



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Trayectorias monocromáticas y ciclos  
monocromáticos en torneos, torneos  
bipartitos y torneos k-partitos

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
M A T E M Á T I C A  
P R E S E N T A :

Eugenia Ramírez Reyes Retana



Directora de Tesis: Dra. Hortensia Galeana Sánchez

2004



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Trayectorias monocromáticas y ciclos monocromáticos en torneos,  
torneos bipartitos y torneos k-partitos.  
realizado por Eugenia Ramírez Reyes Retana

con número de cuenta 40004261-3 , quien cubrió los créditos de la carrera de:  
Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

Dra. Hortensia Galeana Sánchez

*H. Galeana*

Propietario

Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

*Hugo A. Rincón M.*

Propietario

M. en C. Patricia Cortes Flores

*Patricia*

Suplente

Mat. Laura Pastrana Ramírez

Laura Pastrana R.

Suplente

Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo

*Martha*

Consejo Departamental de Matemáticas



M. en C. Alejandro Bravo Mojica  
FACULTAD DE CIENCIAS  
CONSEJO DEPARTAMENTAL

# Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares.</b>	<b>5</b>
2.1. Conceptos Generales . . . . .	5
2.2. Trayectorias y ciclos en una digráfica. . . . .	11
2.3. Conexidad. . . . .	15
2.4. Digráficas asociadas a una digráfica dada y el Principio de Dualidad. . . . .	19
<b>3. Núcleos.</b>	<b>23</b>
<b>4. Núcleos por trayectorias monocromáticas.</b>	<b>31</b>
<b>5. Trayectorias monocromáticas y ciclos monocromáticos en torneos <math>m</math>-coloreados.</b>	<b>39</b>
5.1. Trayectorias monocromáticas en torneos $m$ -coloreados. . . . .	40
5.2. Trayectorias monocromáticas y ciclos casimonocromáticos y monocromáticos en torneos $m$ -coloreados. . . . .	53
<b>6. Trayectorias monocromáticas y ciclos de longitud 4 en torneos bipartitos coloreados.</b>	<b>65</b>

<b>7. Ciclos de longitud 3 y ciclos de longitud 4 monocromáticos en torneos <math>k</math>-partitos.</b>	<b>81</b>
<b>8. Conclusiones.</b>	<b>99</b>
<b>9. Bibliografía.</b>	<b>101</b>

*A Cecilia y a Pepe.*

*A Eduardo.*

*A Sergio y a Gabriela.*

*A Sergio, a María y Santiago.*

*A Ernesto.*

*En memoria de Vic.*



## Agradecimientos.

Debo empezar por agradecer a Hortensia, sin quien este trabajo no hubiera sido posible, por haberme introducido al mundo de las gráficas y haberme así devuelto el amor a las matemáticas. A César, por ser, más que un profesor, un gran ejemplo y un gran amigo. A Gaby, por su confianza y apoyo constantes. A Laura por las clases tan interesantes a través de la carrera. A Patricia y a Hugo por la dedicación que le pusieron a esta tesis. A Alberto Barajas por compartir conmigo su amor por las matemáticas y así haber sido una inspiración a través de estos años. A mis profesores Alejandro, Luis, Rafael, Roli.

A mi mamá por su amor incondicional, por su ejemplo, su cariño, sus consejos, por ayudarme a crecer. A Pepe, por su amor, su apoyo y su presencia de siempre. A Eduardo, por ser mi compañero en este trabajo y en mi vida diaria, por llenarla de diversión.

A Sergio y a Gaby por su afecto y su cariño. A Sergio, María y Santiago por ser un factor de gran alegría en mi vida.

A mi abuela, por ser parte esencial de mi crecimiento. A mi abuelo, por ser un cariño permanente en mi vida. A mi tío Oscar por su interés constante. A la familia Reyes Retana por estar siempre ahí.

A Aisha, por ser gran parte de este trabajo, de mi carrera y de mi vida. A Daniela, Lorena, Ma. Carmen y Paola, por ser más que amigas, compañeras a lo largo de la vida. A todas, por su amistad incondicional.

A Oscar, Valentina, Alejandro y Luis Alberto por todas las experiencias compartidas.

A Christina, Danielle, Jenifer y Loretta, quienes hicieron de U.C.L.A. mi casa, y de nuestra amistad un lazo para siempre.

A Abraham, Ana, Alfredo, Emiliano, Gustavo, Mariano y Rüdiger, por su amistad y compañerismo, por todo lo que vivimos juntos en Ciencias. A Andrés, Citlalli, Enrique, Ianis y Jossabeth, porque más que ser compañeros de carrera, crecimos juntos en la Facultad.

A Ernesto, con quien además de compartir esto, comparto mi vida entera. Por su amor absoluto, por ser mi motivación.

A todos, mil gracias,

Eugenia

# Capítulo 1

## Introducción.

As for everything else, so for a mathematical theory:  
beauty can be perceived but not explained.

Arthur Cayley.

Este trabajo estará centrado en la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en torneos, torneos bipartitos y torneos  $k$ -partitos. En 1982 en "On monochromatic paths in edge-coloured digraphs" [11], Sands, Sauer y Woodrow probaron que todo torneo 2-coloreado tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. En 1986 Minggang demostró que todo torneo  $m$ -coloreado que no contenga a  $T_3$  o a  $C_3^T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, y puntualizó que la condición del teorema de que la digráfica no contuviera ningún triángulo 3-coloreado si  $m \geq 5$  no podía ser mejorada. Sin embargo para  $m = 3, 4$  no se habían encontrado contraejemplos. Fue hasta 2003, que Galeana Sánchez y Rojas Monroy dieron una familia de contraejemplos para  $m = 4$ .

Sin embargo, ya en 1992 Galeana Sánchez había probado que la condición de que cada ciclo de longitud 3 sea monocromático era condición suficiente para que un torneo  $m$ -coloreado tenga núcleo por trayectorias monocromáticas. En 2004, Galeana Sánchez y Rojas Monroy demostraron que para el caso de torneos  $m$ -coloreados bipartitos se

tendría que pedir que todo ciclo de longitud 4 del torneo fuera monocromático para asegurar que el torneo tuviera núcleo por trayectorias monocromáticas. Finalmente, en un artículo en preparación, Galeana Sánchez y Rojas Monroy generalizan el caso a torneos  $m$ -coloreados  $k$ -partitos, en los que la hipótesis de que todo ciclo de longitud 3 y todo ciclo de longitud 4 en el torneo sean monocromáticos, garantiza que el torneo tenga núcleo por trayectorias monocromáticas.

En esta tesis iremos recorriendo este camino para establecer las bases y llegar a la prueba de dichos teoremas, que son los resultados centrales de esta disertación. En el segundo capítulo introduciremos al lector a los conceptos principales en gráficas y digráficas, probaremos también proposiciones y teoremas básicos dentro de la teoría de gráficas, que serán fundamentales para el desarrollo de los capítulos posteriores.

Más adelante, en el capítulo 3 presentaremos el concepto de núcleo, demostrando algunas de sus propiedades importantes, y así en el siguiente capítulo, generalizaremos este concepto al de núcleo por trayectorias monocromáticas. De igual manera en el capítulo 4, mostraremos cuáles son algunas de las características que debemos pedir a una digráfica para que tenga núcleo por trayectorias monocromáticas. Introduciremos también el concepto fundamental de cerradura transitiva de una digráfica, y probaremos que dicha digráfica tiene núcleo por trayectorias monocromáticas si y sólo si su cerradura transitiva tiene núcleo.

En el capítulo 5, empezaremos a trabajar con trayectorias y ciclos monocromáticos en torneos  $m$ -coloreados, probaremos el teorema de Shen Minggang y analizaremos el contraejemplo dado por Galeana y Rojas. Además retomaremos los conceptos de digráfica Núcleo Perfecta y digráfica Núcleo Imperfecta Crítica para demostrar ciertos teoremas de caracterización de digráficas de este tipo.

En los capítulos 6 y 7 extenderemos este análisis a los torneos  $m$ -coloreados bipartitos y  $k$ -partitos respectivamente. En el capítulo 6 nos enfocaremos a las trayectorias

y los ciclos de longitud 4 monocromáticos en los torneos bipartitos, probaremos algunas proposiciones sobre este tipo de torneos para demostrar finalmente que si  $D$  es un torneo bipartito  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 4 es monocromático, entonces  $D$  tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas y que este resultado es el mejor posible. Por último, en el capítulo 7, consideraremos los ciclos de longitud 3 y 4 en torneos  $k$ -partitos y con base en propiedades esenciales demostraremos que si  $D$  es un torneo  $k$ -partito  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 y todo ciclo de longitud 4 contenido en  $D$  es monocromático, entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.



# Capítulo 2

## Preliminares.

Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.

Albert Einstein

En este capítulo introduciremos al lector a las nociones y definiciones generales en gráficas y digráficas, así como a algunas proposiciones básicas. Probaremos también algunos teoremas importantes dentro de la teoría de gráficas.

### 2.1. Conceptos Generales

**Definición 2.1** Una *gráfica*  $G$ , consiste de un conjunto no vacío, finito, de elementos llamados *vértices*, denotado por  $V(G)$  y un conjunto de pares no ordenados de distintos vértices llamados *aristas*, denotado por  $A(G)$ .

Si  $a = (u, v) \in A(G)$ , decimos que  $u$  y  $v$  son los **extremos** de  $a$ . Decimos también que  $u$  es **adyacente a  $v$**  o que  $v$  es **adyacente a  $u$**  y lo denotamos  $u \text{ ady}_G v$  o  $v \text{ ady}_G u$ .

**Definición 2.2** Sea  $G$  una gráfica,  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ ,  $u$  y  $v$  no necesariamente distintos, un  $uv$ -camino de  $G$  es una sucesión finita de vértices,  $C = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = v)$  tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$  o  $(x_{i+1}, x_i) \in A(D) \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Decimos que  $n$ , el número de aristas de camino, es su **longitud** y escribiremos  $l(C) = n$ .

**Definición 2.3** Un camino  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  es **cerrado** si  $x_0 = x_n$ .

**Definición 2.4** Una  $uv$ -trayectoria en  $G$  es un  $uv$ -camino que no repite vértices.

**Definición 2.5** Un  $uv$ -paseo en  $G$  es un  $uv$ -camino que no repite aristas.

**Definición 2.6** Un **circuito** en  $G$  es un paseo cerrado no trivial.

**Definición 2.7** Un **ciclo** en  $G$  es un circuito  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$  con  $l(C) \geq 3$  y  $x_i \neq x_j$  para cada  $i \neq j$ .

**Definición 2.8** Una gráfica  $G$  es **bipartita** si existe una bipartición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(G)$  tal que  $\forall a \in A(G)$ ,  $a$  tiene un extremo en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ .

**Teorema 2.9** En toda gráfica bipartita  $G$ , todo ciclo tiene longitud par.

### **Demostración.**

Sea  $G$  una gráfica bipartita, con bipartición  $\{V_1, V_2\}$ . Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$  un ciclo en  $G$  tal que  $l(C) = n + 1$ . Demostraremos que  $n + 1$  es par. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $x_0 \in V_1$ , como  $x_0$  ady $_G$   $x_1$ ,  $x_1 \in V_2$ . Como  $x_1$  ady $_G$   $x_2$ ,  $x_2 \in V_1$ . Continuando con este procedimiento, observamos que  $x_i \in V_1$  si y sólo si  $i \equiv 0(\text{mod } 2)$  y  $x_i \in V_2$  si y sólo si  $i \equiv 1(\text{mod } 2)$ .

Como  $x_n$  ady $_G$   $x_0$  y  $x_0 \in V_1$ , entonces  $x_n \in V_2$ , por lo que  $n \equiv 1(\text{mod } 2)$ , es decir  $n$  es impar y por lo tanto  $n + 1$  es par. ■

**Definición 2.10** Una **digráfica**  $D$ , consiste de un conjunto no vacío, finito, de elementos llamados **vértices**, denotado por  $V(D)$  y un conjunto de pares ordenados de distintos vértices llamados **flechas**, denotado por  $F(D)$ .

Decimos que una digráfica  $D$  tiene **orden**  $p$ , si  $|V(D)| = p$  y que tiene **tamaño**  $q$  si  $|F(D)| = q$ .

**Lema 2.11** Para toda digráfica  $D$  de orden  $p$  y tamaño  $q$ :

$$0 \leq 2 \frac{p!}{2!(p-2)!} = p(p-1) \text{ y } 0 \leq q \leq p(p-1)$$

Nótese que de cada vértice salen a lo más  $p-1$  flechas. ■

Sea  $D$  una digráfica.

Si  $a = (u, v) \in F(D)$ , decimos que  $a$  es **incidente desde**  $u$  y  $a$  es **incidente hacia**  $v$ ;  $u$  y  $v$  son los **extremos** de  $a$ ,  $u$  es el **extremo inicial** y que  $v$  es el **extremo final**. Decimos también que  $u$  es **adyacente hacia**  $v$  y que  $v$  es **adyacente desde**  $u$ .

Si  $(u, v) \in F(D)$ ,  $(u, v)$  es una  $S_1S_2$ -flecha si  $u \in S_1$  y  $v \in S_2$ ,  $S_1 \subset V(D)$ ,  $S_2 \subset V(D)$ .

**Definición 2.12** El **exgrado** o **grado exterior** de un vértice  $v$  en la digráfica  $D$  es el número de flechas que inciden desde  $v$  y lo denotamos  $\delta_D^+(v)$ .

**Definición 2.13** El **ingrado** o **grado interior** de un vértice  $v$  en la digráfica  $D$  es el número de flechas que inciden hacia  $v$  y lo denotamos  $\delta_D^-(v)$ .

**Definición 2.14** El **grado** de un vértice  $v$  en la digráfica  $D$  es

$$\delta_D(v) = \delta_D^+(v) + \delta_D^-(v).$$

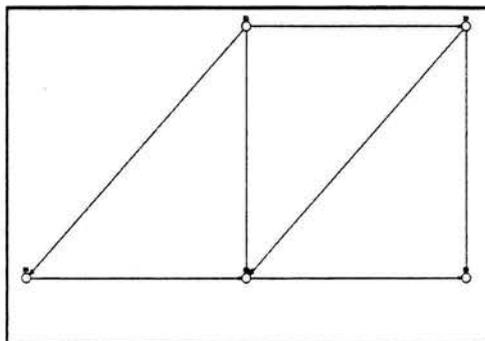


Figura 2.1:

En la figura 2.1, tenemos una digráfica  $G$ , con  $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , donde

$$\begin{array}{lll}
 \delta_D^+(x_1) = 3 & \delta_D^-(x_1) = 0 & \delta_D(x_1) = 3 \\
 \delta_D^+(x_2) = 2 & \delta_D^-(x_2) = 1 & \delta_D(x_2) = 3 \\
 \delta_D^+(x_3) = 0 & \delta_D^-(x_3) = 2 & \delta_D(x_3) = 2 \\
 \delta_D^+(x_4) = 1 & \delta_D^-(x_4) = 3 & \delta_D(x_4) = 4 \\
 \delta_D^+(x_5) = 1 & \delta_D^-(x_5) = 1 & \delta_D(x_5) = 2
 \end{array}$$

**Teorema 2.15** Sea  $D$  una digráfica de orden  $p$  y tamaño  $q$ ,  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , entonces

$$\sum_{i=1}^p \delta_D^+(v_i) = \sum_{i=1}^p \delta_D^-(v_i) = q.$$

### Demostración.

Nótese que cada flecha incide desde (hacia) un vértice, así que cada flecha está contada exactamente una vez en la suma de los exgrados (ingrados).■

**Definición 2.16** Sea  $D$  una digráfica, la **gráfica subyacente de  $D$**  es la gráfica obtenida al sustituir cada flecha de  $D$  por la arista sin la orientación correspondiente.

**Definición 2.17** Sean  $D_1$  y  $D_2$  digráficas.  $D_1$  es **isomorfa** a  $D_2$ ,  $D_1 \cong D_2$ , si existe una función biyectiva  $\phi$ ,  $\phi : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$  tal que  $(u, v) \in F(D_1)$  si y sólo si  $(\phi(u), \phi(v)) \in F(D_2)$ .

Observemos que  $D_1 \sim D_2$  ( $D_1$  esta relacionada con  $D_2$ ) si y sólo si  $D_1 \cong D_2$  es una relación de equivalencia. Consideraremos que dos digráficas son iguales, cuando sean isomorfas.

**Definición 2.18** Sea  $D$  una digráfica,  $D'$  es una **subdigráfica** de  $D$  si  $D'$  es una digráfica tal que  $V(D') \subseteq V(D)$  y  $F(D') \subseteq F(D)$ .

$D'$  es una subdigráfica **generadora** de  $D$  si  $D'$  es una subdigráfica de  $D$  tal que  $V(D') = V(D)$ .

**Definición 2.19** Sea  $D$  una digráfica no trivial,  $v \in V(D)$ ,  $a \in F(D)$ ,  $\mathbf{D} - \mathbf{v}$  es la digráfica tal que  $V(\mathbf{D} - \mathbf{v}) = V(D) - \{v\}$  y  $F(\mathbf{D} - \mathbf{v}) = \{f \in F(D) \mid f \text{ no incide desde } v \text{ y } f \text{ no incide hacia } v\}$ .  $\mathbf{D} - \mathbf{a}$  es la digráfica tal que  $V(\mathbf{D} - \mathbf{a}) = V(D)$  y  $F(\mathbf{D} - \mathbf{a}) = F(D) - \{a\}$ .

**Definición 2.20** Sea  $D$  una digráfica no trivial,  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ ,  $f = (u, v) \notin F(D)$ , entonces  $\mathbf{D} + \mathbf{f}$  es la digráfica tal que  $V(\mathbf{D} + \mathbf{f}) = V(D)$  y  $F(\mathbf{D} + \mathbf{f}) = F(D) \cup \{f\}$ . (Ver figura 2.2)

**Definición 2.21** Sea  $D$  una digráfica,  $U \subseteq V(D)$ ,  $U \neq \emptyset$ , la **subdigráfica de  $D$  inducida por  $U$** ,  $D[U]$ , se define como sigue:  $V(D[U]) = U$  y  $F(D[U]) = \{\text{flechas de } D \text{ que tienen ambos extremos en } U\}$ .

En la figura 2.3 tenemos a  $D$  y  $D[U]$ , donde  $U = \{x_1, x_2, x_4\} \subset V(D)$ .

Observemos que cualquier subdigráfica inducida de  $D$ , puede obtenerse quitando vértices de  $D$ .

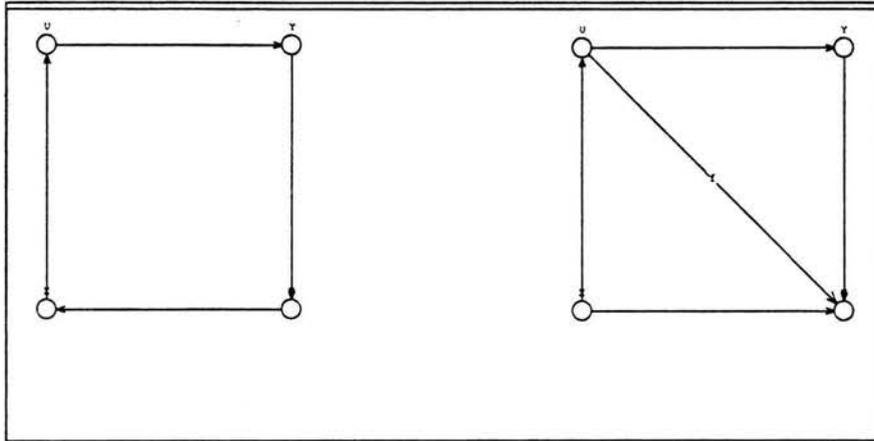


Figura 2.2:  $D$  y  $D + f$ .

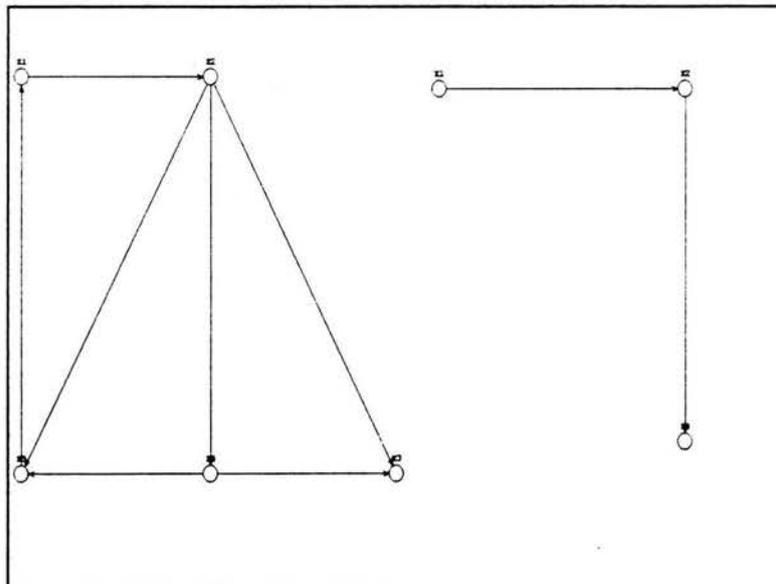


Figura 2.3:  $D$  y  $D[U]$ .

**Definición 2.22** Sea  $D$  una digráfica, decimos que  $D$  es **simétrica** (**asimétrica**), si para cada flecha  $f = (u, v)$ , se tiene que  $(v, u) \in F(D)$  ( $(v, u) \notin F(D)$ ). La flecha  $(u, v) \in F(D)$  es **simétrica** si  $(v, u) \in F(D)$ . La flecha  $(u, v)$  es **asimétrica** si  $(v, u) \notin F(D)$ .

Observemos que existe una correspondencia uno a uno entre las digráficas simétricas y las gráficas.

**Definición 2.23** Una digráfica  $D$  es **completa** si para cualesquiera  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ ,  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ .

**Definición 2.24** Una digráfica  $D$  es **completa simétrica de orden  $p$** ,  $K_p$ , si para cualesquiera  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ ,  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, u) \in F(D)$ .

En este caso  $q = p(p - 1)$  y  $\forall v \in V(D) \delta_D^+(v) = \delta_D^-(v) = p - 1$ .

**Definición 2.25** Un **torneo**  $T$  es una digráfica completa asimétrica.

**Definición 2.26** Una digráfica  $D$  es **regular de grado  $r$** , o  **$r$ -regular** si  $\forall v \in V(D)$ ,  $\delta_D^+(v) = \delta_D^-(v) = r$ .

## 2.2. Trayectorias y ciclos en una digráfica.

**Definición 2.27** Sea  $D$  una digráfica,  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ ,  $u$  y  $v$  no necesariamente distintos, un  **$uv$ -camino** de  $D$  es una sucesión finita de vértices,  $C = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = v)$  tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  o  $(x_{i+1}, x_i) \in F(D) \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Decimos que  $n$  es la **longitud** del camino y escribiremos  $l(C) = n$ .

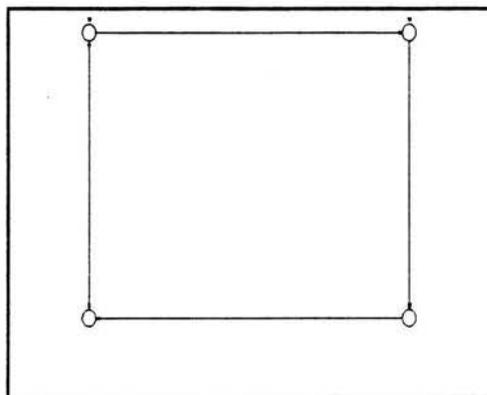


Figura 2.4:  $D$  una digráfica 1-regular o regular de grado 1.

**Definición 2.28** Un  $uv$ -camino dirigido en  $D$  es un camino  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D) \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . En este caso la longitud del  $uv$ -camino dirigido es el número de flechas,  $n$ , y lo denotaremos  $l(C) = n$ .  $C^{-1}$  denotará al  $vu$ -camino dirigido  $C^{-1} = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$ . Denotaremos por  $(x_i, C, x_j)$  al  $x_i x_j$ -camino contenido en  $C$ .

**Definición 2.29** Un camino  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  es **cerrado** si  $x_0 = x_n$ .

**Definición 2.30** Una  $uv$ -trayectoria dirigida en  $D$  es un  $uv$ -camino dirigido que no repite vértices.

**Definición 2.31** Un  $uv$ -paseo dirigido en  $D$  es un  $uv$ -camino dirigido que no repite flechas.

Observemos que toda  $uv$ -trayectoria dirigida en  $D$  es un  $uv$ -paseo dirigido, sin embargo no todo  $uv$ -paseo dirigido en  $D$  es una  $uv$ -trayectoria.

**Definición 2.32** Un **circuito dirigido** en  $D$  es un paseo dirigido cerrado no trivial.

**Definición 2.33** Un **ciclo dirigido** en  $D$  es un circuito dirigido  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$  con  $l(C) \geq 1$  y  $x_i \neq x_j$  para cada  $i \neq j$ .

De ahora en adelante cuando usemos los términos camino, trayectoria, paseo, circuito o ciclo, nos referiremos a camino dirigido, trayectoria dirigida, paseo dirigido, circuito dirigido o ciclo dirigido respectivamente.

**Definición 2.34** Sea  $D$  una digráfica,  $S \subseteq V(D)$  y  $x \in V(D)$ , una  **$s_x$ -flecha** es  $(x, s_i) \in F(D)$  tal que  $s_i \in S$ . Si  $S_1 \subseteq V(D)$ ,  $S_2 \subseteq V(D)$ , una flecha  $(s_1, s_2) \in F(D)$  es una  **$s_1s_2$ -flecha** si  $s_1 \in S_1$  y  $s_2 \in S_2$ .

**Definición 2.35** Sea  $D$  una digráfica,  $S \subseteq V(D)$ , la **vecindad interior de  $S$** , denotada  $\Gamma^-(S) = \{v \in V(D) | \exists \text{ una } vS\text{-flecha en } F(D)\}$ . La **vecindad exterior de  $S$** , denotada  $\Gamma^+(S) = \{v \in V(D) | \exists \text{ una } Sv\text{-flecha en } F(D)\}$

Sea  $\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_n, z_0)$  un ciclo, denotaremos por  $l(\gamma)$  su **longitud** y si  $z_i, z_j \in V(\gamma)$ , denotaremos por  $(z_i, \gamma, z_j)$  a la  $z_i z_j$ -trayectoria contenida en  $\gamma$ .

**Definición 2.36** Sea  $D$  una digráfica,  $D$  es **acíclica** si no tiene ciclos.

**Definición 2.37** Un ciclo  $\gamma$  de una digráfica  $D$  es **hamiltoniana** si  $V(D) = V(\gamma)$  y diremos que  $D$  es **hamiltoniana** si tiene un ciclo hamiltoniano.

**Teorema 2.38** Todo  $uv$ -camino contiene una  $uv$ -trayectoria.

### Demostración

Procedamos por inducción sobre la longitud del camino,  $l(C)$ .

1. Si  $l(C) = 0$ , entonces  $C = (u)$  por lo que no se repiten vértices y  $C$  también es una trayectoria.

Si  $l(C) = 1$ , entonces  $C = (u, v)$  por lo que no se repiten vértices y  $C$  mismo es una  $uv$ -trayectoria.

2. Supongamos que todo  $uv$ -camino de longitud  $< n$  contiene una  $uv$ -trayectoria.

3. Sea  $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  tal que  $l(C) = n$ , tenemos dos casos:

caso a) Si  $C$  no repite vértices,  $C$  mismo es una  $uv$ -trayectoria.

caso b) Si  $x_i = x_j$  para algún  $i \neq j$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad,  $i < j$ , entonces  $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$ . Consideremos  $C' = (u = x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$ , tenemos que  $l(C') < l(C)$ , entonces por hipótesis de inducción,  $C'$  contiene una  $uv$ -trayectoria  $T$  tal que  $T \subseteq C' \subseteq C$ , por lo que  $C$  contiene una  $uv$ -trayectoria. ■

**Teorema 2.39** *Todo camino cerrado  $C$  de longitud impar contiene un ciclo de longitud impar  $\gamma$ .*

**Demostración.**

Por Inducción sobre  $n = |V(D)|$

1. Si  $n = 3$ , entonces  $C = (u = x_0, x_1, x_2 = u)$ . Observemos que  $x_i \neq x_j$  porque  $x_i$  es adyacente a  $x_j$ , para toda  $i$  e  $j$ , por lo tanto  $C$  mismo es un ciclo.

2. Supongamos que todo camino cerrado de longitud impar  $< 2n + 1$  tiene un ciclo de longitud impar.

3. Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x_0)$  un camino cerrado tal que  $l(C)$  es impar, tenemos dos casos:

caso a) Si  $C$  no repite vértices, excepto el vértice inicial y el final,  $C$  mismo es un ciclo de longitud impar.

caso b) Si  $x_i = x_j$  para algún  $i \neq j$ , supongamos, sin pérdida de generalidad,  $i < j$ , entonces  $C = (x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{2n}, x_0)$ , consideremos  $C' = (x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_{2n}, x_0)$  y  $C'' = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i)$  son dos caminos cerrados y como  $l(C)$  es impar, entonces o  $l(C')$  o  $l(C'')$  es impar, sin pérdida de generalidad, supongamos que  $l(C')$  es impar y observemos que  $l(C') < 2n + 1$ , así que por hipótesis de inducción  $C'$  contiene un ciclo de longitud impar  $\gamma$ ,  $\gamma \subseteq C' \subseteq C$ , es decir  $\gamma \subseteq C$ . ■

## 2.3. Conexidad.

Sea  $D$  una digráfica.

**Definición 2.40** Si  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ ,  $u$  *está conectado* a  $v$  en  $D$  si existe un  $uv$ -camino o un  $vu$ -camino no necesariamente dirigidos en  $D$ .

**Definición 2.41** Diremos que  $D$  es *conexa* si para cualesquiera  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ ,  $u$  y  $v$ , están conectados.

Observemos que la relación "estar conectados" es una relación de equivalencia sobre  $V(D)$ . Llamaremos a las subdigráficas inducidas por las clases de equivalencia, **componentes conexas** de  $D$ .

**Definición 2.42** Diremos que  $D$  es *unilateralmente conexa* si para cualesquiera  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , existe un  $uv$ -camino o un  $vu$ -camino en  $D$ .

**Definición 2.43** Diremos que  $D$  es *fuertemente conexa* si para cualesquiera  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , existen un  $uv$ -camino y un  $vu$ -camino en  $D$ .

Observemos que  $D$  fuertemente conexa implica que  $D$  es unilateralmente conexa, que a su vez implica que  $D$  es conexa.

**Definición 2.44** Si  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ ,  $D$  una digráfica,  $u$  es *alcanzable* desde  $v$ , si existe un  $uv$ -camino.

Observemos que "ser mutuamente alcanzables" es una relación de equivalencia sobre  $V(D)$ . Llamaremos a las subdigráficas inducidas por las clases de equivalencia, los **componentes fuertemente conexas** de  $D$ .

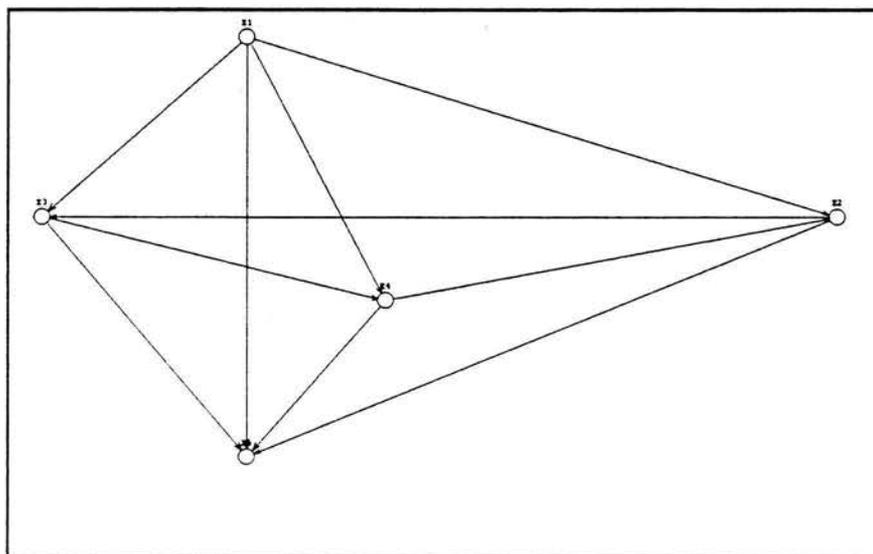


Figura 2.5:  $D$  con componentes fuertemente conexas  $C_1, C_2, C_3$ .

**Definición 2.45** Una componente **fuertemente conexa terminal** de una digráfica  $D$  es una componente fuertemente conexa de  $D$  a la que no le salen flechas hacia otra componente fuertemente conexa de  $D$ .

En la figura 2.5,  $D$  tiene componentes fuertemente conexas  $C_1 = \{x_1\}$ ,  $C_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$  y  $C_3 = \{x_5\}$ ,  $C_3$  es una componente fuertemente conexa terminal.

**Teorema 2.46** Sea  $D$  una digráfica,

- i)  $D$  es conexa si y sólo si  $D$  contiene un camino, no necesariamente dirigido, cerrado generador.
- ii)  $D$  es unilateralmente conexa si y sólo si  $D$  contiene un camino generador.
- iii)  $D$  es fuertemente conexa si y sólo si  $D$  contiene un camino cerrado generador.

i) **Demostración.**

$\Rightarrow$  Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_m, x_0)$  un camino cerrado que pasa por el mayor número posible de vértices de  $D$ ,

caso 1) Si  $V(C) = V(D)$ , entonces  $C$  es un camino cerrado generador.

caso 2) Si existe  $u \in V(D)$  tal que  $u \notin V(C)$ , como  $D$  es conexa, existe un camino  $C'$  entre  $x_0$  y  $u$ , entonces  $C \cup C' \cup C'^{-1}$  es un camino cerrado que contiene más vértices de  $D$  que  $C$ , contradiciendo la elección de  $C$ .

$\Leftrightarrow$  Sea  $W = (w_1, \dots, w_n)$  un camino cerrado en  $D$  tal que  $V(W) = V(D)$ . Para cualesquiera  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , se tiene que  $\{u, v\} \subseteq V(W)$ , entonces  $W = (w_0, w_1, \dots, w_i = u, w_{i+1}, \dots, w_j = v, w_{j+1}, \dots, w_n, w_0)$  y  $W' = (x_i = u, w_{i+1}, \dots, w_j = v)$  es un  $uv$ -camino, por lo tanto  $D$  es conexa. ■

ii) **Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Sea  $C = (w_1, \dots, w_m)$  un camino que tenga el mayor número posible de vértices de  $D$ ,

caso 1) Si  $V(C) = V(D)$ , entonces  $C$  es un camino generador.

caso 2) Si existe  $v \in V(D)$  tal que  $v \notin V(C)$  entonces sabemos que no existe un  $vw_1$ -camino ni un  $w_nv$ -camino en  $D$  pues si cualquiera de los dos existiera, entonces  $C$  no sería el de máximo número de vértices. Pero como  $D$  es unilateralmente conexa, entonces existen un  $w_1v$ -camino y un  $vw_n$ -camino dirigido en  $D$ . (\*)

Sea  $j = \min\{i \mid \exists \text{ un } w_iv\text{-camino } C_1 \text{ y un } vw_{i+1}\text{-camino } C_2 \text{ en } D, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ . Nótese que  $j$  existe, por (\*).

Consideremos  $C' = (w_1, w_2, \dots, w_j) \cup (w_j, C_1, v) \cup (v, C_2, w_{j+1}) \cup (w_{j+1}, \dots, w_n)$ .  $C'$  es un camino que contiene un mayor número de vértices que  $C$ , que contradice la elección de  $C$ .

$\Leftrightarrow$  Sea  $W = (w_0, w_1, \dots, w_n)$  un camino tal que  $V(W) = V(D)$ . Para cualesquiera  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , tenemos que  $\{u, v\} \subseteq V(W)$ , entonces  $u = w_i$  y  $v = w_j$ , para  $i \neq j$ ,

caso 1) Si  $i < j$ ,  $W' = (w_i = u, w_{i+1}, \dots, w_j = v)$  es un  $uv$ -camino en  $D$ .

caso 2) Si  $j < i$ ,  $W'' = (w_j = v, w_{j+1}, \dots, w_i = u)$  es un  $vu$ -camino en  $D$ .

Así que  $D$  es unilateralmente conexa. ■

iii) **Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Si  $D$  es fuertemente conexa,  $D$  es unilateralmente conexa, y por el inciso anterior,  $D$  contiene un camino  $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  tal que  $V(C) = V(D)$ .

caso 1) Si  $u = v$ , entonces  $C$  es un camino cerrado generador.

caso 2) Si  $u \neq v$ , entonces como  $D$  es fuertemente conexa, existe una  $vu$ -trayectoria  $T$  en  $D$ , así que  $C' = C \cup T$  es un camino cerrado generador.

$\Leftarrow$ ) Sea  $W = (w_1, \dots, w_n, w_1)$  un camino cerrado tal que  $V(W) = V(D)$ . Para cualesquiera  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , tenemos que  $u, v \in V(W)$ , así que  $u = w_i$  y  $v = w_j$ , con  $i \neq j$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos  $i < j$ , tenemos:  $W' = (w_i = u, w_{i+1}, \dots, w_j = v)$  y  $W'' = (w_j = v, w_{j+1}, \dots, w_n, w_1, \dots, w_i = u)$  un  $uv$ -camino y un  $vu$ -camino en  $D$  respectivamente. Así que  $D$  es fuertemente conexa. ■

**Teorema 2.47** Una digráfica  $D$  es fuertemente conexa si y sólo si para toda partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  existe una  $V_1V_2$ -flecha.

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Sea  $\{V_1, V_2\}$  una partición de  $V(D)$ . Sean  $\{v_1, v_2\} \subseteq V(D)$  tal que  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ . Como  $D$  es fuertemente conexa, entonces existe una  $v_1v_2$ -trayectoria  $T$  en  $D$ ,  $T = (v_1 = u_0, u_1, \dots, u_n = v_2)$ , notemos que  $\forall u_i \in V(T)$ ,  $u_i \in V_1$  o  $u_i \in V_2$ . Sea  $m = \min\{j | u_j \in V_2\}$ ,  $m \geq 1$  pues  $v_1 \in V_1$ , entonces  $(u_{m-1}, u_m)$  es una  $V_1V_2$ -flecha.

Observemos que como  $\{V_1, V_2\}$  es una partición arbitraria de  $V(D)$ , también existe una  $V_2V_1$ -flecha.

$\Leftarrow$ ) Sean  $\{x, y\} \subseteq V(D)$ . Sean  $V_1 = \{w \in V(D) | \exists \text{ un } xw\text{-camino en } D\}$ ,  $V_2 = V(D) - V_1$ .

caso 1) Si  $y \in V_1$ , entonces existe un  $xy$ -camino en  $D$

caso 2) Si  $y \notin V_1$ , entonces  $y \in V_2$ , entonces  $\{V_1, V_2\}$  es una partición de  $V(D)$ . Por hipótesis existe una  $V_1V_2$ -flecha en  $D$ ,  $(z, w)$  tal que  $z \in V_1$  y  $w \in V_2$ . Como  $z \in V_1$ , entonces existe un  $xz$ -camino en  $D$ ,  $C_1$ , por lo que  $C_1 \cup (z, w)$  es un  $xw$ -camino

en  $D$ , entonces  $w \in V_1$ . (Contradicción). Entonces este caso no es posible, por lo que  $D$  es fuertemente conexa. ■

**Teorema 2.48** *Toda digráfica fuertemente conexa, con más de un vértice, tiene ciclos.*

**Demostración.**

Sean  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , como  $D$  es fuertemente conexa, entonces existe un  $uv$ -camino,  $C_1 = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  y un  $vu$ -camino,  $C_2 = (v = y_0, y_1, \dots, y_m = u)$ . Observemos que existe  $y_j$  tal que  $y_j = x_k$  para algún  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$  pues  $y_m = u = x_0$ . Sea

$$s = \text{mín}\{j | y_j = x_k \text{ para algún } k\},$$

entonces  $(x_k, C_1, v) \cup (v, C_2, y_s = x_k)$  es un ciclo. ■

## 2.4. Digráficas asociadas a una digráfica dada y el Principio de Dualidad.

Sea  $D$  una digráfica.

**Definición 2.49** *La parte asimétrica de  $D$ , denotada  $Asim(D)$ , es la subdigráfica generadora de  $D$  cuyas flechas son las flechas asimétricas de  $D$ . (Ver figura 2.6).*

**Definición 2.50** *La parte simétrica de  $D$ , denotada  $Sim(D)$ , es la subdigráfica generadora de  $D$  cuyas flechas son las flechas simétricas de  $D$ . (Ver figura 2.6).*

**Definición 2.51** *El complemento de  $D$ , denotado  $D^-$ , es la digráfica tal que  $V(D^-) = V(D)$  y para cualesquiera  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ ,  $u \neq v$ ,  $(u, v) \in F(D^-)$  si y sólo si  $(u, v) \notin F(D)$ .*

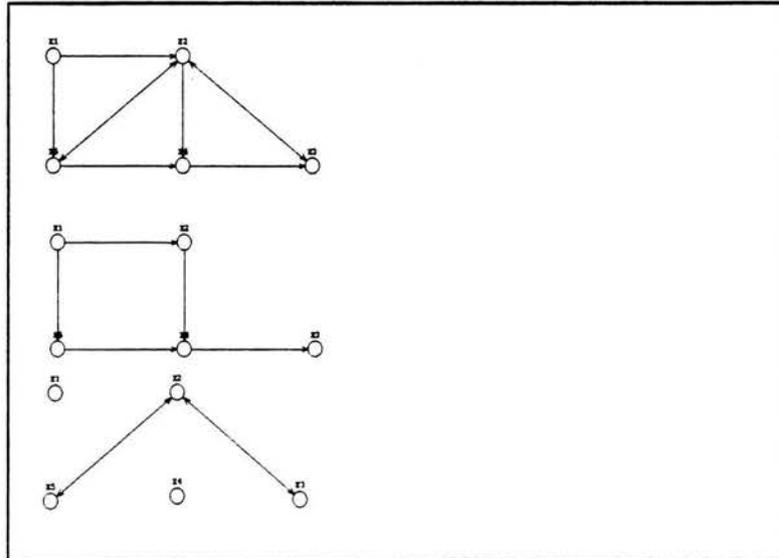


Figura 2.6:  $D$ ,  $Asim(D)$  y  $Sim(D)$ .

**Definición 2.52** La *digráfica de condensación* de  $D$ , denotada  $D^*$  es la digráfica que se obtiene a través de la correspondencia uno a uno entre  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , las componentes fuertemente conexas de  $D$  y  $u_1, u_2, \dots, u_n$  los vértices de  $D^*$  tal que  $(u_i, u_j) \in F(D^*)$  si y sólo si existen  $x \in S_i, y \in S_j$  tales que  $(x, y) \in F(D)$ .

**Teorema 2.53** Para toda digráfica  $D$ , su digráfica de condensación  $D^*$  es acíclica.

**Demostración.**

Procedamos por contradicción, supongamos que  $D^*$  contiene algún ciclo. Sean  $S_1, S_2, \dots, S_n$  las componentes fuertemente conexas de  $D$  y  $V(D^*) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Sea  $C = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$  un ciclo en  $D^*$ . Demostraremos que

$$\bigcup_{i=1}^k S_i$$

es fuertemente conexas, contradiciendo que cada  $S_i$  es una componente fuertemente conexas.

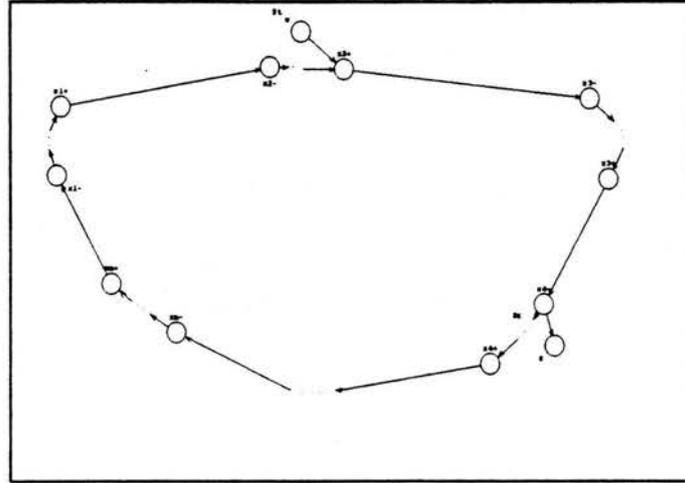


Figura 2.7: El  $wz$ -camino en  $D$ .

Sean  $\{w, z\} \subseteq \bigcup_{i=1}^k S_i$ , entonces  $w \in S_t, z \in S_r$ , demostraremos que existe un  $wz$ -camino en  $D$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  sean  $x_i^+$  y  $x_i^-$  en  $S_i$  tales que existen  $(x_i^+, x_{i+1}^-) \in F(D)$  y  $(x_{i-1}^+, x_i^-) \in F(D)$ , donde  $x_{i+1}^- \in S_{i+1}$  y  $x_{i-1}^+ \in S_{i-1}$ .

Sea  $C_i$  un camino de  $x_i^-$  a  $x_i^+$ ,  $C^* = \bigcup C_i \cup \{(x_i^+, x_{i+1}^-), (x_{i-1}^+, x_i^-) | i \in \{1, \dots, k\}\}$  (notación mod  $k$ ), es un camino cerrado.

Como  $w$  y  $x_t^+$  están en la misma componente conexa, existe un  $wx_t^+$ -camino  $C'_1$ . Como  $x_r^-$  y  $z$  están en la misma componente conexa, existe un  $x_r^-z$ -camino  $C'_2$ . Así  $C'_1 \cup (x_t^+, C^*, x_r^-) \cup C'_2$  es un  $wz$ -camino. ■

**Definición 2.54** Sea  $D$  una digráfica, la **digráfica dual** de  $D$ , denotada  $D'$  es la digráfica tal que  $V(D') = V(D)$  y  $(u, v) \in F(D')$  si y sólo si  $(v, u) \in F(D)$ .

### Principio de Dualidad Direccional.

Para cada teorema en digráficas, existe un teorema correspondiente que se obtiene al reemplazar cada concepto por el concepto dual.

**Teorema 2.55** Toda digráfica acíclica contiene al menos un vértice de grado exterior

cero.

**Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica acíclica y  $P$  una trayectoria de longitud máxima en  $D$ , digamos que  $P$  es una  $uv$ -trayectoria,

caso 1) Si  $v$  es adyacente hacia algún vértice de  $P$ , entonces hay un ciclo en  $D$ , contradiciendo que  $D$  es acíclica

caso 2) Si  $v$  es adyacente hacia algún vértice de  $D$  que no está en  $P$ , entonces existe en  $D$  una trayectoria cuya longitud es mayor a la de  $P$ . (Contradicción).

Por lo tanto  $v$  no es adyacente hacia ningún vértice de  $D$ , es decir  $\delta_D^+(v) = 0$ . ■

Por dualidad obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.56** *Toda digráfica acíclica contiene al menos un vértice de grado interior cero.*

**Lema 2.57** *Sea  $D$  una digráfica. Si  $\forall v \in V(D), \delta_D^+(v) \geq 1$ , entonces  $D$  tiene un ciclo.*

**Demostración.**

Sea  $T$  una trayectoria de longitud máxima en  $D$ ,  $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ , por hipótesis  $\delta_D^+(x_n) \geq 1$ , es decir,  $x_n$  es adyacente hacia  $z$  para algún  $z \in V(D)$ .

Si  $z \notin V(T)$ , entonces,  $T' = (x_0, x_1, \dots, x_n, z)$  es una trayectoria en  $D$  tal que  $l(T') > l(T)$ , lo que es una contradicción a la elección de  $T$ . Entonces  $z \in V(T)$ ,  $z = x_i$  para algún  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  y  $\gamma = (z = x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, z)$  es un ciclo en  $D$ . ■

**Lema 2.58** *Sea  $D$  una digráfica, si  $\forall v \in V(D), \delta_D^-(v) \geq 1$ , entonces  $D$  tiene un ciclo.*

La demostración es dual a la del lema anterior.

# Capítulo 3

## Núcleos.

Ein Mathematiker, der nicht irgendwie ein Dichter ist,  
wird nie ein vollkommener Mathematiker sein.

Karl Weierstraß

En este capítulo definiremos y trabajaremos con los conceptos principales sobre núcleos en digráficas y se demostrarán los resultados más importantes respecto a este tema.

Sea  $D$  una digráfica y  $N \subseteq V(D)$ .

**Definición 3.1**  $N$  es un conjunto **independiente** de  $D$  si para cualesquiera  $u, v \in N$ , no existen flechas entre ellos en  $D$ . (Ver figura 3.1).

**Definición 3.2**  $N$  es un conjunto **absorbente** de  $D$  si  $\forall u \in V(D) \setminus N$ ,  $u$  es adyacente hacia algún elemento de  $N$ . (Ver figura 3.2).

**Definición 3.3**  $N$  es **núcleo** si es independiente y absorbente. (Ver figura 3.3).

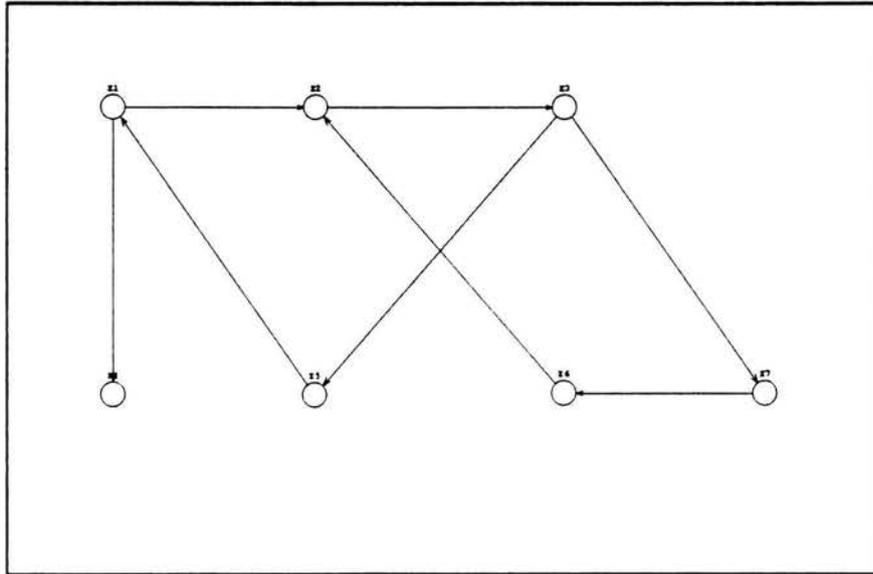


Figura 3.1:  $N = \{x_4, x_5, x_6\}$  es independiente en  $D$ .

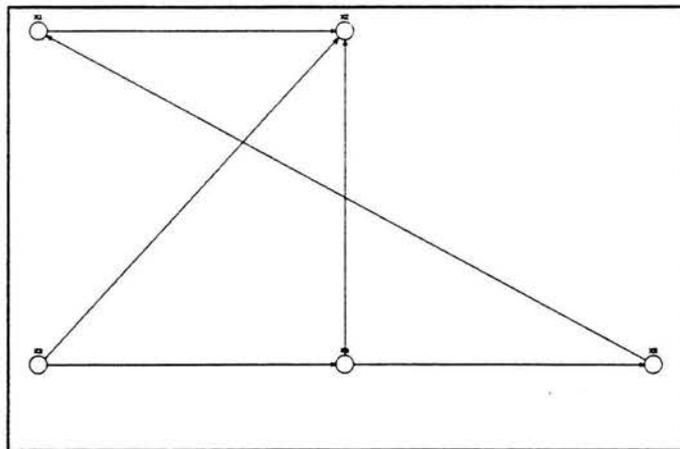


Figura 3.2:  $N = \{x_1, x_2\}$  es absorbente en  $D$ .

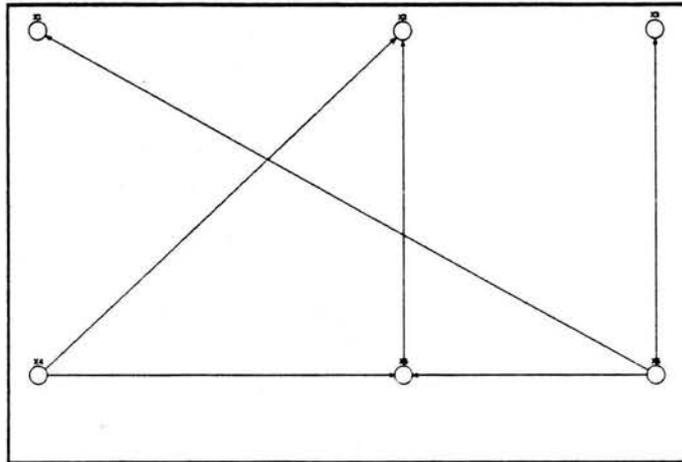


Figura 3.3:  $N = \{x_1, x_2, x_3\}$  es núcleo de  $D$ .

**Teorema 3.4** *Toda digráfica sin ciclos de longitud impar tiene núcleo.*

**Demostración.**

Ver [1].

**Definición 3.5** *Diremos que  $D$  es **núcleo perfecta (NP)** si toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo.*

Un ejemplo de una digráfica NP son los ciclos de longitud par  $n$ , denotados  $C_n$  que tienen núcleo y sus digráficas inducidas son trayectorias que también tienen núcleo. En el caso de  $C_8$ ,  $\{x_1, x_3, x_5, x_7\}$  es núcleo. (figura 3.4) Otro ejemplo de digráficas NP son las trayectorias de longitud  $n$  denotadas por  $T_n$ . En el caso de  $T_3$ ,  $\{v_2, v_4\}$  es núcleo y en el de  $T_2$ ,  $\{y_1, y_3\}$  es núcleo. (figura 3.4)

**Definición 3.6** *Diremos que  $D$  es **núcleo imperfecta crítica (NIC)** si no tiene núcleo, pero toda subdigráfica propia de  $D$  si tiene núcleo.*

Un ejemplo de una digráfica NIP son los ciclos de longitud impar  $n$ , denotados por  $C_n$ , pues no tienen núcleo, pero como toda subdigráfica inducida propia no tiene ciclos

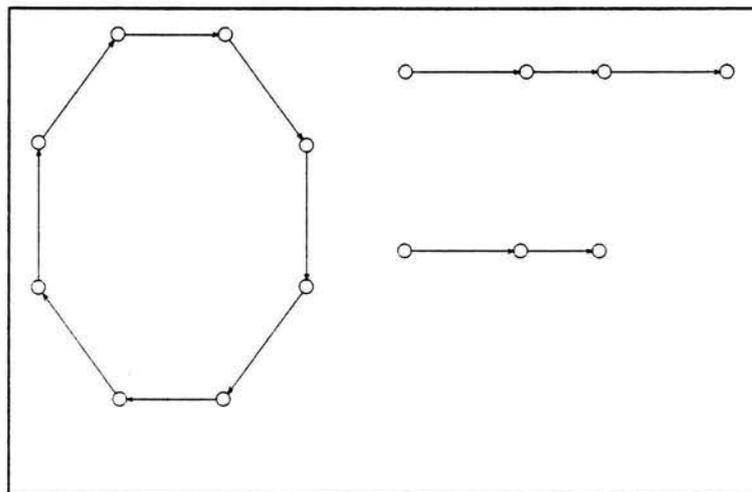


Figura 3.4:  $C_n$  con  $n = 8$  y  $T_n$  con  $n = 4$  y  $n = 3$ .

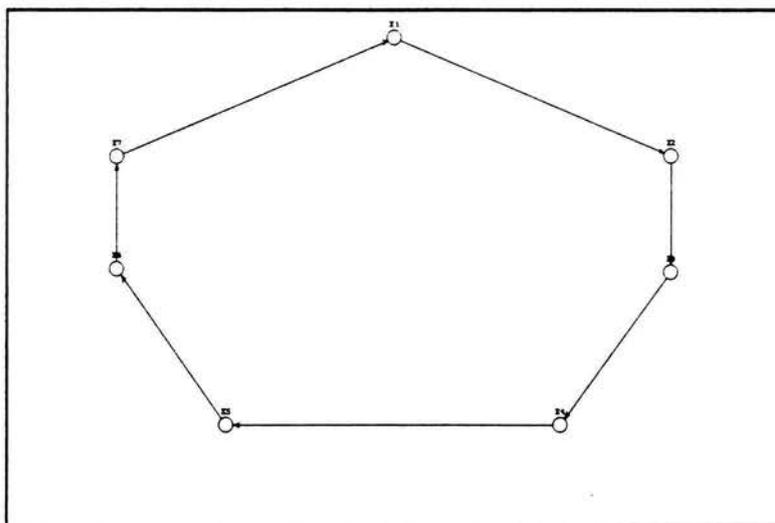


Figura 3.5:  $C_n$  con  $n = 7$ .

de longitud impar, entonces por el Teorema 3.4, toda subdigráfica inducida tiene núcleo. En la figura 3.5, podemos ver  $C_7$ .

**Teorema 3.7** *Si una digráfica  $D$  es tal que todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica, entonces es núcleo perfecta.*

**Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica tal que todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica. Entonces  $Asim(D)$  es acíclica y por el Teorema 2.55 se sigue que  $\{z \in V(D) \mid \delta_{Asim(D)}^+(z) = 0\} \neq \emptyset$ . Procederemos por Inducción sobre  $|V(D)|$ .

1°  $|V(D)| = 1$ , entonces si  $V(D) = \{v\}$ ,  $v$  mismo es núcleo.

$|V(D)| = 2$ , tenemos dos casos:

Caso 1: Supongamos  $V(D) = \{v_1, v_2\}$ , si  $(v_1, v_2) \in F(D)$  y  $(v_2, v_1) \notin F(D)$ , entonces  $v_2$  es el núcleo de  $D$  y cualquier subdigráfica inducida tiene núcleo.

Caso 2: Supongamos que  $V(D) = \{v_1, v_2\}$ , si  $(v_1, v_2) \in F(D)$  y  $(v_2, v_1) \in F(D)$ , claramente cualquiera de los dos vértices de  $D$  es núcleo y toda subdigráfica inducida tiene núcleo.

2° Supongamos que para toda digráfica  $D'$  tal que  $|V(D')| < |V(D)|$  tenemos que si todo ciclo de  $D'$  tiene al menos una flecha simétrica, entonces  $D'$  es núcleo perfecta.

3° Demostraremos entonces que si  $D$  satisface las condiciones del teorema es núcleo perfecta. Por hipótesis de inducción sabemos que toda subdigráfica inducida propia de  $D$  es núcleo perfecta y en particular tiene núcleo. Solo resta demostrar que  $D$  tiene núcleo.

Sea  $z_0 \in V(D)$  tal que  $\delta_{Asim(D)}^+(z_0) = 0$ .

**Observación 1.** Observemos que si  $(z_0, v) \in F(D)$ , entonces  $(v, z_0) \in F(D)$ .

Consideremos  $D[V(D) - (\{z_0\} \cup \{\Gamma_D^-(z_0)\})] = H$ . Si  $H = \emptyset$ , entonces  $z_0$  es el núcleo de  $D$ . Si  $H \neq \emptyset$ , por hipótesis de Inducción,  $H$  tiene núcleo,  $N'$ . Demostraremos que  $N' \cup \{z_0\}$  es núcleo de  $D$ .

i)  $N' \cup \{z_0\}$  es independiente:

$N'$  es independiente en  $D$  porque es núcleo de  $H$  que es subdigráfica inducida de  $D$ . No hay  $Nz_0$ -flechas por la definición de  $H$ . No hay  $z_0N'$ -flechas porque si hubiera alguna  $z_0N'$ -flecha, se sigue de la Observación 1 que también habría  $Nz_0$ -flecha.

ii)  $N' \cup \{z_0\}$  es absorbente:

Para todo  $x \in V(D) - (N' \cup \{z_0\})$  existe  $x(N' \cup \{z_0\})$ -flecha.

Caso 1) Si  $x \in H - N'$  entonces existe una  $xN'$ -flecha pues  $N'$  es núcleo de  $H$ .

Caso 2) Si  $x \in \Gamma_D^-(z_0)$ , entonces existe  $xz_0$ -flecha. ■

**Teorema 3.8** *Toda digráfica  $D$ , sin núcleo, tiene una subdigráfica inducida NIC.*

#### **Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica sin núcleo.

caso 1) Si todas las subdigráficas inducidas de  $D$  tienen núcleo,  $D$  es NIC.

caso 2) Si no todas las subdigráficas inducidas de  $D$  tienen núcleo, entonces existe  $H_1$  una subdigráfica inducida de  $D$  tal que  $H_1$  no tiene núcleo. Si todas las subdigráficas inducidas de  $H_1$  tienen núcleo, entonces  $H_1$  es NIC.

Si no es así, existe  $H_2$ , subdigráfica inducida de  $H_1$  tal que  $H_2$  no tiene núcleo. Si todas las subdigráficas inducidas de  $H_2$  tienen núcleo, entonces  $H_2$  es NIC.

Si no es así, y continuando con este procedimiento y como  $V(D)$  es un conjunto finito, obtendremos una subdigráfica inducida  $H_i$ , tal que  $H_i$  es NIC, pues como las digráficas con uno o dos vértices siempre tienen núcleo, entonces las digráficas NIC siempre tienen al menos tres vértices. ■

**Teorema 3.9** *Toda digráfica  $D$ , tal que  $D$  no es NP, tiene una subdigráfica inducida NIC.*

**Demostración.**

Como  $D$  no es una digráfica NP, entonces existe una subdigráfica inducida  $H$  de  $D$  tal que  $H$  no tiene núcleo. Entonces, por el Teorema anterior (3.8),  $H$  contiene una subdigráfica inducida NIC, sea  $H'$  dicha gráfica. Como  $H'$  es una subdigráfica inducida de  $H$ , que a su vez es una digráfica inducida de  $D$ , entonces  $H'$  es una subdigráfica inducida de  $D$  NIC. ■



# Capítulo 4

## Núcleos por trayectorias monocromáticas.

Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.

Bertrand Russell.

En este capítulo introduciremos el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas que será primordial en el desarrollo siguiente de esta tesis. Así mismo, probaremos importantes teoremas de caracterización de digráficas con núcleos por trayectorias monocromáticas. Otro concepto importante será el de cerradura transitiva de una digráfica  $D$ , pues cerraremos este capítulo demostrando que  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas si y sólo si su cerradura transitiva tiene núcleo.

**Definición 4.1** *Sea  $D$  una digráfica donde a cada flecha se le ha asignado un color, si para colorear las flechas se han utilizado  $m$  colores, diremos que  $D$  es una **digráfica  $m$ -coloreada**.*

Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada.

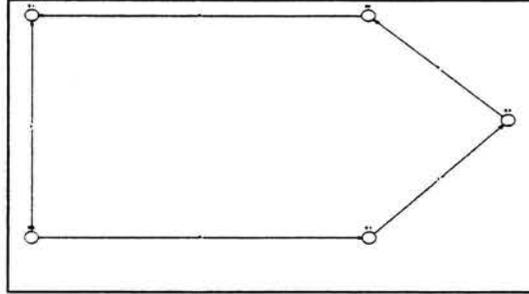


Figura 4.1:  $D$  con  $N = \{x_2, x_5\}$  independiente por trayectorias monocromáticas.

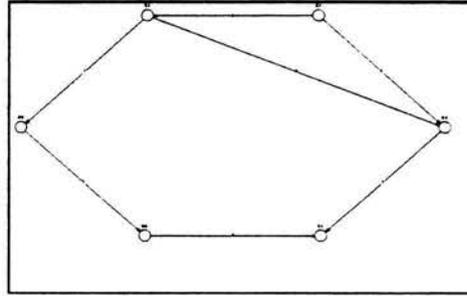


Figura 4.2:  $D$  con  $N = \{x_4, x_5\}$  absorbente por trayectorias monocromáticas.

**Definición 4.2** Una **trayectoria monocromática** en  $D$  es una trayectoria tal que todas sus flechas tienen asignado el mismo color.

**Definición 4.3** Sea  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un conjunto **independiente por trayectorias monocromáticas** de  $D$  si para cualesquiera  $u, v \in N$  no existen en  $D$  trayectorias monocromáticas entre  $u$  y  $v$ . (Ver figura 4.1).

**Definición 4.4** Sea  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un conjunto **absorbente por trayectorias monocromáticas** de  $D$ , si para cualquier  $u \in V(D) \setminus N$ , existe una  $uv$ -trayectoria monocromática para algún  $v \in N$ . (Ver figura 4.2).

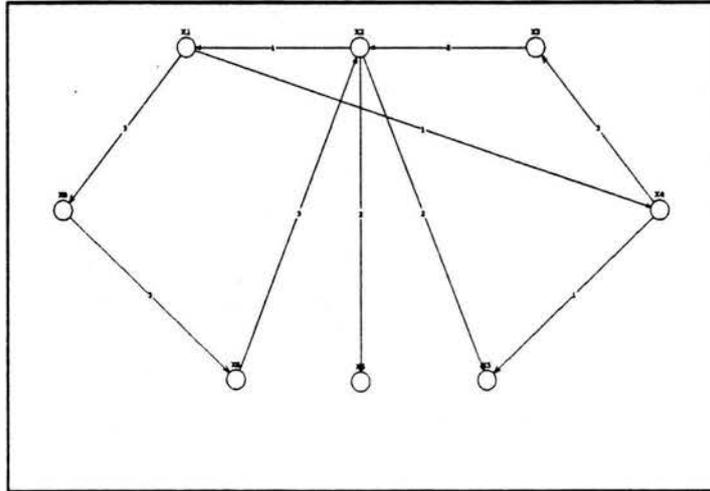


Figura 4.3:  $D$  con  $N = \{x_5, x_6, x_7\}$  núcleo por trayectorias monocromáticas.

**Definición 4.5** Sea  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un **núcleo por trayectorias monocromáticas** en  $D$  si es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas de  $D$ . (Ver figura 4.3).

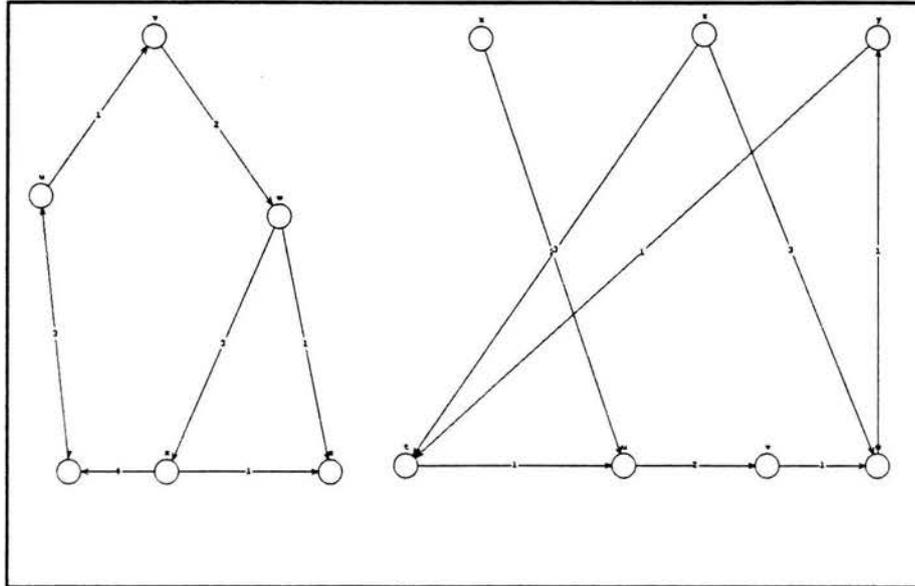
**Observación 1.** Para cualquier digráfica, podemos asignar a cada flecha un color diferente y entonces un conjunto de vértices es un núcleo de la digráfica si y sólo si es un núcleo por trayectorias monocromáticas. Esto hace ver que el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas generaliza el concepto de núcleo de una digráfica.

**Observación 2.** No toda digráfica  $m$ -coloreada tiene núcleo por trayectorias monocromáticas y si tiene, no necesariamente es único.

En la figura 4.3,  $D_1$  es una digráfica 4-coloreada que no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

$D_2$  es una digráfica 3-coloreada que tiene dos núcleos por trayectorias monocromáticas distintos, a saber  $N_1 = \{t, v\}$  y  $N_2 = \{u, w\}$ .

**Definición 4.6** En una digráfica no se permite que existan dos o más flechas con los

Figura 4.4:  $D_1$  y  $D_2$ .

mismos extremos y la misma dirección. Sin embargo, en una **multidigráfica** se permite que existan este tipo de flechas, llamadas flechas múltiples.

**Definición 4.7** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada, la **cerradura transitiva** de  $D$ , denotada  $C(D)$ , se define como la multidigráfica tal que  $V(C(D)) = V(D)$  y  $F(C(D)) = F(D) \cup \{(u, v) \text{ con color } i \mid \exists \text{ una } uv\text{-trayectoria monocromática de color } i \text{ en } D\}$

**Teorema 4.8** Si  $D$  es una digráfica  $m$ -coloreada, entonces  $C(D)$  es transitiva por colores, es decir, si en  $C(D)$  existen flechas de color  $i$  de  $u$  a  $v$  y de  $v$  a  $w$ , entonces existe la flecha de color  $i$  de  $u$  a  $w$  en  $C(D)$ . Más aún  $C(C(D)) = C(D)$ .

#### **Demostración.**

Supongamos que en  $C(D)$  existen flechas de color  $i$  de  $u$  a  $v$  y de  $v$  a  $w$ , entonces por la definición de cerradura transitiva, en  $D$  existen trayectorias de color  $i$  de  $u$  a  $v$  y de  $v$  a  $w$ ,  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente.

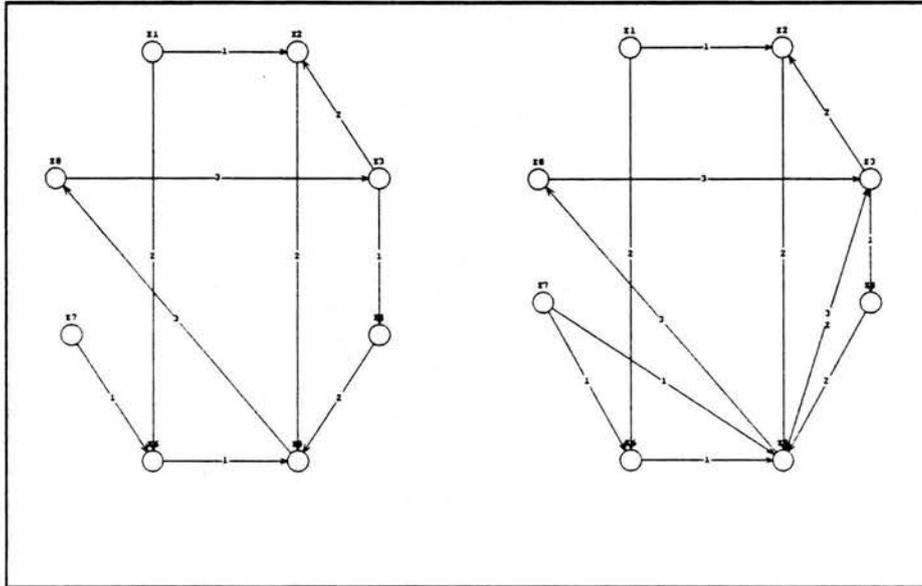


Figura 4.5:  $D$  y  $C(D)$

Consideremos  $T = T_1 \cup T_2$ , es un camino de color  $i$  de  $u$  a  $w$  y como probamos anteriormente (Teorema 2.38)  $T$  contiene una  $uw$ -trayectoria de color  $i$ , por lo que en  $C(D)$  existe una  $uw$ -flecha de color  $i$ , por lo tanto,  $C(D)$  es transitiva por colores.

Demostraremos ahora que  $C(C(D)) = C(D)$ . Bastará con demostrar que si existe una  $uv$ -trayectoria monocromática de color  $i$ ,  $T$  en  $C(D)$ , entonces existe una  $uv$ -flecha de color  $i$  en  $C(D)$ . Procedamos por inducción sobre  $l(T)$ :

1° Si  $l(T) = 1$ , no hay nada que demostrar.

Si  $l(T) = 2$ , el resultado significa precisamente que  $C(D)$  es transitiva por colores.

2° Supongamos que se cumple para  $l(T) = n$ .

3° Probémoslo para  $l(T) = n+1$ . Si  $T = (u = z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1} = v)$  una trayectoria monocromática de color  $i$ , entonces  $T' = (u = z_0, z_1, \dots, z_n)$  es una  $uz_n$ -trayectoria monocromática de color  $i$  en  $C(D)$  y  $l(T') = n$ . Por lo tanto, por hipótesis de Inducción, existe una  $uz_n$ -flecha de color  $i$  en  $C(D)$ . Como  $C(D)$  es transitiva por colores y existe

una  $uz_n$ -flecha y una  $z_nv$ -flecha de color  $i$  en  $C(D)$ , entonces sabemos que existe también una  $uv$ -flecha de color  $i$  en  $C(D)$ . ■

**Teorema 4.9** *Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas si y sólo si  $C(D)$  tiene núcleo. Además, el número de núcleos por trayectorias monocromáticas de  $D$  es igual al número de núcleos de  $C(D)$ .*

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Sea  $N \subseteq V(D)$  un núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ . Sabemos que  $V(D) = V(C(D))$ , entonces  $N \subseteq V(C(D))$ . Ahora demostraremos que  $N$  es núcleo de  $C(D)$ :

i)  $N$  es independiente en  $C(D)$ . Supongamos por contradicción, que existen  $u, v \in N$  y  $(u, v) \in F(C(D))$ , como  $C(D)$  es la cerradura transitiva de  $D$ , entonces existe una  $uv$ -trayectoria monocromática en  $D$ , pero eso contradice el hecho de que  $N$  sea independiente por trayectorias monocromáticas en  $D$ . Entonces, para cualesquiera  $u, v \in N$  no existen  $uv$ -flechas en  $C(D)$ , por lo que  $N$  es independiente en  $C(D)$ .

ii)  $N$  es absorbente en  $C(D)$ :

Sea  $u \in V(C(D)) \setminus N$ . Sabemos que  $V(C(D)) = V(D)$  y como  $N$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ , entonces existe una  $uv$ -trayectoria con  $v \in N$ . Entonces por definición de  $C(D)$  hay una  $uv$ -flecha en  $C(D)$ . Es decir  $N$  es absorbente en  $C(D)$ .

De i) y ii) podemos concluir que  $N$  es núcleo de  $C(D)$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $N \subseteq V(C(D))$  un núcleo de  $C(D)$ . Sabemos que  $V(D) = V(C(D))$ , entonces  $N \subseteq V(D)$ . Ahora demostraremos que  $N$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ :

i)  $N$  es independiente por trayectorias monocromáticas de  $D$ :

Sean  $u, v \in N$  y supongamos por contradicción que existe una  $uv$ -trayectoria monocromática en  $D$ , entonces por la definición de cerradura transitiva de  $D$ ,  $(u, v) \in$

$F(C(D))$ , lo que contradice el hecho de que  $N$  es independiente en  $C(D)$ . Entonces, para cualesquiera  $u, v \in N$  no existen  $uv$ -trayectorias monocromáticas en  $D$ , por lo tanto  $N$  es independiente por trayectorias monocromáticas en  $D$ .

ii)  $N$  es absorbente por trayectorias monocromáticas de  $D$  :

Sea  $u \in V(D) \setminus N$ . Sabemos que  $V(D) = V(C(D))$  y como  $N$  es núcleo de  $C(D)$ , entonces existe una  $uv$ -flecha en  $F(C(D))$  con  $v \in N$ . Por lo tanto, por definición de  $C(D)$  existe una  $uv$ -trayectoria monocromática en  $D$ . Es decir  $N$  es absorbente por trayectorias monocromáticas en  $D$ .

De i) y ii) podemos concluir que  $N$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ .

Al haber probado esto, demostramos que todo núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$  es un núcleo de  $C(D)$  y todo núcleo de  $C(D)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ , por lo que el número de núcleos de  $C(D)$  es igual al número de núcleos por trayectorias monocromáticas de  $D$ . ■

**Definición 4.10** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada, decimos que  $D$  es *casimonocromática* si todas sus flechas son del mismo color excepto a lo más una.



## Capítulo 5

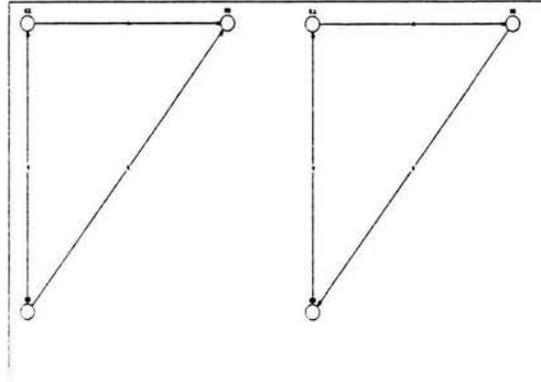
# Trayectorias monocromáticas y ciclos monocromáticos en torneos $m$ -coloreados.

Die beste von allen Sprachen der Welt ist eine künstliche Sprache,  
eine ziemlich gedrängte Sprache, die Sprache der Mathematik.

N. I. Lobatschewski.

En el presente capítulo presentaremos la noción de torneo  $m$ -coloreado y demostraremos el Teorema de Shen Minggang sobre caracterización de torneos con núcleos por trayectorias monocromáticas y analizaremos también el contraejemplo dado por Galeana y Rojas para torneos 4-coloreados. Por último probaremos resultados esenciales en torneos con ciclos casi y monocromáticos, retomaremos el concepto de digráfica NP y NIC, para examinar algunas de las caracterizaciones de digráficas de este tipo.

El material presentado en este capítulo se obtuvo de los artículos [10], [7] y [3].

Figura 5.1:  $T_3$  y  $C_3^T$ .

### 5.1. Trayectorias monocromáticas en torneos $m$ -coloreados.

**Definición 5.1** Llamamos a un torneo  $T$  un torneo  $m$ -coloreado si las flechas de  $T$  están coloreadas con  $m$ -colores.

**Definición 5.2** Sea  $T$  un torneo, diremos que  $T$  es un **torneo transitivo** si  $\{u, v, z\} \subseteq V(T)$ , tal que  $(u, v)$  y  $(v, z) \in F(T)$ , entonces  $(u, z) \in F(T)$ . Denotaremos al torneo transitivo con 3 vértices cuyas flechas están coloreadas con 3 colores,  $T_3$ .

**Definición 5.3** Denotaremos al ciclo con 3 vértices  $C_3$  y al ciclo con 3 vértices cuyas flechas están coloreadas con 3 colores,  $C_3^T$ .

Sands, Sauer y Woodrow probaron en [11] que todo torneo  $T$  2-coloreado tiene un vértice  $v$  tal que  $\forall x \in V(T) - \{v\}$  existe una  $xv$ -trayectoria monocromática. Es decir que todo torneo 2-coloreado en sus flechas tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Por otro lado ellos se plantearon el siguiente problema:

Sea  $T$  un torneo 3-coloreado que no contiene a  $C_3^T$ . ¿Entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas?

Probaremos que si a  $T$  no se le permite contener a  $C_3^T$  ni a  $T_3$ , entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

**Teorema 5.4** [10] *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado que no contiene a  $C_3^T$  ni a  $T_3$ . Entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

### Demostración

Procedamos por Inducción sobre  $|V(T)| = n$ .

1° Para  $n = 1$  y  $n = 2$  es claro. Para  $n = 3$ , pues si  $|V(T)| = 3$ ,  $V(T) = \{v_1, v_2, v_3\}$ , tal que  $T$  no contenga a  $C_3$  ni a  $T_3^T$ , entonces tenemos los siguientes casos:

Caso a:  $T$  es un torneo cuyas flechas están coloreadas con un sólo color, digamos color 1.

Caso a.1:  $T$  es el torneo transitivo de tres vértices (figura 5.2 izquierda), en este caso  $v_2$  es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Caso a.2:  $T$  es ciclo de tres vértices (figura 5.2 derecha), en este caso cualquiera de los tres vértices es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Caso b:  $T$  es un torneo cuyas flechas están coloreadas con dos colores, digamos color 1 y color 2.

Caso b.1:  $T$  es el torneo transitivo de tres vértices (figura 5.3 izquierda), en este caso  $v_2$  es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Caso b.2:  $T$  es el torneo transitivo de tres vértices (figura 5.3 derecha), en este caso  $v_2$  es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Caso b.3:  $T$  es ciclo de tres vértices (figura 5.4), en este caso  $v_1$  es núcleo por trayectorias monocromáticas.

2° Supongamos que la propiedad es cierta para cualquier torneo  $T$   $m$ -coloreado tal que  $|V(T)| < n$  y que cumpla con las hipótesis.

Observemos que para todo torneo  $T$ , si  $T$  tiene núcleo éste solo puede constar de un vértice, debido a la independencia. Así, que  $\forall v \in V(T)$ , existe un vértice en  $T$ ,

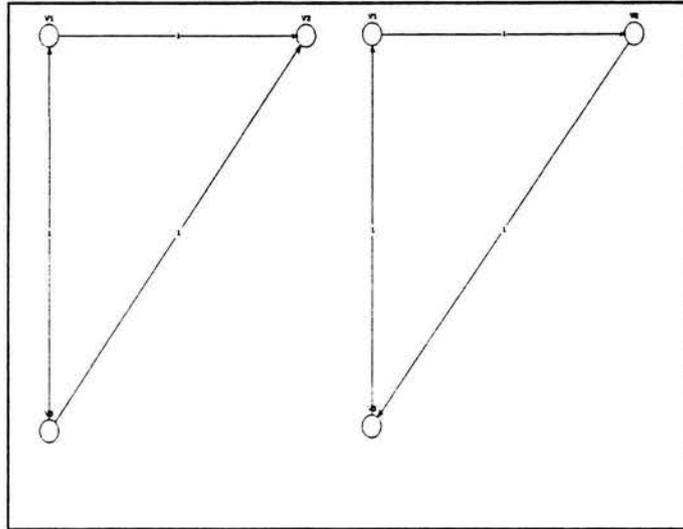


Figura 5.2: Teorema 5.4. Casos a.1 y a.2

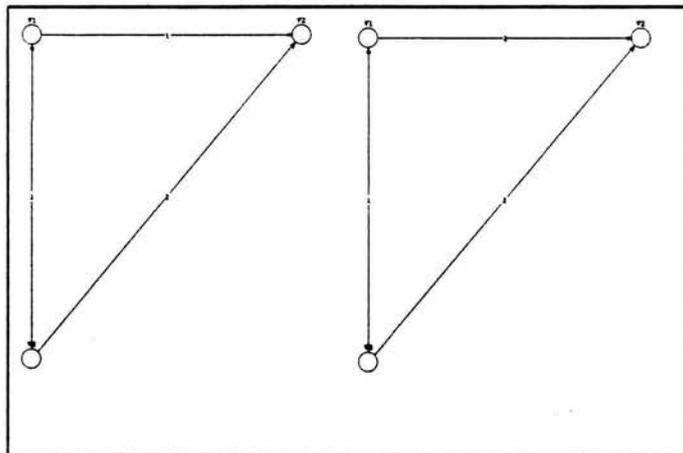


Figura 5.3: Teorema 5.4. Casos b.1,b.2.

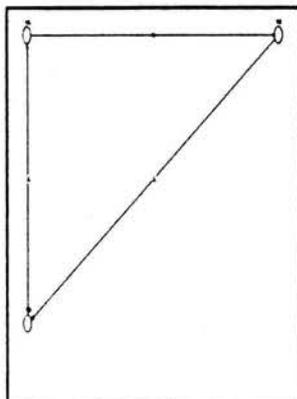


Figura 5.4: Teorema 5.4. Caso b.3.

llamémosle  $f(v)$ , tal que  $f(v)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T - \{v\}$ .

3° Probaremos que si  $|V(T)| = n$  y  $T$  satisface las hipótesis del teorema, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

**Observación i)** Si  $f(u) = f(v), u \neq v$ , entonces  $f(v)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ .

Por hipótesis de inducción,  $\forall x \in V(T) - \{u\}$ ,  $f(u)$  absorbe a  $x$ , y análogamente  $\forall x \in V(T) - \{v\}$ ,  $f(v)$  absorbe a  $x$ . Es decir,  $f(v)$  absorbe a todos los vértices de  $T$  excepto a  $v$  pero  $f(u) = f(v)$  y  $f(u)$  absorbe a  $v$ , entonces  $f(v)$  absorbe a  $v$ , por lo tanto  $f(v)$  absorbe a  $x$  para todo  $x \in V(T)$ , es decir  $f(v)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ .

**Observación ii)** Si para algún  $v \in V(T)$ , existe una  $vf(v)$ -trayectoria monocromática, entonces  $f(v)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ . Por hipótesis de Inducción  $f(v)$  absorbe a  $x \forall x \in V(T) - \{v\}$  y como existe una  $vf(v)$ -trayectoria monocromática, entonces  $f(v)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas.

**Observación iii)** Podemos suponer que  $f$  es una biyección.

Para cada  $v \in V(T), \exists f(v)$ .

Por la observación i, podemos suponer que si  $u \neq v$ , entonces  $f(u) \neq f(v)$ . Como  $f$

es una función inyectiva en un conjunto finito a el mismo, entonces  $f$  es biyección.

**Observación iv)** De la observación iii, podemos suponer por reducción al absurdo, que no hay  $vf(v)$ -trayectoria monocromática.

**Observación v)** Al reetiquetar los vértices de  $T$ ,  $f(v_i) = v_{i+1}$ , se obtiene una partición en ciclos

$$(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1), (v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{n_2}, v_{n+1}), \dots$$

Sea  $v_1 \in V(T)$ , tenemos la sucesión  $v_1, v_2, \dots$  donde  $f(v_i) = v_{i+1}$  y como  $V(T)$  es finito existe un primer  $n$  tal que  $f(v_n) = v_j$  con  $1 \leq j < n$ .

Probaremos que  $j = 1$ . Supongamos que no, entonces  $j = i$  con  $1 < i < n$ ,  $f(v_n) = v_j = v_i = f(v_{i-1})$  con  $v_n \neq v_{i-1}$ , contradiciendo que  $f$  es biyección.

Así obtenemos un primer ciclo  $C_1 = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ . Si  $V(C_1) = V(T)$  ya terminamos. Si no, sea  $v_{n+1} \in V(T) - V(C_1)$  y repitiendo el argumento anterior obtenemos otro ciclo  $C_2$ . Continuando con este proceso, obtenemos una colección de ciclos que cubre a  $V(T)$ .

Probaremos que los ciclos son ajenos en vértices. Supongamos que hay dos ciclos  $C_1$  y  $C_2$  distintos que no son ajenos en vértices. Es decir, existe  $v_i \in V(C_1)$  tal que  $v_i = v_{n+j}$ ,  $v_{n+j} \in V(C_2)$ . Como  $v_i = f(v_{i-1})$ ,  $v_{n+j} = f(v_{n+j-1})$  y como  $f$  es biyectiva  $v_{i-1} = v_{n+j-1}$ . Como  $v_{i-1} = f(v_{i-2})$  y  $v_{n+j-1} = f(v_{n+j-2})$  y como  $f$  es biyectiva, entonces  $v_{i-2} = v_{n+j-2}$ .

Continuando de esta manera obtenemos que  $V(C_1) = V(C_2)$ , contradiciendo que  $C_1$  y  $C_2$  son ciclos distintos.

Donde

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_2, \dots, f(v_{n_1}) = v_1, \\ f(v_{n_1+1}) &= v_{n_1+2}, \dots, f(v_{n_2}) = v_{n_1+1}. \end{aligned}$$

Observemos que si esta partición cuenta con más de un ciclo, por la hipótesis de Inducción tenemos que  $\exists v_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$  tal que  $v_i$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T[\{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}]$ . Sin embargo, esto contradice que  $v_i = f(v_{i-1})$ . Por lo que habrá una trayectoria monocromática de  $v_{i-1}$  a  $v_i = f(v_{i-1})$ , contradiciendo la observación iv).

Podemos suponer entonces que la partición consta de un sólo ciclo,  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Como no existe una  $v_i v_{i+1}$ -trayectoria monocromática y como  $T$  es torneo, entonces  $(v_2, v_1), (v_3, v_2), \dots, (v_n, v_{n-1}) \in F(T)$ . Supongamos que tienen colores  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  respectivamente.

Si  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$  entonces existe  $(v_n, \dots, v_2, v_1)$  una  $v_n v_1$ -trayectoria monocromática de color  $a_1$ , lo que contradice la observación iv. Entonces  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  no pueden ser todos iguales. Es decir, existen  $a_{s-1}$  y  $a_s$ , con  $a_{s-1} \neq a_s$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $a_{s-1} = 1$  y  $a_s = 2$ . Observemos que existe una  $v_{s-1} v_{s+1}$ -trayectoria monocromática de color  $b$ , pues por definición de  $v_{s+1}$ ,  $v_{s+1}$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T - \{v_s\}$ , por lo tanto  $v_{s+1}$  absorbe por trayectorias monocromáticas a cada  $x$ ,  $\forall x \in V(T) - \{v_s\}$ , en particular existe una  $v_{s-1} v_{s+1}$ -trayectoria monocromática,  $\alpha$  de color  $b$ .

**Observación vi)** Nótese que no existe  $v_i v_{i+1}$ -trayectoria monocromática (por observación iv).

Ahora observemos que  $b \neq 1$  y  $b \neq 2$ . Pues si  $b = 1$ , entonces  $(v_s, v_{s-1}) \cup (v_{s-1}, \alpha, v_{s+1})$  contiene una  $v_s v_{s+1}$  trayectoria monocromática de color 1, contradiciendo la observación vi. Si  $b = 2$ , entonces  $(v_{s-1}, \alpha, v_{s+1}) \cup (v_{s+1}, v_s)$  contiene una  $v_{s-1} v_s$ -trayectoria monocromática de color 2, contradiciendo la observación vi.

Podemos suponer entonces que  $b = 3$ . Sea  $\alpha' = (u_1, u_2, \dots, u_t)$  la más corta  $v_{s-1} v_{s+1}$ -trayectoria monocromática de color 3, donde  $u_1 = v_{s-1}$  y  $u_t = v_{s+1}$ .

Consideremos el color de la flecha entre  $v_s$  y  $u_i$  con  $1 < i < t$ .

Probaremos que no existen flechas  $(v_s, u_i)$  o  $(u_i, v_s)$  con  $1 < i < t$  de color 3. Supongamos que existe  $(v_s, u_i) \in F(T)$  de color 3, entonces  $(v_s, u_i) \cup (u_i, \alpha', u_t = v_{s+1})$  contiene una  $v_s v_{s+1}$ -trayectoria monocromática de color 3, contradiciendo la observación vi. Ahora supongamos que existe  $(u_i, v_s) \in F(T)$  de color 3, entonces  $(u_1 = v_{s-1}, \alpha', u_i) \cup (u_i, v_s)$  contiene una  $v_{s-1} v_s$ -trayectoria monocromática de color 3, contradiciendo la observación vi.

Observemos que existen  $(v_s, u_i), (u_{i+1}, v_s) \in F(T)$ , que son de distinto color pues  $(v_s, u_1)$  es de color 1 y  $(u_t, v_s)$  es de color 2 (figura 5.5). Entonces bastará con tomar

$$i + 1 = \text{mín}\{j \mid \text{la flecha entre } v_s \text{ y } u_j \text{ es de color distinto de 1}\}$$

Por lo tanto  $v_s u_i u_{i+1}$  es un triángulo con 3 colores distintos, lo que contradice la hipótesis de que  $T$  no contiene  $C_3^T$  ni  $T_3$ . (Nótese que un triángulo en un torneo siempre induce  $C_3^T$  o  $T_3$ ).

Esta contradicción surge de suponer que para cada  $v \in V(T)$ , no hay  $vf(v)$ -trayectorias monocromáticas. Por lo tanto para algún  $v_0 \in V(T)$  si existe  $v_0 f(v_0)$ -trayectoria monocromática, y por lo tanto  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

**Corolario 5.5** *Sea  $T$  un torneo 2-coloreado, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

**Demostración.**

Si  $T$  es 2-coloreado, entonces  $T$  no contiene  $C_3^T$  ni  $T_3$ . ■

**Corolario 5.6** *Sean  $T, H_1, H_2, \dots, H_n$ , donde  $T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , torneos  $m$ -coloreados que no contienen  $C_3^T$  ni  $T_3$ . Sea  $T'$  el torneo obtenido al reemplazar cada vértice  $v_i$  de  $T$  con  $H_i$  y al colorear todas las flechas entre  $H_i$  y  $H_j$  del mismo color de la flecha entre  $v_i$  y  $v_j$  pero con direcciones arbitrarias. Entonces  $T'$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

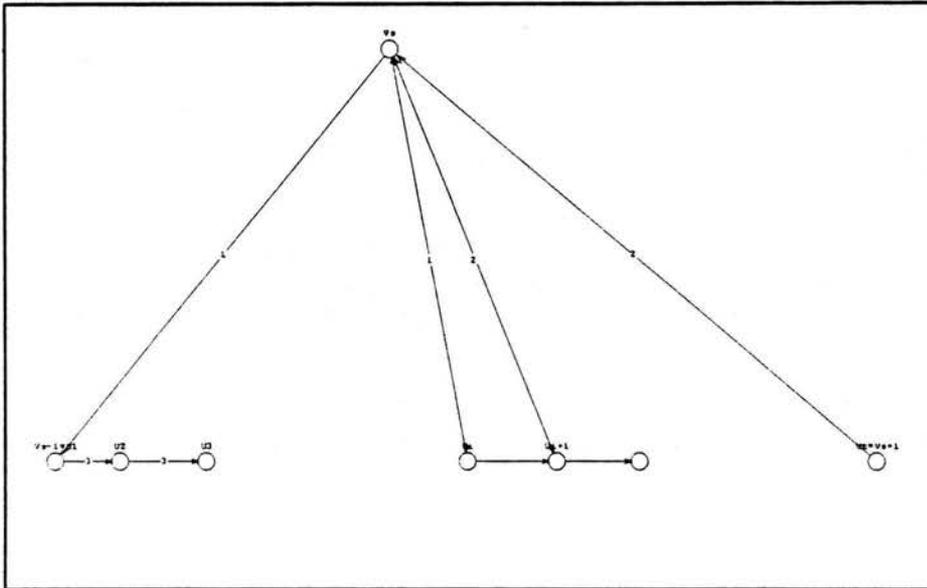


Figura 5.5:  $u_{i+1}$  es el primer vértice tal que la flecha entre  $v_s$  y  $u_{i+1}$  es de color distinto de 1

### Demostración.

Demostraremos que  $T'$  no contiene  $C_3^T$  ni  $T_3$ . Supongamos, por contradicción, que  $T'$  contiene un  $C_3^T$  o un  $T_3$ . Supongamos que los vértices de éste ( $C_3^T$  o  $T_3$ ) son  $w_1, w_2$  y  $w_3$ . Analizaremos los posibles casos:

caso i)  $\{w_1, w_2, w_3\} \subseteq H_i$  para alguna  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Pero ya que  $H_i$ , no contiene  $C_3^T$  ni  $T_3$ , esto contradice la hipótesis sobre  $H_i$ .

caso ii)  $\{w_1, w_2\} \subseteq H_i$  y  $w_3 \in H_j$ , con  $i \neq j$ . Sin embargo, por la definición de  $T'$  las flechas entre  $w_1$  y  $w_3$  y entre  $w_2$  y  $w_3$  deben de ser del mismo color.

caso iii)  $w_1 \in H_i, w_2 \in H_j, w_3 \in H_k$   $i \neq j, i \neq k, j \neq k$ . Sin embargo, por la definición de  $T'$ , esto implicaría que  $\{v_i, v_j, v_k\} \subseteq V(T)$  tales que forman  $T_3$  o  $C_3^T$ , contradiciendo la hipótesis sobre  $T$ .

Observemos que si en el teorema pidiéramos sólo que  $T$  no contuviera  $C_3^T$  el resul-

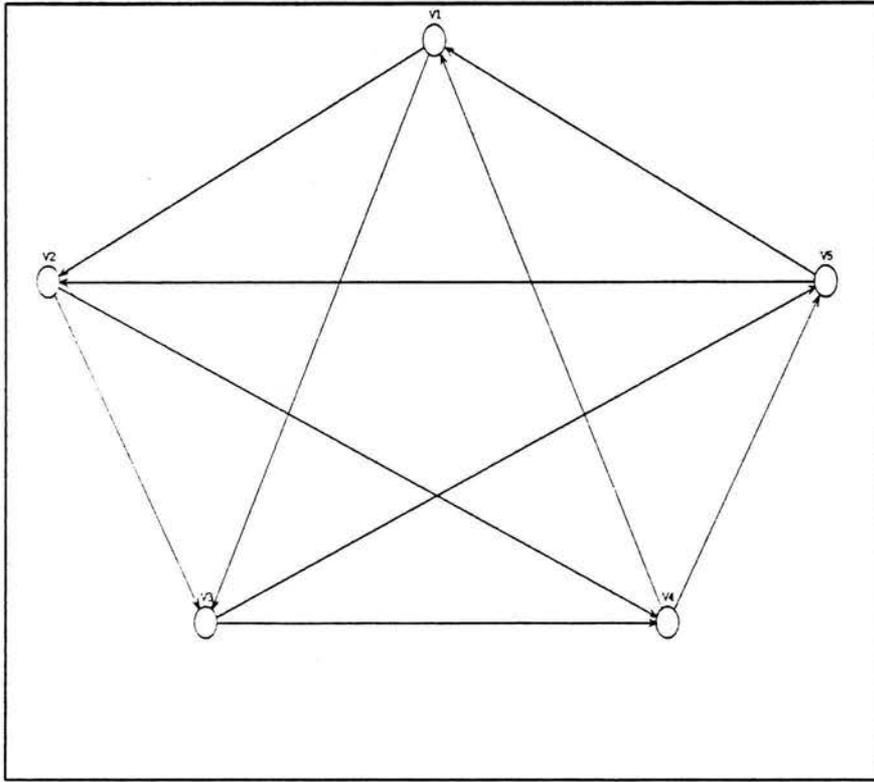


Figura 5.6:  $G_5$

tado fallaría. Por ejemplo el torneo  $G_5$ , (figura 5.6), es un torneo 5-coloreado, de orden 5 y no contiene  $C_3^T$ . Sin embargo  $G_5$  no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. De hecho no existen  $v_{i+1}v_i$ -trayectorias monocromáticas con  $i + 1$  tomado módulo 5. En los siguientes ejemplos, toda la notación será tomada módulo 5.

Probaremos que  $G_5$  no contiene  $C_3^T$ . Analizaremos las posibles ternas en  $G_5$ .

Encontramos que podemos hacer una partición de las ternas en las que no inducen un triángulo dirigido:  $(v_1, v_2, v_3)$ ,  $(v_1, v_2, v_5)$ ,  $(v_1, v_4, v_5)$ ,  $(v_2, v_3, v_4)$ ,  $(v_3, v_4, v_5)$ .

Y en las que inducen un triángulo dirigido pero utilizan sólo 2 colores:  $(v_1, v_2, v_4)$ ,  $(v_1, v_3, v_4)$ ,  $(v_1, v_3, v_5)$ ,  $(v_2, v_3, v_5)$ ,  $(v_2, v_4, v_5)$ .

Probaremos también que no hay  $v_{i+1}v_i$ -trayectorias monocromáticas para  $i \in \{1, 2, 3,$

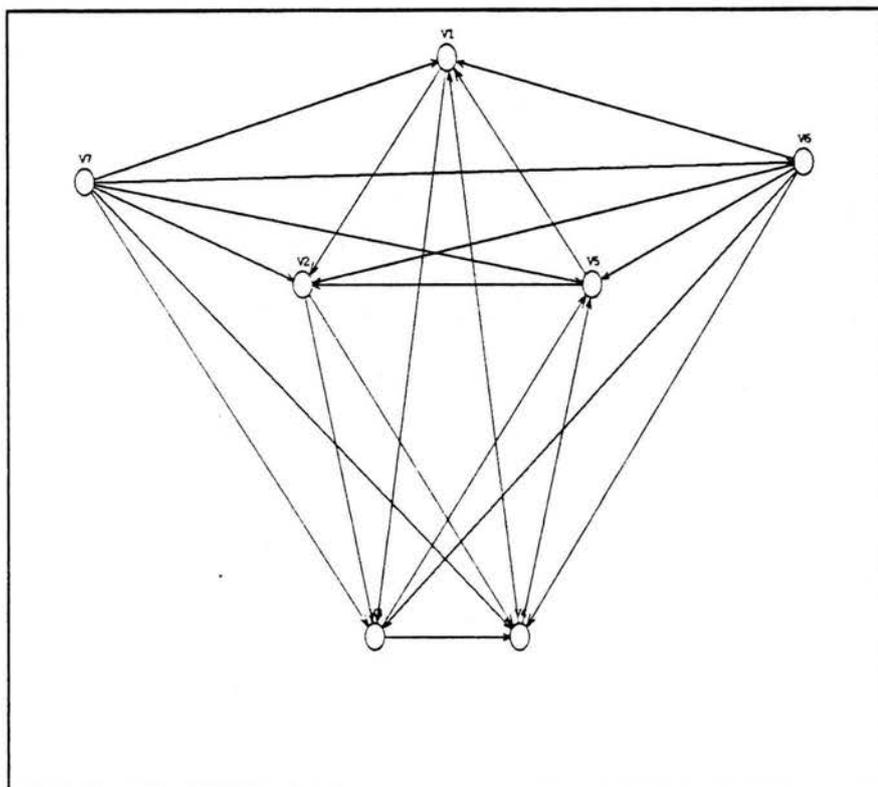


Figura 5.7:  $G_5$  al añadir dos vértices,  $x_6$  y  $x_7$ .

4, 5}.

De  $v_{i+1}$  sólo salen flechas de colores  $i + 1$  e  $i + 3$  y a  $v_i$  solamente entran flechas de colores  $i$  e  $i + 4$  donde  $i \neq i + 1 \pmod{5}$ ,  $i \neq i + 3 \pmod{5}$ ,  $i + 4 \neq i + 1 \pmod{5}$ ,  $i + 4 \neq i + 3 \pmod{5}$ . Por lo tanto  $G_5$  no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Observemos que podemos construir contraejemplos más grandes para  $m = 5$ , añadiendo vértices a  $G_5$  uno por uno y conectando cada nuevo vértice con todos los que ya teníamos mediante una flecha de color 1. (Ver figura 5.7).

Observemos que esta digráfica no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas ya que como no hay  $G_5 v_i$ -flechas para  $i \in \{6, 7, \dots\}$ , el vértice que sea núcleo por trayectorias monocromáticas debe estar en  $G_5$  y ya vimos que en  $G_5$  no hay un vértice

que absorba por trayectorias monocromáticas a todos los demás.

Análogamente si en el teorema sólo pidiéramos que  $T$  no contuviera a  $T_3$ , el resultado fallaría. Por ejemplo, sea  $D_n$  un torneo 4-coloreado con  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vértices, tal que  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_2, v_3)$ , y  $(v_3, v_1)$  sean coloreadas con colores 1, 2 y 3 respectivamente y todas las demás flechas coloreadas de color 4 y dirigidas  $(v_i, v_j)$  si  $j < i$ . Claramente  $D_n$  es 4-coloreado sin contener  $T_3$ , pues  $(v_1, v_2, v_3)$  no induce  $T_3$  por hipótesis, entonces si existiera  $T_3$  en  $D_n$  tendría que usar un  $v_i, i \in \{4, 5, \dots\}$  pero por construcción todas las flechas que inciden en  $v_i$  tienen color 4, por lo que  $T_3$  no puede ser 3-coloreada (contradicción).

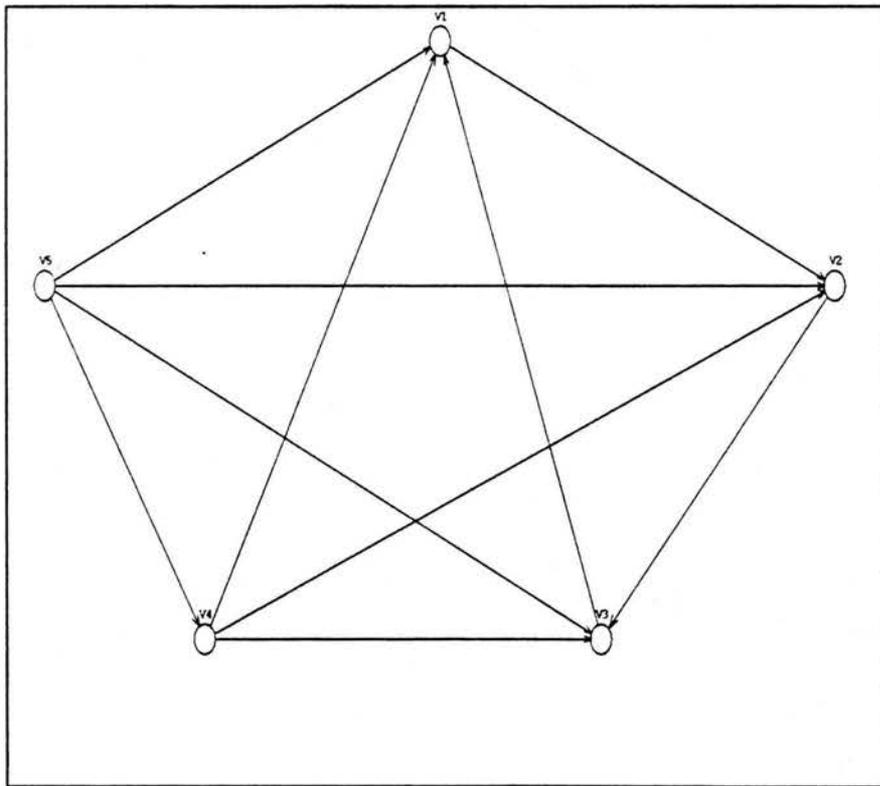
Probaremos que  $D_n$  no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Por contradicción, supongamos que tiene núcleo por trayectorias monocromáticas  $N$ . Como  $D_n$  es completa,  $N$  es un sólo vértice  $w, w = v_i$ , pero  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$   $v_i$  no absorbe por trayectorias monocromáticas a  $v_{i-1}$ .

$D_5$  (figura 5.8) es un torneo 4-coloreado sin contener  $T_3$ , pero  $D_5$  no contiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

Así, si  $m \geq 5$ , la condición en el teorema de que no contenga  $T_3$  ni  $C_3^T$  no puede ser mejorada, en el sentido de que no podemos quitar ninguna de las dos hipótesis (que no contenga  $C_3^T$  ni  $T_3$ ), es decir, que el Teorema es el mejor resultado. Sin embargo hasta 1982 no se había encontrado ningún contraejemplo para los casos  $m = 3, 4$  pero en 2003 Galeana-Sánchez y Rojas-Monroy dieron una familia de contraejemplos para  $m = 4$  que se puede citar en el siguiente teorema.

**Teorema 5.7** [7] *Para cada  $n \geq 6$  existe un torneo  $T_n$  4-coloreado de orden  $n$  que satisface las siguientes condiciones:*

- i)  $T_n$  no contiene  $C_3^T$ .
- ii)  $T_n$  no contiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Figura 5.8:  $D_5$ .

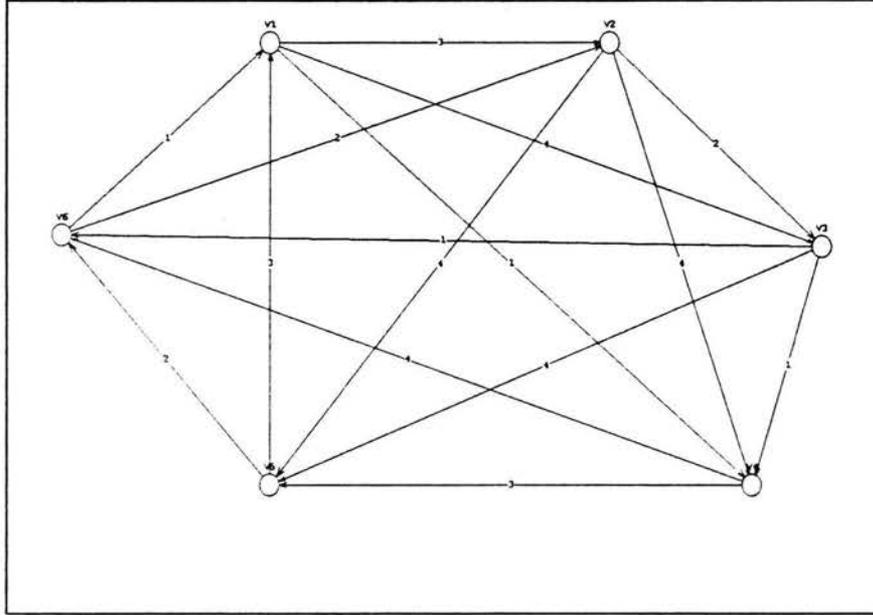


Figura 5.9:  $T_6$ , contraejemplo para torneo 4-coloreado

### Demostración.

Para  $n = 6$ , el torneo  $T_6$ , (figura 5.9), es un torneo 4-coloreado de orden 6. Probaremos que no contiene  $C_3^T$ . Analizaremos las posibles ternas. Podemos hacer también una partición de éstas en las que no inducen un triángulo dirigido:  $(v_1, v_2, v_3)$ ,  $(v_1, v_2, v_4)$ ,  $(v_1, v_2, v_6)$ ,  $(v_1, v_3, v_4)$ ,  $(v_1, v_5, v_6)$ ,  $(v_2, v_3, v_4)$ ,  $(v_2, v_3, v_5)$ ,  $(v_3, v_4, v_5)$ ,  $(v_3, v_4, v_6)$ ,  $(v_4, v_5, v_6)$ , y en las ternas que aunque inducen un triángulo dirigido, sólo utilizan 2 colores:  $(v_1, v_2, v_5)$ ,  $(v_1, v_3, v_5)$ ,  $(v_1, v_3, v_6)$ ,  $(v_1, v_4, v_5)$ ,  $(v_1, v_4, v_6)$ ,  $(v_2, v_3, v_6)$ .

Probaremos también que no existen  $v_{i+1}v_i$ - trayectorias monocromáticas para  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  con  $i + 1$  tomado módulo 6.

No hay  $v_2v_1$ -trayectorias monocromáticas pues de  $v_2$  sólo salen flechas de colores 2 y 4 y a  $v_1$  sólo entran flechas de colores 1 y 3.

No hay  $v_3v_2$ -trayectorias monocromáticas pues de  $v_3$  sólo salen flechas de colores 1 y 4 y a  $v_2$  sólo entran flechas de colores 2 y 3.

No hay  $v_4v_3$ -trayectorias monocromáticas pues de  $v_4$  sólo salen flechas de colores 3 y 4 y aunque a  $v_3$  entran flechas de colores 2 y 4 no hay  $v_4v_3$  trayectoria de color 4 porque la flecha de color 4 que sale de  $v_4$  entra a  $v_6$  y de  $v_6$  no salen flechas de color 4.

No hay  $v_5v_4$ -trayectorias monocromáticas pues de  $v_5$  sólo salen flechas de colores 2 y 3 y a  $v_4$  sólo entran flechas de colores 1 y 4.

No hay  $v_6v_5$ -trayectorias monocromáticas pues de  $v_6$  sólo salen flechas de colores 1 y 2 y a  $v_5$  sólo entran flechas de colores 3 y 4.

No hay  $v_1v_6$ -trayectorias monocromáticas pues de  $v_1$  sólo salen flechas de colores 1, 3 y 4 y aunque a  $v_6$  entran flechas de colores 1, 2 y 4, no hay  $v_1v_6$ -trayectoria de color 1 porque la flecha de color 1 que sale de  $v_1$  entra a  $v_4$  y de  $v_4$  no salen flechas de color 1. Tampoco hay  $v_1v_6$ -trayectorias de color 4 porque la flecha de color 4 que sale de  $v_1$  entra a  $v_3$  y la flecha de color 4 que sale de  $v_3$  entra a  $v_5$  pero de  $v_5$  no salen flechas de color 4.

Por lo tanto,  $T_6$  no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

A partir de  $T_6$  se pueden construir torneos 4-coloreados más grandes con las mismas propiedades, añadiendo a  $T_6$  vértices uno por uno y conectando cada nuevo vértice hacia todos los que ya teníamos mediante una flecha de color 1. ■

## 5.2. Trayectorias monocromáticas y ciclos casimonocromáticos y monocromáticos en torneos $m$ -coloreados.

Recordemos que una digráfica  $D$  es llamada digráfica núcleo perfecta o digráfica NP, si toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo.

Una digráfica  $D$  es llamada digráfica núcleo imperfecta crítica o digráfica NIC, si  $D$  no tiene núcleo pero toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene núcleo.

**Definición 5.8** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada. Un ciclo es *casimonocromático*,

si todas sus flechas, con excepción a lo más de una, están coloreadas del mismo color.

Sands, Sauer y Woodrow probaron en [11] que para toda digráfica 2-coloreada  $D$ ,  $C(D)$  es una digráfica núcleo perfecta. En particular probaron que todo torneo 2-coloreado  $T$  tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas  $\{v\}, v \in V(T)$  (es decir que  $\{v\}$  es núcleo de  $C(T)$ ). Así mismo, ellos plantearon el siguiente problema: Sea  $T$  un torneo 3-coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 es un ciclo casimonocromático, ¿entonces  $C(T)$  debe tener núcleo?

En la sección 5.1 analizamos el resultado de Shen Minggang en el que probó que si en el problema pedimos que todo torneo transitivo de orden 3 sea casimonocromático (es decir, que para cada torneo transitivo,  $T_3$  de orden 3, de  $T$ , se cumple que, con a lo más una excepción, las flechas de  $T_3$  están coloreadas del mismo color), la respuesta será afirmativa.

**Definición 5.9** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y  $\gamma_n = (0, 1, \dots, n-1, 0)$  un ciclo de  $D$ . Diremos que  $\gamma_n$  es  $C(D)$ -**monocromático** si existe un conjunto  $\{f_i = (i, i+1) \in F(C(D)) \mid i \in \{1, \dots, n\} \text{ notación mod } n\}$  de flechas coloreadas del mismo color. (Ver figura 5.10).

**Teorema 5.10** H. Galeana Sánchez y Neumann Lara [5]. Si  $D$  es una digráfica NIC, entonces no existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que  $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$  ( $D[V_1, V_2] = \{uv \in F(D) \mid u \in V_1, v \in V_2\}$ ). Es decir que  $\text{Asim}(D)$  es fuertemente conexa.

### Demostración

Procedamos por contradicción. Supongamos que existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que,  $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$ . Como  $\{V_1, V_2\}$  es una partición, entonces  $V_1 \neq \emptyset$ ,  $V_2 \neq \emptyset$ . Por lo tanto  $D[V_1]$  es una subdigráfica propia inducida de  $D$ , entonces como por hipótesis  $D$  es NIC,  $D[V_1]$  tiene núcleo  $N_1$ .

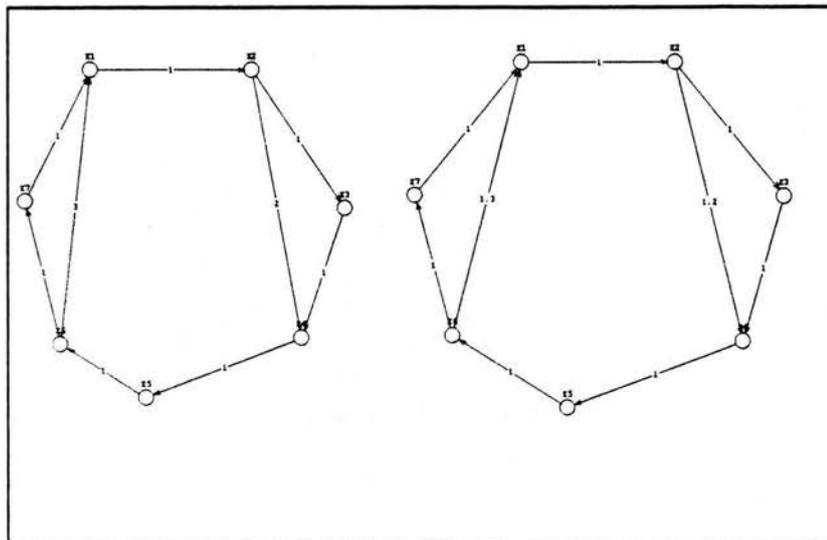


Figura 5.10:  $D$  y  $C(D)$ ,  $\gamma = (x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_1)$  es  $C(D)$ -monocromático.

Consideremos  $D - (N_1 \cup \Gamma^-(N_1))$ .

Caso i) Si  $D - (N_1 \cup \Gamma^-(N_1)) = \emptyset$ . Entonces,  $N_1$  es núcleo de  $D$ , contradiciendo que  $D$  es NIC.

Caso ii) Si  $D - (N_1 \cup \Gamma^-(N_1)) \neq \emptyset$ . Entonces consideremos  $D - (N_1 \cup \Gamma^-(N_1))$  que es una subdigráfica inducida propia de  $D$  y por lo tanto, por hipótesis, tiene núcleo  $N_2$ .

Probaremos que  $N_1 \cup N_2$  es núcleo de  $D$ .

$N_1 \cup N_2$  es independiente, pues  $N_1$  es independiente y  $N_2$  es independiente y no hay flechas de  $N_2$  a  $N_1$  (pues si hubiera,  $N_2 \cap \Gamma^-(N_1) \neq \emptyset$ ) y no hay flechas de  $N_1$  a  $N_2$  (pues si hubiera, por hipótesis, también habría flechas de  $N_2$  a  $N_1$ ).

$N_1 \cup N_2$  es absorbente, pues  $N_1$  absorbe a  $\Gamma^-(N_1)$  y  $N_2$  absorbe a  $D - (N_1 \cup \Gamma^-(N_1)) \cup N_2$ .

Por lo tanto  $N_1 \cup N_2$  es núcleo de  $D$ , contradiciendo la hipótesis de que  $D$  es NIC. ■

**Teorema 5.11** Berge y Duchet [1]. Una digráfica completa es una digráfica NP si y

sólo si todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica.

### Demostración

$\implies$ ) Sea  $D$  una digráfica completa NP, demostraremos que todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica. Procedamos por contradicción. Supongamos que hay un ciclo  $C = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_0)$  cuyas flechas son todas asimétricas. Como  $D$  es NP, entonces  $D[V(C)]$  tiene núcleo,  $N_c$ . Como  $D$  es completa,  $N_c$  es sólo un vértice  $v_i$ . Sin embargo, como  $D$  no tiene flechas simétricas,  $(v_{i+1}, v_i) \notin F(D)$ , entonces  $v_i$  no absorbe a  $v_{i+1}$  contradiciendo que  $N_c$  es núcleo.

$\Leftarrow$ ) Sea  $D$  una digráfica completa tal que todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica, demostraremos que  $D$  es NP. Procedamos por contradicción. Supongamos que  $D$  no es NP, entonces  $D$  contiene una subdigráfica inducida  $H$  que es NIC. Por el Teorema 5.10,  $Asim(H)$  es fuertemente conexa, y por lo tanto (Teorema 2.48),  $Asim(H)$  contiene algún ciclo, entonces  $D$  contiene algún ciclo asimétrico, contradiciendo la hipótesis. ■

**Teorema 5.12** *H. Galeana-Sánchez y Rajsbaum [6]. Sea  $T$  un torneo hamiltoniano con  $n$  vértices y sea  $\gamma$  un ciclo de  $T$ . Para toda  $k$  ( $3 \leq k \leq n-1$ ) existe un ciclo de longitud  $k$ , digamos  $\gamma_k$ , contenido en  $T$  tal que  $|F(\gamma_k) \cap F(\gamma)| \geq 1$ .*

La prueba de este teorema es muy larga y no se incluirá en la tesis ya que corresponde a otro tema.

**Teorema 5.13** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado. Si cada ciclo contenido en  $T$  de longitud a lo más 4 es un ciclo casimonocromático, entonces  $C(T)$  es una digráfica NP.[3].*

### Demostración.

Procedamos por contradicción. Supongamos que  $C(T)$  no es una digráfica NP. Sin embargo como  $C(T)$  es una digráfica completa por el Teorema 5.11 existe un ciclo contenido en  $Asim(C(T))$ .

Sea  $\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_0)$  un ciclo de longitud mínima  $m$  contenido en  $Asim(C(T))$ .

Porbaremos las siguientes proposiciones:

a)  $\gamma \subseteq T$ .

Por definición de  $\gamma$ ,  $\gamma \subseteq Asim(C(T))$  y como  $T$  es torneo con  $V(T) = V(C(T))$ , se sigue que  $\gamma \subseteq T$ .

b)  $l(\gamma) = m \geq 5$ .

Por contradicción, supongamos que  $l(T) \leq 4$ . Como  $\gamma \subseteq T$  se sigue de la hipótesis que  $\gamma$  es un ciclo casimonocromático, donde podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $\{(z_i, z_{i+1}) \in F(\gamma) | i \in \{0, 1, \dots, m-2\}\}$  están coloreadas del mismo color. Por lo tanto,  $(z_0, z_{m-1}) \in F(C(T))$  y entonces  $(z_{m-1}, z_0) \in A(Sim(C(T)) \cap \gamma)$ . (Contradicción).

c)  $\gamma$  no es monocromático.

Supongamos que  $\gamma$  si es un ciclo monocromático, entonces  $(z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$  es una trayectoria monocromática y  $(z_0, z_{m-1}) \in F(C(T))$ , por lo tanto  $(z_{m-1}, z_0) \in F(Sim(C(T)) \cap F(\gamma))$ . (Contradicción).

d) Para todo  $z_i, z_j \in V(\gamma)$  tal que  $j \notin \{i-1, i+1\}$  se cumple que  $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(C(T))$ .

Sea  $z_i, z_j \in V(\gamma)$  tal que  $j \notin \{i-1, i+1\}$ . Como  $\{z_i, z_j\} \subseteq V(T)$ , al menos una de las dos flechas  $(z_i, z_j)$  o  $(z_j, z_i)$  está en  $T$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $(z_i, z_j) \in F(T)$ . Entonces  $\gamma' = (z_i, z_j, z_{j+1}, \dots, z_{i-1}, z_i)$  (notación mod  $m$ ), es un ciclo con  $l(\gamma') < l(\gamma)$ . Por la definición de  $\gamma$  tenemos que  $\gamma' \not\subseteq Asim(C(T))$ , por lo tanto  $(z_j, z_i) \in Sim(C(T))$ .

Como  $\gamma$  no es monocromático, por c), existen dos flechas consecutivas de  $\gamma$  con colores distintos asignados. Digamos que la flecha  $(z_0, z_1)$  es roja y la flecha  $(z_1, z_2)$  es azul.

e)  $(z_2, z_0) \notin A(T)$ .

Procedamos por contradicción. Supongamos que  $(z_2, z_0) \in A(T)$ , entonces,  $\gamma_3 =$

$(z_0, z_1, z_2, z_0)$  es un ciclo de longitud 3 contenido en  $T$ . Por hipótesis  $(z_2, z_0)$  es roja o  $(z_2, z_0)$  es azul. Si  $(z_2, z_0)$  es roja, entonces  $(z_2, z_0, z_1)$  es una trayectoria monocromática, por lo que  $(z_2, z_1) \in F(C(T))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq Asim(C(T))$ . Si  $(z_2, z_0)$  es azul, entonces  $(z_1, z_2, z_0)$  es una trayectoria monocromática, por lo que  $(z_1, z_0) \in F(C(T))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq Asim(C(T))$ . Entonces  $(z_2, z_0) \notin F(T)$ . Sin embargo, por la proposición d, implica que  $(z_2, z_0) \in F(C(T))$ . Por lo tanto, existe una trayectoria monocromática de longitud al menos 2 de  $z_2$  hacia  $z_0$ , contenida en  $T$ . Sea  $\alpha = (z_2 = 0, 1, \dots, p = z_0)$  dicha trayectoria con  $p \geq 2$ .

f)  $\alpha$  no es azul.

Si  $\alpha$  es azul, entonces  $(z_1, z_2) \cup \alpha$  es una trayectoria monocromática y por lo tanto  $(z_1, z_0) \in F(C(T))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq Asim(C(T))$ .

g)  $\alpha$  no es roja

Si  $\alpha$  es roja, entonces  $\alpha \cup (z_0, z_1)$  es una trayectoria monocromática y por lo tanto  $(z_2, z_1) \in F(C(T))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq Asim(C(T))$ .

De ahora en adelante, supondremos, sin pérdida de generalidad, que  $\alpha$  es negra.

h) Para cada  $i \geq 0$  tal que  $2i < p$ ,  $(z_1, 2i) \in F(T)$ .

Procedamos por contradicción. Supongamos que existe  $i \geq 0$  tal que  $2i < p$  y  $(z_1, 2i) \notin F(T)$ . Sea

$$2i_0 = \min\{2i \mid (z_1, 2i) \notin F(T) (0 \leq 2i < p)\}.$$

Como  $0 = z_2$  y  $(z_1, z_2) \in F(T)$ , se sigue que  $2i_0 > 0$  y  $2i_0 - 2 \geq 0$ . Por lo tanto  $(z_1, 2i_0 - 2) \in F(T)$ ,  $(z_1, 2i_0) \notin F(T)$  y  $(2i_0, z_1) \in F(T)$ .

Sea  $\gamma_4 = (z_1, 2i_0 - 2, 2i_0 - 1, 2i_0, z_1)$ . Lo anterior significa que  $\gamma_4$  es un ciclo de longitud 4 contenido en  $T$  con dos flechas negras, digamos  $(2i_0 - 2, 2i_0 - 1)$  y  $(2i_0 - 1, 2i_0)$ . La hipótesis del teorema implica que  $\gamma_4$  es un ciclo casimonocromático y por lo tanto por lo menos una de las dos flechas  $(z_1, 2i_0 - 2)$  o  $(2i_0, z_1)$  es negra.

Si  $(z_1, 2i_0 - 2)$  es negra, entonces  $(z_1, 2i_0 - 2) \cup (2i_0 - 2, 2i_0 - 1, 2i_0, \dots, p)$  es una

trayectoria monocromática, por lo tanto  $(z_1, z_0) \in F(C(T))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ .

Si  $(2i_0, z_1)$  es negra, entonces  $(z_2 = 0, 1, \dots, 2i_0) \cup (2i_0, z_1)$  es una trayectoria monocromática, por lo tanto  $(z_2, z_1) \in F(C(T))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ .

Concluiremos la prueba del teorema 5.13, analizando el caso en que  $p$  es par y en el que  $p$  es impar:

Caso 1:  $p$  es par. En este caso  $p - 2$  también es impar y como  $p \geq 2$  tenemos que  $p - 2 \geq 0$ . Por la proposición (h) sabemos que  $(z_1, p - 2) \in F(T)$ . Por lo tanto,  $\gamma_4 = (z_1, p - 2, p - 1, p, z_1)$  es un ciclo de longitud 4 contenido en  $T$  con al menos dos flechas negras, sean  $((p - 2, p - 1)$  y  $(p - 1, p)$ . Ahora, como  $\gamma_4$  es un ciclo casimonocromático, se sigue que  $(z_1, p - 2)$  es negra (notemos que  $(p, z_1) = (z_0, z_1)$  es roja), y consecuentemente  $(z_1, p - 2, p - 1, p = z_0)$  es una trayectoria monocromática, por lo que  $(z_1, z_0) \in F(C(T))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ .

Caso 2:  $p$  es impar. Probaremos primero algunas proposiciones:

i) Si  $p$  es impar, entonces para cada  $i \geq 0$  tal que  $1 \leq 2i + 1 \leq p$ ,  $(2i + 1, z_1) \in F(T)$ .

Procedamos por contradicción, supongamos que existe  $i \geq 0$  tal que  $1 \leq 2i + 1 \leq p$  y  $(2i + 1, z_1) \notin F(T)$  y sea

$$2i_0 + 1 = \max\{2i + 1 \mid (2i + 1, z_1) \notin F(T) (1 \leq 2i + 1 \leq p)\}$$

Como  $p = z_0$  y  $(z_0, z_1) \in F(T)$ , se sigue que  $2i_0 + 1 < p$ . Por lo tanto  $(2i_0 + 3, z_1) \in F(T)$  y  $(z_1, 2i_0 + 1) \in F(T)$ .

Sea  $\gamma_4 = (z_1, 2i_0 + 1, 2i_0 + 2, 2i_0 + 3, z_1)$ . Lo anterior implica que  $\gamma_4$  es un ciclo de longitud 4 contenido en  $T$  con dos flechas negras, sean  $(2i_0 + 1, 2i_0 + 2)$  y  $(2i_0 + 2, 2i_0 + 3)$ . La hipótesis del teorema implica que  $\gamma_4$  es un ciclo casimonocromático y por lo tanto por lo menos una de las flechas  $(z_1, 2i_0 + 1)$  o  $(2i_0 + 3, z_1)$  es negra.

Si  $(z_1, 2i_0 + 1)$  es negra, entonces  $(z_1, 2i_0 + 1) \cup (2i_0 + 1, 2i_0 + 2, \dots, p = z_0)$  es una trayectoria monocromática, por lo que  $(z_1, z_0) \in F(C(T))$ , contradiciendo que

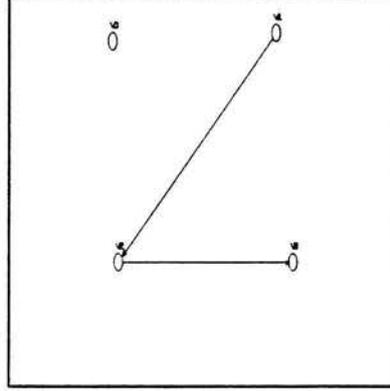


Figura 5.11: Caso j)

$\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ .

Si  $(2i_0+3, z_1)$  es negra, entonces  $(z_2 = 0, 1, \dots, 2i_0+3) \cup (2i_0+3, z_1)$  es una trayectoria monocromática, por lo que  $(z_2, z_1) \in F(C(T))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ .

j) Si  $p$  es impar, entonces  $(1, z_1) \in F(T)$  es azul.

Se sigue directamente del i) que  $(1, z_1) \in F(T)$ . Por lo tanto  $\gamma_3 = (z_1, z_2 = 0, 1, z_1)$  es un ciclo de longitud 3 contenido en  $T$ . Como la flecha  $(z_1, z_2)$  es azul, y además sabemos que la flecha  $(0, 1)$  es negra y, por la hipótesis del teorema  $\gamma_3$  es un ciclo casimonocromático. Se sigue que la flecha  $(1, z_1)$  es azul o es negra.

Si la flecha  $(1, z_1)$  es negra, entonces  $(z_2, 1, z_1)$  es una trayectoria monocromática, lo que implicaría que  $(z_2, z_1) \in F(C(T))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ . Concluimos que  $(1, z_1)$  es azul.

k) Si  $p$  es impar, entonces  $(z_1, p-1) \in F(T)$  es roja.

Como  $p$  es impar, entonces  $p-1$  es par y h) implica que  $(z_1, p-1) \in F(T)$ . Por lo tanto  $\gamma_3 = (z_1, p-1, p, z_1)$  es un ciclo de longitud 3 contenido en  $T$ . Como  $(z_0, z_1) = (p, z_1)$  es roja, y además sabemos que  $(p-1, p)$  es negra y por la hipótesis del teorema  $\gamma_3$  es un ciclo casimonocromático. Se sigue que la flecha  $(z_1, p-1)$  es roja o negra.

Si la flecha  $(z_1, p-1)$  es negra, entonces  $(z_1, p-1, p)$  es una trayectoria monocromática, lo que implicaría que  $(z_1, p) \in F(C(T))$  y por lo tanto  $(p, z_1) \in F(\text{Sim}(C(T)))$  contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ . Concluimos que  $(z_1, p-1)$  es roja.

Terminaremos la prueba del teorema analizando los siguientes subcasos:

Subcaso 2.a:  $(1, p) \in F(T)$ . En este caso,  $\gamma_4 = (p = z_0, z_1, z_2 = 0, 1, p)$  es un ciclo de longitud 4 contenido en  $T$  cuyas flechas están coloreadas con al menos 3 colores, contradiciendo la hipótesis el teorema.

Subcaso 2.b:  $(p, 1) \in F(T)$ . En este caso,  $\gamma_4 = (1, z_1, p-1, p, 1)$  es un ciclo de longitud 4 contenido en  $T$  cuyas flechas están coloreadas con al menos 3 colores pues la proposición j) implica que  $(1, z_1)$  es azul, la proposición k) implica que  $(z_1, p-1)$  es roja y  $(p-1, p)$  es negra, contradiciendo la hipótesis del teorema. Entonces  $p$  no es impar.

Por lo tanto  $p$  no es par ni impar lo que es una contradicción. Esta contradicción surge de suponer que existía un ciclo,  $\gamma$ , contenido en  $\text{Asim}(C(T))$ . Por lo que todo ciclo de  $C(T)$  tiene al menos una flecha simétrica. ■

**Corolario 5.14** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado. Si cada ciclo contenido en  $T$  de longitud a lo más 4 es un ciclo casimonocromático, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

**Demostración.**

Como consecuencia inmediata del teorema 5.13 tenemos que  $C(T)$  es una digráfica núcleo perfecta, en particular  $C(T)$  tiene núcleo. Por el teorema 4.9 sabemos que si  $C(T)$  tiene núcleo, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

**Teorema 5.15** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 contenido en  $T$  es un ciclo monocromático, entonces  $C(T)$  es una digráfica NP.[3].*

**Demostración.**

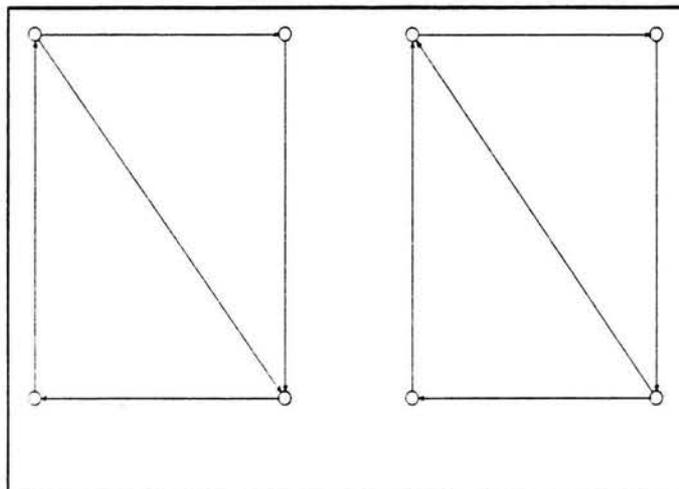


Figura 5.12: (1)  $D$  si  $(0, 2) \in F(T)$ , (2)  $D$  si  $(2, 0) \in F(T)$ .

Probaremos que todo ciclo de longitud 4 contenido en  $T$  es un ciclo casimonocromático.

Sea  $\gamma_4 = (0, 1, 2, 3, 0)$  un ciclo de longitud 4 contenido en  $T$  y supongamos que  $\gamma_4$  no es monocromático. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que las flechas  $(0, 1)$  y  $(1, 2)$  tienen colores distintos, digamos que  $(0, 1)$  es roja y  $(1, 2)$  es azul.

Observemos que las flechas  $(2, 3)$  y  $(3, 0)$  son del mismo color, pues si no lo fueran, si  $(0, 2) \in F(T)$ , entonces el ciclo  $\gamma_3 = (2, 3, 0, 2)$  de longitud 3 contenido en  $T$  no sería monocromático, contradiciendo la hipótesis del teorema.

Si  $(2, 0) \in F(T)$ , entonces el ciclo  $\gamma_3 = (2, 0, 1, 2)$  de longitud 3 contenido en  $T$  no es monocromático, contradiciendo la hipótesis del teorema.

Observemos también que las flechas  $(2, 3)$  y  $(3, 0)$  son ambas rojas o ambas azules, pues si no lo fueran, digamos que ambas fueran negras, si  $(1, 3) \in F(T)$ , entonces  $\gamma_3 = (1, 3, 0, 1)$  no es un triángulo monocromático, contradiciendo la hipótesis del teorema. Si  $(3, 1) \in F(T)$ , entonces  $\gamma_3 = (3, 1, 2, 3)$  no es un triángulo monocromático, contradiciendo la hipótesis del teorema.

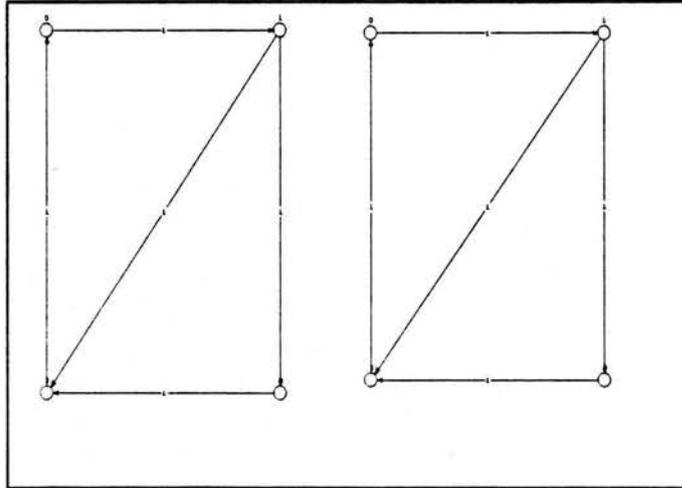


Figura 5.13: (1)  $D$  si  $(1, 3) \in F(T)$ , (2)  $D$  si  $(3, 1) \in F(T)$ .

Entonces las flechas  $(2, 3)$  y  $(3, 0)$  son ambas rojas o ambas azules, de cualquier manera  $\gamma_4$  es un ciclo casimonocromático. Se sigue directamente del teorema 5.13 que  $C(T)$  es una digráfica NP. ■

**Corolario 5.16** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 contenido en  $T$  es un ciclo monocromático, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

**Demostración.**

Como consecuencia inmediata del teorema 5.15 tenemos que  $C(T)$  es una digráfica núcleo perfecta, en particular  $C(T)$  tiene núcleo. Por el teorema 4.9 sabemos que si  $C(T)$  tiene núcleo, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

**Teorema 5.17** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 contenido en  $T$  es  $C(T)$ -monocromático, entonces  $C(T)$  es una digráfica NP.[3]*

**Demostración**

Como  $C(T)$  es una digráfica completa, se sigue del Teorema 5.11 que es suficiente probar que todo ciclo contenido en  $C(T)$  tiene al menos una flecha simétrica. Sea  $\gamma$  un ciclo contenido en  $C(T)$  y supongamos por contradicción que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ . Se sigue que  $\gamma \subseteq T$ . (Pues si  $(u, v) \in F(C(T))$ , entonces  $(u, v) \in F(T)$ , de lo contrario si  $(u, v)$  no estuviera en  $F(T)$  y como  $T$  es torneo,  $(v, u) \in F(T)$ , lo que implicaría que  $(v, u) \in F(C(T))$ , por lo que  $(u, v) \in F(\text{Sim}(C(T)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ ). El ciclo  $\gamma$  es un ciclo hamiltoniano del torneo  $T[V(\gamma)] = T'$ .

Se sigue del Teorema 5.12 que existe un ciclo  $\gamma_3$  de longitud 3 contenido en  $T'$  tal que  $|F(\gamma_3) \cap F(\gamma)| \geq 1$ . Como  $\gamma_3$  es  $C(T)$ -monocromático,  $\forall u, v \in \gamma_3$  hay una  $uv$ -trayectoria monocromática y una  $vu$ -trayectoria monocromática, por lo que  $\forall u, v \in V(C(C(T)))$ ,  $(u, v)$  y  $(v, u) \in F(C(C(T)))$ , pero como  $CC((T)) = C(T)$  (Teorema 4.8),  $\forall u, v \in V(C(T))$ ,  $(u, v)$  y  $(v, u) \in F(C(T))$ . Se sigue que  $\gamma_3 \subseteq \text{Sim}(C(T))$  y que  $F(\gamma) \cap F(\text{Sim}(C(T))) \neq \emptyset$ . ■

**Corolario 5.18** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 contenido en  $T$  es  $C(T)$ -monocromático, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

#### **Demostración.**

Como consecuencia inmediata del Teorema 5.17 tenemos que  $C(T)$  es una digráfica núcleo perfecta, en particular  $C(T)$  tiene núcleo. Por el Teorema 4.9 sabemos que si  $C(T)$  tiene núcleo, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

## Capítulo 6

# Trayectorias monocromáticas y ciclos de longitud 4 en torneos bipartitos coloreados.

Die Mathematik ist das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten: sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger.

Daher kommt es, daß unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet.

David Hilbert.

En el Teorema 5.13 ya probamos que si  $T$  es un torneo  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud a lo más 4 es casimonocromático, entonces  $C(T)$  es NP y por lo tanto  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. En [4] y [2] se probaron resultados similares para la digráfica obtenida al remover una sola flecha de un torneo. Las condiciones suficientes que hasta ahora se conocen, para la existencia de un núcleo

por trayectorias monocromáticas en torneos o casi torneos  $m$ -coloreados ( $m \geq 3$ ), piden que pequeñas subdigráficas como ciclos de longitud a lo mas 4 o torneos transitivos de orden 3 tengan la propiedad de ser monocromáticas o casimonocromáticas.

En este capítulo probaremos que si  $D$  es un torneo bipartito  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 4 es monocromático entonces  $D$  tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas y el resultado es el mejor posible.

El material presentado en este capítulo se obtuvo del artículo [8].

**Definición 6.1** Una digráfica  $D$  es un torneo bipartito si existe una bipartición de  $V(D)$ ,  $\{V_1, V_2\}$  tal que :

- i) Toda flecha de  $D$  tiene un extremo en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ .
- ii) Para todo  $x_1 \in V_1$  y para todo  $x_2 \in V_2$  , tenemos que  $|\{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\} \cap F(D)| = 1$ .

Escribiremos  $D = (V_1, V_2)$  para indicar la partición.

Denotaremos al ciclo con 4 vértices  $C_4$ .

**Teorema 6.2** Sea  $D$  una digráfica bipartita, entonces todo ciclo de  $D$  tiene longitud par.

**Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica bipartita,  $D = (V_1, V_2)$ . Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$  un ciclo en  $D$  tal que  $l(C) = n + 1$ . Demostremos que  $n + 1$  es par. Sea  $G$  la gráfica subyacente de  $D$ , entonces  $G$  es bipartita y  $C$  es un ciclo en  $G$  con  $l(C) = n + 1$ . Por el Teorema 2.9 sabemos que todo ciclo en  $G$  tiene longitud par, por lo que  $n + 1$  es par. ■

Recordemos que en el Teorema 3.7 probamos que si una digráfica  $D$  es tal que todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica, entonces  $D$  es NP. Probaremos algunos lemas, antes de probar el resultado principal.

**Lema 6.3** Sea  $D = (V_1, V_2)$  un torneo bipartito y  $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  un camino en  $D$ . Para  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$   $(u_i, u_j) \in F(D)$  o  $(u_j, u_i) \in F(D)$  si y sólo si  $j - i \equiv 1 \pmod{2}$ .

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $u_0 \in V_1$ , entonces  $u_i \in V_1$  si y sólo si  $i \equiv 0 \pmod{2}$  y  $u_i \in V_2$  si y sólo si  $i \equiv 1 \pmod{2}$ . ■

**Lema 6.4** Para todo torneo bipartito  $D = (V_1, V_2)$ , todo camino cerrado de longitud a lo más 6 en  $D$  es un ciclo de  $D$ .

**Demostración.**

Sea  $C$  un camino cerrado tal que  $l(C) \leq 6$ . Probaremos que  $C$  es un ciclo. Como  $D$  es bipartita  $l(C)$  es par (pues por el Teorema 2.39 sabemos que todo camino cerrado de longitud impar, contiene un ciclo de longitud impar y se sigue del Teorema 6.2 que  $D$  no tiene ciclos de longitud impar).  $l(C) = 2$  es imposible pues un torneo bipartito es una digráfica asimétrica. Supongamos que  $l(C) = 4$  y sea  $C = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_0)$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad  $u_i \in V_1$  para  $i \in \{0, 2\}$  y  $u_j \in V_2$  para  $j \in \{1, 3\}$  lo que implica  $u_i \neq u_j$  para  $i \in \{0, 2\}, j \in \{1, 3\}$ . (Ver figura 6.1).

Como  $(u_1, u_2) \in F(D)$  y  $(u_2, u_3) \in F(D)$  tenemos que  $u_1 \neq u_3$  (pues  $D$  es una digráfica asimétrica) y análogamente  $u_0 \neq u_2$ ; entonces  $C$  es un ciclo.

Finalmente, supongamos que  $l(C) = 6$  y sea  $C = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_0)$ , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $u_i \in V_1$  para  $i \in \{0, 2, 4\}$ ,  $u_j \in V_2$  para  $j \in \{1, 3, 5\}$  lo que implica que  $u_i \neq u_j$  para  $i \in \{0, 2, 4\}$  y  $j \in \{1, 3, 5\}$ . (Ver figura 6.2).

Además como  $\{(u_i, u_{i+1}), (u_{i+1}, u_{i+2})\} \subseteq F(D)$  para  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  (notación  $\pmod{6}$ ) y  $D$  es asimétrica, tenemos que  $u_i \neq u_{i+2}$  para  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  (notación  $\pmod{6}$ ). Entonces  $C$  es un ciclo. ■

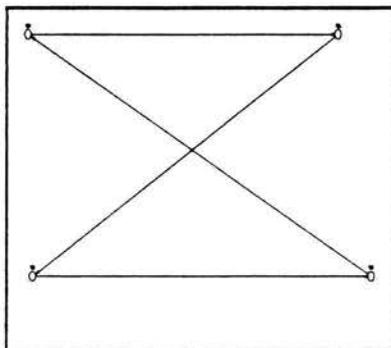


Figura 6.1:  $C$  cuando  $l(C) = 4$ .

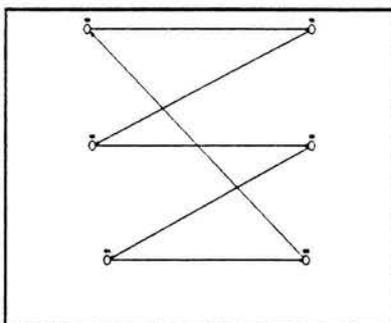


Figura 6.2:  $C$  cuando  $l(C) = 6$ .

**Lema 6.5** Sea  $D$  un torneo bipartito  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 4 es monocromático y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ . Si existe una  $uv$ -trayectoria monocromática pero no existe una  $vu$ -trayectoria monocromática en  $D$ , entonces al menos una de las dos siguientes condiciones se cumple:

- i)  $(u, v) \in F(D)$ .
- ii) existe en  $D$  una  $uv$ -trayectoria de longitud 2.

**Demostración.**

Sea  $D, \{u, v\} \subseteq V(D)$  como en la hipótesis. Procedamos por inducción sobre la longitud de la  $uv$ -trayectoria monocromática.

1° Claramente, el lema 6.5 se cumple si existe una  $uv$ -trayectoria monocromática de longitud a lo más 2.

2° Supongamos que el lema 6.5 se cumple si existe una  $uv$ -trayectoria monocromática de longitud  $l$ ,  $2 \leq l \leq n$ .

3° Ahora, supongamos que existe una  $uv$ -trayectoria monocromática,  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_{n+1} = v)$  con  $l(T) = n + 1$ ; podemos suponer, sin pérdida de generalidad que  $T$  es de color 1.

**Afirmación 6.6** Si  $(u_i, v) \in F(D)$  para alguna  $i \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$ , entonces  $(u, v) \in F(D)$  o existe una  $uv$ -trayectoria de longitud 2.

Supongamos que  $(u_i, v) \in F(D)$  para alguna  $i \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$  y sea  $i_0 = \min\{i \in \{0, 1, \dots, n - 2\} \mid (u_i, v) \in F(D)\}$ . si  $i_0 = 0$  entonces  $(u, v) \in F(D)$  y si  $i_0 = 1$  entonces  $(u, u_1, v)$  es una  $uv$ -trayectoria de longitud 2, así que podemos suponer  $i_0 \in \{2, \dots, n - 2\}$ .

Como  $i_0 \equiv i_0 - 2 \pmod{2}$  e  $i_0$  no es congruente con  $n + 1 \pmod{2}$  (pues  $(u_{i_0}, v) \in F(D)$ ) tenemos que  $i_0 - 2$  no es congruente con  $n + 1 \pmod{2}$  y se sigue del Lema 6.3 que  $(u_{i_0-2}, v) \in F(D)$  o  $(v, u_{i_0-2}) \in F(D)$ .

La elección de  $i_0$  implica que  $(v, u_{i_0-2}) \in F(D)$  y por lo tanto  $C_4 = (u_{i_0-2}, u_{i_0-1}, u_{i_0}, v, u_{i_0-2})$  es un ciclo de longitud 4, que por hipótesis es monocromático, más aún como

$(u_{i_0-1}, u_{i_0})$  es de color 1 (pues es una flecha de  $T$ ), se sigue que  $C_4$  es de color 1. Entonces tenemos que  $T' = (u, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, v)$  es una  $uv$ -trayectoria tal que  $l(T') < n + 1$ , y la hipótesis inductiva implica que  $(u, v) \in F(D)$  o que existe una  $uv$ -trayectoria de longitud 2.

Se sigue del Lema 6.3 que para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$ ,  $(u_i, u_{i+3}) \in F(D)$  o  $(u_{i+3}, u_i) \in F(D)$ , pues  $i$  no es congruente con  $i + 3 \pmod{2}$ .

Analizaremos los dos posibles casos:

**Caso a:** Existe  $i \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$  tal que  $(u_i, u_{i+3}) \in F(D)$ . Sea  $j_0 = \max\{j \in \{i + 3, \dots, n + 1\} \mid (u_i, u_j) \in F(D)\}$ . Notemos que el Lema 6.3 implica que  $i$  no es congruente con  $j_0 \pmod{2}$ .

**Caso a.1:**  $j_0 = n + 1$ .

En este caso el resultado se sigue de la Afirmación 6.6.

**Caso a.2:**  $j_0 = n$  y  $i = 0$ .

Tenemos que  $(u_0 = u_i, u_{j_0} = u_n, u_{n+1})$  es una  $uv$ -trayectoria de longitud 2.

**Caso a.3:**  $j_0 = n$  e  $i \geq 1$ .

Como  $i$  no es congruente con  $j_0 \pmod{2}$  tenemos que  $i - 1$  no es congruente con  $j_0 + 1 = n + 1 \pmod{2}$  y se sigue del Lema 6.3 que  $(u_{i-1}, u_{n+1} = v) \in F(D)$  o  $(v, u_{i-1}) \in F(D)$ . Si  $(u_{i-1}, v) \in F(D)$  la afirmación del Lema 6.5 se sigue de la Afirmación 6.6. Si  $(v, u_{i-1}) \in F(D)$  tenemos  $C_4 = (u_{i-1}, u_i, u_{j_0} = u_n, v, u_{i-1})$  un ciclo de longitud 4 que por hipótesis es monocromático, de hecho  $C_4$  es de color 1 (pues  $(u_{i-1}, u_i) \in F(T) \cap F(C_4)$ ) por lo que  $T' = (u, T, u_i) \cup (u_i, u_{j_0} = u_n, u_{n+1} = v)$  es una  $uv$ -trayectoria monocromática con  $l(T') \leq n$ . Se sigue de la hipótesis inductiva que  $(u, v) \in F(D)$  o que existe una  $uv$ -trayectoria de longitud 2.

**Caso 2.4:**  $j_0 \leq n - 1$ .

$i$  no es congruente con  $j_0 + 2 \pmod{2}$  (pues  $i$  no es congruente con  $j_0 \pmod{2}$ ), así que se sigue del Lema 6.3 que  $(u_i, u_{j_0+2}) \in F(D)$  o  $(u_{j_0+2}, u_i) \in F(D)$ ; la elección de  $j_0$

implica que  $(u_{j_0+2}, u_i) \in F(D)$ . Por lo tanto  $C_4 = (u_i, u_{j_0}, u_{j_0+1}, u_{j_0+2}, u_i)$  es un ciclo de longitud 4 que por hipótesis es monocromático y de color 1 (pues  $(u_{j_0}, u_{j_0+1}) \in F(T) \cap F(C_4)$ ), en particular  $(u_i, u_{j_0})$  es de color 1, entonces  $T' = (u, T, u_i) \cup (u_i, u_{j_0}) \cup (u_{j_0}, T, v)$  es una  $uv$ -trayectoria monocromática tal que  $l(T') \leq n$  y la hipótesis inductiva implica que  $(u, v) \in F(D)$  o que existe una  $uv$ -trayectoria de longitud 2.

Caso b: Para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ ,  $(u_{i+3}, u_i) \in F(D)$ .

$C_4^i = (u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_i)$  es un ciclo de longitud 4 que por hipótesis es monocromático, más aún de color 1 porque  $(u_i, u_{i+1}) \in (F(T) \cap F(C_4^i))$ , por lo que para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ ,  $(u_{i+3}, u_i)$  es de color 1. Sea  $k \in \{1, 2, 3\}$  tal que  $k \equiv n+1 \pmod{3}$ , entonces  $(v = u_{n+1}, u_{n-2}, u_{n-5}, \dots, u_k) \cup (u_k, T, u_3) \cup (u_3, u_0)$  es una  $uv$ -trayectoria monocromática, contradiciendo la hipótesis. ■

**Teorema 6.7** *Sea  $D$  un torneo bipartito  $m$ -coloreado. Si todo ciclo de longitud 4 en  $D$  es monocromático, entonces  $C(D)$  es una digráfica NP.*

### **Demostración.**

Durante la prueba utilizaremos el hecho de que todo camino cerrado de longitud al menos 6 es un ciclo (por Lema 6.4) sin más explicación.

Por el Teorema 3.7 será suficiente probar que todo ciclo de  $C(D)$  tiene al menos una flecha simétrica. Procederemos por contradicción. Supongamos que existe  $C = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$  un ciclo de  $C(D)$  tal que  $C \subseteq \text{Asim}C(D)$ .

**Afirmación 6.8** *Para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$  o existe una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria de longitud 2 (notación  $\pmod{n+1}$ ).*

Sea  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Como  $(u_i, u_{i+1}) \in F(C(D))$ , entonces existe una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria monocromática en  $D$ , y como  $C$  no tiene flechas simétricas, entonces no existe una  $u_{i+1} u_i$ -trayectoria monocromática en  $D$ , así que la Afirmación 6.8 se sigue del Lema 6.5.

Ahora consideremos dos casos posibles:

Caso a:  $n = 2$ .

Como  $D$  no tiene ciclos de longitud impar, tenemos que para alguna  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,  $(u_i, u_{i+1}) \notin F(D)$  (notación(mod 3)). Sin pérdida de generalidad, podemos asumir  $(u_0, u_1) \notin F(D)$ , entonces se sigue de la afirmación 2 que existe una  $u_0, u_1$ -trayectoria de longitud 2 en  $D$ , digamos  $(u_0, v_0, u_1)$ .

Caso a.1:  $\{(u_1, u_2), (u_2, u_0)\} \subseteq F(D)$ .

En este caso  $(u_0, v_0, u_1, u_2, u_0)$  es un ciclo de longitud 4 en  $D$ , que por hipótesis es monocromático y por lo tanto  $(u_1, u_2, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria monocromática en  $D$ . Entonces  $(u_0, u_1)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , contradiciendo nuestra suposición.

Caso a.2:  $\{(u_1, u_2), (u_2, u_0)\} \not\subseteq F(D)$ .

**Afirmación 6.9** *Podemos suponer que  $\{(u_1, u_2), (u_2, u_0)\} \cap F(D) = \emptyset$ .*

Si  $(u_1, u_2) \notin F(D)$ , entonces  $(u_2, u_0) \notin F(D)$ , pues como  $(u_1, u_2) \notin F(D)$  se sigue de la Afirmación 6.8 que existe una  $u_1u_2$ -trayectoria de longitud 2, digamos  $(u_1, v_1, u_2)$ , así que si  $(u_2, u_0) \in F(D)$  obtendríamos  $(u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, u_0)$  un ciclo de longitud 5 contenido en  $D$  lo que es una contradicción. Análogamente puede probarse que si  $(u_2, u_0) \notin F(D)$ , entonces  $(u_1, u_2) \notin F(D)$ .

Se sigue de la Afirmación 6.8 que existe una  $u_1u_2$ -trayectoria de longitud 2 en  $D$ , digamos  $(u_1, v_1, u_2)$  y una  $u_2u_0$ -trayectoria de longitud 2 en  $D$ , digamos  $(u_2, v_2, u_0)$ . Entonces  $(u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_0)$  es un ciclo de longitud 6 en  $D$  y se sigue del Lema 6.3 que  $(u_0, v_1) \in F(D)$  o  $(v_1, u_0) \in F(D)$ . Si  $(u_0, v_1) \in F(D)$  obtenemos  $(u_0, v_1, u_2, v_2, u_0)$  un ciclo de longitud 4 en  $D$  que por hipótesis es monocromático, en particular  $(u_0, v_1, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria monocromática en  $D$  lo que implicaría que  $(u_2, u_0)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$  contradiciendo nuestra suposición. Si  $(v_1, u_0) \in F(D)$  obtenemos  $(u_0, v_0, u_1, v_1, u_0)$  un ciclo de longitud 4 en  $D$  que por hipótesis es monocromático,

en particular  $(u_1, v_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria monocromática en  $D$  lo que implicaría que  $(u_0, u_1)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$  contradiciendo nuestra suposición.

Caso b:  $n \geq 3$ .

En lo que sigue, la notación se tomará mod  $n + 1$ .

Por la Afirmación 6.8, para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  podemos tomar una  $u_iu_{i+1}$ -trayectoria como sigue:

$$T_i = \left\{ \begin{array}{l} (u_i, u_{i+1}) \text{ si } (u_i, u_{i+1}) \in F(D) \\ \text{una } u_iu_{i+1} \text{ -trayectoria de longitud 2 si } (u_i, u_{i+1}) \notin F(D) \end{array} \right\}$$

Sea  $C' = \bigcup_{i=1}^n T_i$ . Entonces  $C'$  es un camino cerrado en  $D$ , sea  $C' = (z_0, z_1, \dots, z_k, z_0)$  y definamos la función  $\phi: \{0, 1, \dots, k\} \rightarrow V(C)$  como sigue: para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  si  $T_i = (u_i = z_{i_0}, z_{i_0+1} = u_{i+1})$ , entonces  $\phi(i_0) = z_{i_0} = u_i$  y si  $T_i = (u_i = z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2} = u_{i+1})$  entonces  $\phi(i_0) = \phi(i_0+1) = z_{i_0}$ .

Diremos que un índice  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$  es un índice principal cuando  $\phi(j) = z_j$ ; y denotaremos por  $I_p$  al conjunto de índices principales. Observemos que en  $C'$  todos los índices son diferentes y observemos también que un vértice  $u_j$  puede corresponder a un índice principal  $l$  y también a uno no principal  $p$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $u_0 = z_0$ . Como  $D$  es un torneo bipartito, tenemos que  $k \equiv 1 \pmod{2}$  y por el Lema 6.3 para cada  $i \in \{1, \dots, \frac{k-3}{2}\}$ ,  $(z_0, z_{2i+1}) \in F(D)$  o  $(z_{2i+1}, z_0) \in F(D)$ . Consideremos los siguientes casos:

Caso b.1:  $(z_3, z_0) \in F(D)$ .

En este caso tenemos  $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_0)$  un ciclo de longitud 4 en  $D$  que por hipótesis es monocromático. La definición de  $C'$  implica que  $z_1 = u_1$  o  $z_2 = u_1$ . Si  $z_1 = u_1$  entonces  $(u_1 = z_1, z_2, z_3, z_0 = u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria monocromática en  $D$  lo que implica que  $(u_0, u_1)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , contradiciendo nuestra suposición

sobre  $C$ . Entonces  $z_1 \neq u_1$ , consecuentemente  $z_2 = u_1$  y por lo tanto  $(u_1 = z_2, z_3, z_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria monocromática en  $D$ , por lo que  $(u_0, u_1)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , contradiciendo nuestra suposición sobre  $C$ .

Caso b.2:  $(z_0, z_{k-2}) \in F(D)$ .

La suposición del subcaso b.2 implica que  $(z_0, z_{k-2}, z_{k-1}, z_k, z_0)$  es un ciclo de longitud 4 en  $D$  que por hipótesis es monocromático. La construcción de  $C'$  implica que  $z_k = u_n$  o  $z_{k-1} = u_n$ . Si  $z_k = u_n$ , entonces  $(u_0 = z_0, z_{k-2}, z_{k-1}, z_k = u_n)$  es una  $u_0u_n$ -trayectoria monocromática en  $D$  lo que implica que  $(u_n, u_0)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , contradiciendo nuestra suposición sobre  $C$ . Entonces  $z_k \neq u_n$ , consecuentemente  $z_{k-1} = u_n$  y por lo tanto  $(u_0 = z_0, z_{k-2}, z_{k-1} = u_n)$  es una  $u_0u_n$ -trayectoria monocromática en  $D$ , por lo que  $(u_n, u_0)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , contradiciendo nuestra suposición sobre  $C$ .

Caso b.3:  $(z_0, z_3) \in F(D)$  y  $(z_{k-2}, z_0) \in F(D)$ .

Como  $\{(z_0, z_1), (z_0, z_3), (z_{k-2}, z_0)\} \subseteq F(D)$  tenemos que  $k - 2 \geq 5$  y existe  $j \in \{1, \dots, \frac{k-5}{2}\}$  tal que  $(z_0, z_{2j+1}) \in F(D)$  y  $(z_{2j+3}, z_0) \in F(D)$ .

Sea  $i_0 = \min\{j \in \{1, \dots, \frac{k-5}{2}\} \mid \{(z_0, z_{2j+1}), (z_{2j+3}, z_0)\} \subseteq F(D)\}$ . Por lo tanto  $C' = (z_0, z_{2i_0+1}, z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_0)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 en  $D$  que por hipótesis es monocromático. Ahora consideremos dos posibles casos:

Caso b.3.1:  $2i_0 + 1 \in I_p$ .

En este caso  $z_{2i_0+1} = u_j$  para  $j \in \{2, \dots, n - 2\}$  (pues  $3 \leq 2i_0 + 1 \leq k - 4$ ). Por la construcción de  $C'$  tenemos que  $z_{2i_0+2} = u_{j+1}$  o  $z_{2i_0+3} = u_{j+1}$ . Si  $z_{2i_0+2} = u_{j+1}$  entonces  $(u_{j+1} = z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_0, z_{2i_0+1} = u_j)$  es una  $u_{j+1}u_j$ -trayectoria monocromática en  $D$  lo que implica que  $(u_j, u_{j+1})$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$  contradiciendo nuestra suposición. Por lo tanto  $z_{2i_0+2} \neq u_{j+1}$  y en consecuencia  $z_{2i_0+3} = u_{j+1}$ , entonces  $(u_{j+1} = z_{2i_0+3}, z_0, z_{2i_0+1} = u_j)$  es una  $u_{j+1}u_j$ -trayectoria monocromática en  $D$  lo que implica que  $(u_j, u_{j+1})$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$  contradiciendo nuestra

suposición.

Caso b.3.2:  $2i_0 + 1 \notin I_p$ .

Por construcción de  $C'$  tenemos que  $\{2i_0, 2i_0+2\} \subseteq I_p$ , es decir, que  $z_{2i_0+2} = u_j$  para alguna  $j \in \{2, \dots, n-1\}$ .

El Lema 6.3 implica que  $(z_{2i_0}, z_{2i_0+3}) \in F(D)$  o  $(z_{2i_0+3}, z_{2i_0}) \in F(D)$ . Si  $(z_{2i_0+3}, z_{2i_0}) \in F(D)$  entonces  $(z_{2i_0}, z_{2i_0+1}, z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_{2i_0})$  es un ciclo de longitud 4 en  $D$  que por hipótesis es monocromático; entonces  $(u_j = z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_{2i_0} = u_{j-1})$  es una  $u_j u_{j-1}$ -trayectoria monocromática en  $D$  lo que implica que  $(u_{j-1}, u_j)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$  contradiciendo nuestra suposición. Por lo tanto  $(z_{2i_0}, z_{2i_0+3}) \in F(D)$ , observemos que la elección de  $i_0$  implica que  $(z_0, z_{2i_0-1}) \in F(D)$  (si  $(z_{2i_0-1}, z_0) \in F(D)$  el hecho de que  $(z_0, z_1) \in F(D)$  implica que existe  $j \leq i_0 - 2$  tal que  $(z_0, z_{2j+1}) \in F(D)$  y  $(z_{2j+3}, z_0) \in F(D)$  contradiciendo la elección de  $i_0$ ) por lo tanto  $C'' = (z_0, z_{2i_0-1}, z_{2i_0}, z_{2i_0+3}, z_0)$  es un ciclo de longitud 4 en  $D$  que por hipótesis debe ser monocromático; como  $(z_{2i_0+3}, z_0) \in F(C) \cap F(C'')$  tenemos que  $C$  y  $C''$  son del mismo color, entonces  $(u_j = z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_0, z_{2i_0-1}, z_{2i_0} = u_{j-1})$  es una  $u_j u_{j-1}$ -trayectoria monocromática en  $D$  lo que implica que  $(u_{j-1}, u_j)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$  contradiciendo nuestra suposición. ■

El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema 6.7

**Corolario 6.10** *Sea  $D$  un torneo bipartito  $m$ -coloreado. Si todo ciclo dirigido de longitud 4 en  $D$  es monocromático, entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

**Demostración.**

Como consecuencia inmediata del teorema 6.7 tenemos que  $C(T)$  es una digráfica núcleo perfecta, en particular  $C(T)$  tiene núcleo. Por el teorema 4.9 sabemos que si  $C(T)$  tiene núcleo, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

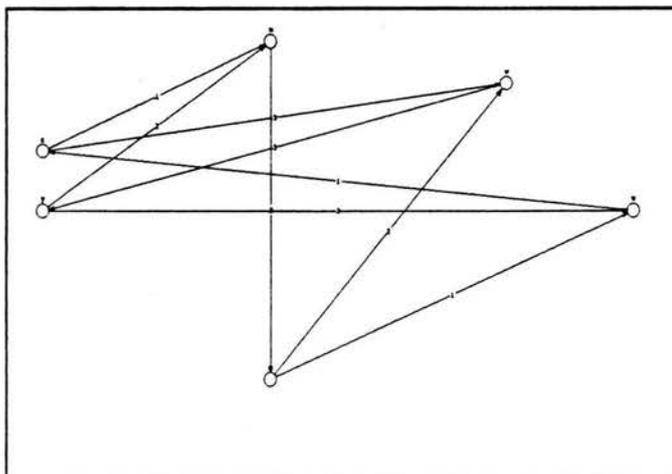


Figura 6.3:  $D$ .

**Observación 6.11** *La hipótesis de que todo ciclo dirigido de longitud 4 en el corolario 6.10 es necesaria.*

Sea  $D$  el torneo bipartito 3-coloreado definido como sigue:

$V(D) = \{u, v, w, x, y, z\}$  y  $F(D) = \{(u, x), (x, v), (v, y), (y, w), (w, z), (z, u), (x, w), (y, u), (z, v)\}$ ; las flechas  $(x, w)$ ,  $(w, z)$  y  $(z, u)$  son de color 1; las flechas  $(y, u)$ ,  $(u, x)$  y  $(x, v)$  son de color 2 y las flechas  $(z, v)$ ,  $(v, y)$  y  $(y, w)$  son de color 3. Los únicos ciclos de longitud 4 en  $D$  son  $(u, x, w, z, u)$ ,  $(v, y, u, x, v)$  y  $(w, z, v, y, w)$  que son casi-monocromáticos. (figura 6.3)

La digráfica  $C(D)$ , (figura 6.4) es una digráfica completa que no tiene núcleo, pues como es completa su núcleo debe ser un sólo vértice. Analizaremos cada uno de sus vértices:

$u$  no es núcleo pues  $u$  no absorbe a  $v$ .

$v$  no es núcleo pues  $v$  no absorbe a  $y$  ni a  $w$ .

$w$  no es núcleo pues  $w$  no absorbe a  $u$ .

$x$  no es núcleo pues  $x$  no absorbe a  $z$  ni a  $v$  ni a  $w$ .

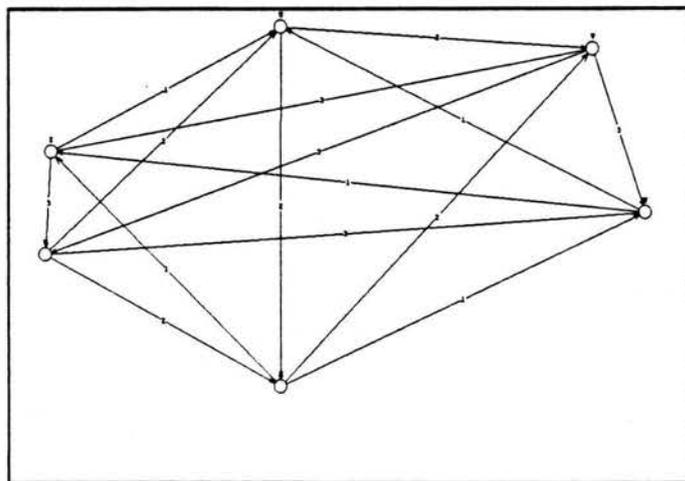


Figura 6.4:  $C(D)$

$y$  no es núcleo pues  $y$  no absorbe a  $x$  ni a  $w$  ni a  $u$ .

$z$  no es núcleo pues  $z$  no absorbe a  $u$  ni a  $v$  ni a  $y$ .

Entonces  $C(D)$  no tiene núcleo y por lo tanto  $D$  no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Más aún puede construirse una familia infinita de digráficas cuyos ciclos de longitud 4 sean casimonocromáticos y que no tenga núcleo por trayectorias monocromáticas como sigue: Sea  $D_n$  la digráfica obtenida de  $D$  (la digráfica descrita en el párrafo anterior) al añadir los vértices  $z_1, z_2, \dots, z_n$  y flechas de color 3 desde cada uno de estos vértices hacia  $u, v$  y  $w$ , respectivamente.

**Observación 6.12** *La suposición de que todo ciclo de longitud 4 en un torneo bipartito  $D$  es monocromático, no implica que todo ciclo de longitud 6 sea monocromático.*

En la digráfica  $D$  de la figura 6.5, todo ciclo de longitud 4 es monocromático, de hecho es de color 1, y el único ciclo de longitud 6  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  es monocromático, pues 5 de sus flechas tienen color 1 y la sexta flecha tiene color 2.

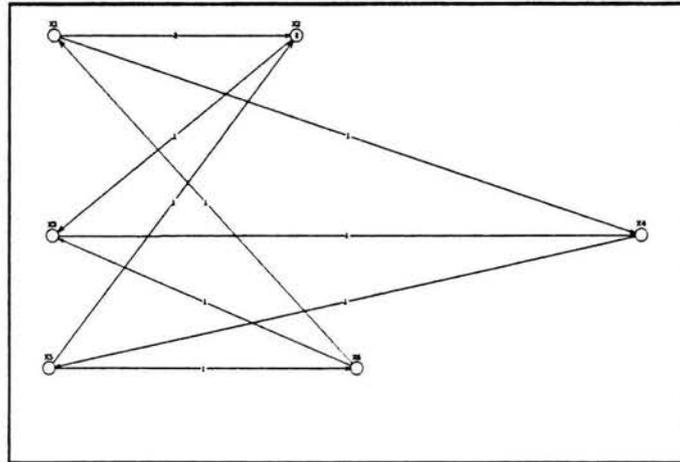


Figura 6.5:  $D$ , un torneo bipartito.

**Observación 6.13** *Para cada  $m$  existe un torneo bipartito hamiltoniano  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 4 es monocromático.*

**Demostración.**

Sea  $D$  la digráfica  $m$ -coloreada definida como sigue:

$$V(D) = X \cup Y \cup Z \cup W \text{ donde;}$$

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}, Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}, W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

$$F(D) = X_Y \cup Y_Z \cup Z_W \cup W_X \cup Z_Y \cup W_Z \cup X_W \text{ donde;}$$

$$\begin{aligned}
X_Y &= \{(x_i, y_j) | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}\}, \\
Y_Z &= \{(y_i, z_i) | i \in \{1, 2, \dots, m\}\}, \\
Z_W &= \{(z_i, w_i) | i \in \{1, 2, \dots, m\}\}, \\
W_X &= \{(w_i, x_{i+1}) | i \in \{1, 2, \dots, m-1\}\} \cup \{(w_m, x_1)\}, \\
Z_Y &= \{(z_i, y_j) | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j\} \\
W_Z &= \{(w_i, z_j) | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j\} \\
X_W &= \{(x_i, w_j) | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j+1\}.
\end{aligned}$$

Notación mod  $m$ .

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , la flecha  $(x_i, y_i)$  es de color  $i$  y cualquier otra flecha es de color 1.

Claramente  $D$  es un torneo bipartito  $m$ -coloreado, con bipartición  $V_1 = X \cup Z$  y  $V_2 = Y \cup W$ , donde por construcción todas las flechas tienen un extremo en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ . Además, por la definición de  $D$  podemos construir  $C = (x_1, y_1, z_1, w_1, x_2, y_2, z_2, w_2, x_3, \dots, x_m, y_m, z_m, w_m, x_m)$  es un ciclo hamiltoniano en  $D$ .

Ahora, sea  $C$  un ciclo de longitud 4 en  $D$  vamos a ver que es monocromático. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$ . Supongamos por contradicción que  $(v_1, v_2)$  es de color  $i \neq 1$ . Entonces  $(v_1, v_2) = (x_i, y_i)$ . Por la definición de  $D$   $(v_2, v_3) = (y_i, z_i)$  y  $(v_3, v_4) = (z_i, w_i)$  ó  $(v_3, v_4) = (z_i, y_j)$   $j \neq i$ . Si  $v_4 = w_i$ , como  $v_1 = x_1$ ,  $(v_4, v_1) \notin F(D)$ , una contradicción.

Si  $v_4 = y_j$ ,  $j \neq i$ , como  $v_1 = x_1$ ,  $(v_4, v_1) \notin F(D)$ , una contradicción.

Por lo tanto todo ciclo de longitud 4 en  $D$  es monocromático.



## Capítulo 7

# Ciclos de longitud 3 y ciclos de longitud 4 monocromáticos en torneos $k$ -partitos.

Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft  
nicht ohne Beweis geglaubt werden.

R. Dedekind.

En este capítulo formularemos propiedades importantes sobre torneos  $k$ -partitos que servirán como base para la prueba de uno de los resultados principales de este trabajo, que si  $D$  es un torneo  $k$ -partito  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 y todo ciclo de longitud 4 contenido en  $D$  es monocromático, entonces  $C(D)$  es núcleo perfecta y por lo tanto  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

El material presentado en este capítulo se obtuvo del artículo [9].

**Definición 7.1** Una digráfica  $D$  es un **torneo  $k$ -partito** si existe  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  una partición de  $V(D)$  en  $k$  conjuntos tal que:

i) Para cualquier  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $F(D[V_i]) = \emptyset$  y

ii) Si  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$  e  $i \neq j$ , entonces entre cualquier vértice de  $V_i$  y cualquier vértice de  $V_j$  existe una y sólo una flecha en  $D$ .

Observemos que un torneo  $T$  con  $p$  vértices es un torneo  $p$ -partito con partición  $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$  donde  $V_i = \{x_i\}$  y  $V(T) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ .

Claramente, un torneo bipartito es un caso especial de un torneo  $k$ -partito con  $k = 2$ .

**Definición 7.2** Sea  $D$  una digráfica, denotamos por  $\Gamma^-(u)$  al conjunto de todos los vértices de  $D$  que son **vecinos interiores** de  $u$ , análogamente denotamos por  $\Gamma^+(u)$  al conjunto de todos los vértices de  $D$  que son **vecinos exteriores** de  $u$ . Es decir

$$\Gamma^-(u) = \{v \in V(D) \mid (v, u) \in F(D)\} \text{ y}$$

$$\Gamma^+(u) = \{v \in V(D) \mid (u, v) \in F(D)\}$$

**Lema 7.3** Sea  $D$  un torneo  $k$ -partito,  $k \geq 2$ . Sean  $\{x, y\} \subseteq V(D)$ . Si  $(x, y) \notin F(D)$  y  $(y, x) \notin F(D)$ , entonces  $(x, u) \in F(D)$  ó  $(u, x) \in F(D)$  para toda  $u \in \Gamma^-(y) \cup \Gamma^+(y)$ .

**Demostración.**

Sea  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  una partición de  $V(D)$  en  $k$  conjuntos tal que satisface la definición de torneo  $k$ -bipartito.

Si  $(x, y) \notin F(D)$  y  $(y, x) \notin F(D)$ , entonces  $\{x, y\} \subseteq V_i$  para alguna  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Como consecuencia del inciso i) de la definición de torneo  $k$ -partito tenemos que  $\Gamma^-(y) \cap V_i = \emptyset$  y  $\Gamma^+(y) \cap V_i = \emptyset$ . Entonces si  $u \in \Gamma^-(y) \cup \Gamma^+(y)$  tenemos que  $u \in V_j$  para alguna  $j \neq i$ .

Por el inciso ii) de la definición de torneo  $k$ -partito tenemos que entre  $x$  e  $u$  existe una y sólo una flecha en  $D$ , es decir,  $(x, u) \in F(D)$  ó  $(u, x) \in F(D)$ . ■

**Definición 7.4** Sea  $D$  una digráfica y sean  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ . Decimos que una  $uv$ -trayectoria  $T$  en  $D$  es **minimal** si  $D[V(T)]$  no contiene una  $uv$ -trayectoria de longitud menor que la de  $T$ .

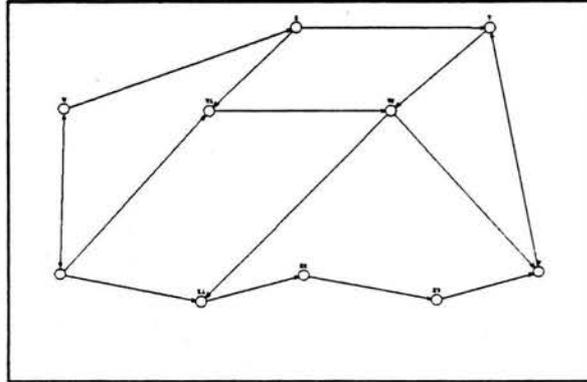


Figura 7.1: Digráfica  $D$ .

En la figura 7.1,  $T_1 = (u, y_1, y_2, v)$  es una  $uv$ -trayectoria minimal en  $D$ , sin embargo  $T_2 = (u, x_1, x_2, x_3, v)$  no es una  $uv$ -trayectoria minimal en  $D$ , pues en  $D[V(T)]$   $l(T_1) < l(T_2)$ .

**Lema 7.5** Sea  $D$  un torneo  $k$ -partito  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 y todo ciclo de longitud 4 contenido en  $D$  es monocromático. Sean  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , tales que existe  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  en  $D$  una  $uv$ -trayectoria monocromática con  $l(T) \geq 3$ . Supongamos que para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$  y toda  $j \in \{i+2, \dots, n\}$ ,  $(u_i, u_j) \notin F(D)$ . Entonces para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  existe en  $D$  una  $u_i u$ -trayectoria del mismo color que  $T$ .

#### **Demostración.**

Supongamos que  $T$  es de color 1. Procederemos por inducción sobre  $i$ .

1° Supongamos que  $i = 1$ . Si  $(u_2, u_0) \in F(D)$  entonces  $C = (u_0, u_1, u_2, u_0)$  es un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático. Como  $(u_0, u_1)$  es de color 1 entonces  $C$  es de color 1, esto implica que  $(u_2, u_0)$  es de color 1. Así  $(u_1, u_2, u_0 = u)$  es una  $u_1 u$ -trayectoria de color 1 en  $D$ .

Si  $(u_2, u_0) \notin F(D)$ , por hipótesis  $(u_0, u_2) \notin F(D)$ , entonces por el Lema 7.3 existe

una flecha entre  $u_0$  y  $u_3$ . Como por hipótesis  $(u_0, u_3) \notin F(D)$ , entonces  $(u_3, u_0) \in F(D)$ . Así,  $C = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_0)$  es un  $C_4$  en  $D$  que por hipótesis es monocromático. Como  $(u_0, u_1)$  es de color 1, entonces  $C$  es de color 1, esto implica que  $(u_3, u_0)$  es de color 1. Así  $(u_1, u_2, u_3, u_0 = u)$  es una  $u_1u$ -trayectoria de color 1 en  $D$ .

2° Supongamos que para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  existe  $T'$  una  $u_iu$ -trayectoria de color 1 en  $D$ .

3° Ahora veamos que existe una  $u_{i+1}u$ -trayectoria de color 1 en  $D$ . Si  $(u_{i+1}, u_{i-1}) \in F(D)$ , entonces  $C = (u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i-1})$  es un  $C_3$  en  $D$ , que por hipótesis es monocromático. Como  $(u_{i-1}, u_i)$  es de color 1 entonces  $C$  es de color 1, esto implica que  $(u_{i+1}, u_{i-1})$  es de color 1. Así  $(u_{i+1}, u_{i-1}, u_i) \cup T'$  contiene una  $u_{i+1}u$ -trayectoria de color 1 en  $D$ .

Supongamos que  $(u_{i+1}, u_{i-1}) \notin F(D)$  y consideremos los siguientes dos casos:

Caso a: Supongamos que  $i \leq n-2$ . Como  $(u_{i+1}, u_{i-1}) \notin F(D)$  y por hipótesis  $(u_{i-1}, u_{i+1}) \notin F(D)$ , entonces por el Lema 7.3 existe una flecha entre  $u_{i-1}$  y  $u_{i+2}$ . Por hipótesis  $(u_{i-1}, u_{i+2}) \notin F(D)$  entonces  $(u_{i+2}, u_{i-1}) \in F(D)$ . Así  $C = (u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$  es un  $C_4$  en  $D$  que por hipótesis es monocromático. Como  $(u_{i+1}, u_{i+2})$  es de color 1 entonces  $C$  es de color 1, esto implica que  $(u_{i+2}, u_{i-1})$  es de color 1. Entonces  $(u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i-1}, u_i) \cup T'$  contiene una  $u_{i+1}u$ -trayectoria de color 1 en  $D$ .

Caso b: Supongamos que  $i = n-1$ . Como  $l(T) = n \geq 3$ , entonces  $i \geq 2$ . Como  $(u_{i+1}, u_{i-1}) \notin F(D)$  y por hipótesis  $(u_{i-1}, u_{i+1}) \notin F(D)$ , entonces por el Lema 7.3 existe una flecha entre  $u_{i-2}$  y  $u_{i+1}$ . Por hipótesis  $(u_{i-2}, u_{i+1}) \notin F(D)$  entonces  $(u_{i+1}, u_{i-2}) \in F(D)$ . Así  $C = (u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i-2})$  es un  $C_4$  en  $D$  que por hipótesis es monocromático. Como  $(u_{i-2}, u_{i-1})$  es de color 1 entonces  $C$  es de color 1, esto implica que  $(u_{i+1}, u_{i-2})$  es de color 1.

Entonces  $(u_{i+1}, u_{i-2}, u_{i-1}, u_i) \cup T'$  contiene una  $u_{i+1}u$ -trayectoria de color 1 en  $D$ .

Por lo tanto, para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe en  $D$  una  $u_iu$ -trayectoria de color 1. ■

**Lema 7.6** *Sea  $D$  un torneo  $k$ -partito  $m$ -coloreado tal que todo  $C_3$  y  $C_4$  contenido en  $D$  es monocromático. Sean  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , tales que existe en  $D$  una  $uv$ -trayectoria monocromática y no existe ninguna  $vu$ -trayectoria monocromática. Entonces  $(u, v) \in F(D)$  o existe una  $uv$ -trayectoria de longitud 2.*

**Demostración.**

Supongamos que  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria monocromática en  $D$  de longitud mínima, sea 1 el color de  $T$ . Si  $l(T) = 1$  ó  $l(T) = 2$  entonces se satisface ya la conclusión del teorema. Supongamos que  $l(T) \geq 3$ .

Caso a: Supongamos que existe  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $(u_i, u_j) \in F(D)$  para algún  $j \geq i+2$ . Sea  $i_0 = \min\{i \in \{0, 1, \dots, n-2\} | (u_i, u_j) \in F(D) \text{ para algún } j \geq i+2\}$  y sea  $j_0 = \max\{j \in \{i_0+2, \dots, n\} | (u_{i_0}, u_j) \in F(D)\}$

Subcaso a.1: Supongamos que  $j_0 \leq n-2$ . Por la elección de  $j_0$  tenemos que  $(u_{i_0}, u_{j_0+1}) \notin F(D)$ . Si  $(u_{j_0+1}, u_{i_0}) \in F(D)$ , entonces  $C = (u_{i_0}, u_{j_0}, u_{j_0+1}, u_{i_0})$  es un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático. Como  $(u_{j_0}, u_{j_0+1})$  es de color 1, entonces  $C$  es de color 1, esto implica que  $(u_{i_0}, u_{j_0})$  es de color 1. Así  $T' = (u = u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_{j_0}) \cup (u_{j_0}, T, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria de color 1 de longitud menor que la de  $T$ , lo que contradice la elección de  $T$ . Por lo tanto  $(u_{j_0+1}, u_{i_0}) \notin F(D)$ . Como  $(u_{i_0}, u_{j_0+1}) \notin F(D)$  y  $(u_{j_0+1}, u_{i_0}) \notin F(D)$ , entonces por el Lema 7.3 entre  $u_{i_0}$  y  $u_{j_0+2}$  hay al menos una flecha en  $D$ . Por la elección de  $j_0$ ,  $(u_{i_0}, u_{j_0+2}) \notin F(D)$ . Por lo tanto  $(u_{j_0+2}, u_{i_0}) \in F(D)$ . Entonces  $C' = (u_{i_0}, u_{j_0}, u_{j_0+1}, u_{j_0+2}, u_{i_0})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático, como  $(u_{j_0}, u_{j_0+1})$  es de color 1 entonces  $C'$  es de color 1, esto implica que  $(u_{i_0}, u_{j_0})$  es de color 1. Así  $T' = (u = u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_{j_0}) \cup (u_{j_0}, T, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria de color 1 de longitud menor que la de  $T$ , lo que contradice la elección de  $T$ . Por lo tanto este caso no es posible.

Subcaso a.2: Supongamos que  $j_0 = n-1$ . Supongamos que  $i_0 \geq 1$ . Por la elección de  $j_0$  tenemos que  $(u_{i_0}, u_n) \notin F(D)$ . Supongamos que  $(u_n, u_{i_0}) \in F(D)$ , entonces  $C =$

$(u_n, u_{i_0}, u_{n-1}, u_n)$  es un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático. Como  $(u_{n-1}, u_n)$  es de color 1, entonces  $C$  es de color 1 lo que implica que  $(u_{i_0}, u_{n-1})$  es de color 1. Así  $T' = (u = u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_{n-1}, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria de color 1 de longitud menor que la de  $T$ , lo que contradice la elección de  $T$ . Por lo tanto  $(u_n, u_{i_0}) \notin F(D)$ . Como además  $(u_{i_0}, u_n) \notin F(D)$ , por el Lema 7.3 entre  $u_{i_0-1}$  y  $u_n$  existe una flecha en  $D$ . Por la elección de  $i_0$ ,  $(u_{i_0-1}, u_n = v) \notin F(D)$  entonces  $(v, u_{i_0}) \in F(D)$ . Entonces  $C' = (u_{i_0-1}, u_{i_0}, u_{n-1}, u_n, u_{i_0-1})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático. Como  $(u_{n-1}, u_n)$  es de color 1 entonces  $C$  es de color 1 lo que implica que  $(u_{i_0}, u_{n-1})$  es de color 1. Así,  $T' = (u = u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_{n-1}, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria de color 1 de longitud menor que la de  $T$ , lo que contradice la elección de  $T$ . Por lo tanto  $i_0 = 0$  y entonces  $(u = u_0, u_{n-1}, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria de longitud 2, y así se satisface la conclusión del teorema.

Subcaso a.3: Supongamos que  $j_0 = n$ . Supongamos que  $i_0 \geq 2$ . Por la elección de  $i_0$ ,  $(u_{i_0-1}, u_n = v) \notin F(D)$ . Supongamos que  $(v, u_{i_0-1}) \in F(D)$ . Entonces  $C = (u_{i_0-1}, u_{i_0}, u_n, u_{i_0-1})$  es un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático. Como  $(u_{i_0-1}, u_{i_0})$  es de color 1, entonces  $C$  es de color 1. Así  $(u = u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_n)$  es una  $uv$ -trayectoria de color 1 de longitud menor que la de  $T$ , lo que contradice la elección de  $T$ . Por lo tanto  $(v, u_{i_0-1}) \notin F(D)$ . Como además  $(u_{i_0-1}, v) \notin F(D)$  entonces por el Lema 7.3 entre  $u_{i_0-2}$  y  $v$  existe una flecha en  $D$ . Por la elección de  $i_0$ ,  $(u_{i_0-2}, v) \notin F(D)$  entonces  $(v, u_{i_0-2}) \in F(D)$ . Entonces  $C' = (u_{i_0-2}, u_{i_0-1}, u_{i_0}, u_n, u_{i_0-2})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático. Como  $(u_{i_0-1}, u_{i_0})$  es de color 1 entonces  $C'$  es de color 1 lo que implica que  $(u_{i_0}, u_n = v)$  es de color 1. Así,  $T' = (u = u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria de color 1 de longitud menor que la de  $T$ , lo que contradice la elección de  $T$ . Por lo tanto  $i_0 \leq 1$ . Entonces  $(u = u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria de longitud 1 o 2 en  $D$ , así se satisface la conclusión del teorema.

Caso b: Supongamos que para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$  y toda  $j \in \{i+2, \dots, n\}$ ,  $(u_i, u_j)$

$\notin F(D)$ . Por el Lema 7.5, para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe en  $D$  una  $u_i u$ -trayectoria de color 1, pero esto es una contradicción, por lo tanto este caso no es posible. ■

La siguiente observación es inmediata de la definición de torneo  $k$ -partito.

**Observación 7.7** *Sea  $D$  un torneo  $k$ -partito  $m$ -coloreado. Supongamos que  $C$  es un camino cerrado en  $D$  de longitud a lo más 5 entonces  $C$  es un ciclo.*

**Demostración.**

Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_k, x_0)$  con  $k \leq 4$  un camino cerrado en  $D$ . Demostraremos que  $C$  es un ciclo, es decir que  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j, i, j \leq 4$ .

Caso 1: Si  $l(C) = 2$ . Entonces  $C = (x_0, x_1, x_0)$ . Este caso no puede ser posible pues por definición de torneo  $k$ -partito entre dos vértices de  $D$ , en este caso  $x_0$  y  $x_1$ , existe una y sólo una flecha.

Caso 2: Si  $l(C) = 3$ . Entonces  $C = (x_0, x_1, x_2, x_0)$ .  $x_0 \neq x_1$  pues  $x_0 \text{ ady}_D x_1$ ,  $x_1 \neq x_2$  pues  $x_1 \text{ ady}_D x_2$  y  $x_2 \neq x_0$  pues  $x_2 \text{ ady}_D x_0$ .

Caso 3: Si  $l(C) = 4$ . Entonces  $C = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$ .  $x_0 \neq x_1$  pues  $x_0 \text{ ady}_D x_1$ ,  $x_0 \neq x_2$  pues si  $x_0 = x_2$  existiría una flecha simétrica entre  $x_0$  y  $x_1$  contradiciendo la definición de torneo  $k$ -partito.  $x_0 \neq x_3$  pues  $x_3 \text{ ady}_D x_0$ . Análogamente se prueba que cada uno de los vértices restantes es distinto de los demás.

Caso 4: Si  $l(C) = 4$ . Entonces  $C = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_0)$ .  $x_0 \neq x_1$  pues  $x_0 \text{ ady}_D x_1$ ,  $x_0 \neq x_2$  pues si  $x_0 = x_2$  existiría una flecha simétrica entre  $x_0$  y  $x_1$  contradiciendo la definición de torneo  $k$ -partito,  $x_0 \neq x_3$  pues si  $x_0 = x_3$  existiría una flecha simétrica entre  $x_0$  y  $x_4$  contradiciendo la definición de torneo  $k$ -partito,  $x_0 \neq x_4$  pues  $x_4 \text{ ady}_D x_0$ . Análogamente se prueba que cada uno de los vértices restantes es distinto de los demás. ■

Ahora probaremos el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 7.8** *Sea  $D$  un torneo  $k$ -partito  $m$ -coloreado tal que todo  $C_3$  y todo  $C_4$  es monocromático. Entonces  $C(D)$  es núcleo perfecta.*

**Demostación.**

Por el Teorema 3.7 será suficiente probar que todo ciclo de  $C(D)$  tiene al menos una flecha simétrica. Supongamos, por contradicción, que  $C = (u_0, u_1, \dots, u_n = u_0)$  es un ciclo en  $C(D)$  que no tiene flechas simétricas. Entonces para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$  tenemos:

(I) Existe en  $D$  una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria monocromática. Como  $(u_i, u_{i+1}) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$  tenemos que en  $D$  existe al menos una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria monocromática.

(II) No existe en  $D$  ninguna  $u_{i+1} u_i$ -trayectoria monocromática. Como  $C$  no tiene flechas simétricas, entonces  $(u_{i+1}, u_i) \notin F(C(D))$ , entonces por definición de  $C(D)$  tenemos que en  $D$  no existe ninguna  $u_{i+1} u_i$ -trayectoria monocromática.

(III)  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$  o existe una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria de longitud 2. Se sigue de las afirmaciones anteriores y del lema 7.6.

(IV) Si  $P$  es un camino cerrado monocromático en  $D$ , entonces  $P$  no contiene a la vez a  $u_j$  y a  $u_{j+1}$  para toda  $j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Se sigue de la suposición de que  $C$  no contiene flechas simétricas, ya que si  $u_j, u_{j+1} \in V(P)$  tenemos un  $u_j u_{j+1}$ -camino monocromático y un  $u_{j+1} u_j$ -camino monocromático en  $D$  que contienen respectivamente a una  $u_j u_{j+1}$ -trayectoria monocromática y una  $u_{j+1} u_j$ -trayectoria monocromática y por lo tanto existe en  $C(D)$  una flecha simétrica entre  $u_j$  y  $u_{j+1}$ .

Para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$  sea:

$$T_i = \left\{ \begin{array}{l} (u_i, u_{i+1}) \text{ si } (u_i, u_{i+1}) \in F(D), \\ \text{una } u_i u_{i+1} \text{ - trayectoria de longitud 2 si } (u_i, u_{i+1}) \notin F(D). \end{array} \right\}$$

Sea  $C^1 = \bigcup_{i=0}^n T_i$ ,  $C^1$  es un camino cerrado en  $D$ . Sea  $C^1 = (z_0, z_1, \dots, z_k, z_0)$  y definamos la función  $\varphi : \{0, 1, \dots, k\} \rightarrow V(C)$  de la siguiente manera: si  $T_i = (u_i = z_{i_0}, z_{i_0+1}, \dots, z_{i_0+r} = u_{i+1})$  con  $r \in \{1, 2\}$  entonces  $\varphi(j) = z_{i_0}$  para toda  $j \in \{i_0, i_0+1, \dots, i_0+r-1\}$ . Decimos que el índice  $i$  del vértice  $z_i$  de  $C^1$  es principal si  $z_i = \varphi(i)$ ,

denotemos por  $I_p$  al conjunto de índices principales. La suma sobre los índices de los vértices de  $C^1$  será tomada módulo  $k$ . Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

1. No existe en  $D$  ningún camino cerrado  $C''$  monocromático tal que para alguna  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $\{z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}\} \subseteq V(C'')$ . Procederemos por contradicción. Supongamos que existe un camino  $C''$  con las características anteriores. Por la definición de índice principal tenemos que existe  $m \in \{i, i+1\}$  tal que  $m$  es índice principal, supongamos que  $z_m = u_j$  para algún  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , nuevamente por definición de índice principal, tenemos que  $u_{j+1} \in \{z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}\}$ . Así tenemos a  $u_j, u_{j+1} \in V(C)$ ,  $C''$  un camino cerrado monocromático, lo que contradice la afirmación IV.

2. Para toda  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $(z_{i+3}, z_i) \notin F(D)$ . Pues si  $(z_{i+3}, z_i) \in F(D)$ , entonces  $(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}, z_i)$  es un camino cerrado de longitud 4, por la Observación 7.7, es un  $C_4$ , que por hipótesis es monocromático, es decir un camino cerrado monocromático contradiciendo la afirmación 1.

De las hipótesis de nuestra suposición sobre  $C^1$ , aplicando el Lema 7.3 y la afirmación IV, tenemos las afirmaciones 3 a 7.

3. Para cualquier  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  tal que  $i \in I_p$  tenemos:

3.1  $(z_{i+2}, z_i) \notin F(D)$ . Pues si  $(z_{i+2}, z_i) \in F(D)$ , entonces  $(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_i)$  es un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV.

3.2  $(z_i, z_{i-2}) \notin F(D)$ . La prueba es completamente análoga a la del 3.1.

4. Para cualquier  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  tal que  $i \in I_p$  tenemos:

4.1  $(z_i, z_{i+2}) \in F(D)$  o  $(z_i, z_{i+3}) \in F(D)$ . Pues si  $(z_i, z_{i+2}) \notin F(D)$  como por 3.1  $(z_{i+2}, z_i) \notin F(D)$  entonces  $z_i$  y  $z_{i+2}$  no son adyacentes y por el Lema 7.3 existe una flecha entre  $z_i$  y  $z_{i+3}$ . Si  $(z_{i+3}, z_i) \in F(D)$ , entonces  $(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}, z_i)$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV. Entonces  $(z_i, z_{i+3}) \in F(D)$ .

4.2  $(z_{i-2}, z_i) \in F(D)$  o  $(z_{i-3}, z_i) \in F(D)$ . La prueba es completamente análoga a la del 4.1.

5.  $(z_2, z_0) \notin F(D)$ ,  $(z_3, z_0) \notin F(D)$ ,  $(z_0, z_{k-2}) \notin F(D)$  y  $(z_0, z_{k-3}) \notin F(D)$ . En otro caso se obtiene un  $C_3$  o un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV.

6.  $(z_0, z_2) \in F(D)$  o  $(z_0, z_3) \in F(D)$ . Se sigue de 4.1 para  $i = 0$ .

7.  $(z_{k-2}, z_0) \in F(D)$  o  $(z_{k-3}, z_0) \in F(D)$ . Se sigue de 4.2 para  $i = k$ .

Sea  $i_0 = \min\{i \in \{3, 4, \dots, k-2\} / (z_{i+1}, z_0) \in F(D)\}$ , sabemos que ese mínimo existe pues  $(z_{k-1}, z_0) \in F(D)$ . Entonces

8.  $(z_0, z_{i_0}) \in F(D)$  o  $(z_0, z_{i_0-1}) \in F(D)$ . Por la elección de  $i_0$ ,  $(z_{i_0}, z_0) \notin F(D)$  y  $(z_{i_0-1}, z_0) \notin F(D)$ . Si  $(z_0, z_{i_0}) \notin F(D)$  entonces  $z_0$  y  $z_{i_0}$  no son adyacentes y por el Lema 7.3 existe una flecha entre  $z_0$  y  $z_{i_0-1}$ , entonces  $(z_0, z_{i_0-1}) \in F(D)$ . ■

**Observación 7.9** Podemos suponer que  $i_0 \geq 3$  pues si  $i_0 < 3$ , entonces  $i_0 + 1 \leq 3$  y en cualquiera de los casos se obtiene un  $C_3$  o un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV. Analizaremos los dos casos dados por la afirmación 8.

Caso a: Supongamos que  $(z_0, z_{i_0}) \in F(D)$ . De la definición de  $i_0$  tenemos  $(z_{i_0+1}, z_0) \in F(D)$ , entonces  $C'' = (z_0, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0)$  es un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático, sea 1 el color de  $C''$ .

Subaso a.1:  $i_0 \notin I_p$ . Entonces:

1 (a.1)  $i_{0-1} \in I_p$  e  $i_{0+1} \in I_p$ . Por definición de índice principal.

2 (a.1)  $(z_0, z_{i_0-1}) \notin F(D)$ . Pues si  $(z_0, z_{i_0-1}) \in F(D)$  entonces  $(z_0, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0)$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV. Analizaremos los dos casos dados por la afirmación 8.

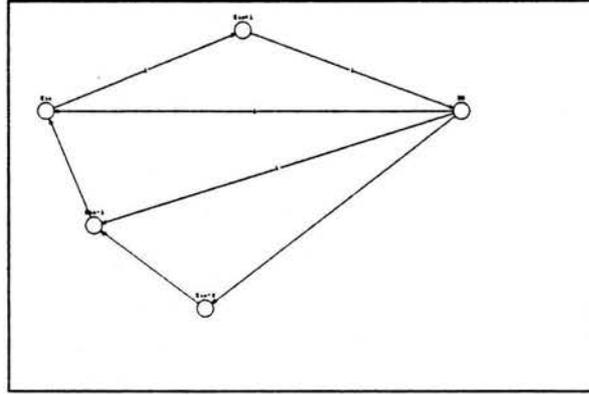


Figura 7.2: Subcaso a.1

3 (a.1)  $(z_0, z_{i_0-2}) \in F(D)$ . Pues por (2.a.1) y la elección de  $i_0$ ,  $z_0$  y  $z_{i_0-1}$  no son adyacentes entonces por el Lema 7.3 existe una flecha entre  $z_0$  y  $z_{i_0-2}$ , pero por la elección de  $i_0$ ,  $(z_{i_0-2}, z_0) \notin F(D)$ .

4 (a.1)  $(z_{i_0-1}, z_{i_0+1}) \in F(D)$ . Como  $z_0$  y  $z_{i_0-1}$  no son adyacentes y por definición de  $i_0$   $(z_{i_0+1}, z_0) \in F(D)$ , entonces por el Lema 7.3 existe una flecha entre  $z_{i_0-1}$  y  $z_{i_0+1}$ , y por (3.1)  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-1}) \notin F(D)$ .

Ahora,  $(z_{i_0-1}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-2}, z_{i_0-1})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático, como  $(z_{i_0+1}, z_0)$  es de color 1, entonces el ciclo anterior es de color 1, pero esto contradice la afirmación IV, por lo que este caso no es posible.

Subcaso a.2:  $i_0 \in I_p$ .

Subcaso a.2.1:  $(z_0, z_{i_0-1}) \in F(D)$ . Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

1 (a.2.1)  $i_0 - 2 \in I_p$ . Pues  $i_0 - 1 \notin I_p$  porque si lo fuera  $(z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-1})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV. Entonces  $i_0 - 2 \in I_p$ .

2 (a.2.1)  $(z_{i_0-2}, z_{i_0+1}) \notin F(D)$ . Supongamos por contradicción que  $(z_{i_0-2}, z_{i_0+1}) \in F(D)$ . Si  $z_{i_0-2}$  es adyacente a  $z_0$ , por definición de  $i_0$ ,  $(z_0, z_{i_0-2}) \in F(D)$ , entonces tenemos que  $(z_0, z_{i_0-2}, z_{i_0+1}, z_0)$  es un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático y

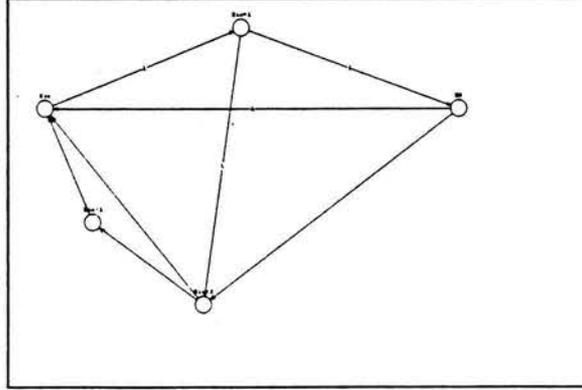


Figura 7.3: Subcaso a.2.1

de color 1 pues  $(z_{i_0+1}, z_0)$  es de color 1. Entonces  $(z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-2})$  es una  $z_{i_0}z_{i_0-2}$ -trayectoria monocromática, contradiciendo que  $C$  es asimétrico en  $C(D)$  pues  $i_0 - 2$  e  $i_0$  son índices principales consecutivos. Si  $z_0$  y  $z_{i_0-2}$  no son adyacentes, entonces  $z_0$  y  $z_{i_0-3}$  si son adyacentes (Lema 7.3) y por la definición de  $i_0$ ,  $(z_0, z_{i_0-3}) \in F(D)$  (Nótese que  $i_0 - 3 \neq 0$  pues estamos suponiendo que  $(z_0, z_{i_0-2}) \notin F(D)$ ). Entonces  $(z_0, z_{i_0-3}, z_{i_0-2}, z_{i_0+1}, z_0)$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y de color 1 pues  $(z_{i_0+1}, z_0)$  es de color 1. Entonces  $(z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-3}, z_{i_0-2})$  es una  $z_{i_0}z_{i_0-2}$ -trayectoria monocromática, contradiciendo que  $C$  es asimétrico en  $C(D)$  pues  $i_0 - 2$  e  $i_0$  son índices principales consecutivos.

3 (a.2.1)  $(z_{i_0-2}, z_{i_0}) \in F(D)$ . Pues  $i_0 - 2 \in I_p$  y  $(z_{i_0-2}, z_{i_0+1}) \notin F(D)$ , entonces, por 4.1  $(z_{i_0-2}, z_{i_0}) \in F(D)$ .

4 (a.2.1)  $(z_0, z_{i_0-2}) \in F(D)$ . Pues  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-2}) \notin F(D)$  pues si lo fuera  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV, y como  $(z_{i_0-2}, z_{i_0+1}) \notin F(D)$  (2(a.2.1)), entonces  $z_{i_0+1}$  y  $z_{i_0-2}$  no son adyacentes. Por lo tanto, por el Lema 7.3 existe una flecha entre  $z_0$  y  $z_{i_0-2}$ , pero por la definición de  $i_0$ ,  $(z_0, z_{i_0-2}) \in F(D)$ .

Ahora,  $(z_0, z_{i_0-2}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0)$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático, como

$(z_{i_0+1}, z_0)$  es de color 1, entonces el ciclo anterior es de color 1, lo que contradice la afirmación IV. Por lo tanto este subcaso no es posible.

Subcaso a.2.2:  $(z_0, z_{i_0-1}) \notin F(D)$ . Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

1 (a.2.2)  $(z_0, z_{i_0-2}) \in F(D)$ . Pues como  $(z_0, z_{i_0-1}) \notin F(D)$  por hipótesis y por definición de  $i_0$   $(z_{i_0-1}, z_0) \notin F(D)$ , entonces  $z_0$  y  $z_{i_0-1}$  no son adyacentes. Por lo tanto, por el Lema 7.3, existe una flecha entre  $z_0$  y  $z_{i_0-2}$ , pero por definición de  $i_0$   $(z_0, z_{i_0-2}) \in F(D)$ .

2 (a.2.2)  $(z_{i_0-1}, z_{i_0+1}) \notin F(D)$ . Pues si  $(z_{i_0-1}, z_{i_0+1}) \in F(D)$ , entonces  $(z_{i_0-1}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-2}, z_{i_0-1})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y es de color 1 pues  $(z_{i_0+1}, z_0)$  es de color 1. Si  $i_{0-1} \in I_p$ , entonces  $(z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-2}, z_{i_0-1})$  es una  $z_{i_0}z_{i_0-1}$ -trayectoria monocromática, contradiciendo que  $C$  es asimétrico en  $C(D)$ . Si  $i_{0-1} \notin I_p$ , entonces  $i_{0-2} \in I_p$  y  $(z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-2})$  es una  $z_{i_0}z_{i_0-2}$ -trayectoria monocromática, contradiciendo que  $C$  es asimétrico en  $C(D)$ .

3 (a.2.2)  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-1}) \in F(D)$ . Pues  $z_0$  y  $z_{i_0-1}$  no son adyacentes, por lo tanto, por el Lema 7.3, existe una flecha entre  $z_{i_0+1}$  y  $z_{i_0-1}$  pero por 2.(a.2.2)  $(z_{i_0-1}, z_{i_0+1}) \notin F(D)$ , entonces  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-1}) \in F(D)$ .

4 (a.2.2)  $i_{0-2} \in I_p$ . Pues si  $i_{0-2} \notin I_p$ , entonces  $i_{0-1} \in I_p$ , entonces  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1})$  es un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV.

5 (a.2.2)  $(z_{i_0-2}, z_{i_0+1}) \notin F(D)$ . Pues si  $(z_{i_0-2}, z_{i_0+1}) \in F(D)$ , entonces  $(z_{i_0-2}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-2})$  es un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático y de color 1 pues  $(z_{i_0+1}, z_0)$  es de color 1. Entonces  $(z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-2})$  es una  $z_{i_0}z_{i_0-2}$ -trayectoria monocromática, contradiciendo que  $C$  es asimétrico en  $C(D)$ . (recuérdese 4(a.2.2)).

6 (a.2.2)  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-2}) \notin F(D)$ . Pues si  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-2}) \in F(D)$ , entonces  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV.

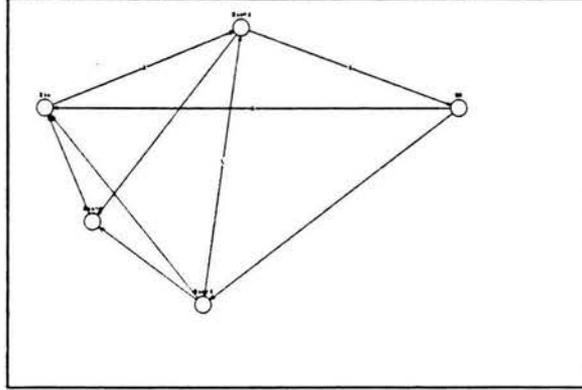


Figura 7.4: Subcaso a.2.2

7 (a.2.2)  $(z_{i_0-2}, z_{i_0}) \in F(D)$ . Pues por el 5(a.2.2) y 6(a.2.2)  $z_{i_0-2}$  y  $z_{i_0+1}$  no son adyacentes. Por lo tanto, por el Lema 7.3, existe una flecha entre  $z_{i_0-2}$  y  $z_{i_0}$  y si  $(z_{i_0}, z_{i_0-2}) \in F(D)$ , entonces  $(z_{i_0}, z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0})$  es un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV. Entonces  $(z_{i_0-2}, z_{i_0}) \in F(D)$ .

Ahora,  $(z_0, z_{i_0-2}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0)$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático, como  $(z_{i_0+1}, z_0)$  es de color 1, entonces el ciclo anterior es de color 1, lo que contradice la afirmación IV. Por lo tanto este subcaso no es posible.

Caso b: Supongamos que  $(z_0, z_{i_0}) \notin F(D)$ . Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

1 (b)  $(z_0, z_{i_0-1}) \in F(D)$ . Pues  $(z_0, z_{i_0}) \notin F(D)$  por hipótesis y por definición de  $i_0$ , entonces  $z_0$  y  $z_{i_0}$  no son adyacentes. Por lo tanto, por el Lema 7.3, existe una flecha entre  $z_0$  y  $z_{i_0-1}$ , pero por la definición de  $i_0$ ,  $(z_0, z_{i_0-1}) \in F(D)$ .

2 (b)  $i_0 - 1 \notin I_p$ . Pues  $(z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-1})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático. Si  $i_0 - 1 \in I_p$ , entonces  $i_0 \in I_p$  o  $i_0 + 1 \in I_p$ . En cualquier caso el  $C_4$  anterior contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV.

3 (b)  $i_0 \in I_p$  e  $i_0 - 2 \in I_p$ . Por definición de índice principal y de la  $T_{i_0}$  trayectoria.

4 (b)  $i_0 + 1 \notin I_p$ . Pues si  $i_0 + 1 \in I_p$ ,  $(z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV.

5 (b)  $i_0 + 2 \in I_p$ . Por definición de índice principal y 4(b).

6 (b)  $(z_{i_0}, z_{i_0-2}) \notin F(D)$ . Pues si  $(z_{i_0}, z_{i_0-2}) \in F(D)$ ,  $C$  tendría una flecha simétrica en  $C(D)$ . Contradicción (recuérdese 2(b) y 3(b)).

7 (b)  $(z_0, z_{i_0-3}) \in F(D)$ .  $(z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-1})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático, digamos de color 1. Si  $(z_0, z_{i_0-3}) \notin F(D)$ , como por definición de  $(z_{i_0-3}, z_0) \notin F(D)$ , entonces  $z_0$  y  $z_{i_0-3}$  no son adyacentes. Por lo tanto, por el Lema 7.3, existe una flecha entre  $z_0$  y  $z_{i_0-2}$ , pero por definición de  $i_0$ ,  $(z_0, z_{i_0-2}) \in F(D)$ . Si  $(z_{i_0-2}, z_{i_0}) \in F(D)$ , entonces  $(z_{i_0-2}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-2})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV. Si  $(z_{i_0-2}, z_{i_0}) \notin F(D)$ , por 6(b),  $z_{i_0}$  y  $z_{i_0-2}$  no son adyacentes. Entonces, por el Lema 7.3, existe una flecha entre  $z_{i_0-2}$  y  $z_{i_0+1}$ . Si  $(z_{i_0-2}, z_{i_0+1}) \in F(D)$ , entonces  $(z_{i_0-2}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-2})$  es un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático y de color 1 pues  $(z_{i_0+1}, z_0)$  es de color 1. Entonces  $(z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-2})$  es una  $z_{i_0}z_{i_0-2}$ -trayectoria monocromática, contradiciendo que  $C$  es asimétrico en  $C(D)$ . Si  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-2}) \in F(D)$ , entonces  $(z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0-2})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV.

8 (b)  $(z_{i_0-2}, z_{i_0+1}) \in F(D)$ . Como  $z_{i_0}$  y  $z_{i_0-2}$  no son adyacentes (ambos son índices principales consecutivos con la  $T_{i_0-2}$  trayectoria de longitud 2 y por 6(b)), por lo tanto, por el Lema 7.3, existe una flecha entre  $z_{i_0-2}$  y  $z_{i_0+1}$ , pero si  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-2}) \in F(D)$ , entonces  $(z_{i_0+1}, z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV. Entonces  $(z_{i_0-2}, z_{i_0+1}) \in F(D)$ .

Ahora  $(z_0, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0)$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático, digamos

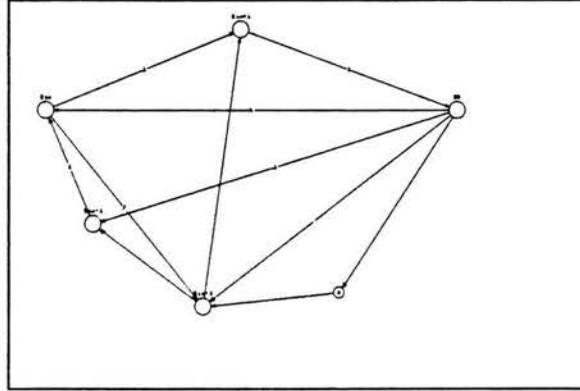


Figura 7.5: Caso b.

de color 1.  $(z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-3}, z_{i_0-2}, z_{i_0+1})$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y de color 1 pues  $(z_{i_0+1}, z_0)$  es de color 1. Por lo tanto  $(z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_0, z_{i_0-3}, z_{i_0-2})$  es una  $z_{i_0}z_{i_0-2}$ -trayectoria monocromática, contradiciendo que  $C$  es asimétrico en  $C(D)$ . Por lo tanto este subcaso no es posible.

Recordemos la Observación 7.9. Analicemos ahora cuando  $i_0 = 3$ . Supongamos que  $(z_0, z_2) \in F(D)$ . Así tenemos que  $C'' = (z_0, z_2, z_3, z_4, z_0)$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático, sea 1 el color de  $C''$ . Entonces  $\{2, 4\} \cap I_p = \emptyset$  y  $\{1, 3\} \subseteq I_p$ , pues si  $2 \in I_p$ , entonces  $3 \in I_p$  o  $4 \in I_p$ , en cualquier caso, se contradice la afirmación IV. Si  $4 \in I_p$ , entonces  $3 \in I_p$  o  $4 \in I_p$ , de nuevo en cualquier caso se contradice la afirmación IV. Así, como  $\{2, 4\} \cap I_p = \emptyset$ , entonces  $\{1, 3\} \subseteq I_p$ . Si  $(z_1, z_3) \in F(D)$  o  $(z_3, z_1) \in F(D)$  obtenemos una flecha simétrica en  $C$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto entre  $z_1$  y  $z_3$  no hay flechas en  $D$ . Entonces por el Lema 7.3 tenemos que entre  $z_1$  y  $z_4$  existe una flecha en  $D$ , pero cualquiera de las dos posibilidades nos lleva a que existe una flecha simétrica en  $D$ , lo cual es una contradicción.

Entonces supongamos por el contrario que  $(z_0, z_2) \notin F(D)$ . Por la definición de  $i_0$ ,  $(z_2, z_0) \notin F(D)$ , entonces  $z_0$  y  $z_2$  no son adyacentes, así por el Lema 7.3 tenemos que entre  $z_0$  y  $z_3$  existe una flecha en  $D$ . Por la afirmación 2  $(z_3, z_0) \notin F(D)$  por

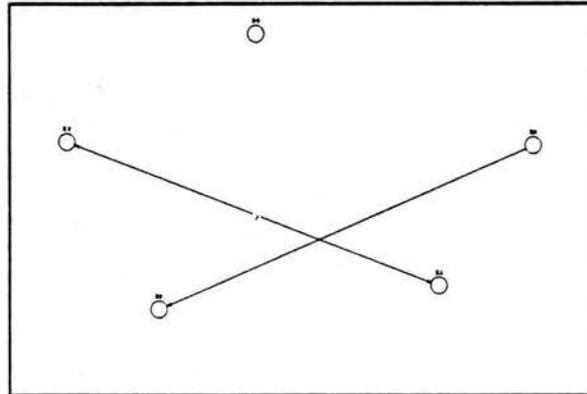


Figura 7.6: Si  $i_0 = 3$ ,  $(z_0, z_2) \in F(D)$

lo tanto  $(z_0, z_3) \in F(D)$ . Entonces tenemos  $(z_3, z_4, z_0, z_3)$  un  $C_3$  que por hipótesis es monocromático, digamos de color 2. Como  $z_1$  y  $z_3$  no son adyacentes, se sigue del Lema 7.3 que existe una flecha entre  $z_4$  y  $z_1$ . Si  $(z_4, z_1) \in F(D)$ , entonces  $(z_3, z_4, z_1, z_2, z_3)$  es un  $C_4$  que por hipótesis es monocromático y que contiene dos índices principales consecutivos, contradiciendo la afirmación IV. Si  $(z_1, z_4) \in F(D)$ , entonces  $(z_3, z_4, z_0, z_3)$  es un  $C_3$  que debe ser monocromático y de color 2, entonces  $(z_3, z_4, z_0, z_1)$  es una  $z_3 z_1$ -trayectoria monocromática, contradiciendo que  $C$  es asimétrico en  $C(D)$ .

Así llegamos a la contradicción final. Por lo tanto todo ciclo de  $C(D)$  tiene al menos una flecha simétrica y concluimos que  $C(D)$  es núcleo perfecta. ■

**Corolario 7.10** *Sea  $D$  un torneo  $k$ -partito  $m$ -coloreado tal que todo  $C_3$  y todo  $C_4$  es monocromático, entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

#### **Demostración.**

Como consecuencia inmediata del Teorema 7.8 tenemos que  $C(T)$  es una digráfica núcleo perfecta, en particular  $C(T)$  tiene núcleo. Por el Teorema 4.9 sabemos que si  $C(T)$  tiene núcleo, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

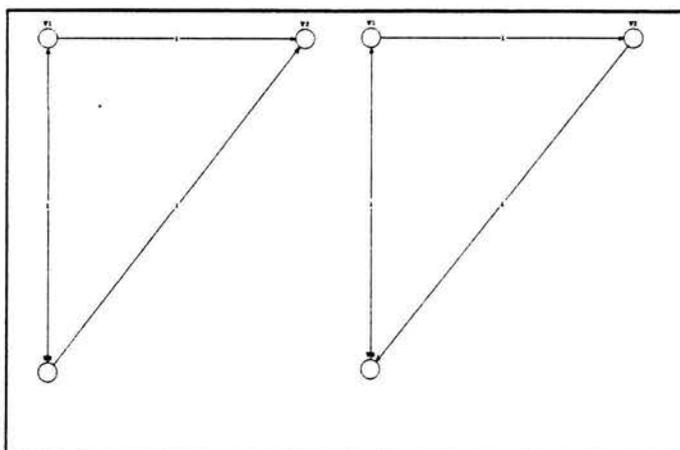


Figura 7.7: Si  $i_0 = 3$ ,  $(z_0, z_2) \notin F(D)$

# Capítulo 8

## Conclusiones.

La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.

Blaise Pascal

Después de haber definido e introducido los conceptos y propiedades fundamentales de la teoría de gráficas, y con base a los teoremas demostrados en los primeros capítulos, el resultado primordial que probamos en este trabajo es que para todo torneo  $T$   $m$ -coloreado, sin partición, bipartito o  $k$ -partito, la simple condición de que los ciclos pequeños ( $C_3$ ,  $C_4$ , y  $C_3$  y  $C_4$  respectivamente) contenidos en  $T$  sean monocromáticos, garantiza que la cerradura transitiva de  $T$  tenga núcleo y por tanto que  $T$  tenga núcleo por trayectorias monocromáticas. Ésta, es una caracterización importante de torneos con núcleos por trayectorias monocromáticas, pues es fácil verificar si dicha hipótesis se cumple.



# Capítulo 9

## Bibliografía.

[1] C. Berge, P. Duchet, *Recent problems and results about kernels in directed graphs*, Discrete Math. 86 (1990) 27-31.

[2] H. Galeana Sánchez, *Kernels in edge-coloured digraphs*, Discrete Math. 184 (1988) 87-99.

[3] H. Galeana Sánchez, *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Math. 156 (1996) 103-112.

[4] H. Galeana Sánchez, J.J. García Ruvalcaba, *Kernels in the closure of coloured digraphs*, Discuss. Math. Graph Theory 20 (2000) 243-354.

[5] H. Galeana Sánchez, V. Neumann Lara, *On kernel-perfect critical digraphs*, Discrete Math. 59 (1986) 257-265.

[6] H. Galeana Sánchez, S. Rajsbaum, *Cycle pancyclism in tournaments III*, Graphs and Combinatorics (1997) 13:57-63.

[7] H. Galeana Sánchez, R. Rojas Monroy, *A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments*, Discrete Math. 282 (2004) 275-276.

[8] H. Galeana Sánchez, R. Rojas Monroy, *On monochromatic paths and monochromatic 4-cycles in edge coloured bipartite tournaments*,

Discrete Math. 285 (2004) 313-318.

[9] H. Galeana Sánchez, R. Rojas Monroy, *Torneos  $k$ -partitos con  $C_3$  y  $C_4$  monocromáticos*, artículo en preparación.

[10] S. Minggang, *On monochromatic paths in  $m$ -coloured tournaments*, J. Combin. Theory Ser. B45 (1988) 108-111.

[11] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*, J. Combin. Theory Ser. B33 (1982) 271-275.