

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ARAGÓN



ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

**ANÁLISIS DE PUENTES VEHICULARES DE
ARCO ARTICULADOS, SIMÉTRICOS Y DE
NERVADURA SÓLIDA BAJO DISTINTAS
CONDICIONES DE CARGA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
PRESENTA

VALDIVIESO DE JESÚS JESÚS ANTONIO



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

| | |
|---|----|
| INTRODUCCIÓN | 1 |
| I. MARCO TEÓRICO | 3 |
| I.1 Generalidades de puentes de arco. | 3 |
| I.1.1 Evolución de puentes de arco | 3 |
| I.1.2 Ejemplos de puentes de arco en el mundo | 4 |
| I.2 Clasificación de puentes de arco | 7 |
| I.2.1 Tipo y materiales de puentes de arco | 7 |
| I.2.2 Clasificación por el nivel de cubierta | 8 |
| I.2.3 Clasificación por su nervadura | 9 |
| I.2.4 Por sus claros o luz del puente | 11 |
| I.3 Consideraciones en el análisis de puentes de arco simétricos | 12 |
| I.3.1 Cargas de diseño | 12 |
| I.3.2 Estudios de campo | 14 |
| I.3.3 Consideraciones en la construcción de la cubierta y estribos | 17 |
| I.3.4 Economía y estética en puentes de arco | 17 |
| I.3.5 Coordenadas del eje parabólico | 18 |
| I.3.6 Ángulo formado por la horizontal y cualquier punto del arco | 19 |
| I.3.7 Sección transversal y longitud de un arco simétrico | 20 |
| I.3.8 Características principales de un Puente de Arco | 22 |
| I.4 Métodos de análisis | 25 |
| I.4.1 Análisis isostáticos (arcos triplemente articulados) | 25 |
| I.4.2 Método del trabajo mínimo (arcos doblemente articulados) | 25 |
| I.4.3 Método del trabajo mínimo para asentamientos, cambio de temperatura y acortamiento del cuerpo del arco. | 32 |
| I.5 Resumen previo al análisis. | 34 |
| II. DESARROLLO | 35 |
| II.1 Solución de arcos de nervadura sólida triplemente articulados | 35 |
| II.1.1 Ecuaciones para arcos con carga uniformemente repartida | 35 |

| | |
|---|-----|
| II.1.2 Ecuaciones para arcos con carga concentrada | 46 |
| II.1.3 Ecuaciones para arcos con varias cargas concentradas con claros Iguales | 54 |
| II.2 Solución de arcos de nervadura sólida doblemente articulados | 67 |
| II.2.1 Ecuaciones para arcos con carga uniformemente repartida | 67 |
| II.2.2 Ecuaciones para arcos con carga concentrada | 74 |
| II.2.3 Ecuaciones para arcos con varias cargas concentradas con claros Iguales | 81 |
| III. RESULTADOS | 94 |
| III.1 Tablas para obtener los valores de la elevación f a partir de la longitud y su relación f/L | 95 |
| III.2 Tablas para obtener los valores de x y de y a partir de por ciento de longitud de arco | 99 |
| III.3 Tablas para obtener los valores de α a partir de por ciento de longitud de arco y su relación f/L | 101 |
| III.4 Ejemplo | 103 |
| FUENTES CONSULTADAS | 111 |
| ANEXOS | 112 |
| Anexo a. Valores para una carga concentrada a diferentes posiciones | 112 |
| Anexo b. Valores para conseguir el ángulo de un arco a diferentes posiciones | 114 |
| Anexo c. Como calcular la distancia en x de una carga horizontal al arco | 115 |
| Anexo d. Datos meteorológicos en distintas localidades de la república Mexicana | 117 |

INTRODUCCIÓN

Se puede decir que en México existen muy pocos trabajos donde se haga mención de las estructuras de puente de arco, sin embargo, en algunos libros de análisis estructural se hace alusión a dicho tema; el cual, sólo es tratado en forma efímera y sin la información suficiente que contribuya a una solución, que tome en cuenta la variabilidad de detalles para su análisis.

Una de las principales causas que contribuyen a que la información sea escasa en este rubro es el del análisis estructural debido a que, en el análisis de este tipo de estructuras, se da un cambio constante de la geometría del arco, lo cual, nos lleva al planteamiento de una serie de ecuaciones complejas que son difíciles de descomponer en unas ecuaciones de más fácil manejo y que simplifiquen las consideraciones realizadas.

Otra causa que plantea un problema en la solución de estructuras de puente de arco son los ocasionados por la cimentación, ya que, al trabajar el arco a compresión pura provoca reacciones horizontales muy grandes en los apoyos, las cuales, deben resistirse suficientemente por los estribos o pilares en función de las condiciones del terreno, lo que trae consigo problemas de análisis adicionales de asentamientos en la estructura durante y después de la construcción.

Algunos problemas más son causados por la erección de los arcos, las condiciones en que trabaja un arco deben proporcionar compresión a los apoyos durante la construcción, llevando a métodos constructivos como el uso de gato hidráulico para darle compresión a los apoyos durante la construcción o el método de construcción en forma de cantiliver que es muy utilizado en la actualidad para arcos de dimensiones mayores. También podemos mencionar los problemas de cimbrado para librar claros mayores en arcos de concreto reforzado y la construcción de torres provisionales para arcos de acero y de concreto reforzado, los cuales, son demolidos al concluir la erección del arco.

Aunque las consideraciones planteadas anteriormente puedan parecer demasiado desfavorables en la construcción de estructuras de puente de arco, no superan a las ventajas que ofrecen estas estructuras en cuanto a su funcionamiento colectivo con la infraestructura carretera de una región.

Una razón importante por la cual debieran usarse estructuras de puente en arco es el estético, debido a que el arco es una estructura agradable a la vista, impacta favorablemente al medio ambiente que la sustenta, puesto que, sus condiciones geométricas se acoplan en forma perfecta con los accidentes geográficos de dicha región.

En algunas regiones de Estados Unidos de América, Asia y Europa en general, las estructuras de arco son utilizadas como un atractivo turístico, ya que, resultan un atractivo adicional a la belleza geográfica de estos países, ayudando al desarrollo económico de sus regiones.

No sólo las cualidades estéticas son ventajosas en la construcción de puentes de arco, sino también su economía, dado que los arcos trabajan a compresión pura, se evita el uso excesivo de materiales, permitiendo construir secciones transversales con espesores pequeños, y los efectos por fuerzas cortantes y momentos flexionantes se reducen considerablemente; además, se evitan los sistemas de pilares largos usados en puentes continuos y el uso excesivo de acero en puentes de armadura de formas distintas al arco.

Debido a que la geometría del arco lo hace trabajar a compresión pura, se suelen evitar las tensiones producidas por las cargas vivas y por las cargas permanentes, las cuales, provocan problemas graves en puentes hechos a base de vigas, donde los esfuerzos por flexión son muy grandes proporcionando esfuerzos de tensión significativos.

Dadas las ventajas anteriores, este trabajo consiste básicamente en elaborar una metodología para el análisis estructural de la superestructura de puentes de arco, tomando en cuenta algunas de las condiciones variables de cargas que los afectan y utilizando las especificaciones contenidas en los códigos de construcción vigentes. Cabe señalar que sólo se referirán algunas condiciones en la construcción de puentes de arco, debido a que en cada región cambian los factores para la construcción de dichas estructuras tratando de dejar generalizadas las más importantes y que coadyuven a una solución satisfactoria para cada caso. Además, quedan fuera del alcance de este trabajo el diseño estructural de miembros, análisis y diseño de la subestructura y cubierta, y la transmisión de cargas de líneas de influencia, que requieren un análisis más detallado y sistemático.

Objetivos

En este trabajo se plantearán ecuaciones para la solución de puentes de arco, donde se expresaran en función al tipo de cargas aplicadas, así cómo, al número de articulaciones que contengan conforme a su relación elevación - claro (f/L). Las ecuaciones determinarán las reacciones en los apoyos, fuerzas cortantes, fuerzas normales y momentos flexionantes en cualquier punto de la longitud del arco. Al final se ofrecen tablas para la obtención de propiedades geométricas del arco conforme a su relación f/L . Además se harán consideraciones para llegar a la solución de arcos conforme a las cargas aplicadas y a los materiales utilizados dando un ejemplo ilustrativo.

I. MARCO TEÓRICO

I.1 GENERALIDADES DE PUENTES DE ARCO

I.1.1 EVOLUCIÓN DE PUENTES DE ARCO

Los Puentes de Arco han venido evolucionando hasta nuestros días. Se tienen registros de las primeras construcciones de arcos desde la antigüedad, con los Egipcios, Asirios y Babilónicos, donde se utilizaban como unidad arquitectónica.

El arco verdadero se usó primeramente en un grado apreciable por los Etruscos, pueblo de origen asiático que invadió la Italia del norte alrededor de 1300 a.C. Los ingenieros del Imperio Romano desarrollaron el arco verdadero a un punto en el que, por cinco siglos (desde alrededor de 200 a.C. quizá hasta 200 d.C.), se construyeron muchos puentes de arco y acueductos, en todas partes del imperio.

En 1176 d.C. la construcción del puente de Londres se comenzó y esta estructura antiestética que consistía en una serie de arcos de claro pequeño duró seis siglos. En el siglo XII los miembros de una orden religiosa conocida como Fratres Pontes (Hermanos del Puente) se dedicaron a la reparación de puentes así como la construcción de nuevos. En el Siglo XIV fue construido el primer puente con una cubierta de mampostería soportado por nervaduras de un arco. Cabe señalar que hasta aquí todos los métodos empleados son empiristas sin un análisis real de su función estructural.

El Francés, Lahire (1640 – 1718), fue el primero en aplicar los principios de la estática en un intento de analizar un arco. En 1773 Coulomb consideraba los tipos de falla en un arco y proponía una teoría. Ambos consideraban que el arco era inelástico. En 1826 Navier aportó la primera contribución importante a la teoría de flexión de barras curvas. Incluía en su teoría solamente los efectos de la deformación de flexión, sin embargo, Navier explicaba cómo podían considerarse los efectos axiales.

Yvon Villarceau (1813 – 1883), presentó una famosa memoria sobre arcos en la Academia Francesa de Ciencias en 1845. Entendía que la solución completa requería de la consideración de las deformaciones elásticas de la nervadura, sin embargo, consideraba que los bloques del arco eran absolutamente rígidos.

El Francés, J. V. Poncelet (1788 – 1867), fue aparentemente el primero en sugerir (en un artículo en 1852) que un arco debe considerarse como una barra elástica.

Jacques Bresse (1822 – 1883), francés también, publicó un libro en 1854 que trataba de la deflexión de barras curvas, y en este incluía los efectos tanto de deformaciones axiales como de flexión y demostraba la aplicación de su teoría en el diseño de arcos.

C. Culmann (1821 – 1881), un alemán, publicó su famoso libro sobre estática gráfica, parte del cual está dedicado a la consideración de análisis de arcos y muros de retención.

Culmann introdujo el importante concepto de centro elástico que permite el análisis de arcos no articulados sin usar ecuaciones simultáneas.

E. Winkler (1855 – 1888) un alemán, publica en 1867 un libro sobre resistencia de materiales. Winkler discutía los problemas de arcos doblemente articulados previamente considerados por Bresse y extendía la teoría para incluir arcos no articulados. En el libro incluían tablas para las diferentes condiciones de cargas para arcos circulares y parabólicos con sección transversal constante.

Otto Mohr (1834 – 1918) aportó dos contribuciones importantes a la teoría elástica de los arcos. La primera publicada en 1870, donde presentaba las ideas de cálculo de la línea de influencia para la componente de reacción horizontal de un arco doblemente articulado como el diagrama de momento flexión para una viga conjugada cargada con el diagrama y/EI de rigidez para el arco. Su segunda contribución fue una extensión del concepto del centro elástico (punto neutro) que incluía arcos articulados.

Contribuciones más recientes a la teoría y método de análisis de arcos son las de A. Strassner en 1927, J. Melan y T. Gestechi en 1931, y E Marsch en 1935. En este último año también fue publicada una teoría para la deflexión de arcos por A. Freudenthal. (tema tomado de la ref. 01).

1.1.2 EJEMPLOS DE PUENTES DE ARCO EN EL MUNDO

Los siguientes puentes son solo un ejemplo de estructuras de arco en el mundo.

Puentes de Arco de Armadura:

- New River Gorge, cerca de Fayetteville Virginia del Este, concluido en 1978, es el más largo del mundo con un claro de 518 m y una relación $f/L = 1/4.59$.
- Puente de las Americas es un puente de armadura intermedia que se encuentra en el canal de Panamá y fue concluido en 1962.
- Runcorn que se encuentra en Ucrania, fue concluido en 1961.
- El puente sobre el cañón Glen concluido en 1958 y que tiene una longitud de 313.5 m, se encuentra en Arizona, Estados Unidos.
- Bayonne, fue abierto en 1931 encima del Kill van Kull con un claro de 503.53 m biarticulado, soporta una carretera con una elevación 45.72 m sobre el nivel del agua en el centro del claro. El puente de Bayonne contiene 12.19 m de carretera para un total de cuatro líneas de tráfico.
- Bahía de Sydney, es el puente ferroviario más grande del mundo con una armadura de acero doblemente articulada, y tiene un claro de 503 m, en la Bahía de Sydney Australia.
- Otro puente de armadura de arco es el Hohenzollern dividido en tres claros de 119 – 168 – 123 metros respectivamente.
- El Hell's Gate Arch en el río este de Nueva York. a 42.67 m sobre el río al centro del claro, con una luz de 297.94 m, concluido en 1917.
- el puente sobre el río Tyne, concluido en 1928, biarticulado de 162 m de claro en Newcastle, Estados Unidos.

- el Yeongjiang de 180 m de claro entre los apoyos en Corea del Sur.

Puentes de Arco de Costilla Sólida de Acero:

- Puente sobre el río Crooked de 125 m de luz y una altura sobre el cauce de 91.5 m , concluido en el 2000; se encuentra en Oregón, Estados Unidos.
- Puente sobre el embalse del Ricobayo en Estados Unidos , con un claro de 168 m concluido en 1995.
- La barqueta España con 160 m de claro consta de un arco de acero de 36.7 m de altura atirantado
- Cold Spring Cayonn Bridge de 366 m de luz, biarticulado se encuentra en Santa Bárbara, Estados Unidos.
- Puente sobre el lago Roosevelt en Arizona, con un claro de 329 m con costilla de acero articulada, concluido en 1991.
- Henry Hudson, en Spuyten Duyvil, en la ciudad de Nueva York en las riveras del río Harlem, tiene un claro de 243.84 m aproximadamente. Es un arco uniforme de cuadratura parabólica con relación grande entre su elevación / claro.
- Orford – Fairle, sobre el río Conecticut, en la línea que separa nueva Hampshire y Vermont. Estructura de tirantes suspendidos de un arco de acero. Su claro es de 129.54 m y su altura 25.91 m. La cubierta de la carretera está suspendida de los arcos por barras rígidas.
- Rainbow Arch, en las cataratas de Niagara, con un claro de 285 m con costilla de acero no articulada.
- Southwark a traves del río Thames en Londres; sus longitudes varían de 38 m hasta 42 m, concluido en 1921.
- Fremont en Portlan Oregón con una plataforma de 5.5 m de ancho, y de arco central que mide 275 m de claro biarticulado.
- Puente sobre el Loira en Orleans, Francia, con un claro de 201.6 m.
- Puente sobre el South Street, Estados Unidos, con un claro de 59 m y una relación $f/L = 1/6.66$.
- Puente sobre Río Blanco, en México que es un puente atirantado de arco de paso inferior; los dos arcos a los costados de la carretera están unidos en la clave para darle mayor rigidez a la estructura, tiene una luz de 76 m.
- Puente Targermunde en Elba, Alemania, con un claro de 185 m.
- Otros puentes importantes de este tipo son el Port Mann que es el uno de los más grande del mundo de este tipo con un claro de 305 m, el Grosvenor en Londres, el Olimpia en Washintong concluido en 1985, y el West end North Side, que es un arco de costilla de acero atirantado de paso inferior, sobre el río Ohio en Pittsburg, Pa.

Puentes de Arco de Costilla Sólida de Concreto:

- El Wanxian es el puente más largo del mundo de este tipo, con un claro de 420 m dividido en diez claros parciales sobre el arco de 40 m cada uno, cuatro claros de 35 m dos a cada lado del arco y dos claros de 30 m uno en cada extremo se encuentra en China.

- Sobre la cañada de Takachio en el parque nacional del Japón, tiene un claro de 143 m y consta de una sección de cajón de concreto presforzado de 15.5 m de anchura, fue concluido en 2000.
- Viamala que cruza el Hinterrhine, San Bernardino Pass, Suiza, tiene un claro de 112 m, el espacio entre columnas es de 17 m, sección en caja de cubierta de 9 m de ancho y un arco de 4 m de ancho.
- Modong en Hongshui China, concluido en 1999, tiene un claro de 180 m.
- Krk I y Krk II en Croacia, el primero, fue por muchos años el puente más grande del mundo de concreto reforzado con un claro de 390 m, fue concluido en 1980.
- Nagayabu en Japón con un claro de 82.8 m y 23.9 de elevación, con un ancho de losa de 7.6 m y 1.0 de espesor, y un arco laminar de 5.5 m de anchura y 1.2 m de espesor
- El Gladesville, arco de concreto reforzado, con un claro de 304.80 m Este elegante puente de seis carriles encima del río Parramatta, en la rama oeste del puerto de Sydney, Australia, fue concluido en 1964.
- Sando en Suecia, fue terminado en 1943; es un tipo de arco de concreto reforzado, tiene un claro de 263.96 m, sólo 2.44 m de espesor en la corona y 4.27 m en las líneas de arranque. Parejas de columnas circulares soportan la carretera con corredores encima del arco.
- Puente del Valle del Diablo, Hermsdorf, Alemania, que une a Jena con Gera. Es uno de los arcos de concreto armado más grandes del mundo supera una barranca de 137.77 m de ancho.
- Albrechgraben en Alemania con un claro de 160 m y una elevación de 80 m.
- Carinski en Bosnia-Herzegovina con claros de 67 m.
- Paul saver En la carretera Nacional link Cape Town y Port Elizabeth, Estados Unidos, con un claro de 137 m y columnas inclinadas.
- Natchez en Trace Parkway Tennessee, Estados Unidos, concluido en 1994.
- Pundefjord en Bergen Noruega, concluido en 1998.
- Fursteuland a través del río Sitter en St. Gallen, Suiza, con un claro de 135 m.
- Russian Gulch dos arcos paralelos fijos de 161 m de claro y de columnas verticales se encuentra en California.
- Tiber en Roma fue concluido en 1911, teniendo un claro libre de 100 m y una elevación del arco de 10 m aproximadamente.
- Coplelen Memorial, Minneapolis, MN. Concluido en 1923, alcanzando un claro de 121.92 m
- Plongastel puente encima de el río Elorn cerca de Brest, Francia, fue concluido en 1923, contiene tres claros de 186.54 m.
- El puente de arco en Esla, España, Es el puente ferroviario de concreto armado más grande del mundo, fue concluido en 1940, con un claro de 196.60 m.
- Puente de Arco sobre la Barraca del Diablo, en la península de Monterrey, CA, pasa por encima de una barranca de 97.54 m de ancho, con una altura de 73.152 m sobre el lecho del río. Puente de Arco con columnas soportando una carretera de dos vías.
- Puente Key, concluido en 1923, conectando Georgetown con Rosslyn, VA, de siete claros de tímpano abierto cuenta con tres arcos.
- Djpsund, cerca del Salto, Suecia. La base de la carretera está suspendida del arco mediante varillas redondas de acero. Con una Luz efectiva de 70.104 m mientras que la sección del arco sólo tiene 0.722 m, en la corona y 0.635 m de espesor.

- Arlington Memorial, conecta a Lincon Memorial con Arlinton Memorial Cemetery. Con nueve arcos, ocho son de costilla cerrada de concreto reforzado y el arco central con un claro de 66 m.
- Colorado Street en Pasadena, CA, proximo al Rose Bowl, de nueve claros de costilla abierta; fue concluida en 1913.
- Shepped's Dell a través de Young Creek proximo a Latourell, OR, concluido en 1914, con un claro de 30 m de costilla abierta.
- Cayon Padre, en la vieja ruta 66 proximo a Flagstaff, AZ, de costilla cerrada con un claro de 43 m, concluido en 1914.
- Tunkhannock Creek Viaduct proximo a Nicholson, PA, con diez claros de costilla abierta, concluido en 1915.
- Mendota a través del río Minnesota en Mendota, MN, con trece claros de costilla abierta, concluido en 1926.
- Rouge River en la carretera costera de Oregon cerca de Gold Beach, OR, con siete claros de costilla abierta, concluido en 1931.
- George Westinghouse Memorial a través de Turtle Creek a North Versailles, PA, con cinco claros de costilla abierta, concluido en 1931.
- Bixby Creek al sur de Carmel, CA, en la ruta estatal 1 alrededor del escadroso terreno de Big Sur, de un claro de 100 m y una flecha de 36.6 m, de costilla abierta, concluido en 1933.
- Spring Street a través de Duncan Creek en Chippewa Falls, WI, con un claro de 27m, concluido en 1916.
- Fort Morgan a través del South Platte River, cerca de Fort Morgan, CO, con once claros de 27 m, concluido en 1923.
- Cedar Creek proximo a Elgin, KS, con un claro de 25 m, concluido en 1927.
- Salginatobel, Suiza, Es un arco de concreto armado de tres articulaciones con un claro de 89.29 m, una anchura de 3.51 m, y fue construido en 1930.
- Schwandbach, construido en 1933, teniendo una curvatura elíptica en el plano con un claro de 37.39 m.
- Longeray en Francia, con un claro de 69 m, concluido en 1940.
- Otros Puentes de Arco de concreto son El Pasadena Pioneers en Pasadena, CA, Strawberry sobre el río Stanislaus, CA. Viaducto del Aire en Madrid, España, el Puente de Santo Domingo en México, Innsbruck triplemente articulado en Austria, entre otros.

I.2. CLASIFICACIÓN DE PUENTES DE ARCO

I.2.1 TIPO Y MATERIALES DE PUENTES DE ARCO

Materiales en Puentes de Arco

Un puente de arco puede clasificarse en base de los materiales con los cuales se construye. Los hay de mampostería que fueron usados muy comúnmente en el pasado por que se podían librar claros amplios a base de varios arcos continuos; los arcos en este tipo de material ya casi no se construyen. Los hay también de madera que son diseñados para claros pequeños y son utilizados comúnmente para puentes peatonales. Los más comunes son los de concreto armado y acero de nervadura sólida o a base de armadura.

Tipo de Puentes de Arco

Un puente de arco puede clasificarse por su tipo de función estructural dependiendo del número de articulaciones que tenga; los hay triplemente articulados o isostáticos, e hiperestáticos estos últimos se dividen en tres tipos que son: arcos doblemente articulados, arcos fijos o empotrados y arcos con una sola articulación, generalmente en la corona del arco y es utilizada temporalmente durante la construcción, este tipo de arcos es muy raro y casi no se utiliza.

I.2.2 CLASIFICACIÓN POR EL NIVEL DE CUBIERTA

Puentes de Arco Paso Superior. Son puentes con cubierta por arriba de los arcos y espacio libre por abajo figura I.2.2a, se diseñan como arcos de tímpano abierto sobre estribos que resisten el empuje. Con suficiente espacio libre y cimientos adecuados, este tipo es usualmente el más económico. A menudo compite en costos con otros sistemas de puentes.

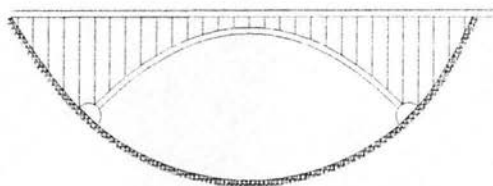


Figura I.2.2a Arco de tímpano abierto

Puentes de Arco de Paso Inferior. Los puentes con cubierta cerca de los apoyos del arco figura I.2.2b se diseñan normalmente a base de arcos con tirante, donde éstos toman el empuje del arco. Los apoyos de los extremos y los estribos son similares a los de los puentes de traveses o de armadura. Los arcos con tirantes compiten en costo con los puentes de tirante de paso inferior, en los lugares donde el espacio inferior está restringido. Debemos considerar que algunas veces se prefiere los arcos por razones estéticas.

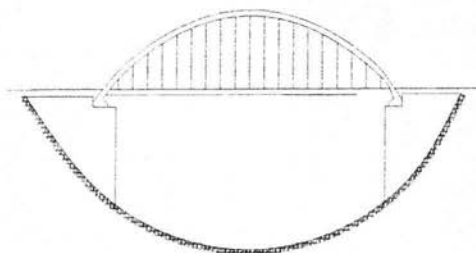


Figura I.2.2b Arco de Tirantes

Puentes de Arco de Paso a Través. Los puentes con cubiertas en el nivel intermedio figura I.2.2c pueden ser con tirantes, descansar en los apoyos que resisten el empuje o combinarse estructuralmente con claros laterales que aligeren el empuje del claro principal sobre las pilastras o pilares principales figura I.2.2d. Las posiciones intermedias de la cubierta se usan para claros largos que levantan mucho sobre pilares bajos. Los claros de los puentes de arco múltiple, en general están separados estructuralmente sobre las pilastras. Pero tales puentes se diseñan como estructuras continuas (tema tomado de la ref. 06).

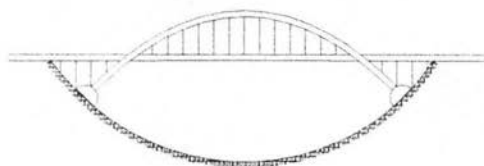


Figura I.2.2c Arco con la cubierta a nivel intermedio

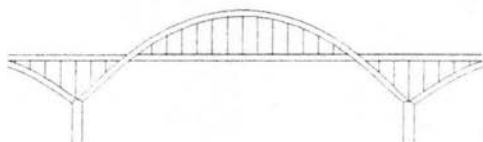


Figura I.2.2d Puente de Arcos Múltiples

I.2.3 CLASIFICACIÓN POR SU NERVADURA

Arco de Nervadura Sólida. Como se muestra en la figura I.2.3a este tipo de arco puede usarse con dos articulaciones en los extremos o puede ser no articulado. Las nervaduras de concreto reforzado son casi siempre no articuladas, los arcos de acero con claros cortos de nervaduras sólidas; por ejemplo de 150 a 180 m se encuentran generalmente articulados; pero las nervaduras de acero para arcos mayores son siempre no articuladas.

Arco de Nervadura Arriostrada. Como se muestra en la figura I.2.3b. La cubierta está colgando del arco señalada por la línea interrumpida. Estos arcos también llamados de armadura son, generalmente, con articulaciones en los apoyos.

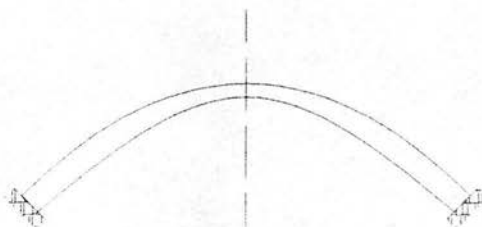


Figura I.2.3a Costilla sólida no articulada

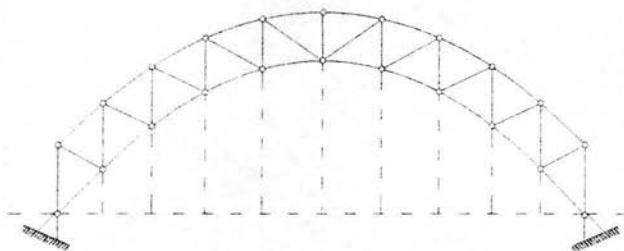


Figura I.2.3b Costilla arriostrada doble articulada

Arco de Tímpano Arriostrado. Como se muestra en la figura I.2.3c es esencialmente una armadura de cubierta con fuerzas horizontales desarrolladas en ambos extremos. Puesto que las componentes horizontales de reacción son esenciales para un arco, resulta lógico que deben existir excelentes condiciones de cimentación en el lugar.

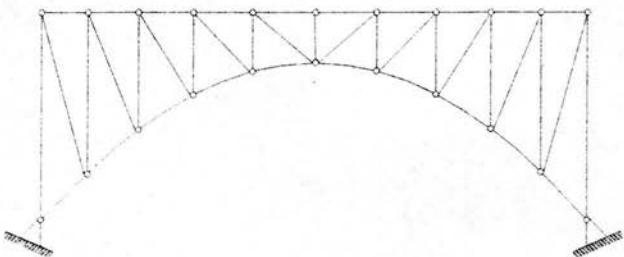


Figura I.2.3c Arco de descarga arriostrado

Arco con Tirante. Cuando no existan condiciones adecuadas para la cimentación, entonces la reacción horizontal se puede obtener por la unión de los extremos, como se muestra en la figura I.2.3d (tema tomado de la ref. 01).

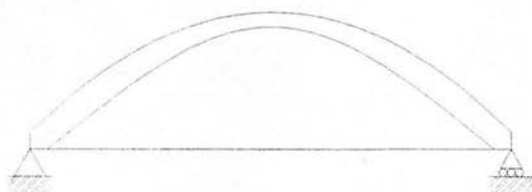


Figura I.2.3d Costilla sólida con tirante

I.2.4 POR SUS CLAROS O LUZ DE PUENTE

Los puentes para su análisis y diseño se pueden clasificar por medio de sus claros o luz de puente los cuales pueden ser:

Puentes con Claros Cortos. Estos puentes pueden ser hasta de 20 m y en este tipo están incluidos los siguientes: losas, vigas "I", vigas de madera, vigas de cajón de concreto prefabricado, vigas "I" de concreto prefabricado, conductos simples o multiceldas, vigas compuestas laminadas en acero, entre otros.

Puentes de Claros Medianos. Estos puentes pueden ser hasta de 50 m y en este tipo están incluidos los siguientes: vigas de cajón de concreto prefabricado, vigas "I" de concreto prefabricado, vigas compuestas laminadas en acero, puentes compuestos de plataforma de acero, traveses de cajón de concreto fabricado en sitio, traveses de cajón de acero y algunos arcos de concreto, entre otros.

Puentes de Claros Largos. Estos puentes se consideran de 50 m hasta 150 m y en este tipo están incluidos los siguientes: puentes compuestos de plataforma a base de traveses de acero, traveses de cajón de concreto pos-tensado colado en sitio, segmento de concreto pos-tensado, arcos de concreto, arcos de acero, armaduras de acero, entre otros.

Puentes de Claros Extra-Largos. Estos puentes se consideran de más de 150 m y en este tipo están incluidos todos los tipos anteriores en general excepto losas. Para claros entre 100 m y 1000 m se pueden solucionar con un puente sostenido a base de cables, y para claros entre 300 y 1500 o más pueden usarse puentes suspendidos o también llamados colgantes.

Por lo tanto para el tipo de puentes de arco que se consideran en el presente trabajo, serán de claros medianos, claros largos y en algunas ocasiones claros extra-largos.

Para comprender las longitudes de claros a utilizar dependiendo el tipo de estructura se plantea la tabla A (tema tomado de la ref. 04).

I.3. CONSIDERACIONES EN EL ANÁLISIS DE PUENTES DE ARCO

Los siguientes criterios fueron utilizados en base a las especificaciones de la "Standard Specifications Highway Bridges" de la AASTHO (ref. 06, 07 y 09). En el caso de las tablas para coeficientes de dilatación y diseño de cargas vivas fueron tomadas de la referencia 05.

I.3.1 CARGAS DE DISEÑO

Cargas Muertas. Las cargas muertas que actúan en un puente es la suma de los pesos de todos los componentes. Si el puente no cambia radicalmente a lo largo de su longitud, la carga muerta puede ser considerada como uniformemente distribuida y el peso integro de la estructura es soportado por los miembros principales.

El diseñador debe incluir a detalle todas las cargas soportadas por el puente como lo son las aplicadas por aceras y servicios. Se toma un porcentaje de carga del 10 al 15% para los pesos de los detalles como son: pasadores, remaches, soldaduras, atiesadores, juntas, trabajo de pintura, etc. Los siguientes son los pesos volumétricos de algunos materiales comúnmente usados en la construcción de un puente tabla B. (tema tomado de la ref. 07).

| TIPO DE SUPERESTRUCTURA | MATERIAL | RANGO DE CLAROS m | MÁXIMO CLARO EN SERVICIO |
|------------------------------------|-------------------|-------------------|---|
| LOSAS | Concreto | 0 - 12 | Existen muchos ejemplos |
| TRABES | Concreto | 12 - 250 | Hamana Ko Lane con 240m |
| | Acero | 30 - 260 | Sava I con 261m |
| AMADURA DE ACERO | Acero | 90 - 550 | Quebec Rail con 550m Greater N. Orleans con 480m |
| ARCOS | Concreto | 90 - 300 | Gladesville con 305m |
| | Armadura de Acero | 240 - 500 | New River Gorge con 510m |
| | Costilla de Acero | 120 - 360 | Port Mann con 365m |
| PUENTE SUSPENDIDO A BASE DE CABLES | Concreto | ≤ 250 | Maracaibo con 235m |
| | Acero | 90 - 850 | Normandia con 856m |
| PUENTE COLGANTE | Acero | 300 - 1500 | Humber con 1410m |

Tabla A. Longitudes de claros para varios tipos de superestructuras (ref. 04)

Cargas Vivas. La carga viva en puentes son las fuerzas transmitidas por los vehículos que transitan en el puente. Se expresa en carriles de diseño y carriles de carga. El número de carriles de diseño depende del ancho de la carretera. Los carriles de carga están representadas por un camión tipo con remolque, o como una carga uniforme de 3.05 m de ancho en combinación con una carga concentrada ver figura I.31a. Se debe determinar la posición de la carga concentrada que produce el efecto más desfavorable; la determinación de dicha carga lleva a el concepto de líneas de influencia. Como se muestra en la figura I.3.1a hay 5 clases de cargas: H20, H15 y H10, las cuales representan un camión con dos ejes cargados y HS20 y HS15 que representan un camión con tres ejes cargados. Los efectos que producen la carga simultáneamente en más de dos carriles se reducirán con un factor de carga, de 0.90 para 3 carriles y de 0.75 para cuatro carriles.

| MATERIALES | PESO EN t/m ³ (Máx.) |
|---------------------|---------------------------------|
| CONCRETO ARMADO | 2.40 |
| CONCRETO SIMPLE | 2.20 |
| ACERO | 7.85 |
| ARENA SECA | 1.75 |
| ARENA SATURADA | 2.10 |
| TEPETATE | 1.95 |
| GRAVA | 1.60 |
| TEZONTLE SECO | 1.25 |
| TEZONTLE SATURADO | 1.55 |
| ALUMINIO | 2.75 |
| PAVIMENTO (Asfalto) | 1.50 |
| FIERRO FUNDIDO | 7.90 |

Tabla B. Peso volumétrico de algunos materiales para puente

Impacto. La carga de impacto son las fuerzas dinámicas producidas por la velocidad a la que circulan los vehículos que incrementan las fuerzas internas de la estructura. Esta carga se determinará como una fracción de la carga viva y según la AASHTO se determina con la formula:

$$I = \frac{15}{L + 37.5} \leq 0.30$$

donde L: es la luz o claro del puente en metros.

Fuerzas Longitudinales. Son las fuerzas que provocan los vehículos por arranque y frenado en la dirección del eje del puente. Por lo general se toma un 20% del peso del vehículo de diseño.

Fuerzas Centrífigas. Este incremento solo se usará en puentes con longitud curva en la dirección de su eje y se produce por los empujes radiales. Se tomará un 20% del peso del vehículo.

Fuerzas de Viento. Son las cargas móviles que pueden actuar horizontalmente en cualquier dirección haciendo presión en las áreas expuestas de la superestructura, conforme se ve en elevación lateral; sobre el tráfico en el puente, con centro de gravedad a 2 m sobre la cubierta, y en las áreas cubiertas de la subestructura, como se ve en elevación frontal o lateral. Se tomarán según la AASHTO para Arcos y Armaduras una presión de viento mínima de 366 kg/m^2 (75 lb/pie^2).

Fuerzas Térmicas. Deben preverse las dilataciones y contracciones por variaciones de temperatura y en las estructuras de concreto, también por las contracciones. En la tabla C se toman algunos datos de los coeficientes de dilatación para distintos materiales.

| MATERIALES | $\alpha, \frac{1}{C^{\circ}} \times 10^{-6}$ |
|-----------------------|--|
| CONCRETO | 10 |
| ACERO | 12 |
| MAMPOSTERÍA DE BARRO | 6 |
| MAMPOSTERÍA DE PIEDRA | 8 |
| MADERA | 4 A 5 |
| ALUMINIO | 24 |
| COBRE | 17 |
| PLASTICOS | 70 |

Tabla C. Coeficientes de dilatación por temperatura (ref. 05)

Fuerzas Sísmicas. Estas fuerzas se deben considerar actuando horizontalmente en el centro de gravedad de la estructura, en la dirección donde produzcan los esfuerzos máximos en el elemento o parte de la estructura que se considera.

Fuerzas Provocadas por Asentamientos Diferenciales. Son las fuerzas provocadas por hundimientos en los apoyos de un puente, provocando problemas en la superestructura, haciendo necesario un análisis preciso.

1.3.2 ESTUDIOS DE CAMPO

Los estudios de campo pueden ser muy diversos en la construcción de cada puente, pero se mencionaran los más importantes, los cuales se pueden dividir en cuatro grandes grupos. (Tema tomado de la Ref. 11):

Estudios Topográficos

- Origen del kilometraje
- Plano en planta, a escala 1:200, mostrando el eje del camino, curvas de nivel, dirección del cause, construcciones cercanas y datos importantes.
- Ángulo que forma el camino con la corriente.
- Elevación y descripción del banco de nivel más próximo.

- Planos de localización correspondientes a un kilómetro a cada lado de la obra.
- Elevación de la subrasante que resulte más adecuada.

Estudios Hidráulicos

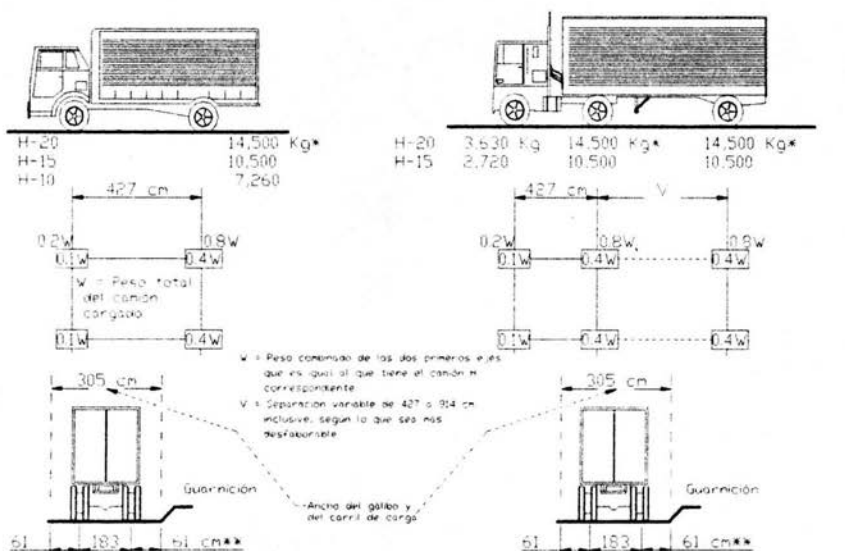
- Una sección en el cruce y dos secciones auxiliares aguas arriba y aguas abajo a escala 1:200 considerando: nivel de aguas mínimas, nivel de aguas máximas extraordinarias, pendiente del fondo del cauce o de la superficie del agua en una extensión de 200 m a cada lado del puente.
- Coeficiente de rugosidad del cauce.
- Velocidad superficial indicando el procedimiento usado.
- Frecuencia y duración de las corrientes máximas extraordinarias, época del año en que se efectúan y dimensiones aproximadas del material de arrastre.
- Si el cauce es estable o divergente o si tiene tendencias a divagar.
- Si la corriente deposita o socava.
- Si hay que efectuar alguna canalización.
- Si el remanso afectará propiedades vecinas.
- Claro mínimo de los tramos y espacio libre vertical para el paso de los cuerpos flotantes.
- Datos sobre puentes construidos aguas a bajo y aguas arriba próximos al cruce, tales como su longitud, longitud mínima del tramo, altura de la subrasante sobre el fondo, área hidráulica, si es o no suficiente el puente, separación entre pilas y pendiente del cauce en el cruce.

Estudios Geológicos y de Mecánica de Suelos

- Características generales de los materiales que forman el fondo y las márgenes de la corriente.
- Corte geológico indicando los materiales del subsuelo y el nivel de las aguas freáticas, enviando muestras alteradas e inalteradas.
- Carga admisible aproximada que pueden soportar cada estrato del subsuelo.

Estudios Comerciales

- jornales medios en la región para diferentes categorías.
- Precios unitarios de los diversos materiales en el lugar de la obra.
- Ubicación de los diferentes bancos de materiales.
- Vía más próxima de comunicación.
- Clima dominante en la región.
- Enfermedades de la región.
- Importe de las indemnizaciones que tendría que hacerse al llevarse acabo las obras.



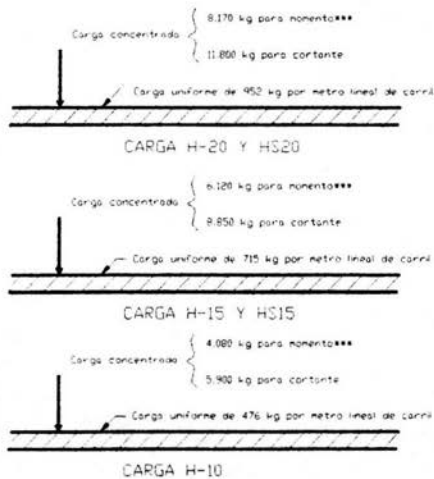
Reglas para la aplicación de la carga viva estándar:

1. La carga por carril a el vehículo estándar ocupan un ancho de 305 m. Estas cargas se colocarán en bandas de 35 m distribuidas a lo ancho de la calzada del puente en números y posiciones tales que produzcan fuerzas internas máximas. Cuando el ancho de calzada se encuentre entre 6 y 72 m se considerarán dos bandas de tráfico de la mitad del ancho de calzada.

2. Cada carga de carril o vehículo estándar se considera como unidades indivisibles y no se podrán considerar aplicaciones fraccionales de ellos.

3. Cuando se considere más de un carril de tráfico se reducen las fuerzas internas calculadas a los siguientes porcentajes considerando que es poco probable que las cargas máximas coincidan con varios carriles:

| | |
|-----------------------|------|
| Uno o dos carriles | 100% |
| Tres carriles | 90% |
| Cuatro o más carriles | 75% |



* Para el diseño de pisos con las cargas H20 y HS20 podrá usarse en lugar de la carga de eje de 14,500 kg una carga de eje de 10,900 kg a dos cargas de eje de 7,260 kg cada una espaciadas 122 cm entre sí y separando lo que produzca efectos más desfavorables.

** Para el diseño de losas se supondrá que el eje vertical del centro de la rueda queda a 305 cm de la guarnición.

*** En el art. 2.8 se especifica una carga adicional para claros continuos que incluyan cargas de carril.

Figura I.3.1a Cálculo de las cargas vivas estándar según la AASHTO.(Ref. 05)

1.3.3 CONSIDERACIONES EN LA CONSTRUCCIÓN DE CUBIERTA Y ESTRIBOS

Cubierta. Las cubiertas de puentes de arco son generalmente de concreto reforzado; ya sea la estructura de acero o de concreto, a menudo, se usa el concreto aligerado sobre una estructura de acero hecha con largueros y piezas de puente. Las cubiertas de concreto se proveen de juntas de expansión o son presforzadas, para evitar la cooperación indeseable con la estructura primaria. Las cubiertas ortotrópicas que combinan las funciones de cubierta de tráfico, barra – tirante, trabe rigidizadora y diafragma lateral se han empleado en algunos puentes de arco mayores.

Estribos. Para la construcción de los estribos es necesario conocer el claro y la elevación del arco, ya que deben resistir la componente horizontal en los apoyos del arco. Un arco de una gran relación elevación-claro (f/L), desenvuelve relativamente menos componente horizontal, pero, es una estructura relativamente pesada. Un arco con una pequeña relación elevación-claro (f/L), produce una enorme componente horizontal y provoca que se tengan que diseñar muy largos estribos. Los esfuerzos por temperatura, contracción y reducciones elásticas son comunes en arcos planos y requieren materiales extra a menos que se sitúe roca en los apoyos.

1.3.4 ECONOMÍA Y ESTÉTICA EN PUENTES DE ARCO

Estética. Podemos dividir la estética de un puente de arco en tres partes importantes que son: La cubierta o superficie de rodamiento, el soporte de la cubierta o tímpano estructurado y el aro del arco de acero o concreto.

- a) La Cubierta. Debe de estar arreglada simétricamente, con el espacio suficiente para vehículos y peatones. Una curva ligera en la carretera no solo es útil para el drenaje, sino que agregamos gracia por el conjunto.
- b) Estructuración del Tímpano. Los soportes de la cubierta o estructura del tímpano de un arco son similares a los de un viaducto y son similarmente proporcionados. La distancia económica entre columnas, depende de la altura del arco hasta la cubierta.
- c) Aro del Arco.
 - 1) Acero. Para el segmento circular de arcos se utilizan las formas geométricas de la parábola y de la hipérbola y algunas de estas formas son apropiadas para arcos de elevación pequeña. Los arcos pueden ser lo suficientemente elevados para desplegar su fuerza.
 - 2) Concreto. Las formas comunes para un puente de arco de concreto son la semicircular, elipse y segmento circular. La primera es preferible para una serie de arcos en grandes viaductos. Los segmentos de círculo y elipse se aproximan a la línea de presiones de una carga uniformemente repartida, por lo que, pueden ser diseñadas como una figura parabólica. Los segmentos de círculo pueden desplegar mejor su fuerza, los semicírculos y elipses son usados por su fina apariencia. Los segmentos de círculo y elipses manifiestan una mayor ventaja en puentes bajos cuando no hay suficiente espacio para una muy grande elevación.

Economía. La economía de un puente de arco está sujeta a la influencia de su relación Elevación / Claro o luz del puente, esto va a depender en muchas ocasiones de las condiciones del lugar. El puente de arco es una estructura muy económica comparada con otros sistemas de puentes a base de vigas y pilas de la misma longitud, ya que se utiliza menos materiales en la construcción de estos, pero no han sido utilizadas por razones que superan su economía. Se puede decir que la relación Elevación / Claro o luz del puente más económica es la que se encuentra entre los rangos de 0.25 y 0.30, pero algunas razones hacen estos límites impracticables. Los puentes de arco con claros menores de 50 m resultan elevados en su costo.

I.3.5 COORDENADAS DE EJES PARABÓLICOS

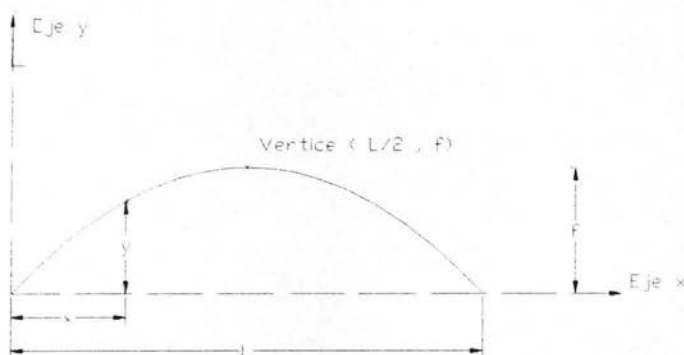


Figura I.3.5a

Tomando la ecuación de la parábola con vértice en la corona y ejes en el apoyo izquierdo del arco tenemos (ver figura I.3.5a):

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \dots \dots \dots (a)$$

Sustituyendo en (a) para el punto $(L, 0)$ y vértice $(L/2, f)$

$$(L/2 - L)^2 = 4p(f - 0) \dots \dots \dots (b)$$

Haciendo operaciones encontramos el valor de **p**

$$p = \frac{L^2}{16f}$$

Sustituyendo el valor de **p** en la ecuación (a) que da de la siguiente forma para cualquier punto del arco (x,y) .

$$(L/2 - x)^2 = \frac{L^2}{4f}(f - y) \dots \dots \dots (c)$$

Despejando y de la ecuación (c) nos queda

$$y = 4f \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad (1)$$

que es la ecuación para encontrar las coordenadas de ejes parabólicos conociendo su claro **L**, su elevación **f** y cualquier punto sobre el eje **x**.

I.3.6 ÁNGULO FORMADO POR LA HORIZONTAL Y CUALQUIER PUNTO DEL ARCO

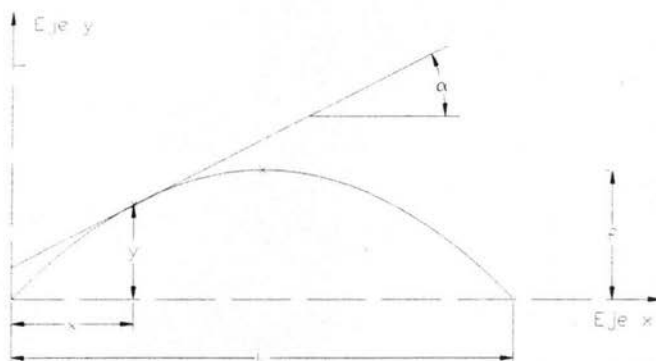


Figura I.3.6a

A partir de la ecuación (1) podemos derivar en función de “**dx**” para obtener la pendiente en cada punto del arco por lo tanto tenemos (ver figura I.3.6a):

$$\frac{dy}{dx} = m = \tan \alpha = \frac{4f}{L^2}(L - 2x) \quad (2)$$

para obtener el valor del ángulo α despejamos la ecuación (2) quedando

$$\alpha = \arctan \left[\frac{4f}{L^2}(L - 2x) \right] \quad (3)$$

I.3.7 SECCIÓN TRANSVERSAL Y LONGITUD DE UN ARCO SIMÉTRICO

Sección Transversal de un Arco Simétrico

Para considerar al eje del arco como una sección transversal constante, para la solución de las reacciones horizontales de los capítulos I.4.2 y I.4.3, se debe considerar que los momentos de inercia de las secciones de un arco, con relación a su eje neutro, varían directamente con la secante del ángulo en cada punto del arco ($I_x = I_c \sec \alpha$).

Por lo tanto, podemos decir, que el espesor de los miembros curvos varía desde la corona a la línea de arranque del arco por medio de la siguiente ecuación:

$$d_x = d_c^3 / \sec \alpha \quad (4)$$

donde:

d_x = es el peralte en cualquier punto del arco

d_c = es el peralte en la corona del arco

$\sec \alpha$ = es la secante del ángulo formado por la horizontal y la tangente que pasa por cualquier punto del arco, ver figura I.3.7a.

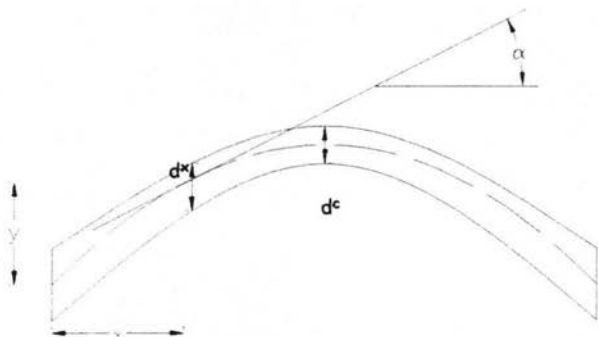


Figura I.3.7a

Longitud de un Arco Simétrico

Si trasladamos los ejes del arco a la corona, y además, consideramos los valores del eje y positivos en la parte inferior del mismo (ver figura I.3.7b), tendríamos que:

$$x^2 = Ky \quad (5)$$

ahora bien, cuando:

$$x = \frac{L}{2} \quad \text{y} \quad y = f, \quad \text{por lo tanto} \quad K = \frac{L^2}{4f}$$

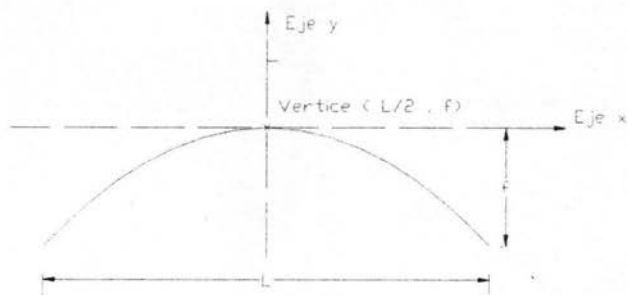


Figura I.3.7b

Sustituyendo en (5) y despejando y , tenemos:

$$y = \frac{4fx^2}{L^2} \quad (6)$$

y además, la longitud de una curva está dada por la ecuación paramétrica siguiente:

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} ds \quad (7)$$

Si convertimos la ecuación (6) a su forma paramétrica, y además, derivamos los valores de x y y nos queda:

$$\begin{aligned} x &= t && \text{derivando con respecto a } t \text{ nos queda } x'(t) = 1 \\ y &= \frac{4ft^2}{L^2} && \text{derivando con respecto a } t \text{ nos queda } y'(t) = \frac{8ft}{L^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo para los límites inferior $a = 0$ y superior $b = L/2$ la ecuación (7) queda:

$$s = \int_0^{L/2} \sqrt{1^2 + \left(\frac{8ft}{L^2}\right)^2} ds \quad (8)$$

Integrando la ecuación anterior y sustituyendo los límites establecidos nos da el siguiente resultado:

$$s = \left[\frac{L}{4} \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{L}\right)^2} + \frac{L^2}{16f} L_N \left\{ \frac{64f^2}{L^3} + \frac{16f}{L^2} \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{L}\right)^2} \right\} \right] \quad (9)$$

y multiplicando por dos (por ser la ecuación anterior integrada solo para la mitad del arco) tenemos:

$$s = \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{L}\right)^2} + \frac{L}{4f} L_N \left[\frac{4f}{L} + \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{L}\right)^2} \right] \right\} \frac{L}{2} \quad (10)$$

Que es la ecuación para obtener la longitud de cualquier arco parabólico simétrico en función de su claro o luz y la elevación del mismo.

En la referencia 08 se presenta una tabla de valores de longitud de arco para diferentes relaciones elevación /claro, la cual se reproduce a continuación.

| | | | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| relación del arco de f/l | 0.00 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 |
| longitud de eje del arco parabólico (s) | 1.000L | 1.007L | 1.026L | 1.057L | 1.098L | 1.148L | 1.204L | 1.334L | 1.479L | 1.635L |
| abscisa de su punto en el arco parabólico que corresponde a la cuarta parte de la longitud del eje. | 0.250L | 0.249L | 0.246L | 0.241L | 0.234L | 0.226L | 0.219L | 0.205L | 0.195L | 0.186L |

Tabla D. Longitud de ejes parabólicos (ref. 08).

I.3.8 CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE UN PUENTE DE ARCO

Definición: El Puente de Arco es una estructura rígida, que cualquiera que sean la intensidad y dirección de sus cargas, tiende a producir reacciones horizontales convergentes y dichas cargas se transmiten a los apoyos por compresión pura.

Aspectos Importantes a Cuidar:

1. La forma debe corresponder exactamente al funicular de cargas aplicadas (ya que cualquier desviación de esta trayectoria implica aparición de flexiones), para que las cargas puedan ser transmitidas a los apoyos. El polígono funicular se aproxima bastante a un segmento de círculo, una curva circular de centros múltiples o una parábola. Ver figura I.3.8a (ref. 05).
2. La forma del arco es ventajosa, debido a que los momentos internos que resultan de las cargas aplicadas son mucho más pequeñas que los que resultarían si se aplicaran las mismas cargas a una estructura de eje recto del mismo claro. Ver figura I.3.8b (ref. 01).
3. Su plano de curvatura es también un plano de simetría para cada una de las secciones transversales y que las fuerzas externas aplicadas al arco actúan solamente en este plano. Si la sección transversal del arco no es simétrica con

- respecto al plano de curvatura, se producirá torsión bajo carga y en estas condiciones la barra no puede considerarse propiamente un arco. (ref. 03 y 10).
4. Por estar sujeto a compresiones elevadas, el arco puede fallar por pandeo transversal (pandeo lateral) o, por pandeo en el plano cuando su sección es muy esbelta. (ref. 05).
 5. A igualdad de claros, los empujes horizontales en los apoyos aumenta al reducir la flecha del arco por lo que conviene que esta sea lo más grande posible. (ref. 02).
 6. Los esfuerzos de compresión son muy altos por lo que se requieren elementos de contraventeo que ligen a los dos arcos colocados a ambos lados de la calzada. (ref. 02).
 7. Con la necesidad de resistir las componentes horizontales de las reacciones en la proyección de arcos, en ocasiones estas fuerzas se absorben con tirantes entre los soportes y en otras con estribos o contrafuertes pesados. (ref. 06).
 8. Por su hiperestaticidad los arcos de sección continua (doblemente articulados y fijos) están sujetos a efectos de temperatura y hundimientos diferenciales en los apoyos. (ref. 05).
 9. Cuando esté actuando la carga, los apoyos del arco no deben desplazarse. (ref. 10).
 10. El uso de articulaciones depende de las condiciones de cimentación. Si los cimientos no son completamente seguros, se deben emplear apoyos articulados (ref. 06).
 11. Para evitar pequeños movimientos en los estribos, es necesaria una tercera articulación por lo general en la corona del arco (ref 06).
 12. Para cargas móviles pesadas, a veces es ventajoso asignar la resistencia a la flexión del sistema a traves o armaduras rigidizadoras especiales análogas a las de los puentes colgantes (ref 06).
 13. El análisis elemental de arcos debe hacerse en base a la teoría elástica o de primer orden la cual supone que la forma del geométrica del arco permanece constante. Los arcos que sufren acortamiento elástico de las costillas, desplazamientos elásticos o no de los estribos y deformación local por concentraciones de carga viva aumentan en arcos planos; por lo que, deben verificarse por la teoría de la deflexión o de segundo orden.
 14. Los arcos deben diseñarse para esfuerzos combinados debidos a cargas axiales y flexionantes ($\sigma = N/A \pm M/S$); y además, para esfuerzos provocados por cargas cortantes ($\tau = V/A$).
 15. * Para arcos triplemente articulados, en la práctica, se diseñan con una relación de elevación / claro (f/L) de 0.083 hasta 0.200. Y los arcos doblemente articulados se diseñan con una relación f/L que va de 0.150 hasta 0.300 en concreto y de 0.070 hasta 0.500 en arcos de acero de tímpano abierto y 0.100 hasta 0.500 en arcos de acero atirantados.
 16. * Los claros utilizados para arcos de acero de costilla sólida van desde los 60 m hasta los 360m.
 17. * Los claros utilizados para arcos de concreto van desde los 30 m hasta los 420 m.

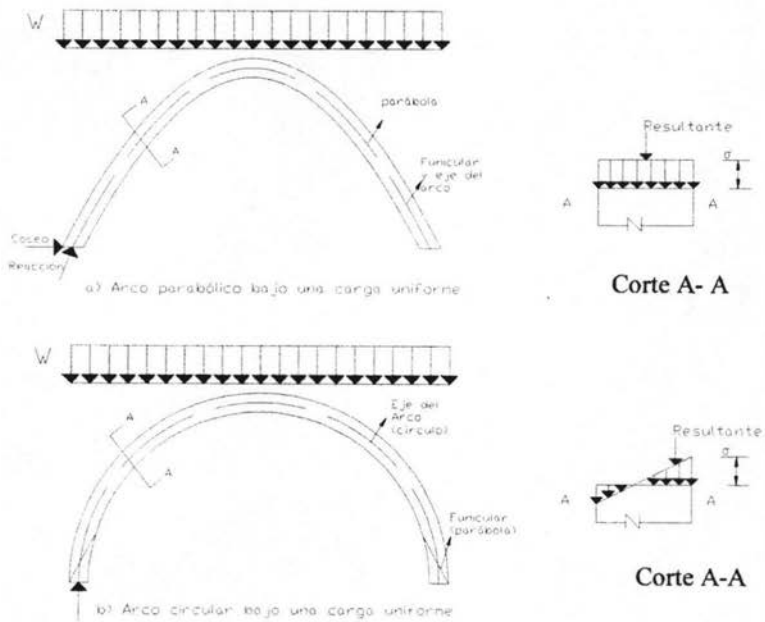


Figura I.3.8a Esfuerzos en arcos de diferentes formas.

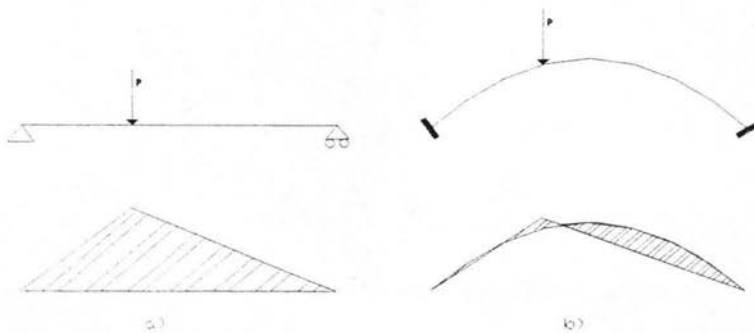


Figura I.3.8b Comparación de momentos: a) viga libremente apoyada; y b) Arco

*Nota: Los datos anteriores son datos representativos de grupos de Puentes de Arco que han sido construidos alrededor del mundo bajo estas características. La construcción y las condiciones para el diseño dependerán de las condiciones propias del proyecto y la disponibilidad de materiales y equipo para su construcción.

I.4. MÉTODOS DE ANÁLISIS

I.4.1 ANÁLISIS ISOSTÁTICOS (ARCOS TRIPLEMENTE ARTICULADOS)

Este tipo de arcos posee tres articulaciones; Una interna en la nervadura del arco y dos en los apoyos del mismo. Existen cuatro incógnitas, dos componentes horizontales y dos verticales, estas componentes se pueden resolver con las ecuaciones de equilibrio estático y considerando que la suma de momentos respecto a la articulación es igual a cero. Lo anterior se puede describir de la siguiente manera:

- La suma de fuerzas horizontales es cero ($\Sigma F_x = 0$ ó $\Sigma F_H = 0$). (Ejem.: $H_A - H_B = 0$ ver figura I.4.1a).
- La suma de los momentos con respecto a los apoyos debe ser cero ($\Sigma M_i = 0$). (Ejem.: $V_B = Pk$ ver figura I.4.1a).
- La suma de las fuerzas verticales debe ser cero ($\Sigma F_y = 0$ ó $\Sigma F_V = 0$). (Ejem.: $V_A = P[1-k]$ ver figura I.4.1a).
- El momento de flexión en la articulación interna debe de ser cero ($\Sigma M_C = 0$). (Ejem.: $H = V_B b / f$ ver figura I.4.1a).

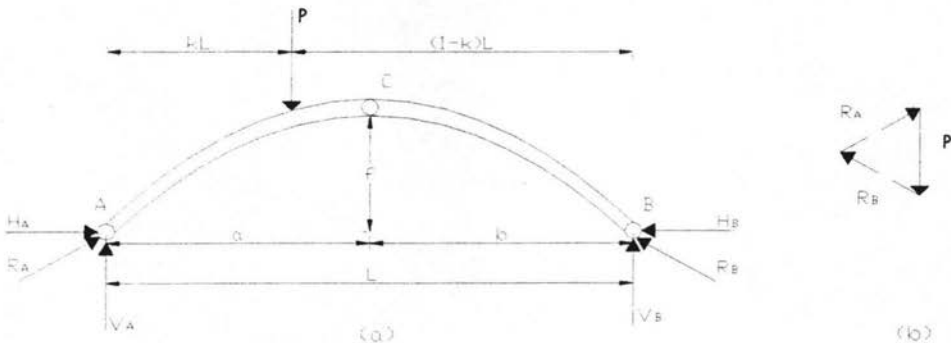


Figura I.4.1a Arco Isostático (Triplemente Articulado)

I.4.2 MÉTODO DEL TRABAJO MÍNIMO (ARCOS DOBLEMENTE ARTICULADOS)

En el caso del arco biarticulado de la figura anterior, se puede observar que se tienen cuatro incógnitas, dos reacciones verticales que se pueden resolver con las ecuaciones del equilibrio estático y dos horizontales para las cuales se buscará una ecuación más para su solución.

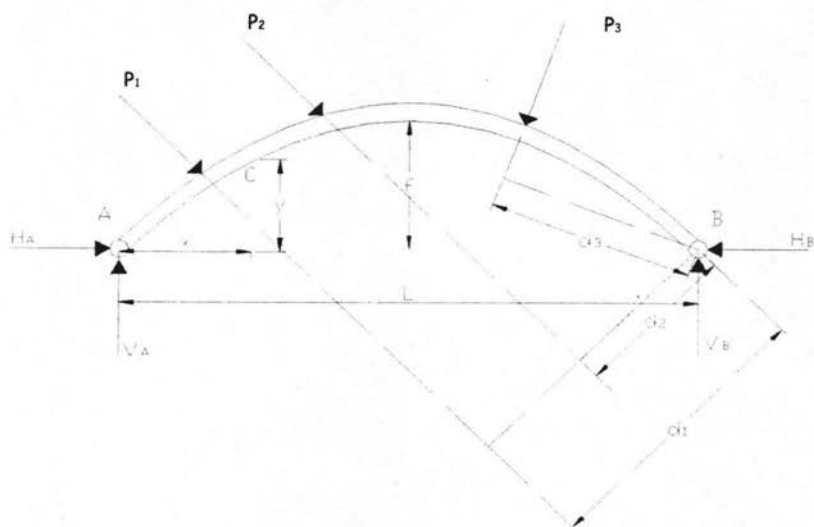


Figura I.4.2a Arco Biarticulado (Hiperestático)

Para determinar las reacciones verticales se procede de la siguiente manera. Utilizando la tercera ecuación de equilibrio $\Sigma M_i = 0$, tomamos momentos con respecto al punto B y dado que en las articulaciones el momento es nulo tenemos:

$$V_A L - \sum P_n d_n = 0$$

$$V_A = \frac{\sum P_n d_n}{L} \quad (11)$$

y utilizando la primera ecuación del equilibrio la cual nos dice $\Sigma F_v = 0$, tenemos:

$$V_A + V_B - \sum P_v = 0$$

$$V_B = \sum P_v - V_A \quad (12)$$

donde:

$P_n d_n$ Son las cargas aplicadas multiplicadas por sus respectivas distancias perpendiculares medidas al punto de deformación.

ΣP_v Son las componentes de deformación de las cargas.

Para encontrar H_A y H_B usaremos el segundo teorema de Castigliano o teorema del trabajo mínimo. Para llegar a la deformación deseada primero establecemos la deformación para la energía total de deformación almacenada bajo la carga. Observando la figura I.4.2b podemos ver que M, V y N son respectivamente el momento flexionante, el esfuerzo

cortante y el esfuerzo normal en cualquier sección transversal positivos cuando están dirigidos como se muestra en la figura.

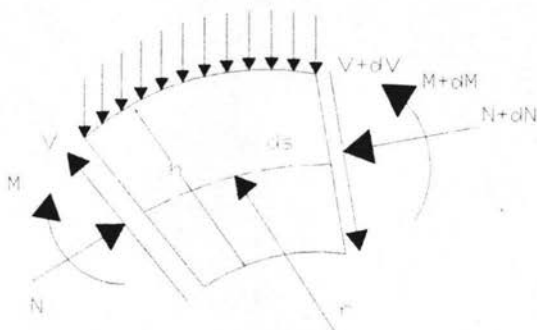


Figura I.4.2b Sección transversal de un arco

Despreciando el trabajo realizado por el momento torcionante, dado que, su plano de curvatura es también su plano de simetría; de no ser así no podría considerarse un arco, por lo tanto tenemos:

$$T = \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EI} + \int_0^s \frac{N^2 ds}{2EA} + k \int_0^s \frac{V^2 ds}{2GA} \quad (13)$$

La ecuación (13) es el trabajo total realizado por el arco y considerando que el primer teorema de castigliano que dice: "para obtener el desalojamiento del punto de aplicación de una carga en la dirección de ésta, basta con determinar la derivada parcial del trabajo total de deformación con respecto a dicha carga", por lo tanto, tomando a H como reacción superabundante tenemos:

$$\delta = \frac{\partial T}{\partial H} \quad (14)$$

y aplicando el teorema del trabajo mínimo o segundo teorema de castigliano el cual dice: "La derivada parcial con respecto a una carga, del trabajo total de deformación producido por el sistema de cargas del cual forma parte de que se trata, es igual a cero". Y como hemos supuesto nulo el desalojamiento de la carga H nos queda:

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \int_0^s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} ds + \int_0^s \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial H} ds + k \int_0^s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial H} ds = 0 \quad (15)$$

está ecuación todavía se puede simplificar más si tomamos en cuenta que las deformaciones por cortante son tan pequeñas para el arco parabólico (ver ref. 01. Nervadura sólida de arco doblemente articulado), que se puede encontrar comúnmente en la práctica y, por lo tanto, podemos simplificar la ecuación (15) como sigue:

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \int_0^s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} ds + \int_0^s \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial H} ds = 0 \quad (16)$$

La ecuación anterior la podemos condicionar para arcos con una flecha $f < L/10$ (ver ref. 03. Págs.178-182). Para arcos con una relación $f \geq L/10$, la fórmula anterior se reduce a la expresión que se usa muy comúnmente en la práctica para la solución de puentes de arco de tipo parabólico biarticulado, en el cual no es necesario considerar la fuerza normal en el análisis de las deformaciones, por tanto, la fórmula sólo queda condicionada a la deformación por flexión:

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \int_0^s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} ds = 0 \quad (17)$$

Ahora bien, si tomamos momentos en un punto cualquiera C del arco (ver figura I.4.2a) y analizando el lado izquierdo respecto al punto C tendríamos lo siguiente:

$$M = V_{Ax} - \sum P_n d_n - H_A y \quad (18)$$

y además, se puede observar que en la ecuación anterior $V_{Ax} - \sum P_n d_n$ representa el momento estático de una viga curva (M_E), por lo tanto, podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$M = M_E - H_A y \quad (19)$$

sustituyendo el valor del momento en la ecuación (17) nos queda:

$$\frac{\partial T}{\partial H_A} = \int_0^s \frac{M_E}{EI} \frac{\partial M}{\partial H_A} ds - \int_0^s \frac{H_A}{EI} \frac{\partial M}{\partial H_A} ds = 0 \quad (20)$$

pero sí:

$$\frac{\partial M}{\partial H_A} = \frac{\partial [M_E - H_A y]}{\partial H_A} = -y \quad (21)$$

por lo tanto la ecuación (20) nos quedara:

$$\frac{\partial T}{\partial H_A} = H_A \int_0^s y^2 ds - \int_0^s M_E y ds = 0 \quad (22)$$

despejando H_A nos queda:

$$H_A = \frac{\int_0^s M_E y ds}{\int_0^s y^2 ds} \quad (23)$$

Que es la ecuación general para encontrar la reacción horizontal de un arco y es aplicable a cualquiera que sea la forma del arco (como un primer análisis).

Recomendaciones:

- 1) Cuando $f < L/10$ se dice que el arco es un arco plano donde los esfuerzos normales se incrementan considerablemente. En la práctica rara vez se utiliza esta condición por los problemas de erección que provocan y su cálculo se dificulta incrementando los costos en este tipo de arcos (esta condición es más crítica en arcos fijos que en biarticulados).
- 2) Para el semicírculo con carga concentrada al centro del claro, los esfuerzos cortantes se incrementan llegando a ser significativos, por lo cual, se aceptará la integración de la ecuación (15) donde k representa el factor de cortante dependiendo de la forma de la sección del arco.
- 3) Para evitar las cargas perpendiculares a la costilla del arco, se unirán por medio de un sistema de contraventeo. Este sistema puede ser aplicado por medio del sistema de piso en la parte superior del arco y en el caso que quede por debajo del arco se utilizarán elementos de liga independientes.

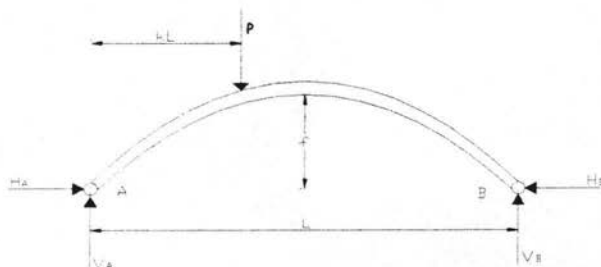


Figura I.4.2c. Carga Asimétrica Aplicada a un Arco

Cuando la carga que es aplicada P al arco es asimétrica a una distancia kL del origen (figura I.4.2c), la determinación del empuje horizontal H_A se realiza utilizando el principio de superposición y se reemplaza el sistema asimétrico por uno simétrico y uno antimétrico como se muestra en la figura I.4.2d.

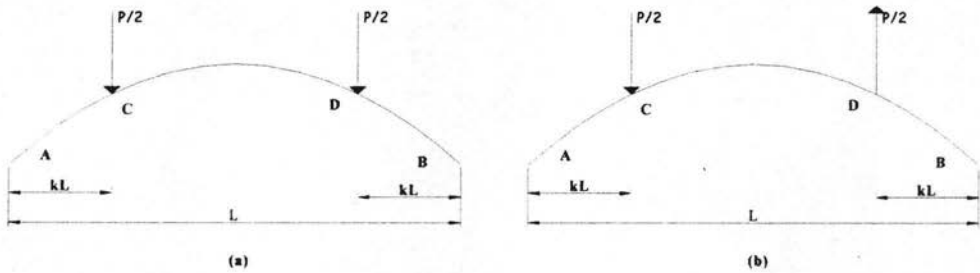


Figura I.4.2d. Carga simétrica y antisimétrica

Por simetría, el empuje horizontal que origina la carga, en el punto C es igual a la que actúa en la misma dirección en D. Así la reacción horizontal será la misma que la correspondiente en la figura I.4.2d (a); mientras que para la carga antisimétrica de la figura I.4.2d (b) el empuje es cero.

Por el método de flexibilidad, el diagrama de momentos (m) para la figura I.4.2d (a) es como se muestra en la figura I.4.2e

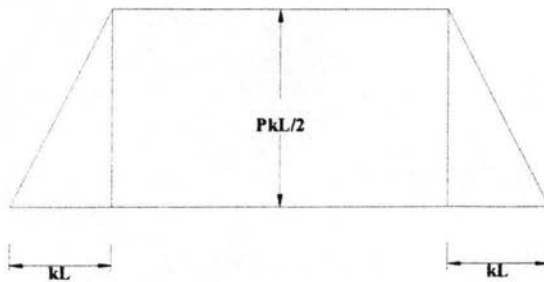


Figura I.4.2e

Por lo tanto podemos deducir que

$$\int_{-L}^L \frac{my}{EI_x} ds = \frac{2}{EI_0} \int_0^{L/2} my dx \quad (24)$$

Si sabemos que $EI_x = EI_0 \sec \alpha$ entonces

$$\int_0^{L/2} my dx = -\frac{2}{EI_0} \left[\int_0^{kL} my dx + \int_{kL}^{L/2} \frac{P}{2} kLy dx \right] \quad (25)$$

$$\int_0^{L/2} my dx = -\frac{2}{EI_0} \left[\int_0^{kL} \frac{P}{2} xy dx + \int_{kL}^{L/2} \frac{P}{2} kLy dx \right]$$

sustituyendo tenemos

$$-\frac{1}{EI_0} \int my dx = -\frac{1}{EI_0} \frac{PL^2 f}{3} [k - 2k^3 + k^4] \quad (26)$$

y

$$\int \frac{y^2}{EI_x} ds = \frac{1}{EI_0} \int_0^L y^2 dx = \frac{8 f^2 L}{15 EI_0} \quad (27)$$

Remplazando las ecuaciones (26) y (27) en la ecuación (23) nos quedaría:

$$H = \frac{5 PL}{8 f} k(1 - 2k^2 + k^3) \quad (28)$$

Los momentos finales son:

$$M = m + Hy$$

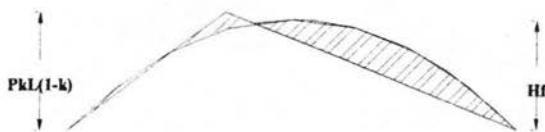


Figura I.4.2f

El signo de m negativo y el diagrama resultante es como en la figura I.4.2f.

Si queremos considerar una carga uniformemente distribuida la cual se extendiera de k_1L a k_2L , su elemento de carga es $wL dk$ para la carga P y la ecuación (28) queda:

$$H = \frac{5L^2 w}{8f} \int_{k_1}^{k_2} k(1 - 2k^2 + k^3) dk \quad (29)$$

I.4.3 MÉTODO DEL TRABAJO MÍNIMO PARA ASENTAMIENTOS, CAMBIO DE TEMPERATURA Y ACORTAMIENTO DEL CUERPO DEL ARCO.

ASENTAMIENTOS

Tanto los estribos como el cuerpo del arco se deformarán con un cambio de longitud (Δ). Donde la expresión de compatibilidad queda:

$$\int \frac{my}{EI_x} ds + H \int \frac{y^2}{EI_x} ds = \Delta \quad (30)$$

si además $m = 0$, entonces;

$$H = \frac{\Delta}{\int \frac{y^2}{EI_x} ds} \quad \text{ó} \quad H = \frac{15\Delta}{8f^2 L} EI_0 \quad (31)$$

CAMBIO DE TEMPERATURA

El efecto de un cambio de temperatura en el arco es similar a los asentamientos. Donde la expresión de compatibilidad queda:

$$\int \frac{my}{EI_x} ds + H \int \frac{y^2}{EI_x} ds = \alpha t L \quad (32)$$

si además $m = 0$, entonces;

$$H = \frac{\alpha t L}{\int \frac{y^2}{EI_x} ds} \quad \text{ó} \quad H = \frac{15\alpha t}{8f^2} EI_0 \quad (33)$$

Nota: $m=0$; por no haber carga al momento de las deformaciones. Para un descenso de temperatura ($-t^\circ$).

ACORTAMIENTO DEL CUERPO DEL ARCO

Para llegar a la ecuación (23) se tomaron en cuenta únicamente los efectos provocados por la flexión. Pero cuando $f < L/10$ (arcos aplanados) se toman en cuenta los efectos axiales, por lo tanto, se incluirán los términos adicionales. De la segunda parte de la ecuación (16) podemos deducir:

$$\int \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial H} ds = \int \frac{P_1 P_0}{A_x E} ds + H \int \frac{P_1^2}{A_x E} ds = 0 \quad (34)$$

$$\int \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial H} ds = \int \frac{V \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{A_x E} dx + H \int \frac{\cos^2 \alpha}{A_x E} dx = 0$$

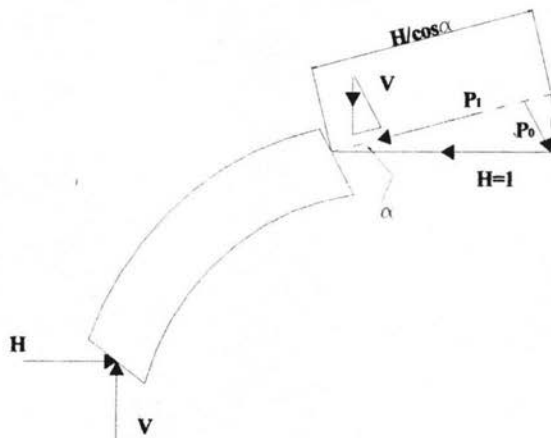


Figura I.4.3a

de la figura I.4.3a se denota que:

$$P_1 = H \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$P_0 = V \operatorname{sen} \alpha$$

$$ds = dx / \cos \alpha = \operatorname{sec} \alpha$$

Y tomando a $EA_x = EA_0 \operatorname{sec} \alpha$ donde EA_0 es la extensibilidad o acortamiento en la cúspide o corona y sustituyendo los valores anteriores en (34) la ecuación de compatibilidad queda de la siguiente manera

$$\int \frac{my}{EI_0} dx + H \int \frac{y^2}{EI_0} dx + \frac{HL}{A_0 E} = 0 \quad (35)$$

de donde $V \operatorname{sen} \alpha + H \cos \alpha = H / \cos \alpha$

$$\int \frac{(V \operatorname{sen} \alpha + H \cos \alpha) \cos \alpha}{EA_0} dx = H \int_0^L \frac{dx}{EA_0} = \frac{HL}{EA_0}$$

Por lo tanto, despejando la fuerza horizontal nos queda:

$$H = \frac{\int \frac{my}{EI_0} dx}{\int \frac{y^2}{EI_0} dx + \frac{L}{A_0 E}} \quad (36)$$

1.5. RESUMEN PREVIO AL ANÁLISIS

ARCOS TRIPLEMENTE ARTICULADOS

1. Las ecuaciones para calcular las reacciones, se obtendrán a partir de las ecuaciones del equilibrio estático mencionadas en el Tema I.4.1.
2. La geometría del arco es la proporcionada por las ecuaciones (1), (3) y (10) vistas en los Temas I.3.5, I.3.6 y I.3.7.
3. Las relaciones f/L (elevación / claro) son las consideradas para estructuras de puente en forma de arco triplemente articulados; pero, podrían utilizarse para otro tipo de estructura. (angares, presas, cubiertas, etc.).
4. Para la obtención de las formulas para Normal, Cortante y Momento flexionante la convención de signos es la siguiente: Para cortante: cargas que entren al arco son negativas y cargas que salgan del mismo son positivas. Para normal: cargas que entren al arco son positivas y cargas que salgan del mismo son negativas.
5. Para la formular las ecuaciones de momento fueron aplicados la convención de signos siguiente: si el momento producido por una carga va en dirección de las manecillas del reloj es positivo y en caso contrario es negativo.

ARCOS DOBLEMENTE ARTICULADOS

1. Para calcular las reacciones horizontales se usarán las ecuaciones (28) y (29) según sea el caso; salvo en los casos especiales, en los cuales se aceptará la integración de la ecuación (23).
2. Para calcular las reacciones verticales se procederá por medio de dos de las ecuaciones del equilibrio estático ($\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_i = 0$) ecuaciones (11) y (12).
3. La geometría del arco es la proporcionada por las ecuaciones (1), (3), (4) y (10) vistas en los Temas I.3.5, I.3.6 y I.3.7, donde el modulo de elasticidad será una constante.
4. Las relaciones f/L (elevación / claro) son las consideradas para estructuras de puente en forma de arco doblemente articulados; pero, podrían utilizarse para otro tipo de estructura. (angares, presas, cubiertas, etc.).
5. Para la obtención de las formulas para Normal, Cortante y Momento flexionante la convención de signos es la siguiente: Para cortante: cargas que entren al arco son negativas y cargas que salgan del mismo son positivas. Para normal: cargas que entren al arco son positivas y cargas que salgan del mismo son negativas.
6. Para formular las ecuaciones de momento fueron aplicados la convención de signos siguiente: si el momento producido por una carga va en dirección de las manecillas del reloj es positiva y en caso contrario es negativa.

II. DESARROLLO

II.1 SOLUCIÓN DE ARCOS DE NERVADURA SÓLIDA TRIPLEMENTE ARTICULADOS

En este capítulo se determinarán las ecuaciones para arcos de nervadura sólida simétricos y con tres articulaciones, una en cada apoyo y la otra en la corona del arco, bajo distintas condiciones de carga que son las más representativas en este tipo de estructuras.

II.1.1 ECUACIONES PARA ARCOS CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA SOBRE TODA LA LONGITUD DEL ARCO

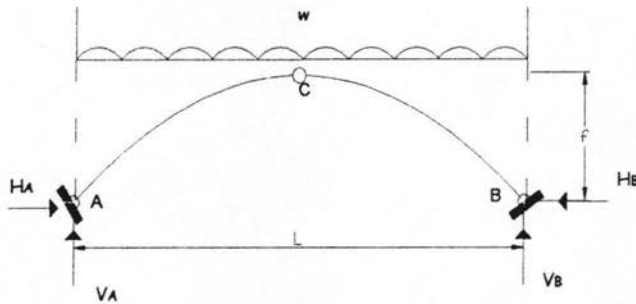


Figura II.1.1a.

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$(wL^2/2) - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{wL}{2}} \quad (37)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - wL + (wL/2) = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{wL}{2}} \quad (38)$$

$$\Sigma M_{C_{izq}} = 0;$$

$$-H_A f + (wL^2/4) + (wL^2/8) = 0;$$

$$H_A = \frac{wL^2}{8f} \quad (39)$$

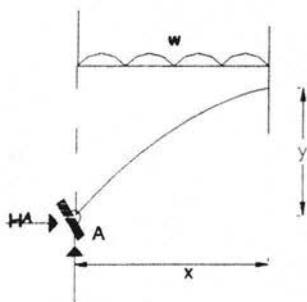
$$\Sigma F_x = 0;$$

$$H_B - (wL^2/8) = 0;$$

$$H_B = \frac{wL^2}{8f} \quad (40)$$

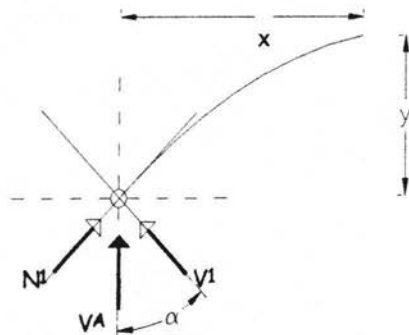
Para la obtención de las ecuaciones de Normal, Cortante y Momento Flexionante procedemos de la siguiente manera:

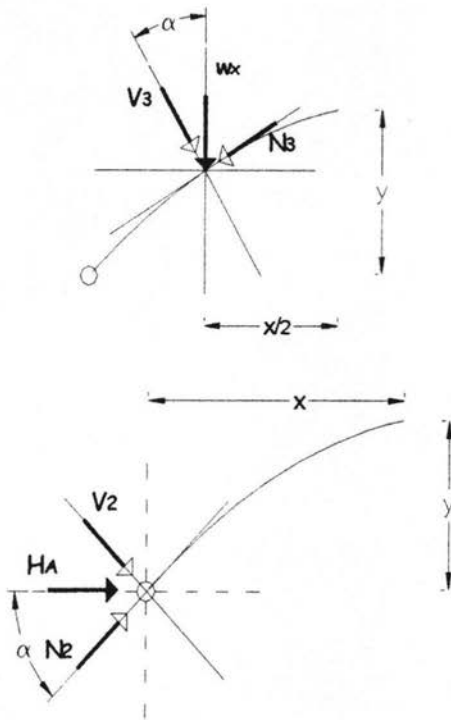
- Para una relación $0 \leq x < L/2$ tenemos:



V_A

La cual podemos dividir de la siguiente manera





Por lo tanto podemos deducir lo siguiente

$$N_x = N_1 + N_2 + N_3$$

$$V_x = V_1 + V_2 + V_3$$

(a)

Utilizando la convención de signos mencionada en el tema I.5 apartado 4 y en base a la ecuación (3) antes definida, las ecuaciones anteriores nos quedan:

$$N_1 = (wL/2) \operatorname{sen} \alpha$$

$$N_2 = (wL^2/8f) \cos \alpha$$

$$N_3 = -wx \operatorname{sen} \alpha$$

$$V_1 = (wL/2) \cos \alpha$$

$$V_2 = -(wL^2/8f) \operatorname{sen} \alpha$$

$$V_3 = -wx \cos \alpha$$

Sustituyendo (a) tenemos:

$$N_x = (wL/2) \operatorname{sen} \alpha + (wL^2/8f) \cos \alpha - wx \operatorname{sen} \alpha$$

$$N_x = (wL/2 - wx) \operatorname{sen} \alpha + (wL^2/8f) \cos \alpha$$

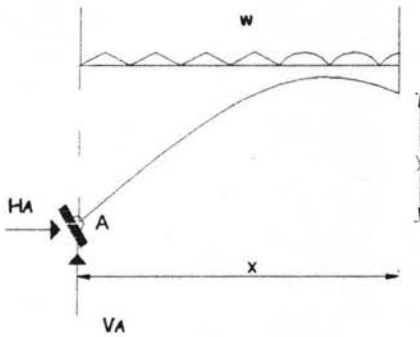
$$V_x = (wL/2) \cos \alpha - (wL^2/8f) \sin \alpha - wx \cos \alpha$$

$$V_x = (wL/2 - wx) \cos \alpha - (wL^2/8f) \sin \alpha$$

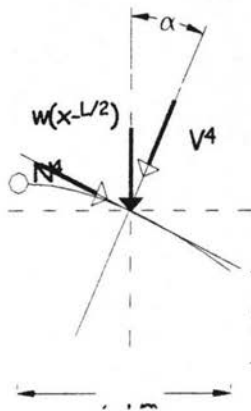
Utilizando la convención de signos mencionada en el tema I.5 apartado 5, se puede deducir la ecuación de momento de la siguiente forma:

$$M_x = (wL/2)x - (wL^2/8f)y - (wx^2/2)$$

- Para una relación $L/2 \leq x < L$ tenemos:



La cual podemos dividir de la siguiente manera



Además de las consideraciones anteriores nos quedan:

$$N_x = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$$

$$V_x = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

(b)

Utilizando la convención de signos mencionada en el tema I.5 apartado 4 y en base a la ecuación (3) antes definida, las ecuaciones anteriores nos quedan:

$$\begin{aligned} N_1 &= (wL/2) \operatorname{sen} \alpha \\ N_2 &= (wL^2/8f) \cos \alpha \\ N_3 &= -wx \operatorname{sen} \alpha \\ N_4 &= (w[x-L/2]) \operatorname{sen} \alpha \\ V_1 &= (wL/2) \cos \alpha \\ V_2 &= -(wL^2/8f) \operatorname{sen} \alpha \\ V_3 &= -wx \cos \alpha \\ V_4 &= (w[x-L/2]) \cos \alpha \end{aligned}$$

Sustituyendo (a) tenemos:

$$N_x = (wL/2) \operatorname{sen} \alpha + (wL^2/8f) \cos \alpha - wx \operatorname{sen} \alpha$$

$$\boxed{N_x = (-wL/2 + wx) \operatorname{sen} \alpha + (wL^2/8f) \cos \alpha}$$

$$V_x = (wL/2) \cos \alpha - (wL^2/8f) \operatorname{sen} \alpha - wx \cos \alpha$$

$$\boxed{V_x = (wL/2 - wx) \cos \alpha - (wL^2/8f) \operatorname{sen} \alpha}$$

Utilizando la convención de signos mencionada en el tema I.5 apartado 5, se puede deducir la ecuación de momento de la siguiente forma:

$$\boxed{M_x = (wL/2)x - (wL^2/8f)y - (wx^2/2)}$$

NOTA: De la forma que se procedió para encontrar las ecuaciones anteriores, es la misma que se utilizará para la determinación de las ecuaciones de los siguientes casos.

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{wL}{2} x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{8f} y \quad (41)$$

$$N_x = \left(\frac{wL}{2} - wx \right) \operatorname{sen} \alpha + \frac{wL^2}{8f} \cos \alpha \quad (42)$$

$$V_x = \left(\frac{wL}{2} - wx \right) \cos \alpha - \frac{wL^2}{8f} \operatorname{sen} \alpha \quad (43)$$

Cuando $L/2 \leq x < L$

$$Mx = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{8f}y \quad (44)$$

$$Nx = \left(wx - \frac{wL}{2} \right) \operatorname{sen} \alpha + \frac{wL^2}{8f} \cos \alpha \quad (45)$$

$$Vx = \left(\frac{wL}{2} - wx \right) \cos \alpha - \frac{wL^2}{8f} \operatorname{sen} \alpha \quad (46)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas cortantes correspondientes a cualquier punto del arco son iguales a cero. Esto lo podemos deducir al sustituir sus valores correspondientes de x , y y α en las ecuaciones anteriores.

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA A LA MITAD DE UN ARCO

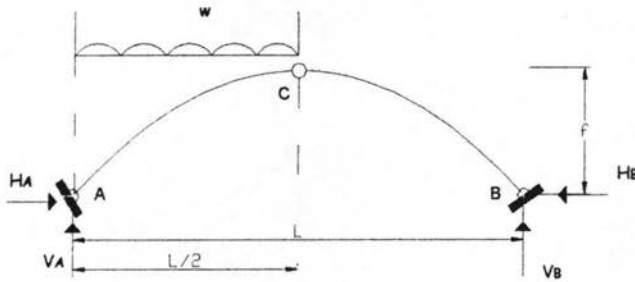


Figura II.1.1b

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{wL^2}{8} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{wL}{8}} \quad (47)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - \frac{wL}{2} + \frac{wL}{8} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{3wL}{8}} \quad (48)$$

$$\Sigma M_{Cizq} = 0;$$

$$-H_A f + \frac{wL^2}{16} - \frac{wL^2}{8} = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{wL^2}{16f}} \quad (49)$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$H_B - \frac{wL^2}{16f} = 0;$$

$$\boxed{H_B = \frac{wL^2}{16f}} \quad (50)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{3wL}{8}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{wL^2}{16f}y \quad (51)$$

$$N_x = \left(\frac{3wL}{8} - wx \right) \text{sen} \alpha + \frac{wL^2}{16f} \cos \alpha \quad (52)$$

$$V_x = \left(\frac{3wL}{8} - wx \right) \cos \alpha - \frac{wL^2}{16f} \text{sen} \alpha \quad (53)$$

Cuando $L/2 \leq x < L$

$$Mx = \frac{wL^2}{8} - \frac{wL}{8}x - \frac{wL^2}{16f}y \quad (54)$$

$$Nx = \left(-\frac{wL}{8}\right)\text{sen}\alpha + \frac{wL^2}{16f}\cos\alpha \quad (55)$$

$$Vx = \left(-\frac{wL}{8}\right)\cos\alpha - \frac{wL^2}{16f}\text{sen}\alpha \quad (56)$$

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA A LA MITAD CENTRAL DE UN ARCO

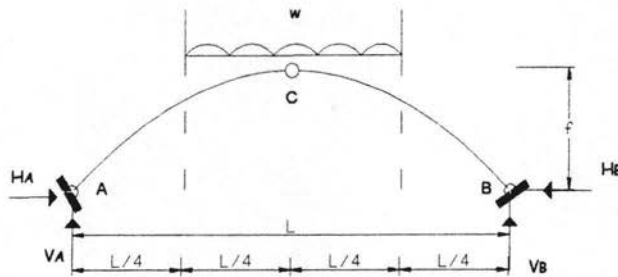


Figura II.1.1c

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{wL^2}{4} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{wL}{4}} \quad (57)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - \frac{wL}{2} + \frac{wL}{4} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{wL}{4}} \quad (58)$$

$$\Sigma M_{C_{izq}} = 0;$$

$$-H_A f - \frac{wL^2}{32} + \frac{wL^2}{8} = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{3wL^2}{32f}} \quad (59)$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$H_B - \frac{3wL^2}{32f} = 0;$$

$$\boxed{H_B = \frac{3wL^2}{32f}} \quad (60)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/4$

$$M_x = \frac{wL}{4} x - \frac{3wL^2}{32f} y \quad (61)$$

$$N_x = \left(\frac{wL}{4}\right) \text{sen} \alpha + \frac{3wL^2}{32f} \cos \alpha \quad (62)$$

$$V_x = \left(\frac{wL}{4}\right) \cos \alpha - \frac{3wL^2}{32f} \text{sen} \alpha \quad (63)$$

Cuando $L/4 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{wL}{4} x - \frac{3wL^2}{32f} y - \frac{w}{2} \left(x - \frac{L}{4}\right)^2 \quad (64)$$

$$N_x = \left(\frac{wL}{2} - wx\right) \text{sen} \alpha + \frac{3wL^2}{32f} \cos \alpha \quad (65)$$

$$V_x = \left(\frac{wL}{2} - wx\right) \cos \alpha - \frac{3wL^2}{32f} \text{sen} \alpha \quad (66)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA HORIZONTAL SOBRE TODA LA ELEVACIÓN DEL ARCO

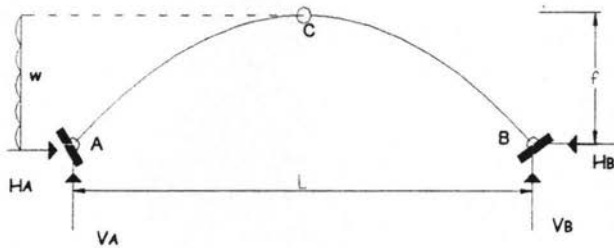


Figura II.1.1d

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$\frac{wf^2}{2} - V_A L = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{wf^2}{2L}} \quad (67)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_B - \frac{wf^2}{2L} = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{wf^2}{2L}} \quad (68)$$

$$\Sigma M_{C_{izq}} = 0;$$

$$H_A f - \frac{wf^2}{2} - \frac{wf^2}{4} = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{3wf}{4}} \quad (69)$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$-H_B - \frac{3wf}{2}y + wf = 0;$$

$$\boxed{H_B = \frac{wf}{4}} \quad (70)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{3wf}{4}y - \frac{w}{2}y^2 - \frac{wf^2}{2L}x \quad (71)$$

$$N_x = \left(wy - \frac{3wf}{4} \right) \cos \alpha - \frac{wf^2}{2L} \operatorname{sen} \alpha \quad (72)$$

$$V_x = \left(\frac{3wf}{4} - wy \right) \operatorname{sen} \alpha - \frac{wf^2}{2L} \cos \alpha \quad (73)$$

Cuando $L/2 \leq L$

$$M_x = \frac{wf}{4}y - \frac{wf^2}{2} + \frac{wf^2}{2L}x \quad (74)$$

$$N_x = \left(\frac{wf}{4} \right) \cos \alpha - \frac{wf^2}{2L} \operatorname{sen} \alpha \quad (75)$$

$$V_x = \left(-\frac{wf}{4} \right) \operatorname{sen} \alpha - \frac{wf^2}{2L} \cos \alpha \quad (76)$$

II.1.2 ECUACIONES PARA ARCOS CON CARGA CONCENTRADA

CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO DEL ARCO

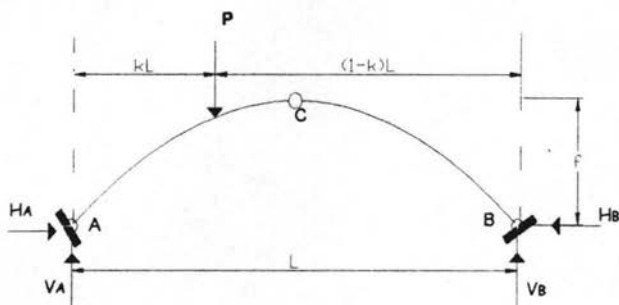


Figura II.1.2a

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema 1.4.1 y donde $0 \leq k \leq 1$ tenemos:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$PkL - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = Pk} \quad (77)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P + Pk = 0;$$

$$\boxed{V_A = P(1-k)} \quad (78)$$

$$\Sigma M_{C_{der}} = 0;$$

$$H_B f - \frac{PkL}{2} = 0;$$

$$\boxed{H_B = \frac{PkL}{2f}} \quad (79)$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$H_A f - \frac{PkL}{2} = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{PkL}{2f}} \quad (80)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $x < kL$

$$M_x = P(1-k)x - \frac{PkL}{2f} y \quad (81)$$

$$N_x = P(1-k)\text{sen}\alpha + \frac{PkL}{2f} \cos\alpha \quad (82)$$

$$V_x = P(1-k)\cos\alpha - \frac{PkL}{2f} \text{sen}\alpha \quad (83)$$

Cuando $x \geq kL$ y $x < L/2$

$$M_x = Pk \left[L - \frac{L}{2f} y - x \right] \quad (84)$$

$$N_x = (-Pk)\text{sen}\alpha + \frac{PkL}{2f} \cos\alpha \quad (85)$$

$$V_x = (-Pk)\cos\alpha - \frac{PkL}{2f} \text{sen}\alpha \quad (86)$$

Cuando $x \geq kL$ y $x \geq L/2$

$$M_x = Pk \left[L - \frac{L}{2f} y - x \right] \quad (87)$$

$$N_x = (Pk)\text{sen}\alpha + \frac{PkL}{2f} \cos\alpha \quad (88)$$

$$V_x = (-Pk)\cos\alpha + \frac{PkL}{2f} \text{sen}\alpha \quad (89)$$

CARGA CONCENTRADA EN LA CORONA DEL ARCO

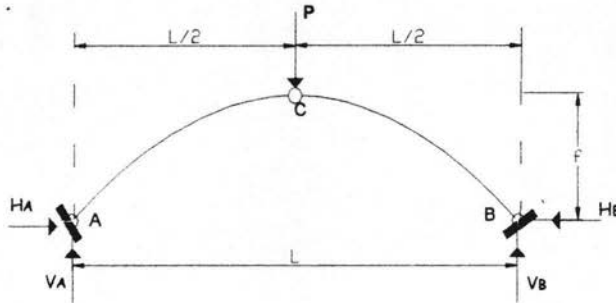


Figura II.1.2b

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{2} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{P}{2}} \quad (90)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P + \frac{P}{2} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{P}{2}} \quad (91)$$

$$\Sigma M_{Cizq} = 0;$$

$$-H_A f + \frac{PL}{4} = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{PL}{4f}} \quad (92)$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$H_B f - \frac{PL}{4} = 0;$$

$$\boxed{H_B = \frac{PL}{4f}} \quad (93)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{P}{2} x - \frac{PL}{4f} y \quad (94)$$

$$N_x = \left(\frac{P}{2}\right) \text{sen} \alpha + \frac{PL}{4f} \cos \alpha \quad (95)$$

$$V_x = \left(\frac{P}{2}\right) \cos \alpha - \frac{PL}{4f} \text{sen} \alpha \quad (96)$$

Cuando $L/2 \leq x < L$

$$M_x = \frac{P}{2} (L-x) - \frac{PL}{4f} y \quad (97)$$

$$N_x = \left(-\frac{P}{2}\right) \text{sen} \alpha + \frac{PL}{4f} \cos \alpha \quad (98)$$

$$V_x = \left(-\frac{P}{2}\right) \cos \alpha - \frac{PL}{4f} \text{sen} \alpha \quad (99)$$

CARGA HORIZONTAL CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO DEL ARCO

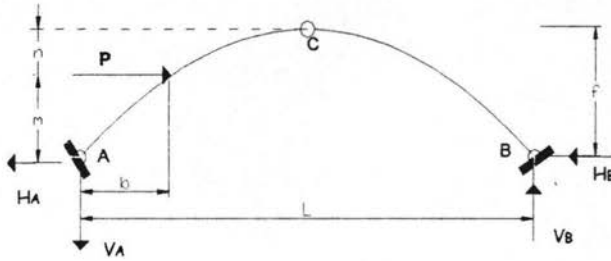


Figura II.1.2c

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$Pm - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{Pm}{L}} \quad (100)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$-V_A + \frac{Pm}{L} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{Pm}{L}} \quad (101)$$

$$\Sigma M_{Cizq} = 0;$$

$$H_A f - \frac{Pm}{2} - Pn = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{P}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right)} \quad (102)$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$-H_B - \frac{P}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right) + P = 0;$$

$$\boxed{H_B = P - \frac{P}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right)} \quad (103)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $x < b$

$$M_x = \frac{P}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right) y - \frac{Pm}{L} x \quad (104)$$

$$N_x = -\frac{Pm}{L} \operatorname{sen} \alpha - \frac{P}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right) \cos \alpha \quad (105)$$

$$V_x = -\frac{Pm}{L} \cos \alpha + \frac{P}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right) \operatorname{sen} \alpha \quad (106)$$

Cuando $x \geq b$ y $x < L/2$

$$M_x = P \left[\frac{m}{L} x - \frac{y}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right) - (y - n) \right] \quad (107)$$

$$N_x = \left[P - \frac{P}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right) \right] \cos \alpha - \frac{Pm}{L} \operatorname{sen} \alpha \quad (108)$$

$$V_x = \left[\frac{P}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right) - P \right] \operatorname{sen} \alpha - \frac{Pm}{L} \cos \alpha \quad (109)$$

Cuando $x \geq b$ y $x \geq L/2$

$$M_x = P \left[\frac{m}{L} x - \frac{y}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right) - (y - n) \right] \quad (110)$$

$$N_x = \left[P - \frac{P}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right) \right] \cos \alpha - \frac{Pm}{L} \operatorname{sen} \alpha \quad (111)$$

$$V_x = \left[P - \frac{P}{f} \left(\frac{m}{2} + n \right) \right] \operatorname{sen} \alpha - \frac{Pm}{L} \cos \alpha \quad (112)$$

CARGA HORIZONTAL CONCENTRADA EN LA CORONA DEL ARCO

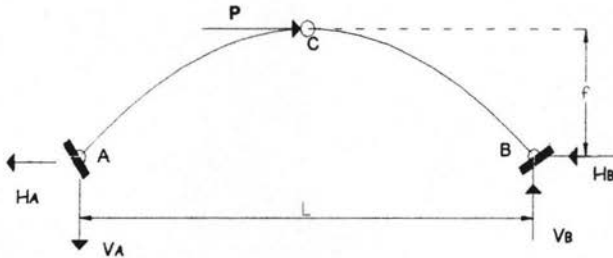


Figura II.1.2d

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$Pf - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{Pf}{L}} \quad (113)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$-V_A + \frac{Pf}{L} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{Pf}{L}} \quad (114)$$

$$\Sigma M_{Cizq} = 0;$$

$$H_A f - \frac{Pf}{2} = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{P}{2}}$$

(115)

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$-H_B - \frac{P}{2} + P = 0;$$

$$\boxed{H_B = \frac{P}{2}}$$

(116)

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{P}{2} y - \frac{Pf}{L} x \quad (117)$$

$$N_x = \left(-\frac{P}{2}\right) \cos \alpha - \frac{Pf}{L} \operatorname{sen} \alpha \quad (118)$$

$$V_x = \left(\frac{P}{2}\right) \operatorname{sen} \alpha - \frac{Pf}{L} \cos \alpha \quad (119)$$

Cuando $L/2 \leq x < L$

$$M_x = \frac{P}{2} y - Pf \left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (120)$$

$$N_x = \left(\frac{P}{2}\right) \cos \alpha - \frac{Pf}{L} \operatorname{sen} \alpha \quad (121)$$

$$V_x = \left(-\frac{P}{2}\right) \operatorname{sen} \alpha - \frac{Pf}{L} \cos \alpha \quad (122)$$

II.1.3 ECUACIONES PARA ARCOS CON VARIAS CARGAS CONCENTRADAS CON CLAROS IGUALES

DOS CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

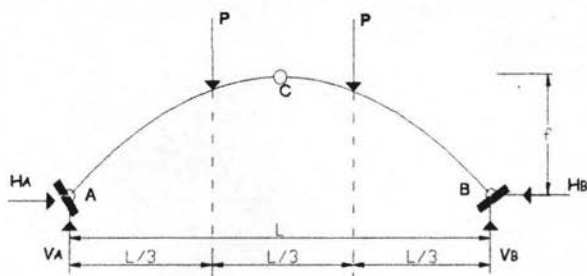


Figura II.1.3a

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{3} + \frac{2PL}{3} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = P} \quad (123)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P + P = 0;$$

$$\boxed{V_A = P} \quad (124)$$

$$\Sigma M_{Cizq} = 0;$$

$$-H_A f - \frac{PL}{6} + \frac{PL}{2} = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{PL}{3f}} \quad (125)$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$H_B - \frac{PL}{3f} = 0;$$

$$\boxed{H_B = \frac{PL}{3f}} \quad (126)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/3$

$$M_x = Px - \frac{PL}{3f} y \quad (127)$$

$$N_x = P \operatorname{sen} \alpha + \frac{PL}{3f} \cos \alpha \quad (128)$$

$$V_x = P \cos \alpha - \frac{PL}{3f} \operatorname{sen} \alpha \quad (129)$$

Cuando $L/3 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{PL}{3} - \frac{PL}{3f} y \quad (130)$$

$$N_x = \frac{PL}{3f} \cos \alpha \quad (131)$$

$$V_x = -\frac{PL}{3f} \operatorname{sen} \alpha \quad (132)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

TRES CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

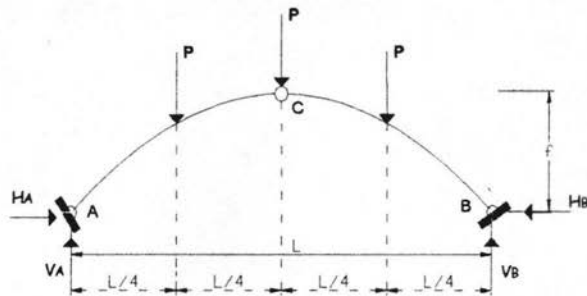


Figura II.1.3b

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{4} + \frac{PL}{2} + \frac{3PL}{4} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{3P}{2}} \quad (133)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P - P + \frac{3P}{2} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{3P}{2}} \quad (134)$$

$$\Sigma M_{Cizq} = 0;$$

$$-H_A f - \frac{PL}{4} + \frac{3PL}{4} = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{PL}{2f}} \quad (135)$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$H_B - \frac{PL}{2f} = 0;$$

$$\boxed{H_B = \frac{PL}{2f}} \quad (136)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

$$0 \leq x < L/4$$

$$M_x = \frac{3P}{2}x - \frac{PL}{2f}y \quad (137)$$

$$N_x = \frac{3P}{2}\text{sen}\alpha + \frac{PL}{2f}\cos\alpha \quad (138)$$

$$V_x = \frac{3P}{2}\cos\alpha - \frac{PL}{2f}\text{sen}\alpha \quad (139)$$

$$\text{Cuando } L/4 \leq x < L/2$$

$$M_x = \frac{P}{2}x - \frac{PL}{2f}y + \frac{PL}{4} \quad (140)$$

$$N_x = \frac{P}{2}\text{sen}\alpha + \frac{PL}{2f}\cos\alpha \quad (141)$$

$$V_x = \frac{P}{2}\cos\alpha - \frac{PL}{2f}\text{sen}\alpha \quad (142)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

CUATRO CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

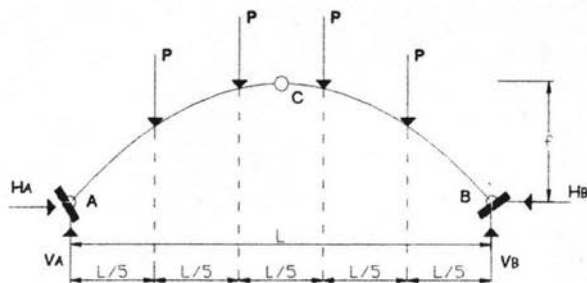


Figura II.1.3c

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{5} + \frac{2PL}{5} + \frac{3PL}{5} + \frac{4PL}{5} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = 2P} \quad (143)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P - P - P + 2P = 0;$$

$$\boxed{V_A = 2P} \quad (144)$$

$$\Sigma M_{Cizq} = 0;$$

$$-H_A f - \frac{PL}{10} - \frac{3PL}{10} + PL = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{3PL}{5f}} \quad (145)$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$H_B - \frac{3PL}{5f} = 0;$$

$$H_B = \frac{3PL}{5f} \quad (146)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/5$

$$M_x = 2Px - \frac{3PL}{5f} y \quad (147)$$

$$N_x = 2P \operatorname{sen} \alpha + \frac{3PL}{5f} \cos \alpha \quad (148)$$

$$V_x = 2P \cos \alpha - \frac{3PL}{5f} \operatorname{sen} \alpha \quad (149)$$

Cuando $L/5 \leq x < 2L/5$

$$M_x = Px - \frac{3PL}{5f} y + \frac{PL}{5} \quad (150)$$

$$N_x = P \operatorname{sen} \alpha + \frac{3PL}{5f} \cos \alpha \quad (151)$$

$$V_x = P \cos \alpha - \frac{3PL}{5f} \operatorname{sen} \alpha \quad (152)$$

Cuando $2L/5 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{3PL}{5} - \frac{3PL}{5f} y \quad (153)$$

$$N_x = \frac{3PL}{5f} \cos \alpha \quad (154)$$

$$V_x = -\frac{3PL}{5f} \operatorname{sen} \alpha \quad (155)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

CINCO CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

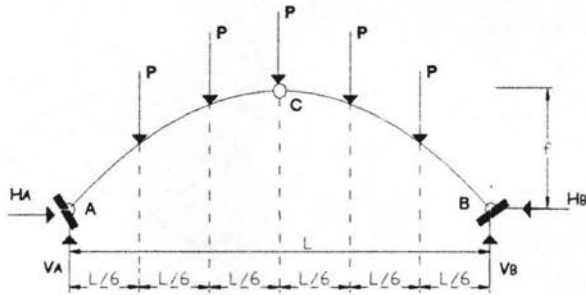


Figura II.1.3d

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{6} + \frac{PL}{3} + \frac{PL}{2} + \frac{2PL}{3} + \frac{5P}{6} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{5P}{2}}$$

(156)

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P - P - P - P + \frac{5P}{2} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{5P}{2}}$$

(157)

$$\Sigma M_{C_{izq}} = 0;$$

$$-H_A f - \frac{PL}{6} - \frac{PL}{3} + \frac{5PL}{4} = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{3PL}{4f}}$$

(158)

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$H_B - \frac{3PL}{4f} = 0;$$

$$\boxed{H_B = \frac{3PL}{4f}} \quad (159)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/6$

$$M_x = \frac{5P}{2}x - \frac{3PL}{4f}y \quad (160)$$

$$N_x = \frac{5P}{2}\text{sen}\alpha + \frac{3PL}{4f}\cos\alpha \quad (161)$$

$$V_x = \frac{5P}{2}\cos\alpha - \frac{3PL}{4f}\text{sen}\alpha \quad (162)$$

Cuando $L/6 \leq x < L/3$

$$M_x = \frac{3P}{2}x - \frac{3PL}{4f}y + \frac{PL}{6} \quad (163)$$

$$N_x = \frac{3P}{2}\text{sen}\alpha + \frac{3PL}{4f}\cos\alpha \quad (164)$$

$$V_x = \frac{3P}{2}\cos\alpha - \frac{3PL}{4f}\text{sen}\alpha \quad (165)$$

Cuando $L/3 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{P}{2}x - \frac{3PL}{4f}y + \frac{PL}{2} \quad (166)$$

$$N_x = \frac{P}{2}\text{sen}\alpha + \frac{3PL}{4f}\cos\alpha \quad (167)$$

$$V_x = \frac{P}{2}\cos\alpha - \frac{3PL}{4f}\text{sen}\alpha \quad (168)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

SEIS CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

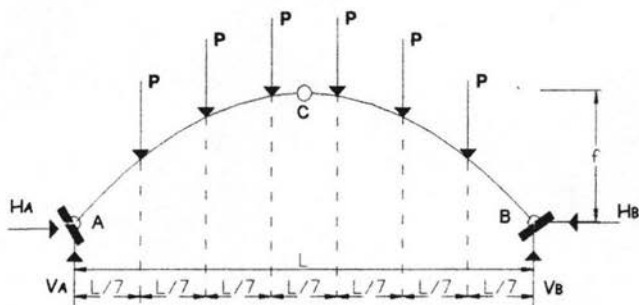


Figura II.1.3e

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{7} + \frac{2PL}{7} + \frac{3PL}{7} + \frac{4PL}{7} + \frac{5P}{7} + \frac{6P}{7} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = 3P}$$

(169)

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P - P - P - P - P + 3P = 0;$$

$$\boxed{V_A = 3P}$$

(170)

$$\Sigma M_{Cizq} = 0;$$

$$-H_A f - \frac{PL}{14} - \frac{3PL}{14} - \frac{5PL}{14} + \frac{3PL}{2} = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{6PL}{7f}}$$

(171)

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$H_B - \frac{6PL}{7f} = 0;$$

$$\boxed{H_B = \frac{6PL}{7f}} \quad (172)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/7$

$$M_x = 3Px - \frac{6PL}{7f}y \quad (173)$$

$$N_x = 3P \operatorname{sen} \alpha + \frac{6PL}{7f} \cos \alpha \quad (174)$$

$$V_x = 3P \cos \alpha - \frac{6PL}{7f} \operatorname{sen} \alpha \quad (175)$$

Cuando $L/7 \leq x < 2L/7$

$$M_x = 2Px - \frac{6PL}{7f}y + \frac{PL}{7} \quad (176)$$

$$N_x = 2P \operatorname{sen} \alpha + \frac{6PL}{7f} \cos \alpha \quad (177)$$

$$V_x = 2P \cos \alpha - \frac{6PL}{7f} \operatorname{sen} \alpha \quad (178)$$

Cuando $2L/7 \leq x < 3L/7$

$$M_x = Px - \frac{6PL}{7f}y + \frac{3PL}{7} \quad (179)$$

$$N_x = P \operatorname{sen} \alpha + \frac{6PL}{7f} \cos \alpha \quad (180)$$

$$V_x = P \cos \alpha - \frac{6PL}{7f} \operatorname{sen} \alpha \quad (181)$$

Cuando $3L/7 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{6PL}{7} - \frac{6PL}{7}y \quad (182)$$

$$N_x = \frac{6PL}{7f} \cos \alpha \quad (183)$$

$$V_x = -\frac{6PL}{7f} \operatorname{sen} \alpha \quad (184)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

OCHO CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

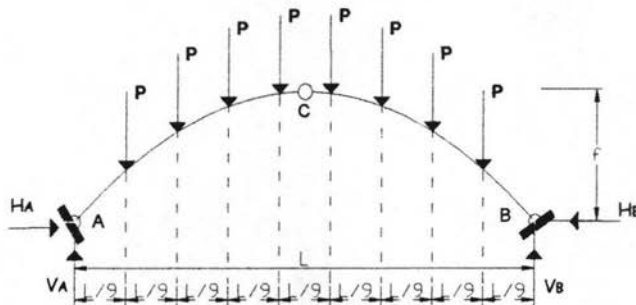


Figura II.1.3f

Por medio de las ecuaciones de la estática vistas en el Tema I.4.1 tenemos:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{9} + \frac{2PL}{9} + \frac{PL}{3} + \frac{4PL}{9} + \frac{5P}{9} + \frac{2P}{3} + \frac{7PL}{9} + \frac{8P}{9} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = 4P} \quad (185)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P - P - P - P - P - P - P + 4P = 0;$$

$$\boxed{V_A = 4P} \quad (186)$$

$$\Sigma M_{Cizq} = 0;$$

$$-H_A f - \frac{PL}{18} - \frac{PL}{6} - \frac{5PL}{18} - \frac{7PL}{18} + 2PL = 0;$$

$$\boxed{H_A = \frac{10PL}{9f}} \quad (187)$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$H_B - \frac{10PL}{9f} = 0;$$

$$\boxed{H_B = \frac{10PL}{9f}} \quad (188)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/9$

$$M_x = 4Px - \frac{10PL}{9f} y \quad (189)$$

$$N_x = 4P \operatorname{sen} \alpha + \frac{10PL}{9f} \cos \alpha \quad (190)$$

$$V_x = 4P \cos \alpha - \frac{10PL}{9f} \operatorname{sen} \alpha \quad (191)$$

Cuando $L/9 \leq x < 2L/9$

$$M_x = 3Px - \frac{10PL}{9f} y + \frac{PL}{9} \quad (192)$$

$$N_x = 3P \operatorname{sen} \alpha + \frac{10PL}{9f} \cos \alpha \quad (193)$$

$$V_x = 3P \cos \alpha - \frac{10PL}{9f} \operatorname{sen} \alpha \quad (194)$$

Cuando $2L/9 \leq x < L/3$

$$M_x = 2Px - \frac{10PL}{9f}y + \frac{PL}{3} \quad (195)$$

$$N_x = 2P \operatorname{sen} \alpha + \frac{10PL}{9f} \cos \alpha \quad (196)$$

$$V_x = 2P \cos \alpha - \frac{10PL}{9f} \operatorname{sen} \alpha \quad (197)$$

Cuando $L/3 \leq x < 4L/9$

$$M_x = Px - \frac{10PL}{9f}y + \frac{2PL}{3} \quad (198)$$

$$N_x = P \operatorname{sen} \alpha + \frac{10PL}{9f} \cos \alpha \quad (199)$$

$$V_x = P \cos \alpha - \frac{10PL}{9f} \operatorname{sen} \alpha \quad (200)$$

Cuando $4L/9 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{10PL}{9} - \frac{10PL}{9}y \quad (201)$$

$$N_x = \frac{10PL}{9f} \cos \alpha \quad (202)$$

$$V_x = -\frac{10PL}{9f} \operatorname{sen} \alpha \quad (203)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

II.2 SOLUCIÓN DE ARCOS DE N.S. DOBLEMENTE ARTICULADOS

En este capítulo se determinarán las ecuaciones para arcos de nervadura sólida simétricos y con dos articulaciones una en cada apoyo del arco bajo distintas condiciones de carga que son las más representativas en este tipo de estructuras.

II.2.1 ECUACIONES PARA ARCOS CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA SOBRE TODA LA LONGITUD DEL ARCO

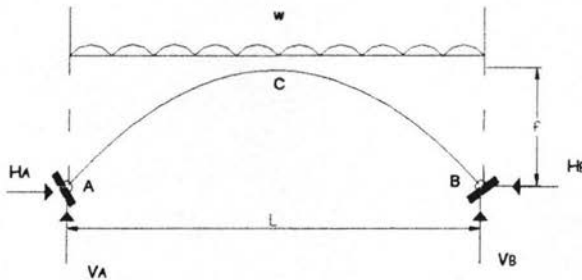


Figura II.2.1a

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \sec \alpha$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$(wL^2/2) - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{wL}{2}} \quad (204)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - wL + (wL/2) = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{wL}{2}} \quad (205)$$

Utilizando la ecuación (29) obtenemos el valor de H_A y H_B , donde $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$

$$H = \frac{5wL^2}{8f} \int_{k_2}^{k_1} k(1 - 2k^2 + k^3) dk \quad H = \frac{5wL^2}{8f} \left[\frac{k^2}{2} - \frac{k^4}{2} + \frac{k^5}{5} \right]_0^1$$

$$\boxed{H_A = H_B = \frac{wL^2}{8f}} \quad (206)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{wL}{2} x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{8f} y \quad (207)$$

$$N_x = \left(\frac{wL}{2} - wx \right) \text{sen} \alpha + \frac{wL^2}{8f} \cos \alpha \quad (208)$$

$$V_x = \left(\frac{wL}{2} - wx \right) \cos \alpha - \frac{wL^2}{8f} \text{sen} \alpha \quad (209)$$

Cuando $L/2 \leq x < L$

$$M_x = \frac{wL}{2} x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{8f} y \quad (210)$$

$$N_x = \left(wx - \frac{wL}{2} \right) \text{sen} \alpha + \frac{wL^2}{8f} \cos \alpha \quad (211)$$

$$V_x = \left(\frac{wL}{2} - wx \right) \cos \alpha - \frac{wL^2}{8f} \text{sen} \alpha \quad (212)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas cortantes correspondientes a cualquier punto del arco son iguales a cero. Esto lo podemos deducir al sustituir sus valores correspondientes de x , y y α en las ecuaciones anteriores.

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA A LA MITAD DE UN ARCO

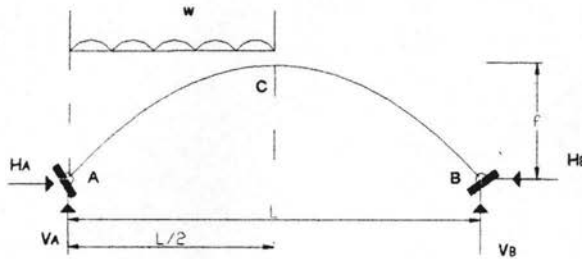


Figura II.2.1b

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \sec \alpha$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{wL^2}{8} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{wL}{8}} \quad (213)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - \frac{wL}{2} + \frac{wL}{8} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{3wL}{8}} \quad (214)$$

Utilizando la ecuación (29) obtenemos el valor de H_A y H_B , donde $k_1 = 0$ y $k_2 = 1/2$

$$H = \frac{5wL^2}{8f} \int_{k_2}^{k_1} k(1 - 2k^2 + k^3) dk \quad H = \frac{5wL^2}{8f} \left[\frac{k^2}{2} - \frac{k^4}{2} + \frac{k^5}{5} \right]_0^{1/2}$$

$$\boxed{H_A = H_B = \frac{wL^2}{16f}} \quad (215)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{3wL}{8}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{wL^2}{16f}y \quad (216)$$

$$N_x = \left(\frac{3wL}{8} - wx \right) \text{sen} \alpha + \frac{wL^2}{16f} \cos \alpha \quad (217)$$

$$V_x = \left(\frac{3wL}{8} - wx \right) \cos \alpha - \frac{wL^2}{16f} \text{sen} \alpha \quad (218)$$

Cuando $L/2 \leq x < L$

$$M_x = \frac{wL^2}{8} - \frac{wL}{8}x - \frac{wL^2}{16f}y \quad (219)$$

$$N_x = \left(-\frac{wL}{8} \right) \text{sen} \alpha + \frac{wL^2}{16f} \cos \alpha \quad (220)$$

$$V_x = \left(-\frac{wL}{8} \right) \cos \alpha - \frac{wL^2}{16f} \text{sen} \alpha \quad (221)$$

CARGA □NIFORMEMENTE REPARTIDA A LA MITAD CENTRAL DE UN ARCO

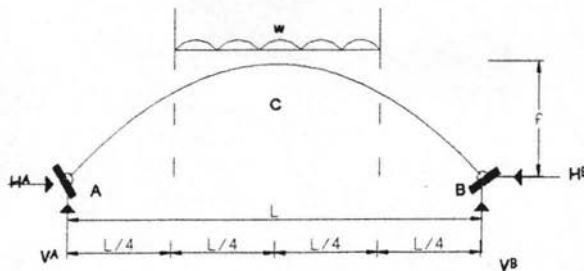


Figura II.1.1c

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \sec \alpha$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{wL^2}{4} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{wL}{4}} \quad (222)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - \frac{wL}{2} + \frac{wL}{4} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{wL}{4}} \quad (223)$$

Utilizando la ecuación (29) obtenemos el valor de H_A y H_B , donde $k_1 = 1/4$ y $k_2 = 3/4$

$$H = \frac{5wL^2}{8f} \int_{k_2}^{k_1} k(1-2k^2+k^3) dk \quad H = \frac{5wL^2}{8f} \left[\frac{k^2}{2} - \frac{k^4}{2} + \frac{k^5}{5} \right]_{1/4}^{3/4}$$

$$\boxed{H_A = H_B = \frac{361wL^2}{4096f}} \quad (224)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/4$

$$M_x = \frac{wL}{4} x - \frac{361wL^2}{4096f} y \quad (225)$$

$$N_x = \left(\frac{wL}{4} \right) \text{sen} \alpha + \frac{361wL^2}{4096f} \cos \alpha \quad (226)$$

$$V_x = \left(\frac{wL}{4} \right) \cos \alpha - \frac{361wL^2}{4096f} \text{sen} \alpha \quad (227)$$

Cuando $L/4 \leq x < L/2$

$$Mx = \frac{wL}{4}x - \frac{361wL^2}{4096f}y - \frac{w}{2}\left(x - \frac{L}{4}\right)^2 \quad (228)$$

$$Nx = \left(\frac{wL}{2} - wx\right)\text{sen}\alpha + \frac{361wL^2}{4096f}\text{cos}\alpha \quad (229)$$

$$Vx = \left(\frac{wL}{2} - wx\right)\text{cos}\alpha - \frac{361wL^2}{4096f}\text{sen}\alpha \quad (230)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA HORIZONTAL SOBRE TODA LA ELEVACIÓN DEL ARCO

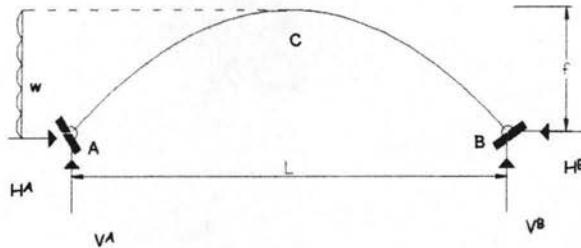


Figura II.2.1d

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \text{sen}\alpha$
 $\Sigma M_B = 0$

$$\frac{wf^2}{2} - V_A L = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{wf^2}{2L}}$$

(231)

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_B - \frac{wf^2}{2L} = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{wf^2}{2L}} \quad (232)$$

Integrando la ecuación (23) obtenemos el valor de H_A y H_B ,

$$H = \frac{\int_0^s M_{E_y} ds}{\int_0^s y^2 ds}$$

$$\boxed{H_A = \frac{5}{7} wf} \quad (233)$$

$$\boxed{H_B = \frac{2}{7} wf} \quad (234)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{5wf}{7} y - \frac{w}{2} y^2 - \frac{wf^2}{2L} x \quad (235)$$

$$N_x = \left(wy - \frac{5wf}{7} \right) \cos \alpha - \frac{wf^2}{2L} \operatorname{sen} \alpha \quad (236)$$

$$V_x = \left(\frac{5wf}{7} - wy \right) \operatorname{sen} \alpha - \frac{wf^2}{2L} \cos \alpha \quad (237)$$

Cuando $L/2 \leq L$

$$M_x = \frac{2wf}{7} y - \frac{wf^2}{2} + \frac{wf^2}{2L} x \quad (238)$$

$$N_x = \left(\frac{2wf}{7} \right) \cos \alpha - \frac{wf^2}{2L} \operatorname{sen} \alpha \quad (239)$$

$$V_x = \left(-\frac{2wf}{7} \right) \text{sen}\alpha - \frac{wf^2}{2L} \cos\alpha \quad (240)$$

II.2.2 ECUACIONES PARA ARCOS CON CARGA CONCENTRADA

CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO DEL ARCO

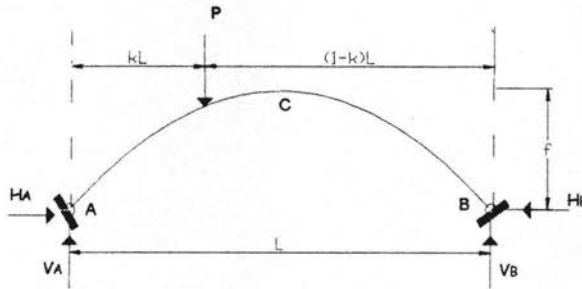


Figura II.2.2a

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \text{sen}\alpha$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$PkL - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = Pk} \quad (241)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P + Pk = 0;$$

$$\boxed{V_A = P(1-k)} \quad (242)$$

Utilizando la ecuación (28) obtenemos el valor de H_A y H_B

$$H = \frac{5PL}{8f} k(1-k^2+k^3)$$

$$\boxed{H_A = H_B = \frac{5PL}{8f} k(1-k^2+k^3)} \quad (243)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $x < kL$ y $x < L/2$

$$M_x = P(1-k)x - H_A y \quad (244)$$

$$N_x = P(1-k)\text{sen}\alpha + H_A \cos\alpha \quad (245)$$

$$V_x = P(1-k)\cos\alpha - H_A \text{sen}\alpha \quad (246)$$

Cuando $x \geq kL$ y $x < L/2$

$$M_x = P(1-k)x - H_A y \quad (247)$$

$$N_x = (-Pk)\text{sen}\alpha + H_A \cos\alpha \quad (248)$$

$$V_x = (-Pk)\cos\alpha - H_A \text{sen}\alpha \quad (249)$$

Cuando $x \geq kL$ y $x \geq L/2$

$$M_x = P(1-k)x - H_A y \quad (250)$$

$$N_x = (Pk)\text{sen}\alpha + H_A \cos\alpha \quad (251)$$

$$V_x = (-Pk)\cos\alpha + H_A \text{sen}\alpha \quad (252)$$

CARGA CONCENTRADA EN LA CORONA DEL ARCO

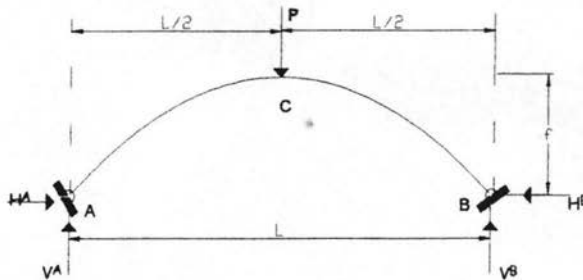


Figura II.2.2b

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \sec \alpha$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{2} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{P}{2}} \quad (253)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P + \frac{P}{2} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{P}{2}} \quad (254)$$

Utilizando la ecuación (28) obtenemos el valor de H_A y H_B , donde $k = 1/2$

$$H = \frac{5PL}{8f} k(1 - k^2 + k^3)$$

$$\boxed{H_A = H_B = \frac{25PL}{128f}} \quad (255)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{P}{2} x - \frac{25PL}{128f} y \quad (256)$$

$$N_x = \left(\frac{P}{2}\right) \text{sen} \alpha + \frac{25PL}{128f} \cos \alpha \quad (257)$$

$$V_x = \left(\frac{P}{2}\right) \cos \alpha - \frac{25PL}{128f} \text{sen} \alpha \quad (258)$$

Cuando $L/2 \leq x < L$

$$M_x = \frac{P}{2}(L-x) - \frac{25PL}{128f}y \quad (259)$$

$$N_x = \left(-\frac{P}{2}\right)\text{sen}\alpha + \frac{25PL}{128f}\cos\alpha \quad (260)$$

$$V_x = \left(-\frac{P}{2}\right)\cos\alpha - \frac{25PL}{128f}\text{sen}\alpha \quad (261)$$

CARGA HORIZONTAL CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO DEL ARCO

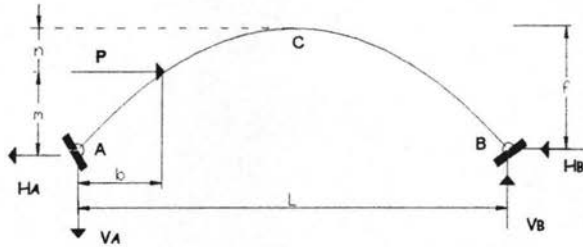


Figura II.2.2c

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \text{sec}\alpha$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$Pm - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{Pm}{L}} \quad (262)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$-V_A + \frac{Pm}{L} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{Pm}{L}} \quad (263)$$

Integrando la ecuación (23) obtenemos el valor de H_A y H_B .

$$H = \frac{\int_0^s M_E y ds}{\int_0^s y^2 ds}$$

$$\boxed{H_A = P(1-K)} \quad (264)$$

$$\boxed{H_B = PK} \quad (265)$$

Los Valores de K se obtienen de la Tabla 1.2.2.

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $x < b$

$$M_x = P(1-K)y - \frac{Pm}{L} x \quad (266)$$

$$N_x = -\frac{Pm}{L} \operatorname{sen} \alpha - P(1-K) \cos \alpha \quad (267)$$

$$V_x = -\frac{Pm}{L} \cos \alpha + P(1-K) \operatorname{sen} \alpha \quad (268)$$

Cuando $x \geq b$ y $x < L/2$

$$M_x = PKy - Pm \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \quad (269)$$

$$N_x = PK \cos \alpha - \frac{Pm}{L} \operatorname{sen} \alpha \quad (270)$$

$$V_x = -PK \operatorname{sen} \alpha - \frac{Pm}{L} \cos \alpha \quad (271)$$

Cuando $x \geq b$ y $x \geq L/2$

$$M_x = PKy - Pm \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \quad (272)$$

$$N_x = PK \cos \alpha + \frac{Pm}{L} \operatorname{sen} \alpha \quad (273)$$

$$V_x = PK \operatorname{sen} \alpha - \frac{Pm}{L} \cos \alpha \quad (274)$$

Tabla 1.2.2 valores de **K** para diferente **m** (ver ref. 08)

| m | 0 | 0.2f | 0.4f | 0.6f | 0.8f | 1.0f |
|---|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| K | 0 | 0.1243 | 0.2444 | 0.3545 | 0.4463 | 0.5000 |

CARGA HORIZONTAL CONCENTRADA EN LA CORONA DEL ARCO

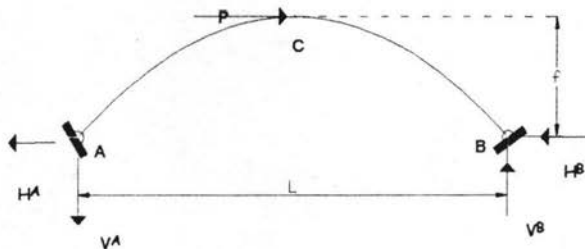


Figura II.2.2d

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \operatorname{sen} \alpha$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$Pf - V_B L = 0;$$

$$V_B = \frac{Pf}{L}$$

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**

(275)

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$-V_A + \frac{Pf}{L} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{Pf}{L}} \quad (276)$$

Integrando la ecuación (23) obtenemos el valor de H_A y H_B ,

$$H = \frac{\int_0^s M_E y ds}{\int_0^s y^2 ds}$$

$$\boxed{H_A = \frac{P}{2}} \quad (277)$$

$$\boxed{H_B = \frac{P}{2}} \quad (278)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{P}{2} y - \frac{Pf}{L} x \quad (279)$$

$$N_x = \left(-\frac{P}{2}\right) \cos \alpha - \frac{Pf}{L} \operatorname{sen} \alpha \quad (280)$$

$$V_x = \left(\frac{P}{2}\right) \operatorname{sen} \alpha - \frac{Pf}{L} \cos \alpha \quad (281)$$

Cuando $L/2 \leq x < L$

$$M_x = \frac{P}{2} y - Pf \left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (282)$$

$$N_x = \left(\frac{P}{2}\right) \cos \alpha - \frac{Pf}{L} \operatorname{sen} \alpha \quad (283)$$

$$V_x = \left(-\frac{P}{2}\right) \operatorname{sen} \alpha - \frac{Pf}{L} \cos \alpha \quad (284)$$

II.2.3 ECUACIONES PARA ARCOS CON VARIAS CARGAS CONCENTRADAS CON CLAROS IGUALES

DOS CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

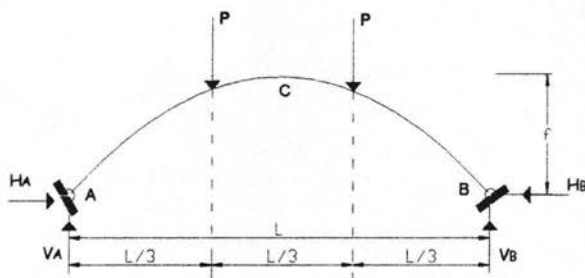


Figura II.2.3a

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \sec \alpha$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{3} + \frac{2PL}{3} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = P} \quad (285)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P + P = 0;$$

$$\boxed{V_A = P} \quad (286)$$

Utilizando la ecuación (28) obtenemos el valor de H_A y H_B , donde $k = 1/3$ y $k = 2/3$

$$H = \frac{5PL}{8f} k(1 - k^2 + k^3)$$

sumando los valores obtenidos para $k = 1/3$ y $k = 2/3$ nos queda [ver tabla F Anexo a)]:

$$\boxed{H_A = H_B = \frac{55PL}{162f}} \quad (287)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/3$

$$M_x = Px - \frac{55PL}{162f} y \quad (288)$$

$$N_x = P \operatorname{sen} \alpha + \frac{55PL}{162f} \cos \alpha \quad (289)$$

$$V_x = P \cos \alpha - \frac{55PL}{162f} \operatorname{sen} \alpha \quad (290)$$

Cuando $L/3 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{PL}{3} - \frac{55PL}{162f} y \quad (291)$$

$$N_x = \frac{55PL}{162f} \cos \alpha \quad (292)$$

$$V_x = -\frac{55PL}{162f} \operatorname{sen} \alpha \quad (293)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

TRES CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

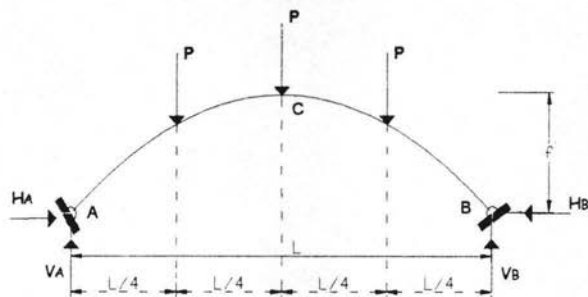


Figura II.2.3b

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_0 \sec \alpha$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{4} + \frac{PL}{2} + \frac{3PL}{4} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{3P}{2}} \quad (294)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P - P + \frac{3P}{2} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{3P}{2}} \quad (295)$$

Utilizando la ecuación (28) obtenemos el valor de H_A y H_B , donde $k = 1/4$, $k = 1/2$ y $k = 3/4$

$$H = \frac{5PL}{8f} k(1 - k^2 + k^3)$$

sumando los valores obtenidos para $k = 1/4$, $k = 1/2$ y $k = 3/4$ nos queda [ver tabla F Anexo a)]:

$$H_A = H_B = \frac{485PL}{1024f} \quad (296)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

$$0 \leq x < L/4$$

$$M_x = \frac{3P}{2}x - \frac{485PL}{1024f}y \quad (297)$$

$$N_x = \frac{3P}{2}\text{sen}\alpha + \frac{485PL}{1024f}\text{cos}\alpha \quad (298)$$

$$V_x = \frac{3P}{2}\text{cos}\alpha - \frac{485PL}{1024f}\text{sen}\alpha \quad (299)$$

Cuando $L/4 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{P}{2}x - \frac{485PL}{1024f}y + \frac{PL}{4} \quad (300)$$

$$N_x = \frac{P}{2}\text{sen}\alpha + \frac{485PL}{1024f}\text{cos}\alpha \quad (301)$$

$$V_x = \frac{P}{2}\text{cos}\alpha - \frac{485PL}{1024f}\text{sen}\alpha \quad (302)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

CUATRO CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

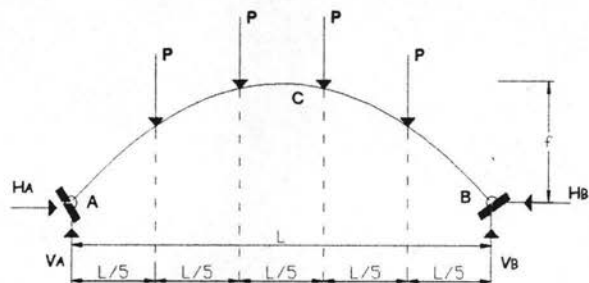


Figura II.2.3c

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \text{seca}$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{5} + \frac{2PL}{5} + \frac{3PL}{5} + \frac{4PL}{5} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = 2P} \quad (303)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P - P - P + 2P = 0;$$

$$\boxed{V_A = 2P} \quad (304)$$

Utilizando la ecuación (28) obtenemos el valor de H_A y H_B , donde $k = 1/5$, $k = 2/5$, $k = 3/5$ y $k = 4/5$

$$H = \frac{5PL}{8f} k(1 - k^2 + k^3)$$

sumando los valores obtenidos para $k = 1/5$, $k = 2/5$, $k = 3/5$ y $k = 4/5$ nos queda [ver tabla F Anexo a)]:

$$\boxed{H_A = H_B = \frac{151PL}{250f}} \quad (305)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/5$

$$M_x = 2Px - \frac{151PL}{250f}y \quad (306)$$

$$N_x = 2P\text{sen}\alpha + \frac{151PL}{250f}\cos\alpha \quad (307)$$

$$V_x = 2P\cos\alpha - \frac{151PL}{250f}\text{sen}\alpha \quad (308)$$

Cuando $L/5 \leq x < 2L/5$

$$M_x = Px - \frac{151PL}{250f}y + \frac{PL}{5} \quad (309)$$

$$N_x = P\text{sen}\alpha + \frac{151PL}{250f}\cos\alpha \quad (310)$$

$$V_x = P\cos\alpha - \frac{151PL}{250f}\text{sen}\alpha \quad (311)$$

Cuando $2L/5 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{3PL}{5} - \frac{151PL}{250f}y \quad (312)$$

$$N_x = \frac{151PL}{250f}\cos\alpha \quad (313)$$

$$V_x = -\frac{151PL}{250f}\text{sen}\alpha \quad (314)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

CINCO CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

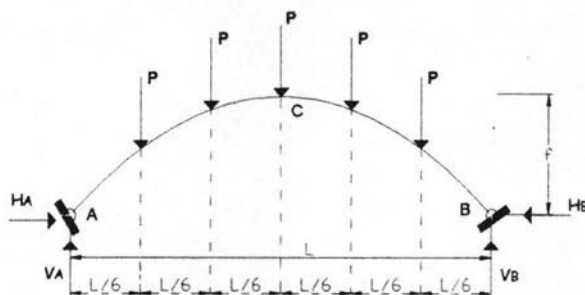


Figura II.2.3d

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \sec \alpha$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{6} + \frac{PL}{3} + \frac{PL}{2} + \frac{2PL}{3} + \frac{5P}{6} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = \frac{5P}{2}} \quad (315)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P - P - P - P + \frac{5P}{2} = 0;$$

$$\boxed{V_A = \frac{5P}{2}} \quad (316)$$

Utilizando la ecuación (28) obtenemos el valor de H_A y H_B , donde $k = 1/6$, $k = 1/3$, $k = 1/2$, $k = 2/3$ y $k = 5/6$

$$H = \frac{5PL}{8f} k(1 - k^2 + k^3)$$

sumando los valores obtenidos para $k = 1/6$, $k = 1/3$, $k = 1/2$, $k = 2/3$ y $k = 5/6$ nos queda [ver tabla F Anexo a]):

$$H_A = H_B = \frac{7595PL}{10368f} \quad (317)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/6$

$$M_x = \frac{5P}{2}x - \frac{7595PL}{10368f}y \quad (318)$$

$$N_x = \frac{5P}{2}\text{sen}\alpha + \frac{7595PL}{10368f}\cos\alpha \quad (319)$$

$$V_x = \frac{5P}{2}\cos\alpha - \frac{7595PL}{10368f}\text{sen}\alpha \quad (320)$$

Cuando $L/6 \leq x < L/3$

$$M_x = \frac{3P}{2}x - \frac{7595PL}{10368f}y + \frac{PL}{6} \quad (321)$$

$$N_x = \frac{3P}{2}\text{sen}\alpha + \frac{7595PL}{10368f}\cos\alpha \quad (322)$$

$$V_x = \frac{3P}{2}\cos\alpha - \frac{7595PL}{10368f}\text{sen}\alpha \quad (323)$$

Cuando $L/3 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{P}{2}x - \frac{7595PL}{10368f}y + \frac{PL}{2} \quad (324)$$

$$N_x = \frac{P}{2}\text{sen}\alpha + \frac{7595PL}{10368f}\cos\alpha \quad (325)$$

$$V_x = \frac{P}{2}\cos\alpha - \frac{7595PL}{10368f}\text{sen}\alpha \quad (326)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

SEIS CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

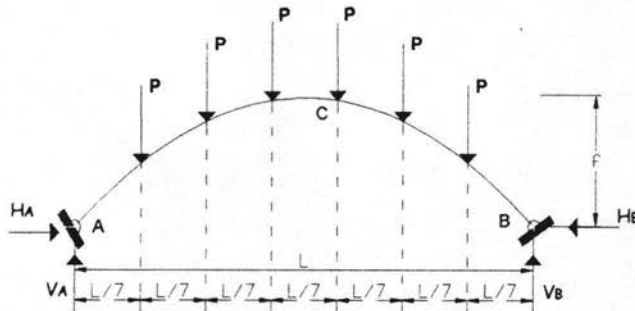


Figura II.2.3e

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \text{secc}$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{7} + \frac{2PL}{7} + \frac{3PL}{7} + \frac{4PL}{7} + \frac{5P}{7} + \frac{6P}{7} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = 3P} \quad (327)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P - P - P - P - P + 3P = 0;$$

$$\boxed{V_A = 3P} \quad (328)$$

Utilizando la ecuación (28) obtenemos el valor de H_A y H_B , donde $k = 1/7$, $k = 2/7$, $k = 3/7$, $k = 4/7$, $k = 5/7$ y $k = 6/7$

$$H = \frac{5PL}{8f} k(1 - k^2 + k^3)$$

sumando los valores obtenidos para $k = 1/7$, $k = 2/7$, $k = 3/7$, $k = 4/7$, $k = 5/7$ y $k = 6/7$ nos queda [ver tabla F Anexo a)]:

$$\boxed{H_A = H_B = \frac{260PL}{343f}} \quad (329)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/7$

$$M_x = 3Px - \frac{260PL}{343f} y \quad (330)$$

$$N_x = 3P \operatorname{sen} \alpha + \frac{260PL}{343f} \cos \alpha \quad (331)$$

$$V_x = 3P \cos \alpha - \frac{260PL}{343f} \operatorname{sen} \alpha \quad (332)$$

Cuando $L/7 \leq x < 2L/7$

$$M_x = 2Px - \frac{260PL}{343f} y + \frac{PL}{7} \quad (333)$$

$$N_x = 2P \operatorname{sen} \alpha + \frac{260PL}{343f} \cos \alpha \quad (334)$$

$$V_x = 2P \cos \alpha - \frac{260PL}{343f} \operatorname{sen} \alpha \quad (335)$$

Cuando $2L/7 \leq x < 3L/7$

$$M_x = Px - \frac{260PL}{343f} y + \frac{3PL}{7} \quad (336)$$

$$N_x = P \operatorname{sen} \alpha + \frac{260PL}{343f} \cos \alpha \quad (337)$$

$$V_x = P \cos \alpha - \frac{260PL}{343f} \operatorname{sen} \alpha \quad (338)$$

Cuando $3L/7 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{6PL}{7} - \frac{260PL}{343} y \quad (339)$$

$$N_x = \frac{260PL}{343f} \cos \alpha \quad (340)$$

$$V_x = -\frac{260PL}{343f} \operatorname{sen} \alpha \quad (341)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

OCHO CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LA LONGITUD DEL ARCO

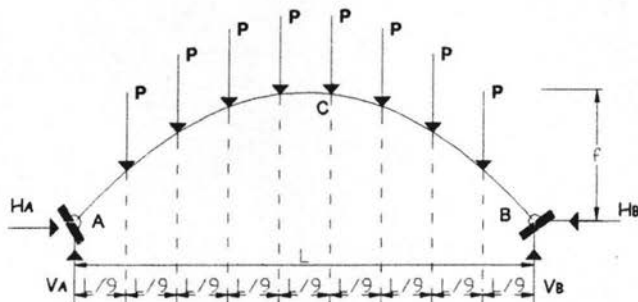


Figura II.2.3f

Utilizando las consideraciones del Tema I.4.2 y tomando $E = \text{constante}$ e $I_x = I_c \operatorname{sen} \alpha$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\frac{PL}{9} + \frac{2PL}{9} + \frac{PL}{3} + \frac{4PL}{9} + \frac{5P}{9} + \frac{2P}{3} + \frac{7PL}{9} + \frac{8P}{9} - V_B L = 0;$$

$$\boxed{V_B = 4P} \quad (342)$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$V_A - P - P - P - P - P - P - P - P + 4P = 0;$$

$$\boxed{V_A = 4P} \quad (343)$$

Utilizando la ecuación (28) obtenemos el valor de H_A y H_B , donde $k = 1/9$, $k = 2/9$, $k = 1/3$, $k = 4/9$, $k = 5/9$, $k = 2/3$, $k = 7/9$ y $k = 8/9$

$$H = \frac{5PL}{8f} k(1 - k^2 + k^3)$$

sumando los valores obtenidos para $k = 1/9$, $k = 2/9$, $k = 1/3$, $k = 4/9$, $k = 5/9$, $k = 2/3$, $k = 7/9$ y $k = 8/9$ nos queda [ver tabla F Anexo a)]:

$$\boxed{H_A = H_B = 1.01 \frac{PL}{f}} \quad (344)$$

Las Ecuaciones de Momento (M_x), Normal (N_x) y Cortante (V_x) en cualquier punto de la longitud del arco y obteniendo el ángulo α de la ecuación (3) quedan de la siguiente forma:

Cuando $0 \leq x < L/9$

$$M_x = 4Px - 1.01 \frac{PL}{f} y \quad (345)$$

$$N_x = 4P \operatorname{sen} \alpha + 1.01 \frac{PL}{f} \cos \alpha \quad (346)$$

$$V_x = 4P \cos \alpha - 1.01 \frac{PL}{f} \operatorname{sen} \alpha \quad (347)$$

Cuando $L/9 \leq x < 2L/9$

$$M_x = 3Px - 1.01 \frac{PL}{f} y + \frac{PL}{9} \quad (348)$$

$$N_x = 3P \operatorname{sen} \alpha + 1.01 \frac{PL}{f} \cos \alpha \quad (349)$$

$$V_x = 3P \cos \alpha - 1.01 \frac{PL}{f} \operatorname{sen} \alpha \quad (350)$$

Cuando $2L/9 \leq x < L/3$

$$M_x = 2Px - 1.01 \frac{PL}{f} y + \frac{PL}{3} \quad (351)$$

$$N_x = 2P \operatorname{sen} \alpha + 1.01 \frac{PL}{f} \cos \alpha \quad (352)$$

$$V_x = 2P \cos \alpha - 1.01 \frac{PL}{f} \operatorname{sen} \alpha \quad (353)$$

Cuando $L/3 \leq x < 4L/9$

$$M_x = P_x - 1.01 \frac{PL}{f} y + \frac{2PL}{3} \quad (354)$$

$$N_x = P \operatorname{sen} \alpha + 1.01 \frac{PL}{f} \cos \alpha \quad (355)$$

$$V_x = P \cos \alpha - 1.01 \frac{PL}{f} \operatorname{sen} \alpha \quad (356)$$

Cuando $4L/9 \leq x < L/2$

$$M_x = \frac{10PL}{9} - 1.01 \frac{PL}{f} y \quad (357)$$

$$N_x = 1.01 \frac{PL}{f} \cos \alpha \quad (358)$$

$$V_x = -1.01 \frac{PL}{f} \operatorname{sen} \alpha \quad (359)$$

NOTA: Los momentos y las fuerzas axiales correspondientes a la mitad derecha del arco, son iguales a los de la sección izquierda; Las fuerzas cortantes tienen el mismo valor numérico que los de la parte izquierda pero de signo contrario.

III. RESULTADOS

En este capítulo se darán algunas tablas de propiedades geométricas de arcos simétricos que son de gran importancia para la solución de las ecuaciones presentadas en los capítulos anteriores que representan estructuras en forma de arco. Estas tablas están en función de su elevación, longitud o claro del arco entre apoyos, su relación f/L y de las ecuaciones (1) y (3) definidas anteriormente.

El tema se divide en cuatro capítulos; en el primero se dan tablas para encontrar valores de elevación, cuando se dan los valores de la longitud y la relación f/L deseada, aunque este valor va a depender de la viabilidad de construcción del lugar, en el segundo capítulo se darán tablas para la obtención de los valores de x (por ciento de longitud) y de y elevación del arco en función de por ciento de longitud de arco vistas con anterioridad al definir la ecuación (1), en el tercer capítulo las tablas serán definidas para la obtención del ángulo en cualquier punto del arco a partir de la horizontal que quedan expresadas en la ecuación (3) vistas anteriormente; por último en el cuarto capítulo se propone un ejemplo ilustrativo donde se da la solución analítica de un puente de arco doblemente articulado utilizando los pormenores vistos en capítulos anteriores.

III.1 TABLAS PARA OBTENER LOS VALORES DE LA ELEVACIÓN f A PARTIR DE LA LONGITUD l Y SU RELACIÓN f/l .

| Longitud | Valores de elevación f a partir de la relación f/l | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|--|--|--|
| | 0.08 | 0.09 | 0.10 | 0.11 | 0.12 | 0.13 | 0.14 | 0.15 | 0.16 | 0.17 | 0.18 | 0.19 | | | | |
| 30 | 2.40 | 2.70 | 3.00 | 3.30 | 3.60 | 3.90 | 4.20 | 4.50 | 4.80 | 5.10 | 5.40 | 5.70 | | | | |
| 40 | 3.20 | 3.60 | 4.00 | 4.40 | 4.80 | 5.20 | 5.60 | 6.00 | 6.40 | 6.80 | 7.20 | 7.60 | | | | |
| 50 | 4.00 | 4.50 | 5.00 | 5.50 | 6.00 | 6.50 | 7.00 | 7.50 | 8.00 | 8.50 | 9.00 | 9.50 | | | | |
| 60 | 4.80 | 5.40 | 6.00 | 6.60 | 7.20 | 7.80 | 8.40 | 9.00 | 9.60 | 10.20 | 10.80 | 11.40 | | | | |
| 70 | 5.60 | 6.30 | 7.00 | 7.70 | 8.40 | 9.10 | 9.80 | 10.50 | 11.20 | 11.90 | 12.60 | 13.30 | | | | |
| 80 | 6.40 | 7.20 | 8.00 | 8.80 | 9.60 | 10.40 | 11.20 | 12.00 | 12.80 | 13.60 | 14.40 | 15.20 | | | | |
| 90 | 7.20 | 8.10 | 9.00 | 9.90 | 10.80 | 11.70 | 12.60 | 13.50 | 14.40 | 15.30 | 16.20 | 17.10 | | | | |
| 100 | 8.00 | 9.00 | 10.00 | 11.00 | 12.00 | 13.00 | 14.00 | 15.00 | 16.00 | 17.00 | 18.00 | 19.00 | | | | |
| 110 | 8.80 | 9.90 | 11.00 | 12.10 | 13.20 | 14.30 | 15.40 | 16.50 | 17.60 | 18.70 | 19.80 | 20.90 | | | | |
| 120 | 9.60 | 10.80 | 12.00 | 13.20 | 14.40 | 15.60 | 16.80 | 18.00 | 19.20 | 20.40 | 21.60 | 22.80 | | | | |
| 130 | 10.40 | 11.70 | 13.00 | 14.30 | 15.60 | 16.90 | 18.20 | 19.50 | 20.80 | 22.10 | 23.40 | 24.70 | | | | |
| 140 | 11.20 | 12.60 | 14.00 | 15.40 | 16.80 | 18.20 | 19.60 | 21.00 | 22.40 | 23.80 | 25.20 | 26.60 | | | | |
| 150 | 12.00 | 13.50 | 15.00 | 16.50 | 18.00 | 19.50 | 21.00 | 22.50 | 24.00 | 25.50 | 27.00 | 28.50 | | | | |
| 160 | 12.80 | 14.40 | 16.00 | 17.60 | 19.20 | 20.80 | 22.40 | 24.00 | 25.60 | 27.20 | 28.80 | 30.40 | | | | |
| 170 | 13.60 | 15.30 | 17.00 | 18.70 | 20.40 | 22.10 | 23.80 | 25.50 | 27.20 | 28.90 | 30.60 | 32.30 | | | | |
| 180 | 14.40 | 16.20 | 18.00 | 19.80 | 21.60 | 23.40 | 25.20 | 27.00 | 28.80 | 30.60 | 32.40 | 34.20 | | | | |
| 190 | 15.20 | 17.10 | 19.00 | 20.90 | 22.80 | 24.70 | 26.60 | 28.50 | 30.40 | 32.30 | 34.20 | 36.10 | | | | |
| 200 | 16.00 | 18.00 | 20.00 | 22.00 | 24.00 | 26.00 | 28.00 | 30.00 | 32.00 | 34.00 | 36.00 | 38.00 | | | | |
| 210 | 16.80 | 18.90 | 21.00 | 23.10 | 25.20 | 27.30 | 29.40 | 31.50 | 33.60 | 35.70 | 37.80 | 39.90 | | | | |
| 220 | 17.60 | 19.80 | 22.00 | 24.20 | 26.40 | 28.60 | 30.80 | 33.00 | 35.20 | 37.40 | 39.60 | 41.80 | | | | |
| 230 | 18.40 | 20.70 | 23.00 | 25.30 | 27.60 | 29.90 | 32.20 | 34.50 | 36.80 | 39.10 | 41.40 | 43.70 | | | | |
| 240 | 19.20 | 21.60 | 24.00 | 26.40 | 28.80 | 31.20 | 33.60 | 36.00 | 38.40 | 40.80 | 43.20 | 45.60 | | | | |
| 250 | 20.00 | 22.50 | 25.00 | 27.50 | 30.00 | 32.50 | 35.00 | 37.50 | 40.00 | 42.50 | 45.00 | 47.50 | | | | |
| 260 | 20.80 | 23.40 | 26.00 | 28.60 | 31.20 | 33.80 | 36.40 | 39.00 | 41.60 | 44.20 | 46.80 | 49.40 | | | | |
| 270 | 21.60 | 24.30 | 27.00 | 29.70 | 32.40 | 35.10 | 37.80 | 40.50 | 43.20 | 45.90 | 48.60 | 51.30 | | | | |
| 280 | 22.40 | 25.20 | 28.00 | 30.80 | 33.60 | 36.40 | 39.20 | 42.00 | 44.80 | 47.60 | 50.40 | 53.20 | | | | |
| 290 | 23.20 | 26.10 | 29.00 | 31.90 | 34.80 | 37.70 | 40.60 | 43.50 | 46.40 | 49.30 | 52.20 | 55.10 | | | | |
| 300 | 24.00 | 27.00 | 30.00 | 33.00 | 36.00 | 39.00 | 42.00 | 45.00 | 48.00 | 51.00 | 54.00 | 57.00 | | | | |
| 310 | 24.80 | 27.90 | 31.00 | 34.10 | 37.20 | 40.30 | 43.40 | 46.50 | 49.60 | 52.70 | 55.80 | 58.90 | | | | |
| 320 | 25.60 | 28.80 | 32.00 | 35.20 | 38.40 | 41.60 | 44.80 | 48.00 | 51.20 | 54.40 | 57.60 | 60.80 | | | | |
| 330 | 26.40 | 29.70 | 33.00 | 36.30 | 39.60 | 42.90 | 46.20 | 49.50 | 52.80 | 56.10 | 59.40 | 62.70 | | | | |
| 340 | 27.20 | 30.60 | 34.00 | 37.40 | 40.80 | 44.20 | 47.60 | 51.00 | 54.40 | 57.80 | 61.20 | 64.60 | | | | |
| 350 | 28.00 | 31.50 | 35.00 | 38.50 | 42.00 | 45.50 | 49.00 | 52.50 | 56.00 | 59.50 | 63.00 | 66.50 | | | | |
| 360 | 28.80 | 32.40 | 36.00 | 39.60 | 43.20 | 46.80 | 50.40 | 54.00 | 57.60 | 61.20 | 64.80 | 68.40 | | | | |
| 370 | 29.60 | 33.30 | 37.00 | 40.70 | 44.40 | 48.10 | 51.80 | 55.50 | 59.20 | 62.90 | 66.60 | 70.30 | | | | |
| 380 | 30.40 | 34.20 | 38.00 | 41.80 | 45.60 | 49.40 | 53.20 | 57.00 | 60.80 | 64.60 | 68.40 | 72.20 | | | | |
| 390 | 31.20 | 35.10 | 39.00 | 42.90 | 46.80 | 50.70 | 54.60 | 58.50 | 62.40 | 66.30 | 70.20 | 74.10 | | | | |
| 400 | 32.00 | 36.00 | 40.00 | 44.00 | 48.00 | 52.00 | 56.00 | 60.00 | 64.00 | 68.00 | 72.00 | 76.00 | | | | |

Valores de elevación f a partir de la relación f/L

| Longitud | 0.20 | 0.21 | 0.22 | 0.23 | 0.24 | 0.25 | 0.26 | 0.27 | 0.28 | 0.29 | 0.30 | 0.31 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 30 | 6.00 | 6.30 | 6.60 | 6.90 | 7.20 | 7.50 | 7.80 | 8.10 | 8.40 | 8.70 | 9.00 | 9.30 |
| 40 | 8.00 | 8.40 | 8.80 | 9.20 | 9.60 | 10.00 | 10.40 | 10.80 | 11.20 | 11.60 | 12.00 | 12.40 |
| 50 | 10.00 | 10.50 | 11.00 | 11.50 | 12.00 | 12.50 | 13.00 | 13.50 | 14.00 | 14.50 | 15.00 | 15.50 |
| 60 | 12.00 | 12.60 | 13.20 | 13.80 | 14.40 | 15.00 | 15.60 | 16.20 | 16.80 | 17.40 | 18.00 | 18.60 |
| 70 | 14.00 | 14.70 | 15.40 | 16.10 | 16.80 | 17.50 | 18.20 | 18.90 | 19.60 | 20.30 | 21.00 | 21.70 |
| 80 | 16.00 | 16.80 | 17.60 | 18.40 | 19.20 | 20.00 | 20.80 | 21.60 | 22.40 | 23.20 | 24.00 | 24.80 |
| 90 | 18.00 | 18.90 | 19.80 | 20.70 | 21.60 | 22.50 | 23.40 | 24.30 | 25.20 | 26.10 | 27.00 | 27.90 |
| 100 | 20.00 | 21.00 | 22.00 | 23.00 | 24.00 | 25.00 | 26.00 | 27.00 | 28.00 | 29.00 | 30.00 | 31.00 |
| 110 | 22.00 | 23.10 | 24.20 | 25.30 | 26.40 | 27.50 | 28.60 | 29.70 | 30.80 | 31.90 | 33.00 | 34.10 |
| 120 | 24.00 | 25.20 | 26.40 | 27.60 | 28.80 | 30.00 | 31.20 | 32.40 | 33.60 | 34.80 | 36.00 | 37.20 |
| 130 | 26.00 | 27.30 | 28.60 | 29.90 | 31.20 | 32.50 | 33.80 | 35.10 | 36.40 | 37.70 | 39.00 | 40.30 |
| 140 | 28.00 | 29.40 | 30.80 | 32.20 | 33.60 | 35.00 | 36.40 | 37.80 | 39.20 | 40.60 | 42.00 | 43.40 |
| 150 | 30.00 | 31.50 | 33.00 | 34.50 | 36.00 | 37.50 | 39.00 | 40.50 | 42.00 | 43.50 | 45.00 | 46.50 |
| 160 | 32.00 | 33.60 | 35.20 | 36.80 | 38.40 | 40.00 | 41.60 | 43.20 | 44.80 | 46.40 | 48.00 | 49.60 |
| 170 | 34.00 | 35.70 | 37.40 | 39.10 | 40.80 | 42.50 | 44.20 | 45.90 | 47.60 | 49.30 | 51.00 | 52.70 |
| 180 | 36.00 | 37.80 | 39.60 | 41.40 | 43.20 | 45.00 | 46.80 | 48.60 | 50.40 | 52.20 | 54.00 | 55.80 |
| 190 | 38.00 | 39.90 | 41.80 | 43.70 | 45.60 | 47.50 | 49.40 | 51.30 | 53.20 | 55.10 | 57.00 | 58.90 |
| 200 | 40.00 | 42.00 | 44.00 | 46.00 | 48.00 | 50.00 | 52.00 | 54.00 | 56.00 | 58.00 | 60.00 | 62.00 |
| 210 | 42.00 | 44.10 | 46.20 | 48.30 | 50.40 | 52.50 | 54.60 | 56.70 | 58.80 | 60.90 | 63.00 | 65.10 |
| 220 | 44.00 | 46.20 | 48.40 | 50.60 | 52.80 | 55.00 | 57.20 | 59.40 | 61.60 | 63.80 | 66.00 | 68.20 |
| 230 | 46.00 | 48.30 | 50.60 | 52.90 | 55.20 | 57.50 | 59.80 | 62.10 | 64.40 | 66.70 | 69.00 | 71.30 |
| 240 | 48.00 | 50.40 | 52.80 | 55.20 | 57.60 | 60.00 | 62.40 | 64.80 | 67.20 | 69.60 | 72.00 | 74.40 |
| 250 | 50.00 | 52.50 | 55.00 | 57.50 | 60.00 | 62.50 | 65.00 | 67.50 | 70.00 | 72.50 | 75.00 | 77.50 |
| 260 | 52.00 | 54.60 | 57.20 | 59.80 | 62.40 | 65.00 | 67.60 | 70.20 | 72.80 | 75.40 | 78.00 | 80.60 |
| 270 | 54.00 | 56.70 | 59.40 | 62.10 | 64.80 | 67.50 | 70.20 | 72.90 | 75.60 | 78.30 | 81.00 | 83.70 |
| 280 | 56.00 | 58.80 | 61.60 | 64.40 | 67.20 | 70.00 | 72.80 | 75.60 | 78.40 | 81.20 | 84.00 | 86.80 |
| 290 | 58.00 | 60.90 | 63.80 | 66.70 | 69.60 | 72.50 | 75.40 | 78.30 | 81.20 | 84.10 | 87.00 | 89.90 |
| 300 | 60.00 | 63.00 | 66.00 | 69.00 | 72.00 | 75.00 | 78.00 | 81.00 | 84.00 | 87.00 | 90.00 | 93.00 |
| 310 | 62.00 | 65.10 | 68.20 | 71.30 | 74.40 | 77.50 | 80.60 | 83.70 | 86.80 | 89.90 | 93.00 | 96.10 |
| 320 | 64.00 | 67.20 | 70.40 | 73.60 | 76.80 | 80.00 | 83.20 | 86.40 | 89.60 | 92.80 | 96.00 | 99.20 |
| 330 | 66.00 | 69.30 | 72.60 | 75.90 | 79.20 | 82.50 | 85.80 | 89.10 | 92.40 | 95.70 | 99.00 | 102.30 |
| 340 | 68.00 | 71.40 | 74.80 | 78.20 | 81.60 | 85.00 | 88.40 | 91.80 | 95.20 | 98.60 | 102.00 | 105.40 |
| 350 | 70.00 | 73.50 | 77.00 | 80.50 | 84.00 | 87.50 | 91.00 | 94.50 | 98.00 | 101.50 | 105.00 | 108.50 |
| 360 | 72.00 | 75.60 | 79.20 | 82.80 | 86.40 | 90.00 | 93.60 | 97.20 | 100.80 | 104.40 | 108.00 | 111.60 |
| 370 | 74.00 | 77.70 | 81.40 | 85.10 | 88.80 | 92.50 | 96.20 | 99.90 | 103.60 | 107.30 | 111.00 | 114.70 |
| 380 | 76.00 | 79.80 | 83.60 | 87.40 | 91.20 | 95.00 | 98.80 | 102.60 | 106.40 | 110.20 | 114.00 | 117.80 |
| 390 | 78.00 | 81.90 | 85.80 | 89.70 | 93.60 | 97.50 | 101.40 | 105.30 | 109.20 | 113.10 | 117.00 | 120.90 |
| 400 | 80.00 | 84.00 | 88.00 | 92.00 | 96.00 | 100.00 | 104.00 | 108.00 | 112.00 | 116.00 | 120.00 | 124.00 |

| Longitud | Valores de elevación f apartir de la relación f/l | | | | | | | | | | | | | |
|----------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|--|
| | 0.32 | 0.33 | 0.34 | 0.35 | 0.36 | 0.37 | 0.38 | 0.39 | 0.40 | 0.41 | 0.42 | 0.43 | | |
| 30 | 9.60 | 9.90 | 10.20 | 10.50 | 10.80 | 11.10 | 11.40 | 11.70 | 12.00 | 12.30 | 12.60 | 12.90 | | |
| 40 | 12.80 | 13.20 | 13.60 | 14.00 | 14.40 | 14.80 | 15.20 | 15.60 | 16.00 | 16.40 | 16.80 | 17.20 | | |
| 50 | 16.00 | 16.50 | 17.00 | 17.50 | 18.00 | 18.50 | 19.00 | 19.50 | 20.00 | 20.50 | 21.00 | 21.50 | | |
| 60 | 19.20 | 19.80 | 20.40 | 21.00 | 21.60 | 22.20 | 22.80 | 23.40 | 24.00 | 24.60 | 25.20 | 25.80 | | |
| 70 | 22.40 | 23.10 | 23.80 | 24.50 | 25.20 | 25.90 | 26.60 | 27.30 | 28.00 | 28.70 | 29.40 | 30.10 | | |
| 80 | 25.60 | 26.40 | 27.20 | 28.00 | 28.80 | 29.60 | 30.40 | 31.20 | 32.00 | 32.80 | 33.60 | 34.40 | | |
| 90 | 28.80 | 29.70 | 30.60 | 31.50 | 32.40 | 33.30 | 34.20 | 35.10 | 36.00 | 36.90 | 37.80 | 38.70 | | |
| 100 | 32.00 | 33.00 | 34.00 | 35.00 | 36.00 | 37.00 | 38.00 | 39.00 | 40.00 | 41.00 | 42.00 | 43.00 | | |
| 110 | 35.20 | 36.30 | 37.40 | 38.50 | 39.60 | 40.70 | 41.80 | 42.90 | 44.00 | 45.10 | 46.20 | 47.30 | | |
| 120 | 38.40 | 39.60 | 40.80 | 42.00 | 43.20 | 44.40 | 45.60 | 46.80 | 48.00 | 49.20 | 50.40 | 51.60 | | |
| 130 | 41.60 | 42.90 | 44.20 | 45.50 | 46.80 | 48.10 | 49.40 | 50.70 | 52.00 | 53.30 | 54.60 | 55.90 | | |
| 140 | 44.80 | 46.20 | 47.60 | 49.00 | 50.40 | 51.80 | 53.20 | 54.60 | 56.00 | 57.40 | 58.80 | 60.20 | | |
| 150 | 48.00 | 49.50 | 51.00 | 52.50 | 54.00 | 55.50 | 57.00 | 58.50 | 60.00 | 61.50 | 63.00 | 64.50 | | |
| 160 | 51.20 | 52.80 | 54.40 | 56.00 | 57.60 | 59.20 | 60.80 | 62.40 | 64.00 | 65.60 | 67.20 | 68.80 | | |
| 170 | 54.40 | 56.10 | 57.80 | 59.50 | 61.20 | 62.90 | 64.60 | 66.30 | 68.00 | 69.70 | 71.40 | 73.10 | | |
| 180 | 57.60 | 59.40 | 61.20 | 63.00 | 64.80 | 66.60 | 68.40 | 70.20 | 72.00 | 73.80 | 75.60 | 77.40 | | |
| 190 | 60.80 | 62.70 | 64.60 | 66.50 | 68.40 | 70.30 | 72.20 | 74.10 | 76.00 | 77.90 | 79.80 | 81.70 | | |
| 200 | 64.00 | 66.00 | 68.00 | 70.00 | 72.00 | 74.00 | 76.00 | 78.00 | 80.00 | 82.00 | 84.00 | 86.00 | | |
| 210 | 67.20 | 69.30 | 71.40 | 73.50 | 75.60 | 77.70 | 79.80 | 81.90 | 84.00 | 86.10 | 88.20 | 90.30 | | |
| 220 | 70.40 | 72.60 | 74.80 | 77.00 | 79.20 | 81.40 | 83.60 | 85.80 | 88.00 | 90.20 | 92.40 | 94.60 | | |
| 230 | 73.60 | 75.90 | 78.20 | 80.50 | 82.80 | 85.10 | 87.40 | 89.70 | 92.00 | 94.30 | 96.60 | 98.90 | | |
| 240 | 76.80 | 79.20 | 81.60 | 84.00 | 86.40 | 88.80 | 91.20 | 93.60 | 96.00 | 98.40 | 100.80 | 103.20 | | |
| 250 | 80.00 | 82.50 | 85.00 | 87.50 | 90.00 | 92.50 | 95.00 | 97.50 | 100.00 | 102.50 | 105.00 | 107.50 | | |
| 260 | 83.20 | 85.80 | 88.40 | 91.00 | 93.60 | 96.20 | 98.80 | 101.40 | 104.00 | 106.60 | 109.20 | 111.80 | | |
| 270 | 86.40 | 89.10 | 91.80 | 94.50 | 97.20 | 99.90 | 102.60 | 105.30 | 108.00 | 110.70 | 113.40 | 116.10 | | |
| 280 | 89.60 | 92.40 | 95.20 | 98.00 | 100.80 | 103.60 | 106.40 | 109.20 | 112.00 | 114.80 | 117.60 | 120.40 | | |
| 290 | 92.80 | 95.70 | 98.60 | 101.50 | 104.40 | 107.30 | 110.20 | 113.10 | 116.00 | 118.90 | 121.80 | 124.70 | | |
| 300 | 96.00 | 99.00 | 102.00 | 105.00 | 108.00 | 111.00 | 114.00 | 117.00 | 120.00 | 123.00 | 126.00 | 129.00 | | |
| 310 | 99.20 | 102.30 | 105.40 | 108.50 | 111.60 | 114.70 | 117.80 | 120.90 | 124.00 | 127.10 | 130.20 | 133.30 | | |
| 320 | 102.40 | 105.60 | 108.80 | 112.00 | 115.20 | 118.40 | 121.60 | 124.80 | 128.00 | 131.20 | 134.40 | 137.60 | | |
| 330 | 105.60 | 108.90 | 112.20 | 115.50 | 118.80 | 122.10 | 125.40 | 128.70 | 132.00 | 135.30 | 138.60 | 141.90 | | |
| 340 | 108.80 | 112.20 | 115.60 | 119.00 | 122.40 | 125.80 | 129.20 | 132.60 | 136.00 | 139.40 | 142.80 | 146.20 | | |
| 350 | 112.00 | 115.50 | 119.00 | 122.50 | 126.00 | 129.50 | 133.00 | 136.50 | 140.00 | 143.50 | 147.00 | 150.50 | | |
| 360 | 115.20 | 118.80 | 122.40 | 126.00 | 129.60 | 133.20 | 136.80 | 140.40 | 144.00 | 147.60 | 151.20 | 154.80 | | |
| 370 | 118.40 | 122.10 | 125.80 | 129.50 | 133.20 | 136.90 | 140.60 | 144.30 | 148.00 | 151.70 | 155.40 | 159.10 | | |
| 380 | 121.60 | 125.40 | 129.20 | 133.00 | 136.80 | 140.60 | 144.40 | 148.20 | 152.00 | 155.80 | 159.60 | 163.40 | | |
| 390 | 124.80 | 128.70 | 132.60 | 136.50 | 140.40 | 144.30 | 148.20 | 152.10 | 156.00 | 159.90 | 163.80 | 167.70 | | |
| 400 | 128.00 | 132.00 | 136.00 | 140.00 | 144.00 | 148.00 | 152.00 | 156.00 | 160.00 | 164.00 | 168.00 | 172.00 | | |

| Longitud | Valores de elevación f a partir de la relación f/L | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|--|--|--|
| | 0.44 | 0.45 | 0.46 | 0.47 | 0.48 | 0.49 | 0.50 | 0.51 | 0.52 | 0.53 | 0.54 | 0.55 | | | | |
| 30 | 13.20 | 13.50 | 13.80 | 14.10 | 14.40 | 14.70 | 15.00 | 15.30 | 15.60 | 15.90 | 16.20 | 16.50 | | | | |
| 40 | 17.60 | 18.00 | 18.40 | 18.80 | 19.20 | 19.60 | 20.00 | 20.40 | 20.80 | 21.20 | 21.60 | 22.00 | | | | |
| 50 | 22.00 | 22.50 | 23.00 | 23.50 | 24.00 | 24.50 | 25.00 | 25.50 | 26.00 | 26.50 | 27.00 | 27.50 | | | | |
| 60 | 26.40 | 27.00 | 27.60 | 28.20 | 28.80 | 29.40 | 30.00 | 30.60 | 31.20 | 31.80 | 32.40 | 33.00 | | | | |
| 70 | 30.80 | 31.50 | 32.20 | 32.90 | 33.60 | 34.30 | 35.00 | 35.70 | 36.40 | 37.10 | 37.80 | 38.50 | | | | |
| 80 | 35.20 | 36.00 | 36.80 | 37.60 | 38.40 | 39.20 | 40.00 | 40.80 | 41.60 | 42.40 | 43.20 | 44.00 | | | | |
| 90 | 39.60 | 40.50 | 41.40 | 42.30 | 43.20 | 44.10 | 45.00 | 45.90 | 46.80 | 47.70 | 48.60 | 49.50 | | | | |
| 100 | 44.00 | 45.00 | 46.00 | 47.00 | 48.00 | 49.00 | 50.00 | 51.00 | 52.00 | 53.00 | 54.00 | 55.00 | | | | |
| 110 | 48.40 | 49.50 | 50.60 | 51.70 | 52.80 | 53.90 | 55.00 | 56.10 | 57.20 | 58.30 | 59.40 | 60.50 | | | | |
| 120 | 52.80 | 54.00 | 55.20 | 56.40 | 57.60 | 58.80 | 60.00 | 61.20 | 62.40 | 63.60 | 64.80 | 66.00 | | | | |
| 130 | 57.20 | 58.50 | 59.80 | 61.10 | 62.40 | 63.70 | 65.00 | 66.30 | 67.60 | 68.90 | 70.20 | 71.50 | | | | |
| 140 | 61.60 | 63.00 | 64.40 | 65.80 | 67.20 | 68.60 | 70.00 | 71.40 | 72.80 | 74.20 | 75.60 | 77.00 | | | | |
| 150 | 66.00 | 67.50 | 69.00 | 70.50 | 72.00 | 73.50 | 75.00 | 76.50 | 78.00 | 79.50 | 81.00 | 82.50 | | | | |
| 160 | 70.40 | 72.00 | 73.60 | 75.20 | 76.80 | 78.40 | 80.00 | 81.60 | 83.20 | 84.80 | 86.40 | 88.00 | | | | |
| 170 | 74.80 | 76.50 | 78.20 | 79.90 | 81.60 | 83.30 | 85.00 | 86.70 | 88.40 | 90.10 | 91.80 | 93.50 | | | | |
| 180 | 79.20 | 81.00 | 82.80 | 84.60 | 86.40 | 88.20 | 90.00 | 91.80 | 93.60 | 95.40 | 97.20 | 99.00 | | | | |
| 190 | 83.60 | 85.50 | 87.40 | 89.30 | 91.20 | 93.10 | 95.00 | 96.90 | 98.80 | 100.70 | 102.60 | 104.50 | | | | |
| 200 | 88.00 | 90.00 | 92.00 | 94.00 | 96.00 | 98.00 | 100.00 | 102.00 | 104.00 | 106.00 | 108.00 | 110.00 | | | | |
| 210 | 92.40 | 94.50 | 96.60 | 98.70 | 100.80 | 102.90 | 105.00 | 107.10 | 109.20 | 111.30 | 113.40 | 115.50 | | | | |
| 220 | 96.80 | 99.00 | 101.20 | 103.40 | 105.60 | 107.80 | 110.00 | 112.20 | 114.40 | 116.60 | 118.80 | 121.00 | | | | |
| 230 | 101.20 | 103.50 | 105.80 | 108.10 | 110.40 | 112.70 | 115.00 | 117.30 | 119.60 | 121.90 | 124.20 | 126.50 | | | | |
| 240 | 105.60 | 108.00 | 110.40 | 112.80 | 115.20 | 117.60 | 120.00 | 122.40 | 124.80 | 127.20 | 129.60 | 132.00 | | | | |
| 250 | 110.00 | 112.50 | 115.00 | 117.50 | 120.00 | 122.50 | 125.00 | 127.50 | 130.00 | 132.50 | 135.00 | 137.50 | | | | |
| 260 | 114.40 | 117.00 | 119.60 | 122.20 | 124.80 | 127.40 | 130.00 | 132.60 | 135.20 | 137.80 | 140.40 | 143.00 | | | | |
| 270 | 118.80 | 121.50 | 124.20 | 126.90 | 129.60 | 132.30 | 135.00 | 137.70 | 140.40 | 143.10 | 145.80 | 148.50 | | | | |
| 280 | 123.20 | 126.00 | 128.80 | 131.60 | 134.40 | 137.20 | 140.00 | 142.80 | 145.60 | 148.40 | 151.20 | 154.00 | | | | |
| 290 | 127.60 | 130.50 | 133.40 | 136.30 | 139.20 | 142.10 | 145.00 | 147.90 | 150.80 | 153.70 | 156.60 | 159.50 | | | | |
| 300 | 132.00 | 135.00 | 138.00 | 141.00 | 144.00 | 147.00 | 150.00 | 153.00 | 156.00 | 159.00 | 162.00 | 165.00 | | | | |
| 310 | 136.40 | 139.50 | 142.60 | 145.70 | 148.80 | 151.90 | 155.00 | 158.10 | 161.20 | 164.30 | 167.40 | 170.50 | | | | |
| 320 | 140.80 | 144.00 | 147.20 | 150.40 | 153.60 | 156.80 | 160.00 | 163.20 | 166.40 | 169.60 | 172.80 | 176.00 | | | | |
| 330 | 145.20 | 148.50 | 151.80 | 155.10 | 158.40 | 161.70 | 165.00 | 168.30 | 171.60 | 174.90 | 178.20 | 181.50 | | | | |
| 340 | 149.60 | 153.00 | 156.40 | 159.80 | 163.20 | 166.60 | 170.00 | 173.40 | 176.80 | 180.20 | 183.60 | 187.00 | | | | |
| 350 | 154.00 | 157.50 | 161.00 | 164.50 | 168.00 | 171.50 | 175.00 | 178.50 | 182.00 | 185.50 | 189.00 | 192.50 | | | | |
| 360 | 158.40 | 162.00 | 165.60 | 169.20 | 172.80 | 176.40 | 180.00 | 183.60 | 187.20 | 190.80 | 194.40 | 198.00 | | | | |
| 370 | 162.80 | 166.50 | 170.20 | 173.90 | 177.60 | 181.30 | 185.00 | 188.70 | 192.40 | 196.10 | 199.80 | 203.50 | | | | |
| 380 | 167.20 | 171.00 | 174.80 | 178.60 | 182.40 | 186.20 | 190.00 | 193.80 | 197.60 | 201.40 | 205.20 | 209.00 | | | | |
| 390 | 171.60 | 175.50 | 179.40 | 183.30 | 187.20 | 191.10 | 195.00 | 198.90 | 202.80 | 206.70 | 210.60 | 214.50 | | | | |
| 400 | 176.00 | 180.00 | 184.00 | 188.00 | 192.00 | 196.00 | 200.00 | 204.00 | 208.00 | 212.00 | 216.00 | 220.00 | | | | |

III.2 TABLAS PARA OBTENER LOS VALORES DE x Y DE y A PARTIR DE POR CIENTO DE LONGITUD DE ARCO

| Longitud | Valores de x en por ciento de longitud | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|--|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--|--|--|--|--|
| | 0.00 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | | | | | |
| 30 | 0.00 | 1.50 | 3.00 | 4.50 | 6.00 | 7.50 | 9.00 | 10.50 | 12.00 | 13.50 | | | | | |
| 40 | 0.00 | 2.00 | 4.00 | 6.00 | 8.00 | 10.00 | 12.00 | 14.00 | 16.00 | 18.00 | | | | | |
| 50 | 0.00 | 2.50 | 5.00 | 7.50 | 10.00 | 12.50 | 15.00 | 17.50 | 20.00 | 22.50 | | | | | |
| 60 | 0.00 | 3.00 | 6.00 | 9.00 | 12.00 | 15.00 | 18.00 | 21.00 | 24.00 | 27.00 | | | | | |
| 70 | 0.00 | 3.50 | 7.00 | 10.50 | 14.00 | 17.50 | 21.00 | 24.50 | 28.00 | 31.50 | | | | | |
| 80 | 0.00 | 4.00 | 8.00 | 12.00 | 16.00 | 20.00 | 24.00 | 28.00 | 32.00 | 36.00 | | | | | |
| 90 | 0.00 | 4.50 | 9.00 | 13.50 | 18.00 | 22.50 | 27.00 | 31.50 | 36.00 | 40.50 | | | | | |
| 100 | 0.00 | 5.00 | 10.00 | 15.00 | 20.00 | 25.00 | 30.00 | 35.00 | 40.00 | 45.00 | | | | | |
| 110 | 0.00 | 5.50 | 11.00 | 16.50 | 22.00 | 27.50 | 33.00 | 38.50 | 44.00 | 49.50 | | | | | |
| 120 | 0.00 | 6.00 | 12.00 | 18.00 | 24.00 | 30.00 | 36.00 | 42.00 | 48.00 | 54.00 | | | | | |
| 130 | 0.00 | 6.50 | 13.00 | 19.50 | 26.00 | 32.50 | 39.00 | 45.50 | 52.00 | 58.50 | | | | | |
| 140 | 0.00 | 7.00 | 14.00 | 21.00 | 28.00 | 35.00 | 42.00 | 49.00 | 56.00 | 63.00 | | | | | |
| 150 | 0.00 | 7.50 | 15.00 | 22.50 | 30.00 | 37.50 | 45.00 | 52.50 | 60.00 | 67.50 | | | | | |
| 160 | 0.00 | 8.00 | 16.00 | 24.00 | 32.00 | 40.00 | 48.00 | 56.00 | 64.00 | 72.00 | | | | | |
| 170 | 0.00 | 8.50 | 17.00 | 25.50 | 34.00 | 42.50 | 51.00 | 59.50 | 68.00 | 76.50 | | | | | |
| 180 | 0.00 | 9.00 | 18.00 | 27.00 | 36.00 | 45.00 | 54.00 | 63.00 | 72.00 | 81.00 | | | | | |
| 190 | 0.00 | 9.50 | 19.00 | 28.50 | 38.00 | 47.50 | 57.00 | 66.50 | 76.00 | 85.50 | | | | | |
| 200 | 0.00 | 10.00 | 20.00 | 30.00 | 40.00 | 50.00 | 60.00 | 70.00 | 80.00 | 90.00 | | | | | |
| 210 | 0.00 | 10.50 | 21.00 | 31.50 | 42.00 | 52.50 | 63.00 | 73.50 | 84.50 | 94.50 | | | | | |
| 220 | 0.00 | 11.00 | 22.00 | 33.00 | 44.00 | 55.00 | 66.00 | 77.00 | 88.00 | 99.00 | | | | | |
| 230 | 0.00 | 11.50 | 23.00 | 34.50 | 46.00 | 57.50 | 69.00 | 80.50 | 92.00 | 103.50 | | | | | |
| 240 | 0.00 | 12.00 | 24.00 | 36.00 | 48.00 | 60.00 | 72.00 | 84.00 | 96.00 | 108.00 | | | | | |
| 250 | 0.00 | 12.50 | 25.00 | 37.50 | 50.00 | 62.50 | 75.00 | 87.50 | 100.00 | 112.50 | | | | | |
| 260 | 0.00 | 13.00 | 26.00 | 39.00 | 52.00 | 65.00 | 78.00 | 91.00 | 104.00 | 117.00 | | | | | |
| 270 | 0.00 | 13.50 | 27.00 | 40.50 | 54.00 | 67.50 | 81.00 | 94.50 | 108.00 | 121.50 | | | | | |
| 280 | 0.00 | 14.00 | 28.00 | 42.00 | 56.00 | 70.00 | 84.00 | 98.00 | 112.00 | 126.00 | | | | | |
| 290 | 0.00 | 14.50 | 29.00 | 43.50 | 58.00 | 72.50 | 87.00 | 101.50 | 116.00 | 130.50 | | | | | |
| 300 | 0.00 | 15.00 | 30.00 | 45.00 | 60.00 | 75.00 | 90.00 | 105.00 | 120.00 | 135.00 | | | | | |
| 310 | 0.00 | 15.50 | 31.00 | 46.50 | 62.00 | 77.50 | 93.00 | 108.50 | 124.00 | 139.50 | | | | | |
| 320 | 0.00 | 16.00 | 32.00 | 48.00 | 64.00 | 80.00 | 96.00 | 112.00 | 128.00 | 144.00 | | | | | |
| 330 | 0.00 | 16.50 | 33.00 | 49.50 | 66.00 | 82.50 | 99.00 | 115.50 | 132.00 | 148.50 | | | | | |
| 340 | 0.00 | 17.00 | 34.00 | 51.00 | 68.00 | 85.00 | 102.00 | 119.00 | 136.00 | 153.00 | | | | | |
| 350 | 0.00 | 17.50 | 35.00 | 52.50 | 70.00 | 87.50 | 105.00 | 122.50 | 140.00 | 157.50 | | | | | |
| 360 | 0.00 | 18.00 | 36.00 | 54.00 | 72.00 | 90.00 | 108.00 | 126.00 | 144.00 | 162.00 | | | | | |
| 370 | 0.00 | 18.50 | 37.00 | 55.50 | 74.00 | 92.50 | 111.00 | 129.50 | 148.00 | 166.50 | | | | | |
| 380 | 0.00 | 19.00 | 38.00 | 57.00 | 76.00 | 95.00 | 114.00 | 133.00 | 152.00 | 171.00 | | | | | |
| 390 | 0.00 | 19.50 | 39.00 | 58.50 | 78.00 | 97.50 | 117.00 | 136.50 | 156.00 | 175.50 | | | | | |
| 400 | 0.00 | 20.00 | 40.00 | 60.00 | 80.00 | 100.00 | 120.00 | 140.00 | 160.00 | 180.00 | | | | | |

| Valores de y en por ciento de longitud | | | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.00 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 |
| 0.00f | 0.19f | 0.36f | 0.51f | 0.64f | 0.75f | 0.84f | 0.91f | 0.96f | 0.99f |

| Longitud | Valores de x en por ciento de longitud | | | | | | | | | | | | |
|----------|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|--|--|
| | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 | | | |
| 30 | 15.00 | 16.50 | 18.00 | 19.50 | 21.00 | 22.50 | 24.00 | 25.50 | 27.00 | 28.50 | | | |
| 40 | 20.00 | 22.00 | 24.00 | 26.00 | 30.00 | 30.00 | 32.00 | 34.00 | 36.00 | 38.00 | | | |
| 50 | 25.00 | 27.50 | 30.00 | 32.50 | 35.00 | 37.50 | 40.00 | 42.50 | 45.00 | 47.50 | | | |
| 60 | 30.00 | 33.00 | 36.00 | 39.00 | 42.00 | 45.00 | 48.00 | 51.00 | 54.00 | 57.00 | | | |
| 70 | 35.00 | 38.50 | 42.00 | 45.50 | 49.00 | 52.50 | 56.00 | 59.50 | 63.00 | 66.50 | | | |
| 80 | 40.00 | 44.00 | 48.00 | 52.00 | 56.00 | 60.00 | 64.00 | 68.00 | 72.00 | 76.00 | | | |
| 90 | 45.00 | 49.50 | 54.00 | 58.50 | 63.00 | 67.50 | 72.00 | 76.50 | 81.00 | 85.50 | | | |
| 100 | 50.00 | 55.00 | 60.00 | 65.00 | 70.00 | 75.00 | 80.00 | 85.00 | 90.00 | 95.00 | | | |
| 110 | 55.00 | 60.50 | 66.00 | 71.50 | 77.00 | 82.50 | 88.00 | 93.50 | 99.00 | 104.50 | | | |
| 120 | 60.00 | 66.00 | 72.00 | 78.00 | 84.00 | 90.00 | 96.00 | 102.00 | 108.00 | 114.00 | | | |
| 130 | 65.00 | 71.50 | 78.00 | 84.50 | 91.00 | 97.50 | 104.00 | 110.50 | 117.00 | 123.50 | | | |
| 140 | 70.00 | 77.00 | 84.00 | 91.00 | 98.00 | 105.00 | 112.00 | 119.00 | 126.00 | 133.00 | | | |
| 150 | 75.00 | 82.50 | 90.00 | 97.50 | 105.00 | 112.50 | 120.00 | 127.50 | 135.00 | 142.50 | | | |
| 160 | 80.00 | 88.00 | 96.00 | 104.00 | 112.00 | 120.00 | 128.00 | 136.00 | 144.00 | 152.00 | | | |
| 170 | 85.00 | 93.50 | 102.00 | 110.50 | 119.00 | 127.50 | 136.00 | 144.50 | 153.00 | 161.50 | | | |
| 180 | 90.00 | 99.00 | 108.00 | 117.00 | 126.00 | 135.00 | 144.00 | 153.00 | 162.00 | 171.00 | | | |
| 190 | 95.00 | 104.50 | 114.00 | 123.50 | 133.00 | 142.50 | 152.00 | 161.50 | 171.00 | 180.50 | | | |
| 200 | 100.00 | 110.00 | 120.00 | 130.00 | 140.00 | 150.00 | 160.00 | 170.00 | 180.00 | 190.00 | | | |
| 210 | 105.00 | 115.50 | 126.00 | 136.50 | 147.00 | 157.50 | 168.00 | 178.50 | 189.00 | 199.50 | | | |
| 220 | 110.00 | 121.00 | 132.00 | 143.00 | 154.00 | 165.00 | 176.00 | 187.00 | 198.00 | 209.00 | | | |
| 230 | 115.00 | 126.50 | 138.00 | 149.50 | 161.00 | 172.50 | 184.00 | 195.50 | 207.00 | 218.50 | | | |
| 240 | 120.00 | 132.00 | 144.00 | 156.00 | 168.00 | 180.00 | 192.00 | 204.00 | 216.00 | 228.00 | | | |
| 250 | 125.00 | 137.50 | 150.00 | 162.50 | 175.00 | 187.50 | 200.00 | 212.50 | 225.00 | 237.50 | | | |
| 260 | 130.00 | 143.00 | 156.00 | 169.00 | 182.00 | 195.00 | 208.00 | 221.00 | 234.00 | 247.00 | | | |
| 270 | 135.00 | 148.50 | 162.00 | 175.50 | 189.00 | 202.50 | 216.00 | 229.50 | 243.00 | 256.50 | | | |
| 280 | 140.00 | 154.00 | 168.00 | 182.00 | 196.00 | 210.00 | 224.00 | 238.00 | 252.00 | 266.00 | | | |
| 290 | 145.00 | 159.50 | 174.00 | 188.50 | 203.00 | 217.50 | 232.00 | 246.50 | 261.00 | 275.50 | | | |
| 300 | 150.00 | 165.00 | 180.00 | 195.00 | 210.00 | 225.00 | 240.00 | 255.00 | 270.00 | 285.00 | | | |
| 310 | 155.00 | 170.50 | 186.00 | 201.50 | 217.00 | 232.50 | 248.00 | 263.50 | 279.00 | 294.50 | | | |
| 320 | 160.00 | 176.00 | 192.00 | 208.00 | 224.00 | 240.00 | 256.00 | 272.00 | 288.00 | 304.00 | | | |
| 330 | 165.00 | 181.50 | 198.00 | 214.50 | 231.00 | 247.50 | 264.00 | 280.50 | 297.00 | 313.50 | | | |
| 340 | 170.00 | 187.00 | 204.00 | 221.00 | 238.00 | 255.00 | 272.00 | 289.00 | 306.00 | 323.00 | | | |
| 350 | 175.00 | 192.50 | 210.00 | 227.50 | 245.00 | 262.50 | 280.00 | 297.50 | 315.00 | 332.50 | | | |
| 360 | 180.00 | 198.00 | 216.00 | 234.00 | 252.00 | 270.00 | 288.00 | 306.00 | 324.00 | 342.00 | | | |
| 370 | 185.00 | 203.50 | 222.00 | 240.50 | 259.00 | 277.50 | 296.00 | 314.50 | 333.00 | 351.50 | | | |
| 380 | 190.00 | 209.00 | 228.00 | 247.00 | 266.00 | 285.00 | 304.00 | 323.00 | 342.00 | 361.00 | | | |
| 390 | 195.00 | 214.50 | 234.00 | 253.50 | 273.00 | 292.50 | 312.00 | 331.50 | 351.00 | 370.50 | | | |
| 400 | 200.00 | 220.00 | 240.00 | 260.00 | 280.00 | 300.00 | 320.00 | 340.00 | 360.00 | 380.00 | | | |

| Valores de y en por ciento de longitud | | | | | | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|--|--|
| 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 | | | |
| 1.00f | 0.99f | 0.96f | 0.91f | 0.84f | 0.75f | 0.64f | 0.51f | 0.36f | 0.19f | | | |

III.3 TABLAS PARA OBTENER LOS VALORES DE α APARTIR DE POR CIENTO DE LONGITUD DE ARCO Y SU RELACIÓN ϕ/L .

| Relación ϕ/L | Valores de α en por ciento de longitud | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--|--|--|--|--|
| | 0.00 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | | | | | |
| 0.08 | 17.7447 | 16.0664 | 14.3593 | 12.6258 | 10.8685 | 9.0903 | 7.2942 | 5.4836 | 3.6619 | 1.8328 | | | | | |
| 0.09 | 19.7989 | 17.9523 | 16.0664 | 14.1440 | 12.1886 | 10.2040 | 8.1943 | 6.1641 | 4.1182 | 2.0618 | | | | | |
| 0.10 | 21.8014 | 19.7989 | 17.7447 | 15.6422 | 13.4957 | 11.3099 | 9.0903 | 6.8428 | 4.5739 | 2.2906 | | | | | |
| 0.11 | 23.7495 | 21.6036 | 19.3921 | 17.1188 | 14.7887 | 12.4074 | 9.9818 | 7.5196 | 5.0291 | 2.5194 | | | | | |
| 0.12 | 25.6410 | 23.3643 | 21.0068 | 18.5723 | 16.0664 | 13.4957 | 10.8685 | 8.1943 | 5.4836 | 2.7481 | | | | | |
| 0.13 | 27.4744 | 25.0796 | 22.5873 | 20.0015 | 17.3279 | 14.5742 | 11.7500 | 8.8667 | 5.9374 | 2.9767 | | | | | |
| 0.14 | 29.2488 | 26.7481 | 24.1324 | 21.4062 | 18.5723 | 15.6422 | 12.6258 | 9.5366 | 6.3905 | 3.2052 | | | | | |
| 0.15 | 30.9638 | 28.3690 | 25.6410 | 22.7824 | 19.7989 | 16.6992 | 13.4957 | 10.2040 | 6.8428 | 3.4336 | | | | | |
| 0.16 | 32.6192 | 29.9419 | 27.1124 | 24.1324 | 21.0068 | 17.7447 | 14.3593 | 10.8685 | 7.2942 | 3.6619 | | | | | |
| 0.17 | 34.2157 | 31.4666 | 28.5462 | 25.4544 | 22.1955 | 18.7780 | 15.2163 | 11.5301 | 7.7447 | 3.8901 | | | | | |
| 0.18 | 35.7539 | 32.9432 | 29.9419 | 26.7481 | 23.3643 | 19.7989 | 16.0664 | 12.1886 | 8.1943 | 4.1182 | | | | | |
| 0.19 | 37.2348 | 34.3721 | 31.2996 | 28.0130 | 24.5130 | 20.8068 | 16.9093 | 12.8439 | 8.6428 | 4.3461 | | | | | |
| 0.20 | 38.6598 | 35.7539 | 32.6192 | 29.2488 | 25.6410 | 21.8014 | 17.7447 | 13.4957 | 9.0903 | 4.5739 | | | | | |
| 0.21 | 40.0303 | 37.0893 | 33.9011 | 30.4555 | 26.7481 | 22.7824 | 18.5723 | 14.1440 | 9.5366 | 4.8016 | | | | | |
| 0.22 | 41.3478 | 38.3792 | 35.1455 | 31.6331 | 27.8341 | 23.7495 | 19.3921 | 14.7887 | 9.9818 | 5.0291 | | | | | |
| 0.23 | 42.6141 | 39.6248 | 36.3531 | 32.7815 | 28.9987 | 24.7024 | 20.2036 | 15.4295 | 10.4258 | 5.2564 | | | | | |
| 0.24 | 43.8309 | 40.8270 | 37.5243 | 33.9011 | 29.9419 | 25.6410 | 21.0068 | 16.0664 | 10.8685 | 5.4836 | | | | | |
| 0.25 | 45.0000 | 41.9872 | 38.6598 | 34.9920 | 30.9638 | 26.5651 | 21.8014 | 16.6992 | 11.3099 | 5.7106 | | | | | |
| 0.26 | 46.1233 | 43.1066 | 39.7605 | 36.0546 | 31.9642 | 27.4744 | 22.5873 | 17.3279 | 11.7500 | 5.9374 | | | | | |
| 0.27 | 47.2026 | 44.1865 | 40.8270 | 37.0893 | 32.9432 | 28.3690 | 23.3643 | 17.9523 | 12.1886 | 6.1641 | | | | | |
| 0.28 | 48.2397 | 45.2283 | 41.8603 | 38.0964 | 33.9011 | 29.2488 | 24.1324 | 18.5723 | 12.6258 | 6.3905 | | | | | |
| 0.29 | 49.2364 | 46.2332 | 42.8613 | 39.0766 | 34.8379 | 30.1137 | 24.8913 | 19.1879 | 13.0616 | 6.6167 | | | | | |
| 0.30 | 50.1944 | 47.2026 | 43.8309 | 40.0303 | 35.7539 | 30.9638 | 25.6410 | 19.7989 | 13.4957 | 6.8428 | | | | | |
| 0.31 | 51.1155 | 48.1378 | 44.7699 | 40.9680 | 36.6492 | 31.7989 | 26.3814 | 20.4052 | 13.9283 | 7.0686 | | | | | |
| 0.32 | 52.0013 | 49.0402 | 45.6794 | 41.8603 | 37.5243 | 32.6192 | 27.1124 | 21.0068 | 14.3593 | 7.2942 | | | | | |
| 0.33 | 52.8533 | 49.9110 | 46.5602 | 42.7379 | 38.3792 | 33.4246 | 27.8341 | 21.6036 | 14.7887 | 7.5196 | | | | | |
| 0.34 | 53.6732 | 50.7514 | 47.4133 | 43.5914 | 39.2144 | 34.2157 | 28.5462 | 22.1955 | 15.2163 | 7.7447 | | | | | |
| 0.35 | 54.4623 | 51.5627 | 48.2397 | 44.4213 | 40.0303 | 34.9920 | 29.2488 | 22.7824 | 15.6422 | 7.9696 | | | | | |
| 0.36 | 55.2222 | 52.3460 | 49.0402 | 45.2283 | 40.8270 | 35.7539 | 29.9419 | 23.3643 | 16.0664 | 8.1943 | | | | | |
| 0.37 | 55.9541 | 53.1026 | 49.8157 | 46.0130 | 41.6051 | 36.5014 | 30.6255 | 23.9412 | 16.4888 | 8.4187 | | | | | |
| 0.38 | 56.6593 | 53.8334 | 50.5672 | 46.7760 | 42.3648 | 37.2348 | 31.2996 | 24.5130 | 16.9093 | 8.6428 | | | | | |
| 0.39 | 57.3391 | 54.5396 | 51.2954 | 47.5181 | 43.1066 | 37.9542 | 31.9642 | 25.0796 | 17.3279 | 8.8667 | | | | | |
| 0.40 | 57.9946 | 55.2222 | 52.0013 | 48.2397 | 43.8309 | 38.6598 | 32.6192 | 25.6410 | 17.7447 | 9.0903 | | | | | |
| 0.41 | 58.6270 | 55.8821 | 52.6855 | 48.9415 | 44.5379 | 39.3518 | 33.2649 | 26.1972 | 18.1595 | 9.3136 | | | | | |
| 0.42 | 59.2373 | 56.5203 | 53.3490 | 49.6242 | 45.2283 | 40.0303 | 33.9011 | 26.7481 | 18.5723 | 9.5366 | | | | | |
| 0.43 | 59.8265 | 57.1377 | 53.9924 | 50.2882 | 45.9022 | 40.6955 | 34.5280 | 27.2937 | 18.9832 | 9.7594 | | | | | |
| 0.44 | 60.3955 | 57.7352 | 54.6166 | 50.9342 | 46.5602 | 41.3478 | 35.1455 | 27.8341 | 19.3921 | 9.9818 | | | | | |
| 0.45 | 60.9454 | 58.3136 | 55.2222 | 51.5627 | 47.2026 | 41.9872 | 35.7539 | 28.3690 | 19.7989 | 10.2040 | | | | | |
| 0.46 | 61.4769 | 58.8737 | 55.8099 | 52.1743 | 47.8298 | 42.6141 | 36.3531 | 28.9987 | 20.2036 | 10.4258 | | | | | |
| 0.47 | 61.9908 | 59.4162 | 56.3803 | 52.7696 | 48.4422 | 43.2285 | 36.9432 | 29.4230 | 20.6063 | 10.6473 | | | | | |
| 0.48 | 62.4880 | 59.9419 | 56.9342 | 53.3490 | 49.0402 | 43.8309 | 37.5243 | 29.9419 | 21.0068 | 10.8685 | | | | | |
| 0.49 | 62.9691 | 60.4514 | 57.4721 | 53.9131 | 49.6242 | 44.4213 | 38.0964 | 30.4555 | 21.4052 | 11.0894 | | | | | |
| 0.50 | 63.4349 | 60.9454 | 57.9946 | 54.4623 | 50.1944 | 45.0000 | 38.6598 | 30.9638 | 21.8014 | 11.3099 | | | | | |

Valores de α en por ciento de longitud

| Relación \bar{r}/L | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 1.00 |
|----------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.08 | 0.0000 | 1.8328 | 3.6619 | 5.4836 | 7.2942 | 9.0903 | 10.8685 | 12.6258 | 14.3593 | 17.7447 |
| 0.09 | 0.0000 | 2.0618 | 4.1182 | 6.1641 | 8.1943 | 10.2040 | 12.1886 | 14.1440 | 16.0664 | 19.7989 |
| 0.10 | 0.0000 | 2.2906 | 4.5739 | 6.8428 | 9.0903 | 11.3099 | 13.4957 | 15.6422 | 17.7447 | 21.8014 |
| 0.11 | 0.0000 | 2.5194 | 5.0291 | 7.5196 | 9.9818 | 12.4074 | 14.7887 | 17.1188 | 19.3921 | 23.7495 |
| 0.12 | 0.0000 | 2.7481 | 5.4836 | 8.1943 | 10.8685 | 13.4957 | 16.0664 | 18.5723 | 21.0068 | 25.6410 |
| 0.13 | 0.0000 | 2.9767 | 5.9374 | 8.8667 | 11.7500 | 14.5742 | 17.3279 | 20.0015 | 22.5873 | 27.4744 |
| 0.14 | 0.0000 | 3.2052 | 6.3905 | 9.5366 | 12.6258 | 15.6422 | 18.5723 | 21.4052 | 24.1324 | 29.2488 |
| 0.15 | 0.0000 | 3.4336 | 6.8428 | 10.2040 | 13.4957 | 16.6992 | 19.7989 | 22.7824 | 25.6410 | 30.9638 |
| 0.16 | 0.0000 | 3.6619 | 7.2942 | 10.8685 | 14.3593 | 17.7447 | 21.0068 | 24.1324 | 27.1124 | 32.6192 |
| 0.17 | 0.0000 | 3.8901 | 7.7447 | 11.5301 | 15.2163 | 18.7780 | 22.1955 | 25.4544 | 28.5462 | 34.2157 |
| 0.18 | 0.0000 | 4.1182 | 8.1943 | 12.1886 | 16.0664 | 19.7989 | 23.3643 | 26.7481 | 29.9419 | 35.7539 |
| 0.19 | 0.0000 | 4.3461 | 8.6428 | 12.8439 | 16.9093 | 20.8068 | 24.5130 | 28.0130 | 31.2996 | 37.2348 |
| 0.20 | 0.0000 | 4.5739 | 9.0903 | 13.4957 | 17.7447 | 21.8014 | 25.6410 | 29.2488 | 32.6192 | 38.6598 |
| 0.21 | 0.0000 | 4.8016 | 9.5366 | 14.1440 | 18.5723 | 22.7824 | 26.7481 | 30.4555 | 33.9011 | 40.0303 |
| 0.22 | 0.0000 | 5.0291 | 9.9818 | 14.7887 | 19.3921 | 23.7495 | 27.8341 | 31.6331 | 35.1455 | 41.3478 |
| 0.23 | 0.0000 | 5.2564 | 10.4258 | 15.4295 | 20.2036 | 24.7024 | 28.8987 | 32.7815 | 36.3531 | 42.6141 |
| 0.24 | 0.0000 | 5.4836 | 10.8685 | 16.0664 | 21.0068 | 25.6410 | 29.9419 | 33.9011 | 37.5243 | 43.8309 |
| 0.25 | 0.0000 | 5.7106 | 11.3099 | 16.6992 | 21.8014 | 26.5651 | 30.9638 | 34.9920 | 38.6598 | 45.0000 |
| 0.26 | 0.0000 | 5.9374 | 11.7500 | 17.3279 | 22.5873 | 27.4744 | 31.9642 | 36.0546 | 39.7605 | 46.1233 |
| 0.27 | 0.0000 | 6.1641 | 12.1886 | 17.9523 | 23.3643 | 28.3690 | 32.9432 | 37.0893 | 40.8270 | 47.2026 |
| 0.28 | 0.0000 | 6.3905 | 12.6258 | 18.5723 | 24.1324 | 29.2488 | 33.9011 | 38.0964 | 41.8603 | 48.2397 |
| 0.29 | 0.0000 | 6.6167 | 13.0616 | 19.1879 | 24.8913 | 30.1137 | 34.8379 | 39.0766 | 42.8613 | 49.2364 |
| 0.30 | 0.0000 | 6.8428 | 13.4957 | 19.7989 | 25.6410 | 30.9638 | 35.7539 | 40.0303 | 43.8309 | 50.1944 |
| 0.31 | 0.0000 | 7.0686 | 13.9283 | 20.4052 | 26.3814 | 31.7989 | 36.6492 | 40.9580 | 44.7699 | 51.1155 |
| 0.32 | 0.0000 | 7.2942 | 14.3593 | 21.0068 | 27.1124 | 32.6192 | 37.5243 | 41.8603 | 45.6794 | 52.0013 |
| 0.33 | 0.0000 | 7.5196 | 14.7887 | 21.6036 | 27.8341 | 33.4248 | 38.3792 | 42.7379 | 46.5602 | 52.8533 |
| 0.34 | 0.0000 | 7.7447 | 15.2163 | 22.1955 | 28.5462 | 34.2157 | 39.2144 | 43.5914 | 47.4133 | 53.6732 |
| 0.35 | 0.0000 | 7.9696 | 15.6422 | 22.7824 | 29.2488 | 34.9920 | 40.0303 | 44.4213 | 48.2397 | 54.4623 |
| 0.36 | 0.0000 | 8.1943 | 16.0664 | 23.3643 | 29.9419 | 35.7539 | 40.8270 | 45.2283 | 49.0402 | 55.2222 |
| 0.37 | 0.0000 | 8.4187 | 16.4888 | 23.9412 | 30.6255 | 36.5014 | 41.6051 | 46.0130 | 49.8157 | 55.9541 |
| 0.38 | 0.0000 | 8.6428 | 16.9093 | 24.5130 | 31.2996 | 37.2348 | 42.3648 | 46.7760 | 50.5672 | 56.6593 |
| 0.39 | 0.0000 | 8.8667 | 17.3279 | 25.0796 | 31.9642 | 37.9582 | 43.1066 | 47.5181 | 51.2954 | 57.3391 |
| 0.40 | 0.0000 | 9.0903 | 17.7447 | 25.6410 | 32.6192 | 38.6598 | 43.8309 | 48.2397 | 52.0013 | 57.9946 |
| 0.41 | 0.0000 | 9.3136 | 18.1595 | 26.1972 | 33.2649 | 39.3518 | 44.5379 | 48.9415 | 52.6855 | 58.6270 |
| 0.42 | 0.0000 | 9.5366 | 18.5723 | 26.7481 | 33.9011 | 40.0303 | 45.2283 | 49.6242 | 53.3490 | 59.2373 |
| 0.43 | 0.0000 | 9.7594 | 18.9832 | 27.2937 | 34.5280 | 40.6955 | 45.9022 | 50.2882 | 53.9924 | 59.8265 |
| 0.44 | 0.0000 | 9.9818 | 19.3921 | 27.8341 | 35.1455 | 41.3478 | 46.5602 | 50.9342 | 54.6166 | 60.3955 |
| 0.45 | 0.0000 | 10.2040 | 19.7989 | 28.3690 | 35.7539 | 41.9872 | 47.2026 | 51.5627 | 55.2222 | 60.9454 |
| 0.46 | 0.0000 | 10.4258 | 20.2036 | 28.8987 | 36.3531 | 42.6141 | 47.8298 | 52.1743 | 55.8099 | 61.4769 |
| 0.47 | 0.0000 | 10.6473 | 20.6063 | 29.4230 | 36.9432 | 43.2285 | 48.4422 | 52.7696 | 56.3803 | 61.9908 |
| 0.48 | 0.0000 | 10.8685 | 21.0068 | 29.9419 | 37.5243 | 43.8309 | 49.0402 | 53.3490 | 56.9342 | 62.4880 |
| 0.49 | 0.0000 | 11.0894 | 21.4052 | 30.4555 | 38.0964 | 44.4213 | 49.6242 | 53.9131 | 57.4721 | 62.9691 |
| 0.50 | 0.0000 | 11.3099 | 21.8014 | 30.9638 | 38.6598 | 45.0000 | 50.1944 | 54.4623 | 57.9946 | 63.4349 |

III.4 EJEMPLO

Sea un arco parabólico doblemente articulado de sección constante de tímpano abierto de 40 metros de claro o luz de puente la elevación y profundidad del arco son de 6.0 metros y 4.20 metros respectivamente, además un peralte de arco de 0.20 metros en la corona. Consta de una cubierta 5.60 metros con dos vigas paralelas monolíticas con una losa de concreto de 0.15 metros de espesor y vigas de 0.35 metros por 0.90 metros. Además cuenta con 10 columnas de 0.20 metros de espesor y 4.20 metros de profundidad, con una altura variable como se muestra en la figura III.4a.

Solución:

Calculo de las cargas permanentes de cubierta :

| | | w |
|--------------------|---|--------------------|
| Cubierta | $(0.15\text{m} \times 4.20\text{m} \times 2.40\text{t/m}^3)$ | = 1.512 t/m |
| Vigas laterales | $(0.90\text{m} \times 0.35\text{m} \times 2.40\text{t/m}^3) \times 2$ | = 0.756 t/m |
| Parapeto | $(0.15\text{m} \times 0.15\text{m} \times 2.40\text{t/m}^3) \times 2$ | = 0.054 t/m |
| Guarnición | $(0.15\text{m} \times 1.05\text{m} \times 2.40\text{t/m}^3) \times 2$ | = 0.756 t/m |
| | | <u>3.078 t/m</u> |
| 15% de accesorios | | <u>0.462 t/m</u> |
| W_{total} | | = 3.540 t/m |

Para calcular el peso del arco procedemos de la siguiente manera:

1. Obtenemos el volumen del arco con la siguiente formula (ref. 08 pp. 377)

$$V = \frac{S}{6} (A_1 + 4A_2 + A_3)$$

donde:

V es el volumen del prismoide parabólico.

S es la longitud del eje del arco (ver capítulo I.3.7).

A_1 es el área de la sección transversal del barril en la línea de arranque.

A_2 es el área de la sección transversal del barril en la cuarta parte del arco parabólico.

A_3 es el área de la sección transversal del barril en la corona del arco.

2. Obtenemos los valores de S, A_1 , A_2 , A_3 y V

$S = 1.057L = 42.28 \text{ m}$ (tabla D, capítulo I.3.7, ref. 08)

$A_1 = d_1 \times 4.20 \text{ m} = 0.2105 \text{ m} \times 4.20 \text{ m} = 0.8841 \text{ m}^2$

$A_2 = d_2 \times 4.20 \text{ m} = 0.2031 \text{ m} \times 4.20 \text{ m} = 0.8530 \text{ m}^2$

$A_3 = d_3 \times 4.20 \text{ m} = 0.2105 \text{ m} \times 4.20 \text{ m} = 0.8400 \text{ m}^2$ [d_1, d_2 y d_3 obtenidos de la ecuación (4)]

$$V = 36.19 \text{ m}^3$$

3. Para obtener el peso del arco lo multiplicamos por el peso volumétrico del concreto armado así nos queda:

$$36.19 \text{ m}^3 \times 2.40 \text{ t/m}^3 = 86.86 \text{ ton}$$

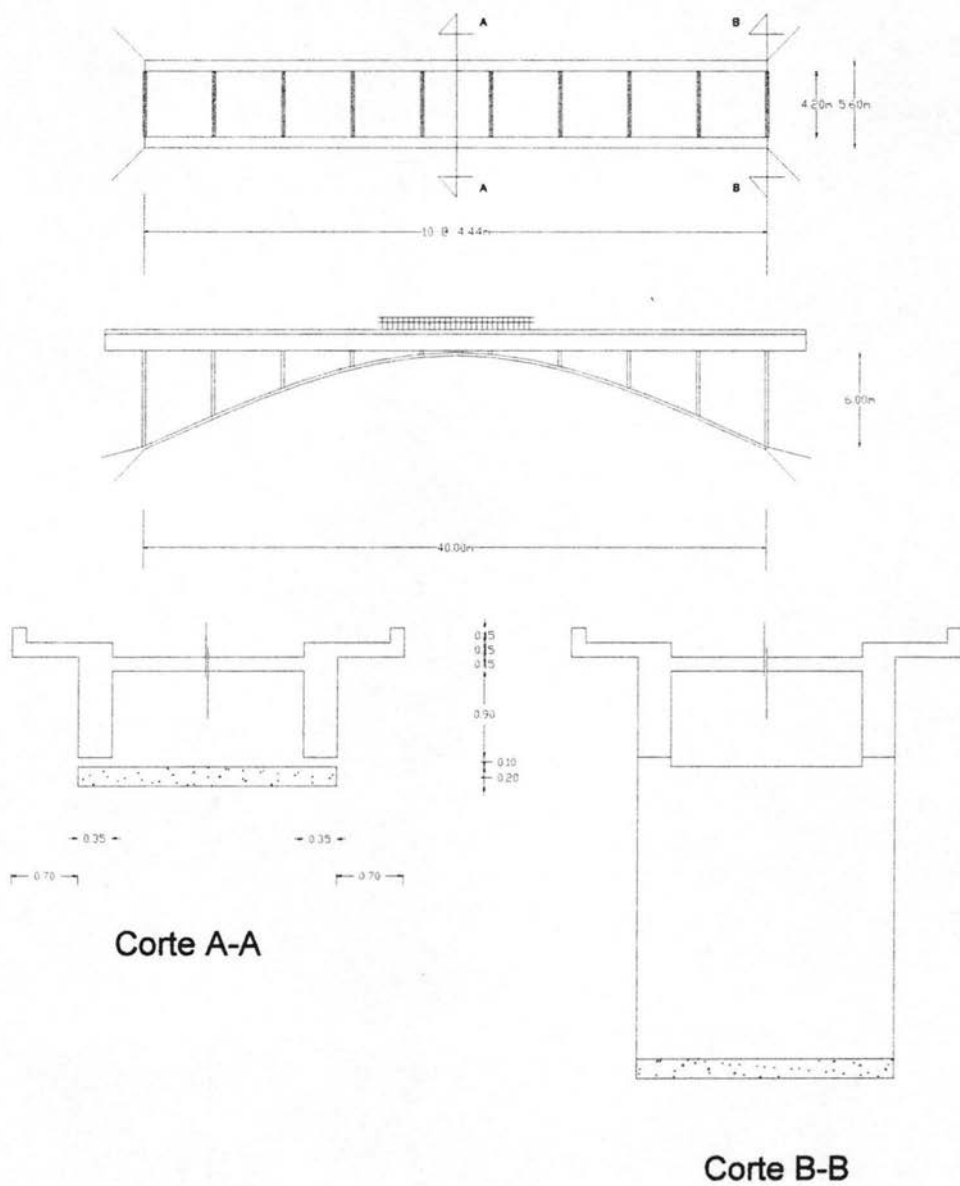


Figura III.4a Sección longitudinal y transversal de un puente de arco.

Para obtener el peso total de la cubierta nos queda:

$$3.54 \text{ t/m} \times 40 \text{ m} = \mathbf{141.60 \text{ ton}}$$

sumando el ultimo valor al peso del arco más el peso de columnas nos queda:

$$86.86 \text{ ton} + 141.60 \text{ ton} + 56.61 \text{ ton} = \mathbf{285.07 \text{ ton}}$$

además le agregamos la carga viva uniformemente repartida para una carga H-15 (ver figura 3-1a, capítulo I.3.3, ref. 05)

$$w = 0.715 \text{ t/m}$$

$$L = 40 \text{ m}$$

$$0.715 \text{ t/m} \times 40 \text{ m} = \mathbf{28.60 \text{ ton}}$$

sumándolo a la carga de cubierta y barril del arco y dividiéndolo entre las diez columnas nos queda la primera condición.

$$28.60 \text{ ton} + 285.07 \text{ ton} = 313.67 / 10 \text{ columnas} = \mathbf{31.37 \text{ ton}}$$

Utilizaremos un valor un poquito mayor de $P_0 = \mathbf{32.00 \text{ ton}}$; ver figura III.4b

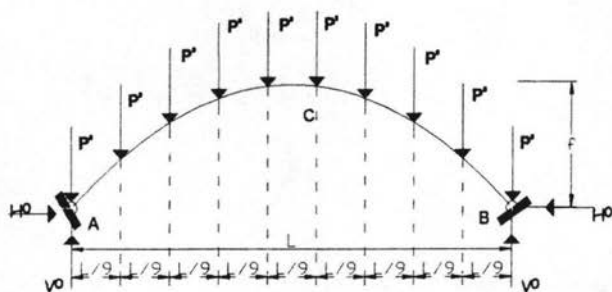


Figura III.4b

De donde deducimos que:

$$V_0 = 5P_0 = 5 \times 20 \text{ ton} = \mathbf{160 \text{ ton}}$$

$$H_0 = 1.01P_0L/f = (1.01 \times 20 \text{ ton} \times 40 \text{ m}) / 6.0 \text{ m} = \mathbf{215.46 \text{ ton}}$$
 [ver ecuación (344)]

Nota: para obtener las ecuaciones de reacción horizontal, momento flexionante, normal y cortante se utilizan las mismas formulas que obtuvimos para un arco con ocho cargas concentradas a lo largo de su longitud. Solamente cambia la reacción vertical.

Para la carga viva concentrada H-15 tenemos dos valores para cortante y para normal las cuales se representan en la figura. III.4c; las cuales son:

$P_1 = 8.85 \text{ ton}$ para cortante

$P_2 = 6.12 \text{ ton}$ para momento

Donde $k = 0.2L$ (la longitud anterior es propuesta para fines prácticos; para obtener el valor real se debe proceder con un análisis de líneas de influencia)

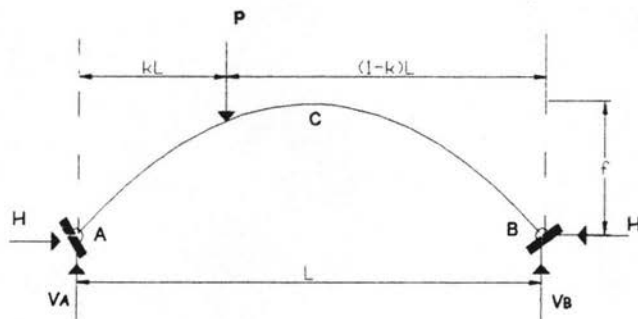


Figura III.4c

De donde deducimos que para P_1 [ver ecuaciones(241),(242) y (243)]:

$$V_{A1} = P_1(1-k) = 8.85 \text{ ton} \times (1 - 0.20) = \mathbf{7.08 \text{ ton}}$$

$$V_{B1} = kP_1 = 8.85 \text{ ton} \times 0.20 = \mathbf{1.77 \text{ ton}}$$

$$H_1 = 29P_1L/250f = (29 \times 8.85 \text{ ton} \times 40 \text{ m}) / (250 \times 6.0 \text{ m}) = \mathbf{6.84 \text{ ton}}$$

De donde deducimos que para P_2 :

$$V_{A2} = P_2(1-k) = 6.12 \text{ ton} \times (1 - 0.20) = \mathbf{4.90 \text{ ton}}$$

$$V_{B2} = kP_2 = 6.12 \text{ ton} \times 0.20 = \mathbf{1.22 \text{ ton}}$$

$$H_2 = 29P_2L/250f = (29 \times 6.12 \text{ ton} \times 40 \text{ m}) / (250 \times 6.0 \text{ m}) = \mathbf{4.73 \text{ ton}}$$

Lo siguiente se representa en las tablas de normal, cortante y momento flexionante siguientes; así como, las graficas de esfuerzos en la sección transversal de la misma. Además de los diagramas de normal, cortante y momento flexionante correspondientes.

Valores de la cortante en cualquier punto del arco (Vx)

| |
|----------|
| P0= 32 |
| P1= 8.85 |

Con L=0.150

| | | | | | | | | | | | | | |
|---------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Angulos | 3.814074834 | 3.814074834 | 11.30993247 | 11.30993247 | 13.49573328 | 18.43494882 | 18.43494882 | 19.79887635 | 19.79887635 | 25.01689348 | 25.01689348 | 25.64100582 | 30.96375653 |
| caso | 0.56 | 0.56 | 0.67 | 0.67 | 0.70 | 0.78 | 0.78 | 0.80 | 0.80 | 0.89 | 0.89 | 0.90 | 1.00 |
| 1 | -14.3326 | -13.3348 | -41.2759 | -40.2953 | -48.3393 | -66.2392 | -65.2905 | -70.1601 | -70.1601 | -88.3992 | -87.4930 | -89.6330 | -107.4267 |
| 2 | 6.8155 | 6.8155 | 6.6719 | 6.6719 | 6.6083 | 6.4295 | 6.4295 | 6.3717 | 6.3717 | 6.1173 | 6.1173 | 6.0835 | 5.7658 |
| suma | -7.5171 | -6.5193 | -34.6040 | -33.6235 | -41.7310 | -59.8096 | -58.8609 | -63.7884 | -63.7884 | -82.2818 | -81.3756 | -83.5496 | -101.6609 |

Longitudes de arco en por ciento de longitud (L)

Valores del momento en cualquier punto del arco (Mx)

| |
|----------|
| P2= 6.12 |
|----------|

Con L=0.150

| | | | | | | | | | | | | |
|---------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------|
| Angulos | 30.96375653 | 25.01689348 | 19.79887635 | 19.79887635 | 13.49573328 | 18.43494882 | 18.43494882 | 11.30993247 | 11.30993247 | 3.814074834 | 3.814074834 | 0 |
| caso | 0.00 | 0.11 | 0.11 | 0.20 | 0.20 | 0.22 | 0.22 | 0.30 | 0.30 | 0.33 | 0.44 | 0.44 |
| 1 | 0.0000 | 58.1531 | 58.1531 | 82.8302 | 82.8302 | 101.7679 | 101.7679 | 108.7147 | 108.7147 | 130.8444 | 145.3827 | 145.3827 |
| 2 | 0.0000 | 10.5415 | 10.5415 | 20.9940 | 20.9940 | 18.4476 | 18.4476 | 10.4187 | 10.4187 | 7.3984 | -0.8462 | -0.8462 |
| suma | 0.0000 | 68.6946 | 68.6946 | 103.8243 | 103.8243 | 120.2155 | 120.2155 | 119.1334 | 119.1334 | 138.2428 | 144.5365 | 144.5365 |

Longitudes de arco en por ciento de longitud (L)

Valores del momento en cualquier punto del arco (My)

| |
|----------|
| P2= 6.12 |
|----------|

Con L=0.150

| | | | | | | | | | | | | | |
|---------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Angulos | 3.814074834 | 3.814074834 | 11.30993247 | 11.30993247 | 13.49573328 | 18.43494882 | 18.43494882 | 19.79887635 | 19.79887635 | 25.01689348 | 25.01689348 | 25.64100582 | 30.96375653 |
| caso | 0.56 | 0.56 | 0.67 | 0.67 | 0.70 | 0.78 | 0.78 | 0.80 | 0.80 | 0.89 | 0.89 | 0.90 | 1.00 |
| 1 | 145.3827 | 145.3827 | 130.8444 | 130.8444 | 108.7147 | 101.7679 | 101.7679 | 82.8302 | 82.8302 | 58.1531 | 58.1531 | 46.5920 | 0.0000 |
| 2 | -6.2862 | -6.2862 | -8.9216 | -8.9216 | -9.1653 | -8.7524 | -8.7524 | -8.3820 | -8.3820 | -5.7785 | -5.7785 | -5.3268 | 0.0000 |
| suma | 139.0965 | 139.0965 | 121.9228 | 121.9228 | 99.5494 | 93.0155 | 93.0155 | 74.4483 | 74.4483 | 52.3746 | 52.3746 | 41.2652 | 0.0000 |

Longitudes de arco en por ciento de longitud (L)

NOTA: fuerzas en toneladas (ton)

Valores de los esfuerzos en cualquier punto del arco

| esfuerzos axiales y de flexión | | Longitudes de arco en por ciento de longitud (L) | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|----------|--|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | 0.00 | 0.11 | 0.11 | 0.20 | 0.20 | 0.22 | 0.22 | 0.30 | 0.30 | 0.33 | 0.33 | 0.44 | 0.44 |
| máximos | 230.5513 | 651.5173 | 651.0138 | 868.6966 | 868.7334 | 968.1823 | 967.8058 | 967.2443 | 1083.0030 | 1082.7895 | 1124.4863 | 1124.4071 | 1011.6929 | 1011.6929 |
| mínimos | 230.5513 | -166.2756 | -166.7790 | -367.2698 | -367.3066 | -462.9552 | -463.3316 | -451.0099 | -562.7452 | -562.9787 | -596.1862 | -596.2654 | -482.4192 | -482.4192 |

| esfuerzos normales y de flexión | | Longitudes de arco en por ciento de longitud (L) | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------------------|-----------|--|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | 0.56 | 0.56 | 0.67 | 0.67 | 0.70 | 0.70 | 0.78 | 0.78 | 0.80 | 0.80 | 0.89 | 0.89 | 0.90 |
| máximos | 1092.0405 | 1092.1197 | 985.5275 | 985.7610 | 850.5146 | 805.5665 | 805.9429 | 693.4459 | 693.4459 | 553.1910 | 553.6944 | 486.3826 | 229.5127 | 229.5127 |
| mínimos | -563.8701 | -563.7909 | -465.9349 | -465.7015 | -334.5968 | -301.7614 | -301.3850 | -192.8430 | -192.8430 | -70.3162 | -69.8127 | -4.8692 | 229.5127 | 229.5127 |

| esfuerzos de cortante | | Longitudes de arco en por ciento de longitud (L) | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|-----------|--|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|
| | | 0.00 | 0.11 | 0.11 | 0.20 | 0.20 | 0.22 | 0.22 | 0.30 | 0.30 | 0.33 | 0.33 | 0.44 | 0.44 |
| máximos | -130.5390 | -107.9772 | -109.0560 | -88.3350 | -91.9036 | -86.1226 | -87.2520 | -65.9612 | -56.3733 | -57.5406 | -24.1446 | -25.3324 | -8.1476 | -8.1476 |

| esfuerzos de cortante | | Longitudes de arco en por ciento de longitud (L) | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|---------|--|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| | | 0.56 | 0.56 | 0.67 | 0.67 | 0.70 | 0.70 | 0.78 | 0.78 | 0.80 | 0.80 | 0.89 | 0.89 | 0.90 |
| máximos | -8.9469 | -7.7611 | -41.1953 | -40.0279 | -49.6797 | -71.2019 | -70.0726 | -75.9386 | -75.9386 | -97.9546 | -96.8758 | -99.4638 | -121.0249 | -121.0249 |

NOTA: Esfuerzos en toneladas por metrocuadrado (t/m²)
ver tema 1.3.8 apartado 14.

b= 4.20
d= 0.20

Diagramas de normal, cortante y momento flexionante

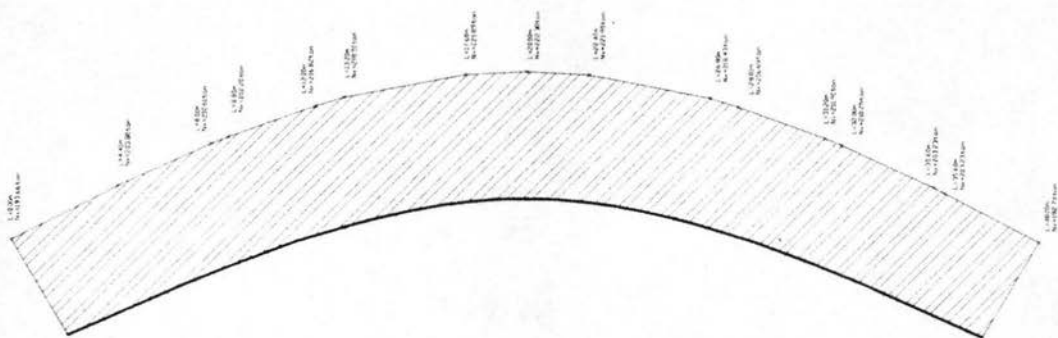


Diagrama de normal

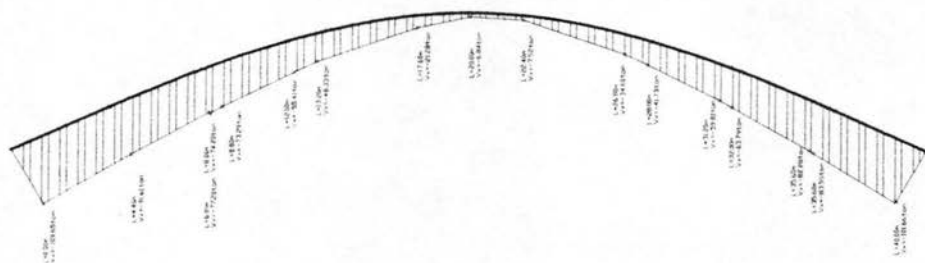


Diagrama de cortante

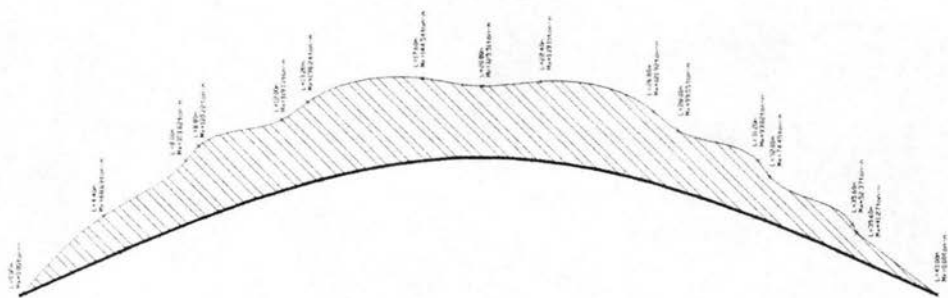


Diagrama de momento flexionante

FUENTES CONSULTADAS

REFERENCIAS

1. J. Sterling Kinney. *Análisis de Estructuras Indeterminadas*. C.E.C.S.A.
2. Oscar de Buen. *Apuntes de Diseño Estructural*. F.I. U.N.A.M.
3. Miguel Chiñas de la Torre. *Cálculo Estructural, Ingeniería Civil y Arquitectura*. Trillas.
4. Richrd M. Barker y Jay A. Puckett. *Desing of Highway Bridges*. Wiley Interscience.
5. Roberto Melí Piralla. *Diseño Estructural*. Limusa.
6. Frederick S. Merrit. *Guía del Ingeniero Civil*. Mc. Graw Hill.
7. M.S. Troitsky, D. Sc. *Planning and Desing of Bridges*. Wiley Interscience.
8. Valerian Leontovich. *Pórticos y Arcos*. C.E.C.S.A.
9. American Association of Highway Transportantion Officials AASTHO. *Standar Specifications for Highway Bridges*. Washington D.C.
10. Timoshenko y Young. *Teoría de las Estructuras*. Elcano, S.A.
11. Carlos Crespo Villalaz. *Vías de Comunicación, caminos, ferrocarriles, aeropuertos, puentes y puertos*. Limusa.

BIBLIOGRAFÍA

1. Manual de Diseño de Obras Civiles. "Acciones" cap. C.I.2. Comisión Federal de Electricidad. México D.F.
2. Olvera L. Alfonso. *Análisis de Estructuras*. C.E.C.S.A.
3. J. Sterling Kinney. *Análisis de Estructuras Indeterminadas*. C.E.C.S.A.
4. Miguel Chiñas de la Torre. *Cálculo Estructural, Ingeniería Civil y Arquitectura*. Trillas.
5. F. Masi. *Construir en Acero*. Omega.
6. Jack C. y Mc. Cormac. *Diseño de Estructuras Metálicas*. Alfa Omega.
7. Wt. Marshall y H.M. Nelson. *Estructuras*. Alfa Omega.
8. Frederick S. Merrit. *Guía del Ingeniero Civil*. Mc. Graw Hill.
9. Valerian Leontovich. *Pórticos y Arcos*. C.E.C.S.A.
10. David P. Billington. *Robert Millart and de Art of Reinforced Concrete*.
11. Timoshenko y Young. *Teoría de las Estructuras*. Elcano, S.A.

ECONOGRAFÍA

1. Ma. Elena Solís Estrada y Manuel A. Rincón Mancilla. *Tesis: Puentes en la red Federal Carretera de México*. México 1999, E.N.E.P. Aragón.

ANEXO a

Valores para una carga concentrada a diferentes posiciones de la longitud del arco:

| POSICIÓN DE LA CARGA EN EL ARCO (k) | V_A $V_A = P(1-k)$ | V_B $V_B = Pk$ | $H_A = H_B$ $H_A = H_B = \frac{5 PL}{8 f} k(1-2k^2+k^3)$ |
|--|-------------------------|---------------------|---|
| 0 | P | 0 | 0 |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}P$ | $\frac{1}{3}P$ | $\frac{55 PL}{324 f}$ |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}P$ | $\frac{1}{4}P$ | $\frac{285 PL}{2048 f}$ |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{5}P$ | $\frac{1}{5}P$ | $\frac{29 PL}{250 f}$ |
| $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}P$ | $\frac{2}{5}P$ | $\frac{93 PL}{500 f}$ |
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}P$ | $\frac{1}{6}P$ | $\frac{1025 PL}{10368 f}$ |
| $\frac{1}{7}$ | $\frac{6}{7}P$ | $\frac{1}{7}P$ | $\frac{205 PL}{2401 f}$ |
| $\frac{2}{7}$ | $\frac{5}{7}P$ | $\frac{2}{7}P$ | $\frac{1395 PL}{9604 f}$ |
| $\frac{3}{7}$ | $\frac{4}{7}P$ | $\frac{3}{7}P$ | $\frac{1425 PL}{9604 f}$ |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{7}{8}P$ | $\frac{1}{8}P$ | $\frac{2475 PL}{32768 f}$ |
| $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{8}P$ | $\frac{3}{8}P$ | $\frac{5115 PL}{32768 f}$ |
| $\frac{1}{9}$ | $\frac{8}{9}P$ | $\frac{1}{9}P$ | $\frac{1775 PL}{26244 f}$ |
| $\frac{2}{9}$ | $\frac{7}{9}P$ | $\frac{2}{9}P$ | $\frac{3245 PL}{26244 f}$ |
| $\frac{4}{9}$ | $\frac{5}{9}P$ | $\frac{4}{9}P$ | $\frac{1885 PL}{13122 f}$ |
| $\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{10}P$ | $\frac{1}{10}P$ | $\frac{979 PL}{16000 f}$ |
| $\frac{3}{10}$ | $\frac{7}{10}P$ | $\frac{3}{10}P$ | $\frac{2379 PL}{16000 f}$ |
| $\frac{1}{11}$ | $\frac{10}{11}P$ | $\frac{1}{11}P$ | $\frac{3275 PL}{58564 f}$ |
| $\frac{2}{11}$ | $\frac{9}{11}P$ | $\frac{2}{11}P$ | $\frac{6255 PL}{58564 f}$ |
| $\frac{3}{11}$ | $\frac{8}{11}P$ | $\frac{3}{11}P$ | $\frac{2175 PL}{14641 f}$ |

| POSICIÓN DE LA CARGA EN EL ARCO (k) | V_A $V_A = P(1-k)$ | V_B $V_B = Pk$ | $H_A = H_B$ $H_A = H_B = \frac{5 PL}{8 f} k(1-2k^2+k^3)$ |
|-------------------------------------|-------------------------|---------------------|---|
| $\frac{4}{11}$ | $\frac{7}{11}P$ | $\frac{4}{11}P$ | $\frac{5215 PL}{29282 f}$ |
| $\frac{5}{11}$ | $\frac{6}{11}P$ | $\frac{5}{11}P$ | $\frac{22650 PL}{117128 f}$ |

Tabla F. Valor de las reacciones con carga concentrada en cualquier punto de la longitud del arco.

Nota: Estos valores se pueden sumar en caso de que actúen simultáneamente más de una carga sobre la longitud del arco.

ANEXO b

Valores para conseguir el ángulo que forman la horizontal con la tangente en cualquier punto del arco dado en porcentaje de luz o claro del mismo, conforme a la ecuación (3) vista en el tema I.3.6.

$$\alpha = \arctan \left[4f \left(\frac{1}{L} - \frac{2x}{L^2} \right) \right]$$

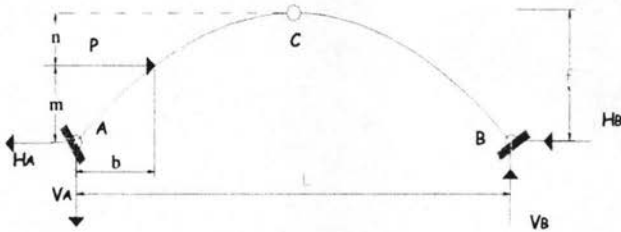
| VALOR DE "X" EN PORCENTAJE DE CLARO | VALOR DEL ÁNGULO α CONFORME A SU RELACIÓN (f/L) | VALOR DE "X" EN PORCENTAJE DE CLARO | VALOR DEL ÁNGULO α CONFORME A SU RELACIÓN (f/L) |
|-------------------------------------|--|-------------------------------------|--|
| 0.00 L | $\tan^{-1}[4.00(f/L)]$ | 0.30 L | $\tan^{-1}[1.60(f/L)]$ |
| 0.05 L | $\tan^{-1}[3.60(f/L)]$ | 0.33 L | $\tan^{-1}[1.33(f/L)]$ |
| 0.10 L | $\tan^{-1}[4.00(f/L)]$ | 0.35 L | $\tan^{-1}[1.20(f/L)]$ |
| 0.11 L | $\tan^{-1}[3.11(f/L)]$ | 0.40 L | $\tan^{-1}[0.80(f/L)]$ |
| 0.14 L | $\tan^{-1}[2.86(f/L)]$ | 0.43 L | $\tan^{-1}[0.57(f/L)]$ |
| 0.15 L | $\tan^{-1}[2.80(f/L)]$ | 0.44 L | $\tan^{-1}[0.44(f/L)]$ |
| 0.17 L | $\tan^{-1}[2.67(f/L)]$ | 0.45 L | $\tan^{-1}[0.40(f/L)]$ |
| 0.18 L | $\tan^{-1}[2.53(f/L)]$ | 0.50 L | $\tan^{-1}[0.00(f/L)]$ |
| 0.20 L | $\tan^{-1}[2.40(f/L)]$ | 0.60 L | $\tan^{-1}[0.80(f/L)]$ |
| 0.22 L | $\tan^{-1}[2.22(f/L)]$ | 0.70 L | $\tan^{-1}[1.60(f/L)]$ |
| 0.25 L | $\tan^{-1}[2.00(f/L)]$ | 0.80 L | $\tan^{-1}[2.40(f/L)]$ |
| 0.28 L | $\tan^{-1}[1.79(f/L)]$ | 0.90 L | $\tan^{-1}[3.20(f/L)]$ |
| 0.29 L | $\tan^{-1}[1.71(f/L)]$ | 1.00 L | $\tan^{-1}[4.00(f/L)]$ |

NOTA: Estos valores son los que se usaron al redactar este trabajo los cuales se pueden ver en el tema III.4

Tabla G. Valor del ángulo en cualquier punto de la longitud del arco.

ANEXO c

Para encontrar las coordenadas del punto b de la siguiente figura haremos el siguiente planteamiento:



Si se sabe que la ecuación para encontrar las coordenadas de ejes parabólicos es la ecuación (1) del presente trabajo que es:

$$y = 4f \left(\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right)$$

pero de la figura se puede hacer la siguiente deducción, $y = m$ y $x = b$ por lo tanto la ecuación anterior nos queda

$$m = 4f \left(\frac{b}{L} + \frac{b^2}{L^2} \right)$$

si asignamos valores de m a la ecuación anterior nos quedan de la siguiente forma:

para $m = 0.20f$

$$0.2f = 4f \left(\frac{b}{L} + \frac{b^2}{L^2} \right)$$

la cual al despejar la ecuación anterior nos da la ecuación cuadrática siguiente

$$0 = -0.05 + b/L - b^2/L^2$$

resolviendo la ecuación nos dan los siguientes resultados:

$$b_1 = 0.0528L$$

$$b_2 = 0.9472L$$

para $m = 0.40f$

$$0.4f = 4f \left(\frac{b}{L} + \frac{b^2}{L^2} \right)$$

la cual al despejar la ecuación anterior nos da la ecuación cuadrática siguiente

$$0 = -0.10 + b/L - b^2/L^2$$

resolviendo la ecuación nos dan los siguientes resultados:

$$b_1 = 0.1127L$$

$$b_2 = 0.8873L$$

para $m = 0.60f$

$$0.6f = 4f \left(\frac{b}{L} + \frac{b^2}{L^2} \right)$$

la cual al despejar la ecuación anterior nos da la ecuación cuadrática siguiente

$$0 = -0.15 + b/L - b^2/L^2$$

resolviendo la ecuación nos dan los siguientes resultados:

$$b_1 = 0.1838L$$

$$b_2 = 0.8162L$$

para $m = 0.80f$

$$0.8f = 4f \left(\frac{b}{L} + \frac{b^2}{L^2} \right)$$

la cual al despejar la ecuación anterior nos da la ecuación cuadrática siguiente

$$0 = -0.20 + b/L - b^2/L^2$$

resolviendo la ecuación nos dan los siguientes resultados:

$$b_1 = 0.2764L$$

$$b_2 = 0.7236L$$

ANEXO d

Datos meteorológicos en distintas localidades de la República Mexicana (ref 05):

| Ciudad | T _M | T _m | O _D | H |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----|
| Acapulco | 34 | 22 | 10 | 72 |
| Aguascalientes | 32 | 4 | 22 | 42 |
| Campeche | 32 | 16 | 10 | 72 |
| Ciudad Juárez | 36 | 2 | 23 | 27 |
| Ciudad Victoria | 37 | 10 | 18 | - |
| Colima | 32 | 12 | 20 | 52 |
| Cuernavaca | 26 | 7 | 14 | - |
| Culiacán | 40 | 12 | 21 | 54 |
| Chetumal | 32 | 18 | 10 | 84 |
| Chihuahua | 36 | 2 | 23 | 29 |
| Chilpancingo | 32 | 12 | 20 | 75 |
| Durango | 30 | 2 | 22 | - |
| Guadalajara | 32 | 6 | 22 | 40 |
| Guanajuato | 32 | 6 | 17 | 32 |
| Hermosillo | 40 | 8 | 23 | 32 |
| Jalapa | 28 | 10 | 12 | 72 |
| La Paz | 34 | 12 | 16 | 60 |
| León | 32 | 6 | 21 | 45 |
| Mazatlán | 30 | 16 | 6 | 72 |
| Mérida | 35 | 18 | 13 | 62 |
| Mexicali | 38 | 5 | 22 | - |
| México, D.F. | 30 | 6 | 23 | 44 |
| Monterrey | 35 | 6 | 17 | 62 |
| Morelia | 28 | 8 | 16 | 47 |
| Oaxaca | 36 | 12 | 23 | 57 |
| Orizaba | 32 | 12 | 13 | - |
| Pachuca | 28 | 2 | 16 | 62 |
| Puebla | 26 | 4 | 17 | 42 |
| Guerrero | 30 | 4 | 21 | 33 |
| Saltillo | 30 | 4 | 17 | 50 |
| San Luis Potosí | 30 | 4 | 20 | 38 |
| Tampico | 34 | 16 | 9 | 78 |
| Tepic | 34 | 10 | 23 | 80 |
| Tijuana | 28 | 6 | 17 | - |
| Tlaxcala | 20 | 4 | 18 | - |
| Toluca | 22 | 2 | 17 | - |
| Tuxtla Gtz. | 35 | 16 | 16 | 65 |
| Veracruz | 34 | 17 | 8 | 78 |
| Villa Hermosa | 34 | 18 | 15 | - |
| Zacatecas | 28 | 4 | 11 | 28 |

T_m Temperatura máxima en el mes más caluroso (media en el mes), en C°

T_m Temperatura mínima en el mes más frío (media en el mes), en C°

O_D Oscilación diaria de temperatura máxima, en C°

H Humedad relativa media en %