

01149



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SECCIÓN MECÁNICA

***Diseño de una Plataforma
Paralela Esférica***

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
INGENIERÍA ÁREA: MECÁNICA

PRESENTA:

ING. NORBERTO LÓPEZ LUIZ

ASESOR: M. en I. FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ

MÉXICO D.F.

DICIEMBRE 2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIAS

A Dios, por permitirme lograr alcanzar esta meta.

A mi esposa, por estar siempre a mi lado apoyándome, a mis hijas con amor y por ser el motor que me impulsa a seguir adelante.

A mi madre, por su apoyo, comprensión y amor.

A la memoria de mi padre.

A mis hermanos, por su apoyo incondicional.

A Francisco Cuenca Jiménez por su asesoría y apoyo incondicional, que hizo posible el desarrollo de este trabajo, gracias por tu amistad.

Al CONACYT, por el apoyo recibido para realizar mis estudios de maestría.

A mis maestros y compañeros por compartir sus conocimientos y experiencias.

A la Universidad de Colima, por el apoyo otorgado.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo receptonal.
NOMBRE: NORBERTO LOPEZ LUIZ
FECHA: 18 NOV 2004
FIRMA: 

Resumen

Las características de los robots paralelos los hacen particularmente apropiados para numerosas aplicaciones. Por ejemplo como manipuladores capaces de soportar grandes cargas, simuladores de vuelo, micromáquinas, centros de maquinado, etc.

Por la complejidad de su implementación, su control y su diseño, representan hoy en día un gran problema y reto de análisis.

En este trabajo de tesis se propone un diseño acerca del mecanismo de Plataforma Paralela Esférica, el cual consta de una base fija, un plato móvil y tres cadenas cinemáticas, cada una de ellas formadas por dos eslabones.

Se desarrolla una síntesis del mecanismo mediante dos métodos, denominados: método de matrices de desplazamiento y método del ángulo constante. Mediante la síntesis, es posible obtener distintas configuraciones del mecanismo.

Una vez seleccionada la configuración que cumple con los requerimientos, es posible proponer el diseño de un prototipo de la Plataforma Paralela Esférica. De esta forma se realiza un modelo sólido del mecanismo con sus respectivas dimensiones.

Posterior a la síntesis se realiza un análisis cinemático mediante el método de forma cerrada, así mismo se lleva a cabo un balanceo del mecanismo, a través del método de contrapesos.

Para validar el balanceo logrado, se desarrolla un análisis estático y dinámico, empleando el método de trabajo virtual; de esta forma es posible obtener también el valor de los torques requeridos para el movimiento de la plataforma paralela.

Prólogo

En la actualidad existe un gran interés por parte de los investigadores en cuanto a los robots paralelos, esto es debido a sus numerosas aplicaciones.

Por lo anterior, en este trabajo de tesis se propone un diseño acerca del mecanismo de Plataforma Paralela Esférica tipo 3R, denominado también Robot Paralelo Esférico de 3 grados de libertad, el cual consiste en el desarrollo de la síntesis del mecanismo, así como de su análisis cinemático, estático y dinámico.

En el capítulo 1 de esta tesis se presenta un resumen de los estudios previos acerca de los mecanismos y en especial la descripción de los manipuladores paralelos esféricos. También se plantean los objetivos del proyecto.

Algunos conceptos fundamentales sobre los métodos matriciales en la cinemática se muestra en el capítulo 2.

En el capítulo 3 se desarrolla la síntesis de la plataforma, utilizando dos métodos de solución. Dicha síntesis se utiliza para obtener las posiciones iniciales de la configuración deseada; logrando así proponer el diseño de un prototipo para la plataforma paralela esférica.

El comportamiento cinemático de la plataforma se muestra en el capítulo 4, obteniendo el desplazamiento, la velocidad y la aceleración mediante el método de forma cerrada. Con base en el análisis cinemático, en el capítulo 5 se propone el método de contrapesos para lograr el balanceo.

Dicho balanceo es validado empleando el método de trabajo virtual para el análisis estático y dinámico, respectivamente, el cual es presentado en el capítulo 6. Finalmente en el capítulo 7, se muestran las conclusiones derivadas del proyecto.

Lista de símbolos y abreviaturas

PPE	Plataforma paralela esférica
GDL	Grados de libertad
R	Junta de revolución
s	Seno
c	Coseno
a	punto o pivote de posición de un eslabón
i	Número de cadena cinemática
j	Número de posiciones
[R]	Matriz de rotación
[D]	Matriz de desplazamiento
[E]	Matriz de rotación alrededor de un eje
[I]	Matriz identidad
α_{1n}, α_{2n}	Posición angular de los primeros y segundos eslabones de la cadena cinemática.
D_{1n}, D_{2n}, D_{3n}	Términos de posición para α_{1n}
D_{4n}, D_{5n}, D_{6n}	Términos de posición para α_{2n}
$\dot{\alpha}_{1n}, \dot{\alpha}_{2n}$	Velocidad angular de los primeros y segundos eslabones de la cadena cinemática.
$V_{1n}, V_{2n}, V_{3n}, V_{4n}$	Términos de velocidad para α_{1n}
$V_{5n}, V_{6n}, V_{7n}, V_{8n}$	Términos de velocidad para α_{2n}
$\ddot{\alpha}_{1n}, \ddot{\alpha}_{2n}$	Aceleración angular de los primeros y segundos eslabones de la cadena cinemática.
$A_{1n}, A_{2n}, \dots, A_{14n}$	Términos de aceleración para α_{1n}
$A_{15n}, A_{16n}, \dots, A_{28n}$	Términos de aceleración para α_{2n}
δW	Trabajo virtual
δR	Desplazamiento virtual

Índice general

1. Generalidades	1
1.1. Introducción	1
1.2. Justificación	1
1.3. Objetivos	2
1.4. Definiciones	3
1.5. Descripción de Manipuladores Paralelos	5
2. Métodos Matriciales en la Cinemática	9
2.1. Introducción	9
2.2. Matrices de Rotación	9
2.2.1. Rotación Alrededor de Ejes Cartesianos	10
2.2.2. Matrices de Rotación Espaciales (respecto de un eje arbitrario)	12
2.2.3. Matrices de Rotación con Ángulos de Euler	13
2.2.4. Matriz de Desplazamiento	15
3. Síntesis de la PPE	17
3.1. Introducción	17
3.2. Clases de Síntesis	17
3.3. Características de la PPE	18
3.4. Síntesis de Conducción de Cuerpo Rígido	20
3.4.1. Método de Matrices de Desplazamiento	20
3.4.2. Método del Ángulo Constante	29
3.4.3. Solución de las Ecuaciones de Diseño	32
3.4.4. Otras Soluciones	37
3.5. Diseño del Prototipo de la PPE	43
3.5.1. Consideraciones de Diseño	43
3.5.2. Modelo y Configuración del Prototipo	43
4. Análisis Cinemático	46
4.1. Introducción	46
4.2. Generalidades	47
4.3. Análisis Cinemático - Método de Forma Cerrada	47

4.3.1. Análisis de Posición	50
4.3.2. Análisis de Velocidad	56
4.3.3. Análisis de Aceleración	63
4.4. Trayectoria de la PPE	73
5. Balanceo Estático	79
5.1. Introducción	79
5.2. Balanceo de Mecanismos Paralelos	79
5.3. Balanceo de la Plataforma Esférica	80
5.4. Ejemplo de Aplicación	95
6. Análisis Estático y Dinámico	103
6.1. Introducción	103
6.2. Método de Trabajo Virtual	103
6.3. Análisis Aplicado a la PPE	104
6.3.1. Desarrollo de Términos	107
6.3.2. Matrices de Transformación	114
6.4. Análisis Estático	118
6.4.1. Para el Caso No Balanceado	118
6.4.2. Para el Caso Balanceado	119
6.5. Análisis Dinámico	121
6.5.1. Para el Caso No Balanceado	121
6.5.2. Para el Caso Balanceado	124
Conclusiones	127
A. Términos Algebraicos Empleados	129
A.1. Solución de Ecuación Trascendental	129
A.2. Ángulo entre Dos Vectores	131
B. Dibujos de Detalle y Ensamble de la PPE	132
Bibliografía	141

Capítulo 1

Generalidades

1.1. Introducción

En este primer capítulo, se justifica y plantea el proyecto de tesis, así como los objetivos generales y particulares que se pretenden cubrir. Se definen conceptos relacionados con la teoría de mecanismos y las máquinas. Así mismo se describen las características más importantes de los mecanismos de plataforma paralela, a fin de predeterminedar las condiciones hacia el diseño de la misma.

1.2. Justificación

El crecimiento continuo e impresionante de los conocimientos sobre cinemática y dinámica de las máquinas en las últimas décadas ha venido a reforzar los métodos de análisis y desarrollos comunes de los mismos.

El presente trabajo de tesis surge del análisis de mecanismos esféricos y plataformas paralelas. Con el fin de conjuntar ambas áreas de estudio, se investigó sobre su uso y aplicación, originando el tema de tesis "**Diseño de una Plataforma Paralela Esférica**" (PPE), el cual es conocido como robot paralelo de tres grados de libertad (3 GDL).

Los manipuladores paralelos pueden ser encontrados en distintas aplicaciones, como por ejemplo, simuladores de vuelo (Stewart, 1965), articulaciones ajustables (Reinholtz y Gokhale, 1987), máquinas para minería (Arai, 1991), aparato posicionador (Gosselin y Hamel, 1994), y máquinas caminantes (Waldron, 1984).

Recientemente han sido desarrollados como centros de maquinados de multi-grados de libertad, con alta velocidad y alta precisión (Giddings y Lewis, 1995).

Dentro de los usos y aplicaciones más comunes que se tienen para estos tipos de mecanismos se encuentran las máquinas de control numérico (CNC) para

realizar trabajos de manufactura; esto es debido a que permiten fácilmente orientar la pieza de trabajo en una posición deseada con cierto ángulo de inclinación, permitiendo que la máquina herramienta realice el maquinado ya programado. Así mismo se utilizan en los sistemas de simulación de vuelo, ya que poseen la ventaja de su fácil orientación y capacidad para sostener o llevar grandes cargas [1].

El principal propósito de este trabajo de tesis es contribuir en el estudio de las plataformas paralelas esféricas en relación con el análisis y diseño, empleando para esto, los métodos vectorial y algebraico para la síntesis y el análisis cinemático, respectivamente; realizando un balanceo estático empleando el método de contrapesos y un análisis de equilibrio estático y dinámico mediante el método de trabajo virtual.

Finalmente, en una etapa posterior construir un prototipo de la PPE para comprobar los resultados obtenidos analíticamente y a la vez profundizar en el análisis del comportamiento cinemático y dinámico en estos mecanismos.

1.3. Objetivos

Objetivos Generales

El objetivo principal es la síntesis y el análisis de una PPE de tres GDL, desarrollando para esto:

- 1) Una síntesis cinemática
- 2) Un análisis cinemático (método algebraico)
- 3) Un análisis de balanceo (método de contrapesos)
- 4) Un análisis estático y dinámico de fuerzas (método del trabajo virtual)

El método de balanceo con contrapesos se aplicará a la PPE con el fin de conseguir su equilibrio estático, de esta forma se logra que los torques requeridos para su movimiento sean mínimos. También se pretende comprobar el balanceo logrado, aplicando el método de trabajo virtual para el equilibrio estático y dinámico.

Objetivos Particulares

- 1) Lograr una síntesis adecuada y crear eslabones simétricos.
- 2) Realizar el análisis cinemático de la PPE mediante el método algebraico, para obtener posición, velocidad y aceleración, que serán utilizados en el análisis dinámico.

- 3) Aplicar el método de balanceo con contrapesos, para lograr el equilibrio total del cuerpo rígido que forma la PPE, respecto de cualquier orientación.
- 4) Mediante el método de trabajo virtual lograr comprobar los resultados obtenidos del balanceo, verificando el equilibrio estático del cuerpo; además de determinar el análisis dinámico del mismo y obtener finalmente el valor de los torques requeridos.
- 5) Verificar que se cumplan las expectativas del trabajo de tesis, en cuanto al diseño de la PPE.

Con los objetivos anteriores se logrará contribuir significativamente en el estudio del comportamiento cinetoestático del mecanismo esférico debido a que nos permitirá conocer los movimientos esperados del mismo; logrando así contar con una herramienta matemática y visual para comprobar si el diseño considerado es adecuado o no para los propósitos que se persigan.

1.4. Definiciones

Un **mecanismo** [2], puede definirse como una combinación de varios cuerpos conectados por medio de articulaciones, cuyo propósito es transformar el movimiento.

Una **máquina** es un ensamble de uno o más mecanismos, junto con otros componentes eléctricos o hidráulicos, usados para transformar energía externa en trabajo u otra forma de energía.

El manipulador mecánico de un sistema robótico es un mecanismo, el cual pasa a ser una máquina al adaptarle un microprocesador para su control, sensores de fuerza, encoders y otros accesorios que son incorporados para que la energía externa se convierta en trabajo.

Los mecanismos [3], se pueden clasificar en: **planos, esféricos y espaciales**; el criterio para distinguirlos se basa en los movimientos.

Un **mecanismo plano** [4], como se muestra en la figura 1.1 [11], es aquel en el cual todos los cuerpos rígidos describen curvas planas en el espacio y todas éstas se encuentran en planos paralelos; es decir, los lugares geométricos de todos los puntos son curvas planas paralelas a un solo plano en común. El eslabonamiento plano de cuatro barras, la leva de disco y su seguidor, y el mecanismo de corredera-manivela son ejemplos conocidos de mecanismos planos.

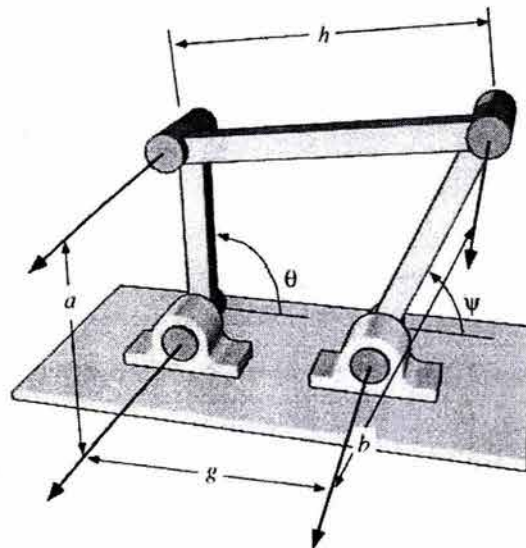


Figura 1.1. Mecanismo plano de 4 barras.

Un **mecanismo esférico** [3], es aquel, en el cual los ejes de todos los pares de revoluta se interceptan en un punto en común llamado el centro de la esfera, como se muestra en la figura 1.2. [11].

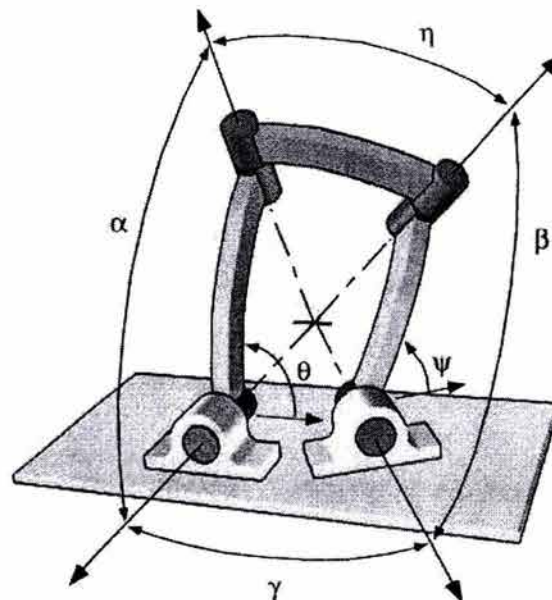


Figura 1.2. Mecanismo esférico de 4 barras.

Un **mecanismo espacial** [3], como el mostrado en la figura 1.3 [11], es aquel en el cual algunos eslabones experimentan un movimiento tridimensional en el espacio.

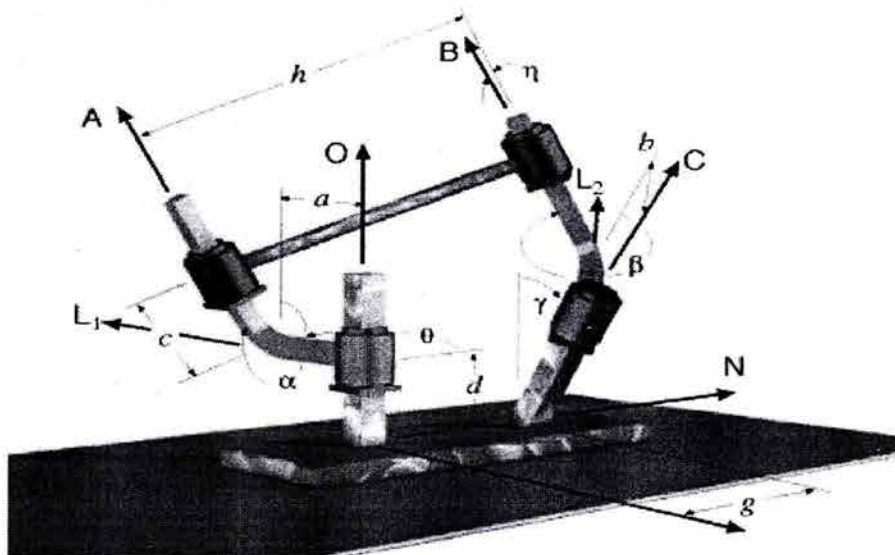


Figura 1.3. Mecanismo espacial.

1.5. Descripción de Manipuladores Paralelos

El diseño de manipuladores paralelos data de 1962 con Gough y Whitehall, en 1965, Stewart diseñó un manipulador de plataforma para su uso como simulador de vuelos.

En 1983, Hunt realizó un estudio sistemático de la estructura cinemática de manipuladores paralelos. Desde entonces los manipuladores paralelos han sido estudiados extensivamente por numerosos grupos de investigadores [1].

Los **manipuladores paralelos** son clasificados como **planar**, **esféricos** o **espaciales**, de acuerdo con sus características de movimiento. En la figura 1.4 [18], se muestra un manipulador paralelo, el cual consiste de una plataforma móvil que es conectada a una base fija alrededor de un cierto número de piernas.

Específicamente, el número de piernas es igual al número de grados de libertad (GDL) y cada una de ellas es controlada por un actuador, los cuales van montados a la base fija. Por esta razón los manipuladores paralelos son algunas veces llamados manipuladores de plataforma paralela o mecanismos de plataforma paralela.

La plataforma móvil es el punto de atención del mecanismo, debido a que según su aplicación, soportará una carga, guiará una herramienta o sólo será un efector final.

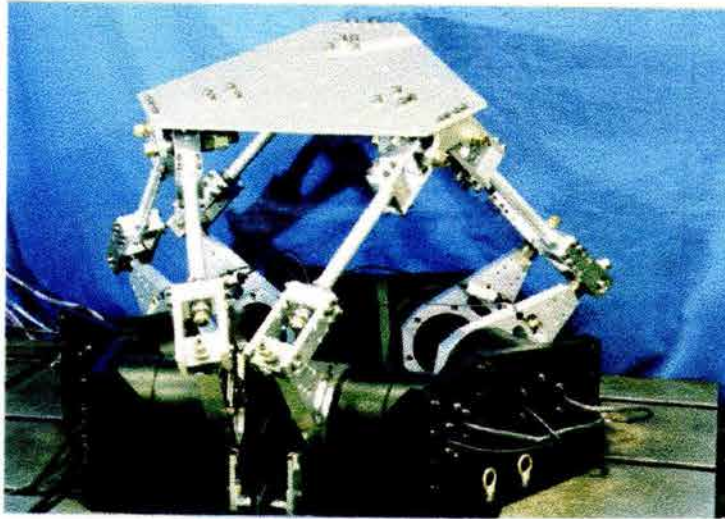


Figura 1.4. Robot Paralelo de 6 GDL.

Debido a que la carga externa puede ser repartida en los actuadores, los manipuladores paralelos tienden a tener una gran capacidad de soporte de carga. Los manipuladores paralelos poseen la ventaja de su alta rigidez, baja inercia y su gran capacidad de carga. Sin embargo, sus desventajas son su relativamente pequeña utilidad de espacio de trabajo y dificultades en el diseño; además su cinemática directa es un problema muy complejo.

La figura 1.5 [19], muestra un simulador de vuelos el cual es una de las muchas aplicaciones que tienen las plataformas paralelas.

La figura 1.6, representa un manipulador paralelo de 6 GDL formado por 3 cadenas cinemáticas, dicho manipulador fué desarrollado en el Laboratorio de la Universidad de Laval en Canadá. Este es un nuevo tipo de plataforma paralela espacial, la cual puede ser balanceada estáticamente por medio de resortes [16].

La figura 1.7, muestra el denominado "*Ojo Ágil*" o robot de visión, el cual es una de las aplicaciones que se le han dado a los manipuladores paralelos; fué desarrollado en 1993 en el Laboratorio de la Universidad de Laval en Canadá. El ojo ágil es un manipulador paralelo esférico de 3 GDL, 3 RRR; desarrollado para la rápida orientación de una cámara [16].

Los mecanismos esféricos [1], pueden ser considerados como un caso especial de mecanismos espaciales, debido a que se presentan como una consecuencia de una geometría especial en la orientación particular de los ejes de sus juntas.

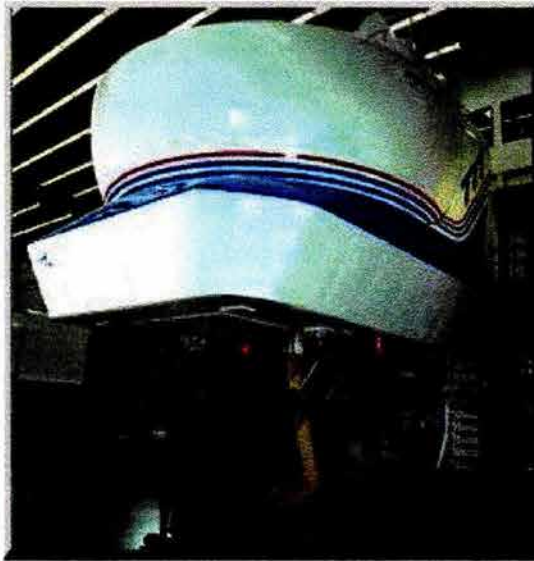


Figura 1.5. Simulador de Vuelos (Stewart).



Figura 1.6. Manipulador paralelo.

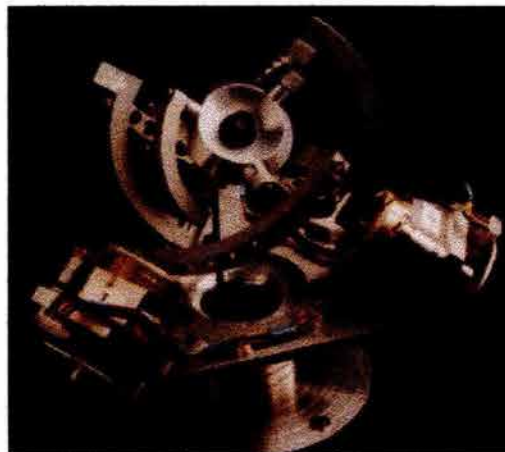


Figura 1.7. Robot de visión.

Para manipuladores de eslabonamiento esférico, el único tipo de junta permisible es el tipo de *junta de revolución (R)*, y todos los ejes de las juntas se intersectan en un punto en común, llamado el *centro esférico*.

El manipulador mostrado en la figura 1.8, es un manipulador paralelo esférico de 3 GDL, 3 RRR; el cual es objeto de estudio en esta tesis.

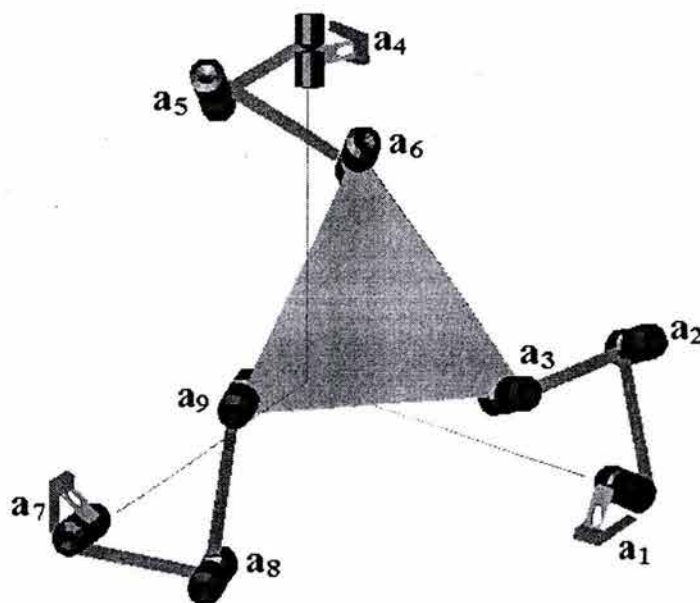


Figura 1.8. Manipulador paralelo esférico de 3 GDL.

Capítulo 2

Métodos Matriciales en la Cinemática

2.1. Introducción

En el presente capítulo se describen los métodos matriciales y su aplicación en el análisis de cuerpos rígidos. Con el uso de la notación matricial aquí descrita, se desarrolló el análisis para la PPE. Se hace mención sobre las formas matriciales que se emplean para describir la rotación o el movimiento angular de un cuerpo en el espacio tridimensional.

2.2. Matrices de Rotación

El desplazamiento total de un cuerpo rígido [5], puede ser siempre considerado como la suma de sus componentes básicos: la rotación angular del cuerpo más el desplazamiento lineal de cualquier punto de referencia arbitrario fijo en el cuerpo rígido (usualmente el centro de masa).

El movimiento angular puede ser descrito de diferentes maneras, las más comunes son:

- 1) Un conjunto de rotaciones alrededor de un conjunto derecho de ejes cartesianos.
- 2) Ángulos de Euler.
- 3) Rotación angular alrededor de un eje arbitrario en el espacio.

En la siguientes secciones se describirán brevemente cada uno de ellos.

2.2.1. Rotación Alrededor de Ejes Cartesianos

Una matriz de rotación de 3×3 se puede definir como una matriz de transformación que opera sobre un vector de posición en un espacio tridimensional y transforma sus coordenadas expresadas en un sistema de coordenadas rotado $Ox'y'z'$ (sistema ligado al cuerpo) a un sistema de coordenadas de referencia fijo $Oxyz$.

En la figura 2.1 se dan dos sistemas de coordenadas rectangulares, los sistemas $Oxyz$ y $Ox'y'z'$. Ambos sistemas de coordenadas tienen sus orígenes coincidentes en el punto O . El sistema de coordenadas $Ox'y'z'$ está girado con respecto al sistema de referencia $Oxyz$.

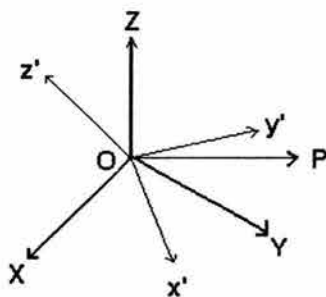


Figura 2.1. Sistema rotado.

Considerando una rotación con ángulo α alrededor del eje z (ver figura 2.2) para un vector de longitud constante fijo en un cuerpo rígido rotando. Las componentes del vector v antes y después del desplazamiento son medidos respecto a los ejes fijos xyz .

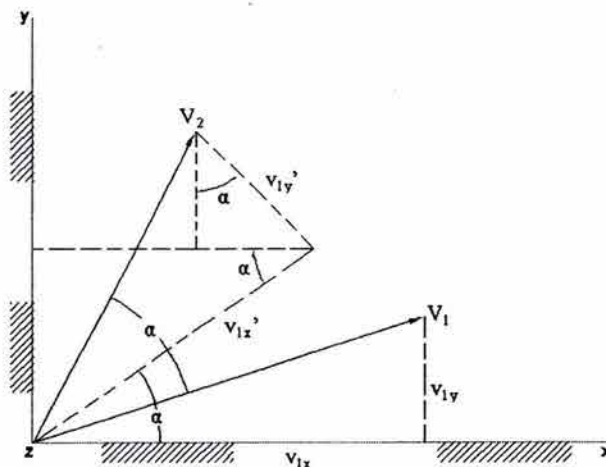


Figura 2.2. Rotación de un vector con respecto a un eje z fijo.

De la figura 2.2 anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_{1x'} + \mathbf{v}_{1y'} + \mathbf{v}_{1z'} \\
 &= (v_{1x}c\alpha)\hat{\mathbf{i}} + (v_{1x}s\alpha)\hat{\mathbf{j}} - (v_{1y}s\alpha)\hat{\mathbf{i}} + (v_{1y}c\alpha)\hat{\mathbf{j}} + v_{1z}\hat{\mathbf{k}} \\
 &= (v_{1x}c\alpha - v_{1y}s\alpha)\hat{\mathbf{i}} + (v_{1y}s\alpha + v_{1x}c\alpha)\hat{\mathbf{j}} + v_{1z}\hat{\mathbf{k}} \quad (2.3.1)
 \end{aligned}$$

pero también:

$$\mathbf{v}_2 = v_{2x}\hat{\mathbf{i}} + v_{2y}\hat{\mathbf{j}} + v_{2z}\hat{\mathbf{k}} \quad (2.3.2)$$

siendo $s = \text{seno}$, $c = \text{coseno}$. Igualando las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 v_{2x} &= v_{1x}c\alpha - v_{1y}s\alpha \\
 v_{2y} &= v_{1y}s\alpha + v_{1x}c\alpha \\
 v_{2z} &= v_{1z} \quad (2.3.3)
 \end{aligned}$$

por lo tanto, matricialmente para una rotación α alrededor de z se tiene:

$$\begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

Para una rotación β alrededor de y :

$$\begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

Para una rotación de γ alrededor de x :

$$\begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

estas son las llamadas **matrices básicas de rotación**, las cuales describen la rotación de cualquier vector fijo en un cuerpo rígido.

Las matrices básicas de rotación se pueden multiplicar entre sí para representar una secuencia de rotación finita (**matriz de rotación compuesta**) respecto del eje principal del sistema de coordenadas $Oxyz$. Como las multiplicaciones de matrices no conmutan, es importante el orden o secuencia de realización de las rotaciones. Por ejemplo, para desarrollar una matriz de rotación que represente una rotación de ángulo α respecto del eje Ox seguida por una rotación del

ángulo θ respecto del eje Oz , seguida por una rotación del ángulo ϕ respecto del eje Oy ; la matriz de rotación resultante que representa estas rotaciones es:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{R}] &= [\mathbf{R}_{\phi,y}][\mathbf{R}_{\theta,z}][\mathbf{R}_{\alpha,x}] \\
 &= \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\phi c\theta & s\phi s\alpha - c\phi s\theta c\alpha & c\phi s\theta s\alpha + s\phi c\alpha \\ s\theta & c\theta c\alpha & -c\theta s\alpha \\ -s\phi c\theta & s\phi s\theta c\alpha + c\phi s\alpha & c\phi c\alpha - s\phi s\theta s\alpha \end{bmatrix} \quad (2.3.7)
 \end{aligned}$$

Esto es diferente de la matriz de rotación que representa una rotación de ángulo ϕ respecto de Oy seguida por una rotación de ángulo θ respecto del eje Oz , seguida por una rotación de ángulo α respecto del eje Ox . La matriz de rotación resultante es:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{R}] &= [\mathbf{R}_{\alpha,x}][\mathbf{R}_{\theta,z}][\mathbf{R}_{\phi,y}] \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta c\phi & -s\theta & c\theta s\phi \\ c\alpha s\theta c\phi + s\alpha s\phi & c\alpha c\theta & c\alpha s\theta s\phi + s\alpha c\phi \\ s\alpha s\theta c\phi - c\alpha s\phi & s\alpha c\theta & s\alpha s\theta s\phi + c\alpha c\phi \end{bmatrix} \quad (2.3.8)
 \end{aligned}$$

2.2.2. Matrices de Rotación Espaciales (respecto de un eje arbitrario)

Las rotaciones [20] no siempre se realizan sobre los ejes coordenados principales. A menudo interesa una rotación sobre un eje arbitrario en el espacio, por lo tanto si $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$, expresado en el marco $0x_0y_0z_0$, es un vector unitario definido en un eje. Se quiere derivar la matriz de rotación $[\mathbf{R}_{k,\theta}]$ representando una rotación de θ grados sobre este eje.

Hay distintas formas en que la matriz $[\mathbf{R}_{k,\theta}]$ puede ser derivada. Por ejemplo la forma más simple es rotar el vector \mathbf{k} alrededor de uno de los ejes coordenados, es decir z_0 , entonces al rotar sobre z_0 por θ y finalmente rotar \mathbf{k} de regreso a su posición original. Con referencia a la figura 2.3, se ve que podemos rotar \mathbf{k} en z_0 para la primera rotación sobre z_0 por $-\alpha$, entonces rotando sobre y_0 por $-\beta$. Donde todas las rotaciones son realizadas relativas al marco fijo $0x_0y_0z_0$, la matriz $[\mathbf{R}_{k,\theta}]$ es obtenida como:

$$[\mathbf{R}_{k,\theta}] = [\mathbf{R}_{z,\alpha}][\mathbf{R}_{y,\beta}][\mathbf{R}_{z,\theta}][\mathbf{R}_{y,-\beta}][\mathbf{R}_{z,-\alpha}] \quad (2.3.9)$$

De la figura 2.3, donde \mathbf{k} es un vector unitario, tenemos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (2.3.10)$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}$$

Sustituyendo (2.3.10) en (2.3.9), se obtiene:

$$[\mathbf{R}_{\mathbf{k},\theta}] = \begin{bmatrix} k_x^2 V_\theta + c\theta & k_x k_y V_\theta - k_z s\theta & k_x k_z V_\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y V_\theta + k_z s\theta & k_y^2 V_\theta + c\theta & k_y k_z V_\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z V_\theta - k_y s\theta & k_y k_z V_\theta + k_x s\theta & k_z^2 V_\theta + c\theta \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

donde $V_\theta = \operatorname{Vers} \theta = 1 - c\theta$

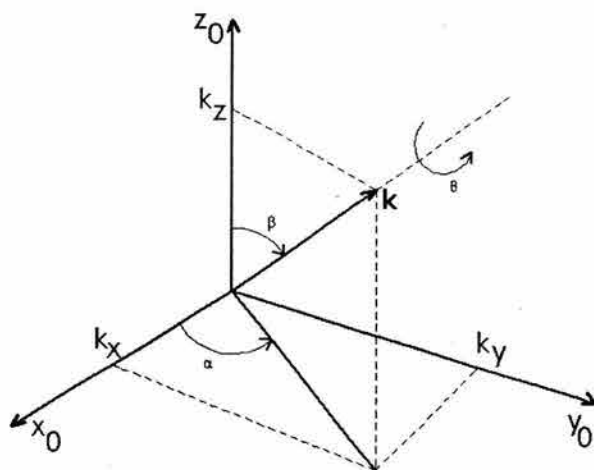


Figura 2.3. Rotación sobre un eje arbitrario.

2.2.3. Matrices de Rotación con Ángulos de Euler

En los ángulos de Euler [5], el desplazamiento del cuerpo rígido está en función de tres ángulos de desplazamiento relativo denominados (ψ, θ, ϕ) , ver figura 2.4. El termino relativo implica que los ángulos se toman en ejes x, y, z , los cuales están definidos en el cuerpo y no respecto a los ejes fijos X, Y, Z . En un inicio ambos sistemas coinciden.

Los ángulos ψ y θ son conocidos como ángulo de *precesión* y *nutación* respectivamente, los cuales sirven para orientar el eje z (eje de giro). Con el ángulo de *rotación* (ϕ) el cuerpo rígido completa su desplazamiento angular.

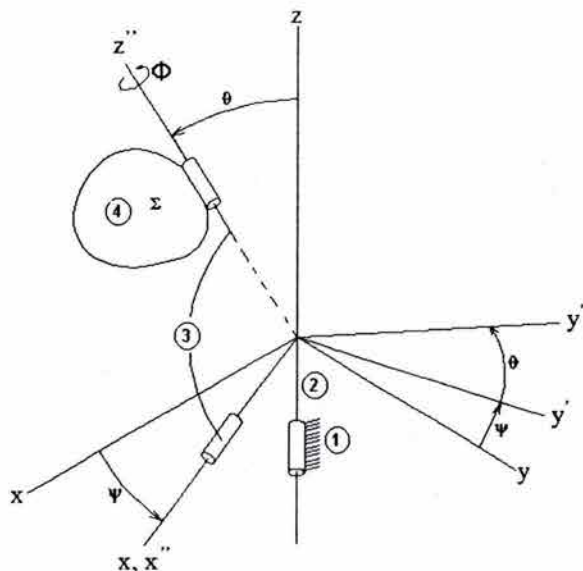


Figura 2.4. Ángulos de Euler para rotación finita de un cuerpo rígido.

Para obtener la nueva posición de un vector \mathbf{v}_1 después de tres giros, se procede de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_2 = [\mathbf{R}_{\phi, z''}][\mathbf{R}_{\theta, x'}][\mathbf{R}_{\psi, z}]\mathbf{v}_1 \quad (2.3.12)$$

de acuerdo a la definición de rotación de una matriz mostrada en el apéndice A, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= [\mathbf{R}_{\psi, z}][\mathbf{R}_{\theta, x'}][\mathbf{R}_{\phi, z}]\mathbf{v}_1 \\ &= [\mathbf{R}_{\psi, \theta, \phi}]\mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Esta ecuación representa la rotación de un sistema con el cuerpo rígido. Por lo tanto, la secuencia de desplazamiento angular relativo puede ser descrita por una secuencia de matrices de rotación de la siguiente manera:

$$[\mathbf{R}_{\psi, \theta, \phi}] = [\mathbf{R}_{\psi, z}][\mathbf{R}_{\theta, x'}][\mathbf{R}_{\phi, z}] \quad (2.3.14)$$

las cuales forman la matriz de rotación de Euler:

$$[\mathbf{R}_{\psi, \theta, \phi}] = \begin{bmatrix} c_\psi c_\phi - s_\psi c_\theta s_\phi & -c_\psi s_\phi - s_\psi c_\theta c_\phi & s_\psi s_\theta \\ s_\psi c_\phi + c_\psi c_\theta s_\phi & -s_\psi s_\phi + c_\psi c_\theta c_\phi & -c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\phi & s_\theta c_\phi & c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.3.15)$$

Una matriz de rotación geoméricamente representa los ejes principales del sistema de coordenadas rotado con respecto al sistema de coordenadas de referencia.

2.2.4. Matriz de Desplazamiento

El movimiento plano de cuerpo rígido puede ser descrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= [\mathbf{R}_\theta] \mathbf{v}_1 \\ \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Considerando la definición de un vector; se tiene una diferencia de puntos; un punto \mathbf{p} la cola del vector y un punto \mathbf{q} la cabeza del mismo; como se muestra en la figura 2.5.

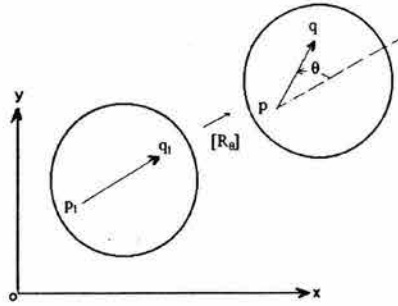


Figura 2.5. Desplazamiento plano de cuerpo rígido.

Por lo tanto considerando la figura anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{q} - \mathbf{p}) &= [\mathbf{R}_\theta](\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_1) \\ \mathbf{q} &= [\mathbf{R}_\theta](\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_1) + \mathbf{p} \\ \mathbf{q} &= [\mathbf{R}_\theta](\mathbf{q}_1) + (\mathbf{p} - [\mathbf{R}_\theta](\mathbf{p}_1)) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

la ecuación (2.3.17) puede ser representada mediante una matriz de desplazamiento homogénea:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_\theta] & (\mathbf{p} - [\mathbf{R}_\theta]\mathbf{p}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.18)$$

sustituyendo las coordenadas de los puntos $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$, $\mathbf{q}_1 = (q_{1x}, q_{1y})$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$, $\mathbf{p}_1 = (p_{1x}, p_{1y})$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & (p_x - (c\theta(p_{1x}) + s\theta(p_{1y}))) \\ s\theta & -c\theta & (p_y - (s\theta(p_{1x}) - c\theta(p_{1y}))) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1x} \\ q_{1y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

de manera general la ecuación (2.3.18) se escribe como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{D}] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.19)$$

La matriz $[D]$ de 3×3 es llamada **matriz de desplazamiento plano**; análogamente la representación espacial de la matriz de desplazamiento es hecha mediante el reemplazo de $[R_\theta]$ por su equivalente tridimensional $[R_{\psi,\theta,\phi}]$ o $[R_{\phi,u}]$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [R_{\phi,u}] & (\mathbf{p} - [R_{\phi,u}]\mathbf{p}_1) \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ 1 \end{bmatrix} &= [D_{\phi,u}] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

la ecuación (2.3.20) es una matriz de desplazamiento de 4×4 , denominada **matriz de transformación homogénea**.

Capítulo 3

Síntesis de la Plataforma Paralela Esférica (PPE)

3.1. Introducción

El término **síntesis cinemática** se refiere al diseño o creación de un mecanismo para obtener un conjunto deseado de características de movimiento. Existe una amplia variedad de técnicas disponibles, aquí se definen los métodos de **Suh & Radcliffe** [5] y **McCarthy** [11]; los cuales se emplean para la síntesis de la PPE.

En la práctica, la mayor parte del diseño en ingeniería comprende una combinación de **síntesis** y **análisis**. No puede analizarse algo hasta que no haya sido sintetizado. Muchos problemas de diseño de máquinas requieren la creación de un dispositivo con características de movimiento peculiares. Quizá se necesite mover una herramienta de una posición a otra en un intervalo de tiempo particular o se necesite describir una trayectoria particular en el espacio para insertar una pieza en un ensamble. Las posibilidades son interminables, pero un denominador común suele ser la necesidad de un eslabonamiento para generar los movimientos deseados.

Por lo tanto se requiere de la síntesis para crear soluciones de eslabonamientos potenciales para aplicaciones cinemáticas típicas. Considerando lo anterior, en este capítulo se describen las características deseadas de la PPE y se desarrolla la **síntesis dimensional** para lograr que se cumplan los movimientos requeridos.

3.2. Clases de Síntesis

Síntesis de Tipo

Se refiere a la elección del tipo apropiado de mecanismo mejor adaptado al problema.

Síntesis de Número

Se ocupa del número de eslabones y juntas que se requieren para obtener un movimiento determinado.

Síntesis Dimensional

Es la determinación de los tamaños (longitudes) de los eslabones necesarios para realizar los movimientos deseados. Este a su vez comprende tres tipos: **generación de función, de trayectoria y de movimiento** [6].

Generación de función, se define como la correlación entre una función de entrada y una función de salida en un mecanismo. Esto es, cuando se necesita que un elemento de salida gire, oscile o tenga un movimiento alternativo, según una función del tiempo, o bien, una función del movimiento de entrada especificada.

Generación de trayectoria es el control de un punto de la curva del acoplador que se hace pasar a través de un conjunto de puntos de salida deseados, siendo una porción de la trayectoria un arco circular, elíptico o una recta.

Generación de movimiento o conducción de cuerpo rígido, es el control de una recta en un cuerpo, tal que asume un conjunto secuencial de posiciones prescritas. Aquí es importante la orientación del eslabón que contiene la línea. El interés reside en mover un objeto de una posición a otra; el problema puede ser una traslación simple o una combinación de traslación y rotación.

3.3. Características de la PPE

De acuerdo a las definiciones de síntesis ya descritas y considerando además que los robots pueden ser clasificados de acuerdo a varios criterios, por sus GDL, estructura cinemática, tecnología empleada, geometría de espacio de trabajo y características de movimiento; de lo anterior, podemos describir las características deseadas de nuestra PPE, las cuales son:

1. Por la estructura cinemática, la PPE debe estar formada por tres cadenas cinemáticas, cada una de ellas unidas a una plataforma móvil, considerada como el órgano o efector final del mecanismo.
2. Cada cadena cinemática estará formada por dos eslabones, los cuales se unirán por medio de juntas rotacionales.
3. Las cadenas cinemáticas deben ser simétricas. Cada uno de los eslabones forma una barra curva de un ángulo arbitrario en su configuración.
4. Los eslabones de entrada estarán unidos a una base fija, el cual tendrá una forma similar a la del plato móvil.

5. Los GDL [17] de la PPE es de 3, de la ecuación:

$$GDL = 3(n - 1) - 2p_1 - 1p_2$$

siendo n el número de eslabones, p_1 el número de pares cinemáticos de un movimiento y p_2 el número de pares cinemáticos de dos movimientos; se tiene que $n = 8$, $p_1 = 9$, por lo tanto:

$$GDL = 3(8 - 1) - 2(9) - 1(0) = 3$$

La figura 3.1, muestra el mecanismo de la PPE de 3 GDL, los eslabones e_1 , e_2 y e_3 son considerados los eslabones de entrada, los eslabones e_4 , e_5 y e_6 son considerados eslabones conducidos, el eslabón e_7 ha sido designado como el eslabón de salida, el eslabón fijo no se muestra por simplicidad.

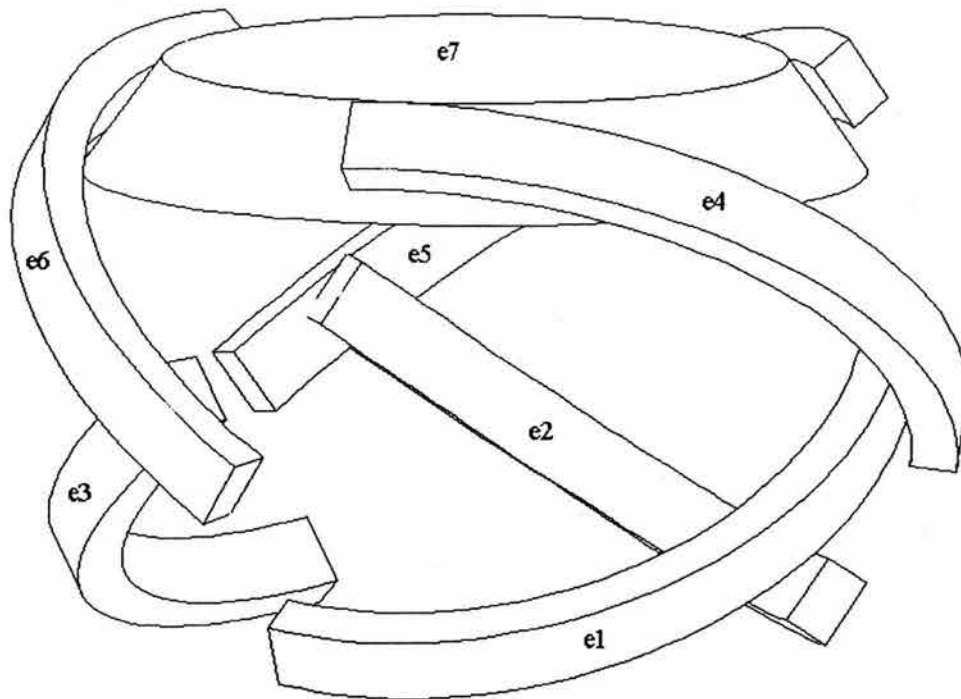


Figura 3.1. Plataforma Paralela Esférica de 3 GDL.

Considerando las características deseadas de nuestra PPE, se procede a realizar la síntesis dimensional para cada uno de los eslabones que la forman, de manera que se cumplan las condiciones 2 y 3 ya mencionadas.

3.4. Síntesis de Conducción de Cuerpo Rígido

3.4.1. Método de Matrices de Desplazamiento

En esta sección se desarrollan las ecuaciones de diseño para los eslabones de la PPE, empleando la metodología de Suh [5]. Como en la síntesis de eslabonamientos planos [5], el problema general en la síntesis de mecanismos esféricos involucra la determinación de la primera posición de posibles ejes fijos a la *tierra* y ejes móviles sobre un cuerpo rígido en movimiento, el cual pasa a través de una secuencia de posiciones que a su vez pasan por un arco circular sobre la superficie de una esfera.

Los eslabones esféricos (manivela y seguidor), como se muestra en la figura 3.2, están formados por un punto en movimiento (puntos del círculo esférico) y un punto fijo correspondiente (puntos del centro esférico) los cuales radican sobre ejes pasando a través del origen, y deben girar el cuerpo en movimiento (acoplador) a través de una serie de posiciones prescritas.

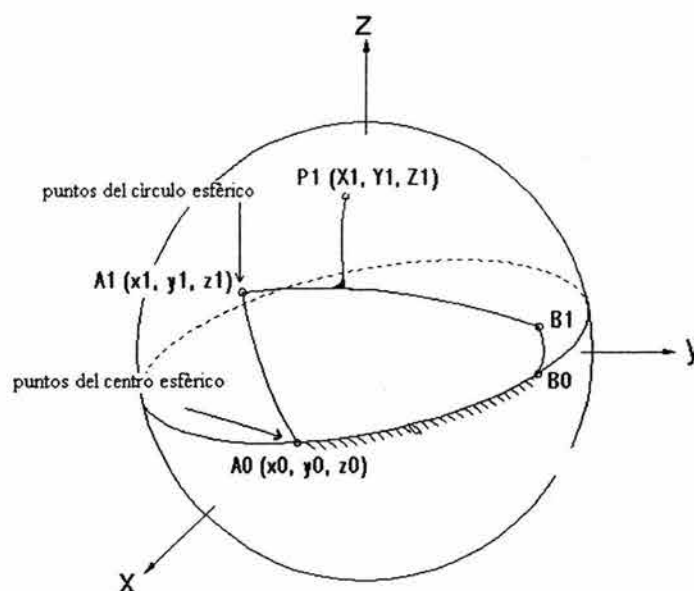


Figura 3.2. Sistema coordinado para mecanismo esférico.

Los eslabones esféricos para conducción de cuerpo rígido son sintetizados por una solución iterativa de un conjunto de ecuaciones de diseño algebraicas no lineales simultáneas. Las iteraciones son ejecutadas usando el método de Newton - Raphson. Las ecuaciones de diseño son desarrolladas de la siguiente manera:

1. Se asume que el movimiento de cuerpo rígido es conocido para ser esférico, las coordenadas del centro (O_x, O_y, O_z) y el radio de la esfera son calculados

a partir de la ecuación de la esfera.

$$\begin{bmatrix} (x^2 + y^2 + z^2) & x & y & z & 1 \\ (p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2) & p_{1x} & p_{1y} & p_{1z} & 1 \\ (p_{2x}^2 + p_{2y}^2 + p_{2z}^2) & p_{2x} & p_{2y} & p_{2z} & 1 \\ (p_{3x}^2 + p_{3y}^2 + p_{3z}^2) & p_{3x} & p_{3y} & p_{3z} & 1 \\ (p_{4x}^2 + p_{4y}^2 + p_{4z}^2) & p_{4x} & p_{4y} & p_{4z} & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.1)$$

el cual puede ser expandido en la forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3.4.2)$$

los subíndices en la ecuación (3.4.1) se refieren a las cuatro posiciones de cualquier punto dado. Reduciendo dicha ecuación a la forma ordinaria:

$$(x - O_x)^2 + (y - O_y)^2 + (z - O_z)^2 = R^2 \quad (3.4.3)$$

se hallan entonces las coordenadas del centro esférico $\mathbf{O} = (O_x, O_y, O_z)$ y el radio esférico R para el movimiento del punto \mathbf{p} .

2. La ecuación (3.4.3) es entonces normalizada a la ecuación de una esfera unitaria dividiendo por R^2 :

$$\left(\frac{x - O_x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - O_y}{R}\right)^2 + \left(\frac{z - O_z}{R}\right)^2 = 1$$

La ecuación anterior se mueve al origen de la esfera (0, 0, 0), transformando todas las coordenadas mediante:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \quad (3.4.4)$$

Las coordenadas de los puntos en movimiento son entonces normalizadas, convertidos al sistema coordenado normal y la síntesis es realizada sobre la superficie de la esfera unitaria.

3. Las matrices de desplazamiento $[\mathbf{D}_{1j}]$ son calculadas mediante los métodos anteriormente ya mencionados en el capítulo 2.
4. Las ecuaciones de diseño están basadas sobre ecuaciones de restricción que aseguran la longitud constante de los eslabones conductores y las ecuaciones de la esfera unitaria. Las coordenadas del punto del centro esférico y las del punto del círculo son respectivamente:

$$\mathbf{a}_0 = (a_{0x}, a_{0y}, a_{0z}) \quad (3.4.5)$$

$$\mathbf{a}_1 = (a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}) \quad (3.4.6)$$

Las ecuaciones de diseño de las manivelas esféricas y de la esfera unitaria son:

$$(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0)^T(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)^T(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) \quad (3.4.7)$$

$$(\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_1) = 1 \quad (3.4.8)$$

$$(\mathbf{a}_0)^T(\mathbf{a}_0) = 1$$

$$(\mathbf{a}_j) = [\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{a}_1) \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (3.4.9)$$

El número de ecuaciones de diseño es igual a $n + 1$ con 6 incógnitas (a_{0x} , a_{0y} , a_{0z} , a_{1x} , a_{1y} , a_{1z}). Donde n es el número de posiciones a conducir.

Considerando la figura 3.3, la cual muestra una de las cadenas cinemáticas, formada por dos eslabones, el plato móvil y el plato base o fijo, el cual no es mostrado por simplicidad; se define el problema de la síntesis para conducción de cuerpo rígido para la PPE.

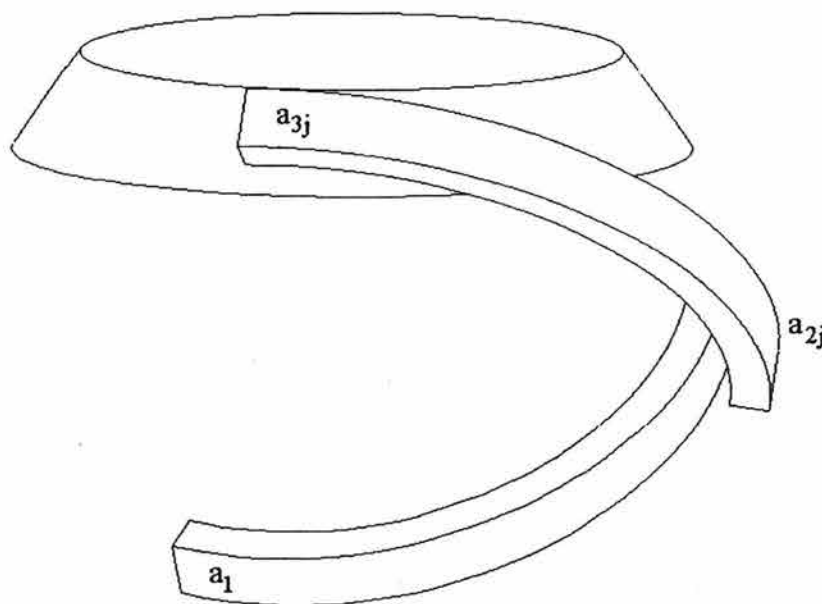


Figura 3.3. Cadena cinemática de la PPE.

Definición del Problema de Síntesis

Dado un movimiento esférico conocido del plato móvil a través de una serie de posiciones, se desea determinar la primera posición de ejes fijos y ejes móviles que conforman la Plataforma Paralela Esférica.

Ecuaciones de Síntesis de la PPE

Evaluando el procedimiento de las ecuaciones de diseño, para la PPE, se tiene:

1. Se asume que el movimiento de cuerpo rígido es conocido para ser esférico. Las coordenadas del centro se designarán como $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$ y el radio de la esfera será asignado como $R = 15 \text{ cm}$. Los datos anteriores se asignan por conveniencia del diseño. Con esto la ecuación (3.4.3) y (3.4.4) no son requeridas.
2. Las matrices de desplazamiento $[\mathbf{D}_{1j}]$ son asignadas a partir de un movimiento deseado.
3. Aplicando las ecuaciones de longitud constante y las ecuaciones de la esfera unitaria a la primera cadena cinemática de la PPE, formada por los primeros y segundos eslabones, tenemos las siguientes ecuaciones que restringen su movimiento:

$$(\mathbf{a}_{2j} - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_{2j} - \mathbf{a}_1) = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \quad (3.4.10)$$

$$(\mathbf{a}_{3j} - \mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{3j} - \mathbf{a}_{2j}) = (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2) \quad (3.4.11)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_1) &= 1 \\ (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2) &= 1 \\ (\mathbf{a}_3)^T(\mathbf{a}_3) &= 1 \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

donde $j = 2, 3, \dots, n$; además considerando que:

$$(\mathbf{a}_{3j}) = [\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{a}_3) \quad (3.4.13)$$

$$(\mathbf{a}_{2j}) = [\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{a}_2) \quad (3.4.14)$$

siendo $[\mathbf{D}_{1j}]$ la matriz de desplazamiento del plato móvil. La cual representa un movimiento alrededor del eje x , con un ángulo arbitrario α_{1j} . De igual manera $[\mathbf{E}_{1j}]$ representa una rotación alrededor del eje \mathbf{a}_1 , con un ángulo arbitrario β_{1j} .

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_{1j}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\alpha_{1j},x}] & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{E}_{1j}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\beta_{1j},\mathbf{a}_1}] & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Desarrollando la Ecuación (3.4.10)

Se tiene:

$$((\mathbf{a}_{2j})^T - (\mathbf{a}_1)^T) ((\mathbf{a}_{2j}) - (\mathbf{a}_1)) = ((\mathbf{a}_2)^T - (\mathbf{a}_1)^T) ((\mathbf{a}_2) - (\mathbf{a}_1))$$

efectuando el producto escalar en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{2j}) - (\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_{2j}) + (\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_1) = \\ (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_1) \end{aligned}$$

simplificando:

$$(\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{2j}) - 2(\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_1) = (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2) - 2(\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_1)$$

agrupando términos

$$-2((\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_1)) + ((\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{2j}) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2)) = 0$$

$$-2((\mathbf{a}_{2j} - \mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_1)) + ((\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{2j}) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2)) = 0$$

$$(\mathbf{a}_{2j} - \mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_1) - \frac{1}{2}((\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{2j}) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2)) = 0 \quad (3.4.15)$$

Por otro lado dados los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , sus normas se definen como:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{u})^T(\mathbf{u}) \\ \|\mathbf{U}\|^2 &= (\mathbf{U})^T(\mathbf{U}) \end{aligned}$$

y considerando que $[\mathbf{D}_{1j}]$ y $[\mathbf{E}_{1j}]$ preservan la magnitud, tenemos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \\ (\mathbf{U})^T(\mathbf{U}) &= (\mathbf{u})^T(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

esto se comprueba de la manera siguiente, para $\mathbf{U} = [\mathbf{D}](\mathbf{u})$ y sustituyendo en (3.4.16), se tiene:

$$\begin{aligned} ([\mathbf{D}](\mathbf{u}))^T([\mathbf{D}](\mathbf{u})) &= (\mathbf{u})^T(\mathbf{u}) \\ (\mathbf{u})^T[\mathbf{D}]^T[\mathbf{D}](\mathbf{u}) &= (\mathbf{u})^T(\mathbf{u}) \\ (\mathbf{u})^T[\mathbf{I}](\mathbf{u}) &= (\mathbf{u})^T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

A partir de (3.4.15) y utilizando (3.4.16), tenemos $(\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{2j}) = (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2)$. Así:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{2j} - \mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_1) - \frac{1}{2}((\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2)) &= 0 \\ (\mathbf{a}_{2j} - \mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_1) &= 0 \\ ((\mathbf{a}_{2j})^T - (\mathbf{a}_2)^T)(\mathbf{a}_1) &= 0 \end{aligned}$$

sustituyendo $(\mathbf{a}_{2j}) = [\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{a}_2)$ en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} (([\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{a}_2))^T - (\mathbf{a}_2)^T)(\mathbf{a}_1) &= 0 \\ ((\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{E}_{1j}]^T - (\mathbf{a}_2)^T)(\mathbf{a}_1) &= 0 \\ (\mathbf{a}_2)^T([\mathbf{E}_{1j}]^T - [\mathbf{I}])(\mathbf{a}_1) &= 0 \\ (\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{C}_{1j}](\mathbf{a}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

donde $[\mathbf{C}_{1j}] = [\mathbf{E}_{1j}]^T - [\mathbf{I}]$, y la matriz $[\mathbf{I}]$ es la matriz identidad de 4×4 .

Desarrollando la Ecuación (3.4.11)

Se tiene:

$$(\mathbf{a}_{3j} - \mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{3j} - \mathbf{a}_{2j}) = (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2)$$

$$((\mathbf{a}_{3j})^T - (\mathbf{a}_{2j})^T)((\mathbf{a}_{3j}) - (\mathbf{a}_{2j})) = ((\mathbf{a}_3)^T - (\mathbf{a}_2)^T)((\mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_2))$$

efectuando el producto escalar en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{3j})^T(\mathbf{a}_{3j}) - (\mathbf{a}_{3j})^T(\mathbf{a}_{2j}) - (\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{3j}) + (\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{2j}) = \\ (\mathbf{a}_3)^T(\mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_3)^T(\mathbf{a}_2) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3) + (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2) \end{aligned}$$

simplificando:

$$(\mathbf{a}_{3j})^T(\mathbf{a}_{3j}) - 2(\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{3j}) + (\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{2j}) = (\mathbf{a}_3)^T(\mathbf{a}_3) - 2(\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3) + (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2)$$

agrupando términos:

$$-2((\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{3j}) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3)) + ((\mathbf{a}_{3j})^T(\mathbf{a}_{3j}) - (\mathbf{a}_3)^T(\mathbf{a}_3)) + ((\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{2j}) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2)) = 0$$

A partir de (3.4.16):

$$(\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{2j}) = (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2)$$

y también

$$(\mathbf{a}_{3j})^T(\mathbf{a}_{3j}) = (\mathbf{a}_3)^T(\mathbf{a}_3)$$

por lo tanto:

$$-2((\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{3j}) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3)) = 0$$

sustituyendo $(\mathbf{a}_{2j}) = [\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{a}_2)$ y $(\mathbf{a}_{3j}) = [\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{a}_3)$ en la expresión anterior:

$$-2((\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{E}_{1j}]^T[\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3)) = 0$$

$$((\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{E}_{1j}]^T[\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{I}](\mathbf{a}_3)) = 0$$

factorizando:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}_2)^T ([\mathbf{E}_{1j}]^T [\mathbf{D}_{1j}] - [\mathbf{I}]) (\mathbf{a}_3) &= 0 \\
 (\mathbf{a}_2)^T [\mathbf{F}_{1j}] (\mathbf{a}_3) &= 0 \qquad (3.4.18)
 \end{aligned}$$

donde $[\mathbf{F}_{1j}] = [\mathbf{E}_{1j}]^T [\mathbf{D}_{1j}] - [\mathbf{I}]$. Finalmente de (3.4.12), (3.4.17) y (3.4.18), se tienen las ecuaciones de diseño para la primera cadena cinemática:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}_2)^T [\mathbf{C}_{1j}] (\mathbf{a}_1) &= 0 \\
 (\mathbf{a}_2)^T [\mathbf{F}_{1j}] (\mathbf{a}_3) &= 0 \\
 (\mathbf{a}_1)^T (\mathbf{a}_1) &= 1 \\
 (\mathbf{a}_2)^T (\mathbf{a}_2) &= 1 \\
 (\mathbf{a}_3)^T (\mathbf{a}_3) &= 1
 \end{aligned}$$

La figura 3.4, muestra la cadena cinemática 2 de la PPE.

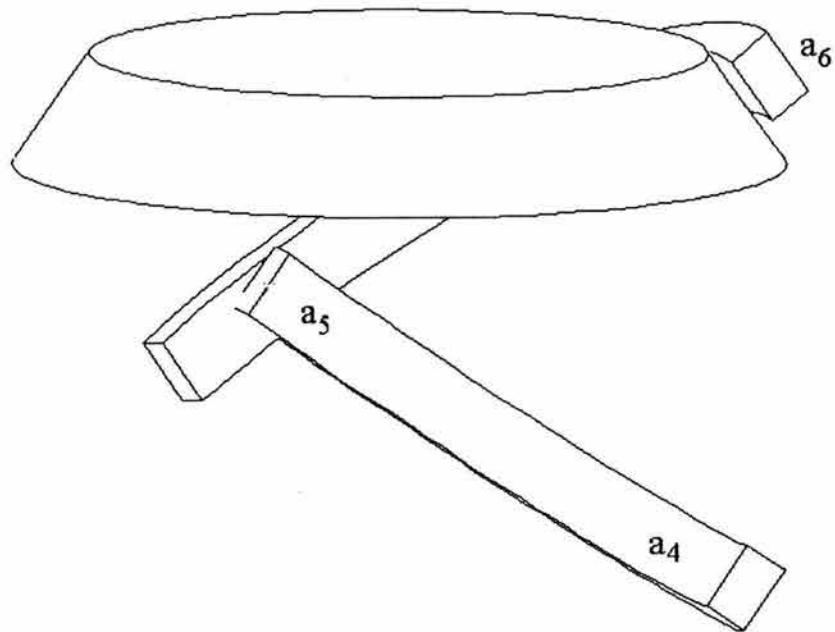


Figura 3.4. Cadena cinemática 2 de la PPE.

Las ecuaciones correspondientes a la cadena cinemática 2 se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_5)^T [\mathbf{C}_{2j}] (\mathbf{a}_4) &= 0 \\ (\mathbf{a}_5)^T [\mathbf{F}_{2j}] (\mathbf{a}_6) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_4)^T (\mathbf{a}_4) &= 1 \\ (\mathbf{a}_5)^T (\mathbf{a}_5) &= 1 \\ (\mathbf{a}_6)^T (\mathbf{a}_6) &= 1 \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

donde:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_{2j}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\theta_{1j}, a_4}] & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{C}_{2j}] &= [\mathbf{E}_{2j}]^T - [\mathbf{I}] \\ [\mathbf{F}_{2j}] &= [\mathbf{E}_{2j}]^T [\mathbf{D}_{1j}] - [\mathbf{I}] \end{aligned}$$

La figura 3.5, muestra la cadena cinemática 3 de la PPE.

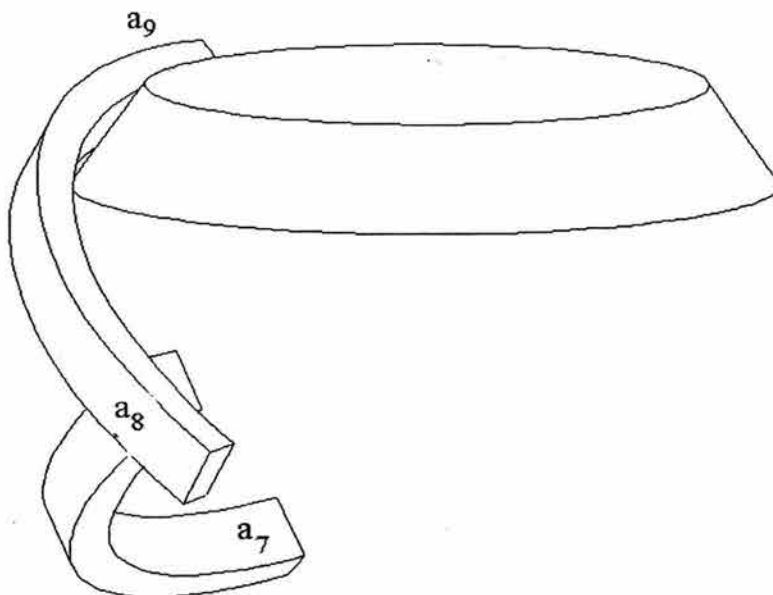


Figura 3.5. Cadena cinemática 3 de la PPE.

Las ecuaciones correspondientes a la cadena cinemática 3 se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_8)^T [\mathbf{C}_{3j}] (\mathbf{a}_7) &= 0 \\ (\mathbf{a}_8)^T [\mathbf{F}_{3j}] (\mathbf{a}_9) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_7)^T (\mathbf{a}_7) &= 1 \\ (\mathbf{a}_8)^T (\mathbf{a}_8) &= 1 \\ (\mathbf{a}_9)^T (\mathbf{a}_9) &= 1 \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

donde:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_{3j}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\phi_{1j}, \mathbf{a}_7}] & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{C}_{3j}] &= [\mathbf{E}_{3j}]^T - [\mathbf{I}] \\ [\mathbf{F}_{3j}] &= [\mathbf{E}_{3j}]^T [\mathbf{D}_{1j}] - [\mathbf{I}] \end{aligned}$$

Ya que los sistemas resultantes para la síntesis de las cadenas cinemáticas de la plataforma esférica son ecuaciones no lineales, requieren para su solución de un método numérico iterativo. Por lo tanto se emplea el método de Newton-Raphson. Así podemos hablar del problema de síntesis considerando la tabla 1, donde los valores conocidos son α_{1j} , esta indica los parámetros involucrados y las posibles soluciones en función de los datos dados. Por ejemplo para la cadena cinemática 1:

<i>posiciones</i>	<i>ecuaciones</i>	<i>variables</i>	<i>incógnitas</i>	<i>síntesis seleccionada</i>
$j = 3$	7	11	a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}	<i>dando</i> : $a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}, a_{2x}$
			a_{2x}, a_{2y}, a_{2z}	<i>calcular el resto</i>
			a_{3x}, a_{3y}, a_{3z}	
			β_{12}, β_{13}	
$j = 4$	6	12	a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}	<i>dando</i> : a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}
			a_{2x}, a_{2y}, a_{2z}	a_{2x}, a_{2y}, a_{2z}
			a_{3x}, a_{3y}, a_{3z}	<i>calcular el resto</i>
			$\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}$	
$j = 5$	8	13	a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}	<i>dando</i> : a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}
			a_{2x}, a_{2y}, a_{2z}	a_{2x}, a_{2y}
			a_{3x}, a_{3y}, a_{3z}	<i>calcular el resto</i>
			$\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}, \beta_{15}$	
$j = 6$	10	14	$\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$	<i>dando</i> : $a_{0x}, a_{0y}, a_{0z}, a_{1x}$
			$\beta_{1j}, j = 2, \dots, 6$	<i>calcular el resto</i>

Tabla1. Parámetros involucrados y posibles soluciones en función de los datos dados.

3.4.2. Método del Ángulo Constante

En esta sección se desarrollan las ecuaciones de diseño para los eslabones de la PPE, empleando la metodología de McCarthy [11]. En la siguiente figura 3.6, se muestran los puntos o pivotes \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_{2j} , y \mathbf{a}_{3j} , los cuales determinan la posición de cada uno de los eslabones respectivamente, así mismo se tienen los ángulos constantes α y β , los cuales representan los ángulos de construcción de los eslabones.

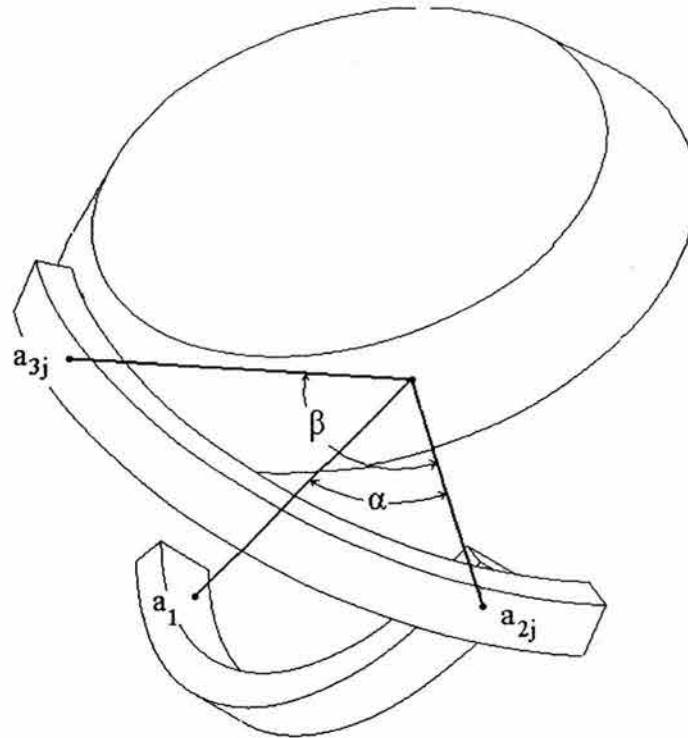


Figura 3.6. Cadena cinemática de la PPE.

Ecuaciones de Diseño para el Eslabón 1 de la Cadena 1

Considerando que los ángulos en los eslabones se mantienen constantes, las ecuaciones de diseño son:

$$(\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_1) = \|(\mathbf{a}_{2j})\| \|(\mathbf{a}_1)\| \cos\alpha \quad (3.4.23)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{2j}) &= [\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{a}_2) \\ \|(\mathbf{a}_{2j})\| &= \|(\mathbf{a}_2)\| \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

De (3.4.23) para $j = 1$, se tiene:

$$(\mathbf{a}_{21})^T(\mathbf{a}_1) = \|(\mathbf{a}_{21})\| \|(\mathbf{a}_1)\| \cos\alpha \quad (3.4.25)$$

por otro lado:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{2j}) &= [\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{a}_2) \\ [\mathbf{E}_{1j}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\beta_{1j}, a_1}] & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para $j = 1$, donde $\beta_{11} = 0^\circ$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_{11}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{I}] & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{a}_{21}) &= [\mathbf{E}_{11}](\mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_2) \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

sustituyendo (3.4.26) en (3.4.25) se tiene:

$$(\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_1) = \|(\mathbf{a}_2)\| \|(\mathbf{a}_1)\| \cos\alpha \quad (3.4.27)$$

De (3.4.23) queda $j = 2, 3, \dots, n$, y usando (3.4.24):

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_1) &= \|(\mathbf{a}_{2j})\| \|(\mathbf{a}_1)\| \cos\alpha \\ &= \|(\mathbf{a}_2)\| \|(\mathbf{a}_1)\| \cos\alpha \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

igualando (3.4.27) y (3.4.28):

$$(\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_1) = (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_1)$$

$$(\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_1) = 0$$

$$((\mathbf{a}_{2j})^T - (\mathbf{a}_2)^T)(\mathbf{a}_1) = 0$$

sustituyendo $(\mathbf{a}_{2j}) = [\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{a}_2)$:

$$(([\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{a}_2))^T - (\mathbf{a}_2)^T)(\mathbf{a}_1) = 0$$

$$((\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{E}_{1j}]^T - (\mathbf{a}_2)^T)(\mathbf{a}_1) = 0$$

$$(\mathbf{a}_2)^T([\mathbf{E}_{1j}]^T - [\mathbf{I}])(\mathbf{a}_1) = 0$$

$$(\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{C}_{1j}](\mathbf{a}_1) = 0 \quad (3.4.29)$$

Ecuaciones de Diseño para el Eslabón 2 de la Cadena 1

Las ecuaciones de diseño son:

$$(\mathbf{a}_{3j})^T(\mathbf{a}_{2j}) = \|(\mathbf{a}_{3j})\| \|(\mathbf{a}_{2j})\| \cos\beta \quad (3.4.30)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{2j}) &= [\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{a}_2) \\ (\mathbf{a}_{3j}) &= [\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{a}_3) \\ \|(\mathbf{a}_{2j})\| &= \|(\mathbf{a}_2)\| \\ \|(\mathbf{a}_{3j})\| &= \|(\mathbf{a}_3)\| \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

De (3.4.30) para $j = 1$, se tiene:

$$(\mathbf{a}_{31})^T(\mathbf{a}_{21}) = \|(\mathbf{a}_{31})\| \|(\mathbf{a}_{21})\| \cos\beta$$

para esta posición inicial $(\mathbf{a}_{31}) = (\mathbf{a}_3)$ y $(\mathbf{a}_{21}) = (\mathbf{a}_2)$:

$$(\mathbf{a}_3)^T(\mathbf{a}_2) = \|(\mathbf{a}_3)\| \|(\mathbf{a}_2)\| \cos\beta \quad (3.4.32)$$

De (3.4.30) queda $j = 2, 3, \dots, n$, y usando (3.4.31):

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{3j})^T(\mathbf{a}_{2j}) &= \|(\mathbf{a}_{3j})\| \|(\mathbf{a}_{2j})\| \cos\beta \\ &= \|(\mathbf{a}_3)\| \|(\mathbf{a}_2)\| \cos\beta \end{aligned} \quad (3.4.33)$$

igualando (3.4.32) y (3.4.33):

$$(\mathbf{a}_{3j})^T(\mathbf{a}_{2j}) = (\mathbf{a}_3)^T(\mathbf{a}_2)$$

$$(\mathbf{a}_{3j})^T(\mathbf{a}_{2j}) - (\mathbf{a}_3)^T(\mathbf{a}_2) = 0$$

además $(\mathbf{a}_{2j}) = [\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{a}_2)$ y $(\mathbf{a}_{3j}) = [\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{a}_3)$ entonces:

$$(\mathbf{a}_{2j})^T(\mathbf{a}_{3j}) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3) = 0$$

$$([\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{a}_2))^T([\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{a}_3)) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3) = 0$$

$$(\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{E}_{1j}]^T[\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3) = 0$$

$$(\mathbf{a}_2)^T([\mathbf{E}_{1j}]^T[\mathbf{D}_{1j}] - [\mathbf{I}]) (\mathbf{a}_3) = 0$$

$$(\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{F}_{1j}](\mathbf{a}_3) = 0 \quad (3.4.34)$$

Finalmente de (3.4.12), (3.4.29) y (3.4.34), se tienen las ecuaciones de diseño en una esfera unitaria, para la cadena 1 de nuestra PPE.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{C}_{1j}](\mathbf{a}_1) &= 0 \\
 (\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{F}_{1j}](\mathbf{a}_3) &= 0 \\
 (\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_1) &= 1 \\
 (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2) &= 1 \\
 (\mathbf{a}_3)^T(\mathbf{a}_3) &= 1
 \end{aligned} \tag{3.4.35}$$

Los resultados obtenidos con el método de matrices de desplazamiento (**Suh & Radcliffe**) y el método del ángulo constante (**McCarthy**) producen las mismas ecuaciones de diseño. Los cuales son un conjunto de ecuaciones no lineales, y para su solución se emplea un método numérico iterativo.

3.4.3. Solución de las Ecuaciones de Diseño

Las ecuaciones de diseño para la síntesis son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{C}_{1j}](\mathbf{a}_1) &= 0 & (\mathbf{a}_5)^T[\mathbf{C}_{2j}](\mathbf{a}_4) &= 0 & (\mathbf{a}_8)^T[\mathbf{C}_{3j}](\mathbf{a}_7) &= 0 \\
 (\mathbf{a}_2)^T[\mathbf{F}_{1j}](\mathbf{a}_3) &= 0 & (\mathbf{a}_5)^T[\mathbf{F}_{2j}](\mathbf{a}_6) &= 0 & (\mathbf{a}_8)^T[\mathbf{F}_{3j}](\mathbf{a}_9) &= 0 \\
 (\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_1) &= 1 & (\mathbf{a}_4)^T(\mathbf{a}_4) &= 1 & (\mathbf{a}_7)^T(\mathbf{a}_7) &= 1 \\
 (\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_2) &= 1 & (\mathbf{a}_5)^T(\mathbf{a}_5) &= 1 & (\mathbf{a}_8)^T(\mathbf{a}_8) &= 1 \\
 (\mathbf{a}_3)^T(\mathbf{a}_3) &= 1 & (\mathbf{a}_6)^T(\mathbf{a}_6) &= 1 & (\mathbf{a}_9)^T(\mathbf{a}_9) &= 1
 \end{aligned}$$

$$[\mathbf{E}_{1j}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\beta 1j, a1}] & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{E}_{3j}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\phi 1j, a7}] & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{E}_{2j}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\theta 1j, a4}] & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{D}_{1j}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\alpha 1j, x}] & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{C}_{1j}] &= [\mathbf{E}_{1j}]^T - [\mathbf{I}] & [\mathbf{F}_{1j}] &= [\mathbf{E}_{1j}]^T[\mathbf{D}_{1j}] - [\mathbf{I}] \\
 [\mathbf{C}_{2j}] &= [\mathbf{E}_{2j}]^T - [\mathbf{I}] & [\mathbf{F}_{2j}] &= [\mathbf{E}_{2j}]^T[\mathbf{D}_{1j}] - [\mathbf{I}] \\
 [\mathbf{C}_{3j}] &= [\mathbf{E}_{3j}]^T - [\mathbf{I}] & [\mathbf{F}_{3j}] &= [\mathbf{E}_{3j}]^T[\mathbf{D}_{1j}] - [\mathbf{I}]
 \end{aligned}$$

Considerando que $j = 3$ y a partir de la tabla 1, se tiene un sistema de 7 ecuaciones con 11 incógnitas para cada una de las cadenas que forman la PPE. Además el movimiento de la plataforma es conocido, siendo:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{12} &= -45^\circ \\
 \alpha_{13} &= -90^\circ
 \end{aligned}$$

Para resolver dicho sistema se proporcionan 4 de las 11 incógnitas.

Para la cadena 1

Los datos asignados son:

$$a_{1x} = 0,81649658$$

$$a_{1z} = -0,57735026$$

$$a_{3x} = 0,81649658$$

$$a_{3z} = 0,57735026$$

las incógnitas a calcular son las variables mostradas:

$$\mathbf{a}_1 = (0,81649658, a_{1y}, -0,57735026)$$

$$\mathbf{a}_2 = (a_{2x}, a_{2y}, a_{2z})$$

$$\mathbf{a}_3 = (0,81649658, a_{3y}, 0,57735026)$$

y además:

$$\beta_{12} \text{ y } \beta_{13}$$

los valores iniciales sugeridos en el método de Newton-Raphson son:

$$a_{1yi} = 0,0043795159$$

$$a_{2xi} = 0$$

$$a_{2yi} = 1$$

$$a_{2zi} = 0$$

$$a_{3yi} = 0,0043795159$$

$$\beta_{12i} = -24,591604^\circ$$

$$\beta_{13i} = -46,29805414^\circ$$

los valores de posición obtenidos de la síntesis son:

$$\mathbf{a}_1 = (0,81649658, 0,00027372, -0,57735026)$$

$$\mathbf{a}_2 = (0,00199545, 0,999994, -0,00287619)$$

$$\mathbf{a}_3 = (0,81649658, 0,00027372, 0,57735026)$$

$$\beta_{12} = -26,9214^\circ$$

$$\beta_{13} = -50,8685^\circ$$

dichos valores cumplen la condición del ángulo de 90° , tal que:

$$(\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_2) = 89,7958^\circ$$

$$(\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3) = 89,9861^\circ$$

Para la cadena 2

Los datos asignados son:

$$a_{4x} = -0,40824829$$

$$a_{4z} = -0,57735026$$

$$a_{6x} = -0,40824829$$

$$a_{6z} = 0,57735026$$

las incógnitas a calcular son las variables mostradas:

$$\mathbf{a}_4 = (-0,40824829, a_{4y}, -0,57735026)$$

$$\mathbf{a}_5 = (a_{5x}, a_{5y}, a_{5z})$$

$$\mathbf{a}_6 = (-0,40824829, a_{6y}, 0,57735026)$$

y además:

$$\theta_{12} \text{ y } \theta_{13}$$

los valores iniciales sugeridos en el método de Newton-Raphson son:

$$a_{4yi} = 0,707106781$$

$$a_{5xi} = -0,86447296$$

$$a_{5yi} = -0,50267563$$

$$a_{5zi} = 0,0019204624$$

$$a_{6yi} = 0,707106781$$

$$\theta_{12i} = 11,64460557^\circ$$

$$\theta_{13i} = 20,1328974599^\circ$$

los valores de posición obtenidos de la síntesis son:

$$\mathbf{a}_4 = (-0,40824829, 0,707106781, -0,57735026)$$

$$\mathbf{a}_5 = (0,00199545, 0,999994, 0,0019204624)$$

$$\mathbf{a}_6 = (-0,40824829, 0,707106781, 0,57735026)$$

$$\theta_{12} = 11,6446^\circ$$

$$\theta_{13} = 20,1329^\circ$$

dichos valores cumplen la condición del ángulo de 90° , tal que:

$$(\mathbf{a}_4)^T(\mathbf{a}_5) = 90,2082^\circ$$

$$(\mathbf{a}_5)^T(\mathbf{a}_6) = 90,0812^\circ$$

Para la cadena 3

Los datos asignados son:

$$a_{7x} = -0,40824829$$

$$a_{7z} = -0,57735026$$

$$a_{9x} = -0,40824829$$

$$a_{9z} = 0,57735026$$

las incógnitas a calcular son las variables mostradas:

$$\mathbf{a}_7 = (-0,40824829, a_{7y}, -0,57735026)$$

$$\mathbf{a}_8 = (a_{8x}, a_{8y}, a_{8z})$$

$$\mathbf{a}_9 = (-0,40824829, a_{9y}, 0,57735026)$$

y además:

$$\phi_{12} \text{ y } \phi_{13}$$

los valores iniciales sugeridos en el método de Newton-Raphson son:

$$a_{7yi} = -0,707106781$$

$$a_{7zi} = 0,86074910106$$

$$a_{8yi} = -0,5090283789$$

$$a_{8zi} = 0,0010602520$$

$$a_{9yi} = -0,707106781$$

$$\phi_{12i} = -162,6121428^\circ$$

$$\phi_{13i} = -123,80716348^\circ$$

los valores de posición obtenidos de la síntesis son:

$$\mathbf{a}_7 = (-0,40824829, -0,707107, -0,57735026)$$

$$\mathbf{a}_8 = (0,860749, -0,509028, 0,00106025)$$

$$\mathbf{a}_9 = (-0,40824829, -0,707107, 0,57735026)$$

$$\phi_{12} = -162,312^\circ$$

$$\phi_{13} = -123,807^\circ$$

dichos valores cumplen la condición del ángulo de 90° , tal que:

$$(\mathbf{a}_7)^T(\mathbf{a}_8) = 89,5459^\circ$$

$$(\mathbf{a}_8)^T(\mathbf{a}_9) = 89,4757^\circ$$

De los valores obtenidos anteriormente a través de la solución en el software Mathematica, se tienen las siguientes figuras (3.7a, b, c y d) las cuales muestran la configuración de la PPE.

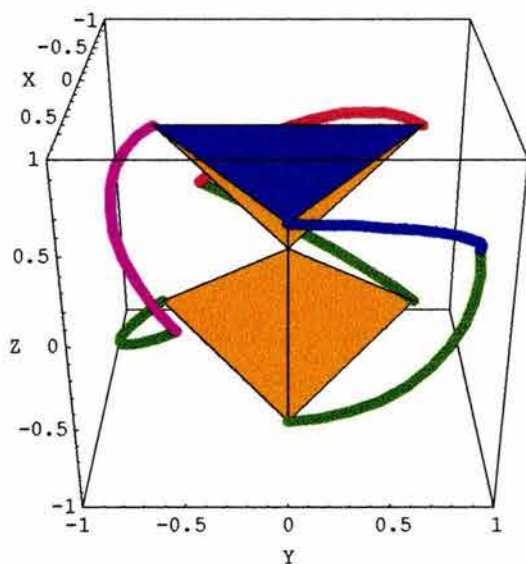


Figura 3.7a Vista frontal.

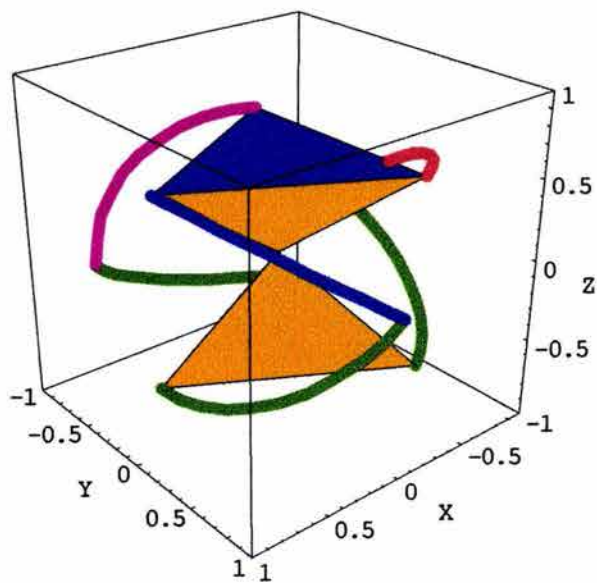


Figura 3.7b Vista lateral derecha.

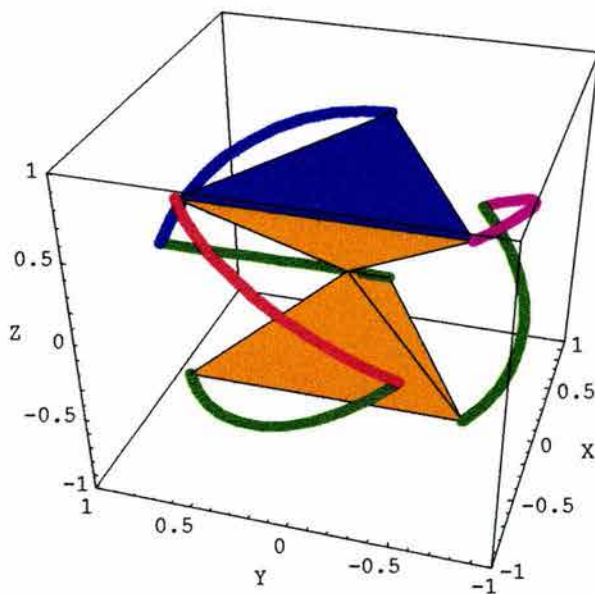


Figura 3.7c. Vista posterior.

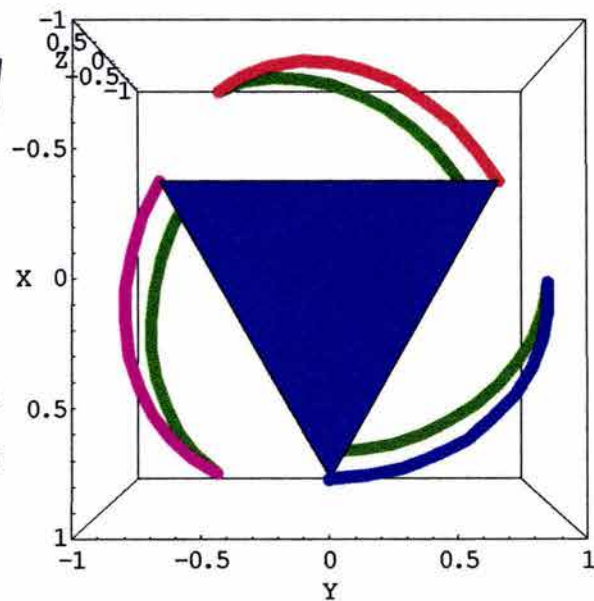


Figura 3.7d. Vista superior.

3.4.4. Otras Soluciones

Considerando el procedimiento descrito anteriormente, se tienen otras soluciones para la configuración de la PPE.

Primera Solución

Cadena 1

Incógnitas a calcular: a_{1y} , a_{2x} , a_{2y} , a_{2z} , a_{3y} , β_{12} y β_{13}

Datos	Valores Iniciales	Valores Obtenidos	Ángulo obtenido
$a_{1x} = 0,81649$	$a_{1yi} = 0,004379$	$a_{1y} = 0,81649$	$(\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_2) = 109,277^\circ$
$a_{1z} = -0,57735$	$a_{2xi} = -0,421277$	$a_{2x} = -0,51436$	$(\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3) = 120,628^\circ$
$a_{3x} = 0,81649$	$a_{2yi} = 0,358814$	$a_{2y} = 0,84339$	
$a_{3z} = 0,57735$	$a_{2zi} = 0,178704$	$a_{2z} = -0,15530$	
	$a_{3yi} = 0,004379$	$a_{3y} = 0,000205$	
	$\beta_{12i} = -24,591^\circ$	$\beta_{12} = -25,7645^\circ$	
	$\beta_{13i} = -46,298^\circ$	$\beta_{12} = -48,3827^\circ$	

Cadena 2

Incógnitas a calcular: a_{4y} , a_{5x} , a_{5y} , a_{5z} , a_{6y} , θ_{12} y θ_{13}

Datos	Valores Iniciales	Valores Obtenidos	Ángulo obtenido
$a_{4x} = -0,40824$	$a_{4yi} = 0,707107$	$a_{4y} = 0,70710$	$(\mathbf{a}_4)^T(\mathbf{a}_5) = 102,082^\circ$
$a_{4z} = -0,57735$	$a_{5xi} = -0,78394$	$a_{5x} = -0,71045$	$(\mathbf{a}_5)^T(\mathbf{a}_6) = 101,879^\circ$
$a_{6x} = -0,40824$	$a_{5yi} = -0,74399$	$a_{5y} = -0,70374$	
$a_{6z} = 0,57735$	$a_{5zi} = 0,16371$	$a_{5z} = 0,00298$	
	$a_{6yi} = 0,70710$	$a_{6y} = 0,707107$	
	$\theta_{12i} = 11,644^\circ$	$\theta_{12} = 16,9837^\circ$	
	$\theta_{13i} = 20,132^\circ$	$\theta_{13} = 29,3084^\circ$	

Cadena 3

Incógnitas a calcular: a_{7y} , a_{8x} , a_{8y} , a_{8z} , a_{9y} , ϕ_{12} y ϕ_{13}

Datos	Valores Iniciales	Valores Obtenidos	Ángulo obtenido
$a_{7x} = -0,40824$	$a_{7yi} = -0,707107$	$a_{7y} = -0,70710$	$(\mathbf{a}_7)^T(\mathbf{a}_8) = 62,373^\circ$
$a_{7z} = -0,57735$	$a_{8xi} = 0,73066$	$a_{8x} = 0,61659$	$(\mathbf{a}_8)^T(\mathbf{a}_9) = 92,390^\circ$
$a_{9x} = -0,40824$	$a_{8yi} = -0,37191$	$a_{8y} = -0,65438$	
$a_{9z} = 0,57735$	$a_{8zi} = -0,86959$	$a_{8z} = -0,43771$	
	$a_{9yi} = -0,70710$	$a_{9y} = -0,70710$	
	$\phi_{12i} = -322,625^\circ$	$\phi_{12} = -321,263^\circ$	
	$\phi_{13i} = -123,807^\circ$	$\phi_{13} = -131,419^\circ$	

De los valores obtenidos, se tiene la siguiente figura 3.8, la cual muestra la configuración de la PPE.

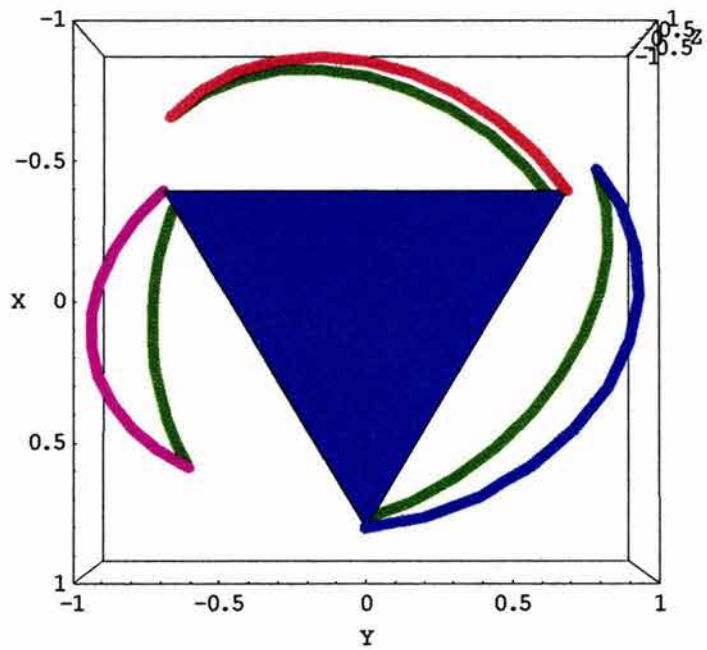
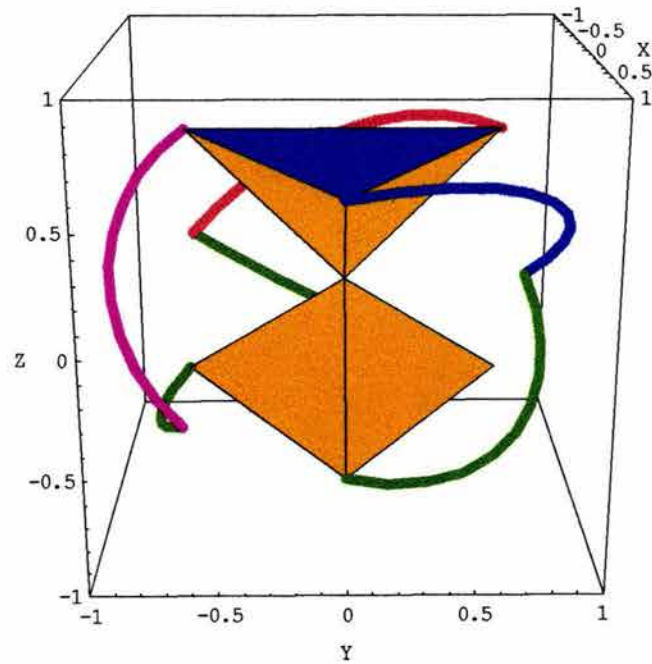


Figura 3.8. Vista frontal y superior configuración 1.

Segunda Solución

Cadena 1

Incógnitas a calcular: a_{1y} , a_{2x} , a_{2y} , a_{2z} , a_{3y} , β_{12} y β_{13}

Datos	Valores Iniciales	Valores Obtenidos	Ángulo obtenido
$a_{1x} = 0,8164$	$a_{1yi} = 0,0043$	$a_{1y} = 0,5419$	$(\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_2) = 90,16^\circ$
$a_{1z} = -0,1989$	$a_{2xi} = 0,0559$	$a_{2x} = -0,5161$	$(\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3) = 90,385^\circ$
$a_{3x} = 0,8164$	$a_{2yi} = 0,5687$	$a_{2y} = 0,8378$	
$a_{3z} = 0,4081$	$a_{2zi} = 0,5520$	$a_{2z} = 0,1779$	
	$a_{3yi} = 0,0043$	$a_{3y} = 0,4083$	
	$\beta_{12i} = -24,591^\circ$	$\beta_{12} = -19,999^\circ$	
	$\beta_{13i} = -46,298^\circ$	$\beta_{12} = -36,378^\circ$	

Cadena 2

Incógnitas a calcular: a_{4y} , a_{5x} , a_{5y} , a_{5z} , a_{6y} , θ_{12} y θ_{13}

Datos	Valores Iniciales	Valores Obtenidos	Ángulo obtenido
$a_{4x} = -0,4082$	$a_{4yi} = 0,7071$	$a_{4y} = 0,7526$	$(\mathbf{a}_4)^T(\mathbf{a}_5) = 99,856^\circ$
$a_{4z} = -0,5166$	$a_{5xi} = -0,6704$	$a_{5x} = -0,6876$	$(\mathbf{a}_5)^T(\mathbf{a}_6) = 99,871^\circ$
$a_{6x} = -0,4082$	$a_{5yi} = -0,9379$	$a_{5y} = -0,7086$	
$a_{6z} = 0,7867$	$a_{5zi} = 0,6215$	$a_{5z} = -0,1576$	
	$a_{6yi} = 0,7071$	$a_{6y} = 0,4630$	
	$\theta_{12i} = 11,644^\circ$	$\theta_{12} = 17,984^\circ$	
	$\theta_{13i} = 20,132^\circ$	$\theta_{13} = 31,240^\circ$	

Cadena 3

Incógnitas a calcular: a_{7y} , a_{8x} , a_{8y} , a_{8z} , a_{9y} , ϕ_{12} y ϕ_{13}

Datos	Valores Iniciales	Valores Obtenidos	Ángulo obtenido
$a_{7x} = -0,40824$	$a_{7yi} = -0,147004$	$a_{7y} = -0,61813$	$(\mathbf{a}_7)^T(\mathbf{a}_8) = 131,14^\circ$
$a_{7z} = -0,67174$	$a_{8xi} = 0,651508$	$a_{8x} = 0,51336$	$(\mathbf{a}_8)^T(\mathbf{a}_9) = 63,613^\circ$
$a_{9x} = -0,40824$	$a_{8yi} = -0,706106$	$a_{8y} = -0,18531$	
$a_{9z} = 0,63559$	$a_{8zi} = 0,701038$	$a_{8z} = 0,83792$	
	$a_{9yi} = -0,70710$	$a_{9y} = -0,65525$	
	$\phi_{12i} = -245,363^\circ$	$\phi_{12} = -216,827^\circ$	
	$\phi_{13i} = -123,807^\circ$	$\phi_{13} = -157,909^\circ$	

De los valores obtenidos, se tiene la siguiente figura 3.9, la cual muestra la configuración de la PPE.

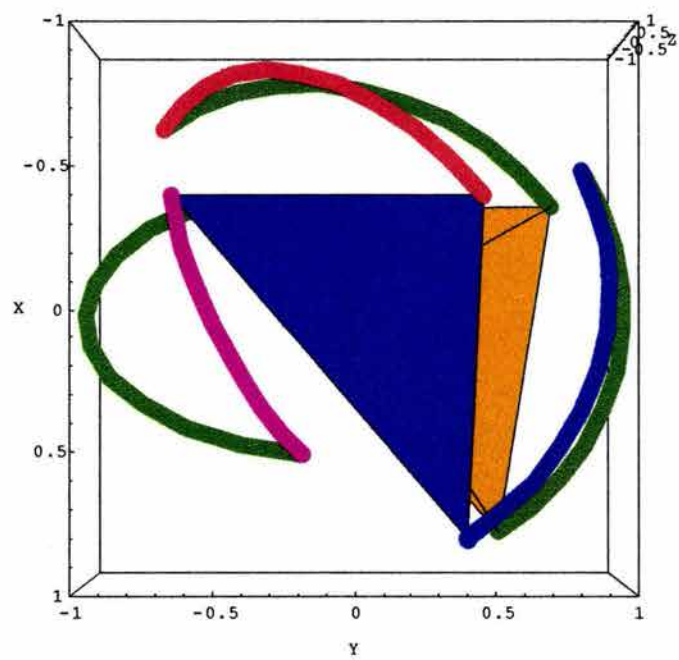
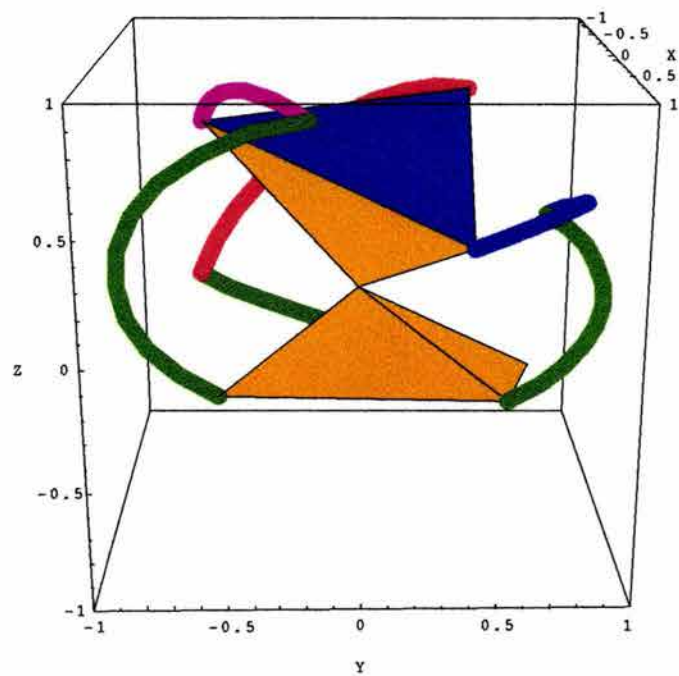


Figura 3.9. Vista frontal y superior configuración 2.

Tercera Solución

Cadena 1

Incógnitas a calcular: a_{1y} , a_{2x} , a_{2y} , a_{2z} , a_{3y} , β_{12} y β_{13}

Datos	Valores Iniciales	Valores Obtenidos	Ángulo obtenido
$a_{1x} = 0,81649$	$a_{1yi} = 0,004379$	$a_{1y} = 0,4586$	$(\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_2) = 68,732^\circ$
$a_{1z} = -0,35074$	$a_{2xi} = 0,527063$	$a_{2x} = 0,04553$	$(\mathbf{a}_2)^T(\mathbf{a}_3) = 68,279^\circ$
$a_{3x} = 0,81649$	$a_{2yi} = 0,744804$	$a_{2y} = 0,94884$	
$a_{3z} = 0,55204$	$a_{2zi} = -0,196069$	$a_{2z} = 0,31245$	
	$a_{3yi} = 0,004379$	$a_{3y} = 0,16906$	
	$\beta_{12i} = -24,591^\circ$	$\beta_{12} = -26,472^\circ$	
	$\beta_{13i} = -46,298^\circ$	$\beta_{13} = -49,365^\circ$	

Cadena 2

Incógnitas a calcular: a_{4y} , a_{5x} , a_{5y} , a_{5z} , a_{6y} , θ_{12} y θ_{13}

Datos	Valores Iniciales	Valores Obtenidos	Ángulo obtenido
$a_{4x} = -0,40824$	$a_{4yi} = 0,70710$	$a_{4y} = 0,91285$	$(\mathbf{a}_4)^T(\mathbf{a}_5) = 95,146^\circ$
$a_{4z} = -0,00469$	$a_{5xi} = -0,42390$	$a_{5x} = -0,83863$	$(\mathbf{a}_5)^T(\mathbf{a}_6) = 94,875^\circ$
$a_{6x} = -0,40824$	$a_{5yi} = -0,39445$	$a_{5y} = -0,47468$	
$a_{6z} = 0,79147$	$a_{5zi} = 0,85184$	$a_{5z} = -0,26714$	
	$a_{6yi} = 0,70710$	$a_{6y} = 0,45486$	
	$\theta_{12i} = 11,644^\circ$	$\theta_{12} = 13,022^\circ$	
	$\theta_{13i} = 20,132^\circ$	$\theta_{13} = 22,498^\circ$	

Cadena 3

Incógnitas a calcular: a_{7y} , a_{8x} , a_{8y} , a_{8z} , a_{9y} , ϕ_{12} y ϕ_{13}

Datos	Valores Iniciales	Valores Obtenidos	Ángulo obtenido
$a_{7x} = -0,40824$	$a_{7yi} = -0,7626$	$a_{7y} = -0,4969$	$(\mathbf{a}_7)^T(\mathbf{a}_8) = 34,304^\circ$
$a_{7z} = -0,7657$	$a_{8xi} = 0,0753$	$a_{8x} = 0,1397$	$(\mathbf{a}_8)^T(\mathbf{a}_9) = 97,045^\circ$
$a_{9x} = -0,4082$	$a_{8yi} = -0,7759$	$a_{8y} = -0,3494$	
$a_{9z} = 0,3832$	$a_{8zi} = -0,7213$	$a_{8z} = -0,9264$	
	$a_{9yi} = -0,7071$	$a_{9y} = -0,8285$	
	$\phi_{12i} = -295,291^\circ$	$\phi_{12} = -282,101^\circ$	
	$\phi_{13i} = -123,807^\circ$	$\phi_{13} = -174,928^\circ$	

De los valores obtenidos, se tiene la siguiente figura 3.10, la cual muestra la configuración de la PPE.

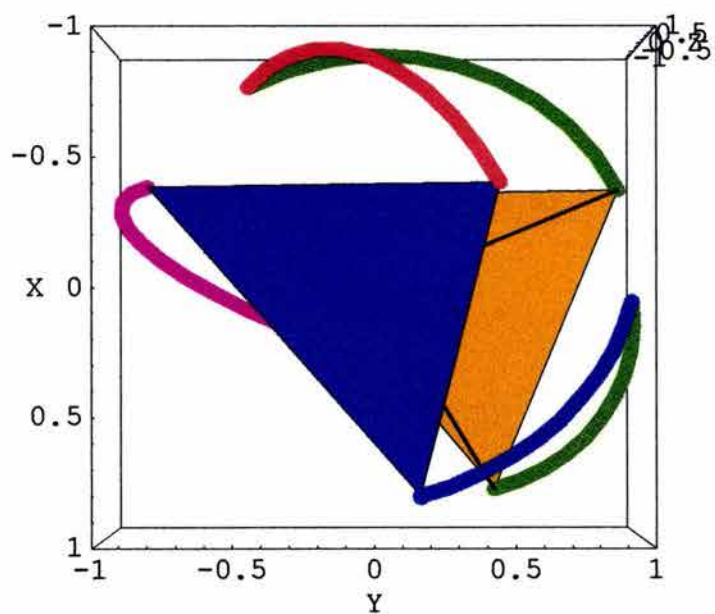
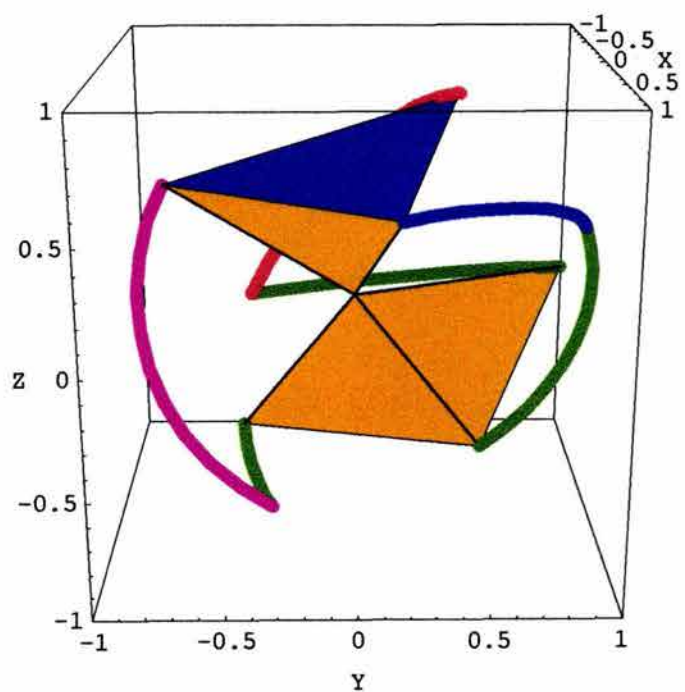


Figura 3.10. Vista frontal y superior configuración 3.

3.5. Diseño del Prototipo de la PPE

3.5.1. Consideraciones de Diseño

En este trabajo de tesis no se pretende profundizar en el uso de metodologías de diseño o modelos descriptivos para fabricar manipuladores paralelos. Por lo tanto solo se plantea realizar un modelo o prototipo de una plataforma paralela esférica que cumpla con las necesidades y especificaciones del análisis y los métodos empleados para su solución.

Así mismo no se pretende desarrollar el diseño de un producto para ser comercializado, sino sólo como elemento que sirva de análisis y comprobación de resultados.

El término diseño es considerado como parte del proceso de síntesis desarrollado par lograr obtener una configuración o modelo de la PPE.

Por lo tanto, los conceptos básicos desarrollados son aplicados al problema de la PPE, su formulación y diseños posibles se prepararon en forma analítica y esquemática. Siendo de gran utilidad los modelos sólidos por computadora tanto bidimensionales como tridimensionales para ensayar conceptos hacia una preselección.

Surgieron diferentes tipos de ideas de las cuales se generaron alternativas de diseño realizables donde las más promisorias se seleccionaron según requisitos y restricciones ya mencionados anteriormente para la PPE.

El concepto seleccionado de diseño se concretó con parámetros específicos, resultado de una síntesis de la PPE. Es claro que el diseño no es un esfuerzo en una sola dirección y de un solo paso. Retroalimentación e iteración ocurren en distintas etapas del mismo, de donde surgen nuevas respuestas, las cuales se convierten en oportunidades para mejorar el diseño con base en una mejor información [13].

3.5.2. Modelo y Configuración del Prototipo

La plataforma paralela esférica mostrada en la figura 3.11, puede ser dividida en tres partes: la base fija, la plataforma móvil y las piernas.

La base es un plato circular, el cual está fijo a la tierra; la plataforma móvil o efector final es también de forma circular; las piernas están unidas a la base y a la plataforma por juntas de revolución y pueden ser divididas en dos partes: la pierna-eslabón y la pierna base.

El eslabón unido a la plataforma móvil es el denominado la pierna-eslabón, consiste de un eslabón y dos juntas de revolución.

El eslabón unido al plato base es el denominado la pierna base, consta de una junta de revolución unida y fija al plato base y de una segunda junta de revolución la cual está unida a la pierna eslabón.

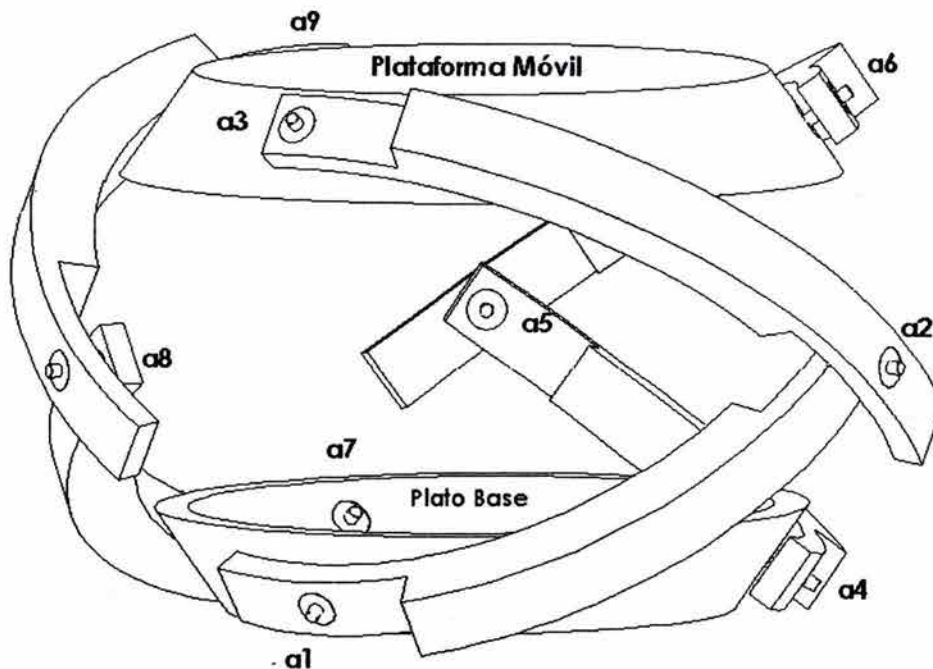


Figura 3.11. Plataforma Paralela Esférica de 3 GDL.

Los dibujos de trabajo o de detalle del mecanismo completo se muestran en el apéndice B, estos contienen la información necesaria para una etapa posterior de su manufactura.

Los dibujos de ensamble indican la relación entre sus componentes y el dibujo en explosivo, designa a éstos con un número de referencia de pieza.

Cabe mencionar que cada uno de los dibujos presentados fueron realizados en el software denominado SolidWorks.

Además, solo se dan las propiedades más importantes del material seleccionado para la fabricación de la PPE, los elementos usados como juntas para permitir el movimiento de cada uno de los elementos ensamblados son cojinetes de bolas. Se sugieren pernos simples con seguros en los extremos para asegurar la unión entre los elementos ensamblados.

De esta manera se obtienen los datos como son: peso, momentos de inercia, ubicación de centros de gravedad, etc. Los cuales servirán para realizar el

balanceo y el análisis estático y dinámico de la PPE.

A continuación en las figuras 3.13 y 3.14, se muestran otros modelos de solución realizados, los cuales de acuerdo a su configuración no son viables para el análisis requerido en este trabajo de tesis. Debido a que se presenta interferencia en el movimiento de las cadenas cinemáticas que forman la PPE.

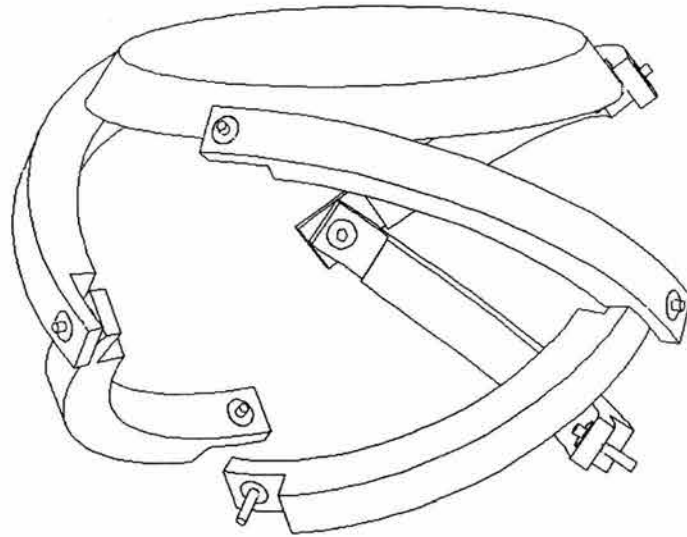


Figura 3.13. PPE de 3 GDL.

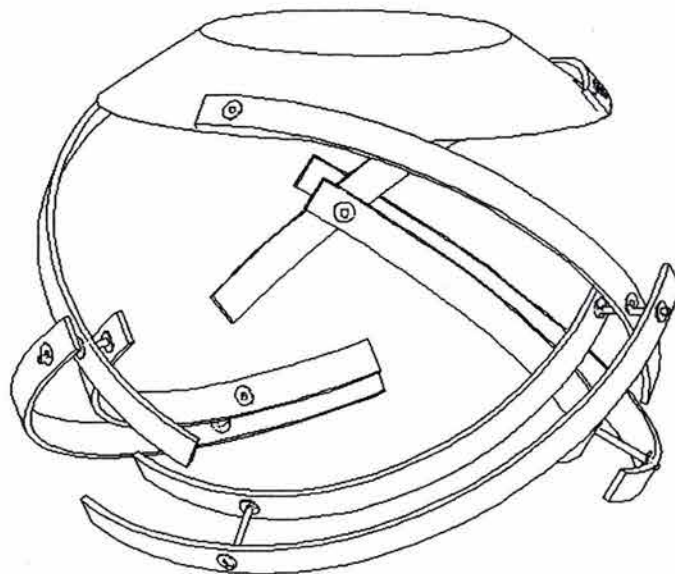


Figura 3.14. PPE de 3 GDL.

Capítulo 4

Análisis Cinemático

4.1. Introducción

El estudio de la robótica envuelve tanto a la teoría como a la investigación aplicada, que puede dividirse en diseño de manipuladores, mecánica básica, planeación y control de trayectorias, programación y máquinas inteligentes, etc.

La mecánica es parte de la ciencia que trata con la energía y las fuerzas, y sus efectos sobre el movimiento de sistemas mecánicos. El estudio envuelve tres campos del conocimiento, relacionados entre sí: **cinemática, estática y dinámica**.

Una vez que un diseño de un mecanismo tentativo ha sido sintetizado, debe ser analizado enseguida. Una meta principal del **análisis cinemático** consiste en determinar las aceleraciones de todas las partes móviles del conjunto. Una fuerza dinámica es proporcional a su aceleración, por la segunda ley de Newton. Se necesitan conocer las fuerzas dinámicas con el fin de calcular los esfuerzos en los componentes.

Para calcular las aceleraciones debemos hallar primero las posiciones de todos los elementos del mecanismo (sus eslabones) para cada incremento en el movimiento de entrada, y luego derivar (o diferenciar) las ecuaciones de posición con respecto al tiempo para obtener las velocidades; se derivan luego éstas con el fin de obtener las expresiones de aceleración [2].

Por lo tanto, en el presente capítulo se tratan los aspectos del análisis cinemático de la PPE en estudio, empleando el método de forma cerrada. Se muestra el proceso del análisis cinemático, cuyos cálculos se realizaron empleando como herramienta de trabajo el software denominado Mathematica, en el cual se desarrollaron los programas correspondientes al análisis de posición, velocidad y aceleración, respectivamente.

4.2. Generalidades

La **cinemática** [14], se ocupa de los aspectos del movimiento sin importar las fuerzas o torques que lo produzcan. El análisis cinemático trata con la derivación de los movimientos relativos entre varios eslabones de un manipulador dado. Hay dos tipos de problemas de análisis cinemático: **cinemática directa** y **cinemática inversa**.

En la programación de un robot manipulador, son especificadas en el espacio las posiciones y orientaciones, y quizá las derivadas del tiempo de las posiciones y orientaciones del efector final. El problema es encontrar todas las posibles determinaciones de variables de las juntas móviles y sus correspondientes derivadas del tiempo para que el efector final pueda situarse en la posición y orientación deseada con las características de movimientos propuestos. Esto es conocido como **cinemática inversa**; la cual es aplicada a nuestra PPE para el análisis cinemático desarrollado.

Por otro lado, algunas veces las variables de las juntas móviles y posiblemente sus derivadas del tiempo son obtenidas de las lecturas de los sensores instalados en las juntas, con esto se desea determinar y encontrar todas las posibles posiciones y orientaciones del efector final y sus correspondientes derivadas del tiempo. Esto es conocido como **cinemática directa**.

4.3. Análisis Cinemático - Método de Forma Cerrada

Se utiliza álgebra matricial para representar la localización de los elementos de la PPE con respecto a un sistema de referencia fijo. Tal como se describió en el capítulo 2 sobre las diferentes formas de describir el movimiento angular de un cuerpo rígido, se continua con el uso de las matrices de rotación y los ángulos de Euler.

El método de forma cerrada, derivado por McCarthy [11], se basa principalmente en matrices de rotación a través de las cuales se forman cada uno de los eslabones, que al ser conectados por las juntas rotacionales forman cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE, a la vez que con el uso de los ángulos de Euler se representa el movimiento del plato o efector final del mecanismo mostrado en la figura 4.1.

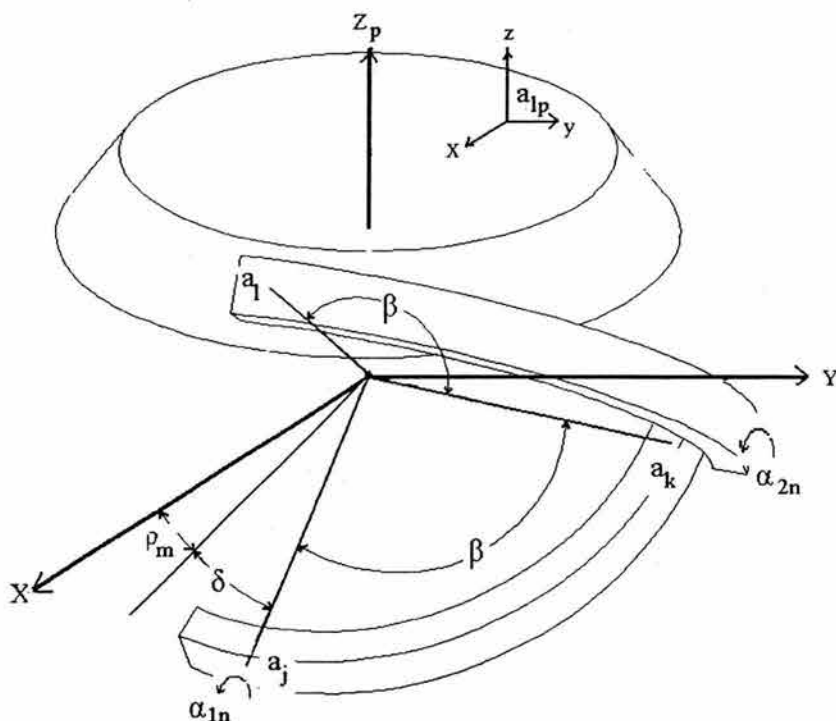


Figura 4.1. Formación de los eslabones.

Considerando la figura 4.1, se muestran las ecuaciones generales de rotación que se desarrollaron para la formación de los primeros y segundos eslabones de cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE.

$$\mathbf{a}_j = [\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}] \mathbf{x} \quad (4.3.1)$$

$$\mathbf{a}_k = [\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}][\mathbf{R}_{\alpha_{1n}, x}][\mathbf{R}_{\beta, z}] \mathbf{x} \quad (4.3.2)$$

$$\mathbf{a}_l = [\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}][\mathbf{R}_{\alpha_{1n}, x}][\mathbf{R}_{\beta, z}][\mathbf{R}_{\alpha_{2n}, x}][\mathbf{R}_{\beta, z}] \mathbf{x} \quad (4.3.3)$$

$$\mathbf{a}_p = [\mathbf{R}_{\psi, z}][\mathbf{R}_{\theta, x}][\mathbf{R}_{\phi, z}][\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{-\delta, y}] \mathbf{x} \quad (4.3.4)$$

$$\mathbf{z}_p = [\mathbf{R}_{\psi, z}][\mathbf{R}_{\theta, x}][\mathbf{R}_{\phi, z}] \mathbf{z} \quad (4.3.5)$$

donde:

		j	k	l	n	ρ_m
m	1	1	2	3	1	0°
	2	4	5	6	2	120°
	3	7	8	9	3	240°

$$\begin{aligned}\beta &= 90^\circ & \delta &= 35,27^\circ & \lambda &= 54,73^\circ \\ \mathbf{x} &= [1, 0, 0]^T \\ \mathbf{z} &= [0, 0, 1]^T\end{aligned}$$

Por ejemplo cuando $m = 1$, se tiene $j = 1$, $k = 2$, $l = 3$, $n = 1$, $\rho_m = 0^\circ$, y las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= [\mathbf{R}_{\rho_1,z}][\mathbf{R}_{\delta,y}] \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2 &= [\mathbf{R}_{\rho_1,z}][\mathbf{R}_{\delta,y}][\mathbf{R}_{\alpha_{11,x}}][\mathbf{R}_{\beta,z}] \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_3 &= [\mathbf{R}_{\rho_1,z}][\mathbf{R}_{\delta,y}][\mathbf{R}_{\alpha_{11,x}}][\mathbf{R}_{\beta,z}][\mathbf{R}_{\alpha_{21,x}}][\mathbf{R}_{\beta,z}] \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{3p} &= [\mathbf{R}_{\psi,z}][\mathbf{R}_{\theta,x}][\mathbf{R}_{\phi,z}][\mathbf{R}_{\rho_1,z}][\mathbf{R}_{-\delta,y}] \mathbf{x}\end{aligned}$$

siendo las matrices de rotación empleadas en las ecuaciones (4.3.1) a (4.3.5) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}[\mathbf{R}_{\rho_m,z}] &= \begin{bmatrix} c\rho_m & -s\rho_m & 0 \\ s\rho_m & c\rho_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [\mathbf{R}_{\delta,y}] &= \begin{bmatrix} c\delta & 0 & s\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\delta & 0 & c\delta \end{bmatrix} \\ [\mathbf{R}_{\alpha_{1n,x}}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{1n} & -s\alpha_{1n} \\ 0 & s\alpha_{1n} & c\alpha_{1n} \end{bmatrix} & [\mathbf{R}_{\beta,z}] &= \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{R}_{\alpha_{2n,x}}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{2n} & -s\alpha_{2n} \\ 0 & s\alpha_{2n} & c\alpha_{2n} \end{bmatrix} & [\mathbf{R}_{\psi,z}] &= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (4.3.6) \\ [\mathbf{R}_{\theta,x}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} & [\mathbf{R}_{\phi,z}] &= \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$c = \text{coseno}$ y $s = \text{seno}$

Una vez descritas como están constituidas cada una de las ecuaciones generales para la formación de los eslabones de la PPE, se describe el procedimiento para la creación de cada uno de ellos. La ecuación (4.3.1):

$$\mathbf{a}_j = [\mathbf{R}_{\rho_m,z}][\mathbf{R}_{\delta,y}] \mathbf{x}$$

nos permite ubicar un vector unitario \mathbf{x} de referencia, el cual está desplazado $[\mathbf{R}_{\rho_m,z}][\mathbf{R}_{\delta,y}]$ respecto del eje x inercial.

La ecuación (4.3.2) forma y orienta el primer eslabón de cada cadena cinemática.

$$\mathbf{a}_k = [\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}][\mathbf{R}_{\alpha_{1n}, x}][\mathbf{R}_{\beta, z}] \mathbf{x}$$

El término $[\mathbf{R}_{\beta, z}]$ forma el primer eslabón con un ángulo β entre su punto inicial y final. El siguiente término $[\mathbf{R}_{\alpha_{1n}, x}]$ indica el ángulo de orientación del eslabón. Los términos $[\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}]$ nos dan la ubicación final del eslabón.

La ecuación (4.3.3) forma y orienta el segundo eslabón de cada cadena cinemática.

$$\mathbf{a}_l = [\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}][\mathbf{R}_{\alpha_{1n}, x}][\mathbf{R}_{\beta, z}][\mathbf{R}_{\alpha_{2n}, x}][\mathbf{R}_{\beta, z}] \mathbf{x}$$

El término $[\mathbf{R}_{\beta, z}]$ forma el segundo eslabón con un ángulo β . El siguiente término $[\mathbf{R}_{\alpha_{2n}, x}]$ indica el ángulo de orientación del segundo eslabón relativo al primero. Los términos $[\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}][\mathbf{R}_{\alpha_{1n}, x}][\mathbf{R}_{\beta, z}]$ forman el primer eslabón. La ecuación (4.3.3) representa el punto final de los segundos eslabones como parte de la cadena cinemática.

La ecuación (4.3.4) orienta los ejes pertenecientes al plato móvil.

$$\mathbf{a}_{lp} = [\mathbf{R}_{\psi, z}][\mathbf{R}_{\theta, x}][\mathbf{R}_{\phi, z}][\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{-\delta, y}] \mathbf{x}$$

Los términos $[\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{-\delta, y}]$ posicionan a los ejes pertenecientes al plato móvil y los términos $[\mathbf{R}_{\psi, z}][\mathbf{R}_{\theta, x}][\mathbf{R}_{\phi, z}]$ orientan dichos ejes mediante los ángulos de Euler.

La ecuación (4.3.5) orienta un eje que pasa en el centro del plato móvil a través de los ángulos de Euler.

$$\mathbf{z}_p = [\mathbf{R}_{\psi, z}][\mathbf{R}_{\theta, x}][\mathbf{R}_{\phi, z}] \mathbf{z}$$

4.3.1. Análisis de Posición

Problema Cinemático Inverso

El problema cinemático inverso para la posición se define de la siguiente manera:

Definición:

Dados los ángulos de Euler ψ, θ, ϕ , referente a los ejes z, x, z , que definen la orientación de la PPE respecto al sistema inercial, determinar los ángulos $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$, de los eslabones 1 y $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}$ de los eslabones 2 que describen las orientaciones de cada una de las cadenas cinemáticas.

Para calcular los ángulos de posición α_{1n}, α_{2n} de los eslabones que forman cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE, se parte de la definición del ángulo entre dos vectores (ver apéndice A.2). A continuación se muestra el análisis

para los primeros y segundos eslabones de cada una las cadenas cinemáticas que forman la PPE.

Eslabones 1n:

Para el primer eslabón de la cadena, se tiene la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{a}_k)^T(\mathbf{a}_{lp}) = c\beta \quad , \quad c\beta = \cos \beta \quad (4.3.7)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k &= [\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}][\mathbf{R}_{\alpha_{1n}, x}][\mathbf{R}_{\beta, z}] \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_k &= \begin{bmatrix} c\rho_m & -s\rho_m & 0 \\ s\rho_m & c\rho_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\delta & 0 & s\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\delta & 0 & c\delta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{1n} & -s\alpha_{1n} \\ 0 & s\alpha_{1n} & c\alpha_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\rho_m c\delta & -s\rho_m c\delta & c\rho_m s\delta \\ s\rho_m c\delta & c\rho_m s\delta & s\rho_m s\delta \\ -s\delta & 0 & c\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ c\alpha_{1n}s\beta & c\alpha_{1n}c\beta & -s\alpha_{1n} \\ s\alpha_{1n}s\beta & s\alpha_{1n}c\beta & c\alpha_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_k &= \begin{bmatrix} c\rho_m c\delta c\beta - s\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + c\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta \\ s\rho_m c\delta c\beta + c\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + s\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta \\ -s\delta c\beta + c\delta s\alpha_{1n}s\beta \end{bmatrix} \quad (4.3.7a) \end{aligned}$$

Así mismo, para:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{lp} &= [\mathbf{R}_{\psi, z}][\mathbf{R}_{\theta, x}][\mathbf{R}_{\phi, z}][\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{-\delta, y}] \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{lp} &= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\rho_m & -s\rho_m & 0 \\ s\rho_m & c\rho_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\delta & 0 & -s\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\delta & 0 & c\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi c\theta & s\psi s\theta \\ s\psi & c\psi c\theta & -c\psi s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\rho_m c\phi - s\rho_m s\phi & -s\rho_m c\phi - c\rho_m s\phi & 0 \\ c\rho_m s\phi + s\rho_m c\phi & -s\rho_m s\phi + c\rho_m c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\delta \\ 0 \\ s\delta \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_{lp} &= \begin{bmatrix} c\delta(c\psi(c\rho_m c\phi - s\rho_m s\phi) - s\psi c\theta(c\rho_m c\phi + s\rho_m s\phi)) + s\delta s\psi s\theta \\ c\delta(s\psi(c\rho_m c\phi - s\rho_m s\phi) + c\psi c\theta(c\rho_m s\phi + s\rho_m c\phi)) - s\delta c\psi s\theta \\ c\delta(s\theta(c\rho_m s\phi + s\rho_m c\phi)) + s\delta c\theta \end{bmatrix} \quad (4.3.7b) \end{aligned}$$

Una vez encontrados cada uno de los términos (4.3.7a) y (4.3.7b), se sustituyen en la ecuación (4.3.7), obteniendo:

$$(\mathbf{a}_k)^T(\mathbf{a}_{lp}) = c\beta$$

$$\begin{bmatrix} c\rho_m c\delta c\beta - S\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + c\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta \\ s\rho_m c\delta c\beta + c\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + s\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta \\ -s\delta c\beta + c\delta s\alpha_{1n}s\beta \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} c\delta(c\psi(c\rho_m c\phi - s\rho_m s\phi) - s\psi c\theta(c\rho_m c\phi + s\rho_m s\phi)) + s\delta s\psi s\theta \\ c\delta(s\psi(c\rho_m c\phi - s\rho_m s\phi) + c\psi c\theta(c\rho_m s\phi + s\rho_m c\phi)) - s\delta c\psi s\theta \\ c\delta(s\theta(c\rho_m s\phi + s\rho_m c\phi)) + s\delta c\theta \end{bmatrix} = c\beta$$

Finalmente al efectuar la operación escalar, obtenemos los términos factorizados en función de $c\alpha_{1n}$, $s\alpha_{1n}$ y términos independientes:

$$(c\rho_m s\beta(-c\psi s\delta s\theta + c\delta c\rho_m (c\theta c\psi s\phi + c\phi s\psi) + c\delta s\rho_m (c\theta c\psi c\phi - s\phi s\psi)) - s\beta s\rho_m (s\delta s\theta s\psi + c\delta s\rho_m (-c\psi s\phi - c\theta c\phi s\psi) + c\delta c\rho_m (c\phi c\psi - c\theta s\phi s\psi)))c\alpha_{1n} +$$

$$(c\delta s\beta(c\theta s\delta + c\delta c\phi s\theta s\rho_m + c\delta c\rho_m s\theta s\phi) + s\beta s\delta s\rho_m (-c\psi s\delta s\theta + c\delta c\rho_m (c\theta c\psi s\phi + c\phi s\psi) + c\delta s\rho_m (c\theta c\psi c\phi - s\phi s\psi)) + c\rho_m s\beta s\delta (s\delta s\theta s\psi + c\delta s\rho_m (-c\psi s\phi - c\theta c\phi s\psi) + c\delta c\rho_m (c\theta c\psi - c\theta s\phi s\psi)))s\alpha_{1n} -$$

$$c\beta s\delta (c\theta s\delta + c\delta c\phi s\theta s\rho_m + c\delta c\rho_m s\theta s\phi) + c\beta c\delta s\rho_m (-c\psi s\delta s\theta + c\delta c\rho_m (c\theta c\psi s\phi + c\phi s\psi) + c\delta s\rho_m (c\theta c\psi c\phi - s\phi s\psi)) + c\beta c\delta c\rho_m (s\delta s\theta s\psi + c\delta s\rho_m (-c\psi s\phi - c\theta c\phi s\psi) + c\delta c\rho_m (c\phi c\psi - c\theta s\phi s\psi)) = c\beta$$

los términos multiplicando a $c\alpha_{1n}$, $s\alpha_{1n}$ y el término independiente son renombrados como D_{1n} , D_{2n} , D_{3n} :

$$D_{1n} c\alpha_{1n} + D_{2n} s\alpha_{1n} + D_{3n} = c\beta \quad (4.3.8)$$

donde los términos D_{1n} , D_{2n} , D_{3n} han sido simplificados finalmente a las expresiones siguientes:

$$D_{1n} = s\beta(c\psi(-(c\rho_m s\delta s\theta) + c\delta(-(c(\rho_m + \phi) * s\rho_m) + c\theta c\rho_m * s(\rho_m + \phi))) + (-s\delta s\theta s\rho_m) + c\delta(c\rho_m * c(\rho_m + \phi) + c\theta s\rho_m * s(\rho_m + \phi)))s\psi)$$

$$D_{2n} = s\beta(c\delta c\theta c\delta + c\psi s\delta(-(s\delta s\theta s\rho_m) + c\delta(c\phi(c\rho_m^2 + c\theta s\rho_m^2) + (-1 + c\theta c\rho_m s\rho_m s\phi)) + c\delta^2 s\theta * s(\rho_m + \phi) + c\rho_m s\delta^2 S\theta + c\delta s\delta((1 - c\theta) * c\rho_m c\phi s\rho_m - (c\theta c\rho_m^2 + s\rho_m^2)s\phi))s\psi)$$

$$D_{3n} = c\beta(-(c\theta s\delta + c\delta s\delta^2 s\theta((-c\phi - c\psi)s\rho_m + c\rho_m(-s\phi + s\psi)) + c\delta^2(c\rho_m s\rho_m((-1 + c\theta)c\psi s\phi + c\phi s\psi - c\theta c\phi s\psi) + s\rho_m^2(c\theta c\phi c\psi - s\phi s\psi) + c\rho_m^2(c\phi c\psi - c\theta s\phi s\psi)))$$

aplicando a la ecuación (4.3.8) el procedimiento de solución mostrado en el apéndice A.1, se tiene:

$$\alpha_{1n} = \arctan 2\left(\frac{D_{2n}}{D_{1n}}\right) + \arccos\left(\frac{-D_{3n} + \cos(\beta)}{\sqrt{D_{1n}^2 + D_{2n}^2}}\right) \quad (4.3.9)$$

obteniendo así, la ecuación que nos permite determinar la posición de los primeros eslabones en cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE, respectivamente.

Eslabones 2n:

Para los segundos eslabones de la cadena, se tiene la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{a}_l)^T(\mathbf{z}_p) = c\lambda \quad (4.3.10)$$

donde considerando las ecuaciones (4.3.3) y (4.3.5), se muestra el procedimiento desarrollado para encontrar la ecuación de posición que gobierne a los segundos eslabones.

De la ecuación (4.3.10), tenemos:

$$(\mathbf{a}_l)^T(\mathbf{z}_p) = c\lambda$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_l &= [\mathbf{R}_{\rho_m, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}][\mathbf{R}_{\alpha_{1n}, x}][\mathbf{R}_{\beta, z}][\mathbf{R}_{\alpha_{2n}, x}][\mathbf{R}_{\beta, z}] \mathbf{x} \\
 \mathbf{a}_l &= \begin{bmatrix} c\rho_m & -s\rho_m & 0 \\ s\rho_m & c\rho_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\delta & 0 & s\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\delta & 0 & c\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{1n} & -s\alpha_{1n} \\ 0 & s\alpha_{1n} & c\alpha_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{2n} & -s\alpha_{2n} \\ 0 & s\alpha_{2n} & c\alpha_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\rho_m c\delta & -s\rho_m c\delta & c\rho_m s\delta \\ s\rho_m c\delta & c\rho_m s\delta & s\rho_m s\delta \\ -s\delta & 0 & c\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ c\alpha_{1n}s\beta & c\alpha_{1n}c\beta & -s\alpha_{1n} \\ s\alpha_{1n}s\beta & s\alpha_{1n}c\beta & c\alpha_{1n} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ c\alpha_{2n}s\beta & c\alpha_{2n}c\beta & -s\alpha_{2n} \\ s\alpha_{2n}s\beta & s\alpha_{2n}c\beta & c\alpha_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{a}_l &= \begin{bmatrix} c\alpha_{2n}s\beta(-c\delta c\rho_m c\beta + c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}c\beta s\rho_m) + \\ s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m) + c\beta(c\beta c\delta c\rho_m + c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta s\delta - c\alpha_{1n}s\beta s\rho_m) \\ s\alpha_{2n}s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + c\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m - c\delta s\beta s\rho_m + \\ c\beta s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + c\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta + c\beta c\delta s\rho_m + s\alpha_{1n}s\beta s\delta s\rho_m) \\ c\alpha_{1n}c\delta s\alpha_{2n}s\beta + c\beta(c\delta s\alpha_{1n}s\beta - c\beta s\delta) + c\alpha_{2n}s\beta(c\beta c\delta s\alpha_{1n} + s\beta s\delta) \end{bmatrix} \quad (4.3.10a)
 \end{aligned}$$

Así mismo, para:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_p &= [\mathbf{R}_{\psi, z}][\mathbf{R}_{\theta, x}][\mathbf{R}_{\phi, z}] \mathbf{z} \\
 \mathbf{z}_p &= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi c\theta & s\psi s\theta \\ s\psi & c\psi c\theta & -c\psi s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\psi c\phi - c\theta s\phi s\psi & -c\psi s\phi - c\theta c\phi s\psi & s\theta s\psi \\ c\theta c\psi s\phi + c\phi s\psi & c\theta c\phi c\psi - s\phi s\psi & -c\psi s\theta \\ s\theta s\phi & c\phi s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{z}_p &= \begin{bmatrix} s\theta s\psi \\ -c\psi s\theta \\ c\theta \end{bmatrix} \quad (4.3.10b)
 \end{aligned}$$

Una vez encontrados cada uno de los términos (4.3.10a) y (4.3.10b), se sustituyen en la ecuación (4.3.10), obteniendo:

$$(\mathbf{a}_l)^T(\mathbf{z}_p) = c\lambda$$

$$\begin{bmatrix} c\alpha_{2n}s\beta(-c\delta c\rho_m c\beta + c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}c\beta s\rho_m) + \\ s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m) + c\beta(c\beta c\delta c\rho_m + c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta s\delta - \\ c\alpha_{1n}s\beta s\rho_m) \\ s\alpha_{2n}s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + c\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m - \\ c\delta s\beta s\rho_m + c\beta s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + c\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta + c\beta c\delta s\rho_m + \\ s\alpha_{1n}s\beta s\delta s\rho_m) \\ c\alpha_{1n}c\delta s\alpha_{2n}s\beta + c\beta(c\delta s\alpha_{1n}s\beta - c\beta s\delta) + c\alpha_{2n}s\beta(c\beta c\delta s\alpha_{1n} + s\beta s\delta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s\theta s\psi \\ -c\psi s\theta \\ c\theta \end{bmatrix} = c\lambda$$

Finalmente al efectuar la operación escalar, obtenemos los términos factorizados en función de $c\alpha_{2n}$, $s\alpha_{2n}$ y términos independientes:

$$(c\theta s\beta(c\beta c\delta s\alpha_{1n} + s\beta s\delta) - c\psi s\beta s\theta(c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m + (-c\delta s\beta + c\beta s\alpha_{1n}s\delta)s\rho_m) + s\beta s\theta(c\rho_m - (c\delta s\beta + c\beta s\alpha_{1n}s\delta) - c\alpha_{1n}c\beta s\rho_m)s\psi)c\alpha_{2n} +$$

$$(c\alpha_{1n}c\delta c\theta s\beta - c\psi s\beta s\theta(-c\rho_m s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + s\beta s\theta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m)s\psi)s\alpha_{2n} +$$

$$(c\beta c\theta(c\delta s\alpha_{1n}s\beta - c\beta s\delta) - c\beta c\psi s\theta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta + (c\beta c\delta + s\alpha_{1n}s\beta s\delta)s\rho_m) + c\beta s\theta(c\rho_m (c\beta c\delta + s\alpha_{1n}s\beta s\delta) - c\alpha_{1n}s\beta s\rho_m)s\psi) = c\lambda$$

los términos multiplicando a $c\alpha_{2n}$, $s\alpha_{2n}$ y el término independiente son renombrados como D_{4n} , D_{5n} , D_{6n} :

$$D_{4n} c\alpha_{2n} + D_{5n} s\alpha_{2n} + D_{6n} = c\lambda \quad (4.3.11)$$

donde los términos D_{4n} , D_{5n} , D_{6n} han sido simplificados finalmente a las expresiones siguientes:

$$D_{4n} = s\beta(s\beta(c\theta s\delta + c\delta s\theta * s(\rho_m - \psi)) + c\beta(c\delta c\theta s\alpha_{1n} - s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi))))$$

$$D_{5n} = s\beta(c(\rho_m - \psi) * s\alpha_{1n}s\theta + c\alpha_{1n}(c\delta c\theta - s\delta s\theta * s(\rho_m - \psi)))$$

$$D_{6n} = -c\beta(c\beta c\theta s\delta + s\beta s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi)) + c\delta(-(c\theta s\alpha_{1n}s\beta) + c\beta s\theta * s(\rho_m - \psi)))$$

aplicando a la ecuación (4.3.11) el procedimiento de solución mostrado en el apéndice A.1, se tiene:

$$\alpha_{2n} = \arctan2\left(\frac{D_{5n}}{D_{4n}}\right) + \arccos\left(\frac{-D_{6n} + \cos(\lambda)}{\sqrt{D_{4n}^2 + D_{5n}^2}}\right) \quad (4.3.12)$$

obteniendo así la ecuación que nos permite determinar la posición de los segundos eslabones en cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE, respectivamente.

4.3.2. Análisis de Velocidad

Una vez que se ha efectuado el análisis de posición, el siguiente paso es determinar las velocidades de todos los eslabones en el mecanismo. Se requieren conocer las velocidades en nuestro mecanismo, para la determinación de las aceleraciones de los eslabones, necesarias para el cálculo de las fuerzas dinámicas.

Problema Cinemático Inverso

El problema cinemático inverso para la velocidad se define de la siguiente manera:

Definición:

Dadas las variaciones en el tiempo de los ángulos de Euler $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$, referente a los ejes z, x, z , que definen las velocidades angulares de la PPE respecto al sistema inercial, determinar $\dot{\alpha}_{11}, \dot{\alpha}_{12}, \dot{\alpha}_{13}$, de los eslabones 1 y $\dot{\alpha}_{21}, \dot{\alpha}_{22}, \dot{\alpha}_{23}$ de los eslabones 2 que describen las velocidades angulares de cada una de las cadenas cinemáticas.

Para calcular las ecuaciones de velocidad que gobiernen a los primeros y segundos eslabones de cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE, se tiene nuevamente en consideración el concepto de ángulo entre dos vectores.

Eslabones 1n:

Para los primeros eslabones de la cadena, se tiene la ecuación de posición (4.3.7):

$$(\mathbf{a}_k)^T(\mathbf{a}_{lp}) = c\beta$$

derivando con respecto al tiempo para obtener la ecuación de velocidad:

$$(\dot{\mathbf{a}}_k)^T(\mathbf{a}_{lp}) + (\mathbf{a}_k)^T(\dot{\mathbf{a}}_{lp}) = c\dot{\beta} \quad (4.3.13)$$

Desarrollando $\dot{\mathbf{a}}_k$, se tiene:

$$\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} c\rho_m \dot{c}\delta c\beta - s\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + c\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta \\ s\rho_m \dot{c}\delta c\beta + c\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + s\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta \\ -s\delta c\beta + c\delta s\alpha_{1n}s\beta \end{bmatrix}$$

Considerando que los términos constantes son (ρ_m, β, δ) , derivando obtenemos $\dot{\mathbf{a}}_k$:

$$\dot{\mathbf{a}}_k = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{1n}(s\rho_m s\beta s\alpha_{1n} + c\rho_m s\delta s\beta c\alpha_{1n}) \\ \dot{\alpha}_{1n}(-c\rho_m s\beta s\alpha_{1n} + s\rho_m s\delta s\beta c\alpha_{1n}) \\ \dot{\alpha}_{1n}(c\delta s\beta c\alpha_{1n}) \end{bmatrix}$$

Desarrollando $\dot{\mathbf{a}}_{lp}$, se tiene:

$$\mathbf{a}_{lp} = \begin{bmatrix} c\delta(c\psi(c\rho_m c\phi - s\rho_m s\phi) - s\psi c\theta(c\rho_m c\phi + s\rho_m s\phi)) + s\delta s\psi s\theta \\ c\delta(s\psi(c\rho_m c\phi - s\rho_m s\phi) + c\psi c\theta(c\rho_m s\phi + s\rho_m c\phi)) - s\delta c\psi s\theta \\ c\delta(s\theta(c\rho_m s\phi + s\rho_m c\phi)) + s\delta c\theta \end{bmatrix}$$

Considerando que los términos constantes son (ρ_m, β, δ) , derivando obtenemos $\dot{\mathbf{a}}_{lp}$:

$$\dot{\mathbf{a}}_{lp} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}(-c\delta s\psi c\rho_m c\phi + c\delta s\psi s\rho_m s\phi - c\delta c\psi c\theta c\rho_m s\phi - c\delta c\psi c\theta s\rho_m c\phi + s\delta c\psi s\theta) + \\ \dot{\theta}(c\delta s\psi s\theta c\rho_m s\phi + c\delta s\psi s\theta s\rho_m c\phi + s\delta s\psi c\theta) + \\ \dot{\phi}(-c\delta c\psi c\rho_m s\phi - c\delta c\psi s\rho_m c\phi - c\delta s\psi c\theta c\rho_m c\phi + c\delta s\psi c\theta s\rho_m s\phi) \\ \dot{\psi}(c\delta c\psi c\rho_m c\phi - c\delta c\psi s\rho_m s\phi - c\delta s\psi c\theta c\rho_m s\phi - c\delta s\psi c\theta s\rho_m c\phi + s\delta s\psi s\theta) + \\ \dot{\theta}(-c\delta c\psi s\theta c\rho_m s\phi - c\delta c\psi s\theta s\rho_m c\phi - s\delta c\psi c\theta) + \\ \dot{\phi}(-c\delta s\psi c\rho_m s\phi - c\delta s\psi s\rho_m c\phi + c\delta c\psi c\theta c\rho_m c\phi - c\delta c\psi c\theta s\rho_m s\phi) \\ \dot{\theta}(c\delta c\theta c\rho_m s\phi + c\delta c\theta s\rho_m c\phi - s\delta s\theta) + \dot{\phi}(c\delta s\theta c\rho_m c\phi - c\delta s\theta s\rho_m s\phi) \end{bmatrix}$$

Desarrollando el término $(\dot{\mathbf{a}}_k)^T(\mathbf{a}_{lp})$:

$$(\dot{\mathbf{a}}_k)^T(\mathbf{a}_{lp}) = \dot{\alpha}_{1n}(((s\rho_m s\beta s\alpha_{1n} + c\rho_m s\delta s\beta s\alpha_{1n})(c\delta(c\psi(c\rho_m c\phi - s\rho_m s\phi) - s\psi c\theta(c\rho_m c\phi + s\rho_m s\phi)) + s\delta s\psi s\theta)) + ((-c\rho_m s\beta s\alpha_{1n} + s\rho_m s\delta s\beta c\alpha_{1n})(c\delta(s\psi(c\rho_m c\phi - s\rho_m s\phi) + c\psi c\theta(c\rho_m s\phi + s\rho_m c\phi)) - s\delta c\psi)) + ((c\delta s\beta c\alpha_{1n})(c\delta(s\theta(c\rho_m s\phi + c\phi)) + s\delta c\theta)))$$

simplificando:

$$(\dot{\mathbf{a}}_k)^T(\mathbf{a}_{lp}) = \dot{\alpha}_{1n}(V_{1n}) \quad (4.3.14)$$

simplificando el término V_{1n} se tiene:

$$V_{1n} = s\beta(c\alpha_{1n}c\delta(c\theta s\delta + c\delta s\theta s(\rho_m + \phi)) + (-c\rho_m s\alpha_{1n}) + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m)(-c\psi s\delta s\theta) + c\delta(c\theta c\psi s(\rho_m + \phi) + c(\rho_m + \phi)s\psi)) + (c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m)(s\delta s\theta s\psi + c\delta(c(\rho_m + \phi)c\psi - c\theta s(\rho_m + \phi)s\psi))$$

Desarrollando el término $(\mathbf{a}_k)^T(\dot{\mathbf{a}}_{lp})$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}_k)^T(\dot{\mathbf{a}}_{lp}) &= \dot{\psi}((-c\delta s\psi c\rho_m c\phi + c\delta s\psi s\rho_m s\phi - c\delta c\psi c\theta c\rho_m s\phi + c\delta c\psi c\theta s\rho_m c\phi + \\
&\quad s\delta c\psi s\theta)(c\rho_m c\delta c\beta - s\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + c\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta) + \\
&\quad (c\delta c\psi c\rho_m c\phi - c\delta c\psi s\rho_m s\phi - c\delta s\psi c\theta c\rho_m s\phi - c\delta s\psi c\theta s\rho_m c\phi + s\delta s\psi s\theta) \\
&\quad (s\rho_m c\delta c\beta + c\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + s\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta)) + \\
&\quad \dot{\theta}((c\delta s\psi s\theta c\rho_m s\phi - c\delta s\psi s\theta s\rho_m c\phi + s\delta s\psi c\theta) \\
&\quad (c\rho_m c\delta c\beta - s\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + c\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta) + \\
&\quad (-c\delta c\psi s\theta c\rho_m s\phi - c\delta c\psi s\theta s\rho_m c\phi - s\delta c\psi c\theta) \\
&\quad (s\rho_m c\delta c\beta + c\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + s\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta) + \\
&\quad (c\delta c\theta c\rho_m s\phi + c\delta c\theta s\rho_m c\phi - s\delta s\theta)(-s\delta c\beta + c\delta s\alpha_{1n}s\beta)) + \\
&\quad \dot{\phi}((-c\delta c\psi c\rho_m s\phi - c\delta c\psi s\rho_m c\phi - c\delta s\psi c\theta c\rho_m c\phi - c\delta s\psi c\theta s\rho_m s\phi) \\
&\quad (c\rho_m c\delta c\beta - s\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + c\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta) + \\
&\quad (-c\delta s\psi c\rho_m s\phi - c\delta s\psi s\rho_m c\phi + c\delta c\psi c\theta c\rho_m c\phi - c\delta c\psi c\theta s\rho_m s\phi) \\
&\quad (s\rho_m c\delta c\beta + c\rho_m c\alpha_{1n}s\beta + s\rho_m s\delta s\alpha_{1n}s\beta) + \\
&\quad (c\delta s\theta c\rho_m c\phi - c\delta s\theta s\rho_m s\phi)(-s\delta c\beta + c\delta s\alpha_{1n}s\beta))
\end{aligned}$$

simplificando:

$$(\mathbf{a}_k)^T(\dot{\mathbf{a}}_{lp}) = \dot{\psi}(V_{2n}) + \dot{\theta}(V_{3n}) + \dot{\phi}(V_{4n}) \quad (4.3.15)$$

donde los términos V_{2n}, V_{3n}, V_{4n} son:

$$\begin{aligned} V_{2n} = & c\beta(-c\delta c\theta s\delta(s(\rho_m + \phi) + s(\rho_m - \psi))) + \\ & s\theta(s\delta^2 - c\delta^2 * s(\rho_m + \phi) * s(\rho_m - \psi))) + \\ & s\beta(c\theta(-(c(\rho_m - \psi)c\alpha_{1n}s\delta) + (c\delta^2 * s(\rho_m - \psi) - \\ & s\delta^2 * s(\rho_m - \psi))s\alpha_{1n})) + \\ & s\theta(-(c\delta * c(\rho_m - \psi)c\alpha_{1n} * s(\rho_m + \phi)) + \\ & c\delta s\delta(-1 - s(\rho_m + \phi) * s(\rho_m - \psi))s\alpha_{1n})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{3n} = & -(c\beta c\delta(c\delta * c(\rho_m - \psi) * s(\rho_m + \phi) + c(\rho_m + \phi) * \\ & (s\delta s\theta - c\delta c\theta * s(\rho_m - \psi)))) + \\ & c\delta^2 * c(\rho_m + \phi)s\beta s\theta s\alpha_{1n} + c\delta(c\alpha_{1n}(c\theta * c(\rho_m + \phi) * \\ & c(\rho_m - \psi) + s(\rho_m + \phi)) + s\delta(-(c(\rho_m - \psi) * s(\rho_m + \phi)) + \\ & c\theta * c(\rho_m + \phi) * s(\rho_m - \psi))s\alpha_{1n})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{4n} = & c\beta c\delta(c(\rho_m - \psi)(s\delta s\theta - c\delta c\theta * s(\rho_m + \phi)) + c\delta * c(\rho_m + \phi) * \\ & s(\rho_m - \psi)) + s\beta(s\delta s\theta(-(c\alpha_{1n} * s(\rho_m - \psi) + c(\rho_m - \psi)s\delta s\alpha_{1n})) + \\ & c\delta(c(\rho_m + \phi) * c(\rho_m - \psi)c\alpha_{1n} + c\theta c\alpha_{1n} * s(\rho_m + \phi) * s(\rho_m - \psi) + \\ & s\delta(-(c\theta * c(\rho_m - \psi) * s(\rho_m + \phi)) + c(\rho_m + \phi) * s(\rho_m - \psi))s\alpha_{1n})) \end{aligned}$$

Sustituyendo (4.3.14) y (4.3.15) en (4.3.13), se tiene:

$$(\mathbf{a}_k)^T(\mathbf{a}_{lp}) + (\mathbf{a}_k)^T(\mathbf{a}_{lp}) = \dot{c}\beta$$

$$\alpha_{1n} \dot{V}_{1n} + \dot{\psi}(V_{2n}) + \dot{\theta}(V_{3n}) + \dot{\phi}(V_{4n}) = 0$$

despejando el término de velocidad α_{1n} :

$$\alpha_{1n} = -\left(\frac{1}{V_{1n}}\right) \left(\dot{\psi}(V_{2n}) + \dot{\theta}(V_{3n}) + \dot{\phi}(V_{4n})\right) \quad (4.3.16)$$

obteniendo de esta forma la ecuación general de velocidad para los primeros eslabones de cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE.

Eslabones 2n:

Para los segundos eslabones de la cadena, se tiene la ecuación de posición (4.3.10):

$$(\mathbf{a}_l)^T(\mathbf{z}_p) = c\lambda$$

derivando con respecto al tiempo para obtener la ecuación de velocidad:

$$(\mathbf{a}_l)^T(\dot{\mathbf{z}}_p) + (\mathbf{a}_l)^T(\mathbf{z}_p) = \dot{c}\lambda \quad (4.3.17)$$

Desarrollando $\dot{\mathbf{a}}_l$, se tiene:

$$\mathbf{a}_l = \begin{bmatrix} \alpha_{2n}s\beta(-c\delta c\rho_m s\beta + c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}c\beta s\rho_m) + s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m) \\ + c\beta(c\beta c\delta c\rho_m + c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta s\delta - c\alpha_{1n}s\beta s\rho_m) \\ s\alpha_{2n}s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n} + c\rho_m s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + c\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m - c\delta s\beta s\rho_m + \\ c\beta s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + c\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta + c\beta c\delta s\rho_m + s\alpha_{1n}s\beta s\delta s\rho_m) \\ c\alpha_{1n}c\delta s\alpha_{2n}s\beta + c\beta(c\delta s\alpha_{1n}s\beta - c\beta s\delta) + c\alpha_{2n}s\beta(c\beta c\delta s\alpha_{1n} + s\beta s\delta) \end{bmatrix}$$

Considerando que los términos constantes son (ρ_m, β, δ) , derivando obtenemos $\dot{\mathbf{a}}_l$:

$$\dot{\mathbf{a}}_l = \begin{bmatrix} (c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m s\beta s\delta + c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\beta c\rho_m s\beta s\delta - c\rho_m s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\delta + c\beta s\alpha_{1n}s\beta s\rho_m + \\ c\alpha_{2n}c\beta s\alpha_{1n}s\beta s\rho_m + c\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\rho_m)\dot{\alpha}_{1n} + (-s\alpha_{2n}s\beta(-c\delta c\rho_m s\beta + c\beta c\rho_m - \\ c\alpha_{1n}c\beta s\rho_m) + c\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m))\dot{\alpha}_{2n} \\ (-c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta - c\alpha_{2n}c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta - c\alpha_{1n}c\rho_m s\alpha_{2n}s\beta + c\alpha_{1n}c\beta s\beta s\delta s\rho_m + \\ c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\beta s\beta s\delta s\rho_m - s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\delta s\rho_m)\dot{\alpha}_{1n} + (c\alpha_{2n}s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n} + \\ c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) - s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m - c\delta s\beta s\rho_m + c\beta s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m))\dot{\alpha}_{2n} \\ (c\alpha_{1n}c\beta c\delta s\beta + c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\beta c\delta s\beta - c\delta s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta)\dot{\alpha}_{1n} + \\ (c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\delta s\beta - s\alpha_{2n}s\beta(c\beta c\delta s\alpha_{1n} + s\beta s\delta))\dot{\alpha}_{2n} \end{bmatrix}$$

Desarrollando $\dot{\mathbf{z}}_p$, se tiene:

$$\mathbf{z}_p = \begin{bmatrix} s\theta s\psi \\ -c\psi s\theta \\ c\theta \end{bmatrix}$$

Considerando que los términos constantes son (ρ_m, β, δ) , derivando obtenemos $\dot{\mathbf{z}}_p$:

$$\dot{\mathbf{z}}_p = \begin{bmatrix} c\theta s\psi\dot{\theta} + c\psi s\theta\dot{\psi} \\ -c\theta c\psi\dot{\theta} + s\theta s\psi\dot{\psi} \\ -s\theta\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Desarrollando el término $(\mathbf{a}_l)^{\bullet T}(\mathbf{z}_p)$:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}_l)^{\bullet T}(\mathbf{z}_p) &= \alpha_{2n}^{\bullet}(c\theta(ca_{1n}c\alpha_{2n}c\delta s\beta - s\alpha_{2n}s\beta(c\beta c\delta s\alpha_{1n} + s\beta s\delta)) - \\
 &\quad c\psi s\theta(ca_{2n}s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) - \\
 &\quad s\alpha_{2n}s\beta(ca_{1n}c\beta c\rho_m - c\delta s\beta s\rho_m + c\beta s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m)) + \\
 &\quad s\theta(-s\alpha_{2n}s\beta(-c\delta c\rho_m s\beta + c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}c\beta s\rho_m) + \\
 &\quad c\alpha_{2n}s\beta(ca_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m))s\psi) + \\
 &\quad \alpha_{1n}^{\bullet}(c\theta(ca_{1n}c\beta c\delta s\beta + c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\beta c\delta s\beta - c\delta s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta) - \\
 &\quad c\psi s\theta(-c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta - c\alpha_{2n}c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta - c\alpha_{1n}c\rho_m s\alpha_{2n}s\beta + \\
 &\quad c\alpha_{1n}c\beta s\beta s\delta s\rho_m + c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\beta s\beta s\delta s\rho_m - s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\delta s\rho_m) + \\
 &\quad s\theta(ca_{1n}c\beta c\rho_m s\beta s\delta + c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\beta c\rho_m s\beta s\delta - c\rho_m s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\delta + \\
 &\quad c\beta s\alpha_{1n}s\beta s\rho_m + c\alpha_{2n}c\beta s\alpha_{1n}s\beta s\rho_m + c\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\rho_m)s\psi) \\
 (\mathbf{a}_l)^{\bullet T}(\mathbf{z}_p) &= \alpha_{2n}^{\bullet}V_{5n} + \alpha_{1n}^{\bullet}V_{6n} \tag{4.3.18}
 \end{aligned}$$

simplificando los términos V_{5n} y V_{6n} :

$$\begin{aligned}
 V_{5n} &= s\alpha_{2n}s\beta^2(-(c\theta s\delta) - c\delta s\theta * s(\rho_m - \psi)) + s\beta(ca_{1n}c\alpha_{2n}c\delta c\theta - \\
 &\quad c\alpha_{2n}c\psi s\theta(-(c\rho_m s\alpha_{1n}) + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + c\beta s\alpha_{2n}(-(c\delta c\theta s\alpha_{1n}) + \\
 &\quad s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi))) + \\
 &\quad c\alpha_{2n}s\theta(ca_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m)s\psi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{6n} &= c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi)s\alpha_{2n}s\beta s\theta + c\alpha_{1n}(-1 - c\alpha_{2n})c\beta c\psi s\beta s\delta s\theta s\rho_m + \\
 &\quad s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta(-(c\delta c\theta) + s\delta s\theta * s(\rho_m - \psi) + (1 + c\alpha_{2n})c\beta s\beta \\
 &\quad (c(\rho_m - \psi)s\alpha_{1n}s\theta + c\alpha_{1n}(c\delta c\theta + c\rho_m s\delta s\theta s\psi))
 \end{aligned}$$

Desarrollando el término $(\mathbf{a}_l)^T(\dot{\mathbf{z}}_p)$:

$$(\mathbf{a}_l)^T(\dot{\mathbf{z}}_p) = \dot{\psi}(c\psi s\theta(c\alpha_{2n}s\beta(-c\delta c\rho_m s\beta + c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}c\beta s\rho_m) + s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m) + c\beta(c\beta c\delta c\rho_m + c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta s\delta - c\alpha_{1n}s\beta s\rho_m)) + s\theta(s\alpha_{2n}s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + c\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m - c\delta s\beta s\rho_m + c\beta s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + c\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta + c\beta c\delta s\rho_m + s\alpha_{1n}s\beta s\delta s\rho_m))s\psi) +$$

$$\dot{\theta}((-c\alpha_{1n}c\delta s\alpha_{2n}s\beta - c\beta(c\delta s\alpha_{1n}s\beta - c\beta s\delta) - c\alpha_{2n}s\beta(c\beta c\delta s\alpha_{1n} + s\beta s\delta))s\theta - c\theta\dot{\psi}(s\alpha_{2n}s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + c\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m - c\delta s\beta s\rho_m + c\beta s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) + c\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta + c\beta c\delta s\rho_m + s\alpha_{1n}s\beta s\delta s\rho_m)) + c\theta(c\alpha_{2n}s\beta(-c\delta c\rho_m s\beta + c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}c\beta s\rho_m) + s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m) + c\beta(c\beta c\delta c\rho_m + c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta s\delta - c\alpha_{1n}s\beta s\rho_m))s\psi)$$

$$(\mathbf{a}_l)^T(\dot{\mathbf{z}}_p) = \dot{\psi}V_{7n} + \dot{\theta}V_{8n} \quad (4.3.19)$$

simplificando los términos V_{7n} y V_{8n} :

$$V_{7n} = s\theta(C\delta(c\beta^2 * c(\rho_m - \psi)) - c\alpha_{2n} * c(\rho_m - \psi)s\beta^2) + s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta * s(\rho_m - \psi) + c\beta s\alpha_{1n}s\beta((1 + c\alpha_{2n}c\rho_m c\psi s\delta + (1 + c\alpha_{2n})c\rho_m c\psi s\delta + (1 + c\alpha_{2n})s\delta s\rho_m s\psi) + c\alpha_{1n}(c(\rho_m - \psi)s\alpha_{2n}s\beta s\delta + c\beta s\beta((-1 - c\alpha_{2n})c\psi s\rho_m + (1 + c\alpha_{2n})c\rho_m s\psi)))$$

$$V_{8n} = (c\beta^2 * c\alpha_{2n}s\beta^2)(s\delta s\theta - c\delta c\theta * s(\rho_m - \psi) + c\beta s\beta(c\alpha_{1n}(-1 - c\alpha_{2n})c\theta * c(\rho_m - \psi) + (-1 - c\alpha_{2n})c\delta s\alpha_{1n}s\theta + (-1 - c\alpha_{2n})c\theta s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi)) - s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\delta s\theta + c\theta(-(c(\rho_m - \psi)s\alpha_{1n}) + c\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi))))$$

Sustituyendo (4.3.18) y (4.3.19) en (4.3.17), se tiene:

$$(\mathbf{a}_l)^T(\dot{\mathbf{z}}_p) + (\mathbf{a}_l)^T(\dot{\mathbf{z}}_p) = \dot{c}\lambda$$

$$\alpha_{2n}\dot{V}_{5n} + \alpha_{1n}\dot{V}_{6n} + \dot{\psi}V_{7n} + \dot{\theta}V_{8n} = 0$$

despejando el término de velocidad $\dot{\alpha}_{2n}$:

$$\dot{\alpha}_{2n} = -\left(\frac{1}{V_{5n}}\right) \left(\dot{\alpha}_{1n}V_{6n} + \dot{\psi}V_{7n} + \dot{\theta}V_{8n}\right) \quad (4.3.20)$$

obteniendo de esta forma la ecuación general de velocidad para los segundos eslabones de cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE.

4.3.3. Análisis de Aceleración

Posterior a la velocidad, se continúa con la determinación de las aceleraciones de todos los eslabones en el mecanismo. Es necesario conocer las aceleraciones para calcular las fuerzas dinámicas. Tales fuerzas contribuirán a los esfuerzos en los eslabones y otros componentes.

Problema Cinemático Inverso

El problema cinemático inverso para la aceleración se define de la siguiente manera:

Definición:

Dadas las variaciones en el tiempo de los ángulos de Euler ψ, θ, ϕ , referente a los ejes z, x, z , que definen las aceleraciones angulares de la PPE respecto al sistema inercial, determinar $\ddot{\alpha}_{11}, \ddot{\alpha}_{12}, \ddot{\alpha}_{13}$, de los eslabones 1 y $\ddot{\alpha}_{21}, \ddot{\alpha}_{22}, \ddot{\alpha}_{23}$ de los eslabones 2 que describen las aceleraciones angulares de cada una de las cadenas cinemáticas.

Eslabones 1n:

Se procede a derivar nuevamente la ecuación (4.3.13) de velocidad, para calcular la ecuación de aceleración que gobierne a los primeros eslabones de cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE.

$$(\dot{\mathbf{a}}_k)^T(\dot{\mathbf{a}}_{lp}) + (\mathbf{a}_k)^T(\dot{\mathbf{a}}_{lp}) = \dot{c}\beta \quad (4.3.13)$$

Por lo tanto al derivar con respecto al tiempo se obtiene la ecuación de aceleración:

$$\begin{aligned} (\ddot{\mathbf{a}}_k)^T(\dot{\mathbf{a}}_{lp}) + (\dot{\mathbf{a}}_k)^T(\ddot{\mathbf{a}}_{lp}) + (\mathbf{a}_k)^T(\ddot{\mathbf{a}}_{lp}) + (\mathbf{a}_k)^T(\ddot{\mathbf{a}}_{lp}) &= 0 \\ (\ddot{\mathbf{a}}_k)^T(\dot{\mathbf{a}}_{lp}) + 2(\dot{\mathbf{a}}_k)^T(\ddot{\mathbf{a}}_{lp}) + (\mathbf{a}_k)^T(\ddot{\mathbf{a}}_{lp}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Desarrollando $\ddot{\mathbf{a}}_k$ a partir de $\dot{\mathbf{a}}_k$, se tiene:

$$\dot{\mathbf{a}}_k = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{1n}(s\rho_m s\beta s\alpha_{1n} + c\rho_m s\delta s\beta c\alpha_{1n}) \\ \dot{\alpha}_{1n}(-c\rho_m s\beta s\alpha_{1n} + s\rho_m s\delta s\beta c\alpha_{1n}) \\ \dot{\alpha}_{1n}(c\delta s\beta c\alpha_{1n}) \end{bmatrix}$$

así:

$$\ddot{\mathbf{a}}_k = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{1n}(c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta s\delta + s\alpha_{1n}s\beta s\rho_m) + \dot{\alpha}_{1n}^2(-c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta s\delta + c\alpha_{1n}s\beta s\rho_m) \\ s\beta s\delta s\rho_m(-s\alpha_{1n}\dot{\alpha}_{1n}^2 + c\alpha_{1n}\ddot{\alpha}_{1n}) + c\rho_m s\beta(-c\alpha_{1n}\dot{\alpha}_{1n}^2 + s\alpha_{1n}\ddot{\alpha}_{1n}) \\ c\delta s\beta(-s\alpha_{1n}\dot{\alpha}_{1n}^2 + c\alpha_{1n}\ddot{\alpha}_{1n}) \end{bmatrix}$$

Desarrollando $\ddot{\mathbf{a}}_{ip}$, a partir de $\dot{\mathbf{a}}_{ip}$ se tiene:

$$\dot{\mathbf{a}}_{ip} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}(-c\delta s\psi c\rho_m c\phi + c\delta s\psi s\rho_m s\phi - c\delta c\psi c\theta c\rho_m s\phi - c\delta c\psi c\theta s\rho_m c\phi + s\delta c\psi s\theta) + \\ \dot{\theta}(c\delta s\psi s\theta c\rho_m s\phi + c\delta s\psi s\theta s\rho_m c\phi + s\delta s\psi c\theta) + \\ \dot{\phi}(-c\delta c\psi c\rho_m s\phi - c\delta c\psi s\rho_m c\phi - c\delta s\psi c\theta c\rho_m c\phi + c\delta s\psi c\theta s\rho_m s\phi) \\ \dot{\psi}(c\delta c\psi c\rho_m c\phi - c\delta c\psi s\rho_m s\phi - c\delta s\psi c\theta c\rho_m s\phi - c\delta s\psi c\theta s\rho_m c\phi + s\delta s\psi s\theta) + \\ \dot{\theta}(-c\delta c\psi s\theta c\rho_m s\phi - c\delta c\psi s\theta s\rho_m c\phi - s\delta c\psi c\theta) + \\ \dot{\phi}(-c\delta s\psi c\rho_m s\phi - c\delta s\psi s\rho_m c\phi + c\delta c\psi c\theta c\rho_m c\phi - c\delta c\psi c\theta s\rho_m s\phi) \\ \dot{\theta}(c\delta c\theta c\rho_m s\phi + c\delta c\theta s\rho_m c\phi - s\delta s\theta) + \dot{\phi}(c\delta s\theta c\rho_m c\phi - c\delta s\theta s\rho_m s\phi) \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{a}}_{ip} = \begin{bmatrix} (\ddot{\mathbf{a}}_{ip})_x \\ (\ddot{\mathbf{a}}_{ip})_y \\ (\ddot{\mathbf{a}}_{ip})_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(\ddot{\mathbf{a}}_p)_x &= \ddot{\psi}(c\psi s\delta s\theta - c\delta s\psi * c(\rho_m + \phi) - c\delta c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \ddot{\theta}(c\theta s\delta s\psi + c\delta s\theta s\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \ddot{\phi}(-c\delta c\theta s\psi * c(\rho_m + \phi) - c\delta c\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \dot{\psi}^2(-s\delta s\theta s\psi - c\delta c\psi * c(\rho_m + \phi) + c\delta c\theta s\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \dot{\theta}^2(-s\delta s\theta s\psi + c\delta c\theta s\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \dot{\phi}^2(-c\delta c\psi * c(\rho_m + \phi) + c\delta c\theta s\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \dot{\psi}(\dot{\phi}(-2c\delta c\theta c\psi * c(\rho_m + \phi) + 2c\delta s\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \dot{\theta}(2c\theta c\psi s\delta + 2c\delta c\psi s\theta * s(\rho_m + \phi))) + \\
&\quad \dot{\phi} \dot{\theta}(2c\delta s\theta s\psi * c(\rho_m + \phi))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\ddot{\mathbf{a}}_p)_y &= \ddot{\psi}(s\delta s\theta s\psi + c\delta c\psi * c(\rho_m + \phi) - c\delta c\theta s\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \ddot{\theta}(-c\theta c\psi s\delta - c\delta c\psi s\theta * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \ddot{\phi}(c\delta c\theta c\psi * c(\rho_m + \phi) - c\delta s\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \dot{\psi}^2(c\psi s\delta s\theta - c\delta s\psi * c(\rho_m + \phi) - c\delta c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \dot{\theta}^2(c\psi s\delta s\theta - c\delta c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \dot{\phi}^2(-c\delta s\psi * c(\rho_m + \phi) - c\delta c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \dot{\psi}(\dot{\phi}(-2c\delta c\theta s\psi * c(\rho_m + \phi) - 2c\delta c\psi * s(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \dot{\theta}(2c\theta s\delta s\psi + 2c\delta s\theta s\psi * s(\rho_m + \phi))) - \\
&\quad \dot{\phi} \dot{\theta}(2c\delta c\psi s\theta * c(\rho_m + \phi))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\ddot{\mathbf{a}}_p)_z &= \ddot{\theta}(-s\delta s\theta + c\delta c\theta * s(\rho_m + \phi)) + \ddot{\phi}(c\delta s\theta * c(\rho_m + \phi)) + \\
&\quad \dot{\theta}^2(-c\theta s\delta - c\delta s\theta * s(\rho_m + \phi)) - \dot{\phi}^2(c\delta s\theta * s(\rho_m + \phi)) - \\
&\quad \dot{\phi} \dot{\theta}(2c\delta c\theta * c(\rho_m + \phi))
\end{aligned}$$

Desarrollando el término $(\ddot{\mathbf{a}}_k)^T(\mathbf{a}_{lp})$:

$$\begin{aligned}
 (\ddot{\mathbf{a}}_k)^T(\mathbf{a}_{lp}) &= \ddot{\alpha}_{1n}(c\alpha_{1n}c\delta S\beta(c\theta s\delta + c\delta s\theta * s(\rho_m + \phi)) - c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta(-c\psi s\delta s\theta + \\
 &\quad c\delta(c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi) + c(\rho_m + \phi) * s\psi)) + c\alpha_{1n}s\beta s\delta s\rho_m(-c\psi s\delta s\theta + \\
 &\quad c\delta(c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi) + c(\rho_m + \phi) * s\psi)) + (c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta s\delta + s\alpha_{1n}s\beta s\rho_m) \\
 &\quad (s\delta s\theta s\psi + c\delta(c(\rho_m + \phi) * c\psi - c\theta * s(\rho_m + \phi) * s\psi))) + \\
 &\quad \dot{\alpha}_{1n}^2(-c\delta s\alpha_{1n}s\beta(c\theta s\delta + c\delta s\theta * s(\rho_m + \phi)) - c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta(-c\psi s\delta s\theta + \\
 &\quad c\delta(c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi) + c(\rho_m + \phi) * s\psi)) - s\alpha_{1n}s\beta s\delta s\rho_m(-c\psi s\delta s\theta + \\
 &\quad c\delta(c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi) + c(\rho_m + \phi) * s\psi)) + (-c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta s\delta + c\alpha_{1n}s\beta s\rho_m) \\
 &\quad (s\delta s\theta s\psi + c\delta(c(\rho_m + \phi) * c\psi - c\theta * s(\rho_m + \phi) * s\psi))) \\
 (\ddot{\mathbf{a}}_k)^T(\mathbf{a}_{lp}) &= \ddot{\alpha}_{1n}A_{1n} + \dot{\alpha}_{1n}^2 A_{2n} \tag{4.3.22}
 \end{aligned}$$

simplificando los términos A_{1n} y A_{2n} se tiene:

$$\begin{aligned}
 A_{1n} &= s\alpha_{1n}s\beta(c(\rho_m - \psi) * s\delta s\theta + c\delta((-c\theta c\psi * c(\rho_m - \psi) * s(\rho_m + \phi)) + \\
 &\quad c(\rho_m + \phi) * s(\rho_m - \psi))) + c\alpha_{1n}s\beta(c\delta^2 s\theta * s(\rho_m + \phi)) - \\
 &\quad s\delta^2 s\theta * s(\rho_m - \psi) + c\delta(c(\rho_m + \phi) * c(\rho_m - \psi) * s\delta + \\
 &\quad c\theta s\delta(1 + s(\rho_m + \phi) * s(\rho_m - \psi)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{2n} &= -(c\delta^2 s\alpha_{1n}s\beta s\theta * s(\rho_m + \phi)) + s\beta s\delta s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) * s\alpha_{1n}s\delta * \\
 &\quad s(\rho_m - \psi)) + c\delta s\beta(-c\theta s\alpha_{1n}s\delta) - c\alpha_{1n}c\rho_m(c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi) + \\
 &\quad c(\rho_m + \phi) * s\psi) + c\alpha_{1n}s\rho_m(c(\rho_m + \phi) * c\psi - c\theta * s(\rho_m + \phi) * s\psi) \\
 &\quad + s\alpha_{1n}(-(s\delta s\rho_m(c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi) + c(\rho_m + \phi) * s\psi)) - \\
 &\quad c\rho_m s\delta(c(\rho_m + \phi) * c\psi - c\theta * s(\rho_m + \phi) * s\psi))
 \end{aligned}$$

Desarrollando el término $(\mathbf{a}_k)^T(\ddot{\mathbf{a}}_{lp})$:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}_k)^T(\ddot{\mathbf{a}}_{lp}) &= A_{3n}\ddot{\psi} + A_{4n}\ddot{\phi} + A_{5n}\ddot{\theta} + A_{6n}\dot{\psi}^2 + A_{7n}\dot{\phi}^2 + \\
 &\quad A_{8n}\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}(A_{9n}\dot{\theta} + A_{10n}\dot{\phi}) + A_{11n}\dot{\phi}\dot{\theta} \tag{4.3.23}
 \end{aligned}$$

factorizando los términos desde A_{3n} hasta A_{11n} se tiene:

$$A_{3n} = (c\beta c\delta c\rho_m + s\beta(c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}s\rho_m))(c\psi(s\delta s\theta - c\delta c\theta * s(\rho_m + \phi)) - c\delta * c(\rho_m + \phi) * s\psi) + (c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta + (c\beta c\delta + s\alpha_{1n}s\beta s\delta)s\rho_m)(s\delta s\theta s\psi + c\delta(c(\rho_m + \phi) * c\psi - c\theta * s(\rho_m + \phi) * s\psi))$$

$$A_{4n} = c\delta^2 * c(\rho_m + \phi) * s\alpha_{1n}s\beta s\theta - c\beta c\delta * c(\rho_m + \phi) * s\delta s\theta + (-(c\beta c\delta^2 c\rho_m) + c\delta s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta) + c\alpha_{1n}s\rho_m)(c\psi * s(\rho_m + \phi) + c\theta * c(\rho_m + \phi) * s\psi) + (c\beta c\delta^2 s\rho_m + c\delta s\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m + s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m))(c\theta * c(\rho_m + \phi) * c\psi - s(\rho_m + \phi) * s\psi)$$

$$A_{5n} = c\alpha_{1n}(-(c\theta * c(\rho_m - \psi) * s\beta s\delta) - c\delta * c(\rho_m - \psi) * s\beta s\theta * s(\rho_m + \phi)) - c\delta s\alpha_{1n}s\beta s\delta s\theta(1 + s(\rho_m + \phi) * s(\rho_m - \psi)) + c\beta(s\delta^2 s\theta - c\delta^2 s\theta s(\rho_m + \phi) * s(\rho_m - \psi)) + c\theta(-(c\beta c\delta s\delta(s(\rho_m + \phi) + s(\rho_m - \psi))) + s\alpha_{1n}(c\delta^2 s\beta * s(\rho_m + \phi) - s\beta s\delta^2 * s(\rho_m - \psi)))$$

$$A_{6n} = (c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta + (c\beta c\delta + s\alpha_{1n}s\beta s\delta)s\rho_m)(c\psi(s\delta s\theta - c\delta c\theta * s(\rho_m + \phi)) - c\delta * c(\rho_m + \phi) * s\psi) + (c\beta c\delta c\rho_m + s\beta(c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}s\rho_m))(-s\delta s\theta s\psi) + c\delta(-(c(\rho_m + \phi) * c\psi + c\theta * s(\rho_m + \phi) * s\psi))$$

$$A_{7n} = c\delta(c\beta s\delta s\theta * s(\rho_m + \phi) + c\alpha_{1n}s\beta(-(c\theta * c(\rho_m - \psi) * s(\rho_m + \phi)) + c(\rho_m + \phi) * s(\rho_m - \psi)) - s\alpha_{1n}s\beta s\delta(s\rho_m(c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi) + c(\rho_m + \phi) * s\psi) + c\rho_m(c(\rho_m + \phi) * c\psi - c\theta * s(\rho_m + \phi) * s\psi))) + c\delta^2(-(s\alpha_{1n}s\beta s\theta * s(\rho_m + \phi)) + c\beta(-(s\rho_m(c\theta c\psi * s(\rho_m + \phi) + c(\rho_m + \phi) * s\psi)) + c\rho_m(-(c(\rho_m + \phi) * c\psi) + c\theta * s(\rho_m + \phi) * s\psi)))$$

$$A_{8n} = c\psi(c\alpha_{1n}c\rho_m s\beta + (c\beta s\delta + s\alpha_{1n}s\beta s\delta)s\rho_m)(s\delta s\theta - c\delta c\theta * s(\rho_m + \phi)) - (c\delta s\alpha_{1n}s\beta - c\beta s\delta)(c\theta s\delta + c\delta s\theta * s(\rho_m + \phi)) + (c\beta c\delta c\rho_m + s\beta(c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}s\rho_m))(-s\delta s\theta) + c\delta c\theta * s(\rho_m + \phi) s\psi$$

$$A_{9n} = 2(c\theta s\delta + c\delta s\theta * s(\rho_m + \phi))(c\beta c\delta * c(\rho_m - \psi) + s\beta(c\rho_m(c\psi s\alpha_{1n}s\delta + c\alpha_{1n}s\psi) + s\rho_m(-(c\alpha_{1n}c\psi) + s\alpha_{1n}s\delta s\psi)))$$

$$A_{10n} = -2c\delta(c\beta c\delta(c\theta * c(\rho_m + \phi) * c(\rho_m - \psi) + s(\rho_m + \phi) * s(\rho_m - \psi)) + s\beta(s(\rho_m + \phi)(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi)) + c\theta * c(\rho_m + \phi)(c\rho_m c\psi s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}c\psi s\rho_m + c\alpha_{1n}c\rho_m s\psi + s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m s\psi)))$$

$$A_{11n} = -2c\delta * c(\rho_m + \phi)(c\beta c\theta s\delta + s\beta s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi)) + c\delta(-(c\theta s\alpha_{1n}s\beta + c\beta s\theta * s(\rho_m - \psi))))$$

Desarrollando el término $2 (\mathbf{a}_k)^T (\mathbf{a}_{lp})$:

$$2 (\mathbf{a}_k)^T (\mathbf{a}_{lp}) = \alpha_{1n} (A_{12n} \dot{\psi} + A_{13n} \dot{\theta} + A_{14n} \dot{\phi}) \quad (4.3.24)$$

factorizando los términos desde A_{12n} hasta A_{14n} se tienen:

$$A_{12n} = 2s\beta((c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m)(c\psi s\delta s\theta - c\delta c\theta s(\rho_m + \phi)) - c\delta c(\rho_m + \phi) * s\psi) + (-(c\rho_m s\alpha_{1n}) + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m)(s\delta s\theta s\psi + c\delta(c(\rho_m + \phi) * c\psi - c\theta * s(\rho_m + \phi) * s\psi)))$$

$$A_{13n} = s\beta(2c\alpha_{1n}c\delta(-(s\delta s\theta) + c\delta c\theta * s(\rho_m + \phi)) + 2(-(c\rho_m s\alpha_{1n}) + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m)(-c\theta c\psi s\delta) - c\delta c\psi s\theta * s(\rho_m + \phi)) + 2(c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m)(c\theta s\delta s\psi + c\delta s\theta * s(\rho_m + \phi) * s\psi))$$

$$A_{14n} = 2c\delta s\beta(c\alpha_{1n}c\delta * c(\rho_m + \phi) * s\theta - (c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m)(c\psi * s(\rho_m + \phi) + c\theta * c(\rho_m + \phi) * s\psi) + (-(c\rho_m s\alpha_{1n}) + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m)(c\theta * c(\rho_m + \phi) * c\psi - s(\rho_m + \phi) * s\psi))$$

finalmente sustituyendo las ecuaciones (4.3.22), (4.3.23) y (4.3.24) en (4.3.21) se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_k)^T (\mathbf{a}_{lp}) + 2 (\mathbf{a}_k)^T (\mathbf{a}_{lp}) + (\mathbf{a}_k)^T (\mathbf{a}_{lp}) &= 0 \\ (A_{1n} \ddot{\alpha}_{1n} + A_{2n} \dot{\alpha}_{1n}^2 + \alpha_{1n} (A_{12n} \dot{\psi} + A_{13n} \dot{\theta} + A_{14n} \dot{\phi}) + A_{3n} \ddot{\psi} + A_{4n} \ddot{\phi} + \\ A_{5n} \ddot{\theta} + A_{6n} \dot{\psi}^2 + A_{7n} \dot{\phi}^2 + A_{8n} \dot{\theta}^2 + \psi (A_{9n} \dot{\theta} + A_{10n} \dot{\phi}) + A_{11n} \dot{\phi} \dot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

despejando el término de aceleración:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_{1n} &= -\left(\frac{1}{A_{1n}}\right) (A_{2n} \dot{\alpha}_{1n}^2 + A_{3n} \ddot{\psi} + A_{4n} \ddot{\phi} + A_{5n} \ddot{\theta} + A_{6n} \dot{\psi}^2 + A_{7n} \dot{\phi}^2 + \\ A_{8n} \dot{\theta}^2 + \psi (A_{9n} \dot{\theta} + A_{10n} \dot{\phi}) + A_{11n} \dot{\phi} \dot{\theta} + \alpha_{1n} (A_{12n} \dot{\psi} + A_{13n} \dot{\theta} + A_{14n} \dot{\phi})) & \quad (4.3.25) \end{aligned}$$

Se obtiene de esta forma la ecuación que permite determinar la aceleración para los primeros eslabones de cada una de las cadenas cinemáticas que forman la PPE.

Eslabones 2n:

Se procede a derivar nuevamente la ecuación de velocidad (4.3.17), para calcular la ecuación de aceleración que gobierne a los segundos eslabones de cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE.

$$(\mathbf{a}_l)^T(\mathbf{z}_p) + (\mathbf{a}_l)^T(\dot{\mathbf{z}}_p) = \dot{c}\lambda \quad (4.3.17)$$

Derivando con respecto al tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} (\ddot{\mathbf{a}}_l)^T(\mathbf{z}_p) + (\dot{\mathbf{a}}_l)^T(\dot{\mathbf{z}}_p) + (\mathbf{a}_l)^T(\ddot{\mathbf{z}}_p) + (\mathbf{a}_l)^T(\ddot{\mathbf{z}}_p) &= 0 \\ (\ddot{\mathbf{a}}_l)^T(\mathbf{z}_p) + 2(\dot{\mathbf{a}}_l)^T(\dot{\mathbf{z}}_p) + (\mathbf{a}_l)^T(\ddot{\mathbf{z}}_p) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Desarrollando $\ddot{\mathbf{a}}_l$, a partir de $\dot{\mathbf{a}}_l$ se tiene:

$$\dot{\mathbf{a}}_l = \begin{bmatrix} (\alpha_{1n}c\beta c\rho_m s\beta s\delta + \alpha_{1n}\alpha_{2n}c\beta c\rho_m s\beta s\delta - c\rho_m s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\delta + c\beta s\alpha_{1n}s\beta s\rho_m + \\ \alpha_{2n}c\beta s\alpha_{1n}s\beta s\rho_m + \alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\rho_m)\dot{\alpha}_{1n} + (-s\alpha_{2n}s\beta(-c\delta c\rho_m s\beta + c\beta c\rho_m - \\ c\alpha_{1n}c\beta s\rho_m) + \alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m))\dot{\alpha}_{2n} \\ (-c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta - \alpha_{2n}c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta - c\alpha_{1n}c\rho_m s\alpha_{2n}s\beta + \alpha_{1n}c\beta s\beta s\delta s\rho_m + \\ \alpha_{1n}\alpha_{2n}c\beta s\beta s\delta s\rho_m - s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\delta s\rho_m)\dot{\alpha}_{1n} + (\alpha_{2n}s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n} + \\ c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) - s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m - c\delta s\beta s\rho_m + c\beta s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m))\dot{\alpha}_{2n} \\ (\alpha_{1n}c\beta c\delta s\beta + \alpha_{1n}\alpha_{2n}c\beta c\delta s\beta - c\delta s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta)\dot{\alpha}_{1n} + \\ (\alpha_{1n}\alpha_{2n}c\delta s\beta - s\alpha_{2n}s\beta(c\beta c\delta s\alpha_{1n} + s\beta s\delta))\dot{\alpha}_{2n} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{a}}_l = \begin{bmatrix} (\ddot{\mathbf{a}}_l)_x \\ (\ddot{\mathbf{a}}_l)_y \\ (\ddot{\mathbf{a}}_l)_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{a}}_l = & \left[\begin{aligned}
& -c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta s\delta\dot{\alpha}_{1n}^2 - c\alpha_{2n}c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta s\delta\dot{\alpha}_{1n}^2 - c\alpha_{1n}c\rho_m s\alpha_{2n}s\beta s\delta\dot{\alpha}_{1n}^2 + \\
& c\alpha_{1n}c\beta s\beta s\rho_m \dot{\alpha}_{1n}^2 + c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\beta s\beta s\rho_m \dot{\alpha}_{1n}^2 - s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\rho_m \dot{\alpha}_{1n}^2 + \\
& 2c\alpha_{2n}s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta\dot{\alpha}_{1n} + c\alpha_{1n}s\rho_m \dot{\alpha}_{1n})\dot{\alpha}_{2n} - 2s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m s\delta\dot{\alpha}_{1n} + \\
& c\beta s\alpha_{1n}s\rho_m \dot{\alpha}_{1n})\dot{\alpha}_{2n} - c\alpha_{2n}s\beta(-c\delta c\rho_m s\beta + c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}c\beta s\rho_m)\dot{\alpha}_{2n}^2 - \\
& s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m)\dot{\alpha}_{2n}^2 + (c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m s\beta s\delta + \\
& c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\beta c\rho_m s\beta s\delta - c\rho_m s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\delta + c\beta s\alpha_{1n}s\beta s\rho_m + c\alpha_{2n}c\beta s\alpha_{1n}s\beta s\rho_m + \\
& c\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\rho_m)\ddot{\alpha}_{1n} + (-s\alpha_{2n}s\beta(-c\delta c\rho_m s\beta + c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\delta - c\alpha_{1n}c\beta s\rho_m) + \\
& c\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\rho_m s\delta + s\alpha_{1n}s\rho_m))\ddot{\alpha}_{2n} \\
& -c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m s\beta\dot{\alpha}_{1n}^2 - c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\beta c\rho_m s\beta\dot{\alpha}_{1n}^2 + c\rho_m s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta\dot{\alpha}_{1n}^2 - \\
& c\beta s\alpha_{1n}s\beta s\delta s\rho_m \dot{\alpha}_{1n}^2 - c\alpha_{2n}c\beta s\alpha_{1n}s\beta s\delta s\rho_m \dot{\alpha}_{1n}^2 - c\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta s\delta s\rho_m \dot{\alpha}_{1n}^2 - \\
& 2s\alpha_{2n}s\beta(-c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}\dot{\alpha}_{1n} + c\alpha_{1n}c\beta s\delta s\rho_m \dot{\alpha}_{1n})\dot{\alpha}_{2n} + 2c\alpha_{2n}s\beta(-c\alpha_{1n}c\rho_m \dot{\alpha}_{1n} - \\
& s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m \dot{\alpha}_{1n} - s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m \dot{\alpha}_{1n})\dot{\alpha}_{2n} - s\alpha_{2n}s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m)\dot{\alpha}_{2n}^2 - \\
& c\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m - c\delta s\beta s\rho_m + c\beta s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m)\dot{\alpha}_{2n}^2 + (-c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta - \\
& c\alpha_{2n}c\beta c\rho_m s\alpha_{1n}s\beta - c\alpha_{1n}c\rho_m s\alpha_{2n}s\beta + c\alpha_{1n}c\beta s\beta s\delta + c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\beta s\beta s\delta s\rho_m)\ddot{\alpha}_{1n} + \\
& (c\alpha_{2n}s\beta(-c\rho_m s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\rho_m) - s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\beta c\rho_m - c\delta s\beta s\rho_m + \\
& c\beta s\alpha_{1n}s\delta s\rho_m))\ddot{\alpha}_{2n} \\
& -c\beta c\delta s\alpha_{1n}s\beta\dot{\alpha}_{1n}^2 - c\alpha_{2n}c\beta c\delta s\alpha_{1n}s\beta\dot{\alpha}_{1n}^2 - c\alpha_{1n}c\delta s\alpha_{2n}s\beta\dot{\alpha}_{1n}^2 - \\
& 2c\alpha_{2n}c\delta s\alpha_{1n}s\beta\dot{\alpha}_{1n}\dot{\alpha}_{2n} - 2c\alpha_{1n}c\beta c\delta s\alpha_{2n}s\beta\dot{\alpha}_{1n}\dot{\alpha}_{2n} - \\
& c\alpha_{1n}c\delta s\alpha_{2n}s\beta\dot{\alpha}_{2n}^2 - c\alpha_{2n}s\beta(c\beta c\delta s\alpha_{1n} + s\beta s\delta)\dot{\alpha}_{2n}^2 + \\
& (c\alpha_{1n}c\beta c\delta s\beta + c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\beta c\delta s\beta - c\delta s\alpha_{1n}s\alpha_{2n}s\beta)\ddot{\alpha}_{1n} + \\
& (c\alpha_{1n}c\alpha_{2n}c\delta s\beta - s\alpha_{2n}s\beta(c\beta c\delta s\alpha_{1n} + s\beta s\delta))\ddot{\alpha}_{2n}
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Desarrollando $\ddot{\mathbf{z}}_p$, a partir de $\dot{\mathbf{z}}_p$ se tiene:

$$\dot{\mathbf{z}}_p = \begin{bmatrix} c\theta s\psi\dot{\theta} + c\psi s\theta\dot{\psi} \\ -c\theta c\psi\dot{\theta} + s\theta s\psi\dot{\psi} \\ -s\theta\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{z}}_p = \begin{bmatrix} (\ddot{\mathbf{z}}_p)_x \\ (\ddot{\mathbf{z}}_p)_y \\ (\ddot{\mathbf{z}}_p)_z \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{z}}_p = \begin{bmatrix} -s\theta s\dot{\psi}\ddot{\theta} + 2c\theta c\dot{\psi}\ddot{\psi} - s\theta s\dot{\psi}\dot{\psi} + c\theta s\dot{\psi}\ddot{\theta} + c\dot{\psi}s\theta\ddot{\psi} \\ c\dot{\psi}s\theta\ddot{\theta} + 2c\theta s\dot{\psi}\ddot{\psi} + c\dot{\psi}s\theta\dot{\psi} - c\theta c\dot{\psi}\ddot{\theta} + s\theta s\dot{\psi}\ddot{\psi} \\ -c\theta\ddot{\theta} - s\theta\ddot{\psi} \end{bmatrix}$$

Desarrollando el término $(\ddot{\mathbf{a}}_l)^T(\mathbf{z}_p)$:

$$(\ddot{\mathbf{a}}_l)^T(\mathbf{z}_p) = A_{15n}\ddot{\alpha}_{1n} + A_{16n}\ddot{\alpha}_{2n} + A_{17n}\dot{\alpha}_{1n}^2 + A_{18n}\dot{\alpha}_{2n}^2 + A_{19n}(\dot{\alpha}_{1n}\dot{\alpha}_{2n}) \quad (4.3.27)$$

$$A_{15n} = -(s\alpha_{2n}s\beta(c\delta c\theta s\alpha_{1n} - s\theta(c\alpha_{1n}c(\rho_m - \psi) + s\delta * s(\rho_m - \psi)))) + (1 + c\alpha_{2n})c\beta s\beta(c(\rho_m - \psi) * s\alpha_{1n}s\theta + c\alpha_{1n}(c\delta c\theta - s\delta s\theta * s(\rho_m - \psi)))$$

$$A_{16n} = -(s\alpha_{2n}s\beta^2(c\theta s\delta + c\delta s\theta * s(\rho_m - \psi))) - c\beta s\alpha_{2n}s\beta(c\delta c\theta s\alpha_{1n} - s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi))) + c\alpha_{2n}s\beta(c(\rho_m - \psi) * s\alpha_{1n}s\theta + c\alpha_{1n}(c\delta c\theta - s\delta s\theta * s(\rho_m - \psi)))$$

$$A_{17n} = (-1 - c\alpha_{2n})c\beta s\beta(c\delta c\theta s\alpha_{1n} - s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi))) - s\alpha_{2n}s\beta(c(\rho_m - \psi) * s\alpha_{1n}s\theta + c\alpha_{1n}(c\delta c\theta - s\delta s\theta * s(\rho_m - \psi)))$$

$$A_{18n} = -(c\alpha_{2n}s\beta^2(c\theta s\delta + c\delta s\theta * s(\rho_m - \psi))) - c\alpha_{2n}c\beta s\beta(c\delta c\theta s\alpha_{1n} - s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi))) - s\alpha_{2n}s\beta(c(\rho_m - \psi) * s\alpha_{1n}s\theta + c\alpha_{1n}(c\delta c\theta - s\delta s\theta * s(\rho_m - \psi)))$$

$$A_{19n} = -2c\alpha_{2n}s\beta(c\delta c\theta s\alpha_{1n} - s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi))) - 2c\beta s\alpha_{2n}s\beta(c(\rho_m - \psi) * s\alpha_{1n}s\theta + c\alpha_{1n}(c\delta c\theta - s\delta s\theta * s(\rho_m - \psi)))$$

Desarrollando el término 2 $(\dot{\mathbf{a}}_l)^T(\dot{\mathbf{z}}_p)$:

$$2(\dot{\mathbf{a}}_l)^T(\dot{\mathbf{z}}_p) = \dot{\alpha}_{1n}(A_{20n}\dot{\theta} + A_{21n}\dot{\psi}) + \dot{\alpha}_{2n}(A_{22n}\dot{\theta} + A_{23n}\dot{\psi}) \quad (4.3.28)$$

$$A_{20n} = s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\theta * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}(c\delta s\theta + c\theta s\delta * s(\rho_m - \psi))) + (1 + c\alpha_{2n})c\beta s\beta(-(c\alpha_{1n}c\delta s\theta) + c\theta(s\rho_m(-(c\alpha_{1n}c\psi s\delta) + s\alpha_{1n}s\psi) + c\rho_m(c\psi s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\psi)))$$

$$A_{21n} = (1 + c\alpha_{2n})c\beta s\beta s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi)s\delta + s\alpha_{1n} * s(\rho_m - \psi)) - s\alpha_{2n}s\beta s\theta(c\rho_m(c\psi s\alpha_{1n}s\delta + c\alpha_{1n}c\psi) + s\rho_m(-(c\alpha_{1n}c\psi) + s\alpha_{1n}s\delta s\psi))$$

$$A_{22n} = s\alpha_{2n}s\beta^2(s\delta s\theta - c\delta c\theta - s(\rho_m - \psi)) + c\beta s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n}c\theta * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}(c\delta s\theta + c\theta s\delta * s(\rho_m - \psi))) + c\alpha_{2n}s\beta(-(c\alpha_{1n}c\delta s\theta + c\theta(s\rho_m(-(c\alpha_{1n}c\psi s\delta) + s\alpha_{1n}s\psi) + c\rho_m(c\psi s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\psi)))$$

$$A_{23n} = c\delta * c(\rho_m - \psi)s\alpha_{2n}s\beta^2s\theta + c\alpha_{2n}s\beta s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi)s\delta + s\alpha_{1n} * s(\rho_m - \psi)) - c\beta s\alpha_{2n}s\beta s\theta(c\rho_m(c\psi s\alpha_{1n}s\delta + c\alpha_{1n}s\psi) + s\rho_m(-(c\alpha_{1n}c\psi) + s\alpha_{1n}s\delta s\psi))$$

Desarrollando el término $(\mathbf{a}_l)^T(\mathbf{z}_p)^{\ddot{\bullet}}$:

$$(\mathbf{a}_l)^T(\mathbf{z}_p)^{\ddot{\bullet}} = A_{24n}\ddot{\psi} + A_{25n}\ddot{\theta} + A_{26n}\dot{\theta}^2 + A_{27n}\dot{\psi}^2 + A_{28n}\dot{\psi}\dot{\theta} \quad (4.3.29)$$

$$A_{24n} = c\beta^2c\delta * c(\rho_m - \psi) * s\theta - c\alpha_{2n}c\delta * c(\rho_m - \psi) * s\beta^2s\theta + s\alpha_{2n}s\beta s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) * s\delta + s\alpha_{1n} * s(\rho_m - \psi)) + (1 + c\alpha_{2n})c\beta s\beta s\theta(c\rho_m(c\psi s\alpha_{1n}s\delta + c\alpha_{1n}s\psi) + s\rho_m(-(c\alpha_{1n}c\psi) + s\alpha_{1n}s\delta s\psi))$$

$$A_{25n} = c\beta^2(s\delta s\theta - c\delta c\theta * s(\rho_m - \psi)) + c\alpha_{2n}s\beta^2(-(s\delta s\theta) + c\delta c\theta * s(\rho_m - \psi)) + (-1 - c\alpha_{2n})c\beta s\beta(c\alpha_{1n}c\theta * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}(c\delta s\theta + c\theta s\delta * s(\rho_m - \psi))) + s\alpha_{2n}s\beta(-(c\alpha_{1n}c\delta s\theta) + c\theta(s\rho_m(-(c\alpha_{1n}c\psi s\delta) + s\alpha_{1n}s\psi) + c\rho_m(c\psi s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\psi)))$$

$$A_{26n} = c\beta^2(c\theta s\delta + c\delta s\theta * s(\rho_m - \psi)) - c\alpha_{2n}s\beta^2(c\theta s\delta + c\delta s\theta * s(\rho_m - \psi)) + (-1 - c\alpha_{2n})c\beta s\beta(c\delta c\theta s\alpha_{1n} - s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi))) - s\alpha_{2n}s\beta(c(\rho_m - \psi) * s\alpha_{1n}s\theta + c\alpha_{1n}(c\delta c\theta - s\delta s\theta * s(\rho_m - \psi)))$$

$$A_{27n} = c\beta^2c\delta s\theta * s(\rho_m - \psi) - c\alpha_{2n}c\delta s\beta^2s\theta * s(\rho_m - \psi) + (1 + c\alpha_{2n})c\beta s\beta s\theta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) + s\alpha_{1n}s\delta * s(\rho_m - \psi)) - s\alpha_{2n}s\beta s\theta(s\rho_m(-(c\alpha_{1n}c\psi s\delta) + s\alpha_{1n}s\psi) + c\rho_m(c\psi s\alpha_{1n} + c\alpha_{1n}s\delta s\psi))$$

$$A_{28n} = 2c\beta^2c\delta s\theta * c(\rho_m - \psi) - 2c\alpha_{2n}c\delta c\theta * c(\rho_m - \psi) * s\beta^2 + 2c\theta s\alpha_{2n}s\beta(c\alpha_{1n} * c(\rho_m - \psi) * s\delta + s\alpha_{1n} * s(\rho_m - \psi)) + 2(1 + c\alpha_{2n})c\beta c\theta s\beta(c\rho_m(c\psi s\alpha_{1n}s\delta + c\alpha_{1n}s\psi) + s\rho_m(-(c\alpha_{1n}c\psi) + s\alpha_{1n}s\delta s\psi))$$

finalmente sustituyendo las ecuaciones (4.3.27), (4.3.28) y (4.3.29) en (4.3.26), se tiene:

$$(\mathbf{a}_l)^T(\mathbf{z}_p)^{\ddot{\bullet}} + 2(\mathbf{a}_l)^T(\mathbf{z}_p)^{\dot{\bullet}} + (\mathbf{a}_l)^T(\mathbf{z}_p)^{\bullet\bullet} = 0$$

$$\begin{aligned}
& (A_{15n} \ddot{\alpha}_{1n} + A_{16n} \ddot{\alpha}_{2n} + A_{17n} \dot{\alpha}_{1n}^2 + A_{18n} \dot{\alpha}_{2n}^2 + A_{19n} (\dot{\alpha}_{1n} \dot{\alpha}_{2n})) + \\
& \dot{\alpha}_{1n} (A_{20n} \dot{\theta} + A_{21n} \dot{\psi}) + \dot{\alpha}_{2n} (A_{22n} \dot{\theta} + A_{23n} \dot{\psi}) + \\
& A_{24n} \ddot{\psi} + A_{25n} \ddot{\theta} + A_{26n} \dot{\theta}^2 + A_{27n} \dot{\psi}^2 + A_{28n} \dot{\theta} \dot{\psi}) = 0
\end{aligned}$$

despejando el término de aceleración $\ddot{\alpha}_{2n}$:

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha}_{2n} = & -\left(\frac{1}{A_{16n}}\right) (A_{15n} \ddot{\alpha}_{1n} + A_{17n} \dot{\alpha}_{1n}^2 + A_{18n} \dot{\alpha}_{2n}^2 + A_{19n} (\dot{\alpha}_{1n} \dot{\alpha}_{2n})) + \\
& \dot{\alpha}_{1n} (A_{20n} \dot{\theta} + A_{21n} \dot{\psi}) + \dot{\alpha}_{2n} (A_{22n} \dot{\theta} + A_{23n} \dot{\psi}) + \\
& A_{24n} \ddot{\psi} + A_{25n} \ddot{\theta} + A_{26n} \dot{\theta}^2 + A_{27n} \dot{\psi}^2 + A_{28n} \dot{\theta} \dot{\psi}) \quad (4.3.30)
\end{aligned}$$

se obtiene de esta forma la ecuación que permite determinar la aceleración para los segundos eslabones de cada una de las cadenas cinemáticas que forman la PPE.

4.4. Trayectoria de la PPE

En esta sección se desarrolla un polinomio de quinto orden para especificar la trayectoria que seguirá la plataforma móvil. De esta forma es posible determinar la posición, velocidad y aceleración de la PPE.

Considerando que los ángulos de Euler están en función del tiempo mediante una función polinomial de quinto orden [10], de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 \\
\dot{\varphi}(t) &= c_1 + 2 c_2 t + 3 c_3 t^2 + 4 c_4 t^3 + 5 c_5 t^4 \\
\ddot{\varphi}(t) &= 2 c_2 + 6 c_3 t + 12 c_4 t^2 + 20 c_5 t^3 \quad (4.4.1)
\end{aligned}$$

con las condiciones iniciales y finales siguientes:

$$\begin{array}{llll}
t_i = 0 & \varphi_i = 0^\circ & \dot{\varphi}_i = 0 & \ddot{\varphi}_i = 0 \\
t_f = 10 \text{ seg} & \varphi_f = 360^\circ & \dot{\varphi}_f = 0 & \ddot{\varphi}_f = 0
\end{array}$$

sustituyendo en las ecuaciones (4.4.1), se tienen:

$$\begin{aligned} 0^\circ &= c_0 \\ 360^\circ &= c_0 + 10 c_1 + 100 c_2 + 1000 c_3 + 10000 c_4 + 100000 c_5 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= c_1 + 20 c_2 + 300 c_3 + 4000 c_4 + 50000 c_5 \\ 0 &= 2 c_2 \\ 0 &= 2 c_2 + 60 c_3 + 1200 c_4 + 20000 c_5 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_1 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= 3,6 \\ c_4 &= -0,54 \\ c_5 &= 0,0216 \end{aligned}$$

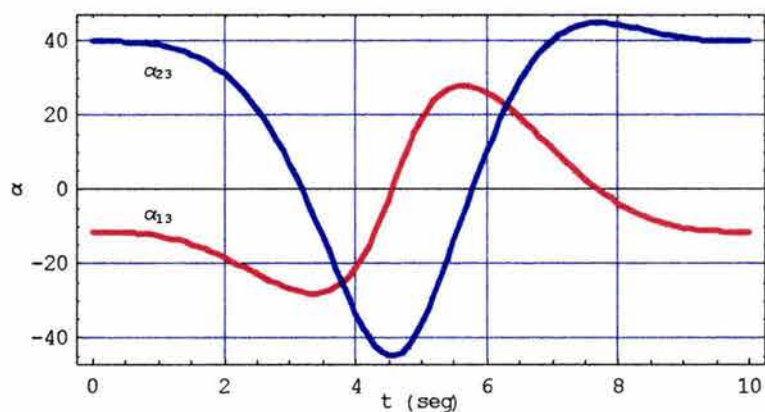
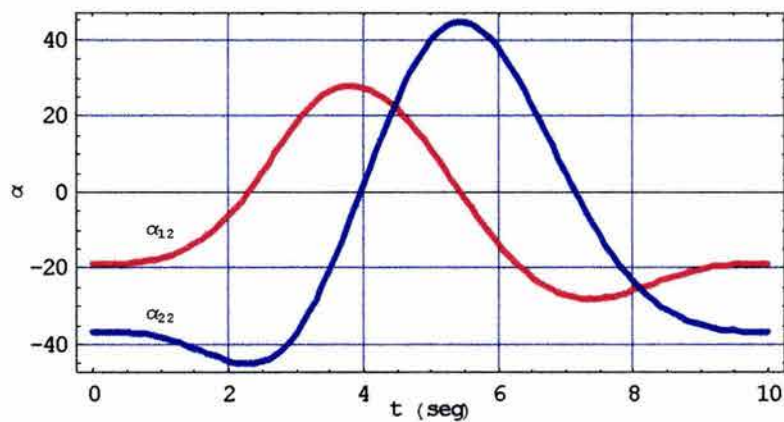
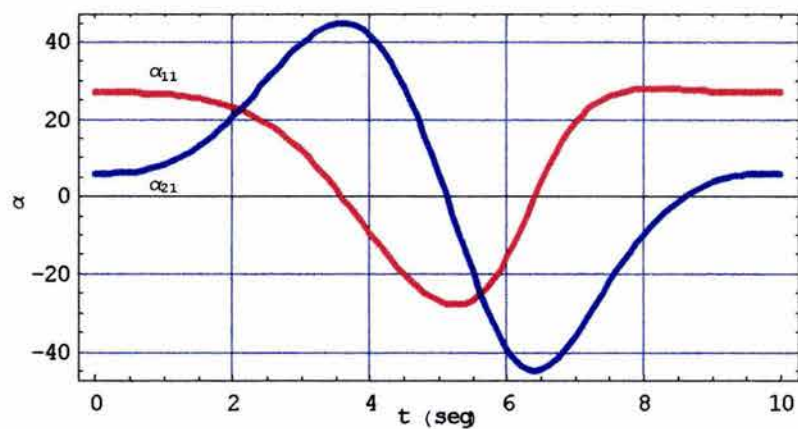
resulta en las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 3,6 t^3 - 0,54 t^4 + 0,0216 t^5 && (\text{grados}) \\ \dot{\varphi}(t) &= 10,8 t^2 - 2,16 t^3 + 0,108 t^4 && (\text{grados/s}) \\ \ddot{\varphi}(t) &= 21,6 t - 6,48 t^2 + 0,432 t^3 && (\text{grados/s}^2) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

La asignación de los ángulos de Euler fueron de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \psi = \varphi(t) & \dot{\psi} = \dot{\varphi}(t) & \ddot{\psi} = \ddot{\varphi}(t) \\ \theta = 45^\circ & \dot{\theta} = 0 & \ddot{\theta} = 0 \\ \phi = -\varphi(t) & \dot{\phi} = -\dot{\varphi}(t) & \ddot{\phi} = -\ddot{\varphi}(t) \end{array}$$

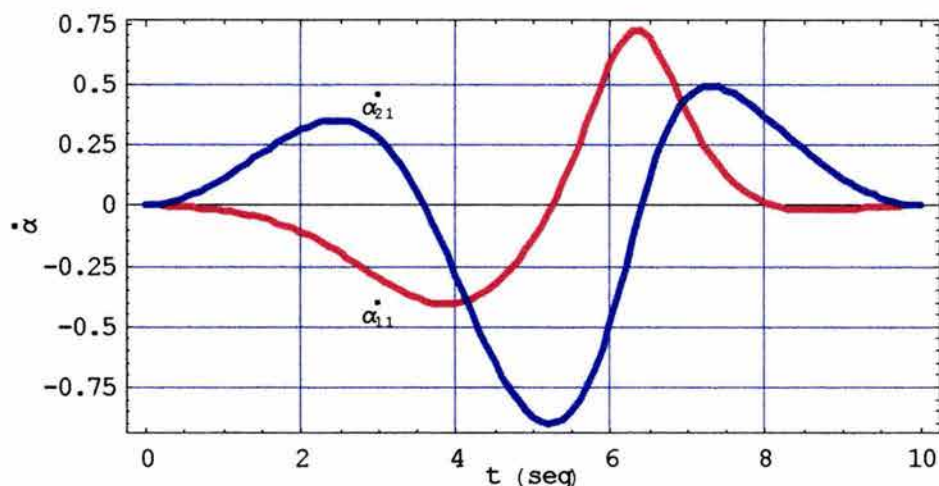
A continuación se muestran las gráficas de posición (α) con respecto al tiempo (t), para cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE, los resultados fueron obtenidos en el software Mathematica.



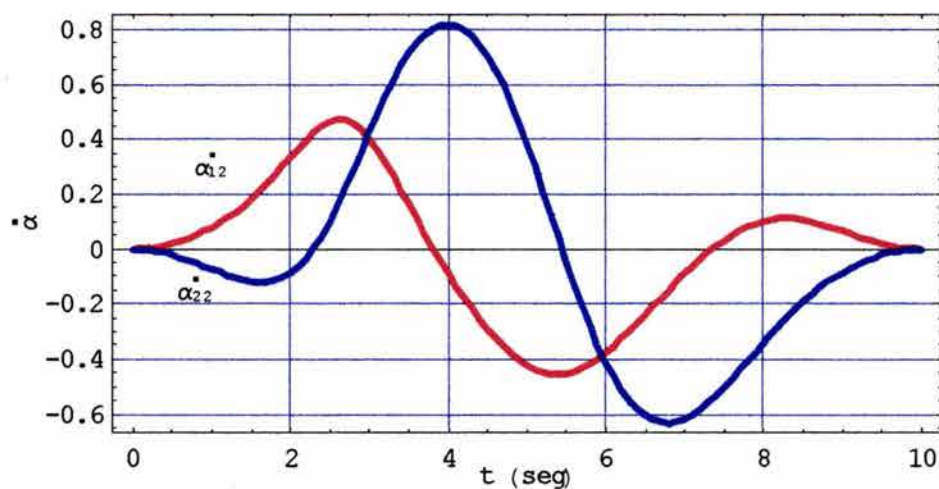
Empleando además las ecuaciones (4.4.2) y la variación de los ángulos de Euler respecto al tiempo, dados por:

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi(t) & \dot{\psi} &= \dot{\varphi}(t) \\ \theta &= 45^\circ & \dot{\theta} &= 0 \\ \phi &= -\varphi(t) & \dot{\phi} &= -\dot{\varphi}(t) \end{aligned}$$

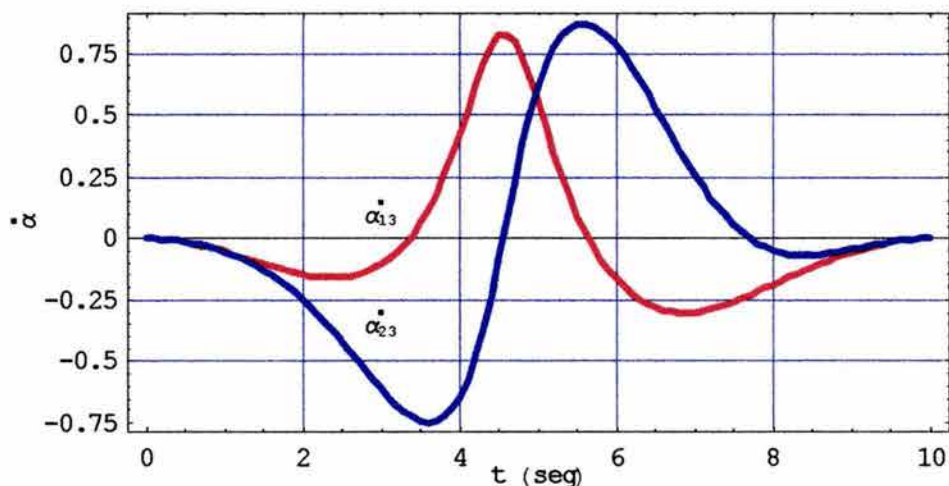
A continuación se muestran las gráficas de velocidad ($\dot{\alpha}$) con respecto al tiempo (t), para cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE, los resultados fueron obtenidos en el software Mathematica.



Gráfica 4.4.2a. Velocidad de la cadena 1.



Gráfica 4.4.2b. Velocidad de la cadena 2.

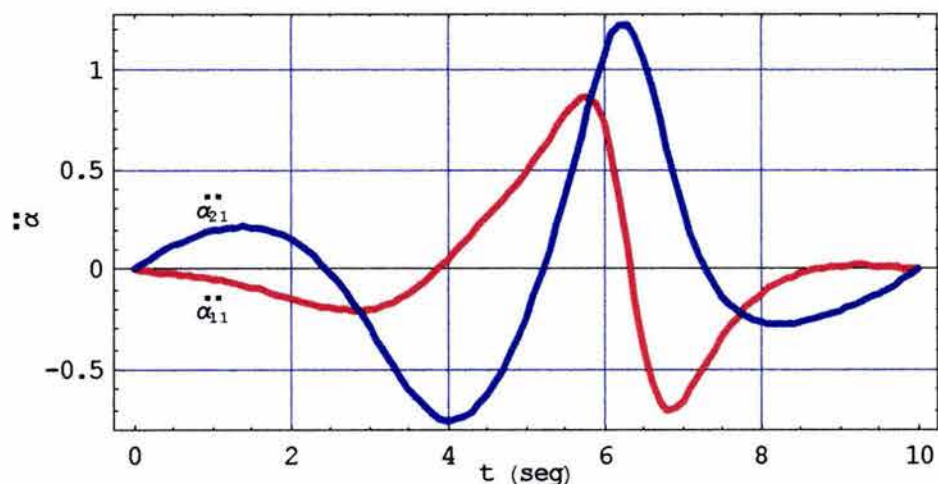


Gráfica 4.4.2c. Velocidad de la cadena 3.

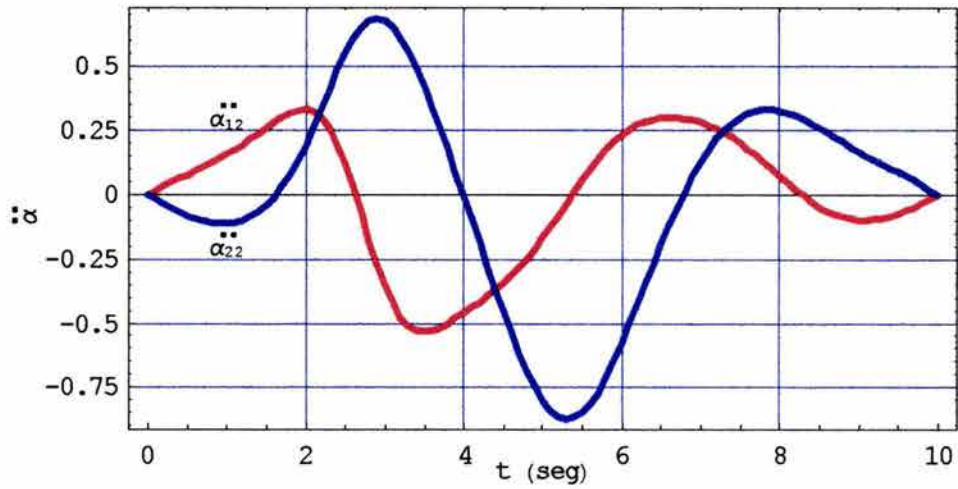
De igual forma, empleando las ecuaciones (4.4.2) y la variación de los ángulos de Euler respecto al tiempo, dados por:

$$\begin{array}{lll}
 \psi = \varphi(t) & \dot{\psi} = \dot{\varphi}(t) & \ddot{\psi} = \ddot{\varphi}(t) \\
 \theta = 45^\circ & \dot{\theta} = 0 & \ddot{\theta} = 0 \\
 \phi = -\varphi(t) & \dot{\phi} = -\dot{\varphi}(t) & \ddot{\phi} = -\ddot{\varphi}(t)
 \end{array}$$

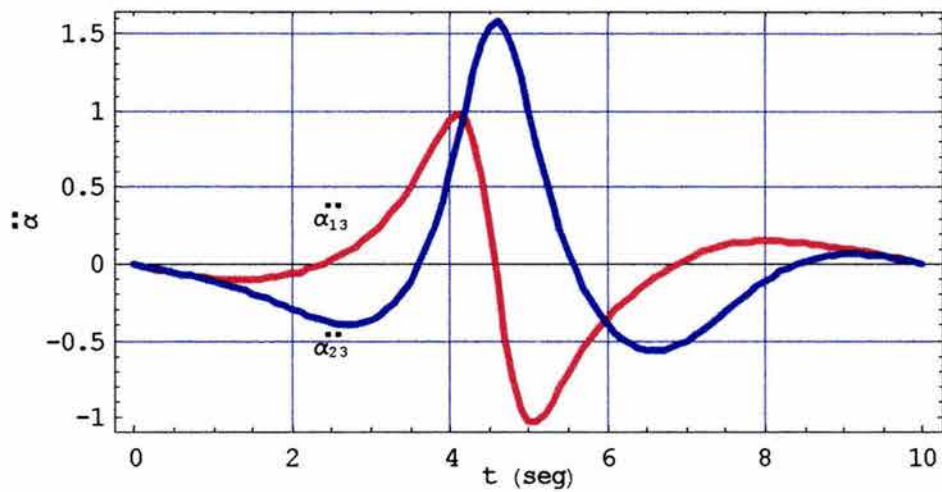
Se obtienen las gráficas de aceleración ($\ddot{\alpha}$) con respecto al tiempo (t), para cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE, los resultados fueron obtenidos en el software Mathematica.



Gráfica 4.4.3a. Aceleración de la cadena 1.



Gráfica 4.4.3b. Aceleración de la cadena 2.



Gráfica 4.4.3c. Aceleración de la cadena 3.

Capítulo 5

Balanceo Estático

5.1. Introducción

En esta sección se exploran los principios del balanceo estático, se discute el concepto y el propósito del mismo.

Cualquier eslabón o elemento que se encuentre en rotación pura puede, teóricamente, estar perfectamente equilibrado para eliminar todas las fuerzas y momentos de vibración [2]. Es aceptado, en la práctica del diseño, equilibrar todos los elementos o piezas en rotación en una máquina, a menos que la vibración o sacudimiento sean necesarios. Un elemento rotatorio puede estar equilibrado o balanceado tanto estática como dinámicamente.

En algunos casos, el equilibrio estático puede ser un sustituto aceptable para el equilibrio dinámico y generalmente es más fácil de alcanzar. Existen dos formas muy comunes de realizar el balanceo estático de un mecanismo, estos son el uso de **contrapesos** y el uso de **resortes**, cada uno de los cuales posee sus propias ventajas y desventajas [8].

5.2. Balanceo de Mecanismos Paralelos

El balanceo estático de mecanismos paralelos espaciales de 3 GDL con actuadores de revoluta usando contrapesos o resortes es estudiado en [9]. Se dice que un mecanismo está balanceado por fuerzas cuando su centro global de masa permanece fijo, para cualquier movimiento arbitrario del mecanismo.

Esta condición es muy importante en maquinaria donde las fuerzas desbalanceadas sobre la base provocarán vibraciones, desgaste y otros efectos no deseados. Para manipuladores robóticos o dispositivos simuladores de movimiento, sin embargo, las fuerzas sobre la base no son usualmente críticas y los diseñadores

están más interesados con los torques o fuerzas, que son requeridos en los actuadores para mantener el manipulador o mecanismo en equilibrio estático. Por lo tanto, en este contexto, los manipuladores o mecanismos son considerados **estáticamente balanceados**, cuando el peso de los eslabones no produce ningún torque o fuerza en los actuadores bajo condiciones estáticas, para cualquier configuración del manipulador o mecanismo. Esta condición es también referida como compensación gravitatoria.

Como se menciona anteriormente, en un manipulador paralelo estáticamente balanceado los actuadores no contribuyen a soportar el peso de los eslabones móviles para todas las configuraciones. Por lo tanto, los actuadores son usados sólo para impartir aceleraciones a los eslabones móviles, lo cual conduce a una reducción del tamaño y potencia de los actuadores, y resulta en el mejoramiento de la precisión del control. En simuladores de vuelos, donde la carga es muy grande (usualmente del orden de toneladas) y el movimiento del mecanismo de la plataforma es más lento, las fuerzas o torques ejercidos en las juntas actuadas son principalmente debido al peso de la plataforma. Por lo tanto, si el mecanismo está balanceado estáticamente, las fuerzas o torques actuadoras pueden ser reducidas en mayor proporción, lo cual resultará en significantes mejoras del control y eficiencia de energía.

En este capítulo se describe el balanceo estático de la PPE aplicando el método de contrapesos [9]. En el manipulador de 3 GDL analizado en [9], la composición de rotaciones de los segundos eslabones de las cadenas cinemáticas no existe respecto a los primeros eslabones. Debido a la estructura especial de dicho manipulador, la orientación de los segundos eslabones fue referida de manera directa a la vertical, dando como resultado ecuaciones más simples de balanceo. Para nuestro caso, debido a la configuración esférica de la plataforma, la composición de rotaciones de los segundos eslabones de las cadenas cinemáticas respecto a los primeros eslabones no se puede evitar, lo cual origina ecuaciones más complejas de balanceo. Lo anterior da como consecuencia numerosas ecuaciones de balanceo equivalentes o linealmente dependientes entre sí. A partir de las cuales se obtuvo un conjunto reducido de ecuaciones útiles para el balanceo.

5.3. Balanceo de la Plataforma Esférica

A continuación se describe el método del balanceo [9], por contrapesos para lograr el equilibrio de la PPE. Es importante mencionar que se consideran los datos obtenidos en la síntesis cinemática.

Considerando la figura 5.1, se tiene el mecanismo paralelo esférico de 3 GDL, con tres cadenas cinemáticas idénticas conectadas a la base de la plataforma. Cada una de estas cadenas consiste de una junta de revoluta, un primer eslabón

móvil, una segunda junta de revoluta, un segundo eslabón móvil y una tercera junta de revoluta unida a la plataforma móvil o efector final.

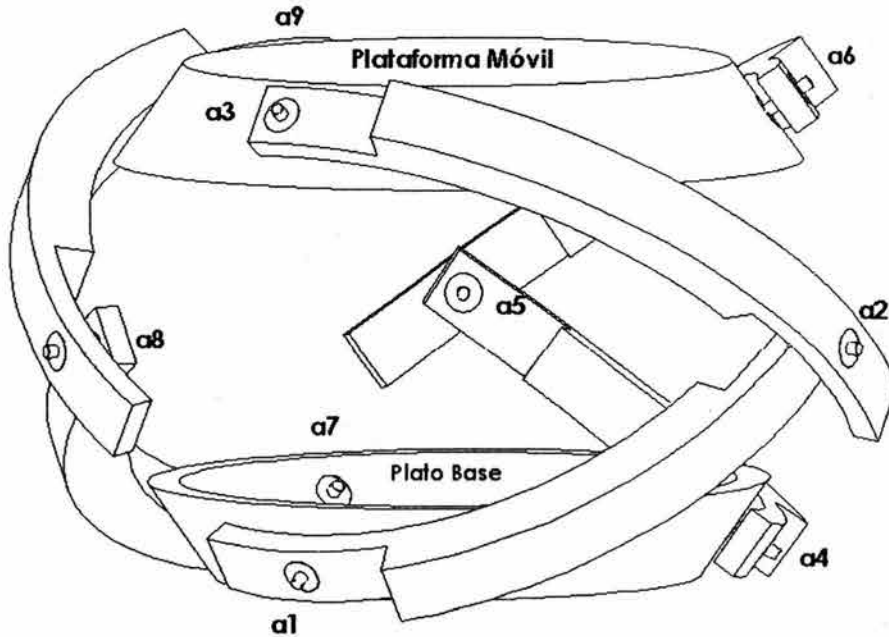


Figura 5.1. Modelo CAD de la PPE.

Con objeto de representar la posición del centro de masa de cada eslabón, un marco coordinado de referencia es definido sobre ellos. El marco coordinado inercial, es designado como $Oxyz$, dicho sistema coordinado es fijo y se encuentra localizado en el centro de nuestra esfera.

De igual forma, se tiene un sistema coordinado móvil $O'x'y'z'$ unido a la plataforma móvil, con su origen en el punto O' , el cual es un punto definido sobre la plataforma, como se muestra en la figura 5.2.

Así mismo, se muestran dos marcos coordinados de referencia designados como $O_{1i} x_{1i} y_{1i} z_{1i}$ y $O_{2i} x_{2i} y_{2i} z_{2i}$ unidos al primer y segundo eslabón de la i -ésima cadena respectivamente.

Los puntos O_{1i} y O_{2i} son respectivamente localizados en el centro de la primera y segunda junta de revoluta.

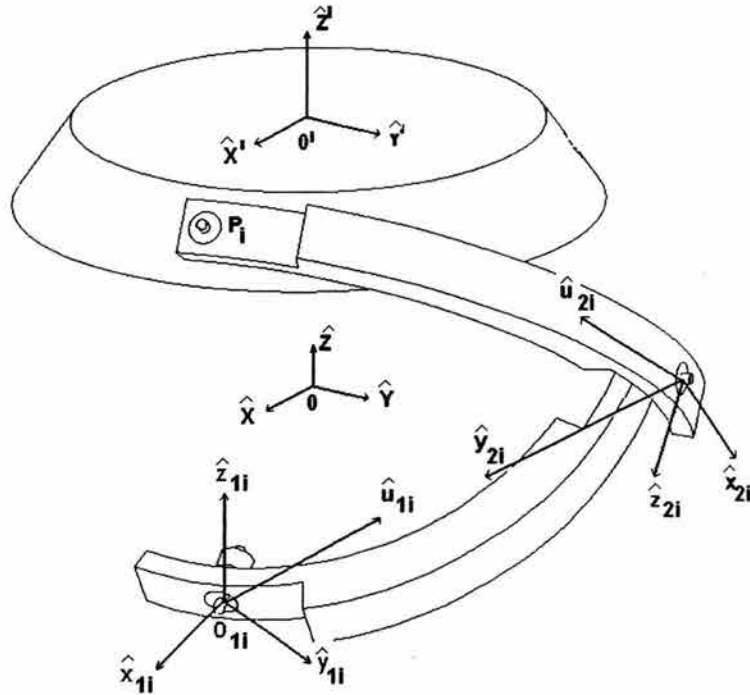


Figura 5.2. Sistema coordenado de la PPE.

Los ejes son determinados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{1i} &= [\mathbf{R}_{\rho_i, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}]\mathbf{x} \\
 \mathbf{z}_{1i} &= \frac{\mathbf{x}_{1i} \times \mathbf{u}_{1i}}{\|\mathbf{x}_{1i} \times \mathbf{u}_{1i}\|} \\
 \mathbf{y}_{1i} &= \frac{\mathbf{z}_{1i} \times \mathbf{x}_{1i}}{\|\mathbf{z}_{1i} \times \mathbf{x}_{1i}\|}
 \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{2i} &= [\mathbf{R}_{\rho_i, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}][\mathbf{R}_{\alpha_{1i}, x}]\mathbf{x} \\
 \mathbf{z}_{2i} &= \frac{\mathbf{x}_{2i} \times \mathbf{u}_{2i}}{\|\mathbf{x}_{2i} \times \mathbf{u}_{2i}\|} \\
 \mathbf{y}_{2i} &= \frac{\mathbf{z}_{2i} \times \mathbf{x}_{2i}}{\|\mathbf{z}_{2i} \times \mathbf{x}_{2i}\|}
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{11} &= (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) & \mathbf{u}_{12} &= (\mathbf{a}_5 - \mathbf{a}_4) & \mathbf{u}_{13} &= (\mathbf{a}_8 - \mathbf{a}_7) \\
 \mathbf{u}_{21} &= (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2) & \mathbf{u}_{22} &= (\mathbf{a}_6 - \mathbf{a}_5) & \mathbf{u}_{23} &= (\mathbf{a}_9 - \mathbf{a}_8)
 \end{aligned}$$

Donde \mathbf{x}_{1i} , \mathbf{y}_{1i} , \mathbf{z}_{1i} , son vectores unitarios definidos en la dirección positiva del eje de coordenadas del marco O_{1i} x_{1i} y_{1i} z_{1i} . Así mismo \mathbf{x}_{2i} , \mathbf{y}_{2i} , \mathbf{z}_{2i} , son vectores unitarios definidos en la dirección positiva del eje de coordenadas del marco O_{2i} x_{2i} y_{2i} z_{2i} . Y \mathbf{u}_{11} , \mathbf{u}_{12} , etc, son vectores unitarios definidos en los puntos extremos de los eslabones.

Las coordenadas de los puntos \mathbf{P}_i relativo al marco coordenado móvil unido a la plataforma son dados por (a_i, b_i, c_i) con $i = 1, 2, 3$. La orientación del marco móvil $O'x'y'z'$ con respecto al marco fijo $Oxyz$ es descrito por la matriz de rotación $[\mathbf{Q}]$, donde:

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

Las coordenadas del punto \mathbf{O}_{1i} expresados en el marco coordenado inercial son $(x_{O_i}, y_{O_i}, z_{O_i})$ donde $i = 1, 2, 3$. Los ángulos α_{1i} y α_{2i} son definidos como los ángulos del primero y segundo eslabón móviles de la i -ésima cadena. Siguiendo esta notación, podemos escribir:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{1i}] &= [\mathbf{R}_{\rho_i, z}] [\mathbf{R}_{\delta, y}] [\mathbf{R}_{\alpha_{1i}, x}] \\ [\mathbf{R}_{2i}] &= [\mathbf{R}_{\rho_i, z}] [\mathbf{R}_{\delta, y}] [\mathbf{R}_{\alpha_{1i}, x}] [\mathbf{R}_{\beta, z}] [\mathbf{R}_{\alpha_{2i}, x}] \end{aligned}$$

donde $[\mathbf{R}_{1i}]$ y $[\mathbf{R}_{2i}]$ son las matrices de orientación de los marcos coordenados $O_{1i} x_{1i} y_{1i} z_{1i}$ y $O_{2i} x_{2i} y_{2i} z_{2i}$, respectivamente, con respecto al marco inercial.

Considerando los parámetros anteriormente mencionados, se describen las condiciones para el balanceo estático, el cual es satisfecho al especificar que el centro de masa global del mecanismo está fijo. El vector de posición del centro de masa de un eslabón, multiplicado por su masa es llamado **el vector masa del eslabón**. La ecuación para el vector masa total del sistema puede ser escrito como:

$$M\mathbf{r} = m_p\mathbf{r}_p + \sum_{i=1}^3 (m_{1i}\mathbf{r}_{1i} + m_{2i}\mathbf{r}_{2i}) \quad (5.3.4)$$

donde M es la masa total de todos los eslabones móviles del sistema, \mathbf{r} es el vector de posición de su centro de masa global, \mathbf{r}_p es el vector de posición del centro de masa de la plataforma móvil, \mathbf{r}_{1i} y \mathbf{r}_{2i} son los vectores de posición del centro de masa del primer y segundo eslabón de la i -ésima pierna; m_p , m_{1i} y m_{2i} son las masas correspondientes, figura 5.3 y figuras 5.4(a y b). La ubicación de las masas de los eslabones mostradas en las figuras, son sólo ilustrativas ya que por lo general no se encuentran ahí.

Los vectores de posición del centro de masa de cada eslabón pueden escribirse como:

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_{O_3} + [\mathbf{R}_{13}]\mathbf{l}_{13} + [\mathbf{R}_{23}]\mathbf{l}_{23} + [\mathbf{Q}](\mathbf{c}_P - \mathbf{r}_3) \quad (5.3.5)$$

$$\mathbf{r}_{1i} = \mathbf{r}_{O_i} + [\mathbf{R}_{1i}]\mathbf{c}_{1i} \quad (5.3.6)$$

$$\mathbf{r}_{2i} = \mathbf{r}_{O_i} + [\mathbf{R}_{1i}]\mathbf{l}_{1i} + [\mathbf{R}_{2i}]\mathbf{c}_{2i} \quad (5.3.7)$$

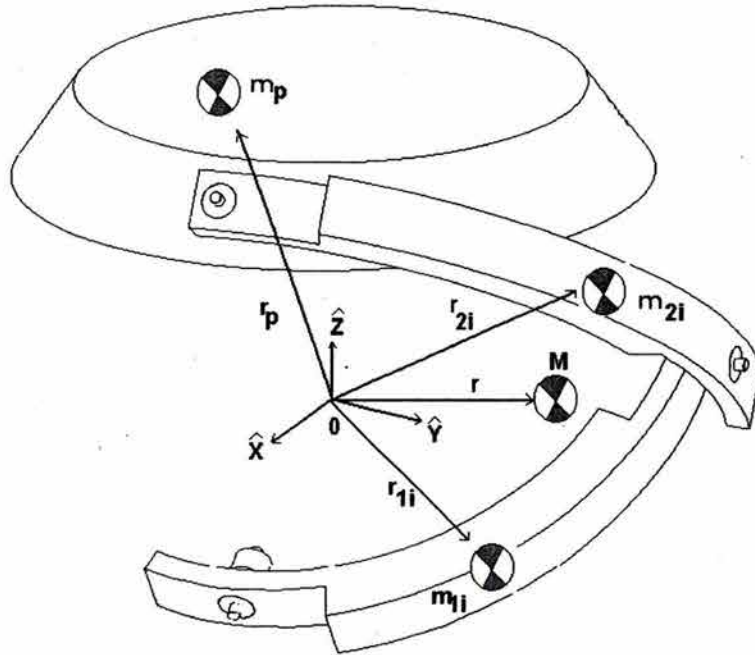


Figura 5.3. Localización de las masas en la cadena i.

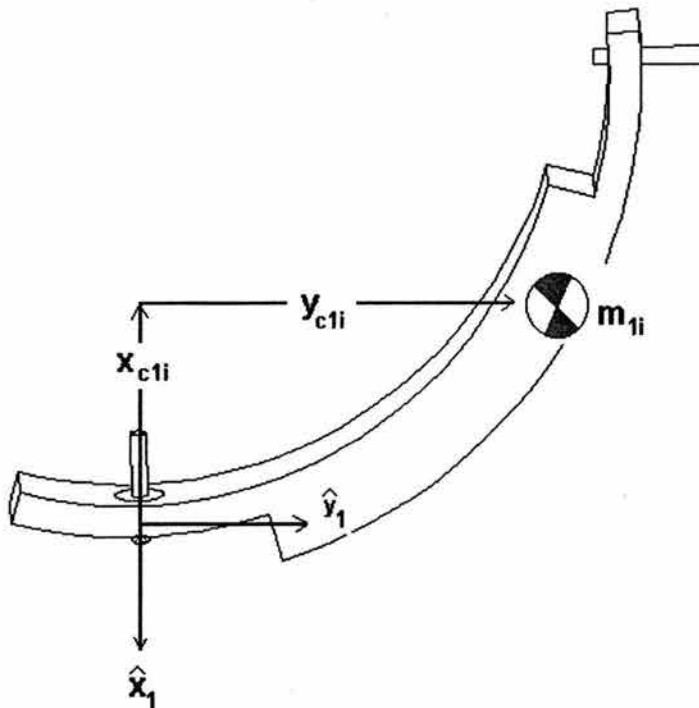


Figura 5.4a. Ubicación del centro de masa del eslabón 1.

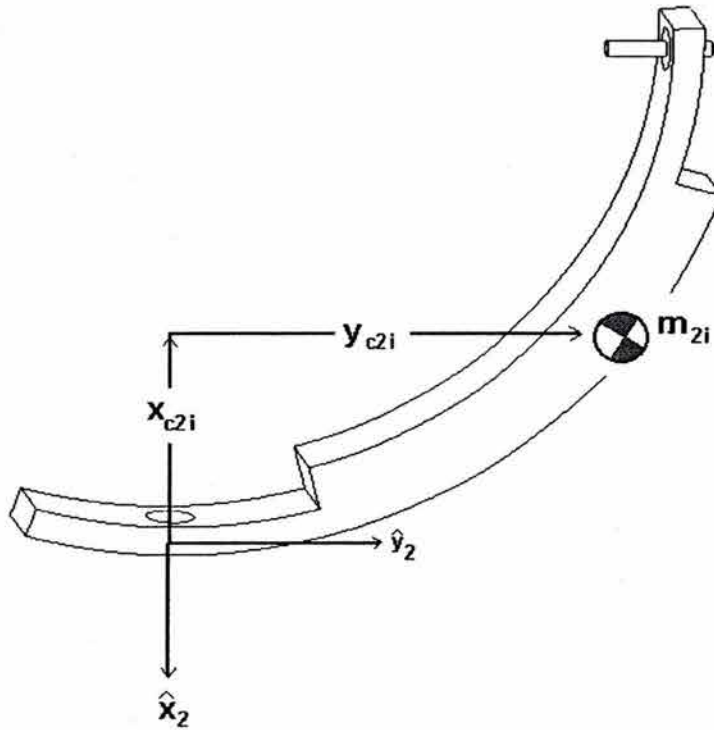


Figura 5.4b. Ubicación del centro de masa del eslabón 2.

Donde \mathbf{r}_{O_i} ($i = 1, 2, 3$) son tres vectores constantes desde el marco coordenado inercial $Oxyz$ a O_{11} , O_{12} y O_{13} , respectivamente; \mathbf{l}_{1i} y \mathbf{l}_{2i} son los vectores de posición desde O_{1i} a O_{2i} y de O_{2i} a P_i , respectivamente. Mientras \mathbf{c}_{1i} y \mathbf{c}_{2i} son los vectores de posición desde O_{1i} al centro de masa del primer y segundo eslabón de la i -ésima pierna, respectivamente (figura 5.5).

Así mismo, \mathbf{c}_p y \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, 3$) son, respectivamente, los vectores de posición desde O' al centro de masa de la plataforma y desde O' al punto P_i . Todos los vectores anteriores ya mencionados -excepto \mathbf{r}_{O_i} - son expresados en un marco de referencia local móvil y se asume que los primeros y segundos eslabones de cada cadena son iguales, por lo tanto $m_{1i} = m_1$ y $m_{2i} = m_2$, además:

$$\mathbf{r}_{O_i} = \begin{bmatrix} x_{0i} \\ y_{0i} \\ z_{0i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{1i} = \begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_{2i} = \begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{l}_{1i} = \begin{bmatrix} l_{1x} \\ l_{1y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{l}_{2i} = \begin{bmatrix} l_{2x} \\ l_{2y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

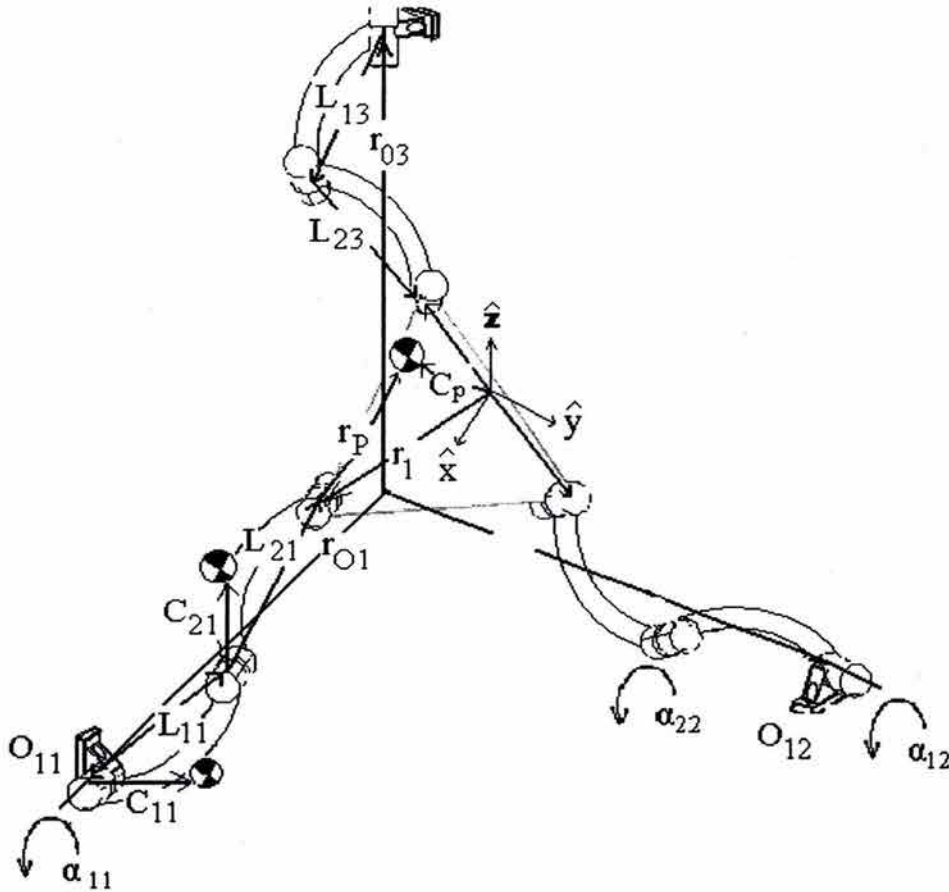


Figura 5.5. Representación de la ubicación de los vectores en la PPE.

Sustituyendo las ecuaciones desde (5.3.5) hasta (5.3.7) en la ecuación (5.3.4), se obtiene un vector de componentes:

$$M\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad (5.3.8)$$

donde:

$$\begin{aligned} r_x = & m_1(x_{03} + f_{11}x_{c1} + s\alpha_{13}(f_{13}y_{c1} - f_{12}z_{c1}) + c\alpha_{13}(f_{12}y_{c1} + f_{13}z_{c1})) + \\ & m_1(x_{02} + g_{11}x_{c1} + s\alpha_{12}(g_{13}y_{c1} - g_{12}z_{c1}) + c\alpha_{12}(g_{12}y_{c1} + g_{13}z_{c1})) + \\ & m_1(x_{01} + k_{11}x_{c1} + s\alpha_{11}(k_{13}y_{c1} - k_{12}z_{c1}) + c\alpha_{11}(k_{12}y_{c1} + k_{13}z_{c1})) + \\ & m_2(k_{11}l_{1x} + k_{13}l_{1y}s\alpha_{11} + x_{01} + k_{13}s\alpha_{11}x_{c2} - k_{12}s\alpha_{11}s\alpha_{21}y_{c2} + \\ & k_{11}s\alpha_{21}z_{c2} + c\alpha_{11}(k_{12}(l_{1y} + x_{c2}) + k_{13}s\alpha_{21}y_{c2} + c\alpha_{21}k_{13}z_{c2}) - \\ & c\alpha_{21}(k_{11}y_{c2} + k_{12}s\alpha_{11}z_{c2})) + \\ & m_2(g_{11}l_{1x} + g_{13}l_{1y}s\alpha_{12} + x_{02} + g_{13}s\alpha_{12}x_{c2} - g_{12}s\alpha_{12}s\alpha_{22}y_{c2} + \\ & g_{11}s\alpha_{22}z_{c2} + c\alpha_{12}(g_{12}(l_{1y} + x_{c2}) + g_{13}s\alpha_{22}y_{c2} + c\alpha_{22}g_{13}z_{c2}) - \\ & c\alpha_{22}(g_{11}y_{c2} + g_{12}s\alpha_{12}z_{c2})) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_2(f_{11}l_{1x} + f_{13}l_{1y}s\alpha_{13} + x_{03} + f_{13}s\alpha_{13}x_{c2} - f_{12}s\alpha_{13}s\alpha_{23}y_{c2} + \\
& f_{11}s\alpha_{23}z_{c2} + c\alpha_{13}(f_{12}(l_{1y} + x_{c2}) + f_{13}s\alpha_{23}y_{c2} + c\alpha_{23}f_{13}z_{c2}) - \\
& c\alpha_{23}(f_{11}y_{c2} + f_{12}s\alpha_{13}z_{c2})) + \\
& m_p(f_{11}l_{1x} - c\alpha_{23}f_{11}l_{2y} - a_3q_{11} - b_3q_{12} - c_3q_{13} + f_{13}l_{1y}s\alpha_{13} + \\
& f_{13}l_{2x}s\alpha_{13} - f_{12}l_{2y}s\alpha_{13}s\alpha_{23} + \\
& c\alpha_{13}(f_{12}(l_{1y} + l_{2x}) + f_{13}l_{2y}s\alpha_{23}) + x_{03} + q_{11}x_p + q_{12}y_p + q_{13}z_p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_y = & m_1(f_{21}x_{c1} + y_{03} + s\alpha_{13}(f_{23}y_{c1} - f_{22}z_{c1}) + c\alpha_{13}(f_{22}y_{c1} + f_{23}z_{c1})) + \\
& m_1(g_{21}x_{c1} + y_{02} + s\alpha_{12}(g_{23}y_{c1} - g_{22}z_{c1}) + c\alpha_{12}(g_{22}y_{c1} + g_{23}z_{c1})) + \\
& m_1(k_{21}x_{c1} + y_{01} + s\alpha_{11}(k_{23}y_{c1} - k_{22}z_{c1}) + c\alpha_{11}(k_{22}y_{c1} + k_{23}z_{c1})) + \\
& m_2(k_{21}l_{1x} + k_{23}l_{1y}s\alpha_{11} + k_{23}s\alpha_{11}x_{c2} + y_{01} - k_{22}s\alpha_{11}s\alpha_{21}y_{c2} + \\
& k_{21}s\alpha_{21}z_{c2} + c\alpha_{11}(k_{22}(l_{1y} + x_{c2}) + k_{23}s\alpha_{21}y_{c2} + c\alpha_{21}k_{23}z_{c2}) - \\
& c\alpha_{21}(k_{21}y_{c2} + k_{22}s\alpha_{11}z_{c2})) + \\
& m_2(g_{21}l_{1x} + g_{23}l_{1y}s\alpha_{12} + g_{23}s\alpha_{12}x_{c2} + y_{02} - g_{22}s\alpha_{12}s\alpha_{22}y_{c2} + \\
& g_{21}s\alpha_{22}z_{c2} + c\alpha_{12}(g_{22}(l_{1y} + x_{c2}) + g_{23}s\alpha_{22}y_{c2} + c\alpha_{22}g_{23}z_{c2}) - \\
& c\alpha_{22}(g_{21}y_{c2} + g_{22}s\alpha_{12}z_{c2})) + \\
& m_2(f_{21}l_{1x} + f_{23}l_{1y}s\alpha_{13} + f_{23}s\alpha_{13}x_{c2} + y_{03} - f_{22}s\alpha_{13}s\alpha_{23}y_{c2} + \\
& f_{21}s\alpha_{23}z_{c2} + c\alpha_{13}(f_{22}(l_{1y} + x_{c2}) + f_{23}s\alpha_{23}y_{c2} + c\alpha_{23}f_{23}z_{c2}) - \\
& c\alpha_{23}(f_{21}y_{c2} + f_{22}s\alpha_{13}z_{c2})) + \\
& m_p(f_{21}l_{1x} - c\alpha_{23}f_{21}l_{2y} - a_3q_{21} - b_3q_{22} - c_3q_{23} + f_{23}l_{1y}s\alpha_{13} + \\
& f_{23}l_{2x}s\alpha_{13} - f_{22}l_{2y}s\alpha_{13}s\alpha_{23} + \\
& c\alpha_{13}(f_{22}(l_{1y} + l_{2x}) + f_{23}l_{2y}s\alpha_{23}) + q_{21}x_p + y_{03} + q_{22}y_p + q_{23}z_p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_z = & m_1(f_{31}x_{c1} + f_{33}s\alpha_{13}y_{c1} + z_{03} + c\alpha_{13}f_{33}z_{c1}) + \\
& m_1(g_{31}x_{c1} + g_{33}s\alpha_{12}y_{c1} + z_{02} + c\alpha_{12}g_{33}z_{c1}) + \\
& m_1(k_{31}x_{c1} + k_{33}s\alpha_{11}y_{c1} + z_{01} + c\alpha_{11}k_{33}z_{c1}) + \\
& m_2(f_{31}l_{1x} + f_{33}s\alpha_{13}(l_{1y} + x_{c2}) + c\alpha_{13}f_{33}s\alpha_{23}y_{c2} + z_{03} + \\
& f_{31}s\alpha_{23}z_{c2} + c\alpha_{23}(-f_{31}y_{c2} + c\alpha_{13}f_{33}z_{c2})) + \\
& m_2(g_{31}l_{1x} + g_{33}s\alpha_{12}(l_{1y} + x_{c2}) + c\alpha_{12}g_{33}s\alpha_{22}y_{c2} + z_{02} + \\
& g_{31}s\alpha_{22}z_{c2} + c\alpha_{22}(-g_{31}y_{c2} + c\alpha_{12}g_{33}z_{c2})) + \\
& m_2(k_{31}l_{1x} + k_{33}s\alpha_{11}(l_{1y} + x_{c2}) + c\alpha_{11}k_{33}s\alpha_{21}y_{c2} + z_{01} + \\
& k_{31}s\alpha_{21}z_{c2} + c\alpha_{21}(-k_{31}y_{c2} + c\alpha_{11}k_{33}z_{c2})) + \\
& m_p(f_{31}l_{1x} - c\alpha_{23}f_{31}l_{2y} - a_3q_{31} - b_3q_{32} - c_3q_{33} + \\
& f_{33}(l_{1y} + l_{2x})s\alpha_{13} + c\alpha_{13}f_{33}l_{2y}s\alpha_{23} + q_{31}x_p + q_{32}y_p + z_{03} + q_{33}z_p)
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= c\delta c\rho_1 & k_{12} &= -s\rho_1 & k_{13} &= c\rho_1 s\delta \\
 k_{21} &= c\delta s\rho_1 & k_{22} &= c\rho_1 & k_{23} &= s\delta s\rho_1 \\
 k_{31} &= -s\delta & k_{32} &= 0 & k_{33} &= c\delta \\
 \\
 g_{11} &= c\delta c\rho_2 & g_{12} &= -s\rho_2 & g_{13} &= c\rho_2 s\delta \\
 g_{21} &= c\delta s\rho_2 & g_{22} &= c\rho_2 & g_{23} &= s\delta s\rho_2 \\
 g_{31} &= -s\delta & g_{32} &= 0 & g_{33} &= c\delta \\
 \\
 f_{11} &= c\delta c\rho_3 & f_{12} &= -s\rho_3 & f_{13} &= c\rho_3 s\delta \\
 f_{21} &= c\delta s\rho_3 & f_{22} &= c\rho_3 & f_{23} &= s\delta s\rho_3 \\
 f_{31} &= -s\delta & f_{32} &= 0 & f_{33} &= c\delta
 \end{aligned}$$

Por otro lado, de las restricciones cinemáticas del mecanismo, a saber, de las ecuaciones de lazo cerrado independientes asociada con los lazos cinemáticos $\mathbf{O}_i \mathbf{O}_{i2} \mathbf{P}_i \mathbf{P}_3 \mathbf{O}$, ($i = 1, 2$), se tiene:

$$\mathbf{r}_{0i} + [\mathbf{R}_{1i}]\mathbf{l}_{1i} + [\mathbf{R}_{2i}]\mathbf{l}_{2i} = \mathbf{r}_{03} + [\mathbf{R}_{13}]\mathbf{l}_{13} + [\mathbf{R}_{23}]\mathbf{l}_{23} + [\mathbf{Q}](\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_3), \quad i = 1, 2 \quad (5.3.9)$$

La ecuación (5.3.9) para $i = 1$, puede ser escrita en forma escalar como:

$$\begin{aligned}
 &k_{11}l_{1x} - c\alpha_{21}k_{11}l_{2y} + (l_{1y} + l_{2x})(c\alpha_{11}k_{12} + k_{13}s\alpha_{11}) + \\
 &l_{2y}(c\alpha_{11}k_{13} - k_{12}s\alpha_{11})s\alpha_{21} + x_{01} = \\
 &f_{11}(l_{1x} - c\alpha_{23}l_{2y}) + (a_1 - a_3)q_{11} + (b_1 - b_3)q_{12} + (c_1 - c_3)q_{13} + \\
 &(l_{1y} + l_{2x})(c\alpha_{13}f_{12} + f_{13}s\alpha_{13}) + l_{2y}(c\alpha_{13}f_{13} - f_{12}s\alpha_{13})s\alpha_{23} + x_{03}
 \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

$$\begin{aligned}
 &k_{21}l_{1x} - c\alpha_{21}k_{21}l_{2y} + (l_{1y} + l_{2x})(c\alpha_{11}k_{22} + k_{23}s\alpha_{11}) + \\
 &l_{2y}(c\alpha_{11}k_{23} - k_{22}s\alpha_{11})s\alpha_{21} + y_{01} = \\
 &f_{21}(l_{1x} - c\alpha_{23}l_{2y}) + (a_1 - a_3)q_{21} + (b_1 - b_3)q_{22} + (c_1 - c_3)q_{23} + \\
 &(l_{1y} + l_{2x})(c\alpha_{13}f_{22} + f_{23}s\alpha_{13}) + l_{2y}(c\alpha_{13}f_{23} - f_{22}s\alpha_{13})s\alpha_{23} + y_{03}
 \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

$$\begin{aligned}
 &k_{31}l_{1x} - c\alpha_{21}k_{31}l_{2y} + k_{33}(l_{1y} + l_{2x})s\alpha_{11} + c\alpha_{11}k_{33}l_{2y}s\alpha_{21} + z_{01} = \\
 &f_{31}(l_{1x} - c\alpha_{23}l_{2y}) + (a_1 - a_3)q_{31} + (b_1 - b_3)q_{32} + (c_1 - c_3)q_{33} + \\
 &f_{33}((l_{1y} + l_{2x})s\alpha_{13} + c\alpha_{13}l_{2y}s\alpha_{23}) + z_{03}
 \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

La ecuación (5.3.9) para $i = 2$, puede ser escrita en forma escalar como:

$$\begin{aligned}
 &g_{11}l_{1x} - c\alpha_{22}g_{11}l_{2y} + (l_{1y} + l_{2x})(c\alpha_{12}g_{12} + g_{13}s\alpha_{12}) + \\
 &l_{2y}(c\alpha_{12}g_{13} - g_{12}s\alpha_{12})s\alpha_{22} + x_{02} = \\
 &f_{11}(l_{1x} - c\alpha_{23}l_{2y}) + (a_2 - a_3)q_{11} + (b_2 - b_3)q_{12} + (c_2 - c_3)q_{13} + \\
 &(l_{1y} + l_{2x})(c\alpha_{13}f_{12} + f_{13}s\alpha_{13}) + l_{2y}(c\alpha_{13}f_{13} - f_{12}s\alpha_{13})s\alpha_{23} + x_{03}
 \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

$$\begin{aligned}
& g_{21}l_{1x} - c\alpha_{22}g_{21}l_{2y} + (l_{1y} + l_{2x})(c\alpha_{12}g_{22} + g_{23}s\alpha_{12}) + \\
& l_{2y}(c\alpha_{12}g_{23} - g_{22}s\alpha_{12})s\alpha_{22} + y_{02} = \\
& f_{21}(l_{1x} - c\alpha_{23}l_{2y}) + (a_2 - a_3)q_{21} + (b_2 - b_3)q_{22} + (c_2 - c_3)q_{23} + \\
& (l_{1y} + l_{2x})(c\alpha_{13}f_{22} + f_{23}s\alpha_{13}) + l_{2y}(c\alpha_{13}f_{23} - f_{22}s\alpha_{13})s\alpha_{23} + y_{03}
\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

$$\begin{aligned}
& g_{31}l_{1x} - c\alpha_{22}g_{31}l_{2y} + g_{33}(l_{1y} + l_{2x})s\alpha_{12} + c\alpha_{12}g_{33}l_{2y}s\alpha_{22} + z_{02} = \\
& f_{31}(l_{1x} - c\alpha_{23}l_{2y}) + (a_2 - a_3)q_{31} + (b_2 - b_3)q_{32} + (c_2 - c_3)q_{33} + \\
& f_{33}((l_{1y} + l_{2x})s\alpha_{13} + c\alpha_{13}l_{2y}s\alpha_{23}) + z_{03}
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Con objeto de limitar la complejidad de la ecuación de balanceo (5.3.8), se eliminan las variables dependientes α_{21} y α_{22} de los segundos eslabones de la primera y segunda cadena cinemática. Se eligen estas, debido a que ambas cadenas se encuentran relacionadas mediante la ecuación de lazo (5.3.9). Para lograr esto se despejan en forma arbitraria los términos $\cos \alpha_{21}$ y $\cos \alpha_{22}$ de cualquiera de las expresiones de (5.3.10) a (5.3.15). Por lo tanto de la ecuación (5.3.10), se despeja el término $\cos \alpha_{21}$:

$$\begin{aligned}
c\alpha_{21} = & -\frac{1}{k_{11} l_{2y}}(-k_{11}l_{1x} + f_{11}(l_{1x} - c\alpha_{23}l_{2y}) + \\
& (a_1 - a_3)q_{11} + (b_1 - b_3)q_{12} + (c_1 - c_3)q_{13} + \\
& k_{13}((-l_{1y} - l_{2x})s\alpha_{11} - c\alpha_{11}l_{2y}s\alpha_{21}) + \\
& k_{12}(c\alpha_{11}(-l_{1y} - l_{2x}) + l_{2y}s\alpha_{11}s\alpha_{21}) + \\
& f_{13}((l_{1y} + l_{2x})s\alpha_{13} + c\alpha_{13}l_{2y}s\alpha_{23}) + \\
& f_{12}(c\alpha_{13}(l_{1y} + l_{2x}) - l_{2y}s\alpha_{13}s\alpha_{23}) - x_{01} + x_{03})
\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

De la ecuación (5.3.13), se despeja el término $\cos \alpha_{22}$:

$$\begin{aligned}
\cos \alpha_{22} = & -\frac{1}{g_{11} l_{2y}}(-g_{11}l_{1x} + f_{11}(l_{1x} - c\alpha_{23}l_{2y}) + \\
& (a_2 - a_3)q_{11} + (b_2 - b_3)q_{12} + (c_2 - c_3)q_{13} + \\
& g_{13}((-l_{1y} - l_{2x})s\alpha_{12} - c\alpha_{12}l_{2y}s\alpha_{22}) + \\
& g_{12}(c\alpha_{12}(-l_{1y} - l_{2x}) + l_{2y}s\alpha_{12}s\alpha_{22}) + \\
& f_{13}((l_{1y} + l_{2x})s\alpha_{13} + c\alpha_{13}l_{2y}s\alpha_{23}) + \\
& f_{12}(c\alpha_{13}(l_{1y} + l_{2x}) - l_{2y}s\alpha_{13}s\alpha_{23}) - x_{02} + x_{03}
\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Las ecuaciones (5.3.16) y (5.3.17) se sustituyen en las componentes r_x , r_y , r_z , de la ecuación (5.3.8). Simplificando estas, nos damos cuenta que aparecen coeficientes multiplicando las variables dependientes del tiempo α y los elementos de la matriz $[Q]$. En la referencia [9], se muestra que los coeficientes se repiten

en cada uno de los componentes r_x , r_y , r_z . De lo anterior, el análisis se puede realizar a partir de cada uno de los componentes, tomando en forma arbitraria la componente x , se procede a encontrar las ecuaciones que determinan el balanceo.

Sustituyendo (5.3.16) y (5.3.17) en (5.3.8) y simplificando se tiene:

$$\begin{aligned}
r_x = & D_{x11}q_{11} + D_{x21}q_{12} + D_{x31}q_{13} + \\
& \left(D_{x4} + D_{x5} + D_{x61} - \frac{f_{11}k_{13}l_{1x}m_2z_{c2}}{k_{11}l_{2y}} \right) c\alpha_{11} + \\
& \left(D_{x12} + D_{x13} + D_{x141} - \frac{f_{11}g_{13}l_{1x}m_2z_{c2}}{g_{11}l_{2y}} \right) c\alpha_{12} + \\
& \left(D_{x101} + D_{x8} + D_{x9} + \frac{f_{11}k_{12}l_{1x}m_2z_{c2}}{k_{11}l_{2y}} \right) s\alpha_{11} + \\
& \left(D_{x16} + D_{x17} + D_{x181} - \frac{f_{11}g_{12}l_{1x}m_2z_{c2}}{g_{11}l_{2y}} \right) s\alpha_{12} + \\
& D_{x12}q_{11}c\alpha_{11} + D_{x22}q_{12}c\alpha_{11} + D_{x32}q_{13}c\alpha_{11} + \\
& D_{x14}q_{11}c\alpha_{12} + D_{x24}q_{12}c\alpha_{12} + D_{x34}q_{13}c\alpha_{12} + \\
& D_{x13}q_{11}s\alpha_{11} + D_{x23}q_{12}s\alpha_{11} + D_{x33}q_{13}s\alpha_{11} + \\
& D_{x15}q_{11}s\alpha_{12} + D_{x25}q_{12}s\alpha_{12} + D_{x35}q_{13}s\alpha_{12} \\
& D_{x62}c\alpha_{13}c\alpha_{11} + D_{x63}s\alpha_{11}c\alpha_{11} + D_{x64}s\alpha_{13}c\alpha_{11} + \\
& D_{x102}c\alpha_{13}s\alpha_{11} + D_{x182}c\alpha_{13}s\alpha_{12} + D_{x183}s\alpha_{13}s\alpha_{12} + \\
& D_{x103}s\alpha_{13}s\alpha_{11} + D_{x142}c\alpha_{13}c\alpha_{12} + D_{x143}s\alpha_{12}c\alpha_{12} + \\
& D_{x144}s\alpha_{13}c\alpha_{12} - D_{x212}c\alpha_{23}s\alpha_{13} - (D_{x213} + D_{x282})s\alpha_{13}s\alpha_{23} + \\
& D_{x232}c\alpha_{23}c\alpha_{13} + (D_{x233} + D_{x281})c\alpha_{13}s\alpha_{23} + D_{x32}c\alpha_{12}c\alpha_{23} - \\
& D_{x33}s\alpha_{11}c\alpha_{23} - D_{x34}s\alpha_{12}c\alpha_{23} + \frac{f_{11}k_{13}m_2z_{c2}}{k_{11}}c\alpha_{23}c\alpha_{11} + \\
& D_{x71}s\alpha_{11}s\alpha_{21}c\alpha_{11} - D_{x72}c\alpha_{13}s\alpha_{23}c\alpha_{11} + D_{x73}s\alpha_{13}s\alpha_{23}c\alpha_{11} + \\
& D_{x111}c\alpha_{13}s\alpha_{23}s\alpha_{11} - D_{x191}c\alpha_{13}s\alpha_{23}s\alpha_{12} - D_{x192}s\alpha_{13}s\alpha_{23}s\alpha_{12} + \\
& D_{x112}s\alpha_{13}s\alpha_{23}s\alpha_{11} + D_{x151}s\alpha_{12}s\alpha_{22}c\alpha_{12} - D_{x152}c\alpha_{13}s\alpha_{23}c\alpha_{12} + \\
& D_{x153}s\alpha_{13}s\alpha_{23}c\alpha_{12} + D_{x31}c\alpha_{23} + (D_{x20} + D_{x211})s\alpha_{13} + \\
& (D_{x22} + D_{x231})c\alpha_{13} + D_{x24}c\alpha_{11}^2 + \left(\frac{k_{13}^2 m_2 z_{c2}}{k_{11}} \right) s\alpha_{21}c\alpha_{11}^2 + \\
& D_{x25}s\alpha_{11}^2 + \left(\frac{k_{12}^2 m_2 z_{c2}}{k_{11}} \right) s\alpha_{21}s\alpha_{11}^2 + \\
& D_{x26}c\alpha_{12}^2 + \left(\frac{g_{13}^2 m_2 z_{c2}}{g_{11}} \right) s\alpha_{22}c\alpha_{12}^2 + \\
& D_{x27}s\alpha_{12}^2 + \left(\frac{g_{12}^2 m_2 z_{c2}}{g_{11}} \right) s\alpha_{22}s\alpha_{12}^2 + D_{x292}s\alpha_{21} + D_{x302}s\alpha_{22} + \\
& Const_1 + Const_2 + D_{x291} + D_{x301}
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

El balanceo se alcanza cuando el centro global de masa permanece fijo para cualquier movimiento arbitrario de la PPE. Esto se logra cuando los coeficientes multiplicando las variables dependientes del tiempo α y los elementos de la matriz [Q] son iguales a cero. Es decir se tiene que el centro de masa cumple con:

$$r_x = Const_1 + Const_2 + D_{x291} + D_{x301} \quad (5.3.19)$$

analíticamente se tiene:

$$D_{x11} = m_p(-a_3 + x_p) + \frac{1}{l_{2y}}(a_1 + a_2 - 2a_3)m_2y_{c2} = 0$$

$$D_{x12} = \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}}\right)(-a_1 + a_3)k_{13}m_2z_{c2} = 0$$

$$D_{x13} = \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}}\right)(a_1 - a_3)k_{12}m_2z_{c2} = 0$$

$$D_{x14} = \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right)(-a_2 + a_3)g_{13}m_2z_{c2} = 0$$

$$D_{x15} = \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right)(a_2 - a_3)g_{12}m_2z_{c2} = 0$$

$$D_{x21} = m_p(-b_3 + y_p) + \frac{1}{l_{2y}}(b_1 + b_2 - 2b_3)m_2y_{c2} = 0$$

$$D_{x22} = \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}}\right)(-b_1 + b_3)k_{13}m_2z_{c2} = 0$$

$$D_{x23} = \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}}\right)(b_1 - b_3)k_{12}m_2z_{c2} = 0$$

$$D_{x24} = \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right)(-b_2 + b_3)g_{13}m_2z_{c2} = 0$$

$$D_{x25} = \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right)(b_2 - b_3)g_{12}m_2z_{c2} = 0$$

$$D_{x31} = m_p(-c_3 + z_p) + \frac{1}{l_{2y}}(c_1 + c_2 - 2c_3)m_2y_{c2} = 0$$

$$D_{x32} = \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}}\right)(-c_1 + c_3)k_{13}m_2z_{c2} = 0$$

$$\begin{aligned}
D_{x33} &= \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}} \right) (c_1 - c_3)k_{12}m_2z_{c2} = 0 \\
D_{x34} &= \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}} \right) (-c_2 - c_3)g_{13}m_2z_{c2} = 0 \\
D_{x35} &= \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}} \right) (c_2 - c_3)g_{12}m_2z_{c2} = 0 \\
D_{x4} &= (k_{12}m_2(l_{1y} + x_{c2}) + m_1(k_{12}y_{c1} + k_{13}z_{c1})) = 0 \\
D_{x5} &= \left(\frac{1}{l_{2y}} \right) (-m_2(k_{12}(l_{1y} + l_{2x}) + y_{c2} - k_{13}l_{1x}z_{c2})) = 0 \\
D_{x61} &= \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}} \right) (k_{13}m_2(x_{01} - x_{03})z_{c2}) = 0 \\
D_{x62} &= \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}} \right) (-f_{12}k_{13}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x63} &= \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}} \right) ((-k_{12}^2 + k_{13}^2)l_{1y}m_2z_{c2} + (-k_{12}^2 + k_{13}^2)l_{2x}m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x64} &= \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}} \right) (-f_{13}k_{13}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x71} &= \left(\frac{1}{k_{11}} \right) (-2k_{12}k_{13}m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x72} &= \left(\frac{1}{k_{11}} \right) (f_{13}k_{13}m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x73} &= \left(\frac{1}{k_{11}} \right) (f_{12}k_{13}m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x8} &= (k_{13}m_2(l_{1y} + x_{c2}) + m_1(k_{13}y_{c1} - k_{12}z_{c1})) = 0 \\
D_{x9} &= \left(\frac{1}{l_{2y}} \right) (-m_2(k_{13}(l_{1y} + l_{2x})y_{c2} + k_{12}l_{1x}z_{c2})) = 0 \\
D_{x101} &= \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}} \right) (k_{12}m_2(-x_{01} + x_{03})z_{c2}) = 0 \\
D_{x102} &= \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}} \right) (f_{12}k_{12}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x103} &= \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}} \right) (f_{13}k_{12}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{x111} &= \left(\frac{1}{k_{11}}\right) (f_{13}k_{12}m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x112} &= \left(\frac{1}{k_{11}}\right) (f_{12}k_{12}m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x12} &= g_{12}m_2(l_{1y} + x_{c2}) + m_1(g_{12}y_{c1} + g_{13}z_{c1}) = 0 \\
D_{x13} &= \left(\frac{1}{l_{2y}}\right) (-m_2(g_{12}(l_{1y} + l_{2x})y_{c2} - g_{13}l_{1x}z_{c2})) = 0 \\
D_{x141} &= \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right) (g_{13}m_2(x_{02} - x_{03})z_{c2}) = 0 \\
D_{x142} &= \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right) (-f_{12}g_{13}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x143} &= \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right) ((g_{12}^2 + g_{13}^2)(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x144} &= \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right) (-f_{13}g_{13}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x151} &= \left(\frac{1}{g_{11}}\right) (-2g_{12}g_{13}m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x152} &= \left(\frac{1}{g_{11}}\right) (f_{13}g_{13}m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x153} &= \left(\frac{1}{g_{11}}\right) (f_{12}g_{13}m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x16} &= g_{13}m_2(l_{1y} + x_{c2}) + m_1(g_{13}y_{c1} - g_{12}z_{c1}) = 0 \\
D_{x17} &= \left(\frac{1}{l_{2y}}\right) (-m_2(g_{13}(l_{1y} + l_{2x})y_{c2} + g_{12}l_{1x}z_{c2})) = 0 \\
D_{x181} &= \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right) (g_{12}m_2(-x_{02} + x_{03})z_{c2}) = 0 \\
D_{x182} &= \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right) (f_{12}g_{12}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x183} &= \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right) (f_{13}g_{12}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x191} &= \left(\frac{1}{g_{11}}\right) (f_{13}g_{12}m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x192} &= \left(\frac{1}{g_{11}}\right) (f_{12}g_{12}m_2z_{c2}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{x20} &= \left(\frac{1}{l_{2y}}\right) (2f_{13}(l_{1y} + l_{2x})m_2y_{c2}) = 0 \\
D_{x211} &= f_{13}(l_{2x}m_p + l_{1y}(m_2 + m_p) + m_2x_{c2} + m_1y_{c1}) - f_{12}m_1z_{c1} = 0 \\
D_{x212} &= f_{12}m_2z_{c2} = 0 \\
D_{x213} &= 3f_{12}m_2y_{c2} = 0 \\
D_{x22} &= \left(\frac{1}{l_{2y}}\right) (2f_{12}(l_{1y} + l_{2x})m_2y_{c2}) = 0 \\
D_{x231} &= f_{12}(l_{2x}m_p + l_{1y}(m_2 + m_p) + m_2x_{c2} + m_1y_{c1}) - f_{13}m_1z_{c1} = 0 \\
D_{x232} &= f_{13}m_2z_{c2} = 0 \\
D_{x233} &= 3f_{13}m_2y_{c2} = 0 \\
D_{x24} &= \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}}\right) (k_{12}k_{13}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x25} &= \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}}\right) (-k_{12}k_{13}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x26} &= \left(\frac{1}{k_{11}l_{2y}}\right) (g_{12}g_{13}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x27} &= \left(\frac{1}{g_{11}l_{2y}}\right) (-g_{12}g_{13}(l_{1y} + l_{2x})m_2z_{c2}) = 0 \\
D_{x281} &= f_{11}m_2z_{c2} + f_{13}l_{2y}m_p = 0 \\
D_{x282} &= f_{12}l_{2y}m_p = 0 \\
D_{x291} &= k_{11}(l_{1y}m_2 + m_1x_{c1}) = 0 \\
D_{x292} &= k_{11}m_2z_{c2} = 0 \\
D_{x301} &= g_{11}(l_{1x}m_2 + m_1x_{c1}) = 0 \\
D_{x302} &= g_{11}m_2z_{c2} = 0 \\
D_{x31} &= -f_{11}(l_{2y}m_p + 3m_2y_{c2}) = 0 \\
D_{x32} &= \frac{f_{11}g_{13}m_2z_{c2}}{g_{11}} = 0 \\
D_{x33} &= \frac{f_{11}k_{12}m_2z_{c2}}{k_{11}} = 0 \\
D_{x34} &= \frac{f_{11}g_{12}m_2z_{c2}}{g_{11}} = 0
\end{aligned} \tag{5.3.20}$$

Las ecuaciones (5.3.20) constituyen las ecuaciones que se deben satisfacer para que la PPE esté balanceada estáticamente. La solución de estas ecuaciones nos permiten determinar las coordenadas de posición de las masas de los eslabones dadas por:

$$\mathbf{c}_{1i} = \begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_{2i} = \begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{bmatrix}$$

De las expresiones:

$$\begin{aligned} Const_1 &= m_p x_{03} + (m_1 + m_2)(x_{01} + x_{02} + x_{03}) + \\ &\quad \frac{m_2((2f_{11} - g_{11} - k_{11})l_{1x} - x_{01} - x_{02} + 2x_{03})y_{c2}}{l_{2y}} \\ Const_2 &= f_{11}(l_{1x}(m_2 + m_p) + m_1 x_{c1}) \\ D_{x291} &= k_{11}(l_{1x}m_2 + m_1 x_{c1}) \\ D_{x301} &= g_{11}(l_{1x}m_2 + m_1 x_{c1}) \end{aligned}$$

Podemos apreciar que la componente x_{c1} queda incluida en los términos constantes y no aparece en los coeficientes que multiplican las variables dependientes del tiempo. Para la evaluación numérica de las ecuaciones de balanceo se considera un valor de $x_{c1} = -5cm$ por conveniencia. Por otro lado aunque y_{c2} aparece en los términos constantes, no se elimina, ya que también aparece en los coeficientes dependientes del tiempo.

5.4. Ejemplo de Aplicación

Caso 1: Masa del eslabón sin alterar.

Las expresiones de balanceo de la sección anterior son aplicables para el caso en el cual la masa de los eslabones involucrados, está prescrita, es decir, la masa de los eslabones no puede ser alterada. El balanceo es alcanzado relocalizando la masa original, a partir de las coordenadas:

$$\mathbf{c}_{1i} = \begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_{2i} = \begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{bmatrix}$$

Caso 2: Masa del eslabón alterada.

Para este caso el balanceo se obtiene al considerar una mayor masa de los eslabones en relación con el original; esta diferencia permitirá añadir y localizar la masa requerida para alcanzar el balanceo. Este es el caso a analizar para la PPE.

A continuación se evalúan las ecuaciones (5.3.20). Considerando los datos (en centímetros) del prototipo propuesto en la síntesis:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{O1} &= (x_{01}, y_{01}, z_{01}) = (12,2474, 0,0041058, -8,66025) \\ \mathbf{r}_{O2} &= (x_{02}, y_{02}, z_{02}) = (-6,12372, 10,6066, -8,66025) \\ \mathbf{r}_{O3} &= (x_{03}, y_{03}, z_{03}) = (-6,12372, -10,6066, -8,66025) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (a_1, b_1, c_1) = (12,06, 0, -1,905) \\ \mathbf{r}_2 &= (a_2, b_2, c_2) = (-6,03, -10,445, -1,905) \\ \mathbf{r}_3 &= (a_3, b_3, c_3) = (-6,03, 10,445, -1,905) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1 &= (l_{1x}, l_{1y}, 0) = (-15, 16,54, 0) \\ \mathbf{l}_2 &= (l_{2x}, l_{2y}, 0) = (-16,54, 14,77, 0) \\ \mathbf{c}_p &= (x_p, y_p, z_p) = (0, 0, -1,905) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0^\circ, & \rho_2 &= 120^\circ, & \rho_3 &= 240^\circ & \delta &= 35,27^\circ \\ m_p &= 1,511582 \text{ kg}, & m_1 &= 0,135 \text{ kg}, & m_2 &= 0,149 \text{ kg} & \text{masas originales} \\ m_p &= 1,511582 \text{ kg}, & m_1 &= 0,500 \text{ kg}, & m_2 &= 0,700 \text{ kg} & \text{masas alteradas} \end{aligned}$$

Un vez evaluadas las ecuaciones en el programa desarrollado en el software Mathematica, se obtiene un sistema con 60 ecuaciones de las cuales, 51 son triviales y 9 son útiles, dichas ecuaciones lineales nos permiten determinar los valores de las coordenadas de posición requeridas.

Las ecuaciones triviales son:

$0.z_{c2} = 0$	$0.z_{c2} = 0$	$0 = 0$
$0.z_{c2} = 0$	$0.z_{c2} = 0$	$0 = 0$
$0.z_{c2} = 0$	$0.z_{c2} = 0$	$0 = 0$
$0.z_{c2} = 0$	$0.z_{c2} = 0$	$0 = 0$
$0.z_{c2} = 0$	$0.z_{c2} = 0$	$0 = 0$
$0.z_{c2} = 0$	$0.z_{c2} = 0$	$0 = 0$
$0.z_{c2} = 0$	$0.z_{c2} = 0$	$0 = 0$
$0.z_{c2} = 0$	$0 = 0$	$0 + 0.y_{c2} = 0$
$0.z_{c2} = 0$	$0 = 0$	$0 + 0.y_{c2} = 0$
$0.z_{c2} = 0$	$0 = 0$	$-0,811609z_{c2} = 0$

$-0,606361z_{c2} = 0$	$0,142936z_{c2} = 0$	$0,700215z_{c2} = 0$
$0,350107z_{c2} = 0$	$0,42875z_{c2} = 0$	$0,285873z_{c2} = 0$
$0,700215z_{c2} = 0$	$0,42875z_{c2} = 0$	$-2,10035z_{c2} = 0$
$-2,10035z_{c2} = 0$	$-1,28607z_{c2} = 0$	$-0,142936z_{c2} = 0$
$-0,606218z_{c2} = 0$	$0,8575z_{c2} = 0$	$-1,28607z_{c2} = 0$
$-0,202101z_{c2} = 0$	$0,142936z_{c2} = 0$	$0,571508z_{c2} = 0$
$-0,202101z_{c2} = 0$	$0,42875z_{c2} = 0$	$-0,285754z_{c2} = 0$

Las ecuaciones útiles son:

$$9,045 + 0,857346y_{c2} = 0 \quad (\text{E1})$$

$$-15,6675 - 1,48507y_{c2} = 0 \quad (\text{E2})$$

$$0,288715z_{c1} + 0,0000426392z_{c2} = 0 \quad (\text{E3})$$

$$6,68548 + 0,404202x_{c2} + 0,288716y_{c1} = 0 \quad (\text{E4})$$

$$-3,34274 - 0,202101x_{c2} - 0,144358y_{c1} + 0,433013z_{c1} = 0 \quad (\text{E5})$$

$$-19,1868 - 1,81865y_{c2} = 0 \quad (\text{E6})$$

$$-6,39648 - 0,606302y_{c2} - 0,285754z_{c2} = 0 \quad (\text{E7})$$

$$-0,288715(11,578 + 0,7x_{c2} + 0,5y_{c1}) + 0,433013z_{c1} = 0 \quad (\text{E8})$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}(11,578 + 0,7x_{c2} + 0,5y_{c1}) - 0,144358z_{c1} + 0,350107z_{c2} = 0 \quad (\text{E9})$$

Resolviendo las ecuaciones (E1), (E2) y (E6) se obtiene:

$$y_{c2} = -10,6315$$

Resolviendo la ecuación (E7) dando $z_{c2} = 0$:

$$y_{c2} = -10,6315$$

Resolviendo la ecuación (E3) dando $z_{c2} = 0$:

$$z_{c1} = 0$$

De las 9 ecuaciones, dos de ellas son combinaciones lineales. Estas son las ecuaciones (E4) y (E5), de (E4) tenemos:

$$6,68548 + 0,404202x_{c2} + 0,288716y_{c1} = 0$$

si evaluamos la ecuación (E5) para $z_{c1} = 0$, tenemos:

$$-3,34274 - 0,202101x_{c2} - 0,144358y_{c1} = 0$$

por lo cual al multiplicar la ecuación (E5) por (-2) , obtenemos que la ecuación (E4) y (E5) son iguales.

Resolviendo la ecuación (E4) ó (E5), (E8) y (E9) dando $z_{c1} = 0$, $z_{c2} = 0$ y $y_{c1} = -5,55$:

$$x_{c2} = -12,5757$$

Además asignamos por conveniencia:

$$x_{c1} = -5$$

Los valores finales obtenidos son:

$$\begin{aligned}x_{c1} &= -5 \\y_{c1} &= -5,55 \\z_{c1} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{c2} &= -12,5757 \\y_{c2} &= -10,6315 \\z_{c2} &= 0\end{aligned}$$

Estos valores obtenidos nos dicen como se deben distribuir las masas alteradas de la PPE. Si estas condiciones son satisfechas, el mecanismo podrá ser fijado en cualquier orientación y, por lo tanto estará balanceado para cualquier dirección del vector de gravedad.

Para las masas añadidas a los eslabones se considera la ecuación propuesta en [6]. Para calcular las coordenadas de posición y el valor de la masa del eslabón 1 (figura 5.6), se tiene el siguiente procedimiento:

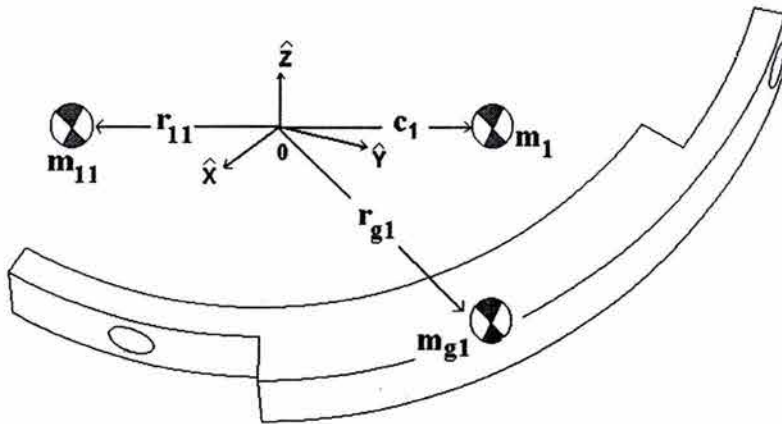


Figura 5.6. Representación de las masas.

Para el eslabón 1:

$$\begin{aligned}m_1 \mathbf{c}_1 &= m_{g1} \mathbf{r}_{g1} + m_{11} \mathbf{r}_{11} \\m_1 \begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{bmatrix} &= m_{g1} \begin{bmatrix} x_{g1} \\ y_{g1} \\ z_{g1} \end{bmatrix} + m_{11} \begin{bmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{E10})$$

además se cumple:

$$m_1 = m_{g1} + m_{11} \quad (\text{E11})$$

donde:

- m_1 = masa de balanceo
- m_{g1} = masa original del eslabón
- m_{11} = masa del contrapeso
- \mathbf{c}_1 = vector de posición de la masa de balanceo
- \mathbf{r}_{g1} = vector de posición de la masa original
- \mathbf{r}_{11} = vector de posición del contrapeso

se tiene un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas y los siguientes datos:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1 &= (-5, -5,55, 0) \\ \mathbf{r}_{g1} &= (-5,39, 9,33, 0) \\ m_1 &= 0,5 \\ m_{g1} &= 0,135\end{aligned}$$

Ejemplo 1: Calculando m_{11} , x_{11} , y_{11} , z_{11} .

De la ecuación (E10) y (E11), se tiene:

$$0,5 \begin{bmatrix} -5 \\ -5,55 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,135 \begin{bmatrix} -5,39 \\ 9,33 \\ 0 \end{bmatrix} + m_{11} \begin{bmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{bmatrix}$$

$$0,5 = 0,135 + m_{11}$$

resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned}x_{11} &= -4,85575 \text{ cm} \\ y_{11} &= -11,0536 \text{ cm} \\ z_{11} &= 0 \text{ cm} \\ m_{11} &= 0,365 \text{ kg}\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Calculando m_{11} , x_{11} , z_{11} .

De la ecuación (E10) y (E11) y dando $y_{11} = -5$, se tiene:

$$0,5 \begin{bmatrix} -5 \\ -5,55 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,135 \begin{bmatrix} -5,39 \\ 9,33 \\ 0 \end{bmatrix} + m_{11} \begin{bmatrix} x_{11} \\ -5 \\ z_{11} \end{bmatrix}$$

$$0,5 = 0,135 + m_{11}$$

resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned}x_{11} &= -2,19647 \text{ cm} \\z_{11} &= 0 \text{ cm} \\m_{11} &= 0,80691 \text{ kg}\end{aligned}$$

Ejemplo 3: Calculando x_{11} , y_{11} , z_{11}

De la ecuación (E10) y dando $m_{11} = 0,5$, se tiene:

$$0,5 \begin{bmatrix} -5 \\ -5,55 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,135 \begin{bmatrix} -5,39 \\ 9,33 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,5 \begin{bmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned}x_{11} &= -3,5447 \text{ cm} \\y_{11} &= -8,0691 \text{ cm} \\z_{11} &= 0 \text{ cm}\end{aligned}$$

Para el eslabón 2:

$$\begin{aligned}m_2 \mathbf{c}_2 &= m_{g2} \mathbf{r}_{g2} + m_{22} \mathbf{r}_{22} \\m_2 \begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{bmatrix} &= m_{g2} \begin{bmatrix} x_{g2} \\ y_{g2} \\ z_{g2} \end{bmatrix} + m_{22} \begin{bmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{E12}$$

además se cumple:

$$m_2 = m_{g2} + m_{22}\tag{E13}$$

donde:

- m_2 = masa de balanceo
- m_{g2} = masa original del eslabón
- m_{22} = masa del contrapeso
- \mathbf{c}_2 = vector de posición de la masa de balanceo
- \mathbf{r}_{g2} = vector de posición de la masa original
- \mathbf{r}_{22} = vector de posición del contrapeso

se tiene un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas y los siguientes datos:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_2 &= (-12,5757, -10,6315, 0) \\ \mathbf{r}_{g2} &= (-5,534, 9,902, 0) \\ m_2 &= 0,7 \\ m_{g2} &= 0,149\end{aligned}$$

Ejemplo 4: Calculando m_{22} , x_{22} , y_{22} , z_{22}

De la ecuación (E12) y (E13), se tiene:

$$0,7 \begin{bmatrix} -12,5757 \\ -10,6315 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,149 \begin{bmatrix} -5,534 \\ 9,902 \\ 0 \end{bmatrix} + m_{22} \begin{bmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{bmatrix}$$

$$0,7 = 0,149 + m_{22}$$

resolviendo el sistema:

$$x_{22} = -14,4799 \text{ cm}$$

$$y_{22} = -16,1841 \text{ cm}$$

$$z_{22} = 0 \text{ cm}$$

$$m_{22} = 0,551 \text{ kg}$$

Ejemplo 5: Calculando m_{22} , x_{22} , z_{22}

De la ecuación (E12) y (E13) y dando $y_{22} = -5$, se tiene:

$$0,7 \begin{bmatrix} -12,5757 \\ -10,6315 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,149 \begin{bmatrix} -5,534 \\ 9,902 \\ 0 \end{bmatrix} + m_{22} \begin{bmatrix} x_{22} \\ -5 \\ z_{22} \end{bmatrix}$$

$$0,7 = 0,149 + m_{22}$$

resolviendo el sistema:

$$x_{22} = -4,47351 \text{ cm}$$

$$z_{22} = 0 \text{ cm}$$

$$m_{22} = 1,77208 \text{ kg}$$

Ejemplo 6: Calculando x_{22} , y_{22} , z_{22}

De la ecuación (E12) y dando $m_{22} = 0,5$, se tiene:

$$0,7 \begin{bmatrix} -12,5757 \\ -10,6315 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,149 \begin{bmatrix} -5,534 \\ 9,902 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,5 \begin{bmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema:

$$x_{22} = -9,97304 \text{ cm}$$

$$y_{22} = -11,1468 \text{ cm}$$

$$z_{22} = 0 \text{ cm}$$

Con los valores obtenidos en los ejemplos anteriores, se establecen las masas a añadir y su ubicación; con el fin de lograr el balanceo.

Para comprobar de manera gráfica las coordenadas de la ubicación de la masa a añadir para los eslabones 1 y 2 obtenidas de los ejemplos 2 y 5, se realizó el siguiente modelo sólido de la PPE (figura 5.7).

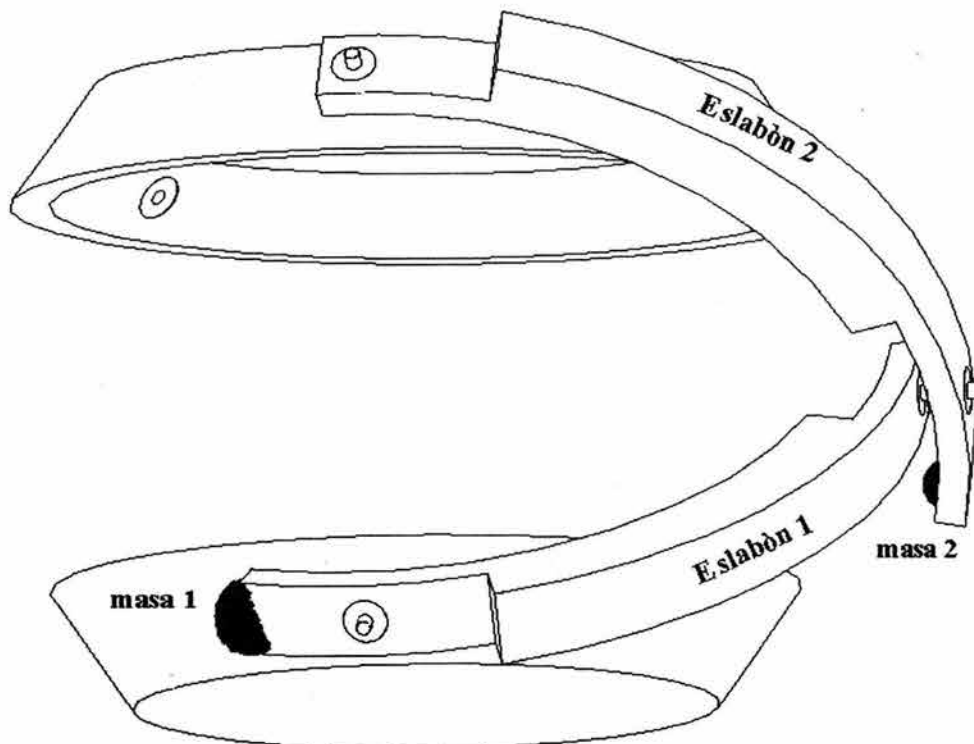


Figura 5.7. Contrapesos para el balanceo de la PPE.

Esto permite concluir que el balanceo por contrapesos logrado, con las condiciones establecidas, se cumplen de manera satisfactoria.

Otra solución puede ser el quitar masa a los eslabones en lugar de añadir, establecer otra configuración de los eslabones o realizar un balanceo por resortes.

Capítulo 6

Análisis Estático y Dinámico

6.1. Introducción

Considerando la importancia que tiene el mantener un cuerpo rígido en equilibrio estático y dinámico, en este capítulo se describe el principio de trabajo virtual empleado para el análisis cinetoestático de la PPE, así mismo se presentan los resultados obtenidos para el caso no balanceado y balanceado. Una de las finalidades principales de realizar este análisis es el poder obtener los valores de los torques requeridos para generar el movimiento de la PPE, los cuales serán transmitidos a través de motores colocados en cada una de las cadenas cinemáticas que forman la plataforma.

6.2. Método de Trabajo Virtual

El método de trabajo virtual se puede emplear para resolver problemas de equilibrio que involucran un sistema de varios cuerpos rígidos conectados, para lo cual se debe especificar el número de GDL del sistema y establecer coordenadas que definan la posición del mismo.

El principio de trabajo virtual [12], representa una gran herramienta para derivar las ecuaciones estáticas y dinámicas de sistemas de multicuerpos. A diferencia de la mecánica Newtoniana, el principio de trabajo virtual no requiere considerar las fuerzas de restricción o de reacción, y solo requiere cantidades de trabajo escalar para definir las ecuaciones estáticas y dinámicas. Este principio puede ser usado para derivar sistemáticamente un mínimo de ecuaciones de movimiento de sistemas de multicuerpos mediante la eliminación de las fuerzas de restricción.

En el uso del principio de trabajo virtual, la importancia de los conceptos de desplazamientos virtuales y fuerzas generalizadas deben ser tomadas en cuenta

y usadas para formular las fuerzas generalizadas de varios elementos de fuerza, tales como resortes, amortiguadores y fuerzas de fricción.

El principio de trabajo virtual puede ser usado para obtener un número de ecuaciones igual al número de grados de libertad del sistema, de este modo proveer un procedimiento sistemático para obtener la forma reducida de las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico.

El desplazamiento virtual es caracterizado por ser un desplazamiento infinitesimal que es consecuente con las restricciones cinemáticas impuestas sobre el movimiento del sistema. Los desplazamientos virtuales son imaginarios en el sentido que se asume que estos ocurren mientras el tiempo se mantiene fijo.

El principio de trabajo virtual [15], es escrito para un sistema de cuerpos en la forma:

$$\sum_{i=1}^n \{(\mathbf{F}_i^W - m_i \mathbf{a}_i)^T \delta \mathbf{R}_i + (\mathbf{M}_i^W - (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i))^T \delta \boldsymbol{\varphi}_i\} = 0 \quad (6.2.1)$$

donde n es el número de cuerpos, \mathbf{F}_i^W y \mathbf{M}_i^W son el efecto del trabajo resultante de fuerzas sustituidas en el centro de masa de cada cuerpo, y $\delta \mathbf{R}_i$ y $\delta \boldsymbol{\varphi}_i$ son los desplazamientos virtuales traslacional y angular del cuerpo por descomposición básica con el punto de referencia en el centro de masa. La ecuación anterior es algunas veces nombrada en la literatura como la ecuación central de la dinámica, la ecuación de D' Alembert-Lagrange o la expresión analítica del principio de D' Alembert en formulación Lagrangeana. Éste dice que un sistema de cuerpos lleva a cabo un movimiento tal, como para mantener la suma algebraica del trabajo virtual de todos los efectos de trabajo e inercia igual a cero.

Las fuerzas que producen trabajo son todas las fuerzas aplicadas, incluso las fuerzas de fricción. Los desplazamientos virtuales traslacional y angular son los cambios elementales de posición del cuerpo, estos están de acuerdo con las condiciones geométricas de restricción del cuerpo examinado, en los cuales estas condiciones no varían con respecto al tiempo.

6.3. Análisis Aplicado a la PPE

La figura 6.1 muestra una de las cadenas cinemáticas que forman la PPE; en ella se representan el torque del actuador aplicado al primer eslabón, las fuerzas y momentos inerciales de los eslabones, los pesos de cada uno de ellos, las fuerzas y momentos inerciales de la plataforma, las fuerzas y momentos externos aplicados a la plataforma móvil y el peso de la misma. También se representan vectores de posición correspondientes a cada eslabón, vectores de posición correspondientes

al plato o efector final, y vectores de posición correspondientes al centro de masa de los mismos.

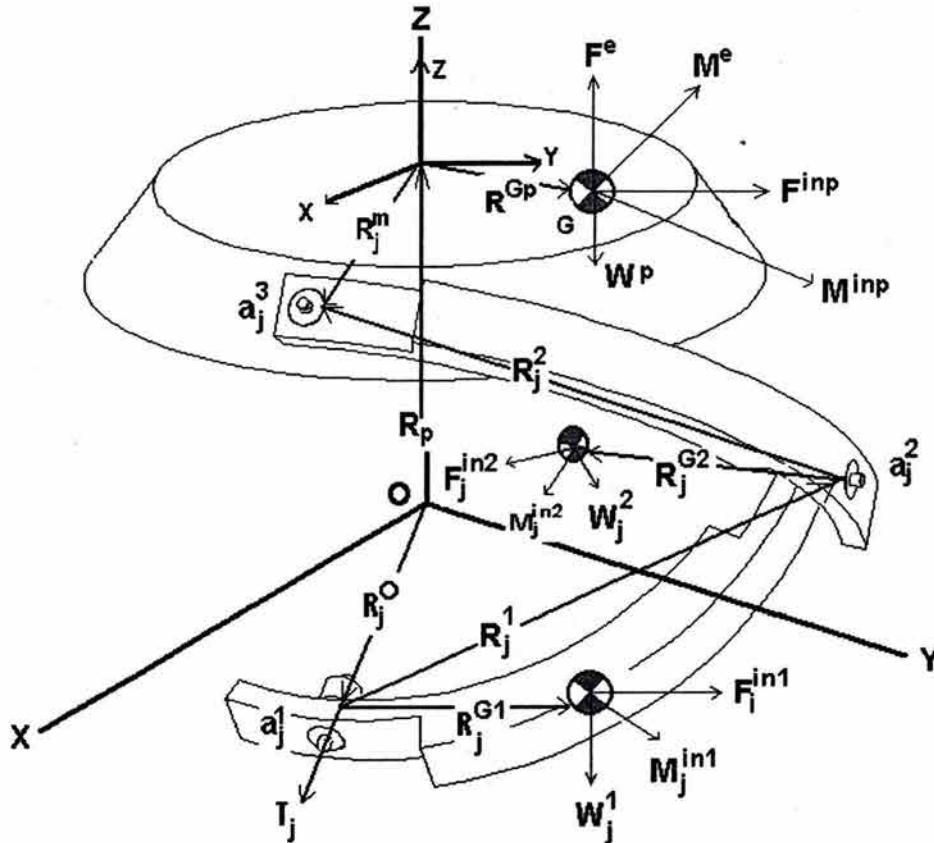


Figura 6.1. Vectores de fuerzas, momentos, pesos y de posición.

donde:

- $\mathbf{F}_j^{in1}, \mathbf{F}_j^{in2}, \mathbf{F}^{inp}$ = fuerzas inerciales de los eslabones 1,2 y de la plataforma móvil.
- $\mathbf{M}_j^{in1}, \mathbf{M}_j^{in2}, \mathbf{M}^{inp}$ = momentos inerciales de los eslabones 1,2 y de la plataforma móvil.
- $\mathbf{W}_j^1, \mathbf{W}_j^2, \mathbf{W}^p$ = pesos de los eslabones 1,2 y de la plataforma móvil
- $\mathbf{F}^e, \mathbf{M}^e$ = fuerzas y momentos externos de la plataforma móvil
- \mathbf{T}_j = torques de los actuadores
- \mathbf{R}_j^O = vector de posición del punto \mathbf{a}_j^1
- $\mathbf{R}_j^1, \mathbf{R}_j^2$ = vectores de posición de los puntos $\mathbf{a}_j^2, \mathbf{a}_j^3$
- $\mathbf{R}_j^{G1}, \mathbf{R}_j^{G2}$ = vectores de posición de los centros de masa de los eslabones 1 y 2.

\mathbf{R}^p = vector de posición del origen del sistema coordinado fijo a la plataforma.

\mathbf{R}^{Gp} = vector de posición del centro de masa respecto al sistema fijo a la plataforma.

El análisis dinámico de fuerzas (análisis cinetoestático) se obtiene a partir de la ecuación general de trabajo virtual para cada una de las cadenas cinemáticas que forman la PPE incluyendo el efector final.

$$\begin{aligned} \delta W = & \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F}_j^1)^T \delta \mathbf{R}_j^{GT1} + \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F}_j^2)^T \delta \mathbf{R}_j^{GT2} + \sum_{j=1}^3 (\mathbf{M}_j^1)^T \delta \mathbf{Q}_j^{GT1} + \sum_{j=1}^3 (\mathbf{M}_j^2)^T \delta \mathbf{Q}_j^{GT2} + \\ & (\mathbf{F}^p)^T \delta \mathbf{R}^p + (\mathbf{M}^p)^T \delta \mathbf{Q} + \sum_{j=1}^3 (\mathbf{T}_j)^T \delta \mathbf{Q}_j^1 \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

los siguientes términos están definidos en la base inercial:

$$\mathbf{F}_j^1 = \mathbf{F}_j^{in1} + \mathbf{W}_j^1 = -m_j^1 \mathbf{a}_j^{G1} + \mathbf{W}_j^1 \quad (6.3.2)$$

$$\mathbf{M}_j^1 = \mathbf{M}_j^{in1} = -([\mathbf{I}_j^{G1}] \dot{\boldsymbol{\omega}}_j^1 + \boldsymbol{\omega}_j^1 \times ([\mathbf{I}_j^{G1}] \boldsymbol{\omega}_j^1)) \quad (6.3.3)$$

$$\mathbf{F}_j^2 = \mathbf{F}_j^{in2} + \mathbf{W}_j^2 = -m_j^2 \mathbf{a}_j^{G2} + \mathbf{W}_j^2 \quad (6.3.4)$$

$$\mathbf{M}_j^2 = \mathbf{M}_j^{in2} = -([\mathbf{I}_j^{G2}] \dot{\boldsymbol{\omega}}_j^{T2} + \boldsymbol{\omega}_j^{T2} \times ([\mathbf{I}_j^{G2}] \boldsymbol{\omega}_j^{T2})) \quad (6.3.5)$$

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{inp} + \mathbf{W}^p = \mathbf{F}^e - m^p \mathbf{a}^{Gp} + \mathbf{W}^p \quad (6.3.6)$$

$$\mathbf{M}^p = \mathbf{M}^e + \mathbf{M}^{inp} + \mathbf{R}^{Gp} \times \mathbf{F}^p$$

$$\mathbf{M}^{inp} = -([\mathbf{I}^{Gp}] \dot{\boldsymbol{\omega}}^p + \boldsymbol{\omega}^p \times ([\mathbf{I}^{Gp}] \boldsymbol{\omega}^p))$$

$$\mathbf{R}^{Gp} = [\mathbf{R}_{plato}] \mathbf{r}^{Gp}$$

donde:

$$\mathbf{W}_j^1 = [0, 0, -m_j^1 g]^T$$

$$\mathbf{W}_j^2 = [0, 0, -m_j^2 g]^T$$

$$\mathbf{W}^p = [0, 0, -m^p g]^T$$

$$[\mathbf{I}_j^{G1}] = [\mathbf{R}_{1j}] [\mathbf{I}_j^{G1'}] [\mathbf{R}_{1j}]^T$$

$$[\mathbf{I}_j^{G2}] = [\mathbf{R}_{2j}] [\mathbf{I}_j^{G2'}] [\mathbf{R}_{2j}]^T$$

$$[\mathbf{I}^{Gp}] = [\mathbf{R}_{plato}] [\mathbf{I}^{Gp'}] [\mathbf{R}_{plato}]^T$$

siendo:

- $\mathbf{a}_j^{G1}, \mathbf{a}_j^{G2}, \mathbf{a}^{Gp}$ = aceleraciones de los centros de masa de los eslabones 1, 2 y del plato móvil.
 $\omega_j^1, \dot{\omega}_j^1$ = velocidad y aceleración angular de los eslabones 1
 $\omega_j^2, \dot{\omega}_j^2$ = velocidad y aceleración angular de los eslabones 2
 m_j^1, m_j^2, m^p = masas de los eslabones 1, 2 y del plato móvil
 $[\mathbf{I}_j^{G1}], [\mathbf{I}_j^{G2}], [\mathbf{I}^{Gp}]$ = inercias de los centros de masa de los eslabones 1, 2 y del plato móvil, definidos en la base inercial.
 $[\mathbf{I}_j^{G1'}], [\mathbf{I}_j^{G2'}], [\mathbf{I}_j^{Gp'}]$ = inercias de los centros de masa de los eslabones 1, 2 y del plato móvil, definidos en la base móvil o local.

6.3.1. Desarrollo de Términos

A continuación se desarrollan los desplazamientos y orientaciones virtuales de la ecuación (6.3.1).

Desarrollando $\delta \mathbf{R}_j^{GT1}$ y \mathbf{a}_j^{G1}

El vector de posición total del centro de masa de los primeros eslabones \mathbf{R}_j^{GT1} se define como:

$$\mathbf{R}_j^{GT1} = \mathbf{R}_j^O + \mathbf{R}_j^{G1} = \mathbf{R}_j^O + [\mathbf{R}_{1j}] \mathbf{r}_j^{G1} \quad (6.3.7)$$

$$[\mathbf{R}_{1j}] = [\mathbf{R}_{\rho j, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}][\mathbf{R}_{\alpha 1j, x}]$$

derivando respecto al tiempo la ecuación (6.3.7) se obtiene:

$$\dot{\mathbf{R}}_j^{GT1} = \dot{\mathbf{R}}_j^O + \dot{\mathbf{R}}_j^{G1} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \dot{\alpha}_{1j} \right) \mathbf{r}_j^{G1} \quad (6.3.8)$$

de la ecuación (6.3.8) el desplazamiento virtual correspondiente es:

$$\delta \mathbf{R}_j^{GT1} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \mathbf{r}_j^{G1} \right) \delta \alpha_{1j} \quad (6.3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] = [\mathbf{R}_{\rho j, z}][\mathbf{R}_{\delta, y}] \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{\alpha 1j, x}]$$

derivando respecto al tiempo nuevamente la ecuación (6.3.8):

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}}_j^{GT1} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_{1j}^2} [\mathbf{R}_{1j}] \dot{\alpha}_{1j}^2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \ddot{\alpha}_{1j} \right) \mathbf{r}_j^{G1} \\ \mathbf{a}_j^{G1} &= \ddot{\mathbf{R}}_j^{GT1}\end{aligned}\quad (6.3.10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha_{1j}^2} [\mathbf{R}_{1j}] = [\mathbf{R}_{\rho j, z}] [\mathbf{R}_{\delta, y}] \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{1j}^2} [\mathbf{R}_{\alpha 1j, x}]$$

Desarrollando $\delta \mathbf{R}_j^{GT2}$ y \mathbf{a}_j^{G2}

El vector de posición total del centro de masa de los segundos eslabones \mathbf{R}_j^{GT2} se define como:

$$\mathbf{R}_j^{GT2} = \mathbf{R}_j^O + \mathbf{R}_j^1 + \mathbf{R}_j^{G2} = \mathbf{R}_j^O + [\mathbf{R}_{1j}] \mathbf{r}_j^1 + [\mathbf{R}_{2j}] \mathbf{r}_j^{G2} \quad (6.3.11)$$

$$\begin{aligned}[\mathbf{R}_{1j}] &= [\mathbf{R}_{\rho j, z}] [\mathbf{R}_{\delta, y}] [\mathbf{R}_{\alpha 1j, x}] \\ [\mathbf{R}_{2j}] &= [\mathbf{R}_{\rho j, z}] [\mathbf{R}_{\delta, y}] [\mathbf{R}_{\alpha 1j, x}] [\mathbf{R}_{\beta, z}] [\mathbf{R}_{\alpha 2j, x}]\end{aligned}$$

derivando respecto al tiempo la ecuación (6.3.11) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}_j^{GT2} &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \dot{\alpha}_{1j} \right) \mathbf{r}_j^1 + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{2j}] \dot{\alpha}_{1j} + \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}} [\mathbf{R}_{2j}] \dot{\alpha}_{2j} \right) \mathbf{r}_j^{G2} \\ &= ([\mathbf{A}] \dot{\alpha}_{1j}) \mathbf{r}_j^1 + ([\mathbf{B}] \dot{\alpha}_{1j} + [\mathbf{C}] \dot{\alpha}_{2j}) \mathbf{r}_j^{G2}\end{aligned}\quad (6.3.12)$$

$$[\mathbf{A}] = \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] = [\mathbf{R}_{\rho j, z}] [\mathbf{R}_{\delta, y}] \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{\alpha 1j, x}]$$

$$[\mathbf{B}] = \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{2j}] = [\mathbf{R}_{\rho j, z}] [\mathbf{R}_{\delta, y}] \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{\alpha 1j, x}] [\mathbf{R}_{\beta, z}] [\mathbf{R}_{\alpha 2j, x}]$$

$$[\mathbf{C}] = \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}} [\mathbf{R}_{2j}] = [\mathbf{R}_{\rho j, z}] [\mathbf{R}_{\delta, y}] [\mathbf{R}_{\alpha 1j, x}] [\mathbf{R}_{\beta, z}] \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}} [\mathbf{R}_{\alpha 2j, x}]$$

de la ecuación (6.3.12) se obtiene el desplazamiento virtual correspondiente:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_j^{GT2} &= ([\mathbf{A}] \delta \alpha_{1j}) \mathbf{r}_j^1 + ([\mathbf{B}] \delta \alpha_{1j} + [\mathbf{C}] \delta \alpha_{2j}) \mathbf{r}_j^{G2} \\ &= ([\mathbf{A}] \mathbf{r}_j^1 + [\mathbf{B}] \mathbf{r}_j^{G2}) \delta \alpha_{1j} + ([\mathbf{C}] \mathbf{r}_j^{G2}) \delta \alpha_{2j} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \mathbf{r}_j^1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{2j}] \mathbf{r}_j^{G2} \right) \delta \alpha_{1j} + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}} [\mathbf{R}_{2j}] \mathbf{r}_j^{G2} \right) \delta \alpha_{2j}\end{aligned}\quad (6.3.13)$$

derivando respecto al tiempo nuevamente la ecuación (6.3.12) se obtiene:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}}_j^{GT2} &= \left(\frac{d}{dt}[\mathbf{A}]\dot{\alpha}_{1j} + [\mathbf{A}]\frac{d}{dt}\dot{\alpha}_{1j} \right) \mathbf{r}_j^1 + \\ &\quad \left(\frac{d}{dt}[\mathbf{B}]\dot{\alpha}_{1j} + [\mathbf{B}]\frac{d}{dt}\dot{\alpha}_{1j} + \frac{d}{dt}[\mathbf{C}]\dot{\alpha}_{2j} + [\mathbf{C}]\frac{d}{dt}\dot{\alpha}_{2j} \right) \mathbf{r}_j^{G2} \\ \frac{d}{dt}[\mathbf{A}] &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{A}]\dot{\alpha}_{1j} = ([\mathbf{R}_{\rho j,z}][\mathbf{R}_{\delta,y}]\frac{\partial^2}{\partial \alpha_{1j}^2}[\mathbf{R}_{\alpha 1j,x}])\dot{\alpha}_{1j} \\ \frac{d}{dt}[\mathbf{B}] &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{B}]\dot{\alpha}_{1j} + \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}}[\mathbf{B}]\dot{\alpha}_{2j} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{B}] &= [\mathbf{R}_{\rho j,z}][\mathbf{R}_{\delta,y}]\frac{\partial^2}{\partial \alpha_{1j}^2}[\mathbf{R}_{\alpha 1j,x}][\mathbf{R}_{\beta,z}][\mathbf{R}_{\alpha 2j,x}] \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}}[\mathbf{B}] &= [\mathbf{R}_{\rho j,z}][\mathbf{R}_{\delta,y}]\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{R}_{\alpha 1j,x}][\mathbf{R}_{\beta,z}]\frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}}[\mathbf{R}_{\alpha 2j,x}] \\ \frac{d}{dt}[\mathbf{C}] &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{C}]\dot{\alpha}_{1j} + \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}}[\mathbf{C}]\dot{\alpha}_{2j} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{C}] &= [\mathbf{R}_{\rho j,z}][\mathbf{R}_{\delta,y}]\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{R}_{\alpha 1j,x}][\mathbf{R}_{\beta,z}]\frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}}[\mathbf{R}_{\alpha 2j,x}] \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}}[\mathbf{C}] &= [\mathbf{R}_{\rho j,z}][\mathbf{R}_{\delta,y}][\mathbf{R}_{\alpha 1j,x}][\mathbf{R}_{\beta,z}]\frac{\partial^2}{\partial \alpha_{2j}^2}[\mathbf{R}_{\alpha 2j,x}]\end{aligned}$$

sustituyendo cada uno de los términos anteriores se tiene:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}}_j^{GT2} &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{A}]\dot{\alpha}_{1j}^2 + [\mathbf{A}]\ddot{\alpha}_{1j} \right) \mathbf{r}_j^1 + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{B}]\dot{\alpha}_{1j}^2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}}[\mathbf{B}]\dot{\alpha}_{1j}\dot{\alpha}_{2j} + [\mathbf{B}]\ddot{\alpha}_{1j} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{C}]\dot{\alpha}_{1j}\dot{\alpha}_{2j} + \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}}[\mathbf{C}]\dot{\alpha}_{2j}^2 + [\mathbf{C}]\ddot{\alpha}_{2j} \right) \mathbf{r}_j^{G2} \\ \ddot{\mathbf{R}}_j^{GT2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_{1j}^2}[\mathbf{R}_{1j}]\dot{\alpha}_{1j}^2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{R}_{1j}]\ddot{\alpha}_{1j} \right) \mathbf{r}_j^1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_{1j}^2}[\mathbf{R}_{2j}]\dot{\alpha}_{1j}^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{R}_{2j}]\right)\dot{\alpha}_{1j}\dot{\alpha}_{2j} + \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}[\mathbf{R}_{2j}]\ddot{\alpha}_{1j} + \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}}[\mathbf{R}_{2j}]\right)\dot{\alpha}_{1j}\dot{\alpha}_{2j} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{2j}^2}[\mathbf{R}_{2j}]\dot{\alpha}_{2j}^2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}}[\mathbf{R}_{2j}]\ddot{\alpha}_{2j} \right) \mathbf{r}_j^{G2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}}_j^{GT2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_{1j}^2} [\mathbf{R}_{1j}] \dot{\alpha}_{1j}^2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \ddot{\alpha}_{1j} \right) \mathbf{r}_j^1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_{1j}^2} [\mathbf{R}_{2j}] \dot{\alpha}_{1j}^2 + \right. \\
&\quad \left. 2 \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{2j}] \right) \dot{\alpha}_{1j} \dot{\alpha}_{2j} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{2j}^2} [\mathbf{R}_{2j}] \dot{\alpha}_{2j}^2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}} [\mathbf{R}_{2j}] \ddot{\alpha}_{2j} \right) \mathbf{r}_j^{G2} \\
\mathbf{a}_j^{G2} &= \ddot{\mathbf{R}}_j^{GT2} \tag{6.3.14}
\end{aligned}$$

Desarrollando $\delta \mathbf{R}^p$ y \mathbf{a}^{Gp}

El vector de posición desde el origen del sistema coordenado fijo al sistema coordenado móvil de la plataforma, \mathbf{R}^p se define como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^p &= [\mathbf{R}_{plato}] \mathbf{r}^p \tag{6.3.15} \\
\mathbf{r}^p &= \mathbf{r}^p \mathbf{k} \\
[\mathbf{R}_{plato}] &= [\mathbf{R}_{\psi,z}] [\mathbf{R}_{\theta,x}] [\mathbf{R}_{\phi,z}]
\end{aligned}$$

derivando respecto al tiempo la ecuación (6.3.15) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{R}}^p &= \left(\frac{\partial}{\partial \psi} [\mathbf{R}_{plato}] \dot{\psi} + \frac{\partial}{\partial \theta} [\mathbf{R}_{plato}] \dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} [\mathbf{R}_{plato}] \dot{\phi} \right) \mathbf{r}^p \\
&= ([\mathbf{A}^p] \dot{\psi} + [\mathbf{B}^p] \dot{\theta} + [\mathbf{C}^p] \dot{\phi}) \mathbf{r}^p \tag{6.3.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}^p] &= \frac{\partial}{\partial \psi} [\mathbf{R}_{plato}] = \frac{\partial}{\partial \psi} [\mathbf{R}_{\psi,z}] [\mathbf{R}_{\theta,x}] [\mathbf{R}_{\phi,z}] \\
[\mathbf{B}^p] &= \frac{\partial}{\partial \theta} [\mathbf{R}_{plato}] = [\mathbf{R}_{\psi,z}] \frac{\partial}{\partial \theta} [\mathbf{R}_{\theta,x}] [\mathbf{R}_{\phi,z}] \\
[\mathbf{C}^p] &= \frac{\partial}{\partial \phi} [\mathbf{R}_{plato}] = [\mathbf{R}_{\psi,z}] [\mathbf{R}_{\theta,x}] \frac{\partial}{\partial \phi} [\mathbf{R}_{\phi,z}]
\end{aligned}$$

de la ecuación (6.3.16) se obtiene el desplazamiento virtual correspondiente:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}^p &= ([\mathbf{A}^p] \delta \psi + [\mathbf{B}^p] \delta \theta + [\mathbf{C}^p] \delta \phi) \mathbf{r}^p \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \psi} [\mathbf{R}_{plato}] \mathbf{r}^p \right) \delta \psi + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} [\mathbf{R}_{plato}] \mathbf{r}^p \right) \delta \theta + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} [\mathbf{R}_{plato}] \mathbf{r}^p \right) \delta \phi \\
&= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \delta \psi + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \delta \theta + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \delta \phi \\
&= \begin{bmatrix} x_1 \delta \psi + x_2 \delta \theta + x_3 \delta \phi \\ y_1 \delta \psi + y_2 \delta \theta + y_3 \delta \phi \\ z_1 \delta \psi + z_2 \delta \theta + z_3 \delta \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \delta \theta \\ \delta \phi \end{bmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial \psi} [\mathbf{R}_{plato}] \mathbf{r}^p \quad \frac{\partial}{\partial \theta} [\mathbf{R}_{plato}] \mathbf{r}^p \quad \frac{\partial}{\partial \phi} [\mathbf{R}_{plato}] \mathbf{r}^p \right] \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \delta \theta \\ \delta \phi \end{bmatrix} \\
\delta \mathbf{R}^p &= [\mathbf{D}_p] \delta \mathbf{p} \tag{6.3.17}
\end{aligned}$$

siendo:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \psi \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \delta \theta \\ \delta \phi \end{bmatrix}$$

derivando respecto al tiempo nuevamente la ecuación (6.3.16) se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{R}}^p = \left(\frac{d}{dt}[\mathbf{A}^p] \dot{\psi} + [\mathbf{A}^p] \frac{d}{dt} \dot{\psi} + \frac{d}{dt}[\mathbf{B}^p] \dot{\theta} + [\mathbf{B}^p] \frac{d}{dt} \dot{\theta} + \frac{d}{dt}[\mathbf{C}^p] \dot{\phi} + [\mathbf{C}^p] \frac{d}{dt} \dot{\phi} \right) \mathbf{r}^p \quad (6.3.18)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}^p] = \frac{\partial}{\partial \psi}[\mathbf{A}^p] \dot{\psi} + \frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{A}^p] \dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{A}^p] \dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{B}^p] = \frac{\partial}{\partial \psi}[\mathbf{B}^p] \dot{\psi} + \frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{B}^p] \dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{B}^p] \dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{C}^p] = \frac{\partial}{\partial \psi}[\mathbf{C}^p] \dot{\psi} + \frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{C}^p] \dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{C}^p] \dot{\phi}$$

sustituyendo cada uno de los términos en la ecuación (6.3.18), se tiene:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}^p = & \left(\left(\frac{\partial}{\partial \psi}[\mathbf{A}^p] \dot{\psi}^2 + \frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{A}^p] \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{A}^p] \dot{\phi} \dot{\psi} \right) + [\mathbf{A}^p] \ddot{\psi} + \right. \\ & \left(\frac{\partial}{\partial \psi}[\mathbf{B}^p] \dot{\psi} \dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{B}^p] \dot{\theta}^2 + \frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{B}^p] \dot{\phi} \dot{\theta} \right) + [\mathbf{B}^p] \ddot{\theta} + \\ & \left. \left(\frac{\partial}{\partial \psi}[\mathbf{C}^p] \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{C}^p] \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{C}^p] \dot{\phi}^2 \right) + [\mathbf{C}^p] \ddot{\phi} \right) \mathbf{r}^p \end{aligned}$$

extrayendo los términos semejantes:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{A}^p] = \frac{\partial}{\partial \psi}[\mathbf{R}_{\psi,z}] \frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{R}_{\theta,x}] [\mathbf{R}_{\phi,z}]$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi}[\mathbf{B}^p] = \frac{\partial}{\partial \psi}[\mathbf{R}_{\psi,z}] \frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{R}_{\theta,x}] [\mathbf{R}_{\phi,z}]$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{A}^p] = \frac{\partial}{\partial \psi}[\mathbf{R}_{\psi,z}] [\mathbf{R}_{\theta,x}] \frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{R}_{\phi,z}]$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{C}^p] = \frac{\partial}{\partial \psi}[\mathbf{R}_{\psi,z}] [\mathbf{R}_{\theta,x}] \frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{R}_{\phi,z}]$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{B}^p] = [\mathbf{R}_{\psi,z}] \frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{R}_{\theta,x}] \frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{R}_{\phi,z}]$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{C}^p] = [\mathbf{R}_{\psi,z}] \frac{\partial}{\partial \theta}[\mathbf{R}_{\theta,x}] \frac{\partial}{\partial \phi}[\mathbf{R}_{\phi,z}]$$

finalmente:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}^P &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial \psi} [\mathbf{A}^P] \dot{\psi}^2 + \frac{\partial}{\partial \theta} [\mathbf{B}^P] \dot{\theta}^2 + \frac{\partial}{\partial \phi} [\mathbf{C}^P] \dot{\phi}^2 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \psi} [\mathbf{A}^P] \ddot{\psi} + \frac{\partial}{\partial \theta} [\mathbf{B}^P] \ddot{\theta} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial}{\partial \phi} [\mathbf{C}^P] \ddot{\phi} \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} [\mathbf{A}^P] \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{\partial}{\partial \phi} [\mathbf{A}^P] \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{\partial}{\partial \phi} [\mathbf{B}^P] \dot{\phi} \dot{\theta} \right) \right) \mathbf{r}^P \\ \mathbf{a}^{G^P} &= \ddot{\mathbf{R}}^P \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

Desarrollando $\omega_j^1, \dot{\omega}_j^1$ y δQ_j^{GT1}

El vector de velocidad angular del cuerpo 1, ω_j^1 se define como:

$$\omega_j^1 = \omega_j^1 \mathbf{x}_{1j} = \dot{\alpha}_{1j} \mathbf{x}_{1j} = \dot{\alpha}_{1j} ([\mathbf{R}_{\rho j, z}] [\mathbf{R}_{\delta, y}] \mathbf{x}) \quad (6.3.20)$$

La derivada respecto al tiempo de un vector se escribe como:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = (\dot{\mathbf{A}})_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

por lo tanto la aceleración angular $\dot{\omega}_j^1$ se escribe como:

$$\dot{\omega}_j^1 = (\dot{\omega}_j^1)_r + \mathbf{0} \times \omega_j^1 = \dot{\omega}_j^1 \mathbf{x}_{1j} = \ddot{\alpha}_{1j} \mathbf{x}_{1j} \quad (6.3.21)$$

considerando la fórmula sobre desplazamientos virtuales dado en [7], se tiene:

$$\begin{aligned} \delta \theta_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \\ \delta Q_j^{GT1} &= \frac{\partial \omega_j^1}{\partial \dot{\alpha}_{1j}} \delta \alpha_{1j} = \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_{1j}} (\dot{\alpha}_{1j} \mathbf{x}_{1j}) \delta \alpha_{1j} \\ \delta Q_j^{GT1} &= \mathbf{x}_{1j} \delta \alpha_{1j} \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

Desarrollando $\omega_j^{T2}, \dot{\omega}_j^{T2}$ y δQ_j^{GT2}

El vector de velocidad angular total del cuerpo 2, ω_j^{T2} se define como:

$$\begin{aligned} \omega_j^{T2} &= \omega_j^1 + \omega_j^2 = \omega_j^1 \mathbf{x}_{1j} + \omega_j^2 \mathbf{x}_{2j} \\ &= \dot{\alpha}_{1j} \mathbf{x}_{1j} + \dot{\alpha}_{2j} \mathbf{x}_{2j} \\ &= \dot{\alpha}_{1j} ([\mathbf{R}_{\rho j, z}] [\mathbf{R}_{\delta, y}] \mathbf{x}) + \dot{\alpha}_{2j} ([\mathbf{R}_{\rho j, z}] [\mathbf{R}_{\delta, y}] [\mathbf{R}_{\alpha 1, x}] [\mathbf{R}_{\beta, z}] \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

y su aceleración angular $\dot{\omega}_j^{T2}$ como:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_j^{T2} &= (\dot{\omega}_j^1)_r + \mathbf{0} \times \omega_j^1 + (\dot{\omega}_j^2)_r + (\omega_j^1) \times (\omega_j^2) \\ &= \dot{\omega}_j^1 \mathbf{x}_{1j} + \dot{\omega}_j^2 \mathbf{x}_{2j} + (\omega_j^1 \mathbf{x}_{1j}) \times (\omega_j^2 \mathbf{x}_{2j}) \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

considerando la fórmula sobre desplazamiento virtuales angulares, se tiene:

$$\begin{aligned}\delta Q_j^{GT2} &= \frac{\partial \omega_j^{T2}}{\partial \dot{\alpha}_{1j}} \delta \alpha_{1j} + \frac{\partial \omega_j^{T2}}{\partial \dot{\alpha}_{2j}} \delta \alpha_{2j} \\ \delta Q_j^{GT2} &= \mathbf{x}_{1j} \delta \alpha_{1j} + \mathbf{x}_{2j} \delta \alpha_{2j}\end{aligned}\quad (6.3.25)$$

Desarrollando $\omega^p, \dot{\omega}^p$ y δQ

El vector de velocidad angular ω^p se define como:

$$\begin{aligned}\omega^p &= \omega_\psi + \omega_\theta + \omega_\phi = \omega_\psi \mathbf{z} + \omega_\theta \mathbf{x}_{p1} + \omega_\phi \mathbf{z}_{p2} \\ &= \dot{\psi} \mathbf{z} + \dot{\theta} \mathbf{x}_{p1} + \dot{\phi} \mathbf{z}_{p2} \\ &= \dot{\psi} \mathbf{z} + \dot{\theta} ([\mathbf{R}_{\psi,z}] \mathbf{x}) + \dot{\phi} ([\mathbf{R}_{\psi,z}] [\mathbf{R}_{\theta,x}] \mathbf{z})\end{aligned}\quad (6.3.26)$$

derivando respecto al tiempo (6.3.26) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}^p &= \frac{d}{dt} \omega_\psi + \frac{d}{dt} \omega_\theta + \frac{d}{dt} \omega_\phi \\ &= (\dot{\omega}_\psi)_r + \mathbf{0} \times \omega_\psi + (\dot{\omega}_\theta)_r + \omega_\psi \times \omega_\theta + (\dot{\omega}_\phi)_r + (\omega_\psi + \omega_\theta) \times \omega_\phi \\ &= \ddot{\psi} \mathbf{z} + \ddot{\theta} \mathbf{x}_{p1} + (\dot{\psi} \mathbf{z}) \times (\dot{\theta} \mathbf{x}_{p1}) + \ddot{\phi} \mathbf{z}_{p2} + (\dot{\psi} \mathbf{z} + \dot{\theta} \mathbf{x}_{p1}) \times (\dot{\phi} \mathbf{z}_{p2})\end{aligned}\quad (6.3.27)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\delta Q &= \left(\frac{\partial \omega^p}{\partial \dot{\psi}} \delta \psi + \frac{\partial \omega^p}{\partial \dot{\theta}} \delta \theta + \frac{\partial \omega^p}{\partial \dot{\phi}} \delta \phi \right) \\ &= \mathbf{z} \delta \psi + \mathbf{x}_{p1} \delta \theta + \mathbf{z}_{p2} \delta \phi \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{z} & \mathbf{x}_{p1} & \mathbf{z}_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \delta \theta \\ \delta \phi \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{E}_p] \delta \mathbf{p}\end{aligned}\quad (6.3.28)$$

Como se demostrará más tarde se tiene:

$$\delta Q = [\mathbf{E}_1]^{-1} \quad (6.3.29)$$

sustituyendo en (6.3.28):

$$\begin{aligned}\delta Q &= [\mathbf{E}_p][\mathbf{E}_1]^{-1} \delta \alpha^1 \\ &= [\mathbf{E}_5] \delta \alpha^1\end{aligned}$$

Desarrollando $(\mathbf{T}_j)^T \delta \mathbf{Q}_j^1$

A partir de la definición del producto punto:

$$(\mathbf{c}\mathbf{u})^T(d\mathbf{v}) = cd(\mathbf{u})^T(\mathbf{v}) \quad (6.3.30)$$

y considerando que:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_j &= T_j \mathbf{x}_{1j} \\ \delta \mathbf{Q}_j^1 &= \delta \alpha_{1j} \mathbf{x}_{1j} \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_j)^T \delta \mathbf{Q}_j^1 &= (T_j \mathbf{x}_{1j})^T (\delta \alpha_{1j} \mathbf{x}_{1j}) = (T_j \delta \alpha_{1j}) (\mathbf{x}_{1j}^T \mathbf{x}_{1j}) \\ &= T_j \delta \alpha_{1j} \end{aligned} \quad (6.3.32)$$

6.3.2. Matrices de Transformación

A partir de la cinemática, capítulo 4, ecuaciones (4.3.16) y (4.3.20), se pueden asociar las velocidades angulares de los eslabones 1 y 2 dados por α_{1n} y α_{2n} , al movimiento de la plataforma dados por ψ , θ y ϕ :

$$\dot{\alpha}_{1j} = -\left(\frac{1}{V_{1j}}\right) \left(\dot{\psi}(V_{2j}) + \dot{\theta}(V_{3j}) + \dot{\phi}(V_{4j}) \right) \quad (6.3.33)$$

$$\dot{\alpha}_{2j} = -\left(\frac{1}{V_{5j}}\right) \left(\dot{\alpha}_{1j}V_{6j} + \dot{\psi}V_{7j} + \dot{\theta}V_{8j} \right) \quad (6.3.34)$$

De la ecuación (6.3.33), para $j = 1, 2, 3$, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{11} &= -\frac{1}{V_{11}}(V_{21}\dot{\psi} + V_{31}\dot{\theta} + V_{41}\dot{\phi}) \\ \dot{\alpha}_{12} &= -\frac{1}{V_{12}}(V_{22}\dot{\psi} + V_{32}\dot{\theta} + V_{42}\dot{\phi}) \\ \dot{\alpha}_{13} &= -\frac{1}{V_{13}}(V_{23}\dot{\psi} + V_{33}\dot{\theta} + V_{43}\dot{\phi}) \end{aligned}$$

matricialmente se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{11} \\ \dot{\alpha}_{12} \\ \dot{\alpha}_{13} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{V_{21}}{V_{11}} & -\frac{V_{31}}{V_{11}} & -\frac{V_{41}}{V_{11}} \\ -\frac{V_{22}}{V_{12}} & -\frac{V_{32}}{V_{12}} & -\frac{V_{42}}{V_{12}} \\ -\frac{V_{23}}{V_{13}} & -\frac{V_{33}}{V_{13}} & -\frac{V_{43}}{V_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}^1 &= [\mathbf{E}_1] \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= [\mathbf{E}_1]^{-1} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^1 \end{aligned} \quad (6.3.35)$$

donde:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\alpha}}^1 &= \left[\dot{\alpha}_{11}, \dot{\alpha}_{12}, \dot{\alpha}_{13} \right]^T \\ \dot{\mathbf{p}} &= \left[\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi} \right]^T \\ [\mathbf{E}_1] &= \begin{bmatrix} -\frac{V_{21}}{V_{11}} & -\frac{V_{31}}{V_{11}} & -\frac{V_{41}}{V_{11}} \\ -\frac{V_{22}}{V_{11}} & -\frac{V_{32}}{V_{11}} & -\frac{V_{42}}{V_{11}} \\ -\frac{V_{23}}{V_{11}} & -\frac{V_{33}}{V_{11}} & -\frac{V_{43}}{V_{11}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

en función de los desplazamientos virtuales:

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{\alpha}^1 &= [\mathbf{E}_1] \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{p} &= [\mathbf{E}_1]^{-1} \delta \boldsymbol{\alpha}^1\end{aligned}\tag{6.3.36}$$

donde:

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{\alpha}^1 &= \left[\delta \alpha_{11}, \delta \alpha_{12}, \delta \alpha_{13} \right]^T \\ \delta \mathbf{p} &= \left[\delta \psi, \delta \theta, \delta \phi \right]^T\end{aligned}$$

De la misma manera de la ecuación (6.3.34), para $j = 1, 2, 3$, se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{21} &= -\frac{1}{V_{51}}(V_{61}\dot{\alpha}_{11} + V_{71}\dot{\psi} + V_{81}\dot{\theta}) \\ \dot{\alpha}_{22} &= -\frac{1}{V_{52}}(V_{62}\dot{\alpha}_{12} + V_{72}\dot{\psi} + V_{82}\dot{\theta}) \\ \dot{\alpha}_{23} &= -\frac{1}{V_{53}}(V_{63}\dot{\alpha}_{13} + V_{73}\dot{\psi} + V_{83}\dot{\theta})\end{aligned}$$

matricialmente se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{21} \\ \dot{\alpha}_{22} \\ \dot{\alpha}_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{V_{61}}{V_{51}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{V_{62}}{V_{52}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{V_{63}}{V_{53}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{11} \\ \dot{\alpha}_{12} \\ \dot{\alpha}_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{V_{71}}{V_{51}} & -\frac{V_{81}}{V_{51}} & 0 \\ -\frac{V_{72}}{V_{52}} & -\frac{V_{82}}{V_{52}} & 0 \\ -\frac{V_{73}}{V_{53}} & -\frac{V_{83}}{V_{53}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}^2 &= [\mathbf{E}_2]\dot{\boldsymbol{\alpha}}^1 + [\mathbf{E}_3]\dot{\mathbf{p}} \\ &= [\mathbf{E}_2]\dot{\boldsymbol{\alpha}}^1 + [\mathbf{E}_3][\mathbf{E}_1]^{-1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}^1 \\ &= ([\mathbf{E}_2] + [\mathbf{E}_3][\mathbf{E}_1]^{-1})\dot{\boldsymbol{\alpha}}^1 \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}^2 &= [\mathbf{E}_4]\dot{\boldsymbol{\alpha}}^1\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\alpha}}^2 &= \left[\dot{\alpha}_{21}, \dot{\alpha}_{22}, \dot{\alpha}_{23} \right]^T \\ [\mathbf{E}_2] &= \begin{bmatrix} -\frac{V_{61}}{V_{51}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{V_{62}}{V_{52}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{V_{63}}{V_{53}} \end{bmatrix} \\ [\mathbf{E}_3] &= \begin{bmatrix} -\frac{V_{71}}{V_{51}} & -\frac{V_{81}}{V_{51}} & 0 \\ -\frac{V_{72}}{V_{52}} & -\frac{V_{82}}{V_{52}} & 0 \\ -\frac{V_{73}}{V_{53}} & -\frac{V_{83}}{V_{53}} & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{E}_4] &= [\mathbf{E}_2] + [\mathbf{E}_3][\mathbf{E}_1]^{-1}\end{aligned}$$

y su desplazamiento virtual se define como:

$$\delta \boldsymbol{\alpha}^2 = [\mathbf{E}_4] \delta \boldsymbol{\alpha}^1 \quad (6.3.37)$$

$$\delta \boldsymbol{\alpha}^2 = \left[\delta \alpha_{21}, \delta \alpha_{22}, \delta \alpha_{23} \right]^T$$

Retomando de nuevo la ecuación general de trabajo virtual (6.3.1) y sustituyendo los términos (6.3.9), (6.3.13), (6.3.17), (6.3.22), (6.3.25), (6.3.29) y (6.3.32), se tiene:

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F}_j^1)^T \delta \mathbf{R}_j^{GT1} + \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F}_j^2)^T \delta \mathbf{R}_j^{GT2} + \sum_{j=1}^3 (\mathbf{M}_j^1)^T \delta \mathbf{Q}_j^{GT1} + \sum_{j=1}^3 (\mathbf{M}_j^2)^T \delta \mathbf{Q}_j^{GT2} + \\ &\quad \sum_{j=1}^3 (\mathbf{T}_j)^T \delta \mathbf{Q}_j^1 + (\mathbf{F}^p)^T \delta \mathbf{R}^p + (\mathbf{M}^p)^T \delta \mathbf{Q} \\ &= \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F}_j^1)^T \left(\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \mathbf{r}_j^{G1} \right) \delta \alpha_{1j} \right) + \\ &\quad \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F}_j^2)^T \left(\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \mathbf{r}_j^1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{2j}] \mathbf{r}_j^{G2} \right) \delta \alpha_{1j} + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}} [\mathbf{R}_{2j}] \mathbf{r}_j^{G2} \right) \delta \alpha_{2j} \right) + \\ &\quad \sum_{j=1}^3 (\mathbf{M}_j^1)^T (\mathbf{x}_{1j}) \delta \alpha_{1j} + \sum_{j=1}^3 (\mathbf{M}_j^2)^T (\mathbf{x}_{1j} \delta \alpha_{1j} + \mathbf{x}_{2j} \delta \alpha_{2j}) + \\ &\quad \sum_{j=1}^3 T_j \delta \alpha_{1j} + (\mathbf{F}^p)^T ([\mathbf{D}_p] \delta \mathbf{p}) + (\mathbf{M}^p)^T ([\mathbf{E}_5] \delta \boldsymbol{\alpha}^1)\end{aligned}$$

simplificando:

$$\delta W =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \left[(\mathbf{F}_j^1)^T \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \mathbf{r}_j^{G1} \right) + (\mathbf{F}_j^2)^T \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \mathbf{r}_j^1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{2j}] \mathbf{r}_j^{G2} \right) + (\mathbf{M}_j^1 + \mathbf{M}_j^2)^T (\mathbf{x}_{1j}) \right] \delta \alpha_{1j} + \\ & \sum_{j=1}^3 T_j \delta \alpha_{1j} + \sum_{j=1}^3 \left[(\mathbf{F}_j^2)^T \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}} [\mathbf{R}_{2j}] \mathbf{r}_j^{G2} \right) + (\mathbf{M}_j^2)^T (\mathbf{x}_{2j}) \right] \delta \alpha_{2j} + \\ & (\mathbf{F}^p)^T ([\mathbf{D}_p][\mathbf{E}_1]^{-1}) \delta \boldsymbol{\alpha}^1 + (\mathbf{M}^p)^T ([\mathbf{E}_5]) \delta \boldsymbol{\alpha}^1 \end{aligned}$$

asignando nuevos términos:

$$H_{1j} = (\mathbf{F}_j^1)^T \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \mathbf{r}_j^{G1} \right) + (\mathbf{F}_j^2)^T \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{1j}] \mathbf{r}_j^1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_{1j}} [\mathbf{R}_{2j}] \mathbf{r}_j^{G2} \right) + (\mathbf{M}_j^1 + \mathbf{M}_j^2)^T (\mathbf{x}_{1j})$$

$$H_{2j} = (\mathbf{F}_j^2)^T \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{2j}} [\mathbf{R}_{2j}] \mathbf{r}_j^{G2} \right) + (\mathbf{M}_j^2)^T (\mathbf{x}_{2j})$$

$$\mathbf{H}_3 = (\mathbf{F}^p)^T ([\mathbf{D}_p][\mathbf{E}_1]^{-1}) + (\mathbf{M}^p)^T [\mathbf{E}_5]$$

introduciendo los términos y simplificando aún más:

$$\delta W = \sum_{j=1}^3 H_{1j} \delta \alpha_{1j} + \sum_{j=1}^3 H_{2j} \delta \alpha_{2j} + \mathbf{H}_3 \delta \boldsymbol{\alpha}^1 + \sum_{j=1}^3 T_j \delta \alpha_{1j}$$

$$\delta W = (\mathbf{H}^1)^T \delta \boldsymbol{\alpha}^1 + (\mathbf{H}^2)^T \delta \boldsymbol{\alpha}^2 + \mathbf{H}^3 \delta \boldsymbol{\alpha}^1 + \mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\alpha}^1$$

$$\delta W = (\mathbf{H}^1)^T \delta \boldsymbol{\alpha}^1 + (\mathbf{H}^2)^T [\mathbf{E}_4] \delta \boldsymbol{\alpha}^1 + \mathbf{H}^3 \delta \boldsymbol{\alpha}^1 + \mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\alpha}^1$$

donde:

$$\mathbf{H}^1 = [H_{11}, H_{12}, H_{13}]^T$$

$$\mathbf{H}^2 = [H_{21}, H_{22}, H_{23}]^T$$

$$\mathbf{T} = [T_1, T_2, T_3]^T$$

finalmente:

$$\delta W = ((\mathbf{H}^1)^T + (\mathbf{H}^2)^T [\mathbf{E}_4] + \mathbf{H}^3 + \mathbf{T}^T) \delta \boldsymbol{\alpha}^1$$

$$\delta W = ((\mathbf{H}^1)^T + (\mathbf{H}^2)^{T'} + \mathbf{H}^3 + \mathbf{T}^T) \delta \boldsymbol{\alpha}^1$$

$$\delta W = (\mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^{2'} + (\mathbf{H}^3)^T + \mathbf{T})^T \delta \boldsymbol{\alpha}^1$$

Para el equilibrio dinámico [12] se requiere que $\delta W = 0$, ya que $\delta \boldsymbol{\alpha}^1 \neq \mathbf{0}$, entonces tenemos que:

$$\mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^{2'} + (\mathbf{H}^3)^T + \mathbf{T} = \mathbf{0}$$

de donde:

$$\mathbf{T} = - (\mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^{2'} + (\mathbf{H}^3)^T) \quad (6.3.38)$$

la cual es la ecuación que nos permite determinar el valor de los torques en cada una de las cadenas cinemáticas que forman la PPE.

6.4. Análisis Estático

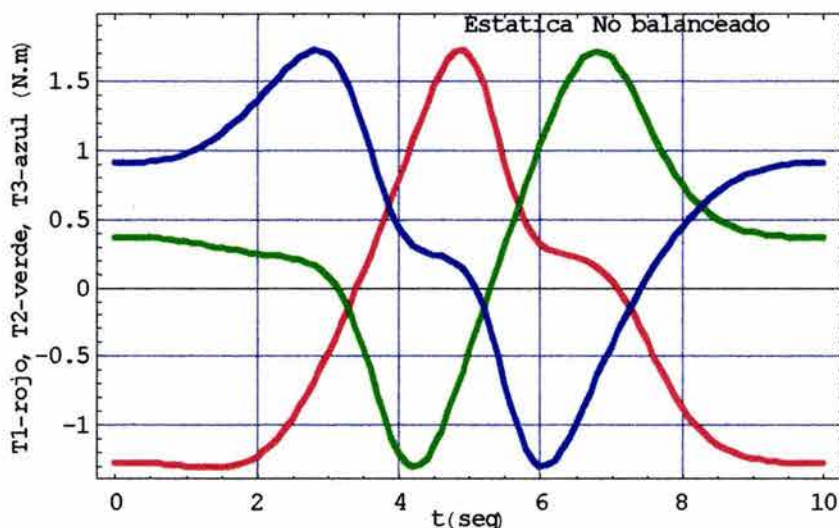
6.4.1. Para el Caso No Balanceado

Para este análisis se requieren los datos obtenidos de la síntesis y del modelo sólido realizado de la PPE, las masas se dan en kilogramos y las magnitudes de los vectores de posición en metros:

Masa del eslabón 1	=	0,135
Masa del eslabón 2	=	0,149
Masa del plato o efector final	=	1,511582
Vector de posición del eslabón 1	=	(-0,15, 0,1654, 0)
Vector de posición del eslabón 2	=	(-0,1654, 0,1477, 0)
Vector de posición del centro de masa del eslabón 1	=	(-0,0539, 0,0933, 0)
Vector de posición del centro de masa del eslabón 2	=	(-0,05534, 0,09902, 0)
Vector de posición del centro de masa del plato	=	(0, 0, -0,01905)
Vector de posición de la base inercial-base del plato	=	(0,0002, 0,00001, 0,10451)

Con los datos anteriores se procede a realizar la sustitución de los valores en la ecuación (6.3.38), y se obtienen los valores de los torques para el caso no balanceado de la PPE, para cada una de las cadenas cinemáticas que la forman.

La siguiente gráfica 6.4.1, muestra la comparación de los torques en las 3 cadenas cinemáticas que forman la PPE obtenidos en el sistema no balanceado estáticamente.



Gráfica 6.4.1. Comparación de los torques.

Siendo T1 el torque en la cadena 1, T2 el torque en la cadena 2 y T3 el torque en la cadena 3, respectivamente.

6.4.2. Para el Caso Balanceado

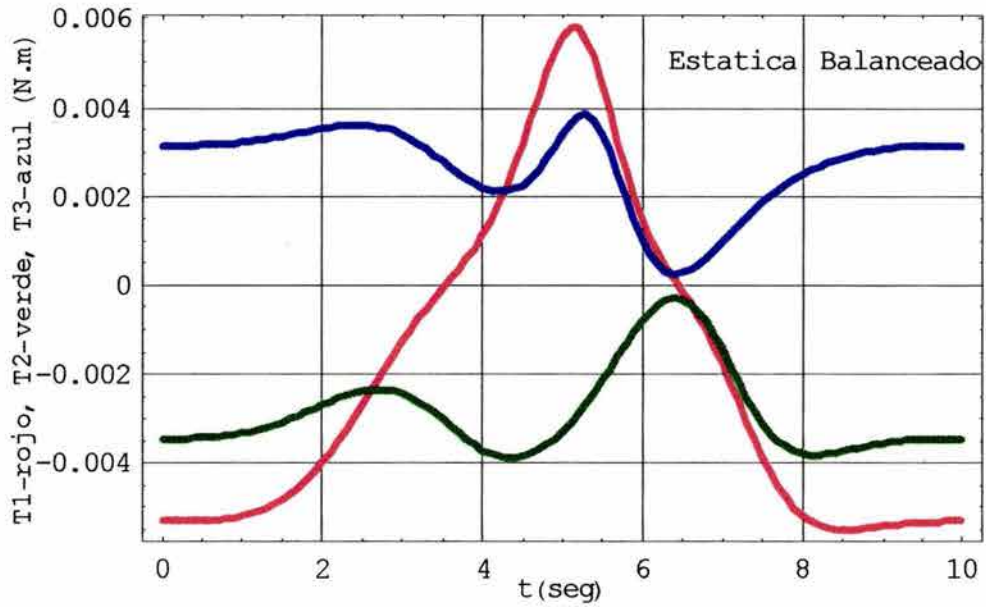
Considerando el procedimiento ya descrito se indican ahora los nuevos datos; los cuales se obtuvieron del análisis de balanceo y del modelo sólido realizado de la PPE:

$$\begin{aligned} \text{Masa del eslabón 1} &= 0,5 \\ \text{Masa del eslabón 2} &= 0,7 \\ \text{Masa del plato o efector final} &= 1,511582 \\ \text{Vector de posición del eslabón 1} &= (-0,15, 0,1654, 0) \\ \text{Vector de posición del eslabón 2} &= (-0,16,54, 0,1477, 0) \\ \text{Vector de posición del centro de masa del eslabón 1} &= (-0,05, -0,0555, 0) \\ \text{Vector de posición del centro de masa del eslabón 2} &= (-0,125757, -0,106315, 0) \\ \text{Vector de posición del centro de masa del plato} &= (0, 0, -0,01905) \\ \text{Vector de posición de la base inercial-base del plato} &= (0,0002, 0,00001, 0,10451) \end{aligned}$$

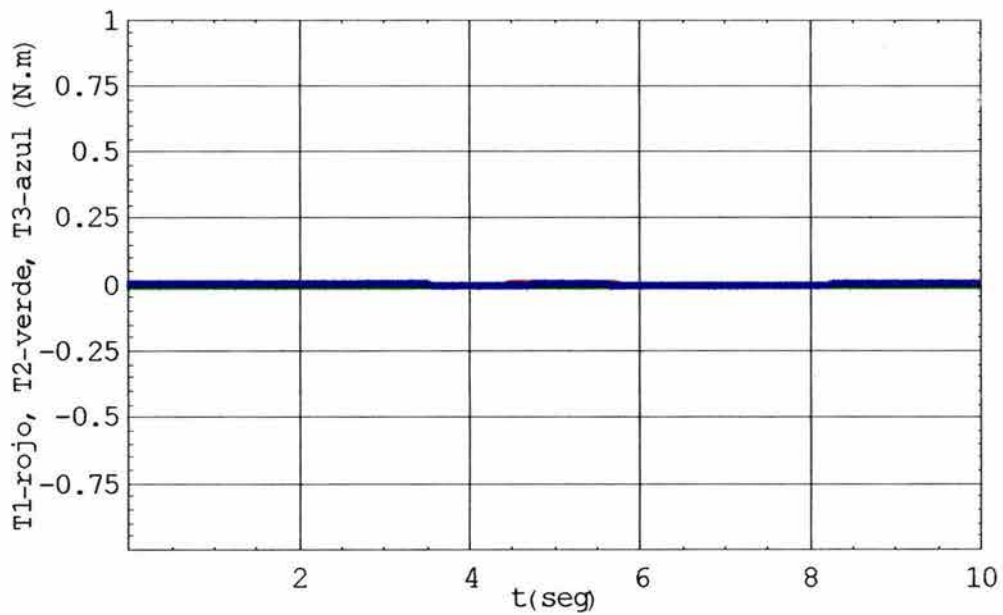
De igual forma, se procede a realizar la sustitución de los valores correspondientes en la ecuación (6.3.38), y se obtienen los valores de los torques para el caso balanceado de la PPE, para cada una de las cadenas cinemáticas que la forman.

Las gráficas (6.4.2a y b) muestran la comparación de los torques en las 3 cadenas cinemáticas que forman la PPE obtenidos en el sistema balanceado estáticamente.

Se puede ver en las gráficas anteriores que el valor de los torques para el caso balanceado son prácticamente nulas en comparación con los valores obtenidos en el caso no balanceado.



Gráfica 6.4.2a. Torques obtenidos, caso balanceado.



Gráfica 6.4.2b. Torques obtenidos, caso balanceado.

6.5. Análisis Dinámico

6.5.1. Para el Caso No Balanceado

Para este análisis se requieren los datos obtenidos de la síntesis y del modelo sólido realizado de la PPE, las masas se dan en kilogramos, las magnitudes de los vectores de posición en metros y los momentos de inercia en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$:

Masa del eslabón 1	=	0,135
Masa del eslabón 2	=	0,149
Masa del plato o efector final	=	1,511582
Vector de posición del eslabón 1	=	(-0,15, 0,1654, 0)
Vector de posición del eslabón 2	=	(-0,1654, 0,1477, 0)
Vector de posición del centro de masa del eslabón 1	=	(-0,0539, 0,0933, 0)
Vector de posición del centro de masa del eslabón 2	=	(-0,05534, 0,09902, 0)
Vector de posición del centro de masa del plato	=	(0, 0, -0,01905)
Vector de posición de la base inercial-base del plato	=	(0,0002, 0,00001, 0,10451)

Momentos de inercia del eslabón 1

$$\begin{aligned}
 I_x &= (3682,987 \times 10^{-5}, 2604,365 \times 10^{-5}, 2,0 \times 10^{-8}) \\
 I_y &= (2604,365 \times 10^{-5}, 2775,015 \times 10^{-5}, -2,0 \times 10^{-8}) \\
 I_z &= (2,0 \times 10^{-8}, -2,0 \times 10^{-8}, 6312,887 \times 10^{-5})
 \end{aligned}$$

Momentos de inercia del eslabón 2

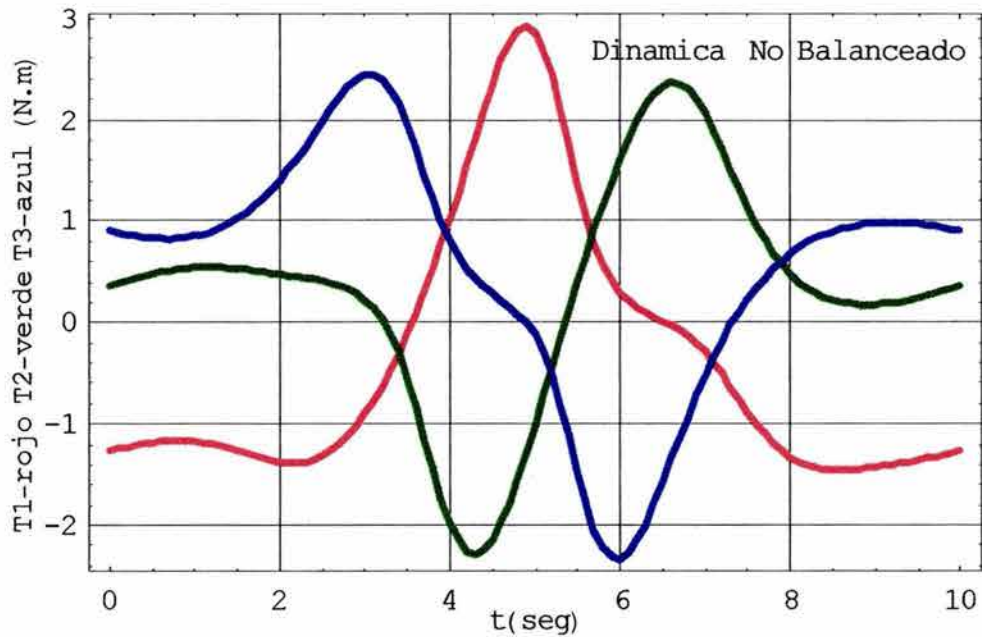
$$\begin{aligned}
 I_x &= (4662,162 \times 10^{-5}, 3575,956 \times 10^{-5}, 3,0 \times 10^{-8}) \\
 I_y &= (3575,956 \times 10^{-5}, 4011,636 \times 10^{-5}, -2,0 \times 10^{-8}) \\
 I_z &= (3,0 \times 10^{-8}, -2,0 \times 10^{-8}, 8513,91 \times 10^{-5})
 \end{aligned}$$

Momentos de inercia del plato móvil

$$\begin{aligned}
 I_x &= (58758,164 \times 10^{-5}, 2,0 \times 10^{-6}, -2,5 \times 10^{-7}) \\
 I_y &= (2,0 \times 10^{-6}, 58758,102 \times 10^{-5}, 1,070 \times 10^{-6}) \\
 I_z &= (-2,5 \times 10^{-7}, 1,070 \times 10^{-6}, 1,02969467)
 \end{aligned}$$

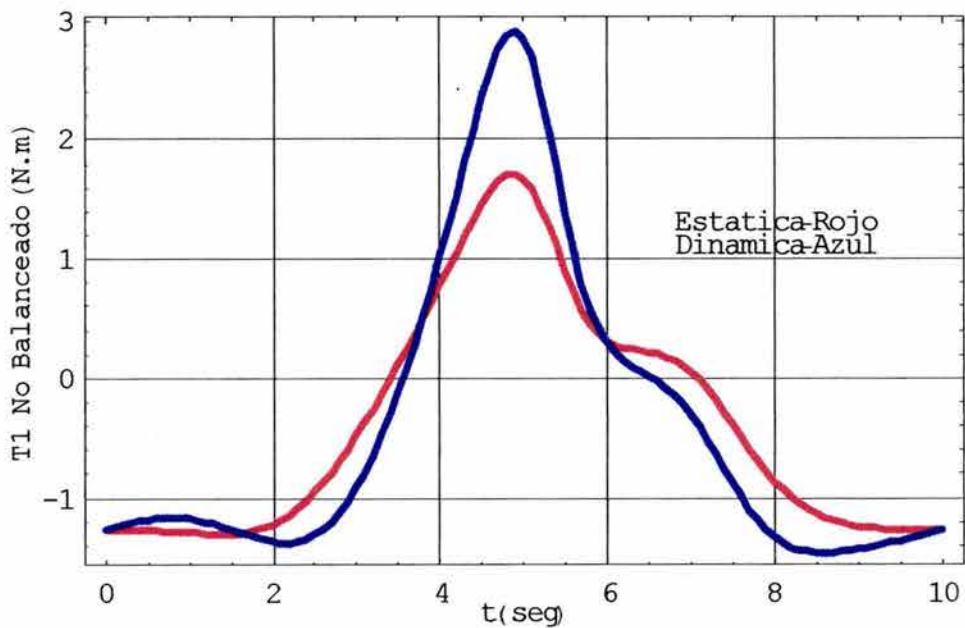
De igual forma, se procede a realizar la sustitución de los valores correspondientes en la ecuación (6.3.38) y se obtienen los valores de los torques para cada una de las cadenas cinemáticas que forman la PPE.

La gráfica 6.5.1 muestra la comparación de los torques obtenidos en las 3 cadenas cinemáticas que forman la PPE.

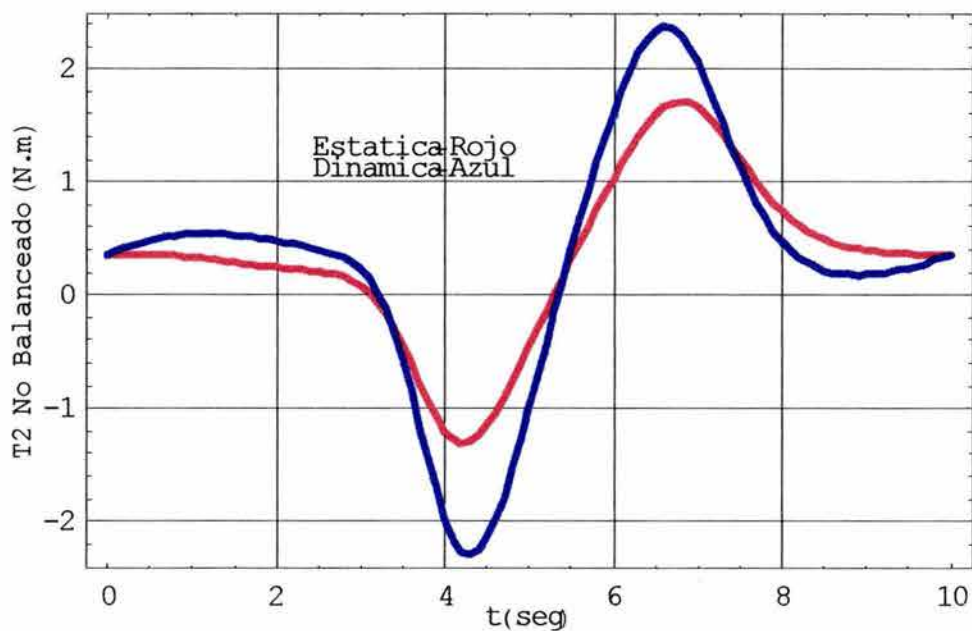


Gráfica 6.5.1. Torques obtenidos, caso no balanceado.

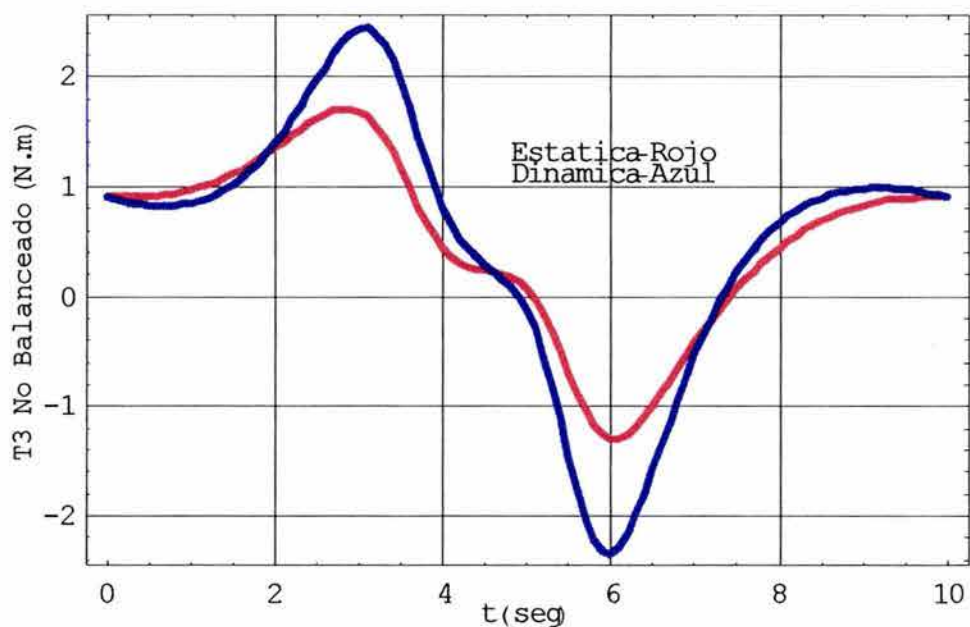
Las gráficas (6.5.2a, b y c), muestran las comparaciones de los torques obtenidos entre el análisis estático no balanceado y el dinámico no balanceado:



Gráfica 6.5.2a. Comparación de torques cadena 1.



Gráfica 6.5.2b. Comparación de torques cadena 2.



Gráfica 6.5.2c. Comparación de torques cadena 3.

Se puede ver en las gráficas (6.5.2a, b y c), anteriores, que el valor de los torques para el caso dinámico no balanceado son mayores en comparación con los valores obtenidos en el caso estático no balanceado, debido a que en el caso dinámico se han tomado en cuenta las fuerzas de inercias aplicadas a la PPE.

6.5.2. Para el Caso Balanceado

Considerando el procedimiento ya descrito se indican ahora los nuevos datos; los cuales se obtuvieron del análisis de balanceo y del modelo sólido realizado de la PPE:

$$\begin{aligned}
 \text{Masa del eslabón 1} &= 0,5 \\
 \text{Masa del eslabón 2} &= 0,7 \\
 \text{Masa del plato o efector final} &= 1,511582 \\
 \text{Vector de posición del eslabón 1} &= (-0,15, 0,1654, 0) \\
 \text{Vector de posición del eslabón 2} &= (-0,1654, 0,1477, 0) \\
 \text{Vector de posición del centro de masa del eslabón 1} &= (-0,05, -0,0555, 0) \\
 \text{Vector de posición del centro de masa del eslabón 2} &= (-0,125757, -0,106315, 0) \\
 \text{Vector de posición del centro de masa del plato} &= (0, 0, -0,01905) \\
 \text{Vector de posición de la base inercial-base del plato} &= (0,0002, 0,00001, 0,10451)
 \end{aligned}$$

Momentos de inercia del eslabón 1

$$\begin{aligned}
 I_x &= (43053,681 \times 10^{-5}, 392,253 \times 10^{-5}, 2002,0 \times 10^{-5}) \\
 I_y &= (392,253 \times 10^{-5}, 9748,273 \times 10^{-5}, 10054,618 \times 10^{-5}) \\
 I_z &= (2002,0 \times 10^{-5}, 1054,618 \times 10^{-5}, 35698,881 \times 10^{-5})
 \end{aligned}$$

Momentos de inercia del eslabón 2

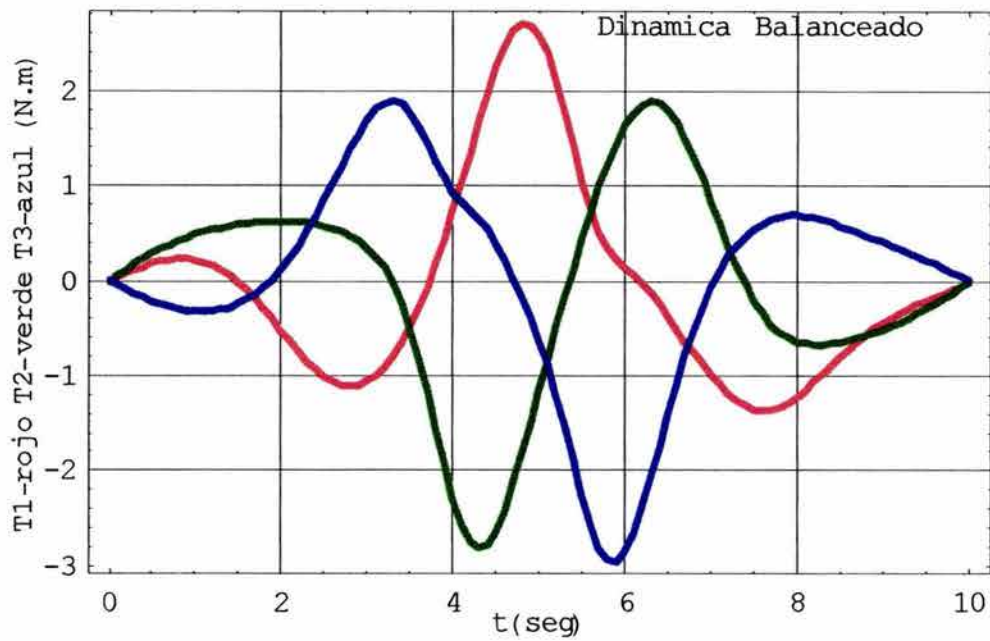
$$\begin{aligned}
 I_x &= (59525,822 \times 10^{-5}, -10205,416 \times 10^{-5}, 7127,739 \times 10^{-5}) \\
 I_y &= (-10205,416 \times 10^{-5}, 16538,370 \times 10^{-5}, 13321,818 \times 10^{-5}) \\
 I_z &= (7127,739 \times 10^{-5}, 13321,818 \times 10^{-5}, 57619,411 \times 10^{-5})
 \end{aligned}$$

Momentos de inercia del plato móvil

$$\begin{aligned}
 I_x &= (58758,164 \times 10^{-5}, 2,0 \times 10^{-6}, -2,5 \times 10^{-7}) \\
 I_y &= (2,0 \times 10^{-6}, 58758,102 \times 10^{-5}, 1,070 \times 10^{-6}) \\
 I_z &= (-2,5 \times 10^{-7}, 1,07 \times 10^{-6}, 1,02969467)
 \end{aligned}$$

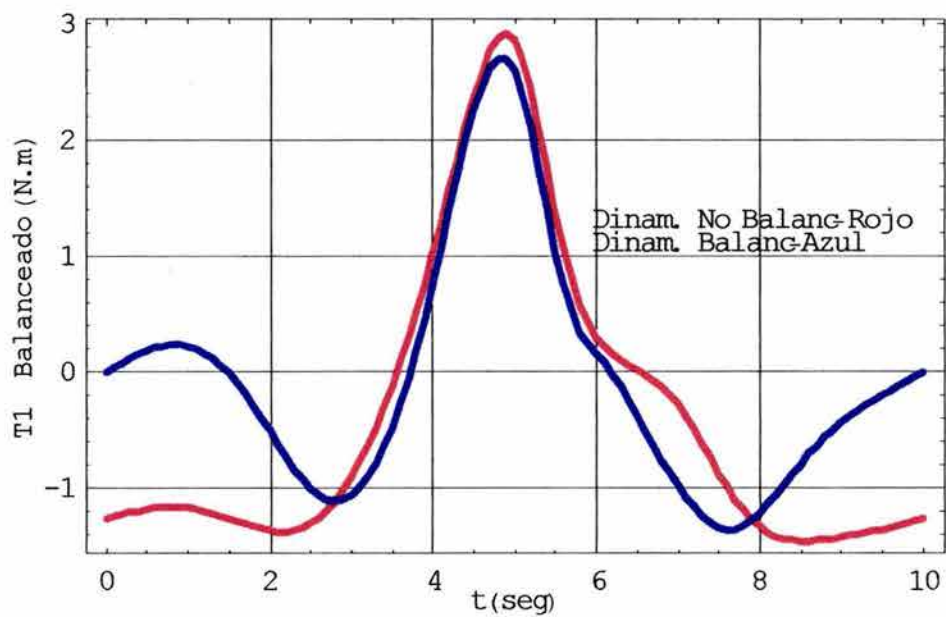
De igual forma, se procede a realizar la sustitución de los valores correspondientes en la ecuación (6.3.38), y se obtienen los valores de los torques para cada una de las cadenas cinemáticas que forman la PPE.

La gráfica 6.5.3 muestra la comparación de los torques obtenidos en las 3 cadenas cinemáticas que forman la PPE.

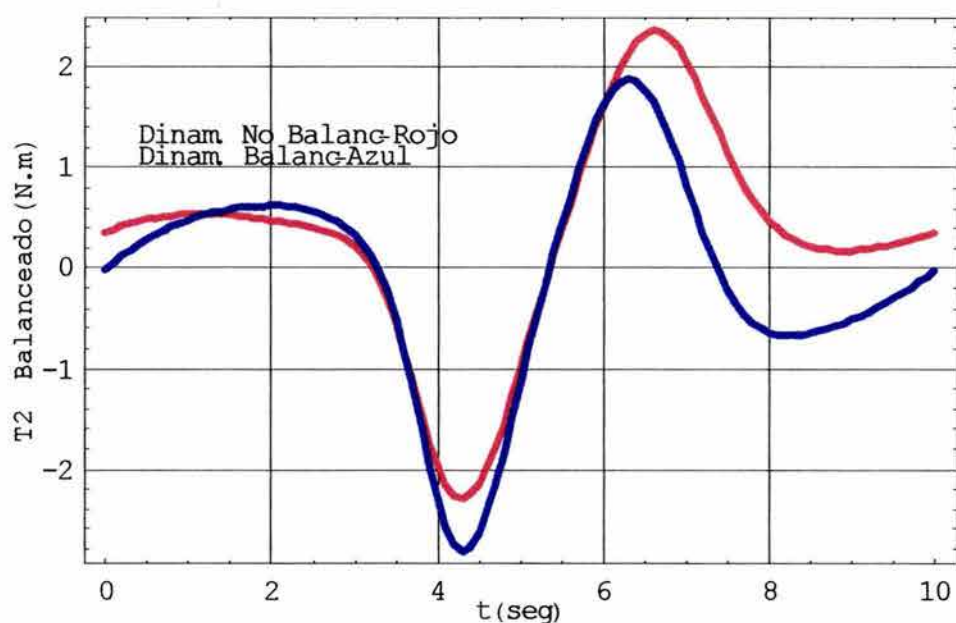


Gráfica 6.5.3. Torques obtenidos, caso balanceado.

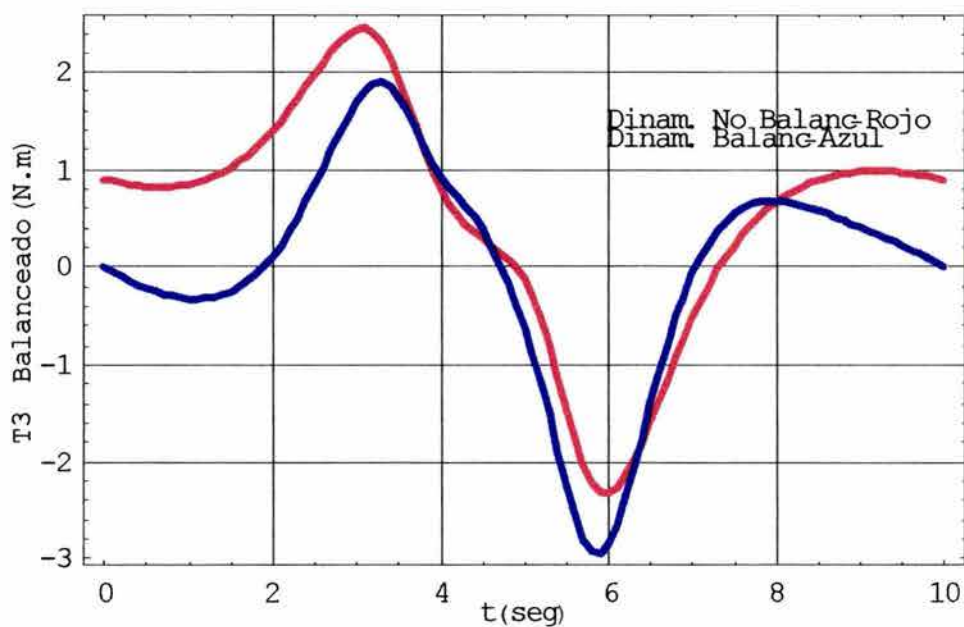
Las gráficas (6.5.4a, b y c), muestran las comparaciones de los torques obtenidos entre el análisis dinámico no balanceado y el dinámico balanceado:



Gráfica 6.5.4a. Comparación de torques cadena 1.



Gráfica 6.5.4b. Comparación de torques cadena 2.



Gráfica 6.5.4c. Comparación de torques cadena 3.

Se puede ver en las gráficas (6.5.4a, b y c), que el valor de los torques para el caso dinámico balanceado son mayores en comparación con los valores obtenidos en el caso dinámico no balanceado, debido a que en el caso dinámico balanceado se han incrementado las masas y por consecuencia las fuerzas inerciales aplicadas a la PPE.

Conclusiones

Con lo realizado en este proyecto de tesis, se puede concluir lo siguiente:

En la síntesis realizada para la PPE:

- Se pudo comprobar que los métodos empleados (matrices de desplazamiento y ángulo constante), producen el mismo sistema de ecuaciones no lineales de diseño. Estas ecuaciones tienen la ventaja de proporcionar resultados rápidos mediante el uso del método numérico de Newton-Raphson y tienen la desventaja propia del método numérico de requerir valores iniciales apropiados que permitan una rápida convergencia. Lo anterior hace que la síntesis sea un proceso iterativo de solución.
- A través de la síntesis se lograron distintas configuraciones para la PPE en cuanto a las dimensiones y forma de cada uno de los eslabones, plataforma móvil y base fija. Decidiendo finalmente un arreglo simétrico el cual cumpliría con un ángulo de 90° en la formación de los eslabones, esto permite una simplificación en las ecuaciones cinemáticas.
- También se pudo comprobar que no cualquier configuración o arreglo de eslabones cumple con las condiciones requeridas para la PPE, por lo tanto, se necesita un proceso iterativo para encontrar una solución satisfactoria con base en el planteamiento realizado.

Una vez resuelta la síntesis, con los datos generados se desarrolló el análisis cinemático inverso de la PPE:

- Mediante el método de forma cerrada se obtuvieron la posición, la velocidad y la aceleración. La desventaja de este método radica en el largo y complejo proceso en la obtención de las ecuaciones, pero su ventaja es que proporciona ecuaciones de fácil y rápida sustitución, dando rapidez en el cálculo cinemático y como consecuencia en el dinámico.

Del balanceo estático de la PPE se puede concluir que:

- Debido a la configuración esférica de la plataforma la composición de rotaciones de los segundos eslabones de las cadenas cinemáticas respecto a los primeros eslabones no se puede evitar, lo cual origina ecuaciones más complejas de balanceo. Lo anterior dá como consecuencia numerosas ecuaciones de balanceo equivalentes o linealmente dependientes entre sí. A partir de las cuales se obtuvo un conjunto reducido de ecuaciones útiles para el balanceo.
- Al implementar el método de masas añadidas, los brazos de palanca formados por los vectores de posición de las masas añadidas crecían para valores de masas muy pequeñas, además cuando se pretendían generar brazos de palancas cortos, las masas requeridas resultaban grandes.
- Algunas de las soluciones encontradas para el posicionamiento de los contrapesos producían interferencia con el movimiento de la plataforma (entre sus eslabones).
- Se encontraron coordenadas de posición que permitieron ubicar las masas de contrapesos de manera satisfactoria evitando la interferencia.
- Para evitar el fenómeno de interferencia, una posible solución sería plantear una configuración de plataforma distinta que satisfaga los valores del balanceo o realizar el balanceo a través de resortes.

Se realizó también un análisis estático y dinámico mediante el principio de trabajo virtual, con el fin de comprobar el balanceo logrado de la PPE:

- A partir de los resultados obtenidos del análisis estático, se comprobó el balanceo de la PPE, ya que los valores de los torques para cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE, resultaron prácticamente nulos.
- Con esto se demuestra que el mecanismo balanceado estáticamente no requiere de un torque externo para mantener su equilibrio respecto a una orientación en particular.
- Así mismo en el análisis dinámico se analizaron los casos no balanceado y balanceado, verificando que el caso balanceado requiere de más torque en comparación con el caso no balanceado, esto debido a las masas que se añaden con los contrapesos.

Será de gran importancia el poder construir el diseño del prototipo propuesto para la PPE, con el fin de comprobar los resultados analíticos con los experimentales y así profundizar en el estudio de las plataformas paralelas.

Apéndice A

Términos Algebraicos Empleados

A.1. Solución de Ecuación Trascendental

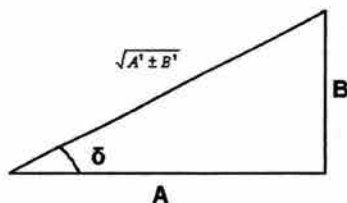
Considerando la ecuación:

$$Ac\psi + Bs\psi = c\theta \quad (\text{A.10})$$

se tiene al dividir por

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}c\psi + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}s\psi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{A.11})$$

por lo tanto, considerando el triángulo rectángulo mostrado en la figura



se tiene:

$$\begin{aligned} c\delta &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ s\delta &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

siendo $s = \text{seno}$, $c = \text{coseno}$

de donde:

$$c\delta c\psi + c\delta s\psi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$c(\psi - \delta) = c\epsilon$$

$$c(\psi - \delta) = c(-\epsilon)$$

debido a que $\psi - \delta = \epsilon$ tienen el mismo coseno, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{arc cos}(c((\psi - \delta))) &= \text{arc cos}(c\epsilon) \\ \psi - \delta &= \epsilon \\ \psi - \delta &= -\epsilon \end{aligned} \tag{A.13}$$

asi:

$$\psi = \delta \pm \epsilon \tag{A.14}$$

también:

$$c\epsilon = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

donde:

$$\begin{aligned} \text{arc cos}(c\epsilon) &= \text{arc cos}\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \\ \epsilon &= \text{arc cos}\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \end{aligned} \tag{A.15}$$

de (A.12):

$$\begin{aligned} \frac{s\delta}{c\delta} &= \frac{B}{A} \\ \tan\delta &= \frac{B}{A} \end{aligned}$$

$$\delta = \text{arc tan}\left(\frac{B}{A}\right) \tag{A.16}$$

sustituyendo (A.15), y (A.16) en (A.14), obtenemos la ecuación de transformación en términos del ángulo de salida correspondiente en este caso para aplicarse a cada una de las cadenas cinemáticas de la PPE:

$$\psi = \text{arc tan}\left(\frac{B}{A}\right) \pm \text{arc cos}\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \tag{A.17}$$

A.2. Ángulo entre Dos Vectores

Considerando que el ángulo entre dos vectores es dado por:

$$\begin{aligned} \cos \eta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \eta \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

de lo anterior, el ángulo entre dos vectores de la PPE como \mathbf{a}_j y \mathbf{a}_{jp} es igual:

$$(\mathbf{a}_j)^T(\mathbf{a}_{jp}) = \|\mathbf{a}_j\| \|\mathbf{a}_{jp}\| \cos \eta$$

como la norma de \mathbf{a}_j y \mathbf{a}_{jp} es igual a la unidad, entonces:

$$(\mathbf{a}_j)^T(\mathbf{a}_{jp}) = \cos \eta \quad (\text{A.19})$$

Siendo $j = 2, 3, 5, 6, 8, 9$; los cuales representan cada uno de los puntos de los eslabones formados en cada una de las cadenas cinemáticas.

Apéndice B

Dibujos de Detalle y Ensamble de la PPE

A continuación se muestran los dibujos de detalle y ensamble de la PPE, en los cuales se representan cada uno de los elementos que la forman, los cuales son: el plato base, la pierna base, la pierna eslabón y el plato móvil o efector final; así como los elementos de unión.

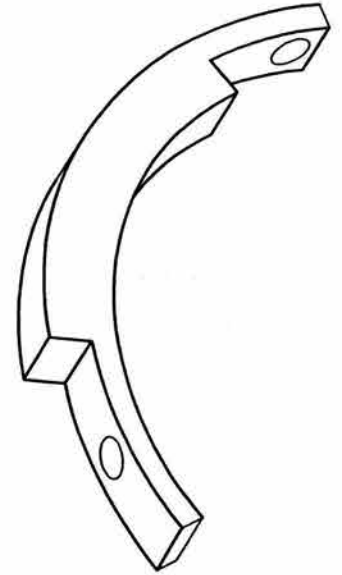
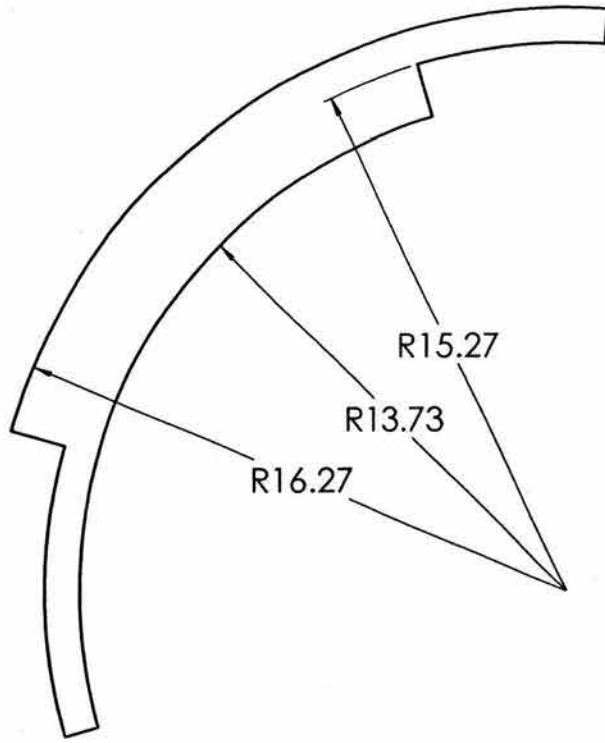
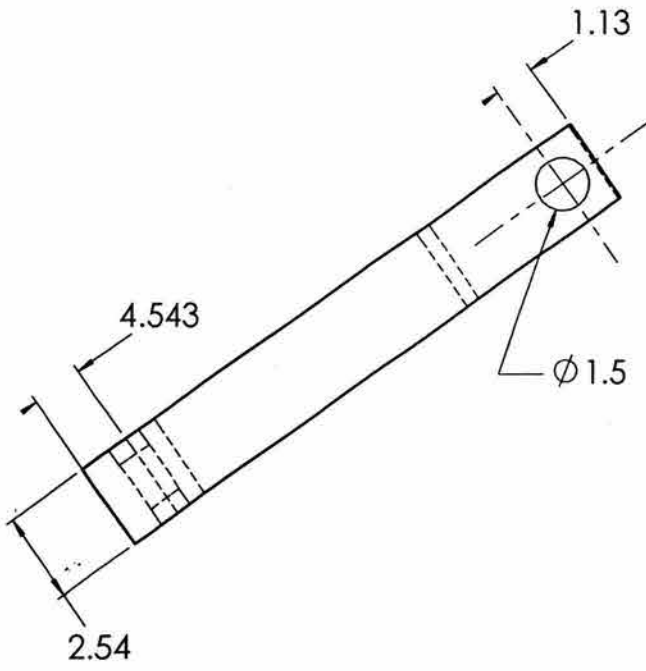
Una de las características de la PPE es su simetría en sus cadenas cinemáticas, por lo tanto solo se consideran los elementos que forman una de ellas.

Cabe aclarar que las propiedades de los materiales que se emplearon solamente sirven como referencia para obtener los datos necesarios de masa, centros de gravedad, momentos de inercia, etc; los cuales fueron útiles para desarrollar todo el análisis realizado en la tesis.

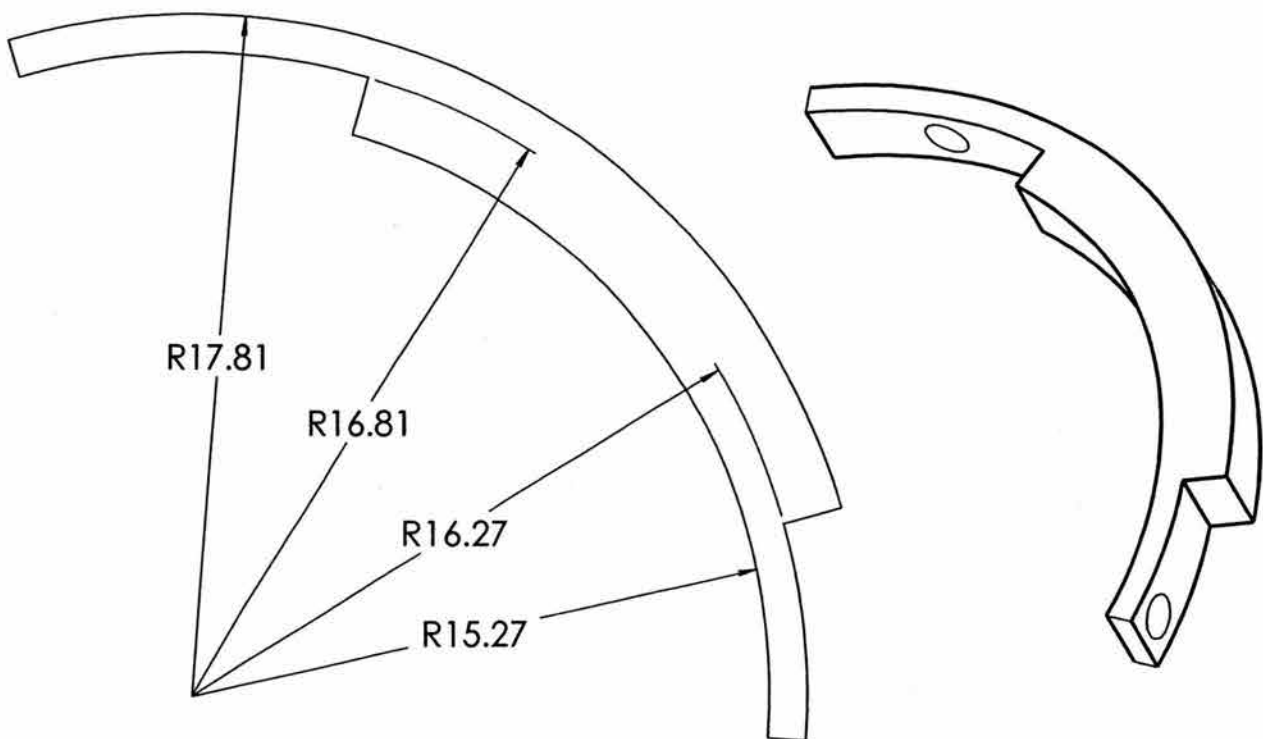
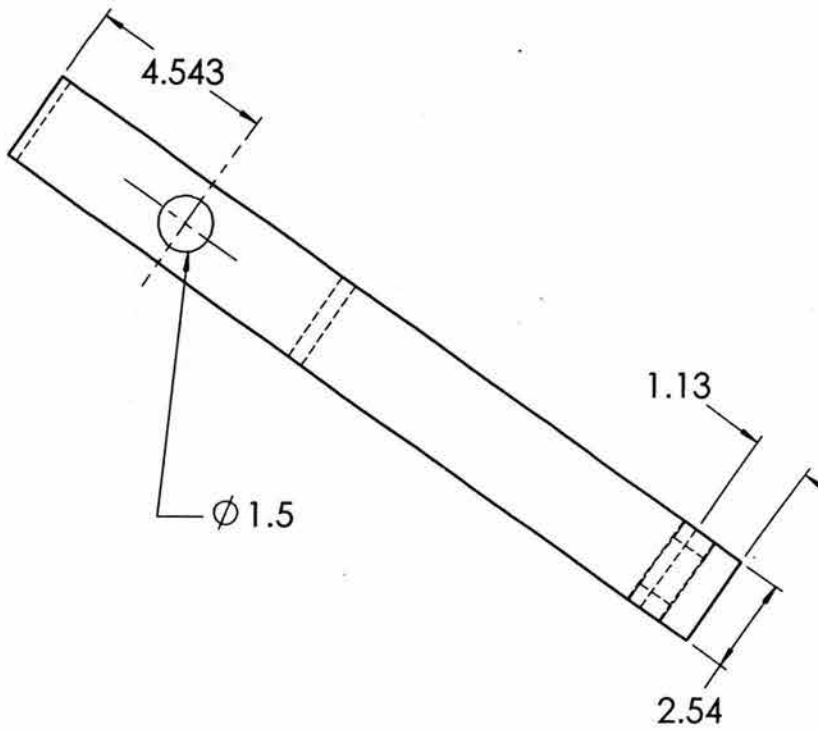
Para los eslabones, plataforma móvil, plato base, rodamientos y pernos de conexión, se considera:

Material : *Aluminio*

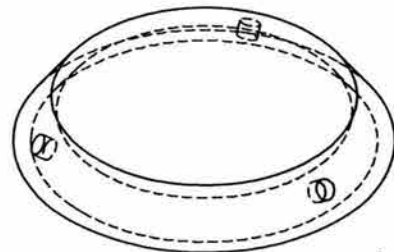
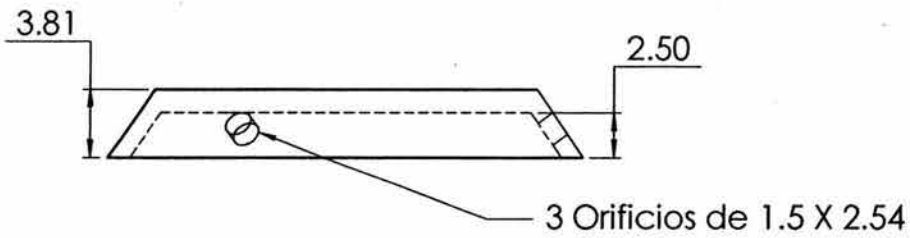
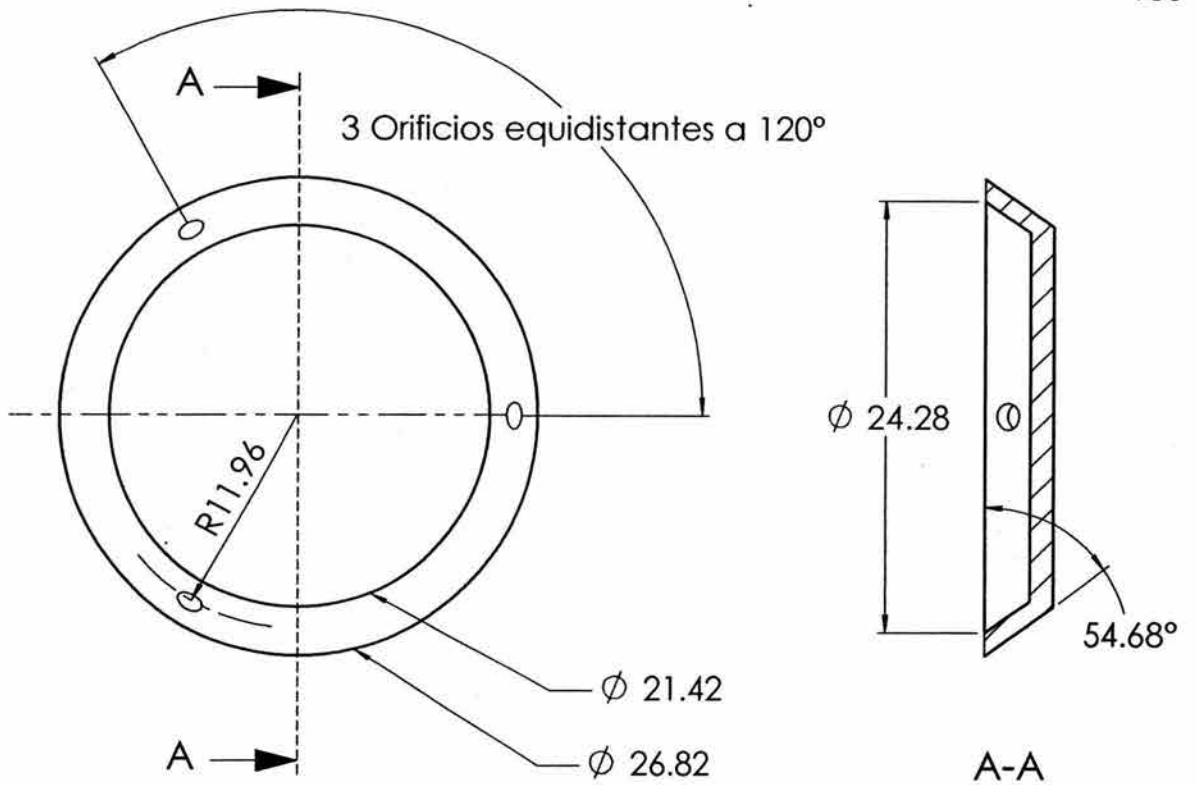
Densidad : $1\text{gr}/\text{cm}^3$



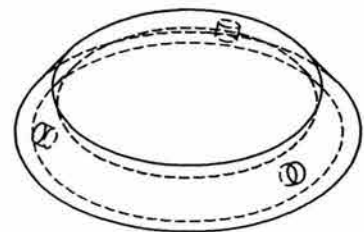
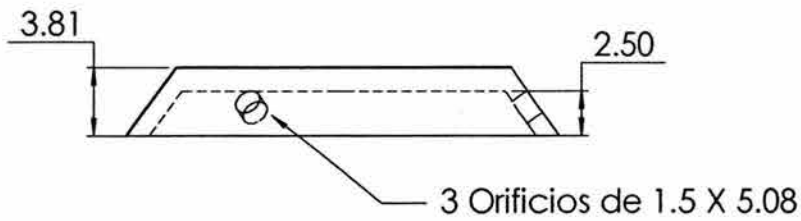
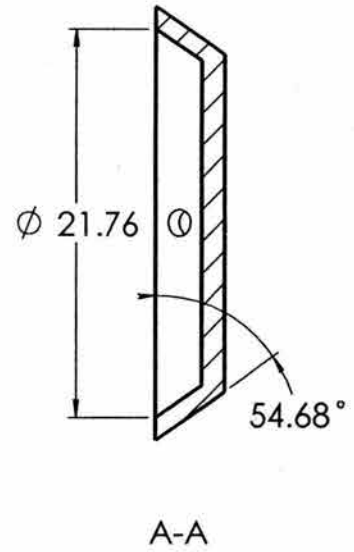
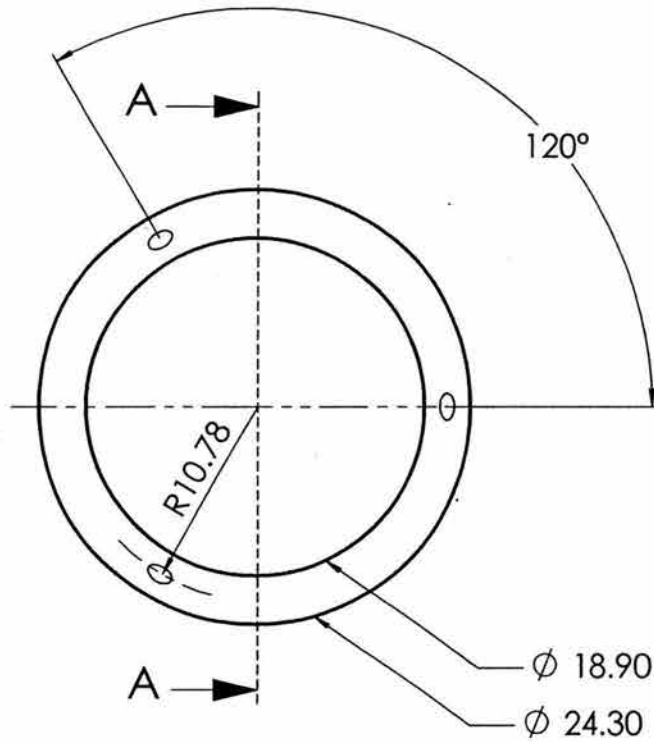
Universidad Nacional Autónoma de México		
Escala: 1: 2	Acotación: cm	DIB. No. 1
	Eslabón 1	Diciembre 2004
Dibujó: Norberto López Luiz		Maestría en Ingeniería



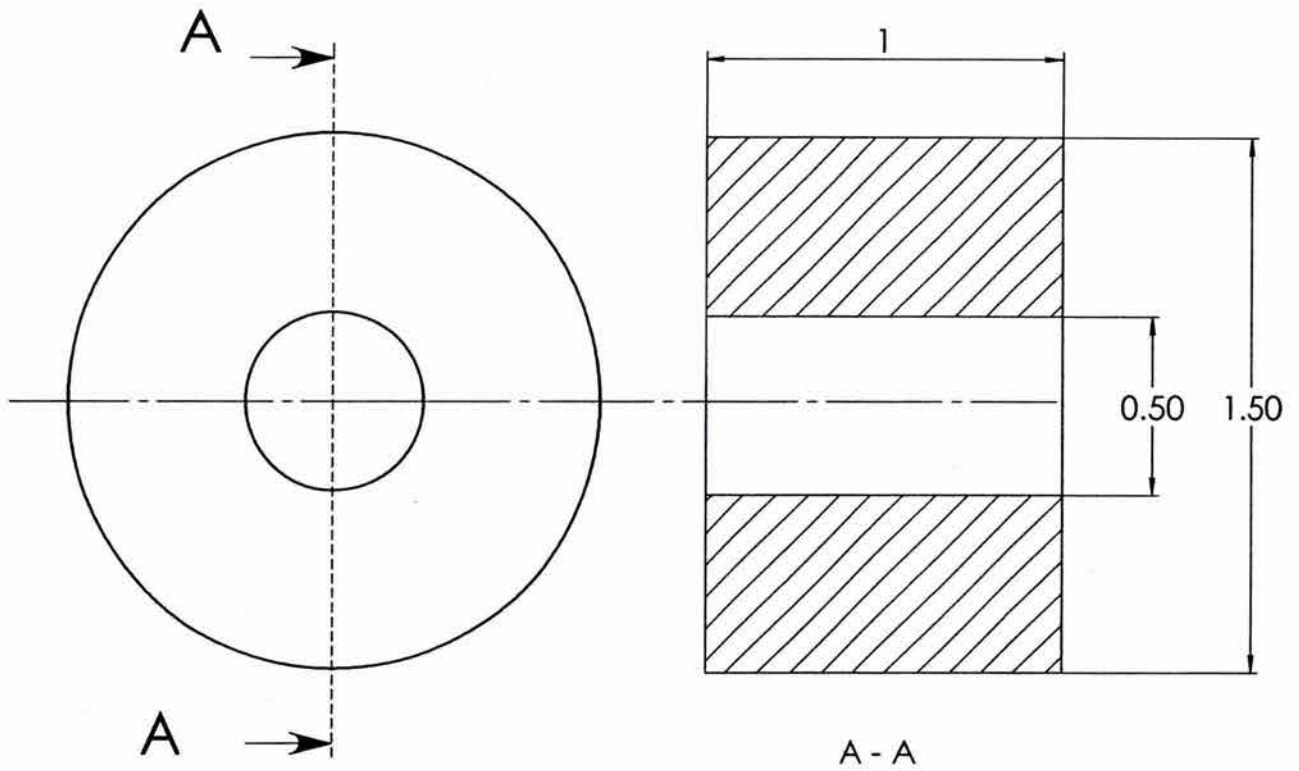
Universidad Nacional Autónoma de México		
Escala: 1: 2	Acotación: cm	DIB. No. 2
	Eslabón 2	Diciembre 2004
Dibujó: Norberto López Luíz		Maestría en Ingeniería



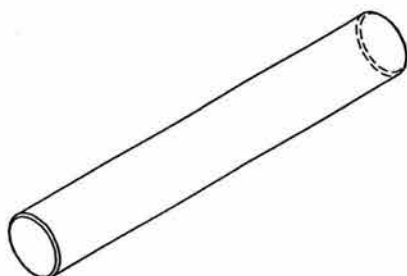
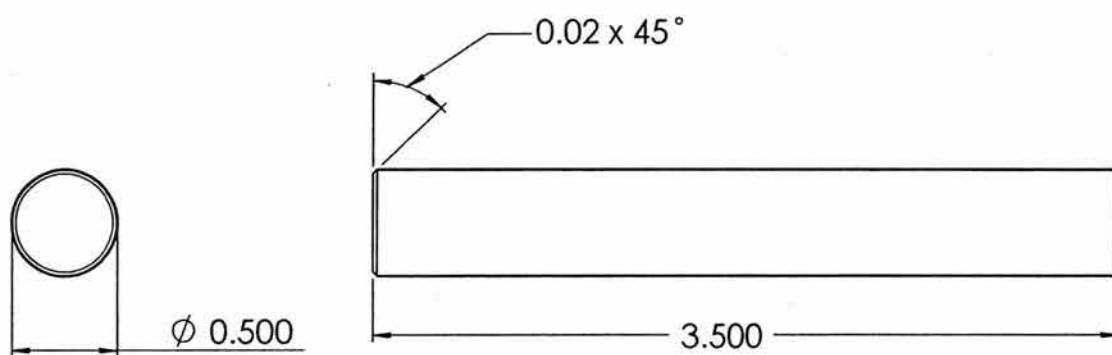
Universidad Nacional Autónoma de México		
Escala: 1: 4	Acotación: cm	DIB. No. 3
	Plato Superior	Diciembre 2004
Dibujó: Norberto López Luiz		Maestría en Ingeniería

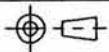


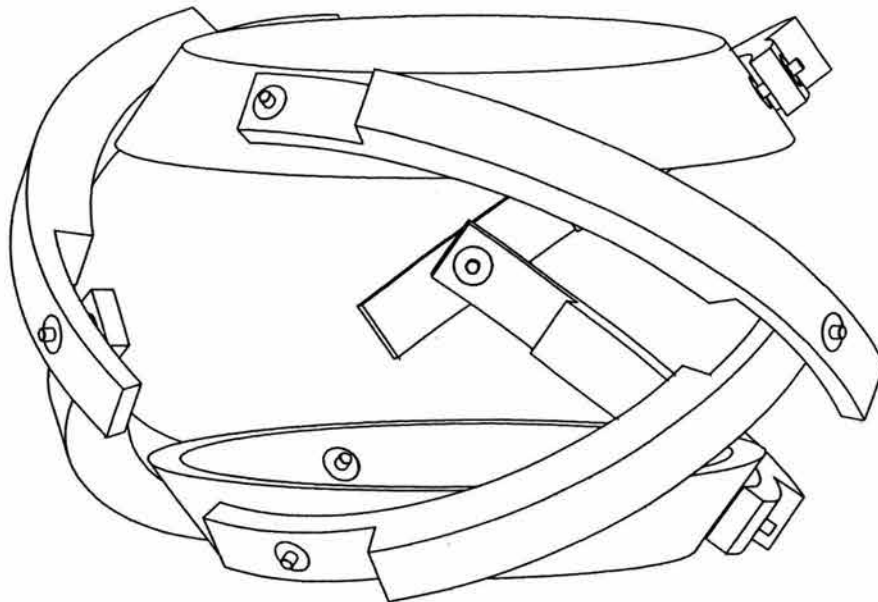
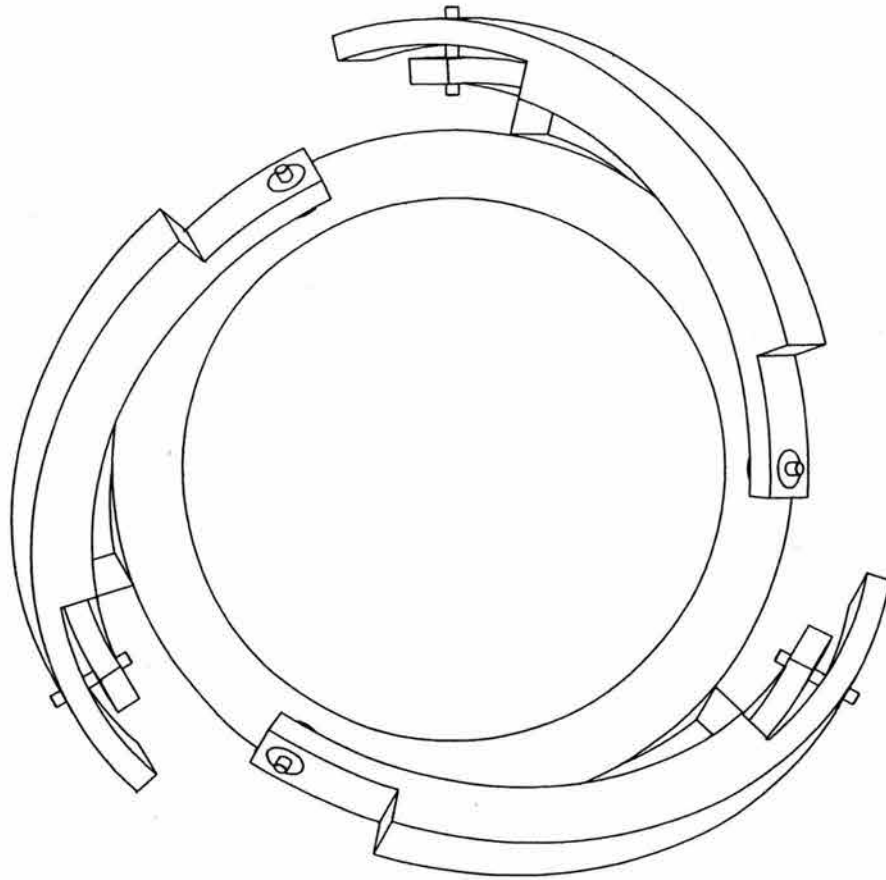
Universidad Nacional Autónoma de México		
Escala: 1: 4	Acotación: cm	DIB. No. 4
	Plato Base	Diciembre 2004
Dibujó: Norberto López Luíz		Maestría en Ingeniería



Universidad Nacional Autónoma de México		
Escala: 5 : 1	Acotación: cm	DIB. No. 5
	Rodamiento	Diciembre 2004
Dibujó: Norberto López Luiz		Maestría en Ingeniería



Universidad Nacional Autónoma de México		
Escala: 3 : 1	Acotación: cm	DIB. No. 6
	Perno de Unión	Diciembre 2004
Dibujó: Norberto López Luiz	Maestría en Ingeniería	



Universidad Nacional Autónoma de México

Escala:

Acotación:

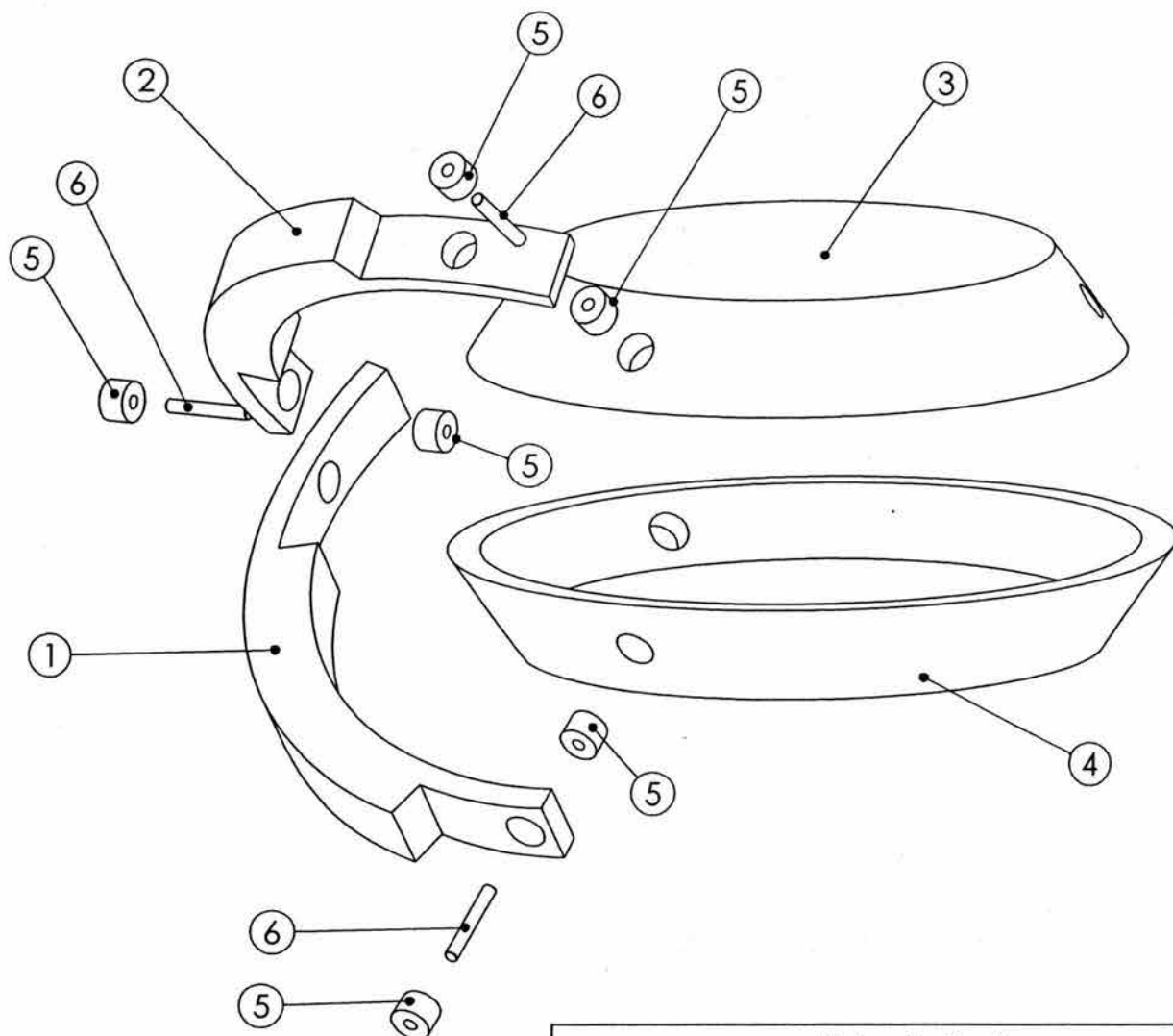
DIB. No. 7

Ensamble PPE

Diciembre 2004

Dibujó: Norberto López Luíz

Maestría en Ingeniería



Lista de Partes		
No. de pieza	Descripción	Cantidad
1	Eslabón 1	3
2	Eslabón 2	3
3	Plato Superior	1
4	Plato Base	1
5	Rodamiento de bolas ursth 45.	18
6	Perno de unión	9

Nota: Sólo se muestra una de las cadenas cinemáticas de la PPE.

Universidad Nacional Autónoma de México		
Escala: 1: 2.5	Acotación:	DIB. No. 8
Vista en Explosivo		Diciembre 2004
Dibujó: Norberto López Luiz		Maestría en Ingeniería

Bibliografía

- [1] Lung - Wen Tsai, 199, Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulator, John Wiley & Sons.
- [2] Robert L. Norton, 1995, Design of Machinery, Mc Graw Hill.
- [3] Joseph Edward Shigley, John Joseph & John Uicker, 1998, Theory of Machines and Mechanisms, Mc Graw Hill.
- [4] Kenneth J. Waldron, 20003, Kinematics, Dynamics and Design of Machinery, John Wiley & Sons.
- [5] Suh & Radcliffe, 1978, Kinematics and Mechanisms Design, John Wiley & Sons.
- [6] Erdman & Sandor, 1998, Advanced Mechanism Designs: Analysis and Synthesis, vol 2, Prentice Hall.
- [7] Donald T. Greenwood, 1998, Principles of Dynamics, Prentice Hall.
- [8] Kevin Jhonson, 2000, "Development of a Statically Balanced Parallel Plataform Manipulator", Tesis, Georgia Institute of Technology.
- [9] Jiegao Wang & Clément M. Gosselin, 1999, "Static Balancing of Three-Degree-of-Freedom Parallel Mechanisms", Mechanism and Machine Theory, vol 34, 437-452.
- [10] Saeed B. Niku, 1999, Introduction to Robotics, Pearson Education & Prentice Hall.
- [11] J. M. McCarthy, 2000, Geometric Design of Linkages, Springer.
- [12] Ahmed A. Shabana, 1996, Computational Dynamics, John Wiley & Sons.
- [13] Nigel Cross, 1999, Métodos de Diseño, John Wiley & Sons.
- [14] K. S. Fu, R. C. Gonzalez, C. S. G. Lee, 1987, Robotic, Control, Sensing, Visión and Intelligence, Mc Graw Hill.

-
- [15] Vladimir S. & Michael Valasek, 1996, Kinematics and Dynamics of Machinery, John Wiley & Sons.
- [16] www.robot.gmc.ulaval.ca/recherche/recherche_a.html
- [17] G. G. Baránov, 1985, Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas, Mir Moscú.
- [18] <http://isd.cme.nist.gov/brochure/Hexapod.html>
- [19] <http://www.frasca.com/>
- [20] M. Vidyasagar, M. W. Spong, 1989, Robot Dynamics and Control, John Wiley & Sons.