UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"TEMAS SELECTOS DE ECONOMÍA MATEMÁTICA. ANÁLISIS DE MODELOS MICROECONÓMICOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

JORGE EDUARDO GÓMEZ CERVANTES

DIRECTORA DE TESIS:

ACT. YOLANDA SILVIA CALIXTO GARCÍA

2004

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Temas Selectos de Economía Matemática. Análisis de Modelos Microeconómicos"

realizado por Jorge Eduardo Gómez Cervantes,

con número de cuenta 8723034-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario ACT. YOLANDA SILVIA CALIXTO GARCIA

Propietario ACT. MARIA AURORA VALDES MICHELL

Propietario ACT. CARLOS FLAVIO ESPINOSA LOPEZ

Suplente ACT. ADRIAN AVALOS PADILLA

Suplente ACT. BENIGNA CUEVAS PINZON Benigna Cuevas P

Consejo Departamental de Matemáticas

ACT. JAIME VAZQUEZ ALAMILLA

Contenido

INTRODUCCIÓN

Al terminar la currícula del plan de estudios de la carrera de actuaría surge la inquietud personal de profundizar en el estudio de la Economía Matemática. Después de realizar una investigación bibliográfica sobre textos de Economía Matemática, puedo decir que la mayoría de éstos presentan como contenido una colección de temas de Matemáticas, y en algunas ocasiones estos resultados se utilizan para replantear argumentos económicos, es decir, la orientación de éstos consiste en exponer temas de matemáticas a lectores con conocimientos previos de Economía. Un hecho que debe resaltarse es que el estudiante de Actuaría maneja con fluidez el material matemático abordado en los textos de Economía Matemática pero desconoce el aspecto económico; la idea es entonces ofrecer un enfoque diferente para el curso de Economía Matemática I, que otorgue los elementos básicos del lenguaje económico a lectores con preparación matemática. Con el objeto de ofrecer un panorama general del trabajo de tesis es conveniente dar una explicación del campo de estudio de la Economía y de la relación que guarda con las Matemáticas y de esta forma ubicar con exactitud el contexto de los temas por desarrollar. La Economía es una ciencia social que se encarga de describir y orientar las acciones de los individuos o grupos en los procesos de producción, intercambio y consumo de bienes y servicios; las unidades individuales y los grupos tienen necesidades ilimitadas, mientras que los recursos para satisfacer estos deseos son limitados.

La Teoría Económica es una rama de la Economía que tiene como objetivo describir y analizar de que manera los sistemas económicos combinan las decisiones de consumidores y unidades de producción para llegar a una concreta asignación de recursos; la teoría económica se divide en dos grandes ramas: la Macroeconomía y la Microeconomía, la primera se ocupa de analizar el comportamiento económico colectivo, en tanto que la Microeconomía estudia el comportamiento económico de unidades individuales, economías domésticas, empresas, mercados e industrias específicos. Como en muchas ocasiones sucede, el lenguaje ordinario resulta insuficiente para poder describir con exactitud las relaciones entre agentes económicos, es por esto que se necesita una herramienta más poderosa que permita mostrar con mayor exactitud el problema económico; las Matemáticas proporcionan al estudioso de la Economía el instrumental para la mejor exposición de las teorías económicas.

El presente trabajo de tesis es una introducción al estudio de la Microeconomía, el cual ha sido dividido en dos partes: la teoría del consumidor y la teoría de la empresa. La primera parte consta de dos capítulos sobre la teoría del comportamiento del consumidor y de la teoría de la demanda relacionada con ella. En el primer capítulo se analiza la conducta del consumidor a través de la noción básica de preferencia del consumidor e imponiendo una serie de supuestos referentes a ésta. En base a éstos se propone una manera alternativa de representación de la preferencia mediante una función de utilidad, la cual asocia a cada conjunto de bienes y servicios un determinado nivel de utilidad. En el capítulo segundo se aborda el tema de la restricción presupuestaria del consumidor que en conjunción con los tópicos del capítulo I constituyen las condiciones de equilibrio del consumidor las cuales dan lugar al concepto de curva de demanda. La segunda parte esta formada por tres capítulos en los cuales se analizan la teoría de la empresa y la teoría del costo. El capítulo tercero se divide en dos partes de manera que procura sea más inteligible la exposición; la primera parte muestra los elementos básicos de la teoría de la empresa por medio de la teoría de la producción con un factor variable, la segunda parte generaliza los resultados de la anterior, es decir, amplía la teoría de la empresa a través de la teoría de la producción con múltiples factores. De manera muy semejante a la teoría del consumidor se genera una función de producción, la cual representa la cantidad máxima de producto que se obtiene con un determinado conjunto de factores; después se abordan los conceptos de rendimientos a escala y de recta isocosto. El capítulo cuatro retoma los conceptos del anterior para obtener las condiciones de equilibrio del productor y en base a estas se generan las funciones de demanda de los factores y la función de oferta del producto. El capítulo cinco muestra una reinterpretación de la teoría de la empresa en términos de la cantidad de producto y el costo mínimo para obtener éste. Al final de cada capítulo se presenta una serie de ejercicios con el objetivo de contribuir a reafirmar los temas expuestos. Por último se incorpora un anexo con las soluciones a los ejercicios propuestos.

1. El Comportamiento del Consumidor

El mercado, es decir, la interacción entre los agentes económicos se compone básicamente de consumidores y de productores, en esta primera parte de nuestro análisis dirigiremos la atención únicamente en los consumidores. Llamamos consumidores a todos aquellos individuos que reciben un ingreso y lo utilizan en adquirir bienes y servicios, la manera en que éstos obtienen su ingreso es para nuestros fines intrascendente.

1.1. Preferencia y Utilidad

El comportamiento del consumidor en el mercado, la elección de mercancías, está determinada por una gran variedad de factores, pero fundamentalmente por las preferencias del consumidor y el ingreso de éste. Consideremos que el consumidor desea obtener la mayor satisfacción por los bienes que adquiere, debe entonces conocer con exactitud los bienes y servicios que existen en el mercado, el precio de éstos y tener un ingreso que le permita reflejar sus preferencias ante el conjunto de mercancías, con estos elementos el consumidor puede ordenar las preferencias que reflejan sus gustos. Lo anterior podemos rescribirlo de la siguiente manera: Sea $\mathbf{R}^n_+$ [1] el conjunto de bienes y servicios o espacio de elección del consumidor y tres canastas de bienes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, donde cada componente representa la cantidad de un bien o servicio específico, entonces:

i. Si el consumidor compara **x** e **y** sólo puede ocurrir alguna de estas tres situaciones:

   a) $\mathbf{x} \; P \; \mathbf{y}$

   b) $\mathbf{y} \; P \; \mathbf{x}$

   c) $\mathbf{x} \; I \; \mathbf{y}$

   Donde ***P*** e ***I*** son un par de relaciones binarias que denotan **"se prefiere a"** y **"es indiferente a"** respectivamente, a dichas relaciones se les conoce como **orden** de las preferencias.

ii. La combinación **x** es indiferente consigo misma, $\mathbf{x} \; I \; \mathbf{x}$, es decir, la relación ***I*** es **reflexiva**.

---

[1] El octante positivo de los números reales

iii. Si la canasta **x** se prefiere a la canasta **y**, la canasta **y** se prefiere a la canasta **z**, entonces la canasta **x** se prefiere a la canasta **z**, de manera semejante para la relación ***I***, lo cual significa que las relaciones ***P*** e ***I*** son **transitivas**.

iv. Para poder comparar entre distintos conjuntos de bienes supondremos que el consumidor prefiere tener más a tener menos, en otras palabras, si la canasta **x** tiene mayor cantidad de al menos uno de los bienes e igual cantidad de los restantes que **y**, entonces **x** se prefiere a **y**; si esto no sucede, entonces **x** e **y** son indiferentes. Este supuesto recibe el nombre de **no saturación**.

v. Las preferencias de los consumidores solo dependen de sus propios gustos e independientemente de los demás individuos.

vi. Por último, supongamos que los bienes y servicios son infinitamente divisibles, con lo que podremos considerar miríadas de cada uno de los bienes; este supuesto llamado de **divisibilidad** desde luego no se cumple cabalmente en la realidad pero es utilizado para simplificar el modelo utilizando las herramientas del cálculo infinitesimal.

1.2. La Función de Utilidad

Representemos ahora las preferencias del consumidor respecto a los conjuntos de bienes mediante una manera alternativa a la formulación anterior, con una función denominada de utilidad. La función de utilidad asigna a cada combinación de bienes y servicios (en $\mathbf{R}^n_+$) un número real, para cada conjunto preferido a otro el número asociado por la función será mayor y para las combinaciones indiferentes el número correspondiente será el mismo para ambas, de donde a cada canasta de bienes le corresponderá un número llamado utilidad. Es claro que esta función otorga una medida ordinal de la satisfacción, es decir, la función de utilidad solo indica si un conjunto de mercancías otorga mayor, menor, o igual utilidad que otro, razón por la cual debe cumplir las siguientes características:

i. Sea $U: R^n \to R$, de clase C^2, i.e. tiene derivadas parciales de primero y segundo orden, continuas y diferenciables.

ii. $U = u(\mathbf{x}) > 0$ $\qquad\qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

iii. $x_i > 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $i = 1, 2, \ldots, n$

iv. Si **x**, **y**, **z** son tres canastas de bienes

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}P\mathbf{y} \Rightarrow \mathrm{u}(\mathbf{x}) > \mathrm{u}(\mathbf{y}) \\
&\mathbf{x}I\mathbf{y} \Rightarrow \mathrm{u}(\mathbf{x}) = \mathrm{u}(\mathbf{y}) \\
&\mathbf{x}P\mathbf{y}, \mathbf{y}P\mathbf{z} \Rightarrow \mathrm{u}(\mathbf{x}) > \mathrm{u}(\mathbf{y}) > \mathrm{u}(\mathbf{z}) \\
&\therefore \mathrm{u}(\mathbf{x}) > \mathrm{u}(\mathbf{z})
\end{aligned}$$

Al considerar una función de utilidad ordinal estamos comparando cualitativamente entre canastas de bienes, hablamos de combinaciones preferidas o indiferentes a otras, nunca decimos cuan preferido es un conjunto respecto de otro, por lo tanto, el índice de utilidad no es único y podemos afirmar que cualquier transformación monótona creciente de la función de utilidad es adecuada como representación.

1.3. La Curva de Indiferencia

Una curva de indiferencia es el conjunto de puntos que representan diferentes combinaciones de mercancías que brindan al consumidor el mismo nivel de utilidad. Si consideramos una canasta con únicamente dos bienes x, y la función de utilidad asociada será u(x, y). Entonces u(x, y) = c donde c = constante, define la curva de indiferencia[2] de valor c, la cual se muestra en la figura 1.

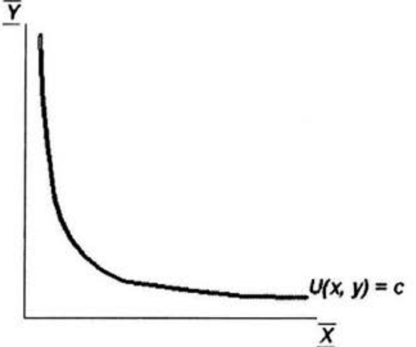


Figura 1

[2] Sea f: $R^2 \rightarrow R$, f(x, y) = k es llamada la curva de nivel de valor k.

Para diferentes valores de c generamos un mapa de indiferencia como el que se muestra en la figura 2.

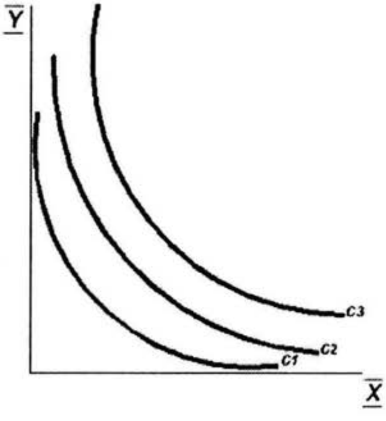


Figura 2

Debido a que u(x, y) nos da una medida ordinal de la utilidad las curvas de indiferencia situadas más arriba y a la derecha son las que representan mayor utilidad.

De los supuestos hechos sobre las preferencias del consumidor podemos obtener algunas propiedades de las curvas de indiferencia, como:

i. **Las curvas de indiferencia no tienen pendiente positiva.**

   Supongamos una curva de indiferencia con pendiente positiva como en la figura 3.

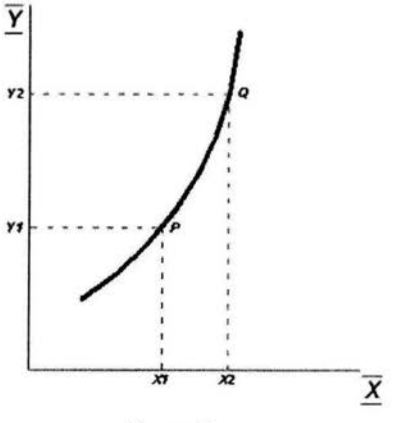


Figura 3

Como P y Q se encuentran en la misma curva de indiferencia, P y Q son indiferentes, pero Q tiene x_2 unidades de x e y_2 unidades de y mientras que P tiene x_1 unidades de x ($x_1 < x_2$) e y_1 unidades de y ($y_1 < y_2$) entonces Q debe preferirse a P, pues Q tiene mayor cantidad de cada bien que P, de donde, P y Q no pueden estar en la misma curva de indiferencia, por lo tanto, las curvas de indiferencia no pueden tener pendiente positiva.

ii. Las curvas de indiferencia no se intersectan.

Para comprobar esta propiedad, supongamos que dos curvas de indiferencia se intersectan como las que se muestran en la figura 4.

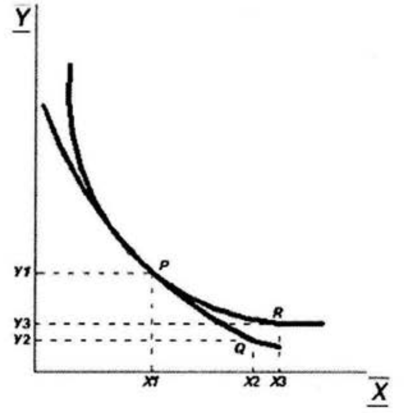


Figura 4

Observamos que R tiene x_3 unidades de x e y_3 unidades de y mientras que Q tiene x_2 e y_2 unidades de x e y respectivamente como $x_3 > x_2$ e $y_3 > y_2$ R se prefiere a Q. Por otra parte P tiene x_1 unidades de x e y_1 unidades de y como $x_1 < x_3$ e $y_1 > y_3$ P y R son indiferentes, por eso están en la misma curva de indiferencia; Q tiene x_2 unidades de x e y_2 de y pero $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$, de donde P y Q son indiferentes y están en la misma curva de indiferencia. Pero si P es indiferente a R y P es indiferente a Q, entonces R debe ser indiferente a Q, pero R se prefiere a Q, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, las curvas de indiferencia no se intersectan.

iii. Una curva de indiferencia pasa por cada punto del espacio de bienes.

Para verificar esta propiedad recordemos que u(x, y) = c define la curva de indiferencia de valor c, como u(x, y) es de clase C^2 entonces para todas y cada una de las combinaciones de x, y que brindan un mismo nivel de utilidad hay un punto asociado en el espacio de bienes.

1.4. La Tasa Marginal de Sustitución

Sabemos que diferentes combinaciones de mercancías pueden generar un mismo nivel de satisfacción para el consumidor, entonces podemos intercambiar la cantidad de un bien por otro y conservar la misma utilidad; la tasa marginal de sustitución de x por y mide la cantidad de y que se sacrifica para obtener un incremento en la cantidad de x conservando el mismo nivel de utilidad. La tasa marginal de sustitución está dada por el negativo de la pendiente de la curva de indiferencia, observemos la figura 5.

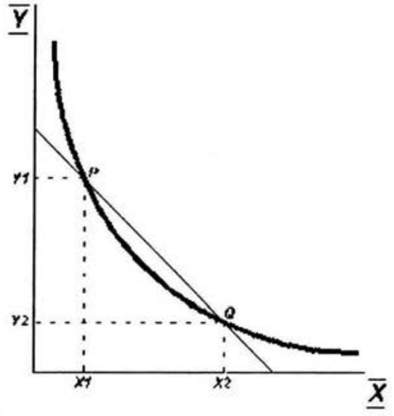


Figura 5

Si el consumidor esta situado en el punto P tiene x_1 unidades de x e y_1 unidades de y, para que el consumidor obtenga la combinación Q con x_2, y_2 unidades de x e y respectivamente debe sacrificar cierta cantidad de y para obtener mayor cantidad de x, tal cambio está dado por el negativo de la pendiente de la recta que pasa por P y Q.

$$\frac{(y_1 - y_2)}{(x_2 - x_1)} = -\frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}$$

Conforme Q tiende a P la pendiente de la recta que pasa por P y Q tiende a la pendiente de la recta tangente a la curva de indiferencia en el punto P, de donde, la tasa marginal de sustitución de x por y es[3]:

$$TMS_{xy} = -\frac{dy}{dx}$$

La pendiente de la recta tangente a la curva de indiferencia la podemos obtener de la siguiente manera: como la función de utilidad depende de x e y, la parcial de U = u(x, y) respecto de x nos indica el cambio en la utilidad originado por un incremento infinitesimal en x, mientras que la parcial de U respecto de y nos da el cambio en la utilidad atribuible a una variación marginal en y. Situándonos en la curva de indiferencia de valor c, es decir, U = c y tomando la diferencial total:

$$dU = U_x\,dx + U_y\,dy = 0$$
$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x}; U_y = \frac{\partial U}{\partial x}$$

Despejando la pendiente de la recta tangente a la curva de indiferencia

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y}$$

De donde $$TMS_{xy} = -\frac{dy}{dx} = \frac{U_x}{U_y}$$

Cabe hacer la aclaración de que la TMS_{xy} se define a lo largo de una curva de indiferencia dada.

[3] Consideramos el negativo de la pendiente de la recta tangente a la curva de indiferencia en un punto porque nos interesa una medida positiva de sustitución entre los bienes.

1.5. Ejercicios

1.1 Determine el orden de preferencias de los siguientes conjuntos utilizando el supuesto de no saturación.

Conjunto	Cantidad del Bien			Lugar
	x	y	z	
A	86	88	87	
B	86	87	76	
C	100	90	78	
D	86	89	76	

1.2 Grafique los siguientes puntos y obtenga la TMS_{xy} para los puntos sucesivos.

Punto	x	y	TMSxy
1	1	8	
2	2	6	
3	3.5	4	
4	5.5	2	
5	8	1	

1.3 Sea $U = u(x, y) = (x + a)^{\alpha} (y + b)^{\beta}$ $\quad 0 < \alpha, \ \beta < 1 \ \ a, b > 0$

a) ¿Qué tipo de curvas de indiferencia genera U?, ¿Corresponden a las características señaladas en la sección 1.3?

1.4 Sea $U = x^{1/4} y^{1/2}$ la función de utilidad de un determinado consumidor.

a) ¿Cuál es la TMSxy?

b) Grafique las curvas de indiferencia para los niveles de utilidad c = 2, 4, 8.

2. La Demanda del Consumidor

En el capítulo anterior analizamos las preferencias del consumidor ante las diferentes mercancías, pero éstas no son el único determinante para la elección del consumidor; cada mercancía se compra no solo porque se prefiere, sino también porque se cuenta con un ingreso mediante el cual se refleja el deseo sobre el bien o servicio en cuestión. Los gustos del consumidor así como el ingreso de éste y los precios de los bienes y servicios determinan totalmente el conjunto de bienes elegibles para el consumidor y consecuentemente su demanda individual.

2.1. La Restricción Presupuestaria

Supongamos que el consumidor tiene un ingreso M, entonces la cantidad de bienes x e y que puede adquirir a los precios p_x y p_y es menor o igual al total de su ingreso, lo cual puede representarse con la siguiente desigualdad:

$$xp_x + yp_y \leq M \ldots (1)$$

A la expresión (1) se le conoce como el espacio de presupuesto; si consideramos que el consumidor utiliza toda su renta para adquirir los bienes x e y tenemos:

$$xp_x + yp_y = M \ldots (2)$$

Despejando $$y = \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x \ldots (3)$$

Como observamos se trata de la ecuación de una recta con ordenada al origen M / p_y y pendiente - p_x / p_y, la expresión (3) se le denomina la línea de presupuesto (figura 6).

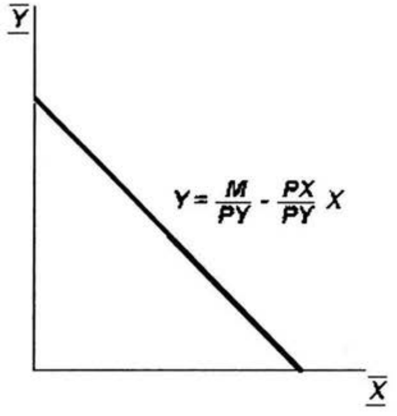


Figura 6

2.2. Maximización de la Utilidad

El problema esencial del consumidor es como ya hemos mencionado, maximizar la utilidad que le brinda un conjunto de bienes o servicios condicionado a que su presupuesto es limitado. Como podemos recordar, la curva de indiferencia describe las preferencias del consumidor y la línea de presupuesto indica qué combinaciones puede adquirir; sabemos que existe un número infinito de curvas de indiferencia que cubren todo el espacio de bienes, pero no todas alcanzables para el consumidor, la línea de presupuesto nos dice cuales de entre todo el conjunto de curvas de indiferencia son posiblemente elegibles para el consumidor. Fijemos nuestra atención en las tres curvas mostradas en la figura 7.

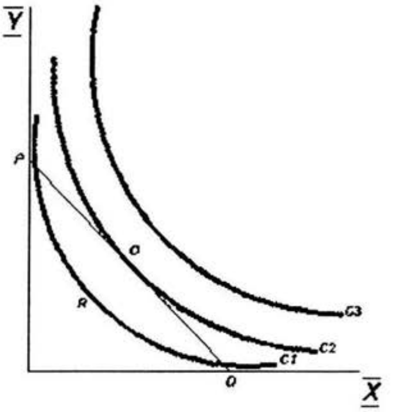


Figura 7

Es evidente que la curva de indiferencia de valor c_3 brinda la mayor utilidad pero está por encima de la línea de presupuesto, por lo tanto no es alcanzable para el consumidor. Si observamos la curva de indiferencia de valor c_1 vemos que esta intersecta a la línea de presupuesto en los puntos P y Q, como P, Q y R están sobre la misma curva de indiferencia R *I* P y R *I* Q pero la combinación R puede obtener gastando menos, por otra parte O esta sobre una curva de indiferencia más alta que también toca a la línea de presupuesto, por lo tanto O debe preferirse a R (pues O se localiza en una curva de indiferencia más alta). Del análisis gráfico podemos concluir que el consumidor maximiza su utilidad cuando una curva de indiferencia es tangente a la línea de presupuesto, es decir, cuando las pendientes de la curva de indiferencia y de la línea de presupuesto son iguales. El resultado anterior se puede obtener analíticamente de la siguiente manera: Como sabemos la pendiente de la curva de indiferencia (sec. 1.4) es $dy / dx = - TMS_{xy}$ y la pendiente de la línea de presupuesto es $- p_x / p_y$, el consumidor maximiza su utilidad cuando:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -TMS_{xy}$$

$$\Leftrightarrow TMS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$$

lo que significa que el consumidor encontrará su punto de equilibrio cuando la cantidad del bien y que va a sacrificar para aumentar la cantidad de x sea permitido por el mercado.

Si la elección del consumidor es frente a n bienes ($n \geq 2$) el problema se pude resolver mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange, es decir, se trata de un problema de:

$$\begin{aligned}
&\text{máx. } u(\mathbf{x}) \\
&\text{s.a.} \\
&g(\mathbf{x}) = M - \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \\
&x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

la función de Lagrange es $L(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x})$, las condiciones necesarias de primer orden para un máximo condicionado son que:

$$\nabla L(\mathbf{x},\lambda) = (0,0,\ldots,0) \text{ n+1 componentes}$$

$$\nabla L(\mathbf{x},\lambda) = (L_1, L_2, \ldots, L_n, L_\lambda) = (0,0,\ldots,0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = L_i ; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda$$

$$\Leftrightarrow L_i = 0 = L_\lambda \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow U_i - \lambda p_i = 0 \ldots (1)$$

$$M - \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0$$

de la ecuación (1) tenemos que:

$$\lambda = \frac{U_1}{p_1} = \frac{U_j}{p_j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_1}{U_j} = \frac{p_1}{p_j}$$

Es decir, la misma condición encontrada geométricamente para dos bienes. Las condiciones de suficientes de segundo orden son que los hessianos orlados relevantes evaluados en los puntos críticos $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ alternen su signo $H_2 > 0$, $H_3 < 0$, etc.

$$H_r = (-1)^r \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1r} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & & L_{2r} & g_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L_{r1} & L_{r2} & & L_{rr} & g_r \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_r & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Donde [4]

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L(x_0, \lambda_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$g_i = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i}$$

Para i , j = 1, 2, ..., n

r = 2, 3, . . . , n

2.3. La Curva de Demanda

Hemos analizado la cantidad de bienes que el consumidor demandará en el punto de equilibrio de acuerdo a sus preferencias, ingreso y los precios de cada uno de los bienes. Supongamos que ocurre un incremento en el precio de alguno de los bienes mientras que el precio de las otras mercancías y el ingreso se mantienen fijos, sea:

$xp_x + yp_y = M$ la restricción presupuestaria original

$xp_x^1 + yp_y = M$ La nueva restricción debida al aumento del precio del bien x $(p_x < p_x^1)$.

Sabemos que el equilibrio del consumidor se encuentra cuando

$$TMS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$$

Entonces cuando aumenta el precio de x el punto de equilibrio del consumidor se dará en

$$TMS_{xy} = \frac{p_x^1}{p_y}$$

es decir, en otra curva de indiferencia como lo muestra la figura 8.

[4] Siendo sumamente rigurosos en la notación deberíamos escribir: $\partial L(x, \lambda) / \partial x_j \partial x_i = L_{ij}$, pero como suponemos continuidad en las derivadas parciales $L_{ij} = L_{ji}$ para todo i , j

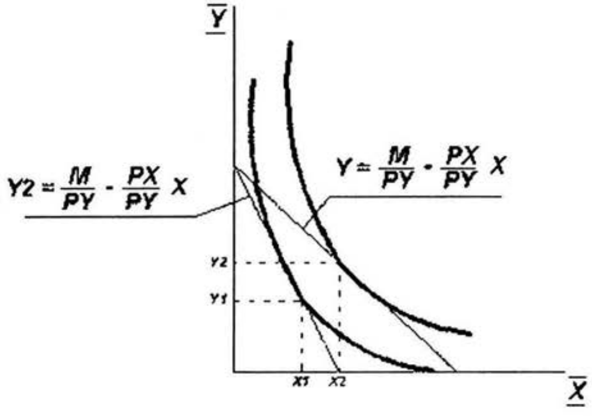


Figura 8

Es claro que al incrementar el precio del bien x también varía la cantidad consumida de éste (x_1 en lugar de x_2 $x_1 < x_2$), podemos continuar con incrementos sucesivos en el precio de x y observar las cantidades de este bien que se adquieren en equilibrio y concluir diciendo que: al aumentar el precio de alguno de los bienes conservándose el ingreso y los demás precios constantes, disminuye la cantidad demandada del bien en cuestión. De acuerdo a lo anterior definimos a la **curva de demanda** como: "El lugar geométrico de los puntos que relaciona las cantidades óptimas compradas por los consumidores a los diferentes precios de mercado cuando el ingreso y los demás precios se mantienen constantes" [5]. Una gráfica típica de la curva de demanda se presenta en la figura 9.

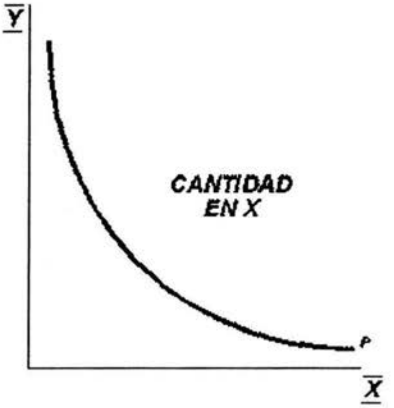


Figura 9

[5] Blair Roger. "Microeconomía con Aplicaciones a la Empresa". Mc. Graw-Hill. 1985. p 33.

Si se cumplen las condiciones de segundo orden (sección 2.3), la solución de las condiciones de primer orden brindan las n funciones de demanda para cada una de las mercancías en función de los precios y el ingreso, i.e.

$$x_i = x_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, M) \quad i = 1,2,\ldots, n$$

2.4. Los Determinantes de la Demanda

Hasta antes de la sección 2.3 hemos considerado los precios de los bienes y el ingreso como cantidades fijas, supongamos que alguno de estos factores sufre un cambio, ¿qué ocurre con la demanda individual? En las siguientes secciones daremos solución a esta interrogante.

2.4.1. La Elasticidad de una Función

Sea $y = f(x)$ una función con una sola variable, ¿cómo procederíamos para encontrar una medida del cambio proporcional en y originado por un cambio proporcional en x? Supongamos que x aumenta en h ($h > 0$), el cambio proporcional en x esta dado por:

$$\frac{(x+h-x)}{x} = \frac{h}{x}$$

En tanto que en y es: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$

De donde, el cambio proporcional en y atribuible a un cambio proporcional en x está dado por:

$$\frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}}{\dfrac{h}{x}} = \frac{x}{f(x)}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Cuando h tiende a cero y si la derivada de y con respecto de x existe, la tasa de cambio proporcional es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x}{f(x)} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

Definimos la elasticidad de una función y = f(x) como: la tasa de cambio proporcional en y por aumento proporcional en x y la denotamos por:

$$\varepsilon = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

Ahora bien si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función de n variables, la elasticidad de z respecto de la variable x_i se define como: la tasa de cambio proporcional en z por incremento proporcional en x_i, manteniendo las demás variables fijas y la escribimos como:

$$\varepsilon = \frac{x_i}{z} \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

2.4.2. Elasticidad Precio de la Demanda

Retomando el problema que nos ocupa, esto es, la demanda individual; sabemos que existe una relación inversa entre la cantidad demandada de un bien y el precio de éste, pero quisiéramos saber la medida que nos indique en que proporción reacciona la cantidad demandada ante las variaciones en su precio; a esta medida se le conoce como elasticidad precio de la demanda. La elasticidad precio de la demanda es el cociente del cambio porcentual de la cantidad demandada entre el cambio porcentual de su precio, denotamos ésta por ε_{ii}.

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\Delta x}{xi} \frac{\Delta p}{pi}$$ [6]

[6] Como el precio y la cantidad demandada varían en sentido opuesto, anteponemos el signo (-) para hacer de ε_{ii} una cantidad positiva.

Si la función de demanda individual es una función continua con derivadas parciales continuas la elasticidad precio es:

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{p_i}{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial p_i}$$

El valor de la elasticidad precio de la demanda en torno al uno nos permitirá clasificar a la demanda individual de la siguiente manera:

$\varepsilon_{ii} > 1$ Diremos que la demandada es elástica, esto es, una variación porcentual en el precio genera un cambio porcentual mayor en la cantidad demandada.

$\varepsilon_{ii} = 1$ La elasticidad es unitaria, lo que significa que el cambio porcentual en el precio trae consigo un incremento porcentual de igual magnitud en la cantidad demandada.

$\varepsilon_{ii} < 1$ La demanda es inelástica, es decir, la modificación en el precio provoca un menor impacto en la cantidad demandada.

2.4.3. Elasticidad Cruzada de la Demanda

La demanda de un bien específico también se ve afectada por el cambio en los precios de los demás bienes, la medida de la reacción relativa de las modificaciones en la cantidad demandada de un bien ante la variación en el precio de los bienes relacionados se conoce como elasticidad cruzada de la demanda. La elasticidad cruzada de la demanda está dada por el cambio porcentual de la cantidad demandada del bien x_i dividido por el cambio porcentual del precio del bien x_j.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\Delta x_i}{x_i}\frac{\Delta p_i}{p_j}$$

Si x_i es una función continua de la forma $x_i = x_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, M)$ entonces:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{p_j}{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$$

De donde, podemos clasificar a los bienes de la siguiente manera:

Si $\varepsilon_{ij} > 0$ Diremos que los bienes son sustitutos, lo que significa, que un incremento en el precio del bien x_j provoca una disminución en el consumo del bien x_i.

$\varepsilon_{ij} < 0$ Los bienes son complementarios, en otras palabras, el incremento en el precio del bien x_j provoca un aumento en el consumo del bien x_i [7].

2.4.4. Elasticidad Ingreso de la Demanda

Por último analicemos el otro determinante de la demanda, el ingreso. La elasticidad ingreso de la demanda nos indica el cambio relativo de la cantidad demandada referido a la variación porcentual en el ingreso, es decir, el cambio proporcional de la cantidad demandada dividido entre el cambio proporcional en el ingreso:

$$\varepsilon_M = \frac{\Delta x_i}{x_i} \frac{\Delta M}{M}$$

Si x_i es una función continua y diferenciable

$$\varepsilon_M = \frac{M}{x_i} \frac{\partial x}{\partial M}$$

Y clasificamos a los bienes de la siguiente manera:

Si $\varepsilon_M > 0$ Hablamos de bienes normales, en otros términos, el incremento en el ingreso provoca una mayor variación en la cantidad consumida.

$\varepsilon_M < 0$ Se trata de un bien inferior, esto es, el cambio en el ingreso genera una disminución en la cantidad demandada.

---

[7] Algunos ejemplos de esta clasificación: el aumento en el precio de la carne de cerdo cuando el precio de la carne de res permanece constante propiciará un incremento en el consumo de carne de res, ε_{rc} es positivo, por lo cual ambos bienes son sustitutos. Por otra parte, el aumento en el precio del té provocará una reducción en la cantidad de consumida de azúcar, ε_{at} es negativa, es decir, el té y el azúcar son bienes complementarios.

2.5. Ejercicios

2.1 ¿Qué significado tienen las variables x, y, los parámetros p_x, p_y, M en la ecuación $x\,p_x + y\,p_y = M$?

2.2 Un consumidor cuya utilidad viene representada por la función $U = u(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$ dispone de un ingreso de \$160, si el precio del bien x es de \$2 y de \$4 el de y. ¿Qué cantidad de cada bien debe adquirir el consumidor para maximizar su función de utilidad?

2.3 Encuentre las cantidades de cada bien que el consumidor debe comprar para maximizar su función de utilidad U = u(x, y) sujeto a la restricción presupuestaria.

$U = u(x, y) = \ln x^{.5} + 0.5 \ln y$

$p_x = \$2$

$p_y = \$4$

$M = \$200$

Si el consumidor destina \$40 de su ingreso al ahorro.

2.4 Sea $U = u(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ $0 < \alpha, \beta < 1$, la función de utilidad del consumidor, p_x el precio de x, p_y el precio de y, M el ingreso. Calcule el punto de equilibrio del consumidor y a partir de este resultado obtenga las funciones de demanda de los bienes x e y.

2.5 Si F es una transformación monótona creciente de la función de utilidad U = u(x, y), p_x, p_y, M los precios de los bienes x, y, el ingreso del consumidor respectivamente. Muestre que las condiciones de primer orden para un máximo condicionado se conservan bajo la transformación F.

2.6 Sea $x(p_x, M)$ la función de demanda del bien x, encuentre:

$x = aMp_x \quad a>0$

$x = Mp_x^{\beta}$ Para $0< \beta<1$

a) La elasticidad precio de la demanda.
b) La elasticidad ingreso de la demanda.

3. La Producción

Hemos descrito brevemente la teoría del consumidor, corresponde ahora hablar de su contraparte, la teoría de la empresa. Para los economistas la empresa es una unidad económica de toma de decisiones relacionadas con la combinación de factores (insumos, inputs) que se utilizan en la producción de bienes y servicios que venden a los consumidores (individuos u otras empresas).Si bien el supuesto básico de la teoría del consumidor es que éste desea maximizar su utilidad, el del empresario es maximizar el beneficio. Al igual que en la teoría del consumidor consideramos otros supuestos simplificadores de la realidad, que nos servirán de base para describir la conducta de la empresa en el mercado.

i. La empresa produce más de lo que puede vender, ésta tiene la capacidad de eliminar el excedente sin incurrir en costos adicionales (**eliminación gratuita**).
ii. Los insumos y el producto son infinitamente divisibles (**divisibilidad**).
iii. La empresa conoce totalmente las situaciones en las que se desarrolla la producción (**conocimiento perfecto**).
iv. La producción solo depende de sus propios recursos (**ausencia de externalidades**).
v. La calidad de los insumos y del producto es igual que la de las demás empresas (**homogeneidad de factores y productos**).

En los párrafos anteriores se utilizó repetidamente el término producción, por lo que es conveniente definir el significado del concepto producción en Economía. La producción se refiere a las actividades de las empresas que utilizan diversos factores para obtener una determinada mercancía. Generalmente las empresas utilizan una gran variedad de factores para producir bienes, la mejor selección de insumos para un determinado nivel de producción es el objetivo del análisis económico. Antes de abundar en la teoría de la producción es conveniente considerar dos conceptos muy utilizados en el análisis económico: el corto y el largo plazo, esta división del tiempo en Economía se refiere en el caso del corto plazo a que alguno(s) de los insumos es (son) fijo(s) y los demás variables, es decir, que a corto plazo el uso de alguno de los factores (tierra, edificios, maquinaria, etc.) no se pude alterar de inmediato cuando el mercado indica que este cambio resultaría benéfico; mientras que a largo plazo todos los insumos se consideran variables.

3.1. Producción con un Factor Variable

El caso más sencillo en el estudio de la teoría de la producción es aquel en que únicamente se cuenta con dos insumos, uno fijo y otro variable, es desde luego un modelo a corto plazo pero que nos permitirá comprender con mayor facilidad la teoría de la empresa.

3.1.1. La Función de Producción a Corto Plazo

Consideremos que la producción se realiza con un insumo fijo y otro variable, que la tecnología está dada y que el volumen de producción sólo se puede alterar modificando la cantidad de factor variable. La función de producción es la relación que muestra la cantidad máxima de producto que se obtiene con un conjunto determinado de insumos de acuerdo a la tecnología existente. Como solo contamos con un factor variable y uno fijo podemos representar a la función de producción como: $Q: R^n_+ \rightarrow R_+ \cup \{0\}$, $Q = q(x, y_0)$ donde x es el insumo variable e y_0 el insumo fijo. Es claro que únicamente nos interesan los valores positivos de Q, i.e. $Q \geq 0$, $x \geq 0$, $y_o \geq 0$, utilizando el supuesto de divisibilidad podemos considerar que Q es continua y con derivadas continuas de primero y segundo orden, es decir, $\frac{dQ}{dx}, \frac{d^2Q}{dx^2}$ existen y son continuas [8]. Observamos inmediatamente que a diferencia de la función de utilidad, Q es una medida cardinal, pues nos muestra el número máximo de unidades de una cierta mercancía y nos dice no sólo qué valores son mayores sino además, en cuanto lo son. Debemos aclarar que para el análisis económico se supone la eficiencia técnica de la función de producción, en otras palabras, se da por hecho que el uso de los insumos es el mejor técnicamente y el trabajo del economista es analizar cual es la mejor combinación de factores de acuerdo a la tecnología presente.

3.1.2. Producto Medio y Producto Marginal

Después de definir a la función de producción un par de preguntas que surgen de manera natural son las siguientes: ¿qué cantidad de producto se genera con el nivel de insumo variable respectivo? y ¿si incrementamos el uso del factor variable, en que magnitud varía el nivel de producción? .Para dar respuesta a estas interrogantes definimos dos conceptos: **producto medio** y **producto marginal**; Como Q representa el número máximo de unidades generadas para cada nivel de producción consideremos el producto medio del

---

[8] Como el insumo y es fijo podemos considerar a Q como función solo de x , es por eso que utilizamos el operador d / dx y no $\partial / \partial x$

insumo variable como la producción total dividida entre el número de unidades de insumo variable utilizadas en ese nivel, en otros términos:

$$PMe = \frac{Q}{x}$$

Ahora bien, si cambia el uso del factor variable y queremos saber como responde la producción total a dicha variación, definimos el producto marginal del insumo variable como el cociente de incremento en la producción dividido por el incremento en el uso del factor variable, de donde:

$$PMg = \frac{\Delta Q}{\Delta x}$$

3.1.3. La Ley de los Rendimientos Físicos Decrecientes

Es natural pensar que si aumentamos el uso del factor variable x entonces la producción también debe incrementarse, pero reflexionando un poco nos daremos cuenta que esto solo, pude suceder en un determinado intervalo; pensemos por un momento en la producción agropecuaria y consideremos una parcela de tierra y el trabajo de los agricultores[9] como los insumos fijo y variable respectivamente, si un agricultor trabaja la tierra obtendrá digamos Q_0 unidades de producto, al incrementar el número de trabajadores es lógico pensar que la producción también aumentará conforme crezca el número de labriegos[10], alcanzará un nivel máximo de producción y después disminuirá paulatinamente, pues si el número de trabajadores es muy elevado éstos no dispondrán de espacio suficiente para realizar su labor y consecuentemente no habrá producción. Si ocurriera que al aumentar la mano de obra, la producción creciera por siempre, entonces el problema económico de la generación de alimentos quedaría resuelto, pues en una parcela se podrían producir éstos, simplemente añadiendo cada vez más trabajadores, situación a todas luces imposible. Con base en esta breve reflexión podemos enunciar **la ley de los rendimientos físicos decrecientes**: cuando la cantidad del insumo variable aumenta y se

---

[9] Consideremos al agricultor como una unidad de trabajo dotada de las herramientas y la materia prima necesarias para cultivar la tierra.

[10] Pues entre otras cosas se dará origen a la especialización y por tanto a la mejor utilización de recursos.

mantiene constante el otro insumo se llega a un punto en el cual el producto marginal comienza a decrecer. Es importante resaltar que la ley de los rendimientos físicos decrecientes es solo una afirmación de las relaciones físicas observadas en la realidad.

3.1.4. Relación Geométrica entre el Producto Medio y el Producto Marginal

Como en la función de producción a corto plazo uno de los factores es fijo, podemos considerar a Q como función de una sola variable x. Suponiendo que se cumple la ley de los rendimientos físicos decrecientes, la producción aumenta en un cierto intervalo, alcanza un máximo y luego decrece, la gráfica de una función típica a corto plazo es como la que se muestra en la figura 10.

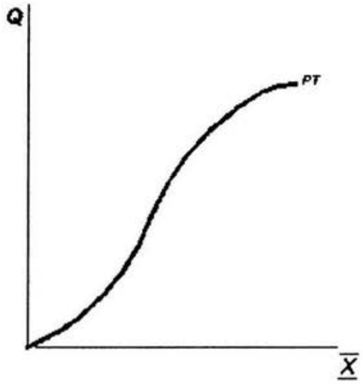


Figura 10

Veamos algunas relaciones geométricas interesantes entre la función de producción a corto plazo, el producto medio y el producto marginal. El producto medio es según lo hemos definido el cociente del producto total Q entre el número de unidades del factor variable utilizadas en cada nivel de producción; sea x_1 la cantidad del insumo variable utilizadas para producir Q_1 unidades de producto, para el punto A el producto medio es Q_1 / x_1 pero $0Q_1 = x_1A$, de donde, el producto medio en A es $x_1A / 0x_1$ que no es otra cosa que la pendiente de la recta que pasa por el origen y el punto A, observamos también que el PMe en B es $Q_2 / x_2 = x_2B / 0x_2$, es decir, que el PMe en B es la pendiente de la recta que va del origen a B, pero del diagrama vemos que la recta que va del origen a B es la misma que une al cero con el punto A, por lo que el PMe en A es igual al PMe en B; esto motiva a pensar que el PMe alcanza un valor máximo entre A y B y además que el PMe crece en un cierto intervalo, alcanza un máximo, decrece e incluso puede alcanzar el valor cero. El punto donde PMe es máximo es aquel en donde la pendiente de la recta que pasa por el origen y la curva de producto total es mayor, observamos que esto sucede cuando esta recta es tangente por encima de la curva de producción, es decir, en el punto M de la figura 11.

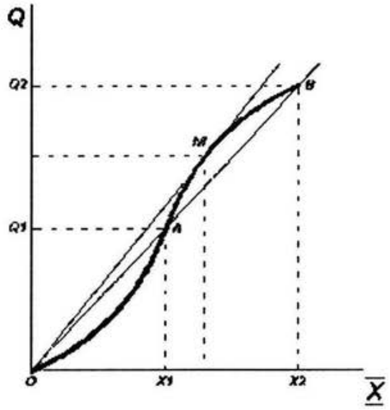


Figura 11

Por otra parte el PMg representa la adición al producto total atribuible al incremento en el uso del factor variable, como podemos observar en la figura 12 al incrementar el insumo variable de x_1 a x_2 el producto total aumenta de Q_1 a Q_2 pero observamos que Q_1Q_2 = FE y x_1x_2 = DF, entonces el PMg en D es FE / DF, lo que geométricamente representa a la pendiente de la recta que pasa por D y E; cuando x_2 tiende a x_1 y E tiende a D la pendiente de la recta tangente a la curva generada por la función de producción en el punto D es la mejor aproximación lineal del PMg, esto es, PMg = dQ / dx.

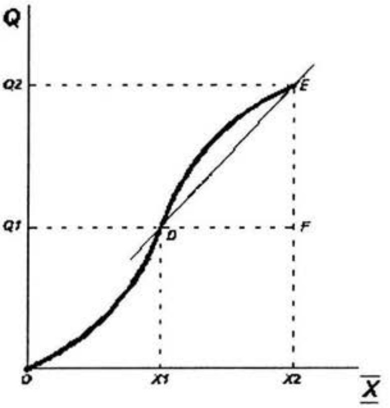


Figura 12

De la figura 13 observamos que la función de producción tiene un punto donde la curva cambia de concavidad, es decir, aquél en que la gráfica del producto total tiene un punto de inflexión y otro donde el producto total es máximo. Como el PMg del insumo variable está representado por la derivada de la función de producción observamos que el PMg es mayor que cero y crece hasta llegar al punto de inflexión de la curva de producto total[11] , valor donde el PMg alcanza un máximo y después éste comienza a decrecer. La curva de producto total alcanza un máximo cuando la pendiente de la recta tangente es igual a cero, o lo que es lo mismo cuando PMg = 0, por lo tanto después de este punto PMg es menor que cero. Por otra parte vemos que PMe < PMg en el punto A y que PMg < PMe en B, además las pendientes de las rectas que pasan por el origen y la curva de producto total son ascendentes en x_1 y descendentes en x_2, lo que significa que PMe alcanza su máximo valor entre A y B; observemos el punto C sobre la curva de producto total, en este punto la recta que pasa por el origen y C es tangente a la curva de producto total, entonces la pendiente de esa recta representa simultáneamente al PMe y al PMg en el punto C, de donde, en tal punto PMe = PMg.

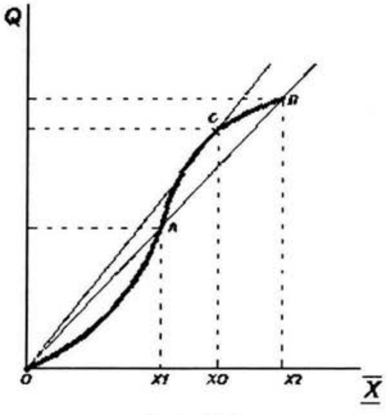


Figura 13

Tracemos otro rayo que parta del origen a la curva de producto total y el punto donde corta a ésta última se encuentra a la derecha de C, la pendiente de este rayo será menor que la pendiente de la recta que pasa por cero y C; si lo hacemos para puntos a la izquierda de C ocurrirá lo mismo, por lo tanto, la pendiente de mayor valor de un rayo que parte del origen y corta a la curva de producto total es aquella que es tangente por encima a ésta. De

[11] Un punto de inflexión de la función f(x) se define como el punto donde df(x) / dx alcanza un mínimo o máximo

acuerdo a lo anterior podemos concluir que la gráfica del PMe se desplaza por debajo de la gráfica de PMg hasta el punto donde PMe es máximo e igual al PMg, a la derecha de este punto el PMg será menor que el PMe, tal como lo muestra la figura 14.

Figura 14

3.1.5. Las Etapas de Producción

Los resultados anteriores también nos brindan la oportunidad de clasificar a la producción en tres diferentes fases: la primera es aquella que va del punto en que PMg es cero hasta donde PMe es máximo, es decir, cuando el PMe es ascendente, la etapa dos abarca el intervalo donde el PMe es máximo hasta que el PMg es cero y la tercera etapa se da cuando el PMg es negativo, resumiendo:

Etapa I $0 \leq PMg < PMe$

Etapa II $PMg \leq PMe$

Etapa III $PMg < 0$

Como se muestra en las figuras 15 y 16.

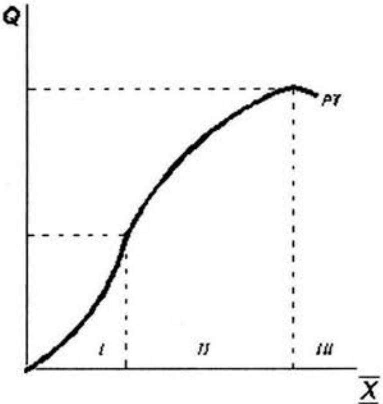


Figura 15

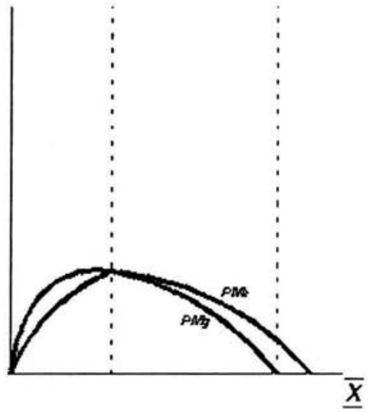


Figura 16

3.2. Producción con Múltiples Factores

Consideremos ahora que el proceso de producción requiere dos o más insumos y que éstos se pueden variar cuando la producción así lo requiera, podemos suponer que estos insumos se utilizan con uno o varios factores fijos, o bien son los únicos existentes; esta última situación se da desde luego únicamente a largo plazo.

3.2.1. La Función de Producción con Múltiples Factores

Nuevamente la función de producción representa la cantidad máxima de producto, solo que en esta ocasión se utilizan dos o más insumos que pueden combinarse de muy diversas maneras para obtener un nivel dado de producción; podemos representar a la función de producción como una aplicación del conjunto de insumos R^n_+ en R_+, de modo que a una combinación de insumos le asociemos un número que indique el nivel máximo de producción correspondiente a tales factores, lo anterior significa que Q: $R^n_+ \rightarrow R_+ \cup \{0\}$ supongamos además que Q es continua, con derivadas parciales continuas de primero y segundo orden y que : $\frac{\partial Q}{\partial x_i} \geq 0, \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} \leq 0$ para i = 1, 2, ... , n

3.2.2. Producto Medio y Producto Marginal

Para la función de producción multi-insumo también definimos los conceptos de producto medio y producto marginal del insumo x_i de la misma manera que en la producción con un insumo variable, es decir, el producto medio del insumo x_i es el producto total dividido entre el número de unidades del factor x_i utilizadas en cada volumen de producción, analíticamente tenemos que:

$$PMe = \frac{Q}{x_i}$$

El producto marginal del insumo x_i es por definición el incremento (decremento) en el volumen de producción atribuible al incremento en el uso del factor variable x_i

$$PMg_i = \frac{\partial Q}{\partial x_i} \quad i=1, 2, ..., n$$

3.2.3. Rendimientos a Escala

El concepto de rendimientos a escala nace de la idea incrementar todos los insumos en la misma proporción y observar que sucede con el producto total; a saber pueden ocurrir tres situaciones: que el producto total aumente en la misma proporción que el incremento en los factores, que la producción aumente en proporción mayor o que la producción aumente en menor proporción. Si ocurre el primer caso entonces diremos que la producción presenta rendimientos constantes a escala, si sucede la segunda situación entonces la producción muestra rendimientos crecientes a escala y finalmente sí tiene lugar la tercera, la producción muestra rendimientos decrecientes a escala. Algunos procesos productivos pueden presentar rendimientos crecientes, constantes y decrecientes a escala en determinados intervalos. Si contamos con una función que establezca la relación existente entre la combinación de diferentes insumos y el producto total, los rendimientos a escala corresponden al grado de homogeneidad de la función de producción, es decir, supongamos que $Q = q(x_1, x_2,..., x_n)$ es la función e incrementamos la cantidad de cada uno de los factores en el escalar t entonces ocurre que:

$$q(t\mathbf{x}) = t^k q(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

la función es homogénea de grado k. Cuando la función de producción sea homogénea de grado uno entonces el proceso productivo mostrará rendimientos a escala, si es de grado menor que uno presenta rendimientos decrecientes y si la función es de grado mayor que uno muestra rendimientos crecientes a escala, rescribiendo lo anterior tenemos que:

1) $q(t\mathbf{x}) = t\, q(\mathbf{x})$ rendimientos constantes $(t > 0)$

2) $q(t\mathbf{x}) < t\, q(\mathbf{x})$ rendimientos decrecientes $(t > 1)$

3) $q(t\mathbf{x}) > t\, q(\mathbf{x})$ rendimientos crecientes $(t > 1)$

3.2.4. Elasticidad Escala de Producción

Un instrumento matemático que nos puede facilitar el conocimiento del grado de homogeneidad de la función de producción y por ende que tipo de rendimientos presenta es la elasticidad escala de producción. Sea $Q = q(\mathbf{x})$ la función de producción, un incremento de todos los insumos en la cantidad t convierte a $Q = q(\mathbf{x})$ en $Q^1 = q(t\mathbf{x})$, como cada componente del vector $\mathbf{x}$ depende de t podemos escribir a Q^1 como:

$$Q^1 = z = q(t(\mathbf{x}))$$

$$f_i(t) = tx_i$$

y las funciones componentes de z son

$$q(t(\mathbf{x})) = q(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$$

Derivando z

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial q(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial f_1}\frac{df_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial q(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial f_n}\frac{df_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial f_i}\frac{df_i}{dt}$$

Pero $\dfrac{df_i}{dt} = x_i \Rightarrow \dfrac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial q}{\partial f_i} x_i$

Consideremos a la elasticidad escala de producción como:

$$\varepsilon = \frac{t}{z}\frac{dz}{dt} = \frac{t}{z}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial f_i} x_i = \frac{t}{q(t\mathbf{x})}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial (tx_i)} x_i$$

Como los rendimientos se consideran alrededor de t = 1 tomemos el límite cuando t tiende a uno, de donde:

$$\varepsilon = \lim_{t \to 1} \frac{t}{z}\frac{dz}{dt} = \lim_{t \to 1} \frac{t}{q(t\mathbf{x})}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial (tx_i)} x_i$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{1}{q(\mathbf{x})}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_i} x_i$$

La elasticidad escala mide el aumento proporcional que experimenta el nivel de producción cuando se incrementan todos los factores en la misma cantidad.

$\varepsilon = 1$ hay rendimientos constantes a escala.

$\varepsilon < 1$ hay rendimientos decrecientes a escala.

$\varepsilon > 1$ hay rendimientos crecientes a escala.

En las secciones 3. 2. 5 a 3. 2. 8 restringiremos nuestro estudio a $n = 2$

3.2.5. La Curva Isocuanta de Producción

Al considerar una función de producción con dos insumos variables implícitamente estamos trabajando en el espacio de dimensión 3, la altura de la gráfica generada por la función de producción se obtiene al combinar los insumos x, y; acotamos que para elaborar un mismo volumen de producción existe una infinidad de combinaciones posibles de ambos factores; analíticamente esto significa considerar a la función de producción igualada a una constante, este valor representa un nivel fijo de producción $q(x, y) = k$, en otras palabras la isocuanta es el término económico con que se conoce a la curva de nivel de valor k de la función de producción. De donde, a la curva en el espacio de insumos que muestra el total de combinaciones de factores capaces de originar un volumen dado de producción recibe el nombre de isocuanta.

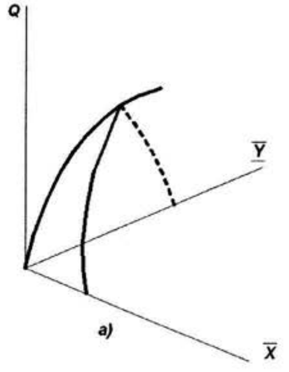
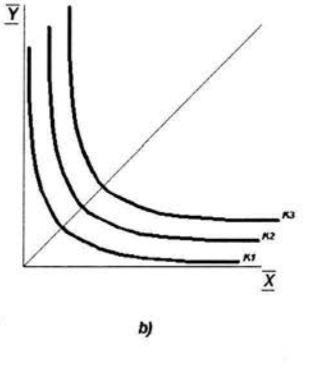


figura 17.



La parte (a) de la figura 17 muestra una función de producción[12] muy utilizada en estudios económicos, mientras que la parte (b) presenta el mapa de isocuantas correspondiente. Es claro que las isocuantas más alejadas del origen en dirección noreste mostrarán niveles de producción mayores. Podemos encontrar una clara analogía entre las isocuantas y las

[12] La gráfica mostrada en la figura 17 se genera con la función Cobb-Douglas $q(x, y) = ax^{\alpha}y^{\beta}$, en este caso $\alpha = 0.5 = \beta$, $A = 1$, es preciso decir que esta función presenta únicamente la etapa II de producción, es por ello que las isocuantas tienen pendiente decrecientes en todo su dominio.

curvas de indiferencia, pero debemos tener presente que las isocuantas representan características tecnológicas que son "objetivas" mientras que las curvas de indiferencia muestran las preferencias de los consumidores "subjetivas".

3.2.6. La Tasa Marginal de Sustitución Técnica

Debido a la existencia de una infinidad de combinaciones de insumos capaces de generar un concreto nivel de producción es conveniente considerar la tasa a la que se pude sustituir un insumo por otro en cada nivel de producción. Fijemos nuestra atención en la figura 18 la cual muestra las diferentes combinaciones de factores x e y que se pueden utilizar para obtener el nivel de producción k_1.

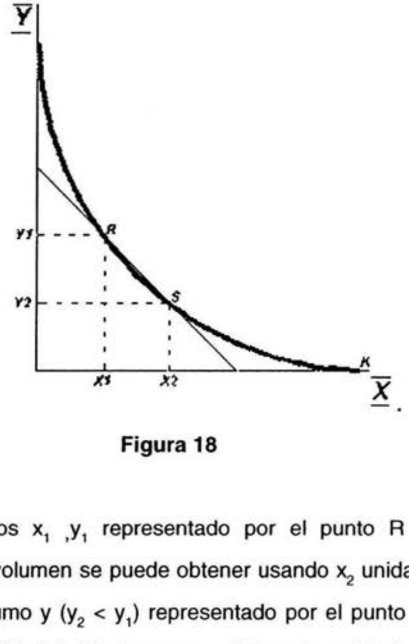


Figura 18

La combinación de insumos x_1 ,y_1 representado por el punto R genera el nivel de producción k_1, este mismo volumen se puede obtener usando x_2 unidades del insumo x ($x_2 > x_1$) e y_2 unidades del insumo y ($y_2 < y_1$) representado por el punto S; la combinación S necesita de una menor cantidad del factor y para obtener k_1 unidades de producto, para pasar del R a S es necesario compensar el sacrificio en la utilización del insumo y con un incremento en el uso del insumo x, la medida en que los factores se sustituyen está dada por el cociente $(y_1 - y_2) / (x_2 - x_1)$, es decir, el negativo de la pendiente de la recta que une los puntos R y S $-(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$. Cuando se trata de una variación muy pequeña (en el margen) de la sustitución entre los insumos, el punto S tiende a R y la pendiente de la recta que pasa por S y R se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la isocuanta en R, entonces la tasa marginal de sustitución del insumo x por el insumo y ($TMST_{xy}$) se puede escribir como el negativo de la derivada de la isocuanta, es decir,

$$TMST_{xy} = -\frac{dy}{dx}$$

Podemos decir entonces que la TMSTxy es la relación en la que se puede sustituir un factor por otro y mantener el mismo nivel de producción; la $TMST_{xy}$ se representa como el negativo de la derivada de la isocuanta, nótese que el concepto de $TMST_{xy}$ es enteramente análogo en términos matemáticos al de la TMS_{xy} de la teoría del consumidor (sec. 1. 4) de donde podemos afirmar que:

$$TMST_{xy} = \frac{Q_x}{Q_y}$$

Donde $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}, Q_y = \frac{\partial Q}{\partial y}$

3.2.7. La Recta Isocosto

Sabemos que diferentes combinaciones de insumos pueden dar lugar a un mismo volumen de producción, pero esta información por si sola no brinda al empresario los elementos de juicio para tomar decisiones sobre la mejor combinación de insumos que optimicen su beneficio; es necesario considerar el precio de los factores de producción y el presupuesto de que dispone el productor para poder elegir la mejor combinación de insumos. Supongamos que la producción individual de cada empresario no puede influir en el precio de los insumos, en otras palabras, digamos que el precio de los factores está dado por el mercado y que la producción individual es tan pequeña que no puede alterar el precio del producto. Cada productor dispone de un determinado presupuesto C que pueden utilizar para comprar los insumos que necesita para producir, si para llevar a cabo la producción se necesitan solo esos dos factores, entonces el empresario puede gastar su presupuesto a lo más de la siguiente manera: comprando x unidades del primer insumo al precio w_x e y unidades del segundo factor al precio w_y, que escribimos como:

$$C = x\,w_x + y\,w_y \;\ldots (1)$$

a (1) se le conoce como ecuación de costo, despejando y tenemos:

$$y = \frac{C}{w_y} - \frac{w_x}{w_y}x \;\ldots (2)$$

esta expresión es obviamente la ecuación de una recta con ordenada al origen C / w_y y pendiente $-w_x / w_y$, a la ecuación (2) se le llama la línea de isocosto, ésta nos muestra las diferentes combinaciones de insumos que se pueden comprar con un presupuesto fijo (figura 19).

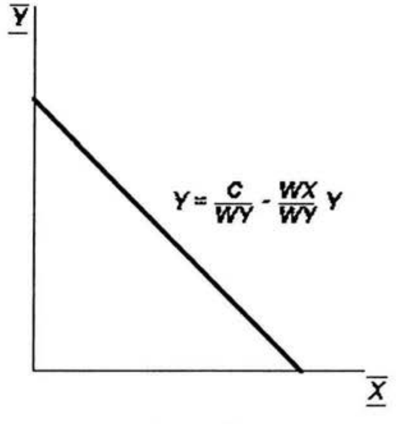


Figura 19

3.3. Ejercicios

3.1 Determine en base a la siguiente tabla el PMe y PMg del insumo x. Grafique el producto total, PMe y PMg.

Insumo y_0	x	Producto Total	Producto Medio	Producto Marginal
1	0	0		
1	1	2		
1	2	5		
1	3	9		
1	4	12		
1	5	14		
1	6	15		
1	7	15		
1	8	14		
1	9	12		

a) ¿Cuándo PMg crece, que pasa con el PMe?.

b) ¿Cuándo PMe es máximo, como es el PMg?.

3.2 Sea $q(x, y_0) = 0.1x^2 + 0.005x^3$

a) ¿Cuál es el PMe de x?.

b) ¿Cuál es el PMg de x?.

c) Dibuje las gráficas de producto total, PMe y PMg, indique las fases de producción.

3.3 Sea $q(x, y_0)$ la función de producción a corto plazo de una determinada empresa. Verifique:

a. Cuando PMg es máximo, la curva de producto total tiene un punto de inflexión.

b. Que PMe < PMg hasta que PMe alcanza un máximo.

c. PMe = PMg cuando PMe es máximo (suponga $dQ / dx > 0$, $d^2Q / dx^2 < 0$).

d. Cuando PMg es cero la curva de producto total alcanza un máximo.

(Observe que ésta es la explicación analítica de las relaciones geométricas entre producto total, PMe y PMg dadas en la secciones 3. 1. 4 y 3. 1. 5).

3.4 Considere a la tierra y el trabajo de los campesinos como los insumos fijo y variable respectivamente; explique en que consiste la ley de los rendimientos físicos decrecientes.

4. La Conducta Optimizadora del Empresario

A lo largo del capítulo tres se han dado las herramientas básicas para poder resolver el problema fundamental del empresario: encontrar la combinación óptima de los factores para la producción; la solución a este problema se da únicamente a largo plazo, debido a que el productor solo a largo plazo puede variar el nivel de uso todos y cada uno de los insumos. Básicamente son tres la situaciones de decisión a las que puede enfrentarse un empresario: la maximización de la producción, la minimización del costo y la maximización de la diferencia entre ingresos y gastos.

4.1. Maximización de la Producción

Sí como suponemos, el productor no puede influir ni en el precio de los insumos (por mucho que compre) ni en el precio del producto (por mucho que venda) entonces, la única manera en la que el empresario puede optimizar su beneficio es elevando al máximo su producción. Por una parte la isocosto señala al productor las diferentes combinaciones de insumos que puede adquirir con su presupuesto, por otro lado la isocuanta indica los niveles de producción que puede obtener de acuerdo a una tecnología específica, de entre todas estas combinaciones el empresario debe elegir la que otorga el mayor nivel de producción. El problema del empresario es en términos matemáticos el de maximizar una función sujeta a restricciones, en particular a una restricción lineal.

Sea $Q = q(x, y)$ la función de producción y $C = x\,w_x + y\,w_y$ la restricción lineal, utilizando el método de multiplicadores de Lagrange, reformulemos el problema del empresario:

$$
\begin{aligned}
&\text{máx. } Q = q(x, y)\\
&\text{s.a.}\\
&C = xw_x + yw_y = h(x,y)
\end{aligned}
$$

Formando la función de Lagrange

$$
\begin{aligned}
L(x,y,\lambda) &= q(x,y) + \lambda(C - xw_x + yw_y)\\
&= q(x,y) + \lambda h(x,y)
\end{aligned}
$$

Las condiciones necesarias de primer orden para un punto máximo son que:

$$\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$$

i.e.

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial q(x,y)}{\partial x} - \lambda w_x = \frac{\partial q(x,y)}{\partial y} - \lambda w_y = C - x w_x - y w_y = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}}{w_x} = \frac{\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}}{w_y} \ldots(1)$$

es decir que el equilibrio del productor se encuentra cuando la contribución a la producción del último peso gastado en el insumo x es igual a la cantidad adicionada a la producción del último peso gastado en y. De la ecuación (1) tenemos que:

$$\lambda = \frac{\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}} = \frac{w_x}{w_y}$$

Pero el lado izquierdo de la igualdad es la TMST, lo que significa que la cociente de los productos marginales debe ser igual a la razón de precios de los insumos en el punto donde se optimiza la producción, esto es, la mejor combinación de factores (punto de equilibrio) está dado por el punto de tangencia de la isocuanta y la isocosto. Las condiciones suficientes de segundo orden para un máximo con restricciones son que el hessiano orlado relevante evaluado en el punto estacionario sea positivo:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Si la elección del empresario se realizara ante n insumos (n ≥ 2) el problema se convierte en:

máx. $q(\mathbf{x})$ $\qquad$ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

s.a.

$$C - \sum_{i=1}^{n} x_i w_i = h(\mathbf{x}) = 0$$

Formando la función de Lagrange

$$L(\mathbf{x},\lambda) - q(\mathbf{x}) + \lambda(C - \sum_{i=1}^{n} x_i w_i) = q(\mathbf{x}) + \lambda h(\mathbf{x})$$

Las condiciones de primer orden para un máximo condicionado son:

$$\nabla L(\mathbf{x},\lambda) = (0,0,\ldots,0) \text{ n+1 componentes}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_i} = \frac{\partial L(\mathbf{x},\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial q(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_i} - \lambda w_i = 0$$

$$C - \sum_{1}^{n} x_i w_i = 0$$

$$\lambda = \frac{\frac{\partial q(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_i}}{w_i}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial q(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_i}}{w_i} = \frac{\frac{\partial q(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_j}}{w_j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{w_i}{w_j} = \frac{\dfrac{\partial q(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial q(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_j}}; \forall i, j$$

Las condiciones de segundo orden son que:

$$H_r = (-1)^r \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1r} & h_1 \\ L_{21} & L_{22} & & L_{2r} & h_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L_{r1} & L_{r2} & & L_{rr} & h_r \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_r & 0 \end{vmatrix} > 0$$

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$h_i = \frac{dh}{dx_i}$$

para i, j = 1, 2, . . . , n, r = 2, . . . , n

4.2. Minimización del Costo

En algunas ocasiones puede ocurrir que al empresario se le solicite una determinada producción, digamos Q_0, entonces para que el productor maximice el beneficio es necesario que obtenga la producción solicitada al menor costo posible. Examinemos el problema primero desde un punto de vista geométrico y después utilizando criterios de cálculo. Fijemos la atención en la figura 20, donde por una parte la isocuanta Q_0 muestra el nivel fijo de producción que le solicitan al empresario y por otro lado las diferentes líneas isocosto, con la misma pendiente[13] .

[13] Las isocosto son paralelas pues suponemos que los precios de los insumos son constantes, de donde, la razón de precios es la misma para todas las, líneas isocosto.

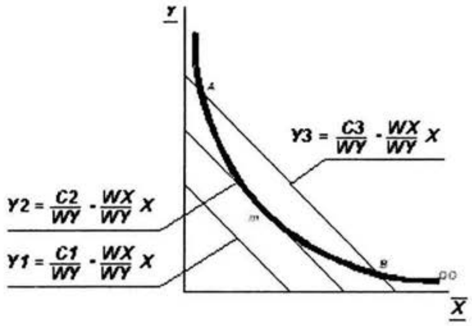


Figura 20

Es claro que el nivel de costo representado por la línea de isocosto y_1 no es posible para el productor pues ninguna de sus combinaciones de insumos alcanza para producir Q_0, con la isocosto y_3 se puede obtener Q_0 con las combinaciones representadas por los puntos A y B, pero el empresario puede alcanzar la misma producción a menor costo en el punto m, observamos que el productor minimiza los costos cuando el nivel de producción fijo representado por la isocuanta Q_0 es tangente a una línea isocosto, es decir, cuando la pendiente de la recta tangente a la isocuanta es igual a la pendiente de la isocosto; como la pendiente de la recta tangente a la isocuanta está dada por el negativo de la TMST y la pendiente de la línea isocosto es la razón de precios con signo negativo, entonces la solución al problema de minimización del costo dado el nivel de producción se encuentra cuando:

$$\text{TMST} = \frac{w_x}{w_y}$$

Conforme a lo anterior observamos que las soluciones para los problemas de maximización condicionada de la producción y de minimización del costo sujeto a una producción fija son equivalentes.

Resolvamos el problema desde el punto de vista del cálculo; nuevamente nos encontramos frente a un problema de optimización con restricciones, reformulando el problema tenemos que si Q_0 es el nivel fijo de producción, entonces el empresario desea:

$$\text{min. } xw_x + yw_y$$

$$\text{s. a } Q_0 - q(x,y) = h(x,y)$$

Escribiendo la función de Lagrange

$$L(x,y,\mu) = xw_x + yw_y + \mu(Q_0 - q(x,y))$$
$$= xw_x + yw_y + \mu h(x,y)$$

las condiciones necesarias para un mínimo condicionado son:

$$\nabla L(x,y,\mu) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial L(x,y,\mu)}{\partial x} = \frac{\partial L(x,y,\mu)}{\partial y} = \frac{\partial L(x,y,\mu)}{\partial \mu} = 0$$
$$\Leftrightarrow w_x - \mu\frac{\partial q(x,y,\mu)}{\partial x} = w_y - \mu\frac{\partial q(x,y,\mu)}{\partial y}$$
$$= Q_0 - q(x,y) = 0$$

Despejando μ

$$\mu = \frac{w_x}{\frac{\partial q(x,y,\mu)}{\partial x}} = \frac{w_y}{\frac{\partial q(x,y,\mu)}{\partial y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{\frac{\partial q(x,y,\mu)}{\partial x}}{w_x} = \frac{\frac{\partial q(x,y,\mu)}{\partial y}}{w_y}$$

$$\Leftrightarrow TMST = \frac{w_x}{w_y}$$

Las condiciones de segundo orden requieren que:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Si existen n insumos (n ≥2) el problema por resolver es:

$$\text{mín} \sum_{1}^{n} x_i w_i$$

$$\text{s. a} \quad Q_0 - q(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) = 0$$

Formando la función de Lagrange

$$L(\mathbf{x},\mu) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + \mu(Q_0 - q(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + \mu(h(\mathbf{x}))$$

Las condiciones de primer orden para un mínimo condicionado son:

$\nabla L(\mathbf{x},\mu) = (0,0,\ldots,0)$ esto es,

$$\frac{\partial L(\mathbf{x},\mu)}{\partial x_i} = \frac{\partial L(\mathbf{x},\mu)}{\partial \mu} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L(\mathbf{x},\mu)}{\partial x_i} = w_i - \mu \frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L(x,\mu)}{\partial \mu} = Q_0 - q(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{w_i}{\frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_i}} = \frac{w_j}{\frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_j}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{\frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{w_i} = \frac{\frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_j}}{w_j}; \forall i, j$$

Las condiciones de segundo orden son tales que:

$$H_r = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1r} & h_1 \\ L_{21} & L_{22} & & L_{2r} & h_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L_{r1} & L_{r2} & & L_{rr} & h_r \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_r & 0 \end{vmatrix} < 0$$

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$h_i = \frac{dh}{d x_i}$$

Para i, j = 1, 2,..., n; r = 2,..., n

4.3. Maximización de la Ganancia

Generalmente el empresario puede variar su presupuesto y por tanto el nivel de producción, entonces su objetivo consiste en maximizar el beneficio, es decir, la diferencia entre sus ingresos y los costos de producción; el ingreso del empresario que vende su producto en un mercado perfectamente competitivo está dado por el número de unidades producidas multiplicado por el precio (fijo) del producto, mientras que el costo de producción es la suma de los insumos utilizados en la producción multiplicados por su respectivo precio.

Sea Π el beneficio o ganancia del empresario, entonces:

el empresario desea maximizar Π

$$\text{máx.}\Pi = \text{máx.}pq(q, y) - (xw_x + yw_y)$$

el beneficio es función de los insumos, el empresario debe maximizar respecto a las cantidades que de esos factores va a utilizar en la producción. Las condiciones de primer orden para un máximo son:

$$\nabla \Pi = (0,0)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0$$

$$\Leftrightarrow p\frac{\partial q(x,y)}{\partial x} - w_x = 0 = p\frac{\partial q(x,y)}{\partial y} - w_y$$

$$\Leftrightarrow p\frac{\partial q(x,y)}{\partial x} = w_x$$

$$\Leftrightarrow p\frac{\partial q(x,y)}{\partial y} - w_y$$

Es decir, las condiciones de primer orden piden al empresario que la utilización de los insumos se dé hasta el punto en que igualen a su precio. Las condiciones de segundo orden para un máximo sin restricciones requieren que la matriz hessiana se defina negativa, esto es, que los menores principales alternen su signo de la siguiente manera:

$$H = (-1)^r \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0$$

r = 1, 2

Para n factores el problema de maximización del beneficio:

$$\max \Pi = \max pq(\mathbf{x}) - \sum_{1}^{n} x_i w_i$$

las condiciones de primer orden son:

$$\nabla \Pi = (0,0,\ldots 0)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow p\frac{\partial q(x)}{\partial x_i} - w_i = 0$$

$$\Leftrightarrow p\frac{\partial q(x)}{\partial x_i} = w_i$$

y las condiciones de segundo orden son que la matriz hessiana se defina negativa.

$$H_r = (-1)^r \begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12}\cdots & \Pi_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \Pi_{n1} & \Pi_{n2}\cdots & \Pi_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

donde

$$\Pi_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_i \partial x_j} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n; \; r = 1, 2, \ldots, n$$

4.4. La Senda de Expansión

En las secciones 4. 1 y 4. 2 encontramos que la empresa optimiza la combinación de factores (encuentra el punto de equilibrio) es decir, maximiza la producción dado el costo o minimiza el costo dado el nivel de producción cuando la isocuanta y la línea isocosto son tangentes; cuando se incrementa el volumen de producción el empresario optimizador del beneficio se desplaza de un punto de equilibrio a otro, digamos de E_0 a E_1 en la gráfica que se muestra en la figura 20, vemos que E_0 y E_1 son puntos de tangencia de las isocuantas I_0 e I_1 con las líneas de isocosto C_0 y C_1 respectivamente , C_0 y C_1 paralelas pues los precios son constantes, entonces cuando la empresa expande la producción cambia su punto de equilibrio; consideremos la extensión de la curva de E_0E_1 como el lugar geométrico de los puntos de tangencia de las isocuantas y las isocostos paralelas. La empresa maximizadora del beneficio se desplazará a lo largo de esta curva cuando incremente la producción; a la curva antes descrita se le denomina: **senda de expansión**.

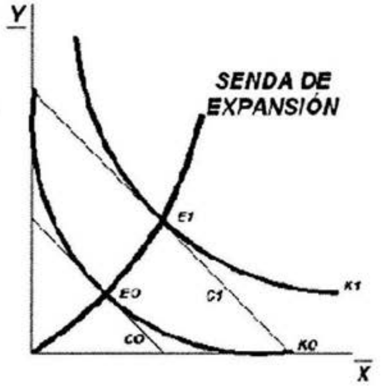


Figura 21

Al minimizar el costo de elaborar una producción fija, de hecho lo que se realiza es encontrar el número de unidades que de cada insumo se deben utilizar para lograr el menor costo posible; el aumento de la producción trae consigo un incremento en las cantidades utilizadas de cada uno de los insumos, podemos entonces establecer que existe una relación funcional entre el nivel de producción y el precio de los insumos, la regla de asociación entre la cantidad de insumos que se utilizan en el punto de equilibrio de la empresa y los precios de los factores se conoce como las funciones de demanda condicionada de los factores.

Replanteando el argumento anterior tenemos que:

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$$

s.a.

$$Qo - q(\mathbf{x}) = 0 = h(\mathbf{x})$$

para cada nivel de producción Q_0, si se cumplen las condiciones de segundo orden (sec. 4. 2), las condiciones de primer orden generan (n+1) ecuaciones con (n+1) incógnitas, las soluciones de las x_i ecuaciones brindan las n funciones de demanda condicionada de los factores.

$$x_i^c = x_i(Q_0, w_1, w_2, \cdots, w_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

La maximización del beneficio (sec. 4. 3) se da cuando el empresario utiliza cada uno de los insumos hasta el punto en que igualen a su respectivo precio, en otros términos:

$$\max \Pi = \max pq(\mathbf{x}) - \sum_{1}^{n} x_i w_i$$

Si se cumplen las condiciones de segundo orden (sec. 4. 3), las condiciones de primer orden generan n ecuaciones con n incógnitas la solución de las n ecuaciones son las n funciones de demanda directa de los factores, las cuales nos indican la elección óptima de los insumos en función del precio del producto y los precios de los insumos, es decir,

$$x_i^d = x_i(p, w_1, w_2, \cdots, w_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Sustituyendo las funciones de demanda directa de los factores en la función de producción se tiene a esta última como función del precio del producto y el precio de los insumos, a esta manera de expresar a la función de producción se le llama función de **oferta del producto**.

$$Q = q(x^d(p, w_1, w_2, \ldots, w_n)) = q^*(p, w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

4.5. Ejercicios

4.1 Defina los siguientes términos:

a) Isocuanta.

b) Línea isocoste.

c) Rendimientos a escala.

d) Tasa marginal de sustitución técnica.

4.2 ¿Qué tipo de rendimientos presentan las siguientes funciones?

a) $A\,x^{\alpha}\,y^{\beta}$

b) $Ax + By$

c) $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\chi}$

d) $(Ax^{-\rho} + By^{-\rho}\;)^{-v/\rho}$

4.3 Muestre que la función f(x, y)=3x + 4y + 6 no es lineal homogénea.

4.4 ¿Cuál es la elasticidad escala de las siguientes funciones de producción?.

a) $q(x, y)= 5x + 23.\,5y$

b) $q(x, y)= 7(\,x^{5}\,y^{-4}\,) + 3(y^{2}\,x^{-1})$

c) $q(x, y)= 6x^{0.25}\quad y^{0.\,75}$

d) $q(x, y)= Ax^{\alpha}\; + By^{\alpha}$

e) $q(x, y)= A\,x^{\alpha}\;\; y^{\beta}$

f) $q(x, y)= (Ax^{\rho} + By^{\rho})^{1/\rho}$

4.5 Encuentre la función de demanda condicionada de los factores sí la función de producción es:

$q(x, y) = (x^{\rho} + y^{\rho})^{1/\,\rho}$ (CES)

4.6 Encuentre las funciones de demanda de los factores, de oferta del producto y las de demanda condicionada para una empresa que utiliza dos factores y la tecnología está definida así:

$q(x, y) = Ax^{\alpha}\,y^{\beta}\qquad 0 < \alpha,\;\; \beta < 1$ (Cobb-Douglas)

4.7 Calcule las cantidades que de cada insumo debe adquirir un empresario que de desea maximizar el beneficio, sí la función de producción está dada por:

$q(x, y) = 8x^{0.5}\ 20y^{0.5}$

los precios de los factores son p_x= \$1 y p_y= \$5 y el presupuesto del empresario es de \$60.

5. Teoría del Costo

El objetivo de este último capítulo es replantear la teoría de la producción analizada en los capítulos tres y cuatro convirtiéndola en una teoría coherente de los costos, en otras palabras, mientras que en la teoría de la producción se establece una relación entre la cantidad de insumos utilizados y el nivel de producción, en la teoría del costo se pretende encontrar una correspondencia entre la cantidad producida y el costo de elaborarla. En Economía el término costo de un producto se refiere al costo mínimo dada la tecnología y los precios de los insumos. Nuevamente utilizaremos los conceptos de corto y largo plazo, a corto plazo algunos costos como la renta de los edificios, los impuestos sobre la propiedad, etc. son fijos, es decir, no cambian cuando varía el nivel de producción, en oposición hay otros costos como el de las materias primas que si se alteran para cada volumen de producción, es decir, son variables. A largo plazo todos los insumos se pueden variar para obtener la mejor combinación de éstos y por tanto a largo plazo todos los costos son variables. Vemos que la frontera que separa al corto y al largo plazo en Economía, no es una línea de tiempo totalmente especificada, sino que se trata de la condición según la cual todos los insumos son variables; por supuesto el corto o el largo plazo no es el mismo para todas las empresas, todo depende de los factores que éstas utilicen y de la tecnología con la que cuenten. Como el objetivo de este capítulo es replantear la teoría de la producción en términos del costo de producción, volveremos a utilizar los supuestos establecidos en el capítulo 3.

5.1. El Costo a Corto Plazo

Como ya se ha mencionado a corto plazo algunos insumos no se pueden ajustar al pasar de un nivel de producción a otro, por ello el costo de tales insumos es fijo, mientras que los insumos variables pueden cambiar con el nivel de producción y por tanto su costo es variable; podemos decir que a corto plazo el costo total de una empresa está determinado por la suma de los costos fijos y los costos variables.

5.1.1. La Función de Costo a Corto Plazo

De la misma manera que la función de producción es la herramienta para describir las posibilidades técnicas de la producción, la función de costo lo es respecto a sus argumentos de precio y cantidad producida. La función de costo a corto plazo expresa la relación entre los costos (fijo y variable) y el nivel de producción correspondiente; el costo fijo está compuesto por la cantidad de insumo fijo multiplicada por su precio, en caso de varios insumos fijos es la suma de todos los insumos fijos multiplicados por sus respectivos precios, mientras que el costo variable es el valor de mercado de la cantidad mínima de insumo(s) variable(s) dada la tecnología necesaria para obtener las distintas cantidades de producto. Observamos que el costo fijo no depende del nivel de producción, pero el costo variable se encuentra en estrecha relación con el volumen de producción; podemos escribir de manera analítica a la función de costo a corto plazo como:

$$CTC(Q) = CF + CV(Q)$$

donde CTC(Q) es el costo total a corto plazo, CF es el costo fijo y CV(Q) es el costo variable. Hay que anotar que la función de costo se obtiene a partir de la función de producción relacionada con ella y de la ecuación de costo, debiéndose cumplir la condición de costo mínimo dado el nivel de producción, es decir, basándose en el supuesto de la actitud optimizadora del empresario, por tanto podemos recurrir a los supuestos de divisibilidad de la función de producción y a la continuidad de sus derivadas parciales y establecer que la función de costo a corto plazo debe ser continua con derivadas continuas de primer y segundo orden. La función de costo a corto plazo se puede obtener con los siguientes elementos (supongamos un insumo fijo y dos variables) :

$$Q = q(x, y, z_0)$$

$$C = x\, w_x + y\, w_y + z_0\, w_{z0}$$

sea $z_0\, w_{z0} = C_0$

$$C = C_0 + x\, w_x + y\, w_y$$

$$g(x, y) = 0$$

donde w_x, w_y y w_{zo} son los precios de los factores, g(x, y) es la senda de expansión correspondiente. Se trata de un sistema de ecuaciones con cuatro incógnitas Q, C, x, y, el cual puede reducirse a una sola expresión en la que el costo se exprese como función implícita del nivel de producción y el costo del insumo fijo.

5.1.2. Costo Medio y Costo Marginal

El concepto de costo medio total surge de la pregunta ¿cuánto cuesta obtener cada nivel de producción?, la solución a esta interrogante consiste en considerar el costo total a corto plazo y dividirlo entre el volumen de producción correspondiente, es decir:

$$CMeTC = \frac{CTC}{Q}$$

Ya que a corto plazo existen costos fijos y costos variables debemos considerar por separado los conceptos de costo medio fijo y costo medio variable; el costo medio fijo (CMeF) es el cociente del costo fijo dividido por el nivel de producción y el costo medio variable (CMeV) es el costo variable dividido por el nivel de producción:

$$CMeF = \frac{CF}{Q}$$

$$CMeV = \frac{CV}{Q}$$

es claro que el CMeTC se puede descomponer como la suma de CmeF y CMeV, así:

$$CMeT = CMeF + CMeV$$

El costo marginal nos dice cuanto varía el costo total al incrementar el volumen de producción, lo cual podemos representar como:

$$CMg = \frac{\Delta CTC}{\Delta Q}$$

Consideramos un incremento h en la producción, el costo marginal será :

$$CMg = \frac{CTC(Q+h) - CTC}{h} \quad \ldots (1)$$

cuando h tiende a cero y sí la derivada de CTC existe, entonces:

$$CMg = \frac{dCTC}{dQ}$$

Debido a que a corto plazo únicamente cambia el costo variable, entonces el incremento en CTC atribuible a un incremento en el nivel de producción (CMg) es consecuencia exclusiva del cambio en el costo variable, esta afirmación es fácilmente evidenciable si descomponemos al CTC como la suma del CF y CV y al sustituir los valores en (1) obtenemos de inmediato el resultado.

5.1.3. Geometría de los Costos a Corto Plazo

Gráficamente el costo fijo es una recta paralela al eje de las abscisas, pues para cada nivel de producción el costo fijo es el mismo. La curva de costo variable se relaciona de manera sistemática con la función de producción a corto plazo; consideremos que la producción se genera únicamente con dos insumos, uno fijo y otro variable (figura 22).

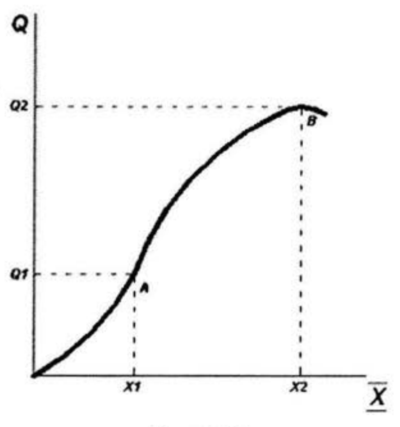


figura 22

El CV se obtiene multiplicando el precio del insumo variable x por la cantidad de éste utilizadas en cada nivel de producción, hasta punto A de la figura 22 el PMg es creciente, es decir, la producción aumenta en forma mas que proporcional al incremento en el uso del insumo variable, entonces el costo variable crece a una tasa decreciente en ese intervalo, a partir del punto A el PMg crece pero la producción aumenta aproximadamente igual al incremento en el uso del factor variable y por ello el costo variable aumenta a una tasa creciente hasta el punto B, a partir de allí el PMg es decreciente y menor que cero por lo cual si se incrementa el uso del factor variable el costo variable crecerá mucho más rápido. Como el CTC es la suma del CF más el CV la gráfica de CTC será idéntica a la de CV, con la salvedad de que esta última parte del cero mientras que la de CTC estará trasladada el número de unidades correspondientes al CF. La figura 23 muestra las curvas de CTC y CV correspondientes a una curva de producción a corto plazo.

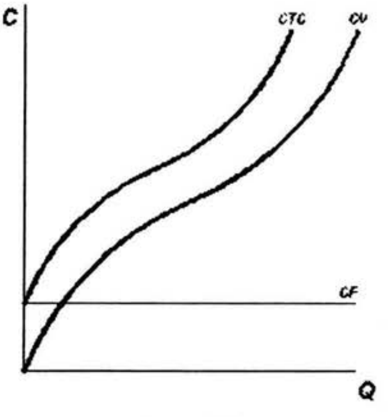


figura 23

El CMeF es por definición el CF dividido por el volumen de producción, geométricamente esta relación representa la pendiente de una recta que parte del origen y pasa por la curva de CF en cada nivel de producción (figura 24).

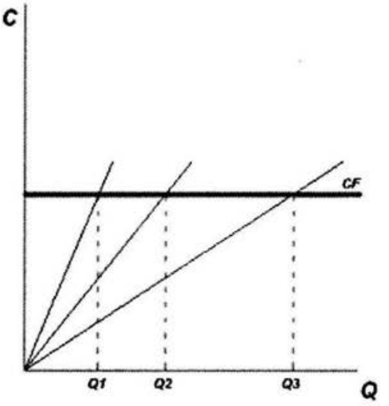


figura 24

Cerca del cero la pendiente de la recta que pasa por el origen y la curva de CF tiende a infinito, conforme nos alejamos del cero la pendiente de la recta disminuye y en el límite cuando el nivel de producción es muy grande el CMeF tiende a cero (figura 25).

Figura 25

El CMeV es el cociente del costo variable entre el nivel de producción, es decir, se trata de la pendiente de la recta que pasa por el origen y la curva de CV (figura 26).

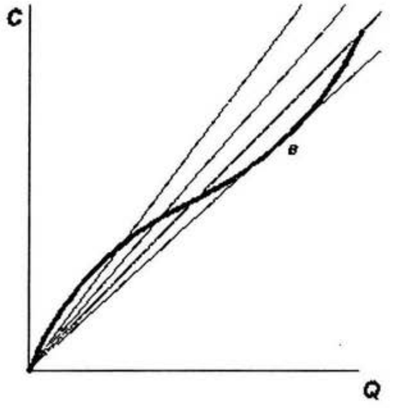


Figura 26

Observamos que del cero al punto B la pendiente de la recta que pasa por cero y la curva de CV decrece, en B alcanza su valor mínimo y a continuación comienza a crecer. La curva de CMeT se obtiene de manera muy semejante a la curva de CMeV por lo expuesto al inicio de esta sección, entonces las gráficas de CMeV y CMeT deben tener la siguiente forma (figura 27).

figura 27

Recordemos que CMeT = CMeF + CMeV = CF / Q + CV / Q , lo que significa que la distancia entre CMeT y CMeV en cada nivel de producción es simplemente el CMeF correspondiente, de donde, la distancia entre CMeT y CMeV tiende a infinito cuando la producción es cercana a cero y tiende a cero cuando la producción aumenta mucho.

El CMg es por definición el cociente del incremento en el CTC entre el incremento en el volumen de producción, es decir, la pendiente de la secante que pasa por los puntos A y B, observemos la figura 28.

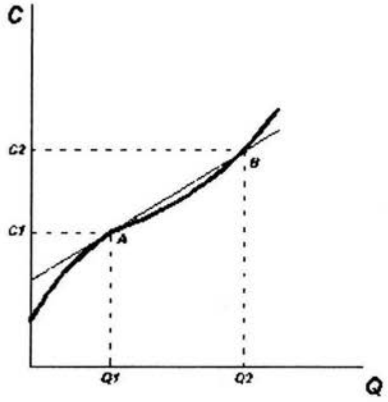


figura 28

Cuando B tiende a A la pendiente de la secante que une a B con A se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva de CTC en el punto A; consideremos entonces al CMg como la derivada de la función de costo total a corto plazo en cada nivel de producción veamos la figura 29.

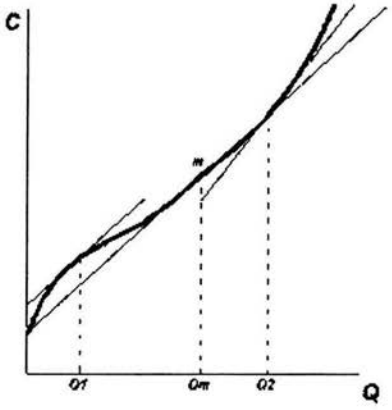


Figura 29

De la gráfica de CTC de la figura 29, observamos que la pendiente de la recta tangente a la curva de CTC decrece conforme nos alejamos del cero, alcanza un mínimo en **m** y comienza a crecer, entonces la curva de CMg debe tener su punto mínimo cuando la producción sea Q_1 (figura 30).

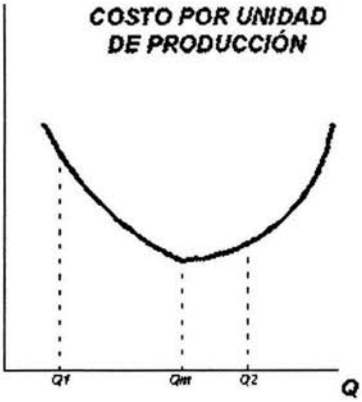


figura 30

5.1.4. Relación entre Costo Medio y Costo Marginal

figura 31

Sea Q_M el punto donde CMeT alcanza su punto mínimo, entonces la pendiente de la recta tangente a la curva de CMeT será menor o igual que cero para puntos a la izquierda de Q_M

$$\frac{dCMeT}{dQ} \leq 0$$

como CMeT = CTC / Q, derivando respecto de Q

$$\frac{dCMeT}{dQ} = \frac{dCTC}{dQ} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{dCTC}{dQ} \cdot Q - CTC\right)}{Q^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dCTC}{dQ} \cdot Q - CTC\right) \leq 0$$

pues Q^2 >= 0,

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dCTC}{dQ} \leq \frac{CTC}{Q}\right) \qquad Q > 0$$

es decir $CMg \leq CMeT$ . . . (1)

Siguiendo el mismo razonamiento para puntos a la derecha de Q_M la pendiente de la recta tangente a CMeT debe ser mayor o igual que cero, i.e.

$$\frac{dCMeT}{dQ} = \frac{d\left(\frac{CTC}{Q}\right)}{dQ} \geq 0$$

$$\frac{\left(\frac{dCTC}{dQ} \cdot Q - CTC\right)}{Q^2} \geq 0$$

como Q > 0, debe ocurrir que

$$\frac{dCTC}{dQ} \cdot Q - CTC \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{dCTC}{dQ} \cdot Q \geq CTC$$

es decir $$\frac{dCTC}{dQ} \geq \frac{CTC}{Q} \quad Q > 0$$

de donde $$CMg \geq CMeT \ldots (2)$$

combinando las desigualdades (1) y (2) tenemos que CMeT es igual al CMg cuando CMeT es mínimo. Con un procedimiento enteramente análogo podemos deducir que el CMeV es igual al CMg cuando CMeV es mínimo. Pero ¿qué pasa con las curvas de CMeV y CMg cuando la producción es cercana a cero?. Sabemos que CMg = dCV / dQ = dCTC / dQ y que CMeV = CV / Q; cuando Q = 0 CMeV = 0 / 0, pues el nivel de producción es cero y solo se utilizan los insumos fijos. Sin embargo podemos considerar el límite de CMeV cuando Q tiende a cero, i. e.

$$\lim_{Q \to 0} CMeV = \lim_{Q \to 0} \frac{CV}{Q}$$

como suponemos que CV y Q son continuas y derivables podemos utilizar la regla de L' Hôpital, es decir, considerar el cociente de las derivadas de CMeV y Q y tomar el límite cuando Q tiende a cero:

$$\lim_{Q \to 0} \frac{CMeV}{Q} = \lim_{Q \to 0} \frac{\frac{dCV}{dQ}}{\frac{dQ}{dQ}} = \lim_{Q \to 0} \frac{CMg}{1}$$

luego entonces cuando la producción tiende a cero el CMeV tiende al valor del CMg. Combinando los resultados anteriores tenemos las siguientes gráficas (figura 32).

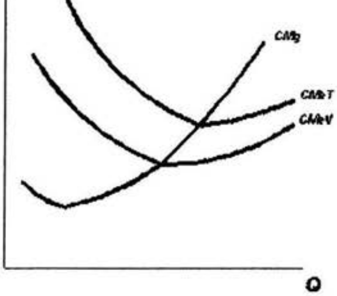


figura 32

5.1.5. Maximización de la Ganancia a Corto Plazo

El ingreso del empresario a corto plazo puede ser expresado en términos del costo como la diferencia entre el número de unidades producidas multiplicadas por su precio (fijo) menos el costo total a corto plazo. Sea $\Pi = pQ - CTC = pQ - CF - CV$, deseamos maximizar la ganancia del empresario, lo cual se reduce a un problema de optimización clásica:

$$\max \Pi = pQ - CF - CV$$

las condiciones de primer orden para un máximo global son:

$$\frac{d\Pi}{dQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p - \frac{dCV}{dQ} = 0$$

es decir que $\quad p = CMg$

lo que significa para maximizar el beneficio a corto plazo el empresario debe igualar el costo marginal con el precio de su producto. La condición de segundo orden es tal que:

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} < 0$$

es decir, $\quad -\frac{dCV}{dQ} < 0$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{dCMg}{dQ} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dCMg}{dQ} \geq 0$$

en otras palabras, para optimizar el beneficio el CMg debe ser creciente.

Las condiciones obtenidas en la maximización a corto plazo están dadas en términos del CMg y por lo tanto únicamente del CV, salvo en un caso patológico, aquél que sucede cuando el beneficio máximo es negativo y mayor que el costo fijo, en tal situación el empresario debe abstenerse de generar cualquier cantidad de producto para no incurrir en pérdidas.

5.2. Costo a Largo Plazo

A largo plazo la empresa puede ajustar todos los factores cuando el mercado así lo requiera y de esta manera obtener la combinación óptima de factores que minimicen el costo. Para apreciar el cambio en el costo al incrementarse la producción a largo plazo es suficiente considerar el costo en los niveles óptimos de producción.

5.2.1. La Función de Costo a Largo Plazo

La senda de expansión muestra el lugar geométrico de las combinaciones de insumos que minimizan el costo cuando la razón de precios de los factores es constante, la curva de costo total a largo plazo es la representación de los pares de puntos de volumen de producción y costo mínimo respectivo. Como ya se ha mencionado a largo plazo todos los insumos se pueden modificar y por ende solo existen costos variables. La función de costo a largo plazo y la senda de expansión están en estrecha vinculación, esto es, la función de producción a largo plazo correspondiente, la ecuación de costos y la condición de costo mínimo caracterizan totalmente a la función de costo a largo plazo, en símbolos:

$$Q = q(x, y, z)$$

$$C = x\,w_x + y\,w_y + z\,w_z$$

y las condiciones necesarias de primer orden representadas por la senda de expansión $g(x, y, z) = 0$, que se pueden reducir a una sola expresión en la que el costo se exprese como función del nivel de producción. La función de costo a largo plazo establece la relación entre el valor de mercado de la cantidad mínima de insumos para obtener las distintas cantidades de producto.

5.2.2. Costo Medio y Costo Marginal a Largo Plazo

De la misma manera que sucede a corto plazo el costo medios el cociente del costo total entre el nivel de producción correspondiente en tanto que el costo marginal es el incremento en el costo total atribuible al incremento en la cantidad producida, es decir:

$$CMe = \frac{CTL}{Q}$$

$$CMg = \frac{dCTL}{dQ}$$

es obvio que no se puede descomponer al CMe en CF y CV pues a largo plazo todos los costos son variables.

5.2.3 Geometría de los Costos a Largo Plazo

Si la función de producción muestra rendimientos crecientes, constantes y decrecientes a escala, es decir, se trata de una función típica, entonces la gráfica de la senda de expansión tiene la forma que muestra la figura 33.

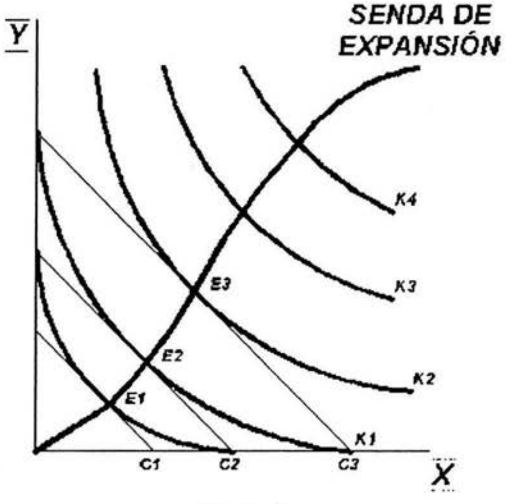


figura 33.

La curva de CTL tendrá la misma forma que la de CTC, solamente que CTL parte del origen, pues como todos los insumos son variables el empresario puede incluso dejar de utilizar todos los factores y así detener la producción. En la figura 34 se presenta una función de CTL.

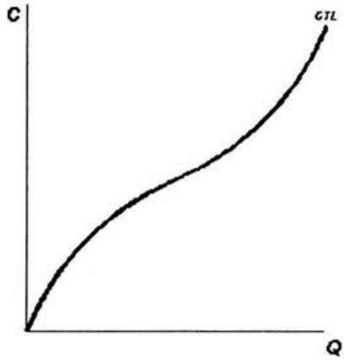


figura 34

Las gráficas de CMe y CMg a largo plazo se generan de la misma manera que sus respectivas a corto plazo, es decir, repitiendo los mismos argumentos geométricos, por lo cual las curvas de CMe y CMg tendrán la habitual forma de "U". El CMg y el CMe se intersectan cuando CMe es mínimo, de donde, el CMg < CMe para puntos a la izquierda del mínimo de CMe y CMg > CMe para niveles de producción a la derecha del mínimo de CMe. Todas estas relaciones se pueden obtener de la misma manera que las correspondientes a corto plazo, cambiando lo que se tenga que cambiar. La figura 35 muestra las gráficas de CMe y CMg.

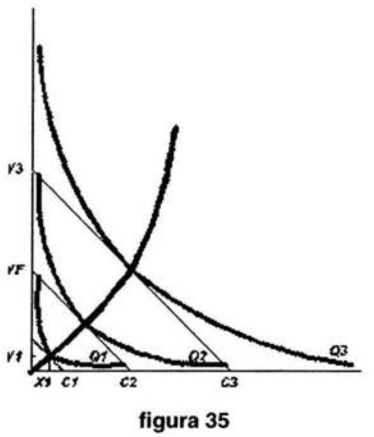


figura 35

5.3. Ejercicios

5.1 Definir los siguientes conceptos:

a) Costo fijo total.

b) Costo variable.

c) Costo medio total.

d) Costo marginal.

5.2 Para que una empresa maximice el beneficio es necesario que el precio de su producto sea igual a la derivada del costo total y suficiente sí la segunda derivada del costo total es estrictamente mayor que cero. ¿En términos económicos que significado tienen las condiciones antes señaladas ?.

5.3 Sea $C(Q) = Q\left(w_1, w_2\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$

w_1, $w_2 > 0$, $0 < \alpha, \beta < 0$, $Q > 0$; la función de costo a largo plazo de un empresario, considere que $\alpha + \beta = 1$. Grafique las curvas de CT, CMe y CMg.

5.4 Dadas las siguientes funciones de costo a corto plazo encuentre:

C(Q) = 5.184 + 208Q - 5Q2 +Q3 / 24

$C(Q) = Q^3 - 8Q^2 + 100Q + 512$

CF, CV, CMeV, CMeF y CMg.

5.5 Sea $q(x_1, y_0) = x^{\alpha} y_0^{1-\alpha}$ y_0 fijo, w_x y w_y los precios de x e y respectivamente, encuentre:

a) La función de costo a corto plazo.

b) CMT, CMV, CMF y CMG.

5.6 Considere una empresa que produce un bien y el precio de éste es de \$5, sí la función de costo a corto plazo está dada por $C = Q^3 - 6Q^2 + 10Q + 2$.¿Qué cantidad debe producir el empresario para maximizar su beneficio?.

5.7 Considere una empresa que produce dos bienes, suponga que los precios de las mercancías son p_1, p_2 y Q_1, Q_2 son los niveles de producción 1 y 2 respectivamente, el costo de producir conjuntamente Q_1 y Q_2 es $C(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$. ¿Cuántas unidades de cada producto deben fabricar para maximizar el beneficio?.

5.8 Suponga que una empresa recibió un pedido de k unidades de producto y desea distribuir su manufactura entre dos de sus plantas, sean Q_1 y Q_2 las producciones de las plantas 1 y 2, sí $C(Q_1, Q_2)$ es la función de costo total para ambas plantas:

a) ¿Cómo debe distribuir el empresario la producción con el fin de minimizar los costos?.

b) Si $C(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$

5.9 Encuentre la función de costo a largo plazo sí la función de producción es:

a) $Q = q(x_1, x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{\beta} \quad 0 < \alpha, \beta < 1$

b) $Q = q(x_1, x_2) = (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho}$

6. Apéndice: Soluciones a los ejercicios.

Capítulo 1.

1.1 **A = 2, B = 1, C = 3, D = 2**

1.2 **Para los puntos 1 y 2 $TMS_{xy} = 2$**

Para los puntos 2 y 3 $TMS_{xy} = 2 / 1.5$

Para los puntos 3 y 4 $TMS_{xy} = 1$

Para los puntos 4 y 5 $TMS_{xy} = 1 / 1.5$

1.3 u(x, y) = c

$$c = (x+a)^{\alpha}(y+b)^{\beta}$$

$$\frac{c}{(x+a)^{\alpha}} = (y+b)^{\beta}$$

$$y = \frac{c^{1/\beta}}{(x+a)^{\alpha}} - b$$

sea $k = c^{1/\beta}$

entonces $$y = \frac{k}{(x+a)^{\alpha/\beta}} - b$$

Si $\alpha \geq \beta$ $\alpha / \beta \geq 1$ y describe curvas de indiferencia típicas.

si $\alpha < \beta$, $0 < \alpha / \beta < 1$ y describe curvas de indiferencia típicas.

1.4 $TMSxy = \frac{y}{2x}$

Capítulo 2

2.1 Ver sección 2.1

2.2 El problema por resolver es:

máx. $U(x, y) = (xy)^{1/2}$

s.a $2x + 4y = 160$

$2x + 4y - 160 = 0 = g(x, y)$

la función de Lagrange correspondiente es:

$L(x, y, \lambda) = (xy)^{1/2} + \lambda(2x + 4y - 160)$

Las condiciones necesarias de primer orden exigen que

$\nabla L(\mathbf{x}, \lambda) = (0, 0, \ldots, 0)$ i.e. $\nabla L = \mathbf{0}$

esto ocurre si:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = L_i; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = 0$$

es decir

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2(y/x)^{1/2}} + 2\lambda = 0 \ldots(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2(x/y)^{1/2}} + 4\lambda = 0 \ldots(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 4y - 160 = 0 \ldots(3)$$

Despejando - λ de (1) y (2) tenemos que :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2(x/y)^{1/2}} + 4\lambda = 0 \ldots(4)$$

es decir

$$x = 2y \quad \ldots (5)$$

sustituyendo (5) en (3) y resolviendo la ecuación tenemos que

$y = 20$,

$x = 40$

sustituyendo ambos valores en (4) obtenemos que

$\lambda = -0.177$

Las condiciones de segundo orden requieren que el hessiano orlado sea positivo, teniendo las derivadas de segundo orden de L y las de primer orden de g tenemos que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{y}{x^3}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4}(xy)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \frac{1}{4}(xy)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{x}{y^3}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 4$$

Evaluando en el punto $\mathbf{(x_0, y_0, \lambda_0) = (40, 20, -0.177)}$ y resolviendo el determinante, tenemos que $H = 0.106 > 0$, por lo que la condición de segundo orden es suficiente y podemos afirmar que el consumidor maximizará su función de utilidad adquiriendo 40 unidades del primer bien y 20 del segundo con su presupuesto de $160.

2.3 Como el consumidor destina \$40 al ahorro entonces el presupuesto de que dispone para adquirir los bienes x e y es de \$140. El problema del consumidor se puede replantear en términos de cálculo como la búsqueda de la solución a un problema de optimización condicionada; de donde tenemos que resolver:

máx. $U(x, y) = \ln x^{.5} + 0.5 \ln y$

s.a $2x + 4y = 160$

$2x + 4y - 160 = 0 = g(x, y)$

la función de Lagrange correspondiente es:

$L(x, y, \lambda) = \ln x^{.5} + 0.5 \ln y + \lambda\,(2x + 4y - 160)$

Las condiciones necesarias de primer orden exigen que el gradiente de L sea idénticamente cero, esto ocurre si:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{0.5}{x} + 2\lambda = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{0.5}{y} + 4\lambda = 0 \quad \ldots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 4y - 160 = 0 \quad \ldots (3)$$

Despejando - λ de (1) y (2) tenemos que :

$$-\lambda = \frac{1}{2\left(x/y\right)} \quad \ldots (4)$$

$x = 2y \quad \ldots (5)$

sustituyendo (5) en (3) y resolviendo la ecuación tenemos que

y = 20

x = 40

sustituyendo ambos valores en (4) obtenemos que

λ = - 0.00625.

Las condiciones de segundo orden requieren que el hessiano orlado sea positivo, obteniendo las derivadas de segundo orden de L y las de primer orden de g tenemos que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -\frac{0.5}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -\frac{0.5}{y^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 4$$

Evaluando en el punto **$(x_0, y_0, \lambda_0) = (40, 20, -0.00625)$** y resolviendo el determinante tenemos que H > 0 (compruébelo usted mismo), por lo que la condición de segundo orden es suficiente y podemos afirmar que el consumidor maximizará su función de utilidad adquiriendo 40 unidades del primer bien y 20 del segundo con su presupuesto de $160.

2.4 Para maximizar la función de utilidad condicionado a un presupuesto limitado utilicemos nuevamente el método de los multiplicadores de Lagrange, es decir,

máx. $U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$

s.a $xp_x + yp_y = M$

$= xp_x + yp_y - M = 0 = g(x, y)$

la función de Lagrange correspondiente es:

$L(x, y, \lambda) = x^{\alpha} y^{\beta} + \lambda (xp_x + yp_y - M)$

Las condiciones necesarias de primer orden exigen que el gradiente de L = **0**, es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} + \lambda p_x = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \beta x^{\alpha} y^{\beta-1} + \lambda p_y = 0 \quad \ldots (2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x p_x + y p_y - M = 0 \quad \ldots (3$$

Despejando -λ de (1) y (2) tenemos que:

$$-\lambda = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{p_x} = \frac{\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}}{p_y}$$

es decir

$$x = \left(\frac{\alpha p_y}{\beta p_x}\right) y$$

$$y = \left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_y}\right) x$$

Sustituyendo en (3) y resolviendo la ecuación encontramos el punto de equilibrio; las funciones de demanda de los bienes x e y en función de su precio y el ingreso del consumidor:

$$x = \frac{M}{p_x (1+\beta/\alpha)}$$

$$y = \frac{M}{p_y (1+\alpha/\beta)}$$

Como podemos ver se trata de un par de hipérbolas equiláteras, es decir, cumplen con la ley de la demanda (ver sec. 2.3).

2.5 Sea F(u(x, y)) la función que se desea maximizar, entonces:

máx. F

s. a $M - xp_x + yp_y = 0 = g(x, y)$

formando la función de Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = F(u(x, y)) + \lambda\,(M - xp_x + yp_y).$$

Las condiciones de primer orden exigen que L tenga un punto estacionario, es decir, grad. L = (0, 0, 0),
esto sucede cuando:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = F' + U_x - \lambda p_x = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = F' + U_y - \lambda p_y = 0 \quad \ldots (2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x p_x + y p_y - M = 0 \quad \ldots (3$$

resolviendo el sistema y si F' $\neq 0$

$$F' + \frac{U_x}{p_x} = \lambda = F' + \frac{U_y}{p_y}$$

dividiendo entre F'

$$\frac{U_x}{p_x} = \frac{U_y}{p_y}$$

2.6

a) $\varepsilon_{xx} = -\frac{p_x}{x}\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{p_x}{x}\frac{aM}{p_x^2} = \frac{aM}{xp_x}$

aM > 1 La demanda será elástica.

aM = 1 La demanda es de elasticidad unitaria.

aM < 1 La demanda será inelástica.

b) $\varepsilon_M = \frac{M}{x}\frac{\partial x}{\partial M} = \frac{M}{x}\frac{a}{p_x} = 1$

como $\varepsilon_M > 0$ estamos hablando de **un bien normal.**

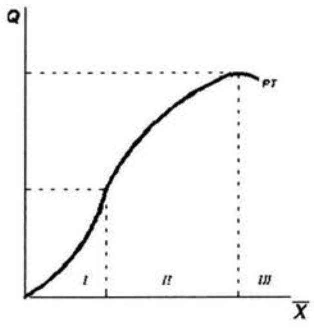
y	PMe	PMg
0	0.00	0.00
1	2.00	2.00
2	2.50	3.00
3	3.00	4.00
4	3.00	3.00
5	2.80	2.00
6	2.50	1.00
7	2.14	0.00
8	1.75	-1.00
9	1.33	-2.00

Capítulo 3

3.1

a) El **PMe < PMg ,** además el **PMe es creciente**.

b) El **PMe = PMg**



3.2

a) $$PMe = \frac{0.1x^2 - 0.005x^3}{x} = 0.1x - 0.005x^2$$

b) $$PMg = \frac{dQ}{dx} = 0.2x - 0.015x^2$$

c) La curva de producto total es la gráfica generada por Q, como solo nos interesan los valores positivos de Q veamos para que valores de x ocurre que

Q >0

$\Leftrightarrow$ 0.1x2 - 0.005x3 > 0

x2(0.1 - 0.005x) > 0

$0.1 - 0.005x > 0$

$x < 20$

entonces $\mathbf{0 < x < 20}$

Ahora revisemos los puntos críticos de Q:

$$\frac{dQ}{dx} = 0 = 0.2x - 0.015x^2$$

$\Leftrightarrow x(0.2 - 0.015x) = 0$

$0.2 - 0.015x = 0$

es decir

$\mathbf{(x_0 , x_1)=(13.3, 0)}$

Verifiquemos las condiciones de segundo orden

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0.2 - 0.03x \text{ evaluada en } x_0 = 13.3$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = -0.19 < 0$$

esto es, Q tiene un máximo.

Evaluando en $x_1 = 0$

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0.2 > 0 \text{, es decir, Q tiene un mínimo.}$$

Veamos si Q tiene puntos de inflexión, para esto observemos la derivada de Q. La función de producción tendrá un punto de inflexión si dQ / dx tiene un máximo o un mínimo, es decir,

$$\frac{dQ}{dx} = 0.2x - .03x = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 6.6$$

$$\frac{d^2Q}{dx_0^2} = -6.6 < 0$$

es decir, dQ / dx tiene un máximo en -6.6,de donde, en tal punto tiene un punto de inflexión.

Analicemos la gráfica de PMe = $0.1x - 0.005x^2$, se trata de una parábola que abre hacia abajo en el eje y, además como sabemos PMe = PMg cuando PMe es máximo, de donde:

$$0.1x - 0.005x^2 = 0.2x - 0.015x^2$$

$$0.1x - 0.01x^2 = 0$$

$$x(0.1 - 0.01x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0, x_1) = (0,0)$$

Por otra parte el PMg = $0.2x - 0.015x^2$, el cual describe una parábola que tiene un máximo en $x_0 = 6.6$, por lo tanto las gráficas de producto total, PMe y PMg son como las siguientes gráficas:

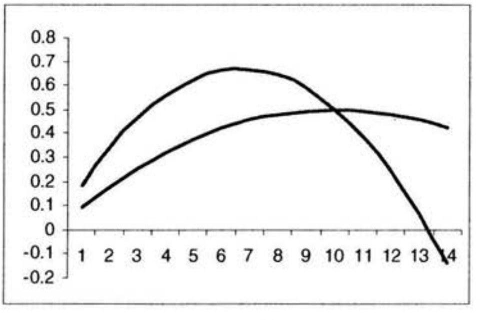


figura 00

3.3

a) De cálculo sabemos que una función f(x) tiene un punto de inflexión cuando df(x) / dx tiene un máximo o un mínimo; por otra parte si Q es la función de producción a corto plazo el PMg = dQ / dx, cuando éste es máximo la derivada de Q alcanza un máximo, por lo tanto Q tiene un punto de inflexión cuando PMg es máximo.

b) PMe $\leq$ PMg hasta que PMe es máximo.

Sea M el punto donde PMe alcanza un máximo, entonces la pendiente de la recta tangente a la curva de PMe es mayor o igual que cero para puntos a la izquierda de M, es decir,

$$\frac{dPMe}{dx} =\geq 0$$

pero $PMe = \dfrac{Q}{x}$

$$\frac{d\left(\dfrac{Q}{x}\right)}{dx} \geq 0$$

derivando al PMe

$$\frac{\left(\dfrac{dQ}{dx}x - Q\right)}{x^2} \geq 0$$

pero $PMg = \dfrac{dQ}{dx}$ y como $x^2 \geq 0$ entonces

$$x\ PMg - Q \geq 0$$

$$\Leftrightarrow PMg \geq \frac{Q}{x}$$

$$PMg \geq PMe$$

por lo tanto PMg $\geq$ PMe del cero al punto donde PMe es máximo.

c) Sabemos que PMe = Q / x, para determinar donde tiene éste un máximo debemos derivar PMe e igualarlo a cero, entonces tenemos que:

$$\frac{dPMe}{dx} = \frac{d\frac{Q}{x}}{dx} = \frac{x\frac{dQ}{dx} - Q}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\frac{dQ}{dx} - Q = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dQ}{dx} = \frac{Q}{x}$$

pero $PMg = \frac{dQ}{dx}, PMe = \frac{Q}{x}$

PMg = PMe.

Verificando condiciones de segundo orden tenemos que:

$$\frac{d^2PMe}{dx^2} = \frac{x^3\frac{d^2Q}{dx^2} - 2x^2\frac{dQ}{dx} - 2xQ}{x^4}$$

para que exista un máximo la segunda derivada de PMe debe ser menor que cero, pero como $x^4 > 0$

$\Rightarrow x^3\frac{d^2Q}{dx^2} - 2x^2\frac{dQ}{dx} - 2xQ$ debe ser menor que cero

$x^3 > 0; \frac{d^2Q}{dx^2} - < 0$ por hipótesis

además $\Rightarrow -2x^2\frac{dQ}{dx} < 0$ pues suponemos $\frac{dQ}{dx} > 0$

y como - $2xQ < 0$

$$\Rightarrow \frac{d^2PMe}{dx^2} < 0$$

∴ PMe es máximo cuando es igual al PMg

d) Para saber donde tiene un máximo Q verifiquemos las condiciones de primer orden para un punto óptimo, es decir,

$$\frac{dQ}{dx} = 0$$

pero $\frac{dQ}{dx} = PMg$

∴ la curva de producto total tiene un máximo cuando PMg = 0.

3.4 Ver sección 3.1.3

Capítulo 4.

4.1

a) Ver sección 3.2.5

b) Ver sección 3.2.7

c) Ver sección 3.2.3

d) Ver sección 3.2.6

4.2

a) Necesitamos observar $q(tx, ty) = t^k q(x, y)$

$q(tx, ty) = A(tx)^\alpha (ty)^\beta = A\, t^\alpha x^\alpha t^\beta y^\beta = \mathbf{t^{\alpha+\beta} A(x^\alpha y^\beta)}$

sea $k = \alpha + \beta$

si **k = 1 q(x, y) muestra rendimientos constantes a escala.**

k < 1 q(x, y) presenta rendimientos decrecientes a escala.

k > 1 q(x, y) tiene rendimientos crecientes a escala.

b) q(tx, ty) = A(tx) + B(ty) = **t (Ax + By)**

como **k = 1 entonces q(x, y) presenta rendimientos constantes a escala.**

c) $q(tx, ty, tz) = (tx)^{\alpha}\,(ty)^{\beta}(tz)^{\chi} = \mathbf{t^{\alpha+\beta+\delta}\,(x^{\alpha}\,y^{\beta}z^{\delta})}$

sea $\alpha+\beta+\delta = k$

k = 1 q(x, y, z) muestra rendimientos constantes a escala.

k < 1 q(x, y, z) presenta rendimientos decrecientes a escala.

k > 1 q(, y, z) tiene rendimientos crecientes a escala.

d) $q(tx, ty) = (A(tx)^{-\rho} + B(ty)^{-\rho}\ )^{-v/\rho} = \mathbf{t^{v}\ (Ax^{-\rho} + By^{-\rho}\ )^{-v/\rho}}$

v = 1 q(x, y) presenta rendimientos constantes a escala.

v < 1 q(x, y) presenta rendimientos decrecientes a escala.

v > 1 q(x, y) presenta rendimientos crecientes a escala.

4.3 Si f fuera lineal homogénea entonces

f(tx, ty) = t f(x, y)

pero f(tx, ty) = 3(tx) + 4(ty) + 6 = t(3x + 4y) +6 ≠ t(3x + 4y + 6)

∴ f no es lineal homogénea.

4.4

a) $\varepsilon = \dfrac{1}{f(x,y)}\sum_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x_i} = \dfrac{5x+23.5y}{5x+23.5y} = \mathbf{1}$,

por lo tanto q(x, y) muestra **rendimientos constantes a escala.**

b) $\varepsilon = \dfrac{1}{7\dfrac{x^{5,}}{y^{4}}+3\dfrac{y^{2}}{x}}\,7\dfrac{x^{5,}}{y^{4}}+3\dfrac{y^{2}}{x} = \mathbf{1}$, es decir, la función de producción tiene **rendimientos constantes a escala** en todo su dominio.

c) $\varepsilon = \frac{1}{6x^{0.25}y^{0.75}} 6x^{0.25}y^{0.75} = \mathbf{1}$ es por esto que q(x, y) presenta **rendimientos constantes a escala.**

d) $\varepsilon = \frac{1}{Ax^{\alpha}+By^{\alpha}} \alpha(Ax^{\alpha}+By^{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$

$\alpha = 1$ q(x, y) presenta rendimientos constantes a escala.

$\alpha < 1$ q(x, y) presenta rendimientos decrecientes a escala.

$\alpha > 1$ q(x, y) presenta rendimientos decrecientes a escala.

e) $\varepsilon = \frac{1}{q(x,y)}\left(\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}x + \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}y\right) = \frac{1}{Ax^{\alpha}y^{\beta}}(\alpha A x^{\alpha-1}y^{\beta}x + \beta A x^{\alpha}y^{\beta-1}y)$

$= \frac{1}{Ax^{\alpha}y^{\beta}}(\alpha A x^{\alpha}y^{\beta} + \beta A x^{\alpha}y^{\beta}) = \frac{1}{Ax^{\alpha}y^{\beta}} A x^{\alpha}y^{\beta}(\alpha+\beta) = \boldsymbol{\alpha+\beta}$

sea $\alpha + \beta = k$

si **k = 1 q(x, y) muestra rendimientos constantes a escala.**

k < 1 q(x, y) presenta rendimientos decrecientes a escala.

k > 1 q(x, y) tiene rendimientos crecientes a escala.

f) $\varepsilon = \left(\frac{1}{Ax^{r}+By^{r}}\right)^{1/r} Ax^{r}+By^{r} = \mathbf{1}$, por lo tanto q(x, y) presenta **rendimientos constantes a escala.**

4.5 Las funciones de demanda condicionada de los factores se encuentran de la siguiente manera:

$$\min \; w_1p_1 + w_2p_2$$

$$\text{s.a} \;\; Q_0 = (x^{\rho} + y^{\rho})^{1/\rho}$$

$$Q_0 - (x^\rho + y^\rho)^{1/\rho} = 0 = h(x, y)$$

formando la función de Lagrange:

$$L(x, y, \mu) = w_1p_1 + w_2p_2 + \mu(Q_0 - (x^\rho + y^\rho)^{1/\rho})$$

es necesario que el gradiente de L sea igual a cero, es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = w_1 - \mu\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} x^{\rho-1} = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = w_2 - \mu\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} y^{\rho-1} = 0 \quad \ldots (2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = Q_0 - \left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = 0 \qquad \ldots (3$$

despejando μ de (1) y (2) tenemos que:

$$\mu = \frac{w_1}{\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} x^{\rho-1}} = \frac{w_2}{\left(x^{-\rho} + y^{-}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} y^{\rho-1}}$$

de donde

$$x = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} y$$

$$y = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x$$

que sustituyendo en (3)

$$Q_0 = \left[x^{\rho} + \left(\frac{W_2}{W_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} X \right]^{\frac{1}{\rho}}$$

despejando y tenemos que la función de demanda condicionada de x es:

$$x^c = Q_0 w_1^{\frac{1}{\rho-1}} (w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}})^{-\frac{1}{\rho}}$$

de manera similar para y, esto es

$$y^c = Q_0 w_2^{\frac{1}{\rho-1}} (w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}})^{-\frac{1}{\rho}}$$

4.6 Las funciones de demanda de los factores x e y se obtienen a partir de la solución al problema de maximización del beneficio:

$$\text{máx. } \Pi = \text{máx, } pQ - (w_1 x + w_2 y) = pA\, x^{\alpha}\, y^{\beta} (w_1 x + w_2 y)$$

las condiciones de primer orden requieren que

$$\nabla \Pi = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = p\alpha A x^{\alpha-1} y^{\beta} - w_1 = 0 \ldots \text{ (1)}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = p\beta A y^{\beta-1} x^{\beta} - w_2 = 0 \ldots \text{ (2)}$$

de (1) y (2) tenemos que:

$$p\,\alpha\,A\,x^{\alpha-1}\,y^{\beta} = w_1$$

$$\beta\,A\,y^{\beta-1}\,x^{\beta} = w_2$$

multiplicando (1) por x, (2) por y como $q(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$ entonces las funciones de demanda de los factores quedan de la siguiente forma:

$$x^{d} = p\alpha\frac{Q}{w_1}$$

$$y^{d} = p\beta\frac{Q}{w_2}$$

La función de oferta del producto se obtiene sustituyendo las funciones de demanda de los factores en la función de producción

$$Q = \left(p\alpha\frac{Q}{w_1}\right)^{\alpha}\left(p\beta\frac{Q}{w_2}\right)^{\beta}$$

$$Q = Q^{\alpha+\beta}A\left(\frac{p\alpha}{w_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{p\beta}{w_2}\right)^{\beta}$$

$$Q^{1-\alpha-\beta} = Ap^{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\beta}$$

$$Q = \left[Ap^{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\beta}\right]^{1/1-\alpha-\beta}$$

Las funciones de demanda condicionada de los factores se encuentra de la siguiente manera:

min. $w_1p_1 + w_2p_2$

$$\text{s.a } Q_0 = Ax^{\alpha}y^{\beta}$$

$$Q_0 - Ax^{\alpha}y^{\beta} = 0 = h(x, y)$$

formando la función de Lagrange:

$$L(x, y, \mu) = w_1p_1 + w_2p_2 + \mu(Q_0 - Ax^{\alpha}y^{\beta})$$

es necesario que el gradiente de L sea igual a cero, es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = w_1 - \alpha A\mu x^{\alpha-1}y^{\beta} = \frac{\partial L}{\partial y} = w_2 - \beta A\mu x^{\alpha}y^{\beta-1} = \frac{\partial L}{\partial \mu} = Q_0 - Ax^{\alpha}y^{\beta} = 0$$

Resolviendo el sistema para μ

$$\mu = \frac{w_1}{\alpha A x^{\alpha-1}y^{\beta}} = \frac{w_2}{\beta A x^{\alpha}y^{\beta-1}}$$

de donde

$$(x, y) = \left(\frac{w_2\alpha y}{w_1\beta}, \frac{w_1\beta x}{w_2\alpha}\right)$$

de donde

$$Q_0 = \left(\frac{w_2\alpha y}{w_1\beta}\right)^{\alpha} y^{\beta} = \left(\frac{w_2\alpha}{w_1\beta}\right)^{\alpha} y^{\alpha+\beta}$$

despejando y tenemos que la función de demanda condicionada de y es:

$$y^c = Q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w_2\alpha}{w_1\beta}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}}$$

de manera similar para x, esto es,

$$x^c = Q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w_1\beta}{w_2\alpha}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}}$$

4.7 Debemos encontrar el punto de equilibrio, el problema del empresario es:

máx. $8x^{1/2} + 20y^{1/2}$

s. a $x + 5y - 60 = 0 = h(x, y)$

la función de Lagrange correspondiente es

$L(x, y, \lambda) = 8x^{1/2} + 20y^{1/2} + \lambda\,(x + 5y - 60)$ para que exista un máximo

condicionado es necesario que $\nabla L = \mathbf{0}$, es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x^{-0.5} + \lambda = \frac{\partial L}{\partial y} = 10y^{-0.5} + 5\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 5y - 60 = 0$$

Resolviendo para λ

$$\lambda = -4x^{-05} = -2y^{-05}$$

lo que significa que:

$$y = 4x$$

sustituyendo en (3) y resolviendo para x , y, λ obtenemos:

$(x, y, \lambda_0) = (2.86, 11.43, -0.15)$

Las condiciones de suficientes requieren que el hessiano orlado sea mayor que cero, las derivadas parciales de segundo para L son:

$$L_{xx} = -2x^{-3/2}$$

$$L_{xy} = 0 = L_{yx}$$

$$L_{yy} = -5x^{-3/2}$$

y las derivadas parciales de h son:

$$h_1 = 1$$

$$h_2 = 5$$

Evaluando en el punto $(x_0, y_0, \lambda_0) = (2.86, 11.43, -0.15)$ y resolviendo el determinante tenemos que $H = 0.02 > 0$, por lo que concluimos que el punto (x_0, y_0, λ_0) maximiza la función de producción del empresario condicionada a un presupuesto de \$60.

Capítulo 5.

5.1

a) Ver sección 5.1.1

b) Ver sección 5.1.1

c) Ver sección 5.1.2

d) Ver sección 5.1.2

5.2

La condición $\frac{dCT}{dQ} = p$ económicamente significa que como el precio del producto es fijo y el mercado es perfectamente competitivo el empresario debe incrementar la producción hasta el nivel en que ese aumento dé como resultado que el incremento en el costo total atribuible al aumento en la producción sea igual al precio de mercado del producto.

La condición $\frac{d^2CT}{dQ^2} = \frac{dCMg}{dQ} > 0$ significa que el costo marginal debe ser creciente, es decir, para poder maximizar el beneficio los costos se deben incrementar más rápido que la producción, i.e. la función de producción debe presentar rendimientos decrecientes a escala.

5.3

a) Si $\alpha + \beta = 1$ entonces $C(Q) = Qw_1^{\alpha}w_2^{\beta}$ representa la ecuación de una recta con pendiente $w_1^{\alpha}w_2^{\beta} = k > 0$ y con ordenada al origen cero.

5. 4

a) $C(Q) = 5.184 + 208Q - 5Q^2 + Q^{3/24}$

CF = 5.184

CV = $208Q - 5Q^2 + Q^{3/24}$

CMeV = $208 - 5Q + Q^{2/24}$

CMeF = 5.184 / Q

CMg = $208Q - 10Q + Q^2 / 8$

b) $C(Q) = Q^3 - 8Q^2 + 100Q + 512$

CF = 512

CV = $Q^3 - 8Q2 + 100Q$

CMeV = $Q^2 - 8Q^2 + 100Q$

CMeF = 512 / Q

CMg = $3Q^2 - 16Q + 100$

5.5

a) La función de costo a corto plazo se obtiene a partir del problema de minimización de la isocosto sujeta a un determinado nivel de producción, es decir,

min. $xw_1 + y_ow_2$

s. a $Q_0 = x^{\alpha} y_0^{1-\alpha}$

de donde $x = \left(\dfrac{Q_0}{y_0^{1-\alpha}} \right)^{1/\alpha}$

entonces la función de costo a corto plazo resultante es:

$$C(x, y_0) = w_1 \left(\frac{Q_0}{y_0^{1-\alpha}} \right)^{1/\alpha} + w_2 y_0$$

$$= w_1 Q_0^{1/\alpha} y_0^{\alpha-1} + w_2 y_0$$

b) $\text{CMT} = w_1 \left(\dfrac{y_0}{Q_0^{1/\alpha}} \right)^{\alpha-1} + \dfrac{w_2 y_0}{Q}$

$$\text{CMeF} = \frac{w_2 y_0}{Q}$$

$$\text{CMeV} = w_1 \left(\frac{y_0}{Q_0^{1/\alpha}} \right)^{\alpha-1}$$

$$\text{CMg} = \frac{w_1}{\alpha} \left(\frac{y_0}{Q_0^{1/\alpha}} \right)^{\alpha-1}$$

5.6 El empresario debe

máx. $\Pi = pQ - C = pQ - (Q^3 - 6Q^2 + 10Q + 2)$

para que esto ocurra es necesario que:

$$\frac{d\Pi}{dQ}=0$$

es decir, que exista un punto estacionario, lo que significa que:

$$\frac{d\Pi}{dQ}=5-3Q^2+12Q-10=0$$

lo cual sucede cuando (Q_1, Q_2)= (3.52 , 0.4724)

Si ocurre que $\frac{d^2\Pi}{dQ^2}<0$ entonces Π tiene un máximo en Q_1 ó Q_2 verificando la derivada de segundo orden de Π y sustituyendo los valores de Q_1 = 3.52 y Q_2 = 0.4724 obtenemos:

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2}=-6Q_1+12=-9.12$$ **Π tiene un máximo**

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2}=-6Q2+12=9.18$$ **Π tiene un mínimo.**

por lo que el empresario debe producir **3. 5** unidades de producto para así maximizar el beneficio.

5.7 El empresario desea maximizar el beneficio, es decir, la diferencia entre el ingreso total (p_1Q_1 + p_2Q_2) menos los costos totales ($2Q_1^2 + Q1Q2 + 2Q_2^2$), analíticamente:

$$\text{máx. } \Pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - (2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2)$$

para que Π tenga un máximo es condición necesaria que:

$$\nabla \Pi = (0, 0)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial Q_1}=p_1-(4Q_1+Q_2)=0=\frac{\partial\Pi}{\partial Q_2}=p_2-(4Q_2+Q_1)$$

resolviendo el sistema para Q_1 y Q_2 obtenemos:

$$Q_1 = \frac{4p_1 - p_2}{15}$$

$$Q_2 = \frac{4p_2 - p_1}{15}$$

verificando las condiciones de segundo orden, las cuales exigen que el hessiano se defina negativo :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -1 = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2 \partial Q_1}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2} = -4$$

resolviendo los determinantes observamos que el hessiano se define negativo, pues $-4 < 0$ y $15 > 0$, de donde la condición de segundo orden es suficiente, por lo tanto si el fabricante produce

$(Q_1, Q_2) = \left(\frac{4p_1 - p_2}{15}, \frac{4p_2 - p_1}{15} \right)$ unidades de los productos Q_1 y Q_2 respectivamente, entonces maximizará el beneficio.

5.8

a) El fabricante debe

min $C(Q_1, Q_2)$

s. a $Q_1 + Q_2 = k$

resolviendo el problema de minimización condicionada mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange, tenemos que

$L(Q_1, Q_2, \lambda) = C(Q_1, Q_2) + \lambda(k - Q_1 + Q_2)$

la condición necesaria para la existencia de un mínimo condicionado, es que:

$\nabla L = (0, 0, 0)$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = \frac{\partial C}{\partial Q_1} - \lambda = 0 = \frac{\partial L}{\partial Q_2} = \frac{\partial C}{\partial Q_2} - \lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = k - Q_1 - Q_2$$

resolviendo el sistema tenemos que:

$$\lambda = \frac{\partial C}{\partial Q_1} = \frac{\partial C}{\partial Q_2}$$

esto es, el fabricante debe producir en cada planta de modo que $CMg_1 = CMg_2$

b) Si $C(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$ y $k = 200$, entonces como el productor debe igualar los costos marginales de cada planta para poder minimizar los costos sujeto a que la producción conjunta debe ser igual a 200 unidades de producto, debe ocurrir:

$CMg_1 = CMg_2$

$\Leftrightarrow \quad 2Q_1 + Q_2 = 2Q_2 + Q_1$

$Q_1 = Q_2$

y como $Q_1 + Q_2 = 200$

$\mathbf{Q_1 = 100}$

$\mathbf{Q_2 = 100}$

por lo que el empresario debe producir 100 unidades de cada bien en la planta 1 y 100 en la planta 2.

5.9 Como sabemos la función de costo a largo plazo se obtiene a partir del problema de minimización de costo condicionado a una determinada producción, sustituyendo las funciones de demanda condicionada de los factores de producción en la ecuación de costo.

a) Si la función de producción es $Q = q(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$

las funciones de demanda condicionada de los factores son:

$$x^c = Q_0^{1/\alpha+\beta}\left(\frac{w_1^{\beta}}{w_2^{\alpha}}\right)^{-\beta/\alpha+\beta}$$

$$y^c = Q_0^{1/\alpha+\beta}\left(\frac{w_2^{\alpha}}{w_1^{\beta}}\right)^{-\alpha/\alpha+\beta}$$

sustituyendo los valores de x^c e y^c en la ecuación de costo, obtenemos la función de costo a largo plazo:

$$C = w_1 Q_0^{1/\alpha+\beta}\left(\frac{w_1^{\beta}}{w_2^{\alpha}}\right)^{-\beta/\alpha+\beta} + w_2 Q_0^{1/\alpha+\beta}\left(\frac{w_2^{\alpha}}{w_1^{\beta}}\right)^{-\alpha/\alpha+\beta}$$

$$= Q_0^{1/\alpha+\beta}\left[w_1\left(\frac{w_1^{\beta}}{w_2^{\alpha}}\right)^{-\beta/\alpha+\beta} + w_2\left(\frac{w_2^{\alpha}}{w_1^{\beta}}\right)^{-\alpha/\alpha+\beta}\right]$$

$$= Q_0^{1/\alpha+\beta} w_1^{\alpha/\alpha+\beta} w_2^{\beta/\alpha+\beta}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/\alpha+\beta} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha/\alpha+\beta}\right]$$

$$C(Q_0, w_1, w_2) = \left(Q_0 w_1^{\alpha} w_2^{\beta}\right)^{1/\alpha+\beta}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/\alpha+\beta} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha/\alpha+\beta}\right]$$

Del ejercicio 4.5 sabemos que las funciones de demanda condicionada de los factores, es decir, aquellos valores de los insumos que minimizan el costo para cada nivel de producción cuando la tecnología es:

$$Q = q(x, y) = (x^{\rho} + y^{\rho})^{1/\rho}$$

$$x^c = Q_0 w_1^{1/\rho-1}\left(w_1^{\rho/\rho-1} + w_2^{\rho/\rho-1}\right)^{-1/\rho}$$

$$y^c = Q_0 w_2^{1/\rho-1}\left(w_1^{\rho/\rho-1} + w_2^{\rho/\rho-1}\right)^{-1/\rho}$$

que sustituyendo en la ecuación de costo

$$C = w_1 Q_0 w_1^{1/\rho-1}\left(w_1^{\rho/\rho-1} + w_2^{\rho/\rho-1}\right)^{-1/\rho} + w_2 Q_0 w_2^{1/\rho-1}\left(w_1^{\rho/\rho-1} + w_2^{\rho/\rho-1}\right)^{-1/\rho}$$

$$C = Q_0\left(w_1^{\rho/\rho-1} + w_2^{\rho/\rho-1}\right)^{-1/\rho}\left(w_1^{\rho/\rho-1} + w_2^{\rho/\rho-1}\right)$$

$$C = Q_0\left(w_1^{\rho/\rho-1} + w_2^{\rho/\rho-1}\right)^{\rho-1/\rho}$$

sea $\varphi = \dfrac{\rho}{\rho-1}$

$$C(Q_0, w_1, w_2) = Q_0\left(w_1^{\varphi} + w_2^{\varphi}\right)^{1/\varphi}$$

de donde puede observarse que la función de costo a largo plazo para una tecnología CES tiene la misma forma que la función de producción.

Conclusiones

Mi interés por proponer en este trabajo de tesis algunos temas para ser analizados en el curso de Economía Matemática I, habla de la inquietud de la comunidad: estudiantes, profesionales y académicos de formar parte de las decisiones en las actividades propias de nuestra disciplina. La carencia del Departamento de Actuaría motiva la ausencia de propuestas por parte del alumnado en la elaboración de los contenidos en las materias de la currícula. Al no existir un Departamento de Actuaría se propicia la pérdida de la participación e interés de la gran mayoría de los profesionales egresados de esta institución en el desarrollo de la vida académica al interior de nuestra casa de estudios. Creo el no contar con éste se obstaculiza la creación de espacios físicos que permitan la reunión de los estudiosos de la disciplina. Lo anterior no permite la adecuación de los planes de estudio a las necesidades actuales del país. Por todo ello me parece conveniente la creación de un Departamento de Actuaría en la Facultad de Ciencias, el cual permitiría:

- Coordinar la colaboración de los diversos sectores involucrados, con el propósito de redefinir el campo de acción del Actuario, diferenciándolo de otros profesionales, evitando abordar áreas propias de otras disciplinas como son: Computación, Investigación de Operaciones, etc. y de esta manera rescatar la importancia del trabajo actuarial en nuestro entorno.

- Mejorar el plan de estudios de la carrera, revalorizando las materias propias de la profesión: Matemáticas Financieras, Cálculo Actuarial (grupos cerrado y abierto de vida), Pensiones, Demografía, etc.; que han sido menospreciadas no solo por los profesores del área de Matemáticas, sino por los propios alumnos de Actuaría; para conseguir esto debemos procurar la cooperación de los egresados mediante la transmisión de su experiencia profesional a los alumnos a través de pláticas organizadas por el Departamento de Actuaría.

- Promover la mayor disponibilidad de materiales bibliográficos y hemerográficos para que tanto profesores como estudiantes se encuentren al tanto del desarrollo de la profesión.

- Implementar talleres en los cuales se vincule lo aprendido en las aulas, con el trabajo en las empresas.

- Establecer convenios con instituciones o empresas que requieran personal con el perfil profesional del actuario.

- Coordinar el intercambio entre estudiantes de otros países para realizar prácticas profesionales en diversas naciones.

- Implementar cursos de materias relacionadas con la carrera pero que utilizan otras formas en su discurso, generalmente ignorado por los estudiantes de Actuaría.

- Organizar cursos de paquetería computacional, de investigaciones actuales relacionadas con la profesión y de materias con alto índice de reprobación.

- Permitir las actividades propias de la investigación para el desarrollo de la disciplina.

- Crear alternativas para abundar en ramas de la Actuaría poco cultivadas tales como: Seguros No Vida, Seguridad Social, Finanzas.

- Promover líneas de investigación que permitan el desarrollo y la actualización de la profesión.

- Favorecer la utilización del método científico, pues aunque el egresado de la carrera de Actuaría adquiere una sólida formación de la ciencia matemática, generalmente a través del método de "prueba y error" , esto provoca que mucha gente abandone la carrera (por sentirse incapaz de aprender) o bien que al concluir perciba poca consistencia en su formación profesional.

Lo anterior redituará no solo en una mejor preparación del actuario y con ello en mejores oportunidades laborales, sino en un mejor desempeño del profesional en la comunidad y de esta manera contribuir a modelar el comportamiento social.

Ahora bien, el presente trabajo de tesis permite conocer los aspectos básicos del entorno económico y como pueden estos servir de apoyo a los estudiantes de la carrera de Actuaría para comprender con mayor exactitud el ambiente financiero donde se lleva a cabo su labor profesional. Por otra parte considero que facilita la comprensión, el hecho de que procuro exponer los temas en un lenguaje ordinario y con argumentos geométricos, para después tratarlos de manera analítica, en virtud de que muchos resultados son evidentemente matemáticos, pero que se pueden comprender más fácilmente si se conoce el contexto económico en que se generan. Además, la experiencia obtenida al colaborar como ayudante de la profesora. Yolanda S. Calixto en el curso de Economía Matemática I, me permite afirmar que en general la manera en que se llevó a cabo el curso resultó interesante para los alumnos, pues si bien presentamos la parte "literaria" de los temas, también mostramos la utilización de algunos resultados matemáticos en la exposición del modelo marginalista, con lo cual se puso de manifiesto la gran vinculación entre las Matemáticas y las demás ramas del conocimiento. Si bien las hipótesis del modelo neoclásico (marginalista) parecen a primera vista restrictivas, en realidad no lo son pues los resultados obtenidos mediante el uso de este modelo se utilizan muy frecuentemente en estudios prácticos (Econométricos) por lo que debemos juzgar a la teoría no por la restricción de los supuestos sino por la amplitud de sus resultados. Adicionalmente debemos considerar que este modelo Microeconómico sirve como introducción al estudio de la Teoría Económica, utilizando técnicas esencialmente geométricas y de cálculo pero que facilitan el posterior estudio de modelos más sofisticados, los cuales se valen de bagaje matemático mucho más poderoso (Programación Lineal, Teoría de Juegos, Programación No Lineal, etc.) que generalmente no manejan los alumnos de 5° semestre de la carrera de Actuaría.

Por último estimo pertinente sugerir que para poder iniciarse en el estudio de la Microeconomía debe comenzarse por leer a Ferguson [6] porque expone los principales temas con un lenguaje muy fácil de comprender, después se puede revisar a Sher [11] o Ahijado [1], ambos realizan una exposición valiéndose de argumentos geométricos e introduciendo la utilización del cálculo, además de que el libro de Ahijado [1] cuenta con un texto complementario de ejercicios, el cual permite que los interesados prueben la solidez de sus lecturas teóricas; continuando la lectura de Henderson y Quandt [8], los cuales suponen el manejo "literario" de los temas, describiendo éstos con argumentos puramente matemáticos y para concluir puede leerse Varian [15] o Shone [13] los cuales llevan a cabo una exhaustiva fundamentación Matemática de los principales temas Microeconómicos. Al final muestro una amplia bibliografía al respecto.

Bibliografía

[1] AHIJADO MANUEL
"CURSO DE MICROECONOMÍA: TEORIA".
CENTRO DE ESTUDIOS RAMÓN ARECES, S.A.
ESPAÑA 1989.
426 P.

[2] AHIJADO MANUEL
"CURSO DE MICROECONOMÍA: PRÁCTICAS".
CENTRO DE ESTUDIOS RAMÓN ARECES, S.A.
ESPAÑA 1989.
520 P.

[3] ALLEN ROGER
"MATHEMATHICAL ANALISYS FOR ECONOMISTS ".
MC MILLAN.
UK 1956.
528 P.

[4] ALLEN ROGER
"MICROECONOMÍA CON APLICACIONES A LA EMPRESA ".
MC GRAW HILL.
MÉXICO 1985.
345 P.

[5] CABRERA VALVERDE JORGE M.
"MODELOS MATEMÁTICOS EN ECONOMÍA ".
TESIS PROFESIONAL MATEMÁTICO.
MÉXICO 1973.

[6] CHIANG ALPHA
"MÉTODOS FUNDAMENTALES DE ECONOMÍA MATEMÁTICA".
MC GRAW HILL.
MÉXICO 1984.
805 P.

[7] Ferguson CH. Y GOULD J.P.
"TEORÍA MICROECONÓMICA".
FONDO DE CULTURA ECONÓMICA.
MÉXICO 1992.
550 P.

[8] HENDERSON J.M. Y QUAND R.E.
"TEORÍA MICROECONÓMICA".
ARIEL.
MÉXICO 1962.
250 P.

[9] INTRILIGATOR MICHEL
"OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA Y TEORÍA ECONÓMICA".
PRENTICE-HALL INTERNACIONAL.
ESPAÑA 1973.
486 P.

[10] MARTÍNEZ CONSTANTINO
"PRÁCTICAS DE MICROECONOMÍA".
DM.
ESPAÑA 1991.
272 P.

[11] RUSELL ROBERT Y WILKINSON MAURICE
"MICROECONOMÍA. SÍNTESIS DE LAS TEORÍAS NEOCLÁSICAS Y MODERNAS ".
HISPANO EUROPEA.
ESPAÑA 1983.
638 P.

[12] SHER W. Y PINOLA RUDY.
"TEORÍA MICROECONÓMICA".
ALIANZA UNIVERSIDAD TEXTOS.
ESPAÑA 1985.
730 P.

[13] SHONE R.
"ANÁLISIS MICROECONÓMICO MODERNO".
HISPANO EUROPEA.
ESPAÑA 1980.
457 P.

[14] SHUMANN JOCHEN
"FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA MICROECONÓMICA".
HERDER.
ESPAÑA 1980.
373 P.

[15] VARIAN HAL R.
"ANÁLISIS MICROECONÓMICO".
ANTONI BOSCH.
ESPAÑA 1980.
334 P.

[16] VARIAN HAL R.
"MICROECONOMÍA INTERMEDIA : UN ENFOQUE MODERNO".
ANTONI BOSCH.
ESPAÑA 1980.
717 P.