

01170



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN INGENIERIA

TESIS

**MODELO MATEMATICO PARA UNA SUPERFICIE
SELECTIVA DE FRECUENCIA BASADA EN
RESONADORES DE ANILLOS RANURADOS.**

PRESENTADA POR:

JESUS RODRIGUEZ ZAMUDIO

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERIA
(ELECTRICA)**

DIRECTOR DE TESIS:

DR. OLEKSANDR MARTYNYUK



CIUDAD UNIVERSITARIA

OCTUBRE, 2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

LA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Dedicatoria:

*Dedico esta tesis a mis padres por su invaluable apoyo, paciencia y tolerancia:
ayer, hoy, ... siempre.*

M.A. J.

Agradecimientos :

Agradezco especialmente al Dr. Oleksandr Martynyuk por la ayuda y apoyo brindados, los cuales hicieron posible la realización de este trabajo.

A cada uno de los miembros del jurado: Dr. Oleg Kolokoltsev, Dr. Jorge Rodríguez Cuevas, Dr. Volodymyr Svyryd y Dr. Carlos Rivera Rivera por sus comentarios y observaciones sobre el trabajo.

A Ismael Martínez por su ayuda y sugerencias; así como a cada persona que colaboró de alguna forma en alcanzar esta meta.

Finalmente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, por el apoyo financiero.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Introducción | 3 |
| 1. Introducción a las Superficies Selectivas de Frecuencia | 6 |
| 1.1. Descripción de las <i>SSF</i> | 7 |
| 1.2. Aplicaciones de las <i>SSF</i> | 9 |
| 1.3. Investigaciones Sobre el Modelado de las <i>SSF</i> | 17 |
| 1.3.1. Apreciación del Método Modal | 17 |
| 2. Formulación General del Problema de las Condiciones de Frontera | 19 |
| 2.1. El Teorema de Floquet y los Arreglos Infinitos | 20 |
| 2.1.1. Modos Floquet Vectoriales | 24 |
| 2.2. Ecuaciones Integrales para el Arreglo de Fase Infinito | 27 |
| 2.2.1. Ecuación Integral para el Campo Desconocido <i>E</i> | 28 |
| 2.3. Métodos de Solución | 35 |
| 2.3.1. Representación General de una Base Discreta | 35 |
| 2.3.2. Elección de las Bases | 40 |
| 2.3.3. Técnica del Acoplamiento Modal | 46 |
| 3. Resonadores de Anillos Ranurados | 53 |
| 3.1. Desarrollo del Modelo Matemático | 56 |
| 3.1.1. Producto escalar entre las funciones base del resonador de anillos y las ondas Floquet. | 60 |

| | |
|---|----|
| 3.2. Resultados de la Simulación Numérica | 66 |
| 3.2.1. Verificación experimental | 75 |
| 4. Conclusiones | 88 |
| Bibliografía | 91 |

Introducción

Las estructuras periódicas han sido usadas exhaustivamente en la ingeniería eléctrica. La periodicidad en su geometría es a menudo aprovechada para conseguir ciertas propiedades electromagnéticas deseadas, principalmente comportamientos selectivos en la frecuencia, que no son realizables en el caso de un solo elemento. Las antenas de arreglos de fase y las superficies selectivas de frecuencia (*SSF*), se consideran estructuras periódicas.

Las propiedades únicas y los usos prácticos de las superficies selectivas de frecuencia han encontrado una extensiva área de trabajo dentro de los sectores tanto académicos como industriales. Históricamente el comportamiento fundamental de estas superficies proviene de los conceptos de mallas y rejillas que fueron ampliamente utilizados en el régimen óptico. Para frecuencias de microondas las aplicaciones de las *SSF* están predominantemente enfocadas a los sistemas de antenas tanto en servicios fijos como móviles. Los artículos publicados sobre las propiedades básicas de estructuras simples en la región de las ondas milimétricas se remontan a los años comprendidos entre 1940 y 1960, aunque el nombre de *SSF* no fue usado sino hasta mucho tiempo después. La precisión en el modelado de sus propiedades electromagnéticas empezó a tomar forma a partir de 1970, donde mucha experiencia fue adquirida del estudio de los arreglos de fase de esa época. Con la aparición de las computadoras digitales, de análisis eficientes y de técnicas de medición de banda ancha, el conocimiento y el grado de desarrollo en la fabricación y diseño de las *SSF* se han acrecentado constantemente. Ejemplo de esto es que naves de misiones espaciales y antenas de satélites han utilizado con éxito la tecnología de las *SSF*.

En general una superficie selectiva de frecuencia es una pantalla metálica con ciertas propiedades de filtro selectivo en determinados rangos de frecuencia. Dependiendo de su diseño, podría ser un filtro paso-bajas, paso-altas, paso-banda o supresor de banda. Dos aplicaciones importantes y de uso común se encuentran en los radomos que protegen las

antenas de las aeronaves y en los subreflectores para sistemas de antenas de reflector de frecuencia doble. La estructura básica paso-banda consta de una ranura o hueco sobre una hoja metálica, que transmitirá una onda incidente cuando la frecuencia sea tal que la ranura esté en resonancia. Para modelar apropiadamente las *SSF*, la técnica estándar empleada para el análisis utiliza una variedad de métodos numéricos.

El primer paso en la formulación del problema de la dispersión electromagnética de una *SSF* es relacionar los campos dispersos desde la *SSF* con el campo eléctrico sobre el plano conductor producido por el campo incidente. A menudo los problemas de las condiciones de frontera electromagnéticas se formulan como ecuaciones integrales. La función desconocida normalmente representa alguna distribución de la fuente a ser determinada. Un método usado frecuentemente para resolver numéricamente estas ecuaciones integrales es el método de momentos. Básicamente, el método de momentos es un método de proyección donde la ecuación integral original se reemplaza por una ecuación matricial dimensionalmente finita. En general los elementos de la matriz no pueden calcularse analíticamente, por lo que se adopta la integración numérica o cierto tipo de aproximaciones.

Existen interesantes estructuras periódicas basadas en anillos, las cuales pueden ser usadas como base del diseño de los arreglos reflectivos, polarizadores, arreglos de fase, etc. El propósito de este trabajo es desarrollar el modelo matemático para el análisis teórico cuantitativo de una superficie selectiva de frecuencia infinitamente delgada, basada en ranuras anulares que se comportarán como elementos resonadores. Es necesario un modelo matemático para optimizar los parámetros de la estructura base *SSF* con ranuras. Debido a que en la estructura de anillos existe una fuerte interacción electromagnética entre los elementos, el modelo adecuado debe basarse en la teoría electromagnética. Empleando el teorema de Floquet para construir el modelo matemático de la *SSF* basada en anillos ranurados, se calcula la componente del campo tangencial eléctrico desconocido sobre el plano del anillo. Este teorema permite analizar una estructura periódica infinita resolviendo únicamente los campos desconocidos en una celda unitaria de la estructura

periódica.

Una vez formulada la ecuación integral que relacione las componentes de los campos sobre la estructura, se resuelve mediante el método de momentos para obtener las características de reflexión de la superficie selectiva. Basándose en los resultados de la simulación numérica fueron explicados los procesos físicos que tienen lugar en la estructura, como resultado se obtuvo un circuito equivalente simple *LC*. El método del simulador de guía de onda fue usado en la verificación de los resultados obtenidos del modelo matemático formulado. Debido a que el modelo matemático consume una moderada cantidad de tiempo, el optimizar los parámetros de la estructura periódica no es una tarea eficiente. Por lo tanto se propone un modelo matemático alternativo, tomando como referencia las expresiones para evaluar los parámetros eléctricos de la línea ranurada, para optimizar los parámetros de la superficie selectiva con mayor rapidez.

La presentación de este trabajo se divide en 4 capítulos, el primero es una introducción a las superficies selectivas de frecuencia; donde a grandes rasgos se describe el funcionamiento y la aplicación práctica de este tipo de estructuras periódicas.

El segundo capítulo comprende el análisis modal donde el teorema de Floquet es utilizado en la formulación de las condiciones de frontera asociadas con las estructuras periódicas infinitas. La derivación de la ecuación integral y los métodos numéricos para su solución son discutidos.

En el tercer capítulo se presentan los resultados y conclusiones de la formulación del modelo matemático y su validez experimental; así como la propuesta de un modelo alternativo para el análisis de la dispersión electromagnética en la *SSF*.

En el último capítulo se muestran las conclusiones obtenidas y finalmente se presentan las referencias citadas en el trabajo.

Capítulo 1

Introducción a las Superficies Selectivas de Frecuencia

Un arreglo periódico de parches metálicos sobre un sustrato o un plano conductor periódicamente ranurado constituye una superficie selectiva de frecuencia (*SSF*) para las ondas electromagnéticas. Tales estructuras han sido extensamente analizadas por la teoría de antenas hace más de medio siglo. La teoría de antenas de arreglos de fase proporciona un punto de partida para el estudio de las *SSF*. Amitay, Galindo y Wu [1] aportan una descripción minuciosa sobre este tema. Gran parte de la teoría fundamental para las *SSF* se basa en la teoría de antenas de arreglos de fase, sin embargo, los métodos aplicables específicamente a las estructuras basadas en *SSF* son examinados por Wu [2]. Aunque las descripciones teóricas de las *SSF* se encuentran bien establecidas, todavía es necesario más trabajo en el área del análisis teórico cuantitativo de estas estructuras.

Con los avances computacionales de los últimos 10 años, es ahora posible destinar un análisis numérico exhaustivo sobre el comportamiento de las características espectrales de las *SSF* a medida que se hacen variar la periodicidad y la geometría de las ranuras o parches.

1.1. Descripción de las *SSF*

En la literatura se distinguen dos tipos de geometrías. La primera geometría, comúnmente referida como una *SSF* inductiva, actúa como un filtro paso-altas. El segundo caso, una *SSF* capacitiva, es similar a un filtro paso-bajas. Si los elementos periódicos dentro de una *SSF* poseen características de resonancia, la *SSF* inductiva mostrará una transmisión total a las ondas cuya λ sea cercana a la longitud de onda de resonancia, mientras que la *SSF* capacitiva exhibirá una reflexión total a dichas ondas.

Las *SSF* capacitivas e inductivas derivan su nombre de la teoría de circuitos. La figura 1.1 muestra una *SSF* capacitiva e inductiva construidas a partir de parches y ranuras periódicas rectangulares, respectivamente. También se ilustra en la figura sus respectivos modelos de circuito equivalente, además de los coeficientes de transmisión (T) correspondientes. Los parches metálicos rectangulares en la *SSF* capacitiva actúan de manera similar a un circuito capacitivo. Mientras que las ranuras rectangulares en la *SSF* inductiva se comportan como un circuito inductivo.

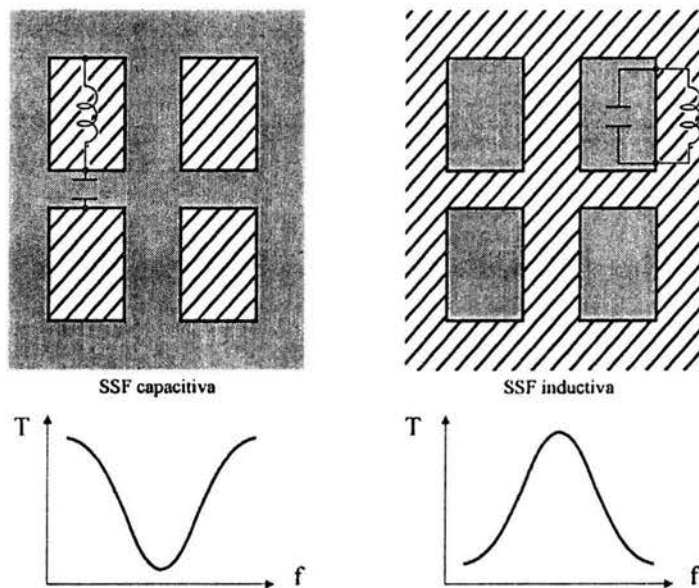


Figura 1.1. *SSF* capacitiva e inductiva con sus correspondientes circuitos equivalentes.

Asumiendo que los parches y las ranuras rectangulares en la figura 1.1 son de dimensiones y periodicidad idénticas, los dos filtros son complementarios entre sí.

En las técnicas típicas de litografía, un filtro de tipo capacitivo consistirá en parches metálicos depositados en un sustrato planar. Para el filtro del tipo inductivo, una hoja metálica (usualmente depositada sobre un sustrato dieléctrico) se perfora con ranuras. El espesor de la *SSF* con respecto a la longitud de onda para la que será utilizada determina si la *SSF* es clasificada como “gruesa” o “delgada”. Cuando el espesor físico de la *SSF* es una fracción de la longitud de onda más pequeña en el rango de las longitudes de onda para la que será usada, entonces la *SSF* puede modelarse como un filtro delgado.

Para filtros delgados, es posible modelarlos como el caso de “infinitamente delgados”. Tal modelo asume que las regiones de incidencia y transmisión están en contacto entre sí sobre el plano del filtro, con las condiciones de frontera aplicadas al plano del filtro. En el modelo del filtro grueso, el límite de la región incidente se acopla al lado incidente del filtro (la parte superior del filtro), mientras que el límite de la región de transmisión se acopla al lado de transmisión del filtro (la parte inferior del filtro). Este modelo tiene dos regiones límite distintas que deben acoplarse, opuestamente a la región única que presenta el modelo de la *SSF* delgada. Por esta razón es conveniente modelar la *SSF* como una estructura planar, infinitamente delgada.

Los elementos periódicos en una *SSF* son generalmente organizados en arreglos rectangulares como se muestra en la figura 1.2. Sin embargo, el arreglo geométrico más común es el arreglo triangular, también mostrado en la figura 1.2. Se observa que la periodicidad en el arreglo triangular existe a lo largo del eje x y el eje y . Si el ángulo oblicuo α es de 90° , entonces el arreglo triangular se convierte en un arreglo rectangular.

Debe mencionarse que el campo incidente será considerado como una onda plana. Los estados de polarización ortogonales serán divididos en *TE* (campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia) y *TM* (campo magnético perpendicular al plano de incidencia).

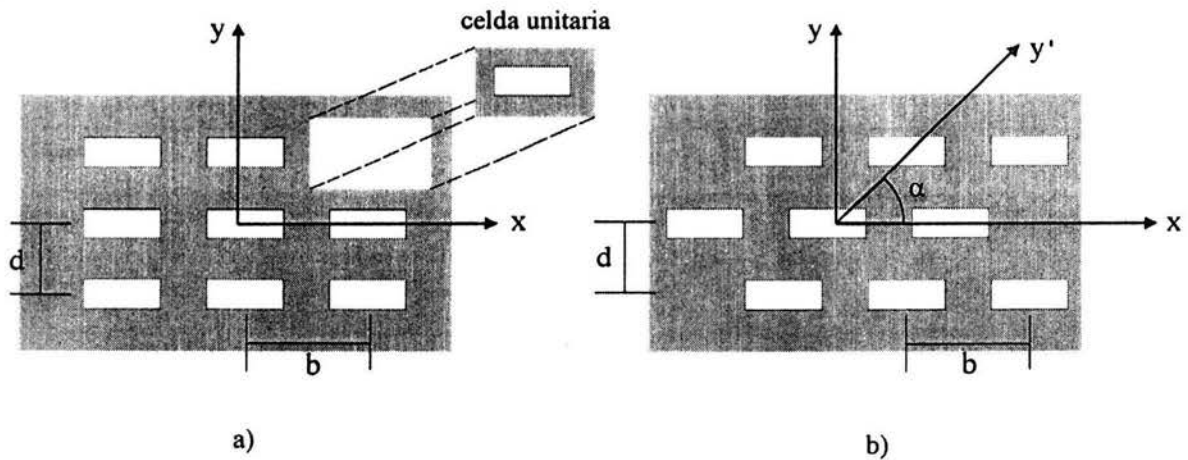


Figura 1.2. a) Arreglo rectangular y b) Arreglo triangular.

La periodicidad de la *SSF* se ha descrito en relación a la figura 1.2. Debido a que las ranuras o parches de la *SSF* se colocan de una forma periódica, es posible describir el campo en el plano del filtro solamente en términos de una celda periódica unitaria.

El teorema de Floquet establece que si una ecuación diferencial lineal tiene coeficientes y condiciones de frontera periódicas, entonces las soluciones estables serán, en el caso general, funciones periódicas multiplicadas por una función exponencial [4].

A través de la aplicación de este teorema, el campo en cualquier otra celda periódica será relacionado a la celda de referencia en términos de una función exponencial.

1.2. Aplicaciones de las *SSF*

Algunas aplicaciones de las *SSF* incluyen filtros paso-banda, polarizadores y divisores de haz. En el rango de longitudes de onda cercanas al infrarrojo, las superficies selectivas de frecuencia son usadas principalmente en aplicaciones de filtrado.

Si los elementos periódicos dentro de una *SSF* poseen características de resonancia, la *SSF* inductiva exhibirá una total transmisión a las longitudes de onda cercanas a la

longitud de onda de resonancia, mientras que la *SSF* capacitiva mostrará una total reflexión. Esta característica permite que una *SSF* con los elementos apropiados funcione como un filtro paso-banda estrecho. De forma similar, un diseño complementario puede construirse para reflejar selectivamente las frecuencias que corresponden a la banda de transparencia del filtro paso-banda estrecho. Aplicaciones específicas de estos tipos de filtros basados en *SSF* incluyen filtros astronómicos de banda estrecha y filtros para instrumentación espacial.

Si los elementos periódicos dentro de una *SSF* poseen una característica de resonancia dependiente de la polarización, tal característica puede ser empleada para producir un polarizador. Si esta dependencia de la polarización es utilizada con el propósito de que una sola polarización sea reflejada totalmente, mientras que la polarización ortogonal sea transmitida totalmente, la *SSF* puede emplearse como un divisor de haz.

El uso de las *SSF* permite la construcción de polarizadores y divisores de haz para longitudes de onda, donde los materiales tradicionales hacen la construcción de tales dispositivos poco práctica.

Divisor de Haz

En general una *SSF* actuará como un divisor de haz si una polarización es totalmente reflejada mientras que la polarización ortogonal es totalmente transmitida. La figura 1.3 muestra las configuraciones para un divisor de haz inductivo y capacitivo en donde una onda plana incide con un ángulo de 45° . Considérese una onda plana de polarización *TM* como la onda plana cuya proyección del vector del campo eléctrico en la superficie de la *SSF* es paralela a la dimensión larga de la ranura. Para un divisor de haz inductivo, la onda plana *TM* incidente debe ser totalmente reflejada.

La polarización ortogonal (polarización *TE*) tiene el vector de campo eléctrico perpendicular a la dimensión larga de la ranura. Tal polarización es transmitida totalmente a la longitud de onda de resonancia λ_r . Dado que la polarización *TM* experimenta una reflexión total y la polarización *TE* experimenta una transmisión total en λ_r , lo necesario

para construir un divisor de haz a partir de una *SSF* son la relación entre la geometría de la *SSF* (el período y las dimensiones de la ranura rectangular) y λ_r para una onda plana incidente a 45° .

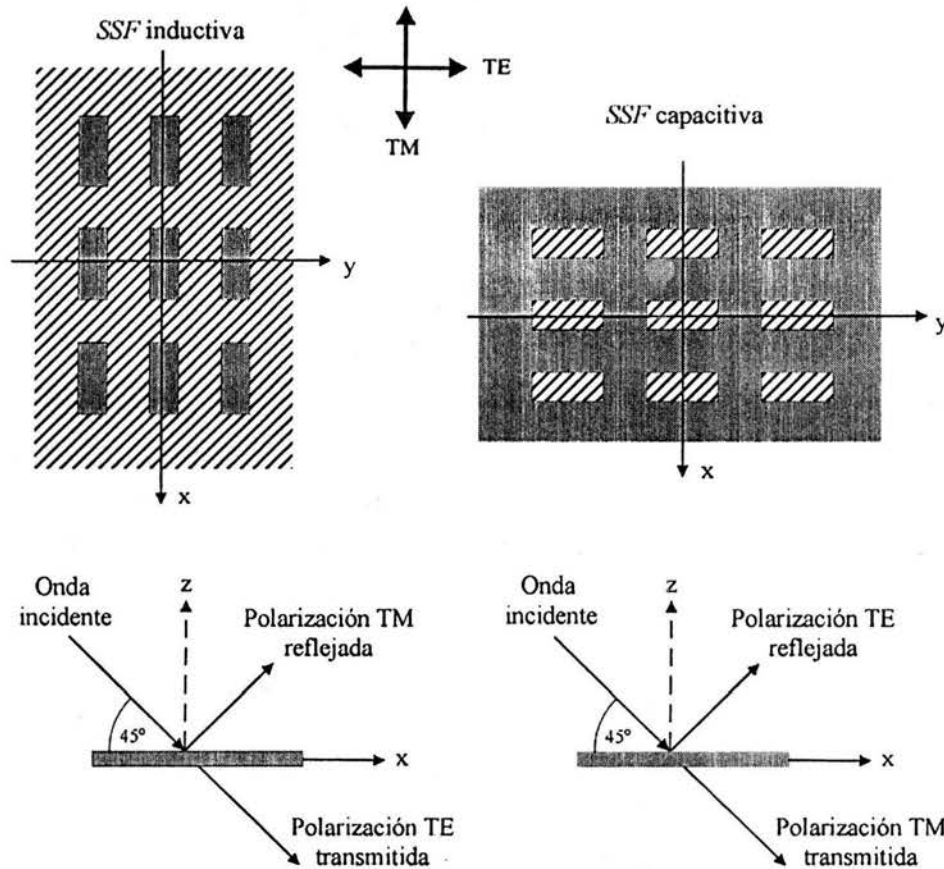


Figura 1.3. Divisor de haz.

Radomos Híbridos

La aplicación de radomos paso-banda suele reducir la sección transversal del radar (*STR*) de las antenas fuera de su banda de operación.

Una situación típica se muestra en la figura 1.4 donde la antena de radar montada al frente de un avión ha sido cubierta con un radomo cuya característica de filtro paso-banda se muestra en la misma figura. Cuando el radomo es expuesto a un campo incidente la

mayoría de las señales serán reflejadas debido a la forma del radomo y producirá una señal muy débil en la dirección de la llegada de la onda incidente, por lo que se tiene una *STR* baja. Por otro lado, si la señal incidente tiene una frecuencia donde el radomo es transparente, éste será incapaz de reducir la *STR* de la antena. La *STR* es esencialmente determinada por la antena misma y siempre se espera que sea de un valor lo más bajo posible. La solución sería entonces colocar una antena, denominada arreglo, diseñada para ser “invisible” en la dirección de regreso de la onda incidente sobre un rango de frecuencias relativamente amplio [5].

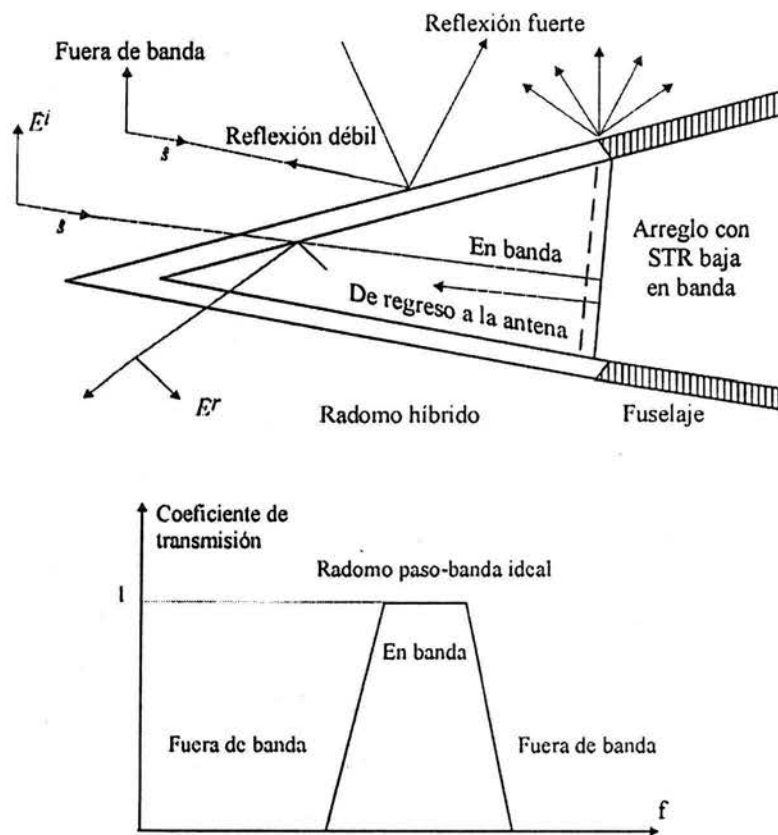


Figura 1.4. El uso de un radomo híbrido con característica paso-banda reduce la *STR* de la antena fuera de banda.

Subreflectores Dicroicos

En la figura 1.5 se muestra un sistema Cassegrain que tiene el subreflector hecho de una estructura dicroica. Este término se refiere a una superficie periódica que es transparente en una banda de frecuencias f_1 mientras que en otra banda de frecuencias f_2 no lo es. Esto permite colocar un alimentador de corneta que opera en f_1 sobre el foco del reflector principal y otro alimentador de corneta operando en f_2 sobre la posición focal Cassegrain. El resultado permite que las dos bandas de frecuencias f_1 y f_2 puedan ser utilizadas por un solo reflector principal, lo cual presenta ahorros en aspectos tanto financieros como de espacio.

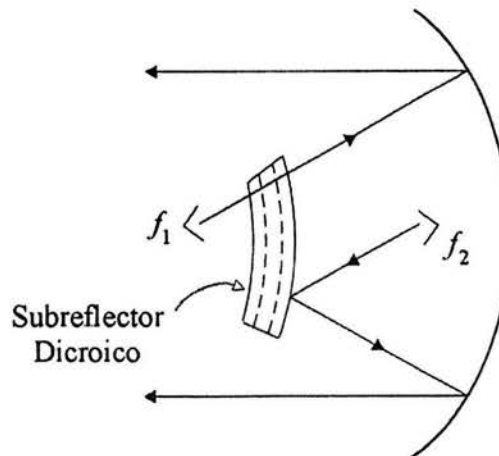


Figura 1.5. Uso de una estructura periódica como un subreflector Cassegrain.

Polarizadores Meanderline

Para una onda incidente del campo eléctrico con polarización vertical, el polarizador actuará como una inductancia en derivación sobre una línea de transmisión equivalente, mientras que una onda polarizada horizontalmente será afectada de una manera capacitiva.

Entonces si una onda incidente es linealmente polarizada e inclinada 45° , puede di-

vidirse en dos componentes vertical y horizontal, donde la primera será retrasada y la última adelantada en fase. Si después de pasar a través del polarizador la diferencia total entre las dos componentes es 90° , se recombinarán en una onda de polarización circular. Al colocar en cascada dos o más superficies polarizadoras es posible mejorar el ancho de banda [5].

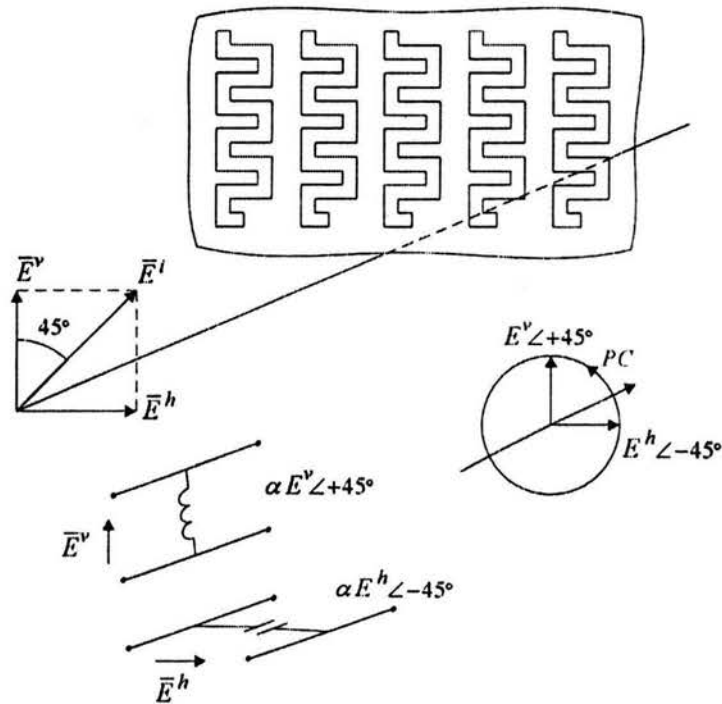


Figura 1.6. Estructura meanderline.

Arreglos Reflectivos

Una alternativa para el uso de antenas de reflector son los llamados arreglos reflectivos, que están constituidos por un alimentador y un reflector. La característica principal de los arreglos reflectivos radica en el reflector, el cual está formado por un arreglo de elementos radiantes, a diferencia de los reflectores metálicos parabólicos [6].

Las antenas basadas en arreglos reflectivos combinan las mejores características de los reflectores y de los arreglos de fase. Por un lado la alimentación de cada uno de los

elementos radiantes que forman el arreglo es llevada a cabo con un alimentador y no con líneas de transmisión convencionales, alimentación empleada en los arreglos de fase. De esta forma se evita la complejidad de la red de alimentación que puede introducir elevadas pérdidas y desplazamientos de fase. Por otro lado con la tecnología impresa empleada actualmente en la realización de los elementos radiantes, el arreglo reflectivo es una superficie plana de dos dimensiones, frente a la superficie parabólica de tres dimensiones. Gracias a esto se reduce enormemente la complejidad mecánica y el volumen de la antena.

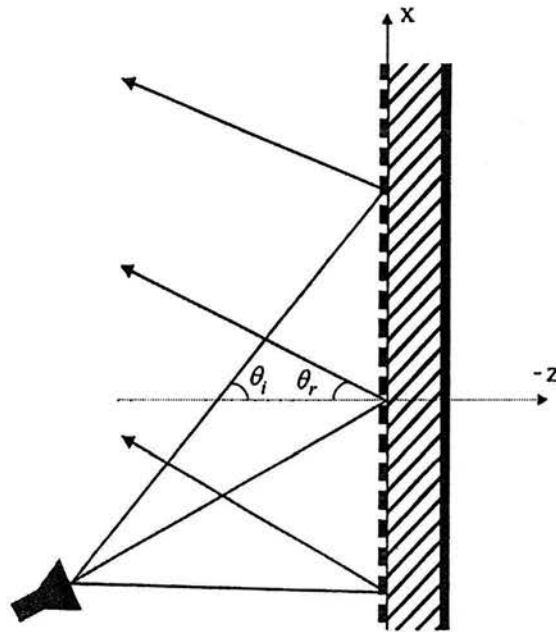


Figura 1.7. Arreglo reflectivo.

La base del funcionamiento de los arreglos reflectivos radica en que cada uno de los elementos del arreglo deben volver a radiar la energía proveniente de la bocina alimentadora con un defasaje que se ajuste de forma apropiada para que el haz del campo reflejado quede enfocado en una determinada dirección.

Filtros Astronómicos

Filtros paso-banda muy estrechos (con anchos de banda en el orden de un angstrom) son usados a menudo en aplicaciones astronómicas. Por ejemplo, el examen de la superficie solar a longitudes de onda "Hidrógeno-alfa" ($H\alpha$) les permite a los astrónomos examinar la cromosfera. Normalmente esta región se ve abrumada por la intensidad de la capa inferior (la fotosfera), pero se vuelve ópticamente espesa exactamente a la longitud $H\alpha$ de 6565 Å (angstroms). Los filtros paso-banda centrados en una longitud de onda de 6565 Å, con un ancho de banda de 1 o menos angstroms son difíciles de construir. Un filtro típico hecho de películas delgadas de dieléctrico, debe mantenerse a una temperatura precisa para conservar las características de resonancia del filtro. Esto se logra usando un "horno" controlado termo-estáticamente. Es posible usar una *SSF* para crear un filtro paso-banda estrecho, donde ningún "horno" es necesario.

La tarea de la *SSF* será el proporcionar la respuesta paso-banda estrecha necesaria para completar la filtración de las longitudes $H\alpha$ [7]. Para esto se considera que la luz entrante del sol ha sido propiamente reducida en intensidad y polarizada. Y también que un sistema convencional de filtrado en banda ancha se emplea para bloquear todas las longitudes de onda, salvo aquellas en la región $H\alpha$ deseada.

1.3. Investigaciones Sobre el Modelado de las SSF

La teoría de antenas de arreglos de fase proporciona un fundamento teórico para las SSF . El estudio específicamente relacionado con las SSF es numeroso y diverso. Por simplicidad las investigaciones sobre SSF se catalogan basándose en las técnicas empleadas para el análisis del filtro. El método para analizar las superficies selectivas de frecuencia puede ser desglosado en varias categorías: técnicas de la teoría de circuitos, técnicas de expansión modal, técnicas iterativas, etc.

El enfoque de la teoría de circuitos utiliza la aproximación cuasi-estática para derivar el modelo del circuito equivalente para la SSF . En la técnica de expansión modal, los modos Floquet en el espacio se acoplan con los modos de la ranura para formar una ecuación integral. Esta ecuación integral se resuelve por medio de una técnica, como el método de momentos [8]. Los métodos iterativos [9] pueden ahorrar amplios requisitos de almacenamiento de matrices utilizando la iteración en el cómputo explícito de éstas. En la técnica iterativa espectral, la corriente en la superficie de la región conductora es la cantidad a iterar.

Las técnicas de expansión modal comprenden la clase más grande de métodos para analizar las SSF . Estos métodos predicen la respuesta espectral de las SSF con un alto grado de precisión [2]. En particular se ha propuesto una técnica de expansión modal basada en el método de momentos para analizar una delgada pantalla conductora ranurada [3]. Este método también puede extenderse a ranuras circulares usando los modos de la guía de onda circular para las funciones de expansión, descritas en [10]. Los filtros capacitivos (parches de metal en lugar de las ranuras) pueden analizarse aplicando un procedimiento similar [11].

1.3.1. Apreciación del Método Modal

El campo de la onda plana incidente se descompone en una combinación lineal de modos Floquet TE y TM . Cada uno de los campos reflejado y transmitido desconocidos

se expanden en una serie infinita de modos Floquet con coeficientes desconocidos.

Debido a que el propio filtro es considerado como el caso de “infinitamente delgado”, las expansiones de las tres componentes del campo se acoplan en este plano. La representación integral de los coeficientes de reflexión y transmisión son sustituidos por estos coeficientes de reflexión y transmisión desconocidos, resultando una ecuación integral.

Para aplicar las condiciones de frontera al plano del filtro, el campo en las ranuras (o en los parches) de la *SSF* se expande en otro conjunto de funciones base ortonormales que abarcan el espacio de la ranura (o parche). Esta expansión del campo se sustituye en la ecuación integral. Usando el método de Galerkin, la ecuación integral es transformada en un sistema de ecuaciones que debe ser resuelto para obtener los coeficientes de transmisión y de reflexión. En el siguiente capítulo se plantea, de forma general, el problema de las condiciones de frontera para el análisis de las *SSF*.

Capítulo 2

Formulación General del Problema de las Condiciones de Frontera

Para estudiar las superficies selectivas de frecuencia, la teoría de antenas de arreglos de fase proporciona un punto de partida. A continuación se plantea el análisis sobre un arreglo de fase basándose en el trabajo de Amitay, Galindo y Wu [1].

La propuesta para el análisis de arreglos de fase, donde se ignoran los efectos de la interacción mutua entre los elementos del arreglo, ha mostrado ser generalmente inadecuada. Sin embargo, es posible obtener un modelo matemático de la interacción mutua con razonable exactitud para grandes arreglos periódicos e infinitos. De hecho los arreglos finitos pueden ser sujetos a ciertos enfoques matemáticos. Pero es más fácil analizar el arreglo infinito porque el teorema de Floquet es aplicable al problema.

El teorema de Floquet permite describir los campos en la región externa de cualquier elemento del arreglo de la guía de onda ($z \geq 0$ en la figura 2.1) en términos de un juego completo ortogonal de modos. Estos modos Floquet y el uso de los modos de guía de onda naturales permiten formular el problema de las condiciones de frontera en arreglos de fase, en términos de diferentes tipos de ecuaciones integrales. Estas ecuaciones integrales bidimensionales son generalmente aplicables a una clase muy amplia de antenas de arreglos de fase.

2.1. El Teorema de Floquet y los Arreglos Infinitos

El teorema de Floquet es una extensión del teorema de series de Fourier para funciones periódicas. Esta extensión permite una descripción modal de cualquier campo o función que se repita periódicamente multiplicado por un factor exponencial. Dicha función periódica es una descripción apropiada para el campo situado en la vecindad de un arreglo de fase periódico infinito que es excitado uniformemente en amplitud pero con variaciones lineales de fase.

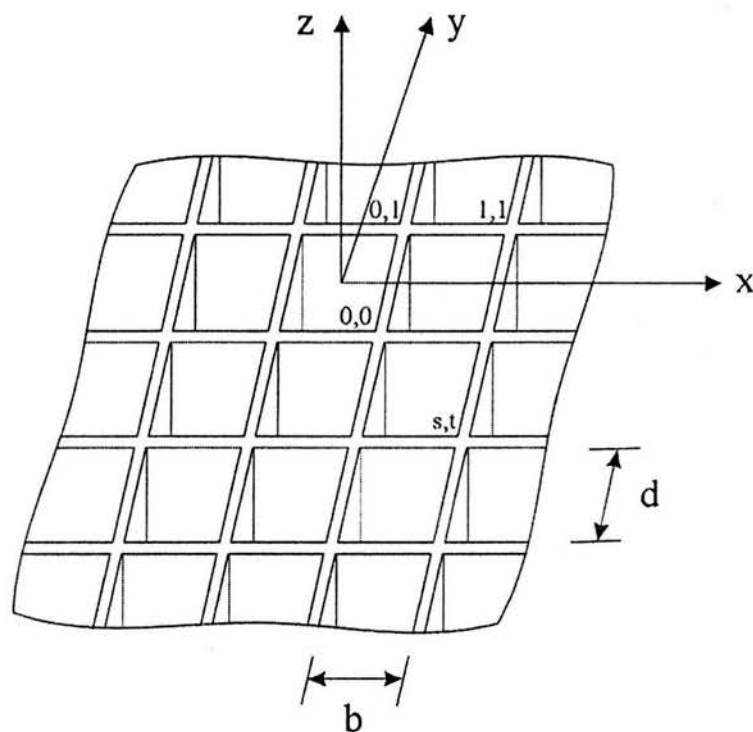


Figura 2.1. Arreglo infinito de guías de onda.

Considerando el arreglo rectangular de guías de onda de longitud infinita y de conductor perfecto mostrado en la figura 2.1 (los elementos pueden ser rectangulares, como se muestra, o de cualquier otra sección transversal). Las guías de onda están acopladas en $z = -\infty$, por lo que ninguna onda que viaje en dirección $z = -\infty$ regresará. Si el

elemento de coordenadas (s, t) de la guía de onda es excitado por uno de sus modos con coeficiente

$$V_{00}e^{-j(s\psi_x+t\psi_y)} \quad (2.1)$$

donde ψ_x y ψ_y son cambios de fase fijos en las direcciones x y y , respectivamente, esta distribución de fase lineal excitará un haz radiado en la dirección (θ, ϕ) dada por

$$\psi_x = kb \sin \theta \cos \phi \quad (2.2)$$

$$\psi_y = kd \sin \theta \sin \phi$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es la constante de propagación y λ es la longitud de onda en el espacio libre.

Para la representación del campo por medio de modos Floquet, se asume que los elementos del arreglo de la guía de onda son excitados por modos con coeficientes dados por (2.1). El determinar una representación apropiada para los campos en la región del espacio libre ($z \geq 0$), lleva a la derivación del teorema de Floquet.

Cualquier componente del campo en coordenadas rectangulares es una solución a la ecuación escalar homogénea de Helmholtz en esta región

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{\xi}(x, y, z) = 0 \quad (2.3)$$

donde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Para guías de onda, ξ representa a E_z o H_z . Asumiendo que el campo varía con respecto a la dirección de propagación z ,

$$\vec{\xi}(x, y, z) = e^{-j\Gamma z} \vec{\xi}(x, y) \quad (2.4)$$

y que sobre el perímetro de la guía de onda $E_z = \xi = 0$ o $\partial H_z/\partial n = \partial \xi/\partial n = 0$, donde

n es la normal perimetral.

Con la excitación dada por (2.1) y la simetría periódica del arreglo, se observa que todas las componentes del campo o ξ , presentan el siguiente comportamiento

$$\vec{\xi}(x+b, y+d, z) = \vec{\xi}(x, y, z) e^{-j(\psi_x + \psi_y)} \quad (2.5)$$

Este es el comportamiento requerido de los campos en cualquier plano transversal ($z = \text{constante}$). El comportamiento en la dirección z se considera, al igual que en las guías de onda, como

$$\vec{\xi}(x, y, z) = \vec{\xi}(x, y) e^{-j\Gamma z} \quad (2.6)$$

entonces la ecuación (2.3) se convierte en

$$[\nabla_i^2 + (k^2 + \Gamma^2)] \vec{\xi}(x, y) = 0 \quad (2.7)$$

donde

$$\nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

con la condición de frontera de fase periódica (2.5).

Aplicando la técnica de separación de variables a (2.7) se tiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_x^2 \right) f(x) = 0 \quad (2.8)$$

para la dependencia en x y

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_y^2 \right) g(y) = 0 \quad (2.9)$$

para la dependencia en y , donde k_x y k_y son constantes de separación tal que

$$\Gamma^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2 \quad (2.10)$$

Ahora, considerando únicamente la dependencia en x , si

$$f(x + b) = f(x)e^{-j\psi_x}$$

es posible definir a

$$F(x) = f(x)e^{j(\psi_x/b)x}$$

como una función periódica, dado que

$$F(x + b) = f(x + b)e^{j(\psi_x/b)x}e^{j\psi_x} = F(x)$$

Por lo tanto $F(x)$ puede representarse mediante la siguiente serie de Fourier:

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{j(2\pi m/b)x}$$

y

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{j[(2\pi m - \psi_x)/b]x} \quad (2.11)$$

Cada término de esta serie también satisface la ecuación (2.8), y en general

$$k_x = k_{xm} = \frac{2\pi m - \psi_x}{b} \quad (2.12)$$

De forma similar, para la dependencia en y , se obtiene

$$k_y = k_{yn} = \frac{2\pi n - \psi_y}{d} \quad (2.13)$$

así que

$$\Gamma_{mn}^2 = k^2 - \left(\frac{2\pi m - \psi_x}{b}\right)^2 - \left(\frac{2\pi n - \psi_y}{d}\right)^2 \quad (2.14)$$

y

$$\vec{\xi}_{mn}(x, y, z) = e^{jk_{xm}x} e^{jk_{yn}y} e^{-j\Gamma_{mn}z} \quad (2.15)$$

La anterior solución periódica de la ecuación (2.3) sujeta a la condición de frontera (2.5) es en esencia, un planteamiento del teorema de Floquet.

2.1.1. Modos Floquet Vectoriales

La parte transversal del campo dependiente de ψ puede ser ortonormalizada de tal manera que

$$\vec{\xi}_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{1}{bd}} e^{jk_{xm}x} e^{jk_{yn}y} \quad (2.16)$$

y

$$\iint_{A_p} \xi_{mn} \xi_{m'n'}^* dx dy = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (2.17)$$

donde la delta de Kronecker, $\delta_{mm'}$, es igual a 1 para $m = m'$ y 0 para $m \neq m'$, y A_p denota el área de cualquier celda periódica sobre la superficie del arreglo ($b \times d$ para el arreglo rectangular de la figura 2.1). La ecuación (2.16) representa un juego ortonormal de modos Floquet escalares.

Un conjunto completo ortonormal de modos Floquet vectoriales *TE* y *TM* a partir de los modos Floquet escalares (2.16) se deriva a continuación.

Modos TE.

Si $\vec{\xi}_{mn}(x, y) = \vec{H}_{zmn}(x, y)$ y $\vec{E}_z = 0$, entonces los correspondientes campos transversales (de componentes en \hat{x} y \hat{y}) son obtenidos a partir de \vec{H}_{zmn} por

$$\vec{E}_{tmn} = \frac{j\omega\mu}{k_{r_{mn}}^2} \hat{z} \times \nabla_t \vec{H}_{zmn} \quad (2.18)$$

y

$$\vec{H}_{tmn} = \frac{j\Gamma_{mn}}{k_{r_{mn}}^2} \nabla_t \vec{H}_{zmn} \quad (2.19)$$

donde

$$k_{r_{mn}}^2 = k_{xm}^2 + k_{yn}^2 = k^2 - \Gamma_{mn}^2 \quad (2.20)$$

y

$$\nabla_t = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} = j(\hat{x}k_{x_m} + \hat{y}k_{y_n}) \quad (2.21)$$

Las funciones modales vectoriales obtenidas son ortogonales pero no están normalizadas. Para obtener un modo vectorial ortonormalizado se define

$$\vec{E}_{t_{mn}} = \frac{\omega\mu}{k_{r_{mn}}} \vec{\Psi}_{1mn}(x, y) \quad (2.22)$$

obteniendo

$$\vec{\Psi}_{1mn} = \sqrt{\frac{1}{bd}} \left\{ \frac{k_{y_n} \hat{x} - k_{x_m} \hat{y}}{k_{r_{mn}}} \right\} e^{j(k_{x_m}x + k_{y_n}y)} \quad (2.23)$$

como un modo ortonormal, donde el subíndice 1 que precede al subíndice mn significa que es un modo TE . Estos modos tienen la siguiente propiedad

$$\iint_{A_p} \vec{\Psi}_{1mn} \cdot \vec{\Psi}_{1m'n'}^* dx dy = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (2.24)$$

Recordando que $\vec{E}_{t_{mn}}$ y $\vec{H}_{t_{mn}}$ se relacionan mediante

$$\hat{z} \times \vec{H}_{t_{mn}} = \left(\frac{\Gamma_{mn}}{\omega\mu} \right) \vec{E}_{t_{mn}} \quad (2.25)$$

se denota esta proporción como la admitancia modal TE

$$Y_{1mn} = \frac{\Gamma_{mn}}{\omega\mu} \quad (2.26)$$

Modos TM.

Para el caso del modo TM , los campos transversales se derivan como

$$\vec{E}_{t_{mn}} = \frac{-j\Gamma_{mn}}{k_{r_{mn}}^2} \nabla_t \vec{E}_{z_{mn}} \quad (2.27)$$

y

$$\vec{H}_{t_{mn}} = \frac{j\omega\epsilon}{k_{r_{mn}}^2} \hat{z} \times \nabla_t \vec{E}_{z_{mn}} \quad (2.28)$$

definiendo un modo TM ortonormal

$$\vec{E}_{t_{mn}} = \frac{\Gamma_{mn}}{k_{r_{mn}}} \vec{\Psi}_{2mn} \quad (2.29)$$

donde

$$\vec{\Psi}_{2mn} = \sqrt{\frac{1}{bd}} \left\{ \frac{k_{x_m} \hat{x} + k_{y_n} \hat{y}}{k_{r_{mn}}} \right\} e^{j(k_{x_m}x + k_{y_n}y)} \quad (2.30)$$

El subíndice 2 significa un modo TM . El juego de los modos TE y TM para el espacio libre tienen la propiedad

$$\iint_{A_p} \vec{\Psi}_{p_{mn}} \cdot \vec{\Psi}_{p'm'n'}^* dx dy = \delta_{pp'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (2.31)$$

donde la delta de Kronecker, $\delta_{pp'}$, indica que los modos vectoriales TE y TM son mutuamente ortogonales.

La admitancia modal TM es encontrada a partir de

$$\hat{z} \times \vec{H}_{t_{mn}} = \left(\frac{\omega\epsilon}{\Gamma_{mn}} \right) \vec{E}_{t_{mn}} \quad (2.32)$$

como

$$Y_{2mn} = \frac{\omega\epsilon}{\Gamma_{mn}} \quad (2.33)$$

Físicamente las funciones modales vectoriales, $\vec{\Psi}_{p_{mn}}$, son ondas planas TE o TM que se propagan (o decaen) fuera del plano de la ranura ($z = 0$). La constante de propagación en la dirección z , Γ_{mn} , es real para las ondas que se propagan, mientras que es un valor puramente imaginario para las ondas que decaen (ondas evanescentes).

En aplicaciones prácticas, son los campos en la zona lejana de especial interés. En la zona lejana, generalmente solo los modos TE y TM con índices modales $m = n = 0$ existen ya que los modos de orden superior son evanescentes si los espacios de la celda b

y d son pequeños. Por ejemplo, cuando b y d son menores a la mitad de la longitud de onda, no hay lóbulo principal secundario alguno en el patrón de radiación de la antena, solo los modos con $m = n = 0$ se propagan en la zona lejana.

2.2. Ecuaciones Integrales para el Arreglo de Fase Infinito

Ahora se formula el problema del arreglo de fase de la figura 2.1, cuyas guías de onda con paredes de conductor perfecto y longitud infinita pueden presentar elementos de guía de onda arbitrarios, como un problema de condiciones de frontera electromagnéticas. Los puntos de partida son la estructura de la figura 2.1, las ecuaciones de Maxwell y las apropiadas condiciones de frontera del campo.

En lugar de las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera usuales, es posible describir los campos dentro de las guías de onda en términos de un juego completo de soluciones modales a las ecuaciones de Maxwell apropiadas para una guía de onda en particular. En la región del espacio libre ($z \geq 0$) se podría usar la descripción en modos Floquet de los campos, tal y como se vio en la sección anterior. Los coeficientes desconocidos de estos modos pueden ser determinados aplicando las apropiadas condiciones de continuidad para los campos tangenciales en la ranura, \vec{E}_t y \vec{H}_t , en $z = -\infty$, $z = 0$ y $z = +\infty$.

Las condiciones para los campos en $z = +\infty$ y $z = -\infty$ son determinadas por la condición de radiación o las condiciones terminales de las guías de onda. Asumiendo que las guías de onda en $z = -\infty$ terminan en su impedancia característica (al igual que en el espacio libre en $z = +\infty$), entonces, salvo cualquier campo incidente, los campos modales deberán salir de la interfaz espacio libre - ranura en la guía de onda ($z = 0$). Siempre se considerará que un campo incidente está presente para tratar al problema como un problema de dispersión, en donde los campos se dispersan en la unión de la ranura. El campo incidente se puede originar dentro de las guías de onda (el arreglo transmisor

activo) o de la región del espacio libre (el arreglo receptor pasivo).

Después de aplicar las condiciones de radiación, la aplicación de las condiciones de continuidad en $z = 0$ dará como resultado una solución para los coeficientes modales desconocidos del campo.

2.2.1. Ecuación Integral para el Campo Desconocido E

Para el problema de la figura 2.1, el arreglo transmisor activo, es necesario derivar una ecuación integral de primer orden con E_t , el campo tangencial eléctrico en la ranura, como variable desconocida. En el arreglo de guías de onda ilustrado en dicha figura, es posible considerar un elemento típico (de cualquier corte transversal) tal y como se muestra en la figura 2.2.

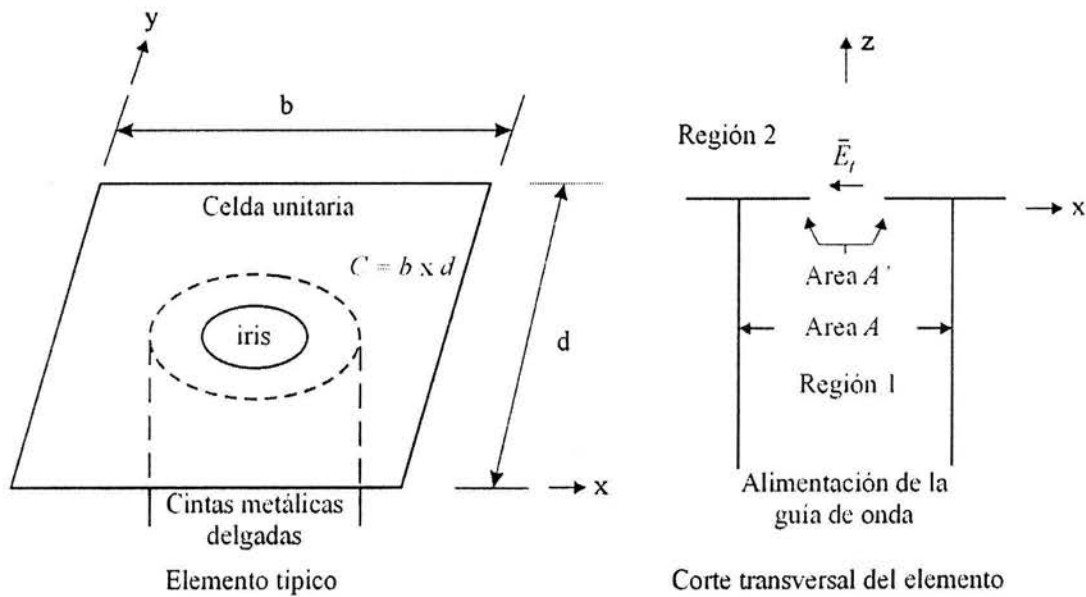


Figura 2.2. Corte transversal de un elemento típico.

Considerando una celda unitaria de un arreglo ranurado como se muestra en la figura 2.2, la celda unitaria es rectangular y ocupa un área C en el plano $x - y$. Se muestra un

elemento de la guía de onda con una sección transversal de área A con un delgado iris metálico en la apertura de la guía de onda. La apertura del iris con área A' , constituye un elemento ranurado; fuera de la ranura el plano $z = 0$ es un conductor perfecto. La región 2 representa el espacio libre mientras que la región 1 es el interior de las guías de onda, cuyas paredes son de conductor perfecto.

Debe mencionarse que la sección transversal de la guía de onda de área A' y la apertura del iris A' pueden representar una composición de varias guías de onda en una superficie periódica, como se muestra en la figura 2.3.

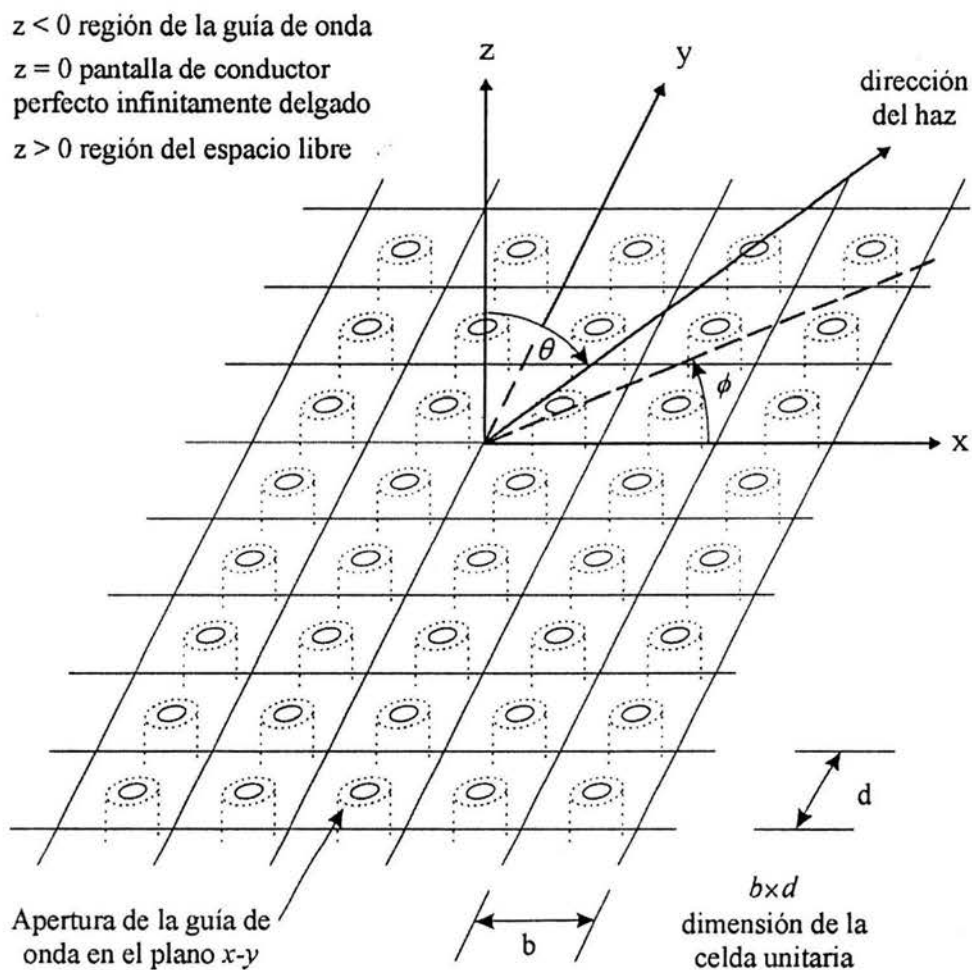


Figura 2.3. Arreglo de guías de onda.

El campo transversal eléctrico, $\vec{\mathcal{E}}_t = \hat{x}\vec{\mathcal{E}}_{t_x} + \hat{y}\vec{\mathcal{E}}_{t_y}$, dentro de la guía de onda (q, s) puede ser expresado como una suma de los modos vectoriales ortonormales de la guía de onda, $\vec{\Phi}_{pqs}$, ($p = 1$ para los modos TE y $p = 2$ para los modos TM) como:

$$\vec{\mathcal{E}}_t(x, y, z) = \left[\begin{array}{c} \sum_{i=1}^J (A_i e^{-j\gamma_i z} + R_i e^{j\gamma_i z}) \vec{\Phi}_i(x, y) + \\ \sum_{i=J+1}^{\infty} v_i \vec{\Phi}_i(x, y) e^{-j\gamma_i z} \end{array} \right] e^{-j(q\psi_x + s\psi_y)} \quad (2.34)$$

En la ecuación (2.34) por simplicidad se reordenaron los modos de la guía de onda

$$\vec{\Phi}_{pqs} \rightarrow \vec{\Phi}_i$$

adoptando un solo índice (i). Esta notación será de gran utilidad para obtener una solución aproximada. El reordenamiento de los modos se lleva a cabo considerando la contribución de los modos de la guía de onda.

Los coeficientes A_i : $i = 1, \dots, J$ son los coeficientes conocidos de los primeros J modos incidentes sobre la ranura en $z = 0$. Normalmente estos modos se propagan, es decir, $\gamma_i = |\gamma_i|$ para $i = 1, \dots, J$. Sin embargo es posible permitir que algunos de estos modos sean evanescentes, $\gamma_i = -j|\gamma_i|$, aunque en tal caso la impedancia y las matrices de dispersión deben redefinirse cuidadosamente. Los coeficientes R_i son los coeficientes de reflexión desconocidos referidos a la ranura, $z = 0$, de cada uno de los primeros J modos. Los coeficientes v_i son las amplitudes de los modos restantes que deben determinarse junto con R_i , para una solución completa del problema. Dado que los campos se repiten periódicamente, desde un punto de vista del teorema de Floquet, de celda a celda (es decir con un cambio de fase ψ_x en la dirección x y ψ_y en la dirección y), es suficiente discutir únicamente los campos en la celda ($q = 0, s = 0$).

Observando que el campo descrito por (2.34) satisface la condición de radiación en $z = -\infty$, se debe satisfacer la condición de continuidad en $z = 0$, obteniendo

$$\vec{E}_t(x, y, z = 0^-) = \sum_{i=1}^J (A_i + R_i) \vec{\Phi}_i + \sum_{i=J+1}^{\infty} v_i \vec{\Phi}_i \quad (2.35)$$

Aplicando las propiedades de la ortonormalidad sobre la sección transversal de la guía de onda, A ,

$$\iint_A \vec{\Phi}_i \cdot \vec{\Phi}_k \, dx dy = \delta_{ik} \quad (2.36)$$

donde δ_{ik} es la delta de Kronecker, permite expresar a los coeficientes en términos del campo tangencial eléctrico desconocido en la ranura

$$\iint_A \vec{\Phi}_i \cdot \vec{E}_t \, dx dy = \begin{cases} A_i + R_i & i \leq J \\ v_i & i > J \end{cases} \quad (2.37)$$

cuando el iris está presente, el área de integración se reduce a A' en favor de las condiciones de frontera que requieren el desvanecimiento de \vec{E}_t sobre el iris, $A - A'$.

El campo transversal magnético, $\vec{\mathcal{H}}_t$, en las guías de onda puede ser encontrado de las ecuaciones de Maxwell o mediante los modos Floquet, haciendo uso de las admitancias modales. Los modos que viajan en la dirección $+z$ tendrán el campo transversal magnético que apunta (para ese modo) opuestamente al del mismo modo que viaja en la dirección $-z$.

Obteniendo por consiguiente $\vec{\mathcal{H}}_t$

$$-\hat{z} \times \vec{\mathcal{H}}_t(x, y, z) = \sum_{i=1}^J (A_i e^{-j\gamma_i z} - R_i e^{j\gamma_i z}) y_i \vec{\Phi}_i - \sum_{i=J+1}^{\infty} v_i y_i \vec{\Phi}_i e^{j\gamma_i z} \quad (2.38)$$

donde los coeficientes y_i son las admitancias modales de la guía de onda, definidas como $y_i = \gamma_i / \omega \mu$ para los modos TE y $y_i = \omega \epsilon / \gamma_i$ para los modos TM . Para los modos que se propagan y_i es siempre real positivo. Para los modos evanescentes y_i está dado por

$$y_i = \frac{\gamma_i}{\omega \mu} = j \frac{|\gamma_i|}{\omega \mu} \quad (2.39)$$

para modos TE y

$$y_i = \frac{\omega \epsilon}{|\gamma_i|} = -j \frac{\omega \epsilon}{|\gamma_i|} \quad (2.40)$$

para modos TM .

Obteniendo el campo magnético en la ranura

$$-\hat{z} \times \vec{H}_t(x, y, z) = -\hat{z} \times \vec{H}_t(x, y, z = 0^-) = \sum_{i=1}^J (A_i - R_i) y_i \vec{\Phi}_i - \sum_{i=J+1}^{\infty} v_i y_i \vec{\Phi}_i \quad (2.41)$$

Es conveniente considerar la representación de \vec{E}_t y \vec{H}_t como integrales mediante el uso de la relación (2.37). Por lo tanto (2.35) se convierte en

$$\vec{E}_t(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\Phi}_i \iint_A \vec{\Phi}_i \cdot \vec{E}_t \, dx' dy' \quad (2.42)$$

Introduciendo el concepto de la función delta u operador de identidad es posible invertir el orden de integración y el sumando en (2.42) como

$$\vec{E}_t(x, y) = \iint_A \left[\sum_{i=1}^{\infty} \vec{\Phi}_i(x, y) \vec{\Phi}_i(x', y') \right] \cdot \vec{E}_t(x', y') \, dx' dy' \quad (2.43)$$

La representación de una función delta en virtud de la integridad de las funciones $\vec{\Phi}_i$ sobre A es

$$\bar{I} \delta(x - x') \delta(y - y') = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\Phi}_i(x, y) \vec{\Phi}_i(x', y') \quad (2.44)$$

donde \bar{I} es un operador tridimensional unitario. El operador integral,

$$\iint_A \left[\sum_{i=1}^{\infty} \vec{\Phi}_i(x, y) \vec{\Phi}_i(x', y') \right] \cdot dx' dy' \quad (2.45)$$

es un operador de identidad sobre las funciones vectoriales.

Con estos conceptos se puede escribir el campo eléctrico en la ranura (2.35), como

$$\vec{E}_t(x, y) = \sum_{i=1}^J (A_i + R_i) \vec{\Phi}_i + \iint_A \left[\sum_{i=J+1}^{\infty} \vec{\Phi}_i \vec{\Phi}_i \right] \cdot \vec{E}_t \, dx' dy' \quad (2.46)$$

y con una simple extensión de estos conceptos, el campo magnético (2.41), puede es-

cribirse como

$$-\hat{z} \times \vec{H}_t(x, y) = \sum_{i=1}^J (A_i - R_i) y_i \vec{\Phi}_i - \iint_A \left[\sum_{i=J+1}^{\infty} y_i \vec{\Phi}_i \vec{\Phi}_i \right] \cdot \vec{E}_t dx' dy' \quad (2.47)$$

El operador en (2.47) puede verse como un operador de admitancia, opuestamente al operador unitario en (2.46).

El campo transversal eléctrico en la región del espacio libre ($z \geq 0$) puede ser representado por un juego completo de modos Floquet vectoriales, como se mencionó antes. Debido a que la única excitación o campo incidente proviene de las guías de onda (para el caso del arreglo transmisor activo), estos modos deben viajar en la dirección $+z$ en $z = \infty$

$$\vec{\mathcal{E}}_t(x, y, z \geq 0) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \vec{\Psi}_k(x, y, z) e^{-j\Gamma_k z} \quad (2.48)$$

En la ecuación anterior, al igual que con los modos de la guía de onda, se reordenaron los modos Floquet en el espacio libre

$$\vec{\Psi}_{pmn} \rightarrow \vec{\Psi}_k$$

utilizando un solo índice (k). El reordenamiento considera aquellos modos cuya componente del número de onda sea X veces menor al número de onda del espacio libre. El valor de X debe ser determinado tomando en cuenta un número de modos suficientes para la simulación numérica.

Los coeficientes V_k son los coeficientes desconocidos en esta representación del campo eléctrico. En $z = 0^+$ se puede usar la ortonormalidad de los modos en el espacio libre (2.31), para expresar

$$V_k = \iint_A \vec{\Psi}_k^*(x, y) \cdot \vec{E}_t(x, y) dx dy \quad (2.49)$$

En (2.49) se usó la misma designación del campo, \vec{E}_t para la región $z = 0^+$ como se hizo en la expresión (2.37) para $z = 0^-$. Las ecuaciones (2.37) y (2.49), juntas constituyen una expresión para la continuidad de \vec{E}_t a través de la ranura en $z = 0$. Solo es

necesario comparar las expresiones para \vec{H}_t a través de la ranura para satisfacer todas las condiciones de frontera y llegar a una representación de la ecuación integral.

Una expresión para \vec{H}_t ($x, y, z \geq 0$) se obtiene a partir del uso de las admitancias modales en el espacio libre

$$-\hat{z} \times \vec{H}_t(x, y, z \geq 0) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k Y_k \vec{\Psi}_k(x, y, z) e^{-j\Gamma_k z} \quad (2.50)$$

En la ranura, usando (2.49), se obtiene

$$-\hat{z} \times \vec{H}_t(x, y, z = 0^+) = \iint_A \left[\sum_{k=1}^{\infty} Y_k \vec{\Psi}_k \vec{\Psi}_k^* \right] \cdot \vec{E}_t \, dx' dy' \quad (2.51)$$

Para tomar en cuenta la posible presencia del iris en la ranura de la guía de onda (figura 2.3), se necesita $\vec{E}_t = 0$ en el área $A - A'$. Esta condición de frontera se satisface reemplazando A por A' en (2.47) y (2.51).

Finalmente se igualan estas dos expresiones para $\hat{z} \times \vec{H}_t$ sobre el área A' únicamente y los rangos de (x, y) y (x', y') se definen sobre la misma región A' . Haciendo el uso de (2.37) y la identidad

$$(A_i - R_i) y_i \vec{\Phi}_i = 2A_i y_i \vec{\Phi}_i - y_i \vec{\Phi}_i \iint_{A'} \vec{\Phi}_i \cdot \vec{E}_t \, dx' dy' \quad (2.52)$$

se obtiene una ecuación integral útil para \vec{E}_t

$$2 \sum_{i=1}^J A_i y_i \vec{\Phi}_i = \iint_{A'} \left[\sum_{i=1}^{\infty} y_i \vec{\Phi}_i(x, y) \vec{\Phi}_i(x', y') + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \vec{\Psi}_k(x, y) \vec{\Psi}_k^*(x', y') \right] \cdot \vec{E}_t(x', y') \, dx' dy' \quad (2.53)$$

que es una ecuación integral de primer orden.

2.3. Métodos de Solución

En la sección anterior se obtuvo la ecuación integral para el problema del valor de frontera de un arreglo de guías de onda infinito. Una característica de dicha integral es que el núcleo de la ecuación está compuesto de sumas infinitas que representan las contribuciones de los modos de guías de onda. En general debido a la complejidad del problema, las ecuaciones de este tipo no permiten obtener soluciones analíticas. Por lo tanto los métodos de solución tendrán un énfasis sobre las técnicas numéricas.

La obtención de ecuaciones propias para el cálculo numérico, implica convertir las ecuaciones integrales en ecuaciones matriciales usando el método de momentos. Una vez que las ecuaciones matriciales son obtenidas, pueden ser resueltas por medio de técnicas estándar, como el método de la inversión matricial. Aunque esta técnica puede ser llevada a cabo con cierta facilidad ayudándose del cómputo actual, la posibilidad de obtener una solución depende de muchos factores, tal como la obtención de la ecuación matricial y el cálculo de los elementos de la matriz. El uso de los modos de guía de onda como una representación de función base ha mostrado ventajas sobre la elección de otras bases.

2.3.1. Representación General de una Base Discreta

El problema de las condiciones de frontera electromagnéticas en un arreglo puede ser formulado en términos de ecuaciones integrales de distintas formas. Puede ser expresado como una ecuación integral de primer o segundo orden. Para la solución de los problemas de arreglos, las ecuaciones de primer orden son las más convenientes.

Una ecuación integral de primer orden puede ser escrita en forma de un operador, tal que

$$y = Kx \tag{2.54}$$

donde K es un operador lineal determinado únicamente por la geometría del arreglo, y es una función conocida proporcional a la excitación y x es la función a determinar. Generalmente x y y son cantidades vectoriales y K es un tensor.

Asociado con un operador existe un espacio llamado dominio de la definición, S_D , que es el conjunto de las funciones sobre el cual actúa el operador. En el caso de trabajar con operadores integrales, las condiciones de frontera son automáticamente incorporadas. En el caso de operadores diferenciales, las condiciones de frontera deben ser especificadas para definir el dominio apropiadamente. Cuando un operador actúa sobre una función, éste genera una nueva función. El conjunto de todas las funciones generadas por el operador que actúa sobre cada miembro en su dominio es llamado el rango del operador S_L . Dadas dos funciones, x_1 y x_2 , y dos constantes arbitrarias, α_1 y α_2 , al ser K un operador lineal se cumple la siguiente relación

$$K(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 K x_1 + \alpha_2 K x_2$$

Asumiendo que se encuentra un conjunto de funciones lineales independientes que representa al espacio S_D y otro conjunto que representa al espacio S_L , serán denotados por $\{f_n: f_n \in S_D\}$ y $\{g_n: g_n \in S_L\}$, respectivamente. Por conveniencia se considera que los elementos en cada conjunto son ortonormales. Debido a que la función x es un elemento en S_D , es posible escribirla como una combinación lineal de f_n

$$x = \sum a_n f_n \tag{2.55}$$

donde a_n son los coeficientes a determinar. Esta representación requiere una suma infinita cuando son necesarias las soluciones exactas de (2.54). En este caso los conjuntos de las funciones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ deben estar completos en su respectivo espacio. Para las soluciones aproximadas, la suma es finita por razones prácticas. El conjunto de funciones $\{f_n\}$ no necesariamente deberá estar completo, aunque es importante que ciertos elementos sean incluidos para obtener resultados significativos.

Cuando la ecuación (2.55) es sustituida en (2.54), se observa la linealidad del operador

$$y = \sum a_n K f_n \quad (2.56)$$

La diferencia entre el lado izquierdo y derecho de (2.56) es un elemento nulo en S_L . Una manera de asegurar esto es que el elemento $(y - \sum a_n K f_n)$ sea ortogonal para todos los elementos en un conjunto que describe a S_L . Por lo tanto

$$\langle g_m, y - \sum a_n K f_n \rangle = 0 \quad (2.57)$$

para toda m , o

$$\langle g_m, y \rangle = \sum \langle g_m, K f_n \rangle a_n \quad (2.58)$$

para $m = 1, 2, \dots$

Este es un sistema de ecuaciones que puede ser escrito de forma matricial. Definiendo una matriz cuadrada $[K_{mn}]$ y los vectores a y y como

$$[K_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle g_1, K f_1 \rangle & \langle g_1, K f_2 \rangle & \cdots \\ \langle g_2, K f_1 \rangle & \langle g_2, K f_2 \rangle & \\ \langle g_3, K f_1 \rangle & \langle g_3, K f_2 \rangle & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \langle g_1, y \rangle \\ \langle g_2, y \rangle \\ \langle g_3, y \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

La ecuación (2.58) se convierte en

$$y = [K_{mn}]a \quad (2.59)$$

La ecuación integral es convertida entonces en un sistema de ecuaciones algebraicas. Por lo tanto el sistema puede ser resuelto eficazmente dependiendo de varios factores. Ya que el sistema es de orden infinito con un número infinito de variables desconocidas, salvo pocas excepciones, ningún método parece accesible para obtener una solución exacta. Para trabajar con el sistema, es necesario hacer uso de aproximaciones. En lugar de utilizar funciones infinitas necesarias para la representación correcta de la función desconocida, se usa un número finito N de funciones para su aproximación. En lugar de la ecuación (2.55), se tiene

$$x \approx \sum_{n=1}^N a'_n f_n \quad (2.60)$$

Los coeficientes desconocidos a'_n serán diferentes de la solución completa a_n . La sustitución de (2.60) en (2.54) resulta

$$y \approx \sum_{n=1}^N a'_n K f_n \quad (2.61)$$

Ambos lados de la ecuación (2.61) no son iguales debido a la aproximación involucrada. La diferencia entre ambos lados representa un error. Para minimizar este error en el espacio descrito por el conjunto de funciones g_m , con $m = 1, 2, \dots, N$, ambos lados de la ecuación deberán tener la misma proyección sobre el conjunto $\{g_m\}$. De forma equivalente, la diferencia entre los lados izquierdo y derecho deberá ser ortogonal a cada miembro del conjunto $\{g_m\}$. Cuando éste es el caso, se produce un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, el cual puede ser descrito en forma matricial de nuevo

$$y' = [K_{Nmn}]a' \quad (2.62)$$

donde

$$[K_{N_{mn}}] = \begin{bmatrix} \langle g_1, K f_1 \rangle & \langle g_1, K f_2 \rangle & \cdots & \langle g_1, K f_N \rangle \\ \langle g_2, K f_1 \rangle & \langle g_2, K f_2 \rangle & & \langle g_2, K f_N \rangle \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \langle g_N, K f_1 \rangle & \langle g_N, K f_2 \rangle & \cdots & \langle g_N, K f_N \rangle \end{bmatrix}$$

$$a' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a'_N \end{bmatrix}, \quad y' = \begin{bmatrix} \langle g_1, y \rangle \\ \langle g_2, y \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle g_N, y \rangle \end{bmatrix}$$

La matriz es de orden finito, así que la solución puede ser obtenida mediante la inversión de la matriz. Sea $[K_{N_{mn}}]^{-1}$ la matriz inversa de $[K_{N_{mn}}]$, la solución se escribiría

$$a' = [K_{N_{mn}}]^{-1} y' \quad (2.63)$$

Arreglando el conjunto de funciones $\{f_n\}$ como

$$f^T = [f_1, f_2, \dots, f_N]$$

donde el superíndice T denota transposición.

La solución aproximada toma la forma compacta

$$x \approx f^T a' = f^T [K_{N_{mn}}]^{-1} y' \quad (2.64)$$

Cabe hacer notar que la ecuación matricial obtenida usando la representación finita (2.61) es la misma ecuación que resulta de truncar la ecuación matricial infinita (2.59)

apropiadamente. Es de suponer que la aproximación mejorará cuando N se incremente. Un caso particular se presenta si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ constituyen conjuntos completos, la solución aproximada se acerca al valor exacto mientras $N \rightarrow \infty$. Desde luego que a mayor N será más grande la matriz y su inversión se volverá cada vez más difícil. Qué tan grande debe ser N para una exactitud dada depende del problema en específico.

El proceso de reducir una ecuación operador a una ecuación matricial generalmente se conoce como el método de momentos [12]-[13]. Para el caso especial en que $\{f_n\} = \{g_n\}$, el procedimiento es referido como el método de Galerkin o Ritz - Galerkin. El conjunto $\{f_n\}$ que fue usado para representar la función desconocida x , es llamado base o función de expansión, mientras que el conjunto $\{g_n\}$ es denominado función de peso o de prueba. Aun cuando la base y las funciones de peso pueden ser arbitrarias, su elección es muy importante desde el punto de vista de exactitud y eficiencia.

2.3.2. Elección de las Bases

Reordenamiento de los Modos

Considerando la ecuación integral para el arreglo infinito de guías de onda derivada en la sección anterior (2.53), el núcleo de la ecuación está compuesto de dos sumas infinitas aportadas por los modos de guía de onda del interior y los modos Floquet del exterior, respectivamente. De acuerdo con la nomenclatura comúnmente adoptada para la clasificación de los modos de onda, generalmente las funciones modales contienen tres subíndices, uno para distinguir entre los modos TE y TM y dos para el orden del modo. Aun cuando hay una infinidad de modos, tanto TE como TM , debido a que el juego de modos es innumerable, se permite reenumerarlos con un solo subíndice. Las ventajas de utilizar un solo subíndice radican en el ahorro de notación cuando las ecuaciones integrales son convertidas en conjuntos de ecuaciones algebraicas y también cuando estas ecuaciones resultantes son implementadas para el cálculo numérico.

Debido a que la solución aproximada para el sistema de ecuaciones necesariamente requiere del truncamiento en algún momento, es importante volver arreglar los modos con

el propósito de que todos los modos importantes sean incluidos en el cálculo. En general no es obvio cuáles modos son importantes y cuáles no. En los problemas de arreglos de fase normalmente solo los modos de índices modales bajos están involucrados en el transporte de potencia. Físicamente se puede esperar que el acoplamiento entre los modos con los mismos valores de la constante de propagación sea más fuerte que el acoplamiento entre los modos con valores muy diferentes. Un método útil es organizar los modos de acuerdo con el orden ascendente (en valor absoluto) de las constantes de propagación en la dirección z . Cuando existen modos degenerativos, es decir más de un modo con la misma constante de propagación pero con diferentes polarizaciones, es importante que la degeneración sea considerada apropiadamente.

Se denotará a los juegos de modos de guía de onda internos como $\{\vec{\Phi}_j(r)\}$ con las correspondientes admitancias modales y_j y a los juegos de modos Floquet externos como $\{\vec{\Psi}_m(r)\}$ con las correspondientes admitancias modales Y_m . La ecuación integral con el campo eléctrico en la ranura como incógnita para un arreglo excitado por un modo $\vec{\Phi}_{j'}$ está dada por

$$2y_{j'}\vec{\Phi}_{j'}(r) = \int_A \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} y_j \vec{\Phi}_j(r) \vec{\Phi}_j(r') + \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \vec{\Psi}_m(r) \vec{\Psi}_m^*(r') \right\} \cdot \vec{E}_t(r') dr' \quad (2.65)$$

para $r \in A$.

$\vec{E}_t(r)$ es el campo eléctrico desconocido en la ranura que será determinado. El límite de integración se extiende sobre la ranura A y la ecuación es únicamente válida en A .

La ecuación integral será convertida en un conjunto de ecuaciones algebraicas por el método de momentos. Como se mencionó con anterioridad la elección de las bases en este proceso puede ser arbitraria, pero considerables ventajas se adquirirán si se realiza una selección sensata. En el caso de la ecuación integral para un arreglo de fase (2.65), la expresión para el núcleo de la ecuación sugiere que las funciones modales internas son apropiadas como bases para dos razones importantes. Primero, satisfacen las mismas condiciones de frontera requeridas por las componentes de \vec{E}_t tangentes a la circunferen-

cia de la sección transversal de la guía de onda. Por lo tanto es posible obtener soluciones exactas con menos términos de los que serían necesarios si son usadas funciones que no satisfacen las condiciones de frontera. Segundo, dado que las funciones modales aparecen en el núcleo de la ecuación, la ortogonalidad entre ellas puede ser utilizada para simplificar el cálculo de los elementos de la matriz. Además las funciones modales de la guía de onda se integran de forma cerrada con los modos Floquet en la mayoría de los casos.

Sea

$$\vec{E}_t(r) \approx \sum_{p=1}^N v'_p \vec{\Phi}_p(r) \quad (2.66)$$

el superíndice (') usado en v_p indica que es una expansión modal aproximada. Sustituyendo (2.66) en (2.65) y luego tomando momentos con respecto a $\vec{\Phi}_q(r)$, con $q = 1, 2, \dots, N$, se tiene

$$\sum_{p=1}^N A_{qp} v'_p = 2y_j \delta_{j'q} \quad (2.67)$$

En estas ecuaciones,

$$A_{qp} = y_q \delta_{qp} + \sum_{m=1}^{\infty} Y_m C_{qm} C_{pm}^* \quad (2.68)$$

donde

$$\delta_{qp} = \begin{cases} 1, & q = p \\ 0, & q \neq p \end{cases}$$

es la delta de Kronecker y

$$C_{pm} = \int_A \vec{\Phi}_p(r') \cdot \vec{\Psi}_m(r') dr' \quad (2.69)$$

son los coeficientes de acoplamiento intermodales. La ecuación (2.67) es un conjunto de N ecuaciones para las N incógnitas, $\{v'_p\}$.

Se puede observar que las admitancias modales interiores aparecen solamente en los elementos diagonales, A_{qq} , mientras que las exteriores aparecen en todos los elementos.

La ecuación (2.67) escrita en forma matricial es

$$[A_{qp}] v' = f \quad (2.70)$$

donde

$$v' = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_N \end{bmatrix}, \quad f = 2y_{j'} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución de (2.70) puede ser encontrada invirtiendo la matriz $[A_{qp}]$, de tal manera que

$$v' = [A_{qp}]^{-1} f \quad \text{o} \quad v'_p = \sum_{p=1}^N A_{qp}^{-1} f_p = 2y_{j'} A_{qj'}^{-1} \quad (2.71)$$

donde A_{qp}^{-1} son los elementos de $[A_{qp}]^{-1}$. Las soluciones v'_p son los voltajes modales de los varios modos que existen en la guía de onda. El campo eléctrico en la ranura es obtenido aproximadamente como una combinación lineal de estos modos, como se expresó en (2.66). El coeficiente de reflexión del modo incidente está dado por

$$v'_{j'} = 1 + R_{j'} \quad \text{o} \quad R_{j'} = 2y_{j'} A_{j'j'}^{-1} - 1 \quad (2.72)$$

Los coeficientes de transmisión dentro de otros modos de la guía de onda, después de normalizarlos son

$$t_n = \sqrt{y_n/y_{j'}} v'_n \quad (2.73)$$

Para determinar el coeficiente de transmisión en la región del espacio libre, se utiliza la continuidad del campo tangencial eléctrico a través de la ranura A

$$\sum_{q=1}^N v'_q \vec{\Phi}_q \approx \sum_{m=1}^M V'_m \vec{\Psi}_m \quad (2.74)$$

El signo de aproximación usado en (2.74) es debido a que solo un número finito de modos fueron elegidos para describir el campo. Utilizando la propiedad de ortonormalidad de las funciones modales, se obtiene

$$V'_m \approx \int_A \left\{ \sum_{q=1}^N v'_q \vec{\Phi}_q(r) \right\} \cdot \vec{\Psi}_m^*(r') dr' = \sum_{q=1}^N C_{qm}^* v'_q \quad (2.75)$$

Por lo tanto, el coeficiente de transmisión normalizado dentro del m -ésimo modo Floquet es

$$T_m = \sqrt{Y_m/y_{j'}} V'_m \quad (2.76)$$

Como solamente los modos que se propagan pueden llevar energía fuera de la interfaz del arreglo para formar haces de radiación, éstos son los modos en los que basará para caracterizar las propiedades del arreglo. Para el cálculo de los coeficientes modales, la ecuación (2.75) es adecuada cuando N es de valor grande.

La ecuación integral para un arreglo receptor con una onda incidente correspondiente al modo $\vec{\Psi}_{m'}(r)$ está dada por

$$2Y_{m'} \vec{\Psi}_{m'}(r) = \int_A \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} y_j \vec{\Phi}_j(r) \vec{\Phi}_j(r') + \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \vec{\Psi}_m(r) \vec{\Psi}_m^*(r') \right\} \cdot \vec{E}_t(r') dr' \quad (2.77)$$

Aplicando un procedimiento similar al descrito anteriormente, la ecuación (2.77) es convertida en el siguiente sistema lineal de ecuaciones algebraicas

$$\sum_{p=1}^N A_{qp} v'_p = 2Y_{m'} C_{qm'} \quad (2.78)$$

o en forma matricial como

$$[A_{qp}] v' = f' \quad (2.79)$$

donde

$$f' = 2Y_{m'} \begin{bmatrix} C_{1m'} \\ C_{2m'} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{Nm'} \end{bmatrix}$$

El cambio de la excitación resulta en una modificación del término libre únicamente. Debido a que la forma del núcleo de la ecuación es determinada completamente por la geometría del problema, no es afectada por el cambio de la onda incidente. La solución de (2.79) puede ser escrita como

$$v' = [A_{qp}]^{-1} f' \quad (2.80)$$

o de la forma

$$v'_q = \sum_{p=1}^N A_{qp}^{-1} f'_p = 2Y_{m'} \sum_{p=1}^N A_{qp}^{-1} C_{pm'} \quad (2.81)$$

El coeficiente de reflexión del modo $\vec{\Psi}_{m'}(r)$ se obtiene calculando el voltaje modal apropiado para este modo Floquet de acuerdo con (2.75). Por lo tanto

$$V'_{m'} = 1 + R_{m'} \quad (2.82)$$

Los coeficientes de transmisión pueden ser calculados usando ecuaciones similares a (2.73) y (2.76).

Los elementos de la matriz en (2.68) contienen sumas infinitas, que resultan del producto entre las admitancias modales y los coeficientes de acoplamiento intermodales. En arreglos de guías de onda rectangulares y circulares, donde las expresiones explícitas para C_{jq} están disponibles en la literatura, se ha demostrado que estas series convergen. Por

otro lado, en arreglos ordinarios, el tamaño de la ranura es en general comparable al tamaño de la celda unitaria básica. Por lo tanto para describir apropiadamente el campo tangencial en la interfaz del arreglo es de esperar que el mismo número de modos sea requerido, sin tener en cuenta la región de la cual los modos son elegidos. Esto implica que las sumas que aparecen en los elementos de la matriz pueden ser truncadas en un número comparable al orden de la matriz. Para el caso de (2.68) la sumatoria puede ser truncada en $m = M$ con $M \approx N$. Aun cuando se realiza otra aproximación de la solución, esto no debe afectar su exactitud.

2.3.3. Técnica del Acoplamiento Modal

El sistema de ecuaciones en (2.67) fue obtenido en dos pasos. Primero, el problema de las condiciones de frontera del arreglo se formuló rigurosamente en términos de las ecuaciones integrales con el campo tangencial eléctrico como la función desconocida. El método de momentos era entonces aplicado, usando las bases apropiadas para reducir las ecuaciones integrales a sistemas de ecuaciones algebraicas. Los mismos sistemas de ecuaciones también pueden ser obtenidos por un proceso llamado la técnica del acoplamiento modal [14]-[15], en donde las expansiones modales para los campos dispersos son hechas para cada región, tal y como se haría al obtener la ecuación integral. La aplicación de las condiciones de continuidad en la interfaz entre las dos regiones da como resultado dos relaciones distintas entre los coeficientes de expansión, una de la continuidad del campo eléctrico y la otra de la continuidad del campo magnético. Estas relaciones pueden ser puestas en forma de un sistema de ecuaciones en términos de muchas incógnitas. Generalmente se asume que solamente un número finito de modos son excitados en la ranura A . Esta es una aproximación razonable si son incluidos suficientes modos. El resultado es un sistema de ecuaciones finito.

Considerando un arreglo infinito donde $\vec{\Phi}_j(r)$ son las funciones modales vectoriales para la región de guía de onda y $\vec{\Psi}_m(r)$ son los modos Floquet. Cuando el arreglo es excitado por un modo $\vec{\Phi}_{j'}(r)$, los campos eléctricos y magnéticos tangenciales en la

ranura, (2.35) y (2.41), pueden ser escritos como:

$$\begin{aligned}\vec{E}_t(r) &\approx (1 + R_{j'}) \vec{\Phi}_{j'}(r) + \sum_{j=1}^N {}^{(j')}v'_j \vec{\Phi}_j(r) \approx \sum_{m=1}^M V'_m \vec{\Psi}_m(r) \\ -\hat{z} \times \vec{H}_t(r) &\approx y_{j'} (1 - R_{j'}) \vec{\Phi}_{j'}(r) - \sum_{j=1}^N {}^{(j')}y_{j'} v'_j \vec{\Phi}_j(r) \approx \sum_{m=1}^M Y_m V'_m \vec{\Psi}_m(r)\end{aligned}\quad (2.83)$$

Los signos de aproximación son usados en las expresiones porque solamente es incluido un número finito de modos. La ecuación del campo magnético es válida únicamente sobre la ranura de la guía de onda, mientras que la ecuación del campo eléctrico es válida sobre una celda unitaria entera con $\vec{E}_t = 0$ sobre $C - A$. Al multiplicar la primera ecuación por $\vec{\Psi}_p^*(r)$ e integrando sobre C , se encuentra en virtud de la ortonormalidad del modo

$$V'_p \approx (1 + R_{j'}) C_{j'p}^* + \sum_{j=1}^N C_{jp}^* v'_j \quad p = 1, 2, \dots, M \quad (2.84)$$

donde C_{jp} son los coeficientes de acoplamiento dados en (2.69). De forma similar, multiplicando la segunda ecuación de (2.83) por $\vec{\Phi}_n(r)$ e integrando sobre A , se obtiene

$$y_{j'} (1 - R_{j'}) \delta_{j'n} - (1 - \delta_{j'n}) y_n v'_n \approx \sum_{m=1}^M Y_m V'_m C_{nm} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.85)$$

Considerando a v'_n , $n = 1, \dots, N$, con $v'_{j'} = R_{j'}$, y V'_m , $m = 1, \dots, M$ como $N + M$ coeficientes desconocidos, es posible escribir las ecuaciones (2.84) y (2.85) de forma matricial

$$[\Lambda] \sigma = x \quad (2.86)$$

donde

$$[\Lambda] = \left[\begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} C_{11}^* & C_{21}^* & \cdots & C_{N1}^* \\ C_{12}^* & C_{22}^* & \cdots & C_{N2}^* \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ C_{1M}^* & C_{2M}^* & \cdots & C_{NM}^* \end{array}}^N & & \overbrace{\begin{array}{cccc} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & & & -1 \end{array}}^M \\ \underbrace{\begin{array}{cccc} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & y_N \end{array}}^N & \begin{array}{cccc} Y_1 C_{11} & Y_2 C_{12} & \cdots & Y_M C_{1M} \\ Y_1 C_{21} & Y_2 C_{22} & \cdots & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ Y_1 C_{N1} & & & Y_M C_{NM} \end{array} \end{array} \right] \quad (2.87)$$

y

$$\sigma = \begin{bmatrix} v'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_{j'-1} \\ R_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_N \\ V'_1 \\ V'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_M \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -C_{j'1}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -C_{j'M}^* \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_i \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Este es un conjunto de $M + N$ ecuaciones de las que $M + N$ incógnitas pueden ser determinadas. Una característica interesante de la matriz $[\Lambda]$ es que puede ser dividida en cuatro submatrices, de las cuales las dos submatrices fuera de la diagonal principal son diagonales. Esta partición indica que (2.84) y (2.85) se reescribirían como

$$V' = [R] v' + b \quad (2.89)$$

$$d - [y] v' = [S] [Y] V' \quad (2.90)$$

Este es un sistema de ecuaciones acopladas en el que los vectores desconocidos son

$$V' = \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V'_M \end{bmatrix}, \quad v' = \begin{bmatrix} v'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_{j'-1} \\ R_{j'} \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_N \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

También $[R]$ y $[S]$ son matrices de orden $M \times N$ y $N \times M$ respectivamente, dadas por

$$[R] = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{21}^* & \cdots & C_{N1}^* \\ C_{12}^* & C_{22}^* & \cdots & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ C_{1M}^* & C_{2M}^* & \cdots & C_{NM}^* \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

y

$$[S] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1M} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NM} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Las matrices de admitancia tienen solamente elementos diagonales no evanescentes

$$[y] = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & y_N \end{bmatrix}$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_2 & \cdots & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & Y_M \end{bmatrix}$$

y

$$b = \begin{bmatrix} C_{j'1}^* \\ C_{j'2}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{j'M}^* \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ y_{j'} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo V' de (2.89) en (2.90), se elimina V' para obtener una ecuación única-

mente en función de v' . Reordenando se tiene

$$([y] + [S][Y][R])v' = d - [Y][S]b \quad (2.94)$$

La matriz $([y] + [s][Y][R])$ es de rango K y existen N incógnitas en v' . La q -ésima ecuación está dada por

$$\sum_{p=1}^N \left\{ y_q \delta_{qp} + \left(\sum_{m=1}^M Y_m C_{qm} C_{pm}^* \right) \right\} v'_p = y_{j'} \delta_{qj'} - \sum_{m=1}^M Y_m C_{qm} C_{j'm}^* \quad (2.95)$$

Redefiniendo $v'_{j'} = 1 + R_{j'}$, la ecuación (2.95) puede ser reescrita como

$$\sum_{p=1}^N \left\{ y_q \delta_{qp} + \left(\sum_{m=1}^M Y_m C_{qm} C_{pm}^* \right) \right\} v'_p = 2y_{j'} \delta_{qj'} \quad (2.96)$$

Esta ecuación es idéntica a (2.67), que fue obtenida de la ecuación integral para el campo eléctrico en la ranura por el método de momentos, donde las funciones modales de la guía de onda son elegidas como las bases. Una vez que son obtenidas las soluciones para v' , V' se calcula usando (2.89), que puede ser reescrito para mostrar que es de la misma forma que en (2.75).

Las derivaciones anteriores demuestran que el método de momentos, aplicado a la ecuación del campo eléctrico o del campo magnético, es idéntico a la aplicación de la técnica del acoplamiento modal, siempre que en ambos procedimientos sea usado el mismo número de modos.

Capítulo 3

Resonadores de Anillos Ranurados

Las superficies selectivas de frecuencia han sido usadas en muchas aplicaciones como divisores de haz, filtros, polarizadores, arreglos reflectores, etc.

En general dos tipos de geometrías se distinguen: la *SSF* inductiva, donde los elementos metálicos están unidos y la *SSF* capacitiva, donde los elementos metálicos están aislados. Es posible considerar un tercer tipo de geometría, la *SSF* paso-banda, que es un estado intermedio entre los dos tipos anteriores.

Como se mencionó en el primer capítulo, si los elementos periódicos dentro de una *SSF* poseen características de resonancia, la *SSF* inductiva mostrará una total transmisión a las longitudes de onda cercanas a la longitud de onda de resonancia, la *SSF* capacitiva exhibirá una reflexión total a dichas ondas y, considerando la nueva geometría, ésta presentará una característica paso-banda.

Por lo anterior al proponer una estructura que combine elementos inductivos y capacitivos, como el caso de una ranura anular o anillo ranurado, es de esperar que la teoría aplicada a los arreglos infinitos muestre que la superficie selectiva de frecuencia con elementos circulares tenga buenas características paso-banda [17].

La geometría del anillo ranurado y su circuito equivalente se muestran en la figura 3.1. La energía magnética se almacena principalmente debido a las corrientes eléctricas que circulan a través de la parte derecha e izquierda del anillo conductor exterior. La

energía eléctrica se almacena debido a la concentración del campo eléctrico en la ranura del anillo. El circuito equivalente usado es un circuito resonante paralelo que contiene dos inductancias iguales L_i, L_d y una capacitancia C . La frecuencia de resonancia es

$$\omega_r = \sqrt{(2/L_d C)}.$$

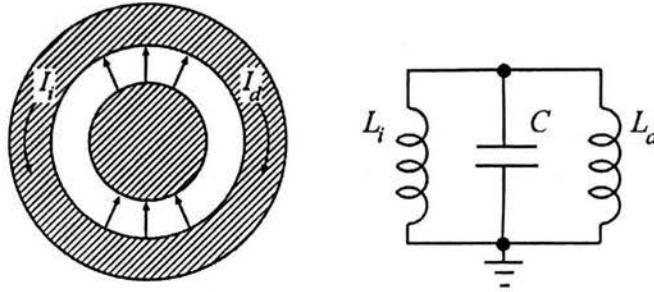


Figura 3.1. Anillo ranurado y su circuito equivalente.

Un arreglo de anillos ranurados se muestra en la figura 3.2. Las ranuras anulares tienen como radio exterior r_2 y radio interior r_1 . Las ranuras son espaciadas periódicamente a lo largo del eje x con período b . El otro eje de periodicidad forma un ángulo α con el eje y' y la proyección de la ranura espaciada a lo largo de este segundo eje es denotada por d . El eje z se asume ortogonal a las superficies de la pantalla. La estructura completa es soportada por un sustrato dieléctrico ϵ_r .

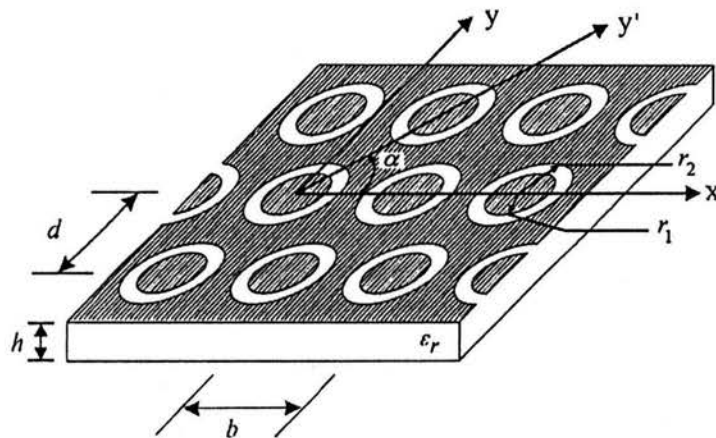


Figura 3.2. Arreglo de anillos ranurados.

En el capítulo anterior se consideró el problema de las condiciones de frontera para un arreglo planar de guías de onda, las cuales tienen una excitación de amplitud constante (2.1). El análisis de esta clase de arreglos puede llevarse a cabo mediante la técnica del acoplamiento modal antes mencionada. Sin embargo, la red de alimentación de las guías de onda introduce una complejidad diferente.

La diferencia entre el problema de dispersión en una superficie selectiva de frecuencia y el problema del arreglo de fase del capítulo anterior es la siguiente: En un problema de dispersión, la periodicidad de la fuente es determinada por el ángulo de incidencia; mientras que en un problema de arreglos de fase, los elementos del arreglo tienen redes de alimentación que generan la distribución de fase lineal para formar el haz radiado. Además, en el problema de arreglos de fase la interconexión mutua existe solo en la región $z > 0$, mientras que en la *SSF* existe en las dos regiones lo que impacta a la solución del problema.

Para el problema de la figura 2.3, se formuló una ecuación integral en términos del campo eléctrico tangencial sobre la ranura A' . Este enfoque es similar al empleado para la *SSF* basada en anillos ranurados, sin embargo, los campos en la región 1 del arreglo de fase (dentro de las guías de onda) son diferentes a los campos sobre la *SSF*.

En las regiones sobre la superficie y dentro del sustrato los campos eléctricos y magnéticos pueden ser descritos como una superposición de ondas planas (ondas Floquet). Dentro de la ranura los campos pueden ser descritos en términos de los modos de guía de onda coaxial; estos modos son combinaciones lineales de las funciones de Bessel y Neumann, J_q y N_q , y sus derivadas, J'_q y N'_q , respectivamente. Junto con el modo *TEM*, forman un juego completo ortonormal en la región sobre la ranura. El campo transversal eléctrico resultante debe ser continuo a través de la superficie de la pantalla mientras que la componente del campo transversal magnético necesita ser continua a través del área de la ranura.

3.1. Desarrollo del Modelo Matemático

A continuación se desarrolla el modelo matemático basándose en el trabajo de Wang [16]. Para el problema de dispersión de la superficie apoyada en un dieléctrico, tal y como se muestra en la figura 3.3, \vec{E}^i es una onda incidente de amplitud unitaria con polarización arbitraria,

$$\vec{E}^i = \hat{u}e^{-j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \quad (3.1)$$

donde \hat{u} es un vector unitario y

$$\mathbf{k}_0 = \kappa_0 [\hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta] \quad (3.2)$$

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Esta onda incidente se propaga en la dirección $+z$. En el plano $z = 0$, los campos totales son considerados como los campos incidente, reflejado y transmitido; los cuales pueden ser expandidos en modos Floquet. Las componentes transversales de los campos de incidencia, \vec{E}_t^i y \vec{H}_t^i , son expresados como una expansión de los modos Floquet vectoriales, de acuerdo con las ecuaciones (2.22-2.25) y (2.29-2.32) como

$$\begin{aligned} \vec{E}_t^i &= \sum_{k=1}^2 A_k \vec{\Psi}_k e^{-j\Gamma_k z} \\ \vec{H}_t^i &= \sum_{k=1}^2 A_k Y_k \hat{z} \times \vec{\Psi}_k e^{-j\Gamma_k z} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Los componentes transversales de la onda reflejada, \vec{E}_t^r y \vec{H}_t^r , también pueden ser expandidos en modos Floquet

$$\begin{aligned} \vec{E}_t^r &= \sum_{k=1}^{\infty} R_k \vec{\Psi}_k e^{j\Gamma_k z} \\ \vec{H}_t^r &= - \sum_{k=1}^{\infty} R_k Y_k \hat{z} \times \vec{\Psi}_k e^{j\Gamma_k z} \end{aligned} \quad (3.4)$$

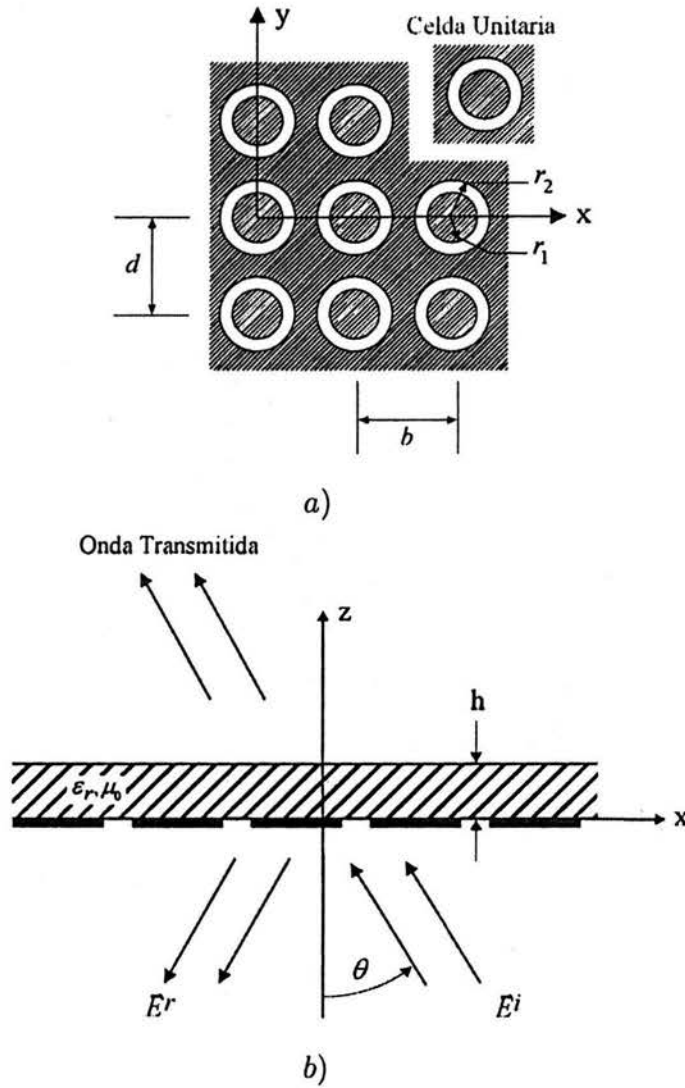


Figura 3.3 a) Estructura periódica ranurada sobre un sustrato dieléctrico.

b) Representación de los campos totales.

Las admitancias modales son, de acuerdo con las ecuaciones (2.26) y (2.33), para las ondas TE

$$Y_k = \frac{\Gamma_k}{\omega\mu_0} \quad (3.5)$$

y para las ondas TM

$$Y_k = \frac{\omega\epsilon_0}{\Gamma_k} \quad (3.6)$$

Por lo tanto en la región $z \leq 0$, los campos transversales \vec{E}_t^1 y \vec{H}_t^1 son

$$\begin{aligned}\vec{E}_t^1 &= \vec{E}_t^i + \vec{E}_t^r = \sum_{k=1}^2 A_k \vec{\Psi}_k e^{-j\Gamma_k z} + \sum_{k=1}^{\infty} R_k \vec{\Psi}_k e^{j\Gamma_k z} \\ \vec{H}_t^1 &= \vec{H}_t^i + \vec{H}_t^r = \sum_{k=1}^2 A_k Y_k \hat{z} \times \vec{\Psi}_k e^{-j\Gamma_k z} - \sum_{k=1}^{\infty} R_k Y_k \hat{z} \times \vec{\Psi}_k e^{j\Gamma_k z}\end{aligned}\quad (3.7)$$

Para los campos transmitidos (\vec{E}^t , \vec{H}^t) en $z > 0$, la admitancia modal Y_k^+ vista a través de la región dieléctrica desde el plano $z = 0^+$ puede ser obtenida mediante la ecuación general de la línea de transmisión

$$Y_k^+ = Y_k^d \frac{Y_k + jY_k^d \tan(\Gamma_k^d h)}{Y_k^d + jY_k \tan(\Gamma_k^d h)} \quad (3.8)$$

donde Γ_k^d resulta de sustituir $k = \omega^2 \epsilon_r \mu_0$ en la ecuación (2.14) y Y_k^d es la admitancia modal en la región del dieléctrico calculada de acuerdo con las ecuaciones (3.5 y 3.6) con Γ_k y ϵ_0 reemplazadas por Γ_k^d y ϵ_r , respectivamente.

Por lo tanto, en la región $z \geq 0$, las componentes transversales de los campos transmitidos, \vec{E}_t^2 y \vec{H}_t^2 son

$$\begin{aligned}\vec{E}_t^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \vec{\Psi}_k e^{-j\Gamma_k z} \\ \vec{H}_t^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k Y_k^+ \hat{z} \times \vec{\Psi}_k e^{-j\Gamma_k z}\end{aligned}\quad (3.9)$$

Acoplando las componentes tangenciales del campo eléctrico en $z = 0$ se tiene

$$\vec{E}_t = \sum_{k=1}^2 A_k \vec{\Psi}_k + \sum_{k=1}^{\infty} R_k \vec{\Psi}_k = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \vec{\Psi}_k \quad (3.10)$$

en la celda unitaria, y la condición de frontera

$$\vec{E}_t = 0 \quad (3.11)$$

sobre la superficie conductora.

La continuidad del campo tangencial magnético en $z = 0$ requiere

$$\sum_{k=1}^2 A_k Y_k \vec{\Psi}_k - \sum_{k=1}^{\infty} R_k Y_k \vec{\Psi}_k = \sum_{k=1}^{\infty} B_k Y_k^+ \vec{\Psi}_k \quad (3.12)$$

en la ranura.

Tomando el producto escalar con $\vec{\Psi}_k$ en la ecuación (3.10)

$$A_k + R_k = B_k = \int_A \vec{E}_t \cdot \vec{\Psi}_k^* ds \quad (3.13)$$

y sustituyendo (3.13) en (3.12) da como resultado

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 A_k Y_k \vec{\Psi}_k - \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \vec{\Psi}_k \left\{ \int_A \vec{E}_t \cdot \vec{\Psi}_k^* ds - A_k \right\} \\ = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^+ \vec{\Psi}_k \int_A \vec{E}_t \cdot \vec{\Psi}_k^* ds \end{aligned} \quad (3.14)$$

que se reduce a la siguiente ecuación integral

$$2 \sum_{k=1}^2 A_k Y_k \vec{\Psi}_k = \sum_{k=1}^{\infty} (Y_k + Y_k^+) \vec{\Psi}_k \int_A \vec{E}_t \cdot \vec{\Psi}_k^* ds \quad (3.15)$$

sobre la ranura.

Para resolver esta ecuación integral por medio del método de momentos, se expande el campo tangencial desconocido \vec{E}_t sobre la ranura en otro juego completo ortonormal de funciones base que abarquen la ranura. Es decir,

$$\vec{E}_t = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \vec{\Phi}_i \quad (3.16)$$

Tomando el producto escalar en (3.15) con $\vec{\Phi}_i$ sobre la ranura, se tiene

$$2 \sum_{k=1}^2 A_k Y_k C_k^{I*} = \sum_{k=1}^{\infty} (Y_k + Y_k^+) C_k^{I*} \int_A \vec{E}_t \cdot \vec{\Psi}_k^* ds \quad (3.17)$$

donde

$$C_k^I = \int_A \vec{\Phi}_I \cdot \vec{\Psi}_k^* ds \quad (3.18)$$

son los coeficientes de acoplamiento. El asterisco denota el complejo conjugado. Debido a que el conjunto de las funciones de peso es idéntico al conjunto de funciones base, el procedimiento a utilizar es el método de Galerkin, discutido anteriormente.

La sustitución de (3.16) en (3.17) conduce a

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k Y_k C_k^{I*} = \sum_{k=1}^{\infty} (Y_k + Y_k^+) C_k^{I*} \sum_{i=1}^{\infty} F_i C_k^i \quad (3.19)$$

para diferentes valores de I .

La ecuación (3.19) es un conjunto de ecuaciones lineales, con F_i como incógnitas, que pueden escribirse de forma matricial

$$\{Y_I^i\} \{F_i\} = 2 \{I_I\} \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} Y_I^i &= \sum_{k=1}^{\infty} (Y_k + Y_k^+) C_k^{I*} C_k^i \\ I_I &= \sum_{k=1}^2 A_k Y_k C_k^{I*} \end{aligned} \quad (3.21)$$

La ecuación matricial (3.20) puede ser resuelta numéricamente para las amplitudes modales desconocidas F_i y por lo tanto \vec{E}_I en la ranura. Finalmente es posible valuar los coeficientes de reflexión y de transmisión de la ecuación (3.13).

3.1.1. Producto escalar entre las funciones base del resonador de anillos y las ondas Floquet.

A continuación se muestran los productos escalares entre las funciones base del resonador de anillos y las ondas Floquet [1]. Las funciones de guía de onda coaxial ayudarán

en la aproximación de la distribución del campo en el resonador tipo anillo ranurado mediante los modos de distribución del campo en la guía de onda coaxial. Considerando el arreglo de guías de onda organizadas en una superficie simétricamente oblicua, figura 3.4, la vista aumentada de cada elemento es indicada en la figura 3.5.

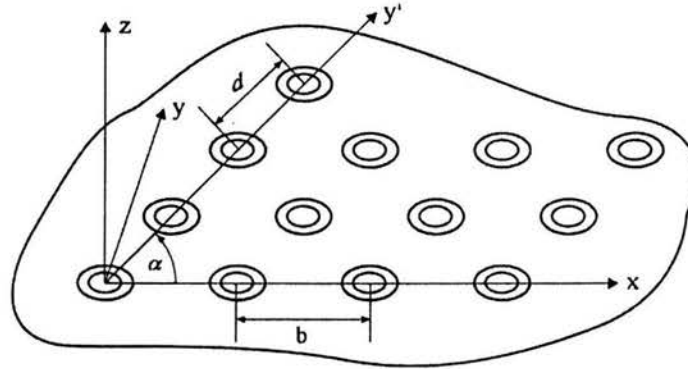


Figura. 3.4. Arreglo de fase de elementos de guía de onda.

Las funciones ortonormalizadas de las ondas en el espacio libre son

$$\vec{\Psi}_{1mn} = \frac{1}{\sqrt{S_\alpha}} \left(\hat{x} \frac{\kappa_y}{\kappa_r} - \hat{y} \frac{\kappa_x}{\kappa_r} \right) \exp [-j (x\kappa_x + y\kappa_y)] \quad (3.22)$$

$$\vec{\Psi}_{2mn} = \frac{1}{\sqrt{S_\alpha}} \left(\hat{x} \frac{\kappa_x}{\kappa_r} + \hat{y} \frac{\kappa_y}{\kappa_r} \right) \exp [-j (x\kappa_x + y\kappa_y)] \quad (3.23)$$

$S_\alpha = bd \sin \alpha$ es el área de la celda periódica y

$$\kappa_r^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$$

$$\kappa_x = \frac{\psi_x}{b} - \frac{2\pi m}{b}$$

$$\kappa_y = \frac{\psi_y}{d \sin \alpha} - \left(\frac{2\pi n}{d \sin \alpha} - \frac{2\pi m}{b} \cot \alpha \right) \quad -\infty \leq m, n \leq \infty$$

donde ψ_x/b y $\psi_y/(d \sin \alpha)$ son los cambios de fase por unidad de longitud en las direcciones x y y .

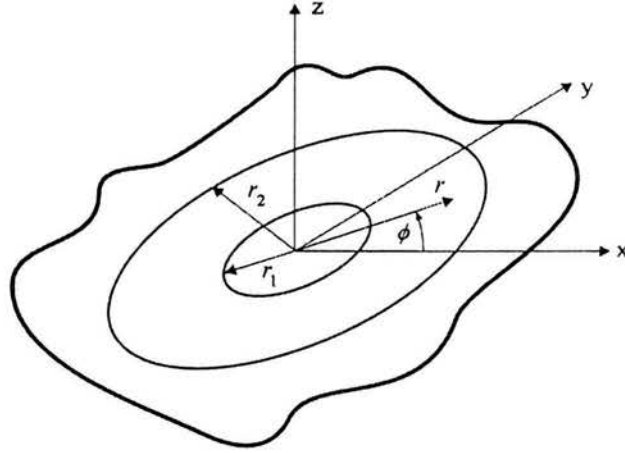


Figura. 3.5. Elemento de la guía de onda.

El juego completo ortonormal de modos vectoriales de la guía de onda coaxial consta de los modos TE y TM . Los modos vectoriales TE del campo transversal eléctrico son

$${}^V_H \vec{\Phi}_{1qs} = \hat{r} \frac{q}{r} Z_q(\beta_s r) \begin{cases} \text{sen } q\phi \\ -\text{cos } q\phi \end{cases} + \hat{\phi} \beta_s Z'_q(\beta_s r) \begin{cases} \text{cos } q\phi \\ \text{sen } q\phi \end{cases} \quad (3.24)$$

y los modos vectoriales TM son

$${}^V_H \vec{\Phi}_{2qs} = -\hat{r} \alpha_s \bar{Z}'_q(\alpha_s r) \begin{cases} \text{sen } q\phi \\ \text{cos } q\phi \end{cases} + \hat{\phi} \frac{q}{r} \bar{Z}_q(\alpha_s r) \begin{cases} -\text{cos } q\phi \\ \text{sen } q\phi \end{cases} \quad (3.25)$$

con $q, s = 0, 1, 2, \dots, \infty$. En estas expresiones $Z_q(\beta_s r)$ y $\bar{Z}_q(\alpha_s r)$ son combinaciones lineales particulares de las funciones de Bessel y Neumann que satisfacen las condiciones de frontera en la guía de onda coaxial [18]. El superíndice (') denota derivadas con respecto al argumento. Los superíndices y subíndices del lado izquierdo H y V designan el modo degenerativo "horizontal" o "vertical" con variaciones angulares $\text{cos } q\phi$ o $\text{sen } q\phi$, respectivamente, de la componente radial del campo. Expresando los modos del espacio libre, (3.22) y (3.23), en coordenadas cilíndricas se tiene

$$\vec{\Psi}_{1mn} = \frac{1}{\sqrt{S_\alpha}} \left[\hat{r} \sin(\phi_1 - \phi) - \hat{\phi} \cos(\phi_1 - \phi) \right] \exp[-j\kappa_r \cos(\phi - \phi_1)] \quad (3.26)$$

y

$$\vec{\Psi}_{2mn} = \frac{1}{\sqrt{S_\alpha}} \left[\hat{r} \cos(\phi_1 - \phi) + \hat{\phi} \sin(\phi_1 - \phi) \right] \exp[-j\kappa_r \cos(\phi - \phi_1)] \quad (3.27)$$

donde

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{\kappa_y}{\kappa_x}$$

Un típico producto escalar (o coeficiente de acoplamiento) entre los modos de la guía de onda y del espacio libre para el elemento mostrado en la figura 3.5 es

$${}^V_H C_{1mn}^{1qs} = \left\langle {}^V_H \vec{\Phi}_{1qs}, \vec{\Psi}_{1mn} \right\rangle = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} {}^V_H \vec{\Phi}_{1qs} \cdot \vec{\Psi}_{1mn} r dr d\phi \quad (3.28)$$

Sustituyendo (3.24) y (3.26) en (3.28) e integrando con respecto a ϕ , se obtiene una integral de la forma

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \left[\beta_s \kappa_r Z'_q(\beta_s r) J'_q(\kappa_r r) + \frac{q^2}{r^2} Z_q(\beta_s r) J_q(\kappa_r r) \right] r dr \quad (3.29)$$

donde $J_q(x)$ es la función de Bessel de orden q y argumento x . La ecuación (3.29) puede ser integrado en forma cerrada [18] como

$$I = \left\{ \frac{r \left[\kappa_r^2 \beta_s J_q(\kappa_r r) Z'_q(\beta_s r) - \beta_s^2 \kappa_r J'_q(\kappa_r r) Z_q(\beta_s r) \right]}{\kappa_r^2 - \beta_s^2} \right\} \Big|_{r_1}^{r_2} \quad (3.30)$$

Las expresiones finales para los productos escalares entre las funciones de onda de las dos regiones son

$$\begin{aligned}
\langle {}^V_H \vec{\Phi}_{1qs}, \vec{\Psi}_{1mn} \rangle &= \frac{2\pi\beta_s (-j)^{q-1}}{(\kappa_r^2 - \beta_s^2) \sqrt{S_\alpha}} \left\{ r_2 \left[\beta_s Z_q(\beta_s r_2) J'_q(\kappa_r r_2) - \kappa_r Z'_q(\beta_s r_2) J_q(\kappa_r r_2) \right] \right. \\
&\quad \left. - r_1 \left[\beta_s Z_q(\beta_s r_1) J'_q(\kappa_r r_1) - \kappa_r Z'_q(\beta_s r_1) J_q(\kappa_r r_1) \right] \right\} \begin{cases} \cos q\phi_1 & (V) \\ \text{sen } q\phi_1 & (H) \end{cases} \\
&\hspace{15em} (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle {}^V_H \vec{\Phi}_{1qs}, \vec{\Psi}_{2mn} \rangle &= \frac{2\pi q (-j)^{q-1}}{\kappa_r \sqrt{S_\alpha}} \left[Z_q(\beta_s r_2) J_q(\kappa_r r_2) - Z_q(\beta_s r_1) J_q(\kappa_r r_1) \right] \begin{cases} \text{sen } q\phi_1 & (V) \\ -\cos q\phi_1 & (H) \end{cases} \\
&\hspace{15em} (3.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle {}^V_H \vec{\Phi}_{2qs}, \vec{\Psi}_{1mn} \rangle &= \frac{2\pi q (-j)^{q-1}}{\kappa_r \sqrt{S_\alpha}} \left[\bar{Z}_q(\alpha_s r_2) J_q(\kappa_r r_2) - \bar{Z}_q(\alpha_s r_1) J_q(\kappa_r r_1) \right] \begin{cases} \cos q\phi_1 & (V) \\ -\text{sen } q\phi_1 & (H) \end{cases} \\
&\hspace{15em} (3.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle {}^V_H \vec{\Phi}_{2qs}, \vec{\Psi}_{2mn} \rangle &= \frac{2\pi\alpha_s (-j)^{q-1}}{(\kappa_r^2 - \alpha_s^2) \sqrt{S_\alpha}} \left\{ r_2 \left[\alpha_s \bar{Z}_q(\alpha_s r_2) J'_q(\kappa_r r_2) - \kappa_r \bar{Z}'_q(\alpha_s r_2) J_q(\kappa_r r_2) \right] \right. \\
&\quad \left. - r_1 \left[\alpha_s \bar{Z}_q(\alpha_s r_1) J'_q(\kappa_r r_1) - \kappa_r \bar{Z}'_q(\alpha_s r_1) J_q(\kappa_r r_1) \right] \right\} \begin{cases} \text{sen } q\phi_1 & (V) \\ \cos q\phi_1 & (H) \end{cases} \\
&\hspace{15em} (3.34)
\end{aligned}$$

El modo *TEM* no degenerativo $\vec{\Phi}_{200}$ debe ser integrado por separado

$$\langle \vec{\Phi}_{200}, \vec{\Psi}_{2mn} \rangle = \sqrt{\frac{2\pi}{S_\alpha \ln(r_2/r_1)}} \frac{(-j)}{\kappa_r} [J_0(\kappa_r r_1) - J_0(\kappa_r r_2)] \quad (3.35)$$

y

$$\langle \vec{\Phi}_{200}, \vec{\Psi}_{1mn} \rangle = 0 \quad (3.36)$$

La dependencia radial de las funciones de onda de la guía de onda en (3.24) es

$$Z_q(\beta_s r) = \frac{\sqrt{\pi \varepsilon_q}}{2} \frac{J_q(\beta_s r) N'_q(\beta_s r_1) - N_q(\beta_s r) J'_q(\beta_s r_1)}{\left\{ [J'_q(\beta_s r_1) / J'_q(\beta_s r_2)]^2 [1 - (q/\beta_s r_2)^2] - [1 - (q/\beta_s r_1)^2] \right\}^{1/2}} \quad (3.37)$$

donde $N_q(x)$ es la función de Neumann de orden q y argumento x , además

$$\varepsilon_q = \begin{cases} 1, & q = 0 \\ 2, & q \neq 0 \end{cases}$$

Las cantidades $\{\beta_s\}$ son las raíces de la siguiente ecuación característica

$$J'_q(\beta_s r_2) N'_q(\beta_s r_1) - N'_q(\beta_s r_2) J'_q(\beta_s r_1) = 0 \quad (3.38)$$

De forma similar,

$$\bar{Z}_q(\alpha_s r) = \frac{\sqrt{\pi \varepsilon_q}}{2} \frac{J_q(\alpha_s r) N_q(\alpha_s r_1) - N_q(\alpha_s r) J_q(\alpha_s r_1)}{\left\{ [J_q(\alpha_s r_1) / J_q(\alpha_s r_2)]^2 - 1 \right\}^{1/2}} \quad (3.39)$$

con $\{\alpha_s\}$ como las raíces de

$$J_q(\alpha_s r_2) N_q(\alpha_s r_1) - N_q(\alpha_s r_2) J_q(\alpha_s r_1) = 0 \quad (3.40)$$

Para guías de onda circulares, $r_1 = 0$, las funciones anteriores se reducen a

$$Z_q(\beta_s r) = \sqrt{\varepsilon_q / \pi} \frac{1}{\sqrt{(\beta_s r_2)^2 - q^2}} \frac{J_q(\beta_s r)}{J_q(\beta_s r_2)} \quad (3.41)$$

con $\{\beta_s\}$ como las raíces de $J'_q(\beta_s r_2) = 0$ y

$$\bar{Z}_q(\alpha_s r) = \sqrt{\epsilon_q/\pi} \frac{J_q(\alpha_s r)}{\alpha_s r_2 J_{q+1}(\alpha_s r_2)} \quad (3.42)$$

con $\{\alpha_s\}$ como las raíces de $J_q(\alpha_s r_2) = 0$.

3.2. Resultados de la Simulación Numérica

La evaluación numérica del modelo matemático permitirá el cálculo del coeficiente de reflexión para una superficie basada en anillos ranurados. En los siguientes resultados de la simulación numérica, todos los arreglos son rectangulares y la excitación de la superficie presenta una incidencia normal con polarización horizontal.

A continuación se analizan tres superficies selectivas, modificando los parámetros que las caracterizan, para determinar su respuesta espectral sobre un rango de frecuencias.

La primera *SSF* tiene como parámetros $b = d = 11$ [mm], $r_1 = 3$ [mm] y $r_2 = 4$ [mm]. Los parámetros de la segunda *SSF* son $b = d = 9$ [mm], $r_1 = 1.6$ [mm] y $r_2 = 2.8$ [mm]. Y la tercer *SSF* tiene como parámetros $b = 11.43$ [mm], $d = 10.13$ [mm], $r_1 = 3.8$ [mm] y $r_2 = 4.5$ [mm].

Efectos del sustrato dieléctrico

Es común que una estructura periódica sea diseñada de primera instancia sin dieléctrico alguno, después por razones mecánicas se le añade un sustrato y se espera que el diseño original no difiera mucho en su desempeño. Por lo general esto no sucede. Como se verá a continuación, los sustratos dieléctricos influyen en la curva de reflexión.

Las siguientes figuras muestran el efecto de un sustrato dieléctrico en el comportamiento de las estructuras periódicas.

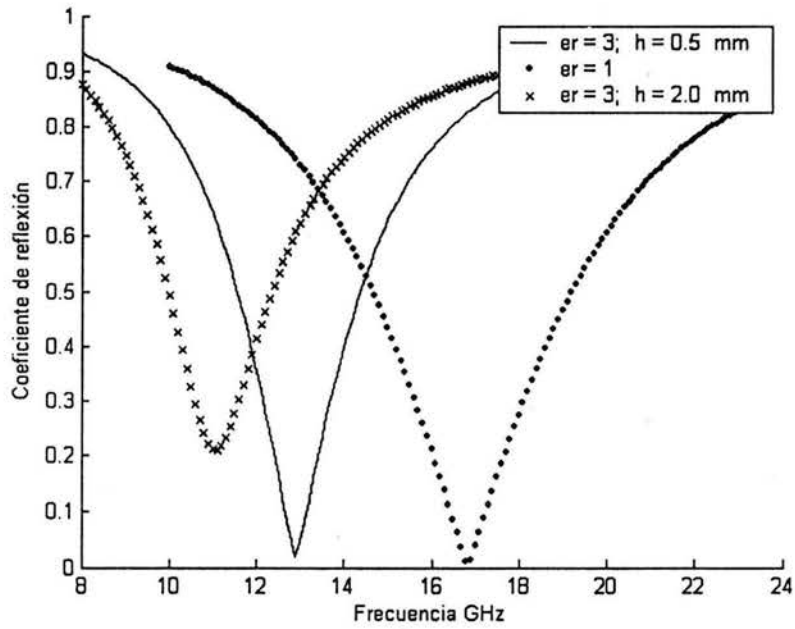


Figura 3.6. (SSF_1) , $r_1 = 3$ mm, $r_2 = 4$ mm, $d = b = 11$ mm.

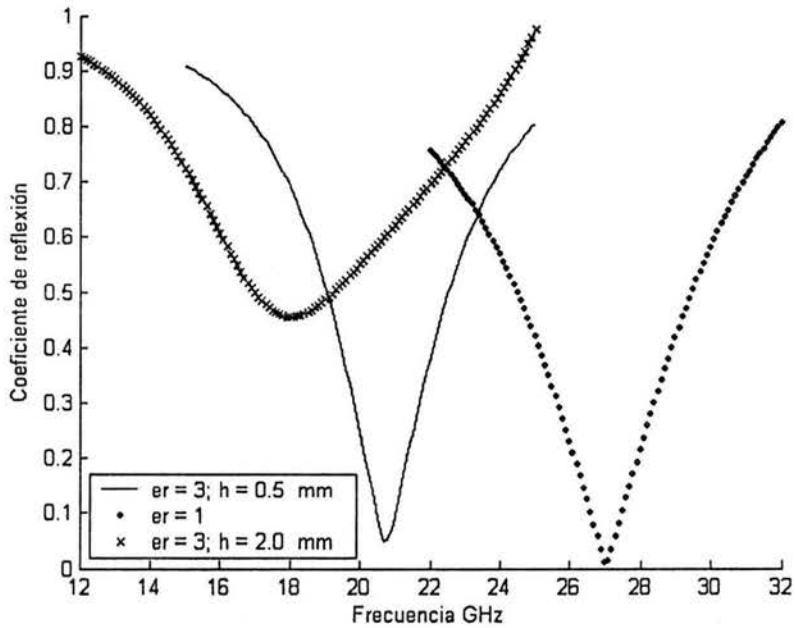


Figura 3.7. (SSF_2) , $r_1 = 1.6$ mm, $r_2 = 2.8$ mm, $d = b = 9$ mm.

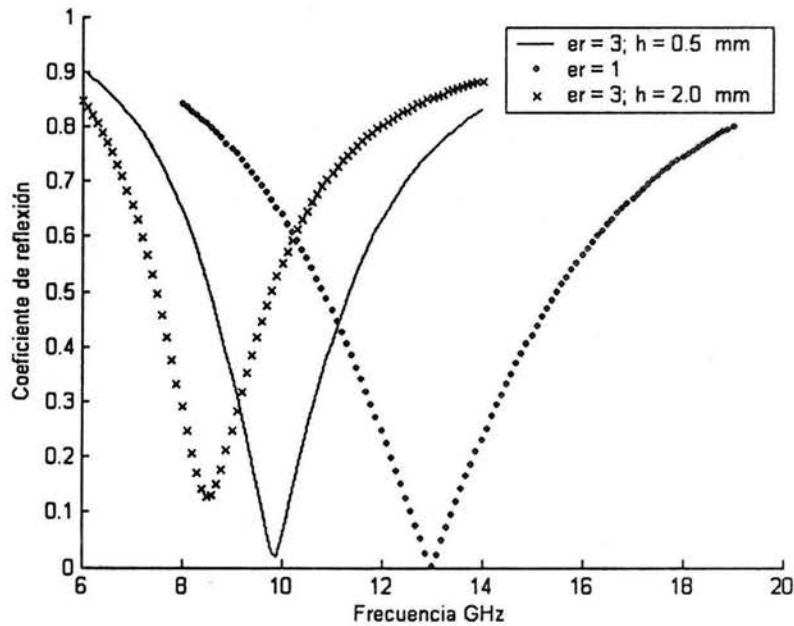


Figura 3.8. (SSF_3), $r_1 = 3.8$ mm, $r_2 = 4.5$ mm, $d = 10.13$ mm, $b = 11.43$ mm.

De las figuras se observa que la estructura sin sustrato dieléctrico ($\epsilon_r = 1$) es transparente a la onda incidente en el caso donde el perímetro medio del anillo es aproximadamente igual a la longitud de onda de resonancia λ_r [17]. Al presentarse el sustrato dieléctrico e ir aumentando su grosor la frecuencia de resonancia f_r disminuye. Esto se debe a que la velocidad de fase en presencia del sustrato es menor que la velocidad de fase en el espacio libre. La frecuencia de resonancia para una SSF depende tanto de las dimensiones de cada elemento, como del sustrato dieléctrico. Si el grosor del sustrato se reduce, la frecuencia de resonancia tiende al valor de la frecuencia de resonancia en el espacio libre.

Dimensión del anillo

El ajustar las dimensiones del anillo, ya sea modificando los radios interno y externo o el radio medio, representa un cambio tanto en la frecuencia como en el ancho de banda del resonador.

Las figuras 3.10 a 3.12 muestran el efecto de variar el radio medio únicamente en función el radio externo r_2 . Desde luego que las dimensiones resultantes del anillo deberán permanecer dentro del área de la celda unitaria. Los anillos son soportados por un sustrato dieléctrico de permitividad $\epsilon_r = 3$ y el grosor del dieléctrico es $h = 0.5$ mm. La diferencia entre los radios del anillo se denotará como $W = r_2 - r_1$.

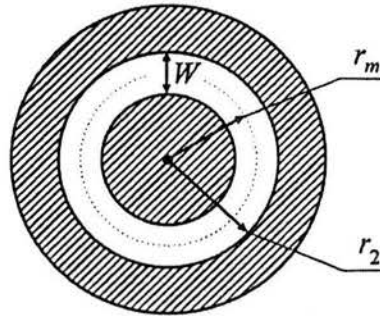


Figura 3.9. Variación del radio medio r_m .

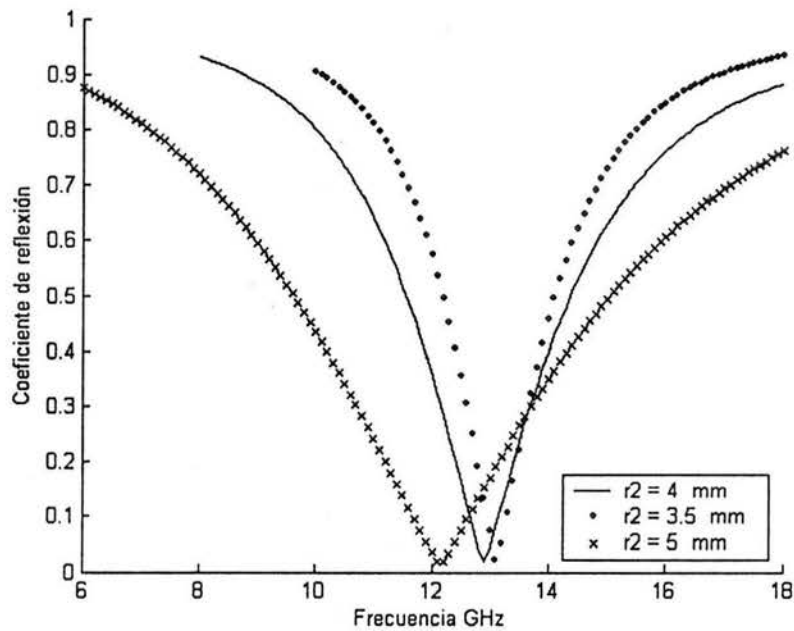


Figura 3.10. (SSF_1) , $r_1 = 3$ mm, $d = b = 11$ mm, $\epsilon_r = 3$, $h = 0.5$ mm.

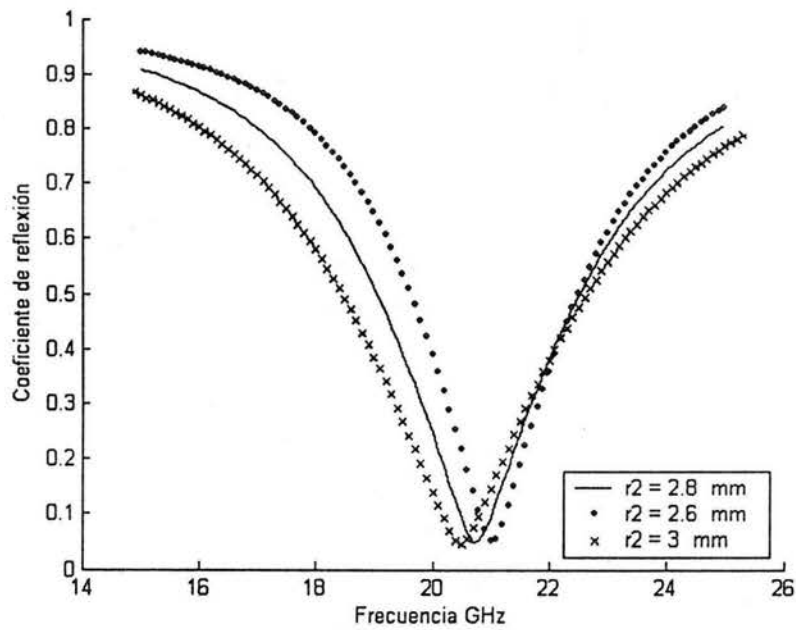


Figura 3.11. (SSF_2), $r_1 = 1.6$ mm, $d = b = 9$ mm, $\epsilon_r = 3$, $h = 0.5$ mm.

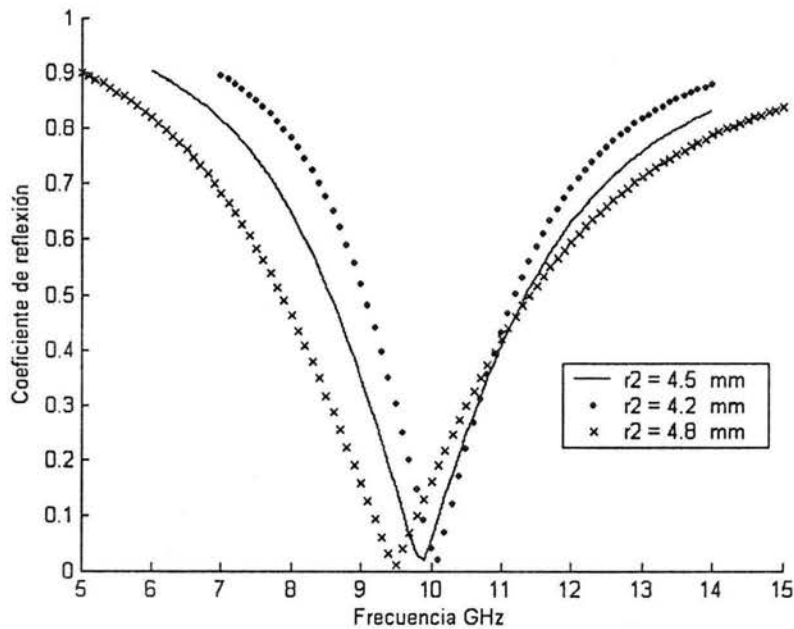


Figura 3.12 (SSF_3), $r_1 = 3.8$ mm, $d = 10.13$ mm, $b = 11.43$ mm, $\epsilon_r = 3$, $h = 0.5$ mm.

Al aumentar el radio medio del anillo, la longitud de onda aumenta y por consiguiente la frecuencia disminuye. Además el ancho del anillo crece de forma proporcional al radio

medio, logrando que el resonador sea más “transparente” a la onda incidente y que el coeficiente de reflexión disminuya su valor en un rango mayor de frecuencias. Cuando se presenta el caso de modificar ambos radios, r_1 y r_2 , para mantener el radio medio constante, se logra el efecto de aumentar la frecuencia de resonancia. Este efecto se debe a la disminución de la capacitancia formada entre las dos superficies metálicas que conforman el anillo. Al ser mayor la diferencia entre los radios del anillo es mayor el campo eléctrico sobre la ranura. Como consecuencia de todo lo anterior se tiene una menor selectividad del resonador.

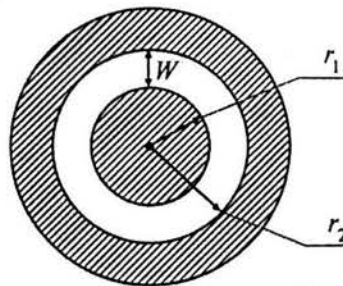


Figura 3.13. Variación de los radios interno y externo, r_1 y r_2 .

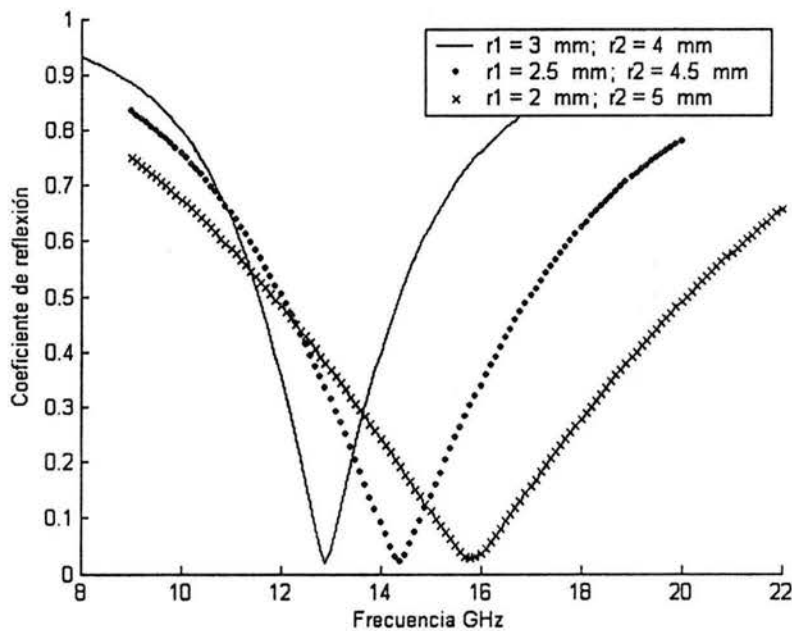


Figura 3.14. (SSF_1), $r_m = 3.5$ mm, $d = b = 11$ mm, $\epsilon_r = 3$, $h = 0.5$ mm.

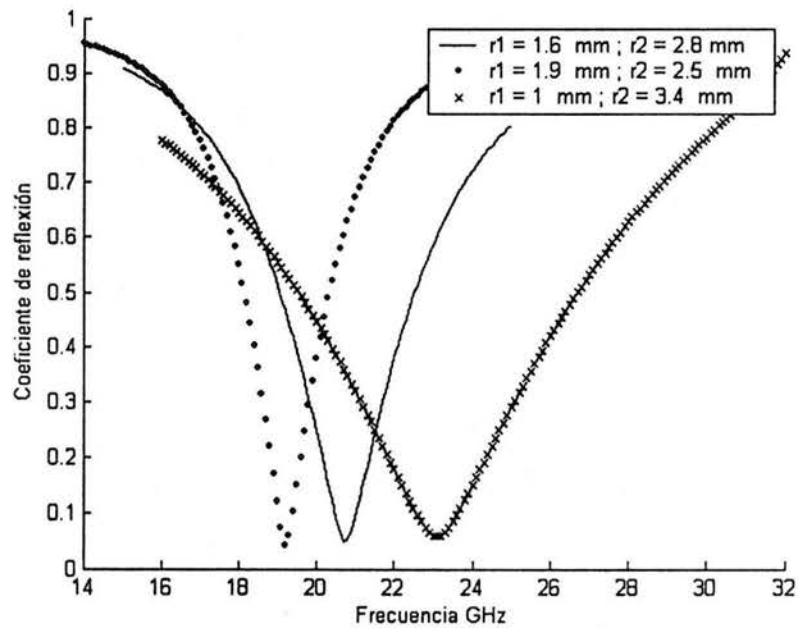


Figura 3.15. (SSF_2) , $r_m = 2.2$ mm, $d = b = 9$ mm, $\epsilon_r = 3$, $h = 0.5$ mm

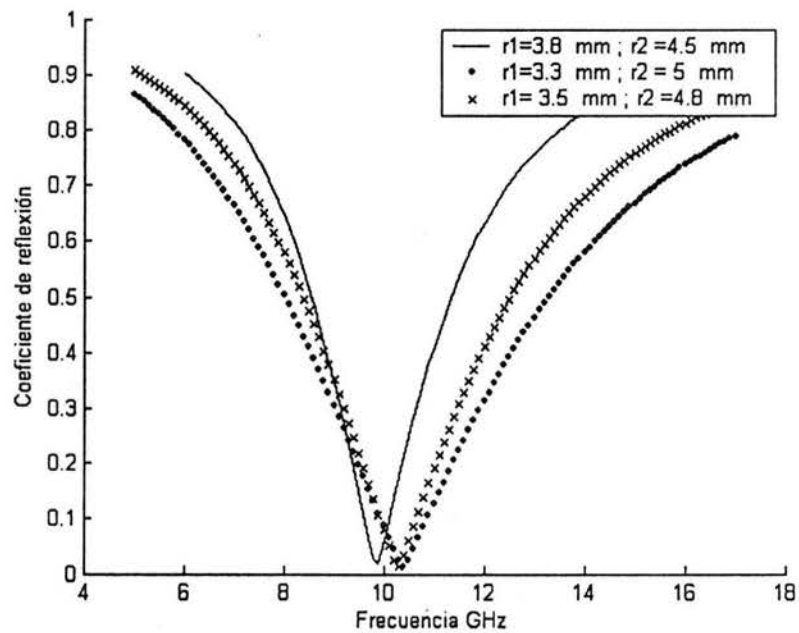


Figura 3.16. (SSF_3) , $r_m = 4.15$ mm, $d = 10.13$ mm, $b = 11.43$ mm, $\epsilon_r = 3$, $h = 0.5$ mm.

Dimensión de la celda

A continuación se muestran los resultados de incrementar la longitud d de la celda unitaria con respecto al eje y , manteniendo todos los demás parámetros constantes.

Recordando que la onda incidente presenta una polarización horizontal, se observa que al aumentar la longitud de la celda d , la frecuencia experimenta un incremento en su valor. Para justificar este hecho se tendrá en cuenta el circuito equivalente del anillo ranurado de la figura 3.1. Cuando el parámetro d aumenta, los valores de las inductancias L_i y L_d disminuyen; esto a causa del incremento de la superficie conductora por la que circulan las corrientes eléctricas I_i e I_d .

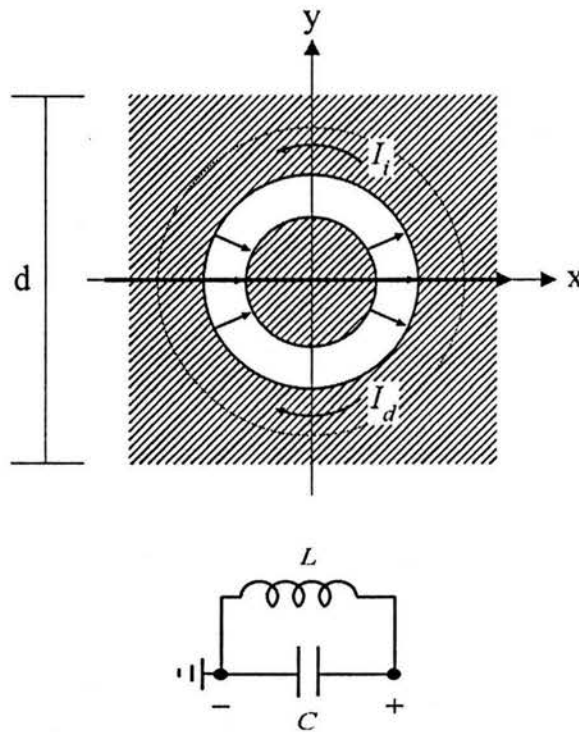


Figura 3.17. Variación en la dimensión de la celda.

En el caso de la figura 3.19, donde lo antes mencionado no se cumple, no tiene una explicación concreta. Dado que la distancia entre el radio exterior r_2 y la frontera de la celda es grande, se presenta un efecto donde la frecuencia de resonancia disminuye.

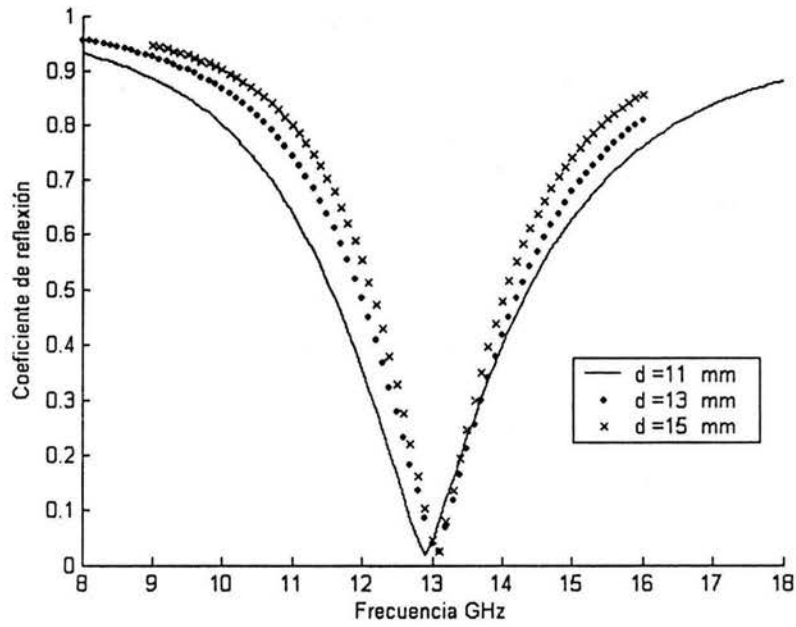


Figura 3.18. (SSF_1) , $r_1 = 3$ mm, $r_2 = 4$ mm, $b = 11$ mm, $\epsilon_r = 3$, $h = 0.5$ mm.

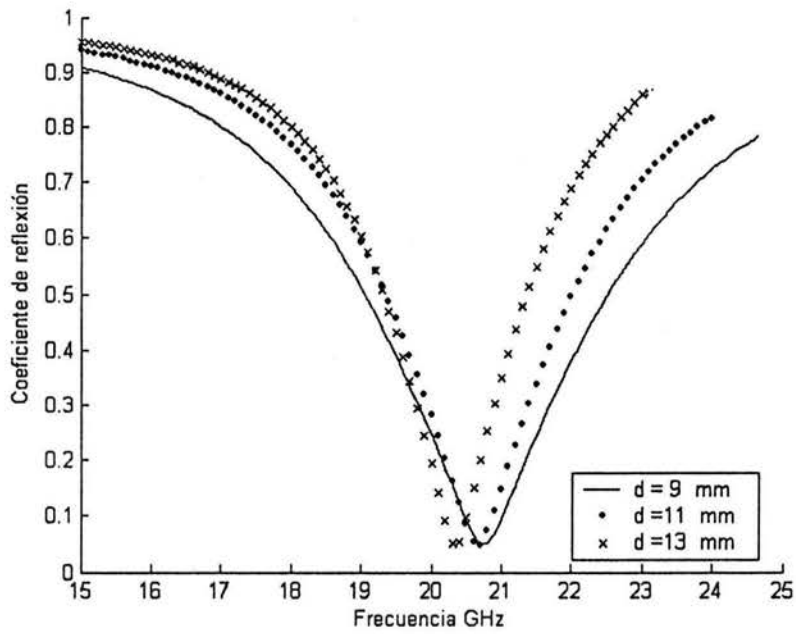


Figura 3.19. (SSF_2) , $r_1 = 1.6$ mm, $r_2 = 2.8$ mm, $b = 9$ mm, $\epsilon_r = 3$, $h = 0.5$ mm.

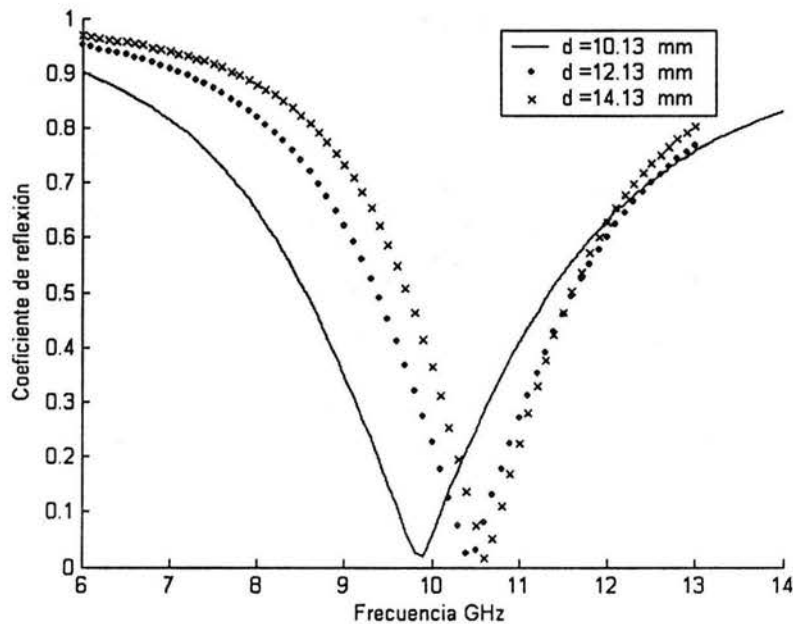


Figura 3.20. (SSF_3), $r_1 = 3.8$ mm, $r_2 = 4.5$ mm, $b = 11.43$ mm, $\epsilon_r = 3$, $h = 0.5$ mm

3.2.1. Verificación experimental

Simuladores de guías de onda

Un factor importante en el desarrollo de antenas de arreglos de fase para haces estrechos de exploración sobre grandes regiones angulares, es el desempeño de sus elementos radiantes. Sin embargo, el diseño de un buen elemento radiante en un arreglo de fase es un proceso complicado. Además de que una medición exacta del desempeño de un solo elemento en el arreglo de muchos elementos es sumamente difícil. Ambos problemas pueden atribuirse al hecho que el comportamiento de cada elemento es afectado por la presencia de los elementos circundantes en el arreglo.

El único método exacto para la medición de un elemento del arreglo requiere que éste sea colocado en el arreglo completo. Si la impedancia activa del elemento debe ser medida, entonces los demás elementos deben excitarse con la amplitud y fase apropiadas. Si los patrones de la radiación del elemento necesitan ser medidos, esto debe hacerse en la zona lejana del arreglo completo. Estos requisitos hacen a las mediciones poco atractivas

desde un punto de vista práctico.

Una aproximación al problema de la medición del comportamiento de un elemento involucra un pequeño arreglo, en donde el elemento a medir es rodeado por elementos adicionales. En este caso, se espera que únicamente estos elementos cercanos tengan un efecto importante, de tal manera que este arreglo pequeño sea una buena aproximación del arreglo completo. Pero en general los elementos distantes también tienen un efecto significativo, debido al gran número de éstos.

Una propuesta alternativa al problema emplea los simuladores de guía de onda. Tal simulación permite representar con precisión un arreglo infinito con relativamente pocos elementos. Un simulador de guía de onda es una guía de onda rectangular que se usa para cubrir un número prescrito de celdas en la región $z \geq 0$ del arreglo.

Las condiciones que se deben de imponer para construir un simulador de guía de onda son similares a aquellas impuestas sobre la geometría del arreglo para obtener una expresión variacional que determine las impedancias de entrada de los arreglos, relacionadas con los coeficientes de reflexión [20]-[22].

Primeramente se asumirá por conveniencia que solamente un modo de la guía de onda incide sobre la ranura; esto es $J = 1$ y $A_1 = 1$ en la ecuación (2.53). Debido a que los efectos de más de un modo incidente pueden ser añadidos por superposición, esto no afectará el siguiente análisis. A partir de (2.37) es posible manipular la ecuación integral (2.53) de la forma

$$y_{in_1} y_1 \vec{\Phi}_1(r) \iint_{A'} \vec{\Phi}_1 \cdot \vec{E}_t da' = \iint_{A'} \left[\sum_{i=2}^{\infty} y_i \vec{\Phi}_i(r) \vec{\Phi}_i(r') + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \vec{\Psi}_k(r) \vec{\Psi}_k^*(r') \right] \cdot \vec{E}_t(r') da' \quad (3.43)$$

donde y_{in_1} es la admitancia de entrada del arreglo dada por

$$y_{in_1} = \frac{1 - R_1}{1 + R_1}$$

R_1 es el coeficiente de reflexión encontrado a partir de la misma ecuación (2.37). El vector

r denota una coordenada de posición (x, y) sobre A' y da' denota un área diferencial en r' .

Ahora se transforma la ecuación (3.43) con el propósito de que una expresión variacional pueda ser obtenida. Para llevar a cabo esta transformación, se requiere que la estructura del arreglo de la guía de onda sea invariante bajo el grupo de operadores de reflexión, F_x , F_y y R_z definidos por

$$\begin{aligned}
 F_x &= \text{reflexión en el plano } y - z \\
 F_y &= \text{reflexión en el plano } x - z \\
 R_z &= F_x F_y = F_y F_x = \text{rotación de } 180^\circ \text{ alrededor del eje } z
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

Si estas condiciones de simetría son satisfechas, es posible hacer radiar cuatro haces simultáneos desde el arreglo, como se muestra en la figura 3.21, en las direcciones

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta \\
 \phi_1 &\equiv \phi, \quad \phi_2 = \pi - \phi, \quad \phi_3 = \pi + \phi, \quad \phi_4 = -\phi
 \end{aligned}$$

o en términos de los cosenos directores correspondientes

$$\begin{aligned}
 (T_{x1}, T_{y1}) &= (T_x, T_y) \\
 (T_{x2}, T_{y2}) &= (-T_x, T_y) \\
 (T_{x3}, T_{y3}) &= (-T_x, -T_y) \\
 (T_{x4}, T_{y4}) &= (T_x, -T_y)
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

con las siguientes distribuciones de campo eléctrico

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_{t1} &= \{\mathcal{E}_x(x, y, z), \mathcal{E}_y(x, y, z)\} \equiv \vec{E}_t \\
\vec{\mathcal{E}}_{t2} &= \{-\mathcal{E}_x(-x, y, z), \mathcal{E}_y(-x, y, z)\} \\
\vec{\mathcal{E}}_{t3} &= \{-\mathcal{E}_x(-x, -y, z), -\mathcal{E}_y(-x, -y, z)\} \\
\vec{\mathcal{E}}_{t4} &= \{\mathcal{E}_x(x, -y, z), -\mathcal{E}_y(x, -y, z)\}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

El campo eléctrico total en el exterior (región $z > 0$) es encontrado a partir de las ecuaciones (2.48) y (3.46) como

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_t &= \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_{xt} \\ \vec{\mathcal{E}}_{yt} \end{pmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4jk_{xm}}{\sqrt{bd}\sqrt{k_{xm}^2 + k_{yn}^2}} e^{-j\Gamma_{mn}z} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \left(V_{2mn} + \frac{k_{yn}}{k_{xm}} V_{1mn} \right) \text{sen } k_{xm}x \cos k_{yn}y \\ \left(V_{2mn} \frac{k_{yn}}{k_{xm}} - V_{1mn} \right) \cos k_{xm}x \text{sen } k_{yn}y \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

con k_{xm} y k_{yn} dados por (2.12) y (2.13) respectivamente. Para los incrementos de fase dados por

$$\psi_x = \psi_{x_{fs}} = \frac{\pi f}{s} \quad \text{y} \quad \psi_y = \psi_{y_{gh}} = \frac{\pi g}{h} \tag{3.47}$$

donde $(f, g) =$ enteros impares y $(s, h) =$ enteros pares, el campo eléctrico total satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_{xt} &= 0 \quad \text{cuando} \quad y = \pm \frac{hd}{2} \\
\vec{\mathcal{E}}_{yt} &= 0 \quad \text{cuando} \quad x = \pm \frac{sb}{2}
\end{aligned}$$

Como resultado de lo anterior se pueden introducir paredes metálicas en estas ubicaciones sin modificar la distribución del campo. Esto presenta una situación en la que una o más guías de onda radian en una guía de onda más grande. Por lo tanto, la transición de una guía de onda equivalente a un arreglo infinito bajo algunas condiciones especiales

de exploración es obtenida. La simulación de la guía de onda para el arreglo de fase es posible con los ángulos determinados en (3.47).

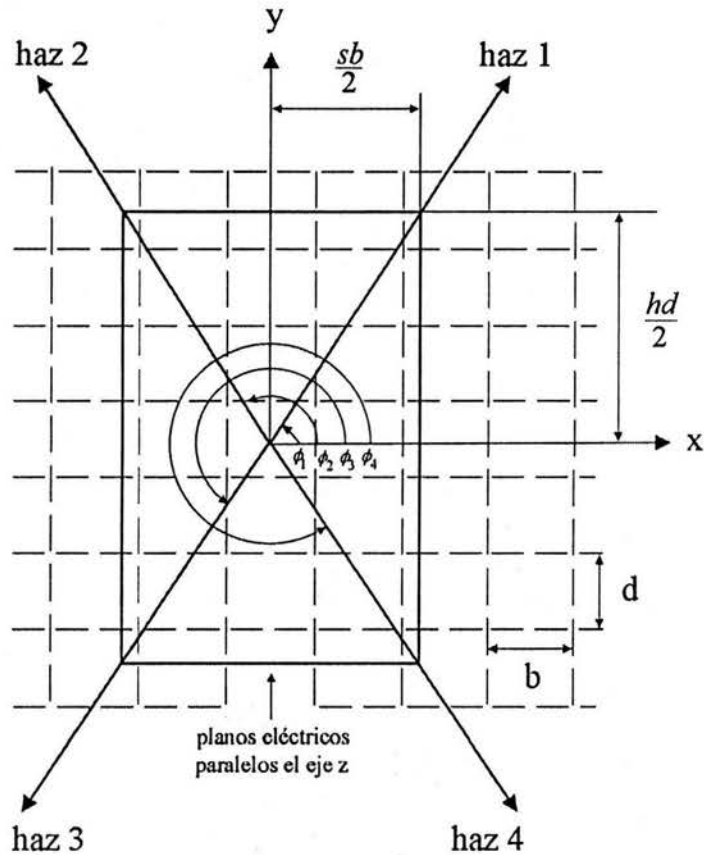


Figura 3.21. Cuatro haces simultáneos para la simulación de la guía de onda.

Simulación de la guía de onda [21]

Las direcciones de propagación de las componentes de las ondas planas en una guía de onda rectangular (que formarán los planos eléctricos necesarios para la simulación), proyectadas sobre el plano transversal de la guía de onda se muestra en la figura 3.22. Mientras que dos ondas son suficientes para describir el modo dominante TE_{10} , se necesitan cuatro ondas para describir completamente todos los modos de alto orden [23]. Las direcciones de propagación de las componentes de las ondas planas para el modo TE_{10} están sobre los planos paralelos a la pared más ancha de la guía de onda.

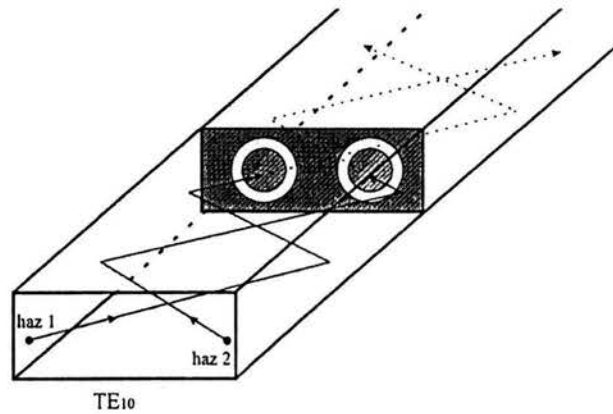


Figura 3.22. Direcciones de propagación de las ondas planas.

La sección transversal de la guía de onda no puede ser elegida arbitrariamente, se debe restringir su sección transversal a un determinado tamaño, el cual requerirá de un número pequeño de elementos y utilizará los modos de bajo orden para minimizar los problemas de los modos espurios.

Con base en las dimensiones de la celda unitaria de la *SSF* y de las dimensiones de la guía de onda rectangular, mostradas en la figura 3.23, se encontrarán los parámetros del simulador de guía de onda.

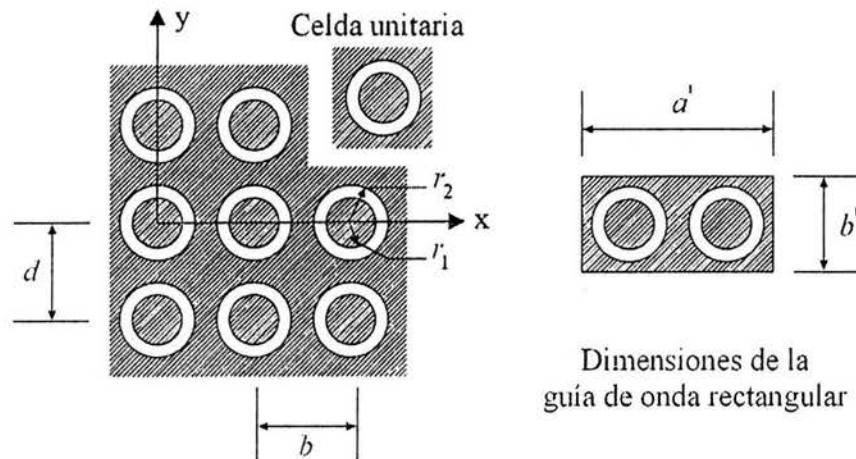


Figura 3.23. Dimensiones de la celda unitaria y de la guía de onda rectangular.

Las dimensiones del simulador, para el caso de un solo anillo en la celda unitaria, son $a' = b$ y $b' = d$. En el caso de colocar dos anillos por celda unitaria, las dimensiones son $a' = 2b$ y $b' = d$.

Los ángulos de exploración o cambios de fase, para los cuales la simulación del arreglo es posible, pueden ser determinados a partir del análisis de la guía de onda rectangular para el modo dominante TE_{10} .

Recordando que en una guía de onda rectangular la componente del campo eléctrico para el modo TE_{10} se define mediante

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{a} x \right) e^{-j\beta z} = E_0 \frac{e^{j\frac{\pi}{a}x} - e^{-j\frac{\pi}{a}x}}{2j} e^{-j\beta z} \\ &= \frac{E_0}{2j} [e^{j\frac{\pi}{a}x} e^{-j\beta z} - e^{-j\frac{\pi}{a}x} e^{-j\beta z}] \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde la constante de propagación es

$$\beta_{TE_{10}} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2}$$

Al igualar la ecuación (3.48) con la ecuación que determina el campo eléctrico por medio del teorema de Floquet (2.15), se observa que $k_y = 0$, $k_x = \pi/a$ para la primer onda y $k_x = -\pi/a$ para la segunda onda.

Sustituyendo los valores de k_x en la ecuación (2.12)

$$\psi_x = k_x b = \frac{\pi a}{a} \frac{b}{2} = \frac{\pi}{2}$$

que son los valores de los cambios de fase para ambas ondas incidentes.

Con base en lo anterior se usa el simulador de guía de onda [1] para verificar el modelo matemático. Un diafragma de metal que contiene dos celdas unitarias de la SSF mostrada en la figura 3.23 fue impresa en un material dieléctrico con $\epsilon_r = 3.4$ y espesor de 0.51 mm. Este diafragma se colocó en la sección transversal de la guía de onda rectangular $WR-90$ que presenta las siguientes dimensiones $b' = 10.13$ mm y $a' = 22.86$ mm. Las dimensiones

de los radios interno y externo son $r_1 = 3.74 \text{ mm}$ y $r_2 = 4.46 \text{ mm}$, respectivamente. La figura 3.24 muestra el diafragma de metal empleado en la simulación.

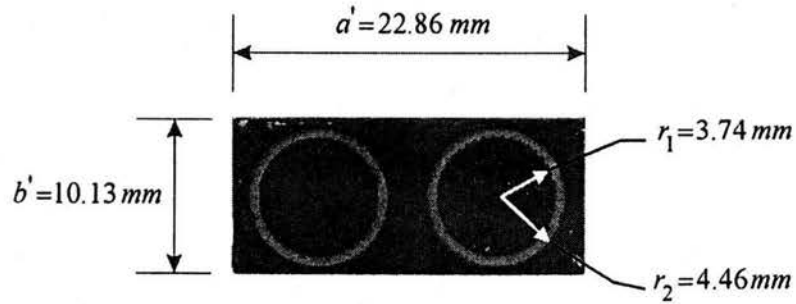


Figura 3.24. Diafragma empleado en la simulación de la guía de onda.

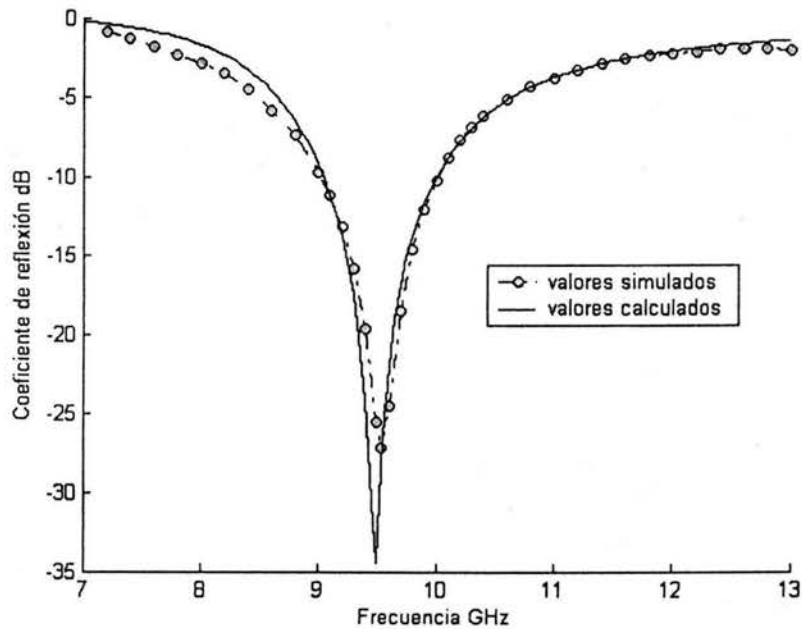


Figura 3.25. Resultados de la investigación experimental del simulador de guía de onda.

La figura 3.25 presenta el resultado de la comparación entre los valores medidos en el simulador de guía de onda y los valores calculados del coeficiente de reflexión para la *SSF*. La magnitud medida del coeficiente de reflexión es muy cercana de la magnitud

calculada del coeficiente de reflexión que corresponde a la dispersión de la onda plana TE incidente sobre la SSF equivalente mostrada en la figura 3.23.

Las diferencias entre los resultados obtenidos por el modelo matemático desarrollado y el simulador de guía de onda se deben, en general, a la precisión con que se obtuvieron los valores por parte del modelo matemático, esto incluye el número de modos empleado y el intervalo en el barrido de la frecuencia; mientras que en la simulación experimental influye en gran medida la calibración del equipo así como la misma construcción del diafragma y su colocación en la guía de onda rectangular para lograr las mediciones más correctas posibles. En el caso de la magnitud del coeficiente de reflexión, la simulación de la guía de onda presenta un menor valor que el obtenido con el modelo matemático; la razón es que el sustrato dieléctrico empleado en la construcción del diafragma tiene cierta tolerancia especificada por el propio fabricante, además de que el efecto de pérdidas por dieléctrico se hace presente.

Comparación de los resultados de la simulación numérica con el método empírico

Observando el anillo ranurado de la figura 3.1 es posible modelarlo como una estructura similar a la línea ranurada. La línea ranurada es una guía de onda compatible con la tecnología planar. Consta de una ranura o hueco en una capa conductora depositada sobre un sustrato dieléctrico, tal como se muestra en la figura 3.26.

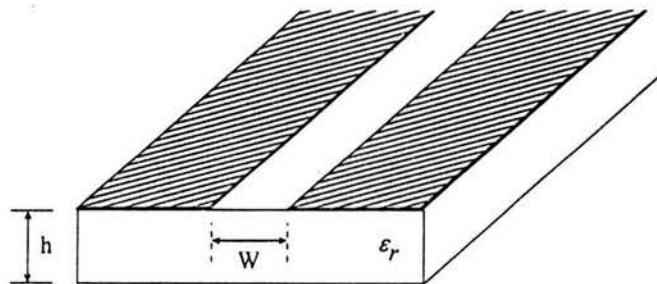


Figura 3.26. Línea ranurada sobre un sustrato dieléctrico.

Para que la línea ranurada sea una línea de transmisión práctica, la radiación debe ser minimizada. Esto se logra a través del uso de un sustrato con permitividad alta, causando que la longitud de onda de la línea ranurada sea pequeña comparada con la longitud de onda en el espacio libre, resultando que los campos sean limitados a la ranura con pérdidas de radiación despreciables.

Los parámetros eléctricos básicos de la línea ranurada son la impedancia característica Z_0 y la velocidad de fase v_p . Debido a la naturaleza no-*TEM* de la línea ranurada estos parámetros no son constantes, variando ligeramente con la frecuencia. La línea ranurada difiere de las guías de onda en que no tiene frecuencia de corte. La propagación a través de la ranura ocurre para todas las frecuencias. Fórmulas empíricas han sido desarrolladas para evaluar la longitud de onda normalizada y la impedancia característica de la línea ranurada [24].

Las siguientes formulas son validas para $0.006 \leq h/\lambda_0 \leq 0.060$ y $2.22 \leq \epsilon_r \leq 3.8$

$$0.0015 \leq W/\lambda_0 \leq 0.075$$

$$\begin{aligned} \lambda'/\lambda_0 = & 1.045 - 0.365 \ln \epsilon_r + \frac{6.3 (W/h) \epsilon_r^{0.945}}{(238.64 + 100W/h)} \\ & - \left[0.148 - \frac{8.81(\epsilon_r + 0.95)}{100\epsilon_r} \right] \ln(h/\lambda_0) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} Z_0 = & 60 + 3.69 \operatorname{sen} \left[\frac{(\epsilon_r - 2.22)\pi}{2.36} \right] + 133.5 \ln(10\epsilon_r) \sqrt{W/\lambda_0} \\ & + 2.81 [1 - 0.011\epsilon_r (4.48 + \ln \epsilon_r)] (W/h) \ln(100h/\lambda_0) \\ & + 131.1 (1.028 - \ln \epsilon_r) \sqrt{h/\lambda_0} \\ & + 12.48(1 + 0.18 \ln \epsilon_r) \frac{W/h}{\sqrt{\epsilon_r - 2.06 + 0.85(W/h)^2}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$0.075 \leq W/\lambda_0 \leq 1$$

$$\begin{aligned} \lambda'/\lambda_0 = & 1.194 - 0.24 \ln \varepsilon_r - \frac{0.621 \varepsilon_r^{0.835} (W/\lambda_0)^{0.48}}{(238.64 + 100W/h)} \\ & - 0.0617 \left[1.91 - \frac{(\varepsilon_r + 2)}{\varepsilon_r} \right] \ln(h/\lambda_0) \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} Z_0 = & 133 + 10.34(\varepsilon_r - 1.8)^2 + 2.87 [2.96 + (\varepsilon_r - 1.582)^2] \\ & \{ [W/h + 2.32\varepsilon_r - 0.56] \\ & \{ (32.5 - 6.67\varepsilon_r) (100h/\lambda_0)^2 - 1 \} \}^{1/2} \\ & - (684.45h/\lambda_0) (\varepsilon_r + 1.35)^2 \\ & + 13.23 [(\varepsilon_r - 1.722)W/\lambda_0]^2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde λ_0 es la longitud de onda en el espacio libre, ε_r y h son el valor de la permitividad y el grosor del sustrato dieléctrico, respectivamente.

Al modelar el resonador de anillos ranurados como una línea ranurada se determina que la diferencia entre el radio externo e interno, r_2 y r_1 , en el anillo es igual al grosor de la ranura W , siendo h el espesor para ambas estructuras. Recordando que la longitud de onda en resonancia para la superficie selectiva es aproximadamente igual al perímetro del anillo, es posible aproximar la respuesta de la *SSF* mediante el método empírico aplicado a la línea ranurada.

Para dos valores diferentes del grosor de la línea ranurada, $W = 1$ mm y $W = 0.7$ mm, y tomando en consideración valores de $h = 0.5$ mm y $\varepsilon_r = 3$ para el espesor y la constante dieléctrica del sustrato, se obtuvieron las respectivas longitudes de onda de la línea ranurada para cada longitud de onda en el espacio libre, a partir de las ecuaciones (3.49) a (3.52). Empleando la relación existente que presenta la *SSF* con respecto a su radio

medio y la longitud de onda en resonancia

$$2\pi r_{medio} = \lambda_r$$

es posible obtener el valor del radio medio en función de la frecuencia de resonancia, representado por la línea continua en las figuras 3.27 y 3.28.

A partir de las curvas obtenidas mediante el método empírico, se tomaron diferentes valores del radio medio para evaluar las frecuencias de resonancia empleando el modelo matemático desarrollado. Para comprobar la posible validez de la aproximación basada en método empírico, se utilizaron dos celdas unitarias de dimensiones 10.13 x 11.43 mm y 9 x 9 mm respectivamente, para evaluar la respuesta espectral de cada uno de los radios medios. Los valores obtenidos por el modelo matemático, para cada celda unitaria se presentan en las figuras 3.27 y 3.28.

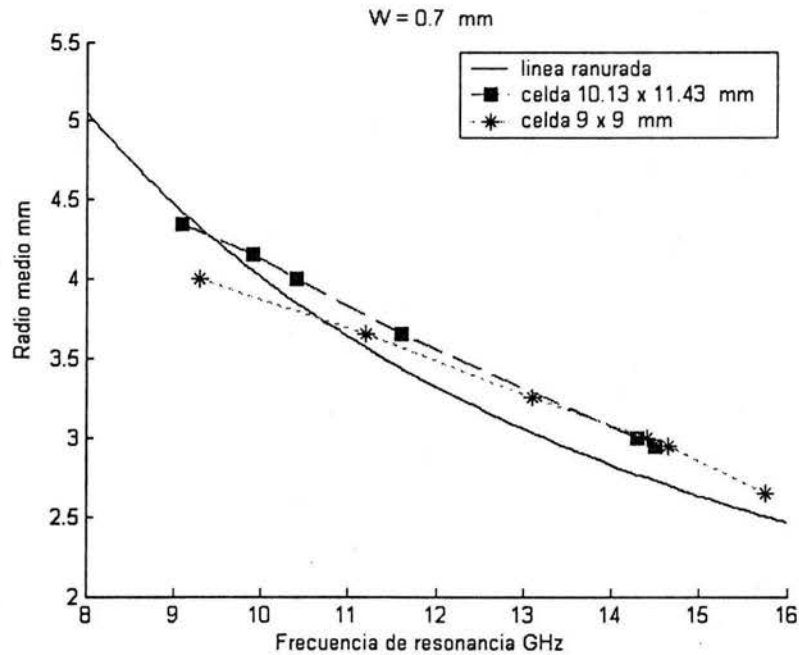


Figura 3.27. Comparación entre la simulación numérica y el método empírico para $W = 0.7$ mm.

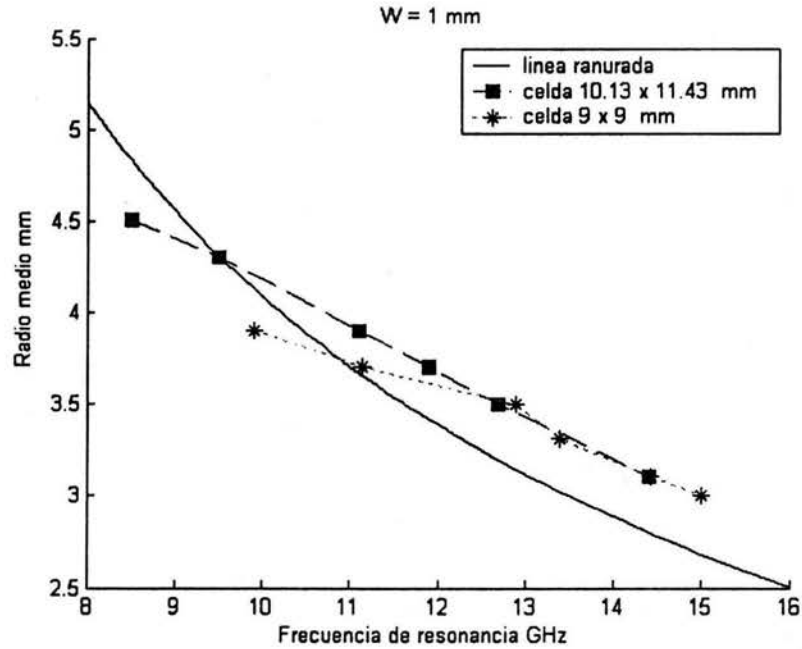


Figura 3.28. Comparación entre la simulación numérica y el método empírico para $W = 1.0$ mm.

Se aprecia que los resultados del modelo matemático y los obtenidos mediante el método empírico presentan un comportamiento aproximado. Al modelar la estructura anular como una línea ranurada es de esperar cierto margen de error entre los resultados, debido al no considerar la forma circular del elemento resonador ni las dimensiones de la celda en las ecuaciones del método empírico, inclusive la misma tolerancia de dichas ecuaciones se hace presente en los resultados obtenidos. Para considerar el modelo basado en la línea ranurada es necesario entonces determinar un factor de corrección, a manera de ajustar los resultados con la mayor exactitud posible.

Capítulo 4

Conclusiones

1. Basándose en la teoría electromagnética fue desarrollado un modelo matemático para una estructura periódica basada en resonadores de anillos. Modificando los parámetros que caracterizan dicha estructura se logró conocer la respuesta del diseño para filtros paso-banda. La propiedad principal de la superficie basada en resonadores de anillos ranurados es el comportamiento resonante de su coeficiente de reflexión. La resonancia ocurre cuando la circunferencia del anillo ranurado es aproximadamente igual a la longitud de onda λ .
 - a) Para asegurar resultados de una tolerancia adecuada en el modelo matemático, fue aplicado el método de simulación electromagnética que consiste en la formulación de la ecuación integral basada en la expansión modal y la aplicación de condiciones de frontera con solución posterior basada en el método de momentos. El procedimiento básico es expandir la distribución del campo eléctrico desconocido sobre el plano conductor en un juego de modos Floquet y relacionar los campos magnéticos desconocidos en ambos lados de la superficie por medio de las admitancias modales correspondientes en estas dos regiones. Acoplando apropiadamente las componentes tangenciales del campo en el plano conductor, una ecuación integral es obtenida para el campo eléctrico desconocido en la ranura.

- b) Para simplificar los cálculos, la distribución del campo desconocido en la ranura es expandida en un nuevo juego de funciones que son ortogonales sobre la misma ranura. Por medio del método de momentos, la ecuación integral es reducida a un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales que puede ser resuelto con el uso de la computadora.
- c) Un programa computacional fue desarrollado para calcular los coeficientes de reflexión de una *SSF* basada en anillos ranurados. Para acelerar la convergencia y el tiempo de cálculo, las funciones base que se usaron en la expansión del campo dentro de las ranuras de la *SSF* fueron las funciones modales de la guía de onda coaxial. En el cómputo de los coeficientes de reflexión se observó la convergencia de las soluciones en función del número de modos de guía de onda y modos del espacio libre usados, indicando que 10 modos de guía de onda y 1000 modos del espacio libre producen un porcentaje alto en la exactitud de la magnitud de los coeficientes reflexión.
2. Las gráficas obtenidas mostraron que un plano conductor perforado con ranuras de geometría anular presenta características de filtro paso-banda cuando es iluminado por una onda electromagnética incidente de frecuencia variable. Dicha propiedad hace que este tipo de estructuras sea útil para muchas aplicaciones como filtros de microondas, radomos paso-banda, antenas reflectores, polarizadores, etc.; inclusive la adición de cortos metálicos en los anillos permiten un ajuste en la frecuencia de resonancia [25]-[27].
3. A partir del circuito equivalente *LC* y del análisis de los resultados de la simulación numérica se explicó el comportamiento de la *SSF* basándose en los procesos físicos que tienen lugar en la estructura periódica.
4. Para confirmar la validez del modelo matemático formulado se empleó el método del simulador de guía de onda. Para los parámetros de la *SSF* mostrados en la figura 3.24, la frecuencia de resonancia obtenida por medio del modelo matemático es de

9.5 GHz. Comparándola con la frecuencia de 9.54 GHz obtenida por el simulador de guía de onda, se obtiene un porcentaje de error menor al 1 %. Los anchos de banda referidos a -10 dB obtenidos del modelo matemático y el simulador son 954 MHz y 987 MHz, respectivamente, lo cual da una error del 3.4 %.

5. Se propuso un modelo alternativo basado en el método empírico sobre la línea ranurada, para llevar acabo el análisis de la dispersión electromagnética en la *SSF* en un menor tiempo. Esta aproximación dio resultados cercanos con respecto a los obtenidos mediante el modelo matemático, aun sin considerar totalmente los parámetros de la superficie selectiva. Para un grosor de la ranura $W = 0.7$ mm el porcentaje de error presentado entre el modelo matemático y el método empírico para la celda cuadrada fue de 6.9 %, mientras que para la celda rectangular se obtuvo un error del 4.4 %. Al aumentar el grosor de la ranura a 1 mm, los porcentajes de error obtenidos para la celda cuadrada y rectangular son 9 % y 8 %, respectivamente. Los resultados entre ambos métodos pueden mejorarse a partir de ajuste de curvas, procesos iterativos y de optimización.

Bibliografía

- [1] N. Amitay, V. Galindo y C. P. Wu, *Theory and Analysis of Phased Array Antennas*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [2] T. K. Wu, ed., *Frequency Selective Surface and Grid Array*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [3] C. C. Chen, "Transmission Through a Conducting Screen Perforated Periodically with Apertures," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-18, 627-632, 1970.
- [4] D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations* (Academic Press Inc., Boston, 1989), p. 405.
- [5] Ben A. Munk, *Frequency Selective Surfaces: Theory and Design*, John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [6] D. G. Berry R. G. Malech, y W. A. Kennedy, "The Reflectarray Antenna," *IEEE Trans. on Antennas and Propagat.*, Vol. AP-11, 1963, pp.646-51.
- [7] J. A. Reed y D. M. Byrne, "Frequency Selective Surfaces with Multiple Apertures within a Periodic Cell," *J. Opt. Soc. Am., A/* Vol. 15, No. 3/Marzo 1998.
- [8] C. C. Chen, "Transmission of Microwave Through Perforated Flat Plates of Finite Thickness," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-21, 1-6, 1973.
- [9] J. P. Montgomery y K. R. Davey, "The Solution of Planar Periodic Structures Using Iterative Methods," *Electromagnetics*, 5, 209-235, 1985.

- [10] C. C. Chen, "Diffraction of Electromagnetic Waves by a Conducting Screen Perforated Periodically with Circular Holes," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-19, 475-481, 1971.
- [11] C. C. Chen, "Scattering by a Two-Dimensional Periodic Array of Conducting Plates," *IEEE Trans. Antennas Propagation.*, AP-18, 660-665, 1970.
- [12] L. V. Kantorovich y V. I. Krylov, *Approximate Methods of Higher Analysis*, Interscience Publishers, New York, 1958.
- [13] R. F. Harrington, *Field Computation by Moments Method*, The Macmillan Company, New York, 1968.
- [14] P. J. B. Clarricoats y K. R. Slinn, "Numerical Solution of Waveguide-Discontinuity Problems," *Proc. IEE*, Vol.114, pp. 878-886, Julio 1967.
- [15] W. J. Cole, E. R. Nagelberg y C. M. Nagel, "Interactive Solution of Waveguide Discontinuity Problems," *Bell System Tech. J.*, Vol.46, pp. 649-722, Marzo 1967.
- [16] J. J. H. Wang, *Generalized Moment Methods in Electromagnetics : Formulation and Computer Solution of Integral Equations*, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [17] A. Roberts y R. Phedran, "Bandpass Grids with Annular Apertures," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. AP- 36, pp. 607-611, Mayo 1988.
- [18] N. Marcuvitz (ed.), *Waveguide Handbook*, M.I.T. Radiation Laboratory Series, Vol. 10, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951, pp. 66-89.
- [19] W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1950, pp. 173-177.
- [20] P. W. Hannan P. J. Meier, y M. A. Balfour, "Simulation of Phased Array Antenna Impedance in Waveguide," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. AP-11, pp. 715-716, Noviembre 1963.

- [21] P. W. Hannan y M.A. Balfour, "*Simulation of a Phased-Array Antenna in Waveguide,*" IEEE Trans. Antennas and Propagation. Vol. AP-13, pp 342-353, Mayo 1965.
- [22] M. A. Balfour, "*Phased Array Simulators in Waveguide for Triangular Arrangement of Elements,*" IEEE Trans. Antennas and Propagation. Vol. AP-13, pp 475-476, Mayo 1965.
- [23] Page, L., y N. I. Adams, Jr., "*Electromagnetic Waves in Conducting Tubes,*" Phys. Rev., vol 52, 1937, p 647.
- [24] R. Janaswamy y D. H. Schaubert, "*Characteristic Impedance of a Wide Slotline on Low-permittivity Substrates,*" IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-34, p. 900, 1986.
- [25] A. E. Martynyuk y J. I. Martinez Lopez, "*Reflective Antenna Arrays Based on Shorted Ring Slots,*" IEEE 2001 M7T-S IMS Digest, Phoenix, Junio 2001, pp. 1379-1382.
- [26] A. E. Martynyuk y J. I. Martinez Lopez, "*Frecuency-Selective Surfaces Based on Shorted Ring Slots,*" Electron. Lett., Marzo 2001, 37, pp. 268-269.
- [27] A. E. Martynyuk y J. I. Martinez Lopez, "*Polarization Converters Based on Shorted Ring Slot Resonators,*" ICT-2000, Mayo 2000, pp. 943-946.

