

00582



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS  
QUÍMICAS**

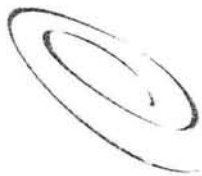
**LA DINAMICA DEL ATRACTOR DE FEIGENBAUM: MULTIFRACTALIDAD, NO  
EXTENSIVIDAD Y TRANSICIONES DE FASE DE MORI**

TESIS  
PARA OPTAR POR EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS**

PRESENTA

M en C ESTELA MAYORAL VILLA



Ciencias  
Químicas

TUTOR: Dr. ALBERTO ROBLEDO NIETO

AÑO: 2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**

## **AGRADECIMIENTOS**

Deseo agradecer a todos los que con su apoyo contribuyeron en este trabajo de tesis.

En especial al **Dr. Alberto Robledo Nieto**, por compartir sus conocimientos y experiencia conmigo a través de agradables charlas que hicieron posible esta investigación.

A la **Dra. Jacqueline Quintana Hinojosa**, por haber seguido de cerca este trabajo y brindarme el apoyo necesario para realizarlo. Al **Dr. Luis Vicente Hinestroza** por sus valiosos comentarios durante el desarrollo de mi doctorado.

Al **Dr. Arturo Olvera Chávez** por todas las explicaciones y propuestas que ayudaron al desarrollo de este trabajo, y al **Dr. Víctor Romero Rochín**, por sus comentarios finales acerca de esta tesis.

Al resto de los miembros del jurado: **Dr. Vladimir Tchijov**, **Dr. Renato Lemus**, **Dr. José Luis del Río** y **Dr. José Luis Mateos** por revisar este trabajo de tesis.

Al la **DGEP** por el apoyo económico brindado.

Al **INSTITUTO DE FISICA** y al **INSTITUTO DE QUIMICA** de la UNAM por darme acceso a sus instalaciones y brindarme la infraestructura necesaria para desarrollar este trabajo.

A mis **padres** y a mis **hermanos** por su apoyo incondicional.

De manera especial y con todo mi amor a mi **esposo e hijo**.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Estela Mayoral

VIII

FECHA: 19-NOV-2009

FIRMA: [Firma]



*A mis Franciscos ...*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>7</b>
2.1. Caos determinista . . . . .	7
2.1.1. Mapeos no lineales . . . . .	8
2.1.2. Mapeos, trayectorias y atractores . . . . .	9
2.1.3. Mapeos hiperbólicos y no hiperbólicos . . . . .	12
2.2. Entropía y principios variacionales . . . . .	13
2.2.1. Principio de máxima entropía . . . . .	13
2.2.2. Información de Shannon . . . . .	14
2.3. Entropía generalizada o de Tsallis . . . . .	18
2.3.1. Características de la entropía de Tsallis . . . . .	19
2.4. Grupo de renormalización . . . . .	22
2.4.1. Renormalización en espacio real . . . . .	23
2.4.2. Puntos fijos . . . . .	28
<b>3. Termodinámica de mapeos no lineales</b>	<b>33</b>
3.1. Termodinámica de sistemas caóticos . . . . .	34
3.1.1. Probabilidad en la teoría de sistemas caóticos . . . . .	34
3.1.2. Dimensiones generalizadas . . . . .	37
3.1.3. Entropías generalizadas . . . . .	41
3.1.4. Exponentes de Lyapunov generalizados . . . . .	43
3.1.5. Presión topológica . . . . .	47
3.1.6. Función de partición generalizada . . . . .	47
3.2. Transiciones de fase en sistemas no lineales . . . . .	52
3.2.1. Transiciones de fase internas . . . . .	53
3.2.2. Transiciones de fase externas . . . . .	57
3.2.3. Transiciones de fase de Mori . . . . .	58

<b>4. Planteamiento</b>	<b>65</b>
4.1. Los mapeos tipo logístico . . . . .	66
4.1.1. Mapeos con máximo de orden $z$ . . . . .	72
4.1.2. Las funciones de escalamiento $1/\sigma(m, z)$ y $f(\alpha)$ . . . . .	78
4.2. Transiciones de fase $\mathbf{q}$ de Mori en el borde del caos para mapeos unimodales . . . . .	81
4.2.1. Comportamiento dinámico del atractor crítico $2^\infty$ . . . . .	83
4.2.2. Espectro de fluctuaciones $\psi(\beta)$ . . . . .	84
4.3. No extensividad en el borde del caos de mapeos unimodales . . . . .	87
4.3.1. Identidad de Pesin no extensiva . . . . .	89
4.3.2. El índice entrópico y las dimensiones generalizadas . . . . .	92
4.4. Planteamiento del problema . . . . .	94
<b>5. Resultados</b>	<b>99</b>
5.1. Análisis de las propiedades estáticas del atractor de Feigenbaum mediante el grupo de renormalización . . . . .	99
5.1.1. TGR de 'eliminar la mitad' . . . . .	102
5.1.2. Función $\eta(\mathbf{q})$ . . . . .	105
5.1.3. Cálculo de la TGR para mapeos con máximo de orden $z > 1$ . . . . .	106
5.1.4. Los puntos fijos de la TGR y la dimensión crítica $D_{\mathbf{q}_c}$ . . . . .	109
5.2. Análisis de las propiedades dinámicas del atractor de Feigenbaum. . . . .	117
5.2.1. El exponente de Lyapunov $q$ generalizado $\lambda_q$ . . . . .	123
5.2.2. Sensibilidad a las condiciones iniciales . . . . .	126
5.2.3. Otras condiciones iniciales dentro del atractor . . . . .	134
5.2.4. Transiciones de fase $\mathbf{q}$ en el borde del caos . . . . .	154
<b>6. Conclusiones</b>	<b>163</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Hoy en día, una interesante rama de la física estadística (de sistemas complejos) es el estudio y caracterización de sistemas dinámicos no lineales. Este tipo de sistemas se expresan mediante mapeos que, en general, presentan un comportamiento que pasa de ser periódico a caótico y que describen una gran cantidad de fenómenos físicos, químicos y biológicos de interés, que van desde sistemas mecánicos clásicos, fluidos turbulentos, láseres, óptica no lineal, reacciones químicas, modelos biológicos de crecimiento poblacional, entre otros [1, 2].

Durante las últimas décadas, el estudio de éstos mapeos se ha llevado a cabo empleando poderosas herramientas teóricas de la mecánica estadística como son los principios variacionales y el grupo de renormalización. Acompañados de los experimentos numéricos, estas técnicas han arrojado resultados novedosos e interesantes que nos permiten caracterizar el comportamiento caótico y su génesis. En efecto, un sistema dinámico no lineal puede estudiarse como un problema de mecánica estadística usual y existen varias analogías entre las cantidades que describen el sistema dinámico y las cantidades termodinámicas de un sistema fisicoquímico [3].

Una de estas analogías aparecen en el paso del comportamiento periódico al caótico que usualmente se produce al modificar el parámetro de control característico del mapeo. El cambio en el comportamiento del sistema, puede verse como una transición de fase de segundo orden [4, 5], presentándose características interesantes propias de los puntos críticos como las propiedades de escalamiento [6]. Ello nos permite hechar mano de poderosas herramientas, como lo es la del grupo de renormalización, para describir y estudiar estos sistemas bajo condiciones de criticalidad. Sus características de universalidad

nos permiten además hacer una descripción global de ellos [7, 8].

Los mapeos no lineales muestran un comportamiento caótico bajo ciertas circunstancias, dicho caos es llamado determinista ya que está 'determinado' por las ecuaciones propias del sistema, sin embargo su comportamiento a tiempos grandes no se puede predecir ya que este tipo de sistemas presenta una dependencia excepcionalmente sensible a las condiciones iniciales [1, 9].

Es esta característica la que nos obliga estudiarlos únicamente en un sentido probabilístico mediante las técnicas tradicionales de la mecánica estadística. En este caso (a diferencia de un sistema termodinámico donde se tiene de antemano la distribución de probabilidad intrínseca del sistema) construimos la distribución de probabilidad que describe el comportamiento del sistema a través de un experimento numérico y de ahí planteamos las funciones de partición y obtenemos las cantidades que juegan el papel de las energías libres del sistema, así como ecuaciones entrópicas y aún más, encontramos sus ecuaciones de estado. Esta analogía con los sistemas fisicoquímicos comunes nos permite describirlos de la misma manera que lo hacemos cuando estudiamos otro fenómeno termodinámico [3].

Las transiciones de fase son una de las situaciones más interesantes que se presentan en estos sistemas [10, 11, 12] y su estudio requiere de la construcción de diagramas de fases [13]. Estos nos permiten observar las transiciones que se presentan tanto en el aspecto dinámico del sistema como en su aspecto estático. De entre las distintas transiciones de fase que pueden observarse son de interés especial las transiciones de fase de Mori que nos indican el cambio en el comportamiento dinámico del sistema debido a las expansiones y contracciones locales del espacio de fase [14].

Las propiedades dinámicas del sistema en muchos casos van de la mano con las características estáticas de éste [15, 16, 17], esta relación es evidente por ejemplo en los mapeos hiperbólicos, donde se han planteado y demostrado estrechas conexiones entre las cantidades dinámicas y estáticas del sistema. Estas relaciones han sido en general estudiadas y comprobadas rigurosamente para la parte periódica y caótica del sistema. En los mapeos no hiperbólicos (como es el caso de la familia de mapeos tipo logístico) estos vínculos no son tan inmediatos y aún más, estas propiedades en el borde del caos aún no han sido esclarecidas.

La familia de mapeos tipo logístico en el borde del caos será el tema central de este trabajo de investigación. Dicha familia se representa como  $f(x) = 1 - r|x|^z$ , donde  $z > 1$  es el orden del mapeo y  $0 \leq r \leq 2$  es un parámetro de control que al colocarse en  $r = r_\infty$  nos sitúa en el borde del

caos. Por debajo de este valor ( $r < r_\infty$ ) el sistema presenta un comportamiento periódico, y por encima de éste ( $r > r_\infty$ ) el sistema muestra un comportamiento caótico. El atractor de estos mapeos (la sección del espacio de fase a la cual se acercan las iteraciones del mapeo a tiempos grandes) en el borde del caos es un multifractal conocido como atractor de Feigenbaum. Las propiedades multifractales del atractor de Feigenbaum son uno de los motivos por los que la dinámica de estos sistemas presenta un comportamiento especial: su espacio de fase pierde su ergodicidad debido a que las trayectorias del sistema no pueden cubrir todo el espacio de fase produciendo que su dinámica se desarrolle en una sección restringida, ello conlleva a que sus propiedades sean anómalas y a que se manifiesten características de no extensividad en el sistema [18, 19, 20, 21, 22].

Las características de no extensividad del sistema se refieren al hecho de que, en estos puntos, la descripción estadística del sistema sigue distribuciones de leyes de potencia [2] y no exponenciales comunes. El caso Gaussiano y la estadística de Boltzmann Gibbs (BG) tienen que ser reemplazados por un principio más general dado por los principios variacionales de la entropía generalizada o de Tsallis que permite maximizar la función entropía bajo las restricciones adecuadas cuando tenemos una distribución de ley de potencias [23]. Esta entropía es no extensiva y su estadística generalizada sustituye a la estadística usual de BG presentándose un índice de no extensividad característico  $q$ . Cuando este índice  $q$  tiende a 1, recobramos la estadística tradicional [24].

Estos novedosos resultados son hoy en día motivo de debate [25, 26].

En este trabajo de tesis presentamos un estudio detallado del atractor de Feigenbaum, que es el atractor multifractal de la familia de mapeos unidimensionales con máximo de orden  $z > 1$  en el borde del caos [27], empleando las técnicas de grupo de renormalización, la de termodinámica de sistemas caóticos y la de la sensibilidad a las condiciones iniciales reformulada mediante la estadística no extensiva [28] empleando funciones exponenciales  $q$ .

El estudio de la parte estática o estructural del atractor se llevó a cabo mediante la técnica de grupo de renormalización (GR) retomando la transformación de grupo de renormalización (TGR) de Feigenbaum y aplicándola sobre la función de partición  $Z$  del atractor multifractal. De ésta manera, la TGR elimina la mitad de los puntos del multifractal cada vez que se aplica. La invariancia de  $Z$  fija un factor de transformación de las longitudes de escala  $2^n$  en términos de las dimensiones generalizadas. Se encontró que existe un brinco en los valores permitidos de  $\eta$ ,  $\Delta\eta = D_{-\infty}^{-1} - D_{\infty}^{-1}$ . Las propiedades

dinámicas del atractor de Feigenbaum se analizaron a través del cálculo del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado  $\lambda_q$ . Recordemos que en el borde del caos el exponente de Lyapunov tradicional  $\lambda = 0$ , por lo que se empleó el exponente  $\lambda_q$  definido a partir de la sensibilidad a las condiciones iniciales  $\xi_t$  mediante exponentes  $q$  como  $\xi_t = [1 - \lambda_q(1 - q)]^{1/(1-q)}$ . La sensibilidad a las condiciones iniciales  $\xi_t$  se calculó rigurosamente y a partir de ella se encontró el valor del índice entrópico no extensivo  $q$  el cual mostró estar relacionado con el salto en la función  $\eta$  obtenido del análisis de la parte estática del atractor mediante el GR, de esta forma, se encontró la relación  $\Delta\eta = 1/(1 - q) = D_{-\infty}^{-1} - D_{\infty}^{-1}$  derivada previamente por Tsallis y Lyra [18]. Este brinco puede considerarse como un salto en la energía libre estática del sistema, por lo que una explicación de la conexión entre la parte estática a través de la función  $\eta$  y la dinámica mediante el índice entrópico no extensivo  $q$  es que, durante su dinámica, el sistema visita diferentes secciones del multifractal, el paso de una sección a otra donde la dimensión generalizada es distinta origina un cambio en la energía libre estática del sistema manifestándose en la dinámica de éste a través del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado  $\lambda_q$  y su índice entrópico no extensivo  $q$ .

Debido a que el exponente de Lyapunov es una cantidad que fluctúa, se propuso un modelo basado en la función de escalamiento del sistema,  $\sigma(m, z)$ , para obtener analíticamente los espectros de los exponentes de Lyapunov  $q$  generalizados  $\lambda_q$  a través del análisis de la sensibilidad a las condiciones iniciales  $\xi_t$  mediante funciones exponenciales  $q$ , obteniéndose parejas de índices de no extensividad  $q$  y  $Q$  relacionados entre sí mediante la propiedad de inversión de las funciones exponenciales  $q, Q = 2 - q$ . Se encontraron diferentes parejas de valores de  $q_i$  y  $Q_i$  para las distintas condiciones iniciales analizadas. Se obtuvieron además las gráficas de las funciones de energía libre del sistema definidas por Mori,  $\Psi(\lambda_q)$  y  $\Phi(q)$  [14].

Empleando el mismo modelo, obtuvimos numéricamente los espectros del exponente de Lyapunov en el borde del caos definido por Anania y Politi [12] como  $\beta = \ln |f^n(x_0)| / \ln n$  y estudiado por Mori a través de sus funciones de estructura termodinámica  $\beta(q)$ ,  $\phi(q)$  y  $\psi(\beta)$ . El análisis para diferentes condiciones iniciales tomadas individualmente nos llevó a la obtención de varios espectros de  $\beta(q)$  donde se observan dos transiciones de fase de Mori en dos valores de  $q$  críticos  $q_{c1}$  y  $q_{c2}$ . Estos valores críticos coinciden con los índices de no extensividad del sistema encontrados mediante el análisis de la sensibilidad a las condiciones iniciales  $q_{c1} = q$  y  $q_{c2} = Q$ . Al aproximar los espectros obtenidos numéricamente a una función escalón, reproducimos los



---

espectros obtenidos analíticamente mediante el estudio de la sensibilidad a las condiciones iniciales por medio de funciones exponenciales  $q$ .

Esta tesis se ha dividido en seis capítulos incluyendo la presente introducción que constituye el primer capítulo.

En el segundo capítulo se incluyen los antecedentes generales básicos necesarios para el entendimiento del presente trabajo y consta de cuatro secciones. La primera de ellas habla de las generalidades del caos determinístico y de los mapeos no lineales, la segunda sección presenta los principios variacionales de la entropía. La tercera sección del capítulo de antecedentes expone las bases de la entropía no extensiva y sus principales características. Finalmente, el capítulo de antecedentes cierra con una descripción breve de los principios del grupo de renormalización.

El capítulo tres contiene los principios generales de la termodinámica de sistemas no lineales y consta de dos secciones cuyo contenido principal fué tomado del libro *Thermodynamics of chaotic systems* escrito por Christian Beck y Friedrich Schlögl en 1993 [3], donde se exponen los argumentos fundamentales en los que descansa la teoría de la termodinámica de los sistemas caóticos. La primera sección, nos introduce en la termodinámica de sistemas caóticos incluyendo las principales cantidades que empleamos para describir y estudiar este tipo de sistemas y la segunda nos presenta los diferentes tipos de transiciones de fase que podemos observar. En esta sección es de interés especial para este trabajo el último tema, acerca de las transiciones de fase  $q$  de Mori que no se encuentra incluido en el texto original de Beck.

El capítulo cuatro de la tesis introduce el problema a estudiar, describiendo las características y propiedades del sistema empleado: el mapeo logístico y en general, los mapeos con máximo de orden  $z > 1$ . Incluimos además los resultados mas recientes reportados en la literatura acerca de las transiones de fase de Mori en el borde del caos para estos mapeos y de la no extensividad del atractor de Feigenbaum de los mapeos unimodales.

El quinto capítulo presenta los resultados obtenidos y consta básicamente de dos secciones. La primera de ellas corresponde con el estudio del aspecto estático del atractor de Feigenbaum, mediante el grupo de renormalización sobre la función de partición estática del atractor de Feigenbaum. El análisis de los puntos fijos obtenidos ofrece una interpretación de la relación entre las características estáticas del sistema y los aspectos dinámicos de éste. La segunda sección analiza a fondo el aspecto dinámico del sistema mediante el cálculo analítico, también mediante el grupo de renormalización, del valor del exponente de Lyapunov generalizado  $\lambda_q$  y el del índice de no extensivi-



dad  $q$  para la familia de mapeos tipo logístico en el borde del caos cuando tomamos como condición inicial  $x_0 = 1$ . Siguiendo esta misma orientación, en esta sección se introduce un modelo basado en la función de escalamiento  $\sigma(m, z)$  para el análisis de la sensibilidad a las condiciones iniciales en su formulación no extensiva y la obtención del espectro de exponentes de Lyapunov  $q$  generalizados  $\lambda_q$ . Finalmente se obtienen con éste modelo las funciones de estructura termodinámica del sistema  $\Psi(\lambda_q)$  y  $\Phi(q)$  y se determinan las transiciones de fase de Mori, identificando los valores de  $q$  críticos  $q_c$ .

El sexto y último capítulo presenta el análisis y la discusión de los resultados obtenidos y establece las conclusiones derivadas del trabajo de investigación realizado.

Al final de la tesis se presenta la bibliografía consultada.

# Capítulo 2

## Antecedentes

Este capítulo consta de cuatro secciones donde se presentan varios de los conceptos básicos, incluyendo algunas definiciones elementales, que se han incluido con el fin de que el texto sea suficientemente autoconsistente y sirva de apoyo al lector no familiarizado con el tema. Al lector especialista se le recomienda seguir al siguiente capítulo. En la primera sección hablamos acerca de los mapeos no lineales y del caos determinístico. En la segunda sección presentamos los principios variacionales de la entropía y la tercera sección introduce las características generales de la entropía no extensiva o de Tsallis. La última sección presenta los fundamentos de la teoría de grupo de renormalización (GR).

### 2.1. Caos determinista

Comenzaremos esta sección estableciendo a qué nos referimos cuando hablamos de *caos determinista*. El término *caos*, nos indica un estado de un sistema dado donde se observa desorden o un comportamiento no esperado o irregular. Si el sistema físico que exhibe un comportamiento caótico se encuentra especificado por una o varias ecuaciones que describen su evolución temporal, estamos hablando de caos determinístico [1]. Estas ecuaciones, en principio, nos permiten determinar el comportamiento del sistema partiendo de alguna condición inicial, sin embargo, la principal dificultad que presentan los sistemas caóticos es que, como veremos, dos condiciones iniciales muy cercanas producen una respuesta muy distinta, lo cual provoca un comportamiento no esperado o irregular. De esta manera, aunque tengamos las

ecuaciones que describen el sistema en cada paso de iteración tendríamos que introducir exactamente el valor al tiempo anterior, los errores de truncamiento de las cantidades se magnifican y provocan que, después de un cierto tiempo finito, su comportamiento sea imposible de predecir [9]. Esto conlleva a que, como veremos, el estudio de este tipo de sistemas se haga principalmente de una manera estadística [3].

### 2.1.1. Mapeos no lineales

A continuación introduciremos algunas definiciones y conceptos generales de los *mapeos no lineales* [1, 29].

Un *mapeo* puede ser considerado como “un sistema dinámico discreto en el tiempo” [3]. Generalmente dichos mapeos se construyen mediante un experimento numérico (iteraciones en una computadora). Para que un mapeo presente un comportamiento caótico se requiere que las ecuaciones que lo definen tengan términos no lineales (por ejemplo polinomios de orden mayor que 1, funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, trascendentes, etc). Esta no linealidad es indispensable para que un mapeo presente un comportamiento caótico, sin embargo, no implica que necesariamente lo manifieste en todos los casos. En general, contamos con un parámetro de control propio del mapeo que nos permite colocarlo en diferentes regiones, por ejemplo, en el caso del mapeo logístico  $f(x) = 1 - r|x|^2$ , el parámetro de control  $r$  nos permite situarlo en las zonas donde el mapeo es periódico, colocándolo por debajo de un valor crítico  $r_\infty$  ( $r < r_\infty$ ) o bien en la parte donde el sistema presenta un comportamiento caótico, esto es para valores de  $r$  por encima de  $r_\infty$  ( $r > r_\infty$ ). Si nos situamos justo donde el parámetro de control  $r = r_\infty$  nos encontramos en el borde del caos. Las diferentes zonas del mapeo nos darán entonces diferentes características dinámicas. El exponente de Lyapunov  $\lambda$  nos ayuda a decir qué tan caótico es un sistema. Un valor del exponente de Lyapunov negativo ( $\lambda < 0$ ) indica que estamos en la zona periódica, así, dos trayectorias inicialmente muy cercanas se juntarán a lo largo del tiempo exponencialmente. Por el contrario si nos encontramos en la zona caótica, dos condiciones iniciales muy cercanas se separarán exponencialmente en el tiempo, el exponente de Lyapunov será en este caso, positivo ( $\lambda > 0$ ). En el borde del caos y puntos de bifurcación  $\lambda = 0$ . Los atractores de estos sistemas (o la sección del espacio de fase hacia donde convergen las iteraciones del mapeo a tiempos grandes) generalmente presentan una estructura multifractal lo cual origina, como veremos mas adelante, que se manifiesten características de no

extensividad [19, 20, 21].

### 2.1.2. Mapeos, trayectorias y atractores

Supongamos que tenemos un mapeo en un espacio  $d$ -dimensional expresado por

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n), \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector en el *espacio de fase*  $X$ . Llamamos espacio de fase  $X$  a el conjunto de los posibles valores de las coordenadas del mapeo. Iteremos nuestro mapeo un número  $n$  de veces, obteniendo en cada paso de iteración  $i$  un valor  $\mathbf{x}_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Como cada paso de iteración toma el mismo tiempo, es usual considerar el número de iteraciones  $n$  como el *tiempo total*  $t$ . El conjunto de los valores obtenidos, nos genera una *trayectoria*, que se define como la secuencia dada por las iteraciones  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ . La trayectoria nos describe el movimiento de un punto en el espacio de fase  $X$  y su longitud será igual al tiempo total  $t$  [3]. Una trayectoria puede volverse *periódica* o permanecer *aperiódica* por siempre. Decimos que una trayectoria es periódica si después de iterar  $k$  veces el mapeo, los iterados se aproximan a una secuencia  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_{k+l})$  satisfaciendo que

$$\mathbf{x}_{k+l} = \mathbf{x}_k. \quad (2.2)$$

La secuencia  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_{k+l})$  se conoce como *órbita periódica* o *ciclo* de  $f$ . El valor mas pequeño de  $l$  que satisface la ecuación (2.2) es la *longitud del ciclo*. Una órbita periódica de longitud  $l = 1$  es un *punto fijo del mapeo*  $f$ . Un punto fijo  $\mathbf{x}^*$  satisface

$$\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}^*). \quad (2.3)$$

Una órbita periódica de longitud  $l$  se puede considerar como un punto fijo de la función  $f$  iterada  $l$  veces

$$f^l(\mathbf{x}) = f(f(\dots f(\mathbf{x}))) \quad (l \text{ veces}) \quad (2.4)$$

Así que podemos restringir nuestra discusión al estudio de puntos fijos.

Cuando estudiamos un sistema no lineal, nos interesa principalmente su comportamiento a tiempos grandes ( $t \gg 1$ ) a partir de un valor inicial  $\mathbf{x}_0$ . Dicho comportamiento será distinto para diferentes tipos de mapeos, distinguiéndose fundamentalmente dos tipos de sistemas dinámicos: los *Hamiltonianos* y los *disipativos* [3]. Un sistema Hamiltoniano tiene la propiedad de

que conserva el volumen de un elemento de volumen arbitrario del espacio de fase durante su evolución en el tiempo. Lo cual puede expresarse mediante el determinante de Jacobi [3]

$$U(\mathbf{x}) = \det Df(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

donde  $D(f)$  denota la matriz  $d \times d$   $\partial f^{(\beta)} / \partial \mathbf{x}^{(\alpha)}$ . Un sistema Hamiltoniano satisface  $U(\mathbf{x}) = 1$ .

Por otro lado, para un sistema disipativo un pequeño volumen del espacio de fase se expande o se contrae dependiendo, usualmente, de la posición  $\mathbf{x}$  en el espacio de fase. En este caso, un gran número de trayectorias se aproximan a cierto subconjunto  $A$  del espacio de fase  $X$  en el límite  $n \rightarrow \infty$ . El subconjunto  $A$  se conoce como *atractor*. Pueden existir uno o varios atractores pero generalmente solo un atractor atrae la mayoría de las trayectorias [3].

Un punto fijo estable es un atractor. Se dice que el punto fijo  $\mathbf{x}^*$  es *estable* si todos los  $d$  eigenvalores  $\eta_\alpha$  de la matriz  $Df(\mathbf{x}^*)$  satisfacen que  $|\eta_\alpha| < 1$ . En el caso unidimensional un punto fijo es estable si  $|f'(\mathbf{x}^*)| < 1$ . La estabilidad significa que un gran número de trayectorias son atraídas por  $\mathbf{x}^*$ .

Analícemos lo que le ocurre a un punto  $\mathbf{x}$  en la vecindad de un punto fijo  $\mathbf{x}^*$ , donde  $|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}| \ll 1$ .  $\mathbf{x}$  es "mapeado" en  $f(\mathbf{x})$ . Si desarrollamos  $f(\mathbf{x})$  en series de Taylor alrededor de  $\mathbf{x}^*$  obtenemos, en el caso unidimensional,

$$f(\mathbf{x}) \approx \mathbf{x}^* + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)f'(\mathbf{x}^*). \quad (2.6)$$

Entonces la nueva distancia en el siguiente paso de iteración será

$$|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^*| \approx |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*||f'(\mathbf{x}^*)| \quad (2.7)$$

menor que la distancia anterior  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|$  por lo que  $|f'(\mathbf{x}^*)| < 1$ . Encontramos entonces que una característica de un punto fijo estable es que su vecindad se contrae bajo la acción de  $f$ .

En general, un atractor de un mapeo puede ser una *órbita periódica estable* de longitud  $l$  la cual, como se mencionó anteriormente, puede considerarse como un punto fijo de la función iterada  $l$  veces  $f^l$ . La órbita periódica de longitud  $l$  es llamada estable si el punto fijo correspondiente de  $f^l$  es estable. Denotemos la órbita periódica por  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{l-1}$  la condición de estabilidad significa que todos los eigenvalores  $\eta_\alpha$  de la matriz

$$Df^l(\mathbf{x}_0) = \prod_{n=0}^{l-1} Df(\mathbf{x}_n) \quad (2.8)$$

satisfacen

$$|\eta_\alpha| < 1. \quad (2.9)$$

En este caso la vecindad de una órbita periódica se contrae y en consecuencia un gran número de trayectorias son atraídas hacia ella. Si al menos un eigenvalor de  $Df^L(\mathbf{x}_0)$  satisface  $|\eta_\alpha| > 1$ , tenemos una *órbita periódica inestable*. Una órbita periódica inestable no es un atractor por que repele todas las trayectorias. Cabe notar que, entonces, la presencia de un punto fijo no necesariamente es de relevancia para el comportamiento a tiempos grandes del mapeo, si no que debe ser un punto fijo estable para que atraiga un gran número de trayectorias.

Junto con las órbitas periódicas estables existen otro tipo de atractores que corresponden con el movimiento caótico. Un sistema dinámico se dice que es caótico si éste depende sensiblemente de las condiciones iniciales [1, 9]. Esto significa que dos valores inicialmente muy cercanos  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$  generan trayectorias totalmente diferentes a tiempos grandes. Consideremos un mapeo unidimensional  $f$ , las iteraciones de  $\mathbf{x}_0$  al tiempo  $n$  se denotarán por  $\mathbf{x}_n$  y las iteraciones de la condición inicial  $\mathbf{x}'_0$  por  $\mathbf{x}'_n$ . Como regla, para mapeos caóticos se observa un incremento exponencial de la diferencia  $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n|$

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n| \approx |\delta\mathbf{x}_0| \exp(\lambda n) \quad (|\delta\mathbf{x}_0| \ll 1). \quad (2.10)$$

El promedio de la rapidez de separación  $\lambda$  se conoce como exponente de Lyapunov del mapeo. El movimiento caótico corresponde con un exponente de Lyapunov positivo, mientras que el movimiento periódico corresponde con un exponente de Lyapunov negativo, y en el borde del caos y puntos de bifurcación  $\lambda = 0$ , en las siguientes secciones se hablará extensamente de ésta cantidad. Los atractores caóticos pueden tener una estructura extremadamente complicada y son llamados *atractores extraños*. Para los atractores extraños existe al menos una dirección en el espacio de fase donde las distancias pequeñas se expanden en promedio a pesar de que el atractor extraño está confinado en un espacio de fase finito. Los atractores extraños a menudo tienen una estructura fractal. Esto significa que observamos una complicada estructura con longitudes de escala arbitrarias que pueden describirse por una dimensión no entera [3, 30].

### 2.1.3. Mapeos hiperbólicos y no hiperbólicos

Tomemos un mapeo  $d$  dimensional  $f$  con un punto fijo  $\mathbf{x}^*$ , esto es

$$f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*. \quad (2.11)$$

En la sección anterior, se presentó la caracterización de las propiedades de estabilidad de los puntos fijos mediante los eigenvalores  $\eta_\alpha(\mathbf{x}^*)$  de la matriz de Jacobi  $Df(\mathbf{x}^*)$ . Equivalentemente podemos caracterizar los puntos fijos por el conjunto de sus exponentes de Lyapunov  $\lambda_\alpha(\mathbf{x}^*)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, d$ , lo cual es equivalente ya que

$$Df^N(\mathbf{x}^*) = [Df(\mathbf{x}^*)]^N \quad (2.12)$$

y de acuerdo a las ecuaciones 2.10, 2.11 y 2.12

$$\lambda_\alpha(\mathbf{x}^*) = \ln |\eta_\alpha(\mathbf{x}^*)|. \quad (2.13)$$

Tenemos un punto fijo *hiperbólico* si todos sus exponentes de Lyapunov son diferentes de cero, y lo llamamos *atractivo* si todos los  $\lambda_\alpha < 0$  y *repulsivo* si todos los  $\lambda_\alpha > 0$ . Si algunos  $\lambda_\alpha$  son positivos y otros son negativos el punto fijo se dice que es tipo *silla*. En la vecindad de  $\mathbf{x}^*$  el subespacio contenido por los eigenvectores correspondientes a  $\lambda_\alpha$  negativos se llama variedad global estable de  $\mathbf{x}^*$  y el correspondiente a los  $\lambda_\alpha$  positivos se llama variedad global inestable. Las variedades estables e inestables también pueden definirse para órbitas periódicas. En los casos típicos las variedades estables e inestables tienen una tendencia a plegarse y acumularse de una forma muy complicada. En particular las variedades estables e inestables pueden intersectarse. Tal punto de intersección es llamado *punto homoclínico*.

### Sistemas dinámicos hiperbólicos

Los sistemas dinámicos hiperbólicos son fundamentales en la formulación matemática rigurosa del formalismo termodinámico ya que la mayoría de las relaciones obtenidas se pueden demostrar únicamente en el caso de que el mapeo sea hiperbólico. “Un mapeo es llamado hiperbólico si las variedades estables e inestables de los puntos fijos inestables (incluyendo todas las órbitas periódicas) arbitrarios se juntan unas con otras transversalmente. Ellas nunca deben tocarse de una manera tangencial” [3]. Como se dijo, los resultados más rigurosos del formalismo termodinámico pueden probarse sólo para mapeos hiperbólicos [31], sin embargo muchos de los mapeos no lineales genéricos (mapeo logístico, mapeo de Kaplan-York y mapeo de Hénon) son no hiperbólicos.



### Mapeos dinámicos expansivos

En ocasiones, no hay dirección de contracción del espacio de fase. “Un mapeo  $d$  dimensional  $f$  en un espacio de fase  $X$  se llama expansivo si existen constantes  $\epsilon > 0$  y  $\alpha > 1$  tales que

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| > \alpha|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (2.14)$$

para toda  $\mathbf{x} \in X$  con  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon$  [3]”, en otras palabras, en cada punto del espacio de fase los elementos de volumen de éste se expanden en todas direcciones. En el caso de un mapeo unidimensional diferenciable la condición anterior se reduce a

$$|f^N(\mathbf{x})| > 1 \quad (2.15)$$

para toda  $\mathbf{x} \in X$ , esto es el mapeo iterado  $N$  veces se expande.

## 2.2. Entropía y principios variacionales

A continuación hablaremos de los principios variacionales de la entropía. Como es sabido [34], la descripción de los sistemas termodinámicos, se obtiene mediante la relación fundamental en sus distintas representaciones. Estas funciones presentan la característica de que alcanzan valores extremos cuando el sistema se encuentra en equilibrio. Por ejemplo, el estado de equilibrio termodinámico de un sistema a una temperatura y volumen fijo, es aquel que minimiza la energía libre de Helmholtz. De manera similar, en el equilibrio a presión y temperatura constante, la energía libre de Gibbs alcanza un mínimo. Como sabemos, la entropía alcanza un máximo en el equilibrio, mientras que la energía interna se minimiza. Estos resultados pueden emplearse en cálculos estadísticos y termodinámicos para estimar los valores de los parámetros en el equilibrio [34].

### 2.2.1. Principio de máxima entropía

Analizaremos ahora un poco mas a fondo el principio de máxima entropía. Si un sistema aislado cambia su estado termodinámico infinitesimalmente, el cambio de entropía en el proceso obedece la relación

$$S \geq 0. \quad (2.16)$$



La desigualdad ocurre para algún cambio espontáneo (irreversible). Después de que el sistema aislado ha agotado todos los cambios espontáneos posibles (cada uno con  $dS > 0$ ), la entropía habrá alcanzado un valor máximo. Un cambio infinitesimal posterior en el estado será ahora reversible y se satisficará la igualdad.

Éste es uno de los postulados fundamentales de la termodinámica, y nos dice que existe una función de los parámetros extensivos de algún sistema compuesto, llamada entropía y denotada por  $S$ , definida para todos los estados de equilibrio y que tiene la siguiente propiedad: los valores que adquieren los parámetros extensivos en ausencia de alguna restricción interna son aquellos que maximizan la entropía sobre todo el conjunto de estados de equilibrio [5].

### 2.2.2. Información de Shannon

A continuación introduciremos el concepto de medida de información. El objetivo de tal medida, es distinguir entre distribuciones de probabilidad con alta o baja calidad de predicción. Una medida de información es una medida del conocimiento que un observador gana con respecto a la ocurrencia de un evento si conoce la distribución de probabilidad y nada más.

#### Números-bit

Podemos considerar una unidad bit de almacenamiento de una computadora como un interruptor con dos posibles posiciones. Un conjunto  $A$  de tales interruptores puede tomar

$$N = 2^A \quad (2.17)$$

diferentes estados y entonces dar  $N$  diferentes estructuras de bit. En particular cada uno de estos estados puede usarse para seleccionar uno de los  $N$  números  $0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Esto puede hacerse por ejemplo, escribiendo un número  $m$  como un número binario de longitud  $A$  en la forma

$$m = \sum_{k=0}^{A-1} s_k 2^k \quad (2.18)$$

donde  $s_k$  es 0 o 1. Entonces podemos representar cada  $s_k$  por la posición del  $k$ -ésimo interruptor. La ecuación (2.17) dice que necesitamos

$$A = \frac{\ln N}{\ln 2} \quad (2.19)$$

bits para seleccionar uno de  $N$  eventos. Es conveniente usar  $\ln 2$  como una unidad y definir

$$b = \ln N \quad (2.20)$$

como el *número bit* [3]. Ahora hagamos que  $p_i$  sea la probabilidad de un evento  $i$  de un conjunto muestra de  $R$  eventos  $i = 1, 2, \dots, R$ . Llamemos al conjunto de todas las  $p_i$ , que en general pueden tomar diferentes valores, una distribución de probabilidades o simplemente una distribución y denotémosla por  $p$ . Todas las cantidades numéricas que ocurren en un mecanismo digital son números racionales. Entonces, si simulamos probabilidades de ciertos eventos en una computadora podemos suponer que cada probabilidad  $p_i$  puede ser representada por el cociente de dos enteros positivos  $N_i$  y  $N$ , esto es

$$p_i = \frac{N_i}{N} \quad (2.21)$$

con

$$N = \sum_{i=1}^R N_i. \quad (2.22)$$

Consideremos ahora un gran conjunto de muestras de  $N$  eventos elementales  $\alpha$  de igual probabilidad. Este conjunto está dividido en subconjuntos  $i = 1, 2, \dots, R$  que no tienen elementos en común. Cada subconjunto es una composición de  $N_i$  eventos elementales. La probabilidad de encontrar un evento elemental  $\alpha$  en el  $i$ -ésimo subconjunto está dado por  $p_i$  de la ecuación (2.21) y es la probabilidad del evento compuesto  $i$ . Este evento es representado por el subconjunto  $i$  y significa encontrar algún evento elemental arbitrario  $\alpha$  que se encuentra en el subconjunto. El mínimo número bit necesario para seleccionar un evento elemental  $\alpha$  fuera del conjunto muestra es  $\ln N$ . Este tiene que ser independiente de si seleccionamos primero el subconjunto  $i$  en el que se encuentra  $\alpha$  y entonces seleccionar  $\alpha$  fuera de éste subconjunto, o de si seleccionamos  $\alpha$  directamente de un conjunto de muestras grande. Denotemos el número bit necesario para seleccionar el subconjunto  $i$  por  $b_i$ . Entonces se establece que

$$b_i + \ln N_i = \ln N. \quad (2.23)$$

Y obtenemos el siguiente resultado

$$b_i = -\ln p_i \quad (2.24)$$

que es el número bit de un observador ausente, cuyo objeto es saber cuando ocurrirá el evento  $i$ , si sólo conoce la probabilidad  $p_i$  de éste evento. Por conveniencia podemos excluir los eventos con probabilidad cero. En la práctica ésta no es una restricción seria.

### Medida de información de Shannon

La medida de información de Shannon se expresa por la siguiente ecuación

$$I(p) = \sum_{i=1}^R p_i \ln p_i. \quad (2.25)$$

Esta cantidad es una función de la distribución de  $p$ . Podemos también incluir eventos con probabilidad cero, debido a que el límite de  $p_i \ln p_i$  cuando  $p_i \rightarrow 0$  es cero. Tales eventos no contribuyen a  $I(p)$ . Como la cantidad  $b_i$  mide la ausencia de conocimiento, entonces  $-b_i$  el conocimiento.  $I(p)$  fué introducida por Shannon, Weaver y Wiener como una medida de la información en la teoría de comunicación [36]. Para distinguir  $I(p)$  de otras medidas de información ésta es llamada información de Shannon y puede considerarse como una medida del conocimiento de un observador acerca de la pregunta de cuál evento del conjunto de muestras se espera, si se conoce sólo la distribución  $p$ . Como  $0 \leq p_i \leq 1$ , la cantidad  $I(p)$  es siempre negativa, y el valor máximo de cero corresponde al conocimiento óptimo. La medida de información negativa

$$S(p) = -I(p) \quad (2.26)$$

es la llamada entropía de Shannon. Esta es una medida de la ausencia de conocimiento acerca del sistema y es siempre positiva. La cantidad  $S(p)$  (como hemos visto) es bien conocida en mecánica estadística. Esta corresponde con la entropía térmica en el caso especial de que los eventos  $i$  sean microestados dinámicos en el espacio de fase de Gibbs de la mecánica clásica o los estados cuánticos puros en el espacio de Hilbert en la mecánica cuántica [3, 4]. Sin embargo ésta se encuentra restringida a el caso en el que la distribución  $p$  corresponda con el equilibrio térmico macroscópico.  $I(p)$  toma su valor máximo 0 para un estado puro, que significa para una distribución en la que sólo un microestado (digamos  $j$ ) es alcanzado. Por otro lado  $I(p)$  toma su valor mínimo  $-\ln R$  si todos los eventos  $i = 1, \dots, R$  tienen igual probabilidad.

**Principio de máxima entropía**

En 1877 Boltzmann introdujo la función entropía [4]

$$S = - \int p(x) \ln p(x) dx \quad \text{con} \quad \int p(x) dx = 1. \quad (2.27)$$

En el principio de máxima entropía se busca la distribución  $p(x)$  que maximiza la entropía sujeta a las condiciones auxiliares (con  $F_1(x) = c_1 = 1$ )

$$\int F_i(x) p(x) dx = c_i \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.28)$$

Por medio del método de multiplicadores de Lagrange uno introduce los parámetros  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  que serán escogidos después de hacer variaciones del funcional de  $p(x)$ .

$$F(p) = - \int p(x) [\ln p(x) + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l F_l] dx \quad (2.29)$$

se hace cero cuando

$$\delta F(p) = - \int [\ln p(x) + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_l F_l] \delta p(x) dx = 0, \quad (2.30)$$

esto es con

$$p(x) = \exp [-(1 + \lambda_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_l F_l)]. \quad (2.31)$$

Ahora examinemos este proceso de una manera inversa. Supongamos que estamos interesados en una distribución conocida  $p(x)$ , y queremos saber qué condiciones auxiliares se requieren escoger para que la función maximice la entropía para esta distribución. El ejemplo mas simple es

$$p(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & \text{con } 0 \leq x < \infty \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

entonces

$$S = \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu x} [\ln \mu - \mu x] dx. \quad (2.32)$$

$\lambda_1$  puede ser escogida como  $\lambda_1 = -(1 + \ln \mu)$ ,  $\lambda_2$  como  $\mu$ , y la función  $F_2 = x$ . Entonces el decaimiento exponencial maximiza la función entropía sujeta a la

restricción de que el valor medio de  $x$  es fijo. El siguiente caso mas complicado (pero común en mecánica estadística de equilibrio), es la distribución normal

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-x^2/2\sigma^2), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.33)$$

Entonces

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \left[ \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - (x^2/2\sigma^2) \right] dx. \quad (2.34)$$

Aquí se ha escogido  $\lambda_1 = -(1 + \frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma^2)$  y  $F_2 = cx^2$ , entonces se pide de condición que el segundo momento de la distribución sea finito.

### 2.3. Entropía generalizada o de Tsallis

Las distribuciones Gaussianas son fundamentales en la naturaleza, y es sabido que se encuentran íntimamente relacionadas con muchos fenómenos, sin embargo, existe otra gran cantidad de fenómenos estocásticos en la física, biología y ciencias socioeconómicas que están controlados por distribuciones de Lévy [2, 23, 24, 37]. La pregunta básica es: ¿cuál es el fundamento termoestadístico de éste tipo de distribuciones?. Tal respuesta es bien conocida para los fenómenos regidos por distribuciones gaussianas, y se encuentra fundamentada en dos pilares: la entropía de Boltzmann-Gibbs (BG) y el teorema de límite central estándar. ¿Cuál será el análogo para las distribuciones de tipo Lévy? Montroll y colaboradores mostraron que si usamos la entropía de BG las restricciones auxiliares impuestas para encontrar la forma de la distribución que optimiza la entropía son inaceptables para el caso de distribuciones de Lévy [37]. Sólo una compleja restricción *ad hoc* puede usarse en esta caso, sin embargo este procedimiento es poco satisfactorio. Hace algunos años este problema se resolvió mediante un nuevo marco teórico de una termoestadística generalizada que involucra una entropía no extensiva. Antes de explicar estas ideas conviene recordar el caso estándar de las distribuciones tipo gaussianas, en términos de principios variacionales. La entropía de BG asociada con el caso tradicional esta dada por

$$S_1[p] = -k \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln[\sigma p(x)] dx \quad (k > 0) \quad (2.35)$$

$\sigma > 0$  es la longitud característica. Con

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1. \quad (2.36)$$

La restricción adicional mas simple está dada por

$$\langle x^2 \rangle \equiv \int x^2 p(x)dx = \sigma^2. \quad (2.37)$$

Usando multiplicadores de Lagrange, inmediatamente obtenemos la distribución que optimiza  $S_1[p]$

$$p_1(x) = \exp(-\beta x^2)/Z_1, \quad (2.38)$$

con  $Z_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta x^2)dx = (\pi/\beta)^{1/2}$ .

En años recientes [38], se ha encontrado que el comportamiento de muchos sistemas y procesos naturales obedece a distribuciones de probabilidad con decaimiento de ley de potencia [2]. Este hecho ha producido que se desvíe la atención del estudio de sistemas tradicionales, los cuales son gobernados por distribuciones con decaimiento exponencial (Gaussianas). Como consecuencia del teorema de límite central, la distribución Gaussiana resulta ser el límite de todas las distribuciones simétricas que presentan su segundo momento finito. Ésta también se obtiene cuando llevamos a cabo la maximización de la expresión de la entropía extensiva de Boltzmann-Shannon, bajo la restricción de mantener su segundo momento fijo. Por otro lado, como se dijo, existe otro tipo de distribuciones estables: las distribuciones de Lévy [39]. Estas exhiben un decaimiento de ley de potencia y sus segundos y superiores momentos no son finitos. Tales distribuciones se obtienen a través de la maximización de la entropía no extensiva o de Tsallis [23], bajo la restricción de momento generalizado [24, 40]. La entropía generalizada o de Tsallis, provee una medida conveniente de la no extensividad, aplicable cuando los momentos ordinarios de las distribuciones divergen, y se emplea en asociación con los momentos generalizados de la forma  $\langle l^\alpha \rangle_q^r \equiv \sum_l l^\alpha [p(l)]^q$  [23].

### 2.3.1. Características de la entropía de Tsallis

Como se ha mencionado, la termoestadística de Boltzmann-Gibbs (BG) y la termodinámica usual constituyen una útil y poderosa herramienta teórica para situaciones estándar [18, 41, 42, 43]. Esto es, cuando se presenta una termodinámica extensiva (o aditiva). Sin embargo, este formalismo falla cuando

el sistema físico incluye fuerzas de largo alcance o efectos de memoria largos y también si el sistema evoluciona en un espacio tiempo fractal. Por “falla”, nos referimos a el hecho de que las sumas estándar o integrales que aparecen en el cálculo de las cantidades termoestadísticas relevantes divergen. En consecuencia, no estamos en condiciones de calcular cantidades derivadas de éstas, que son las que normalmente se emplean para caracterizar al sistema y que pueden ser comparadas con los datos experimentales.

En general, sistemas que tanto en su descripción espacio-temporal como en su evolución de espacio fase presentan un comportamiento del tipo multifractal (concepto que será explicado en la siguiente sección) o estructura no convencional, pueden exhibir dificultades matemáticas intratables al ser estudiados mediante los formalismos termoestadísticos estándar o, al menos, manifestar escalas no usuales. Para tratar este tipo de anomalías se ha propuesto un formalismo que generaliza la termoestadística convencional y la termodinámica [41]. Este sigue básicamente dos postulados

- El primer postulado consiste en suponer la siguiente entropía generalizada

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1} \quad (q \text{ pertenece a } \mathbb{R}; \sum_i p_i = 1), \quad (2.39)$$

o en general

$$S_q \equiv k \frac{1 - \text{Tr} \mathbf{P}^q}{q - 1}, \quad (2.40)$$

donde  $k$  es una constante positiva,  $p_i$  son las probabilidades de los estados microscópicos y  $\mathbf{p}$  es el operador densidad correspondiente. Uno puede reescribir  $S_q$  de la siguiente forma

$$S_q = \frac{k}{q - 1} \sum_{i=1}^W p_i (1 - p_i^{q-1}), \quad (2.41)$$

que hace evidente que  $S_q \geq 0$  en todos los casos, es decir que esta entropía es no negativa, cóncava en el  $\{p_i\}$  para  $q > 0$  y cóvexa para  $q < 0$ . Además reproduce la ecuación de Boltzmann-Gibbs-Shannon ( $S_1 = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$ ) en el límite  $q \rightarrow 1$ . Por otro lado, satisface la

*pseudo-aditividad*, esto es: si  $A$  y  $B$  son dos sistemas independientes ( $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$ ), entonces

$$\frac{S_q(A+B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}, \quad (2.42)$$

que muestra que  $(1-q)$  es una medida de la *no extensividad* del sistema.

- El segundo postulado consiste en suponer la siguiente energía interna generalizada

$$U_q \equiv \sum_i p_i^q \epsilon_i, \quad (2.43)$$

o en general

$$U_q \equiv \text{Tr} p^q \mathcal{H} \equiv \langle \mathcal{H} \rangle_q, \quad (2.44)$$

donde  $\{\epsilon_i\}$  es el espectro de energía (esto es, el conjunto de eigenvalores del Hamiltoniano  $\mathcal{H}$ ).

La optimización de  $S_q$  dada por la ecuación (2.40) con la restricción de que  $\text{Tr} p = 1$  y  $\text{Tr} p^q \mathcal{H} = U_{q < \infty}$ , lleva a la distribución de equilibrio del conjunto canónico

$$p = \frac{[1 - (1-q)\beta\mathcal{H}]^{\frac{1}{(1-q)}}}{Z_q}, \quad (2.45)$$

donde  $\beta \equiv \frac{1}{kT}$  es el multiplicador de Lagrange asociado con la termoestadística. La función de partición generalizada está dada por

$$Z_q \equiv \text{Tr} [1 - (1-q)\beta\mathcal{H}]^{\frac{1}{(1-q)}}. \quad (2.46)$$

En el límite  $q \rightarrow 1$  recobramos la distribución de Boltzmann-Gibbs  $p \propto e^{(-\beta\mathcal{H})}$ . Se puede demostrar que [41], para toda  $q$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_q}{\partial U_q}, \quad (2.47)$$

$$U_q = \frac{\partial Z_q^{1-q} - 1}{\partial \beta(1-q)}, \quad (2.48)$$

$$F_q \equiv U_q - T S_q = -\frac{1}{\beta} \frac{Z_q^{1-q} - 1}{1-q} \quad (2.49)$$



y

$$c_q \equiv T \frac{\partial S_q}{\partial T} = \frac{\partial U_q}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F_q}{\partial T^2} \quad (2.50)$$

donde  $c_q$  es el calor específico generalizado. Encontramos entonces que la estructura termodinámica de las transformadas de Legendre se conserva a pesar de que el sistema es no extensivo. Mas aún, la estabilidad termodinámica puede probarse para toda  $q$  basada en el hecho de que siempre  $c_q/q \geq 0$  [42].

## 2.4. Grupo de renormalización

A continuación se introducen los conceptos básicos del formalismo moderno para el estudio del comportamiento del equilibrio crítico, convencionalmente conocido como *grupo de renormalización* (GR).

Todo estudio de grupo de renormalización tiene en común la idea de re-expresar los parámetros que definen a un problema en términos de algún otro conjunto de parámetros, quizá mas simple, mientras permanezcan sin cambio aquellos aspectos físicos del problema que sean de interés [6]. Esto puede suceder a través de analizar a grosso modo (coarse-graining) los grados de libertad de corto alcance, como en el problema de fenómeno crítico, donde la física de largas distancias es la de interés. Existen esencialmente dos formas del grupo de renormalización. Una que corresponde al mapeo exacto entre Hamiltonianos, que conduce a un Hamiltoniano con un menor número de grados de libertad. Cabe mencionar que, en el sentido estricto, este conjunto de transformaciones entre los parámetros de los Hamiltonianos es sólo un semigrupo por que las transformaciones carecen de inversa. La otra forma del grupo de renormalización, se encuentra en el contexto de teoría de campos y se basa en la idea de reparametrización. Cualquiera que sea la motivación, todos estos métodos terminan con las ecuaciones matemáticas que describe el *flujo del grupo de renormalización* en algún espacio de parámetros complicado. Es el estudio de estos flujos y lo que éstos nos dicen acerca del fenómeno físico la esencia del grupo de renormalización. El ejemplo mas ilustrativo donde el aspecto general del grupo de renormalización aparece directamente, es la renormalización en el *espacio real* aplicado a sistemas de espines en una malla. Debido a lo anterior emplearemos este ejemplo para explicar el método, a pesar de que los resultados en espacio real son difíciles de controlar en cuanto a su aspecto cuantitativo, debido a que no hay realmente un parámetro pequeño en torno al cual realizar los desarrollos. Sin embargo este

hecho no debilita las poderosas implicaciones de escalamiento y universalidad que se obtienen como propiedades generales, y son estos resultados en los que nos concentraremos [6].

### 2.4.1. Renormalización en espacio real

A principios de los años setentas, todo cálculo para obtener los exponentes críticos se realizaba mediante alguno de los siguientes tres métodos: *i*) resolviendo el sistema de manera exacta, a partir de sus propiedades termodinámicas y examinando su comportamiento en el régimen crítico, *ii*) por medio de simulaciones numéricas del sistema, o bien *iii*) por extrapolación de soluciones aproximadas, las cuales eran inválidas en la vecindad de la transición de fase.

En 1966 Kadanoff presentó un artículo [44] donde se exponía una forma de cálculo simple para el régimen crítico de donde podían extraerse los exponentes críticos sin trabajar con la función de partición del sistema. Sin embargo las ideas de Kadanoff, a pesar de ser de una gran intuición física en cuanto al comportamiento de los sistemas en sus condiciones críticas, carecían del rigor matemático necesario para ser establecidas de una forma general.

En 1974, Wilson y colaboradores, presentaron un argumento cuantitativo al respecto, introduciendo las llamadas técnicas de Grupo de Renormalización. Actualmente, éstas técnicas se dividen, a grosso modo, en dos clases. Una se refiere a aquellas que se desarrollaron estableciendo una analogía entre la mecánica estadística y las teorías de campo cuánticas, y son denotadas como técnicas de *campo teórico* o del *espacio-k*. Mientras que la otra es mas simple y cercana en esencia a las ideas originales de Kadanoff y se denomina *renormalización en espacio real*. El término 'espacio real' se refiere al hecho de que éstas técnicas involucran cantidades dependientes de la posición en un espacio ordinario. Las técnicas de campo teórico, son mas simples cuando las ecuaciones se escriben en términos de cantidades espaciales por transformadas de Fourier, por lo que son llamadas en 'espacio-k' [7, 8].

#### Renormalizando la malla

La técnica de renormalización en espacio real, sólo puede aplicarse a sistemas basados en una malla. Mas aún, la malla debe de ser regular en muchos sentidos: esto es, debe tener una simetría de escalamiento discreta. Para entender que quiere decir esto, tomemos una malla y dividamos los sitios de

ésta en bloques. Ahora reemplacemos cada conjunto de sitios (o bloque) por un solo sitio, que puede ocupar la posición de uno de los sitios o la de toda el área de sitios. La malla tiene una simetría de escalamiento discreta si podemos obtener una nueva malla con exactamente la misma forma que la malla original, excepto por un incremento en el tamaño que dependerá del parámetro de malla  $a$ , entonces  $a \rightarrow a' \equiv ba$ . En el proceso de renormalizar la malla necesitamos ahora reducir todas las dimensiones en la nueva malla por un factor de  $b$ , terminando finalmente con una nueva malla con exactamente el mismo tamaño que la original.

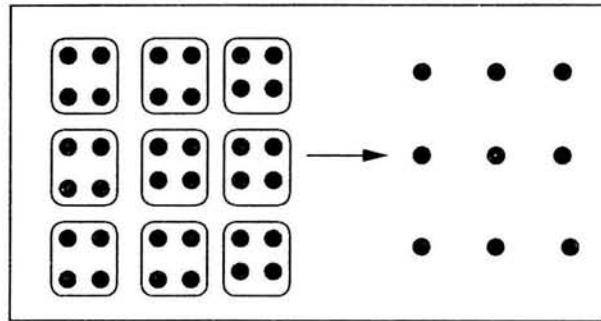


Figura 2.1: Renormalización de una malla cuadrada

Si agrupamos los sitios en bloques que contienen  $p$  sitios en promedio, entonces la malla renormalizada contendrá menos sitios que la malla original por un factor de  $p$ . Esto será importante cuando redefinamos las cantidades de sitio promedio. Debido a que hemos escalado toda nuestra malla por un factor de  $b$  su volumen debe de haber disminuido en un valor de  $b^d$  donde  $d$  es el número de dimensiones espaciales. Entonces, si los sitios en la malla renormalizada se encuentran arreglados en exactamente la misma forma que aquellos de la malla original, su número debe de haberse reducido por un factor de  $p = b^d$ .

La malla mas común que presenta simetría de escalamiento discreta, es la malla cuadrada. En la figura 2.1 se muestra la renormalización de la malla cuadrada en dos dimensiones. En este caso  $b = 2$  y el número de sitios de la malla final tiene un cuarto de la cantidad de sitios de la malla original [6, 35].

### Variables de bloque

Ahora supongamos un modelo en el que tenemos ciertas variables a las que llamaremos espines, definidas en cada sitio de nuestra malla. Por simplicidad

enfocaremos nuestra discusión a modelos en los que tenemos sólo un espín escalar  $s_i$  en cada sitio  $i$ . Ahora renormalizamos la malla. Para cada bloque  $k$ , definimos una nueva variable  $\sigma_k^{(1)}$  que es alguna función  $f$  de los espines del bloque. A las variables  $\sigma_k^{(1)}$  las llamaremos *variables de bloque*. Si  $\mathcal{S}_k$  denota el conjunto de sitios en el bloque  $k$ -ésimo, entonces escribimos

$$\sigma_k^{(1)} = f(\{s_i\}), \quad \text{donde } i \in \mathcal{S}_k. \quad (2.51)$$

La naturaleza recursiva de esta definición, (el hecho de que para definir variables  $\sigma_i^{(n+1)}$  sólo necesitemos las variables  $\sigma_i^{(n)}$  y no las variables  $s_i \equiv \sigma_i^{(0)}$ ) es crucial en la idea de renormalización. Como un ejemplo, una definición simple de las variables de bloque es la *definición lineal*

$$\sigma_k^{(n+1)} = A^{(n)} \sum_{i \in \mathcal{S}_k} \sigma_i^{(n)}, \quad (2.52)$$

donde  $A^{(n)}$  es la constante de renormalización. Existen otras formas de llevar a cabo la asignación de las variables de bloque a partir de las variables originales. Una de ellas es conocida como *regla de la mayoría*, y consiste en asignar a la nueva variable de bloque el valor que tiene el mayor número de los sitios del bloque inicial [6]. Así, si en nuestro bloque la mayoría de los sitios tiene un valor de espín de, digamos, +1 el valor de la variable de bloque tendrá este valor.

Otra forma común de definir  $\sigma_k^{(n+1)}$  es establecer su valor como el valor de alguna de las variables  $\sigma_i^{(n)}$  en el bloque

$$\sigma_k^{(n+1)} = \sigma_i^{(n)}, \quad \text{donde } i \in \mathcal{S}_k. \quad (2.53)$$

Esta definición de  $\sigma_k^{(n+1)}$  recibe el nombre de *decimación*. La variable  $\sigma_i^{(n)}$  cuyo valor se asigna a la variable de bloque  $\sigma_k^{(n+1)}$  se escoge aleatoriamente o, a veces, suele escogerse el valor que tiene el espín situado en la esquina superior derecha del bloque en una malla cuadrada.

Existen muchas otras formas de definir las variables de bloque sin embargo, evidentemente, toda definición que se proponga deberá ser coherente con el problema que estamos tratando. Otra restricción importante es que el conjunto de estados disponibles para cada una de las nuevas variables, deberá ser el mismo que el disponible para las variables originales.

### Renormalización del Hamiltoniano

Si  $P(\{s_i\})$  es la probabilidad de que los espines en nuestro modelo tomen algún conjunto de valores particular  $\{s_i\}$  entonces podemos definir el *Hamiltoniano efectivo* para nuestro modelo por la ecuación

$$P(\{s_i\}) = \frac{\exp[-\mathcal{H}(\{s_i\})]}{Z}. \quad (2.54)$$

El Hamiltoniano efectivo dependerá, en general, de la temperatura y de la selección de parámetros tales como interacción espín-espín. Ahora tenemos que establecer cuál es la distribución de probabilidad correspondiente  $P^{(1)}(\{\sigma_i^{(1)}\})$  para las variables de bloque. Debido a que, de la ecuación (2.52), sabemos cómo han sido definidas las variables  $\sigma_i^{(n+1)}$  en términos de  $\sigma_i^{(n)}$ , podemos obtener la distribución de probabilidad  $P^{(n+1)}(\{\sigma_i^{(n+1)}\})$  de las variables de bloque en el estado  $(n+1)$  de la renormalización, a partir tan sólo del conocimiento de  $P^{(n)}(\{\sigma_i^{(n)}\})$ . Esto es, nosotros simplemente sumamos sobre las probabilidades de todas las configuraciones  $\{\sigma^{(n)}\}$  consistentes con la configuración  $\{\sigma^{(n+1)}\}$  de las variables de bloque.

Dada tal distribución de probabilidad, podemos definir el Hamiltoniano efectivo del sistema después de  $n$ -iteraciones de la transformación de renormalización en analogía con la ecuación (2.54)

$$P^{(n)}(\{\sigma_i^{(n)}\}) = \frac{\exp[-\mathcal{H}^{(n)}(\{\sigma_i^{(n)}\})]}{Z^{(n)}}, \quad (2.55)$$

donde

$$Z^{(n)} \equiv \sum_{\{\sigma_i^{(n)}\}} \exp[-\mathcal{H}^{(n)}(\{\sigma_i^{(n)}\})]. \quad (2.56)$$

Esto desplaza el valor de  $\mathcal{H}$  por una constante aditiva. Nosotros fijamos esta constante mediante una condición de normalización específica sobre  $\mathcal{H}^{(n)}$  por ejemplo

$$\mathcal{H}^{(n)}(\{\sigma_i^{(n)}\})|_{\sigma_i^{(n)}=0} = 0. \quad (2.57)$$

Son posibles muchas otras condiciones; sin embargo ésta es particularmente conveniente para realizar el cálculo de la energía libre, pero otras pueden ser adecuadas para el cálculo de alguna otra cantidad física. Con  $\mathcal{H}^{(n)}$  definido de esta forma, es claro que el valor esperado de alguna función  $X$  de variables

$\sigma_i^{(n+1)}$  llevará al mismo valor, cuando nosotros la evaluemos empleando  $\mathcal{H}^{(n+1)}$  o  $\mathcal{H}^{(n)}$ . Esto es, si evaluamos la cantidad para  $n \gg 1$

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z^{(n+1)}} \sum_{\{\sigma^{(n+1)}\}} X(\{\sigma_i^{(n+1)}\}) \exp[-\mathcal{H}^{(n+1)}(\{\sigma_i^{(n+1)}\})], \quad (2.58)$$

obtendremos el mismo resultado que si evaluamos

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z^{(n)}} \sum_{\{\sigma^{(n)}\}} X(\{\sigma_i^{(n)}\}) \exp[-\mathcal{H}^{(n)}(\{\sigma_i^{(n)}\})]. \quad (2.59)$$

Entonces cuando escribamos el valor de espectación no habrá necesidad de especificar qué Hamiltoniano efectivo estamos empleando, ya que todos los valores de espectación son equivalentes.

Cuando realizamos un cálculo de renormalización en espacio real, imponemos una condición mas al Hamiltoniano efectivo  $\mathcal{H}^{(n+1)}$ : estipulamos que debe de tomar la misma forma funcional que  $\mathcal{H}^{(n)}$ , entonces el modelo es exactamente el mismo en cada estado excepto por un cambio en los parámetros que parecen en el Hamiltoniano efectivo. Esta condición es, en la mayoría de los casos, imposible de cumplir, y lo mejor que podemos hacer es aproximar el verdadero Hamiltoniano efectivo renormalizado  $\mathcal{H}^{(n+1)}$ , como lo definimos anteriormente con una función de la misma forma que  $\mathcal{H}^{(n)}$ . Al hacer esto, escogemos los parámetros que aparecen en la función para hacer la aproximación lo mas exacta posible, pero un grado de aproximación es inevitable. La renormalización del Hamiltoniano, es una operación que toma a  $\mathcal{H}^{(n)}$  y lo mapea en  $\mathcal{H}^{(n+1)}$

$$\mathcal{H}^{(n+1)} = \mathcal{Q}(\mathcal{H}^{(n)}). \quad (2.60)$$

El único efecto de la transformación  $\mathcal{Q}$  es que los valores de los parámetros que aparecen en  $\mathcal{H}$  cambian. Los nuevos valores de los parámetros dependen sólo de los valores anteriores, y de nada mas, a pesar de que a veces esta dependencia puede ser alguna complicada función no lineal.

La ecuación (2.60) puede generar un poco de confusión, ya que ésta relaciona las funciones  $\mathcal{H}(\{\sigma_i\})$  antes y después de la renormalización, pero lo que cambia de un estado a otro es el valor de los parámetros. Por ello es conveniente usar otra notación. Llamemos a los parámetros del Hamiltoniano efectivo  $H_1, H_2, H_3, \dots$  y escribámoslos como las componentes de un vector



$\mathbf{H}$ , y escribir la renormalización como alguna operación (quizá no lineal) de  $\mathbf{R}$ , actuando sobre este vector, de tal forma que

$$\mathbf{H}^{(n+1)} = \mathbf{R}(\mathbf{H}^{(n)}) \quad (2.61)$$

$$\text{o } \mathbf{H}' = \mathbf{R}(\mathbf{H}). \quad (2.62)$$

En lo que sigue nos referiremos a  $\mathbf{H}$  como Hamiltoniano efectivo [6]. A veces es adecuado pensar en un espacio de Hamiltonianos, esto es, un espacio finito dimensional en el que un punto con vector de posición  $\mathbf{H}$  representa el Hamiltoniano efectivo con los valores correspondientes de los parámetros  $H_n$ , los cuales juegan el papel de las coordenadas en este espacio. Nuestra transformación de renormalización  $\mathbf{R}$  nos mueve en este espacio en saltos discretos. Si comenzamos en algún punto inicial  $\mathbf{H}^{(0)}$  e iteramos la ecuación (2.61) avanzamos en pasos a través de alguna trayectoria en nuestro espacio. Este movimiento puede ser esquematizado por medio de diagramas como el de la figura 2.2 en donde, por claridad, los pasos sucesivos se han unido y se ha trazado una curva [6, 7]. En cada paso los valores de los parámetros que aparecen en el Hamiltoniano efectivo son reemplazados por unos nuevos, que calculamos a partir de los valores anteriores mediante la ecuación (2.61).

### 2.4.2. Puntos fijos

En general, habrá puntos fijos en nuestro espacio. Un *punto fijo* es un punto que es mapeado en él mismo por la transformación  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}(\mathbf{H}). \quad (2.63)$$

Es importante no confundir estos puntos fijos de la transformación de grupo de renormalización con los definidos anteriormente para los mapeos. Podemos clasificar los puntos fijos como *atractivos*, *repulsivos* o *mixtos*. Un punto fijo atractivo es uno hacia el cual tienden todos los Hamiltonianos efectivos situados en su vecindad cuando se aplica la transformación de grupo de renormalización. Un punto fijo repulsivo, es uno hacia el cual no tiende ninguno de los Hamiltonianos efectivos cercanos a éste al cabo de varias iteraciones. Un punto fijo mixto, no es ni atractivo ni repulsivo, si no que algunos Hamiltonianos efectivos cercanos a éste tienden hacia él en una dirección a partir de las sucesivas iteraciones, mientras que otros Hamiltonianos en su vecindad se alejarán de él en otra dirección. La figura 2.2 muestra las trayectorias de

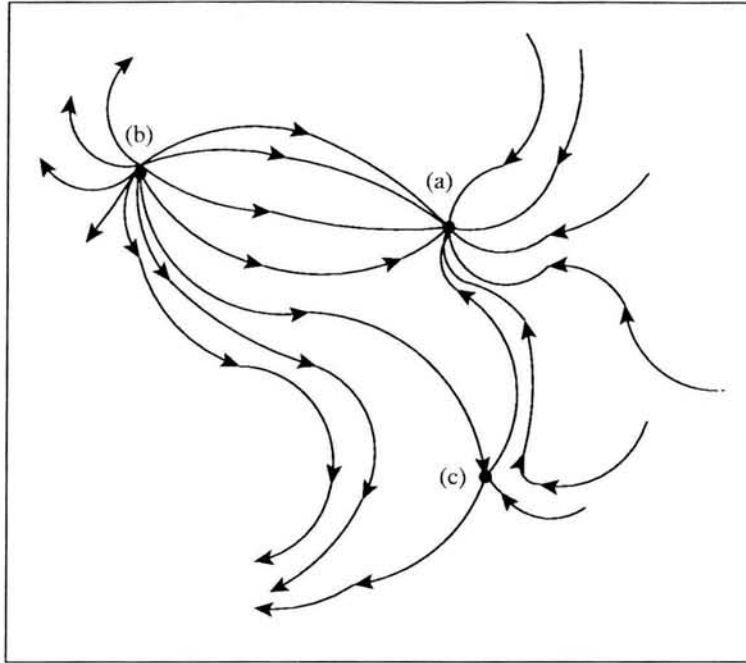


Figura 2.2: Ilustración de las líneas de flujo para los tres tipos de puntos fijos en el espacio de parámetros. (a) Punto fijo atractivo, (b) punto fijo repulsivo, (c) punto fijo mixto

los Hamiltonianos efectivos en la vecindad de los tres tipos de puntos fijos en un espacio de Hamiltonianos bidimensional [6, 8].

Podemos determinar la naturaleza de los puntos fijos en un sistema dado como sigue. Primero resolvemos la ecuación (2.63) para encontrar los puntos estacionarios. Entonces suponemos que estamos interesados en explorar la naturaleza del punto fijo en  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ . Escribimos el efecto de  $\mathbf{R}$  en el Hamiltoniano efectivo cercano a  $\mathbf{H}_0$  como

$$\mathbf{H}_0 + \delta\mathbf{H}' = \mathbf{R}(\mathbf{H}_0 + \delta\mathbf{H}) = \mathbf{R}(\mathbf{H}_0) + \mathbf{M}\delta\mathbf{H} + O(\delta\mathbf{H}^2), \quad (2.64)$$

donde hemos desarrollado a  $\mathbf{R}$  en series de potencias en torno de  $\mathbf{H}_0$ .  $\mathbf{M}$  es una matriz ordinaria cuyos elementos están dados por

$$M_{ij} = \left. \frac{\partial R_i(\mathbf{H})}{\partial H_j} \right|_{\mathbf{H}=\mathbf{H}_0}. \quad (2.65)$$

debido a que  $\mathbf{H}_0$  es un punto fijo de  $\mathbf{R}$  concluimos que

$$\delta\mathbf{H}' = \mathbf{M}\delta\mathbf{H} + O(\delta\mathbf{H}^2). \quad (2.66)$$



Entonces cuando nos movemos infinitesimalmente cerca del punto fijo  $\mathbf{H}_0$ , nuestra trayectoria está dada completamente por una matriz, o bien, por sus eigenvalores y eigenvectores. Si  $\mathbf{M}$  tiene un eigenvalor  $\lambda_R > 1$ , el punto fijo será *repulsivo* en la dirección del eigenvector correspondiente, en este caso se dice que las variables asociadas a éste punto son *relevantes*, ya que al realizar las iteraciones sucesivas éstas nos alejan del punto fijo. Y similarmente, si éste tiene un eigenvalor  $\lambda_A < 1$ , el punto fijo será *atractivo* en la dirección correspondiente, en este caso las variables asociadas a  $\lambda_A$  serán *irrelevantes* ya que las iteraciones sucesivas llevan su valor a cero, dirigiéndonos hacia el punto fijo. Si el eigenvalor es exactamente igual a 1, el punto fijo se dice que es *marginal* en la dirección del correspondiente eigenvector. En éste caso necesitamos considerar el siguiente término en el desarrollo de Taylor de la transformación de renormalización con objeto de decidir la verdadera naturaleza del punto fijo. Entonces, para identificar si  $\mathbf{H}_0$  es atractivo, repulsivo o mixto, necesitamos tan sólo resolver para los eigenvalores de  $\mathbf{M}$ .

Para algún sistema en el que se presenta una transición de fase simple, las identidades de dos de los puntos fijos son claras. Uno, el *punto fijo de alta temperatura*, es el Hamiltoniano efectivo para el sistema cuando  $T \rightarrow \infty$ . En este caso todas nuestras variables adquieren valores aleatorios y no están correlacionadas. Cuando nosotros dividimos en bloques al sistema, las variables de bloque tendrán valores aleatorios y seguirán sin correlación, por lo que su distribución de probabilidades no cambiará. Entonces el Hamiltoniano efectivo se conserva igual ante la transformación y por tanto estamos en un punto fijo. Otro punto fijo es el *punto fijo de baja temperatura*, que es el Hamiltoniano efectivo para el sistema cuando  $T \rightarrow 0$ . En este caso el sistema está en su estado basal, en el que hay un completo orden. Cuando formamos bloques, las nuevas variables de bloque también se encuentran ordenadas y entonces el Hamiltoniano efectivo no cambia al realizar la transformación, por lo que nos encontramos en un punto fijo.

Estos dos puntos fijos son atractivos, ver figura 2.3. Ahora bien, los Hamiltonianos efectivos que fluyen hacia el punto fijo de alta temperatura y aquellos que fluyen hacia el de baja temperatura, deben estar separados por alguna superficie que cruza nuestro espacio de Hamiltonianos, y la llamaremos *superficie crítica*. Cada punto de esta superficie crítica corresponde a un Hamiltoniano efectivo que se encuentra en la temperatura crítica adecuada con los valores de los otros parámetros en ese punto. Uno debe de ser cuidadoso en no considerar esta superficie crítica como una isoterma  $T = T_c$ . En general, la temperatura crítica será diferente en los diferentes puntos de la superficie

crítica.

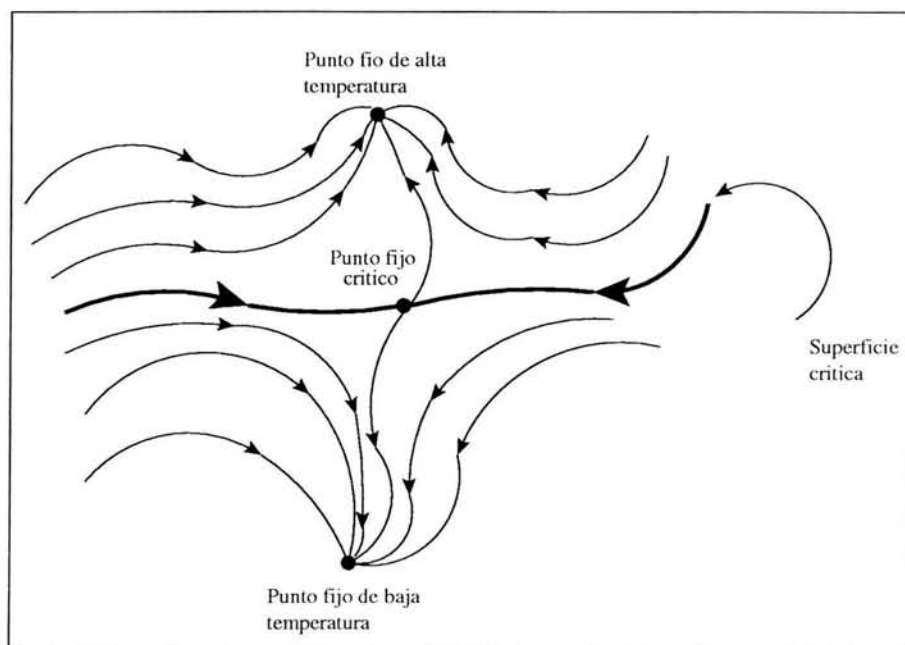


Figura 2.3: Porción del espacio de Hamiltonianos mostrando los puntos fijos de alta y de baja temperatura y el punto fijo crítico

Ahora imaginemos lo que pasa si escogemos un punto sobre la superficie crítica como nuestro Hamiltoniano inicial e iteramos la ecuación (2.61). Ninguno de los argumentos explicados anteriormente se aplica en este caso, ya que  $\mathbf{H}$  no tiende hacia el punto fijo de alta temperatura ni al de baja temperatura, sino que permanece sobre la superficie crítica. Con esta restricción aun tenemos varias posibilidades

1.  $\mathbf{H}$  tiende al límite  $\mathbf{H}^*$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ;
2.  $\mathbf{H}$  se va a infinito cuando  $n \rightarrow \infty$ ;
3.  $\mathbf{H}$  cae en un círculo cerrado de valores moviéndose alrededor de éstos sin tender nunca a un límite;
4.  $\mathbf{H}$  se mueve caóticamente sobre la superficie crítica sin nunca alcanzar un límite.

Las últimas dos posibilidades ocurren en los casos de *dinámica crítica* usando renormalización en espacio real, pero en nuestro caso no consideraremos este tipo de sistemas. Para los sistemas en equilibrio, que son los que estamos considerando aquí, el comportamiento de los sistemas siempre cae en uno de los dos primeros casos anteriores. Estos dos casos, sin embargo, no son muy distintos el uno del otro, ambos tienen un punto fijo que es atractivo sólo que en el segundo caso éste es el  $\infty$ . Escogiendo un nuevo sistema de coordenadas para nuestro espacio de Hamiltonianos o cambiando los parámetros que aparecen en la definición de las variables de bloque, podemos siempre hacer el punto fijo finito (por ejemplo podemos simplemente invertir la coordenada o las coordenadas que miden nuestro progreso a través de la superficie crítica). Entonces tendremos identificado un nuevo punto fijo sobre la superficie crítica en  $\mathbf{H}^*$ . Este es el *punto fijo crítico*, el cual es atractivo en la superficie crítica. Fuera de ésta, sabemos que todos los Hamiltonianos efectivos son atraídos hacia los puntos fijos de alta o de baja temperatura. Por lo tanto podemos concluir que el punto fijo crítico es un punto fijo mixto: repulsivo a lo largo de la trayectoria fuera de la superficie crítica y atractivo a lo largo de las trayectorias sobre la superficie crítica. La matriz  $\mathbf{M}$  correspondiente a éste punto tiene sólo un eigenvalor que es mayor que uno. El punto fijo crítico es por mucho el más interesante de los puntos fijos ya que sus propiedades nos hablan directamente del comportamiento crítico del sistema [6, 7].

## Capítulo 3

# Termodinámica de mapeos no lineales

Resultado de varias sugerencias durante el desarrollo de las investigaciones contenidas en esta tesis, expongo en este capítulo el cuerpo de conocimiento correspondiente a la estructura termodinámica que poseen los sistemas no lineales en sus estados caóticos. Estas razones descansan en que este trabajo se ha realizado dentro del Programa de Posgrado en Ciencias Químicas de la UNAM, donde es común estudiar temas de termodinámica y mecánica estadística aplicados a sistemas térmicos. En nuestro caso aplicamos un formalismo paralelo a sistemas dinámicos no lineales y consideramos conveniente resaltar este formalismo en el texto. Con este fin, seleccionamos lo que juzgamos una de las exposiciones más accesibles, contenidas en el libro *Thermodynamics of chaotic systems* de C. Beck y F. Schögl y la presentamos de la siguiente manera. Primero, planteamos los argumentos teóricos que nos permiten estudiar los sistemas caóticos empleando las herramientas de la termodinámica y de la mecánica estadística, exhibiendo la similitud entre este tipo de sistemas no lineales y otros sistemas fisicoquímicos e introduciendo conceptos fundamentales de multifractalidad, exponentes de Lyapunov y entropías como medida de la pérdida de información del sistema. Después presentamos las diferentes transiciones de fase en sistemas no lineales, dentro de esta sección incluimos las transiciones de fase  $q$  de Mori [14, 31, 57], fundamentales en este trabajo y que no se encuentran contenidas en el texto original de Beck.

## 3.1. Termodinámica de sistemas caóticos

### 3.1.1. Probabilidad en la teoría de sistemas caóticos

Como se ha mencionado, los valores  $\mathbf{x}_n$  obtenidos a partir del proceso de iterar un mapeo determinístico no son eventos aleatorios y se encuentran determinados por el valor inicial  $\mathbf{x}_0$ . A pesar de esto, si el mapeo es no lineal y se manifiesta un comportamiento caótico, la sensible dependencia a las condiciones iniciales y la imposibilidad de incluir valores exactos en cada paso de iteración, nos obliga a estudiarlo de manera estadística. Esto lo hacemos partiendo de distribuciones de probabilidad que obtenemos mediante un experimento numérico (iteraciones en una computadora) [1, 3]. Estas distribuciones de probabilidad nos ayudan a describir los sistemas estadísticamente y permite establecer un formalismo similar al de la mecánica estadística. Al emplear las técnicas de la física estadística en este tipo de sistemas encontramos una enorme similitud con los sistemas fisicoquímicos y podemos hacer una descripción global de nuestro sistema no lineal de la misma manera que lo hacemos con otro sistema ordinario.

A continuación presentaremos brevemente algunos conceptos y cantidades básicas que se emplean en la descripción de los sistemas no lineales cuando aplicamos la mecánica estadística para estudiarlos. Estos conceptos pueden consultarse mas ampliamente en distintos textos (ver por ejemplo [1, 3, 9, 57]), nosotros aqui nos basamos en el libro *Thermodynamic of chaotic systems* escrito por C. Beck y F. Schlögl en 1993. Decidimos escribir este capítulo basándonos en esta fuente para evitar confusión en la notación y ser autoconsistentes con la estructura de las funciones termodinámicas empleadas en el trabajo.

Comenzaremos ésta sección dando una definición empírica del concepto de *probabilidad*. Pensemos en un experimento del cual podemos obtener  $R$  posibles resultados  $i$ . Llamaremos *conjunto muestra* o *disyunción completa* al conjunto de los  $R$  posibles resultados de los eventos aleatorios  $i$ . Una de las propiedades de esta disyunción completa se encuentra expresada en el propio nombre y es que, el resultado del experimento siempre lleva a un solo posible elemento  $i$  del conjunto muestra (es decir, los eventos son excluyentes).

Repitamos el experimento independientemente bajo las mismas condiciones un número  $n$  de veces. Si en esta secuencia de  $n$  experimentos el resultado  $i$  se obtiene  $n_i$  veces, llamaremos al cociente  $n_i/n$  la *frecuencia relativa*  $H_i$  del evento  $i$ . Si cuando llevamos a cabo una gran cantidad de

experimentos esta frecuencia toma un valor fijo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_i = p_i, \quad (3.1)$$

llamamos a este valor límite  $p_i$  la probabilidad del evento observado  $i$ .

Ahora bien, como hemos dicho, para un sistema caótico dado por un mapeo determinístico a partir de un valor inicial fijo  $\mathbf{x}_0$ , las iteraciones obtenidas no son eventos aleatorios, sin embargo son impredecibles en la práctica. El comportamiento a tiempos grandes de un sistema caótico sólo puede describirse en un sentido estadístico.

La forma de hacer esto la describe Beck de la siguiente manera, “dividamos el espacio de fase  $d$ -dimensional  $X$  en celdas  $d$ -dimensionales. Las celdas son subconjuntos disjuntos del espacio de fase  $X$  que juntas lo cubren completamente. Etiquetemos estas celdas por medio de un subíndice  $i = 1, 2, 3, \dots, R$  donde  $R$  es el número total de celdas. Después de un cierto número de iteraciones a partir de un valor inicial  $\mathbf{x}_0$  el número de iteraciones encontradas en la celda  $i$  será llamado  $n_i$ . El número total de iteraciones es

$$n = \sum_{i=1}^R n_i, \quad (3.2)$$

donde la suma corre sobre todas las celdas. Si el tiempo  $n$  de iteración es muy grande, las frecuencias relativas

$$H_i = n_i/n \quad (3.3)$$

se hacen prácticamente independientes de  $n$ .”

Recordando que en este caso las  $n$  iteraciones no son eventos estadísticamente independientes, la expresión anterior no resulta idéntica a la suposición hecha anteriormente para la ecuación (3.1). En nuestro caso supondremos que el límite de (3.3) existe en el sentido en que se considerarán sólo los sistemas dinámicos que cumplan con esta condición. Para valores de  $n$  suficientemente grandes, llamaremos *frecuencia relativa*  $H_i$  a la probabilidad  $p_i$  de encontrar una iteración de la trayectoria en la celda  $i$ .

La manera de llevar a cabo el experimento mencionado es a través de la iteración del mapeo  $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$  en una computadora a partir de un valor inicial  $\mathbf{x}_0$ , el valor  $\mathbf{x}_{n+1}$  obtenido en cada paso de iteración irá conformando la trayectoria en el espacio de fase  $X$  de éste. Cada punto  $\mathbf{x}_{n+1}$  de la trayectoria caerá dentro de cierto intervalo  $i$  en los que hemos dividido nuestro espacio de



fase. Con ello podemos calcular la frecuencia relativa  $H_i$  contando cuantas iteraciones han caído en cada intervalo y dividiendo entre el número total de iteraciones  $n$  cuando  $n \gg 1$ . En general, las probabilidades obtenidas dependerán del valor inicial  $\mathbf{x}_0$ . Decimos que el mapeo es *ergódico* [3] cuando las probabilidades no dependen de la condición inicial.

Haremos ahora una comparación con la termodinámica estadística, donde los estados termodinámicos de un sistema están descritos por distribuciones de probabilidad sobre microestados  $i$ . En termodinámica tratamos de predecir el comportamiento general del sistema basándonos en leyes microdinámicas y observaciones macroscópicas. Para encontrar leyes a tales predicciones empleamos la distribución de probabilidad. En este caso, lo que nos interesa fundamentalmente son las cantidades macroscópicas observables. También en la teoría de sistemas dinámicos el interés fundamental no es en qué celda  $i$  se encuentra el sistema (o en cuál microestado se encuentra), sino encontrar características globales que describan el comportamiento del sistema. La diferencia entre la situación caótica y la termoestadística es que en el caso de los sistemas caóticos las distribuciones de probabilidades se conocen a partir de frecuencias relativas obtenidas mediante un experimento por computadora, mientras que las probabilidades termodinámicas son una expresión de nuestra expectación [3].

Consideremos ahora un conjunto de diferentes valores iniciales  $\mathbf{x}_0$ . La frecuencia relativa de valores iniciales en un cierto subconjunto  $A$  del espacio de fase puede interpretarse como la probabilidad  $\mu_0(A)$  de tener un valor inicial  $\mathbf{x}_0$  en  $A$ . La cantidad  $\mu_0$  es llamada *medida de probabilidad de  $A$* . Podemos escribir

$$\mu_0(A) = \int_A d\mathbf{x} \rho_0(\mathbf{x}). \quad (3.4)$$

La función  $\rho_0(\mathbf{x})$  definida en todo el espacio de fase es la llamada *densidad de probabilidad*. La diferencia entre la medida y la densidad de probabilidad es que una medida es una función de un conjunto y la densidad es una función de las coordenadas  $\mathbf{x}$ . Supongamos ahora que tenemos un mapeo  $f$  y nos interesa estudiar la evolución en el tiempo del conjunto de trayectorias correspondientes con los diferentes valores iniciales  $\mathbf{x}_0$ . Para nuestro estudio, estaremos interesados fundamentalmente en *distribuciones de probabilidad invariantes* esto es, distribuciones que no cambian bajo la acción de  $f$ . Esto quiere decir que cumplen con la propiedad



$$\mu_{n+1}(A) = \mu_n(f^{-1}(A)) = \mu_n(A). \quad (3.5)$$

Una medida de probabilidad  $\mu_n$  que cumple con la ecuación (3.5) se llama *medida invariante* y su correspondiente función de densidad  $\rho(\mathbf{x})$  *densidad invariante*. Ésta describe un conjunto de puntos cuya densidad no cambia en el tiempo: un estado estacionario. Cabe aclarar que los puntos individuales sí evolucionan en el tiempo bajo la acción de  $f$ . Lo que es constante es su distribución de probabilidad [29, 3].

### 3.1.2. Dimensiones generalizadas

#### Fractales y multifractales

Podemos definir un fractal como un objeto geométrico complejo que posee una estructura no trivial y cuya dimensionalidad es menor que 1. Si a esta base fractal tenemos asociada una distribución de probabilidad, decimos entonces que el objeto es un multifractal. Un ejemplo de multifractal es el atractor de un sistema dinámico en el borde del caos. En éste, las iteraciones obtenidas a partir del mapeo, conformarán un conjunto de puntos fractal en el espacio de fase. Como tal su dimensión será menor que 1. A este conjunto fractal tenemos asociada una medida de probabilidad dada por las frecuencias relativas de las iteraciones que son interpretadas como probabilidades, por lo tanto decimos que dicho atractor es un multifractal.

#### La dimensión fractal

Naturalmente sabemos, que los objetos geométricos simples poseen una dimensión entera. Sin embargo existen objetos geométricos (llamados fractales) cuya dimensión no es un número entero [30]. Para explicarnos esto podemos analizar la rapidez de crecimiento  $r(\epsilon)$  de pequeñas celdas  $d$ -dimensionales de volumen  $\epsilon^d$ , que se requieren para cubrir el objeto en consideración,  $d$  se escoge lo suficientemente grande para que la dimensión  $D(0)$  del objeto satisfaga que  $D(0) \leq d$ . Si deseamos cubrir el objeto completamente necesitaremos

$$r(\epsilon) \sim \epsilon^{-D(0)} \quad (3.6)$$

celdas, para  $\epsilon \ll 1$ . La rapidez de crecimiento  $r(\epsilon)$  para  $\epsilon \rightarrow 0$  es la dimensión  $D(0)$  del objeto bajo consideración. Con ello, la dimensión fractal se define

como

$$D(0) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln r(\epsilon)}{\ln \epsilon}. \quad (3.7)$$

Para los matemáticos, la dimensión anterior (obtenida para celdas de igual tamaño sin importar su forma) se conoce como *capacidad* y en ocasiones el límite en la ecuación (3.7) puede no existir. Por ello conviene definir una nueva cantidad llamada *dimensión de Hausdorff*  $D_H$ . Esta dimensión se define a través de celdas de tamaño variable. El objeto fractal  $A$  se cubre con celdas  $\sigma_k$  de diámetro variable  $\epsilon_k$ , donde  $\epsilon_k$  satisface  $\epsilon_k < \epsilon$ . Entonces se define un parámetro positivo  $\mathbf{q}$  de la forma

$$m(\mathbf{q}, \epsilon) = \inf_{\sigma_k} \Sigma_k(\epsilon_k)^{\mathbf{q}}. \quad (3.8)$$

El ínfimo se toma sobre todas las posibles formas de cubrir  $A$ . En el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , la cantidad  $m(\mathbf{q}, \epsilon)$  se va a cero para  $\mathbf{q} > \mathbf{q}_0$  y diverge para  $\mathbf{q} < \mathbf{q}_0$ . El punto  $\mathbf{q}_0$  en el que  $m(\mathbf{q}, \epsilon)$  ni diverge ni se va a cero es la dimensión de Hausdorff  $D_H$  de  $A$

$$D_H = \mathbf{q}_0. \quad (3.9)$$

$D_H$  es una cantidad matemática bien definida [48] pero difícil de calcular.  $D(0)$  es mucho más sencilla de calcular mediante un experimento numérico, afortunadamente, ambas cantidades coinciden para la mayoría de los casos.

### Informaciones y dimensiones de Rényi

En el caso de los multifractales, su descripción se encuentra incompleta si consideramos una sola dimensión. En un conjunto multifractal tenemos un número infinito de dimensiones que juntas constituyen el espectro de dimensiones generalizadas [12, 47, 49].

Supongamos que tenemos una distribución de probabilidades arbitraria y dividamos el espacio de fase en cajas de tamaños iguales. Etiquetemos las  $r$  cajas con probabilidad diferente de cero con los índices  $i = 1, 2, \dots, r$ . Nótese que el número  $r$  es distinto del número total de cajas  $R \sim \epsilon^{-d}$ . Para un valor dado de  $\epsilon$  la probabilidad atribuida a una caja  $i$  será llamada  $p_i$ . Como  $p_i$  se atribuye a una sola caja es una cantidad local. Una cantidad local relacionada es el *índice de acumulación*  $\alpha_i(\epsilon)$  de la caja  $i$  centrada en el punto  $\mathbf{x}$ . Para un valor finito  $\epsilon$  se define como el cociente

$$\alpha_i(\epsilon) = \frac{\ln p_i}{\ln \epsilon}. \quad (3.10)$$

Consideremos una secuencia de cajas con tamaños  $\epsilon_j \rightarrow 0$ . Si el límite

$$\alpha(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(\epsilon) \quad (3.11)$$

existe, entonces  $\alpha(\mathbf{x})$  es llamado *exponente de escamamiento local*. El fractal es llamado no uniforme o multifractal si  $\alpha(\mathbf{x})$  depende de  $\mathbf{x}$ . Genéricamente los atractores fractales de mapeos no lineales son de este tipo. En realidad tenemos un espectro entero de diferentes índices de acumulación debidos a las singularidades de la densidad invariante [31, 50, 51]. Consideremos cajas de tamaño regular  $\epsilon$ . Las informaciones de Rényi se definen como

$$I_{\mathbf{q}}(p) \equiv \frac{1}{\mathbf{q} - 1} \ln \sum_{i=1}^r p_i^{\mathbf{q}}. \quad (3.12)$$

Consideremos ahora el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , que implica  $R \sim \epsilon^{-d} \rightarrow \infty$ . En este límite las informaciones de Rényi dadas por la ecuación (3.12) divergen [52]. Por lo que resulta conveniente definir las *dimensiones de Rényi* [12, 47, 3] como

$$D(\mathbf{q}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I_{\mathbf{q}}(p)}{\ln \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \epsilon} \frac{1}{\mathbf{q} - 1} \ln \sum_{i=1}^r p_i^{\mathbf{q}}. \quad (3.13)$$

Esta cantidad no diverje en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Si definimos la cantidad  $Z(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^r p_i^{\mathbf{q}}$ , ésta se espera que escale como

$$Z(\mathbf{q}) \sim \epsilon^{(\mathbf{q}-1)D(\mathbf{q})}. \quad (3.14)$$

Es importante enfatizar que las probabilidades  $p_i$  se encuentran relacionadas con cajas de igual tamaño. Dependiendo del índice  $\mathbf{q}$  las dimensiones de Rényi describen diferentes propiedades interesantes del sistema. Algunas de estas tienen nombres específicos y ya las conocemos, por ejemplo con  $\mathbf{q} = 0$ ,  $D(0)$  corresponde con la dimensión de Hausdorff, mientras que el caso  $\mathbf{q} = 1$  nos da la llamada dimensión de información  $D(1)$ , para  $\mathbf{q} = 2$  tenemos la dimensión de correlación  $D(2)$ . Otras dos dimensiones importantes son las dimensiones límites  $D(\pm\infty)$ . La dimensión  $D(\infty)$  describe el comportamiento escalatorio de la región del espacio de fase donde la probabilidad está mas concentrada.  $D(-\infty)$  por otro lado, describe el comportamiento de la región donde la probabilidad se encuentra mas rarificada [9].

Analicemos a continuación lo que sucede cuando no trabajamos con cajas de tamaño regular si no variable. Cubramos entonces nuestro multifractal con celdas de diferente tamaño y forma  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ . Supongamos que  $p_i$  es la

probabilidad asociada a la celda  $\sigma_i$ . Cubramos completamente cada celda por una bola esférica de radio  $l_i$  lo mas pequeño posible, tal que  $l_i < l$ . La función de partición generalizada puede definirse como sigue

$$Z(\mathbf{q}, \tau) = \inf_{\{\sigma\}} \sum_{i=1}^r \frac{p_i^{\mathbf{q}}}{l_i^{\tau}} \quad \text{para } \mathbf{q} \leq 1, \tau \leq 0, \quad (3.15)$$

y respectivamente

$$Z(\mathbf{q}, \tau) = \sup_{\{\sigma\}} \sum_{i=1}^r \frac{p_i^{\mathbf{q}}}{l_i^{\tau}} \quad \text{para } \mathbf{q} > 1, \tau > 0. \quad (3.16)$$

El ínfimo y el supremo se toman con respecto a todas las posibles particiones. En analogía con el caso de tamaños regulares, consideremos un proceso límite donde el tamaño de todas las celdas va a cero y por supuesto el número  $r$  va a infinito. Las dimensiones de Rényi se encuentran ahora definidas por el valor

$$\tau(\mathbf{q}) = (\mathbf{q} - 1)D(\mathbf{q}), \quad (3.17)$$

que hace que  $Z(\mathbf{q})$  ni diverja ni vaya a cero en el límite  $l \rightarrow 0$  [47].

### Espectro de dimensiones locales $f(\alpha)$

En termodinámica a menudo relacionamos los potenciales termodinámicos a través de transformadas de Legendre. En la teoría de sistemas dinámicos empleamos también transformadas de Legendre para obtener cantidades asociadas al multifractal. Una de ellas es la transformada de Legendre de  $\tau(\mathbf{q})$ ,  $f(\alpha)$ , que se obtiene mediante las siguientes relaciones

$$f(\alpha) = \mathbf{q}\alpha - \tau(\mathbf{q}) \quad (3.18)$$

y

$$\frac{d\tau}{d\mathbf{q}} = \alpha, \quad \frac{df}{d\alpha} = \mathbf{q}. \quad (3.19)$$

$f(\alpha)$  es llamada espectro de singularidades de los exponentes de escalamiento locales  $\alpha(x)$ .  $f(\alpha)$  y  $\tau(\mathbf{q})$  contienen la misma cantidad de información del sistema y están relacionadas a través de transformadas de Legendre [31, 50]. El espectro de dimensiones locales  $f(\alpha)$  tiene una interpretación 'física', según Beck " $f(\alpha)$  es la dimensión fractal del subconjunto de puntos que poseen un índice de escalamiento local  $\alpha$ ".

### 3.1.3. Entropías generalizadas

Las cantidades introducidas en la sección anterior, caracterizan la parte estática o geométrica del multifractal, a continuación introduciremos las cantidades que describen la parte dinámica de éste.

#### Entropía de Kolmogorov-Sinai

Dividamos el espacio de fase  $R$  celdas y denotemos esta partición como  $\{A\} = \{A_1, A_2, \dots, A_R\}$ . Cada trayectoria  $x_0, x_1, x_2, \dots$  de un mapeo  $f$  genera una *secuencia simbólica*  $i_0, i_1, i_2, \dots$  determinada por la condición  $\mathbf{x}_n \in A_{i_n}$ , esto es la  $n$ -ésima iteración se encuentra en la celda  $A_{i_n}$ . El conjunto  $J(i_0, \dots, i_{N-1})$  de todos los valores iniciales  $\mathbf{x}_0$  que genera la secuencia  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{N-1}$  se conoce como un  $N$  cilindro. La probabilidad de una secuencia simbólica finita se denota por  $p(i_0, \dots, i_{N-1})$  y está determinada por la medida de probabilidad  $\sigma$  que se atribuye al  $N$  cilindro.  $\sigma$  puede escogerse arbitrariamente, sin embargo resulta razonable escoger como distribución inicial la medida natural invariante  $\mu$ . De esta manera, el proceso estocástico correspondiente generado por el mapeo es estacionario: las probabilidades  $p(i_0, \dots, i_{N-1})$  no cambian con el tiempo. Si queremos ahora medir la información contenida en las probabilidades, una medida de información adecuada es la información de Shannon

$$I(p) = \sum_{i_0, \dots, i_{N-1}} p(i_0, \dots, i_{N-1}) \ln p(i_0, \dots, i_{N-1}). \quad (3.20)$$

Aquí la suma corre sobre todas las secuencias simbólicas permitidas  $i_0, \dots, i_{N-1}$ . El negativo de la información dinámica de Shannon es la entropía dinámica de Shannon dada por

$$H(p) = -I(p) \quad (3.21)$$

y mide la ausencia de conocimiento acerca de la pregunta de qué secuencia simbólica se espera. Nótese que para un mapeo dado  $f$  esta entropía depende de la distribución de probabilidad  $\sigma$  de valores iniciales, la partición  $\{A\}$  del espacio de fase y de la longitud  $N$  de la secuencia simbólica. Que se expresa como

$$H = H(\sigma, \{A\}, N). \quad (3.22)$$

Cuando  $N$  crece,  $H$  usualmente diverge. Sin embargo la entropía dinámica

de Shannon por unidad de tiempo definida como

$$\begin{aligned} h(\sigma, \{A\}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (H/N) \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i_0, \dots, i_{N-1}} p(i_0, \dots, i_{N-1}) \ln p(i_0, \dots, i_{N-1}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

permanece finita. Esta cantidad depende de la medida  $\sigma$  y de la partición  $\{A\}$ . Con objeto de construir una cantidad fundamental que sólo pueda ser atribuida al mapeo  $f$  y sea independiente de la partición escogida, tomamos el supremo de todas las posibles particiones del espacio de fase y definimos

$$h(\sigma) = \sup_{\{A\}} h(\sigma, \{A\}). \quad (3.24)$$

Esta cantidad es llamada *entropía de Kolmogorov Sinai* de un mapeo con respecto a la medida  $\sigma$ . Usualmente uno toma para  $\sigma$  la medida natural invariante  $\mu$ , entonces  $h = h(\mu)$  es una cantidad atribuida únicamente al mapeo [9, 3]. En ocasiones esta cantidad se usa para cuantificar el caos, es decir que tan caótico es un sistema, un sistema se dice que es caótico si posee una entropía de Kolmogorov Sinai (KS) positiva. Además mientras mas grande sea la entropía KS, mas fuertemente caóticas serán las propiedades del sistema, esto es por que esta entropía mide la rapidéz promedio de la pérdida de la información del sistema.

### Entropías de Rényi

Hemos visto que además de la información de Shannon existen otras medidas de información importantes las medidas de información de Rényi. Podemos entonces también medir la pérdida de información asociada con las secuencias simbólicas de éstas informaciones de Rényi de orden  $\mathbf{q}$  [52]. La correspondiente generalización de la entropía de Kolmogorov Sinai para éstas entropías son llamadas entropías de Renyi [53] y se expresan como

$$K(\mathbf{q}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \mathbf{q}} \frac{1}{N} \ln \sum_{j=1}^{\omega} (p_j^{(N)})^{\mathbf{q}}, \quad (3.25)$$

donde  $p_j$  es la probabilidad correspondiente a la secuencia simbólica  $j$ . De la misma manera que en el caso de las dimensiones de Rényi, algunos valores específicos de  $\mathbf{q}$  nos dan cantidades conocidas, por ejemplo si  $\mathbf{q} = 0$ ,  $K(0)$

es conocida como entropía topológica, si  $q = 1$ ,  $K(1)$  corresponde con la entropía de información, etc. También de manera análoga, la transformada de Legendre de la energía libre dinámica nos da el espectro de los índices dinámicos  $g(\gamma)$  que es la contraparte dinámica de la función  $f(\alpha)$  [52, 54, 55, 31].

### 3.1.4. Exponentes de Lyapunov generalizados

A continuación discutiremos lo que ocurre con la evolución en el tiempo de un elemento pequeño del espacio de fase. Típicamente tal elemento se expande en ciertas direcciones y se contrae en otras. Esto es, cambia su forma cuando el mapeo es iterado. Esto también es cierto para sistemas Hamiltonianos, a pesar de que ahí tenemos la restricción de que el volumen total de un elemento de volumen del espacio de fase se conserva, su forma puede cambiar. Las rapidez de expansión y contracción promedio se describen cuantitativamente mediante los exponentes de Lyapunov que, a su vez, se encuentran relacionados con la pérdida de información [9]. Así mismo estas cantidades presentan fluctuaciones por lo que se puede construir un espectro de los exponentes de Lyapunov locales.

#### Expansión en sistemas unidimensionales

Consideremos un mapeo unidimensional  $f(x)$  en un espacio de fase unidimensional  $X = [a, b]$

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n). \quad (3.26)$$

En lo siguiente, nos referiremos a funciones diferenciables o, al menos, secciones de la función diferenciables. Consideremos un pequeño intervalo  $I_0$  de longitud  $\Delta_0$ . Después de una iteración se transforma en un intervalo  $I_1$  de longitud

$$\Delta_1 = |f'(\mathbf{x}_0)|\Delta_0, \quad (3.27)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  es un valor apropiado en  $I_0$  y  $f'(\mathbf{x})$  denota la derivada de  $f(\mathbf{x})$ . Para  $|f'(\mathbf{x}_0)| > 1$ , la transformación es una expansión espacial genuina, para  $|f'(\mathbf{x}_0)| < 1$  es una contracción (o una expansión negativa). Podemos extender esta consideración a la expansión de  $I_0$  durante  $N$  pasos de iteración de la siguiente forma. Escribimos

$$\mathbf{x}_N = f(\mathbf{x}_{N-1}) = f^2(\mathbf{x}_{N-2}) = \dots = f^N(\mathbf{x}_0), \quad (3.28)$$



esto es, consideramos el mapeo iterado  $N$  veces  $f^N(\mathbf{x})$ . Después de  $N$  iteraciones el pequeño intervalo  $\mathbf{x}_0$  se transforma en un intervalo de longitud

$$\Delta_N = |f^{N'}(\mathbf{x}_0)|\Delta_0, \quad (3.29)$$

donde  $f^{N'}$  es la derivada de  $f^N$  y  $\mathbf{x}_0$  es otra vez un valor apropiado en  $I_0$ . Como consecuencia de la regla de la cadena tenemos

$$f^{N'}(\mathbf{x}_0) = \prod_{n=0}^{N-1} f'(\mathbf{x}_n). \quad (3.30)$$

La rapidéz de expansión local  $E_N(\mathbf{x}_0)$  se define por

$$\Delta_N = \exp[NE_N(\mathbf{x}_0)]\Delta_0. \quad (3.31)$$

Obviamente

$$E_N(\mathbf{x}_0) = (1/N) \ln |f^{N'}(\mathbf{x}_0)| = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} \ln |f'(\mathbf{x}_n)|. \quad (3.32)$$

Para  $N$  finita, la cantidad  $E_N$  es independiente del valor inicial  $\mathbf{x}_0$ . Sin embargo, suponiendo que el mapeo es ergódico, el promedio en el tiempo

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} E_N(\mathbf{x}_0) \quad (3.33)$$

existe y es independiente de  $\mathbf{x}_0$ . Recordando que para mapeos ergódicos los promedios de los observables  $Q$  en el tiempo pueden expresarse como promedios de configuraciones, entonces para el observable  $Q(\mathbf{x}) = \ln |f'(\mathbf{x})|$  obtenemos

$$\lambda = \int d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \ln |f'(\mathbf{x})|. \quad (3.34)$$

$\lambda$  es llamado el exponente de Lyapunov del mapeo unidimensional  $f$ . Éste describe la rapidéz de expansión promedio. Un exponente de Lyapunov positivo significa que los pequeños intervalos (pequeñas incertidumbres en la condición inicial) se expanden en promedio, un exponente de Lyapunov negativo significa que los intervalos se contraen en promedio. En otras palabras un exponente de Lyapunov positivo implica dependencia sensitiva a las condiciones iniciales [3, 9].

### Espectro de los exponentes de Lyapunov

Como acabamos de mencionar, el espectro de Lyapunov  $\lambda$  puede considerarse como el promedio en el tiempo del observable local  $\ln |f'(\mathbf{x}_n)|$ . Para  $N$  finita este promedio todavía depende del valor inicial  $\mathbf{x}_0$ . Si no llevamos a cabo el límite  $N \rightarrow \infty$  en la ecuación (3.33) podemos escribir

$$\lambda(\mathbf{x}_0, N) = E_N(\mathbf{x}_0) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} \ln |f'(\mathbf{x}_n)| = (1/N) \ln |f^{N'}(\mathbf{x}_0)|. \quad (3.35)$$

Esta cantidad es usualmente llamada exponente de Lyapunov local del punto  $\mathbf{x}_0$  y describe la rapidéz de expansión o contracción local. Los exponentes de Lyapunov locales son cantidades que fluctúan, entonces es posible aplicarles la termoestadística de manera similar a la que hemos presentado en las cantidades estáticas y dinámicas del sistema.

De acuerdo a la ecuación (3.29) un pequeño intervalo  $I_0$  que contiene el valor inicial  $\mathbf{x}_0$  se expande después de  $N$  iteraciones por el factor

$$L_N(\mathbf{x}_0) = |f^{N'}(\mathbf{x}_0)| = \exp[NE_N(\mathbf{x}_0)]. \quad (3.36)$$

Para  $N$  fijo y finito, consideremos un conjunto de valores iniciales  $\mathbf{x}_0$  y determinemos los momentos de  $L_N$  con respecto a la medida natural invariante  $\mu$

$$\langle L_N^{\mathbf{q}} \rangle = \int_X d\mu(\mathbf{x}_0) |f^{N'}(\mathbf{x}_0)|^{\mathbf{q}} = \int_X d\mu(\mathbf{x}_0) \exp[N\mathbf{q}\lambda] \quad (3.37)$$

donde  $\mathbf{q}$  es un parámetro real arbitrario que se escoge de tal forma que la integral exista. En la ecuación (3.37) cada posible valor inicial es pesado por la densidad natural invariante y se determina el conjunto promedio de la  $\mathbf{q}$ ésima potencia del factor de expansión  $L_N$ . Escribamos ahora la ecuación (3.37) en una forma que nos recuerde la función de partición de un sistema termodinámico. Para distinguir esta función de partición de la función de partición dinámica la denotaremos por  $Z_N^{Lya}(\mathbf{q})$  donde el índice *Lya* proviene de exponente de Lyapunov. Usando la ecuación (3.32) obtenemos

$$Z_N^{Lya}(\mathbf{q}) = \langle L_N^{\mathbf{q}} \rangle = \int d\mu(\mathbf{x}_0) \exp[\mathbf{q}NE_N(\mathbf{x}_0)] = \int d\mu(\mathbf{x}_0) \exp[\mathbf{q} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |f'(\mathbf{x}_n)|]. \quad (3.38)$$

La única diferencia ahora con respecto a las otras funciones de partición introducidas, es que tenemos una integral sobre todos los posibles estados  $\mathbf{x}_0$  en lugar de una suma. Mas aún, cada estado  $\mathbf{x}_0$  no sólo se encuentra pesado

por el 'factor de Boltzmann' si no también por la medida natural invariante  $d\mu(\mathbf{x}_0) = \rho(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}_0$ . De aquí en adelante llamaremos número de partícula a  $N$ . La energía libre por partícula  $\Lambda(\mathbf{q}, N)$  (excepto por un trivial signo menos) está dada por

$$\Lambda(\mathbf{q}, N) = (1/\mathbf{q}N) \ln Z_N^{Lyq}(\mathbf{q}). \quad (3.39)$$

En particular estamos interesados en la energía libre por partícula en el límite  $N \rightarrow \infty$

$$\Lambda(\mathbf{q}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda(\mathbf{q}, N). \quad (3.40)$$

Esta cantidad  $\lambda(\mathbf{q})$  es llamada exponente de Lyapunov generalizado de orden  $\mathbf{q}$  [56], y es una generalización del exponente de Lyapunov ordinario en el mismo sentido en que las dimensiones de Rényi  $D(\mathbf{q})$  son generalizaciones de la dimensión de Hausdorff  $D(0)$ . Cada rapidéz de expansión local posible es 'escaneada' por la 'temperatura inversa'  $\mathbf{q}$ , y en adición, pesada por la medida invariante. Una dependencia no trivial de  $\lambda(\mathbf{q})$  en el escaneo del parámetro  $\mathbf{q}$  indica que existe un espectro no trivial  $\phi(E)$  de las rapideces de expansión local  $E$ , de la misma manera que una dependencia no trivial de  $D(\mathbf{q})$  con  $\mathbf{q}$  indica un espectro no trivial  $f(\alpha)$  de los índices de acumulación  $\alpha$ . De la misma forma que en las subsecciones anteriores, mediante una transformada de Legendre pasamos de los exponentes de Lyapunov de orden  $\mathbf{q}$ ,  $\Lambda(\mathbf{q})$  a el espectro  $\phi(E)$ .

Cuando existe una partición generadora, la longitud de los  $N$  cilindros  $l_j^{(N)}$  es inversamente proporcional a los factores de expansión  $L_N(\mathbf{x}_0^{(j)})$  donde  $\mathbf{x}_0$  es un valor inicial apropiado dentro del  $j$ -ésimo  $N$  cilindro. Cada cilindro está pesado por la probabilidad  $p_j^{(N)}$  correspondiente con la medida natural invariante. En éste caso podemos escribir

$$\Lambda(\mathbf{q}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbf{q}N} \ln \sum_j p_j^{(N)} (l_j^{(N)})^{-\mathbf{q}}. \quad (3.41)$$

Para mapeos ergódicos, para  $N$  arbitrario, el límite  $\mathbf{q} \rightarrow 0$  de  $\Lambda(\mathbf{q}, N)$  es idéntico con el exponente de Lyapunov ordinario

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \Lambda(\mathbf{q}, N) = \int d\mu(x_0) \ln |f'(x_0)| = \lambda. \quad (3.42)$$

Mencionaremos una vez más que un conjunto promedio tal como  $\langle L_N^{\mathbf{q}} \rangle$  puede expresarse como un promedio en el tiempo para mapeos ergódicos. Entonces el exponente de Lyapunov generalizado contiene información acerca de las fluctuaciones temporales de las rapideces de expansión [57, 58, 59].

### 3.1.5. Presión topológica

Hemos introducido hasta ahora tres diferentes tipos de 'energía libre': las dimensiones de Rényi que describen las propiedades escalatorias de la medida natural invariante respecto al espacio, las entropías dinámicas de Rényi describiendo las propiedades de escalamiento de la secuencia simbólica con respecto al tiempo, y los exponentes de Lyapunov generalizados de orden  $q$  conteniendo información acerca de las rapideces de expansión y sus fluctuaciones temporales. Todas estas energías libres tienen en común el hecho de que la medida natural invariante entra en la función de partición. En muchos casos sin embargo, no conocemos analíticamente la medida natural invariante pero aún así deseamos estudiar el sistema dinámico por medio de métodos termoestadísticos. Entonces es usual emplear un tipo de función de partición que contiene información acerca de las rapideces de expansión y sus fluctuaciones pero sin pesarlas con la distribución invariante. En lugar de esto se toman en cuenta propiedades geométricas del mapeo tales como tamaño de los cilindros u órbitas periódicas inestables, pesándolas con la misma probabilidad a priori. La energía libre correspondiente se conoce como presión topológica [3].

### 3.1.6. Función de partición generalizada

Para sistemas unidimensionales expansivos (o hiperbólicos) un tipo de energía libre es suficiente para derivar las otras (dimensiones de Rényi, entropías de Rényi y exponentes de Lyapunov generalizados) sin embargo, para sistemas no hiperbólicos todas estas energías son cantidades independientes. No existe una relación simple entre ellas. La función de partición ahora depende de muchos parámetros intensivos diferentes. Esto corresponde con la introducción del conjunto de presiones o el conjunto gran canónico en termodinámica convencional. Esta generalización es ventajosa para sistemas no hiperbólicos debido a que nos permite unificar los conceptos de dimensiones de Rényi, entropías de Rényi, presión topológica y exponentes de Lyapunov generalizados en una teoría [53, 60].

#### El conjunto de presiones

Consideraremos ahora una función de partición que contiene dos cantidades que fluctúan. Principalmente estas cantidades fluctuantes serán los

tamaños de los intervalos  $l_j^{(N)}$  y las probabilidades  $p_j^{(N)}$  atribuidas a los  $N$  cilindros. Por supuesto esto sólo lleva a más información si las probabilidades  $p_j^{(N)}$  no dependen de las longitudes de escala  $l_j^{(N)}$ . Para el caso de mapeos hiperbólicos

$$p_j^{(N)} \sim (l_j^{(N)})^{\mathbf{q}} \quad (3.43)$$

esto es, la probabilidad de los cilindros se comporta como una potencia  $\mathbf{q}$  de la longitud de escala, donde  $\mathbf{q}$  es independiente del índice  $j$ . Para este tipo de sistemas la termodinámica extendida que describiremos a continuación no es necesaria, ya que toda la información acerca de  $p_j^{(N)}$  está contenida en  $l_j^{(N)}$ . Sin embargo en general la medida natural invariante de mapeos no hiperbólicos no satisface la condición anterior. El caso de los mapeos unidimensionales tipo logístico son un caso importante de mapeos no hiperbólicos, por lo que su estudio requiere de la termodinámica extendida que describiremos a continuación. Supongamos que existe una función generadora para una medida de probabilidad dada en el espacio fase, definimos una función de partición que depende de dos parámetros intensivos  $\mathbf{q}$  y  $\tau$  como sigue

$$Z_N(\mathbf{q}, \tau) = \sum_j (p_j^{(N)})^{\mathbf{q}} (l_j^{(N)})^{\tau}. \quad (3.44)$$

Como antes,  $l_j^{(N)}$  denota la longitud de los  $N$  cilindros y  $p_j^{(N)}$  es la probabilidad atribuida a éste. Para simplificar la notación en lo siguiente omitiremos el índice  $N$ . Esta función de partición fué introducida anteriormente cuando describimos la dimensión de Rényi obtenida a partir de intervalos irregulares, ahí escogíamos  $\tau(\mathbf{q})$  de tal forma que  $Z_N(\mathbf{q}, \tau)$  permaneciera finita cuando  $N \rightarrow \infty$ . Ahora, sin embargo, consideraremos  $\mathbf{q}$  como un parámetro independiente. Introduciremos las distribuciones adjuntas  $w_j$  de la forma

$$w_j = (p_j^{\mathbf{q}} l_j^{\tau}) / Z_N(\mathbf{q}, \tau). \quad (3.45)$$

Donde  $\mathbf{q}$  es un parámetro real arbitrario. Como éste puede tomar valores negativos, restringimos la suma a eventos  $j$  con probabilidad diferente de cero. Llamaremos  $P$  a la distribución adjunta de  $p$  de índice  $\mathbf{q}$ . Un cambio en el índice  $\mathbf{q}$  cambiará los pesos relativos de cómo los eventos  $i$  entran en la distribución adjunta. El cambio del índice  $\mathbf{q}$  es una herramienta para “escanear” la estructura de la distribución  $p$ . Mientras menor sea el índice  $\mathbf{q}$  mayor será el peso de las probabilidades pequeñas. Por otro lado mientras mayor sea el índice  $\mathbf{q}$  las probabilidades mas grandes tendrán un mayor peso. En resumen, para  $\mathbf{q} \rightarrow \infty$  las  $p_i$  mas grandes dominan la suma, mientras que

para  $\mathbf{q} \rightarrow -\infty$  las  $p_i$  mas chicas originan la contribución dominante. La cantidad  $1/\mathbf{q}$  juega el papel de la temperatura  $T$  en la analogía termodinámica. El escaneo de  $p$  por el cambio de  $\mathbf{q}$  corresponde con un cambio de temperatura. Para las complicadas distribuciones que aparecen en dinámica no lineal podemos emplear valores de  $\mathbf{q}$  negativos, de esta manera el concepto de temperaturas negativas sirve como herramienta para obtener mayor información.

Consideraremos estas probabilidades  $w_j$  como las probabilidades del conjunto canónico generalizado, por ejemplo el conjunto de presión. Para mostrar esto, introduciremos la energía fluctuante  $E_j$  y el volumen fluctuante  $V_j$  escribiendo

$$p_j^{\mathbf{q}} = \exp(-\mathbf{q}E_j) \quad (3.46)$$

$$l_j^{\tau} = \exp(-\tau V_j). \quad (3.47)$$

Más aún, uno puede definir la presión  $\pi$  (no confundir con la presión topológica  $T(\mathbf{q})$ ) por el cociente

$$\pi = \tau/\mathbf{q}. \quad (3.48)$$

Con esta notación podemos definir la distribución adjunta como

$$w_j = \exp[\mathbf{q}(G - E_j - \pi V_j)], \quad (3.49)$$

donde la energía libre de Gibbs  $G$  se define como

$$G(\mathbf{q}, \pi) = -\mathbf{q}^{-1} \ln Z_N(\mathbf{q}, \tau). \quad (3.50)$$

Para  $N$  grande esperamos que la energía libre crezca en proporción a  $N$ . Otra vez, parece plausible llamar a  $N$  el número de partícula. Podemos entonces definir en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$  la energía libre de Gibbs por partícula (o bien por paso de iteración) como

$$g(\mathbf{q}, \pi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} G(\mathbf{q}, \pi) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbf{q}N} \ln Z_N(\mathbf{q}, \pi). \quad (3.51)$$

Esta función nos provee la caracterización general de la dinámica del sistema caótico. Las entropías de Rényi  $K(\mathbf{q})$  y la presión topológica  $T(\tau)$  son dadas como valores especiales de un potencial termodinámico mas general  $g(\mathbf{q}, \pi)$

$$K(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{q} - 1} g(\mathbf{q}, 0), \quad (3.52)$$

$$T(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N(0, \tau) \quad (3.53)$$

tomando siempre como distribución la medida natural invariante del mapeo. Las dimensiones de Rényi se definen implícitamente por la expresión

$$g\left(\mathbf{q}, \frac{1-\mathbf{q}}{\mathbf{q}}D(q)\right) = 0. \quad (3.54)$$

Finalmente, los exponentes de Lyapunov generalizados estan dados por

$$\Lambda(\tau) = -\frac{1}{\tau}g(1, -\tau) = -\frac{1}{\pi}g(1, -\pi). \quad (3.55)$$

Resumiendo, la función  $g(\mathbf{q}, \pi)$  unifica los conceptos de dimensiones de Rényi, entropías de Rényi, exponentes de Lyapunov generalizados y presión topológica para sistemas no hiperbólicos. La función  $g(\mathbf{q}, \pi)$  lleva información adicional acerca del sistema dinámico y a través de ella se pueden estudiar las transiciones de fase del sistema. Kovacs y Tél [13] han introducido un poderoso método para calcular las energías libres de Gibbs numéricamente.  $g(\mathbf{q}, \pi)$  se obtiene de los eigenvalores mas grandes de la extensión bivariada del método de operación de transferencia.

### Ecuación de estado de un sistema caótico

Para el conjunto de presión tanto las energías

$$E_j^{(N)} = \ln p_j^{(N)} \quad (3.56)$$

como los volúmenes

$$V_j^{(N)} = -\ln l_j^{(N)} \quad (3.57)$$

de los microestados fluctúan, mientras que el número de partículas es un valor fijo. Para  $N$  grande, la función de partición escala como

$$Z_N(\mathbf{q}, \tau) = \sum_j (p_j^{(N)})^{\mathbf{q}} (l_j^{(N)})^{\tau} \sim \exp[-\mathbf{q}Ng(\mathbf{q}, \pi)], \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.58)$$

Los volúmenes  $V_j^{(N)}$  fluctúan debido a que las longitudes de los  $N$  cilindros de la partición generadora usualmente no son constantes. Por otro lado, en muchos caso estamos interesados en la partición uniforme del espacio de fase en pequeñas cajas de igual tamaño  $\epsilon$ , en lugar de celdas de tamaño variable  $l_j^{(N)}$ . Para una partición uniforme, el volumen  $V = -\ln \epsilon$  tiene un valor fijo y sólo las energías asociadas con las probabilidades fluctúan. Denotemos la probabilidad asociada con la  $j$ -ésima caja de una partición uniforme por  $p_j$ .



Formalmente podemos otra vez evaluar la función de partición del conjunto de presiones de una partición uniforme reemplazando  $p_j^{(N)}$  por  $p_j$  y  $l_j^{(N)}$  por  $\epsilon$ . Para la función de partición correspondiente escribimos  $Z_V^{uni}(\mathbf{q}, \tau)$  dado que está caracterizada por una partición uniforme a un volumen fijo  $V$ , en lugar de una partición no uniforme a un número de partícula fijo  $N$ . Obtenemos

$$\begin{aligned} Z_V^{uni}(\mathbf{q}, \tau) &= \sum_j (p_j)^{\mathbf{q}} \epsilon^\tau \sim \epsilon^{(\mathbf{q}-1)D(\mathbf{q})+\mathbf{q}} \\ &= \exp\{[(1-\mathbf{q})D(\mathbf{q}) - \mathbf{q}]V\}, \quad V \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Donde  $D(\mathbf{q})$  son las dimensiones de Rényi definidas a través de cajas de igual tamaño. El límite termodinámico significa  $N \rightarrow \infty$  para la función de partición  $Z_N(\mathbf{q}, \tau)$  y  $V \rightarrow \infty$  para la función de partición  $Z_V^{uni}(\mathbf{q}, \tau)$ . Comparando las dos funciones de partición anteriores una cantidad usual es la razón

$$\sigma = N/V. \quad (3.60)$$

Como este cociente es el número de partículas entre el volumen, le llamamos *densidad de partícula*. La densidad de partícula describe el tamaño relativo de los grados de libertad temporales  $N$  contra los grados de libertad espaciales  $V$ . Es claro que deseamos tener una descripción única del sistema caótico que no dependa de la partición escogida. Entonces igualamos los exponentes en las ecuaciones (3.58) y (3.1.6) y usando  $\pi = \tau/\mathbf{q}$  obtenemos en el límite termodinámico

$$\sigma(\mathbf{q}, \pi) = \frac{N}{V} = \frac{(\mathbf{q}-1)\mathbf{q}^{-1}D(\mathbf{q}) + \pi}{g(\mathbf{q}, \pi)}. \quad (3.61)$$

Esta ecuación describe la forma en la que el límite acoplado  $N \rightarrow \infty$  y  $V \rightarrow \infty$  tiene que llevarse a cabo con objeto de tener equivalencia entre las energías libres generalizadas de las funciones de partición  $Z_N$  y  $Z_V^{uni}$ . Podemos interpretar la ecuación (3.61) como una ecuación de estado que describe la densidad de partícula  $\sigma(\mathbf{q}, \pi)$  como una función de la temperatura inversa  $\mathbf{q}$  y la presión  $\pi$  [3]. Escribamos la ecuación anterior como

$$g(\mathbf{q}, \pi) = [(\mathbf{q}-1)\mathbf{q}^{-1}D(\mathbf{q}) + \pi]\sigma^{-1}. \quad (3.62)$$

Previendo  $\sigma \neq \mathbf{q}0$ , notamos que la función  $g(\mathbf{q}, \pi)$  se hace cero si escogemos el valor especial  $\pi = -(\mathbf{q}-1)\mathbf{q}^{-1}D(\mathbf{q})$ . Esta última ecuación tiene una interpretación termodinámica. Recordemos que la expresión  $(\mathbf{q}-1)\mathbf{q}^{-1}D(\mathbf{q})$  es considerada como la energía libre de Helmholtz  $F$  por volumen del sistema.

Más aún  $g(\mathbf{q}, \pi)$  es la energía libre de Gibbs  $G$  por número de partícula  $N$ . Entonces podemos escribir la ecuación (3.62) como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{G}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{F}{V} + \pi \right) \frac{V}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (F + \pi V). \quad (3.63)$$

Reconocemos la relación

$$G = F + \pi V \quad (3.64)$$

de la termoestadística convencional. La situación en la dinámica no lineal es sin embargo diferente de la termodinámica convencional. La ecuación (3.64) es siempre válida, esto es, para cualquier densidad de partícula  $\sigma(\mathbf{q}, \pi)$ . Esto sólo describe el hecho de que el límite termodinámico  $G$  y  $F$  son transformadas de Legendre una de otra. En dinámica no lineal la ecuación (3.64) es válida sólo para cierta densidad de partícula específica  $\sigma(\mathbf{q}, \pi) = N/V$ . En otras palabras la validéz de la ecuación (3.64) define la densidad de partícula. Esto se debe a que en este caso  $F$  contiene menos información que  $G$  por lo que su relación no puede ser simplemente a través de una transformada de Legendre.

### El conjunto gran canónico

En lugar considerar un volumen que fluctúa  $V_j^{(N)} = -\ln l_j^{(N)}$  del cilindro  $J_j^{(N)}$  podemos presentar una formulación donde las celdas son cajas de tamaño constante  $\epsilon$  pero el número de iteración fluctúa. Entonces podemos incorporar información dinámica en la función de partición considerando el número de partículas fluctuante.

## 3.2. Transiciones de fase en sistemas no lineales

Las transiciones de fase son un interesante fenómeno que se presenta típicamente en sistemas dinámicos no hiperbólicos [11, 12, 13, 61]. Estas transiciones de fase se manifiestan cuando encontramos singularidades en el comportamiento de alguna de las distintas cantidades características del sistema para ciertos valores críticos del parámetro de control. En las secciones anteriores se presentaron diferentes cantidades que nos ayudan a describir los sistemas dinámicos, y las hemos identificado con algún tipo de energía libre del sistema de la siguiente manera

1. energía libre estática

$$\frac{(\mathbf{q} - 1)D_{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}}, \quad (3.65)$$

2. energía libre dinámica

$$\frac{(\mathbf{q} - 1)K_{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}}, \quad (3.66)$$

3. energía libre de expansión

$$-\frac{T(\mathbf{q})}{\mathbf{q}} \quad \text{y} \quad -\Lambda(\mathbf{q}). \quad (3.67)$$

Dependiendo de en qué tipo de energía libre se presenta el comportamiento no analítico clasificaremos las transiciones de fase como transiciones de fase estáticas, dinámicas o de expansión. Además de éstas, encontramos las transiciones de fase con respecto al volumen. Todas ellas serán incluidas en lo que se conoce como transiciones de fase internas. Existen además transiciones de fase respecto a algún parámetro de control extremo del sistema que se conocen como transiciones de fase externas. Como tema especial, hablaremos además de las transiciones de fase  $\mathbf{q}$  estudiadas por Mori en los años 80's [14]. Estas transiciones de fase serán centrales en este trabajo de tesis por lo que se incluye una sección especial donde se describen ampliamente sus características principales enfocadas a mapeos de orden  $z > 1$  en su fase caótica.

### 3.2.1. Transiciones de fase internas

#### Transiciones de fase estáticas

Supongamos que tenemos un mapeo cuya densidad natural invariante presenta discontinuidades. Estas discontinuidades provocan que las dimensiones de Rényi  $D_{\mathbf{q}}$  no sean diferenciables con respecto a  $\mathbf{q}$  en el punto crítico  $\mathbf{q}_c$ . Como  $\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{q} - 1)D_{\mathbf{q}}$  es, según las definiciones anteriores, considerada como la densidad de energía libre, este comportamiento se considera como una transición de fase de primer orden que ocurre en la temperatura crítica  $T_c = \mathbf{q}_c^{-1}$  en el límite  $V \rightarrow \infty$ . El significado "físico" de esta transición puede entenderse (de acuerdo a Beck) de la siguiente manera: "al variar  $\mathbf{q}$  estamos escaneando la influencia de diferentes subregiones del espacio de fase. En el punto de la

transición de fase, la contribución dominante de la energía libre repentinamente proviene de una subregión diferente del espacio de fase lo cual provoca el comportamiento observado en la transición”.

### Transiciones de fase dinámicas

Fundamentalmente, existen dos mecanismos que pueden originar una transición de fase dinámica. El primero de ellos se presenta cuando, al incrementar la longitud de las secuencias simbólicas, las probabilidades de algunas de ellas decrecen mas lento que una exponencial. Por el contrario, el segundo caso corresponde con un decaimiento mas rápido que una exponencial de la probabilidad de ciertas secuencias simbólicas.

En general, para un sistema hiperbólico, cuando incrementamos el número de iteraciones  $N$ , la probabilidad de observar cierta secuencia simbólica  $i_0, \dots, i_{N-1}$  decrece exponencialmente. En el caso de un sistema no hiperbólico puede haber probabilidades de secuencias simbólicas que no decrecen exponencialmente, si no que lo hacen mas lentamente cuando  $N$  crece. Esto puede producirse por ejemplo, cuando un sistema permanece por mucho tiempo en una subregión del espacio de fase, volviéndose casi periódico por tiempos muy largos. Para  $\mathbf{q} \rightarrow \infty$  la probabilidad mas grande (la que decrece mas lentamente) domina la función de partición dinámica y obtenemos

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{1}{1 - \mathbf{q}} \ln \sum_{i_0, \dots, i_{N-1}} p^{\mathbf{q}}(i_0, \dots, i_{N-1}) \\ &\sim \lim_{\mathbf{q} \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{1}{1 - \mathbf{q}} \ln p^{\mathbf{q}}(i_0^*, \dots, i_{N-1}^*) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{\mathbf{q}}{1 - \mathbf{q}} (\ln C - \alpha \ln N) = 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde  $p(i_0^*, \dots, i_{N-1}^*) = CN^{-\alpha}$  denota la probabilidad mas grande que se supone decrece de una manera polinomial. Entonces  $K(\infty) = 0$ . Además dado que, en general,  $K(\mathbf{q}) \geq 0$  y  $K(\mathbf{q}) \leq (\mathbf{q} - 1)^{-1} \mathbf{q} K(\infty)$  para  $\mathbf{q} > 1$  debemos tener

$$K(\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} > 1, \quad (3.69)$$

esto es, no sólo  $K(\infty)$  si no todas las  $K(\mathbf{q})$  con  $\mathbf{q} > 1$  se hacen cero. Por otro lado, si el sistema exhibe un comportamiento caótico entonces por definición tiene un entropía  $K$  positiva

$$K(1) = h > 0. \quad (3.70)$$

Las ecuaciones (3.69) y (3.70) indican que en el valor del parámetro crítico  $\mathbf{q}_c = 1$  la función  $K(\mathbf{q})$  es discontinua. Esta es una consecuencia directa del hecho de que existe al menos una secuencia simbólica cuya probabilidad decrece mas lentamente que una exponencial [62, 59].

La segunda razón posible, para la ocurrencia de una transición de fase dinámica, es que se encuentre provocada por una dinámica extremadamente inestable, es decir, por la presencia de almenos un punto en el espacio de fase con un exponente de Lyapunov local infinito. En este caso la probabilidad de la secuencia simbólica correspondiente  $p(i_0^*, \dots, i_{N-1}^*)$  decrece mas rápido que una exponencial con el incremento de la longitud de la secuencia simbólica  $N$ . Para  $\mathbf{q} \rightarrow -\infty$  esta probabilidad mas pequeña domina la función de partición dinámica

$$K(\mathbf{q}) \sim \lim_{\mathbf{q} \rightarrow -\infty, N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{1}{1 - \mathbf{q}} \ln p^{\mathbf{q}}(i_0^*, \dots, i_{N-1}^*). \quad (3.71)$$

Entonces  $K(-\infty) = \infty$ . Sin embargo en general la desigualdad

$$K(\mathbf{q}) \geq \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{q} - 1} K(-\infty), \quad \mathbf{q} < 0 \quad (3.72)$$

se cumple. Entonces realmente tenemos

$$K(\mathbf{q}) = \infty \quad \text{para toda} \quad \mathbf{q} < 0. \quad (3.73)$$

### Transiciones de fase de expansión

Existen dos tipos de transiciones de fase de expansión dependiendo si ocurre para la presión topológica o para el exponente de Lyapunov generalizado. La primera de ellas se presenta cuando existe una discontinuidad en la presión topológica  $T(\mathbf{q})$  y se conoce como transición de fase de expansión topológica. Para explicar la existencia de tal transición de fase pueden emplearse los mismos argumentos que en las secciones anteriores. La función de partición consiste en una suma de contribuciones de los  $N$ -cilindros elevados a la potencia  $\mathbf{q}$ . En la temperatura crítica, la contribución dominante de la función de partición pasa de un subconjunto de cilindros a otro. Mas aún, en el caso en el que alguna longitud de los cilindros decrezca más lentamente o más rápidamente que una exponencial cuando incrementa  $N$ , esperaremos un fenómeno similar al que ocurre con las singularidades de la entropía de Rényi. La razón para que se presente la transición de fase es el hecho de

que localmente, en la vecindad de un punto fijo inestable, un pequeño intervalo se expande con una rapidéz local mayor que todos los otros pequeños subintervalos del espacio de fase.

En el segundo caso, si se presenta un comportamiento no analítico en los exponentes de Lyapunov generalizados  $\Lambda(\mathbf{q})$  definidos por

$$Z_N^{Lyap}(\mathbf{q}) = \sum_j p_j^{(N)} (l_j^{(N)})^{-\mathbf{q}} \sim \exp[\mathbf{q}N\Lambda(\mathbf{q})], \quad N \rightarrow \infty \quad (3.74)$$

tenemos una transición de fase de expansión métrica. El comportamiento no analítico de los exponentes de Lyapunov generalizados será semejante al de la presión topológica [3].

### Transiciones de fase con respecto al volumen

Incluiremos dentro del punto de vista de transiciones de fase en dinámica no lineal el cambio súbito de comportamiento de la energía libre si el tamaño de caja  $\epsilon$  o bien el valor del volumen  $V = -\ln \epsilon$  varía. Un decremento de  $\epsilon$  (incremento de  $V$ ) significa un incremento en la capacidad de observación del sistema. Entonces  $V$  puede ser considerado como una medida de la habilidad de resolución. Si por el incremento de  $V$  una cantidad tal como la energía libre cambia súbitamente su comportamiento, esto nos da información acerca de una nueva estructura fina del sistema, por lo que es interesante estudiar tales casos. Generalmente es sabido que una transición de fase puede ocurrir sólo en el límite termodinámico  $V \rightarrow \infty$  y  $N \rightarrow \infty$ . Consideremos el mapeo logístico de orden  $z$  dado por  $f(x) = 1 - r|x|^z$  donde  $z > 1$  y  $r \in [0, 2]$ . Si iteramos el mapeo para un parámetro  $r$  menor que el valor crítico  $r_\infty$  de acumulación de duplicación de periodo, el mapeo posee una órbita periódica estable. Si ahora incrementamos  $V$  dejando  $r - r_\infty$  constante, existe un valor  $V = V_c$  donde la resolución es lo suficientemente grande como para reconocer que existe una órbita periódica estable en lugar del atractor de Feigenbaum. Obtenemos una gráfica como la esquematizada en la figura 3.1.

Por encima de el valor crítico  $V_c$  la energía libre ya no depende de  $V$ . La razón es que para  $V > V_c$  todos los elementos de la órbita tienen una distancia mayor que la del tamaño de la caja  $\epsilon$ , entonces la suma de la energía libre

$$F(\mathbf{q}, V) = -\frac{1}{\mathbf{q}} \ln \sum_i p_i^{\mathbf{q}} \quad (3.75)$$

no cambia si el tamaño de la caja  $\epsilon$  decrece.

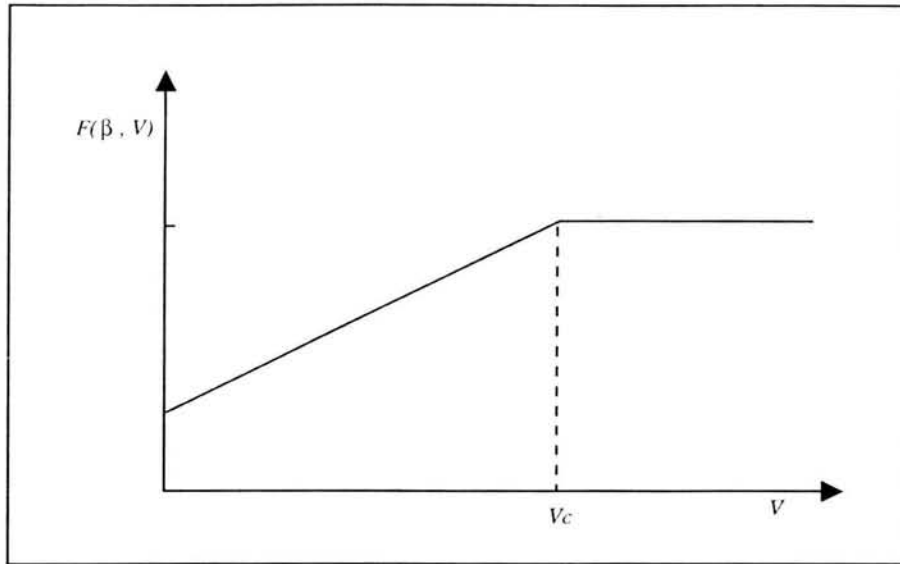


Figura 3.1: Transición de fase respecto al volumen.

### 3.2.2. Transiciones de fase externas

Un mapeo usualmente depende de un parámetro de control o un conjunto de tales parámetros. Un ejemplo es el parámetro  $r$  del mapeo logístico. Si incorporamos esta dependencia en el formalismo termodinámico estos parámetros de control entran en la descripción como variables térmicas. Las diferentes energías libres entonces se hacen funciones de tales parámetros. No es de sorprendernos que haya muchos sistemas para los cuales la energía libre exhibe un comportamiento no analítico no sólo respecto a  $q$  o  $V$  si no también respecto al parámetro de control. Llamamos a estas transiciones de fase, *transiciones de fase externas* por que están relacionadas con un parámetro externo del sistema. Por otro lado, llamamos a todas las transiciones de fase descritas anteriormente *transiciones de fase internas* por que provienen del tratamiento termodinámico intrínseco del sistema dinámico dejando el parámetro de control fijo.

En esta sección trataremos las transiciones de fase externas de segundo orden. Justamente como en mecánica estadística convencional, estas transiciones de fase están caracterizadas por la ocurrencia de exponentes críticos [3, 6]. Un ejemplo simple es el mapeo logístico cerca del punto de acumulación  $r_\infty$  de duplicación de periodo, es conocido que el exponente de Lyapunov



$\lambda = \lambda(r)$  escala cerca de  $r_\infty$  como

$$\lambda \sim |r - r_\infty|^\gamma, \quad \gamma = \ln 2 / \ln \delta \quad (3.76)$$

donde  $\delta$  es la constante de Feigenbaum. El exponente de Lyapunov  $\Lambda(\mathbf{q} = 0) = \lambda$  puede ser considerado como la energía libre de expansión métrica de un sistema con la temperatura inversa  $\mathbf{q} = 0$ . Entonces el comportamiento escalatorio anterior puede considerarse como una transición de fase externa de expansión métrica con respecto a  $r$  ocurriendo en  $\mathbf{q} = 0$ . Esta es una transición de fase de segundo orden debido a que existe un exponente crítico  $\gamma$ . Este exponente es esencialmente dado por la constante de Feigenbaum  $\delta$ . El exponente de Lyapunov es justamente un observable posible que puede usarse para describir el comportamiento del sistema cerca de  $r_\infty$ . Otros parámetros de orden usuales son las longitudes  $L(r)$  o funciones de correlación. Todas estas cantidades escalan cerca de  $r_\infty$  de una manera no trivial y los exponentes críticos pueden relacionarse con las constantes de Feigenbaum [1].

### 3.2.3. Transiciones de fase de Mori

En las secciones anteriores se han presentado algunas de las cantidades que se emplean para caracterizar las estructuras de los sistemas no lineales como, por ejemplo, las dimensiones generalizadas  $D(\mathbf{q})$  ( $-\infty < \mathbf{q} < \infty$ ) de estructuras multifractales y el espectro de singularidades  $f(\alpha)$  de la medida natural invariante. Las estructuras de los atractores caóticos se forman mediante procesos de expansión y contracción de órbitas caóticas, que pueden describirse en términos de rapidezces de expansión local de órbitas cercanas. Estas dos funciones  $D(\mathbf{q})$  y  $f(\alpha)$  se encuentran íntimamente relacionadas con el promedio pesado con un índice  $\mathbf{q}$  ( $\mathbf{q}$ -pesado)  $\Lambda(\mathbf{q})$  de las rapidezces de expansión local  $\Lambda$  a lo largo del espectro de rapidezces de expansión  $h(\Lambda)$ . De hecho  $\Lambda(\mathbf{q})$  y  $h(\Lambda)$  tienen características que están ausentes en  $D(\mathbf{q})$  y  $f(\alpha)$  [31, 57]. Debido a que los atractores caóticos están gobernados por leyes deterministas, sus estructuras, aunque parezcan muy complicadas, tienen orden. La dimensión fractal y el exponente de Lyapunov describen sólo sus estructuras de escalamiento global. Los atractores caóticos sin embargo tienen varias estructuras locales. Las bifurcaciones dentro de la zona caótica cambian las estructuras de los atractores caóticos drásticamente, creando estructuras singulares de las órbitas locales en los puntos de bifurcación. Estas estructuras locales producen fluctuaciones grandes de las rapidezces de expansión local  $\Lambda$

a lo largo del exponente de Lyapunov positivo. El promedio  $\mathbf{q}$ -pesado  $\Lambda(\mathbf{q})$  y el espectro de rapidez de expansión  $h(\Lambda)$  se usan para describir estas fluctuaciones. Como veremos, cuando  $\mathbf{q}$  varía el promedio  $\mathbf{q}$ -pesado  $\Lambda(\mathbf{q})$  presenta una transición discontinua en valores discretos de  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta, \dots$  y la  $\mathbf{q}$ -variancia  $\sigma(\mathbf{q}) \equiv \Lambda'(\mathbf{q})$  diverge en estos puntos de transición. Estas transiciones se originan por las fluctuaciones grandes que producen las partes lineales en  $h(\Lambda)$  y se conocen como transiciones de fase  $\mathbf{q}$  o de Mori. Las diferentes fases y las transiciones de fase  $\mathbf{q}$  representan diferentes estructuras locales de los atractores caóticos.

Introduciremos ahora las funciones de estructura dinámica  $\Phi_n(\mathbf{q}), \Lambda_n(\mathbf{q})$  y  $\sigma_n(\mathbf{q})$  para las rapidez de expansión local de órbitas caóticas de longitud  $n$  usando el formalismo termodinámico de sistemas dinámicos caóticos de las secciones previas y discutiremos las características generales de las transiciones  $\mathbf{q}$  o de Mori [58, 14].

### Transiciones de fase $\mathbf{q}$ en la región caótica de los mapeos tipo logístico

A continuación explicaremos las transiciones de fase  $\mathbf{q}$  o de Mori, empleando como ejemplo el mapeo logístico

$$x_{t+1} = f(x_t) = 1 - rx_t^2. \quad (3.77)$$

Este mapeo presenta atractores caóticos para algunos valores de  $\mu$ . Como hemos mencionado, éste mapeo es no hiperbólico. Para una órbita caótica  $\{X_m\}$ , ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) en el atractor caótico, sea  $\lambda_1(X_m)$  la rapidez de expansión local de órbitas cercanas en  $X_m$ . Definamos la rapidez de expansión local

$$\Lambda_n(X_0) \equiv (1/n) \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_1(X_m) \quad (3.78)$$

para  $n$  grande. Para mapeos unidimensionales tenemos

$$\Lambda_n(x_0) = (1/n) \ln |df^{(n)}(x_0)/dx_0| \quad (3.79)$$

donde  $f^{(n)}$  es la  $n$ -ésima iterada de  $f(x_0)$ . La rapidez  $\Lambda_n(X_0)$  toma diferentes valores entre un valor máximo  $\Lambda_{max}$  y un valor mínimo  $\Lambda_{min}$  dependiendo del punto inicial  $X_0$ . Los valores de  $\Lambda_{max}$  y  $\Lambda_{min}$  dependen del mapeo. En particular  $\Lambda_{min}$  se hace negativo para mapeos no hiperbólicos. La densidad de probabilidad para  $\Lambda_n(X_0)$  de tomar un valor alrededor de  $\Lambda$  esta dada por

$$P(\Lambda, n) \equiv \langle \delta(\Lambda_n(X_0) - \Lambda) \rangle, \quad (3.80)$$

donde  $\delta(g)$  es la función delta de  $g$  y  $\langle \dots \rangle$  denota el promedio a tiempos grandes

$$\langle G(X_0) \rangle \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{t=0}^{N-1} G(X_t). \quad (3.81)$$

Supongamos que el atractor es ergódico. Entonces cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda_n(X_0)$  converge a un exponente de Lyapunov positivo  $\Lambda^\infty$  que es independiente de  $X_0$  para casi todos los valores de  $X_0$  con base de atracción en el atractor. El límite  $n \rightarrow \infty$  debe tomarse después del límite  $N \rightarrow \infty$  en la ecuación anterior para extraer las fluctuaciones de  $\Lambda_n(X_0)$  alrededor de  $\Lambda^\infty$ . Entonces el espectro de fluctuaciones  $\psi(\Lambda)$  se define como

$$P(\Lambda, n) = P(\Lambda^\infty, n) \exp\{-n\psi(\Lambda)\} \quad (3.82)$$

para  $n \rightarrow \infty$ , donde  $\psi(\Lambda) \geq 0$ .  $\psi(\Lambda)$  es una función cóncava que toma su mínimo en cero en  $\Lambda = \Lambda^\infty$ . Además del espectro  $\psi(\Lambda)$ , es usual también emplear el espectro  $h\Lambda \equiv \Lambda - \psi(\lambda)$  en el formalismo termodinámico.

Los promedios  $\mathbf{q}$ -pesados pueden introducirse sistemáticamente por el formalismo termodinámico de sistemas dinámicos. De acuerdo a ello se define la función de partición

$$Z_n(\mathbf{q}) \equiv \langle \exp\{-n(\mathbf{q} - 1)\Lambda_n(X_0)\} \rangle, \quad (-\infty < \mathbf{q} < \infty) \quad (3.83)$$

el exponente de escalamiento temporal

$$\Phi_n(\mathbf{q}) \equiv -(1/n) \ln Z_n(\mathbf{q}), \quad (3.84)$$

y sus derivadas

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{q}) &\equiv d\Phi_n(\mathbf{q})/d\mathbf{q} = \{1/Z_n(\mathbf{q})\} \langle \Lambda_n(X_0) \exp\{-n(\mathbf{q} - 1)\Lambda_n(X_0)\} \rangle, \\ \sigma_n(\mathbf{q}) &\equiv -d\Lambda_n(\mathbf{q})/d\mathbf{q} \\ &= \{1/Z_n(\mathbf{q})\} \langle \{\Lambda_n(X_0) - \Lambda_n(\mathbf{q})\}^2 \exp\{-n(\mathbf{q} - 1)\Lambda_n(X_0)\} \rangle. \end{aligned}$$

Debido a que  $\Lambda'_n(\mathbf{q}) \leq 0$ ,  $\Lambda_n(\mathbf{q})$  es una función monótona no creciente de  $\mathbf{q}$ .  $\sigma_n(\mathbf{q})$  es la variancia de las fluctuaciones de  $\Lambda_n(X_0)$  alrededor de  $\Lambda_n(\mathbf{q})$ , para  $\mathbf{q} = 1$  se reduce a  $\Phi_n(1) = 0$ ,  $\Lambda_n(1) = \Lambda^\infty$  y

$$\sigma_n(1) = \sum_{m=0}^{n-1} \{ \langle \lambda_1(X_m) \lambda_1(X_0) \rangle - \langle \lambda_1(X_m) \rangle \langle \lambda_1(X_0) \rangle \}. \quad (3.85)$$

Tenemos  $\Lambda_n(\infty) = \Lambda_{min}$ ,  $\Lambda_n(-\infty) = \Lambda_{max}$ . Entonces  $\Lambda_n(\mathbf{q})$  y  $\sigma_n(\mathbf{q})$  con  $\mathbf{q} > 1$  y  $\mathbf{q} < 1$  puede explícitamente describir las fluctuaciones grandes

negativas y positivas de  $\lambda_n(X_0)$  respectivamente. En términos de la densidad de probabilidad tenemos

$$Z_n(\mathbf{q}) = \int d\Lambda P(\Lambda, n) \exp\{-n(\mathbf{q} - 1)\Lambda\} = \exp\{-n\Phi_n(\mathbf{q})\}, \quad (3.86)$$

$$\Lambda_n(\mathbf{q}) = \{1/Z_n(\mathbf{q})\} \int d\Lambda P(\Lambda, n) \exp\{-n(\mathbf{q} - 1)\Lambda\}, \quad (3.87)$$

$$\sigma_n(\mathbf{q}) = \{n/Z_n(\mathbf{q})\} \int d\Lambda P(\Lambda, n) \{\Lambda - \Lambda_n(\mathbf{q})\}^2 \exp\{-n(\mathbf{q} - 1)\Lambda\}. \quad (3.88)$$

Mediante el cálculo numérico de  $P(\Lambda, n)$  podemos obtener  $\Phi_n(\mathbf{q})$ ,  $\Lambda_n(\mathbf{q})$  y  $\sigma_n(\mathbf{q})$  a partir de estas ecuaciones. Estas funciones son llamadas funciones de estructura dinámica debido a que describen estructuras de escalamiento de atractores caóticos. Insertando (3.82) en (3.86) y tomando el integrando dominante con un valor  $\Lambda(\mathbf{q})$  de  $\Lambda$  obtenemos

$$\Lambda_n(\mathbf{q}) = \min_{\Lambda} \{(\psi\Lambda) - (1 - \mathbf{q})\Lambda\} = \mathbf{q}\Lambda(\mathbf{q}) - h(\Lambda(\mathbf{q})), \quad (3.89)$$

$$\Lambda_n(\mathbf{q}) = \Lambda(\mathbf{q}) \quad (3.90)$$

para  $n \rightarrow \infty$ , donde  $h(\Lambda) \equiv \Lambda - \psi(\Lambda)$ ,

$$h'(\Lambda(\mathbf{q})) = \mathbf{q}, \quad h''(\Lambda(\mathbf{q})) = 1/\Lambda'(\mathbf{q}) = -1/\sigma_{\infty}(\mathbf{q}), \quad (3.91)$$

si  $h(\Lambda)$  es diferenciable. La ecuación (3.89) es la transformada de Legendre  $\psi(\Lambda)$  de  $\Phi_{\infty}(\mathbf{q})$ . Para atractores hiperbólicos el potencial  $\Phi_{\infty}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q} - 1)K(\mathbf{q})$ . Esta relación sin embargo, no aplica para atractores no hiperbólicos que son precisamente el caso de los mapeos tipo logístico. La autosimilaridad global de los atractores caóticos no es considerada en el presente caso a diferencia del formalismo del espectro de singularidades  $f(\alpha)$  de la medida natural invariante, debido a que estamos interesados en las estructuras locales singulares que tienen diferentes formas de las estructuras locales en otros sitios. Las estructuras locales singulares del mapeo logístico tal como el extremo y los puntos fijos en las esquinas del mapeo y sus iteraciones superiores a ciertos valores del parámetro de control producen las transiciones de fase discontinuas para  $\Lambda_{\infty}(\mathbf{q})$  como se muestra esquemáticamente en la figura 3.2.

La variancia  $\sigma_{\infty}(\mathbf{q})$  diverge en los puntos de transición  $\mathbf{q}_{\alpha}$  y  $\mathbf{q}_{\beta}$ , como se muestra en la figura 3.3.

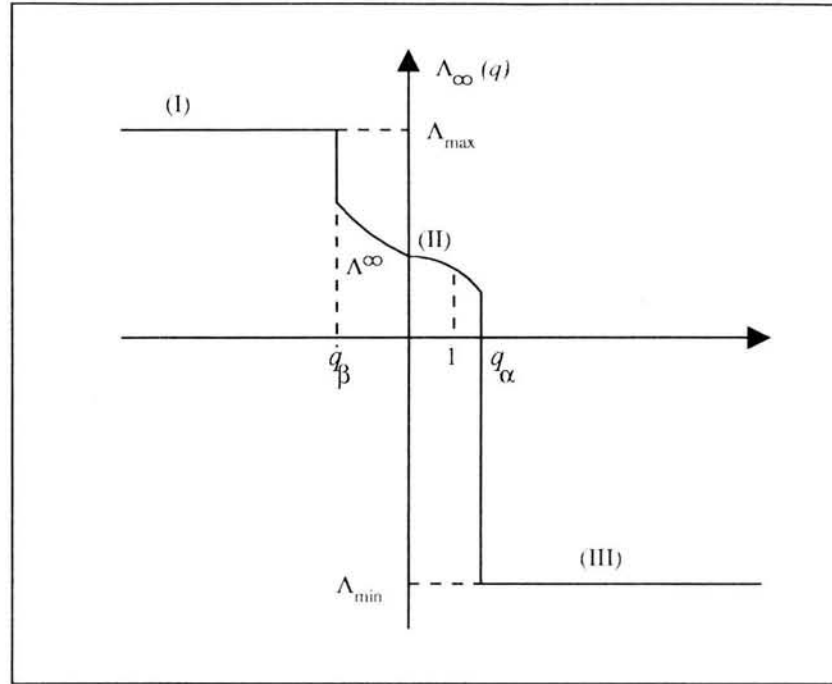


Figura 3.2: Transiciones de fase  $\mathbf{q}$  del mapeo logístico.

Las fases I, II y III representan diferentes estructuras locales. Estas transiciones de fase son causadas por las fluctuaciones grandes producidas por las estructuras locales singulares y son llamadas transiciones de fase  $\mathbf{q}$ . Las transiciones de fase  $\mathbf{q}$  son formalmente similares a las transiciones de fase termodinámicas de primer orden de ferromagnetos en el diagrama de magnetización contra el campo magnético. Su parámetro de orden es la rapidez de expansión local  $\Lambda$ .

Debe notarse que las correlaciones espaciales de espines y átomos llevan a las transiciones de fase termodinámica mientras que las correlaciones en el tiempo de las rapidezces de expansión local llevan a las transiciones de fase  $\mathbf{q}$ . Las transiciones de fase  $\mathbf{q}$  ocurren en los atractores críticos en los puntos de bifurcación, de crisis y desdoblamiento de bandas y sirven para caracterizar las estructuras locales singulares de los atractores críticos. Resumiendo, en el límite  $n \rightarrow \infty$  tenemos que

1. existe un espectro  $\psi(\Lambda)$  que es una función cóncava no negativa y toma su mínimo en cero en  $\lambda = \Lambda_\infty$ ,

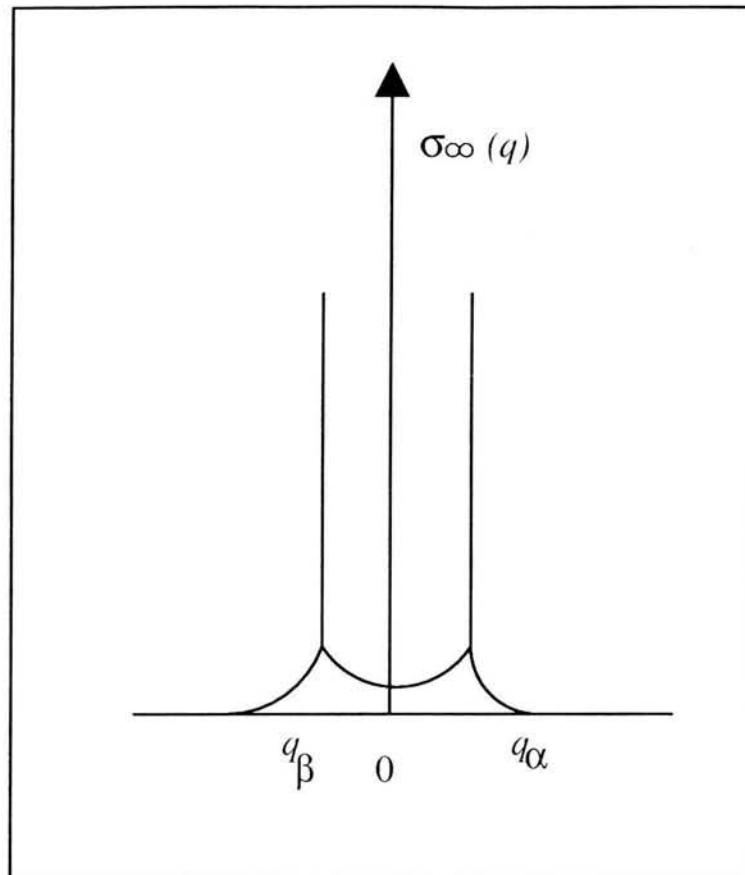


Figura 3.3: La variancia en los puntos de transición.

2. similarmente existen funciones definidas como  $\Phi_n(\mathbf{q})$ ,  $\Lambda_\infty(\mathbf{q})$  y  $\sigma_\infty(\mathbf{q})$  que están relacionadas con el espectro  $\Psi(\Lambda)$  por el principio variacional,
3. las singularidades pueden aparecer para éstas funciones entonces, las transiciones de fase  $\mathbf{q}$  ocurren para  $\Lambda_n(\mathbf{q})$  y  $\sigma_n(\mathbf{q})$  en este límite,
4.  $D(\mathbf{q})$  y  $f(\alpha)$  están íntimamente relacionadas con  $\Phi_n(\mathbf{q})$  en éste límite, entonces si  $\Lambda_\infty(\mathbf{q})$  exhibe una transición de fase  $\mathbf{q}$  también  $D(\mathbf{q})$  y  $\alpha(\mathbf{q})$  presentan una transición de fase  $\mathbf{q}$  en los mapeos en dos dimensiones.





# Capítulo 4

## Planteamiento

En esta capítulo presentamos las propiedades y características principales de la familia de sistemas dinámicos unidimensionales que estudiamos en éste trabajo de tesis, estos son los mapeos tipo logístico en el borde del caos. Dichos mapeos presentan la ruta al caos vía la duplicación de periodos o ruta de Feigenbaum [32] y es precisamente esta ruta la que nos interesa estudiar.

Hemos dividido este capítulo en tres partes, la primera de ellas habla de las generalidades del maepo logístico y las características de la familia de mapeos unimodales con máximo de orden  $z > 1$  [27]. Presentamos resultados ampliamente conocidos para este tipo de mapeos y que nos servirán de apoyo para el capítulo de resultados. En la segunda parte hablamos de las transiciones de fase  $q$  de Mori en el borde del caos para mapeos unidimensionales [14]. Finalmente en la tercera sección retomamos varios de los resultados obtenidos recientemente en el estudio de la no extensividad de mapeos unimodales, en los que se ha determinado la sensibilidad a las condiciones iniciales, los exponentes de Lyapunov generalizados y la entropía generalizada o de Tsallis, y que han resultado en importantes resultados como lo es la generalización de la identidad de Pesin [67]. Todos estos resultados son claves para entender el trabajo que realizamos, donde fundamentalmente hemos estudiado y analizado el vínculo de la muy empleada termodinámica de sistemas caóticos (presentada en el capítulo anterior) con los nuevos resultados obtenidos en un marco teórico que involucra la termodinámica no extensiva introducida por Tsallis.

## 4.1. Los mapeos tipo logístico

Para el desarrollo de este trabajo se escogió un sistema unidimensional que posee ambos comportamientos, periódico y caótico, que ha sido de gran interés desde hace muchos años: el mapeo logístico y, en general, la familia de mapeos tipo logístico [1, 27, 29]. Este tipo de mapeos, a pesar de su sencillez, han sido muy estudiados ya que presentan una gran riqueza en cuanto a la presencia de puntos críticos y cantidades interesantes de ser investigadas, siendo uno de los casos que permite encontrar soluciones exactas para varias propiedades como veremos a continuación.

La ecuación que describe la familia de mapeos tipo logístico es

$$x_{n+1} = f_r(x_n) \equiv 1 - r|x_n|^z \quad (4.1)$$

con  $-1 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq r \leq 2$ ,  $z > 1$ . Cuando tenemos  $z = 2$  recuperamos el llamado mapeo logístico

$$x_{n+1} = f_r(x_n) \equiv 1 - r|x_n|^2 \quad (4.2)$$

con  $-1 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq r \leq 2$ . La gráfica del mapeo logístico se muestra en la figura 4.1.

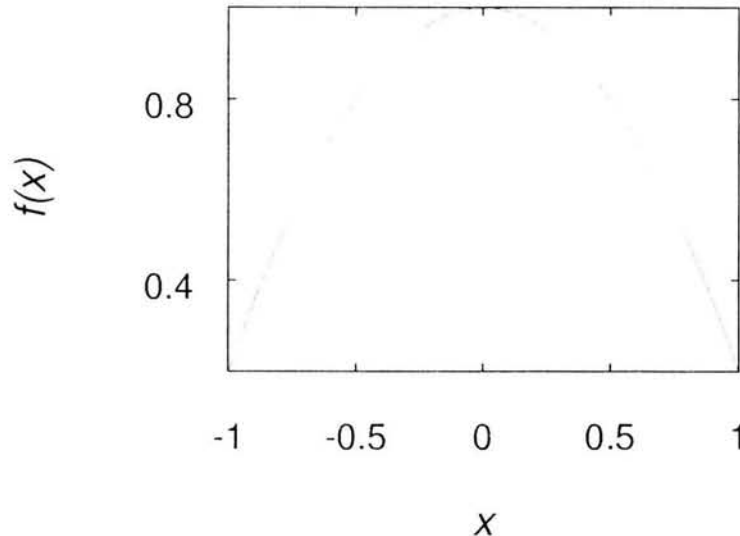


Figura 4.1: Gráfica del mapeo logístico con  $r = 0,8$

Este mapeo describe el comportamiento de varios sistemas que se presentan en distintas áreas. Por ejemplo, describe los ángulos  $x_n$  de un rotor fuertemente amortiguado, el crecimiento de una población en un área cerrada, o los ahorros en una cuenta bancaria con un crecimiento de intereses auto-limitada, entre otros [3].

Una de las rutas al caos que se presenta en el mapeo logístico es la conocida como ruta de Feigenbaum [32], la cual ocurre con algunas restricciones en todas las ecuaciones de primer orden  $x_{n+1} = f(x_n)$  en las que  $f(x_n)$  tiene un solo máximo en el intervalo unitario  $0 \leq x_n \leq 1$  estos conforman la familia de mapeos tipo logístico (ver ecuación (4.1)) también conocida como mapeos unimodales o de mapeos con máximo de orden  $z$ . Feigenbaum encontró que las propiedades de invariancia ante cambios de escala presentes en el comportamiento del sistema en la transición al caos, se encuentran gobernadas por constantes universales,  $\alpha(z)$  y  $\delta(z)$ , cuyo valor depende sólo de  $z$  [27, 33]. Las propiedades y características de la familia de mapeos con máximo de orden  $z$  serán discutidas ampliamente en la siguiente subsección, aquí abordaremos primero el caso  $z = 2$ .

### Características del mapeo logístico

Para analizar el comportamiento del mapeo logístico y observar sus rutas al caos, conviene hacer un estudio numérico de éste cuando variamos el parámetro de control  $r$ . En esta sección mostraremos algunas de las propiedades que pueden observarse para este mapeo.

La parte superior de la figura 4.2 muestra el atractor del mapeo logístico para diferentes valores del parámetro de control  $r$ . La figura 4.2 se obtiene al variar el parámetro de control, llevar a cabo las iteraciones a partir de un valor inicial  $x_0$  y graficar los valores de los iterados  $x_n$  a tiempos grandes. Observamos un comportamiento periódico para valores del parámetro de control  $1 < r < r_\infty$ , en esta zona el exponente de Lyapunov  $\lambda$  es siempre negativo y se hace cero justo en los puntos de bifurcación. El valor de  $\lambda$  se muestra en la parte inferior de la gráfica 4.2. En  $r_\infty = 1,401155189\dots$  encontramos el valor del parámetro de control donde pasamos de un comportamiento periódico o régimen de bifurcación a un comportamiento aperiódico o régimen caótico (también aquí  $\lambda = 0$ ). La región caótica se observa para valores de  $r_\infty < r \leq 2$ , aquí el exponente de Lyapunov generalmente es positivo  $\lambda > 0$ , sin embargo, aún dentro del régimen caótico, se observan ventanas con comportamiento periódico donde otra vez  $\lambda < 0$  [1].

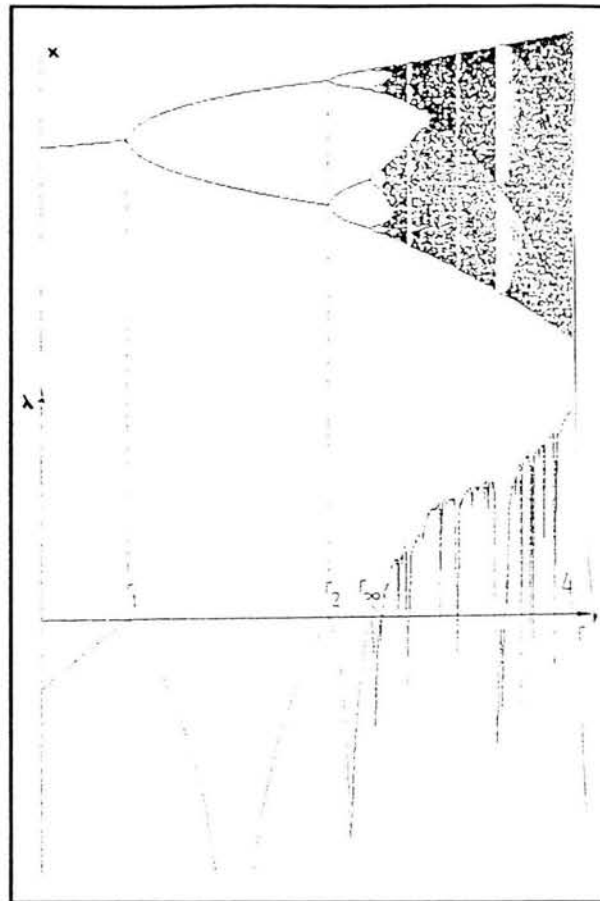


Figura 4.2: Atractor del mapeo logístico y exponentes de Lyapunov  $\lambda$  (Figura tomada del libro *Deterministic Chaos* de H.G. Schuster (1988))

En la región periódica, se observa que el atractor del mapeo está constituido por órbitas de tamaño  $2^k$ . Esto es, después de un cierto tiempo, conocido como transitorio, las iteraciones visitan alternadamente los puntos que constituyen la órbita periódica para cierto valor de  $r$ . Cada órbita se bifurca al alcanzarse ciertos valores de  $r$  que llamaremos  $r_k$ . Para estos valores de  $r$  donde el número de puntos fijos (puntos de bifurcación) cambia de  $2^{k-1}$  a  $2^k$  se observa un comportamiento escalatorio de la forma

$$r_k = r_\infty - \text{const}(\delta(z)^{-k}) \quad \text{para } k > 1. \quad (4.3)$$

Es importante mencionar que cada una de las órbitas de la parte periódica

son órbitas estables de periodo  $2^k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$  en el intervalo de  $r_k \leq r < r_{k+1}$ . Al variar el parámetro de control las órbitas se desestabilizan y se observa una bifurcación. Las órbitas periódicas no desaparecen si no que se vuelven órbitas periódicas inestables y están presentes para cualquier valor de  $r > r_{k+1}$ . De hecho siguen hasta la parte caótica y al cruzar con las bandas características del regimen caótico las rompen en dos, provocando la bifurcación inversa de bandas que se observa en la parte caótica.

Para  $x = 0$ , tenemos un *ciclo superestable* [1] (ver capítulo 4), los valores de  $r$  correspondientes a los puntos donde cruza  $x = 0$  con cada una de las ramas del mapeo serán denotados por  $R_k$  (ver figura 4.3). En  $R_k$ , las distancias  $d_k$  del punto en un ciclo  $2^k$  que está mas cercano a  $x = 0$  (el cual nos genera un ciclo superestable como se explicará detalladamente en la siguiente subsección) tienen cocientes constantes (ver figura (4.3))

$$\frac{d_k}{d_{k+1}} = -\alpha(z) \quad \text{para } k > 1 \quad (4.4)$$

Las constantes de Feigenbaum  $\delta(z)$  y  $\alpha(z)$  para  $z = 2$  tienen los valores  $\delta(2) = 4,6692016091\dots$  y  $\alpha(2) = 2,5029078750\dots$

Al pasar a la región caótica, los intervalos caóticos se bifurcan inversamente en bandas hasta que las iteraciones se distribuyen sobre todo el intervalo  $[-1, 1]$  cuando  $r = 2$ . Esto es, cerca del borde del caos tenemos un número muy grande de bandas caóticas que se van reduciendo a la mitad en número en ciertos valores de  $r$ , hasta originar una sólo banda que se distribuye sobre todo el espacio de fase. Dentro la zona caótica se observan ventanas de comportamiento periódico que aparecen en ciertos valores de  $r_i$  caracterizadas por ciclos de periodos  $p$  ( $p = 3, 5, 6, \dots$ ) con bifurcaciones sucesivas  $p, p(2^1), p(2^2)$ , etc. Los valores de  $r_i$  correspondientes con la aparición de las ventanas escalan como (4.3) con el mismo  $\delta(z)$  pero diferente constante. También los periodos triples  $p(3^n)$  y cuádruples  $p(4^n)$ , etc., ocurren en  $r' = r'_\infty - \text{const}(\delta'(z)^{-n})$  con diferentes constantes de Feigenbaum  $\delta'(z)$  que son otra vez universales (por ejemplo  $\delta'(2) = 55,247\dots$  para  $p3^n$ ) [1].

Las propiedades de escalamiento de la familia de mapeos tipo logístico en el borde del caos serán discutidas mas ampliamente en la siguiente subsección.

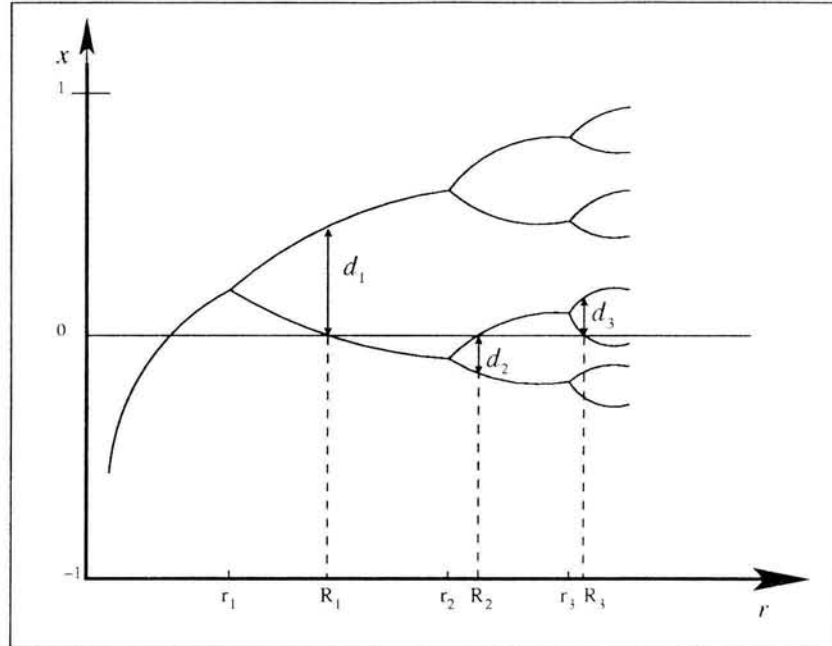


Figura 4.3: Distancias  $d_n$  de los puntos fijos cercanos a  $x = 0$  para ciclos superestables  $2^k$

### Grupo de renormalización en el atractor de Feigenbaum

A continuación mostramos el uso del método de grupo de renormalización en el atractor de Feigenbaum [32, 45, 46]. Feigenbaum hizo la observación fundamental de que para  $r \approx 1,4$  el mapeo logístico iterado dos veces  $f^2(x)$  muestra cierta similitud con el mapeo original  $f(x)$ . Esto lo podemos observar a partir de la figura 4.4, si colocamos la gráfica de  $f^2$  invertida y la reescalamos de una manera apropiada restringiéndonos a la vecindad de  $x = 0$ .

Esta similitud es aproximada sin embargo es válido preguntarse si existe alguna función  $g(x)$  tal que su segunda iterada  $g^2(x)$  tenga la propiedad de que al invertirla y reescalarla adecuadamente sea exactamente igual a la función original  $g(x)$ . Lo cual se expresa mediante la ecuación

$$\alpha g(g(x/\alpha)) = g(x), \quad (4.5)$$

donde  $\alpha$  denota el factor de reescalamiento. Esta ecuación puede tener muchas soluciones, pero podemos escoger una solución que cumpla con el requisito de que sea una función analítica de la forma

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}, \quad (4.6)$$

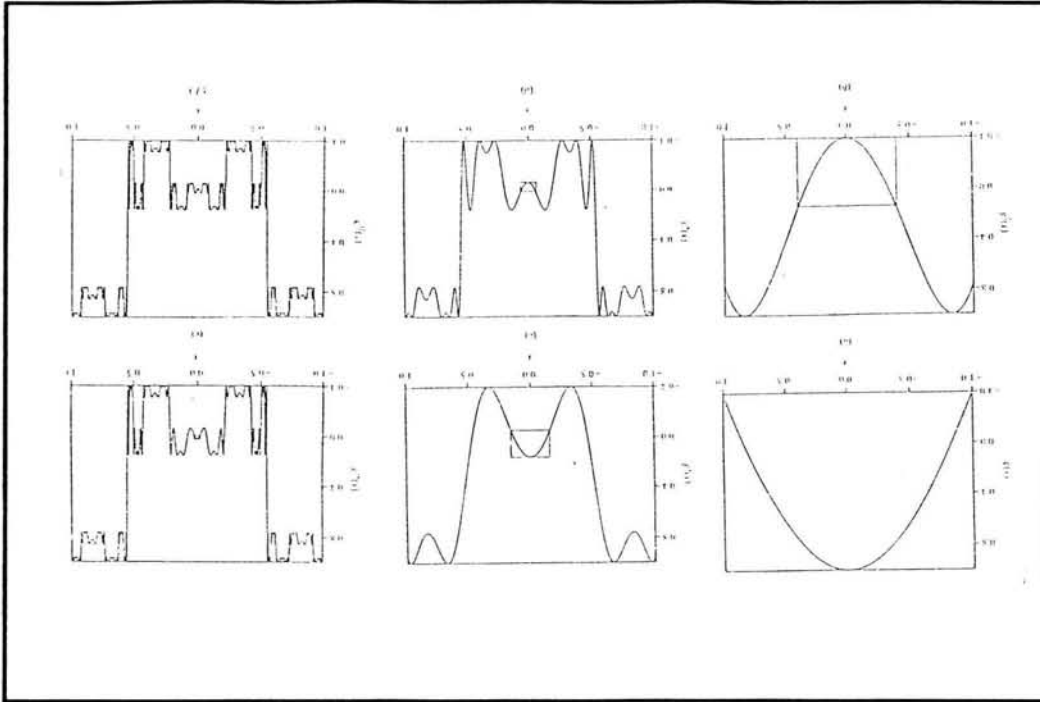


Figura 4.4: Auto semejanza del mapeo logístico (Figura tomada del libro *Thermodynamics of Chaotic Systems* de C. Beck y F. Schlogl (1993))

donde  $c_k$  son coeficientes apropiados. Con  $c_0 = 1$ , garantizamos que  $g(0) = 1$  y  $g'(0) = 0$ , esto es, en la vecindad de  $x = 0$  la función  $g$  tiene las mismas propiedades que el mapeo logístico  $f$ . La ecuación de grupo de renormalización (4.5) puede resolverse numéricamente. Los primeros coeficientes de  $c_k$  son :  $c_0 = 1, c_1 = -1,527633, c_2 = +0,1048152, c_3 = +0,0267057, c_4 = -0,0035274, c_5 = +0,0000816$ . La ecuación (4.5) tiene para el valor especial  $x = 0$  el factor de reescalamiento  $\alpha = 1/g(1) = -2,5029079$ . De acuerdo a la ecuación (4.5) podemos interpretar a  $g$  como el punto fijo del operador  $R$  también llamado *operador doble* definido por

$$Rf(x) = \alpha f(f(x/\alpha)) = \alpha f^2(x/\alpha). \quad (4.7)$$

Debe quedar claro que este punto fijo es una función de punto fijo y no debe de confundirse con los puntos fijos del mapeo en el espacio de fase. Aplicando el operador doble  $k$  veces sobre alguna función  $f(x)$  obtenemos

$$R^k f(x) = \alpha^k f^{2^k}(x/\alpha^k). \quad (4.8)$$



El punto fijo  $g$  satisface

$$R^k g(x) = \alpha^k g^{2^k}(x/\alpha^k) = g(x). \quad (4.9)$$

La idea detrás de esta universalidad es que en el punto crítico  $r_\infty$  de duplicación de periodo, la clase de mapeos  $f$  con un máximo cuadrático converge a la función  $g$  bajo sucesivas iteraciones y reescalamientos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R^k f(x) = g(x), \quad r = r_\infty. \quad (4.10)$$

Aquí,  $f$  puede ser el mapeo logístico o cualquier otro mapeo con máximo cuadrático con el valor del parámetro de control  $r = r_\infty$  escogido de tal forma que corresponda con el punto de acumulación de duplicación de periodo [27]. El punto fijo  $g$ , obtenido en el límite  $k \rightarrow \infty$ , así como la constante de Feigenbaum  $\alpha$  son universales en el sentido de que no dependen de los detalles del mapeo  $f$ . El valor crítico  $r_\infty$  del parámetro de control  $r$  sin embargo no es universal y depende de la forma precisa del mapeo. No sólo es universal el comportamiento del punto crítico de duplicación de periodo si no también el comportamiento en la vecindad de  $r_\infty$ .

#### 4.1.1. Mapeos con máximo de orden $z$

A continuación presentamos las características principales de las escalas presentes en los sistemas que muestran duplicación de periodo, ejemplificados por el mapeo unidimensional  $x_{n+1} = 1 - r|x_n|^z$  el cual tiene un máximo de orden  $z(z > 1)$ . Como veremos en detalle en esta sección, asociados a mapeos de este tipo, existen dos factores de escala universales  $\alpha(z)$  y  $\delta(z)$  que dependen únicamente del valor de  $z$ , y más generalmente de las funciones de escalamiento  $1/\sigma(m, z)$  y  $f(\alpha)$ .

En la figura 4.5 se muestran varios árboles de bifurcación para diferentes valores de  $z$ . De ésta figura se observa que cada rama del árbol de bifurcación es una pequeña copia del árbol original. Por este motivo, el árbol de bifurcación puede describirse a través de factores de escalamiento [32, 45]: en la dirección de  $r$  por el factor  $\delta(z)$  y en la dirección de  $x$  por todo un conjunto de factores de escala (siendo los más importantes  $\alpha(z)$  y  $\alpha(z)^z$ ) que juntos forman la función de escalamiento  $1/\sigma(m, z)$ . Cabe recalcar que todos estos factores dependen de  $z$  como puede observarse en la figura 4.5. Nótese que para todo  $z > 1$  el mapeo presenta bifurcaciones en sus órbitas periódicas en las cuales el periodo de éstas se duplica hasta que, al alcanzar

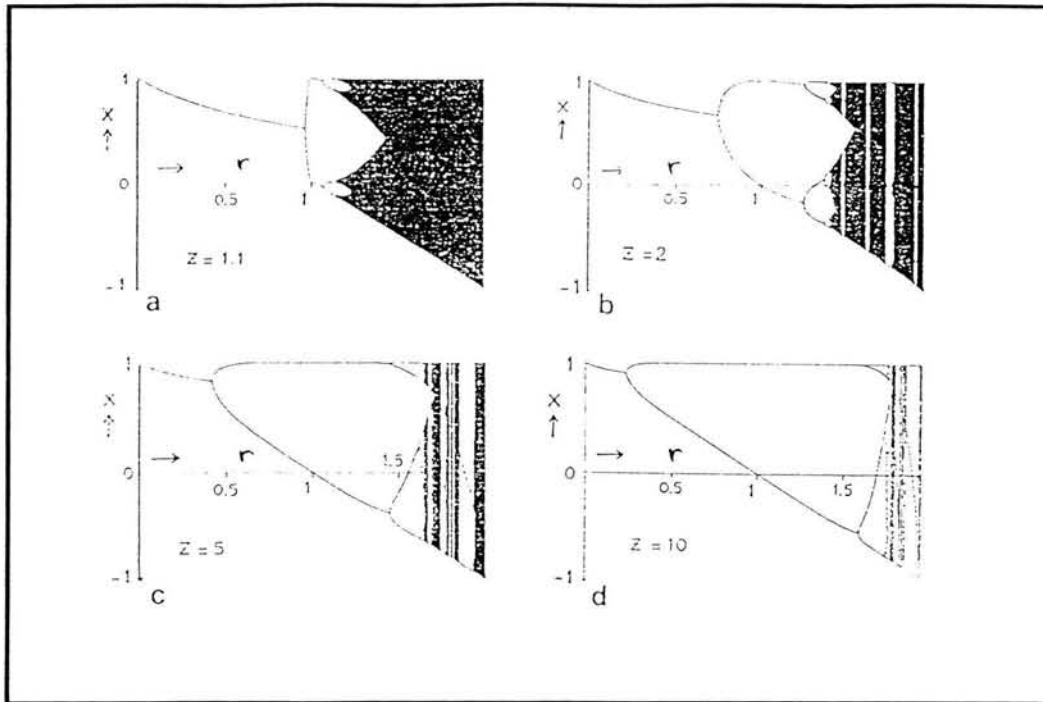


Figura 4.5: Diagrama de bifurcación para la familia tipo logístico con  $z = 1,1, z = 2, z = 5, z = 10$  (figura tomada de la referencia [27])

el valor del parámetro  $r_\infty$  ( $r_\infty \approx 1,40115\dots$  para  $z = 2$ ), el periodo de la órbita es infinito. Iniciando de un 1-ciclo estable en  $r = 0$  las bifurcaciones aparecen en valores de  $r = r_k(z), k = 1, 2, \dots$ , donde el ciclo  $2^{k-1}$  se hace inestable y aparece un nuevo ciclo estable  $2^k$ . El  $r_k$  se acumula en  $r = r_\infty(z)$  en el borde del caos. Para  $r > r_\infty(z)$  aparece una región predominantemente caótica donde se presentan ventanas de comportamiento periódico. La mas evidente es una ventana de periodo 3 pero hay también otras ventanas de periodos 5, 6, etc. Dentro de estas ventanas la transición al caos presenta nuevamente bifurcaciones de duplicación de periodo con los mismos factores de escalamiento que para las series originales de  $2^k$ -ciclos [29]. Los factores de escalamiento pueden encontrarse directamente midiendo las distancias en el árbol de bifurcación para  $2^k$ -ciclos sucesivos, sin embargo en los casos límites  $z \rightarrow 1$  y  $z \rightarrow \infty$  éste método directo no funciona. Estos casos límites, pueden ser estudiados por medio de la transformación de grupo de renormalización de Feigenbaum [27, 32, 33].

### Estabilidad

Consideremos un punto  $x_n$  en la vecindad de un punto fijo  $x_n^*$  de un  $N$ -ciclo  $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*$ ,

$$x_n = x_n^* - \Delta x_n. \quad (4.11)$$

Después de  $N$  iteraciones tendremos

$$x_{n+N} = f_r^{(N)}(x_n^* + \Delta x_n) = x_n^* + \Delta x_n \frac{df_r^{(N)}(x)}{dx} \Big|_{x=x_n^*} + \dots, \quad (4.12)$$

donde  $f_r^{(N)}$  denota el mapeo iterado  $N$  veces. Ahora, el  $N$ -ciclo es estable si  $|\Delta x_{n+N}| \leq |\Delta x_n|$  ó

$$-1 \leq \frac{df_r^{(N)}(x)}{dx} \Big|_{x=x_n^*} \leq 1. \quad (4.13)$$

Empleando la regla de la cadena esto se puede escribir como

$$-1 \leq f_r'(x_0^*) f_r'(x_1^*) \dots f_r'(x_{N-1}^*) \leq 1, \quad (4.14)$$

donde la prima indica la diferenciación respecto a  $x$ . Ahora consideremos las series de duplicación de periodo de  $2^k$ -ciclos, esto es  $N = 2^k (k = 0, 1, 2, \dots)$ . Entonces los signos de igualdad en la ecuación (4.14), leídos de izquierda a derecha, corresponden con los valores de bifurcación  $r_{k+1}(z)$  y  $r_k(z)$ . Entre estos dos valores siempre existe un  $r = r'_k(z)$  para el cual el producto en la ecuación (4.14) se hace cero,

$$f_r'(x_0^*) f_r'(x_1^*) \dots f_r'(x_{N-1}^*) = 0. \quad (4.15)$$

El  $2^k$ -ciclo correspondiente es llamado superestable. Con  $f_r(x)$  como en la ecuación del mapeo logístico se sigue que cada ciclo superestable contiene el punto  $x = 0$  (excepto el 1-ciclo superestable  $x^* = 1$  en  $r'_0 = 0$ ). Entonces los valores  $r'_k(z)$  pueden obtenerse como las soluciones de

$$f_{r'_k}^{(2^k)}(0) = 0. \quad (4.16)$$

Nótese que  $r'_1 = 1$  para toda  $z$ . Los valores superiores de  $r'_k$  dependen de  $z$ . Para  $z \rightarrow \infty$  los valores de  $r'_k (k = 2, 3, \dots)$  se acumulan cerca de  $r = 2$ . Esto puede observarse en la figura 4.5 donde para un incremento de  $z$  el 2-ciclo

va dominando el árbol de bifurcación llevando al 1-ciclo hacia  $r = 0$  y todos los ciclos superiores y la región caótica hacia  $r = 2$ . Este efecto ocasiona evidentemente que para  $z = \infty$  sólo el 2-ciclo  $x_0^*, x_1^* = 1, 1 - r$  permanezca [27].

En el otro extremo, cuando  $z \rightarrow 1$  el caos domina, en este límite tenemos un 1-ciclo  $x^* = 1/(1 + r)$  que es estable para  $0 \leq r < 1$  y todos los  $r'_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) incluyendo  $r_\infty$  colapsan en  $r = 1$ . Las ventanas periódicas (es decir los intervalos para los cuales las órbitas periódicas estables ocurren) en la región caótica ( $1 < r \leq 2$ ) se hace infinitesimalmente delgadas.

El análisis de estabilidad anterior no se encuentra restringido a los  $2^k$ -ciclos, de hecho podemos encontrar algún  $N$ -ciclo superestable usando

$$f_r^{(N)}(0) = 0. \quad (4.17)$$

### El factor de escalamiento $\alpha$

A continuación describiremos brevemente el factor de escalamiento en la dirección  $x$ . Consideremos el  $2^k$ -ciclo superestable  $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{2^k-1}^*$ , con  $x_0^* = 0$  y en particular las distancias  $d_{k,m}(z)$  entre el punto  $x_m^*$  y su punto gemelo  $x_{m+2^{k-1}}^*$ ,

$$d_{k,m}(z) = x_{m+2^{k-1}}^* - x_m^* = f_{r'_k}^{(m+2^{k-1})}(0) - f_{r'_k}^{(m)}(0). \quad (4.18)$$

En la figura 4.6 se muestran algunas distancias para ilustrar la definición. Las aproximaciones al factor de escala  $\alpha(z)$  están dadas en términos de las distancias centrales ( $m = 0$ )

$$\alpha_k(z) = -\frac{d_{k,0}(z)}{d_{k+1,0}(z)}, \quad (4.19)$$

con  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k(z) = \alpha(z)$ . El resto de las distancias y los factores de escalamiento ( $m \neq 0$ ) serán tratados mas adelante. Se encuentra que  $\alpha(z)$  es una función decreciente de  $z$ , con  $\lim_{z \rightarrow 1} \alpha(z) = \infty$  y  $\lim_{z \rightarrow \infty} \alpha(z) = 1$ . La figura 4.7 siguiente muestra el comportamiento de  $\alpha$  vs  $z$  y de  $\alpha^z$  vs  $z$  para diferentes valores de  $z$  [68].

### La ecuación de Feigenbaum-Cvitanovic

A continuación daremos una breve discusión de la ecuación de Feigenbaum-Cvitanovic para órbitas de periodo  $2^k$ . Consideremos para ello la cascada de

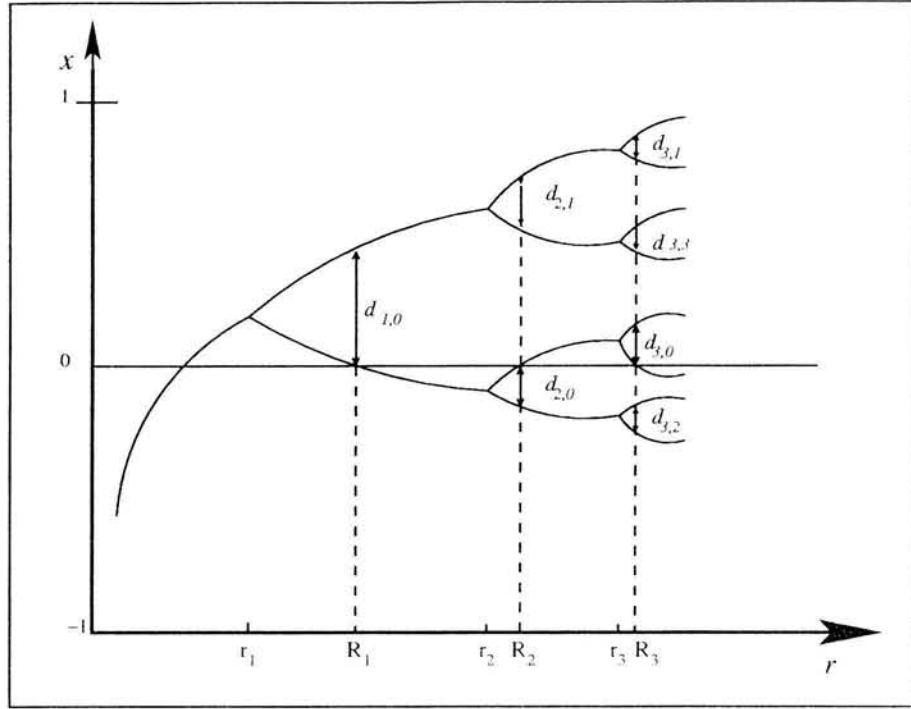


Figura 4.6: Diametros del mapeo logístico

$2^k$ -ciclos. El mapeo relevante para el  $2^k$ -ciclo es  $f_r^{(2^k)}(x)$ . Propiamente reescalado este mapeo (localmente a lo largo del máximo central) mimetiza el mapeo original  $f_r(x)$ ; esto explica la autosimilaridad del proceso de duplicación de periodo. Para describir esta autosimilaridad Feigenbaum introdujo una familia de funciones  $g_k^*(x)$  definida por

$$g_k^*(x) = P_k f_{r_\infty}^{(2^k)}\left(\frac{x}{P_k}\right), \quad (4.20)$$

donde  $P_k = (-\alpha_{k-1})(-\alpha_{k-2})\dots(-\alpha_0)$  es el factor de escalamiento acumulado después de  $k$  duplicaciones de periodo. Tomando en cuenta que  $\alpha_k$  converge a un valor límite  $\alpha$  tenemos  $P_k = \eta_k^*(-\alpha)^k$ , donde todas las desviaciones de  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$  de  $\alpha$  se han incluido en el factor  $\eta_k^*$ . La ecuación (4.20) también puede escribirse como

$$\frac{1}{P_k} g_k^*(P_k x) = f_{r_\infty}^{(2^k)}(x). \quad (4.21)$$

Consecuentemente se tiene

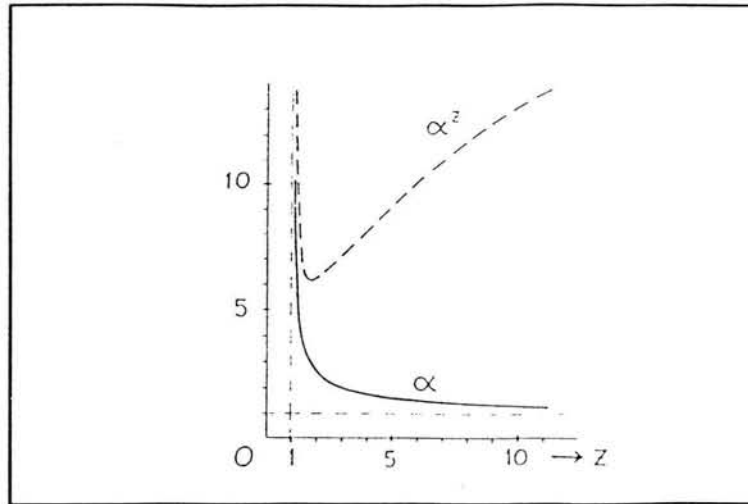


Figura 4.7: Dependencia de la constante de Feigenbaum  $\alpha$  con  $z$

$$\frac{1}{P_{k+1}} g_{k+1}^*(P_{k+1}x) = f^{(2^{k+1})}(x) = \frac{1}{P_k} g_k^*(g_k^*(P_k x)) \quad (4.22)$$

y reemplazando  $x$  por  $x/P_{k+1}$  esto conduce a

$$g_{k+1}^*(x) = -\alpha_k g_k^* \left( g_k^* \left( \frac{x}{-\alpha_k} \right) \right), \quad (4.23)$$

donde  $(-\alpha_k) = P_{k+1}/P_k$ . Podemos omitir el signo en el argumento de  $g_k^*$ , debido a que  $g_k^*(x)$  es una función par de  $x$ ; esto es evidente del hecho que  $f_r^{(2^k)}(x)$  depende de  $x$  solo vía  $|x|^z$ . Debido a que la duplicación de periodo es un proceso convergente, podemos concluir que el límite de  $k \rightarrow \infty$  existe, con  $\alpha_k \rightarrow \alpha$  y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k^*(x) = g(x). \quad (4.24)$$

En éste límite (4.23) se reduce, con  $g(x)$  par,

$$g(x) = -\alpha g(g(x/\alpha)). \quad (4.25)$$

Esta es la ecuación de Feigenbaum-Cvitanovic [32, 68], la cual refleja la naturaleza autosimilar de las bifurcaciones de duplicación de periodo. Nótese

que (4.25) es invariante ante la transformación  $g(x) \rightarrow \eta g(x/\eta)$ , usando esta propiedad podemos establecer que

$$g(0) = 1 \quad (4.26)$$

y consecuentemente, con (4.25),

$$g(1) = -\frac{1}{\alpha}. \quad (4.27)$$

Debido a que  $g(x)$  depende de  $x$  sólo via  $|x|^z$  podemos desarrollar  $g(x)$  en series de potencias,

$$g(x) = 1 + A|x|^z + B|x|^{2z} + \dots \quad (4.28)$$

Los coeficientes  $A, B, \dots$ , así como  $\alpha$  pueden determinarse numéricamente insertando este desarrollo en series de potencias en (4.25) e igualando las potencias de  $|x|^z$ . El formalismo anterior también se aplica a la ruta al caos por duplicación de periodo en las ventanas periódicas con  $r > r_\infty$ . Para una ventana de periodo  $N$  el mapeo básico es  $f_r^{(N)}(x)$  y consecuentemente el mecanismo de ruta al caos por duplicación de periodo (produciendo los  $2^k N$ -ciclos con  $k = 1, 2, \dots$ ) es descrito por la función

$$g^{*N}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k f_{r_\infty}^{(2^k N)} \left( \frac{x}{P_k} \right), \quad (4.29)$$

donde  $r_\infty$  es ahora el punto de acumulación de las bifurcaciones de la  $N$ -ventana. Otra propiedad de esta función que se empleará en lo sucesivo es que la derivada  $g'(1)$  satisface [27]

$$g'(1) = -\alpha^{z-1}. \quad (4.30)$$

### 4.1.2. Las funciones de escalamiento $1/\sigma(m, z)$ y $f(\alpha)$

#### La función sigma

El índice de escalamiento en la dirección  $x$  puede estudiarse a través de las distancias  $d_{k,m}(z)$  definidas por

$$d_{k,m}(z) = f_{r_k}^{(m+2^{k-1})}(0) - f_{r_k}^{(m)}(0). \quad (4.31)$$



En general definimos para cualquier valor de  $m$

$$1/\sigma(m, z) = 1/\sigma(t, z) \equiv \frac{d_{k,m}(z)}{d_{k+1,m}(z)}, \quad t = \frac{m}{2^{k+1}} \quad (4.32)$$

donde  $m = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$ . Esta función  $1/\sigma_k(m, z)$  es el conjunto de todos los factores de escalamiento de las órbitas en el nivel del ciclo- $2^k$  [69]. Nótese que  $1/\sigma(0, z) = -\alpha_k(z)$ , y mas aún

$$\frac{d_{k,1}}{d_{k+1,1}} = \left| \frac{d_{k,0}}{d_{k+1,0}} \right|^z = (\alpha_k(z))^z. \quad (4.33)$$

El límite del conjunto de funciones para  $k \rightarrow \infty$  es llamado función de escalamiento

$$1/\sigma(m, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1/\sigma_k(m, z). \quad (4.34)$$

Podemos restringir  $1/\sigma(t, z)$  a el intervalo  $0 \leq t < 1/2$ , esto es, para valores de  $m = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$ . Si consideramos valores mayores de  $t$  no encontraremos información adicional para la función de escalamiento ya que  $d_{k+1,m+2^k} = -d_{k+1,m}$  y entonces  $1/\sigma_k(t + 1/2) = -1/\sigma_k(t)$ . En una aproximación cruda la función sigma puede dividirse en dos secciones

$$1/\sigma(t, z) \sim \begin{cases} \alpha(z)^z & 0 < t \leq 1/4 \\ \alpha(z) & 1/4 < t \leq 1/2. \end{cases}$$

Esto es, la mitad de las distancias  $d_{k,m}(z)$  escalan, a grosso modo, como  $\alpha(z)^z$  y la otra mitad como  $\alpha(z)$ . Conforme  $z$  crece esta aproximación empeora y se tiene que tomar en cuenta mas y mas valores de los factores de escala. La figura 4.8 muestra esta función para diferentes valores de  $z$  [1, 27, 69].

### La función de escalamiento $f(\alpha)$

La función de escalamiento  $1/\sigma(t, z)$  tiene muchas discontinuidades, que se hacen mas y mas pronunciadas conforme  $z$  crece. Por ello es conveniente introducir la función de escalamiento alternativa  $f(\alpha)$  [15, 16, 70]. Esta función nos dá la dimensión global del conjunto de distancias  $d_{k,m}(z)$  en el  $2^k$ -ciclo (en el límite  $k \rightarrow \infty$ ) que están asociadas con el índice de escalamiento  $\alpha$ . Para calcular  $f(\alpha)$  se consideran las distancias  $d_{k,m}(z)$  del  $2^k$ -ciclo superestable

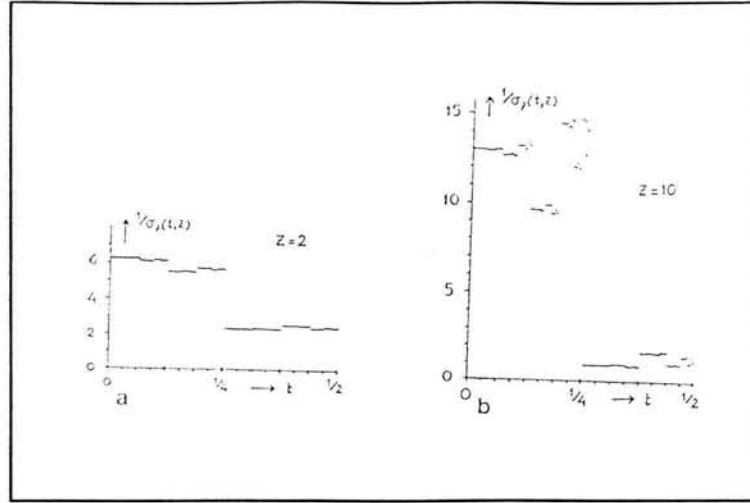


Figura 4.8: La función  $1/\sigma(m, z)$  para diferentes valores de  $z$ .

dado por (3.1). Existen  $2^{k-1}$  distancias con las cuales se forma la función de partición

$$\Gamma_k(\mathbf{q}, \tau, z) = \left( \frac{1}{2^{k-1}} \right)^{\mathbf{q}} \sum_{m=0}^{2^{k-1}-1} |d_{k,m}(z)|^{-\tau}. \quad (4.35)$$

Normalizando  $\Gamma_k(\mathbf{q}, \tau, z) = 1$ , encontramos para cada valor de  $\mathbf{q}$  un valor correspondiente de  $\tau$  que denotamos como  $\tau_k(\mathbf{q}, z)$ . En el límite  $k \rightarrow \infty$  la función  $\tau_k(\mathbf{q}, z)$  se aproxima a la función  $\tau(\mathbf{q}, z)$ . Para valores grandes y positivos de  $\mathbf{q}$  el factor  $(1/2^{k-1})^{\mathbf{q}}$  será muy chico. De acuerdo con esto, el factor suma  $\sum |d_{k,m}(z)|^{\tau}$  debe de ser grande para asegurar que  $\Gamma_k(\mathbf{q}, \tau, z) = 1$ . Debido a que  $|d_{k,m}| < 1$  para toda  $m$  esto implica que  $\tau$  es positiva y las distancias menores darán la contribución principal. En el límite  $\mathbf{q} \rightarrow \infty$  la función de partición es dominada completamente por las distancias mas pequeñas. De manera semejante, para valores negativos de  $q$  encontramos que  $\tau$  debe de ser negativa y las distancias mas grandes contribuirán principalmente. Entonces  $\tau(+\infty, z)$  y  $\tau(-\infty, z)$  están asociadas con las distancias mas pequeñas y mas grandes respectivamente. Mas aún, uno encuentra que  $\tau_k(\mathbf{q}, z)$  es una función cóncava de  $\mathbf{q}$ . El valor  $\tau(0, z)$  para  $\mathbf{q}=0$  se encuentra asociado con todas las distancias. De hecho  $\tau(0, z)$  es (menos) la dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor que es el conjunto límite de los segmentos de líneas que conectan los puntos  $x_m$  de las órbitas  $2^k$  con sus puntos gemelos  $x_{m+2^{k-1}}$ . A partir de la transformada de Legendre de  $\tau_k(\mathbf{q}, z)$  uno obtiene la función de escalamiento  $f(\alpha, z)$ . Esto es

$$\begin{aligned} f_k(\alpha_k, z) &= \mathbf{q}\alpha_k - \tau_k, \\ \alpha_k x &= \frac{d}{d\mathbf{q}} \tau_k(\mathbf{q}, z) \end{aligned} \quad (4.36)$$

con  $\alpha_k \rightarrow \alpha$  y  $f_k(\alpha_k, z) \rightarrow f(\alpha, z)$  para  $k \rightarrow \infty$ . El índice de escalamiento  $\alpha$  se encuentra restringido al intervalo  $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max}$ , donde

$$\begin{aligned} \alpha_{min} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{\ln |d_{k,max}/d_{k+1,min}|}, \\ \alpha_{max} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{\ln |d_{k,min}/d_{k+1,max}|}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

y donde  $d_{k,min}$  y  $d_{k,max}$  denotan las distancias mínima y máxima  $d_{k,m}$  de la  $2^k$ -órbita superestable [27, 3]. De los datos numéricos uno concluye que  $d_{k,min} = d_{k,1}$  y  $d_{k,max} = d_{k,0}$ , es decir

$$\alpha_{min} = \frac{\ln 2}{\ln \alpha^z}, \quad \alpha_{max} = \frac{\ln 2}{\ln \alpha}, \quad (4.38)$$

y en consecuencia

$$\alpha_{max} = z\alpha_{min}. \quad (4.39)$$

La figura 4.9 muestra la función  $f(\alpha)$  para diferentes valores de  $z$  [27].

## 4.2. Transiciones de fase q de Mori en el borde del caos para mapeos unimodales

Como hemos visto en la sección de antecedentes, el comportamiento caótico de sistemas dinámicos disipativos ha sido extensamente estudiado. En particular se han hecho muchos esfuerzos por tratar de encontrar cantidades físicas a *grosso modo* (coarse-grained) para describir y entender el caos desde los puntos de vista tanto geométricos como dinámicos. Efectivamente, se ha mostrado que la estructura de escalamiento de la medida natural invariante contenida en el atractor caótico puede describirse por medio del espectro de exponentes de singularidades  $f(\alpha)$  [15] y la evolución temporal

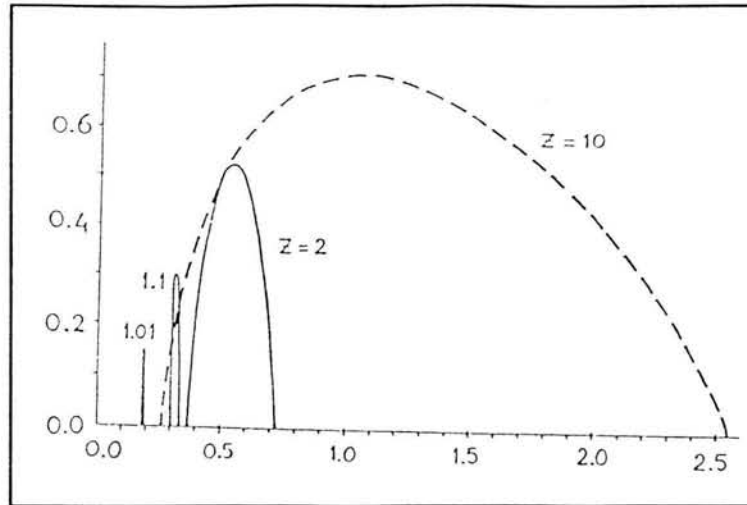


Figura 4.9: La función  $f(\alpha)$  para diferentes valores de  $z$ .

de estructuras locales en un atractor caótico puede ser descrito por el espectro de tasas locales de expansión de órbitas cercanas  $\psi(\Lambda)$  [31, 71, 12, 54]. En ciertos casos, estas dos cantidades aparecen relacionadas estrechamente. Esta descripción de sistemas dinámicos nos provee de un poderoso método para investigar atractores caóticos. Se ha encontrado que las bifurcaciones del caos, tales como el desdoblamiento de bandas, están caracterizadas por transiciones de fase  $\mathbf{q}$  o de Mori observables en las cantidades dependientes de  $\mathbf{q}$ ,  $\Lambda(\mathbf{q})$  y  $\alpha(\mathbf{q})$  definidas por los principios variacionales  $(\mathbf{q} - 1)\Lambda + \psi(\Lambda) = \min$  y  $\mathbf{q}\alpha - f(\alpha) = \min$  para  $\mathbf{q}$  dada. La transición de fase  $\mathbf{q}$  representa las estructuras locales del atractor caótico en el punto de bifurcación. La descripción del caos, sin embargo, aún es incompleta. El espectro  $\psi(\Lambda)$  no puede describir las estructuras multifractales universales de los atractores críticos en el borde del caos vía la cascada de duplicación de periodo y la transición cuasiperiódica, mientras que el espectro  $f(\alpha)$  no puede describir las bifurcaciones del caos en los mapeos unidimensionales. En 1989 el grupo de Mori [14] presentó una manera efectiva de estudiar las transiciones de fase  $\mathbf{q}$  en el borde del caos, inspirado en las ideas publicadas por Anania y Politi [72] donde se sugirió que, en el borde del caos, la sensibilidad a las condiciones iniciales sigue un comportamiento de ley de potencias con respecto al número de iteraciones  $n$ .

Consideremos un mapeo unidimensional  $x_{t+1} = f(x_t)$ . Para una órbita  $\{x_t\}$ , ( $t = 1, 2, \dots$ ) la aproximación dinámica inicia con la suma de las rapi-

deces de expansión local de órbitas cercanas al tiempo  $n$

$$S_n(x_0) \equiv \sum_{t=0}^{n-1} \lambda_1(x_t), \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.40)$$

donde  $\lambda_1(x_t) = \ln |df(x_t)/dx_t|$ . En el caso general de una órbita caótica  $S_n(x_0)$  crece linealmente con  $n$  para  $n \gg 1$ , entonces cuando  $n \rightarrow \infty$  las rapideces de expansión local

$$\Lambda_n(x_0) \equiv S_n(x_0/n), \quad (4.41)$$

convergen a el coeficiente de Lyapunov  $\Lambda^\infty$  para casi todos los valores iniciales  $x_0$ . La variancia  $\langle \{S_n(x) - n\Lambda^\infty\}^2 \rangle$  crece también como  $n$ . Esto sugiere que la distribución de las fluctuaciones de  $\Lambda_n(x_0)$  alrededor de  $\Lambda^\infty$  obedece el teorema de límite central. Sin embargo, en el borde del caos el comportamiento de  $S_n(x_0)$  para la órbita crítica  $2^\infty$  es de un crecimiento como  $\ln n$  y exhibe un fenómeno significativo de memoria. Como mencionamos, esta dependencia en  $\ln n$  fué detectada por Anania y Politi para esta órbita crítica [72]. Además,  $S_n(x_0)$  vs  $n$  exhibe una estructura autosimilar de patrones que dan una nueva característica de no mezclado del atractor crítico [14].

### 4.2.1. Comportamiento dinámico del atractor crítico $2^\infty$

Consideremos el mapeo logístico escrito de la siguiente forma

$$x_{t+1} = f_r(x_t) = \mu - x_t^2, \quad (0 \leq r \leq 2) \quad (4.42)$$

que presenta la ruta al caos por duplicación de periodos cuando  $r$  se incrementa hasta llegar al valor crítico  $r = r_\infty = 1,401155189\dots$ , donde el sistema posee un atractor crítico  $2^\infty$  (el atractor de Feigenbaum). Para esta órbita crítica consideremos la suma (4.40), la cual toma la siguiente forma

$$S_n(x_0) = \sum_{t=0}^{n-1} \ln(2|x_t|). \quad (4.43)$$

En este caso, el coeficiente de Lyapunov  $\Lambda^\infty$  es cero, y  $S_n(x_0)$  no crece linealmente con  $n$ , si no que presenta (como veremos) un interesante comportamiento. La estructura temporal de la variancia

$$\langle \{S_n(x)\}^2 \rangle = (1/N) \sum_{u=0}^{N-1} \{S_n(x_u)\}^2 \quad (4.44)$$

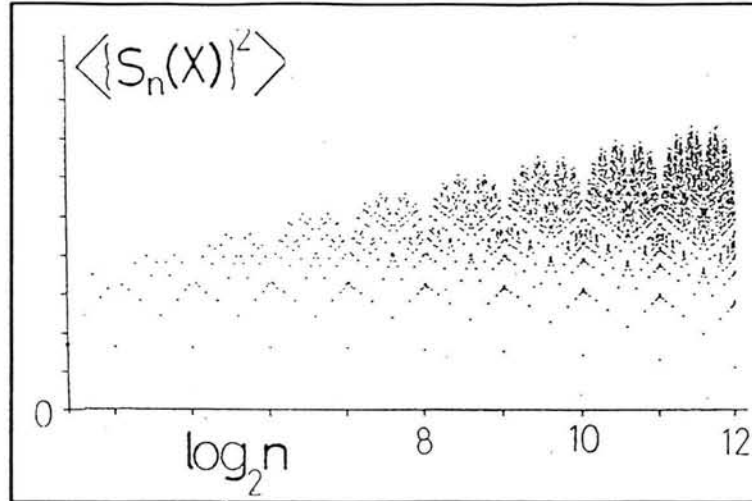


Figura 4.10: Estructura en bloques de  $S_n(x_0)$ , figura tomada de la referencia [14]

consiste de bloques, como se observa en la figura 4.10.

El  $m$ -ésimo bloque se encuentra entre  $n = 2^m$  y  $n = 2^{m+1}$ , ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Cuando  $m$  se incrementa, los bloques exhiben una estructura de autosimilaridad. La envolvente de los bloques crece con  $n$  como  $\ln n$  para  $n$  grande. Esta estructura temporal nos da una importante característica de el atractor de Feigenbaum que no tiene propiedad de mezclado ( $\Lambda^\infty = 0$ ) entonces la memoria del punto inicial persiste indefinidamente. La dependencia como  $\ln n$  de la envolvente de  $\langle \{S_n(x)\}^2 \rangle$  nos lleva al coeficiente algebraico

$$\beta_n(x_0) \equiv S_n(x_0)/\ln n, \quad (n \gg 1) \quad (4.45)$$

que está graficado contra  $n$  en la figura 4.11.

Observamos que  $\beta_n(x_0)$  no converge a ningún valor constante ni diverge para  $n$  grande, si no que presenta una estructura recurrente. Nótese que  $\beta_n(x_0)$  depende de  $x_0$  pero exhibe estructuras similares para diferentes  $x_0$ .

#### 4.2.2. Espectro de fluctuaciones $\psi(\beta)$

La estructura temporal de  $\langle \{S_n(x)\}^2 \rangle$  presenta una dependencia con  $\ln n$ . Esta dependencia nos permite discutir las fluctuaciones de  $\beta_n(x_0)$  como veremos a continuación. La medida de probabilidad para  $\beta_n(x_0)$  de tomar un valor entre  $\beta$  y  $\beta + d\beta$  está dado por  $P(\beta, n)d\beta$  con  $P(\beta, n) \equiv \langle \delta(\beta_n(x) - \beta) \rangle$

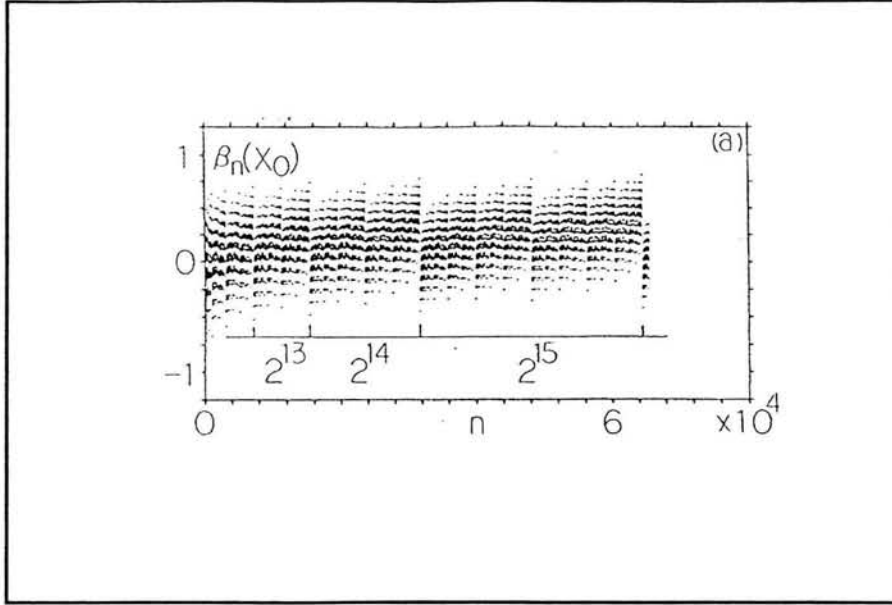


Figura 4.11:  $\beta_n(x_0)$  vs  $n$  figura tomada de la referencia [14]

donde  $\delta(x)$  es la función  $\delta$  de Dirac de  $x$ . Se anticipa la forma de escalamiento algebraica

$$P(\beta, n) = n^{-\psi_\beta(\beta)} P(0, n) \quad (4.46)$$

para  $n$  grande, donde  $\psi(\beta)$  es una función cóncava de  $\beta$  con  $\psi_\beta(\beta) \geq \psi_\beta(0) = 0$  y representa el espectro de fluctuaciones de  $\beta$ . Con objeto de describir las fluctuaciones grandes de  $\beta$  explícitamente, introducimos la función de partición

$$Z_n(\mathbf{q}) \equiv \int d\beta P(\beta, n) n^{-(\mathbf{q}-1)\beta}, \quad (-\infty < \mathbf{q} < \infty) \quad (4.47)$$

y las funciones de estructura termodinámica

$$\Phi_\beta(\mathbf{q}) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (1/\ln n) \ln Z_n(\mathbf{q}), \quad (4.48)$$

$$\beta(\mathbf{q}) \equiv d\Phi_\beta(\mathbf{q})/d\mathbf{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{1/Z_n(\mathbf{q})\} \int d\beta P(\beta, n) \beta n^{-(\mathbf{q}-1)\beta}, \quad (4.49)$$

$$\sigma_\beta(\mathbf{q}) = -d\beta(\mathbf{q})/d\mathbf{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\ln n/Z_n(\mathbf{q})\} \int d\beta P(\beta, n) \{\beta - \beta(\mathbf{q})\}^2 n^{-(\mathbf{q}-1)\beta}, \quad (4.50)$$

donde  $\beta(\mathbf{q})$  es el promedio de  $\beta$  con peso  $n^{-(\mathbf{q}-1)\beta}$  y  $\sigma_\beta(\mathbf{q})$  es la variancia pesada con  $\mathbf{q}$  de las fluctuaciones de  $\beta$  alrededor de  $\beta(\mathbf{q})$ . Si insertamos (4.46)



en (4.47) entonces  $Z_n$  es dominada por el valor  $\beta(\mathbf{q})$  de  $\beta$  que minimiza el potencial  $\phi_{\mathbf{q}}(\beta) \equiv (\mathbf{q} - 1)\beta + \psi_{\beta}(\beta)$  para  $\mathbf{q}$  dada, llevando a  $\Phi_{\beta}(\mathbf{q}) = \min_{\beta} \{\phi_{\mathbf{q}}(\beta)\}$ . La figura 4.12 muestra estas funciones estructurales para la órbita  $2^{\infty}$  donde  $\psi(\beta)$  fué obtenida numéricamente a partir de una órbita grande  $\{x_t\}$ , ( $t = 0, 1, \dots, N - 1$ ) empleando

$$P(\beta, n) = (1/N) \sum_{u=0}^{N-1} \delta(\beta_n(x_u) - \beta), \quad (4.51)$$

$$\psi_{\beta}(\beta) = -(1/\ln n) \ln \{P(\beta, n)/P(0, n)\} \quad (4.52)$$

con  $N = 2^{23}$ .

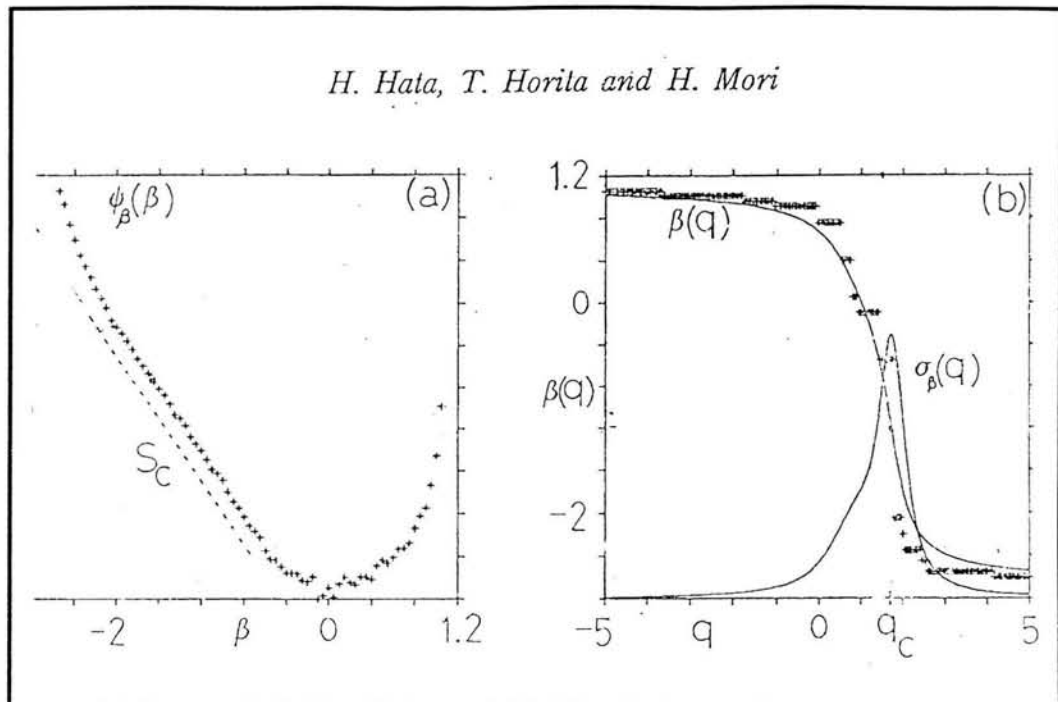


Figura 4.12: Función  $\psi(\beta)$  del mapeo logístico en el borde del caos, figura tomada de la referencia [14]

La figura indica que  $\psi_{\beta}(\beta)$  tiene una parte lineal para  $\beta$  negativa. Esta parte lineal se debe a los extremos del mapeo  $f_r(x)$  cuya vecindad produce valores negativos grandes de  $\lambda_1(x)$ . Su pendiente  $s_c \approx -0,7$ , es consistente con el estimado teórico  $s_c = \ln 2 / (z - 1) \ln \alpha = -0,7555$ ; donde  $\alpha = \alpha(z = 2)$  es la constante de Feigenbaum y  $z$  es el orden del mapeo y  $\ln 2 / \ln \alpha(z)$  es el exponente de singularidad  $\alpha$  de la medida natural invariante en el punto

### 4.3 No extensividad en el borde del caos de mapeos unimodales 87

$x = 0$  con  $f'_r(0) = 0$ . La función  $\sigma_\beta(\mathbf{q})$  tiene un pico preciso en  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_c = 1 - s_c \approx 1,7$  que se espera diverja para  $n \rightarrow \infty$  asegurando la transición de fase  $\mathbf{q}$  de  $\beta(\mathbf{q})$  en  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_c$  [14].

### 4.3. No extensividad en el borde del caos de mapeos unimodales

La generalización no extensiva de la mecánica estadística de Boltzmann y Gibbs (BG) ha despertado mucho interés y debate en los últimos años debido a que existe firme evidencia [18, 20, 21] de su aplicación en circunstancias específicas donde el sistema se encuentra fuera del rango de validéz de la teoría canónica de BG. Entender y reconocer la existencia de tal límite de validéz es uno de los retos de la física estadística de nuestros días. Las situaciones físicas que no satisfacen las condiciones de equilibrio de BG pueden ser, por ejemplo, insuficiente aleatoriedad y movimiento limitado o no uniforme en el espacio de fase, provocando propiedades dinámicas anómalas [21, 18, 19, 22]. Un claro ejemplo de este caso son los mapeos disipativos no lineales unidimensionales. Estos describen una gran variedad de sistemas con un grado de libertad. La no linealidad puede inducir al sistema a exhibir un comportamiento complejo con algunos patrones estructurales en el espacio de fase. La sensibilidad a las condiciones iniciales es un aspecto relevante asociado con la estructura del atractor dinámico [18, 21, 1]. En general la sensibilidad es medida como un efecto de la incertidumbre en las variables del sistema. Para sistemas que exhiben órbitas periódicas el efecto de alguna incertidumbre en las condiciones iniciales provoca una evolución temporal exponencial con  $\xi(t) \equiv \lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \Delta x(t)/\Delta x(0) \sim \exp \lambda t$ , donde  $\lambda$  es el llamado exponente de Lyapunov [1, 3],  $\xi$  es la sensibilidad,  $\Delta x(0)$  y  $\Delta x(t)$  son las incertidumbres a los tiempos 0 y  $t$ . Cuando el exponente de Lyapunov  $\lambda < 0$ ,  $\xi(t)$  caracteriza una rapidez de contracción hacia la órbita periódica. Por otro lado, para  $\lambda > 0$ , ésta caracteriza una rapidez de divergencia de las órbitas caóticas. En los puntos de bifurcación y puntos críticos (borde del caos) el exponente de Lyapunov se hace cero [1, 3]. Recientemente, se ha propuesto que esta característica está relacionada con una sensibilidad de ley de potencia [18, 19, 21, 22, 20] a las condiciones iniciales de la forma

$$\xi(t) = [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{1/(1-q)}, \quad (4.53)$$

con  $\lambda_q$  definiendo el tiempo de escala característico después que el comportamiento de ley de potencia aparezca.

Los valores de  $\lambda_q$  para el mapeo logístico han sido encontrados analíticamente mediante técnicas de grupo de renormalización obteniéndose que su valor máximo es  $\lambda_q = 1,323\dots$  [21, 22].

Una forma cuantitativa de medir la sensibilidad a las condiciones iniciales es a partir de una partición particular del espacio de fase, la evolución temporal del número de celdas ocupadas  $W(t)$  por un conjunto de copias idénticas del sistema. Para órbitas periódicas y caóticas

$$W(t) = W(0) \exp\{\lambda t\} \quad (4.54)$$

en el caso particular de equiprobabilidad se espera la conocida igualdad de Pesin

$$K = \lambda \quad \text{si} \quad \lambda \geq 0 \quad (4.55)$$

donde  $K$  es la entropía de Kolmogorov-Sinai definida como la variación por unidad de tiempo de la entropía estándar de Boltzmann Gibbs

$$K = S/t = -\sum_i p_i \ln p_i / t \quad (4.56)$$

Esta igualdad provee una unión entre la sensibilidad a las condiciones iniciales y la evolución dinámica de la entropía relevante. En los puntos de bifurcación y puntos críticos, para un conjunto de condiciones iniciales concentrados en una sola celda, esto es  $W(0) = 1$ , se ha propuesto que

$$W(t) = [1 + (1 - q)K_q t]^{1/(1 - q)}, \quad (4.57)$$

donde  $K_q$  es la entropía generalizada de Kolmogorov Sinai definida como la rapidez de variación de la entropía no extensiva de Tsallis

$$K_q = S_q/t = (1 - \sum_i p_i^q) / t(q - 1). \quad (4.58)$$

En artículos recientes [67] se ha mostrado que la igualdad de Pesin puede generalizarse encontrándose

$$K_q = \lambda_q \quad \text{si} \quad \lambda_q \geq 0. \quad (4.59)$$

Es importante mencionar que el hallazgo fundamental que justifica la expresión anterior es que la forma entrópica que cumple con la igualdad de Pesin es precisamente la entropía generalizada o de Tsallis, lo cual es

### 4.3 No extensividad en el borde del caos de mapeos unimodales 89

una evidencia firme de la validez de esta expresión para caracterizar este tipo de trabajos. La entropía de Tsallis ha sido aplicada exitosamente en trabajos recientes [24] en una serie de sistemas no extensivos proporcionando un respaldo teórico para entender algunas de las propiedades físicas inusuales que se presentan en estos sistemas.

#### 4.3.1. Identidad de Pesin no extensiva

En artículos recientes [21, 22] se han probado rigurosamente las predicciones de la teoría no extensiva en las bifurcaciones dobles y tangentes de los mapeos tipo logístico, así como para el borde del caos de estos mismos mapeos. Lo anterior se ha llevado a cabo analíticamente empleando la técnica de grupo de renormalización (GR) y tomando en cuenta que la sensibilidad a las condiciones iniciales sigue un comportamiento descrito por una función exponencial- $q$  [21, 22], lo cual expresamos de la siguiente manera

$$\xi_t = \exp(\lambda_q t) \equiv [1 - (q - 1)\lambda_q t]^{-1/(q-1)}, \quad (4.60)$$

donde  $\xi_t$  es la sensibilidad a las condiciones iniciales. La expresión anterior contiene el índice entrópico no extensivo  $q$  y el coeficiente de Lyapunov  $q$ -generalizado  $\lambda_q$ . La ecuación (4.60) se ha propuesto como la contraparte de la sensibilidad exponencial usual  $\xi_t = \exp(\lambda_1 t)$  a las condiciones iniciales que prevalece cuando el coeficiente de Lyapunov ordinario  $\lambda_1$  no se hace cero (La forma exponencial de BG se recobra cuando  $q \rightarrow 1$ ). Mediante la técnica del grupo de renormalización ha sido posible conocer las expresiones para  $\lambda_q$  en los estados críticos mencionados de los mapeos tipo logístico. Estas expresiones se han interpretado en términos de los parámetros del mapeo de punto fijo y corroborados numéricamente vía cálculos *a priori*. Específicamente, para el borde del caos del mapeo logístico  $\lambda_q$  y  $q$  están dados por  $\lambda_q = \ln \alpha / \ln 2$  y  $q = 1 - \ln 2 / \ln \alpha$  donde  $\alpha$  es la constante universal de Feigenbaum. La fórmula de Pesin relaciona la entropía de Kolmogorov-Sinai  $\mathcal{K}$  y los coeficientes de Lyapunov de mapeos no lineales y ha sido de gran utilidad para el análisis cuantitativo de los estados caóticos dinámicos. Esta fórmula involucra la conexión entre la medida de la pérdida de información por  $\mathcal{K}$  y los coeficientes de Lyapunov  $\lambda^{(l)}$  para estados caóticos. La desigualdad general  $\mathcal{K} \leq \Sigma \lambda^{(l)}$  donde la suma sobre los  $\lambda^{(l)} > 0$  se reduce para sistemas unidimensionales a la identidad de Pesin  $\mathcal{K} = \lambda$ ,  $\lambda > 0$ . Como punto inicial consideremos la tasa de producción de entropía  $q$  generalizada definida vía

$K_q t = S_q(t) - S_q(0)$ , para  $t$  grande donde

$$S_q \equiv \sum_i p_i \ln_q \left( \frac{1}{p_i} \right) = \frac{1 - \sum^W p_i^q}{q - 1} \quad (4.61)$$

es la entropía de Tsallis y donde

$$\ln_q y \equiv (y^{1-q} - 1)/(1 - q) \quad (4.62)$$

es el inverso de la exponencial  $q$ . En el límite  $q \rightarrow 1$ ,  $K_q$  se vuelve

$$K_1 \equiv t^{-1}[S_1(t) - S_1(0)] \quad (4.63)$$

donde  $S_1(t) = -\sum^W p_i(t) \ln p_i(t)$  y  $p_i$  es la distribución de probabilidad obtenida de las frecuencias relativas en que las posiciones de un conjunto de trayectorias ocurren con celdas  $i = 1, \dots, W$  en el tiempo de iteración  $t$ . Las condiciones iniciales para estas trayectorias tienen una distribución preestablecida  $p_i(0)$  y el espacio de fase en el que el mapeo es definido se ha partido en un gran número  $W$  de celdas disjuntas de longitud  $l_i$ . La diferencia entre  $K_1$  y la entropía de Komogorov-Sinai  $\mathcal{K}$  es que esta última tiene una definición mas elaborada ya que considera las trayectorias enteras de sus posiciones iniciales en el límite  $t \rightarrow \infty$ . La relación entre  $\mathcal{K}$  y  $K_1$  se ha investigado para muchos mapeos caóticos estableciéndose que, la igualdad  $\mathcal{K} = K_1$ , ocurre para un estado intermedio en la evolución de la entropía  $S_1(t)$  después de un transitorio dependiente de la distribución inicial y antes de una aproximación asintótica a un valor de equilibrio constante [73]. La entropía de Kolmogorov-Sinai  $q$  generalizada  $K_q$  se obtiene de la misma forma que  $\mathcal{K}$  pero con el uso de la ecuación (4.61). En éste caso encontramos el análogo intermedio donde  $\mathcal{K}_q = K_q$ . Esto es suficiente para evaluar la tasa de crecimiento de  $K_q$  para una distribución inicial uniforme definida en la partición de celdas de igual longitud para establecer la validez de la identidad de Pesin generalizada  $K_q = \lambda_q$ .

Consideremos un conjunto de  $N$  trayectorias con posiciones iniciales  $x_{in}$  distribuidas uniformemente a lo largo del intervalo  $[1 - l, 1]$ . Partamos este intervalo en un cierto número  $I$  de segmentos de longitud  $l_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$  que no se intersectan con  $l = \sum l_i$ . Para  $l$  suficientemente chica las iteraciones de la forma  $\tau = (2k + 1)2^{n-k}$  transforman los intervalos  $l_i$  en  $l_i^{(\tau)}$  de acuerdo a  $l_i^{(\tau)} + \alpha^m l_i =$ , entonces los cocientes de los intervalos permanecen constantes, esto es  $l_i/l = l_i^{(\tau)}/l^\tau$ . Por lo tanto, el número de trayectorias inicial en cada

### 4.3 No extensividad en el borde del caos de mapeos unimodales 91

intervalo  $Nl_i/l$  permanece fijo para todos los tiempos  $\tau < t$ . Ahora podemos calcular la tasa de la producción entrópica. Esto se hace fácilmente con el uso de una partición  $W$  de celdas de igual longitud  $l$ . Si observamos en escala logarítmica la evolución de la distribución  $p_i(\tau)$  de posiciones de un conjunto de trayectorias en el borde del caos iniciando de una distribución uniforme  $p_i(1)$  de posiciones contenidas en una sólo celda de longitud  $l$  adyacente a  $x = 1$  corroboraremos la constancia de la uniformidad en el tiempo de la distribución ver figura 4.13 [67].

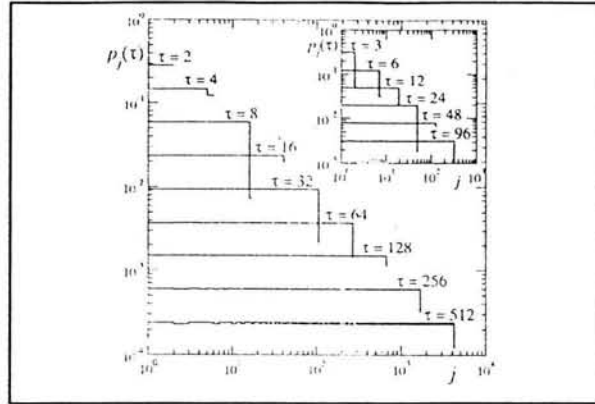


Figura 4.13: Evolución en el tiempo en escala logarítmica de la distribución  $p_j(\tau)$  de trayectorias en el borde del caos [67]

Si denotamos por  $W_{t_k}$  el número de celdas que el conjunto ocupa en el tiempo  $t_k = \tau - 2k - 1$  y por  $\Delta x_{t_k}$  la longitud total del intervalo que forman estas celdas adyacentes, tenemos  $W_{t_k} = \Delta x_{t_k}/l$  y en el límite  $l \rightarrow 0$  (debido a que  $W_{t_k} = (\Delta x_{t_k}/\Delta x_{t_k=0})(\Delta x_{t_k=0}/l)$ ) obtenemos el resultado de que  $W_{t_k} = \xi_{t_k}$ . Como la distribución es uniforme y debido a que

$$\xi_{t_k} = \exp_q[\lambda_q^{(k)} t_k], \quad (4.64)$$

la entropía está dada por  $S_q(t_k) = \ln_q W_{t_k} = \lambda_q^{(k)} t_k$ , de donde

$$K_q^k = \lambda_q^k \quad (4.65)$$

con  $W_{t_k=0} = 1$ . Los resultados numéricos que corroboran ésta expresión se muestran en la figura 4.14 [67].

Una observación importante acerca de la estructura del formalismo no extensivo es que la expresión de la entropía equiprobable  $\ln_q W_t$  puede obtenerse

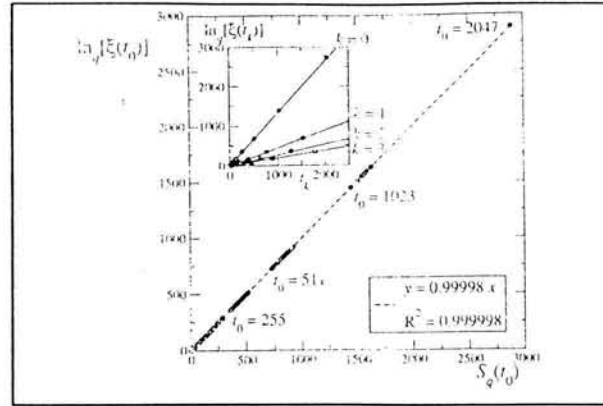


Figura 4.14: Corroboración numérica de la identidad de Pesin generalizada  $K_q^{(k)} = \lambda_q^{(K)}$  en el borde del caos [67]

no sólo de  $S_q$  dada por la ecuación 4.61 si no también por

$$S_Q \equiv -\sum_i p_i \ln_Q(p_i), \quad (4.66)$$

donde  $S_Q = S_{2-Q} = S_q$ , debido a la propiedad inversa de la exponencial  $q$  se lee como

$$\ln_q y = -\ln_{2-q}(1/y) \quad (4.67)$$

para el logaritmo  $q$  y que introduce un par de índices conjugados  $Q = 2 - q$ .

### 4.3.2. El índice entrópico y las dimensiones generalizadas

La expansión hacia el atractor crítico de un conjunto de condiciones iniciales concentradas alrededor del punto de inflexión del mapeo puede caracterizarse por  $S_q$  evolucionando a rapidez constante. Los argumentos de escalamiento han mostrado [18, 19, 20] que el índice entrópico apropiado  $q$  está relacionado con la estructura multifractal del atractor dinámico crítico a través de

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{\alpha_{min}} - \frac{1}{\alpha_{max}} \quad (4.68)$$

donde  $\alpha_{min}$  y  $\alpha_{max}$  son los extremos de las singularidades del espectro multifractal del atractor crítico  $f(\alpha)$  [3, 27]. Esta última expresión es sumamente interesante ya que relaciona la parte dinámica del sistema con la parte estática de éste y ha sido estudiada para la familia de mapeos tipo logístico



### 4.3 No extensividad en el borde del caos de mapeos unimodales 93

y para el mapeo del círculo. El valor de  $q$  se ha determinado por diferentes métodos (analíticos y numéricos [18, 19, 21]) encontrándose para el caso del mapeo logístico un valor de  $q = 0,2445\dots$ . A pesar de que la evolución temporal de los sistemas dinámicos críticos dependen fuertemente del conjunto inicial particular se han encontrado algunas leyes de escalamiento para un conjunto de condiciones iniciales concentradas alrededor del punto de inflexión del mapeo, estas generalmente no son universales con respecto a todo el conjunto de condiciones iniciales. Numéricamente se ha estudiado la evolución temporal crítica del volumen del espacio de fase ocupado por un conjunto de condiciones iniciales distribuidas sobre todo el espacio de fase. Este conjunto de condiciones iniciales se espera se contraiga hacia el atractor crítico. Los resultados numéricos muestran una dependencia entre  $W(t)$  y la dimensión fractal  $D_0$  para mapeos unidimensionales tipo logístico [19]. Los mapeos tipo logístico son los sistemas dinámicos unidimensionales mas simples que nos permiten una investigación cercana de los exponentes críticos relacionados con el borde del caos. Como ya hemos mencionado esta familia de mapeos esta expresada por

$$x_{t+1} = 1 - r|x_t|^z, \quad (4.69)$$

donde  $z$  es el máximo del mapeo en la vecindad del punto extremo  $x = 0$ . Es bien conocido que estos mapeos tienen propiedades topológicas que no dependen de  $z$ . Sin embargo las propiedades métricas como los exponentes de Feigenbaum y el espectro multifractal sí dependen de  $z$ . En general, la dimensión fractal  $D_0(z) < 1$  y entonces la trayectorias no pueden ocupar todo el espacio de fase [67]. Para un conjunto de condiciones iniciales distribuidos en la vecindad del punto de inflexión se ha encontrado que el volumen del espacio de fase ocupado por el conjunto crece siguiendo un rico patrón con los límites superiores gobernados por la ley de potencias

$$W_{max}(t) \propto t^{1/(1-q)} \quad (4.70)$$

donde  $q$  es el índice entrópico que caracteriza la entropía de Tsallis relevante que crece a rapidez constante. Se ha encontrado que el exponente dinámico  $1/(1 - q)$  se encuentra directamente relacionado con los exponentes de escalamiento geométrico relacionados con los extremos del atractor dinámico.

## 4.4. Planteamiento del problema

A continuación estableceremos el propósito de este trabajo de investigación.

Como hemos visto en este capítulo, los mapeos con máximo de orden  $z$  han sido muy estudiados desde diferentes puntos de vista. Nosotros nos encontramos interesados en estudiar estos sistemas, dados por la ecuación

$$f(x) = 1 - r|x|^z, \quad (4.71)$$

cuando el parámetro de control  $r = r_\infty$ . En este valor el sistema pasa de tener un comportamiento periódico (para valores de  $r < r_\infty$ ) a uno caótico (donde  $r > r_\infty$ ) y esta situación se conoce como borde del caos. El atractor de estos sistemas en este estado es un multifractal conocido como *atractor de Feigenbaum*.

Este caso ha sido estudiado desde distintas ópticas, la primera de ellas [27] es a través de sus propiedades de escalamiento y relaciones entre constantes universales mediante el grupo de renormalización y explotando las propiedades de cuasiperiodicidad del atractor [32, 33, 27]. De ahí conocemos información importante a cerca de la autosemejanza y las escalas características de las diferentes variables que participan en el problema. Encontramos que, para caracterizar la estructura del multifractal que constituye el atractor del sistema en el borde del caos, tenemos diferentes funciones de escalamiento, una de ellas, la función  $\sigma(m, z)$ , se define como

$$1/\sigma(m, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|d_{k,m}|}{|d_{k+1,m}|}, \quad (4.72)$$

y nos da los factores de escala característicos del sistema a través de los diámetros  $|d_{k,m}| = |f_k(0)^{2^{k+1}+m} - f_k(0)^m|$ . Por ejemplo, cerca de  $x = 0$  los puntos del multifractal se encuentran muy espaciados comparados con el resto de las zonas de éste, ahí la escala de longitud característica es  $\alpha(z)^{-1}$  (donde  $\alpha(z)$  es la constante de Feigenbaum del mapeo de orden  $z$ ) y corresponde a

$$1/\sigma(0, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|d_{k,0}|}{|d_{k+1,0}|} = \alpha(z). \quad (4.73)$$

Mientras que en la zona cercana a  $x = 1$  los puntos del atractor se encuentran muy juntos, la escala de longitud característica en esta región es  $\alpha(z)^{-z}$  y

corresponde a [27]

$$1/\sigma(1, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|d_{k,1}|}{|d_{k+1,1}|} = \alpha(z)^z. \quad (4.74)$$

Los índices de acumulación  $\alpha_i$  del sistema nos hablan acerca de las escalas que separan los puntos del multifractal, su distribución es la llamada función  $f(\alpha)$  y su correspondiente transformada de Legendre nos dá las dimensiones generalizadas  $D_q$ . El espectro de las dimensiones generalizadas  $D_q$  vs  $q$ , muestra todas las dimensiones locales del sistema, entre ellas un caso particular es la dimensión de Hausdorff  $D_0$  que corresponde con  $q=0$ . Aquí el índice  $q$  nos sirve para recorrer distintas zonas del multifractal y observar la dimensión dominante en cada valor de  $q$ . Todas estas funciones nos ayudan a caracterizar el aspecto estático o estructural del sistema y nos dan información valiosa acerca de las escalas dominantes en cada zona de éste [3].

Una segunda manera de abordar el problema [14, 31] es a través de su estudio por medio de las herramientas propias de la mecánica estadística [3], planteando analogías entre cantidades del sistema y cantidades termodinámicas como las funciones de partición, las energías libres y las ecuaciones de estado, además de fenómenos como transiciones de fase. Entre estas cantidades existen relaciones útiles que nos permiten extraer a partir de una función de partición generalizada todas las cantidades que nos ayudan a estudiar la dinámica y la estática del sistema (entropía generalizada, presión topológica, exponente de Lyapunov generalizado y dimensiones generalizadas). Así, podemos estudiar los aspectos estáticos y dinámicos del multifractal a través del espectro de dimensiones generalizadas y del espectro de exponentes de Lyapunov generalizados respectivamente. Es importante enfatizar que el caso que estamos analizando, el borde del caos, es mas complicado que el que se refiere a los regímenes caóticos o periódicos de estos mapeos ya que en este estado el sistema no es ergódico. En este caso, el vínculo entre las cantidades anteriores no es inmediato y todavía no es muy claro. De hecho, el exponente de Lyapunov  $\lambda$  es cero en el borde del caos y de acuerdo con la identidad de Pesin,  $\lambda = K$  (donde  $K$  es la entropía de Kolmogorov-Sinai), esto es, esta entropía también es cero ahí. El exponente de Lyapunov  $\lambda$  depende además de las condiciones iniciales por lo que tenemos estrictamente un conjunto de valores de éste. Para definir y estudiar el espectro de esta cantidad en el borde del caos se requiere la consideración fundamental de que en este punto,

la sensibilidad a las condiciones iniciales no sigue un comportamiento exponencial sino una ley de potencias, como lo establecieron Anania y Politi en 1988 [72]. Esta observación es clave y permite generar un espectro de exponentes de Lyapunov generalizados  $\beta$ , definidos por  $\beta(x_0) = \ln |f^{n'}(x_0)| / \ln n$ . La construcción del espectro de exponentes de Lyapunov generalizados y las funciones de “energía libre”  $\psi(\beta)$  y  $\phi(q)$  dadas por las ecuaciones 4.52 y 4.49 a través del formalismo termodinámico fué introducido por Mori en 1988 [14, 31], y permite observar transiciones de fase  $q$  o tipo Mori en el espectro de exponentes de Lyapunov generalizados [14]. Estas transiciones de fase se deben a que existen diferentes estructuras locales que dominan los factores de expansión del sistema. El pasar de una sección del sistema donde domina cierta estructura local asociada a la cual tenemos un factor de expansión local para esa parte, a otra sección donde la estructura dominante es distinta a la anterior, provoca una transición de fase en el espectro de exponentes de Lyapunov generalizados  $\beta$ . Las transiciones de fase de Mori se presentan en ciertos valores críticos de  $q = q_{ci}$  y originan en la función  $\psi(\beta)$  una sección lineal con pendiente  $s_{ci} = (1 - q_{ci})$ .

Una tercera y mas reciente aproximación al problema es mediante la termoestadística no extensiva o de Tsallis [18, 19, 67, 22]. En este caso la observación clave hecha por Politi [72] de que, en el borde del caos, la distribución que rige el comportamiento del sistema no es exponencial si no tipo ley de potencias, lleva a su generalización a través de las funciones exponenciales  $q$ . Estas funciones exponenciales  $q$  están definidas por

$$\exp_q a \equiv [1 + (q - 1)a]^{\frac{1}{q-1}} \quad (4.75)$$

y cuentan con el índice de no extensividad  $q$  característico de cada sistema, cuando  $q \rightarrow 1$  recobramos la función exponencial normal. La sensibilidad a las condiciones iniciales  $\xi$  es una cantidad que en el borde del caos sigue un comportamiento tipo ley de potencia y el exponente de Lyapunov  $q$  generalizado,  $\lambda_q$ , se define a través de esta estructura matemática como

$$\xi(t) = [1 - (1 - q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}} \equiv \exp_q(\lambda_q t). \quad (4.76)$$

Mediante el uso del teorema de Pesin generalizado, se ha probado [67] que la entropía que debe usarse para estudiar este tipo de sistemas es la no extensiva o de Tsallis, dada por

$$S_q = \frac{1}{q-1} \{1 - \sum_i^W p_i^q\}, \quad (4.77)$$

donde  $p_i$  es la distribución de probabilidad obtenida de las frecuencias relativas en que las posiciones de un conjunto de trayectorias ocurren con celdas  $i = 1, \dots, W$ , en el tiempo de iteración  $t$ . Debido a que ésta cumple con la identidad de Pesin generalizada

$$\lambda_q = S_q. \quad (4.78)$$

Como mencionamos, las estructuras matemáticas anteriores cuentan con un índice de no extensividad  $q$ . El límite de estas funciones cuando  $q \rightarrow 1$  es la exponencial normal y con ello recobramos la estadística tradicional de Boltzmann-Gibbs. Sin embargo, en el borde del caos, este índice es diferente de 1 y ha sido calculado por distintos métodos [18, 19, 21], en el caso del mapeo logístico  $z = 2$  su valor es  $q = 0,2445$ . Otro detalle importante es que se ha encontrado una relación entre éste índice no extensivo y las propiedades estáticas del multifractal [19] dada por

$$\frac{1}{1-q} = D_{-\infty}^{-1} - D_{\infty}^{-1}. \quad (4.79)$$

Esta relación indica una conexión entre la dinámica y la estática del sistema ya que el índice de no extensividad  $q$  se encuentra relacionado con el exponente de Lyapunov  $q$  generalizado  $\lambda_q$  que nos indica el comportamiento del sistema durante su evolución temporal, mientras que las dimensiones generalizadas  $D_{\infty}$  y  $D_{-\infty}$  nos caracterizan la estructura del multifractal en las zonas donde los puntos de éste se encuentran mas y menos concentrados, respectivamente.

Como vemos, el estudio de este tipo de sistemas no lineales mediante la termoestadística no extensiva ha permitido encontrar resultados importantes y sugiere un formalismo generalizado adecuado para este tipo de problemas, sin embargo quedan aún muchas preguntas abiertas.

En este trabajo de tesis se pretende esclarecer algunas de ellas a través de resultados rigurosos, empleando los formalismos termodinámicos tradicionales y el grupo de renormalización, para establecer las conexiones entre los resultados obtenidos mediante el análisis no extensivo del sistema y los viejos resultados obtenidos por medio de la termodinámica de sistemas caóticos.

Específicamente los propósitos de este trabajo son:

- Dar una explicación acerca de la relación entre las propiedades dinámicas del sistema y la estructura multifractal del atractor.

- Encontrar de manera rigurosa el valor del índice de no extensividad  $q$  para la familia de mapeos tipo logístico.
- Establecer la conexión entre éste índice de no extensividad obtenido a partir del análisis no extensivo del sistema y los valores de  $q$  críticos presentes en las transiciones de fase de Mori.
- Mostrar la equivalencia entre el estudio del sistema a través de las funciones de estructura termodinámica de Mori y su estudio mediante la termoestadística generalizada o de Tsallis.

# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1. Análisis de las propiedades estáticas del atractor de Feigenbaum mediante el grupo de renormalización

Una clase importante de multifractales son los atractores originados por la iteración de mapeos no lineales. Un ejemplo prototípico es el llamado atractor de Feigenbaum, también conocido como borde del caos, generado por los mapeos tipo logístico. Los atractores de esta gran familia de mapeos no lineales (conocidos además como mapeos unimodales o con máximo de orden  $z$ ) comparten características de autosemejanza y escalamiento muy importantes que permiten aplicar de una manera sencilla y transparente la técnica del grupo de renormalización. Esta familia de mapeos se expresa mediante la siguiente ecuación

$$f(x) = 1 - r|x|^z. \quad (5.1)$$

Para el parámetro de control  $r = r_\infty$ , la dinámica está en el borde del caos, es decir donde el sistema pasa de tener un comportamiento periódico a uno caótico. El atractor de dichos mapeos en este punto, es un multifractal (conocido como atractor de Feigenbaum) y tiene la característica de que se encuentra formado por dos partes: una a la que llamamos par (ya que está constituida por las iteraciones correspondientes a los tiempos pares) y otra impar (que esta formada por las iteraciones correspondientes a los tiempos impares). La parte par reproduce todo el sistema original por medio de un factor de re



escalamiento característico, mientras que la parte impar es cualitativamente similar a todo el conjunto [48].

En la figura 5.1, hemos graficado en escala logarítmica los valores absolutos de las primeras iteraciones del mapeo logístico en el borde del caos ( $r_\infty = 1,401155\dots$  y  $z = 2$ ),

$$x(t+1) = 1 - r_\infty |x(t)|^2, \quad (5.2)$$

con la condición inicial de  $x(0) = 0$  que, como sabemos, genera un ciclo superestable. Usaremos la notación  $x(t) = f_\infty^t(0)$  donde  $t$  indica el número de iteraciones realizadas. Las etiquetas en la figura indican el tiempo de iteración  $t$ . Nótese la estructura de bandas horizontales y que en la banda superior se encuentra la mitad de las posiciones del atractor (tiempos impares), mientras que en la segunda banda se encuentra un cuarto de las posiciones del atractor y así sucesivamente.

Notemos ahora que la banda superior se elimina mediante la composición funcional del mapeo original, esto es, considerando la órbita generada por el mapeo  $f_\infty^{(2)}(0)$  en lugar de  $f_\infty(0)$ . Las bandas sucesivas son eliminadas considerando las órbitas de  $f_\infty^{(2^k)}(0)$  con  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Las posiciones de la banda superior (tiempos impares de la forma  $t = 1 + 2n$ ), pueden reproducirse aproximadamente por las posiciones de la banda debajo de ésta (tiempos de la forma  $t = 2 + 4n$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) multiplicadas por un factor igual a  $\alpha(z)$  (constante de Feigenbaum para el mapeo logístico  $z = 2$ ); por ejemplo

$$|x(1)| \approx \alpha(z) |x(2)|. \quad (5.3)$$

Las posiciones de la segunda banda son reproducidas por las posiciones de la tercera banda multiplicadas por  $\alpha(z)$ , esto es  $|x(2)| \approx \alpha(z) |x(4)|$  y así sucesivamente; entonces

$$|x(n)| \approx \alpha(z) |x(2n)|. \quad (5.4)$$

Para analizar de la misma manera lo que ocurre con las iteraciones a tiempos impares del mapeo, conviene ahora construir la gráfica de  $|1 - x(t)|$  vs  $t$ , la cual se presenta en la figura 5.2. Observamos que esta gráfica muestra una estructura de bandas similar a la de la figura 5.1. Ahora, en la banda superior se encuentran la mitad de las iteraciones (tiempos pares) y la otra mitad (tiempos impares) se encuentra distribuida en bandas subsecuentes. Las posiciones en el tiempo de cada banda, son reproducidas aproximadamente por las posiciones de la banda debajo de ésta multiplicadas por un factor de  $\alpha(z)^z$ , por ejemplo  $|1 - x(3)| \approx \alpha(z)^z |1 - x(5)|$ .

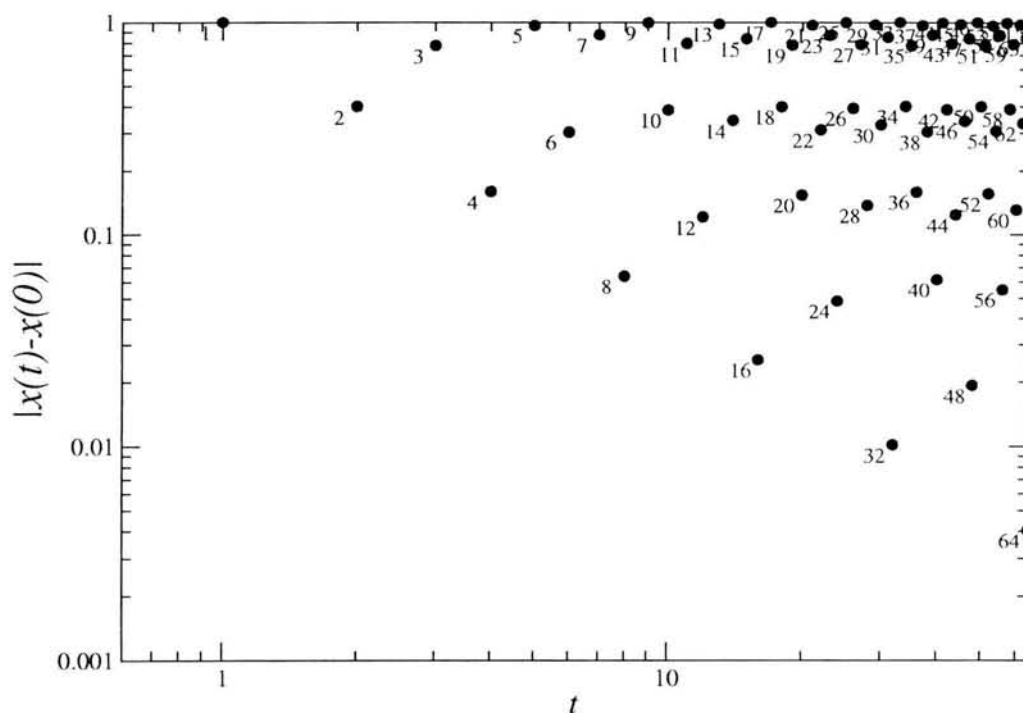


Figura 5.1: Gráfica en escala logarítmica de  $t$  vs  $|x(t) - x(0)|$

Las propiedades de escalamiento anteriores, y la manera de eliminar bandas sucesivas mediante la composición funcional de  $f_\infty(0)$ , sugieren la transformación de grupo de renormalización (TGR) sobre la función de partición estructural que será descrita a continuación, para obtener la expresión que nos dice como cambia la dimensión generalizada  $D_q$  a lo largo de la TGR. Para ello conviene escribir los dos factores de escala como  $\alpha = 2^{\eta_\infty}$  y  $\alpha^z = 2^{\eta_\infty}$ , de donde  $\eta_{-\infty} = \ln \alpha / \ln 2$  y  $\eta_\infty = z \ln \alpha / \ln 2$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>La dependencia de  $\alpha(z)$  con  $z$  será omitida para simplificar la notación.

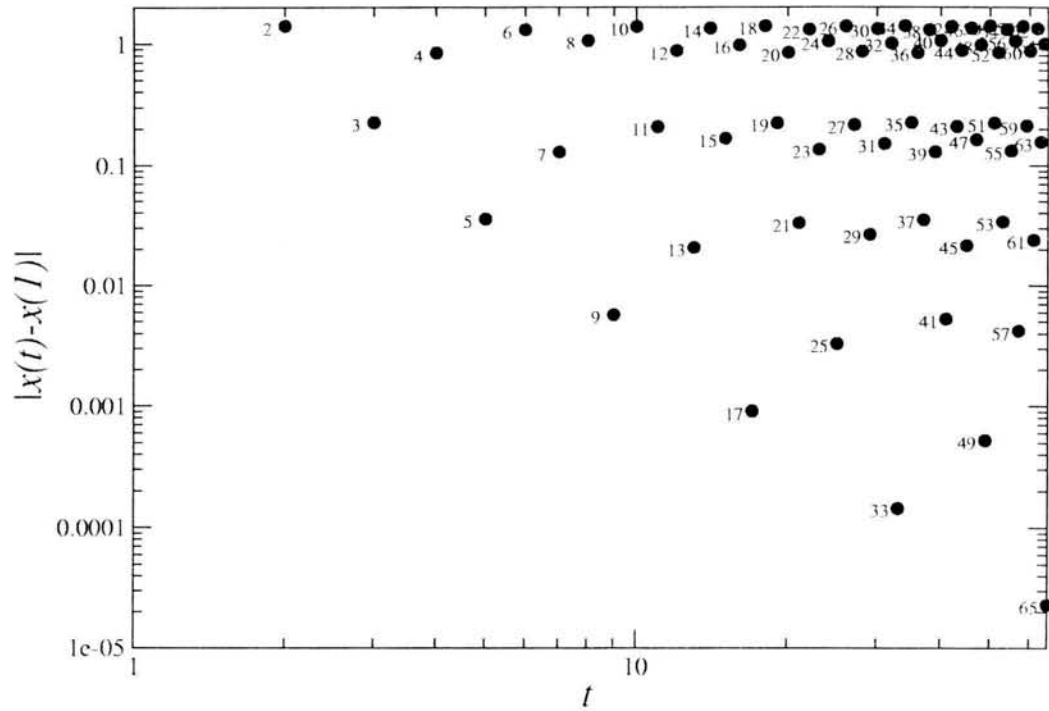


Figura 5.2: Gráfica en escala logarítmica de  $|x(t) - x(1)|$  vs  $t$  para  $z = 2$

### 5.1.1. TGR de 'eliminar la mitad'

Supongamos ahora que tenemos un mapeo  $f(x)$  del tipo descrito anteriormente. Situémonos en el borde del caos, donde el atractor extraño es un multifractal con las características de autosemejanza y escalamiento mencionadas al inicio del capítulo. Cubramos nuestro multifractal con  $i$  segmentos de tamaño irregular  $l_i$ , cada segmento  $l_i$  tendrá asociada una cierta probabilidad  $p_i$ , que será igual a la probabilidad de encontrar una iteración en el intervalo  $i$  ésimo. Con estas cantidades construimos la función de partición estructural del sistema definida en la sección 3.1.2, la cual queda expresada como

$$\Gamma \equiv \sum_{i=1}^W p_i^q l_i^{-\tau} \quad (5.5)$$

donde  $\mathbf{q}$  y  $\tau$  son dos índices independientes que van de  $-\infty$  a  $\infty$ , y como describimos en el capítulo 3, sirven para analizar distintas partes del multifractal dando diferentes pesos a las probabilidades  $p_i$  y a los segmentos  $l_i$  respectivamente.

En general las probabilidades  $p_i$  serán distintas y los tamaños de los intervalos  $l_i$  serán irregulares. Como casos particulares (según escojamos nuestra partición), podemos estudiar distribuciones de probabilidad equiprobable y/o intervalos regulares. Para que la función de partición anterior no diverja ni se anule, pedimos la condición de normalización

$$\Gamma = 1. \quad (5.6)$$

Lo cual fija una relación entre las variables  $\mathbf{q}$  y  $\tau$ , ( $\tau = \tau(\mathbf{q})$ ) ya que deben escogerse de tal manera que se cumpla la ecuación (5.6), estableciéndose de esta forma una relación entre ellas y la dimensión generalizada  $D_{\mathbf{q}}$

$$D_{\mathbf{q}}(\mathbf{q} - 1) = \tau. \quad (5.7)$$

Consideremos ahora una distribución equiprobable normalizada, esto es  $p_i = p = 1/W$ , donde  $W$  representa el número de estados accesibles del sistema. En este caso la función de partición estructural resulta

$$\Gamma = \sum_{i=1}^W p_i^{\mathbf{q}} l_i^{-\tau} = p^{\mathbf{q}} \sum_{i=1}^W l_i^{-\tau} = 1. \quad (5.8)$$

Dividamos nuestro sistema inicial en dos subsistemas, de tal forma que cada uno de ellos preserve la autosemejanza del sistema original. Esto lo conseguimos, como se ha explicado en la sección anterior, mediante la composición funcional que elimina sistemáticamente la mitad de las iteraciones del multifractal original. Pidamos que la función de partición estructural de nuestro nuevo sistema  $\Gamma_1 = 1$  (donde el subíndice 1 indica que hemos dividido el sistema original 1 vez). Las probabilidades asociadas a nuestro nuevo sistema serán ahora  $p_{i,1} = p_1 = 1/W_1$  mientras que el tamaño de los intervalos de nuestro nuevo subsistema estarán denotados por  $l_{i,1}$ . Su función de partición estructural queda entonces expresada por

$$\Gamma_1 = \sum_{i=1}^{W_1} p_{i,1}^{\mathbf{q}_1} l_{i,1}^{-\tau_1} = p_1^{\mathbf{q}_1} \sum_{i=1}^{W_1} l_{i,1}^{-\tau_1} = 1. \quad (5.9)$$

Los exponentes  $\mathbf{q}_1$  y  $\tau_1$  serán en general diferentes de los del sistema original  $\mathbf{q}$  y  $\tau$ . De la ecuación (5.7) tenemos que  $\mathbf{q} = \tau/D_{\mathbf{q}} + 1$  de donde las ecuaciones (5.8) y (5.9) se reescriben como

$$\Gamma = p^{\tau/D_{\mathbf{q}}+1} \sum^W l_i^{-\tau} \quad (5.10)$$

$$\Gamma_1 = p_1^{\tau_1/D_{\mathbf{q}_1}+1} \sum^{W_1} l_{i,1}^{-\tau_1}. \quad (5.11)$$

Despejando  $1/D_{\mathbf{q}}$  y  $1/D_{\mathbf{q}_1}$  de las ecuaciones anteriores tenemos

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}}} = -\frac{\ln \sum^W l_i^{-\tau}}{\tau \ln p} - \frac{1}{\tau} \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}_1}} = -\frac{\ln \sum^{W_1} l_{i,1}^{-\tau_1}}{\tau_1 \ln p_1} - \frac{1}{\tau_1}. \quad (5.13)$$

Los exponentes  $\tau$  y  $\tau_1$  van de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Consideremos  $\tau = \tau_1$  recordando que esto fijará una relación entre nuestras variables  $D_{\mathbf{q}}$ ,  $D_{\mathbf{q}_1}$ ,  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{q}_1$  dada por  $D_{\mathbf{q}}(\mathbf{q} - 1) = D_{\mathbf{q}_1}(\mathbf{q}_1 - 1)$ . Entonces, restando las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}}} - \frac{1}{D_{\mathbf{q}_1}} = -\frac{\ln \sum^W l_i^{-\tau}}{\tau \ln p} + \frac{\ln \sum^{W_1} l_{i,1}^{-\tau}}{\tau \ln p_1}. \quad (5.14)$$

Considerando  $W \approx W_1 \gg 1$ ,  $p \approx p_1 \ll 1$  podemos hacer la aproximación

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}_1}} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} + \frac{\ln(\sum^W l_i^{-\tau} / \sum^{W_1} l_{i,1}^{-\tau})}{\tau \ln p}. \quad (5.15)$$

Ahora procedemos a renormalizar las variables involucradas. Supongamos que cada una de las partes del multifractal reproduce todo el multifractal de acuerdo a la siguiente ley de escalamiento

$$l_i = 2^\eta l_{i,1} \quad (5.16)$$

donde  $\eta$  es una función de escalamiento característica del sistema. Con esto obtenemos

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}_1}} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} + \frac{\ln 2^{-\eta\tau}}{\tau \ln p} \quad (5.17)$$

$$= \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} - \eta \frac{\ln 2}{\ln p}. \quad (5.18)$$

Si repetimos la operación anterior  $k$  veces obtenemos la forma general de la expresión anterior dada por

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}_k}} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} - k\eta \frac{\ln 2}{\ln p} \quad (5.19)$$

donde  $D_{\mathbf{q}_k}$  es la dimensión generalizada del sistema renormalizado  $k$  veces.

El análisis dimensional de esta expresión nos lleva a reescribir el segundo término del lado derecho como el inverso de una dimensión generalizada característica que denotaremos por  $1/D_{\mathbf{q}_c} = \eta \ln 2 / \ln p$ . De donde la ecuación (5.19) se reescribe como

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}_k}} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} - k \frac{1}{D_{\mathbf{q}_c}}. \quad (5.20)$$

Las ecuaciones (5.19) y (5.20) nos dicen como cambia la dimensión generalizada  $D_{\mathbf{q}}$  a través de la TGR.

### 5.1.2. Función $\eta(\mathbf{q})$

A continuación analizaremos más a fondo el significado de la función  $\eta$  definida anteriormente como la función que nos indica la renormalización del tamaño de los intervalos.

Tomemos nuevamente la función de partición estructural del mapeo original y del mapeo obtenido al componer  $2^k$  veces

$$\Gamma = \sum^W p_i^{\mathbf{q}} l_i^{-\tau} = 1, \quad (5.21)$$

$$\Gamma_k = \sum^{W_k} p_{k,i}^{\mathbf{q}_k} l_{k,i}^{-\tau_k} = 1. \quad (5.22)$$

Suponiendo equiprobabilidad e igualando las dos ecuaciones anteriores tenemos

$$p^{\mathbf{q} \sum W} l_i^{-\tau} = p_i^{\mathbf{q}_k \sum W_k} l_{k,i}^{-\tau_k}. \quad (5.23)$$

Recordemos que  $p = 1/W$  y  $p_k = 1/W_k$  se encuentran normalizadas y que al componer  $p = 2^{-k} p_k$  obtenemos

$$p^{\mathbf{q} \sum W} l_i^{-\tau} = (2^k p)^{\mathbf{q}_k \sum W_k} l_{i,k}^{-\tau_k}. \quad (5.24)$$

Ahora deseamos renormalizar nuestro tamaño de intervalos de tal forma que la dimensión fractal del atractor se conserve, esto es, pedimos  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_k$  y  $\tau = \tau_k$  buscando el valor de la función  $\eta$  tal que  $l_i = 2^{k\eta} l_{i,k}$ . De estas condiciones obtenemos

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{q}\Sigma^W l_i^{-\tau}} &= (2^k p)^{\mathbf{q}\Sigma^{W_k} l_{i,k}^{-\tau}}, \\ \Sigma^W l_i^{-\tau} &= (2^k)^{\mathbf{q}\Sigma^{W_k} l_{i,k}^{-\tau}}, \\ \Sigma^W l_i^{-\tau} &= (2^k)^{\mathbf{q}} 2^{k\eta\tau} \Sigma^{W_k} l_{i,k}^{-\tau}, \\ 1 &= 2^{\mathbf{q}} 2^{\eta\tau}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde en el último paso hemos llevado nuestro análisis al límite  $W \approx W_k \gg 1$ , obteniendo finalmente

$$\eta = \mathbf{q}/\tau = \frac{\mathbf{q}}{D_{\mathbf{q}}(\mathbf{q} - 1)}. \quad (5.26)$$

Encontramos entonces que nuestra función  $\eta$  es una función dada por el cociente  $\mathbf{q}/\tau$ .

### 5.1.3. Cálculo de la TGR para mapeos con máximo de orden $z > 1$

A continuación aplicaremos nuestra TGR a un ejemplo específico: los mapeos con máximo de orden  $z$  dados por la siguiente expresión

$$f(x) = 1 - r|x|^z, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad (5.27)$$

donde  $r$  es el parámetro de control que al ser llevado a  $r = r_{\infty}$  nos coloca en el borde del caos.  $z > 1$  es el orden del mapeo y como veremos la mayoría de las propiedades del mapeo dependen de éste.

Trabajemos primero con el mapeo logístico, donde  $z = 2$  y construyamos la gráfica de  $\eta = \mathbf{q}/\tau$  vs  $\mathbf{q}$  (figura 5.3). Esta gráfica la obtenemos a partir del espectro de dimensiones generalizadas que hemos calculado numéricamente empleando el procedimiento reportado en la referencia [70]. Dicho procedimiento consiste en calcular la función de partición estructural equiprobable dada por

$$\Sigma^W p^{\mathbf{q} l_i^{-\tau}} = p^{\mathbf{q}\Sigma^W l_i^{-\tau}} = 1 \quad (5.28)$$

de donde

$$\mathbf{q} = \frac{-\ln \Sigma^W l_i^{-\tau}}{\ln p}. \quad (5.29)$$



La manera de encontrar numéricamente los valores de  $l_i$  y  $p$  es la siguiente. Escogemos como condición inicial  $x_0 = 0$  e iteramos el mapeo logístico  $2^N$  veces. Tomamos como valores  $l_i$  los segmentos delimitados por las iteraciones  $x_j$  y la iteración mas cercana a ésta  $x_k$ . De esta manera, la probabilidad de encontrar una iteración en el intervalo  $l_i = |x_j - x_k|$  será de  $p = 2^{-(N-1)}$ . Para cada valor de  $\tau$  dado, encontramos un valor de  $\mathbf{q}$ , y recordando que al fijar  $\Gamma = 1$  los valores de  $\mathbf{q}$  y  $\tau$  definen la dimensión generalizada  $D_{\mathbf{q}}(\mathbf{q} - 1) = \tau$  tenemos

$$D_{\mathbf{q}} = \frac{\tau}{\mathbf{q}-1}. \quad (5.30)$$

Con ello podemos encontrar numéricamente los valores de  $D_{\mathbf{q}}$ ,  $\tau$  y  $\mathbf{q}$ . Al graficar  $\eta = \mathbf{q}/\tau$  vs  $\mathbf{q}$  obtenemos la figura 5.3.

Observamos dos límites asintóticos, uno de ellos ( $\mathbf{q} \rightarrow -\infty$ ) situado en  $\ln \alpha / \ln 2$  y el otro ( $\mathbf{q} \rightarrow +\infty$ ) situado en  $2 \ln \alpha / \ln 2 = z \ln \alpha / \ln 2$ . Encontramos además una divergencia de la función  $\eta$  para  $\mathbf{q} \rightarrow 1$ . Una aproxima-

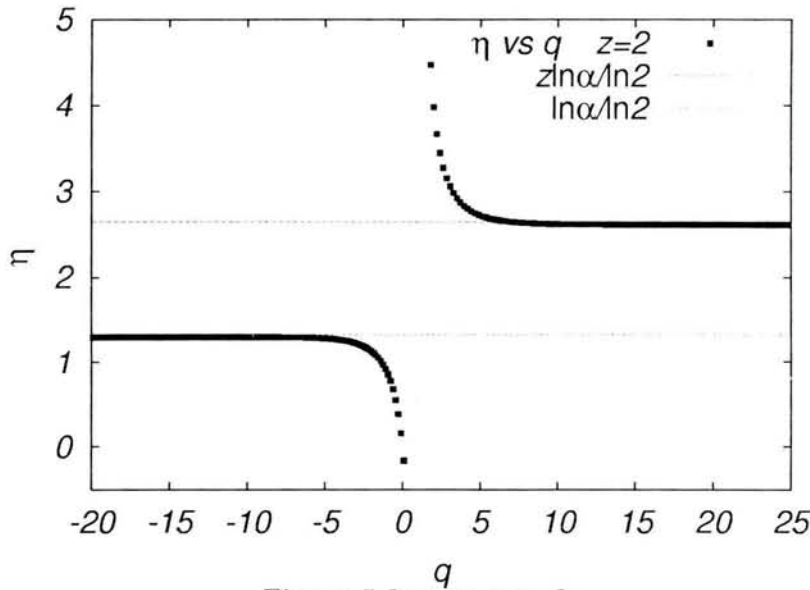


Figura 5.3:  $\eta$  vs  $\mathbf{q}$   $z=2$

mación de ésta función es mediante una función escalón dada por

$$\eta(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{\ln \alpha}{\ln 2}, & \text{si } \mathbf{q} < 1 \\ \frac{z \ln \alpha}{\ln 2}, & \text{si } \mathbf{q} > 1. \end{cases}$$

Sustituyendo los valores asintóticos de la función  $\eta$  en la ecuación (5.19) y considerando que  $p = 2^{-n}$  (donde  $n$  es el tamaño de la órbita) tenemos

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}_k}} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} - k \frac{\ln \alpha \ln 2}{\ln p \ln 2} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} + \frac{k \ln \alpha}{n \ln 2}, \quad \mathbf{q} < 1, \quad (5.31)$$

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}_k}} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} - k \frac{\ln \alpha \ln 2}{\ln p \ln 2} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} + \frac{kz \ln \alpha}{n \ln 2}, \quad \mathbf{q} > 1, \quad (5.32)$$

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}_k}} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} - k(\pm\infty) \frac{\ln 2}{\ln p} = \infty, \quad \mathbf{q} \rightarrow 1, \quad (5.33)$$

de donde  $D_{\mathbf{q}_k} \rightarrow 0$  si  $q \rightarrow 1$ .

Analicemos ahora los límites de las expresiones anteriores. Si tenemos una órbita de tamaño infinito (límite termodinámico)  $n \rightarrow \infty$ , y en consecuencia  $D_{\mathbf{q}_k} = D_{\mathbf{q}}$ , la dimensión generalizada permanece invariante ante la aplicación de la TGR. Por el contrario si  $n = n_c$  y  $k \rightarrow \infty$  entonces  $D_{\mathbf{q}_k} \rightarrow 0$  como en el caso  $\mathbf{q} \rightarrow 1$ . Finalmente si  $k \rightarrow n \rightarrow \infty$  tenemos

$$\lim_{k \rightarrow n} \frac{1}{D_{\mathbf{q}_k}} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} + \frac{\ln \alpha}{\ln 2}, \quad \mathbf{q} < 1, \quad (5.34)$$

$$\lim_{k \rightarrow n} \frac{1}{D_{\mathbf{q}_k}} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} + \frac{z \ln \alpha}{\ln 2}, \quad \mathbf{q} > 1. \quad (5.35)$$

Las gráficas siguientes (figs. 5.4 y 5.5) se han construido a partir de los resultados numéricos y empleando la ecuación (5.19), con  $N = 15$ . En ellas podemos observar como cambia la dimensión generalizada a través de la TGR.

De la gráfica 5.5 donde se considera  $k = n$ , encontramos dos límites para  $1/D_{\mathbf{q}_k}$ . El primero de ellos para  $\mathbf{q} < 1$  es  $1/D_{\mathbf{q}_{k_2}} = 2 \ln \alpha / \ln 2$  y el segundo para  $\mathbf{q} > 1$  es  $1/D_{\mathbf{q}_{k_1}} = 2z \ln \alpha / \ln 2$ . De ahí se desprende el hecho de que

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}_1^*}} = \frac{\ln \alpha}{\ln 2}, \quad \mathbf{q} < 1. \quad (5.36)$$

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}_2^*}} = \frac{z \ln \alpha}{\ln 2}, \quad \mathbf{q} > 1, \quad (5.37)$$

donde  $1/D_{\mathbf{q}}^*$  denota el punto fijo de la TGR. Se realizó el mismo análisis para otros valores de  $z$ ,  $z = 1,25$  y  $z = 1,5$ , corroborándose las expresiones anteriores. Las gráficas 5.6, 5.7 y 5.8 muestran estos resultados.

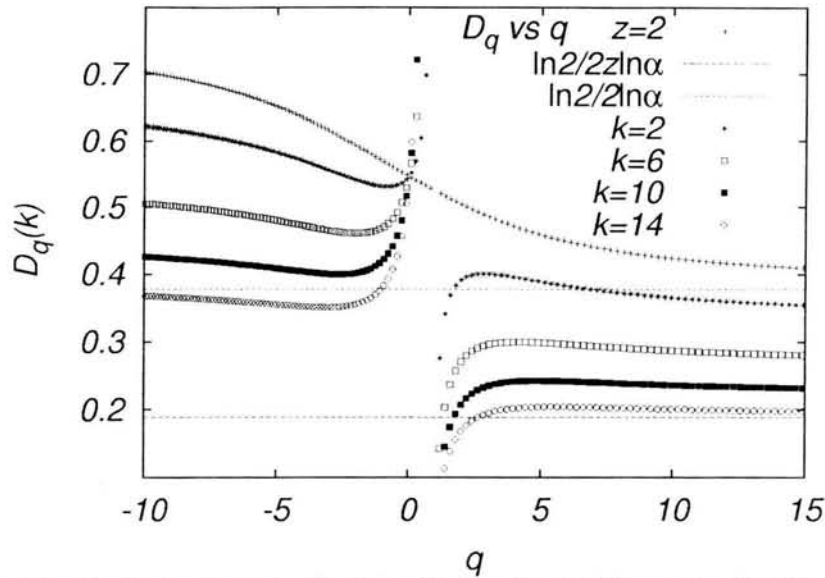


Figura 5.4: Gráfica de la evolución de la dimensión generalizada  $D_q(k)$  a través de la TGR para  $z = 2$

#### 5.1.4. Los puntos fijos de la TGR y la dimensión crítica

$$D_{q_c}$$

A continuación analizaremos y discutiremos el significado de los puntos fijos de la TGR obtenidos en la sección anterior.

Como hemos mencionado, en nuestro sistema tenemos dos variables, las probabilidades  $p_i$  y los intervalos  $l_i$ . Definimos (como en el capítulo 3)  $E_i = -\ln p_i$  y  $V_i = -\ln l_i$ , donde  $V_i$  corresponde con lo que sería el volumen en un sistema termodinámico y  $E_i$  la energía del estado  $i$ -ésimo del sistema. Tenemos la posibilidad de trabajar con equiprobabilidad, ello equivaldría a trabajar con energía constante, o bien, podríamos escoger trabajar con intervalos regulares, esto es a volumen constante. Los resultados obtenidos por uno u otro método deben ser equivalentes, según sucede en los sistemas termodinámicos cuando, en el límite termodinámico, comparamos los resultados obtenidos al trabajar con uno u otro ensamble (digamos microcanónico y a presión constante, por ejemplo). Para un sistema usual en mecánica estadística, esto ocurre, como se ha mencionado, en el límite termodinámico  $V \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$  donde  $N$  es el número de partículas (la cantidad que juega este papel en el sistema dinámico es el tamaño de la órbita  $n$ ). Sabemos

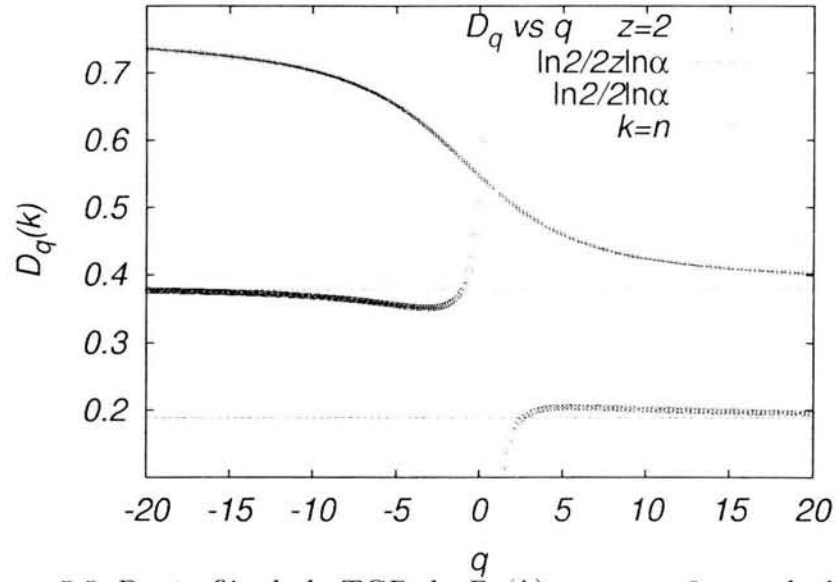


Figura 5.5: Punto fijo de la TGR de  $D_q(k)$  para  $z = 2$  cuando  $k \rightarrow n$

que en el marco teórico de la termodinámica de sistemas caóticos, esto no ocurre necesariamente, la equivalencia entre los dos ensambles ocurre sólo hasta cierto valor crítico de “densidad de partícula”  $\sigma_c = n/V_c$ . Entonces supongamos que queremos encontrar las condiciones en las que, al trabajar con equiprobabilidad o intervalos iguales, obtenemos resultados equivalentes, para ello escribamos nuevamente la función de partición estructural

$$\Gamma = \sum^W p_i^q l_i^{-\tau} \quad (5.38)$$

con  $D_q(q-1) = \tau$ . Si pedimos equiprobabilidad obtenemos

$$\Gamma = p^q \sum^W l_i^{-\tau}. \quad (5.39)$$

Ahora si queremos además trabajar con intervalos regulares tenemos

$$\Gamma = p^q 1/p l^{-\tau} = p^{q-1} l^{-\tau} = p^{q-1} l^{-D_q(q-1)} = 1. \quad (5.40)$$

Que se cumple para

$$p = l^{D_q}. \quad (5.41)$$

Este resultado nos indica que si en nuestro experimento numérico desearamos trabajar con intervalos regulares y equiprobabilidad tendríamos que escoger el tamaño de nuestros intervalos de acuerdo con  $p^{1/D_q}$ .

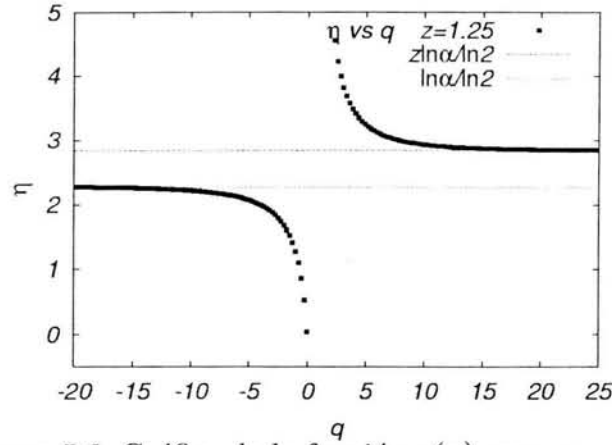


Figura 5.6: Gráfica de la función  $\eta(\mathbf{q})$  para  $z = 1,25$

Ahora, recordemos nuevamente que nuestras expresiones serán válidas hasta cierto límite dado por la densidad de partícula crítica  $\sigma_c$  donde se presentará una transición de fase externa con respecto al volumen (ver sección de transiciones de fase con respecto al volumen en el capítulo 3). Como se ha mencionado esta densidad crítica  $\sigma_c$  se encuentra relacionada con los efectos de tamaño finito dados por los errores de precisión numéricos que nos colocan en una órbita de tamaño  $n$  muy grande pero finito, en este caso  $\sigma_c = n/V_c = -n/\ln l_c$  donde  $l_c$  es la partición crítica del espacio de fase que puedo hacer debido a las limitaciones experimentales. Para  $q \rightarrow -\infty$  la longitud característica mas pequeña que describe el comportamiento del multifractal es  $l_c = \alpha^{-n}$  mientras que para valores de  $q \rightarrow +\infty$ , la longitud característica menor será  $l_c = \alpha^{-zn}$  entonces de la ecuación (5.41) tenemos

$$D_{\mathbf{q}_c} = \frac{\ln p}{\ln l_c} = \frac{\ln 2}{\ln \alpha}, \quad \mathbf{q} \rightarrow -\infty, \quad (5.42)$$

$$D_{\mathbf{q}_c} = \frac{\ln p}{\ln l_c} = \frac{\ln 2}{z \ln \alpha}, \quad \mathbf{q} \rightarrow \infty. \quad (5.43)$$

Los límites anteriores corresponden con los valores de punto fijo obtenidos previamente para  $D_{\mathbf{q}^*}$ .

Para analizar el significado de los puntos fijos  $D_{\mathbf{q}^*}$  de la TGR propuesta anteriormente conviene recordar algunas de las características del atractor extraño de punto fijo de los mapeos de orden  $z$  en el borde del caos. Este

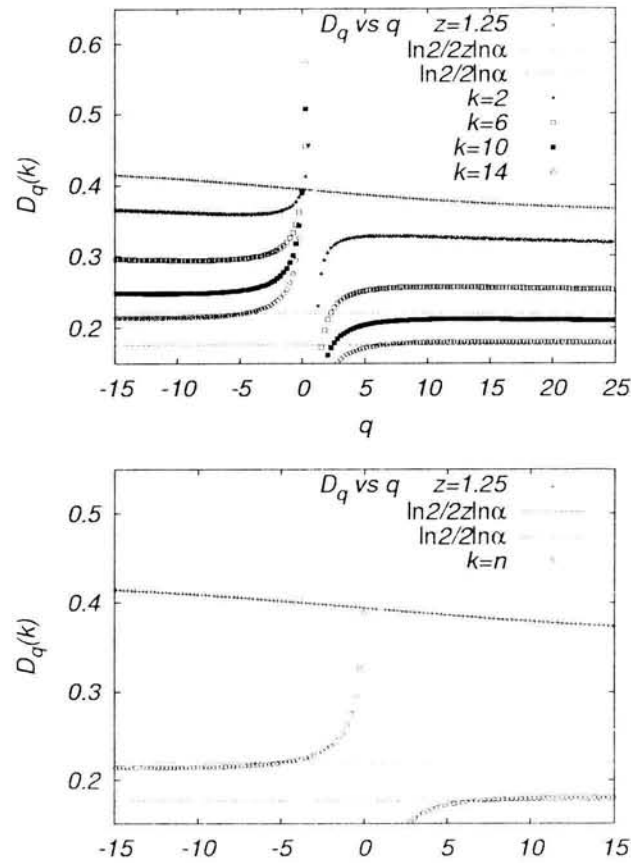


Figura 5.7: Gráfica de  $D_q^q(k)$  vs  $q$  para  $z = 1,25$

consiste en un multifractal que se encuentra compuesto por dos partes una par y la otra impar como se ha mencionado (ver figuras 5.1 y 5.2). A partir de la parte constituida por las iteraciones obtenidas a tiempos pares del multifractal (que llamaremos parte par) podemos obtener la parte del multifractal constituida por las iteraciones a tiempos impares mediante la siguiente relación

$$x_{2n} = -x_n/\alpha(z) \quad (5.44)$$

donde  $\alpha(z)$  es la constante de Feigenbaum característica del mapeo de orden  $z$ . En otras palabras: si se elimina la sección impar del multifractal, la sección restante (parte par) es exactamente igual al multifractal original pero reescalada por un factor de  $1/\alpha(z)$ . La autosemejanza del nuevo multifractal

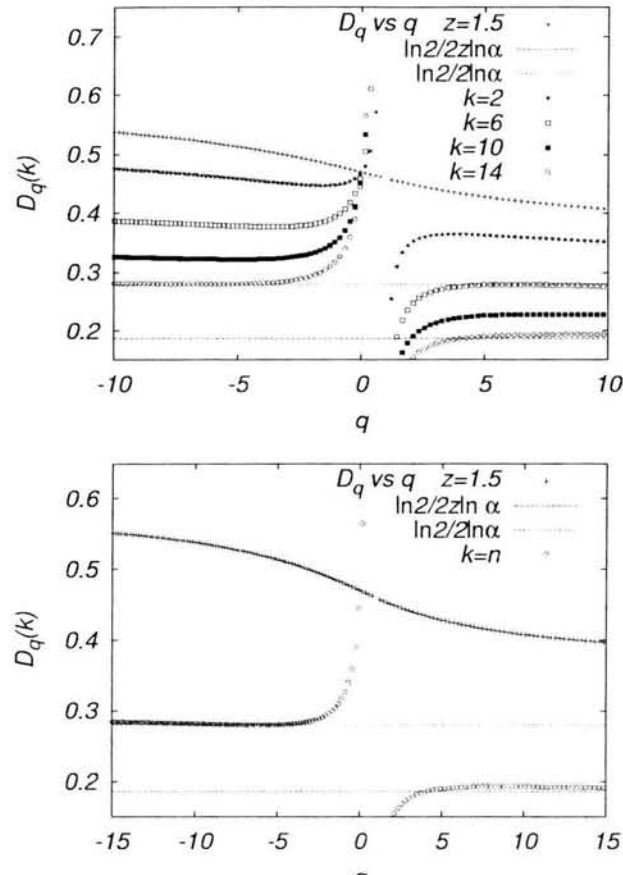


Figura 5.8: Gráfica de  $D_q(k)$  vs  $q$  para  $z = 1,5$

lleva a que, nuevamente, éste se encuentre constituido por dos partes una par y la otra impar con las mismas propiedades descritas anteriormente. De esta forma podemos retomar el primer paso de construcción de nuestra TGR mediante la composición del mapeo original  $2^k$  veces. Con ello conseguimos ir eliminando ordenadamente la parte impar del multifractal y quedándonos con la parte par de éste como se explicó al inicio del capítulo. Nuestra parte restante reproducirá el multifractal original al ser reescalada por un factor de  $\alpha(z)$ .

Con lo anterior estamos en posibilidades ahora de re deducir la expresión que nos dice como cambia la dimensión fractal a lo largo de la TGR. Primero



escribamos nuevamente la función de partición estructural  $\Gamma$ ,

$$\Gamma = \sum_{i=1}^W p_i^q l_i^{-\tau}. \quad (5.45)$$

Ahora trabajemos con probabilidad constante. Una manera de implementar esto es dividir nuestro multifractal en segmentos irregulares que contengan el mismo número de iteraciones. La manera más natural de definir estos intervalos irregulares es empleando la distancia que separa a dos valores  $x_j$  y  $x_{2^k+j}$  vecinos. De esta forma  $l_i = |x_j - x_{2^k+j}|$ . Nótese que estos valores son equivalentes con los diámetros introducidos en el capítulo anterior. Por construcción, la probabilidad en cada uno de estos segmentos irregulares será  $p_i = p = 2/N$  donde  $N$  es el número total de iteraciones. Entonces tenemos

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N/2} ((2/N)^{1+\tau/D_q}) l_i^{-\tau} = (2/N)^{1+\tau/D_q} \sum_{i=1}^{N/2} l_i^{-\tau} = 1. \quad (5.46)$$

Despejando  $D_q$  de la expresión anterior resulta

$$D_q = -\frac{\tau}{1 + \ln(\sum l_i^{-\tau}) / \ln(2/N)}. \quad (5.47)$$

Compongamos ahora nuestro mapeo consigo mismo, con ello nos quedamos únicamente con la parte par de éste. Sabemos que esta parte es exactamente igual al mapeo original excepto por un factor de escala de  $1/\alpha(z)$  y entonces  $l_i/\alpha(z) = l_i$ . Si calculamos ahora la dimensión generalizada para este atractor resultante con un número igual de iteraciones  $N$  obtenemos  $D_{q_1}$  la cual puede ser construida a partir de la  $D_q$  mediante la siguiente expresión

$$D_{q_1} = -\frac{\tau}{1 + \ln(\sum l_i^{-\tau}) / \ln(2/N)} = -\frac{\tau}{1 + \ln(\alpha^\tau \sum l_i^{-\tau}) / \ln(2/N)}. \quad (5.48)$$

Re escribiendo la ecuación anterior tenemos

$$D_{q_1} = \frac{1}{D_q^{-1} - \ln \alpha / \ln(2/N)}, \quad (5.49)$$

y, en general,

$$D_{q_k} = \frac{1}{D_q^{-1} - k \ln \alpha / \ln(2/N)}. \quad (5.50)$$

La ecuación (5.50) puede re escribirse como

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}_k}} = \frac{1}{D_{\mathbf{q}}} - k \frac{\ln \alpha}{\ln p}, \quad (5.51)$$

y, al compararla con la ecuación (5.19), identificamos que

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}^+}} = \eta \frac{\ln 2}{\ln p} = \frac{\ln \alpha}{\ln p}. \quad (5.52)$$

Entonces  $\eta = \ln \alpha / \ln 2$  y  $1/D_{\mathbf{q}^+} = \ln \alpha / \ln p$ .

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}^+}} = \eta \frac{\ln 2}{\ln p} = \frac{\ln \alpha}{\ln p}. \quad (5.53)$$

Para la parte impar del multifractal, trabajemos de manera semejante. Como hemos dicho, esta parte es cualitativamente similar a todo el conjunto, y ahora su factor de reescalamiento será  $1/\alpha^z$ . Llevando a cabo exactamente el mismo análisis que en la sección anterior encontramos que

$$\frac{1}{D_{\mathbf{q}^-}} = \eta \frac{\ln 2}{\ln p} = \frac{z \ln \alpha}{\ln p}. \quad (5.54)$$

El análisis de los puntos fijos de la sección anterior lleva a que cada uno de éstos, (equivalentes a la dimensión crítica  $D_{q_c}$ ) corresponde con cada una de las partes par e impar del multifractal original. Recordemos ahora que la cantidad  $D_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})/\mathbf{q} = \tau/\mathbf{q} = \eta^{-1}$  puede considerarse como la energía libre estática del sistema (ver capítulo 3). Durante la dinámica de nuestro mapeo, el sistema va visitando alternadamente la parte par y la parte impar del multifractal, la energía que requiere al pasar de una a otra sección del multifractal será entonces

$$\Delta(1/F) = \Delta\eta = \frac{z \ln \alpha}{\ln 2} - \frac{\ln \alpha}{\ln 2} = (z - 1) \frac{\ln \alpha}{\ln 2} \quad (5.55)$$

ó

$$\Delta(1/F) = \frac{1}{D_{-\infty}} - \frac{1}{D_{\infty}}. \quad (5.56)$$

donde  $\Delta$  significa una diferencia entre los valores de  $(1/F)$  Como mencionamos en la última sección del capítulo 4, los resultados obtenidos por el grupo de Tsallis y reportados en las referencias [18, 19], muestran una relación entre el comportamiento dinámico del sistema y su estructura, expresado por ellos a través de su índice entrópico  $q$  mediante la relación

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{D_{-\infty}} - \frac{1}{D_{\infty}} \quad (5.57)$$

De aquí encontramos que nuestro resultado obtenido para  $\Delta(1/F) = \Delta\eta$ , es idéntico a el lado derecho de la ecuación anterior, que da una explicación de la relación encontrada anteriormente por Tsallis, a través de la siguiente identidad

$$\frac{1}{1-q} = \Delta(1/F) = \Delta\eta. \quad (5.58)$$

Este resultado no es trivial debido a que nos está indicando que la dinámica del sistema analizada a través de la estadística de Tsallis, que incluye el índice no extensivo  $q$ , se encuentra relacionada con un brinco en la cantidad  $1/F$  que, según la teoría de termodinámica de sistemas caóticos, puede considerarse en inverso de la energía libre estática del sistema y que se encuentra dada únicamente a través de la estructura multifractal de éste.

## 5.2. Análisis de las propiedades dinámicas del atractor de Feigenbaum.

En la figura 5.9, hemos graficado nuevamente en escala logarítmica los valores absolutos de las primeras iteraciones del mapeo logístico en el borde del caos ( $r_\infty = 1,401155\dots$  y  $z = 2$ )

$$x(t+1) = 1 - r_\infty |x(t)|^z, \quad (5.59)$$

iniciando de  $x(0) = 0$  que, como sabemos, genera un ciclo superestable. Usaremos otra vez, la notación  $x(t) = f^t(0)$  donde  $t$  indica el número de iteraciones realizado. Las etiquetas en la figura indican el tiempo de iteración  $t$ . Llamaremos a esta órbita la órbita maestra ya que a partir de ella se pueden leer los valores de los diámetros  $d_{k,m}$  definidos como

$$d_{k,m} = f_{r_k}^{m+2^{k-1}}(0) - f_{r_k}^m(0), \quad (5.60)$$

donde  $r_k$  indica el mapeo en el valor del parámetro de control  $r_k$ . Es importante aclarar que una de las características del borde del caos es que su órbita reproduce aproximadamente el comportamiento observado para los puntos superestables previos. Para entender esto, recordemos que al colocarnos en el valor del parámetro de control  $r_1$ , por ejemplo, el mapeo genera una órbita de longitud  $2^1$ . En el borde del caos, las primeras iteraciones del mapeo pasarán muy cerca de las posiciones que corresponden con las de la órbita  $2^1$  en  $r_1$ , una vez que ha terminado con ésta órbita, sus posiciones generan una órbita aproximada a la órbita  $2^2$  de  $r_2$  y así sucesivamente. Este comportamiento aproximado nos permite entonces identificar la serie de diámetros  $d_{k,m}$  dados por la ecuación (5.60).

En la gráfica 5.9, la distancia al origen de las posiciones en tiempos de la forma  $t = 2^{k-1}$  para  $k = 1, 2, \dots$  (diagonal inferior) corresponde con el logaritmo del valor absoluto de los diámetros  $d_{k,0}$  ya que

$$|d_{k,0}| = |f_{r_k}^{2^{k-1}}(0) - f_{r_k}^0(0)| \approx |f_{r_\infty}^{2^{k-1}}(0) - f_{r_\infty}^0(0)| = |f_{r_\infty}^{2^{k-1}}(0) - 0| = |f_{r_\infty}^{2^{k-1}}(0)|. \quad (5.61)$$

Nótese nuevamente que en la ecuación anterior se ha incluido la característica del mapeo en el borde del caos ( $r_\infty$ ) descrita anteriormente y que se refiere al hecho de que las posiciones del atractor reproducen aproximadamente todo el comportamiento previo del sistema en los puntos superestables ( $r_k$ ).

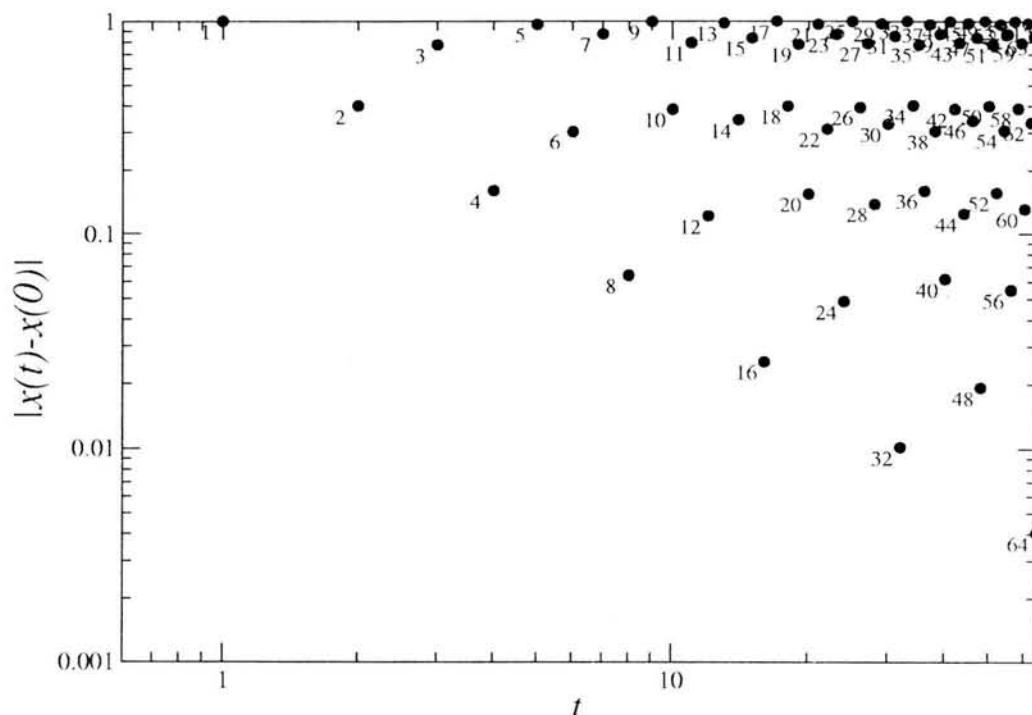


Figura 5.9: Gráfica en escala logarítmica de  $t$  vs  $|x(t) - x(0)|$

La pendiente de la recta que une estas posiciones es  $-\ln \alpha / \ln 2 = 1,323$ , donde  $\alpha = 2,5029\dots$  es la constante de Feigenbaum para  $z = 2$  y como sabemos corresponde con el factor de escala característico cerca del cero.

En la figura 5.10, hemos graficado el logaritmo del valor absoluto de  $|x(t) - x(1)| = |f_{r_\infty}^{(t)}(0) - f_{r_\infty}^{(1)}(0)| = |f_{r_\infty}^{(t)}(0) - 1|$  de esta manera podemos leer, al tiempo  $t = 2^{k-1} + 1$ , el logaritmo del valor absoluto de los diámetros  $d_{k,1} = |f_{r_k}^{(2^{k-1}+1)}(0) - f_{r_k}^{(1)}(0)| \sim |f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+1)}(0) - f_{r_\infty}^{(1)}(0)|$ , los cuales corresponden con la distancia que separa del origen las posiciones de las iteraciones al tiempo  $t = 2^{k-1} + 1$  para  $k = 1, 2, \dots$  que nuevamente han quedado en la diagonal inferior de la recta como indican las etiquetas. La pendiente de la recta que une estos puntos corresponde con  $-z \ln \alpha / \ln 2$  donde, ahora  $\alpha^z = 6,295081\dots$

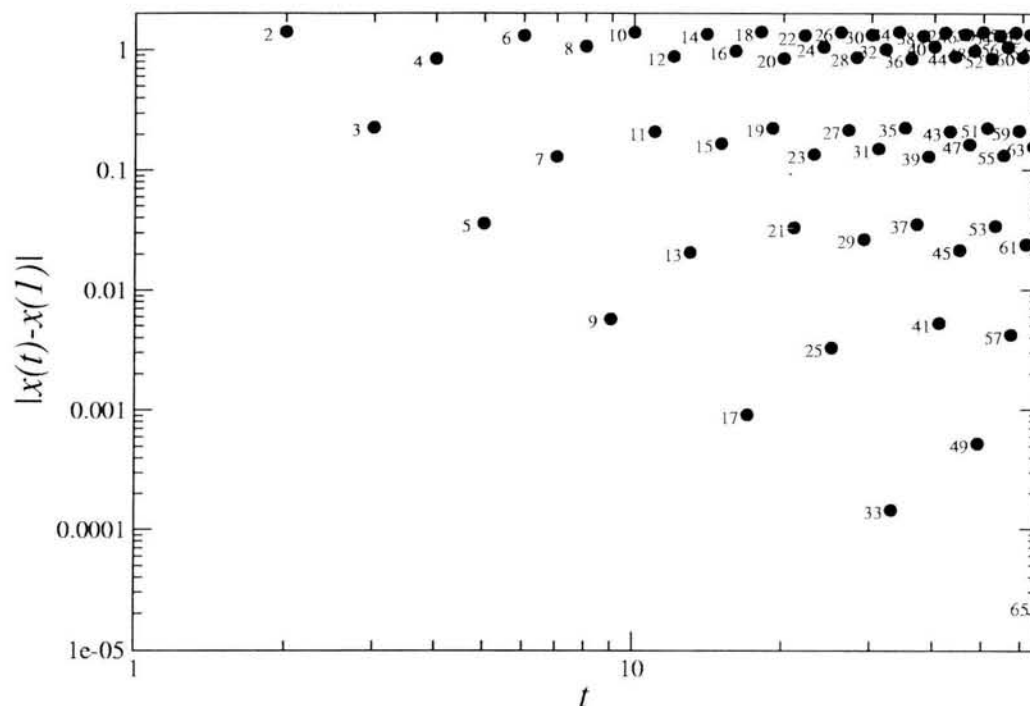


Figura 5.10: Gráfica en escala logarítmica de  $t$  vs  $|x(t) - x(1)|$

es el factor de escala característico en la región cercana a uno.

En las figuras 5.11 a 5.13 se ha graficado de la misma manera el logaritmo del valor absoluto de  $|x(t) - x(m)| \sim |f_{r_\infty}^{(t)}(0) - f_{r_\infty}^{(m)}(0)|$  para otros valores de  $m$ . También ahora, los valores correspondientes con el logaritmo del valor absoluto de los diámetros  $d_{k,m}$  se leen como la distancia que separa los puntos de la diagonal inferior con el origen, ya que estos corresponden con las iteraciones de la forma  $t = 2^{k-1} + m$ . En todos los casos las pendientes de las rectas que unen estos puntos están relacionados con los factores de escalamiento en la vecindad de los diámetros, y que generan la función de escalamiento  $\sigma(m, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k+1,m}}{d_{k,m}}$  introducida en la sección de antecedentes.

Así, a partir de las pendientes de las rectas obtenidas en las gráficas

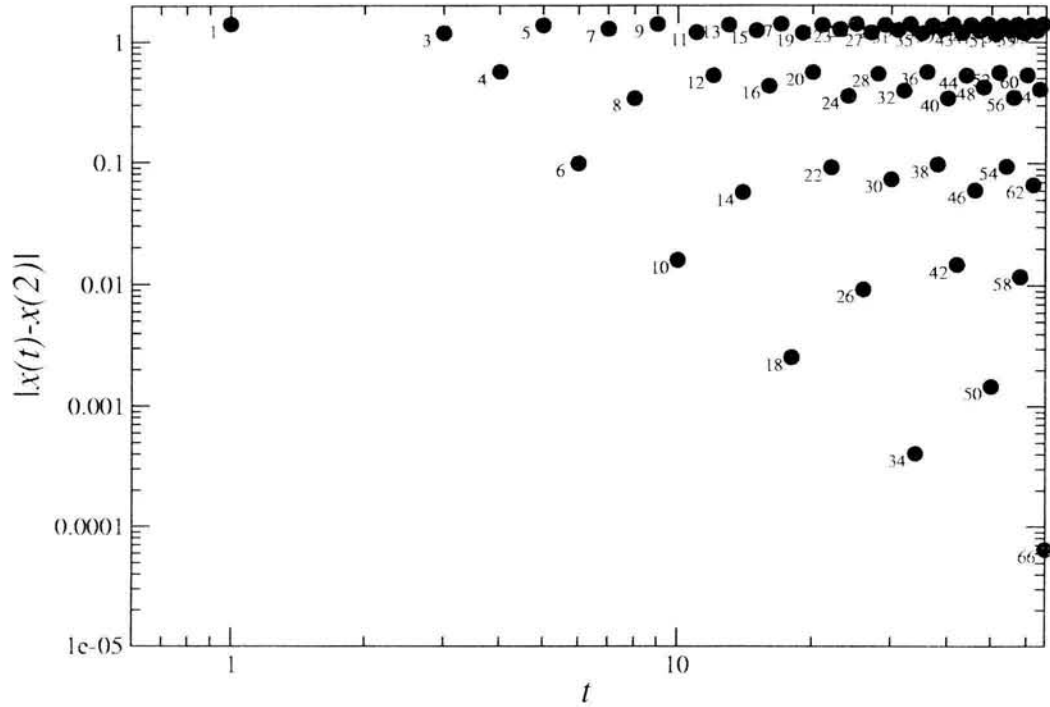


Figura 5.11: Gráfica del  $t$  vs  $|x(t) - x(2)|$ ,  $m = 2$

para diferentes valores de  $m$ , encontramos de manera aproximada los factores de escalamiento  $\alpha_j$  en las zonas del atractor cercanas a los diámetros  $d_{k,m}$ . Tomando sólo los valores de  $m$  de la forma  $m = 2^j$  (que es donde se presentan las discontinuidades principales), podemos construir la función  $\sigma(m, z)$  que se muestra en la figura 5.14 ya que, por definición

$$\sigma(m, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k+1,m}}{d_{k,m}}. \quad (5.62)$$

Haciendo el ajuste lineal de los puntos correspondientes con las iteraciones



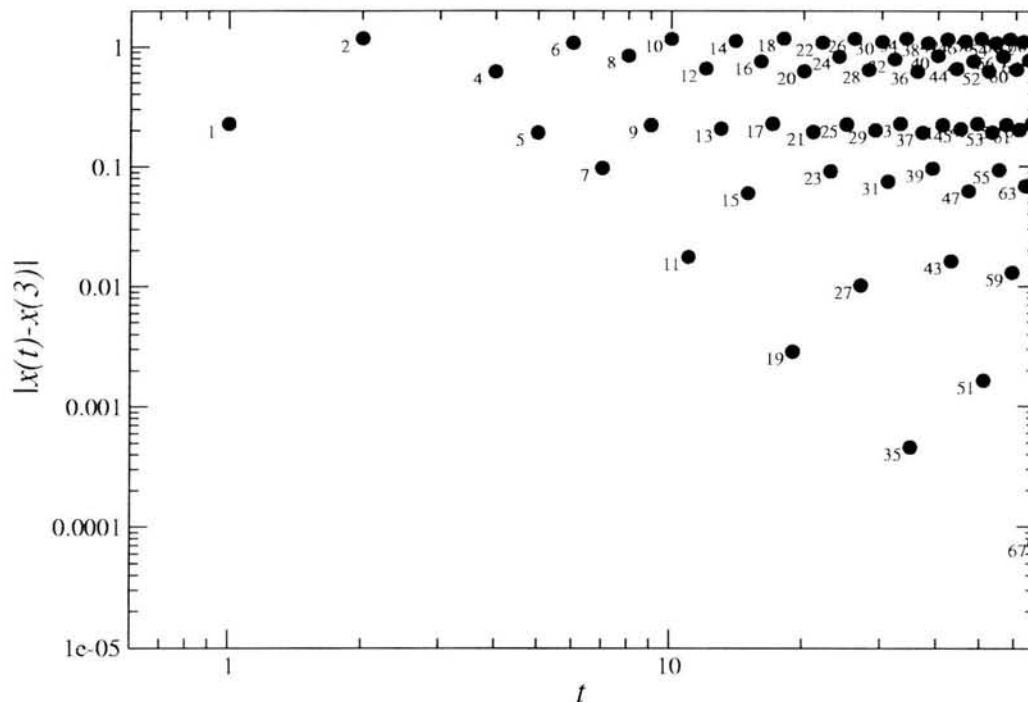


Figura 5.12: Gráfica del  $t$  vs  $|x(t) - x(3)|$ ,  $m = 3$

de las gráficas anteriores tenemos

$$A \ln(2^{k-1} + m) + B = \ln |d_{k,m}| \quad (5.63)$$

$$\exp[A \ln(2^{k-1} + m) + B] = |d_{k,m}| \quad (5.64)$$

$$(2^{k-1} + m)^A \exp B = |d_{k,m}|, \quad (5.65)$$

donde  $A$  es la pendiente de la recta obtenida por regresión lineal y  $B$  su ordenada al origen. Entonces

$$\sigma(m, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k+1,m}}{d_{k,m}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2^k + m)^A \exp B}{(2^{k-1} + m)^A \exp B} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2^k + m)^A}{(2^{k-1} + m)^A}, \quad (5.66)$$

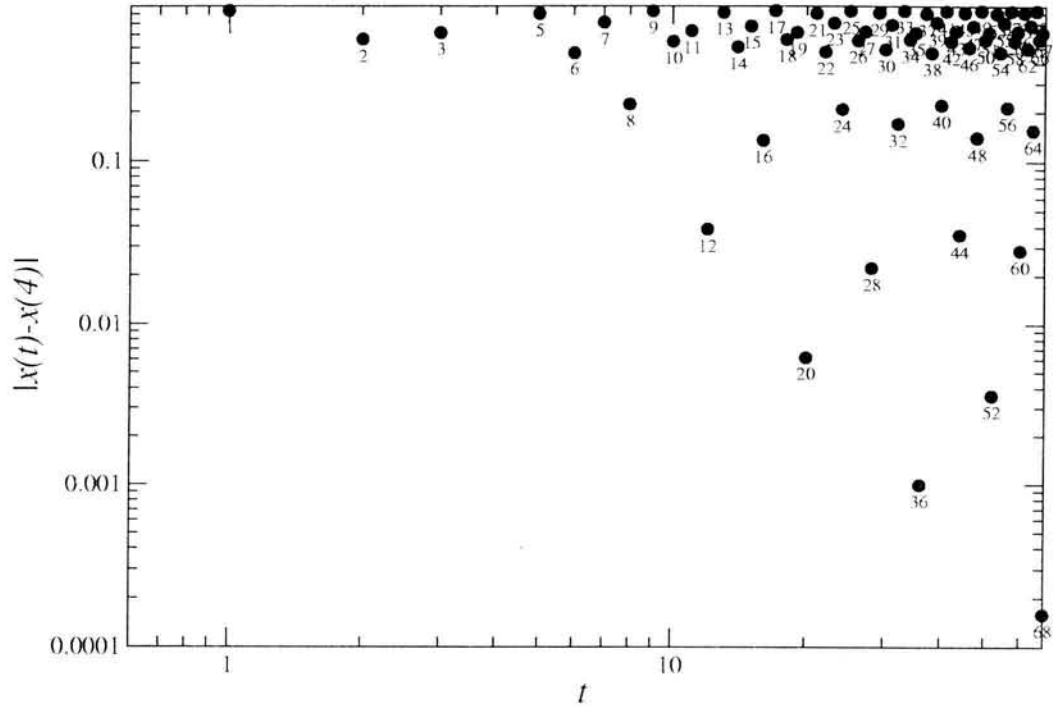


Figura 5.13: Gráfica del  $t$  vs  $|x(t) - x(4)|$ ,  $m = 4$

resultando

$$\sigma(m, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + m/(2^{k-1})}{1 + m/(2^{k-1})} \right)^A = 2^A. \quad (5.67)$$

Con esta expresión calculamos la función  $\sigma(m, z)$  para el mapeo logístico, obteniendo los valores presentados en el cuadro 4.1.

La gráfica de la función  $\sigma(m, z = 2)$  obtenida es muy cercana a la reportada por métodos más sofisticados [27, 33] y se muestra en la figura 5.14.

Como podemos observar la función se encuentra constituida por una serie de discontinuidades que se presentan en valores de  $m = 2^j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Una aproximación a dos escalas de esta función corresponde con la mitad de los diámetros escalando con un factor de  $\alpha$  y la otra mitad con  $\alpha^z$ . La

$m$	$A$	$B$	$\alpha_j = 1/\sigma(m, z = 2)$
1	-2.65200	0.3469	6.285
2	-2.64148	0.4814	6.269
4	-2.62187	1.3220	6.155
8	-2.61227	1.2670	6.114
16	-2.59636	1.1728	6.040
32	-2.43980	0.3500	5.426
64	-2.44174	0.3507	5.433
128	-2.45150	0.1800	5.470
256	-1.31905	0.0437	2.195
512	-1.28050	-0.1316	2.429
1024	-1.35696	0.2008	2.561
2048	-1.40020	0.4120	2.639
4096	-1.40019	0.4119	2.639
8192	-1.40019	0.4119	2.639
16384	-1.40019	0.4118	2.639
32768	-1.38317	0.3208	2.602

Cuadro 5.1: Factores de escalamiento aproximados para  $z = 2$

propiedad del atractor de Feigenbaum de que sus iteraciones son asintóticamente periódicas, hace que la función  $\sigma(m, z)$  sea una función periódica como se ha mencionado en la sección de antecedentes.

### 5.2.1. El exponente de Lyapunov $q$ generalizado $\lambda_q$

Recordemos que el exponente de Lyapunov  $\lambda$  describe la rapidez de expansión exponencial promedio del mapeo, pues nos dice cómo se separan en el tiempo dos condiciones inicialmente muy cercanas. Supongamos que iniciamos con dos condiciones muy cercanas  $x_i(0)$  y  $x_j(0)$  cuya separación está dada por  $\Delta x_0 = |x_i(0) - x_j(0)|$ , dejamos evolucionar el sistema y al cabo de un cierto tiempo  $t$  nos preguntamos qué tan separadas se encuentran ahora nuestras condiciones iniciales. Esta separación al tiempo  $t$  está dada por  $\Delta x_t = |x_i(t) - x_j(t)|$ . La sensibilidad a las condiciones iniciales al tiempo  $t$ ,  $\xi_t$  se expresa como

$$\xi_t = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} = |f'^t(x(0))| \tag{5.68}$$

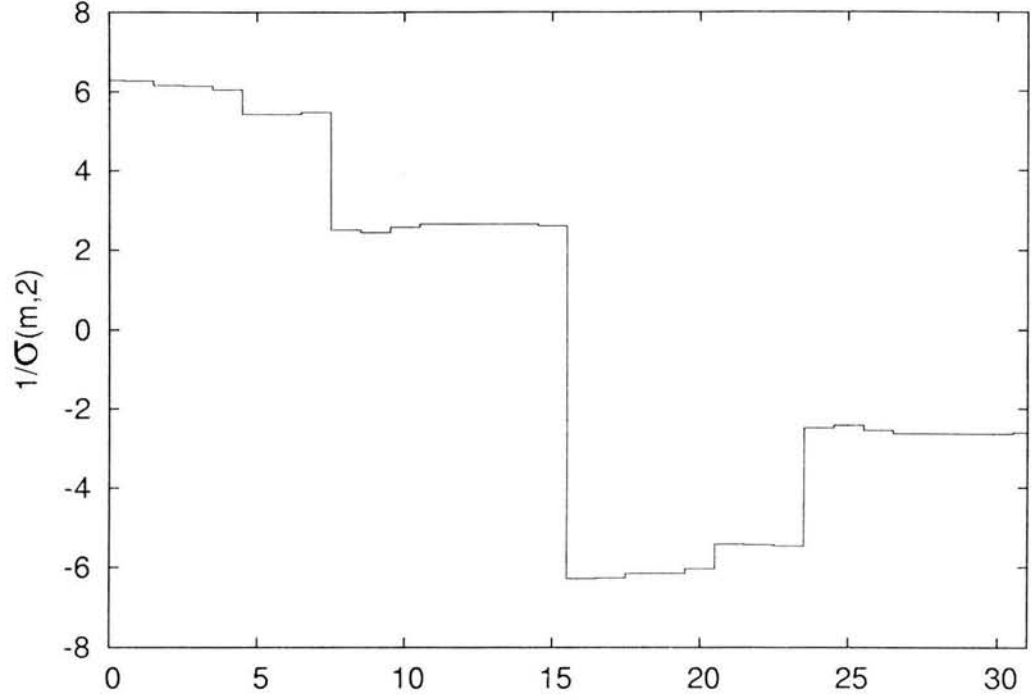


Figura 5.14: Gráfica de  $\sigma(m, z = 2)$  vs  $j$ , para  $m = 2^j$

y el exponente de Lyapunov  $\lambda$  es por definición [3, 9]

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f''(x(0))| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sum_{k=0}^t |f'(x(k))| \quad (5.69)$$

donde  $t$  es el número de iteraciones. Como se ha mencionado, el exponente de Lyapunov se hace cero ( $\lambda = 0$ ) en el borde del caos. Argumentos recientes basados en la estadística generalizada no extensiva de Tsallis [18, 19, 21] han mostrado que una manera conveniente de obtener información de lo que pasa en este límite en el borde del caos es a través de exponenciales  $q$ . Este argumento propone que la sensibilidad a condiciones iniciales no sigue un comportamiento exponencial sino un decaimiento más lento dado por una ley de potencias caracterizada por un índice de no extensividad  $q$ . El exponente de Lyapunov no extensivo  $\lambda_q$  se define de acuerdo a la siguiente expresión

$$\xi_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} = [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{1/(1-q)}, \quad (5.70)$$

donde  $\xi_t$  es la sensibilidad a las condiciones iniciales definida como en la ecuación (5.68) y  $q$  es el índice de no extensividad que toma un valor preciso para cada condición inicial dada. Cabe aclarar aquí que este valor preciso relacionado con la estadística no extensiva o de Tsallis será denotado por  $q$  ( $q$  itálica), y es diferente del valor  $\mathbf{q}$  ( $q$  negrita) que se empleó en la primera parte de los resultados y que se refiere a las expresiones de la termodinámica de sistemas caóticos presentados en el capítulo 3, ahí la variable  $\mathbf{q}$  es un valor que va de  $-\infty < \mathbf{q} < \infty$  y sirve para recorrer o “escanear” distintas partes del espacio de fase del sistema. Tomando el logaritmo de la ecuación (5.70) tenemos

$$\ln \xi_t = \frac{1}{1-q} \ln[1 + (1-q)\lambda_q t] = \ln |f'^t(x(0))| \quad (5.71)$$

El valor de  $|f'^t(x(0))|$  puede encontrarse a partir de las propiedades del mapeo de punto fijo  $g(x)$  obtenidas mediante el grupo de renormalización e introducidas en el capítulo del planteamiento del problema. Recordando que una de las propiedades de la función universal  $g(x)$  es

$$g(1)' = -\alpha^{z-1} \quad (5.72)$$

obtenemos la siguiente propiedad

$$g'^{2^k}(1) = [-1]^{k+1} \alpha^{(k+1)(z-1)}, \quad (5.73)$$

entonces tenemos

$$f'_{r_\infty}{}^{2^k}(1) = -(1)^{k+1} \alpha^{(k+1)(z-1)} \quad (5.74)$$

$$\ln |f'_{r_\infty}{}^{2^k}(1)| = \ln |-\alpha^{(k+1)(z-1)}| = (k+1)(z-1) \ln \alpha. \quad (5.75)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.71) para tiempos grandes de la forma  $t = 2^{k+1} \gg 1$  encontramos

$$\frac{1}{1-q} \ln[(1-q)\lambda_q t] = (k+1)(z-1) \ln \alpha, \quad (5.76)$$

lo cual con  $1/(1-q) = \lambda_q$  resulta en

$$\frac{1}{1-q} \ln[2^{k+1}] = (k+1)(z-1) \ln \alpha, \quad (5.77)$$

de donde

$$\frac{1}{1-q} = (z-1) \frac{\ln \alpha}{\ln 2} = \lambda_q. \quad (5.78)$$

Encontramos entonces que el valor de  $\lambda_q$  para cualquier no linealidad  $z > 1$  del mapeo *específicamente* para el caso en el que iniciamos de  $x(0) = 1$  está dado por la ecuación (5.78). Este resultado es consistente con lo reportado previamente [21, 22, 18, 19] y obtenido por otros métodos como se mencionó en el capítulo del planteamiento, y nos da el valor de  $q = 0,2445$ .

### 5.2.2. Sensibilidad a las condiciones iniciales

En la sección anterior calculamos de manera analítica el exponente de Lyapunov generalizado  $\lambda_q$  para  $x(0) = 1$  empleando la TGR y las propiedades de su mapeo de punto fijo asociado a la familia de los mapeos con máximo de orden  $z$ . Sin embargo el exponente de Lyapunov es una cantidad que fluctúa dependiendo de las condiciones iniciales. Para estudiar estas fluctuaciones introducimos el espectro de exponentes de Lyapunov. Para construir este espectro necesitamos primero obtener un conjunto representativo de los valores que toma el exponente de Lyapunov dependiendo de las condiciones iniciales. Para ello llevamos a cabo el análisis de la sensibilidad a las condiciones iniciales para varios casos empleando la técnica de la órbita maestra presentada en las secciones anteriores.

#### Condiciones iniciales cercanas a $x = 0$ y a $x = 1$

A continuación estudiaremos la sensibilidad a las condiciones iniciales considerando dos puntos del atractor como posiciones iniciales y finales de órbitas particularmente importantes por la característica de nuestro mapeo. Como recordaremos, el mapeo alcanza su máximo alrededor de  $x = 0$ . Ahí las longitudes escalan con un factor característico  $\alpha(z)^{-1}$ . Es en ésta región donde los puntos del atractor se encuentran menos concentrados, por tanto se espera que la evolución en el tiempo de dos puntos en esta región inicialmente muy cercanos los junte hasta llegar a la zona donde los puntos del atractor se encuentran mas concentrados. En esta zona cercana a  $x = 1$ , la longitud de escala característica va como  $\alpha(z)^{-z}$ . Los puntos del atractor se encuentran mas concentrados ahí y por tanto si tomamos dos condiciones inicialmente muy cercanas en esta zona a lo largo del tiempo se irán separando hasta llegar a la zona mas espaciada del atractor (otra vez alrededor de  $x = 0$ ).

Como veremos estas condiciones iniciales nos dan los factores de contracción y expansión mas característicos del sistema y que, como veremos, están relacionados con la discontinuidad mas pronunciada en la función de escalamiento  $\sigma(m, z)$ .

**Condiciones iniciales cercanas a  $x = 0$**

Supongamos que tomamos como condiciones iniciales dos puntos del atractor cercanos a  $x = 0$  de la forma

$$\begin{aligned} x_1(0) &= f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+1)}(0) \\ x_2(0) &= f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+1+2^k)}(0), \end{aligned} \tag{5.79}$$

Si observamos el sistema a intervalos de tiempo de la forma  $t = \tau 2^{k+1} - 1$  donde  $\tau = 1, 2, 3, \dots$ , entonces

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+1+\tau 2^{k+1}-1)}(0) = f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+\tau 2^{k+1})}(0) \\ x_2(t) &= f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+1+2^k+\tau 2^{k+1}-1)}(0) = f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+2^k+\tau 2^{k+1})}(0), \end{aligned} \tag{5.80}$$

y la sensibilidad a estas condiciones iniciales será

$$\xi_t = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} \right| \approx \left| \frac{f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+\tau 2^{k+1}+2^k)}(0) - f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+\tau 2^{k+1})}(0)}{f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+1+2^k)}(0) - f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+1)}(0)} \right|, \quad \text{para } k \gg 1. \tag{5.81}$$

Nótese que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+1+2^k)}(0) = f_{r_\infty}^{(2^{k-1}+1)}(0)$ , por lo que llevar a cabo el límite  $k \rightarrow \infty$  equivale a llevar  $\Delta x_0 \rightarrow 0$ . La última igualdad puede escribirse empleando los diámetros definidos por

$$d_{k+1,m} \approx f_{r_\infty}^{m+2^k}(0) - f_{r_\infty}^m(0). \tag{5.82}$$

Así,

$$\Delta x_0 = |d_{k+1,2^{k-1}+1}|, \tag{5.83}$$

$$\Delta x_t = |d_{k+1,2^{k-1}+\tau 2^{k+1}}| = |d_{k+1,2^k}|. \tag{5.84}$$

En el último paso de la segunda ecuación hemos empleado la propiedad del atractor de Feigenbaum de que las iteraciones son asintóticamente periódicas lo cual se escribe como

$$d_{k+1,m} = -d_{k+1,m+2^k} \tag{5.85}$$

Entonces la sensibilidad a estas condiciones iniciales  $\xi_t$  esta dada por

$$\xi_t = \frac{|d_{k+1,2^{k-1}}|}{|d_{k+1,2^{k-1}+1}|}, \quad t = \tau 2^{k+1} - 1 \gg 1 \quad (5.86)$$

Los factores de escalamiento asociados a los diámetros en la ecuación (5.112) serán

$$|d_{k+1,2^{k-1}+1}| \sim \alpha^{-1k} |d_{1,2^{k-1}+1}| \quad (5.87)$$

$$|d_{k+1,2^{k-1}}| \sim \alpha^{-zk} |d_{1,2^{k-1}}|, \quad (5.88)$$

Estos valores para los factores de escalamiento pueden observarse claramente en la gráfica de la función  $\sigma(m, z)$  (fig 5.14), donde la aproximación a los valores  $|d_{k+1,2^{k-1}+1}|/|d_{1,2^{k-1}+1}| \sim \alpha^{-k}$  y  $|d_{k+1,2^{k-1}}|/|d_{1,2^{k-1}}| \sim \alpha^{-zk}$  corresponde con la suposición de dos escalas del atractor, esto es, considerar que la mitad de las longitudes escala como  $\alpha^{-1}$  y la otra mitad como  $\alpha^{-z}$  [27]. Entonces de la definición de la función  $\sigma(m, z)$

$$\sigma(2^{k-1} + 1, z = 2) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{d_{k,2^{k-1}+1}}{d_{k+1,2^{k-1}+1}} \right| \sim \alpha \quad (5.89)$$

y

$$\left| \frac{d_{1,2^{k-1}+1}}{d_{2,2^{k-1}+1}} \right| \left| \frac{d_{2,2^{k-1}+1}}{d_{3,2^{k-1}+1}} \right| \left| \frac{d_{3,2^{k-1}+1}}{d_{4,2^{k-1}+1}} \right| \cdots \left| \frac{d_{k,2^{k-1}+1}}{d_{k+1,2^{k-1}+1}} \right| \sim \alpha^k \quad (5.90)$$

de donde

$$\left| \frac{d_{1,2^{k-1}+1}}{d_{k+1,2^{k-1}+1}} \right| \sim \alpha^k. \quad (5.91)$$

De manera análoga

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{d_{k,2^{k-1}}}{d_{k+1,2^{k-1}}} \right| \sim \alpha^z \quad (5.92)$$

y

$$\left| \frac{d_{1,2^{k-1}}}{d_{2,2^{k-1}}} \right| \left| \frac{d_{2,2^{k-1}}}{d_{3,2^{k-1}}} \right| \left| \frac{d_{3,2^{k-1}}}{d_{4,2^{k-1}}} \right| \cdots \left| \frac{d_{k,2^{k-1}}}{d_{k+1,2^{k-1}}} \right| \sim \alpha^{kz} \quad (5.93)$$

de donde

$$\left| \frac{d_{1,2^{k-1}}}{d_{k+1,2^{k-1}}} \right| \sim \alpha^{kz}. \quad (5.94)$$



Ahora, debido a la ecuación (5.85)

$$|d_{k+1,m}| = |d_{k+1,2^k+m}|, \quad (5.95)$$

$$|d_{1,m}| = |d_{1,m+1}|, \quad \text{para } k = 0; \quad (5.96)$$

y para  $m = 2^{k-1} + 1$

$$|d_{1,2^{k-1}+1}| = |d_{1,2^{k-1}+2}| = |d_{1,2^{k-1}+2^0+2^0}| \quad (5.97)$$

$$|d_{1,2^{k-1}+1}| = |d_{1,2^{k-1}}| \quad (5.98)$$

Retomando la ecuación (5.86) y empleando la identidad dada por la ecuación anterior (eq (5.98)) y las ecuaciones (5.88), la sensibilidad a estas condiciones iniciales entonces resulta

$$\xi_t = \frac{|d_{k+1,2^{k-1}}||d_{1,2^{k-1}+1}|}{|d_{k+1,2^{k-1}+1}||d_{1,2^{k-1}}|} \sim \left( \frac{\alpha^{-z}}{\alpha^{-1}} \right)^k = \alpha^{-k(z-1)} \quad (5.99)$$

con  $t = \tau 2^{k+1} - 1 \gg 1$ . Definiendo el tiempo efectivo  $t_E$  como el número total de iteraciones (esto es el número de iteraciones que se requieren para llegar a la condición inicial  $x_1(0)$  a partir de  $x = 0$  mas el tiempo transcurrido  $t$ ) tenemos

$$t_E = m + t = 2^{k-1} + 1 + \tau 2^{k+1} - 1 = 2^{k-1}(4\tau + 1) \quad (5.100)$$

$$2t_E = 2^k(4\tau + 1) \quad (5.101)$$

finalmente

$$2^k = \frac{2t_E}{4\tau + 1}. \quad (5.102)$$

Para  $t_E \gg 1$  ó  $k \gg 1$  resulta que

$$2^k \approx \frac{2t_E}{(4\tau + 1)} + 1. \quad (5.103)$$

La ecuación (5.99) puede re escribirse como una exponencial  $q$  de la forma siguiente

$$\xi_t = \alpha^{-(k)(z-1)} = [2^k]^{\frac{-(z-1)\ln\alpha}{\ln 2}} = \left[ \frac{2t_E}{4\tau + 1} + 1 \right]^{\frac{-(z-1)\ln\alpha}{\ln 2}} = [1 + (1-Q)\lambda_Q t_E]^{1/(1-Q)}, \quad (5.104)$$

donde hemos empleado la identidad

$$\alpha^x = 2^{x \ln \alpha / \ln 2} \quad (5.105)$$

y el tiempo  $t_E = m + t = 2^{k-1}(4\tau + 1)$  para  $t_E \gg 1$  con

$$\frac{1}{1-Q} = -\frac{(z-1) \ln \alpha}{\ln 2}, \quad Q = 1,7555 \quad \text{y} \quad \lambda_Q^{(\tau)} = -\frac{2(z-1) \ln \alpha}{(4\tau+1) \ln 2}. \quad (5.106)$$

### Condiciones iniciales cercanas a $x = 1$

De manera análoga abordaremos el caso de las condiciones iniciales cercanas a  $x = 1$ . Para ello supongamos ahora que tomamos como condiciones iniciales dos puntos del atractor cercanos a uno de la forma

$$\begin{aligned} x_1(0) &= f_{r_\infty}^{(2^k+1)}(0) \\ x_2(0) &= f_{r_\infty}^{(2^{k+1}+1)}(0). \end{aligned} \quad (5.107)$$

Nótese ahora que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{r_\infty}^{(2^{k+1}+1)}(0) = f^1(0)$ . Observamos las posiciones en intervalos de tiempo de la forma  $t = \tau 2^{k+1} - 1$ , con  $\tau = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f_{r_\infty}^{(2^k+1+\tau 2^{k+1}-1)}(0) = f^{(2^k(1+2\tau))}, \\ x_2(t) &= f_{r_\infty}^{(2^{k+1}+1+\tau 2^{k+1}-1)}(0) = f^{(2^k(1+2\tau)+2^k)}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

La sensibilidad a estas condiciones iniciales estará dada en este caso por

$$\xi_t = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} \right| \approx \left| \frac{f_{r_\infty}^{(2^k(1+2\tau)+2^k)}(0) - f_{r_\infty}^{(2^k(1+2\tau))}(0)}{f_{r_\infty}^{(2^k+1)}(0) - f_{r_\infty}^{(2^{k+1}+2^k)}(0)} \right| \quad \text{cuando } k \gg 1. \quad (5.109)$$

En paralelo a las ecuaciones (5.82), (5.85), tenemos

$$\Delta x_0 = |d_{k+1,2^k+1}| = |d_{k+1,1}| = \alpha^{kz} |d_{1,1}| \quad (5.110)$$

$$\Delta x_t = |d_{k+1,2^k+2\tau 2^k}| = |d_{k+1,0}| = \alpha^k |d_{1,0}|. \quad (5.111)$$

Entonces

$$\xi_t = \frac{|d_{k+1,0}|}{|d_{k+1,1}|}, \quad t = \tau 2^{k+1} - 1 \quad (5.112)$$

con  $|d_{1,1}| = |d_{1,0}|$ . Empleando el mismo método que en la sección anterior obtenemos

$$\xi_t = \frac{|d_{k+1,0}| |d_{1,1}|}{|d_{k+1,1}| |d_{1,0}|} = \alpha^{(k)(z-1)}. \quad (5.113)$$

Esta última ecuación puede escribirse también como una exponencial  $q$  de la forma siguiente

$$\xi_t = \alpha^{(k)(z-1)} = [2^{(k)}]^{(z-1)\frac{\ln \alpha}{\ln 2}} = [1 + t_E]^{(z-1)\frac{\ln \alpha}{\ln 2}} = [1 + (1 - q)\lambda_q t_E]^{1/(1-q)}, \quad (5.114)$$

donde otra vez hemos empleado la identidad  $\alpha^x = 2^{x \ln \alpha / \ln 2}$ , el tiempo  $t_E = t + m = 2^k(1 + 2\tau)$  para  $t_E \gg 1$ , y con

$$\frac{1}{1 - q} = \frac{(z - 1) \ln \alpha}{\ln 2}, \quad q = 0,2445 \quad \text{y} \quad \lambda_q^{(\tau)} = \frac{(z - 1) \ln \alpha}{(2\tau + 1) \ln 2}. \quad (5.115)$$

Es importante notar la relación que surge entre los valores de  $q$  y  $Q$ ,  $q = 2 - Q$ , que corresponde con la propiedad de inversión de la exponencial  $q$  que se expresa como

$$\exp_q(-x) = \exp_{2-q}(x). \quad (5.116)$$

De esta manera hemos encontrado que al iniciar con condiciones iniciales cercanas a  $x = 0$ , obtenemos el factor de contracción mínimo  $\lambda_Q^{(0)} = -2 \ln \alpha / \ln 2 = -2,646$  con un valor de  $Q = 1,7555$  para  $\tau = 0$ , por otro lado al iniciar con condiciones cercanas a  $x = 1$  encontramos el factor de expansión máximo igual a  $\lambda_q^{(0)} = (z - 1) \ln \alpha / \ln 2 = 1,323$  con  $q = 0,2445$  para  $\tau = 0$ . El resto de los valores de  $\lambda_Q^{(\tau)}$  y  $\lambda_q^{(\tau)}$  obtenidos cuando el índice  $\tau$  toma sus valores  $\tau = 1, 2, 3, \dots$ , conforman un conjunto de valores del exponente de Lyapunov  $q$ -generalizado, llamaremos a éste conjunto de valores  $\lambda_{\mathbf{q}}$ . Nótese aquí nuevamente la diferencia en la notación:  $\lambda_q^{(\tau)}$  y  $\lambda_Q^{(\tau)}$  con subíndices  $q$  y  $Q$  itálicos, corresponden con dos valores específicos del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado, dados por la estadística no extensiva y todos estos valores se encuentran asociados a dos valores específicos de  $q$  ( $q = 0,2445$  y  $Q = 1,7555$ ). Por otro lado,  $\lambda_{\mathbf{q}}$  corresponde con un conjunto de valores del exponente de Lyapunov generalizado para diferentes valores de  $\mathbf{q}$ .

Para hacer contacto con el formalismo termodinámico de las transiciones  $\mathbf{q}$  de Mori, consideremos ahora el conjunto de valores del exponente de Lyapunov  $\lambda_{\mathbf{q}}$  generalizado,

$$\begin{aligned}\lambda_q^{(\tau)} &= \frac{1}{(1-q)(2\tau+1)} = \frac{(z-1)\ln\alpha}{(2\tau+1)\ln 2} \\ \lambda_Q^{(\tau)} &= \frac{2}{(1-Q)(4\tau+1)} = -\frac{2(z-1)\ln\alpha}{(4\tau+1)\ln 2}\end{aligned}\quad (5.117)$$

La gráfica (a) de la figura 5.15 muestra la dependencia de estos valores con respecto a  $\mathbf{q}$  aproximando el resultado a una función escalón de la forma

$$\lambda_{\mathbf{q}} = \begin{cases} 1,323 & \text{si } \mathbf{q} \leq q_c \\ 0 & \text{si } q_c < \mathbf{q} < 2 - q_c \\ -2,646 & \text{si } \mathbf{q} \geq 2 - q_c \end{cases}$$

con  $q_c = q$  y  $2 - q_c = Q$ . Conviene aquí nuevamente recalcar la diferencia entre  $q$  y  $\mathbf{q}$ ,  $q$  se refiere a los valores específicos (índice de no extensividad) que toma la variable  $q$  dentro de la estadística de las funciones exponenciales  $q$ , mientras que  $\mathbf{q}$  es una variable que va de  $-\infty < \mathbf{q} < \infty$  y que se encuentra relacionada con el formalismo termodinámico de los sistemas caóticos. Nótese además que  $q$  y  $Q$  corresponden con los valores críticos de  $\mathbf{q}$ . De la misma manera  $\lambda_q$  corresponde con los valores específicos del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado, mientras que  $\lambda_{\mathbf{q}}$  corresponde con todo el conjunto de valores del exponente de Lyapunov que se obtienen para distintos valores de  $\mathbf{q}$  que van de  $-\infty > \mathbf{q} > \infty$ .

Según el formalismo de Mori, la energía libre  $\Phi(\mathbf{q})$  y su transformada de Legendre  $\Psi(\lambda_{\mathbf{q}})$  se encuentran dadas por

$$\Phi(\mathbf{q}) = \Psi(\lambda_{\mathbf{q}}) + (\mathbf{q} - 1)\lambda_{\mathbf{q}} \quad (5.118)$$

$$\lambda_{\mathbf{q}} = \frac{d\Phi}{d\mathbf{q}} \quad (5.119)$$

y en nuestro caso resultan

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} \lambda_c(\mathbf{q} - q_c) = 1,323(\mathbf{q} - q_c) & \text{si } \mathbf{q} \leq q_c \\ 0 & \text{si } q_c < \mathbf{q} < 2 - q_c \\ -2\lambda_c(\mathbf{q} - (2 - q_c)) = -2,646(\mathbf{q} - 2 + q_c) & \text{si } \mathbf{q} \geq 2 - q_c. \end{cases}$$

y

$$\Psi(\lambda_{\mathbf{q}}) = \begin{cases} (1 - q_c)\lambda_{\mathbf{q}} = 0,7555\lambda_{\mathbf{q}} & \text{si } 0 < \lambda_{\mathbf{q}} < \lambda_c \\ -(1 - q_c)\lambda_{\mathbf{q}} = -0,7555\lambda_{\mathbf{q}} & \text{si } -2\lambda_c < \lambda_{\mathbf{q}} < 0 \end{cases}$$

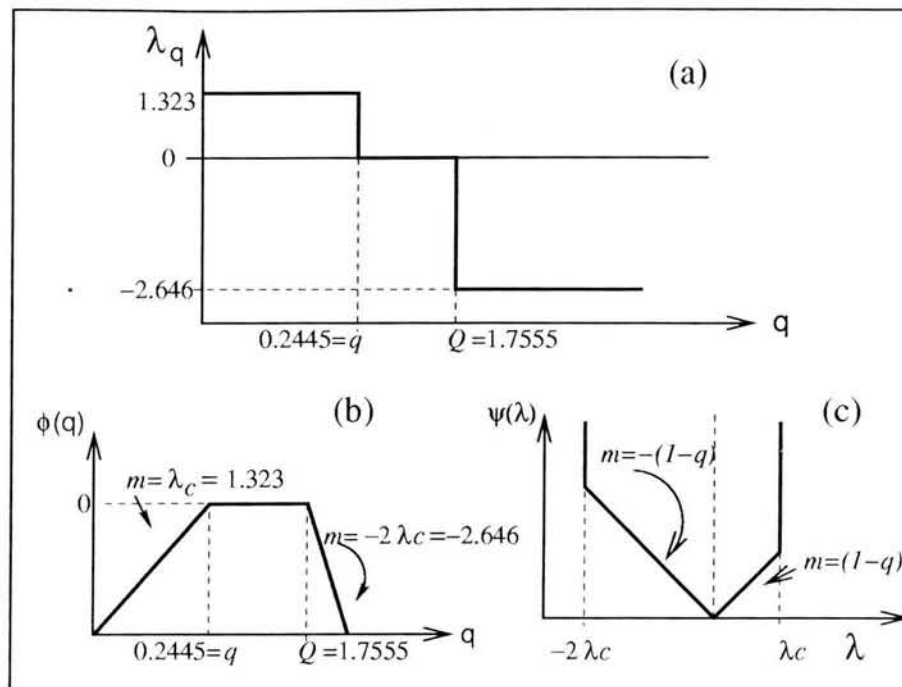


Figura 5.15: (a)  $\lambda_q$  vs  $q$ , (b)  $\Phi(q)$  vs  $q$  y (c)  $\Psi(\lambda_q)$  vs  $q$ .

con  $\lambda_c = 1/(1 - q_c) = 1,323$ . La gráfica de esta funciones se muestra en las figuras (b) y (c) de la fig 5.15.

Encontramos que la parte correspondiente a los valores negativos de  $\lambda_q$  de la función  $\Psi(\lambda_q)$  corresponde con la parte lineal observada por Mori en la transición de fase  $q$  descrita en la sección de antecedentes y mostrada en la figura ???. El valor de  $q_c$  de Mori, se encuentra relacionado con el valor de  $Q$  en la exponencial  $Q$  de Tsallis mediante  $q_c = Q = 1 - q$ . (Donde  $Q = 1,7555$  y  $q = 0,2445$ .)

Este resultado nos indica que el valor específico de  $q$  en la forma generalizada de la sensibilidad a las condiciones iniciales descrita por Tsallis corresponde con un valor específico de  $q$  en el marco teórico de la termodinámica de sistemas caóticos, y se encuentra relacionada con la transición de fase de Mori en el borde del caos que ocurre en el valor específico de  $q_c$  y que da en la función  $\Psi(\lambda_q)$  la parte lineal que describe la transición.

### 5.2.3. Otras condiciones iniciales dentro del atractor

Analicemos ahora lo que ocurre con otras condiciones iniciales dentro del atractor. Supongamos que tomamos como condiciones iniciales dos puntos del atractor  $x_1(0)$  y  $x_2(0)$ , escogidos de tal forma que

$$\Delta x_0 = x_1(0) - x_2(0) = d_{k+1, m+1} \quad (5.120)$$

donde  $d_{k+1, m}$  son aproximadamente los diámetros dados por la ecuación (5.82) entonces

$$\begin{aligned} x_1(0) &= f_{r_\infty}^{m+1+2^k}(0), \\ x_2(0) &= f_{r_\infty}^{m+1}(0). \end{aligned} \quad (5.121)$$

Recordemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{r_\infty}^{2^k+m+1}(0) = f_{r_\infty}^{m+1}(0)$ . Iteremos ahora  $t$  veces. Obtenemos

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f_{r_\infty}^{m+1+2^k+t}(0), \\ x_2(t) &= f_{r_\infty}^{m+1+t}(0), \end{aligned} \quad (5.122)$$

y por tanto

$$\Delta x_t = x_1(t) - x_2(t) = f_{r_\infty}^{(m+1+t)+2^k}(0) - f_{r_\infty}^{(m+1+t)}(0), \quad (5.123)$$

que escribimos como un nuevo diámetro de la forma

$$\Delta x_t = d_{k+1, m+1+t}. \quad (5.124)$$

Entonces al tiempo  $t$  los factores de expansión  $L_t(0)$  estarán dados por

$$L_t(0) = \left| \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} \right| = |f'^t(x(0))| = \left| \frac{d_{k+1, m+1+t}}{d_{k+1, m+1}} \right|. \quad (5.125)$$

La definición de sensibilidad a las condiciones iniciales es

$$\xi_t = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} \right|. \quad (5.126)$$

Llevar al cabo el límite anterior  $\Delta x_0 \rightarrow 0$  equivale en nuestro análisis a llevar  $k \rightarrow \infty$ . De esta forma escribimos la sensibilidad a las condiciones iniciales como

$$\xi_t(m) \approx \left| \frac{d_{k+1, m+1+t}}{d_{k+1, m+1}} \right| \quad \text{para } k \gg 0. \quad (5.127)$$

Ahora bien, supongamos tiempos de la forma  $t = 2^{k+1} - 1$  y recordemos además que debido a la propiedad del atractor de Feigenbaum de que las iteraciones son asintóticamente periódicas, tenemos  $d_{k+1,m} = -d_{k+1,m+2^k}$ , de donde  $d_{k+1,m+1+t} = d_{k+1,m+1+2^{k+1}-1} = d_{k+1,m+2^k+2^k} = -d_{k+1,m+2^k} = d_{k+1,m}$ . De acuerdo a esto re escribimos la ecuación anterior como

$$\xi_{2^{k+1}-1}(m) = \left| \frac{d_{k+1,m}}{d_{k+1,m+1}} \right|. \quad (5.128)$$

La expresión anterior puede ser reescrita como un cociente de funciones  $\sigma(m, z)$ , definida anteriormente como

$$\sigma(m, z) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{d_{k+1,m}}{d_{k,m}} \right|, \quad (5.129)$$

o bien,

$$\begin{aligned} \sigma_1(m, z) &\equiv \left| \frac{d_{2,m}}{d_{1,m}} \right| \approx \sigma(m), \\ \sigma_2(m, z) &\equiv \left| \frac{d_{3,m}}{d_{2,m}} \right| \approx \sigma(m), \\ \sigma_3(m, z) &\equiv \left| \frac{d_{4,m}}{d_{3,m}} \right| \approx \sigma(m), \\ \sigma_k(m, z) &\equiv \left| \frac{d_{k+1,m}}{d_{k,m}} \right| \approx \sigma(m). \end{aligned} \quad (5.130)$$

Evidentemente mientras mayor es el valor de  $k$  la aproximación a la función  $\sigma(m, z)$  es mejor. En lo que sigue la dependencia de la función  $\sigma$  con  $z$  será omitida por razones de simplificación en la notación. Ahora bien, el producto

$$\sigma_1(m)\sigma_2(m)\sigma_3(m) \dots \sigma_k(m) \approx \sigma(m)^k. \quad (5.131)$$

Entonces

$$\left| \frac{d_{2,m}}{d_{1,m}} \right| \left| \frac{d_{3,m}}{d_{2,m}} \right| \left| \frac{d_{4,m}}{d_{3,m}} \right| \dots \left| \frac{d_{k+1,m}}{d_{k,m}} \right| \approx \sigma^k(m), \quad (5.132)$$

de donde

$$\left| \frac{d_{k+1,m}}{d_{1,m}} \right| \approx [\sigma(m)]^k. \quad (5.133)$$

Notemos ahora que la propiedad  $d_{k+1,m} = -d_{k+1,m+2^k}$  implica que, para  $k = 0$

$$d_{1,m} = -d_{1,m+1}$$

ó bien

$$\left| \frac{d_{1,m}}{d_{1,m+1}} \right| = 1. \quad (5.134)$$

Entonces

$$\xi_{t=2^{k+1}+1}(m) \approx \left| \frac{d_{k+1,m}}{d_{k+1,m+1}} \right| = \left| \frac{d_{k+1,m}}{d_{k+1,m+1}} \right| \left| \frac{d_{1,m+1}}{d_{1,m}} \right| = \left| \frac{d_{k+1,m}}{d_{1,m}} \right| \left| \frac{d_{1,m+1}}{d_{k+1,m+1}} \right|. \quad (5.135)$$

Si escribimos la última igualdad de la ecuación anterior como un cociente de funciones sigma de la forma

$$\left| \frac{d_{k+1,m}}{d_{1,m}} \right| = |\sigma(m)|^k \quad \text{y} \quad \left| \frac{d_{1,m+1}}{d_{k+1,m+1}} \right| = |\sigma(m+1)|^{-k}, \quad (5.136)$$

entonces encontramos

$$\xi_t = \left| \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+1)} \right|^k. \quad (5.137)$$

Recordemos que la función  $\sigma(m, z)$  es una función periódica constituida por una serie de discontinuidades (ver figura 5.14). Consideremos las discontinuidades que ocurren para valores de  $m$  de la forma  $m = 2^j$ . Estos valores pueden ser estimados mediante el grupo de renormalización como se mostró en la sección de antecedentes [27] mediante la ecuación

$$\frac{1}{1/\sigma(2^j+0, z)} - \frac{1}{1/\sigma(2^j, z)} \sim -\frac{(z-1)\alpha(z)^z}{\rho\delta(z)^r}, \quad (5.138)$$

donde  $\alpha(z)$  y  $\delta(z)$  son las constantes de Feigenbaum para el mapeo de orden  $z > 1$  y  $\rho$  es una constante, o bien mediante el método empleado en la sección 4.2.

Una aproximación cruda de la función  $\sigma(m)$  para mapeos con máximo de orden  $z$  es suponer que la mitad de los diámetros escala como  $\alpha$  y la otra mitad como  $\alpha^z$ . Bajo esta aproximación la función  $\sigma(m)$  resulta una función escalón periódica de la forma

$$\frac{1}{\sigma(m)} = \begin{cases} \alpha^z & \text{para } 0(2^{k-1}) < m \leq 1(2^{k-1}) \\ \alpha & \text{para } 1(2^{k-1}) < m \leq 2(2^{k-1}) \\ -\alpha^z & \text{para } 2(2^{k-1}) < m \leq 3(2^{k-1}) \\ -\alpha & \text{para } 3(2^{k-1}) < m \leq 4(2^{k-1}) \end{cases}$$



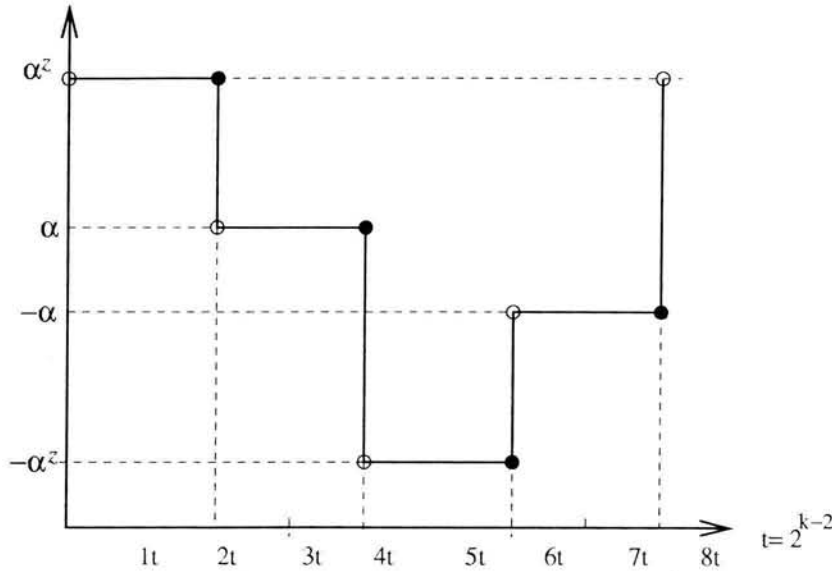


Figura 5.16: Aproximación de la función  $\sigma(m)$  a dos escalas

La figura 5.16 muestra esquemáticamente el comportamiento periódico de esta cantidad.

Encontramos entonces que para valores de  $m$  en el intervalo  $[(2v)2^{k-1}, (2v+1)2^{k-1})$  con  $v = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{1}{\sigma(m)} = |\alpha^z|, \quad (5.139)$$

mientras que para valores de  $m$  en el intervalo  $[(2v+1)2^{k-1}, (2v+2)2^{k-1})$  con  $v = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{1}{\sigma(m)} = |\alpha|. \quad (5.140)$$

Aquí  $v$  nos coloca sobre cierto intervalo de valores de  $m$ , la característica periódica de la función sigma nos permite restringir nuestro análisis a los casos con  $v = 0$ .

Con esta aproximación el cociente de funciones sigma  $\sigma(m)/\sigma(m+1) = 1$  excepto en los puntos donde se presenta la discontinuidad de la función, en estos puntos

$$\xi_t(m+1) = \left| \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+1)} \right|^k = \left| \frac{\alpha}{\alpha^z} \right|^k = \alpha^{-(z-1)k} \quad \text{para} \quad m = (2v+1)2^{k-1}$$

y

$$\xi_t(m+1) = \left| \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+1)} \right|^k = \left| \frac{\alpha^z}{\alpha} \right|^k = \alpha^{(z-1)k} \quad \text{para} \quad m = (2v+2)2^{k-1}$$

Observando a intervalos de tiempo de la forma  $t = \tau(2^{k+1}) - 1$  y definiendo el tiempo efectivo (número de iteraciones total del mapeo) como  $t_E = m+1+t$  encontramos para el primer caso

$$\begin{aligned} t_E = m+1+t &= (2v+1)2^{k-1} + 1 + 4\tau 2^{k-1} - 1 = 2^{k-1}(2v+1+4\tau), \\ \frac{2t_E}{(2v+4\tau+1)} &= 2^k, \end{aligned} \quad (5.141)$$

con  $v = 0, 1, 2, \dots$  y  $\tau = 0, 1, 2, \dots$ . Con esta expresión re escribimos la sensibilidad a las condiciones iniciales  $\xi_t = \alpha^{-k(z-1)}$  como una exponencial  $q$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \xi_t &= [2^k]^{-(z-1)\ln\alpha/\ln 2} = \left[ 1 + \frac{2t_E}{(2v+4\tau+1)} \right]^{-(z-1)\ln\alpha/\ln 2} \\ &= [1 + (1-Q)\lambda_Q t_E]^{1/(1-Q)} \end{aligned} \quad (5.142)$$

para  $t_E \gg 1$  y con

$$\lambda_Q^{(v,\tau)} = -\frac{2(z-1)\ln\alpha}{(2v+4\tau+1)\ln 2}, \quad (5.143)$$

$$\frac{1}{1-Q} = -\frac{(z-1)\ln\alpha}{\ln 2}, \quad (5.144)$$

$$Q = \ln 2 / (z-1)\ln\alpha + 1 = 1,7555. \quad (5.145)$$

Mientras que para el segundo caso ( $m = (2v+2)(2^{k-1})$ )

$$\begin{aligned} t_E &= m+1+t = (2v+2)(2^{k-1}) + 1 + 4\tau(2^{k-1}) - 1 = 2^{k-1}(2v+2+4\tau) \\ &= 2^k(v+1+2\tau) \end{aligned}$$

$$\frac{t_E}{(v+2\tau+1)} = 2^k,$$

con  $v = 0, 1, 2, \dots$  y  $\tau = 0, 1, 2, \dots$ . La sensibilidad a las condiciones iniciales  $\xi_t = \alpha^{k(z-1)}$  como una exponencial  $q$  resulta ser

$$\begin{aligned} \xi_t &= [2^k]^{(z-1)\ln\alpha/\ln 2} = \left[ 1 + \frac{t_E}{(v+2\tau+1)} \right]^{(z-1)\ln\alpha/\ln 2} \\ &= [1 + (1-q)\lambda_q t_E]^{1/(1-q)}, \end{aligned} \quad (5.146)$$

para  $t_E \gg 1$  y con

$$\lambda_q^{(v,\tau)} = \frac{(z-1) \ln \alpha}{(v+2\tau+1) \ln 2}, \quad (5.147)$$

$$\frac{1}{1-q} = \frac{(z-1) \ln \alpha}{\ln 2}, \quad (5.148)$$

$$q = 1 - \ln 2 / (z-1) \ln \alpha = 0,2445. \quad (5.149)$$

De donde  $Q = 2 - q$ . Observamos que para  $v = 0$  obtenemos los mismos resultados de la sección anterior donde habíamos considerado también sólo dos escalas. De esta manera encontramos con mayor generalidad dos conjuntos de valores del exponente de Lyapunov generalizado en el borde del caos el cual corresponde con dos valores específicos de  $q$  que se encuentran relacionados entre si mediante la propiedad de inversión de las exponenciales  $q$  por

$$Q = 2 - q, \quad q = 0,2445 \quad \text{y} \quad Q = 1,7555. \quad (5.150)$$

Consideremos ahora el conjunto de valores del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado,

$$\begin{aligned} \lambda_q^{(v,\tau)} &= \frac{1}{(1-q)(v+2\tau+1)} = \frac{(z-1) \ln \alpha}{(v+2\tau) \ln 2} \\ \lambda_Q^{(v,\tau)} &= \frac{2}{(1-Q)(2v+4\tau+1)} = -\frac{2(z-1) \ln \alpha}{(2v+4\tau+1) \ln 2} \end{aligned} \quad (5.151)$$

Como hemos visto este conjunto de valores nos permiten construir una gráfica escalón para la dependencia de  $\lambda_q$  vs  $q$ , y una para la función de energía libre  $\Phi(q)$  con su transformada de Legendre  $\Psi(\lambda_q)$ . Las gráficas de estas funciones se muestran en la figura 5.15.

Exploremos ahora lo que ocurre cuando consideramos la siguiente discontinuidad de la función  $\sigma(m, z)$  (la segunda mas pronunciada). Esta discontinuidad se presenta en valores periódicos de  $m = 2^{k-2}$ , como se muestra en el esquema siguiente.

En la figura 5.17 se muestran ahora tres escalas importantes  $\alpha$ ,  $\alpha^z$  y  $\alpha_1$ , esta última corresponde con la nueva discontinuidad y estará asociada al diámetro  $d_{k+1, 2^{k-2}}$ . Su valor puede ser estimado a partir de este diámetro como se presentó en la sección 4.2, o bien mediante el uso del GR y su función universal  $g(x)$  como se mostró en la sección de antecedentes, el valor obtenido para esta cantidad es  $\alpha_1 \approx 5,4588$ .

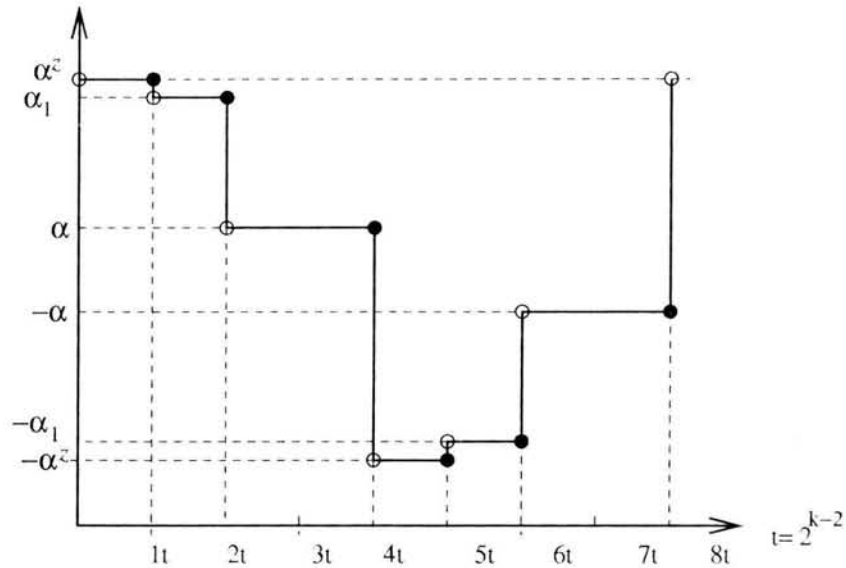


Figura 5.17: Aproximación de la función  $\sigma(m)$  a tres escalas

La aproximación de la función sigma a una función escalón con tres escalas puede escribirse como

$$\frac{1}{\sigma(m)} = \begin{cases} \alpha^z & \text{para } 0(2^{k-2}) < m \leq 1(2^{k-2}) \\ \alpha_1 & \text{para } 1(2^{k-2}) < m \leq 2(2^{k-2}) \\ \alpha & \text{para } 2(2^{k-2}) < m \leq 4(2^{k-2}) \\ -\alpha^z & \text{para } 4(2^{k-2}) < m \leq 5(2^{k-2}) \\ -\alpha_1 & \text{para } 5(2^{k-2}) < m \leq 6(2^{k-2}) \\ -\alpha & \text{para } 6(2^{k-2}) < m \leq 8(2^{k-2}). \end{cases}$$

Observamos ahora que tenemos que considerar tres tipos de condiciones iniciales para estimar el valor de la sensibilidad en los puntos donde la función sigma es discontinua. Así tenemos

- Caso 1: Para las condiciones iniciales de la forma  $m = (4v + 4)2^{k-2} + 1$

y  $t = \tau 2^{k+1} - 1$ , obtenemos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+1)} = \left( \frac{\alpha^z}{\alpha} \right)^k = \alpha^{k(z-1)}, \quad (5.152)$$

$$\lambda_q^{(v,\tau)} = \frac{(z-1) \ln \alpha}{(v+2\tau+1) \ln 2}, \quad (5.153)$$

$$q = 0,2445, \quad (5.154)$$

$$\lambda_{q_{max}} = 1,323. \quad (5.155)$$

Para su caso inverso, esto es, condiciones iniciales de la forma  $m = (4v+2)2^{k-2} + 1$ , con  $t = (4\tau+3)2^{k-2} - 1$ , obtenemos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+t)} = \left( \frac{\alpha}{\alpha^z} \right)^k = \alpha^{-k(z-1)}, \quad (5.156)$$

$$\lambda_Q^{(v,\tau)} = \frac{-4(z-1) \ln \alpha}{(4v+4\tau+5) \ln 2} \quad (5.157)$$

$$Q = 1,7555, \quad (5.158)$$

$$\lambda_{Q_{min}} = -1,0584, \quad (5.159)$$

- Caso 2: Para las condiciones iniciales de la forma  $m = (4v+2)2^{k-2} + 1$  y  $t = \tau 2^{k+1} - 1$ , obtenemos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+1)} = \left( \frac{\alpha}{\alpha_1} \right)^k, \quad (5.160)$$

$$\lambda_{Q1}^{(v,\tau)} = \frac{2 \ln \alpha / \alpha_1}{(2v+4\tau+1) \ln 2} \sim -\frac{2(1,12498)}{2v+4\tau+1}, \quad (5.161)$$

$$Q1 = 1,8889, \quad (5.162)$$

$$\lambda_{Q1_{min}} = -2,24996. \quad (5.163)$$

En su caso inverso,  $m = (4v+1)2^{k-2} + 1$  y  $t = (4\tau+3)2^{k-2} - 1$ , obtenemos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+t)} = \left( \frac{\alpha_1}{\alpha} \right)^k, \quad (5.164)$$

$$\lambda_{q1}^{(v,\tau)} = \frac{\ln \alpha_1 / \alpha}{(v+\tau+1) \ln 2} \sim -\frac{(1,12498)}{v+\tau+1}, \quad (5.165)$$

$$q1 = 0,11109, \quad (5.166)$$

$$\lambda_{q1_{max}} = 1,12498. \quad (5.167)$$

- Caso 3: Para las condiciones iniciales de la forma  $m = (4v + 1)2^{k-2} + 1$  y  $t = \tau 2^{k+1} - 1$ , encontramos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+1)} = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha^z}\right)^k, \quad (5.168)$$

$$\lambda_{Q^2}^{(v,\tau)} = \frac{4 \ln \alpha_1 / \alpha^z}{(4v + 8\tau + 1) \ln 2} \sim -\frac{4(0,1986)}{4v + 8\tau + 1}, \quad (5.169)$$

$$Q_2 = 6,034, \quad (5.170)$$

$$\lambda_{Q_{2min}} = 0,7944. \quad (5.171)$$

Y en su caso inverso con condiciones iniciales de la forma  $m = (4v + 4)2^{k-2} + 1$  y  $t = (4\tau + 2)2^{k-2} - 1$ , obtenemos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+t)} = \left(\frac{\alpha^z}{\alpha_1}\right)^k, \quad (5.172)$$

$$\lambda_{q^2}^{(v,\tau)} = \frac{2 \ln \alpha^z / \alpha_1}{(2v + 2\tau + 3) \ln 2} \sim -\frac{2(0,1986)}{2v + 2\tau + 3}, \quad (5.173)$$

$$q_2 = -4,0348, \quad (5.174)$$

$$\lambda_{q_{2max}} = 0,1324. \quad (5.175)$$

En todos estos casos y como consideramos anteriormente,  $v = 0, 1, 2, 3, \dots$  y  $\tau = 0, 1, 2, 3, \dots$ . El valor de  $\lambda_{q_{i_{max}}}$  y  $\lambda_{Q_{i_{min}}}$  corresponde con los valores máximos y mínimos que toma el valor de  $\lambda_q$  para  $\tau = 0$  y  $v = 0$ . Los casos inversos consisten en cambiar la condición inicial a condición final y viceversa (nótese además que el tiempo de iteración varía en cada caso). Sus valores pueden leerse fácilmente del esquema de la función  $\sigma(m, z)$  a tres escalas en la figura 5.17 siguiendo el mismo razonamiento que en la sección anterior. Observamos que se conservan los valores de  $q$  y  $Q$ , sin embargo lo que cambia es el valor del exponente de Lyaounov  $q$  generalizado. Así, cada uno de los distintos casos anteriores nos genera un nuevo conjunto de valores del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado que nos da una nueva aproximación del espectro de  $\lambda_{q_i}$  a una función escalón y de la energía libre  $\psi(q)$  y su transformada de Legendre  $\phi(q)$ , mostrando nuevamente la transición de fase tipo Mori en los valores críticos de  $q_i$  y  $Q_i$ . Estas funciones se presentan a continuación para los diferentes casos.

■ Caso 1

$$\lambda_q = \begin{cases} 1,323 & \text{si } q \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < q < 2 - q_c, \\ -1,0584 & \text{si } q \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

con  $q_c = q = 0,2445$  y  $2 - q_c = Q = 1,7555$ . Las energías libres  $\Phi(q)$  y

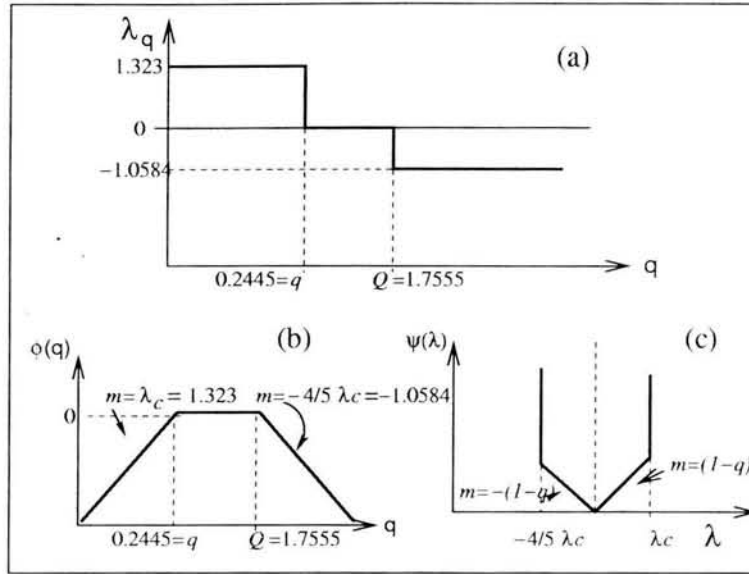


Figura 5.18: (a)  $\lambda_q$  vs  $q$  (b)  $\Phi(q)$  vs  $q$  y (c)  $\Psi(\lambda_q$  vs  $q$ , para el caso 1 de tres escalas

$\Psi(\lambda_q)$

$$\Phi(q) = \begin{cases} \lambda_c(q - q_c) = 1,323(q - q_c) & \text{si } q \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < q < 2 - q_c, \\ -(4/5)\lambda_c(q - (2 - q_c)) = -1,0584(q - 2 + q_c) & \text{si } q \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

y

$$\Psi(\lambda_q) = \begin{cases} (1 - q_c)\lambda_q = 0,7555\lambda_q & \text{si } 0 < \lambda_q < \lambda_c, \\ -(1 - q_c)\lambda_q = -0,7555\lambda_q & \text{si } -(4/5)\lambda_c < \lambda_q < 0, \end{cases}$$

con  $\lambda_c = 1/(1 - q_c) = 1,323$ . Las gráficas de estas funciones se muestran en la fig 5.18.

■ Caso 2

$$\lambda_{\mathbf{q}} = \begin{cases} 1,12498 & \text{si } \mathbf{q} \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < \mathbf{q} < 2 - q_c, \\ -2,24996 & \text{si } \mathbf{q} \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

con  $q_c = q_1 = 0,1111$  y  $2 - q_c = Q_1 = 1,8889$ . Las energías libres  $\Phi(\mathbf{q})$

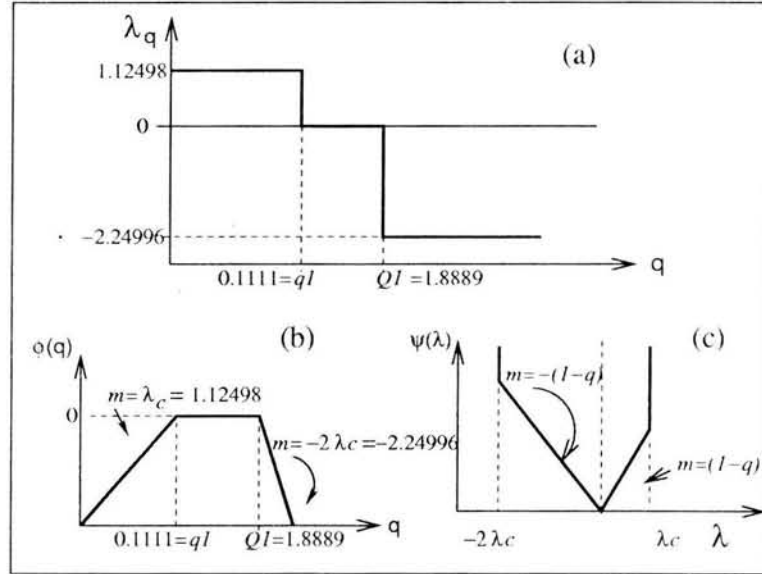


Figura 5.19: (a)  $\lambda_{\mathbf{q}}$  vs  $\mathbf{q}$  (b)  $\Phi(\mathbf{q})$  vs  $\mathbf{q}$  y (c)  $\Psi(\lambda_{\mathbf{q}}$  vs  $\mathbf{q}$ , para el caso 2 de tres escalas

y  $\Psi(\lambda_{\mathbf{q}})$

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} \lambda_c(\mathbf{q} - q_c) = 1,12498(\mathbf{q} - q_c) & \text{si } \mathbf{q} \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < \mathbf{q} < 2 - q_c, \\ -(2)\lambda_c(\mathbf{q} - (2 - q_c)) = -2,24996(\mathbf{q} - 2 + q_c) & \text{si } \mathbf{q} \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

y

$$\Psi(\lambda_{\mathbf{q}}) = \begin{cases} (1 - q_c)\lambda_{\mathbf{q}} = 0,88891\lambda_{\mathbf{q}} & \text{si } 0 < \lambda_{\mathbf{q}} < \lambda_c, \\ -(1 - q_c)\lambda_{\mathbf{q}} = -0,88891\lambda_{\mathbf{q}} & \text{si } -2\lambda_c < \lambda_{\mathbf{q}} < 0, \end{cases}$$

con  $\lambda_c = 1/(1 - q_c) = 1,12498$ . Las gráficas de estas funciones se muestran en la fig 5.19.



■ Caso 3

$$\lambda_{\mathbf{q}} = \begin{cases} 0,1324 & \text{si } \mathbf{q} \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < \mathbf{q} < 2 - q_c, \\ -0,7944 & \text{si } \mathbf{q} \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

con  $q_c = q_2 - 4,0348$  y  $2 - q_c = Q_2 = 6,034$ . Las energías libres  $\Phi(\mathbf{q})$  y

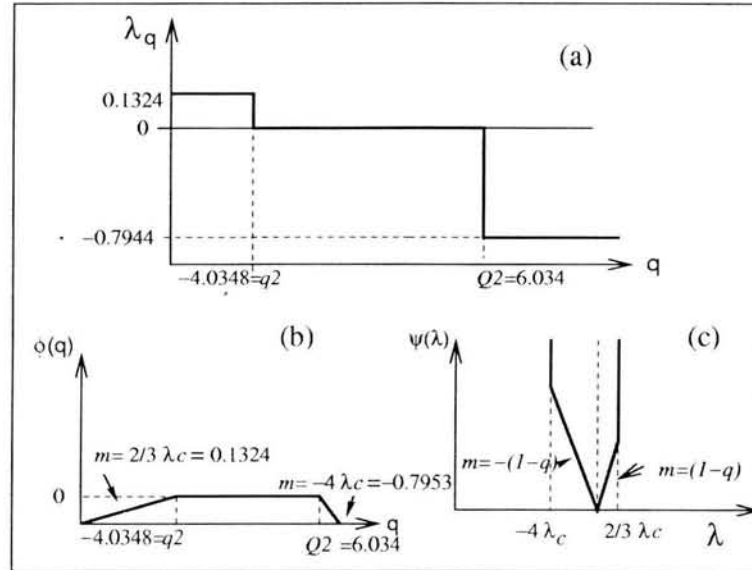


Figura 5.20: (a)  $\lambda_{\mathbf{q}}$  vs  $\mathbf{q}$  (b)  $\Phi(\mathbf{q})$  vs  $\mathbf{q}$  y (c)  $\Psi(\lambda_{\mathbf{q}}$  vs  $\mathbf{q}$ , para el caso 3 de tres escalas

la función  $\Psi(\lambda_{\mathbf{q}})$  en este caso

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} (2/3)\lambda_c(\mathbf{q} - q_c) = 0,1324(\mathbf{q} - q_c) & \text{si } \mathbf{q} \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < \mathbf{q} < 2 - q_c, \\ -(4)\lambda_c(\mathbf{q} - (2 - q_c)) = -0,7953(\mathbf{q} - 2 + q_c) & \text{si } \mathbf{q} \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

y

$$\Psi(\lambda_{\mathbf{q}}) = \begin{cases} (1 - q_c)\lambda_{\mathbf{q}} = 5,0348\lambda_{\mathbf{q}} & \text{si } 0 < \lambda_{\mathbf{q}} < \lambda_c, \\ -(1 - q_c)\lambda_{\mathbf{q}} = -5,0348\lambda_{\mathbf{q}} & \text{si } -4\lambda_c < \lambda_{\mathbf{q}} < 0, \end{cases}$$

con  $\lambda_c = 1/(1 - q_c) = 0,19861$ . Las gráficas de estas funciones se muestran en la fig 5.20.

Si consideramos una escala mas, esto es, la que corresponde con la discontinuidad observada en  $3(2^{k-2})$ , obtenemos la siguiente aproximación de la función  $\sigma(m, z)$  ahora a cuatro escalas. Ver figura 5.21.

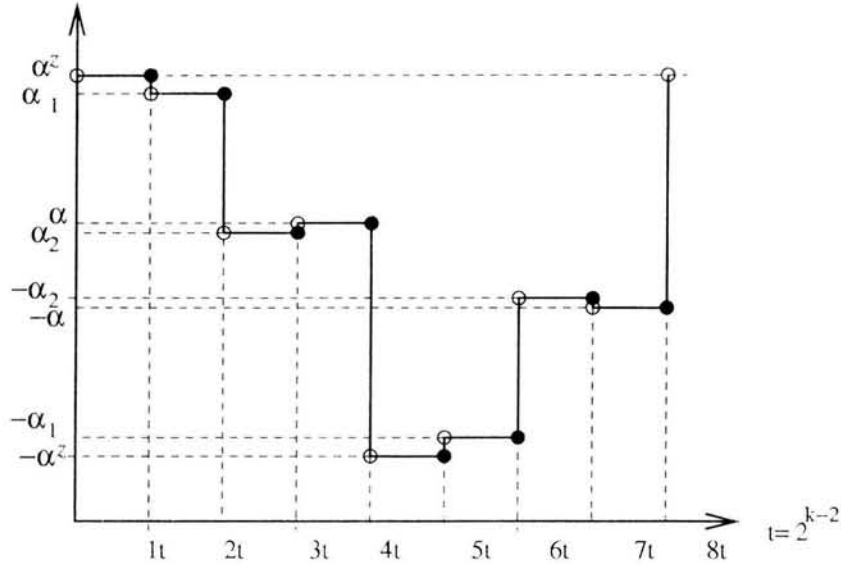


Figura 5.21: Aproximación de la función  $\sigma(m)$  a cuatro escalas

Encontramos ahora que surge una escala más asociada con el diámetro  $d_{k+1,3(2^{k-2})}$ , que llamaremos  $\alpha_2$  que al ser estimada nos da un valor aproximado de  $\alpha_2 \approx 2,2$  para el mapeo logístico.

La aproximación de la función  $\sigma(m)$  a una función escalón con cuatro escalas puede escribirse como

$$\frac{1}{\sigma(m)} = \begin{cases} \alpha^z & \text{para } 0(2^{k-2}) < m \leq 1(2^{k-2}) \\ \alpha_1 & \text{para } 1(2^{k-2}) < m \leq 2(2^{k-2}) \\ \alpha_2 & \text{para } 2(2^{k-2}) < m \leq 3(2^{k-2}) \\ \alpha & \text{para } 3(2^{k-2}) < m \leq 4(2^{k-2}) \\ -\alpha^z & \text{para } 4(2^{k-2}) < m \leq 5(2^{k-2}) \\ -\alpha_1 & \text{para } 5(2^{k-2}) < m \leq 6(2^{k-2}) \\ -\alpha_2 & \text{para } 6(2^{k-2}) < m \leq 7(2^{k-2}) \\ -\alpha & \text{para } 7(2^{k-2}) < m \leq 8(2^{k-2}) \end{cases}$$

En este caso tenemos que considerar cuatro tipos de condiciones iniciales para estimar el valor de la sensibilidad en los puntos donde la función  $\sigma(m)$

es discontinua. Así tenemos:

- Caso 1: Para las condiciones iniciales de la forma  $m = (4v + 4)2^{k-2} + 1$  y  $t = \tau 2^{k+1} - 1$ , obtenemos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+1)} = \left(\frac{\alpha^z}{\alpha}\right)^k = \alpha^{k(z-1)}, \quad (5.176)$$

$$\lambda_q^{(v,\tau)} = \frac{(z-1) \ln \alpha}{(v+2\tau+1) \ln 2}, \quad (5.177)$$

$$q = 0,2445, \quad (5.178)$$

$$\lambda_{q_{max}} = 1,323. \quad (5.179)$$

Para su caso inverso con condiciones iniciales de la forma  $m = (4v + 3)2^{k-2} + 1$  y  $t = (4\tau + 1)2^{k-2} - 1$ , encontramos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+t)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha^z}\right)^k = \alpha^{-k(z-1)}, \quad (5.180)$$

$$\lambda_Q^{(v,\tau)} = -\frac{(z-1) \ln \alpha}{(v+\tau+1) \ln 2}, \quad (5.181)$$

$$Q = 1,7555, \quad (5.182)$$

$$\lambda_{Q_{min}} = -1,323. \quad (5.183)$$

- Caso 2: Para las condiciones iniciales de la forma  $m = (4v + 3)2^{k-2} + 1$ ,  $t = \tau 2^{k+1} - 1$ , obtenemos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+1)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_2}\right)^k, \quad (5.184)$$

$$\lambda_{q^1}^{(v,\tau)} = \frac{4 \ln \alpha / \alpha_2}{(4v + 8\tau + 3) \ln 2} \sim \frac{4(0,18609)}{4v + 8\tau + 3}, \quad (5.185)$$

$$q^3 = -4,373, \quad (5.186)$$

$$\lambda_{q^3_{max}} = 0,2481. \quad (5.187)$$

Para su caso inverso con condiciones iniciales de la forma  $m = (4v +$

2)  $2^{k-2} + 1$  y  $t = (4\tau + 2)2^{k-2} - 1$ , encontramos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+t)} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^k, \quad (5.188)$$

$$\lambda_{q^1}^{(v,\tau)} = \frac{\ln \alpha_2/\alpha}{(v+\tau+1)\ln 2} \sim -\frac{(0,18609)}{v+\tau+1}, \quad (5.189)$$

$$Q3 = 6,3735, \quad (5.190)$$

$$\lambda_{q3_{min}} = -0,186009. \quad (5.191)$$

- Caso 3: Para las condiciones iniciales de la forma  $m = (4v+2)2^{k-2} + 1$ ,  $t = \tau 2^{k+1} - 1$ , encontramos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+1)} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^k, \quad (5.192)$$

$$\lambda_{Q^4}^{(v,\tau)} = \frac{2 \ln \alpha_2/\alpha_1}{(2v+4\tau+1)\ln 2} \sim -\frac{2(1,31108)}{2v+8\tau+1}, \quad (5.193)$$

$$Q4 = 1,7629, \quad (5.194)$$

$$\lambda_{Q4_{min}} = -2,62216. \quad (5.195)$$

Para su caso inverso con condiciones iniciales de la forma  $m = (4v+1)2^{k-2} + 1$  y  $t = (4\tau+2)2^{k-2} - 1$ , obtenemos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+t)} = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^k, \quad (5.196)$$

$$\lambda_{q^4}^{(v,\tau)} = \frac{4 \ln \alpha_1/\alpha_2}{(4v+4\tau+3)\ln 2} \sim -\frac{4(1,31108)}{4v+4\tau+3}, \quad (5.197)$$

$$q4 = 0,2372, \quad (5.198)$$

$$\lambda_{q^4_{max}} = 0,4370. \quad (5.199)$$

- Caso 4: Para las condiciones iniciales de la forma  $m = (4v+1)2^{k-2} + 1$ ,  $t = \tau 2^{k+1} - 1$ , encontramos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+1)} = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha^z}\right)^k, \quad (5.200)$$

$$\lambda_{Q^2}^{(v,\tau)} = \frac{4 \ln \alpha_1 / \alpha^z}{(4v + 8\tau + 1) \ln 2} \sim -\frac{4(0,1986)}{4v + 8\tau + 1}, \quad (5.201)$$

$$Q^2 = 6,0348, \quad (5.202)$$

$$\lambda_{Q^2_{min}} = -0,7944. \quad (5.203)$$

Para su caso inverso con condiciones iniciales  $m = (4v)2^{k-2} + 1$ ,  $t = (4\tau + 2)2^{k-2} - 1$ , encontramos

$$\xi_t = \frac{\sigma(m)}{\sigma(m+t)} = \left(\frac{\alpha^z}{\alpha_1}\right)^k, \quad (5.204)$$

$$\lambda_{q^2}^{(v,\tau)} = \frac{2 \ln \alpha_1 / \alpha^z}{(2v + 2\tau + 1) \ln 2} \sim -\frac{2(0,1986)}{2v + 3\tau + 1}, \quad (5.205)$$

$$q^2 = -4,034, \quad (5.206)$$

$$\lambda_{q^2_{max}} = 0,397. \quad (5.207)$$

De la misma manera que en la aproximación a dos y tres escalas podemos con estas parejas de valores correspondientes con cada uno de los casos generar distintos espectros para el exponente de Lyapunov  $q$  generalizado y sus correspondientes energías libres  $\psi(q)$  y  $\phi(q)$ , los resultados se presentan a continuación

■ Caso 1

$$\lambda_{\mathbf{q}} = \begin{cases} 1,323 & \text{si } \mathbf{q} \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < \mathbf{q} < 2 - q_c, \\ -1,323 & \text{si } \mathbf{q} \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

con  $q_c = q = 0,2445$  y  $2 - q_c = Q = 1,7555$ . Sus energías libres  $\Phi(\mathbf{q})$  y  $\Psi(\lambda_{\mathbf{q}})$  resultan

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} \lambda_c(\mathbf{q} - q_c) = 1,323(\mathbf{q} - q_c) & \text{si } \mathbf{q} \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < \mathbf{q} < 2 - q_c, \\ -\lambda_c(\mathbf{q} - (2 - q_c)) = -1,323(\mathbf{q} - 2 + q_c) & \text{si } \mathbf{q} \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

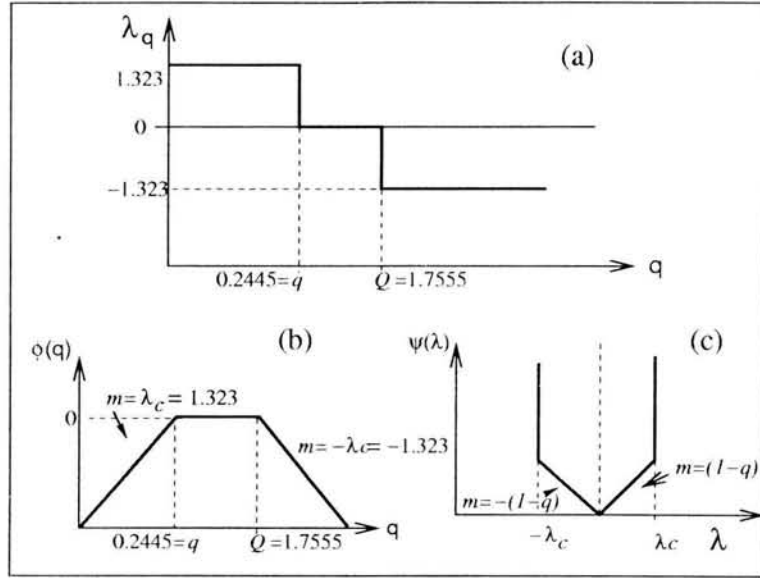


Figura 5.22: (a)  $\lambda_{\mathbf{q}}$  vs  $\mathbf{q}$  (b)  $\Phi(\mathbf{q})$  y (c)  $\Psi(\lambda_{\mathbf{q}})$  para el caso 1 a cuatro escalas

y

$$\Psi(\lambda_{\mathbf{q}}) = \begin{cases} (1 - q_c)\lambda_{\mathbf{q}} = 0,7555\lambda_{\mathbf{q}} & \text{si } 0 < \lambda_{\mathbf{q}} < \lambda_c, \\ -(1 - q_c)\lambda_{\mathbf{q}} = -0,7555\lambda_{\mathbf{q}} & \text{si } -\lambda_c < \lambda_{\mathbf{q}} < 0, \end{cases}$$

con  $\lambda_c = 1/(1 - q_c) = 1,323$ . Las gráficas de estas funciones se muestran en la fig 5.22.

■ Caso 2

$$\lambda_{\mathbf{q}} = \begin{cases} 0,2481 & \text{si } \mathbf{q} \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < \mathbf{q} < 2 - q_c, \\ -0,186 & \text{si } \mathbf{q} \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

con  $q_c = q_3 = -4,373$  y  $2 - q_c = Q_3 = 6,373$ .

Sus energías libres  $\Phi(\mathbf{q})$  y  $\Psi(\lambda_{\mathbf{q}})$  resultan

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} (4/3)\lambda_c(\mathbf{q} - q_c) = 0,2481(\mathbf{q} - q_c) & \text{si } \mathbf{q} \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < \mathbf{q} < 2 - q_c, \\ -\lambda_c(\mathbf{q} - (2 - q_c)) = -0,18609(\mathbf{q} - 2 + q_c) & \text{si } \mathbf{q} \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

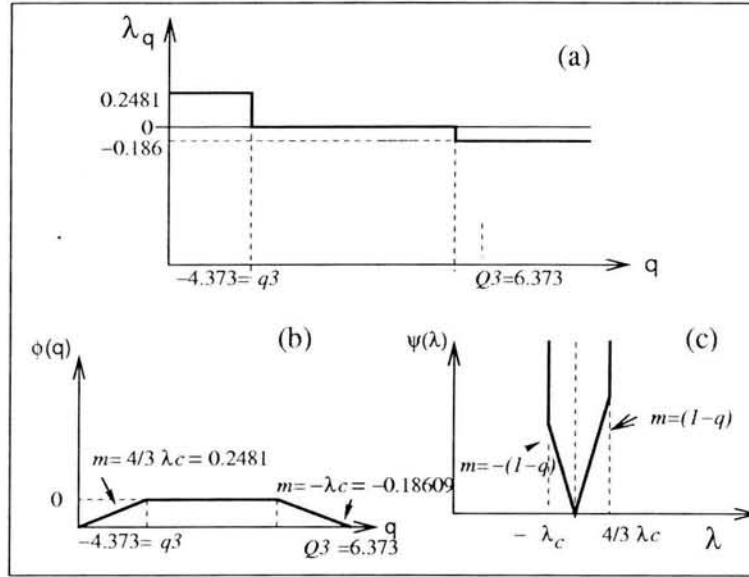


Figura 5.23: (a)  $\lambda_q$  vs  $q$  (b)  $\Phi(q)$  y (c)  $\Psi(\lambda_q)$  para el caso 2 a cuatro escalas

y

$$\Psi(\lambda_q) = \begin{cases} (1 - q_c)\lambda_q = 5,373\lambda_q & \text{si } 0 < \lambda_q < (4/3)\lambda_c, \\ -(1 - q_c)\lambda_q = -5,373\lambda_q & \text{si } -\lambda_c < \lambda_q < 0, \end{cases}$$

con  $\lambda_c = 1/(1 - q_c) = 0,18609$ .

■ Caso 3

$$\lambda_q = \begin{cases} 0,4370 & \text{si } q \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < q < 2 - q_c, \\ -2,62216 & \text{si } q \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

con  $q_c = q_4 = 0,2372$  y  $2 - q_c = Q_4 = 1,7629$ .

Sus energías libres  $\Phi(q)$  y la función  $\Psi(\lambda_q)$  resultan

$$\Phi(q) = \begin{cases} (4/3)\lambda_c(q - q_c) = 0,4370(q - q_c) & \text{si } q \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < q < 2 - q_c, \\ -2\lambda_c(q - (2 - q_c)) = -2,62216(q - 2 + q_c) & \text{si } q \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

y

$$\Psi(\lambda_q) = \begin{cases} (1 - q_c)\lambda_q = 0,7628\lambda_q & \text{si } 0 < \lambda_q < (4/3)\lambda_c, \\ -(1 - q_c)\lambda_q = -0,76238\lambda_q & \text{si } -2\lambda_c < \lambda_q < 0, \end{cases}$$

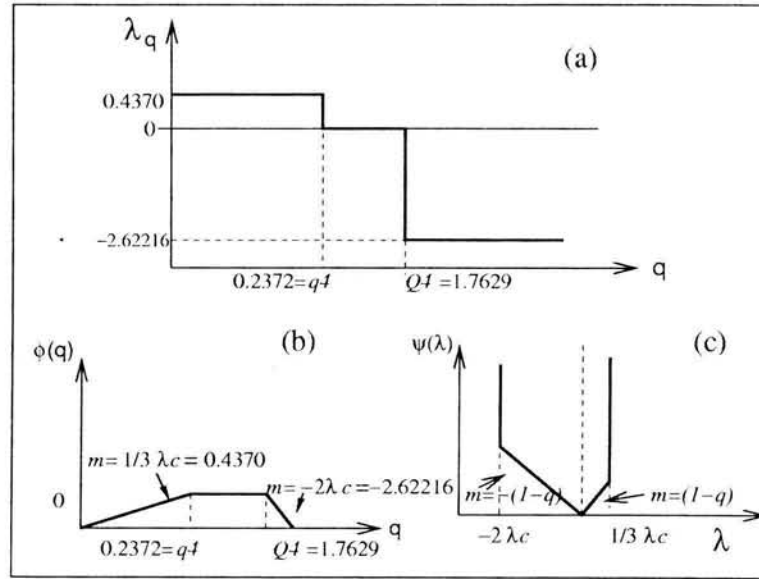


Figura 5.24: (a)  $\lambda_q$  vs  $q$  (b)  $\Phi(q)$  y (c)  $\Psi(\lambda_q)$  para el caso 3 a cuatro escalas

con  $\lambda_c = 1/(1 - q_c) = 1,31108$ . Las gráficas de estas funciones se muestran en la fig 5.23.

■ Caso 4

$$\lambda_q = \begin{cases} 0,1324 & \text{si } q \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < q < 2 - q_c, \\ -0,7944 & \text{si } q \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

con  $q_c = q_2 = -4,0348$  y  $2 - q_c = Q_2 = 6,034$ . Las gráficas de estas funciones se muestran en la fig 5.24.

Sus energías libres  $\Phi(q)$  y  $\Psi(\lambda_q)$

$$\Phi(q) = \begin{cases} (2)\lambda_c(q - q_c) = 0,3974(q - q_c) & \text{si } q \leq q_c, \\ 0 & \text{si } q_c < q < 2 - q_c \\ -(4)\lambda_c(q - (2 - q_c)) = -0,7953(q - 2 + q_c) & \text{si } q \geq 2 - q_c, \end{cases}$$

y

$$\Psi(\lambda_q) = \begin{cases} (1 - q_c)\lambda_q = 5,0348\lambda_q & \text{si } 0 < \lambda_q < 2\lambda_c, \\ -(1 - q_c)\lambda_q = -5,0348\lambda_q & \text{si } -4\lambda_c < \lambda_q < 0, \end{cases}$$



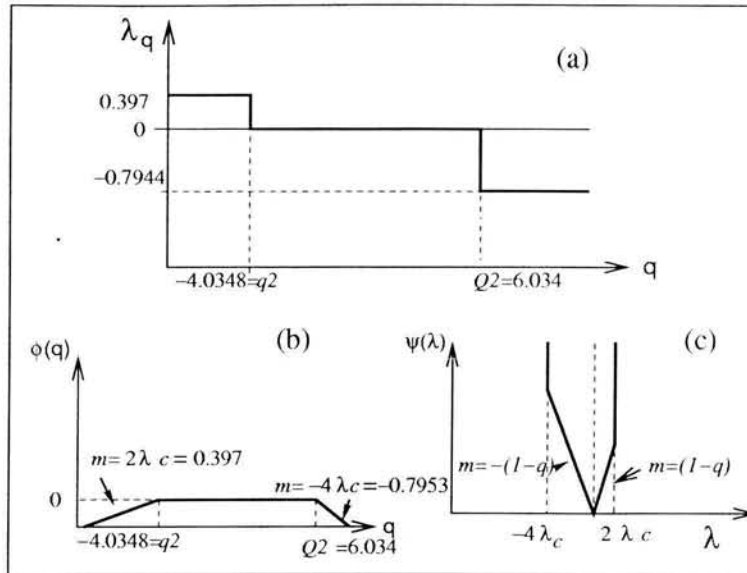


Figura 5.25: (a)  $\lambda_q$  vs  $q$  (b)  $\Phi(q)$  y (c)  $\Psi(\lambda_q)$  para el caso 4 a cuatro escalas

con  $\lambda_c = 1/(1 - q_c) = 0,19861$ . Las gráficas de estas funciones se muestran en la fig 5.25.

Encontramos entonces que cada una de las parejas de valores obtenidas para diferentes condiciones iniciales originan una sensibilidad  $\xi_t$  que sigue la forma de una exponencial  $q$  mostrando sus dos índices de no extensividad  $qi$  y  $Qi$  relacionados entre si mediante la ecuación  $Qi = 2 - qi$ . Estas parejas de valores generan además un espectro del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado individual que muestra dos transiciones de fase tipo Mori en los valores de  $q$  críticos dados por los mismos  $qi$  y  $Qi$  obtenidos mediante el análisis no extensivo de las sensibilidad a las condiciones iniciales. Sus energías libres nos proporcionan las gráficas de las funciones  $\phi(q)$  y  $\psi(q)$ , esta última muestra además de la sección lineal encontrada por Mori [14] con pendiente  $-(1 - q_c)$  otra sección lineal con pendiente  $(1 - q_c)$  correspondiente a la segunda transición de fase  $q$ , también indica el acotamiento lateral dado por los valores máximos y mínimos de  $\lambda_q$ . Notamos además que, debido a que ciertas discontinuidades se conservan al ir aumentando la precisión de la aproximación, aparecen varios valores de  $\lambda_q$  para un mismo valor de  $qi$  y  $Qi$  provenientes de distintas condiciones iniciales, estos valores pueden observarse en el espectro obtenido por Mori. En la tabla siguiente se han resumido los resultados anteriores, se muestran los valores maximos y minimos del exponente de

Lyapunov  $q$  generalizado en cada caso, y su correspondiente valor de  $q_i$  y  $Q_i$ .

$\lambda_q$	$\lambda_Q$	$q$	$Q$
1.323	-2.646	0.2445	1.7555
1.323	-1.0584	0.2445	1.7555
1.323	-1.323	0.2445	1.7555
0.4370	-2.62216	0.2372	1.7629
1.12498	-2.24996	0.1111	1.8889
0.3974	-0.7944	-4.0348	6.034
0.1324	-0.7944	-4.0348	6.034
0.24812	-0.18609	-4.373	6.3735

Cuadro 5.2: Valores del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado  $\lambda_q$  para diferentes  $q$

#### 5.2.4. Transiciones de fase $q$ en el borde del caos

En la sección anterior se obtuvieron los valores más representativos de las fluctuaciones del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado  $\lambda_q$  aproximando la función  $\sigma(m)$  con una función escalón y analizando sus discontinuidades en relación a la termoestadística de Tsallis. Ahora encontraremos de manera numérica el espectro de exponentes de Lyapunov  $\beta$  definidos por Anania y Politi [12] y las transiciones de fase de Mori en el borde del caos respecto a esta cantidad. Para ello empleamos la ecuación (5.125) dada para los factores de expansión  $L_t(m)$  y calculamos la cantidad

$$L_t(m) = \left| \frac{d_{k+1, m+1+t}}{d_{k+1, m+1}} \right| \quad (5.208)$$

para diferentes valores de  $t$ . Tomemos  $t = 2^{k+1} + 1$ , entonces

$$L_t(m) = \left| \frac{d_{k+1, m+2^{k+1}+1}}{d_{k+1, m}} \right| = \left| \frac{d_{k+1, m+1}}{d_{k+1, m}} \right|, \quad (5.209)$$

donde hemos recorrido los valores de  $m$  una unidad. Consideremos otra vez el caso a dos escalas, esto es tomemos en cuenta sólo valores cercanos a  $x = 0$  y  $x = 1$ . La gráfica siguiente muestra el cociente  $\frac{x(t)-x(1)}{x(t)-x(0)}$  vs  $t$  en escala logarítmica

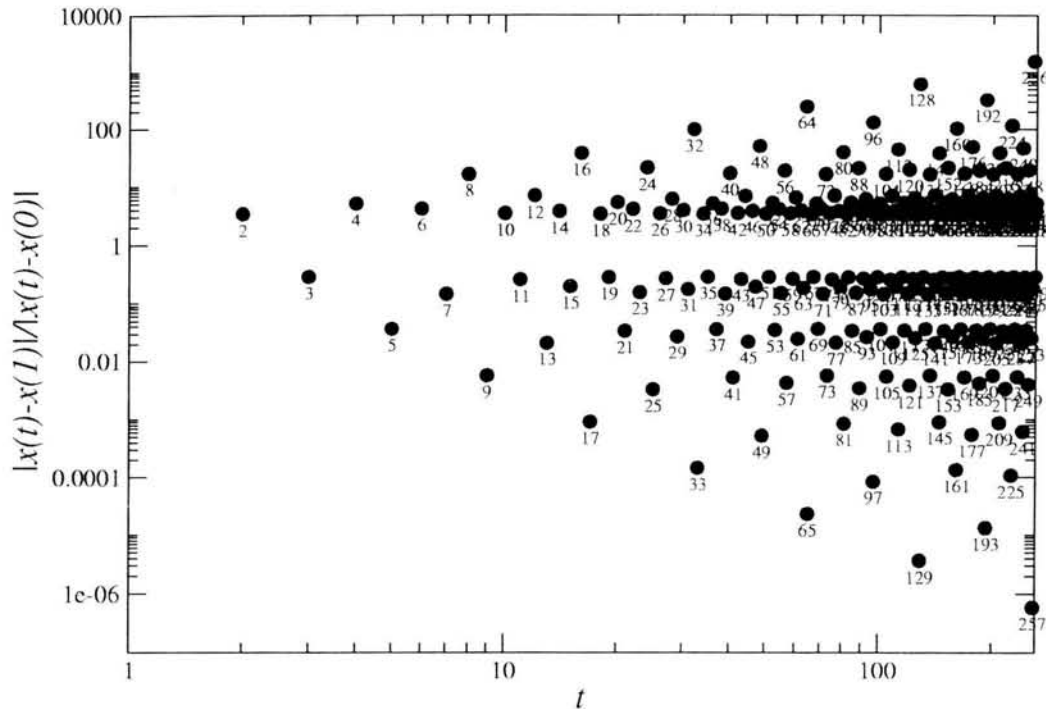


Figura 5.26: Gráfica en escala logarítmica de  $|x(t) - x(1)|/|x(t) - x(0)|$  vs  $t$

Observamos una serie de valores que presentan dependencia lineal de acuerdo a tiempos de la forma de  $t = 2^{k+1} + \tau$ , haciendo el ajuste lineal del logaritmo de  $L_t^r(0)$  contra logaritmo de  $t$  para  $t = 2^{k+1} + \tau$ , encontramos que

$$\begin{aligned} \ln L_t^r &= A \ln t + B, \\ A &= \ln L_t / \ln t + B / \ln t, \end{aligned} \tag{5.210}$$

y

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln L_t^r(0) / \ln t, \tag{5.211}$$

donde  $A$  es la pendiente de la recta obtenida mediante el ajuste lineal de los datos numéricos y  $B$  es la ordenada al origen de la recta.

Del capítulo de planteamiento del problema, recordamos que en el borde del caos

$$\beta(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln f^{(t)}(x_0) / \ln t = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln L_t(x_0) / \ln t \quad (5.212)$$

son cantidades definidas por Anania y Politi [12] apropiadas para una sensibilidad  $\xi_t$  que evoluciona como una ley de potencias y equivalentes al exponente de Lyapunov ordinario.

Para observar la transición de fase  $\mathbf{q}$  en el borde del caos es necesario calcular el espectro de fluctuaciones  $\Psi(\beta)$  de exponentes de Lyapunov generalizados en el borde del caos como función de  $\mathbf{q}$ . Emplearemos para ello las definiciones propuestas por Mori y presentadas en el capítulo de planteamiento del problema. Recordemos que las fluctuaciones del exponente de Lyapunov tienen una dependencia proporcional a  $\ln t$  para  $t$  grande. Esta dependencia nos permite construir el espectro de fluctuaciones de  $\beta(x_0)$  según Mori [14]. La medida de probabilidad de  $\beta_t(x_0)$  de tomar un valor entre  $\beta$  y  $\beta + d\beta$  esta dada por  $P(\beta, t)d\beta$  y presenta la forma de escalamiento algebraica

$$P(\beta, t) = t^{-\Psi(\beta)} P(0, t) \quad (5.213)$$

para  $t$  grande, donde  $\Psi(\beta)$  es una función cóncava de  $\beta$  y especifica el espectro de fluctuaciones de  $\beta$ . Para describir las fluctuaciones grandes de  $\beta$  explícitamente introducimos la función de partición

$$Z_t(\mathbf{q}) \equiv \int d\beta P(\beta, t) t^{-(\mathbf{q}-1)\beta} \quad (-\infty < \beta < \infty), \quad (5.214)$$

y las funciones de estructura termodinámica,

$$\Phi_\beta(\mathbf{q}) \equiv - \lim_{t \rightarrow \infty} (1/\log t) \log Z_t(\mathbf{q}), \quad (5.215)$$

$$\beta(\mathbf{q}) \equiv d\Phi(\mathbf{q})/d\mathbf{q} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{1/Z(\mathbf{q})\} \int d\beta P(\beta, t) \beta t^{-(\mathbf{q}-1)\beta}, \quad (5.216)$$

$$\sigma_\beta(\mathbf{q}) = -d\beta(\mathbf{q})/d\mathbf{q} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{\log t/Z_t(\mathbf{q})\} \int d\beta P(\beta, t) \{\beta - \beta(\mathbf{q})\}^2 t^{-(\mathbf{q}-1)\beta} \quad (5.217)$$

donde  $\beta(\mathbf{q})$  es el promedio de  $\beta$  con el peso  $t^{-(\mathbf{q}-1)\beta}$  y  $\sigma_\beta(\mathbf{q})$  es la variancia con peso  $\mathbf{q}$  de las fluctuaciones de  $\beta$  alrededor de  $\beta(\mathbf{q})$ .  $\Phi_\beta(\mathbf{q})$ .  $Phi_\beta(\mathbf{q})$  es

equivalente a una energía libre,  $\beta(\mathbf{q})$  sería entonces una ecuación de estado donde  $\beta$  toma el papel del parámetro de orden, y  $\sigma_\beta(\mathbf{q})$  es la susceptibilidad correspondiente.

Tomando en cuenta la ecuación (5.213) escribimos la ecuación (5.216) de la forma

$$\begin{aligned}\beta(\mathbf{q}) &\equiv \frac{1}{Z_t} \int d\beta P(\beta, t) \beta t^{-(\mathbf{q}-1)\beta} = \frac{1}{Z_t} \int d\beta t^{-\Psi} \beta t^{-(\mathbf{q}-1)\beta} \\ &= \frac{1}{Z_t} \int d\beta \beta t^{-(\Psi+(\mathbf{q}-1)\beta)}\end{aligned}\quad (5.218)$$

con

$$\begin{aligned}Z_t &\equiv \int d\beta P(\beta, t) t^{-(\mathbf{q}-1)\beta} = \int d\beta t^{-\Psi} t^{-(\mathbf{q}-1)\beta} \\ &= \frac{1}{Z_t} \int d\beta t^{-(\Psi+(\mathbf{q}-1)\beta)}.\end{aligned}\quad (5.219)$$

Tomando la función  $\Psi(\beta)$  como

$$\Psi(\beta) = \begin{cases} -0,7555\beta & \text{si } \beta < 0 \\ +0,7555\beta & \text{si } \beta > 0, \end{cases}$$

$\beta(\mathbf{q})$  resulta

$$\beta(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{1}{Z_t} \int d\beta \beta t^{(1,7555-\mathbf{q})\beta} & \text{si } \beta < 0 \\ \frac{1}{Z_t} \int d\beta \beta t^{(0,2445-\mathbf{q})\beta} & \text{si } \beta > 0 \end{cases}$$

donde

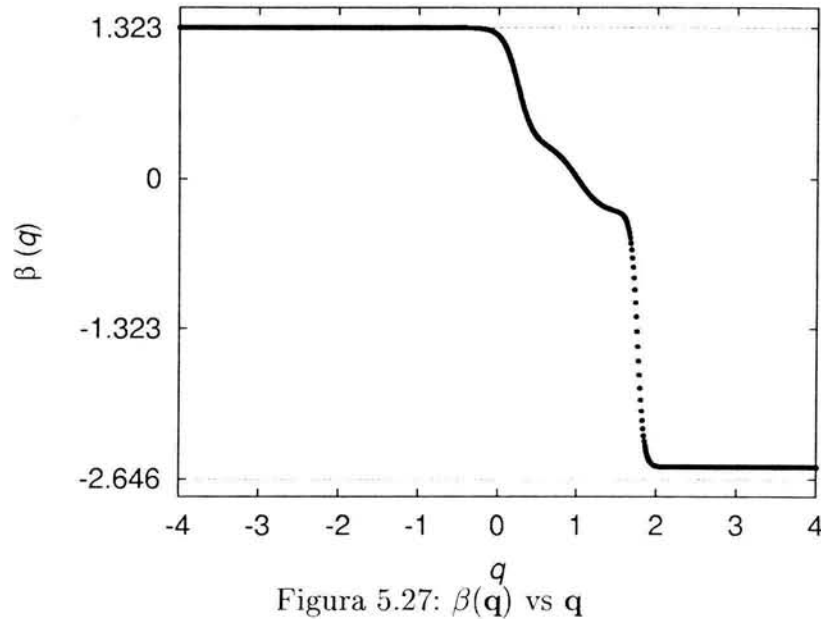
$$Z_t = \begin{cases} \int d\beta t^{(1,7555-\mathbf{q})\beta} & \text{si } \beta < 0 \\ \int d\beta t^{(0,2445-\mathbf{q})\beta} & \text{si } \beta > 0 \end{cases}$$

Recordemos que en nuestro modelo los valores discretos de  $\beta(x_0)$  estan dados por

$$\beta(x_0) = \ln f'^t(x_0) / \ln t = \ln |d_{k+1,m+1} / d_{k+1,m}| / \ln t, \quad (5.220)$$

de manera que, calculando esta cantidad numéricamente para  $m = 0$ ,  $m+1 = 1$  obtenemos para la ecuación (5.2.4) los resultados graficados en la figura 5.27.

La siguiente figura muestra la gráfica de la función  $\sigma(\mathbf{q})$  definida por la ecuación (5.217), observamos dos transiciones de fase  $\mathbf{q}$  en los valores de  $\mathbf{q}$



críticos  $q = 0,2445$  y  $Q = 1,7555$ . La grafica 5.29 muestra la función  $\phi(\mathbf{q})$  obtenida numéricamente empleando la ecuación (5.215).

Encontramos que este resultado coincide con lo obtenido previamente a través del análisis de la sensibilidad a condiciones iniciales empleando la forma de exponenciales  $q$ , donde habíamos aproximado la función  $\lambda_q$  como una función escalón. En este caso el resultado numérico muestra que la función escalón es el caso límite de  $\beta(\mathbf{q})$  cuando tomamos como condiciones iniciales puntos dentro del atractor cercanos a  $x = 0$  y  $x = 1$ . Su correspondiente función de energía libre  $\Psi(\beta)$  nos da la solución lineal que origina la transición de fase  $\mathbf{q}$ . Se presentan dos transiciones de fase de Mori en el valor de  $q = 0,2445$  y  $Q = 1,7555$ .

Se llevó a cabo el mismo cálculo, considerando ahora diferentes condiciones iniciales y finales. Las gráficas siguientes (5.30, 5.31, 5.32, 5.33) muestran el espectro de  $\beta$  vs  $\mathbf{q}$  y la varianza  $\sigma(\mathbf{q})$  para distintos valores de  $m$  los cuales se indican en los pies de figura y corresponden con los valores donde se esperan las discontinuidades de la función  $\sigma(m, z)$  según la tabla 5.2, observándose las transiciones de fase  $\mathbf{q}$  en los valores esperados y los límites superior e inferior del exponente de Lyapunov.

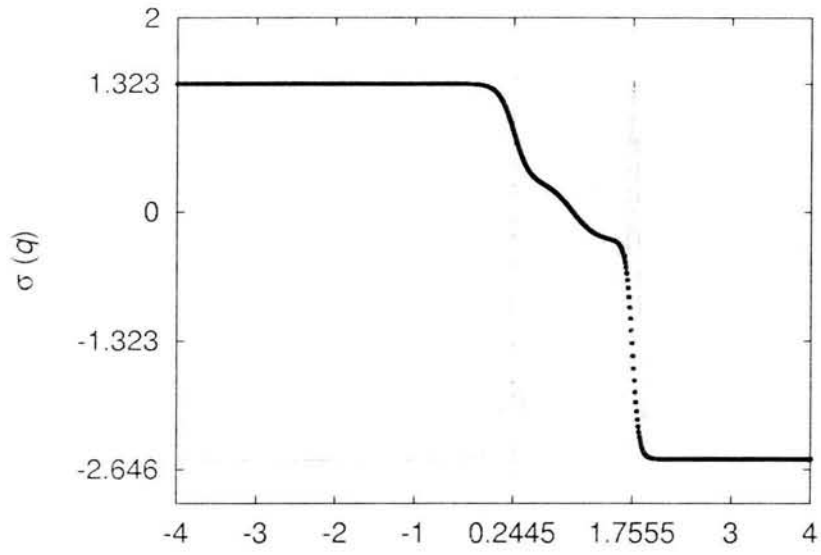


Figura 5.28:  $\sigma(q)$  vs  $q$

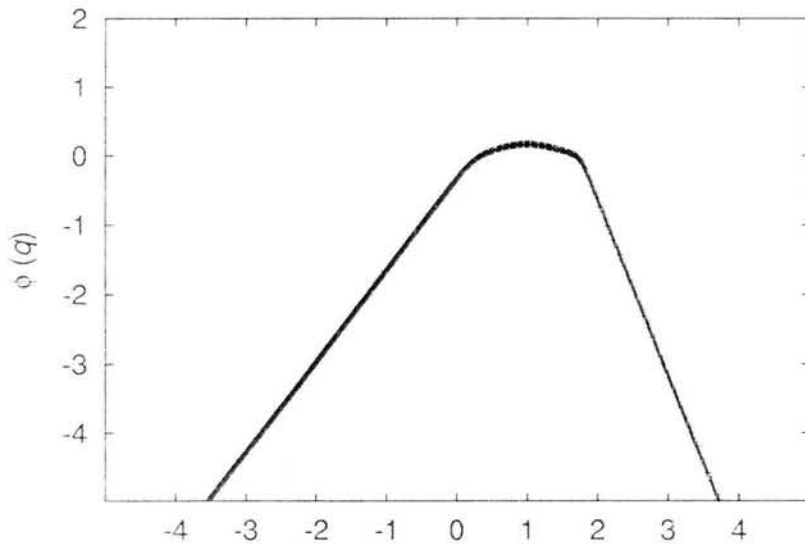


Figura 5.29:  $\phi(q)$  vs  $q$

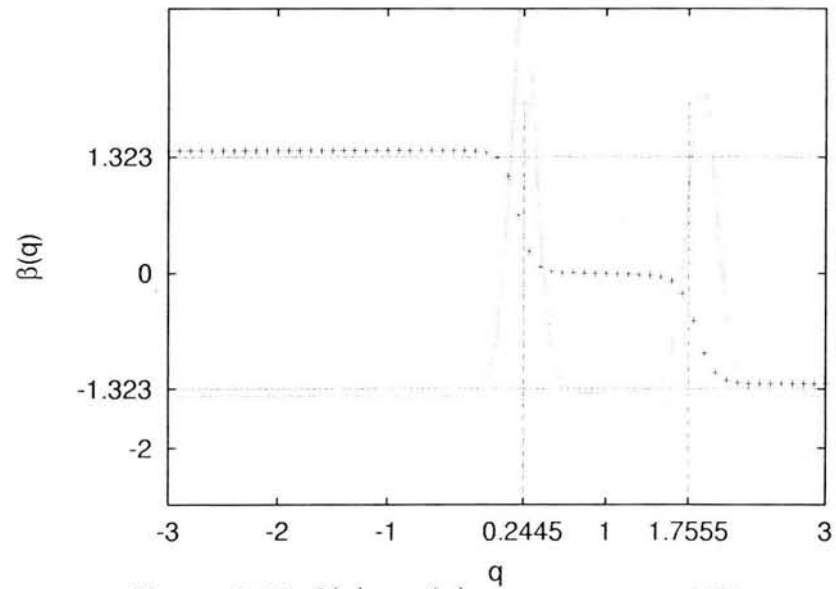


Figura 5.30:  $\beta(\mathbf{q})$  y  $\sigma(\mathbf{q})$  vs  $\mathbf{q}$  para  $m = 133$

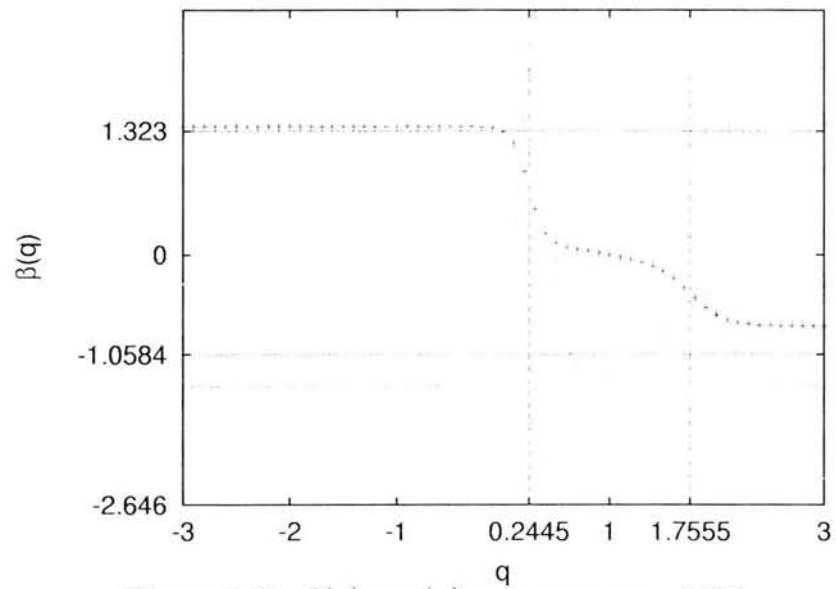


Figura 5.31:  $\beta(\mathbf{q})$  y  $\sigma(\mathbf{q})$  vs  $q$  para  $m = 8192$



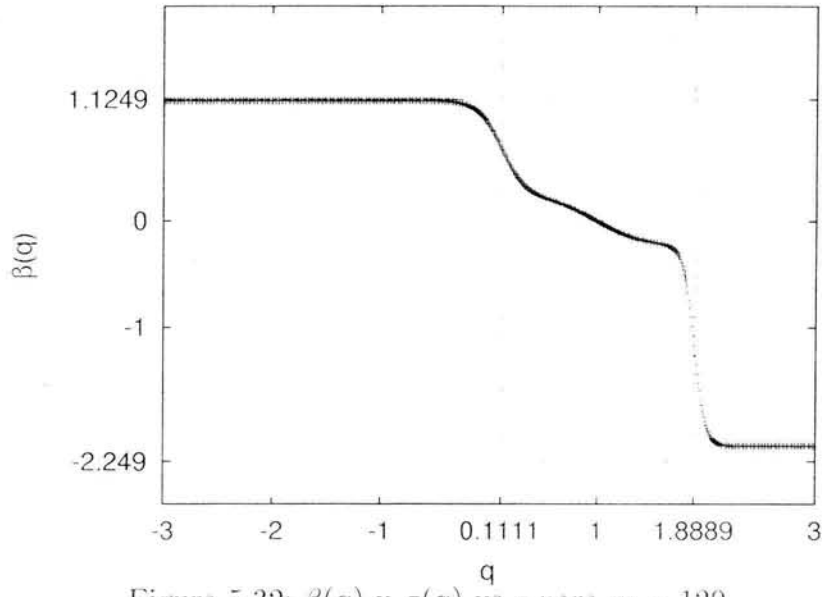


Figura 5.32:  $\beta(\mathbf{q})$  y  $\sigma(\mathbf{q})$  vs  $q$  para  $m = 129$

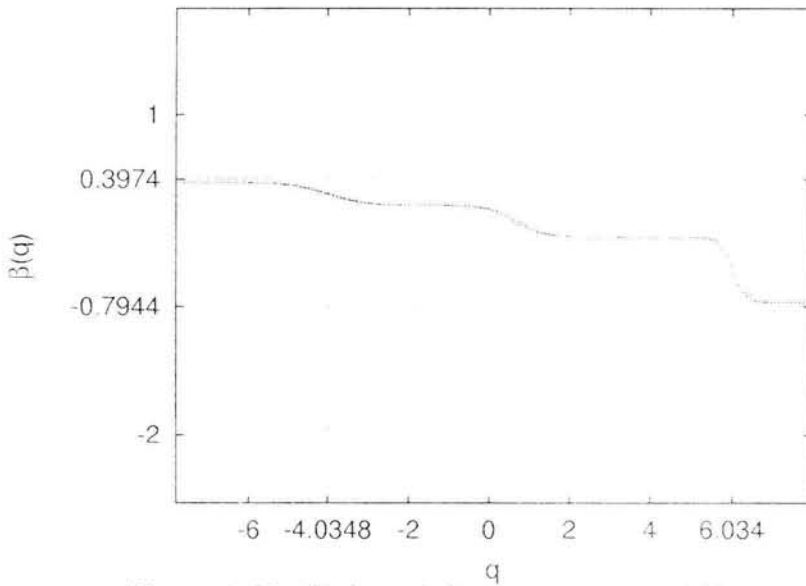


Figura 5.33:  $\beta(\mathbf{q})$  y  $\sigma(\mathbf{q})$  vs  $q$  para  $m = 133$



# Capítulo 6

## Conclusiones

A continuación presentamos las conclusiones principales derivadas de éste trabajo de investigación. Primero estableceremos las conclusiones generadas de la primera parte de la tesis, que se refiere al estudio de la parte estática del atractor de Feigenbaum mediante el grupo de renormalización. En esta sección:

- Estudiamos las propiedades estáticas del atractor multifractal de la familia de mapeos tipo logístico  $f(x) = 1 - r|x|^z$  ( $0 < r < 2$  y  $z > 1$ ) en el borde del caos (esto es para  $r = r_\infty$ ).
- Empleamos la transformación de grupo de renormalización de Feigenbaum sobre la función de partición estructural del sistema, eliminando sistemáticamente secciones del multifractal a través de la composición funcional del mapeo.
- El análisis de la evolución de la dimensión generalizada  $D_q$  a través de la TGR nos llevó a encontrar los puntos fijos de ésta.
- Los puntos fijos de la TGR para  $D_q$  se encuentran relacionados con la función de escalamiento  $\eta(q) = q/\tau$  la cual presenta los valores de escalamiento permitidos para cada mapeo, mostrando una discontinuidad en los valores permitidos igual a  $\Delta\eta(q) = D_{-\infty}^{-1} - D_\infty^{-1}$ .
- La relación anterior corresponde además con los resultados encontrados previamente por Tsallis y colaboradores [19, 20], donde su índice de no extensividad  $q$  se encuentra relacionado con las propiedades estáticas del multifractal mediante la expresión  $1/(1-q) = D_{-\infty}^{-1} - D_\infty^{-1} = \Delta\eta(q)$ .

- Estos puntos fijos corresponden además, con la dimensión crítica de cada una de las dos secciones fundamentales del multifractal. Una de ellas es la zona cercana a  $x = 0$  donde los puntos del atractor se encuentran menos concentrados y la otra corresponde a la zona cercana a  $x = 1$  donde los puntos del atractor se encuentran mas concentrados.
- El brinco en la función  $\eta(q)$  puede ser considerada como una discontinuidad entre dos ramas de la energía libre estática del sistema  $F$  definida a través de la dimensión generalizada  $D_q$ .
- La relación encontrada entre la fórmula de Tsallis y nuestra función de escalamiento  $\eta(\mathbf{q})$  indica que una explicación de esta relación es que el sistema a lo largo de su evolución dinámica pasa de una sección del multifractal a otra. La diferencia entre los factores de escala característicos de cada una de estas regiones provoca un brinco en la energía libre estática que se refleja en las propiedades dinámicas del sistema a través del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado y en el índice de no extensividad  $q$ .

De la segunda parte del trabajo de investigación donde estudiamos el aspecto dinámico del atractor de Feigenbaum encontramos lo siguiente:

- Se estableció un manera sistemática para determinar el valor de los diámetros  $d_{k,m}$  a través de la órbita superestable en  $r = r_\infty$ , que llamamos órbita maestra (órbita superestable).
- Mediante éste método se construyó numéricamente la función de escalamiento  $\sigma(m, z)$ .
- Se determinó de manera rigurosa el valor del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado  $\lambda_q$  mediante las propiedades de la función de punto fijo de la transformación de grupo de renormalización de Feigenbaum para los mapeos con máximo de orden  $z$  cuando tomamos como condición inicial  $x(0) = 1$ .
- El valor encontrado analíticamente para  $\lambda_q(1)$  corresponde con el reportado previamente y que fué obtenido mediante distintos métodos [21, 18, 19].
- Mediante el análisis del comportamiento de la sensibilidad a las condiciones iniciales  $\xi_t$ , que resultan tener expresiones exponenciales  $q$  se

- 
- encontraron varios conjuntos de valores del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado y sus correspondientes índices de no extensividad  $q$  y  $Q$  para diferentes condiciones iniciales y finales.
- Estos conjuntos de valores del exponente de Lyapunov  $q$  generalizado para diferentes condiciones iniciales, nos permitieron construir una serie de espectros del exponente  $\lambda_q$ , donde en cada uno se presentan dos transiciones de fase tipo Mori en dos valores críticos de  $q$  que coinciden con los valores de los índices de no extensividad encontrados del análisis a través de la sensibilidad  $\xi_t$ .
  - A través de la descomposición del espectro de exponentes de Lyapunov  $q$  generalizados con distintas parejas de condiciones iniciales y finales, encontramos un conjunto discreto de valores de  $q$  (índice de no extensividad) provenientes de cada uno de los factores de escala que caracterizan localmente el multifractal.
  - Se calcularon de manera numérica los espectros de los exponentes de Lyapunov  $\beta$  definidos por Anania y Politi [12], empleando las funciones de estructura termodinámica  $\beta(\mathbf{q})$ ,  $\psi(\lambda)$  y  $\phi(\mathbf{q})$  definidas por Mori en el borde del caos y se encontraron las transiciones de fase de Mori tomando parejas de condiciones iniciales y finales.
  - Cada uno de los espectros que encontramos mostraron tener dos transiciones de fase de Mori en los valores esperados de  $\mathbf{q}$  críticos correspondientes con los obtenidos mediante el análisis de la sensibilidad a las condiciones iniciales que obedecen exponenciales  $q$ .
  - Los espectros de  $\beta(\mathbf{q})$  obtenidos mostraron ser equivalentes a los espectros de  $\lambda_q$  calculados.
  - Lo anterior muestra que, al descomponer el espectro de  $\beta(\mathbf{q})$  reportado inicialmente por Mori [14] (el cual corresponde con considerar muchas condiciones iniciales y que presenta una transición de fase  $\mathbf{q}$  en un valor de  $\mathbf{q}_c = 1,7555$ ) considerando parejas de condiciones iniciales y finales, obtenemos una serie de espectros individuales que muestran cada uno, dos transiciones de fase tipo Mori en dos valores específicos de  $\mathbf{q}$ .
  - Estos valores críticos de  $\mathbf{q}$  donde se presentan las transiciones de fase de Mori y que denotamos por  $q$  y  $Q$ , nos lleva a los resultados encontrados por nosotros correspondiendo con los índices de no extensividad

generados por el análisis de la sensibilidad a las condiciones iniciales y relacionados entre si por la expresión  $Q = 2 - q$  proveniente de las propiedades de las exponenciales  $q$ .

- La parte lineal con pendiente  $-(1 - q)$  observada en la función de estructura termodinámica  $\psi(\lambda)$  por Mori también se observa en cada uno de los espectros individuales, sin embargo aquí se observa además otra parte lineal positiva con pendiente  $+(1 - q)$  correspondiente con la segunda transición de fase presente.
- El espectro individual correspondiente a tomar en cuenta sólo los dos factores de escalamiento correspondientes con la región cercana a  $x = 0$  y  $x = 1$  (región mas espaciada y mas apretada del multifractal respectivamente), indica dos transiciones de fase tipo Mori en los dos valores de  $q$  críticos  $q = 0,2445$  y  $Q = 1,7555$ . Este último corresponde con el observado por Mori, y el primero con el índice de no extensividad reportado anteriormente. Ambos se encuentran relacionados a través de las propiedades de las exponenciales  $q$  como ya se ha mencionado.

En conclusión llevamos a cabo el estudio de las propiedades estáticas del atractor de Feigenbaum mediante la transformación del grupo de renormalización de Feigenbaum. Esta consiste en la composición funcional y reescalamiento del mapeo original. Al readaptar esta TGR sobre la función de partición estática del sistema, eliminamos sistemáticamente secciones ordenadas del multifractal original. Los puntos fijos encontrados para la dimensión generalizada  $D_q$  mostraron estar conectados con la relación encontrada por Tsallis entre la dinámica a través del índice de no extensividad  $q$  y la estática a través de las dimensiones  $D_{-\infty}$  y  $D_{\infty}$  dada por  $1/1 - q = D_{-\infty}^{-1} - D_{\infty}^{-1}$ . Una explicación de ésta propiedad es que, a lo largo de su evolución dinámica el sistema visita la parte del multifractal donde la dimensión dominante es  $D_{\infty}$  y pasa a la zona donde la dimensión dominante es  $D_{-\infty}$ . El paso de una zona a otra requiere de un brinco en la energía libre estática  $\Delta F = D_{-\infty}^{-1} - D_{\infty}^{-1}$  que se refleja en la relación dinámica a través del índice  $q$ . Encontramos además que la transición de fase observada por Mori en el espectro de exponentes de Lyapunov generalizados aparece en un valor de  $q_c$  igual al valor del índice no extensivo  $Q = 2 - q$  encontrado a través del análisis de la sensibilidad a las condiciones iniciales por medio de exponenciales  $q$ . La descomposición de éste espectro en parejas de condiciones iniciales y finales muestran un conjunto de espectros de exponentes de Lyapunov generalizados, que muestran

cada uno dos transiones de fase  $q$  en los valores críticos  $q_i$  y  $Q_i$  conectados entre si mediante la relación  $Q = 2 - q_i$ .

Hemos logrado nuestros objetivos delineados en el planteamiento del problema (sección 3.5). Nuestros resultados, que son rigurosos, permiten entender la relación entre los estudios de la dinámica en el borde del caos llevados a cabo por Politi, Mori y colaboradores [14, 72] y los estudios mas recientes de este mismo problema llevados a cabo por Tsallis, Robledo y colaboradores que muestran la validéz de la estadística no extensiva para el borde del caos.





# Bibliografía

- [1] H.G. Schuster. *Deterministic Chaos*. Physic-Verlag, Weinheim, 1988.
- [2] M. Schroeder. *Fractals, Chaos, Power Laws*. W.H. Freeman and Company, NY, 1991.
- [3] C. Beck and F. Schlogl. *Thermodynamics of Chaotic Systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [4] H. Huang. *Statistical Physics*. McGraw-Hill, 1982.
- [5] T.L. Hill. *An introduction to Statistical Thermodynamics*. Dover, 1986.
- [6] J. Cardy. *Scalling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge University Press, 1997.
- [7] M. Fisher. *Renormalization Group Theory: Its Basis and Formulation in Statistical Physics*. Reviews on Modern Physics, vol 70 No. 2, 1998.
- [8] M. Fisher. Scalig, universality and renormalization group theory. *Lecture Notes in Physics*, 186:1, 1983.
- [9] R.C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press, 2000.
- [10] P. Szépfalusy and T. Tel. *Phys. Rev.*, 34 A:2520, 1986.
- [11] W. Withers E. Ott and J.A. Yorke. *J. Stat. Phys*, 36:697, 1984.
- [12] R. Badii and A. Politi. *Phys. Rev. A*, 35:1288, 1987.
- [13] Z. Kovács and T. Tel. *Phys. Rev.*, 45 A:2270, 1992.

- [14] T. Horita H. Hata and H. Mori. *Progress of theoretical Physics*, 82, No.5:897, 1989.
- [15] L.P. Kadanoff I. Procaccia T.C. Halsey, M.H. Jensen and B.I. Shraiman. *Phys. Rev. A*, 33, No. 2:1141, 1986.
- [16] L.P. Kadanoff M.H. Jensen and I. Procaccia. *Phys. Rev. A*, 36, No. 3:1409, 1987.
- [17] P. Grassberger and I. Procaccia. *Phys. Rev. Lett.*, 50 No. 5:346, 1983.
- [18] C. Anteodo and C. Tsallis. *Phys. Rev. Lett.*, 80 No. 24:5313, 1998.
- [19] M.L. Lyra and C. Tsallis. *Phys. Rev. Lett.*, 80 No. 1:53, 1998.
- [20] A.R. Plastino U.M.S. Costa, M.L. Lyra and C. Tsallis. *Phys. Rev. E*, 56 No. 1:245, 1997.
- [21] F. Baldovin and A. Robledo. *Phys. Rev. E*, 66:045104(R), 2002.
- [22] A. Robledo. *Phys. Lett. A*, 328:467, 2004.
- [23] C. Tsallis. *J. Stat. Phys.*, 52:479, 1988.
- [24] C. Tsallis et all. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3589, 1995.
- [25] A. Cho. *Science*, 297:1268, 2002.
- [26] S. Abe, A. Rapisarda A.K. Rajagopal; A. Plastino; V. Latora, and A. Robledo. *Science*, 300:249, 2003.
- [27] H.W. Capel J.P. Van der Weele and R. Kluiving. *Physica*, 145A:425, 1987.
- [28] E. Mayoral and A. Robledo. *Physica A*, 340:219, 2004.
- [29] P. Collet and J.P. Eckmann. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Birkhauser, Basel, 1980.
- [30] B.B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
- [31] H. Hata T. Morita and H. Mori. *Progress of Theoretical Physics*, 78, No.3:511, 1987.

- [32] M.J. Feigenbaum. *J. of Stat. Phys.*, 21 No. 6:669, 1979.
- [33] M.J. Feigenbaum. *Physica*, 7D:16, 1983.
- [34] H.B. Callen. *Thermodynamics*. John Wiley & Sons, 1980.
- [35] J.J. Binney N.J. Dowrick J. Fisher, M.E. Newman. *The Theory of Critical Phenomena (An introduction to the Renormalization Group)*. Oxford University Press, 1993.
- [36] C. Shannon and W. Weaver. *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, Urbana, 1948.
- [37] E. W. Montroll and M.F. Shlesinger. *J. Stat. Phys.*, 32:209, 1983.
- [38] M.F. Shlesinger G.M. Zaslavsky and U. Frish. *Lévy Flights and Related Topics in Physics*. Springer, Berlin, 1995.
- [39] M.F. Shlesinger G.M. Zaslavsky and U. Frish. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Wiley, N.Y., 1971.
- [40] P.A. Alemany and D.H. Zanette. *Phys. Rev. E*, 49:R956, 1994.
- [41] A.M.C. de Souza C. Tsallis, S.B.F. Levy and R. Maynard. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3589, 1996.
- [42] S.G. Kim P.Jund and C. Tsallis. *Phys. Rev. B*, 52:50, 1995.
- [43] C. Tsallis and B.J. Bukman. *Phys. Rev. E*, 54:R2197, 1996.
- [44] L.P. Kadanoff. *Physics*, 2:263, 1966.
- [45] M.J. Feigenbaum. *J. of Stat. Phys.*, 19:25, 1978.
- [46] P. Coullet and J. Tresser. *J. Phys*, C5:25, 1978.
- [47] H.G.E. Hentschell and I.Procaccia. *Physica*, 8D:435, 1983.
- [48] P. Grassberger. *J. of Stat. Phys.*, 26 No. 1:173, 1981.
- [49] P. Grassberger. *Phys. Lett.*, 97A No. 6:227, 1983.
- [50] A. Libchaber I. Procaccia M.H. Jensen, L.P. Kadanoff and J. Stavans. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2798, 1985.

- [51] R. Badii A. Politi and P. Grassberger. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 21:L763, 1988.
- [52] P. Grassberger. *Physica*, 14D:3665, 1985.
- [53] M. Kohmoto. *Phys. Rev. A*, 37 No. 4:1345, 1987.
- [54] R. Badii P. Grassberger and A. Politi. *J. of Stat. Phys.*, 51:135, 1988.
- [55] P. Grassberger and A. Politi. *Physica*, 13D:34, 1984.
- [56] H. Fujisaka. *Prog. Theor. Phys*, 70:1264, 1983.
- [57] H. Mori T. Morita H. Hata, T. Horita and K. Tomita. *Progress of Theoretical Physics*, 80, No.5:809, 1988.
- [58] H. Mori T. Horita, H. Hata and K. Tomita. *Progress of Theoretical Physics*, 81, No.6:1073, 1989.
- [59] P. Szépfalusy and T. Tel. *Phys. Rev. A*, 35 No. 1:477, 1987.
- [60] T. Tel. *Z. Naturforsch*, 43 a:1154, 1988.
- [61] D. Katzen and I. Procaccia. *Phy. Rev. Lett.*, 58:1169, 1987.
- [62] A. Csordas Z. Kovács P. Szépfalusy, T. Tel. *Phys. Rev. A*, 36:3525, 1987.
- [63] C. Beck and G. Roepstorff. *Physica*, 25D:173, 1987.
- [64] T. Bohr and D. Rand. *Physica D*, 25:387, 1987.
- [65] T. Tel. *Phys. Lett.*, A119:65, 1986.
- [66] T. Tel. *Phys. Rev A*, 36:2507, 1987.
- [67] F. Baldovin and A. Robledo. *Phys. Rev. E*, 69:0452XX-1, 2004.
- [68] P. Cvitanovic. *University in Chaos*. Hilger Bristol, 1984.
- [69] M.J. Feigenbaum. *Comm. Math. Phys*, 77:65, 1980.
- [70] T.C. Halsey and M.H. Jensen. *Physica*, 23D:112, 1986.
- [71] H. Mori T. Horita T. Morita, H. Hata and K. Tomita. *Progress of Theoretical Physics*, 79:1334, 1988.

[72] G. Anania and A. Politi. *Europhys. Lett.*, 7(2):119, 1988.

[73] V. Latora y M. Baranger. *Phys. Rev. Lett.*, 82:520, 1999.

# Índice alfabético

- índice de acumulación, 38
- órbita periódica, 9
- órbita periódica estable, 10
- órbita periódica inestable, 11
- aperiódica, 9
- atractor, 10
- Atractor de Feigenbaum, 94
- atractores extraños, 11
- caos, 7
- caos determinista, 7
- capacidad, 38
- ciclo, 9
- conjunto de presiones, 48
- conjunto grab canónico, 52
- conjunto muestra, 34
- decimación, 25
- definición lineal, 25
- densidad de partícula, 51
- densidad de probabilidad, 36
- densidad invariante, 37
- dimensión de Hausdorff, 38
- dimensiones de Rényi, 39
- disyunción completa, 34
- ecuación de estado, 52
- energía libre, 47
- entropía de Kolmogoriv Sinai, 42
- entropía generalizada o de Tsallis, 19
- ergódico, 36
- espacio de fase, 9
- exponente de escalamiento local, 39
- flujo de grupo de renormalización, 22
- grupo de renormalización, 22
- Hamiltoniano efectivo, 26
- longitud del ciclo, 9
- mapeo, 8
- mapeos no lineales, 8
- medida de probabilidad, 36
- medida invariante, 37
- numero bit, 15
- periódica, 9
- principio de máxima entropía, 13
- probabilidad, 34
- punto fijo, 28
- punto fijo crítico, 32
- punto fijo de alta temperatura, 30
- punto fijo de baja temperatura, 30
- punto fijo del mapeo  $f$ , 9
- punto fijo estable, 10
- punto fijo hiperbólico, 12
- regla de la mayoría, 25
- renormalización en espacio  $k$ , 23

- 
- renormalización en espacio real, 23
  
  - secuencia simbólica, 41
  - Sistemas disipativos, 9
  - sistemas Hamiltonianos, 9
  - superficie crítica, 30
  
  - tiempo total, 9
  - transición de fase dinámica, 54
  - transiciones de fase  $q$ , 59
  - transiciones de fase de expansión  
    métrica, 56
  - transiciones de fase de expansión  
    topológica, 55
  - transiciones de fase de Mori, 59
  - transiciones de fase externas, 57
  - transiciones de fase internas, 57
  - transiciones de fase, 52
  - trayectoria, 9
  
  - variables de bloque, 25
  - variables irrelevantes, 30
  - variables relevantes, 30