



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

## “TRIANGULACIONES DE CONJUNTOS DE PUNTOS”

### T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACION

PRESENTA:

**RUY FABILA MONROY**



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. JORGE URRUTIA GALICIA**

2004



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Triangulaciones de Conjuntos de Puntos"

realizado por Ruy Fabila Monroy

con número de cuenta 400042754 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Licenciatura en  
Ciencias de la Computación

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario Dr. Jorge Urrutia Galicia

Propietario Dr. Criel Merino López

Propietario Dr. Juan José Montellano Ballesteros

Suplente Dr. Martha Gabriela Araujo Pardo

Suplente M. en C. Pilar Valencia Saravia

Consejo Departamental de Matemáticas



Dr. Francisco Hernández Quiroz

MATEMÁTICAS

Merino López Criel

G Araujo P

Pilar Valencia S.

# Agredecimientos

A mis padres y hermano por tantas cosas que con decir gracias no basta.

A Jorge Urrutia a quien no sólo le agradezco sus enseñanzas. sino su tiempo y paciencia al permitirme trabajar a su lado estos años.

A mis sinodales: Criel Merino, Juan José Montellano, Gabriela Araujo y Pilar Valencia. Por sus valiosos comentarios y sugerencias.

A mis maestros: Rafael Rojas, Alejandro Diaz Barriga, José Galaviz y Rocio Vite

A Fabiola por todo el tiempo y experiencias que vivimos juntos.

A mis amigos de la carrera: Grecia, Josafat, Gustavo, John y Mary con quienes tuve la fortuna de compartir este no siempre fácil camino.

A Paco que estuvo presente al principio de esta investigación y porque a sus discusiones debo mucha de la intuición que tengo al respecto.

A Daniel, Mario, Gonzalo y David por tantísimos años de amistad y por haber estado en las buenas y en las malas.

A los amigos que hice durante mi breve estancia en el ITAM, en especial a Jhoseline.

A Peña y Miguel con quienes di mis primeros pasos.

Finalmente me gustaria agradecer al proyecto PAPIIT IN110802 por el apoyo economico que me brindo en la elaboracion de esta tesis.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>13</b>
2.1. Definiciones	14
2.2. Resultados Fundamentales	17
2.2.1. Existencia	18
2.2.2. ¿Cuántos Triángulos? ¿Cuántos Tetraedros?	20
<b>3. Triangulaciones Hamiltonianas</b>	<b>33</b>
3.1. Motivación	33
3.2. Triangulación Hamiltoniana de Puntos en el Plano	35
3.3. Tetraedralizaciones Hamiltonianas (primeras observaciones)	38
3.4. Triangulación Hamiltoniana en tiempo $O(n \log n)$ .	40
3.4.1. Triangulación Hamiltoniana en tiempo $O(n \log n)$ (sin localización de vértices separadores)	42
3.5. Triangulaciones con un Punto Central	48
<b>4. La Tetraedralización del Ojo</b>	<b>51</b>
4.1. El Casquete Convexo	51
4.2. La Tetraedralización del Ojo	54
4.3. Gráficas Cúbicas Plana 3-Conexas Hamiltonianas	58
4.4. Los Ojos del Casquete Convexo	61
4.5. Gráficas Cúbicas Planas 3-conexas Sin Ojos Hamiltonianos	66
<b>5. Giros de Aristas y Caras</b>	<b>71</b>
5.1. Giros en el plano	71

5.2. Giros en la Tetraedralización del Ojo . . . . .	72
<b>6. Puntos de Steiner</b>	<b>79</b>
6.1. Aproximando con Puntos de Steiner . . . . .	79
6.2. Agregando puntos de Steiner . . . . .	80
<b>7. Conclusiones</b>	<b>87</b>
7.1. Triangulaciones en dimensiones mayores a 3 . . . . .	87
7.2. Triangulaciones Hamiltonianas . . . . .	89
7.3. Puntos de Steiner . . . . .	91

# Índice de figuras

1.1. Representación de un cuerpo físico. . . . .	10
2.1. La cerradura convexa de un conjunto y el casquete convexo del mismo conjunto . . . . .	14
2.2. Triangulación de un conjunto de puntos . . . . .	15
2.3. Tetraedralización de un conjunto de puntos . . . . .	16
2.4. Gráfica dual de una triangulación . . . . .	17
2.5. Orden cíclico de los vértices en un polígono . . . . .	19
2.6. Giros en el plano. . . . .	23
2.7. Giros en el espacio. . . . .	23
2.8. Intersección de los triángulos $\tau'_1$ y $\tau'_2$ . . . . .	29
3.1. Triangulación de un polígono . . . . .	35
3.2. Agregando los puntos interiores a la trayectoria. . . . .	36
3.3. Agregando los puntos del casquete convexo a la trayectoria . . . . .	37
3.4. Agregando los puntos interiores en 3D . . . . .	38
3.5. Triangulaciones con un punto central . . . . .	48
4.1. Proyección del ojo y la triangulación que induce sobre la imagen. . . . .	55
4.2. Buscando un ojo hamiltoniano. . . . .	57
4.3. La gráfica de Tutte (una CP3C no hamiltoniana) . . . . .	59
4.4. La gráfica de Tutte menos una cara y una trayectoria hamiltoniana en ella . . . . .	60
4.5. Una triangulación con dual 2-conexa pero no hamiltoniana. . . . .	64
4.6. Uniendo dos gráficas CP3C por dos de sus vértices . . . . .	67
6.1. Agregando puntos de Steiner. . . . .	82
6.2. Uniendo ciclos en la gráfica dual después de agregar el punto de Steiner. . . . .	83

# Capítulo 1

## Introducción

Las computadoras al ser de capacidad limitada, cuando se usan como modeladores del mundo físico necesitan representaciones finitas de este. Esto significa que no podemos representar un cuerpo tridimensional en una computadora como listado de la infinidad de puntos que en el mundo físico lo describen. Necesitamos una representación que la computadora pueda manejar.

Una manera de lograrlo es dividir el objeto original en objetos más pequeños manejables por la computadora. Este enfoque es muy usado en gráficas por computadora donde se suele dividir el cuerpo o superficie que se quiere graficar en triángulos, los cuales son graficados de manera independiente. Esta división podría no ser una representación fiel sin embargo se puede aproximar tanto como se quiera. Pero esta técnica no se limita sólo al ámbito de gráficas por computadora, también por ejemplo en el cálculo numérico de una función se suele aproximar el dominio mediante triángulos y hacer el cálculo en cada uno de estos triángulos por separado. En general es usado como una herramienta para aproximar la realidad física.

Esta gama de aplicaciones ha motivado el estudio de triangulaciones (divisiones en



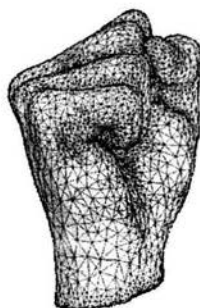


Figura 1.1: Representación de un cuerpo físico.

triángulos) de diversos objetos como son conjuntos de puntos, polígonos y superficies. En esta obra nos enfocaremos en los primeros. Sin embargo, si trabajamos con un sólido los triángulos como unidad de división resultan inadecuados, necesitamos pues otra unidad atómica. En estos casos se suele usar tetraedros y entonces hablamos de tetraedralizaciones en vez de triangulaciones.

Además de su gran aplicación práctica las triangulaciones y tetraedralizaciones son un objeto fascinante de estudio desde un punto de vista puramente teórico. Estudiaremos ambos aspectos indistintamente a lo largo de la obra. Un problema en particular, que es la motivación y el trasfondo de este trabajo, es el de triangular y tetraedralizar hamiltonianamente conjuntos de puntos. Sin entrar en detalles, una triangulación (tetraedralización) es hamiltoniana cuando todos sus triángulos (tetraedros) se pueden poner en secuencia de manera que dos consecutivos comparten una arista (respectivamente una cara) y cada uno aparece una sola vez en la secuencia. Este problema tiene la virtud de ser un problema muy interesante desde el punto de vista teórico y tiene una aplicación directa pues nos permite acelerar el procesamiento de las triangulaciones (tetraedralizaciones).

Nuestra perspectiva es la de la Geometría Computacional y las Matemáticas Discretas en general por tanto tratamos en medida de lo posible atenemos al estilo de éstas áreas. Prefiriendo la intuición sobre el formalismo en las demostraciones y exposición de los teoremas.

Por lo mismo libremente hacemos uso de conceptos y definiciones de áreas como Teoría de Gráficas, Análisis de Algoritmos y Geometría Computacional. Para no extender demasiado la obra no incluimos apéndices de estas áreas en cambio referimos al lector a libros especializados. En lo concerniente a Teoría de Gráficas la notación que usamos es estándar, para mayor referencia véase [7], [11], [4]. Para Geometría Computacional véase [14] y para Análisis de Algoritmos en general [5].

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo daremos las definiciones y conceptos que necesitaremos posteriormente. Definiremos los conceptos de convexidad, cierre convexo y casquete convexo. Introduciremos también la noción de puntos en posición general. Haciendo uso del concepto de convexidad diremos lo que es una triangulación y lo que es una tetraedralización de un conjunto de puntos en posición general.

Como no siempre nos interesa el contexto geométrico de una triangulación o tetraedralización definiremos la gráfica dual de una triangulación o una tetraedralización.

Una vez definido lo que es una triangulación y una tetraedralización de un conjunto de puntos, probaremos que todo conjunto de puntos en el plano(espacio) admite una triangulación(tetraedralización). Después veremos propiedades combinatorias de las triangulaciones y tetraedralizaciones. Será aquí donde se verán las primeras diferencias entre ambos conceptos. Finalizaremos con una discusión sobre extensiones e implicaciones de estos resultados.

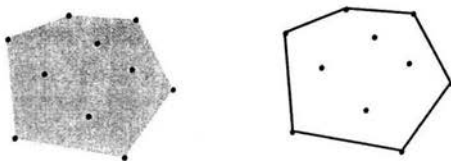


Figura 2.1: La cerradura convexa de un conjunto y el casquete convexo del mismo conjunto

## 2.1. Definiciones

**Definición 1.** Sea  $S$  un conjunto en  $\mathbb{R}^n$ , diremos que  $S$  es convexo si dados  $x, y \in S$  el segmento de recta que los une está contenido en  $S$ .

Con esta definición podríamos pensar en el conjunto convexo más pequeño que contenga a un conjunto de puntos, es decir:

**Definición 2.** La cerradura convexa o cierre convexo de un conjunto  $S$  se define como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $S$  y la denotaremos como  $\text{Conv}(S)$ .

En la práctica nos interesaran aquellos puntos que están en la frontera del cierre convexo.

**Definición 3.** El casquete convexo de un conjunto  $S$  es la frontera de  $\text{Conv}(S)$ .

De hecho ningún conjunto finito con más de un elemento es convexo sin embargo diremos que dicho conjunto se encuentra en posición convexa si está contenido en su casquete convexo.

Podemos entonces definir que son las triangulaciones y las tetraedralizaciones.

**Definición 4.** Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano. Por una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$  entenderemos una partición de  $\text{Conv}(S)$  en una familia de triángulos tal que los triángulos:

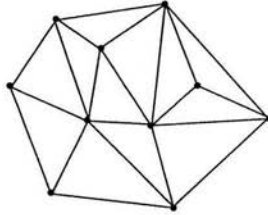


Figura 2.2: Triangulación de un conjunto de puntos

- 1) Tengan sus vértices en  $S$ .
- 2) No se intersecten en su interior.
- 3) No contengan elementos de  $S$  en su interior.

Análogamente definimos lo que es una tetraedralización:

**Definición 5.** Sea  $S$  un conjunto de puntos en el espacio. Por una tetraedralización  $\mathcal{T}$  de  $S$ , entenderemos una partición de  $\text{Conv}(S)$  en una familia de tetraedros tal que los tetraedros:

- 1) Tengan sus vértices en  $S$ .
- 2) No se intersecten en su interior.
- 3) No contengan elementos de  $S$  en su interior.

Dadas estas definiciones, 4 puntos colineales no podrán ser triangulables (tetraedralizables), es por eso que introducimos el siguiente concepto:

**Definición 6.** Un conjunto de puntos en el plano (respectivamente espacio), diremos que está en posición general si no tiene tres (respectivamente cuatro) puntos colineales (coplanares).

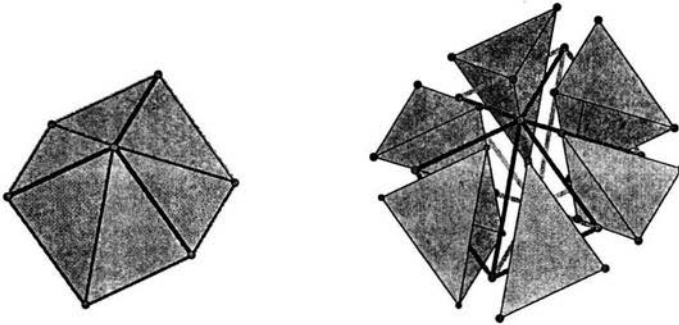


Figura 2.3: Tetraedralización de un conjunto de puntos

De ahora en adelante siempre supondremos posición general para conjuntos de puntos a menos que se indique lo contrario. Esta decisión no es tan arbitraria como pudiera parecer a primera vista. Por ejemplo, en la práctica siempre se puede por medio de perturbaciones simbólicas (Vease [9]), obtener de cualquier conjunto de puntos otro en posición general tan cerca del primero como se quiera. Esto quiere decir que en aplicaciones reales se podría revisar los datos de entrada y en caso de tener 3 puntos colineales perturbar los datos para obtener uno que no los tenga y que además sean tan cercanos a los datos originales como para poder asegurar la precisión que requiera la aplicación. Una vez hecho esto se descartan los datos originales y se trabaja con los datos perturbados.

Observemos también que nunca dijimos nada sobre la cardinalidad de los conjuntos. Sería interesante considerar triangulaciones de conjuntos infinitos como  $Z^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Sin embargo a diferencia de los conjuntos finitos no todos los conjuntos infinitos son triangulables, por ejemplo  $Q^2$  en  $\mathbb{R}^2$  (de hecho ningún denso en el plano). Por lo anterior y como en la práctica todos los conjuntos con los que tratemos serán finitos este trabajo se limitará a triangulaciones de conjuntos finitos. Es por eso que en adelante los conjuntos de puntos siempre serán finitos.

Como en general nos interesa la estructura combinatoria de la triangulación (tetraedra-

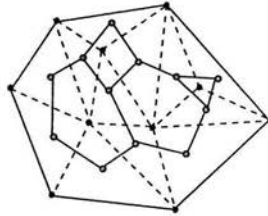


Figura 2.4: Gráfica dual de una triangulación

lización) puede ser que a veces no nos interese su estructura geométrica. De esta manera podríamos fijarnos solo en como se conectan los triángulos(tetraedros) y así definir:

**Definición 7.** *Dada una triangulación(respectivamente tetraedralización)  $\mathcal{T}$ , se define la gráfica dual ( $D_{\mathcal{T}}$ ) de  $\mathcal{T}$  como la gráfica cuyos vértices son los triángulos(respectivamente tetraedros) y haciendo dos triángulos(tetraedros) adyacentes si comparten una arista (respectivamente una cara).*

Una triangulación (tetraedralización) entonces es hamiltoniana si su gráfica dual tiene una trayectoria hamiltoniana. Lo anterior no considera la información geométrica en el sentido que dos triangulaciones(tetraedralizaciones) diferentes podrían tener gráficas duales isomorfas.

## 2.2. Resultados Fundamentales

Notemos que al conocer el casquete convexo de un conjunto de puntos dado conocemos implícitamente su cerradura convexa. El casquete convexo dividiría al espacio(plano) en dos conjuntos conexos siendo uno de ellos la cerradura convexa. Ahora nos faltaría discernir entre las dos regiones conexas antes mencionadas. La cerradura convexa será pues la que se encuentre al “interior” del casquete convexo. Si el conjunto de puntos se encuentra

en el plano entonces al tratarse de un conjunto finito, el casquete convexo vá a consistir de un polígono cerrado. Como los estamos considerando en posición general todos sus ángulos serán diferentes de  $\pi$  y de hecho por ser la frontera de un conjunto convexo sus ángulos internos serán menores a  $\pi$ . En este caso la cerradura convexa será la región del plano acotada por el polígono convexo.

Observamos que en el espacio, el casquete convexo de un conjunto finito de puntos es un poliedro convexo. Ahora bien por estar en posición general las caras de este poliedro estarán forzadas a ser triángulos. El problema del cálculo del casquete convexo de conjuntos de puntos, es un problema clásico de la Geometría Computacional, por sus numerosas aplicaciones [10]. Los distintos algoritmos para su cálculo en dos como en tres dimensiones se pueden consultar en libros especializados en Geometría Computacional como por ejemplo [14]. Es por eso que no nos detendremos en la discusión de su cálculo por el momento, basta decir que tanto en el plano como en el espacio ambas pueden ser calculadas en tiempo de  $O(n \log n)$ .

### 2.2.1. Existencia

Ya definimos lo que son las triangulaciones y las tetraedralizaciones pero no hemos dicho nada sobre su existencia. Es más ni si quiera sabemos si existe un conjunto de puntos triangulable o tetraedralizable. Veremos que de hecho todo conjunto de puntos ya sea en el plano o en el espacio es triangulable o tetraedralizable según sea el caso.

Tanto en el espacio como en el plano el casquete convexo nos ayudará a encontrar una triangulación o tetraedralización.

Sea un  $S$  un conjunto de puntos en el plano o en el espacio. Haremos primero el caso en que  $S$  se encuentre en el plano y el caso tridimensional lo haremos de manera análoga.



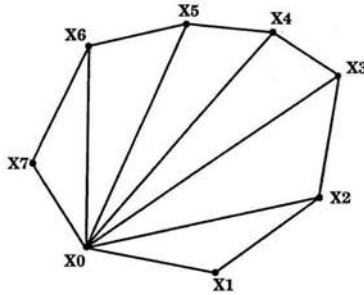


Figura 2.5: Orden cíclico de los vértices en un polígono

Sea  $C \subseteq S$  el conjunto de puntos de  $S$  que están en su casquete convexo.

Tomemos un punto arbitrario  $x_0 \in C$ . Como ya vimos el casquete convexo de  $S$  es un polígono  $P$  y los vértices de dicho polígono van a ser los puntos de  $C$ .

Vamos a dar una triangulación de  $C$  que después extenderemos a una triangulación de  $S$ . El polígono  $P$  induce un orden cíclico en los puntos de  $C$ , supondremos que  $x_0$  es el primer vértice y  $x_1, \dots, x_n$  los vértices restantes en dicho orden entonces podemos triangular a  $C$  agregando para cada  $i = 1, \dots, n - 1$  el triángulo  $\Delta x_0 x_i x_{i+1}$ .

Ahora solo faltan por triangular los puntos al interior y habremos terminado. Supongamos que ya triangulamos un conjunto  $S' \subset S$ . Si  $v \in S - S'$  es un punto interior de  $S$  que no está en  $S'$  entonces  $v$  vá a estar contenido en exactamente un triángulo  $\Delta p_0 p_1 p_2$  de la triangulación de  $S'$ . De esta manera podemos triangular a  $S' \cup \{v\}$  añadiendo los triángulos  $\Delta v p_0 p_1, \Delta v p_1 p_2, \Delta v p_2 p_0$ . Con este procedimiento podemos extender la triangulación que ya teníamos de  $C$  añadiendo los puntos de interiores de  $S$  hasta triangular todo  $S$ . Este es solo un ejemplo de como podríamos triangular a  $S$ , pero de ninguna manera es la única manera de hacerlo. También notemos que se puede triangular a  $S$  en tiempo de  $O(n \log n)$ .

El caso tridimensional se hace análogamente, otra vez tomemos el casquete convexo de

$S$  que ahora vá a ser un poliedro tridimensional con todas sus caras triangulares.

Al igual que en el plano elegimos un elemento distinguido  $x_0$  del casquete convexo de  $S$  y para cada cara  $\Delta p_0 p_1 p_2$  agregamos el tetraedro con vértices  $x, p_0, p_1, p_2$ .

Los puntos al interior otra vez los agregamos uno a uno, con la diferencia de que cada vértice interior  $v$  se encontrará en un tetraedro. Si el tetraedro está determinado por los vértices  $p_0, p_1, p_2, p_3$  entonces el  $v$  generaría cuatro tetraedros, a saber los determinados por los conjuntos de vértices:  $\{v, p_0, p_1, p_2\}$ ,  $\{v, p_0, p_1, p_3\}$ ,  $\{v, p_0, p_2, p_3\}$  y  $\{v, p_1, p_2, p_3\}$ .

Al igual que en el caso bidimensional se puede tetraedralizar en tiempo de  $O(n \log n)$ . El procedimiento básicamente es el mismo, sólo que la inserción de los vértices interiores no es arbitraria si no de manera tal que garantice el  $O(n \log n)$ .

En ambos casos construimos una triangulación y una tetraedralización con  $O(n)$  triángulos (resp tetraedros). Un problema interesante (abierto en el espacio) es saber cuál es mínimo o máximo número de triángulos o tetraedros necesarios, pero ya hablaremos de eso a su debido tiempo.

Hasta ahora realmente sólo hemos hablado de triangulaciones y sólo nos hemos referido a las tetraedralizaciones como analogías directas de estas. Poco a poco iremos tratando las tetraedralizaciones en sí mismas y viendo propiedades que no tienen las triangulaciones. Nos convendrá en lo subsecuente denotar el tetraedro formado por vértices  $\{v, p_0, p_1, p_2\}$  como  $\Delta v p_0 p_1 p_2$ .

### 2.2.2. ¿Cuántos Triángulos? ¿Cuántos Tetraedros?

Ya vimos que las tetraedralizaciones y triangulaciones existen pero uno podría preguntarse por diferentes tipos de éstas que existen para un mismo conjunto de puntos.

Así, veremos ahora una de las primeras diferencias que hay entre tetraedralizaciones y

triangulaciones.

Empecemos por las triangulaciones. Definimos las triangulaciones como una colección de triángulos que cumplieran ciertas propiedades. Sin embargo para nuestros propósitos es conveniente considerar otro punto de vista.

Podemos también ver una triangulación de un conjunto de puntos  $S$  como una gráfica con conjunto de vértices  $S$  y como aristas las aristas de los triángulos.

Así pues como los triángulos no se intersectan en su interior las aristas de dos triángulos no pueden cruzarse (pues habría un área común a ambos). Por lo tanto la gráfica en cuestión resulta ser plana. Siendo esta gráfica una manera natural de representar las triangulaciones, no le daremos un nombre especial y nos referiremos a ella como una triangulación de  $S$  haciendo una distinción explícita con la definición anterior cuando esto sea necesario. Cabe notar que dicha gráfica es distinta de la gráfica dual que ya definimos antes.

¿Que propiedades podemos decir que son comunes a cualquier triangulación de  $S$ ? Notemos por ejemplo que todas tienen las aristas del casquete convexo. Observemos también que todas sus caras, (como gráfica plana) son triángulos con la posible excepción de la correspondiente al casquete convexo.

Si las triangulaciones tienen  $m$  vértices en el casquete convexo tendremos que todos ellos formaran la cara exterior. Tomemos una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$ .

Podemos entonces agregar un vértice que esté en la parte exterior de la triangulación y unirlo con aristas (no necesariamente rectas) a cada vértice del casquete convexo conservando al mismo tiempo la planaridad de la gráfica. Llamemos a esta gráfica  $G_{\mathcal{T}}$ . Notemos que la cara exterior de dicha gráfica es un triángulo así como lo son las demás caras que aumentamos. Esto se debe a que constan de las aristas que estaban en casquete convexo con sus extremos unidos al nuevo vértice. La gráfica  $G_{\mathcal{T}}$  es una gráfica maximal plana con exactamente un vértice más que la gráfica original. Sabemos de teoría de gráficas que si una

gráfica es maximal plana con  $p$  vértices entonces tiene  $3p-6$  aristas. Tenemos entonces que  $|A(G_{\mathcal{T}})| = 3|V(G_{\mathcal{T}})| - 6$  pero como ya dijimos  $|A(G_{\mathcal{T}})| = |A(\mathcal{T})| + m$  y  $|V(G_{\mathcal{T}})| = |V(\mathcal{T})| + 1$ . Por lo que se tiene que  $|A(\mathcal{T})| = 3|V(\mathcal{T})| - 3 - m$ , es decir todas las triangulaciones posibles de  $S$  tiene el mismo número de aristas. Pero se puede decir aun más pues en  $G_{\mathcal{T}}$  todas las caras son triángulos y como cada arista está en dos caras tenemos que tiene  $\frac{2(3|V(G_{\mathcal{T}})|-6)}{3}$  caras pero de estas una es la exterior y  $m$  de ellas las agregamos a  $\mathcal{T}$  durante la construcción de  $G_{\mathcal{T}}$ . Es decir  $\mathcal{T}$  tiene  $2|V(G_{\mathcal{T}})| - 4 - m$  triángulos o en términos de los vértices de  $\mathcal{T}$   $2|V(\mathcal{T})| - 2 - m$ .

Observando que el número de vértices es el número de puntos de  $S$  obtenemos el siguiente teorema:

**Teorema 1.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano con  $m$  de ellos en el casquete convexo y sea  $\mathcal{T}$  una triangulación de  $S$  entonces  $\mathcal{T}$  tendrá  $3n - 3 - m$  aristas y  $2n - 2 - m$  triángulos.*

Así pues todas las triangulaciones de un conjunto de vértices dado constan del mismo número de triángulos. Sería interesante saber si esto también sucede para tetraedralizaciones. Un simple ejemplo nos dará la respuesta. Consideremos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  dos tetraedros que coinciden en una de sus caras tal que la unión de ambos forma un conjunto convexo. Si denotamos con  $P$  a los vértices de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  tenemos que  $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2\}$  es una tetraedralización de  $P$ . Sea  $\Delta v_1 v_2 v_3$  la cara común a  $\tau_1$  y  $\tau_2$  con  $p$  y  $q$  los vértices opuestos a dicha cara en  $\tau_1$  y  $\tau_2$  respectivamente. Como la unión de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  es convexa, el segmento de recta  $\overline{pq}$  cruza a  $\Delta v_1 v_2 v_3$ , podemos dar una nueva tetraedralización de  $P$  con  $\mathcal{T}' = \{\Delta pqv_1 v_2, \Delta pqv_2 v_3, \Delta pqv_3 v_1\}$ .

De esta manera hemos exhibido dos tetraedralizaciones de  $P$  una con 2 elementos y otra con 3. Esta última operación la usaremos constantemente en el futuro por lo que vale la



Figura 2.6: Giros en el plano.



Figura 2.7: Giros en el espacio.

pena que hagamos un paréntesis para definirla.

**Definición 8.** Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano y  $\mathcal{T}$  una triangulación de  $S$ . Con  $\Delta pv_1v_2, \Delta qv_1v_2 \in \mathcal{T}$  son dos triángulos cuya unión es convexa, llamaremos a la acción de intercambiar a  $\Delta pv_1v_2, \Delta qv_1v_2$  en  $\mathcal{T}$  por  $\Delta pv_1q, \Delta pv_2q$  el “girar” la arista  $pq$ .

**Definición 9.** Análogamente si ahora  $S$  es un conjunto de puntos en el espacio y  $\mathcal{T}$  una tetraedralización de  $S$ . Con  $\Delta pv_1v_2v_3, \Delta qv_1v_2v_3 \in \mathcal{T}$  dos tetraedros cuya unión es convexa, llamaremos a la acción de intercambiar a  $\Delta pv_1v_2v_3, \Delta qv_1v_2v_3$  en  $\mathcal{T}$  por  $\Delta pv_1v_2q, \Delta pv_2v_3q, \Delta pv_3v_1q$  el “girar” la cara  $v_1v_2v_3$  y la operación inversa el girar la arista  $pq$  cuando esto sea posible.

Volviendo al tema del número de tetraedros de una tetraedralización el hecho de que en general dos tetraedralizaciones de un mismo conjunto de puntos no tengan el mismo

número de tetraedros sugiere varias preguntas. Por ejemplo ¿Cuántos tetraedros al menos tienen las tetraedralizaciones y a lo más cuántos? Sería bueno para poder contestar esta pregunta contar con una relación entre el número de tetraedros, caras, aristas y vértices de una tetraedralización dada. Los resultados que se mostraran a continuación así como extensiones de ellos se pueden encontrar en [12].

Por eso enunciamos el siguiente lema, lamentablemente la demostración de este escapa el alcance de esta obra.

**Lema 1.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el espacio y  $\mathcal{T}$  una tetraedralización con  $t$  tetraedros de  $S$ , se tiene entonces que:*

$$n - e + f - t = 1$$

*Donde  $e$  y  $f$  son el número total de aristas y caras respectivamente de la tetraedralización*

Pese a que no lo vamos a demostrar daremos una breve e informal explicación de este resultado. Este lema es consecuencia directa de la formula Euler-Poincaré que establece que para todo politopo convexo  $d$ -dimensional se tiene que  $f_0 - f_1 + f_2 + \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1} + (-1)^d f_d = 1$  donde  $f_i$  es el numero de caras de dimensión  $i$ . La cara  $d$ -dimensional es el politopo mismo.

En  $R^3$  esta es la conocida formula de Euler  $f_0 - f_1 + f_2 = 2$  y en  $R^4$  se tiene  $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$ . Si a nuestro conjunto de puntos en  $R^3$  le agregamos un punto  $p$  en  $R^4$  fuera del hiperplano donde se encuentra y agregamos un tetraedro  $\Delta p v_1 v_2 v_3$  a  $\mathcal{T}$  por cada triángulo  $\Delta v_1 v_2 v_3$  del casquete convexo la colección resultante será un politopo convexo 4-dimensional. Denotemos con  $e'$  el número de aristas que agregamos, con  $f'$  el de caras y con  $t'$  el de tetraedros. Entonces como el casquete convexo de  $S$  es un poliedro convexo (politopo convexo en  $R^3$ ) y por cada uno de sus vértices agregamos una arista, por cada arista una cara y por cada

para un tetraedro se cumple que  $e' - f' + t' = 2$ . De esta manera como ya dijimos la nueva colección satisface la igualdad  $(n + 1) - (e + e') + (f + f') - (t + t') = 0$ , esto con lo anterior nos da el lema.

Siguiendo con la terminología del lema, si  $S$  tiene  $m$  puntos en su casquete convexo entonces tendrá  $3m - 6$  aristas en el casquete convexo así como  $2m - 4$  triángulos (esto es por un razonamiento análogo al del Teorema 1) en el casquete convexo. Ahora bien cada tetraedro consta de dos caras y cada cara está en dos tetraedros por lo que  $f = \frac{4t + (2m - 4)}{2}$  es decir  $f = 2t + m - 2$ .

Denotemos con  $m'$  el número de puntos interiores de  $S$  entonces observando que  $n = m + m'$  y sustituyendo  $f = 2t + m - 2$  en el lema pasado y despejando  $t$  obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.** *Sea  $\mathcal{T}$  una tetraedralización de un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el espacio con  $m$  de ellos en el casquete convexo y  $m'$  al interior se tiene que:*

$$|\mathcal{T}| = e - n - m + 3 = e - 2m - m' + 3$$

Donde  $e$  es el número total de aristas en  $\mathcal{T}$

En vista del teorema anterior como todas las tetraedralizaciones tienen el mismo número de vértices (a saber  $|S|$ ) lo único que puede hacer variar el número de tetraedros entre diferentes tetraedralizaciones de  $S$  es el número de aristas que estas contengan. Por lo tanto si acotamos el número de aristas acotamos también el número de tetraedros. Sabemos que al menos las aristas del casquete convexo están en  $\mathcal{T}$  por lo tanto hay al menos  $3m - 6$  aristas debidas al casquete convexo. Además cada vértice interior está contenido en al menos cuatro aristas y cada arista consta de dos vértices. Estos contribuirán con al menos  $2m'$  aristas.

Usando el teorema tenemos que  $|\mathcal{T}| \geq 3m - 6 + m' - 2m - m' + 3 = m + m' - 3 = n - 3$ . Por otra parte a lo mas hay  $\binom{n}{2}$  aristas en total y por tanto por el teorema anterior  $|\mathcal{T}| \leq \binom{n}{2} - n - m + 3$ . Juntando estas dos cotas obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.** *Sea  $\mathcal{T}$  una tetraedralización de un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el espacio con  $m$  de ellos en el casquete convexo entonces  $n - 3 \leq |\mathcal{T}| \leq \binom{n}{2} - n - m + 3$*

Dicho en otras palabras el orden del número de tetraedros de  $\mathcal{T}$  está entre  $O(n)$  y  $O(n^2)$ .

Hasta ahora solo hemos acotado por arriba y por abajo el número de posibles tetraedros que podría tener una tetraedralización de  $S$ . Faltaría ver si podemos mejorar dichas cotas o si hay configuraciones de puntos y tetraedralizaciones donde se de la igualdad. Dicho en otras palabras: ¿Habrán conjuntos de  $n$  puntos en el espacio que admitan una tetraedralización con  $n - 3$  tetraedros? ¿Con  $\binom{n}{2} - n - m + 3$ ?

La respuesta en ambos casos es afirmativa. La construcción de la cota inferior es relativamente fácil, la de la cota superior requiere más cuidado.

### Tetraedralizaciones con $n - 3$ tetraedros

Para construir un conjunto con  $n$  vértices y una tetraedralización con  $n - 3$  tetraedros empezaremos con un tetraedro  $\Delta p_0 p_1 p_2 p_3$  y agregaremos los siguientes  $n - 4$  puntos de manera tal que solo añadamos un tetraedro extra por punto. Haciendolo de esta manera aseguramos los  $n - 3$  tetraedros pues por cada punto tenemos un tetraedro a excepcion de los primeros cuatro los cuales en conjunto solo contribuyen con uno.

Una vez que hemos tetraedralizado de esta manera los primeros  $p_0 \dots p_i$  puntos escogemos una cara  $\Delta v_0 v_1 v_2$  en el casquete convexo. El punto  $p_{i+1}$  lo acercamos lo suficiente a  $\Delta v_0 v_1 v_2$  de manera que solo aumentemos  $\Delta p_{i+1} v_0 v_1$ ,  $\Delta p_{i+1} v_1 v_2$  y  $\Delta p_{i+1} v_0 v_2$  al casquete convexo. De esta manera podemos extender la tetraedralización añadiendo el tetraedro  $\Delta p_{i+1} v_0 v_1 v_2$ . Hay



un detalle tecnico que hay cuidar al agregar el punto  $p_{i+1}$ . Tenemos que conservar la posición general de todo el conjunto, la única manera que rompamos la condición de posición general seria que el punto  $p_{i+1}$  cayera en el plano generado por tres puntos anteriores. Si nos fijamos en todos los conjuntos posibles de tres puntos en  $p_0 \dots p_i$  y en los planos generados por esto obtenemos un número finito de planos. Al estar en el espacio no importa donde hayamos colocado a  $p_{i+1}$  podemos moverlo un lugar tan cerca como queramos que no este en ninguno de los planos antes mencionados. Este ejemplo muestra que la cota inferior se puede alcanzar.

### Tetraedralizaciones con un número cuadrático de tetraedros

Para la cota superior elegiremos el conjunto de puntos sobre la curva de momento  $\mathfrak{M} = \{(x, x^2, x^3)\}$ .

Sean  $0 < r_1 < r_2 \dots < r_n$  numeros reales, denotemos con  $p_i$  el punto  $(r_i, r_i^2, r_i^3)$  sobre la curva de momento. Probaremos que el conjunto de tetraedros  $\mathcal{T} = \{\Delta p_i p_{i+1} p_j p_{j+1} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  induce una tetraedralización del conjunto de puntos en el espacio  $S = \{p_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ . Para que en efecto sea una tetraedralización de  $S$ ,  $S$  tiene que estar en posición general y  $\mathcal{T}$  cumplir con la definición de tetraedralización es decir que particione el cierre convexo, que sus tetraedros no se intersecten en su interior y que los tetraedros no contengan puntos de  $S$  en su interior. Hagamos primero unas observaciones que nos serán utiles para probar que  $S$  y  $\mathcal{T}$  cumplen estas propiedades.

Consideremos el plano  $\Pi$  dado por la ecuacion  $Ax + By + Cz + D = 0$  entonces  $(x, x^2, x^3) \in \mathfrak{M}$  intersecta a  $\Pi$  si y solo si  $Ax + Bx^2 + Cx^3 + D = 0$ , pero el lado izquierdo de la ecuacion resulta ser un polinomio de grado tres. Sea  $p(x)$  dicho polinomio.

Esto quiere decir que la curva de momento intersecta a cualquier plano en a lo más 3 puntos. Ademas si  $x_1 < x_2 < x_3$  son tres raices reales de  $p(x)$  entonces  $p(x)$  cambia de

signo en  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . Por lo tanto todos los puntos en  $(-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$  evaluados en  $p(x)$  tienen el mismo signo y lo mismo pasa para los puntos en  $(x_1, x_2) \cup (x_3, \infty)$ .

Observemos que los puntos fuera de  $\Pi$  están divididos en dos semiespacios, en uno los puntos evaluados en  $p(x)$  son mayores a cero y en el otro menores a cero. Esto quiere decir que  $\{(x, x^2, x^3) \mid x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)\}$  está en uno de los semiespacios y  $\{(x, x^2, x^3) \mid x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, \infty)\}$  en el otro. Estas observaciones establecen que  $S$  por estar contenida en la curva de momento, está en posición general.

Para ver que los tetraedros de  $\mathcal{T}$  no contienen puntos de  $S$  en su interior, demostraremos que  $S$  está en posición convexa. Si un tetraedro de  $\mathcal{T}$  tuviera un punto de  $S$  al interior dicho punto no podría estar en el casquete convexo de  $S$ .

Sea  $S' = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_n\}$  la proyección de  $S$  sobre el plano  $XY$  entonces  $S'$  estará sobre la parábola  $\{(x, x^2)\}$ . Si tomamos el polígono  $P$  determinado por los vértices  $p'_1, p'_2, \dots, p'_n, p'_1$  dicho polígono será convexo y ocupará todos los vértices de  $S'$ . Por lo tanto  $P$  es el casquete convexo de  $S'$ , lo que significa que  $S'$  está en posición convexa.

Si  $S$  no estuviera en posición convexa al menos un punto de  $S$  estaría al interior del cierre convexo de  $S$ , no importa sobre que plano proyectemos a  $S$  dicho punto irá a estar en el interior del cierre convexo de la proyección. Entonces el que  $S'$  esté en posición convexa implica que  $S$  también lo está.

Finalmente veamos que los tetraedros de  $\mathcal{T}$  no se intersectan en su interior y que  $\mathcal{T}$  particiona a  $\text{Conv}(S)$ . Esto lo haremos de manera inductiva.

Denotamos con  $S_m = p_1, \dots, p_m$  y con  $\mathcal{T}_m = \{\Delta p_i p_{i+1} p_j p_{j+1} \mid 1 \leq i < j \leq m\}$ . Claramente  $S_4$  está tetraedralizado por  $\mathcal{T}_4$ . Suponiendo que  $S_m$  está tetraedralizado por  $\mathcal{T}_m$ , extenderemos  $S_m$  a  $S_{m+1}$  y  $\mathcal{T}_m$  a  $\mathcal{T}_{m+1}$  agregando los tetraedros faltantes, a saber los de la forma  $\Delta_{p_m p_{m+1} p_i p_{i+1}}$ .

Para probar que  $\mathcal{T}_m$  es en efecto una tetraedralización de  $S_m$  nos será de utilidad saber



Figura 2.8: Intersección de los triángulos  $\tau'_1$  y  $\tau'_2$

cual es en general el casquete convexo de  $S_m$  para  $0 < m \leq n$ . Para que un triángulo  $\Delta p_i p_j p_k$  ( $r_i < r_j < r_k$ ) con vértices en  $S_m$  este en el casquete convexo de  $S_m$  es condición necesaria y suficiente que el plano  $\Pi_\tau$  generado por  $\tau = \Delta p_i p_j p_k$  deje a todos los demás vértices de  $S_k$  del mismo “lado”. Propiamente dicho si a  $\Pi_\tau$  le asignamos el polinomio  $p_\tau(x)$  de grado tres como lo hicimos anteriormente entonces  $r_1, \dots, r_k$  al ser evaluados en  $p_\tau(x)$  tendrán el mismo signo (a excepción de  $r_i, r_j$  y  $r_k$  que evalúan a cero). Lo que significa que  $r_1, \dots, r_k$  están en  $[-\infty, r_i] \cup [r_j, r_k]$  o bien en  $[r_i, r_j] \cup [r_k, \infty]$ . En el primer caso se tiene que  $r_i$  y  $r_j$  deben ser consecutivos y  $r_k$  ser el último de la lista. Es decir  $j = i + 1, k = m$  y por consiguiente  $\tau = \Delta p_i p_{i+1} p_m$ . En el otro caso  $r_j$  y  $r_k$  son consecutivos y  $r_i$  es el primero de la lista. Se tiene ahora que  $k = j + 1, i = 1$  y  $\tau = \Delta p_1 p_j p_{j+1}$ .

Los triángulos del casquete convexo son entonces los de la forma  $\Delta p_1 p_i p_{i+1}$  o  $\Delta p_i p_{i+1} p_m$ .

Nos fijamos ahora en  $S_{m+1}$  que no es otra cosa más que  $S_m \cup \{p_{m+1}\}$  y en  $\mathcal{T}_{m+1}$  que resulta ser  $\mathcal{T}_m \cup \{\Delta p_i p_{i+1} p_m p_{m+1} \mid 1 \leq i < m - 1\}$ . Tenemos que probar que los tetraedros de  $\mathcal{T}_{m+1}$  no se cruzan en su interior y que  $\mathcal{T}_{m+1}$  particionan a  $\text{Conv}(S_{m+1})$ . Como los triángulos  $\Delta p_i p_{i+1} p_m$  están en el casquete de  $S_m$  y comparten un mismo vértice los tetraedros  $\Delta p_i p_{i+1} p_m p_{m+1}$  no se cruzan en su interior y como los  $\mathcal{T}_m$  forman una tetraedralización sus

tetraedros tiene interiores ajenos.

Los únicos tetraedros que podrían cruzarse serían los de  $\mathcal{T}_m$  con los de  $\mathcal{T}_{m+1} - \mathcal{T}_m$ .

Sean  $\tau \in \mathcal{T}_m$  y  $\tau' \in \mathcal{T}_{m+1} - \mathcal{T}_m$ . Supongamos  $\tau$  y  $\tau'$  se intersectan en su interior, en particular  $\tau$  debe intersectar el interior de  $S_m$  por que debe atravesar una cara del casquete convexo de  $S_m$ . Es decir debe cruzar un triángulo de la forma  $\Delta p_1 p_i p_{i+1}$  o  $\Delta p_i p_{i+1} p_m$ .

Ahora bien los triángulos  $\Delta p_1 p_i p_{i+1}$  estan en el casquete convexo de  $S_{m+1}$  y  $\tau$  está contenido en dicho casquete.

Lo que significa  $\tau$  atraviesa un triángulo  $\tau_j = \Delta p_j p_{j+1} p_m$ . Por lo que al menos una de sus caras lo atraviesa.

Suponiendo que  $\tau = \Delta p_i p_{i+1} p_m p_{m+1}$ , las caras  $\Delta p_i p_{i+1} p_m$  y  $\Delta p_i p_{i+1} p_{m+1}$  están en el casquete convexo de  $S_m$  y  $S_{m+1}$  respectivamente. Por lo que  $\Delta p_i p_m p_{m+1}$  o  $\Delta p_{i+1} p_m p_{m+1}$  debe atravesar a  $\tau_j$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $\tau_i = \Delta p_i p_m p_{m+1}$  atraviesa a  $\tau_j$ . Tomando  $p_{\tau_i}(x)$  como lo hicimos anteriormente, se tiene que  $r_j$  y  $r_{j+1}$  tiene el mismo signo y  $r_m$  evalua a cero en  $p_{\tau_i}(x)$ . Por lo que  $\tau_j$  no intersecta al plano generado por  $\tau_i$ .

Falta ver que  $\tau_{m+1}$  cubra a  $\text{Conv}(S_{m+1})$ . Pero  $\text{Conv}(S_m)$  está cubierto por  $\mathcal{T}_m$  y  $\text{Conv}(S_{m+1}) - \text{Conv}(S_m)$  por  $\{\Delta p_i p_{i+1} p_m p_{m+1} | 1 \leq i < m - 1\}$ .

Esta tetraedralización utiliza todas las aristas posibles de  $S$  alcanzando así la cota máxima.

Una vez visto que las cotas son alcanzables se podría uno preguntar que tan cerca de las cotas se puede tetraedralizar un conjunto de puntos dado.

Es decir cuales son el mínimo y máximo numero de tetraedros necesarios para tetraedralizar cualquier conjuntos de  $n$  puntos en el espacio.

La primera cuestión es de interes práctico pues una tetraedralización con pocos tetraedros significa que se necesitara poca memoria para almacenarla y en general disminuye el tiem-

po de los algoritmos que la involucren.

Por las mismas razones las tetraedralizaciones con mucho tetraedros recibieron poca atencion en un principio.

Sin embargo, hay consecuencias sorprendentes de tetraedralizaciones con muchos tetraedros. Si fuese cierto que todo conjunto de puntos en el espacio admite una tetraedralización con un número supra-lineal de tetraedros se podría demostrar que si coloreamos con  $m$  colores una colección con  $n$  puntos en el espacio, para un  $n$  lo suficiente grande habrá un tetraedro monocromatico vacio.

Actualmente no se sabe cual es el máximo pero si se sabe que al menos es mayor o igual que  $4,75n$  menos una constante  $c$  (Vease [16]).

## Capítulo 3

# Triangulaciones Hamiltonianas

En este capítulo estudiaremos el problema de la triangulación hamiltoniana en general. Daremos una motivación para su estudio en términos de las aplicaciones que se derivan de su solución. Veremos las diferentes variantes del problema, para conjunto de puntos o para polígonos. Resolveremos el problema de la triangulación hamiltoniana para conjuntos de puntos en el plano. Haremos énfasis en este último y haremos observaciones que posteriormente nos servirán para atacar el problema en el espacio.

Mostraremos un algoritmo nuevo para obtener una triangulación hamiltoniana de un conjunto de vértices dado. Generalizamos la técnica usada en este algoritmo para probar una condición de suficiencia para que una triangulación sea hamiltoniana y con esto terminaremos el capítulo.

### 3.1. Motivación

Las triangulaciones, ya sea de polígonos o conjuntos de puntos, son muy usadas en matemáticas y en particular en la rama de geometría computacional. Esto se debe en parte

a que dividen el problema original en partes que son fáciles de tratar.

Si quisiéramos, por ejemplo, calcular el área de un polígono podríamos triangularlo y sumar el área de los triángulos que lo conforman. Para calcular el área de un triángulo lo podemos hacer en tiempo constante por lo que realmente influye en cuanto al desempeño del algoritmo es el computo de la triangulación. Otro lugar donde se ha encontrado gran aplicación a las triangulaciones es en el ámbito de la graficación por computadora. Es aquí donde radica el interés práctico de la triangulación hamiltoniana.

Si a un polígono  $P$  le agregamos tantas diagonales que no se intersecten (segmentos de recta al interior de  $P$  con vértices en  $P$ ) como sea posible habremos dividido a  $P$  en triángulos. Dicha colección  $\mathcal{T}$  de triángulos se conoce como una triangulación de  $P$ .

Supongamos que queremos representar gráficamente a  $P$ , podríamos hacer otra vez uso de la triangulación para trazar cada uno de sus triángulos por separado y al terminar habremos trazado a  $P$ . Supongamos ahora que  $P$  tiene una triangulación hamiltoniana  $\mathcal{T}'$ . Es decir que la gráfica dual de  $\mathcal{T}'$ ,  $D_{\mathcal{T}'}$ , tiene una trayectoria hamiltoniana. Dado un triángulo en la trayectoria podemos indicar el próximo triángulo, indicando solo el siguiente punto así como la arista que comparte con el primero. Esto último lo podemos hacer a un costo extra de un bit por triángulo, pues si elegimos una arista como la base del triángulo las otras dos aristas las designamos como izquierda y derecha.

De esta manera la trayectoria y en consecuencia el polígono se puede guardar como una sucesión de vértices con un bit asociado.

Después cuando se quiera dibujar el polígono, se dibujan los triángulos en el orden indicado por la sucesión. La ventaja de esto es que mientras todavía se está graficando un triángulo se puede empezar a graficar el siguiente (a esto se le conoce como "pipelining").

En [2] se da una discusión a fondo sobre triangulaciones hamiltonianas de polígonos y conjuntos de puntos en el plano, en particular se demuestran que todo conjunto de puntos

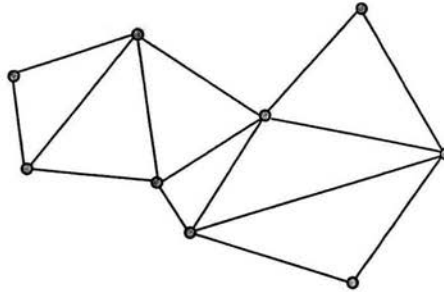


Figura 3.1: Triangulación de un polígono

admite o no una triangulación hamiltoniana. Pese a que no todo polígono tiene una triangulación hamiltoniana en [2] dan una condición necesaria y suficiente para determinar si un polígono admite una triangulación hamiltoniana. Proporcionan también un algoritmo de  $O(|E|)$  para determinar si tiene dicha propiedad donde  $|E|$  es el número de aristas de la gráfica de visibilidad del polígono.

El problema de triangular hamiltonianamente un polígono general como el de hacerlo para conjuntos de puntos en el plano tienen bastantes aplicaciones prácticas. La misma situación se presenta en el espacio. Sin embargo en el espacio un poliedro no siempre es tetraedralizable (en más o menos el mismo sentido que extendimos el concepto de triangulaciones para polígonos). Además saber si un poliedro dado es tetraedralizable es un problema *NP* difícil (véase [15]). Como además es muy poco lo que se sabe en el contexto de conjuntos de puntos en el espacio nos enfocaremos en este problema.

## 3.2. Triangulación Hamiltoniana de Puntos en el Plano

El problema de la triangulación hamiltoniana para puntos en el plano tiene una solución sencilla, sin embargo lo estudiaremos a detalle por su relación con el mismo problema en



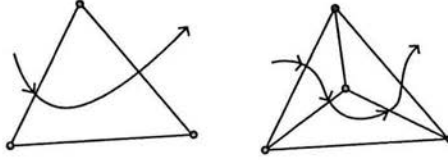


Figura 3.2: Agregando los puntos interiores a la trayectoria.

el espacio.

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Sea  $p$  un punto interior de  $S$  y supongamos que  $S' = S - \{p\}$  tiene una triangulación hamiltoniana  $\mathcal{T}'$  con trayectoria hamiltoniana  $\Gamma'$  en  $D_{\mathcal{T}'}$

Considerando la ubicación de  $p$  en el plano tenemos que se encuentra localizado en uno y sólo un triángulo  $\tau = \Delta q_1 q_2 q_3$  de  $\mathcal{T}'$ .

Tomando eso en cuenta si ahora cambiamos a  $\mathcal{T}'$  por  $\mathcal{T} = \mathcal{T}' - \tau \cup \{\Delta p q_1 q_2, \Delta p q_1 q_3, \Delta p q_2 q_3\}$  tendremos una triangulación de  $S$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que en  $\Gamma'$  se entra a  $\tau$  por  $\overline{q_1 q_2}$  y se sale por  $\overline{q_1 q_3}$ . Substituyendo a  $\tau$  en  $\Gamma'$  por  $\Delta p q_1 q_2, \Delta p q_2 q_3, \Delta p q_1 q_3$  en ese orden obtenemos una trayectoria hamiltoniana  $\Gamma$  de  $D_{\mathcal{T}}$ .

Podemos repetir el proceso anterior hasta llegar a un conjunto de puntos en posición convexa. Esto quiere decir que si fuera posible triangular hamiltonianamente cualquier conjunto de puntos en el plano en posición convexa, entonces cualquier conjunto de puntos admitiría una triangulación hamiltoniana.

Supongamos pues que  $S$  está en posición convexa, entonces el casquete convexo de  $S$  forma un polígono convexo  $P$ . Se tiene por hipótesis que  $S \subset P$ . Sea  $q_0 \in S$  y  $q_1, q_2$  los dos vértices a los que es adyacente en  $P$ .

De manera similar a como lo hicimos anteriormente supongamos que  $S' = S - \{q_0\}$  tiene una triangulación hamiltoniana  $\mathcal{T}'$  con trayectoria hamiltoniana  $\Gamma'$  en  $D_{\mathcal{T}'}$ .

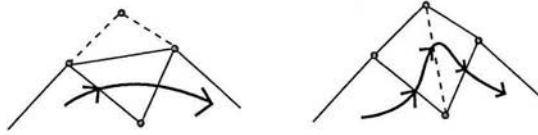


Figura 3.3: Agregando los puntos del casquete convexo a la trayectoria

Como  $S$  está en posición convexa también lo está  $S'$  y por tanto  $S'$  está contenido en su casquete convexo, el cual forma un polígono convexo  $P'$ .

Al ser  $q_1$  y  $q_2$  adyacentes a  $q_0$  en  $P$ ,  $q_1$  y  $q_2$  son adyacentes entre si en  $P'$ . Dado que  $\mathcal{T}'$  es una triangulación de  $S'$  y  $\overline{q_1q_2}$  está en el casquete convexo de  $S'$ , hay un único triángulo que contiene a  $\overline{q_1q_2}$ . Sea  $\tau = \Delta q_1q_2q_3$  dicho triángulo.

Si unimos a  $q_0$  con  $q_3$  debemos forzosamente atravesar a  $P'$  pero como  $S$  está en posición convexa y todas las arista de  $P'$  salvo  $\overline{q_1q_2}$  están en  $P$ ,  $\overline{q_0q_3}$  debe cruzar a  $\overline{q_1q_2}$ .

Por lo tanto la unión de  $\tau = \Delta q_1q_2q_3$  con  $\Delta q_0q_1q_2$  es convexa. Como vimos en el capítulo 2 podemos girar a  $\overline{q_1q_2}$  para obtener los triángulos  $\Delta q_0q_1q_3$  y  $\Delta q_0q_2q_3$ . Ahora de manera análoga a lo que hicimos para los puntos interiores intercambiamos a  $\tau$  por  $\Delta q_0q_1q_3$  y  $\Delta q_0q_2q_3$  en  $\mathcal{T}'$  para así obtener una tetraedralización  $\mathcal{T}$  de  $S$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\Gamma'$  entra a  $\tau$  por  $\overline{q_1q_3}$  y sale  $\overline{q_2q_3}$ . Reemplazamos a  $\tau$  por  $\Delta q_0q_1q_3$  y  $\Delta q_0q_2q_3$  en  $\Gamma'$  en dicho orden obteniendo una trayectoria hamiltoniana  $\Gamma$  de  $D_{\mathcal{T}}$ .

Con esto demostramos que todo conjunto de puntos en posición convexa tiene una triangulación hamiltoniana. Juntando los dos resultados anteriores obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 4.** *Todo conjunto de puntos en plano tiene una triangulación hamiltoniana.*



Figura 3.4: Agregando los puntos interiores en 3D

### 3.3. Tetraedralizaciones Hamiltonianas (primeras observaciones)

Dimos una técnica para triangular hamiltonianamente un conjunto de puntos en el plano. Primero nos deshicimos de los puntos interiores observando que si quitábamos un punto interior y triangulábamos hamiltonianamente podíamos regresar el punto que quitamos y retriangular hamiltonianamente el conjunto original. Sería interesante saber si podemos hacer lo mismo en el espacio.

En el plano quitamos un vértice interior, triangulamos hamiltonianamente y al regresarlo, este vértice se encontraba en un sólo triángulo. Después subdividimos dicho triángulo en tres adyacentes entre sí. Esto nos permitió extender la trayectoria hamiltoniana para abarcar el conjunto original. Haciendo esto para cada punto interior fuimos capaces de reducir el problema al de encontrar una triangulación hamiltoniana para conjuntos de puntos en posición convexa.

Consideramos ahora a  $S$  como un conjunto de puntos en el espacio y  $p$  un punto interior de  $S$ . Procedemos de la misma manera como hicimos en el plano, es decir suponemos que

$\mathcal{T}'$  es una tetraedralización hamiltoniana de  $S' = S - \{p\}$ . Sea  $\tau = \Delta q_1 q_2 q_3 q_4$  el único tetraedro de  $\mathcal{T}'$  que contiene a  $p$ . Subdivimos a  $\tau$  en cuatro tetraedros adyacentes entre sí a saber  $\Delta p q_1 q_2 q_3$ ,  $\Delta p q_1 q_2 q_4$ ,  $\Delta p q_1 q_3 q_4$ ,  $\Delta p q_2 q_3 q_4$ . Obteniendo así una tetraedralización de  $S$  y de la misma manera que en el plano extendemos la trayectoria hamiltoniana de  $S'$  para que abarque  $S$ .

Esto quiere decir que para tetraedralizar hamiltonianamente a  $S$  basta con tetraedralizar hamiltonianamente el conjunto de puntos de  $S$  que están en el casquete convexo. Por eso, de ahora en adelante enfocaremos nuestra atención en tetraedralizar conjuntos de puntos en posición convexa.

Formalmente tenemos que :

**Teorema 5.** *Un conjunto de puntos  $S$  en el espacio es tetraedralizable hamiltonianamente si el conjunto  $S'$  de puntos de  $S$  que están su casquete convexo lo es.*

En el plano fuimos capaces de lidiar con los puntos en el casquete convexo haciendo uso del hecho de que no importando como tetraedralizemos el resto de los puntos siempre podíamos extender la tetraedralización para que incluyese el punto y hacer un giro para incluirlo en la trayectoria.

Esto fue posible en parte por que en el plano un vértice del casquete convexo sólo es adyacente a dos vértices, en el espacio esto no es el caso, de hecho un vértice puede ser adyacente a todos los demás vértices del casquete convexo.

Sin embargo, si el vértice tiene grado tres en el casquete convexo podemos hacer algo similar a lo que hicimos en el espacio.

Usamos la misma notación que antes, sólo que ahora suponemos que  $p$  está en el casquete convexo de  $S$  y que es de grado 3 en el casquete convexo, es decir que sólo es adyacente a tres vértices  $(q_1, q_2, q_3)$  del casquete convexo .

Estos tres vértices forman una cara del casquete convexo de  $S'$ . Sea  $\tau = \Delta q_1 q_2 q_3 q$  el único tetraedro que contiene a esta cara en  $\mathcal{T}'$ . Como  $S$  es convexo, el segmento de recta  $\overline{pq}$  está enteramente contenido en  $\tau \cup \Delta p q_1 q_2 q_3$  y por lo tanto la cara  $\Delta q_1 q_2 q_3$  es girable. Sean  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  los tres tetraedros resultantes de dicho giro. Como dos a dos estos tetraedros son adyacentes los ordenamos de manera que al intercambiarlos por  $\tau$  en  $\Gamma'$  obtengamos una trayectoria hamiltoniana  $\Gamma$  de  $\mathcal{T} = (\mathcal{T}' - \tau) \cup \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$  tetraedralización de  $S$ .

De esta manera obtenemos un resultado más.

**Teorema 6.** *Sea  $S$  un conjunto de puntos en el espacio y  $p$  un punto del casquete convexo de  $S$  de grado 3,  $S$  tiene una tetraedralización hamiltoniana si  $S - p$  la tiene.*

### 3.4. Triangulación Hamiltoniana en tiempo $O(n \log n)$ .

En [2] se menciona un algoritmo determinístico para calcular una triangulación hamiltoniana de un conjunto de puntos en tiempo  $O(n \log n)$ . Por la dificultad de su implementación dan como alternativa un algoritmo aleatorio con tiempo esperado de  $O(n \log n)$ . Ambos algoritmos descritos en [2] básicamente funcionan de la misma manera, que se dá a continuación.

Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano con  $S'$  los vértices de  $S$  en su casquete convexo

Calculamos el cierre convexo de  $S$ , una vez hecho esto fijamos un vértice  $p \in S'$  y trazamos  $\overline{pq}$  para cada  $q \in S' - p$ . Con esto obtenemos una triangulación hamiltoniana de  $S'$ . Después localizamos en que triángulo se encuentra cada punto interior  $r \in S$ .

En [2] no especifican como llevar acabo esta construcción sin embargo lo podemos hacer relativamente fácil y en tiempo  $O(n \log n)$  si ordenamos los segmentos de recta  $\overline{pq}$ ,  $q \in S' - p$ , con respecto a  $p$ .

Sólo basta encontrar entre cual de estos segmentos se encuentra  $\overline{pr}$ . Finalmente los

vértices al interior los agregamos uno a uno como hicimos para probar que podíamos quitar los puntos al interior al principio del capítulo.

Al agregar cada vértice, dividimos un triángulo de la trayectoria en tres, descartamos este vértice y calculamos en cual de los nuevos triángulos se encuentran los vértices interiores del original.

Si fuera el caso en que todos los puntos interiores se encuentran en uno de los triángulos originales y agregamos los puntos interiores en un orden tal que dejen todos los puntos restantes en un mismo triángulo tendríamos un tiempo cuadrático de ejecución. Esto se debe a que si  $S'$  tiene  $m$  elementos, en cada paso  $i$  tenemos que calcular donde se encuentra cada uno de los  $m - i$  vértices restantes.

Para garantizar un tiempo de  $O(n \log n)$ , la elección del siguiente vértice que agreguemos tiene que ser hecha de tal manera que distribuya más o menos uniformemente los demás vértices en los tres triángulos nuevos.

En [3] demuestran que si el triángulo original tiene  $m$  vértices al interior, hay un vértice tal que los tres triángulos nuevos tienen a lo más  $\frac{2m}{3}$  vértices. Este punto “separador” se puede encontrar en tiempo  $O(m)$ . Este hace que se hagan llamadas para localizar los vértices de profundidad a lo más  $O(\log n)$  tardando tiempo lineal en cada llamada. Lo anterior y el hecho de que la cerradura convexa se puede calcular en tiempo  $O(n \log n)$  nos dá la cota de  $O(n \log n)$  para el algoritmo (determinístico) descrito.

Del análisis del algoritmo anterior se obtiene que:

**Teorema 7.** *Se puede encontrar una triangulación hamiltoniana de un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano, en tiempo  $O(n \log n)$ .*

El cálculo de este vértice separador tiene la desventaja de ser difícil de implementar.

Es por eso que en [2] observan que haciendo la elección del vértice separador aleato-

riamente el tiempo esperado de ejecución es de  $O(n \log n)$ .

Además en ambos casos se requiere precalcular el cierre convexo para lo cual hay algoritmos relativamente fáciles de implementar que lo hacen en tiempo  $O(n \log n)$ .

### 3.4.1. Triangulación Hamiltoniana en tiempo $O(n \log n)$ (sin localización de vértices separadores)

Terminaremos esta sección dando un algoritmo determinístico de tiempo  $O(n \log n)$  para triangular hamiltonianamente conjuntos de puntos en el plano sin tener que localizar vértices separadores. Dicho algoritmo tiene la ventaja de ser fácil de implementar y no ha sido publicado anteriormente.

El algoritmo que presentamos se basa en el barrido de Graham (“Graham scan” vease [10]) que no sólo sirve para calcular cerraduras convexas, sino que también genera una triangulación. Esta triangulación resulta ser de hecho hamiltoniana. Mientras el barrido de Graham calcula la cerradura convexa, nuestro algoritmo va recolectando información que nos permita construir en tiempo lineal la trayectoria hamiltoniana al finalizar. Esta recolección la hacemos en un espacio lineal y sin subir la complejidad del barrido de Graham que es de  $O(n \log n)$ .

Primero presentaremos el barrido de Graham, veremos que en efecto no sólo calcula el cierre convexo sino que también genera una triangulación hamiltoniana de un conjunto de puntos dado.

Después veremos que modificaciones hay que hacer para que al final del algoritmo podamos construir la trayectoria hamiltoniana.

**Barrido de Graham**

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano, elegimos el vértice  $p_0$  de coordenada  $X$  mínima, en caso de empate el que tenga menor coordenada  $Y$ .

Ordenamos el resto de los vértices con respecto a  $p_0$  en el sentido que  $r > s$  si y sólo si  $\angle rp_0s \leq \pi$ , donde  $\angle rp_0s$  es el ángulo entre  $\overline{p_0s}$  y  $\overline{p_0r}$  yendo de  $s$  a  $r$  en sentido contrario de las manecillas del reloj (de esta manera  $\angle rp_0s \neq \angle sp_0r$ ). Sean  $p_1, \dots, p_{n-1}$  los puntos de  $S - p_0$  en dicho orden.

Iremos examinando los vértices  $p_1, \dots, p_{n-1}$  en dicho orden, conservando la invariante de que cuando llegamos al vértice  $p_i$  sabemos que vértices de  $V_{i-1} = \{p_0 \dots p_{i-1}\}$  están en el casquete convexo de  $V_{i-1}$ . Al visitar el vértice  $p_i$  determinamos que vértices siguen estando en el casquete convexo  $V_i$  y cuales ya no.

Los vértices del casquete convexo de  $V_i$  los guardamos con su orden correspondiente en una pila que denotaremos con  $\Gamma$  y sus elementos como  $\Gamma = (abc)$ , siendo  $a$  el elemento en el tope de la pila.

Metemos  $p_0, p_1, p_2$  a la pila, pues  $p_0, p_1, p_2$  están en el casquete convexo de  $V_2 = \{p_0, p_1, p_2\}$ .

Es decir inicializamos  $\Gamma = (p_2, p_1, p_0)$ . Supongamos inductivamente que en  $\Gamma$  se encuentran los vértices del casquete convexo de  $V_i$  y que procedemos a visitar  $p_{i+1}$ .

Sean  $q_1$  y  $q_2$  los dos primeros elementos de  $\Gamma$ . Si  $\angle p_{i+1}q_1q_2 < \pi$ ,  $q_1$  no podría estar en el casquete convexo de  $V_i$  pues  $\text{Conv}(V_i)$  no contendría al segmento de recta  $\overline{p_{i+1}q_2}$ .

En ese caso sacamos a  $q_1$  de la pila y nos fijamos en los siguientes dos elementos de  $\Gamma$ , si se cumple otra vez que  $\angle p_{i+1}q_2q_3 < \pi$  sacamos a  $q_2$  de la pila. Seguimos sacando vértices de la pila mientras formen ángulos exteriores menores a  $\pi$ . Como  $p_0$  y  $p_1$  siempre están en el casquete convexo de  $V_{i+1}$  nunca sacaremos todos los vértices de  $\Gamma$ .



Una vez que sacamos de  $\Gamma$  los vértices que formen ángulos exteriores con  $p_{i+1}$  menores a  $\pi$  tenemos que por inducción los restantes vértices de  $\Gamma$  no forman consecutivamente ángulos menores a  $\pi$ . Metemos  $p_{i+1}$  a la pila, los vértices de  $\Gamma$  forman un polígono con todos sus ángulos exteriores mayores a  $\pi$  que contiene además a  $V_{i+1}$ .

Dicha condición es suficiente y necesaria para que el polígono sea convexo por lo tanto los vértices en  $\Gamma$  son los vértices del casquete convexo de  $V_{i+1}$ . De esta manera el barrido de Graham calcula el casquete convexo (y por ende el cierre convexo) de un conjunto de puntos dado.

El ordenar los puntos con respecto a  $p_0$  toma tiempo de  $O(n \log n)$ . Las operaciones sobre la pila toman tiempo constante. Además una vez que sacamos un vértice de la pila lo descartamos; dichas operaciones las hacemos  $O(n)$  veces. Por lo tanto el barrido de Graham toma tiempo  $O(n \log n)$ .

El algoritmo de Graham aproxima a cada paso el casquete convexo de  $S$ , podemos usar este hecho para encontrar una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$  sin incrementar la complejidad del algoritmo.

Una vez que hemos ordenado los vértices con respecto a  $p_0$  inicializamos  $\mathcal{T} = \{\Delta p_0 p_i p_{i+1} \mid 0 < i < n - 1\}$ . Supongamos que estamos visitando el vértice  $p_i$  y que sacamos el vértice  $q_1$  de  $\Gamma$ . Sea  $q_2$  el vértice que precede a  $q_1$  en  $\Gamma$ . Sacamos  $q_1$  por que  $\angle p_i q_1 q_2 < \pi$ , esto quiere decir que  $\overline{p_i q_2}$  está fuera del polígono determinado por los vértices de  $\Gamma$  y  $p_i$ . Agregamos entonces  $\Delta p_i q_1 q_2$  a  $\mathcal{T}$ . Si hacemos eso cada que saquemos un vértice tendremos que en cada paso  $\mathcal{T}$  es una triangulación del polígono determinado por los vértices que nos falta visitar y los de  $\Gamma$  (en ese orden).

Al terminar el barrido de Graham,  $\mathcal{T}$  es una triangulación de  $S$ . Se puede decir todavía más, en particular  $\mathcal{T}$  cumple que:

**Teorema 8.** *La triangulación  $\mathcal{T}$  generada por el barrido de Graham es hamiltoniana.*

*Demostración.* Sea  $Q$  el polígono determinado por la lista de los vértices  $(p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_1)$  de  $S - p_0$  ordenados con respecto a  $p_0$ .

Al empezar el algoritmo inicializamos  $\mathcal{T} = \{\Delta p_0 p_i p_{i+1} \mid 0 < i < n - 1\}$ , por lo que hasta este momento  $\mathcal{T}$  es una triangulación de  $Q$ . Esta será una invariante a lo largo del algoritmo. También observemos que  $\mathcal{T}$  contiene las aristas  $\overline{p_0 q}$  con  $q$  vértice de  $Q$ . Por lo que  $\mathcal{T}$  es la unión de los triángulos que se encuentran contenidos dentro de los polígonos  $\Delta_i$ , determinados por los vértices  $(p_0 q_i q_{i+1})$  donde  $q_i$  y  $q_{i+1}$  son dos vértices consecutivos de  $Q$  distintos de  $p_0$ .

Sea  $\mathcal{T}_i$  el conjunto de triángulos de  $\mathcal{T}$  que están contenidos en  $\Delta_i$ . Es decir  $\mathcal{T}_i$  es una triangulación de  $\Delta_i$ .

Supongamos que se puede entrar por cualquiera de las tres arista de  $\Delta_i$ , pasar por todos los triángulos de  $\mathcal{T}_i$  una sola vez y salir por cualquiera de las dos aristas restantes.

Es decir hay una trayectoria hamiltoniana en  $D_{\mathcal{T}_i}$  (vease definición 7 en el capítulo 2) que empieza en cualquier arista y termina en cualquier otra de  $\Delta_i$ . Como  $\Delta_i$  y  $\Delta_{i+1}$  comparten la arista  $\overline{p_0 q_{i+1}}$  al entrar y salir en  $\Delta_i$  por  $\overline{p_0 q_i}$  y salir por  $\overline{p_0 q_{i+1}}$  llegamos a  $\Delta_{i+1}$  habiendo recorrido todos los triángulos de  $\mathcal{T}_i$  una sola vez.

Si ahora entramos por  $\overline{p_0 q_{i+1}}$  en  $\Delta_{i+1}$  pasamos por todos los triángulos y salimos por  $\overline{p_0 q_{i+2}}$  llegamos a  $\Delta_{i+2}$ . Haciendo esto sucesivamente para cada  $\Delta_i$  desde 1 hasta  $n - 2$  encontramos una trayectoria hamiltoniana en  $D_{\mathcal{T}}$ . Esto se cumple claramente al inicio del barrido de Graham falta ver que se cumpla en cada paso del algoritmo. Supongamos que sacamos el vértice  $r_1$  de  $\Gamma$  mientras visitamos el vértice  $p_i$  durante la ejecución del algoritmo y que se cumplen las condiciones anteriores. Sea  $r_2$  el vértice que está ahora en el tope de  $\Gamma$ , por lo tanto es el vértice que antecede a  $r_1$  en  $Q$ . Si  $r_2$  es el  $j - 1$ -ésimo vértice en  $Q$  usando la notación anterior tenemos que  $q_{j-1} = r_2$ ,  $q_j = r_1$  y  $q_{j+1} = p_i$ .

En el algoritmo al sacar  $r_1$  de  $\Gamma$  agregamos  $\Delta p_i r_1 r_2$  a  $\mathcal{T}$ . Por lo tanto  $\mathcal{T}_{j-1} \cup \mathcal{T}_j \cup \{\Delta p_i r_1 r_2\}$

es una triangulación del polígono determinado por los vértices  $(p_0, q_{j-1}, q_{j+1})$ .

Tomamos ahora  $\Delta_{j-1}$  como el polígono determinado por  $(p_0, q_{i-1}, q_{i+1})$  y descartamos los  $\Delta_{j-1}, \Delta_j$  originales. También actualizamos  $Q$  a ser el polígono determinado por los mismos vértices que tenía antes menos  $r_1$ .

Finalmente actualizamos  $\mathcal{T}_{j-1} = \mathcal{T}_{j-1} \cup \mathcal{T}_j \cup \{\Delta p_i r_1 r_2\}$ . Hasta ahora todas las propiedades que mencionamos anteriormente se cumplen falta ver que en efecto se pueda entrar por cualquier arista y salir por cualquier otra arista de  $\Delta_{j-1}$ .

Pero  $\Delta_{j-1}$  está subdividido en tres triángulos, a saber los  $\Delta_{j-1}, \Delta_j$  originales y  $\Delta p_i r_1 r_2$ . Cada uno de estos triángulos tiene la propiedad de que se puede entrar y salir por cualquiera de sus aristas pasando por todos los triángulos que estos contengan una sola vez. Como los tres son adyacentes entre sí podemos recorrerlos en cualquier orden y de esta manera entrar por cualquier arista de  $\Delta_{j-1}$  y salir por cualquier otra, recorriendo todos los triángulos de  $\mathcal{T}_{j-1}$ . Con esto termina la prueba.  $\square$

### Implementación

Haremos uso de lo anterior para modificar el barrido de Graham de manera que al término del algoritmo obtengamos una trayectoria hamiltoniana en la dual de la triangulación inducida por el barrido de Graham.

La primera cuestión a considerar sería la representación de dicha trayectoria. La trayectoria constaría de una sucesión de triángulos de  $\mathcal{T}$  tales que sucesivamente comparten una arista. Si representamos cada triángulo como la terna de los tres puntos que lo definen tenemos el inconveniente de que al representar el siguiente triángulo repetiríamos dos de los vértices anteriores (a saber la arista que tienen en común). Podemos mejorar esta representación observando que si fijamos la arista usada para entrar al triángulo actual el siguiente triángulo contendrá a una de las dos aristas restantes. Denotando estas de manera

genérica como  $IZQ$  y  $DER$ , así para especificar el siguiente triángulo solo hace falta decir cual es el siguiente vértice y sobre cual de las dos aristas  $IZQ$  y  $DER$  contiene (esto último se puede hacer a un costo de un bit extra por triángulo).

Representaremos entonces las trayectorias de triángulos en  $D_T$  como listas de vértices y a cada vértice le asociamos un bit de dirección  $IZQ$  o  $DER$  que indicia no la ubicación de este triángulo con respecto al anterior sino el siguiente con respecto al que sigue, lo denotamos como  $v.dir$  para un vértice arbitrario  $v$ . Esto lo hacemos para facilitar la implementación. Así pues la lista  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  con el bit asociado a  $u_3$  igual a  $IZQ$  define la sucesión de triángulos  $(\Delta u_1 u_2 u_3, \Delta u_1 u_3 u_4)$ .

Usando la notación de la demostración anterior le asignamos a cada vértice  $q_i$  tres listas que corresponde a tres trayectorias hamiltonianas de  $D_{T_i}$ . La primera entra por la derecha  $(\overline{p_0 q_{i+1}})$ , sale por la izquierda  $(\overline{p_0 q_i})$  y la denotamos como  $q_i.di$ . La segunda entra por la izquierda  $(\overline{p_0 q_{i+1}})$ , sale por arriba  $(\overline{q_{i+1} q_i})$  y la denotamos como  $q_i.ia$ . Finalmente la segunda entra por la arriba  $(\overline{q_{i+1} q_i})$  sale por la derecha  $(\overline{p_0 q_{i+1}})$  y la denotamos como  $q_i.ad$ . Estas tres listas son de las trayectorias mencionadas para entrar y salir por cualquier arista de  $\Delta_i$  pasando por todos sus triángulos.

Al empezar el algoritmo para cada  $q_i$ , con la excepción de  $q_{n-2} = p_{n-2}$ , inicializamos en  $q_i.di = (q_i)$  con  $q_i.dir = DER$ ,  $q_i.ia = (q_i)$  con  $q_i.dir = IZQ$ ,  $q_i.ad = (p_0)$  con  $q_i.dir = IZQ$ . Las listas de  $q_{n-2}$  las inicializamos en  $q_{n-2}.di = (q_{n-1}, p_0, q_{n-2})$  con  $q_{n-2}.dir = DER$ ,  $q_{n-2}.ia = (q_{n-1}, p_0, q_{n-2})$  con  $q_{n-2}.dir = IZQ$  y  $q_i.ad = ()$  la dejamos vacía pues nunca se va a usar.

Cuando sacamos un vértice de la  $\Gamma$  tenemos que actualizar las listas para los nuevos valores de los  $Q_i$ . Supongamos que sacamos el vértice  $r = q_i$  de  $\Gamma$ . Actualizamos las listas de  $q_{i-1}$  a  $q_{i-1}.di = q_i.ia \cup (q_{i-2}) \cup q_{i-1}.ad$  con  $q_{i-1}.dir = DER$ ,  $q_{i-1}.ia = q_i.id \cup q_{i-1}.ia \cup (q_{i+1})$  con  $q_{i+1}.dir = DER$  y  $q_{i-1}.ad = (q_i) \cup q_i.ad \cup q_{i-1}.id$  con  $q_i.dir = DER$ .

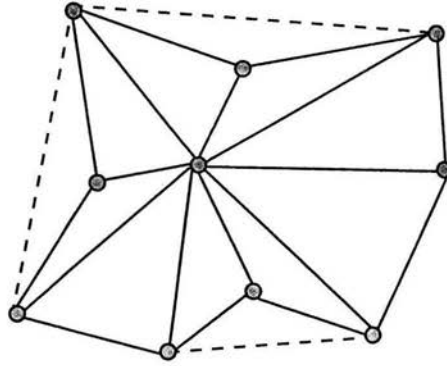


Figura 3.5: Triangulaciones con un punto central

Hay que tener sumo cuidado al hacer estas actualizaciones ya que por ejemplo una vez que actualizamos  $q_{i-1}.di$ , al actualizar  $q_{i-1}.ad$  no alteremos el valor de  $q_{i-1}$ . La concatenación de listas se puede hacer en tiempo constante por lo tanto el tiempo total del algoritmo sigue siendo  $O(n \log n)$ . Como asociamos sólo tres listas por vértice y al actualizar concatenamos dos de las listas anteriores agregando sólo un vértice más, el algoritmo ocupa memoria de  $O(n)$ . A continuación daremos una generalización de estos resultados

### 3.5. Triangulaciones con un Punto Central

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y  $\mathcal{T}$  una triangulación de  $S$  y  $p \in S$  de manera de que todos los puntos restantes de  $S$  sean adyacentes a  $p$ . Llamamos a  $p$  un punto central de  $\mathcal{T}$ . En esta sección generalizamos el resultado anterior para probar:

**Teorema 9.** *Las triangulaciones con vértices centrales son hamiltonianas.*

*Demostración.* Sea  $T$  el subconjunto de aquellos triángulos de  $\mathcal{T}$  que contengan a  $p$ . Los triángulos de  $T$  se encuentran en secuencia alrededor de  $p$ . Si  $p$  se encuentra al interior

dichos triángulos forman un ciclo, si de otra manera  $p$  está en el casquete convexo de  $S$  forman una trayectoria (todo esto en  $D\mathcal{T}$ ). Sean  $p_1, \dots, p_{n-1}$  los puntos de  $S - \{p\}$  en el orden inducido por él, ya sea el ciclo o la trayectoria. Sea  $e_i$  la arista exterior de  $T$  determinada por los vértices  $p_i, p_{i+1}$  modulo  $n - 1$ . De manera análoga a la demostración del teorema 8 mantendremos la invariante de que en el triángulo  $\tau_i = \Delta p p_i p_{i+1}$ , hay una trayectoria que entra y sale por cualquiera de sus aristas y pasa por todos los triángulos contenidos en  $\tau_i$ . Ahora bien como  $\mathcal{T}$  es una triangulación debe existir una arista  $e'$  de  $\mathcal{T}$  que una un vértice  $p_i$  con  $p_{i+2}$  (a menos que ya se tenga que  $T$  cubra  $Conv(S)$ ). Agregamos  $e'$  a  $T$  es decir sustituimos  $\tau_i$  y  $\tau_{i+1}$  por  $\Delta p p_i p_{i+2}$ . Dado que  $\tau_i$  como  $\tau_{i+1}$  tienen la propiedad de que se puede entrar y salir por cualquiera de sus aristas, heredan esta propiedad a  $\Delta p p_i p_{i+2}$ . Reetiquetando los vértices y aristas de  $T$  repetimos el procedimiento anterior hasta llegar a que  $T$  cubra a  $Conv(S)$ . Tomando las trayectorias contenidas en secuencia de los triángulos de  $T$  obtenemos una trayectoria cuando  $p$  está en el casquete convexo de  $S$  o bien un ciclo cuando está en el interior de  $S$ .  $\square$

Finalizamos el capítulo con una implicación de este resultado en Teoría de Gráficas. Una gráfica plana  $G$  es una pseudo triangulación si todas sus caras excepto una, que llamamos la cara externa de  $G$ , son triángulos (es decir constan de 3 aristas). Es bien sabido que dichas gráficas tienen una inmersión en el plano tal que:

- 1.-Todos sus vértices están representados por puntos en posición convexa.
- 2.-Las aristas de  $G$  están representadas por segmentos de recta que no se intersectan.
- 3.-La cara externa de  $G$  es representada por un polígono convexo.

La pseudo gráfica dual  $D(G)$  de una pseudo triangulación  $G$  es la gráfica cuyos vértices son las caras de  $G$  menos la cara exterior, dos de ellas adyacentes si comparten una arista en  $G$ . De la inmersión anterior y del resultado de esta sección se sigue que si  $G$  tiene un vértice

adyacente a todos los restantes entonces  $D(G)$  tiene un trayectoria hamiltoniana. Además si dicho vértice no se encuentra en la cara externa  $D(G)$  tiene un ciclo hamiltoniano.

## Capítulo 4

# La Tetraedralización del Ojo

En este capítulo estudiaremos las propiedades del casquete convexo. Con base en ellas definiremos la tetraedralización del ojo. Después veremos la relación existente entre el casquete convexo y la tetraedralización del ojo, veremos que si cierta gráfica asociada al casquete convexo es hamiltoniana entonces existe una tetraedralización del ojo hamiltoniana. La gráfica que asociaremos al casquete convexo ha sido ampliamente estudiada y como corolario de resultados anteriores tendremos que todo conjunto de puntos en el espacio con a lo más 20 de ellos en el casquete convexo admite una tetraedralización hamiltoniana.

### 4.1. El Casquete Convexo

El problema de la tetraedralización hamiltoniana consiste en contestar a la siguiente pregunta: Dado un conjunto  $S$  de puntos en el espacio ¿Existe una tetraedralización  $\mathcal{T}$  de  $S$  tal que  $D_{\mathcal{T}}$  tenga una trayectoria hamiltoniana?

Como vimos en el capítulo pasado (teorema 5) basta probar que el conjunto de puntos de  $S$  que están en su casquete convexo tenga una tetraedralización hamiltoniana. Es por eso



que nos sera útil estudiar el casquete convexo.

Ya hemos mencionado que el casquete convexo de  $S$  es un politopo convexo tridimensional (poliedro)  $\mathcal{P}$ , además como los puntos están en posición general todas las caras de  $\mathcal{P}$  son triángulos. Estos triángulos forman de alguna manera una triangulación del casquete convexo.

Como hicimos para triangulaciones sobre el plano definimos la gráfica dual  $D_{\mathcal{P}}$  como la gráfica cuyos vértices son las caras de  $\mathcal{P}$  y dos vértices son adyacentes si como caras de  $\mathcal{P}$  comparten una arista. En el futuro nos será de utilidad la estructura de  $D_{\mathcal{P}}$  como gráfica.

$D_{\mathcal{P}}$  es una gráfica cúbica, plana, 3-conexa. El que sea cúbica se debe a que como los vértices de  $D_{\mathcal{P}}$  son triángulos en  $\mathcal{P}$  solo comparten aristas con tres triángulos más.

Para ver que  $D_{\mathcal{P}}$  es plana agreguemos un vértice  $v$  a  $\mathcal{P}$  por fuera lo suficientemente cerca a una de sus caras  $\Delta q_1 q_2 q_3$  de manera que  $\mathcal{P} \cup \{v\}$  estén en posición convexa y general. En el poliedro resultante  $\mathcal{P}'$ ,  $v$  sólo es adyacente a  $q_1, q_2, q_3$ . Tomemos cualquier plano  $\Pi$  tal que  $\mathcal{P}$  este entre  $v$  y  $\Pi$  (es decir que  $\Pi$  sea paralelo a un plano tangente a  $\mathcal{P}$  que contenga a  $v$ ). Proyectamos a  $\mathcal{P}$  sobre el plano  $\Pi$  estereográficamente usando a  $v$  como eje. Es decir cada punto  $p$  de  $\mathcal{P}$  ya sea un vértice o una de sus aristas lo identificamos con el punto resultante de la intersección de la recta generada por los puntos  $p$  y  $v$  con el plano  $\Pi$ . Como  $\mathcal{P}$  es convexo una vez que una de estas rectas "sale" de  $\mathcal{P}$  no lo vuelve a cruzar. Si dicha recta contuviera otro punto  $q$  de  $\mathcal{P}$  distinto de  $p$  tendría que contener la recta que pasa por ambos y esta tendría que ser una de las aristas de  $\mathcal{P}$ . Por lo anterior la aplicación descrita es inyectiva. Por lo tanto la imagen de dicha proyección es una gráfica plana  $G_{\mathcal{P}}$  si tomamos los vértices como la imagen de los vértices de  $\mathcal{P}$  y a las aristas como la imagen de las aristas de  $\mathcal{P}$ . Tomamos la gráfica dual de  $G_{\mathcal{P}}$  con conjunto de vértices las caras de  $G_{\mathcal{P}}$  (incluyendo la cara exterior) y haciendo dos de estas adyacentes si tienen una arista en común. Esta gráfica por ser la dual de una gráfica plana es plana, además es isomorfa a  $D_{\mathcal{P}}$ . Por lo tanto

$D_{\mathcal{P}}$  es una gráfica plana.

Falta verificar que  $D_{\mathcal{P}}$  sea 3-conexa. Solo hay que probar que un conjunto de 2 vértices de  $V(D_{\mathcal{P}})$  no desconecta la gráfica. Sean pues  $\tau_p = \Delta p_1 p_2 p_3$  y  $\tau_q = \Delta q_1 q_2 q_3$  dos vértices de  $D_{\mathcal{P}}$ . Hacemos la misma proyección que hicimos anteriormente pero ahora tomando como eje  $p_1$ . Sea  $S'$  la imagen de los vértices de  $\mathcal{P}$  menos  $p_1$  bajo la proyección y para cada vértice  $p$  en  $\mathcal{P}$  menos  $p_1$  denotamos con  $p'$  a la imagen de  $p$ . Como la proyección manda rectas en rectas, la gráfica resultante es una triangulación de  $S'$  en el plano. Denotamos esta triangulación con  $\mathcal{T}_{p_1}$ . La gráfica  $D_{\mathcal{T}_{p_1}}$  es isomorfa a  $D_{\mathcal{P}} - \{\tau \in V(D_{\mathcal{P}}) \mid \tau \text{ contiene a } p_1\}$ . El casquete convexo de  $S'$  son aquellos vértices que en la preimagen son adyacentes a  $p_1$ . Por lo tanto cada triángulo  $\Delta p_1 r s$  que contenga a  $p_1$  es adyacente en  $D_{\mathcal{P}}$  a un triángulo cuya imagen bajo la proyección esta en  $D_{\mathcal{T}_{p_1}}$  (a saber el triángulo que contiene a  $\overline{r's'}$  en  $\mathcal{T}_{p_1}$ ). En consecuencia si  $\tau_q = \Delta q_1 q_2 q_3$  contiene a  $p_1$  se tiene que  $\tau_q$  no es proyectado a ningún triángulo en  $D_{\mathcal{T}_{p_1}}$  y por lo tanto  $D_{\mathcal{P}} - \{\tau \in V(D_{\mathcal{P}}) \mid \tau \text{ contiene a } p_1\}$  es conexa. Juntando las dos observaciones anteriores concluimos que  $D_{\mathcal{P}} - \{\tau_p, \tau_q\}$  es conexa. Supongamos que  $\tau_q$  no contiene a  $p_1$ . Tenemos que  $\tau_q$  es proyectado al triángulo  $\tau'_q = \Delta q'_1 q'_2 q'_3$  en  $\mathcal{T}_{p_1}$ . Si  $D_{\mathcal{T}_{p_1}} - \tau'_q$  fuera conexa entonces por los mismos argumentos que usamos arriba  $D_{\mathcal{P}} - \{\tau_p, \tau_q\}$  sería conexa. Para que  $\tau'_q$  desconecte a  $D_{\mathcal{T}_{p_1}}$ ,  $\tau'_q$  tendría que ser un triángulo separador de  $\mathcal{T}_{p_1}$ . Es decir al menos una de las aristas de  $\tau'_q$  serían diagonales del polígono asociado al casquete convexo de  $S'$ , dividiendo a este en dos o más polígonos. Las subgráficas de  $D_{\mathcal{T}_{p_1}}$  inducidas por los triángulos de  $\mathcal{T}_{p_1}$  contenidos en cada uno de estos polígonos serán conexas. Además cada una de estos polígonos tendrá al menos dos aristas del casquete convexo de  $S'$  y los triángulos que las contiene serán adyacentes a alguno de los triángulos que contienen a  $p_1$  en  $D_{\mathcal{P}}$ . Ahora bien como  $\tau_q$  no es parte de estos triángulos se puede ir de cualquiera de ellos a cualquier otro en  $D_{\mathcal{P}} - \{\tau_p, \tau_q\}$ . Las preimágenes de las subgráficas que mencionamos arriba están conectadas entre si por medio de los triángulos que contienen a

$p_1$  en  $D_{\mathcal{P}} - \{\tau_p, \tau_q\}$ . Por lo tanto  $D_{\mathcal{P}} - \{\tau_p, \tau_q\}$  es conexa y por consiguiente  $D_{\mathcal{P}}$  es 3-conexa.

## 4.2. La Tetraedralización del Ojo

Usando la notación anterior supongamos ahora que  $S$  es un conjunto de puntos en posición convexa. Las proyecciones que hicimos en la discusión anterior nos sugieren una manera natural de tetraedralizar a  $S$ . Dado un vértice  $v$  de  $S$  podemos tetraedralizar a  $S$  con la colección de tetraedros  $\{\Delta vr_1r_2r_3 \mid \Delta r_1r_2r_3 \text{ es una cara de } \mathcal{P}\}$ . Es decir nos paramos en  $v$  y para cada cara de  $\mathcal{P}$  que no contenga a  $v$  agregamos el tetraedro formado por esa cara y  $v$ . Esta tetraedralización de  $S$  la llamamos la tetraedralización del ojo generada por  $v$  y nos referiremos a ella como  $\mathcal{T}_v$ . En lo subsecuente nos referiremos a los vértices de  $S$  como ojos de  $S$  cuando estemos en el contexto de tetraedralizaciones de este tipo.

Cabe notar que la dual de la tetraedralización del ojo generada por  $v$  (que denotamos de ahora en adelante con  $D_v$ ) es isomorfa a la dual de la triangulación resultante de proyectar a  $S$  usando a  $v$  como eje. Esta propiedad de las triangulaciones del ojo es muy fuerte pues relaciona de alguna manera el problema en el espacio con su análogo en el plano. Observemos que  $D_v$  es isomorfa a  $D_{\mathcal{P}} - \{\tau \in V(D_{\mathcal{P}}) \mid \tau \text{ contiene a } p_1\}$ , que no es más que  $D_{\mathcal{P}}$  menos una de sus caras.

Ya vimos que la proyección estereográfica sobre un vértice induce una triangulación sobre la imagen y que la dual de dicha triangulación es isomorfa a  $D_v$ . A la imagen la denotaremos con  $S'_v$  y a la triangulación de esta imagen como  $\mathcal{T}'_v$ . Hay que tener cuidado al hablar de  $S'_v$  porque podemos hacer la proyección de diferentes maneras. Por esta razón siempre que hablemos de  $S'_v$  lo haremos independientemente de como proyectemos es decir solo usaremos las propiedades que compartan todas las posibles imágenes.

Este marco teórico nos permitirá demostrar algunas condiciones suficientes para la exis-

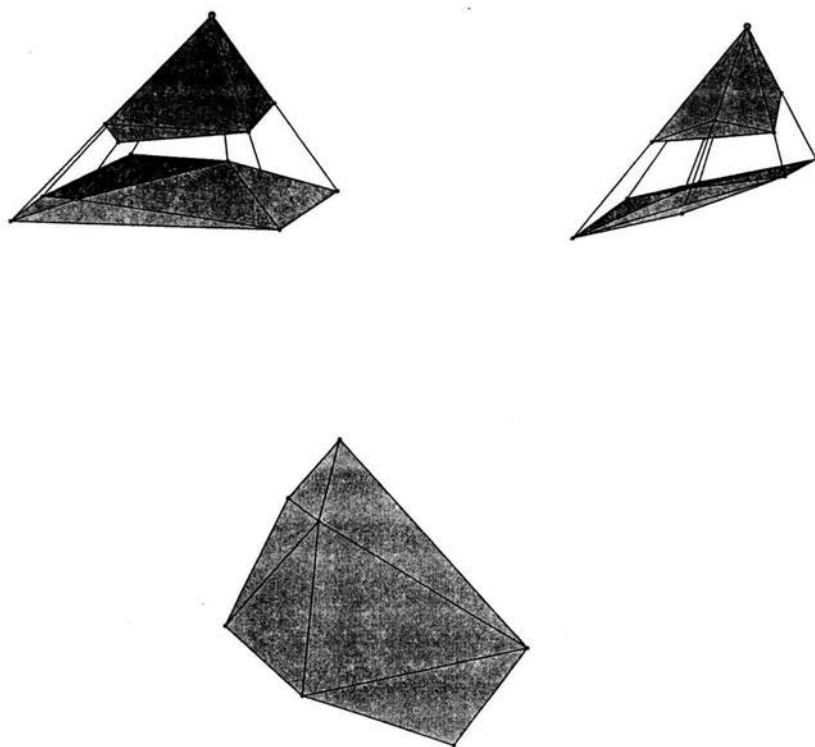


Figura 4.1: Proyeccion del ojo y la triangulacion que induce sobre la imagen.

tencia de tetraedralizaciones hamiltonianas. Por su utilidad haremos amplio uso de este en lo restante de la obra.

Denotamos con  $G'_T$  a la realización geométrica de  $\mathcal{T}'_v$ , es decir en la gráfica con vértices en  $S'_v$ , con dos de estos vértices  $x$  y  $y$  unidos por segmentos de recta cuando exista un triángulo en  $\mathcal{P}$  que contenga a  $\overline{xy}$  como arista. Supongamos que existe un vértice  $v$  de  $S$  adyacente a todos los demás en  $\mathcal{P}$ .  $S'_v$  no tendrá vértices al interior pues de lo contrario dicho vértice no sería adyacente a  $v$  en  $G'_T$ . Esto quiere decir que  $S'_v$  esta en posición convexa y  $\mathcal{T}'_v$  es la triangulación del polígono convexo determinado por los vértices de  $S'_v$ . Ahora bien la gráfica dual de una triangulación de un polígono convexo es acíclica. Como  $D_{\mathcal{T}'_v}$  es acíclica tiene vértices de grado 1, estos vértices son triángulos de  $\mathcal{T}'_v$  que sólo comparten una de sus aristas con otro triángulo de  $\mathcal{T}'_v$ . La preimagen  $u$  del vértice opuesto a esta arista sólo será adyacente a tres vértices en  $\mathcal{P}$  a saber  $v$  y las preimagenes de los extremos de la arista en cuestión. En el capítulo 3 (Teorema 6) vimos que podíamos quitar los vértices de grado tres. Pero al quitar  $u$ ,  $v$  sigue siendo adyacente a todos los demás vértices en casquete convexo de  $S - u$ . Quitando  $u$  y aplicando el mismo argumento tantas veces como nos sea necesario eventualmente llegamos a un conjunto con sólo 4 vértices cuya única tetraedralización consta del tetraedro que pasa por estos 4 vértices y por lo tanto es trivialmente hamiltoniano. Esto nos da una condición suficiente para que  $S$  tenga una tetraedralización hamiltoniana.

**Teorema 10.** *Sea  $S$  un conjunto de puntos en el espacio. Si existe un vértice  $v$  en el casquete convexo de  $S$  que sea adyacente a todos los demás vértices del casquete convexo entonces  $S$  admite una triangulación hamiltoniana.*

Como era de esperar la estructura de  $D_{\mathcal{P}}$  esta íntimamente relacionada con las gráficas duales  $D_v$  de las tetraedralizaciones de los diferentes ojos de  $S$ . El siguiente resultado es un

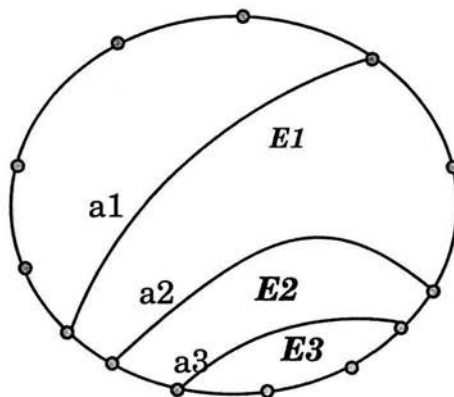


Figura 4.2: Buscando un ojo hamiltoniano.

ejemplo de esta interdependencia.

**Teorema 11.** *Si  $D_{\mathcal{P}}$  tiene un ciclo hamiltoniano, entonces existe un ojo  $v$  de  $S$  tal que  $D_v$  tiene un trayectoria hamiltoniana.*

*Demostración.* Sabemos que las duales de las tetraedralizaciones del ojo son isomorfas a  $D_{\mathcal{P}}$  menos una de sus caras. Lo converso también es cierto pues dada una cara  $\mathcal{F}$  de  $D_{\mathcal{P}}$ , todos los vértices comparten un punto como triángulos en  $\mathcal{P}$  y es ese punto el que al tomar la dual de su tetraedralización del ojo es isomorfa a  $D_{\mathcal{P}} - \mathcal{F}$ . Por lo tanto basta mostrar que si  $D_{\mathcal{P}}$  tiene un ciclo hamiltoniano existe una cara  $\mathcal{F}$  de  $D_{\mathcal{P}}$  tal que  $D_{\mathcal{P}} - \mathcal{F}$  tiene una trayectoria hamiltoniana.

Ahora bien sabemos que  $D_{\mathcal{P}}$  es plana y por lo tanto en una inmersión cualquiera de esta en el plano, un ciclo de  $D_{\mathcal{P}}$  divide al plano en dos regiones. Estas dos regiones son a saber la parte interior y exterior del ciclo. Supongamos que  $D_{\mathcal{P}}$  tiene un ciclo hamiltoniano  $C$ . Tomamos cualquier arista  $a$  que no este en  $C$  y nos fijamos en la región formada por  $a$  y una de las trayectorias  $\Gamma$  contenidas en  $C$  que unen los extremos de  $a$ . Todos los vértices en

$\Gamma$  tienen tres aristas, dos en  $C$  y una fuera del ciclo. Si todas las aristas de los vértices de  $\Gamma$  que no están en  $C$  no están en el interior de  $\Gamma \cup a$  entonces  $\Gamma \cup a$  es una cara de  $D_{\mathcal{P}}$ . Si una de estas aristas estuviera al interior  $\Gamma \cup a$  tomamos la región determinada por esta arista y la trayectoria contenida propiamente en  $\Gamma$  que une sus extremos, aplicamos el mismo razonamiento y como la gráfica es finita eventualmente llegamos a que existe una arista  $a$  y una trayectoria  $\Gamma \subset C$  tal que  $\mathcal{F} = \Gamma \cup a$  es una cara de  $\Gamma$ . Pero  $C - \Gamma$  es una trayectoria hamiltoniana de  $D_{\mathcal{P}} - \mathcal{F}$ .  $\square$

Es interesante notar que lo converso no es cierto, es decir el que  $D_{\mathcal{P}}$  no tenga un ciclo hamiltoniano no implica que no existe un vértice  $v$  de  $S$  tal que  $D_v$  tenga una trayectoria hamiltoniana. Veremos ejemplos de estos casos más adelante. Si siempre hubiera un vértice “ojo hamiltoniano” (tal que su tetraedralización del ojo tuviera una tetraedralización hamiltoniana) el problema de la tetraedralización hamiltoniana sería resuelto afirmativamente. Lamentablemente este no es el caso, es decir:

**Teorema 12.** *Existe un conjunto de puntos  $S$  en posición convexa en el espacio, tal que  $D_v$  no tiene trayectorias hamiltonianas para todo vértice  $v$  de  $S$ .*

Dejamos la demostración para el final del capítulo.

El tema natural a estudiar después de ver el Teorema 11 sería la existencia de ciclos hamiltonianos en  $D_{\mathcal{P}}$ .

### 4.3. Gráficas Cúbicas Plana 3-Conexas Hamiltonianas

Al principio del capítulo demostramos que  $D_{\mathcal{P}}$  era una gráfica cúbica plana 3-conexa (que abreviaremos como CP3C). No lo vamos a demostrar, sin embargo también es cierto que dada una gráfica cúbica 3-conexa  $G$  hay un poliedro convexo (con caras triangulares)

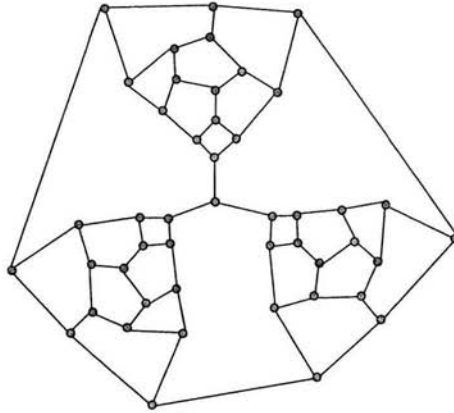


Figura 4.3: La gráfica de Tutte (una CP3C no hamiltoniana)

tal que su dual es isomorfa a  $G$ . Es decir al estudiar las gráficas CP3C estamos estudiando las gráficas duales de los posibles casquetes convexos de un conjunto de puntos dado.

En general es difícil encontrar CP3C no hamiltonianas, de hecho en 1880 Peter Guthrie Tait conjeturó que todas las CP3C eran hamiltonianas. No fue sino hasta 1946 que William Thomas Tutte dio un contraejemplo.

Las gráficas CP3C históricamente han generado interés por su relación con el Teorema de los Cuatro Colores pues, si por ejemplo, la conjetura de Tait hubiera sido cierta implicaría el Teorema de los Cuatro Colores.

Cabe mencionar que la gráfica de Tutte no prueba nuestra conjetura pues de hecho se puede encontrar un ojo hamiltoniano en esta gráfica.

Por el Teorema 11 si quisiéramos encontrar un contraejemplo para el problema de la tetraedralización hamiltoniana sabemos que habría que buscarlo en las gráficas CP3C no hamiltonianas. Es decir, necesariamente la dual del casquete convexo del contraejemplo no tendría un ciclo hamiltoniano.



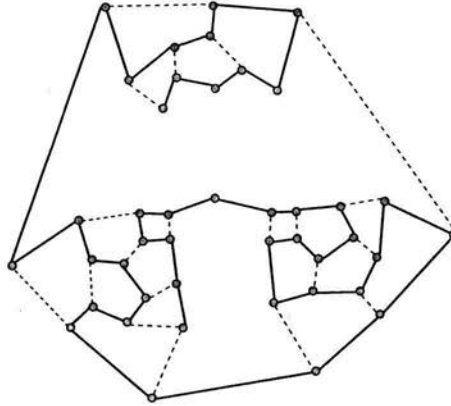


Figura 4.4: La gráfica de Tutte menos una cara y una trayectoria hamiltoniana en ella

La gráfica de Tutte nos muestra que en general las CP3C no son hamiltonianas, sin embargo la gráfica de Tutte consta de 46 vértices. Sería interesante saber si existen ejemplos más pequeños y si de haberlos con cuantos vértices. En [13] y subsecuentemente en [1] se estudia a fondo este tema y preguntas relacionadas. En particular [13] basandose en cálculos hechos con computadoras demuestran:

**Teorema 13.** *Todas las gráficas cúbicas planas 3-conexas con a lo más 36 vértices son hamiltonianas.*

Esta cota es la mejor posible pues en [13] dan ejemplos de gráficas CP3C con 38 vértices no hamiltonianas (notemos que por ser cúbicas las CP3C tienen un número par de vértices). Para nuestros fines este resultado tiene consecuencias interesantes.

**Corolario 1.** *Todo conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el espacio con a lo más 20 de ellos en el casquete convexo tiene una tetraedralización hamiltoniana.*

*Demostración.* Como ya vimos el poliedro  $\mathcal{P}$  asociado al casquete convexo de  $S$  visto

como gráfica es plana con todas sus caras triangulares, por lo tanto es una gráfica maximal plana y tiene  $3n' - 6$  vértices (donde  $n'$  es el número de vértices de  $S$  en su casquete convexo). Dado que cada arista se encuentra en exactamente dos caras y todas sus caras son triangulares,  $\mathcal{P}$  tiene  $2n' - 4$  caras. Ya que  $n' \leq 20$ ,  $D_{\mathcal{P}}$  tiene a lo más 36 vértices. Usando el Teorema 11 y 13 obtenemos el resultado  $\square$

Este resultado nos incita a pensar que todo conjunto de puntos tiene una tetraedralización hamiltoniana o bien que el contraejemplo es bastante complicado. El Corolario 1 así como el Teorema 11 nunca han sido publicados.

Todos los resultados sobre hamiltonianidad de las CP3C se traducen en resultados sobre tetraedralizaciones hamiltonianas. Por ejemplo en [1] prueban que toda CP3C con caras de longitud al menos 6 y con a lo más 176 vértices son hamiltonianas. Esto se traduce en que todo conjunto de puntos en el espacio con a lo más 90 de ellos en el casquete convexo y con vértices de grado a lo más 6 tiene una tetraedralización hamiltoniana.

Vimos que hay una fuerte relación entre el casquete convexo y sus ojos en la siguiente sección profundizaremos en este tema.

## 4.4. Los Ojos del Casquete Convexo

El planteamiento del Teorema 12 motivó el estudio del casquete convexo y sus diferentes ojos. Como dado un ojo la dual de su tetraedralización es isomorfa a una triangulación del plano y en relación al Teorema 12 nos interesamos en ver cuales de estas triangulaciones podrían tener trayectorias hamiltonianas. Otra manera de pensarlo sería buscar que tipo de triangulaciones no tienen trayectorias hamiltonianas. Por ejemplo claramente si la dual de la triangulación tiene tres o más vértice de corte de grado tres no podría tener una trayectoria hamiltoniana. Entonces los ojos que podrían ser buenos candidatos a ser ha-

miltonianos serian aquellos tales que su tetraedralización fuera dos conexa. Observamos siempre se puede encontrar un ojo dos conexo.

**Teorema 14.** *Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición convexa en el espacio siempre se puede encontrar un vértice  $v$  en  $S$  tal que  $D_v$  es 2-conexa.*

*Demostración.* Como para cada vértice de  $S$  la dual de su tetraedralización del ojo tiene grado a lo más 3, el que tenga una vértice de corte implica que tiene una arista de corte. Análogamente si tiene una arista de corte alguno de los vértices sobre los que incide es de corte. Basta probar que hay un ojo  $v$  de  $S$  tal que  $D_v$  no tenga aristas de corte. Dado  $v$  un vértice de  $S$ , sabemos que  $D_v$  es isomorfa a la dual de una triangulación  $\mathcal{T}'_v$  en el plano. Una arista de corte en  $D_v$  se traduce a una diagonal del polígono que delimita a  $\mathcal{T}'_v$  (es decir una arista que une dos vértices no adyacentes de este polígono).

Sea  $G_{\mathcal{P}}$  gráfica resultante de la proyección esteoreografica (como la hicimos al principio del capítulo) del casquete convexo  $\mathcal{P}$  de  $S$ . La triangulación  $\mathcal{T}'_v$  (en su contexto geométrico) asociada a  $v$  es isomorfa a una subgráfica de  $G_{\mathcal{P}}$  a saber  $G_{\mathcal{P}}$  menos todos los vértices adyacentes a la imagen de  $v$  bajo la proyección. Como lo mencionamos arriba estamos buscando un ojo tal que su triangulación asociada no tenga diagonales pero en vista de lo anterior esto significa que buscamos un ojo tal que en su imagen en  $G_{\mathcal{P}}$  no tenga aristas entre sus vecinos (además de las que se encuentran entre vecinos consecutivos, es decir aquellas que forman el polígono que delimita a su triangulación del ojo).

Si  $G_{\mathcal{P}}$  tiene un vértice de grado 3, la preimagen dicho vértice es el ojo que buscamos pues no tendrá aristas entre vecinos no consecutivos (ya que sus vecinos forman un triángulo). Supongamos pues que  $G_{\mathcal{P}}$  no tiene vértices de grado 3.

Sea  $x$  un vértice de  $G_{\mathcal{P}}$  y sea  $N(x)$  el conjunto de vecinos de  $x$  (estos como ya lo mencionamos forman un ciclo  $C$ ) en  $G_{\mathcal{P}}$ . Si no hay mas aristas entre vértices de  $N(x)$  mas

que las que unen vértices consecutivos entonces la preimagen de  $x$  es el ojo que buscamos. Si hay una arista  $\alpha$  entre dos vértices  $n_i$  y  $n_j$  consecutivos de  $N(x)$ ,  $\alpha$  junto con una de las dos trayectorias (sea  $\Gamma$  dicha trayectoria) que unen  $n_i$  y  $n_j$  en  $C$  forman una región acotada  $\mathcal{E}$  del plano. Como todos los vértices tiene grado mayor a 3 tienen al menos una arista distinta de las dos que se encuentran en  $C$  y de la que los une con  $x$ . Si un vértice interior  $y$  de  $\Gamma$  comparte una arista con otro vértice  $w$  de  $\Gamma$ , esta arista esta junto con la subtrayectoria de  $\Gamma$  que une  $y$  con  $w$  definen una región del plano acotada contenida propiamente en  $\mathcal{E}$ . Podemos seguir este procedimiento hasta encontrar una subtrayectoria  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  y una arista  $\alpha'$  que una sus extremos, tal que  $\Gamma' \cup \alpha'$  defina una región del plano  $\mathcal{E}'$  propiamente contenida en  $\mathcal{E}$ . Como  $\alpha'$  une los extremos de  $\Gamma'$  (sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dichos extremos) y no esta contenida en esta,  $\Gamma'$  tiene al menos un vértice interior. Sea  $x'$  un vértice interior de  $\Gamma'$ . Si  $x'$  es el único vértice interior de  $\Gamma'$  entonces  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son vecinos de  $x'$ . Ya que  $x'$  es de grado mayor a tres al menos es adyacente a un vértice distinto de  $x$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Esto implica que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  como vecinos de  $x'$  no son consecutivos. Por lo que  $\alpha'$  es una arista que une dos vecinos no consecutivos de  $x'$ . Tomando ahora a  $x'$  como vértice de partida podemos repetir el argumento. Como además todos los vecinos de  $x'$  distintos de  $x$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  están contenidos en  $\mathcal{E}'$  al repetir el argumento no corremos el riesgo de repetir vértices. Si  $\Gamma'$  tiene dos o más vértices interiores,  $x'$  no puede ser adyacente a los dos extremos de  $\Gamma'$  al mismo tiempo y en consecuencia  $\alpha'$  no une vecinos no consecutivos de  $x'$ . Cabe preguntarse entonces si  $x'$  es ya el ojo dos conexo que buscamos. Si no lo es entonces tiene una arista  $\alpha''$  entre dos vecinos no consecutivos. Sea  $\Gamma''$  la trayectoria que une los extremos de  $\alpha''$  en los vecinos de  $x'$  y no pasa por  $x$ . Ahora bien por construcción  $x'$  no es adyacente a ningún vértice de  $\Gamma''$  salvo aquel que le antecede y le sigue en  $\Gamma''$ . Por lo que todos los vértices de  $\Gamma''$  salvo sus extremos no están en  $\Gamma'$ , además si alguno de estos fuera alguno de los que ya consideramos la arista que los une tendría que entrar y salir de  $\mathcal{E}'$  contradiciendo la hipótesis de que  $G_{\mathcal{P}}$

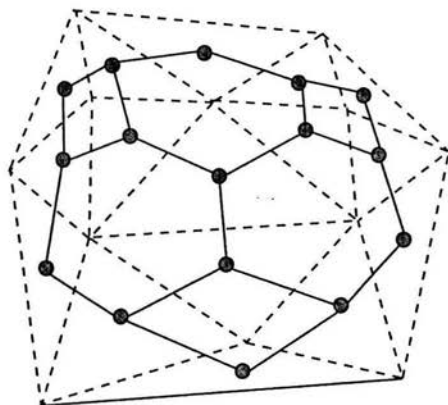


Figura 4.5: Una triangulación con dual 2-conexo pero no hamiltoniana.

es plana. Es decir como en el caso anterior podemos repetir el razonamiento con  $x'$  y  $\alpha''$  sin repetir vértices, como la gráfica es finita en algún momento debemos llegar a un ojo dos conexo.  $\square$

Lamentablemente el que una triangulación sea dos conexa no es garantía de que tenga una trayectoria hamiltoniana.

En el mismo sentido que los Teorema 14 y 11 uno puede preguntarse por la existencia de ojos con diversas propiedades dadas ciertas características del casquete convexo. Pero esta discusión se puede replantear como un problema en el plano:

Si a cualquier triangulación le agregamos un punto fuera del plano que la contiene y lo hacemos adyacente a cada vértice del casquete convexo entonces obtenemos un poliedro en  $R^3$  (con sus puntos no estando en posición general). La gráfica dual de dicho poliedro será entonces una gráfica CP3C.

Esta construcción induce una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las triangulaciones en el plano. Dos triangulaciones estarán relacionadas si haciendo esta ope-

ración en ambas las gráficas duales de los poliedros resultantes son isomorfas. De esta manera la buscar ojos con ciertas propiedades estamos buscando que propiedades siempre tiene al menos un representante de cada clase. A cada clase de equivalencia le asignamos la gráfica dual del poliedro que resulta de la operación antes descrita sobre uno de sus representantes (esto lo hacemos salvo isomorfismo). Mencionamos brevemente aunque no lo demostramos que toda gráfica CP3C se puede realizar como la dual de algún poliedro en  $R^3$ . Lo que significa que cada CP3C (salvo isomorfismo) tiene una clase de equivalencia asociada. El pedir como hipótesis ciertas propiedades del casquete convexo es pedir que la gráfica asociada a las clases de equivalencia la cumpla.

Claramente dos triangulaciones con duales isomorfas están relacionadas, lo que nos permite refinar todavía más la teoría. Consideramos ahora los miembros de cada clase de equivalencia como distintos si sus duales no son isomorfas e equivalentes cuando lo sean. Es decir primero agrupamos aquellas que tengan duales isomorfas y luego las agrupamos bajo la relación anteriormente descrita.

Dada una una triangulación en el plano  $\mathcal{T}$  denotamos con  $[\mathcal{T}]$  su clase de equivalencia (agrupando primero triangulaciones con duales isomorfas), con  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  su poliedro asociado (considerando equivalentes aquellos con duales isomorfas) y con  $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$  la gráfica CP3C dual de  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ .

Al buscar representantes con ciertas propiedades, seria bueno saber con cuantos miembros podría llegar a contar cada clase. Dada la asociación que hicimos el número de miembros deber ser finito, a lo más una triangulación por cada vértice de  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ . Muchos de estos vértices podrían inducir la misma triangulación, de hecho si tomamos un polígono  $P$  con  $n$  vértices en el plano, agregamos un vértice al interior y lo hacemos adyacente con todos los demás la clase de equivalencia de la triangulación resultante constara de dos elementos.

De alguna manera el número de miembros de  $[\mathcal{T}]$  esta relacionado con que tan simétrico

sea  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ , es decir si es muy simétrico muchos de sus ojos verán la misma triangulación. Una medida que tan simétrico es  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  es mediante su grupo de automorfismos (aquellas funciones que sean isomorfismos con dominio  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  y contra dominio  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ ). Si por ejemplo  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  tuviera un automorfismo  $g$  distinto de la identidad, habrá un vértice  $v$  de  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  tal que  $g(v) \neq v$ . Si restringimos  $g$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}} - v$  obtenemos una isomorfismo entre  $\mathcal{T}_v$  y  $\mathcal{T}_{g(v)}$  (viéndolas no como colección de triángulos si no en su contexto geométrico). De dicho isomorfismo se obtiene un isomorfismo  $g'$  entre  $\mathcal{D}_v$  y  $\mathcal{D}_{g(v)}$ , pues los triángulos de  $\mathcal{T}_v$  van a dar a triángulos de  $\mathcal{T}_{g(v)}$  y si dos triángulos comparten una arista en  $\mathcal{T}_v$  la compartirán en la imagen bajo  $g$ . Es decir  $\mathcal{T}_v$  y  $\mathcal{T}_{g(v)}$  representan el mismo elemento en  $[\mathcal{T}]$ .

De un automorfismo de  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  obtuvimos un isomorfismo entre dos triangulaciones del ojo de  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  haremos algo similar pero en sentido inverso. Supongamos ahora que  $\mathcal{T}_u$  y  $\mathcal{T}_v$  representan el mismo elemento en  $[\mathcal{T}]$  Dicho de otra manera existe un isomorfismo  $h$  entre las gráficas duales de  $\mathcal{T}_u$  y  $\mathcal{T}_v$ . La cara exterior de  $D_u$  debe ir a dar a la cara exterior de  $D_v$ , pues son las únicas que tienen vértices con grado menor o igual a 2. Extendemos  $h$  a  $h'$  de manera que dado un triángulo  $\tau$  que contenga a  $u$ , adyacente en  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  a un triángulo  $\tau'$  sobre la cara exterior de  $D_u$  lo asignamos al triángulo que contiene a  $u$ , adyacente en  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  a  $h(\tau')$ . Como  $h$  es isomorfismo, la extensión anterior  $h'$  es un automorfismo entre  $D_{\mathcal{T}}$ . De manera análoga a partir de  $h'$  obtenemos un automorfismo de  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ .

## 4.5. Gráficas Cúbicas Planas 3-conexas Sin Ojos Hamiltonianos

Cuando vimos que si la gráfica dual del casquete convexo es hamiltoniana se podía encontrar un ojo hamiltoniano, quedó pendiente contestar a la pregunta: ¿Toda gráfica CP3C

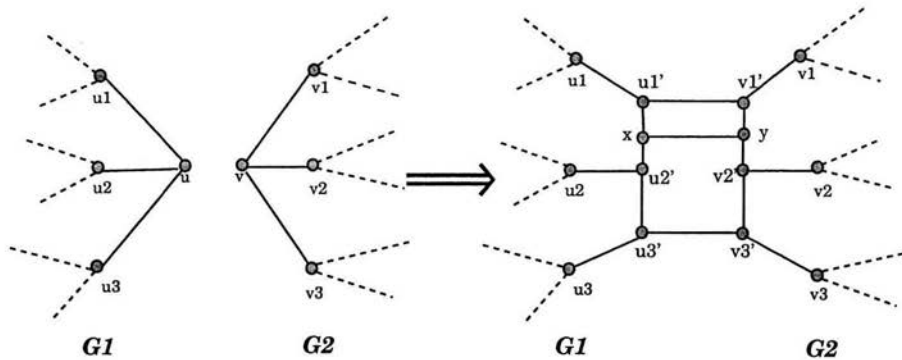


Figura 4.6: Uniendo dos gráficas CP3C por dos de sus vértices

tiene un ojo hamiltoniano? En esta sección contestaremos negativamente a esa pregunta y con ello daremos por concluido este capítulo.

Las gráficas duales de los casquetes convexo son gráficas CP3C, no lo demostramos pero lo converso también es cierto. Para toda gráfica CP3C  $G$  existe un conjunto de puntos tal que la gráfica dual de su casquete convexo es isomorfa a  $G$ .

Construiremos una CP3C sin ojos hamiltonianos uniendo de cierta manera gráficas CP3C no hamiltonianas. Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas CP3C y sean  $u$  y  $v$  vértices de las caras exteriores de  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente. Sean  $v_1, v_2, v_3$  los vecinos de  $v$  en  $G_1$  y  $u_1, u_2, u_3$  los vecinos de  $u$  en  $G_2$ . Quitamos  $u$  y  $v$  de ambas gráficas y los sustituimos por un ciclo  $(u'_1, u'_2, u'_3, v'_1, v'_2, v'_3)$  de nuevos vértices. Ahora hacemos adyacentes el vértice  $u'_i$  con  $u_i$  y  $v'_j$  con  $v_j$ . La gráfica resultante es cúbica y plana pero no es 3-conexa. Para hacerla 3-conexa basta con subdividir las aristas  $(u_1u_2)$  y  $(v_1v_2)$  y unir los nuevos vértices. Es decir quitamos  $(u_1u_2)$  y  $(v_1v_2)$  y agregamos las aristas  $(u_1x)$ ,  $(xu_2)$ ,  $(v_1y)$ ,  $(yv_2)$  y  $(x, y)$  La gráfica resultante es una gráfica cúbica plana y 3-conexa.

Consideremos ahora dos ciclos  $\gamma_1 = (x_1, x_2, \dots, x_8)$  y  $\gamma_2 = (y_1, y_2, \dots, y_8)$ . Colocamos



$\gamma_2$  al interior de  $\gamma_1$  y hacemos cada vértice  $x_i$  de  $\gamma_1$  adyacente con el vértice  $y_i$  de  $\gamma_2$ . Haciendo esta construcción obtenemos una gráfica  $H$  cúbica plana y 3-conexa. Sean  $G_1, G_2, G_3$  y  $G_4$  cuatro gráficas CP3C no hamiltonianas, es decir que no tengan un ciclo hamiltoniano (como la gráfica de Tutte por ejemplo). Elegimos ahora un vértice en la cara exterior de cada una de ellas. Sean  $v_1, v_2, v_3, v_4$  dichos vértices en  $G_1, G_2, G_3$  y  $G_4$  respectivamente. Unimos ahora cada una de las  $G_i$  a  $H$  con la operación descrita anteriormente. Hacemos la unión de  $G_i$  con  $H$  por medio del vértice  $v_i$  de  $G_i$  y el vértice  $x_{2i-1}$  de  $H$ . Sea  $\mathcal{H}$  la gráfica resultante de estas uniones.

Por construcción  $\mathcal{H}$  es una gráfica CP3C. Sea  $\mathcal{F}$  una cara de  $\mathcal{H}$ , supongamos que  $\mathcal{H} - \mathcal{F}$  tiene una trayectoria hamiltoniana  $\Gamma$ . Para cada  $G_i$  sea  $G'_i$  la subgráfica inducida de  $\mathcal{H}$  por el conjunto de vértices  $V(G_i) - \{v_i\}$  con  $1 \leq i \leq 4$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\mathcal{F}$  no contiene vértices de  $G'_1, G'_2$  y  $G'_3$ . Como  $\Gamma$  tiene sólo dos extremos, una de estas tres gráficas no contiene ningún extremo de  $\Gamma$ . Otra vez sin pérdida de generalidad supongamos  $G'_1$  no contiene ninguno de los extremos de  $\Gamma$ .  $\Gamma$  al entrar y salir de  $G'_1$  debe hacerlo forzosamente por los vecinos de  $v_1$  en  $G_1$  que a su vez son vértices también de  $\mathcal{H} - \mathcal{F}$ . Por lo anterior y el hecho de que no hay extremos de  $\Gamma$  en  $G'_1$ ,  $\Gamma$  sólo entra y sale una vez de  $G'_1$ . Dado que  $\Gamma$  es hamiltoniana, al entrar y salir debe recorrer todos los vértices de  $G'_1$ . Es decir hay una subtrayectoria  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  que entra pasa por todos los vértices de  $G'_1$  y los dos extremos de  $\Gamma'$  son vecinos de  $v_1$  en  $G_1$ . Por otra parte  $G'_1$  es subgráfica de  $G_1$  por lo que  $v_1\Gamma'v_1$  es un ciclo hamiltoniano de  $G_1$ . Por lo tanto  $\mathcal{H} - \mathcal{F}$  no contiene una trayectoria hamiltoniana para ninguna cara  $\mathcal{F}$  de de  $\mathcal{H}$ .

Estas gráficas son de suma importancia en cuanto al problema de la tetraedralización hamiltoniana. Pues en caso de existir un conjunto de puntos sin tetraedralización hamiltoniana, la dual del casquete convexo será una gráfica de este tipo. Por otra parte estas gráficas por no tener ojos hamiltonianos nos obligan a desarrollar nuevas herramientas para encon-

trarles tetraedralizaciones hamiltonianas. Estas herramientas podrían llevar eventualmente a la resolución del problema.

# Capítulo 5

## Giros de Aristas y Caras

En este capítulo veremos más a detalle los giros en el plano y en el espacio. Mencionaremos algunos de los resultados que se conocen al respecto. Veremos también una manera de relacionar los giros en el espacio con los giros en el plano. Esta relación motivará una extensión de la tetraedralización del ojo. Finalmente veremos como podría usarse todo lo anterior para atacar el problema de la tetraedralización hamiltoniana.

### 5.1. Giros en el plano

En el capítulo 2 definimos lo que significa girar una arista en una triangulación. En esta sección mencionaremos algunos resultados sobre el tema. Recordemos primero la definición del giro de arista. Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano y  $\mathcal{T}$  una triangulación de este. Dada cualquier arista  $\overline{p_1p_2}$  si los dos triángulos  $\Delta p_1p_2q$  y  $\Delta p_1p_2r$  que la contienen forman un triángulo convexo podemos intercambiar la arista  $\overline{p_1p_2}$  por  $\overline{qr}$  en  $\mathcal{T}$  y obtener así una nueva triangulación de  $S$ . A esta acción se le conoce como “girar” la arista  $\overline{p_1p_2}$

Mencionaremos algunos resultados probados en [6]. Demuestran por ejemplo que to-

da triangulación de  $n$  puntos en el plano tiene al menos  $\lceil (n-4)/2 \rceil$  aristas girables y dan ejemplos donde se alcanza esta cota. Demuestran también que se puede obtener cualquier triangulación de un conjunto de puntos a partir de cualquier otra mediante giros. Sin embargo hay casos en que se necesita un número cuadrático de giros para lograrlo. Este resultado también es válido para triangulaciones de polígonos en general.

## 5.2. Giros en la Tetraedralización del Ojo

En esta sección haremos uso de la propiedad de la triangulación del ojo de relacionar el problema en el espacio con el del plano para traducir los giros en el plano en giros en el espacio. Consideremos dos tetraedros  $\tau_1 = \Delta pv_1v_2v_3$  y  $\tau_2 = \Delta qv_1v_2v_3$  en una tetraedralización cualquiera tal que la unión de ambos es convexa. A la acción de retetraedralizar  $\tau_1 \cup \tau_2$  con los tetraedros  $\Delta pqv_1, \Delta pqv_2, \Delta pqv_3$  la llamamos girar la cara  $\Delta v_1v_2v_3$  y a la acción inversa girar la arista  $\overline{pq}$ .

Sea  $\mathcal{T}_v$  una tetraedralización del ojo de un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  de  $n$  puntos en posición convexa. Asociamos a cada triangulación del ojo una triangulación del plano que en esencia es la parte restante del casquete convexo que el ojo ve. Esta triangulación la denotamos como  $\mathcal{T}'_v$  para la tetraedralización del ojo  $\mathcal{T}_v$ .

Supongamos que en este caso  $\mathcal{T}'_v$  tiene una arista girable  $\overline{p'q'}$ . Sean  $\tau'_1 = \Delta r'_1p'q'$  y  $\tau'_2 = \Delta r'_2p'q'$  los dos triángulos de  $\mathcal{T}'_v$  que contienen a  $\overline{p'q'}$ . Como la unión de ambos triángulos es convexa y el ángulo interior de  $\Delta r_1pq$  con  $\Delta r_2pq$  es menor a  $\pi$ , la preimagen de  $\tau'_1 \cup \tau'_2$  es convexa. Es decir  $\Delta vr_1pq \cup \Delta vr_2pq$  es convexa. Por tanto podemos girar la cara  $\Delta vpq$  en  $\mathcal{T}_v$ . La relación inversa también se cumple es decir supongamos ahora que la cara  $\Delta vpq$  que comparten dos tetraedros  $\tau_1 = \Delta pqvr_1$  y  $\tau_2 = \Delta pqvr_2$  es girable en  $\mathcal{T}_v$ . La imagen de  $\tau_1 \cup \tau_2$  en  $\mathcal{T}'_v$  se puede ver de la siguiente manera: Extendemos las caras de de

$\tau_1 \cup \tau_2$  que contenga a  $v$  y las interseccionamos con el plano sobre el que descansa  $\mathcal{T}'_v$ , dicha intersección formará la imagen de  $\tau_1 \cup \tau_2$  en  $\mathcal{T}'_v$ . Como la extensión anterior y el plano son conjuntos convexos su intersección será convexa, por tanto  $\overline{p'q'}$  será girable en  $\mathcal{T}'_v$ . De esta manera relacionamos los giros en el plano con los giros en el espacio en la tetraedralización del ojo.

Una vez girada una arista en  $\mathcal{T}_v$ , el ojo  $v$  ya no “vera” la misma triangulación. De hecho lo que el ojo ve ahora ya no es convexo. Es por eso que ahora nos conviene generalizar nuestra notación para abarcar no solo la tetraedralización del ojo sino todas las tetraedralizaciones en general. Consideremos cualquier tetraedralización  $\mathcal{T}$  de  $S$  y cualquier vértice  $v \in S$ . Denotemos con  $\mathcal{T}_v$  la colección de tetraedros de  $\mathcal{T}$  que contienen a  $v$ . Con  $S_v$  a los puntos de  $S$  distintos de  $v$  que se encuentran en alguno de los tetraedros de  $\mathcal{T}_v$ . Podemos hacer las mismas proyecciones que hicimos en el caso de la tetraedralización del ojo y en este caso obtener una triangulación  $\mathcal{T}'_v$  de la imagen de  $S_v$  (que denotamos con  $S'_v$ ). En este sentido la tetraedralización del ojo no es mas que el caso en que para un vértice  $u$  se tiene que  $\mathcal{T}_u = \mathcal{T}$ . Claramente si para cada vértice de dos tetraedralizaciones ven lo mismo entonces dichas tetraedralizaciones son iguales.

En el caso de la tetraedralización del ojo vimos que una arista era girable en  $\mathcal{T}'_v$  si y solo si lo era como cara de  $\mathcal{T}_v$ . No sucede lo mismo para tetraedralizaciones en general. Sea  $\mathcal{T}$  una tetraedralización cualquiera de  $S$  y  $\overline{p'q'}$  una arista girable de  $\mathcal{T}'_v$ . Sean  $\Delta p'q'r'_1$  y  $\Delta p'q'r'_2$  los triángulos de  $\mathcal{T}'_v$  que contienen a la arista  $\overline{p'q'}$ . Ahora bien pudiera ser el caso en que el ángulo (visto desde el ojo) entre  $\Delta pqr_1$  y  $\Delta pqr_2$  sea mayor a  $\pi$ . Como por ejemplo después de hacer un giro en la tetraedralización del ojo. En este caso no podemos garantizar que por ser girable la arista en  $\mathcal{T}'_v$  lo sea en  $\mathcal{T}_v$ . Sin embargo la relación inversa se sigue cumpliendo es decir si una arista es girable en  $\mathcal{T}_v$  lo será en  $\mathcal{T}'_v$ . Esto se da por las mismas razones que cuando se trata de tetraedralizaciones del ojo.

Por lo anterior una vez que giramos una arista en  $\mathcal{T}'_v$  perdemos de alguna manera la relación entre los giros de  $\mathcal{T}_v$  y los de  $\mathcal{T}'_v$ . Sin embargo un giro es realmente un pequeño cambio en la tetraedralización y por tanto no es de extrañar que parte de la estructura de los giros se preserve después del giro. La única manera en que una arista sea girable en  $\mathcal{T}'_v$  y no lo sea en  $\mathcal{T}_v$  es que las preimágenes de los triángulos que contienen a la arista en  $\mathcal{T}'_v$  formen un ángulo mayor a  $\pi$  (otra vez visto desde el ojo). A este tipo de aristas las llamaremos no convexas y a las que en la preimagen formen un ángulo menor o igual a  $\pi$  las llamaremos convexas. Es interesante notar que una arista convexa sigue siendo convexa después de un giro, en este sentido nos referíamos a que se conservaba la estructura. Para ver lo anterior sea  $\overline{pq}$  una arista convexa de  $\mathcal{T}_v$  y que hacemos un giro. Supongamos que la arista que giramos no se encuentra en el cuadrilátero que contiene a la arista  $\overline{p'q'}$  en  $\mathcal{T}'_v$ . Las preimágenes de los dos triángulos que contienen a  $\overline{p'q'}$  no habrán cambiado y por tanto  $\overline{pq}$  sigue siendo girable. Supongamos ahora que la arista que giramos se encuentra en alguno de los triángulos  $\tau'_1$  y  $\tau'_2$  que contienen a  $\overline{p'q'}$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que es  $\tau'_1$ . El ángulo entre  $\tau_1$  y  $\tau_2$  (las preimágenes de  $\tau'_1$  y  $\tau'_2$  en  $\mathcal{T}$ ) es la suma de los ángulos que cada uno de estos forma con el triángulo  $\Delta pqv$ . La preimagen del triángulo que después del giro contiene a  $\overline{p'q'}$  forma un ángulo necesariamente menor con  $\Delta pqv$  que el que formaba  $\tau_1$  con  $\Delta pqv$  pues de otra manera la arista en cuestión no hubiera sido girable. Al hacer el giro el ángulo que forman las preimágenes de los triángulos que contienen a  $\overline{p'q'}$  es menor al que formaban antes. Como  $\overline{pq}$  era convexa este ángulo era menor a  $\pi$  por tanto  $\overline{pq}$  sigue siendo convexa después del giro.

Nuestra intención al principio de la sección era reducir de alguna manera el problema en el espacio al problema en el plano y la discusión anterior nos da una manera de hacerlo, en particular nos permite trabajar con  $\mathcal{T}'_v$ . Esto lo hacemos siguiendo la siguiente regla: una vez que giramos una arista no la podemos volver a girar (en el sentido de que si giramos la

arista  $a$  en  $\mathcal{T}'_v$  a la nueva arista resultante consideramos que ocupa ahora el lugar de  $a$  y no la volvemos a girar). Con esto garantizamos que los giros que hagamos en  $\mathcal{T}'_v$  los podemos hacer también en  $\mathcal{T}_v$ .

Aun queda la pregunta de a cuáles de todas las triangulaciones posibles de  $S'$  son accesibles mediante este tipo de giros (aquellos válidos en  $\mathcal{T}'_v$  como en  $\mathcal{T}_v$ ). Vimos que en el plano se puede ir una triangulación a cualquier otra mediante giros. En este caso estamos restringidos por aquellos giros que también sean giros en  $\mathcal{T}_v$ .

**Teorema 15.** *Sea  $\mathcal{T}_v$  una tetraedralización del ojo de un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  de puntos en posición convexa. Desde  $\mathcal{T}'_v$  se puede llegar mediante giros (válidos en  $\mathcal{T}'_v$  y en  $\mathcal{T}_v$ ) a cualquier otra triangulación de  $S'$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}^*$  una triangulación cualquiera de  $S'$  (la proyección de  $S$ ) diferente de  $\mathcal{T}'_v$ . Unimos por medio de  $\mathcal{T}^*$  los vértices de  $S$  de la siguiente manera: Si  $p'$  y  $q'$  son adyacentes en  $\mathcal{T}^*$  hacemos adyacentes  $p$  y  $q$  (las preimágenes de  $p'$  y  $q'$  bajo la proyección) en  $S$ . De esta manera obtenemos una “triangulación” de  $S - v$  ahora si a cada uno de estos triángulos los unimos a  $v$  obtenemos una colección de tetraedros  $T_v$  con vértices en  $S$ . Esta colección no va a cubrir la cerradura convexa de  $S$  por lo que tendrá alguna arista  $\overline{p'q'}$  no convexa (vista desde  $v$ ). Sean  $\tau'_1 = \Delta x'pq'$  y  $\tau'_2 = \Delta y'pq'$  los triángulos de  $\mathcal{T}^*$  que contienen a  $a'$  (la imagen de  $a$  bajo la proyección). Si la unión  $\tau_1$  y  $\tau_2$  forma un cuadrilátero no convexo, necesariamente un extremo de  $a'$  tendrá un ángulo interior mayor a  $\pi$ , sin pérdida de generalidad supongamos que se trata de  $p'$ . El vértice  $p'$  se encuentra al interior del triángulo  $\Delta x'y'q'$  (que bien pudiera no estar en  $\mathcal{T}^*$ ). Por lo que el triángulo  $\Delta xyq$  está entre  $p$  y  $v$  pues de otra manera  $p$  sería un vértice interior del tetraedro  $\Delta xyqv$  y los puntos están en posición convexa. En consecuencia  $\tau_1 \cup \tau_2$  forma una cuadrilátero convexo. Intercambiamos los tetraedros  $\Delta vxpq$ ,  $\Delta vypq$  por  $\Delta vxyp$ ,  $\Delta vxyq$  en  $\mathcal{T}_v$ . Haciendo

esta actualización en  $T$  y con la notación usual observamos que dado que  $\Delta vxy p \cup \Delta vxy q$  es convexo la arista  $\overline{x'y'}$  es girable en  $T'_v$  como en  $T_v$ . De hacer el giro se tendría  $T'_v = \mathcal{T}^*$  es decir se puede llegar de  $T'_v$  a  $\mathcal{T}^*$  mediante un giro. Haciendo ahora  $\mathcal{T}^* = T'_v$  y repitiendo el argumento eventualmente llegamos a cubrir toda la cerradura convexa de  $S$  y la colección de tetraedros que finalmente la cubrirá sera la tetraedralización del ojo  $\mathcal{T}_v$ . Teniendo en cuenta que en cada paso se puede llegar a que  $v$  “vea” la triangulación del paso anterior mediante un giro, se puede mediante giros llegar a que  $v$  “vea” la triangulación original  $\mathcal{T}^*$ .  $\square$

Una consecuencia interesante de este teorema es un resultado que ya mencionamos y sin embargo no probamos

**Corolario 2.** *Sea  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  cuales quiera dos triangulaciones de un conjunto  $S$  de puntos en el plano. Se puede pasar de  $\mathcal{T}_1$  mediante giros a  $\mathcal{T}_2$ .*

*Demostración.* Sea  $\Pi$  el plano que contiene a  $S$  y sea  $\mathcal{E}$  una esfera que no intersekte a  $\Pi$ . Sea  $v$  el punto mas lejano a  $\Pi$  en  $\mathcal{E}$ . Proyectamos estereográficamente a  $\mathcal{E}$  sobre  $\Pi$  tomando como eje a  $v$ . Sea  $S^{-1}$  la preimagen de  $S$  bajo esta proyección. Tetraedralizamos a  $S^{-1}$  tomando como base  $v$  con la tetraedralización del ojo  $\mathcal{T}_v$ . Por el teorema anterior se puede pasar de  $\mathcal{T}_1$  a  $\mathcal{T}'_v$  y de  $\mathcal{T}_2$  a  $\mathcal{T}'_v$ . Por lo que usando a  $\mathcal{T}'_v$  como intermediario se puede pasar de  $\mathcal{T}_1$  a  $\mathcal{T}_2$  mediante giros.  $\square$

Lo interesante de la aplicación del teorema en el corolario anterior es que hace uso de los resultados en el espacio para probar un resultado en el plano. Generalmente la aplicación se da en sentido inverso.

Los giros en la tetraedralización del ojo nos dan una herramienta más para atacar el problema de la tetraedralización hamiltoniana. Hasta el momento por ejemplo no hemos



encontrado una tetraedralización del ojo que no pueda ser llevada mediante este tipo de giros (hechos en  $\mathcal{T}'_v$  y en  $\mathcal{T}_v$  simultáneamente) a una tetraedralización hamiltoniana. Probablemente la combinación de los giros con elecciones adecuadas de ojos darían la solución al problema.

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**

## **Capítulo 6**

### **Puntos de Steiner**

En este capítulo presentaremos hablaremos de soluciones aproximadas al problema de la tetraedralización hamiltoniana. Describiremos en que sentido las soluciones son aproximadas. Una vez hecho esto damos una técnica para encontrarlas. Finalmente hablaremos de las limitaciones de esta técnica. La técnica descrita no ha sido publicada anteriormente.

#### **6.1. Aproximando con Puntos de Steiner**

Cuando por alguna razón somos incapaces de encontrar una solución exacta a un problema optamos por buscar una aproximación lo suficientemente buena para nuestros propósitos. En este sentido en Geometría Computacional al tratar con diferentes objetos geométricos se suelen agregar puntos “extras” (es decir que no estaban considerados en el planteamiento original del problema) de manera que nos auxilien a encontrar una solución. Dichos puntos se les conoce como puntos de Steiner.

En el caso del problema de la tetraedralización hamiltoniana lo que haremos es dado  $S \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto de puntos en posición convexa encontraremos otros conjunto  $S^*$  de

puntos en el espacio de manera de que  $S \subset S^*$  y  $S^*$  tenga una tetraedralización hamiltoniana.

En general quisiéramos que la aproximación sea lo más cercana posible a la solución exacta. Para estos fines trataremos de minimizar en medida de lo posible la cantidad de puntos de Steiner que agregamos. Es decir trataremos de minimizar la cardinalidad de  $S^* - S$ . En el proceso de ir agregando puntos de Steiner nos interesara conservar algunas propiedades del conjunto original como por ejemplo la cerradura convexa. Pues que sentido tendría agregar cuatro puntos fuera de  $S$  lo suficientemente lejanos uno del otro de manera de que  $S$  este enteramente contenido en el tetraedro generado por dichos puntos. Procediendo de esta manera  $S^*$  tendría una tetraedralización hamiltoniana. Como ya vimos basta con que los puntos que están en el casquete convexo de  $S^*$  tengan una tetraedralización hamiltoniana. El casquete convexo de  $S^*$  constaría de un tetraedro y por tanto  $S^*$  tiene trivialmente una tetraedralización hamiltoniana. Es decir sólo con 4 puntos de Steiner fuimos capaces de tetraedralizar hamiltonianamente a  $S^*$ . Pero esto no es lo que se quiere. Mas allá de tratar de minimizar el número de puntos de Steiner usados nos gustaría que además el casquete convexo de  $S$  coincida con el de  $S^*$ . De hecho como veremos adelante esto siempre sera posible. Es decir todos los puntos de Steiner que agreguemos estarán en el interior de  $Conv(S)$ .

## 6.2. Agregando puntos de Steiner

En esta sección explicaremos a detalle la técnica que usamos para agregar puntos de Steiner al conjunto original. Veremos los resultados que hemos alcanzado con esta técnica y después sus posibles limitaciones.

Usando la notación anterior empezaremos por agregar un punto de Steiner  $v \notin S$  al

interior de  $S$  y usaremos este punto para tetraedralizar a  $S$  con  $\mathcal{T} = \{\Delta v p_1 p_2 p_3 \mid \Delta p_1 p_2 p_3 \text{ es una cara del casquete convexo de } S\}$ . Esto nos recuerda de alguna manera lo que hicimos con la tetraedralización del ojo en el capítulo 4 . Ahora bien como vimos en ese mismo capítulo la gráfica dual del casquete convexo de  $S$  sera una gráfica CP3C (gráficas cúbicas planas tres conexas). Por construcción entonces  $D_{\mathcal{T}}$  sera una gráfica CP3C.

Un resultado de Teoría de Gráficas muy conocido debido a Petersen afirma que toda gráfica cúbica  $G$  2-conexa tiene un 1-factor. Un 1-factor  $G$  no es otra cosa más que una subgráfica  $H$  1-regular de  $G$  con  $V(H) = V(G)$ . Si a  $G$  le quitamos las aristas de  $H$  le estamos quitando a cada vértice una arista. Lo que nos queda es una subgráfica de  $G$ , 2-regular con el mismo conjunto de vértices es decir un 2-factor. Por ser 2-regular esta subgráfica de  $G$  se puede cubrir con una colección de ciclos ajenos dos a dos de manera que cada vértice de que cada vértice este en algún ciclo. Usando el hecho de que es una subgráfica de  $G$  cubrimos a los vértices de  $G$  con ciclos ajenos entre sí.

Como  $D_{\mathcal{T}_v}$  es 3-conexa en particular es 2-conexa. Además es cúbica por lo que existe una colección de ciclos ajenos que cubren todos los vértices de  $D_{\mathcal{T}_v}$ . La idea es ahora es usar los puntos de Steiner para ir uniendo los ciclos de manera que eventualmente con un sólo ciclo cubramos los vértices de  $D_{\mathcal{T}_v}$ . Empezamos con la cobertura inicial de ciclos  $C_1, C_2, \dots, C_m$ . Sean  $\tau_1 = \Delta p r_1 r_2 r_3$  y  $\tau_2 = \Delta q r_1 r_2 r_3$  dos tetraedros adyacentes de  $\mathcal{T}_v$  que se están cubiertos por ciclos distintos ( $C_i$  y  $C_j$  respectivamente). Agregamos un punto de Steiner  $x$  al interior de  $\tau_1$  (cambiando  $\tau_1$  por los tetraedros  $\Delta x r_1 r_2 r_3, \Delta x p r_1 r_2, \Delta x p r_2 r_3, \Delta x p r_3 r_1$ ) de manera que el segmento de recta  $\overline{xq}$  intersecte  $\Delta r_1 r_2 r_3$ .

Por la localización de  $x$  la unión de  $\tau_2$  con  $\Delta x r_1 r_2 r_3$  es convexa y en consecuencia  $\Delta r_1 r_2 r_3$  es girable. Giramos dicha cara (ver figura 6.2) El ciclo  $C_i$  originalmente podría entrar a  $\tau_1$  por cualquiera de sus caras (a excepción de  $\Delta r_1 r_2 r_3$ ) y salir por cualquier otra. Fijamos cualesquiera dos caras de  $\tau_1$  como entrada (pues por simetría no importa cuales

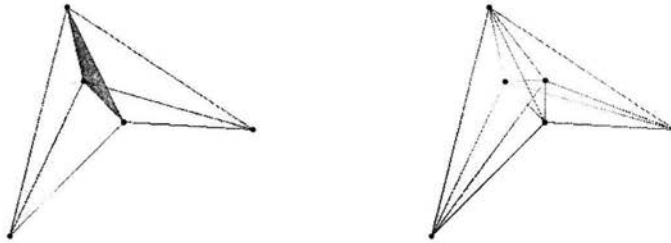


Figura 6.1: Agregando puntos de Steiner.

elijamos). Análogamente  $C_j$  puede entrar y salir de  $\tau_2$  por cualquiera de sus aristas. No importando por cual de estas entre o salga,  $C_j$  una vez agregado  $x$  se puede crear un nuevo ciclo a partir de  $C_i$  y  $C_j$  que pase por los tetraedros que cubrían ambos, así como los que se generaron en el proceso (ver figura 6.2).

Uniendo de esta manera de dos en dos ciclos con un punto de Steiner agregando  $m$  vértices (tomando en cuenta que al principio agregamos el vértice  $v$ ) obtenemos un ciclo que pasa por todos los vértices de la gráfica dual de la tetraedralización resultante. Es decir el número de puntos de Steiner a utilizar depende del tamaño de la colección original de ciclos. Como ya vimos en el capítulo 3 podemos suponer que no hay vértices de grado 3 en el casquete convexo de  $S$ . Esto quiere decir que la longitud mínima de los ciclos es 4 por lo que en el peor de los casos todos los ciclos son de longitud 4. Combinando esto con el hecho de que el casquete convexo tendrá  $2n - 4$  triángulos (por ser una gráfica plana con todas sus caras triangulares) obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 16.** *Para todo conjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa, existe un conjunto  $S^* \subset \mathbb{R}^3$  que contiene a  $S$ , con la propiedad de que  $\text{Conv}(S) = \text{Conv}(S^*)$  y  $|S^* - S| \leq \frac{n-2}{2}$ .*

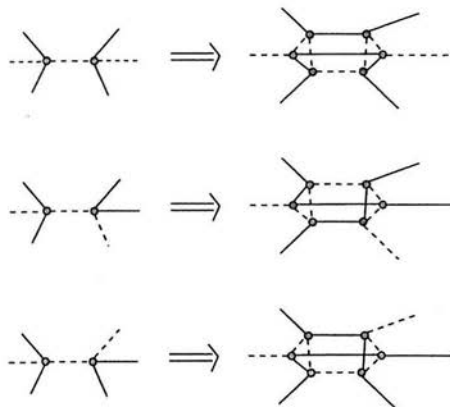


Figura 6.2: Uniendo ciclos en la gráfica dual después de agregar el punto de Steiner.

En otras palabras el número de puntos de Steiner requeridos es de  $O(n)$ . Cabe preguntarse si podemos mediante esta técnica bajar esta cota a  $O(\log n)$  por ejemplo. Veremos que de hecho hay casos donde se necesitan  $O(n)$  puntos extras. Esto no resuelve el problema de la tetraedralización hamiltoniana pues nos estamos enfocando solamente al proceso anteriormente descrito. Sin embargo nos da una idea de su complejidad.

El número de puntos de Steiner usados está condicionado por el tamaño de la cobertura inicial de ciclos. En particular encontraremos una familia infinita de gráficas CP3C que requerirán al menos  $\frac{m}{50} + 1$  ciclos para ser cubiertas (donde  $m$  es el número de vértices de la gráfica). Haremos la construcción de manera un poco al contrario de lo esperado. En vez de fijar una  $m$  en particular y construir una CP3C que no se pueda cubrir con menos de  $\frac{m}{50} + 1$  ciclos, escogeremos cualquier  $k$  en los naturales y construiremos una CP3C que requiera al menos  $k$  ciclos para ser cubrir todos sus vértices con la propiedad de que  $k = \frac{m}{50} + 1$ . Como las gráficas CP3C se pueden realizar como gráficas duales de casquetes convexos de polítopos tridimensionales habremos acabado.

Para este propósito iremos uniendo de manera análoga a como hicimos en el capítulo 4 gráficas CP3C no hamiltonianas para construir la gráfica final. La unión entre dos CP3C la haremos exactamente de la misma manera que en la sección 4,5 del capítulo 4. Empezaremos con la gráfica CP3C,  $G$  formada por los vértices  $x_0, \dots, x_{3(k-2)}, y_0, \dots, y_{3(k-2)}$ . Haciendo adyacentes  $x_i$  con  $x_{i-1}$ ,  $y_i$  con  $y_{i-1}$  y  $x_i$  con  $y_i$ . Sean ahora  $H_0, \dots, H_{k-2}$  copias de la gráfica CP3C no hamiltoniana con 38 vértices descrita en [13]. Tomando cualquiera de los vértices en su cara exterior unimos cada  $H_i$  a  $G$  por el vértice  $x_{3i}$  (modulo  $k - 1$ ). Supongamos que un sólo ciclo de la gráfica resultante contiene a todos los vértices que antes estaban en  $H_i$ . Por la manera en que unimos las gráficas podemos usar este ciclo para encontrar un ciclo que pase por todos los vértices de  $H_i$ . Dado que  $H_i$  no es hamiltoniana esto no es posible y por tanto por cada  $H_i$  necesitamos al menos dos ciclos. Además uno de estos ciclos constará solamente de vértices de  $H_i$  y posiblemente de los vértices que generamos al unirla con  $G$ . Ahora bien, necesitamos al menos un ciclo para cubrir los vértices  $y_0, \dots, y_{3k-2}$ . Es decir al menos  $k$  ciclos.  $G$  contribuye con  $6(k-1)$  vértices y cada  $H_i$  con 38 vértices, al unir  $H_i$  a  $G$  perdemos 2 vértices (los que unimos) y ganamos 8 (los que agregamos). Es decir cada  $H_i$  contribuye con 6 vértices más al momento de unirla a  $G$ . Como son  $k - 1$  gráficas todas en total tenemos  $6(k - 1)$  vértices. Es decir el número total de vértices al finalizar es  $50(k - 1)$ . Con esto probamos el siguiente resultado:

**Teorema 17.** *Para cada  $k$  en  $\mathbb{N} - \{0\}$  existe una gráfica CP3C  $G$  tal que necesitan al menos  $k$  ciclos ajenos para cubrir todos sus vértices. Con la propiedad de que  $k = \frac{m}{50} + 1$  (donde  $m$  es el número de vértices de  $G$ ).*

Insistimos en que estos resultados sólo aplican a la técnica descrita en este capítulo y de ninguna forma a cualquier manera de agregar puntos de Steiner en general. Observamos también que la manera en que construimos la gráfica del Teorema 17 fue hecha más para

---

mostrar que se necesita al menos un número lineal de puntos de Steiner que para encontrar una cota mínima al Teorema 16. Seguramente se pueden mejorar las cotas de ambos teoremas. El propósito de este capítulo fue mostrar como usar puntos de Steiner para encontrar una solución aproximada al problema de la tetraedralización hamiltoniana. Habiendo logrado esto concluimos el capítulo y dejamos el refinamiento de los resultados para trabajos posteriores.



# Capítulo 7

## Conclusiones

### 7.1. Triangulaciones en dimensiones mayores a 3

A lo largo de la obra nos ocupamos de triangulaciones y tetraedralizaciones de conjuntos de puntos en  $R^2$  y  $R^3$ . Esto lo hicimos por la gran cantidad de aplicaciones practicas existentes en ambos casos. Pero en el sentido teórico uno no tiene porque limitarse a 2 y 3 dimensiones. Seria interesante generalizar el concepto de triangulación a dimensiones arbitrarias. Tanto las triangulaciones como las tetraedralizaciones son divisiones del cierre convexo de un conjunto dado en partes más pequeñas ajenas entre si. En el primer caso se trata de triángulos y en el segundo de tetraedros. La primera extensión de la teoría seria el generalizar estas unidades mínimas de división.

Los triángulos en  $R^2$  y los tetraedros en  $R^3$  tienen en común no pueden estar inmersos en un espacio de dimensión menor a la que están. Es decir si un subespacio afín de  $R^2$  contiene a un triángulo dado este subespacio debe ser de dimensión 2. Análogamente cualquier subespacio a fin de  $R^3$  que contenga un tetraedro tendrá que ser de dimensión 3. Ambos son mínimos en cuanto al número de vértices es decir si un conjunto de puntos en  $R^2$  cumple

con la misma propiedad entonces debe tener al menos 3 puntos (pues de tener 2 o 1 hay una recta que los cubre) y lo mismo sucede en  $R^3$  para los tetraedros. Sea  $C$  un conjunto de  $d$  puntos en  $R^d$  tal que cualquier subespacio afín de  $R^d$  que lo contenga tiene dimensión  $d$ . Generalizando lo anterior decimos que  $\text{Conv}(C)$  es un  $d$ -simplejo. De esta manera podemos hablar de triangulaciones en cualquier dimensión.

**Definición 10.** Sea  $S$  un conjunto de puntos en  $R^d$ . Por una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$ , entenderemos una partición de  $\text{Conv}(S)$  en una familia de  $d$ -simplejos tal que los  $d$ -simplejos :

- 1) Tengan sus vértices en  $S$ .
- 2) No se intersecten en su interior.
- 3) No contengan elementos de  $S$  en su interior.

En el capítulo 2 para poder garantizar la existencia de triangulaciones y de tetraedralizaciones así como facilitar la exposición introdujimos el concepto de posición general.

Este concepto se generaliza en  $R^d$  de la siguiente manera:

**Definición 11.** Un conjunto de puntos  $S \subset R^d$  decimos que esta en posición general si la cerradura convexa de cualesquiera  $d$  puntos de  $S$  forman un  $d$ -simplejo en  $R^d$ .

Así como en el plano y en el espacio dado un conjunto  $S \subset R^d$  de  $n$  puntos siempre se puede por medio de perturbación simbólica encontrar otro conjunto de  $n$  puntos tan cerca como se quiera de  $S$  en posición general (vease [9]).

Sea  $S \subset R^d$  un conjunto de puntos en posición general con  $\mathcal{T}$  una triangulación de  $S$ . Dadas dos  $d$ -simplejos en  $\mathcal{T}$ , lo más que pueden compartir es una cara  $d-1$  dimensional (es decir un  $d-1$ -simplejo). Cuando esto pase decimos que los dos  $d$ -simplejos son adyacentes. De la misma manera en que se definió la gráfica dual de las triangulaciones y tetraedraliza-

ciones se definen la gráfica dual  $D_{\mathcal{T}}$  de  $\mathcal{T}$  tomando como vértices los  $d$ -simplejos de  $\mathcal{T}$  y haciendo dos de estas adyacentes si lo son en  $\mathcal{T}$ .

Antes de seguir hacemos la observación de que el marco teórico aquí presentado difiere un tanto de lo usual (vease [8] por ejemplo). Esto se hizo en parte para facilitar la exposición pues se trato de introducir la mínima cantidad posible de conceptos a la teoría. De esta manera a lo largo de la obra se trataron temas difíciles pero conservando la simpleza en la exposición. Por otra parte nuestro interés radica en geometría computacional y en esta area se definen las triangulaciones como se definieron en la presenta obra. Al tratar el problema en el espacio nos inspiramos en el plano para crear nuestro marco teórico. Finalmente al generalizar a más dimensiones hicimos la generalización de los conceptos de la manera que nos pareció más natural. Sin embargo solo es una diferencia en cuanto a definiciones y en esencia los objetos de estudio son los mismos entre los diferentes marcos teóricos existentes.

Las mismas preguntas que hicimos sobre triangulaciones y tetraedralizaciones las podemos hacer en triangulaciones de dimensiones arbitrarias. Históricamente la atención se centrado mayormente en el caso bidimensional y hasta hace relativamente poco en el caso tridimensional. Por lo mismo los casos en dimensiones mayores a 3 han sido poco estudiados.

## 7.2. Triangulaciones Hamiltonianas

Nuestro estudio se baso en triangulaciones y tetraedralizaciones en general prestando principal atención al problema de triangulaciones y tetraedralizaciones hamiltonianas.

En el caso de las triangulaciones hamiltonianas dimos al final del capítulo 3 un algoritmo nuevo de tiempo  $O(n \log n)$  para triangular hamiltonianamente un conjunto de puntos

en el plano. Una de las ventajas que tiene nuestro algoritmo sobre otros es de que no necesita encontrar vértices separadores. Además tiene como base un algoritmo muy usado para encontrar la cerradura convexa de un conjunto de puntos, lo que facilita bastante su implementación.

Para atacar el problema del espacio en el capítulo 4 introdujimos el concepto de la tetraedralización del ojo y lo relacionamos con el casquete convexo. Pese a que no fuimos capaces de resolver el problema en general, sí presentamos varios resultados parciales. Entre los primeros resultados está el hecho de que para tetraedralizar un conjunto de puntos en el espacio solo hace falta tetraedralizar aquellos que están en el casquete convexo. Observamos también que si la gráfica dual del casquete convexo es hamiltoniana entonces existe una tetraedralización del ojo hamiltoniana. Vimos que la implicación no se da en sentido inverso es decir la existencia de un ojo hamiltoniano no garantiza que el casquete convexo lo sea. En [13] demuestran que toda gráfica CP3C (cúbica plana y 3 conexa) con a lo más 38 vértices es hamiltoniana. Las gráficas duales de los casquetes convexos son CP3C (de hecho toda CP3C se puede realizar como la gráfica dual del casquete convexo de algún conjunto de puntos). En consecuencia cualquier conjunto de puntos con a lo más 20 de ellos en el casquete convexo admite una tetraedralización hamiltoniana. Al final del capítulo 4 dimos un ejemplo de como se puede construir un conjunto de puntos sin una tetraedralización del ojo hamiltoniana.

La gráfica dual de la tetraedralización del ojo es isomorfa a la gráfica dual del casquete convexo menos una cara. En este sentido encontramos una CP3C tal que no importando que cara se le quite el resultado sigue sin tener una trayectoria hamiltoniana. La CP3C que construimos básicamente consta de 192 vértices. En consecuencia el conjunto de puntos en el espacio que la tuviera como gráfica dual constaría de 97 puntos. En resumen a toda CP3C con a lo más 38 vértices se le puede quitar una cara y obtener una gráfica hamiltoniana, la

CP3C más chica donde esto no sucede que pudimos encontrar consta de 192 vértices. Una pregunta que queda abierta entonces sería: ¿Cual es la gráfica CP3C más pequeña tal que sin importar que cara se le quite el resultado no contiene una trayectoria hamiltoniana? La respuesta a dicha pregunta nos permitirá aumentar el número de puntos para los cuales sabemos que siempre existe una tetraedralización hamiltoniana. Dicha línea de investigación se podría llevar a cabo muy al estilo de [13] donde para encontrar la CP3C más chica no hamiltoniana hicieron bastante uso de computadoras.

El problema de la triangulación hamiltoniana en dimensiones mayores a 3 sigue sin respuesta. La tetraedralización del ojo se puede generalizar a más dimensiones. Sin embargo en dimensiones mayores a 3 se podría perder la relación entre la tetraedralización del ojo y el casquete convexo que nos da el Teorema 11. Esto se debe a que en la prueba del Teorema 11 hicimos uso de la planaridad de la gráfica dual del casquete convexo. En dimensiones mayores a 3 la gráfica dual del casquete convexo no siempre es plana. Habría por lo tanto que encontrar un sustituto para el Teorema 11. Sin embargo pensamos que en dimensiones mayores a 3 siempre hay conjuntos de puntos que no admiten una triangulación hamiltoniana.

### 7.3. Puntos de Steiner

En el capítulo 6 vimos como encontrar una solución aproximada al problema de la tetraedralización hamiltoniana. Dado  $S \subset R^3$  en posición convexa agregamos puntos de Steiner a  $S$  hasta encontrar un conjunto que ya tuviera una tetraedralización hamiltoniana. Todos los puntos de Steiner los agregamos al interior de  $S$  por lo que al terminar no alteramos el casquete convexo. Vimos además que si  $S$  tenía  $n$  puntos necesitábamos a lo más  $\frac{n-2}{2}$  puntos extra para tetraedralizarlo hamiltonianamente. Sin embargo también observa-

mos que usando nuestra técnica había casos donde se requerían al menos  $\frac{n-1}{25} + 1$  vértices extra.

Queda pendiente para trabajos posteriores el refinamiento de estas cotas, es decir saber el verdadero alcance de la técnica que presentamos. Sería interesante también el explorar nuevas maneras de agregar puntos de Steiner basados en la técnica que presentamos, combinando por ejemplo elecciones adecuadas de ojos y giros con puntos de Steiner.

Los puntos de Steiner inspiran un planteamiento más débil del problema de la tetraedralización hamiltoniana a saber: ¿Cual es el mínimo número de puntos de Steiner necesarios para tetraedralizar cualquier conjunto de puntos en el espacio?. El problema de la tetraedralización hamiltoniana en caso de ser resuelto afirmativamente diría que no se necesitan puntos extra para tetraedralizar hamiltonianamente cualquier conjunto de puntos. Nosotros mostramos se puede  $\frac{n-2}{2}$  y conjeturamos que de hecho se puede con  $O(\log n)$

Faltaría también en base a lo estudiado diseñar un algoritmo eficiente para obtener a  $S^*$ . Para este propósito lo único que faltaría sería una manera eficiente encontrar la cobertura de ciclos inicial. Así como garantizar si se requiere que se conserve la posición general. Este algoritmo sería de importancia practica mientras se resuelve el problema de la tetraedralización hamiltoniana. Sin embargo tal vez sea prudente esperar a que madure la teoría para pensar en su implementación.

En el caso de dimensiones más altas habría que primero ver como agregar los puntos de Steiner y luego buscar resultados parecidos a los encontrados en el espacio. Probablemente en general se pueden agregar los puntos de Steiner de la misma manera. Es decir tomando dos simplejos adyacentes, poner un punto en una área visible a ambos y retetraedralizar de alguna manera conveniente.

Con estas consideraciones concluimos el capítulo y con este la obra.

## Bibliografía

- [1] R. E. L. Aldred, S. Bau, D. A. Holton, and Brendan D. McKay. Nonhamiltonian 3-connected cubic planar graphs. *SIAM J. Discrete Math*, 13(1):25–32, 2000.
- [2] Esther M. Arkin, Martin Held, Joseph S. B. Mitchell, and Steven Skiena. Hamiltonian triangulations for fast rendering. *The Visual Computer*, 12(9):429–444, 1996.
- [3] David Avis and Hossam ElGindy. Triangulating point sets in space. *Discrete & Computational Geometry*, 2:99–111, 1987.
- [4] Béla Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer Verlag, 1998.
- [5] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, second edition, 2001.
- [6] Ferran Hurtado Diaz, Marc Noy, and Jorge Urrutia. Flipping edges in triangulations. *Discrete & Computational Geometry*, 22(3):333–346, Oct 1999.
- [7] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer Verlag, second edition, 2000.
- [8] Herbert Edelsbrunner. *Geometry and Topology for Mesh Generation*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 2001.

- 
- [9] Herbert Edelsbrunner and Ernst P. Mücke. Simulation of simplicity: A technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms. In *Symposium on Computational Geometry*, pages 118–133, 1988.
- [10] R. L. Graham. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. *Information Processing Letters*, 1:132–133, 1972.
- [11] Frank Harary. *Graph Theory*. Perseus Books, 1969.
- [12] H. Edelsbrunner, F. P. Preparata, and D. B. West. Tetrahedrizing point sets in three dimensions. *Journal of Symbolic Computation*, 10:335–347,, 1990.
- [13] D.A. Holton and B. D. McKay. The smallest non-hamiltonian 3-connected cubic planar graphs have 38 vertices. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 45:315–319, 1988.
- [14] Joseph O'Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, second edition edition, 1998.
- [15] Jim Ruppert and Raimund Seidel. On the difficulty of triangulating three-dimensional nonconvex polyhedra. *Discrete & Computational Geometry*, 7:227–253, 1992.
- [16] J Urrutia. Coloraciones, tetraedralizaciones, y tetraedros vacíos en coloraciones de conjuntos de puntos en  $r^3$ . 2003.