UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"METODOS CATEGORICOS EN COMBINATORIA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ARTICO RAMIREZ URRUTIA

DIRECTOR DE TESIS: DR. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Artico Ramírez Urrutia
FECHA: 14 de Noviembre del 2004
FIRMA:

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Métodos categóricos en combinatoria"

realizado por Artico Ramírez Urrutia

con número de cuenta 9514807-2, quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. Francisco Marmolejo Rivas

Propietario Dr. Ernesto Vallejo Ruíz

Propietario Dr. Alejandro Alvarado García

Suplente Mat. Adriana Merino Sánchez

Suplente Mat. Hugo Juárez Anguiano

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMATICAS

A mis seres mas amados, José, Blanca, Tíber y Nely.

Índice general

Introducción

El presente trabajo tiene como fin mostrar algunos resultados de combinatoria utilizando herramientas categóricas. En general, una categoría E es una colección de objetos y morfismos (entre los objetos), de tal manera que la composición de morfismos (que se puedan componer) es asociativa y que para cada objeto de la colección exista un morfismo con las propiedades de un idéntico. Un funtor $\mathbf{F} : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ entre categorías, es una operación que a los objetos y morfismos de E les asigna objetos y morfismos de F, respectivamente, de tal manera que si $X \xrightarrow{f} Y$, entonces $\mathbf{F}(X) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(Y)$ y además que

$$\text{si } X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, \text{ entonces } \mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(g) \text{ y}$$
$$\mathbf{F}(Id_X) = Id_{\mathbf{F}(X)}, \forall \text{ objeto } X \in \mathsf{E}.$$

Nuetro objeto primordial de análisis en este trabajo son las especies (funtores de la categoría $\mathbf{Bij}_f$ a la categoría $\mathbf{Set}_f$), y sobre todo, aquellas que nos ofrezcan estrucuras algebraicas que ya conocemos, como por ejemplo le especie de permutaciones, la de permutaciones pares, la de endofunciones, etc. Cabe mencionar que este trabajo está basado en gran medida en el artículo [1] de Yoshida, el cual ofrece una buena cantidad de material indispensable para los ejemplos del capítulo 6. El otro trabajo en el que está basada esta tesis es en el artículo [2] de Joyal, el cual nos sirvió para la elaboración del capítulo 4.

En el capítulo 1 se define el concepto de E-estructuras con respecto a un funtor fiel $\mathbf{F} : \mathsf{E} \to \mathsf{D}$. La importancia de esta definición se reflejará en los capítulos posteriores. En este mismo capítulo Yosida [1] afirma de manera erronea que si $\mathbf{G}$ es un grupo finitamente generado y $\mathbf{H}$ un subgrupo de $\mathbf{G}$, el funtor restricción (definido en el capítulo 1) $\mathbf{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}} : \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}} \to \mathbf{Set}_f^{\mathbf{H}}$ tiene adjunto derecho y adjunto izquierdo. Esta afirmación resulta ser falsa y se muestran contraejemplos, así como una versión corecta para el enunciado. No obstante, el ejemplo seguido a la afirmación no requiere de este resultado y dicho ejemplo tiene su aplicación en el capítulo 6.

En el capítulo 2 definimos el concepto fundamental de este trabajo, las **especies**. Se exhibe además una equivalencia entre la categoría de especies,

$$[\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f],$$

y la categoría

$$\prod_n \mathbf{Set}_f^{\mathbf{S}_n}.$$

Algunos ejemplos interesantes de especies y de morfismos de especies son expuestos a continuación, definiendo también lo que entenderemos por función generadora de una especie o serie de Hurwitz seguida de algunos ejemplos. Al final del capítulo se enuncia un resultado más de este trabajo que debido a que su demostración es larga y que el resultado no es trascendental para el resto del trabajo, decidimos colocar la demostración en la sección de apéndices.

El espacio de las series de potencias formales y las funciones exponenciales generadoras de especies E, esqueléticamente pequeñas y localmente finitas, se definen en el capitulo 3. También se definine para un funtor fiel $\mathbf{F} : \mathsf{E} \to \mathsf{D}$ con fibras finitas entre categorías esqueléticamente pequeñas lo que entenderemos por función exponencial generadora de E a lo largo de $\mathbf{F}$. Se enuncia y se demuestra el teorema 3.3.1 que nos muestra la relación que existe entre la función exponencial generadora de E a lo largo de $\mathbf{F}$ y las estructuras definidas en el capítulo 1. Con la teoría abarcada hasta esta parte de la tesis, se muestran dos ejemplos de lo que se puede hacer con los resultados obtenidos, el primero de ellos es en grupos finitos y el segundo es en $\mathbf{G}$-conjuntos.

El capítulo 4 no es una continuación de los capítulos anteriores, sin embargo, nos sirve como una pauta para mostrar los resultados que se pueden arrojar teniendo poco material. En este capítulo se ofrecen una serie de definiciones, ejemplos y unos cuentos resultados enfocados a demostrar de manera categórica el teorema de Cayley (4.5.1), el cual nos dice que el número a_n de estructuras de árbol sobre un conjunto de cardinalidad n es n^{n-2}.

En el capítulo 5 se define lo que son los objetos conexos y lo que llamaremos categorías de Krull-Schmidt (KS). Estas categorías serán nuestro objeto de estudio en los dos últimos capítulos (5 y 6). Cuatro resultados (un lema, un corolario y dos teoremas) acerca de las categorías KS son demostrados al final del capítulo, estos resultados son de gran importancia para los dos ejemplos del capítulo 6 y nos exponen la relación que existe (dentro de las categorías KS) entre las funciones generadoras de las subcategorías de objetos conexos y las definidas previamente.

Tenemos por último en el capítulo 6 dos ejemplos: la fórmula de Wohlfahrt,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_n)|}{n!} t^n = \mathbf{exp}\Bigg(\sum_{\mathbf{H} \leq_f \mathbf{G}} \frac{t^{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}}{(\mathbf{G} : \mathbf{H})} \Bigg),$$

seguida de una aplicación sobre particiones. La demostración de la fórmula de Wohlfahrt requiere de algunos resultados de $\mathbf{G}$-conjuntos situados en la sección de apéndices y de algunos otros en los capítulos anteriores. El segundo ejemplo es sobre representación de permutaciones pares, donde nuevamente Yoshida [1] comete un error afirmando que un $\mathbf{G}$-conjunto transitivo $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ asociado a un subgrupo $\mathbf{H}$ es par, si y solo si

$$|\langle x\rangle\backslash\mathbf{G}/\mathbf{H}| \cong (\mathbf{G}:\mathbf{H})\ (mod\ 2)$$

para cualquier 2-elemento de $\mathbf{G}$. Damos de nuevo un ejemplo en el que mostramos que la afirmación es falsa. El ejemplo no sufre alteraciones por la falsa afirmación y se logra demostrar satisfactoriamente la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{A}_n)|}{n!}t^n = \frac{1}{2}\mathbf{exp}\Big(\sum_{\mathbf{H}\leq_f\mathbf{G}}\frac{t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\Big)$$
$$+\frac{1}{2}\mathbf{exp}\Big(\sum_{\mathbf{H}\leq_f\mathbf{G}}\frac{\mathbf{sgn}(\mathbf{G}/\mathbf{H})t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\Big).$$

.

Capítulo 1

Estructuras

1.1. Notación y terminología

Decimos que una categoría es finita si tiene un número finito de objetos y morfismos; una categoría es esqueléticamente finita si es equivalente a una categoría finita; una categoría es localmente finita si para cualquier par de objetos X, Y en dicha categoría, $\mathbf{Hom}(X, Y)$ es un conjunto finito; una categoría tiene grupos de automorfismo finitos si para cualquier objeto de la categoría el grupo $\mathbf{Aut}(X)$ es finito; un esqueleto de una categoría es una subcategoría plena, tal que para cada clase de isomorfía uno y sólo uno de los objetos de la clase está en la subcategoría; una categoría es esqueléticamente pequeña si es equivalente a una categoría pequeña; por $\mathsf{C}/\cong$ entenderemos el conjunto de clases de isomorfismo de los objetos de la categoría C, mientras que $[X]$ denotará la clase del objeto X.

Para una categoría C, definimos al grupoide C_{iso} como la categoría cuyos objetos son los mismos de la categoría C, mientras que los morfismos de C_{iso} son todos los isomorfismos de C. La notación $X \in \mathsf{C}$ significa que X es un objeto de la categoría C. Dadas las categorías C y D, denotaremos por $[\mathsf{C}, \mathsf{D}]$ o D^{C} a la categoría de todos los funtores de C a D.

Usaremos las siguientes notaciones para algunas categorías importantes. $\mathbf{Set}$ es la categoría de los conjuntos con todas las funciones entre ellos; $\mathbf{Set}_f$ es la subcategoría plena de $\mathbf{Set}$ de conjuntos finitos; $\mathbf{Bij}_f = (\mathbf{Set}_f)_{iso}$; si $\mathbf{G}$ es un grupo, $\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}$ es la categoría de $\mathbf{G}$-conjuntos finitos (izquierdos) y $\mathbf{G}$-funciones como morfismos; $\mathbf{Gpd}$ denota a la categoría de grupoides y $\mathbf{Cat}$ a la categoría de todas las categorías.

Para cada natural n, $[n] := \{1, 2, ..., n\}$, $[0] := \emptyset$. Dado un conjunto N, denotamos por $\mathbf{Sym}(N)$ al grupo simétrico en N. En particular, $\mathbf{S}_n = \mathbf{Sym}([n])$ es el grupo simétrico de grado n.

1.2. Categorías Coma

Definición 1.2.1. *Para una categoría C y un objeto $X \in \mathsf{C}$, la categoría coma C/X (también $\mathsf{C} \downarrow X$) es la categoría de morfismos sobre X, es decir, un objeto de esta categoría es un morfismo $\alpha : A \to X$, donde $A \in \mathsf{C}$, y un morfismo f de $\alpha : A \to X$ a $\beta : B \to X$ es un morfismo $f : A \to B$ en C tal que $\beta \circ f = \alpha$.*

Tenemos también un funtor llamado localizador tal que

$$\Sigma_X : \mathsf{C}/X \to \mathsf{C}; \alpha : (A \to X) \longmapsto A; f : (\alpha : A \to X) \to (\beta : B \to X) \longmapsto f$$

En general, dados dos funtores $\mathbf{F} : \mathsf{A} \to \mathsf{C}$ y $\mathbf{G} : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$, la categoría coma $\mathbf{F} \downarrow \mathbf{G}$ se define como la categoría de ternas (X, α, Y), donde $X \in \mathsf{A}$, $Y \in \mathsf{B}$ y $\alpha : \mathbf{F}(X) \to \mathbf{G}(Y)$. Un morfismo en la categoría coma es un par $(f, g) : (X, \alpha, Y) \to (X', \alpha', Y')$ tal que $f : X \to X'$ y $g : Y \to Y'$ son morfismos en A y B respectivamente, con la condición $\mathbf{G}(f) \circ \alpha = \alpha' \circ \mathbf{F}(f)$.

En particular, para un funtor $\mathbf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ y un objeto A de D, la categoría coma $A \downarrow \mathbf{F}$ tiene como elementos a pares de la forma (α, Y), donde Y es un objeto en C y $\alpha : A \to \mathbf{F}(Y)$. Un morfismo $g : (\alpha, Y) \to (\beta, Z)$ es un morfismo $g : Y \to Z$ en C tal que $\mathbf{F}(g) \circ \alpha = \beta$.

Sea C una categoría y X un objeto de C. Denotaremos por $(\mathsf{C} \downarrow X)_m$ a la subcategoría plena de $(\mathsf{C} \downarrow X)$ compuesta por todos los objetos que son monomorfismos. Definimos la relación de equivalencia $\sim$ sobre $(\mathsf{C} \downarrow X)_m$ como

$$(\sigma : Y \to X) \sim (\lambda : Z \to X) \Leftrightarrow \text{existen morfismos}$$
$$t_1 : (\sigma : Y \to X) \to (\lambda : Z \to X) \ \ y \ \ t_2 : (\lambda : Z \to X) \to (\sigma : Y \to X).$$

Dicha relación es claramente una relación de equivalencia.

Definición 1.2.2. *A las clases de equivalencia bajo dicha relación les llamaremos subobjetos de X.*

Observación. Si $(\sigma : Y \to X)$ y $(\lambda : Z \to X)$ pertenecen a la misma clase de subobjetos de X, entonces $Y \cong Z$.

Dem. Como $(\sigma : Y \to X)$ y $(\lambda : Z \to X)$ pertenecen a la misma clase de subobjetos de X, entonces existen $t_1 : Z \to Y$ y $t_2 : Y \to Z$ tales que

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[dd, "t_1"'] & \\
& X \\
Z \arrow[ur, "\lambda"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[dd, "t_2"'] & \\
& X \\
Y \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}
$$

conmutan. Tenemos entonces que $\sigma = \lambda \circ t_1 = \sigma \circ t_2 \circ t_1$ y como σ es monomorfismo, entonces $t_2 \circ t_1 = id_Y$, análogamente $t_1 \circ t_2 = id_Z$. Por lo tanto, $Y \cong Z$.

□

1.3. La categoría de elementos

Definición 1.3.1. *Dado un funtor $\boldsymbol{F} : C \to \boldsymbol{Set}$, un elemento del funtor $\boldsymbol{F}$ es un par (X, s) con $X \in C$ y s un elemento del conjunto $\boldsymbol{F}(X)$. Un morfismo $f : (X, s) \to (Y, t)$ entre elementos de $\boldsymbol{F}$ es un morfismo $f : X \to Y$ en C tal que $\boldsymbol{F}(f)(s) = t$.*

Los elementos de $\mathbf{F}$, a los que denotaremos por $\mathbf{Elts}(\mathbf{F})$, forman una categoría, pues si $f : (X, s) \to (Y, t)$ y $g : (Y, t) \to (Z, u)$, $\mathbf{F}(g \circ f)(s) = (\mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f))(s) = \mathbf{F}(g)(\mathbf{F}(f)(s)) = \mathbf{F}(g)(t) = u$, por lo tanto, la composición está bien definida y al heredar $\mathbf{Elts}(\mathbf{F})$ las propiedades de C, $\mathbf{Elts}(\mathbf{F})$ es también una categoría.

Tenemos así un funtor fiel llamado proyección

$$S_{\mathbf{F}} : \mathbf{Elts}(\mathbf{F}) \to \mathsf{C}$$

tal que $(X, s) \longmapsto X; g : (X, s) \to (X', s') \longmapsto g$.

Por lo tanto, podemos construir un funtor

$$\Lambda : [\mathsf{C}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Cat}/\mathsf{C}$$

donde $\Lambda(\mathbf{F}) = \mathbf{S_F}$ para un funtor $\mathbf{F}$ en $[\mathsf{C}, \mathbf{Set}]$ y si $\mu : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F}'$ es una transformación natural entonces $\Lambda(\mu) : \mathbf{S_F} \to \mathbf{S_{F'}}$ es el funtor tal que para un elemento (X, s), $\Lambda(\mu)(X, s) = (X, \mu_X(s))$, claramente $(X, \mu_X(s))$ es un elemento de $\mathbf{F}'$ por ser μ_X un morfismo de $\mathbf{F}(X)$ en $\mathbf{F}'(X)$, si $g : (X, s) \to (X', s')$ entonces $\Lambda(\mu)(g) = g$, esta manera de definirla está bien, ya que por ser μ una transformación natural tenemos que $\mathbf{F}'(g) \circ \mu_X(s) = \mu_{X'}(\mathbf{F}(g)(s)) = \mu_{X'}(s)$.

1.4. E-estructuras

Definición 1.4.1. *Dado un funtor fiel $\boldsymbol{F} : \mathsf{E} \to \mathsf{D}$ y un objeto N de D, una E-estructura sobre N (a lo largo de $\boldsymbol{F}$) es un par (X, σ) tal que X es un objeto de E y $\sigma : \boldsymbol{F}(X) \to N$ es un isomorfismo. A N se le llamará el conjunto etiqueta.*

Un morfismo $f : (X, \sigma) \to (Y, \tau)$ entre E-estructuras sobre N a lo largo de $\mathbf{F}$ es un morfismo $f : X \to Y$ en E tal que $\tau \circ \mathbf{F}(f) = \sigma$. De esta manera tenemos $\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)$, la categoría de E-estructuras sobre N a lo largo $\mathbf{F}$. El conjunto de las clases de isomorfismo de E-estructuras sobre N es denotado por $\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong$. Un elemento de $\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong$ tiene la forma $[X, \sigma]$, con X un objeto y $\sigma : \mathbf{F}(X) \to N$ un isomorfismo. Así, tenemos que:

$$[X, \sigma] = [Y, \tau] \Leftrightarrow \exists f : X \xrightarrow{\cong} Y \text{ tal que } \tau \circ \mathbf{F}(f) = \sigma$$

1.5. Funtores con fibras finitas

Definición 1.5.1. *Decimos que un funtor $\boldsymbol{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ tiene fibras finitas si para cualquier objeto Y de D, existe sólo un número finito de clases de isomorfismo de objetos X tales que $\boldsymbol{F}(X) \cong Y$. Es decir,*

$$|\{X \in \mathsf{C} | \boldsymbol{F}(X) \cong Y\}/\cong| < \infty.$$

Lema 1.5.1. *Sea $\boldsymbol{F} : \mathsf{E} \to \mathsf{D}$ un funtor fiel sobre una categoría D con grupos de automorfismos finitos. Entonces:*

1.- Bajo cualquiera de las dos siguientes hipótesis, $\boldsymbol{F}$ tiene fibras finitas:

(a) $\boldsymbol{F}$ tiene un adjunto derecho y cada objeto X de E tiene sólo un número finito de subobjetos.

(b) $\boldsymbol{F}$ tiene un adjunto izquierdo y cada objeto X de E tiene sólo un número finito de cocientes.

2.- $|\boldsymbol{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong| < \infty$ para todo objeto N de D si y sólo si $\boldsymbol{F}$ tiene fibras finitas.

Dem. 2)[$\Rightarrow$]. Supongamos que $|\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong| < \infty$. Sea $\mathbf{H} : \mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong \to \{X \in \mathsf{C} | \mathbf{F}(X) \cong Y\}/\cong$ definida por $\mathbf{H}([X, \sigma]) = [X]$. La función está bien definida, pues si $[X, \sigma] = [X', \sigma']$ entonces $[X] = [X']$. Como resulta claro que la función es suprayectiva, tenemos que $|\mathbf{F}^{-1}(N)/\cong| < |\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong|$, $\therefore$ $\mathbf{F}$ tiene fibras finitas.

[$\Leftarrow$]. Supongamos que $\mathbf{F}$ tiene fibras finitas. Sea $[X] \in \{X \in \mathsf{C} | \mathbf{F}(X) \cong N\}/\cong$, $\mathbf{H}^{-1}([X]) = \{[Y, \sigma] \in \mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong | [Y] \cong [X]\}$, así que

$$|\mathbf{H}^{-1}([X])| \leq |\{(X, \sigma) | \sigma : \mathbf{F}(X) \xrightarrow{iso} N\}| = |\mathbf{Aut}(N)| < \infty.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}|\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong| &= |\mathbf{H}^{-1}([X])||\{X\in \mathsf{C}|\mathbf{F}(X)\cong N\}/\cong|\\ &\leq |\mathbf{Aut}(N)||\{X\in \mathsf{C}|\mathbf{F}(X)\cong N\}/\cong| < \infty.\end{aligned}$$

1). Bastará con demostrarlo solo para a), pues las hipótesis a) y b) son duales una de la otra. Supongamos entonces que $\mathbf{F}$ tiene adjunto derecho y cada objeto X de E tiene asociado sólo un número finito de subobjetos. Sea $\mathbf{R}:\mathsf{D}\to\mathsf{E}$ adjunto derecho de $\mathbf{F}:\mathsf{E}\to\mathsf{D}$ y sea $\sigma:\mathbf{F}(X)\to N$ un isomorfismo. Demostraremos que $\widehat{\sigma}:X\to\mathbf{R}(N)$, el morfismo correspondiente en la biyección natural de la adjunción, es un monomorfismo. Sean $u,v:A\to X$ tales que $\widehat{\sigma}\circ u=\widehat{\sigma}\circ v$, entonces $\mathbf{F}(\widehat{\sigma}\circ u)=\mathbf{F}(\widehat{\sigma}\circ v)$. Como

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(A) \arrow[r, shift left, "\mathbf{F}(u)"] \arrow[r, shift right, "\mathbf{F}(v)"'] & \mathbf{F}(X) \arrow[r, "\mathbf{F}(\sigma)"] \arrow[dr, "\cong", "\sigma"'] & \mathbf{FR}(N) \arrow[d, "\epsilon_N"] \\
& & N,
\end{tikzcd}$$

donde ϵ es la counidad. Entonces $\sigma\circ\mathbf{F}(u)=\sigma\circ\mathbf{F}(v)$ y como σ es un isomorfismo se tiene que $\mathbf{F}(u)=\mathbf{F}(v)$ y por la fidelidad de $\mathbf{F}$, $u=v$. De esta manera se tiene que $\widehat{\sigma}$ es un monomorfismo.

Como $\widehat{\sigma}:X\to\mathbf{R}(N)$ es un monomorfismo, entonces $\widehat{\sigma}:X\to\mathbf{R}(N)$ pertenece a la clase de subobjeto de algún $g_j:Z_j\to\mathbf{R}(N)$. Definimos la función

$$\omega:\{X\in\mathsf{E}|\mathbf{F}(X)\cong N\}/\cong\to\mathbf{Sub}(\mathbf{R}(N)),$$

de la siguiente manera. Si $[X]\in\{X\in\mathsf{E}|\mathbf{F}(X)\cong N\}/\cong$, entonces elegimos primero un representante de la clase (en este caso ya elegimos a X) y elegimos una $\sigma:\mathbf{F}(X)\xrightarrow{\cong}N$ y le asignamos

$$\omega(X)=\widehat{\sigma}.$$

Es claro que ω está bien definida. Si $\omega(X)=\omega(X')$, existen $\sigma_1:\mathbf{F}(X)\xrightarrow{\cong}N$ y $\sigma_2:\mathbf{F}(X')\xrightarrow{\cong}N$ tales que $\widehat{\sigma_1}:X\to\mathbf{R}(N)$ y $\widehat{\sigma_2}:X'\to\mathbf{R}(N)$ pertenecen a la misma clase de subobjeto y por lo tanto, $X\cong X'$ ($X=X'$, por la elección que se hizo del representante de cada clase). Con esto último tenemos que ω es inyectiva, así que

$$|\{X\in\mathsf{E}|\mathbf{F}(X)\cong N\}/\cong|\leq|\mathbf{Sub}(\mathbf{R}(N))|<\infty.$$

Por lo tanto, $\mathbf{F}$ tiene fibras finitas. $\square$

Ejemplos

SUPRAYECCIONES.-Sea **Surj** la categoría de funciones suprayectivas entre conjuntos finitos, es decir, un objeto de la categoría es una función suprayectiva

$$X \xrightarrow{p} X'$$

(X y X' conjuntos finitos) y un morfismo

$$(f,f') : (X \xrightarrow{p} X') \to (Y \xrightarrow{q} Y')$$

(p y q suprayectivas) es un par de funciones $f : X \to Y$ $f' : X' \to Y'$ tales que $f' \circ p = q \circ f$. Tenemos un funtor fiel $\mathbf{F} : \mathbf{Surj} \to \mathbf{Set}_f$ definido como $\mathbf{F}(X \xrightarrow{p} X') = X$ en los objetos y $\mathbf{F}(f,f') = f$ en los morfismos. Entonces, una **Surj**-estructura $(X \xrightarrow{p} X',\sigma)$ sobre N da una partición $\{\sigma[p^{-1}(x')]\}_{x' \in X'}$ de la misma N. Por otra parte, tenemos que una partición $\{\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k\}$ de N genera una **Surj**-estructura $(N \xrightarrow{p} [k], id_N)$ donde $p(x) = i$ si $x \in \mathcal{B}_i$. Veamos primero que si dos **Surj**-estructuras son equivalentes, entonces las particiones generadas por ellas son la misma.

Sean $(X \xrightarrow{p} X', \sigma)$ y $(Y \xrightarrow{q} Y', \omega)$ dos **Surj**-estructuras equivalentes entre ellas, existe entonces un isomorfismo

$$(f,f') : (X \xrightarrow{p} X') \to (Y \xrightarrow{q} Y')$$

tal que $\omega \circ \mathbf{F}(f,f') = \sigma$ i.e $\omega \circ f = \sigma$ con f un isomorfismo. Consideremos entonces el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, leftrightarrow, "f'"] & Y' \\
X \arrow[u, "p"] \arrow[r, leftrightarrow, "f"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\sigma"'] & Y \arrow[u, "q"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\omega"] \\
N \arrow[r, equal, "id_N"'] & N
\end{tikzcd}$$

Lo que nos muestra este diagrama es que si $x' \in X'$, entonces existe una única $y' \in Y'$ tal que $\sigma[p^{-1}(x')] = \omega[q^{-1}(y')]$, con lo que podemos concluir que las particiones que arrojan ambas son la misma.

Si empezamos tomando una **Surj**-estructura $(X \xrightarrow{p} X', \sigma)$ y obtenemos la partición

$$\{\sigma[p^{-1}(x')]\}_{x' \in X'},$$

generamos con esta a la **Surj**-estructura

$$(N \xrightarrow{q} \{\sigma[p^{-1}(x')]\}_{x' \in X'}, id_N)$$

donde $q(n) = \{\sigma[p^{-1}(x')]\}$ si $p(\sigma^{-1}(n)) = x'$.

Veamos que $(X \xrightarrow{p} X', \sigma)$ y $(N \xrightarrow{q} \{\sigma[p^{-1}(x')]\}_{x' \in X'}, id_N)$ son isomorfas.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\sigma"'] & X' \arrow[d, "\eta"] \\
N \arrow[r, "q"'] & \{\sigma(p^{-1}(x'))\}_{x' \in X'}
\end{tikzcd}$$

$\eta(x') = \{\sigma[p^{-1}(x')]\}$. η es claramente inyectiva, pues si $x \neq x'$ entonces $p^{-1}(x) \cap p^{-1}(x') = \emptyset$ y como σ es biyectiva entonces $\sigma[p^{-1}(x)] \neq \sigma[p^{-1}(x')]$. Si $x \in X$, $\sigma(x) \in N$ y como $p(\sigma^{-1} \circ \sigma(x)) = p(x)$ se tiene que $q(\sigma(x)) = \{\sigma(p^{-1}(p(x)))\} = \eta \circ p(x)$, concluimos entonces que $(X \xrightarrow{p} X', \sigma)$ y $(N \xrightarrow{q} \{\sigma[p^{-1}(x')]\}_{x' \in X'}, id_N)$ son isomorfas.

Por otra parte, si comenzamos con una partición $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ..., \mathcal{B}_k\}$, obtenemos la **Surj**-estructura $(N \xrightarrow{p} [k], id)$, esta a su vez nos induce la partición $\{p^{-1}(i)\}_{i \in [k]} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ..., \mathcal{B}_k\}$. Por lo tanto tenemos una biyección entre $\mathbf{Str(Surj}/[n]\mathbf{)}/\cong$ y el número de relaciones de equivalencia sobre $[n]$, es decir, $|\mathbf{Str(Surj}/[n]\mathbf{)}/\cong|$ es igual al número de Bell $b(n)$.

En el artículo de Yoshida [1] se menciona que si tomamos un grupo $\mathbf{G}$ finitamente generado y $\mathbf{H}$ un subgrupo de $\mathbf{G}$, el funtor restricción

$$\mathbf{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}} : \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}} \to \mathbf{Set}_f^{\mathbf{H}}; X \mapsto X$$

tiene adjunto izquierdo, así como derecho. El siguiente ejemplo muestra que dicha afirmación es falsa.

Ejemplo. Sean $\mathbf{G} = \mathbb{Z}$ y $\mathbf{H} = \{e\}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 2$, definimos la acción de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}_n$ como $a * \overline{b} = \overline{a+b}$. Supongamos que $\mathbf{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}$ tiene adjunto izquierdo

$$\text{Ł} : \mathbf{Set}_f^{\mathbf{H}} \to \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}.$$

Existe entonces una biyección natural entre

$$\mathbf{Set}_f^{\mathbb{Z}}(\text{Ł}(\mathbb{Z}_m), \mathbb{Z}_n) \text{ y } \mathbf{Set}_f^{\{e\}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbf{Set}_f(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n).$$

Sea $f \in \mathbf{Set}_f^{\mathbb{Z}}(\mathrm{L}(\mathbb{Z}_m), \mathbb{Z}_n)$ y sea $x \in \mathrm{L}(\mathbb{Z}_m)$. Si $j \not\equiv k(mod(n))$, entonces

$$\overline{j + f(x)} \neq \overline{k + f(x)} \Rightarrow f(jx) \neq f(kx) \Rightarrow jx \neq kx.$$

$\therefore$ $|\mathrm{L}(\mathbb{Z}_m)| \geq n \ \forall n \geq 2$, lo cual es una contradicción. Podemos concluir que no tiene adjunto izquierdo.

Supongamos que tiene adjunto derecho

$$\mathbf{D} : \mathbf{Set}_f^{\mathbf{H}} \to \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}.$$

Existe una biyección natural entre

$$\mathbf{Set}_f^{\{e\}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_2) = \mathbf{Set}_f(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_2) \text{ y } \mathbf{Set}_f^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbf{D}(\mathbb{Z}_2)).$$

Si $f \in \mathbf{Set}_f^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_2)$ f está completamente determinada por lo que hace en 0 (o en cualquier otro elemento), pues

$$f(\overline{a}) = f(\overline{a + 0}) = (a) * f(0).$$

Esto quiere decir que $|\mathbf{Set}_f^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbf{D}(\mathbb{Z}_2))| \leq |\mathbf{D}(\mathbb{Z}_2)| \Rightarrow 2^n = |\mathbf{Set}_f(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_2)| = |\mathbf{Set}_f^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbf{D}(\mathbb{Z}_2))| \leq |\mathbf{D}(\mathbb{Z}_2)|$ para cualquier n, $\therefore$ $|\mathbf{D}(\mathbb{Z}_2)| = \infty$ teniendo de nuevo una contradicción. Concluimos que tampoco existe adjunto derecho.

Podemos cambiar la afirmación anterior por la siguiente proposición.

Proposición 1.5.1. *Si $\boldsymbol{H} \leq \boldsymbol{G}$ tal que el número de clases laterales izquierdas , $(\boldsymbol{G} : \boldsymbol{H})$, es finito, entonces el funtor*

$$\boldsymbol{Res}_{\boldsymbol{H}}^{\boldsymbol{G}} : \boldsymbol{Set}_f^{\boldsymbol{G}} \to \boldsymbol{Set}_f^{\boldsymbol{H}}$$

tiene adjunto derecho.

Dem. Comencemos primero por observar que si $Y \in \mathbf{Set}_f^{\mathbf{H}}$, entonces

$$|\mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y)| < \infty :$$

Sea $\varphi \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y)$, como

$$\mathbf{G} = \bigcup_{g \in \{g_1, \dots, g_k\}} \mathbf{H}g,$$

con la unión ajena, tenemos que para cualquier $g \in \mathbf{G}$, $g = hg_r$ para algún $r \in \{1, \dots, k\}$. Evaluando en φ en g,

$$\varphi(g) = \varphi(hg_r) = h\varphi(g_r).$$

Por lo tanto φ está completamente determinada por $\{\varphi(g_r)\}_{r\in\{1,\dots,k\}}$ y así,

$$|\mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y)| \leq |Y|^{|\{1,\dots,k\}|} = |Y|^k < \infty.$$

Le daremos ahora a $\mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y)$ una estructura de $\mathbf{G}$-conjunto: Si $g \in \mathbf{G}$ y $f \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y)$, definimos $g * f$ como

$$g * f(x) = f(xg).$$

Veamos que $g * f \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y)$. Sea $h \in \mathbf{H}$, $h(g * f)(x) = h(f(xg)) = f(hxg) = (g * f)(hx)$, con lo cual $g * f \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y)$. Tenemos que

1. $e * f = f$ de manera trivial
2. Si $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$, entonces para $x \in \mathbf{G}$, $((g_1 g_2) * f)(x) = f(xg_1 g_2) = f((xg_1)g_2) = (g_2 * f)(xg_1) = g_1 * (g_2 * f)(x)$.

Por lo tanto, $\mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y)$ es un $\mathbf{G}$-conjunto finito bajo esta acción.

Definimos entonces el funtor $\mathrm{L} : \mathbf{Set}_f^{\mathbf{H}} \to \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}$ de la siguiente manera. Si $Y \in \mathbf{Set}_f^{\mathbf{H}}$,

$$\mathrm{L}(Y) = \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y)$$

y si $f \colon Y_1 \to Y_2$, entonces $\mathrm{L}(f) : \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y_1) \to \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y_2)$ está dada por

$$\mathrm{L}(f)(\sigma) = f \circ \sigma,$$

con $\sigma \in \mathbf{Set}_f^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y_1)$, además, $f \circ \sigma \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y_2)$. Como podemos observar,

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(f_1 \circ f_2)(\sigma) &= (f_1 \circ f_2)(\sigma) = \mathrm{L}(f_1)(f_2 \circ \sigma) \\ &= \mathrm{L}(f_1)(\mathrm{L}(f_2(\sigma))) = (\mathrm{L}(f_1) \circ \mathrm{L}(f_2))(\sigma), \end{aligned}$$

así que L es funtor (es claro que L manda la identidad en la identidad).

Veamos tambien que $\mathrm{L}(f) : \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y_1) \to \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y_2)$ es una $\mathbf{G}$-función. Si $\varphi \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}(\mathbf{G}, Y_1)$ y $g \in \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned} g * \mathrm{L}(f)(\varphi)(g') &= g * (f \circ \varphi)(g') = f \circ \varphi(g' g) \\ &= f(g * \varphi(g')) = f \circ (g * \varphi)(g') = \mathrm{L}(f)(g * \varphi)(g'), \end{aligned}$$

para toda $g' \in \mathbf{G}$. Por lo tanto $\mathrm{L}(f)$ es $\mathbf{G}$-función.

Tenemos que encontrar una biyección natural entre $\mathbf{Set}_f^{\mathbf{H}}(\mathbf{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(X), Y)$ y $\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}(X, \mathrm{L}(Y))$, donde $X \in \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}$ y $Y \in \mathbf{Set}_f^{\mathbf{H}}$. Si $\alpha : X \to \mathrm{L}(Y)$, entonces definimos $\widehat{\alpha} : \mathbf{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(X) \to Y$ como

$$\widehat{\alpha}(x) = \alpha(x)(e).$$

Si $h \in \mathbf{H}$, $h\widehat{\alpha}(x) = h\alpha(x)(e) = \alpha(hx)(e) = \widehat{\alpha}(hx)$, así que en efecto $\widehat{\alpha}$ es una $\mathbf{H}$-función.

Si $\beta : \mathbf{Res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(X) \to Y$, entonces definimos $\overline{\beta} : X \to \mathrm{L}(Y)$ como

$$\overline{\beta}(x)(g) = \beta(g \cdot x).$$

Tenemos que ver que $\overline{\beta}(x)$ es un morfismo de $\mathbf{H}$-conjuntos. Sean $g \in \mathbf{G}$ y $h \in \mathbf{H}$, entonces

$$\overline{\beta}(x)(hg) = \beta((hg)\cdot x) = h\beta(g\cdot x) = h * (\overline{\beta}(x))(g).$$

Veamos también que $\overline{\beta}$ es un morfismo de $\mathbf{G}$-conjuntos. Sean $g, g' \in \mathbf{G}$ y $x \in X$, entonces

$$\overline{\beta}(g\cdot x)(g') = ((g'g)\cdot x) = \overline{\beta}(x)(g'g) = (g * \overline{\beta}(x))(g').$$

Veremos a continuación que si $\beta \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}_{f}(\mathbf{Res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(X), Y)$, entonces $\widehat{\overline{\beta}} = \beta$. Tomemos pues $\beta \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}_{f}(\mathbf{Res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(X), Y)$, entonces $\overline{\beta} \in \mathbf{Set}^{\mathbf{G}}_{f}(X, \mathrm{L}(Y))$ es tal que $\overline{\beta}(x)(g) = \beta(g\cdot x)$, entonces $\widehat{\overline{\beta}} \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}_{f}(\mathbf{Res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(X), Y)$ cumple que

$$\widehat{\overline{\beta}}(x) = \overline{\beta}(x)(e) = \beta(e\cdot x) = \beta(x).$$

Por otra parte, si $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathbf{G}}_{f}(X, \mathrm{L}(Y))$, entonces $\widehat{\alpha} \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}_{f}(\mathbf{Res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(X), Y)$ y $\widehat{\alpha}(x) = \alpha(x)(e)$, así que $\overline{\widehat{\alpha}} \in \mathbf{Set}^{\mathbf{G}}_{f}(X, \mathrm{L}(Y))$ cumple que

$$\overline{\widehat{\alpha}}(x)(g) = \widehat{\alpha}(g\cdot x) = \alpha(g\cdot x)(e) = g * \alpha(x)(e) = \alpha(x)(g).$$

Resta probar que la biyección que hemos dado, a la que llamaremos η, es natural. Sean $t_1 : X \to X'$ y $t_2 : Y' \to Y$, tenemos que demostrar que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\mathbf{H}}_{f}(\mathbf{Res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(X), Y) \arrow[r, "\eta_{X,Y}"] & \mathbf{Set}^{\mathbf{G}}_{f}(X, \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}_{f}(\mathbf{G}, Y)) \\
\mathbf{Set}^{\mathbf{H}}_{f}(\mathbf{Res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(X'), Y') \arrow[u, "\phi_1"] \arrow[r, "\eta_{X',Y'}"'] & \mathbf{Set}^{\mathbf{G}}_{f}(X', \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}_{f}(\mathbf{G}, Y')) \arrow[u, "\phi_2"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde $\phi_1(\_) = t_2 \circ \_ \circ t_1$ y $\phi_2(\_) = \mathrm{L}(t_2)\circ \_ \circ t_1$. Sea $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}_{f}(\mathbf{Res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(X'), Y')$, entonces

$$\eta_{X,Y}(\phi_1(\alpha))(x)(g) = \eta_{X,Y}(t_2\circ\alpha\circ t_1)(x)(g) = \overline{t_2\circ\alpha\circ t_1}(x)(g) = (t_2\circ\alpha\circ t_1)(g\cdot x),$$

por otra parte,

$$\begin{aligned}\phi_2(\eta_{X',Y'}(\alpha))(x)(g) &= \phi_2(\overline{\alpha})(x)(g) = (\mathrm{L}(t_2)\circ\overline{\alpha}\circ t_1)(x)(g) = \mathrm{L}(t_2)((\overline{\alpha}\circ t_1)(x))(g)\\ &= (t_2\circ(\overline{\alpha}(t_1(x)))(g)) = t_2(\alpha(g\cdot t_1(x))) = t_2(\alpha(t_1(g\cdot x))) = (t_2\circ\alpha t_1)(g\cdot x).\end{aligned}$$

□

Pese a haber sido incorrecta la afirmación, la siguiente afirmación que hace Yoshida [1] es verdadera. El funtor $\mathbf{Res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}$ tiene fibras finitas si $\mathbf{G}$ es finitamente generado. Si tomamos $X \in \mathbf{Set}^{\mathbf{H}}_f$,

$$|\{Y \in \mathbf{Set}^{\mathbf{G}}_f | \mathbf{Res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(Y) \cong X\}| \leq |\mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_X)| \leq |\mathbf{S}_X|^{|K|} < \infty,$$

donde K es un subconjunto finito generador de $\mathbf{G}$.

Sea N un $\mathbf{H}$-conjunto finito con su representación de permutación asociada

$$\rho_N : \mathbf{H} \to \mathbf{S}_N; h \mapsto (i \mapsto hi)$$

y denotaremos por $\mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_N; \mathbf{H}, \rho_N)$ al conjunto $\{\pi \in \mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_N) | \pi_{|\mathbf{H}} = \rho_N\}$. Como $\mathbf{G}$ es finitamente generado, $\mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_N)$ es finito. Tenemos entonces la siguiente biyección.

$$\mathbf{Str}(\mathbf{Set}^{\mathbf{G}}_f/N)/\cong \leftrightarrow \mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_N; \mathbf{H}, \rho_N)$$

dada por

$$\lambda_1([X, \sigma]) = (\pi : g \mapsto (\pi(g) : i \mapsto \sigma(g * \sigma^{-1}(i))))$$

Veamos que $\pi(g) \in \mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_N)$. Si $g_1, g_2 \in \mathbf{G} \Rightarrow \pi(g_1g_2)(i) = \sigma((g_1g_2) * \sigma^{-1}(i)) = \sigma(g_1 * \sigma^{-1}(\sigma(g_2 * \sigma^{-1}(i)))) = \pi(g_1)(\sigma(g_2 * \sigma^{-1}(i))) = \pi(g_1)(\pi(g_2)(i)) = (\pi(g_1)\circ\pi(g_2))(i)$ $\therefore$ π es homomorfismo.

Si $h \in \mathbf{H}$, entonces $\pi(h)(i) = \sigma(h * \sigma^{-1}(i)) = h * \sigma(\sigma^{-1}(i)) = h * i = \rho_N(i)$ $\therefore$ $\pi_{|\mathbf{H}} = \rho_N$.

Veamos que λ_1 está bien definida. Sean $[X, \sigma] = [Y, \omega]$, existe $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ tal que $\omega\circ\mathbf{Res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(f) = \sigma$. Tenemos entonces que $\pi(h)(i) = \sigma(h * \sigma^{-1}(i)) = (\omega\circ f)(h * ((f^{-1}\circ\omega^{-1})(i))) = (\omega\circ f)(f^{-1}(h*\omega^{-1}(i))) = \omega(h*\omega^{-1}(i))$, por lo que no depende del representante. Tenemos además $\lambda_2 : \mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_N; \mathbf{H}, \rho_N) \to \mathbf{Str}(\mathbf{Set}^{\mathbf{G}}_f/N)/\cong$ definida como

$$\lambda_2(\pi : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_N | \pi_{|\mathbf{H}} = \rho_N) = [N, 1],$$

donde la acción sobre N está dada por $g \star i = \pi(g)(i)$.

Si comenzamos tomando $\pi \in \mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_N; \mathbf{H}, \rho_N)$ y le aplicamos λ_2, obtenemos $[N, 1]$, si aplicamos λ_1 se tiene $\widehat{\pi} \in \mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_N; \mathbf{H}, \rho_N)$ tal que $\widehat{\pi}(g)(i) = g * i = \pi(g)(i) \therefore \widehat{\pi} = \pi$.

Por otra parte, si tomamos $[X, \sigma]$ una $\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}$-estructura sobre N, entonces $\lambda_1([X, \sigma]) = (\pi : g \to (\pi(g) : i \to \sigma(g * \sigma^{-1}(i))))$, aplicando λ_2 tenemos que $\lambda_2(\pi) = [N, 1]$, cuya acción está dada por $g \star i = \pi(g)(i) = \sigma(g * \sigma^{-1}(i))$. Como $g \star (\sigma(x)) = \pi(g)(\sigma(x)) = \sigma(g * \sigma^{-1}(\sigma(i))) = \sigma(g * x)$ y σ es un isomorfismo en $\mathbf{Set}_f^{\mathbf{H}}$, entonces σ es isomorfismo en $\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}$ y $1 \circ \mathbf{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\sigma) = \mathbf{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\sigma)$. Por lo tanto, $[N, 1] = [X, \sigma]$. Cuando $\mathbf{H} = \{e\}$ y $N = [n]$, entonces el funtor $\mathbf{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}$ es el funtor que olvida y la biyección que se tiene es

$$\mathbf{Str}(\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}/[n])/\cong \leftrightarrow \mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_n). \tag{1.1}$$

Capítulo 2

Especies

2.1. Especies

Definición 2.1.1. *Entenderemos por una especie a cualquier funtor* $\mathcal{A} : \mathbf{Bij}_f \to \mathbf{Set}_f$. *Un morfismo entre especies es una transformación natural. De esta manera tenemos definida a la categoría de especies, a la cual se le denotará por* $[\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f]$. *La imagen de un conjunto* E *bajo la especie* $\mathcal{A}$ *se escribirá como* $\mathcal{A}[E]$ *y sus elementos serán llamados* $\mathcal{A}$*-estructuras (etiquetadas por* E*).*

Veremos a continuación que una especie $\mathcal{A}$ está completamente determinada, salvo equivalencias, por la serie $\{\mathcal{A}[n]\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{A}[n]$ es un $\mathbf{S}_n$-conjunto.

Proposición 2.1.1. *Las categorías* $[\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f]$ *y* $\prod_n \mathbf{Set}_f^{\mathbf{S}_n}$ *son equivalentes, con* $\prod_n \mathbf{Set}_f^{\mathbf{S}_n}$ *la categoría de sucesiones de* $\mathbf{S}_n$*-conjuntos finitos cuyos morfismos son* $\mathbf{S}_n$*-funciones en sus respectivas coordenadas.*

Dem. Definimos el funtor

$$\wp : [\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f] \Rightarrow \prod_n \mathbf{Set}_f^{\mathbf{S}_n}$$

de la siguiente manera. Si $\mathbf{F} : \mathbf{Bij}_f \to \mathbf{Set}_f$, entonces $\wp(\mathbf{F}) = \{\mathbf{F}[n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde la acción de $\mathbf{S}_n$ sobre $\mathbf{F}[n]$ está dada por $\sigma * a = \mathbf{F}(\sigma)(a)$. Si μ es una transformación natural de $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$, entonces $\wp(\mu) = \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que ver que μ_n es una $\mathbf{S}_n$-función $\forall n \in \mathbb{N}$, pero esto se desprende del hecho de que μ es una transformación natural: Si $\sigma \in \mathbf{S}_n$ y $a \in \mathbf{F}_1[n]$, entonces $\mu_n(\mathbf{F}_1(\sigma)(a)) = \mathbf{F}_2(\sigma)(\mu_n(a))$, como se ilustra en el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}_1[n] \arrow[r, "\mu_n"] \arrow[d, "\mathbf{F}_1(\sigma)"'] & \mathbf{F}_2[n] \arrow[d, "\mathbf{F}_2(\sigma)"] \\ \mathbf{F}_1[n] \arrow[r, "\mu_n"'] & \mathbf{F}_2[n]. \end{tikzcd}$$

Definiremos a continuación el funtor

$$\Re : \prod_n \mathbf{Set}_f^{\mathbf{S}_n} \Rightarrow [\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f].$$

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión donde cada X_n es un $\mathbf{S}_n$-conjunto, definimos el funtor $\mathcal{A}_X$ de la siguiente manera.

Para cada $Y \in \mathbf{Bij}_f$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ única tal que $Y \cong [n]$. Sea f_Y una biyección de Y a $[n]$, si $Y = [n]$ tomaremos la identidad. Sea $\mathcal{A}_X : \mathbf{Bij}_f \to \mathbf{Set}_f$ la especie que le asigna a un conjunto finito Y, X_n, donde n es tal que $[n] \cong Y$. Sea $g : Y \to Y'$ una función biyectiva, definiremos a $\mathcal{A}_X(g) : \mathcal{A}_X(Y) \to \mathcal{A}_X(Y')$ como $\mathcal{A}_X(g)(a) = (f_{Y'} \circ g \circ f_Y^{-1}) * a$ ($*$ es la acción de $\mathbf{S}_n$ sobre X_n). Si $g_1 : Y_1 \to Y_2$ y $g_2 : Y_2 \to Y_3$, entonces $\mathcal{A}_X(g_2 \circ g_1)(a) = (f_{Y_3} \circ (g_2 \circ g_1) \circ f_{Y_1}^{-1}) * a = (f_{Y_3} \circ g_2 \circ f_{Y_2}^{-1}) \circ (f_{Y_2} \circ g_1 \circ f_{Y_1}^{-1}) * a = (\mathcal{A}_X(g_2) \circ \mathcal{A}_X(g_1))(a)$, además, $\mathcal{A}_X(id) = id$ $\therefore$ $\mathcal{A}_X$ es funtor.

Si $\mathbf{T} : \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $\{\mathbf{T}_E\}_{E\in\mathbb{N}}$ está dada para cada $E \in \mathbf{Bij}_f$ de la siguiente manera. Si $E \in \mathbf{Bij}_f$, existe una única $n \in \mathbb{N}$ tal que $E \cong [n]$, entonces

$$\mathbf{T}_E : \mathcal{A}_X(E) \to \mathcal{A}_Y(E)$$

es $\mathbf{T}_E = \mathbf{T}_n : X_n \to Y_n$. Dicha $\{\mathbf{T}_E\}_{E\in\mathbf{Bij}_f}$ es una transformación natural, pues si K_1 y K_2 son objetos de $\mathbf{Bij}_f$, $t : K_1 \to K_2$, $\mathcal{A}_X(K_1) = \mathcal{A}_X(K_2) = X_n$ y $\mathcal{A}_Y(X_1) = \mathcal{A}_Y(X_2) = Y_n$, entonces el siguiente diagrama conmuta al ser $\mathbf{T}_n$ una $\mathbf{S}_n$-acción.

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "\mathbf{T}_n"] \arrow[d, "\mathcal{A}_X(t)"'] & Y_n \arrow[d, "\mathcal{A}_Y(t)"] \\ X_n \arrow[r, "\mathbf{T}_n"'] & Y_n. \end{tikzcd}$$

con $\mathcal{A}_X(t) = (f_{K_2} \circ t \circ f_{K_1}^{-1})*$ y $\mathcal{A}_Y(t) = (f_{K_2} \circ t \circ f_{K_1}^{-1})\star$ ($*$ es la acción sobre X_n y $\star$ es la acción sobre Y_n).

Tenemos que ver ahora que existen isomorfismos naturales

$$\mu : Id_{[\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f]} \Rightarrow \Re\wp$$

y

$$\omega : Id_{\prod_n \mathbf{Set}_f^{\mathbf{S}_n}} \Rightarrow \wp\Re.$$

Definimos ω como $\omega_{\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = id_{\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$, pues $\wp\Re$ es el funtor identidad en $\{\mathbf{S}_n\text{-}\mathbf{Set}_f\}$. A μ lo definimos por $\mu_{\mathbf{F}}$ la transformación natural cuyas componentes son $\mathbf{F}(f_X) : \mathbf{F}(X) \to \mathbf{F}(n)$. Se afirma que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}_1 \arrow[r, Rightarrow, "\mu_{\mathbf{F}_1}"] \arrow[d, Rightarrow, "\lambda"'] & \mathcal{A}_{\{\mathbf{F}_1(n)\}_{n\in\mathbb{N}}} \arrow[d, Rightarrow, "\lambda_{\mathcal{A}}"] \\ \mathbf{F}_2 \arrow[r, Rightarrow, "\mu_{\mathbf{F}_2}"'] & \mathcal{A}_{\{\mathbf{F}_2(n)\}_{n\in\mathbb{N}}} \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Si tomamos X, X' en $\mathbf{Bij}_f$ y $g : X \to X'$, entonces

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}_1(X) \arrow[r, "\mathbf{F}_1(g)"] \arrow[d, "\lambda_X"'] & \mathbf{F}_1(X') \arrow[d, "\lambda_{X'}"] \\ \mathbf{F}_2(X) \arrow[r, "\mathbf{F}_2(g)"'] & \mathbf{F}_2(X') \end{tikzcd}$$

conmuta por ser λ una transformación natural, por lo tanto

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}_1(X) \arrow[r, "\mathbf{F}_1(f_X)"] \arrow[d, "\lambda_X"'] & \mathbf{F}_1(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\ \mathbf{F}_2(X) \arrow[r, "\mathbf{F}_2(f_X)"'] & \mathbf{F}_2(n) \end{tikzcd}$$

conmuta, así que el diagrama 2.1 en efecto conmuta.

□

2.2. Ejemplos de especies

Ejemplo 1. Un esquema simplicial sobre un conjunto E, es un subconjunto $\Im$ del conjunto potencia de E tal que

1. $\forall \alpha \in \Im$, $\alpha \neq \emptyset$

2. Si $\alpha \neq \emptyset$ con $\alpha \subset \beta$ para alguna $\beta \in \Im$, entonces $\alpha \in \Im$

3. $\forall x \in E$, $\{x\} \in \Im$.

A los elementos de $\Im$ se les llama simplejos. La dimensión de un simplejo es su cardinalidad menos uno. Una gráfica es un esquema simplicial en la que la dimensión de los simplejos es menor o igual a 1.

Si $u : E \to F$ es una biyección, es claro que $u(\Im) = \{u(\mathbf{S})|\mathbf{S} \in \Im\}$ es también un esquema simplicial sobre F. Podemos definir la especie de esquemas simpliciales como

$$\mathbf{S} : \mathbf{Bij}_f \to \mathbf{Set}_f \text{ ; } \mathbf{S}(E) = \text{Conjunto de esquemas simpliciales de } E.$$

Para $u : E \to F$ biyectiva, definimos $\mathbf{S}(u) : \mathbf{S}(E) \to \mathbf{S}(F)$ como $\mathbf{S}(u)(\Im) = u(\Im)$, la cual es biyectiva. Podemos de esta menera obtener por ejemplo la subespecie de gráficas, la de gráficas conexas, la de árboles y otras tantas, esto gracias a que dichas propiedades son invariantes bajo isomorfismos.

Ejemplo 2. Si $\phi : E \to E$ es una endofunción y $u : E \to F$ una biyección, entonces $u \circ \phi \circ u^{-1} : F \to F$ es una endofunción en F. Así, tenemos la especie $\mathbf{End} : \mathbf{Bij}_f \to \mathbf{Set}_f$ dada por $\mathbf{End}(E) = \{f : E \to E\}$, si $u : E \to F$ entonces $\mathbf{End}(u) = u \circ \_ \circ u^{-1}$, que también es biyectiva. Si definimos $\mathbf{Per}(E) = \{f : E \to E | f \textit{ es biyectiva}\}$, entonces tenemos la subespecie de **End** llamada especie de permutaciones. Si pedimos que la gráfica de la endofunción sea conexa, obtenemos la especie de endofunciones conexas, lo mismo con la de permutaciones circulares y con la de contracciones (las que eventualmente se convierten en una costante, es decir, que exista un punto fijo de la función x_0, para el cual, para toda $x \in E$ exista un entero positivo m tal que $\varphi^m(x) = x_0$).

2.3. Ejemplos de morfismos de especies

Ejemplo 1. La construcción de la cerradura transitiva de una gráfica determina un morfismo de la especie de gráficas a la de particiones (o relaciones de equivalencia).

$$\mathbf{S} : \mathbf{Graph}_f \to \mathbf{Part}_f.$$

Para $[n] \in \mathbf{Bij}_f$, $\mathbf{Graph}_f([n])$= Conjunto de todos los esquemas simpliciales en $[n]$, a los que denotaremos por ρ_n, tales que sus simplejos tienen dimensión menor o igual a 1. El morfismo

$$\mathbf{S}_n : \mathbf{Graph}_f([n]) \to \mathbf{Part}_f([n]),$$

está dado por

$$\mathbf{S}_n(\rho_n) = \overline{\rho_n},$$

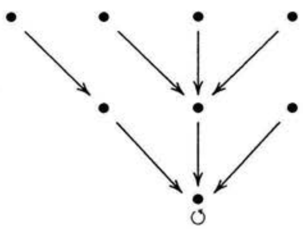
donde $\overline{\rho_n} = \rho_n \cup \{\{a, c\} | \exists \{b_1, b_2, ..., b_k\} \subset [n]$, con $k \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$\{a, b_1\}, \{b_1, b_2\}, ..., \{b_k, c\} \in \rho_n\}.$$

Como se puede observar, $\overline{\rho_n}$ es una partición sobre $[n]$ en donde la relación de equivalencia está dada por

$$a \sim b \Leftrightarrow \{a, b\} \in \overline{\rho_n}.$$

Ejemplo 2. Una arborescencia es un árbol provisto de una raíz (la raíz es un punto arbitrario del conjunto subyacente). Si orientamos las aristas de una arborescencia en dirección a la raíz y colocamos en esta última un bucle, obtenemos la gráfica de una contracción.



2.4. Funciones exponenciales de especies

Definición 2.4.1. *La función generadora (exponencial) de una especie $\mathcal{A}$ está definida por la serie formal*

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}[n]|}{n!} x^n. \tag{2.2}$$

Otro nombre con el que se le conoce a la ecuación 2.2 es cardinalidad de la especie $\mathcal{A}$ y se denota por $\mathbf{Card}(\mathcal{A})$, también se le conoce como serie de Hurwitz.

Definición 2.4.2. *La función generadora etiquetada es la serie*

$$\widetilde{\mathcal{A}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}[n]/\boldsymbol{S}_n| x^n, \tag{2.3}$$

donde $\mathcal{A}[n]/\boldsymbol{S}_n$ denota al conjunto de $\boldsymbol{S}_n$-órbitas de $\mathcal{A}[n]$.

Más adelante retomaremos a estas series.

2.5. Ejemplos de funciones generadores de especies

Ejemplo 1. Sea $0 : E \mapsto \emptyset$ la especie que manda todo al vacío. El funtor fiel asociado a esta especie es

$$\mathbf{S} : \mathbf{Elts}(0) \to \mathbf{Set}_f,$$

como $\mathbf{Elts}(0) = \emptyset$ entonces $\mathbf{S} : \emptyset \to \mathbf{Set}_f$. Por lo tanto,

$$0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|0[n]|}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\emptyset|}{n!} x^n = 0.$$

Ejemplo 2. Sea $\mathbf{I}$ una especie tal que $\mathbf{I}[E] = \{\emptyset\}$ si $E = \emptyset$ y $\mathbf{I}[E] = \emptyset$ en otro caso. $\mathbf{Elts}(\mathbf{I}) = \{(N, a) | N \in \mathbf{Bij}_f \ y \ a \in \mathbf{I}(N)\} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$.

$$\mathbf{I}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{I}(n)|}{n!} x^n = \frac{|\{\emptyset\}|}{0!} x^0 = 1.$$

Ejemplo 3. Una especie uniforme $\mathbf{U}$ se define como $\mathbf{U}[E] = \{E\}$ para todo conjunto finito E. $\mathbf{Elts}(\mathbf{U}) = \{(N, a) | N \in \mathbf{Bij}_f \ y \ a \in \mathbf{U}[N] = \{N\}\} = \{(N, N) | N \in \mathbf{Bij}_f\} = \mathbf{Bij}_f$. $\mathbf{S} : \mathbf{Elts}(\mathbf{U}) = \mathbf{Bij}_f \to \mathbf{Set}_f$ es el funtor inclusión.

$$\mathbf{U}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{U}[n]|}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \mathbf{e}^x.$$

2.6. $[\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f] \equiv (\mathbf{Gpd}/\mathbf{Set}_f)_{fff}$

Como el nombre de esta sección lo sugiere, las categorías

$$[\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f] \ \text{y} \ (\mathbf{Gpd}/\mathbf{Set}_f)_{fff}$$

son equivalentes, sin embargo, debido a que la demostración es muy larga y el resultado no es trascendental, se puede ver la demostración en el apéndice D.

Capítulo 3

Funciones exponenciales

3.1. El espacio de las series de potencias formales

Sea $\mathbf{R}$ una $\mathbb{Q}$-álgebra conmutativa y sea E una categoría esqueléticamente pequeña. $\mathbf{R}[[\mathsf{E}^{op}/\cong]]$ denota al $\mathbf{R}$-módulo compuesto por las series de potencias con exponentes en E

$$f(t) = \sum_{N\in\mathsf{E}}{}' a_N t^N, \qquad a_N \in \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

La suma $\sum'$ denota la suma sobre todas las clases de isomorfismo de objetos de E y t^N representa a la clase de isomorfismo a la que pertenece el objeto N en la categoría E^{op}, de esta manera tenemos que $t^N = t^M \Leftrightarrow M \cong N$. Si la suma de la ecuación 3.1 es finita entonces la llamaremos polinomial y denotaremos por $\mathbf{R}[\mathsf{E}^{op}/\cong]$ al $\mathbf{R}$-módulo compuesto por las polinomiales.

En el caso de la categoría $\mathbf{Set}_f$, la ecuación 3.1 tiene la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

3.2. Funciones generadoras

Definición 3.2.1. *La función exponencial generadora de una categoría esqueléticamente pequeña y localmente finita E es la suma formal*

$$E(t) = \sum_{X\in E}{}' \frac{t^X}{|\mathbf{Aut}(X)|} \in \mathbf{R}[[E^{op}/\cong]]. \tag{3.2}$$

La función generadora ordinaria de una categoría E esqueléticamente pequeña y localmente finita es la suma formal

$$\widetilde{E} = \sum_{X \in E}{}' t^X \in \boldsymbol{R}[[E^{op/\cong}]].$$

3.3. Una función lineal inducida por un funtor

Sea $\mathbf{F} : \mathsf{E} \to \mathsf{D}$ un funtor con fibras finitas entre categorías esqueléticamente pequeñas. $\mathbf{F}$ induce una transformación lineal

$$\mathbf{F}_* : \mathbf{R}[[\mathsf{E}^{op}/\cong]] \to \mathbf{R}[[\mathsf{D}^{op}/\cong]]$$

definida como

$$\mathbf{F}_*\Big(\sum_{X \in \mathsf{E}}{}' a_X t^X\Big) = \sum_{X \in \mathsf{E}}{}' a_X t^{\mathbf{F}(X)} = \sum_{N \in \mathsf{D}}{}' \Big(\sum_{\substack{X \in \mathsf{E}: \\ \mathbf{F}(X) \cong N}}{}' a_X\Big) t^N,$$

en donde agrupamos a los $X \in \mathsf{E}/\cong$ tales que $\mathbf{F}(X) \cong N$, obteniendo la suma

$$\sum_{\substack{X \in \mathsf{E}: \\ \mathbf{F}(X) \cong N}}{}' a_X,$$

que es finita por ser $\mathbf{F}$ un funtor con fibras finitas.

Definición 3.3.1. *A la serie*

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}_*(E(t)) = \sum_{X \in E}{}' \frac{1}{|\mathbf{Aut}(X)|} t^{\boldsymbol{F}(X)}$$

*la llamaremos **función exponencial generadora de E a lo largo de F**, mientras que a la serie*

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}(t) = \boldsymbol{F}_*(\widetilde{E}(t)) = \sum_{X \in E}{}' t^{\boldsymbol{F}(X)},$$

la llamaremos función generadora ordinaria de E a lo largo de $\boldsymbol{F}$.

Dichas funciones generadoras corresponden a la función generadora exponencial y a la función generadora etiqueta de especies, respectivamente:

Proposición 3.3.1. *Sea $\mathcal{A} : \mathbf{Bij}_f \to \mathbf{Set}_f$ una especie. Sea $\boldsymbol{F}$ el funtor proyección*

$$\boldsymbol{F} : \boldsymbol{Elts}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Set}_f.$$

Entonces $\mathcal{A}(t) = \boldsymbol{F}(t)$.

Dem. Para un elemento $s \in \mathcal{A}(n)$, denotaremos por $\mathbf{S}_{n_s}$ al estabilizador de s bajo $\mathbf{S}_n$ y por $\mathbf{S}_n(s)$ a la órbita de s bajo $\mathbf{S}_n$. Utilizando el resultado de $\mathbf{G}$-conjuntos que nos permite calcular el tamaño de una órbita, tenemos

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_*(\mathbf{Elts}(t)) = \mathbf{F}_*\Bigg(\sum_{(X,s)\in\mathbf{Elts}(\mathcal{A})}{}^{'} \frac{t^{(X,s)}}{|\mathbf{Aut}(X,s)|} \Bigg)$$

$$= \sum_{Y\in\mathbf{Set}_f}{}^{'} \Bigg(\sum_{\substack{(X,s)\in\mathbf{Elts}(\mathcal{A}):\\ \mathbf{F}(X,s)\,\cong\, Y}}{}^{'} \frac{1}{|\mathbf{Aut}(X,s)|} \Bigg) t^{Y}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{\substack{(X,s)\in\mathbf{Elts}(\mathcal{A}):\\ \mathbf{F}(X,s)\,\cong\, n}}{}^{'} \frac{1}{|\mathbf{Aut}(X,s)|} \Bigg) t^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{(n,s)\in\mathbf{Elts}(\mathcal{A})}{}^{'} \frac{1}{|\mathbf{Aut}(n,s)|} \Bigg) t^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{(n,s)\in\mathbf{Elts}(\mathcal{A})}{}^{'} \frac{1}{|\mathbf{S}_{n_s}|} \Bigg) t^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{(n,s)\in\mathbf{Elts}(\mathcal{A})}{}^{'} \frac{|\mathbf{S}_n(s)|}{|\mathbf{S}_n|} \Bigg) t^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{(n,s)\in\mathbf{Elts}(\mathcal{A})}{}^{'} \frac{|\mathbf{S}_n(s)|}{n!} \Bigg) t^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Bigg(\sum_{(n,s)\in\mathbf{Elts}(\mathcal{A})}{}^{'} |\mathbf{S}_n(s)| \Bigg) t^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}([n])|}{n!} t^{n} = \mathcal{A}(t),$$

por otra parte

$$\widetilde{\mathbf{F}}(t) = \sum_{N\in\mathbf{Set}_f}{}^{'} |\{(X,s) \in \mathbf{Elts}(\mathcal{A})/\cong \,|\, X \cong N\}| t^{N}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |\{(n,s) \in \mathbf{Elts}(\mathcal{A})/\cong\}| t^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}([n])/\mathbf{S}_n| t^{n} = \widetilde{\mathcal{A}}(t).$$

Teorema 3.3.1. *Sea $\boldsymbol{F}\colon E \to D$ un funtor fiel con fibras finitas entre categorías esqueléticamente pequeñas. Entonces*

$$\sum_{X\in E}{}^{'} \frac{C_{\boldsymbol{F}(X)}}{|\mathbf{Aut}(X)|} t^{\boldsymbol{F}(X)} = \sum_{N\in D}{}^{'} \frac{|\boldsymbol{Str}(E/N)/\cong|}{\boldsymbol{Aut}(N)} C_N t^{N},$$

donde los coeficientes C_N cumplen que si $N \cong N'$, entonces $C_N = C_{N'}$. En particular,

$$\boldsymbol{F}(t) = \sum_{N \in D}{}' \frac{|\boldsymbol{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong|}{\boldsymbol{Aut}(N)} t^N.$$

Dem. $|\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong| = |\{[X,\sigma] | X \in \mathsf{E}/\cong,\ \sigma : \mathbf{F}(X) \xrightarrow{\cong} N\}|$. Tenemos que $|\{[X,\sigma] | X \in \mathsf{E}/\cong,\ \sigma : \mathbf{F}(X) \xrightarrow{\cong} N\}|$ es igual a

$$\sum_{X \in \mathsf{E}}{}' |\{[X,\sigma] | \sigma : \mathbf{F}(X) \xrightarrow{\cong} N\}|, \tag{3.3}$$

por otro lado, si fijamos X tenemos que $|\{[X,\sigma] | \sigma : \mathbf{F}(X) \xrightarrow{\cong} N\}| = |\{(X,\sigma) | \sigma : \mathbf{F}(X) \xrightarrow{\cong} N\}/\cong| = \frac{|\mathbf{Iso}(\mathbf{F}(X),N)|}{|\mathbf{Aut}(X)|}$, pues como $\mathbf{Aut}(X)$ es un grupo que actua sobre el conjunto $\mathbf{Iso}(\mathbf{F}(X),N)$ ($\alpha * \sigma = \sigma \circ \mathbf{F}(\alpha)^{-1}$), $|\{(X,\sigma) | \sigma : \mathbf{F}(X) \xrightarrow{\cong} N\}/\cong|$ es igual al número de órbitas de $\mathbf{Iso}(\mathbf{F}(X),N)$, pues $[X,\sigma] = [X,\sigma'] \Leftrightarrow \exists \lambda : X \xrightarrow{\cong} X$ tal que $\sigma \circ \mathbf{F}(\lambda) = \sigma' \Leftrightarrow \exists \lambda : X \xrightarrow{\cong} X$ tal que $\sigma' \circ \mathbf{F}(\lambda)^{-1} = \sigma \Leftrightarrow \sigma$ y σ' pertenecen a la misma órbita. Así las cosas, aplicando Burnside tenemos que

$$|\{[X,\sigma] | \sigma : \mathbf{F}(X) \xrightarrow{\cong} N\}| = \frac{1}{|\mathbf{Aut}(X)|} \sum_{h \in \mathbf{Aut}(X)} |X_h|,$$

donde $X_h = \{\alpha : \mathbf{F}(X) \xrightarrow{\cong} N | \alpha \circ h = \alpha\}$, pero $\alpha \circ h = \alpha \Leftrightarrow h = id_{\mathbf{F}(X)}$. Por lo tanto,

$$\sum_{h \in \mathbf{F}(\mathbf{Aut}(X))} |X_h| = |X_{Id_{F(X)}}| = |\mathbf{Iso}(\mathbf{F}(X),N)|.$$

Concluimos entonces que 3.3 puede expresarse como

$$\sum_{X \in \mathsf{E}}{}' \frac{|\mathbf{Iso}(\mathbf{F}(X),N)|}{|\mathbf{Aut}(X)|},$$

que a su vez puede expresarse como

$$\sum_{X \in \mathsf{E}}{}' \frac{|\mathbf{Aut}(N)|}{|\mathbf{Aut}(X)|}.$$

Así ,

$$\sum_{N\in \mathsf{D}}{}' \frac{|\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong|}{\mathbf{Aut}(N)} \mathsf{C}_N t^N$$

$$= \sum_{N\in \mathsf{D}} \Big(\sum_{X\in \mathsf{E}/\cong : \mathbf{F}(X)\cong N} \frac{1}{|\mathbf{Aut}(X)|} \Big) \mathsf{C}_N t^N =$$

$$\sum_{X\in \mathsf{E}}{}' \frac{\mathsf{C}_{\mathbf{F}(X)}}{|\mathbf{Aut}(X)|} t^{\mathbf{F}(X)}.$$

□

Corolario 3.3.1. *Sea E una categoría esqueléticamente pequeña con grupos de automorfismos finitos. Sea E^C la categoría de objetos cíclicos (C es un grupo infinito cíclico visto como una categoría) con el funtor proyección $\boldsymbol{F} : \mathsf{E}^C \to \mathsf{E}$. Entonces tenemos que*

$$\boldsymbol{F}_*(\mathsf{E}^C(t)) = \widetilde{\mathsf{E}}(t).$$

Dem. Tenemos una biyección de $\mathbf{Str}(\mathsf{E}^C/N)/\cong$ a $\mathbf{Aut}(N)$ dada por

$$[(X,\alpha),\sigma] \mapsto \sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1} \ \ (\alpha \in \mathbf{Aut}(X),\ \sigma \in \mathbf{Iso}(X,N))$$

cuya inversa es

$$\beta \mapsto [(N,\beta),1_N].$$

Si $[(X,\alpha),\sigma] \in \mathbf{Str}(\mathsf{E}^C/N)/\cong$ (α es el generador), entonces $[(X,\alpha),\sigma] \mapsto \sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1}$ está bien definida. Sean $[(X,\alpha),\sigma] = [(X',\alpha'),\sigma']$, existe $\lambda : (X,\alpha) \to (X',\alpha')$ tal que $\sigma'\circ\lambda = \sigma$ ($\lambda : (X,\alpha) \to (X',\alpha') \Leftrightarrow \alpha'\circ\lambda = \lambda\circ\alpha$), tenemos entonces que $\sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1} = (\sigma'\circ\lambda)\circ\alpha\circ(\sigma'\circ\lambda)^{-1} = \sigma'\circ\lambda\circ\alpha\circ\lambda^{-1}\circ(\sigma')^{-1} = \sigma'\circ\alpha'\circ(\sigma')^{-1}$ $\therefore$ está bien definida.

$$[(X,\alpha),\sigma] \mapsto \sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1} \mapsto [(N,\sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1}),1_N]$$

y $[(X,\alpha),\sigma] = [(N,\sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1}),1_N]$, pues $\sigma : (X,\alpha) \to (N,\sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1})$ es un isomorfismo tal que $1_N\circ\sigma = \sigma$. Por otra parte $\beta \mapsto [(N,\beta),1_N] \mapsto 1_N\circ\beta\circ 1_N^{-1} = \beta$. Por lo tanto, $|\mathbf{Str}(\mathsf{E}^C/N)/\cong| = |\mathbf{Aut}(N)|$. Podemos ver ahora que

$$\mathbf{F}_*(\mathsf{E}^C(t)) = \sum_{X\in\mathsf{E}}{}' \frac{|\mathbf{Str}(\mathsf{E}^C/X)/\cong|}{|\mathbf{Aut}(X)|} t^X = \sum_{X\in\mathsf{E}}{}' \frac{|\mathbf{Aut}(X)|}{|\mathbf{Aut}(X)|} t^X = \sum_{X\in\mathsf{E}}{}' t^X = \widetilde{\mathsf{E}}(t).$$

□

3.4. Ejemplo en grupos finitos

Proposición 3.4.1. *Sea $\boldsymbol{Gp}$ la categoría de grupos finitos y sea $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{Gp} \to \mathbf{Set}_f$ el funtor que olvida. Existe una correspondencia biyectiva entre las clases de isomorfismo de $\boldsymbol{Gp}$-estructuras sobre un conjunto finito N y las estructuras de grupo μ sobre N,*

$$\mu : N{\times}N \to N.$$

Dem. Sea $[X,\sigma]$ una **Gp**-estructura sobre N. Definimos $\mu_{[X,\sigma]} : N{\times}N \to N$ como $\mu_{[X,\sigma]}(n_1,n_2) = \sigma(\sigma^{-1}(n_1) * \sigma^{-1}(n_2))$.

Veamos primero que $\mu_{[X,\sigma]}$ es una estrutura de grupo. Sea $n_e = \sigma(e)$,

$$\mu_{[X,\sigma]}(n_e, n) = \sigma(e * \sigma^{-1}(n)) = \sigma(\sigma^{-1}(n)) = n$$

(análogamente en el otro orden). Dados n_1, n_2 y n_3 se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_{[X,\sigma]}(n_1, \mu_{[X,\sigma]}(n_2,n_3)) &= \sigma(\sigma^{-1}(n_1) * \sigma^{-1}(\mu_{[X,\sigma]}(n_2,n_3)) \\ &= \sigma(\sigma^{-1}(n_1) * (\sigma^{-1}(n_2) * \sigma^{-1}(n_3))) \\ &= \sigma((\sigma^{-1}(n_1) * \sigma^{-1}(n_2)) * \sigma^{-1}(n_3)) = \mu_{[X,\sigma]}(\mu_{[X,\sigma]}(n_1,n_2),n_3). \end{aligned}$$

Dado n, $\sigma^{-1}(n)$ tiene inverso y existe n' única para este inverso tal que $\sigma^{-1}(n') = (\sigma^{-1}(n))^{-1}$, por ser σ una biyección.

$$\begin{aligned} \mu_{[X,\sigma]}(n,n') &= \sigma(\sigma^{-1}(n) * \sigma^{-1}(n')) = \sigma(e) = n_e \\ &= \sigma(e) = \sigma(\sigma^{-1}(n') * \sigma^{-1}(n)) = \mu_{[X,\sigma]}(n',n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu_{[X,\sigma]}$ es una estructura de grupo.

Veamos ahora que $\mu_{[X,\sigma]}$ está bien definida. Sea $[X,\sigma] = [Y,\omega]$, existe $\varphi : X \xrightarrow{\cong} Y$ en **Gp** tal que $\omega \circ \varphi = \sigma$.

$$\begin{aligned} \mu_{[X,\sigma]}(n_1,n_2) &= \sigma(\sigma^{-1}(n_1) * \sigma^{-1}(n_2)) = \omega\circ\varphi((\omega\circ\varphi)^{-1}(n_1) * (\omega\circ\varphi)^{-1}(n_2)) \\ &= \omega\circ\varphi\circ\varphi^{-1}(\omega^{-1}(n_1) * \omega^{-1}(n_2)) = \omega(\omega^{-1}(n_1) * \omega^{-1}(n_2)) = \mu_{[Y,\omega]}(n_1,n_2). \end{aligned}$$

Dada $\mu : N{\times}N \to N$ una estructura de grupo, definimos la **Gp**-estructura $[N_\mu, id_N]$, donde N_μ es N con su estructura de grupo μ.

Tenemos entonces que

$$[X,\sigma] \mapsto \mu_{[X,\sigma]} \mapsto [N_{\mu_{[X,\sigma]}}, id_N],$$

como $id_N \circ \sigma = \sigma$ y $\sigma(x_1 * x_2) = \sigma(\sigma^{-1}(\sigma(x_1)) * \sigma^{-1}(\sigma(x_2))) = \mu_{[X,\sigma]}(\sigma(x_1),\sigma(x_2))$, entonces $[X,\sigma] = [N_{\mu_{[X,\sigma]}}, id_N]$. Por otra parte

$$\mu \mapsto [N_\mu, in_N] \mapsto \mu_{[N_\mu, id_N]} = \mu.$$

□

La fórmula exponencial 3.2 del funtor que olvida $\mathbf{F}$ tiene la forma

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{\mathbf{G}\in\mathbf{Gp}}{}' \frac{1}{|\mathbf{Aut(G)}|} t^{\mathbf{G}}$$

y el número de estructuras de grupo sobre $[n]$, por la demostración del teorema 3.3.1 y por el resultado anterior, es

$$|\mathbf{Str}(\mathbf{Gp}/[n])/\cong| = \sum_{|\mathbf{G}|=n}{}' \frac{\mathbf{Aut}([n])}{\mathbf{Aut(G)}} = \sum_{|\mathbf{G}|=n}{}' \frac{n!}{\mathbf{Aut(G)}} = n! \sum_{|\mathbf{G}|=n}{}' \frac{1}{\mathbf{Aut(G)}}.$$

En particular,

$$n^{-n^2} n! \sum_{|\mathbf{G}|=n}{}' \frac{1}{\mathbf{Aut(G)}}$$

representa la probabilidad de que una operación binaria $\mu : N\text{x}N \to N$ satisfaga las propiedades de operaciones de grupo.

3.5. Ejemplo en G-conjuntos

Proposición 3.5.1. *Sea $[n,\rho]$ el $\mathbf{G}$-conjunto correspondiente al homomorfismo $G \xrightarrow{\rho} S_n$. $[n,\rho] = [n,\rho']$ como $\mathbf{G}$-conjuntos $\Leftrightarrow$ existe un automorfismo interno i de S_n tal que $\rho' = i\circ\rho$.*

Dem[$\Rightarrow$]. Supongamos que $[n,\rho] \cong [n,\rho']$, existe entonces $\varphi : n \xrightarrow{\cong} n$ tal que $\forall g \in \mathbf{G}$, $\rho(g)(\varphi(a)) = \varphi(\rho'(g)(a))$, para cualquier $a \in [n]$, entonces $(\varphi\circ\rho(g))(a) = (\rho(g)\circ\varphi)(a)$ para toda $a \in [n]$, entonces $\rho(g)(a) = (\varphi\circ\rho'(g)\circ\varphi^{-1})(a)$ y por tanto, $i : \mathbf{S}_n \xrightarrow{\cong} \mathbf{S}_n$ definido por

$$i(\alpha) = \varphi^{-1}\circ\alpha\circ\varphi$$

es un automorfismo interno de $\mathbf{S}_n$ que cumple que $(i\circ\rho)(g) = \varphi^{-1}\circ\rho(g)\circ\varphi = \varphi^{-1}\circ\varphi\circ\rho'(g)\circ\varphi^{-1}\circ\varphi = \rho'(g)$.

[$\Leftarrow$]. Supongamos que existe un automorfismo interno i de $\mathbf{S}_n$ tal que $\rho' = i\circ\rho$, digamos que i tiene la forma

$$i(\sigma) = \omega^{-1}\circ\sigma\circ\omega \text{ para algún } \omega \in \mathbf{Aut}(\mathbf{S}_n).$$

Si $a \in [n]$ y $g \in \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned}\rho'(g)(a) = (i\circ\rho)(g)(a) &\Rightarrow \rho'(g)(a) = (\omega^{-1}\circ\rho(g)\circ\omega)(a)\\ &\Rightarrow \omega(\rho'(g)(a)) = \rho(g)(\omega(a)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\omega : [n,\rho'] \to [n,\rho]$ es un isomorfismo de $\mathbf{G}$-conjuntos.

$\square$

Si fijamos ρ, definimos $\phi : \mathbf{S}_n \to \{\rho' : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_n | [n,\rho] = [n,\rho']\}$ como $\phi(\sigma)(g) = \sigma^{-1} \circ \rho(g) \circ \sigma$. La función es suprayectiva por la afirmación anterior.

Sean σ, λ en $\mathbf{S}_n$ tales que $\sigma^{-1} \circ \rho(\_) \circ \sigma = \lambda^{-1} \circ \rho(\_) \circ \lambda$, entonces

$$(\lambda \circ \sigma^{-1}) \circ \rho(\_) \circ (\sigma \circ \lambda^{-1}) = \rho.$$

Por lo tanto, el número de automorfismos de n que bajo ϕ van a dar a la misma ρ' es igual a $|\mathbf{Aut}[n,\rho]|$. Así, tenemos que

$$|\{\rho' : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_n | [n,\rho] = [n,\rho']\}| = \frac{n!}{|\mathbf{Aut}[n,\rho]|}.$$

Tenemos entonces que la función exponencial generadora de la especie $\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}$ es

$$\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}(t) = \sum_{X \in \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}}{}' \frac{1}{|\mathbf{Aut}(X)|} t^X = \sum_{[n,\rho] \in \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}}{}' \frac{1}{|\mathbf{Aut}([n,\rho])|} t^{[n,\rho]}$$
$$= \sum_{[n,\rho] \in \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}}{}' \frac{|\{\rho' : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_n | [n,\rho] = [n,\rho']\}|}{n!} t^{[n,\rho]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Bigg(\sum_{\rho \in \mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{S}_n)} t^{[n,\rho]} \Bigg),$$

también tenemos que

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{X \in \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}}{}' \frac{1}{|\mathbf{Aut}(X)|} t^{\mathbf{F}(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{\rho \in \mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{S}_n)} t^{\mathbf{F}[n,\rho]} \Bigg)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{S}_n)|}{n!} t^n.$$

De manera similar, si consideramos al funtor $\mathbf{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}$ que restringe a un $\mathbf{G}$-conjunto en un $\mathbf{H}$-conjunto ($\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$), obtenemos

$$(\mathbf{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}})_*(\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}(t)) = (\mathbf{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}})_* \Bigg(\sum_{X \in \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}}{}' \frac{1}{|\mathbf{Aut}(X)|} t^X \Bigg)$$
$$= \sum_{X \in \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}}{}' \frac{1}{|\mathbf{Aut}(X)|} t^{X|_{\mathbf{H}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{\rho \in \mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{S}_n)} t^{[n,\rho]|_{\mathbf{H}}} \Bigg).$$

Para $\rho : \mathbf{H} \to \mathbf{S}_n$ tenemos que contar cuantos $\rho' : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_n$ tales que $\rho'_{|\mathbf{H}} = \rho$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{\rho \in \mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{S}_n)} t^{[n,\rho]_{|\mathbf{H}}} &= \sum_{\rho \in \mathbf{Hom}(\mathbf{H},\mathbf{S}_n)} |\{\rho' : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_n | \rho'_{|\mathbf{H}} = \rho\}| t^{[n,\rho]} \\ &= \sum_{\rho \in \mathbf{Hom}(\mathbf{H},\mathbf{S}_n)} |\mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_n; \mathbf{H}, \rho)| t^{[n,\rho]},\end{aligned}$$

donde $\mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_n; \mathbf{H}, \rho)$ lo definimos al final del capítulo 1. Concluimos entonces que

$$\sum_{X \in \mathbf{Set}^{\mathbf{G}}_f}{}' \frac{1}{|\mathbf{Aut}(X)|} t^{X_{|\mathbf{H}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{\rho \in \mathbf{Hom}(\mathbf{H},\mathbf{S}_n)} |\mathbf{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_n; \mathbf{H}, \rho)| t^{[n,\rho]} \Big).$$

Capítulo 4

Teorema de Cayley

En el presente capítulo se expondrá la versión de la desmostración del teorema de Cayley que dio Joyal en su artículo [2]. El teorema de Cayley al que nos referimos dice que el número de estructuras de árbol sobre un conjunto de cardinalidad n es n^{n-2}. Para ver dicha desmostración necesitaremos de ciertas definiciones y resultados preliminares.

Lo primero que tenemos que hacer es definir operaciones sobre las especies de tal manera que dichas operaciones (suma, producto y composición) sean compatibles con las operaciones de las series formales.

4.1. Operaciones de especies

Dadas dos especies M, N, podemos definir la operación suma (en la categoría de especies) como el coproducto

$$(M+N)[E] = M[E] + N[E]$$

en cada conjunto finito E. En general, dada una familia arbitraria de especies $\{M_i\}_{i\in I}$, diremos que dicha familia es *sumable* si para cada conjunto finito E, el conjunto de índices $i \in I$ para los cuales $M_i[E] \neq \emptyset$, es finito. Tenemos entonces que

$$\left(\sum_{i\in I} M_i\right)[E] = \sum_{i\in I} M_i[E].$$

Definamos ahora el producto de especies. Diremos que una partición de un conjunto E en dos pedazos es un par (E_1, E_2) tal que $E_1 \cup E_2 = E$ y $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Se puede definir también el concepto de partición de E en n pedazos ($n \in \mathbb{N}$), en tal caso escribiremos $E = E_1 + \cdots + E_n$ en vez de $(E_1, ..., E_n)$. Es claro que **Card** (ver la ecución 2.2) preserva la suma, para demostrar que preserva el producto daremos primero una definición.

Definición 4.1.1. *Una estructura de especie $M \cdot N$ sobre un conjunto finito E es una cuarteta (E_1, E_2, s, t), donde $E = E_1 + E_2$ y $(s, t) \in M[E_1] x N[E_2]$. Así, tenemos definida la especie $M \cdot N$ dada por*

$$M \cdot N[E] = \{(E_1, E_2, s, t) | E = E_1 + E_2 \ \ y \ \ (s, t) \in M[E_1] x[E_2]\}$$

en los objetos y

$$M \cdot N(f)(E_1, E_2, s, t) = (f[E_1], f[E_2], f(s), f(t))$$

en los morfismos.

Teorema 4.1.1. *Dadas dos especies M, N, tenemos que*

$$\boldsymbol{Card}(M \cdot N) = \boldsymbol{Card}(M) \cdot \boldsymbol{Card}(N).$$

Dem. Por definición tenemos que

$$(M \cdot N)[E] = \sum_{E = E_1 + E_2} M[E_1] x N[E_2].$$

Si $|E| = n$ y $0 \leq k \leq n$, existen entonces $\binom{n}{k}$ subconjuntos E_1 de E tales que $|E_1| = k$, por lo tanto, existen $\binom{n}{k}$ formas de partir a E en $E_1 + E_2$ con $|E_1| = k$. Tenemos que

$$\mathbf{Card}(M \cdot N) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \ |M[k]| \ |N[n-k]|) \ \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{n! \ |M(k)| \ |N(n-k)|}{k! \ (n-k)!}) \ \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{|M(k)| \ |N(n-k)|}{k! \ (n-k)!}) \ x^n$$

$$= (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|M(n)|}{n!} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|N(n)|}{n!} x^n) = \mathbf{Card}(M) \cdot \mathbf{Card}(N).$$

□

Ejemplo 1. Sea **S** la especie de permutaciones, $\mathbf{S}_0$ la de permutaciones sin punto fijo y **U** la especie uniforme. Dados el conjunto n y σ una permutación en n, podemos partir a n en dos conjuntos, digamos n_1 y n_2, de la siguiente manera. El conjunto n_1 consta de todos los elementos de n que no quedaron fijos bajo σ, mientras que n_2 consta de los elementos de n que quedaron fijos. $\sigma_{|_{n_1}}$ es una permutación sin puntos fijos sobre n_1, $\sigma_{|n_2} = id_{n_2}$ es la permutación sobre n_2 que deja a todos fijos. Por lo tanto,

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{U},$$

donde esta última igualdad denota la existencia de un isomorfismo natural entre la especie $\mathbf{S}$ y la especie $\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{U}$. En adelante este tipo de igualdades denotará lo mismo.

Tenemos que $\mathbf{Card}(\mathbf{U}) = e^x$ y $\mathbf{Card}(\mathbf{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pero $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es la serie de Taylor de la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$, entonces $\mathbf{Card}(\mathbf{S}_0) = \mathbf{S}_0(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ (o la serie de Taylor de esta función).

Ejemplo 2. Sea $\mathbf{D}$ la especie de endofunciones, $\mathbf{D}_0$ la especie de endofunciones provistas de un punto fijo y $\mathbf{A}$ la de arboresencias, es decir, la especie que a un conjunto finito E lo mapea en el conjunto de todas las estructuras de árbol sobre E, provistas de un punto fijo y con las aristas orientadas en dirección de dicho punto (en el caso del punto fijo colocamos un bucle). Dados un conjunto finito E y un endomorfismo ϕ provisto de un punto fijo x_0, podemos partir al conjunto E en (E_1, E_2) de la siguiente manera. E_1 está formado por todos los puntos $a \in E$ tales que $\phi^n(a) = x_0$, p.a. $1 \leq n$. La gráfica de $\phi_{|E_1}$ resulta ser una arboresencia (con raíz x_0). Si $E_2 = E - E_1$, $\phi_{|E_2}$ es un endomorfismo arbitrario sobre E_2. De esta forma tenemos que

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}.$$

4.2. Ejemplo de Joyal

Podemos pensar al producto de especies

$$M = \prod_{i=1}^{n} M_i$$

como la especie tal que dado un conjunto finito E, una estructura de especie M sobre E es una partición $E = E_1 + \cdots + E_n$, donde cada pedazo E_i (posiblemente vacío) está provisto de una estructura de especie M_i.

Podemos también describir la potencia $N^{\mathbf{S}}$, donde N es una especie y $\mathbf{S}$ es un conjunto finito, como la especie en la que dado un conjunto finito E, una estructura de especie $N^{\mathbf{S}}$ sobre E es una función $\varphi : E \to \mathbf{S}$ donde cada fibra está provista de una estructura de especie N.

Entenderemos por un *vertebrado* a un árbol bipunteado por un par de nodos (p_0, p_1). Diremos que p_0 es la vertebra de cola y p_1 la vertebra de cabeza. Al camino más corto de la vertebra de cola a la vertebra de cabeza se le llama columna vertebral. Los nodos sobre la columna vertebral son llamados vertebras. Para cada nodo p en el vertebrado, denotaremos por $v(p)$ a la vertebra más cercana a p. Dicha notación nos permite definir una función del vertebrado a la columna vertebral, la llamaremos obviamente v. Es claro que como la imagen de la columna vertebral queda fija bajo v, la función v es idempotente y si consideramos cada fibra de v obtenemos una estructura de arboresencia, donde la raíz de cada arboresencia es una vertebra. De esta manera, un vertebrado sobre E determina una partición de longitud variada $E = E_1 + \cdots + E_n$, donde cada pedazo E_i está provisto de una estructura de arbolesencia. Tenemos entonces que

$$\mathcal{V} = \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}^i,$$

donde $\mathcal{V}$ es la especie de vertebrados y $\mathcal{A}$ la de arbolesencias.

4.3. Potencia dividida y sustitución

Sea N una especie tal que $N[\emptyset] = \emptyset$ y sea E un conjunto finito. Un ensamblado de estructuras de especie N sobre E es una partición de E en la que cada clase está provista de una estructura de especie N. Un miembro de un ensamblado es una clase provista de la N-estructura correspondiente. La *potecia dividida* $\gamma_n(N)$ es la especie de ensamblados de N-estructuras que tienen exactamente n miembros. La especie $\mathbf{exp}(N)$ es la especie de todos los ensamblados de N-estructuras. La razón por la que pedimos que $N[\emptyset] = \emptyset$ se aclara en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 4.3.1. *Sea N una especie y $n \geq 0$, entonces*

$$\boldsymbol{Card}(\gamma_n(N)) = \frac{N(x)^n}{n!}.$$

Dem. Sabemos que una estructura de especie N^n sobre E determina una partición $E = E_1 + \cdots + E_n$ en pedazos no vacíos, pues $N[\emptyset] = \emptyset$. Si nos olvidamos del orden lineal entre los pedazos obtenemos una partición $\{E_1, ..., E_n\}$ donde cada pedazo está provisto de una N-estructura. Con esto podemos observar que una N^n-estructura es un N-ensamblado en donde los miembros están colocados en orden lineal. Así,

$$\begin{aligned}\mathbf{Card}(N^n) &= \sum_{m=0}^{\infty} |N^n[m]| \frac{x^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} (|\gamma_n(N)[m]|\ n!) \frac{x^m}{m!} \\ &= n!\ \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_n(N)[m]| \frac{x^m}{m!} = n!\mathbf{Card}(\gamma_n(N)).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{N(x)^n}{n!} = \frac{N^n(x)}{n!} = \frac{\mathbf{Card}(N^n)}{n!} = \mathbf{Card}(\gamma_n(N)).$$

□

Corolario 4.3.1. ***Card(exp(N))=exp(N(x)).*** *

Dem. Sabemos por el teorema anterior que

$$\mathbf{Card}\gamma_n(N) = \frac{N(x)^n}{n!},$$

y por definición de la especie $\mathbf{exp}(N)$ tenemos

$$\mathbf{exp}(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(N).$$

Desarrollando se tiene que

$$\mathbf{exp}(N(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N(x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Card}\gamma_n(N)$$
$$= \mathbf{Card}(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(N)) = \mathbf{Card}(\mathbf{exp}(N)).$$

□

**Nota:* *La exponencial en* $\boldsymbol{exp}(N(x))$ *representa la serie de la función exponencial que conocemos, mientras que* $\boldsymbol{Card}(\boldsymbol{exp}(N))$ *representa a la serie formal de* $\boldsymbol{exp}(N)$.

Definición 4.3.1. *Sean R y N dos especies y supongamos que $N[\emptyset] = \emptyset$. La especie $R(N)$ es la de las parejas (a, ρ), donde a es un ensamblado de N-estructuras y ρ es una R-estructura sobre el conjunto de ensamblados de a. Diremos que $R(N)$ es la especie que resulta de sustituir N en R. Diremos además que un elemento de $R(N)$ es un R-ensamblado de N-estructuras.*

Teorema 4.3.2. *Sea N una especie tal que $N[\emptyset] = \emptyset$, entonces*

$$\boldsymbol{Card}R(N) = R(N(x)).$$

Dem. Dada $n \geq 0$, denotaremos por R_n a la especie de R-estructuras donde el conjunto subyacente es de cardinalidad n. Podemos descomponer a R como

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n,$$

que induce una descomposición de R-ensamblados en función del número de miembros

$$R(N) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(N).$$

Un elemento de $R_n(N)$ es un ensamblado de n miembros dotado de una R-estructura, donde cada miembro está provisto de una N-estructura. Tenemos entonces que

$$\mathbf{Card}(R_n(N)) = |R[N]|\mathbf{Card}(\gamma_n(N)),$$

así que

$$\begin{aligned}\mathbf{Card}(R(N)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Card}(R_n(N)) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} |R[n]|\mathbf{Card}(\gamma_n(N)) &= \sum_{n=0}^{\infty} |R[n]|\frac{N(x)^n}{n!} \\ &= R(N(x)).\end{aligned}$$

□

4.4. Ejemplo de endofunciones

Sea $\mathbf{D}$ la especie de endofunciones, $\mathbf{S}$ la de permutaciones y $\mathbf{A}$ la de arboresencias. Veremos que

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}(\mathbf{A}).$$

Sea $\phi \in \mathbf{D}(E)$. Un elemento $x \in E$ se dice que es *periódico* si existe un entero $n \geq 1$ tal que $\phi^n(x) = x$. La función ϕ es una permutación entre los elementos periodicos, pues si x es periodico, claramente $\phi(x)$ también lo es y si x_1, x_2 son periodicos tales que $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, entonces $\exists\ m \geq 1$ tal que $\phi^m(x_1) = x_1$ y $\exists\ n \geq 1$ tal que $\phi^n(x_2) = x_2$, por lo tanto,

$$x_1 = \phi^m(x_1) = \phi^m(x_2) \ \ y \ \ x_2 = \phi^n(x_2) = \phi^n(x_1),$$

con lo que se tiene que $\phi^{m+n}(x_1) = x_1$ y $\phi^{m+n}(x_2) = x_2$, así que $m|n$ y $n|m$, lo que nos dice que $m = n$ y por tanto, $x_1 = x_2$.

Para cada $x \in E$, sea $v(x)$ el primer punto periódico de la serie $x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots$. La función v es idempotente. Para cada $x \in \mathbf{Im}(v)$ (x punto periodico), la fibra $v^{-1}\{x\}$ está provista de una estructura de arboresencia, donde x es la raíz. Inversamente, si tenemos un ensamblado de arboresencias y una permutación de las raíces, entonces podemos construir la endofunción correspondiente ϕ. Por lo tanto,

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}(\mathbf{A}).$$

4.5. Teorema de Cayley

Teorema 4.5.1. *El número a_n de estructuras de árbol sobre un conjunto de cardinalidad n es n^{n-2}.*

Dem. Si el número de estructuras de árbol que podemos darle a n es a_n, entonces el número de vertebrados es igual a $n^2 a_n$, pues n^2 es el número de posibilidades que tenemos para elegir un par de puntos (o elegir dos veces el mismo punto) de n. El ejemplo de Joyal nos dice que los vertebrados son ensamblados ordenados en forma lineal de arboresencias. El ejemplo de endofunciones que acabamos de ver nos muestra que las endofunciones son ensamblados permutados de arboresencias. Como el número de ordenes lineales en un conjunto finito coincide con el número de permutaciones en dicho conjunto, es decir, dado $n \in \mathbb{N}$, el número de permutaciones sobre n es $n!$, que es el número de ordenes lineales que podemos darle a n, entonces $n^2 a_n$ es igual al número de ensamblados ordenados en forma lineal de arboresencias sobre n, que es igual al número de ensamblados permutados de arboresencias y este a su vez es igual al número de endofunciones en un conjunto de cardinalidad n, que sabemos que es n^n. Por lo tanto, $a_n = n^n \cdot n^{-2} = n^{n-2}$.

$\square$

Capítulo 5

Fórmulas exponenciales

5.1. El anillo de polinomios

Sea E una categoría esqueléticamente pequeña con coproductos finitos (y por lo tanto con objeto inicial). El conjunto $\mathsf{E}^{op}/\cong$ de clases de isomorfismo de la categoría E forma un monoide multiplicativo con neutro, donde el producto está dado por

$$t^M \cdot t^N = t^{N+M},$$

y el neutro es por supuesto $t^{\emptyset} = 1$. El producto está bien definido, pues si $N \cong N'$ y $M \cong M'$, entonces $N + M \cong N' + M'$.

Sea $\mathbf{R}$ un anillo con 1, denotaremos por $\mathbf{R}[\mathsf{E}^{op}/\cong]$ al $\mathbf{R}$-módulo de los polinomios de la forma

$$f(t) = \sum_{N \in \mathsf{E}}{}' a_N t^N, \quad a_N \in \mathbf{R},$$

donde la suma es finita. Es claro que $\mathbf{R}[\mathsf{E}^{op}/\cong]$ es un anillo con 1. Llamaremos a $\mathbf{R}[\mathsf{E}^{op}/\cong]$ el anillo de polinomios con exponentes en E. En el caso en que $\mathsf{E} = \mathbf{Set}_f$, $\mathbf{R}[\mathsf{E}^{op}/\cong] \cong \mathbf{R}[t]$ con la identificación $t^N = t^{|N|}$.

5.2. El anillo de series formales de potencia

Sea E una categoría esqueléticamente pequeña con coproductos finitos. Para extender la multiplicación de polinomios a la de series formales necesitaremos la siguiente hipótesis.

Para cualquier objeto $N \in \mathsf{E}$, existe sólo un número finito de clases de isomorfismo de pares (E, E') de objetos en E tales que $N \cong E + E'$.

Bajo esta hipótesis, el $\mathbf{R}$-módulo $\mathbf{R}[[\mathsf{E}^{op}/\cong]]$ de combinaciones $\mathbf{R}$-lineales infinitas de t^N ($N \in \mathsf{E}/\cong$), se convierte en una $\mathbf{R}$-álgebra, con el producto definido como

$$\left(\sum_{N\in\mathsf{E}}{}' a_N t^N\right)\left(\sum_{N\in\mathsf{E}}{}' b_N t^N\right) = \sum_{N\in\mathsf{E}}{}' c_N t^N, \quad c_N = \sum_{E+E'\cong N}{}' a_E \cdot b_{E'}.$$

5.3. Sustitución

Definición 5.3.1. *Sea $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ un anillo conmutativo tal que $\boldsymbol{R} \subset \widetilde{\boldsymbol{R}}$. Una invariante multiplicativa de E es una función $\tau : E \to \widetilde{\boldsymbol{R}}$ tal que satisface las siguientes condiciones:*

1. $M \cong N \Rightarrow \tau(M) = \tau(N)$
2. $\tau(\emptyset) = 1$
3. $\tau(M+N) = \tau(M)\cdot\tau(N)$.

Podemos entonces sustituir τ por t en $f(t)$

$$f(\tau) = \sum_{N\in\mathsf{E}}{}' a_N \tau(N).$$

La serie puede no converger, sin embargo, la sustitución $f(t) \mapsto f(\tau)$ es un morfismo de anillos cuando la serie converge.

5.4. Ejemplos de invariantes multiplicativos

Ejemplo 1. Para una categoría E esqueléticamente pequeña y localmente finita con productos finitos, tenemos el invariante de Yoneda asociado a $X \in \mathsf{E}$ definido como

$$\eta_X : N \to |\mathbf{Hom}(N, X)|.$$

Veamos que en efecto es un invariante multiplicativo.

1. $\eta_X(\emptyset) = |\mathbf{Hom}(\emptyset, X)| = 1$
2. Si $M \cong N$, entonces resulta claro que $|\mathbf{Hom}(M, X)| = |\mathbf{Hom}(N, X)|$
3. Tenemos que demostrar que $|\mathbf{Hom}(M+N, X)| = |\mathbf{Hom}(M, X)|\cdot|\mathbf{Hom}(N, X)|$.

Por la propiedad universal del coproducto

$$\begin{tikzcd} & M+N \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & X \\ M \arrow[ur, "i_M"] \arrow[urrr, dashed, "\varphi_M"'] & & & N \arrow[ull, "i_N"'] \arrow[u, dashed, "\varphi_N"'] \end{tikzcd}$$

existe una correspondencia biyectiva entre los pares de morfismos

$$(M \xrightarrow{\varphi_M} X, N \xrightarrow{\varphi_N} X)$$

y los morfismos

$$M+N \xrightarrow{\varphi} X.$$

Por lo tanto, $|\mathbf{Hom}(M+N,X)| = |\mathbf{Hom}(M,X)| \cdot |\mathbf{Hom}(N,X)|$.

Ejemplo 2. Si $\mathbf{F} : \mathsf{E} \to \mathbf{Set}_f$ es un funtor que preserva el coproducto, entonces

$$\tau_{\mathbf{F}} : N \to X^{|\mathbf{F}(N)|} \in \mathbb{R}[X],$$

donde X es una indeterminada, es un invariante multiplicativo.

1. $\tau_{\mathbf{F}}(\emptyset) = X^{|\mathbf{F}(\emptyset)|} = X^{|\emptyset|} = 1$
2. Si $M \cong N$, entonces $X^{|\mathbf{F}(M)|} = X^{|\mathbf{F}(N)|}$
3. Como $\mathbf{F}$ preserva coproductos,
$$X^{|\mathbf{F}(M+N)|} = X^{|\mathbf{F}(M)+\mathbf{F}(N)|} = X^{|\mathbf{F}(M)|+|\mathbf{F}(N)|} = X^{|\mathbf{F}(M)|} \cdot X^{|\mathbf{F}(N)|}.$$

Ejemplo 3. Supongamos que E es una subcategoría plena, localmente finita y esqueléticamente pequeña de un **Topos** (ver C.0.13), cerrada bajo subobjetos y coproductos. Denotemos por $\mathbf{Sub}(X)$ al conjunto de subobjetos de X. Entonces

$$\mathbf{sub} : N \to |\mathbf{Sub}(N)|$$

es un invariante multiplicativo.

1. $\mathbf{sub}(\emptyset) = |\mathbf{Sub}(\emptyset)| = 1$
2. Si $M \cong N$, entonces $|\mathbf{Sub}(M)| = |\mathbf{Sub}(N)|$
3. Queremos demostrar que $|\mathbf{Sub}(M+N)| = |\mathbf{Sub}(M)| \cdot |\mathbf{Sub}(N)|$.

Tenemos que $\mathbf{Sub}(M) \cong \mathbf{Hom}(M,\Omega)$, $\mathbf{Sub}(N) \cong \mathbf{Hom}(N,\Omega)$ y $\mathbf{Sub}(M+N) \cong \mathbf{Hom}(M+N,\Omega)$, donde Ω es el clasificador. Se tiene que

$$\begin{aligned} |\mathbf{Sub}(M+N)| &= |\mathbf{Hom}(M+N,\Omega)| \\ &= |\mathbf{Hom}(M,\Omega)| \cdot |\mathbf{Hom}(N,\Omega)| \\ &= |\mathbf{Sub}(M)| \cdot |\mathbf{Sub}(N)|. \end{aligned}$$

5.5. Categorías de Krull-Schmidt

Definición 5.5.1. *Sea E una categoría en la que existen todos los coproductos finitos. Un objeto J no inicial es conexo si para cualquier descomposición de J, $J = A + B$, se tiene que A o B es un objeto inicial. A la subcategoría plena de E compuesta por todos los objetos conexos, se le denotará por* $\boldsymbol{Con}(E)$.

Definición 5.5.2. *Diremos que la categoría E es de Krull-Schmidt (estricta) si cumple la siguiente propiedad.*

Propiedad KS. Cualquier objeto X de la categoría E es isomorfo a un coproducto de un número finito de objetos conexos, dicha descomposición es única en el siguiente sentido: si $I_1 + I_2 + \cdots + I_m$ y $J_1 + J_2 + \cdots + J_n$ son dos descomposiciones de X en coproductos de objetos conexos con sus respectivas inclusiones canónicas $i_\alpha : I_\alpha \to X$ y $j_\beta : J_\beta \to X$, entoces $m = n$ y existe una permutación $\pi \in \boldsymbol{S}_n$ e isomorfismos $f_\alpha : I_\alpha \to J_{\pi(\alpha)}$ tales que $j_{\pi(\alpha)} \circ f_\alpha = i_\alpha$ $\forall \alpha \in \{1, 2, ..., n\}$. Si E es una KS categoría estricta, entonces

$$X \cong \coprod_J{}' n_J(X)J,$$

donde J es un representante de su clase de isomorfismo de objetos conexos, $n_J(X)J$ es el coproducto de $n_J(X)$ copias de J y $n_J(X) = 0$ para casi todas las J's. Dicha descomposición será llamada KS descomposición de X.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. La categoría $\mathbf{Set}_f$ es una categoría de Krull-Schmidt, pues dado un objeto $\mathcal{A}$ en $\mathbf{Set}_f$, como $\mathcal{A}$ es un conjunto finito, podemos dar una descomposición finita de $\mathcal{A}$ en conjuntos conexos

$$\mathcal{A} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{a\},$$

donde la unión es disjunta (coproducto) y $\{a\}$ es conexo $\forall\ a \in \mathcal{A}$. Resulta claro que esta descomposición es única en el sentido de la propiedad KS.

Ejemplo 2. La categoría $\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}$ es también una categoría de Krull-Schmidt. Si X es un $\mathbf{G}$-conjunto finito y $x \in X$, entonces la órbita $\mathbf{G}x$ es un $\mathbf{G}$-conjunto con la acción de $\mathbf{G}$ sobre X restringida a $\mathbf{G}x$. Si tenemos que $\{\mathbf{G}x_1, ..., \mathbf{G}x_n\}$ es un conjunto completo órbitas de X, entonces $X = \mathbf{G}x_1 + \cdots + \mathbf{G}x_n$, además, cada órbita $\mathbf{G}x$ es un conjunto conexo y cada conjunto conexo tiene que estar compuesto de una sola órbita, así que como esta descomposición es única entonces $\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}$ es una categoría de Krull-Schmidt.

Lema 5.5.1. *Sea E una categoría esqueléticamente pequeña y KS con sumas universales y disjuntas (ver definiciones C.0.11 y C.0.12). Sea $\mathsf{F} = \boldsymbol{Con}(\mathsf{E})$ la subcategoría plena de objetos conexos. Sea $\coprod_\alpha n_\alpha J_\alpha$ una KS descomposición de X. Entonces*

$$\mathbf{Aut}(X) \cong \prod_\alpha (\boldsymbol{Aut}(J_\alpha))\ \boldsymbol{wr}\ \boldsymbol{S}_{n_\alpha},$$

*donde **wr** representa al producto "wreath"(Ver [3]).*

Dem. Dada $f \in \mathbf{Aut}(X)$, como $X = \coprod_\alpha n_\alpha J_\alpha$ el monomorfismo $f \circ j_{\alpha,\beta} : J_\alpha \to X$, con $\beta \in \{1, 2, ..., n_\alpha\}$, se factoriza a través de un único copedazo de X al tener como hipótesis que tenemos sumas universales, pues si

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_1 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & J_\alpha \arrow[d, "f\circ j_{\alpha,\beta}"] & \mathbf{T}_2 \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[d, "\lambda_2"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "j_{\mathcal{A}}"'] & X & \mathcal{B}, \arrow[l, "j_{\mathcal{B}}"] \end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son sumas de copedazos de X de tal manera que $\mathcal{A} + \mathcal{B} = X$, como J_α es conexo y las sumas son universales tenemos que el renglón de la parte superior del diagrama es una suma y por lo tanto que $\mathbf{T}_1 = \emptyset$ y $\mathbf{T}_2 = J_\alpha$ (o viceversa), con lo cual $\sigma_2 = id_{J_\alpha}$ y por lo tanto, $f \circ j_{\alpha,\beta} = j_{\mathcal{B}} \circ \lambda_2$, con lo cual el morfismo $j_{\alpha,\beta}$ se factorizó a través del copedazo $\mathcal{B}$. Repitiendo este proceso un número finito de veces podemos ver que existe $J_{\alpha'}$ y $\beta' \in \{1, 2, ..., n_{\alpha'}\}$ tales que existe $\lambda : J_\alpha \to J_{\alpha'}$, con la propiedad de que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & X \\ J_\alpha \arrow[u, "j_{\alpha,\beta}"] \arrow[r, "\lambda"'] & J_{\alpha'} \arrow[u, "j_{\alpha',\beta'}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Análogamente, existe bajo el mismo argumento $J_{\alpha''}$, $\beta'' \in \{1, 2, ..., n_{\alpha''}\}$ y $\omega : J_{\alpha'} \to J_{\alpha''}$ tales que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f^{-1}"] & X \\ J_{\alpha'} \arrow[u, "j_{\alpha',\beta'}"] \arrow[r, "\omega"'] & J_{\alpha''}, \arrow[u, "j_{\alpha'',\beta''}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, componiendo los dos diagramas se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_X"] & X \\ J_\alpha \arrow[u, "j_{\alpha,\beta}"] \arrow[r, "\omega\circ\lambda"'] & J_{\alpha''} . \arrow[u, "j_{\alpha'',\beta''}"'] \end{tikzcd}$$

Supongamos que $J_\alpha \neq J_{\alpha''}$, entonces el producto fibrado de $j_{\alpha,\beta}$ y $j_{\alpha'',\beta''}$ es el objeto inicial $\emptyset$, por ser las sumas disjuntas,

$$\begin{tikzcd} J_\alpha \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "id_{J_\alpha}"] \arrow[ddr, bend right, "\omega\circ\lambda"'] & & \\ & \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & J_\alpha \arrow[d, "j_{\alpha,\beta}"] \\ & J_{\alpha''} \arrow[r, "j_{\alpha'',\beta''}"'] & X \end{tikzcd}$$

tenemos entonces un morfismo de J_α a $\emptyset$, lo cual nos dice que $J_\alpha = \emptyset$ por tener objeto inicial estricto, contradicción. Por lo tanto, $J_\alpha = J_{\alpha''}$. De manera similar obtenemos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_X"] & X \\ J_\alpha \arrow[u, "j_{\alpha,\beta}"] \arrow[r, "\lambda\circ\omega"'] & J_\alpha . \arrow[u, "j_{\alpha,\beta''}"'] \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que $\omega\circ\lambda = id_{J_\alpha}$ y $\lambda\circ\omega = id_{J_\alpha}$. Definimos $\pi_\alpha : n_\alpha \to n_\alpha$ la permutación tal que $\pi(\beta) = \beta'$ y denotaremos a λ por $(f_{\alpha,\beta})$.

Definimos $\overline{\mathbf{H}} : \mathbf{Aut}(X) \to \prod_\alpha \mathbf{Aut}(J_\alpha) \textbf{ wr } \mathbf{S}_{n_\alpha}$ como

$$\overline{\mathbf{H}}(f) = (f_{\alpha,\beta}, \pi_\alpha).$$

Sean $f_{\alpha,\beta}$ en $\mathbf{Aut}(J_\alpha)$ ($\beta \in \{1, 2, ..., n_\alpha\}$) y π_α una permutación en n_α. Tenemos ahora

$$((f_{\alpha,\beta}), \pi_\alpha)_\alpha \in \prod_\alpha \mathbf{Aut}(J_\alpha) \textbf{ wr } \mathbf{S}_{n_\alpha}.$$

Entonces la familia de funciones $\{j_{\alpha,\pi_\alpha(\beta)}\}$ que está definida sobre todos los copedazos, define un único automorfismo $f\colon X \to X$ tal que

$$\begin{tikzcd} J_{\alpha,\beta} \arrow[r, "f_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "j_{\alpha,\beta}"'] & J_{\alpha,\pi_\alpha(\beta)} \arrow[d, "j_{\alpha,\pi_\alpha(\beta)}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

conmuta para toda α y toda $\beta \in \{1,2,...,n_\alpha\}$. Definimos por lo tanto $\mathbf{H} : \prod_\alpha \mathbf{Aut}(J_\alpha)\ \mathbf{wr}\ \mathbf{S}_{n_\alpha} \to \mathbf{Aut}(X)$ como

$$\mathbf{H}((f_{\alpha,\beta}),\pi_\alpha)_\alpha = f.$$

Dados $((f_{\alpha,\beta}),\pi_\alpha)_\alpha$, $((f'_{\alpha,\beta}),\pi'_\alpha)_\alpha$ en $\prod_\alpha \mathbf{Aut}(J_\alpha)\ \mathbf{wr}\ \mathbf{S}_{n_\alpha}$, como los cuadrados

$$\begin{tikzcd} J_{\alpha,\beta} \arrow[r, "f'_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "j_{\alpha,\beta}"'] & J_{\alpha,\pi'_\alpha(\beta)} \arrow[r, "f_{\alpha,\pi'_\alpha(\beta)}"] \arrow[d, "j_{\alpha,\pi'_\alpha(\beta)}"] & J_{\alpha,\pi_\alpha(\pi'_\alpha(\beta))} \arrow[d, "j_{\alpha,\pi_\alpha(\pi'_\alpha(\beta))}"] \\ X \arrow[r, "f'"'] & X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

conmutan, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}((((f_{\alpha,\beta}),\pi_\alpha)_\alpha \cdot ((f'_{\alpha,\beta}),\pi'_\alpha)_\alpha) &= \mathbf{H}(f_{\alpha,\pi'_\alpha(\beta)} \circ f'_{\alpha,\beta}, \pi_\alpha \circ \pi'_\alpha)_\alpha \\ &= \mathbf{H}((((f_{\alpha,\beta}),\pi_\alpha)_\alpha) \circ \mathbf{H}((((f'_{\alpha,\beta}),\pi'_\alpha)_\alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{H}$ es homomorfismo.

Si comenzamos tomando $f \in \mathbf{Aut}(X)$, entonces $\overline{\mathbf{H}}(f) = (f_{\alpha,\beta},\pi_\alpha)$ y claramente $\mathbf{H}(f_{\alpha,\beta},\pi_\alpha)_\alpha = f$, por la unicidad de la f. Por otra parte, si tomamos $(f_{\alpha,\beta},\pi_\alpha)_\alpha$, entonces $\mathbf{H}(f_{\alpha,\beta},\pi_\alpha)_\alpha = f$, con f tal que

$$\begin{tikzcd} J_{\alpha,\beta} \arrow[r, "j_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "\alpha,\beta"'] & J_{\alpha,\pi_\alpha(\beta)} \arrow[d, "j_{\alpha,\pi_\alpha(\beta)}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X, \end{tikzcd}$$

con esto último tenemos que $\overline{\mathbf{H}}(f) = (f_{\alpha,\beta},\pi_\alpha)_\alpha$. Concluimos que

$$\mathbf{Aut}(X) \cong \prod_\alpha \mathbf{Aut}(J_\alpha)\ \mathbf{wr}\ \mathbf{S}_{n_\alpha} \quad y$$

$$|\mathbf{Aut}(X)| = \prod_\alpha |\mathbf{Aut}(J_\alpha)|^{n_\alpha} \cdot n_\alpha!. \qquad \square$$

Teorema 5.5.1. *(Función Exponencial). Sea* E *una categoría esqueléticamente pequeña y KS con sumas universales y disjuntas, y sea* $\mathsf{F} = \boldsymbol{Con}(\mathsf{E})$*. Entonces*

$$\mathsf{E}(t) = \boldsymbol{exp}(\mathsf{F}(t)).$$

Dem. Desarrollando, tenemos que

$$\mathbf{exp}(\mathsf{F}(t)) = \mathbf{exp}\left(\sum_{J\in\mathsf{F}}{}' \frac{t^J}{|\mathbf{Aut}(J)|}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{J\in\mathsf{F}}' \frac{t^J}{|\mathbf{Aut}(J)|}\right)^n}{n!}.$$

Dado un objeto $X = n_1J_1 + n_2J_2 + \cdots + n_kJ_k$ en la categoría E, el coeficiente asignado a X en $(\sum'_{J\in\mathsf{F}} \frac{t^J}{|\mathbf{Aut}(J)|})^n$, donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, es $\frac{n!}{\prod_{j=1}^k n_i!} \frac{1}{\prod_{i=1}^k |\mathbf{Aut}(J_i)|^{n_i}}$, pues tenemos que calcular de cuantas maneras podemos ordenar a la unión de n_i veces J_i para toda $i \in \{1, 2, ..., k\}$, que son combinaciones con repetición.

Tenemos entonces que el coeficiente asignado a X en $\mathbf{exp}\left(\sum'_{J\in\mathsf{F}} \frac{t^J}{|\mathbf{Aut}(J)|}\right)$ es

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!} \frac{1}{n!} \frac{1}{\prod_{i=1}^k |\mathbf{Aut}(J_i)|^{n_i}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^k |\mathbf{Aut}(J_i)|^{n_i} n_i!}, \tag{5.1}$$

por el lema anterior, el termino del lado derecho de 5.1 es igual a

$$\frac{1}{|\mathbf{Aut}(n_1J_1 + n_2J_2 + \cdots + n_kJ_k)|} = \frac{1}{|\mathbf{Aut}(X)|}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{X\in\mathsf{E}}{}' \frac{t^X}{|\mathbf{Aut}(X)|} = \mathbf{exp}(\mathsf{F}(t)).$$

□

Corolario 5.5.1. *Sea* E *una categoría esqueléticamente pequeña y KS con sumas universales y disjuntas, y sean* $\mathsf{C} = \boldsymbol{Con}(\mathsf{E})$ *y* $\boldsymbol{F} : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ *un funtor fiel con fibras finitas que preserva coproductos. Entonces se tiene la siguiente igualdad*

$$\sum_{N\in\mathsf{F}}{}' \frac{|\boldsymbol{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong|}{|\boldsymbol{Aut}(N)|} t^N = \boldsymbol{exp}\left(\sum_{N\in\mathsf{F}}{}' \frac{|\boldsymbol{Str}(\mathsf{C}/N)/\cong|}{|\boldsymbol{Aut}(N)|} t^N\right).$$

Dem. Por el teorema anterior tenemos que

$$\mathbf{F}_*(\mathbf{exp}(\mathsf{C}(t))) = \mathbf{F}_*(\mathsf{E}(t)) = \mathbf{F}_*\left(\sum_{X\in\mathsf{E}}{}' \frac{t^X}{|\mathbf{Aut}(X)|}\right) = \sum_{X\in\mathsf{E}} \frac{t^{\mathbf{F}(X)}}{|\mathbf{Aut}(X)|},$$

por otra parte, como $\mathbf{F}$ preserva coproductos entonces, si $X = \coprod n_J J \Rightarrow \mathbf{F}(X) = \coprod n_J \mathbf{F}(J)$, así que

$$\mathbf{exp}(\mathbf{F}_*(\mathsf{C}(t))) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sum'_{J\in\mathsf{C}} \frac{t^{\mathbf{F}(J)}}{|\mathbf{Aut}(J)|}\right)^n}{n!} = \sum_{X\in\mathsf{E}}' \frac{t^{\mathbf{F}(X)}}{|\mathbf{Aut}(X)|} = \mathbf{F}_*(\mathsf{E}(t)).$$

Como

$$\mathbf{F}_*(\mathsf{E}(t)) = \sum_{N\in\mathsf{F}}' \frac{|\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong|}{|\mathbf{Aut}(N)|} t^N$$

y

$$\mathbf{F}_*(\mathsf{C}(t)) = \sum_{N\in\mathsf{F}}' \frac{|\mathbf{Str}(\mathsf{C}/N)/\cong|}{|\mathbf{Aut}(N)|} t^N$$

por el teorema 3.3.1, tenemos demostrado el corolario.

□

Teorema 5.5.2. *(Teorema binomial). Sea E una categoría esqueléticamente pequeña y KS con sumas universales y disjuntas, y sea $\mathsf{F} = \boldsymbol{Con}(\mathsf{E})$. Entonces*

$$\widetilde{\mathsf{E}}(t) = \prod_{I\in\mathsf{F}}' \frac{1}{1-t^I},$$

donde en general, en el caso que tengamos convergencia de los coeficientes de las series, el producto infinito denota a la serie definida por

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \left(\sum_{N_\alpha\in E}' a_{N_\alpha} t^{N_\alpha}\right) = \sum_{\mathcal{A}'\subseteq_f \mathcal{A}} \left(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}'} a_{N_\alpha} t^{N_\alpha}\right),$$

. donde $\mathcal{A}' \subseteq_f \mathcal{A}$ significa que $\mathcal{A}'$ es un subconjunto de cardinalidad finita de $\mathcal{A}$.

Note que en el caso finito la notación del producto infinito coincide con el producto finito que ya conocemos.
Dem. Desarrollando, tenemos que

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathsf{E}}(t) &= \sum_{X\in\mathsf{E}}' t^X = \sum_{(n_J)} t^{\coprod n_J J} = \sum_{(n_J)} \prod_{J\in\mathsf{F}}' (t^J)^{n_J} \\ &= \prod_{J\in\mathsf{F}}' \left(\sum_{n=0}^{\infty} (t^J)^n\right) = \prod_{J\in\mathsf{F}}' \frac{1}{1-t^J},\end{aligned}$$

donde los dos últimos porductos denotan lo que ya hemos explicado.

□

Capítulo 6

Ejemplos

6.1. La fórmula de Wohlfahrt

Proposición 6.1.1. *Cualquier $\boldsymbol{G}$-conjunto finito conexo es isomorfo al $\boldsymbol{G}$-conjunto homogeneo $\boldsymbol{G/H}$ (con la acción que se hereda del producto del grupo $\boldsymbol{G}$), para algún $\boldsymbol{H} \leq \boldsymbol{G}$ de índice finito.*

Dem. Como ya vimos en el ejemplo 2 de categorías de Krull-Schmidt, los únicos $\mathbf{G}$-conjuntos conexos son los que tienen solamente una órbita (los transitivos). Por lo tanto, si tomamos cualquier elemento x del $\mathbf{G}$-conjunto, entonces el $\mathbf{G}$-conjunto es isomorfo a $\mathbf{G}/\mathbf{G}_x$, por el teorema A.0.2.

□

Teorema 6.1.1. *(Wohlfahrt). Sea $\boldsymbol{G}$ un grupo finitamente generado. Entonces se tiene que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S}_n)|}{n!} t^n = \boldsymbol{exp}\left(\sum_{\boldsymbol{H} \leq_f \boldsymbol{G}} \frac{t^{(\boldsymbol{G}:\boldsymbol{H})}}{(\boldsymbol{G} : \boldsymbol{H})} \right),$$

donde $\boldsymbol{H} \leq_f \boldsymbol{G}$ denota que $\boldsymbol{H}$ es un subgrupo de $\boldsymbol{G}$ de índice finito.

Dem. Denotemos por Υ al conjunto de subgrupos de $\mathbf{G}$ que son conjugados de $\mathbf{H}$. Observese que Υ es un $\mathbf{G}$-conjunto transitivo con la acción de conjugación, pues dados $a\mathbf{H}a^{-1}$ y $b\mathbf{H}b^{-1}$ en Υ,

$$ba^{-1}(a\mathbf{H}a^{-1}) = ba^{-1}a\mathbf{H}a^{-1}(ba^{-1})^{-1} = b\mathbf{H}a^{-1}(ab^{-1}) = b\mathbf{H}b^{-1}.$$

Tambien tenemos que

$$g \in \mathbf{G_H}(\text{el estabilizador de } \mathbf{H}) \Leftrightarrow g * \mathbf{H} = \mathbf{H} \Leftrightarrow g\mathbf{H}g^{-1} = \mathbf{H} \Leftrightarrow g \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}).$$

Por el teorema A.0.2 tenemos que

$$|\Upsilon| = (\mathbf{G} : N_{\mathbf{G}}(\mathbf{H})).$$

Tenemos entonces por la proposición 6.1.1 que

$$(\mathbf{Con}(\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}))(t) = \sum_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}{}' \frac{t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{|\mathbf{Aut}(\mathbf{G}/\mathbf{H})|} = \sum_{\mathbf{H}\leq_f \mathbf{G}} \frac{t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}$$

(donde **H** corre sobre todos los subgrupos de índice finito), pues

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}:\mathbf{N_G}(\mathbf{H}))(\mathbf{N_G}(\mathbf{H}):\mathbf{H}) = (\mathbf{G}:\mathbf{H}) &\Rightarrow (\mathbf{G}:\mathbf{N_G}(\mathbf{H}))|\mathbf{Aut}(\mathbf{G}/\mathbf{H})| \\ = (\mathbf{G}:\mathbf{H}) &\Rightarrow 1/|\mathbf{Aut}(\mathbf{G}/\mathbf{H})| = (\mathbf{G}:\mathbf{N_G}(\mathbf{H}))/(\mathbf{G}:\mathbf{H}).\end{aligned}$$

Con esto y con las proposiciones A.0.2 y A.0.3 tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}{}' \frac{t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{|\mathbf{Aut}(\mathbf{G}/\mathbf{H})|} &= \sum_{\mathbf{H}\leq_f \mathbf{G}} \frac{1}{|\Upsilon|}\frac{t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{|\mathbf{Aut}(\mathbf{G}/\mathbf{H})|} = \sum_{\mathbf{H}\leq_f \mathbf{G}} \frac{1}{|\Upsilon|}\frac{|\Upsilon|}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})} t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}} \\ &= \sum_{\mathbf{H}\leq_f \mathbf{G}} \frac{t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{|(\mathbf{G}:\mathbf{H})|},\end{aligned}$$

aplicando el teorema de la función exponencial (teorema 5.5.1) obtenemos

$$\sum_{X\in\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}}{}' \frac{t^X}{|\mathbf{Aut}(X)|} = \mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{exp}\left(\sum_{\mathbf{H}\leq_f \mathbf{G}} \frac{t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\right)$$

y por el corolario 5.5.1 aplicado al funtor **F** y por la ecuación 1.1 tenemos que

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_*(\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}(t)) = \sum_{n=0} \frac{|\mathbf{Str}(\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}/[n]/\cong)|}{\mathbf{Aut}([n])} t^n = \sum_{n=0} \frac{|\mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{S}_n)|}{n!} t^n$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_*(\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}(t)) &= \mathbf{exp}(\mathbf{F}_*(\mathbf{Con}(\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}(t)))) = \mathbf{exp}\left(\mathbf{F}_*\left(\sum_{\mathbf{H}\leq_f \mathbf{G}} \frac{t^{\mathbf{F}(\mathbf{G}/\mathbf{H})}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\right)\right) \\ &= \mathbf{exp}\left(\sum_{\mathbf{H}\leq_f \mathbf{G}} \frac{t^{\mathbf{F}(\mathbf{G}/\mathbf{H})}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\right) = \mathbf{exp}\left(\sum_{\mathbf{H}\leq_f \mathbf{G}} \frac{t^{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos la fórmula de Wohlfahrt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{S}_n)|}{n!} t^n = \mathbf{exp}\left(\sum_{\mathbf{H}\leq_f \mathbf{G}} \frac{t^{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\right).$$

Veamos a continuación un ejemplo.

Sea $\mathbf{G}$ un grupo abeliano libre de rango 2. El número $|\mathbf{Hom(G, S}_n)|$ es igual al número de elementos $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_n$ tales que $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$, pues si $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_n$ es un homomorfismo y $\{x, y\}$ es una base de $\mathbf{G}$, entonces φ está completamente determinada por sus valores en $\{x, y\}$. Si $\varphi(x) = \sigma_1$ y $\varphi(y) = \sigma_2$, entonces

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(x * y) = \varphi(y * x) = \varphi(y) \circ \varphi(x) = \sigma_2 \circ \sigma_1.$$

Por atra parte, como $\{x, y\}$ es una base de $\mathbf{G}$, entonces para cualesquiera σ_1, σ_2 que conmuten entre ellos, existe un único homomorfismo $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_n$ tal que $\varphi(x) = \sigma_1$ y $\varphi(y) = \sigma_2$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_n | \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1\}|}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{Hom(G, S}_n)|}{n!} \\ = \mathbf{exp}\Big({\sum_{\mathbf{H} \leq_f \mathbf{G}}}' \frac{t^{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})} \Big) &= \mathbf{exp}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma(m)}{m} t^m \Big),\end{aligned}$$

donde $\sigma(m)$ representa al número de subgrupos de $\mathbf{G}$ que tienen índice m.

Demostremos el siguiente resultado.

Lema 6.1.1. *Con la notación anterior, $\sigma(m)$ es igual a la suma de todos los divisores de m.*

Dem. Podemos suponer que $\mathbf{G} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por ser $\mathbf{G}$ un grupo abeliano libre de rango 2. Sea $\mathbf{H}$ un subgrupo de $\mathbf{G}$ tal que $(\mathbf{G} : \mathbf{H}) = m$. Sean d el menor entero positivo tal que $(d, 0) \in \mathbf{H}$ y $(a, b) \in \mathbf{H}$ tal que si $(a', b') \in \mathbf{H}$, entonces $b \leq b'$. Aplicando algoritmo de la división a d y a tenemos que $a = dq + r$, con $0 \leq r < d$. Veremos a continuación que $\mathbf{H} = \langle (d, 0), (r, b) \rangle$.

Sea $(x, y) \in \mathbf{H}$, entonces como b es mínimo con la propiedad mencionada tenemos que si $y = bt + k$, con $0 \leq k < b$, entonces

$$(x - tr, k) = (x, bt + k) - (tr, tb) = (x, bt + k) - t(r, b) = (x, y) - t(r, b) \in \mathbf{H},$$

por lo tanto, $k = 0$ y por consiguiente $b | y$. Tenemos que $(x, y) = (x, tb)$, así que $(x - tr, 0) = (x, bt) - t(r, b) \in \mathbf{H}$, con lo que $(x - tr, 0) = h(d, 0)$ para algún entero h. Concluimos entonces que

$$(x, y) = h(d, 0) + t(r, b)$$

y por lo tanto, $\mathbf{H} =< (d, 0), (r, b) >$. Queremos ver ahora que $b = \frac{m}{d}$ (o bien, que $bd = m$).

Dado cualquier $(x, y) \in \mathbf{G}$, nuevamente por algoritmo de la división tenemos que $y = by'' + y'$, donde $0 \leq y' < b$. Desarrollando, tenemos que

$$(x, y) = (x, by'' + y') = y''(r, b) + (x - y''r, y'),$$

aplicando ahora algoritmo de la división a $x - y''r$ y d, se tiene que $x - y''r = dx'' + x'$, con $0 \leq x' < d$, con lo cual

$$y''(r, b) + (x - y''r, y') = y''(r, b) + x''(d, 0) + (x', y').$$

Esto último nos dice que

$$(x, y) + \mathbf{H} = (x', y') + \mathbf{H}.$$

Lo que hemos demostrado es que $(x, y) + \mathbf{H}$ es igual a $(x', y') + \mathbf{H}$, con $0 \leq x' < d$ y $0 \leq y' < b$. Dicha (x', y') es única por la siguiente razón. Si $(x_1, y_1) + \mathbf{H} = (x_2, y_2) + \mathbf{H}$, con $0 \leq x_1, x_2 < d$ y $0 \leq y_1, y_2 < b$, entonces $(x_1, y_1) - (x_2, y_2) \in \mathbf{H}$ y por razonamientos que hicimos anteriormente, $d|(x_1 - x_2)$ y $b|(y_1 - y_2)$, así que $x_1 - x_2 = 0$ y $y_1 - y_2 = 0$.

Hemos visto que $\mathbf{H} =< (d, 0), (r, \frac{m}{d}) >$, con $0 \leq r < d$. Resulta claro que si $d \neq d'$, entonces $< (d, 0), (r, \frac{m}{d}) > \neq < (d', 0), (r, \frac{m}{d'}) >$, tenemos que observar solamente que si $r \neq r'$, entonces $< (d, 0), (r, \frac{m}{d}) > \neq < (d, 0), (r', \frac{m}{d}) >$, pero esto es cierto debido a que si $< (d, 0), (r, \frac{m}{d}) > = < (d, 0), (r', \frac{m}{d}) >$, entonces tendriamos que

$$(r', \frac{m}{d}) = \alpha_1(d, 0) + \alpha_2(r, \frac{m}{d})$$

y

$$(r, \frac{m}{d}) = \beta_1(d, 0) + \beta_2(r', \frac{m}{d})$$

para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$. Podemos observar que $\alpha_2 = \beta_2 = 1$, y por lo tanto,

$$r' = \alpha_1 d + r \ \ y \ \ r = \beta_1 d + r'.$$

Sustituyendo una igualdad en la otra tenemos

$$r' = \alpha_1 d + \beta_1 d + r',$$

entonces $\alpha_1 = -\beta_1$. Con esto último tenemos

$$r' = -\beta_1 d + r \ \ y \ \ r = \beta_1 d + r'.$$

Restando las igualdades se tiene que

$$r' - r = -2\beta_1 d + r - r' \Rightarrow 2(r - r') = 2\beta_1 d \Rightarrow (r - r') = \beta_1 d$$
$$\Rightarrow d|r - r' \Rightarrow r - r' = 0.$$

Hemos demostrado que $\mathbf{H} =< (d,0),(r,\frac{m}{d}) >$, con $0 \leq r < d$. Como existen exactamente d enteros positivos entre 0 y $d-1$, podemos afirmar que en efecto $\sigma(m)$ es igual a la suma de todos los divisores de m o, en otras palabras, la suma de los divisores de m es igual al número de subgrupos de $\mathbf{G}$ con índice m.

□

Tenemos entonces la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\{(x,y) \in \mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_n | xy = yx\}|}{n!} = \mathbf{exp}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma(m)}{m} t^m \right).$$

Si tomamos en cuenta la acción de un grupo finito $\mathbf{G}$ sobre el mismo, dada por la conjugación ($g * h = ghg^{-1}$) y aplicamos el teorema de Burnside [3] se obtiene la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} r = \frac{\sum_{h\in\mathbf{G}} |X_h|}{|\mathbf{G}|} &= \frac{\sum_{h\in\mathbf{G}} |\{g \in \mathbf{G} | ghg^{-1} = h\}|}{|\mathbf{G}|} \\ = \frac{\sum_{h\in\mathbf{G}} |\{g \in \mathbf{G} | gh = hg\}|}{|\mathbf{G}|} &= \frac{|\{(g,h) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G} | gh = hg\}|}{|\mathbf{G}|}, \end{aligned}$$

donde r representa el número de orbitas de $\mathbf{G}$ bajo la conjugación (o bien, el número de clases de conjugación).

Si $\sigma \in \mathbf{S}_n$, entonces σ arroja una partición sobre n dada por la siguiente relación de equivalencia. Sean $x, y \in n$, entonces $x \sim_\sigma y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tal que $\sigma^n(x) = y$. Veamos que $\sigma, \sigma' \in \mathbf{S}_n$ son una conjugada de la otra si y solo si las particiones que arrojan son isomorfas (o que las relaciones de equivalencia son isomorfas).

Sean $\sigma, \sigma' \in \mathbf{S}_n$ tales que $\exists \lambda \in \mathbf{S}_n$ con $\lambda \circ \sigma \circ \lambda^{-1} = \sigma'$. Entonces

$$\begin{aligned} x \sim_{\sigma'} y &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} - \{0\} \ \ \textit{tal que}\ (\sigma')^n(x) = (y) \\ &\Leftrightarrow \lambda \circ \sigma^n \circ \lambda^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \sigma^n(\lambda^{-1}(x)) = \lambda^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow \lambda^{-1}(x) \sim_\sigma \lambda^{-1}(y). \end{aligned}$$

La última equivalencia nos dice que ambas relaciones son isomorfas.

Por lo tanto, la equación que hemos obtenido es

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) t^n = \mathbf{exp}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma(m)}{m} t^m \right),$$

donde $p(n)$ denota al número de particiones de n no isomorfas.

6.2. Representación de permutaciones pares

Definición 6.2.1. *Sea $\boldsymbol{G}$ un grupo finitamente generado. Diremos que un $\boldsymbol{G}$-conjunto finito es par si el homomorfismo $\boldsymbol{G} \to \boldsymbol{S}_n$ correspondiente a la acción se puede factorizar a través del grupo alternante $\boldsymbol{A}_n$, para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$,*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{G} \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & \boldsymbol{S}_n \\ & \mathcal{A}_n \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

En el artículo de Yoshida [1] se enuncia de manera erronea el siguiente enunciado.

Un $\mathbf{G}$-conjunto transitivo $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ asociado a un subgrupo $\mathbf{H}$ es par, si y solo si

$$|\langle x\rangle\backslash\mathbf{G}/\mathbf{H}| \cong (\mathbf{G}:\mathbf{H})\ (mod\, 2)$$

para cualquier 2-elemento de $\mathbf{G}$.

Sin embargo, si $\mathbf{G} = \mathbb{Z}$ y $\mathbf{H} = 2\mathbb{Z}$, entonces como $\mathbb{Z}$ no tiene ningún 2-elemento la segunda parte de la equivalencia se cumple, pero $\mathbf{G}/\mathbf{H} \cong \mathbb{Z}_2$, cuya acción de $\mathbb{Z}$-conjunto está dada por

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbf{S}_{\mathbb{Z}_2}\ ;\ n \mapsto \overline{n + (\_)},$$

pero el morfismo $\overline{1 + (\_)}$ se descompone como la permutación impar $(0,1)$. Por lo tanto, no podemos descomponer a φ a través de $\mathbf{A}_{\mathbb{Z}_2} = \{Id\}$. No obstante, si pedimos que $\mathbf{G}$ sea finito, entonces la proposición es verdadera.

Proposición 6.2.1. *Sea $\boldsymbol{G}$ un grupo finito. Un $\boldsymbol{G}$-conjunto transitivo $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ asociado a un subgrupo $\boldsymbol{H}$ es par, si y solo si*

$$|\langle x\rangle\backslash \boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}| \cong (\boldsymbol{G}:\boldsymbol{H})\ (mod\, 2)$$

para cualquier 2-elemento de $\boldsymbol{G}$.

Dem[$\Rightarrow$]. Supongamos que $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es par. Sea x un 2-elemento de $\mathbf{G}$ y sea $\{g_i\mathbf{H}\}_{i\in m}$ un conjunto completo de representantes de $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, entonces

$$\langle x\rangle\backslash\mathbf{G}/\mathbf{H} = \bigcup_{i=1}^{m} \langle x\rangle g_i\mathbf{H}.$$

Sea $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}$ el momorfismo correspondiente al $\mathbf{G}$-conjunto $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, podemos expresar a $\langle x\rangle g_i\mathbf{H}$ como

$$\langle x\rangle g_i\mathbf{H} = g_i\mathbf{H} \cup \varphi(x)(g_i\mathbf{H}) \cup \varphi^2(x)(g_i\mathbf{H}) \cup ...,$$

para cada $i \in m$. Si descomponemos a $\varphi(x)$ en ciclos ajenos,

$$\varphi(x) = C_1 C_2 \cdots C_t,$$

entonces $|\langle x\rangle\backslash\mathbf{G}/\mathbf{H}|=t$, el número de ciclos ajenos de la descomposición de $\varphi(x)$.

Sabemos que $\mathbf{sgn}(\varphi(x)) = 1 \Leftrightarrow \varphi(x)$ es par, así que $\mathbf{sgn}(\varphi(x)) = 1$. Si recordamos como calcular el signo de $\varphi(x)$ veremos que

$$1 = \mathbf{sgn}(\varphi(x)) = (-1)^{|\mathbf{G}/\mathbf{H}|-t} = (-1)^{(\mathbf{G}:\mathbf{H})-t}.$$

Por lo tanto, 2 divide $(\mathbf{G}:\mathbf{H}) - t$, es decir, $(\mathbf{G}:\mathbf{H}) \cong t(mod\, 2)$ o en otra forma,

$$|\langle x\rangle\backslash\mathbf{G}/\mathbf{H}| \cong (\mathbf{G}:\mathbf{H})(mod\, 2).$$

[$\Leftarrow$]. Supongamos que para todo 2-elemento x de $\mathbf{G}$,

$$|\langle x\rangle\backslash\mathbf{G}/\mathbf{H}| \cong (\mathbf{G}:\mathbf{H})(mod\, 2).$$

Obsérvese que si x es un 2-elemento de $\mathbf{G}$, entonces $(\mathbf{G}:\mathbf{H}) - t = 2r$ (r el número de ciclos de la descomposición de $\varphi(x)$), con lo cual $\varphi(x) \in \mathbf{A}_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}$. Sea $y \in \mathbf{G}$ y digamos que $o(y) = 2^k m$, con $o(y)$ el orden de y y m impar. Como y^m es un 2-elemento, entonces $\varphi(y^m) \in \mathbf{A}_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}$. Por otro lado, y^{2k} tiene orden impar y como $o(\varphi(y^{2^k}))|o(y^{2^k})$, entonces $o(\varphi(y^{2^k}))$ es impar y si suponemos que $\varphi(y^{2^k})$ se descompone como

$$\varphi(y^{2^k}) = \tau_1\tau_2\cdots\tau_s,$$

producto de permutaciones, con s impar, entonces tendriamos que

$$Id = (\varphi(y^{2^k}))^\alpha = (\tau_1\tau_2\cdots\tau_s)^\alpha \notin \mathbf{A}_{\mathbf{G}/\mathbf{H}},$$

donde $\alpha = o(\varphi(y^{2^k}))$, lo cual sería una cotradicción, por lo tanto, $\varphi(y^{2^k}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}$. Ahora, como $(2^k, m) = 1$, entonces existen enteros l_1, l_2 tales que $1 = 2^k l_1 + ml_2$, con lo cual

$$y = y^{2^k l_1 + ml_2} = (y^{2^k})^{l_1}\cdot(y^m)^{l_2}.$$

Podemos concluir que $\varphi(y) \in \mathbf{A}_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}$.

□

Definiremos ahora lo que entenderemos por el *signo* de un $\mathbf{G}$-conjunto finito.

Definición 6.2.2. *Sea X un $\mathbf{G}$-conjunto finito. El signo de X, al que denotaremos como* $\mathbf{sgn}(X)$, *es la función*

$$\mathbf{sgn}(X) = \begin{cases} +1 & \text{si } X \text{ es un } \mathbf{G}\text{-conjunto par} \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es evidente que $\mathbf{sgn}(X+Y) = \mathbf{sgn}(X)\cdot\mathbf{sgn}(Y)$. La categoría de $\mathbf{G}$-conjuntos pares no es una KS-categoría, sin embargo, podemos hacer los siguientes desarrollos.

Como ya vimos en la fórmula de Wohlfahrt tenemos que

$$\sum_{X\in\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}}{}' \frac{t^X}{|\mathbf{Aut}(X)|} = \mathbf{exp}\Big(\sum_{\mathbf{H}\leq_f\mathbf{G}} \frac{t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\Big). \tag{6.1}$$

Si substituimos t^X por $\mathbf{sgn}(X)t^X$ tenemos

$$\sum_{X\in\mathbf{Set}_f^{\mathbf{G}}}{}' \frac{\mathbf{sgn}(X)t^X}{|\mathbf{Aut}(X)|} = \mathbf{exp}\Big(\sum_{\mathbf{H}\leq_f\mathbf{G}} \frac{\mathbf{sgn}(\mathbf{G}/\mathbf{H})t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\Big), \tag{6.2}$$

y al sumar a la ecuación 6.1 la ecuación 6.2 obtenemos la ecuación

$$2\sum_{X:pares}{}' \frac{t^X}{|\mathbf{Aut}(X)|} = \mathbf{exp}\Big(\sum_{\mathbf{H}\leq_f\mathbf{G}} \frac{t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\Big) + \mathbf{exp}\Big(\sum_{\mathbf{H}\leq_f\mathbf{G}} \frac{\mathbf{sgn}(\mathbf{G}/\mathbf{H})t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\Big),$$

o que es lo mismo,

$$\sum_{X:pares}{}' \frac{t^X}{|\mathbf{Aut}(X)|} = \frac{1}{2}\mathbf{exp}\Big(\sum_{\mathbf{H}\leq_f\mathbf{G}} \frac{t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\Big) + \frac{1}{2}\mathbf{exp}\Big(\sum_{\mathbf{H}\leq_f\mathbf{G}} \frac{\mathbf{sgn}(\mathbf{G}/\mathbf{H})t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\Big).$$

Siguiendo los mismos desarrollos que seguimos en la fórmula de Wohlfahrt tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{A}_n)|}{n!}t^n = \frac{1}{2}\mathbf{exp}\Big(\sum_{\mathbf{H}\leq_f\mathbf{G}} \frac{t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\Big)\\ +\frac{1}{2}\mathbf{exp}\Big(\sum_{\mathbf{H}\leq_f\mathbf{G}} \frac{\mathbf{sgn}(\mathbf{G}/\mathbf{H})t^{\mathbf{G}/\mathbf{H}}}{(\mathbf{G}:\mathbf{H})}\Big).\end{aligned}$$

Si $\mathbf{G}$ es un grupo cíclico de orden m, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\{\pi\in\mathbf{A}_n|\pi^m=1\}|}{n!}t^n = \frac{1}{2}\mathbf{exp}\Big(\sum_{k|m}\frac{t^k}{k}\Big) + \frac{1}{2}\mathbf{exp}\Big(\sum_{k|m}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k}\Big),$$

donde $\mathbf{sgn}(\mathbf{G}/\mathbf{H}) = (-1)^{k-1}$, pues si $\mathbf{G}$ es cíclico finito , entonces $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ tiene estructura de grupo cíclico finito y como $(\mathbf{G}:\mathbf{H}) = k$, entonces podemos suponer que $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ tiene la forma

$$\mathbf{G}/\mathbf{H} = \{\mathbf{H}, g\mathbf{H}, g^2\mathbf{H}, g^3\mathbf{H}, ..., g^{k-1}\mathbf{H}\},$$

y para cada $g \in \mathbf{G}$, el morfismo de $\mathbf{G}$-conjuntos $g(\_)$ cumple que

$$g(g^i\mathbf{H}) = g(g^j\mathbf{H}) \Leftrightarrow g^i\mathbf{H} = g^j\mathbf{H},$$

con $i \neq j$, entonces $g(\_)$ se descompone en un solo ciclo, digamos

$$g(\_) = (t_1, t_2, ..., t_k) = (t_1, t_k)(t_1, t_{k-1}) \cdots (t_1, t_2)$$

y por lo tanto que $\mathbf{sgn}(\mathbf{G}/\mathbf{H}) = (-1)^{k-1}$, lo cual justifica la fórmula.

Apéndice A

La función signo y G-conjuntos

Definición A.0.3. *Si $\alpha \in \boldsymbol{S}_n$ y $\boldsymbol{\alpha} = \beta_1 ... \beta_t$ es una factorización completa de α en ciclos ajenos, entonces la función signo se define como*

$$\boldsymbol{sgn}(\alpha) = (-1)^{n-t}.$$

Teorema A.0.1. *Una permutación $\alpha \in \boldsymbol{S}_n$ es par si y sólo si $\boldsymbol{sgn}(\alpha) = 1$*

Dem. Ver [3]

$\square$

Dados los conjuntos A_1, A_2 y la función $* : A_1 \times A_2 \to A_3$, si $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, denotaremos por $a_1 * a_2$ al elemento $*(a_1, a_2)$.

Definición A.0.4. *Sea $\boldsymbol{G}$ un grupo y X un conjunto. Una acción de $\boldsymbol{G}$ sobre X es una función*

$$* : \boldsymbol{G} \times X \to X$$

que cumple lo siguiente:

1. $\forall x \in X \quad e * x = x$

2. *Si $g_1, g_2 \in \boldsymbol{G}$, entonces $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$.*

Si X está dotado por una acción de $\mathbf{G}$ sobre él, diremos que X es un $\mathbf{G}$-conjunto.

Observación. Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de acciones de $\mathbf{G}$ sobre X y el conjunto de morfismos de grupo $\mathbf{G} \to \mathbf{S}_X$.

Dem. Sea $*$ una acción de $\mathbf{G}$ sobre X. Definimos

$$\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_X$$

de la siguiente manera. Si $g \in \mathbf{G}$, entonces $\varphi(g) = \varphi_g : X \to X$ dado por $\varphi_g(x) = g * x$. Es fácil notar que φ_g es un isomorfismo de grupos y que φ es un homomorfismo de grupos. Si tenemos dada

$$\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_X,$$

entonces definimos la acción de $\mathbf{G}$ sobre X como $g * x = \varphi(g)(x)$. La correspondencia que hemos descrito es biyectiva.

□

Definición A.0.5. *Sea $\boldsymbol{G}$ un grupo y X un $\boldsymbol{G}$-conjunto. Para cada $x \in X$, $\boldsymbol{G}_x = \{g \in \boldsymbol{G} | g * x = x\}$ se llama el subgrupo de isotropía de x (el cual es un subgrupo de $\boldsymbol{G}$).*

Denotaremos en todo momento por $\mathbf{G}$ a un grupo y por X a un $\mathbf{G}$-conjunto.

Es fácil ver que la relación $\sim$ dada por, $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \exists g \in \mathbf{G}$ tal que $g * x_1 = x_2$, es una relación de equivalencia. En base a esto damos la siguiente definición.

Definición A.0.6. *La órbita de $x \in X$ es la clase de equivalencia a la que pertenece bajo la relación $\sim$. Dicha órbita es denotada como $\boldsymbol{G}x$.*

Observación. La órbita de x, $\mathbf{G}x$, es igual al conjunto $\{y \in X | y = g * x$, para algún $g \in \mathbf{G}\}$.

Teorema A.0.2. *$|\boldsymbol{G}x_0| = (\boldsymbol{G} : \boldsymbol{G}_{x_0})$ para toda $x_0 \in X$*

Dem. En realidad se demuestra que $\mathbf{G}x_0 \cong \mathbf{G}/\mathbf{G}_{x_0}$.

Tomemos cualquier elemento $x_0 \in X$. Sea

$$\mathbf{G}_{x_0} = \{g \in \mathbf{G} | g * x_0 = x_0\}$$

el estabilizador de x_0. Definimos

$$\varphi : \mathbf{G}x_0 \to \mathbf{G}/\mathbf{G}_{x_0} \;;\quad \varphi(x) = g\mathbf{G}_{x_0},$$

donde $g \in \mathbf{G}$ es tal que $g * x_0 = x$. Veamos que φ está bien definida.

Supongamos que $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$ y $g_1 * x_0 = g_2 * x_0$, entonces $x_0 = g_1^{-1} g_2 * x_0 \Rightarrow g_1^{-1} g_2 \in \mathbf{G}_{x_0} \Rightarrow g_1\mathbf{G}_{x_0} = g_2\mathbf{G}_{x_0}$.

Si $g' \in \mathbf{G}$ y $x \in X$, entonces $g'(\varphi(x)) = g'(g\mathbf{G}_{x_0}) = (g'g)\mathbf{G}_{x_0} = \varphi(g' * x)$, pues como $g * x_0 = x$, entonces $(g'g) * x_0 = g' * x$. Por lo tanto, φ es homomorfismo de $\mathbf{G}$-conjuntos. Veamos ahora que φ es biyectiva. Si $\varphi(x) = \varphi(y)$, entonces existen $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$ con $g_1 * x_0 = x$ y $g_2 * x_0 = y$ y $g_1\mathbf{G}_{x_0} = g_2\mathbf{G}_{x_0}$, entonces $g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{G}_{x_0}$ $\Rightarrow (g_1^{-1}g_2) * x_0 = x_0 \Rightarrow g_1 * x_0 = g_2 * x_0 \Rightarrow x = y$, con lo cual φ es inyectiva. Si $g\mathbf{G}_{x_0} \in \mathbf{G}/\mathbf{G}_{x_0}$, elegimos cualquier $g' \in \mathbf{G}_{x_0}$, entonces $(gg') * x_0 = g * x_0$ y por lo tanto, $\varphi((gg') * x_0) = g\mathbf{G}_{x_0}$. Entonces φ es un isomorfismo de $\mathbf{G}$-conjuntos.

□

Proposición A.0.2. *Si $M, N \leq \boldsymbol{G}$, entonces*

$$\boldsymbol{G}/M \cong \boldsymbol{G}/N \text{ como } \boldsymbol{G}\text{-conjuntos} \Leftrightarrow M \text{ y } N \text{ son conjugados.}$$

Dem[$\Rightarrow$]. Sean $M, N \leq \mathbf{G}$ tales que $\mathbf{G}/M \cong \mathbf{G}/N$ como $\mathbf{G}$-conjuntos, sea

$$\varphi : \mathbf{G}/N \to \mathbf{G}/M$$

un isomorfismo. Entonces $\varphi(N) = gM$ para algún $g \in \mathbf{G}$. Si $a \in N$ entonces $\varphi(aN) = a\varphi(N) = agM$, por otra parte, $\varphi(aN) = \varphi(N) = gM$, entonces $g^{-1}ag \in M$, por lo que $g^{-1}Ng \leq M$. Análogamente con $\varphi^{-1} : \mathbf{G}/M \to \mathbf{G}/N$ se tiene que $gMg^{-1} \leq N$. Por lo tanto,

$$M = g^{-1}(gMg^{-1})g \leq g^{-1}Ng \leq M,$$

con lo cual $g^{-1}Ng = M$.

[$\Leftarrow$]. Sea $M = g^{-1}Ng$ para algún $g \in \mathbf{G}$. Definimos $\varphi : \mathbf{G}/N \to \mathbf{G}/M$ como $\varphi(g'N) = g'(gM)$. Sean $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$, tenemos que $g_1(gM) = g_2gM \Leftrightarrow g^{-1}g_1^{-1}g_2g \in M$ $\Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in N \Leftrightarrow g_1N = g_2N$, por lo tanto, φ está bien definida y es inyectiva. Para cualquier $g'M \in \mathbf{G}/M$ se tiene que $\varphi(g'g^{-1}N) = g'g^{-1}gM = g'M$ y es claro que φ es una $\mathbf{G}$-función, pues $\varphi(g''g'N) = g''(g'gM) = g''(\varphi(g'N))$. Tenemos entonces que

$$\mathbf{G}/M \cong \mathbf{G}/N \Leftrightarrow M \text{ y } N \text{ son conjugados.}$$

□

Proposición A.0.3. *Sea $\boldsymbol{H} \leq \boldsymbol{G}$, entonces los grupos $\boldsymbol{Aut}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H})$ y $\boldsymbol{N_G}(\boldsymbol{H})/\boldsymbol{H}$ son isomorfos, donde $\boldsymbol{N_G}(\boldsymbol{H})$ denota al normalizador de $\boldsymbol{H}$.*

Dem. Definimos la función

$$\varphi : \mathbf{N_G(H)} \to \mathbf{Aut(G/H)}$$

como $\varphi(g) = f_g$, donde f_g es el automorfismo de $\mathbf{G/H}$ tal que $f_g(g'\mathbf{H}) = g'(g\mathbf{H})$. En efecto f_g es una $\mathbf{G}$-función, pues

$$g''f_g(g'\mathbf{H}) = g''(g'g\mathbf{H}) = (g''g')g\mathbf{H} = f_g(g''g\mathbf{H}),$$

además,

$$\begin{aligned} a\mathbf{H} = b\mathbf{H} &\Leftrightarrow b^{-1}a \in \mathbf{H} \Leftrightarrow g^{-1}(b^{-1}a)g \in \mathbf{H} \\ &\Leftrightarrow (bg)^{-1}ag \in \mathbf{H} \Leftrightarrow ag\mathbf{H} = bg\mathbf{H}, \end{aligned}$$

así que f_g está bien definida y es inyectiva. Dada $g'\mathbf{H}$ en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, $f_g(g'g^{-1}\mathbf{H}) = g'g^{-1}g\mathbf{H} = g'\mathbf{H}$ y por lo tanto f_g resulta ser un automorfismo en $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Por otra parte

$$f_{gg'}(a\mathbf{H}) = agg'\mathbf{H} = a(gf_{g'}(\mathbf{H})) = a(f_g \circ f_{g'}(\mathbf{H})) = f_g \circ f_{g'}(a\mathbf{H}),$$

con lo cual φ es un homomorfismo de grupos. Tenemos tambien que si $f\colon \mathbf{G}/\mathbf{H} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ es un automorfismo, entonces

$$f(g\mathbf{H}) = gf(\mathbf{H}),$$

$\forall\ g \in \mathbf{G}$, entonces si $f(\mathbf{H}) = a\mathbf{H}$, para alguna $a \in \mathbf{G}$, $f(g\mathbf{H}) = ga\mathbf{H} = f_a(g\mathbf{H})$ $\forall\ g \in \mathbf{G}$ y entonces $f = f_a$, tambien se tiene que para toda $h \in \mathbf{H}$, $a^{-1}ha\mathbf{H} = (a^{-1}h)f(\mathbf{H}) = f(a^{-1}h\mathbf{H}) = f(a^{-1}\mathbf{H}) = a^{-1}a\mathbf{H} = \mathbf{H}$, lo cual nos dice que $a \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{H})$. Podemos decir entonces que φ es suprayectiva. El nucleo de φ lo podemos calcular con el siguiente razonamiento,

$$\varphi(g) = id \Leftrightarrow \varphi(g)(a\mathbf{H}) = f_g(a\mathbf{H}) = a\mathbf{H}\ \ \forall\ a \in \mathbf{H} \Leftrightarrow ag\mathbf{H} = a\mathbf{H}\ \ \forall\ a \in \mathbf{H} \Leftrightarrow g \in \mathbf{H}.$$

Aplicando el primer teorema de isomorfismos de grupos tenemos que

$$\mathbf{Aut}(\mathbf{G}/\mathbf{H}) \cong N_{\mathbf{G}}(\mathbf{H})/\mathbf{H}.$$

□

Teorema A.0.3. *(Burnside). Consideremos en esta ocasión a* $\boldsymbol{G}$ *un grupo finito y a* X *un* $\boldsymbol{G}$*-conjunto finito. El número de órbitas en* X *bajo* $\boldsymbol{G}$*, al que denotaremos por* ν*, está dado por*

$$\nu = \frac{\sum_{g \in \boldsymbol{G}} |X_g|}{|\boldsymbol{G}|},$$

donde $X_g = \{x \in X | g * x = x\}$.

Dem. Ver [3].

Apéndice B

Series de potencias

Definición B.0.7. *Una serie de potencia sobre el conjunto* $\mathbb{N}$ *con coeficientes en* $\boldsymbol{R}$ *es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Al anillo formado por estas series con las operaciones de suma y producto que definiremos a continuación, le llamaremos el anillo de las series de potencia con coeficientes en $\boldsymbol{R}$.

Definición B.0.8. *Sean* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *dos series de potencia (sobre el mismo anillo). Definimos las operaciones suma (+) y producto (·) como*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n$$

y

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n) t^n,$$

donde $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

Definiremos por último una operación más, la cual es de gran importancia en el capítulo 4.

Definición B.0.9. *Sean* $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *y* $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *dos series de potencia (sobre el mismo anillo). Definimos la composición en el orden* $(f \circ g)(t)$, *como*

$$(f \circ g)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m)^n,$$

donde $(\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m)^n$ *representa el producto de* n *copias de* $g(t)$.

Apéndice C

Algunas definiciones categóricas

Definición C.0.10. *Dada E una categoría, diremos que un objeto inicial de E es estricto si siempre que exista $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \emptyset$ implica que $\mathcal{A} = \emptyset$, donde $\emptyset$ es el objeto inicial.*

Definición C.0.11. *Sea E una categoría con sumas y sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ objetos en E. Diremos que la suma $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ es universal si para cualquier morfismo $f\colon E \to \mathcal{A}+\mathcal{B}$, los productos fibrados a lo largo de las inyecciones existen y el renglón superior del diagrama*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "f"] & E_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathcal{A} \arrow[r] & \mathcal{A}+\mathcal{B} & \mathcal{B}, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

donde los cuadrados son productos fibrados, es una suma.

Lema C.0.1. *Si E es una categoría con sumas universales, entonces el objeto inicial es estricto.*

Dem. Ver [4]

□

Definición C.0.12. *Sea E una categoría. Diremos que las sumas universales son disjuntas si las inyecciones en la suma son monomorfismos y si su producto fibrado es el objeto inicial.*

Definición C.0.13. *Una categoría* E *es un topos si tiene todos los limites finitos, una objeto* Ω *(llamado clasificador de subobjetos) y una función* P *que asigna a cada objeto* $\mathcal{B}$ *de* E *un objeto* $P(\mathcal{B})$ *de* E*, tal que para cada objeto* $\mathcal{A}$ *de* E*, se tienen dos isomorfismos naturales en* $\mathcal{A}$*,*

$$\boldsymbol{Sub}_{\mathsf{E}}(\mathcal{A}) \cong \boldsymbol{Hom}_{\mathsf{E}}(\mathcal{A}, \Omega) \;\; y$$
$$\boldsymbol{Hom}_{\mathsf{E}}(\mathcal{B} \times \mathcal{A}, \Omega) \cong \boldsymbol{Hom}_{\mathsf{E}}(\mathcal{A}, P(\mathcal{B})).$$

Apéndice D

Demostración del teorema del capítulo 2

Definición D.0.14. *Un grupoide es una categoría (esqueléticamente pequeña) en la que todos los morfismos son isomorfismos. Todos los grupoides y funtores entre ellos forman la categoría de grupoides,* $\boldsymbol{Gpd}$.

Definición D.0.15. *Definimos la categoría* $(\boldsymbol{Cat}/\mathbf{Set}_f)_{fff}$ *como la categoría que cumple las siguientes condiciones.*

1. *Un objeto es un funtor fiel* $\boldsymbol{S} : \mathsf{C} \to \mathbf{Set}_f$ *con fibras finitas proveniente de una categoría* C.

2. *Un morfismo de* $\boldsymbol{S} : \mathsf{E} \to \mathbf{Set}_f$ *a* $\boldsymbol{T} : \mathsf{F} \to \mathbf{Set}_f$ *es un par* $[\boldsymbol{F}, \lambda]$, *donde* $\boldsymbol{F} : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ *y* $\lambda : \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{F} \Rightarrow \boldsymbol{S}$ *es un isomorfismo natural. Si* $[\boldsymbol{F}, \lambda], [\boldsymbol{F}', \lambda'] : (\boldsymbol{S} : \mathsf{E} \to \mathbf{Set}_f) \to (\boldsymbol{T} : \mathsf{F} \to \mathbf{Set}_f)$, *entonces diremos que* $[\boldsymbol{F}, \lambda] = [\boldsymbol{F}', \lambda']$ *si y sólo si existe* $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}'$ *isomorfismo tal que* $\lambda' \circ (\boldsymbol{T} * \varphi) = \lambda$, *donde* $\boldsymbol{T} * \varphi = 1_{\boldsymbol{T}} * \varphi$ *denota la composición horizontal.*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[rr, bend left, "\boldsymbol{F}"] \arrow[rr, bend right, "\boldsymbol{F}'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\varphi"] \arrow[dr, "\boldsymbol{S}"'] & & \mathcal{F} \arrow[dl, "\boldsymbol{T}"] \\
& \mathbf{Set}_f \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\lambda}\ \overset{\Leftarrow}{\lambda'}"] &
\end{tikzcd}
$$

(Observemos que si $S : E \to \mathbf{Set}_f$ es un objeto en esta categoría, entonces la categoría E es esqueléticamente pequeña, pues sabemos que una categoría es equivalente a cualquiera de sus esqueletos, digamos que $\widehat{E}$ es un esqueleto de E. Para cada objeto X de E existe una única $n \in \mathbb{N}$ tal que $S(X) \cong [n]$. La cantidad de objetos de $\widehat{E}$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\{X \in \widehat{E} | S(X) \cong [n]\}/\cong| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\{X \in E | S(X) \cong [n]\}/\cong| \leq \aleph_0.$$

Por lo tanto la categoría E es esqueléticamente pequeña.)

3. *La composición*

$$(E \xrightarrow{S} \mathbf{Set}_f) \xrightarrow{[F,\lambda]} (F \xrightarrow{T} \mathbf{Set}_f) \xrightarrow{[G,\mu]} (G \xrightarrow{U} \mathbf{Set}_f)$$

está definida por

$$[G, \mu]\circ[F, \lambda] = [G\circ F, U\circ G\circ F \xrightarrow{\mu * F} T\circ F \xrightarrow{\lambda} S].$$

Proposición D.0.4. *La composición está bien definida.*

Dem. Sean $[\mathbf{F}, \lambda] = [\mathbf{F}', \lambda']$ y $[\mathbf{G}, \mu] = [\mathbf{G}', \mu']$, existen $\varphi : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F}'$ y $\psi : \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{G}'$ tales que $\lambda'\circ(\mathbf{T} * \varphi) = \lambda$ y $\mu'\circ(\mathbf{U} * \psi) = \mu$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, bend left, "\mathbf{F}"] \arrow[r, bend right, "\mathbf{F}'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] \arrow[dr, bend right=60, "\mathbf{S}"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow_{\lambda}\ \Leftarrow_{\lambda'}"] & F \arrow[r, bend left, "\mathbf{G}"] \arrow[r, bend right, "\mathbf{G}'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] \arrow[d, "\mathbf{T}"] & G \arrow[dl, bend left=60, "\mathbf{U}"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow_{\mu}\ \Leftarrow_{\mu'}"'] \\
& \mathbf{Set}_f &
\end{tikzcd}$$

Queremos demostrar que $\lambda'\circ(\mu'_{\mathbf{F}'})\circ(\mathbf{U} * (\psi * \varphi)) = \lambda\circ(\mu_{\mathbf{F}})$.

$$\begin{aligned}\lambda'\circ(\mu'_{\mathbf{F}'})\circ(\mathbf{U} * (\psi * \varphi)) &= \lambda'\circ(\mu'_{\mathbf{F}'})\circ(\mathbf{U} * (\psi_{\mathbf{F}'}\circ\mathbf{G}(\varphi)) \\ &= \lambda'\circ\mu'_{\mathbf{F}'}\circ\mathbf{U}(\psi_{\mathbf{F}'})\circ\mathbf{U}(\mathbf{G}(\varphi)).\end{aligned} \tag{D.1}$$

Sabemos que μ es natural y conocemos sus propiedades, así como las de λ. Por lo tanto, para E objeto de la categoría E se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{UGF}'(E) \arrow[dr, "\mu'_{\mathbf{F}'(E)}"] & & \\
\mathbf{UGF}'(E) \arrow[ur, "\mathbf{U}(\psi_{\mathbf{F}'(E)})"] \arrow[rr, "\mu_{\mathbf{F}'(E)}"'] & & \mathbf{TF}'(E) \arrow[dr, "\lambda'_E"] & \\
 & & & \mathbf{S}(E) \\
\mathbf{UGF}(E) \arrow[uu, "\mathbf{UG}(\varphi_E)"] \arrow[rr, "\mu_{\mathbf{F}(E)}"'] & & \mathbf{TF}(E) \arrow[uu, "\mathbf{T}(\varphi_E)"] \arrow[ur, "\lambda_E"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

Por lo tanto, la última igualdad de la ecuación D.1 es igual a $\lambda\circ(\mu_{\mathbf{F}})$, con lo que la composición está bien definida.

$\square$

Nuestro propósito será demostrar que las categorías $[\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f]$ y $(\mathbf{Gpd}, \mathbf{Set}_f)_{fff}$ son equivalentes, donde $(\mathbf{Gpd}, \mathbf{Set}_f)_{fff}$ es la subcategoría plena de

$$(\mathbf{Cat}, \mathbf{Set}_f)_{fff}$$

en la que los objetos son funtores fieles con fibras finitas provenientes de un grupoide. Para ello necesitamos definir los siguientes funtores:

Construiremos primero el funtor $\Lambda : [\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f] \to (\mathbf{Gpd}, \mathbf{Set}_f)_{fff}$ de la siguiente manera. Para una especie $\mathcal{A} : \mathbf{Bij}_f \to \mathbf{Set}_f$, la categoría de elementos de $\mathcal{A}$

$$\mathbf{Elts}(\mathcal{A}) = \{(N, a) | N \in \mathbf{Bij}_f, a \in \mathcal{A}(N)\}$$

es un grupoide, además, la proyección $\mathbf{S}_{\mathcal{A}} : \mathbf{Elts}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Set}_f$ tiene fibras finitas y es fiel. Argumentemos por qué $\mathbf{Elts}(\mathcal{A})$ es un grupoide. Sea $f\colon (N, a) \to (N', a')$, entonces f es una biyección de N a N' tal que $\mathcal{A}(f)(a) = a'$, entonces $f^{-1} : (N', a) \to (N, a')$ y como claramente $\mathbf{Elts}(\mathcal{A})$ es esqueléticamente pequeña $\therefore$ $\mathbf{Elts}(\mathcal{A})$ es un grupoide.

Definimos entonces $\Lambda(\mathcal{A}) = \mathbf{S}_{\mathcal{A}}$ en los objetos. Si $\theta : \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ es una transformación natural, entonces definimos $\Lambda(\theta) : \mathbf{Elts}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Elts}(\mathcal{B})$ como $\Lambda(\theta)(N, a) =$

$(N, \theta_N(a))$ (como $a \in \mathcal{A}(N)$, $\theta_N(a) \in \mathcal{B}(N)$). Si $g : (N, a) \to (N, b)$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(N) \arrow[r, "\theta_N"] \arrow[d, "\mathcal{A}(g)"'] & \mathcal{B}(N) \arrow[d, "\mathcal{B}(g)"] \\
\mathcal{A}(N' \arrow[r, "\theta_{N'}"'] & \mathcal{B}(N'))
\end{tikzcd}$$

conmuta, así que definimos $\Lambda(\theta)(g) = g : (N, \theta_N(a)) \to (N', \theta_{N'}(a'))$, pues

$$\mathcal{B}(g)(\theta_N(a)) = \theta_{N'}(\mathcal{A}(g)(a)) = \theta_{N'}(a').$$

Como $\mathbf{S}_{\mathcal{A}} = \mathbf{S}_{\mathcal{B}} \circ \Lambda(\theta)$ tenemos que Λ es funtor y $[\Lambda(\theta), Id]$ es un morfismo de $\mathbf{Elts}(\mathcal{A})$ a $\mathbf{Elts}(\mathcal{B})$.

Sea $\mathbf{S} : \mathsf{E} \to \mathbf{Set}_f$ un funtor fiel con fibras finitas. Dados N, N' y $g : N \to N'$ en $\mathbf{Bij}_f$, definimos el funtor $\mathcal{A}_{\mathbf{S}} : \mathbf{Bij}_f \to \mathbf{Set}_f$ de la siguiente manera

$$\mathcal{A}_{\mathbf{S}}(N) = \mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong$$

$$\mathcal{A}_{\mathbf{S}}(g) : \mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong \to \mathbf{Str}(\mathsf{E}/N')/\cong; \mathcal{A}_{\mathbf{S}}(g)\overline{[X, \sigma]} = \overline{[X, g \circ \sigma]}$$

Si el funtor $\mathbf{S} : \mathsf{E} \to \mathbf{Set}_f$ tiene fibras finitas, entonces por el lema 1.5.1 tenemos que $|\mathcal{A}_{\mathbf{S}}(N)| = |\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong| < \infty$, así que $\mathcal{A}_{\mathbf{S}}$ es una especie. Demostraremos a continuación que $\mathcal{A}_{\mathbf{S}}(g)$ está bien definida.

Si $\overline{[X, \sigma]} = \overline{[X', \sigma']}$, entonces $\exists\ \varphi : X \to X'$ biyectiva tal que $\sigma' \circ \mathbf{S}(\varphi) = \sigma$, entonces $(g \circ \sigma') \circ \mathbf{S}(\varphi) = g \circ \sigma \therefore \overline{[X, g \circ \sigma]} = \overline{[X', g \circ \sigma']}$.

Definimos ahora el funtor

$$\Gamma : (\mathbf{Cat}, \mathbf{Set}_f)_{fff} \to [\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f]$$

de la siguiente manera. Sean

$$\mathbf{S} : \mathsf{E} \to \mathbf{Set}_f,\ \mathbf{T} : \mathsf{F} \to \mathbf{Set}_f \text{ y } [\mathbf{F}, \lambda] \text{ en } (\mathbf{Cat}, \mathbf{Set}_f)_{fff},$$

entonces $\Gamma(\mathbf{S}) = \mathcal{A}_{\mathbf{S}}$ y $\Gamma([\mathbf{F}, \lambda]) : \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{T}}$ es la transformación natural para la cual, la componente sobre $N \in \mathbf{Set}_f$ es

$$\Gamma[\mathbf{F}, \lambda]_N : \mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong \to \mathbf{Str}(\mathsf{F}/N)/\cong; \overline{[X, \sigma]} \mapsto \overline{[\mathbf{F}(X), \sigma \circ \lambda_X]},$$

como $\sigma : \mathbf{S}(X) \to N$ y $\lambda_X : \mathbf{TF}(X) \to X$ son isomorfismos, entonces la composición $\sigma \circ \lambda_X : \mathbf{TF}(X) \to N$ es un isomorfismo. Veamos primero que $\Gamma[\mathbf{F}, \lambda]_N$ está bien definida. Sea $[X,\sigma] = [X',\sigma']$, existe entonces $\varphi : X \to X'$ biyectiva tal que $\sigma'\circ\mathbf{S}(\varphi) = \sigma$, si nos fijamos en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{TF}(X) \arrow[r, "\lambda_X"] \arrow[d, "\mathbf{TF}(\varphi)"'] & \mathbf{S}(X) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mathbf{S}(\varphi)"] & N \arrow[d, equal] \\
\mathbf{TF}(X') \arrow[r, "\lambda_{X'}"'] & \mathbf{S}(X') \arrow[r, "\sigma'"'] & N,
\end{tikzcd}$$

podemos observar que $\sigma\circ\lambda_X = \sigma'\circ\lambda_{X'}\circ\mathbf{T}(\mathbf{F}(\varphi))$, lo que nos dice que

$$[\mathbf{F}(X), \sigma\circ\lambda_X] = [\mathbf{F}(X), \sigma'\circ\lambda_{X'}].$$

Veamos que $\Gamma[\mathbf{F},\lambda]$ es una transformación natural. Tenemos que ver que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong \arrow[r, "{\Gamma[\mathbf{F},\lambda]_N}"] \arrow[d, "\mathcal{A}_{\mathbf{S}}(g)"'] & \mathbf{Str}(\mathsf{F}/N)/\cong \arrow[d, "\mathcal{A}_{\mathbf{T}}(g)"] \\
\mathbf{Str}(\mathsf{E}/N')/\cong \arrow[r, "{\Gamma[\mathbf{F},\lambda]_{N'}}"'] & \mathbf{Str}(\mathsf{F}/N')/\cong
\end{tikzcd} \tag{D.2}$$

conmuta. Si $[X,\sigma] \in \mathbf{Str}(\mathsf{E}/N)/\cong$, entonces

$$\mathcal{A}_{\mathbf{T}}(g)\circ\Gamma[\mathbf{F},\lambda]_N([X,\sigma]) = \mathcal{A}_{\mathbf{T}}(g)([\mathbf{F}(X),\sigma\circ\lambda_X]) = [\mathbf{F}(X), g\circ\sigma\circ\lambda_X],$$

por otra parte, $\Gamma[\mathbf{F},\lambda]_{N'}\circ\mathcal{A}_{\mathbf{S}}(g)([X,\sigma]) = \Gamma[\mathbf{F},\lambda]_{N'}([X, g\circ\sigma]) = [\mathbf{F}(X), g\sigma\circ\lambda_X]$, por lo tanto, el cuadrado D.2 conmuta.

También tenemos que ver que no depende de la elección de $[\mathbf{F},\lambda]$. Sea $[\mathbf{F},\lambda] = [\mathbf{F}',\lambda']$, tenemos que demostrar que $[\mathbf{F}(X),\sigma\circ\lambda_X] = [\mathbf{F}'(X),\sigma\circ\lambda'_X]$ $\forall\ X \in \mathsf{E}$. Si $[\mathbf{F},\lambda] = [\mathbf{F}',\lambda']$ entonces existe $\varphi : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F}'$ isomorfismo natural tal que $\lambda\circ(\mathbf{T} * \varphi) = \lambda$, si $X \in \mathsf{E}$ entonces $\sigma\circ\lambda'_X\circ\mathbf{T}(\varphi_X) = \sigma\circ\lambda_X$, pues $\lambda'_X\circ\mathbf{T}(\varphi_X) = \lambda_X$ y por lo tanto tenemos la igualdad que buscabamos.

Veamos finalmente que Γ es funtor. Es claro que $\Gamma[Id, id]_N = [Id, id]_N$. Sean $[\mathbf{F},\lambda] : \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ y $[\mathbf{G},\mu] : \mathbf{T} \to \mathbf{U}$, entonces $[\mathbf{G},\mu]\circ[\mathbf{F},\lambda] = [\mathbf{G}\circ\mathbf{F}, \lambda\circ\mu_{\mathbf{F}}]$. Si $N \in \mathsf{E}$, entonces

$$\begin{aligned}
\Gamma([\mathbf{G},\mu]\circ[\mathbf{F},\lambda])_N([X,\sigma]) &= \Gamma[\mathbf{G}\circ\mathbf{F}, \lambda\circ\mu_{\mathbf{F}}]([X,\sigma]) = [\mathbf{G}\circ\mathbf{F}(X), \sigma\circ\lambda_X\circ\mu_{\mathbf{F}(X)}] \\
&= \Gamma[\mathbf{G},\mu]_N([\mathbf{F}(X),\sigma\circ\lambda_X]) = \Gamma[\mathbf{G},\mu]_N\circ\Gamma[\mathbf{F},\lambda]_N([X,\sigma]).
\end{aligned}$$

Lema D.0.2. *Sean $\Gamma : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ y $\Lambda : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ funtores tales que*

1. *Existe $\mu : \Gamma\Lambda \Rightarrow Id_{\mathsf{E}}$ isomorfismo natural.*
2. *Γ es fiel*
3. *Λ es denso, es decir, para cada objeto S en E, existe un objeto A_S en F tal que $\Lambda(A_S) \cong S$.*

Entonces E y F son equivalentes.

Tenemos que demostrar que existe $\lambda : \Lambda\Gamma \Rightarrow Id_{\mathsf{F}}$ isomorfismo natural. Sea $S \in \mathsf{E}$, como Λ es denso existe $A_S \in \mathsf{F}$ tal que $\Lambda(A_S) \cong S$. Sea $\varphi_{A_S} : S \to \Lambda(A_S)$ un isomorfismo, entonces

$$\Lambda\Gamma(S) \xrightarrow{\Lambda\Gamma(\varphi_{A_S})} \Lambda\Gamma\Lambda(A_S) \xrightarrow{\Lambda(\mu_{A_S})} \Lambda(A_S) \xrightarrow{\varphi_{A_S}^{-1}} S$$

es un isomorfismo de $\Lambda\Gamma(S)$ a S. Para ver que estos morfismos forman una transformación natural veremos que si $g : \mathbf{S} \to \mathbf{S}'$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Lambda\Gamma(S) \arrow[r, "\Lambda\Gamma(\varphi_{A_S})"] \arrow[d, "\Lambda\Gamma(g)"'] & \Lambda\Gamma\Lambda(A_S) \arrow[r, "\Lambda(\mu_{A_S})"] \arrow[d, dashed, "\Lambda\Gamma(t)"'] & \Lambda(A_S) \arrow[r, "\varphi_{A_S}^{-1}"] \arrow[d, dashed, "t"] & S \arrow[d, "g"] \\
\Lambda\Gamma(S') \arrow[r, "\Lambda\Gamma(\varphi_{A_{S'}})"] & \Lambda\Gamma\Lambda(A_{S'}) \arrow[r, "\Lambda(\mu_{A_{S'}})"] & \Lambda(A_{S'}) \arrow[r, "\varphi_{A_{S'}}^{-1}"] & S'
\end{tikzcd} \tag{D.3}$$

conmuta, donde $t = \varphi_{A_{S'}} \circ g \circ \varphi_{A_S}^{-1}$. Los cuadrados de los extremos en el diagrama D.3 obviamente conmutan, por lo tanto, tenemos que demostrar solamente la conmutatividad del diagrama de enmedio.

Por la naturalidad de μ

$$\begin{tikzcd}
\Gamma\Lambda\Gamma\Lambda(A_S) \arrow[r, "\Gamma\Lambda\Gamma\Lambda(\varphi_{A_{S'}} \circ g \circ \varphi_{A_S}^{-1})"] \arrow[d, "\mu_{\Gamma\Lambda(A_S)}"'] & \Gamma\Lambda\Gamma\Lambda(A_{S'}) \arrow[d, "\mu_{\Gamma\Lambda(A_{S'})}"] \\
\Gamma\Lambda(A_S) \arrow[r, "\Gamma(\varphi_{A_{S'}} \circ g \circ \varphi_{A_S}^{-1})"'] & \Gamma\Lambda(A_{S'})
\end{tikzcd} \tag{D.4}$$

conmuta. Por otra parte, $\mu_{\Gamma\Lambda(A)} = \Gamma\Lambda(\mu_A)$, para cuarquier objeto A en F, pues nuevamente por la naturalidad de μ se tiene que

$$\begin{tikzcd}
\Gamma\Lambda\Gamma\Lambda(A) \arrow[r, "\mu_{\Gamma\Lambda(A)}"] \arrow[d, "\Gamma\Lambda(\mu_A)"'] & \Gamma\Lambda(A) \arrow[d, "\mu_A"] \\
\Gamma\Lambda(A) \arrow[r, "\mu_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta y como μ_A es un isomorfismo concluimos que $\mu_{\Gamma\Lambda(A)} = \Gamma\Lambda(\mu_A)$. Así, el diagrama D.4 es igual al diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Gamma\Lambda\Gamma\Lambda(A_S) \arrow[r, "\Gamma\Lambda\Gamma\Lambda(\varphi_{A_{S'}} \circ g \circ \varphi_{A_S}^{-1})"] \arrow[d, "\Gamma\Lambda(\mu_{A_S})"'] & \Gamma\Lambda\Gamma\Lambda(A_{S'}) \arrow[d, "\Gamma\Lambda(\mu_{A_{S'}})"] \\
\Gamma\Lambda(A_S) \arrow[r, "\Gamma(\varphi_{A_{S'}} \circ g \circ \varphi_{A_S}^{-1})"'] & \Gamma\Lambda(A_{S'})
\end{tikzcd}$$

y por ser Γ fiel entonces

$$\begin{tikzcd}
\Gamma\Lambda\Gamma\Lambda(A_S) \arrow[r, "\Lambda\Gamma\Lambda(\varphi_{A_{S'}} \circ g \circ \varphi_{A_S}^{-1})"] \arrow[d, "\Lambda(\mu_{A_S})"'] & \Lambda\Gamma\Lambda(A_{S'}) \arrow[d, "\Lambda(\mu_{A_{S'}})"] \\
\Lambda(A_S) \arrow[r, "\varphi_{A_{S'}} \circ g \circ \varphi_{A_S}^{-1}"'] & \Lambda(A_{S'})
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto Γ y Λ son equivalentes.

□

Teorema D.0.4. *$[\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f]$ y $(\boldsymbol{Gpd}, \mathbf{Set}_f)_{fff}$ son equivalentes.*

Dem. Observemos que el funtor $\Gamma : (\mathbf{Cat}, \mathbf{Set}_f)_{fff} \to [\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f]$ se puede restringir a la subcategoría de $(\mathbf{Cat}, \mathbf{Set}_f)_{fff}$, $(\mathbf{Gpd}, \mathbf{Set}_f)_{fff}$. Pensaremos en el funtor restringido cuando hablemos de Γ.

1.- Demostraremos primero que $\Gamma\Lambda \cong Id$. Sea $\mathcal{A}$ una especie, llamaremos $\mathcal{B}$ a la especie $\Gamma\Lambda(\mathcal{A})$. Si $N \in \mathbf{Bij}_f$, entonces

$$\mathcal{B}(N) = \Gamma\Lambda(\mathcal{A})(N) = \Gamma(\mathbf{S}_{\mathcal{A}} : \mathbf{Elts}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Set}_f) = \mathcal{A}_{\mathbf{S}_{\mathcal{A}}}(N) =$$

$$\mathbf{Str}(\mathbf{Elts}(\mathcal{A})/N)/\cong = \{((M,a),\sigma)\}/\cong$$

tal que $\sigma : \mathbf{S}_{\mathcal{A}}(M,a) \to N$ es un isomorfismo. Sea $b = \sigma(a)$, veremos que $[(M,a),\sigma] = [(N,b),1]$. Queremos ver que existe $\varphi : (M,a) \to (N,b)$ isomorfismo tal que $1 \circ \mathbf{S}_{\mathcal{A}}(\varphi) = \sigma$. Proponemos $\sigma : (M,a) \to (N,b)$, entonces $1 \circ \mathbf{S}_{\mathcal{A}}(\sigma) = 1 \circ \sigma = \sigma$.

Si $[(N,a),1] = [(N,a',1)]$, entonces existe $\varphi : N \to N$ biyección tal que $1 \circ \varphi = 1$, entonces $\varphi = 1$, por lo que $a' = \varphi(a) = 1(a) = a$. Tenemos entonces una biyección entre $\mathcal{A}(N)$ y $\mathcal{B}(N)$ dada por

$$\varphi_N(a) = [(N,a),1].$$

Para cada $N \in \mathbf{Bij}_f$, tenemos que demostrar que φ_N es un isomorfismo natural.

Sea $g : N \to N'$, tenemos que demostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(N) \arrow[r, "\varphi_N"] \arrow[d, "\mathcal{A}(g)"'] & \Gamma\Lambda(\mathcal{A})(N) \arrow[d, "\Gamma\Lambda(\mathcal{A})(g)"] \\ \mathcal{A}(N') \arrow[r, "\varphi_{N'}"'] & \Gamma\Lambda(\mathcal{A})(N') \end{tikzcd} \tag{D.5}$$

conmuta. Si $a \in \mathcal{A}(N)$ entonces $\varphi_N(a) = [(N,a),1]$, evaluando en $\Gamma\Lambda(\mathcal{A})(g)$ obtenemos $[(N,a),g]$. Por otra parte se tiene que $\varphi_{N'} \circ \mathcal{A}(g)(a) = [(N', \mathcal{A}(g)(a)),1]$. Resta probar que $[(N,a),g] = [(N',\mathcal{A}(g)(a)),1]$, pero $g : [(N,a),g] \to [(N',\mathcal{A}(g)(a),1)]$ asi que se da la igualdad. Por lo tanto, el diagrama D.5 en conmuta.

Tenemos que ver ahora que si $\theta : \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}'$ es una transformación natural, entonces

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, Rightarrow, "\varphi^{\mathcal{A}}"] \arrow[d, Rightarrow, "\theta"'] & \Gamma\Lambda(\mathcal{A}) \arrow[d, Rightarrow, "\Gamma\Lambda(\theta)"] \\ \mathcal{A}' \arrow[r, Rightarrow, "\varphi^{\mathcal{A}'}"'] & \Gamma\Lambda(\mathcal{A}') \end{tikzcd} \tag{D.6}$$

conmuta. Veamos quién es $\Gamma\Lambda(\theta)$

$\Lambda(\theta) : \mathbf{Elts}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Elts}(\mathcal{A}')$ cumple lo siguiente.

1. $\Lambda(\theta)(N,a) = (N, \theta_N(a))$

2. $\Lambda(\theta)(g : (N,a) \to (N',a')) = g : (N, \theta_N(a)) \to (N', \theta_{N'}(a'))$.

$\Gamma([\Lambda(\theta), id_{\mathbf{Elts}(\mathcal{A})}])[(N,a),1] = [\Lambda(\theta)(N,a), id_{(N,a)}] = [(N,\theta_N(a)), id_N]$. Entonces tenemos que si $a \in \mathcal{A}(N)$,

$$(\Gamma\circ\Lambda(\theta)_N)\circ\varphi_N^{\mathcal{A}}(a) = \Gamma\circ\Lambda(\theta)_N[(N,a),1] = [(N,\theta_N(a)), id_N],$$

pero por otra parte $\varphi_N^{\mathcal{A}'}\circ\theta_N(a) = [(N,\theta_N(a)), id_N]$. Por lo tanto el diagrama D.6 conmuta. Concluimos que $\Gamma\Lambda \cong Id$.

2.- Demostraremos a continuación que Γ es fiel. Sean

$$\mathbf{S} : \mathcal{G} \to \mathbf{Set}_f, \quad \mathbf{T} : \mathcal{H} \to \mathbf{Set}_f$$

en $(\mathbf{Gpd}/\mathbf{Set}_f)_{fff}$, queremos demostrar que

$$\Gamma : (\mathbf{Gpd}/\mathbf{Set}_f)_{fff}(\mathbf{S},\mathbf{T}) \to [\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f](\mathcal{A}_{\mathbf{S}}, \mathcal{A}_{\mathbf{T}})$$

es inyectiva.

Sean $[\mathbf{F},\lambda], [\mathbf{G},\mu] : \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ tales que $\Gamma[\mathbf{F},\lambda] = \Gamma[\mathbf{G},\mu] : \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \to \mathcal{A}_{\mathbf{T}}$. Si $N \in \mathbf{Bij}_f$, $\Gamma[\mathbf{F},\lambda]_N = \Gamma[\mathbf{G},\mu]_N$. Para cualquier $[X,\sigma]$ en $\mathbf{Str}(\mathcal{G}/N)/\cong$, $[\mathbf{F}(X), \sigma\circ\lambda_X] = [\mathbf{G}(X), \sigma\circ\mu_X]$, es decir, existe un isomorfismo $\tau_X : \mathbf{F}(X) \to \mathbf{G}(X)$ tal que

$$\sigma\circ\mu_X\circ\mathbf{T}(\tau_X) = \sigma\circ\lambda_X.$$

Como σ es un isomorfismo, entonces $\mu_X\circ\mathbf{T}(\tau_X) = \lambda_X$. Queremos ver que $\tau = (\tau_X)_{X\in\mathcal{G}}$ es una transformación natural. Si $h : X \to X'$, entonces

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{TF}(X) \arrow[r, "\lambda_X"] \arrow[d, "\mathbf{TF}(h)"'] & \mathbf{S}(X) \arrow[r, "\mu_X^{-1}"] \arrow[d, "\mathbf{S}(h)"'] & \mathbf{TG}(X) \arrow[d, "\mathbf{TG}(h)"'] \\
\mathbf{TF}(X') \arrow[r, "\lambda_{X'}"'] & \mathbf{S}(X') \arrow[r, "\mu_{X'}^{-1}"'] & \mathbf{TG}(X')
\end{tikzcd}$$

y como $\mathbf{T}(\tau_x) = \mu_X^{-1}\circ\lambda_X$ y es fiel, entonces

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "\mathbf{F}(h)"'] & \mathbf{G}(X) \arrow[d, "\mathbf{G}(h)"] \\
\mathbf{F}(X') \arrow[r, "\tau_{X'}"'] & \mathbf{G}(X')
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ τ es un isomorfismo natural, así que $[\mathbf{F}, \lambda] = [\mathbf{G}, \mu]$.

3.- Demostraremos finalmente que Λ es denso. Sea $\mathbf{S} : \mathcal{G} \to \mathbf{Set}_f$ un funtor fiel con fibras finitas con $\mathcal{G}$ un grupoide. Sean la especie $\mathcal{A}_\mathbf{S}$ y el funtor $\mathbf{T}$ dados por

$$\mathcal{A}_\mathbf{S} = (\Gamma(\mathbf{S}) : N \mapsto \mathbf{Str}(\mathcal{G}/N)/\cong)$$

$$\mathbf{T} = \Lambda(\mathcal{A}_\mathbf{S}) : \mathbf{Elts}(\mathcal{A}_\mathbf{S}) \to \mathbf{Set}_f; (N, [X, \sigma]) \mapsto N.$$

Sea $\mathbf{F} : \mathcal{G} \to \mathbf{Elts}(\mathcal{A}_\mathbf{S})$ tal que $X \mapsto (\mathbf{S}(X), [X, 1])$. Si $g : X \to X'$ entonces $\mathbf{F}(g) = \mathbf{S}(g) : (\mathbf{S}(X), [X, 1]) \to (\mathbf{S}(X'), [X', 1])$, $\mathcal{A}_\mathbf{S}(\mathbf{S}(g))[X, 1] = [X, \mathbf{S}(g)] = [X', 1]$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[dd, "\mathbf{F}"'] \arrow[dr, "\mathbf{S}"] & \\
& \mathbf{Set}_f \\
\mathbf{Elts}(\mathcal{A}_\mathbf{S}) \arrow[ur, "\mathbf{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

Queremos demostrar que $[\mathbf{F}, 1_\mathbf{S}] : \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ es un isomorfismo, por lo tanto, debemos demostrar que $\mathbf{F}$ da una equivalencia de grupoides.

Demostraremos que $\mathbf{F}$ es fiel y pleno. Sean $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ objetos de $\mathcal{G}$, queremos ver que $\mathbf{F} : \mathcal{G}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \to \mathbf{Elts}(\mathcal{A}_\mathbf{S})(\mathbf{F}(\mathcal{G}_1), \mathbf{F}(\mathcal{G}_2))$ es biyectiva. Supongamos que $f, g : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ tales que $\mathbf{F}(f) = \mathbf{F}(g)$, entonces $\mathbf{S}(f) = \mathbf{S}(g)$, como $\mathbf{S}$ es fiel entonces $f = g$. Veamos ahora que la función es suprayectiva. Sea $g : (\mathbf{S}(X), [X, 1]) \to (\mathbf{S}(Y), [Y, 1])$ un morfismo en $\mathbf{Elts}(\mathcal{A}_\mathbf{S})$, entonces $g : \mathbf{S}(X) \to \mathbf{S}(Y)$ con $[X, g] = [Y, 1]$ en $\mathbf{Str}(\mathcal{G}/\mathbf{S}(Y))/\cong$, pues $[Y, 1] = \mathcal{A}_\mathbf{S}(g)[X, 1] = [X, g]$. Esto quiere decir que existe un isomorfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{G}$ tal que $\mathbf{S}(f) = g$, es decir, $\mathbf{F}(f) = g$.
$\therefore$ $\mathbf{F}$ es fiel y pleno.

Si $(N, [X, \sigma])$ es un objeto de $\mathbf{Elts}(\mathcal{A}_\mathbf{S})$, σ es un isomorfismo

$$\sigma : \mathbf{F}(X) = (\mathbf{S}(X), [X, 1]) \to (N, [X, \sigma]),$$

pues $\sigma : \mathbf{S}(X) \to N$ es un isomorfismo tal que $\mathcal{A}_\mathbf{S}[X, 1] = [X, \sigma \circ 1] = [X, \sigma]$, por lo tanto, $\mathbf{F}$ es una equivalencia.

Sea $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \eta, \epsilon)$ una adjunción de equivalencia.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Elts}(\mathcal{A}_\mathbf{S}) \arrow[r, "\mathbf{G}"] \arrow[dr, "id"'] & \mathcal{G} \arrow[r, "\mathbf{S}"] \arrow[d, "\mathbf{F}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\epsilon}{\Longleftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_\mathbf{S}}{\Longrightarrow}"] & \mathbf{Set}_f \\
& \mathbf{Elts}(\mathcal{A}_\mathbf{S}) \arrow[ur, "\mathbf{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

Queremos demostrar que $[\mathbf{G}, \mathbf{T}(\epsilon)] \circ [\mathbf{F}, 1_{\mathbf{S}}] = [Id_{\mathbf{G}}, id_{\mathbf{S}}]$ y $[\mathbf{F}, 1_{\mathbf{S}}] \circ [\mathbf{G}, \mathbf{T}(\epsilon)] = [Id_{\mathbf{Elts}(\mathcal{A}_{\mathbf{S}})}, id_{\mathbf{T}}]$.

$[\mathbf{G}, \mathbf{T}(\epsilon)] \circ [\mathbf{F}, 1_{\mathbf{S}}] = [\mathbf{G} \circ \mathbf{F}, 1_{\mathbf{S}} \circ \mathbf{T}(\epsilon)_{\mathbf{F}}] = [\mathbf{G} \circ \mathbf{F}, \mathbf{T}(\epsilon)_{\mathbf{F}}]$, como

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F} \arrow[r, Rightarrow, "\mathbf{F} * \eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "id_{\mathbf{F}}"'] & \mathbf{FGF} \arrow[d, Rightarrow, "\epsilon_{\mathbf{F}}"] \\ & \mathbf{F}, \end{tikzcd}$$

entonces $\mathbf{T}(\epsilon)_{\mathbf{F}} \circ \mathbf{S}(\eta) = \mathbf{T}(\epsilon_{\mathbf{F}}) \circ \mathbf{TF}(\eta) = \mathbf{T}(\epsilon_{\mathbf{F}} \circ \mathbf{F}(\eta)) = \mathbf{T}(id_{\mathbf{F}}) = id_{\mathbf{TF}} = id_{\mathbf{S}}$, por lo tanto, $[\mathbf{G} \circ \mathbf{F}, \mathbf{T}(\epsilon)_{\mathbf{F}}] = [Id_{\mathbf{G}}, id_{\mathbf{S}}]$. Por otra parte, $[\mathbf{F}, 1_{\mathbf{S}}] \circ [\mathbf{G}, \mathbf{T}(\epsilon)] = [\mathbf{F} \circ \mathbf{G}, \mathbf{T}(\epsilon) \circ (1_{\mathbf{S}})_{\mathbf{G}}] = [\mathbf{F} \circ \mathbf{G}, \mathbf{T}(\epsilon)]$, como $id_{\mathbf{T}} \circ \mathbf{T}(\epsilon) = \mathbf{T}(\epsilon)$, entonces $[\mathbf{F} \circ \mathbf{G}, \mathbf{T}(\epsilon)] = [Id_{\mathbf{Elts}_{\mathcal{A}_{\mathbf{S}}}}, id_{\mathbf{T}}]$.
$\therefore$ Λ es denso.

Por el lema D.0.2 $[\mathbf{Bij}_f, \mathbf{Set}_f] \equiv (\mathbf{Gpd}, \mathbf{Set}_f)_{fff}$.

$\square$

Bibliografía

[1] T. Yoshida. *Categorical aspects of generating functions (I): Exponencial formulas and Krull-Schmidt categories*, Journal of Algebra, 2001.

[2] A. Joyal. *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics, 1981.

[3] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*, cuarta edición, Springer.

[4] Adriana Merino S. *Locales, gavillas y morfismos ultrafinitos*, tesis de licenciatura(Matemático)-UNAM, Facultad de Ciencias.