}\alpha + C_0\text{Cosh}\alpha \\ & [2A_1\text{Senh}(2\alpha) + 2C_1\text{Cosh}(2\alpha) + D_1]\text{Cos}(\beta) + [2A'_1\text{Senh}(2\alpha) + 2C'_1\text{Cosh}(2\alpha) + D'_1]\text{Sen}(\beta) + \\ & \left. \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ [(n+1)A_n\text{Senh}(n+1)\alpha + (n-1)B_n\text{Senh}(n-1)\alpha + (n+1)C_n\text{Cosh}(n+1)\alpha + (n-1)D_n\text{Cosh}(n-1)\alpha]\text{Cos}(n\beta) + \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{m=2}^{\infty} [(n+1)A'_n\text{Senh}(n+1)\alpha + (n-1)B'_n\text{Senh}(n-1)\alpha + (n+1)C'_n\text{Cosh}(n+1)\alpha + (n-1)D'_n\text{Cosh}(n-1)\alpha]\text{Sen}(n\beta) \right\} \right\} \end{aligned}$$

... (4.17)

Iguando términos correspondientes entre la ecuación (4.4) y las condiciones de Dirchlet (4.12), (4.15) y entre la ecuación (4.17) y las condiciones de Neumann (4.14), (4.16), se llega a que el sistema de ecuaciones para determinar al coeficiente B'_1 del $\text{Sen}(\beta)$ es:

$$\begin{aligned} A'_1 \text{Cosh}2\alpha_1 + B'_1 + C'_1 \text{Senh} 2\alpha_1 + D'_1 \alpha_1 &= b'_1 \\ A'_1 \text{Cosh}2\alpha_2 + B'_1 + C'_1 \text{Senh} 2\alpha_2 + D'_1 \alpha_2 &= 0 \\ 2A'_1 \text{Senh}(2\alpha_1) + 2C'_1 \text{Cosh}(2\alpha_1) + D'_1 &= f_1 \\ 2A'_1 \text{Senh}(2\alpha_2) + 2C'_1 \text{Cosh}(2\alpha_2) + D'_1 &= 0 \end{aligned}$$

en donde b'_1 corresponde al desarrollo (4.12) mientras que f_1 al (4.14).

El determinante de este sistema es:

$$8[(\alpha_1 - \alpha_2)\text{Cosh}(\alpha_1 - \alpha_2) - \text{Senh}(\alpha_1 - \alpha_2)]\text{Senh}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

que se anula sólo si $\alpha_1 = \alpha_2$.

Al resolver el sistema para B'_1 se tiene el resultado único:

$$B'_1 = \frac{\text{Csch}(\alpha_1 - \alpha_2)2(b'_1 - \alpha_1 f_1 + (\alpha_2 f_1 - b'_1)\text{Cosh}(2(\alpha_1 - \alpha_2))) + (f_1 - 4\alpha_2 b'_1)\text{Senh}(2(\alpha_1 - \alpha_2))}{8[(\alpha_1 - \alpha_2)\text{Cosh}(\alpha_1 - \alpha_2) - \text{Senh}(\alpha_1 - \alpha_2)]}$$

... (4.18)

IV.6.1. Coeficientes de B'_1 . A continuación se muestra como calcular los coeficientes que aparecen en la definición de B'_1 en términos de los datos del problema. De la definición (4.14) es inmediato que:

$$f_1 = -d_1 + \frac{b_1^0 \text{Senh}(\alpha_1)}{a} \dots (4.19)$$

en donde d_1 corresponde al desarrollo del componente v_2 de la condición de frontera (ec.4.9) y b_1^0 es un término del desarrollo de la función de corriente Ψ (ec. 4.11).

En el caso de b_1' , realizando las operaciones indicadas en la definición de (4.12) (las cuales están detalladas en el apéndice IV.1) se llega a:

$$\begin{aligned} h\Psi|_{\alpha_1} &= \left(\frac{\text{Cosh}(\alpha_1) a_0^0}{2a} - \frac{a_1^0}{2a} \right) + \left(\frac{a_1^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) - \frac{a_0^0}{2a} - \frac{a_2^0}{2a} \right) \text{Cos}(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_n^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) - \frac{a_{n+1}^0}{2a} - \frac{a_{n-1}^0}{2a} \right) \text{Cos}(n\beta) \\ &+ \left(\frac{b_1^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) - \frac{b_2^0}{2a} \right) \text{Sen}(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{b_n^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) - \frac{b_{n+1}^0}{2a} - \frac{b_{n-1}^0}{2a} \right) \text{Sen}(n\beta) \\ &\equiv \frac{a_0^0}{2} + a_1^0 \text{Cos}(\beta) + b_1^0 \text{Sen}(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}(n\beta) + b_n^0 \text{Sen}(n\beta) \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$b_1^0 = \frac{b_1^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) - \frac{b_2^0}{2a} \dots \quad (4.20)$$

en donde b_1^0, b_2^0 son términos del desarrollo (4.11) de Ψ .

IV.6.2. Coeficientes de Ψ . Para completar la definición de f_1 dada en (4.19) y b_1' establecida en (4.20), se requiere de obtener el desarrollo en serie (4.11) de la función de corriente, para así conocer a los coeficientes b_1^0, b_2^0 .

Se tiene que:

$$\Psi|_{\alpha_1} = \int_{h|\alpha_1}^{v_1} d\beta = \frac{a_0^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta]$$

con (4.9):

$$\frac{v_1}{h}|_{\alpha_1} = \frac{\frac{a_0^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta]}{h} = \frac{a_0^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta]$$

Puesto que [67]:

$$\frac{1}{h(\alpha_1, \beta)} = a \text{Csch}(\alpha_1) + 2a \text{Csch}(\alpha_1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta)$$

Entonces:

$$\frac{v_1}{h}|_{\alpha_1} = \left(\frac{a_0^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta] \right) \left(a \text{Csch}(\alpha_1) + 2a \text{Csch}(\alpha_1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta) \right)$$

Realizando las operaciones indicadas en el producto de series anterior, las cuales están detalladas en el apéndice IV.2, se llega a que:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{h}|_{\alpha_1} &= \frac{a_0^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta] \\ a_0^0 &= a_0^0 a \text{Csch}(\alpha_1) + 2a \text{Csch}(\alpha_1) \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha_1} \end{aligned}$$

$$a_1^* = a_0 a \operatorname{Csch}(\alpha_1) e^{-\alpha_1} + a \operatorname{Csch}(\alpha_1) a_1 + a \operatorname{Csch}(\alpha_1) \left(a_1 e^{-2\alpha_1} + 2 \operatorname{Cosh}(\alpha_1) \sum_{j=2}^{\infty} a_j e^{-j\alpha_1} \right)$$

$$a_n^* = a_0 a \operatorname{Csch}(\alpha_1) e^{-n\alpha_1} + a \operatorname{Csch}(\alpha_1) a_n + a \operatorname{Csch}(\alpha_1) \left(\sum_{j=1}^n a_j e^{-(n+j)\alpha_1} + 2 \operatorname{Cosh}(n\alpha_1) \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha_1} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j e^{-(n-j)\alpha_1} \right) \quad n > 1$$

$$b_1^* = a \operatorname{Csch}(\alpha_1) b_1 + a \operatorname{Csch}(\alpha_1) \left(-b_1 e^{-2\alpha_1} + 2 \operatorname{Senh}(\alpha_1) \sum_{j=2}^{\infty} b_j e^{-j\alpha_1} \right)$$

$$b_n^* = a \operatorname{Csch}(\alpha_1) b_n + a \operatorname{Csch}(\alpha_1) \left(-\sum_{j=1}^n b_j e^{-(n+j)\alpha_1} + 2 \operatorname{Senh}(n\alpha_1) \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e^{-j\alpha_1} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j e^{-(n-j)\alpha_1} \right) \quad n > 1$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \psi[\alpha_1, \beta] &= \int \frac{V_1}{h} \Big|_{\alpha_1} d\beta = \int \left(\frac{a_0^*}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \operatorname{Cos}[n\beta] + b_n^* \operatorname{Sen}[n\beta] \right) d\beta = \\ &= \int \frac{a_0^*}{2} d\beta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \int \operatorname{Cos}[n\beta] d\beta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \int \operatorname{Sen}[n\beta] d\beta \\ &= \frac{a_0^*}{2} \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^*}{n} \operatorname{Sen}(n\beta) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^*}{n} \operatorname{Cos}(n\beta) = \frac{a_0^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \operatorname{Cos}[n\beta] + b_n^0 \operatorname{Sen}[n\beta] \end{aligned}$$

De la última igualdad se tiene:

$$\frac{a_0^*}{2} = 0 \Rightarrow a_0^* = 0$$

$$\frac{a_0^0}{2} = 0 \Rightarrow a_0^0 = 0$$

$$a_n^0 = -\frac{b_n^*}{n}$$

$$b_n^0 = \frac{a_n^*}{n}$$

Por lo tanto:

$$b_1^0 = a_0 a \operatorname{Csch}(\alpha_1) e^{-\alpha_1} + a \operatorname{Csch}(\alpha_1) a_1 + a \operatorname{Csch}(\alpha_1) \left(a_1 e^{-2\alpha_1} + 2 \operatorname{Cosh}(\alpha_1) \sum_{j=2}^{\infty} a_j e^{-j\alpha_1} \right)$$

$$b_2^0 = \frac{1}{2} \left(a_0 a \operatorname{Csch}(\alpha_1) e^{-2\alpha_1} + a \operatorname{Csch}(\alpha_1) a_2 + a \operatorname{Csch}(\alpha_1) \left(\sum_{j=1}^2 a_j e^{-(2+j)\alpha_1} + 2 \operatorname{Cosh}(2\alpha_1) \sum_{j=3}^{\infty} a_j e^{-j\alpha_1} + a_1 e^{-\alpha_1} \right) \right)$$

... (4.21)

IV.7. Extensiones de Stokes.

En este apartado se resuelve el problema de Stokes para el caso de deformaciones puramente tangenciales y transversales, las cuales por ser linealmente independientes, constituyen una base suficiente para la descripción de las deformaciones del círculo.

Como se muestra en los apartados III.2.2 y III.2.3, para obtener el desplazamiento y la potencia de brazada de una deformación elemental, basta calcular el coeficiente de curvatura y la potencia de los componentes básicos V , W de la estrategia de natación. En consecuencia es suficiente obtener las extensiones de Stokes correspondientes a dichos modos básicos por separado, es decir que ellos son los que definen, cada uno por su cuenta, la condición de no-resbalamiento del problema de Stokes en cada caso. Esto equivale a recorrer el ciclo de brazada no por el círculo $(a(t), b(t))$ sino, como se menciona en II.8, mediante un cuadrilátero, de la misma área que dicho círculo, y en donde cada modo V , W actúa solo por su cuenta durante un tiempo infinitesimal en cada lado del cuadrilátero.

IV.7.1. Deformaciones Tangenciales. Debido a que el vector unitario \hat{e}_β es tangencial en cada punto del círculo α_1 , el campo vectorial correspondiente constituye una base natural para expresar a este tipo de deformaciones.

En analogía a lo hecho en el capítulo anterior, las estrategias de natación tangenciales V , W , se definen como sigue:

$$V = f_n(\beta)\hat{e}_\beta \quad ; \quad W = f_m(\beta)\hat{e}_\beta \quad \dots \quad (4.22)$$

en donde la función:

$$f_m(\beta) = \begin{cases} \text{Cos}(m\beta) \\ \text{Sen}(m\beta) \end{cases}$$

De este modo la brazada general elemental $s(t)$, o sea la familia completa de deformaciones periódicas es:

$$s(t) = a(t)V + b(t)W = \text{Cos}(2\pi vt) f_m(\beta)\hat{e}_\beta + \text{Sen}(2\pi vt) f_n(\beta)\hat{e}_\beta$$

mientras que la transformación que especifica las deformaciones infinitesimales de la forma básica $R_1\sigma$ es aquí:

$$\sigma \rightarrow \sigma + R_1 \varepsilon (\text{Cos}(2\pi vt) f_m(\beta)\hat{e}_\beta + \text{Sen}(2\pi vt) f_n(\beta)\hat{e}_\beta)$$

siendo $\sigma = (x, y - a\text{Coth}(a))$ la parametrización del círculo bipolar de radio $R_1 = a\text{Csch}(a)$, con $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$ de acuerdo con las ecuaciones (4.3a).

Bajo la acción de estas deformaciones tangenciales, cada punto de la frontera del círculo σ oscilará alrededor de su posición inicial siguiendo la dirección de la tangente en dicho punto. Como consecuencia, la frontera del nadador mostrará zonas alternantes de compresión y extensión, de manera análoga a lo sucedido en el caso no acotado del capítulo anterior.

A partir de la definición de los campos de deformación se obtendrán condiciones de Neumann y Dirichlet para la función de Jeffery $h\Psi$ en ambos componentes de $\partial \mathcal{D}$.

Frontera $\alpha = \alpha_1$. Sea entonces ν el campo de deformación definido sobre $R_1\sigma$. En coordenadas bipolares se tiene en general que:

$$\nu = \nu_\alpha \hat{e}_\alpha + \nu_\beta \hat{e}_\beta$$

En el caso puramente tangencial, el componente radial $v_\alpha = 0$, por lo que de acuerdo con (4.22):

$$v_\beta = f_n(\beta) \equiv f(\beta)$$

Mediante las relaciones (4.6) se tiene que:

$$\begin{aligned} v_\alpha &= h \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = 0 \\ v_\beta &= -h \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = f(\beta) \end{aligned} \quad \dots (4.23)$$

Condiciones de Dirichlet: Una característica muy conveniente de las deformaciones tangenciales es que son "lisas", en el sentido de que no alteran con protrusiones a la forma inicial. En consecuencia la frontera $\alpha = \alpha_1 = \text{Cte.}$ puede ser definida como una línea de corriente de Ψ . Entonces:

$$\Psi|_{\alpha=\alpha_1} = K$$

en donde K es una constante real. En particular se puede hacer $K = 0$ por lo que:

$$\Psi|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \Rightarrow h \Psi|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \quad \dots (4.24)$$

es la condición de Dirichlet en esta frontera.

Condición de Neumann:

Como:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial \alpha} = h \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + \Psi \frac{\partial h}{\partial \alpha}$$

entonces al restringir a α_1 se tiene, por la condición de Dirichlet $\Psi = 0$, que:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial \alpha} = h \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = -v_\beta = -f(\beta)$$

la última igualdad consecuencia de la segunda ecuación de (4.23). Entonces la condición de Neumann en la frontera α_1 es:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial \alpha} = -f(\beta) \quad \dots (4.25)$$

Frontera $\alpha = \alpha_2$. Puesto que la frontera α_2 , correspondiente a la membrana celular, se supone inmóvil e impermeable se puede hacer:

$$\Psi|_{\alpha=\alpha_2} = 0 \Rightarrow h \Psi|_{\alpha=\alpha_2} = 0 \quad \dots (4.26)$$

que define la condición de Dirichlet y:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial\alpha} = 0 \dots (4.27)$$

como condición de Neumann en esta frontera.

IV.7.1.1. Solución. Para encontrar soluciones sin multivaluación causada por el ángulo β , tanto en el campo de velocidades como en la presión y además que dichas soluciones provengan de condiciones de frontera de carácter oscilatorio no trivial (es decir excluyendo transformaciones rígidas y dilataciones), se eliminará el término de β y los correspondientes a $n = 0$ y $n = 1$, quedando la solución general (4.4) como^a:

$$h\Psi = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left(A_n \text{Cosh}[(n+1)\alpha] + B_n \text{Cosh}[(n-1)\alpha] + C_n \text{Senh}[(n+1)\alpha] + D_n \text{Senh}[(n-1)\alpha] \right) \text{Cos}(n\beta) + \\ & \left(A'_n \text{cosh}[(n+1)\alpha] + B'_n \text{cosh}[(n-1)\alpha] + C'_n \text{senh}[(n+1)\alpha] + D'_n \text{senh}[(n-1)\alpha] \right) \text{Sen}(n\beta) \end{aligned} \right\} \dots (4.28)$$

que, aplicando las definiciones (4.5) puede escribirse como:

$$h\Psi = \sum_{n=2}^{\infty} F_n(\alpha) \text{Cos}(n\beta) + G_n(\alpha) \text{Sen}(n\beta)$$

Derivando con respecto a α la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left[(n+1)A_n \text{Senh}(n+1)\alpha + (n-1)B_n \text{Senh}(n-1)\alpha + (n+1)C_n \text{Cosh}(n+1)\alpha + (n-1)D_n \text{Cosh}(n-1)\alpha \right] \text{Cos}(n\beta) + \\ & \left[(n+1)A'_n \text{Senh}(n+1)\alpha + (n-1)B'_n \text{Senh}(n-1)\alpha + (n+1)C'_n \text{Cosh}(n+1)\alpha + (n-1)D'_n \text{Cosh}(n-1)\alpha \right] \text{Sen}(n\beta) \end{aligned} \right\} \dots (4.29)$$

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} F'_n(\alpha) \text{Cos}(n\beta) + G'_n(\alpha) \text{Sen}(n\beta)$$

en donde el apóstrofe se refiere aquí a la derivada con respecto a α .

IV.7.1.2. Caso $f(\beta) = \text{Cos}(m\beta)$.

En este caso específico las condiciones de Neumann y Dirichlet (4.24)-(4.27) se convierten en:

^a En lo sucesivo, el índice n se refiere al orden de los términos de la solución de Jeffery y no deberá confundirse con el orden de los modos de oscilación, de acuerdo con (4.22)

Frontera α_1 :

$$h\Psi = 0$$
$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial\alpha} = -\text{Cos}(m\beta)$$

Frontera α_2 :

$$h\Psi = 0$$
$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial\alpha} = 0$$

Por lo tanto, al igualar los coeficientes del desarrollo (4.28) con la condición de Dirichlet correspondiente a la frontera α_1 , se obtiene:

$$F_n(\alpha_1) = 0 \quad ; \quad G_n(\alpha_1) = 0$$

para todo $n \geq 2$. Igualmente para la condición de Dirichlet en la frontera α_2 :

$$F_n(\alpha_2) = 0 \quad ; \quad G_n(\alpha_2) = 0$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo y tal que $m \geq 2$. Al igualar los coeficientes del desarrollo (4.29) con la condición de Neumann correspondiente a la frontera α_1 , se obtiene:

$$F'_n(\alpha_1) = 0 \quad ; \quad G'_n(\alpha_1) = 0$$

para todo $n \geq 2$ tal que $n \neq m$, mientras que para m se tiene que:

$$F'_m(\alpha_1) = -1 \quad ; \quad G'_m(\alpha_1) = 0$$

Finalmente, para la condición de Neumann en la frontera α_2 :

$$F'_n(\alpha_2) = 0 \quad ; \quad G'_n(\alpha_2) = 0$$

válido para todo $n \geq 2$.

Como conclusión de lo anterior, el sistema homogéneo de cuatro ecuaciones en las cuatro incógnitas A'_n, B'_n, C'_n, D'_n dado por:

$$G_n(\alpha_1) = 0$$

$$G_n(\alpha_2) = 0$$

$$G'_n(\alpha_1) = 0$$

$$G'_n(\alpha_2) = 0$$

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

es válido para toda $n \geq 2$. Este sistema tiene como única solución al vector $\mathbf{0}$ y por lo tanto se tiene que:

$$A'_n = B'_n = C'_n = D'_n = 0$$

para toda $n \geq 2$. Es decir que no aparecerán en la solución final funciones del seno, cosa que era de esperarse debido a que en las condiciones de frontera del presente caso tampoco aparece la función *Sen*.

El sistema de cuatro ecuaciones formado por las funciones $F_n(\alpha)$, $F'_n(\alpha)$ es también homogéneo para toda n distinta de m :

$$F_n(\alpha_1) = 0$$

$$F_n(\alpha_2) = 0$$

$$F'_n(\alpha_1) = 0$$

$$F'_n(\alpha_2) = 0$$

y por lo tanto en ese caso:

$$A_n = B_n = C_n = D_n = 0$$

El único sistema que no es homogéneo corresponde a m , y es:

$$A_m \cosh[(m+1)\alpha_1] + B_m \cosh[(m-1)\alpha_1] + C_m \sinh[(m+1)\alpha_1] + D_m \sinh[(m-1)\alpha_1] = 0$$

$$A_m \cosh[(m+1)\alpha_2] + B_m \cosh[(m-1)\alpha_2] + C_m \sinh[(m+1)\alpha_2] + D_m \sinh[(m-1)\alpha_2] = 0$$

$$(m+1)A_m \sinh[(m+1)\alpha_1] + (m-1)B_m \sinh[(m-1)\alpha_1] + (m+1)C_m \cosh[(m+1)\alpha_1] + (m-1)D_m \cosh[(m-1)\alpha_1] = -1$$

$$(m+1)A_m \sinh[(m+1)\alpha_2] + (m-1)B_m \sinh[(m-1)\alpha_2] + (m+1)C_m \cosh[(m+1)\alpha_2] + (m-1)D_m \cosh[(m-1)\alpha_2] = 0$$

que tiene como solución única (encontrada en *Mathematica 4.0*):

$$A_m = - \frac{(-1+m) \operatorname{Sinh}[(1+m)\alpha_1] - m \operatorname{Sinh}[\alpha_1 - m\alpha_1 - 2\alpha_2] - \operatorname{Sinh}[\alpha_1 - m\alpha_1 + 2m\alpha_2]}{2(-1+m^2 - m^2 \operatorname{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \operatorname{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])},$$

$$B_m = - \frac{(1+m) \operatorname{Sinh}[\alpha_1 - m\alpha_1] - m \operatorname{Sinh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2\alpha_2] + \operatorname{Sinh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2m\alpha_2]}{2(-1+m^2 - m^2 \operatorname{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \operatorname{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])},$$

$$C_m = - \frac{(-1+m) \operatorname{Cosh}[(1+m)\alpha_1] - m \operatorname{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1 - 2\alpha_2] + \operatorname{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1 + 2m\alpha_2]}{2(-1+m^2 - m^2 \operatorname{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \operatorname{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])},$$

$$D_m = - \frac{(1+m) \operatorname{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1] + m \operatorname{Cosh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2\alpha_2] + \operatorname{Cosh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2m\alpha_2]}{2(-1+m^2 - m^2 \operatorname{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \operatorname{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])}$$

Con los valores encontrados para los coeficientes A_n, \dots, D_n para cada $n \geq 2$, se tiene entonces que la solución final es:

$$h\Psi = [A_m \cosh(m+1)\alpha + B_m \cosh(m-1)\alpha + C_m \sinh(m+1)\alpha + D_m \sinh(m-1)\alpha] \operatorname{Cos}(m\beta)$$

\Leftrightarrow

$$\Psi = \frac{1}{h} [A_m \cosh(m+1)\alpha + B_m \cosh(m-1)\alpha + C_m \sinh(m+1)\alpha + D_m \sinh(m-1)\alpha] \operatorname{Cos}(m\beta)$$

o equivalentemente:

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{h} F_m(\alpha) \cos(m\beta)$$

con $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

Como se demuestra en apéndice IV.3, la solución para $h\Psi$ satisface las condiciones de frontera y la función de corriente Ψ satisface a la ecuación biarmónica. La gráfica de contornos de Ψ en el dominio \mathcal{D} se encuentra en la figura IV.3.

El campo vectorial de velocidades solución del problema de Stokes (4.1), o sea la extensión de Stokes \hat{v} , se puede obtener de la función de corriente Ψ en coordenadas bipolares por medio de las relaciones (4.6), que en este caso resultan en:

$$\begin{aligned} \hat{v}(\alpha, \beta) &= v_\alpha(\alpha, \beta) \hat{e}_\alpha + v_\beta(\alpha, \beta) \hat{e}_\beta = h \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \hat{e}_\alpha - h \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \hat{e}_\beta \\ &= \left[F_m(\alpha) \left(-\frac{\cos(m\beta) \operatorname{Sen}(\beta)}{ah} - m \operatorname{Sen}(m\beta) \right) \right] \hat{e}_\alpha + \cos(m\beta) \left(\frac{F_m(\alpha) \operatorname{Sen}h(\alpha)}{ah} - F'_m(\alpha) \right) \hat{e}_\beta \end{aligned}$$

La expresión final correspondiente a los componentes v_α, v_β está en el punto 3 del apéndice IV.3 en donde se verifica también que el campo es incompresible. En las figuras IV.4 y IV.5, se grafica la extensión de Stokes obtenida. De hecho, la fig. IV.5 es la versión completa, extendida a toda la frontera del nadador, de la fig. III.10.

Esta solución proporciona mediante integración de la ecuación de Stokes, una presión p univaluada, es decir que no depende directamente del ángulo β (ver apéndice IV.3 punto 5).

IV.7.1.3. Caso $f(\beta) = \operatorname{Sen}(m\beta)$.

En este caso específico las condiciones de Neumann y Dirichlet (4.24)-(4.27) se convierten en:

Frontera α_1 :

$$\begin{aligned} h\Psi &= 0 \\ \frac{\partial(h\Psi)}{\partial \alpha} &= -\operatorname{Sen}(m\beta) \end{aligned}$$

Frontera α_2 :

$$\begin{aligned} h\Psi &= 0 \\ \frac{\partial(h\Psi)}{\partial \alpha} &= 0 \end{aligned}$$

Procediendo idénticamente a lo realizado en la sección anterior, se llega a que el único sistema que no es homogéneo corresponde a m , y es:

$$\begin{aligned} A'_m \cosh[(m+1)\alpha_1] + B'_m \cosh[(m-1)\alpha_1] + C'_m \operatorname{sen}h[(m+1)\alpha_1] + D'_m \operatorname{sen}h[(m-1)\alpha_1] &= 0 \\ A'_m \cosh[(m+1)\alpha_2] + B'_m \cosh[(m-1)\alpha_2] + C'_m \operatorname{sen}h[(m+1)\alpha_2] + D'_m \operatorname{sen}h[(m-1)\alpha_2] &= 0 \\ (m+1)A'_m \sinh[(m+1)\alpha_1] + (m-1)B'_m \sinh[(m-1)\alpha_1] + (m+1)C'_m \cosh[(m+1)\alpha_1] + (m-1)D'_m \cosh[(m-1)\alpha_1] &= -1 \\ (m+1)A'_m \sinh[(m+1)\alpha_2] + (m-1)B'_m \sinh[(m-1)\alpha_2] + (m+1)C'_m \cosh[(m+1)\alpha_2] + (m-1)D'_m \cosh[(m-1)\alpha_2] &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como solución única a:

$$\begin{aligned} A'_m &= -\frac{-(-1+m) \operatorname{Sinh}[(1+m)\alpha_1] - m \operatorname{Sinh}[\alpha_1 - m\alpha_1 - 2\alpha_2] - \operatorname{Sinh}[\alpha_1 - m\alpha_1 + 2m\alpha_2]}{2(-1+m^2 - m^2 \operatorname{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \operatorname{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])}, \\ B'_m &= \frac{-(1+m) \operatorname{Sinh}[\alpha_1 - m\alpha_1] - m \operatorname{Sinh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2\alpha_2] + \operatorname{Sinh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2m\alpha_2]}{2(-1+m^2 - m^2 \operatorname{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \operatorname{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])}, \\ C'_m &= -\frac{(-1+m) \operatorname{Cosh}[(1+m)\alpha_1] - m \operatorname{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1 - 2\alpha_2] + \operatorname{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1 + 2m\alpha_2]}{2(-1+m^2 - m^2 \operatorname{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \operatorname{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])}, \\ D'_m &= \frac{-(1+m) \operatorname{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1] + m \operatorname{Cosh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2\alpha_2] + \operatorname{Cosh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2m\alpha_2]}{2(-1+m^2 - m^2 \operatorname{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \operatorname{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])} \end{aligned}$$

En consecuencia y para cada $m \geq 2$, se tiene entonces que la solución final es:

$$\begin{aligned} h\Psi &= [A'_m \cosh(m+1)\alpha + B'_m \cosh(m-1)\alpha + C'_m \sinh(m+1)\alpha + D'_m \sinh(m-1)\alpha] \operatorname{Sen}(m\beta) \\ &\Leftrightarrow \\ \Psi &= \frac{1}{h} [A'_m \cosh(m+1)\alpha + B'_m \cosh(m-1)\alpha + C'_m \sinh(m+1)\alpha + D'_m \sinh(m-1)\alpha] \operatorname{Sen}(m\beta) \end{aligned}$$

o equivalentemente:

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{h} G_m(\alpha) \operatorname{Sen}(m\beta)$$

con $G_m(\alpha)$ como en (4.5) y para $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

Aplicando ahora las fórmulas (4.6) se obtienen los componentes de la extensión de Stokes, que en general es en este caso:

$$\begin{aligned} \bar{v}(\alpha, \beta) &= v_\alpha(\alpha, \beta) \hat{e}_\alpha + v_\beta(\alpha, \beta) \hat{e}_\beta = h \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \hat{e}_\alpha - h \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \hat{e}_\beta \\ &= \left[G_m(\alpha) \left(-\frac{\operatorname{Sen}(m\beta) \operatorname{Sen}(\beta)}{ah} + m \operatorname{Cos}(m\beta) \right) \right] \hat{e}_\alpha + \operatorname{Sen}(m\beta) \left(\frac{G_m(\alpha) \operatorname{Sen}h(\alpha)}{ah} - G'_m(\alpha) \right) \hat{e}_\beta \end{aligned}$$

Siguiendo los mismos procedimientos del apartado anterior, y que se detallan en el apéndice IV.3, aquí también se verifica que el campo vectorial de velocidades es incompresible y proporciona una presión univaluada que satisface la ecuación de Stokes.

IV.7.2. Deformaciones Transversales. En este caso se impusieron en la membrana del nadador circular, condiciones de frontera que son de alguna manera "ortogonales" a las definidas en el caso tangencial. Esto garantiza extensiones de Stokes no tangenciales que sean lo suficientemente simples como para plantear sistemas sencillos de resolver al aplicar la solución de Jeffery.

Frontera $\alpha = \alpha_1$. Condiciones de Dirichlet:

$$h\Psi = f_n(\beta) = \begin{cases} \operatorname{Cos}(n\beta) \\ \operatorname{Sen}(n\beta) \end{cases}$$

Condición de Neumann:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial\alpha} = 0$$

Frontera $\alpha = \alpha_2$. Condición de Dirichlet:

$$h\Psi = 0$$

Condición de Neumann:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial\alpha} = 0$$

Estas condiciones de frontera implican las siguientes deformaciones en el círculo C_1 del nadador.

Si:

$$h\Psi|_{\alpha_1} = f_n(\beta) = \begin{cases} \text{Cos}(n\beta) \\ 0 \\ \text{Sen}(n\beta) \end{cases}$$

entonces:

$$\Psi(\alpha_1, \beta) = \frac{f_n(\beta)}{h(\alpha_1, \beta)}$$

Como:

$$\Psi(\alpha_1, \beta) = \int \frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\bigg|_{\alpha_1} d\beta = \int \frac{v_\alpha}{h}\bigg|_{\alpha_1} d\beta$$

entonces:

$$\frac{f_n(\beta)}{h} = \int \frac{v_\alpha}{h}\bigg|_{\alpha_1} d\beta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{f_n(\beta)}{h} \right) = \frac{v_\alpha}{h} \Rightarrow v_\alpha = h \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{f_n(\beta)}{h} \right)$$

De la última igualdad se tiene que, si $f_n(\beta) = \text{Cos}(n\beta)$:

$$v_\alpha = \frac{\text{Sen}[(n-1)\beta]}{2ah} - n\text{Sen}(n\beta) - \frac{\text{Sen}[(n+1)\beta]}{2ah}$$

y si $f_n(\beta) = \text{Sen}(n\beta)$:

$$v_\alpha = -\frac{\text{Cos}[(n-1)\beta]}{2ah} + n\text{Cos}(n\beta) + \frac{\text{Cos}[(n+1)\beta]}{2ah}$$

Por otro lado, como:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial\alpha} = 0$$

y:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial\alpha} = h \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} + \Psi \frac{\partial h}{\partial\alpha} = -v_\beta + \Psi \frac{\partial h}{\partial\alpha}$$

entonces:

$$v_\beta = \Psi \frac{\partial h}{\partial\alpha} = \frac{f_n(\beta)}{h} \frac{\text{Sinh}(\alpha)}{a}$$

por lo tanto:

$$\text{si } f_n(\beta) = \text{Cos}(n\beta): v_\beta = \frac{\text{Sin}(n\beta) \text{Sinh}(\alpha)}{ah}; \quad \text{si } f_n(\beta) = \text{Sen}(n\beta): v_\beta = \frac{\text{Sin}(n\beta) \text{Sinh}(\alpha)}{ah}$$

En conclusión, los campos de deformación transversales sobre C_1 son de tipo mixto, presentando tanto un componente radial v_α como uno angular v_β no nulos.

De nuevo se buscan soluciones del tipo^b:

$$h\Psi = \sum_{n=2}^{\infty} F_n(\alpha) \text{Cos}(n\beta) + G_n(\alpha) \text{Sen}(n\beta)$$

que implica, como en la sección IV.7.1.1, que:

$$\frac{\partial(h\Psi)}{\partial\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} F'_n(\alpha) \text{Cos}(n\beta) + G'_n(\alpha) \text{Sen}(n\beta)$$

IV.7.2.1. Caso $f(\beta) = \text{Cos}(m\beta)$. Procediendo de idéntica forma a lo hecho en el apartado IV.7.1.2, se llega a que el único sistema de coeficientes no homogéneo se obtiene cuando ocurre que $n = m$ y este es:

$$\begin{aligned} A_m \cosh[(m+1)\alpha_1] + B_m \cosh[(m-1)\alpha_1] + C_m \sinh[(m+1)\alpha_1] + D_m \sinh[(m-1)\alpha_1] &= 1 \\ A_m \cosh[(m+1)\alpha_2] + B_m \cosh[(m-1)\alpha_2] + C_m \sinh[(m+1)\alpha_2] + D_m \sinh[(m-1)\alpha_2] &= 0 \\ (m+1)A_m \sinh[(m+1)\alpha_1] + (m-1)B_m \sinh[(m-1)\alpha_1] + (m+1)C_m \cosh[(m+1)\alpha_1] + (m-1)D_m \cosh[(m-1)\alpha_1] &= 0 \\ (m+1)A_m \sinh[(m+1)\alpha_2] + (m-1)B_m \sinh[(m-1)\alpha_2] + (m+1)C_m \cosh[(m+1)\alpha_2] + (m-1)D_m \cosh[(m-1)\alpha_2] &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como solución única:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{(-1+m) \left((1+m) \text{Cosh}[(1+m)\alpha_1] - m \text{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1 - 2\alpha_2] - \text{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1 + 2m\alpha_2] \right)}{2(-1+m^2 - m^2 \text{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \text{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])}, \\ B_m &= -\frac{(1+m) \left((-1+m) \text{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1] + m \text{Cosh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2\alpha_2] - \text{Cosh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2m\alpha_2] \right)}{2(-1+m^2 - m^2 \text{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \text{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])}, \\ C_m &= -\frac{(-1+m) \left((1+m) \text{Sinh}[(1+m)\alpha_1] - m \text{Sinh}[-(1+m)\alpha_1 + 2\alpha_2] + \text{Sinh}[-(1+m)\alpha_1 - 2m\alpha_2] \right)}{2(-1+m^2 - m^2 \text{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \text{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])}, \\ D_m &= \frac{(1+m) \left((-1+m) \text{Sinh}[\alpha_1 - m\alpha_1] + m \text{Sinh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2\alpha_2] + \text{Sinh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2m\alpha_2] \right)}{2(-1+m^2 - m^2 \text{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \text{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])} \end{aligned}$$

^b En lo sucesivo, el índice n se refiere al orden de los términos de la solución de Jeffery y no deberá confundirse con el orden de los modos de oscilación, de acuerdo con (4.22)

Por lo tanto, la función de Jeffery solución es:

$$h\Psi = [A_m \cosh(n+1)\alpha + B_m \cosh(m-1)\alpha + C_m \sinh(m+1)\alpha + D_m \sinh(m-1)\alpha] \cos(m\beta)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Psi = \frac{1}{h} [A_m \cosh(n+1)\alpha + B_m \cosh(m-1)\alpha + C_m \sinh(m+1)\alpha + D_m \sinh(m-1)\alpha] \cos(m\beta)$$

o equivalentemente:

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{h} F_m(\alpha) \cos(m\beta)$$

con $F_m(\alpha)$ como en (4.5) y para $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$. Es decir que tiene la misma forma que la solución tangencial correspondiente a este mismo caso, difiriendo ambas sólo por las expresiones particulares de los coeficientes A_n, \dots, D_n . En consecuencia la forma general de la extensión de Stokes es también la misma.

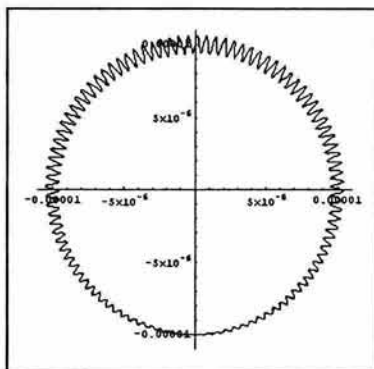


Figura IV.9. Deformaciones transversales con $n = 100$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

Como se verifica en el apéndice IV.4, la solución encontrada para Ψ satisface la ecuación biarmónica y $h\Psi$ satisface las condiciones de frontera (ver en apéndice IV.4). Las curvas de nivel de la función de corriente están en la gráfica de la figura IV.6.

La expresión analítica de la extensión de Stokes obtenida se da en el punto 3 del apéndice IV.4, mientras que su gráfica en el dominio \mathcal{D} se puede ver en las figuras IV.7 y IV.8.

Bajo la acción de las deformaciones transversales, cada punto de la frontera del círculo σ oscilará alrededor de su posición inicial siguiendo la dirección radial. Como consecuencia, la frontera del nadador mostrará pequeñas "olas" en su superficie

como se muestra en la figura IV.9 y de acuerdo con la transformación:

$$\sigma \rightarrow \sigma + R_1 \varepsilon (\cos(2\pi vt) v_\alpha \hat{e}_\alpha + \sin(2\pi vt) v_\beta \hat{e}_\beta)$$

con v_α y v_β como en las páginas 72-73 y siendo $\sigma = (x, y - a \coth(\alpha))$ la parametrización del círculo bipolar de radio $R_1 = a \operatorname{Csch}(\alpha)$, con $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$ de acuerdo con las ecuaciones (4.3a).

Aplicando los mismos procedimientos utilizados en el apéndice IV.3 se verifica que también aquí el campo de velocidades es incompresible y proporciona una presión univaluada que satisface la ecuación de Stokes, cuya expresión final se puede ver en el punto 4 del apéndice IV.4.

IV.7.2.2. Caso $f(\beta) = \operatorname{Sen}(m\beta)$. El único sistema de coeficientes no homogéneo se obtiene cuando $n = m$ y es:

$$\begin{aligned}
A'_m \cosh[(m+1)\alpha_1] + B'_m \cosh[(m-1)\alpha_1] + C'_m \sinh[(m+1)\alpha_1] + D'_m \sinh[(m-1)\alpha_1] &= 1 \\
A'_m \cosh[(m+1)\alpha_2] + B'_m \cosh[(m-1)\alpha_2] + C'_m \sinh[(m+1)\alpha_2] + D'_m \sinh[(m-1)\alpha_2] &= 0 \\
(m+1)A'_m \sinh[(m+1)\alpha_1] + (m-1)B'_m \sinh[(m-1)\alpha_1] + (m+1)C'_m \cosh[(m+1)\alpha_1] + (m-1)D'_m \cosh[(m-1)\alpha_1] &= 0 \\
(m+1)A'_m \sinh[(m+1)\alpha_2] + (m-1)B'_m \sinh[(m-1)\alpha_2] + (m+1)C'_m \cosh[(m+1)\alpha_2] + (m-1)D'_m \cosh[(m-1)\alpha_2] &= 0
\end{aligned}$$

que tiene como solución única:

$$\begin{aligned}
A'_m &= \frac{(-1+m) \left((1+m) \text{Cosh}[(1+m)\alpha_1] - m \text{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1 - 2\alpha_2] - \text{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1 + 2m\alpha_2] \right)}{2(-1+m^2 - m^2 \text{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \text{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])}, \\
B'_m &= -\frac{(1+m) \left((-1+m) \text{Cosh}[\alpha_1 - m\alpha_1] + m \text{Cosh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2\alpha_2] - \text{Cosh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2m\alpha_2] \right)}{2(-1+m^2 - m^2 \text{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \text{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])}, \\
C'_m &= -\frac{(-1+m) \left((1+m) \text{Sinh}[(1+m)\alpha_1] + m \text{Sinh}[\alpha_1 - m\alpha_1 - 2\alpha_2] - \text{Sinh}[\alpha_1 - m\alpha_1 + 2m\alpha_2] \right)}{2(-1+m^2 - m^2 \text{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \text{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])}, \\
D'_m &= -\frac{(1+m) \left((-1+m) \text{Sinh}[-(1+m)\alpha_1] - m \text{Sinh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2\alpha_2] - \text{Sinh}[\alpha_1 + m\alpha_1 - 2m\alpha_2] \right)}{2(-1+m^2 - m^2 \text{Cosh}[2(\alpha_1 - \alpha_2)] + \text{Cosh}[2m(\alpha_1 - \alpha_2)])}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de Jeffery solución es:

$$\begin{aligned}
h\Psi &= \left[A'_m \cosh(m+1)\alpha + B'_m \cosh(m-1)\alpha + C'_m \sinh(m+1)\alpha + D'_m \sinh(m-1)\alpha \right] \text{Sen}(m\beta) \\
&\Leftrightarrow \\
\Psi &= \frac{1}{h} \left[A'_m \cosh(m+1)\alpha + B'_m \cosh(m-1)\alpha + C'_m \sinh(m+1)\alpha + D'_m \sinh(m-1)\alpha \right] \text{Sen}(m\beta)
\end{aligned}$$

o equivalentemente:

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{h} G_m(\alpha) \text{Sen}(m\beta)$$

con $G_m(\alpha)$ como en (4.5) y para $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$. Es decir que tiene la misma forma que la solución tangencial correspondiente a este mismo caso, difiriendo ambas sólo por las expresiones particulares de los coeficientes A'_n, \dots, D'_n , obteniéndose entonces también la misma forma general de la extensión de Stokes.

Todas las verificaciones hechas en los apartados anteriores se cumplen satisfactoriamente también en este subcaso.

IV.8. Tensor de esfuerzo.

En notación tensorial, se tiene que el tensor de esfuerzo Π es:

$$\Pi = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

en donde \mathbf{I} es el tensor identidad p la presión μ la viscosidad y \mathbf{D} es el tensor de deformaciones:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t \right)$$

siendo \mathbf{u} un campo vectorial.

Como $\nabla \mathbf{u}$, el gradiente del vector \mathbf{u} , es una diádica en el plano entonces es de la forma:

$$\nabla \mathbf{u} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 u_{jk} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k = u_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + u_{12} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + u_{21} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + u_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2$$

en donde u_{ab} son sus componentes en el sistema de coordenadas ortogonal $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2\}$. Su transpuesta es:

$$\nabla \mathbf{u}^\dagger = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 u_{kj} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k = u_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + u_{21} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + u_{12} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + u_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) = \frac{1}{2} [u_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + u_{12} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + u_{21} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + u_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + u_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + u_{21} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + u_{12} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + u_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2] \\ &= \frac{1}{2} [2u_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + (u_{12} + u_{21}) \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + (u_{21} + u_{12}) \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + 2u_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2] \\ &= u_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \frac{1}{2} (u_{12} + u_{21}) \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \frac{1}{2} (u_{21} + u_{12}) \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + u_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 = D_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + D_{12} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + D_{21} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + D_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 \end{aligned}$$

en donde se aprecia la simetría del tensor \mathbf{D} , dado que:

$$D_{12} = u_{12} + u_{21} = u_{21} + u_{12} = D_{21}$$

De acuerdo a [39 p:489] se tiene que:

$$\begin{aligned} u_{11} &= h_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_1} + h_2 u_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{h_1} \right) \right), \quad u_{12} = h_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial q_1} - h_2 u_1 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{h_1} \right) \right), \\ u_{21} &= h_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_2} - h_1 u_2 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{h_2} \right) \right), \quad u_{22} = h_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial q_2} + h_1 u_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{h_2} \right) \right). \end{aligned}$$

substituyendo resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= h_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_1} + h_2 u_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{h_1} \right) \right) \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \frac{1}{2} \left(h_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial q_1} - h_2 u_1 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{h_1} \right) \right) + h_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_2} - h_1 u_2 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{h_2} \right) \right) \right) \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(h_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_2} - h_1 u_2 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{h_2} \right) \right) + h_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial q_1} - h_2 u_1 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{h_1} \right) \right) \right) \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + h_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial q_2} + h_1 u_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{h_2} \right) \right) \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 \end{aligned}$$

En consecuencia y en coordenadas bipolares, la forma nonion de la diádica \mathbf{D} es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \hat{e}_\alpha \hat{e}_\alpha h \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + hu_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h} \right) \right) \\
&+ \frac{1}{2} \hat{e}_\alpha \hat{e}_\beta \left[h \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha} - hu_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h} \right) \right) + h \left(\frac{\partial u_1}{\partial \beta} - hu_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h} \right) \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \hat{e}_\beta \hat{e}_\alpha \left[h \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha} - hu_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h} \right) \right) + h \left(\frac{\partial u_1}{\partial \beta} - hu_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h} \right) \right) \right] \\
&+ \hat{e}_\beta \hat{e}_\beta h \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} + hu_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h} \right) \right) \\
\mathbf{D} &= D_{11} \hat{e}_\alpha \hat{e}_\alpha + \frac{1}{2} D_{12} \hat{e}_\alpha \hat{e}_\beta + \frac{1}{2} D_{21} \hat{e}_\beta \hat{e}_\alpha + D_{22} \hat{e}_\beta \hat{e}_\beta \\
&\dots \quad (4.30)
\end{aligned}$$

en donde las yuxtaposiciones $\hat{e}_\alpha \hat{e}_\beta$ etc. de los vectores unitarios bipolares son díadas y los u_i son los componentes del campo \mathbf{u} .

Por lo tanto, cada componente del tensor de esfuerzo es:

$$\Pi_{ij} = 2\mu D_{ij} - p\delta_{ij}$$

en donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

En el punto 1 del apéndice IV.5 se da el algoritmo utilizado para calcular cada componente Π_{ij} , de acuerdo a las fórmulas anteriores.

IV.8.1. Teorema de la divergencia. Como se menciona en el apartado II.4, el teorema de reciprocidad de Lorentz implica que la potencia E es una métrica en el espacio tangente. Para que se cumpla dicho teorema es imprescindible que se satisfaga el teorema de la divergencia para el tensor de esfuerzos $\mathbf{\Pi}$ en la región anular \mathcal{D} :

$$\iint_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{v}) dS = \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{\Pi}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dl$$

en donde $\mathbf{\Pi}(\hat{\mathbf{v}})$ es el tensor de esfuerzos asociado a la extensión de Stokes $\hat{\mathbf{v}}$ y \mathbf{n} es el vector normal exterior.

Partiendo de la fórmula A-7.8 p:489 de [39] se llega a que la divergencia de un tensor (0,2) en coordenadas bipolares es:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{\Pi}(\alpha, \beta) &= \hat{e}_\alpha \left[h^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\Pi_{11}}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Pi_{21}}{h} \right) \right\} + h^2 \left(\Pi_{12} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h} \right) - \Pi_{22} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h} \right) \right) \right] + \\
&\hat{e}_\beta \left[h^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\Pi_{12}}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Pi_{22}}{h} \right) \right\} + h^2 \left(\Pi_{21} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h} \right) - \Pi_{11} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h} \right) \right) \right] \\
&\dots \quad (4.31)
\end{aligned}$$

en donde Π_{ij} son los componentes del tensor Π .

El algoritmo utilizado para calcular la divergencia del tensor de esfuerzo y su integral en la región \mathcal{D} se detalla en el punto 2.1 del apéndice IV.5.

Por otra parte la fuerza total ejercida por el fluido en la frontera ∂D es:

$$\vec{F} = \int_{\partial D} \vec{f} dS = \int_{\partial D} \Pi(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS$$

siendo \vec{f} el vector de esfuerzo y $\partial D = \alpha_1 + \alpha_2$ es la unión de los círculos bipolares parametrizados por α_1 y α_2 .

En coordenadas bipolares el vector normal exterior a los círculos $\alpha = \text{Cte.}$ es \hat{e}_α excepto para la frontera exterior α_2 en donde es $-\hat{e}_\alpha$, lo anterior debido a la convención de dirección de integración.

Entonces, para la frontera interior α_1 se tiene:

$$\Pi(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) \cdot (\hat{e}_\alpha) = -p\hat{e}_\alpha + 2\mu\mathbf{D} \cdot \hat{e}_\alpha$$

Dado que:

$$\mathbf{D} = u_{11}\hat{e}_\alpha\hat{e}_\alpha + \frac{1}{2}(u_{12} + u_{21})\hat{e}_\alpha\hat{e}_\beta + \frac{1}{2}(u_{21} + u_{12})\hat{e}_\beta\hat{e}_\alpha + u_{22}\hat{e}_\beta\hat{e}_\beta$$

en donde u_{ij} son los componentes del gradiente del campo de velocidades. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \hat{e}_\alpha &= \left(u_{11}\hat{e}_\alpha\hat{e}_\alpha + \frac{1}{2}(u_{12} + u_{21})\hat{e}_\alpha\hat{e}_\beta + \frac{1}{2}(u_{21} + u_{12})\hat{e}_\beta\hat{e}_\alpha + u_{22}\hat{e}_\beta\hat{e}_\beta \right) \cdot \hat{e}_\alpha = \\ &= u_{11}\hat{e}_\alpha + \frac{1}{2}(u_{21} + u_{12})\hat{e}_\beta = D_{11}\hat{e}_\alpha + D_{21}\hat{e}_\beta = D_{11}\hat{e}_\alpha + D_{12}\hat{e}_\beta \end{aligned}$$

Así se tiene que:

$$\Pi(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) \cdot (\hat{e}_\alpha) = -p\hat{e}_\alpha + 2\mu(D_{11}\hat{e}_\alpha + D_{12}\hat{e}_\beta)$$

y para la frontera α_2 :

$$\Pi(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) \cdot (-\hat{e}_\alpha) = p\hat{e}_\alpha - 2\mu(D_{11}\hat{e}_\alpha + D_{12}\hat{e}_\beta)$$

Además, como el elemento de longitud ds , para curvas $\alpha = \text{Cte.}$, es:

$$ds = \frac{d\beta}{h}$$

entonces, para la frontera α_1 :

$$\vec{F} = \int_{-\pi}^{\pi} \left[-p\hat{e}_\alpha + 2\mu(D_{11}\hat{e}_\alpha + D_{12}\hat{e}_\beta) \right] h^{-1} \partial\beta$$

y para la frontera α_2 :

$$\vec{F} = \int_{-\pi}^{\pi} \left[p \hat{e}_{\alpha} - 2\mu (D_{11} \hat{e}_{\alpha} + D_{12} \hat{e}_{\beta}) \right] h^{-1} \partial\beta$$

O dado que también:

$$\Pi(\nu) \cdot \mathbf{n} = \Pi(\nu) \cdot \hat{e}_{\alpha} = (\Pi_{11} \hat{e}_{\alpha} + \Pi_{21} \hat{e}_{\beta})$$

entonces, en α_1 :

$$\vec{F} = \int_{-\pi}^{\pi} (\Pi_{11} \hat{e}_{\alpha} + \Pi_{21} \hat{e}_{\beta}) h^{-1} \partial\beta = \int_{-\pi}^{\pi} (\Pi_{11} \hat{e}_{\alpha} + \Pi_{12} \hat{e}_{\beta}) h^{-1} \partial\beta \dots (4.32a)$$

y para la frontera α_2 :

$$\vec{F} = - \int_{-\pi}^{\pi} (\Pi_{11} \hat{e}_{\alpha} + \Pi_{21} \hat{e}_{\beta}) h^{-1} \partial\beta = - \int_{-\pi}^{\pi} (\Pi_{11} \hat{e}_{\alpha} + \Pi_{12} \hat{e}_{\beta}) h^{-1} \partial\beta \dots (4.32b)$$

El algoritmo utilizado para calcular las integrales (4.32) se da en el punto 2.2 del apéndice IV.5.

Como se señala en ese punto, para todos los casos considerados en la sección IV.7 se obtuvo, por un lado, que la divergencia del tensor de esfuerzo es cero y por otro, que la suma de la fuerza total sobre las fronteras del dominio anular también es cero, por lo que en todos los casos efectivamente se satisface el teorema de la divergencia.

IV.9. Componentes horizontales.

De acuerdo con las ecuaciones (2.10) y (2.15), es necesario calcular las partes horizontales de las extensiones de Stokes para poder conocer tanto a la curvatura asociada al acoplamiento de dos modos de oscilación, para de ahí calcular el desplazamiento producido, como la energía de brazada asociada a una deformación determinada.

Como se citó en II.3, un campo es horizontal si la fuerza y torca totales que el fluido ejerce sobre un cuerpo son ambas iguales a cero.

La fuerza total en la frontera del nadador es en general:

$$\vec{F} = \int_{\partial C} \vec{f} dS = \int_{\partial C} \Pi(\hat{\nu}) \cdot \mathbf{n} dS$$

y no es otra más que la dada por la ecuación (4.32a) siendo ∂C la frontera del círculo nadador. Como ya se demostró en el punto IV.8.1 esta integral es igual a cero tanto en el caso tangencial como en el radial:

$$\vec{F} = \mathbf{0}$$

Por otra parte, la torca total ejercida por el fluido en la frontera ∂C es:

$$\vec{T} = \int_{\partial C} \vec{t} dS = \int_{\partial C} \mathbf{r}_0 \times \Pi(\hat{v}) \cdot \mathbf{n} dS$$

con \vec{t} es el vector de torca por unidad de superficie dS y \mathbf{r}_0 es un vector de posición referido al centro de geométrico del cuerpo en movimiento.

Dadas las ecuaciones (4.3a) de cambio de coordenadas en el sistema bipolar "vertical":

$$x = \frac{a \operatorname{Sen}(\beta)}{\operatorname{Cosh}(\alpha) - \operatorname{Cos}(\beta)} ; y = \frac{a \operatorname{Senh}(\alpha)}{\operatorname{Cosh}(\alpha) - \operatorname{Cos}(\beta)}$$

se llega a que la ecuación de los círculos de $\alpha = \text{Cte.}$ es (4.3b):

$$x^2 + (y - a \operatorname{Coth}(\alpha))^2 = a^2 \operatorname{Csch}^2(\alpha)$$

En consecuencia, referidos al centro $(0, \gamma)$ de la circunferencia α_1 con $\gamma = -a \operatorname{Coth}(\alpha_1)$, el vector \mathbf{r}_0 en el plano cartesiano es:

$$\mathbf{r}_0 = (x, y + \gamma) = \left(\frac{a \operatorname{Sen}(\beta)}{\operatorname{Cosh}(\alpha_1) - \operatorname{Cos}(\beta)}, \frac{a \operatorname{Senh}(\alpha_1)}{\operatorname{Cosh}(\alpha_1) - \operatorname{Cos}(\beta)} - a \operatorname{Coth}(\alpha_1) \right)$$

El vector de posición \mathbf{r}_0 se expresa en el plano bipolar como una combinación lineal de la forma:

$$\mathbf{r}_0 = A \hat{e}_\alpha + B \hat{e}_\beta$$

en donde los coeficientes A, B deben de satisfacer el sistema:

$$r_0^\alpha = A \hat{e}_\alpha^1 + B \hat{e}_\beta^1$$

$$r_0^\beta = A \hat{e}_\alpha^2 + B \hat{e}_\beta^2$$

siendo $r_0^\alpha, r_0^\beta, \hat{e}_\alpha^i, \hat{e}_\beta^i, i = 1, 2$ los componentes del vector de posición \mathbf{r}_0 y de los vectores unitarios $\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta$ respectivamente.

Geoméricamente es claro que, como \mathbf{r}_0 es paralelo al vector unitario radial \hat{e}_α , entonces debe de ser $B = 0$ y además como $|\mathbf{r}_0| = \gamma$ entonces $A = \gamma$, que de hecho es el resultado que se obtiene al resolver el sistema anterior.

Puesto que:

$$\Pi(\hat{v}) \cdot \mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) \cdot (\hat{e}_\alpha) = -p\hat{e}_\alpha + 2\mu(D_{11}\hat{e}_\alpha + D_{12}\hat{e}_\beta)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 \times \Pi(\hat{v}) \cdot \mathbf{n} &= (A \hat{e}_\alpha) \times (p\hat{e}_\alpha - 2\mu(D_{11}\hat{e}_\alpha + D_{21}\hat{e}_\beta)) \\ &= A \hat{e}_\alpha \times p\hat{e}_\alpha - 2\mu(A \hat{e}_\alpha \times D_{11}\hat{e}_\alpha + A \hat{e}_\alpha \times D_{21}\hat{e}_\beta) \\ &= -2\mu A D_{21} \hat{k} \end{aligned}$$

con $\hat{\kappa} = \hat{e}_\alpha \times \hat{e}_\beta$ un vector unitario paralelo al vector cartesiano \hat{k} en dirección del eje z . En consecuencia:

$$\vec{T} = \int_{\partial S} \mathbf{r}_0 \times \Pi(\hat{v}) \cdot \mathbf{n} dS = -2A\mu\hat{\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} D_{21} h^{-1} d\beta$$

Calculando la integral anterior mediante los algoritmos descritos en los puntos 3 y 4 del apéndice IV.5, se obtiene el resultado:

$$\vec{T} = \mathbf{0}$$

válido tanto para deformaciones tangenciales como transversales.

En conclusión, puesto que tanto la fuerza como la torca totales son idénticamente cero para todas las extensiones de Stokes \hat{v} obtenidas en la sección IV.7, entonces dichos campos vectoriales son ya horizontales.

Esto era de esperarse, puesto que los campos de velocidad \hat{v} fueron obtenidos de funciones de Jeffery en donde desde el comienzo se buscaron soluciones que carecieran por completo de los términos de movimiento rígido (ver IV.7.1.1), es decir que no tuvieran elementos del espacio vertical.

IV.10. Corchete de Lie.

En general, lo que se ha estado realizando hasta ahora es resolver problemas definidos inicialmente en la región anular cartesiana \mathcal{D} llevándolos, mediante el cambio de coordenadas $z = \omega(\zeta)$, a la región rectangular más simple en el plano bipolar ζ (Fig. IV.2). Así si $\varphi(z)$ es una función desconocida en el plano cartesiano z , lo que se trata de encontrar es la función compuesta $\varphi^* = \varphi \circ \omega$ definida en el plano bipolar. A la función φ^* se le conoce como el "pullback" (retracción) de la función φ en el plano ζ . Una vez que se resuelve para $\varphi^*(\zeta)$ se puede encontrar la función φ del problema original, componiendo con la inversa del cambio de coordenadas: $\varphi = \varphi^* \circ \omega^{-1}$ (o simplemente substituyendo en φ^* los valores conocidos de α y β).

IV.10.1. Componentes. Como se mencionó en II.8, la expresión general del corchete de Lie de dos modos de oscilación horizontales, evaluado en la frontera de la forma q es:

$$[\vec{v}_m^h, \vec{v}_n^h] = (\vec{v}_m^h \cdot \nabla) \vec{v}_n^h \Big|_q - (\vec{v}_n^h \cdot \nabla) \vec{v}_m^h \Big|_q$$

Aplicando esta definición y la regla de la cadena se obtiene el "pullback" del Corchete de Lie [68]:

$$[\vec{v}_m^h, \vec{v}_n^h] = \left(\frac{\partial \vec{v}_n^h}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \Big|_{\alpha_1} \vec{v}_m^h + \left(\frac{\partial \vec{v}_m^h}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} \right) \Big|_{\alpha_1} \bar{\vec{v}}_n^h - \left(\frac{\partial \vec{v}_m^h}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \Big|_{\alpha_1} \vec{v}_n^h - \left(\frac{\partial \vec{v}_n^h}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} \right) \Big|_{\alpha_1} \bar{\vec{v}}_m^h \dots (4.33)$$

restringido a la frontera del círculo nadador α_1 y en donde:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} ia \operatorname{Coth}(\zeta/2) \right)^{-1}$$

Las extensiones de Stokes \hat{v} calculadas en la sección IV.7 se expresan en forma de funciones complejas en el plano bipolar como:

$$\hat{v}(\zeta) = v_1(\zeta) + i v_2(\zeta) \equiv \hat{v}(\alpha, \beta) = v_1(\alpha, \beta) + i v_2(\alpha, \beta)$$

siendo $\zeta = \alpha + i\beta$.

Puesto que entre el plano complejo cartesiano y el bipolar media un mapeo conforme, entonces en el plano bipolar las ecuaciones de Cauchy tienen la misma forma que las del plano cartesiano, simplemente substituyendo $x \rightarrow \alpha$, $y \rightarrow \beta$:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial v_2}{\partial \beta} \quad ; \quad \frac{\partial v_2}{\partial \beta} = -\frac{\partial v_1}{\partial \alpha}$$

Por lo tanto también se cumplen las identidades:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \beta}$$

Utilizando las definiciones anteriores, es posible calcular el corchete de Lie de cualesquier dos extensiones de Stokes de la sección IV.7 aplicando directamente la fórmula (4.33).

Los cuatro casos resueltos en IV.7 generan sólo dos tipos generales distintos de función de corriente:

$$a) \Psi = \frac{1}{h} F_m(\alpha) \operatorname{Cos}(m\beta) \quad ; \quad b) \Psi = \frac{1}{h} G_m(\alpha) \operatorname{Sen}(m\beta)$$

Entonces, para especificar qué modos de oscilación de qué casos son los que se están acoplando en el corchete de Lie, se usará la notación:

$$v_n(\operatorname{Cos})$$

que por ejemplo designa a una extensión de Stokes con modo de oscilación n y correspondiente a una función de corriente que depende del coseno. Así la notación:

$$[v_m(\operatorname{Cos}), v_n(\operatorname{Cos})]$$

se refiere al corchete de Lie de dos modos m y n que provienen de la función de corriente tipo a).

El algoritmo que se siguió para calcular los componentes \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 del corchete de Lie se da en el apéndice IV.6 y arroja los siguientes resultados generales:

Tabla IV.1

I.- Caso Tangencial:

i) $[v_m(Cos), v_n(Cos)]:$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{a(Cos(\beta) - Cosh(\alpha))^2} \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} B_k Sen[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} B'_k Sen[k\beta] \right)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{a(Cos(\beta) - Cosh(\alpha))^2} \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} C_k Cos[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} C'_k Cos[k\beta] \right)$$

ii) $[v_m(Sen), v_n(Sen)]:$ Igual al caso i) anterior.

iii) $[v_m(Cos), v_n(Sen)]:$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{a(Cos(\beta) - Cosh(\alpha))^2} \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} A_k Cos[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} A'_k Cos[k\beta] \right)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{a(Cos(\beta) - Cosh(\alpha))^2} \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} D_k Sen[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} D'_k Sen[k\beta] \right)$$

iv) $[v_m(Sen), v_n(Cos)]:$ Igual al caso iii).

II.- Caso Transversal: Igual al caso tangencial.

III.- Caso Tangencial-Transversal: Los ocho casos posibles son iguales, de 4 en 4, al caso tangencial.

Los coeficientes $A_k, A'_k \dots$ etc. de la serie de cada componente \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son largas expresiones algebraicas que tienen como parámetros a los índices modales, m, n y a la coordenada α_1 y se sobreentiende que dichos coeficientes son distintos en cada uno de los casos señalados, puesto que sólo son expresiones generales.

IV.10.2. Series de Fourier. Lo que se quiere ahora es expresar a cada componente \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 del corchete de Lie como serie de Fourier:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos(n\beta) + b_n Sen(n\beta) ; \quad \mathcal{L}_2 = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n Cos(n\beta) + d_n Sen(n\beta) \dots (4.34)$$

Esto se consigue, primero expresando en serie de Fourier al término:

$$\frac{1}{(Cos(\beta) - Cosh(\alpha))^2}$$

para luego realizar el producto de series y sumas indicado en cada caso.

Como se desprende de los resultados de la sección anterior, en realidad solamente hay dos casos independientes a considerar, $[v_m(Cos), v_n(Cos)]$ y $[v_m(Cos), v_n(Sen)]$ que son los que se tratan a continuación.

En el apéndice IV.7, se demuestra que:

$$\frac{1}{(Cos(\beta) - Cosh(\alpha))^2} = -Coth(\alpha)Csch(\alpha)^2 + 2Csch(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha))Cos(j\beta)$$

IV.10.2.1. Caso $[v_m(Cos), v_n(Cos)]$. Substituyendo la serie anterior en las sumas para \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 en este caso resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{a} \left(-Coth(\alpha)Csch(\alpha)^2 + 2Csch(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha))Cos(j\beta) \right) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} B_k Sen[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} B'_k Sen[k\beta] \right) \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{a} \left(-Coth(\alpha)Csch(\alpha)^2 + 2Csch(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (n + Coth(\alpha))Cos(j\beta) \right) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} C_k Cos[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} C'_k Cos[k\beta] \right) \end{aligned}$$

a) \mathcal{L}_1 . Abriendo paréntesis en la expresión de \mathcal{L}_1 , aplicando identidades trigonométricas y reorganizando algunas de las sumatorias que aparecen en el proceso, procedimiento que se detalla en el apéndice IV.7 se llega a:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{Csch(\alpha)^2}{a} \left[-Coth(\alpha) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} B_k Sen[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} B'_k Sen[k\beta] \right) + \sum_{q=1}^{\infty} (B_q + B'_q) Sen(q\beta) \right] \quad \dots (4.35)$$

con:

$$\begin{aligned} B_q &= \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} B_k \left[e^{-Abs[(q-k)]\alpha_1} (Abs[(q-k)] + Coth(\alpha_1)) - e^{-Abs[(q+k)]\alpha_1} (Abs[(q+k)] + Coth(\alpha_1)) \right] \\ &\quad + B_{-q} Coth(\alpha_1) - B_q Coth(\alpha_1) \quad \dots (4.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_q &= \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} B'_k \left[e^{-Abs[(q-k)]\alpha_1} (Abs[(q-k)] + Coth(\alpha_1)) - e^{-Abs[(q+k)]\alpha_1} (Abs[(q+k)] + Coth(\alpha_1)) \right] \\ &\quad - B'_q (Coth(\alpha_1)) \quad \dots (4.37) \end{aligned}$$

Para $2 < m < n$ la expresión (4.32) es de hecho un desarrollo de Fourier de la forma:

$$\mathcal{L}_1 = \sum_{q=1}^{\infty} b_q Sen[q\beta]$$

b) \mathcal{L}_2 . Procediendo análogamente al inciso anterior, se llega a:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{Csch(\alpha)^2}{a} \left[-Coth(\alpha) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} C_k Cos[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} C'_k Cos[k\beta] \right) + \frac{\Gamma_0 + \Gamma'_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} (\Gamma_q + \Gamma'_q) Cos(q\beta) \right] \quad \dots (4.38)$$

con:

$$\Gamma_0 = \sum_{\substack{k=m-n-3 \\ k \neq 0}}^{m-n+3} C_k e^{-Abs[k]\alpha_1} (Abs[k] + Coth(\alpha_1)) \quad \dots (4.39)$$

$$\Gamma_q = \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} C_k \left[e^{-Abs[(q-k)\alpha_1]} (Abs[(q-k)] + Coth(\alpha_1)) + e^{-Abs[(q+k)\alpha_1]} (Abs[(q+k)] + Coth(\alpha_1)) \right] - C_{-q} Coth(\alpha_1) - C_q Coth(\alpha_1) \quad \dots (4.40)$$

$$\Gamma'_0 = \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} C'_k e^{-Abs[k]\alpha_1} (Abs[k] + Coth(\alpha_1)) \quad \dots (4.41)$$

$$\Gamma'_q = \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} C'_k \left[e^{-Abs[(q-k)\alpha_1]} (Abs[(q-k)] + Coth(\alpha_1)) + e^{-Abs[(q+k)\alpha_1]} (Abs[(q+k)] + Coth(\alpha_1)) \right] - C'_q (Coth(\alpha_1)) \quad \dots (4.42)$$

y se tiene así un desarrollo de Fourier de la forma:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{C_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} c_q \cos[q\beta]$$

IV.10.2.2. [$v_m(Cos)$, $v_n(Sen)$]. En la tabla IV.1 se puede notar que, aparte de los nombres de los coeficientes, el presente caso difiere del anterior en que aquí las sumas finitas en la expresión de \mathcal{L}_1 dependen del coseno mientras que en el anterior dependen del seno.

Análogamente para \mathcal{L}_2 , las dichas sumas finitas dependen aquí del seno mientras en el punto anterior dependen del coseno. Es decir que, formalmente ambos casos son isomorfos mediante las transformaciones:

$$\mathcal{L}_1^{(iii)} \rightarrow \mathcal{L}_2^{(i)} \wedge (A_k \rightarrow C_k) \wedge (A'_k \rightarrow C'_k); \quad \mathcal{L}_2^{(iii)} \rightarrow \mathcal{L}_1^{(i)} \wedge (D_k \rightarrow B_k) \wedge (D'_k \rightarrow B'_k)$$

en donde los superíndices señalan el caso correspondiente de acuerdo con la tabla IV.1.

En consecuencia se tiene que el resultado es ahora:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{Csch(\alpha)^2}{a} \left[-Coth(\alpha) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} A_k \cos[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} A'_k \cos[k\beta] \right) + \frac{A_0 + A'_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} (A_q + A'_q) \cos(q\beta) \right] \quad \dots (4.43)$$

$$\equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} a_q \cos[q\beta]$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{Csch(\alpha)^2}{a} \left[-Coth(\alpha) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} D_k \sin[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} D'_k \sin[k\beta] \right) + \sum_{q=1}^{\infty} (\Delta_q + \Delta'_q) \sin(q\beta) \right] \quad \dots (4.44)$$

$$\equiv \sum_{q=1}^{\infty} d_q \sin[q\beta]$$

Dados los anteriores renombramientos de símbolos se tiene entonces también que: $A_0 \rightarrow \Gamma_0$, $A'_0 \rightarrow \Gamma'_0$, $A_q \rightarrow \Gamma_q$, $A'_q \rightarrow \Gamma'_q$ cuando $\mathcal{L}_1^{(iii)} \rightarrow \mathcal{L}_2^{(i)}$, mientras que para $\mathcal{L}_2^{(iii)} \rightarrow \mathcal{L}_1^{(i)}$ $\Delta_q \rightarrow B_q$, $\Delta'_q \rightarrow B'_q$. Es decir que se pueden usar las fórmulas (4.36), (4.37) y (4.39) a (4.42) para determinar los coeficientes del presente caso, sin más que hacer los cambios de nombre indicados.

Estos son las únicas dos posibilidades independientes, por lo que el resto de las inscritas en la tabla IV.1 se podrían encontrar haciendo los cambios de nombre correspondientes.

IV.10.3. Dirección de traslación. Como conclusión de la sección IV.10.2 anterior se tiene que:

a) Caso $[v_m(Cos), v_n(Cos)]$.

$$\mathcal{L}_1 = \sum_{q=1}^{\infty} b_q \text{Sen}[q\beta] ; \quad \mathcal{L}_2 = \frac{c_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} c_q \text{Cos}[q\beta]$$

b) Caso $[v_m(Cos), v_n(Sen)]$.

$$\mathcal{L}_1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} a_q \text{Cos}[q\beta] ; \quad \mathcal{L}_2 = \sum_{q=1}^{\infty} d_q \text{Sen}[q\beta]$$

Nótese que, con respecto al desarrollo de Fourier completo dado por la ecuación (4.34), para el caso a) se cumple que:

$$a_q = 0 \forall q \in \mathbb{N} \wedge d_q = 0 \forall q \in \mathbb{N}$$

Incluyendo este resultado en las ecuaciones (4.21) se tiene:

$$b_1^0 = b_2^0 = d_1 = 0$$

y por lo tanto, de acuerdo a (4.19) y (4.20) resulta que:

$$\begin{aligned} b_1^1 &= 0 \\ f_1 &= 0 \end{aligned}$$

Al sustituir estos resultados en (4.18) se obtiene: $B_1^1 = 0$, es decir que no habría componente de traslación en la dirección \hat{j} .

En cambio, en el caso del inciso b), se tiene lo contrario:

$$a_q \neq 0 \forall q \in \mathbb{N} \wedge d_q \neq 0 \forall q \in \mathbb{N}$$

por lo que se puede esperar que los coeficientes b_1^0, b_2^0 de los desarrollos (4.21) probablemente serán distintos de cero y en consecuencia puede ocurrir que los coeficientes

de (4.19) y (4.20) no sean nulos, con lo que, en general, $B_1' \neq 0$ y se tendrá la posibilidad de traslación a lo largo del eje y .

De hecho, encontrando las condiciones para la generación de movimiento de traslación a lo largo de la dirección \hat{i} (que se dan en el apéndice IV.8), se puede demostrar que el desarrollo de Fourier del caso a) cumple con tales condiciones, mientras que el del b) no.

La situación anterior puede resumirse en la siguiente tabla:

$tg/tr/tg-tr/tr-tg$	$Cos(n\beta)$	$Sen(n\beta)$
$Cos(m\beta)$	\hat{i}	\hat{j}
$Sen(m\beta)$	\hat{j}	\hat{i}

Es decir que, para cualquier tipo de deformación, ya sean tangenciales (tg) o transversales (tr) puras o mixtas, el acoplamiento de campos "en fase" produce traslación solamente en la dirección \hat{i} , mientras que un acoplamiento "fuera de fase" produce traslación exclusivamente en la dirección \hat{j} .

Como se cita en el apartado IV.2, sólo se estudia aquí el tema de la traslación del nadador a lo largo del eje y . La razón de ello es la sencillez matemática, puesto que las soluciones a la ecuación biarmónica vienen ya dadas en [67] para el sistema bipolar "vertical" exclusivamente. El movimiento de traslación a lo largo del eje x tendría que estudiarse en el sistema bipolar "horizontal", en donde los círculos de a constante son coaxiales con el eje x . En consecuencia, en lo subsiguiente sólo se considerará al caso b) de acoplamiento de modos de oscilación $v_m(Cos)$, $v_n(Sen)$.

IV.11. Escalamiento.

IV.11.1 *Similitud.* Debido a que las coordenadas bipolares:

$$\alpha = Ln \left[\frac{r_1}{r_2} \right] ; \quad \beta = \theta_1 - \theta_2$$

(ver fig. IV.2) son adimensionales, la única escala de medida con que cuenta este sistema de coordenadas es precisamente la constante a que aparece en el coeficiente métrico $h = [Cosh(\alpha) - Cos(\beta)]/a$. La constante a actúa como factor de dilatación-compresión (homotecia) en el plano z , de manera que los círculos bipolares se ajusten al tamaño real del problema en cuestión mediante valores adecuados de a .

Para encontrar el valor de a que corresponde a cada posición del nadador, representado por el círculo interior C_1 (ver figura IV.1), primero se encuentran un par de círculos bipolares α_1, α_2 que satisfagan las proporciones del sistema real, es decir que la razón de sus radios sea igual a 100 por un lado y por otro que la excentricidad ϵ , mediada como la relación que guardan la distancia entre los centros de ambos círculos y el radio mayor, sea la misma. Como consecuencia los círculos α_1, α_2 son geoméricamente similares a los círculos C_1, C_2 correspondientes, respectivamente, al nadador y a la célula.

Para determinar a los dichos círculos bipolares similares, se plantea el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. De acuerdo con la ec. (4.3b), la ecuación de los círculos de coordenada bipolar $\alpha = \text{Cte.}$ es:

$$x^2 + (y - a\text{Coth}(\alpha))^2 = a^2\text{Csch}(\alpha)^2$$

en consecuencia cada círculo tiene centro $c_a = (0, a\text{Coth}(\alpha))$ y radio $\rho = a\text{Csch}(\alpha)$.

La distancia entre los centros de dos círculos bipolares α_1 y α_2 (con $\alpha_1 > \alpha_2$ y $\alpha_1, \alpha_2 > 0$) es entonces:

$$+\sqrt{(a\text{Coth}(\alpha_2) - a\text{Coth}(\alpha_1))^2} = a(\text{Coth}(\alpha_2) - \text{Coth}(\alpha_1))$$

puesto que $\text{Coth}(x)$ es una función decreciente de su argumento y tiende a 1 si $x > 0$.

Por otro lado, la razón entre los radios es:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{a\text{Csch}(\alpha_2)}{a\text{Csch}(\alpha_1)} = \text{Csch}(\alpha_2)\text{Sinh}(\alpha_1)$$

siendo ρ_1 y ρ_2 los radios de los círculos α_1 y α_2 respectivamente.

Entonces el sistema de ecuaciones para determinar a α_1 y α_2 es:

$$\begin{aligned} a(\text{Coth}(\alpha_2) - \text{Coth}(\alpha_1)) &= \epsilon a\text{Csch}(\alpha_2) \\ \text{Csch}(\alpha_2)\text{Sinh}(\alpha_1) &= 100 \end{aligned}$$

en donde $\epsilon \in (0,1)$ es:

$$\epsilon = \frac{d_{C_1-C_2}}{R_2}$$

siendo $d_{C_1-C_2}$ la distancia entre los centros de los círculos C_1 y C_2 . Nótese que el sistema anterior no depende del parámetro a .

Una vez determinados los círculos bipolares α_1 y α_2 se encuentra el valor de a que es necesario para que estos tengan las dimensiones reales del problema. Puesto que en la situación biológica $R_1 \sim 10^{-5}$ cm. entonces:

$$10^{-5} = a\text{Csch}(\alpha_1) \Rightarrow a = \frac{10^{-5}}{\text{Csch}(\alpha_1)}$$

IV.11.2. Normalización. Para efectos de la comparación entre los resultados de los casos de deformación tangencial y transversal, tanto entre las distintas situaciones de acotamiento (bidimensional acotado y no acotado) como en cada una de ellas, es indispensable trabajar en una base de deformaciones normalizada, para lo cual se utilizó la norma $\|\cdot\|$ de L^2 :

$$\|\vec{v}\|^2 = \int_S \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle ds$$

en donde \langle , \rangle es el producto punto.

Entonces, en coordenadas bipolares se tiene que:

$$\|\bar{v}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \frac{d\beta}{h}$$

en donde h es el coeficiente métrico bipolar.

a) En el caso tangencial, la base de deformación es (ver sección IV.7.1):

$$\bar{v} = f_n(\beta) \hat{e}_\beta$$

con $f_n(\beta)$ como en (4.22). En consecuencia:

$$\|\bar{v}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f_n(\beta)]^2 \frac{d\beta}{h} = \begin{cases} \pi a \operatorname{Csch}(\alpha) (1 + e^{-2n\alpha}) & \text{si } f_n(\beta) = \operatorname{Cos}(n\beta) \\ \pi a \operatorname{Csch}(\alpha) (1 - e^{-2n\alpha}) & \text{si } f_n(\beta) = \operatorname{Sen}(n\beta) \end{cases}$$

b) En el caso transversal, la base de deformación es:

$$\bar{v} = v_\alpha \hat{e}_\alpha + v_\beta \hat{e}_\beta$$

con v_α y v_β como en la sección IV.7.2. Así se tiene que:

$$\|\bar{v}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \langle v_\alpha \hat{e}_\alpha + v_\beta \hat{e}_\beta, v_\alpha \hat{e}_\alpha + v_\beta \hat{e}_\beta \rangle \frac{d\beta}{h} = \int_{-\pi}^{\pi} (v_\alpha^2 + v_\beta^2) \frac{d\beta}{h}$$

que da por resultado, si $f_n(\beta) = \operatorname{Cos}(n\beta)$:

$$\|\bar{v}\|^2 = \pi \left[a \operatorname{Csch}(\alpha) (1 + n^2 + 2 \operatorname{Csch}^2(\alpha) + e^{-2n\alpha} (1 + 3n^2 + 4n \operatorname{Coth}(\alpha) + 2 \operatorname{Csch}^2(\alpha))) \right]$$

si $f_n(\beta) = \operatorname{Sen}(n\beta)$:

$$\|\bar{v}\|^2 = \pi \left[a \operatorname{Csch}(\alpha) (1 + n^2 + 2 \operatorname{Csch}^2(\alpha) - e^{-2n\alpha} (1 + 3n^2 + 4n \operatorname{Coth}(\alpha) + 2 \operatorname{Csch}^2(\alpha))) \right]$$

En el caso anterior, resultaron útiles las siguientes fórmulas de integración (no siempre fáciles de encontrar):

$$-\operatorname{Csch}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\beta}{\operatorname{Cos}(\beta) - \operatorname{Cosh}(\alpha)} \quad ; \quad -2\pi e^{-n\alpha} \operatorname{Csch}(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{Cos}(n\beta)}{\operatorname{Cos}(\beta) - \operatorname{Cosh}(\alpha)} d\beta$$

que junto con sus derivadas respecto de α , permiten el cálculo de la integral de la norma.

IV.12. Algoritmo para el cálculo de la curvatura.

El cálculo de la curvatura se restringe a dos casos concretos:

$$\dots [v_m^{tg}(\text{Cos}), v_n^{tg}(\text{Sen})]$$
$$\dots [v_m^{tr}(\text{Cos}), v_n^{tr}(\text{Sen})]$$

es decir, a los casos de acoplamiento entre campos de deformación del mismo tipo (tangenciales (*tg*) o transversales (*tr*)) que pueden producir desplazamiento en la dirección del vector unitario \hat{j} , de acuerdo a lo establecido en los apartados IV.2 y IV.10.

Los cálculos se hicieron para cada una de 10 posiciones excéntricas del nadador circular C_1 , correspondientes a los valores del parámetro de excentricidad $\epsilon = 0.1, 0.2, \dots, 0.98$ (el parámetro ϵ está definido en el apartado IV.11). En lo subsiguiente a estos 10 sitios de evaluación se les denominará también, estaciones y se numeran del 1 al 10 partiendo de la más central ($\epsilon = 0.1$) a la más periférica ($\epsilon = 0.98$).

En cada estación se corrieron cálculos numéricos para los modos m, n con $2 \leq m \leq 100$ y $n = m+25$.

Después de asignar un valor definido a m y n se calculan los parámetros α_1, α_2 y a de los círculos bipolares correspondientes a cada posición excéntrica particular del nadador, de acuerdo con las fórmulas de la sección IV.11.

Definidos m, n , y α_1, α_2 es posible calcular los coeficientes A_m, B_m, \dots de las fórmulas (4.5), según el caso y de acuerdo con las expresiones que para cada coeficiente se dan en la sección IV.7.

Conociendo a las funciones $F_m(\alpha)$, de (4.5) se puede ahora determinar ya a los coeficientes A_k, \dots, D'_k correspondientes a las sumas finitas de las fórmulas (4.43) y (4.44) para los componentes \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 del corchete de Lie.

Enseguida y con los valores de A_k, \dots, D'_k del paso anterior, se determinan los valores de los coeficientes A_0, A'_0, A_q, \dots , de acuerdo con las fórmulas (4.39) a (4.42) según se explicó en la sección IV.10.2. Estos coeficientes corresponden a la parte infinita de \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dada por las series en (4.43) y (4.44).

Con esto se tendría ya la serie truncada de Fourier para \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 y por lo tanto quedan así disponibles los coeficientes a_k y d_k necesarios para definir a b_1^0, b_0^0 de acuerdo con la ecuación (4.21).

A partir de esto se calcula el valor de f_1 y b_1' con las fórmulas (4.19) y (4.20) con lo que es finalmente posible encontrar el término de holonomía B_1' de acuerdo con la expresión (4.18).

Estos resultados representan la curvatura $F[v_n, v_m]$ debida al acoplamiento de dos modos v_n, v_m . Con el fin de que el tiempo de procesamiento fuera el mínimo posible, primero se calculó la curvatura de modos de oscilación v_n, v_m no normalizados y al final se multiplicó el resultado por el producto de los factores de normalización correspondientes $\| \cdot \|^{-1}$, de acuerdo con la sección IV.11.2. Debido a la propiedad de bilinealidad de F , esto corresponde al cálculo de la curvatura de los modos de oscilación normalizados:

$$V_n = \| v_n \|^{-1} v_n ; V_m = \| v_m \|^{-1} v_m$$

ya que $F[V_n, V_m] = \|v_n\|^{-1} \|v_m\|^{-1} F[v_n, v_m]$.

Tanto en los desarrollos de Fourier como para \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dados por (4.43) y (4.44) como en las fórmulas (4.21) para definir a b^0_1 y b^0_0 , se tomaron 10 términos en los desarrollos infinitos. Incluyendo hasta 25 términos no se obtuvieron cambios numéricos significativos, algo que es de esperarse debido a la presencia de funciones exponenciales decrecientes en la definición de estas fórmulas.

El programa que se utilizó para implementar este algoritmo está en el apéndice IV.9.

IV.13. Potencia.

De acuerdo con II.4, el operador de potencia se define por:

$$\mathbf{E}(\vec{v}, \vec{w}) = \int_S \vec{v} \cdot \mathcal{P}(\vec{w}) d\vec{s} \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in T_q Q$$

en donde \mathcal{P} es el operador autoadjunto de Lorentz y S corresponde, en principio, a la frontera total del dominio \mathcal{D} ocupado por el fluido, es decir $S = C_1 \cup C_2$. Puesto que aquí se ha supuesto que el campo \vec{v} se anule en C_2 , entonces la integral correspondiente a esa frontera es igual a cero, quedando únicamente la correspondiente al círculo C_1 que es el que representa al nadador. Por lo tanto, en lo subsecuente se asumirá que $S = C_1$.

La forma cuadrática asociada al operador bilineal \mathbf{E} :

$$E(\vec{v}) = \mathbf{E}(\vec{v}, \vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot \mathcal{P}(\vec{v}) d\vec{s}$$

representa la energía disipada E o potencia, la cual es generada por la tasa con la que los esfuerzos que actúan sobre la superficie S , realizan trabajo debido a la deformación instantánea especificada por el campo $\vec{v} \in T_q Q$.

Desarrollando la expresión anterior se tiene que:

$$E(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot \Pi(\vec{v}) \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{v} \cdot \Pi(\vec{v}) \cdot \vec{n} ds = \int_S \vec{v} \cdot \vec{f} ds$$

en donde \vec{f} es el vector de esfuerzo o fuerza unitaria de superficie.

Por el teorema de la divergencia se tiene que:

$$E(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot \Pi(\vec{v}) \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \Pi(\vec{v})) dV \dots (4.45)$$

El integrando en la última igualdad, representa la tasa temporal unitaria por unidad de volumen a la cual la energía está siendo suministrada por el trabajo hecho por los esfuerzos en un elemento de volumen, sin considerar fuerzas de masa. Esta función viene dada por [39 p:29]:

$$\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \Pi) = -p \nabla \cdot \vec{v} + \Phi + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \Pi) \dots (4.46)$$

en donde el primer término representa el trabajo hecho sobre la partícula del fluido por cambios en su volumen, y se anula para un fluido incompresible.

El segundo término Φ es la función de disipación de energía mecánica, que representa el trabajo hecho sobre la partícula al vencer las fuerzas de fricción interna y viene dada en general por:

$$\Phi = 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} + k (\nabla \cdot \vec{v})$$

en donde μ es la viscosidad dinámica, k es el módulo de elasticidad volumétrica y \mathbf{D} es el tensor de rapidez de deformación, el cual es simétrico. Para un fluido newtoniano incompresible lo anterior es simplemente:

$$\Phi = 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}$$

Finalmente el último término de (3), representa el trabajo hecho en el movimiento del elemento de volumen como un todo. Para fluidos de Stokes, sin fuerzas de masa actuantes, se tiene que [39 p:85,89]:

$$\nabla \cdot \Pi = 0$$

En consecuencia (4.46) se reduce a:

$$\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \Pi) = \Phi \dots (4.47)$$

Substituyendo (4.47) en (4.45) se tiene finalmente que:

$$E(\vec{v}) = \int_V \Phi dV \dots (4.48)$$

que coincide con la tasa de disipación de energía mecánica en una región V cualquiera, ocupada por el fluido [39 p:30].

IV.13.1. Cálculo de Φ .

De acuerdo con la expresión (4.30) en coordenadas bipolares (α, β) se tiene que:

$$\mathbf{D} = \hat{e}_\alpha \hat{e}_\alpha D_{11} + \frac{1}{2} \hat{e}_\alpha \hat{e}_\beta D_{12} + \frac{1}{2} \hat{e}_\beta \hat{e}_\alpha D_{21} + \hat{e}_\beta \hat{e}_\beta D_{22}$$

con $D_{12} = D_{21}$ y $\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta$ los vectores unitarios bipolares.

En general, el doble producto punto de la diádica $\mathbf{D}^{(1)}$ con la diádica $\mathbf{D}^{(2)}$ es el escalar dado por [39 p:530]:

$$\mathbf{D}^{(1)} : \mathbf{D}^{(2)} = \sum_j \sum_k D_{jk}^{(1)} D_{jk}^{(2)}$$

En consecuencia se tiene que $\mathbf{D} : \mathbf{D}$ es:

$$\mathbf{D} : \mathbf{D} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 D_{jk} D_{jk} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 D_{jk}^2 = D_{11}^2 + D_{12}^2 + D_{21}^2 + D_{22}^2 = D_{11}^2 + D_{22}^2 + 2D_{12}^2$$

y por lo tanto:

$$\Phi = 2\mu \left(\sum_{i=1}^2 D_{ii}^2 + 2D_{12}^2 \right) \dots \quad (4.49)$$

Así, substituyendo (4.49) en (4.48) se obtiene la potencia en coordenadas bipolares:

$$\begin{aligned} E(\bar{v}) &= \int_R 2\mu \left(\sum_{i=1}^2 D_{ii}^2 + 2D_{12}^2 \right) dV = 2\mu \int_R \left(\sum_{i=1}^2 D_{ii}^2 + 2D_{12}^2 \right) \frac{d\alpha d\beta}{h^2} \\ &= 2\mu \int_R \Phi \frac{d\alpha d\beta}{h^2} \end{aligned}$$

Cuando la región R de integración es el rectángulo $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2, -\pi < \beta < \pi$, que corresponde a un anillo excéntrico en el plano cartesiano se tiene que:

$$E(\bar{v}) = 2\mu \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi \frac{d\alpha d\beta}{h^2} \dots \quad (4.50)$$

En la práctica, esta fórmula resulta más sencilla de calcular que la dada por la integral de superficie en las igualdades (4.45), porque a pesar de que ahora se trata de una doble integración, se tiene la ventaja de que en (4.50) no aparece el término de presión.

IV.14. Resultados.

IV.14.1. Curvatura y desplazamiento.

Los resultados que aparecen en esta sección se obtuvieron mediante la aplicación del algoritmo descrito en el apartado IV.12.

Tanto para deformaciones tangenciales como transversales, los cálculos muestran que en cada estación y para cada m , la curvatura como función del modo de oscilación n decae rápidamente a cero después de alcanzar un máximo cuando se acoplan los modos $m, n = m+1$. En las figuras IV.10a, IV.10b se muestran dos curvas típicas de cada caso. Nótese la diferencia de magnitud entre ambos, de hecho para todo acoplamiento máximo en cualquier estación se cumple que:

$$F_{m,m+1}^{tg} < F_{m,m+1}^{tr}$$

siendo la relación de magnitudes aproximadamente:

$$F_{m,m+1}^{tr} \cong \frac{5}{3} F_{m,m+1}^{tg}$$

válida en promedio en cada estación.

Al comparar los modos de curvatura máxima $m, n = m+1$ dentro de cada estación particular, resulta que mientras más grande sea m mayor será la curvatura y esto se da de manera aproximadamente lineal tanto en el caso tangencial (Fig. IV.11a) como en el

transversal (Fig. IV.11b). La diferencia entre ambos es puramente cuantitativa. El cociente entre las pendientes aproximadas de cada recta, favorece al caso transversal en una proporción promedio de $\cong 4/3$. Aunque la proporción se hace más pequeña conforme la excentricidad posicional del nadador crece, siempre es mayor a 1 en todos los casos.

Entre estaciones, el valor de los modos máximos de curvatura crece comparativamente poco al principio conforme la excentricidad aumenta, subiendo drásticamente en las estaciones ya cercanas a la pared celular. En las primeras siete estaciones el aumento de la curvatura procede aproximadamente doblando el valor de la estación precedente, mientras que en las estaciones finales el crecimiento es exponencial. Lo anterior ocurre para todos los modos de oscilación de curvatura máxima analizados, tanto en el caso tangencial (de la cual la Fig.IV.12a es típica) como en el transversal (Fig. IV.12b).

Aplicando la fórmula (3.5) para el desplazamiento D , con los mismos parámetros que en el caso no acotado, se obtienen las gráficas de las figuras IV.13 que muestran la dependencia de D con respecto al modo de oscilación en una estación típica, mientras que las gráficas de las figuras IV.14 se ve el crecimiento de D en cada estación cuando se acoplan los modos $m = 50$ y $n = 51$. Obviamente estas gráficas tienen la misma tendencia que siguen las correspondientes gráficas de curvatura (figs. IV.11 y IV.12) y guardan la misma relación cuantitativa, puesto que entre D y F_{mn} solo media un cambio de escala. Así se ve como la estrategia de natación transversal avanza aproximadamente $5/3$ más en cada brazada que la tangencial.

IV.14.2. Potencia básica y de brazada

Aplicando la fórmula (4.50) para el caso de deformaciones tangenciales, se obtiene:

$$E = -\frac{nr\mu \left[-8\text{Cosh}(n(\alpha - \alpha_2))\text{Sinh}(n(\alpha - \alpha_2))^3 + n(n^2 - 1)\text{Sinh}(4(\alpha - \alpha_2)) + 2(n^2 - 1)\text{Sinh}(2(\alpha - \alpha_2)) + (n-1)\text{Sinh}(2(n-1)(\alpha - \alpha_2)) - 2n\text{Sinh}(2n(\alpha - \alpha_2)) + (n-1)\text{Sinh}(2(n+1)(\alpha - \alpha_2)) \right]}{\left(\text{Cosh}(2n(\alpha - \alpha_2)) - n^2\text{Cosh}(2(\alpha - \alpha_2)) + n^2 - 1 \right)^2} \dots (4.51)$$

que es válida tanto para cuando $f(\beta) = \text{Sen}(n\beta)$ como para cuando $f(\beta) = \text{Cos}(n\beta)$.

Para deformaciones transversales resulta que la potencia es:

$$E = \frac{nr\mu \left[(n^2 - 1)(2n(n^2 - 1)\text{Sinh}(2(\alpha - \alpha_2)) - n^3\text{Sinh}(4(\alpha - \alpha_2)) - n(n+1)\text{Sinh}(2(n-1)(\alpha - \alpha_2)) + 2(n^2 - 1)\text{Sinh}(2n(\alpha - \alpha_2)) + \text{Sinh}(4n(\alpha - \alpha_2))) - (n-1)^2 n(n+1)\text{Sinh}(2(n+1)(\alpha - \alpha_2)) \right]}{\left(\text{Cosh}(2n(\alpha - \alpha_2)) - n^2\text{Cosh}(2(\alpha - \alpha_2)) + n^2 - 1 \right)^2} \dots (4.52)$$

igualmente válida para ambos casos de $f(\beta)$.

Debido a la propiedad de bilinealidad del operador E , para obtener la potencia correspondiente a un modo de deformación normalizado:

$$V_n = \|v_n\|^{-1} v_n$$

se debe de multiplicar las fórmulas anteriores por los correspondientes factores de normalización según el caso de que se trate, y de acuerdo con los resultados de la sección IV.11.2. Esto es:

$$E[V_n, V_n] = \|v_n\|^2 E[v_n, v_n]$$

en donde $E[v_n, v_n]$ corresponde a las fórmulas (4.51) o (4.52), según el caso.

Calculando con estas ecuaciones se obtiene que, mientras más alto sea el modo de la oscilación n mayor es la potencia disipada, siguiendo una tendencia lineal tanto en el caso tangencial como en el transversal (Figs. IV.15a y IV.15b). Como ocurrió con la curvatura, la diferencia entre los dos casos es cuantitativa, cosa que no se aprecia en las gráficas debido a que es muy pequeña. Los valores tangenciales son $\cong 2\%$ mayores que los transversales cuando $n = 10$, disminuyendo el porcentaje hasta 0.02% para modos cercanos 100.

Comparando entre estaciones y para cada n , se observa que la potencia de hecho permanece básicamente constante cuando el nadador se mueve desde el centro a la periferia tanto en el caso tangencial como en el transversal (Figs. IV.16 y IV.17), aunque se obtuvieron dos comportamientos característicos distintos, observables solo al amplificar la escala (Figs. IV.18 y IV.19).

En el caso tangencial, para modos de oscilación bajos ($n < 10$) en donde la magnitud de E es pequeña, se tiene una curva levemente ascendente en donde la diferencia más grande entre el valor mínimo (en $\epsilon = 0.1$) y máximo (en $\epsilon = 1$) llega hasta un 14% cuando $n = 2$, disminuyendo dicha diferencia rápidamente a un valor de 0.02% cuando $n = 5$ (Fig. IV.18a) y a 10^{-5} para $n = 10$. En modos con n grande, la potencia oscila con una amplitud muy pequeña ($\cong 10^{-15}$) alrededor de una tendencia promedio ligeramente ascendente (Fig. IV.19a), de manera que prácticamente se podría considerar como constante a lo largo del trayecto entre estaciones.

En el caso transversal la leve tendencia ascendente de la curva de potencia entre estaciones, ocurre únicamente para modos con $n < 4$. En el resto de los modos persiste una tendencia ligeramente descendente. Para modos de oscilación bajos ($n < 10$) en donde la magnitud de E es pequeña, se tiene que la diferencia más grande entre el valor máximo ($\epsilon = 0.1$) y mínimo ($\epsilon = 1$) llega hasta un 30% cuando $n = 2$, disminuyendo dicha diferencia rápidamente hasta un valor de 2% cuando $n = 5$ (Fig. IV.18b) y de 0.6% cuando $n = 10$. En modos de oscilación mayores, la diferencia es del orden de 10^{-15} alrededor de un cierto valor, de manera que prácticamente se podría considerar como constante aun con su tendencia descendente (Fig. IV.19b).

En las figuras IV.20 y IV.21 se grafican las curvas de la potencia de brazada \mathcal{E} , calculada de acuerdo con la ecuación (3.7), y en donde se puede apreciar la magnitud de esta variable, la cual sigue la misma forma de las correspondientes curvas de la potencia básica (figs. IV.15, IV.16 y IV.17), puesto que entre ambas solo media un cambio de escala.

GRAFICAS DE CURVATURA.

Unidad de medida del coeficiente de curvatura F_{mn} : cm^{-1} .

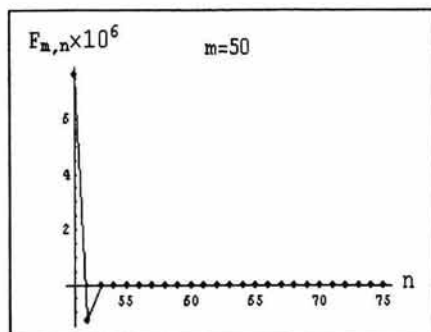


Figura IV.10a. Caso tangencial. Coeficiente de curvatura F_{mn} con $m=50$, estación 5.

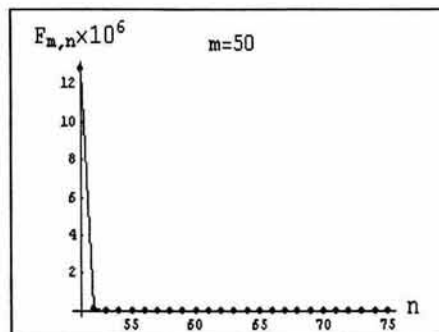


Figura IV.10b. Caso transversal. Coeficiente de curvatura F_{mn} con $m=50$, estación 5.

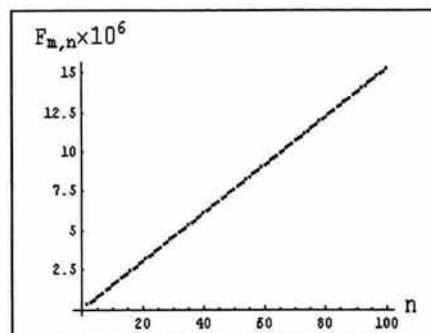


Figura IV.11a. Caso tangencial. Coeficiente de curvatura máximo $F_{m,m+1}$ estación 5.

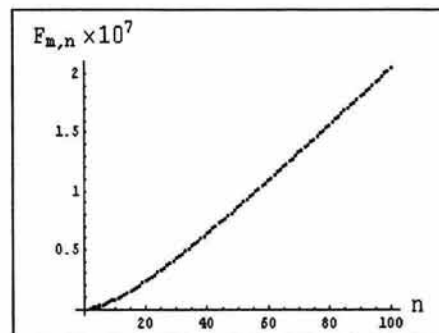


Figura IV.11b. Caso transversal. Coeficiente de curvatura máximo $F_{m,m+1}$ estación 5.

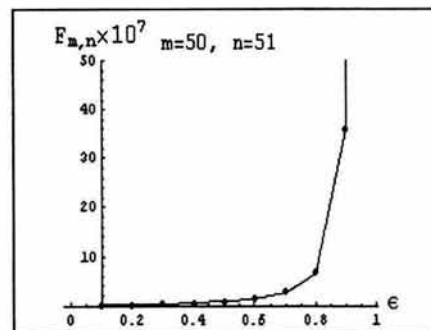


Figura IV.12a. Caso tangencial. Coeficiente de curvatura $F_{50,51}$ en las distintas estaciones. El último dato, que no se muestra en la gráfica, es para $\epsilon = 0.98$, $F_{50,51} = 12219$.

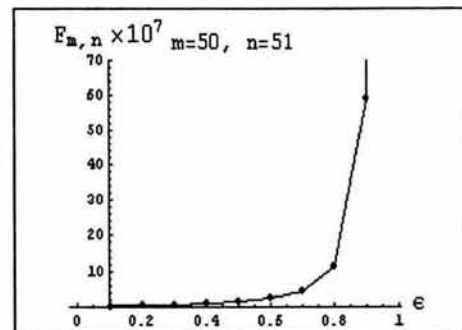


Figura IV.12b. Caso transversal. Coeficiente de curvatura $F_{50,51}$ en las distintas estaciones. El último dato, que no se muestra en la gráfica, es para $\epsilon = 0.98$, $F_{50,51} = 15165$.

GRAFICAS DE DESPLAZAMIENTO.
 Unidad de medida del desplazamiento D : cm.

Radio del nadador $r = 10^{-5}$, amplitud de la deformación relativa $\epsilon = 0.01$.

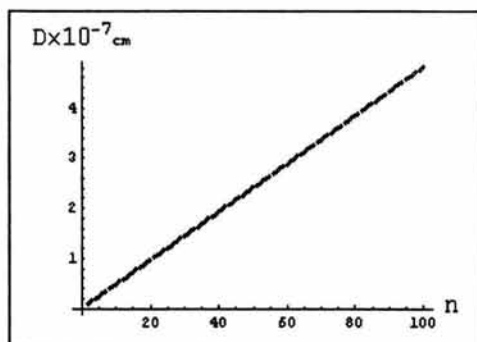


Figura IV.13a. Caso Tangencial.
 Desplazamiento contra número de onda n en la estación 5.

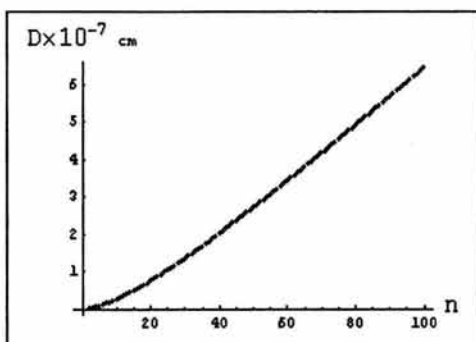


Figura IV.13b. Caso Transversal.
 Desplazamiento contra número de onda n en la estación 5.

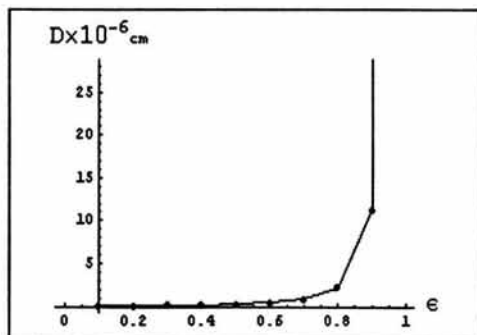


Figura IV.14a. Caso Tangencial.
 Desplazamiento contra excentricidad correspondiente a los modos $m=50, n=51$.

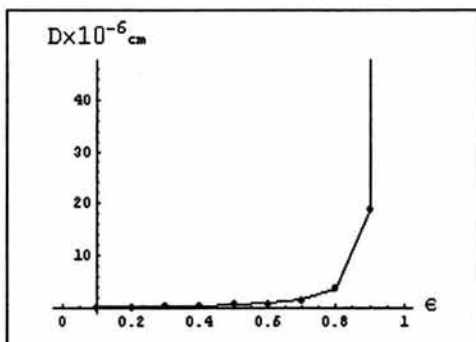


Figura IV.14b. Caso Transversal.
 Desplazamiento contra excentricidad correspondiente a los modos $m=50, n=51$.

GRAFICAS DE LA POTENCIA BASICA.
 Unidad de medida de la potencia básica E : ergs/seg.

Escala de las gráficas: completa.

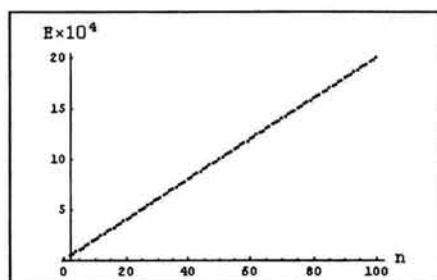


Figura IV.15a. *Caso tangencial.* Potencia E en función del número de onda n , estación 5.

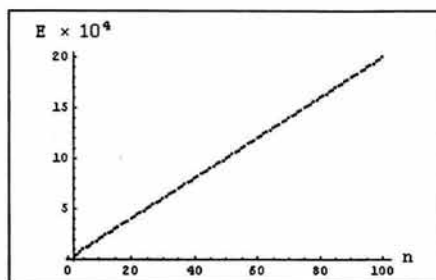


Figura IV.15b. *Caso transversal.* Potencia E en función del número de onda n , estación 5.

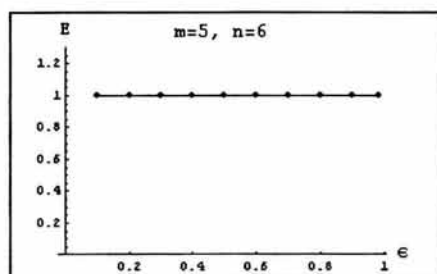


Figura IV.16a. *Caso tangencial.* Potencia E correspondiente a los modos $m=5$, $n=6$ en función de la excentricidad del nadador. La diferencia entre el valor máximo y mínimo de E es del orden de 0.05%.

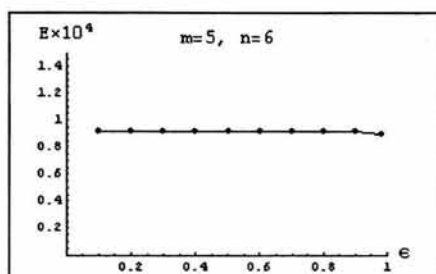


Figura IV.16b. *Caso transversal.* Potencia E correspondiente a los modos $m=5$, $n=6$ en función de la excentricidad del nadador. La diferencia entre el valor máximo y mínimo de E es del orden de 2%.

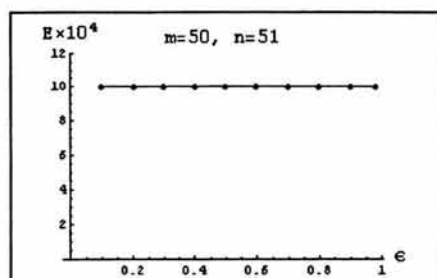


Figura IV.17a. *Caso tangencial.* Potencia E correspondiente a los modos $m=50$, $n=51$ en función de la excentricidad del nadador. La diferencia entre el valor máximo y mínimo de E es del orden de 10^{-15} .

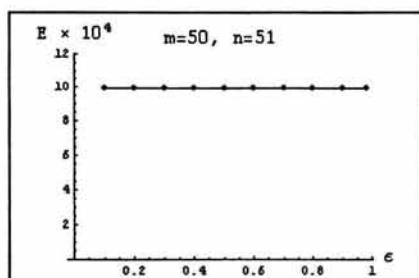


Figura IV.17b. *Caso transversal.* Potencia E correspondiente a los modos $m=50$, $n=51$ en función de la excentricidad del nadador. La diferencia entre el valor máximo y mínimo de E es del orden de 10^{-15} .

GRAFICAS DE LA POTENCIA BASICA.

Unidad de medida de la potencia básica E: ergs/seg.

Escala de las gráficas: en el rango de valores de la potencia.

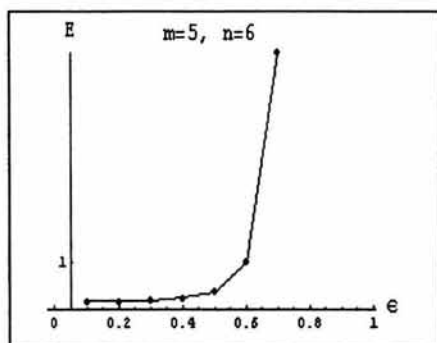


Figura IV.18a. Caso tangencial. Potencia E correspondiente al modos $m=5$, $n=6$ en función de la excentricidad del nadador. La diferencia entre el valor máximo y mínimo de E es del orden de 0.05%.

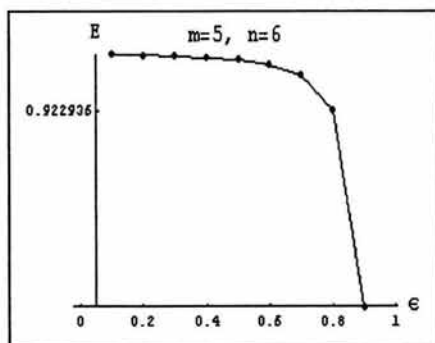


Figura IV.18b. Caso transversal. Potencia E correspondiente al modos $m=5$, $n=6$ en función de la excentricidad del nadador. La diferencia entre el valor máximo y mínimo de E es del orden de 2%.

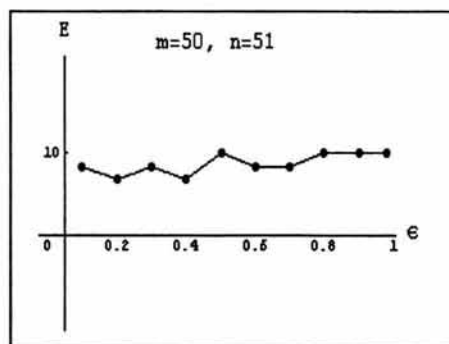


Figura IV.19a. Caso tangencial. Potencia E correspondiente al modos $m=50$, $n=51$ en función de la excentricidad del nadador. La diferencia entre el valor máximo y mínimo de E es del orden de 10^{-15} .

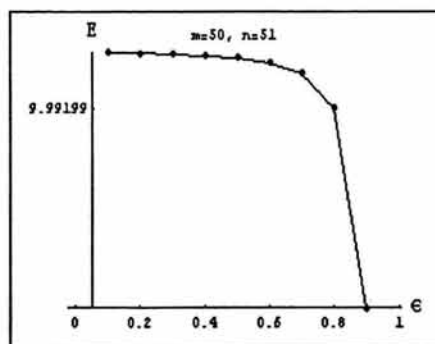


Figura IV.19b. Caso transversal. Potencia E correspondiente al modos $m=50$, $n=51$ en función de la excentricidad del nadador. La diferencia entre el valor máximo y mínimo de E es del orden de 10^{-15} .

GRAFICAS DE LA POTENCIA DE BRAZADA.
 Unidad de medida de la potencia de brazada \mathcal{E} : $\text{gr}^{-1} \text{ergs}^2$.

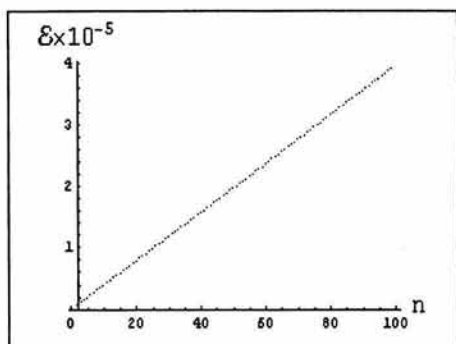


Figura IV.20a. *Caso tangencial.* Potencia \mathcal{E} en función del número de onda n , estación 5.

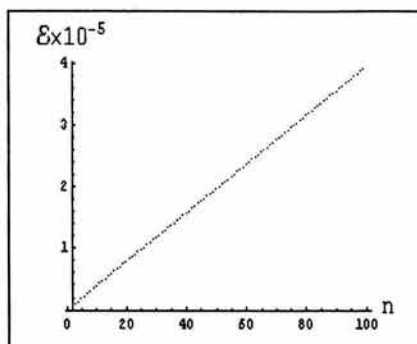


Figura IV.20b. *Caso transversal.* Potencia \mathcal{E} en función del número de onda n , estación 5.

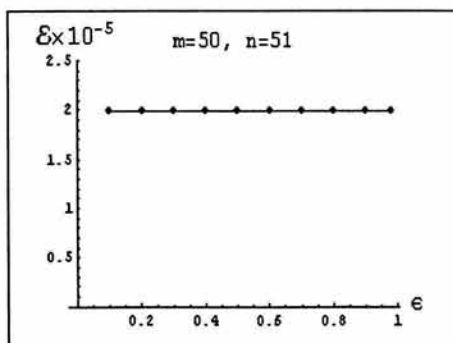


Figura IV.21a. *Caso tangencial.* Potencia \mathcal{E} correspondiente al modos $m=50$, $n=51$ en función de la excentricidad del nadador.

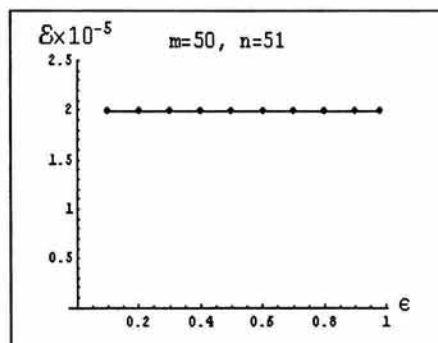


Figura IV.21b. *Caso transversal.* Potencia \mathcal{E} correspondiente al modos $m=50$, $n=51$ en función de la excentricidad del nadador.

GRAFICAS DE EFICIENCIA

Unidades de medida de la eficiencia η : $(\text{cm/seg})^{-1} \text{erg}^{-1}$.

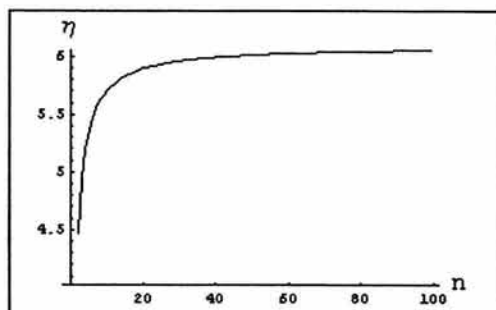


Figura IV.22a. Caso tangencial. Eficiencia η como función del modo de oscilación n , estación 5.

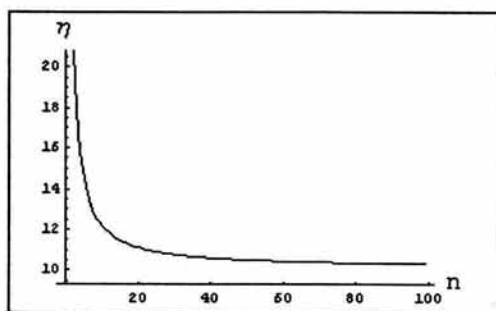


Figura IV.22b. Caso transversal. Eficiencia η como función del modo de oscilación n , estación 5.

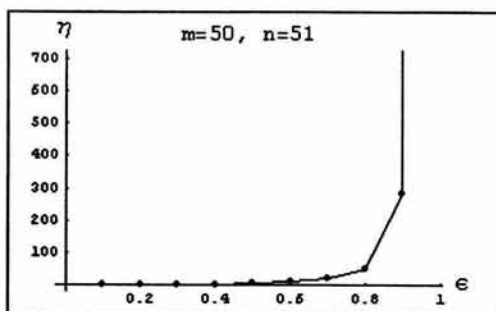


Figura IV.23a. Caso tangencial. Eficiencia η del modo máximo $m=50, n=51$ como función de la excentricidad. No se muestra en la gráfica el último dato para el cual en $\epsilon=0.98$ se tiene que $\eta = 96276$.

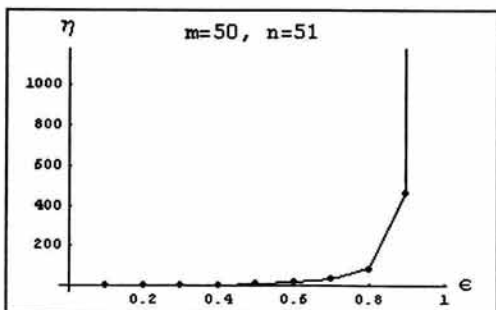


Figura IV.23b. Caso transversal. Eficiencia η del modo máximo $m=50, n=51$ como función de la excentricidad. No se muestra en la gráfica el último dato para el cual en $\epsilon=0.98$ se tiene que $\eta = 114977$.

IV.14.3. Eficiencia.

Únicamente se calculó la eficiencia de los modos de curvatura máximos m , $n = m+1$ de acuerdo con la ecuación (3.10):

$$\eta = \frac{F^{rr} [V_m^h, W_n^h]}{2\pi (E(V_m^h, V_m^h) + E(W_n^h, W_n^h))}$$

fórmula cuya obtención de describe en el apartado III.2.

En el caso tangencial la forma de las curvas de la eficiencia como función de n es la misma en todas y cada una de las estaciones (Fig. IV.22a). En dicha forma, que en general pudiera asimilarse a un segmento de una hipérbola equilátera, hay una fase de crecimiento rápido aproximadamente lineal, crecimiento cuya tasa disminuye progresivamente conforme sigue aumentando n , hasta que parece alcanzar un límite para valores grandes del número de onda.

En todas las estaciones del caso transversal se tiene que la forma de la curva de eficiencia es también una rama de una hipérbola equilátera pero invertida respecto de la del caso tangencial (Fig. IV.22b). Estas curvas comienzan en un valor máximo de eficiencia cuando $n = 2$ ($n = 3$ en la última estación) y a partir de ahí la curva desciende asintóticamente, hacia un aparente valor límite, conforme aumenta n .

Cuantitativamente se tiene el resultado:

$$\eta_n^{tg} < \eta_n^{rr}$$

para toda $n > 1$ en cada una de las estaciones. De hecho, promediando sobre todas las estaciones se obtiene:

$$\eta_n^{rr} \cong \frac{9}{5} \eta_n^{tg}$$

para toda $n > 20$.

Como función de la posición del nadador, la eficiencia siempre crece con la excentricidad ϵ para toda $n > 1$. Al principio, en las primeras ocho estaciones, el aumento en la eficiencia procede a una tasa aproximadamente constante de alrededor de 2.5 en promedio, pero en las dos estaciones finales se da un drástico incremento de tipo exponencial, tanto en el caso de deformaciones tangenciales como transversales (Figs IV.23a y IV.23b).

IV.15. Discusión.

Esta sección se subdivide en dos partes. En la primera se considera el fenómeno desde un punto de vista físico elemental, básicamente buscando verificar en lo posible los resultados obtenidos comparándolos con resultados previos, así como también evaluando su factibilidad a partir de relaciones generales y dando algunas explicaciones heurísticas sobre sus posibles causas.

En la segunda parte se discute sobre lo que es el principal objetivo del presente trabajo, las aplicaciones a la Biología de los resultados obtenidos, tanto en el aspecto cuantitativo como cualitativo.

IV.15.1. Física.

IV.15.1.1 Curvatura. A bajos números de Reynolds las fuerzas viscosas prevalecen sobre las inerciales y por lo tanto son las primeras las que debe de usar un cuerpo en movimiento para propulsarse a sí mismo a través de un fluido. En este régimen dinámico la resistencia y los cambios en resistencia que ofrezca el medio ante el avance del nadador, en una dirección de movimiento particular, pueden resultar en propulsión. Por ejemplo, una membrana oscilatoria a bajos Re , básicamente utiliza la viscosidad del fluido para apoyarse y generar algún apalancamiento [50, 56-57].

Para una membrana de una cierta longitud fija, mientras más grande sea el número de onda n mayor será el número de regiones en la membrana que interactúan fuertemente con el fluido por medio de la generación de esfuerzo. Basándose en lo mencionado en el párrafo anterior, se esperaría entonces que esta suerte de "agarre" del fluido por la membrana del nadador produjese un desplazamiento mayor en proporción directa con el número de onda de la deformación oscilatoria, esto en tanto se trate de una estrategia de natación exitosa producida con ondas de amplitud pequeña y constante. De hecho eso es lo que ocurre en los diferentes modelos de membranas oscilatorias, tales como planos, filamentos, esferas, círculos y elipses moviéndose en medios fluidos no acotados mediante deformaciones periódicas de baja amplitud y con determinada simetría [33, 51, 57-58].

Como lo demuestran los cálculos presentados en las figuras IV.11, esa misma tendencia se recupera aquí también para el caso del nadador circular contenido en un medio acotado, tanto en el caso de estrategias de natación tangenciales como transversales. Mientras más alto es el acoplamiento modal, más grande es el coeficiente de curvatura correspondiente y por lo tanto mayor el desplazamiento del cuerpo.

En los casos no acotados arriba citados, el resultado se obtiene en bases sin escala, de modo que los coeficientes de los campos vectoriales de deformación son unitarios (como en ec. 4.22), quedando la especificación de la amplitud de deformación restringida exclusivamente a la constante ϵ , tal y como se señala en la fórmula (3.5) para el desplazamiento.

La diferencia en $|F_{mn}|$ a favor de la estrategia de natación transversal, mostrada en las figuras IV.11, es algo que cabría esperar partiendo de las diferencias de complejidad entre ambas deformaciones. La estrategia de natación tangencial aquí estudiada es mínima o estrictamente bimodal, puesto que está constituida por la superposición de dos vectores tangenciales cada uno de los cuales consta de una sola función trigonométrica básica, por ejemplo:

$$V(\sigma) = (\text{Cos} (m \beta) + \text{Sen} (n \beta)) \hat{e}_\beta$$

en consecuencia la curvatura asociada a esta deformación es simplemente el término elemental:

$$F_{mn} [\text{Cos} (m \beta) \hat{e}_\beta , \text{Sen} (n \beta) \hat{e}_\beta]$$

En cambio, la estrategia transversal de la sección IV.7.2 es trimodal en la dirección radial y unimodal en la dirección tangencial:

$$V_n(\sigma) = \left(\sum_{j=-1}^1 g_j(\alpha, \beta, n) \text{Sen}[(n+j)\beta] \right) \hat{e}_\alpha + (g'(\alpha, \beta) \text{Sen}(n\beta)) \hat{e}_\beta$$

En consecuencia el operador de curvatura correspondiente al acoplamiento de dos modos de oscilación transversales: $F_{mn} [V_m, V_n]$, se expande en una suma de 16 términos de curvatura más elementales. Así, puede percibirse que en una situación tal, la probabilidad de que se obtengan curvaturas relativamente grandes es mayor en los casos multimodales que en los bimodales. Por ejemplo, en [34] se cita que de hecho las estrategias de natación mixtas proporcionan velocidades varios órdenes de magnitud mayores que las tangenciales. Por supuesto que existen deformaciones multimodales con curvaturas totales menores a las de una deformación mínima. En el apéndice IV.10 se muestran casos sencillos de deformaciones mixtas multimodales en las que una efectivamente supera en su coeficiente de curvatura total a cualquier de los modos de deformación simples, tanto tangenciales como radiales, y la otra tiene una curvatura menor a la de estos casos, en la situación del nadador circular en un medio infinito.

La tendencia de la curvatura a aumentar conforme el círculo nadador C_1 se mueve hacia la periferia, es un resultado compatible con el trabajo de H. Stone relativo al cálculo de la velocidad de un cuerpo deformable [69].

Partiendo del teorema de reciprocidad de Lorentz (sec. II.4.2) y con la condición de "non-bootstrap" [33] de fuerza y torca totales iguales a cero (sec. II.3.1), en [69] se llega a establecer, para el caso no acotado, la siguiente relación entre las deformaciones periódicas $\vec{u}'(t)$ de la frontera del cuerpo y su velocidad de natación resultante $\vec{U}(t)$:

$$\vec{U}(t) = \frac{K_1}{K_2} \int_{C_1} \vec{u}'(t) dS$$

en donde las constantes K_1 y K_2 se determinan a partir de la forma básica C_1 del nadador. La constante K_1 aparece en la expresión del vector de esfuerzo del movimiento rígido correspondiente a la traslación del nadador, mientras que K_2 es la constante que relaciona al empuje (drag) con la velocidad de dicho movimiento.

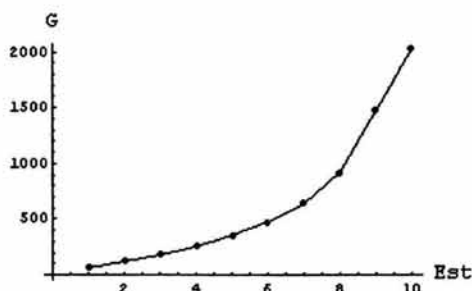
Puesto que en el caso acotado el teorema de reciprocidad de Lorentz también es válido [38], entonces es posible emplear el método anterior para extenderlo a la situación de un fluido finito, cosa que se detalla en el apéndice IV.11. Así es posible determinar como cambia la velocidad de traslación $\vec{U}(t)$ durante el trayecto del nadador circular. Como $\vec{U}(t)$ es directamente proporcional a la curvatura F_{mn} (ec. 3.5), entonces de esta manera se podrá inferir el cambio de F_{mn} en cada estación, de acuerdo con la teoría desarrollada en [69].

En el presente trabajo se ha supuesto que la estrategia de natación $\vec{u}'(t)$ sea siempre la misma durante todo el trayecto cuerpo, y por lo tanto su integral alrededor de la frontera C_1 es siempre una constante. Entonces, si se quiere averiguar como cambia $\vec{U}(t)$ conforme el nadador se mueve centrífugamente en el dominio acotado, basta conocer como cambia la constante geométrica $G = K_1 / K_2$ durante dicha travesía.

Realizando los cálculos necesarios se llega a que (ver apéndice IV.11):

$$G = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \text{Tanh}(\alpha_1 - \alpha_2)}{4a\pi}$$

Al calcular los parámetros bipolares α_1 , α_2 , a , correspondientes a cada estación, se obtiene que G crece de la siguiente manera conforme el nadador se mueve atravesando las distintas estaciones (Est):



lo que implica que la velocidad crecerá también de la misma forma y por lo tanto de igual manera lo haría la curvatura. Nótese que $G(\text{Est})$ tiene también dos fases de crecimiento, al igual que las gráficas de F_{mn} en las figuras IV.12. Incluso el orden de magnitud del incremento en el valor de G guarda una proporción similar al incremento del orden de magnitud en la curvatura, que es de 10^2 si se consideran solamente los datos más típicos para cada n .

Se tiene así una confirmación cualitativa para los resultados obtenidos relativos a la tendencia de la curvatura como función de la posición excéntrica del nadador. Así mismo, el enfoque adoptado en [69] permite resaltar aun más la importancia del teorema de reciprocidad, que es el que lo fundamenta. Restaría en todo caso poder dar una explicación que permitiera aclarar las razones físicas, hidrodinámicas, que sustentan a este fenómeno.

Es interesante comparar, entre los casos bidimensionales acotado y no acotado, a los desplazamientos generados por estrategias semejantes. Como se establece en la sección IV.12, el único caso de deformación tangencial estudiado aquí es:

$$V(\sigma) = (\text{Sen}(m\beta) + \text{Cos}(n\beta))\hat{e}_\beta$$

Resolviendo el caso análogo en la situación no acotada:

$$V(\sigma) = (\text{Sen}(m\theta) + \text{Cos}(n\theta))\hat{e}_\theta$$

resulta que la magnitud del componente de curvatura correspondiente es (ver apéndice IV.10):

$$F_{mn} [\text{Sen}(m\theta)\hat{e}_\theta, \text{Cos}(n\theta)\hat{e}_\theta] = (1/4)(3m - n)$$

Puesto que en ambos casos se trata de estrategias de natación bimodales y periódicas con coeficientes unitarios, aplica la misma fórmula de desplazamiento (3.5). Como se muestra en la gráfica IV.23, al comparar círculos con el mismo radio sujetos a deformaciones con idéntica amplitud relativa ε , el desplazamiento es del mismo orden de

GRAFICAS DE DESPLAZAMIENTO CASOS ACOTADO Y NO ACOTADO.

Cálculos con radio $R = 10^{-5}$ cm, deformación relativa $\varepsilon = 0.01$.

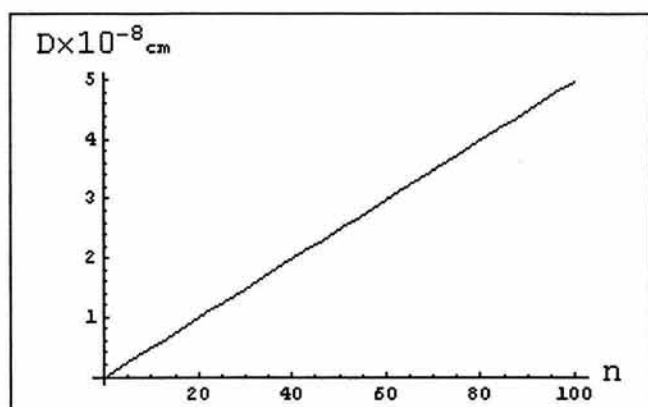


Figura IV.21a. Desplazamiento caso no acotado.

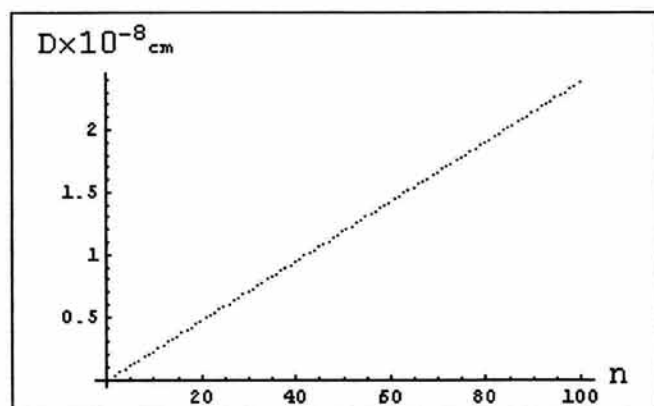


Figura IV.21b. Desplazamiento caso acotado, estación 1.

GRAFICAS DE POTENCIA DE BRAZADA, CASOS ACOTADO Y NO ACOTADO.

Unidad de medida de la potencia de brazada \mathcal{E} : $\text{gr}^{-1}\text{ergs}^2$.

Cálculos con radio $R = 10^{-5}$ cm, deformación relativa $\varepsilon = 0.01$.

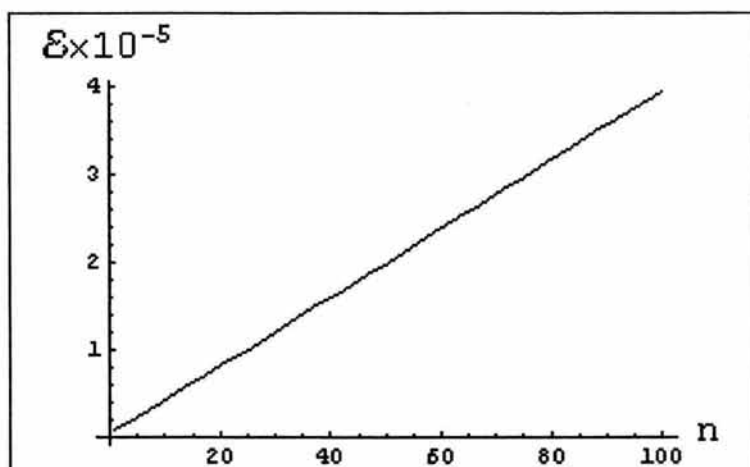


Figura IV.24a. Potencia de brazada, caso no acotado.

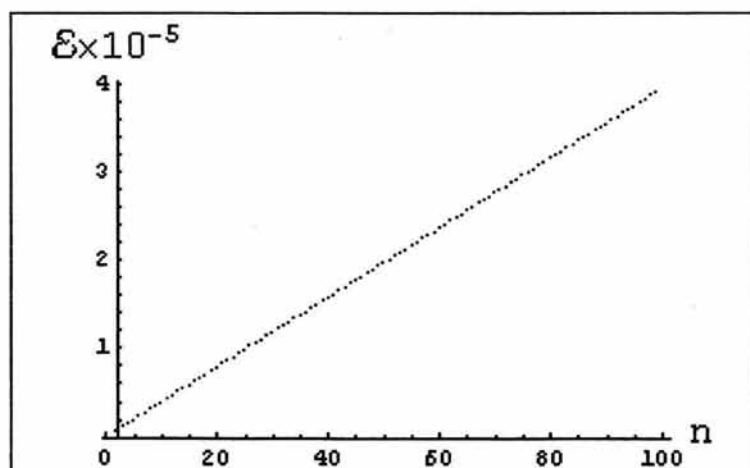


Figura IV.24b. Desplazamiento caso acotado, estación 5.

magnitud, en los casos no acotado y acotado, cuando en este último el nadador ocupa la posición más céntrica.

Como la magnitud de la curvatura crece, en el caso acotado, al irse acercando el cuerpo hacia la periferia (fig. IV.12a), la diferencia entre ambos va aumentando (compárese también con fig.IV.13a), de manera que en la posición más excéntrica el desplazamiento del nadador acotado es ya de tres órdenes de magnitud mayor.

Sobre la base de lo anterior, puede concluirse que el efecto de acotamiento se hace sentir en toda posición del nadador, puesto que se va generando un aumento del desplazamiento en cada estación, aunque en la posición más lejana de cualquier sector de la pared el efecto es el menor posible. Además dicho efecto se va incrementando a un ritmo cada vez mayor conforme se está más cerca de la pared.

A bajos números de Reynolds, la autopropulsión de un cuerpo flexible se alcanza cuando este distorsiona de tal manera su frontera que el cuerpo debe de moverse hacia adelante para así poder cancelar la fuerza total que sobre él ejercen los esfuerzos viscosos del fluido que lo rodea [57]. La figura IV.10 muestra que el nadador circular moviéndose en un fluido acotado, tiene a su disposición varios modos de oscilación que resultan en desplazamiento neto, en un sentido o en otro, a lo largo de la dirección marcada por el vector unitario cartesiano \hat{j} . Sin embargo, la magnitud del máximo valor de curvatura, que ocurre cuando los modos m y $n = m+1$ se acoplan, es mucho mayor que las demás, las cuales básicamente tienden rápidamente a cero conforme m aumenta. Esta es una situación comparable a la que ocurre para algunas de las estrategias probadas en la esfera y en el círculo en fluidos no acotados, en donde los únicos modos con curvatura distinta de cero son también los consecutivos $m, n = m+1$ [33, 52].

De hecho, como el operador de curvatura \mathcal{F} , de dimensión infinita, es bilineal y antisimétrico, entonces puede representarse canónicamente por una matriz tridiagonal, en donde las diagonales superior e inferior a la principal, son las únicas con entradas F_{mn} distintas de cero. Es decir que, teóricamente, la matriz de curvatura de una estrategia de natación, la cual típicamente tendría inicialmente una distribución dispersa de coeficientes F_{mn} distintos de cero, puede llevarse, mediante un cierto cambio de base de los campos vectoriales de deformación, en una matriz en donde los únicos coeficientes de curvatura distintos de cero correspondan a los consecutivos, $m, n = m+1$. Genéricamente, el cambio de base involucraría a una serie infinita de elementos de la base canónica, por lo que numérica o experimentalmente la situación más común será la de obtener matrices de curvatura dispersas en mayor o menor grado.

IV.15.1.2 Potencia. Una explicación análoga a la dada en el caso de la curvatura se puede aplicar también para la potencia E como función del número de onda n . Al aumentar el número de puntos de generación de esfuerzo conforme aumenta n , se esperaría que la energía disipada igualmente aumentase, en tanto la amplitud de deformación permaneciese constante, tal y como ocurre en las figuras IV.15, lo mismo para el caso tangencial que para el transversal. Este es un resultado que se obtiene también en el círculo para todo n [52] y en la esfera a partir de $n \approx 10$ [51], ambos nadando en un medio no acotado mediante deformaciones periódicas de amplitud constante, axisimétricas. También es un resultado que se obtiene en problemas de micronatación con supuestos más generales [49].

Además, dicho aumento se produce siguiendo una tendencia lineal en ambos casos, cosa que está en completo acuerdo con lo que ocurre en el caso bidimensional no acotado [52].

La pequeña diferencia cuantitativa que existe entre ambos tipos de deformación, y que indica que la estrategia tangencial disipa un poco más energía que la transversal, quizás pudiera parecer como algo contra-intuitivo en un primer momento.

En efecto, en comparación con las deformaciones tangenciales las transversales alteran de manera significativa la forma del nadador (Fig. IV.9). Por un lado, la frontera deformada transversalmente expone al fluido una longitud más grande, con lo que aumenta el número de puntos de contacto entre el fluido y el nadador y por lo tanto de puntos de generación de esfuerzo. Por otra parte, las protrusiones generadas en las deformaciones transversales, que básicamente siguen una dirección radial, producen además esfuerzos normales que no están presentes en las tangenciales. De esta forma, intuitivamente se podría esperar un nivel general de generación de esfuerzo mayor en el caso transversal que en el tangencial.

De hecho, eso es lo que ocurre en el caso acotado si se compara con bases de deformación no normalizadas, en donde se obtiene que la potencia transversal, promediada en las distintas estaciones, supera en alrededor de tres órdenes de magnitud a la tangencial para cada modo de oscilación n . En línea con lo anterior, las deformaciones radiales también disipan más energía que las tangenciales en el caso de la esfera en un medio no acotado, como se citó en III.5.1.2 y que también es un resultado en una base no normalizada.

La normalización de las bases de deformación cambia todo el panorama anterior en la situación acotada. Mientras que en el caso tangencial se puede considerar que la norma de las deformaciones básicas no depende de n , lo contrario ocurre con la norma transversal (ver sección IV.11.2). En esta última situación lo que pasa es que al normalizar las bases, la potencia de modos de oscilación altos es más fuertemente corregida que la de los bajos, con lo que se cierra la brecha energética cuantitativa con la potencia tangencial. Al final de cuentas ambas resultaron ser ligeramente distintas y esto último es comparable a lo que ocurre en el caso bidimensional infinito. De acuerdo con [52] la energía disipada por un círculo nadador moviéndose en un medio no acotado, es la misma para cualquier tipo de deformación que tenga el mismo vector de coeficientes periódicos, $\{a(t), b(t)\}$ y suponiendo también a dichas deformaciones como axisimétricas y de baja amplitud. En particular, para estrategias bimodales, ya sean estas tangenciales, radiales o transversales, se tiene que $E_n = E[V_n, V_n] = 2\pi\mu n$ para el círculo unitario (ver apéndice IV.10).

En cambio, la normalización no alteraría la relación de potencias E_n^{tr} / E_n^{tg} en los casos esférico o circular no acotados, porque la norma L^2 de los vectores básicos de las estrategias utilizadas, tanto tangenciales (tg) como radiales (tr), es simplemente la constante $\sqrt{\pi}$.

Es interesante comparar la potencia de brazada entre los casos bidimensionales acotado y no acotado, porque esta variable toma en cuenta el tamaño real de los cuerpos y sus deformaciones. Utilizando a las mismas estrategias tangenciales definidas en el caso del desplazamiento y suponiendo también un radio de $r = 10^{-5}$ y una amplitud relativa $\epsilon = 0.01$, los resultados obtenidos se presentan en la figura IV.24. Los datos graficados son virtualmente idénticos en su mayoría y cuando existen diferencias estas tienen un valor máximo de 1%, unas veces a favor del caso acotado y otras al del no acotado. Puesto que el

cambio de la potencia \mathcal{E} entre las distintas estaciones es pequeño (figs IV.21), la situación de igualdad entre el caso no acotado y el acotado es válida en cualquier estación.

Ciertamente que lo anterior tiende a sugerir que el efecto de pared sobre la potencia es, en general, inapreciable. Esta conclusión es similar a la que se extrae de los resultados reportados en [65], para el caso del movimiento radial centrífugo de un círculo rígido trasladándose, a bajo número de Reynolds, en un contenedor también circular. Ahí se muestra que mientras más pequeña es la proporción entre el radio del cuerpo en movimiento y el radio del contenedor, la potencia permanece constante a lo largo de más estaciones, antes de subir asintóticamente a un valor límite en posiciones ya muy cercanas a la pared. De hecho, para una relación radial de 1:100 la estación en donde la curva de potencia asciende verticalmente, se encuentra tan cercana a la pared, que implicaría que el cuerpo está casi en contacto con ella.

Así que, en cuanto a la permanencia de un valor constante de la potencia a lo largo del trayecto hacia la pared, los resultados tanto de las deformaciones tangenciales como de las transversales, coinciden con lo reportado para el cuerpo rígido en un medio acotado. A partir de ahí existen dos diferencias.

Por un lado, el ascenso de la curva de potencia en la cercanía de la pared solo se da aquí para las deformaciones tangenciales, en donde la forma de la curva coincide completamente con la del cuerpo rígido en términos cualitativos. En el caso de las transversales, la deflexión descendente final de la curva de potencia es un efecto de la normalización de bases que se hizo. Los datos sin normalizar tienen la referida tendencia asintótica ascendente. Así que la fuerte corrección que hace la norma transversal cuando crece n , termina por deflectar hacia abajo la curva de potencia cuando n es grande. Esto podría ser una característica de condiciones de frontera "expansivas", en donde la superposición de funciones trigonométricas contiene términos no lineales en n , tales como $n\text{Sen}(n\beta)$, $n\text{Cos}(n\beta)$ del caso transversal (sec. IV.7.2).

Por otra parte, la tendencia ascendente de la curva de potencia en el caso del cuerpo rígido es de uno o dos órdenes de magnitud, al comparar los valores de potencia de los puntos de la asíntota con los de puntos en la parte constante de la curva. Es decir que se trata de una deflexión notable, a diferencia de lo que ocurre con el círculo deformable sujeto a oscilaciones tangenciales, en donde la deflexión podría incluso despreciarse, especialmente cuando n es relativamente grande.

Esta diferencia entre el caso rígido y el deformable, y también otras que se comentan más adelante, puede tratar de ser explicada partiendo de las diferencias en la tasa de extinción de la magnitud del campo de velocidades conforme uno se aleja de la frontera del cuerpo.

No existe un acuerdo acerca de una expresión general para dicha tasa, al menos en lo concerniente a la micronatación. Por un lado, y siempre refiriéndose a un nadador en un medio no acotado, en [52] se menciona que el flujo del fluido debido al n -ésimo modo de oscilación se extingue a una tasa geométrica de r^{-n} , en donde r mide la distancia de un punto del fluido a la membrana oscilante del cuerpo deformable. Por otra parte, C. Brennen en su modelo de propulsión ciliar, citado en [34], encuentra que los efectos no estacionarios de la capa límite de fluido alrededor del cuerpo oscilante, decaen a una tasa exponencial de e^{-r} . Así que, distintas características del fluido podrían estar decayendo de manera diferente cuando el punto de referencia se aleja del cuerpo.

En las figuras IV.25 y IV.26 se muestra la manera en que decaen los campos de velocidad estudiados en esta tesis. Es notable como, para n pequeño, el campo decae mucho

más lentamente al principio que en el caso de n grande, en donde se puede decir que el campo de velocidades sólo existe en una pequeña vecindad de la frontera del nadador. La diferencia entre un decaimiento exponencial y uno geométrico se ve mejor cuando n es pequeño. Mirando a estas gráficas se aprecia, en primera instancia, que el decaimiento se asemeja más a una tasa geométrica. De hecho, si se calcula la proporción entre la magnitud del campo vectorial en la cercanía de la pared celular (99% de la distancia total) con la magnitud en la frontera del nadador, esta es del orden de 10^{-4} cuando $n = 2$ y de cero cuando $n = 50$, en promedio de todas las estaciones en el caso de las deformaciones tangenciales. Algo similar ocurre para la estrategia transversal.

En consecuencia, se propondría que los campos de velocidad generados por una membrana oscilante se extinguen más rápido con la distancia que los provocados por el arrastre de un cuerpo rígido. Así, el cuerpo deformable podría acercarse mucho a la pared celular sin perturbar al fluido circundante más allá de una pequeña región a su alrededor y por lo tanto la energía disipada no variaría mucho entre los distintos puntos del trayecto. Incluso al llegar al contacto con la pared, la pequeña cantidad de fluido arrastrada por el cuerpo, causaría una disipación final de energía también pequeña, de donde se sigue la minúscula deflexión de la curva de potencia en el caso deformable.

Como se comentó en la sección de resultados IV.14.2, cuando el número de onda n es del orden de las unidades, la variación de la potencia entre las distintas estaciones es más notable que cuando n es más grande, siendo imperceptible ya cuando $n > 10$, tanto en el caso tangencial como en el transversal.

Sobre la base de lo anterior, se puede proponer que, dado que a modos de oscilación bajos los efectos en el fluido generados por la membrana oscilante, se llegan a sentir en la pared celular proporcionalmente más que con n grande, el efecto del acotamiento, en este caso sobre la potencia, será mayor cuando n es pequeño que cuando n es grande. En este último caso, el nadador puede acercarse tanto como quiera a la pared celular, y aun así su interacción con ella a través del campo de velocidades será mínima. Así, como ya se comentó, la energía disipada por la deformación solo se generaría en una pequeña capa límite del fluido alrededor del cuerpo deformable, y por lo tanto siempre sería de una magnitud comparable a la potencia en estaciones más céntricas.

IV.15.1.3 Eficiencia. La presencia de un límite para la eficiencia "naive" conforme aumenta el modo de la deformación, es típica de todos los casos de micronatación que se han estudiado hasta ahora [49, 51-52]. En la mayoría de estos estudios, el énfasis se pone en lo que ocurre cuando el índice n del modo de deformación tiende a infinito, obteniéndose en estas regiones cotas superiores para el valor de η , en el caso de estrategias de natación de amplitud baja y constante dadas por la forma general (2.11). La manifestación de modos de oscilación bajos muy eficientes, como en el caso transversal de la figura IV.22, solo había sido conjeturada en el caso de la esfera en un medio no acotado [52].

De hecho, si se incluye también el estudio de la eficiencia de deformaciones con modos de oscilación bajos, ocurren al menos dos casos: o aparece alguna rama de la hipérbola equilátera como en las figuras IV.22, o como en la esfera en [51] y en el círculo sujeto a deformaciones radiales (apéndice IV.10), o la eficiencia permanece en un nivel constante máximo, como en el caso de algunas deformaciones tangenciales del círculo en un fluido no acotado (apéndice IV.10).

GRÁFICAS DE EXTINCIÓN DE LA VELOCIDAD.

Estación #1. El valor de α decrece hacia la pared celular y es máximo en la membrana del nadador. Rango del ángulo β : $-\pi < \beta < \pi$.

Deformaciones tangenciales.

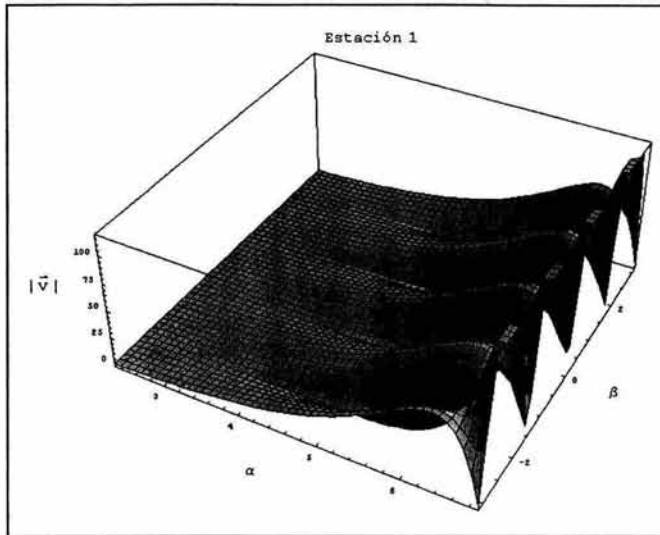


Fig.IV.25a. Modo de oscilación $n = 3$.

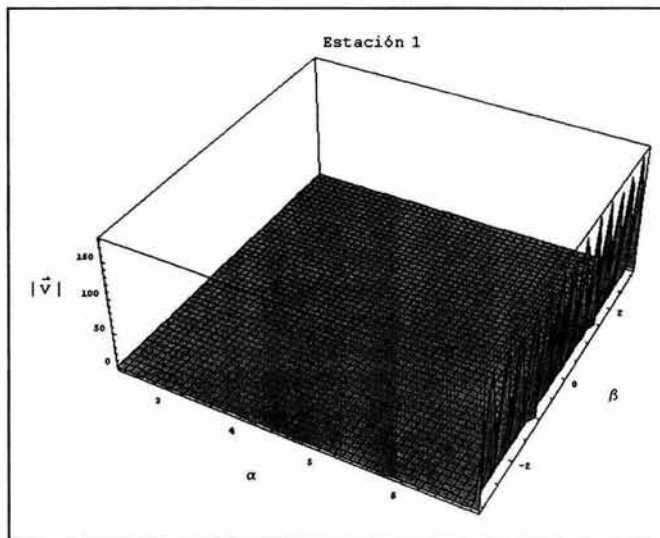


Fig.IV.25b. Modo de oscilación $n = 80$.

Deformaciones transversales.

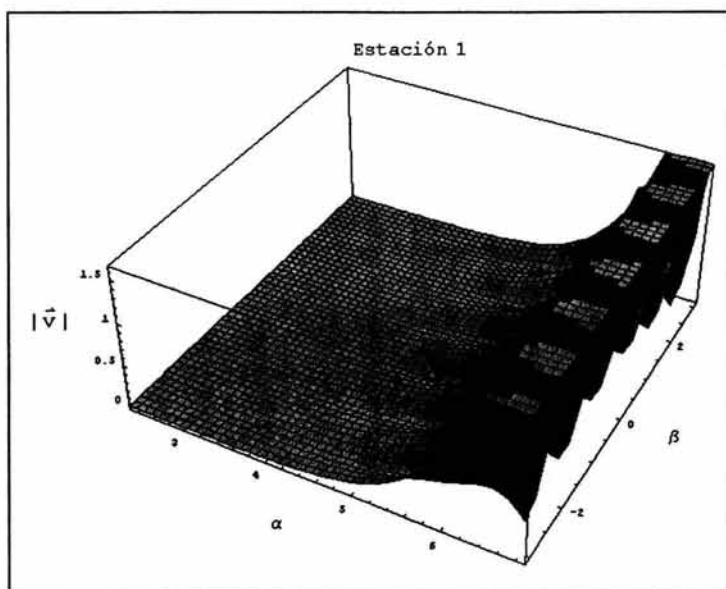


Fig.IV.26a. Modo de oscilación $n = 3$.

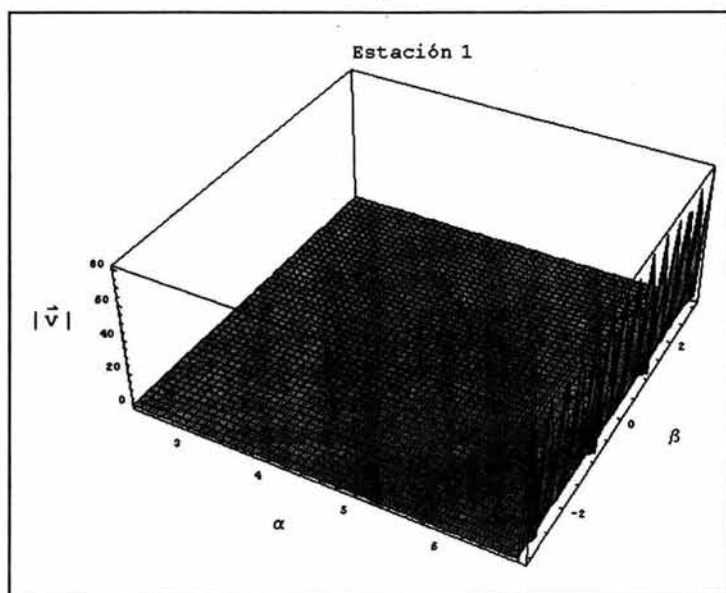


Fig.IV.26b. Modo de oscilación $n = 80$.

De esta manera, las curvas de η como función de n de las figuras IV.22 se encuentran en línea con algunos resultados previos, al menos en cuanto a su forma y aparente conducta al límite.

El hecho de que las ramas de hipérbola correspondientes al caso tangencial y transversal, se encuentran invertidas una respecto de la otra, es una consecuencia de las diferencias entre los factores de normalización. Como ya se mencionó antes, la norma del vector de deformación transversal es una función de n , mientras que la tangencial puede considerarse prácticamente constante. Como resultado de eso, en el caso tangencial el término de normalización sale como factor común en el denominador de la fórmula (3.10) de la eficiencia "naive" y puede cancelarse con el respectivo término del numerador, pero no así en el caso transversal. Ahí básicamente queda un término de norma sin cancelar en el denominador, que causa que la eficiencia tenga un valor máximo al principio, en lo que el término de curvatura crece lo suficiente como para compensar el crecimiento del término de normalización y generar finalmente la conducta asintótica hacia un límite mayor a cero que se observa en la figura IV.22b.

En el caso de la esfera presentado en el capítulo II, las deformaciones tangenciales ahí consideradas resultaron ser claramente más eficientes que las radiales, situación que se repite en el caso del círculo en un medio no acotado, al menos para modos n bajos, (apéndice IV.10). Para el círculo en un fluido acotado, los comparativamente mayores desplazamientos de la estrategia transversal son obtenidos con una disipación de energía hidrodinámica relativamente más baja, resultando por consecuencia en eficiencias casi dos veces más elevadas que las de las deformaciones tangenciales. Una situación análoga también ocurre en el caso circular no acotado. Como se muestra en el apéndice IV.10, existen estrategias transversales (también llamadas mixtas) que superan (o igualan) la eficiencia de las tangenciales.

La continua elevación de la eficiencia con la excentricidad en ambos tipos de deformaciones (Figs.IV.23), es el resultado conjunto del aumento en el desplazamiento del cuerpo conforme este se acerca a la pared (Figs.IV.14), con el hecho de que al mismo tiempo la potencia permanece básicamente constante (Figs.IV.21).

Es interesante tanto desde un punto de vista Físico como Biológico, comparar el caso del nadador circular acotado con el del no acotado. Debido a su invarianza respecto de los distintos parámetros métricos de la deformación (ver II.9), una comparación en términos cuantitativos puede hacerse con más seguridad utilizando a la eficiencia "naive".

En el caso de un círculo nadando en un medio no acotado, utilizando estrategias bimodales puras (radiales o tangenciales), del mismo tipo que el dado por las ecuaciones (3.13), resulta que la máxima eficiencia alcanzable es igual a:

$$\frac{1}{16\pi^2\mu}$$

que con $\mu = 0.01$ toma un valor de 0.633 (apéndice IV.10).

En el caso acotado, la estrategia más eficiente es la transversal y la eficiencia depende de la posición del nadador. Niveles de eficiencia iguales o mayores a la cota dada los alcanzan los modos de oscilación altos desde la primera estación en el caso transversal y a partir de la segunda en el tangencial. En este último caso en la estación más céntrica se tiene un valor de eficiencia máximo de alrededor de 0.3.

En general puede decirse entonces que la magnitud de la eficiencia es significativamente menor en el caso no acotado que en el acotado, para toda posición del nadador circular. Puesto que en ambos la potencia de brazada es de la misma magnitud (figs. IV.20 y IV.21), la mayor eficiencia en la situación acotada se debe al comparativamente mayor desplazamiento, el cual aumenta al irse acercando el nadador a la pared (fig. IV.14).

Es decir que es la diferencia que hay entre los tensores de curvatura y potencia en cuanto a su sensibilidad de las condiciones de finitud del dominio del fluido, lo que finalmente redundará en una mayor eficiencia de natación, para un cuerpo circular deformado por oscilaciones periódicas de baja amplitud desplazándose en un medio acotado.

Uno de los objetivos principales de la Micronatación es determinar las estrategias óptimas de movimiento de una forma particular, de acuerdo a un cierto criterio de eficiencia. Esto ha sido hecho para modos finitos de oscilación en el caso del círculo y la esfera en fluidos no acotados y de acuerdo al concepto de eficiencia "naive" [52]. Los resultados que ahí se obtienen, involucran siempre y solamente a deformaciones que son transversales en general. En ese mismo artículo, se conjetura que, en cada problema de micronatación particular, se llegaría a la misma estrategia óptima partiendo de cualquier concepto razonable de eficiencia. Por los resultados de este capítulo, se puede asegurar que tampoco en el caso acotado del círculo, las estrategias tangenciales son las óptimas.

IV.15.2. *Biología.*

IV.15.2.1 *Estimaciones cuantitativas.*

i) *Potencia.* Para dar una idea aproximada del consumo de potencia de un nadador esférico moviéndose en un fluido acotado por un recipiente también esférico utilizando datos de un modelo bidimensional, se puede considerar el hecho de que a bajos números de Reynolds la proporción de la magnitud de las fuerzas de arrastre sobre una esfera y un cilindro circular es del orden de 10 [39].

Puesto que para ambos tipos de deformaciones el valor de la potencia de brazada \mathcal{E} (ec.3.7) como función de n está en el orden de 10^{-5} y prácticamente no cambia entre estaciones, en los cálculos siguientes se tomó $\mathcal{E} \approx 10^{-5}$ como un valor representativo para esta variable dentro de la célula. Además, con un valor para la energía libre estándar del ATP dentro de la célula de $\Delta G = 12 \text{ Kcal/mol}$, para una vesícula de radio $R = 1 \times 10^{-5} \text{ cm}$, deformación relativa $\epsilon = 1 \times 10^{-2}$ y frecuencia de oscilación de la onda de deformación $\nu = 500 \text{ seg}^{-1}$, (similar a las reportadas para motores moleculares *in vitro*) con $\mu = 1$ centipoises para el agua intracelular, mediante la fórmula:

$$[\text{ATP}] = (K/\Delta G)(\mathcal{E}/Y)^{1/2}$$

se obtiene la concentración molar de ATP necesaria para generar los datos de potencia aquí obtenidos para las distintas estrategias de natación. En la fórmula anterior K es el factor de conversión de ergs a calorías y Y es el volumen de la vesícula.

Para deformaciones tanto tangenciales como transversales se obtiene un rango en el orden de $[\text{ATP}] \approx 10^{-10} \text{ M}$. Estos resultados se pueden comparar con el valor de la concentración intracelular típica de ATP que es de 10^{-3} M , o con la concentración de saturación de ATP necesaria para que un motor molecular alcance su máxima velocidad *in vitro*, que es $[\text{ATP}] \approx 10^{-4} \text{ M}$ [9].

La potencia hidrodinámica es únicamente un componente de la disipación total de energía que un cuerpo deformable en natación tendría. Fuentes más relevantes de disipación de energía provendrían de las características de elasticidad de los materiales que de hecho se encontrasen involucrados en la deformación. En este sentido, la potencia hidrodinámica sería un piso mínimo de disipación de energía en un proceso de micronatación y, como se desprende de los datos anteriores, el compuesto de alta energía típico de la bioquímica celular, se encuentra en concentraciones más que suficientes para cubrir la demanda energética hidrodinámica del nadador, aun considerando el orden de magnitud que sería necesario añadir por tratarse de una estimación bidimensional, como se mencionó en el primer párrafo de esta sección.

Los datos obtenidos se pueden considerar como razonables, en el sentido de que se encuentran dentro de la escala energética de un ser vivo. Es común encontrar que, para llevarse a cabo, algunos procesos bioquímicos involucren concentraciones nano o pico molares de ATP. Además siendo en realidad que se trata de concentraciones bajas, dejan margen suficiente para poder incluir otras contribuciones de disipación de energía que, necesariamente, ocurrirían durante un proceso real de micronatación.

ii) *Amplitud de deformación.* Debido a que se conocen estimaciones experimentales razonablemente buenas *in vivo*, de la velocidad promedio de algunos organelos dentro de la célula, se puede utilizar la fórmula de la velocidad, dada por la ecuación (3.6), para dar un aproximado del valor de la amplitud de deformación absoluta, utilizando los datos de los coeficientes de curvatura. Dado que la forma circular se apega más a la de las vesículas de transportación, en lo que sigue se considera únicamente ese caso para el cálculo, utilizando un valor de $1 \mu\text{m/s}$ para la velocidad promedio.

De la ecuación (3.6) se tiene que la deformación absoluta d es:

$$d = \sqrt{\frac{|\bar{v}|}{\pi v |F(\bar{V}^h, \bar{W}^h)|}}$$

Utilizando un valor de $v = 500 \text{ s}^{-1}$ y realizando un promedio entre estaciones del promedio de la magnitud de los coeficientes de curvatura entre modos de oscilación, se obtiene que, para ambos tipos de deformaciones, $d \approx 4 \text{ nm}$.

Este número no se compara mal con los tamaños típicos de los biopolímeros de membrana, los cuales supuestamente podrían ser los agentes físicos mínimos encargados de las hipotéticas deformaciones. Por ejemplo, la longitud de equilibrio de bicapas lipídicas es del orden de 7 nm . Dado que las longitudes de enlace orgánicas son del orden de 0.1 nm se podrían tener alrededor de 40 de dichos enlaces en una distancia de la talla calculada para d . A temperatura ambiente, los fosfolípidos de las biomembranas adoptan constantemente configuraciones plegadas, llamadas "kinks", que usualmente involucran alrededor de 3 enlaces por cadena de hidrocarburo [71]. Algo similar ocurre también en los cambios conformacionales de las proteínas. En consecuencia se puede pensar que una deformación de 4 nm involucraría a lo más a pequeños grupos de biopolímeros.

De manera que se puede concluir que la amplitud calculada de las deformaciones propuestas, se encuentra dentro de la escala común de los cambios conformacionales de las biomoléculas.

Para completar la estimación de los parámetros de la onda de deformación, considérese un modo de $n = 20$, que se encuentra cercano al nivel máximo de eficiencia tanto para deformaciones transversales como para tangenciales, la longitud de onda λ de la deformación sería $\lambda = 2\pi R/n$ que para una vesícula con un radio típico de 100 nm tiene un valor de $\lambda \approx 30 \text{ nm}$ y una velocidad de onda $c = v\lambda$ de $c \approx 15 \mu\text{s}$.

IV.15.2.2 Características cualitativas.

i) *Direccionalidad.* Una característica importante del movimiento subcelular vectorial, que ha sido corroborada con estudios *in vivo*, es que los organelos membranosos se trasladan tanto en la dirección retrógrada como en la anterógrada a lo largo de las fibras del citoesqueleto. Debido a la antisimetría del tensor de curvatura \mathcal{F} , esta es una propiedad presente necesariamente en un cuerpo deformable que nada mediante ondas periódicas de baja amplitud, puesto que la dirección del movimiento puede invertirse simplemente intercambiando los modos básicos de oscilación sin que se afecte la magnitud del desplazamiento. Esta acción demandaría de la envoltura deformable del organelo, la capacidad suficiente como para generar tales modos de oscilación.

ii) *Estabilidad.* Es interesante notar como un pequeño cambio en el modo de oscilación alrededor del correspondiente a la máxima curvatura, que ocurre cuando se acoplan los modos consecutivos $m, n=m+1$ (figura IV.10), traería como consecuencia un gran cambio en las características del movimiento de traslación para este tipo de nadador, tanto en términos de rapidez como en dirección.

Supóngase que un nadador se traslada en un momento dado utilizando cierto modo de oscilación. *A priori*, basándose en los resultados anteriores, se puede pensar que se usaría, por ejemplo, un modo lo suficientemente alto como para garantizar una alta eficiencia y que nadar de esa manera sería un objetivo importante para el organismo, así que buscaría mantenerlo ante perturbaciones del medio intracelular.

Se puede postular entonces la existencia de un generador de ondas de la envoltura deformable de un organelo, que se comportara como un servo-mecanismo capaz de regresar a su funcionamiento normal después de sufrir alguna perturbación. Esas perturbaciones provocarían cambios transitorios en el modo original de oscilación de la membrana, que el servo-mecanismo trataría de corregir. Tanto en la fase de perturbación como en la de corrección, se manifestarían modos de oscilación distintos al óptimo, por ejemplo se podría pasar del $m, m+1$ a un $m, m+2$ en distintos momentos antes de volver al punto de estabilidad dinámica del mecanismo generador de ondas. Puesto que canónicamente sólo los modos consecutivos inducen desplazamientos distintos de cero, entonces el movimiento de traslación completo del nadador se vería como teniendo períodos relativamente largos de movimiento con alta velocidad y en la dirección correcta, acompañados por períodos de inmovilidad o aun por otros en donde el desplazamiento cambia de sentido.

Esta clase de movimiento "saltatorio" es una característica distintiva del transporte subcelular y ha sido observada en distintas situaciones experimentales, tanto *in vivo* como *in vitro* [70]. Entonces, los resultados de la sección anterior sugieren que la estabilidad comprometida de un generador de ondas determinista, posiblemente después de encarar fluctuaciones aleatorias del medio intracelular, puede explicar dicho tipo de movimiento.

iii) *Mecanismos biológicos.*

Fenómenos biológicos sostenidos por ondas periódicas auto-organizadas son comunes al nivel de componentes celulares, por ejemplo el batido ciliar, la propulsión flagelar y más generalmente los potenciales de acción de la membrana celular y mitocondrial. En el ámbito molecular, existen también numerosas sugerencias teóricas acerca de solitones biológicos. Es más difícil encontrar corroboraciones experimentales de este tipo de oscilaciones en otros organelos, tales como las vesículas de transportación, pero aun así se pueden sugerir algunas posibilidades teóricas razonablemente bien fundadas y que se exponen a continuación.

A priori se pueden concebir varios agentes biológicos que podrían constituir al mecanismo generador de ondas arriba supuesto, de acuerdo con el modelo de la envoltura explicado en la sección III.5.2.1. La propuesta sería que, una onda viajera de deformación auto-organizada se movería alrededor de la superficie de la vesícula partiendo de un foco primario, el cual sería el sitio en donde ocurre el "golpe" energético inicial necesario para poner en movimiento la ola de deformación y que a su vez marcaría la dirección del movimiento de natación.

En las cinco posibilidades expuestas enseguida, en general la envoltura deformable está constituida por agentes flexibles con un accionar periódico resultante en un patrón de flujo que impulsaría la traslación de un organelo intracelular.

a) *La membrana del organelo.* ¿Podría la propia membrana considerarse como la envoltura deformable de un organelo?. Esta es una posibilidad que no puede excluirse al nivel subcelular, al menos no por las mismas razones por las que se excluye en el ámbito de organismos unicelulares, en donde la deformación de la rígida membrana celular ciertamente que generaría enormes esfuerzos que convertirían al proceso de micronatación en algo energéticamente incosteable. Tan es así que los micro-organismos desarrollan estructuras flexibles, tales como cilios y flagelos, que les sirven para realizar los cambios de forma necesarios a un costo energético relativamente moderado.

Como lo sugieren los cálculos aproximados del tamaño de la deformación, esta podría no involucrar más que a unas pocas de las biomoléculas presentes en la membrana del organelo, ya sean estos los propios fosfolípidos o segmentos de glico-proteínas sumergidas en la matriz lipídica. El número de segmentos involucrados en cada región deformable (≈ 40), hace pensar que posiblemente este proceso de cambio de forma fuese energéticamente realizable. De hecho, a temperatura ambiente una proporción significativa de fosfolípidos en una bicapa lipídica se encuentra ya en conformaciones no lineales, o plegadas [71].

b) *Proteínas de membrana.* De los componentes de la membrana de los organelos otro probable ejecutor de semejantes deformaciones sería algún tipo de proteína de las que, estando ancladas en la bicapa lipídica, recubren al organelo. De hecho, existe una clase de proteínas, llamadas en general proteínas *G*, conocidas también como proteínas "switch" por su característica de cambiar entre dos conformaciones "on-off" al unirse con un compuesto de alta energía, el GTP [1]. Estas proteínas se encuentran en la membrana de las vesículas secretoras formando parte de un complejo proteínico más grande, conocido como COP y que actualmente se le reconoce un papel en la formación, por gemación, de la vesícula secretora en el Retículo Endoplásmico y en el Aparato de Golgi. También se cree que tienen algún papel dentro del modelo de transporte por vía del citoesqueleto.

La sugerencia aquí es que la cubierta proteínica actuaría como el medio que transporta, generándola mediante cambios conformacionales, a la onda viajera de deformación o solitón estructural. Esta idea tiene semejanza con el truco que emplean los microorganismos para solucionar el problema de los grandes esfuerzos a los que estaría sometida una membrana biológica a causa de las deformaciones natatorias, desplazando el ejecutor de dichas deformaciones a estructuras flexibles, tales como cilios o flagelos.

Aquí se estaría proponiendo entonces que la cubierta proteínica juega el papel, en la vesícula secretora o en otro organelo, de la capa de cilios en lo que posiblemente sería un ejemplo de cómo la vida aplica muchas veces el mismo esquema de solución en diferentes niveles de organización.

c) Coatómeros.

Otra manera de producir un patrón de flujo sin recurrir a las deformaciones de la membrana, sería la existencia de "hélices" localizadas alrededor de la vesícula. Estas ejecutarían los movimientos necesarios para batir el fluido alrededor de la vesícula de manera que se produjera un patrón de flujo determinado. Si se observan micrografías electrónicas de las vesículas secretoras (Fig.IV.17), se advierte la presencia de estructuras

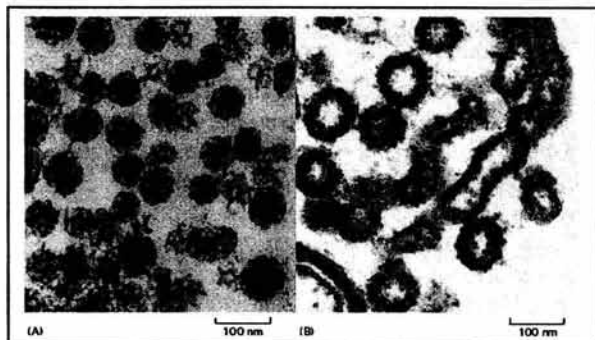


Figura IV.17. Vesículas secretoras recubiertas de clatrina a) y por coatómeros b). Se cree que estas últimas median el transporte de vesículas constitutivo y las segundas el selectivo en una célula.

redondeadas distribuidas a su alrededor en toda su superficie. Estas estructuras son ensamblajes de proteínas conocidos como coatómeros y de las cuales forman parte principal las COP mencionadas arriba. A primera vista, el número de coatómeros que se observa, considerando que se trata de cortes de vesículas, no parece poder ir mucho más allá de algunas centenas, pero claro que se requiere de un cálculo más preciso. Por ejemplo, si se pudiera conocer el tamaño aproximado de un coatómero sería posible estimar el número

de ellos sobre una superficie esférica y compararlo con los números de onda ya obtenidos. De acuerdo a los resultados de eficiencia en el caso tangencial, mientras más grande sea el número de onda mayor es la eficiencia del movimiento de traslación. Sin embargo, y haciendo la hipótesis de equivalencia entre modo de oscilación y número de agentes propulsores, si el organismo buscara optimizar también la cantidad de materia que utiliza, probablemente escogiese un número de complejos proteínicos en el orden de las decenas, en donde prácticamente se alcanza el nivel máximo de eficiencia. En el caso transversal, bastaría con 2 o 3 unidades de estos complejos y de hecho añadir más causaría una disminución de la eficiencia, pero en cambio le proporcionaría estabilidad ante la pérdida funcional de algún agente motor, puesto que con n grande la eficiencia ya no cambia mucho.

Es importante señalar, en apoyo de esta idea, que las vesículas de la ruta de secreción permanente (constitutiva) de una célula no se desprenden nunca de la cubierta de coatómeros en su viaje del aparato de Golgi a la membrana plasmática.

Sin embargo, la situación es más complicada. Las vesículas que pertenecen a la ruta de secreción estimulada, no están cubiertas de coatómeros sino por una rejilla de malla hexagonal formada básicamente por una proteína llamada clatrina (Fig. IV.17) en la que no se aprecian estructuras semejantes a los coatómeros, ni tampoco otros aditamentos que pudiera argumentarse están funcionando como estructuras propulsoras. Además, una vez que han sido formadas, las vesículas se desprenden de la cubierta de clatrina, al proseguir en su movimiento hacia la membrana.

Aún así, es interesante comentar que en la cianobacteria *Synechococcus*, conocida por su habilidad para moverse sin flagelos o cilios que la ayuden, se ha identificado también una estructura de apariencia muy geométrica, encerrando a su membrana exterior a modo de rejilla de malla romboidal. Asociadas a la rejilla se observan unas espículas, que se propone podrían estar batiendo el medio acuoso y producir así movimiento [62]. ¿ Se encontrará algo semejante a estas espículas en el caso de la membrana de los organelos ?.

d) Mecanismos de transporte de membrana.

La acción coordinada de algún tipo de canal iónico o bomba de transportación de la membrana del organelo, podría ser suficiente para generar el movimiento del fluido necesario para producir un movimiento de traslación de la partícula subcelular.

La presencia de canales iónicos y bombas en la membrana de los organelos está bien probada, ya sea que se trate de mitocondrias o vesículas de transporte y es sabido que, no importando su especificidad, siempre movilizan agua al estar operando.

Sería interesante tener alguna estimación de la cantidad de fluido que se moviliza en cada ciclo de operación de alguno de estos tipos de mecanismos de transporte transmembranal, para compararlo con la magnitud del flujo que un campo de velocidades del fluido produce en las cercanías de la membrana. Una comparación así ayudaría a probar la posibilidad mínima de este tipo de mecanismo como agente de traslación intracelular.

e) Motores moleculares.

Dos de las muchas preguntas que no sean contestado hasta el momento en relación con la actuación de los motores moleculares durante el transporte subcelular *in vivo* son: cuántos motores moleculares lleva unidos a su membrana un organelo que está siendo transportado y si el o los motores moleculares que de hecho estén realizando el trabajo de traslación, interactúan siempre lo suficientemente fuerte con la fibra del citoesqueleto como para que pudiera pensarse que se están apoyando en ella. Si la interacción es lo bastante débil como para considerar que el organelo transportado está en flotación libre, entonces el esquema teórico de la micronatación puede aplicarse también en la hipótesis del citoesqueleto.

De esta manera, se puede hacer la sugerencia de que los cambios conformacionales que realizan las proteínas motoras servirían para agitar el fluido y así proporcionar el impulso necesario para la transportación de su carga.

En los resultados de eficiencia para ambos tipos de deformaciones, se ve que los modos de oscilación relativamente bajos de aproximadamente $10 < m < 20$, prácticamente alcanzan el nivel máximo estable de eficiencia. Entonces, se puede sugerir que quizás el número de motores moleculares unidos a un organelo y que se encuentran activos durante

su traslado, se encuentre en el orden de unas pocas decenas a lo más. Inclusive algunos de estos motores moleculares podrían estar realizando acciones distintas al mismo tiempo. Por ejemplo, algunos estarían arrastrando al organelo de la manera sugerida en la hipótesis del citoesqueleto mientras otros remarían agitando el fluido en fase con el movimiento oscilatorio de los primeros.

iv) Estrategia hipotética.

Sería deseable llegar a proponer al menos el tipo de deformaciones que, bajo algún criterio válido, serían de esperarse como las más probables de aparecer en un determinado organelo en el medio intracelular.

De acuerdo con los resultados del capítulo IV.14.1, la estrategia tangencial no puede ser la más eficiente en el caso del nadador circular en un fluido acotado y esto quizás sería así, independientemente del concepto de eficiencia que se maneje. Además, tampoco es la más eficiente en el caso de un nadador esférico ni circular en medios no acotados. De modo que, si el concepto de eficiencia de movimiento en general, cualquiera que este fuese, tuviese algún significado relevante en Biología Celular, sería razonable esperar la preponderancia de determinado tipo de deformaciones transversales en el medio subcelular, al menos para el caso de organelos de forma aproximadamente esférica.

Hasta la fecha los únicos cambios de forma que se han observado en los organelos membranosos intracelulares han sido grandes y conspicuas deformaciones. No se sabe aun si estas deformaciones juegan un papel significativo en el movimiento de las partículas subcelulares, pero el hecho apunta en la dirección señalada previamente de la hipotética preponderancia general de las deformaciones transversales. Por supuesto que para descartar finalmente a las deformaciones tangenciales no se puede recurrir a la observación de cambios de forma sino, por ejemplo, a la caracterización del patrón de flujo.

IV.16. Conclusión.

En este capítulo se presenta por primera vez la solución a un problema de Micronatación acotado.

La Física del nadador circular auto-propulsado por ondas periódicas de deformación de baja amplitud, que se traslada a través de un fluido contenido en un medio finito, es consistente con lo que se esperaría a partir de consideraciones generales y resultados previamente reportados.

Cuando se aplica a la Biología en problemas de movimiento subcelular, el modelo puede interpretar adecuadamente algunas de las más importantes características *in vivo* de la traslación de organelos y también proporciona estimaciones cuantitativas, bajo supuestos razonables, que no entran en conflicto con datos conocidos y que incluso se ubican dentro de lo que sería de esperarse en la escala biológica.

Esto demuestra que la posibilidad de que la traslación de organelos se lleve a cabo por la acción de una envoltura deformable permanece viable, al menos en términos del terreno teórico explorado, tanto físico como biológico.

IV. 17. PERSPECTIVAS.

a) *Experimentales.* Como se menciona en la hipótesis general de esta tesis, un punto central que distingue a la micronatación de otros mecanismos de movimiento subcelular es la existencia de un campo de velocidades propulsor, de ciertas características, en el fluido que rodea al organelo. Idealmente se quisiera observar dicho patrón de movimiento en la vecindad de la partícula subcelular. Si el patrón corresponde en todas sus características con uno típico del simple arrastre de un cuerpo sólido a través del fluido, la idea completa de la micronatación estaría en duda. Por el contrario, si el flujo es más complicado o se conforma con alguno de los calculados por la teoría, se estaría apoyando dicha idea.

La escala micro o nanométrica a la que ocurre el movimiento subcelular más la necesidad de tener datos *in vivo*, hacen sospechar que experimentos de este tipo no serían muy sencillos de realizar.

Otra manera de proceder sería tratar de probar experimentalmente las hipótesis que se dan en el apartado IV.12.2 acerca de la posible composición de la envoltura deformable. Por ejemplo, en el caso de la hipótesis de los cambios conformacionales de proteínas de membrana, se podría intentar bloquear de manera específica la unión entre la proteína y el compuesto de alta energía (GTP o ATP), de manera que se impidieran los cambios conformacionales y determinar si existen variaciones en las características del movimiento del organelo. O quizás también podría intentarse trabajar con mutantes que presentarían defectos estructurales en dichas proteínas los cuales les impedirían realizar la unión con el compuesto de alta energía.

De manera análoga, el bloqueo específico de los distintos tipos de canales iónicos de la membrana del organelo, mediante agentes químicos adecuados o técnicas genéticas, ayudaría a discernir si la actividad metabólica de dichos canales juega o no un papel en el movimiento del organelo.

En relación con la hipótesis de la membrana deformable, debido a que se espera que las deformaciones ocurran en una escala nanométrica, sería razonable proponer un estudio experimental basado en técnicas que revelen el microambiente de las moléculas, quizás algo como la resonancia magnética. En un estudio así se estarían buscando alteraciones cíclicas de la señal de resonancia, las cuales deberían de tener una duración y magnitud tales que, permitieran inferir la presencia de una onda de deformación con características similares a las propuestas por la teoría.

b) *Teóricas.* Queda mucho por hacer en cuanto a dar interpretaciones físicas, fundamentadas en la mecánica de fluidos, de algunos de los resultados obtenidos, en especial el del aumento del desplazamiento del nadador en posiciones excéntricas dentro de la célula.

El estudio de la parte rotacional de las estrategias de natación aquí consideradas, completaría el cuadro físico del fenómeno de desplazamiento subcelular. En el caso acotado, en primera instancia esto representa un reto de cierta dificultad debido a que, como ocurrió en la parte traslacional aquí analizada, no se esperan fórmulas asintóticas que permitan una evaluación directa del término de rotación.

Un segundo punto de interés sería el estudio de la cinemática y energética de las estrategias mixtas de natación, es decir de aquellas que se expresan como una combinación lineal de estrategias básicas, como por ejemplo tangenciales y transversales. ¿Serán estas estrategias más eficientes y rápidas que las básicas y por lo tanto, mejores candidatos que

estas últimas para ser propuestas como los candidatos teóricos de la micronatación subcelular ?. Este punto ha sido trabajado en [52] para el caso de bases finitas de deformación expresadas en polinomios de Legendre sobre la esfera y el círculo, nadando ambos en un fluido infinito. El resultado es que, efectivamente cierto tipo de estrategia combinada es la más eficiente, bajo un criterio de eficiencia un tanto más restringido que el "naive".

Como se menciona en el capítulo introductorio, experimentalmente se han observado deformaciones muy conspicuas durante la traslación de algunos organelos. Esto sugiere la importancia de estudiar teóricamente también la micronatación de grandes deformaciones, aunque en ese caso prácticamente se debe abandonar la esperanza de encontrar soluciones en forma analítica [36].

También en la introducción de esta tesis se cita que al menos existe un organelo cuyo movimiento ciertamente no ocurre a través del citoesqueleto, el ribosoma citoplásmico durante la síntesis de proteínas. Para la teoría este caso representa retos considerables además de que, en mi opinión, se trata de una de las mejores posibilidades que tiene la micronatación de ser un considerado como un mecanismo real de movimiento subcelular. La forma peculiar del objeto (básicamente dos subunidades semiesféricas unidas por una especie de resorte proteínico) y la necesidad de no solamente determinar el componente de traslación del movimiento, sino también el de rotación – porque sólo de esa manera sería posible proponer una explicación razonable a las típicas figuras helicoidales que deja el RNAm al ser leído por los ribosomas– representan dos de las circunstancias que hacen especial el tratamiento teórico de este caso.

Otra buena posibilidad de la micronatación se da en el caso de la teoría simbiótica del origen de la mitocondria, en donde se supone que una bacteria fagocitada por una célula primitiva pudo entrar en una relación cooperativa con esta hasta convertirse morfológica y funcionalmente en una mitocondria. Parece claro que en un principio la célula primitiva no tenía a disposición el sofisticado sistema de transportación vía citoesqueleto, por lo que la bacteria debió de estar trasladando por sí misma, en un proceso de locomoción que muy bien pudo haberse llevado a cabo mediante deformaciones cíclicas de alguna envoltura, a la manera de algunas de las bacterias actuales.

En relación con lo anterior, debido a que, al menos para el caso del círculo, la eficiencia de natación en el medio acotado es en general más alta que en el no acotado, se puede asumir que el encierro de la mitocondria en la célula huésped le significó una ventaja adaptativa más, aunada a otras como resguardo, nutrientes, etc.

APENDICES

APENDICE III.1
PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE CURVATURA Y POTENCIA

El producto escalar

Coefficientes.

```

α[n_, 0] := - (2 ^ (n - 1) Factorial[n] / Factorial2[2 n - 1]) / n
α[n_, k_] := (2 n - 4 k + 1) 2 ^ (n - 2 k - 1) Factorial[n - k - 1]
    Factorial2[2 k - 3] / (Factorial2[2 n - 2 k + 1] Factorial[k])
ind[n_] := If[EvenQ[n], 1, 0];
β[n_, -1] := (Pi / 4) (Factorial2[2 n - 1] / (2 ^ (n - 1) Factorial[n]))
β[n_, k_] :=
- (Factorial2[2 n + 2 k - 1] Factorial2[2 k - 1]
    (2 n + 4 k + 3) / (2 ^ (2 k) Factorial[n + k + 1] Factorial[k + 1]))
    ((Pi / 4) / 2 ^ (n + 1))

```

Expansiones.

```

S[n_] := Sum[α[n, k] P[n - 2 k], {k, 0, Floor[n / 2]}] -
    ind[n] α[n, Floor[n / 2]] P[0]
Co[n_] := Sum[β[n, k] P[n + 2 k + 1], {k, -1, 20}]

```

Propiedades de Operador de Potencia.

```

En[a_ + b_, c_] := En[a, c] + En[b, c];
En[a_, b_ + c_] := En[a, b] + En[a, c];
En[k_ P[n_], c_] := k En[P[n], c] /; FreeQ[k, P]
En[a_, k_ P[n_]] := k En[a, P[n]] /; FreeQ[k, P]
En[k_ v[n_, r_], c_] := k En[v[n, r], c] /; FreeQ[k, v]
En[a_, k_ v[n_, r_]] := k En[a, v[n, r]] /; FreeQ[k, v]
λ1[n_] := 2 (n + 2)
λ3[n_] := (2 n ^ 2 + 1) / (n + 1)
En[v[n_, i_], v[m_, j_]] := If[i != j, 0,
    If[m != n, 0,
        If[i == 1, λ1[n],
            If[i == 3, λ3[n]]]]]

```

sust =

```

{P[n_] -> ((Sqrt[2] / Sqrt[n + 1]) n v[n, 1] + Sqrt[2 n] v[n, 3])
    ((n + 1) / (2 n + 1))}

```

Energía usando los modos S[n] y Co[n]

```

ESC[n_] :=
(R^2 e^2 2 Pi ^ 2 v)
( En[Expand[S[n] /. sust], Expand[S[n] /. sust]] +
    En[Expand[Co[n] /. sust], Expand[Co[n] /. sust]]);
energias = Table[N[ESC[n]], {n, 1, 500}]

```

APENDICE IV.1

DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES EN LA CONDICIÓN DE DIRICHLET:

De acuerdo con (4.12) la condición de Dirichlet para $h\psi$ es:

$$\begin{aligned} h(\alpha_1, \beta) \Psi(\alpha_1, \beta) &= \left(\frac{\text{Cosh}(\alpha_1) - \text{Cos}(\beta)}{a} \right) \left(\frac{a_0^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta] \right) \\ &= \left(\frac{\text{Cosh}(\alpha_1) - \text{Cos}(\beta)}{a} \right) \frac{a_0^0}{2} + \left(\frac{\text{Cosh}(\alpha_1) - \text{Cos}(\beta)}{a} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta] \right) \end{aligned}$$

El término:

$$\left(\frac{\text{Cosh}(\alpha_1) - \text{Cos}(\beta)}{a} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta] \right)$$

es:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a} \left[\text{Cosh}(\alpha_1) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta] \right) - \text{Cos}(\beta) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta] \right) \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cosh}(\alpha_1) \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Cosh}(\alpha_1) \text{Sen}[n\beta] - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}(\beta) \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Cos}(\beta) \text{Sen}[n\beta] \right] \end{aligned}$$

Dado que:

$$\text{Cos}(\beta) \text{Cos}(n\beta) = \frac{1}{2} \left[\text{Cos}((n-1)\beta) + \text{Cos}((n+1)\beta) \right]$$

$$\text{Cos}(\beta) \text{Sen}(n\beta) = \frac{1}{2} \left[\text{Sen}((n-1)\beta) + \text{Sen}((n+1)\beta) \right]$$

entonces:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}(\beta) \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Cos}(\beta) \text{Sen}[n\beta] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^0}{2} \left(\text{Cos}[(n-1)\beta] + \text{Cos}[(n+1)\beta] \right) + \frac{b_n^0}{2} \left(\text{Sen}[(n-1)\beta] + \text{Sen}[(n+1)\beta] \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} h\Psi|_{\alpha_1} &= \frac{\text{Cosh}(\alpha_1) - \text{Cos}(\beta)}{a} \frac{a_0^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) \text{Cos}[n\beta] + \frac{b_n^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) \text{Sen}[n\beta] - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^0}{2a} \left(\text{Cos}[(n-1)\beta] + \text{Cos}[(n+1)\beta] \right) + \frac{b_n^0}{2a} \left(\text{Sen}[(n-1)\beta] + \text{Sen}[(n+1)\beta] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{Cosh}(\alpha_1) a_0^0}{2a} - \frac{\text{Cos}(\beta) a_0^0}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) \text{Cos}[n\beta] + \frac{b_n^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) \text{Sen}[n\beta] \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}^0}{2a} \text{Cos}(n\beta) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1}^0}{2a} \text{Cos}(n\beta) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}^0}{2a} \text{Sen}(n\beta) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_{n-1}^0}{2a} \text{Sen}(n\beta)
\end{aligned}$$

Rearreglando:

$$\begin{aligned}
h\Psi|_{a1} &= \left(\frac{\text{Cosh}(\alpha_1) a_0^0}{2a} - \frac{a_1^0}{2a} \right) + \left(\frac{a_1^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) - \frac{a_0^0}{2a} - \frac{a_2^0}{2a} \right) \text{Cos}(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_n^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) - \frac{a_{n+1}^0}{2a} - \frac{a_{n-1}^0}{2a} \right) \text{Cos}(n\beta) \\
&+ \left(\frac{b_1^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) - \frac{b_2^0}{2a} \right) \text{Sen}(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{b_n^0}{a} \text{Cosh}(\alpha_1) - \frac{b_{n+1}^0}{2a} - \frac{b_{n-1}^0}{2a} \right) \text{Sen}(n\beta) \\
&\equiv \frac{a_0^0}{2} + a_1^0 \text{Cos}(\beta) + b_1^0 \text{Sen}(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta]
\end{aligned}$$

APENDICE IV.2

DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES DE Ψ .

Se tiene que:

$$\psi[\alpha_1, \beta] = \int_{\frac{v_1}{h} |_{\alpha_1}} d\beta = \frac{a_0^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \text{Cos}[n\beta] + b_n^0 \text{Sen}[n\beta]$$

con:

$$\frac{v_1}{h} |_{\alpha_1} = \frac{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] + b_n \text{Sen}[n\beta]}{h} = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \text{Cos}[n\beta] + b_n^* \text{Sen}[n\beta]$$

Puesto que:

$$y(\alpha, \beta) = \frac{\text{Sinh}(\alpha)}{h(\alpha, \beta)}$$

y:

$$\frac{y(\alpha_1, \beta)}{a} = \frac{\text{Sinh}(\alpha_1)}{\text{Cosh}(\alpha_1) - \text{Cos}(\beta)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta)$$

entonces:

$$\frac{\text{Sinh}(\alpha_1)}{ah(\alpha_1, \beta)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta)$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(\alpha_1, \beta)} &= \frac{a}{\text{Senh}(\alpha_1)} + \frac{2a}{\text{Senh}(\alpha_1)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta) = \\ &= a\text{Csch}(\alpha_1) + 2a\text{Csch}(\alpha_1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta) \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{h} |_{\alpha_1} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] + b_n \text{Sen}[n\beta] \left(a\text{Csch}(\alpha_1) + 2a\text{Csch}(\alpha_1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} a\text{Csch}(\alpha_1) + \frac{a_0}{2} 2a\text{Csch}(\alpha_1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta) + a\text{Csch}(\alpha_1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] + b_n \text{Sen}[n\beta] \\ &\quad + 2a\text{Csch}(\alpha_1) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] + b_n \text{Sen}[n\beta] \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta) \right) \end{aligned}$$

El término:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] + b_n \text{Sen}[n\beta] \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Sen}[n\beta] \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_1} \text{Cos}(n\beta) \end{aligned}$$

i) El primer producto es:

$$\begin{aligned}
 \sum_1^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] \sum_1^{\infty} e^{-n\alpha} \text{Cos}(n\beta) &= (a_1 \text{Cos}[\beta] + a_2 \text{Cos}[2\beta] + \dots)(e^{-\alpha} \text{Cos}(\beta) + e^{-2\alpha} \text{Cos}(2\beta) + \dots) \\
 &= a_1 \text{Cos}[\beta] e^{-\alpha} \text{Cos}(\beta) + a_1 \text{Cos}[\beta] e^{-2\alpha} \text{Cos}(2\beta) + \dots = \sum_1^{\infty} a_1 e^{-n\alpha} \text{Cos}[\beta] \text{Cos}(n\beta) \\
 &+ a_2 \text{Cos}[2\beta] e^{-\alpha} \text{Cos}(\beta) + a_2 \text{Cos}[2\beta] e^{-2\alpha} \text{Cos}(2\beta) + \dots = \sum_1^{\infty} a_2 e^{-n\alpha} \text{Cos}[2\beta] \text{Cos}(n\beta) \\
 &+ \dots + a_k \text{Cos}[k\beta] e^{-\alpha} \text{Cos}(\beta) + a_k \text{Cos}[k\beta] e^{-2\alpha} \text{Cos}(2\beta) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_k e^{-n\alpha} \text{Cos}[k\beta] \text{Cos}(n\beta) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_k e^{-n\alpha} \text{Cos}[k\beta] \text{Cos}(n\beta) \quad \dots \text{ (A.1)}
 \end{aligned}$$

Puesto que:

$$\begin{aligned}
 &\text{TrigReduce}[\text{Cos}[k\beta] \text{Cos}[n\beta]] \\
 &\frac{1}{2} (\text{Cos}[k\beta - n\beta] + \text{Cos}[k\beta + n\beta]) \\
 &\text{Map}[\text{Factor}, \%, 10] \\
 &\frac{1}{2} (\text{Cos}[(k-n)\beta] + \text{Cos}[(k+n)\beta])
 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_k e^{-n\alpha} \text{Cos}[k\beta] \text{Cos}(n\beta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_k e^{-n\alpha} \left(\frac{1}{2} \text{Cos}[(k-n)\beta] + \frac{1}{2} \text{Cos}[(k+n)\beta] \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_k e^{-n\alpha} \text{Cos}[(k-n)\beta] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_k e^{-n\alpha} \text{Cos}[(k+n)\beta] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_k e^{-n\alpha} \text{Cos}[(k-n)\beta] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_k e^{-n\alpha} \text{Cos}[(k+n)\beta] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n e^{-k\alpha} \text{Cos}[(n-k)\beta] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n e^{-k\alpha} \text{Cos}[(n+k)\beta]
 \end{aligned}$$

Desarrollando el primer término:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n e^{-k\alpha} \text{Cos}[(n-k)\beta] \\
 &= a_1 e^{-\alpha} \text{Cos}[0\beta] + a_1 e^{-2\alpha} \text{Cos}[-\beta] + a_1 e^{-3\alpha} \text{Cos}[-2\beta] + \dots + a_1 e^{-k\alpha} \text{Cos}[(1-k)\beta] + \\
 &+ a_2 e^{-\alpha} \text{Cos}[\beta] + a_2 e^{-2\alpha} \text{Cos}[0\beta] + a_2 e^{-3\alpha} \text{Cos}[-\beta] + \dots + a_2 e^{-k\alpha} \text{Cos}[(2-k)\beta] + \\
 &\dots \\
 &+ a_j e^{-\alpha} \text{Cos}[(j-1)\beta] + a_j e^{-2\alpha} \text{Cos}[(j-2)\beta] + \dots + a_j e^{-j\alpha} \text{Cos}[0\beta] + \dots + a_j e^{-k\alpha} \text{Cos}[(j-k)\beta] \dots
 \end{aligned}$$

Agrupando los términos para cada n de $\text{Cos}(n\beta)$ y utilizando la paridad de la función coseno, resulta que lo anterior puede escribirse como:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n a_j e^{-(n+j)\alpha 1} + 2\text{Cosh}(n\alpha 1) \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} \right) \text{Cos}[n\beta]$$

Desarrollando el segundo término:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n e^{-k\alpha 1} \text{Cos}[(n+k)\beta] &= a_1 e^{-\alpha 1} \text{Cos}[2\beta] + a_1 e^{-2\alpha 1} \text{Cos}[3\beta] + \dots + a_1 e^{-k\alpha 1} \text{Cos}[(1+k)\beta] + \\ &+ a_2 e^{-\alpha 1} \text{Cos}[3\beta] + a_2 e^{-2\alpha 1} \text{Cos}[4\beta] + a_2 e^{-3\alpha 1} \text{Cos}[5\beta] + \dots + a_2 e^{-k\alpha 1} \text{Cos}[(2+k)\beta] + \\ &\dots \\ &+ a_j e^{-\alpha 1} \text{Cos}[(j+1)\beta] + a_j e^{-2\alpha 1} \text{Cos}[(j+2)\beta] + \dots + a_j e^{-k\alpha 1} \text{Cos}[(j+k)\beta] + \dots \end{aligned}$$

Agrupando los términos para cada n de $\text{Cos}(n\beta)$ resulta que lo anterior puede escribirse como:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j e^{-(n-j)\alpha 1} \right) \text{Cos}[n\beta]$$

Sumando estos dos términos se llega a que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha 1} \text{Cos}(n\beta) &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n a_j e^{-(n+j)\alpha 1} + 2\text{Cosh}(n\alpha 1) \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} \right) \text{Cos}[n\beta] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j e^{-(n-j)\alpha 1} \right) \text{Cos}[n\beta] \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} + \left[a_1 e^{-2\alpha 1} + 2\text{Cosh}(\alpha 1) \sum_{j=2}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} \right] \text{Cos}[\beta] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^n a_j e^{-(n+j)\alpha 1} + 2\text{Cosh}(n\alpha 1) \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j e^{-(n-j)\alpha 1} \right] \text{Cos}[n\beta] \right\} \end{aligned}$$

ii) Por otro lado, en analogía con (A.1) se tiene que:

$$\sum_1^{\infty} b_n \text{Sen}[n\beta] \sum_1^{\infty} e^{-n\alpha 1} \text{Cos}(n\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_k e^{-n\alpha 1} \text{Sen}[k\beta] \text{Cos}(n\beta)$$

Puesto que:

$$\begin{aligned} &\text{TrigReduce}[\text{Sin}[k\beta] \text{Cos}[n\beta]] \\ &\frac{1}{2} (\text{Sin}[k\beta - n\beta] + \text{Sin}[k\beta + n\beta]) \\ &\text{Map}[\text{Factor}, \%, 10] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} (\text{Sin}[(k-n)\beta] + \text{Sin}[(k+n)\beta])$$

entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_k e^{-n\alpha} \text{Sen}[k\beta] \text{Cos}(n\beta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_k e^{-n\alpha} \left(\frac{1}{2} \text{Sen}[(k-n)\beta] + \frac{1}{2} \text{Sen}[(k+n)\beta] \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_k e^{-n\alpha} \text{Sen}[(k-n)\beta] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_k e^{-n\alpha} \text{Sen}[(k+n)\beta] \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_k e^{-n\alpha} \text{Sen}[(k-n)\beta] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_k e^{-n\alpha} \text{Sen}[(k+n)\beta] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_n e^{-k\alpha} \text{Sen}[(n-k)\beta] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_n e^{-k\alpha} \text{Sen}[(n+k)\beta] \end{aligned}$$

Desarrollando el primer término:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_n e^{-k\alpha} \text{Sen}[(n-k)\beta] \\ &= b_1 e^{-\alpha} \text{Sen}[0\beta] + b_1 e^{-2\alpha} \text{Sen}[-\beta] + b_1 e^{-3\alpha} \text{Sen}[-2\beta] + \dots + b_1 e^{-k\alpha} \text{Sen}[(1-k)\beta] + \dots \\ &+ b_2 e^{-\alpha} \text{Sen}[\beta] + b_2 e^{-2\alpha} \text{Sen}[0\beta] + b_2 e^{-3\alpha} \text{Sen}[-\beta] + \dots + b_2 e^{-k\alpha} \text{Sen}[(2-k)\beta] + \dots \\ &\dots \\ &+ b_j e^{-\alpha} \text{Sen}[(j-1)\beta] + b_j e^{-2\alpha} \text{Sen}[(j-2)\beta] + \dots + b_j e^{-j\alpha} \text{Sen}[0\beta] + \dots + b_j e^{-k\alpha} \text{Sen}[(j-k)\beta] + \dots \end{aligned}$$

Agrupando los términos para cada n de $\text{Sen}(n\beta)$ y utilizando la antisimetría de la función seno, resulta que lo anterior puede escribirse como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\sum_{j=1}^n b_j e^{-(n-j)\alpha} + 2 \text{Senh}(n\alpha) \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e^{-j\alpha} \right) \text{Sen}[n\beta]$$

Desarrollando el segundo término:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_n e^{-k\alpha} \text{Sen}[(n+k)\beta] &= b_1 e^{-\alpha} \text{Sen}[2\beta] + b_1 e^{-2\alpha} \text{Sen}[3\beta] + \dots + b_1 e^{-k\alpha} \text{Sen}[(1+k)\beta] + \dots \\ &+ b_2 e^{-\alpha} \text{Sen}[3\beta] + b_2 e^{-2\alpha} \text{Sen}[4\beta] + b_2 e^{-3\alpha} \text{Sen}[5\beta] + \dots + b_2 e^{-k\alpha} \text{Sen}[(2+k)\beta] + \dots \\ &\dots \\ &+ b_j e^{-\alpha} \text{Sen}[(j+1)\beta] + b_j e^{-2\alpha} \text{Sen}[(j+2)\beta] + \dots + b_j e^{-k\alpha} \text{Sen}[(j+k)\beta] + \dots \end{aligned}$$

Agrupando los términos para cada n de $\text{Sen}(n\beta)$ resulta que lo anterior puede escribirse como:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j e^{-(n-j)\alpha} \right) \text{Sen}[n\beta]$$

Sumando estos dos términos se llega a que:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Sen}[n\beta] \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha 1} \text{Cos}(n\beta) = \\
 & = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\sum_{j=1}^n b_j e^{-(n+j)\alpha 1} + 2\text{Senh}(n\alpha 1) \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e^{-j\alpha 1} \right) \text{Sen}[n\beta] + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j e^{-(n-j)\alpha 1} \right) \text{Sen}[n\beta] \right] \\
 & = \frac{1}{2} \left\{ \left[-b_1 e^{-2\alpha 1} + 2\text{Senh}(\alpha 1) \sum_{j=2}^{\infty} b_j e^{-j\alpha 1} \right] \text{Sen}[\beta] \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-\sum_{j=1}^n b_j e^{-(n+j)\alpha 1} + 2\text{Senh}(n\alpha 1) \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e^{-j\alpha 1} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j e^{-(n-j)\alpha 1} \right] \text{Sen}[n\beta] \right\}
 \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] + b_n \text{Sen}[n\beta] \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha 1} \text{Cos}(n\beta) \right) = \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} + \frac{1}{2} \left[a_1 e^{-2\alpha 1} + 2\text{Cosh}(\alpha) \sum_{j=2}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} \right] \text{Cos}[\beta] + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^n a_j e^{-(n+j)\alpha 1} + 2\text{Cosh}(n\alpha) \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j e^{-(n-j)\alpha 1} \right] \text{Cos}[n\beta] \\
 & + \frac{1}{2} \left[-b_1 e^{-2\alpha 1} + 2\text{Senh}(\alpha) \sum_{j=2}^{\infty} b_j e^{-j\alpha 1} \right] \text{Sen}[\beta] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left[-\sum_{j=1}^n b_j e^{-(n+j)\alpha 1} + 2\text{Senh}(n\alpha) \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e^{-j\alpha 1} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j e^{-(n-j)\alpha 1} \right] \text{Sen}[n\beta]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \frac{y_1}{h_{\alpha 1}} & = \frac{a_0}{2} a \text{Csch}(\alpha 1) + \frac{a_0}{2} 2a \text{Csch}(\alpha 1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha 1} \text{Cos}(n\beta) + a \text{Csch}(\alpha 1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] + b_n \text{Sen}[n\beta] + \\
 & + 2a \text{Csch}(\alpha 1) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}[n\beta] + b_n \text{Sen}[n\beta] \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha 1} \text{Cos}(n\beta) \right) \\
 & = \frac{a_0}{2} a \text{Csch}(\alpha 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0}{2} 2a \text{Csch}(\alpha 1) e^{-n\alpha 1} \text{Cos}(n\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} a \text{Csch}(\alpha 1) a_n \text{Cos}[n\beta] + a \text{Csch}(\alpha 1) b_n \text{Sen}[n\beta] + \\
 & + 2a \text{Csch}(\alpha 1) \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} + \frac{1}{2} \left[a_1 e^{-2\alpha 1} + 2\text{Cosh}(\alpha) \sum_{j=2}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} \right] \text{Cos}[\beta] \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n a_j e^{-(n+j)\alpha 1} + 2\text{Cosh}(n\alpha) \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha 1} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j e^{-(n-j)\alpha 1} \right] \text{Cos}[n\beta] \right) \\
 & + 2a \text{Csch}(\alpha 1) \left(\frac{1}{2} \left[-b_1 e^{-2\alpha 1} + 2\text{Senh}(\alpha) \sum_{j=2}^{\infty} b_j e^{-j\alpha 1} \right] \text{Sen}[\beta] \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left[-\sum_{j=1}^n b_j e^{-(n+j)\alpha 1} + 2\text{Senh}(n\alpha) \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e^{-j\alpha 1} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j e^{-(n-j)\alpha 1} \right] \text{Sen}[n\beta] \right)
 \end{aligned}$$

Los términos correspondientes a la serie del $\text{Cos}(n\beta)$ entonces son:

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_0}{2} aCsch(\alpha) + aCsch(\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha} \\
&+ \left[a_0 aCsch(\alpha) e^{-\alpha} + aCsch(\alpha) a_1 + aCsch(\alpha) \left(a_1 e^{-2\alpha} + 2Cosh(\alpha) \sum_{j=2}^{\infty} a_j e^{-j\alpha} \right) \right] Cos(\beta) \\
&+ \\
&+ \left[a_0 aCsch(\alpha) e^{-n\alpha} + aCsch(\alpha) a_n + aCsch(\alpha) \left(\sum_{j=1}^n a_j e^{-(n+j)\alpha} + 2Cosh(n\alpha) \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j e^{-(n-j)\alpha} \right) \right] Cos(n\beta)
\end{aligned}$$

y los correspondientes a $Sen(n\beta)$ son:

$$\begin{aligned}
&= \left[aCsch(\alpha) b_1 + aCsch(\alpha) \left(-b_1 e^{-2\alpha} + 2Senh(\alpha) \sum_{j=2}^{\infty} b_j e^{-j\alpha} \right) \right] Sen(\beta) \\
&+ \dots + \left[aCsch(\alpha) b_n + aCsch(\alpha) \left(-\sum_{j=1}^n b_j e^{-(n+j)\alpha} + 2Senh(n\alpha) \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e^{-j\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j e^{-(n-j)\alpha} \right) \right] Sen(n\beta)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{V_1}{h_{\alpha 1}} = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* Cos[n\beta] + b_n^* Sen[n\beta]$$

$$a_0^* = a_0 aCsch(\alpha) + 2aCsch(\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha}$$

$$a_1^* = a_0 aCsch(\alpha) e^{-\alpha} + aCsch(\alpha) a_1 + aCsch(\alpha) \left(a_1 e^{-2\alpha} + 2Cosh(\alpha) \sum_{j=2}^{\infty} a_j e^{-j\alpha} \right)$$

$$a_n^* = a_0 aCsch(\alpha) e^{-n\alpha} + aCsch(\alpha) a_n + aCsch(\alpha) \left(\sum_{j=1}^n a_j e^{-(n+j)\alpha} + 2Cosh(n\alpha) \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j e^{-j\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j e^{-(n-j)\alpha} \right) \quad n > 1$$

$$b_1^* = aCsch(\alpha) b_1 + aCsch(\alpha) \left(-b_1 e^{-2\alpha} + 2Senh(\alpha) \sum_{j=2}^{\infty} b_j e^{-j\alpha} \right)$$

$$b_n^* = aCsch(\alpha) b_n + aCsch(\alpha) \left(-\sum_{j=1}^n b_j e^{-(n+j)\alpha} + 2Senh(n\alpha) \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e^{-j\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j e^{-(n-j)\alpha} \right) \quad n > 1$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
\psi[\alpha 1, \beta] &= \int \frac{V_1}{h_{\alpha 1}} d\beta = \int \left(\frac{a_0^*}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* Cos[n\beta] + b_n^* Sen[n\beta] \right) d\beta = \\
&= \int \frac{a_0^*}{2} d\beta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \int Cos[n\beta] d\beta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \int Sen[n\beta] d\beta \\
&= \frac{a_0^*}{2} \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^*}{n} Sen(n\beta) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^*}{n} Cos(n\beta) = \frac{a_0^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 Cos[n\beta] + b_n^0 Sen[n\beta]
\end{aligned}$$

De la última igualdad se tiene:

$$\frac{\dot{a}_0}{2} = 0 \Rightarrow \dot{a}_0 = 0$$

$$\frac{a_0^0}{2} = 0 \Rightarrow a_0^0 = 0$$

$$a_n^0 = -\frac{\dot{b}_n}{n}$$

$$b_n^0 = \frac{\dot{a}_n}{n}$$

APENDICE IV.3

VERIFICACIONES CASO TANGENCIAL.

Las siguientes verificaciones fueron calculadas en *Mathematica* 4.0.

1. $h\Psi$ *satisface condiciones de frontera.*

Con las definiciones de los coeficientes A_n, \dots, D_n dadas en se tiene que $h\Psi$ es:

$$h\Psi = \frac{(A_n \text{Cosh}[(n+1)\alpha] + B_n \text{Cosh}[(n-1)\alpha] + C_n \text{Sinh}[(n+1)\alpha] + D_n \text{Sinh}[(n-1)\alpha]) / \text{Cos}[n\beta]}{\text{Cos}[n\beta] \left(\frac{(-1+n) \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] + \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2]}{2(-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])} \text{Sinh}[(-1+n)\alpha] - \frac{((-1+n) \text{Cosh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] + \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 + 2n\alpha 2]) \text{Sinh}[(1+n)\alpha]}{2(-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])} + \frac{\text{Cosh}[(-1+n)\alpha] (-1+n) \text{Sinh}[\alpha 1 - n\alpha 1] - n \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] + \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2]}{2(-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])} - \frac{\text{Cosh}[(1+n)\alpha] (-1+n) \text{Sinh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Sinh}[\alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \text{Sinh}[\alpha 1 - n\alpha 1 + 2n\alpha 2]}{2(-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])} \right)}$$

$h\Psi$ *satisface condiciones de Dirichlet* (4.23) *y* (4.25):

$$\begin{aligned} & \text{Simplify}[h\Psi /. \alpha \rightarrow \alpha 1] \\ & 0 \\ & \text{Simplify}[h\Psi /. \alpha \rightarrow \alpha 2] \\ & 0 \end{aligned}$$

y de Neumann (4.24) *y* (4.26):

$$\begin{aligned} & \text{Dpsi}\alpha = D[h\Psi, \alpha]; \\ & \text{Simplify}[\text{Dpsi}\alpha /. \alpha \rightarrow \alpha 2] \\ & 0 \\ & \text{Simplify}[\text{Dpsi}\alpha /. \alpha \rightarrow \alpha 1] \\ & -\text{Cos}[n\beta] \end{aligned}$$

2. Ψ *satisface ecuación biarmónica.*

La función de corriente $h\Psi/h$ es:

$$\psi[\alpha, \beta] = \frac{\text{Simplify}[h\Psi/h]}{(a \text{Cos}[n\beta] ((1+n) \text{Sinh}[(-1+n)(\alpha - \alpha 1)] + (-1+n) \text{Sinh}[(1+n)(\alpha - \alpha 1)] - n \text{Sinh}[\alpha + n\alpha + \alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] + n \text{Sinh}[\alpha - n\alpha + \alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] + \text{Sinh}[\alpha + n\alpha - \alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2] - \text{Sinh}[(-1+n)\alpha + \alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2])) / (2(\text{Cos}[\beta] - \text{Cosh}[\alpha]) (-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])}$$

ψ *satisface a la ecuación biarmónica* (4.2):

$$\begin{aligned} & \ll \text{Calculus} \backslash \text{VectorAnalysis} \backslash \\ & \text{SetCoordinates}[\text{Bipolar}[\beta, \alpha, z, \mathbf{I} \mathbf{a}]] \\ & \text{Bipolar}[\beta, \alpha, z, \mathbf{i} \mathbf{a}] \\ & \text{Simplify}[\text{Biharmonic}[\psi[\alpha, \beta]]] \\ & 0 \end{aligned}$$

3. Campo de velocidades.

De la expresión anterior para la función de corriente se obtienen los componentes v_α y v_β de la extensión de Stokes mediante las igualdades (4.6):

$$v_\alpha = h \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} ; v_\beta = -h \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$$

que dan como resultado:

$$v_\alpha = \text{Simplify}[h D[\psi[\alpha, \beta], \beta]]$$

$$-(n \cos[\beta] \cos[n\beta] - n \cos[n\beta] \cosh[\alpha] + \sin[\beta] \sin[n\beta]) \\ ((1+n) \sinh[(-1+n)(\alpha-\alpha1)] + (-1+n) \sinh[(1+n)(\alpha-\alpha1)] - n \sinh[\alpha+n\alpha+\alpha1-n\alpha1-2\alpha2] + \\ n \sinh[\alpha-n\alpha+\alpha1+n\alpha1-2\alpha2] + \sinh[\alpha+n\alpha-\alpha1+n\alpha1-2n\alpha2] - \sinh[(-1+n)\alpha+\alpha1+n\alpha1-2n\alpha2]) / \\ (2(\cos[\beta] - \cosh[\alpha])(-1+n^2 - n^2 \cosh[2(\alpha1-\alpha2)] + \cosh[2n(\alpha1-\alpha2)]))$$

$$v_\beta = \text{Simplify}[-h D[\psi[\alpha, \beta], \alpha]]$$

$$(\sin[n\beta] ((\cos[\beta] - \cosh[\alpha])((-1+n)(1+n) \cosh[(-1+n)(\alpha-\alpha1)] + (-1+n)(1+n) \cosh[(1+n)(\alpha-\alpha1)] - \\ n(1+n) \cosh[\alpha+n\alpha+\alpha1-n\alpha1-2\alpha2] - (-1+n) n \cosh[\alpha-n\alpha+\alpha1+n\alpha1-2\alpha2] + \\ (1+n) \cosh[(1+n)\alpha + (-1+n)\alpha1-2n\alpha2] - (-1+n) \cosh[(-1+n)\alpha + \alpha1+n\alpha1-2n\alpha2]) + \\ \sinh[\alpha] ((1+n) \sinh[(-1+n)(\alpha-\alpha1)] + (-1+n) \sinh[(1+n)(\alpha-\alpha1)] - \\ n \sinh[\alpha+n\alpha+\alpha1-n\alpha1-2\alpha2] + n \sinh[\alpha-n\alpha+\alpha1+n\alpha1-2\alpha2] + \\ \sinh[\alpha+n\alpha-\alpha1+n\alpha1-2n\alpha2] - \sinh[(-1+n)\alpha + \alpha1+n\alpha1-2n\alpha2])) / \\ (2(\cos[\beta] - \cosh[\alpha])(-1+n^2 - n^2 \cosh[2(\alpha1-\alpha2)] + \cosh[2n(\alpha1-\alpha2)]))$$

4. *Divergencia.* La extensión de Stokes hecha explícita en el punto anterior satisface la condición de incompresibilidad impuesta:

$$\text{div}(\vec{v}) = h^2 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v_\alpha}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v_\beta}{h} \right) \right) = 0$$

$$t1 = \text{Simplify}[v_\alpha / h]$$

$$t2 = \text{Simplify}[v_\beta / h]$$

$$t3 = \text{Simplify}[D[t1, \alpha]]$$

$$t4 = \text{Simplify}[D[t2, \beta]]$$

$$t5 = \text{Simplify}[h^2 t3]$$

$$t6 = \text{Simplify}[h^2 t4]$$

$$\text{div} = \text{Simplify}[t5 + t6]$$

0

5. Presión.

Primero se expone la obtención de la ecuación de Stokes en coordenadas curvilíneas (que no fue sencilla de encontrar en la bibliografía) para después mostrar el proceso automático que se usó para calcular la presión mediante su integración. Todas las citas y fórmulas se refieren a los apéndices de [36].

La vorticidad, es $\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$, con \mathbf{u} campo de velocidades. En el caso plano, en componentes se tiene que:

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{i}_3 h_1 h_2 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \right) \dots \text{(A-5.4), (A-5.5) p:484}$$

siendo \mathbf{i}_3 el vector unitario curvilíneo en la dirección de la coordenada curvilínea q_3 .

Usando la relación vectorial $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$ p:485 y el hecho de que el campo de velocidades tiene divergencia cero, junto con las ecuaciones de Stokes:

$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u}$ para obtener

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u} = -\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -2\mu \nabla \times \omega$$

que en componentes se escribe como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu} \nabla p &= 2 \nabla \times \omega = \\ 2 \nabla \times \omega &= 2 \nabla \times \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \right) = \nabla \times \left(h_1 h_2 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \right) \mathbf{i}_3 \right) \\ &= \mathbf{i}_1 h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{h_1 h_2 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \right)}{h_3} \right] - \mathbf{i}_2 h_3 h_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{h_1 h_2 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \right)}{h_3} \right] \\ &= \mathbf{i}_1 h_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left[h_1 h_2 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \right) \right] - \mathbf{i}_2 h_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left[h_1 h_2 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

igualando componentes,

$$\begin{aligned} -\frac{h_1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial q_1} &= h_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left[h_1 h_2 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \right) \right] \\ -\frac{h_2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial q_2} &= -h_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left[h_1 h_2 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

En coordenadas bipolares es:

$$\begin{aligned} -\frac{h}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \alpha} &= h \frac{\partial}{\partial \beta} \left[h^2 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_2}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_1}{h} \right) \right) \right] \Rightarrow -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[h^2 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_2}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_1}{h} \right) \right) \right] \\ -\frac{h}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \beta} &= -h \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[h^2 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_2}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_1}{h} \right) \right) \right] \Rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[h^2 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_2}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_1}{h} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Partiendo como aquí de la expresión de la vorticidad ω , se obtiene una fórmula mas simple que utilizando directamente al comienzo la expresión del gradiente de un campo vectorial.

El proceso utilizado para integrar la ecuación anterior en *Mathematica* 4.0 solo tiene la dificultad de simplificar cada componente y evaluar la integral en cada término de su expansión trigonométrica, para acelerar el proceso.

```

coefi1 = Simplify[D[h^2 (D[vβ / h, α] - D[vα / h, β]), β]]
      t1 = Simplify[vβ / h]
      t2 = Simplify[vα / h]
      t3 = Simplify[D[t1, α]]
      t4 = Simplify[D[t2, β]]
      Simplify[h^2 (t3 - t4)]
      t5 = %;
coefi2 = Simplify[D[t5, α], TimeConstraint -> 1200]
ex = Expand[TrigReduce[coefi1]];
      r = 0;
For[k = 1, k ≤ Length[ex],

      r = r + Integrate[ex[[k]], α];
      Print[k];

      k++;
      Simplify[r]
      pa = -μ %
ex = Expand[TrigReduce[coefi2]];
      r = 0;
For[k = 1, k ≤ Length[ex],

      r = r + Integrate[ex[[k]], β];
      Print[k];

      k++;
      Simplify[r]
      pb = μ %
s1 = Simplify[pa - pb]
0

```

con el resultado final de:

$$\begin{aligned}
 p = & -(\mu (n(1+n) \cos[(-1+n)\beta] \cosh[(-1+n)(\alpha-\alpha_1)] - (-1+n)n \cos[(1+n)\beta] \cosh[(1+n)(\alpha-\alpha_1)] - \\
 & \cos[n\beta] \cosh[n\alpha-\alpha_1-n\alpha_1] + n^2 \cos[n\beta] \cosh[n\alpha-\alpha_1-n\alpha_1] + \cos[n\beta] \cosh[n\alpha+\alpha_1-n\alpha_1] - \\
 & n^2 \cos[n\beta] \cosh[n\alpha+\alpha_1-n\alpha_1] + \cos[n\beta] \cosh[\alpha_1-n(\alpha+\alpha_1-2\alpha_2)] + \\
 & n \cos[n\beta] \cosh[\alpha_1-n(\alpha+\alpha_1-2\alpha_2)] - \cos[n\beta] \cosh[\alpha_1+n(\alpha+\alpha_1-2\alpha_2)] + \\
 & n \cos[n\beta] \cosh[\alpha_1+n(\alpha+\alpha_1-2\alpha_2)] - n \cos[n\beta] \cosh[n\alpha+\alpha_1-n\alpha_1-2\alpha_2] - \\
 & n^2 \cos[n\beta] \cosh[n\alpha+\alpha_1-n\alpha_1-2\alpha_2] + n^2 \cos[(1+n)\beta] \cosh[\alpha+n\alpha+\alpha_1-n\alpha_1-2\alpha_2] - \\
 & n^2 \cos[(-1+n)\beta] \cosh[\alpha-n\alpha+\alpha_1-n\alpha_1-2\alpha_2] - n \cos[n\beta] \cosh[n\alpha-\alpha_1-n\alpha_1+2\alpha_2] + \\
 & n^2 \cos[n\beta] \cosh[n\alpha-\alpha_1-n\alpha_1+2\alpha_2] - n \cos[(1+n)\beta] \cosh[\alpha+n\alpha-\alpha_1+n\alpha_1-2n\alpha_2] - \\
 & n \cos[(-1+n)\beta] \cosh[\alpha-n\alpha-\alpha_1-n\alpha_1+2n\alpha_2]) / \\
 & (a(-1+n^2-n^2 \cosh[2(\alpha_1-\alpha_2)] + \cosh[2n(\alpha_1-\alpha_2)])
 \end{aligned}$$

APENDICE IV.4

VERIFICACIONES CASO TRANSVERSAL.

1. $h\Psi$ *satisface condiciones de frontera.*

Con las definiciones de los coeficientes A_n, \dots, D_n dadas en se tiene que $h\Psi$ es:

$$h\Psi = \frac{(A_n \text{Cosh}[(n+1)\alpha] + B_n \text{Cosh}[(n-1)\alpha] + C_n \text{Sinh}[(n+1)\alpha] + D_n \text{Sinh}[(n-1)\alpha]) / \text{sol} \text{Cbs}[n,\beta]}{\text{Cbs}[n,\beta]} \left(\frac{(1+n) \text{Cosh}[-(1+n)\alpha] (-(-1+n) \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2])}{2(-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])} + \frac{(-1+n) \text{Cosh}[(1+n)\alpha] ((1+n) \text{Cosh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 + 2n\alpha 2])}{2(-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])} - \frac{(-1+n) \text{Sinh}[(1+n)\alpha] ((1+n) \text{Sinh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Sinh}[-(1+n)\alpha 1 + 2\alpha 2] + \text{Sinh}[-(1+n)\alpha 1 - 2n\alpha 2])}{2(-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])} + \frac{(1+n) \text{Sinh}[-(1+n)\alpha] ((-1+n) \text{Sinh}[\alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] + \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2])}{2(-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])} \right)$$

$h\Psi$ *satisface condiciones de Dirichlet (4.23) y (4.25):*

$$\begin{aligned} & \text{Simplify}[h\Psi / . \alpha \rightarrow \alpha 2] \\ & 0 \\ & \text{Simplify}[h\Psi / . \alpha \rightarrow \alpha 1] \\ & \text{Cbs}[n,\beta] \end{aligned}$$

y de Neumann (4.24) y (4.26):

$$\begin{aligned} & \text{D}[h\Psi, \alpha] \\ & \text{Simplify}[\text{D}[h\Psi, \alpha] / . \alpha \rightarrow \alpha 2] \\ & 0 \\ & \text{Simplify}[\text{D}[h\Psi, \alpha] / . \alpha \rightarrow \alpha 1] \\ & 0 \end{aligned}$$

2. Ψ *satisface ecuación biarmónica.*

La función de corriente $h\Psi/h$ es:

$$\psi_{nt}[\alpha, \beta] = \frac{\text{Simplify}[h^{-1} h\Psi]}{-\alpha \text{Cbs}[n,\beta]} \left(\frac{(-1+n) \text{Cosh}[-(1+n)\alpha] (-(-1+n) \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2]) + (-1+n) \text{Cosh}[(1+n)\alpha] ((1+n) \text{Cosh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 + 2n\alpha 2]) - (-1+n) \text{Sinh}[(1+n)\alpha] ((1+n) \text{Sinh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Sinh}[-(1+n)\alpha 1 + 2\alpha 2] + \text{Sinh}[-(1+n)\alpha 1 - 2n\alpha 2]) + (1+n) \text{Sinh}[-(1+n)\alpha] ((-1+n) \text{Sinh}[\alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] + \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2])}{(2(\text{Cbs}[\beta] - \text{Cosh}[\alpha]) (-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])}$$

y *satisface a la ecuación biarmónica (4.2):*

$$\begin{aligned} & \ll \text{Calculus} \backslash \text{VectorAnalysis} \\ & \text{SetCoordinates}[\text{Bipolar}[\beta, \alpha, z, \mathbf{I} a]] \\ & \text{Bipolar}[\beta, \alpha, z, \mathbf{I} a] \end{aligned}$$

Simplify[Biharmonic[ψnt[α, β]]]

0

3. Campo de velocidades.

De la expresión anterior para la función de corriente se obtienen los componentes v_α y v_β de la extensión de Stokes mediante las igualdades (4.6):

$$v_\alpha = h \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} ; v_\beta = -h \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$$

que dan como resultado:

$v_\alpha = \text{Simplify}[h D[\psi nt[\alpha, \beta], \beta]]$

$$\begin{aligned} & -((- \text{Cos}[n\beta] \text{Sin}[\beta] + n (\text{Cos}[\beta] - \text{Cosh}[\alpha]) \text{Sin}[n\beta]) \\ & ((-1-n) \text{Cosh}[(-1+n)\alpha] (-(-1+n) \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2]) + \\ & (-1+n) \text{Cosh}[(1+n)\alpha] ((1+n) \text{Cosh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 + 2n\alpha 2]) - \\ & (-1+n) \text{Sinh}[(1+n)\alpha] ((1+n) \text{Sinh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Sinh}[(-1+n)\alpha 1 + 2\alpha 2] + \text{Sinh}[(-1+n)\alpha 1 - 2n\alpha 2]) + \\ & (1+n) \text{Sinh}[(-1+n)\alpha] ((-1+n) \text{Sinh}[\alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] + \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2])) / \\ & (2 (\text{Cos}[\beta] - \text{Cosh}[\alpha]) (-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])) \end{aligned}$$

$v_\beta = \text{Simplify}[-h D[\psi nt[\alpha, \beta], \alpha]]$

$$\begin{aligned} & (\text{Cos}[n\beta] (-(-1+n) (\text{Cos}[\beta] - \text{Cosh}[\alpha])) \\ & ((-1-n) (-(-1+n) \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2]) \text{Sinh}[(-1+n)\alpha] + \\ & (1+n) ((1+n) \text{Cosh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 + 2n\alpha 2]) \text{Sinh}[(1+n)\alpha] - \\ & (1+n) \text{Cosh}[(1+n)\alpha] ((1+n) \text{Sinh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Sinh}[(-1+n)\alpha 1 + 2\alpha 2] + \text{Sinh}[(-1+n)\alpha 1 - 2n\alpha 2]) + \\ & (1+n) \text{Cosh}[(-1+n)\alpha] ((-1+n) \text{Sinh}[\alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] + \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2])) - \\ & \text{Sinh}[\alpha] ((-1-n) \text{Cosh}[(-1+n)\alpha] (-(-1+n) \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2]) - \\ & \text{Cosh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2]) + (-1+n) \text{Cosh}[(1+n)\alpha] \\ & ((1+n) \text{Cosh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \text{Cosh}[\alpha 1 - n\alpha 1 + 2n\alpha 2]) - (-1+n) \\ & \text{Sinh}[(1+n)\alpha] ((1+n) \text{Sinh}[(1+n)\alpha 1] - n \text{Sinh}[(-1+n)\alpha 1 + 2\alpha 2] + \text{Sinh}[(-1+n)\alpha 1 - 2n\alpha 2]) + \\ & (1+n) \text{Sinh}[(-1+n)\alpha] ((-1+n) \text{Sinh}[\alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] + \text{Sinh}[\alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2])) / \\ & (2 (\text{Cos}[\beta] - \text{Cosh}[\alpha]) (-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])) \end{aligned}$$

4. Presión.

Con la extensión de Stokes definida en 3 y mediante el mismo algoritmo señalado en el punto 5 del apéndice IV.3 se obtiene que la presión en este caso viene dada por:

$p =$

$$\begin{aligned} & -(\mu (n (-1+n^2) \text{Sin}[(-1+n)\beta] \text{Sinh}[(-1+n)(\alpha - \alpha 1)] - n (-1+n^2) \text{Sin}[(1+n)\beta] \text{Sinh}[(1+n)(\alpha - \alpha 1)] - \\ & \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha - \alpha 1 - n\alpha 1] - n \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha - \alpha 1 - n\alpha 1] + n^2 \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha - \alpha 1 - n\alpha 1] + \\ & n^3 \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha - \alpha 1 - n\alpha 1] - \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha + \alpha 1 - n\alpha 1] + n \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha + \alpha 1 - n\alpha 1] + \\ & n^2 \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha + \alpha 1 - n\alpha 1] - n^3 \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha + \alpha 1 - n\alpha 1] - \\ & \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[\alpha 1 - n(\alpha + \alpha 1 - 2\alpha 2)] + n^2 \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[\alpha 1 - n(\alpha + \alpha 1 - 2\alpha 2)] + \\ & \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[\alpha 1 + n(\alpha + \alpha 1 - 2\alpha 2)] - n^2 \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[\alpha 1 + n(\alpha + \alpha 1 - 2\alpha 2)] + \\ & n \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha + \alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] - n^3 \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha + \alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \\ & n^2 \text{Sin}[(1+n)\beta] \text{Sinh}[\alpha + n\alpha + \alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] + n^3 \text{Sin}[(1+n)\beta] \text{Sinh}[\alpha + n\alpha + \alpha 1 - n\alpha 1 - 2\alpha 2] + \\ & n^2 \text{Sin}[(-1+n)\beta] \text{Sinh}[\alpha - n\alpha + \alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] + n^3 \text{Sin}[(-1+n)\beta] \text{Sinh}[\alpha - n\alpha + \alpha 1 + n\alpha 1 - 2\alpha 2] - \\ & n \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha - \alpha 1 - n\alpha 1 + 2\alpha 2] + n^3 \text{Sin}[n\beta] \text{Sinh}[n\alpha - \alpha 1 - n\alpha 1 + 2\alpha 2] - \\ & n \text{Sin}[(1+n)\beta] \text{Sinh}[\alpha + n\alpha - \alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2] + n^2 \text{Sin}[(1+n)\beta] \text{Sinh}[\alpha + n\alpha - \alpha 1 + n\alpha 1 - 2n\alpha 2] - \\ & n \text{Sin}[(-1+n)\beta] \text{Sinh}[\alpha - n\alpha - \alpha 1 - n\alpha 1 + 2n\alpha 2] - n^2 \text{Sin}[(-1+n)\beta] \text{Sinh}[\alpha - n\alpha - \alpha 1 - n\alpha 1 + 2n\alpha 2])) / \\ & (a (-1+n^2 - n^2 \text{Cosh}[2(\alpha 1 - \alpha 2)] + \text{Cosh}[2n(\alpha 1 - \alpha 2)])) \end{aligned}$$

APENDICE IV.5
ESFUERZO, DIVERGENCIA Y TORCA.

1. *Tensor de esfuerzo.*

Considerando la función de presión p y la extensión de Stokes v correspondientes a cada caso tangencial o transversal, se corrió el siguiente programa para obtener a los 4 componente Π_{ij} de $\mathbf{\Pi}$, de acuerdo a:

$$\Pi_{ij} = 2\mu D_{ij} - p\delta_{ij}$$

en donde D_{ij} vienen dados por la fórmula (4.27).

Cálculo de D_{11} :

$$\begin{aligned} f1 &= \text{Simplify}[h[\alpha, \beta] D[v1, \alpha], \text{TimeConstraint} \rightarrow 600]; \\ f2 &= \text{Simplify}[h[\alpha, \beta]^2 v2 D[1/h[\alpha, \beta], \beta], \text{TimeConstraint} \rightarrow 600]; \\ e11 &= \text{Simplify}[f1 + f2] \end{aligned}$$

Cálculo de D_{22} :

$$\begin{aligned} f1 &= \text{Simplify}[h[\alpha, \beta] D[v2, \beta], \text{TimeConstraint} \rightarrow 600]; \\ f2 &= \text{Simplify}[h[\alpha, \beta]^2 v1 D[1/h[\alpha, \beta], \alpha], \text{TimeConstraint} \rightarrow 600]; \\ e22 &= \text{Simplify}[f1 + f2] \end{aligned}$$

Cálculo de D_{12} :

$$\begin{aligned} f1 &= \text{Simplify}[D[h[\alpha, \beta] v2, \alpha], \text{TimeConstraint} \rightarrow 600]; \\ f2 &= \text{Simplify}[D[h[\alpha, \beta] v1, \beta], \text{TimeConstraint} \rightarrow 600]; \\ e12 &= \text{Simplify}[(1/2) (f1 + f2)] \\ e21 &= e12; \end{aligned}$$

Cálculo de Π_{ij} :

$$\begin{aligned} \sigma11[\alpha_, \beta_] &= \text{Simplify}[2\mu e11 - p, \text{TimeConstraint} \rightarrow 600]; \\ \sigma22[\alpha_, \beta_] &= \text{Simplify}[2\mu e22 - p, \text{TimeConstraint} \rightarrow 600]; \\ \sigma12[\alpha_, \beta_] &= 2\mu e12; \\ \sigma21[\alpha_, \beta_] &= \sigma12[\alpha, \beta]; \end{aligned}$$

Las fórmulas finales de cada componente Π_{ij} no se muestran aquí y consisten en largas y complicadas expresiones que involucran a las funciones seno y coseno, a sus correspondientes funciones hiperbólicas de α_1 y α_2 así como también a n .

2. *Teorema de la divergencia.*

Se quiere verificar que en la región anular \mathcal{D} se satisface que:

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{\Pi}(v) dS = \int_{\partial D} \mathbf{\Pi}(v) \cdot \mathbf{n} dl$$

en donde $\mathbf{\Pi}(v)$ es el tensor de esfuerzos asociado a la extensión de Stokes v y \mathbf{n} es el vector normal exterior.

2.1 Utilizando los cálculos para los Π_{ij} del punto 6, se corrió el siguiente programa para calcular la divergencia de Π de acuerdo a la expresión (4.28):

```

corch11 = h[α, β]^2 (D[(σ11[α, β] / h[α, β]), α] + D[(σ21[α, β] / h[α, β]), β]);
corch21 = h[α, β]^2 (σ12[α, β] D[(1/h[α, β]), β] - σ22[α, β] D[(1/h[α, β]), α]);
corch12 = h[α, β]^2 (D[(σ12[α, β] / h[α, β]), α] + D[(σ22[α, β] / h[α, β]), β]);
corch22 = h[α, β]^2 (σ21[α, β] D[(1/h[α, β]), α] - σ11[α, β] D[(1/h[α, β]), β]);
h[α, β_] = (Cosh[α] - Cos[β]) / a;
Simplify[corch11 + corch21, TimeConstraint -> 1200]
0
Simplify[corch12 + corch22, TimeConstraint -> 1200]
0

```

En todos los casos tangenciales y transversales se obtuvo:

$$\nabla \cdot \Pi(v) = 0$$

y en consecuencia:

$$\iint_D \nabla \cdot \Pi(v) dS = 0 \dots (A.1)$$

2.2 Habiendo ya calculado los componentes Π_{ij} del tensor de esfuerzos, como se señala en el punto anterior, se prosiguió mediante el siguiente algoritmo a calcular las integrales que dan las fuerzas totales en cada frontera, de acuerdo a las fórmulas (4.29).

```

fzauit = Simplify[(σ11 eα + σ12 eβ), TimeConstraint -> 1200]
fza = (1/h) fzaunit;
fzail = Expand[TrigReduce[Together[fza[[1]]]];
fzai2 = Expand[TrigReduce[fza[[2]]]];

integra[f_ + g_, {a_, b_}] := integra[f, {a, b}] + integra[g, {a, b}];
integra[c_g_, {a_, b_}] := c integra[g, {a, b}] /; FreeQ[c, β];
integra[Sin[n_ . β] / (Cos[β] - Cosh[α]), {a_, b_}] := 0 /; FreeQ[n, β];
integra[β / (Cos[β] - Cosh[α]), {a_, b_}] := 0;
integra[Cos[n_ . β] / (Cos[β] - Cosh[α]), {a_, b_}] := -2 π Exp[-n α] Csch[α] /; FreeQ[n, β];
integra[c_ / (Cos[β] - Cosh[α])^2, {a_, b_}] := 2 π c (Csch[α])^2 Coth[α] /; FreeQ[c, β];
integra[Cos[n_ . β] / (Cos[β] - Cosh[α])^2, {a_, b_}] :=
2 π Exp[-n α] (Csch[α])^2 (n + Coth[α]) /; FreeQ[n, β];
integra[β Sin[β] / (Cos[β] - Cosh[α])^2, {a_, b_}] := 2 π (Csch[α] - 1 / (1 + Cosh[α]));
integra[β / (Cos[β] - Cosh[α])^2, {a_, b_}] := 0;
integra[1 / (Cos[β] - Cosh[α]), {a_, b_}] := -2 π Csch[α];
integra[Sin[n_ . β] / (Cos[β] - Cosh[α])^2, {a_, b_}] := 0 /; FreeQ[n, β];
integra[β Cos[n_ . β] / (Cos[β] - Cosh[α])^2, {a_, b_}] := 0 /; FreeQ[n, β];
integra[Sin[n_ . β] Cos[β] / (Cos[β] - Cosh[α])^2, {a_, b_}] := 0 /; FreeQ[n, β];
integra[c_, {a_, b_}] := c (b - a) /; FreeQ[c, β];
F1 = Simplify[ExpToTrig[integra[fzail, {-π, π}]]]

```

```

0
integra[fzai2, {-π, π}]
0

```

La función *integra*[f, {}] cuya definición se muestra en el algoritmo, fue desarrollada para integrar el tipo de funciones que específicamente que aparecen en la expansión trigonométrica de los componentes *fzai1*, *fzai2* del vector de esfuerzo. De otra forma, integrando con la función de paquetería de *Mathematica* 4.0 los tiempos de cálculo y/o el espacio de memoria necesarios se vuelven prohibitivamente grandes.

Para todas las extensiones de Stokes calculadas en el apartado IV.6 se obtuvo que la fuerza total en D es cero de la siguiente forma:

$$\vec{F} = \int_{\partial D} \Pi(\vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \int_{\alpha_1} \Pi(\vec{v}) \cdot \vec{n} dS + \int_{\alpha_2} \Pi(\vec{v}) \cdot \vec{n} dS = 0 + 0 = 0$$

Este resultado junto con (A.1) demuestran que en este caso se cumple el teorema de la divergencia para el tensor de esfuerzo.

3. Torca Tangencial.

```

ea = { Sin[β] Sinh[α], -1 + Cos[β] Cosh[α] };
eb = { 1 - Cos[β] Cosh[α], Sin[β] Sinh[α] };
r0 = { a Sin[β] / (Cosh[α1] - Cos[β]), a Sinh[α1] / (Cosh[α1] - Cos[β]) - a Coth[α1] };
eqns =
  { r0[[1]] = (A ea[[1]] + B eb[[1]]) /. α → α1,
    r0[[2]] = (A ea[[2]] + B eb[[2]]) /. α → α1 }
coefs = Flatten[Simplify[Solve[eqns, {A, B}]]]
(A → -a Csch[α1], B → 0)
h = (Cosh[α] - Cos[β]) / a;

```

Aquí expresiones para la presión y la extensión de Stokes

```

p
v1
v2
e11 = Simplify[h (D[v1, α] + h v2 D[1/h, β])]
e12 = Simplify[(1/2) (D[h v2, α] + D[h v1, β])]
torca = TrigReduce[-(1/h) (B p + 2 μ (A e12 - B e11))] /. α → α1

```

```

integra[f_+g_, {a_, b_}] := integra[f, {a, b}] + integra[g, {a, b}];
integra[c_g_, {a_, b_}] := c integra[g, {a, b}] /; FreeQ[c, β];
integra[Sin[n_ . β] / (Cos[β] - Cosh[α1]), {a_, b_}] := 0 /; FreeQ[n, β];
integra[β / (Cos[β] - Cosh[α1]), {a_, b_}] := 0;
integra[Cos[n_ . β] / (Cos[β] - Cosh[α1]), {a_, b_}] := - 2 π Exp[-n α1] Csch[α1] /; FreeQ[n, β];
integra[c_ / (Cos[β] - Cosh[α1])^2, {a_, b_}] := 2 π c (Csch[α1])^2 Coth[α1] /; FreeQ[c, β];
integra[Cos[n_ . β] / (Cos[β] - Cosh[α1])^2, {a_, b_}] :=
  2 π Exp[-n α1] (Csch[α1])^2 (n + Coth[α1]) /; FreeQ[n, β];
integra[β Sin[β] / (Cos[β] - Cosh[α1])^2, {a_, b_}] := 2 π (Csch[α1] - 1 / (1 + Cosh[α1]));
integra[β / (Cos[β] - Cosh[α1])^2, {a_, b_}] := 0;
integra[1 / (Cos[β] - Cosh[α1]), {a_, b_}] := - 2 π Csch[α1];
integra[Sin[n_ . β] / (Cos[β] - Cosh[α1])^2, {a_, b_}] := 0 /; FreeQ[n, β];
integra[β Cos[n_ . β] / (Cos[β] - Cosh[α1])^2, {a_, b_}] := 0 /; FreeQ[n, β];
integra[Sin[n_ . β] Cos[β] / (Cos[β] - Cosh[α1])^2, {a_, b_}] := 0 /; FreeQ[n, β];
integra[c_, {a_, b_}] := c (b - a) /; FreeQ[c, β];
integra[Map[Factor, Expand[TrigReduce[torca]], 10], {-π, π}]
  Simplify[ExpToTrig[% /. coeffs]]
0

```

4. Torca Transversal.

```

ea = { Sin[β] Sinh[α], -1 + Cos[β] Cosh[α] };
     { Cos[β] - Cosh[α], Cos[β] - Cosh[α] };
eb = { 1 - Cos[β] Cosh[α], Sin[β] Sinh[α] };
     { Cos[β] - Cosh[α], Cos[β] - Cosh[α] };
r0 = { a Sin[β], a Sinh[α] };
     { Cosh[α1] - Cos[β], Cosh[α1] - Cos[β] } - a Coth[α1];
eqns =
  {r0[[1]] = (A ea[[1]] + B eb[[1]]) / . α → α1,
   r0[[2]] = (A ea[[2]] + B eb[[2]]) / . α → α1}
coeffs = Flatten[Simplify[Solve[eqns, {A, B}]]]
  {A → -a Csch[α1], B → 0}
A = coeffs[[1]][[2]]; B = coeffs[[2]][[2]];
h = (Cosh[α] - Cos[β]) / a;

```

Aqui expresiones para la presión y la extensión de Stokes

```

p
v1
v2
e11 = Simplify[h (D[v1, α] + h v2 D[1/h, β])]
e12 = Simplify[(1/2) (D[h v2, α] + D[h v1, β])]
torca = Simplify[-(1/h) (B p + 2 μ (A e12 - B e11))] / . α → α1
  Simplify[Integrate[torca, {β, -π, π}]]
Simplify[-(8 a n (-1 + n^2) μ Csch[α1] Sin[n π] Sinh[α1 - α2]^2) /
  (1 - n^2 + n^2 Cosh[2 (α1 - α2)] - Cosh[2 n (α1 - α2)]), {n ∈ Integers, α1 > α2}]
0

```

APENDICE IV.6

PROGRAMA DE COMPONENTES DEL CORCHETE DE LIE.

Como ejemplo del algoritmo de cálculo de los componentes del corchete de Lie, el que sigue corresponde al caso tangencial $[v_m(\text{Cos}), v_n(\text{Cos})]$. Los programas correspondientes al resto de los casos difieren del presente en detalles mínimos.

$$h = (\text{Cosh}[\alpha] - \text{Cos}[\beta]) / a;$$

$$\psi = \frac{\text{Fn}[\alpha] \text{Cos}[n\beta]}{h};$$

Aplicando fórmula (4.6) para calcular componentes de velocidad:

$$v1n = \text{FullSimplify}[h D[\psi, \beta]];$$

$$v2n = \text{FullSimplify}[-h D[\psi, \alpha]];$$

Definición de el campo y su conjugado en modo n:

$$vn = v1n + I v2n;$$

$$vnc = v1n - I v2n;$$

Definición de el campo y su conjugado en modo m:

$$vm = vn /. \{n \rightarrow m, \text{Fn}[\alpha] \rightarrow \text{Fm}[\alpha], \text{Fn}'[\alpha] \rightarrow \text{Fm}'[\alpha]\};$$

$$vmc = vnc /. \{n \rightarrow m, \text{Fn}[\alpha] \rightarrow \text{Fm}[\alpha], \text{Fn}'[\alpha] \rightarrow \text{Fm}'[\alpha]\};$$

Mapeo Conforme:

$$z = I a \text{Coth}[\xi / 2];$$

Obtención de los distintos términos de la fórmula (4.30):

$$dz = \text{Simplify}[1 / (D[z, \xi])];$$

$$dgczc = dz / . \xi \rightarrow \xi;$$

$$\xi = \alpha + I \beta; \quad \bar{\xi} = \alpha - I \beta;$$

$$dvng = \frac{1}{2} D[vn, \alpha] - \frac{I}{2} D[vn, \beta];$$

$$dvngc = \frac{1}{2} D[vn, \alpha] + \frac{I}{2} D[vn, \beta];$$

$$dvmg = \frac{1}{2} D[vm, \alpha] - \frac{I}{2} D[vm, \beta];$$

$$dvmgc = \frac{1}{2} D[vm, \alpha] + \frac{I}{2} D[vm, \beta];$$

Cálculo de fórmula (4.30):

$$\text{lie} = dvng dz vm + dvngc dgczc vnc - dvmg dz vn - dvmgc dgczc vnc;$$

$$\text{ComplexExpand}[\%];$$

$$\text{cexlie} = \%;$$

Componentes real e imaginario:

$$v1 = \text{Drop}[\text{cexlie}, \{39\}];$$

$$v2 = \text{Expand}[\text{cexlie}[\{39\}] / I];$$

Verificación:

$$\text{Simplify}[\text{lie} - (v1 + I v2)]$$

0

Extracción del primer componente del corchete de Lie:

$$\text{TrigReduce}[v1];$$

$$\text{liel} = \text{Map}[\text{Factor}, \text{Collect}[\%, \text{Sin}[_]] /. \alpha \rightarrow \alpha 1, 10]$$

Extracción del segundor componente del corchete de Lie:

$$\text{tr} = \text{TrigReduce}[v2];$$

$$\text{lie2} = \text{Map}[\text{Factor}, \text{Collect}[\text{Numerator}[\text{tr}], \text{Cos}[_]] /. \alpha \rightarrow \alpha 1, 10] / \text{Denominator}[\text{tr}]$$

APENDICE IV.7.

SERIES DE FOURIER DEL CORCHETE DE LIE.

Lo que se quiere es expresar a cada componente como serie de Fourier:

$$L_1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\beta) + b_n \sin(n\beta) ; \quad L_2 = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\beta) + d_n \sin(n\beta)$$

Se sabe que [34]:

$$\frac{1}{ah} = \frac{1}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} = \operatorname{Csch}(\alpha) + 2\operatorname{Csch}(\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} \cos(j\beta)$$

por lo que:

$$-\frac{1}{ah} = \frac{1}{\cos(\beta) - \cosh(\alpha)} = -\operatorname{Csch}(\alpha) - 2\operatorname{Csch}(\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} \cos(j\beta)$$

Como:

$$\frac{D[1 / (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)), \alpha]}{\operatorname{Sinh}[\alpha]} \\ (\cos(\beta) - \cosh(\alpha))^2$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\cos(\beta) - \cosh(\alpha)} \right) &= \frac{\operatorname{Senh}(\alpha)}{(\cos(\beta) - \cosh(\alpha))^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (-\operatorname{Csch}(\alpha)) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2\operatorname{Csch}(\alpha) e^{-j\alpha} \cos(j\beta) \right) \\ &= -\operatorname{Coth}(\alpha) \operatorname{Csch}(\alpha) - \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial(2\operatorname{Csch}(\alpha) e^{-j\alpha})}{\partial \alpha} \cos(j\beta) \right) \end{aligned}$$

Como:

$$\text{FullSimplify}[D[2 \operatorname{Csch}[\alpha] \operatorname{Exp}[-n \alpha], \alpha] \\ -2 e^{-n \alpha} (n + \operatorname{Coth}[\alpha]) \operatorname{Csch}[\alpha]]$$

entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial(2\operatorname{Csch}(\alpha) e^{-j\alpha})}{\partial \alpha} \cos(j\beta) &= \sum_{j=1}^{\infty} -2e^{-j\alpha} \operatorname{Csch}(\alpha) (j + \operatorname{Coth}(\alpha)) \cos(j\beta) \\ &= -2\operatorname{Csch}(\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha)) \cos(j\beta) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Senh}(\alpha)}{(\cos(\beta) - \cosh(\alpha))^2} &= -\operatorname{Coth}(\alpha) \operatorname{Csch}(\alpha) - \left(-2\operatorname{Csch}(\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha)) \cos(j\beta) \right) \\ &= -\operatorname{Coth}(\alpha) \operatorname{Csch}(\alpha) + 2\operatorname{Csch}(\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha)) \cos(j\beta) \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\cos(\beta) - \cosh(\alpha))^2} &= \frac{-\operatorname{Coth}(\alpha)\operatorname{Csch}(\alpha)}{\operatorname{Senh}(\alpha)} + \frac{2\operatorname{Csch}(\alpha)}{\operatorname{Senh}(\alpha)} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha))\cos(j\beta) \\ &= -\operatorname{Coth}(\alpha)\operatorname{Csch}(\alpha)^2 + 2\operatorname{Csch}(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha))\cos(j\beta) \end{aligned}$$

Caso $[v_m(\cos), v_n(\cos)]$. Las expresiones correspondientes de la tabla IV.1 son ahora:

$$\mathcal{L}_1 = \left(-\operatorname{Coth}(\alpha)\operatorname{Csch}(\alpha)^2 + 2\operatorname{Csch}(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha))\cos(j\beta) \right) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} b_k \operatorname{Sen}[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} b'_k \operatorname{Sen}[k\beta] \right)$$

$$\mathcal{L}_2 = \left(-\operatorname{Coth}(\alpha)\operatorname{Csch}(\alpha)^2 + 2\operatorname{Csch}(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (n + \operatorname{Coth}(\alpha))\cos(j\beta) \right) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} c_k \cos[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} c'_k \cos[k\beta] \right)$$

Para \mathcal{L}_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \left(-\operatorname{Coth}(\alpha)\operatorname{Csch}(\alpha)^2 + 2\operatorname{Csch}(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha))\cos(j\beta) \right) b_k \operatorname{Sen}[k\beta] \\ &+ \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \left(-\operatorname{Coth}(\alpha)\operatorname{Csch}(\alpha)^2 + 2\operatorname{Csch}(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha))\cos(j\beta) \right) b'_k \operatorname{Sen}[k\beta] \\ &= \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \left(-\operatorname{Coth}(\alpha)\operatorname{Csch}(\alpha)^2 b_k \operatorname{Sen}[k\beta] + 2\operatorname{Csch}(\alpha)^2 b_k \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha))\cos(j\beta) \operatorname{Sen}[k\beta] \right) \\ &+ \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \left(-\operatorname{Coth}(\alpha)\operatorname{Csch}(\alpha)^2 b'_k \operatorname{Sen}[k\beta] + 2\operatorname{Csch}(\alpha)^2 b'_k \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha))\cos(j\beta) \operatorname{Sen}[k\beta] \right) \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} &\text{Map[Factor, TrigReduce[Cos[n\beta] Sin[k\beta]], 10] \\ &\quad \frac{1}{2} (\operatorname{Sin}[(k-n)\beta] + \operatorname{Sin}[(k+n)\beta]) \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha))\cos(j\beta) \operatorname{Sen}[k\beta] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha)) \left[\frac{1}{2} (\operatorname{Sen}((k-j)\beta) + \operatorname{Sen}((k+j)\beta)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha)) \operatorname{Sen}((k-j)\beta) + e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha)) \operatorname{Sen}((k+j)\beta) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha)) \operatorname{Sen}((k-j)\beta) + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \operatorname{Coth}(\alpha)) \operatorname{Sen}((k+j)\beta) \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \\
&= \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \left(\begin{aligned} &-Coth(\alpha)Csch(\alpha)^2 b_k Sen[k\beta] \\ &+ 2Csch(\alpha)^2 b_k \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) Sen((k-j)\beta) + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) Sen((k+j)\beta) \right] \end{aligned} \right) \\
&+ \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \left(\begin{aligned} &-Coth(\alpha)Csch(\alpha)^2 b'_k Sen[k\beta] \\ &+ 2Csch(\alpha)^2 b'_k \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) Sen((k-j)\beta) + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) Sen((k+j)\beta) \right] \end{aligned} \right) \\
L_1 &= -Coth(\alpha)Csch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} b_k Sen[k\beta] + Csch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b_k Sen((k-j)\beta) + \\
&+ Csch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b_k Sen((k+j)\beta) \\
&- Coth(\alpha)Csch(\alpha)^2 \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} b'_k Sen[k\beta] + Csch(\alpha)^2 \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b'_k Sen((k-j)\beta) + \\
&+ Csch(\alpha)^2 \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b'_k Sen((k+j)\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= -Coth(\alpha)Csch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} b_k Sen[k\beta] \\
&+ Csch(\alpha)^2 \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b_k Sen((k-j)\beta) + \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b_k Sen((k+j)\beta) \right) \\
&- Coth(\alpha)Csch(\alpha)^2 \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} b'_k Sen[k\beta] \\
&+ Csch(\alpha)^2 \left(\sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b'_k Sen((k-j)\beta) + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b'_k Sen((k+j)\beta) \right)
\end{aligned}$$

Desarrollando el primer paréntesis resulta que se puede poner como:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b_k Sen((k-j)\beta) + \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b_k Sen((k+j)\beta) \\
&= \sum_{q=1}^{\infty} Sen(q\beta) \left(\begin{aligned} &\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} b_k \left[e^{-Abs[(q-k)]\alpha} (Abs[(q-k)] + Coth(\alpha)) - e^{-Abs[(q+k)]\alpha} (Abs[(q+k)] + Coth(\alpha)) \right] \\ &+ b_{-q} Coth(\alpha) - b_q Coth(\alpha) \end{aligned} \right) \\
&= \sum_{q=1}^{\infty} B_q Sen(q\beta)
\end{aligned}$$

Igualmente se tiene que el segundo paréntesis es igual a:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b'_k Sen((k-j)\beta) + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) b'_k Sen((k+j)\beta) = \\
&= \sum_{q=1}^{\infty} Sen(q\beta) \left(\begin{aligned} &\sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} b'_k \left[e^{-Abs[(q-k)]\alpha} (Abs[(q-k)] + Coth(\alpha)) - e^{-Abs[(q+k)]\alpha} (Abs[(q+k)] + Coth(\alpha)) \right] \\ &- b'_q (Coth(\alpha)) \end{aligned} \right) \\
&= \sum_{q=1}^{\infty} B'_q Sen(q\beta)
\end{aligned}$$

Con los resultados anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1 &= -\text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} b_k \text{Sen}[k\beta] \\
 &+ \text{Csch}(\alpha)^2 \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) b_k \text{Sen}((k-j)\beta) + \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) b_k \text{Sen}((k+j)\beta) \right) \\
 &- \text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} b'_k \text{Sen}[k\beta] \\
 &+ \text{Csch}(\alpha)^2 \left(\sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) b'_k \text{Sen}((k-j)\beta) + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) b'_k \text{Sen}((k+j)\beta) \right) \\
 &= -\text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} b_k \text{Sen}[k\beta] + \text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{Sen}(q\beta) \\
 &- \text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} b'_k \text{Sen}[k\beta] + \text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{q=1}^{\infty} B'_q \text{Sen}(q\beta) \\
 \mathcal{L}_1 &= \text{Csch}(\alpha)^2 \left[-\text{Coth}(\alpha) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} b_k \text{Sen}[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} b'_k \text{Sen}[k\beta] \right) + \sum_{q=1}^{\infty} (B_q + B'_q) \text{Sen}(q\beta) \right]
 \end{aligned}$$

Para \mathcal{L}_2 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_2 &= \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \left(-\text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 + 2\text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) \text{Cos}(j\beta) \right) c_k \text{Cos}[k\beta] \\
 &+ \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \left(-\text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 + 2\text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) \text{Cos}(j\beta) \right) c'_k \text{Cos}[k\beta] \\
 &= \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \left(-\text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 c_k \text{Cos}[k\beta] + 2\text{Csch}(\alpha)^2 c_k \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) \text{Cos}(j\beta) \text{Cos}[k\beta] \right) \\
 &+ \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \left(-\text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 c'_k \text{Cos}[k\beta] + 2\text{Csch}(\alpha)^2 c'_k \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) \text{Cos}(j\beta) \text{Cos}[k\beta] \right)
 \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Map[Factor, TrigReduce[Cos[j\beta] Cos[k\beta]], 10] \\
 &\quad \frac{1}{2} (\text{Cos}[(j-k)\beta] + \text{Cos}[(j+k)\beta])
 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) \text{Cos}(j\beta) \text{Cos}[k\beta] \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) \left[\frac{1}{2} (\text{Cos}((j-k)\beta) + \text{Cos}((k+j)\beta)) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) \text{Cos}((j-k)\beta) + e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) \text{Cos}((k+j)\beta) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) \text{Cos}((j-k)\beta) + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) \text{Cos}((k+j)\beta) \right]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_2 &= \\
 &= \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \left(\begin{aligned} &-Coth(\alpha) CsSch(\alpha)^2 c_k Cos[k\beta] \\ &+ 2CsSch(\alpha)^2 c_k \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) Cos((j-k)\beta) + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) Cos((k+j)\beta) \right] \end{aligned} \right) \\
 &+ \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \left(\begin{aligned} &-Coth(\alpha) CsSch(\alpha)^2 c'_k Cos[k\beta] \\ &+ 2CsSch(\alpha)^2 c'_k \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) Cos((j-k)\beta) + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) Cos((k+j)\beta) \right] \end{aligned} \right) \\
 \mathcal{L}_2 &= -Coth(\alpha) CsSch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} c_k Cos[k\beta] + CsSch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) c_k Cos((j-k)\beta) + \\
 &+ CsSch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) c_k Cos((k+j)\beta) \\
 &- Coth(\alpha) CsSch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} c'_k Cos[k\beta] + CsSch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) c'_k Cos((j-k)\beta) + \\
 &+ CsSch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) c'_k Cos((k+j)\beta) \\
 \mathcal{L}_2 &= -Coth(\alpha) CsSch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} c_k Cos[k\beta] \\
 &+ CsSch(\alpha)^2 \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) c_k Cos((j-k)\beta) + \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) c_k Cos((k+j)\beta) \right) \\
 &- Coth(\alpha) CsSch(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} c'_k Cos[k\beta] \\
 &+ CsSch(\alpha)^2 \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) c'_k Cos((j-k)\beta) + \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) c'_k Cos((k+j)\beta) \right)
 \end{aligned}$$

Desarrollando el primer paréntesis resulta que se puede poner como:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) c_k Cos((j-k)\beta) + \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + Coth(\alpha)) c_k Cos((k+j)\beta) \\
 &= \sum_{\substack{k=m-n-3 \\ k \neq 0}}^{m-n+3} c_k e^{-Abs[k]\alpha} (Abs[k] + Coth(\alpha)) + \\
 &+ \sum_{q=1}^{\infty} Cos(q\beta) \left(\begin{aligned} &\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} c_k \left[e^{-Abs[(q-k)]\alpha} (Abs[(q-k)] + Coth(\alpha)) + e^{-Abs[(q+k)]\alpha} (Abs[(q+k)] + Coth(\alpha)) \right] \\ &- c_{-q} Coth(\alpha) - c_q Coth(\alpha) \end{aligned} \right) \\
 &= \frac{\Gamma_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \Gamma_q Cos(q\beta)
 \end{aligned}$$

Igualmente se tiene que el segundo paréntesis es igual a:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) c'_k \text{Cos}((j-k)\beta) + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) c'_k \text{Cos}((k+j)\beta) = \\
& = \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} c'_k e^{-\text{Abs}[k]\alpha} (\text{Abs}[k] + \text{Coth}(\alpha)) + \\
& + \sum_{q=1}^{\infty} \text{Cos}(q\beta) \left(\sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} c'_k \left[e^{-\text{Abs}[(q-k)]\alpha} (\text{Abs}[(q-k)] + \text{Coth}(\alpha)) + e^{-\text{Abs}[(q+k)]\alpha} (\text{Abs}[(q+k)] + \text{Coth}(\alpha)) \right] \right. \\
& \left. - c'_q (\text{Coth}(\alpha)) \right) \\
& = \frac{\Gamma'_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \Gamma'_q \text{Cos}(q\beta)
\end{aligned}$$

Con los resultados anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 & = -\text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} c_k \text{Cos}[k\beta] \\
& + \text{Csch}(\alpha)^2 \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) c_k \text{Cos}((j-k)\beta) + \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) c_k \text{Cos}((k+j)\beta) \right) \\
& - \text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} c'_k \text{Cos}[k\beta] \\
& + \text{Csch}(\alpha)^2 \left(\sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) c'_k \text{Cos}((j-k)\beta) + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\alpha} (j + \text{Coth}(\alpha)) c'_k \text{Cos}((k+j)\beta) \right) \\
& = -\text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} c_k \text{Cos}[k\beta] + \text{Csch}(\alpha)^2 \left(\frac{\Gamma_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \Gamma_q \text{Cos}(q\beta) \right) \\
& - \text{Coth}(\alpha) \text{Csch}(\alpha)^2 \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} c'_k \text{Cos}[k\beta] + \text{Csch}(\alpha)^2 \left(\frac{\Gamma'_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \Gamma'_q \text{Cos}(q\beta) \right) \\
\mathcal{L}_2 & = \text{Csch}(\alpha)^2 \left[-\text{Coth}(\alpha) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} c_k \text{Cos}[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} c'_k \text{Cos}[k\beta] \right) + \frac{\Gamma_0 + \Gamma'_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} (\Gamma_q + \Gamma'_q) \text{Cos}(q\beta) \right]
\end{aligned}$$

Caso $[v_m(\text{Cos}), v_n(\text{Cos})]$. Esta caso es igual al 1. anterior si aquí se aplican las transformaciones:

$$\mathcal{L}_1^3 \rightarrow \mathcal{L}_2^1 \wedge (a_k \rightarrow c_k) \wedge (a'_k \rightarrow c'_k); \quad \mathcal{L}_2^3 \rightarrow \mathcal{L}_1^1 \wedge (d_k \rightarrow b_k) \wedge (d'_k \rightarrow b'_k)$$

en donde los superíndices señalan el caso correspondiente. Por lo que el resultado es ahora:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 & = \text{Csch}(\alpha)^2 \left[-\text{Coth}(\alpha) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} a_k \text{Cos}[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} a'_k \text{Cos}[k\beta] \right) + \frac{\Xi_0 + \Xi'_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} (\Xi_q + \Xi'_q) \text{Cos}(q\beta) \right] \\
\mathcal{L}_2 & = \text{Csch}(\alpha)^2 \left[-\text{Coth}(\alpha) \left(\sum_{k=m-n-3}^{m-n+3} d_k \text{Sen}[k\beta] + \sum_{k=m+n-3}^{m+n+3} d'_k \text{Sen}[k\beta] \right) + \sum_{q=1}^{\infty} (A_q + A'_q) \text{Sen}(q\beta) \right]
\end{aligned}$$

Estos son los únicos casos independientes, por lo que el resto se obtienen haciendo los cambios de nombre correspondientes.

APENDICE IV.8

TERMINO DE DESPLAZAMIENTO EN LA DIRECCION i

El término de traslación rígida en la dirección i es múltiplo de $Senh[\alpha]$. Por lo tanto, interesa aquí determinar al coeficiente C_0 de la solución de Jeffery (4.4).

El sistema correspondiente para C_0 es:

$$(B_0 \cosh \alpha_1 + D_0 \sinh \alpha_1) \alpha_1 + A_0 \cosh \alpha_1 + C_0 \sinh \alpha_1 = \frac{a_0^i}{2}$$

$$(B_0 \cosh \alpha_2 + D_0 \sinh \alpha_2) \alpha_2 + A_0 \cosh \alpha_2 + C_0 \sinh \alpha_2 = 0$$

$$B_0 \cosh \alpha_1 + D_0 \sinh \alpha_1 + (D_0 \cosh \alpha_1 + B_0 \sinh \alpha_2) \alpha_1 + A_0 \sinh \alpha_1 + C_0 \cosh \alpha_1 = \frac{e_0}{2}$$

$$B_0 \cosh \alpha_2 + D_0 \sinh \alpha_2 + (D_0 \cosh \alpha_2 + B_0 \sinh \alpha_2) \alpha_2 + A_0 \sinh \alpha_2 + C_0 \cosh \alpha_2 = 0$$

en donde:

$$\frac{a_0^i}{2} = \frac{1}{2a} (Cosh(\alpha_1) a_0^0 - a_1^0)$$

$$\frac{e_0}{2} = -\frac{c_0}{2} + \frac{a_0^0 Sinh(\alpha_1)}{2a}$$

con:

$$a_0^0 = 0$$

$$a_1^0 = -\left(a Csch(\alpha_1) b_1 + a Csch(\alpha_1) \left(-b_1 e^{-2a_1} + 2 Sinh(\alpha_1) \sum_{j=2}^{\infty} b_j e^{-j a_1} \right) \right)$$

y tiene como solución:

$$C_0 = \frac{(a_0^i (2\alpha_2 - \alpha_1) + 2e_0 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1)) Cosh(\alpha_1) - a_0^i \alpha_1 Cosh(\alpha_1 - 2\alpha_2) + (e_0 \alpha_1 + a_0^i (2\alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)) - 1) Sinh(\alpha_1) - (a_0^i - e_0 \alpha_1) Sinh(\alpha_1 - 2\alpha_2)}{2 + 4(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 2Cosh(2(\alpha_1 - \alpha_2))}$$

APENDICE IV.9

PROGRAMA DE CURVATURA (Caso Tangencial)

Lectura de las expresiones de los componentes del corchete de Lie en la forma dada en la Tabla IV.1

```
srtmp1 = OpenRead["f1tgsc"];
φ1=Read[srtmp1];
Close[srtmp1];
srtmp2 = OpenRead["f2tgsc"];
φ2=Read[srtmp2];
Close[srtmp2];
```

Extracción de los coeficientes A_k, A'_k, D_k, D'_k correspondientes a las sumas finitas de las expresiones del bloque anterior.

```
long = 7;
For[k = 1, k ≤ long, k++, ind = m2 - n2 - 4 + k;
  f1k[δ_] = Coefficient[Coefficient[φ1, Sin[(ind) β]],  $\frac{1}{(\text{Cos}[\beta] - \text{Cosh}[\delta])^2}$ ];];
For[k = 1, k ≤ long, k++, ind = m2 + n2 - 4 + k;
  g1k[δ_] = Coefficient[Coefficient[φ1, Sin[(ind) β]],  $\frac{1}{(\text{Cos}[\beta] - \text{Cosh}[\delta])^2}$ ];];
For[k = 1, k ≤ long, k++, ind = m2 - n2 - 4 + k;
  f2k[δ_] = φ2[[1]] φ2[[2]] Coefficient[φ2[[4]], Cos[(ind) β]];];
For[k = 1, k ≤ long, k++, ind = m2 + n2 - 4 + k;
  g2k[δ_] = φ2[[1]] φ2[[2]] Coefficient[φ2[[4]], Cos[(ind) β]];];
Remove[φ1, φ2];
```

Parámetros de suma infinita, límites de m y n y número de estaciones.

```
numterm = 10; limsupm = 100; limsupn = i2 + 25; estini = 1; estfin = 10;
```

Fórmulas de los coeficientes A_n, \dots, D_n de la ecuación (4.5) del caso tangencial modos m y n.

```
soln1 =
{An1 - ((1 - n1) Sinh[(1 + n1) α11] - n1 Sinh[α11 - n1 α11 - 2 α21] - Sinh[α11 - n1 α11 + 2 n1 α21]) /
  (2 (-1 + n12 - n12 Cosh[2 (α11 - α21)] + Cosh[2 n1 (α11 - α21)])),
  Bn1 - ((-1 - n1) Sinh[α11 - n1 α11] - n1 Sinh[α11 + n1 α11 - 2 α21] + Sinh[α11 + n1 α11 - 2 n1 α21]) /
  (2 (-1 + n12 - n12 Cosh[2 (α11 - α21)] + Cosh[2 n1 (α11 - α21)])),
  Cn1 - ((-1 + n1) Cosh[(1 + n1) α11] - n1 Cosh[α11 - n1 α11 - 2 α21] + Cosh[α11 - n1 α11 + 2 n1 α21]) /
  (2 (-1 + n12 - n12 Cosh[2 (α11 - α21)] + Cosh[2 n1 (α11 - α21)])),
  Dn1 - ((-1 - n1) Cosh[α11 - n1 α11] + n1 Cosh[α11 + n1 α11 - 2 α21] + Cosh[α11 + n1 α11 - 2 n1 α21]) /
  (2 (-1 + n12 - n12 Cosh[2 (α11 - α21)] + Cosh[2 n1 (α11 - α21)]))};
solm1 = {Am1 -  $\frac{(1 - m1) \text{Sinh}[(1 + m1) \alpha_{11}] - m1 \text{Sinh}[\alpha_{11} - m1 \alpha_{11} - 2 \alpha_{21}] - \text{Sinh}[\alpha_{11} - m1 \alpha_{11} + 2 m1 \alpha_{21}]}{2 (-1 + m1^2 - m1^2 \text{Cosh}[2 (\alpha_{11} - \alpha_{21})] + \text{Cosh}[2 m1 (\alpha_{11} - \alpha_{21})])}$ ,
  Bm1 -  $\frac{(-1 - m1) \text{Sinh}[\alpha_{11} - m1 \alpha_{11}] - m1 \text{Sinh}[\alpha_{11} + m1 \alpha_{11} - 2 \alpha_{21}] + \text{Sinh}[\alpha_{11} + m1 \alpha_{11} - 2 m1 \alpha_{21}]}{2 (-1 + m1^2 - m1^2 \text{Cosh}[2 (\alpha_{11} - \alpha_{21})] + \text{Cosh}[2 m1 (\alpha_{11} - \alpha_{21})])}$ ,
  Cm1 - ((-1 + m1) Cosh[(1 + m1) α11] - m1 Cosh[α11 - m1 α11 - 2 α21] + Cosh[α11 - m1 α11 + 2 m1 α21]) /
  (2 (-1 + m12 - m12 Cosh[2 (α11 - α21)] + Cosh[2 m1 (α11 - α21)])),
  Dm1 -  $\frac{(-1 - m1) \text{Cosh}[\alpha_{11} - m1 \alpha_{11}] + m1 \text{Cosh}[\alpha_{11} + m1 \alpha_{11} - 2 \alpha_{21}] + \text{Cosh}[\alpha_{11} + m1 \alpha_{11} - 2 m1 \alpha_{21}]}{2 (-1 + m1^2 - m1^2 \text{Cosh}[2 (\alpha_{11} - \alpha_{21})] + \text{Cosh}[2 m1 (\alpha_{11} - \alpha_{21})])}$ };
```

Ciclo de iteración sobre las estaciones y cálculo de los parámetros a_1 y a_2 .

```
For[i1= estini, i1< estfin, i1++, Print["est = ", i1]; matras = {};  
If[i1= 10, frdc= 98/100, frdc= i1/10];  
s1= N[Solve[{a Abs[Coth[γ1] - Coth[γ2]] = frdc a Csch[γ2], Csch[γ2] Sinh[γ1] = 100}, {γ1, γ2}]]];  
γ2= Rationalize[Abs[s1[[1]][[1]][[2]]], 10-8]; γ1= Rationalize[Abs[s1[[1]][[2]][[2]]], 10-8];
```

Ciclo de iteración sobre los modos m y n .

```
For[i2= 2, i2< limsupm, i2++, tras = {}]; For[i3= i2+1, i3< limsupn, i3++,
```

Asignación de valores a los coeficientes de la ec. (4.5)

```
An= soln[[1]][[2]]; Bn= soln[[2]][[2]]; Cn= soln[[3]][[2]]; Dn= soln[[4]][[2]];  
Am= solm[[1]][[2]]; Bm= solm[[2]][[2]]; Cm= solm[[3]][[2]];  
Dm= solm[[4]][[2]];
```

Asignación de valores a las funciones de la ec. (4.5)

```
Fn[α_] = An Cosh[(n+1) α] + Bn Cosh[(n-1) α] + Cn Sinh[(n+1) α] + Dn Sinh[(n-1) α];  
Fm[α_] = Am Cosh[(m+1) α] + Bm Cosh[(m-1) α] + Cm Sinh[(m+1) α] + Dm Sinh[(m-1) α];
```

Asignación de valores a las funciones hiperbólicas utilizando racionales para trabajar en precisión infinita.

```
a= 1; α1= γ1; α2= γ2; α= α1; m= i2; n= i3; ctghal= Rationalize[Coth[α1], 10-8];  
cschal= Rationalize[Csch[α1], 10-8]; sinh1= Rationalize[Sinh[α1], 10-8];  
cosh1= Rationalize[Cosh[α1], 10-8]; sinh2a1= Rationalize[Sinh[2 α1], 10-8];  
cosh2a1= Rationalize[Cosh[2 α1], 10-8]; sinh2a2= Rationalize[Sinh[2 α2], 10-8];  
cosh2a2= Rationalize[Cosh[2 α2], 10-8];
```

Cálculo de valores de los coeficientes de las sumas finitas de las expresiones de los componentes del corchete de Lie.

```
For[k= 1, k< long, k++, ind= m-n-4+k; b1[ind]= Rationalize[fk[α], 10-8];  
For[k= 1, k< long, k++, ind= m+n-4+k; b2[ind]= Rationalize[gk[α], 10-8];  
For[k= 1, k< long, k++, ind= m-n-4+k; c1[ind]= Rationalize[f3k[α], 10-8];  
For[k= 1, k< long, k++, ind= m+n-4+k; c2[ind]= Rationalize[g3k[α], 10-8];
```

Cálculo de valores de los coeficientes de las series infinitas de las expresiones de los componentes del corchete de Lie.

Bq de acuerdo a fórmula (4.36)

```
For[q= 1, q< numterm, q++, If[-q< m-n-3 || -q> m-n+3, b1[-q]= 0];  
If[q< m-n-3 || q> m-n+3, b1[q]= 0];  
Bq[q]=  
Sum[b1[k] (Rationalize[-e-Abs[(q-k) α1], 10-8] (Abs[(q+k)] + ctghal) +  
Rationalize[e-Abs[(q-k) α1], 10-8] (Abs[(q-k)] + ctghal)), {k, m-n-3, m-n+3}] +  
ctghal b1[-q] - ctghal b1[q];
```

B'q de acuerdo a fórmula (4.37)

```
For[q= 1, q< numterm, q++, If[q< m+n-3 || q> m+n+3, b2[q]= 0];  
Bqp[q]=  
Sum[b2[k] (Rationalize[-e-Abs[(q-k) α1], 10-8] (Abs[(q+k)] + ctghal) +  
Rationalize[e-Abs[(q-k) α1], 10-8] (Abs[(q-k)] + ctghal)), {k, m+n-3, m+n+3}] - ctghal b2[q];
```

Serie de Fourier truncada para el componente L1 del corchete de lie de acuerdo a fórmula (4.35).

```
lie2 =
Expand[
cschal2
(-ctghal (Sum[b1[k] Sin[kβ], {k, m - n - 3, m - n + 3}] + Sum[b2[k] Sin[kβ], {k, m + n - 3, m + n + 3}]) +
Sum[(Bq[q] + Bqp[q]) Sin[qβ], {q, 1, numterm}])];
```

Γq y Γ_0 de acuerdo a fórmulas (4.39) y (4.40).

```
For[q = 1, q < numterm, q++, If[-q < m - n - 3 || -q > m - n + 3, c1[-q] = 0];
If[q < m - n - 3 || q > m - n + 3, c1[q] = 0];
rq[q] =
Sum[
c1[k] (Rationalize[e-Abs[(q+k)α1], 10-8] (Abs[(q+k)] + ctghal) +
Rationalize[e-Abs[(q-k)α1], 10-8] (Abs[(q-k)] + ctghal)), {k, m - n - 3, m - n + 3}] -
ctghal c1[-q] - ctghal c1[q]; If[Head[c1[0]] == c1, c1[0] = 0];
rq[0] = Sum[c1[k] (Rationalize[e-Abs[k]α1], 10-8] (Abs[k] + ctghal)), {k, m - n - 3, m - n + 3}] - ctghal c1[0];
```

$\Gamma' q$ y Γ'_0 de acuerdo a fórmulas (4.41) y (4.42).

```
For[q = 1, q < numterm, q++, If[q < m + n - 3 || q > m + n + 3, c2[q] = 0];
rqp[q] =
Sum[
c2[k] (Rationalize[e-Abs[(q+k)α1], 10-8] (Abs[(q+k)] + ctghal) +
Rationalize[e-Abs[(q-k)α1], 10-8] (Abs[(q-k)] + ctghal)), {k, m + n - 3, m + n + 3}] - ctghal c2[q];
rqp[0] = Sum[c2[k] (Rationalize[e-Abs[k]α1], 10-8] (Abs[k] + ctghal)), {k, m + n - 3, m + n + 3}];
```

Serie de Fourier truncada para el componente L2 del corchete de lie de acuerdo a fórmula (4.38).

```
lie1 =
Expand[
cschal2
(-ctghal (Sum[c1[k] Cos[kβ], {k, m - n - 3, m - n + 3}] + Sum[c2[k] Cos[kβ], {k, m + n - 3, m + n + 3}]) +
 $\frac{rq[0] + rqp[0]}{2}$  + Sum[(rq[q] + rqp[q]) Cos[qβ], {q, 1, numterm}])];
```

Extracción de coeficientes a_k de la serie de Fourier de L2 y serie para fórmulas (4.21).

```
sumb = 0; a1 = 0; a2 = 0;
If[Length[lie1] = 0, a0 = lie1];
If[Head[lie1] == Times, a0 = 0; k = Coefficient[lie1[[2]][[1]], β]; a_k = lie1[[1]];
If[k > 1, sumb = sumb + a_k Rationalize[Exp[-kα1], 10-8]];
If[Head[lie1[[1]]] == Times, a0 = 0; inicio = 1; a0 = lie1[[1]]; inicio = 2;];
For[j = inicio, j < Length[lie1], j++, k = Coefficient[lie1[[j]][[2]][[1]], β];
a_k = lie1[[j]][[1]]; If[k > 1, sumb = sumb + a_k Rationalize[Exp[-kα1], 10-8]];];];
```

Extracción de coeficientes d_1 para fórmula (4.19).

```
If[Length[lie2] > 0, If[Head[lie2] == Times, uno = Coefficient[lie2[[2]][[1]], β];
If[uno = 1, d1 = lie2[[1]], d1 = 0];, uno = Coefficient[lie2[[1]][[2]][[1]], β];
If[uno = 1, d1 = Coefficient[lie2[[1]], Sin[β]], d1 = 0];, d1 = 0];
```

Cálculo de coeficientes b_1^0, b_2^0 de acuerdo con fórmulas (4.21).

$$b01 = a \operatorname{cschal} a_0 \operatorname{Rationalize}[\operatorname{Exp}[-\alpha 1], 10^{-15}] + a \operatorname{cschal} a_1 + a \operatorname{cschal} (a_1 \operatorname{Rationalize}[\operatorname{Exp}[-2 \alpha 1], 10^{-15}] + 2 \operatorname{cschal} \operatorname{sumb});$$

b02 =

$$\frac{1}{2} (a \operatorname{cschal} a_0 \operatorname{Rationalize}[\operatorname{Exp}[-2 \alpha 1], 10^{-15}] + a \operatorname{cschal} a_2 + a \operatorname{cschal} (a_1 \operatorname{Rationalize}[\operatorname{Exp}[-3 \alpha 1], 10^{-15}] + a_2 \operatorname{Rationalize}[\operatorname{Exp}[-4 \alpha 1], 10^{-15}] + a_1 \operatorname{Rationalize}[\operatorname{Exp}[-\alpha 1], 10^{-15}] + 2 \operatorname{cosh} 2a \operatorname{sumbb}));$$

Cálculo de coeficientes b_1^1, f_1 de acuerdo con fórmulas (4.19) y (4.20).

$$b1p = \frac{b01}{a} \operatorname{cosh} a - \frac{b02}{2a}; \phi 1 = -d_1 + \frac{b01 \operatorname{sinh} a}{a};$$

Cálculo de coeficiente de holonomía B^1 , de acuerdo con fórmula (4.18).

Bp1 =

$$\begin{aligned} & - (2 b1p \operatorname{cosh} 2a1 \operatorname{cosh} 2a2 - 2 \alpha 2 \phi 1 \operatorname{cosh} 2a1 \operatorname{cosh} 2a2 - 2 b1p \operatorname{cosh} 2a2^2 + 2 \alpha 1 \phi 1 \operatorname{cosh} 2a2^2 + \\ & 4 b1p \alpha 2 \operatorname{cosh} 2a2 \operatorname{sinh} 2a1 - \phi 1 \operatorname{cosh} 2a2 \operatorname{sinh} 2a1 - 4 b1p \alpha 2 \operatorname{cosh} 2a1 \operatorname{sinh} 2a2 + \phi 1 \operatorname{cosh} 2a1 \operatorname{sinh} 2a2 - \\ & 2 b1p \operatorname{sinh} 2a1 \operatorname{sinh} 2a2 + 2 \alpha 2 \phi 1 \operatorname{sinh} 2a1 \operatorname{sinh} 2a2 + 2 b1p \operatorname{sinh} 2a2^2 - 2 \alpha 1 \phi 1 \operatorname{sinh} 2a2^2) / \\ & (2 (\operatorname{cosh} 2a1^2 - 2 \operatorname{cosh} 2a1 \operatorname{cosh} 2a2 + \operatorname{cosh} 2a2^2 + 2 \alpha 1 \operatorname{cosh} 2a2 \operatorname{sinh} 2a1 - 2 \alpha 2 \operatorname{cosh} 2a2 \operatorname{sinh} 2a1 - \\ & \operatorname{sinh} 2a1^2 - 2 \alpha 1 \operatorname{cosh} 2a1 \operatorname{sinh} 2a2 + 2 \alpha 2 \operatorname{cosh} 2a1 \operatorname{sinh} 2a2 + 2 \operatorname{sinh} 2a1 \operatorname{sinh} 2a2 - \operatorname{sinh} 2a2^2)); \end{aligned}$$

Reinicializaciones y cierre de ciclos de iteración.

```

tras = Join[tras, {N[Bp1]}]; m =.; n =.; a =.; \alpha =.; \alpha 1 =.; \alpha 2 =.; \alpha n =.; \alpha m =.; Bn =.; Bm =.;
Cn =.; Cm =.; Dn =.; Dm =.; Fn[\alpha_] =.; Fm[\alpha_] =.; ClearAll[b1]; ClearAll[b2];
ClearAll[c1]; ClearAll[c2]; ClearAll[rq]; ClearAll[rqp]; ClearAll[sq]; ClearAll[sqp];
lie1 =.; lie2 =.; b01 =.; b02 =.; b1p =.; \phi 1 =.; Bp1 =.;]; matras = Append[matras, tras];
Print[" m = ", i2];]; \gamma 1 =.; \gamma 2 =.; stream[i1] = OpenWrite[temp[i1]]; Write[stream[i1], matras];
Close[stream[i1]];];

```


APÉNDICE IV.10

EFICIENCIAS CASO BIDIMENSIONAL NO ACOTADO

En este apéndice se presenta la solución al problema de micronatación que consiste en encontrar la eficiencia de un círculo que se traslada en un fluido no acotado utilizando estrategias de natación tanto tangenciales como transversales.

Para determinar las extensiones de Stokes correspondientes se utiliza la solución dada por A. Shapere y F. Wilczek (en adelante citado como S&W) en [33]. Para calcular el vector de esfuerzo se utilizan los resultados de [68].

La solución de la ecuación general de curvatura (ver II.8, ec. 2.10b):

$$F_{mn} = \int_{\partial S} A(L) dS$$

en donde:

$$L = [v_m^h, v_n^h]$$

es el corchete de Lie de las partes horizontales de los modos de oscilación v_n, v_m y el operador A es la 1-forma de la conexión de Stokes, se encontró calculando el factor constante de la expansión en serie de Fourier de L . La justificación de este método radica en que dicho termino constante es el mismo tanto en la expansión en serie como en la extensión de Stokes \hat{L} correspondiente a L . De acuerdo a la teoría de micronatación bidimensional, el coeficiente constante de \hat{L} es igual a la cantidad de traslación del nadador [33, 68].

Deformaciones Tangenciales en el Nadador Circular No Acotado.-

Una base conveniente para expresar estas deformaciones es:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cos}(n\theta) \\ \text{Sen}(n\theta) \end{array} \right\} \hat{e}_\theta$$

en donde:

$$\hat{e}_\theta = ie^{i\theta}$$

es el vector unitario tangencial y $n > 0$.

Caso $\text{Sen}(n\theta)$:

Condiciones de Frontera.-

Aquí se tiene que:

$$ie^{i\theta} \text{Sen}(n\theta) = i(\text{Cos}(\theta) + i\text{Sen}(\theta)) \text{Sen}(n\theta) = i\text{Cos}(\theta) \text{Sen}(n\theta) - \text{Sen}(\theta) \text{Sen}(n\theta)$$

Como:

$$\begin{array}{l} \mathbf{I} \text{Exp}[\mathbf{I}\theta] \text{Sin}[n\theta] \\ \mathbf{i} e^{i\theta} \text{Sin}[n\theta] \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \text{ComplexExpand[\%]} \\
& i \cos[\theta] \sin[n\theta] - \sin[\theta] \sin[n\theta] \\
& \text{TrigReduce[\%]} \\
& \frac{1}{2} (-\cos[\theta - n\theta] + \cos[\theta + n\theta] - i \sin[\theta - n\theta] + i \sin[\theta + n\theta]) \\
& \text{TrigToExp[\%]} \\
& -\frac{1}{2} e^{i\theta - i n\theta} + \frac{1}{2} e^{i\theta + i n\theta} \\
& \text{Map[Factor, \%, 10]} \\
& -\frac{1}{2} e^{-i(1-n)\theta} + \frac{1}{2} e^{i(1+n)\theta}
\end{aligned}$$

entonces, la condición de frontera para el campo de velocidades \bar{v} sobre el círculo unitario, es:

$$\bar{v}(s) = -\frac{1}{2} e^{i(1-n)\theta} + \frac{1}{2} e^{i(1+n)\theta} \dots (1)$$

con $s = e^{i\theta}$. Es decir que, de la expresión general en serie de Fourier para la condición de frontera:

$$\bar{v}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k s^{k+1}$$

solo sobreviven dos términos, los correspondientes a:

$$k+1=1-n \Rightarrow k=-n \quad \text{y} \quad k+1=1+n \Rightarrow k=n$$

por lo tanto:

$$v_{-n} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{2}$$

Extensión de Stokes.-

De acuerdo con S&W, la solución general completa del problema de Stokes en términos de la expresión de Goursat:

$$\bar{v}(s) = \varphi_1(s) - \overline{s\varphi_1'(s)} + \overline{\varphi_2(s)}$$

es:

$$\left. \begin{aligned}
a_k &= v_k \quad (k < 0) \\
b_{-2} &= \bar{v}_0 \\
b_k &= \bar{v}_{-k-2} + (k+3)v_{k+2} \quad (k < -2)
\end{aligned} \right\} \dots (2)$$

siendo:

$$\varphi_1(s) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k s^{k+1} \quad ; \quad \varphi_2(s) = \sum_{k=-2}^{-\infty} b_k s^{k+1}$$

los potenciales de Goursat.

Supóngase que $n \neq 0$, entonces:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -n \\ -\frac{1}{2} & \text{si } k = -n \end{cases}$$

por lo tanto:

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{2} z^{-n+1} \quad n > 0$$

si $k < -2$ entonces $v_{-k-2} = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$ y así:

$$v_{-k-2} = \begin{cases} 0 & \text{si } -k-2 \neq n \\ \frac{1}{2} & \text{si } -k-2 = n \Rightarrow k = -n-2 \end{cases}$$

y:

$$v_{k+2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k+2 \neq -n \\ -\frac{1}{2} & \text{si } k+2 = -n \Rightarrow k = -n-2 \end{cases}$$

En consecuencia, de acuerdo con (2):

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -n-2 \quad (n > 0) \\ \frac{1}{2} + (-n+1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2} & \text{si } k = -n-2 \quad (n > 0) \end{cases}$$

y entonces:

$$\varphi_2(z) = b_{-n-2} z^{-n-1} = \frac{n}{2} z^{-n-1} \quad \text{si } n > 0$$

Por lo tanto, el campo de velocidades es:

$$\begin{aligned} \vec{v}(z, \bar{z}) &= \varphi_1(z) - z \overline{\varphi_1'(z)} + \varphi_2(z) \\ &= -\frac{1}{2} z^{1-n} + \frac{1}{2} (1-n) z \bar{z}^{-n} + \frac{1}{2} n \bar{z}^{-n-1} \end{aligned}$$

y se comprueba que el campo de velocidades obtenido satisface la condición de frontera:

$$\text{FullSimplify[PowerExpand[Expand[v /. {w \to Exp[-I \theta], z \to Exp[I \theta]}]]] \\ i e^{i \theta} \text{Sin}[n \theta]$$

Puesto que tanto φ_1 como φ_2 no tienen singularidades en el infinito y $b_{-1} = 0$ entonces la fuerza y torca totales en la frontera del nadador son ambas cero, por lo que la extensión de Stokes obtenida es ya horizontal [68].

Corchete de Lie.-

La expresión general es:

$$[\bar{v}_m, \bar{v}_n] = \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial z} \bar{v}_m + \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial \bar{z}} \bar{v}_n - \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial z} \bar{v}_n - \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial \bar{z}} \bar{v}_m$$

Para dos modos $0 < m < n$.

$$\bar{v}_m = -\frac{1}{2} z^{1-m} + \frac{1}{2} (1-m) z \bar{z}^{-m} + \frac{1}{2} m \bar{z}^{-m-1}$$

$$\bar{v}_n = -\frac{1}{2} z^{1-n} + \frac{1}{2} (1-n) z \bar{z}^{-n} + \frac{1}{2} n \bar{z}^{-n-1}$$

Aplicando la formula correspondiente y realizando algunas simplificaciones algebraicas automáticamente se llega a que la restricción del corchete de Lie a la frontera S , $[\bar{v}_m, \bar{v}_n]_S$, es:

$$-\frac{1}{4} e^{-i(-1+m-n)\theta} e^m + \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} e^m + \frac{1}{4} e^{-i(-1+m+n)\theta} e^{-m} - \frac{1}{4} e^{i(1+m+n)\theta} e^{-m} - \frac{1}{4} e^{-i(-1+m-n)\theta} e^{-n} + \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} e^{-n} - \frac{1}{4} e^{-i(-1+m+n)\theta} e^{-n} + \frac{1}{4} e^{i(1+m+n)\theta} e^{-n}$$

Hay un término constante sii:

$$m - n = -1$$

y proviene de:

$$\frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} e^m + \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} e^{-n}$$

y es:

$$\frac{m}{4} + \frac{n}{4} = \frac{m+n}{4}$$

Fuerza.-

El vector de esfuerzo en $z \in \mathbb{C}$ es:

$$\vec{f} = 4\mu \operatorname{Re}\{\varphi_1'\} \bar{n} - 2\mu (z \bar{\varphi}_1'' - \bar{\varphi}_2') \bar{n} = 2\mu [(\varphi_1' + \bar{\varphi}_1') \bar{n} - (z \bar{\varphi}_1'' - \bar{\varphi}_2') \bar{n}]$$

Siendo la normal $\bar{n} = e^{i\theta}$ e introduciendo las expresiones para los potenciales de Goursat de cada caso se obtiene la correspondiente fuerza unitaria.

$$f_{za} = 2\mu ((d\phi_1 \operatorname{Exp}[I\theta] + d\phi_1 c \operatorname{Exp}[I\theta]) - (z d\phi_1 c - d\phi_2 c) \operatorname{Exp}[-I\theta])$$

$$2 \left(-\frac{1}{2} e^{i\theta} (1-n) w^{-n} - \frac{1}{2} e^{i\theta} (1-n) z^{-n} - e^{-i\theta} \left(-\frac{1}{2} (-1-n) n w^{-2-n} + \frac{1}{2} (1-n) n w^{-1-n} z \right) \right) \mu$$

Sobre la frontera S del nadador la expresión anterior se reduce a:

$$e^{-i(-1+n)\theta} (-1+n - e^{2in\theta} (1+n)) \mu$$

Potencia.-

Por definición:

$$P = \int_s \vec{v} \cdot \vec{f} d\theta$$

Recordando que:

$$\vec{v} \cdot \vec{f} = \text{Re}\{\bar{v} \vec{f}\} = \frac{1}{2}(\bar{v} \vec{f} + v \bar{f})$$

Calculando este producto punto, restringiéndolo después a la frontera del nadador, integrando con respecto al ángulo θ y simplificando se obtiene:

$$P = 2n\pi\mu$$

Eficiencia.-

La eficiencia "naive" de la estrategia de natación que resulta de acoplar los modos m y n es:

$$\eta = \frac{|F_{mn}|}{2\pi(P_m + P_n)}$$

siendo F_{mn} , la curvatura asociado a dichos modos y que es igual a los términos constantes de $[\vec{v}_1, \vec{v}_2]_s$ obtenidos previamente.

Supóngase $0 < m < n$ y $n = m+1$, entonces:

$$\eta = \frac{\frac{|m+n|}{4}}{2\pi(2\pi\mu m + 2\pi\mu n)} = \frac{\frac{m+n}{4}}{4\pi^2\mu(m+n)} = \frac{1}{16\pi^2\mu}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{\frac{m \cdot n}{4}}{2\pi(2\pi\mu m + 2\pi\mu n)}, \{m, n\} \in \text{Integers} \ \&\& \ m > 0 \ \&\& \ n > 0 \ \&\& \ m < n\right]$$

$$\frac{1}{16\pi^2\mu}$$

que con $\mu = 0.01$ vale 0.633.

Caso $\text{Cos}(n\theta)$:

Condiciones de Frontera.-

Aquí se tiene que:

$$ie^{i\theta} \text{Cos}(n\theta) = i(\text{Cos}(\theta) + i\text{Sen}(\theta))\text{Cos}(n\theta) = i\text{Cos}(\theta)\text{Cos}(n\theta) - \text{Sen}(\theta)\text{Cos}(n\theta)$$

Como:

$$\begin{aligned} & \text{I Exp[I } \theta] \text{ Cos[n } \theta] \\ & i e^{i\theta} \text{Cos[n } \theta] \\ & \text{ComplexExpand[\%]} \\ & i \text{Cos}[\theta] \text{Cos[n } \theta] - \text{Cos}[\theta] \text{Sin[n } \theta] \\ & \text{TrigReduce[\%]} \\ & \frac{1}{2} i (\text{Cos}[\theta - n\theta] + \text{Cos}[\theta + n\theta] + i \text{Sin}[\theta - n\theta] + i \text{Sin}[\theta + n\theta]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{TrigToExp}[\%] \\ & \frac{1}{2} i e^{i\theta - i n \theta} + \frac{1}{2} i e^{i\theta + i n \theta} \\ & \text{Map}[\text{Factor}, \%, 10] \\ & \frac{1}{2} i e^{-i(-1+n)\theta} + \frac{1}{2} i e^{i(1+n)\theta} \end{aligned}$$

entonces, la condición de frontera para el campo de velocidades \bar{v} sobre el círculo unitario, es:

$$\bar{v}(s) = \frac{i}{2} e^{i(1-n)\theta} + \frac{i}{2} e^{i(1+n)\theta} \dots (3)$$

Es decir que, de la expresión general en serie de Fourier para la condición de frontera:

$$\bar{v}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k s^{k+1}$$

con $s = e^{i\theta}$, solo sobreviven dos términos, los correspondientes a:

$$k+1 = 1-n \Rightarrow k = -n \quad \text{y} \quad k+1 = 1+n \Rightarrow k = n$$

por lo tanto:

$$v_n = v_{-n} = \frac{i}{2}$$

Extensión de Stokes.-

Supóngase que $n \neq 0$, entonces:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -n \\ \frac{i}{2} & \text{si } k = -n \end{cases}$$

por lo tanto:

$$\varphi_1(z) = \frac{i}{2} z^{-n+1} \quad n > 0$$

si $k < -2$ entonces $v_{-k-2} = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$ y así:

$$v_{-k-2} = \begin{cases} 0 & \text{si } -k-2 \neq n \\ \frac{i}{2} & \text{si } -k-2 = n \Rightarrow k = -n-2 \end{cases}$$

y:

$$v_{k+2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k+2 \neq -n \\ \frac{i}{2} & \text{si } k+2 = -n \Rightarrow k = -n-2 \end{cases}$$

En consecuencia, de acuerdo con (2):

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -n-2 \quad (n > 0) \\ \frac{i}{2} + (-n+1)\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{i}{2} + (-n+1)\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{ni}{2} & \text{si } k = -n-2 \quad (n > 0) \end{cases}$$

y entonces:

$$\varphi_2(z) = b_{-n-2} z^{-n-1} = -\frac{ni}{2} z^{-n-1} \quad \text{si } n > 0$$

Por lo tanto, el campo de velocidades es:

$$\begin{aligned} \bar{v}(z, \bar{z}) &= \varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\varphi_2(z)} \\ &= \frac{1}{2} iz^{1-n} + \frac{1}{2} i(1-n)z\bar{z}^{-n} + \frac{1}{2} in\bar{z}^{-n-1} \end{aligned}$$

y se comprueba que el campo de velocidades obtenido satisface la condición de frontera:

$$\text{FullSimplify[PowerExpand[Expand[v /. {w \to Exp[-I \theta], z \to Exp[I \theta]}]]] \\ i e^{i \theta} \text{Cos}[n \theta]$$

De nuevo, dada la forma de los potenciales de Goursat se concluye que no tienen singularidades en el infinito, y puesto que la solución encontrada para φ_2 solo es válida si $n > 0$ entonces el coeficiente $b_{-1} = 0$ y por lo tanto la fuerza y torca totales sobre la frontera del nadador son igualmente cero, lo que implica que la extensión de Stokes obtenida es un campo horizontal.

Corchete de Lie.-

Para dos modos $0 < m < n$:

$$\begin{aligned} \bar{v}_m &= \frac{1}{2} iz^{1-m} + \frac{1}{2} i(1-m)z\bar{z}^{-m} + \frac{1}{2} in\bar{z}^{-m-1} \\ \bar{v}_n &= \frac{1}{2} iz^{1-n} + \frac{1}{2} i(1-n)z\bar{z}^{-n} + \frac{1}{2} in\bar{z}^{-n-1} \end{aligned}$$

Aplicando la definición de corchete de Lie y realizando simplificaciones algebraicas automáticas, se llega a que la restricción del corchete de Lie a la frontera S , $[\bar{v}_m, \bar{v}_n]_S$, es:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} e^{-i(-1+m-n)\theta} \vartheta_m + \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} \vartheta_m - \frac{1}{4} e^{-i(-1+m+n)\theta} \vartheta_m + \frac{1}{4} e^{i(1+m+n)\theta} \vartheta_m - \\ \frac{1}{4} e^{-i(-1+m-n)\theta} \vartheta_n + \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} \vartheta_n + \frac{1}{4} e^{-i(-1+m+n)\theta} \vartheta_n - \frac{1}{4} e^{i(1+m+n)\theta} \vartheta_n \end{aligned}$$

Hay un término constante sii:

$$m - n = -1$$

y proviene de:

$$\frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} m + \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} n$$

y es:

$$\frac{m}{4} + \frac{n}{4} = \frac{m+n}{4}$$

Fuerza.-

Introduciendo las expresiones para los potenciales de Goursat, se tiene que la fuerza unitaria es ($w = \bar{z}$)

$$fza = 2\mu \left((d\phi_1 \text{Exp}[I\theta] + d\phi_1 c \text{Exp}[I\theta]) - (z d\phi_1 c - d\phi_2 c) \text{Exp}[-I\theta] \right) \\ 2 \left(-\frac{1}{2} i e^{i\theta} (1-n) w^{-n} + \frac{1}{2} i e^{i\theta} (1-n) z^{-n} - e^{-i\theta} \left(-\frac{1}{2} i (-1-n) n w^{-2-n} + \frac{1}{2} i (1-n) n w^{-1-n} z \right) \right) \mu$$

Sobre la frontera S del nadador la expresión anterior se reduce a:

$$-i e^{-i(-1+n)\theta} (-1+n + e^{2in\theta} (1+n)) \mu$$

Potencia.-

Por definición:

$$P = \int_S \vec{v} \cdot \vec{f} d\theta$$

Recordando que:

$$\vec{v} \cdot \vec{f} = \text{Re} \left\{ \bar{v} \vec{f} \right\} = \frac{1}{2} \left(\bar{v} \vec{f} + \vec{v} \bar{\vec{f}} \right)$$

Calculando este producto punto, restringiéndolo después a la frontera del nadador, integrando con respecto al ángulo θ y simplificando se obtiene que, para $n \in \mathbb{Z}$:

$$P = 2n\pi\mu$$

Eficiencia.-

La eficiencia "naive" de la estrategia de natación que resulta de acoplar los modos m y n es:

$$\eta = \frac{F_{mn}}{2\pi(P_m + P_n)}$$

siendo F_{mn} , la curvatura asociado a dichos modos y que es igual a los términos constantes de $[\bar{v}_m, \bar{v}_n]_S$ obtenidos previamente. Supóngase $0 < m < n$ y $n = m+1$, entonces:

$$\eta = \frac{\frac{m+n}{4}}{2\pi(2\pi\mu m + 2\pi\mu n)} = \frac{m+n}{16\pi^2\mu(m+n)} = \frac{1}{16\pi^2\mu}$$

FullSimplify[$\frac{\frac{m+n}{4}}{2\pi(2\pi\mu m + 2\pi\mu n)}$, {m, n} ∈ Integers && m > 0 && n > 0 && m < n]

$$\frac{1}{16\pi^2\mu}$$

que con $\mu = 0.01$ vale 0.633.

Caso $\text{Sen}(m\theta)\text{Cos}(n\theta)$:

Con los campos de velocidad obtenidos previamente se tiene que:

$$\begin{aligned}\bar{v}_m &= -\frac{1}{2}z^{1-m} + \frac{1}{2}(1-m)z\bar{z}^{-m} + \frac{1}{2}m\bar{z}^{-m-1} \\ \bar{v}_n &= \frac{1}{2}iz^{1-n} + \frac{1}{2}i(1-n)z\bar{z}^{-n} + \frac{1}{2}in\bar{z}^{-n-1}\end{aligned}$$

El corchete de Lie restringido a S es ahora:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}ie^{-i(-1+m-n)\theta}m - \frac{1}{4}ie^{i(1+m-n)\theta}m - \frac{1}{4}ie^{-i(-1+m+n)\theta}m - \frac{1}{4}ie^{i(1+m+n)\theta}m - \\ \frac{1}{4}ie^{-i(-1+m-n)\theta}n - \frac{1}{4}ie^{i(1+m-n)\theta}n + \frac{1}{4}ie^{-i(-1+m+n)\theta}n + \frac{1}{4}ie^{i(1+m+n)\theta}n\end{aligned}$$

Supóngase $1 < m < n \in \mathbb{N}$. Entonces hay términos constantes en la expresión anterior, sii:

$$m - n = -1$$

que provienen de:

$$-\frac{1}{4}ie^{i(1+m-n)\theta}m - \frac{1}{4}ie^{i(1+m-n)\theta}n$$

y es:

$$-\frac{im}{4} - \frac{in}{4} = -\frac{i}{4}(m+n)$$

Eficiencia.-

Introduciendo los resultados anteriores en la fórmula:

$$\eta = \frac{|F_{mn}|}{2\pi(P_m + P_n)}$$

se tiene, con $m - n = -1$:

$$\eta = \frac{\left| -\frac{i}{4}(m+n) \right|}{2\pi(2\mu\pi m + 2\mu\pi n)} = \frac{\frac{1}{4}(m+n)}{4\mu\pi^2(m+n)} = \frac{1}{16\mu\pi^2}$$

Deformaciones Radiales en el Nadador Circular No Acotado.-

Una base conveniente para expresar estas deformaciones es:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cos}(n\theta) \\ \text{Sen}(n\theta) \end{array} \right\} \hat{e}_r$$

en donde:

$$\hat{e}_r = e^{i\theta}$$

es el vector unitario tangencial y $n > 0$.

Caso $\text{Sen}(n\theta)$:

Condiciones de Frontera.-

Aquí se tiene que:

$$e^{i\theta} \text{Sen}(n\theta) = (\text{Cos}(\theta) + i\text{Sen}(\theta)) \text{Sen}(n\theta) = \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(n\theta) + i\text{Sen}(\theta) \text{Sen}(n\theta)$$

Como:

$$\begin{aligned} & \text{Exp}[I\theta] \text{Sin}[n\theta] \\ & e^{i\theta} \text{Sin}[n\theta] \\ & \text{ComplexExpand}[\%] \\ & \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[n\theta] + i \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[n\theta] \\ & \text{TrigReduce}[\%] \\ & \frac{1}{2} i (\text{Cos}[\theta - n\theta] - \text{Cos}[\theta + n\theta] + i \text{Sin}[\theta - n\theta] - i \text{Sin}[\theta + n\theta]) \\ & \text{TrigToExp}[\%] \\ & \frac{1}{2} i e^{i\theta - in\theta} - \frac{1}{2} i e^{i\theta + in\theta} \\ & \text{Map}[\text{Factor}, \%, 10] \\ & \frac{1}{2} i e^{-i(1-n)\theta} - \frac{1}{2} i e^{i(1+n)\theta} \end{aligned}$$

entonces, la condición de frontera para el campo de velocidades \vec{v} sobre el círculo unitario, es:

$$\vec{v}(s) = \frac{1}{2} i e^{i(1-n)\theta} - \frac{1}{2} i e^{i(1+n)\theta} \dots (1)$$

Con. Es decir que, de la expresión general en serie de Fourier para la condición de frontera:

$$\vec{v}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k s^{k+1}$$

solo sobreviven dos términos, los correspondientes a:

$$k+1 = 1-n \Rightarrow k = -n \quad \text{y} \quad k+1 = n+1 \Rightarrow k = n$$

por lo tanto:

$$v_{-n} = \frac{i}{2} ; v_n = -\frac{i}{2}$$

Extensión de Stokes.-

De acuerdo con S&W, la solución general completa del problema de Stokes en términos de la expresión de Goursat:

$$\bar{v}(s) = \varphi_1(s) - \overline{s\varphi_1'(s)} + \overline{\varphi_2(s)}$$

es:

$$\left. \begin{aligned} a_k &= v_k \quad (k < 0) \\ b_{-2} &= \bar{v}_0 \\ b_k &= \bar{v}_{-k-2} + (k+3)v_{k+2} \quad (k < -2) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

siendo:

$$\varphi_1(s) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k s^{k+1} ; \quad \varphi_2(s) = \sum_{k=-2}^{-\infty} b_k s^{k+1}$$

Supóngase $n > 0$, entonces:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -n \\ \frac{i}{2} & \text{si } k = -n \end{cases}$$

por lo tanto:

$$\varphi_1(z) = \frac{i}{2} z^{-n+1} \quad n > 0$$

Si $k < -2$ entonces $v_{-k-2} = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$ y así:

$$v_{-k-2} = \begin{cases} 0 & \text{si } -k-2 \neq n \\ -\frac{i}{2} & \text{si } -k-2 = n \Rightarrow k = -n-2 \end{cases}$$

y:

$$v_{k+2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k+2 \neq -n \\ \frac{i}{2} & \text{si } k+2 = -n \Rightarrow k = -n-2 \end{cases}$$

En consecuencia, de acuerdo con (2):

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -n-2 \quad (n > 0) \\ -\frac{i}{2} + (-n+1)\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{2} + (-n+1)\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{2}(2-n) & \text{si } k = -n-2 \quad (n > 0) \end{cases}$$

y entonces:

$$\varphi_2(z) = b_{-n-2} z^{-n-1} = \frac{i}{2}(2-n) z^{-n-1} \quad \text{si } n > 0$$

Por lo tanto, el campo de velocidades es:

$$\begin{aligned} \vec{v}(z, \bar{z}) &= \varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\varphi_2(z)} \\ &= \frac{1}{2} iz^{1-n} + \frac{1}{2} i(1-n) z\bar{z}^{-n} + \frac{1}{2} i(n-2) \bar{z}^{-n-1} \end{aligned}$$

y se comprueba que el campo de velocidades obtenido satisface la condición de frontera:

$$\text{FullSimplify[PowerExpand[Expand[v /. {w -> Exp[-I \theta], z -> Exp[I \theta]}]]] \\ e^{i \theta} \text{Sin}[n \theta]$$

Por las mismas razones explicadas en el caso tangencial, la extensión de Stokes obtenida es horizontal.

Corchete de Lie.-

La expresión general es:

$$[\vec{v}_m, \vec{v}_n] = \frac{\partial \vec{v}_n}{\partial z} \vec{v}_m + \frac{\partial \vec{v}_m}{\partial \bar{z}} \bar{\vec{v}}_n - \frac{\partial \vec{v}_m}{\partial z} \bar{\vec{v}}_n - \frac{\partial \vec{v}_n}{\partial \bar{z}} \vec{v}_m$$

Para dos modos $0 < m < n$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_m &= \frac{1}{2} iz^{1-m} + \frac{1}{2} i(1-m) z\bar{z}^{-m} + \frac{1}{2} i(m-2) \bar{z}^{-m-1} \\ \bar{\vec{v}}_n &= \frac{1}{2} iz^{1-n} + \frac{1}{2} i(1-n) z\bar{z}^{-n} + \frac{1}{2} i(n-2) \bar{z}^{-n-1} \end{aligned}$$

la restricción del corchete de Lie a la frontera S , $[\vec{v}_m, \vec{v}_n]_S$, es:

$$\begin{aligned} e^{i(1+m)n\theta} - e^{i(1-m)n\theta} - \frac{1}{4} e^{i(1+m)n\theta} m + \frac{1}{4} e^{i(1-m)n\theta} m - \frac{1}{4} e^{-i(-1+m)n\theta} m + \\ \frac{1}{4} e^{i(1+m)n\theta} m - \frac{1}{4} e^{i(1-m)n\theta} n + \frac{1}{4} e^{i(1-m)n\theta} n + \frac{1}{4} e^{-i(-1+m)n\theta} n - \frac{1}{4} e^{i(1+m)n\theta} n \end{aligned}$$

Hay un término constante sii:

$$m - n = -1$$

y proviene de:

$$e^{i(1+m-n)\theta} - \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} m - \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} n$$

y es:

$$1 - \frac{m}{4} - \frac{n}{4} = \frac{4 - m - n}{4}$$

Fuerza.-

Introduciendo las expresiones para los potenciales de Goursat, se tiene que la fuerza unitaria es ($w = \bar{z}$):

$$f_z = 2\mu \left((d\phi_1 \text{Exp}[I\theta] + d\phi_1 c \text{Exp}[I\theta]) - (z d\phi_1 c - d\phi_2 c) \text{Exp}[-I\theta] \right) \\ 2 \left(-\frac{1}{2} i e^{i\theta} (1-n) \bar{w}^n + \frac{1}{2} i e^{i\theta} (1-n) z^n - e^{-i\theta} \left(-\frac{1}{2} i (-1-n) (-2+n) \bar{w}^{2n} + \frac{1}{2} i (1-n) n w^{1-n} z \right) \right) \mu$$

Sobre la frontera S del nadador la expresión anterior se reduce a:

$$i e^{-i(-1+n)\theta} (1-n + e^{2in\theta} (1+n)) \mu$$

Potencia.-

Por definición:

$$P = \int_S \vec{v} \cdot \vec{f} d\theta$$

Recordando que:

$$\vec{v} \cdot \vec{f} = \text{Re} \left\{ \bar{v} \vec{f} \right\} = \frac{1}{2} \left(\bar{v} \vec{f} + \vec{v} \bar{\vec{f}} \right)$$

Calculando este producto punto, restringiéndolo después a la frontera del nadador, integrando con respecto al ángulo θ y simplificando se obtiene que, para $n \in \mathbb{Z}$:

$$P = 2n\pi\mu$$

Eficiencia.-

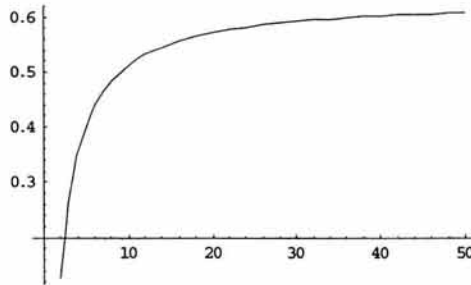
La eficiencia "naive" de la estrategia de natación que resulta de acoplar los modos m y n es:

$$\eta = \frac{|F_{mn}|}{2\pi(P_m + P_n)}$$

siendo F_{mn} , la curvatura asociado a dichos modos y que es igual a los términos constantes de $[\bar{v}_m, \bar{v}_n]_S$ obtenidos previamente. Supóngase $0 < m < n$ y $n = m+1$, entonces:

$$\eta = \frac{\left| \frac{4-m-n}{4} \right|}{2\pi(2\pi\mu m + 2\pi\mu n)} = \frac{|4-m-n|}{16\pi^2 \mu (m+n)}$$

Plot[ef /. n -> m + 1, {m, 2, 50}]



Caso $\text{Cos}(n\theta)$:

Condiciones de Frontera.-

Aquí se tiene que:

$$e^{i\theta} \text{Cos}(n\theta) = (\text{Cos}(\theta) + i\text{Sen}(\theta)) \text{Cos}(n\theta) = \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(n\theta) + i\text{Sen}(\theta) \text{Cos}(n\theta)$$

Como:

```

Exp[I*theta] Cos[n*theta]
e^{i*theta} Cos[n*theta]
ComplexExpand[%]
Cos[theta] Cos[n*theta] + i Cos[n*theta] Sin[theta]
TrigReduce[%]
1/2 (Cos[theta - n*theta] + Cos[theta + n*theta] + i Sin[theta - n*theta] + i Sin[theta + n*theta])
TrigToExp[%]
1/2 e^{i*theta - i*n*theta} + 1/2 e^{i*theta + i*n*theta}
Map[Factor, %, 10]
1/2 e^{-i*(-1*n)*theta} + 1/2 e^{i*(1*n)*theta}

```

entonces, la condición de frontera para el campo de velocidades \bar{v} sobre el círculo unitario, es:

$$\bar{v}(s) = \frac{1}{2} e^{i(1-n)\theta} + \frac{1}{2} e^{i(1+n)\theta} \dots (3)$$

Con. Es decir que, de la expresión general en serie de Fourier para la condición de frontera:

$$\bar{v}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k s^{k+1}$$

solo sobreviven dos términos, los correspondientes a:

$$k+1 = 1-n \Rightarrow k = -n \quad \text{y} \quad k+1 = n+1 \Rightarrow k = n$$

por lo tanto:

$$v_{-n} = \frac{1}{2} ; v_n = \frac{1}{2}$$

Extensión de Stokes.-

Supóngase que $n \neq 0$, entonces:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -n \\ \frac{1}{2} & \text{si } k = -n \end{cases}$$

por lo tanto:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2} z^{-n+1} \quad n > 0$$

si $k < -2$ entonces $v_{-k-2} = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$ y así:

$$v_{-k-2} = \begin{cases} 0 & \text{si } -k-2 \neq n \\ \frac{1}{2} & \text{si } -k-2 = n \Rightarrow k = -n-2 \end{cases}$$

y:

$$v_{k+2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k+2 \neq -n \\ \frac{1}{2} & \text{si } k+2 = -n \Rightarrow k = -n-2 \end{cases}$$

En consecuencia, de acuerdo con (2):

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -n-2 \quad (n > 0) \\ \frac{1}{2} + (-n+1) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + (-n+1) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2-n}{2} & \text{si } k = -n-2 \quad (n > 0) \end{cases}$$

y entonces:

$$\varphi_2(z) = b_{-n-2} z^{-n-1} = \left(\frac{2-n}{2}\right) z^{-n-1} \quad \text{si } n > 0$$

Por lo tanto, el campo de velocidades es:

$$\begin{aligned} \bar{v}(z, \bar{z}) &= \varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\varphi_2(z)} \\ &= \frac{1}{2} z^{1-n} - \frac{1}{2} (1-n) z \bar{z}^{-n} + \frac{2-n}{2} \bar{z}^{-n-1} \end{aligned}$$

y se comprueba que el campo de velocidades obtenido satisface la condición de frontera:

$$\text{FullSimplify[PowerExpand[Expand[v /. {w \to Exp[-I \theta], z \to Exp[I \theta]}]]]]$$

$$e^{1 \theta} \text{Cos}[n \theta]$$

y además, como ya se ha explicado, es también un campo horizontal.

Corchete de Lie.-

Para dos modos $0 < m < n$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_m &= \frac{1}{2} z^{1-m} - \frac{1}{2} (1-m) z\bar{z}^{-m} + \frac{2-m}{2} \bar{z}^{-m-1} \\ \vec{v}_n &= \frac{1}{2} z^{1-n} - \frac{1}{2} (1-n) z\bar{z}^{-n} + \frac{2-n}{2} \bar{z}^{-n-1} \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula previa para el corchete de Lie, su restricción a la frontera S , $[\vec{v}_m, \vec{v}_n]_S$, es:

$$\begin{aligned} e^{i(1+m-n)\theta} - e^{i(1-m-n)\theta} - \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} m + \frac{1}{4} e^{i(1-m-n)\theta} m + \frac{1}{4} e^{-i(-1+m-n)\theta} m - \\ \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} m - \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} n + \frac{1}{4} e^{i(1-m-n)\theta} n - \frac{1}{4} e^{-i(-1+m-n)\theta} n + \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} n \end{aligned}$$

Hay un término constante sii:

$$m - n = -1$$

y proviene de:

$$e^{i(1+m-n)\theta} - \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} m - \frac{1}{4} e^{i(1+m-n)\theta} n$$

y es:

$$1 - \frac{m}{4} - \frac{n}{4} = \frac{4 - m - n}{4}$$

Fuerza.-

Introduciendo las expresiones para los potenciales de Goursat, se tiene que la fuerza unitaria es ($w = \bar{z}$):

$$\begin{aligned} fza = 2\mu ((d\phi_1 \text{Exp}[I\theta] + d\phi_2 \text{Exp}[I\theta]) - (z d\phi_1 c - d\phi_2 c) \text{Exp}[-I\theta]) \\ 2 \left(\frac{1}{2} e^{i\theta} (1-n) w^{-n} + \frac{1}{2} e^{i\theta} (1-n) z^{-n} - e^{-i\theta} \left(-(-1-n) \left(1 - \frac{n}{2} \right) w^{-2-n} - \frac{1}{2} (1-n) n w^{-1-n} z \right) \right) \mu \end{aligned}$$

Sobre la frontera S del nadador la expresión anterior se reduce a:

$$-e^{-i(-1+n)\theta} (-1+n + e^{2in\theta} (1+n)) \mu$$

Potencia.-

Por definición:

$$P = \int_S \vec{v} \cdot \vec{f} d\theta$$

Recordando que:

$$\vec{v} \cdot \vec{f} = \text{Re}\{\bar{v} \vec{f}\} = \frac{1}{2}(\bar{v} \vec{f} + v \bar{f})$$

Calculando este producto punto, restringiéndolo después a la frontera del nadador, integrando con respecto al ángulo θ y simplificando se obtiene que, para $n \in \mathbb{Z}$:

$$P = 2n\pi\mu$$

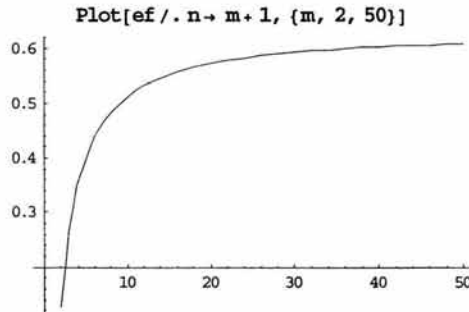
Eficiencia.-

La eficiencia "naive" de la estrategia de natación que resulta de acoplar los modos m y n es:

$$\eta = \frac{|F_{mn}|}{2\pi(P_m + P_n)}$$

siendo F_{mn} , la curvatura asociado a dichos modos y que es igual a los términos constantes de $[\vec{v}_m, \vec{v}_n]_S$ obtenidos previamente. Supóngase $0 < m < n$ y $n = m+1$, entonces:

$$\eta = \frac{\left| \frac{4-m-n}{4} \right|}{2\pi(2\pi\mu m + 2\pi\mu n)} = \frac{|4-m-n|}{16\pi^2\mu(m+n)}$$



Caso Sen(m θ)Cos(n θ):

Con los campos de velocidad obtenidos previamente se tiene que:

$$\vec{v}_m = \frac{1}{2}iz^{1-m} + \frac{1}{2}i(1-m)z\bar{z}^{-m} + \frac{1}{2}i(m-2)\bar{z}^{-m-1}$$

$$\vec{v}_n = \frac{1}{2}z^{1-n} - \frac{1}{2}(1-n)z\bar{z}^{-n} + \frac{2-n}{2}\bar{z}^{-n-1}$$

El corchete de Lie restringido a S es ahora:

$$\begin{aligned}
& -i e^{i(1+m-n)\theta} - i e^{i(1-m+n)\theta} + \frac{1}{4} i e^{i(1+m-n)\theta} m + \frac{1}{4} i e^{i(1-m+n)\theta} m + \\
& \frac{1}{4} i e^{-i(-1+m+n)\theta} m + \frac{1}{4} i e^{i(1+m+n)\theta} m + \frac{1}{4} i e^{i(1+m-n)\theta} n + \\
& \frac{1}{4} i e^{i(1-m+n)\theta} n - \frac{1}{4} i e^{-i(-1+m+n)\theta} n - \frac{1}{4} i e^{i(1+m+n)\theta} n
\end{aligned}$$

Supóngase $1 < m < n \in \mathbb{N}$. Entonces hay términos constantes en la expresión anterior, sii:

$$m - n = -1$$

que provienen de:

$$-i e^{i(1+m-n)\theta} + \frac{1}{4} i e^{i(1+m-n)\theta} m + \frac{1}{4} i e^{i(1+m-n)\theta} n$$

y es:

$$-i + \frac{im}{4} + \frac{in}{4} = -\frac{i}{4}(4 - m - n)$$

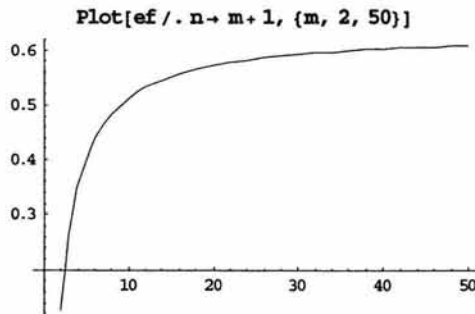
Eficiencia.-

Introduciendo los resultados anteriores en la fórmula:

$$\eta = \frac{|F_{mn}|}{2\pi(P_m + P_n)}$$

se tiene, con $m - n = -1$:

$$\eta = \frac{\left| -\frac{i}{4}(4 - m - n) \right|}{2\pi(2\mu\pi m + 2\mu\pi n)} = \frac{\frac{1}{4}|(4 - m - n)|}{4\mu\pi^2(m + n)} = \frac{|(4 - m - n)|}{16\mu\pi^2(m + n)}$$



Aquí se calcula la eficiencia, de acuerdo a (3.10), de distintos casos de deformaciones elementales del nadador circular en un fluido infinito. El método que se utilizó fue aplicar los resultados de curvatura y potencia dados en [S&W, S&W].

Curvaturas elementales.

Todos los casos de deformaciones bimodales aquí presentados se expresan en términos de los vectores básicos:

$$\sigma^{1-n} ; \sigma^{1+n}$$

por lo tanto resulta indispensable calcular los siguientes términos de curvatura elementales:

$$F[\sigma^{1-m}, \sigma^{1-n}], F[\sigma^{1-m}, \sigma^{1+n}], F[\sigma^{1+m}, \sigma^{1-n}], F[\sigma^{1+m}, \sigma^{1+n}]$$

Término $F[\sigma^{1-m}, \sigma^{1-n}]$.

La forma standart de los vectores básicos en [S&W] es: σ^{q+1} y σ^{p+1} . Aquí entonces se tiene: $p+1 = 1 - m \Rightarrow p = -m$ y $q + 1 = 1 - n \Rightarrow q = -n$. Las cuatro condiciones de curvatura no nula son:

$$\delta_{p+q,-1} ; \delta_{p-q,1} ; \delta_{p-q,-1} ; \delta_{p+q,1}$$

Suponiendo que $n > m > 0$ y $\{n, m\} \in \mathbb{Z}$ entonces:

- 1) $p+q = -1 = -m-n \Rightarrow n = 1-m$ Descartado.
- 2) $p-q = 1 = -m+n \Rightarrow n = 1+m$ Aceptado.
- 3) $p-q = -1 = -m+n \Rightarrow n = -1+m$ Descartado.
- 4) $p+q = 1 = -m-n \Rightarrow n = -1-m$ Descartado.

En el caso aceptado $\delta_{p-q,1}$ se tiene que:

$$F_{pq} = [-(q+1)\theta_q + (p+1)\theta_{-p}]$$

como, $q = -n$ entonces $q < 0$ y $\theta_q = 0$. Análogamente, como $p = -m$ entonces $p < 0$ y $\theta_{-p} = 1$.

En consecuencia:

$$F_{pq} = p + 1 = -m + 1 = F[\sigma^{1-m}, \sigma^{1-n}]$$

Término $F[\sigma^{1-m}, \sigma^{1+n}]$.

Aquí se tiene: $p+1 = 1 - m \Rightarrow p = -m$ y $q + 1 = 1 + n \Rightarrow q = n$. Entonces:

- 1) $p+q = -1 = -m+n \Rightarrow n = -1+m$ Descartado.
- 2) $p-q = 1 = -m-n \Rightarrow n = -1-m$ Descartado.
- 3) $p-q = -1 = -m-n \Rightarrow n = 1-m$ Descartado.
- 4) $p+q = 1 = -m+n \Rightarrow n = 1+m$ Aceptado.

En el caso aceptado $\delta_{p+q,1}$ se tiene que:

$$F_{pq} = [-(q+1)\theta_{-q} + (p+1)\theta_{-p}]$$

como, $q = n$ entonces $q > 0$ y $\theta_{-q} = 0$. Análogamente, como $p = -m$ entonces $p < 0$ y $\theta_{-p} = 1$.
En consecuencia:

$$F_{pq} = p + 1 = -m + 1 = F[\sigma^{1-m}, \sigma^{1+n}]$$

Término $F[\sigma^{1+m}, \sigma^{1-n}]$.

Aquí se tiene: $p+1 = 1 + m \Rightarrow p = m$ y $q + 1 = 1 - n \Rightarrow q = -n$. Entonces:

- 1) $p+q = -1 = m-n \Rightarrow n = 1+m$ Aceptado.
- 2) $p-q = 1 = m+n \Rightarrow n = 1 - m$ Descartado.
- 3) $p-q = -1 = m+n \Rightarrow n = -1 - m$ Descartado.
- 4) $p+q = 1 = m-n \Rightarrow n = -1+m$ Descartado.

En el caso aceptado $\delta_{p+q,-1}$ se tiene que:

$$F_{pq} = [(q + 1)\theta_{-q} - (p+1)\theta_{-p}]$$

como, $q = -n$ entonces $q < 0$ y $\theta_{-q} = 1$. Análogamente, como $p = m$ entonces $p > 0$ y $\theta_{-p} = 0$.
En consecuencia:

$$F_{pq} = q + 1 = -n + 1 = F[\sigma^{1+m}, \sigma^{1-n}]$$

Término $F[\sigma^{1+m}, \sigma^{1+n}]$.

Aquí se tiene: $p+1 = 1 + m \Rightarrow p = m$ y $q + 1 = 1 + n \Rightarrow q = n$. Entonces:

- 1) $p+q = -1 = m+n \Rightarrow n = -1-m$ Descartado.
- 2) $p-q = 1 = m-n \Rightarrow n = -1+m$ Descartado.
- 3) $p-q = -1 = m-n \Rightarrow n = 1 + m$ Aceptado.
- 4) $p+q = 1 = m+n \Rightarrow n = 1-m$ Descartado.

En el caso aceptado $\delta_{p-q,-1}$ se tiene que:

$$F_{pq} = [-(q + 1)\theta_{-q} + (p+1)\theta_p]$$

como, $q = n$ entonces $q > 0$ y $\theta_{-q} = 0$. Análogamente, como $p = m$ entonces $p > 0$ y $\theta_p = 1$. En consecuencia:

$$F_{pq} = p + 1 = m + 1 = F[\sigma^{1+m}, \sigma^{1+n}]$$

Potencia básica.

En todos los casos de deformaciones elementales aquí considerados, los potenciales de Goursat contienen un sólo término de la serie de potencias de Laurent con coeficientes constantes. Además el efecto del vector de coeficientes periódicos α y la amplitud relativa ϵ , se toman en cuenta hasta el cálculo de la potencia de brazada. En estas circunstancias la fórmula (3.10) de la potencia básica de un modo de oscilación V_n quedaría así:

$$E[V_n, V_n] = 2\pi\mu n$$

La expresión anterior coincide con el cálculo de la potencia utilizando la fórmula de integración usual (2.4), partiendo de las extensiones de Stokes y del vector de fuerza

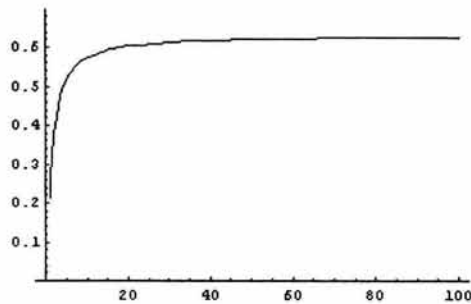
unitaria, de acuerdo con la fórmula (60) de [68].

Caso Tangencial Sen (m), Cos (n).

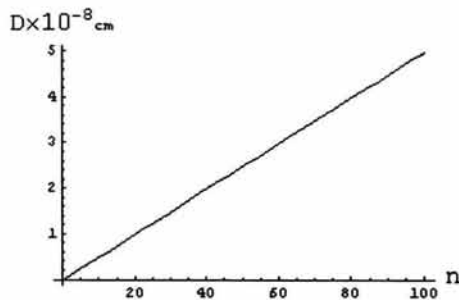
La deformación total se obtiene sumando las deformaciones componentes correspondientes, y es:

$$\begin{aligned} v(\sigma) &= -(1/2) \sigma^{1-m} + (1/2) \sigma^{1+m} + (i/2) \sigma^{1-n} + (i/2) \sigma^{1+n} \\ &\equiv -(1/2)v_1 + (1/2)v_2 + (i/2)u_1 + (i/2)u_2 \\ F[v(\sigma)] &= -(i/4) F[v_1, u_1] - (i/4) F[v_1, u_2] + (i/4) F[v_2, u_1] + (i/4) F[v_2, u_2] \\ F[v(\sigma)] &= (1/4)i(3m - n) \end{aligned}$$

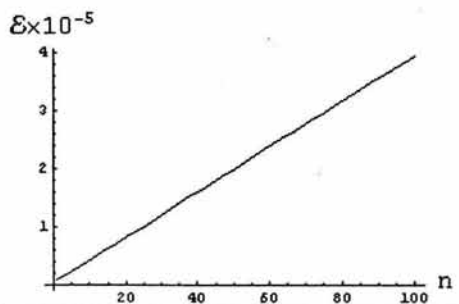
Eficiencia:



Desplazamiento: De acuerdo a la fórmula (3.5).



Potencia de brazada: De acuerdo a la fórmula (3.7) y con $E_{tot} = 2\pi\mu (n+m)$.



Caso $(\cos(m\theta) + \cos((m+1)\theta))\hat{e}_r + \sin(n\theta)\hat{e}_\theta$.

La deformación total se obtiene sumando las deformaciones componentes correspondientes, y es:

$$v(\sigma) = (1/2) \sigma^{1-m} + (1/2) \sigma^{1+m} + (1/2) \sigma^{-m} + (1/2) \sigma^{2+m} - (1/2) \sigma^{1-n} + (1/2) \sigma^{1+n}$$

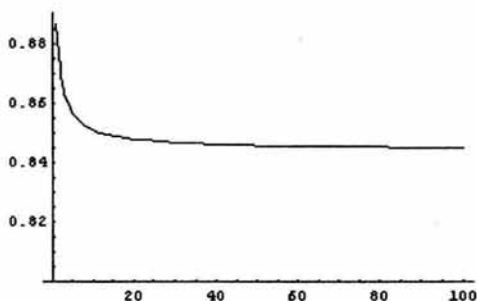
Aplicando la bilinealidad del operador F y los resultados anteriores se llega a:

$$F[v(\sigma)] = (1/4)(1+2m+2n)$$

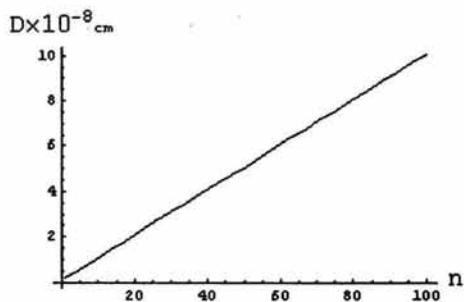
Aquí la potencia básica total sería:

$$2\pi\mu[n+m+(m+1)]$$

Eficiencia:



Desplazamiento: De acuerdo a la fórmula (3.5).



Caso Sen((m-1) θ)ê_r + Cos(n θ)ê_θ.

La deformación total se obtiene sumando las deformaciones componentes correspondientes, y es:

$$v(\sigma) = (i/2) \sigma^{2-m} - (i/2) \sigma^m + (1/2) \sigma^{1-n} + (1/2) \sigma^{1+n}$$

Aquí hay calcular los siguientes términos de curvatura elementales:

$$F[\sigma^{2-m}, \sigma^{1-n}], F[\sigma^{2-m}, \sigma^{1+n}], F[\sigma^m, \sigma^{1-n}], F[\sigma^m, \sigma^{1+n}]$$

Procediendo de manera análoga a lo hecho en la sección de curvaturas elementales, se llega a que cada uno de los términos de curvatura anteriores son iguales a cero. Por lo tanto aquí se tiene un caso de una estrategia de natación con desplazamiento cero.

APENDICE IV.11

EXTENSIÓN DE LA TEORÍA DE STONE A UN DOMINIO ACOTADO.

El teorema de reciprocidad de Lorentz:

$$\int_S \bar{v} \cdot \Pi(\bar{w}) \cdot \bar{n} ds = \int_S \bar{w} \cdot \Pi(\bar{v}) \cdot \bar{n} ds$$

en una región simplemente conexa $S = C_1 \cup C_2$ es:

$$\int_{C_1} \bar{v} \cdot \Pi(\bar{w}) \cdot \bar{n} ds + \int_{C_2} \bar{v} \cdot \Pi(\bar{w}) \cdot \bar{n} ds = \int_{C_1} \bar{w} \cdot \Pi(\bar{v}) \cdot \bar{n} ds + \int_{C_2} \bar{w} \cdot \Pi(\bar{v}) \cdot \bar{n} ds$$

Puesto que en la frontera exterior del dominio \mathcal{D} se ha supuesto que los campos de velocidad se anulen, entonces quedan solamente los términos correspondientes a la frontera C_1 del nadador:

$$\int_{C_1} \bar{v} \cdot \Pi(\bar{w}) \cdot \bar{n} ds = \int_{C_1} \bar{w} \cdot \Pi(\bar{v}) \cdot \bar{n} ds$$

A partir de este punto, se puede continuar el análisis hecho por H. Stone en [] para arribar a su fórmula (4), que en general sería:

$$\bar{U}(t) = \frac{K_1}{K_2} \int_{C_1} \bar{u}'(t) dS \dots (A11.1)$$

en donde la velocidad de traslación $\bar{U}(t)$ del cuerpo deformable q queda en función del campo de deformaciones oscilante $\bar{u}'(t)$ definido sobre su frontera. Las constantes K_1 y K_2 se determinan a partir de la forma básica q del nadador.

Así, K_1 es el factor constante en el vector de esfuerzo $\Pi(\hat{U}) \cdot \bar{n}$, en donde Π es el tensor de esfuerzo correspondiente a un campo de velocidades de traslación rígida \hat{U} definido en q .

El término K_2 es el factor constante correspondiente a la expresión del empuje (drag) que relaciona a \hat{U} con la fuerza \vec{F} .

Puesto que la deformación $\bar{u}'(t)$ es la misma en todas las estaciones, entonces la integral en (A11.1) no cambia durante el trayecto completo del nadador. En consecuencia la conducta de la velocidad $\bar{U}(t)$ conforme el nadador se mueva de estación a estación, queda determinada solamente por la constante geométrica $G = K_1/K_2$.

Para conocer dichas constantes es indispensable resolver el correspondiente problema de Stokes para traslaciones de un círculo rígido.

En el caso de una traslación rígida a lo largo de la dirección del vector unitario \hat{j} , la condición de no-resbalamiento en la frontera del nadador es:

$$\hat{u}|_q = \hat{j}$$

Expresando al vector en coordenadas bipolares se tiene que las componentes v_α y v_β de la velocidad en la frontera son:

$$v_\alpha = \frac{(-1 + \cos[\beta] \cosh[\alpha])}{(\cos[\beta] - \cosh[\alpha])}; \quad v_\beta = \frac{\sin[\beta] \sinh[\alpha]}{(\cos[\beta] - \cosh[\alpha])};$$

que a través de las ecuaciones:

$$v_\alpha = h \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}; \quad v_\beta = -h \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$$

implican que las condiciones de Dirichlet y Neumann para la función de Jeffery $h\Psi$ en la frontera del nadador son:

$$h\Psi = \text{Sen}(\beta); \quad \frac{\partial(h\Psi)}{\partial \alpha} = 0$$

y en la pared celular:

$$h\Psi = 0; \quad \frac{\partial(h\Psi)}{\partial \alpha} = 0$$

Resolviendo como en IV.6, se llega a que los componentes de la extensión de Stokes son:

$$v_\alpha = -\frac{(-1 + \cos[\beta] \cosh[\alpha]) ((\alpha - \alpha_2) \cosh[\alpha_1 - \alpha_2] - \cosh[\alpha - \alpha_1] \sinh[\alpha - \alpha_2])}{(\cos[\beta] - \cosh[\alpha]) ((-\alpha_1 + \alpha_2) \cosh[\alpha_1 - \alpha_2] + \sinh[\alpha_1 - \alpha_2])}$$

$$v_\beta = \frac{(\sin[\beta] (-3 \cosh[\alpha - \alpha_1 - \alpha_2] + 4 \cos[\beta] \cosh[2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2] - \cosh[3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2] - 4 \cos[\beta] \cosh[\alpha_1 - \alpha_2] + 3 \cosh[\alpha + \alpha_1 - \alpha_2] + \cosh[\alpha - \alpha_1 + \alpha_2] - 2\alpha \sinh[\alpha + \alpha_1 - \alpha_2] + 2\alpha_2 \sinh[\alpha + \alpha_1 - \alpha_2] - 2\alpha \sinh[\alpha - \alpha_1 + \alpha_2] + 2\alpha_2 \sinh[\alpha - \alpha_1 + \alpha_2]))}{(4(\cos[\beta] - \cosh[\alpha]) ((-\alpha_1 + \alpha_2) \cosh[\alpha_1 - \alpha_2] + \sinh[\alpha_1 - \alpha_2]))}$$

A partir de aquí, se calcula el tensor de esfuerzo, procediendo como en IV.7, de donde se obtiene el siguiente vector de esfuerzo:

$$\begin{aligned} & \{-(\mu \sin[\beta] (\sinh[\alpha] (\cos[2\beta] \cosh[2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2] - 2 \cos[\beta] (\cosh[\alpha - \alpha_1 - \alpha_2] + \cosh[\alpha] \cosh[\alpha_1 - \alpha_2]) - 4 \cos[\beta] (\cos[\beta] - \cosh[\alpha]) \sinh[\alpha - \alpha_1] \sinh[\alpha - \alpha_2]) - 2 (\cos[\beta] - \cosh[\alpha]) (-1 + \cos[\beta] \cosh[\alpha]) \sinh[2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2])) / \\ & (a (\cos[\beta] - \cosh[\alpha]) ((-\alpha_1 + \alpha_2) \cosh[\alpha_1 - \alpha_2] + \sinh[\alpha_1 - \alpha_2])), \\ & -(\mu (-1 + \cos[\beta] \cosh[\alpha]) (\cos[2\beta] \cosh[2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2] - 2 \cos[\beta] (\cosh[\alpha - \alpha_1 - \alpha_2] + \cosh[\alpha] \cosh[\alpha_1 - \alpha_2]) - 4 \cos[\beta] (\cos[\beta] - \cosh[\alpha]) \sinh[\alpha - \alpha_1] \sinh[\alpha - \alpha_2]) + 2\mu (\cos[\beta] - \cosh[\alpha]) \sin[\beta]^2 \sinh[\alpha] \sinh[2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2]) / \\ & (a (\cos[\beta] - \cosh[\alpha]) ((-\alpha_1 + \alpha_2) \cosh[\alpha_1 - \alpha_2] + \sinh[\alpha_1 - \alpha_2])) \} \end{aligned}$$

el cual tiene como factor común constante al término μ/a . Por lo tanto $K_1 = \mu/a$.

Calculando la integral (4.32a):

$$\vec{F} = \int_{-\pi}^{\pi} (\Pi_{11} \hat{e}_\alpha + \Pi_{21} \hat{e}_\beta) h^{-1} \partial \beta$$

mediante el algoritmo dado en el apéndice IV.5, se obtiene el correspondiente término de empuje, el cual es:

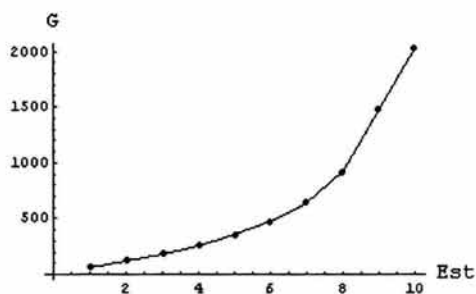
$$\frac{4 \pi \mu \text{Cosh}[\alpha_1 - \alpha_2]}{(\alpha_1 - \alpha_2) \text{Cosh}[\alpha_1 - \alpha_2] - \text{Sinh}[\alpha_1 - \alpha_2]}$$

que es igual a K_2 .

En consecuencia, la constante geométrica G es:

$$G = \frac{K_1}{K_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \text{Tanh}(\alpha_1 - \alpha_2)}{4a\pi}$$

Calculando los parámetros bipolares α_1 , α_2 , a , correspondientes a cada estación se obtiene que G crece de la siguiente manera conforme el nadador se mueve del centro a la periferia:



En consecuencia, la velocidad $\bar{U}(t)$ en (A11.1) crecerá de la misma manera.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alberts, B. et al. (1994). *Molecular Biology of the Cell*. Garland Pub. Inc. NY and London. 3a ed.
2. Beretier-Hahn, J. (1990) *Behavior of mitochondria in the living cell*. Intl Rev Cytol 122, 1-63.
3. Magnasco, M.O. (1993). *Forced thermal ratchets*. Phys.Rev.Lett. 71:1477-81.
4. Lippincot-Schwartz, J. (1998). *Cytoskeletal proteins and Golgi dynamics*. Curr.Op.Cell Biol. 10:52-59.
5. Bereiter-Hahn J. (1978). *Intracellular motility of mitochondria: role of the inner compartment in migration and shape changes of mitochondria in XTH-cells*. J Cell Sci Apr;30:99-115.
6. Nakata, T. et al. (1998). *Visualization of the dynamics of synaptic vesicle plasma membrane proteins in living axons*. J.Cell.Biol.140(3) Feb., 659-674.
7. Brown, S.S.(1999). *Cooperation between microtubule and actin based motor proteins*. Annu.Rev.Cell.Dev.Biol. 15:63-80.
8. Magnasco, M.O (1994). *Molecular combustion motors*. Phys.Rev.Lett. 72:1656-9.
9. Astumian, D.R. & Bier, M. (1996) *Mechanochemical coupling of the motion of molecular motors to ATP hydrolysis*. Biophys. J. 70:637-53.
10. Julicher, F. et al.(1997). *Modeling molecular motors*. Rev. Mod. Phys. 69,4:1269-1281.
11. Van der Moortele, S. et al. (1993) *Nocodazole and taxol affect subcellular compartments but not secretory activity of GH3B6 prolactin cells*. Eur.J.Cell. Biol. 60:217-27.
12. Stults, N.L. et al.(1989).*Relationship between Golgi architecture and glycoprotein biosynthesis and transport in Chinese hamster ovary cells*. J. Biol.Chem. 264:19956-66.
13. Robin, P. et al.(1995).*Effect of microtubule network disturbance by nocodazole and docetaxel(Taxotere) on protein secretion in rat extraorbital lacrimal and parotid glands*.Eur.J.Cell Biol.67:227-37.
14. Gregoraszcuk EL, Stoklosowa S.(1999). *The effect of microtubule and microfilament-disrupting drugs on prolactin-stimulated progesterone synthesis and secretion by cultured porcine theca cells*. Acta Histochem 1997 Jun (2):207-15.
15. Turner, J.R. and Tartakoff, A.M. (1989). *The response of the Golgi complex to microtubule alterations the role of metabolic energy and membrane traffic in Golgi complex organization*. J.Cell.Biol. 109:2081-2088.
16. Rogalski, A.A. et al.(1984). *Effect of microtubule assembly status on the intracellular processing and surface expression of an integral protein of the plasma membrane*. J.Cell.Biol. 99:1101-1109.
17. Rogalski, A.A. and Singer, S.J. (1984) *Associations of elements of the Golgi apparatus with microtubules*. J.Cell.Biol. 99:1092-1100.
18. Salas, P.J. et al. (1986) *Microtubules and actin filaments are not critically involved in the biogenesis of epithelial cell surface polarity*. J.Cell.Biol. 102:1853-1867.
19. Sandoval, I.V. et al. (1984).*Role of microtubules in the organization and localization of the Golgi apparatus*. J.Cell.Biol. 99:113s-118s.
20. Tartakoff, A.M. and P.Vassalli (1977). *Plasma cell membrane immunoglobulin secretion. Arrest is accompanied by alterations of the Golgi complex*. J.Exp.Med. 146: 1332-1345.

21. Thyberg, J. and Moskalewski, S. (1999). *Role of microtubules in the organization of the Golgi complex*. *Exper. Cell Res.* 246: 263-279.
22. Verhey, K.J. (2003) *Motors and Membrane Trafficking* in Schliwa, M.(ed.) *Molecular Motors*.Wiley-Vch. Germany:377-410.
23. Yoneda M, Nishizaki T, Tasaka K, Kurachi H, Miyake A, Murata Y. (2000) *Changes in actin network during calcium-induced exocytosis in permeabilized GH3 cells: calcium directly regulates F-actin disassembly*. *J Endocrinol* 2000 Sep;166(3):677-87.
24. Carbajal ME, Vitale ML. (1997) *The cortical actin cytoskeleton of lactotropes as an intracellular target for the control of prolactin secretion*. *Endocrinology* 1997 Dec;138(12):5374-84.
25. Giardini, P.A. et.al.(2003) *Compression forces generated by actin comet tails on lipid vesicles*. *Proc Natl Acad Sci USA.* 100(11):6493-98.
26. Lendowski, V. & Mogilner, A. *Origin of Actin induced locomotion of Listeria* en Alt, W. et.al. Eds.(1997). *Dynamics of Cell and Tissue Motion*. Ed.Birkhäuser. Basilea, Suiza.
27. Cross, R.A. (1997) *A protein-making motor protein*. *Nature* 385:18-19.
28. Wilson K.S. & Noller, H.F. (1998) *Molecular Movement inside the Translational Engine*. *Cell* 92:337-49.
29. Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. (1987) *Fluid Mechanics*. Ed. Pergamon Press. Oxford 2nd ed.
30. Taylor, G.I. *Low Reynolds number flows*. National Committee for Fluid Mechanics Films. A.I.A.A. Educational Programs.
31. Purcell, E.M. (1977) *Life at low Reynolds number* *Am. J. Phys.* 45(1):3-11.
32. Shapere, A. & Wilczek, F. (1989) *Gauge kinematics of deformable bodies* *Am. J. Phys.* 57(6):514-18.
33. Shapere, A. & Wilczek, F. (1989) *Geometry of self-propulsion at low Reynolds number* *J.Fluid Mech.* 198:557-85.
34. Ehlers, K. et al. (1996). *Do cyanobacteria swim using traveling surface waves ?*. *Proc.Natl.Acad.Sci.*93, 8340-8343.
35. Ehlers, K. M. (1995) *The Geometry of Swimming and Pumping at Low Reynolds Number*. Ph.D. Thesis, University of California, Santa Cruz, USA.
36. Koiller, J. et.al. (1996). *Problems and Progress in Microswimming*. *J.Nonlinear Sci.* 6:507-41.
37. Koiller, J. et.al. (1998) *Spectral Methods for Stokes Flows*. *Comp. Appl.Math.* 17(3):343-71.
38. Delgado, J.(2001) *Microswimming in the Stokesian realm*. *Memorias del XXXIII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana.* #29.
39. Happel, J & Brenner, H.(1986). *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Martinus Nijhoff Pub.Dordrecht, Netherlands.
40. Luby-Phelps, K. (1994) *Physical properties of the cytoplasm* *Curr. Op. Cell Biol.* 6:3-9.
41. Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1963). *Foundations of Differential Geometry*. Interscience Pub.NY.USA.
42. Marsden, J.E. & Hughes, T.J.R. (1983). *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Pub. Inc. NY. USA.
43. Lang, S. (1972). *Differential Manifolds*. Addison-Wesley. Mass. USA.

44. Binz, E. & Fischer, H.R.(1981). *On the manifold of embeddings of a closed manifold*. Lecture Notes in Physics. Ed. Springer. 139:310-24.
45. Segev, R. & Epstein, M. (1996). *On theories of growing bodies*. in: Batra, R.C. & Beatty, M.F. Contemporary Research in the Mechanics and mathematics of Materials.CIMNE, Barcelona:119-130.
46. Schutz,B. (1980) *Geometrical methods of mathematical physics*.Cambridge University Press, Cambridge UK.
47. Frankel, T.(2001). *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press.UK.
48. Shapere, A. & Wilczek, F. (1987) *Self-propulsion at low Reynolds number* Phys. Rev. Lett. 58(20):2051-54.
49. Koiller, J. & Delgado, J. (1998) *On efficiency calculations for nonholonomic locomotion problems:an application to microswimming*. Rep.Math.Phys. 42(1/2):165-83.
50. Vogel, S. (1994). *Life in moving fluids*. Princeton Univ.Press.2a. Ed. Princeton N.J. USA.
51. Delgado, J. & González-García José S.(2002) *Evaluation of spherical shapes swimming efficiency at low Reynolds number with application to some biological problems*.Physica D.168-169:365-378.
52. Shapere, A. & Wilczek, F. (1989) *Efficiencies of self-propulsion at low Reynolds number* J.Fluid Mech. 198:587-99.
53. Lamb, H. (1945). *Hydrodynamics*. Dover, NY,USA.
54. Hobson,E.W. (1931) *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge University Press, Cambridge UK.
55. Gradshteyn,I.S. & Ryzhik, I.M.(1965) *Tables of Integral, Series and Products*.ed. Jeffrey, A. Academic Press NY, USA. 4th ed.
56. Taylor, G.I. (1951). *Analysis of the swimming of microscopic organisms*. Proc.Roy.Soc.Lond. ser A. 209:447-61.
57. Taylor, G.I. (1951). *The action of weaving cylindrical tails in propelling microscopic organisms*. Proc.Roy.Soc.Lond. ser A. 211:225-39.
58. Childress, S.(1981). *Mechanics of swimming and flying*. Cambridge Univ.Press. Cambridge, UK.
59. Kauffman, S.A. (1993) *The Origins of Order*. Oxford University Press. NY USA.
60. Pianka, E.R. (1999). *Evolutionary Ecology*. Addison-Wesley, NY, USA.
61. Alexander, R.M. (1996). *Optima for Animals*. Princeton Univ. Press. Princeton, N.J. USA.
62. Samuel AD, Petersen JD, Reese TS (2001) *Envelope structure of Synechococcus sp. WH8113, a nonflagellated swimming cyanobacterium*. BMC Microbiol.1(1):4.
63. Ladyzhenskaya, O. (1967). *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon & Breach. 2nd Ed. NY. USA.
64. Muskhelishvili, N.I.(1963). *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of elasticity*. P. Noordhoff Ltd. Groningen. Netherlands.
65. Finn, M.D. & Cox, S.M.(2001). *Stokes flow in a mixer with changing geometry*. Journal of Engineering Mathematics 41: 75-99.
66. Milne-Thomson, L.M. (1996). *Theoretical Hydrodynamics*. Dover. NY,USA.
67. Jeffery,G.B.(1921) *Plane stress and plain strain in bipolar coordinates*. Phil.Trans.Roy.Soc.London ser.A.221:265-93.

68. Cherman, A., Delgado, J. et al. (2000). *Low Reynolds number swimming in two dimensions*. in Proc. HAMSYS-98, World Scientific. Singapore:32-62.
69. Stone, H. A. & Aravinthan, D.T.S. (1996) *Propulsion of microorganisms by surface distortions*. Phys. Rev. Lett. 77(19):4102-4104.
70. Sheetz, M.P. (1999). *Motor and cargo interactions*. Eur. J. Biochem. 262:19-25.
71. Marsh, D. (1974). *Statistical Mechanics of the fluidity of phospholipid bilayers and membranes*. J. Membrane Biol. 18:145-162.