

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y  
DOCTORADO EN INGENIERÍA

**REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DEL COMPORTAMIENTO  
HISTERÉTICO DE MATERIALES NO LINEALES HOMOGENEOS  
E ISÓTROPAS**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**  
(ESTRUCTURAS)

PRESENTA

JUAN MANUEL MARTÍNEZ HERRERA

DIRIGIDA POR

Dr. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, 2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

## RESUMEN

El trabajo contiene un procedimiento para realizar el ajuste de la función de Ramberg y Osgood para representar el comportamiento histerético de materiales en su intervalo de comportamiento no lineal. El ajuste se realiza utilizando un procedimiento de mínimos cuadrados lineales y se aplica a pruebas de laboratorio realizadas a tres diferentes dispositivos disipadores de energía.

Se utilizó como un índice en la evaluación de los resultados, la diferencia entre el área encerrada por los ciclos histeréticos medidos en laboratorio con los obtenidos con la función de Ramberg y Osgood. Los resultados indican que el parámetro  $\alpha$ , de la función, es el de mayor sensibilidad en la respuesta y, su optimización logra el mejor ajuste.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Juan Manuel  
Martínez Herrera

FECHA: 15 - Oct - 94

FIRMA: JM

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca que me fue otorgada durante mis estudios de maestría. Al Dr. Oscar López Bátiz quien me proporcionó su apoyo y orientación durante mis estudios.

Al Dr. José Alberto Escobar Sánchez por su valioso y sincero apoyo como maestro y director de esta tesis, por compartir sus conocimientos, por su confianza, paciencia y amistad que me brindó desinteresadamente.

Un reconocimiento especial merece el Maestro en Ingeniería John Dyer de León, por la elaboración de los programas que automatizaron el proceso numérico, por haberme proporcionado su tiempo y por sus valiosos comentarios.

Agradezco a los profesores Dr. Roberto Gómez Martínez, al Dr. Orlando Díaz López y al Dr. Jaime García Pérez por dedicar parte de su tiempo en revisar esta tesis, para mejorarla y enriquecerla con sus valiosas observaciones y comentarios.

A mis profesores.

A mis compañeros, familiares y amigos.

# REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DEL COMPORTAMIENTO HISTERÉTICO DE MATERIALES NO LINEALES HOMOGÉNEOS E ISÓTROPAS

## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1	GENERALIDADES .....	1
1.2	OBJETIVOS Y ALCANCE .....	1
1.3	CONTENIDO .....	2

## CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES

2.1	RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN EN EL INTERVALO DE COMPORTAMIENTO PLÁSTICO .....	3
2.2	RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN ADIMENSIONALES .....	3
2.3	FUNCIÓN DE RAMBERG Y OSGOOD .....	5
2.4	PARÁMETROS QUE CARACTERIZAN A LA FUNCIÓN DE RAMBERG Y OSGOOD .....	6
2.4.1	Influencia de los parámetros en la curva esqueletal .....	6
2.4.2	Influencia de los parámetros en la curva histerética .....	7
2.5	RIGIDECES EN LA CURVA ESQUELETAL .....	11

## CAPÍTULO 3. MÉTODO DE AJUSTE DE DATOS EXPERIMENTALES

3.1	AJUSTE DE DATOS DE PRUEBAS ANTE CARGA CRECIENTE .....	13
3.1.1	Función de potencia con dos parámetros utilizando dos puntos de la curva esfuerzo-deformación .....	13
3.1.2	Función de Ramberg y Osgood con dos parámetros utilizando un ajuste con mínimos cuadrados lineales .....	17
3.2	AJUSTE DE DATOS DE PRUEBAS ANTE CARGA CÍCLICA DE MATERIALES SIN DETERIORO .....	19
3.2.1	Función de Ramberg y Osgood con tres parámetros utilizando un ajuste con mínimos cuadrados lineales .....	19
3.2.2	Características del ajuste .....	23
3.2.3	Solución de la función de Ramberg y Osgood .....	26
3.2.4	Evaluación del ajuste .....	27

## CAPÍTULO 4. APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE AJUSTE DE DATOS

4.1	AJUSTE DE DATOS DE PRUEBAS A TENSIÓN .....	28
4.1.1	Función de potencia con dos parámetros .....	28
4.1.2	Función de Ramberg y Osgood con dos parámetros .....	33
4.2	AJUSTE DE DATOS DE PRUEBAS A FLEXIÓN .....	36
4.2.1	Placas a flexión .....	36
4.2.1.1	Descripción del sistema de placas .....	37
4.2.1.2	Equipo y procedimiento de ensaye .....	37
4.2.1.3	Historia de desplazamientos en las pruebas dinámicas .....	39

4.2.1.4	Información experimental .....	39
4.2.1.5	Mediciones efectuadas en las pruebas .....	43
4.2.1.6	Resultados de la aplicación de la función de Ramberg y Osgood con tres parámetros .....	43
4.2.1.6.1	Resultados para el ciclo de carga máximo .....	44
4.2.1.6.2	Cálculos del valor óptimo de $\alpha$ .....	48
4.2.1.6.3	Resultados para un grupo de ciclos de carga .....	53
4.2.2	Soleras metálicas en forma de U .....	53
4.2.2.1	Descripción de las soleras .....	53
4.2.2.2	Descripción del procedimiento de ensaye .....	54
4.2.2.3	Aplicación de la función de Ramberg y Osgood con tres parámetros .....	55
4.3	AJUSTE EN PRUEBAS DE MATERIAL MAGNETORREOLÓGICO .....	58
4.3.1	Aplicación de la función de Ramberg y Osgood con tres parámetros .....	58
 <b>CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>		
5.1	CONCLUSIONES .....	60
5.2	RECOMENDACIONES .....	61
<b>REFERENCIAS .....</b>		<b>62</b>

## 1.1 GENERALIDADES

Uno de los efectos naturales de importancia en el diseño de las estructuras es el de los sismos, por lo cual, una buena parte de la investigación en ingeniería estructural se ha centrado en el estudio del comportamiento de las estructuras ante efectos sísmicos y la forma de mitigar los daños que éstos les provocan.

En los códigos de diseño se establece que las estructuras se diseñarán para que presenten un comportamiento dúctil ante el efecto de movimientos sísmicos, que les permita la capacidad de absorber y disipar energía por medio de deformaciones inelásticas (Park 1990).

A este respecto el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal establece los siguientes niveles de comportamiento estructural (Rosenblueth y Gómez, 1991).

1. Las edificaciones deberán resistir sin daño sismos de ocurrencia frecuente.
2. Las construcciones no presentarán daño estructural, pero sí daño somero en elementos no estructurales, ante la presencia de sismos poco frecuentes.
3. Las estructuras mostrarán daño estructural severo, pero sin llegar al colapso, para sismos de ocurrencia extraordinaria.

A partir del segundo nivel de comportamiento, la estructura se encuentra en el intervalo de su comportamiento no lineal, presentando deformaciones plásticas y por lo tanto permanentes. Ante esta situación, el estudio del comportamiento histerético de los materiales y de su representación por medio de curvas teóricas, se presenta como una forma adecuada para estudiar su respuesta ante la acción de cargas sísmicas.

Los distintos modelos que se han elaborado para representar el comportamiento ante cargas cíclicas de materiales o de los sistemas estructurales ante el efecto de las cargas cíclicas, generalmente establecen expresiones que relacionan los desplazamientos aplicados con las fuerzas internas del material. Estas dependerán de un cierto número de parámetros, que deben de ser determinados por procedimientos de ajuste para lograr una representación aceptable del comportamiento observado.

La determinación de los parámetros que acompañan a los modelos teóricos se convierte por lo tanto, en un aspecto relevante en la búsqueda de un buen ajuste entre experimento y modelo teórico.

## 1.2 OBJETIVOS Y ALCANCE

En el presente trabajo se desarrolla una metodología de ajuste para la obtención de los parámetros de un modelo teórico que representa el comportamiento histerético de acero estructural ante cargas cíclicas. Para llevar a cabo una selección adecuada del modelo se establecieron los siguientes objetivos generales:

- Que el modelo, fuese simple y con el menor número de reglas histeréticas en la representación del comportamiento observado.
- Que pudiera utilizarse o incorporarse con facilidad en los programas de cómputo de uso comercial existentes para representar el comportamiento no lineal del material.
- Y que tuviera la posibilidad de expresarse como la función de fuerzas y desplazamientos.

Un modelo que cumple con estos objetivos es la llamada ecuación de Ramberg y Osgood, que puede expresarse en función de fuerzas y desplazamientos. (Ozdemir 1976). El modelo contiene parámetros que se pueden obtener mediante un proceso de ajuste por mínimos cuadrados lineales.

El alcance del trabajo incluye en primer término la evaluación del ajuste comparando la energía de cada ciclo histerético del modelo de Ramberg y Osgood, con aquella que presentan las pruebas de laboratorio. Posteriormente la metodología propuesta se aplicó a los resultados obtenidos en pruebas realizadas a tres dispositivos que han sido propuestos como disipadores pasivos de energía. Los resultados del ajuste demuestran una rápida convergencia del procedimiento e indican que una vez que se han hallado los valores base, se mejora el ajuste con solo optimizar uno de los parámetros del modelo.

### 1.3 CONTENIDO

La presentación de la información se ha organizado de la siguiente forma: las principales características del modelo de Ramberg y Osgood incluyendo el efecto que produce la variación de sus parámetros se incluyen en el capítulo 2.

El capítulo 3 contiene el desarrollo del procedimiento de ajuste, aplicado al caso de pruebas de materiales sometidos a carga creciente y al comportamiento ante cargas cíclicas. Además, se proporciona un criterio de evaluación del ajuste con los datos experimentales. Este consiste en la comparación del área de los ciclos histeréticos medidos en el laboratorio con la obtenida con la función de Ramberg y Osgood.

El capítulo 4 contiene la aplicación del procedimiento desarrollado en el capítulo 3 a los resultados obtenidos en pruebas experimentales.

Finalmente, en el capítulo 5 se presenta un resumen de las características del método propuesto de ajuste y se obtienen conclusiones generales del trabajo desarrollado.

## 2.1 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN EN EL INTERVALO DE COMPORTAMIENTO PLÁSTICO

La deformación  $\varepsilon_{TOTAL}$  que un material presenta cuando se le aplican fuerzas en su intervalo de comportamiento no lineal, se puede considerar formada por dos componentes, una lineal  $\varepsilon_{ELAS}$  y otra plástica  $\varepsilon_{PLAS}$ , Figura (2.1.a.). Esto es

$$\varepsilon_{TOTAL} = \varepsilon_{ELAS} + \varepsilon_{PLAS} \quad (2.1)$$

La deformación plástica se puede aproximar con la siguiente expresión empírica (Wagoner, 1997)

$$\varepsilon_{PLAS} = \left( \frac{\sigma}{B} \right)^n \quad (2.2)$$

donde  $\sigma$  es el esfuerzo axial aplicado,  $B$  es un esfuerzo constante y  $n$  una constante que depende del material.

Considerando que  $\varepsilon_{ELAS} = \sigma/E$  y sustituyendo la ecuación (2.2) en la (2.1) se obtiene la deformación total en función del esfuerzo, esto es:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{B} \right)^n \quad (2.3)$$

En esta ecuación  $E$  representa al módulo de elasticidad del material y  $\varepsilon$  es la deformación unitaria.

## 2.2 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN ADIMENSIONALES

Para representar las relaciones esfuerzo-deformación, como la de la ecuación (2.3) en forma adimensional, se dividen los esfuerzos entre un valor base del esfuerzo  $\sigma_0$  y las deformaciones unitarias entre una deformación base  $\varepsilon_0$ . El diagrama así obtenido contiene relaciones esfuerzo-deformación unitarias y se denomina diagrama uno a uno ó adimensional. Figura (2.1.b).

Para definir el valor  $\sigma_0$ , Ramberg y Osgood (Shanley, 1957) utilizaron una recta secante con una pendiente igual al setenta por ciento de aquella que representa al módulo de elasticidad del material. En el punto en el que la recta secante corta a la curva esfuerzo-deformación se define al esfuerzo de fluencia secante. Figura (2.2).

La deformación base  $\varepsilon_0$  se determina cuando la recta horizontal que pasa por el esfuerzo base, corta a la prolongación de la recta que define al módulo de elasticidad, cumpliéndose que  $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$ . Figura (2.2).

De acuerdo con esta definición, en el diagrama adimensional o uno a uno, el módulo de elasticidad base  $E_0$  es igual a  $E$  y la relación de módulos de elasticidad  $E/E_0$  será unitaria. Además se pueden establecer las siguientes relaciones. Figura 2.2:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_0}{0.7E} \quad \text{Entonces } \sigma_0 = 0.7E\varepsilon_1$$

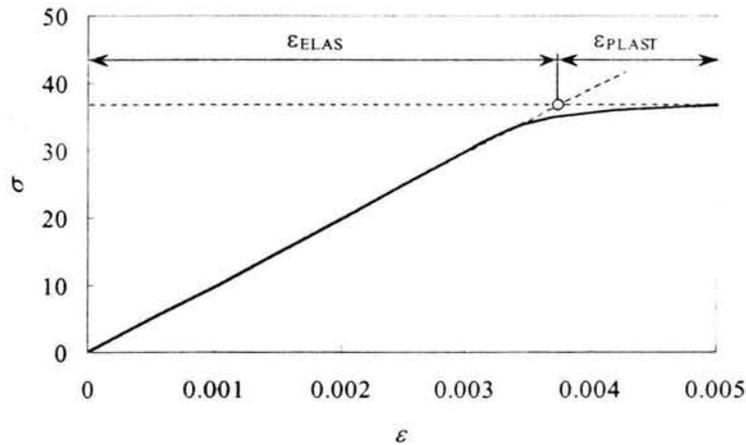
$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \quad \text{Entonces } \sigma_0 = E\varepsilon_0$$

Donde  $\varepsilon_1$  es la deformación unitaria a la cual la recta secante corta a la curva  $\sigma - \varepsilon$ . Al igualar ambas expresiones se obtiene

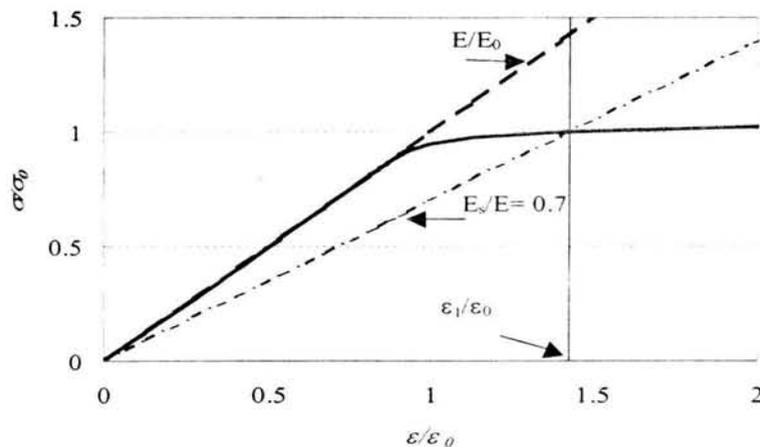
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{0.7}$$

## CAPÍTULO 2

Esta relación se cumple en la mayoría de aceros y aleaciones de aluminio e indica la relación entre la deformación base  $\varepsilon_0$  y aquella que corresponde al 70 % del módulo de elasticidad,  $\varepsilon_1$ . Y que además de que el esfuerzo de fluencia secante  $\sigma_0$ , corresponde al valor de  $\varepsilon/\varepsilon_0 = 1/0.7$  en el diagrama adimensional. Figura (2.1.b).



a). Diagrama esfuerzo-deformación indicando la parte elástica y plástica de la deformación.



b). Diagrama esfuerzo-deformación uno a uno.

Figura 2.1 Diagramas esfuerzo – deformación de un material al que se le aplica una carga que excede su capacidad elástica.

Ramberg y Osgood (Shanley, 1957) reducen la ecuación (2.3) a una expresión unitaria en términos de una deformación y un esfuerzo base, dividiendo la ecuación 2.3 entre  $\varepsilon_0$  para obtener

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 E} + \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\sigma}{B} \right)^n \quad (2.4)$$

llamando

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \quad (2.5)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (2.4)

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \frac{E}{B^n} \frac{\sigma^n}{\sigma_0} \quad (2.6)$$

La deformación plástica en el diagrama adimensional se puede expresar tomando en cuenta la ecuación (2.2), esto es:

$$\varepsilon_{PLAS} = \left( \frac{\sigma_0}{B} \right)^n \quad (2.7)$$

Por otra parte Ramberg y Osgood (Shanley, 1957) definen al intervalo de la deformación plástica como aquel que esta comprendido entre las deformaciones  $\varepsilon_{ELAS}$  y  $\varepsilon_l$ , de la forma siguiente:

$$\varepsilon_{PLAS} = \frac{\sigma_0}{0.7E} - \frac{\sigma_0}{E} = \frac{3}{7} \frac{\sigma_0}{E} \quad (2.8)$$

Al igualar las ecuaciones (2.7) y (2.8) se obtiene

$$\frac{E}{B^n} = \frac{3}{7} (\sigma_0)^{1-n} \quad (2.9)$$

Sustituyendo la ecuación (2.9) en (2.6) se llega a:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \frac{3}{7} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) es la que presentan Ramberg y Osgood (Shanley, 1957 ; Popov, 1963). Con ella se puede representar la relación esfuerzo-deformación en términos de los parámetro  $\sigma_0$  y  $n$ . Esta misma ecuación se puede generalizar, expresándola con tres parámetros. Como se indica a continuación:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (2.11)$$

donde  $\alpha$  es una constante que caracteriza a cada material.

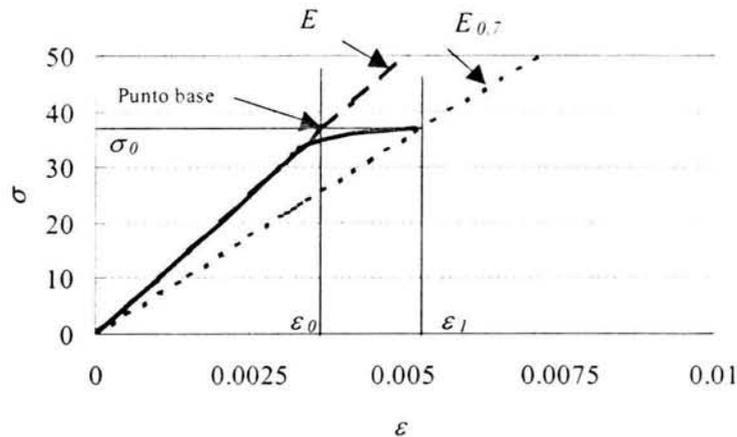


Figura 2.2. Diagrama esfuerzo-deformación mostrando la determinación de  $\sigma_0$

### 2.3 FUNCIÓN DE RAMBERG Y OSGOOD

A continuación se comentan las principales características de la función de Ramberg y Osgood y la variación de los parámetros que la definen. Se utiliza la función en su forma general, donde los parámetros  $n$  y  $\alpha$  dependen del material.

Al esfuerzo base  $\sigma_0$  y a la deformación base  $\varepsilon_0$  se les ha asignado el valor que el material alcanza en la fluencia. Así  $\sigma_0 = \sigma_y$  ;  $\varepsilon_0 = \varepsilon_y$ . Los valores base podrían ser, en teoría, cualquier valor, sin embargo, se reporta que los valores de fluencia, proporcionan un buen ajuste a los datos experimentales (Bruneau et al, 1998).

Considerando lo anterior, los esfuerzos y las deformaciones que presenta un material o un elemento estructural al estar sujeto a cargas cíclicas, se pueden representar como.

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^n \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) también puede expresarse en términos de fuerzas y desplazamientos como se muestra a continuación (Ozdemir, 1976):

$$\frac{\delta}{\delta_y} = \frac{F}{F_y} + \alpha \left( \frac{F}{F_y} \right)^n \quad (2.13)$$

donde  $\delta$  y  $\delta_y$  y  $F$  y  $F_y$  son desplazamientos y fuerzas.

Las ecuaciones (2.12) y (2.13) se caracterizan por ser funciones que permite representar relaciones suavizadas de los materiales, entre la carga y el desplazamiento, al llegar al intervalo de comportamiento no lineal. Esta función se ha utilizado con buenos resultados en la representación del comportamiento no lineal de elementos estructurales (Movses, 1967; Akasawa, et al, 1996) así como también en la determinación de la respuesta de estructuras modeladas como sistemas de un grado de libertad sujetas a cargas dinámicas (Jennings, 1964; Movses y Fan, 1968; Otani, 1981). Por otra parte, la ecuación (2.13) tiene la ventaja de relacionar el desplazamiento con la fuerza, que son, generalmente, los datos que se obtienen en las pruebas experimentales.

## 2.4 PARÁMETROS QUE CARACTERIZAN A LA FUNCIÓN DE RAMBERG Y OSGOOD

Los parámetros  $n$  y  $\alpha$  en las ecuaciones (2.12) y (2.13) permiten representar el comportamiento de una gran variedad de materiales, teniendo como casos límite, por un lado, la relación fuerza-desplazamiento lineal y por el otro, el modelo elasto-plástico perfecto.

### 2.4.1 Influencia de los parámetros en la curva esquelética

La curva esquelética es la relación entre la fuerza y el desplazamiento o entre el esfuerzo y la deformación unitaria que se obtiene al aplicar a un elemento estructural incrementos crecientes de carga o de desplazamiento. La ecuación de Ramberg y Osgood permite representar diferentes tipos de curvas esqueléticas. Para poder determinarlas es conveniente hacer una transformación de variables. Utilizando la ecuación (2.13) y haciendo

$$x = \frac{\delta}{\delta_y} \quad ; \quad y = \frac{F}{F_y}$$

la ecuación (2.13) se puede expresar como

$$x = y + \alpha y^n \quad (2.14)$$

La ecuación anterior presenta los desplazamientos como función de las fuerzas. A su vez, a cada incremento del desplazamiento corresponde uno de fuerza. Por lo que, en general, no existe una solución explícita de la ecuación de Ramberg y Osgood, requiriéndose recurrir a técnicas numéricas para su solución, como se verá más adelante en el capítulo 3.

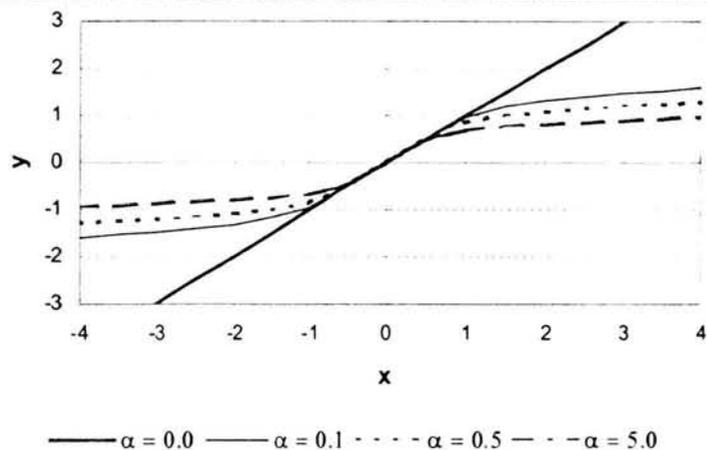


Figura 2.3 Curvas esqueléticas para  $n = 7$  y diferentes valores de  $\alpha$ .

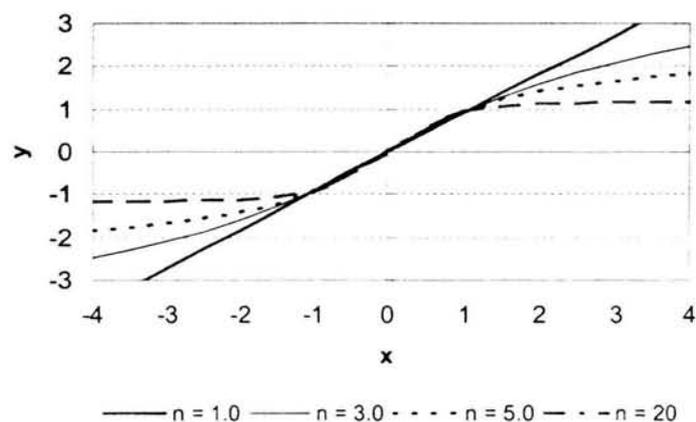


Figura 2.4 Curvas esqueléticas para  $\alpha=0.1$  y diferentes valores de  $n$ .

Algunas de las curvas descritas por la ecuación (2.14) se indican en las Figuras (2.3) y (2.4). En ellas se observa que cuando  $\alpha = 0$ , se presenta una relación lineal entre la fuerza y el desplazamiento, Figura (2.3). Así mismo, para  $\alpha > 0$  se obtiene como límite una relación elasto-plástica perfecta en la medida en la cual el valor de  $n$  crece. Figura (2.4).

Adicionalmente, las curvas de la Figuras 2.3 y 2.4 muestran cómo al aumentar el valor de  $\alpha$ , la curva esquelética correspondiente abandona el comportamiento lineal. Esto se puede ver con claridad si se localiza el punto donde inicia la fluencia,  $x=1.0$ . Por esta razón, al parámetro  $\alpha$  se le puede interpretar como el factor que indica la no linealidad de la función, es decir la rigidez de la curva esquelética.

Por otro lado, el incremento del valor de  $n$  produce relaciones fuerza–desplazamiento con quiebres cada vez más pronunciados. De esta forma, la curva esquelética evoluciona de ser una relación lineal hasta alcanzar a ser una relación elasto-plástica perfecta. Figura (2.4).

### 2.4.2 Influencia de los parámetros en la curva histerética

Cuando la fuerza aplicada a un material excede su límite de fluencia debido a la aplicación de ciclos de carga y descarga, la curva fuerza–desplazamiento ya no coincide con la inicial denominada esquelética. A la curva que resulta de la aplicación alternada de cargas entre dos valores extremos se le llama ciclo histerético y el área que encierra representa la energía disipada durante el ciclo de carga.

La generación de los ciclos histeréticos con la función de Ramberg y Osgood se logra aplicando el criterio de Massing (Jenning, 1964). En este, se establece que las ramas de carga y descarga del ciclo histerético, se forman con la misma ecuación que la curva esquelética, pero trasladando su origen a cada uno de los puntos donde la carga es reversible y escalando el valor del desplazamiento y el de la fuerza entre un factor de 2.

De acuerdo con lo anterior, la expresión de la función de Ramberg y Osgood que reproduce la curva esquelética para ciclos de carga es la siguiente:

$$\frac{\delta - \delta_i}{2\delta_y} = \frac{F - F_i}{2F_y} + \alpha \left( \frac{F - F_i}{2F_y} \right)^n \quad (2.15)$$

En esta ecuación, las coordenadas  $\delta_i/\delta_y$ ;  $F_i/F_y$  representan al punto para el cual la dirección de la carga se invierte. En la Figura (2.5), se presenta un grupo de tres ciclos histeréticos que se obtienen con la ecuación (2.15) para diferentes valores de la relación  $\delta_i/\delta_y$  y con  $\alpha = 0.5$  y  $n = 5.0$ . Se observa cómo la curva esquelética se prolonga en ambos extremos del origen y a ella regresan los ciclos para volver a iniciar.

A continuación se desarrollan las ecuaciones de las curvas de carga y descarga de la función de Ramberg y Osgood, para un solo ciclo histerético que varía entre dos puntos extremos  $A$  y  $B$  de la Figura (2.6). Las coordenadas de los puntos  $A$  y  $B$  son las siguientes:

$$A = \left( -\frac{\delta_i}{\delta_y}, -\frac{F_i}{F_y} \right) \quad B = \left( \frac{\delta_i}{\delta_y}, \frac{F_i}{F_y} \right)$$

Sustituyendo las coordenadas del punto  $A$  en la ecuación (2.15) se obtiene la rama ascendente o de carga, esto es:

$$\frac{\delta + \delta_i}{2\delta_y} = \frac{F + F_i}{2F_y} + \alpha \left( \frac{F + F_i}{2F_y} \right)^n \quad (2.16)$$

Y la rama descendente o de descarga se obtiene sustituyendo el punto  $B$  en la ecuación (2.15):

$$\frac{\delta - \delta_i}{2\delta_y} = \frac{F - F_i}{2F_y} + \alpha \left( \frac{F - F_i}{2F_y} \right)^n \quad (2.17)$$

El ciclo histerético que se obtiene con las ecuaciones (2.16) y (2.17), así como el de la curva esquelética de la ecuación (2.13) se reproduce en la Figura (2.6).

Al inicio del proceso de carga, la función comienza su recorrido por la curva esquelética desde el origen hasta el punto  $B$ . Al llegar aquí, cambia la dirección de la fuerza y la función continúa por la rama descendente hasta el punto  $A$ , en donde nuevamente la fuerza cambia de dirección haciendo que la función continúe por la rama ascendente  $A-B$  completándose el ciclo.

Cada uno de los términos de las ecuaciones (2.16) y (2.17) están divididos entre un factor igual a dos, para tomar en cuenta el fenómeno conocido como efecto Baushinger (Mendelson, 1968) que consiste en que el valor del esfuerzo de fluencia, que un metal alcanza al ser cargado en tensión, es distinto del que presenta en compresión. Este efecto se introduce en la función de Ramberg y Osgood al considerar que la longitud del intervalo lineal de las ramas del ciclo histerético es igual al doble del que presenta la curva esquelética. (Mendelson, 1968).

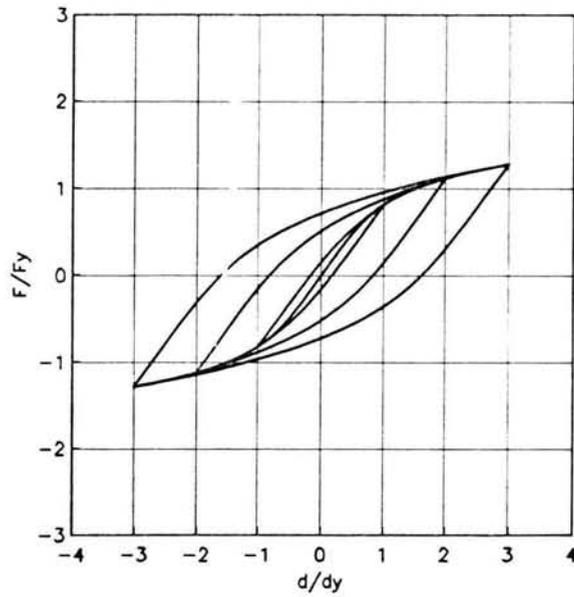


Figura 2.5. Ciclos histeréticos generados con la función de Ramberg y Osgood y la regla de Massing para  $\alpha = 0.5$ ,  $n = 5.0$  y  $d/dy = 1, 2$  y  $3$ .

Por esta razón, la magnitud de la fuerza a la cual se presenta la fluencia en las ramas de carga y descarga será siempre menor que el valor de la fuerza inicial ( $F_i$ ) con la cual inicia cada una de las ramas Figura (2.6).

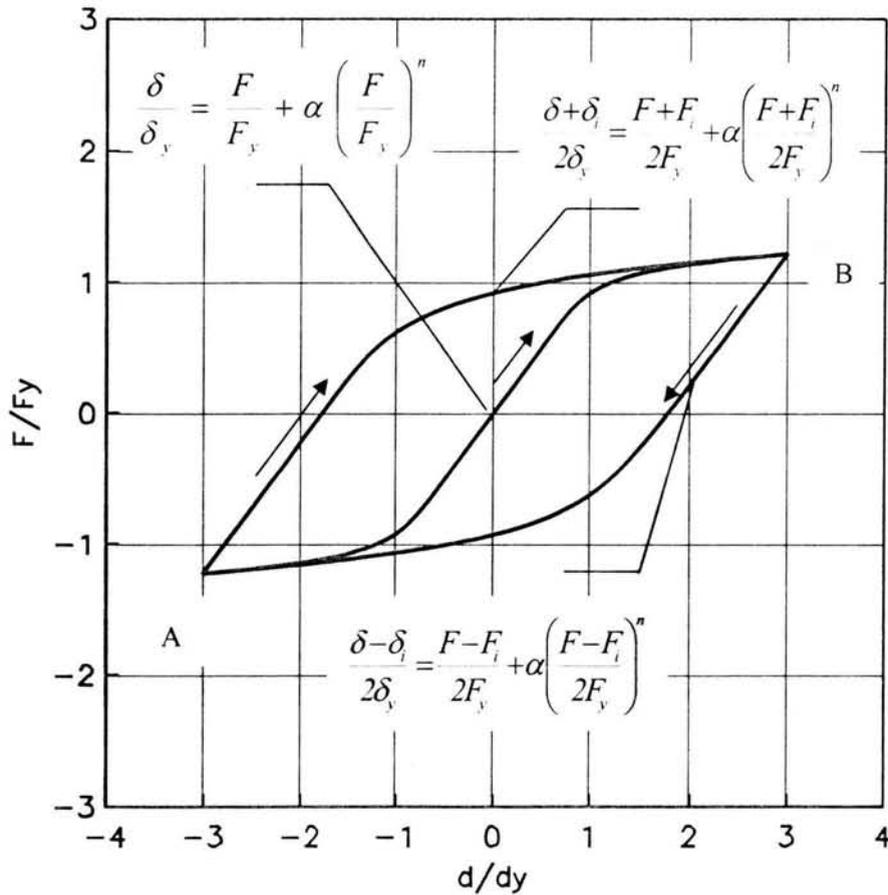


Figura 2.6 Ciclo histerético de Ramberg y Osgood y el criterio de Massing para  $\alpha=0.8$  y  $n=5.0$

La ecuación de la curva esquelética se normaliza entre el valor de una fuerza y un desplazamiento correspondientes a un punto característico de la misma, que como ya se mencionó, podría ser cualquier punto perteneciente a ésta. Utilizando el punto de fluencia (Bruneau, et al, 1998) las fuerzas se dividen entre  $F_y$  y los desplazamientos entre  $\delta_y$ .

Aplicando el criterio de normalizar a los ciclos histeréticos, se tiene que la ecuación (2.15) deberá dividirse entre  $2F_y$  para ser congruente con la curva esquelética. Aparentemente este es el origen del factor de escala que aparece en la misma ecuación (2.15).

Además, las pendientes de los tramos rectos de los ciclos de carga y descarga son iguales a la pendiente del tramo lineal de la curva esquelética. Por lo tanto, el ciclo histerético en la carga y la descarga empiezan con una rigidez igual a la inicial de la curva esquelética. Lo anterior se puede verificar al observar los ciclos de la Figuras (2.5 y 2.6). Indicando un comportamiento homogéneo e isótropo del material con ausencia de degradación en su rigidez.

Se puede comprobar que los ciclos histeréticos y la curva esquelética son tangentes en sus puntos de contacto, (puntos *A* y *B*) verificándose que los ciclos son cerrados y que siempre inician y terminan en la curva esquelética.

Por otro lado, para identificar el efecto que tienen los parámetros  $\alpha$  y  $n$  en el comportamiento de los ciclos histeréticos de la función de Ramberg y Osgood, se recurre a las Figuras (2.5 y 2.6). En la primera se presentan ciclos en los que, a medida que el valor de  $\alpha$  se aproxima a cero, el ciclo va estrechándose y tiende a una línea recta Figura (2.7).

En la Figura (2.8). se observa que al aumentar el valor de  $n$ , los ciclos y la curva esquelética se aproximan a un comportamiento elasto-plástico.

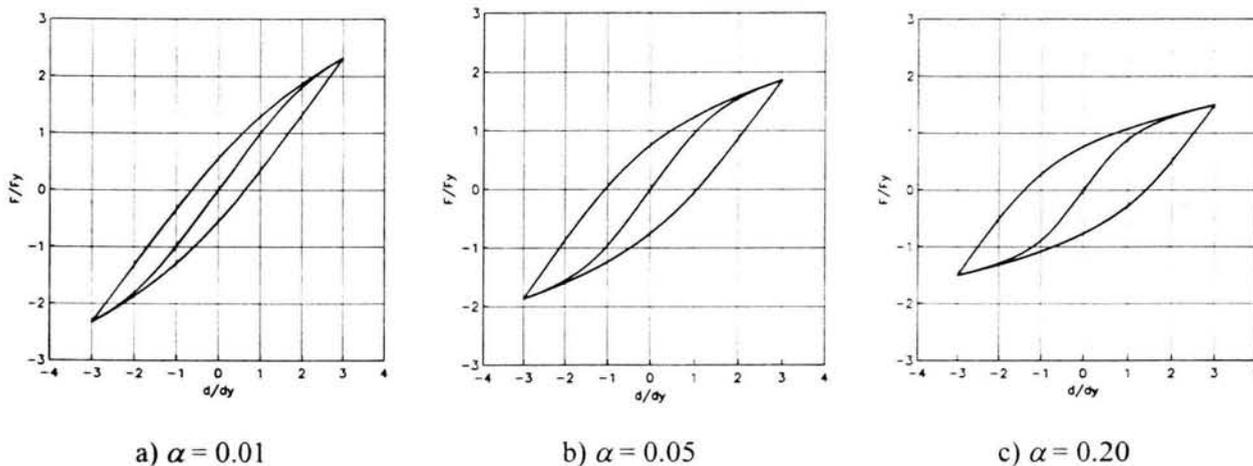


Figura 2.7. Ciclos histeréticos generados con la función de Ramberg y Osgood con la regla de Massing y el efecto Baushinger para,  $n=5$  y diferentes valores de  $\alpha$ .

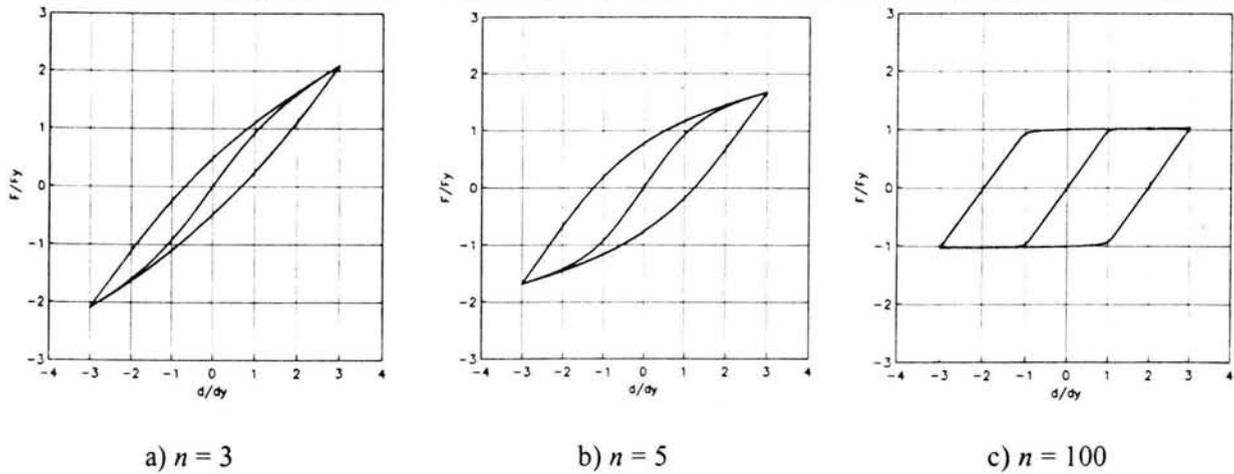


Figura 2.8. Ciclos histéricos generados con la función de Ramberg y Osgood, la regla de Massing y el efecto Baushinger para,  $\alpha=0.1$  y diferentes valores de  $n$ .

### 2.5 RIGIDECES EN LA CURVA ESQUELETAL

La familia de curvas esqueléticas que define la función de Ramberg y Osgood expresada por la ecuación (2.14) presentan la característica que, para un valor de  $\alpha$  constante, todas ellas pasarán por el punto  $F/F_0=1; \delta/\delta_0=1+\alpha$  como se puede apreciar en la Figura (2.9)

Esta característica permite relacionar las rigideces de la parte lineal de cualquier curva con la rigidez de la recta secante que pasa por dicho punto, de la siguiente manera:

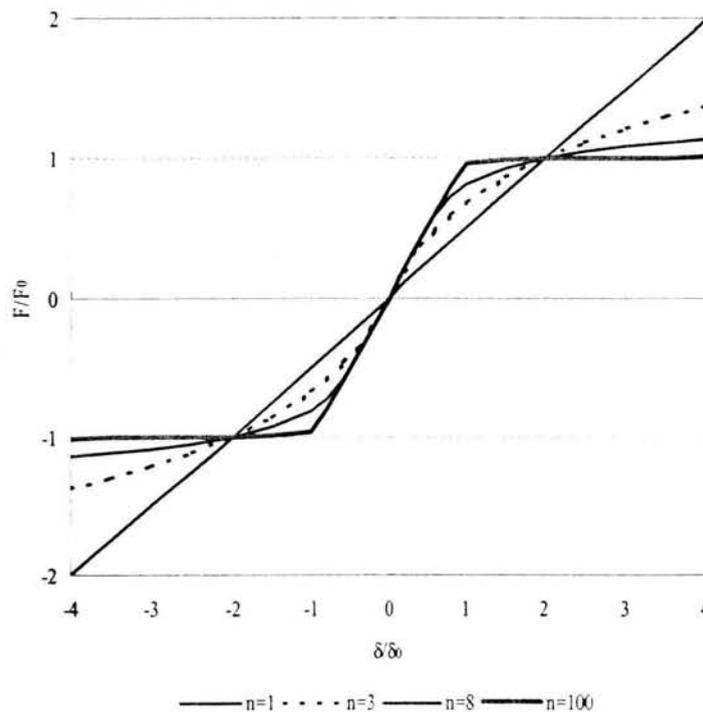


Figura 2.9. Curvas esqueléticas de la función de Ramberg y Osgood, con  $\alpha=1.0$  y diferentes valores de  $n$ .

## CAPÍTULO 2

Si  $k_1$  representa la rigidez del tramo lineal de una determinada curva esquelética definida por la ecuación (2-14) y  $k_2$  la rigidez de la recta secante, se pueden obtener las relaciones siguientes:

$$k_1 = \frac{\frac{F}{F_0}}{\frac{\delta}{\delta_0}} = 1 \quad (2.18)$$

Por otra parte

$$k_2 = \frac{\frac{F}{F_0}}{\frac{l}{l+\alpha}} = \frac{l}{l+\alpha} \quad \text{Entonces: } k_2(l+\alpha) = l \quad (2.19)$$

Relacionando  $k_2$  con  $k_1$  se obtiene

$$k_2 = \frac{k_1}{l+\alpha} \quad (2.20)$$

Por otra parte, se puede hallar la relación de la rigidez de la curva esquelética en la fluencia  $k_3$  con la rigidez del tramo lineal  $k_1$ . Para esto se obtiene la pendiente de la recta tangente de la función de Ramberg y Osgood, expresada por la ecuación (2.14)

$$\frac{1}{k_3} = \frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{1 + \alpha n y^{n-1}} \quad (2.21)$$

Debido a que la pendiente se obtiene cuando ocurre la fluencia, es decir  $F/F_0 = 1.0$ , entonces:

$$k_3 = \frac{1}{1 + \alpha n} \quad (2.22)$$

Para hallar una relación entre  $k_1$  y  $k_3$  en la ecuación (2.21), cuando  $y = 0$ , la rigidez es igual  $k_1$  y haciendo  $y = 1.0$  la rigidez es  $k_3$ . Si  $\gamma = k_1/k_3$  se llega a:

$$\gamma = \frac{k_1}{k_3} = \frac{k_1}{\frac{1}{1 + \alpha n}} \quad \text{Entonces: } n = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\gamma}{k_1} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha} (\gamma - 1) \quad (2.23)$$

Que relaciona al exponente  $n$  de la función de Ramberg y Osgood con las rigideces lineal y en la fluencia de la curva esquelética.

## CAPÍTULO 3 MÉTODOS DE AJUSTE DE DATOS EXPERIMENTALES

En el capítulo anterior se presentó a la función de Ramberg y Osgood, indicando que el esfuerzo base  $\sigma_0$  o la fuerza  $F_0$ , se igualaba al esfuerzo de fluencia del material. Esta consideración permitió estudiar la influencia de sus principales parámetros en el comportamiento de la función. En los métodos de ajuste que se presentan en esta parte,  $\sigma_0$  o  $F_0$  se considera como un parámetro adicional, que junto con  $\alpha$  y  $n$  definen a la función de Ramberg y Osgood que mejor representa a los datos experimentales estudiados.

Se desarrollan dos aplicaciones de la función de Ramberg y Osgood para representar la respuesta no lineal del acero.

En la primera aplicación se representa teóricamente al material ante carga creciente como el que se observa en las pruebas de tensión de probetas metálicas. Se utiliza la función de Ramberg y Osgood expresada como una función de potencia en términos de esfuerzo y deformación con dos parámetros  $\sigma_0$  y  $n$ .

Por las características de este tipo de pruebas (carga creciente hasta la falla sin cambio en su dirección de aplicación) se proponen dos formas para obtener los parámetros  $\sigma_0$  y  $n$  que definen la función y proporcionan el mejor ajuste de la misma. En la primera se utilizan dos puntos de la curva esfuerzo-deformación y en la segunda se recurre a la técnica numérica de mínimos cuadrados lineales.

La segunda aplicación se centra en el ajuste de datos de pruebas ante carga cíclica y sin deterioro del material. Para este fin se utiliza la función de Ramberg y Osgood expresada en función de fuerzas y desplazamientos con tres parámetros para definirla  $F_0$ ,  $n$  y  $\alpha$ . Con esta función se representa teóricamente el comportamiento no lineal de especímenes de acero sujetos a cargas cíclicas utilizando la técnica de mínimos cuadrados lineales en el cálculo de los parámetros.

### 3.1 AJUSTE DE DATOS DE PRUEBAS ANTE CARGA CRECIENTE

#### 3.1.1 Función de potencia con dos parámetros utilizando dos puntos de la curva esfuerzo-deformación

La deformación total que experimenta un material en una prueba ante carga estática, creciente se puede expresar con la ecuación (2.1). A la función representada por esta ecuación se le conoce como una función de potencia (Bruneau, et al, 1998) y la ecuación de Ramberg y Osgood que se estableció en el capítulo anterior, expresada por las ecuaciones (2.12) y (2.13) es un caso particular de una función de potencia normalizada con respecto a la deformación de fluencia.

A continuación se expresa la función de Ramberg y Osgood en la forma de una función de potencia, para lo cual se recurre a la ecuación (2.12) expresada en términos de esfuerzos y deformaciones

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^n \quad (3.1)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (3.1) por  $\varepsilon_y$

$$\varepsilon = \frac{\sigma \varepsilon_y}{\sigma_y} + \alpha \varepsilon_y \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^n \quad (3.2)$$

Desarrollando y agrupando términos se llega a

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + b \left( \frac{\sigma}{E} \right)^n \quad (3.3)$$

donde

$$b = \frac{\alpha}{\varepsilon_y^{n-1}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{E} = \frac{\varepsilon_y}{\sigma_y}$$

La ecuación (3.3) representa la función Ramberg y Osgood en forma de una función de potencia. Por otra parte, la ecuación (3.3) se puede expresar con sólo dos parámetros en la forma siguiente

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \quad (3.4)$$

donde

$$\sigma_l = \frac{(\alpha \varepsilon_y)^{\frac{1}{n}}}{\varepsilon_y E} \quad (3.5)$$

Utilizando el segundo término de la función de potencia con dos parámetros (ecuación 3.4), es posible desarrollar un procedimiento para determinar los parámetros  $n$  y  $\sigma_l$  que proporcionan el mejor ajuste de la función con los valores de esfuerzo y deformación medidos experimentalmente en el intervalo de comportamiento no lineal (Bruneau, et al, 1998).

El método propone un ajuste de la función de potencia tomando dos puntos de la curva esfuerzo deformación. Este procedimiento resulta apropiado debido a la aproximación que los datos experimentales, en el intervalo inelástico presentan con una línea recta, al ser representados en un sistema de ejes logarítmicos Figura (3.1).

Los puntos que se toman para definir la ecuación de dicha recta son el inicio de la fluencia y el que corresponde con el instante en el cual se presenta el estrechamiento de la sección transversal de la probeta, llamado punto de inestabilidad (Margetson, 1981).

El punto de inestabilidad se obtiene de acuerdo al criterio de Considere (Wagoner, 1997). Este criterio establece que el inicio del adelgazamiento de la sección transversal de la probeta y el final del alargamiento uniforme ocurren cuando la velocidad de crecimiento del trabajo de endurecimiento, expresada como  $\partial(\ln \sigma) / \partial(\ln \varepsilon)$ , iguala a la deformación real. De acuerdo con este criterio, el inicio del estrechamiento ocurre en el punto donde la carga es máxima.

En forma general, el criterio de Considere establece que:

$$\sigma_r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \sigma_r} = 1 \quad (3.6)$$

donde el subíndice  $r$  indica que los valores corresponden a los valores reales del esfuerzo y de la deformación unitaria.

Expresando la ecuación (3.4) en función de los valores reales y derivando con respecto a  $\sigma_r$  se llega a (el término  $1/E$  es prácticamente cero y no se considera en la ecuación)

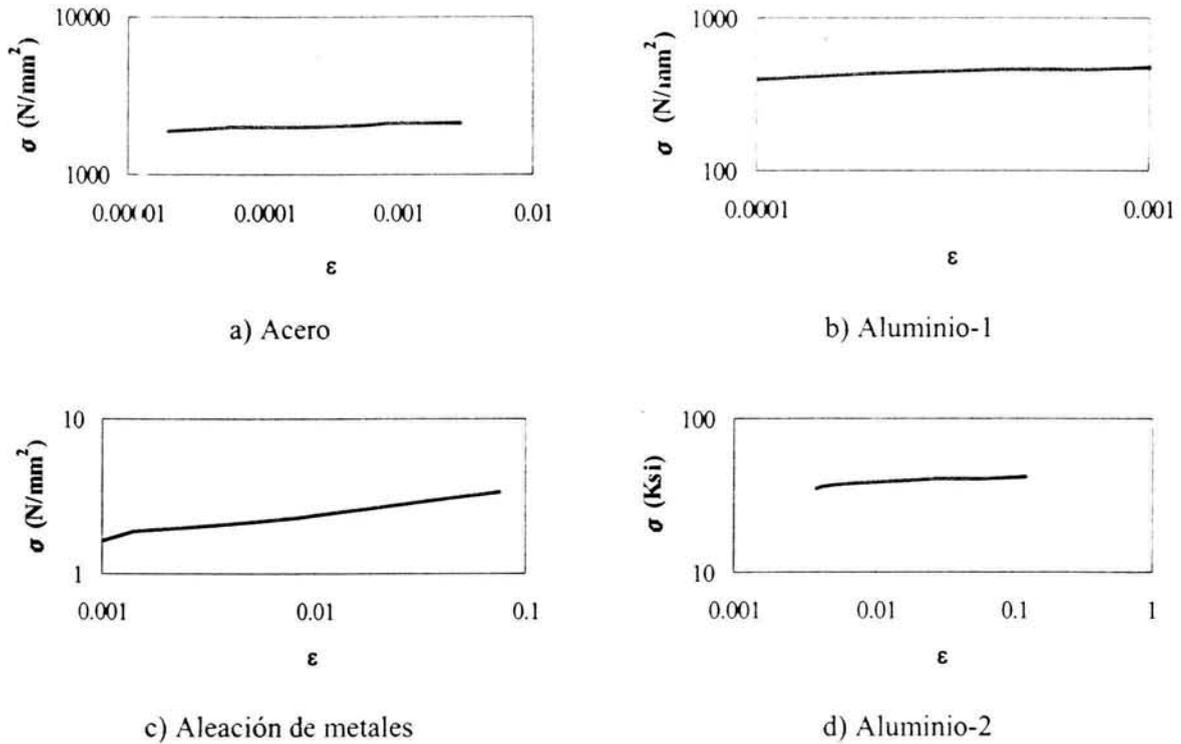


Figura 3.1. Curvas esfuerzo–deformación de pruebas en tensión axial de diferentes metales (Margetson, 1981 y Bruneau, et al, 1998) dibujadas en un sistema log-log.

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \sigma_r} = \frac{n}{\sigma_r} \left( \frac{\sigma_r}{\sigma_l} \right)^n \quad (3.7)$$

Eliminando la derivada parcial en la ecuación anterior al igualar la ecuación (3.6) con la (3.7)

$$\frac{l}{\sigma_r} = \frac{n}{\sigma_r} \left( \frac{\sigma_r}{\sigma_l} \right)^n$$

de aquí

$$\sigma_r = \left( \frac{l}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \sigma_l \quad (3.8)$$

De acuerdo con la ecuación (3.4). La deformación plástica, del  $i$ -ésimo punto de la curva experimental se puede expresar como

$$\varepsilon_{pi} = \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_l} \right)^n$$

donde

$$\sigma_l = \frac{\sigma_i}{\left( \varepsilon_{pi} \right)^{\frac{1}{n}}} \quad (3.9)$$

Por otra parte, la relación entre los valores nominales y reales de la deformación y del esfuerzo, en una prueba de tensión axial, presentan las siguientes relaciones (Wagoner, 1997):

$$\sigma_r = \sigma_{nom} (1 + \varepsilon_{nom}) \quad (3.10.a)$$

$$\varepsilon_r = Ln (1 + \varepsilon_{nom}) \quad (3.10.b)$$

Al inicio de la inestabilidad  $\sigma_{nom} = \sigma_{ult}$  y:

$$\sigma_r = \sigma_{ult} (1 + \varepsilon_{nom}) \quad (3.11)$$

De la ecuación (3.10.b) y eliminado los logaritmos

$$e^{\varepsilon_r} = (1 + \varepsilon_{nom}) \quad (3.12)$$

Sustituyendo la ecuación (3.12) en (3.11) y simplificando se obtiene

$$\varepsilon_r = Ln \left( \frac{\sigma_r}{\sigma_{ult}} \right) \quad (3.13)$$

Por otra parte, sustituyendo la ecuación (3.9) en (3.8) se llega a

$$\sigma_r = \sigma_i \left( \frac{l}{n \varepsilon_{Pi}} \right)^{\frac{l}{n}} \quad (3.14)$$

Sustituyendo la ecuación (3.14) en (3.13), se obtiene la deformación al inicio de la inestabilidad

$$\varepsilon_r = Ln \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{ult}} \left( \frac{l}{n \varepsilon_{Pi}} \right)^{\frac{l}{n}} \right) \quad (3.15)$$

Expresando a la ecuación (3.4) en función de valores reales:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} + \left( \frac{\sigma_r}{\sigma_l} \right)^n \quad (3.16)$$

Sustituyendo los esfuerzos  $\sigma_l$  y  $\sigma_r$  expresados por las ecuaciones (3.9) y (3.14) respectivamente, en la ecuación (3.16)

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_i}{E} \left( \frac{l}{\varepsilon_{Pi} n} \right)^{\frac{l}{n}} + \frac{l}{n} \quad (3.17)$$

En el instante en el que se presenta la inestabilidad se puede igualar la ecuación (3.15) con (3.17)

$$Ln \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{ult}} \left( \frac{l}{n \varepsilon_{Pi}} \right)^{\frac{l}{n}} \right) = \frac{\sigma_i}{E} \left( \frac{l}{\varepsilon_{Pi} n} \right)^{\frac{l}{n}} + \frac{l}{n} \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) contiene como única incógnita al parámetro  $n$ . Así, el procedimiento que se sigue en la determinación de los parámetros que definen a la función de potencia es el siguiente:

- De los datos experimentales correspondientes a una prueba de carga axial, se utilizan aquellos que se registraron en el intervalo no lineal.
- Se escoge como primer punto al de fluencia,  $P_1 = (\varepsilon_y, \sigma_y)$  con el cual se determinará el módulo de elasticidad  $E = \sigma_y / \varepsilon_y$
- Se toma como segundo punto al que corresponde con el inicio del estrangulamiento de la probeta  $P_2 = (\varepsilon_{Pi}, \sigma_{ult})$
- Se determina el valor de  $n$  al resolver la ecuación (3.18)
- El valor de  $n$  se sustituye en la ecuación (3.9) y se determina  $\sigma_l$

- Con los parámetros  $n$  y  $\sigma_l$  se define a la función de potencia que se ajusta a los datos experimentales.

### 3.1.2 Función de Ramberg y Osgood con dos parámetros utilizando un ajuste con mínimos cuadrados lineales

Para realizar el ajuste del modelo a los datos experimentales, se puede utilizar la técnica de mínimos cuadrados (Margetson, 1981) obteniéndose el valor de los parámetros  $n$  y  $\sigma_l$  por medio de un proceso iterativo.

La función de Ramberg y Osgood, en términos de dos parámetros se obtuvo en la ecuación (3.4) de donde la deformación plástica es

$$\varepsilon_p = \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \quad (3.19)$$

En este procedimiento se recurrirá a una serie de Taylor. En general, el desarrollo en series de Taylor de una función de  $v_i$  variables  $f(v_1, v_2, \dots, v_n)$  es de la forma siguiente

$$f(v_1, v_2, \dots, v_m) = f(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial v_j} f(v_1, v_2, \dots, v_m) \Delta v_j + TOS$$

En esta expresión, los términos con guión representan valores promedio o iniciales y  $TOS$  indica términos de orden superior.

Para la ecuación (3.19), la serie de Taylor se expresa en los siguientes términos

$$f(v_1, v_2) = \varepsilon_p ; v_1 = \sigma_0 ; v_2 = n$$

Despreciando los  $TOS$  se llega a:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p(\sigma_l, n) + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \sigma_l} \Delta \sigma_l + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial n} \Delta n = \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \sigma_l} \Delta \sigma_l + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial n} \Delta n \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \sigma_l} \Delta \sigma_l &= - \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \frac{n}{\sigma_l} \Delta \sigma_l \\ \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial n} \Delta n &= \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \ln \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right) \Delta n \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sustituyendo las ecuación (3.21) en (3.20) se tiene

$$\varepsilon_p = \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n - \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \frac{n}{\sigma_l} \Delta \sigma_l + \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \ln \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right) \Delta n \quad (3.22)$$

En el método de mínimos cuadrados lineales, la discrepancia entre la función que los aproxima  $f(v_i)$  y los datos experimentales representados por parejas de puntos  $(\varepsilon_{pi}; \sigma_i)$  donde  $i=1, 2, \dots, m$  se mide por el valor mínimo de la suma de las diferencias entre los valores calculados y los experimentales, si a esta diferencia se le llama residuo entonces se tendrá:

$$R_i = f(v_i) - \varepsilon_{pi} \quad (3.23)$$

Y se busca que

$$\sum_{i=1}^m R_i^2 = \sum_{i=1}^m (f(v_i) - \varepsilon_{pi})^2 \quad (3.24)$$

Los valores mínimos de la ecuación (3.24) se obtienen aplicando el criterio de la primera derivada con respecto a  $n$  y  $\sigma_l$ . De esta forma se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_l} \sum_{i=1}^m R_i^2 = \frac{\partial}{\partial \sigma_l} \sum_{i=1}^m \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n - \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \frac{n}{\sigma_l} \Delta \sigma_l + \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right) \Delta n - \varepsilon_{Pi} \right]^2 = \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{i=1}^m \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n - \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \frac{n}{\sigma_l} \Delta \sigma_l + \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right) \Delta n - \varepsilon_{Pi} \right] \left[ - \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \left( \frac{n}{\sigma_l} \right) \right. \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \left. \begin{aligned} &\left[ - \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^{2n} \left( \frac{n}{\sigma_l} \right) + \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^{2n} \left( \frac{n^2}{\sigma_l^2} \right) \Delta \sigma_l - \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^{2n} \frac{n}{\sigma_l} \text{Ln} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right) \Delta n + \right. \\ &\left. + \varepsilon_{Pi} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \left( \frac{n}{\sigma_l} \right) \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.26) \end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned} A_l &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \frac{n}{\sigma_l} \left( \varepsilon_{Pi} - \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \right) \\ B_l &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^{2n} \left( \frac{n}{\sigma_l} \right)^n \\ C_l &= - \sum_{i=1}^m \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^{2n} \frac{n}{\sigma_l} \text{Ln} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Derivando con respecto a  $n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \sum_{i=1}^m R_i^2 &= \frac{\partial}{\partial n} \sum_{i=1}^m \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n - \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \frac{n \Delta \sigma_l}{\sigma_l} + \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right) \Delta n - \varepsilon_{Pi} \right]^2 = 0 \quad (3.28) \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^{2n} \text{Ln} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right) - \frac{n}{\sigma_l} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^{2n} \text{Ln} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right) \Delta \sigma_l + \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^{2n} \left( \text{Ln} \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^2 \Delta n - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_{Pi} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right) \right] \end{aligned}$$

Llamando

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right) \left( \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^n - \varepsilon_{Pi} \right) \\ B_2 &= - \sum_{i=1}^m \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^{2n} \frac{n}{\sigma_l} \text{Ln} \left( \frac{n}{\sigma_l} \right) \\ C_2 &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^{2n} \text{Ln} \left( \frac{\sigma}{\sigma_l} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ordenando términos se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 \Delta \sigma_1 + C_1 \Delta n &= 0 \\ A_2 + B_2 \Delta \sigma_1 + C_2 \Delta n &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Expresando las ecuaciones (3.30) en forma matricial y resolviendo el sistema se llega a:

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_1 \\ \Delta n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \\ -A_2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_1 &= \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1} \\ \Delta \sigma_n &= \frac{B_1 A_2 - A_1 B_2}{C_1 B_2 - B_1 C_2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Y las expresiones finales de recurrencia serán:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1 + \Delta \sigma_1 \\ n &= n + \Delta n \end{aligned} \quad (3.33)$$

El procedimiento para la determinación de los parámetros  $n$  y  $\sigma_1$  es el siguiente:

- Se proponen valores iniciales para  $\sigma_1$  y  $n$ . Estos pueden ser cualquiera, sin embargo, se recomienda iniciar con valores unitarios.
- Con un proceso iterativo y estableciendo una tolerancia para los valores de los incrementos calculados en la ecuación (3.32) es posible obtener los valores de  $\sigma_1$  y de  $n$  que determinan los parámetros de la función de Ramberg y Osgood (ecuación (3.19)) que mejor se ajusta a los datos experimentales.

## 3.2 AJUSTE DE DATOS DE PRUEBAS ANTE CARGA CÍCLICA DE MATERIALES SIN DETERIORO

### 3.2.1 Función de Ramberg y Osgood con tres parámetros utilizando un ajuste con mínimos cuadrados lineales

Para el caso de ajustar datos de materiales sometidos a cargas cíclicas se utiliza la función de Ramberg y Osgood definida en la ecuación (2.13). En ella se han sustituido los valores de fluencia por valores con los que se normaliza la función, es decir  $F_0 = F_y$  y  $\delta_0 = \delta_y$  (ecuación 3.34).

La parte no lineal de esta ecuación cuenta con tres parámetros  $\alpha$ ,  $F_0$  y  $n$  que se determinan con el procedimiento de mínimos cuadrados lineales.

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{F}{F_0} + \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \quad (3.34)$$

De la misma forma que para el caso de la función de dos parámetros, se desarrolla la parte plástica de la ecuación (3.34) en serie de Taylor

$$\delta_p = \delta_p(\alpha, F_0, n) + \frac{\partial \delta_p}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial \delta_p}{\partial F_0} \Delta F_0 + \frac{\partial \delta_p}{\partial n} \Delta n + IOS \quad (3.35)$$

donde

$$\delta_p = \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \quad (3.36a)$$

$$\frac{\partial \delta_P}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \right] = \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \quad (3.36b)$$

$$\frac{\partial \delta_P}{\partial F_0} = \frac{\partial}{\partial F_0} \left[ \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \right] = - \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \frac{n\alpha}{F_0} \quad (3.36c)$$

$$\frac{\partial \delta_P}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left[ \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \right] = \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right) \quad (3.36d)$$

Sustituyendo la ecuación (3.36) en (3.35) se tiene

$$\delta_P = \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n + \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \Delta_\alpha - \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \frac{n\alpha}{F_0} \Delta F_0 + \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right) \Delta_n \quad (3.37)$$

Los datos de los puntos experimentales que se conocen son  $(\delta_1, F_1), (\delta_2, F_2), \dots, (\delta_m, F_m)$  con  $i = 1, 2, \dots, m$ .

El residuo entre la función que los aproxima  $f(v_i)$  y los datos medidos  $(\delta_{p1}, F_1), (\delta_{p2}, F_2), \dots, (\delta_{pm}, F_m)$  se determina por la suma de las diferencias entre los valores calculados y los experimentales, esto es:

$$R_i = f(v_i) - \delta_{p_i} \quad (3.38)$$

y se busca el valor mínimo de la función

$$\sum_{i=1}^m R_i^2 = \sum_{i=1}^m (f(v_i) - \delta_{p_i})^2 \quad (3.39)$$

Para esto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_j} \sum_{i=1}^m R_i^2 &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial \alpha} (f(v_i) - \delta_{p_i})^2 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial F_0} (f(v_i) - \delta_{p_i})^2 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial n} (f(v_i) - \delta_{p_i})^2 \\ \frac{\partial}{\partial r_j} \sum_{i=1}^m R_i^2 &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta \alpha)^2 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial F_0} (\Delta F_0)^2 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial n} (\Delta n)^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

En estas ecuaciones los incrementos  $\Delta F_0$ ,  $\Delta n$  y  $\Delta \alpha$  se han considerando como variables. A continuación se determinan cada una de las derivadas indicadas en la ecuación (3.40)

$$\frac{\partial}{\partial \Delta F_0} \sum_{i=1}^m R_i^2 = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial}{\partial \Delta F_0} \left[ \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n + \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \Delta_\alpha - \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \frac{n\alpha}{F_0} \Delta F_0 + \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right) \Delta_n - \delta_{p_i} \right]^2 \right\} = 0 \quad (3.41)$$

$$= 2 \left[ \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n + \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \Delta_\alpha - \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \frac{n\alpha}{F_0} \Delta F_0 + \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right) \Delta_n \right] \left[ - \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \frac{n\alpha}{F_0} \right] = 0$$

$$= 2 \left[ -\frac{\alpha n \left( \frac{F}{F_0} \right)^{2n}}{F_0} + \left( \frac{F}{F_0} \right)^{2n} \left( \frac{n\alpha}{F_0} \right)^2 \Delta F_0 - \frac{n\alpha^2 \left( \frac{F}{F_0} \right)^n}{F_0} \text{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right) \Delta n \right] -$$

$$- 2 \left[ \left( \frac{F}{F_0} \right)^{2n} \frac{\alpha}{F_0} \Delta \alpha + \delta_{p_i} \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \frac{n\alpha}{F_0} \right] = 0$$

Llamando

$$A_1 = \sum_{i=1}^m \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^n \frac{n\alpha}{F_0} \left[ \delta_{p_i} - \alpha \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^n \right]$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^m \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^{2n} \left( \frac{n\alpha}{F_0} \right)^2$$

$$C_1 = \sum_{i=1}^m - \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right) \frac{n\alpha^2}{F_0}$$

$$D_1 = \sum_{i=1}^m - \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^{2n} \frac{n\alpha}{F_0}$$

Haciendo

$$\frac{\partial}{\partial \Delta n} \sum_{i=1}^m R_i^2 = \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \Delta F_0} \left[ \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n + \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \Delta \alpha - \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \frac{n\alpha}{F_0} \Delta F_0 + \right]^2 \right. \\ \left. + \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right) \Delta n - \delta_{p_i} \right\} = 0 \quad (3.42)$$

$$= 2 \left[ -\frac{\alpha^2 n \left( \frac{F}{F_0} \right)^{2n}}{F_0} \Delta F_0 + \alpha^2 \left( \frac{F}{F_0} \right)^{2n} \text{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right)^2 \Delta n + \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^{2n} \text{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right) \Delta \alpha \right] +$$

$$+ 2 \left[ \alpha^2 \left( \frac{F}{F_0} \right)^{2n} \text{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right) - \delta_{p_i} \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \text{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right) \right] = 0 \quad (3.43)$$

Llamando

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^n \operatorname{Ln} \left( \frac{F_i}{F_0} \right) \left[ \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^n - \delta_{Pi} \right] \\
 B_2 &= \sum_{i=1}^m -\frac{n\alpha^2}{F_0} \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^{2n} \operatorname{Ln} \left( \frac{F_i}{F_0} \right) \\
 C_2 &= \sum_{i=1}^m \alpha^2 \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^{2n} \left( \operatorname{Ln} \left( \frac{F_i}{F_0} \right) \right)^2 \\
 D_2 &= \sum_{i=1}^m \alpha \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^{2n} \operatorname{Ln} \left( \frac{F_i}{F_0} \right)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Calculando ahora

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \alpha} \sum_{i=1}^m R_i^2 = \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \Delta F_0} \left[ \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n + \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \Delta \alpha - \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \frac{n\alpha}{F_0} \Delta F_0 + \right. \right. \\
 \left. \left. + \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \operatorname{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right) \Delta_n - \delta_{Pi} \right]^2 \right\} = 0 \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left[ \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^{2n} - \left( \frac{F}{F_0} \right)^{2n} \frac{n\alpha}{F_0} \Delta F_0 + \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^2 \operatorname{Ln} \left( \frac{F}{F_0} \right)^{2n} \Delta_n \right] + \\
 &+ 2 \left[ \left( \frac{F}{F_0} \right)^{2n} \Delta \alpha - \delta_{Pi} \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Y llamando

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \sum_{i=1}^m -\left( \frac{F_i}{F_0} \right)^n \left( \alpha \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^n - \delta_{Pi} \right) \\
 B_3 &= \sum_{i=1}^m -\left( \frac{F_i}{F_0} \right)^{2n} \left( \frac{n\alpha}{F_0} \right) \\
 C_3 &= \sum_{i=1}^m \alpha \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^{2n} \operatorname{Ln} \left( \frac{F_i}{F_0} \right) \\
 D_3 &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{F_i}{F_0} \right)^{2n}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Agrupando términos se obtiene

$$\begin{aligned}
 A_1 + B_1 \Delta F_0 + C_1 \Delta n_n + D_1 \Delta \alpha &= 0 \\
 A_2 + B_2 \Delta F_0 + C_2 \Delta n_n + D_2 \Delta \alpha &= 0 \\
 A_3 + B_3 \Delta F_0 + C_3 \Delta n_3 + D_3 \Delta \alpha &= 0
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Que en forma matricial se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F_0 \\ \Delta n \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \\ -A_2 \\ -A_3 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtienen los valores de  $\Delta F_0$ ,  $\Delta n$  y  $\Delta \alpha$ . Los valores actualizados de los parámetros se calculan como

$$\begin{aligned} F_0 &= F_0 + \Delta F_0 \\ n &= n + \Delta n \\ \alpha &= \alpha + \Delta \alpha \end{aligned} \quad (3.50)$$

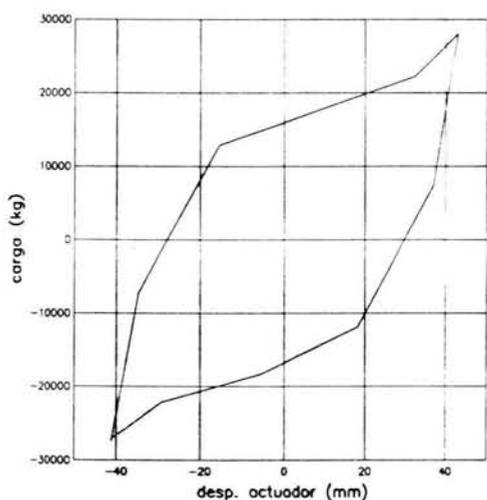
Por medio de un procedimiento iterativo se determinan los valores finales de los parámetros, de la forma siguiente:

- Se proponen valores iniciales de los parámetros, que pueden ser valores unitarios
- Se resuelven las ecuaciones (3.50) utilizando los valores propuestos en el primer paso
- Se calculan por iteraciones los valores finales para los parámetros, con lo cual queda definida la función de Ramberg y Osgood, ecuación (3.34) completamente.

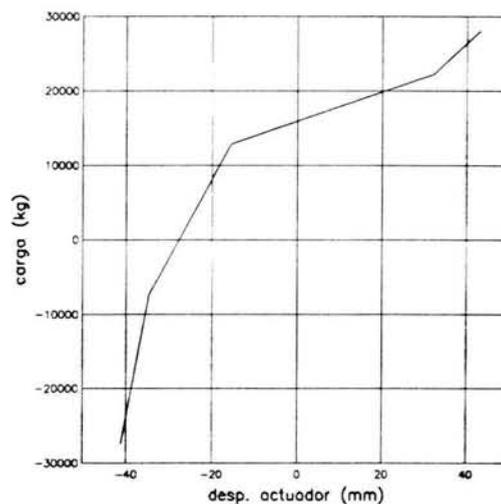
### 3.2.2 Características del ajuste

El presente subcapítulo describe el procedimiento que se siguió en la determinación de los parámetros y en la solución de la ecuación de Ramberg y Osgood, para obtener el ciclo histerético teórico ajustado.

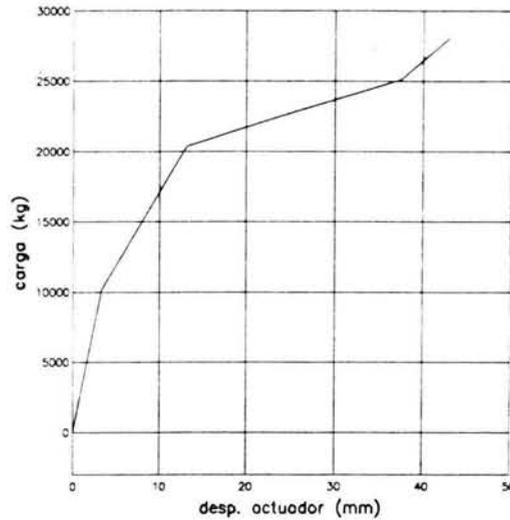
El cálculo de los parámetros  $\alpha$ ,  $F_0$  y  $n$  se realiza utilizando la mitad de un ciclo histerético experimental, pudiendo ser la rama superior o la rama inferior del ciclo. El ajuste de los parámetros se realiza para la rama esquelética del modelo Figura (3.2). Por esta razón es necesario obtener la curva esquelética a partir del medio ciclo histerético, de la forma siguiente:



a) Ciclo completo



b) Ciclo medido



c) Curva esquelética

Figura 3.2. Datos de placa metálica (Escobar y Sánchez, 1998)

Con el medio ciclo, seleccionado de una prueba a carga cíclica que cuenta con un número de puntos,  $n_p$ , formados por parejas de desplazamientos  $\delta_i$  y de fuerzas  $F_i$ ; se calculan los factores de escala para los desplazamientos  $F_{DES}$  y para las fuerzas  $F_{FZA}$  con las siguientes expresiones.

$$F_{DES} = \frac{\delta_i - \delta_{n_p}}{\delta_{n_p}} ; i = 1, \dots, n_p \quad (3.51)$$

$$F_{FZA} = \frac{F_i - F_{n_p}}{F_{n_p}} ; i = 1, \dots, n_p \quad (3.52)$$

Las parejas de valores de la curva esquelética se determinan con las siguientes ecuaciones

$$\delta_{Ei} = \frac{\delta_1 - \delta_i}{F_{DES}} ; i = 1, n_p \quad (3.53)$$

$$F_{Ei} = \frac{F_1 - F_i}{F_{FZA}} ; i = 1, \dots, n_p \quad (3.54)$$

donde  $\delta_{Ei}$  y  $F_{Ei}$  son el desplazamiento y la fuerza correspondientes a la curva esquelética,  $\delta_1$  y  $F_1$  son los valores del primer punto del medio ciclo histerético seleccionado. Los términos  $\delta_i$  y  $F_i$  se refieren a los valores del desplazamiento y de la fuerza del medio ciclo histerético posteriores al primer punto. Y  $F_{DES}$  y  $F_{FZA}$  son los valores de los factores de escala.

Para ejemplificar el procedimiento, se utilizan los datos experimentales de una placa de acero que se probó a flexión (Escobar y Sánchez, 1998). En el capítulo 4 pueden verse los resultados obtenidos para el ajuste de los datos experimentales de esta placa. En este punto solamente son de interés los valores experimentales que definen el diagrama fuerza-desplazamiento, que se presentan en la Tabla 3.1 y cuya gráfica se muestra en la Figura (3.2).

El medio ciclo histerético elegido es el ciclo superior (primeros seis valores de la Tabla 3.1). Para realizar el ajuste, se obtiene la curva esquelética asociada. Primero se calculan los factores de escala utilizando las ecuaciones (3.51) y 3.52), a continuación, utilizando las ecuaciones (3.53) y (3.54)

para cada punto del medio ciclo histerético se determinan los valores del desplazamiento y de la fuerza correspondientes a la curva esquelética asociada.

Tabla 3.1. Datos experimentales de una placa de acero. (Escobar y Sánchez, 1998)

$\delta$ (mm)	F (kg)
-41.169	-27408.691
-34.740	-7331.543
-15.453	12858.398
8.459	17652.100
32.259	22220.215
42.974	28085.449
36.883	7387.939
18.160	-11956.055
-5.527	-18328.857
-29.101	-22163.818
-40.718	-26957.520

A continuación se presentan los cálculos indicados. Los resultados a los que se llega se resumen en la tabla 3.2.

$$F_{DES} = \frac{-41.169 - 42.974}{-42.974} = 1.9579$$

$$F_{FZA} = \frac{-27408.691 - 28085.449}{-28085.449} = 1.9759$$

$$\delta_1 = \frac{-41.169 - (-41.169)}{1.9579} = 0$$

$$F_1 = \frac{-27408.691 - (-27408.691)}{1.9579} = 0$$

$$\delta_2 = \frac{-41.169 - (-34.740)}{1.9579} = -3.283$$

$$F_2 = \frac{-27408.691 - (-7331.543)}{1.9759} = -10161.014$$

$$\delta_3 = \frac{-41.169 - (-15.453)}{1.9579} = -13.134$$

$$F_3 = \frac{-27408.691 - 12858.398}{1.9759} = -20379.112$$

$$\delta_4 = \frac{-41.169 - 8.459}{1.9579} = -25.347$$

$$F_4 = \frac{-27408.691 - 17652.1}{1.9759} = -22805.198$$

$$\delta_5 = \frac{-41.169 - 32.259}{1.9579} = -37.503$$

$$F_5 = \frac{-27408.691 - 22220.215}{1.9759} = -25117.114$$

$$\delta_6 = \frac{-41.169 - 42.974}{1.9579} = -42.974$$

$$F_6 = \frac{-27408.691 - 28085.449}{1.9759} = -28085.5$$

Tabla 3.2. Valores de medio ciclo histerético y su curva esquelética asociada

Medio ciclo histerético		Curva esquelética	
$\delta$ (mm)	F (kg)	$\delta_E$ (mm)	$F_E$ (kg)
-41.169	-27408.691	0	0
-34.740	-7331.543	-3.283	-10161.014
-15.453	12858.398	-13.134	-20379.112
8.459	17652.100	-25.347	-22805.198
32.259	2220.215	-37.503	-25117.114
42.974	28085.449	-42.974	-28085.500

En la Figura 3.2(a) se presenta el ciclo histerético completo, la Figura 3.2(b) muestra el medio ciclo elegido y finalmente, la Figura 3.2(c) contiene la curva esquelética calculada.

Los valores de la curva esquelética resultaron negativos, pero como se prefiere trabajar con la rama en el primer cuadrante, se cambia de signo a los puntos de la curva esquelética obtenida antes de realizar el ajuste.

### 3.2.3 Solución de la función de Ramberg y Osgood

Una vez conocidos los parámetros  $\alpha$ ,  $F_0$  y  $n$  se resuelve la ecuación de Ramberg y Osgood. Para este fin se recurre al método de Newton-Raphson, como a continuación se presenta.

La ecuación (2.14) se puede expresar también como

$$f(y) = y + \alpha y^n - x = 0 \tag{3.55}$$

Desarrollando la serie de Taylor para una raíz aproximada  $y_a$  y con un incremento en  $x$  representado por  $h$  se tiene

$$f(y_{a+1}) = f(y_a + h) = f(y_a) + f'(y_a)h + f''(y_a)\frac{h^2}{2} + \dots \tag{3.56}$$

Si  $y_{a+1}$  es una aproximación de la raíz buscada dentro de la tolerancia seleccionada, entonces  $f(y_{a+1})=0$  y por lo tanto se puede truncar la serie expresada en la ecuación (3.56) hasta el primer término lineal.

$$f(y_{a+1}) = 0 = f(y_a) + f'(y_a)h \tag{3.57.a}$$

o

$$f(y_a) + (y_{a+1} - y_a)f'(y_a) = 0 \quad (3.57.b)$$

donde

$$(y_{a+1} - y_a) = h$$

Reordenando, se llega a una forma explícita y recurrente para la raíz

$$y_{a+1} = y_a - \frac{f(y_a)}{f'(y_a)} \quad (3.58)$$

Obteniendo la derivada de la función con respecto a  $y$  se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y} (y + \alpha y_i^n - x) = 1 + \alpha n y_i^{n-1} \quad (3.59)$$

Aplicando la ecuación (3.59) se llega a:

$$y_{i+1} = y_i - \frac{y_i + \alpha y_i^n - x_i}{1 + \alpha n y_i^{n-1}} \quad (3.60)$$

Al remplazar a la función por los dos primeros términos de la serie de Taylor, ecuación (3.57) se aproxima la obtención de la raíz por medio de una línea recta que pasa por el punto  $(y_i; f(y_i))$  y cuya pendiente es la misma que la recta tangente a la curva en el punto  $y_i$ .

En general, este procedimiento no proporciona el valor de la raíz de la función, sin embargo, el valor que se obtiene con la ecuación (3.60) es un valor mejorado de  $y_i$ .

El método se repite hasta que el valor sucesivo de la estimación de la raíz es menor o igual que una tolerancia considerada (para los ajustes que se realizan en el capítulo 4 se utilizó una tolerancia de  $1 \times 10^{-10}$ ).

Si en la ecuación (3.60), en el término  $(y_i^{n-1})$ , el exponente  $n$  es real y adopta valores menores a cero, ( $y_i < 0.0$ ), entonces el término  $(y_i^{n-1})$  es indeterminado. Para resolver esto se introduce la siguiente variable

$$t_{mp} = y_i^{n-1} \quad (3.61.a)$$

entonces

$$y_i(t_{mp}) = y_i y_i^{n-1} = y_i^n \quad (3.61.b)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.60) se llega a la ecuación final de recurrencia que proporciona la raíz mejorada y que ya no presenta la indeterminación mencionada, esto es:

$$y_{i+1} = y_i - \frac{y_i + (\alpha y_i) t_{mp} - x_i}{1 + \alpha n t_{mp}} \quad (3.62.A)$$

Si agrupamos al segundo término en

$$dr_i = \frac{y_i + (\alpha y_i) t_{mp} - x_i}{1 + \alpha n t_{mp}}$$

La ecuación final de recurrencia que proporciona la raíz mejorada es:

$$y_{i+1} = y_i + dr_i \quad (3.62.b)$$

### 3.2.4 Evaluación y precisión del ajuste

La representación de los datos experimentales por medio de la función de Ramberg y Osgood, combinada con la regla de Massing y el efecto Bauschinger no logra la representación precisa del comportamiento observado en las pruebas bajo carga cíclica. Sin embargo, el modelo presenta la característica de poder ajustarse a los ciclos histeréticos al seleccionar los valores adecuados de sus

parámetros. Bajo estas circunstancias la comparación del área histerética del ciclo teórico con la del ciclo experimental fue el mejor índice para evaluar el ajuste.

## CAPÍTULO 4 APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE AJUSTE DE DATOS

Se presenta el resultado de aplicar los procedimientos del capítulo 3. El método deducido para pruebas a carga creciente se aplica a pruebas de tensión (Margetson, 1981 y Bruneau et al, 1998), mientras que el procedimiento para pruebas cíclicas se utilizan para estimar los resultados de pruebas realizadas a tres tipos de dispositivos metálicos: el primero formado por placas de acero en flexión (Escobar y Sánchez 1998), el segundo constituido por soleras en forma de U (Aguirre y Sánchez, 1992) y el tercero es un material magneto-reológico (Álvarez y Jiménez, 2002).

### 4.1 AJUSTE DE DATOS DE PRUEBAS A TENSIÓN

#### 4.1.1 Función de potencia con dos parámetros

El primer ajuste de los datos experimentales se realiza siguiendo el procedimiento descrito en el subcapítulo 3.1, utilizando los datos de esfuerzo y de deformación de pruebas reportadas en los trabajos de Margetson, (1981) y Bruneau et al, (1998), tomando dos puntos de la curva esfuerzo deformación y las ecuaciones (3.9) y (3.18).

De la ecuación (3.18) se obtiene el parámetro  $n$ , el cual, al sustituirse en la (3.9) proporciona el correspondiente valor de  $\sigma_i$ .

Con los dos parámetros  $n$  y  $\sigma_i$  se define a la función de potencia ajustada a los datos experimentales, ecuación (3.9), la cual puede expresarse como

$$\sigma_i = \sigma_i (\varepsilon_{PLAS_i})^{1/n_i} \quad (4.1)$$

En la cual el subíndice  $i$  indica que se aplica a cada uno de los datos de la prueba, medidos en el intervalo no lineal del material.

A cada valor del parámetro  $n_i$  corresponderá un valor del esfuerzo calculado como lo indica la ecuación (4.1). Este esfuerzo se calcula para cada una de las deformaciones unitarias registradas en la prueba y se compara con el valor experimental. De dicha comparación se determina el error relativo,  $E_{ri}$ , como:

$$E_{ri} = \left( \frac{\sigma_i - \sigma_{EXPi}}{\sigma_{EXPi}} \right) 100 \quad (4.2)$$

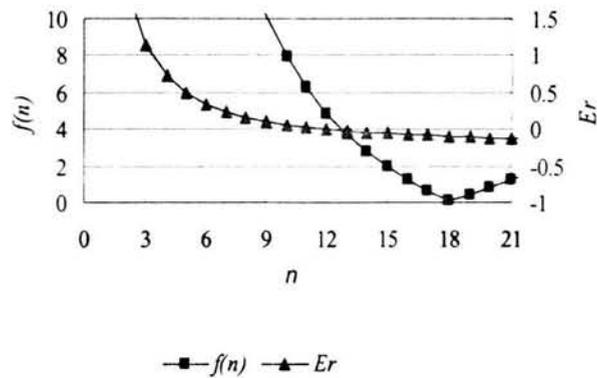
donde  $\sigma_{EXPi}$  y  $\sigma_i$  representan los valores del esfuerzo experimental y del esfuerzo calculado, respectivamente.

Este error se determina para todos los puntos de la prueba y se obtiene un error promedio. Para facilitar la determinación del valor de  $n_i$  se recurre a la ayuda de un método gráfico en donde se presenta la variación de la ecuación (3.18) a la cual se denomina  $f(n)$  con el error promedio  $E_{ri}$ .

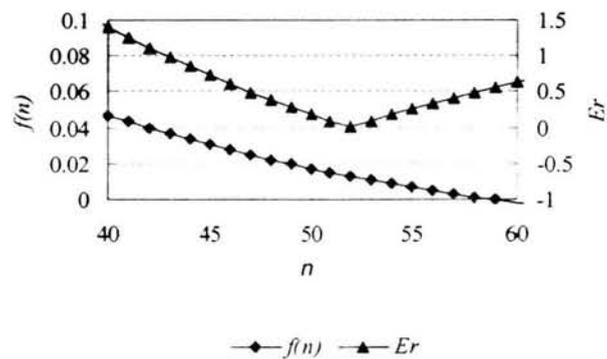
El valor aproximado de  $n$ , asociado al menor valor del error relativo, se utiliza como valor inicial del ajuste. En la Figura (4.1) se presentan las gráficas mencionadas para cada prueba realizada.

Los resultados que se obtienen con  $n$  y  $\sigma_i$ , determinados por este procedimiento, se resumen en las Tablas 4.1 a 4.4 para cada una de las pruebas. Las Figuras 4.2, contienen la representación del ajuste para tres valores de  $n$  cercanos al valor para el cual, gráficamente, el error relativo es mínimo. Este procedimiento para calcular los parámetros proporciona valores aproximados de  $n$  y  $\sigma_0$ , ya que corresponden al valor promedio del error. Debido a lo anterior, el valor de  $n$  debe considerarse como un valor inicial aproximado, que puede mejorarse. Lo anterior se comprueba con los

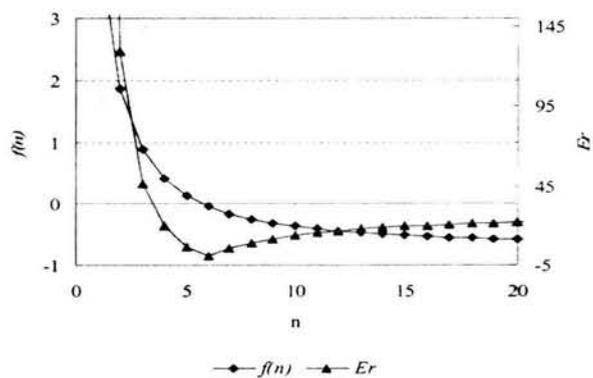
resultados obtenidos en la aleación de aluminio 2; su correspondiente gráfica, Figura (4.1.d), presenta un valor mínimo para  $n=12$ , sin embargo, el mejor ajuste se logra cuando  $n=16.5$ .



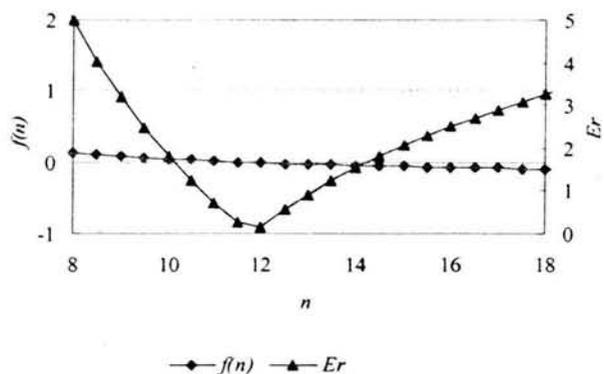
a). Variación de  $f(n)$  con  $Er$  probeta de aluminio 1



b). Variación de  $f(n)$  con  $Er$  probeta de acero



c). Variación de  $f(n)$  con  $Er$  probeta de aleación de metales



d). Variación de  $f(n)$  con  $E_r$  probeta de aluminio 2

Figura 4.1. Variación de  $f(n)$  con respecto a  $n$  y su correspondiente error relativo ( $E_r$ ) para dos materiales distintos

Tabla 4.1 Ajuste obtenido para los datos de la probeta de aluminio 1

Punto	$\varepsilon$ medida	$\sigma$ medido N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_0$ N/mm <sup>2</sup>	$n$	$\sigma$ calculado N/mm <sup>2</sup>	$E_r$ %
1	1.948E-03	438	608.313	19	438	0.0
2	4.211E-03	455			456	0.2
3	7.074E-3	465			469	0.9
4	9.950E-3	473			477	0.9
5	3.681E-2	515			511	0.8
6	6.419E-02	547			526	3.8

Tabla 4.2 Ajuste obtenido para los datos de la probeta de acero

Punto	$\varepsilon$ medida	$\sigma$ medido N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_0$ N/mm <sup>2</sup>	$n$	$\sigma$ calculado N/mm <sup>2</sup>	$E_r$ %
1	5.938E-05	1981	2406.642	50	1981	0.0
2	1.894E-04	2011			2027	0.8
3	5.288E-04	2054			2070	0.8
4	8.498E-04	2084			2089	0.2
5	1.129E-03	2098			2101	0.1
6	1.409E-03	2115			2111	0.2
7	1.969E-03	2128			2125	0.1
8	2.859E-03	2144			2141	0.1

Tabla 4.3 Ajuste obtenido para los datos de la probeta de aleación de metales

Punto	$\varepsilon$ medida	$\sigma$ medido N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_0$ N/mm <sup>2</sup>	$n$	$\sigma$ calculado N/mm <sup>2</sup>	$E_r$ %
1	9.995E-04	1.63	5.1549	6	1.6	0.0
2	1.419E-03	1.86			1.7	7.0
3	3.364E-03	2.04			2.0	2.1
4	8.255E-03	2.29			2.3	1.3
5	1.350E-02	2.5			2.5	0.8
6	1.921E02	2.66			2.7	0.4
7	4.353E-02	3.07			3.1	0.3
8	7.520E-02	3.35			3.3	0.0

Tabla 4.4 Ajuste obtenido para el caso de los datos de la probeta de aluminio 2

Punto	$\varepsilon$ medida	$\sigma$ medido N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_0$ N/mm <sup>2</sup>	$n$	$\sigma$ calculado N/mm <sup>2</sup>	$E_r$ %
1	3.7E-03	35	49.1416	16.5	35	0.0
2	4.2E-03	36			35	2.8
3	5.2E-03	37			36	2.7
4	8.0E-03	38			37	2.6
5	1.5E-02	39			38	2.6
6	2.65E-02	40			39	2.5
7	5.6E-02	41			41	0.0
8	1.22E-01	42			43	2.4

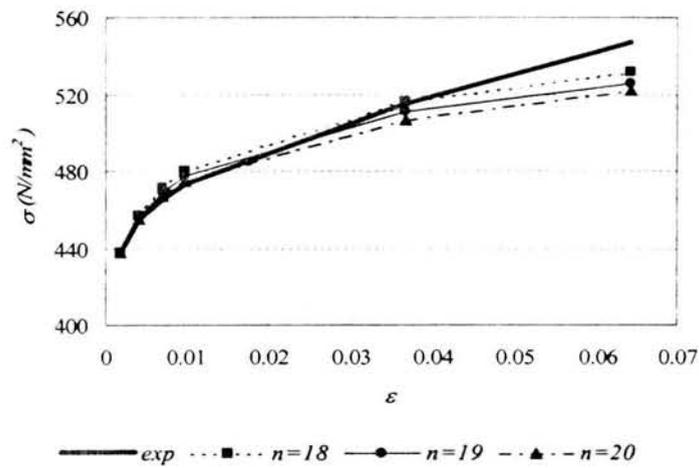


Figura a). Ajuste para tres valores de  $n$ , probeta de aluminio 1

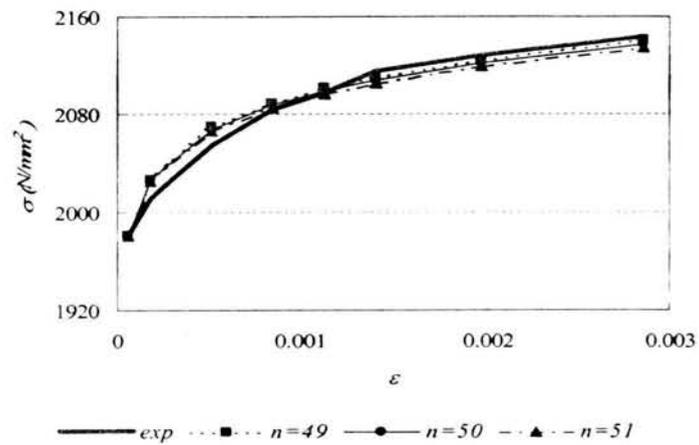


Figura b). Ajuste para tres valores de  $n$ , probeta aleación de acero

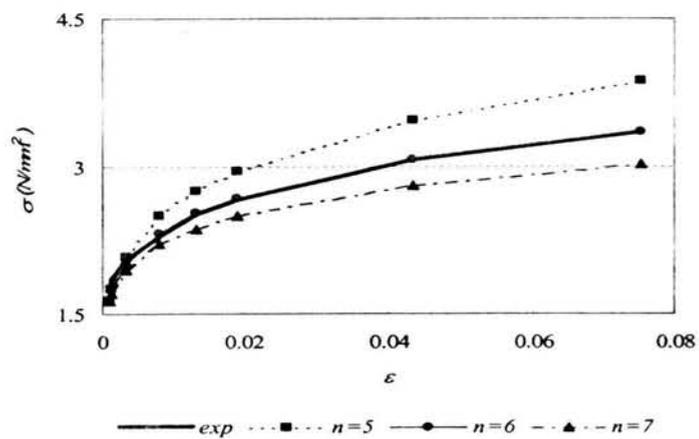


Figura c). Ajuste para tres valores de  $n$ , probeta de aleación de metales

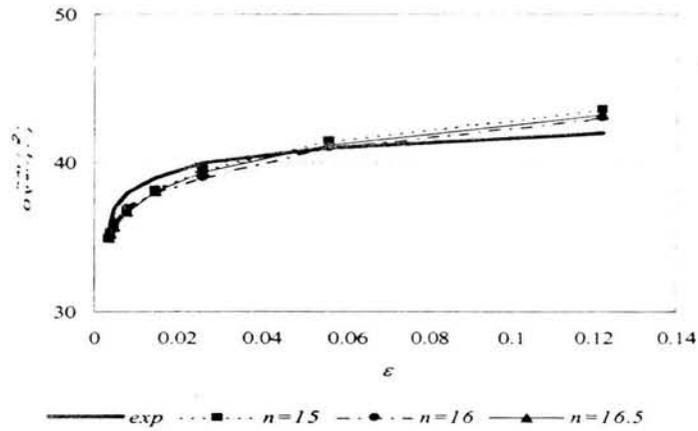


Figura d). Ajuste para tres valores de  $n$ , probeta aluminio 2

Figura 4.2. Resultados del ajuste de la función de Ramberg y Osgood con tres valores del parámetro  $n$ , para dos materiales.

**4.1.2 Función de Ramberg y Osgood con dos parámetros**

En este segundo procedimiento se determina el ajuste de la función de Ramberg y Osgood para el caso de pruebas a tensión. Se realiza siguiendo el procedimiento descrito en el apartado 3.1.2. Los resultados obtenidos se presentan en las Tablas (4.5) a (4.8) y en la Figura (4.3).

Tabla 4.5. Ajuste obtenido para los datos de la probeta de aluminio 1

Punto	$\epsilon$ medida	$\sigma$ medido N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_0$ N/mm <sup>2</sup>	$n$	$\sigma$ calculado N/mm <sup>2</sup>	$Er$ %
1	1.948E-03	438	682.697	12.274	410	-6.26
2	4.211E-03	455			437	-3.91
3	7.074E-3	465			456	-1.92
4	9.950E-3	473			468	-0.86
5	3.681E-2	515			521	1.29
6	6.419E-02	547			545	-0.21

Tabla 4.6. Ajuste obtenido para los datos de la probeta de aleación de acero

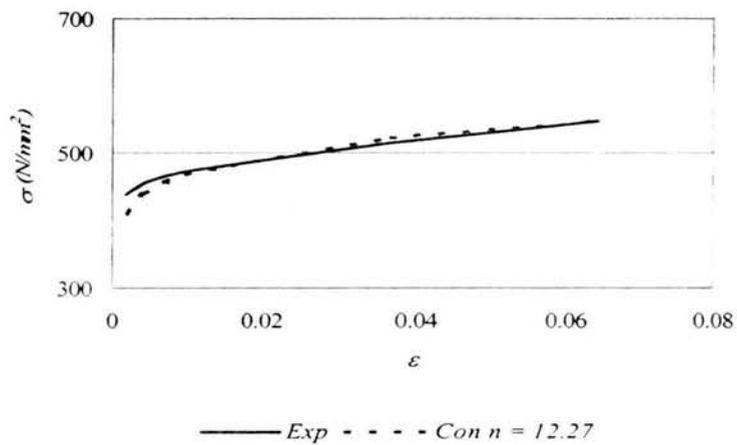
Punto	$\varepsilon$ medida	$\sigma$ medido N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_0$ N/mm <sup>2</sup>	$n$	$\sigma$ calculado N/mm <sup>2</sup>	$Er$ %
1	5.938E-05	1981	2454.768	43.448	1962	-0.95
2	4.894E-04	2011			2015	0.21
3	5.288E-04	2054			2063	0.46
4	8.498E-04	2084			2086	0.10
5	1.129E-03	2098			2099	0.09
6	1.409E-03	2115			2110	-0.21
7	1.969E-03	2128			2126	-0.05
8	2.859E-03	2144			2145	0.06

Tabla 4.7 Ajuste obtenido para los datos de la aleación de metales

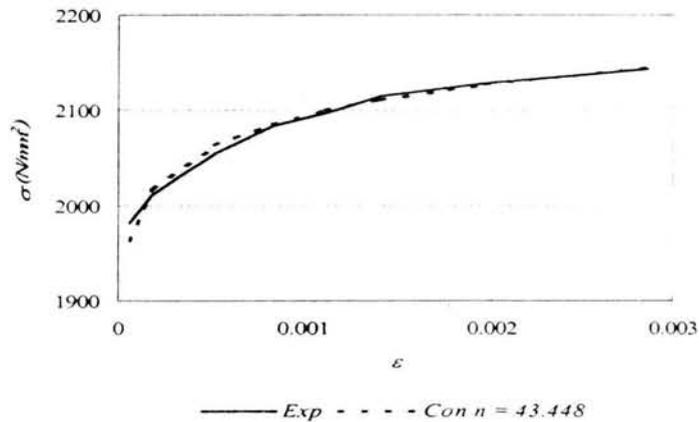
Punto	$\varepsilon$ medida	$\sigma$ medido N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_0$ N/mm <sup>2</sup>	$n$	$\sigma$ calculado N/mm <sup>2</sup>	$Er$ %
1	9.995E-04	1.63	5.1632	5.987	1.63	0.00
2	1.419E-03	1.86			1.73	-7.14
3	3.364E-03	2.04			2.00	-2.20
4	8.255E-03	2.29			2.32	1.22
5	1.350E-02	2.50			2.52	0.65
6	1.921E02	2.66			2.67	0.34
7	4.353E-02	3.07			3.06	-0.33
8	7.520E-02	3.35			3.35	0.07

Tabla 4.8 Ajuste obtenido para los datos de la probeta de aluminio 2

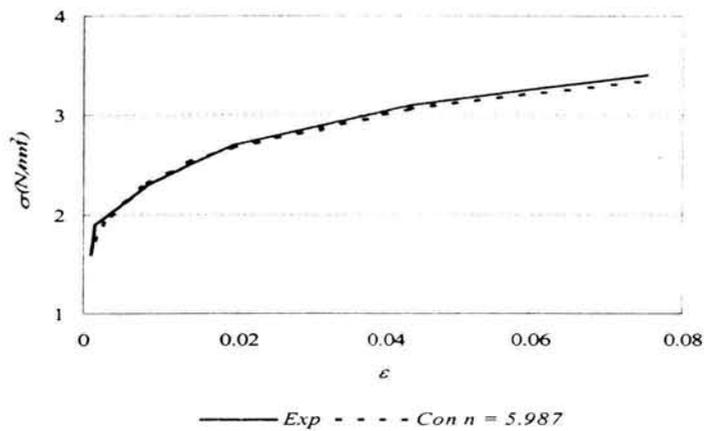
Punto	$\epsilon$ medida	$\sigma$ medido N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_0$ N/mm <sup>2</sup>	$n$	$\sigma$ calculado N/mm <sup>2</sup>	$Er$ %
1	3.7E-03	35	49.1416	16.5	37	6.93
2	4.2E-03	36			37	4.39
3	5.2E-03	37			37	2.29
4	8.0E-03	38			38	1.03
5	1.5E-02	39			39	0.51
6	2.65E-02	40			39	-0.14
7	5.6E-02	41			40	-0.14
8	1.22E-01	42			42	0.03



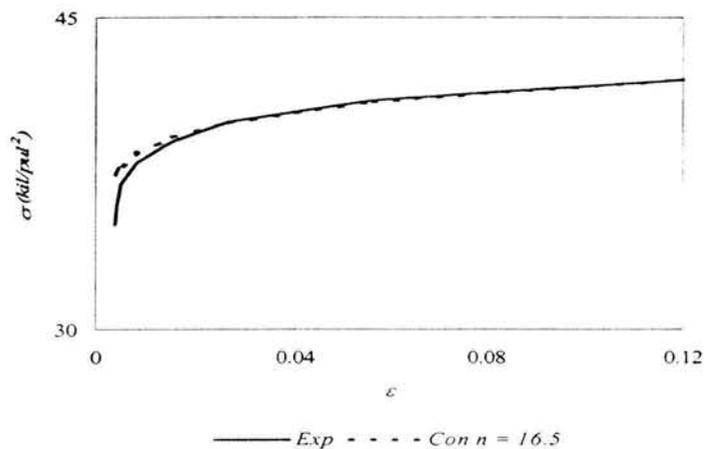
a). Ajuste por el método de mínimos cuadrados para una probeta de aluminio 1



b.) Ajuste por el método de mínimos cuadrados para una probeta de aleación de acero



c.) Ajuste por el método de mínimos cuadrados para una probeta de aleación de metales



d.) Ajuste por el método de mínimos cuadrados para una probeta de aleación de aluminio 2

Figura 4.3. Resultados del ajuste por el método de mínimos cuadrados

Los resultados obtenidos demuestran que el mejor ajuste a los datos experimentales de las pruebas se alcanza con el método de los mínimos cuadrados. A excepción del ajuste hecho a los datos de la probeta de aluminio 1, donde éste método no alcanza un buen ajuste. Una ventaja adicional del método de los mínimos cuadrados es su rápida convergencia.

## 4.2 AJUSTE DE DATOS DE PRUEBAS A FLEXIÓN

### 4.2.1 Placas a flexión

Se aplica el método de ajuste de la ecuación de Ramberg y Osgood con tres parámetros, desarrollado en el capítulo 3 (inciso 3.2.1) al caso de pruebas cíclicas en placas metálicas a flexión.

#### 4.2.1.1 Descripción del sistema de placas

Los especímenes que se ensayaron fueron placas metálicas, cuyas dimensiones se resumen en la Tabla 4.9. Para facilitar la aplicación de las cargas, las placas se montaron sobre cuatro placas verticales. (Escobar y Sánchez, 1998).

La conexión entre los especímenes y sus placas verticales de apoyo se realizó por medio de un cilindro que se suelda en cada uno de los lados cortos de las placas por ensayar. Por este cilindro se hace pasar un perno metálico el cual se une a las placas verticales, formándose un apoyo libre entre las placas Figura (4.4)

Las cargas se aplican directamente sobre la placa horizontal a una distancia fija de ambos extremos e identificada con "a" en la Figura (4.4). Esto se logra con la ayuda de dos placas colocadas en las caras inferior y superior de la placa horizontal, que hacen que la placa horizontal trabaje en flexión.

Tabla 4.9 Dimensiones de las placas ensayadas (mm)

Espécimen	Número de especímenes estudiados	L (longitud)	b (ancho)	e (espesor)
Serie A	4	410	305	19
Serie B	3	410	228	25
Serie C	3	410	150	19

#### 4.2.1.2 Equipo y procedimiento de ensaye

El dispositivo empleado en los ensayos puede verse en la Figura (4.5). Consistió de un marco metálico principal (1) anclado a la losa de reacción. Sobre el marco se sujetó un gato hidráulico (2).

En un marco secundario de menor tamaño (3) se montó el sistema de placas. Este segundo marco se formó con dos traveses armados (4) que se fijaron a la losa con barras metálicas y se arriostró lateralmente al marco principal por medio de cuatro barras de acero (5).

En la aplicación de la carga se utilizó un sistema M.T.S. (Material Testing System) que cuenta con un gato de doble acción que puede aplicar cargas o desplazamientos controlados tanto en su amplitud como en su frecuencia. El gato se fijó en uno de sus extremos a la trabe del marco principal y en el otro al sistema de aplicación de la carga.

La fuerza o el desplazamiento del gato hidráulico se distribuyó entre dos placas verticales (6) con ayuda de una placa horizontal (7). Cada placa vertical llevaba atornillada un par de placas adicionales (8) que fueron con las cuales se empujaba a la placa horizontal (6), en dirección vertical.

Completaba el sistema de carga una consola para el control del gato por medio de una celda con capacidad de carga de 50 t.

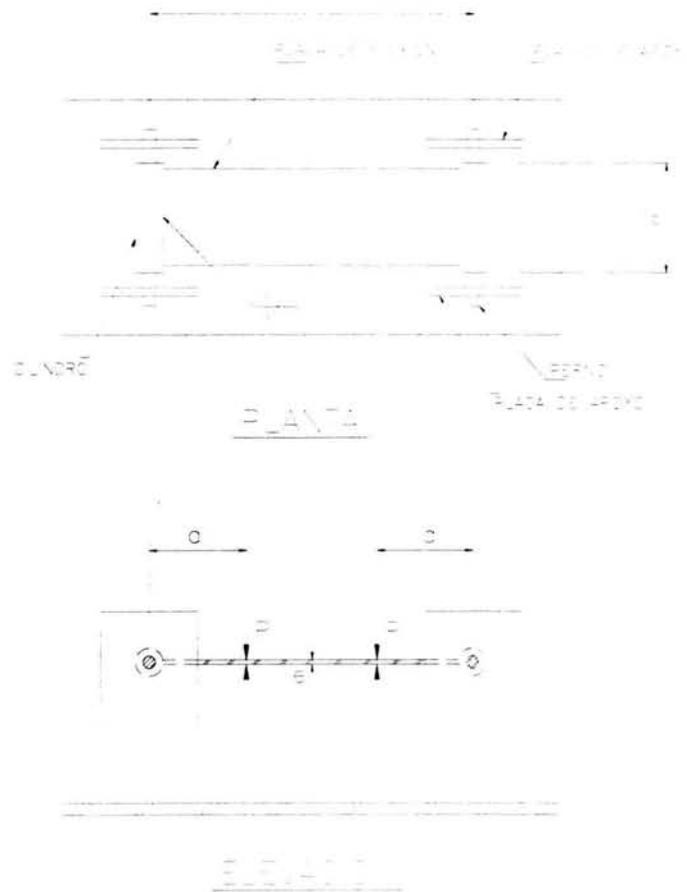


Figura 4.4. Placas ensayadas en flexión

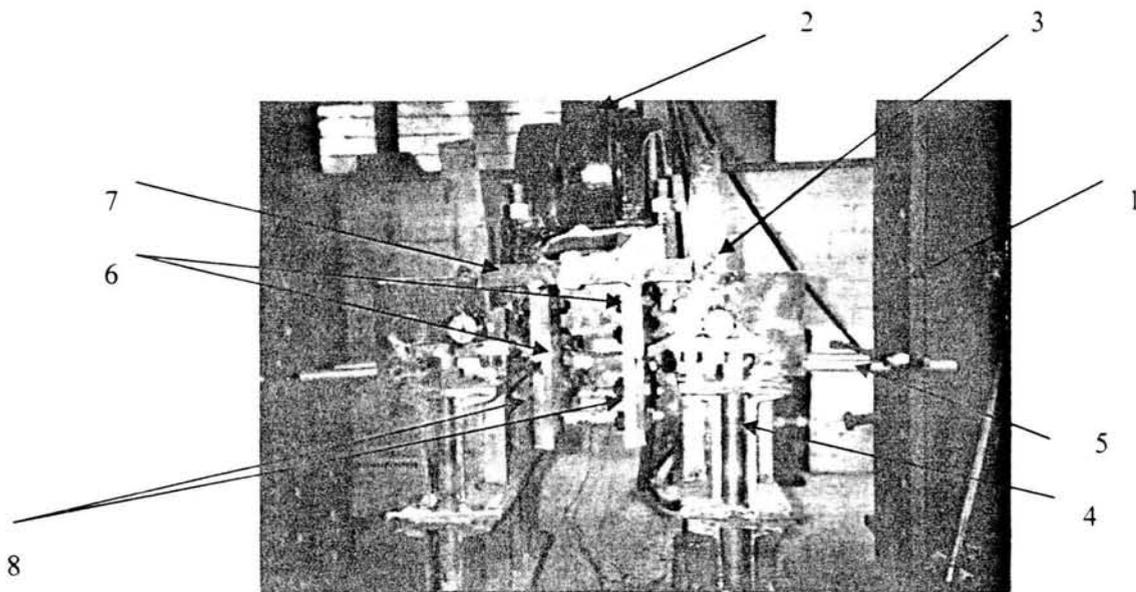


Figura 4.5 Marco de prueba con placa y sistema de carga.

### 4.2.1.3 Historia de desplazamientos en las pruebas dinámicas

Se aplicaron desplazamientos controlados definidos por una función armónica, con amplitudes que variaron entre  $\pm 20$  a  $\pm 40$  mm y con un periodo de  $\frac{1}{2}$  s. Tabla 4.10.

Tabla 4.10 Desplazamientos máximos aplicado a las placas

Espécimen	Desplazamiento (mm)
A1 , A2 y A3	40
A4	20
B2	36
B3	25
B4	30
C1	30
C3	40
C4	40

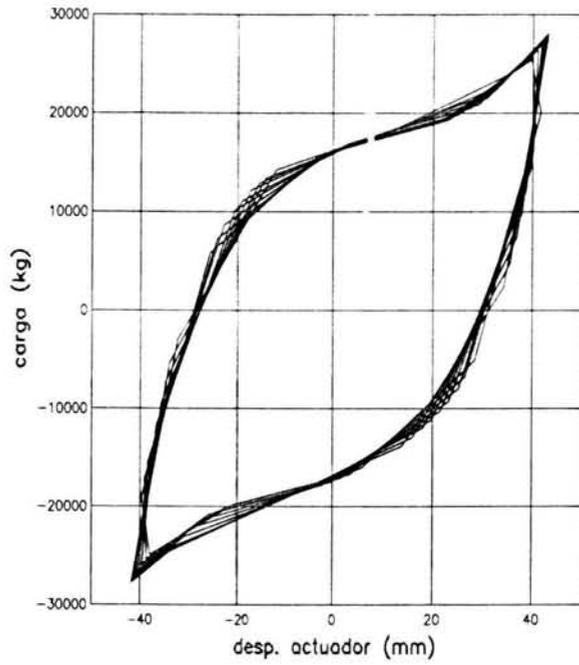
### 4.2.1.4 Información experimental

Para realizar los ajustes de las curvas carga-desplazamiento, se seleccionaron diez pruebas de los resultados experimentales (Escobar y Sánchez, 1998).

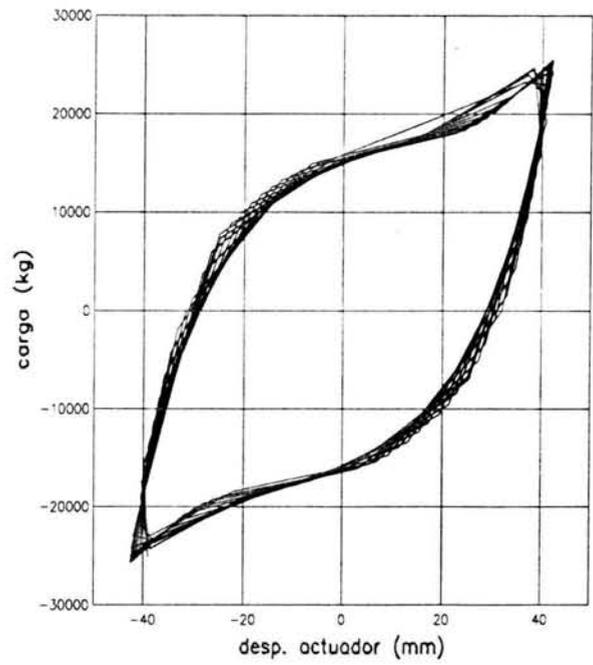
Las figuras 4.6, a 4.8 reproducen los ciclos estables de los sistemas de placas estudiados, pudiéndose distinguir la zona lineal y la plástica por las cuales el sistema hace su recorrido en cada ciclo de carga.

El área contenida en los ciclos histeréticos es amplia y aproximadamente constante en las tres series de placas. En particular, en la serie A, Figura (4.6), las curvas histeréticas presentaron un “adelgazamiento” pronunciado en sus extremos como consecuencia de una falta de holgura en los apoyos, de acuerdo con Escobar y Sánchez, (1998).

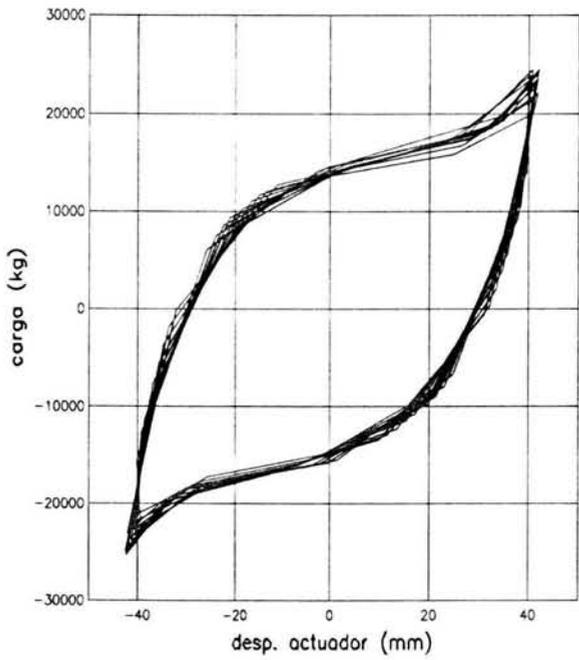
En las pruebas, las placas mostraron un mayor deterioro en la parte de aplicación de la carga, sin un daño visible en la unión soldada, la falla de las placas fue repentina y se localizó en la sección donde se aplicó la carga (Escobar y Sánchez, 1998).



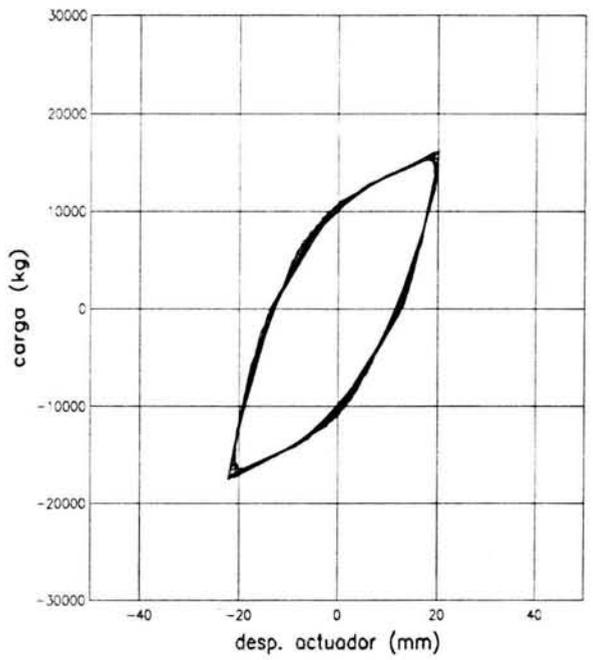
a) Espécimen A1



b) Espécimen A2

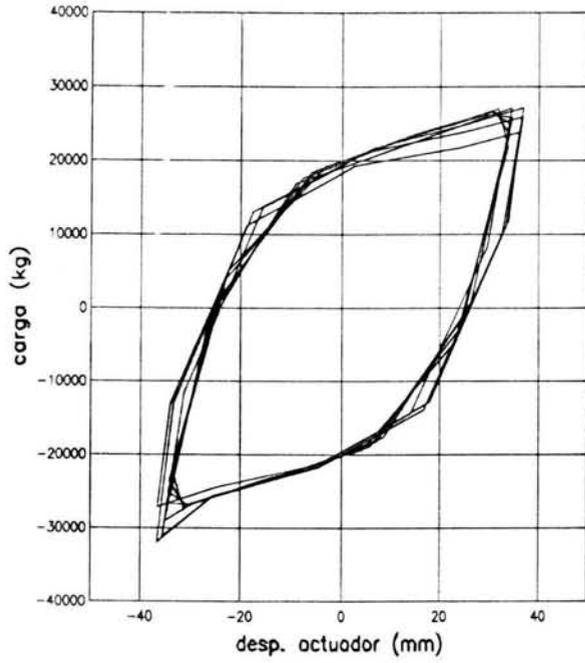


c) Espécimen A3

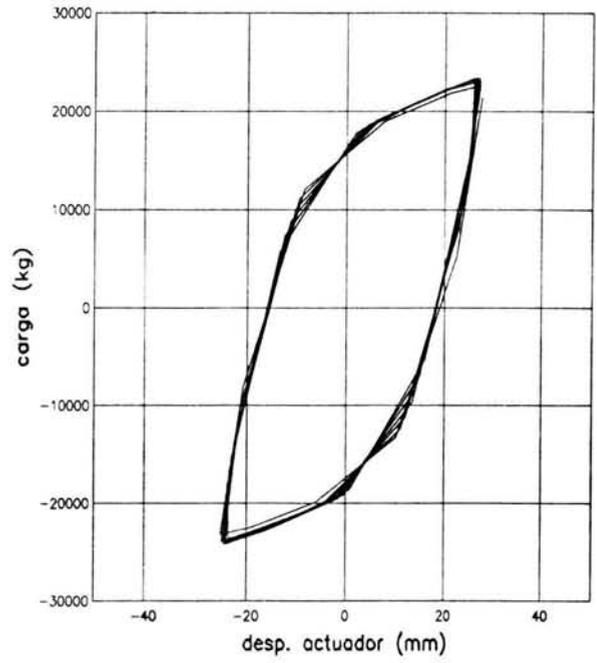


d) Espécimen A4

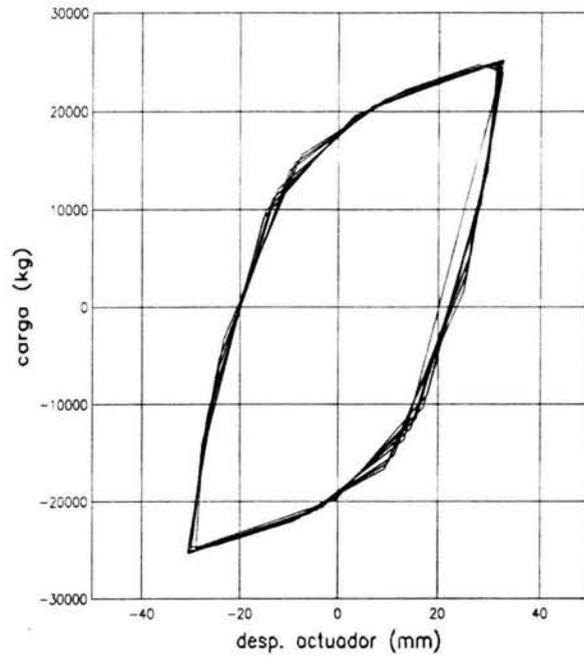
Figura 4.6. Curvas histeréticas de las placas serie A.



a) Espécimen b1

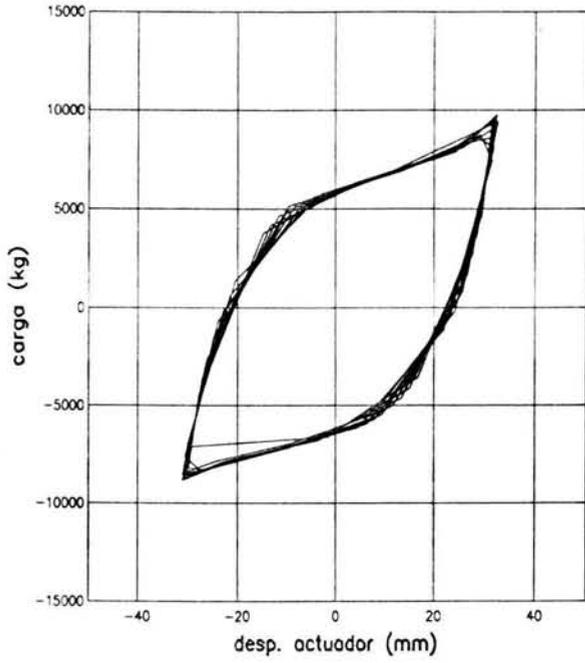


b) Espécimen b2

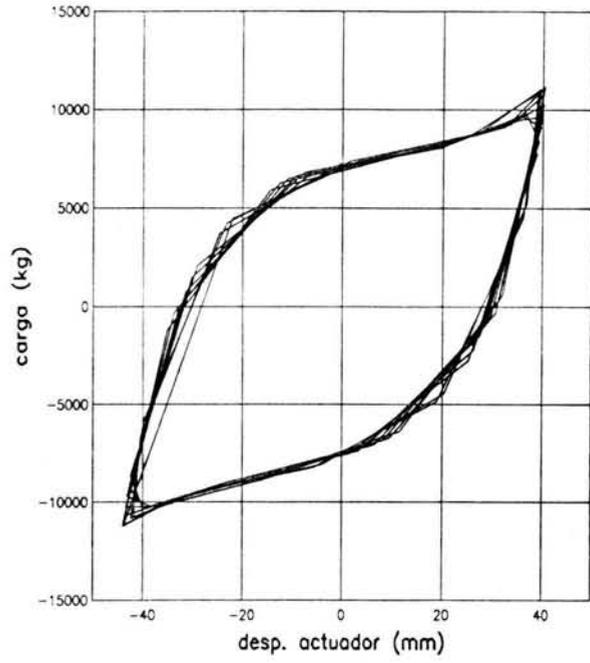


a) Espécimen b3

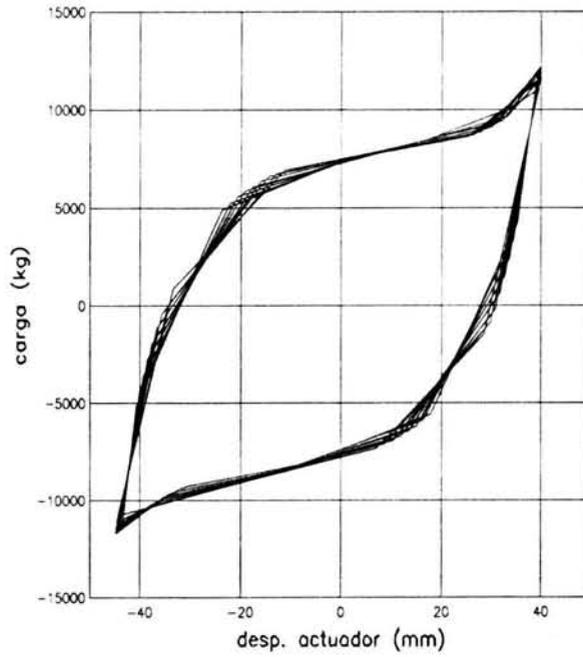
Figura 4.7 Curvas histeréticas de las placas serie B



a) Espécimen C1



b) Espécimen C2



b) Espécimen C3

Figura 4.8 Curvas histeréticas de las placas serie C

#### 4.2.1.5 Mediciones efectuadas en las pruebas

La carga máxima, el número de ciclos a la falla y la energía promedio por ciclo de cada espécimen se resume en la Tabla 4.11, (Escobar y Sánchez, 1998).

Tabla 4.11. Características medidas en las pruebas dinámicas

Espécimen	Carga-máxima (kg)	No. de ciclos a la falla	Energía media por ciclo (kg-mm)
A1	28058	40	1349051
A2	25096	50	1341976
A3	28931	50	1386569
A4	18528	380	435180
B2	31976	50	1136479
B3	23799	130	873824
B4	25725	70	1126897
C1	10940	190	424030
C3	11674	100	671658
C4	12520	100	706766

#### 4.2.1.6 Resultados de la aplicación de la función de Ramberg y Osgood con tres parámetros

Los resultados se dividen en dos partes. Los que se obtienen al aplicar la función a un solo ciclo histerético y los que se obtienen cuando se ocupan varios ciclos de carga y descarga. Como se observará más adelante, los resultados se presentan utilizando dos valores distintos para el parámetro  $\alpha$ . El primero corresponde al que se obtiene con el ajuste por mínimos cuadrados. Al segundo valor de  $\alpha$  se le ha llamado  $\alpha_{CAL}$  por ser un valor calculado utilizando el segundo punto de las lecturas experimentales, como se indica a continuación.

De la ecuación (3.34), el desplazamiento inelástico se expresa como:

$$\begin{aligned}\delta_P &= \alpha \left( \frac{F}{F_0} \right)^n \\ \delta_{P_2} &= \alpha_{CAL} \left( \frac{F_{P_2}}{F_0} \right)^n \\ \alpha_{CAL} &= \frac{\delta_{P_2}}{\left( \frac{F_{P_2}}{F_0} \right)^n}\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde  $\delta_{P_2}$  y  $F_{P_2}$  indican el desplazamiento y la fuerza correspondiente al segundo punto de las lecturas experimentales dentro del intervalo inelástico, mientras  $F_0$  y  $n$  son los valores resultantes del ajuste. Se escogió al segundo punto de los datos de las pruebas con el fin de asegurar que el material ya se encontraba fluyendo.

A pesar de que el valor de  $\alpha_{CAL}$  se determina de manera independiente a los valores del ajuste, permite mejorar la precisión.

#### 4.2.1.6.1 Resultados para el ciclo de carga máximo

El modelo se aplica primeramente al ciclo histerético de carga máximo de cada serie de placas. Los resultados obtenidos se presentan en las Tablas 4.12 y 4.13.

La Tabla 4.12 muestra que el valor de los parámetros  $n$  y  $F_o$  se mantiene constante y el valor de  $\alpha$  toma un valor unitario para todas las placas, presentándose un error relativo mayor al 1.0 %, entre las áreas histeréticas del ciclo experimental con el ciclo teórico.

Por otra parte, al utilizar  $\alpha_{CAL}$  se logra disminuir el error relativo. La Tabla 4.13. presenta dos casos extremos, por un lado están los valores de las placas A1 y A2, donde el ajuste mejora notablemente pasando de un valor de -8.1 a -0.1% y de -7.5 a -0.9%, lo cual significa una mejora en el ajuste de un 70 y 8 %, respectivamente. En otro extremo está la placa C4 en la cual se pierde el ajuste inicial al pasar de un valor de -1.4 a 3.4%

El valor negativo que acompaña al error relativo significa que el área del ciclo histerético fuerza-desplazamiento experimental es mayor al área del calculado con la función de Ramberg y Osgood. Será positivo en el caso contrario.

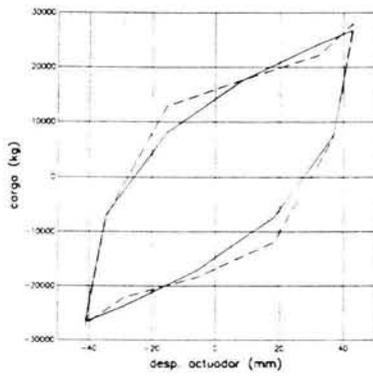
Los resultados de comparar ambos ciclos histeréticos se presentan en las Figuras 4.9 a 4.14.

Tabla 4.12. Ajuste realizado con  $\alpha$  y utilizando el ciclo máximo.

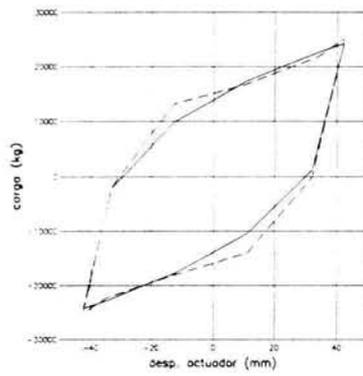
Espécimen	$F_o$ (kg)	$n$	$\alpha$	Error relativo de áreas en (%)
A1	7744.87	2.96	1.0	-8.1
A2	7727.91	3.209	1.0	-7.5
A3	6626.44	2.936	1.0	-10.5
A4	6354.44	3.326	1.0	-7.0
B2	9810.11	3.084	1.0	-9.8
B3	11419.99	4.504	1.0	4.2
B4	12839.29	5.026	1.0	9.1
C1	2988.44	2.983	1.0	-15.0
C3	3353.28	3.122	1.0	-12.4
C4	4292.19	3.853	1.0	-1.4

Tabla 4.13. Ajuste realizado con  $\alpha_{CAL}$  y utilizando el ciclo máximo.

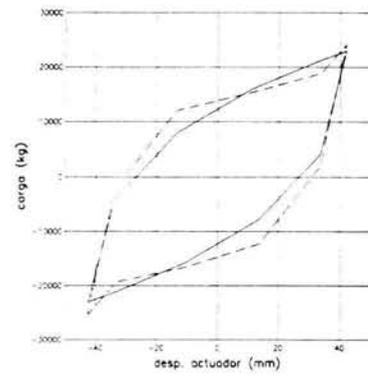
Espécimen	$F_o$ (kg)	n	$\alpha_{CAL}$	Error relativo de áreas en (%)
A1	7744.87	2.96	0.7488	-0.10
A2	7727.91	3.209	1.0000	-0.9
A3	6626.44	2.936	0.7425	-2.1
A4	6354.44	3.326	0.9676	-6.9
B2	9810.11	3.084	0.8045	-4.0
B3	11419.99	4.504	1.069	2.8
B4	12839.29	5.026	1.043	8.3
C1	2988.44	2.983	1.092	-6.6
C3	3353.28	3.122	0.7604	-5.3
C4	4292.19	3.853	0.477	3.4



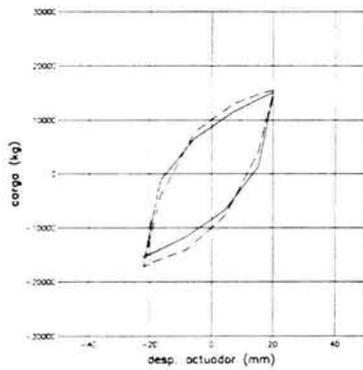
a) Placa A1



b) Placa A2



c) Placa A3



d) Placa A4

Figura 4.9 Ajuste con el parámetro  $\alpha$  en el ciclo máximo de las placas serie A

----- datos experimentales      \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

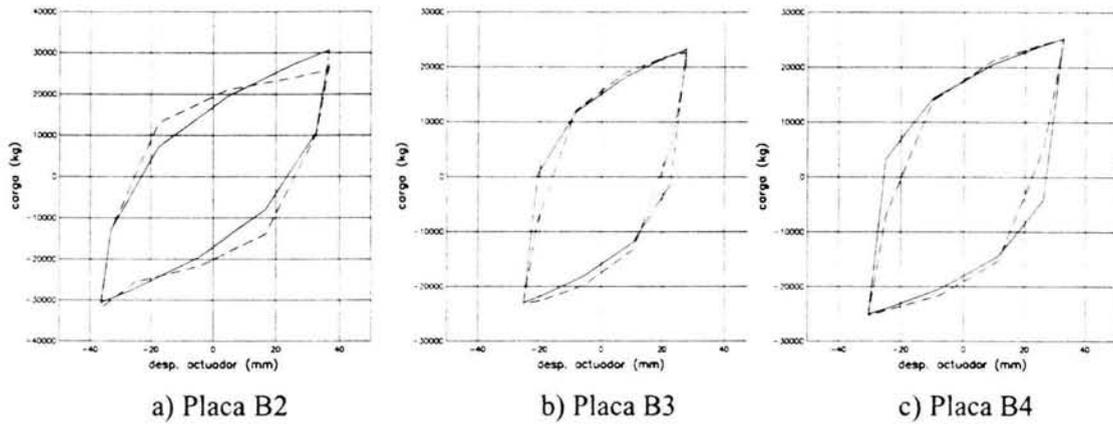


Figura 4.10 Ajuste con el parámetro  $\alpha$  en el ciclo máximo de las placas serie B.

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

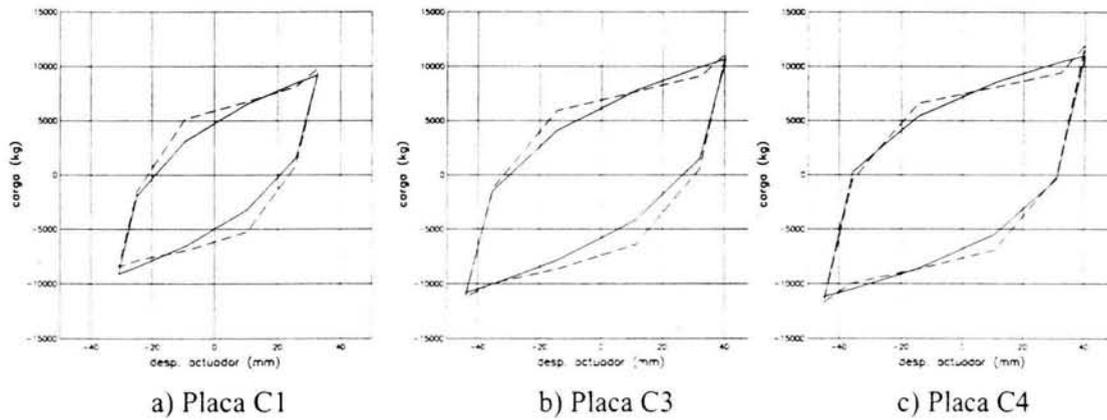


Figura 4.11 Ajuste con el parámetro  $\alpha$  en el ciclo máximo de las placas serie C.

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

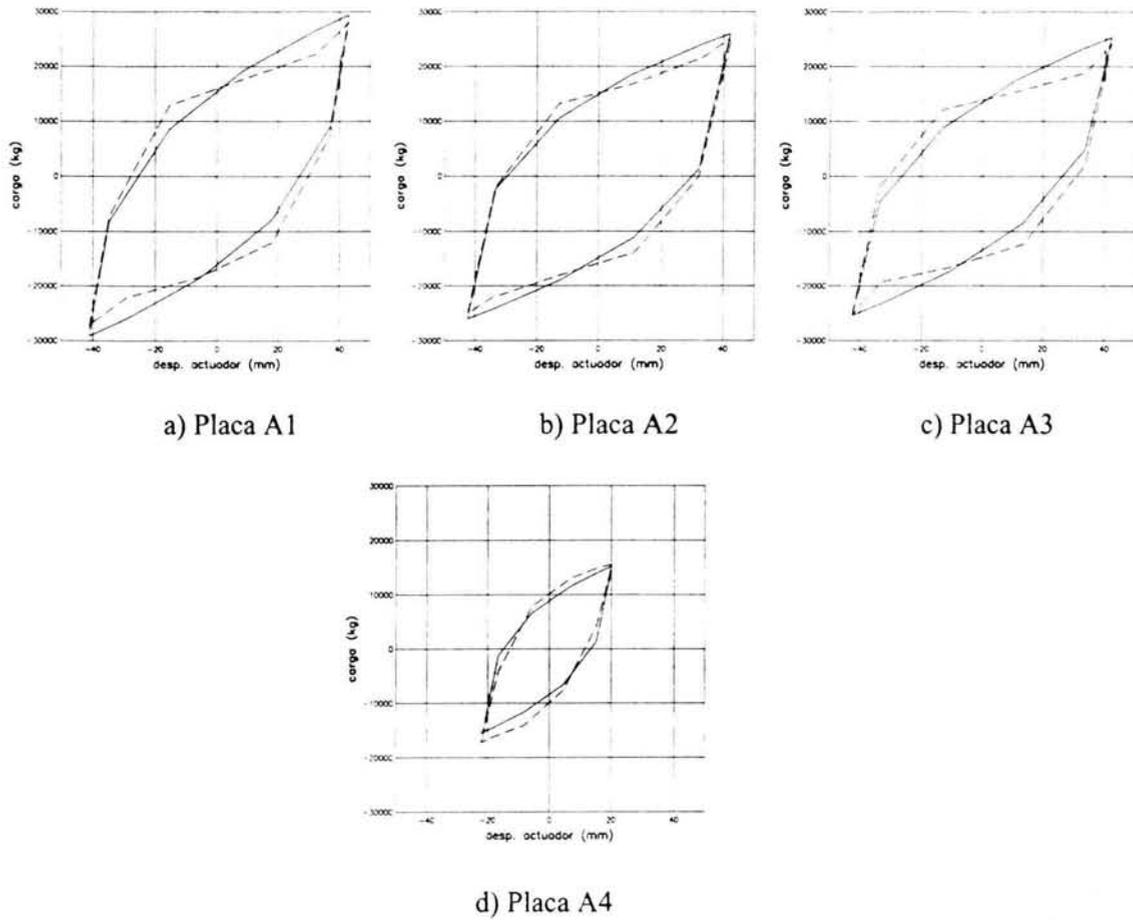


Figura 4.12 Ajuste con el parámetro  $\alpha_{CAL}$  en el ciclo máximo de las placas serie A.

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

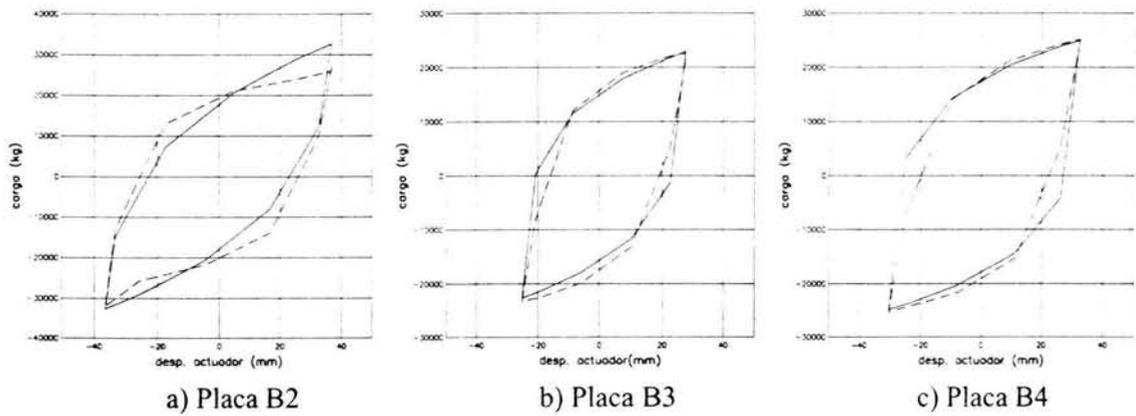


Figura 4.13 Ajuste con el parámetro  $\alpha_{CAL}$  en el ciclo máximo de las placas serie B.

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

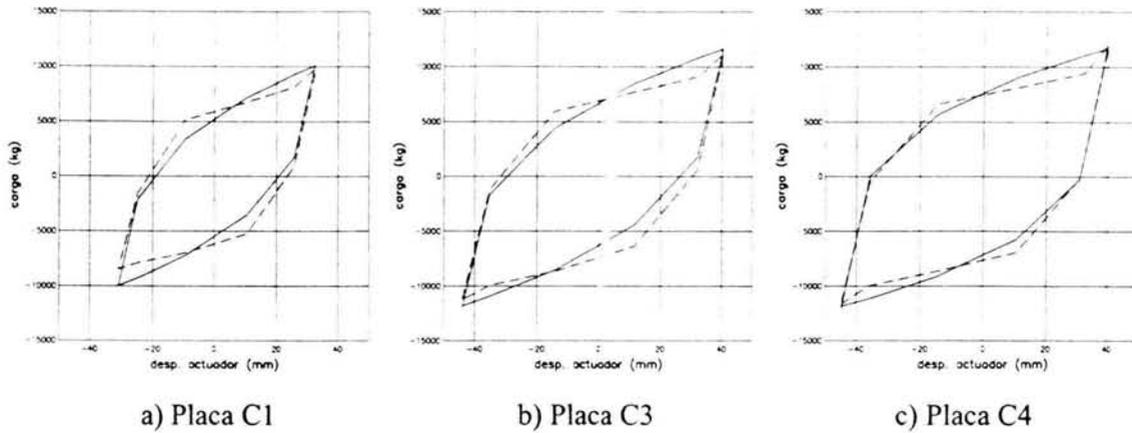


Figura 4.14 Ajuste con el parámetro  $\alpha_{CAL}$  en el ciclo máximo de las placas serie C.

----- datos experimentales      \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

#### 4.2.1.6.2 Cálculo del valor óptimo de $\alpha$

Los resultados obtenidos indican que se puede mejorar el ajuste hallando un valor adecuado de  $\alpha$ . A este valor se le llamará  $\alpha_{OPT}$  y se obtiene siguiendo el método de bisección, como se describe a continuación.

Si se considera que  $f(\alpha)$  representa la diferencia entre las áreas histeréticas y que es una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y que  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos diferentes, entonces existe al menos una raíz de  $f(\alpha)$  entre  $a$  y  $b$ .

Llamando  $\alpha_a = a$ ,  $\alpha_b = b$  y  $\alpha_m$  al punto medio del intervalo  $[a, b]$  es decir,  $\alpha_m = (\alpha_a + \alpha_b)/2$ .

Si  $f(\alpha_m) = 0$ , la raíz es  $\alpha_m$  y el proceso terminaría, de lo contrario, pueden presentarse dos posibilidades establecidas por la siguiente desigualdad:

Si  $f(\alpha_a) \cdot f(\alpha_m) < 0.0$  hacer  $\alpha_b = \alpha_m$  de lo contrario  $\alpha_a = \alpha_m$ .

Para el primer caso, la raíz se encuentra entre  $\alpha_a$  y  $\alpha_m$ . En el segundo, la raíz está en el intervalo contenido entre  $\alpha_m$  y  $\alpha_b$  de esta forma, el intervalo se va reduciendo en cada iteración, y se continúa hasta que se cumpla una o las dos condiciones siguientes:

- a)  $\alpha_a - \alpha_m \leq \text{tolerancia}$
- b)  $f(\alpha) \leq \text{tolerancia}$

En este trabajo se utilizó una tolerancia de  $1 \times 10^{-2}$ , la cual proporciona valores menores a  $2 \times 10^{-5}$  en la diferencia de áreas histeréticas.

Siguiendo este procedimiento se obtienen los resultados que se presentan en la Tabla 4.14. Como se puede observar, al comparar la columna de la diferencia de áreas entre ciclos histeréticos. El valor de  $\alpha_{OPT}$ , mejora el ajuste.

En las Figuras. 4.15 a 4.17 se presentan la evolución del ajuste para el caso del ciclo máximo. Estas figuras muestran cómo el modelo de Ramberg y Osgood se ajusta al comportamiento lineal del ciclo histerético. Por el contrario, el comportamiento no lineal del material queda representado de forma promedio y el ajuste, consiste en lograr que el área del ciclo histerético, obtenido con el

modelo de Ramberg y Osgood se aproxime al área encerrada en los ciclos histeréticos experimentales.

Tabla 4.14. Ajuste realizado con el modelo de Ramberg y Osgood.

Placa	$F_o$ (kg)	n	$\alpha_{OPT}$	Diferencia de áreas en (%)
A1	7744.87	2.96	0.7351	0.00078
A2	7727.91	3.209	0.9684	0.00025
A3	6626.44	2.936	0.6894	0.0000725
A4	6354.44	3.326	0.7255	0.000175
B2	9810.11	3.084	0.6927	0.000175
B3	11419.99	4.504	1.2270	0.00075
B4	12839.29	5.026	1.6015	0.00156
C1	2988.44	2.983	0.8608	0.0016
C3	3353.28	3.122	0.6261	0.0004
C4	4292.19	3.853	0.5495	0.0005

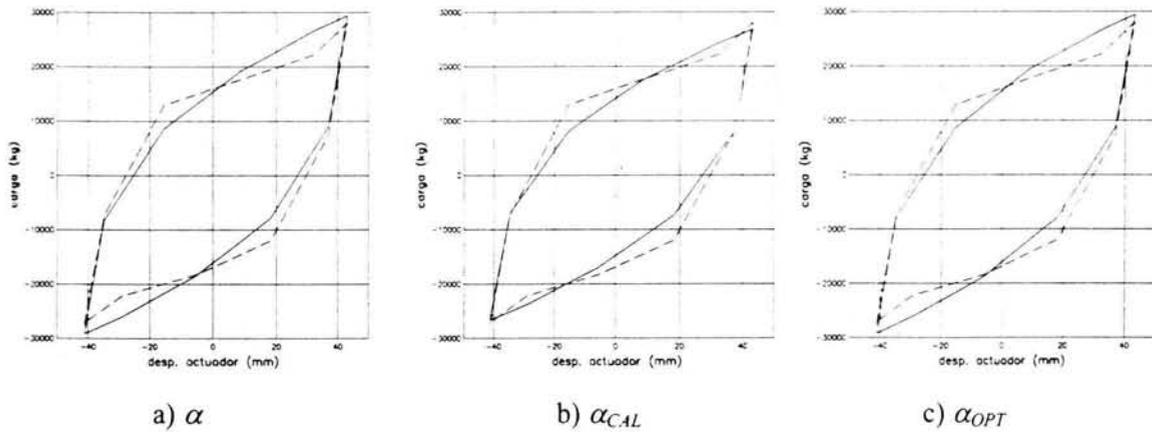


Figura 4.15a. Evolución del ajuste de la placa serie A1  
 ----- datos experimentales      \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

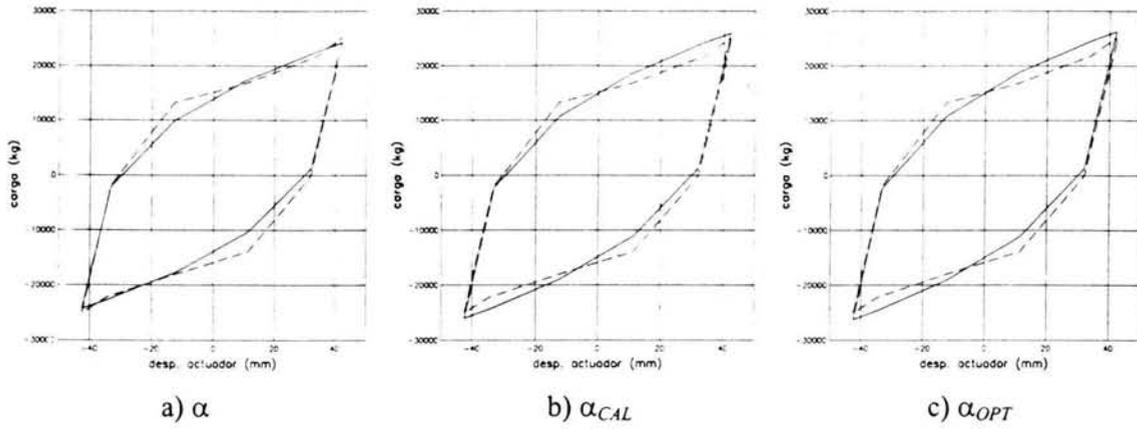


Figura 4.15b. Evolución del ajuste de la placa serie A2

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

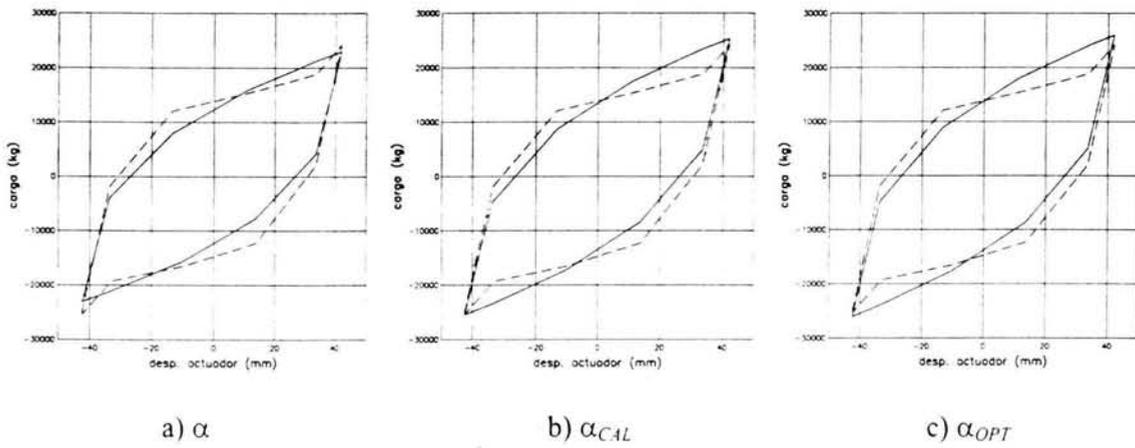


Figura 4.15c. Evolución del ajuste de la placa serie A3

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

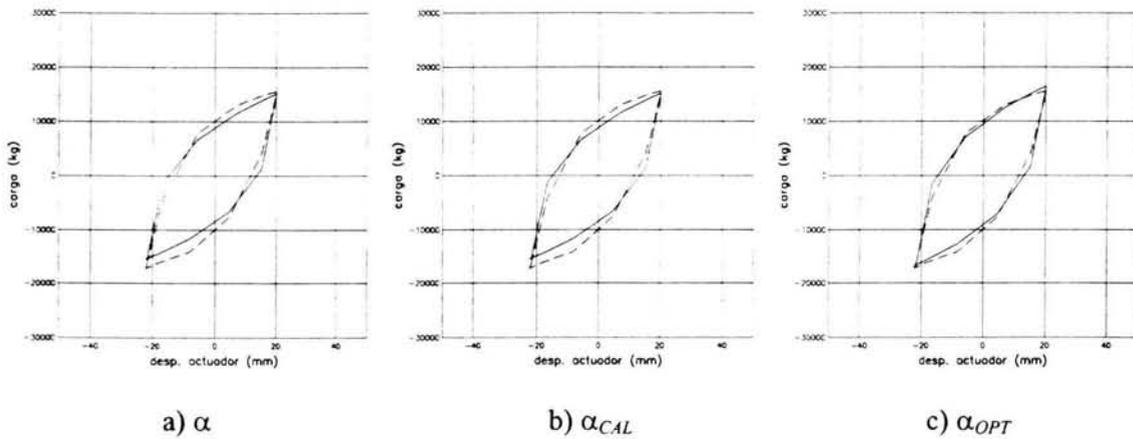


Figura 4.15d. Evolución del ajuste de la placa serie A4

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

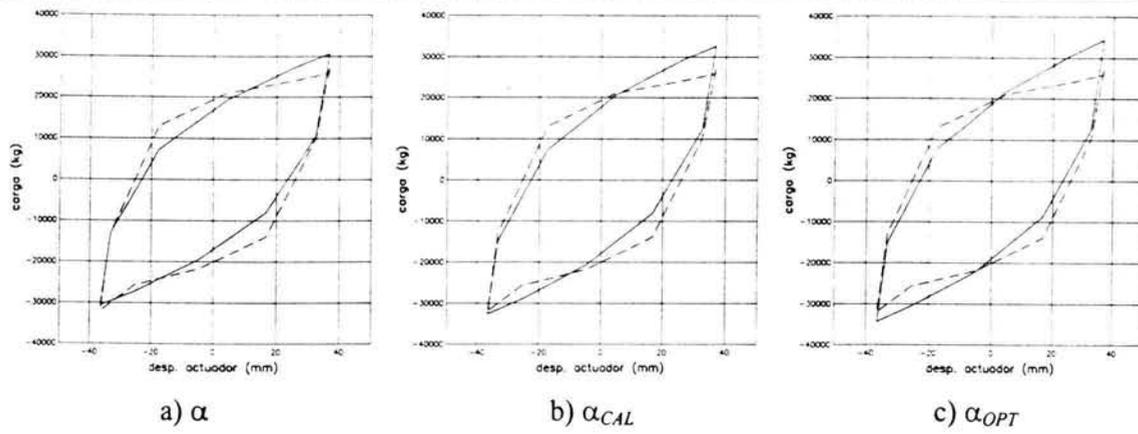


Figura 4.16a. Evolución del ajuste de la placa serie B2

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

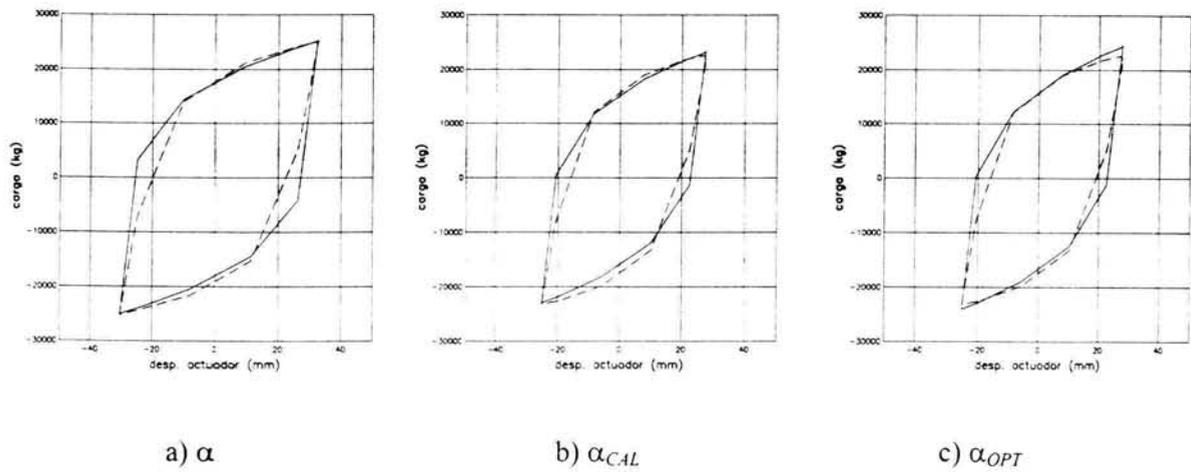


Figura 4.16b. Evolución del ajuste de la placa serie B3

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

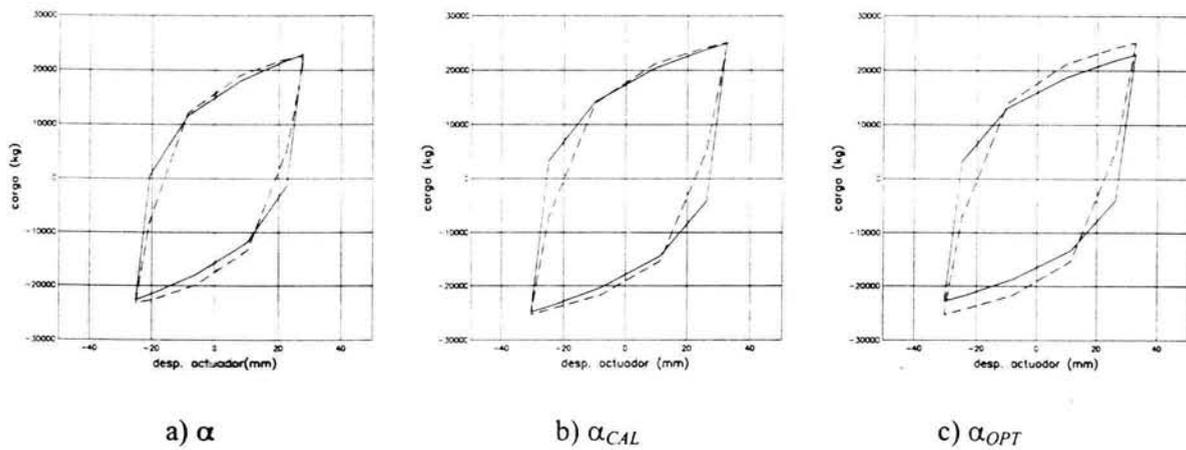


Figura 4.16c. Evolución del ajuste de la placa serie B4

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

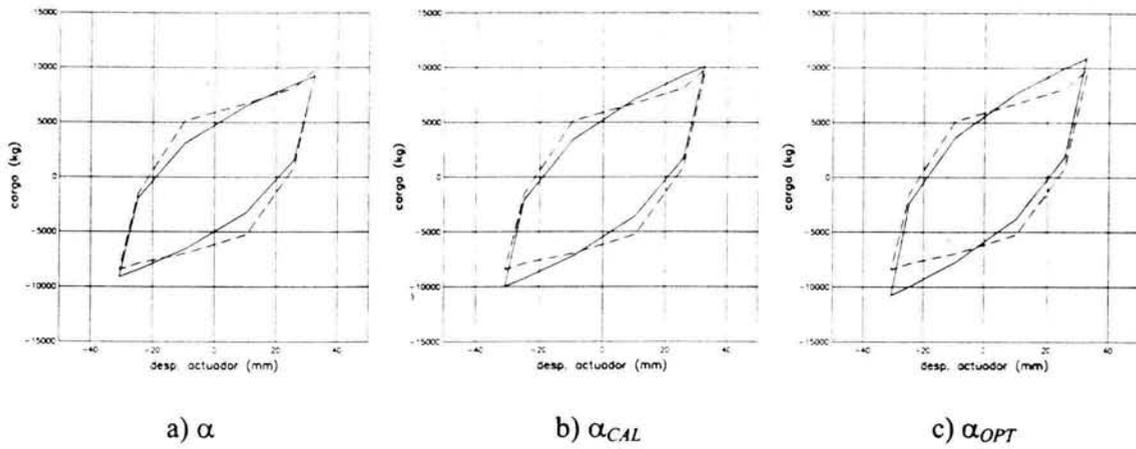


Figura 4.17a. Evolución del ajuste de la placa serie C2

----- datos experimentales      \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

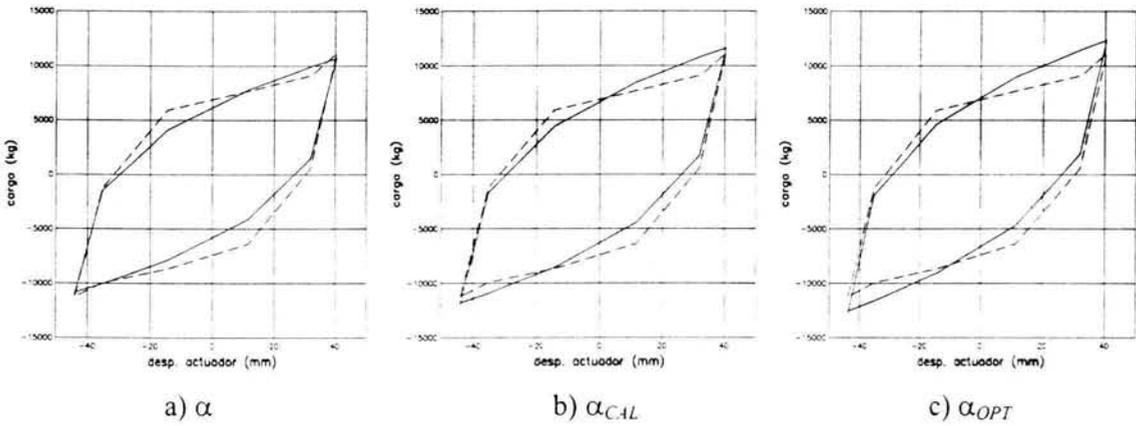


Figura 4.17b. Evolución del ajuste de la placa serie C3

----- datos experimentales      \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

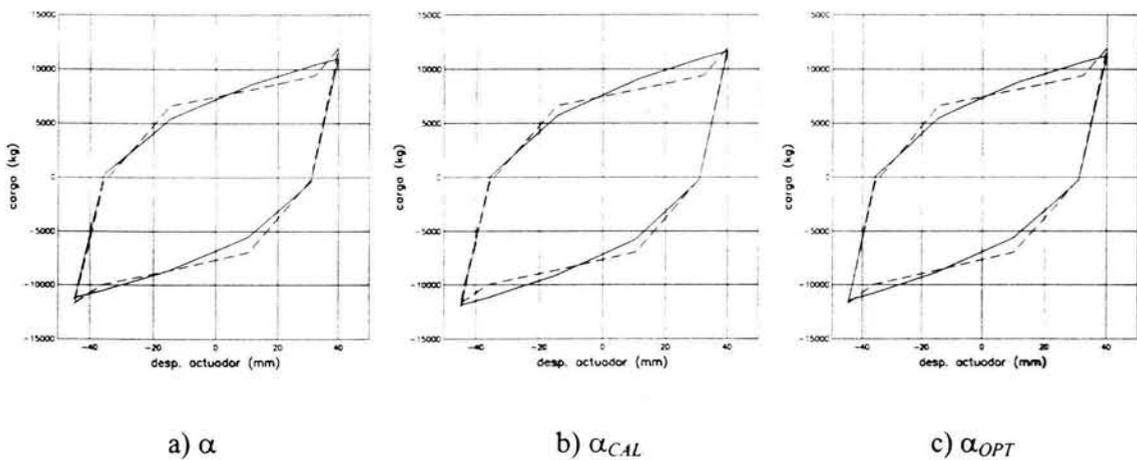


Figura 4.17c. Evolución del ajuste de la placa serie C4

----- datos experimentales      \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

#### 4.2.1.6.3 Resultados para un grupo de ciclos de carga

Con el valor de  $\alpha_{OPT}$  se realizó el ajuste para una serie de ciclos que se escogió de la respuesta dinámica de cada una de la serie de placas, los resultados del ajuste se presentan en la Tabla 4.15

En general, el ajuste medido en la diferencia de áreas histeréticas presenta errores menores que 2 %, excepto en dos casos, donde el error alcanza valores de 3.17 % (placa B3) y de 2.2 % (placa C4).

Tabla 4.15. Ajuste con el modelo de Ramberg y Osgood con  $\alpha_{OPT}$  y utilizando varios ciclos histeréticos.

Placa	$\sigma_o$ (kg)	$n$	$\alpha_{OPT}$	Diferencia de áreas en (%)	Núm. deCiclos
A1	7744.87	2.96	0.7351	-0.74	4
A2	7727.91	3.209	0.9684	0.37	6
A3	6626.44	2.936	0.6894	-1.39	6
A4	6354.44	3.326	0.7255	-0.92	8
B2	9810.11	3.084	0.6927	-1.45	7
B3	11419.99	4.504	1.2270	-3.17	6
B4	12839.29	5.026	1.6015	-1.53	7
C1	2988.44	2.983	0.8608	-0.42	8
C3	3353.28	3.122	0.6261	0.98	6
C4	4292.19	3.853	0.5495	2.21	8

#### 4.2.2 Placas metálicas en forma de U

Se presentan los resultados del ajuste de la función de Ramberg y Osgood a los datos experimentales obtenidos al probar soleras de acero en forma de U sometidas a carga cíclica (Aguirre y Sánchez, 1992). Los resultados se centran en uno de los ciclos histeréticos.

##### 4.2.2.1 Descripción de las soleras

Los especímenes consisten de solera de acero doblada en forma de U con las dimensiones reportadas por Aguirre y Sánchez, (1992) que se resumen en la Tabla 4.16 y en la Figura (4.18).

Tabla 4.16. Dimensiones de la solera metálica en forma U (mm).

Espécimen	A	B	C	t	R
U1	100	38	60	13	45

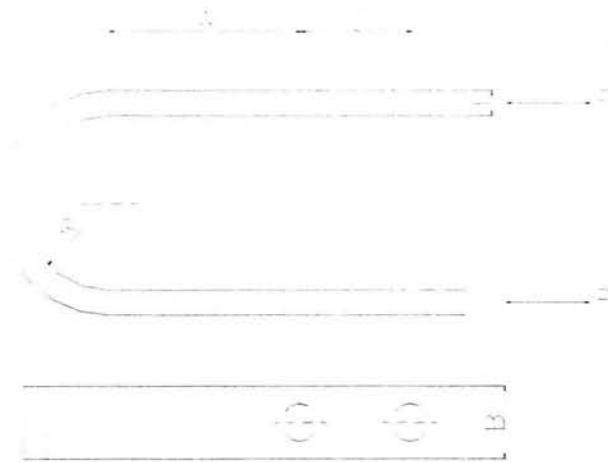


Figura 4.18. Dimensiones de la solera de acero en forma de U ensayada (Aguirre y Sánchez, 1992).

#### 4.2.2.2 Descripción del procedimiento de ensaye

Los especímenes se probaron en una máquina universal con ayuda de un marco de prueba como se muestra en la Figura (4.19). El proceso de prueba consistió en aplicar, por medio de las barras de confinamiento, un desplazamiento controlado de  $\pm 2.5$  cm de amplitud, manteniendo fijo el elemento central del marco de prueba. La frecuencia con la cual se aplicó el desplazamiento cíclico fue de 0.5 Hz.

La prueba se detuvo hasta alcanzar 100 ciclos de carga o hasta que alguna de las dos placas fallara. Un ciclo histerético obtenido de las pruebas de los especímenes se presenta en la Figura (4.20).



Figura 4.19. Equipo de prueba de las soleras

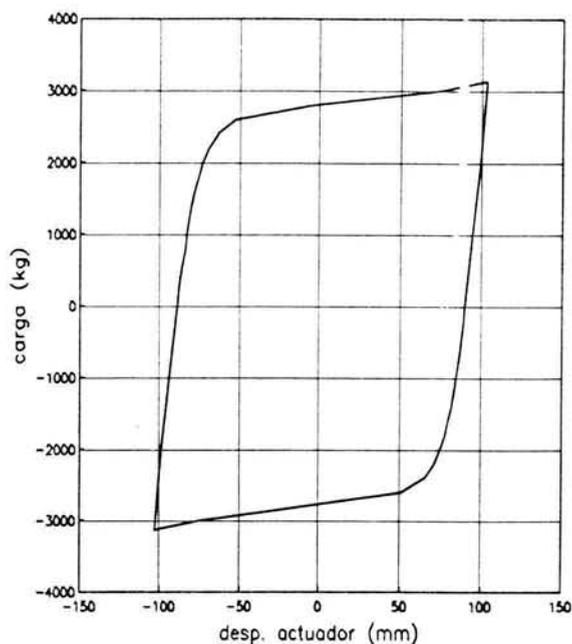


Figura 4.20. Ciclo histérico máximo de la solera metálica en forma de U (Aguirre y Sánchez, 1992).

#### 4.2.2.3 Aplicación de la función de Ramberg y Osgood con tres parámetros

Se realizó el ajuste de los parámetros de la función de Ramberg y Osgood obteniéndose los resultados de la Tabla 4.17 para  $\alpha$  y  $\alpha_{CAL}$ .

Tabla 4.17. Ajuste realizado con  $\alpha$  y  $\alpha_{CAL}$  utilizando el ciclo máximo.

Espécimen	$F_0$ (kg)	$n$	$\alpha$	$\alpha_{CAL}$	Error relativo de áreas en (%)
U1	2116.14	11.85	1.0	----	7.28
	2116.14	11.85	----	15385.3	-52.2

Las Figuras (4.20) y (4.21) presentan los ciclos histéricos del ajuste y el experimental para los dos valores de  $\alpha$  que produce el ajuste de la función de Ramberg y Osgood.

El menor valor del error relativo entre las áreas histéricas se obtuvo para el valor de  $\alpha$ , como se aprecia al comparar los errores relativos entre las áreas de los ciclos histéricos y en las Figuras (4.20) y (4.21).

Los valores de los errores relativos obtenidos, sin embargo, resultan ser mayores que 5%. Para disminuir este valor se busca obtener  $\alpha_{OPT}$ . Los resultados se presentan en la Tabla 4.18 y en la Figura (4.22). Como se aprecia, se mejora notablemente el error relativo alcanzado con  $\alpha_{OPT}$ .

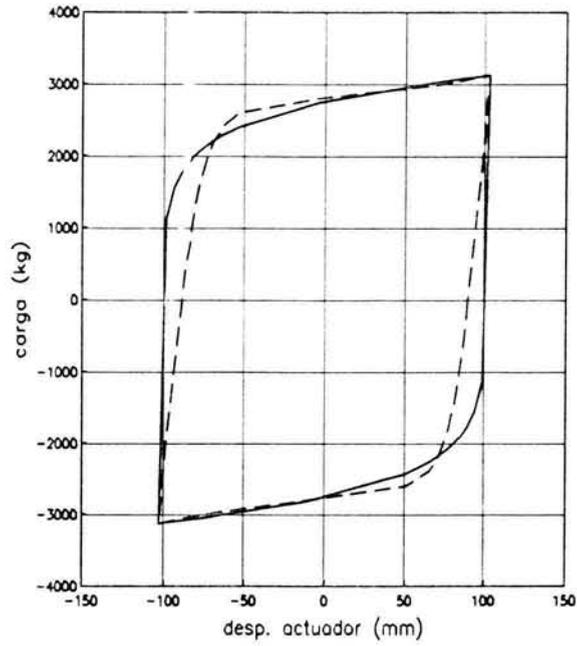


Figura 4.20 Ajuste con el parámetro  $\alpha$  en el ciclo máximo de la solera U.

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

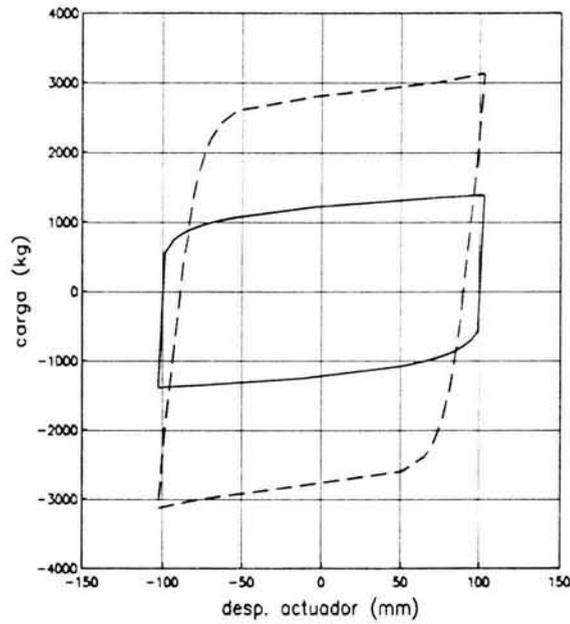


Figura 4.21. Ajuste con el parámetro  $\alpha_{CAL}$  en el ciclo máximo de la solera U.

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

Tabla 4.18. Ajuste realizado con  $\alpha_{OPT}$  y utilizando el ciclo máximo.

Espécimen	$F_o$ (kg)	n	$\alpha_{OPT}$	Error relativo de áreas en (%)
U1	2116.137	11.85	2.319	-0.003

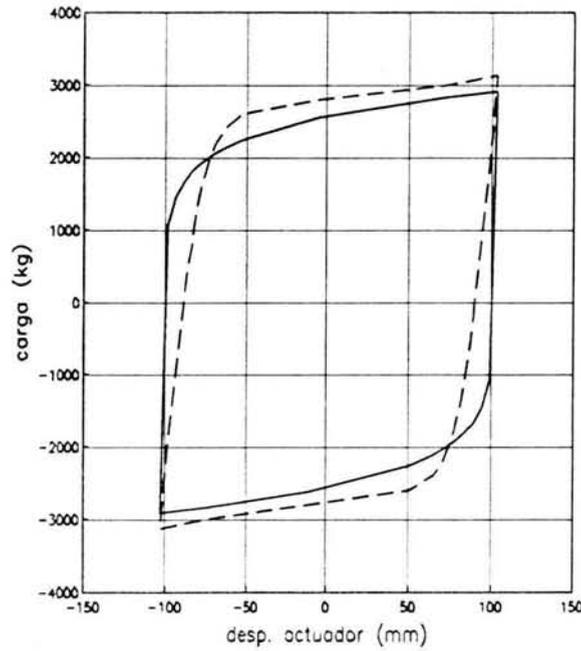


Figura 4.22. Ajuste con el parámetro  $\alpha_{OPT}$  en el ciclo máximo de la solera U.

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood.

### 4.3 AJUSTE EN PRUEBAS DE MATERIAL MAGNETORREOLÓGICO

Los materiales magnetorreológicos pertenecen al grupo de materiales inteligentes que se pretenden utilizar en el control activo de las estructuras ante eventos sísmicos, por su capacidad para disipar energía.

Estos materiales consisten generalmente en un fluido formado por una suspensión no coloidal de partículas polarizadas, en la cual la aplicación de un campo magnético logra que presente una resistencia a la fluencia Soong y Dargush, (1997).

En la Figura (4.23) se presenta un ciclo histerético de una prueba de este tipo de materiales. El ciclo de la figura corresponde al fluido sin la aplicación de ningún campo magnético. Puede observarse la importante amplitud del ciclo así como la inmediata presencia de la plastificación lo que demuestra su buen desempeño para disipar energía.

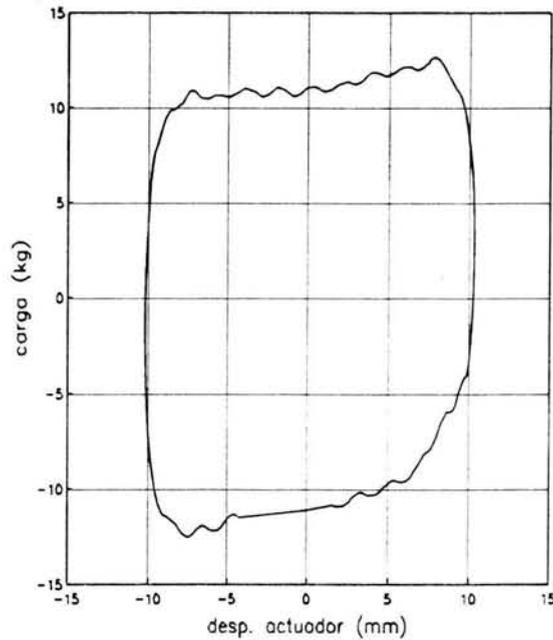


Figura 4.23. Ciclo histerético de un fluido magnetorreológico. (Álvarez y Jiménez, 2002)

#### 4.3.1 Aplicación de la función de Ramberg y Osgood con tres parámetros

El ajuste de los parámetros de la función de Ramberg y Osgood que se obtienen para el ciclo se presentan en la Tabla 4.19.

Tabla 4.19. Ajuste realizado con  $\alpha$  y  $\alpha_{CAL}$ .

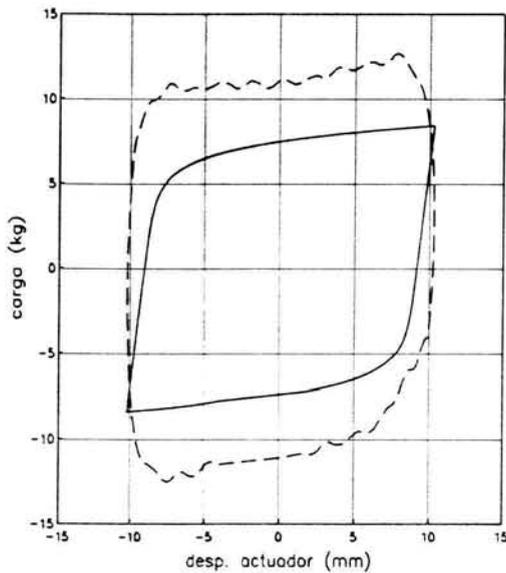
Espécimen	$F_0$ (kg)	$n$	$\alpha$	$\alpha_{CAL}$	Error relativo de áreas en (%)
M-1	7.2101	14.45	1.0	---	-31.884
	7.2101	11.45	---	$1.7 \times 10^{19}$	---

La Figura (4.24) presenta los ciclos histeréticos del ajuste y su comparación con el ciclo experimental para el valor de  $\alpha$  que produce el ajuste de la función de Ramberg y Osgood.

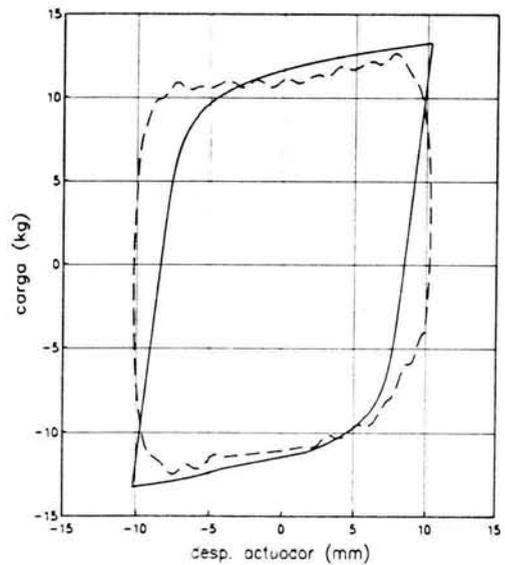
El ciclo con  $\alpha_{CAL}$  no se obtiene debido a que presenta un valor que no es representativo de las características del ciclo histerético experimental. Para mejorar el ajuste se determinó el valor de  $\alpha_{OPT}$ . Tabla 4.20. La Figura (4.24) muestra el resultado del ajuste con  $\alpha_{OPT}$ .

Tabla 4.20. Ajuste realizado con  $\alpha_{OPT}$ .

Espécimen	$F_0$ (kg)	$n$	$\alpha_{OPT}$	Error relativo de áreas en (%)
M-1	7.2101	14.45	0.00125	-0.507



a)  $\alpha$



b)  $\alpha_{OPT}$

Figura 4.24. Ajuste del fluido magnetorreológico.

----- datos experimentales    \_\_\_\_\_ Ramberg y Osgood

UNIVERSIDAD NACIONAL  
DE LA AMÉRICA

### 5.1 CONCLUSIONES

Se presentó un procedimiento para ajustar el modelo de Ramberg y Osgood a pruebas realizadas tanto a cargas estáticas crecientes como a pruebas cíclicas. Se enfatiza en la obtención de los parámetros que definen la función de Ramberg y Osgood y se da importancia al procedimiento de ajuste.

El modelo de Ramberg y Osgood es una función caracterizada por una curva esquelética que, con la incorporación de la regla de Massing, logra formar ciclos histeréticos que inician y terminan en la misma curva esquelética logrando que el modelo sea relativamente simple y con una sola regla de variación para su representación.

Adicionalmente, el modelo permite relaciones suavizadas en el paso del comportamiento elástico al plástico. Funciones muy parecidas a este modelo se incluyen en programas comerciales de análisis estructural para representar las características inelásticas de elementos estructurales o de dispositivos disipadores de energía.

El estudio presentado se centra especialmente en el comportamiento plástico del material considerándolo homogéneo e isótropo y por lo tanto no se incluyen características del endurecimiento por deformación ni de la degradación de la rigidez y resistencia del material.

El desarrollo del trabajo permitió obtener las siguientes conclusiones:

1. El procedimiento se puede aplicar tanto a pruebas estáticas como a pruebas dinámicas.
2. El método elimina el procedimiento de obtener parámetros por medio de tanteos basados en reglas empíricas o consideraciones subjetivas debido a que con los datos medidos en el laboratorio se determinan los parámetros que logran el mejor ajuste del modelo al comportamiento medido. Estos parámetros a su vez, pueden alimentar a los programas o rutinas de análisis no lineal que incluyan al modelo o a relaciones parecidas y obtener una respuesta más cercana al comportamiento registrado.
3. Se obtuvieron relaciones de rigidez en el intervalo de comportamiento lineal y en el de fluencia de la curva esquelética que incorporan los parámetros  $\alpha$  y  $n$  del modelo. Ellos permiten determinar sus rigideces a partir de datos medidos en laboratorio, lo cual produce que la respuesta sea representativa del material.
4. La técnica de los mínimos cuadrados lineales resultó una herramienta adecuada para la obtención de los parámetros que caracterizan a la función de Ramberg y Osgood debido a que se parte de valores unitarios y en la primera iteración se hallan los parámetros característicos.
5. Se encontró que  $\alpha$  es el parámetro que logra que mejore el ajuste. No se hizo un estudio de la influencia de cada parámetro en la respuesta. Sin embargo, haber determinado un valor de  $\alpha$  calculado con el segundo de los puntos experimentales e introducirlo en el ajuste, demostró una disminución en los valores de los errores relativos. Lo anterior permitió buscar un valor de  $\alpha$  que optimizara la respuesta. Los resultados obtenidos demuestran que el valor de  $\alpha$  óptimo representa, con bastante precisión, el comportamiento lineal de los ciclos histeréticos, mientras que para la parte no lineal el valor de  $\alpha$  óptimo logra que el modelo se aproxime al área encerrada en los ciclos histeréticos experimentales.
6. El método presenta la ventaja de trabajar con valores de fuerza y desplazamiento, que son los que se obtienen directamente de las pruebas de los materiales en el laboratorio.

## 5.2 RECOMENDACIONES

Para mejorar y complementar este procedimiento se proponen las siguientes recomendaciones:

1. Con el fin de conocer la influencia de los parámetros en la respuesta y por lo tanto en la optimización del procedimiento de ajuste se propone realizar un estudio de la influencia de los parámetros que definen a la función de Ramberg y Osgood.
2. Incorporar en la función de Ramberg y Osgood el endurecimiento por deformación así como la pérdida de resistencia del material, características que se presentan en las pruebas dinámicas de dispositivos metálicos. Esto significa que se tendrán que incorporar parámetros adicionales que deberán que variar con el tiempo y con la frecuencia del movimiento.
3. Se encontró que el área histerética fue una forma adecuada de medir el ajuste, pero no proporciona directamente un indicio del deterioro o daño del elemento estructural o del efecto que tiene el número de ciclos en su respuesta. Por lo cual se debe hallar un índice que relacione la energía histerética, el número de ciclos y la deformación máxima alcanzada, que permita prever la ruptura del elemento estructural sujeto a fuerzas cíclicas.

## REFERENCIAS

- Aguirre M. y Sánchez R. (1992), "Structural seismic damper", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, No. 5.
- Akazawa T., Nakashima M. y Sakaguchi O. (1996), "Simple model simulating hysteretic behavior involving significant strain hardening", *Eleven World Conference on Earthquake Engineering*, Acapulco Gro. México. Paper No. 264, Elsevier Science Ltd.
- Álvarez L. y Jiménez R. (2002), "Real-time identification of magreto-rheological dampers", *Proceedings of the 2002 IFAC World Congress*, Barcelona, Volumen L.
- Bruneau M., Uang C.M. y Whittaker A. (1998), "Ductile design of steel structures", McGraw – Hill.
- Escobar J. A. y Sánchez R. (1998), "Ensayes ante carga estática y dinámica de un dispositivo disipador de energía", Informe del proyecto 8522, para Jorge Ortega Beltrán, Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Jennings P.C. (1964), "Periodic response of general yielding structure", *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. Vol. 90, No. EM2, abril.
- Margetson J. (1981), "Tensile stress/strain characterization of non-linear materials", *Journal of strain analysis*. Vol. 16 No.2.
- Mendelson (1968), "Plasticity Teory and Aplication",
- Movses J. (1967), "Moment-curvature of beams as Ramberg-Osgood structure", *Journal of the Structural Division ASCE* Vol. 93, No. ST5.
- Movses J. y Fan R.S. (1968), "Earthquake responce of a Ramberg-Osgood structure", *Journal of the Structural Division ASCE* Vol. 94, No. ST10.
- Otani S. (1981), "Hysteresis models of reinforced concrete for earthquake response analisys", *Journal of the Faculty of Engineering, the University of Tokyo (B)* Vol. XXXVI, No. 2.
- Ozdemir H. (1976), "Nonlinear transient dynamic analysis of yielding structures", Tesis doctoral, Universidad de California en Berkeley E.U.A.
- Park R. (1990), "Estructuras de concreto reforzado", Editorial Limusa.
- Popov B. (1995), "Introducción a la mecánica de sólidos", Limusa- Noriega Editores.
- Rosenblueth E. y Gómez R. (1991), "Comentarios y ejemplos a las normas técnicas complementarias para diseño por sismo, DDF", Series del Instituto de Ingeniería U.N.A.M., No. ES-7.
- Shanley F. (1957) "Strenght of materials", McGraw – Hill.
- Soong T.T. y Dargush G.F. (1997), "Passive energy dissipation systems in structural engineering", John Wiley & Sons.
- Wagoner, R (1997), "Fundamentals of metal forming", Jonh Wiley & Sons, Inc.