



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"SUPERFICIES DE RIEMANN COMO COCIENTES DE
ACCIONES DISCONTINUAS EN LA ESFERA."

LIBRO DE TESIS
2004

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

GRODECZ ALFREDO RAMIREZ OGANDO



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE

2004



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Superficies de Riemann como cocientes de acciones
discontinuas en la esfera."

realizado por Ramírez Ogando Grodecz Alfredo

con número de cuenta 09757031-6 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dr. Antonio Lascurain Orive

Propietario

Dr. Javier Páez Cárdenas

Propietario

Dra. María de la Paz Alvarez Scherer

Suplente

M. en C. María del Pilar Martínez Téllez

Suplente

Dra. Ana Margarita Guzmán Gómez

Consejo Departamental de Matemáticas

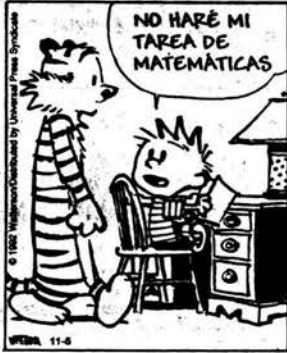


M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

*A Lisis Fajardo, mi maestra de Historia.
A mis papás, a mi hermana, a mis abuelos y a mi familia.
A mi chica Susi Eisert.
A Pepe, mi entrenador.
A todos, todos mis Amigos, donde quiera que estén.*

Calvin y Hobbes



NO HARÉ MI TAREA DE MATEMÁTICAS

MIRA A ESTOS PROBLEMAS SIN RESOLVER. AQUÍ HAY UN NÚMERO EN COMBATE MORTAL CON OTRO. UNO DE ELLOS SERÁ SUBTRAÍDO. ¿PERO POR QUÉ? ¿CÓMO? ¿QUÉ QUEDARÁ DE ÉL?



Agradecimientos

Quiero agradecer a Antonio Lascrain, quien inculco en mi el gusto por la geometría, por la dedicación y el apoyo que me dio durante mi formación académica y durante la realización del presente trabajo.

Así como a Ana Margarita Guzmán por sus palabras de aliento y el participar en mi formación académica.

A Paz Álvarez, a Javier Páez y a Pilar Martínez por aceptar revisar esta tesis.

Un agradecimiento a Enrique Scheinvar por ayudar a pintar en la computadora los bonitos dibujos que se encuentran aquí adentro y a Niza por su opinión sobre dichos dibujitos, así como aguantarnos durante la realización de estos.

A Enrique Bazua por explicarme un poco de topología algebraica y ayudarme a reafirmar mi gusto por las matemáticas (geometría y topología), así como por la filosofía y las cosas banales.

A Rafael Martínez por su apoyo, por escucharme y ayudarme siempre que lo necesité, aclarando, pensando y resolviendo dudas durante la carrera y la realización de la tesis. Gracias Rafa.

A Grodecz Alfredo Ramírez Fuentes y a Beatriz Ogando Díaz, mis papás, y a mi hermana Beatriz por todo su apoyo y cariño siempre.

A todos mis amigos por las porras para realizar y terminar el presente trabajo. No doy nombres pues no quiero olvidar a alguno, además lo esencial es invisible a los ojos (Secreto que el Zorro da al Principito).

Índice

Introducción	vi
1. Preliminares	1
1.1. Resultados topológicos	1
1.2. Transformaciones de Möbius	5
1.3. Acción discontinua	7
1.4. Métrica hiperbólica	16
2. Superficies de Riemann	19
2.1. Nociones básicas	19
2.2. Superficies de Riemann como cocientes	24
2.3. El grupo de una superficie de Riemann	29
2.4. Conjuntos estables	44
Bibliografía	50

Introducción

En las últimas décadas importantes ramas de las matemáticas como los grupos Kleinianos y Fuchsianos, la geometría hiperbólica, los mapeos cuasi-conformes, la teoría de Teichmüller y las 3-variedades hiperbólicas han tenido un desarrollo extraordinario al interactuar unas con otras.

Estas ramas, que inciden directamente con áreas centrales de la matemática, como el álgebra, el análisis real y complejo, la topología y la geometría, han sido desarrolladas principalmente por Troels Jørgensen y William Thurston (medalla Fields) en sus trabajos sobre las 3-variedades hiperbólicas. También, Denis Sullivan y Curt Mc Mullen (medalla Fields) han trabajado sobre notables relaciones de la geometría hiperbólica con los sistemas dinámicos.

En todas estas ramas la teoría de las superficies de Riemann es un tema central. En esta tesis se presentan los fundamentos de las superficies de Riemann en relación con las acciones discontinuas de subgrupos de $PSL(2, \mathbb{C})$ en la esfera de Riemann.

En el primer capítulo se muestran los preliminares necesarios para desarrollar los espacios cocientes como superficies de Riemann. Se establecen los resultados básicos de la topología de conjuntos, así como ciertos resultados sobre discontinuidad, de la métrica hiperbólica, de las transformaciones de Möbius complejas y del conjunto límite. Se demuestra, para el caso elemental, que el conjunto ordinario es el conjunto máximo de discontinuidad. También se exhiben vecindades *estables* en el plano complejo extendido, las cuales se utilizarán en el teorema principal.

El teorema principal establece que si se tiene un subdominio D de $\widehat{\mathbb{C}}$ y un grupo G que actúa discontinuamente en D , al identificar las orbitas, se obtiene que el espacio cociente es una superficie de Riemann.

Posteriormente, usando el teorema de uniformización de Riemann se muestra que cualquier superficie de Riemann cerrada es conformemente equiva-

lente a la esfera, el toro o un toro de género g . Se identifican las superficies de Riemann hiperbólicas con aquellas que provienen de una acción discontinua en el disco unitario. Obteniendo de esta manera un recíproco del teorema principal. Se exhiben también ejemplos que describen el teorema principal con un grupo de traslaciones cuyo cociente es conformemente equivalente a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Finalmente se describen conjuntos estables. Mostrando algunos ejemplos, como familias de horodiscos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Resultados topológicos

Se usarán algunos resultados básicos de la topología.

Definición 1 Sea X un conjunto, una topología en X es una colección no vacía τ de subconjuntos de X llamados conjuntos abiertos, tales que satisfacen los siguientes cuatro axiomas:

(AX 1) El conjunto vacío \emptyset es abierto.

(AX 2) El conjunto X es abierto.

(AX 3) La unión de cualquier familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

(AX 4) La intersección de cualesquiera dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Definición 2 Sea X un espacio y $x \in X$. Se dice que el conjunto $N \subset X$ es una vecindad de x en X , si existe un conjunto abierto U en X tal que $x \in U \subset N$.

Se definirán los conceptos de continuidad y compacidad.

Definición 3 Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Se dice que f es continua en un punto p de X , si para toda vecindad N del punto $f(p)$ en Y , existe una vecindad M del punto p en X , tal que $f(M) \subset N$. Se dice que f es continua en X , si esto se cumple para todo punto de X .

Obsérvese que si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, a cada abierto $U \subset Y$ su imagen inversa $f^{-1}(U)$ es abierta en X .

Definición 4 Sea X un espacio topológico y $M \subset X$. Se dice que M es compacto, si dada una cubierta abierta $\{U_j\}_{j \in I}$ de M , se puede extraer una subcubierta finita $\{U_{j_1}, U_{j_2}, \dots, U_{j_k}\}$ de M .

En el siguiente teorema se muestra la compatibilidad de la continuidad con la compacidad.

Teorema 1.1.1 Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y $K \subset X$ compacto, entonces $f(K)$ es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{V_j\}_{j \in I}$ una cubierta abierta de $f(K)$, entonces como f es continua $\{f^{-1}(V_j)\}_{j \in I}$ es una cubierta abierta de K , por lo que hay una subcubierta abierta finita $\{f^{-1}(V_{j_1}), f^{-1}(V_{j_2}), \dots, f^{-1}(V_{j_n})\}$. Aplicando f se tiene que $\{V_{j_1}, V_{j_2}, \dots, V_{j_n}\}$ es una subcubierta finita de $f(K)$, por lo tanto $f(K)$ es compacto. □

Proposición 1.1.2 Todo conjunto cerrado K , en un espacio compacto X , es compacto.

DEMOSTRACIÓN Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de K en X . Como K es cerrado su complemento K^c es abierto. Por lo tanto $\{U_i\}_{i \in I} \cup K^c$ es una cubierta abierta de X . Al ser X compacto tiene una subcubierta finita $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n \cup K^c$. Por lo tanto $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ es una subcubierta finita de K , por lo que K es compacto. □

En general los subconjuntos compactos son cerrados.

Definición 5 Un espacio topológico es de Hausdorff, si dados $a, b \in M$, tales que $a \neq b$, existen conjuntos abiertos ajenos U y V en M , tal que $a \in U$ y $b \in V$.

Proposición 1.1.3 Todo subespacio topológico E , de un espacio topológico Hausdorff X , es un espacio topológico Hausdorff.

DEMOSTRACIÓN. Sea a, b dos puntos distintos en E . Como X es Hausdorff, existen conjuntos abiertos U y V en X , tales que $a \in U$, $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Ahora sea $U^* = E \cap U$ y $V^* = E \cap V$, se tiene que $a \in U^*$, $b \in V^*$ y $U^* \cap V^* = \emptyset$, por lo tanto E es Hausdorff. \square

Teorema 1.1.4 *Sea K compacto en un espacio topológico X de Hausdorff, entonces K es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Hay que probar que K^c es abierto. Sea $y \in K^c$ y para toda $x \in K$ sean V_x y W_y vecindades abiertas de x y de y tal que $V_x \cap W_y = \emptyset$. Como $K \subset (\bigcup_{x \in X} V_x)$, existe una subcobertura abierta finita $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_m}\}$ de K , sea $W = \bigcap_{j=1}^m W_{y_j}$, por lo tanto W es una vecindad abierta de y y es ajena a K . En consecuencia, K^c es abierto. \square

Teorema 1.1.5 *Toda función f continua y biyectiva de un espacio compacto X , en un espacio topológico Hausdorff Y , es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que f es cerrada. Si E es algún conjunto cerrado en X , entonces por la proposición 1.1.2 E es compacto y $f(E)$ también lo es. Finalmente, se sigue del teorema 1.1.1 que $f(E)$ es cerrado, por lo tanto f es cerrada. \square

Otro concepto básico de la topología que se usará es el de conexidad.

Definición 6 *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Se dice que A es conexo en X , si no existen abiertos no vacíos U y V de X , tal que $A \subset U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

También la conexidad es compatible con la continuidad.

Teorema 1.1.6 *Sea X conexo y $f : X \rightarrow Y$ es continua, entonces $f(X)$ es conexo en Y .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f(X)$ no es conexo en Y por cual existen G, H abiertos en Y tales que $f(X) \subset G \cup H$ y $G \cap H = \emptyset$. En consecuencia $X = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$ y $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = \emptyset$. Como f es

continua, tenemos que $f^{-1}(G)$ y $f^{-1}(H)$ son subconjuntos abiertos de X , lo cual es una contradicción ya que X es conexo.

□

A continuación se definirán otros conceptos de la topología, como las funciones de identificación y los espacios cocientes.

Definición 7 Una transformación continua $f : X \rightarrow Y$ suprayectiva, se dice que es una identificación, si un conjunto $E \subset Y$ es abierto (o cerrado) en Y , si sólo si $f^{-1}(E)$ es abierto (o cerrado) en X .

Teorema 1.1.7 Si $f : X \rightarrow Y$ es una transformación abierta o cerrada suprayectiva, entonces f es una identificación.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos f abierto, sea E un conjunto de Y tal que $f^{-1}(E)$ es abierto en X . Como f es suprayectiva, entonces $f[f^{-1}(E)] = E$, ya que $f^{-1}(E)$ abierto en X y f es abierto, se sigue que E es abierto en Y . Análogamente para f cerrado.

□

El recíproco del teorema no es cierto. Por ejemplo, se puede construir fácilmente una función $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ que es una identificación, tal que $f|_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} = \frac{1}{2}$ por lo que f no es abierta. Véase figura 1.1.

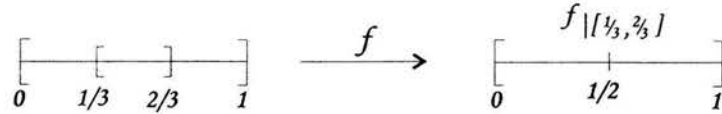


Figura 1.1: Las identificaciones no son abiertas

Teorema 1.1.8 Sea $f : X \rightarrow Y$ una identificación y $g : Y \rightarrow Z$, tal que $g \circ f$ es continua, entonces g es continua.

DEMOSTRACIÓN: Sea $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ y W un abierto en Z , $V = g^{-1}(W)$ y $U = f^{-1}(V)$, entonces $h^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) = U$. Ahora, como h es continua, U es abierto y ya que f es una identificación, V es abierto en Y , por lo cual g es continua.

□

Obsérvese que si $f : X \rightarrow Y$ es suprayectiva y se tiene una topología en X , entonces Y hereda de manera natural una topología que hace que f sea una identificación, es decir un conjunto $V \subset Y$ es abierto, si sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X .

Ahora se verá la proyección natural. Dado X un espacio topológico y $\bigcup_{i \in I} X_i$ una partición de X . Sea Q el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos X_i , $i \in I$, por lo que la cardinalidad de Q es la misma que la de I . A la función $p : X \rightarrow Q$ que a cada $x \in X$ le asocia el subconjunto al que pertenece se le llama la proyección natural. Si a Q se le da la topología de identificación a Q se le llama espacio cociente de X .

1.2. Transformaciones de Möbius

En esta sección se presentan los conceptos básicos de la proyección estereográfica, de métrica cordal y de la clasificación de las transformaciones de Möbius. Es útil incluir el infinito en el estudio de las transformaciones de Möbius.

Definición 8 *El plano complejo extendido es el plano complejo junto con el infinito, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Si se toma la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ llamada la esfera de Riemann y se proyecta desde el polo norte, se obtiene una biyección con $\widehat{\mathbb{C}}$, dada por

$$\psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad \psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & \text{si } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{si } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1). \end{cases}$$

La función inversa esa dada por

$$\pi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \pi(z) = \begin{cases} \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), & \text{si } z \neq \infty \\ (0, 0, 1), & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

[cf. [2], p. 2]. A esta biyección se le llama proyección estereográfica. De esta manera se obtiene una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$ llamada cordal, definida por $d(z_1, z_2) = |\pi(z_1) - \pi(z_2)|$. Un cálculo muestra que

$$d_C(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{(1 + |z_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |z_2|^2)^{\frac{1}{2}}}, & \text{si } z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{2}{(1 + |z_1|^2)^{\frac{1}{2}}}, & \text{si } z_2 = \infty. \end{cases}$$

[cf. [1], p. 22]. Resulta que la métrica cordal define los mismos abiertos en \mathbb{C} que la métrica euclidiana.

Las transformaciones de Möbius están definidas por:

$$z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$. Estas transformaciones de Möbius están definidas en el plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ de la siguiente forma:

- a) Si $c = 0$, se define $T(\infty) = \infty$,
- b) Si $c \neq 0$, se define $T(\infty) = \frac{a}{c}$ y $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$.

Usando la métrica cordal se tiene que las transformaciones de Möbius son continuas en $\widehat{\mathbb{C}}$ [cf. [1], p. 22]. Estas transformaciones de Möbius pueden definirse también por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde las entradas son números complejos y el determinante es 1. A este grupo de matrices se la denota por $SL(2, \mathbb{C})$.

El grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ se define como el cociente de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre su centro $\pm Id$. Usando el primer teorema de isomorfismo de grupos, se le puede identificar con el grupo de transformaciones de Möbius complejas. Se puede clasificar a las transformaciones de Möbius por sus puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Definición 9 Sea T una transformación de Möbius que fija exactamente un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces a T se le llama parabólica.

Es fácil probar que si una transformación de Möbius fija exactamente dos puntos, entonces es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a una transformación de la forma $z \rightarrow \alpha z$, con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Definición 10 Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que fija exactamente dos puntos. Supóngase que T también es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a la transformación $S(z) = \alpha z$, entonces

- a) Si $|\alpha| = 1$, a T se le llama *elíptica*.
- b) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a T se le llama *hiperbólica*.
- c) Si $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \notin \mathbb{R}^+$, a T se le llama *loxodrómica*.

1.3. Acción discontinua

Primero se definirá el concepto de acción de grupo en un conjunto.

Definición 11 Sea G un grupo y X un conjunto. Una acción de G en X es una función $\phi : G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx$ tal que:

- a) $(I, x) \mapsto x$,
- b) $(g, \phi(h, x)) \mapsto \phi(gh, x)$.

En este trabajo se considerará el caso $X = \widehat{\mathbb{C}}$ y $G = PSL(2, \mathbb{C})$ y la acción está dada por $(g, z) \rightarrow g(z)$.

Definición 12 Sea G un grupo que actúa en un conjunto X y $x \in X$. Se define el estabilizador de x como el subgrupo de G

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

y a la órbita de x como

$$G(x) = \{g(x) \in X \mid g \in G\}.$$

Definición 13 Un subgrupo $G < SL(2, \mathbb{C})$ es discreto si dada cualquier sucesión de matrices $\{A_n\} \subset G$ tal que $A_n \rightarrow A$, existe $n_0 > 0$ tal que $A_n = A$ para toda $n \geq n_0$.

Intuitivamente esto significa que si pensamos en las matrices \mathbb{C}^4 , estos puntos no se acumulan. En este trabajo solamente se trabajará con grupos discretos.

Definición 14 *Un subgrupo $G < PSL(2, \mathbb{C})$ de transformaciones de Möbius es discreto si el correspondiente grupo de matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ lo es.*

Para iniciar la discusión de discontinuidad se necesita la siguiente definición.

Definición 15 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$. Se define el conjunto de puntos límites de G , como el conjunto de los puntos $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ tales que existe $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y transformaciones distintas $g_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$ tales que $g_n(z) \rightarrow w$. A este conjunto lo denotaremos por $\Lambda(G)$ o simplemente por Λ .*

La cardinalidad de los puntos límites separa a los grupos de transformaciones de Möbius en dos categorías.

Definición 16 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$. Se dice que G es elemental si $\Lambda(G)$ consiste de a lo más dos puntos y es no elemental en el caso contrario.*

Resulta que si G es no elemental $\Lambda(G)$ es perfecto, esto es que $\Lambda(G)$ es cerrado y sin puntos aislados. Todo conjunto perfecto no vacío es no numerable, por lo tanto $\Lambda(G)$ es no numerable [cf. [1], p. 97]. La definición de puntos límites en el caso no elemental se puede definir de otra manera: Si $G < PSL(2, \mathbb{C})$ es no elemental y Λ_0 es el conjunto de puntos fijos de las transformaciones loxodrómicas o hiperbólicas de G , la cerradura de Λ_0 es precisamente el conjunto límite de G , $\Lambda(G)$ [cf. [1], pp. 96, 97].

Definición 17 *El complemento de Λ , denotado por Ω se le llama el conjunto ordinario de G .*

Se definirá el concepto de discontinuidad.

Definición 18 *Sea X un espacio métrico y G un grupo de homeomorfismos de X en X . Se dice que G actúa discontinuamente en X si dado cualquier conjunto compacto $K \subset X$, se tiene que $g(K) \cap K \neq \emptyset$ para solamente un número finito de elementos de G .*

Resulta que el conjunto donde un grupo discreto actúa de manera menos caótica es precisamente Ω .

A continuación se mencionarán algunos resultados que se usarán en el presente trabajo, las demostraciones se pueden consultar en [1] o con mayor detalle consultar [9]. Un primer resultado muestra consecuencias casi inmediatas.

Proposición 1.3.1 *Sea X en espacio métrico y G un grupo que actúa discontinuamente en X , entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- i) *Si $\varphi : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces $\varphi G \varphi^{-1}$ actúa de forma discontinua en Y .*
- ii) *Si $x \in X$ y g_1, g_2, \dots es una colección de elementos distintos de G , entonces la sucesión $g_1(x), g_2(x), \dots$ no puede converger a ninguna $y \in X$.*
- iii) *Si $x \in X$, entonces el estabilizador G_x es finito.*

Cierto comportamiento de la acción de una transformación de Möbius en discos detecta la existencia de puntos límites.

La conjugación se comporta bien en los puntos límites.

Lema 1.3.2 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$ y $h \in PSL(2, \mathbb{C})$, entonces*

$$\Lambda(hGh^{-1}) = h(\Lambda(G)).$$

Existe otra variación importante del conjunto límite.

Definición 19 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$ y $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Se define $\Lambda_G(z)$ (o $\Lambda(z)$) como el conjunto de los puntos $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ con la propiedad de que existen una colección de transformaciones distintas $g_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $g_n(z) \rightarrow w$.*

Resulta que si G es no elemental, entonces para toda $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ se tiene que $\Lambda = \Lambda(z)$ [cf. [1], p. 98].

A continuación se mostrará la clasificación de los grupos elementales. Los del tipo 1 consisten de transformaciones elípticas y son finitos. Estos son conjugados a los grupos platónicos, es decir las isometrías del tetraedro, del cubo, del dodecaedro, etcétera. Los del tipo 2 son aquéllos que contienen

órbitas en $\widehat{\mathbb{C}}$ que consisten de un solo punto. Por último, los de tipo 3 son aquéllos cuyas órbitas en $\widehat{\mathbb{C}}$ consisten de dos puntos.

Mostramos una breve descripción de los grupos elementales de tipo 2 y 3. Los grupos de tipo 2 son de dos subtipos, dependiendo si consisten de transformaciones parabólicas y posiblemente elípticas o de grupos sin transformaciones parabólicas. En el primer caso, al conjugarse se puede suponer que la órbita que consiste de un solo punto es la del punto al infinito y el grupo es de la forma

$$z \mapsto \omega^k z + nA + mB,$$

donde $k, m, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq q$, $q \neq 5$ y $q \leq 6$, A y B son vectores linealmente independientes o $B = 0$.

En el caso de los grupos de tipo 2, al conjugarse se puede suponer que todos los elementos del grupo fijan a 0 e ∞ por lo que las transformaciones son loxodrómicas o hiperbólicas y posiblemente elípticas. En este caso, las órbitas que consisten de un solo punto son la del cero y la del infinito, y las transformaciones del grupo son de la forma

$$z \mapsto \omega^k \alpha^n z,$$

donde $\alpha, \omega \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \neq 1, 0$, $k, n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k < q$.

Finalmente en los grupos de tipo 3, al conjugarse se puede suponer que la órbita que consiste de dos puntos consta del cero y del infinito y las transformaciones son entonces de la forma

$$z \mapsto \omega^k \alpha^n / z,$$

donde $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < q$. [cf. [1], p. 89]

Supongamos que $G < PSL(2, \mathbb{C})$ actúa discontinuamente en un dominio D y $\infty \notin D$, entonces G actúa discontinuamente en D , en la métrica cordal, si y sólo si G actúa discontinuamente en D con la métrica euclidiana, ya que K es compacto en \mathbb{C} si y sólo si su proyección en la esfera de Riemann \mathbb{S}^2 ($\widehat{\mathbb{C}}$) lo es. Por otra parte si $\infty \in D$ usando la proposición 1.3.1 se puede conjugarse y el grupo conjugado actúa discontinuamente en un dominio que no contiene al ∞ y se puede usar la métrica euclidiana.

Teorema 1.3.3 Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$, si $\Omega \neq \emptyset$, entonces Ω es el dominio máximo de discontinuidad de G , es decir

i) G actúa discontinuamente en Ω .

ii) Si G actúa discontinuamente en un abierto $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, entonces $D \subset \Omega$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración para el caso no elemental se puede consultar en [1] o con mayor detalle consultar [9]. Probaremos aquí el resultado para el caso elemental, consideramos cuatro casos:

i) Si G es de tipo 1. Como el grupo es finito, entonces evidentemente $\Omega = \widehat{\mathbb{C}}$.

ii) Si G es de tipo 2 con elementos parabólicos, usando la proposición 1.3.1 podemos suponer que el grupo es de la forma $z \mapsto \omega^k z + nA + mB$, con $k, m, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < q$, $q \neq 5$ y $q \leq 6$, donde A y B son dos traslaciones linealmente independientes o $B = 0$.

Se afirma que dada $r > 0$ existe una $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $|n||m| \geq N_0$, entonces

$$|nA + mB| > r.$$

Se mostrará que la afirmación implica el teorema. Dado un compacto K , se puede tomar un disco $D = \{ |z| < r \mid z \in \mathbb{C} \}$ tal que $K \subset D$ y basta probar que $g(D) \cap D \neq \emptyset$ para un número finito de transformaciones.

Ahora para toda $z \in D$, $-|z| > -r$ y usando la afirmación

$$|nA + mB| > 2r,$$

si $|n||m| \geq N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$, por lo que

$$|z + mA + nB| \geq |nA + mB| - |z| > 2r - r = r$$

lo cual muestra que $g(D) \cap D \neq \emptyset$, para solamente un número finito de traslaciones. En el caso de que el grupo tenga también elípticas, como éstas son un número finito de rotaciones, se obtiene que $g(D) \cap D \neq \emptyset$, solamente para un número finito de transformaciones en G y G actúa discontinuamente en el plano complejo.

Ahora mostramos la afirmación. Sin pérdida de generalidad, los vectores A y B forman entre si un ángulo agudo, entonces

$$|nA + mB|^2 > r^2$$

si solo si

$$n^2|A|^2 + 2nm \cos \theta |A||B| + m^2|B|^2 > r^2,$$

si n y m son del mismo signo, esto se cumple para

$$m^2|B|^2 > r^2, \text{ i.e. } m > \frac{r}{|B|} \text{ o si } n > \frac{r}{|A|}.$$

Si n , m son de signo opuesto, tomando $\cos \theta < 1 - \varepsilon$, se tiene que

$$\begin{aligned} & n^2|A|^2 + 2nm \cos \theta |A||B| + m^2|B|^2 \\ & > n^2|A|^2 + 2nm|A||B|(1 - \varepsilon) + m^2|B|^2 > r^2 \end{aligned}$$

si sólo si

$$n^2x + 2(1 - \varepsilon)nm + \frac{m^2}{x} > \frac{r^2}{|A||B|},$$

donde $x = \frac{|A|}{|B|}$. Esta última desigualdad es

$$(n\sqrt{x} - \frac{m}{\sqrt{x}})^2 - 2\varepsilon nm > \frac{r^2}{|A||B|},$$

tomando a $|n||m| > N_0$ suficientemente grande tenemos que

$$-nm > \frac{r^2}{2\varepsilon|A||B|}.$$

lo cual prueba la afirmación.

Otra manera de probar la afirmación es observar que los vectores A y B generan un paralelogramo que podemos llamar $R_{0,0}$ y al trasladarlo obtenemos paralelogramos $R_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Es evidente que estos paralelogramos cubren \mathbb{C} . Tomando un punto $z_{n,m}$ en el interior de cada paralelogramo $R_{n,m}$, se sigue que solamente un número finito de paralelogramos cubre $\overline{B(0, r)}$, ya que se sigue del teorema de Weierstrass. [cf. [3], p. 40]

iii) Si G es de tipo 2 con elementos loxodrómicos o hiperbólicos y posiblemente elípticos. Usando la Proposición 1.3.1 podemos suponer que el grupo es de la forma

$$z \mapsto \omega^k \alpha^n z,$$

donde $\alpha, \omega \in \mathbb{C}$, $|\alpha| > 1$, $0, k, n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k < q$ [cf. [4], p. 89]. Dado K compacto en $\mathbb{C} - \{0\}$ existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que el anillo $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$ contiene a K como subconjunto, si $T(z) = \alpha z$, $z \in A$, $M \in \mathbb{R}^+$ y $r_2 < M$, se tiene que $|T^n(z)| = |\alpha^n z| > |\alpha^n r_1| > M$,

como $|\alpha^n| \rightarrow \infty$, existe N_0 tal que si $n > N_0$, se cumple $|\alpha^n| > \frac{M}{r_1}$ y $T^n(K) \cap K = \emptyset$, si $n > N_0$.

Aplicando ahora las interacciones de T^{-1} y tomando $0 < \varepsilon < r_1$, se tiene que

$$|T^{-n}(z)| = |\alpha^{-n}z| < |\alpha^{-n}r_2| < \varepsilon,$$

como $|\alpha^{-n}| \rightarrow 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $-n < -N_0$, se tiene

$$|\alpha^{-n}| < \frac{\varepsilon}{r_2},$$

etcétera. Finalmente como el grupo solo puede tener un número finito de transformaciones elípticas, se sigue que $g(A) \cap A \neq \emptyset$ (y también se sigue que $g(K) \cap K \neq \emptyset$) para un número finito de transformaciones. Por lo tanto el dominio de discontinuidad Ω es $\mathbb{C} - \{0\}$.

iv) Si G es de tipo 3, el grupo tiene transformaciones loxodrómicas o hiperbólicas y posiblemente elípticas. Usando la proposición 1.3.1, se puede suponer conjugando que el grupo es de la forma

$$z \mapsto \omega^k \alpha^n / z,$$

donde $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < q$. [cf.[B] p. 89]. Dado un compacto $K \in \mathbb{C} - \{0\}$ existe un anillo $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < \frac{1}{r} \right\}$, tal que A contiene al compacto.

De manera análoga al caso anterior se sigue que solamente para un número finito de transformaciones se tiene que $g(A) \cap A \neq \emptyset$.

□

Obsérvese que si G actúa discontinuamente en $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces $\Lambda(G) = \emptyset$ y G sería necesariamente discreto y elemental de tipo 1, es decir finito, y la condición $g(\widehat{\mathbb{C}}) = \widehat{\mathbb{C}}$ se cumple solamente para un número finito de transformaciones, lo cual muestra la consistencia de la definición de acción discontinua cuando se usa la métrica cordal, ya que $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto y para todo grupo $G < PSL(2, \mathbb{C})$, si $g \in G$ $g(\widehat{\mathbb{C}}) = \widehat{\mathbb{C}}$.

Usando la Proposición 1.3.1 inciso ii) se sigue de la demostración anterior que los grupos elementales tienen uno (o dos puntos) límite, ya que $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} - \{\alpha\}$ (o $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} - \{\alpha, \beta\}$), donde α es el punto fijo parabólico (o α, β son los puntos fijos de las transformaciones loxodrómicas o hiperbólicas) y evidentemente α (o α y β son los puntos límites). También se tiene que los que son de tipo 3 tienen dos puntos límites, ya que $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} - \{\alpha, \beta\}$.

Obsérvese que la prueba del Teorema 1.3.3 inciso iii) implica que si K es un compacto en $\widehat{\mathbb{C}} - \{\alpha, \beta\}$ y T es el generador loxodrómico o hiperbólico de G con puntos fijos α y β , entonces $T^n(z)$ converge uniformemente a α en K , donde α es el atractor, cuando $n \rightarrow \infty$. Se tiene un resultado análogo para los grupos de tipo 3.

Teorema 1.3.4 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$ y suponga que $\Omega \neq \emptyset$; si $z \in \Omega$, entonces el estabilizador G_z es cíclico finito.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior G actúa discontinuamente en Ω y por el inciso iii) de la proposición 1.3.1, se tiene que G_z es finito y por lo tanto G_z consiste de transformaciones elípticas. Conjugando se puede suponer que G_z es un grupo de rotaciones. Se afirma que G contiene una rotación de ángulo mínimo, de otra manera existe $h_n(z) = e^{i\alpha_n}$ tal que si $n \rightarrow \infty$ y $h_n(z) \rightarrow Id$, entonces el grupo no sería discreto. Ahora supongamos que $g(z) = e^{i\gamma}z$ es una rotación de ángulo menor, entonces si $h(z) = e^{i\alpha}z$ es otra rotación en G_z , si $n\alpha < \gamma < (n+1)\alpha$, aplicando $h^{-n}(z) = e^{i(-n\alpha)}z$, entonces $h^{-n}g(z) = e^{i(\gamma-n\alpha)}z$ sería una rotación de ángulo más pequeño, ya que $0 < \gamma - n\alpha < \alpha$, por lo tanto G_z es cíclico. \square

Para la demostración del siguiente teorema se necesita el siguiente lema, el cual se puede consultar en el capítulo 4 del [cf. [1], p. 68].

Lema 1.3.5 *Sean $h, g \in PSL(2, \mathbb{C})$ tales que tienen un punto fijo α en común $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ pero que no fijan a los mismos puntos, entonces el conmutador es parabólico con punto fijo α .*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad $\alpha = \infty$, es decir $h(z) = az + b$ y $g(z) = \alpha z + \beta$. Calculamos el conmutador

$$\begin{aligned} g^{-1}h^{-1}gh(z) &= g^{-1}h^{-1}(\alpha(az + b) + \beta) \\ &= g^{-1}\left(\frac{\alpha(az + b) + \beta - b}{a}\right) \\ &= z + k, \end{aligned}$$

donde k es constante, es decir el conmutador es una traslación. \square

Teorema 1.3.6 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$ discreto, tal que $\Omega \neq \emptyset$, entonces para toda $z \in \Omega$ existe una vecindad abierta $N \subset \Omega$ tal que*

$$\begin{aligned} g(N) = N & \quad \text{si } g(z) = z, \\ g(N) \cap N = \emptyset & \quad \text{si } g(z) \neq z. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Primero se probará el caso $z=0$. Como $0 \in \Omega$ se sigue del lema 1.3.5 y del teorema 1.3.4 que el subgrupo estabilizador G_0 es cíclico finito y sin pérdida de generalidad, conjugando se puede suponer que el segundo punto fijo es ∞ , es decir que G_0 es un grupo de rotaciones.

Sea B el disco abierto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\}$, tal que $\bar{B} \subset \Omega$. Como G actúa discontinuamente en Ω , tenemos que $g(\bar{B}) \cap \bar{B} \neq \emptyset$ para un número finito de transformaciones $g \in G - G_0$, llamemos a estas transformaciones g_1, g_2, \dots, g_n . Sea $r = \min \{ |g_k(0)| > 0 \mid 1 \leq k \leq n \}$ y D el disco $\{z \mid |z| < \frac{r}{2}\}$. Para cada una de las g_k por continuidad podemos tomar un disco abierto N_k con centro en 0 tal que $g_k(N_k) \cap D = \emptyset$ y $N_k \subset D$. Finalmente tomando el disco abierto

$$N = \bigcap_{k=1}^n N_k.$$

Se sigue que si $|g(0)| > 0$, entonces $g(N) \cap N = \emptyset$ y si $g(0) = 0$, entonces $g(N) = N$.

Se demostrará el caso general. Sea $z \in \Omega(G)$, el subgrupo G_z fija a z y a otro punto $w \in \hat{\mathbb{C}}$. Sea $\varphi(u) = \frac{u-z}{u-w}$ y $G' = \varphi G \varphi^{-1}$, por el lema 1.3.2 de invariabilidad bajo conjugación se tiene que $\Omega(G') = \varphi(\Omega(G))$. Además se tiene que $\varphi G_z \varphi^{-1} = G'_{\varphi(z)}$.

Aplicando el primer caso al grupo G' existe una vecindad

$$N' \subset \Omega(G') = \varphi(\Omega(G))$$

de $\varphi(z) = 0$, tal que

$$\begin{aligned} \varphi g \varphi^{-1}(N) & = N, & \text{si } \varphi g \varphi^{-1}(0) & = 0; \\ \varphi g \varphi^{-1}(N) \cap N & = \emptyset, & \text{si } \varphi g(z) & \neq 0. \end{aligned}$$

$$\varphi g \varphi^{-1}(N) = N, \text{ si } \varphi g \varphi^{-1}(0) = 0$$

y

$$\varphi g \varphi^{-1}(N) \cap N = \emptyset, \text{ si } \varphi g(z) \neq 0.$$

Finalmente $\varphi^{-1}(N') = N$ es una vecindad abierta de z y se sigue fácilmente que

$$\text{si } g(z) = z, \text{ entonces } g(N) = N,$$

$$\text{si } g(z) \neq z, \text{ entonces } g(N) \cap N = \emptyset.$$

□

Las vecindades descritas en el teorema anterior se les llama estables, estos conjuntos se discutirán posteriormente.

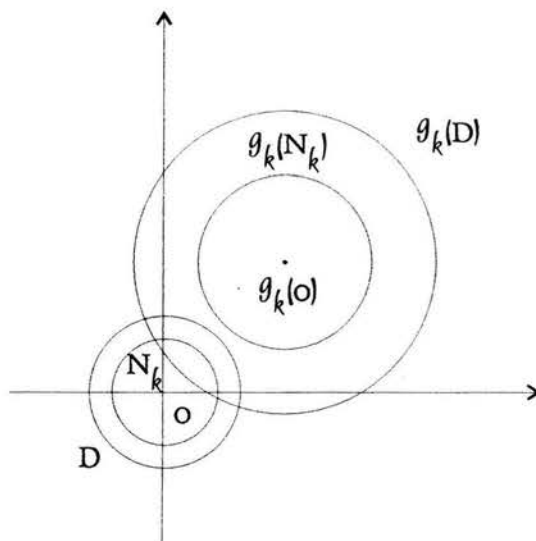


Figura 1.2: Vecindades estables.

1.4. Métrica hiperbólica

Introducimos algunos conceptos básicos de las métricas hiperbólicas en el disco

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

y en el semiplano superior

$$H^2 = \{x + iy \mid 0 < \text{Im } z\}.$$

Definición 20 Sea A una región en \mathbb{R}^n . Una densidad en A es una función continua $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Definición 21 Sea λ una densidad en $A \subset \mathbb{R}^n$ y γ una curva de clase C^1 en A , se define la λ -longitud de γ como

$$l_\lambda(\gamma) = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Se extiende esta definición de manera natural a curvas de clase C^1 por tramos.

Definición 22 Sea λ una densidad en A , se define la λ -distancia de z_1 a z_2 puntos en A , como

$$\rho_\lambda(z_1, z_2) = \inf_\gamma l_\lambda(\gamma),$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas γ de clase C^1 por tramos que unen z_1 con z_2 .

Resulta que esta distancia define una métrica en A [cf. [1], p. 7]. Usando densidades se pueden definir dos modelos del plano hiperbólico: el disco $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ con densidad

$$\sigma(w) = \frac{2}{1 - |w|^2}$$

y el semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{x + iy \mid 0 < \text{Im } z\}$ con densidad

$$\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im } z}.$$

Estos dos modelos son isométricos. Para mostrar esto se necesita primero una definición.

Definición 23 Sea A abierto en \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable. Se dice que f es conforme en $x_0 \in A$, si $Df(x_0)$ es el producto de una matriz ortogonal por una matriz escalar kI , $k \in \mathbb{R}^+$. Al número k se le llama factor de conformalidad y se denota por $\mu_f(x_0)$.

Obsérvese que dadas A y B regiones en \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow B$ una biyección conforme y una densidad $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, se puede definir otra densidad σ en B , de tal manera que f sea una isometría. Esto se obtiene definiendo en B la densidad

$$\sigma(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu_f(x)}.$$

Se sigue que f es una isometría, ya que si $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ es una curva de clase C^1

$$l_\sigma(f(\gamma)) = \int_a^b |(f \circ \gamma)'(t)| \sigma(f(\gamma(t))) dt = \int_a^b \mu_f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \frac{\lambda(\gamma(t))}{\mu_f(\gamma(t))} dt = l_\lambda(\gamma).$$

Como toda curva en B es de esta forma, se sigue la afirmación. De esta observación se sigue que la función

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

es una isometría de \mathbb{H}^2 en Δ [cf. [1]. p. 41]

Al disco unitario Δ con métrica hiperbólica se le llama el disco de Poincaré. Usando esta métrica se puede definir también el área.

Definición 24 Sea A una región en Δ , entonces el área hiperbólica de A está dada por

$$h - \text{área}(A) = \int \int_A \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dx dy.$$

En algunos casos es necesario usar la integral de Lebesgue.

Capítulo 2

Superficies de Riemann

2.1. Nociones básicas

De manera intuitiva una superficie de Riemann es un espacio que localmente es como el plano complejo.

Definición 25 Una superficie de Riemann es un espacio topológico conexo de Hausdorff M , tal que existe una familia $\{(\phi_j, U_j) \mid j \in J\}$ que cumple las siguientes condiciones:

- a) $\{U_j \mid j \in J\}$ es una cubierta abierta de M .
- b) Cada ϕ_j es un homeomorfismo de U_j en un subconjunto abierto del plano complejo.
- c) Si $U = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $\phi_i \phi_j^{-1} : \phi_j(U) \rightarrow \phi_i(U)$ es una transformación analítica.

Obsérvese que en el inciso c) la función $\phi_i \phi_j^{-1}$ no sólo es analítica sino que también es conforme, ya que la inversa $\phi_j \phi_i^{-1}$ es analítica. A las parejas $\{(\phi_j, U_j) \mid j \in J\}$ se les llama cartas coordenadas y a la familia de éstas se le llama atlas.

Definimos ahora el concepto de analiticidad entre superficies de Riemann.

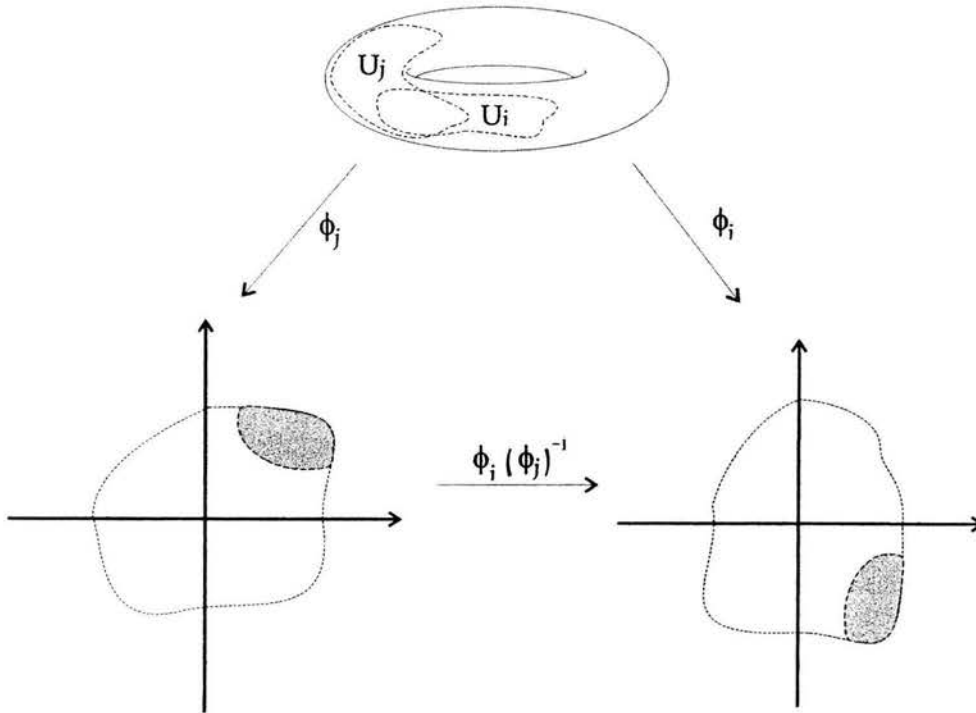


Figura 2.1: Funciones de transición.

Definición 26 Sean M y N superficies de Riemann y $f : M \rightarrow N$ una transformación continua, supóngase también que M tiene un atlas $\{(\phi_j, U_j) \mid j \in J\}$ y que $\{(\psi_k, V_k) \mid k \in K\}$ es el atlas de N , se dice que f es analítica, si cada transformación

$$\psi_k f \phi_j^{-1} : \phi_j(U_j \cap f^{-1}(V_k)) \rightarrow \mathbb{C}$$

es analítica, donde $U_j \cap f^{-1}(V_k) \neq \emptyset$.

Usando el inciso c) de la definición 25 para checar la analiticidad de f , basta hacerlo para subatlas de M y de N que cubran ambas superficies respectivamente. Esto se sigue ya que dada $x \in U_j$, tal que $f(x) \in V_k$, se puede tomar una vecindad U de x , tal que $U \subset U_j \cap U_l$, donde (ϕ_l, U_l) está en el subatlas de M , (ψ_i, V_i) está en el subatlas de N y $U \subset f^{-1}(V_k \cap V_i)$. De esta manera como

$$\psi_k \psi_i^{-1} \psi_i f \phi_l^{-1} \phi_l \phi_j^{-1} = \psi_k f \phi_j^{-1},$$

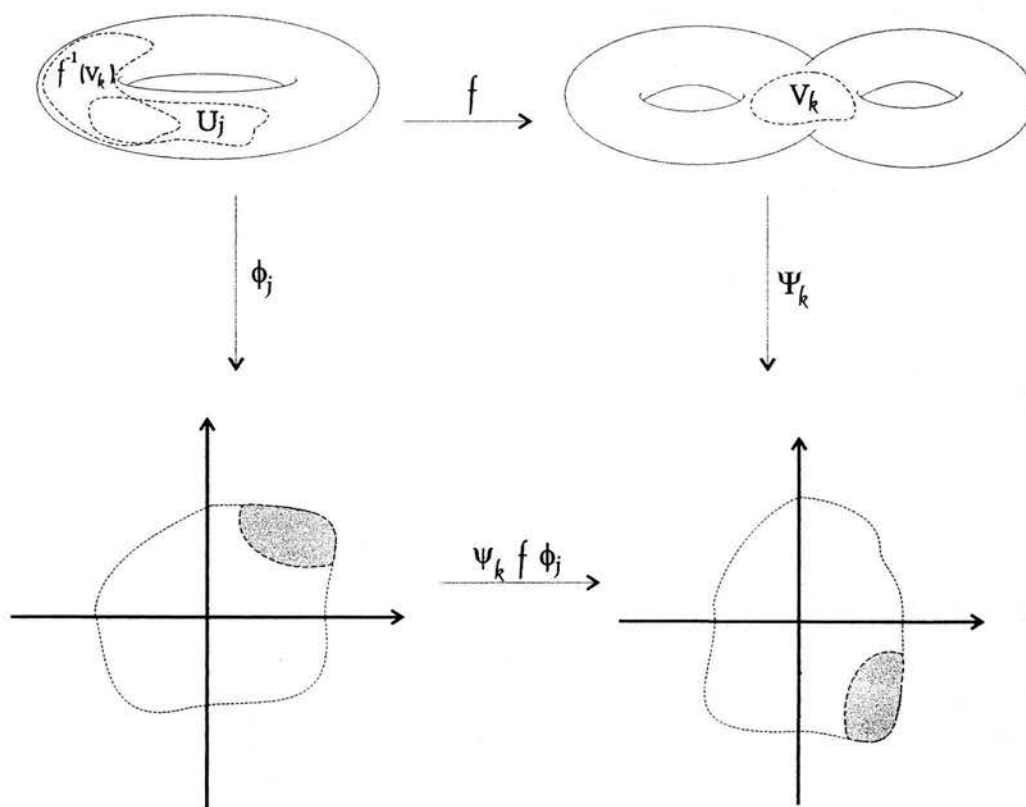


Figura 2.2: Funciones analíticas entre superficies de Riemann.

se sigue que f es analítica en una vecindad de x , al ser composición de funciones analíticas.

Definición 27 Sean γ y σ dos curvas en una superficie de Riemann M tal que se intersectan en $x \in M$, se dice que estas curvas forman un ángulo $\theta \in M$, si dada una carta coordenada (ϕ_j, U_j) , tal que $x \in U_j$, se tiene $\phi_j(\gamma \cap U_j)$ y $\phi_j(\sigma \cap U_j)$ se intersectan en un ángulo θ en $\phi_j(U_j)$.

Para mostrar que la definición no depende de la carta coordenada, sea (ϕ_i, U_i) otra carta coordenada tal que $U_i \cap U_j = U \neq \emptyset$ y $x \in U$, donde x es la intersección de las dos curvas en la superficie de Riemann, ahora como $\phi_i \phi_j^{-1}$ es conforme se tiene que $\phi_i \phi_j^{-1}(\phi_j(\gamma \cap U))$ y $\phi_i \phi_j^{-1}(\phi_j(\sigma \cap U))$

se intersectan formando un ángulo θ en $\phi_i(x)$. Por lo que la definición no depende de la carta coordenada.

Mostraremos ahora un ejemplo de una superficie de Riemann. Sea $M = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con atlas dado por las cartas coordenadas (ϕ_1, U_1) y (ϕ_2, U_2) , donde

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{C}, \\ \phi_1(z) &= z \end{aligned}$$

y

$$U_2 = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\},$$

$$\phi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{si } z \neq \infty; \\ 0, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Ahora si $z \in U_1 \cap U_2$, entonces

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \phi_2(z) = \frac{1}{z}$$

que es analítica en $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} - \{0\}$. Análogamente

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1}(z) = \phi_1\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z},$$

que también es analítica en $\phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} - \{0\}$.

Obsérvese que una superficie de Riemann es conexa por trayectorias. Esto se sigue ya que un espacio topológico, que es conexo y localmente conexo por trayectorias, es necesariamente conexo por trayectorias [cf. [12], p. 89]. Este último hecho es consecuencia de que las componentes por trayectorias son abiertas.

Si M es una superficie de Riemann y $w_j \in M$, $j = 1, 2, \dots, n$ tal que $n < \infty$ entonces $M - \{w_1, \dots, w_n\}$ es también una superficie de Riemann. Para probar esto basta con mostrar que $M - \{w_1\}$ es también una superficie de Riemann. Evidentemente $M - \{w_1\}$ es también conexa por trayectorias. Ahora si $w_1 \in U_j \cap U_i$ es claro que $\phi : U_j - \{w_1\} \rightarrow \mathbb{C}$ es un homeomorfismo en un abierto $\phi_j(U_j) - \phi_j(w_1)$ y también la función $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ es analítica en $\phi_j(U_j \cap U_i - \{w_1\})$. Por lo tanto $M - \{w_1\}$ es una superficie de Riemann.

Proposición 2.1.1 *Sea $f : M \rightarrow N$ una transformación analítica no constante entre dos superficies de Riemann M y N entonces f es abierta, es decir que transforma subconjuntos abiertos de M en subconjuntos abiertos en N .*

DEMOSTRACIÓN. Se afirma que f no es localmente constante. Suponiendo cierta la afirmación, sea U un abierto de M , se puede suponer que $U = \bigcup_{j,k} (U_j \cap f^{-1} \cap U)$ donde (ϕ_j, U_j) y (ψ_k, V_k) son cartas coordenadas de M y de N respectivamente. Si denotamos a los conjuntos abiertos $(U_j \cap f^{-1} \cap U)$ por $W_{j,k}$ y como ϕ_j es un homeomorfismo se tiene que $\phi_j(W_{j,k})$ también es abierto. Ahora, como las funciones analíticas no constantes son abiertas [cf. [4], p. 419] se sigue que la función $\psi_k f \phi_j^{-1}(\phi_j(W_{j,k}))$ es abierta. También es abierta $\psi_k f \phi_j^{-1}(\phi_j(W_{j,k})) = f(W_{j,k})$. Por consiguiente en un conjunto abierto de N , $\bigcup_{j,k} f(W_{j,k}) = f(\bigcup_{j,k} (W_{j,k})) = f(U)$ es abierto. □

Falta probar la afirmación. Si f es constante en un abierto W de M , sea $z \in W$ y $z_0 \in M - W$. Sea γ una trayectoria con abiertos W_1, W_2, \dots, W_m tal que cada uno de ellos es de la forma $U_j \cap f^{-1}(V_k)$ y que $z \in W_1$. Se sigue entonces del principio de continuación analítica (cf. [4], p. 384) que f es constante en $W \cap W_1$ y por lo tanto en W_1 . Este principio establece que si f, g son funciones analíticas en una región A y $f(z_n) = g(z_n)$ donde $z_n \rightarrow \alpha$ tal que $z_n \in A$ y $\alpha \in A$ entonces $f \equiv g$ en A .

Este principio implica también que f es constante en $W_1 \cap W_2$ y por lo tanto en W_2 ; iterando este proceso se tiene que $f(z) = f(z_0)$ contradiciendo que f no era constante. Por lo tanto f es constante en todo M lo cual es una contradicción ya que f únicamente era constante en un abierto W de M . Por lo que la afirmación es cierta, es decir que f no es localmente constante.

Proposición 2.1.2 *Sea $f : M \rightarrow N$ una transformación analítica no constante, donde M y N son superficies de Riemann, si M compacta entonces f es sobre.*

DEMOSTRACIÓN. Como M es un conjunto compacto y f es continua, entonces $f(M)$ es compacto y por lo tanto también es cerrado. Por otra parte, por la proposición 2.1.1. f es abierta, por lo cual $f(M)$ es un conjunto abierto. Finalmente como N es un conjunto conexo, necesariamente $f(M) = N$. Por lo tanto f es sobre. □

2.2. Superficies de Riemann como cocientes

Podemos ahora enunciar y probar uno de los resultados principales del trabajo, éste establece que el espacio cociente del dominio de discontinuidad es una superficie de Riemann.

Teorema 2.2.1 *Sea D un subdominio de $\widehat{\mathbb{C}}$ y $G < PSL(2, \mathbb{C})$ tal que actúa discontinuamente en D , entonces D/G es una superficie de Riemann, donde D/G es el espacio de identificación obtenido al identificar las órbitas.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos primero que D/G es conexo por trayectorias. Para esto sean $w_1, w_2 \in D/G$, por lo que existen $z_1, z_2 \in D$, tal que $\pi(z_1) = w_1$ y $\pi(z_2) = w_2$. Como D es conexo y es localmente conexo por trayectorias, entonces es conexo por trayectorias, por lo que existe una trayectoria γ tal que une a z_1 con z_2 . Por lo cual $\pi(\gamma)$ es una trayectoria en D/G que une a w_1 con w_2 , ya que π es continua

Resulta que π es una transformación abierta. Para demostrarlo, sea A abierto tal que $A \subset D$, si $g \in G$, se tiene que $g(A)$ es abierto por ser g un homeomorfismo y por consiguiente

$$\bigcup_{g \in G} g(A)$$

es abierto. Por lo cual $\pi(A)$ es abierto, ya que su imagen inversa es el abierto definido en $\bigcup_{g \in G} g(A)$ y π es de identificación.

Probaremos ahora que D/G es Hausdorff, para esto usaremos la métrica cordal. Sean z_1, z_2 dos puntos distintos en D , $0 < r < 1$,

$$K_1 = \{z \mid d_c(z, z_1) \leq r\}, \quad K_2 = \{z \mid d_c(z, z_2) \leq r\}$$

y

$$A_n = \{z \mid d_C(z, z_1) < \frac{r}{n}\}, \quad B_n = \{z \mid d_C(z, z_2) < \frac{r}{n}\}, \quad n \geq 1.$$

Si $\pi(A_n) \cap \pi(B_n) \neq \emptyset$ para toda n , entonces existe $w_n \in A_n$ y $g_n \in G$, tal que $g_n(w_n) \in B_n$. Sea $K = K_1 \cup K_2$, entonces como K es compacto

$$g_n(K) \cap K \neq \emptyset$$

para un número finito de transformaciones g_n ya que G actúa discontinuamente en D , por lo tanto $\{g_1, g_2, \dots\}$ es finito. Por consiguiente existe una

subsucesión g_{n_k} , $k \rightarrow \infty$, donde $g_{n_k} = g$. Obsérvese que $w_{n_k} \rightarrow z_1$ y $g(w_{n_k}) \rightarrow z_2$, ya que $g(w_{n_k}) \in B_{n_k}$. Ahora $g(z_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(w_{n_k}) = z_2$.

Si $\pi(z_1) \neq \pi(z_2)$ esto implica que no existe ninguna transformación $g \in G$, tal que $g(z_1) = z_2$. Por lo tanto existe N tal que si $m > N$ $\pi(A_m) \cap \pi(B_m) = \emptyset$. Por lo tanto como π es abierta, se sigue que D/G es de Hausdorff.

A continuación se hará la construcción del Atlas. Usando el teorema 1.3.6 si $z \in D$, existe un disco abierto N_z , tal que $N_z \subset D$ y

$$g(N_z) = N_z, \quad \text{si } g(z) = z;$$

$$g(N_z) \cap N_z = \emptyset, \quad \text{si } g(z) \neq z.$$

Obsérvese que $N_z - \{z\}$ no contiene puntos fijos de G . Si h fija un punto de N_z , h es necesariamente elíptica. Por la descripción anterior $h(z) = z$, también $h(\delta N_z) = \delta N_z$, por lo que δN_z es un círculo de Apolonio y es claro entonces que el otro punto fijo no está en N_z . [cf. [5], p. 28]

Ahora construimos las transformaciones de transición. Si $w \in D$ es un punto fijo, sea σ una transformación de Möbius tal que $\sigma(w) = 0$ y $\sigma(N_w) = \Delta$, donde Δ es el disco unitario. Si el estabilizador G_w es de orden n , éste es generado por alguna transformación g elíptica y

$$\sigma g \sigma^{-1}(z) = z e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad z \in \Delta.$$

Para cada uno de estos puntos fijos se definen cartas coordenadas como $(\phi_w, \pi_w(N_w))$, donde π_w es la restricción de π a N_w y $\phi_w = q_w \sigma_w (\pi_w)^{-1}$, donde $q(z) : \Delta \rightarrow \Delta$ esta dada por $q(z) = z^n$. Para los puntos w que no son puntos fijos, se definen cartas coordenadas como $(\sigma_w (\pi_w)^{-1}, \pi_w(N_w))$. La figura 2.3 muestra la transformación ϕ_w .

Probamos ahora que $\phi_w = q_w \sigma_w (\pi_w)^{-1}$ es un homeomorfismo. Esto es evidente si w no es un punto fijo elíptico, si w sí lo es checamos primero la biyectividad. Un punto $\pi_w(z) \in \pi_w(N_w)$ bajo π_w^{-1} va a n puntos $g^k(z)$ en N_w y para toda $z \in N_w$ tenemos que

$$q \sigma g^k(z) = [\sigma g^k \sigma^{-1}(\sigma(z))]^n = [\sigma(z) e^{\frac{2\pi i k}{n}}]^n = [\sigma(z)]^n,$$

donde $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ y la composición no depende de la k . Por lo que un punto $\pi_w(z) \in \pi_w(N_w)$ es mandado a un solo punto en el

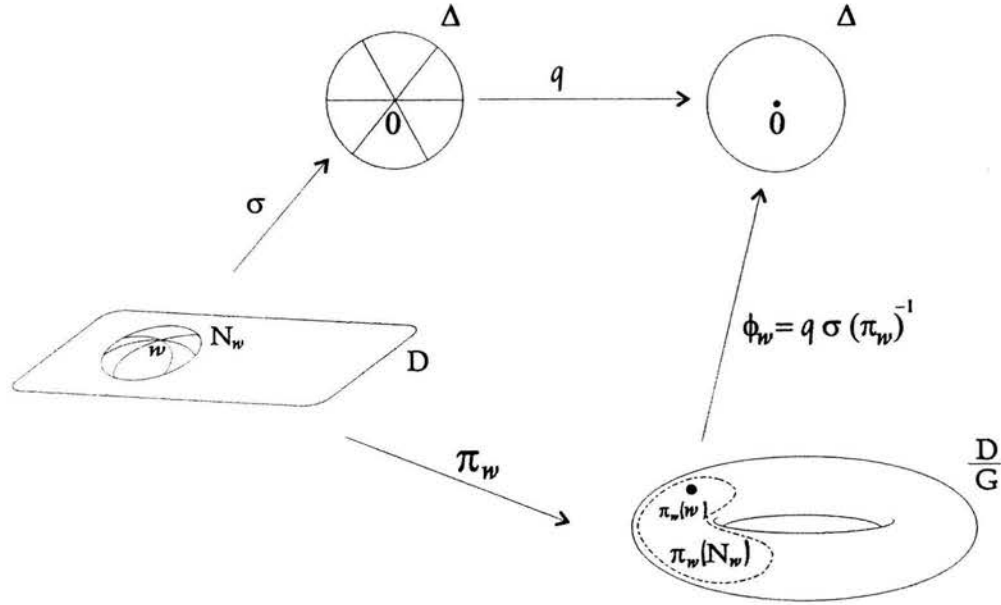


Figura 2.3: La función analítica ϕ_w del atlas.

disco Δ bajo $q_w \sigma_w$. Por lo tanto ϕ_w es la biyección de $\pi_w(N_w)$ en Δ , ya que evidentemente ϕ_w es suprayectiva.

Mostramos que ϕ_w es continua. Tenemos que $\phi_w = q_w \sigma_w (\pi_w)^{-1}$, es decir $\phi_w \pi_w = q_w \sigma_w$ y π_w es de identificación. Se sigue del teorema 1.1.8 que ϕ_w es continua.

Finalmente para mostrar que ϕ_w es un homeomorfismo, basta demostrar que q es abierta, ya que σ lo es y la preimagen de un abierto bajo ϕ_w es abierta ya que ϕ_w es continua. Se checa fácilmente que $q_w(z) = z^n$ es una función abierta o si se quiere, esto se sigue ya que las funciones analíticas son abiertas [cf. [4], p. 419]. Por lo tanto ϕ_w es un homeomorfismo.

Ahora se verá que las funciones de transición

$$\pi_v^{-1} \pi_u, \quad u \neq v$$

son analíticas en $A \subset \Delta$, donde $A = \phi_u(\pi_u(N_u) \cap \pi_v(N_v))$

Supongamos primero que u y v son puntos fijos elípticos G -equivalentes. Sean $\alpha_u \in N_u - \{u\}$, $\alpha_v \in N_v - \{v\}$, tales que $\pi(\alpha_u) = \pi(\alpha_v) = \alpha$, obsérvese que α_u y α_v no son puntos fijos elípticos. Sea $g \in G$ tal que $g(\alpha_u) = \alpha_v$, entonces en una vecindad de α_u coinciden $\pi_v g$ y π_u , es decir

$$\pi_v g = \pi_u.$$

Ya que α_u y α_v no son puntos fijos elípticos, entonces π_v es uno a uno en una vecindad de α_v , por lo que hay una inversa local, tal que $\pi_v^{-1}(\alpha) = \alpha_v$ en una vecindad de α . Aplicando π_v^{-1} se tiene

$$g = \pi_v^{-1}\pi_u$$

en una vecindad de α . Por lo que $\pi_v^{-1}\pi_u$ es analítica en una vecindad de α_u .

Mostramos la analiticidad de $\phi_v\phi_u^{-1}$, $u \neq v$, para los puntos que no son fijos y para $u, v \neq \infty$.

$$\phi_v\phi_u^{-1} = q_v\sigma_v\pi_v^{-1}\pi_u\sigma_u^{-1}q_u^{-1}.$$

La composición es analítica, ya que $\pi_v^{-1}\pi_u$ es analítica, σ_u^{-1} , σ_v son de Möbius y q_v es analítica. Falta mostrar que $q_u^{-1}(z) = z^{1/n}$, $z \in \Delta$, es también analítica. Tomando un semirrayo L en Δ que no contenga al punto $q_u\sigma_u(\alpha_u)$, se define la rama de logaritmo $z \rightarrow e^{\frac{1}{n}\log z}$ de tal manera que esta función sea holomorfa en $\Delta - L$, lo cual muestra que q_u^{-1} es holomorfa para toda $z \in A - \{0\}$, ya que se pueden considerar distintos semirrayos. Esto muestra que la composición es holomorfa en A , ya que la composición $\phi_v\phi_u^{-1}$ es holomorfa en $A \subset \Delta$, salvo quizá en 0, sin embargo como la imagen de esta función está contenida en Δ , se sigue que está acotada y que 0 es una singularidad removible [cf. [4], p. 249]. Por lo tanto $\phi_v\phi_u^{-1}$ es analítica en A . La figura 2.4 ilustra la analiticidad de las funciones de transición.

En el caso de u o v sean ∞ , por ejemplo si $u = \infty$, entonces

$$\phi_v\phi_\infty^{-1} = q_v\sigma_v\pi_v^{-1}\pi_\infty\sigma_\infty^{-1}q_\infty^{-1},$$

esta composición no es analítica en el sentido usual, ya que no podemos decir que $\pi_v^{-1}\pi_\infty$ es analítica, pero es de Möbius y también σ lo es. Por lo tanto

$$\sigma_v\pi_v^{-1}\pi_\infty\sigma_\infty^{-1}$$

es una función de Möbius del disco en el disco, lo que implica que es analítica. Por lo tanto $\phi_v\phi_\infty^{-1}$ lo es.

Si u o v no son puntos fijos elípticos G-equivalentes ($\pi_u(N_u) \cap \pi_v(N_v)$) consisten de puntos no elípticos (es decir sus preimágenes en D no los fija ninguna transformación en D salvo la identidad) y en estos casos los argumentos de arriba muestran que $\pi_v^{-1}\pi_u$ es analítica en A .

□

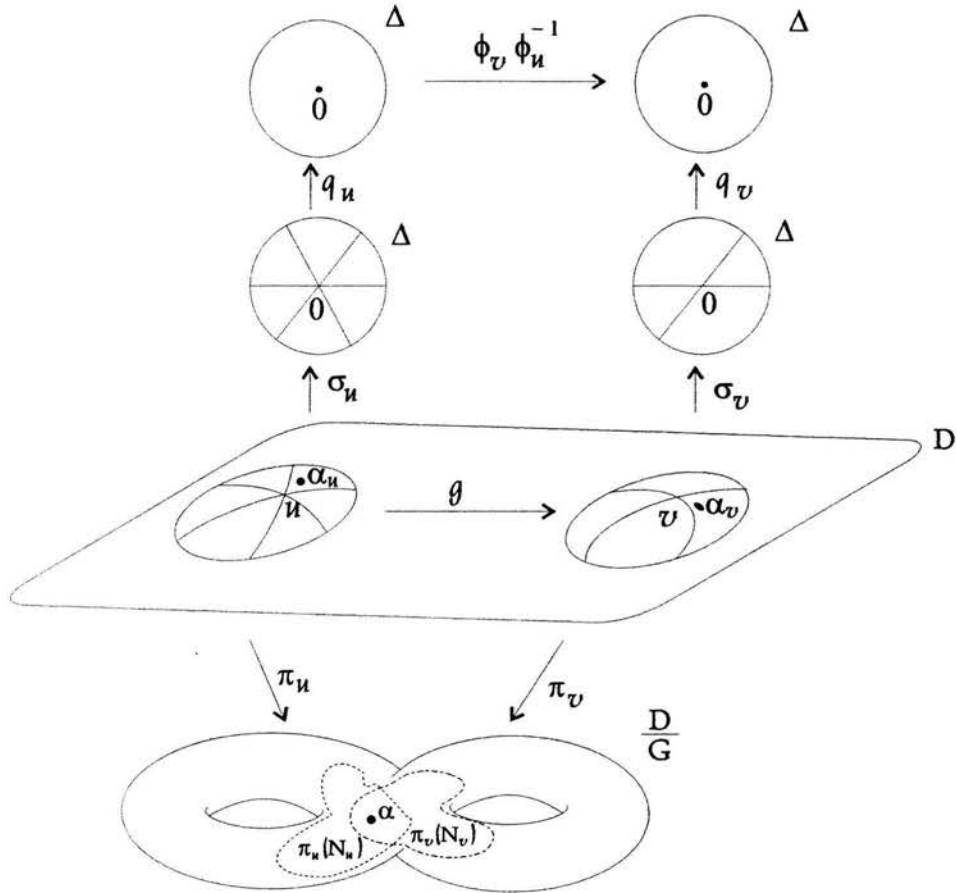


Figura 2.4: La analiticidad en las funciones de transición.

Obsérvese que la función descrita en la prueba anterior $\pi : D \rightarrow D/G$ es analítica, como función entre superficies de Riemann, donde D está provista con la estructura trivial, si $\infty \notin D$ y con la estructura de la esfera si $\infty \in D$ (como en el ejemplo de la sección 2.1). Por lo que si $D \subset \mathbb{C}$, en una vecindad N_w (como en la prueba del teorema de cociente) se tiene que

$$\phi_w \pi = \phi_w \pi_w = q_w \sigma_w (\pi_w)^{-1} \pi_w = q_w \sigma_w$$

es holomorfa. En el caso que $\infty \in D$, sea $f(z) = 1/z$ el homeomorfismo de la carta coordenada, como la analiticidad se checa localmente, basta suponer

que $\infty \in N_w$. Entonces

$$\phi_w \pi f = \phi_w \pi_w f = q_w \sigma_w f$$

es holomorfa, ya que σf es una transformación de Möbius que va del disco en el disco y con esto se muestra la analiticidad de π .

2.3. El grupo de una superficie de Riemann

Hay un resultado recíproco del teorema 2.2.1 del cociente para el cual se requieren ciertos resultados de la topología algebraica y el teorema de uniformización de Riemann que no probaremos en este trabajo, sin embargo describiremos estas ideas. Para enunciar el resultado se necesita primero la siguiente definición de la topología algebraica.

Definición 28 *Sea $p : E \rightarrow X$ una función continua entre dos espacios topológicos, se dice que E es un espacio cubriente de X si para toda $x \in X$ se tiene una vecindad N de x , tal que $p^{-1}(N)$ es la unión disjunta de conjuntos abiertos de E los cuales se proyectan homeomórficamente en N por p .*

El conjunto N de la definición anterior se dice que está parejamente cubierto. Se dice que un espacio cubriente E es la cubierta universal de X , si E es simplemente conexo. No definiremos de manera formal que significa que un espacio topológico sea simplemente conexo. Intuitivamente un espacio es simplemente conexo si toda curva cerrada se puede contraer a un punto.

Necesitamos algunos fundamentos más de la topología algebraica. De manera análoga a como se define una superficie de Riemann, una n -variedad topológica es un espacio Hausdorff, que localmente es homeomorfo a abiertos en \mathbb{R}^n cuyas funciones de transición son continuas. Evidentemente una superficie de Riemann es una dos-variedad topológica.

Teorema 2.3.1 *Sea M una variedad topológica, entonces M tiene una cubierta universal.*

Una demostración se puede consultar en [8] p. 24. Ahora enunciamos el resultado recíproco del teorema 2.2.1.

Teorema 2.3.2 *Dada una superficie de Riemann R se puede construir una superficie de Riemann simplemente conexa \widehat{R} , que es una cubierta universal de R .*

DEMOSTRACIÓN. Como R es una 2-variedad por ser superficie de Riemann, existe una cubierta universal de R que denotaremos por \widehat{R} . Si $\pi : \widehat{R} \rightarrow R$ es la proyección, dado un atlas $\{(\phi_i, U_i) \mid i \in J\}$ en R , mostramos que \widehat{R} tiene una estructura analítica que la hace su erficie de Riemann. Sin pérdida de generalidad, U_i se puede suponer parejamente cubierto. En caso de no estarlo se toman abiertos más pequeños que cubran a U_i que si lo estén (denotamos por $U_{i,k}$, $k \in I_i$, a las preimágenes de π). De esta forma se obtiene un atlas de \widehat{R} como $\{(\phi_i \pi, U_{i,k}) \mid i \in J, k \in I_i\}$. Ahora las funciones de transición son analíticas, ya que éstas están dadas por

$$\phi_j \pi (\phi_i \pi)^{-1} = \phi_j \pi \pi^{-1} \phi_i^{-1} = \phi_j \phi_i^{-1}.$$

Por consiguiente \widehat{R} es una superficie de Riemann y su estructura la hereda de R . Obsérvese que por ser \widehat{R} superficie de Riemann, las funciones de transición son además de analíticas conformes. □

Probaremos que existe un grupo de transformaciones de Möbius G que preservan a \widehat{R} y que \widehat{R}/G es conformemente equivalente a R . A continuación definimos el concepto de transformaciones cubrientes.

Definición 29 *Sea (\widehat{X}, p) un espacio cubriente de un espacio topológico X , el grupo de transformaciones cubrientes consiste de los homeomorfismos $g : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$, tales que hacen conmutativo el siguiente diagrama.*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X} & \xrightarrow{g} & \widehat{X} \\ & p \searrow \swarrow p & \\ & X & \end{array} \quad (2.1)$$

Usaremos el teorema de uniformización de Riemann que describe como son las superficies de Riemann simplemente conexas. Una demostración se puede consultar en [6] pp. 215-228 o en [7] pp. 143, 144.

Teorema 2.3.3 *(De Uniformización) Sea R una superficie de Riemann simplemente conexa, entonces R es conformemente equivalente a la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ (S^2), o al plano complejo \mathbb{C} , o al disco unitario Δ .*

Obsérvese que si \widehat{R} es la cubierta universal de una superficie de Riemann R , entonces \widehat{R} es la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$, el plano \mathbb{C} o el disco unitario Δ . Más aún, las transformaciones cubrientes son biyecciones analíticas conformes. Para mostrar esto, sea $f : \widehat{R} \rightarrow \widehat{R}$ una transformación cubriente y $z \in \widehat{R}$, $w = f(z)$, entonces se pueden tomar vecindades abiertas U_j de z y U_k de w , tal que $f(U_j) = U_k$ y $\pi_j(U_j) = \pi_k(U_k) = U$, donde U es parejamente cubierta. Se puede suponer también que R tiene como carta coordenada la pareja (ϕ, U) . Por consiguiente al levantar la estructura de superficie de Riemann de R a \widehat{R} (como en la prueba del teorema 2.3.2) se tiene

$$\phi \pi_k f \pi_j^{-1} \phi^{-1} = \phi \pi_j \pi_j^{-1} \phi^{-1} = Id$$

(véase la figura 2.5), es decir con estas cartas coordenadas las transformaciones cubrientes localmente son la identidad y por lo tanto f es analítica de \widehat{R} en \widehat{R} con la estructura heredada de R . Sin embargo, por el teorema de uniformización \widehat{R} es conformemente equivalente a \widehat{R}_E , donde \widehat{R}_E es el mismo espacio que \widehat{R} pero con la estructura trivial. Sea $g : \widehat{R} \rightarrow \widehat{R}_E$ dicha biyección conforme, por lo que se tiene que

$$\begin{array}{ccc} \widehat{R} & \xrightarrow{g} & \widehat{R}_E \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ \widehat{R} & \xrightarrow{g} & \widehat{R}_E \end{array} \quad (2.2)$$

donde $h = gfg^{-1}$, entonces h es composición de transformaciones analíticas (entre superficies de Riemann), por lo tanto es analítica con el atlas trivial, es decir en el sentido usual. Se puede por lo tanto remplazar a \widehat{R}_E por \widehat{R} en toda la discusión, ya que g es un homeomorfismo y se obtiene que las transformaciones cubrientes son analíticas.

Recordamos ahora el teorema del *mapeo* de Riemann, una demostración se puede consultar en [5] p. 222.

Teorema 2.3.4 *Sea A una región simplemente conexa, tal que $A \neq \mathbb{C}$, entonces existe una biyección conforme $f : A \rightarrow \Delta$. Mas aún, si $z_0 \in A$, se puede suponer $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$, con tales especificaciones f es única.*

Vemos a continuación que las biyecciones conformes de la esfera en la esfera, del disco en el disco y del plano en el plano son de Möbius.

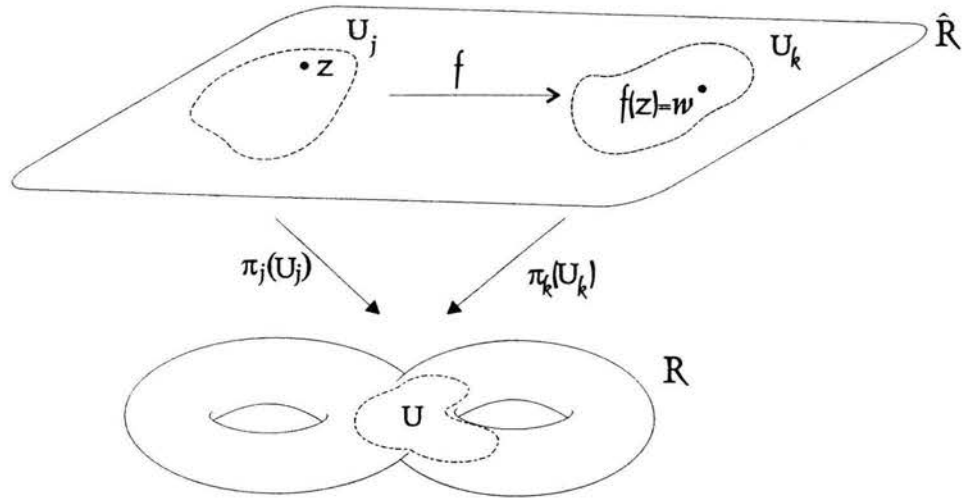


Figura 2.5: Las transformaciones cubrientes son biyecciones analíticas conformes.

Teorema 2.3.5 *Cualquier biyección conforme del disco Δ en el disco Δ es de Möbius.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una biyección conforme de Δ en Δ tal que $f(z_0) = 0$ con $z_0 \in \Delta$ y $\frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|} = e^{i\theta} > 0$. Componiendo a f con $\varphi(z) = ze^{-i\theta}$ si $g(z) = \varphi f(z)$, se tiene que $h(z) = \frac{z - z_0}{-\bar{z}_0 z + 1}$, esta función es evidentemente de Möbius y $h(z_0) = 0$. Si $|z| = 1$, se tiene

$$|h(z)| = \left| \frac{z - z_0}{-\bar{z}_0 z + 1} \right| = \frac{1}{|z|} \frac{|z - z_0|}{|-\bar{z}_0 z + 1|} = \frac{|z - z_0|}{|-\bar{z}_0 z + \bar{z}|} = 1$$

y $h(z_0) = 0$, por lo cual $h(\Delta) = \Delta$.

Ahora, $h'(z_0) > 0$ ya que

$$h'(z) = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar{z}_0 z)^2},$$

y si $z = z_0$, entonces

$$h'(z_0) = \frac{1}{1 - |z_0|^2} > 0.$$

Se sigue entonces de la unicidad en el teorema del "mapeo" de Riemann que $h = g$, lo cual implica que f es de Möbius. \square

Definición 30 Sea f una función holomorfa en una vecindad de ∞ , si f está definida en ∞ , se dice que f es holomorfa en ∞ (o que f tiene un polo de orden k en ∞), si

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

es holomorfa en una vecindad del cero (o tiene un polo de orden k en cero).

Lema 2.3.6 Sea f entera en \mathbb{C} , tal que $f(\infty) = \infty$, entonces f es necesariamente un polinomio.

DEMOSTRACIÓN Como f tiene un polo de orden k en ∞ , si $g(z) = f(1/z)$, entonces se sigue de los resultados básicos sobre polos de la variable compleja que

$$\left|g\left(\frac{1}{z}\right) z^k\right| < M$$

en $D(0, \varepsilon) - \{0\}$, $\varepsilon > 0$ [cf. [4], p. 250]. Sea $R = \frac{1}{\varepsilon}$ y $w = \frac{1}{z}$, por consiguiente

$$\left|\frac{f(w)}{w^k}\right| < M, \text{ si } |w| > R, \text{ es decir, } |f(w)| < M|w^k|$$

si $|w| > R$.

Finalmente, se sigue del teorema de las desigualdades de Cauchy [cf. [4], p. 172] que si $R_1 > R$ y $n > k$, $n \in \mathbb{N}$

$$|f^n(0)| \leq \frac{n! M R_1^k}{R_1^n} = \frac{n! M}{R_1^{n-k}}$$

Ahora, si $R_1 \rightarrow \infty$, entonces $|f^n(0)| \rightarrow 0$, por lo cual $f^n(0) = 0$ para toda $m > k$ y f^k es constante en una vecindad del cero y por lo tanto se sigue que es constante en el plano por el principio de continuación analítica [cf. [4], p. 384]. Integrando k veces se obtiene que f es un polinomio. \square

Teorema 2.3.7 Cualquier biyección meromorfa de la esfera de Riemann en sí misma es de Möbius.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una biyección meromorfa. Consideramos dos casos.

Caso 1, si el polo z_0 es distinto de ∞ . Obsérvese que el orden del polo es 1, de otra manera $\frac{1}{f}$ tendría un cero de orden $k \geq 2$ [cf. [4], p. 248] y f no sería inyectiva, entonces $f(z)(z - z_0)$ es holomorfa en \mathbb{C} y se sigue del lema 2.3.6 que $f(z)(z - z_0)$ es un polinomio, este es necesariamente de grado menor igual a 1 por la biyectividad y toma un valor finito en ∞ .

Caso 2; si $f(\infty) = \infty$, por el lema 2.3.6 f es un polinomio, el cual es de grado uno, ya que f es biyectiva. Por lo tanto f es de Möbius. □

Teorema 2.3.8 *Cualquier biyección conforme de \mathbb{C} en \mathbb{C} es de Möbius.*

DEMOSTRACIÓN Sea f conforme de \mathbb{C} en \mathbb{C} y $g(z) = f(1/z)$, g es analítica en una vecindad agujerada de cero. El cero no es una singularidad esencial, ya que f es inyectiva, por la misma razón, esta singularidad no es un polo de orden k , $k \geq 2$. Sin embargo el 0 es un polo simple, ya que si fuera una singularidad removible f sería acotada en una vecindad de ∞ y por el teorema de Liouville sería constante.

Se sigue entonces que f es una biyección meromorfa de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$ y f es de Möbius, $f(\infty) = \infty$, es decir f es de la forma $z \rightarrow \alpha z + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. □

En los siguientes resultados denotaremos por R a una superficie de Riemann y por \widehat{R} a su cubierta universal, que como se probó también es una superficie de Riemann. Obsérvese que el grupo G de transformaciones cubrientes de \widehat{R} no contienen elementos elípticos, ya que $\pi : \widehat{R} \rightarrow R$ es un homeomorfismo local. El siguiente resultado muestra que, las transformaciones cubrientes actúan discontinuamente.

Proposición 2.3.9 *Sea G un grupo de transformaciones cubrientes de \widehat{R} , entonces G actúa discontinuamente en \widehat{R} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea K compacto en \widehat{R} , K puede ser cubierto por un número finito de discos abiertos N_1, N_2, \dots, N_m , tal que $\bar{N}_i \subset \widehat{N}_i$, donde $\pi(\widehat{N}_i)$ es parejamente cubierta para toda i y \widehat{N}_i son también abiertos. Basta probar que dadas $i \neq j$, $g(N_i) \cap N_j \neq \emptyset$ para un número finito de elementos de G . Supóngase que para una pareja i, j , se tiene que $g(N_i) \cap N_j \neq \emptyset$ para un

número infinito de elementos de G , como $g_k(N_i)$ son subconjuntos ajenos se puede tomar una sucesión infinita $g_k(y_k)$, $y_k \in N_i$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $g_k(y_k) \in N_j$, para toda k . Como \bar{N}_j es compacto existe un punto de acumulación x y tenemos dos casos: Si $x \in g(\bar{N}_i)$ para alguna g o si $x \notin g(\bar{N}_i)$ para toda g .

En el primer caso, si se toma un disco abierto B vecindad de x , tal que $B \subset g(\hat{N}_i) \cap \hat{N}_j$, se tiene que $\pi(B)$ está parejamente cubierta, ya que $\pi(\hat{N}_j)$ lo está. Como $h(\hat{N}_i) \cap g(\hat{N}_i) = \emptyset$, si $h \neq g$ tenemos que $B \cap h(N_i) = \emptyset$ para toda $h \in G - g$, lo cual es una contradicción ya que x es punto de acumulación de $g_k(y_k)$, $y_k \in N_i$.

En el segundo caso, si $x \notin g(\bar{N}_i)$ para toda g , entonces $\pi(\bar{N}_i)$ y $\pi(x)$ son disjuntos en R , como R es un espacio métrico Hausdorff y $\pi(\bar{N}_i)$ es cerrado, se puede encontrar una vecindad M de $\pi(x)$, tal que $\pi(\bar{N}_i) \cap M = \emptyset$, lo cual implica que

$$\pi^{-1}(M) \cap \left(\bigcup_{g \in G} g(N_i) \right) = \emptyset$$

lo cual nuevamente es una contradicción.

□

Por consiguiente, hemos probado el recíproco del teorema del cociente.

Teorema 2.3.10 *Sea R una superficie de Riemann, entonces R es conformemente equivalente a \hat{R}/G donde \hat{R} es su cubierta universal, esto es, \hat{R} es la esfera $\hat{\mathbb{C}}$, el plano \mathbb{C} o el disco unitario Δ , y G es un grupo de transformaciones de Möbius que actúa discontinuamente, el cual no contiene elípticas.*

Usando el teorema de uniformización, analizamos como son todas las superficies de Riemann de acuerdo a sus cubiertas universales \hat{R} . Si \hat{R} es la esfera $\hat{\mathbb{C}}$, en virtud del teorema 2.3.7 el grupo de transformaciones cubrientes de \hat{R} es un grupo de transformaciones de Möbius, ya que como se mostró (después de la definición 26) éstas son biyecciones conformes. Es claro también, que como la analiticidad de una función entre superficies de Riemann no depende de las cartas coordenadas, esto implica que cualquier transformación cubriente en la esfera es también una biyección meromorfa de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$, en el sentido de los cursos básicos de variable compleja. Esto último se sigue de la descripción de la esfera como superficie de Riemann dada al inicio del capítulo. Ahora, sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$ dicho grupo de transformaciones cubrientes de \hat{R} , como G actúa discontinuamente en \hat{R} (proposición

2.3.9), no hay elementos parabólicos, ni hiperbólicos o loxodrómicos, por lo tanto $G = Id$ y $R = \widehat{\mathbb{C}}$.

En el caso de que \widehat{R} sea conformemente equivalente a \mathbb{C} , se sigue del teorema 2.3.8 y de los argumentos anteriores que el grupo de transformaciones cubrientes G es de Möbius. Ahora, el grupo G actúa discontinuamente en \mathbb{C} , se sigue entonces de la proposición 2.3.9 que las únicas transformaciones no triviales son las traslaciones. Como G actúa discontinuamente en un abierto de \mathbb{C} , G es discreto. Más aún, es un grupo elemental ya que actúa discontinuamente en \mathbb{C} . Por lo tanto se trata de un grupo periódico o doblemente periódico o el trivial, como se mostró en la sección de grupos discontinuos en el capítulo 1. Si G es el grupo trivial entonces $R = \mathbb{C}$. El siguiente resultado describe el cociente del plano bajo la acción discontinua de un grupo cíclico de traslaciones.

Teorema 2.3.11 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$ el grupo cíclico $< T >$, donde $T(z) = z + \lambda$, entonces \mathbb{C}/G es la superficie de Riemann $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese primero que por el teorema 2.2.1 \mathbb{C}/G es una superficie de Riemann, renombramos a la proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/G$ de dicho teorema, como $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/G$. Sea $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ la composición de $\phi_3\phi_2\phi_1$, donde

$$\phi_1(z) = \frac{z}{\lambda}, \quad \phi_2(z) = 2\pi i z \quad \text{y} \quad \phi_3(z) = e^z,$$

entonces $g(z) = e^{2\pi i z/\lambda}$. Obsérvese que $\phi_2\phi_1$ transforma el rectángulo infinito determinado por $0, \lambda$ y ∞ en el paralelogramo determinado por $0, 1$ y ∞ y que la multiplicación por $2\pi i$ transforma el rectángulo infinito determinado por $0, 1$ y ∞ en el rectángulo infinito horizontal determinado por $0, 2\pi i$ y ∞ (véase la figura 2.6). Por último la exponencial transforma biyectivamente la franja $\{z \mid 0 \leq \text{Im } z < 2\pi\}$ en \mathbb{C}^* .

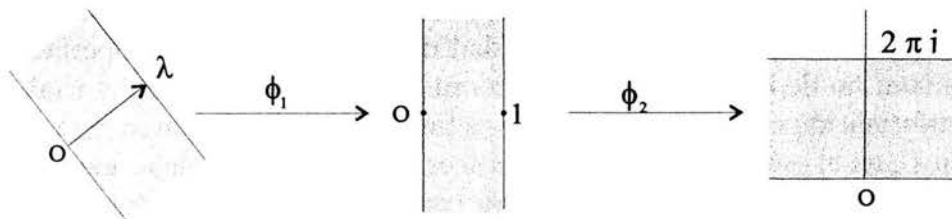


Figura 2.6: composición de $\phi_1\phi_2$

Se quiere definir $f : \mathbb{C}/G \rightarrow \mathbb{C}^*$. Dado $u \in \mathbb{C}/G$, sus preimágenes bajo ψ son de la forma $w + n\lambda$, $n \in \mathbb{Z}$. Ahora, ya que $g(w + n\lambda) = g(w)$ se puede definir a $f(u)$ como $g(w)$, en efecto $g(w + n\lambda) = e^{2\pi i(w+n\lambda)/\lambda} = g(w)$, por lo que g está bien definida. Mostramos ahora la inversa de f . Obsérvese que para cualquier punto $v \in \mathbb{C}^*$ sus preimágenes en \mathbb{C} bajo g son puntos de la forma

$$\phi_1^{-1}\phi_2^{-1}\phi_3^{-1}(v) = \phi_1^{-1}\phi_2^{-1}(\log v + 2\pi ik) = \phi_1^{-1}\left(\frac{\log v}{2\pi i} + k\right) = \frac{\lambda \log v}{2\pi i} + \lambda k,$$

$k \in \mathbb{Z}$, donde $\log v$ es cualquier rama de logaritmo definida en una vecindad de v . Por lo tanto se puede definir una inversa de f de la forma

$$f^{-1}(v) = \psi\left(\frac{\lambda}{2\pi i} \log v + \lambda k\right) = \psi\left(\frac{\lambda \log v}{2\pi i}\right).$$

Finalmente se muestra que f es analítica, usamos la notación de la prueba del teorema 2.2.1. Por ser \mathbb{C}/G una superficie de Riemann, tiene cartas coordenadas $(\phi_w, \psi_w(N_w))$, donde N_w es un disco abierto en \mathbb{C} y ψ_w es la restricción a N_w (como w no es punto fijo $\phi_w = \sigma_w \psi_w^{-1}$); se tenía que σ_w era una función de Möbius, tal que $\sigma_w(N_w) = \Delta$. Por último para puntos en Δ

$$f\phi_w^{-1} = g\psi^{-1}\psi_w\sigma_w^{-1} = g\sigma_w^{-1}$$

es una función holomorfa con derivada $g'(z) = \frac{2\pi i}{\lambda} e^{2\pi iz/\lambda} \neq 0$. Obsérvese que \mathbb{C}^* hereda una estructura de superficie de Riemann de manera natural del plano complejo.

$$\begin{array}{ccc} & \Delta & \\ & \uparrow & \\ & \mathbb{C} & \\ \psi \downarrow & \searrow g & \\ \mathbb{C}/G & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

□

En el caso de que el grupo sea doblemente periódico $\langle T, S \rangle$, esto es de la forma $T(z) = z + \lambda$, $S(z) = z + \mu$ y λ, μ son linealmente independientes,

entonces la superficie de Riemann es un toro. Esto se sigue, ya que evidentemente el paralelogramo descrito en la figura 2.7 es un conjunto fundamental (esto es que contiene un punto por cada órbita) y el cociente se define en topología como un toro.

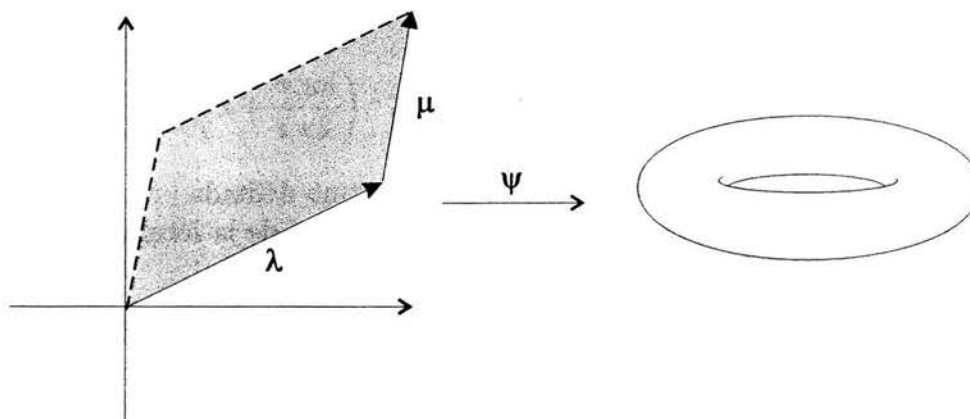


Figura 2.7: El cociente del grupo doblemente periodico es un toro.

Por último sea \widehat{R} conformemente equivalente al disco Δ , entonces R es de la forma Δ/G , donde G actúa discontinuamente en Δ y no tiene elementos elípticos.

Resulta que las superficies de Riemann son orientables, por lo que se dará a continuación la definición de una dos-variedad diferenciable orientable.

Definición 31 Una dos-variedad diferenciable M es orientable, si es posible cubrirla con una familia de vecindades coordinadas de tal forma que si un punto $p \in M$ pertenece a dos vecindades de esta familia, entonces en el cambio de coordenadas el determinante del Jacobiano es positivo en p .

Se sigue entonces que las superficies de Riemann son orientables, ya que las funciones de transición son analíticas y por Cauchy-Riemann el determinante del Jacobiano es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

y el determinante es positivo.

Se dice que una superficie o una dos-variedad es cerrada si es compacta y sin frontera. La suma conexa de las variedades de dimensión dos consiste en quitar un disco en cada una de ellas y pegarlas por las fronteras de los discos eliminados. Así uniendo dos toros se obtiene un 2-toro (ver figura 2.8). Se dice que la esfera tiene género cero, el toro tiene género uno, el 2-toro tiene género dos y pegando n toros, se obtiene un n -toro de género n (ver figura 2.9) [cf. [10], p. 12]. Resulta que el género clasifica a las dos-variedades topológicas cerradas, es decir, dada cualquier dos-variedad topológica cerrada M , se tiene que M es homeomorfa a una esfera o a un n -toro, $n \in \mathbb{N}$.

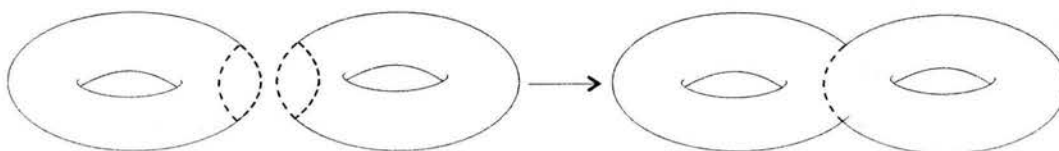


Figura 2.8: Forma de pegar dos toros.

Si R una superficie de Riemann cerrada con género $g = 0$, entonces R es una esfera y su cubierta universal es también una esfera [cf. [8], p. 24], es decir que $\widehat{R} = \widehat{\mathbb{C}}$. Si R es cerrada con género $g = 1$, entonces R es un toro y su cubierta universal $\widehat{R} = \mathbb{C}$. Por último si R cerrada con género $g \geq 2$, entonces su cubierta universal $\widehat{R} = \Delta$, ya que en el análisis de los primeros dos casos, las superficies son de género menor igual que 1.

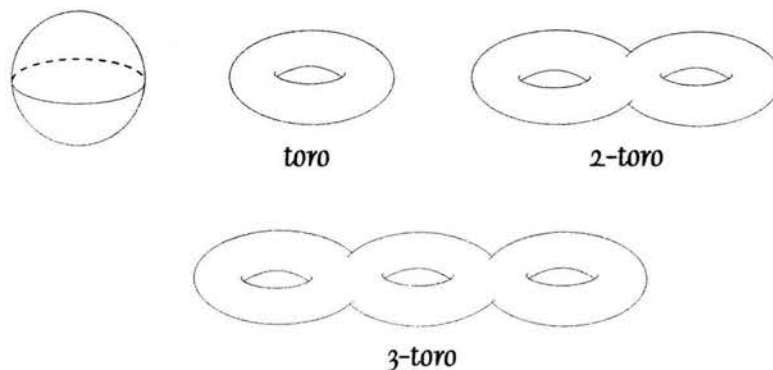


Figura 2.9: Superficies cerradas.

Definición 32 *Un grupo $G < PSL(2, \mathbb{C})$ es un grupo fuchsiano si hay un disco G -invariante en el cual G actúa discontinuamente.*

Una superficie de Riemann R se dice que es de tipo hiperbólico si es de la forma Δ/G , donde G actúa de manera discontinua en Δ y G no tiene elementos elípticos. A esta acción se le llama propiamente discontinua. Como se mostró en los en la sección 1.4, Δ tiene métrica hiperbólica inducida por la densidad

$$\sigma(w) = \frac{2}{1 - |w|^2}.$$

Sea $z \in \Delta$ y $g \in G$, si unimos por medio de una curva $\hat{\gamma}$ a z con $g(z)$ en \hat{R} y proyectamos esta curva a R se obtiene una curva cerrada en R , ya que $\pi g(z) = \pi(z)$.

De manera recíproca, dada una curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow R$ y $z \in \Delta$, donde $\pi(z) = \gamma(0)$, se sigue del teorema de levantamiento de trayectorias de la topología algebraica [cf. [8], p. 18] que hay una curva única $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{R}$, tal que $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$ y $\hat{\gamma}(0) = z$. Nótese que

$$\pi(\hat{\gamma}(1)) = \gamma(1) = \gamma(0) = \pi(z),$$

por lo que existe alguna $h \in G$, para la cual $\hat{\gamma}(1) = h(z)$. Obsérvese que γ se puede medir usando $\hat{\gamma}$. Tomando una partición de $\hat{\gamma}$, donde los segmentos de esta subdivisión están en abiertos parejamente cubiertos y se miden en Δ con la métrica hiperbólica. Nótese que esta medición es invariante, ya que las transformaciones de Möbius que preservan Δ son isometrías hiperbólicas [cf. [1], p. 37]. Además los levantamientos difieren por transformaciones de Möbius en G . El área también se puede calcular de manera análoga. Para continuar la discusión introducimos la siguiente definición general.

Definición 33 *Se dice dos curvas continuas $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow A$ en un espacio topológico son homotópicas, si existe $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$ una función continua, tal que $H|_{\{s\} \times 0} = \gamma_0(s)$ y $H|_{\{s\} \times 1} = \gamma_1(s)$, $s \in [0, 1]$. A la función H se le llama homotopía; si ésta además satisface la condición $H(t, 1) = H(t, 0)$, para toda $t \in [0, 1]$, se dice que la homotopía es relativa a $\{0, 1\}$, y se escribe $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel}\{0, 1\}$.*

Regresando al contexto de las superficies de Riemann hiperbólicas afirmamos que si $\gamma : [0, 1] \rightarrow R$ es una curva cerrada homotópica (relativa

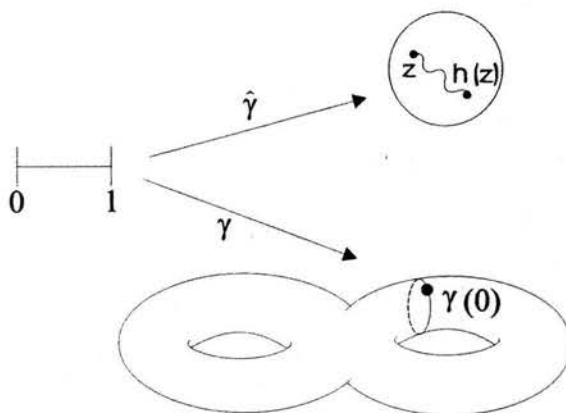
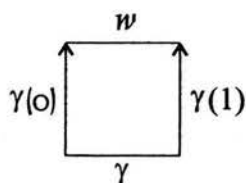


Figura 2.10: Levantamiento de curvas.

a $\{0, 1\}$) a un punto en R , entonces si $z \in \Delta$ es tal que $\pi(z) = \gamma(0)$ y $\hat{\gamma}$ es el levantamiento único de γ a Δ , tal que $\hat{\gamma}(0) = z$ se tiene que $\hat{\gamma}$ es una curva cerrada es decir $\hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}(1)$. Para probar esto, sea $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$, una homotopía relativa a $\{0, 1\}$, tal que

$$H|[0, 1] \times \{0\} = \gamma \quad \text{y} \quad H|[0, 1] \times \{1\} = w, \quad w \in R,$$

obsérvese que $\hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}(1) = w$

Figura 2.11: Una curva γ homotópica a un punto w

Ahora, se sigue del teorema de levantamiento de homotopías (llamado también de monodromía [cf. [1], p. 122]), que la homotopía H se puede levantar a una homotopía $\hat{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Delta$, tal que $\hat{H} : [0, 1] \times \{0\} = \hat{\gamma}$. También, se sigue fácilmente de la unicidad del teorema de levantamiento de trayectorias que

$$\hat{H}(\{0\} \times \{1\}) = \hat{H}(\{1\} \times \{1\}) = \hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}(1) = z,$$

por lo cual la curva es cerrada.

A continuación exponemos un caso particular del teorema 2.3.11. Sea G grupo cíclico de $PSL(2, \mathbb{C})$ generado por $T(z) = z + 1$, entonces \mathbb{H}^2 es un dominio de discontinuidad y se sigue del teorema 2.2.1 que $R = \mathbb{H}^2/G$ es una superficie de Riemann. Obsérvese que este ejemplo es una restricción de la superficie discutida en el teorema 2.3.11, al tomar $\lambda = 1$. Se sigue de dicho teorema que esta superficie de Riemann es conformemente equivalente a $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} - \{0\}$.

Proposición 2.3.12 *Sea $f(z) = e^{2\pi iz}$, \mathbb{H}^2 provisto con la métrica hiperbólica y Δ^* provista con la métrica definida por la densidad*

$$\sigma(w) = \frac{1}{(-\log |w|)|w|},$$

entonces f es una isometría.

DEMOSTRACIÓN. Como se mostró anteriormente $f(z) = e^{2\pi iz}$ es una biyección conforme de \mathbb{H}^2 en Δ^* . En virtud de la sección 1.4, basta probar que la densidad descrita en Δ^* está definida por

$$\frac{\lambda(z)}{\mu_f(z)}.$$

El factor de conformalidad de f está dado por

$$\mu_f(z) = |f'(z)| = |2\pi i e^{2\pi iz}| = 2\pi e^{-2\pi y},$$

donde $z = x + iy$. Por lo tanto la densidad en Δ^* heredada por f es

$$\frac{\lambda(z)}{\mu_f(z)} = \frac{1}{(\operatorname{Im} z) 2\pi e^{-2\pi y}} = \frac{1}{(2\pi y) e^{-2\pi y}}. \quad (2.3)$$

Ahora, si $f(z) = e^{2\pi iz} = w$, entonces

$$z = \frac{1}{2\pi i} \log w + k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde \log es una rama de logaritmo. Por consiguiente

$$x + iy = \frac{-i \log |w|}{2\pi} + k + \frac{\arg w}{2\pi},$$

entonces

$$y = -\frac{\log |w|}{2\pi}.$$

Por lo tanto

$$e^{-2\pi y} = e^{\log |w|} = |w|.$$

Finalmente se sigue entonces de (2.3) que la densidad inducida por f en Δ^* está dada por

$$w \rightarrow \frac{1}{(-\log |w|) e^{-2\pi y}} = \frac{1}{(-\log |w|)|w|}.$$

□

Ahora mostramos que el área de $D = \{z \mid 0 < |z| < \frac{1}{2}\}$ en Δ^* coincide con el área en \mathbb{H}^2 del rectángulo $W = [0, 1] \times [\frac{\log 2}{2\pi}, \infty)$, la cual es finita. Haciendo un cambio de variable $|w| = r$ el área en Δ^* de D está dada por

$$\int_D \frac{\varepsilon}{(\log |w|)^2 |w|^2} dA = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^2 (\log r)^2} d\theta dr = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{r (\log r)^2}.$$

Ahora haciendo otro cambio de variable $\log r = u$ se tiene que

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{r (\log r)^2} = \int_{\log \varepsilon}^{\log \frac{1}{2}} \frac{1}{u^2} du = \left[-\frac{1}{u} \right]_{\log \varepsilon}^{\log \frac{1}{2}} = \frac{1}{-\log \frac{1}{2}} + \frac{1}{\log \varepsilon}.$$

Por consiguiente tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene que

$$Area(D) = \frac{2\pi}{\log 2}.$$

Ahora el área de W en \mathbb{H}^2 esta dada por

$$\int_W \frac{1}{y^2} dA$$

Calculamos tomando el límite cuando $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\frac{\log 2}{2\pi}}^t \int_0^1 \frac{1}{y^2} dx dy = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\frac{\log 2}{2\pi}}^t \frac{1}{y^2} dy = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{y} \right]_{\frac{\log 2}{2\pi}}^t = \frac{2\pi}{\log 2},$$

lo cual no es sorprendente, ya que regiones isométricas deben tener la misma área.

2.4. Conjuntos estables

En esta sección se describirán los conjuntos estables, los cuales son útiles para describir cocientes.

Definición 34 Sea $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ un dominio de discontinuidad G -invariante, se dice que $D_0 \subset D$ es estable con respecto a G , si para toda $g \in G$ sucede que

$$g(D_0) = D_0 \quad \text{o} \quad g(D_0) \cap D_0 = \emptyset.$$

El subgrupo de G de las transformaciones g tales que $g(D_0) = D_0$ se le llama el estabilizador de D_0 . Al estabilizador de D_0 lo denotaremos por G_{D_0} . En el capítulo 1, sección 1.3, teorema 1.3.6, se exhibieron ejemplos de conjuntos estables.

Obsérvese que si D_0 es estable con estabilizador G_0 , se sigue del teorema 2.2.1 que D_0/G_0 es una superficie de Riemann, la cual no siempre es homeomorfa a la proyección $\pi(D_0)$ como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sea $D = \mathbb{C}$ y G el grupo generado por $T(z) = z+1$, se tiene que el conjunto $D_0 = \{x + iy \mid 0 \leq x < 1\}$ es estable con estabilizador es $G_{D_0} = Id$. Por lo tanto la superficie de Riemann

$$D_0/G_{D_0} = D_0/Id = D_0$$

es un espacio simplemente conexo. En cambio al proyectar D_0 a la superficie de Riemann, se tiene que $\pi(D_0) = \mathbb{C} - \{0\}$, como se muestra en el teorema 2.3.11, sin embargo este conjunto no es simplemente conexo. En consecuencia las dos superficies no son homeomorfas.

El siguiente teorema muestra las condiciones suficientes para que exista en un Hausdorff un homeomorfismo entre D_0/G_{D_0} y $\pi(D_0)$.

Teorema 2.4.1 Sea G un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ que actúa discontinuamente en una región $D \subset \mathbb{C}$ y D_0 es estable con estabilizador G_{D_0} . Si

(i) D_0 es abierto en D , o

(ii) D_0/G_{D_0} es compacto,

entonces D_0/G_{D_0} con la topología cociente y $\pi(D_0)$ como subespacio topológico de D/G son homeomorfos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\pi : D \rightarrow D/G$ la función de identificación; se sigue del teorema 2.2.1 y de su prueba que D/G es una superficie de Riemann, que π es una transformación abierta y que $\pi(D)$ es Hausdorff. La restricción de π a D_0 la denotamos como π_0 , obsérvese que $\pi(D_0)$ también es Hausdorff, en virtud de la proposición 1.1.3.

Ahora sea $\phi : D_0 \rightarrow D_0/G_{D_0}$ la función de identificación. Mostramos que ϕ siempre es abierta, aún si D_0 no es abierto. Para esto, sea A un abierto relativo a D_0 , esto es $A = V \cap D_0$, donde V es abierto en \mathbb{C} (o en D), si $g \in G_{D_0}$, como g es un homeomorfismo, se tiene que

$$g(A) = g(V) \cap g(D_0) = g(V) \cap D_0$$

y $g(A)$ es abierto. También como $\phi^{-1}(\phi(A)) = \bigcup_{g \in G_{D_0}} g(A)$ se sigue que ϕ es abierta.

Denotamos a la composición de ϕ^{-1} con π_0 como θ , esto es,

$$\theta = \pi_0 \circ \phi^{-1} : D_0/G_{D_0} \rightarrow \pi(D_0).$$

Probamos primero que θ está bien definida. Esto se sigue, ya que $x, y \in D_0$ y $x \sim y \text{ mod } G_{D_0}$, existe $g \in G_{D_0}$, tal que $g(x) = y$ y en este caso $\pi_0(x) = \pi_0(y)$.

$$\begin{array}{ccc} & D_0 & \\ & \phi \swarrow & \searrow \pi_0 \\ D_0/G_{D_0} & \xrightarrow{\theta} & \pi(D_0) \end{array} \quad (2.4)$$

Mostramos que θ es biyectiva. Es inyectiva, ya que si $u, v \in D_0/G_{D_0}$, satisfacen que $\theta(u) = \theta(v)$; entonces existen $x, y \in D_0$, tales que

$$\phi(x) = u \quad \text{y} \quad \phi(y) = v.$$

Además, $\pi_0(x) = \pi_0(y)$, por lo que existe $g \in G$, tal que $g(x) = y$. Sin embargo, como D_0 es estable $g \in G_{D_0}$, ya que $x, y \in D_0$. Por consiguiente $x \sim y \text{ mod } G_{D_0}$ y $u = v$. La función θ es sobre, ya que si $z \in \pi(D_0)$, se tiene que $z = \pi(x)$, $x \in D_0$; tomando $\phi(x) = w$, se tiene que

$$\pi_0 \phi^{-1}(w) = \pi_0(x) = \pi(x) = z.$$

A continuación mostramos que θ es continua. Si U es abierto en $\pi(D_0)$, se tiene que $U = V \cap \pi(D_0)$, donde V es un abierto en D/G . Ahora

$$\pi_0^{-1}(V \cap \pi(D_0)) = \pi^{-1}(V) \cap D_0$$

que es un abierto en D_0 , y como ϕ es abierta, se tiene que

$$\phi(\pi_0^{-1}(V \cap \pi(D_0))) = \theta^{-1}(U)$$

es un abierto en D_0/G_0 . Por consiguiente θ es biyectiva y continua.

Ahora probamos que si D_0 es abierto, entonces θ es una función abierta. Sea U abierto en D_0/G_{D_0} , entonces $\phi^{-1}(U)$ es abierto en D_0 y por consiguiente es abierto en \mathbb{C} . Finalmente, como

$$\pi_0\phi^{-1}(U) = \pi\phi^{-1}(U)$$

y π es una función abierta, se tiene que

$$\pi_0\phi^{-1}(U) = \theta(U)$$

es abierto en $\pi(D)$ y por lo tanto también es abierto en $\pi(D_0)$. En consecuencia θ es un homeomorfismo.

Para el segundo caso, si D_0/G_{D_0} es compacto, como θ es una función biyectiva y continua de un compacto en $\pi(D_0)$, que es Hausdorff (proposición 1.1.3), se tiene, en virtud del teorema 1.1.5, que θ es también un homeomorfismo. □

Obsérvese que, como se mostró en la observación después del teorema del cociente 2.2.1, si D un subdominio de $\widehat{\mathbb{C}}$ y $D_0 \subset D$ es abierto y estable, entonces la función ϕ es analítica. Más aún la π_0 también es una función holomorfa entre superficies de Riemann, ya que es la restricción de una función holomorfa a un abierto.

Nótese que $\theta = \pi_0\phi^{-1}$ también es analítica (véase el diagrama 2.4). Esto se sigue, ya que se pueden tomar subatlases de $\pi(D_0)$ y de D_0/G_{D_0} . Como en la prueba del teorema del cociente 2.2.1, se puede tomar de tal manera que $w \in D_0$, $N_w \subset D_0$ y las mismas cartas coordenadas tanto para D_0/G_{D_0} , como para $\pi(D_0)$. Obsérvese que como D_0 estable, se tiene que si w un punto fijo elíptico de orden k en G_{D_0} , también lo es en G . Finalmente adaptando la notación de la prueba del teorema 2.2.1 se tiene

$$q_w \sigma_w (\pi_0)_w^{-1} \theta \phi_w \sigma_w^{-1} q_w^{-1} = q_w \sigma (\pi_0)_w^{-1} \pi_0 \phi^{-1} \phi_w \sigma_w^{-1} q_w^{-1} = Id,$$

donde $\phi_w = \phi | N_w$ y $(\pi_0)_w = \pi_0 | N_w$. En consecuencia D_0/G_{D_0} y $\pi(D_0)$ son conformemente equivalentes.

Exhibimos un segundo ejemplo, donde D_0/G_{D_0} y $\pi(D_0)$ no son homeomorfos. Sea $D = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 \leq y < 1\}$ y G el grupo generado por las transformaciones $T(z) = z + 1$ y $S(z) = z + i$. D es estable con respecto a G y el estabilizador es $G_D = \langle T \rangle$. Se sigue del teorema del cociente 2.2.1 que $\pi(D) = D/G$ es una superficie de Riemann que es un toro, ya que el paralelogramo $[0, 1] \times [0, 1]$ es un conjunto fundamental y el cociente en topología se define como un toro (que es un conjunto compacto, ya que es la imagen continua de un compacto). Al ser compacto el toro es también cerrado. El toro $\pi(D)$ no es homeomorfo al anillo D/G_D , ya que este último no es compacto. Para probar que no es compacto, tomamos la cubierta abierta $\{\phi(A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ del anillo D/G_D , donde

$$A_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Im } z < 1 - \frac{1}{n} \right\}.$$

Obsérvese que $\phi(A_n)$ son conjuntos abiertos, ya que A_n son abiertos en D y ϕ es de identificación. Por lo que concluimos que D/G_D no es compacto, ya que $\{\phi(A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene una subcubierta finita.

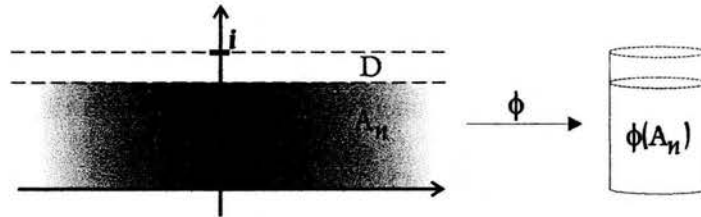


Figura 2.12: Conjunto estable y su identificación.

A continuación mostramos algunos ejemplos del teorema 2.4.1, necesitamos primero una definición.

Definición 35 Sea h un elemento hiperbólico de un grupo fuchsiano G y sea A el eje de h . Decimos que h es un elemento simple de G , si para toda $g \in G$ sucede que

$$g(A) = A \quad \text{o} \quad g(A) \cap A = \emptyset.$$

Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$ tal que actúa discontinuamente en \mathbb{H}^2 y $g \in G$ una transformación hiperbólica simple que fija a 0 e ∞ y L la geodesica que une a 0 con ∞ . Supongamos también que G no tiene elementos elípticos

de orden 2 que preserven a L , i.e., que intercambien a 0 con ∞ . Sea K el subgrupo de G estabilizador de L . Este grupo es cíclico, ya que es un subgrupo de homotecias abeliano [cf. [11], p. 14]. Sea g el generador de K , $g(z) = kz$, i.e. $K = \langle g \rangle$. Ahora, es claro que L/K es una curva simple cerrada, por lo que es compacta, se sigue entonces del teorema 2.4.1 que $\pi(L)$ es homeomorfo a esta curva simple cerrada, donde $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/G$ y \mathbb{H}^2/G es la superficie de Riemann definida por G .

En el caso de que el grupo G tenga elementos elípticos de orden dos, el subgrupo estabilizador de L lo llamaremos K_1 , el cual contiene estos elementos elípticos de orden dos. Por lo que $K < K_1 < G$. Como las transformaciones elípticas de orden dos intercambia 0 e ∞ , el subgrupo K_1 tiene índice dos. Como en los argumentos anteriores, L/K_1 es una curva compacta homeomorfa a $\pi(L)$.

Por último exhibimos un segundo ejemplo del teorema 2.4.1, primero probamos un lema.

Lema 2.4.2 *Sea G un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ que actúa discontinuamente en D un subdominio de $\widehat{\mathbb{C}}$. Supóngase también que $g \in PSL(2, \mathbb{C})$, $G' = gGg^{-1}$ y $D' = g(D)$, entonces D/G es conformemente equivalente a D'/G' .*

DEMOSTRACIÓN: A la proyección de D' en D'/G' la denotamos por η . Se define

$$h = \eta g \pi^{-1} : D/G \rightarrow D'/G',$$

esta función está bien definida, ya que si $z_1, z_2 \in D$ y $z_1 \sim z_2$, entonces existe $f \in G$, tal que $f(z_1) = z_2$. Por lo que $g f(z_1) = g(z_2)$, lo cual implica que $(g f g^{-1})(g(z_1)) = g(z_2)$ y $g f g^{-1} \in G'$. Obsérvese que G' actúa discontinuamente en D' . (Proposición 1.3.1)

Ahora, mostramos que las superficies son conformemente equivalentes. Sea $N_w \subset D$ y $g(N_w) = N_{g(w)} \subset D'$. Entonces se puede tomar cartas coordenadas $\{(\phi_w, \pi_w(N_w)) \mid w \in D\}$, donde $\phi_w = q_w \sigma_w \pi_w^{-1}$, como en el teorema del cociente 2.2.1. Para D'/G' se toma un atlas de la misma manera con cartas coordenadas $\{(\psi_{g(w)}, \eta_{g(w)}(N_{g(w)}))\}$, donde $g(w) \in D'$ y $\psi_{g(w)} = q_{g(w)} \sigma_{g(w)} \eta_{g(w)}^{-1}$. Podemos suponer que $\sigma_{g(w)} g = \sigma_w$, obsérvese también que $q_w = q_{g(w)}$, ya que w es elíptico de orden k , si y sólo si $g(w)$ es elíptico de orden k . Finalmente se muestra que

$$\psi_{g(w)} h \phi_w^{-1}$$

es holomorfa. Esto se sigue, ya que localmente, en un subatlas de D/G y en uno de D'/G' , se tiene que

$$q_{g(w)} \sigma_{g(w)} \eta_{g(w)}^{-1} \eta g \pi^{-1} \pi_w \sigma_w^{-1} q_w^{-1} = q_{g(w)} \sigma_{g(w)} g \sigma_w^{-1} q_w^{-1} = Id.$$

Por lo tanto las superficies de Riemann D/G y D'/G' son conformemente equivalentes. □

Definición 36 *Un horodisco Q en \mathbb{H}^2 es un disco abierto tangente a $\widehat{\mathbb{R}}$ en un punto α , o es un semiplano de la forma $\{z \mid \text{Im } z > y_0\}$, en este caso se dice que el horodisco está basado en ∞ .*

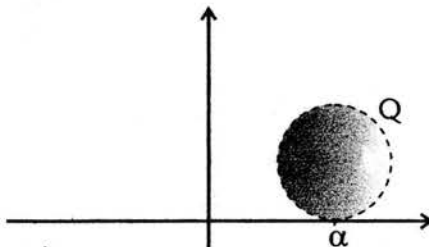


Figura 2.13: Horodisco.

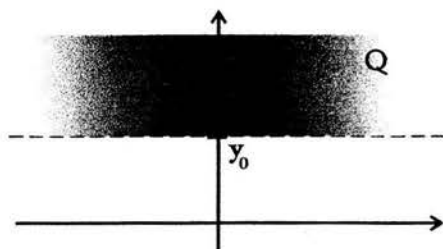
Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$, supongamos que G actúa discontinuamente en \mathbb{H}^2 y que hay un horodisco Q , el cual es estable con estabilizador $G_Q = \langle g \rangle$, donde g es parabólica. Como Q es estable y abierto, por el teorema 2.4.1, se tiene que Q/G_Q es conformemente equivalente a $\pi(Q)$.

Resulta que Q/G_Q es conformemente equivalente a un disco perforado

$$\Delta_r^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r, r < 1\}.$$

Para mostrar esto, obsérvese primero que en virtud del lema 2.4.2, se puede suponer que Q es un horodisco basado en ∞ . Esto se logra mandando el punto de tangencia del horodisco α a ∞ , por una función de la forma $\varphi(z) = \frac{-1}{z - \alpha}$, la cual preserva \mathbb{H}^2 [cf. [11], p. 8]. En este caso $Q = \{x + iy \mid y > y_0\}$.

Se puede suponer también (conjugando otra vez si es necesario) que el estabilizador G_Q está generado por $h(z) = z + 1$. Nuevamente, este es un caso

Figura 2.14: Horodisco estable basado en ∞ .

particular del teorema 2.3.11. En este caso, sea $f : Q \rightarrow \Delta_r^*$ la composición $f_2 f_1$, donde $f_1(z) = 2\pi iz$ y $f_2(z) = e^z$, esto es, $f(z) = e^{2\pi iz}$. Obsérvese que f_1 transforma al rectángulo determinado por $R_1 = (0, 1) \times (y_0, \infty)$ en el rectángulo horizontal $R_2 = (-\infty, -y_0) \times (0, 2\pi)$ y la exponencial transforma biyectivamente al rectángulo R_2 en Δ_r^* . Se sigue del teorema 2.3.11 que Q/G_Q es conformemente equivalente a Δ_r^* . Por consiguiente $\pi(Q)$ es conformemente equivalente a $\Delta^* = \{a \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

Para concluir esta tesis formamos el espacio $(\mathbb{H}^2)^*$ pegando ∞ (el punto fijo de h) y todas sus G -imágenes a \mathbb{H}^2 . Definimos la topología de $(\mathbb{H}^2)^*$ de la siguiente forma: se toman los subconjuntos abiertos de \mathbb{H}^2 junto con los conjuntos de la forma

$$\{\infty\} \cup \{x + iy \mid y > t\},$$

$t > y_0$ y sus G -imágenes, es decir los horodiscos, los cuales se definen como vecindades abiertas de las G -imágenes de ∞ .

Nótese que con esta topología ∞ no tiene una vecindad compacta. Si así fuera existiría t_0 , tal que $W = \{z \mid \text{Im } z > t_0\}$ sería una vecindad compacta de ∞ , pero entonces $\{n + i(t_0 + 1)\}$ es una sucesión en W la cual no converge. Claramente, no converge a un punto en \mathbb{H}^2 , ya que los abiertos de \mathbb{H}^2 son también abiertos en $(\mathbb{H}^2)^*$. Tampoco converge a ∞ , pues se puede encontrar una vecindad de ∞ la cual no contiene a ningún elemento de la sucesión, por ejemplo $\{z \mid \text{Im } z > t_0 + 2\}$.

Se puede probar que $(\mathbb{H}^2)^*/G$ es también una superficie de Riemann esto se puede consultar, por ejemplo, en [13].

Bibliografía

- [1] Alan F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlang, New York, 1983.
- [2] Gareth A. Jones y David Singerman, *Complex Functions*, Cambridge University Press, 1994.
- [3] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Kogakusha, LTD, 1964 (Japón).
- [4] Jerrold E. Marsden y Michael J. Hoffman, *Análisis Básico de Variable Compleja*, Trillas, México, 1996.
- [5] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [6] L. Bers, *Uniformisation by Bertrami Equations*, Comm. pure appl. math., 14, 1961.
- [7] O. Letho, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [8] Marvin J. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, W.A. Benjamin, inc, Massachusetts, 1967.
- [9] José Lucio Sánchez Garrido, *Grupos Kleineanos elementales y no elementales*, Facultad de Ciencias, Univesidad Nacional Autónoma de México, 1999.
- [10] William S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1977.

- [11] Joseph Lehner, *A short Course in Automorphic Function*, Holt, Rinehart and Winston, 1966.
- [12] Sze-Tsen Hu, *Elements of General Topology*, Holden-Day. inc, San Francisco, California, 1964.
- [13] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Tokyo Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1971.

Calvin y Hobbes

