



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MECÁNICA DEL TRABUCO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

FÍSICO

PRESENTA:

HÉCTOR COVARRUBIAS MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JUAN MANUEL LOZANO MEJÍA

2004





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Mecánica del Trabuco"

realizado por Covarrubias Martínez Héctor

con número de cuenta 6508757-4 **, quien cubrió los créditos de la carrera de:** Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Juan Manuel Lozano Mejía

Propietario Dr. Héctor Gerardo Riveros Rotge

Propietario Dr. José Rafael Soto Montiel

Suplente Dr. Jorge Rafael Barojas Weber

Suplente Dr. Marco Antonio Martínez Negrete

Juan Manuel Lozano Mejía
Héctor Gerardo Riveros Rotge
J. Rafael Soto Montiel
J. Barojas Weber
Marco Antonio Martínez Negrete

Consejo Departamental de Física

Alicia Zarzosa Pérez

M. EN C. ALICIA ZARZOSA PÉREZ
Coordinadora de Licenciatura
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Para mis padres, que viven en mí.

Para mi familia, motivo que me impulsó.

Índice

0	Introducción	4
	De la guerra al estudio mecánico	4
1	Operación	8
	La mecánica del trabuco	10
2	Modelo	11
	Modelo vs. sistema	11
3	Ecuaciones de movimiento	23
	Trabuco restringido	24
	Trabuco libre	29
	Condiciones de transición	32
	Observaciones sobre las ecuaciones	33
4	Modelo numérico	35
	Algoritmo	35
	Modos de operación	37
	El programa	41
5	Resultados numéricos	43
	Primeras observaciones	43
	El trabuco eficiente	44
6	Un trabuco	49
	Diseño	49
	Características	52
	Preparación	55
	Ejecución	57
	Observaciones	61
7	Enseñanza	62
	Solución de un problema	62
	Dimensiones y proporciones	65
	Un ejemplo de trabuco escolar	67
8	Consideraciones finales	68
9	Apéndices	69
	1 Código del programa	69
	2 Alcance y fricción del aire	79
	3 Concurso de catapultas	81
10	Referencias	82

0 Introducción



Fig 0-1 Ilustración del libro "Roman de Lancelot du Lac" ca. 1340, que muestra el sitio a una ciudad con un trabuco.

De la guerra al estudio mecánico

El interés por el trabuco surge primero por un atractivo natural hacia un mecanismo capaz de hacer lo que puede parecer un prodigio; lanzar un objeto muy pesado a tal velocidad que llega a cien metros del punto de partida, y todo por una pesa que baja. Y después por la curiosidad y el intento de comprender la mecánica del sistema.

En este trabajo se hace un modelo, se encuentran las ecuaciones de movimiento y se implementa una solución numérica en un programa de cómputo. Se exponen resultados, incluyendo el hallazgo inesperado de un trabuco que transforma toda su energía potencial inicial en cinética del proyectil, esto conduce a diseños de trabucos con características diferentes a los tradicionales. Se muestra una confrontación de los resultados con el comportamiento de un trabuco real.

En el proceso se hicieron algunas simplificaciones y aproximaciones y se muestra cómo se aprovechan los resultados en la enseñanza de la mecánica en diversos niveles escolares.

Proyectiles, cada vez más grandes y de mayor alcance

Desde un montículo de tierra, un hombre con cachucha que siempre mastica lanza un proyectil de 150 gramos a 150 kilómetros por hora y en dos quintos de segundo lo hace tocar cuero y algunas veces madera.

Con velocidad semejante salen los proyectiles que lanza otro hombre en otro contexto. Este tirador no es corpulento como el primero pero es capaz de apuntar con la certeza de pegar en la sien de un gigante o de repetir los tiros tan rápidamente que, junto con sus compañeros, apabulla al ejército enemigo bajo una lluvia de piedras.

El lanzador de beisbol alcanza la máxima velocidad de la bola al hacer girar su brazo en toda su extensión en un brevísimo tiempo. El antiguo lanzador de piedras con honda logra velocidades semejantes con menor esfuerzo por tener la posibilidad de, en un tiempo más largo, dar varias vueltas a la cuerda y acrecentar gradualmente la velocidad.

En la guerra se usó también una variante de la honda en la que la cuerda está sujeta al extremo de una vara. Sin completar una vuelta, se logra gran velocidad por el radio de giro aumentado por las longitudes agregadas de vara y brazo, que dan al proyectil en el extremo de la cuerda una velocidad mucho mayor. Si especulamos, imaginamos que algún ingenioso guerrero pensó en hacer una gran honda con vara manejada por varios hombres, capaz de arrojar piedras más grandes de las que lanza la honda común. Haya sido así o no su origen, un antecesor del trabuco es eso; una barra que gira en un soporte, brazo largo de un lado con la cuerda que lleva el proyectil y brazo corto del otro, con la fuerza de varios hombres que jalan simultáneamente (Fig. 0-2).

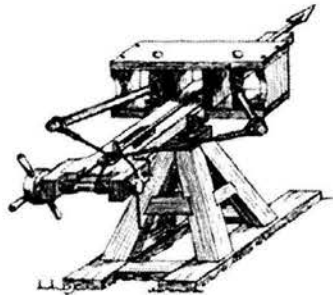
Este diseño evoluciona, el jalón de los hombres es ayudado por el peso de una gran piedra, una piedra mayor no requiere de hombres que jalen pues su propio peso mueve al brazo, y como entre más grande mejor, se llega al uso de enormes lastres, de toneladas, para arrojar los proyectiles más pesados que se hayan lanzado sin ayuda de la pólvora. Los primeros diseños son chinos, de los siglos quinto a tercero a.C. El trabuco llegó a Europa en el siglo sexto d.C. Estuvo en operación incluso cuando ya se usaba la pólvora¹. La última vez que fue usado en guerra, aunque fallidamente, fue en el sitio de Tenochtitlan².



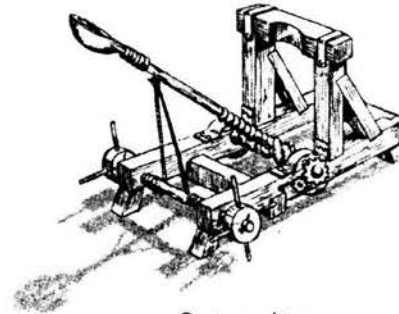
Fig 0-2 Trabuco de tracción operado por varios hombres. Cuando el hombre de la izquierda se suelta el brazo impulsa al proyectil.

Máquinas de guerra antiguas que arrojaban proyectiles

En la antigüedad y en la edad media hubo gran variedad de máquinas de guerra. Hay confusión en los nombres, por ejemplo, el nombre balista se ha aplicado a las llamadas mangonela, catapulta, y escorpión.



Mangonela



Catapulta

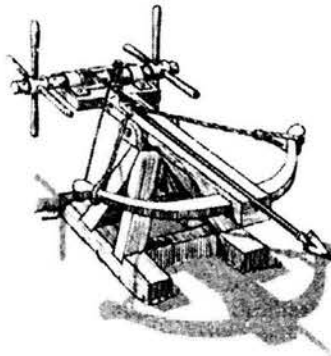
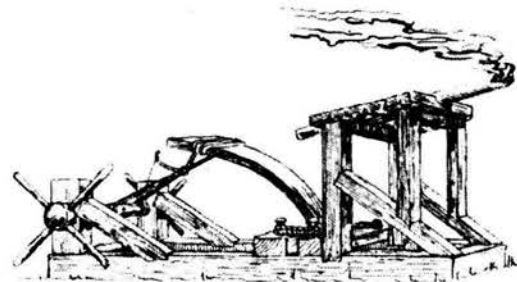


Fig 0-3 Escorpión



Falárica

La mangonela y la catapulta funcionan por la elasticidad de cuerdas de fibras, cuero o cabellos que se tuercen. En la mangonela (Fig. 0-3) el proyectil es guiado por un canal en un tablón mientras es impulsado por una cuerda tensa de manera semejante a una flecha. Esta cuerda es tensada por dos brazos que giran en ejes en los que están las cuerdas que se tuercen. Puede arrojar lanzas o piedras.

La catapulta (Fig. 0-3) tiene un gran brazo que gira en un eje en el que se tuercen cuerdas. En el extremo del brazo hay una cuchara para el proyectil. Al liberarlo, el brazo retorna rápidamente, el proyectil sale despedido, el brazo choca con un tope. No puede lanzar proyectiles tan pesados como el trabuco.

El escorpión romano (Fig. 0-3) funciona por la elasticidad de un arco de madera de tamaño tan grande que es tensado por medio de malacates, dispara lanzas de manera semejante a las flechas disparadas por la ballesta.

La falárica (Fig. 0-3) también funciona por elasticidad de flexión. Una plancha de hojas de madera es deformada y al liberarse golpea un proyectil ligero que puede ser una lanza o un hato de varas encendidas. Es de menor alcance que la catapulta y se usaba más en batallas navales³.

El trabuco antiguo y el de hoy

En el trabuco no hay deformación, funciona solamente por desequilibrio de pesos. No se conserva trabuco antiguo alguno ni existen planos originales o datos precisos sobre sus dimensiones. Hay dibujos medievales, la mayoría sin dar escala (Fig. 0-1). Una ilustración de una obra del siglo XIV tiene indicadas algunas dimensiones (Fig. 0-4). En textos se cuenta con algunas descripciones con pocos datos técnicos de los que se obtiene información sobre su diseño y estructura básica. Con esa información se han hecho reconstrucciones, algunas un tanto arbitrarias y otras muy cuidadas, fundamentadas en investigaciones minuciosas en varias fuentes⁴.

De las reconstrucciones se aprecia que la finalidad de los trabucos originales no era la de obtener una eficiente conversión de la energía potencial del lastre en la cinética del proyectil. Era simplemente la de arrojar un proyectil masivo con el suficiente ímpetu para causar daño. El maestro constructor y operador de trabucos tenía la información de sus antecesores y la experiencia obtenida por ensayo y error. Si el trabuco lograba su objetivo, así estaba bien.

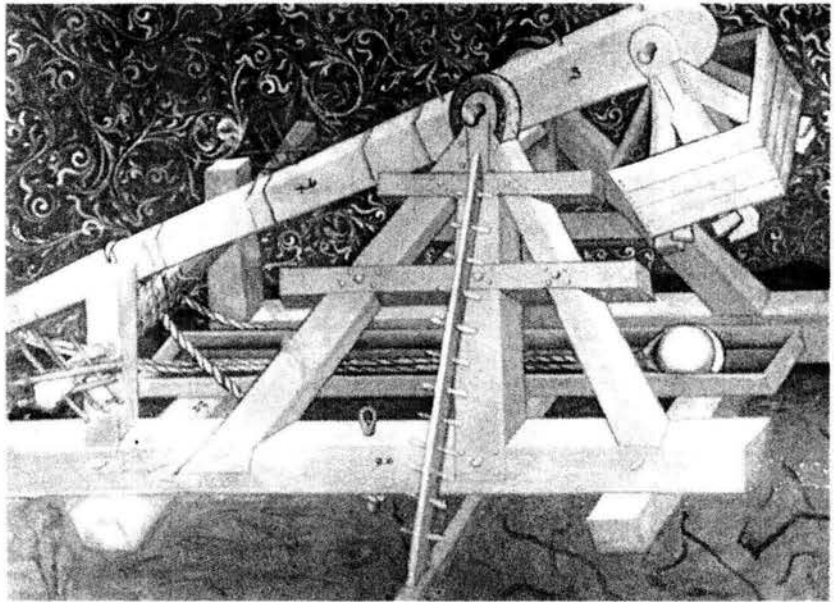


Fig 0-4 Ilustración del "Bellifortis", ca. 1300, de Conrad Kyeser, que muestra dimensiones de algunas piezas de un trabuco, 46 pies el brazo largo, 3 el corto.

Hoy se siguen haciendo trabucos mas no para sitiarse o defender fortalezas. Los hay en castillos convertidos en museos, disparan bolsas de cal, pelotas o piedras al agua para diversión de los turistas. También los construyen aficionados que compiten por el récord de alcance o de peso lanzado. Hay fanáticos del trabuco que igual lanzan un automóvil o un piano a su destrucción al pegar en el campo o se lanzan a sí mismos para zambullirse en las aguas de un lago⁵. También hay quien hace trabucos chicos que lanzan bolas a 100 kilómetros por hora. Es satisfactorio igualar al lanzador de beisbol aunque no sea a mano limpia.

1 Operación

La figura 1-1 muestra las partes principales de un trabuco. El extremo corto del brazo soporta el lastre de una masa que puede ser de hasta dos órdenes de magnitud mayor que la del proyectil. El extremo largo del brazo tiene un gancho en el que está sujeta la cuerda. El brazo gira en un eje horizontal que está sobre un soporte capaz

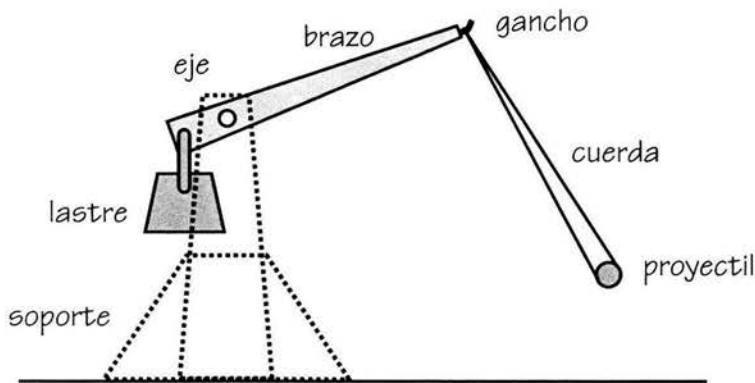


Fig 1-1 Partes elementales del trabuco

de cargarlo y de resistir los esfuerzos originados por el movimiento. Para preparar el trabuco es necesario bajar el extremo del brazo que tiene el gancho, lo que implica elevar el lastre. Aunque el brazo de palanca es grande, en los trabucos mayores esto se lleva a cabo con malacates en los que se enrolla una cuerda que tira del brazo.

La figura 1-2 muestra una reproducción reciente de un trabuco de los más grandes, tiene un mecanismo de

dos ruedas de ardilla para hombres en cuyo eje está el malacate para la cuerda que baja el brazo.

Una vez bajado el brazo, es detenido por un mecanismo parecido a una aldaba. En la figura 1-2 se ve el soporte de la aldaba en forma de una X sobre la que se apoya el brazo. La figura 1-3 muestra la aldaba en detalle.

La cuerda es semejante a la de una honda, está sujeta firmemente por uno de los extremos y el otro extremo con una lazada en el gancho. El proyectil se aloja en una pieza que puede ser como una hamaca flexible o como un bolsillo.

Al liberar la aldaba el extremo largo del brazo sube aceleradamente tirando de la cuerda con el proyectil. Con la cuerda siempre tensa, el proyectil se arrastra sobre el piso. En la figura 1-2 debajo del soporte en X se ve el extremo de un canal con un perfil en forma de V por el que se mueve el proyectil. La cuerda y el proyectil pasan por debajo del soporte con forma de X.

Llega un momento en que el proyectil se despegas del piso, describe un gran arco al elevarse y dependiendo del ángulo del gancho respecto al brazo y del ángulo que hace la cuerda con el gancho, en cierto momento la lazada se desliza quedando libre un extremo de la cuerda y el proyectil es disparado.

El lastre sujeto al extremo corto del brazo puede estar fijo en el brazo o colgando como en las figuras 1-1 y 1-2. En un trabuco grande es del tamaño de una caseta y lleno de piedras puede alcanzar una masa de varias toneladas.

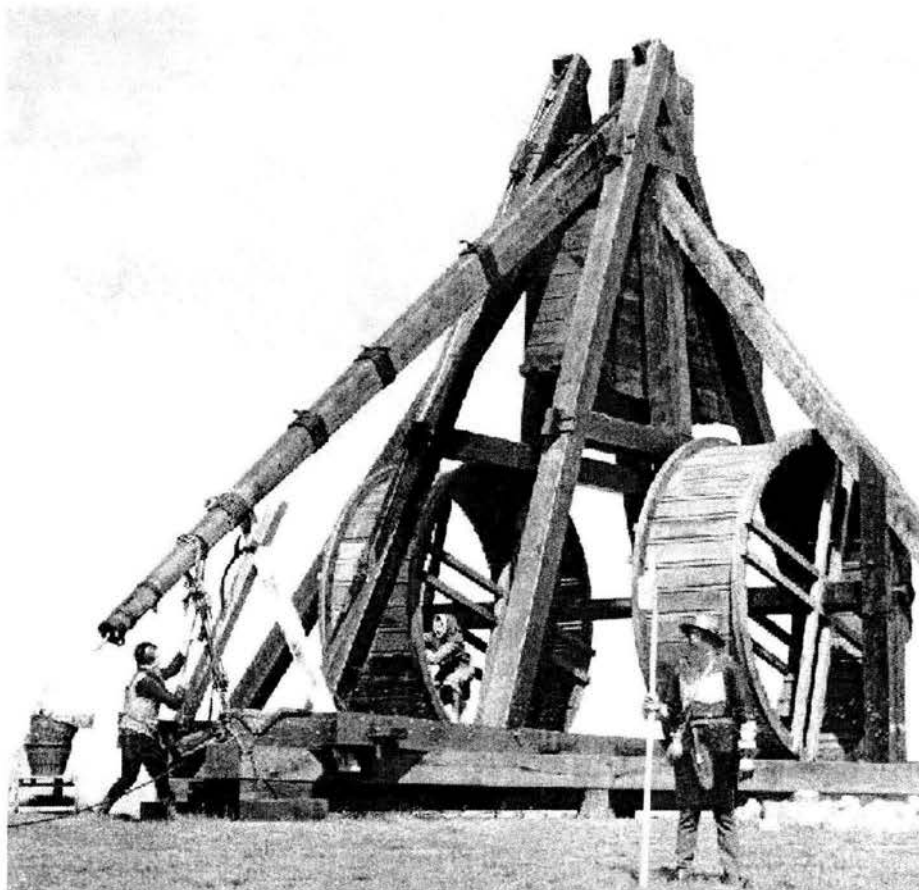


Fig 1-2 Gran trabuco danés con lastre de 1.5 toneladas y proyectil de 30 kg. Reconstrucción con técnicas medievales⁶.

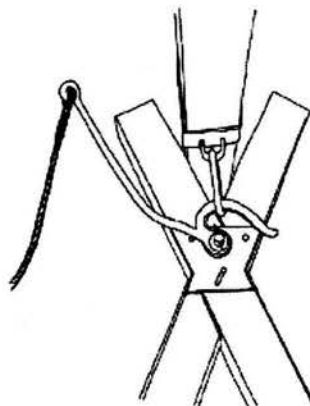


Fig 1-3 Mecanismo de aldaba

La mecánica del trabuco

Híbrido de palanca y honda, el trabuco es como un péndulo complejo con el que se busca alcanzar gran velocidad y precisión de ángulo de disparo de un proyectil.

En su posición inicial es la torca del lastre la que inicia el movimiento y mientras el lastre baja, el brazo se levanta tirando de la cuerda con el proyectil que se arrastra sobre el piso. En un momento dado el proyectil se despega del piso y junto con la cuerda gira teniendo al gancho como centro. Como el gancho del extremo del

brazo se mueve, el proyectil y la cuerda llegan a adquirir gran velocidad angular. La fuerza que ejerce la cuerda sobre el extremo del brazo hace que disminuya la velocidad angular de éste.

El brazo y la cuerda con el proyectil son como dos péndulos que se mueven acoplados⁷. Las magnitudes de sus velocidades y la configuración que tienen en cada momento dependen de la configuración inicial y de las relaciones que hay entre masas y longitudes. Para los fines bélicos del trabuco, se requiere que la velocidad del proyectil sea grande cuando su ángulo es el adecuado para un cierto alcance. El lastre se mueve una distancia

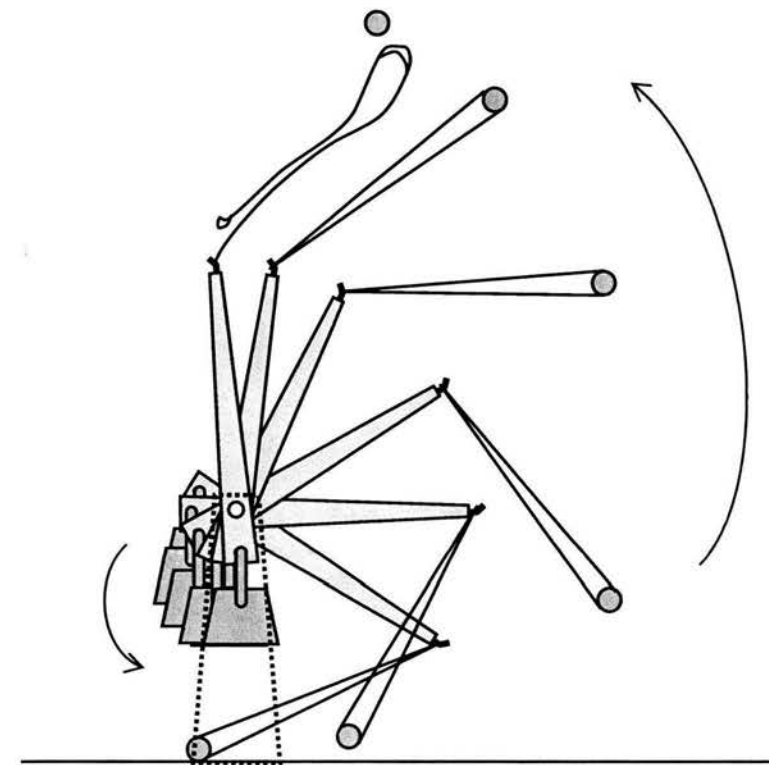


Fig 1-4 Posiciones sucesivas del trabuco al ser liberado

relativamente chica y en el mismo tiempo breve el proyectil recorre un arco muy grande, la velocidad final del proyectil puede hacerse muy alta. El trabuco es relativamente complejo y para aproximarnos a él haremos un modelo.

2 Modelo

Todo modelo es una simplificación del objeto modelado. La manera de juzgar la validez del modelo es la de comparar su comportamiento con el del objeto. Al modelar de manera demasiado simple un sistema complicado los resultados pueden no corresponder con el comportamiento observado del sistema. Se toma el modelo más simple capaz de describir al sistema con la precisión deseada. Se requiere un criterio para decidir qué elementos del sistema pueden dejarse fuera del modelo. El criterio de precisión que adoptaremos para una primera aproximación será de no tomar en cuenta las cantidades que sean pequeñas en comparación con otras de las relevantes. Este criterio será de un orden de magnitud o más.

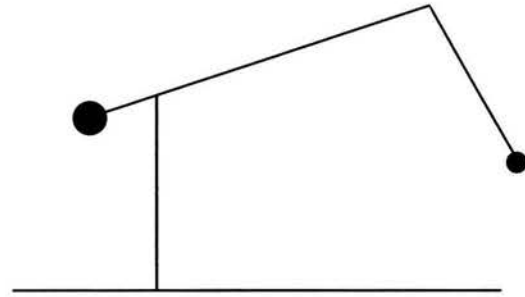


Fig 2-1 Esquema de líneas y puntos del modelo de trábucos

Modelo vs. sistema

Una primera aproximación es la de un sistema de masas puntuales, un brazo y cuerda sin masa, el lastre fijo sobre el extremo corto del brazo y sin fuerzas de fricción. La figura 2-1 muestra un diagrama de líneas y puntos del modelo. A continuación se hará una justificación del modelo comparando las magnitudes de las cantidades involucradas en cada parte.

Brazo

Una aproximación un poco menos simple se obtiene al tomar en cuenta la masa y por lo tanto el momento de inercia del brazo. Si el momento de inercia del brazo es de magnitud comparable con el del lastre será necesario tomarlo en cuenta. Para evaluar eso haremos un modelo del brazo considerando valores de razones de masas y longitudes semejantes a los que se pueden encontrar en un trábucos.

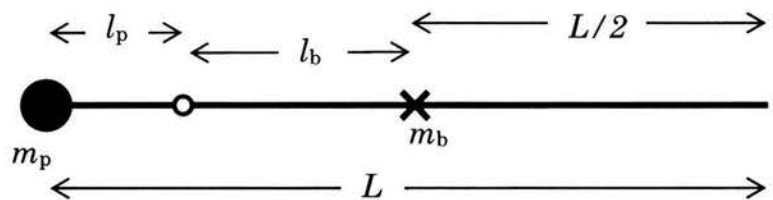


Fig 2-2 Esquema del brazo de barra delgada y masa puntual en un extremo

La figura 2-2 es un diagrama del brazo que consiste en una barra delgada de sección uniforme con masa m_b y un lastre de masa puntual m_p en un extremo. L es la longitud de la barra, l_p es la longitud desde el centro de giro al lastre, l_b es la distancia del centro de masa de la barra al centro de giro.

El momento de inercia del lastre es

$$I_p = m_p l_p^2. \quad (2-1)$$

El momento de inercia de la barra delgada alrededor de su centro de masa es

$$I_{b0} = \frac{1}{12} m_b L^2 \quad (2-2)$$

Por el teorema de los ejes paralelos⁸ el momento de inercia del brazo alrededor del centro de giro es

$$\begin{aligned} I_b &= I_{b0} + m_b l_b^2 \\ I_b &= m_b \left(\frac{1}{12} L^2 + l_b^2 \right) \end{aligned} \quad (2-3)$$

El momento de inercia del brazo completo es la suma de los dos anteriores; (2-1) y (2-3):

$$I = I_b + I_p \quad (2-4)$$

De la figura 2-2:

$$l_b = \frac{L}{2} - l_p, \quad (2-5)$$

al sustituir (2-5) en (2-3):

$$I_b = m_b \left[\frac{1}{12} L^2 + \left(\frac{L}{2} - l_p \right)^2 \right]. \quad (2-6)$$

Para comparar este momento de inercia con el de un brazo sin masa usaremos valores típicos de las razones entre masas y longitudes:

$$m_b = \frac{1}{20} m_p \quad (2-7)$$

$$L = 8 l_p \quad (2-8)$$

Al sustituir (2-7) y (2-8) en (2-6):

$$I_b = \frac{43}{60} m_p l_p^2. \quad (2-9)$$

Al comparar este valor con el del lastre (2-1), se observa que aunque la masa de la barra es chica con respecto a la del lastre, su momento de inercia es 43/60 (= 0.717) el del lastre, lo que no es una magnitud despreciable. Por ello en el modelo tomaremos en cuenta el momento de inercia del brazo completo.

Lastre extenso

En casi todos los trabucos grandes el lastre no está fijo al brazo sino que pende del extremo corto. El comportamiento del trabuco es diferente al de otro con el lastre fijo. Sin embargo, como sí es posible la construcción de trabucos con el lastre fijo, mantendremos el modelo así a manera de primera aproximación.

El lastre no es puntual y si su tamaño es comparable con la distancia de su centro de masa al centro de giro del brazo, su momento de inercia es notoriamente mayor que el de una masa puntual, lo cual sí sucede en un trabuco real. Es posible seguir considerando una masa puntual sólo que a una nueva distancia tal que el momento de inercia sea el mismo que el de la masa extensa. Esto lo veremos a continuación:

$$I = m_p l_p^2 + I_b \quad (2-10)$$

I es el momento de inercia del brazo con lastre de masa puntual, $m_p l_p^2$ es el momento de inercia del lastre que está a una distancia l_p del centro de giro e I_b es el momento de inercia de la barra del brazo. Si consideramos la extensión del objeto que forma el lastre, el momento de inercia del brazo es:

$$I = m_p l_p^2 + I_m + I_b \quad (2-11)$$

en donde I_m es un término que se agrega al momento de inercia del lastre, es el momento de inercia del objeto lastre alrededor de su centro de masa (teorema de los ejes paralelos). Si hacemos que los valores de I en las ecs. (2-10) y (2-11) sean iguales podemos hallar un valor de l_p en la ec. (2-10) que sea equivalente a una distancia a un lastre puntual (Fig. 2-3).

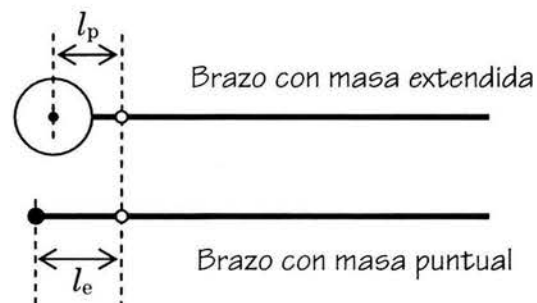


Fig 2-3. El brazo con lastre extendido a una distancia l_p puede ser sustituido por un brazo con lastre puntual a una distancia l_e .

Haciendo $l_p = l_e$ en la ec (2-10) e igualando (2-10) y (2-11):

$$m_p l_e^2 + I_b = m_p l_p^2 + I_m + I_b \quad (2-12)$$

de aquí encontramos el valor de l_e :

$$l_e = \left(l_p^2 + \frac{I_m}{m_p} \right)^{1/2} \quad (2-13)$$

Este valor de l_e es el que se tomará como l_p en la ecuación (2-10) para calcular el momento de inercia suponiendo una masa puntual. Para el cálculo de torca por peso del lastre sí se toma la distancia l_p al centro de masa. En la construcción de un trabuco no se requiere hacer esto, que sólo es una justificación de la ec (2-10), es mejor medir el momento de inercia del brazo con todo y lastre. En las ecuaciones de movimiento usaremos simplemente un valor I para el momento de inercia del brazo completo y una distancia l_1 del centro de giro al centro de masa del brazo completo.

Cuerda

Suponemos que la cuerda siempre está tensa y es de longitud constante. La masa de la cuerda tiene un valor típico máximo de 0.03 la del proyectil. Tanto su masa como su momento de inercia son 2 órdenes de magnitud inferiores, por lo que no se comete un error grande al suponerla de valor pequeño e ignorarlo.

Proyectil

Se le considera puntual pues su tamaño comparado con su radio de giro, longitud de cuerda y longitud de brazo es de 25 a 100 veces menor.

Fuerzas de fricción

Las hay en el eje, en el rozamiento del proyectil con el piso, entre la cuerda y el gancho y con las partes movibles en el aire.

En el eje

Comparamos la torca debida a la fricción en el eje con la debida al lastre. Si suponemos, como aproximación, que la fuerza de fricción se origina en la parte inferior de la cuenca en donde el eje se apoya, la torca de fricción es:

$$\tau_f = \mu m_1 (g + a) r, \quad (2-14)$$

en donde μ es el coeficiente de fricción, r es el radio del eje, m_1 es la masa del brazo apoyado sobre el eje, g es la aceleración debida a la gravedad y a es la componente vertical de la aceleración del brazo.

La torca debida al peso del brazo:

$$\tau_m = m_1(g + a)l_1 \cos \theta_1, \quad (2-15)$$

en donde θ_1 es el ángulo del brazo con la horizontal (fig 2-4).

La razón entre la torcas:

$$\frac{\tau_f}{\tau_m} = \frac{\mu r}{l_1 \cos \theta_1} \quad (2-16)$$

La razón tiene el valor máximo al inicio cuando θ_1 es grande, de unos 70° . Por otra parte, μ en un soporte engrasado tiene un valor típico de 0.15 y la razón típica entre radio y longitud es semejante en cualquier trabuco:

$$\frac{r}{l_1} = \frac{1}{100}, \quad (2-17)$$

sustituyendo en (2-16):

$$\frac{\tau_f}{\tau_m} = 0.0044 \quad (2-18)$$

La torca por fricción en el eje es dos órdenes de magnitud menor que la torca debida al peso.

En el piso

En el inicio del disparo el proyectil se arrastra sobre el piso. Haremos una comparación de las magnitudes de torcas respecto al centro de giro del brazo; la que acelera al proyectil con la de la fuerza de fricción con el piso.

La fuerza de fricción, F_f , es:

$$F_f = \mu_p (mg - F \sin \theta_h) \quad (2-19)$$

en donde μ_p es el coeficiente de fricción, F es la tensión de la cuerda y θ_h es el ángulo que forma la cuerda con la horizontal. El proyectil se mueve pegado al piso acelerado por la fuerza resultante (Fig. 2-5).

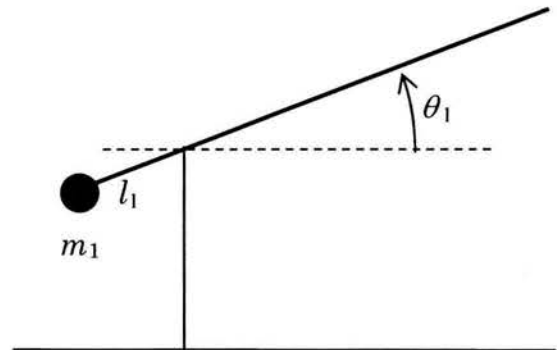


Fig 2-4

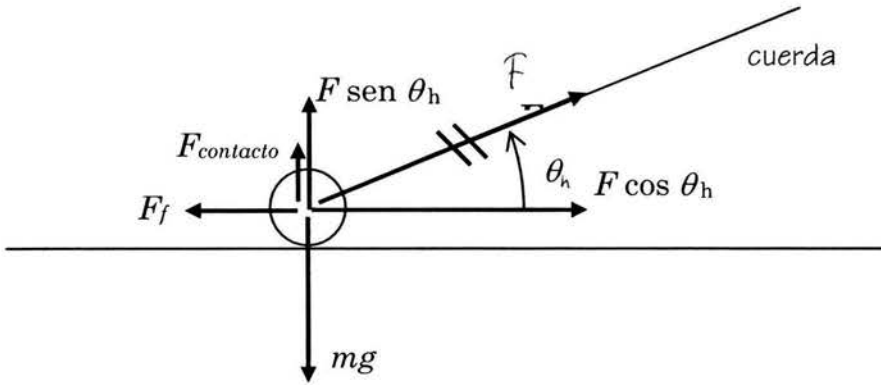


Fig 2-5 Fuerzas sobre el proyectil que se arrastra

La fuerza de fricción es máxima cuando θ_h es cero, es decir cuando la cuerda es horizontal, condición que se cumple aproximadamente al inicio del movimiento. De la figura 2-6 la torca que hace la fuerza de fricción

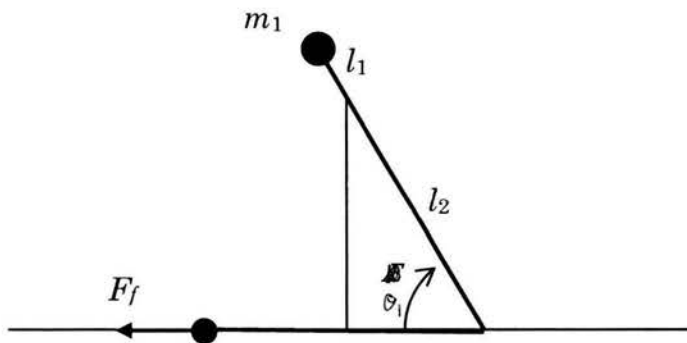


Fig 2-6 La fuerza de fricción máxima sobre el proyectil.

$$\tau_f = F_f l_2 \text{ sen } \theta_1 \quad (2-20)$$

de (2-19), con $\theta_h = 0$:

$$\tau_f = \mu_p m_2 g \text{ sen } \theta_1 \quad (2-21)$$

La torca debida al lastre:

$$\tau_m = m_1 g l_1 \cos \theta_1 \quad (2-22)$$

La razón entre las torcas:

$$\frac{\tau_f}{\tau_m} = \frac{\mu_p m_2 l_2 \tan \theta_1}{m_1 l_1} \quad (2-23)$$

Tanto en trabucos chicos como en grandes las razones de masas y de longitudes son semejantes, son valores típicos:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{150}$$

$$\frac{l_2}{l_1} = 10$$

$$\theta_1 = 70^\circ$$

$$\mu_p = 0.2$$

Sustituyendo los valores en (2-23):

$$\frac{\tau_f}{\tau_m} = 0.037 \quad (2-24)$$

Este es el valor máximo de la razón, sólo ocurre al inicio, así que no tomaremos en cuenta esta fricción.

Cuerda en gancho

La fricción más importante aquí es la que ocurre al momento del disparo, cuando la lazada se desliza sobre el gancho. En la figura 2-7 hay un diagrama de fuerzas. La tensión de la cuerda es F , la fuerza de fricción de la cuerda con el gancho es F_f . El deslizamiento ocurre cuando la componente de la tensión tangente al gancho, F_t , es igual o mayor a la fuerza de fricción.

Por lo que se observa en la figura 2-7, la fuerza de fricción determina el valor del ángulo θ_g , el que forma la cuerda con la perpendicular al gancho. Un valor grande de este ángulo afecta al ángulo de salida del proyectil, así que se hace necesario estimar la magnitud de θ_g .

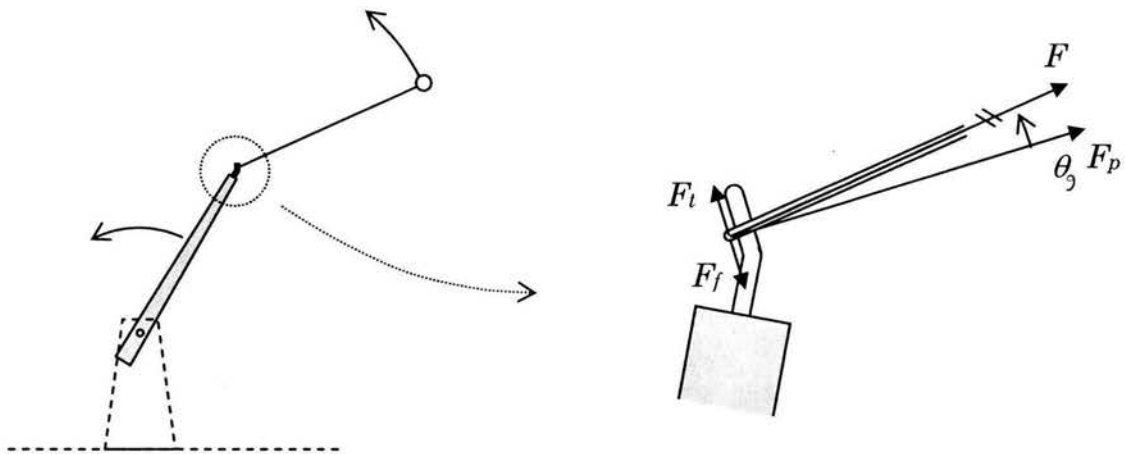


Fig 2-7 Detalle de la cuerda en el gancho

La tangente de θ_g :

$$\tan \theta_g = \frac{F_t}{F_p} \quad (2-25)$$

En donde F_p es la componente de la tensión perpendicular al gancho. Como se había dicho, la condición para que se deslice la cuerda es:

$$F_t = F_f \quad (2-26)$$

La fuerza de fricción:

$$F_f = \mu_c F_p \quad (2-27)$$

en donde μ_c es el coeficiente de fricción estática.

Sustituyendo (2-26) y (2-27) en (2-25):

$$\tan \theta_g = \frac{\mu_c F_p}{F_p}$$

$$\tan \theta_g = \mu_c \quad (2-28)$$

Un valor típico de μ_c es 0.25, del que se obtiene un ángulo de unos 14° que sí es un valor significativo.

Este ángulo se considera cuando se ajusta el gancho (ver página 57, fig. 6-8), pero no es necesario considerarlo en el modelo, ahí su valor es irrelevante pues queda incluido en el ángulo relativo entre la cuerda y el brazo.

Fricción de aire sobre proyectil

La magnitud de la fuerza de fricción del aire sobre el proyectil se puede aproximar si suponemos al proyectil como esférico y usamos las ecuaciones correspondientes. La fuerza de fricción, F_f , del aire sobre la esfera está dada por la ecuación⁹:

$$F_f = (\pi R^2) \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) C_f, \quad (2-29)$$

en donde R es el radio de la esfera, ρ es la densidad del aire, v es la velocidad relativa de la esfera con el aire y C_f es un valor numérico conocido como factor o coeficiente de fricción que depende del número de Reynolds que está dado por la expresión⁹:

$$\text{Re} = \frac{2Rv\rho}{\nu}, \quad (2-30)$$

en donde ν es la viscosidad del aire. Un valor típico de velocidad máxima de proyectil de trabuco es 30 m/s. La densidad del aire es aproximadamente 1 kg/m^3 , su viscosidad es aproximadamente 0.02 cp. El radio puede ser desde unos 4 cm como de una pelota hasta unos 15 cm en el caso del proyectil de un trabuco grande. Al sustituir los primeros valores en (2-30):

$$\text{Re} = \frac{2 \times 0.04 \times 30 \times 1}{2 \times 10^{-5}} \quad (2-31)$$

$$\text{Re} = 1.2 \times 10^5$$

Si el radio es 15 cm:

$$Re = 4.5 \times 10^5 \quad (2-32)$$

La dependencia de C_f de Re es una función complicada y se conoce en parte por medios empíricos. Para valores de Re mayores a 1000, la fuerza de fricción sigue muy aproximadamente la llamada ley de Newton de fricción; la fuerza de fricción es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir C_f es constante⁹. Es el caso de los valores de Re obtenidos en (2-31) y (2-32). Para esferas C_f tiene el valor aproximado de⁹:

$$C_f = 0.5 \quad (2-33)$$

Para evaluar la importancia de la fuerza de fricción comparamos su magnitud con la de las otras fuerzas que actúan sobre el proyectil, la fuerza centrípeta y su peso. La fuerza centrípeta:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \quad (2-34)$$

en donde r es el radio de giro, aunque no es la longitud de la cuerda pues también gira el brazo, su tamaño es aproximadamente el de la cuerda. La razón de las fuerzas, de (2-29) y (2-34):

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{\frac{1}{2} \pi \rho R^2 v^2 C_f}{\frac{mv^2}{r}}, \quad (2-35)$$

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{\pi \rho R^2 r C_f}{2m} \quad (2-36)$$

Son valores típicos para un trabuco de pelotas: m de 150 g con r de 1.5 m y para un trabuco grande m de 30 kg con r de 10 m. Al sustituir en (2-36) los valores del primer caso:

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{\pi \times 1 \times (0.04)^2 \times 1.5 \times 0.5}{2 \times 0.15},$$

$$\frac{F_f}{F_c} = 0.0126 \quad (2-37)$$

Al sustituir los valores del caso del trabuco grande:

$$\frac{F_f}{F_c} = 0.0059 \quad (2-38)$$

En ambos casos la fuerza de fricción es dos órdenes de magnitud menor que la fuerza centrípeta.

La comparación con el peso:

$$\frac{F_f}{F_g} = \frac{\pi \rho R^2 v^2 C_f}{2mg} \quad (2-39)$$

Al sustituir valores del primer caso:

$$\frac{F_f}{F_g} = \frac{\pi \times 1 \times (0.04)^2 (30)^2 0.5}{2 \times 0.15 \times 9.8},$$

$$\frac{F_f}{F_g} = 0.77 \quad (2-40)$$

En el segundo caso:

$$\frac{F_f}{F_g} = 0.054 \quad (2-41)$$

Al comparar la fuerza de fricción con el peso vemos en (2-40) y (2-41) que en el trabuco chico alcanza un valor de orden de magnitud comparable al peso, lo que puede hacer parecer que es importante, sin embargo el peso mismo es pequeño si se compara con la fuerza centrípeta:

$$\frac{F_g}{F_c} = \frac{mg}{\frac{mv^2}{r}} \quad (2-42)$$

$$\frac{F_g}{F_c} = \frac{gr}{v^2} \quad (2-43)$$

Para el trabuco chico:

$$\frac{F_g}{F_c} = \frac{9.8 \times 1.5}{(30)^2}$$

$$\frac{F_g}{F_c} = 0.011 \quad (2-44)$$

Para el grande:

$$\frac{F_g}{F_c} = 0.11 \quad (2-45)$$

El valor de (2-44) nos indica que aunque la fuerza de fricción en el trabuco chico es comparable con el peso, éste es también pequeño al compararse con la fuerza centrípeta. La fuerza dominante cuando el proyectil se mueve rápidamente es la centrípeta. Cuando se mueve lentamente, el peso sí es comparable con ella pero la de fricción es aún más pequeña. Lo anterior justifica no tomar en cuenta la fricción del aire en el proyectil en una primera aproximación.

Fricción de aire sobre el brazo

La fricción del aire sobre el brazo produce una torca que será comparada con la del peso del lastre. La velocidad a la que se mueve casi toda la longitud del brazo es tal que, al igual que en el caso del proyectil, el régimen es el de una fuerza de fricción aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad. Supondremos un brazo cilíndrico.

A cada parte del brazo le corresponde una velocidad diferente, proporcional al radio de giro, que es l , la torca total es la integral resultante a lo largo de todo el brazo.

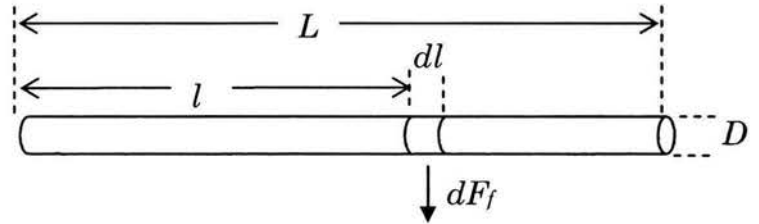


Fig 2-8 Brazo sometido a fuerza de fricción de aire

La figura 2-8 es un esquema del brazo que gira en el extremo de la izquierda. La fuerza de fricción es⁹

$$dF_f = \frac{1}{2} C_f D \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) dl \quad (2-46)$$

en donde D es el diámetro del brazo y las otras variables son como en la ec. (2-29). v es la velocidad en cada punto:

$$v = \omega l \quad (2-47)$$

Cada elemento de fuerza contribuye a la torca:

$$d\tau_f = l dF_f \quad (2-48)$$

Sustituyendo (2-46) y (2-47) en (2-48), la torca está dada por:

$$\tau_f = \frac{1}{4} C_f D \rho \omega^2 \int_0^L l^3 dl \quad (2-49)$$

$$\tau_f = \frac{1}{16} C_f D \rho \omega^2 L^4 \quad (2-50)$$

La velocidad angular máxima ocurre aproximadamente cuando el brazo está en posición horizontal, en ese momento la torca debida a la fuerza de gravedad es:

$$\tau_g = m_1 g l_1 \quad (2-51)$$

Si comparamos las dos torcas:

$$\frac{\tau_f}{\tau_g} = \frac{C_f D \rho \omega^2 L^4}{16 m_1 g l_1} \quad (2-52)$$

El coeficiente de fricción de una barra cilíndrica tiene valores⁹ entre 2.0 y 0.96. Aproximaremos con un valor constante de 1.2.

Los valores típicos para un trábucico chico; $D = 0.02$ m, $L = 1$ m, $m_1 = 20$ kg, $l_1 = 0.1$ m, $\omega = 9$ rad/s, $C_f = 1.2$

$$\frac{\tau_f}{\tau_g} = 0.0056$$

En un trábucico grande $D = 0.2$ m, $L = 10$ m, $m_1 = 2000$ kg, $l_1 = 1$ m, $\omega = 3$ rad/s, $C_f = 1.2$

$$\frac{\tau_f}{\tau_g} = 0.062$$

En ambos casos la torca de la fuerza de gravedad es más de un orden de magnitud mayor a la de la fricción, por lo que no consideraremos esta fricción en el modelo.

Una vez hechas las justificaciones del modelo, se presentan la derivación de las ecuaciones de movimiento.

3 Ecuaciones de movimiento

Como se justificó, el modelo consta de un brazo giratorio con masa m_1 y momento de inercia I , con su centro de masa a una distancia l_1 del punto de rotación, O , y la otra masa puntual, m_2 , en el extremo de una cuerda de longitud r sujeta por su otro extremo a la otra punta del brazo giratorio a una distancia l_2 del punto de rotación. El punto de rotación está fijo a una altura H del piso. La cuerda no tiene masa y no hay fuerzas de fricción.

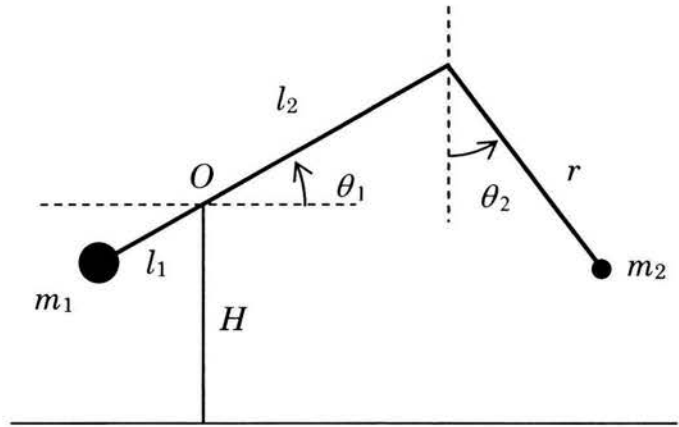


Fig 3-1 Configuración del trábucos.

Haremos la descripción del movimiento usando dos ángulos; θ_1 , el que forma el brazo con la horizontal y vale cero cuando el brazo está horizontal y m_1 está a la izquierda de O en el diagrama, y θ_2 , el que hace la cuerda con la vertical y vale cero cuando la cuerda está vertical y m_2 está debajo del punto de sujeción de la cuerda. Ambos tienen incremento positivo en el sentido convencional (Fig 3-1).

En un tiro típico el movimiento se inicia a partir del reposo, es causado solamente por la torca de la fuerza de gravedad sobre la masa m_1 con brazo l_1 y un ángulo inicial θ_1 con la horizontal. La masa m_2 se desliza sobre el piso moviéndose en línea recta, de 0 a 1 en la fig. 3-2. La tensión en la cuerda va en aumento y en un momento dado toma un valor suficientemente grande para hacer que la masa m_2 se despegue e inicie un movimiento curvilíneo ya sin la restricción de su contacto con el piso, de 1 en adelante en la figura. Así, el movimiento tiene dos etapas, una de movimiento de m_2 restringido a una recta, y la otra, que toma como condiciones iniciales los valores que tiene el movimiento en su primera etapa en el momento en que m_2 se despegue del piso. Las llamaremos de trábucos restringido y libre respectivamente. En la posición 4 de la figura, la masa m_2 es liberada y se mueve como proyectil, el brazo se mueve como péndulo.

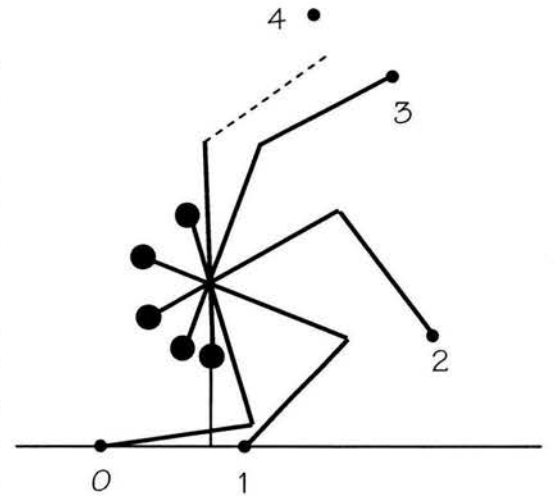


Fig 3-2 Posiciones sucesivas del trábucos en un tiro típico.

Trabuco restringido

Aunque tenemos dos ángulos, en la fase inicial del movimiento hay un solo grado de libertad. La masa m_2 sólo se mueve sobre la línea horizontal y la cuerda de longitud

r siempre se mantiene tensa, eso hace que el ángulo θ_2 quede determinado por el valor del ángulo θ_1 (Fig. 3-3).

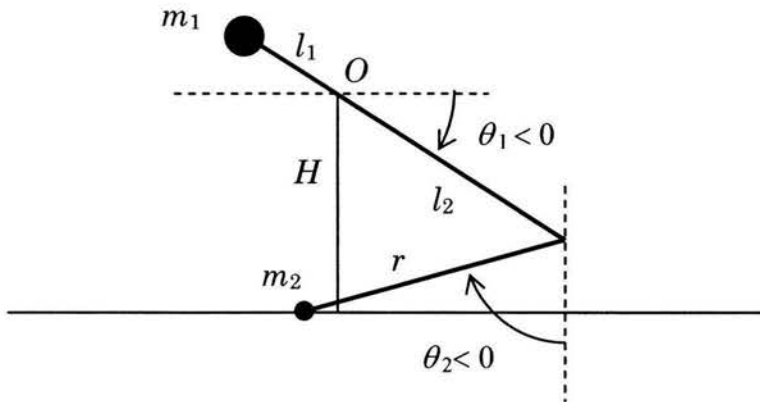


Fig 3-3 Configuración inicial del trabuco restringido (los valores iniciales de los ángulos son negativos).

Las ecuaciones de movimiento serán obtenidas a través de la lagrangiana^{10, 11} del sistema. Las coordenadas cartesianas que emplearemos al inicio tienen su origen en O , el punto de rotación.

La energía cinética del brazo:

$$T_1 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_1^2. \quad (3-1)$$

Las coordenadas de m_2 :

$$x_2 = l_2 \cos \theta_1 + r \sin \theta_2, \quad y_2 = -H \quad (3-2)$$

y_2 es constante, se puede expresar en términos de los ángulos y esa es la ecuación de restricción que relaciona a los ángulos:

$$-H = l_2 \sin \theta_1 - r \cos \theta_2. \quad (3-3)$$

De aquí:

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{r} (l_2 \sin \theta_1 + H). \quad (3-4)$$

Para obtener la energía cinética de m_2 , de (3-2):

$$\dot{x}_2 = -l_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + r \dot{\theta}_2 \cos \theta_2; \quad \dot{y}_2 = 0. \quad (3-5)$$

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_2^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + r^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 - 2l_2 r \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad (3-6)$$

Usaremos la ec. (3-4) para expresar la (3-6) sólo en términos de θ_1 :

$$\theta_2 = \arccos \left[\frac{1}{r} (H + l_2 \operatorname{sen} \theta_1) \right] \quad (3-7)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_1 l_2 \cos \theta_1}{r \left[1 - \frac{1}{r^2} (H + l_2 \operatorname{sen} \theta_1)^2 \right]^{1/2}} \quad (3-8)$$

(El signo escogido para esta derivada es el correspondiente para el intervalo de θ_2 comprendido entre $-\pi/2$ y 0 .)¹²

$$\dot{\theta}_2^2 = \frac{\dot{\theta}_1^2 l_2^2 \cos^2 \theta_1}{r^2 - (H + l_2 \operatorname{sen} \theta_1)^2} \quad (3-9)$$

Sustituimos usando las ecs. (3-4), (3-8) y (3-9) en la (3-6) para dejar solamente términos con θ_1 :

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_2^2 \dot{\theta}_1^2 \operatorname{sen}^2 \theta_1 + \frac{r^2 l_2^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 (H + l_2 \operatorname{sen} \theta_1)^2}{r^2 [r^2 - (H + l_2 \operatorname{sen} \theta_1)^2]} - \frac{2l_2 r \dot{\theta}_1 \operatorname{sen} \theta_1 (l_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1) (H + l_2 \operatorname{sen} \theta_1)}{r^2 \left[1 - \frac{1}{r^2} (H + l_2 \operatorname{sen} \theta_1)^2 \right]^{1/2}} \quad (3-10)$$

Al simplificar queda:

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_2^2 \dot{\theta}_1^2 \left[\operatorname{sen} \theta_1 - \cos \theta_1 \frac{H + l_2 \operatorname{sen} \theta_1}{[r^2 - (H + l_2 \operatorname{sen} \theta_1)^2]^{1/2}} \right]^2 \quad (3-11)$$

La energía cinética de m_2 :

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1^2 \left[\operatorname{sen} \theta_1 - \frac{H + l_2 \operatorname{sen} \theta_1}{[r^2 - (H + l_2 \operatorname{sen} \theta_1)^2]^{1/2}} \cos \theta_1 \right]^2 \quad (3-12)$$

Las energías potenciales:

$$V_1 = -m_1 g l_1 \text{sen } \theta_1; \quad V_2 = -m_2 g H. \quad (3-13)$$

La lagrangiana:

$$L = T - V \quad (3-14)$$

Sustituyendo las ecs. (3-1), (3-12) y (3-13) en la (3-14):

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1^2 \left[\text{sen } \theta_1 - \frac{H + l_2 \text{sen } \theta_1}{[r^2 - (H + l_2 \text{sen } \theta_1)^2]^{1/2}} \right]^2 + m_1 g l_1 \text{sen } \theta_1 + m_2 g H. \quad (3-15)$$

Las derivadas para obtener las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1^2 \left[\text{sen } \theta_1 - \frac{(H + l_2 \text{sen } \theta_1) \cos \theta_1}{[r^2 - (H + l_2 \text{sen } \theta_1)^2]^{1/2}} \right] \\ &\left[\frac{\left[r^2 - (H + l_2 \text{sen } \theta_1)^2 \right]^{1/2} \left[-(H + l_2 \text{sen } \theta_1) \text{sen } \theta_1 + l_2 \cos^2 \theta_1 \right] - (H + l_2 \text{sen } \theta_1) \cos \theta_1 \frac{-2(H + l_2 \text{sen } \theta_1) l_2 \cos \theta_1}{2 \left[r^2 - (H + l_2 \text{sen } \theta_1)^2 \right]^{1/2}}}{r^2 - (H + l_2 \text{sen } \theta_1)^2} \right] \\ &+ m_1 g l_1 \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (3-16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = I \dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1 \left[\text{sen } \theta_1 - \frac{(H + l_2 \text{sen } \theta_1) \cos \theta_1}{[r^2 - (H + l_2 \text{sen } \theta_1)^2]^{1/2}} \right]^2 \quad (3-17)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= I \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_1 \left[\text{sen} \theta_1 - \frac{(H + l_2 \text{sen} \theta_1) \cos \theta_1}{[r^2 - (H + l_2 \text{sen} \theta_1)^2]^{1/2}} \right]^2 \\
&+ 2m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1 \left[\text{sen} \theta_1 - \frac{(H + l_2 \text{sen} \theta_1) \cos \theta_1}{[r^2 - (H + l_2 \text{sen} \theta_1)^2]^{1/2}} \right] \\
&\left[\frac{\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \frac{[r^2 - (H + l_2 \text{sen} \theta_1)^2]^{1/2} [(H + l_2 \text{sen} \theta_1)(-\dot{\theta}_1 \text{sen} \theta_1) + l_2 \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1] + \frac{(H + l_2 \text{sen} \theta_1)^2 l_2 \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1}{[r^2 - (H + l_2 \text{sen} \theta_1)^2]^{1/2}}}{[r^2 - (H + l_2 \text{sen} \theta_1)^2]} \right]
\end{aligned}
\tag{3-18}$$

Para reducir la extensión de las ecuaciones (3-16) y (3-18) hacemos las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned}
S &= \text{sen} \theta_1 \\
C &= \text{cos} \theta_1 \\
A &= (H + l_2 S) \\
B &= (r^2 - A^2)^{1/2} \\
D &= S - \frac{AC}{B}
\end{aligned}
\tag{3-19}$$

La ec. (3-16) queda:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1^2 D \left(C - \frac{B(C^2 l_2 - AS) + \frac{C^2 A^2 l_2}{B}}{B^2} \right) + m_1 g l_1 C
\tag{3-20}$$

La ec. (3-18) queda:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \ddot{\theta}_1 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 D^2) + 2m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1^2 D \left(C - \frac{B(C^2 l_2 - AS) + \frac{C^2 A^2 l_2}{B}}{B^2} \right) \quad (3-21)$$

De las ecs. (3-20) y (3-21) obtenemos la ecuación de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1}, \quad (3-22)$$

de la que se obtiene la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\theta}_1 (I + m_2 l_2^2 D^2) + \dot{\theta}_1^2 m_2 l_2^2 D \left(C - \frac{B(C^2 l_2 - AS) + \frac{C^2 A^2 l_2}{B}}{B^2} \right) = m_1 g l_1 C \quad (3-23)$$

La ec. (3-23) es la correspondiente al movimiento siempre que la masa m_2 esté moviéndose en línea recta sobre el suelo. Más adelante, en la página 32, mostraremos la condición necesaria para que la masa m_2 se despegue y el movimiento sea el que hemos llamado libre.

Trabuco libre

Ahora tenemos dos grados de libertad y los ángulos θ_1 y θ_2 son sus coordenadas. La energía cinética del brazo:

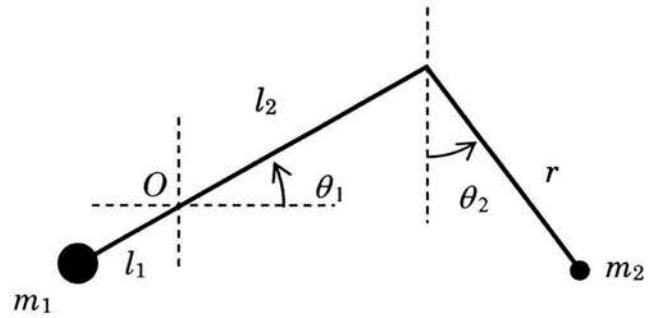


Fig 3-4 Trabuco libre

$$T_1 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_1^2. \quad (3-24)$$

Las coordenadas de m_2 :

$$x_2 = l_2 \cos \theta_1 + r \sin \theta_2, \quad y_2 = l_2 \sin \theta_1 - r \cos \theta_2 \quad (3-25)$$

Las componentes de la velocidad:

$$\dot{x}_2 = -l_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + r \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \quad \dot{y}_2 = l_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + r \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (3-26)$$

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_2^2 \dot{\theta}_1^2 + r^2 \dot{\theta}_2^2 - 2l_2 r \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (3-27)$$

De (3-24) y (3-27), la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 l_2 r \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (3-28)$$

La energía potencial:

$$V = (m_2 l_2 - m_1 l_1) g \sin \theta_1 - m_2 g r \cos \theta_2 \quad (3-29)$$

La lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (I + m_2 l_2^2) + \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 l_2 r \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \sin \theta_1 + m_2 g r \cos \theta_2 \quad (3-30)$$

Las derivadas correspondientes a θ_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \cos \theta_1 \quad (3-31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \dot{\theta}_1 (I + m_2 l_2^2) - m_2 l_2 r \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (3-32)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \ddot{\theta}_1 (I + m_2 l_2^2) - \ddot{\theta}_2 m_2 l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (3-33)$$

De (3-31) y (3-33) la ecuación de Lagrange para θ_1 :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right); \quad (3-34)$$

$$\begin{aligned} -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \cos \theta_1 = \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_1 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) - \ddot{\theta}_2 m_2 l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (3-35)$$

Acomodando términos:

$$\ddot{\theta}_1 (I + m_2 l_2^2) - \ddot{\theta}_2 m_2 l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) = -\dot{\theta}_2^2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos \theta_1 \quad (3-36)$$

Las derivadas correspondientes a θ_2 :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_2 r \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g r \sin \theta_2 \quad (3-37)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 r^2 \dot{\theta}_2 - m_2 l_2 r \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (3-38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \ddot{\theta}_2 m_2 r^2 - \ddot{\theta}_1 m_2 l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ = \ddot{\theta}_2 m_2 r^2 - \ddot{\theta}_1 m_2 l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (3-39)$$

La ecuación de Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right); \quad (3-40)$$

De (3-37) y (3-39):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g r \sin \theta_2 = \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2 m_2 r^2 - \ddot{\theta}_1 m_2 l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (3-41)$$

Arreglando:

$$-\ddot{\theta}_1 m_2 l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2 m_2 r^2 = \dot{\theta}_1^2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g r \sin \theta_2 \quad (3-42)$$

$$\ddot{\theta}_1 (I + m_2 l_2^2) - \ddot{\theta}_2 m_2 l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) = -\dot{\theta}_2^2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos \theta_1 \quad (3-36)$$

Estas ecuaciones, (3-42) y (3-36), son las de movimiento del trabauc libre.

Condiciones de transición

Despegue

La condición para pasar de la etapa de movimiento restringido a la de movimiento libre se da cuando deja de haber equilibrio entre fuerzas. En el movimiento restringido, la masa m_2 está en contacto con el piso y la componente vertical de la tensión

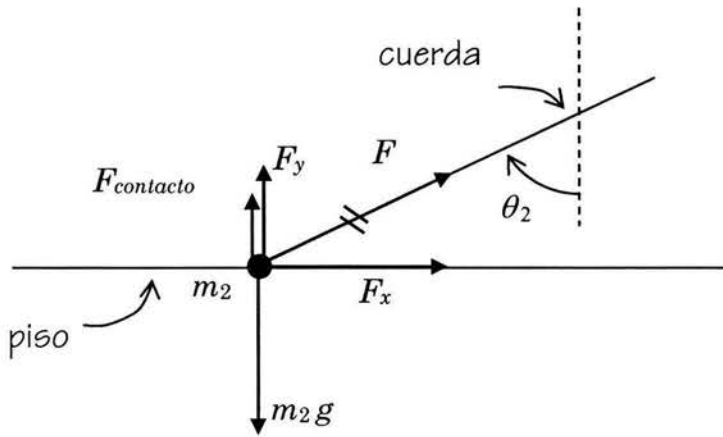


Fig 3-5 Cuando F_y crece y llega a ser igual al peso de m_2 , ésta se despega del piso.

ble conocerlos de antemano, así como tampoco el tiempo en que ocurre, para ello es necesario resolver la ecuación de movimiento.

de la cuerda más la fuerza de contacto con el piso hacen una fuerza igual al peso (Fig. 3-5). No hay aceleración vertical. La tensión va en aumento y la masa m_2 dejará de hacer contacto con el piso cuando la componente vertical de la tensión de la cuerda sea igual a su peso. A partir de ese momento habrá aceleración vertical.

La condición de despegue depende de los valores de aceleración y ángulo, no es posible

Disparo

Al hacer un disparo se desea que la velocidad inicial del proyectil tenga un ángulo determinado, θ_v en la fig. 3-6. Cuando la velocidad de la masa m_2 alcanza ese ángulo se cumple la condición de fin de la etapa de movimiento de trábucos libres. Sin embargo no es posible conocer los valores de la magnitud de esa velocidad, de θ_1, θ_2 y el tiempo en que esto ocurre, sin resolver las ecuaciones de movimiento.

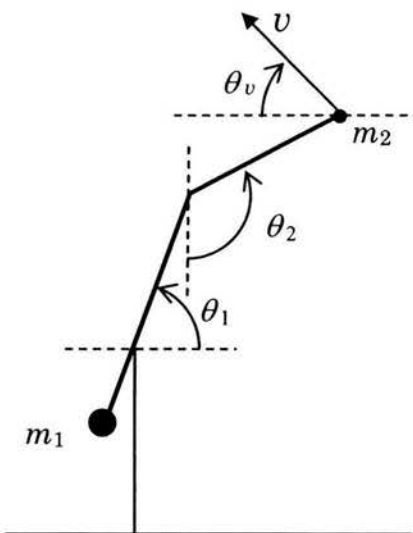


Fig 3-6

Observaciones sobre las ecuaciones

Las ecuaciones de movimiento obtenidas son de segundo orden, tienen términos que contienen derivadas al cuadrado y las variables, los ángulos, aparecen como argumentos de funciones trigonométricas. Las ecuaciones del trábucito libre son dos ecuaciones acopladas^{13, 14}. Al parecer no hay manera de obtener una solución analítica.

Para pasar del régimen de trábucito restringido al de trábucito libre se debe cumplir con una condición dinámica; una relación de ángulo, aceleración y masa, y los valores de la posición y el tiempo en la que ocurre no pueden determinarse antes de resolver la ecuación de trábucito restringido.

De manera semejante, para determinar el momento en que el proyectil se dispara se debe cumplir con una condición sobre el valor de un ángulo ya determinado. No es posible dar el valor de otros ángulos y del tiempo en que esto ocurre sin haber resuelto las ecuaciones de movimiento.

Forma de las ecuaciones

Es posible notar algunas características en las ecuaciones: Si en la configuración inicial del trábucito el ángulo θ_1 es cercano a -90° (Fig 3-3), es decir el brazo es casi vertical, y la altura del soporte H , es aproximadamente igual al brazo l_2 , el ángulo θ_2 es entonces -90° . Con estas condiciones al inspeccionar las ecs. (3-19) se observa que:

$$\begin{aligned} S &\approx -1 \\ C &\ll 1 \\ A &\approx 0 \\ B &\approx r \\ D &\approx -1 \end{aligned} \tag{3-43}$$

Al sustituir estos valores en la ec. (3-23), queda:

$$\ddot{\theta}_1 (I + m_2 l_2^2) \approx m_1 g l_1 C \tag{3-44}$$

que es una ecuación simple. Es decir, al inicio ese trábucito se mueve como péndulo físico simple^{7, 15}. Aunque la masa m_2 no está en el extremo del brazo l_2 , con respecto a su inercia sí se comporta como si estuviera ahí, pues el movimiento es horizontal al igual que el del extremo del brazo.

De las ecuaciones del trábucito libre, 3-36 y 3-42,

$$\ddot{\theta}_1 (I + m_2 l_2^2) - \ddot{\theta}_2 m_2 l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) = -\dot{\theta}_2^2 m_2 l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos \theta_1 \tag{3-36}$$

$$-\ddot{\theta}_1 m_2 l_2 r \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2 m_2 r^2 = \dot{\theta}_1^2 m_2 l_2 r \text{cos}(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g r \text{sen} \theta_2 \quad (3-42)$$

podemos hacer las siguientes observaciones:

La ecuación de movimiento de un péndulo físico simple, de momento de inercia I , con una masa m con el centro de masa a una distancia r del centro de giro, inclinado un ángulo θ respecto a la vertical es:

$$\ddot{\theta} I = -m g r \text{sen} \theta \quad (3-45)$$

El término $\ddot{\theta} I$ es la parte que podríamos llamar inercial y el otro, $-m g r \text{sen} \theta$, es la parte de la torca. En las ecuaciones 3-36 y 3-42 están los términos correspondientes:

	términos de inercia		=	términos de torcas	
	aceleración × momento de inercia	aceleración del otro elemento × momento de inercia		debida al peso	debida a fuerza inercial
Ec. 3-36, movimiento del brazo	$\ddot{\theta}_1 (I + m_2 l_2^2)$	+ $-\ddot{\theta}_2 m_2 l_2 r \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$	=	$g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \text{cos} \theta_1$	+ $-\dot{\theta}_2^2 m_2 l_2 r \text{cos}(\theta_1 - \theta_2)$
Ec. 3-42, movimiento de la cuerda	$\ddot{\theta}_2 m_2 r^2$	+ $-\ddot{\theta}_1 m_2 l_2 r \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$	=	$-m_2 g r \text{sen} \theta_2$	+ $\dot{\theta}_1^2 m_2 l_2 r \text{cos}(\theta_1 - \theta_2)$

Además están otros términos, los que contienen a la variable que describe al otro elemento (θ_2 en la ecuación de θ_1 y viceversa) y que hacen que las ecuaciones sean acopladas.

4 Modelo numérico

Como no es posible hallar solución analítica de las ecuaciones obtenidas, se implementó una solución numérica. Primero la parte de movimiento restringido hasta llegar a la condición de despegue y después la de movimiento libre hasta llegar a la condición de disparo.

Algoritmo

El recurso escogido para aproximarse a la solución es un modelo para computadora que usa el método de Euler¹⁶ para hallar valores sucesivos de las variables en intervalos de tiempo pequeños. Es un método numérico muy simple, usa ecuaciones de primer grado. Primero se determina el valor de la aceleración según la llamada segunda ley de Newton para movimiento de rotación¹⁷. En un objeto rígido que gira y cuya torca que lo acelera angularmente tiene su origen en la fuerza de gravedad, la torca es función de la posición del objeto. Si además hay otro elemento movable fijado al objeto, la torca resultante también estará en función de la velocidad y posición de esta otra parte. En el caso del trábucó restringido, tomando al brazo como objeto en cuestión, la posición y velocidad de la cuerda pueden expresarse en función de la posición y velocidad del brazo, así la torca queda en función solamente de la posición y la velocidad del propio brazo. Podemos plantear una ecuación general que ilustre el método:

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau(\theta, \dot{\theta})}{I}. \quad (4-1)$$

El valor inicial de la torca, τ , queda determinado por las condiciones iniciales de posición y velocidad. I es el momento de inercia. Una vez calculado el valor de la aceleración, se encuentra el valor de la velocidad:

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} + \ddot{\theta} \Delta t, \quad (4-2)$$

en donde Δt es un intervalo de tiempo suficientemente pequeño para tener la precisión deseada. El valor obtenido de la velocidad se usa para calcular la posición:

$$\theta = \theta + \dot{\theta} \Delta t. \quad (4-3)$$

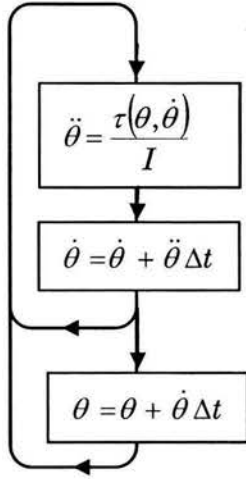


Fig 4-1 Ciclo de cálculo

Los nuevos valores de posición y velocidad son usados en la ecuación (4-1) y el ciclo se repite obteniéndose valores sucesivos de velocidad y posición (Fig 4-1).

De la ecuación de movimiento del trábucó restringido (3-23) se despeja la aceleración, $\ddot{\theta}_1$:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{m_1 g l_1 C - \dot{\theta}_1^2 m_2 l_2^2 D \left(C - \frac{B(C^2 l_2 - A S) + \frac{C^2 A^2 l_2}{B}}{B^2} \right)}{I + m_2 l_2^2 D^2} \quad (4-4)$$

Esta ecuación es la correspondiente a la (4-1).

En el caso del trábucó libre se tienen dos ecuaciones acopladas, el método es semejante sólo que ahora se trabaja con un sistema de dos ecuaciones simultáneas para encontrar los valores de las aceleraciones. Al resolver el sistema se tienen dos ecuaciones equivalentes a la (4-1) para calcular las aceleraciones. Las velocidades y posiciones se calculan con parejas de ecuaciones equivalentes a las (4-2) y (4-3).

Para el trábucó libre se usan las ecuaciones (3-36) y (3-42):

$$\ddot{\theta}_1 E - \ddot{\theta}_2 F = G \quad (4-5)$$

$$-\ddot{\theta}_1 H + \ddot{\theta}_2 J = K \quad (4-6)$$

aquí se han hecho las sustituciones siguientes:

$$\begin{aligned} E &= I + m_2 l_2^2 \\ F &= m_2 l_2 r \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \\ G &= -\dot{\theta}_2^2 m_2 l_2 r \text{cos}(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \text{cos} \theta_1 \\ H &= m_2 l_2 r \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \\ J &= m_2 r^2 \\ K &= \dot{\theta}_1^2 m_2 l_2 r \text{cos}(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g r \text{sen} \theta_2 \end{aligned} \quad (4-7)$$

Las ecuaciones (4-5) y (4-6) se tratan como simultáneas para despejar $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$. Se obtienen las aceleraciones como funciones de velocidades y posiciones¹⁸:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{GJ + FK}{EJ - HF}, \quad (4-8)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{EK + GH}{EJ - HF}. \quad (4-9)$$

Estas dos últimas son las correspondientes a la ecuación (4-1).

Modos de operación

Las ecuaciones mostradas son de un modelo que pretende ser completo en lo que respecta a la interacción entre el brazo y la cuerda con masa. Una vez que se hacen las primeras observaciones de gráficas en pantalla surgen interrogantes sobre la influencia de uno de estos elementos sobre el otro. Si se dispone de la posibilidad de simular el movimiento de uno de los elementos, por ejemplo el brazo, sin que sea influido por el de la cuerda con masa, al comparar los resultados gráficos con el del movimiento del modelo completo se puede hacer una evaluación por inspección de la influencia de uno en el otro.

El programa incluye entonces la posibilidad de movimientos ficticios en los que hay interacciones parciales o sin interacción alguna entre brazo y cuerda con masa. La figura 4-2 servirá como referencia para las ecuaciones de los apartados siguientes.

Modo 1, sin interacción

Los movimientos del brazo y de la cuerda con masa son como de dos péndulos independientes, la cuerda con masa es como un péndulo simple y el brazo como un péndulo físico. Ambos pueden girar u oscilar con cualquier amplitud y es posible escoger las condiciones iniciales.

Las ecuaciones equivalentes a la (4-1) son:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{m_1 g l_1 \cos \theta_1}{I}, \quad (4-10)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g \operatorname{sen} \theta_2}{r}. \quad (4-11)$$

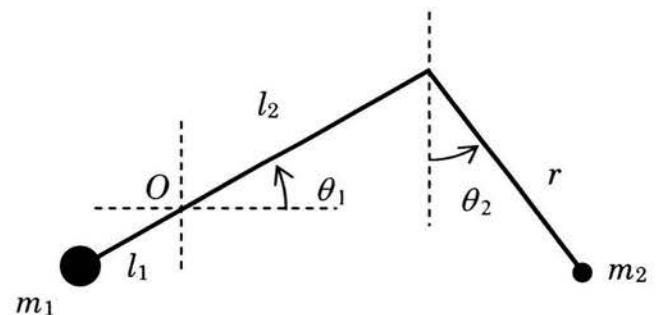


Fig 4-2

En donde l_1 es la distancia del soporte al centro de masa e I es el momento de inercia del brazo (Fig. 4-2).

Modo 2, sólo el brazo es independiente

El movimiento del brazo es el de un péndulo, su ecuación equivalente a la (4-1) es la (4-10) y la cuerda sí está sujeta a la influencia del movimiento del brazo, su movimiento es el de un péndulo simple cuyo soporte está en movimiento. Para encontrar su ecuación de movimiento primero expresamos las coordenadas del punto de apoyo de la cuerda, que es el extremo del brazo:

$$\begin{aligned} x_b &= l_2 \cos \theta_1 \\ y_b &= l_2 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (4-12)$$

las componentes de su aceleración:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_b &= -l_2 (\dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1) \\ \ddot{y}_b &= -l_2 (\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1) \end{aligned} \quad (4-13)$$

La magnitud de la aceleración es

$$a = (\ddot{x}_b^2 + \ddot{y}_b^2)^{1/2} \quad (4-14)$$

El ángulo que forma a con el eje x (Fig. 4-3):

$$\beta = \arctan \left(\frac{\ddot{y}_b}{\ddot{x}_b} \right) \quad (4-15)$$

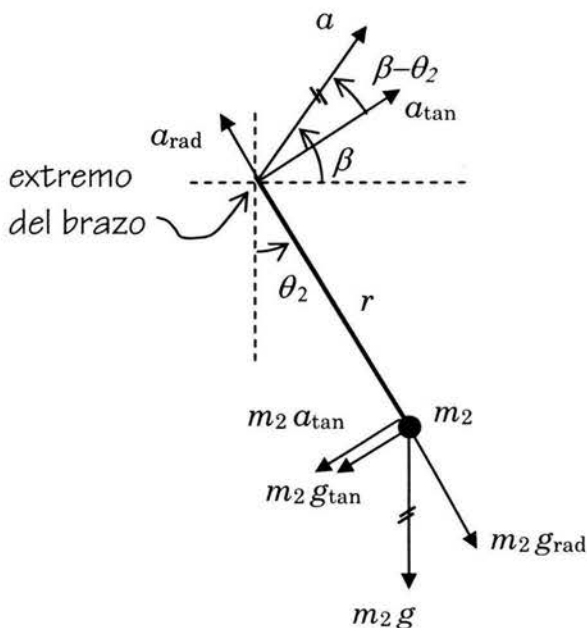


Fig 4-3 Aceleraciones y fuerzas a las que está sometida la cuerda con la masa m_2 . Su soporte es el extremo del brazo.

El movimiento del péndulo será afectado por una fuerza inercial que tiene la misma dirección y sentido contrario al de la aceleración a . Solamente una componente perpendicular a la cuerda será la que se tome en cuenta, es la indicada con a_{tan} en la figura 4-3. La fuerza inercial que se considera es de la misma dirección y sentido contrario a a_{tan} , es la indicada como $m_2 a_{tan}$ en la figura. La fuerza total que se considera es esa más la componente tangencial del peso, $m_2 g_{tan}$.

La magnitud de la componente tangencial de a :

$$a_{tan} = a \cos(\beta - \theta_2) \quad (4-16)$$

La componente tangencial del peso:

$$m_2 g_{tan} = m_2 g \sin \theta_2. \quad (4-17)$$

La torca total sobre la cuerda es

$$\tau = m_2 r (g \sin \theta_2 - a \cos(\beta - \theta_2)) \quad (4-18)$$

De aquí la ecuación correspondiente a la (4-1) es:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{r} (g \sin \theta_2 - a \cos(\beta - \theta_2)) \quad (4-19)$$

Modo 3, la cuerda con la masa es independiente del brazo

Aquí es la cuerda con masa la que se mueve como péndulo simple, su ecuación correspondiente a la (4-1) es la (4-11). El brazo es el que ahora es afectado por la fuerza de reacción al movimiento de la cuerda. La fuerza tiene la misma dirección de la cuerda. En la figura 4-4 es F .

La magnitud de esa fuerza es la suma de la componente del peso de m_2 a lo largo de la cuerda y la fuerza centrípeta asociada al movimiento circular de m_2 :

$$F = m_2 \dot{\theta}_2^2 r + m_2 g \cos \theta_2, \quad (4-20)$$

pero es la componente tangencial al brazo de esta fuerza la que se considera para la torca:

$$F_{tan} = F \cos(\theta_2 - \theta_1). \quad (4-21)$$

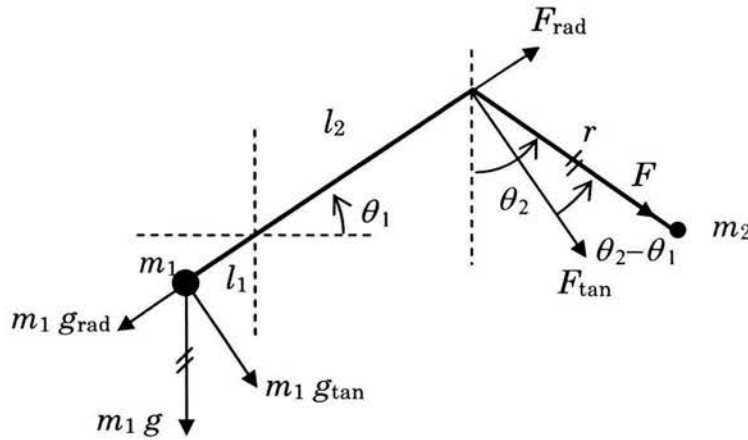


Fig 4-4 Fuerzas a las que está sometido el brazo. Hacen torca las componentes que van como la velocidad tangencial.

Para la torca sobre el brazo también se considera la componente tangencial del peso de m_1 :

$$\tau = l_1 m_1 g \cos \theta_1 - l_2 F \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (4-22)$$

Al sustituir la ec. (4-20) en la (4-22), la ecuación correspondiente a la (4-1) queda:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{I} [l_1 m_1 g \cos \theta_1 - l_2 m_2 (\dot{\theta}_2^2 r + g \cos \theta_2) \cos(\theta_2 - \theta_1)]. \quad (4-23)$$

Modo 4, la cuerda y el brazo sí dependen entre sí pero no hay interacción con el piso

En este modo no hay régimen restringido y es posible escoger las condiciones iniciales, tanto de ángulos como de velocidades, las ecuaciones son las del trabuco libre, (4-8) y (4-9).

Modo 5, completo, iniciando el movimiento con el régimen restringido

Aquí la ecuación del inicio es la (4-4) y al cumplirse la condición de despegue, se cambia de régimen y se trata con las ecuaciones del trabuco libre, (4-8) y (4-9), tomando como condiciones iniciales los valores finales del régimen restringido.

Proyectil

En cualesquiera de los modos, al momento de ocurrir el disparo del proyectil, el brazo se comporta como un péndulo físico independiente, por lo que se usa la ecuación (4-10) tomando como condiciones iniciales los valores finales del modo anterior. Se calculan también los valores de la velocidad del proyectil en coordenadas cartesianas tomando como iniciales los valores del momento del disparo. A partir de ese momen-

to las coordenadas del proyectil se calculan en cada ciclo con las ecuaciones siguientes (v_x es constante):

$$v_y = v_y - g \Delta t \tag{4-24}$$

$$\begin{aligned} x &= x + v_x \Delta t \\ y &= y + v_y \Delta t \end{aligned} \tag{4-25}$$

El programa

Está hecho en Visual Basic de manera que pueda representarse una imagen en movimiento de un diagrama del trabuco al mismo tiempo que se hacen gráficas de velocidad angular respecto al tiempo y respecto a aceleración angular.

En el modo completo (modo 5), el usuario escoge los valores de longitudes y masas así como el ángulo inicial del brazo del trabuco, θ_1 . El ángulo inicial de la cuerda, θ_2 , queda determinado por los valores del primer ángulo y los de las longitudes escogidas. Las velocidades iniciales son cero. En los otros modos de operación el usuario fija los valores iniciales de velocidades y posiciones. Como el modelo puede usarse para representar trabucos grandes, cuyas dimensiones son del orden de metros, y pequeños, del orden de centímetros, es posible escoger las unidades; gramos y centímetros o kilogramos y metros.

El incremento de tiempo, Δt , tiene uno de dos valores, según el sistema de unidades escogido; 10^{-5} s para centímetros y 5×10^{-5} s cuando se escogen metros. Esto es porque el periodo de un péndulo de centímetros es menor que el de un péndulo de metros. Estos valores fueron determinados como los mayores posibles que produjeran resultados de precisión aceptable.

Los datos que se muestran en la pantalla (Fig. 4-6) así como el avance del movimiento del diagrama y los puntos de las gráficas se renuevan cada 200 vueltas al ciclo de cálculo. En un movimiento típico, esto permite mostrar las posiciones sucesivas del diagrama con una separación adecuada para su inspección.

Una manera de evaluar la precisión del cálculo aprovecha el hecho de que el sistema tratado es conservativo. Se compara la energía total calculada por las iteraciones en cada etapa del proceso con la

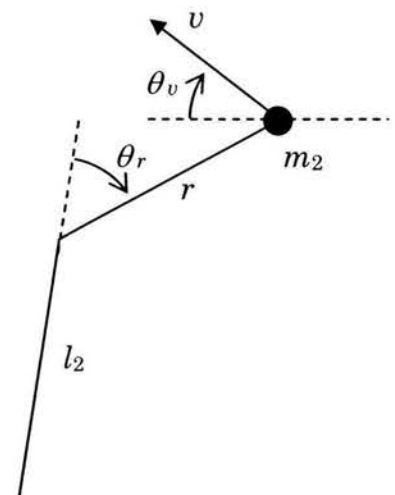


Fig 4-5. En el programa es posible seleccionar entre dos posibilidades de ángulo de disparo, θ_v y θ_r .

energía inicial. Las discrepancias son debidas al cálculo. La razón entre la energía inicial y la calculada durante el proceso de un tiro típico es a lo máximo $1 - 8 \times 10^{-4}$.

Como el programa es de ayuda para diseñar y operar un trabuco real, es posible seleccionar el ángulo de disparo, el que forma la velocidad del proyectil con la horizontal al momento de ser liberado; tal como se define, con respecto a la horizontal, o el que forma la cuerda con el brazo, θ_v y θ_r en la figura 4-5. El ángulo θ_r es el que se ajusta en un trabuco real.

El programa tiene la opción de almacenar en una base de datos del programa Access los mismos valores que se generan para la representación en pantalla. Con tablas de valores de tiempo, posiciones y velocidades es posible hacer gráficas en el programa Excel.

El apéndice 1, página 69, contiene el código del programa.

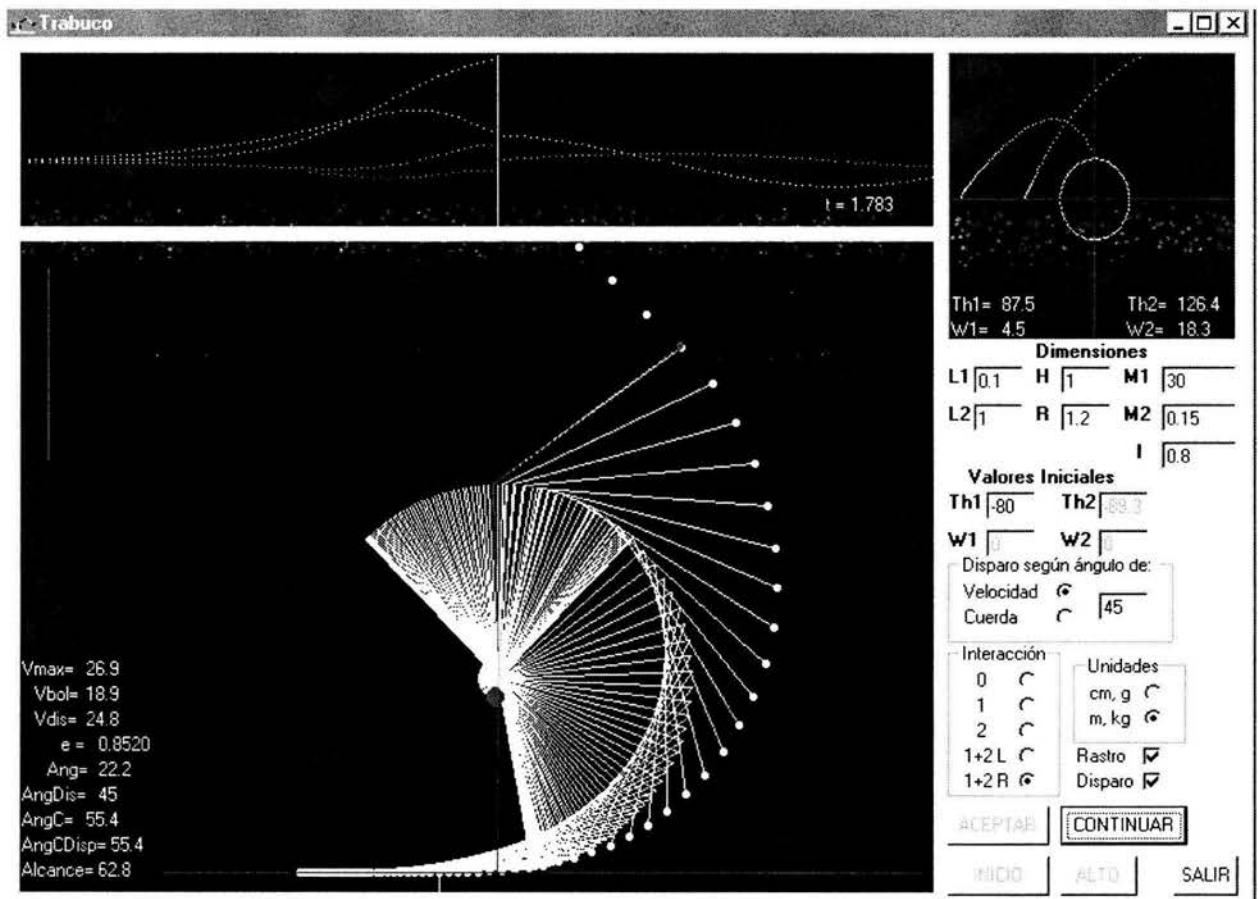


Fig 4-6 Aspecto de la pantalla del programa. El cuadro principal muestra el diagrama del trabuco en movimiento. Hay opción de dejar marcas de posiciones sucesivas. El cuadro superior es de gráficas de velocidad angular contra tiempo. El cuadro superior derecho es del diagrama en espacio de fase, las coordenadas son ángulo y velocidad angular.

5 Resultados numéricos

En una primera impresión, al observar el movimiento de la figura en la pantalla, la simulación parece realista. Como una segunda verificación se observa el caso en que el trabuco se mueve como péndulo, después de haber disparado. En ese caso es fácil calcular el periodo del péndulo y compararlo con el simulado. La verificación es buena.

El principio de conservación de la energía nos permite comparar el valor de la energía inicial con el calculado en cada exposición de valores en pantalla. Esta prueba muestra que el programa es aceptable, la discrepancia nunca es mayor de una parte en 10 000.

Primeras observaciones

Como si se tuviera un trabuco real en el que es posible cambiar magnitudes y condiciones iniciales, con el programa es posible “experimentar” haciendo lanzamientos variados. Desde los primeros tiros se aprecia algo que era de esperarse; cuando el trabuco es de grandes dimensiones, la velocidad inicial del proyectil es grande también. El alcance del proyectil parece proporcional al tamaño del brazo del trabuco.

La razón de longitudes entre brazos del trabuco también juega un papel, como era de esperarse, a razón mayor, mayor alcance. Otra relación que aparece desde las primeras observaciones es la que hay entre el alcance del proyectil y la razón que hay entre la masa del contrapeso y la del proyectil. Se logran alcances grandes cuando la razón es del orden de 100.

El trabuco de guerra

Al escoger valores semejantes a los de un trabuco grande, como los usados en la antigüedad, y con condiciones iniciales también adecuadas, se encuentra que el movimiento del brazo después del disparo es de gran amplitud, semejante a lo observado en videos de trabucos hechos como reproducciones⁶. En un trabuco de esos, lo que se busca es enviar un proyectil grande a gran velocidad, es decir con el mayor ímpetu posible con el fin de causar daño en el blanco. Gran parte de la energía potencial inicial del trabuco no es aprovechada como energía cinética del proyectil, pero eso no importa si éste cumple con su finalidad satisfactoriamente.

El trabuco eficiente

Es casi inmediato el deseo de lograr un disparo en el que el brazo no quede oscilando como péndulo, es decir en el que toda la energía potencial inicial se transfiera al proyectil. Podemos definir una eficiencia como la razón entre la energía del proyectil entre la inicial. Surge la pregunta sobre la posibilidad del trabuco de eficiencia 1.

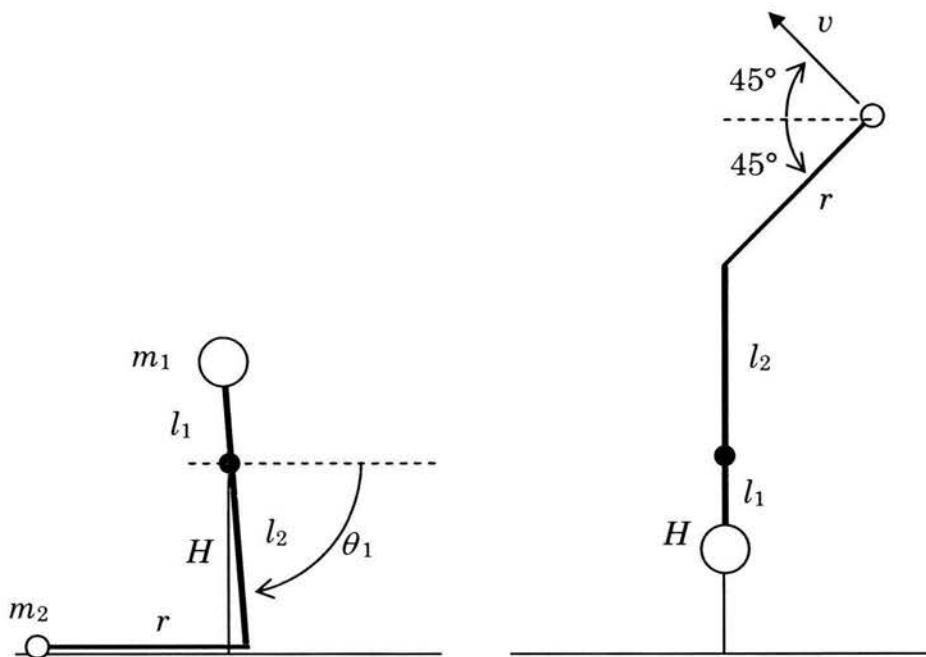


Fig. 5-1. Configuración inicial y de disparo usadas en las pruebas

Con sólo hacer intentos por aproximaciones es posible hallar una configuración y condiciones iniciales que sí cumplen con la eficiencia 1 hasta donde lo permite la precisión del programa. Esto es algo que no era posible prever antes de hacer pruebas con el programa.

De esta manera “experimental” se buscaron las relaciones entre longitudes y masas que hay cuando se consigue la eficiencia 1. Por sencillez se consideró primero un trabuco cuyo brazo no tiene masa, m_1 es una masa puntual a una distancia l_1 del centro de giro y el momento de inercia del brazo es sólo el de esta masa. La configuración inicial siempre fue la misma, con valor inicial de $\theta_1 = -89^\circ$ y la configuración final siempre con el brazo vertical en reposo, la cuerda a 45° de la horizontal y la velocidad del proyectil también a 45° de la horizontal (Fig. 5-1). Los resultados a continuación.

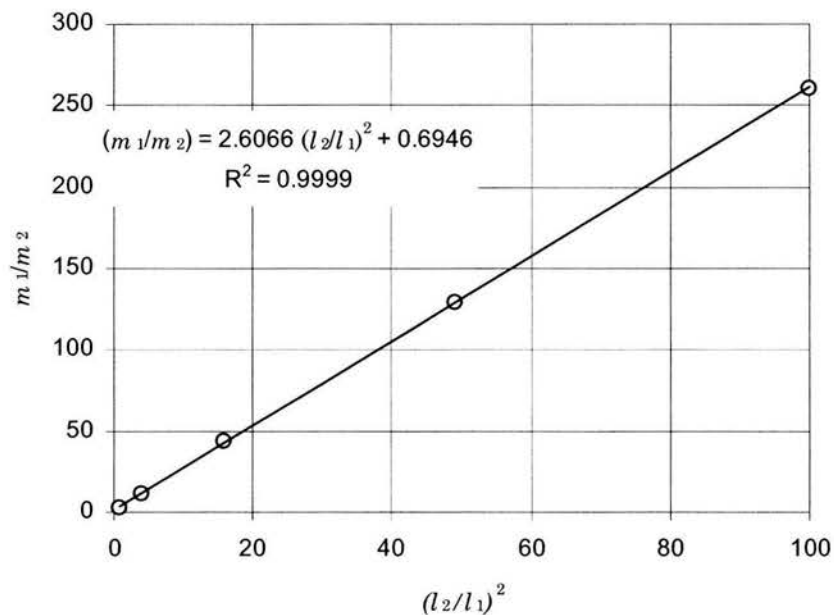
Masas y longitudes

Se encontraron relaciones entre las variables, como ejemplo, la tabla 5-1 muestra diversos valores escogidos de longitudes l_1 , l_2 y de la masa m_1 . Con el programa se encontraron los valores correspondientes de m_2 , r y v , la velocidad de disparo del proyectil.

l_1 (m)	l_2 (m)	l_2/l_1	m_1 (kg)	m_2 (kg)	m_1/m_2	r (m)	v (m/s)	$(l_2/l_1)^2$
0.7	0.7	1	10	3.870	2.584	1.023	5.4	1
0.2	0.4	2	5	0.460	10.870	0.551	7.9	4
0.5	2.0	4	30	0.700	42.857	2.640	26.9	16
0.4	2.8	7	25	0.193	129.534	3.595	43.3	49
0.1	1.0	10	20	0.0767	260.756	1.265	31.1	100

Tabla 5-1. Valores escogidos de longitudes l_1 , l_2 y masa m_1 . Los valores de m_2 , y r son los que hacen resultar eficiencia 1. v es la velocidad de disparo del proyectil.

Como suponemos que el desempeño del trábucos depende de razones entre cantidades semejantes, al probar la relación entre la razón de masas y la de brazos se encuentra una relación interesante. La gráfica 5-1 muestra una relación de proporcionalidad lineal^{19, 20} excelente entre la razón de masas m_1/m_2 , y el cuadrado de la razón de brazos $(l_2/l_1)^2$.



Gráfica 5-1. Se muestra la relación lineal que hay entre la razón de masas m_1/m_2 , y el cuadrado de la razón de longitudes, $(l_2/l_1)^2$ cuando se tiene eficiencia 1. Los valores son de la tabla 5-1.

Del ajuste de la recta de la gráfica 5-1 se desprende la ecuación

$$m_1 l_1^2 = 2.6 m_2 l_2^2 \quad (5-1)$$

Longitudes

La longitud de la cuerda, r , depende de las longitudes de brazos, l_1 y l_2 . Al suponer una relación lineal entre las cantidades, se hizo un ajuste por mínimos cuadrados con los valores de la tabla 5-1. Se encontró la siguiente relación:

$$r_C = 0.22 l_1 + 1.26 l_2 \quad (5-2)$$

Los valores de r_C calculados con los valores de las l de la tabla 5-1 aparecen en la tabla 5-2. La gráfica 5-2 confirma la relación de igualdad, el ajuste es muy bueno.

r (m)	r_C (m)
0.551	0.548
1.023	1.036
1.265	1.282
2.640	2.630
3.595	3.616

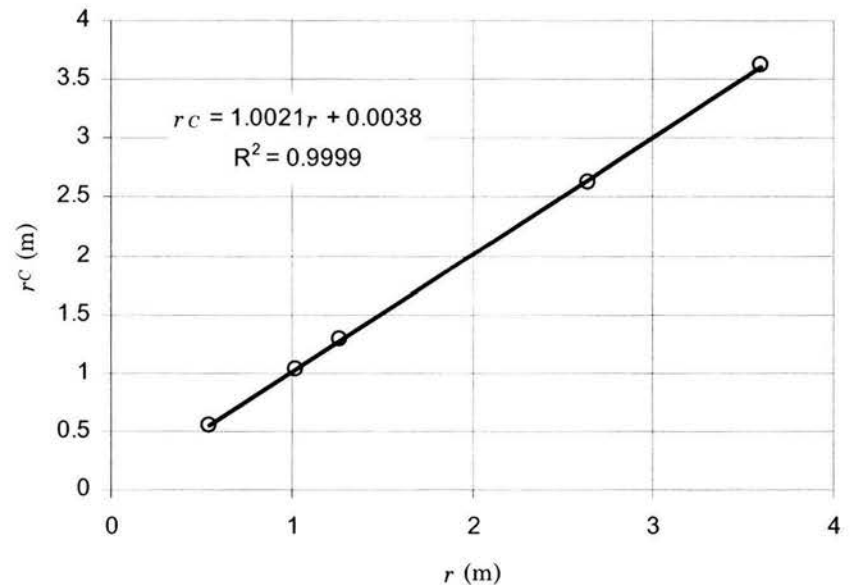


Tabla 5-2 y gráfica 5-2. Valores de la longitud encontrada de la cuerda, r , y de la longitud calculada, r_C , con la ecuación 5-2. La gráfica muestra una igualdad entre ellos.

Determinación de un trábucos eficiente

Las ecuaciones (5-1) y (5-2) permiten determinar valores para obtener un trábucos de eficiencia 1. Si inicialmente se tienen valores de tres cantidades, que no sean longitudes las tres, con las ecuaciones es posible determinar los valores de las dos restantes. Si las cantidades conocidas son las tres longitudes, entonces se determina la razón de masas y cualquier combinación de masas con esa razón cumple la condición. De manera análoga, si sólo se tienen las masas, cualquier combinación de longitudes que tenga la razón correspondiente cumple con la condición.

De lo dicho, vemos que si en cualquiera de los casos de trabuco eficiente se cambian valores de masas de manera que la razón entre ellas sea la misma, la eficiencia del trabuco sigue siendo 1. Lo mismo sucede si se cambian los valores de las longitudes conservando las razones, sólo que ahora también cambia el valor de la velocidad de disparo.

Conservación de energía

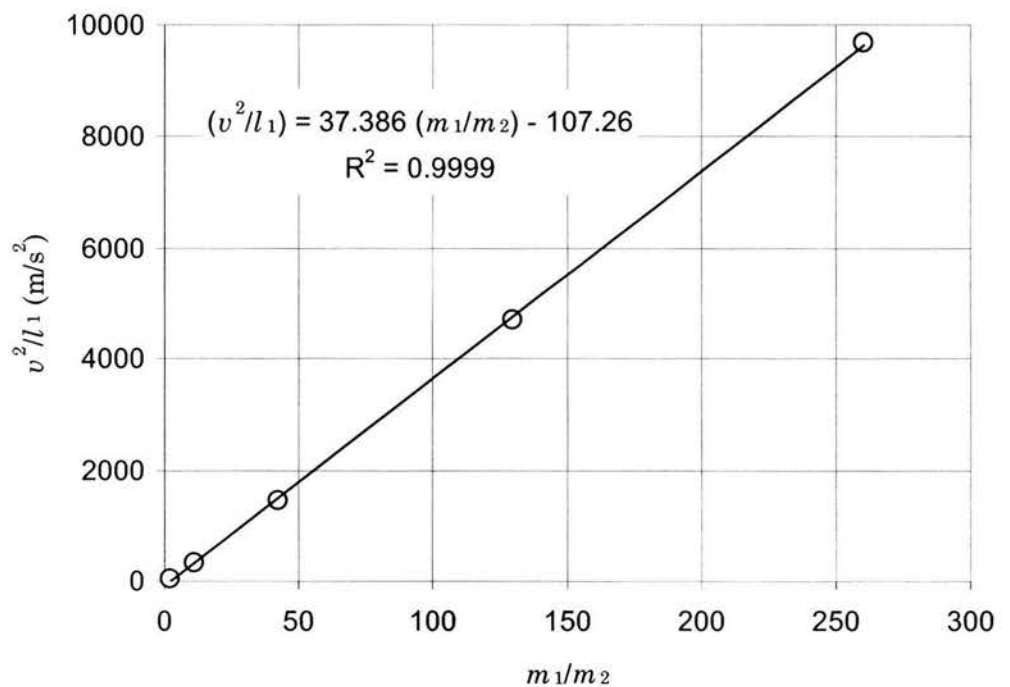
Otra verificación que se puede hacer es sobre la conservación de la energía. Una parte de la energía inicial se transforma en energía potencial del proyectil pues éste se ha elevado, pero casi toda la energía se transforma en cinética del proyectil. El cambio en energía potencial es pues el debido al descenso de m_1 de una altura $2l_1$ (Ver figura 5-1). La energía cinética del proyectil es igual a ese cambio en energía, eso lo expresa la ecuación:

$$2m_1gl_1 \approx \frac{1}{2} m_2v^2. \tag{5-3}$$

De aquí podemos ver que

$$\frac{v^2}{l_1} \approx 4g \frac{m_1}{m_2}. \tag{5-4}$$

Al hacer una gráfica de los valores tomados de la tabla 5-1 para verificar esta última ecuación, se observa una muy buena correspondencia lineal. Al no tomar en cuenta la energía potencial del proyectil, el valor de v^2 resulta mayor que el mostrado en la gráfica y por ello la pendiente de la recta, 37.4, es menor que la indicada por la ec. (5-4), 39.2, el valor de $4g$.



Gráfica 5-3. Se muestra la relación lineal que hay entre la razón de masas m_1/m_2 , y la razón v^2/l_1 . Los valores son de la tabla 5-1.

Sobre los coeficientes

Los valores de los coeficientes de las ecuaciones (5-1) y (5-2) dependen de la configuración inicial del trabuco y del ángulo de disparo seleccionados. En seguida se muestran dos casos a manera de ejemplos. Los valores son los mismos de la tabla 5-1 pero en el primer ejemplo el ángulo inicial θ_1 es -45° y en el segundo, $\theta_1 = -89^\circ$ pero el disparo es vertical hacia arriba (Ver figura 5-2). Los valores de los coeficientes fueron determinados por mínimos cuadrados al igual que los de las ecuaciones (5-1) y (5-2).

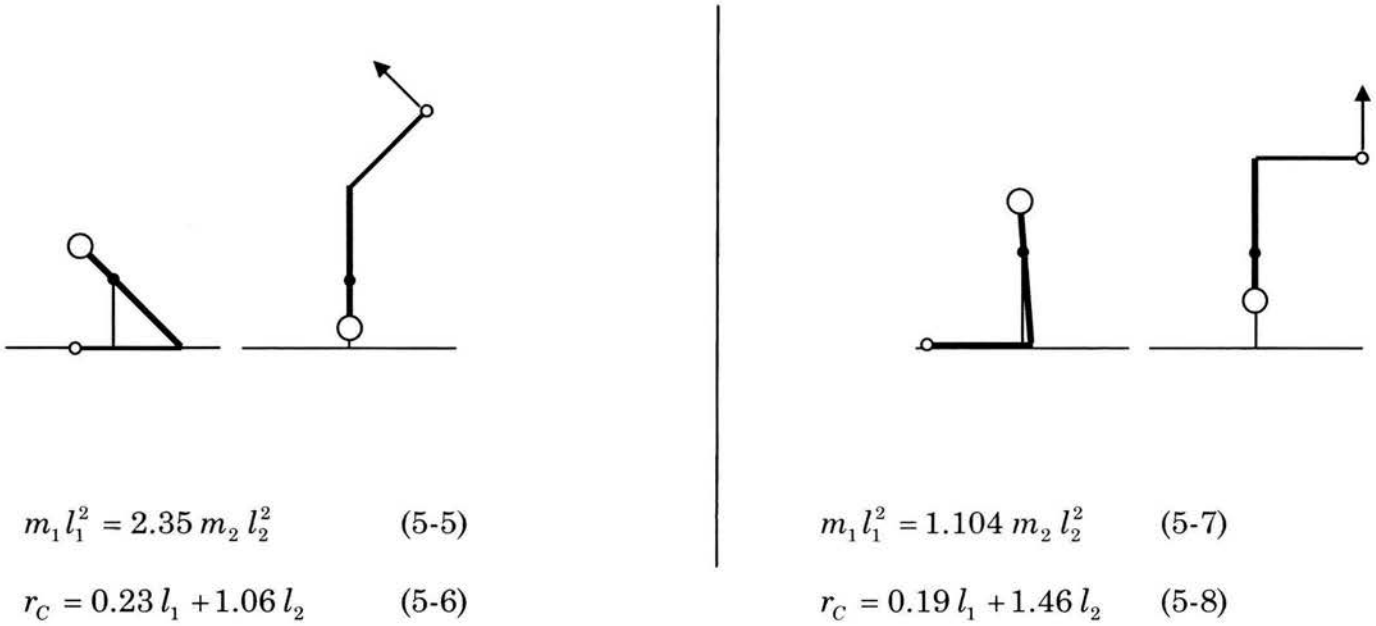


Fig. 5-2. Configuración inicial y de disparo de dos ejemplos. Los coeficientes en las ecuaciones dependen de la configuración inicial y del ángulo de disparo seleccionados.

6 Un trabuco

Para poner a prueba las predicciones del programa es necesario realizar una confrontación con un trabuco real. Se construyó uno que, por sus dimensiones, se puede considerar como un modelo mecánico, no obstante permite hacer las comparaciones necesarias (Fig. 6-1).

Diseño

El trabuco se diseñó buscando un desempeño de eficiencia 1 y buen alcance del proyectil. Por su tamaño es posible transportarlo en un automóvil a un sitio seguro para disparar. En un trabuco eficiente con un lastre que está entre 20 y 30 kg, la masa del proyectil queda alrededor de los 150 g. Así es que se decidió diseñarlo buscando la eficiencia total al lanzar una pelota de beisbol.

Brazo

El brazo es delgado y ligero con el fin de tener un momento de inercia pequeño, es de una sola pieza de madera de pino con refuerzos en la parte del soporte y el lastre (Fig. 6-2). La longitud del eje al gancho, l_2 , mide 1.20 m, la distancia del eje a las pesas es de 10.5 cm, este no es el valor de l_1 , la distancia al centro de masa de todo el brazo, que depende del valor de las pesas.

El lastre está formado por pesas deportivas, son ruedas de diversos tamaños, todas soportadas en su centro por un tubo de 1 pulgada de diámetro. Las mayores son de 18 cm de diámetro. Al usar seis piezas grandes junto con otras seis ruedas menores, la masa total de ellas, el tubo que las soporta, seguros y la del propio brazo se alcanza un máximo de 34.61 kg.

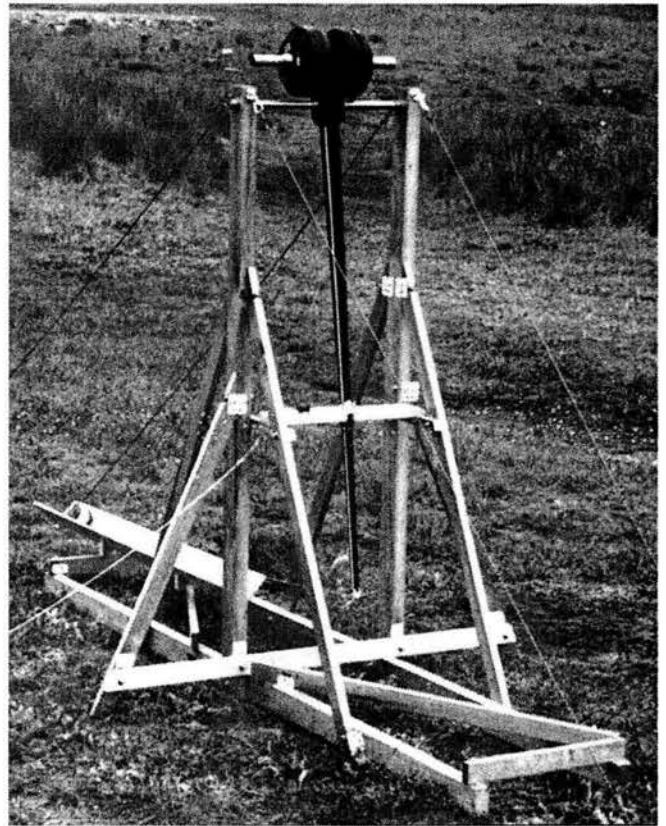


Fig 6-1 Pequeño trabuco mexicano con lastre de 25 kg y proyectil de 150 g

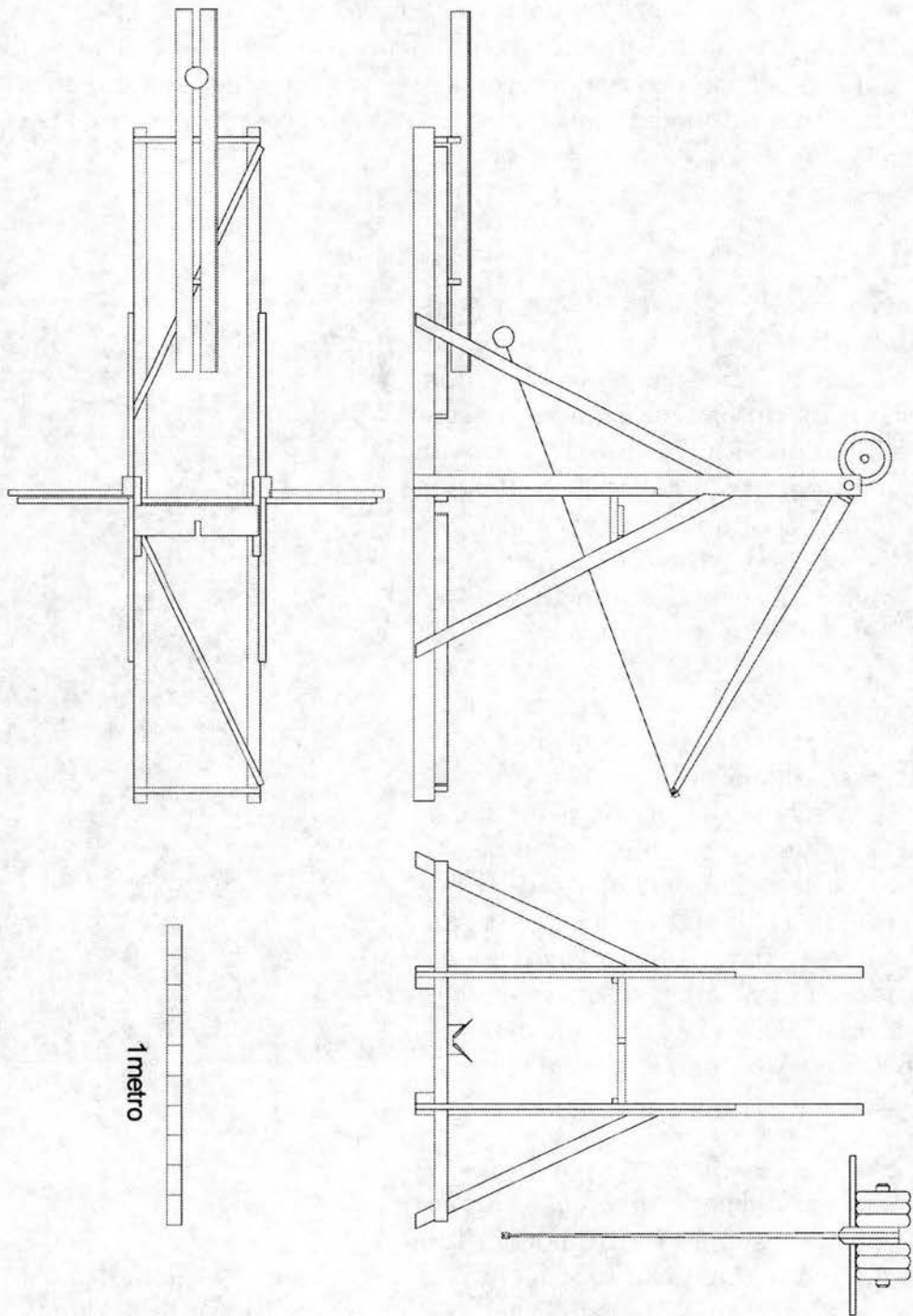


Fig. 6-2 Estructura del soporte.

El eje es de acero de $\frac{3}{4}$ de pulgada de diámetro y 54 cm de longitud, se mueve en chumaceras de latón en el soporte. Atraviesa al brazo y se fija a él con dos seguros tubulares y gira solidariamente con él. Su masa (1.36 kg) es irrelevante pues al girar sobre su eje su momento de inercia es despreciable al compararlo con el del brazo.

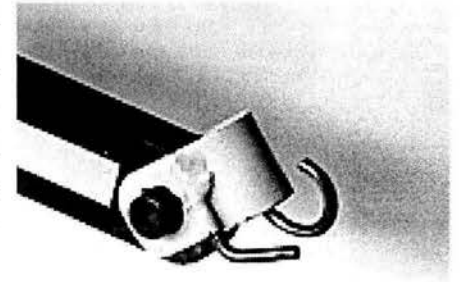


Fig 6-3 Gancho

El gancho es de acero de 2 mm de diámetro, es doble, uno para el extremo fijo de la honda y el otro para el que se libera. Está sobre una pieza movable que permite ajustar el ángulo respecto al brazo (Fig. 6-3). Por medio de un tornillo se fija la pieza firmemente. La honda tiene argollas en los extremos, una queda fija y la otra es la que se libera al momento del disparo. La cuerda de la honda es de nylon, de 0.5 mm de diámetro, ligera y de material tejido de manera tubular no torcida, no tiene variación notable en su longitud. La hamaca es de tela, su masa de 3 g se agrega a la masa de la bola para los cálculos en las simulaciones (Fig. 6-4).

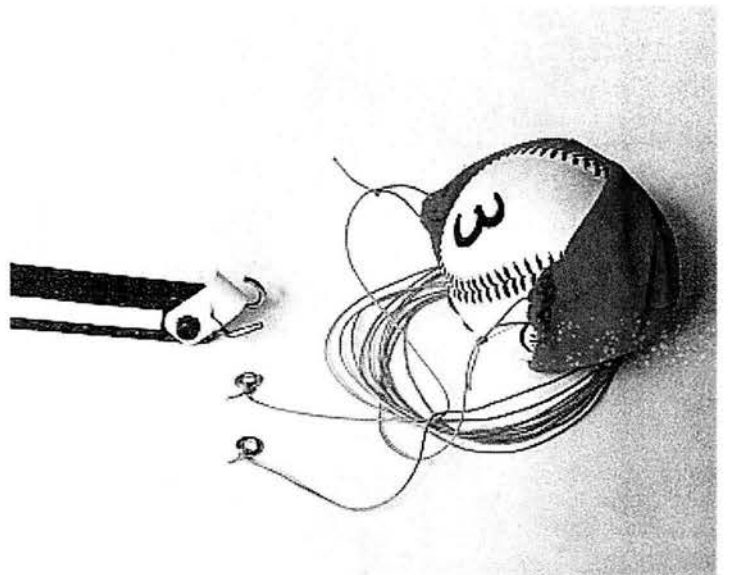


Fig 6-4 Honda

Soporte

El material del soporte es madera de pino común y la estructura es desarmable, igual por cierto que en los trabucos de guerra. Las piezas se ensamblan con tornillos y tuercas.

Dos rieles paralelos forman una base a partir de la que se fijan los demás elementos, copiando el diseño básico de los trabucos antiguos (Fig. 6-2). Los elementos diagonales dan rigidez estructural al formar triángulos. Los rieles son largos (cada uno formado por dos piezas, su longitud total es 2.24 m) para lograr estabilidad al momento del disparo. Los postes verticales que forman el soporte propiamente, son las piezas más largas, de 1.50 m, y cada uno tiene en la parte superior una chumacera de latón en la que ajusta el eje del brazo. La alineación de estas chumaceras fue la labor que requirió de mayor cuidado y ajustes finos.

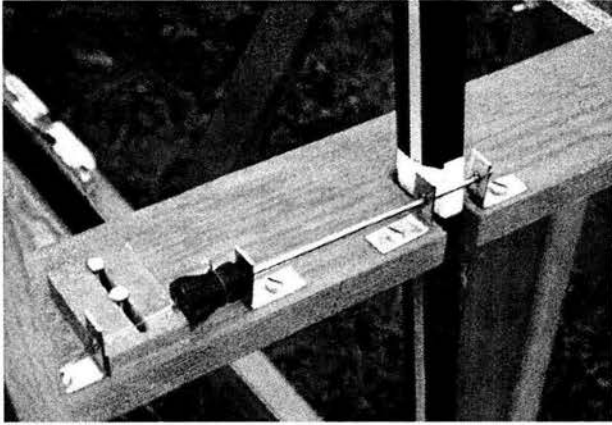


Fig 6-5 Gatillo

Aproximadamente en la parte media de los postes verticales hay una plataforma en la que está el mecanismo de disparo, semejante a un cerrojo de barra deslizante que se acciona tirando de una cuerda (Fig 6-5). La fuerza que debe soportar es un máximo de 5 N. La barra impide el avance del brazo al interponerse a su paso.

Sobre la base hay una canal formada por dos tablas delgadas en ángulo, sirve de guía a la bola en la primera parte del movimiento.

Características

A continuación una lista de valores (Fig. 6-6):

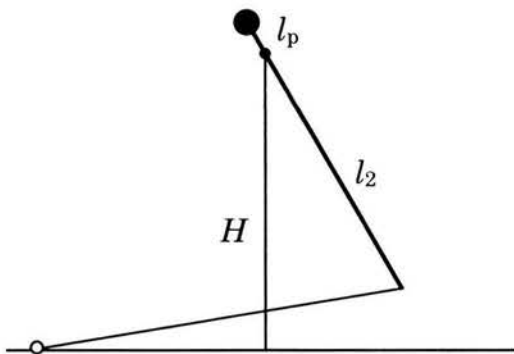


Fig. 6-6

H , altura desde el nivel del proyectil en reposo hasta el eje: 1.30 m.

l_2 , longitud del brazo: 1.20 m.

l_p , distancia del eje al soporte del lastre: 0.105 m.

I_b , momento de inercia del brazo sin lastre: 0.166 kg m².

m_b , masa del brazo sin lastre: 0.938 kg.

El valor de l_1 , la distancia del eje al centro de masa, depende del valor de la masa del lastre, al igual que el valor del momento de inercia del brazo con lastre.

Determinación de valores

Se encontró la posición del centro de masa del brazo equilibrándolo sobre la arista de una pieza con forma de prisma triangular. No es conveniente determinar así la posición del centro de masa del brazo cuando tiene las pesas del lastre pues hay mucha incertidumbre, así que esta fue calculada a partir de los valores de masas y posiciones:

$$l_1 = \frac{m_p l_p - m_b l_b}{m_p + m_b}, \quad (6-1)$$

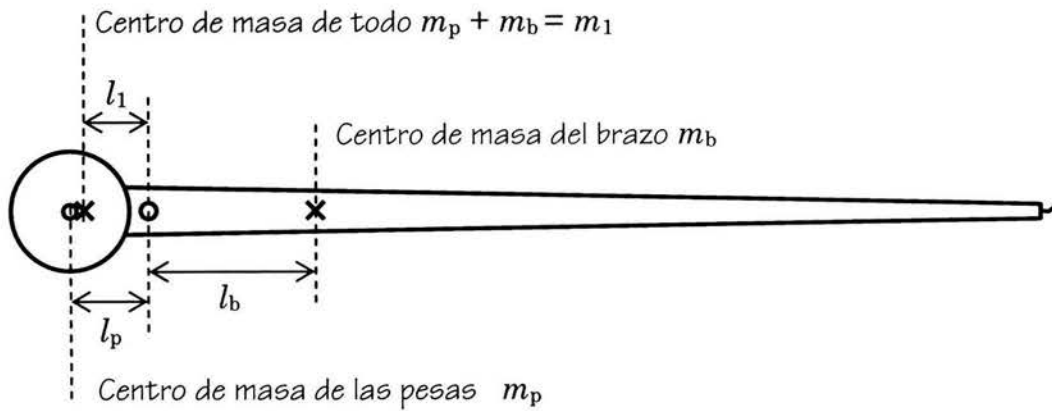


Fig. 6-7. Localización de centros de masa.

en donde m_p es la masa de las pesas con tubo y seguros, m_b es la del brazo. La distancia del eje al soporte de las pesas es l_p , l_b es la que hay del eje al centro de masa del brazo (Ver figura 6-7).

Para determinar el valor de los momentos de inercia del brazo solo y con diferentes masas como lastre se montó el brazo en el soporte y se hizo oscilar con poca amplitud para medir el periodo, T . El momento de inercia I , está dado por la ecuación correspondiente al péndulo físico⁷:

$$I = \frac{T^2 m_1 l_1 g}{4\pi^2}, \quad (6-2)$$

en donde m_1 es la masa total, $m_p + m_b$.

A continuación un ejemplo numérico de la determinación de I :

$$m_b = (0.938 \pm 0.002) \text{ kg}$$

$$m_p = (26.526 \pm 0.002) \text{ kg}$$

$$l_p = (0.105 \pm 0.005) \text{ m}$$

$$l_b = (0.225 \pm 0.001) \text{ m}$$

de (6-1):

$$l_1 = \frac{(26.526 \text{ kg})(0.105 \text{ m}) - (0.938 \text{ kg})(0.225 \text{ m})}{(26.526 + 0.938) \text{ kg}} \pm \delta l_1 = (0.0937 \pm 0.005) \text{ m}.$$

Los errores se calcularon según la referencia 21.

El periodo de oscilación se promedió de 20 oscilaciones:

$$T = (0.955 \pm 0.007) \text{ s.}$$

La masa total es:

$$m_1 = m_p + m_b = (27.46 \pm 0.02) \text{ kg.}$$

La aceleración de la gravedad en la Ciudad de México²²:

$$g = (9.779 \pm 0.005) \text{ m/s}^2.$$

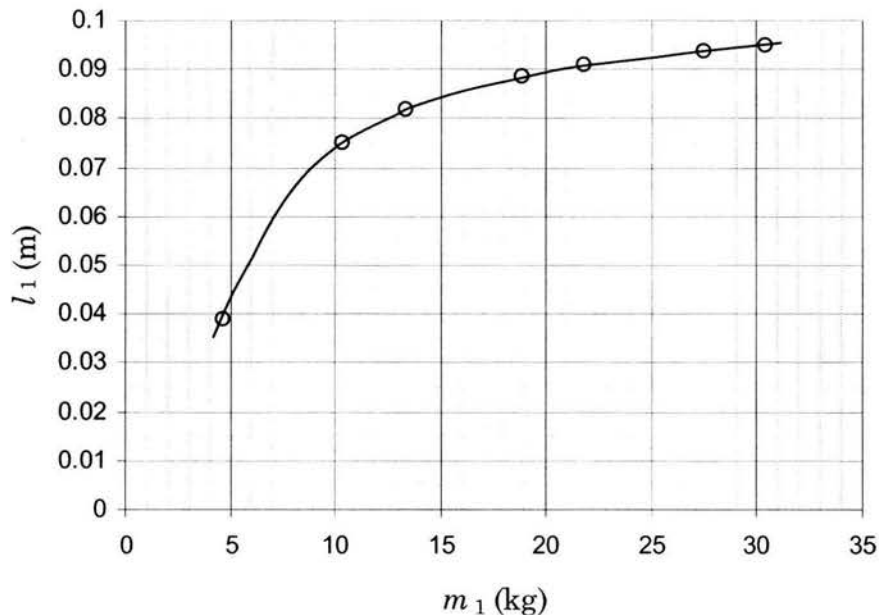
De la (6-2):

$$I = \frac{(0.955^2 \text{ s}^2)(27.46 \text{ kg})(0.0937 \text{ m})(9.779 \text{ m/s}^2)}{4\pi^2} \pm \delta I = (0.58 \pm 0.04) \text{ kg m}^2.$$

De la misma manera que en el ejemplo, se midieron y determinaron las cantidades situando diversas combinaciones de pesas en el brazo y se obtuvieron los datos que se presentan en la tabla 6-1. Los valores de error mostrados son los mayores que ocurren.

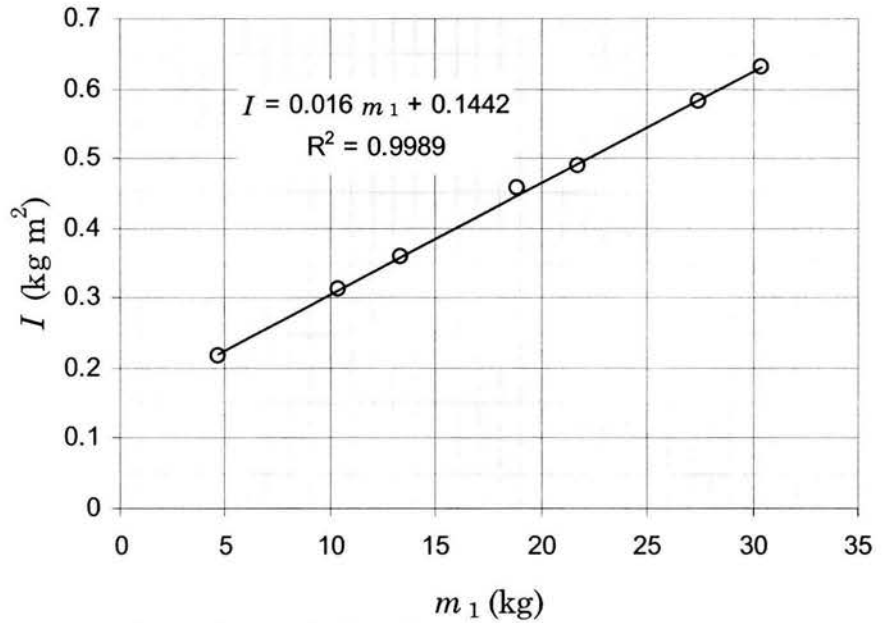
m_1 ($\pm 0.002 \text{ kg}$)	l_1 ($\pm 0.005 \text{ m}$)	T ($\pm 0.007 \text{ s}$)	I ($\pm 0.04 \text{ kg m}^2$)
4.704	0.039	2.18	0.22
10.394	0.075	1.27	0.31
13.366	0.082	1.15	0.36
18.882	0.089	1.05	0.46
21.772	0.091	1.00	0.49
27.460	0.094	0.955	0.58
30.404	0.095	0.940	0.63

Tabla 6-1



Gráfica 6-1. Valores de l_1 respecto a m_1 con una curva suave dibujada entre los puntos para interpolar valores.

Gráfica 6-2. Valores de I respecto a m_1 con una recta ajustada para interpolar valores.



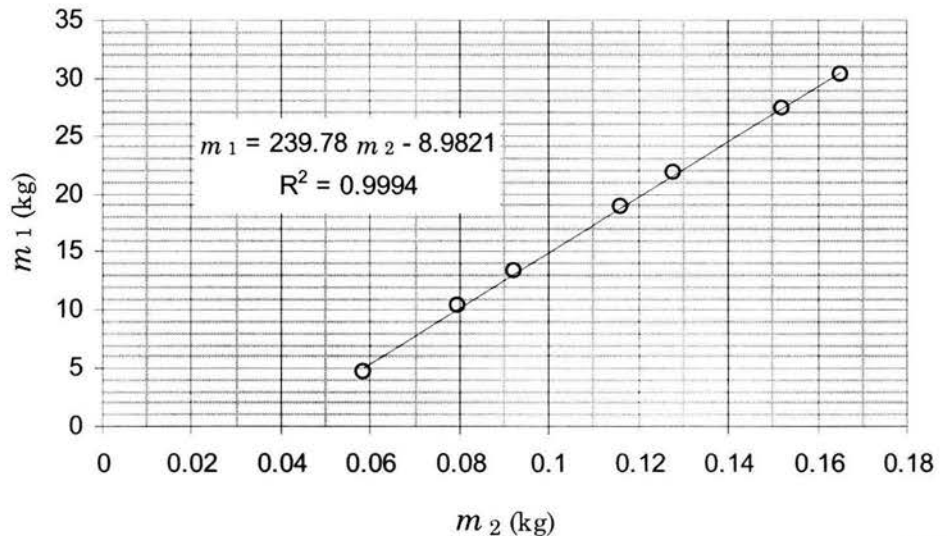
Las gráficas 6-1 y 6-2 muestran los valores de l_1 e I respecto a m_1 con una curva suave entre los puntos o una recta ajustada¹⁹ que sirven para hacer interpolaciones aproximadas.

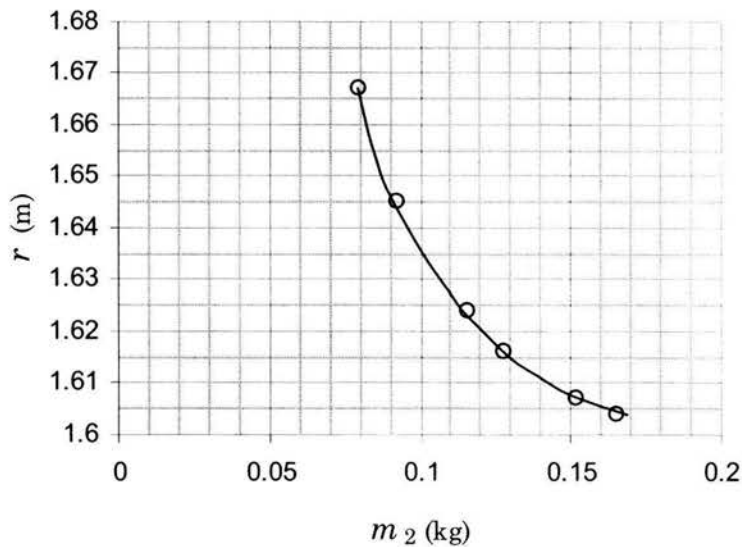
Preparación

Con los valores obtenidos de l_1 e I es posible usar el programa de computadora y encontrar valores de la masa m_1 correspondientes a la masa m_2 con la condición de eficiencia 1. La gráfica 6-3 muestra la relación entre esos valores. Es notable la relación lineal entre las masas, por cada gramo que aumenta la masa del proyectil se requiere un aumento de casi 240 gramos en el lastre.

La longitud r de la cuerda también se encontró con el programa. La gráfica 6-4 muestra la relación entre ella y los valores de m_2 . La curva trazada no es calculada, es interpolada gráficamente.

Gráfica 6-3. Valores de m_1 respecto a m_2 con una recta ajustada para interpolar valores.





Gráfica 6-4. Valores de r respecto a m_2 con una curva suave dibujada entre los puntos para interpolar valores.

Como lo más probable es que para un proyectil dado resulte una masa m_1 que no se puede obtener con las pesas disponibles, se escoge la combinación de pesas que tenga la mejor aproximación. Se dispuso de 12 pesas de masas diferentes, su verdadera masa no es igual a la marcada por el fabricante, la tabla 6-2 muestra las masas de las pesas disponibles.

Pesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Masa (kg) (± 0.002 kg)	4.346	4.316	4.316	4.264	4.240	4.218	2.122	2.086	0.976	0.930	0.528	0.510

Tabla 6-2

La masa de la hamaca de la honda (3 g) se le sumó a la masa de cada bola para encontrar la masa de lastre correspondiente. Se tuvieron 4 bolas diferentes. La tabla 6-3 muestra las masas de bolas, la correspondiente de lastre y la que fue posible aproximar con las pesas disponibles. La tabla también muestra la longitud, r , de la cuerda de la honda, los valores calculados de momentos de inercia, I , y brazos l_1 .

bola	m_2 (con hamaca) (kg)	m_1 (kg)	m_1 usada (kg)	l_1 (m)	I (kg m ²)	r (m)	r usada (m)	θ_r (°)	θ_r usada (°)
práctica	0.109	17.15	17.372	0.0871	0.4222	1.629	1.63	45.2	45
1	0.139	24.35	24.245	0.0922	0.5331	1.612	1.61	44.9	45
2	0.145	25.79	25.962	0.0930	0.5608	1.609	1.61	45.3	45
3	0.159	29.14	29.368	0.0944	0.6157	1.605	1.61	45.4	45

Tabla 6-3

La primer bola de la tabla es del tamaño de una de beisbol, es para practicar, y las 1, 2 y 3 son de beisbol estándar. Sólo en un caso, el primero, la masa m_1 usada difiere en más de 1% de la masa calculada. Las longitudes usadas en la cuerda se aproximaron con medidas redondeadas a centímetros pues esa es la precisión que se puede tener en esa medida. θ_r es el ángulo que hace la cuerda con el brazo al momento del disparo y aquí también por la precisión lograda se aproximaron los valores a grados enteros.

La figura 6-8 muestra la manera de medir el ángulo θ_r . La cuerda enganchada y tensa se va moviendo lentamente variando el ángulo desde los valores mayores hacia los menores hasta el momento en que la argolla se desliza sobre el gancho. El menor ángulo alcanzado es θ_r . El gancho se gira hasta lograr el ángulo deseado y se aprieta el tornillo.

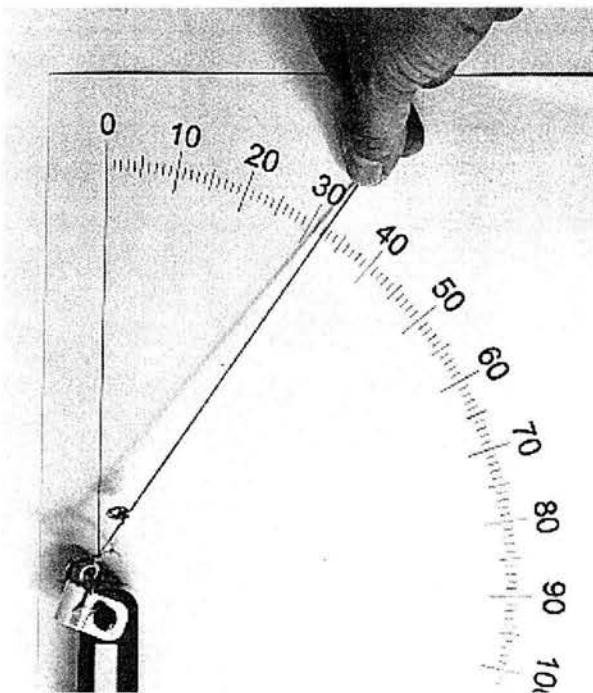


Fig. 6-8 Medida de θ_r .

Ejecución

Se realizaron disparos con las bolas mencionadas. Se midieron los alcances y se hicieron grabaciones en video.

Movimiento del brazo y la honda

La cámara de video graba 30 imágenes por segundo y es posible observarlas una a una. El tiempo de exposición de cada imagen está entre 1/1000 y 1/3000 s por lo que la imagen no es notoriamente movida. La figura 6-9 es un ejemplo de imágenes fijas en la pantalla de video.

Las gráficas que siguen se hicieron tomando las posiciones del brazo y de la bola directamente de la pantalla de video con imágenes fijas. Todas son de un tiro de la bola #3. La gráfica 6-4 muestra los ángulos del brazo respecto al tiempo en imágenes sucesivas. La 6-5 es de los ángulos de la cuerda. En todas las gráficas la línea continua es de los valores calculados con el programa de cómputo que hace la simulación del mismo tiro. El fin de la curva corresponde con el momento del disparo.

En las gráficas se aprecia un retraso del disparo en los datos medidos. En la 6-5, a partir de $t = 0.6$ s, se observa cómo los puntos se alinean con una pendiente menor que la de la curva continua. Eso muestra que la velocidad angular final de la honda es menor que la predicha por el simulador, esto se aprecia mejor en las siguientes gráficas.

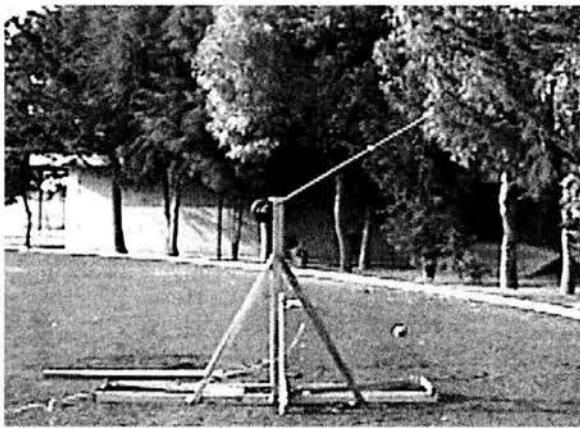
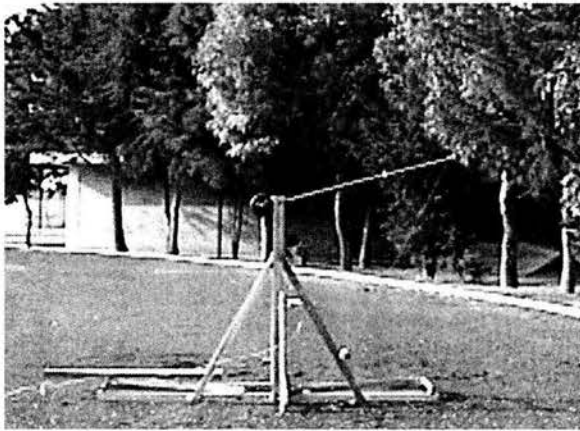
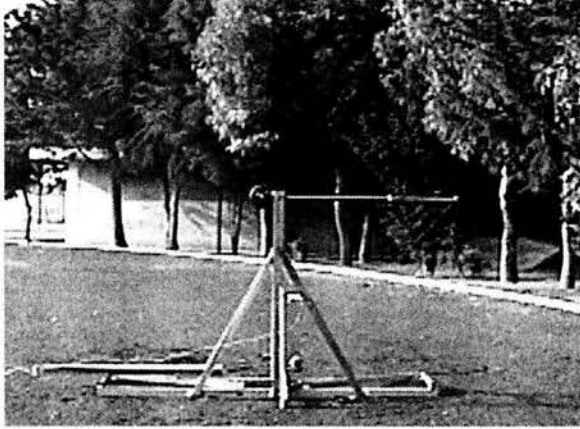
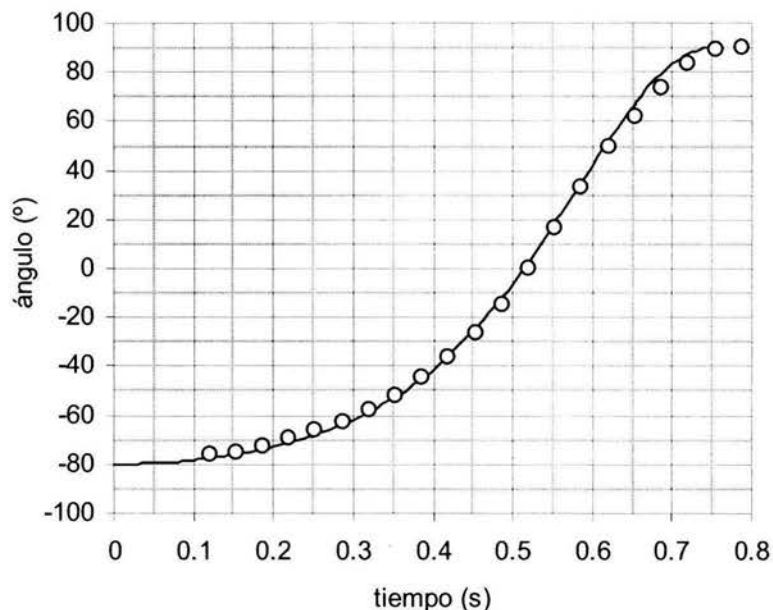


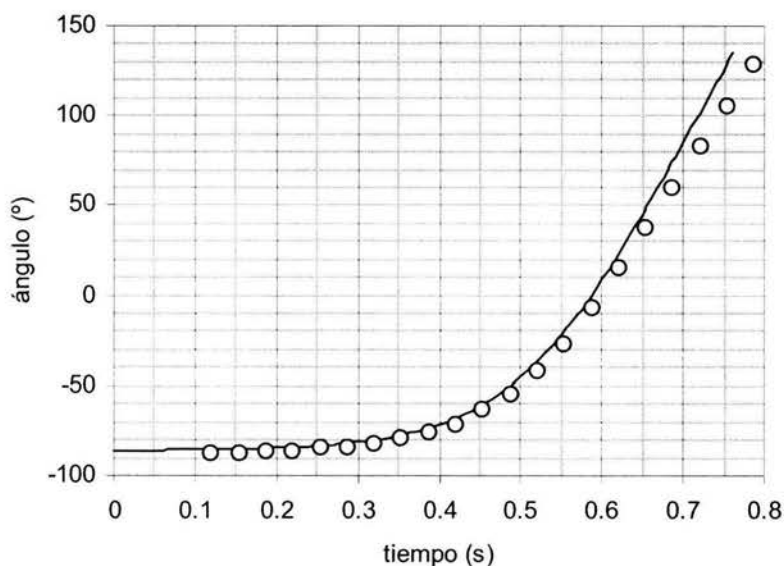
Fig. 6-9. Tres imágenes de video sucesivas de un disparo de la bola #3 que sale a 21 m/s. El intervalo entre imágenes es 1/30 s y cada exposición es de 1/2000 s.

Para las velocidades angulares se tomaron los valores de ángulos contiguos y se calcularon velocidades medias que son las que aparecen en las siguientes gráficas. En todas las gráficas de velocidades es clara la discrepancia de valores que ocurre a partir de $t = 0.6$ s.

Gráfica 6-4. Posición angular del brazo respecto al tiempo. La incertidumbre en el ángulo es de $\pm 1^\circ$.

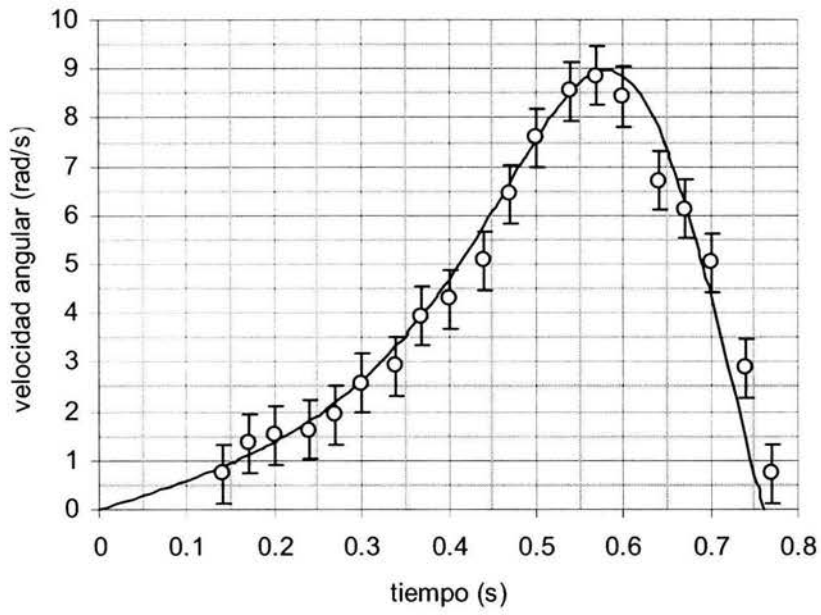


Gráfica 6-5. Posición angular de la cuerda respecto al tiempo. La incertidumbre en el ángulo es de $\pm 1^\circ$.

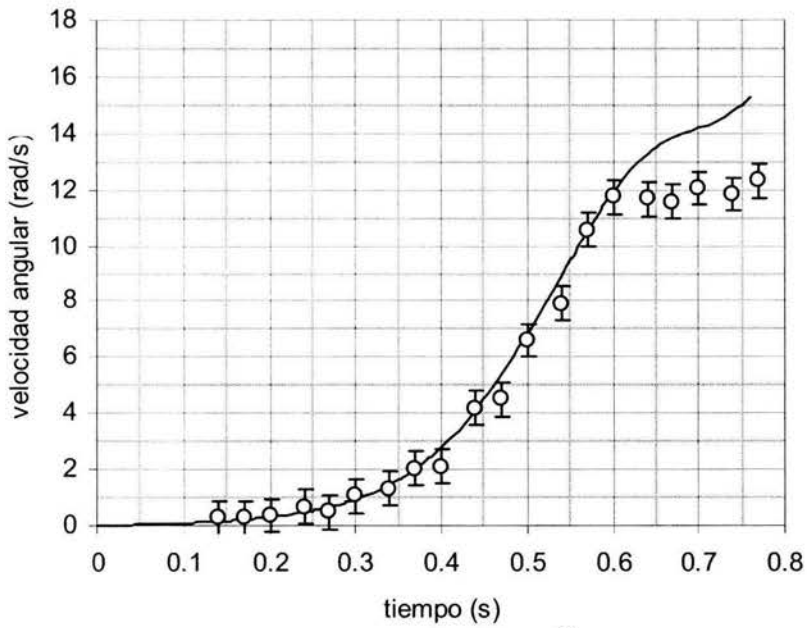


La disminución de la velocidad que solamente ocurre en valores grandes de ella es causada por el aire. Aunque ocurre un retraso en la llegada de la cuerda al ángulo de disparo, la velocidad inicial del disparo tiene un ángulo de 45° pues el movimiento del brazo es de tal manera que su velocidad poco antes del disparo es muy baja. Es como si el brazo ya estuviera en su sitio, en reposo, esperando que la cuerda llegue hasta el ángulo de disparo. Esto se aprecia en la figura 6-10.

Por la disminución en la velocidad de la bola el brazo queda oscilando después del disparo. La oscilación es de unos 5° de amplitud, lo que nos indica que solamente un 0.2% de la energía potencial inicial no se transfirió a la bola. De la energía transferida solamente un 75% queda como energía cinética de la bola, el resto se fue por el rozamiento con el aire. Este efecto del aire hace imposible que la bola conserve toda la energía que se le transfiere. A pesar de eso quizá sea posible disponer una configuración en la que el brazo quede sin oscilar, dejando todo igual, con la cuerda un poco más corta, unos 10 cm menos.



Gráfica 6-6. Velocidad angular del brazo respecto al tiempo.



Gráfica 6-7. Velocidad angular de la cuerda respecto al tiempo.

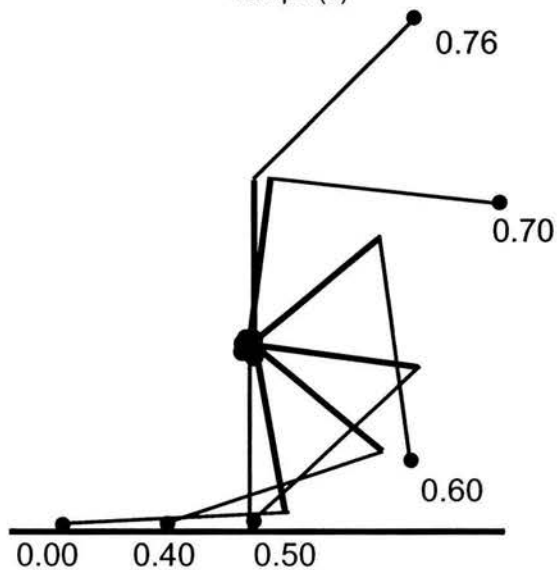
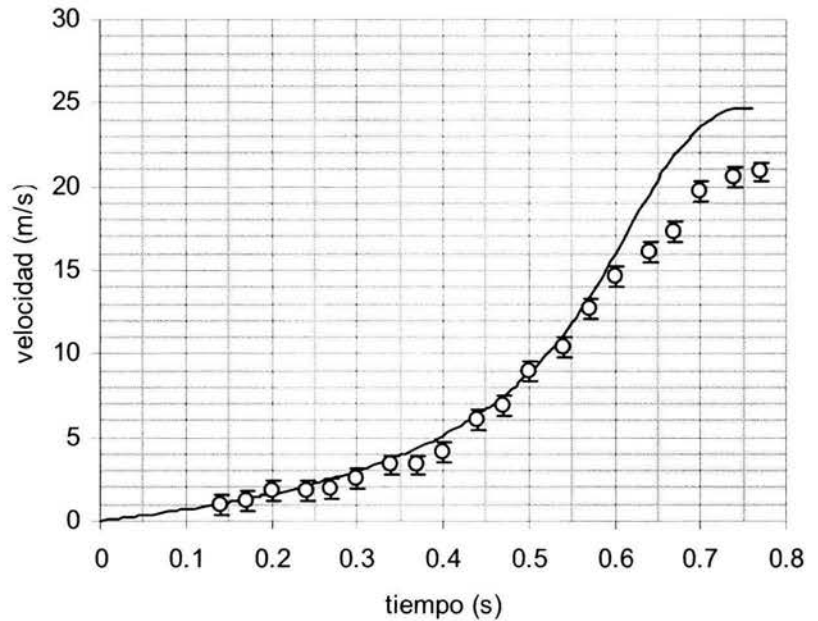


Fig. 6-10. Posiciones de brazo y cuerda respecto al tiempo (s).

Gráfica 6-8. Velocidad de la bola respecto al tiempo.



Alcance y fricción de aire

En el apéndice 2, página 79, hay notas sobre el alcance de la pelota que es menor del calculado con las ecuaciones del movimiento parabólico debido a la fricción del aire.

Observaciones

Excepto por la parte final del movimiento, en donde la acción del aire se hace notar, la ejecución del trauco resultó ser muy semejante al modelo de cómputo. El paso siguiente sería tomar en cuenta al efecto del aire en el modelo, pero como esa interacción no es conservativa no puede ser considerada en el inicio, cuando se calcula la lagrangiana del sistema. Es posible considerar el efecto del aire en el modelo numérico, después de cada vuelta al ciclo de cálculo, agregando un factor que multiplique al cuadrado de la velocidad y se aplique como fuerza sobre la bola en la misma dirección y sentido contrario al de su velocidad.

7 Enseñanza

El comportamiento del trabuco es complicado y puede ser enfocado en diversos niveles. En un nivel básico, propio para la secundaria, puede abordarse desde el punto de vista de la conservación de la energía. En un nivel superior puede tratarse de manera semejante a la ya presentada en este trabajo. Esta sección contiene un enfoque de búsqueda de solución de un problema adecuado para el nivel medio superior en el que se muestran los conceptos involucrados que pueden tratarse conforme se avanza.

Solución de un problema

Se establecen ciertas dimensiones sobre un trabuco y se pide encontrar condiciones para lograr una finalidad. Daremos un ejemplo y detallaremos el tratamiento. Se trata de hacer cálculos para estimar el alcance máximo para un proyectil y después construir un trabuco para intentar lograrlo. La masa del proyectil, que puede ser un balín de acero, es de 30 g. El trabuco tiene un brazo de longitud máxima de 50 cm y un lastre de masa máxima de 2 kg.

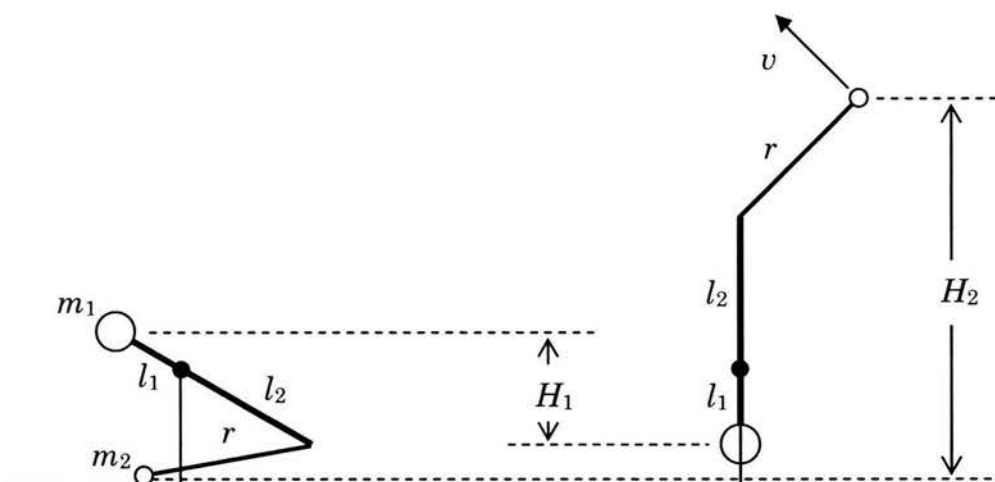


Fig. 7-1. Nomenclatura de las cantidades usadas. Detalles en el texto.

Con el grupo de estudiantes organizado en equipos, el primer paso es hacer una discusión en cada equipo para encontrar una manera de calcular el alcance máximo. El principio de conservación de energía permite hacer una estimación. Si se supone que toda la energía potencial de la configuración inicial es transferida al proyectil, se puede calcular su velocidad de salida, con la que se puede conocer el alcance. La figura 7-1 indica las cantidades a considerar.

Primero se establece la ecuación de la energía antes y después del proceso de disparo. Para ello escribimos la expresión de la energía antes del proceso, E_1 , que es solamente la energía potencial de la masa m_1 :

$$E_1 = m_1 g H_1. \quad (7-1)$$

En el momento que ocurre la salida del proyectil suponemos que el trabuco queda en reposo con la masa m_1 en la posición más baja posible. La energía después del proceso es solamente la potencial y cinética del proyectil:

$$E_2 = m_2 g H_2 + \frac{1}{2} m_2 v^2. \quad (7-2)$$

En estas ecuaciones H_1 y H_2 son los cambios de altura de m_1 y m_2 respectivamente. Las energías E_1 y E_2 son iguales, así igualando (7-1) y (7-2):

$$m_1 g H_1 = m_2 g H_2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 \quad (7-3)$$

Para conocer el alcance es necesario saber el valor de la velocidad de salida, que la despejamos de (7-3):

$$v = \sqrt{2g \left(\frac{m_1}{m_2} H_1 - H_2 \right)}. \quad (7-4)$$

Esta ecuación nos muestra que no es necesario conocer en detalle cómo es el movimiento para estimar la velocidad de disparo. Del tema de movimiento de proyectiles, generalmente tratado en un curso de este nivel, se conoce la expresión que relaciona el alcance, X , con la velocidad de salida:

$$X = \frac{2v^2}{g} \cos \theta_v \sin \theta_v, \quad (7-5)$$

en donde θ_v es el ángulo de la velocidad inicial respecto a la horizontal. Para tener el alcance expresado en términos de las componentes del trabuco sustituimos (7-4) en (7-5):

$$X = 4 \left(\frac{m_1}{m_2} H_1 - H_2 \right) \cos \theta_v \sin \theta_v \quad (7-6)$$

En una primera inspección notamos que no aparece g , la aceleración de la gravedad. Esto es, el alcance no depende de ella. Esta es una observación que se presta para hacer una discusión de grupo. Para iniciarla se pueden hacer preguntas como las siguientes:

En la Luna la aceleración de la gravedad tiene un valor que es la sexta parte del valor en la Tierra. Si llevamos un trabuco a la Luna ¿tendrá el mismo alcance que en la Tierra?

¿Cómo sería la velocidad de salida del proyectil en la Luna si la comparamos con su velocidad de salida en la Tierra?

Si la velocidad de salida no es igual que en la Tierra ¿por qué el alcance sí es igual?

Si el alcance no depende del valor de g , ¿quiere esto decir que también se obtendrá el mismo alcance en un sitio en el que no hay fuerza de gravedad?

¿Hay alguna relación de este resultado; alcance constante, independiente del valor de g , con el fenómeno hecho notar por Galileo, de que todos los objetos caen con la misma aceleración sin depender de su masa?

¿Qué fuerza es la que pone en movimiento al trabuco? ¿Qué fuerza es la que limita el alcance del proyectil?

La ecuación (7-6) nos permite hacer una primera estimación del alcance al sustituir valores numéricos en ella. El alcance máximo se obtiene cuando el ángulo θ_v es de 45° , así la ecuación (7-6) queda:

$$X = 2 \left(\frac{m_1}{m_2} H_1 - H_2 \right) \quad (7-7)$$

En un trabuco típico H_2/H_1 es cercano a 10, al sustituir ese valor de H_1 :

$$X = 2 \left(\frac{m_1}{m_2} \frac{H_2}{10} - H_2 \right),$$
$$X = 2 H_2 \left(\frac{m_1}{10 m_2} - 1 \right) \quad (7-8)$$

Con las medidas dadas como condiciones, H_2 es cercano a 150 cm y m_1/m_2 es 67, al sustituir en (7-8):

$$X = 2 \times 150 \left(\frac{67}{10} - 1 \right) \text{ cm},$$
$$X = 1710 \text{ cm}. \quad (7-9)$$

El valor que se obtenga al realizar una prueba práctica será menor a este, que es aproximado al máximo posible pues hemos supuesto la total transferencia de energía.

La ecuación (7-8) se presta a discusión, pues nos muestra de qué cantidades y de qué manera depende el alcance máximo. Las preguntas que generen la discusión pueden ser:

¿Cómo se aumenta más el alcance, duplicando la masa del lastre o la longitud del brazo?

¿Y si se duplican ambos, cómo cambia el alcance?

Algunos trabucos medievales tenían brazos de hasta unos 10 metros, ¿Por qué los hacían tan grandes?

Después de esto es posible pensar en construir un modelo práctico usando materiales accesibles como madera, plástico y ejes de metal. Cabe aquí una discusión sobre dimensiones y masas, sobre la manera de construir el soporte y cómo se sujeta el lastre, cuerda, y demás detalles. Preguntas sobre esto:

¿En qué puntos se aleja más el artefacto al modelo considerado?

¿Cuáles son las características del modelo que sí son fieles al modelo?

Dimensiones y proporciones

Cuando los estudiantes desean construir un trabuco, es conveniente hacer primero un modelo pequeño para modificar fácilmente las dimensiones hasta lograr un funcionamiento aceptable y después hacer uno grande a escala del pequeño, pero es necesario considerar cómo el comportamiento depende de las proporciones. Si las dimensiones del nuevo se hacen en una proporción lineal respecto al primero, las cosas no funcionan igual. Es posible hacer una estimación de las relaciones que hay entre el alcance y las cantidades que determinan la configuración del trabuco. La ec. (7-8) nos indica que una de las cantidades de las que depende el valor del alcance es H_2 , la longitud que se eleva la masa m_2 (ver figura 7-1). Si se mantiene constante la configuración inicial, es decir sin cambiar ángulos, esta cantidad es proporcional a l_1 , el brazo corto. En la misma ecuación (7-8) aparece m_2/m_1 , si los valores de las masas cambian, el alcance no se altera si la razón entre ellos es la misma.

Podemos apreciar lo que sucede con el alcance si cambiamos los valores de las dimensiones manteniendo constantes las proporciones y los ángulos iniciales, es decir si se construye un trabuco a escala de otro. Por ejemplo, si se duplican todas las

longitudes, l_1 se duplica y el alcance es el doble. Si en esta duplicación de dimensiones se incluyen las de la pesa y el proyectil, conservando la densidad de estos objetos, sus masas, que son proporcionales al volumen, serán 2^3 veces mayores. Pero la proporción m_2/m_1 se conserva; un trabuco con todas las dimensiones al doble es capaz de lanzar un proyectil 8 veces más masivo a una distancia doble.

Ímpetu

En un trabuco bélico, se busca lanzar un proyectil para causar daño en una muralla, así conviene que el ímpetu del proyectil sea lo mayor posible. Si el blanco está al mismo nivel del trabuco, el ímpetu con el que el proyectil choca es de la misma magnitud que al ser disparado. En la ec. (7-4), $\frac{m_1}{m_2} H_1$ es aproximadamente un orden de magnitud mayor que H_2 , por lo que podemos aproximarla:

$$v \approx \sqrt{2g \left(\frac{m_1}{m_2} H_1 \right)}. \quad (7-11)$$

El ímpetu del proyectil,

$$p = m_2 v, \quad (7-12)$$

por la ec. (7-11) es

$$p \approx m_2 \sqrt{2g \left(\frac{m_1}{m_2} H_1 \right)},$$

$$p \approx \sqrt{2gm_1 m_2 H_1}. \quad (7-13)$$

Esta última ecuación nos permite saber qué sucede con el ímpetu del proyectil si cambiamos todas las dimensiones del trabuco de manera proporcional. Por ejemplo, si tenemos dos trabucos, el segundo construido con todas las dimensiones lineales al doble del primero, las masas del segundo serán 8 veces mayores a las del primero y si escribimos la razón de los ímpetus, según la ec. (7-13), queda así:

$$\frac{p'}{p} \approx \frac{\sqrt{2g8m_1 8m_2 2H_1}}{\sqrt{2gm_1 m_2 H_1}},$$

$$\frac{p'}{p} \approx \sqrt{128} = 11.3,$$

al duplicar las dimensiones lineales el ímpetu logrado es once veces mayor.

En general, si el cambio de escala en longitudes es

$$R = \frac{l'_1}{l_1}, \quad (7-14)$$

todas las longitudes serán R veces mayores, las masas serán R^3 veces mayores y el ímpetu crece por un factor que nos da la ec. (7-13):

$$\frac{p'}{p} \approx \sqrt{R^3 R^3 R} = R^{7/2}. \quad (7-15)$$

esto nos muestra por qué los trabucos antiguos eran grandes, el daño que pueden causar crece mucho al aumentar el tamaño. Por ejemplo un trabuco 5 veces mayor que otro es capaz de lograr un ímpetu

$$\frac{p'}{p} \approx 5^{7/2} = 279.5$$

de casi 280 veces mayor que el otro.

Un ejemplo de trabuco escolar

Con la asesoría del autor, dos equipos de estudiantes de bachillerato construyeron trabucos para lanzar bolas de tenis. Ver apéndice 3, página 81. La consistencia del funcionamiento del trabuco hace que las trayectorias en todos los tiros sean muy parecidas, por lo que uno de los equipos resultó ganador de un concurso ínter escolar en el que la meta era atinar a un blanco a 30 m de distancia. El trabuco ganador hizo 20 tiros y todos cayeron a una distancia menor a 3 m del centro del blanco.

Para el trabajo de desarrollo del trabuco escolar se siguió una línea como la sugerida en los apartados anteriores, usando el principio de conservación de la energía para determinar dimensiones. Posteriormente los estudiantes usaron el mismo programa de cómputo descrito en la página 41 para diseñar sus trabucos. El programa también se usó para hacer verificaciones y afinar valores, como la longitud de la cuerda y el ángulo de ajuste del gancho.

8 Consideraciones finales

Las ecuaciones de movimiento del trabuco libre (3-36 y 3-42) son las de un tipo de péndulo doble y para el trabuco restringido hay una sola ecuación (3-23), más complicada que las de trabuco libre. Para resolverlas no es posible hacer restricción de valores de las variables, los ángulos, para obtener una simplificación, pues el movimiento cubre un rango que comprende valores grandes de los ángulos.

En el programa de cómputo, la parte del algoritmo basado en el método de Euler se lleva una pequeña fracción del código, el resto es asunto del tratamiento de datos, conexiones entre módulos, condicionamientos, y representación gráfica. Las opciones de tratamiento de movimientos ficticios (Pág. 37) no fueron aprovechadas, están ahí para un posible uso posterior.

El modelo numérico tiene muy buen acuerdo con el comportamiento del trabuco. Es de llamar la atención que esto se logra con una aproximación en extremo sencilla, el método de Euler, que sólo usa ecuaciones de primer grado. Al examinar las gráficas de posición y velocidad respecto al tiempo (Págs. 59 a 61), se advierte que no tienen variaciones bruscas, son curvas suaves, esto nos explica que no se requiere un método más complicado.

Quizá lo más notable es la existencia del trabuco capaz de transformar toda la energía potencial inicial en energía cinética del proyectil. El brazo, acelerado inicialmente por su propio peso, y a su vez causante del movimiento del proyectil, es llevado al reposo por la fuerza ejercida sobre él por el proyectil a través de la cuerda. Que esto suceda con el ajuste preciso para que el reposo ocurra justo cuando el centro de masa del brazo está en su posición más baja y el proyectil con un ángulo de velocidad preestablecido, es algo que no era posible prever, se requirió el uso del programa de cómputo para encontrarse con ello. No se tiene una receta completa para configurar trabucos de eficiencia 1, pero dadas condiciones iniciales, se pueden tener valores para su configuración (Pág. 44). Para la construcción de un trabuco eficiente, el programa de cómputo permite hallar valores a partir de una configuración inicial.

La construcción de trabucos es estimulante para los estudiantes y se aprovecha para la enseñanza de temas de mecánica; conservación de la energía, dinámica en movimiento circular, momentos de inercia, movimiento de proyectil, escalas y proporciones, trigonometría, etc. Es posible dar tratamientos para diversos niveles escolares.

9 Apéndices

1 Código del programa

```
'Lista de cantidades que serán usadas
Public T As Single 'tiempo
Public T1 As Single 'incremento de tiempo
Public T2 As Single 'incremento corto de tiempo
Public T3 As Single 'incremento largo de tiempo
Public G As Single 'aceleración de la gravedad
Public L1 As Single 'distancia del eje al centro de masa
Public L2 As Single 'longitud del eje al punto de fijación de la cuerda
Public R As Single 'logitud de la cuerda
Public M1 As Single 'masa del brazo con todo y pesa
Public M2 As Single 'masa de la bola (proyectil)
Public I As Single 'momento de inercia del brazo con todo y pesa
Public H As Single 'altura del soporte del eje
Public Th1 As Single 'ángulo del brazo con la horizontal
Public Th2 As Single 'ángulo de la cuerda con la vertical
Public Th10 As Single 'ángulo inicial del brazo
Public Th20 As Single 'ángulo inicial de la cuerda
Public A As Single 'constantes geométricas de la configuración
Public B As Single
Public D As Single
Public E1 As Single
Public E2 As Single
Public E3 As Single
Public E As Single
Public Q As Single
Public Q1 As Single
Public Q2 As Single
Public Q3 As Single
Public Pe As Single
Public Ka As Single
Public PeKa As Single
Public MLR As Single
Public MGR As Single
Public MGL As Single

Public AW1 As Single 'aceleración angular del brazo
Public W1 As Single 'velocidad angular del brazo
Public W2 As Single 'velocidad angular de la cuerda
Public W11 As Single 'valores antes y después de la vel. ang. del brazo
Public W12 As Single
Public W22 As Single 'valores antes y después de la vel. ang. de la cuerda
Public W21 As Single

Public AW2 As Single 'aceleración angular de la cuerda
Public W10 As Single 'velocidad inicial del brazo
Public W20 As Single 'velocidad inicial de la cuerda
Public ThDV As Single 'ángulo de disparo (velocidad)
Public ThDC As Single 'ángulo de disparo (cuerda)
Public ThBola As Single 'ángulo considerado temporalmente (rads)
Public AngBol As Single 'ángulo de la velocidad de la bola respecto a la horizontal
Public AngDisp As Single 'ángulo al que se debe disparar
Public AngDispInt As Single
Public AngActual As Single
Public AngCdisparo As Single 'ang. de cuerda para disparar
Public AngC As Single 'ángulo de la cuerda con el brazo
Public BandAng% 'bandera para ángulo de disparo
Public Xsop As Single 'coordenadas del soporte del eje
Public Ysop As Single
Public S1 As Single 'senos y cosenos de los ángulos
Public S2 As Single 'de brazo y cuerda
Public C1 As Single
Public C2 As Single
Public Escala As Single 'escala twips/unidades de longitud (cm, m)
Public BanCuerda% 'bandera, 1 si hay cuerda, 0 si no la hay
Public BandDisparo% 'Indica que ha ocurrido el disparo
Public BandMarca% 'se ha dibujado la marca de posición de disparo
Public EnTotal As Single 'energía total del sistema al inicio
Public Ener As Single 'energía total durante el proceso
Public Vmax As Single 'velocidad máxima posible dada una configuración inicial
Public Vbol As Single 'velocidad de la bola
Public Vx As Single 'componentes de Vbol
Public Vy As Single
Public Xbol As Single 'coordenadas de la bola
Public Ybol As Single
Public Con As Single 'conversión radianes-grados
Public BandAlto% 'bandera del comando alto
Public Alc As Single 'alcance calculado
Public BandActDoble% 'indicadora de inicio en ActuadoDoble
Public Veces 'valor límite de contador
Public Vueltas1% 'número de vueltas en Restringido
Public Vueltas2% 'número de vueltas en ActuadoDos
```

```

Public Tmax As Single 'valor máximo del tiempo considerado para la gráfica
Public Wmax As Single 'valor máximo de la velocidad angular para gráficas
Public EscT As Single 'escala de tiempo para gráfica
Public EscWGr As Single 'escala de velocidad angular para gráfica de tiempo
Public EscWFs As Single 'escala de velocidad angular para gráfica de fase
Public EscTh As Single 'escala de ángulo para gráfica de fase
Public RW2 As Single
Public L2W1 As Single
Public Color As Single
Public xx As Single
Sub Angulos() 'se calculan cosas para registro y tomar decisiones de disparo

L2W1 = L2 * W11
RW2 = R * W21

AngC = 90 + (Th1 - Th2) * Con 'ángulo de cuerda con brazo

'componentes de la velocidad de la bola:
Vx = -L2W1 * S1 + RW2 * C2 'la velocidad es perpendicular
Vy = L2W1 * C1 + RW2 * S2 'a brazo o cuerda, por eso aparentan
'estar cambiados el seno y el coseno.
'velocidad de la bola:
Vbol = Sqr(Vx ^ 2 + Vy ^ 2)

If Vx = 0 Then
    If Vy >= 0 Then
        ThBola = 90 / Con
    Else 'Vy < 0
        ThBola = -90 / Con
    End If
Else 'Vx <> 0
    ThBola = Atn(Vy / Vx) 'en radianes
End If

AngBola = ThBola * Con 'lo mismo en grados

'para que el ángulo aparezca con signo y magnitud correctos:
If Vx < 0 Then
    If Vy >= 0 Then
        AngBol = -AngBola
    Else 'Vy < 0
        AngBol = 360 - AngBola
    End If
Else 'Vx > 0
    AngBol = 180 - AngBola
End If

If Vx > 0 Then
    If Vy > 0 Then
        AngActual = AngBola
    ElseIf Vy <= 0 Then
        AngActual = 360 + AngBola
    End If
Else 'Vx < 0
    AngActual = 180 + AngBola
End If

End Sub

Sub Dibujo()

```

```

'se dibujan las líneas y las masas
linBrazo.X1 = Xsop - L1 * C1 * Escala
linBrazo.Y1 = Ysop + L1 * S1 * Escala
linBrazo.X2 = Xsop + L2 * C1 * Escala
linBrazo.Y2 = Ysop - L2 * S1 * Escala

'si aún está la cuerda:
If BanCuerda% = 1 Then
    linCuerda.X1 = linBrazo.X2
    linCuerda.Y1 = linBrazo.Y2
    linCuerda.X2 = linBrazo.X2 + R * S2 * Escala
    linCuerda.Y2 = linBrazo.Y2 + R * C2 * Escala
End If

shpM1.Left = linBrazo.X1 - shpM1.Width / 2
shpM1.Top = linBrazo.Y1 - shpM1.Height / 2

'si ocurrió disparo o no:
If BandDisparo% = 0 Then
    shpM2.Left = linCuerda.X2 - shpM2.Width / 2
    shpM2.Top = linCuerda.Y2 - shpM2.Height / 2
Else
    shpM2.Left = Xbol - shpM2.Width / 2 'Xbol y Ybol son coordenadas de la parábola
    shpM2.Top = Ybol - shpM2.Height / 2
End If

'si se seleccionó rastro:
If chkRastro.Value = 1 Then
    'línea del brazo:
    pctImagen.Line (Xsop - L1 * C1 * Escala, Ysop + L1 * S1 * Escala)-(Xsop + L2 * C1 * Escala, Ysop - L2 * S1 * Escala), &HFFFF&

    If BanCuerda% = 1 Then 'si hay cuerda
        'línea de la cuerda:
        pctImagen.Line (Xsop + L2 * C1 * Escala, Ysop - L2 * S1 * Escala)-(Xsop + L2 * C1 * Escala + R * S2 * Escala, Ysop - L2 * S1 * Escala + R * C2 * Escala), &HFFFF&
        'bola pegada a la cuerda:
        pctImagen.Circle (Xsop + L2 * C1 * Escala + R * S2 * Escala, Ysop - L2 * S1 * Escala + R * C2 * Escala), 30
    Else
        pctImagen.Circle (Xbol, Ybol), 30 'bola en mov. parabólico
    End If
End If

End Sub

Sub Energia()
'Ener = G * (-M1 * S1 + M2 * (L2 * S1 - R * C2)) + 0.5 * (I * W1 ^ 2 + M2 * R ^ 2 * W2 ^ 2)
'Ener = G * (-M1 * S1 + M2 * (L2 * S1 - R * C2)) + 0.5 * (I * W1 ^ 2 + M2 * Vbol ^ 2)

lblEfic.Caption = EnTotal / Ener

End Sub

Sub Registro()
'se escriben los datos en las labels y se dibujan las gráficas
lblTiempoCorr.Caption = Redondo2(T)
lblTh1Corr.Caption = Redondo(Th1 * Con)
lblW1Corr.Caption = Redondo(W12)
lblTh2Corr.Caption = Redondo(Th2 * Con)
lblW2Corr.Caption = Redondo(W22)

```



```

lblVbol.Caption = Redondo(Vbol)
lblAngBol.Caption = Redondo(AngBol)
lblAngC.Caption = Redondo(AngC)

'se registran datos mientras no haya disparo:

If BandDisparo% = 0 Then
  datRegistro.Recordset.AddNew

  lblTiempoCorr.Caption = Redondo2(T)
  lblTh1Corr.Caption = Redondo2(Th1 * Con)
  lblW1Corr.Caption = Redondo2(W12)
  lblTh2Corr.Caption = Redondo2(Th2 * Con)
  lblW2Corr.Caption = Redondo2(W22)
  lblVbol.Caption = Redondo2(Vbol)
  lblAngBol.Caption = Redondo2(AngBol)
  lblAngC.Caption = Redondo2(AngC)

  datRegistro.Recordset.Update

End If

End Sub
Sub Grafica()
'gráfica de velocidad angular del brazo:
pctGrafica.PSet (T * EscT, -W12 * EscWGr +
linEjeGr.Y1), RGB(255, 255, 100) 'color amarillo
'gráfica de aceleración angular del brazo:
pctGrafica.PSet (T * EscT, AW1 * 0.05 *
EscWGr + linEjeGr.Y1), RGB(0, 255, 0) 'color verde

If BandDisparo% = 0 Then
  'gráfica de velocidad angular de la cuerda
  con masa:
  pctGrafica.PSet (T * EscT, -W22 * EscWGr +
linEjeGr.Y1), RGB(255, 200, 200) 'color rosa
  'gráfica de aceleración angular de la cuerda
  con masa:
  pctGrafica.PSet (T * EscT, AW2 * 0.05 *
EscWGr + linEjeGr.Y1), RGB(255, 0, 255) 'color
  violeta

End If

End Sub
Sub Fase()

'Coordenadas para la gráfica:
XF1 = linVerFase.X1 + (Th1 - 90 / Con) *
EscTh

'Mod funciona medio raro con los negativos
'por eso esta discriminación de ellos:
If XF1 < 0 Then 'brazo
  XF1 = (pctFase.ScaleWidth + 1) - (pctFase.ScaleWidth - XF1) Mod (pctFase.ScaleWidth)
Else
  XF1 = XF1 Mod (pctFase.ScaleWidth)
End If

pctFase.PSet (XF1, linHorFase.Y1 - W12 *
EscWFs), RGB(255, 255, 100) 'color amarillo

XF2 = linVerFase.X1 + Th2 * EscTh

If XF2 < 0 Then 'Cuerda
  XF2 = (pctFase.ScaleWidth + 1) -
(pctFase.ScaleWidth - XF2) Mod
(pctFase.ScaleWidth)
Else
  XF2 = XF2 Mod (pctFase.ScaleWidth)

```

```

End If

pctFase.PSet (XF2, linHorFase.Y1 - W22 *
EscWFs), RGB(255, 200, 200) 'color

End Sub

Sub Disparo()
'dibuja en la posición de disparo
If BandMarca% = 0 Then 'bandera que permite
sólo un
  BandMarca% = 1 'dibujo de la posición
de disparo

  'escribe el valor del ángulo de disparo:
  lblAngDisp.Caption = Redondo(AngBol) 'en el
  caso de haber especificado ángulo relativo
  'entre
  cuerda y brazo AngDisp no coincide con el
  'ángulo
  especificado (parte aun no escrita del programa)
  'ángulo de disparo en cuerda:
  lblAngCDisp.Caption = Redondo(AngC)

  'línea del brazo:
  pctImagen.Line (Xsop - L1 * C1 * Escala,
Ysop + L1 * S1 * Escala)-(Xsop + L2 * C1 *
Escala, Ysop - L2 * S1 * Escala), 255

  'coordenadas de la bola:
  Xbol = Xsop + L2 * C1 * Escala + R * S2 *
Escala
  Ybol = Ysop - L2 * S1 * Escala + R * C2 *
Escala

  'línea de la cuerda:
  pctImagen.Line (Xsop + L2 * C1 * Escala,
Ysop - L2 * S1 * Escala)-(Xbol, Ybol), 255
  Color = pctImagen.FillColor 'cambio de
  color mientras se dibuja posición indicadora
  de disparo
  pctImagen.FillColor = 255
  pctImagen.Circle (Xbol, Ybol), 30, 255
  pctImagen.FillColor = Color 'vuelta al
  color original

  'línea en la gráfica que marca el momento
  del disparo:
  pctGrafica.Line (T * EscT, 0)-(T * EscT,
pctGrafica.Height), &HFFFFFF0

  If chkDisparo.Value = 1 Then

    Alc = 2 * Vbol ^ 2 * Sin(AngBol / Con) *
    Cos(AngBol / Con) / G
    lblAlcance.Caption = Redondo(Alc)
    lblVdisp.Caption = Redondo(Vbol)

    If Vmax > 0 Then
      lblEfic.Caption = (Vbol / Vmax) ^ 2
    Else
      lblEfic.Caption = "--"
    End If

    'esto porque Pendulo1 puede estar activo
    como primer módulo
    If optInter1.Value = True Then 'o como
    módulo posterior
      Vueltas2% = Vueltas3% 'cuando
      ya ha habido disparo,
      ElseIf optInter0.Value = True Then 'es
      para disparo cuando está

```

```

    Vueltas2% = Vueltas3%          'activo
Pendulo1.
    End If

    T = T + Vueltas2% * T3 'valor del tiempo
en que ocurrió el disparo
    BanCuerda% = 0
    BandDisparo% = 1
    linCuerda.Visible = False
    Exit Sub
End If
End If

End Sub

Sub Parabola()
'trayectoria de la bola libre

Vy = Vy - G * T3

Vbol = Sqr(Vy ^ 2 + Vx ^ 2)
ThBola = Atn(Vy / Vx)
AngBola = ThBola * Con

'para que el ángulo aparezca con signo y
magnitud correctos:
If Vx < 0 Then
    AngBol = -AngBola
Else
    AngBol = 180 - AngBola
End If
'coordenadas de la bola:
Ybol = Ybol - Vy * T3 * Escala
Xbol = Xbol + Vx * T3 * Escala

End Sub
Sub Pendulo1()

'hace invisible la cuerda si hay disparo:
If BanCuerda% = 0 Then
    linCuerda.Visible = False
End If

'En el caso de que Pendulo1 se ejecute como
primera rutina
'el contador Vueltas2% debe valer inicialmen-
te 1:
If BandDisparo% = 0 Then

    Vueltas2% = 1

End If

'Se inicia loop de acción:
Do
    For Vueltas3% = Vueltas2% To Veces
        S1 = Sin(Th1)
        C1 = Cos(Th1)
        AW1 = G * C1 * M1 * L1 / I
        W12 = AW1 * T3 + W11
        W1 = (W12 + W11) / 2
        Th1 = W1 * T3 + Th1
        W11 = W12

        If BandDisparo% = 1 Then
            'aquí lo de bola en parabólico
            Parabola
        Else

            If optInter1.Value = True Then
                Actuado2
            End If
        End If
    Next Vueltas3%

    Dibujo

    Registro

    Grafica

    Fase

    DoEvents

```

```

ElseIf optInter0.Value = True Then

    Pendulo2Interno
End If

'L2W1 = L2 * W11 esto ya quedó dentro
de Angulos
'RW2 = R * W21

'Angulos <--Se quitó de aquí y se metió
dentro de Actuado2 y Pendulo2interno

    End If
Next Vueltas3%

Dibujo

Registro

Grafica

Fase

DoEvents
Vueltas2% = 1
T = T + T2
Loop Until BandAlto% = 1

End Sub
Sub Pendulo2()
BanCuerda% = 1 'si hay cuerda

Do
    For Vueltas2% = 1 To Veces

        Pendulo2Interno

        If BandDisparo% = 1 Then
            ' T = T + Vueltas2% * T3
            Exit For
        End If

        Actuado1

    Next Vueltas2%

    If BandDisparo% = 1 Then Exit Sub

    L2W1 = L2 * W11
    RW2 = R * W21

    AngC = 90 + (Th1 - Th2) * Con 'ángulo de
cuerda con brazo

    Vx = -L2W1 * S1 + RW2 * C2 'la velocidad es
perpendicular
    Vy = L2W1 * C1 + RW2 * S2 'a brazo o
cuerda, por eso aparentan 'estar cam-
biados el seno y el coseno.
'velocidad de la bola:
Vbol = Sqr(Vx ^ 2 + Vy ^ 2)

    Dibujo

    Registro

    Grafica

    Fase

    DoEvents

```

```

T = T + T2
Loop Until BandAlto% = 1
End Sub
Sub Pendulo2Interno()
S2 = Sin(Th2)
C2 = Cos(Th2)
AW2 = -G * S2 / R
W22 = AW2 * T3 + W21
W2 = (W22 + W21) / 2
Th2 = W2 * T3 + Th2
W21 = W22
S2 = Sin(Th2)
C2 = Cos(Th2)
'condición de disparo:
  Angulos 'se calculan cosas para registro
  y disparo
  If optVelocidad.Value = True Then
    'condición de disparo basada en AngAc-
    tual:
    If AngActual >= AngDispInt Then
      If AngActual < 181 Then
        Disparo
      End If
    End If
  Else
    'condición de disparo según AngCuerda:
    If AngC <= AngCdisparo Then
      Disparo
    End If
  End If
  If BandDisparo% = 1 Then
    'T = T + Vueltas3% * T3
    Exit Sub '¿sobra?
  End If
End Sub
Sub Actuado1() 'El péndulo 1 es actuado por
el 2
BanCuerda% = 1 'sí hay cuerda
'aceleración angular del brazo:
AW1 = (L1 * M1 * G * C1 - L2 * M2 * Cos(Th2 -
Th1) * (R * W2 ^ 2 + G * C2)) / I
'AW2 = G * S2 / R Aceleración de la cuer-
da, calculada en Pendulo2Interno
W12 = AW1 * T3 + W11
W1 = (W12 + W11) / 2
Th1 = W1 * T3 + Th1
W11 = W12
S1 = Sin(Th1)
C1 = Cos(Th1)
'aquí no hay condición de disparo
End Sub
Sub Actuado2() 'El péndulo 2 es actuado por
el 1

```

```

BanCuerda% = 1 'sí hay cuerda
'AW1 = L1 * M1 * G * C1 / I aceleración
ang del brazo, ya fue calculada
'en Pendulo1
Ax = W1 ^ 2 * C1 + AW1 * S1 'estas por -L2
son las componentes
Ay = W1 ^ 2 * S1 - AW1 * C1 'de la acelera-
ción del soporte.
Acc = L2 * Sqr(Ax ^ 2 + Ay ^ 2) 'magnitud de
la aceleración del soporte
If Ax = 0 Then 'La componente es -L2 * Ax
  If Ay < 0 Then 'La componente es -L2 * Ay
    Alfa = 90 / Con
  Else
    Alfa = -90 / Con
  End If
Else
  Alfa = Atn(Ay / Ax) 'ángulo de la acelera-
ción del soporte
  If Ax > 0 Then
    Alfa = Alfa + 180 / Con
  End If
End If
AW2 = (-G * S2 - Acc * Cos(Alfa - Th2)) / R
'aceleración ang de la cuerda
'aquí se hace el cálculo de velocidades y
posición:
W22 = AW2 * T3 + W21
W2 = (W21 + W22) / 2
Th2 = W2 * T3 + Th2
W21 = W22
S2 = Sin(Th2)
C2 = Cos(Th2)
'condición de disparo:
  Angulos 'se calculan cosas para registro
  y disparo
  If optVelocidad.Value = True Then
    'condición de disparo basada en AngAc-
    tual:
    If AngActual >= AngDispInt Then
      If AngActual < 181 Then
        Disparo
      End If
    End If
  Else
    'condición de disparo según AngCuerda:
    If AngC <= AngCdisparo Then
      Disparo
    End If
  End If
  If BandDisparo% = 1 Then
    'T = T + Vueltas3% * T3
    Exit Sub '¿sobra?
  End If
End Sub

```

```

Sub ActuadoDoble()

BanCuerda% = 1 'sí hay cuerda

Do
  For Vueltas2% = Vueltas1% To Veces 'esto
    es para que haya uniformidad en      'los
    intervalos graficados.
      'se calculan valores de inicio
      SenDif = Sin(Th1 - Th2)
      Q = -M2 * L2 * R * SenDif
      CosDif = Cos(Th1 - Th2)
      S1 = Sin(Th1)
      C1 = Cos(Th1)
      S2 = Sin(Th2)
      C2 = Cos(Th2)
      U = MLR * W11 ^ 2 * CosDif - MGR * S2
      J = -MLR * W21 ^ 2 * CosDif + MGL * C1
      Del = PeKa - Q ^ 2 'determinante delta de
ecs. simultáneas
      AW1 = (J * Ka - Q * U) / Del
      AW2 = (Pe * U - J * Q) / Del
      W12 = AW1 * T3 + W11
      W22 = AW2 * T3 + W21
      W1 = (W12 + W11) / 2
      W2 = (W22 + W21) / 2
      Th1 = W1 * T3 + Th1
      Th2 = W2 * T3 + Th2
      S1 = Sin(Th1)
      C1 = Cos(Th1)
      S2 = Sin(Th2)
      C2 = Cos(Th2)
      W11 = W12
      W21 = W22
      L2W1 = L2 * W11
      RW2 = R * W21

      Angulos 'se calculan cosas para registro
y disparo

      If optVelocidad.Value = True Then

        'condición de disparo basada en AngAc-
tual:
        If AngActual >= AngDispInt Then
          If AngActual < 181 Then

            Disparo

          End If
        End If

      Else

        'condición de disparo según AngCuerda:
        If AngC <= AngCdisparo Then
          Disparo
        End If

      End If

      If BandDisparo% = 1 Then

        T = T + Vueltas2% * T3

        Exit For
      End If
    Next Vueltas2%

    If BandDisparo% = 1 Then Exit Sub

  T = T + T2

```

```

'esta es la prueba-----
-----
Kin1 = I * W1 ^ 2 / 2
Pot1 = -M1 * G * L1 * S1
Kin2 = M2 * (((L2 * W1) ^ 2 + (R * W2) ^ 2)
/ 2 - L2 * R * W1 * W2 * Sin(Th1 - Th2))
Pot2 = M2 * G * (L2 * S1 - R * C2)

Ener = Kin1 + Pot1 + Kin2 + Pot2

'aquí terminan la prueba-----
-----

Dibujo

Registro

Grafica

Fase

Energia

DoEvents

Vueltas1% = 1
Loop Until BandAlto% = 1 'bandera del coman-
do Alto

End Sub
Sub Restringido()
BanCuerda% = 1 'sí hay cuerda

Do
  For Vueltas1% = 1 To Veces 'loop de 200
    vueltas

    'cálculo de valores:
    AW1 = (Q1 - Q2) / Q3 'aceleración
    W12 = AW1 * T3 + W11 'vel angular
    W1 = (W11 + W12) / 2 'promedio entre
valor anterior y actual
    Th1 = W1 * T3 + Th1 'ángulo
    'nuevos valores:
    S1 = Sin(Th1)
    C1 = Cos(Th1)
    A = L2 * S1 + H
    B = Sqr(R ^ 2 - A ^ 2)
    D = S1 - A * C1 / B
    E1 = C1 - ((L2 * C1 ^ 2) / B)
    E2 = A * S1 / B
    E3 = L2 * (C1 * A) ^ 2 / B ^ 3
    E = E1 + E2 - E3
    Q1 = M1 * G * L1 * C1
    Q2 = M2 * L2 ^ 2 * W11 ^ 2 * D * E
    Q3 = I + M2 * L2 ^ 2 * D ^ 2
    Th2 = -Atn(B / A)
    S2 = Sin(Th2)
    C2 = Cos(Th2)
    W22 = L2 * W12 * C1 / B
    Vbol = -D * L2 * W12
    'cálculo cinemático de la aceleración de
la cuerda
    'sólo con fines de la gráfica:
    AW2 = (W22 - W21) / T3

    W11 = W12 'los valores actuales pasan a
ser los anteriores
    W21 = W22

    AngC = 90 + (Th1 - Th2) * Con 'ángulo de
cuerda con brazo

```

```

'condición de despegue:
If -(AW1 * D + (W12 ^ 2 * E)) >= G * B /
(A * L2) Then
    BanDespegue% = 1
    'T = T + Vueltas1% * T3 'valor del
    tiempo en que ocurrió el despegue
    'no está bien
asi, lo quitamos.
'dibuja línea indicadora:
linDespegue.X2 = linCuerda.X2
linDespegue.X1 = linDespegue.X2 'línea
que indica el sitio de despegue
linDespegue.Visible = True
Exit For
End If

Next Vueltas1%

If BanDespegue% = 1 Then Exit Do 'salida
por ocurrir despegue

T = T + T2
'aquí empieza prueba-----
-----
Kin1 = I * W1 ^ 2 / 2
Pot1 = -M1 * G * L1 * S1
Kin2 = M2 * (L2 * W1 * D) ^ 2 / 2
Pot2 = -M2 * G * H

Ener = Kin1 + Pot1 + Kin2 + Pot2
'fin de prueba-----
-----

Dibujo 'dibuja diagrama

Registro 'escribe datos en las labels

Grafica

Fase

Energia

DoEvents

Loop Until BandAlto% = 1 'bandera del coman-
do Alto

End Sub
Sub InteraccionCero()
'se hacen Pendulo1 y Pendulo2
Pendulo1 'Pendulo2Interno se hace dentro de
Pendulo1
'Pendulo1 con Parabola están aquí
incluidos
End Sub
Sub InteraccionUno()
'se hacen Pendulo1 y Actuado2
Pendulo1
'Pendulo1 con Parabola están aquí
incluidos

End Sub
Sub InteraccionDos()
'se hacen Pendulo2 con Actuado1
Pendulo2 'Actuado1 se ejecuta dentro de
Pendulo2

Pendulo1 'este se ejecuta después del dispa-
ro

End Sub

```

```

Sub InteraccionLibre()
'se hacen ActuadoDoble y posteriormente Pen-
dulol

ActuadoDoble

Pendulo1 'después del disparo

End Sub
Sub InteraccionRestri()
'se hacen Restringido, posteriormente Actua-
doDoble y
'posteriormente Pendulo1
Restringido

ActuadoDoble

Pendulo1

End Sub
Function Redondo(Victima) 'Para redondear con
un decimal
Redondo = CLng(Victima * 10) / 10

End Function
Function Redondo2(Victima)
Redondo2 = CLng(Victima * 1000) / 1000 're-
dondeo a tres decimales

End Function

Private Sub cmdAceptar_Click()

'On Error GoTo Mensaje 'error de Type mis-
match o división por cero en los datos
'escritos en los text-
box.

'txtL1.Text = CSng(txtL1.Text) Esto no sir-
vió

txtL1.Text = txtL1.Text * 1 'tampoco es
esta operación
txtL2.Text = txtL2.Text * 1
txtM1.Text = txtM1.Text * 1
txtM2.Text = txtM2.Text * 1
txtTh1.Text = txtTh1.Text * 1
txtTh2.Text = txtTh2.Text * 1
txtW1.Text = txtW1.Text * 1
txtW2.Text = txtW2.Text * 1
txtH.Text = txtH.Text * 1
txtR.Text = txtR.Text * 1
txtI.Text = txtI.Text * 1
txtAng.Text = txtAng.Text * 1

Cerol = 1 / txtL1.Text 'para detenerse si
hay números igual a cero
Cerol = 1 / txtL2.Text
Cerol = 1 / txtM1.Text
Cerol = 1 / txtM2.Text
Cerol = 1 / txtH.Text
Cerol = 1 / txtR.Text
Cerol = 1 / txtI.Text
Cerol = 1 / txtAng.Text

BandAlto% = 0
BandDisparo% = 0
BandMarca% = 0
linCuerda.Visible = True
pctImagen.Cls
pctGrafica.Cls
pctFase.Cls

```

```

lblVbol.Caption = ""
lblAlcance.Caption = ""
lblAngBol.Caption = ""
lblVdisp.Caption = ""
lblAngDisp.Caption = ""
lblEfic.Caption = ""
lblAngCDisp.Caption = ""
linDespegue.Visible = False
Vy = 0
Vx = 0
AngActual = 0

BanCuerda% = 1 'hay cuerda
Con = 57.29578 'factor de conversión radia-
nes-grados
'Captura de datos desde los textboxes:
L1 = txtL1.Text
L2 = txtL2.Text
H = txtH.Text
R = txtR.Text
M1 = txtM1.Text
M2 = txtM2.Text
I = txtI.Text
Th = txtTh1.Text

'se calcula la escala para el diagrama:
Largo = H + L2 + R
Escala = (linPiso.Y1 - 75) / Largo 'el 75 es
por el margen que se come el
'picture-
box

'verifica que el valor del ángulo esté en el
intervalo correcto:
Select Case Th
Case Is >= 90, Is <= -90
MsgBox "El ángulo Th1 debe ser 90 > Th1 > -
90", 16, "VALOR INADECUADO"
Exit Sub
End Select

'se hacen cálculos de valores iniciales:
Th1 = txtTh1.Text / Con
S1 = Sin(Th1)
C1 = Cos(Th1)

'Valores según unidades:
If optMks.Value = False Then
G = 980 'aceleración de la gravedad
T2 = 0.002 'intervalos para los loops
T3 = 0.00001 'de cálculo
lEscala = 10 * Escala 'línea de 10 cm en
pantalla
linEscala.BorderColor = &HFF00&
Tmax = Sqr(L2 / 50) 'valores máximos
para las gráficas
Wmax = Sqr(120000 / L2)

Else
G = 9.8
T2 = 0.01
T3 = 0.00005
lEscala = Escala 'línea de 1 m en panta-
lla
linEscala.BorderColor = 255
Tmax = Sqr(L2 / 0.5)
Wmax = Sqr(1000 / L2)

End If

'línea de escala:
linEscala.Y2 = linEscala.Y1 + lEscala

```

```

Veces = T2 / T3
'escalas para las gráficas:
EscT = pctGrafica.Width / Tmax 'tiempo
EscWGr = pctGrafica.Height / Wmax 'vel
angular gráfica de tiempo
EscWFs = pctFase.ScaleHeight / Wmax 'vel
angular en gráfica de fase
EscTh = pctFase.ScaleWidth / 6.283185 '2 pi
para gráfica de fase

```

```

'constantes de dimensiones:
Pe = I + M2 * L2 ^ 2
Ka = M2 * R ^ 2
PeKa = Pe * Ka
MLR = M2 * R * L2
MGR = M2 * R * G
MGL = G * (M1 * L1 - M2 * L2)

```

```

'captura según el caso; en Restringido los
valores de las
'Ws son cero y la Th2 está dererminada por
otras cantidades.

```

```

If optInterl2R.Value = True Then
W1 = 0
W2 = 0
txtW1.Text = W1
txtW2.Text = W2
W11 = 0
W12 = 0
W21 = 0
W22 = 0

```

```

Vbol = 0 'velocidad de la bola

```

```

A = L2 * S1 + H 'A es la altura del extremo
del brazo sobre el piso

```

```

If A <= 0 Then
MsgBox "Con los valores escogidos la bola
está debajo del piso o el extremo del brazo
está sobre el piso", 16, "VALORES INADECUA-
DOS"

```

```

Exit Sub 'con bola debajo del piso nos
salimos de la sub
End If

```

```

PreB = R ^ 2 - A ^ 2 'A debe ser menor que
R:

```

```

If PreB <= 0 Then
MsgBox "Con los valores escogidos la bola
no toca el piso", 16, "VALORES INADECUADOS"
Exit Sub 'si A es mayor que R nos sali-
mos de la Sub

```

```

Else
B = Sqr(PreB) 'si no, se calcula B
End If

```

```

Th2 = -Atn(B / A)
txtTh2.Text = Redondo(Th2 * Con)

```

```

D = S1 - A * C1 / B
E1 = C1 - ((L2 * C1 ^ 2) / B)
E2 = A * S1 / B
E3 = L2 * (C1 * A) ^ 2 / B ^ 3
E = E1 + E2 - E3
Q1 = M1 * G * L1 * C1
Q2 = M2 * L2 ^ 2 * W11 ^ 2 * D * E
Q3 = I + M2 * L2 ^ 2 * D ^ 2
AngBol = 180

```

```

Else 'esto es para casos no restringidos
Th2 = txtTh2.Text / Con

```

```

W1 = txtW1.Text
W2 = txtW2.Text
W11 = W1
W12 = 0
W21 = W2
W22 = 0

End If

S2 = Sin(Th2)
C2 = Cos(Th2)

'se da valor al ángulo de disparo escogido y
'a la bandera indicadora:
If optVelocidad.Value = True Then
  AngDisp = txtAng.Text
  Select Case AngDisp
    Case Is <= 180
      AngDispInt = 180 - AngDisp
    Case Else
      AngDispInt = 540 - AngDisp
  End Select

  BandAng% = 0
Else
  AngCdisparo = txtAng.Text
  BandAng% = 1
End If

AngC = 90 + (Th1 - Th2) * Con 'ángulo de
cuerda con brazo

If datRegistro.Recordset.EOF Then

  datRegistro.Recordset.AddNew
End If

'se anotan valores iniciales en labels:
lblTiempoCorr.Caption = 0
lblTh1Corr.Caption = Redondo(Th1 * Con)
lblTh2Corr.Caption = Redondo(Th2 * Con)
lblW1Corr.Caption = Redondo(W1)
lblW2Corr.Caption = Redondo(W2)
lblAngC.Caption = Redondo(AngC)
lblAngBol.Caption = 180
lblVbol.Caption = 0
'-----
-----datos
'datRegistro.Recordset.AddNew
'datRegistro.Recordset.MoveLast
'datRegistro.Recordset.Update
'-----
-----

'se dibuja la línea H:
linH.X1 = pctImagen.Width - (L2 + R) * Escala
- 150 'este 150 es por el margen
linH.X2 = linH.X1
'que se come el picturebox.
linH.Y1 = linPiso.Y1
linH.Y2 = linPiso.Y1 - H * Escala

'coordenadas del soporte:
Xsop = linH.X2
Ysop = linH.Y2

Dibujo 'se dibujan las líneas

'la velocidad máxima posible:
If optInter12R.Value = True Then
  PreV = 2 * G * ((M1 * L1 / M2) * (1 - S1) -
H - L2 - (R * Cos(AngDisp / Con)))
  If PreV >= 0 Then

```

```

Vmax = Sqr(PreV)
lblVmax.Caption = Redondo(Vmax)
EnTotal = G * (-M1 * L1 * S1 - M2 * H)
'energía total antes de iniciar movimiento
lblEfic.Caption = EnTotal
Else
  lblVmax.Caption = "-"
End If
Else
  lblVmax.Caption = ""
End If

T = 0

cmdInicio.Enabled = True
cmdAlto.Enabled = False

Exit Sub

'Mensaje:
'MsgBox "Debes teclear números y en las cajas
superiores deben ser mayores de cero", 48,
"Datos Incorrectos"

End Sub

Private Sub cmdAlto_Click()
BandAlto% = 1
cmdAceptar.Enabled = True
cmdInicio.Enabled = False
cmdPausa.Enabled = False

End Sub

Private Sub cmdInicio_Click()
'se cambia la disponibilidad de botones:
cmdAceptar.Enabled = False
cmdInicio.Enabled = False
cmdPausa.Enabled = True
cmdAlto.Enabled = True

'Se selecciona el módulo según interacción:
If optInter0.Value = True Then
  InteraccionCero
ElseIf optInter1.Value = True Then
  InteraccionUno
ElseIf optInter2.Value = True Then
  InteraccionDos
ElseIf optInter12L.Value = True Then
  InteraccionLibre
ElseIf optInter12R.Value = True Then
  InteraccionRestri
End If

End Sub

Private Sub cmdLimpia_Click()
'borra datos de la base de datos
'datRegistro.Recordset.AddNew

'If datRegistro.Recordset.BOF Then
  datRegistro.Recordset.MoveFirst
  datRegistro.Recordset.MoveNext

'End If

Do Until datRegistro.Recordset.EOF
  datRegistro.Recordset.Delete
  datRegistro.Recordset.MoveNext
Loop

```

```

datRegistro.Recordset.MoveFirst

'datRegistro.Recordset.MoveFirst
End Sub

Private Sub cmdPausa_Click()

Static bPausa As Boolean
If bPausa = False Then
  cmdPausa.Caption = "CONTINUAR"
  bPausa = True
  cmdAlto.Enabled = False
Else
  cmdPausa.Caption = "PAUSA"
  bPausa = False
  cmdAlto.Enabled = True
End If
While bPausa
  DoEvents
Wend

End Sub

Private Sub cmdSalir_Click()

Salida% = MsgBox("¿En verdad quieres salir?",
36, "SALIDA")
If Salida% = 6 Then 'valor del botón "acep-
tar"
End
End If

End Sub

```

```

Private Sub optInter0_Click()
'permite escribir valores
txtW1.Enabled = True
txtW2.Enabled = True
txtTh2.Enabled = True

```

```
End Sub
```

```

Private Sub optInter1_Click()
'permite escribir valores
txtW1.Enabled = True
txtW2.Enabled = True
txtTh2.Enabled = True
End Sub

```

```

Private Sub optInter12L_Click()
'permite escribir valores
txtW1.Enabled = True
txtW2.Enabled = True
txtTh2.Enabled = True
End Sub

```

```

Private Sub optInter12R_Click()
'evita que se escriban valores
txtW1.Enabled = False
txtW2.Enabled = False
txtTh2.Enabled = False
End Sub

```

```

Private Sub optInter2_Click()
'permite escribir valores
txtW1.Enabled = True
txtW2.Enabled = True
txtTh2.Enabled = True
End Sub

```


2 Alcance y fricción del aire

La figura A2-1 es un diagrama de la trayectoria. Le llamamos alcance, X , a la distancia desde la base del trábucos hasta el punto de impacto. X_0 es el alcance calculado sin tomar en cuenta la fricción del aire. Los disparos ocurrieron cuando el brazo estaba en posición vertical en reposo y la cuerda a 45° con la horizontal, en todos los casos la altura h es 3.8 m y la distancia horizontal l es 1.15 m.

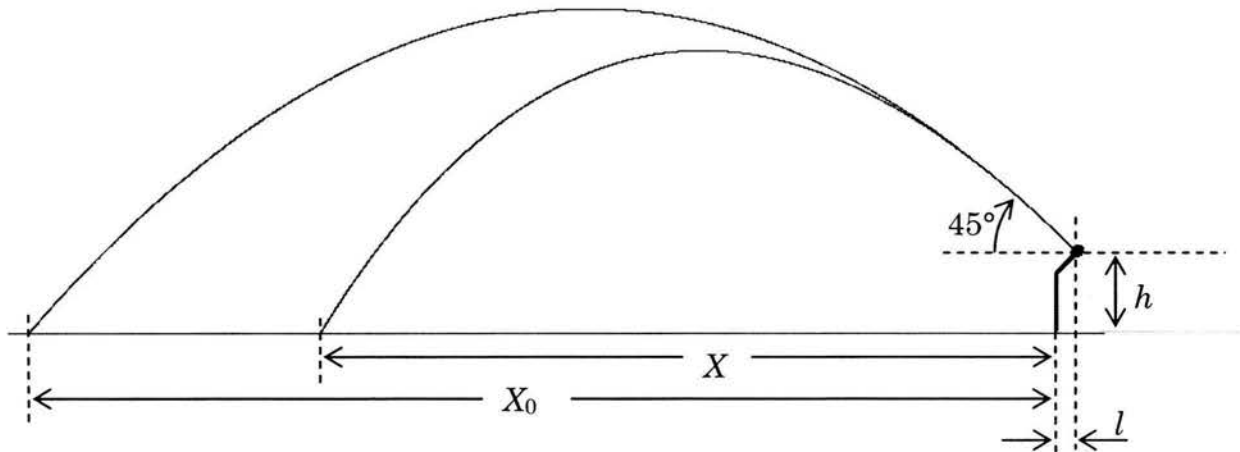


Fig. A2-1. Trayectorias de proyectil

El alcance resultó ser aproximadamente $3/4$ del calculado sin tomar en cuenta el efecto del aire. La fuerza de fricción depende de la forma del objeto, del área que presenta en la dirección del movimiento y de la velocidad⁹:

$$F = \frac{1}{2} \rho A v^2 C_f, \quad (\text{A2-1})$$

ρ es la densidad del aire, A es el área de la sección del objeto perpendicular a la dirección de movimiento, v es la velocidad y C_f es el coeficiente de fricción. En un programa de cómputo que simula el movimiento del proyectil en el aire²³ se hizo un ajuste del valor de C_f para igualar los alcances obtenidos. Además de las bolas de beisbol se lanzó una de golf usando todas las pesas disponibles para lograr la mayor velocidad inicial posible.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Bola	v_0 medida (m/s)	Alcance sin aire (m)	Alcance real (m)	Coefficiente de fricción (kg/m ³)
práctica	19.5 ± 0.5	42.4	30.0 ± 0.5	0.8 ± 0.03
1	20.1 ± 0.5	44.8	30.0 ± 0.5	1.18 ± 0.03
2	21.0 ± 0.5	48.6	30.0 ± 0.5	1.44 ± 0.03
3	21.0 ± 0.5	48.6	32.0 ± 0.5	1.30 ± 0.03
golf	31.0 ± 1.0	101.9	67.0 ± 0.5	0.50 ± 0.01

Tabla A2-1

Hay una diferencia entre los valores encontrados y los reportados²⁴. Para las bolas de beisbol el coeficiente tiene un valor cercano al de objetos no esféricos. El de la bola de golf sí resulta ser igual al de las bolas lisas⁹.

3 Concurso de catapultas

En febrero de 2004 el Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad Iberoamericana convocó al “Concurso de Catapulta Ibero ‘04” de construcción de artefactos tipo catapulta para estudiantes de bachillerato. Se evaluaron tres aspectos; bajo costo, diseño y efectividad. Para evaluar la puntería la meta era atinarle con una pelota de tenis a un blanco de 25 cm de diámetro a una distancia de 30 m. Cada equipo dispuso de 5 minutos para hacer todos los tiros que pudiera. Dos equipos de tres estudiantes, alumnos del autor en el 6° semestre de CCH en el Colegio Madrid, participaron construyendo trabucos.

Los trabucos, contruidos de madera, incluyendo los ejes, usaron pesas deportivas. Como la finalidad no era el aprovechamiento de la energía potencial, sino lograr tiros consistentes, los diseños no requirieron mucha atención a los aspectos de desempeño fino. La eliminatoria se efectuó el 19 de abril, participaron alrededor de 40 equipos de nivel bachillerato de diferentes escuelas. Uno de los equipos asesorados por el autor, junto con otros nueve equipos, pasó a la competencia final el 22 de abril. Aunque hubo trabucos y catapultas impulsadas por elementos elásticos, sólo algunas de éstas últimas fueron competidoras pues eran capaces de hacer tiros con gran frecuencia, alguna hasta un tiro cada dos segundos. Los otros trabucos no resultaron ser buenos por fallas de construcción, principalmente falta de precisión en el ensamble de piezas, lo que lleva a tiros no repetibles. Nuestro trabuco hacía un tiro cada 15 segundos, siendo largo el lapso entre tiros por la necesidad de desenredar y arreglar la lazada. El trabuco hizo 20 tiros en los 5 minutos reglamentarios, todos ellos pegaron a una distancia menor de 3 metros del centro del blanco, fue el aparato más consistente y ganó el primer lugar²⁵.



Fig A3-1. Los trabucos realizando tiros, el primero ganó el primer lugar por consistencia de buenos tiros, a pesar de no haber metido bola al cesto que era el blanco.

10 Referencias

Figuras

0-1, 0-4

Vemming Hansen, Peter
Middelalderens mekaniske apparater til krigsbrug.
Middelaldercentret, 1998.

0-2

Chevedden, Paul E., Eigenbrod, Les, Foley, Bernard, Soedel Werner.
The Trebuchet
Scientific American,
Volume 273, number 1, July 1995. p. 60.

0-3

Engines of war.
Encyclopaedia Britannica, 1968.
Vol. 8, pp.399,400.

1-2, 1-3

Sitio Web de *The Gray Company* en Australia.
www.iinet.net.au/~rmine/middel/html

Texto

1 Chevedden, Paul E.; Eigenbrod, Les; Foley, Bernard; Soedel, Werner.

The Trebuchet
Scientific American,
Volume 273, number 1, July 1995. pp 58-63

2 Díaz del Castillo, Bernal.

Historia Verdadera de la Conquista de la Nueva España.
Cap. CLV, p. 338.
Editorial Porrúa, México D. F. ,1960

3 *Engines of War*

Encyclopaedia Britannica, 1968.
Vol. 8, pp.399,400.

4 Vemming Hansen, Peter.

Experimental Reconstruction of a Medieval Trebuchet
Acta Archaeologica,
Volume 63, 1992, pp. 189-268

5 Sitio Web de *The Gray Company* en Australia.

www.iinet.net.au/~rmine/middel/html

- 6 Museo experimental al aire libre *Centro de la Edad Media* en Nykøbing, Dinamarca.
Middelaldercentret
Ved Hamborgskoven 2
4800 Nykøbing Falster
Dinamarca
www.middelaldercentret.dk
- 7 Sommerfeld, Arnold
Mechanics
Academic Press
1949 Péndulo doble, p 111, péndulo físico, p. 91.
- 8 Ingard, Uno & Kraushaar, William.
Introduction to Mechanics, Matter and Waves
Addison Wesley
1960 Momento de inercia y teorema de ejes paralelos
- 9 Bird, Stewart, Lightfoot.
Transport Phenomena
John Wiley & Sons
New York, 1960
60-11717
pp 190-194, fricción de aire.
- 10 Fowles, Grant R.
Analytical Mechanics
Holt, Rinehart and Winston
1962 Lagrangiana
- 11 Wells, Dare A.
Lagrangian Dynamics
McGraw-Hill
1967 Lagrangiana
- 12 Spiegel, Murray R.
Mathematical Handbook
McGraw-Hill
1967 Derivadas e integrales
- 13 Sommerfeld, Arnold
Partial Differential Equations in Physics
Academic Press
1949 Ecuaciones diferenciales
- 14 Hopf, L.
Introduction to the Differential Equations of Physics
Dover
1948 Ecuaciones diferenciales
- 15 Worsnop, B. L., Flint, H. T.
Curso Superior de Física Práctica
Tomo I
EUDEBA
1964
p. 64, péndulo físico.

- 16 Mathews, John, H.
Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering
Prentice Hall
1992 Método de Euler
- 17 Weidner, Richard T. , Sells, Robert L.
Elementary Classical Physics
Allyn and Bacon
1965 p. 346. Leyes de Newton movimiento rotacional
- 18 Barnett, Raymond A.
Álgebra
McGraw-Hill, 1980, pp 310.
- 19 Baird, D. C.
Experimentación
Prentice-Hall
1988 Error experimental
- 20 Las gráficas y los cálculos de ajuste de curvas fueron hechos con el programa Excel 97 de Microsoft.
- 21 Squires, G. L.
Física Práctica
McGraw-Hill
1972 Error experimental
- 22 *Anuario del Observatorio Astronómico Nacional,*
Edición 1992
UNAM
p. 140, aceleración de la gravedad.
- 23 *Proyectil*
Programa de cómputo de simulación de trayectorias de proyectiles con resistencia de aire.
Hecho por Héctor Covarrubias M.
- 24 Giordano, Nicholas J.
Computational Physics
Prentice Hall
1997
- 25 *Nuestra Comunidad,*
Revista de la Universidad Iberoamericana.
No. 116, 26 de abril 2004, págs. 12, 13.